Universität Bielefeld/IMW

Working Papers
Institute of Mathematical Economics

Arbeiten aus dem
Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung

Nr. 113

Reinhard Selten und Werner Güth

Original oder Fälschung - Gleichgewichtsauswahl in einem Verhandlungsspiel mit unvollständiger Information -

März 1982

H. G. Bergenthal

Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung
an der
Universität Bielefeld
Adresse/Address:
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1
Bundesrepublik Deutschland
Federal Republic of Germany

Original oder Fälschung - Gleichgewichtsauswahl in einem Verhandlungsspiel mit unvollständiger Information -

von

Reinhard Selten und Werner Güth

Spiele mit unvollständiger Information sind Spiele, in denen die Spieler keine genauen Kenntnisse über Auszahlungen, mögliche Strategien oder andere Regelbestandteile haben. John C. Harsanyi hat für derartige Spielsituationen ein Bayesianisches Modell entwickelt, das die Rückführung auf Spiele mit vollständiger Information erlaubt (Harsanyi [1968]). Dieses Modell beruht darauf, daß Typen von Spielern und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Kombinationen von Spielertypen eingeführt werden.

Auf der Grundlage des von Harsanyi entwickelten Begriffs eines Spiels mit unvollständiger Information ist später eine Verhandlungstheorie entwickelt worden, in der der Verhandlungsprozeß durch ein nichtkooperatives Spiel modelliert wird (Harsanyi und Selten [1972]). Das Problem der Auswahl eines Gleichgewichtspunktes oder genauer eines korrelierten Gleichgewichtspunktes ist dabei mit Hilfe einer speziell für die Klasse der betrachteten Verhandlungsspiele entwickelten axiomatischen Theorie gelöst worden. Diese ad hoc-Theorie soll hier nicht angewandt werden, da Harsanyi und Selten inzwischen eine allgemeine Theorie der Gleichgewichtsauswahl ausgearbeitet haben, mit der auch Verhandlungsspiele mit vollständiger Information gelöst werden können (Harsanyi und Selten [1980]). Wegen der Schwierigkeiten, die mit der Anwendung der neueren Theorie verbunden sind, soll ein Verhandlungsmodell zugrunde gelegt werden, das einfacher ist als das ursprüngliche nichtkooperative Verhandlungsspiel von Harsanyi und Selten (Harsanyi und Selten [1972]).

In dem Verhandlungsproblem, das hier behandelt werden soll, steht ein Käufer einem Verkäufer gegenüber, der ihm ein Kunstwerk zum Verkauf anbietet, von dem der Käufer nicht weiß, ob es sich um ein Original oder um eine Fälschung handelt. Es wird sich zeigen, daß der Käufer einen grösseren Anteil des Fälschungsrisikos zu tragen hat als der Verkäufer eines Originals. Dies gilt für alle Parameterkombinationen, für die überhaupt ein Vertrag zustandekommen kann.

1. Die Verhandlungssituation

Es ist unsere Absicht, eine Verhandlungssituation zu untersuchen, in der ein Verkäufer einem Käufer einen Kunstgegenstand anbietet. Der Verkäufer weiß, ob es sich um ein Original oder um eine Fälschung handelt. Der Käufer ist jedoch über die Echtheit des Kunstgegenstandes nur unvollständig informiert. Er kennt lediglich die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß es sich um eine Fälschung handelt. Dieser Parameter w ist auch dem Verkäufer bekannt.

Wir gehen davon aus, daß die von Neumann-Morgenstern-Nutzen der Beteiligten linear vom Geldbesitz abhängen, so daß zwischen erwarteten Geldauszahlungen und Nutzen nicht unterschieden werden muß. Es wird angenommen, daß der Kunstgegenstand, falls es sich um ein Original handelt, für den Verkäufer den Wert 1 und für den Käufer den Wert h hat, wobei $h>1$ gilt. Handelt es sich jedoch um eine Fälschung, so hat der Kunstgegenstand sowohl für den Käufer als auch für den Verkäufer den Wert Null. Diese Festlegung der Bewertungen des Kunstgegenstandes bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, da die Nullpunkte der Nutzenskalen und die Geldeinheit willkürlich gewählt werden können.

Für die Modellierung der Verhandlungssituation wird die einfachste Form gewählt, nämlich die des Einstimmigkeitsspiels: Käufer und Verkäufer machen gleichzeitig und unabhängig voneinander je einen Preisvorschlag. Falls beide Vorschläge übereinstimmen, ist eine Einigung bei diesem Preis erzielt, andernfalls kommt es nicht zu einem Vertragsabschluß.

Der Käufer hat auch die Möglichkeit, die Verhandlungen ganz abzulehnen und überhaupt keinen Preisvorschlag zu machen.

Das Spiel soll mit Hilfe der Gleichgewichtsauswahltheorie von Harsanyi und Selten [1980] analysiert werden. Diese Theorie erlaubt es, einen Gleichgewichtspunkt als Lösung auszusondern. In unserem Fall bestimmt die Lösung, falls überhaupt ein Verhandlungsspielraum vorhanden ist, eindeutig einen Verkaufspreis für den Kunstgegenstand.

Falls die Wahrscheinlichkeit w dafür, daß eine Fälschung vorliegt, nicht zu groß ist, ergibt sich ein Lösungspreis, der in einem hier noch nicht näher erläuterten Sinn dem Verkäufer, der ein Original besitzt, und dem Käufer gleiche Anteile des Fälschungsrisikos aufbürdet. Überschreitet jedoch der Parameter w einen kritischen Wert, so ändert sich der Charakter der Lösung: der Käufer muß nun einen Preis bezahlen, der ihm in Anbetracht des Fälschungsrisikos gerade noch einen positiven Gewinn zumißt.

2. Das Verhandlungsspiel

Das Verhandlungsspiel ist ein Spiel mit unvollständiger Information im Sinne von Harsanyi [1968]. In derartigen Spielen erweist es sich als zweckmäßig, das eigentliche Spiel durch ein anderes Spiel zu ersetzen, das Typenspiel genannt wird. Typen sind mögliche Beschreibungen von Akteuren. Die Unvollständigkeit der Information besteht darin, daß nicht genau bekannt ist, welche der möglichen Beschreibungen eines Akteurs zutreffend ist. Das Typenspiel modelliert die Typen eines Akteurs als verschiedene Spieler.

In unserem Fall hat der Verkäufer zwei Typen, die wir als die Spieler 1 und 2 bezeichnen wollen. Spieler 1 ist derjenige Typ, der eine Fälschung besitzt, und Spieler 2 ist derjenige, der ein Original anbietet. Der Käufer hat nur einen Typ, da über ihn vollständige Information besteht; er wird als Spieler 3 bezeichnet. Das eigentliche Spiel, in dem nur zwei Akteure vorkommen, wird also durch ein 3-Personen-Typenspiel ersetzt.

Es wird angenommen, daß nur Preise vorgeschlagen werden können, die ganzzahlige Vielfache einer vorgegebenen kleinsten Geldeinheit g sind. Außerdem sollen nur Preisvorschläge zulässig sein, die sowohl dem Verkäufer als auch dem Käufer einen Gewinn ermöglichen, falls es sich um ein Original handelt. Als vorgeschlagene Preise kommen also nur ganzzahlige Vielfache kg von g mit

$$(1) \qquad 1 < kg < h$$

infrage. Die Spieler 1 und 2 haben diese Preisvorschläge als reine Strategien. Spieler 3 hat zusätzlich noch die reine Strategie $\emptyset$, die einen Verzicht auf einen Preisvorschlag beinhaltet und als Nichtverhandlungsstrategie bezeichnet wird.

Für den Fall von nur zwei möglichen Preisvorschlägen r=1+g und s=1+2g ist das Spiel in Abbildung 1 als extensive Form wiedergegeben.

Die Gleichgewichtsauswahltheorie von Harsanyi und Selten wird nicht auf die extensive Form, sondern auf die sogenannte Agentennormalform eines Spiels angewandt, die in unserem Fall mit der Normalform des Typenspiels übereinstimmt.

Ein n-Personen-Spiel in Normalform $G = (\Phi_1,\dots,\Phi_n;H)$ besteht aus n endlichen Mengen $\Phi_1,\dots,\Phi_n$, den Mengen reiner Strategien für die Spieler 1,...,n, und einer Auszahlungsfunktion H, die jeder Strategienkombination

$$(2) \qquad \phi = (\phi_1,\dots,\phi_n) \quad \text{mit } \phi_i \in \Phi_i \text{ für } i = 1,\dots,n$$

einen Auszahlungsvektor

$$(3) \qquad H(\phi) = (H_1(\phi),\dots,H_n(\phi))$$

zuordnet.

In unserem Fall ist $\Phi_1 = \Phi_2$ die Menge der zulässigen Preisvorschläge gemäß (1). Φ_3 enthält außerdem noch das Element $\emptyset$.

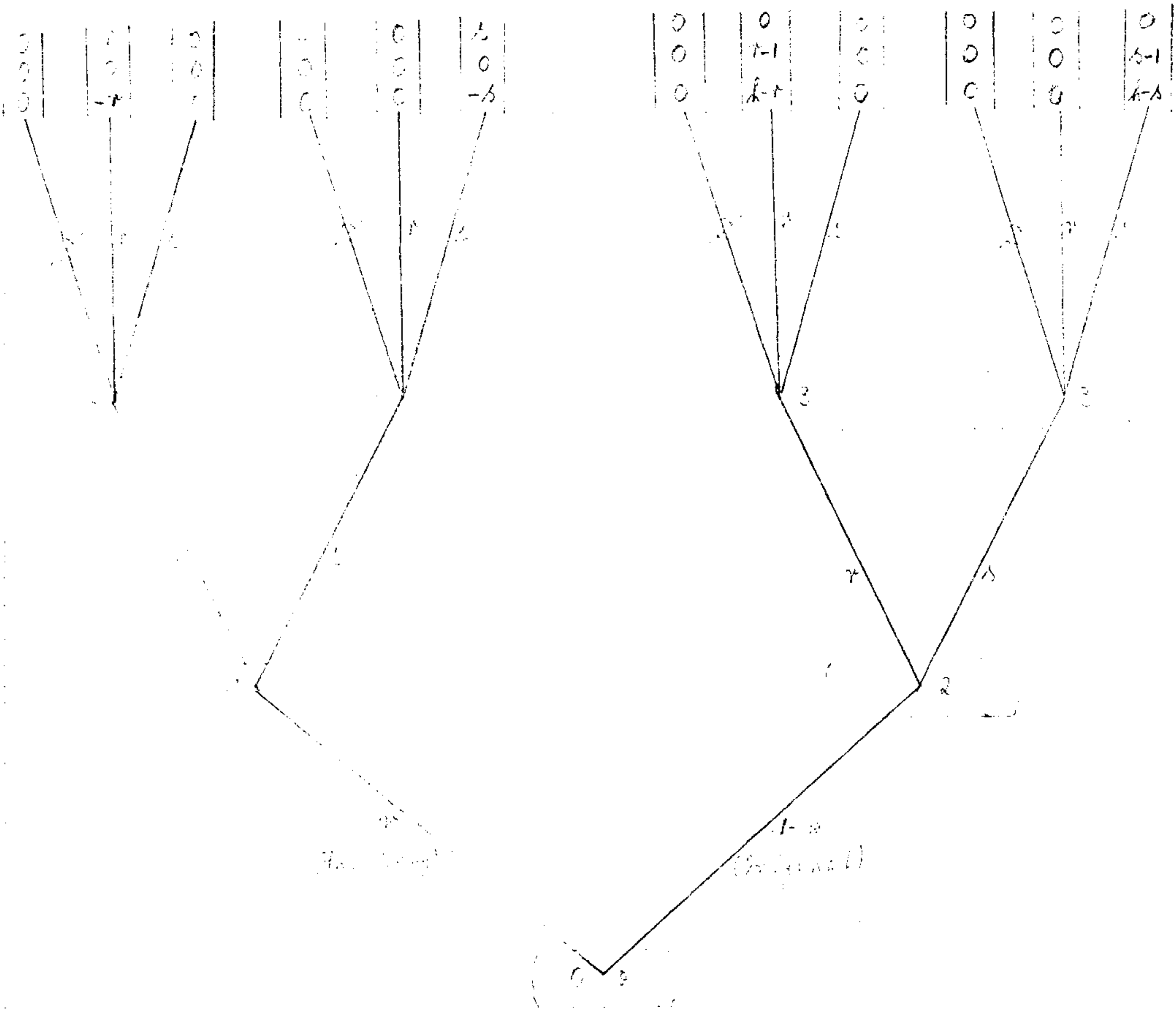


Abbildung 1: Das Verhandlungsspiel als extensive Form für den Fall von nur zwei möglichen Preisvorschlägen r und s. Die Informationsbezirke werden durch gestrichelte Linien dargestellt. Die Auszahlungen der Spieler 1, 2, 3 sind von oben nach unten über den Endpunkten vermerkt.

Es erweist sich als günstig, nicht die Normalform des Typenspieles der Analyse zugrunde zu legen, sondern eine nur unwesentlich verschiedene. Anstelle der aus der extremen Form abgeleiteten Erwartungsauszahlung wird für die Spieler 1 und 2 die bedingte Auszahlungserwartung betrachtet für den Fall, daß der entsprechende Typ tatsächlich vorliegt. Dadurch entfällt der konstante Faktor w, bzw. 1-w. Die Auszahlungen des so normierten Typenspiels $G = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3; H)$ können mit Hilfe der folgenden Hilfsvariablen b leichter zum Ausdruck gebracht werden:

(4) $$b = (1-w)h$$

Die Auszahlungen für $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ sind wie folgt:

(5) $$H_1(\phi) = \begin{cases} r & \text{für } \phi_1 = \phi_3 = r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(6) $$H_2(\phi) = \begin{cases} r-1 & \text{für } \phi_2 = \phi_3 = r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(7) $$H_3(\phi) = \begin{cases} -wr & \text{für } \phi_1 = \phi_3 = r \text{ und } \phi_2 \neq r \\ b-(1-w)r & \text{für } \phi_2 = \phi_3 = r \text{ und } \phi_1 \neq r \\ b-r & \text{für } \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Parameter h und w unterliegen den folgenden Beschränkungen:

(8) $$h > 1$$

(9) $$0 < w < 1$$

Wie wir später sehen werden, sind nur diejenigen Parameterkombinationen von Interesse, für die außerdem gilt:

(10) $$b > 1$$

Ist nämlich (10) nicht erfüllt, so gibt es keinen Gleichgewichtspunkt, in dem ein Vertrag zustande kommt.

Über die kleinste Geldeinheit g soll vorausgesetzt werden, daß die Parameter 1, h, w und b alle durch 4g ohne Rest teilbar sind. Die Analyse könnte auch ohne diese einschränkende Annahme über g durchgeführt werden. Das würde jedoch einen größeren Aufwand erfordern, der hier vermieden werden soll. Welche Probleme auftauchen, wenn die Teilbarkeitsannahme nicht erfüllt ist, und wie sie gelöst werden können, wird in einem anderen Beitrag anhand eines ähnlichen, aber einfacheren Verhandlungsproblems gezeigt (Selten-Leopold [1980]).

Die Teilbarkeitsannahme kann auch inhaltlich verteidigt werden, wenn man davon ausgeht, daß für die Bewertung des Kunstgegenstandes und die Wahrscheinlichkeit w nur hinreichend "runde" Zahlen in Frage kommen. Allerdings appelliert dieses Argument an Gesichtspunkte der eingeschränkten Rationalität, die in einer streng rationalen Analyse, wie sie hier vorgenommen werden soll, eigentlich fehl am Platze sind.

Die Teilbarkeitsannahme hat zur Folge, daß mindestens drei zulässige Preise im Bereich (1) liegen, nämlich 1+g, 1+2g, 1+3g, da 1+4g wegen (8) der kleinste Wert für den Parameter h ist.

3. Starke Gleichgewichtspunkte des Verhandlungsspiels

Im folgenden soll zunächst die Frage untersucht werden, welche starken Gleichgewichtspunkte in reinen Strategien das Verhandlungsspiel besitzt. Ein Gleichgewichtspunkt ist bekanntlich eine Strategienkombination, von der sich für keinen Spieler eine Abweichung lohnt, wenn er erwartet, daß sie von den anderen Spielern gespielt wird. Ein Gleichgewicht heißt stark, wenn jede Abweichung mit einem Verlust verbunden ist, falls die anderen Spieler ihre Gleichgewichtsstrategien spielen. Ein starker Gleichgewichtspunkt ist stets ein Gleichgewichtspunkt in reinen Strategien.

