Universität Bielefeld/IMW

Working Papers
Institute of Mathematical Economics

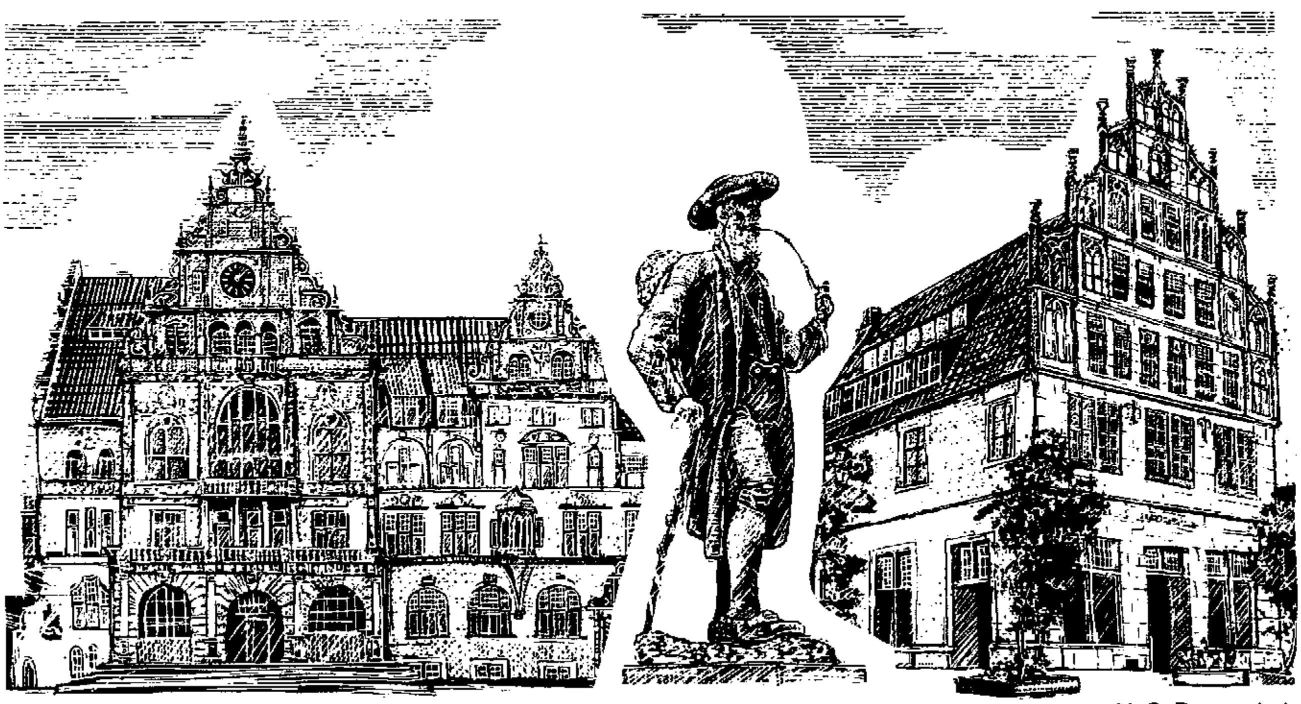
Arbeiten aus dem
Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung

Nr. 60

K.-P. Kistner und R. Subramanian

Regenerative Eigenschaften von Modellen der Zuverlässigkeitstheorie

Oktober 1977



H. G. Bergenthal

Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung
an der
Universität Bielefeld
Adresse/Address:
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1
Bundesrepublik Deutschland
Federal Republic of Germany

Regenerative Eigenschaften von Modellen der Zuverlässigkeitstheorie

K.-P. Kistner und R. Subramanian

Regenerative Eigenschaften von Modellen der Zuverlässigkeitstheorie

von

K.-P. Kistner [1] und R. Subramanian [2]

