

**Universität Bielefeld/IMW**

**Working Papers  
Institute of Mathematical Economics**

**Arbeiten aus dem  
Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung**

Nr. 116

EIN ZUGANG ZU DIFFERENTIALSPIELEN

Axel Ostmann

Frühjahr 1982



H. G. Bergenthal

**Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung  
an der**

**Universität Bielefeld**

**Adresse / Address:**

**Universitätsstraße**

**4800 Bielefeld 1**

**Bundesrepublik Deutschland**

**Federal Republic of Germany**

INHALT

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| Vorbemerkung                                          | 2   |
| <u>Teil A: EINFÜHRUNG</u>                             | 3   |
| Vorbemerkung                                          | 4   |
| §1 Spiele                                             | 5   |
| §2 Prozesse                                           | 15  |
| Exkurs M                                              | 17  |
| Exkurs S                                              | 22  |
| weiter §2                                             | 31  |
| Nachbemerkung                                         | 49  |
| <br>                                                  |     |
| <u>Teil B: NOTWENDIGE BEDINGUNGEN FÜR STEUERUNGEN</u> | 50  |
| Vorbemerkung                                          | 51  |
| §1 Freie Extrema...                                   | 52  |
| §2 Gebundene Extrema                                  | 65  |
| §3 Beispiele                                          | 74  |
| <br>                                                  |     |
| Literatur                                             | 103 |

## DIFFERENTIALSPIELE

Vorbemerkung: In dieser Vorlesung geht es um spezielle nichtkooperative Spiele. Zwecks einfacherer Formulierung beschränke ich mich auf 2-Personen-Nullsummenspiele.

Speziell sind die betrachteten Spiele insofern, als sie von (nichtstochastischen) dynamischen Prozessen mit kontinuierlicher Zeit erzeugt werden.

So kann die vorgelegte Theorie als eine Erweiterung der Theorien für optimale Steuerung gelten. Letztere greifen oft auf ältere Theorien zurück, deren Verallgemeinerung sie darstellen. Dabei sind besonders zu nennen: Theorien, die sich mit (ungesteuerten) Prozessen in der theoretischen Mechanik befassen (z.B. Hamilton-Jacobi-Theorie) und die Variationsrechnung.

In den Theorien der optimalen Steuerung wird zunehmend eine mit Differentialkalkül arbeitende Argumentation von einer funktionalanalytischen verdrängt. Ich will in der Vorlesung diesem Punkt besondere Aufmerksamkeit schenken.

Als Grundmaterial für die Differentialspiele soll das Buch von Isaacs dienen. Keine Beachtung werden Ansätze finden, die versuchen, Differentialspiele mit dynamischen Prozessen diskreter Zeit anzukonvergieren, bei denen die Spieler abwechselnd (also nicht gleichzeitig) steuern.

## A. EINFÜHRUNG

§1 Spiele

§2 Prozesse

Exkurs M: Mannigfaltigkeiten

Exkurs S: Systeme

Steuerung und Regelung

Definition und Interpretation  
eines Differentialspiels

Das Restwegprinzip und andere  
Eigenschaften des Restwertes

Vorbemerkung: Die Einführung dient dazu, die seltsame Landschaft zu beschreiben, in der das Differentialspiel aufgewachsen ist. Neben klar konstruierten Bauten (Theorie der nicht-kooperativen Spiele, Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten) finden wir unwegsames Gestrüpp (technische Systeme). Jedenfalls erscheint es so, wenn man sich einen mathematischen Zugang verschaffen will. Mit diesem Ziel habe ich die Beschreibung der Landschaft auf das wenige reduziert, was mir für das Verständnis der Methodik im Hauptteil der Vorlesung besonders wichtig erscheint.

## §1 SPIELE

(1.1) DEF.  $\Gamma = (A, B, F)$  heißt (2-Personen-Nullsummen) Spiel falls  
 $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir interpretieren und benennen:  $A$  als Strategienraum von Spieler I,  $B$  als Strategienraum von Spieler II,  $F$  als Auszahlungsfunktion an I von II.

So gibt  $F$  für I Nutzen und für II Kosten an.

So will I die Funktion  $F$  über  $A \times B$  maximieren, wobei er nur  $A$  aber nicht  $B$  beherrscht; und umgekehrt will II minimieren.

Für die folgenden Definitionen sei das vorgelegte Spiel  $\Gamma$  fixiert.

(1.2) DEF.  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$   $a \rightarrow \inf_a F(a, b)$

$\psi : B \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$   $b \rightarrow \sup_a F(a, b)$ .

Wir interpretieren:  $\varphi$  und  $\psi$  geben an, was I und II als schlimmsten Fall berücksichtigen müssen. Dieser Fall tritt u.U. nie ein, nur approximativ. Anders gesagt: Spielt II Strategie  $a$ , so ist ihm  $\varphi(a)$  sicher, spielt II Strategie  $b$ , so kostet ihn das höchstens  $\psi(b)$ . Werden  $\inf$  bzw.  $\sup$  eingestellt, so sehen wir den Minimierer bzw. Maximierer als optimale Antwort des Gegners auf die vorgelegte Strategie  $a$  bzw.  $b$ .

(1.3) DEF.  $\underline{v} := \sup_A \psi$  ,  $\bar{v} := \inf_B \varphi$  ,

$\Gamma$  hat einen Wert :  $\Leftrightarrow \underline{v} = \bar{v}$  ,

Wenn  $\Gamma$  einen Wert hat, so sei  $\text{val } \Gamma := \underline{v} (= \bar{v})$  .

Wir interpretieren und benennen:  $\underline{v}$  als unteren Spielwert,  $\bar{v}$  als oberen Spielwert. Das folgende Lemma gibt dafür die Begründung.  $\underline{v}$  ist die approximative Auszahlung für I, wenn I auf Sicherheit spielt;  $\bar{v}$  entsprechend.

(1.4) LEMMA      Es gilt  $\underline{v} \leq \bar{v}$  .

Beweis:      für alle  $b' \in B$  gilt:  $\sup_a \inf_b F(a,b) \leq \sup_a F(a,b')$ .

Damit gilt auch:  $\sup_a \inf_b F(a,b) \leq \inf_b \sup_a F(a,b)$  .

Die linke Seite ist gleich  $\underline{v}$  nach Def. 1.2 und 1.3, die rechte gleich  $\bar{v}$  .

(1.5) FOLG.      Existiert ein  $(a,b)$  mit  $\varphi(a) = \psi(b)$  - so gilt

$$(1) \quad \underline{v} = \bar{v}$$

$$(2) \quad \varphi(a) = \max_{\varphi, \psi}(b) = \min_{\psi}.$$

Weiters

(3)  $(a,b)$  ist Sattelpunkt im Sinne folgender Definition:

(1.6) DEF.       $(\bar{a}, \bar{b})$  heißt Sattelpunkt von  $\Gamma$  falls

$$* \quad \bigwedge_{a,b} F(a, \bar{b}) \leq F(\bar{a}, \bar{b}) \leq F(\bar{a}, b)$$

Vorsicht: diese Definition weicht von der anderswo üblichen ab, denn dort bezeichnet man auch Punkte mit der zu \* dualen Eigenschaft ( $\geq$  statt  $\leq$ ) als Sattelpunkte.

Wir interpretieren \* als: einzeln Abweichen (von  $(\bar{a}, \bar{b})$ ) lohnt nicht.

(1.7) DEF. Die Menge der Sattelpunkte von  $\Gamma$  sei mit  $SP(\Gamma)$  bezeichnet.  $\Gamma$  heißt determiniert falls  $SP(\Gamma) \neq \emptyset$ .

(1.8) BEM. Bei Nichtnullsummenspielen entspricht dem Begriff des Sattelpunktes der des Gleichgewichtes (vgl. z.B. ROSENMÜLLER, Ch.1). Dort kann die Situation auftreten, daß die (gemeinsame, "kooperative") Wahl eines Strategienpaares  $(a,b)$  beiden Spielern mehr Auszahlung verschafft als ein Gleichgewichtspunkt. Anders ausgedrückt: Gleichgewichtspunkte sind i.a. nicht Pareto-optimal. Da bei Nullsummenspielen die Interessen streng antagonistisch sind, also der eine bekommt, was dem anderen genommen, sind Gleichgewichtspunkte auch Pareto-optimal, d.h. \* reflektiert auch "gemeinsam abweichen lohnt nicht". Oder: Kooperation verspricht keinen zusätzlichen Gewinn.

(1.9) DISKUSSION: Mit Lemma 1.4 liegt folgende Situation vor:

$(\underline{v}, \bar{v})$  zerlegt  $\mathbb{R}$  in 2 oder 3 Intervalle:

1. das Intervall  $(-\infty, \underline{v})$ : I kann es meiden,
2. das Intervall  $(\underline{v}, \bar{v})$ : die sogenannte Dualitätslücke oder Unbestimmtheitszone,
3. das Intervall  $(\bar{v}, \infty)$ : II kann es meiden.

Ob von dieser Interpretation her  $\underline{v}$  bzw.  $\bar{v}$  zu den Randintervallen gezählt werden müssen, hängt davon ab, ob die inf/sup eingestellt werden. Bei determinierten Spielen zählen  $\bar{v}$  und  $\underline{v}$  nicht zu den Randintervallen und das 2. Intervall ist leer.

Halten wir fest, es gibt für  $\Gamma$  zwei im abgestreckten Rahmen relevanten Fragestellungen:

- a) Wie groß ist die Unbestimmtheitszone
- b) Wann werden  $\underline{v}$  bzw.  $\bar{v}$  eingestellt.

Klassisch führt das zu Bedingungen von Kompaktheit und Konvexität in A und B und zu Stetigkeits- und Konvexitätseigenschaften an F.



(1.10) Im Falle endlicher Wertevorräte ( $\lim F_I < \infty$ ) werden inf/sup trivialerweise eingestellt. Ist  $\lim F_I = 2$ , so ist das Spiel qualitativ in dem Sinne, daß es nur um Gewinnen oder Verlieren an sich geht.

Jedes Spiel  $\Gamma = (A, B, F)$  kann in qualitative Spiele aufgelöst werden, via

$$\Gamma \rightsquigarrow (\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \text{mit}$$

DEF.  $\Gamma_\alpha := (A, B, 1_{[\alpha, \infty)} \circ F)$ .  $1_{[\alpha, \infty)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist

die charakteristische Funktion für  $[\alpha, \infty)$ , also

$$1_{[\alpha, \infty)}(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta \in [\alpha, \infty) \\ 1 & \text{für } \beta \in (-\infty, \alpha) \end{cases}$$

Interpretiert wird  $\Gamma_\alpha$  als Niveauspiel zum Niveau  $\alpha$ : falls I nicht mindestens  $\alpha$  gewinnt, hat er verloren.

(1.11) SATZ:  $\Gamma$  ist determiniert genau wenn für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\Gamma_\alpha$  determiniert ist.

$\Rightarrow$ : Sei  $(\bar{a}, \bar{b})$  Sattelpunkt für  $\Gamma$ . Aus \* für  $F$  folgt direkt \* für  $1_{[\alpha, \infty)} \circ F$ , also  $(\bar{a}, \bar{b})$  ist auch Sattelpunkt für  $\Gamma_\alpha$ .

$\Leftarrow$ : Nachrechnen von \* wie gerade ergibt:

1. Ist  $(\bar{a}, \bar{b}) \in SP(\Gamma_\alpha)$  und  $(1_{[\alpha, \infty)} \circ F)(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ , so ist für alle  $\beta \geq \alpha$   $(\bar{a}, \bar{b}) \in SP(\Gamma_\beta)$ .

2. Ist  $(\bar{a}, \bar{b}) \in SP(\Gamma_\alpha)$  und  $(1_{[\alpha, \infty)} \circ F)(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ , so ist für alle  $\beta \leq \alpha$   $(\bar{a}, \bar{b}) \in SP(\Gamma_\beta)$ .

Damit folgt: val  $\Gamma$ :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist von der Form  $1_{(-\infty, \bar{\alpha}]}$  oder  $1_{(-\infty, \bar{\alpha})}$ .

Mit Hilfe von \* rechnet man nach:

Ist  $(\bar{a}, \bar{b}) \in SP(\Gamma_{\bar{\alpha}})$ , so ist  $(\bar{a}, \bar{b}) \in SP(\Gamma)$ .  $\Gamma$  ist also determiniert.

(1.12) Ein paar Beispiele.

1. Sei  $A = \{1,2\} = B$ ,  $F(a,b) =: \tilde{F}_{ab}$

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\varphi$  operiert auf  $A$ , d.h. weist einer Zeile das Infimum über die Zeilenelemente zu. Entsprechendes gilt für  $\psi$ .

Ich notiere

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\psi$

$$(0 \quad -2)$$

$$\text{Also: } \sup \varphi = \max \varphi = 0 < 1 = \min \psi = \inf \psi$$

Das Beispiel steht für Einstellen aller Inf/Sup bei einer Dualitätslücke von (0,1).

2.  $A = \mathbb{N} = B$

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{3}{4} & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{6} & \dots \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & \vdots \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{6} & \frac{1}{8} & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \vdots \\ -\frac{1}{2^a} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$\psi$

$$\left( 1 \quad \frac{1}{2} \quad \dots \quad \frac{1}{2^b} \quad \dots \right)$$

$$\sup \varphi = 0 = \inf \psi.$$

Keine Dualitätslücke,  $\Gamma$  hat einen Wert, aber: der Wert wird nicht eingestellt, es existiert kein Sattelpunkt.

3.  $A = \mathbb{N} = B$

$$\tilde{F}_{ab} = \frac{b-a}{a+b}$$

Es gilt  $\psi \equiv 1$ ,  $\varphi \equiv -1$ .

Kommentar klar, oder?

4.  $A = \mathbb{R} = B$

$$F(a,b) = b^2 - a^2$$

Das klassische Sattelpunktbeispiel:

$F(.,b)$  konkav,  $F(a,.)$  konvex.

$(0,0)$  ist Sattelpunkt.

Kommentar klar, oder?

5.  $A$  und  $B$  seien die Kreislinie, etwa dargestellt im  $\mathbb{R}^2$   
 $(a,b \in \mathbb{R}^2, |a| = |b| = 1)$ .

$F(a,b) := p a + p b$ , wobei  $p$  Konstante in  $\mathbb{R}^2$  und das  
Produkt das Skalarprodukt sein soll.

$$\underline{v} = \sup_a \inf_b F(a,b) = \sup_a p a + \inf_b p b$$

$$= \inf_b \sup_a F(a,b) = \bar{v}.$$

Der Wert wird eingestellt bei  $(\bar{a}, \bar{b}) = \left( \frac{p}{|p|}, -\frac{p}{|p|} \right)$ .

(1.13) LEMMA

- a) Sattelpunkte generieren dieselbe Auszahlung
- b) Sattelpunkte stellen den Wert ein
- c) Jede Kombination von optimalen Strategien  
ist optimal.

Formelmäßige Formulierung und Nachweis (trivial) seien zur Übung  
überlassen.

(1.14) Oft geht man bei der Analyse eines Spiels zu einem anderen Spiel über. Dazu bietet sich an, entsprechende "Morphismen", i.e. strukturerhaltende Abbildungen zu betrachten. An Struktur soll hier die Auszahlung erhalten bleiben. Also:

DEF. Seien  $\Gamma = (A, B, F)$  und  $\Gamma' = (A', B', F')$  Spiele. Ein Paar von Abbildungen  $(\alpha, \beta)$  mit  $\alpha: A \rightarrow A'$ ,  $\beta: B \rightarrow B'$  heißt Morphismus (in Zeichen  $(\alpha, \beta) : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ ) falls

$$F = F' \circ (\alpha, \beta)$$

Sind  $(\alpha, \beta)$  injektiv/surjektiv/bijektiv, so heißt  $(\alpha, \beta)$  Mono-/Epi-/Iso-morphismus.

Es ist klar: Isomorphismen transportieren Sattelpunkte und Werte. Es gilt weiters ...

(1.15) LEMMA: Das Urbild eines Sattelpunktes ist ein Sattelpunkt. oder formaler:  $(\bar{a}', \bar{b}') \in SP(\Gamma')$ . Ist  $\alpha\bar{a} = \bar{a}'$  und  $\beta\bar{b} = \bar{b}'$ , so ist  $(\bar{a}, \bar{b}) \in SP(\Gamma)$  und  $\text{val } \Gamma = \text{val } \Gamma'$ .

Beweis: Das Urbild von  $(\bar{a}', \bar{b}')$  ist  $(\bar{a}, \bar{b})$ .

Es gilt für alle  $(a', b')$

$$(*) \quad F'(a', \bar{b}') \leq F'(\bar{a}', \bar{b}') \leq F'(\bar{a}, \bar{b}) \\ \text{und } F'(\bar{a}', \bar{b}') = F(a', b').$$

Insbesondere gilt (\*) für alle  $a', b'$ , die Bilder sind, sagen wir von  $a, b$ ; also:

$$F(a, \bar{b}) = F'(\alpha a, \beta \bar{b}) \leq F(a, b) \leq F'(\alpha \bar{a}, \beta b) = F(\bar{a}, b).$$

Das genügt.

(1.16) LEMMA: Das Bild eines Sattelpunktes unter einem Epimorphismus ist ein Sattelpunkt.

Beweis: Es gilt:

$$F(a, \bar{b}) \leq F(\bar{a}, \bar{b}) \leq F(\bar{a}, b)$$

$$F'(\alpha a, \beta \bar{b}) \quad F'(\alpha \bar{a}, \beta \bar{b}) \quad F'(\alpha \bar{a}, \beta b)$$

oder: für alle  $(a', b')$ , die Bilder sind, gilt (\*).

Nach Voraussetzung ist das aber für alle  $(a', b')$  der Fall.

(1.17) Zwei Beispiele:

1. Ist  $A \subset A'$  und  $B \subset B'$ ,  $(a', b')$  Sattelpunkt von  $\Gamma'$  und aus  $A \times B$ , so ist dieser Punkt auch Sattelpunkt von  $\Gamma$ , d.h. irrelevante Strategien kann man vergessen.

2.  $A = E^n = B$ ,  $E^n := \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$

$$F(a, b) = \|a\| + \|b\|$$

$$\alpha, \beta : E^n \rightarrow E' : x \mapsto \|x\|$$

$$F'(a', b) = a' + b'.$$

$(\alpha, \beta)$  ist Epimorphismus.  $\Gamma$  ist sozusagen faktorisiert.  
Wir können 1.15 und 1.16 zusammenfassen:

"Epimorphismen transportieren die Sattelpunkteigenschaft"  
(vorwärts wie rückwärts).

In den folgenden Punkten sei erinnert an eine Reihe von Sätzen über Sattelpunkte vom Typ

(1.18) "notwendige Bedingungen"

(1.19) "hinreichende Bedingungen"

(1.20-1.22) "erzwingen"

- (1.18) Notwendige Bedingungen, also "wenn  $(\bar{a}, \bar{b})$  ein Sattelpunkt ist, sieht er so und so aus". Die Bekannteste,

$$\frac{\partial F}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\partial F}{\partial b}(\bar{a}, \bar{b}) = 0 ,$$

ist eine lokale Bedingung, zu der entsprechende Bedingungen höherer Ordnung formuliert werden können, die bei genügend Differenzierbarkeit für einen lokalen Sattelpunkt auch hinreichend sind. Ein Sattelpunkt ist auch lokaler Sattelpunkt, aber nicht umgekehrt. Bedingungen obiger Art verlangen differenzierbare Struktur oder ähnliches (z.B. Banachmannigfaltigkeiten oder Strukturen der konvexen Analysis).

- (1.19) Hinreichende Bedingungen.

Die bekannteste lautet:

$A, B$  seien konvexe kompakte Teilmengen reflexiver Banachräume,  $F(., b)$  ist konkav und unterhalbstetig,  $F(a, .)$  ist konvex und oberhalbstetig. Unter dieser und ähnlichen Bedingungen ist die Existenz eines Sattelpunktes gesichert.

Auch die Morsetheorie liefert Existenzaussagen (durch Abzählen und Typisieren von kritischen Punkten), benötigt jedoch differenzierbare Struktur.

- (1.20) Erzwingen.

Mangelt es  $\Gamma = (A, B, F)$  an Sattelpunkten, so kann man versuchen,  $\Gamma$  in  $\Gamma' = (A', B', F')$  einzubetten (Monomorphismus), wobei  $SP(\Gamma') \neq \emptyset$ . Das Verfahren heißt auch Fortsetzung.

Die in der Spieltheorie beliebteste Fortsetzung ist die gemischte Erweiterung. Und zwar, weil  $A', B'$  konvex kompakt sind, und weiters interpretierbar als Wahrscheinlichkeits- oder Intensitätsverteilungen über  $A$  bzw.  $B$ .

(1.21) SATZ (von Neumann et al., vgl. WARGA p. 473)

Seien  $A, B$  kompakt, sei  $F$  beschränkt und  $F(a, \cdot)$  und  $F(\cdot, b)$  seien stetig. Seien  $A', B'$  die Radon-Maße (d.h. die endlichen regulären Borelmaße) der Gesamtmasse 1 auf  $A$  bzw.  $B$ .

Sei  $F' : A' \times B' \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F'(a', b') := \int_{A \times B} F(a, b) da' \times db'.$$

Dann gilt:  $\Gamma' = (A', B', F')$  hat einen Sattelpunkt.

(1.22) BEISPIEL:

Sind  $A, B$  endlich, so heißt  $\Gamma$  Matrixspiel und  $A', B'$  sind die Einheitssimplices der Dimensionen  $|A'|-1$  bzw.  $|B'|-1$ .

## §2 PROZESSE

(2.1) "Prozeß" formalisiert die Vorstellung einer gesetzmäßigen zeitlichen Änderung eines abstrakt definierten Zustandes, der Beobachtungen oder Messungen reflektiert. Die Vorstellung vom Prozeß ist ein wesentliches Hilfsmittel, um Phänomene der verschiedensten Art zu beschreiben, vielleicht sogar zu verstehen. Bei aller Verschiedenartigkeit der Definition für "Prozeß" gehört dazu die Beschreibung von mindestens dem Tripel  $(Z, M, P)$ , wobei  $Z$  eine Zeitstruktur (z.B.  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}_0^+$ ,  $\mathbb{R}$  etc.),  $M$  einen Zustandsraum (z.B. Vektorraum oder Mannigfaltigkeit),  $P$  die Teilmenge von  $\underset{Z}{\times} M$ , die als Menge der möglichen oder zulässigen Pfade des Prozesses aufgefaßt werden kann. Berücksichtigen wir, daß  $\underset{Z}{\times} M = M^Z$  als Menge der Abbildungen von  $Z$  nach  $M$  aufgefaßt werden kann, so können wir  $X \in P$ , einen zulässigen Pfad also, durch  $X(t) := X_t$  (wobei  $X = (X_t)_Z$ ) als Kurve auffassen.

Hinter  $P$  verstecken sich meist drei Arten von Zulässigkeitsanforderungen an die Pfade (" $X \in P \iff 1., 2., 3.$ ").