Es sei $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ ein starker Gleichgewichtspunkt des Verhandlungsspiels. Die Gleichgewichtsstrategie π_3 des Käufers kann nicht seine Nichtverhandlungsstrategie $\emptyset$ sein, da er die Auszahlung Null auch mit der Nennung eines Preises erzielen kann, der von π_1 und π_2 verschieden ist (es sind mindestens drei zulässige Preise vorhanden). Schlägt Spieler 3 einen zulässigen Preis $\pi_3=r$ vor, so ist $\pi_1=r$ und $\pi_2=r$ die einzige beste Antwort für beide Typen von Verkäufern. Ein starker Gleichgewichtspunkt muß daher die Form $\pi=(r,r,r)$ haben. Eine Strategienkombination von dieser Form kann nur dann ein starker Gleichgewichtspunkt sein, wenn sie für Spieler 3 mit einer positiven Auszahlung verbunden ist, da er ja mit Hilfe seiner Nichtverhandlungsstrategie $\emptyset$ die Auszahlung Null erzwingen kann. Mit Hilfe von (7) erkennt man sofort, daß die Auszahlung des Spielers 3 für (r,r,r) genau dann positiv ist, wenn $b > r$ gilt.

Die starken Gleichgewichtspunkte des Verhandlungsspiels sind also die reinen Strategienkombinationen von der Form (r,r,r) mit

$$(11) \qquad 1 < r < b$$

Es ist nun zu sehen, warum Parameterkombinationen mit $b\leq 1$ uninteressant sind. Ein echter Verhandlungsspielraum ist nur dann gegeben, wenn $b > 1$ gilt. Im folgenden werden wir stets davon ausgegen, daß dies der Fall ist.

Im allgemeinen hat das Verhandlungsspiel viele starke Gleichgewichtspunkte. Die Gleichgewichtsauswahltheorie von Harsanyi und Selten soll dazu herangezogen werden, einen dieser starken Gleichgewichtspunkte als Lösung herauszusondern.

Die Gleichgewichtsauswahltheorie wird strenggenommen nicht auf ein Spiel selbst, sondern auf seine uniform gestörten Spiele angewandt. In diesen Spielen ist die Strategiewahl dadurch eingeschränkt, daß jede reine Strategie (der Agentennormalform) mit einer kleinen Mindestwahrscheinlichkeit ε gewählt werden muß. Abgesehen davon stimmen die uniform gestörten Spiele mit dem eigentlichen Spiel überein. Man bestimmt die Lösung der gestörten Spiele und erhält die Lösung des eigentlichen Spiels als den Grenzwert dieser Lösungen für $\varepsilon\to 0$.

Der Umweg über die uniform gestörten Spiele sichert die Perfektheit des ausgewählten Gleichgewichtspunktes. Was unter Perfektheit zu verstehen ist, soll hier nicht näher erläutert werden (Selten [1975]). Starke Gleichgewichtspunkte sind stets perfekt.

Da wir die Analyse so wenig wie möglich mit technischen Details belasten möchten, werden wir den Umweg über die uniform gestörten Spiele nicht gehen und die Theorie stattdessen unmittelbar auf das eigentliche Verhandlungsspiel anwenden. In Fällen, in denen ein starker Gleichgewichtspunkt die Lösung ist, führt der Abkürzungsweg meist zu demselben Ergebnis. Das trifft insbesondere für den hier vorliegenden Fall zu. Die Gründe dafür sollen hier jedoch nicht näher erläutert werden. In dem bereits erwähnten anderen Beitrag, der sich mit einem ähnlichen, aber einfacheren Verhandlungsproblem befaßt, wird die Analyse mit Hilfe der uniform gestörten Spiele unverkürzt durchgeführt (Selten - Leopold [1980]).

Die Gleichgewichtsauswahltheorie kann hier nicht ausführlich dargestellt werden. Wir werden nur diejenigen Teile dieser Theorie erläutern, die für das vorliegende Problem relevant sind, und zwar stets an der Stelle, an der der Gang der Analyse dies erforderlich macht.

4. Die erste Kandidatenmenge

Die Anwendung der Gleichgewichtsauswahltheorie beginnt mit einem Reduktions- und Zerlegungsprozeß, in dem die Lösung des Spiels auf die Lösung eines oder mehrerer kleinerer Spiele zurückgeführt wird. Für den vorliegenden Fall ist dieser Prozeß ohne Bedeutung, da dieser Prozeß das Verhandlungsspiel unverändert läßt. Wir werden deshalb auf den Reduktions- und Zerlegungsprozeß nicht näher eingehen.

Bevor wir die nächsten Schritte in der Anwendung der Gleichgewichtsauswahltheorie auf unser Verhandlungsspiel ins Auge fassen können, müssen noch einige Definitionen und Bezeichnungen eingeführt werden.

Eine gemischte Strategie q_i von Spieler i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge Φ_i seiner reinen Strategien; $q_i(\phi)_i$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit der reinen Strategie ϕ_i gemäß q_i. Eine Kombination gemischter Strategien

$q = (q_1, q_2, q_3)$ enthält eine gemischte Strategie für jeden der drei Spieler.

Eine unvollständige Strategienkombination enthält für alle Spieler außer einem eine Strategie. Wir verwenden für derartige Kombinationen die Bezeichnungsweise $q_{-1} = (-, q_2, q_3)$, $q_{-2} = (q_1, -, q_3)$ bzw. $q_{-3} = (q_1, q_2, -)$. Von besonderer Bedeutung sind die unvollständigen Kombinationen reiner Strategien. Mit Φ_{-i} bezeichnen wir die Menge der unvollständigen reinen Strategienkombinationen ϕ_{-i}, in denen die Strategie des Spielers i fehlt.

Eine gemeinsame Mischung $q_{.i}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über Φ_{-i}; hierbei ist $q_{.i}(\phi_{-i})$ die Wahrscheinlichkeit, die ϕ_{-i} zugeordnet wird. Eine gemeinsame Mischung $q_{.i}$ beschreibt eine mögliche subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilung des Spielers i über das Verhalten der anderen Spieler. Obwohl die anderen Spieler unabhängig voneinander handeln, ist es möglich, daß Spieler i sich eine Erwartung bildet, die nicht einer unvollständigen Strategienkombination q_{-i} entspricht und nur durch den allgemeineren Begriff der gemeinsamen Mischung beschrieben werden kann. Spieler 3 kann zum Beispiel erwarten, daß die anderen Spieler mit Wahrscheinlichkeit z beide den Preis r und mit Wahrscheinlichkeit 1-z beide den Preis s verwenden. Für die so entstehende gemeinsame Mischung verwenden wir auch die Bezeichnungsweise:

$$(12) \qquad q_{.3}^{z} = z(r,r,-) + (1-z)(s,s,-)$$

Eine Erwartungsbildung von dieser Art ist, wie wir noch sehen werden, für die Gleichgewichtsauswahltheorie tatsächlich von Bedeutung.

Eine Hybridkombination $(q_i, q_{.i})$ besteht aus einer gemischten Strategie q_i des Spielers i und einer gemeinsamen Mischung $q_{.i}$ für die anderen Spieler. $H_i(q_i, q_{.i})$ ist die Auszahlungserwartung des Spielers i, falls er q_i spielt und die durch $q_{.i}$ beschriebenen subjektiven Erwartungen über das Verhalten der anderen Spieler hat. In dieser Weise kann der Definitionsbereich von H_i auf Hybridkombinationen ausgeweitet werden. Unvollständige Kombinationen gemischter Strategien können als spezielle gemeinsame Mischungen aufgefaßt werden. In diesem Sinne sind gemischte Strategienkombinationen spezielle Hybridkombinationen.

Eine Strageie $\tilde{q}_i$ ist eine beste Antwort auf q_{-i} bzw. $q_{.i}$, wenn sie die Auszahlung $H_i(q_i,q_{-i})$ bzw. $H_i(q_i,q_{.i})$ bezüglich q_i maximiert.

Die Gleichgewichtsauswahltheorie verlangt, daß ein nicht weiter zerlegbares oder reduzierbares Spiel auf bestimmte Substrukturen hin untersucht wird, die Formationen genannt werden. Eine Formation F eines Spieles $G = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n;H)$ in Normalform ist ein Spiel $F = (\Psi_1,\ldots,\Psi_n;H')$ in Normalform mit folgenden Eigenschaften:

a) Die reinen Strategienmengen Ψ_i sind Teilmengen der entsprechenden reinen Strategienmengen Φ_i.

b) H' ist die Einschränkung von H auf die Strategienkombinationen von F.

c) F ist im folgenden Sinne abgeschlossen gegenüber besten Antworten in G. Es sei $q_{.i}$ eine gemeinsame Mischung in G, die nur solchen unvollständigen reinen Kombinationen ϕ_{-i} positive Wahrscheinlichkeiten zuordnet, die auch in F vorkommen. Eine derartige gemeinsame Mischung in G heißt F-zulässig. Abgeschlossenheit gegenüber besten Antworten bedeutet, daß jede reine Strategie ϕ_i, die beste Antwort auf eine F-zulässige gemeinsame Mischung $q_{.i}$ in G ist, stets zu der Strategienmenge Ψ_i des betreffenden Spielers in F gehört.

Eine Formation F heißt primitiv, wenn sie selbst keine Formationen enthält, die nicht mit ihr übereinstimmen.

Es sei $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$ ein starker Gleichgewichtspunkt von G. Dann ist offensichtlich $F = (\Psi_1,\ldots,\Psi_n;H')$ mit $\Psi_i = \{\pi_i\}$ für $i = 1,\ldots,n$ und H' wie in b) eine primitive Formation von G. Diese Form F heißt die von π erzeugte Formation. Es kann natürlich auch primitive Formationen mit mehrelementigen reinen Strategienmengen Ψ_i geben.

Die Lösungen der primitiven Formationen werden in der Gleichgewichtsauswahltheorie als natürliche Kandidaten für die Lösung des Spiels betrachtet. Die Menge aller Lösungen von primitiven Formationen wird mit Ω_1 bezeichnet und erste Kandidatenmenge genannt. Mit dieser Art der Vorauswahl versucht man dem Ideal des starken Gleichgewichtspunktes so nahe wie möglich zu kommen. Da es Spiele ohne starke Gleichgewichtspunkte gibt, kann Ω_1 nicht einfach als die Menge der starken Gleichgewichtspunkte definiert werden.

Es soll nun gezeigt werden, daß das Verhandlungsspiel außer den von den starken Gleichgewichtspunkten erzeugten primitiven Formationen keine anderen primitiven Formationen besitzt.

Es sei F eine primitive Funktion. Es sei r ein Preisvorschlag mit $r \in \Psi_3$. Dann muß r als einzige beste Antwort auch in Ψ_1 und Ψ_2 enthalten sein. Falls $r < b$ gilt, muß F die von (r,r,r) erzeugte primitive Formation sein. Falls $r \geq b$ gilt, ist $\emptyset$ eine beste Antwort des Spielers 3 auf (r,r,-). Jede Strategie s mit $s < b$ ist eine beste Antwort der Spieler 1 und 2 auf die Wahl von $\emptyset$ durch Spieler 3. Daraus ergibt sich, daß s auch in Ψ_3 liegen muß. Wenn das der Fall ist, kann F nicht primitiv sein. Aus dieser Überlegung ergibt sich auch, daß F nicht primitiv sein kann, falls $\emptyset \in \Psi_3$ gilt. Damit ist gezeigt, daß die primitiven Formationen des Verhandlungsspiels genau diejenigen sind, die von den starken Gleichgewichtspunkten erzeugt werden.

Aus dem bisherigen ergibt sich, daß die erste Kandidatenmenge Ω_1 die Menge der starken Gleichgewichtspunkte ist, d.h. die Menge der reinen Strategienkombination (r,r,r) mit $1 < r < b$.

5. Dominanzvergleiche

In der Gleichgewichtsauswahltheorie werden zwei Dominanzrelationen dazu herangezogen, eine weitere Auswahl in der ersten Kandidatenmenge Ω_1 vorzunehmen. Es handelt sich dabei um die Auszahlungsdominanz und um die Risikodominanz. Die Dominanzvergleiche zwischen zwei Kandidaten U und V werden nicht in dem eigentlichen Spiel, sondern in einem zu dem Vergleich gehörigen restringierten Spiel durchgeführt. Falls alle Spieler in U und V verschiedene Strategien verwenden, ist das restringierte Spiel nichts anderes als die kleinste Formation, die U und V enthält. Das ist für unser Verhandlungsspiel stets der Fall.

U ist auszahlungsdominant gegenüber V, falls für alle Spieler i des restringierten Spiels $H_i(U) > H_i(V)$ gilt. In unserem Falle bedeutet das, daß die Ungleichung für $i = 1, 2, 3$ erfüllt sein muß. Bevor wir zur Definition der Risikodominanz übergehen, soll noch darauf hingewiesen werden, daß für unser Verhandlungsspiel niemals eine Auszahlungsdominanz zwischen zwei starken Gleichgewichtspunkten vorkommen kann. Das ergibt sich unmittelbar daraus, daß eine höhere Auszahlung für den Käufer mit niedrigeren Auszahlungen für die Verkäufer verbunden ist.

Die Definition der Risikodominanz erfordert eine Reihe von Vorbereitungen. Falls alle Spieler in U und V verschiedene Strategien verwenden, kommt es von Ausnahmefällen abgesehen nicht darauf an, ob die Überprüfung der Risikokdominanz im restringierten Spiel oder im eigentlichen Spiel vorgenommen wird. Die Ausnahmefälle sind diejenigen, in denen die logarithmische Version der Spurprozedur angewendet werden muß, von der noch die Rede sein wird. Derartige Ausnahmefälle werden in unserer Analyse nicht vorkommen. Deshalb werden wir uns der Einfachheit halber bei der Definition der Risikodominanz direkt auf das eigentliche Spiel beziehen und den Unterschied zwischen restringiertem Spiel und eigentlichem Spiel außer Acht lassen.

Der Begriff der Risikodominanz stützt sich auf die von Harsanyi entwickelte Spurprozedur. Diese Prozedur modelliert einen Denkprozeß,der durch kontinuierliche Abänderung von einer anfänglichen Apriori-Strategienkombination $p = (p_1,...,p_n)$ zu einem Gleichgewichtspunkt des Spiels führt. Die Apriori-Strategienkombination kann dabei als eine "naive" Verhaltenstheorie betrachtet werden, die lediglich als Ausgangspunkt weiterer Überlegungen dient. Das Ergebnis der Anwendung der Spurprozedur auf p ist ein eindeutig bestimmter Gleichgewichtspunkt T(G,p) des Spiels G.

Bei der Definition der Risikodominanz zwischen zwei Kandidaten U und V wird eine spezielle Apriori-Strategienkombination p zugrunde gelegt, die die bizentrische Apriori-Strategienkombination für U and V genannt wird. U risikodominiert V, falls für dieses p das Ergebnis der Spurprozedur T(G,p) der Gleichgewichtspunkt U ist. Falls T(G,p) = V gilt, wir U von V risikodominiert. Es kann auch vorkommen, daß T(G,p) weder mit U noch mit V übereinstimmt; dann besteht keine Risikodominanzbeziehung zwischen U und V.

Man sagt, daß U den Gleichgewichtspunkt V dominiert, falls U entweder gegenüber V auszahlungsdominant ist oder falls keine Auszahlungsdominanz zwischen U und V besteht und gleichzeitig U risikodominant gegenüber V ist. In dieser Dominanzrelation wird der Auszahlungsdominanz absoluter Vorrang vor der Risikodominanz gegeben. Für das hier vorliegende Verhandlungsspiel ist jedoch Dominanz stets gleichbedeutend mit Risikodominanz, da, wie bereits ausgeführt worden ist, Auszahlungsdominanzbeziehungen nicht vorkommen.

Die noch fehlenden Teile der Definition der Risikodominanz werden in den beiden nächsten Abschnitten erläutert.

6. Bizentrische Apriori-Kombination

Die bizentrische Apriori-Kombination $p = (p_1,\dots,p_n)$ für den Vergleich zwischen zwei Gleichgewichtspunkten $U = (U_1,\dots,U_n)$ und $V = (V_1,\dots,V_n)$ kann als eine "naive" Verhaltenstheorie aufgefaßt werden, der die folgenden Annahmen zugrunde liegen:

(i) Spieler i glaubt, daß entweder alle anderen Spieler ihre Gleichgewichtsstrategien in U oder alle anderen Spieler ihre Gleichgewichtsstrategien in V spielen $(i = 1,\dots,n)$.