A. Methoden zur Analyse der Zuverlässigkeit komplexer Systeme

In der Zuverlässigkeitstheorie wird u.a. die Frage untersucht, wie die Lebensdauer und die Verfügbarkeit störanfälliger Bauteile durch Parallelschalten funktionsgleicher Einheiten (Redundanz), durch die Reparatur ausgefallener Elemente und durch vorbeugende Wartungsmaßnahmen erhöht werden kann. Zur Analyse des Verhaltens solcher komplexer Modelle der Zuverlässigkeitstheorie konnten vielfach Methoden, die ursprünglich in der Warteschlangentheorie entwickelt wurden, übernommen werden: Können alle die Zuverlässigkeit eines Bauteils bestimmenden Einflüsse durch Markoff-Prozesse abgebildet werden, dann sind bekanntlich die Übergangsraten zwischen den Zuständen des Bauteils konstant, so daß mit Hilfe elementarer Überlegungen ein System von Differentialgleichungen zwischen den Zustandswahrscheinlichkeiten aufgestellt werden kann. Die Stärke dieser Methode liegt in ihrer Flexibilität: solange die Übergangsraten zwischen den Zuständen konstant bleiben, kann die Struktur des Modells nahezu beliebig modifiziert werden. Die dadurch implizierte Annahme, daß die Abstände aller den Zustand des Bauteils beeinflussenden Ereignisse exponentialverteilte Zufallsgrößen sind, läßt sich jedoch im allgemeinen empirisch nicht rechtfertigen; die eigentlichen Probleme der Zuverlässigkeitstheorie treten vielfach gerade dann auf, wenn einzelne Einflüsse nicht durch Markoff-Prozesse abgebildet werden können.

Eine fruchtbare Strategie zur Analyse solcher Modelle besteht darin, den Zustandsraum allgemeinerer stochastischer Prozesse so umzuformen, daß das modifizierte Modell die Markoff-Eigenschaft besitzt.

Die Phasenmethoden erreichen dies durch eine Erweiterung des Zustandsraumes, durch Einführung künstlicher Zwischenzustände, zwischen denen konstante Übergangsraten existieren. Die diskrete Phasenmethode zerlegt die Prozesse in eine endliche Zahl aufeinander

---

[1] Prof. Dr. K.-P. Kistner, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität Bielefeld

[2] Dr. R. Subramanian, The Indian Institute of Technology, Madras

folgender Phasen mit exponentialverteilter Verweildauer; die Phase, in der sich die einzelnen Prozesse befinden, wird mit in die Zustandsbeschreibung aufgenommen, so daß die Übergangsraten zwischen den Zuständen des erweiterten Modells konstant sind. Die kontinuierliche Phasenmethode erweitert den Zustandsraum, indem sie die seit dem letzten Ereignis vergangene Zeit in die Zustandsbeschreibung einbezieht, und erreicht so, daß die (momentanen) Übergangsraten konstant sind.

Die Phasenmethoden führen so eine weite Klasse von stochastischen Prozessen auf Markoff-Prozesse zurück und ermöglichen es, daß die Einflüsse auf die Zuverlässigkeit eines Bauteils mit hinreichender Genauigkeit durch Markoff-Modelle abgebildet werden können. Durch die Aufblähung des Zustandsraumes werden allerdings die die Beziehungen zwischen den Zustandswahrscheinlichkeiten wiedergebenden Gleichungssysteme schnell so verwickelt, daß sie nicht mehr explizit gelöst werden können.

Eine zweite Klasse von Lösungsansätzen verzichtet deshalb darauf, das Verhalten des Systems im Zeitablauf zu verfolgen und erfaßt lediglich den Zustand in bestimmten kritischen Zeitpunkten. In der Zuverlässigkeitstheorie genügt es ohnehin meist zu wissen, in welchem Zustand sich ein Bauteil befindet, wenn ein Element ausfällt, da sich dann entscheidet, ob das ganze Bauteil ausfällt oder ob es weiter funktionsfähig ist, weil eine Reserveeinheit zur Verfügung steht. Sind nun diese Zeitpunkte Erneuerungszeitpunkte, d.h. hängt die weitere Entwicklung ausschließlich von dem in diesem Zeitpunkt erreichten Zustand ab, nicht aber davon, wie dieser Zustand erreicht wurde, dann läßt sich die Folge dieser Zeitpunkte und der Zustände in diesen Zeitpunkten durch einen Markoff-Erneuerungsprozeß abbilden (vgl. hierzu: Çinlar (1969)).