1. Mathematisch-technische: z.B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, etc.
2. Restriktionen: z.B.  $X(t) \in A_T \subset M$  (z.B.  $\|X(t)\| \leq 1$  falls eine Norm zur Verfügung steht).
3. Ein Bewegungsgesetz: z.B.  $\dot{X}(t) = f(t, X(t))$ , also eine Differentialgleichung; aber auch Integralgleichungen, Differenz-Differentialgleichungen (time-lag, verzögerte Reaktion) oder ganz einfach Erreichbarkeitsmengen; etc.

VEREINBARUNG: Für die Differentialspiele benötigen wir eine kontinuierliche Zeitstruktur und eine (in etwa) differenzierbare Struktur des Zustandsraumes. Beim Bewegungsgesetz beschränken wir uns auf obige Differentialgleichung bzw. entsprechende mathematische Objekte (Vektorfeld). Unter "Prozeß" wollen wir deshalb die entsprechende Einschränkung des oben "Definierten" verstehen.



(2.2) Sieht  $(Z, M, P)$  wie  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \{X; \dot{X}(t) = f(t, X(t), \dots)\})$  aus, so benötigen wir als Hintergrundwissen den HAUPTSATZ über explizite gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung (im  $\mathbb{R}^n$ ; d.h.  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ):

1. Existenz (Cauchy): Ist  $f$  bei  $(t_0, x_0)$  stetig, so existiert (mindestens) eine Kurve in der betreffenden Umgebung von  $t_0$  mit  $X(t_0) = x_0$  und  $\dot{X}(t) = f(t, X(t))$ .

2. Eindeutigkeit (Lipschitz): Ist weiter  $U$  die betreffende Umgebung von  $(t_0, x_0)$  und gilt

$$\begin{array}{c} \wedge \\ N \in \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ (t, x_1), (t, x_2) \in U \end{array} \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| < N |x_1 - x_2|$$

hat  $f$  also höchstens durch  $N$  beschränkte Knicke), so ist  $X$  eindeutig.

3. Bemerkung: 2. ist erfüllt, (a) wenn  $f$  differenzierbar (trivialerweise), (b) wenn  $\partial f / \partial x$  beschränkt auf  $U$ . Ist  $f$  differenzierbar, so ist  $X$  Lösung von

$$X(t_0) = x_0, \quad \dot{X}(t) = f(t, X(t)) \quad \text{genau wenn}$$

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, X(\tau)) d\tau.$$

(Die genaue (schwächere) Bedingung an  $f$ , damit die DGL mit Anfangswert zu obiger Volterraschen Integralgleichung äquivalent ist, sei hier nicht betrachtet; vgl. etwa WARGA, pp. 156-9).

ÜBUNG: Diskutiere Beispiele zum Hauptsatz.

(2.3) Erfüllt  $X : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Gleichung  $\dot{X}(t) = f(t, X(t))$ , so läßt sich  $\dot{X}(t)$  als Pfeilchen, das am Punkt  $X(t)$  ansetzt, vorstellen. Dieses Pfeilchen repräsentiert die Geschwindigkeit mit Richtung und Größe. Diese Vorstellung werden wir im Exkurs M präzisieren.

Ist  $f$  unabhängig von  $t$ , so können wir uns vorstellen, daß die DGL umgesetzt werden kann in eine Graphik, bei der in jedem Punkt eines Rasters ein Pfeilchen ansetzt. Lösungskurven ließen sich dann durch Durchziehen in Pfeilrichtung gewinnen.

Diese Vorstellung wird präzisiert werden im Begriff des Vektorfeldes und seiner Integralkurven.

Ist  $f$  von  $t$  abhängig, so läßt sich letztere Vorstellung halten, wenn man statt  $\mathbb{R}^n$  den "datiertenRaum"  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  als neuen Zustandsraum wählt (bringe die DGL auf die Standardform).

#### Exkurs M : MANNIGFALTIGKEITEN

Im folgenden soll für den kontinuumsmächtigen Zustandsraum unseres Prozesses differenzierbare Struktur zur Verfügung gestellt werden. Da auf  $\mathbb{R}^n$  solche verfügbar, wollen wir uns zunächst reelle Koordinaten verschaffen. Das geschieht mit folgender Definition

- (M.1) DEF.:  $(M, (U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$  heißt  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (vom Typ  $C^\gamma$ ; i.e.  $\gamma$ -mal stetig differenzierbar), falls
- (o)  $M, \Lambda$  Mengen,
  - (1)  $U_\lambda \subset M$  ,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = M$
  - (2)  $\varphi_\lambda: U_\lambda \xrightarrow{\text{bijektiv}} V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ , i.e.  $\varphi_\lambda$  bildet  $U_\lambda$  bijektiv auf eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ab.
  - (3)  $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} \in C^\gamma$  (wo definiert)

$(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  heißt Atlas,  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$  heißt Karte, für  $p \in M$  heißt  $\varphi_\lambda(p)$  Koordinaten von  $p$ . (3) bedeutet Verträglichkeit der verschiedenen Koordinatendarstellungen.

(M.2) Beispiel: Der Kreis ( $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 1\}$ )

Sei  $\pi_i$  die Projektion auf die  $i$ -te  $\mathbb{R}^2$ -Koordinate.

Sei  $\Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$ .  $U_1 = \{x \in M, x_1 > 0\}$ ,  $U_2 = \{x \in M, x_1 < 0\}$ ,

$U_3 = \{x \in M, x_2 > 0\}$ ,  $U_4 = \{x \in M, x_2 < 0\}$ .

$$\varphi_1 = \pi_2|_{U_1}, \varphi_2 = \pi_2|_{U_2}, \varphi_3 = \pi_1|_{U_3}, \varphi_4 = \pi_1|_{U_4}.$$

Man male sich die Situation auf.

(0), (1), (2) sind trivial erfüllt.

Für (3) rechnen wir exemplarisch  $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ .

$$\varphi_1^{-1}(y) = (+\sqrt{1-y^2}, y), \varphi_3(\varphi_1^{-1}(y)) = +\sqrt{1-y^2}.$$

( $y \in (0, 1)$ ). (3) ist für alle  $\gamma$  erfüllt.

Hat man sich für  $M$  Koordinaten verschafft, so vergißt man meist die Karten und identifiziert  $M$  lokal mit  $\mathbb{R}^n$ . Man sagt dann " $p \in M$  hat die Koordinaten  $(x^1 \dots x^n) \in \mathbb{R}^n$ ", wobei mit  $x^i$  eigentlich  $\pi_i \circ \varphi_\lambda$  gemeint ist. Es tut gut, sich im folgenden immer wieder die exakte Schreibweise zu vergegenwärtigen. Das gilt auch für die Definition von "Kurve" und "Funktion", die von differenzierbaren Abbildungen spricht, wenn die entsprechende Zusammensetzung mit den Koordinatenfunktionen differenzierbar ist. Da es aus dem Zusammenhang meist hervorgeht, wie groß  $\gamma$  in  $C^\gamma$  mindestens sein muß (damit die Formeln Sinn machen), sprechen wir i.f. auch einfach von Differenzierbarkeit (ohne den genauen Typ anzugeben).

(M.3) DEF.  $X : I \rightarrow M$  ( $I$  Intervall in  $\mathbb{R}$ ) heißt Kurve falls  $X$  differenzierbar, genauer: Es existiert

$$\dot{X}(t) = \frac{dX^1(t)}{dt}, \dots, \frac{dX^n(t)}{dt}$$

mit  $X^i := \pi_i \circ \varphi_\lambda \circ X$ ,  $\varphi_\lambda$  adäquat; etc....

(M.4) DEF.  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Funktion falls  $f$  differenzierbar, genauer:  $f \circ \varphi_\lambda^{-1}$  ist differenzierbar, etc....

Die Menge aller Funktionen sei mit  $F$  bezeichnet.

BEM.  $F$  ist in natürlicher Weise eine  $\mathbb{R}$ -Algebra.

Wir wollen uns im folgenden um eine Definition des in (2.3) angesprochenen Raums der Pfeilchen / Geschwindigkeiten bemühen. Es stellt sich heraus, daß diese Vorstellung mit der Vorstellung des Tangentialraums an eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  eng verwandt ist.

Während aber bei letzterer Vorstellung die Formel für den Tangentialraum von der besonderen Einbettung der Fläche in einen höherdimensionalen Raum abhängt, wollen wir uns um einen Tangentialraum bemühen, der nur die "inneren Koordinaten" der Mannigfaltigkeit zur Charakterisierung braucht, und wobei wir von der besonderen Koordinatisierung auch möglichst viel vergessen können.

Und dazu dient die Verallgemeinerung und Präzisierung der "Pfeilchen". Diese Pfeilchen wollen wir mit Hilfe von Kurvenstückchen, i.e. lokale Kurven, definieren.

(M.5) DEF. Seien  $X, Y$  lokale Kurven in  $p \in M$ , i.e.  $X : I_1 \rightarrow M$ ,  $Y : I_2 \rightarrow M$ ,  $0 \in I_1 \cap I_2$ ,  $X(0) = Y(0) = p$ .

$X$  heißt p-äquivalent zu  $Y$ , in Zeichen  $X \sim_p Y$  falls  $\bigwedge_{f \in F} (f \circ X)'(0) = (f \circ Y)'(0)$ .

(M.6) SATZ: ...  $X \sim_p Y$  genau wenn  $\hat{X} = \hat{Y}$ .

Dieser Satz ist grundlegend. Er besagt:  $\sim_p$  bedeutet "haben in  $p$  die gleiche Richtung", anders: die Komponentenableitungen stimmen überein.

(M.7) DEF. Der Tangentialraum in  $p$  ist die Menge der Äquivalenzklassen der lokalen Kurven in  $p$ . Er sei mit  $T_p(M)$  bezeichnet.

BEM.  $T_p(M)$  trägt in natürlicher Weise Vektorraumstruktur und ist nach (M.6) isomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .

(M.8) DEF.  $T_*(M) := \bigcup_{x \in M} T_x(M)$  heißt Tangentialraum zu  $M$ .

BEM.  $T_*(M)$  ist in natürlicher Weise  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Um das einzusehen, betrachte man folgenden Atlas

$$(T_x(M), \tau_x)_M \text{ mit } \tau_x \tilde{X}^p = (\varphi_\lambda(x), \dot{X}(0))$$

wobei  $\tilde{X}^p$  eine Kurvenstückchenäquivalenzklasse mit  $X$  als Repräsentanten ist.

Wir kommen nun zum Begriff des Vektorfeldes:

(M.9) DEF.  $\mathfrak{X} : M \rightarrow T_*(M)$  heißt Vektorfeld, falls differenzierbar (genauer:  $\tau_x \circ \mathfrak{X} \circ \varphi_\lambda^{-1}$  differenzierbar) und  $\mathfrak{X}(p) \in T_p(M)$ .

BEM. Interpretiert heißt das, daß jedem Punkt ein Pfeilchen zugeordnet wird, das in ebendenselben Punkte ansetzt.

(M.10) SATZ: Die Vektorfelder auf  $M$  bilden einen  $n$ -dimensionalen Modul über  $F$ .

Wir geben die natürliche Basis lokal an:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i \in \{1 \dots n\}}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} := \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right)_{p \in M}$$

$$\text{mit } \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \tilde{X}^p,$$

$$X(t) = (x_1 \dots x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1} \dots x_n),$$

$$\varphi_\lambda(p) = (x_1 \dots x_n).$$

D.h.  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  ist der Tangentenvektor in Richtung der  $i$ -ten Koordinate.

Der Satz bedeutet insbesondere

Vektorfelder haben die Darstellung

$$= \sum f_i(x_1 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad ; \quad f_i / \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

oder kurz:

$$\text{vektoriell} \quad = f \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{bzw. mit Summationskonvention} \quad = f_i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Um endlich den Bogen zu unserer DGL aus (2.1-3) zu spannen, bemerken wir:

(M.11) BEM. Zu jeder Kuve  $X : I \rightarrow M$  gehört eine "hochgehobene"/  
"geliftete" Kurve  $\tilde{X}$  im Tangentialraum:

$$\tilde{X} := (X, \tilde{X} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{X(\cdot)}) : I \rightarrow T.M, \text{ oder ausführlicher}$$

$$\tilde{X} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{X(t)} = \sum \left( \frac{dx^i}{dt} \right)_t \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{X(t)}.$$

(M.12) BEM. Ist  $\mathfrak{X}$  Vektorfeld auf  $M$ , so impliziert die Gleichung

$$\tilde{X} = \mathfrak{X} \circ X \text{ eine gewöhnliche DGL 1. Ordnung.}$$

Sei nämlich etwa  $\mathfrak{X} = f^{\partial/\partial x}$ , so sind  $\tilde{X} = (X, \dot{X}(\partial/\partial x)_{X(\cdot)})$

und  $\mathfrak{X} \circ X = (\text{id}, f(\partial/\partial x)_{\text{id}(\cdot)}) \circ X$ .

Es gilt also  $\dot{X}(t) = f(X(t))$ .

Wie schon in (2.3) bemerkt, ist der Unterschied zu  $\dot{X}(t) = f(t, X(t))$  kein gravierender, da wir statt  $M$  die neue Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R} \times M$  betrachten können.

Erfüllt  $X$  die Gleichung  $\tilde{X} = \mathfrak{X} \circ X$ , so heißt  $X$  Integralkurve zu  $\mathfrak{X}$ . Das entspricht einer Lösung der entsprechenden DGL.

### Exkurs S: SYSTEME

Dieser zweite Exkurs soll zwischen formaler Auffassung und dem, was Physiker und Techniker unter Prozessen verstehen, vermitteln. Als wichtiges Buch, das versucht, die Verständigungslücke zu schließen, sei genannt: MacFARLAINE: Analyse technischer Systeme, BI 81:81a. Wir folgen dem dortigen Versuch, die Großzahl physikalischer Theorien und ihrer technischen Ausnutzungen auf ein gemeinsames Paradigma zu beziehen. Physik und Technik arbeiten in diesem Zusammenhang am selben Schema. Ein Unterschied könnte darin bestehen, daß sich Physiker mit dem bloßen Geschehen abgeben, während Techniker das Geschehen zu steuern trachten.

(S.1) "Systeme", was immer das genau ist, werden mit vier Größen vermessen; entweder in einem Punkt oder durch den Vergleich zweier an verschiedenen Punkten gemessener Beobachtungen. Wir benennen die vier Größen und ordnen sie:

|        |  |                    |
|--------|--|--------------------|
| Kraft  |  | Ort (Verschiebung) |
| f      |  | x                  |
| p      |  | v                  |
| Impuls |  | Geschwindigkeit    |

Die beiden Pfeile außen beschreiben Ableitungszusammenhänge nach der Zeit.

Das "Verhalten des Systems" oder der "Zustand des Systems" wird beschrieben in einem  $4n$ -dimensionalen Raum, also für die Praxis durch  $n$ -malige Messung der Größen. Über die Größe von  $n$  gibt (S.2) Auskunft.

Wir wollen somit  $x, p, v, f$  jeweils als  $n$ -Vektoren auffassen. Da wir am zeitlichen Verhalten des Systems interessiert sind, sind wir an Prozeßpfaden interessiert, die die Form  $(X(t), P(t), \dot{X}(t), \dot{P}(t))$  haben. Ein solcher Pfad kann aufgefaßt werden als eine hochgehobene Kurve vom Typ  $\tilde{X}$ . Dies ist eine Kurve im Tangentialraum bzgl. Orts-Impuls-Koordinaten.

In anderen Theorien bzw. Anwendungsfeldern entsprechen den vier Größen z.B.:

|               |                            |
|---------------|----------------------------|
| <u>Kraft</u>  | <u>Verschiebung</u>        |
| Drehmoment    | Winkelverschiebung         |
| Strom $I$     | Induktionsfluß $\emptyset$ |
| <u>Impuls</u> | <u>Geschwindigkeit</u>     |
| Dehimpuls     | Winkel $\sim$              |
| Ladung $Q$    | Spannung $U$               |

(S.2) Grundlegend für die Analyse von Systemen sind ihre Schaltbilder. (wie der Leser sie wohl schon oft genug gesehen haben mag, etwa einen Radioschaltplan...). Wenn wir "System" definieren wollten, so müßten wir es wohl jetzt: System als ein Schaltplan.

Für den Mathematiker ist ein Schaltplan ein Graph, dessen Kanten zusätzliche Struktur tragen, nämlich eine sie charakterisierende



Funktion. Für Praktiker ist es wichtig, aus dem Graphen durch willkürliche Festlegung der Pfeilrichtungen einen Digraph zu machen, damit die Meßvorschriften präzisiert werden (das Verhalten des Systems ist invariant gegenüber Festlegungen von Pfeilrichtungen). Bei den Technikern heißen die Kanten "Bauelemente" und Festlegung der Pfeilrichtungen ergibt die sogenannten "Zählpfeile". Die Knoten werden interpretiert als "Angriffspunkte" oder als ideale Verbindungen zwischen den Bauelementen. Gezeichnet werden sie als Verbindungslinien. Was zur Erfüllung obiger "Definition" nun noch fehlt ist die Charakterisierung der Bauelemente.

Weiter sind wir interessiert am Zustand des Systems. Diesen definieren wir einfach als Vektor der Zustände seiner Bauelemente. Der Zustand eines Bauelementes sei gegeben durch die an ihm (seinem/n Angriffspunkt(en), entsprechend den Zählpfeilen) gemessenen Größen. Ist  $n$  die Anzahl der Bauelemente, so sei der Zustand des Systems gegeben durch  $(x,p,v,f)$ , wobei  $x,p,v,f$  jeweils  $n$ -Vektoren.

(S.3) Drei Typen von Bauelementen seien unterschieden: Speicher, Quellen, Verbraucher.

Beispiele:

Speicher: (träge) Massen, Federn; Kondensatoren, Spulen;...

Quellen: Gravitationsfeld; Stromquelle, Spannungsquelle;...

Verbraucher: Reibung; Widerstand;...

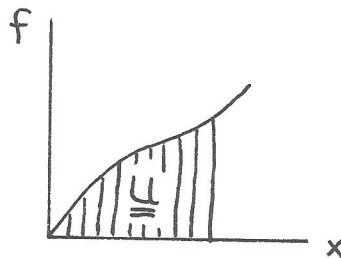
Bauelemente werden charakterisiert durch "Kennlinien", die zwischen Kraft und Ort, Impuls und Geschwindigkeit bzw. bei Verbrauchern: zwischen Kraft und Geschwindigkeit vermitteln.

Wir präzisieren das für Speicher am Beispiel:

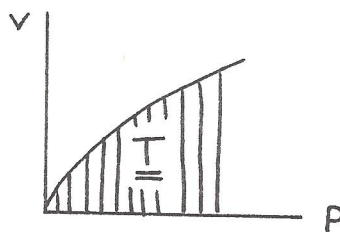
1. der Feder: diese ist charakterisiert durch ihre "Federkennlinie", die  $f$  als Funktion von  $x$  erscheinen läßt, d.h. die ausziehende Kraft als Funktion von der Verschiebung des unteren Angriffspunktes der Feder, wobei der obere Angriffspunkt fixiert bleibt. ( $f$  ist also Ein-Punkt-Größe,  $x$  Zwei-punkt-Größe.)

Einen Speicher der zwischen  $f$  und  $x$  vermittelt nennen wir Speicher potentieller Energie. Die Arbeit die bei Änderung des Zustandes eines solchen Speichers verrichtet werden muß, erscheint als  $\int f(x) dx$ , genommen entlang des Wegs. Das entspricht der bei diesem Vorgang gespeicherten potentiellen Energie, eine Größe, die wir mit  $\underline{U}$  bezeichnen wollen.

Graphisch ist ein Speicher potentieller Energie charakterisiert durch



2. Die Masse: diese charakterisiert durch das Newton'sche Gesetz  $p = mv$  (was  $f = ma$ ,  $a$ : Beschleunigung entspricht). Wir fassen  $v$  als Funktion von  $p$  auf und erhalten kurzgefaßt



wobei  $\underline{T} = \int v(p) dp$  als kinetische Energie benannt sei bzw. die entsprechende Arbeit, die bei Änderung des Zustandes eines Speichers kinetischer Energie anfällt.

(S.4) Techniker kennen als wesentliche Rechenregeln für Schaltbilder das Knotengesetz und das Maschengesetz. Das Knotengesetz besagt: die Summe aller Kräfte in einem Angriffspunkt ist 0.

Das Maschengesetz besagt: die Summe der Geschwindigkeiten (versehen mit dem Vorzeichen der Pfeilrichtung +1 oder -1) entlang eines geschlossenen Weges ("Kreis", "Masche") ist 0.

(Diese Gesetze sind mit dem Namen KIRCHHOFF verbunden.)

Beide Gesetze zusammen sind äquivalent zu einem Energieerhaltungssatz: Sei nun

$\underline{T}$  = Summe der kinetischen Energien der (kinetischen) Bauelemente,  
 $\underline{U}$  = Summe der potentiellen Energien der (potentiellen) Bauelemente;  
es gilt  $\underline{T} + \underline{U} = \text{const.}$

[vgl. dazu MacFARLAIN S. 113 ff].

Mit der Methode der Baumauswahl (i.e. Auswahl von maximalen kreisfreien Teilgraphen) [vgl. ebd. Kap. 3 und 5] erhält der Techniker  $n$  unabhängige Gleichungen aus den Knoten- und Maschengesetzen zusätzlich zu den  $n$  unabhängigen, die Bauelemente charakterisierenden Gleichungen. Mit dieser Information hofft er die Gleichungen in den  $2n$  (i.e. Orts-Impuls-) Koordinaten für das Verhalten des Systems lösen zu können. Die Gleichungen lassen sich umformen in eine DGL vom Typ  $(\dot{X}, \dot{P}) = f \circ (X, P)$ . Diese DGL (ebd. Kap. 5) soll uns aus Zeitmangel nicht interessieren. Lernen könnte man an ihr eine Schiefsymmetrie der Ort-Impuls-Koordinaten, die uns im Zusammenhang mit den Hamilton-Gleichungen noch beschäftigen wird.

Stattdessen wollen wir am Beispiel vier Wege in Richtung Lösung der Bewegungsgleichungen des Systems kennenlernen, wobei wir die die Prozeßpfade charakterisierenden Gleichungen exemplarisch aufstellen.

(S.4) also: Vorbemerkungen über diese vier Wege.

1. Weg: Aus den Systemgleichungen wird durch Einsetzen der isolierten Variablen eine Gleichung nur in  $x$  (bzw. nur in  $p$  bzw.  $v$  bzw.  $f$ ) hergestellt. Das führt i.a. zu einer DGL 2. Ordnung in Ortskoordinaten bzw.  $p, v$  oder  $f$ -Koordinaten.

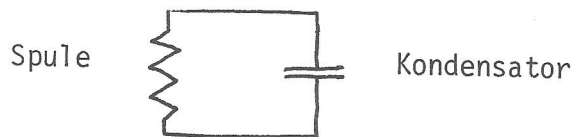
2. Weg: Die Ausnutzung des Energieerhaltungssatzes: in Orts-Impuls-Koordinaten soll  $\underline{T} + \underline{U} = \text{const}$  gelöst werden.

3. Weg: Aufstellen einer DGL 1. Ordnung in Ort-Geschwindigkeit-Koordinaten mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung.

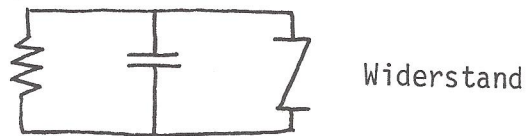
4. Weg: Aufstellen einer DGL 1. Ordnung in Ort-Impuls-Koordinaten mit Hilfe der Hamilton-Gleichungen.