(ii) Spieler i hat eine subjektive Wahrscheinlichkeit z, mit der er U_{-i} erwartet. Die Wahrscheinlichkeit für V_{-i} ist dementsprechend 1-z.

(iii) Spieler i wählt eine reine beste Antwort auf $z\,U_{-i}+(1-z)V_{-i}$. Sind mehrere beste Antworten vorhanden, so werden alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ausgewählt.

(iv) Die subjektive Wahrscheinlichkeit z des Spielers i für U_{-i} ist eine über dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Zufallsvariable.

(v) Die Wahrscheinlichkeit $p_i(\varphi_i)$ für φ_i in der bizentrischen Apriori-Strategie p_i von Spieler i ist die Wahrscheinlichkeit, mit der er unter den Annahmen (i) bis (iv) die reine Strategie φ_i wählt.

Die Annahme (i) beruht auf der Vorstellung des Spielers i, daß nur U oder V als Lösung des Spiels in Frage kommen, und daß er als einziger nicht weiß, welcher der beiden Gleichgewichtspunkte die Lösung ist.

Wir können nun untersuchen, welche bizentrischen Apriorikombinationen sich für den hier vorliegenden Fall beim Vergleich zwischen zwei Kandidaten $U = (r,r,r)$ und $V = (s,s,s)$ ergeben. Hierzu ist es erforderlich festzustellen, welches die besten Antworten auf $z\,U_{-i} + (1-z)V_{-i}$ sind.

r ist beste Antwort des Spielers 1 auf $z\,U_{-1} + (1-z)V_{-1}$, falls gilt:

$$(13)\quad z(H_1(r,r,r) + (1-z)H_1(r,s,s) \geq zH_1(s,r,r) + (1-z)H_1(s,s,s)$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$(14)\quad rz \geq s(1-z)$$

Da z über $[0,1]$ gleichverteilt ist, ist die Wahrscheinlichkeit, daß (14) erfüllt ist, wie folgt:

$$(15)\quad p_1(r) = \frac{r}{r+s}$$

Daraus ergibt sich

$$(16)\quad p_1(s) = \frac{s}{r+s}$$

Führt man analoge Überlegungen für die Spieler 2 und 3 durch, so kommt man zu folgenden Ergebnissen:

$$(17) \qquad p_2(r) = \frac{r-1}{r+s-2}$$

$$(18) \qquad p_2(s) = \frac{s-1}{r+s-2}$$

$$(19) \qquad p_3(r) = \frac{b-r}{2b-r-s}$$

$$(20) \qquad p_3(s) = \frac{b-s}{2b-r-s}$$

7. Die Spurprozedur

Die Spurprozedur betrachtet eine Familie von Spielen $G^t = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n,H^t)$, die mit dem zugrunde liegenden Spiel $G = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n;H)$ wie folgt zusammenhängen:

$$(21) \qquad H_i^t(\varphi)=(1-t)H_i(\varphi_i,p_{-i}) + t\,H_i(\varphi)$$

für $i = 1,\ldots,n$ und $0 \leq t \leq 1$. Für $t = 0$ hängt die Auszahlung H_i^t nur von der eigenen Strategie und den Apriori-Strategien der anderen Spieler ab. Dies entspricht einer Situation, in der Spieler i seine Erwartungen über das Verhalten der anderen Spieler gänzlich auf die Apriori-Strategienkombination p stützt. Für $t = 1$ ergibt sich das eigentliche Spiel G. Je größer der Parameter t ist, desto weniger Vertrauen schenken die Spieler der in der Apriori-Strategienkombination zum Ausdruck kommenden naiven Theorie.

Für jedes t mit $0 \leq t \leq 1$ wird die Menge aller Paare (q,t) mit der Eigenschaft, daß q ein Gleichgewichtspunkt von G^t ist, mit E^t bezeichnet. E ist die Vereinigung aller E^t mit $0 \leq t \leq 1$. Wir nennen E den Gleichgewichtsgraphen. E kann offensichtlich als Teilmenge eines Euklidischen Raumes aufgefaßt werden, in dem alle Paare von der Form (q,t) liegen, wobei q eine gemischte Strategienkombination für G ist.

Von Grenzfällen abgesehen gibt es nur eine beste Antwort auf die Apriori-Strategienkombination p. Es sei dies die reine Strategienkombination $\pi = (\pi_1,\ldots,\pi_n)$. Offenbar ist π ein Gleichgewichtspunkt von G^0. Wie Harsanyi gezeigt hat, gibt es von Grenzfällen abgesehen genau einen stetigen Pfad im Gleichgewichtsgraphen E, der $(\pi,0)$ mit einem Paar von der Form $(q^*,1)$ verbindet (Harsanyi [1975]). q^* ist ein Gleichgewichtspunkt von G, der durch die Anwendung der Spurprozedur auf p eindeutig bestimmt ist. Dieses q^* wird mit T(G,p) bezeichnet.

Die Spurprozedur in der hier angegebenen Form wird lineare Spurprozedur genannt. Es gibt Grenzfälle, in denen die lineare Spurprozedur kein eindeutiges Ergebnis liefert. In diesen Fällen muß eine modifizierte Version der Spurprozedur, die sogenannte logarithmische Spurprozedur, angewandt werden, um T(G,p) zu bestimmen. Wir werden jedoch derartige Grenzfälle hier nicht untersuchen und verzichten deshalb auf eine Beschreibung der logarithmischen Spurprozedur.

Der Parameter t kann mit einigen Vorbehalten als Zeitvariable aufgefaßt werden. Diese Deutung ist nicht ganz korrekt, da der Pfad von $(\pi,0)$ nach $(q^*,1)$ streckenweise auch in dem Sinne rückwärts verlaufen kann, daß t abnimmt. Trotzdem wollen wir bequeme Sprechweisen verwenden, die von der Zeitdeutung für t ausgehen.

In einfachen Fällen, wie wir sie hier untersuchen werden, hat der von der Spurprozedur ausgezeichnete Pfad einen typischen Verlauf, den wir wie folgt beschreiben können: Der Pfad beginnt mit $(\pi,0)$ und bleibt bis zu einem Zeitpunkt t' auf Kombinationen von der Form (π,t). Im Spiel $G^{t'}$ gibt es einen Spieler i, für den π_i nicht mehr die einzige beste Antwort ist. In $G^{t'}$ hat dieser Spieler i eine zweite reine beste Antwort ψ_i auf π. Wir nennen diesen Spieler i den ersten Umsteiger und t' die erste Umschlagszeit.

Es sei q_i eine gemischte Strategie des Spielers i, die nur den reinen Strategien π_i und ψ_i positive Wahrscheinlichkeiten zuordnet. In vielen Fällen sind alle Kombinationen von der Form (q_i,π_{-i}) mit einem derartigen q_i Gleichgewichtspunkte von $G^{t'}$. Das ist immer dann der Fall, wenn (ψ_i,π_{-i}) ein Gleichgewichtspunkt von $G^{t'}$. Falls der Pfad durch die lineare Spurprozedur eindeutig bestimmt ist, setzt er sich nach Durchlaufen dieser Gleichgewichtspunkte von $G^{t'}$ von $((\psi_i,\pi_{-i}),t')$ über Kombinationen von der Form $((\psi_i,\pi_{-i}),t)$ bis zu einer zweiten Umschlagszeit t" fort. Im Spiel $G^{t''}$ ist die Situation ähnlich wie im Spiel $G^{t'}$: Ein Spieler j (der Fall i = j ist nicht ausgeschlossen) ist der zweite Umsteiger, der hier zwischen zwei reinen Strategien indifferent wird.

In dieser Weise kann die Spurprozedur mehrmals umschlagen, bis schließlich ein Gleichgewichtspunkt des eigentlichen Spiels erreicht wird. Es kann allerdings auch vorkommen, daß in einem der Umschlagszeitpunkte, zum Beispiel t', die Situation eintritt, daß (ψ_i,π_{-i}) kein Gleichgewichtspunkt von $G^{t'}$ ist und deshalb der Pfad nicht in der oben beschriebenen Weise weiterlaufen kann. In derartigen Situationen wird der Pfad häufig rückläufig, d.h. von t' werden abnehmende t-Werte durchlaufen. Wir werden jedoch derartige Fälle im vorliegenden Verhandlungsspiel nicht zu betrachten haben.

Es kann vorkommen, daß die eindeutig bestimmte beste Antwort π auf p bereits ein Gleichgewichtspunkt von G ist. Der Pfad der Spurprozedur verharrt dann bei dieser Strategienkombination π, die deshalb das Ergebnis T(G,p) der Spurprozedur wird.

Falls die beste Antwort π auf die bizentrische Apriori-Strategienkombination p kein Gleichgewichtspunkt von G ist, kommt es darauf an, zunächst einmal festzustellen, wer der erste Umsteiger ist. Man bestimmt deshalb für jeden Spieler i eine Umschlagszeit t_i mit der Eigenschaft, daß er in G^{t_i} erstmalig neben π_i noch eine andere reine Strategie ψ_i als beste Antwort auf π_{-i} hat. Es kann natürlich auch Spieler geben, die im Intervall $0 \leq t \leq 1$ niemals in diese Situation kommen können. Um festzustellen, wer der erste Umsteiger ist, muß man herausfinden, welche Umschlagszeit t_i die kleinste ist. Bei der Bestimmung der zweiten Umschlagszeit verfährt man ganz analog.

8. Beste Antworten auf die bizentrische Apriori-Kombination

Wie wir bereits ausgeführt haben, risikodominiert $U = (r,r,r)$ den Gleichgewichtspunkt $V = (s,s,s)$, falls für die zugehörige bizentrische Apriori-Kombination $T(G,p) = U$ gilt. Die Überprüfung der Risikodominanz zwischen U und V erfordert also die Anwendung der Spurprozedur auf p. Als erstes muß untersucht werden, welche reinen Strategienkombinationen für welche Parameterkombinationen einzige beste Antworten auf die bizentrische Apriori-Strategienkombination p sind.

Wir werden im folgenden immer voraussetzen, daß $r < s$ gilt. Hierin liegt keine Einschränkung der Allgemeinheit. Wir untersuchen zunächst die Bedingungen, unter denen r bzw. s einzige beste Antwort auf p_{-1} ist. Es gilt

$$(21) \qquad H_1(r,p_{-1}) = p_3(r)r$$

$$(22) \qquad H_1(s,p_{-1}) = p_3(s)s$$

Da beide Auszahlungen positiv sind und mit einer anderen Strategie als r und s nur die Auszahlung Null erzielt werden kann, kommen von vornherein nur r und s als beste Antworten auf p_{-1} in Frage.

r ist genau dann einzige beste Antwort auf p_{-1}, wenn die Auszahlung in (21) größer als die in (22) ist. Aus (19) und (20) ergibt sich, daß dies genau dann der Fall ist, wenn gilt:

$$(23) \qquad \frac{r(b-r)}{2b-r-s} > \frac{s(b-s)}{2b-r-s}$$

Da r und s kleiner als b sind, ist (23) gleichbedeutend mit

$$(24) \qquad (s-r)(r+s-b) > 0$$

Falls die umgekehrte Ungleichung besteht, ist s die einzige beste Antwort von Spieler 1. Da $s > r$ ist, gilt für die beste Antwort π_1 auf p_{-1}:

$$(25) \qquad \pi_1 = \begin{cases} r & \text{für} \quad b < r+s \\ s & \text{für} \quad b > r+s \end{cases}$$

Wir untersuchen nun in derselben Weise die beste Antwort π_2 des Spielers 2 auf p_{-2}. Es gilt:

$$(26) \qquad H_2(r,p_{-2}) = \frac{(r-1)(b-r)}{2b-r-s}$$

$$(27) \qquad H_2(s,p_{-2}) = \frac{(s-1)(b-s)}{2b-r-s}$$

Andere beste Antworten als r oder s kommen nicht in Frage, da beide Auszahlungen positiv sind. Daraus ergibt sich als Bedingung für $\pi_2 = r$ als einzige beste Antwort die Ungleichung:

$$(28) \qquad b + 1 < r + s$$

Deshalb gilt

$$(29) \qquad \pi_2 = \begin{cases} r & \text{für } b+1 < r+s \\ s & \text{für } b+1 > r+s \end{cases}$$

Die Auszahlungen, die Spieler 3 mit r und s gegen p_{-3} erzielen kann, sind wie folgt:

$$(30) \qquad H_3(r,p_{-3}) = -w\,\frac{r^2}{r+s} + (1-w)\,\frac{(h-r)(r-1)}{r+s-2}$$

$$(31) \qquad H_3(s,p_{-3}) = -w\,\frac{s^2}{r+s} + (1-w)\,\frac{(h-s)(s-1)}{r+s-2}$$

Um zu zeigen, daß die Auszahlung in (31) stets positiv ist, verwenden wir die folgende Umfornung des Ausdrucks auf der rechten Seite:

$$(32) \qquad H_3(s,p_{-3}) = \frac{(b-s)(s-1)(r+s) + w(s-r)}{(r+s)\ (r+s-2)}$$

Da r und s zwischen 1 und b liegen und s > r ist, ist die rechte Seite von (32) positiv. Deshalb kommen nur r und s als beste Antworten auf p_{-3} in Frage; alle anderen reinen Strategien würden Null liefern. Als Bedingung dafür, daß r einzige beste Antwort auf p_{-3} ist, erhält man die Ungleichung:

(33) $b + 1 + w < r + s$

s ist einzige beste Antwort, wenn die umgekehrte Ungleichung gilt. Damit ergibt sich

$$(34) \qquad \pi_3 = \begin{cases} r & \text{für } b+1+w < r+s \\ s & \text{für } b+1+w > r+s \end{cases}$$

Aus (25), (29) und (34) ergibt sich, daß nur vier Kombinationen $\pi = (\pi_1,\pi_2,\pi_3)$ als Kombinationen einziger bester Antworten auf p in Frage kommen:

$$(35) \qquad \pi = \begin{cases} (s,s,s) & \text{für} \quad r+s < b \\ (r,s,s) & \text{für} \quad b<r+s<b+1 \\ (r,r,s) & \text{für} \quad b+1<r+s<b+1+w \\ (r,r,r) & \text{für} \quad b+1+w<r+s \end{cases}$$

Mit (35) haben wir bis auf Grenzfälle einen vollständigen Überblick über die besten Antworten auf die bizentrische Apriori-Kombination gewonnen. In den beiden Fällen, in denen die Gleichgewichtspunkte U = (r,r,r) und V = (s,s,s) als einzige beste Antworten auf p auftauchen, ist damit schon die Frage der Risikodominanz entschieden. Diese Gleichgewichtspunkte sind in den entsprechenden Fällen das Ergebnis der Spurprozedur. U risikodominiert V für $b+1+w < r+s$ und V dominiert U für $r+s < b$.

9. Der Fall $\pi = (r,s,s)$

In (35) bleiben noch zwei Fälle offen, in denen die Risikodominanz mit Hilfe der Spurprozedur entschieden werden muß. Wir betrachten zunächst den Fall $b<r+s<b+1$, in dem $\pi=(r,s,s)$ gilt. Spieler 3 kann nicht erster Umsteiger sein, da $H_3^t(r,s,s)$ mit zunehmendem t zunimmt. Die verlustbringende Wahrscheinlichkeit, mit dem Spieler 1 einen Vertrag einzugehen, wird mit zunehmendem t geringer. Außerdem ist diese Auszahlung positiv. Die Auszahlung für (r,s,r) nimmt dagegen für alle t ab. Aus diesen Überlegungen ergibt sich auch ohne ausführ-

liche Berechnungen, daß Spieler 3 nicht erster Umsteiger sein kann.

Ebenso kann leicht eingesehen werden, daß Spieler 2 nicht erster Umsteiger sein kann. Seine Auszahlung $H_2^t(r,s,s)$ ist positiv und nimmt ebenfalls mit zunehmendem t zu, da die Wahrscheinlichkeit des Vertragsabschlusses mit t anwächst. Die Auszahlung $H_2^t(r,r,s)$ nimmt dagegen mit zunehmendem t ab.

Aus dem bisherigen ergibt sich, daß Spieler 1 der erste Umsteiger sein muß. Sobald er zu s überwechselt, wird mit (s,s,s) eine Kombination erreicht, die bis $t = 1$ nicht mehr verlassen wird. Der Übergang des im Besitz der Fälschung befindlichen Spielers 1 von r nach s verringert die Auszahlung des Spielers 3. Diese Auszahlung bleibt jedoch positiv, da (s,s,s) ein starker Gleichgewichtspunkt ist und die Auszahlung des Spielers 3 für (s,p_{-3}) ebenfalls positiv und größer als diejenige für (r,p_{-3}) ist.