Im folgenden zeigen wir, wie Modelle der Zuverlässigkeitstheorie auf Markoff-Erneuerungsprozesse zurückgeführt und explizite Lösungen hergeleitet werden können. Hierzu untersuchen wir zunächst die durch die Zustände des Bauteils im Zeitpunkt unmittelbar nach einem Ausfall der tätigen Einheit gebildete "eingebettete Markoff-Kette" und leiten ein Gleichungssystem zwischen den Zustandswahrscheinlichkeiten in diesen Erneuerungspunkten her, aus dem die mittlere Lebensdauer und die Verfügbarkeit des Bauteils ermittelt werden kann. Im Anschluß daran wird am Beispiel eines Bauteils mit mehreren Elementen in warmer Redundanz gezeigt, wie die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen der eingebetteten Markoff-Kette als zeitabhängige Lösung einfacher Warteschlangenmodelle bestimmt werden können. Der Schwerpunkt der Überlegungen wird bei der Herleitung expliziter Lösungen liegen; für die Untersuchung der Existenzbedingungen und des Konvergenzverhaltens muß auf die grundlegenden Arbeiten Çinlars (1969) über Markoff-Erneuerungsprozesse verwiesen werden.

B. Lebensdauer und Verfügbarkeit komplexer Bauteile

I. Definitionen und Annahmen

Wir betrachten ein Bauteil, das aus $M > 1$ redundanten Elementen zusammengesetzt ist. Eine Einheit ist tätig, $m = M - 1$ Einheiten stehen als Reserve zur Verfügung. Die tätige Einheit unterliegt Verschleiß, so daß ihre Lebensdauer X eine zufällige Größe ist, die eine Dichtefunktion $\varphi_X(t)$ und einen endlichen Erwartungswert $E(X)$ besitzt. Bei Ausfall der tätigen Einheit wird ohne Zeitverzug eine Reserveeinheit eingeschaltet; steht keine Reserveeinheit mehr zur Verfügung, so fällt das Bauteil aus und muß ersetzt werden. Über das Verhalten der Reserveeinheiten machen wir zunächst keine Annahmen.

Das Bauteil kann eine endliche Zahl von Zuständen annehmen; diese werden durch den Index $i = 0, 1, \ldots, M$ charakterisiert. Im einfachsten Fall gibt dieser die Zahl der ausgefallenen Elemente an; in komplizierteren Fällen kann es erforderlich werden, einen weiteren Index zur Erfassung der internen Zustände des Reservesystems einzuführen. Wir betrachten folgende Ereignisse:

E_0 - Bauteil wird eingeschaltet und ist im Zustand $i = 0$

E_i - tätige Einheit fällt aus, Bauteil ist im Zustand $i = 1,2,\ldots, M - 1$

E_M - tätige Einheit fällt aus, alle Reserveeinheiten sind gestört, so daß Bauteil ausfällt.

Wir setzen nun voraus, daß die Ereignisse regenerativ sind, d.h. die Zeitpunkte, in denen sie auftreten, sind Erneuerungszeitpunkte. Diese restriktive Bedingung wird nicht immer erfüllt sein. Sind die Lebensdauern der Reserveeinheiten und die Reparatur- und Wartungszeiten nicht exponentialverteilt, so kann man jedoch durch Aufspalten des Ausfall- bzw. des Reparaturprozesses in eine endliche Zahl von Phasen mit exponentialverteilter Verweildauer zumindest näherungsweise erreichen, daß die Zeitpunkte des Ausfalls der tätigen Einheit Erneuerungspunkte sind.

Weiter definieren wir:

$\Pi_{ij}(t)$ = Prob $\{E_j$ in $t \mid E_i$ in $0\}$

$f_i(t)$ - Dichtefunktion der Zeit bis zum ersten Systemausfall, falls E_i im Zeitpunkt 0.

Insbesondere ist $f_o(t)$ die gesuchte Dichte der Lebensdauer des Bauteils.

1) Analyse der Zuverlässigkeit

Um rekursive Beziehungen zwischen den Dichtefunktionen $f_i(t)$ herzuleiten, betrachten wir die Fälle, die zu dem Ereignis E_M im Intervall $(t, t+dt)$ führen können, wenn das Bauteil im Zeitpunkt Null voll funktionsfähig war:

1. Die tätige Einheit fällt erstmals im Zeitpunkt t aus und alle Reserveeinheiten sind gestört. Die Dichte dieses Ereignisses ist gegeben durch

$$\varphi_X(t) \quad \Pi_{OM-1}(t)$$

2. Die tätige Einheit fällt erstmals im Zeitpunkt $\tau < t$ aus, in τ sind $j = 1, 2, \ldots, M-1$ Einheiten gestört und das in τ im Zustand $M-j$ gestartete System fällt nach $t-\tau$ Zeiteinheiten aus:

$$\varphi_X(\tau) \quad \Pi_{Oj-1}(\tau) \quad f_j(t-\tau)$$

Faßt man die Wahrscheinlichkeitsdichten dieser sich gegenseitig ausschließenden Fälle, die zu einem Ausfall des Bauteils im Zeitpunkt t führen, zusammen, so erhält man

$$f_o(t) = \sum_{j=1}^{M-1} \int_o^t \varphi_X(\tau) \quad \Pi_{Oj-1}(\tau) \; f_j(t-\tau)d\tau + \varphi_X(t) \; \Pi_{OM-1}(t)$$

Setzt man zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\psi_{ij}(t) = \varphi_X(t)\ \Pi_{ij}(t)$$

und schreibt für das Faltungsintegral

$$\int_0^t \psi_{ij}(\tau)\ f_j(t-\tau)\ d\tau = \psi_{ij-1}(t) * f_j(t)$$

so ergibt sich:

$$f_o(t) = \sum_{j=1}^{M-1} \psi_{oj-1}(t) * f_j(t) + \psi_{oM-1}(t) \tag{1}$$

Durch analoge Überlegungen erhält man für $i = 1, 2, \ldots, M-1$

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^{M-1} \psi_{ij-1}(t) * f_j(t) + \psi_{iM-1}(t) \tag{2}$$

Zur Lösung dieses Systems von Integralgleichungen gehen wir zu den Laplace-Transformierten über. Diese sind definiert als

$$\psi^*_{ij}(s) = \int_0^\infty \psi_{ij}(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \varphi_X(t)\ \Pi_{ij}(t)e^{-st}dt$$

$$f^*_i(s) = f_i(t)\ e^{-st}dt$$

Dann erhält man aus (1) und (2)

$$f^*_i(s) = \sum_{j=1}^{M-1} \psi^*_{ij-1}(s)\ f^*_j(s) + \psi^*_{iM-1}(s) \qquad (i=0,1,\ldots,M-1) \tag{3}$$

Löst man **dieses lineare** Gleichungssystem nach $f^*_o(s)$ auf und kehrt die Laplace-Transformation um, dann erhält man die gesuchte Dichtefunktion der Zeit bis zum Ausfall des Bauteils $f_o(t)$.

Die häufig zur Charakterisierung der Zuverlässigkeit benutzte mittlere Lebensdauer

$$E(T) = \int_0^\infty t f_o(t)dt$$

läßt sich entweder aus der Dichtefunktion oder aber wegen

$$E(T) = -\frac{df^*_o(0)}{dt}$$

aus der ersten Ableitung der Laplace-Transformierten herleiten. Ist man lediglich an der mittleren Lebensdauer des Bauteils interessiert, dann ist es nicht erforderlich, das Gleichungssystem (3) explizit zu lösen; die mittlere Lebensdauer kann vielmehr direkt aus (3) bestimmt werden. Hierzu definieren wir die bedingten Erwartungswerte der Lebensdauer eines Bauteils, gegeben, daß das Bauteil im Zeitpunkt O im Zustand $i = 0, 1, \ldots, M-1$ war:

$$E(T_i) = \int_0^\infty t\, f_i(t)dt$$

Für diese gilt ebenfalls

$$E(T_i) = -\frac{df_i^*(0)}{dt}$$

Differenziert man die Gleichungen (3) an der Stelle $s = 0$, so erhält man

$$-E(T_i) = b_i - \sum_{j=1}^{M-1} \psi^*_{ij-1}(0)E(T_j) \qquad (i = 1,2,\ldots M-1) \qquad (4)$$

mit

$$b_i = \sum_{j=0}^{M-1} \frac{d\psi^*_{ij}(0)}{ds} = -\sum_{j=0}^{M-1} \int_0^\infty t\, \varphi_X(t)\, \Pi_{ij}(t)dt$$

Vertauscht man die Reihenfolge von Summation und Integration, dann erhält man dafür:

$$b_i = \int_0^\infty t\, \varphi_X(t)dt = -E(X)$$

Einsetzen in (4) ergibt:

$$E(T_i) - \sum_{j=1}^{M-1} \psi^*_{ij-1}(0)\; E(T_j) = E(X) \qquad (i = 0,1,\ldots,M-1) \qquad (5)$$

Löst man (5) nach $E(T_0) = E(T)$ auf, dann erhält man die mittlere Lebensdauer des Bauteils für den Fall, daß es im Zeitpunkt O im Zustand O war, d.h. daß in diesem Zeitpunkt alle Elemente funktionsfähig waren.