(S.5) erste Beispiel: ein elektrischer Schwingkreis.

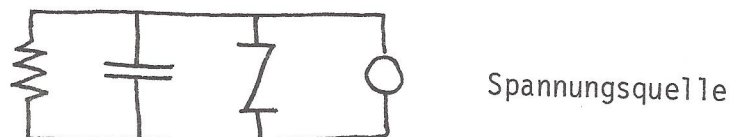
Darstellung:



bzw. mit Dämpfung:



und mit Eingabe-"Signal":



Für  $(x, p, v, f)$  werden die Variablen  $(\emptyset, Q, U, I)$  benutzt:

$\emptyset$  Induktionsfluß,  $Q$  Ladung,  $U$  Spannung,  $I$  Strom. Techniker benutzen zur Beschreibung des Systems  $U$  und  $I$ , Physiker auch  $\emptyset$  und  $Q$ . Bei willkürlicher Auszeichnung der Meßrichtungen lassen sich die  $4 \times 2$  ( $4 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ) Koordinaten auf  $4 \times 1$  ( $4 \times 1$ ,  $4 \times 1 + 2$ ) Stück durch die Anwendung der Maschen- und Knotengesetze reduzieren.

Die "Techniker" geben als Gesetze für die Bauelemente an:

- (1)  $U = L \dot{I}$  für die Spule  
( $L$ , die Induktivität, ist eine Konstante der Spule)
- (2)  $I = c \dot{U}$  für den Kondensator  
( $c$ , die Kapazität, ist eine Konstante des Kondensators)
- (3)  $U = RI$  für den Widerstand  
( $R$  Konstante)

"Physiker" übersetzen (1) und (2) in

$$(1') \quad I = L \dot{\emptyset}$$

$$(2') \quad U = cQ$$

Die Energiegleichung im einfachsten Fall erhält man aus

$$\underline{I} = \frac{1}{2} cQ^2$$

$$\text{und} \quad \underline{U} = \frac{1}{2} L\dot{\emptyset}^2,$$

Mit diesem Wissen können wir die gesuchten Gleichungen aufstellen.

1. Weg:  $U + Lc\ddot{U} = 0$   
bzw. bei Dämpfung:  
 $U + Rc\dot{U} + Lc\ddot{U} = 0$   
und mit Quelle:  
 $U + Rc\dot{U} + Lc\ddot{U} = U_{\text{Quelle}}$

Die Gleichungen sind als Schwingungsgleichungen bekannt, und sie sind mathematisch gut handhabbar.

2. Weg:  $\underline{T} + \underline{U} = \frac{1}{2} cQ^2 + \frac{1}{2} L\dot{\varphi}^2 = \text{const} ,$

bekannt als Ellipsengleichungen im  $(\varphi, Q)$ -Raum.

Bedeutung: der Prozeßpfad des Systems wandert auf einem Element der Ellipsenschar entlang. Ein solches Element nennt man Energiefläche. Die Energiefläche reduziert i.a. die Beschreibung des Systems um eine Dimension. Dazu bedenke man, daß im allgemeinen Fall der  $(\varphi, Q)$ -Raum  $2n$ -dimensional ist. Die Hoffnung weiterer Reduktionsschritte nach Umformulierung des Systems auf neue Koordinaten wird i.a. enttäuscht.

3. Weg: Setze  $L(x, v) := \underline{T}(v) - \underline{U}(x),$

das ist die Lagrangefunktion. Dazu muß man  $\underline{T}$  und  $\underline{U}$  als Funktionen von  $v$  bzw.  $x$  allein auffassen können. Im konkreten Fall verwenden wird (2'). Unter bestimmten Voraussetzungen kennt man den Satz (Euler-Lagrange-Gleichung): Entlang eines Prozeßpfades gilt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

(andere Schreibweise:  $(L_{\dot{x}})' - L_x = 0$ ).

Für unseren konkreten Fall errechnen wir mit

$$L(\varphi, U) = \frac{1}{2c} U^2 - \frac{1}{2} L\dot{\varphi}^2 \text{ die Formel}$$

$$\frac{1}{c} \dot{U} + L\dot{\varphi} = 0.$$

Da  $U = \dot{\varphi}$ , läßt sich das wieder in das Ergebnis vom 1. Weg umrechnen.

4. Weg: Setze  $H(x, p) := vp - L(x, p)$  mit (2') &

$$L(x, p) = \underline{T}(p) - \underline{U}(x), \text{ also entsprechenden Darstellungen/Auffassungen}$$

über die Funktionen  $\underline{T}$ ,  $\underline{U}$ ,  $\underline{L}$ .

In unserem Fall gilt  $H(x,p) = \dots \frac{1}{2}c^{-1}p^2 + \frac{1}{2}Lx^2$ . Unter bestimmten Voraussetzungen kennt man den Satz (Hamilton-Gleichungen): Entlang eines Prozeßpfades  $(X,P)$  gilt:

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}.$$

In unserem Beispiel also:

$$-\dot{p} = \dots LX \quad \text{und} \quad \dot{x} = \dots \frac{1}{c} p \quad (\text{vgl. 2}').$$

Wir können das auffassen als ein Vektorfeld mit den Energieflächen als Integralkurven. (Im allgemeinen nur als Vektorfeld mit Integralkurven auf den Energieflächen.)

- (S.6) Weitere Beispiele lassen sich unschwer entsprechend behandeln, z.B. freier Fall, Wurf, Feder, Pendel, gekoppelte Federn, Planetenbewegung. Sie seien als Übung empfohlen.

Von Interesse ist noch ein allgemeineres Beispiel, skizziert als



bei dem das Subsystem potentielle Energie  $\underline{U}$  speichert und in seinem Inneren nicht spezifiziert wird. Ferner hänge  $\underline{U}$  nur vom Ort ab ( $\underline{U}$  heißt dann Potential).

Nach Reduktion der  $4 \times 2$  Koordinaten auf  $4 \times 1$  gilt zudem  $f = \frac{\partial U}{\partial x}$  bei genügend Differenzierbarkeit. Dabei haben wir das Knoten-Maschen-Gesetz benutzt bzw. äquivalent dazu den Energieerhaltungssatz. Ein solches System heißt auch "konservatives System". Spezifizieren wir  $\underline{T}$  als  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ , so erhalten wir in Ort-Geschwindigkeit-

Koordinaten die Gleichung:

$$\dot{X} = \left(\frac{2}{m} (\underline{E} - \underline{U}(X))\right)^{1/2}$$

wobei  $\underline{E} := \underline{T} + \underline{U}$ , die im System erhaltene und enthaltene Gesamtenergie ist.

Betrachten wir  $v = \left(\frac{2}{m} (\alpha - \underline{U}(x))\right)^{1/2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  so erhalten wir i.a. eine einparametrische Kurvenschar im  $(x, v)$ -Raum. Die graphische Darstellung davon wird Phasendiagramm genannt. Die  $(X, \dot{X})$ -Projektionen der Prozeßpfade müssen auf einer solchen Kurve verlaufen und mehr: die DGL 1. Ordnung in  $x$  erfüllen.

Für den freien Fall z.B. erhält man

$$\dot{X}(t) = \left(\frac{2}{m} (\alpha - maX(t))\right)^{1/2}$$

wobei  $a$  die Gravitationsbeschleunigung (also  $= \ddot{X}$ ) ist.

Damit sind die Exkurse beendet, und wir gehen nun davon aus, daß wir bereits die Bewegungsgleichung des zu betrachtenden Prozesses aufgestellt haben, und zwar auf irgendeine Weise, in der Form  $\dot{Y} = f(t, Y(t))$ .

- (2.4) Wenn wir uns daran erinnern, daß der Zustandsvektor  $y = Y(t)$  des betrachteten Systems i.a. für jedes Bauelement einen Zustandsvektor beinhaltet, und daß (gewisse) Quellen von den das System sich zu Nutze machenden Menschen gesteuert werden können, so werden wir  $Y = (X, U)$  setzen, und weil  $\dot{U}$  uns wenig interessiert, d.h.  $U$  "direkt" gesteuert werden soll, erhalten wir eine DGL der Form

$$\dot{X}(t) = g(t, X(t), U(t)).$$

Das ist die Standardform der Bewegungsgleichung, die von nun an in der Vorlesung zugrunde gelegt sei.



- (2.5) Wozu steuern, wenn kein Ziel? Wir setzen als Ziel der Steuerung (genauer Ziel des Steuernden) die Maximierung eines bestimmten Funktionals  $\underline{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir erhalten also als Grundaufgabe

$$(1) \quad \max_{\mathcal{P}} \underline{F}(Y)$$

Dabei ist die Struktur noch nicht genutzt. Erinnern wir, was und  $Y$  bedeuten, so erhalten wir die Grundaufgabe

$$(2) \quad \max_{\mathcal{U}} \{ \underline{F}(X, U) ; \dot{X}(t) = g(t, X(t), U(t)), \dots \}$$

wobei die Pünktchen an technische Bedingungen und Restriktionen (s.(2)) erinnern sollen, und  $\mathcal{U}$  die Menge zulässiger Steuerpfade  $U$  bedeuten soll.

Sei  $\underline{Y} = \underline{X} \times \underline{U}$  der Zustandsraum des Systems, man spricht dann meistens von  $\underline{X}$  als Zustandsraum und  $\underline{U}$  Stellerraum (oder Raum der Kontrollen) des Prozesses, so sei  $\mathcal{A}$  eine Klasse von Funktionen  $\alpha : \underline{X} \rightarrow \underline{U}$ .

Dann ist eine weitere Grundaufgabe gegeben durch

$$(3) \quad \max_{\mathcal{A}} \{ \underline{F}(X, \alpha \circ X) ; \dot{X} = g, \dots \}.$$

Mit der Grundaufgabe (1) beschäftigt(e) sich die Variationsrechnung. Die neuere Theorie der Optimalen Steuerung ("Optimal Control") beschäftigt sich mit (2) und (3), womit eine gewisse Stagnation der Analyse von (1) (teilweise) überwunden werden konnte.

$\mathcal{U}$  wird als Steuerungen (open-loop-controls),

$\mathcal{A}$  wird als Regelungen (closed-loop-controls) bezeichnet.

(2.6) Es besteht ein wichtiger Unterschied zwischen den Aufgabentypen (2) und (3). Sei im folgenden vorausgesetzt, daß  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{A}$  Funktionenklassen vom gleichen Typ sind, und daß für sie die Nebenbedingungen, insbesondere die Bewegungsgleichungen, erfüllbar sind.

Es sei  $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U} : \alpha \rightarrow \alpha \circ X_\alpha$ , wobei  $X_\alpha$  (zulässige) Lösungen von  $\dot{X}(t) = g(t, X(t), \alpha(X(t)))$ .

Dann gilt das

LEMMA: ...  $i$  ist injektiv, was leicht nachzurechnen ist. Das heißt: "Regelungen sind besondere Steuerungen".

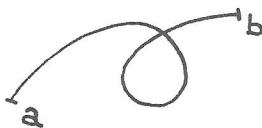
Belegen wir die Lösungen der Grundaufgaben mit dem Begriff "optimal", so bestehen folgenden Folgerungen:

1. Falls  $U$  optimal in  $\mathcal{U}$  und von einem  $\alpha$  erzeugt, so ist  $\alpha$  in  $\mathcal{A}$  optimal.
2. Es kann vorkommen, daß keine optimale Regelung, wohl aber eine optimale Steuerung existiert.
3. Es kann vorkommen, daß die zu einer optimalen Regelung gehörige Steuerung nicht optimal ist.

Die unter 2. und 3. genannten Möglichkeiten treten tatsächlich auf. Ein Beispiel für eine optimale Steuerung, die nicht von einer Regelung stammt, konstruiere man sich gemäß folgender Skizze:

$P$  sind Pfade zwischen  $a$  und  $b$ ,  $a$  zur Zeit  $0$ ,  $b$  zur Zeit  $\leq 1$ .  $\underline{F}$  ist vom Typ eines Kurvenintegrals  $\int_{ab} f(x)dx$ .

Dann könnte die optimale Steuerung mit folgendem Bild in  $M$  beschrieben sein:



Da ein Punkt zweimal durchlaufen wird, gibt es hierzu keine den Pfad erzeugende Regelung.

- (2.7) Für bestimmte Funktionale  $\underline{F}$  ist ein manchmal, besonders für Regelungen, hilfreicher Satz bekannt. Wir formulieren ihn hier für "wegadditive"  $\underline{F}$ , er gilt jedoch noch etwas allgemeiner.

Sei dazu

$$P(t,y) := \{Y|_{[t,\infty)} \mid Y \in P, Y(t) = y\},$$

also die Menge der zur Zeit  $t$  in  $y$  startenden Restpfade, und

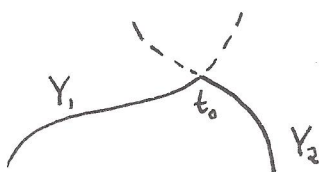
$$P|_I := \{Y|_I \mid Y \in P\},$$

die "Wege" (Pfadstücke) während des Zeitintervalls  $I$ .

Unsere Vorstellung eines wegadditiven Funktionals ist geprägt vom Fall  $\underline{F}(X,U) := \int f(t,X(t), U(t))dt$ , was wir als "laufende Auszahlung" (entlang des Pfades) benennen.

Hier ist es sinnvoll  $(X,U)$  stückweise zusammzusetzen und  $\underline{F}$  entsprechend stückweise zu berechnen.

Betrachten wir die Skizze (in  $M$ ):



$$\text{mit } Y_i \in P_{I_i} \quad \text{und } I_1 \cap I_2 = t_0.$$

(Diese Skizze lehrt uns zudem, daß falls wir an stetigen  $X$ -Pfaden interessiert sind, und wir den  $U$ -Pfad als so etwas wie eine lokale Richtungsangabe auffassen, es naheliegt, Unstetigkeiten der  $U$ -Pfade zuzulassen.)

Wir definieren:

DEF.  $\underline{F}$  heißt wegadditiv falls

(1) für jedes Intervall  $\underline{F}(I) : P|_I \rightarrow \mathbb{R}$   
definierbar ist und  $\underline{F}(\mathbb{R}) = \underline{F}$ , so daß

(2) für alle  $t$  und Intervalle  $I, J$  mit  
 $I \cap J = \{t\}$ ,  $\underline{F}(\cdot)$  für alle an  $t$  zu  $X$   
zusammengeführten Wege  $Y \in P|_I$  und  $Z \in P|_J$   
die Gleichung

$$\underline{F}(I \cup J)(X) = \underline{F}(I)(Y) + \underline{F}(J)(Z)$$

erfüllt.

Es gilt der

SATZ: (Restwegprinzip, Bellmanprinzip).

Ist  $\underline{F}$  wegadditiv und  $Y \in P$  optimal in  $P_{(t_0, y_0)}$ ,  
so ist  $Y$  auch optimal in  $P_{(t+t_0, Y(t+t_0))}$  für  
alle  $t \in \mathbb{R}^+$ .

(2.8) Wir wollen zu Prozessen verschiedene Optimierungsaufgaben betrachten.

DEF. Analog zur Definition von Spielen in §1 definiere man  
als OA (Optimierungsaufgabe) das Paar  $\Gamma = (A, \underline{F})$ . Zu  
bestimmen sind  $v(\Gamma) := \sup_A \underline{F}$  und  $M(\Gamma)$ : die Maximierer.

Zu der Grundaufgabe (1) gehört dann die OA  $(P, \underline{F})$ .

Unter geeigneten Anforderungen (vgl. 2.2) existiert zu  
einem Startpunkt  $(t_0, x_0)$  und einer Steuerung  $U$  bzw.  
Regelung  $\alpha$  stets ein Pfad  $X$ , der davon erzeugt ist.  
Wir schreiben dafür  $X = \kappa(U)$  bzw.  $X = \lambda(\alpha)$ .

Daher gehören zu den Grundaufgaben (2), (3) die OA'n:

(2') Steuerungsproblem:

$$\Delta(t,x) = (\{U \in \mathcal{U}\}, \underline{F} \circ (\kappa, \text{id}))$$

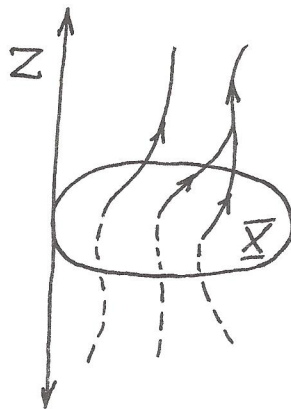
(3') Regelungsproblem:

$$\Gamma(t,x) = (\{\alpha \in \mathcal{O}\}; \underline{F} \circ (\lambda, \alpha \circ \lambda)).$$

BEM. Der datierte Zustand  $(t,x)$  kann als Anfangspunkt des Prozesses interpretiert werden.

Für (2') besagt das Restwegprinzip:

Ist  $\underline{F}$  wegadditiv und  $U \in M(\Delta(t_0, x_0))$ , so ist  $U$  (bzw. seine Restriktion) auch für alle  $t \geq 0$  optimal in  $\Delta(t_0+t, X(t_0+t))$  wobei  $X = \kappa(U)$ . Nimmt man an, daß für jeden Anfangspunkt  $(t_0, x_0)$  genau ein optimaler Pfad existiert, so besagt das Restwegprinzip, daß die Kurven  $(\text{id}, X)$  für optimale Pfade zwar zusammenlaufen können, aber nicht auseinander.



Ist  $\underline{F}$  vom Typ "laufende Auszahlung" und sind  $f$  und  $g$  nicht explizit Funktionen der Zeit ("zeithomogenes Problem"), so vereinfacht sich das Bild zu



Das heißt, die optimalen Pfade zu verschiedenen Startpunkten ergeben ein Strömungsbild auf  $\underline{X}$ . Die optimalen Pfade sind Integralkurven eines Vektorfeldes auf  $\underline{X}$ , dem eine Regelung entspricht.

Für das zeithomogene Problem bei (3') besagt das Restwegprinzip:

$$\text{Ist } \alpha \in M(\Delta(t_0, x_0)) \text{ so auch} \\ \bigwedge_{t > 0} \alpha \in M(\Delta(t+t_0, (\lambda(\alpha))(t+t_0)).$$

Das Restwegprinzip legt es nahe, die Lösung einer OA vom Typ  $\Delta(t, x)$  bzw.  $\Gamma(t, x)$  für laufendes  $(t, x)$  zu untersuchen (sog. "synthetische Sicht"). Dazu wird die Restwertfunktion in (2.9) dienen.

VEREINBARUNG: Da wir im folgenden die Situation  $X = \kappa(U)$  bzw.  $X = \lambda(\alpha)$  im Auge haben, bezeichnen wir nicht mehr wie bisher  $(X, U)$  als Pfad und  $(x, u)$  als Zustand, sondern:

|                                              |                                                                                                        |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \in \underline{X}$                        | als Zustand                                                                                            |
| $u \in \underline{U}$                        | als Kontrolle                                                                                          |
| $X$                                          | als Pfad                                                                                               |
| $U$                                          | als Kontrollpfad (bzw. Steuerung, falls $U \in \mathcal{U}$ )                                          |
| $(t, x) \in \mathbb{R} \times \underline{X}$ | als datierten Zustand, evtl. Anfangspunkt des Pfades $X$ ; für $t = 0$ heißt $x$ dann auch Startpunkt. |

(2.9) Vorgegeben sei ein Prozes wie in (2.8) mit zudem laufender Auszahlung (" $\underline{F} = \int f$ "). Nehmen wir weiters an, daß für jeden datierten Zustand Maximierer der zugehörigen OA'n vorhanden sind (dabei ist implizit, daß es auch keine Konvergenzprobleme beim Integral gibt).

DEF. Unter diesen Voraussetzungen sei

$$W : \mathbb{R} \times \underline{X} \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \rightarrow v(\Delta(t, x)) \text{ bzw. } v(\Gamma(t, x)) \\ \text{und hei\ss e } \underline{\text{Restwertfunktion}}.$$

BEM. Wir haben die OA'n mit Startpunkt im Auge.  $W(0, X)$  wäre dann der ab  $x$  erreichbare "Wert", und das Restwegprinzip gibt uns für  $t \geq 0$  Auskunft über den Rest des Erreichbaren auf einem Restweg:

Sei  $X = X_{(t, x)}$ , also ein in  $(t, x)$  beginnender Pfad. Ist  $X$  optimal, so gilt nach dem Restwegprinzip zusammen mit der Definition:

$$(4) \quad \bigwedge_{t_0 \geq t} W(t, x) = \int_t^{t_0} f \circ (\text{id}, X, \dots)(\tau) d\tau + W(t_0, X(t_0)).$$

Ist  $X$  eventuell suboptimal, so gilt noch

$$(4') \quad \bigwedge_{t_0 \geq t} W(t_0, X(t_0)) \leq W(t, x) + \int_t^{t_0} f \circ (\text{id}, X, \dots)(\tau) d\tau$$

man hat eventuell zwischen  $t$  und  $t_0$  "Wert" verschenkt.

Sei für Funktionen  $z$  von  $(t, x, u)$  die Funktion  $z^*$  von  $(t, x)$  erklärt durch  $z(t, x, \bar{u})$  mit  $\bar{u}$  dem Wert der optimalen Steuerung bzw. Regelung an der Stelle  $(t, x)$ .

SATZ: Sei  $W$  stetig (?) differenzierbar, so gilt

$$(5) \quad - \frac{\partial W}{\partial t} = g^* \frac{\partial W}{\partial x} + f^*$$

und verschärft

(5') "Prinzip der lokalen Steuerung"

$$\bigwedge_u - \frac{\partial W}{\partial t} \geq g \frac{\partial W}{\partial x} + f$$

Beweis: Setze in (4')  $t_0 = t + \epsilon$ , dann ist

$$\begin{aligned}
 W(t+\epsilon, X) - W(t, X) &= W(t+\epsilon, X) - W(t+\epsilon, X(t+\epsilon)) + W(t+\epsilon, X(t+\epsilon)) - W(t, X) \\
 &\stackrel{(4')}{\leq} W(t+\epsilon, X) - W(t+\epsilon, X(t+\epsilon)) - \int_t^{t+\epsilon} f(\tau, X(\tau), \dots) d\tau \\
 &= W(t+\epsilon, X) - W(t+\epsilon, X) - \int_0^\epsilon g(t+\tau, X(t+\tau), \dots) d\tau \\
 &\quad - \int_0^\epsilon f(t+\tau, X(t+\tau), \dots) d\tau
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W(t+\epsilon, X) - W(t, X)}{\epsilon} = - (g(t, X, \dots) \frac{\partial W}{\partial X}(t, X) + f(t, X, \dots)) ,$$

also (2). (1) folgt durch Einsetzen der optimalen Kontrolle  $\bar{u}$ .

BEM. Der Satz wird oft wie folgt genutzt: Da unter den Regularitätsbedingungen eine optimale Steuerung bzw. Regelung die lokalen OA'n  $(\bar{U}, g(t, X, \dots) \frac{\partial W}{\partial X}(t, X) + f(t, X, \dots))$  löst, versucht man umgekehrt, aus den lokal optimalen  $\bar{u}(t, X)$  sich optimale  $U$  bzw.  $\alpha$  zu basteln. U.U. ist das Ergebnis dann nicht mehr aus  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{A}$ .