Damit ist gezeigt, daß auch für $b<r+s<b+1$ der Gleichgewichtspunkt $V = (s,s,s)$ das Ergebnis $T(G,p)$ der Spurprozedur ist. Auch hier wird U von V risikodominiert.

Im Sonderfall $r+s=b$ hat Spieler 1 zwei reine beste Antworten auf p_{-1}, nämlich r und s. Trotzdem bestimmt auch hier die lineare Spurprozedur eindeutig einen Pfad. Nur die beste Antwort $\pi_1 = s$ kann stetig fortgesetzt werden, da für sehr kleine positive t dies die einzige beste Antwort in G^t ist. Man könnte hier von einer ersten Umschlagszeit $t' = 0$ sprechen.

Aus dem bisherigen ergibt sich, daß für $r+s<b+1$ der Gleichgewichtspunkt $U = (r,r,r)$ von $V = (s,s,s)$ risikodominiert wird.

10. <u>Der Fall $\pi = (r,r,s)$</u>

Wir betrachten nun den Fall $b+1 < r+s < b+1+w$, in dem $\pi = (r,r,s)$ die einzige beste Antwort auf die bizentrische Apriori-Kombination p ist. Hier kann nicht ohne weiteres, wie im vorherigen Abschnitt, durch inhaltliche Betrachtungen einer der Spieler als erster Umsteiger ausgeschlossen werden. Wir müssen für alle drei Spieler die Umschlagszeiten t_i

untersuchen und miteinander vergleichen. Spieler 1 kann in allen Spielen G^t nur mit r oder s eine positive Auszahlung erzielen, wenn Spieler 3 die Strategie s wählt. Es kommt daher für ihn nur ein Umschlag von r nach s in Frage. Die Umschlagszeit t_1 ergibt sich als Lösung der Gleichung

$$(36) \qquad H_1^{t_1}(r,r,s) = H_1^{t_1}(s,r,s)$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$(37) \qquad (1-t_1)H_1(r,p_{-1}) = (1-t_1)H_1(s,p_{-1})+t_1 s$$

$$(38) \qquad (1-t_1)(H_1(r,p_{-1}) - H_1(s,p_{-1})) = t_1 s$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$(39) \qquad H_1(r,p_{-1})- H_1(s,p_{-1}) = (s-r)\,\frac{r+s-b}{2b-r-s}$$

Aus (38) und (39) ergibt sich die folgende Gleichung:

$$(40) \qquad \frac{t_1}{1-t_1} = \frac{s-r}{s} \cdot \frac{r+s-b}{2b-r-s}$$

Es ist nicht nötig, diese Gleichung nach t_1 aufzulösen, da wir anstelle der Umschlagszeiten t_i die Umschlagsquotienten

$$(41) \qquad \tau_i = \frac{t_i}{1-t_i}$$

miteinander vergleichen können.

Wir betrachten nun die Umschlagszeit t_2. Spieler 2 kann in den Spielen G^t ebenso wie Spieler 1 nur für r oder s eine positive Auszahlung erzielen, wenn Spieler 3 die Strategie s wählt. Auch für ihn kommt daher nur ein Umschlag nach s in Frage. Aus der zu (36) analogen Gleichung ergibt sich anstelle von (38):

$$(42) \qquad (1-t_2)(H_2(r,p_{-2})-H_2(s,p_{-2})) = t_2(s-1)$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$(43) \qquad H_2(r,p_{-2})-H_2(s,p_{-2}) = (s-r)\,\frac{r+s-b-1}{2b-r-s}$$

Daraus folgt

$$(44) \qquad \tau_2 = \frac{s-r}{s-1} \cdot \frac{r+s-b-1}{2b-r-s}$$

Wir wenden uns nun der Situation des Spielers 3 zu. Da sowohl $H_3(s,p_{-3})$ als auch $H_3(s,s,s)$ positiv sind, kommt für Spieler 3 nur ein Umschlag von s nach r in Frage. Mit zunehmendem t wird (r,r,r) trotz des Betrugsrisikos schließlich attraktiver als (r,r,s), da die Wahrscheinlichkeit, zu s einen Vertrag abzuschließen, mit wachsendem t immer kleiner wird. Aus der zu (36) analogen Gleichung ergibt sich anstelle von (38):

$$(45) \qquad (1-t_3)(H_3(s,p_{-3})-H_3(r,p_{-3})) = t_3(b-r)$$

Es gilt:

$$(46) \qquad H_3(r,p_{-3})-H_3(s,p_{-3}) = (s-r) \; \frac{r+s-b-1-w}{r+s-2}$$

Daraus ergibt sich

$$(47) \qquad \tau_3 = \frac{s-r}{b-r} \cdot \frac{1+b+w-r-s}{r+s-2}$$

Es soll nun nachgewiesen werden, daß stets die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$(48) \qquad \tau_1 > \tau_2$$

Die Ungleichung (48) hat zur Folge, daß Spieler 1 nicht erster Umsteiger sein kann. Wegen s>r ist (48) gleichbedeutend mit

$$(49) \qquad (s-1)(r+s-b) > s(r+s-1-b)$$

Durch Umrechnung erkennt man, daß die Ungleichung für b>r stets erfüllt ist. Da b>r für starke Gleichgewichtspunkte (r,r,r) gegeben sein muß, kann also Spieler 1 nicht erster Umsteiger sein. Um festzustellen, wer erster Umsteiger ist, müssen wir τ_2 und τ_3 vergleichen.

Bevor wir uns dem Vergleich zwischen τ_2 und τ_3 zuwenden, wollen wir die Konsequenzen von $\tau_2 < \tau_3$ bzw. $\tau_2 > \tau_3$ näher betrachten. Falls $\tau_2 < \tau_3$ gilt, so ist Spieler 2 der erste Umsteiger. In G^{t_2} ist nicht nur (r,r,s), sondern auch (r,s,s) ein Gleichgewichtspunkt, denn der Übergang des Spielers 2 von r nach s beeinflußt die Auszahlung des Spielers 1 nicht und verstärkt den Anreiz für Spieler 3, die Strategie s zu wählen. Der Pfad der Spurprozedur bewegt sich daher in E^{t_2} von (r,r,s) nach (r,s,s). Die dann entstehende Situation ist im wesentlichen dieselbe wie diejenige, die für π=(r,s,s) vorliegt. Als zweiter Umsteiger kommt nur Spieler 1 in Frage und der Umschlag erfolgt nach (s,s,s). Daraus ergibt sich, daß für $\tau_2 < \tau_3$ der Kandidat U = (r,r,r) von V = (s,s,s) risikodominiert wird.

Falls $\tau_2 > \tau_3$ gilt, ist Spieler 3 der erste Umsteiger und der Umschlag erfolgt nach (r,r,r). Daraus ergibt sich, daß für $\tau_2 > \tau_3$ der Kandidat U = (r,r,r) den Gleichgewichtspunkt V = (s,s,s) risikodominiert.

Um festzustellen, welcher der beiden Gleichgewichtspunkte U = (r,r,r) und V = (s,s,s) für π = (r,r,s) der risikodominante ist, betrachten wir die Bedingung dafür, daß $\tau_2 < \tau_3$ gilt:

$$(50) \quad \frac{1}{s-1} \cdot \frac{r+s-1-b}{2b-r-s} < \frac{1}{b-r} \cdot \frac{1+b+w-r-s}{r+s-2}$$

Die umgekehrte Ungleichung besteht für $\tau_2 > \tau_3$. Ob U oder V der risikodominante Gleichgewichtspunkt ist, hängt also im Fall π = (r,r,s) davon ab, ob (50) oder die umgekehrte Ungleichung erfüllt ist.

Um den Überblick über die Risikodominanzbeziehungen zu vervollständigen, betrachten wir noch die Grenzfälle r+s = 1+b+w und r+s = 1+b. Die Grenzfälle, die sich ergeben, wenn beide Seiten von (50) gleich sind, sollen nicht näher untersucht werden, da dies zur Bestimmung der Lösung nicht erforderlich ist. Im Fall r+s = 1+b+w hat Spieler 3 die beiden reinen besten Antworten r und s auf p_{-3}. Für hinreichend kleine positive t ist jedoch nur r beste Antwort von 3 in G^t auf (r,r,-). Daher ist auch hier der Pfad der Spurprozedur eindeutig bestimmt, er führt zu (r,r,r) und U risikodominiert V.

Im Grenzfall r+s = 1+b hat Spieler 2 die beiden besten Antworten r und s auf p_{-2}. Für hinreichend kleine positive t ist jedoch nur s beste Antwort auf (r,-,s) in G^t. Daher ist für diesen Grenzfall (s,s,s) das Ergebnis der Spurprozedur und V = (s,s,s) risikodominiert U = (r,r,r).

Wir haben mit Ausnahme der Grenzfälle für Gleichheit der beiden Seiten in (50) einen vollständigen Überblick über die Risikodominanzbeziehungen zwischen den Gleichgewichtspunkten in der ersten Kandidatenmenge gewonnen. Mit der möglichen Ausnahme derartiger Grenzfälle risikodominiert stets einer der beiden Gleichgewichtspunkte den anderen. Freilich ist die Bedingung (50) nur schwer zu überblicken, so daß noch nicht hinreichend geklärt ist, wie die Bereiche aussehen, in denen U bzw. V risikodominant sind. Wir werden diese Frage im folgenden näher untersuchen.

11. Das Risikodominanzdiagramm

Um die Bedeutung der Ungleichung (50) für die Risikodominanz untersuchen zu können, empfiehlt es sich, eine Variablentransformation vorzunehmen, indem man die Parameter r und s durch normierte Abweichungen von dem Mittelpunkt des Intervalls [1,b] ersetzt:

(51) $$\alpha = \frac{r-\frac{b+1}{2}}{b-1}$$

(52) $$\beta = \frac{s-\frac{b+1}{2}}{b-1}$$

Die zu Gleichgewichtspunkten in der ersten Kandidatenmenge gehörigen Werte von α und β liegen zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

(53) $\gamma = \alpha+\beta$

(54) $\eta = \beta-\alpha$

(55) $\omega = \frac{w}{b-1}$

Aus den Gleichungen (51) bis (55) erhält man folgende Beziehungen:

(56) $r = \alpha(b-1) + \frac{b+1}{2}$

(57) $s = \beta(b-1) + \frac{b+1}{2}$

(58) $r+s = \gamma(b-1)+b+1$

(59) $s-1 = (\beta+ \frac{1}{2})(b-1)$

(60) $b-r = (\frac{1}{2} - \alpha)(b-1)$

(61) $r+s-1-b = \gamma(b-1)$

(62) $1+b+w-r-s = (b-1)(\omega-\gamma)$

(63) $2b-r-s = (b-1)(1-\gamma)$

(64) $r+s-2 = (b-1)(\gamma+1)$

Der Fall $\pi = (r,r,s)$, in dem die Ungleichung (50) über die Risikodominanz entscheidet, ist durch die Ungleichung

(65) $b+1<r+s<b+1+w$

gekennzeichnet. Wie man aus den obigen Gleichungen erkennt, ist (65) gleichbedeutend mit

(66) $0<\gamma<\omega$

Da wir weiterhin $r<s$ voraussetzen, gilt außerdem

(67) $\eta > 0$

Mit Hilfe von (56) bis (67) kann die Ungleichung (50) auf die folgende Form gebracht werden:

$$(68) \quad \frac{1}{\beta+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\gamma}{1-\gamma} < \frac{1}{\frac{1}{2}-\alpha} \cdot \frac{\omega-\gamma}{1+\gamma}$$

(68) ist gleichbedeutend mit

$$(69) \quad \omega-\gamma > \frac{1-2\alpha}{1+2\beta} \cdot \frac{1+\gamma}{1-\gamma}\,\gamma$$

Aus (53) und (54) folgt

$$(70) \quad 2\beta = \eta+\gamma$$

$$(71) \quad -2\alpha = \eta-\gamma$$

Ersetzt man -2α und 2β in (69) durch die rechts stehenden Ausdrücke, so erhält man nach einigen Umformungen von (69) die folgende Ungleichung:

$$(72) \quad \frac{\omega}{2} > \gamma \, \frac{\eta+1-\gamma^2}{\eta(1-\gamma)+1-\gamma^2}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$(73) \quad \frac{\omega}{2} > \gamma \left(1+ \frac{\gamma\eta}{\eta(1-\gamma)+1-\gamma^2}\right)$$

$$(74) \quad \eta \left[\frac{\omega(1-\gamma)}{2\gamma} -1 \right] > (1-\gamma^2)\left(1- \frac{\omega}{2\gamma}\right)$$

Mit (74) haben wir eine Form der Ungleichung (50) gewonnen, aus der wir eine wichtige Schlußfolgerung ziehen können. Da $\eta > 0$ und $\gamma < 1$ gilt, kann die Ungleichung (74) nur für

$$(75) \quad \gamma < \frac{\omega}{2}$$

richtig sein. Falls (75) verletzt ist, ist die linke Seite von (74) negativ und die rechte nicht-negativ. Deshalb folgt aus

$$(76) \quad \gamma \geq \frac{\omega}{2} \, ,$$

daß (74) mit "<" stat ">" und deshalb $\tau_2 > \tau_3$ gilt und infolgedessen $U = (r,r,r)$ den Gleichgewichtspunkt $V = (s,s,s)$

risikodominiert, falls der Fall π = (r,r,s) vorliegt. Wir können deshalb im folgenden annehmen, daß (75) gilt.

Es ist nützlich, in einem Diagramm mit den Achsen α und β die Bereiche einzutragen, in denen einer der beiden Gleichgewichtspunkte U = (r,r,r) und V = (s,s,s) den anderen dominiert. Wir bezeichnen dieses Diagramm als Risikodominanzdiagramm. Abbildung 2 zeigt das Risikodominanzdiagramm für den Fall h = 2 und w = 0.30.

Wir hatten die Risikodominanzbeziehungen zwischen U = (r,r,r) und V = (s,s,s) nur unter der Voraussetzung r < s untersucht. Diese Voraussetzung gilt im Risikodominanzdiagram oberhalb der Hauptdiagonalen $\alpha = \beta$. Die Risikodominanzbeziehungen für r > s erhält man durch Vertauschen der Rollen von r und s. Deshalb erhält man durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen aus dem Bereich U, in dem U = (r,r,r) für r < s dominant ist, einen Bereich V, in dem V = (s,s,s) für r > s dominant ist, und ebenso aus dem Bereich V, in dem V = (s,s,s) für r < s dominant ist, den Bereich U, in dem U = (r,r,s) für r > s dominant ist.