2) Analyse der Verfügbarkeit

Vielfach kann ein Bauteil nach dem Ausfall repariert oder ersetzt werden. Dann ist neben der Zeit bis zum Ausfall des Bauteils auch die Verfügbarkeit von Interesse. Diese ist definiert als

$$V(t) = \text{Prob}\,\{\text{Bauteil ist im Zeitpunkt } t \text{ funktionsfähig}\}$$

Um diese Operationscharakteristik mit analogen Überlegungen herleiten zu können, muß sichergestellt werden, daß der Zeitpunkt des Systemausfalls ein Erneuerungszeitpunkt ist. Diese Bedingung ist u.a. dann erreicht, wenn

1. die für die Reparatur einzelner Elemente des Bauteils benötigten Zeiten exponentialverteilte Zufallsgrößen sind,
2. die einzelnen Bauteile nicht reparierbar sind, sondern lediglich das ganze Bauteil repariert oder ersetzt werden kann oder
3. die Elemente des Bauteils zwar einzeln repariert werden können und die Reparaturzeiten beliebig verteilt sind, bei einem Ausfall des Bauteils eine begonnene Reparatur eines Elements unterbrochen werden muß und die bis dahin aufgewandte Reparaturzeit verloren geht, weil das Bauteil generalüberholt oder ersetzt wird.

Die für den Ersatz des Bauteils oder eine Generalüberholung benötigte Zeit sei eine beliebig-verteilte, positive Zufallsgröße R mit der Dichtefunktion $\varphi_R(t)$, der Verteilungsfunktion $\Phi_R(t)$, der Laplace-Transformation $\Phi^*_R(s)$ und dem Erwartungswert $E(R)$.

Es sei

$$A_i(t) = \text{Prob } \{\text{Bauteil in } t \text{ ausgefallen} \mid \text{Bauteil in } 0 \text{ im Zustand } i\}$$

Um rekursive Beziehungen zwischen diesen Wahrscheinlichkeiten herzuleiten, betrachten wir die Ereignisse, die dazu führen können, daß das Bauteil in t ausgefallen ist, wenn es im Zeitpunkt 0 im Zustand i war. Für $i = 0,1,\ldots,M-1$ wird der Zustand M in t erreicht, wenn

1. die tätige Einheit im Zeitpunkt $\tau \leq t$ ausfällt,
2. das Bauteil im Zeitpunkt unmittelbar vor dem Ausfall im Zustand j ist und
3. das im Zeitpunkt τ im Zustand j+1 gestartete System im Zeitpunkt t ausgefallen ist.

Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist

$$\varphi_X(\tau)\ \Pi_{ij}\ A_{j+1}(t-\tau) = \psi_{ij}(\tau)\ A_{j+1}(t-\tau)$$

Integriert man über alle $\tau \leq t$ und summiert über alle $j < M-1$, dann erhält man

$$A_i(t) = \sum_{j=0}^{M-1} \psi_{ij}(t) * A_{j+1}(t) \qquad (i = 0,1,\ldots,M-1) \qquad (6)$$

Bei der Herleitung ähnlicher Beziehungen für $A_M(t)$ müssen wir je nach Art der Reparatur drei Fälle unterscheiden:

Fall I: Bei Ausfall des Bauteils wird lediglich ein Element repariert; nach Abschluß der Reparatur wird das Bauteil im Zustand M-1 wieder eingeschaltet.

Fall II: Bei Ausfall wird das Bauteil durch ein voll funktionsfähiges Bauteil ersetzt oder überholt, so daß es im Zustand O eingeschaltet wird.

Fall III: Bei einem Ausfall wird das Bauteil repariert und mit der Wahrscheinlichkeit p_i in einem Zustand $i = 0,1,\dots,M-1$ eingeschaltet, weil möglicherweise nicht alle fehlerhaften Elemente repariert wurden.

Im Fall I kann das Ereignis {Bauteil in t im Zustand M|Bauteil in O im Zustand M} zustandegekommen sein durch:

1. mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - \Phi_R(t))$ erfolgte keine Reparatur in $(0,t)$;
2. mit der Wahrscheinlichkeit
   $\varphi_R(\tau)\ A_{M-1}(t-\tau)$
   wurde das Bauteil in $\tau \leq t$ repariert und das in τ im Zustand M-1 in Betrieb genommene Bauteil ist in t wieder ausgefallen.