Wir geben noch eine andere Form der Formel des Satzes an, nämlich für eine als (neue, zusätzliche) Zustandsvariable betrachtete Zeit, d.h. es sei der datierte Zustand  $(t, X)$  als neuer Zustand  $\bar{x} = (x_0, X)$  mit  $X_0(0) = 0$ ,  $g_0(\bar{x}, u) \equiv 1$ ,  $\bar{g} = (g_0, g)$  aufgefaßt.

Aus (5) wird dann

$$(6) \quad \bar{g}^* \frac{dW}{d\bar{x}} + f^* = 0 ;$$

(6') aus (5') analog.

Der Satz läßt sich merken als:

"entlang des optimalen Pfades ist  $f + \frac{dW}{dx} g$  optimal".



(2.10) Wir werden Prozesse betrachten, die (zur Zeit 0 starten und) nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit enden. Während es für stochastische Prozesse durchaus zweckmäßig ist, eine solche Gesetzmäßigkeit als Abbildung  $\tau : P \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  aufzufassen, die allerdings nicht "vorgreifend" sein darf (d.h.

$$\tau X = t \Rightarrow \bigwedge_{Y, Y|_{\leq t} = X|_{\leq t}} \tau Y = t, \text{ ist es, z.B. aus Stetig-$$

keitsgründen, für deterministische Prozesse vorteilhaft, die Stopgesetze anders zu spezifizieren.

Damit die einfachen Fälle  $\tau = \text{const}$  ("feste Laufzeit") und für  $N \subset \bar{X}$ ,  $\tau(X,U) := \min \{t; X(t) \in N\}$  ( $N$  anständig, "erste Eintrittszeit"), berücksichtigt werden können, setzen wir als Stopzeit  $\tau = \tau_h$  wobei  $h : \mathbb{R} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\tau(X,U) := \min \{t; h(t, X(t))=0\}$ . Möglichst soll  $h$  differenzierbar und regulär sein, so daß wir uns  $h = 0$  als die das "lebendige" Gebiet von  $\mathbb{R} \times \bar{X}$  berandende Hyperfläche vorstellen können.

Wir stellen uns vor, daß die Auszahlung nach Überschreitung der Stopzeit nicht mehr verändert werden kann, oder sogar, daß der Prozeß tatsächlich endet (was wohl heißt, daß der erreichte Zustand nun bis in Ewigkeit konstant bleibt), oder auch, daß das Stopgesetz das Interesse oder die Beschränktheit des Beobachters widerspiegelt.

...jedenfalls haben wir nun die Zutaten zusammen, um abstrakt das uns interessierende Objekt zu definieren:

(2.11) DEF.  $\phi = (\bar{X}, \underline{U}, f, g, h)$  heißt

Standardprozeß, falls

- (i)  $\bar{X}, \underline{U}$  Mannigfaltigkeiten,  
(evtl. auch Banachräume oder abgeschlossene oder offene Teilmengen von Banachräumen)

(ii)  $f : \mathbb{R} \times \bar{X} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$   
genannt "laufende Auszahlung"

(iii)  $g : \mathbb{R} \times \bar{X} \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$   
wobei  $n = \dim \bar{X}$ ,  
genannt "Bewegung-" oder "Übergangs-  
gesetz/-"funktion"

(iv)  $h : \mathbb{R} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$   
genannt "Stopzeit"

$\psi = (\bar{X}, \bar{U}_1, \bar{U}_2, f, g, h)$  heißt (2-Personen-0-Summen-)  
Differentialspiel falls  $\phi = (\bar{X}, \bar{U}_1 \times \bar{U}_2, f, g, h)$   
Standardprozeß.

Für vorgegebene Funktionenklasse  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$  bzw.  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$   
ergänzen wir die Definitionen von 2.8 (für von  $\phi$  induzierte  
OA'n) um die von  $\psi$  induzierten OA'n:

$$\Delta(t, x) = \Delta_{\psi}(t, x) := (\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \underline{F} \circ (\kappa, \text{id})), \kappa = \kappa(t, x)$$

$$\Gamma(t, x) = \Gamma_{\psi}(t, x) := (\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \underline{F} \circ (\lambda, \alpha \circ \lambda)), \lambda = \lambda(t, x).$$

Diese Objekte heißen zugehöriges (OA bzw.) Spiel (über den  
Steuerungen bzw. Regelungen) ab  $(t, x)$ ; für  $t > 0$  auch  
Restspiel, für  $t = 0$  auch Spiel mit Start  $x$ . Für letzteres  
schreiben wir auch  $\Delta(x)$  bzw.  $\Gamma(x)$ .

Existiert für die OA'n  $\Delta(t, x)$  bzw.  $\Gamma(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \bar{X}$   
eine differenzierbare Restwertfunktion  $W$ , so heißt

$$\Gamma[t, x] := (\bar{U}, g(t, x, \cdot) \frac{\partial W}{\partial x}(t, x) + f(t, x, \cdot)) \text{ zugehörige}$$

lokale OA in  $(t, x)$ .

Die OA  $\Gamma[t, x, p] := (\bar{U}, g(t, x, \cdot) p + f(t, x, \cdot))$  mit  $p \in \mathbb{R}^n$   
( $n = \dim \bar{X}$ ) heißt perlokale OA in  $(t, x)$  mit Impuls  $p$ .

Für Spiele definieren wir, analog:

Die Restwertfunktion  $W : \mathbb{R} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R} : (t,x) \rightarrow v(\Delta(t,x))$

bzw.  $v(\Gamma(t,x))$ ,

das lokale Spiel

$\Gamma[t,x] := (\bar{U}_1, \bar{U}_2, (g \frac{\partial W}{\partial x} + f)(t,x, \cdot))$ ,

das perlokale Spiel

$\Gamma[t,x,p] := (\bar{U}_1, \bar{U}_2, (gp + f)(t,x, \cdot))$ .

(2.12) Ein Beispiel für einen Standardprozeß ohne optimale Steuerung.

$$\bar{X} = I, \bar{U} = [-1,1], f(t,x,u) = u^2 - x^2$$

$$g(t,x,u) = u, h(t,x) = t-1.$$

$$= M(I, [-1,1])$$

Betrachte  $\Delta(0,0)$ : Die Paare  $(X,U)$  seien von der Form  $(\kappa U, U)$

mit  $\kappa = \kappa(0,0)$ . Es ist  $U(t)^2 \leq 1$ , da  $U(t) \in [-1,1]$ .

$$\underline{F}(X,U) \leq 1 - \int X(t)^2 dt$$

$$\leq 1.$$

Es gibt  $(X_j, U_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim \underline{F}(X_j, U_j) = 1$ , nämlich:

Für  $j$  sei das Zeitintervall  $[0,1]$  in  $2^j$  Intervalle zerlegt, in denen  $U_j$  abwechselnd 1 und -1 steuert.

Nehmen wir an, es gäbe ein  $(\bar{X}, \bar{U})$  mit  $\underline{F}(\bar{X}, \bar{U}) = 1$ , so müßte  $\int U(t)^2 dt = 1$  und  $\int X(t)^2 dt = 0$ , d.h.

fast überall  $U(t) = \pm 1$  und  $X(t) = 0$ . Da  $X(t) = x + \int g dt$  und  $g(t,x,u) = u$ , muß fast überall  $U(t) = 0$  sein: Wid.

Das Beispiel suggeriert

1. Lösungen gibts nicht immer.
2. Optimale Steuerungen können (extrem) unstetig werden  
[einfacher Fall : Bang - Bang]
3. Es ist u.U. wichtig, die richtigen Funktionenklassen zu betrachten und für Operatoren und Limiten Funktionalanalysis zu treiben.

(2.13) Der Zusammenhang zwischen Restwert und H-Gleichungen

Der Versuch, die Restweggleichung (7/8) zusammen mit der Randbedingung

(9)  $W(t,x) = 0$  für  $h(t,x) = 0$   
zu lösen, stößt im Allgemeinen auf erhebliche Schwierigkeiten, da diese partielle DGL (7/8) durch max- bzw. max min-Bildung nichtlinear ist.

In Analogie zu Exkurs S. kann man jedoch  $W(t,x)$  als "potentielle Energie"  $\underline{U}(t,x)$  im Zustand  $(t,x)$  auffassen und

$$\underline{I} \circ X = \int_0^t f \circ (\text{id}, X, U) ds$$

als "kinetische Energie" entlang des mittels  $U$  gesteuerten Pfades  $X$ . Dann gilt entlang optimaler Pfade der "Energieerhaltungssatz":

$$(10) \quad \underline{U}(t, X(t)) + \underline{I} \circ X(t) = W(0, x_0)$$

wobei  $x_0 = X(0)$  und  $W(0, x_0)$  die im System enthaltene Gesamtenergie ist.

In weiterer Analogie läßt sich wie im Exkurs S. eine Hamilton-Funktion angeben, für die also die H-Gleichungen

$$(11) \quad H_x = -\dot{p} \quad \text{und} \quad H_p = \dot{X}$$

entlang den optimalen Pfaden erfüllt sind:

SATZ: Gegeben sei ein Standardprozeß oder Differentialspiel.  
Es seien

$$(12) \quad P := \underline{U}_x \circ (\text{id}, X) = W_x \circ (\text{id}, X)$$

$$(13) \quad H := \mathbb{R} \times \bar{X} \times \mathbb{R}^n \times \bar{U} \rightarrow \mathbb{R} :$$

$$(t, x, p, u) \rightarrow g(t, x, u) p + f(t, x, u)$$

Alle Größen seien genügend differenzierbar. Dann gelten entlang optimaler Pfade:

1. Die Hamilton-Gleichungen (11)
2. Das Maximum-/Maximin-Prinzip:

$$(14) \quad H \circ (\text{id}, X, P, U) = v(\Gamma[t, x, p])$$

für Steuerungsprobleme bzw.

$$(15) \quad H \circ (\text{id}, X, P, \alpha \circ X) = v(\Gamma[t, x, p])$$

für Regelungsprobleme.

Zum Beweis, oBdA für "max":

$$(11): H_p = \dot{X} \quad \text{ist trivial: } H_p = g$$

(14/15): sind trivial: sind die rechte Seite der Restweggleichung (7/8).

Es fehlt noch aus (11)  $H_x = -\dot{p}$ :

$$H_x = g_x p + f_x$$

Da  $P = \underline{U}_x \circ (\text{id}, X)$  gilt:

$$\dot{p} = W_{tx} \circ (\text{id}, X) + (W_{xx} \circ (\text{id}, X)) \dot{X} .$$

Sei zunächst das Steuerungsproblem betrachtet:

Nach (14) gilt:

$$- W_{tx} \circ (\text{id}, X) = (H_x + (W_{xx} \circ (\text{id}, X))H_p) \cdot (\text{id}, X, P, U) .$$

Dies zusammen mit  $H_p = \dot{X}$  eingesetzt in  $\dot{P} = \dots$  ergibt:

$$\dot{P} = (W_{tx} - W_{tx}) \circ (\text{id}, X) - H_x \circ (\text{id}, X, P, U) = - H_x .$$

Für das Regelungsproblem erhalten wir mit  $U := \alpha \circ X$  :

$$- W_{tx} \circ (\text{id}, X) = (H_x + (W_{xx} \circ (\text{id}, X))H_p + (\alpha_x \circ X)H_u) \circ (\text{id}, X, P, U)$$

Nach (14) gilt aber (zumindest solange max/max min über ganz  $\underline{U}$  gebildet wird)  $H_u = 0$  , also wieder  $\dot{P} = - H_x$  .

#### (2.14) Die Lagrangefunktion als Kosten für die Steuerung

Wir betrachten ein System gemäß Exkurs S mit Lagrangefunktion  $L := \underline{T} - \underline{U}$  . Wir ergänzen das System um eine Spannungsquelle, d.h. wir steuern die "Geschwindigkeit". Dazu sei ein Standardprozess betrachtet mit:

$$\begin{aligned} f &= - L \\ g(t, x, u) &= u \end{aligned}$$

Dann lautet nach (2.13)

$$\begin{aligned} H &= up + f \\ H_x &= - f_x = L_x \\ H_p &= u \end{aligned}$$

Nach (14):

$$H \circ (\text{id}, X, P, U)(t) = \max_{\mathbb{R}^n} H(t, X(t), P(t), u)$$

gilt:  $H_u = p + f_u = 0$

Also  $P = L_U, \dot{P} = L_X,$

zusammengefaßt

$$(16) \quad (L_U)' - L_X = 0,$$

die Euler-Lagrange-Gleichung.

(2.15) Andere Auszahlungen

In (2.11) legten wir ein Auszahlungsfunktional der Form

$$\underline{F}(X,U) = \int_0^{\tau(X)} f \circ (\text{id}, X, U) dt$$

zugrunde. Die Optimierung von Prozessen mit dieser, nur laufenden Auszahlung wird oft Problem von Lagrange genannt. Zwei andere Typen sind i.w. dazu äquivalent:

$$(17) \quad \underline{M}(X,U) = M(\tau, X(\tau)) \quad \text{mit} \quad \tau = \tau(X),$$

das Problem von Mayer: reine Endauszahlung, und

$$(18) \quad \underline{B}(X,U) = B(\tau, X(\tau)) + \int_0^{\tau(X)} b \circ (\text{id}, X, U) dt$$

mit  $\tau = \tau(X),$

das Problem von Bolza: "gemischte" Auszahlung.

Dazu zeigen wir:

(a) Zu einem vorgelegten  $(B,b)$  existiert ein  $f$  mit  $\underline{F} = \underline{B}.$

(b) In kanonischer Weise existiert zu einem Prozeß mit  $(B,b)$  ein Prozeß mit  $M$  und " $\underline{M} = \underline{B}$ ".

Zu (a):

$$\text{Sei } Q_X(t) := B(t, X(t)) + \int_0^t b \circ (\text{id}, X, U) ds.$$

dann ist  $(Q_X)' = (B_t + B_X g) + b$  entlang  $(\text{id}, X, U).$

Mit  $f(t,x,u) := B_t(t,x) + B_x(t,x) g(t,x,u) + b(t,x,u)$   
gilt:

$$\underline{E}(X,U) = \int_0^{\tau(X)} f \circ (\text{id}, X, U) dt = \int_0^{\tau(X)} (Q_x) \cdot dt = \underline{B}(X,U).$$

...natürlich bei genügend Differenzierbarkeit.

Zu (b):

Während bei (a) nur das Auszahlungsfunktional ausgetauscht wurde, reichen wir bei (b) den Zustandsraum des Prozesses um eine reelle Koordinate ("aufsummierte laufende Auszahlung") an:  $\bar{X}' = \mathbb{R} \times X$ . Die erweiterte Übergangsfunktion ist  $(f,g)$ . Das neue Auszahlungsfunktional gibt - nur Endauszahlung - dann die Summe der bisherigen Endauszahlung und der neuen Koordinate zur Zeit  $\tau$ .

Die H-Funktion für einen von einem Bolza-Problem hergeleiteten Standardprozeß lautet:

$$\begin{aligned} (19) \quad H(t,x,p,u) &= gp + B_t + B_x g + b \\ &= (p + B_x)g + (B_t + b) \end{aligned}$$

Transformiert man den Urbildraum von  $H$  mit  $\tilde{p} = p + B_x(t,x)$ , so erhält man für  $\tilde{H}(t,x,\tilde{p},u) = \tilde{p}g + b$ , der Hamiltonfunktion zum Standardprozeß mit der laufenden Auszahlung  $f = b$ :

$$(20) \quad \tilde{H}_{\tilde{p}} = g = H_p = \dot{X}$$

und

$$\begin{aligned} H_x &= pg_x + B_x g_x + B_{xx}g + B_{tx} + b_x \\ &= (p + B_x)g_x + B_{xx}\dot{X} + B_{tx} + b_x \\ &= \tilde{p}g_x + B_{tx} + b_x + B_{xx}\dot{X} \end{aligned}$$



mit

$$\dot{\tilde{P}} = (P + B_X \circ (\text{id}, X))' = \dot{P} + B_{tX} + B_{XX} \dot{X}$$

weiter

$$(21) \quad \dot{\tilde{P}} = -Pg_X - b_X = H_X.$$

Das bedeutet, daß in diesen Pfadgleichungen nur noch die laufende Auszahlung berücksichtigt wird.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß das Problem von Mayer - reine Endauszahlung - als Sonderfall der Auszahlung vom Maximumtyp

$$\max_{[0, \tau(X)]} f \circ (\text{id}, X, U)$$

aufgefaßt werden kann, vgl. etwa GIRSANOV S. 112 f.

Nachbemerkung: Ziel dieser Vorlesung sind Bedingungen für Optima spezieller Optimierungsaufgaben bzw. Spiele: nämlich solcher, denen Prozesse unterlegt sind. Diese Prozesse, genannt Standardprozeß bzw. Differentialspiel wurden schließlich in (2.11) definiert. Damit die zu ihnen gehörigen speziellen OA/Spiele, nämlich: (a) Relegungsaufgaben  $\Gamma$   
(b) Steuerungsaufgaben  $\Delta$

wohldefiniert sind, benötigt man eindeutige Existenz von Lösungen der Bewegungsgleichungen (vgl. 2.2/2.8). Um Bedingungen für Optima zu gewinnen, war der Ausgangspunkt das Restwegprinzip (Bellman-Prinzip) (2.7). Unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit (des Restwertes war die Restweggleichung (Prinzip der lokalen Steuerung, Bellman - DGL.) (2.9, 2.11 Formel (8) und (7)) abzuleiten. Weitere Differenzierbarkeit brachte Hamilton-Gleichungen und im Sonderfall die Euler-Lagrange-Gleichung. Das Ziel der gewählten Darstellung war Anschauung, samt dem Nachweis, daß unter bestimmten Bedingungen (an den Restwert vor allem) die aus dem Exkurs "Systeme" bekannten "Kniffe" für unsere Zwecke verwendbar sind. Im nächsten Teil soll nun unter Verzicht auf den Restwert dieses Instrument (Hamilton-Gleichungen, Euler-Lagrange-Gleichung) hergeleitet und ausgebaut werden. Ausgangspunkt ist dabei die elementare Idee " $d\underline{E} = 0$  (vgl. 1.8f) im Optimum".

## B. NOTWENDIGE BEDINGUNGEN FÜR STEUERUNGEN

§1 Freie Extrema und Differentiation

§2 Gebundene Extrema und Richtungskegel

§3 Beispiele

Vorbemerkung: Im Teil B soll der "klassische Ansatz vorgestellt werden, mit dem Optimierungsaufgaben bzw. Spiele über  $(P, F)$  behandelt werden.

Die Grundidee ist, über Bedingungen vom Typ  $dF = 0$  im Optimum (Maximum, Minimum oder Sattelpunkt) nachzudenken. Der Ansatz verallgemeinert und präzisiert die Variationsrechnung. Populärer Teil ist das Pontrjaginsche Maximumprinzip.

Mit diesem Ansatz werden üblicherweise (nur) Steuerungsprobleme behandelt, d.h. wir betrachten Pfade im ursprünglichen Sinne, also Kurven in  $\bar{X} \times \bar{U}$  (bzw.  $\bar{X} \times \bar{U}_1 \times \bar{U}_2$ ). Die interessierenden Räume solcher Kurven (z.B. erste = Raumkoordinate stetig, zweite = Steuerkoordinate(n) stückweise stetig differenzierbar) müssen geeignet strukturiert werden, damit  $dF$  analog definierbar wird. Die geeignete Struktur ist die einer lokalkonvexen bzw. Banachmannigfaltigkeit. Das sind analog zu Mannigfaltigkeiten Räume, die lokal wie ein lokalkonvexer bzw. Banach-Raum aussehen.

In §1 werden dazu die Fundierungselemente angegeben, der Hauptsatz über notwendige und hinreichende Bedingungen für Optima vorgestellt und als Folgerungen im Variationszusammenhang Euler-Lagrange- & Hamilton-Gleichungen abgeleitet.

In §2 werden gebundene Optima betrachtet. In unserem Zusammenhang sind die Optima durch die Bewegungsgleichung  $\dot{X} = g$  und oft durch Steuerbeschränkungen und weitere Bedingungen gebunden. Die Methode wird zur Betrachtung der Nebenbedingungen leicht geändert: es bietet sich dabei an, gewisse Richtungskegel zu studieren. Die Theorie dazu stammt von Dubowitzki und Miljutin.

§3 enthält Beispiele.

§1 FREIE EXTREMA UND DIFFERENTIATION

(1.1) 1.f. wird zur Mannigfaltigkeit definiert

- a) der Cotangentenraum in  $p$  oder Raum der Differential in  $p$
- b) das Differential einer Funktion in  $p$
- c) das Cotangentenfeld oder die Differentialform.

Die Definition a) wird erlauben, ein Differential in  $p$  als Funktional auf  $T_p(M)$  aufzufassen:

DEF.: Seien  $f, g \in \mathcal{F}$  (wie in Exkurs M).  $f \sim_p g$  genau wenn alle partiellen (1.) Ableitungen in  $p$  übereinstimmen, i.e.

$$\bigwedge_i \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = \left( \frac{\partial g}{\partial x^i} \right)_p$$

mit  $\left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{\varphi_\lambda^{-1}(u)} := \frac{\partial (f \circ \varphi_\lambda^{-1})}{\partial u^i}(u)$ ,

(Erinnere:

$$\mathbb{R}^n \supset U \xleftarrow{\varphi_\lambda} M \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$T^p(M) := \mathcal{F} / \sim_p$  heißt Cotangentenraum in  $p$  (Raum der Differentiale in  $p$ ). Analog M 8-10 werden  $T^*(M)$  und Cotangentenfelder / Differentialformen definiert.

Für unsere Zwecke ist zentral der

SATZ:  $T_p(M) \sim (T^p(M))^*$

in Worten: der Tangentialraum ist isomorph zum Dualraum des Raums der Differentiale.

Bedeutung: Ein Differential kann aufgefaßt werden als Funktional auf dem Tangentialraum.

Beweis: Wir geben den Isomorphismus  $*$  :  $T_p(M) \rightarrow (T^p(M))^*$  an:

$$* : \tilde{c}^p \rightarrow \left( \frac{d(\cdot \circ c)}{dt} \right)_{t=0} \text{ mit } c \in \tilde{c}^p \text{ und}$$

$$\left( \frac{d(\cdot \circ c)}{dt} \right)_{t=0} : T^p(M) \rightarrow \mathbb{R} : \tilde{f}^p \mapsto \left( \frac{d(f \circ c)}{dt} \right)_{t=0}$$

und  $f \in \mathcal{F}^p$ . D.h. jeder Äquivalenzklasse von Kurvenstückchen wird das Funktional zugeordnet, das einer Äquivalenzklasse von Funktionen den Wert der Ableitung einer repräsentativen Funktion in  $p$  entlang dieser repräsentativen Kurve zuordnet.

Definieren wir  $(dx^j)_p := \pi_j \circ \omega_\lambda^p$  also als Äquivalenzklasse der  $j$ -ten Koordinatenabbildung, so gilt analog Exkurs M:  $\{(dx^j)_p, j = 1 \dots n\}$  ist Basis von  $T^p(M)$ .