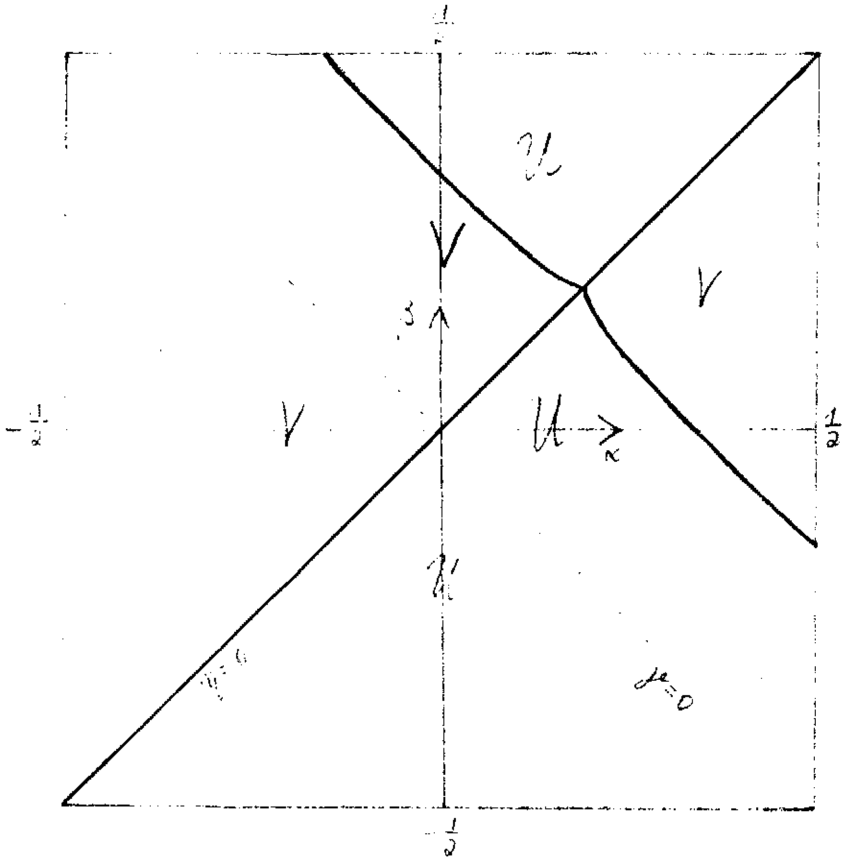


Abbildung 2: Das Risikodominanzdiagramm für h = 2 und w = 0.30

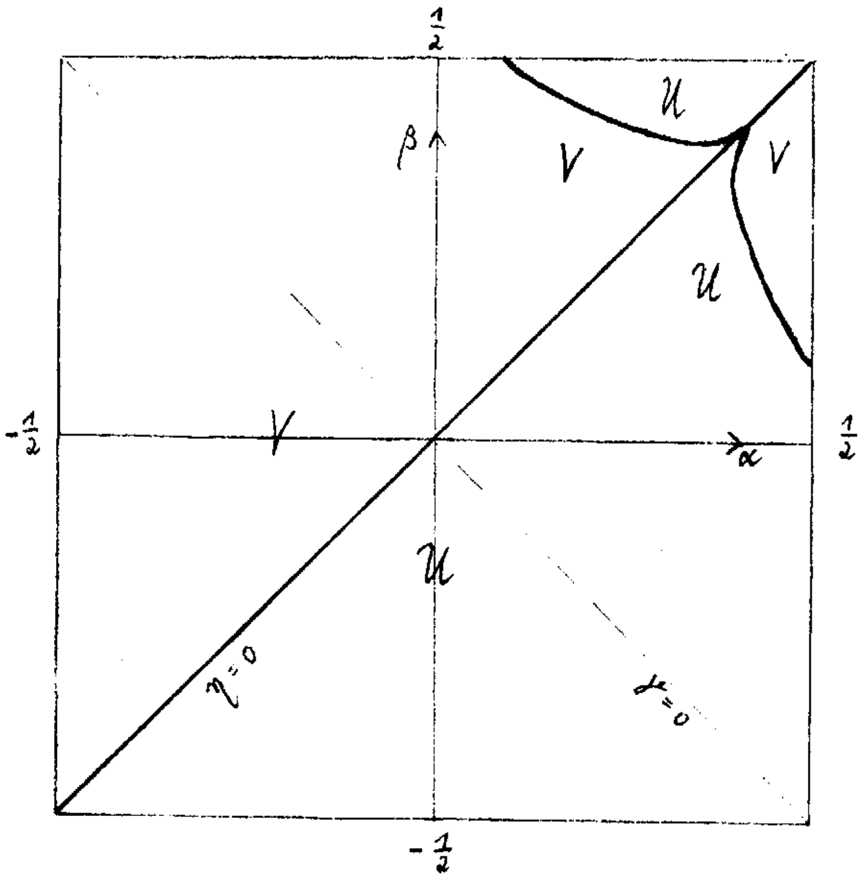
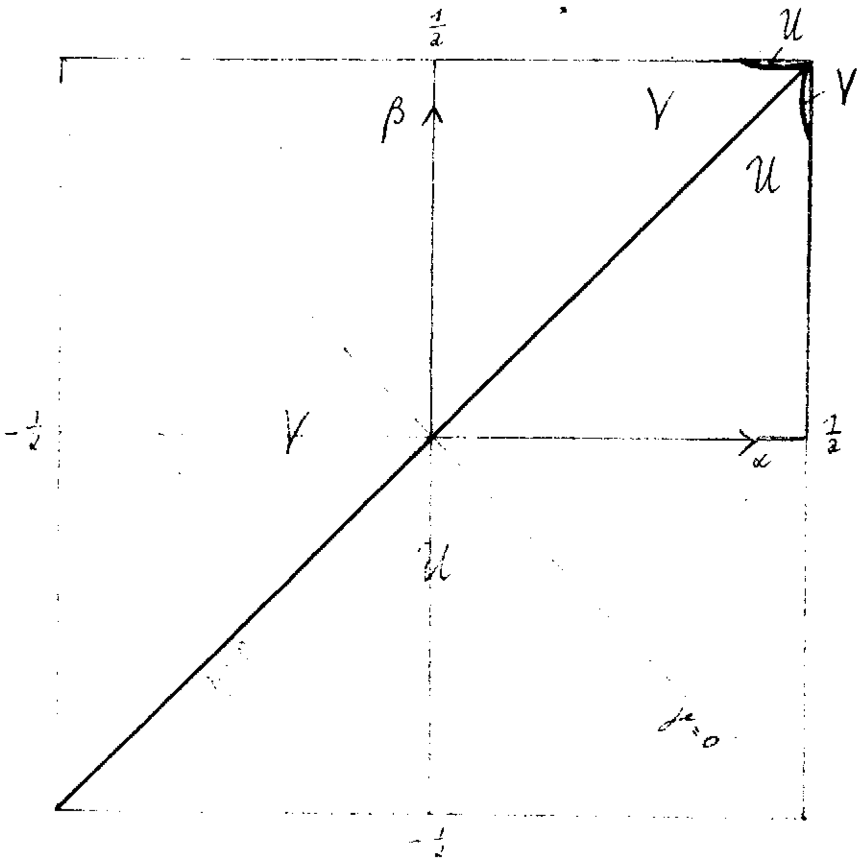
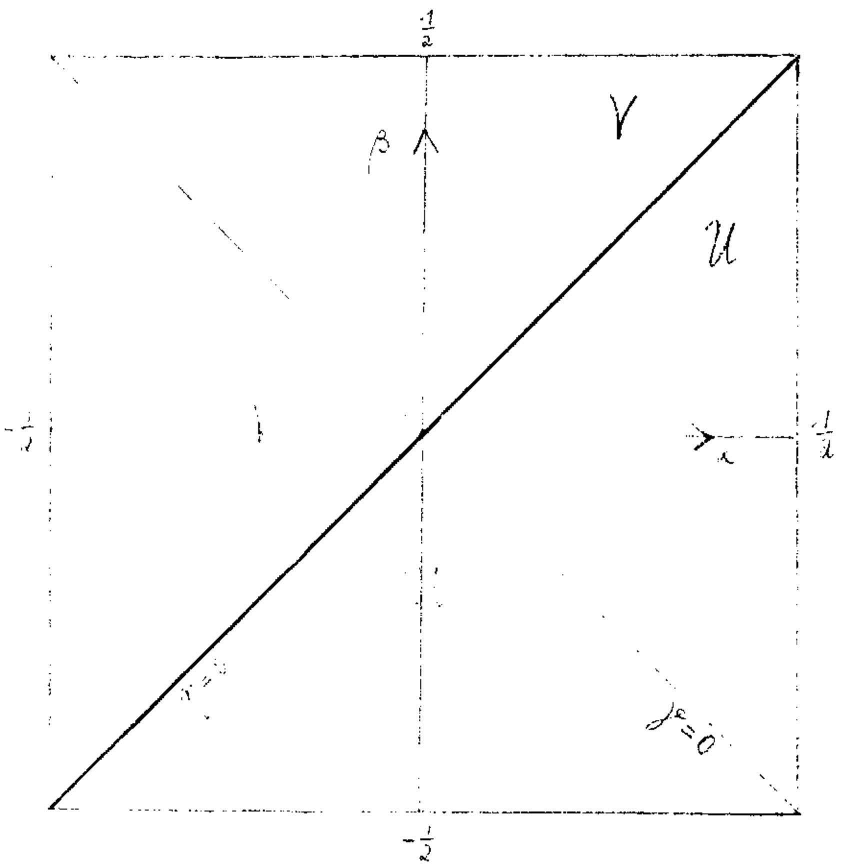


Abbildung 3: Das Risikodominanzdiagramm für h = 2 und w = 0.38



<u>Abbildung 4:</u> Das Risikodominanzdiagramm für h = 2 und w = 0.42



<u>Abbildung: 5:</u> Das Risikodominanzgiagramm für $h = 2$ und $w = 0.45$

Die Trennlinie zwischen den Bereichen U und V oberhalb Hauptdiagonalen ergibt sich aus Gleichsetzung der beiden Seiten in (74) unter Berücksichtigung von (75). Für $r < s$ sind die Fälle mit $\tau_2 < \tau_3$ unterhalb und die Fälle mit $\tau_2 > \tau_3$ oberhalb der Trennlinie. Es zeigt sich, daß in dem betrachteten Spzialfall der Abbildung 2 die anderen Bedingungen, die bei den Fallunterscheidungen hinsichtlich der Risikodominanz aufgetreten sind, für die Abgrenzung der Bereiche keine Bedeutung haben.

Die Abbildung 3 zeigt einen Fall, in dem die Begrenzungslinie etwas anders verläuft als in Abbildung 2. Es ist auch möglich, daß die Begrenzungslinie die 45^o-Linie nicht, wie in den Abbildungen 2 und 3, im Innern, sondern in der oberen rechten Ecke trifft. Ein derartiger Fall ist in Abbildung 4 dargestellt. Schließlich kann es auch vorkommen, daß überall oberhalb der 45^o-Linie der Gleichgewichtspunkt V risikodominant ist. Ein derartiger Fall ist in Abbildung 5 veranschaulicht.

Die Ungleichung (74) entscheidet dann über die Risikodominanz zwischen U und V, wenn die Parameterkombinationen die Bedingung (66) erfüllen. Für $\gamma \leq 0$ ist oberhalb der 45^o-Linie stets V risikodominant und für $\gamma \geq \omega$ ist oberhalb der 45^o-Linie stets U risikodominant. Das ergibt sich aus (35) und dem über die Grenzfälle in Abschnitt 10 Gesagten. Wie wir noch sehen werden, liegt der Punkt, an dem die Begrenzungskurve in den Abbildungen 2 und 3 die 45^o-Linie trifft, bei $\alpha = \beta = \omega/4$, also stets im Bereich $0 < \gamma < \omega$, in dem die Ungleichung (74) relevant ist. Wir haben auch gesehen, daß (74) für $\gamma \geq \omega/2$ mit "<" statt ">" erfüllt ist. Daraus ergibt sich, daß die Begrenzungslinie ganz unterhalb der Linie $\gamma = \omega/2$ verläuft. Deshalb schließen sich in den Abbildungen 2 und 3 die Bereiche für $\gamma \geq \omega$ nahtlos an die entsprechenden Bereiche für $0 < \gamma < \omega$. In den Abbildungen 4 und 5 verläuft die Gerade $\gamma = \omega$ ganz außerhalb des Diagramms.

Aus (73) erkennt man sofort, daß die Begrenzungslinie die Gerade $\gamma = 0$ nicht schneiden kann. Das bedeutet, daß sich auch die Bereiche für $\gamma \leq 0$ nahtlos an die entsprechenden

Bereiche für $0 < \gamma < \omega$ anschließen.

Aus dem bisherigen ergibt sich, daß oberhalb der Hauptdiagonalen V ganz unabhängig von der Größe von γ genau dann risikodominant ist, wenn die Ungleichung (74) erfüllt ist. Und U genau dann risikodominant ist, wenn die (74) entsprechende Ungleichung mit "<" statt ">" gilt.

Wie wir später sehen werden, beschreiben die Abbildungen 2 bis 5 vier typische Fälle, die sich für vier verschiedene Parameterbereiche ergeben, in denen die Lösung auf unterschiedliche Weise bestimmt werden muß. Jede Parameterkombination fällt in einen dieser vier Bereiche.

12. Die zweite Kandidatenmenge

Die Dominanzbeziehungen zwischen den Gleichgewichtspunkten in der ersten Kandidatenmenge werden dazu benutzt, um diese Menge einzuengen und so zu einer zweiten Kandidatenmenge Ω_2 zu gelangen. Es kann allerdings vorkommen, daß eine Elimination von Kandidaten nicht möglich ist und Ω_1 mit Ω_2 übereinstimmt. Außerdem ist es auch möglich, daß die zweite Kandidatenmenge leer ist.

In der Definition der zweiten Kandidatenmenge wird den Dominanzbeziehungen in der ersten Kandidatenmenge umso mehr Beachtung geschenkt, je kleiner eine bestimmte Maßzahl $e(U,V)$, die strategische Entfernung zwischen den beiden Kandidaten U und V, ist. $e(U,V)$ ist die Anzahl der kritischen Wahrscheinlichkeiten z_k, die in dem Intervall $0 \leq z \leq 1$ Intervalle voneinander trennen, in denen mindestens ein Spieler i verschiedene beste Antworten auf $zU_{-i} + (1-z)V_{-i}$ hat. Falls für jeden Spieler i nur U_i und V_i als beste Antworten auf $z\,U_{-i} + (1-z)V_{-i}$ in Frage kommen, kann es pro Spieler nur eine kritische Wahrscheinlichkeit geben. Es könnte allerdings sein, daß weniger kritische Wahrscheinlichkeiten vorhanden sind, weil die Intervalle, in denen U_i bzw. V_i beste Antworten sind, für mehrere Spieler übereinstimmen können. Dies ist jedoch in dem hier untersuchten Spiel niemals der Fall. Die kritischen Wahrscheinlichkeiten, die sich beim Vergleich $U = (r,r,r)$ und $V = (s,s,s)$ ergeben, sind nichts anderes als die Apriori-Wahrscheinlichkeiten $p_i(r)$. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß für $i \neq j$ stets $p_i(r) \neq p_j(r)$ gilt. Diese Tatsache soll hier nicht ausführlich nachgewiesen werden.

Da die strategische Entfernung $e(U,V)$ zwischen zwei Kandidaten U und V stets dieselbe ist, können wir uns bei der weiteren Beschreibung des Lösungsweges auf den Sonderfall gleicher Entfernungen beschränken. Wir werden eine Definition der zweiten Kandidatenmenge angeben, die nur auf diesen Sonderfall zutrifft.

Falls alle strategischen Entfernungen zwischen je zwei Kandidaten gleich sind, besteht die zweite Kandidatenmenge aus allen Gleichgewichtspunkten in der ersten Kandidatenmenge, die nicht von anderen Elementen der ersten Kandidatenmenge dominiert werden.

Wie wir sehen werden, können in dem hier untersuchten Verhandlungsspiel zwei sehr unterschiedliche Fälle vorliegen:

A. <u>Der Fall des universal dominanten Gleichgewichtspunkts</u>
Dieser Fall liegt dann vor, wenn es einen Gleichgewichtspunkt $X = (x,x,x)$ gibt, der alle anderen Gleichgewichtspunkte aus der ersten Kandidatenmenge risikodominiert. Wir nennen einen Kandidaten aus Ω_1 mit dieser Eigenschaft universal dominant. Falls Ω_2 nur einen Kandidaten ententhält, ist dieser Kandidat die Lösung des Spiels.

B. <u>Der Fall der leeren zweiten Kandidatenmenge</u>
Dieser Fall liegt vor, wenn es zu jedem Kandidaten der ersten Kandidatenmenge einen anderen gibt, der ihn risikodominiert. Wie die Lösung in diesem Fall definiert ist, soll später beschrieben werden.

13. <u>Der Fall des universal dominanten Gleichgewichts im Innern</u>

Man kann leicht sehen, daß in dem Spezialfall, der durch Abbildung 2 dargestellt ist, ein universal dominanter Gleichgewichtspunkt vorliegt. Es sei ξ die Ordinate des Schnittpunktes der Begrenzungslinie mit der 45°-Linie $\alpha = \beta$. Den

Wert von ξ ermittelt man am einfachsten dadurch, daß man in (69) die Ausdrücke 2α und 2β sowie γ durch 2ξ ersetzt und beide Seiten gleichsetzt. Es ergibt sich

$$(77) \qquad \xi = \frac{\omega}{4}$$

Dieser Wert von ξ entspricht dem Gleichgewichtspunkt $X = (x,x,x)$ mit

$$(78) \qquad x = \frac{1+b}{2} + \frac{w}{4}$$

Die Annahme, daß b+1 und w duch g teilbar sind, stellt sicher, daß x tatsächlich eine zulässige Strategie ist. Aus Abbildung 2 erkennt man, daß $U = (x,x,x)$ alle Gleichgewichtspunkte $V = (s,s,s)$ mit $r < s$ und $r > s$ risikodominiert. Um das einzusehen, genügt es festzustellen, daß die Linie $\alpha = \xi$ mit Ausnahme des Punktes (ξ,ξ) ganz in dem Bereich U liegt, in dem $U = (r,r,r)$ risikodominant ist.