Faßt man die Wahrscheinlichkeiten dieser sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse zusammen, dann erhält man

$$A_M(t) = \varphi_R(t) * A_{M-1}(t) + [1 - \Phi_R(t)] \tag{7a}$$

Im Fall II erhält man durch analoge Überlegungen

$$A_M(t) = \varphi_R(t) * A_o(t) + [1 - \Phi_R(t)] \tag{7b}$$

und für Fall III gilt schließlich

$$A_M(t) = \sum_{j=o}^{M-1} \varphi_R(t) * A_j(t)p_j + [1 - \Phi_R(t)] \tag{7c}$$

Geht man zur Laplace-Transformierten

$$A_i^*(s) = \int_o^\infty e^{-st} A_i(t)\,dt \qquad (i = 0,1,\dots,M)$$

über, dann erhält man aus (6)

$$A_i^*(s) = \sum_{j=0}^{M-1} \psi_{ij}^*(s)\, A_{j+1}^*(s) \qquad (i = 0,1,\ldots,M-1) \qquad (8)$$

Für i = M gilt im Fall I

$$A_M^*(s) = \phi_R^*(s)\, A_{M-1}^*(s) + \frac{1}{s}\,[1 - \phi_R^*(s)] \qquad (9a)$$

Im Fall II gilt

$$A_M^*(s) = \phi_R^*(s)\, A_O^*(s) + \frac{1}{s}\,[1 - \phi_R^*(s)] \qquad (9b)$$

und im Fall III gilt schließlich

$$A_M^*(s) = \sum_{j=0}^{M-1} \phi_R^*(s)\, A_j^*(s) p_j + \frac{1}{s}\,[1 - \phi_R^*(s)] \qquad (9c)$$

Löst man diese Gleichungssysteme nach $A_O^*(s)$ auf und geht zur Originalfunktion $A_O(t)$ über, dann erhält man für die Verfügbarkeit des Bauteils

$$V(t) = 1 - A_O(t)$$

Die Umkehrung der Laplace-Transformierten $A_O^*(s)$ wird in vielen Fällen mit Schwierigkeiten verbunden sein. Man begnügt sich daher oft mit der Verfügbarkeit im stationären Zustand

$$\bar{V} = \lim_{t\to\infty} V(t)$$

die sich unmittelbar aus $A_O^*(s)$ herleiten läßt. Falls eine stationäre Lösung

$$\bar{A} = \lim_{t\to\infty} A_O(t)$$

existiert, ist diese gegeben durch

$$\bar{A} = \lim_{s\to 0} sA_O^*(s) \qquad \text{und} \qquad \bar{V} = 1 - \bar{A}$$

C. Explizite Lösung für den Fall warmer Redundanz

I. Annahmen über das Verhalten der Reserveeinheiten

Die oben hergeleiteten Ergebnisse hängen von den noch unbekannten Koeffizienten $\psi_{ij}^*(O)$ ab, die den Einfluß der Reserveeinheiten auf die Zuverlässigkeit des Bauteils widerspiegeln. Für die Bestimmung dieser Koeffizienten muß spezifiziert werden, was geschieht, wenn ein Element ausfällt und wie sich die Reserveeinheiten während der Lebensdauer der tätigen Einheit verhalten. Im folgenden untersuchen wir den Spezialfall eines Bauteils mit warmer Redundanz, der durch folgende Annahmen charakterisiert ist:

1. Die Reserveeinheiten unterliegen keinem Verschleiß, jedoch exogenen Störeinflüssen; wir können daher davon ausgehen, daß ihre Lebensdauern Y exponentialverteilte Zufallsgrößen sind:

   $$\varphi_Y(t) = \lambda\ e^{-\lambda t}$$

2. Bei Ausfall der tätigen Einheit oder einer Reserveeinheit wird diese nicht sofort repariert; erst bei Ausfall des ganzen Bauteils wird dieses repariert oder ersetzt. Die Reparaturzeiten sind beliebig verteilte Zufallsgrößen R mit der Dichtefunktion $\varphi_R(t)$ und endlichem Erwartungswert E(R). Durch eine Reparatur wird das Bauteil wieder voll funktionstüchtig (Fall II).