Weiter: bezüglich sind  $\{\partial/\partial x^i\}$  und  $\{dx^j\}$  "duale Basen", d.h.:

$$(*(\partial/\partial x^i)_p)(dx^j)_p = \delta_{ij}.$$

Ist  $\omega_p \in T^p(M)$  so ist  $\omega_p = \sum \alpha^i dx^i$ .

Ist  $\omega$  Differentialform, so ist  $\omega = \sum f^i dx^i$ .

Wir schließen mit der Definition besonderer Differentiale, nämlich solcher, die von einer Funktion  $f$  stammen:

$$\text{Sei } f \in \mathcal{F}, \text{ so heißt } df_p := \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p (dx^i)_p.$$

Differential von  $f$  in  $p$ .

Merke:  $df_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (1.2) Hatten wir bisher bei den Mannigfaltigkeiten  $\mathbb{R}^n$ -Koordinaten im Sinne, so verallgemeinern wir i.f. auf Benachräume bzw. lokalconvexe Räume (statt  $\mathbb{R}^n$ ).

Wir verlassen damit den endlichdimensionalen Bereich mit seinen Annehmlichkeiten (lineares Funktional ist stetig, Einheitskugel ist kompakt...).

Ersetzt werden muß die Definition der Differenzierbarkeit bzw. der  $C^Y$ -Funktionen. Danach fällt es nicht mehr schwer, einfach analog zu Mannigfaltigkeiten Banachmannigfaltigkeiten bzw. lokalkonvexe Mannigfaltigkeiten zu definieren.

Im elementaren Kalkül der Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird Differenzierbarkeit von  $f$  in  $p \in \mathbb{R}$  an die Existenz von

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

- genannt  $f'(p)$ , Ableitung von  $f$  in  $p$  - gebunden. Das ist äquivalent zur "linearen Approximierbarkeit" von  $f$  in  $p$ , d.h. der Existenz eines Funktionals  $L$  mit

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - (f(p) + L(x-p))}{x - p} = 0$$

(dabei ist nämlich  $L(x) = f'(p)x$ ).

Entsprechend lautet die Definition der Differenzierbarkeit für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : Existenz eines linearen Funktionals  $L$  mit

$$* \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - (f(p) + L(x-p))}{\|x - p\|} = 0 .$$

$L$  heißt auch Differential von  $f$  in  $p$  oder in Zeichen:  $L = df_p$ .

Für Funktionen  $f : \underline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\underline{B}$  Banachraum übernehmen wir das:

DEF:  $f$ -differenzierbar (Fréchet - db, total db.) in  $p$  heißt  $f$  falls ein stetiges lineares Funktional  $L$  existiert mit \* .

Wie im elementaren Fall gilt dann:

(1.3) SATZ:  $f$  sei  $F$ -differenzierbar (Fréchet-db bzw. total differenzierbar) in  $p$  mit Ableitung  $L$ . Es gilt für jedes vorgegebene  $x$ :

$$L(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tx) - f(p)}{t}$$

Beweis: für  $x = 0$  fertig. Also  $x \neq 0$ .

Da  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G \ni \underline{p}$  müssen wir sichern, daß  $p + tx \in G$ . Es existiert eine Nullumgebung  $U$  in  $\mathbb{R}$ , so daß das der Fall ist für alle  $t \in U$ .

Für die folgenden Rechnungen benutzen wir

$$\begin{aligned} L((p+tx)-p) &= t L(x) \\ \|(p+tx)-p\| &= |t| \|x\| \end{aligned}$$

Nach Def. gilt i.bes.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tx) - (f(p) + L((p+tx) - p))}{\|(p+tx) - p\|} &= 0 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tx) - f(p) - tL(x)}{|t| \|x\|} \end{aligned}$$

$$\text{da } x \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tx) - f(p) - tL(x)}{|t|} = 0$$

Damit auch:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tx) - f(p) - tL(x)}{t} = 0$$

$$\text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tx) - f(p) - tL(x)}{t} = 0$$



Damit folgt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tx) - f(p)}{t} = L(x) .$$

Vorsicht: Definieren wir für alle  $x \in \underline{B}$  ("Richtungen")

$$\underline{L}(x) := \lim_{t \rightarrow 0} (f(p+tx) - f(p))/t \text{ und weiter:}$$

Ist  $\underline{L}$  stetiges lineares Funktional, so heißt  $\underline{L} = \delta f_p$  G-Differential (Gateaux-D., Richtungs-d.) von  $f$  in  $p$  (und  $f$  in  $p$  G-db.).

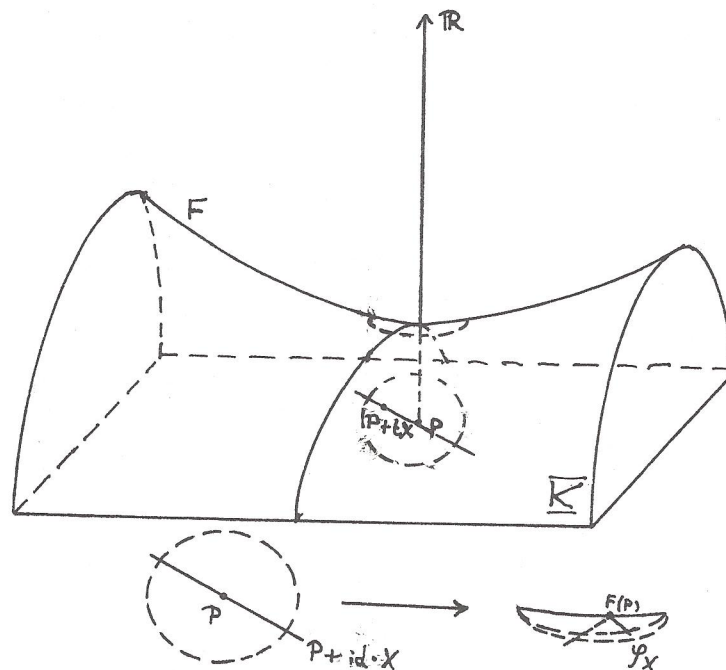
Dann besagt der Satz zwar: "F-db  $\Rightarrow$  G-db mit Übereinstimmung der Differentiale" aber es gilt nicht die Umkehrung "G-db  $\Rightarrow$  F-db".

Für das F-Differential gelten die klassischen Sätze z.B. Kettenregel, Satz über implizite Funktionen und vor allem Taylors Satz. Bei Taylors Satz wird in einer ganzen Umgebung entwickelt, und dazu ist mehr als die Existenz der Richtungsableitung in  $p$  nötig.

Bemerkung: Die Definition von  $\underline{L}$  macht auch in lokalkonvexen Räumen Sinn.

- (1.4) In der klassischen Variationsrechnung drückt man sich um das Studium der Differentiale. Der Kunstgriff dazu besteht darin, das Studium von Funktionalen  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{P}$  lokalkonvexe bzw. Banach-Mannigfaltigkeit - sieht also lokal wie ein lokalkonvexer bzw. Banach-Raum  $\underline{K}$  aus - auf das Studium bestimmter reeller Funktionen zurückzuführen. Sei  $P \in \mathcal{P}$ . Statt  $dF_p$  studiert man in einer Umgebung von  $P$  Kurven in  $\underline{K}$ , die  $P$  zur Zeit 0 passieren, d.h. den Tangentialraum von  $P$ , und die Bilder unter  $F$ . Dabei langt es, den Tangentialraum in  $P$  durch affine (= linear von  $P$  aus gesehen) Kurvenstücken  $P + \text{id} \cdot X$  darzustellen:

$$\begin{aligned} &\text{für } X \in \underline{K} \text{ sei } \varphi_X := F(P + \text{id} \cdot X) \\ \varphi_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow F(P(t) + tX(t)). \end{aligned}$$



Die Funktionen  $\varphi_X$  sind dem elementaren Kalkül zugänglich.

DEF.  $\delta^\gamma F_P(X)$  heißt  $\gamma$ -te Variation ( $\gamma \in \mathbb{N}$ ) von  $F$  in  $P$  in Richtung  $X$  mit

$$\delta^\gamma F_P(X) := \varphi_X^{(\gamma)}(0).$$

Falls  $\delta^\gamma F_P(X)$  für alle  $X$  existiert, heißt  $\delta^\gamma F_P : \underline{K} \rightarrow \mathbb{R}$   $\gamma$ -te Variation von  $F$  in  $P$ .

(1.5) Rechtfertigung findet der Kunstgriff durch folgende Sätze (vgl. ZEIDLER §38.1)

1. SATZ:  $F$  ist G-db in  $p$  genau wenn die erste Variation von  $F$  in  $P$  stetiges lineares Funktional ist. In diesem Fall gilt  $\delta F_P = \delta^1 F_P$ .

2. SATZ: Ist  $f$   $n$ -mal stetig  $F$ -db in  $P$  so gilt lokal Taylors Formel

$$F(P+X) = F(X) + \sum_1^M \frac{1}{i!} \delta^i F_P(X) + \text{Rest},$$

wobei der Rest von Ordnung  $\|X\|^M$  ist.

Der 2. Satz verlangt einen Banachraum.

(1.6) 3. SATZ: (über notwendige und hinreichende Bedingungen für Maxima bzw. Minima) (vgl. ZEIDLER §38.2):

Sei  $D \subset \bar{K}$ ,  $\bar{K}$  lokalkonvexer Raum,  $P$  innerer Punkt von  $D$ ,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a) Ist  $P$  in  $D$  maximierend (minimierend) für  $F$ , so gilt

(i) bei Existenz von  $\delta F_P$ :

$$\bigwedge_X \delta F_P(X) = 0$$

(ii) bei Existenz von  $\delta^2 F_P$ :

$$\bigwedge_X \delta^2 F_P(X) \leq 0 \quad (\geq 0)$$

Sei darüber hinaus  $\bar{K}$  Banachraum.

(b)  $F$  hat in  $P$  sein Maximum (Minimum) in  $D$  falls gilt:

(i)  $0 \neq r := \min \{ \gamma; \bigvee_{X \in \bar{K}} \delta^\gamma F_P(X) \neq 0 \}$ ,

$$r \equiv 0 \pmod{2},$$

$\delta^\gamma F_P$  existieren für  $\gamma \leq r$ .

(ii) Es existiert eine positive reelle Zahl  $c$  mit

$$\delta^r F_P \leq c \|\cdot\|^r \quad (\geq -c \|\cdot\|^r)$$

(iii) In einer Umgebung  $U$  von  $P$  existieren für  $\gamma \leq r$  die  $\delta^\gamma F_{P'}$ , ( $P' \in U$ )

(iv)  $\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{P', \|P'-P\| < \delta} |\delta^r F_{P'} - \delta^r F_P| \leq \epsilon \|\cdot\|^r$

Bedeutung:

Oft ist mit Variationen leichteres Rechnen als mit dem F- (bzw. G-) Differential.

(a i) wird mit dem Namen EULER

(a ii) mit LEGENDRE verknüpft.

(a) hat für Sattelpunkte folgende Form:

$D \subset \underline{K} \times \underline{L}$ ;  $(P, Q)$  innerer Punkt von  $D$ ;

$\underline{K}, \underline{L}$  lokalkonvexe Räume,  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ist  $(P, Q)$  Sattelpunkt bzgl.  $F$  so gilt:

(i) bei Existenz von  $\delta F_{(P, Q)}$

$$\bigwedge_{(X, Y) \in \underline{K} \times \underline{L}} \delta F_{(P, Q)}(X, Y) = 0$$

(ii) bei Existenz von  $\delta^2 F_{(P, Q)}$

$$\bigwedge_{X \in \underline{K}} \delta^2 F_{(P, Q)}(X, 0) \leq 0$$

$$\bigwedge_{Y \in \underline{L}} \delta^2 F_{(P, Q)}(0, Y) \geq 0$$

Entsprechend kann (b) übertragen werden. Die Bedingungen in (b) haben die Funktion Taylor-Entwickelbarkeit zu sichern (und natürlich die richtige Form der  $F$ -Fläche).

BEM.: Punkte, in denen  $\delta F = 0$  gilt, heißen extremal oder kritisch.

(1.7) Als erstes (triviales) Beispiel betrachte man  $\underline{K} = \mathbb{R}^2$ ,  $D = K$ ,  $F(a, b) = b^2 - a^2$  (s. I 1.12, 4.) und die Bedingungen des Satzes für einen Sattelpunkt.

Es gilt:

$$\delta f_{(a, b)}(x, y) = f_a x + f_b y = -2ax + 2by$$

$$\delta^2 f_{(a, b)}(x, y) = f_{aa} x^2 + 2f_{ab} xy + f_{bb} y^2$$

$$= -2x^2 + 2xy \cdot 0 + 2y^2$$

$$= -2x^2 + 2y^2.$$

Also wie in (a ii):

$$\text{für } (x,0) : -2x^2 \leq 0$$

$$\text{für } (0,y) : 2y^2 \geq 0$$

Und nach (a i) muß  $(a,b) = (0,0)$  sein.

Nach (b) ist  $(0,0)$  auch Sattelpunkt, denn:

$$(i) \quad r = 2 \equiv 0 \pmod{2}$$

und die  $\delta^\gamma F_{(a,b)}$  existieren,  $\gamma = 1,2$

$$(ii) \quad \delta^2 F_{(a,b)} \text{ ist durch } -2 \|(x,y)\|^2 \text{ nach unten und durch}$$

$$2 \|(x,y)\|^2 \text{ nach oben beschränkt:}$$

$$-2(x^2+y^2) \leq \delta^2 F_{(a,b)}(x,y) \leq 2(x^2+y^2)$$

(iii) und (iv) folgen.

(1.8) Ein zweites Anwendungsbeispiel sei die Herleitung der EULER-LAGRANGE-Gleichung. In der klassischen Variationsrechnung wurden Funktionale  $F$  mit

$$* \quad F(X) = \int_{t_1}^{t_2} f(t, X(t), \dot{X}(t)) dt$$

auf einem Raum von Pfaden  $\mathcal{P} = \{X, \dots\}$  betrachtet, und für Extremale  $X_0$  (also aus  $\delta F_{X_0} = 0$ ) die Euler-Lagrange-Gleichung

$$** \quad f_2 - \frac{d}{dt} f_3 = 0$$

gefolgert, oft auch geschrieben als

$$f_X - (f_{\dot{X}})' = 0.$$

(In Pflaumann/Unger II, S. 66ff findet man einen Beweis, der von einem dem Satz 1.6 entsprechenden Satz mit  $D$  kreisförmig (allgemeiner!) ausgeht und das  $F$ -Differential (statt wie hier die Variation) benutzt).

Wir skizzieren den

SATZ:  $\mathcal{P} = \{X \in C^1([t_1, t_2], M), X(t_1) = a, X(t_2) = b\}$ ,  
M Mannigfaltigkeit,  $F: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $*$ ,  $f$  zweimal  
differenzierbar. Dann gilt \*\*.

(1.9) Der Beweis von Satz 1.8 erfolgt in folgenden Schritten:

- (a) Strukturierung von  $\mathcal{P}$  als B-Mannigfaltigkeit.
- (b) Berechnen der Variation eines Pfades.
- (c) Anwendung folgenden Lemmas:

Sei  $Y \in C^0$ . Gilt für alle  $X \in C$  :

$$\int X \cdot Y dt = 0, \text{ so ist } Y \equiv 0.$$

(vgl. etwa GRÖBNER/LESKY S. 129).

Zu (a):

(i)  $\mathcal{Q} = (C^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n), \|\psi\|_1)$

$$\text{mit } \|\psi\|_1 := \max \{ \|\psi\|_0, \|\dot{\psi}\|_0 \}$$

$$\text{und } \|\varphi\|_0 := \max \{ |\varphi(t)|, t \in [t_1, t_2] \}$$

ist Banachraum.

$$\text{Es seien } \mathcal{Q}^a = \{X \in \mathcal{Q}, X(t_1) = a\},$$

$$\mathcal{Q}^b = \{X \in \mathcal{Q}, X(t_2) = b\}, \mathcal{Q}^0 =$$

$\{X \in \mathcal{Q}, X(t_1) = X(t_2) = 0\}$ .  $\mathcal{Q}^0$  ist abgeschlossener Unterraum,

$\mathcal{Q}^a$  und  $\mathcal{Q}^b$  sind abgeschlossene affine Unterräume. Nach Umkoordinatisierung ist  $\mathcal{Q}^a \cap \mathcal{Q}^b$  Banachraum.

- (ii) Sei  $X \in \mathcal{P}$ . Die Karten  $(\varphi_\lambda, U_\lambda)$  der Mannigfaltigkeit zerlegen  $X: \{U_\lambda \cap \text{im } X\}_\lambda$  ist eine offene Überdeckung von  $\text{im } X$ . Ist  $X$  stetig, so ist  $\text{im } X$  kompakt, und es existiert eine endliche Teilüberdeckung.

- (iii) In einer geeigneten Darstellung verläuft nach (ii) jeder stetige Pfad in nur endlich vielen  $U_\lambda$ . Die Pfade, die  $M$  in der Reihenfolge  $(U_\lambda, \dots, U_{\lambda_n})$  durchlaufen, sind nach (i) zunächst als abgeschlossener affiner Unterraum eines Banachraums vom Typ  $\mathcal{O}_1$  strukturierbar und somit auch als B-Raum.
- (iv) Mit den allen Reihenfolgen beliebiger endlicher Länge entsprechenden Karten wird  $\mathcal{P}$  Banach-Mannigfaltigkeit.

Zu (b):

$$\begin{aligned} \delta F_{X_0}(X) &= (F(X_0 + tX))'(0) \\ &= \left( \frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} f \circ (\text{id}, X_0 + sX, (\dot{X}_0 + s\dot{X})) (t) dt \right) (0) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} f \circ (\text{id}, X_0 + sX, \dot{X}_0 + s\dot{X}) \Big|_{s=0} (t) dt \end{aligned}$$

(Bem. Die Differentiation unter dem Integral ist möglich, da  $f$  entlang des "Pfad" stetig und nach  $s$  einmal stetig differenzierbar ist).

$$= \int_{t_1}^{t_2} X(t) \cdot f_2(t, X_0(t), \dot{X}_0(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{X}(t) f_3(t, X_0(t), \dot{X}_0(t)) dt$$

Partielle Integration ergibt für den zweiten Term:

$$(f_3 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0))(t) X(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} X(t) \frac{d}{ds} (f_3 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0))(t) dt$$

Da, durch Umkoordinatisierung der affinen Räume,  $X(t)$  an den Endpunkten zu Null, statt  $a$  bzw.  $b$ , gemacht wurde, entfällt der erste Term.

Damit ist insgesamt:

$$\delta F_{X_0}(X) = \int X \cdot (f_2 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0)) dt \\ - \int X \cdot \frac{d}{ds} (f_3 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0)) dt .$$

Zu (iii):

Nach dem Lemma ergibt sich, da  $\delta F_{X_0}(X)$  für alle  $X$  verschwindet:

$$f_2 - \frac{d}{ds} f_3 = 0 \text{ entlang } X_0 .$$

(1.10) Satz 1.8 läßt sich verallgemeinern für Optimierung auf

$$\mathcal{P} = C^1([t_1, t_2], M)$$

$$\text{bzw. } \{X \in C^1([t_1, t_2], M), X(t_1) = a\}$$

$$\text{oder } \{X \in C^1([t_1, t_2], M), X(t_2) = b\}$$

also:

Pfade mit freien Enden, bzw. Pfade mit freiem End- oder freiem Startpunkt.

Dann entfällt in (1.9) der Term  $(f_3 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0))(t)X(t) \Big|_{t_1}^{t_2}$  nicht,

sondern muß noch gesondert betrachtet werden.

Daraus folgen dann

1. die Euler-Lagrange-Gleichung in  $(t_1, t_2)$  und
2. Transversalitätsbedingungen an den freien Enden.

Vgl. dazu etwa GRÖBNER/LESKY a.a.O.

Bemerkung: Eine weitere einfache Verallgemeinerung ist  $C^2$  für  $f$  und  $C^1$  für  $X$  stückweise zu verlangen. Es ergeben sich dann an den Bruchstellen Übergangsbedingungen (Weierstraß-Erdmannsche-Eckenbedingungen).

(1.11) Wir betrachten wieder die Situation in (1.8).



SATZ: Sei  $H : T.(M \times \mathbb{R}^n) \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R} : (x, p, \dot{x}, \dot{p}; t) \mapsto f(t, x, \dot{x}) - \dot{x}p$ .  
Sei  $X_0$  kritisch, erfülle also die Euler-Lagrange-Gleichung

$$f_2 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0) - \frac{d}{dt} f_3 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0) = 0$$

und sei  $P_0$  die Kurve  $f_3 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0)$  so gelten die Hamilton-Gleichungen "entlang  $X_0$ " (i.e.  $(X_0, P_0, \dot{X}_0, \dot{P}_0; \text{id})$ ).

Denn:  $H_x \circ (X_0, P_0, \dot{X}_0, \dot{P}_0; \text{id}) = f_2 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0)$

und nach Euler-Lagrange  $= \frac{d}{dt} f_3 \circ (\text{id}, X_0, \dot{X}_0)$

und nach Definition  $= \dot{P}_0$

Weiters  $H_p = -\dot{x}$ ,  $H_p \circ (X_0, \dots) = -\dot{X}_0$ .

Bem. Im folgenden Paragraphen sollen Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Für unsere Zwecke durchschlagend ist die Nebenbedingung  $\dot{X} = g$ , die sich auch in der H-Funktion niederschlagen wird.

§2 GEBUNDENE EXTREMA UND RICHTUNGSKEGEL

(2.1) Im folgenden werden die Ergebnisse aus §1 so verallgemeinert, daß Nebenbedingungen berücksichtigt werden können. Statt für B-Mannigfaltigkeiten wird jedoch für B-Räume argumentiert. Die Methode ist eine Verallgemeinerung der Methode der LAGRANGE-Multiplikatoren, genannt Theorie von DUBOWITZKY-MILJUTIN.

Gesucht werden Extrema von  $(\mathcal{P}, \underline{F})$  mit

$$\mathcal{P} = \{X \in \underline{B} ; \underline{G}_1, \dots, \underline{G}_{n-1}(X) \leq 0, X \in \mathcal{N}_n, \underline{G}_{n+1}(X) = 0\}$$

$\underline{B}$  Banachraum,  $\mathcal{S}$  offen in  $\underline{B}$ ,

$\mathcal{N}_n$  konvexe Teilmenge von  $\underline{B}$  mit nichtleerem Inneren,

$$\underline{G}_1, \dots, \underline{G}_{n-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\underline{G}_{n+1} : \mathcal{S} \rightarrow \underline{C}, \underline{C} \text{ Banachraum,}$$

$$\underline{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}.$$

SATZ: Hat  $\underline{F}$  in  $X_0 \in \mathcal{S}$  ein Extremum, sind  $\underline{F}, \underline{G}_1, \dots, \underline{G}_{n-1}$  F-differenzierbar in  $X_0$ ,  $\underline{G}_{n+1}$  stetig F-differenzierbar in  $X_0$ , im  $(d\underline{G}_{n+1})_{X_0}$  abgeschlossenen  $\underline{C}$ , dann existieren reelle Zahlen  $\lambda_0 \dots \lambda_{n-1} \geq 0$  und ein Funktional  $\lambda_{n+1} \in \underline{C}^*$  nicht alle Null mit für alle  $X \in \mathcal{N}_n - X_0$

$$* \lambda_0 d\underline{F}_{X_0}(X) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n+1}}^{n+1} \lambda_i d\underline{G}_i_{X_0}(X) \geq 0$$

Ist  $\mathcal{N}_n = \underline{B}$ , so gilt das Gleichheitszeichen.