Abbildung 3 zeigt einen Fall, in dem die Linie $\alpha = \xi$ den Bereich schneidet, in dem V risikodominant ist. Falls die Geldeinheit g hinreichend klein ist, liegen auf dem durch den Bereich für V aus der Linie angeschnittenen Teilstück Punkte (ξ,β), so daß β einer zulässigen Strategie s entspricht. Für hinreichend kleines g ist also hier X kein universal dominanter Gleichgewichtspunkt. Man kann außerdem sehen, daß im Fall der Abbildung 3 für hinreichend kleines g jeder Gleichgewichtspunkt in Ω_1 durch einen anderen dominiert wird.

Ein universal dominanter Gleichgewichtspunkt kann auch in einer Situation vorliegen, die der Abbildung 5 entspricht. Hier ist $Y = (b-g,b-g,b-g)$ universal dominant. Dem Preis b-g entspricht im Risikodominanzdiagramm der Wert

$$(79) \qquad \mu = \frac{1}{2} - \frac{g}{b-1}$$

Alle zu anderen Gleichgewichtspunkten $V = (s,s,s)$ gehörigen Punkte (μ,β) liegen in dem Bereich U unterhalb der 45^{o}-Linie, in dem $U = (r,r,r)$ risikodominant ist.

Falls $X = (x,x,x)$ universal dominant ist, so sprechen wir von einem universal dominanten Gleichgewichtspunkt im Innern, und zwar der Einfachheit halber auch in dem Sonderfall $x = b-g$. Falls $Y = (b-g,b-g,b-g)$ universal dominant ist, ohne daß x mit b-g übereinstimmt, sprechen wir von einem universal dominanten Gleichgewichtspunkt am Rande. In diesem Abschnitt wollen wir uns nur mit dem universal dominanten Gleichgewichtspunkt im Innern befassen.

Wir müssen untersuchen, unter welchen Bedingungen Situationen vorliegen, die den Abbildungen 2, 3, 4 bzw. 5 entsprechen. Eine Situation wie in den Abbildungen 2 und 3 erfordert, daß der dem Schnittpunkt der Trennlinie mit der 45°-Linie entsprechende Wert ξ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$(80) \qquad b-1 > \frac{w}{2}$$

gilt. Wir wollen nun voraussetzen, daß die Ungleichung (80) besteht und die Frage stellen, welche Bedingungen außerdem erfüllt sein müssen, damit X für beliebig kleines g universal dominant ist.

Es ist klar, daß $X = (x,x,x)$ auf jeden Fall alle Gleichgewichtspunkte $V = (s,s,s)$ mit $s > x$ risikodominiert, weil in diesen Fällen $r+s > 2x$ und deshalb $\gamma > \omega/2$ gilt. Wie wir gesehen haben, ist unter der Bedingung (76) der Gleichgewichtspunkt U stets risikodominant.

Es ist noch zu prüfen, unter welchen Bedingungen $X = (x,x,x)$ alle Gleichgewichtspunkte der Form $U = (r,r,r)$ mit $r < x$ dominiert. Es sei

$$(81) \qquad \alpha = \xi-\delta$$

der Wert, der dem Preis r im Risikodominanzdiagramm entspricht. $V = (x,x,x)$ risikodominiert $U = (r,r,r)$, falls (69) erfüllt ist. Ersetzt man in (69) α durch $\xi-\delta$ und β durch ξ, so erhält man unter Beachtung von (77):

$$(82) \quad \frac{\omega}{2} + \delta > \left(\frac{\omega}{2} - \delta\right) \frac{1 - \frac{\omega}{2} + 2\delta}{1 + \frac{\omega}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{\omega}{2} - \delta}{1 - \frac{\omega}{2} + \delta}$$

Durch Umrechnung ergibt sich

$$(83) \quad \left(1+ \frac{\omega}{2}\right)\left(\frac{\omega}{2} + \delta\right)\left(1- \frac{\omega}{2} + \delta\right) > \left(1+ \frac{\omega}{2} - \delta\right)\left(\frac{\omega}{2} -\delta\right)\left(1- \frac{\omega}{2} +2\delta\right)$$

Nach einigen Umformungen erkennt man, daß diese Ungleichung mit der folgenden äquivalent ist:

$$(84) \quad 2 - \omega^2 > 2\delta^2 - \delta(2 + 3\omega)$$

Die Ableitung der rechten Seite nach δ, nämlich $4\delta - 2 - 3\omega$, ist für $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ stets negativ. Die Ungleichung (84) ist deshalb genau dann im ganzen Intervall $0 < \delta < \frac{1}{2}$ erfüllt, wenn die Bedingung

$$(85) \quad \omega^2 \leq 2$$

besteht. Wegen (55) ist (85) gleichbedeutend mit

$$(86) \quad w \leq \sqrt{2}(b-1)$$

Ist (86) verletzt und ist die Geldeinheit g hinreichend klein, so risikodominiert der Gleichgewichtspunkt (r,r,r) mit $r = x-g$ den Gleichgewichtspunkt (x,x,x). Das zu r gehörige δ ist dann so klein, daß die Ungleichung (84) in umgekehrter Richtung besteht.

Aus dem bisherigen ergibt sich, daß (x,x,x) genau dann universal dominant ist, wenn die Bedingung (80) und die Bedingung (86) erfüllt sind. Man erkennt leicht, daß (80) aus (86) folgt.

Als Ergebnis halten wir fest, daß für hinreichend kleines g der Fall eines universal dominanten Gleichgewichtspunkts $X = (x,x,x)$ im Innern genau dann auftritt, wenn die Ungleichung (86) erfüllt ist. Der Gleichgewichtspreis x ist durch die Gleichung (78) bestimmt. Wenn (86) gilt, ist

$X = (x,x,x)$ die Lösung des Spiels.

14. Der Fall des universal dominanten Gleichgewichtspunkts am Rande

In diesem Abschnitt sollen die Bedingungen untersucht werden, unter denen $Y = (b-g,b-g,b-g)$ für $x \neq b-g$ universal dominant ist. Es ist dies der Fall des universal dominanten Gleichgewichtspunkts am Rande. Wie wir gesehen haben, kann dieser Fall nur dann auftreten, wenn (80) nicht erfüllt ist, weil sonst $X = (x,x,x)$ den Gleichgewichtspunkt Y risikodominiert. Wir können deshalb im folgenden voraussetzen, daß

$$(87) \qquad \omega \geq 2$$

gilt. Wir müssen feststellen, unter welchen Bedingungen $V = Y$ alle $U = (r,r,r)$ mit $r<b-g$ risikodominiert.

Dem Gleichgewichtspunkt Y entspricht im Risikodominanzdiagramm der Wert

$$(88) \qquad \beta = \frac{1}{2} - \varepsilon$$

mit

$$(89) \qquad \varepsilon = \frac{g}{b-1}$$

Es sei

$$(90) \qquad \alpha = \frac{1}{2} - \delta$$

der Wert von α, der dem Gleichgewichtspunkt $U = (r,r,r)$ im Risikodominanzdiagramm entspricht. Ungleichung (69) gibt an, unter welchen Bedingungen U von V dominiert wird. Mit den obigen Bezeichnungen nimmt diese Ungleichung die folgende Form an:

$$(91) \qquad \omega + \varepsilon + \delta - 1 > \frac{2\delta}{2-2\varepsilon} \cdot \frac{2-\varepsilon-\delta}{\varepsilon+\delta}\,(1-\varepsilon-\delta)$$

Durch Umfornung der rechten Seite erhält man die zu (91) äquivalente Bedingung

$$(92) \qquad \omega+\varepsilon+\delta-1 > 2\delta \frac{(2-\delta)(1-\delta)-\varepsilon(3-2\varepsilon-2\delta)}{2\delta+\varepsilon(2-2\varepsilon-2\delta)}$$

Wenn man in dieser Ungleichung ε vernachlässigt, verkleinert man die linke und vergrößert man die rechte Seite. Man gewinnt auf diese Weise die folgende notwendige Bedingung für (92):

$$(93) \qquad \omega + \delta - 1 > (2-\delta)(1-\delta)$$

(93) ist gleichbedeutend mit

$$(94) \qquad \omega - 3 > - \delta(4-\delta)$$

Aus (94) erkennt man, daß (91) stets erfüllt ist, falls

$$(95) \qquad \omega \geq 3$$

gilt. Infolgedessen dominiert Y für $\omega \geq 3$ jeden anderen Gleichgewichtspunkt aus der ersten Kandidatenmenge. Y ist also für $\omega \geq 3$ universal dominant.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß Y für $\omega < 3$ nicht universal dominant ist, falls g hinreichend klein ist. Aus $\omega < 3$ folgt für hinreichend kleine δ

$$(96) \qquad \omega - 3 < -\delta(4-\delta)$$

Wenn g hinreichend klein ist, läßt sich ein $\delta > \varepsilon$ finden, für das (96) richtig ist. Aus (96) folgt die (93) entsprechende Ungleichung mit "<" statt ">". Wegen der Stetigkeit der rechts und links stehenden Ausdrücke in (91) ergibt sich daraus, daß für hinreichend kleine ε auch die der Ungleichung (91) entsprechende Bedingung mit "<" statt ">" erfüllt ist.

Falls weder X = (x,x,x) noch Y = (b-g,b-g,b-g) universal dominant sind, gibt es überhaupt keinen universal dominanten Gleichgewichtspunkt. Ein Gleichgewichtspunkt $U = (r,r,r)$ kann nur dann universal dominant sein, wenn für das zu r im Risikodominanzdiagramm gehörige ρ gilt, daß die Vertikale $\alpha=\rho$ den Bereich V nicht schneidet, in dem V risikodominant ist. Dies ist jedoch für $r \neq b-g$ nur dann möglich, wenn $\alpha=\rho$ durch den Punkt geht, an dem die Begrenzungskurve die 45°-Linie trifft.

Als Ergebnis halten wir fest, daß für hinreichend klein gewählte Geldeinheit g folgendes gilt:

(i) Der Gleichgewichtspunkt $X = (x,x,x)$ ist universal dominant für $0 < \omega \leq \sqrt{2}$ (siehe Abschnitt 13).

(ii) Für $\sqrt{2} < \omega < 3$ hat das Spiel keinen universal dominanten Gleichgewichtspunkt. Für Parameterkombinationen in diesem Bereich ist die zweite Kandidatenmenge leer.

(iii) Für $\omega \geq 3$ ist $Y = (b-g,b-g,b-g)$ universal dominant.

15. Definition der Lösung im Fall der leeren zweiten Kandidatenmenge

Falls sich die zweite Kandidatenmenge als leer herausstellt, bestimmt die Gleichgewichtsauswahltheorie die Lösung durch die Anwendung der Spurprozedur auf eine Apriori-Strategienkombination, die der Zentroid der ersten Kandidatenmenge genannt wird. Es seien $q^1,\ldots,q^K$ mit $q^k = (q_1^k,\ldots,q_n^k)$ die Gleichgewichtspunkte der ersten Kandidatenmenge. Hierbei sind die q_i^k gemischte Strategien. Eine reine Strategie kann bekanntlich immer als eine spezielle gemischte Strategie aufgefaßt werden. Der Zentroid

$$c = (c_1,\ldots,c_n) \tag{97}$$

der ersten Kandidatenmenge ist diejenige Kombination gemischter Strategien, für die gilt

$$c_i(\varphi_i) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} q_i^k(\varphi_i) \tag{98}$$

für alle $\varphi_i \varepsilon \Phi_i$ und $i = 1,\ldots,n$. Das Ergebnis $T(G,c)$ der Anwendung der Spurprozedur auf den Zentroid c ist im Falle einer leeren zweiten Kandidatenmenge die Lösung des Spiels.

Es ist vielleicht angebracht, kurz darauf einzugehen, warum die Gleichgewichtsauswahltheorie in dieser Weise verfährt. Falls die zweite Kandidatenmenge leer ist,haben die Relationen der Auszahlungs- und der Risikodominanz als Auswahlprinzipien versagt. Es liegt daher nahe, ihnen keine weitere Beachtung mehr zu schenken und nach einem anderen Prinzip zu suchen, um eine Entscheidung zwischen den Gleichgewichtspunkten der ersten Kandidatenmenge herbeizuführen. Hierzu bietet sich der Zentroid der ersten Kandidatenmenge als eine natürliche Apriori-Strategienkombination für die Spurprozedur an. Es kann allerdings vorkommen, daß sich eine Lösung $T(G,c)$ ergibt, die überhaupt nicht in der ersten Kandidatenmenge liegt. Wie wir sehen werden, ist das allerdings für das hier untersuchte Verhandlungsspiel nicht der Fall.

16. Der Fall einer leeren zweiten Kandidatenmenge

Wie wir in Abschnitt 14 gesehen haben, liegt der Fall einer leeren zweiten Kandidatenmenge immer dann vor, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(99) \qquad \sqrt{2} < \omega < 3$$

Wir werden in diesem Abschnitt stets voraussetzen, daß (99) gilt. Es sei K die Anzahl der Gleichgewichtspunkte in der ersten Kandidatenmenge. Diese Gleichgewichtspunkte haben die Form (r,r,r) mit $r = 1 + kg$ und $k = 1,\dots,K$. Der Zentroid der ersten Kandidatenmenge $c = (c_1,c_2,c_3)$ hat die folgenden Komponenten c_i für $i = 1,2,3$:

$$(100) \qquad c_i(1+kg) = \frac{1}{K} \qquad \text{für } k = 1,\dots,K$$

Die Nichtverhandlungsstrategie $\emptyset$, die dem Spieler 3 neben den Preisen $1 + kg$ zur Verfügung steht, erhält die Wahrscheinlichkeit $c_3(\emptyset) = 0$.

Die Auszahlung, die Spieler i erhält, falls er die Strategie $r = 1+kg$ wählt, während die anderen die unvollständige Zentroidkombination c_{-i} spielen, ist wie folgt:

$$(101)\qquad H_1(r,c_{-1}) = \frac{1}{K}\,r$$

$$(102)\qquad H_2(r,c_{-2}) = \frac{1}{K}\,(r-1)$$

$$(103)\qquad H_3(r,c_{-3}) = \frac{1}{K}\,(b-r)$$

Außerdem gilt:

$$(104)\qquad H_3(\emptyset,c_{-3}) = 0$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß für die besten Antworten σ_i der Spieler $i = 1,2,3$ auf c_{-i} folgendes gilt:

$$(105)\qquad \sigma_1 = 1+Kg = b-g$$

$$(106)\qquad \sigma_2 = 1+Kg = b-g$$

$$(107)\qquad \sigma_3 = 1+g$$

Wir bestimmen nun die Auszahlungen in den Spielen G^t, die sich bei der Anwendung der Spurprozedur auf c ergeben, für den Fall, daß ein Spieler i eine Strategie $r = 1+kg$ spielt und die anderen Spieler ihre besten Antworten σ_j auf c_{-j} wählen:

$$(108)\qquad H_1^t(r,\sigma_{-1}) = \begin{cases} (1-t)\frac{1}{K}\,r & \text{für } r \neq 1+g \\ [(1-t)\frac{1}{K}+t](1+g) & \text{für } r = 1+g \end{cases}$$

$$(109)\qquad H_2^t(r,\sigma_{-2}) = \begin{cases} (1-t)\frac{1}{K}(r-1) & \text{für } r \neq 1+g \\ [(1-t)\frac{1}{K}+t]g & \text{für } r = 1+g \end{cases}$$

$$(110)\qquad H_3^t(r,\sigma_{-3}) = \begin{cases} (1-t)\frac{1}{K}\,(b-r) & \text{für } r \neq b-g \\ [(1-t)\frac{1}{K}+t]g & \text{für } r = b-g \end{cases}$$

Es ist klar, daß die Spieler 1 und 2 nur zu $r = 1+g$ umschlagen können, da nur für diese Strategie die Auszahlung mit zunehmendem t wächst. Ebenso kann Spieler 3 nur zu $r = b-g$

umschlagen. Wie in Abschnitt 10 genügt es, an Stelle der entsprechenden $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3$ die zugehörigen Umschlagsquotienten $\bar{\tau}_i = \bar{t}_i/(1-\bar{t}_i)$ für die drei Spieler $i = 1,2,3$ zu berechnen:

(111) $$\bar{\tau}_1 = \frac{1}{K} \cdot \frac{b-2g-1}{1+g}$$

(112) $$\bar{\tau}_2 = \frac{1}{K} \cdot \frac{b-2g-1}{g}$$

(113) $$\bar{\tau}_3 = \frac{1}{K} \cdot \frac{b-2g-1}{g}$$

Da alle Zähler übereinstimmen, ist offensichtlich $\bar{\tau}_1$ der kleinste Umschlagsquotient. Spieler 1 ist der erste Umsteiger.

