Universität Bielefeld/IMW

Working Papers
Institute of Mathematical Economics

Arbeiten aus dem
Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung

Nr. 191

Eine spieltheoretische Variante des Maximum Prinzips

von

N. N. Worobjoff

Oktober 1990

H. G. Bergenthal

Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung
an der
Universität Bielefeld
Adresse/Address:
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1
Bundesrepublik Deutschland
Federal Republic of Germany

EINE SPIELTHEORETISCHE VARIANTE DES MAXIMUM PRINZIPS

Zum Titel des Artikels muß man hinzufügen, daß die Zeit erstens diskret und zweitens teilweise geordnet ist. Daß die Zeit diskret ist, erleichtert das Problem; daß sie aber teilweise geordnet ist, erschwert es. Also gelangen wir zu einem Ausgleich.

1. Der Kern des Maximum–Prinzips steckt eigentlich in dem Dualitätsatz der linearen (und auch mancher nicht–linearen, z.B. konvexen) Programmierung. Da wir uns im folgenden auf Interpretationen wirtschaftswissenschaftlicher Natur hin orentieren werden, wollen wir LP–Programme als Produktionsproblem verstehen, also als ein "Produktionssystem", (d.h., eine Matrix) A, das die Ressourcen (d.h., einen Vektor) B in eine zulässige Produktion (d.h., einen Vektor) X verarbeitet und bei dieser Produktion unter verschiedenen Preisen C einen Erlös abwirft.

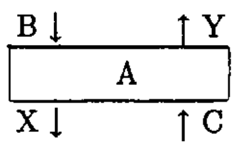

Abb. 1

Dabei entstehen bekannterweise zwei Probleme.

Primale: Welche zulässige Produktion (Produktionsvektor) X, also eine Produktion, die den Beschränkungen

$$XA \leq B \qquad X \geq 0$$

unterliegt, ist zu liefern, um den Gesamtpreis XC^T zu maximieren:

$$XC^T \to \max_X .$$

Duale: Wie muß man die Ressourcenpreise Y bestimmen, um den Gesamtkaufpreis BY^T zu minimieren:

$$BY^T \to \min_Y ,$$

wobei die Zulässigkeitsbedingungen

$$AY^t \geq C^T \quad Y \geq 0$$

gelten.

Wohlbekannt ist der Dualitätssatz: für die Optimalität sowohl des Produktionsvektors X als auch des Preisvektors Y ist notwendig und hinreichend die Gültigkeit der Gleichung

$$XC^T = BY^T .$$

Inhaltlich bedeutet das, daß wenn ein Ressourcenstrom durch das optimal arbeitende System fließt, verändert sich die in der entgegengesetzten Richtung strömende Geldsumme nicht.

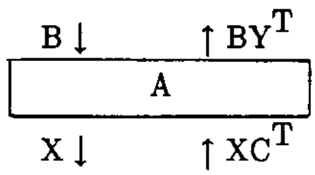

Abb. 2

2. Nun entstehen zwei durchaus natürliche Verallgemeinerungen der aufgestellten Frage.
Erstens, im Sinne der allgemeinen Systemtheorie (wie sie etwa von O.Lange [1] ausgearbeitet wurde) ist es durchaus angebracht, aus den elementaren Zellen der Wirtschaft – die Wirtschaft "im Ganzen" oder wenigstens deren beträchtliche Teile "zusammenzufügen". Die Zeit, in der dabei die Ressourcen in den einzelnen Zellen zur Produktion verarbeitet werden, und in der die entstandene Produktion realisiert wird, wird dabei als diskret vorausgesetzt. Dabei aber gehen die einzelnen Ströme der Ressourcen (alias der Produktion) mit verschiedenen Geschwindigkeiten durch das System. Deshalb existiert jedes Paar "Produktions–Ressource" in seiner eigenen Zeit, die, obwohl teilweise doch aber geordnet ist, und zwar erst produzieren – dann realisieren oder erst eine Ware, eine Produktion, einen Rohstoff erhalten und sie dann als Ressource auffassen.

Zweitens, statt der einfachsten Wirtschaftszelle A mit dem einzigen Interessenträger, der allein die Ressourcen ankauft und die Produktion realisiert, ist es angebracht, kompliziertere Wirtschaftszellen mit mehreren Interessenten und verschiedenen Möglichkeiten ihrer Vereinigung auf den Gebieten der Produktions– und Realisationstätigkeit zu betrachten. Die weiter aufkommenden Varianten entsprechen eigentlich verschiedenen Arten der Wirtschaftsordnung.