(Beweis: s. ZEIDLER 46.2)

Dieser Satz verallgemeinert das " $d\underline{F}_{X_0} \equiv 0$ ".)

(2.2) Wie sieht man ein, daß so ein Satz gilt? Dazu seien die  $\mathcal{N}_i$  die Mengen von  $X \in \mathbb{B}$ , wo die jeweilst  $i$ -te Nebenbedingung erfüllt ist. Die grundlegende Beweisidee ist das Studium zugehöriger Richtungskegel  $\mathcal{K}_i$  und eines Richtungskegels  $\mathcal{K}_0$  der regulären Ab- bzw. Aufstiegsrichtungen von  $\underline{F}$ , und der zu diesen Kegeln dualen Kegeln.

(Ist  $\mathcal{K}$  Kegel in  $\underline{B}$ , so ist  $\mathcal{K}^+ := \{f \in \underline{B}^* ; f \geq 0\}$  Kegel in  $\underline{B}^*$  und heißt zu  $\mathcal{K}$  dualer Kegel).

Die Existenz der  $\lambda$ 's sichert dann ein aus dem Trennungssatz abgeleitetes Lemma über die Existenz von Funktionalen:

LEMMA: Sei  $\underline{K}$  lokalkonvexer Raum, seien  $\mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_{n+1}$  offene konvexe Kegel und  $\mathcal{K}_0 \neq \emptyset$ . So ist der Schnitt der Kegel leer genau wenn Funktionale  $\lambda_i \in \mathcal{K}_i^+$  ( $i = 0, \dots, n+1$ ), nicht alle Null, existieren mit  $\sum \lambda_i = 0$ .  
(vgl. ZEIDLER a.a.O.).

(2.3) Dieses Vorgehen kann unschwer auf Spiele verallgemeinert werden.  $\underline{B}$  hat dann Produktionsstruktur,  $\underline{B}^- = \underline{U} \times \underline{V}$ . Sei  $(U_0, V_0)$  ein Sattelpunkt, und der erste maximiert in der ersten, der zweite minimiert in der zweiten Koordinate. Ist  $\mathcal{K}_{01}$  der Kegel der regulären Aufstiegsrichtungen in  $\underline{U}$  bei festgehaltenem  $V_0$  und  $\mathcal{K}_{02}$  der Kegel der regulären Abstiegsrichtungen in  $\underline{V}$  bei festgehaltenem  $U_0$ , dann betrachte man  $\mathcal{K}_0 := \mathcal{K}_{01} \times \mathcal{K}_{02}$ .

(2.4) Die einschlägige Anwendung von Satz (2.1) in unserem Rahmen ist PONTRJAGIN's Maximumprinzip. Dazu sei  $\phi = (\underline{X}, \underline{U}, f, g, h)$  ein Standardprozeß (s. I 2.11). Wir betrachten  $\Delta(x_0) = (\mathcal{U}, \underline{F} \circ (\kappa, \text{id}))$ ,  $x_0$  fester Startpunkt,  $\emptyset \neq \underline{U}' \subset \underline{U}$ ,  $\mathcal{U} = \{U \text{ stückweise stetig auf } [0, \tau(U)], \kappa(U) \text{ stetig auf } [0, \tau(U)], U(t) \in \underline{U}'\}$ . Sei  $H^\lambda(t, x, u, p) := pg(t, x, u) - \lambda f(t, x, u)$ .

SATZ: Seien  $f, g, h$  einmal partiell stetig differenzierbar,  $\Delta(x_0)$  wie oben. Ist  $U$  Optimierer von  $\Delta(x_0)$  und  $X = \kappa(U)$ ,  $T = \tau(U)$ ,

dann existieren eine reelle Zahl  $\lambda \geq 0$ , ein Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  - nicht gleichzeitig Null - und eine stetige Kurve  $P : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so daß in allen Stetigkeitspunkten von  $U$  gilt:

(a) die Hamiltongleichungen:

$$\dot{P} = - H_x^\lambda = - P(g_x \circ (id, X, U)) + f_x \circ (id, x, U)$$

$$\dot{X} = H_p^\lambda = g \circ (id, X, U)$$

(b) die Transversalität im Endpunkt:

$$P(T) = - \alpha h_x(T, X(T))$$

(c) das Maximumprinzip:

$$H^\lambda \circ (id, X, U, P) = \max_{\underline{U}'} H^\lambda(id, X, u, P)$$

(d) die Stetigkeit der Hamiltonfunktion mit Hebbarkeit in den Unstetigkeitsstellen von  $U$ .

(e) das Zeitverhalten der Hamiltonfunktion:

$$(H^\lambda \circ (id, X, U, P))' = H_t^\lambda$$

$$(H^\lambda \circ (id, X, U, P))(T) = - \alpha h_t(T, X(T))$$

Ist  $\lambda \neq 0$ , so ist  $\lambda$  auf 1 normierbar.

(Zum Beweis s. ZEIDLER 46.6; zur Normierung von  $\lambda$  : s. (2.7))

Schreibweise: Im folgenden sei

$$H^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad H^* := H^\lambda \circ (id, X, U, P).$$

## (2.5) Das Prinzip für Differentialspiele

Der Satz (2.4) läßt sich mit der Modifikation

$$(c') \quad H^* = \max_{\underline{u}_1} \min_{\underline{u}_2} H^\lambda(id, X, u_1, u_2, P)$$

etc.... auf Spiele zu Differentialspielen übertragen.

(2.6) Der Zusammenhang mit Teil A: Die perlokale Aufgaben und das Restwegprinzip

Für  $\lambda = 1$  entsprechen  $H$  die perlokale OA bzw. das perlokale Spiel, (c) bzw. (c') das Restwegprinzip (für Steuerungen) und (a) die daraus durch Differentiation nach  $(t, x)$  gewonnenen Hamiltongleichungen.

(2.7) Die Normierung von  $\lambda$  bei  $\lambda \neq 0$

Wie in A 2.15 transformieren wir den Grundraum und zeigen (2.4) (a) - (e) für  $H(t, x, p, u) = pg + f$ ; wir normieren damit  $\lambda$  auf 1. Es sei dazu  $\tilde{p} = p / \lambda$ .

Wir zeigen nur (a):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\tilde{p}} &= g = H_p = \dot{X} \\ \dot{\tilde{p}} &= 1/\lambda \dot{p} = -\frac{1}{\lambda} H_x = -\frac{1}{\lambda} (g_x p + \lambda f_x) \\ &= - (g_x \tilde{p} + f_x) = -\tilde{H}_x \end{aligned}$$

(2.8) Variationen der Stopzeit

Über (b) und (e) in (2.4) reagieren die Lösungsmöglichkeiten sehr sensibel auf die Formulierung der Stopzeit.

Das Wort "Formulierung" bedarf einer Erklärung: die Definition A 2.11 ("Standardprozeß/Differentialspiel") gibt die Stopzeit mittels einer Funktion  $h$  wieder: jedoch gibt es verschiedene Funktionen mit denen die Terminalmenge  $[h = 0]$  dargestellt werden kann - also auch verschiedene Standardprozesse/Differentialspiele, zwischen denen nicht unterschieden werden sollte. Sie haben i. bes. den selben "Verlauf" und dasselbe "Ergebnis".

Die Objekte mit gleicher Terminalmenge seien hinfert identifiziert.

Wir suchen nun eine rechentechnisch geeignete Darstellung  $h$ .

Da  $h$  als differenzierbar vorausgesetzt wurde, ist  $[h = 0] := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M\}$  von besonderer Form, nämlich fast eine  $n$ -dimensionale

Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R} \times M$  (also: Fläche - von daher Terminalfläche). An Entartungen sind möglich:

1. Einbettungsdefekt:

zwar  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, aber nicht Untermannigfaltigkeit

2. Dimensionsdefekt:

so läßt sich zum Beispiel zu jeder abgeschlossenen Menge  $A$  in  $\mathbb{R} \times M$  ein differenzierbares  $h$  angeben, das genau auf  $A$  verschwindet (Satz von Whitney, vgl. z.B. Bröcker/Jänich § 14).

Man betrachte dazu z.B. die Funktionen

$$h(t,x) = \begin{cases} e^{-\left(\| (t,x) \| - k\right)^{-1}} & \text{für } k < \| (t,x) \| \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$h(t,x) = (t - T)^2 + \|x - x'\|$$

wobei  $k, T$  und  $x'$  Konstanten sind.

3. Selbstdurchdringung:

Dazu betrachte man etwa die Lemniskate oder das kartesische Blatt:

$$h = (x^2 + t^2)^2 - 2 a^2 (x^2 + t^2)$$

$$\text{bzw. } h = x^3 + t^3 - 3 a x t$$

wobei  $a$  Konstante ist.

Alle diese Entartungen werden durch  $h_{(t,x)}(t,x) = 0$  angezeigt. Umgekehrt läßt sich jedoch i.a. nicht auf eine Entartung schließen:

$$\text{Beispiel: } h(t,x) = \|x - x'\|^2,$$

$$h_{(t,x)} \equiv 0 \text{ auf } [h = 0].$$

Ist  $h_{(t,x)}(t,x) \neq 0$ , so ist dies ein Normalenvektor des in einer Umgebung von  $(t,x)$  durch  $h = 0$  gegebenen Flächenstückes.

Die Entscheidung für ein rechentechnisch geeignetes  $h$  ist lokal die Wahl zwischen Normalenvektor oder Nullvektor, wobei bei Entartung der Nullvektor erzwungen wird.

Wir weisen auf zwei mögliche Konsequenzen von  $h_{(t,x)} = 0$  hin:

1.  $\alpha = 0$  kann nicht mehr erkannt werden. Damit auch nicht mehr der Widerspruch  $\alpha = \lambda = 0$ .

2. Aus (b) (d) folgt  $(H^*, P)(\tau) \equiv 0$ ,  
also  $H^*(\tau) = g \dots P(\tau) + \lambda f \dots = 0$ ,  $\lambda f \dots = 0$ .

Meist dürfte daraus  $\lambda = 0$  folgen.

Enthält aber  $g$  nicht  $x$  ( $g_x \equiv 0$ ), so sind in  $(c/c')$  sämtliche  $u$  optimal, und somit die Aussage des Satzes wertlos bzgl. Einschränkung auf mögliche Optima.

(2.9) Die Transversalitätsbedingung in Normalenform

Wir betrachten (c/c') in neuer Form:

$$(H^*, -P) (1, \dot{X}) = \begin{matrix} 0 & \text{für } \lambda = 0 \\ \bar{f} = f \circ (\text{id}, X, \bar{u}) & \text{für } \lambda = 1 \end{matrix}$$

denn  $H^* - P\dot{X} = P\dot{X} + \lambda\bar{f} - P\dot{X} = \lambda\bar{f}$ . Für  $\lambda = 0$  läuft  $(1, \dot{X})$  senkrecht in  $[h = 0]$  ein. Sei nun  $\lambda = 1$ : Wir reichern den Zustandsraum um die Variable  $x_{n+1}$  (= aufsummierte laufende Auszahlung) mit  $g_{n+1} = f$  an.  $P_{n+1}$  kann auf -1 normiert werden ( $h_{n+1} \equiv -1, \dot{P}_{n+1} = -(g_{n+1} P_{n+1} + f)$ ), wodurch

$(H^*, -P, -1) (1, \dot{X}, \bar{f}) (\tau) = 0$ . Das heißt,  $(1, \dot{X}, \bar{f})$  läuft senkrecht zu einem - durch  $\alpha$  festgelegten - Vektor in der Fläche  $[h = 0] \times \mathbb{R}$  in diese ein.

(2.10) Aufspalten der Stopzeit

Die Stopzeit kann auch in (bis zu) n Funktionen  $h_j : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$  aufgespalten werden. In (2.4) müssen dann in (b) und (d)  $\alpha$  und  $h$  als Vektoren gelesen werden, also z.B.

$$P_i(T) = - \sum_j \alpha_j (h_j)_{X_i} (T, X(T)).$$

Rechentechisch hat das oft Vorteile, da  $h_{(t,c)} \neq 0$  entlang  $[h = 0]$  oft einfacher konstruierbar ist, die  $h_j$  von primitiven (= leichter handhabbarem) Typ sind.

$[h = 0]$  bedeutet hierbei natürlich  $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times M, \quad \bigwedge_i h_i(t,x) = 0\}$ .

(2.11) Der Fall  $\lambda = 0$

Wir betrachten zu einem Standardprozeß in  $\mathbb{R}$  mit  $f = u, g = u^2$ ,  $[h = 0] = \{(1,0)\}$ ,  $u \in \mathbb{R}$  eine OA mit Start in  $X(0) = 0$ .



Bei jedem  $u \neq 0$  geht man an einen Ort ohne Rückkehr. Da jedoch die Rückkehr nach 0 (zur Zeit 1) vorgeschrieben ist, bleibt nur ein zulässiger Pfad.

Formal erhalten wir mit  $\lambda \in \{0, 1\}$ :  $H = gp + \lambda f$ ,  $H_p = u^2$ ,  $H_x = 0$   
also  $\dot{p} \equiv 0$ .

Da  $[h = 0]$  entartet ist, ist  $(H^*, P)(\tau) = 0$  unvermeidbar.  
Daraus folgt  $P \equiv 0$  und aus (c)

$$\begin{aligned} H^* &= u^2 \cdot 0 + \lambda u \\ &= \max_u \lambda u . \end{aligned}$$

Damit ein Maximum angenommen wird und zudem  $H^*(\tau) = 0$  muß  $\lambda = 0$  gelten. Dadurch sind aber sämtliche  $u$  optimal.

Soll das Kalkül noch etwas hergeben, so kann die Stopzeit  $h$  durch eine neue  $h'$  ersetzt werden, mit  $[h' = 0] \supset [h = 0]$ . (Eine andere Möglichkeit wird in 2.12 dargestellt). Enden die dort optimalen Pfade sogar in  $[h = 0]$ , so sind sie Kandidaten für das Ausgangsproblem. Hier wähle man etwa  $h' = x$ . Es folgt ebenfalls  $\lambda = 0$ , aber auch die Bedingung  $\max -\alpha u^2 = 0$ , also für  $\alpha > 0$ :  $u = 0$ .

### (2.12) Der Spezialfall der Variationsrechnung

Variationsprobleme werden durch die Daten  $f = -L$ ,  $g = U$ ,  
 $u \in \bar{U}' = \bar{U} = \mathbb{R}^n$  ( $= T_p M$ ),  $X(0) = x^0$ ,  $X(\tau) = x^1 \neq x^0$ ,  $\tau = T$  gegeben.  
Gesucht sind also Pfade von  $x^0$  nach  $x^1$ , die - in vorgegebener  
Zeit durchlaufen - bzgl. des laufenden Aufwands  $L$  minimal sind.

Auch hier eröffnet  $h_{(t,x)}(\tau, X(\tau)) = 0$  eine Sackgasse.

Wir erweitern deshalb den Zustandsraum um die neue Variable  $x_{n+1}$   
mit  $g_{n+1} = 1$ , als "Zeit als Zustandsvariable", behalten aber die  
alte Stopzeit als  $[h = 0] \times \mathbb{R}$  bei.

Diese hat in  $\mathbb{R} \times M \times \mathbb{R}$  die Normale (konstant!)  $(1, 1, \dots, 1, 0)$ .  
 Obda sei also  $(h_t, h_x)(\tau, X(\tau)) = (1, 1, \dots, 1, 0)$ .

Wäre  $\lambda = 0$ , mit  $H^* \equiv 0$  (aus (d)) also  $H^* \equiv 0 = P(U, 1)$  und

$$H^*(\tau) = -\alpha(X', T)(U, 1) = \max_{u \in \bar{U}} -\alpha(X', T)(u, 1)$$

$$= -\alpha T + \max_{u \in \bar{U}} -\alpha X' u$$

so wäre, falls ein Maximum existiert,  $d(-\alpha X' u)/du = -\alpha X' = 0$ ,  
 also  $\alpha = 0$ . Das ist ein Widerspruch zur Aussage des Satzes " $\alpha, \lambda$   
 nicht beide gleich 0". Für Variationsprobleme kann man also  
 $\lambda = 1$  erreichen.

Die Euler-Lagrange-Gleichung folgt mit  $\lambda = 1$  aus (a) wie in A(2.14).  
 Weiteres Rechnen liefert aus (a) - (d) auch andere klassische Be-  
 dingungen wie etwa die von Weierstraß, die von Legendre, die von Weier-  
 straß-Erdmann. Der Interessierte sei hier jedoch auf Bücher der  
 Variationsrechnung verwiesen oder errechne die Bedingungen als Übungs-  
 aufgabe.

(2.13) Spezialfall: Auszahlungen vom Bolza-Typ

Wie in A 2.15 transformieren wir  $H^\lambda$  (statt wie dort  $H = H'$ ). Für  
 das neue  $\tilde{H}(t, x, p, u) = pg + \lambda b$  erhalten wir wie in A 2.15 die Aus-  
 sage (a), also die H-Gleichungen. Auch (c) und (c') folgen sofort.

(b)/(e) wird jedoch ersetzt durch

$$(b')/(e')) \quad (\tilde{H}^*, \tilde{P})(\tau) = \lambda(-b_t(\tau, X(\tau), \bar{u}), B_x(\tau, X(\tau)))$$

$(H^*)'$  wie zuvor.

Hier wähle man im Beweis  $h$  so, daß  $h_{(t,x)} [h = 0] = 0$ .

### § 3 EINIGE BEISPIELE

(3.1) Die Schreibweise in diesem Paragraphen ist verkürzt. In allen Beispielen ist  $\lambda = 1$ . Die Beispiele sind wie folgt geordnet:

- Variationsprobleme und Variationstyp :  $g = u$
- Spiele um den billigsten Weg :  $f = \|u'\| - \|u^2\|$
- Verfolgungsspiele :  $f = 1$  oder  $-1$
- Auszahlungen von Mayer- bzw. Bolza-Typ
- Spiel mit nicht zusammenhängender Zielmenge.

Ein Beispiel mit  $\lambda = 0$  ist in (2.11) zu finden.

(3.2) Das Beispiel aus A 2.12

Das Beispiel ist vom Variationstyp, d.h.  $g = u$ , kein Variationsproblem im Sinne von B 2.12 (und A 2.14), da  $u \in \mathbb{R}$  mit  $|u| \leq 1$ , und  $h = t - 1$ .

Wir erhalten

$$H = pu + \lambda(u^2 - x^2)$$

$$H_p = u, \quad H_x = -2\lambda x$$

$$(H^*, P)(\tau) = (-\alpha, 0), \quad H_t = 0.$$

$$\text{Also } H^* \equiv H^*(\tau) = \max_u \lambda(u^2 - X(\tau)^2) = \lambda(1 - X(\tau)^2) = -\alpha.$$

Das Maximum wird in  $\bar{u} = \pm 1$  angenommen, denn  $\lambda \neq 0$  (sonst wäre auch  $X = 0$ ).

$\dot{P} = 2X$ ,  $\dot{X} = \pm 1$  liefert eine ganze Schar möglicher Kandidaten (zusammenstückeln). Betrachten wir weiter

$$H^* = \pm P + (1 - X^2) = \text{const (da } H_t = 0),$$

so folgt  $U = \text{const}$  und  $X^2 = \text{const}$ .

Da Stetigkeit von  $X$  aus  $U = \text{const}$  folgt, ist  $X = \text{const}$ , im Widerspruch zu  $\dot{X} = \pm 1$ . Damit existiert kein optimaler Pfad.

(3.3) Kürzester Verbindungsweg

Betrachtet wird eine Fläche (im Sinne der Differentialgeometrie; "parametrisiert") im  $\mathbb{R}^{n+1}$ , also eine Abbildung  $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} : x \rightarrow y(x)$  mit genügend Differenzierbarkeit und Regularität. Wesentliche Eigenschaften der Fläche lassen sich berechnen mittels der Funktionen

$$g_{ij}(x) := \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial y}{\partial x_j}(x).$$

Zum Beispiel: Die Länge einer auf im  $y$  (= der "Fläche") verlaufenden Kurve  $Y := yX$ , wobei  $X$  die zugehörige Kurve im Parameterraum ist. Die Länge des Weges, den die Kurve zwischen zwei Zeitpunkten durchläuft, ist  $\int \|\dot{Y}\| dt$ .

Es gilt  $\|\dot{Y}\|^2 = \langle \dot{Y}, \dot{Y} \rangle = \langle (yX)^\cdot, (yX)^\cdot \rangle$  mit  $(yX)^\cdot = \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \dot{x}_1, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \dot{x}_n \right)$ .

Ist  $G(x)$  die durch die  $g_{ij}$  gegebene Matrix, so gilt  $\langle \dot{Y}, \dot{Y} \rangle = \dot{X} G(X) \dot{X}$ , also  $\int \|\dot{Y}\| dt = \int \sqrt{\dot{X} G(X) \dot{X}} dt$ .

$G$  ist von der speziellen Wahl der Parametrisierung  $y$  der im  $\mathbb{R}^{n+1}$  eingebetteten Mannigfaltigkeit im  $y$  unabhängig. Mit  $G$  läßt sich im  $X$  parametrisierungsunabhängig auf kürzeste Wege untersuchen.

Das dazu geeignete mathematische Objekt  $(M, \omega)$  ist eine Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer positiv definiten 2-Form  $\omega$ .

DEF.  $(T.)^\gamma M := \bigcup_{p \in M} (T_p M)^\gamma$  heiße  $n$ -facher Tangentialraum. Ein Funktional auf  $(T.)^\gamma M$ , in jedem Punkt  $p$   $\gamma$ -fache Linearform, heißt  $\gamma$ -Form (oder  $\gamma$ -fache Differentialform).

Daraus folgt wie in B(1.1), daß eine 2-Form  $\omega$  sich schreiben läßt als

$$\omega = \sum_{i,j} g_{ij}(\cdot) dx_i dx_j$$

mit  $g_{ij} \in \mathcal{F}$ .

Werten wir  $\omega$  entlang der Kurve  $X$  aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{X}, \tilde{X})(t) &= \sum g_{ij}(X(t)) \left( \dot{X}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right) \left( \dot{X}_j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} dx_j \right) \\ &= (\dot{X} G(X) \dot{X})(t) \quad , \text{vgl. A Exkurs M.11} \end{aligned}$$

DEF.  $\omega$  heißt positiv definit, falls  $G$  für alle  $p$  positiv definit ist.  $(M, \omega)$ , eine Mannigfaltigkeit  $M$  mit einer positiv definiten 2-Form heißt Riemann-Mannigfaltigkeit.

Wir suchen nun die auf den Geodätischen liegenden Verbindungskurven in  $(M, \omega)$ , soll heißen: die Extremalen von

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\omega(\tilde{X}, \tilde{X})} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{X} G(X) \dot{X}} dt$$

mit  $X(t_1) = x^1$ ,  $X(t_2) = x^2$ . Das ist die Abstrahierung der kürzesten Wege auf im  $y = M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . In der Tat läßt sich auch jede abstrakt gegebene Riemann-Mannigfaltigkeit in einem  $\mathbb{R}^m$  darstellen.