Es muß nun untersucht werden, wie sich der Pfad der Spurprozedur fortsetzt, nachdem der Zeitpunkt $\bar{t}_1$ erreicht ist, zu dem Spieler umsteigt. Wäre $(1+g,b-g,1+g)$ ein Gleichgewichtspunkt von $G^{\bar{t}_1}$, so könnte sich der Pfad in $E^{\bar{t}_1}$ bis zu diesem Gleichgewichtspunkt bewegen und für $t > \bar{t}_1$ eine Zeitlang dort verharren. Wie wir sehen werden, ist jedoch $(1+g,b-g,1+g)$ kein Gleichgewichtspunkt von $G^{\bar{t}_1}$. Es wird sich zeigen, daß sich der Pfad in $E^{\bar{t}_1}$ bis zu einem Punkt $(q_1,b-g,1+g)$ bewegt und sich von dort aus in der Weise mit $t > \bar{t}_1$ fortsetzt, daß sowohl Spieler 1 als auch Spieler 3 gemischte Strategien spielen, während Spieler 2 an $b-g$ festhält. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Spieler 1 und 3 die Strategie $b-g$ wählen, wächst dabei an. Schießlich wird zu einem Zeitpunkt $\hat{t}$ der Gleichgewichtspunkt $(b-g,b-g,b-g)$ erreicht. Um zu zeigen, daß der Pfad tatsächlich so verläuft, muß zunächst das Spiel $G^{\bar{t}_1}$ untersucht werden. Die Auszahlungen der Spieler 1 und 3 in G^t unter der Bedingung, daß der Spieler 2 die Strategie $b-g$ wählt, sind in Abbildung 6 angegeben.

<table>
<tr><td>3 \ 1</td><td>$1+g$</td><td>$b-g$</td></tr>
<tr><td>$1+g$</td><td>$[(1-t)\frac{1}{K}+t](1+g)$
$(1-t)\frac{1}{K}(b-1-g)-t(1+g)$</td><td>$(1-t)\frac{1}{K}(1+g)$
$(1-t)\frac{1}{K}+t(h-b+g)$</td></tr>
<tr><td>$b-g$</td><td>$(1-t)\frac{1}{K}(b-g)$
$(1-t)\frac{1}{K}(b-1-g)$</td><td>$[(1-t)\frac{1}{K}+t](b-g)$
$[(1-t)\frac{1}{K}+t]g$</td></tr>
</table>

Abbildung 6: Auszahlungen für Spieler 1 (oben) und Spieler 3 (unten) im Spiel G^t, falls Spieler 2 die Strategie b-g wählt. Spieler 1 ist der Zeilen- und Spieler 3 der Spaltenspieler.

Multipliziert man die Auszahlungen in Abbildung 6 mit $K/(1-t)$, so erhält man die Auszahlungen in Abbildung 7.

<table>
<tr><td>3 \ 1</td><td>$1+g$</td><td>$b-g$</td></tr>
<tr><td>$1+g$</td><td>$(1+\tau K)(1+g)$
$b-1-g-\tau K(1+g)$</td><td>$1+g$
$g+\tau K(h-b+g)$</td></tr>
<tr><td>$b-g$</td><td>$b-g$
$b-1-g$</td><td>$(1+\tau K)(b-g)$
$(1+\tau K)g$</td></tr>
</table>

Abbildung 7: Die Auszahlungen von Abbildung 6 multipliziert mit $K/(1-t)$. Hierbei ist $\tau = t/(1-t)$.

In dem für uns wichtigen Spezialfall $\tau = \bar{\tau}_1$ erkennt man mit Hilfe von (111), daß die Bimatrix in Abbildung 7 die in Abbildung 8 dargestellte Form hat. Die am Rande eingezeichneten Pfeile geben die Anreizrichtungen an. So bedeutet zum Beispiel der neben der zweiten Spalte nach unten verlaufende Pfeil, daß in der zweiten Spalte die Auszahlung des ersten Spielers in der zweiten Zeile größer ist. Der Doppelpfeil links neben der ersten Spalte weist darauf hin, daß beide Auszahlungen des Spielers 1 in der ersten Spalte gleich sind. Die waagerechten Pfeile betreffen die Anreize für Spieler 3.

1 \ 3	1+g	b-g
1+g	$b-g$ g	$1+g$ $g + \frac{(h-b+g)(b-2g-1)}{1+g}$
b-g	$b-g$ $b-1-g$	$\frac{b-g}{1+g}(b-g)$ $\frac{b-g}{1+g}\, g$

Abbildung 8: Die Bimatrix von Abbildung 7 für den Spezialfall $\tau = \bar{\tau}_1$. Die Pfeile geben die Anreizrichtung an.

Die in Abbildung 8 dargestelle Bimatrix kann als ein 2-Personen-Spiel interpretiert werden. Die Gleichgewichtspunkte von $G^{\bar{t}_1}$, in denen Spieler 2 die Strategie b-g wählt, müssen Komponenten für die Spieler 1 und 3 haben, die einem Gleichgewichtspunkt des Spiels in Abbildung 8 entsprechen. Da in

Abbildung 8 die Strategie b-g des Spielers 1 schwach dominant ist und außerdem Spieler 3 auf 1+g die einzige beste Antwort b-g hat, kann es in diesem Spiel nur Gleichgewichtspunkte von der Form $(q_1, 1+g)$ geben. Hierbei muß außerdem $q_1(1+g) < 1$ gelten. Da $\bar{\tau}_2 > \bar{\tau}_1$ gilt, ist b-g für Spieler 2 in $G^{\bar{t}_1}$ einzige beste Antwort auf die Strategie 1+g des Spielers 3. Daraus ergibt sich,daß jedem Gleichgewichtspunkt $(q_1, 1+g)$ des Spiels in Abbildung 8 ein Gleichgewichtspunkt $(q_1, b-g, 1+g)$ von $G^{\bar{t}_1}$ entspricht. Der Pfad der Spurprozedur kann deshalb in $E^{\bar{t}_1}$ nur Gleichgewichtspunkte von der Form $(q_1, b-g, 1+g)$ durchlaufen. Es ist allerdings noch nicht klar, an welchem dieser Gleichgewichtspunkte der Pfad $E^{\bar{t}_1}$ verläßt und ob sich der Pfad von dort aus mit zunehmendem oder mit abnehmendem t fortsetzt.

Wir schließen zunächst den Fall einer Fortsetzung mit abnehmendem t aus. Dies ergibt sich daraus, daß für $t < \bar{t}_1$ die Spieler 1 und 2 beide die einzige beste Antwort b-g auf die Strategie 1+g des Spielers 3 haben.

Nachdem wir nun wissen, daß sich der Pfad mit zunehmendem t fortsetzt, ist es zur Untersuchung des weiteren Verlaufs erforderlich, die Gleichgewichtspunkte der Spiele G^t mit $t > \bar{t}_1$ zu untersuchen. Zu diesem Zweck werden wir zunächst das Spiel in Abbildung 7 für $\tau > \bar{\tau}_1$ analysieren. Es wird sich später zeigen, daß man auf diese Weise alles Notwendige über den weiteren Verlauf des Pfades erfährt. Wie wir sehen werden, bleibt nämlich Spieler 2 im weiteren Verlauf stets bei seiner Strategie b-g.

Wir untersuchen zunächst die Frage, wie sich die durch die Pfeile angegebenen Anreize in Abbildung 8 mit zunehmendem τ verändern. Der Verlauf der Pfeile in Abbildung 8 und die Art und Weise, in der die Auszahlungen in Abbildung 7 von τ abhängen, lassen die Schlußfolgerung zu, daß in einem Intervall $\bar{\tau}_1 < \tau < \hat{\tau}$ die Anreizrichtungen so verlaufen wie in Abbildung 9. Man erkennt, daß die obere Intervallgrenze $\hat{\tau}$ nichts anderes ist als der Umschlagsquotient $\bar{\tau}_3$, weil dieser ja gerade durch die Bedingung bestimmt worden ist, daß Spieler 3 zwischen 1+g und b-g indifferent ist, wenn die Spieler 1 und 2 beide b-g wählen.

Es ist bekannt, daß in 2 x 2 - Spielen mit Anreizrichtungen wie in Abbildung 9 stets genau ein Gleichgewichtspunkt in gemischten Strategien vorhanden ist. Dieser Gleichgewichtspunkt ist außerdem in dem Sinne vollgemischt, daß beide Spieler beide Strategien mit positiven Wahrscheinlichkeiten verwenden. Für jedes t mit $\bar{\tau}_1 < t/(1-t) < \bar{\tau}_3$ sei (q_1^t, q_3^t) der so bestimmte Gleichgewichtspunkt des Spiels in Abbildung 7. Die beste Antwort des Spielers 2 auf (q_1^t, q_3^t) ist stets b-g, und zwar aus den folgenden Gründen: Wegen (112) und (113) ist $\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_3$. Die beste Antwort von Spieler 2 hängt nur von der Strategie des Spielers 3 ab. Für $\tau < \bar{\tau}_3$ ist die Strategie b-g des Spielers 2 die einzige beste Antwort auf die Strategie 1+g des Spielers 3. Der Anreiz von Spieler 2, die Strategie b-g zu wählen, kann nur vergrößert werden, wenn Spieler 3 von 1+g zu einer Mischung über 1+g und b-g übergeht. Daraus ergibt sich, daß für $\bar{\tau}_1 < \tau < \bar{\tau}_3$ die Strategienkombination $(q_1^t, \text{b-g}, q_3^t)$ ein Gleichgewichtspunkt des Spiels G^t ist. Aus der Tatsache, daß das Spiel aus Abbildung 7 in dem betreffenden Intervall außer (q_1^t, q_3^t) keine anderen Gleichgewichtspunkte hat, ergibt sich sofort, daß der Pfad der Spurprozedur die Gleichgewichtspunkte $(q_1^t, \text{b-g}, q_3^t)$ durchlaufen muß.

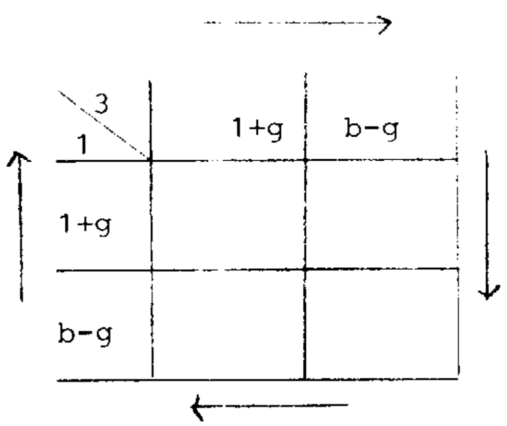


Abbildung 9: Anreizrichtungen im Spiel der Abbildung 7 für $\bar{\tau}_1 < \tau < \bar{\tau}_3$.

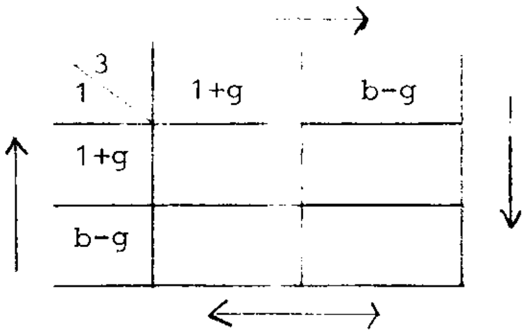


Abbildung 10: Anreizrichtungen im Spiel der Abbildung 7 für $\tau = \bar{\tau}_3$.

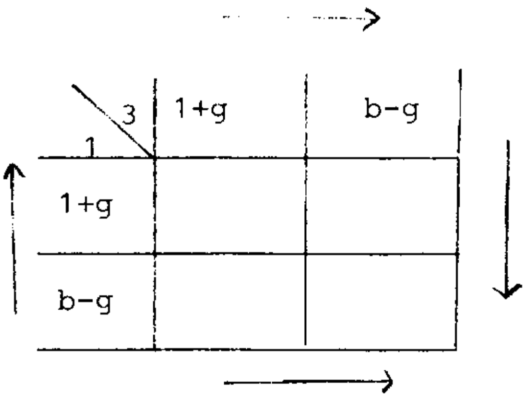


Abbildung 11: Anreizrichtungen im Spiel der Abbildung 7 für $\tau > \bar{\tau}_3$.

Die Anreizrichtungen in $G^{\bar{t}_3}$ sind in Abbildung 10 dargestellt. Ein Spiel dieser Art kann nur Gleichgewichtspunkte von der Form $(b-g, b-g, q_3)$ haben, wobei die zulässigen Werte von $q_3(b-g)$ ein Intervall von der Form $\varkappa \leq q_3(b-g) \leq 1$ mit $\varkappa > 0$ bilden. Der Pfad der Spurprozedur kann von $\bar{t}_3$ ab nicht mit abnehmendem t weiter verlaufen, weil in den betreffenden Spielen nur Gleichgewichtspunkte von der Form $(q_1^t, b-g, q_3^t)$ als Fortsetzung in Frage kommen. Der Pfad verläuft also mit zunehmendem t weiter.

Die Spiele G^t mit $t > \bar{t}_3$ haben für die Spieler 1 und 3 die in Abbildung 11 dargestellten Anreizrichtungen. Man erkennt daraus sofort, daß der Pfad für alle $t > \bar{t}_3$ auf $(b-g, b-g, b-g)$ verharrt.

Als Ergebnis halten wir fest, daß (b-g,b-g,b-g) das Resultat T(G,c) der Anwendung der Spurprozedur auf den Zentroid der ersten Kandidatenmenge ist und deshalb für hinreichend kleine g im Bereich $\sqrt{2} < \omega < 3$ die Lösung des Verhandlungsspiels ist.

Die Bedingung, daß die Geldeinheit g hinreichend klein ist, braucht zur Bestimmung von T(G,c) nicht herangezogen zu werden, sie spielt aber bei der Abgrenzung des Intervalls $\sqrt{2} < \omega < 3$ ein Rolle.

17. Zusammenfassende Darstellung der Lösung in Abhängigkeit von den Parametern

Im folgenden sollen unsere bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammengefaßt werden. Es soll stets vorausgesetzt werden, daß die Geldeinheit g hinreichend klein ist.

Die erste Kandidatenmenge enthält die Gleichgewichtspunkte von der Form (r,r,r) mit $1 < r < b$. Hierbei ist $b = (1-w)h$.