II. Das Verhalten der Reserveeinheiten

Unter der Voraussetzung, daß die Lebensdauern der Reserveeinheiten exponentialverteilte Zufallsgrößen sind und während der Lebensdauer des Bauteils keine Reparaturen durchgeführt werden, kann die Entwicklung des Reservesystems zwischen den durch Ausfall der tätigen Einheit gekennzeichneten Erneuerungspunkten durch einen einfachen Todesprozeß beschrieben werden (vgl. Feller (1957), S. 434 und 450). Es seien $j = 0,1,\dots,m = M-1$ die Zahl der gestörten Einheiten und

$$P_j(t) = \text{Prob}\ \{j \text{ Einheiten in } t \text{ gestört}\}$$

Dann gelten zwischen diesen Zustandswahrscheinlichkeiten folgende Beziehungen:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = (m-j+1)\ \lambda P_{j-1}(t) - (m-j)\lambda P_j(t) \quad (j = 0,1,\dots,m)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten $\Pi_{ij}(t)$ der eingebetteten Markoffkette sind dann gleich der Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen für den Fall, daß das System im Zustand i gestartet wurde. Mit Hilfe von Standard-Methoden erhält man

$$\Pi_{ij}(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=o}^{j-i} (-1)^k \binom{m-i}{m-j}\binom{j-i}{k}\ e^{-(m-j+k)\lambda t} & (i \leq j \leq m) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \qquad (10)$$

Aufgrund des binomischen Lehrsatzes kann man die Summe in (10) zusammenfassen zu

$$\Pi_{ij}(t) = \binom{m-i}{m-j} e^{-(m-i)\lambda t} \, (e^{\lambda t} - 1) \qquad (i \leq j \leq m)$$

Die Koeffizienten $\psi^*_{ij}(0)$ sind definiert als

$$\psi^*_{ij}(0) = \int_0^{\infty} \Pi_{ij}(t) \, \varphi_X(t) \, dt$$

Substituiert man (10), dann erhält man

$$\psi^*_{ij}(0) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \binom{m-i}{m-j} \binom{j-i}{k} \, \Phi^*_X \{(m-j+k)\lambda\} & (i \leq j \leq m) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases} \tag{11}$$

wobei $\Phi^*_X(a)$ der Wert der Laplace-Transformierten der Lebensdauerverteilung der tätigen Einheit an der Stelle a ist.

III. Die mittlere Lebensdauer und die langfristige Verfügbarkeit des Bauteils

Damit ist das Problem auf folgende Daten zurückgeführt: Die Dichtefunktion der Lebensdauer der tätigen Einheit $\varphi_X(t)$, die Ausfallrate der Reserveeinheiten λ sowie die Dichtefunktion der Reparaturzeiten $\varphi_R(t)$.

Da während der Tätigkeit des Bauteils keine Reparaturen durchgeführt werden, kann die Zahl der gestörten Elemente zwischen den Erneuerungspunkten nicht absinken, die Koeffizienten $\psi^*_{ij}(0)$ verschwinden daher für alle $i<j$. Das Gleichungssystem (5) reduziert sich deshalb auf

$$E(T_i) = E(X) + \sum_{j=i+1}^{M-1} \psi^*_{ij-1}(0) \, E(T_j) \qquad (i = 0,1,\ldots,M-1) \tag{5a}$$

und kann - beginnend mit $E(T_{M-1})$ - rekursiv gelöst werden. Für den Fall M = 2 erhält man

$$E(T) = E(T_o) = E(X) \, [1 + \psi^*_{oo}(0)] = E(X) \, [1 + \Phi^*_X(\lambda)]$$

und für den Fall M = 3 ergibt sich:

$$E(T) = E(T_o) = E(X) \, [1 + \psi^*_{oo}(0) + \psi^*_{o1}(0) + \psi^*_{oo}(0) \, \psi^*_{11}(0)] =$$

$$= E(X) \, \left(1 + \Phi^*_X(2\lambda) \, [1 + \Phi^*_X(\lambda)] + 2[\Phi^*_X(2\lambda) - \Phi^*_X(\lambda)]\right)$$

Das Gleichungssystem zur Bestimmung der Laplace-Transformierten der Verfügbarkeit hat in dem hier untersuchten Fall die Form

$$A_i^*(s) = \sum_{j=i}^{M-1} \psi_{ij}^*(s)\ A_{j+1}^*(s) \qquad (i = 0,1,\ldots,M-1) \tag{6a}$$

$$A_M^*(s) = \psi_R^*(s)\ A_o^*(s) + \frac{1}{s}\left[1 - \phi_R^*(s)\right] \tag{9b}$$