Nach (2.12) erfüllen diese Extremale die Euler-Lagrange-Gleichung.

$$(L_{\dot{x}})' - L_x = 0 \quad ,$$

also mit

$$\begin{aligned} L &= \dot{x} G(x) \dot{x} \\ L_x &= \dot{x} G_x(x) \dot{x} \\ L_{\dot{x}} &= 2\dot{x}G(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L_{\dot{x}} \circ (X, \dot{X}))' &= (L_{x\dot{x}} \dot{X} + L_{\dot{x}\dot{x}} \ddot{X}) \circ (X, \dot{X}) \\ &= 2\dot{X}G_x(X)\dot{X} + 2G(X)\ddot{X} \end{aligned}$$

folgt:  $2\dot{X}G_x(X)\dot{X} + 2G(X)\ddot{X} - \dot{X}G_x(X)\dot{X} = 0$

also  $\dot{X}G_x(X)\dot{X} = -2G(X)\ddot{X}$  .

Für den euklidischen Raum  $(M, \langle dx, dx \rangle)$ , der Übersetzung für eine Ebene, also  $g_{ij} \equiv \delta_{ij}$ , gilt:

$$0 = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot{x}$$

$$0 = \ddot{x}$$

Wir erhalten also die natürlichen Geraden.

Die Variationsaufgabe des kürzesten Weges in  $(M, \omega)$  hat mannigfaltige Anwendungen. So läßt sich in der Physik/Technik die kinetische Energie  $\underline{T}$  (s. Exkurs S) als Integral von einem zugehörigen  $\omega$  auffassen (vgl. Mc LANE)

BEM. Die Riemannsche Geometrie liefert auch eine geometrische Deutung der Euler-Lagrange-Gleichung mit Hilfe der Begriffe des affinen Zusammenhangs und der Autoparallelen. Dazu schaue man in die einschlägige Literatur (vgl. z.B. HERMANN § 19).

### (3.4) Hamiltongleichungen für ein spezielles Variationsproblem

Wir betrachten einen Standardprozeß in  $\mathbb{R}$  mit  $L = 4u^2 - 3ux - 2x^2$ ,  $g = u$ ,  $u \in \mathbb{R} (= T_x(\mathbb{R}))$ ,  $h = (x-x^1)^2 + (t-T)^2$ . Das Funktional  $\int L dt$  soll auf den Wegen der Dauer  $T$  nach  $x^1$  minimiert werden ( $f = -L$ ).

Mit  $H = up - 4u^2 + 3ux + 2x^2$  erhält man  $H_x = 3u + 4x$ ,  $H_p = u$ .  
Aus (c) folgt  $H_u(\bar{u}) = 0$ , also

$$-8\bar{u} + 3x + p = 0, \quad \bar{u} = \frac{1}{8}(3x + p).$$

Aus (e) folgt  $H^* = \text{const}$ , also

$$\begin{aligned} H^* &= -\frac{1}{16}(3x + p)^2 + \frac{1}{8}(3x + p)^2 + 2x^2 \\ &= \frac{1}{16}(3x + p)^2 + 2x^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Das sind Gleichungen für Ellipsen mit den Achsen  $3x+p = 0$ ,  $x=0$ . In dieser Situation wählen wir aus Gründen, die in (2.8 - 11) erläutert wurden,  $h = t - T$ , also  $P(\tau) = 0$ . Damit ist dann zu  $X(0) = x^0$ ,  $X(T) = x^1$  genau Ellipsenstück mit dem durch  $H_x, H_p$  bestimmten Pfad darauf gegeben, das von  $x^0$  nach  $x^1$  führt.

Das Beispiel erinnert an Exkurs S: Es gilt nämlich  $L_0(\text{id}, X, \dot{X}) = 4U^2 - 3UX - 2X^2 = (4U^2 + 2X^2) - (3U + 4X)X = H^* + \dot{P}X$ . Nach den Begriffsbestimmungen von Exkurs S wäre  $\int X dp = \int X \dot{P} dt$  als potentielle Energie zu interpretieren, etc...

(3.5) Ein variationsähnlicher Standardprozeß

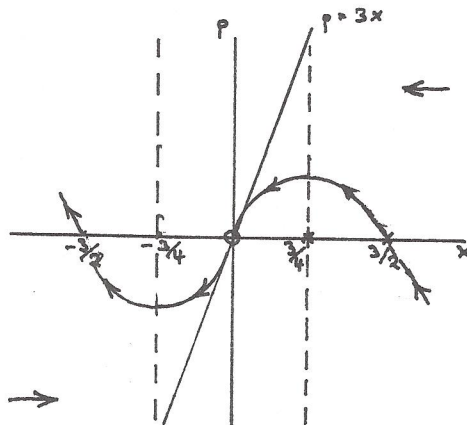
Wir betrachten den zu (3.4) "dualen" Standardprozeß mit  $f = L$ ,  $g = u$ ,  $u \in [-1, 1]$ ,  $h = (x-x^1)^2 + (t-T)^2$ .

Mit  $H = 4u^2 - 3ux - 2x^2 + up$  erhalten wir  $H_x = -3u - 4x$ ,  $H_p = u$ .

Es gilt  $H^* = \text{const}$  und  $\bar{u} = \text{sgn}(p-3x)$  für  $p \neq 3x$ , für  $p = 3x$ :  $\bar{u} \in \{-1, 1\}$ . Eingesetzt in  $H^* = \text{const}$  liefert  $\bar{u}$

$$\begin{aligned} 2X^2 + 3X + \text{const} &= P \quad \text{für } P(t) > 3X(t) \\ -2X^2 + 3X + \text{const} &= P \quad \text{für } P(t) < 3X(t) . \end{aligned}$$

Die Bewegung von  $(X,P)$  wird durch folgendes Bild wiedergegeben.



Eingezeichnet sind die Orte der p-Optima, die "Grenzfläche"  $p = 3x$  und zwei der die Schar der Integralkurven aufspannenden Kurven. Mit  $h$  verfährt man wie in (3.4).

(3.6) Der Leser möge weitere Variationsprobleme betrachten. Dazu etwa BRONSTEIN-SEMENDJAJEW IV S. 483 ff, Insbesondere 11. Iso-perimetrische Probleme. S. 504 ff ist auch ein Näherungsverfahren zur Lösung von Variationsproblemen geschildert.

(3.7) Ein Spiel um den billigsten Weg

Durch die Daten  $f = \|u^2\| - \|u^1\|$ ,  $g = u^1 + u^2$ ,  $h = x$ ,  $u^i \in \mathbb{R}^n (=T_x M)$  mit  $\|u^i\| \leq 1$  ist ein Spiel mit dem Zielpunkt 0 gegeben, mit direkter (additiver) Geschwindigkeitssteuerung (aus zwei Quellen). Wegen  $f$  heißt es vom Typ "billigster Weg": jedes Steuern kostet und bringt dem anderen Gewinn... Das Spiel kann als Zweipersonenversion des "kürzesten Weges" gesehen werden.

Da  $f, g, h$  nicht zeitabhängig sind, gilt nach (e)  $H^* \equiv 0$ .

Wir betrachten aus Darstellungsgründen die eindimensionale Version ( $n = 1$ ).

$$H = u^1 p + u^2 p + |u^2| - |u^1|$$

$$H_p = u^1 + u^2, \quad H_x = 0$$

$$H = \max_{u^1} u^1 (p - \operatorname{sgn} u^1) + \min_{u^2} u^2 (p + \operatorname{sgn} u^2)$$

$$\bar{u} \in SP(\tau[t, xp]) = \begin{cases} \{(-1, 1)\} & p < -1 \\ -\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ & -1 = p \\ \{(0, 0)\} & -1 < p < 1 \\ \mathbb{R}_0^+ \times -\mathbb{R}_0^+ & p = 1 \\ \{(1, -1)\} & 1 > p \end{cases}$$

Aus  $H^* = 0$  folgt bei eingesetztem  $\bar{u}$  :  $\bar{u}^1 = -\bar{u}^2$ .

Damit gibt es keinen von  $X(0)$  wegführenden optimalen Pfad.

"Lösungen" wie: die erste Hälfte des Weges steuert der eine, dann der andere Spieler, sind kooperativer Natur und keine Sattelpunkte.



(3.8) Der schnellste Weg, ein variationsähnliches Problem mit verdoppelten Zustandsvariablen

Der Standardprozeß habe die Daten  $f = -1$ ,  $g = (x^2, u)$ ,  
 $u \in \mathbb{R} (= T_x(\mathbb{R}))$  mit  $|u| \leq 1$ ,  $[h = 0] = \mathbb{R} \times \{(\bar{x}^1, 0)\}$ .  
 Weiter sei  $X(0) = (\bar{x}^0, 0)$ .

$f$  formalisiert die zu minimierende Laufzeit. Gesteuert wird die Beschleunigung. Zu diesem Zwecke wurden die Zustandsvariablen  $x^1$  auf  $(x^1, x^2)$  verdoppelt. Der Prozeß startet in  $x^1 = \bar{x}^0$  mit Geschwindigkeit Null und endet ebenfalls mit Geschwindigkeit Null in  $x^1 = \bar{x}^1$ .

Da  $f, g, h$  zeitunabhängig sind gilt nach (e)  $H^* \equiv 0$ .

Nach (a) ist  $\dot{P} = (0, -P^1)$ , d.h.  $P^2$  ist eine affine Funktion der Zeit. Da  $[h = 0]$  einen Dimensionsdefekt hat, benutzen wir gemäß (2.10) eine aufgespaltene Stopzeit:

$$h^i = (x_i^1 - \bar{x}_i^1), \quad h^{n+i} = \bar{x}_i^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Als Randbedingung gilt dann  $P(\tau) = -(\alpha^1, \alpha^2) = -(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2)$ .  
 $P^2$  ist nicht identisch der Nullfunktion, sonst wären alle  $\alpha_i^j$  Null und aus  $H^* = X^2 P^1 + U P^2 - \lambda = 0$  würde  $\lambda = 0$  folgen, im Widerspruch zu " $\lambda$  und  $\alpha$  nicht gleichzeitig Null".

Aus (c) folgt die optimale Steuerung  $\bar{u} = \text{sgn } P^2$  und damit aus  $H^* \equiv 0$  die Bedingung  $\|P^2\| = 1 - X^2 P^1$ .

Mit den Anfangs- und Endbedingungen folgt daraus  $\|P^2\|(t) = 1$  für  $t = 0, \tau$ .

$$\text{Da } P_i^2 = -\alpha_i^1 (t - \tau) - \alpha_i^2,$$

$$\text{ist } \|P^2\|(0) = \|\alpha^1\| = \|\alpha^2\| = \|P^2\|(\tau).$$

Damit ist  $P^2$  ein Durchmesser der Sphäre mit Radius 1 um 0 und durchläuft zur Zeit  $\tau/2$  den Nullpunkt unter Vorzeichenwechsel.

Damit gilt  $\|p^2\| = \frac{2}{\tau} |t - \frac{\tau}{2}|$  und  $\dot{x} = \frac{p^2}{\|p^2\|}$  hat die Geschwindigkeit  $\|\dot{x}\| = 1$ , wechselt in  $\frac{\tau}{2}$  die Vorzeichen, ist auf den Hälften konstant. im  $X$  ist also das  $\bar{x}^0$  und  $\bar{x}^1$  verbindende Geradenstück. Damit die Bewegung von  $\bar{x}^0$  nach  $\bar{x}^1$  führt, ist  $p^2$  in der ersten Hälfte die Richtung von  $\bar{x}^0$  nach  $\bar{x}^1$ , danach das negative davon.

Insgesamt ergibt sich die Anweisung, die erste Hälfte der Zeit (= des Weges) maximal Richtung  $\bar{x}^1$  zu beschleunigen, und danach maximal zu bremsen.

(3.9) Ein Spiel um den billigsten Weg bei ortsabhängiger Geschwindigkeitssteuerung im  $\mathbb{R}^2$

Die Daten seien  $f = \|v\|^2 - |u|$ ,  $u \in [-1,1]$ ,  $v \in \{y \in \mathbb{R}^2, \|y\| \leq 1\}$ ,  $g = (x, u + v_1, v_2)$ ,

$$h = \langle (x_1, x_2) x^1 \rangle - \|x^1\|^2.$$

Damit ist

$$H = x_1 u p_1 - |u| + v_1(p_1 + v_1) + v_2(p_2 + v_2),$$

$$H_x = (u p_1, 0)$$

Sattelpunkte aus  $SP(\Gamma[t,x,p])$

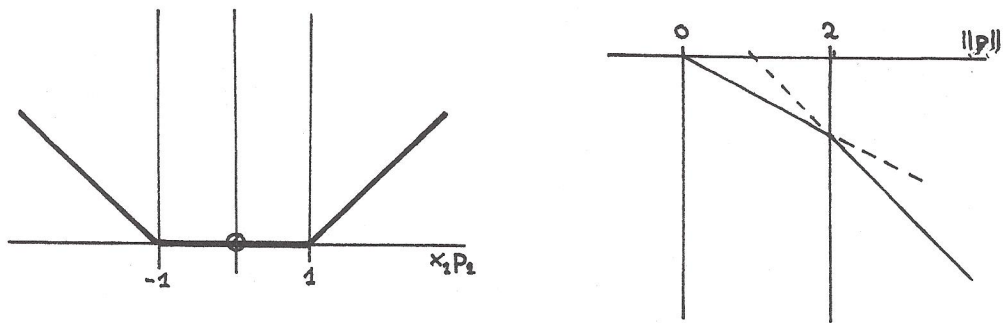
haben die ersten Koordinaten

$$\begin{cases} \text{sgn } x_1 p_1 & \text{für } |x_1 p_1| > 1 \\ y \in \mathbb{R}_0^+ \text{ sgn } x_1 p_1 & \text{für } |x_2 p_1| = 1 \\ 0 & \text{für } |x_1 p_1| < 1 \end{cases}$$

und die zweiten Koordinaten

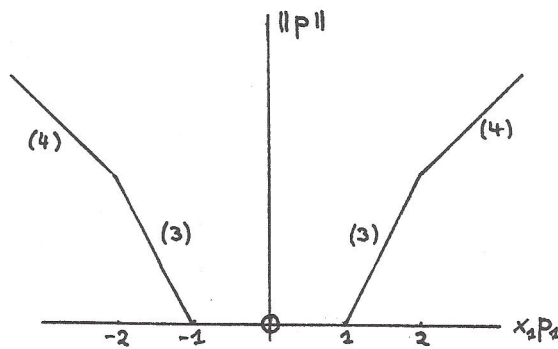
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} P & \text{für } \|P/2\| \leq 1 \\ -P/\|P\| & \text{für } \|P/2\| \geq 1 \end{cases}$$

Damit ist  $H = \max(|x_1 p_1| - 1, 0) + \min(-\frac{1}{2}\|P\|, 1 - \|p\|)$



Da  $H^* \equiv 0$  nach (d), gilt:

- (A) Fall 1:  $|X_1 P_1| \leq 1, \|P\| \leq 2 : 0 = 0 - \frac{1}{2}\|P\|, \|P\| = 0$
- Fall 2:  $|X_1 P_1| \leq 1, \|P\| \geq 2 : 0 = 0 + 1 - \|P\|, \|P\| = 1 : \text{Widerspruch}$
- Fall 3:  $|X_1 P_1| > 1, \|P\| \leq 2 : 2(|X_1 P_1| - 1) = \|P\|, |X_1 P_1| \leq 2$
- Fall 4:  $|X_1 P_1| > 1, \|P\| \geq 2 : |X_1 P_1| = \|P\|, |X_1 P_1| \geq 2$



Fall 1 spiegelt  $u = 0, v = 0, \dot{X} = 0$  wieder, also  $X(0) = x^1$ .

Für die übrigen Fälle (3) und (4) liefert das Einsetzen in (a):

$$(B) \dot{X}_1 = X_1 \operatorname{sgn} X_1 P_1 - \begin{cases} \frac{P_1}{4(|X_1 P_1| - 1)} & \|P\| < 2 \quad (3) \\ \frac{\operatorname{sgn} P_1}{|X_1|} & \|P\| > 2 \quad (4) \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = - \begin{cases} \frac{P_2}{2 \|P\|} & \|P\| < 2 \quad (3) \\ \frac{P_2}{\|P\|} & \|P\| > 2 \quad (4) \end{cases}$$

$$\dot{p}_1 = - \begin{cases} P_1 \operatorname{sgn} X_1 P_1 & |X_1 P_1| > 1 \quad (3) \quad (4) \\ 0 & |X_1 P_1| < 1 \quad \text{entfällt} \end{cases}$$

$$\dot{p}_2 = 0$$

Aus  $\frac{P_1^2}{\|P\|^2} + \frac{P_2^2}{\|P\|^2} = 1$  ergeben sich die

Beziehungen:

$$(C) \quad (3) \quad (\dot{X}_1 - X_1 \operatorname{sgn} X_1 P_1)^2 + \dot{X}_2^2 = \frac{1}{4}$$

$$(4) \quad (\dot{X}_1 - X_1 \operatorname{sgn} X_1 P_1)^2 + \dot{X}_2^2 = 1$$

Es folgt die Integration der Gleichungen (B):

$$(D) \quad P_1 = a e^{-t} \operatorname{sgn} (X_1 P_1)$$

$$P_2 = b$$

Wir beschränken uns im Weiteren auf

$$X_1 \cdot P_1 > 0 \quad (a > 0) :$$

$$\dot{X}_1 - X_1 = - \frac{1}{4(X_1 - a^{-1} e^t)} \quad \text{für (3)}$$

$$\dot{X}_1 - X_1 = - \frac{1}{X_1} \quad \text{für (4)}$$

Fall (3) ergibt integriert

$$x_1 = a^{-1} e^t \pm \sqrt{\frac{1}{4} + ce^{2t}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{b}{a} e^t + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} e^t\right)^2} \right) + d$$

Fall (4) ergibt integriert

$$x_1 = \pm \sqrt{1 + ce^{2t}}, \text{ also nach Voraussetzung: } +$$

$$x_2 = -\ln \left( \frac{b}{a} e^t + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} e^t\right)^2} \right) + d$$

(C) liefert den Zusammenhang zwischen den Integrationsvariablen a, b und c:

$$(3) \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 4c$$

$$(4) \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = c$$

Die restlichen Parameter werden durch die Anfangs-, End- und Randbedingungen beseitigt:

$$X(0) = x^0, \quad X(\tau) = x^1$$

$$P_1(\tau) = ae^{-\tau} = -\alpha x_1^1$$

$$P_2(\tau) = b = -\alpha x_2^1$$

Daraus folgt:

$$\frac{b}{a} e^{\tau} = \frac{x_2^1}{x_1^1}$$

Wir beenden hier das Studium dieses Spieles: Die Schwierigkeiten dürften klar geworden sein.

(3.10) Ein Verfolgungsspiel

Wir betrachten das Differentialspiel im  $\mathbb{R}^2$  mit den Daten:

$$f = 1, g = (u_1 + v, u_2), v \in [-1, 1],$$

$$\|u\| \leq w^2, h = x_1^2 + x_2^2 - k^2;$$

$k$  und  $w$  seien positive Konstanten. Das Spiel ist interpretierbar als Verfolgungsspiel:

Dazu sei  $X$  als Differenz der Orte der Spieler verstanden.

Für  $\|X(0)\| > k$ : Der erste Spieler versucht, möglichst schnell sich dem anderen auf die Distanz  $k$  zu nähern. Der zweite entflieht, so gut er kann.

Für  $\|X(0)\| < k$ : Der erste Spieler versucht, möglichst schnell gegenüber dem anderen die Distanz  $k$  zu erreichen ("schnellste Flucht"). Der zweite versucht, die Flucht des ersten möglichst lange herauszuzögern.

Für  $\|X(0)\| = k$  ist  $\tau = 0$  und nichts zu betrachten.

Aus der Anschauung ist klar:

$\|X(0)\| > k$ : Für  $w > 1$  kann der erste Spieler den zweiten immer fangen. Darüber hinaus kann innerhalb eines Gebietes bestimmter Anfangskonfigurationen der Beweglichkeitsvorteil des ersten ausreichen, um einen Geschwindigkeitsnachteil ( $w < 1$ ) zu kompensieren; sonst wird  $[h = 0]$  nicht erreicht.

$\|X(0)\| < k$ : Für  $w > 1$  kann der erste Spieler immer entfliehen (so weit er will). Darüber hinaus kann er entfliehen, wenn er in eine Richtung entflieht, wohin der andere nicht kann. Also: Es wird  $[h = 0]$  immer erreicht. Die H-Gleichung lautet

$$H = -1 + p_1 u_1 + p_2 u_2 + p_1 v.$$

(a) liefert  $\dot{P} = -H_x = 0$

(b) liefert mit  $h_x = (2x_1, 2x_2)$ ,  $P = \text{const}$ :

$$P \equiv P(\tau) = -2\alpha (X_1(\tau), X_2(\tau)),$$

$$\|P\| = 2 |\alpha| \|X(\tau)\| = 2 |\alpha| k,$$

$$\frac{P}{\|P\|} = -\frac{1}{k} \text{sgn } \alpha (X_1(\tau), X_2(\tau)).$$

Für  $P_1 \neq 0$  erhält man aus (c)

$$U = w \frac{P}{\|P\|} = -\frac{w}{k} \text{sgn } \alpha (X_1(\tau), X_2(\tau))$$

$$V = -\text{sgn } P_1 = -\text{sgn } (-2\alpha X_1(\tau)) = \text{sgn } X_1(\tau) \cdot \text{sgn } \alpha$$

Eingesetzt in  $\dot{X} = H_p$ :

$$\dot{X} = \left( -\frac{w}{k} X_1(\tau) + \text{sgn } X_1(\tau), -\frac{w}{k} X_2(\tau) \right) \text{sgn } \alpha$$

also i.bes.  $\dot{X} = \text{const}$

Das Bild der Kurve  $X$  ist also eine Gerade  $G$  im  $(x_1, x_2)$ -Raum durch  $(X_1(\tau), X_2(\tau))$ .