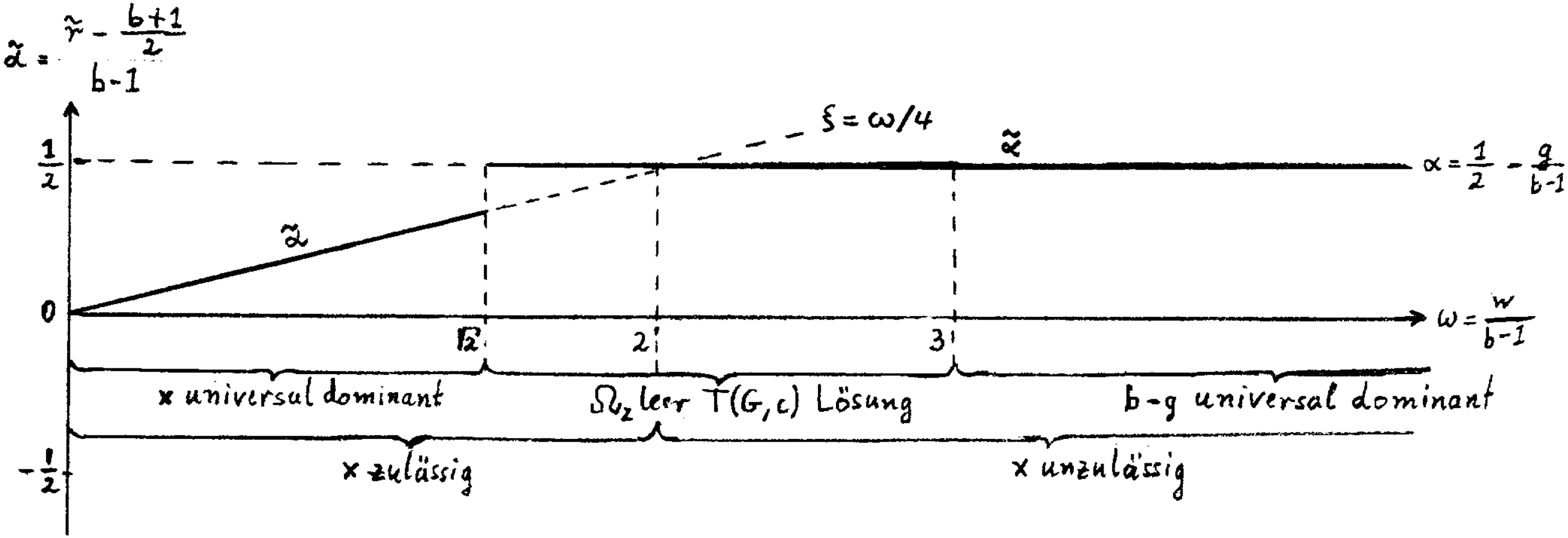
Das Modell hat zwei Parameter, nämlich w und h. Es hat sich gezeigt, daß die Lösung als Funktion von nur einem Parameter ω dargestellt werden kann, ω hängt folgendermaßen von w und h ab:

$$(114) \qquad \omega = \frac{w}{(1-w)h-1}$$

Jeder starke Gleichgewichtspunkt von der Form (r,r,r) ist durch einen Parameter α mit $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$ gekennzeichnet, wobei der folgende Zusammenhang zwischen r und α besteht:

$$(115) \qquad r = \alpha(b-1) + \frac{b+1}{2}$$

Abbildung 12 zeigt die Abhängigkeit des zur Lösung $(\tilde{r},\tilde{r},\tilde{r})$



<u>Abbildung 12:</u> Der Zusammenhang zwischen dem zur Lösung gehörigen Parameter $\tilde{\alpha}$ und ω.

gehörigen $\tilde{\alpha}$ von ω. Es gilt:

$$(116) \qquad \tilde{\alpha} = \begin{cases} \frac{\omega}{4} & \text{für } 0 < \omega \leq \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{g}{b-1} & \text{für } \omega > \sqrt{2} \end{cases}$$

Es fällt auf, daß $\tilde{\alpha}$ nicht stetig von ω abhängt. Bei $\omega = \sqrt{2}$ springt $\tilde{\alpha}$ von $\omega/4$ auf $\frac{1}{2} - \frac{g}{b-1}$. Das hängt damit zusammen, daß für $\sqrt{2} < \omega < 3$ kein universal dominanter Gleichgewichtspunkt mehr vorhanden ist. Risikodominanzüberlegungen tragen in diesem Intervall nichts zur Auswahl zwischen den Gleichgewichtspunkten der ersten Kandidatenmenge bei. Stattdessen wird die Anwendung der Spurprozedur auf den Zentroid zur Bestimmung der Lösung herangezogen. Der Sprung ergibt sich also aus dem Übergang von einem Lösungsprinzip zum anderen.

Bei $\omega = 3$ tritt wieder ein universal dominanter Gleichgewichtspunkt als Lösung auf. Auch hier findet ein Wechsel zwischen den beiden Lösungsprinzipien statt, diesmal in umgekehrter Richtung. Da sich jedoch vor und nach $\omega = 3$, wenn auch aus verschiedenen Gründen, derselbe Lösungsparameter $\tilde{\alpha}$ ergibt, kommt es hier zu keiner Unstetigkeit.

Der zur Lösung $(\tilde{r},\tilde{r},\tilde{r})$ gehörige Lösungspreis $\tilde{r}$ hängt wie folgt von den Parametern w und h ab:

$$(117) \quad \tilde{r} = \begin{cases} \frac{1+(1-w)h}{2} + \frac{w}{4} & \text{für } 0 < \frac{w}{(1-w)h-1} \leq \sqrt{2} \\ (1-w)h-g & \text{für } \frac{w}{(1-w)h-1} > \sqrt{2} \end{cases}$$

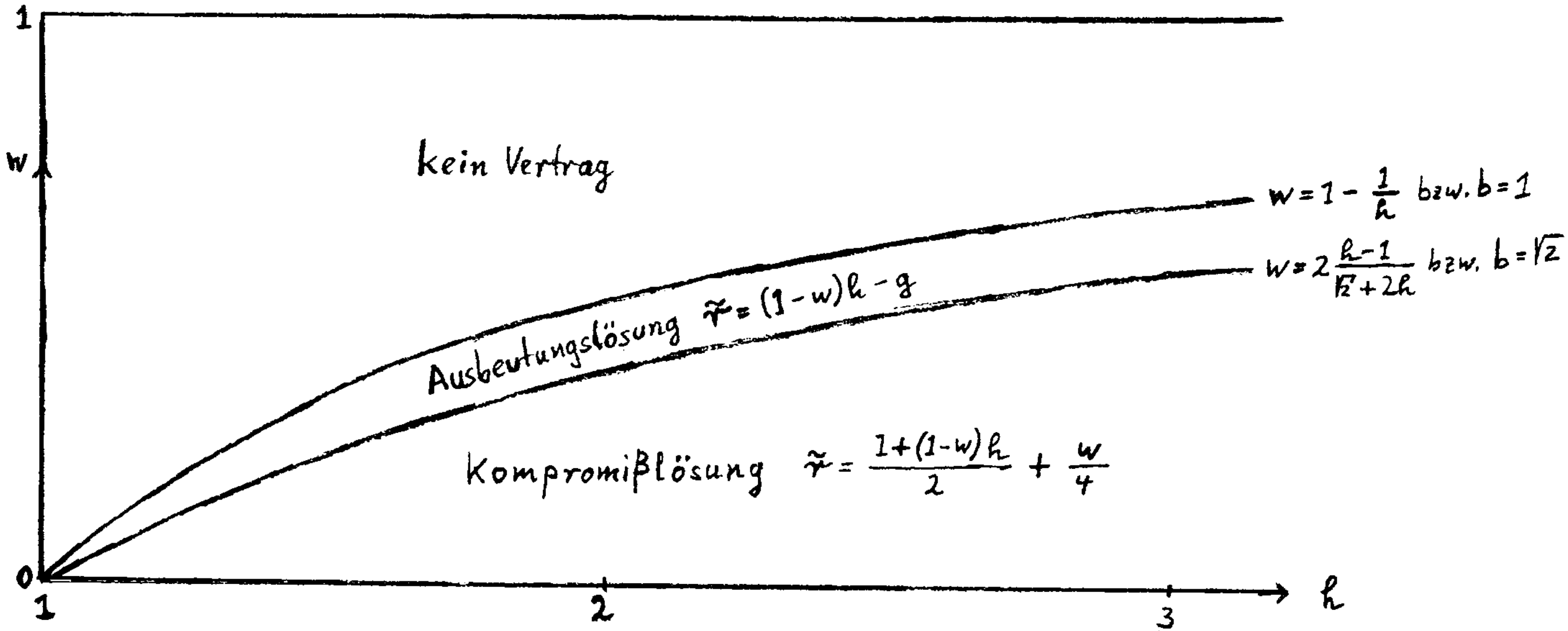


Abbildung 13: Die Lösung in Abhängigkeit von den Parametern h und w.

Abbildung 13 veranschaulicht das Verhalten der Lösung in Abhängigkeit von den Parametern h und w. Oberhalb der Kurve $w = 1 - \frac{1}{h}$ befinden sich diejenigen Parameterkombinationen, in denen das Verhandlungsspiel keine Gleichgewichtspunkte besitzt, die mit dem Abschluß eines Vertrages verbunden sind. Für diese eigentlich nicht interessanten Fälle haben wir die Lösung nicht bestimmt, aber, da es keine anderen Gleichgewichtspunkte gibt, muß sie so aussehen, daß mit Wahrscheinlichkeit 1 kein Vertrag zustandekommt.

Der Bereich zwischen den beiden im Diagramm eingezeichneten Kurven enthält die Parameterkombinationen, für die sich der Gleichgewichtspunkt (b-g,b-g,b-g) ergibt. Es ist dies der für den Käufer ungünstigste starke Gleichgewichtspunkt. Der Lösungsvertrag bietet dem Käufer gegenüber einem Verzicht auf einen Vertragsabschluß nur den minimalen Vorteil in Höhe der Geldeinheit g. Demgegenüber haben Spieler 1 und 2 Auszahlungen in Höhe von $1+(K-1)g$ bzw. $(K-1)g$, die sie verlieren würden, wenn kein Vertrag zustande käme. Wenn man bedenkt, daß K umso grösser ist, je kleiner die Geldeinheit g ist, so erkennt man, daß hier der Käufer im Vergleich zu den Verkäufern extrem schlecht abschneidet, so daß von einer Ausbeutungslösung gesprochen werden kann. Der Preis b-g ist ja nichts anderes als der Preis, den der Verkäufer als Optionsfixierer festsetzen müßte.

Der Bereich, in dem sich die Ausbeutungslösung ergibt, ist, wie man sieht, relativ schmal. Unterhalb der Begrenzungslinie $w = 2(h-1)/(\sqrt{2}+2h)$ ergibt sich ein nicht extremer Lösungspreis $\tilde{r}$. Wie weit $\tilde{r}$ von den Grenzen des Intervalls $1 < r < b$ der Gleichgewichtspreise entfernt ist, erkennt man am besten aus der Abbildung 12. Die Grenzen des Intervalls entsprechen dort den Werten $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{1}{2}$. Der Wert $\alpha = 0$ entspricht der Mitte des Intervalls $\frac{1+b}{2}$. Der Lösungspreis $\tilde{r}$ liegt auch in diesem Bereich oberhalb der Intervallmitte, und zwar um $\frac{w}{4}$. In diesem Sinne kann man davon sprechen, daß der Lösungspreis den durch das Intervall $1 < r < b$ gegebenen Verhandlungsspielraum umso mehr zu Ungunsten des Käufers aufteilt, je größer die Wahrscheinlichkeit w für das Auftreten eines Betrügers ist. Man kann deshalb sagen, daß das Fälschungsrisiko dem Käufer stärker angelastet wird als dem Verkäufer eines Originals.

Für $w = 0$ beträgt der Vertragsvorteil sowohl für den Käufer als auch für den Verkäufer eines Originals $(h-1)/2$. Ein Fälschungsrisiko, das mit positiver Fälscherwahrscheinlichkeit w auftritt, verringert sowohl den Vertragsvorteil des Käufers als auch den des Verkäufers eines Originals. Der Käufer wird jedoch absolut und relativ stärker von der Verringerung betroffen. Bezeichnet man den Vertragsgewinn eines Käufers mit G_K und den des Verkäufers eines Originals mit G_V, so gilt

$$(118) \qquad G_K = \frac{h-1-w(h+\frac{1}{2})}{2}$$

$$(119) \qquad G_V = \frac{h-1-w(h-\frac{1}{2})}{2}$$

Diese Formeln gelten natürlich nur für den durch das Stichwort "Kompromißlösung" gekennzeichneten Bereich in Abbildung 13. Für den Bereich der Ausbeutungslösung ergibt sich, wie wir gesehen haben, ein noch größeres Mißverhältnis zwischen dem Vertragsvorteil eines Käufers und dem des Verkäufers eines Originals.

Ein naiver Betrachter des Verhandlungsproblems könnte leicht auf die Idee kommen, einen Vertrag als Lösung vorzuschlagen, der das Fälschungsrisiko gleichmäßig auf den Käufer und den Verkäufer eines Originals aufteilt. Wie wir gesehen haben, weicht die mit Hilfe der Gleichgewichtsauswahltheorie ermittelte Lösung zu Ungunsten des Käufers von der in diesem Sinne fairen Aufteilung ab. Die Art und Weise, in der sich die Lösung aus der Theorie ergibt, legt eine Interpretation nahe, die das Ergebnis als plausibel erscheinen läßt.

Wenn man von einer Situation ausgeht, in der Unsicherheit darüber besteht, was als eine Lösung des Verhandlungsproblems zu betrachten ist, so werden der Käufer und der Verkäufer eines Originals von dem Fälschungsrisiko in verschiedener Weise betroffen. Der Verkäufer hat einen Vorteil von einem höheren Preis. Bei Unsicherheit über die Lösung ist es für ihn deshalb naheliegend, von der Mitte des Bereichs, in dem die Gleichgewichtspreise liegen, eher nach oben abzuweichen. Der Käufer hat ein Interesse an niedrigen Preisen und könnte daher eher versucht sein, von der Mitte des Bereichs nach unten abzuweichen. Dem steht aber die Überlegung gegenüber, daß der Fälscher weit mehr durch die Wahrscheinlichkeit eines Vertragsabschlusses als durch die Höhe des Preises motiviert ist. Deshalb könnte ein niedrigerer Preis nicht nur leicht zu einem Konflikt mit dem Verkäufer des Originals führen, sondern darüber hinaus noch die Gefahr vergrößern, ein Opfer des Fälschers zu werden. Der Käufer ist deshalb in der schwächeren Position.

Für den Sprung des Lösungspreises bei $\omega = \sqrt{2}$ läßt sich allerdings keine ähnlich einleuchtende Interpretation geben. Freilich kann von einem Lösungskonzept, das Gleichgewichtspunkte auswählt, von vornherein keine Stetigkeit erwartet werden. Das Problem bei der Interpretation des von uns erzielten Resultats liegt weniger bei der Unstetigkeit als solcher als in der Tatsache, daß sie abrupt in den Ausbeutungsbereich hineinführt, in dem der Verkäufer extrem schlecht abschneidet.

Literaturangaben:

John C. Harsanyi: Games with Incomplete Information played by "Bayesian" players, Management Science, Vol. 14 (theory series), 1968, 159-182, 320-334, 486-502

John C. Harsanyi - Reinhard Selten: A Generalized Nash-Solution for 2-Person Bargaining Games With Incomplete Information, Management Science, Vol. 18, 1972, Number 5, Part II, 80-106

John C. Harsanyi - Reinhard Selten: A Noncooperative Solution Concept With Cooperative Applications, Chapter 1: Preliminary Discussion, Workking Paper of the I.M.W., University of Bielefeld, West-Germany, March 1980

John C. Harsanyi - Reinhard Selten: A Noncooperative Solution Concept With Cooperative Applications, Chapter 2: Consequences of Desirable Properties, Working Paper of the I.M.W., University of Bielefeld, West-Germany, March 1980

John C. Harsanyi - Reinhard Selten: A Noncooperative Solution Concept With Cooperative Applications, Chapter 3: The Tracing Procedure, Center for Research in Management, University of California, Berkeley, 1980

John C. Harsanyi - Reinhard Selten: A Noncooperative Solution Concept With Cooperative Applications, Chapter 4: The Solution Concept, Center for Research in Management, University of California, Berkeley, 1980

John C. Harsanyi - Reinhard Selten: A General Theory of Equilibrium Selection in Games, Chapter 2: Games in Standard Form, Working Paper of the I.M.W., University of Bielefeld, West-Germany, December 1980

Reinhard Selten: Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games, International Journal of Game Theory, 1975, 25-55

Reinhard Selten - Ulrike Leopold: Equilibrium Point Selection in a Bargaining Situation with Opportunity Costs, Working Paper of the I.M.W., University of Bielefeld, West-Germany, 1980

" WIRTSCHAFTSTHEORETISCHE ENTSCHEIDUNGSFORSCHUNG"

A series of books published by the Institute of Mathematical Economics, University of Bielefeld.

Wolfgang Rohde
Ein spieltheoretisches Modell eines Terminmarktes (A Game Theoretical Model of a Futures Market)
The model takes the form of a multistage game with imperfect information and strategic price formation by a specialist. The analysis throws light on theoretically difficult empirical phenomena.

Vol. 1 176 pages price: DM 24,80

Klaus Binder
Oligopolistische Preisbildung und Markteintritte (Oligopolistic Pricing and Market Entry)
The book investigates special subgame perfect equilibrium points of a three-stage game model of oligopoly with decisions on entry, on expenditures for market potential and on prices.

Vol. 2 132 pages price: DM 22,80

Karin Wagner
Ein Modell der Preisbildung in der Zementindustrie (A Model of Pricing in the Cement Industry)
A location theory model is applied in order to explain observed prices and quantities in the cement industry of the Federal Republic of Germany.

Vol. 3 170 pages price: DM 24,80

Rolf Stoecker
Experimentelle Untersuchung des Entscheidungsverhaltens im Bertrand-Oligopol (Experimental Investigation of Decision-Behavior in Bertrand-Oligopoly Games)
The book contains laboratory experiments on repeated supergames with two, three and five bargainers. Special emphasis is put on the end-effect behavior of experimental subjects and the influence of altruism on cooperation.

Vol. 4 197 pages price: DM 28,80

Angela Klopstech
Eingeschränkt rationale Marktprozesse (Market processes with Bounded Rationality)
The book investigates two stochastic market models with bounded rationality, one model describes an evolutionary competitive market and the other an adaptive oligopoly market with Markovian interaction.

Vol. 5 104 pages price: DM 29,80

Orders should be sent to:

Pfeffersche Buchhandlung, Alter Markt 7, 4800 Bielefeld 1, West Germany.