Löst man im Fall M = 2 nach $A_o^*(s)$ auf, dann erhält man

$$A_o^*(s) = \frac{[1 - \phi_R^*(s)][\psi_{oo}^*(s)\psi_{11}^*(s) + \psi_{o1}^*(s)]}{s\ \{1 - \phi_R^*(s)\ [\psi_{oo}^*(s)\psi_{11}^*(s) + \psi_{o1}^*(s)]\}}$$

Unter Berücksichtigung der Regel von l'Hospital erhält man

$$\bar{A} = \lim_{s\to o} sA_o^*(s) = \frac{E(R)}{E(R) + E(X)\ [1 + \psi_{oo}^*(0)]}$$

wobei E(R) der Erwartungswert der Reparaturzeit, E(X) der Erwartungswert der Lebensdauer der tätigen Einheit ist. Für die langfristige Verfügbarkeit des Bauteils erhält man daraus

$$\bar{V} = 1 - \bar{A} = \frac{E(X)[1 + \psi_{oo}^*(0)]}{E(R) + E(X)\ [1 + \psi_{oo}^*(0)]}$$

Durch analoge Überlegungen erhält man für M = 3

$$\bar{V} = \frac{E(X)\ [1 + \psi_{oo}^*(0) + \psi_{o1}^*(0) + \psi_{oo}^*(0)\psi_{11}^*(0)]}{E(R) + E(X)\ [1 + \psi_{oo}^*(0) + \psi_{o1}^*(0) + \psi_{oo}^*(0)\ \psi_{11}^*(0)]}$$

Wie man sieht, gilt zwischen der Verfügbarkeit und der Lebensdauer der Bauteile

$$\bar{V} = \frac{E(T)}{E(R) + E(T)} \tag{12}$$

Diese Beziehung leuchtet unmittelbar ein: E(T) + E(R) ist die mittlere Dauer eines Zyklus; E(T) ist die mittlere Lebensdauer eines Bauteils; langfristig muß der durchschnittliche Anteil der Lebensdauer des Bauteils an der durchschnittlichen Zyklusdauer aber gleich der Wahrscheinlichkeit, daß das Bauteil tätig ist, d.h. gleich der Verfügbarkeit, sein. (12) ermöglicht es, die Verfügbarkeit unmittelbar aus der einfacher zu berechnenden mittleren Lebensdauer der Bauteile zu berechnen.

Die hier vorgestellte Methode zur Analyse komplexer Modelle der Zuverlässigkeitstheorie ist nicht auf das in diesem Abschnitt dargestellte Problem der warmen Redundanz beschränkt, sondern läßt sich auf eine Vielzahl von Problemen der Zuverlässigkeitstheorie anwenden. So untersuchen Kistner und Subramanian (1974) sowie Subramanian, Venkatakrishnan und Kistner (1976) Modelle mit Ausfall und Reparatur der Reserveeinheiten bei beliebiger Verteilung der Lebensdauer der tätigen Einheit, exponentialverteilter Lebensdauer der Reserveeinheiten sowie exponentialverteilten Reparaturzeiten. Weitere Modelle behandelt Venkatakrishnan (1975). Wesentlich für die Anwendung der Methode ist lediglich, daß die Ausfallzeitpunkte der tätigen Einheit Erneuerungspunkte sind; dies muß gegebenenfalls durch geeignete Definition des Zustandsraumes erzwungen werden.

D. Literatur

1) Çinlar, E., Markov Renewal Theory, Adv. Appl. Prob. 1(1969), S. 123.
2) Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, Bd. 1, 2. Aufl. 1957
3) Kistner, K.-P.,und R. Subramanian, Die Zuverlässigkeit eines Systems mit redundanten störanfälligen Komponenten und Reparaturmöglichkeiten, ZOR 18(1974), S. 117
4) Subramanian, R., K.S. Venkatakrishnan und K.-P. Kistner, Reliability of a Repariable System with Standby Failure, OR 24(1976), S. 169
5) Venkatakrishnan, K.S., Probabilistic Analysis of Repairable Redundant Systems, Ph. D. Thesis, Indian Institute of Technology, Madras, Dept. of Mathematics, 1975.