Wir zeigen: Für alle Werte von  $X(\tau)$  liegt  $(\frac{k}{w}, 0)$  bzw.  $(-\frac{k}{w}, 0)$  auf dieser Geraden:

$$G = \{X(\tau) + s\dot{X}; s \in \mathbb{R}\}.$$

Für  $s = \frac{k}{w} \text{sgn } \alpha$  erhält man den Geradenpunkt  $(y_1, y_2)$  mit

$$y_1 = X_1(\tau) - X_1(\tau) + \frac{k}{w} \text{sgn } X_1(\tau) = \pm \frac{k}{w}$$

$$y_2 = X_2(\tau) - X_2(\tau) = 0.$$

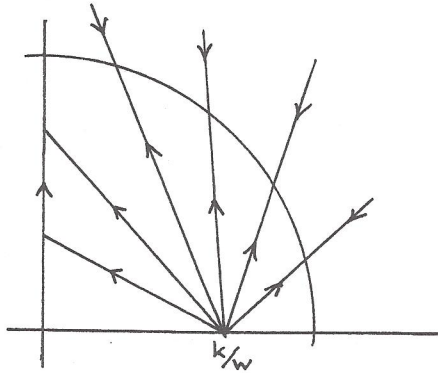
Betrachten wir nun die aus (d) erhaltliche Gleichung  $H^* = 0$  :

$$\begin{aligned}
 H^* &= -1 + \sum_{\gamma=1,2} (-2\alpha X_i(\tau)) \left(-\frac{w}{k} \operatorname{sgn} \alpha X_i(\tau)\right) + P_1 (-\operatorname{sgn} P_1) \\
 &= -1 + \frac{2|\alpha|w}{k} (X_1(\tau)^2 + X_2(\tau)^2) - 2|\alpha| |X_1(\tau)| \\
 &= -1 + 2|\alpha| (wk - |X_1(\tau)|) .
 \end{aligned}$$

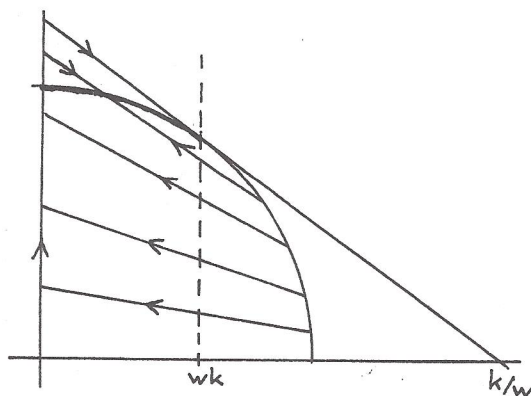
Damit folgt  $wk > |X_1(\tau)|$ .

Die Bewegung ist dargestellt in den beiden folgenden Skizzen:

$w > 1$



$w < 1$



Die Pfeile entlang  $x_1 = 0$  sind der von uns vorne übergangene Fall  $P_1 = 0$ .



(3.11) Verfolgungsspiel vom Variationstyp mit verdoppelten Zustandsvariablen

Das folgende Spiel ist fast eine Zweipersonenversion von (3.8). Der wesentliche Unterschied ist die Asymmetrie der Spieler und daß man sich dem Ziel nur auf eine gewisse Distanz nähern muß. Das Spiel verläuft im  $\mathbb{R}^6$  und ist bekannt als "isotropic rocket game". Die Daten sind  $f = 1$ ,  $g = (u^1, x^3, u^2)$ ,  $u^i \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|u^i\| \leq 1$ ,  $h = \|x^1 - x^2\|^2 - k^2$ ,  $k$  eine positive Konstante (vgl. etwa (3.10)),  $X(0) = (\bar{x}^1, 0, 0)$ .

Der als Verfolger interpretierte zweite Spieler startet also im Nullpunkt mit Geschwindigkeit 0, während der erste sich in  $\bar{x}^1$  befindet.

$$H = p^1 u^1 + p^2 x^3 + p^3 u^3 + 1$$

(a) ergibt  $H_x = (0, 0, p^2)$ , also

$$P = (d^1, d^2, -d^2 t + d^3) .$$

Aus (b):  $P(\tau) = -2\alpha (X^1 - X^2, X^2 - X^1, 0) (\tau)$

folgt  $p^1 = -p^2$ ,  $p^3(\tau) = 0$ , also

$$d^1 = -d^2, \quad d^2_\tau = d^3$$

$$P = (d^1, -d^1, -d^1(\tau - t)) .$$

Weiter gilt:

$$\|P^1\| = \|P^2\| = 2k|\alpha|$$

und für  $t \neq \tau$ :

$$\frac{P^3}{\|P^3\|}(t) = \frac{d^1(t - \tau)}{\|d^1\|(\tau - t)} = -\frac{d^1}{\|d^1\|}$$

Dieser letzte Ausdruck erfüllt:

$$\frac{d^1}{\|d^1\|} = \frac{\operatorname{sgn} \alpha}{k} (X^2 - X^1)(\tau).$$

Damit genug, und weiter zu (c):

$$\bar{u} = \left( \frac{p^1}{\|p^1\|}, -\frac{p^3}{\|p^3\|} \right) = \left( \frac{d^1}{\|d^1\|}, \frac{d^1}{\|d^1\|} \right).$$

Eingesetzt in (d)  $H^* \equiv 0$  erhält man:

$$0 = 1 + X^3 p^2 + \|p^1\| - \|p^3\|$$

(\*)

$$= 1 - X^3 d^1 + \|d^1\| - (\tau - t) \|d^1\|$$

$\bar{u}$ , eingesetzt in (a)  $H_p = \dot{X}$ , liefert:

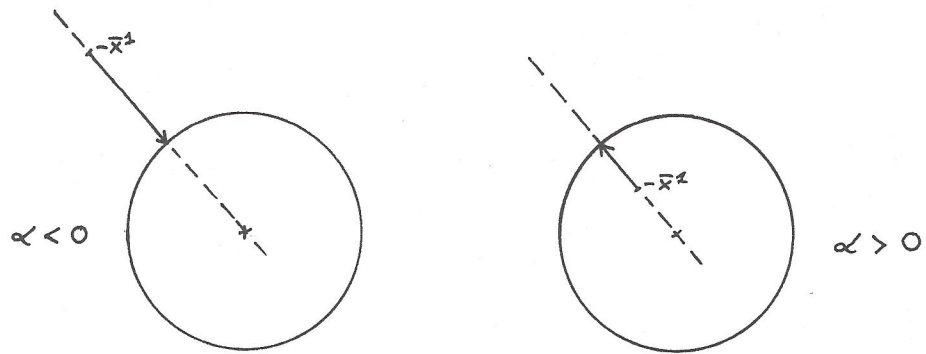
$$\dot{X}^3 = \frac{d^1}{\|d^1\|}, \quad X^3 = X^3(0) + \frac{d^1}{\|d^1\|} t = \frac{d^1}{\|d^1\|} t$$

$$X = \left( \bar{x}^1 + \frac{d^1}{\|d^1\|} t, \frac{1}{2} \frac{d^1}{\|d^1\|} t^2, \frac{d^1}{\|d^1\|} t \right)$$

Nach diesem und einem aus (b) gezogenen Schluß gilt:

$$(X^2 - X^1)(\tau) = \frac{d^1}{\|d^1\|} \left( \frac{\tau^2}{2} - \tau \right) - \bar{x}^1 = k \operatorname{sgn} \alpha \frac{d^1}{\|d^1\|}$$

Das Bild von  $X^2 - X^1$  ist also eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$ , die  $-\bar{x}^1$  und 0 verbindet. Die Bewegung geht auf Null zu für  $\alpha < 0$  und für  $\alpha > 0$  vom Nullpunkt weg. Also  $\alpha < 0$  für  $\|\bar{x}^1\| > k$  und  $\alpha > 0$  für  $\|\bar{x}^1\| < k$ .



Es ist  $\frac{\bar{x}^1}{\|\bar{x}^1\|} = -\operatorname{sgn} \alpha \frac{d^1}{\|d^1\|}$ .

Wir werten nun (\*) für  $t = 0$  aus:

$$0 = 1 + \|d^1\| (1 - \tau)$$

Daraus folgt insbesondere  $\tau > 1$ .

Allgemein folgt aus (\*) die Beziehung

$$\|\bar{x}^1\| = \left| \frac{\tau^2}{2} - \tau - k \operatorname{sgn} \alpha \right|$$

Daraus ist  $\tau$  zu bestimmen.

### (3.12) Die Dolichobrachistochrone

Das Spiel im  $\mathbb{R}^2$  ist charakterisiert durch die Daten:  $f = -1$  ;

$$g = (u_1 \sqrt{x_2} + \frac{w}{2}(v+1), u_2 \sqrt{x_2} + \frac{w}{2}(v-1))$$

$$w > 0, (u_1, u_2) = u \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R},$$

$$\|u\| \leq 1, |v| \leq 1 ; h = x_1 .$$

Der erste will nach  $[x_1 = 0]$ , der zweite will's verhindern:  
 der erste minimiert die Laufzeit.  $g$  setzt sich additiv aus den  
 durch den einzelnen Spieler kontrollierten Komponenten zusammen.

Die Komponente des ersten ergibt sich aus der Wahl eines Winkels und der durch den Ort festgelegten Geschwindigkeit  $\sqrt{|x_2|}$ , also analog einer freien-Fall-Komponente beim Wurf.

Der zweite verfügt mit seiner Komponente über eine ortsunabhängige "Fluchtgeschwindigkeit" in Form eines Dreiecks, das der  $x_2$ -Achse ab- und der  $x_1$ -Achse zugewandt ist.

Anschaulich ergibt sich die Hypothese, daß oberhalb  $x_2 = w^2$  der erste Spieler [ $x_1 = 0$ ] erzwingen kann (vgl. ISAACS 1965, die Umkehrung ist falsch: vgl. LIDOV 1971, CHIGIR' 1976).

Sei oBdA  $x_2 \geq 0$ .

Es ist

$$H = pu \sqrt{x_2} + (p_1 + p_2) \frac{w}{2} v + (p_1 - p_2) \frac{w}{2} - 1$$

Nach (a):

$$H_x = \left( 0, \frac{pu}{2\sqrt{x_2}} \right)$$

Nach (b):

$$P(\tau) = -\alpha (1, 0),$$

$$\text{also } P_1 \equiv -\alpha, \|P(\tau)\| = |\alpha|$$

Nach (c) für  $\|p\| \neq 0$ :

$$\bar{u} = \frac{p}{\|p\|}$$

$$\bar{v} = -\text{sgn}(p_1 + p_2).$$

Nach (d) ist  $H^* \equiv 0$ . Setzt man  $\bar{u}, \bar{v}$  darin ein, erscheint

$$(*) \quad 0 = \|p\| \sqrt{x_2} - |p_1 + p_2| \frac{w}{2} + (p_1 - p_2) \frac{w}{2} - 1.$$

Fall 1:  $(P_1 + P_2)(t) > 0$

Endet der Pfad im Fall 1, so ergibt (\*)

$$1 = |\alpha| \sqrt{X_2(\tau)}, \text{ also } X_2(\tau) = \frac{1}{\alpha^2} .$$

Fall 2:  $(P_1 + P_2)(t) < 0$

Aus (\*) folgt  $1 = \|P\| \sqrt{X_2} + P_1 w$

und an der Stelle  $\tau : 1 = |\alpha| \sqrt{X_2} - \alpha w$ .

Ist  $\alpha > 0$ , wie gleich gezeigt werden wird, folgt daraus

$$X_2(\tau) > w^2$$

Zwischenbemerkung:  $P_2$  fällt monoton bis auf 0 zum Endzeitpunkt:

$$\dot{P}_2 = -\frac{P\bar{u}}{2\sqrt{X_2}} = -\frac{\|P\|}{2\sqrt{X_2}} < 0$$

falls  $P \neq 0$ ; was aber gilt, da sonst (\*) nicht erfüllbar ist.

$P_2$  ist also bis auf  $t = \tau$  positiv. Im Fall 2 ist also das konstante  $P_1$  für alle  $t$  kleiner  $-P_2(t)$ , ist somit negativ. Es gilt:  $\alpha > 0$ . Weiter kann nur an einer Stelle  $t_u$  (höchstens)  $(P_1 + P_2)(t_u) = 0$  gelten.

Fall 3:  $(P_1 + P_2)(t) = 0$

An dieser Stelle wechselt der zweite Spieler die Strategie.

Für  $\tau$  ist (\*) nicht erfüllbar, denn aus  $P_1(\tau) = 0$  und  $(P_1 + P_2)(\tau) = 0$  folgt  $P_2(\tau) = 0$ ,  $\|P\|(\tau) = 0$ .

Wir setzen nun  $\bar{u}, \bar{v}$  in (a)  $H_p = \dot{X}$  ein:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \bar{u} \sqrt{X_2} + \frac{w}{2} (\bar{v} + 1, \bar{v} - 1) \\ &= \frac{P\sqrt{X_2}}{\|P\|} + \frac{w}{2} (-\operatorname{sgn}(P_1+P_2)+1, -\operatorname{sgn}(P_1+P_2)-1) \\ &= \frac{P\sqrt{X_2}}{\|P\|} + \begin{cases} w(0, -1) & \text{für Fall 1} \\ w(1, 0) & \text{für Fall 2} \end{cases} \end{aligned}$$

Liegt zur Zeit  $\tau$  Fall 1 vor, so umfaßt nach der Zwischenbemerkung der Fall 1 ein ganzes Endstück. Da  $P_1$  positiv ist, würde gemäß  $\dot{X}$  der optimale Pfad für  $X_2 \neq 0$  von  $[h = 0]$  wegdriften. Der Prozeß könnte nicht enden.

Es gilt: Fall 1 umfaßt kein Endstück.

Damit erhalten wir  $P_1$  aus (\*) gemäß Fall 2 mit  $s := X_2(\tau)$ :

$$P_1 \equiv \frac{1}{w - \sqrt{s}}$$

Um die Pfade zu erhalten, konstruieren wir vom Ende her und beginnen deshalb mit Fall 2. Hier ist:

$$\begin{aligned} \|P\| &= \frac{1 - P_1 w}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\sqrt{X_2}} \left(1 - \frac{w}{w - \sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{X_2}} \frac{w - \sqrt{s} - w}{w - \sqrt{s}} \\ &= \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s} - w} \frac{1}{\sqrt{X_2}} \end{aligned}$$

Die drei übrigen H-Gleichungen erhalten damit die Gestalt

$$\dot{P}_2 = \frac{\sqrt{s}}{2(w-\sqrt{s})} \frac{1}{X_2}$$

$$\dot{X}_1 = \frac{P_1 \sqrt{X_2}}{\|P\|} + w = \frac{1}{w-\sqrt{s}} \frac{\sqrt{s}-w}{\sqrt{s}} X_2 + w$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{s}} X_2 + w$$

$$\dot{X}_2 = P_2 X_2 \frac{\sqrt{s}-w}{\sqrt{s}}$$

Somit gilt:

$$\frac{\dot{X}_2}{\dot{P}_2} = \frac{P_2 X_2^2 (\sqrt{s}-w) (w-\sqrt{s})^2}{\sqrt{s} \sqrt{s}}$$

$$= -\frac{2}{s} (w-\sqrt{s})^2 P_2 X_2^2$$

Dann liefert Integration:

$$\frac{1}{X_2} = \frac{1}{s} (w-\sqrt{s})^2 P_2^2 + c_1$$

also

$$\dot{P}_2 = \frac{w-\sqrt{s}}{2\sqrt{s}} P_2^2 + \frac{1}{2\sqrt{s}(w-\sqrt{s})}$$

denn  $c_1 = \dot{P}_2(\tau)$ , da  $P_2(\tau) = 0$  und  $X_2(\tau) = s$ .

Integration ergibt zusammen mit  $P_2(\tau) = 0$

$$P_2 = \frac{1}{w-\sqrt{s}} \operatorname{tg} \left( \frac{t-\tau}{2\sqrt{s}} \right)$$

Damit wird  $\dot{X}_2$  integrierbar:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{X}_2}{X_2} &= \frac{\sqrt{s}-w}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{w-\sqrt{s}} \operatorname{tg} \left( \frac{t-\tau}{2\sqrt{s}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{tg} \left( \frac{t-\tau}{2\sqrt{s}} \right)\end{aligned}$$

Zur besseren Integration kehren wir die Zeit um:

$$r = \tau - t, \quad Y(t) := X(\tau - t)$$

Für  $Y_2$  gilt danach

$$\frac{\dot{Y}_2}{Y_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{tg} \left( -\frac{t}{2\sqrt{s}} \right)$$

$$\ln Y_2(t) = 2 \ln \cos \left( -\frac{t}{2\sqrt{s}} \right) + c_2$$

Aus  $Y_2(0) = X_2(\tau) = s$  folgt

$$\ln s = c_2$$

Also insgesamt

$$Y_2(t) = s \cos^2 \left( -\frac{t}{2\sqrt{s}} \right) = \frac{s}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{t}{\sqrt{s}} \right) \right)$$

Aus der letzten H-Gleichung

$$\dot{X}_1 = -\frac{1}{\sqrt{s}} X_2 + w$$

folgt nun

$$\begin{aligned}\dot{Y}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{s}} Y_2(t) - w \\ &= \sqrt{s} \cos^2 \left( -\frac{t}{2\sqrt{s}} \right) - w\end{aligned}$$



also

$$Y_1(t) = \sqrt{s} \left( \frac{1}{2} t - \frac{\sqrt{s}}{2} \sin \left( - \frac{t}{\sqrt{s}} \right) \right) - wt + c_3$$
$$= \left( \frac{\sqrt{s}}{2} - w \right) t - \frac{s}{2} \sin \left( - \frac{t}{\sqrt{s}} \right) + c_3 .$$

Da  $Y_1(0) = 0$ , folgt  $c_3 = 0$ .

Wir betrachten nun den dazu gehörigen Verlauf von  $P_1 + P_2$ . Das Endstück von  $X$  verläuft ab  $t_u$  gemäß Fall 2.

Fall 2 wird berandet durch

$$(P_1 + P_2)(t_u) = 0 = \frac{1}{w - \sqrt{s}} + \frac{1}{w - \sqrt{s}} \operatorname{tg} \left( \frac{t_u - \tau}{2\sqrt{s}} \right)$$

Also:  $1 = - \operatorname{tg} \left( \frac{t_u - \tau}{2\sqrt{s}} \right)$

und mit  $r_u = \tau - t_u$ :

$$r_u = \frac{\pi\sqrt{s}}{2}$$

Dazu gehören die Orte  $Y \left( \frac{\pi\sqrt{s}}{2} \right)$ :

$$Y_1 \left( \frac{\pi\sqrt{s}}{2} \right) = \frac{\sqrt{s}}{2} \left( \frac{\pi\sqrt{s}}{2} - \pi w + 1 \right)$$

$$Y_2 \left( \frac{\pi\sqrt{s}}{2} \right) = \frac{s}{2}$$

Durch diese Gleichungen wird eine Parabel beschrieben, an die die Teilstücke des optimalen Pfades vom Fall 1 ( $P_1 + P_2 > 0$ ) zur Zeit  $t_u$  anknüpfen müssen. Zur Integration der H-Gleichung für Fall 1 vgl. CHIGIR'.

(3.13) Ein Wettrennen in  $\mathbb{R}$ : Auszahlung vom Mayer-Typ

Die Daten sind gegeben durch  $\underline{M} = x_2^2 - x_1^2$ ;  $u_1, u_2 \in [-1,1]$ ,  
 $g = (u_1, x_3, u_2)$ ,  $h = x_1 x_2$ .

Die Spieler bewegen Punkte in  $\mathbb{R}$ , mit dem Ziel nach 0 zu gelangen, wobei des anderen Punkt noch möglichst weit weg sei.

Die Bewegung ist vom Variationstyp mit verdoppelten Variablen: Spieler Eins steuert die Geschwindigkeit, Spieler Zwei die Beschleunigung.

Wir betrachten eine H-Funktion nach (2.13).

$$H_x = (0, 0, p_2)$$

$$P(\tau) = \underline{M}_x(\tau, X(\tau))$$

$$\text{Damit folgt: } P = (-2X_1(\tau), 2X_2(\tau), -2X_2(\tau)t + c)$$

$$\text{mit } c = \begin{cases} 2X_2(\tau)\tau & X_1(\tau) = 0 \\ 0 & X_2(\tau) = 0 \end{cases}$$

(der Deutlichkeit halber)

$$(c) \text{ liefert } \bar{u}_1 = \text{sgn } p_1 \text{ f\u00fcr } p_1 \neq 0$$

$$\text{und } \bar{u}_2 = -\text{sgn } p_3 \text{ f\u00fcr } p_3 \neq 0.$$

$$\text{Damit erh\u00e4lt man } \dot{X} = (\text{sgn } P_1, X_3, -\text{sgn } P_3).$$

$\dot{X}$  ist nach Fallunterscheidung zu integrieren, z.B.  $P_1 < 0, P_3 < 0$ :

$$X = (\bar{x}_1 - t, \bar{x}_2 - \frac{t^2}{2}, -t)$$

$$\text{mit } X(0) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0).$$

Wir beschränken uns auf  $X(0) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$  und auf das Bild der ersten beiden Koordinaten:

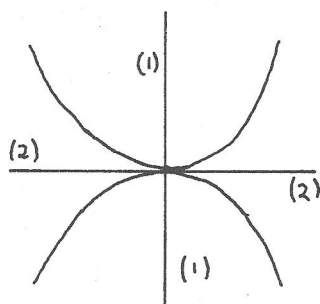
Durch die Pfade  $X$  sind dann im  $\mathbb{R}^2$  Parabeln vom Typ

$$x_2 = \bar{x}_2 \pm \frac{(\bar{x}_1 - x_1)^2}{2}$$

gegeben, die von  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  aus in Richtung "Null" durchlaufen werden. Die Gebiete, von denen aus derselbe "Erstankömmling" ist, werden getrennt durch

$$\bar{x}_2 \pm \frac{x_1^2}{2}$$

Die Situation zeigt das folgende Bild



In den Gebieten (i) "gewinnt" der i-te Spieler den Wettlauf.

(3.14) Ein Spiel im  $\mathbb{R}^2$  vom Mayer-Typ mit additiv gekoppelten indirekten Geschwindigkeitssteuerungen

Die Daten sind gegeben durch  $\underline{M} = \frac{1}{2} x_2^2$ ;  $u^i \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|u^i\| \leq 1$ ,  $g = g^1(x) u^1 + g^2(x) u^2$ ,  $g^i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $h = t - T$ , also "feste Laufzeit".

Wir beschränken uns, wie in ROSENMÜLLER §3, Beispiel 4,16, auf den Spezialfall  $g^1(x) = x_2$ ,  $g^2(x) = x_1 + x_2$ . Wie in (3.13) benutzen wir die H-Funktion nach (2.13).

$$(a): H_x = (pu^2, p(u^1 + u^2))$$

$$(b): P(T) = (0, X_2(T))$$

$$(c): \bar{u} = (\operatorname{sgn} x_2, -\operatorname{sgn} (x_1 + x_2)) \frac{P}{\|P\|}$$

für  $p \neq 0$ .

Einsetzen von  $\bar{u}$  liefert:

$$H_x = \|P\| (-\operatorname{sgn} (X_1+X_2), \operatorname{sgn} X_2 - \operatorname{sgn} (X_1+X_2))$$

$$\dot{X} = \frac{P}{\|P\|} (|X_2| - |X_1+X_2|)$$

Wir betrachten  $X_2 \neq 0, X_1+X_2 \neq 0, P \neq 0$ :

Zu unterscheiden sind die vier Fälle

$$(1) \quad X_2 > 0, X_1 + X_2 > 0$$

$$(2) \quad X_2 > 0, X_1 + X_2 < 0$$

$$(3) \quad X_2 < 0, X_1 + X_2 > 0$$

$$(4) \quad X_2 < 0, X_1 + X_2 < 0$$

Damit gilt:

$$\dot{P} = \|P\| \cdot \left\{ \begin{array}{ll} (1, 0) & (1) \\ (-1, -2) & (2) \\ (1, 2) & (3) \\ (-1, 0) & (4) \end{array} \right.$$

$$\dot{X} = \frac{P}{\|P\|} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} -X_1 & (1) \\ X_1 + 2X_2 & (2) \\ -X_1 - 2X_2 & (3) \\ X_1 & (4) \end{array} \right.$$