Führen wir nun diese beiden Verallgemeinerungen nacheinander aus.

3. Haben wir eine lineare, kettenartige Folge (siehe Abb. 3) von Produktionszellen, die von dem "Warenstrom" durchströmt werden. Dem entgegen fließt der "Geldstrom", dessen Umfang in dem gezeigten Schnitt gleich $X_k C_k^T$ oder (was dasselbe ist) gleich $B_{k+1} Y_{k+1}^T$ ist.

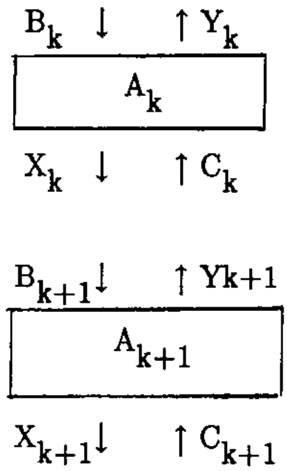

Abb. 3

Der Dualitätssatz besagt in diesem Falle, wenn die Zelle A_k optimal funktioniert, muß

$$B_k Y_k^T + X_k C_k^T = 0$$

gelten. (Den beiden Summanden muß man verschiedene Vorzeichen zuschreiben, weil das angekommene und das ausgegebene Geld mit verschiedenen Vorzeichen versehen werden soll.)

Durch Iterieren erhalten wir, wenn das ganze System optimal arbeitet, daß der Geldstrom von einem Schritt zum anderen unverändert bleiben soll:

$$X_k C_k^T = \underset{k}{\text{const}} \, .$$

Als Optimalitätskriterium des Systems erhalten wir also

$$X_k C_k^T + B_1 Y_1^T = 0.$$

Das heißt, daß, wenn wir einen Teil der Produktionskette mit einer Konturlinie umreißen (siehe Abb.4), der Geldstrom, der in den Bereich ("der Kontur") hineinfließt, ist gleich nach Betrag und entgegengesetzt nach dem Vorzeichen zu dem Strom, der herauskommt. Das ist aber die inhaltliche Deutung des Maximum–Prinzips im Simme von Pontrjagin (in seiner einfachsten, diskreteren Form). Die Zeit ist hier einstweilen linear, also wohlgeordnet angenommen.

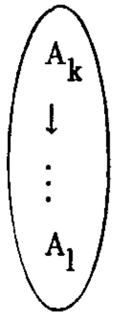

Abb.4

4. Haben wir jetzt einen beliebigen orientierten konturenfreien Graph $\mathcal{G} = \langle J,G \rangle$ (wobei $G : J \to 2^J$ ist und $(j,j) \in G$). Sei dabei jedem Knoten j des Graphen ein Paar von Linearprogrammen (auch in der Produktionsform) P^j, D^1) zugeordnet.

Seien ferner
$$P^j: \quad X_j A_j \leq B_j, \qquad D^j: \quad A_j Y_j^T \geq C_j^T,$$
$$X_j \geq 0, \qquad Y_j \geq 0,$$
$$X_j C_j^T \to \max_X; \qquad B_j Y_j^T \to \min_Y.$$

Das ganze System funktioniert folgendermaßen. Die Produktion des Knotens j wird unter anderen Knoten $k \in Gj$ verteilt und dabei ein Teil für die Realisierung in der Umgebung des Systems übergeben. Der Anteil, der dem Knoten k vorbestimmt ist, wird durch X_{jk} bezeichnet, der Anteil der Umgebung durch X_j^*. Derselbe Gegenstand X_{jk} als eine Ressource für den Knoten k, wird in B_{jk} umbenannt. Aus der Umgebung zu dem Knoten kommende Ressource sei B_k^*.

Es gilt

$$X_j = \sum_{k\in G_j} X_{jk} + X_j^*\ , \ B_k = \sum_{j\in G^{-1}k} B_{jk} + B_k^*\ .$$

Die Produktion X_{jk} des Knotens j, die dem Knoten k zugewiesen ist, wird von dem durch den Käufer k bestimmten Preis C_{jk} realisiert.

Ein typisches Bild sieht ungefähr so aus (siehe Abb.5).

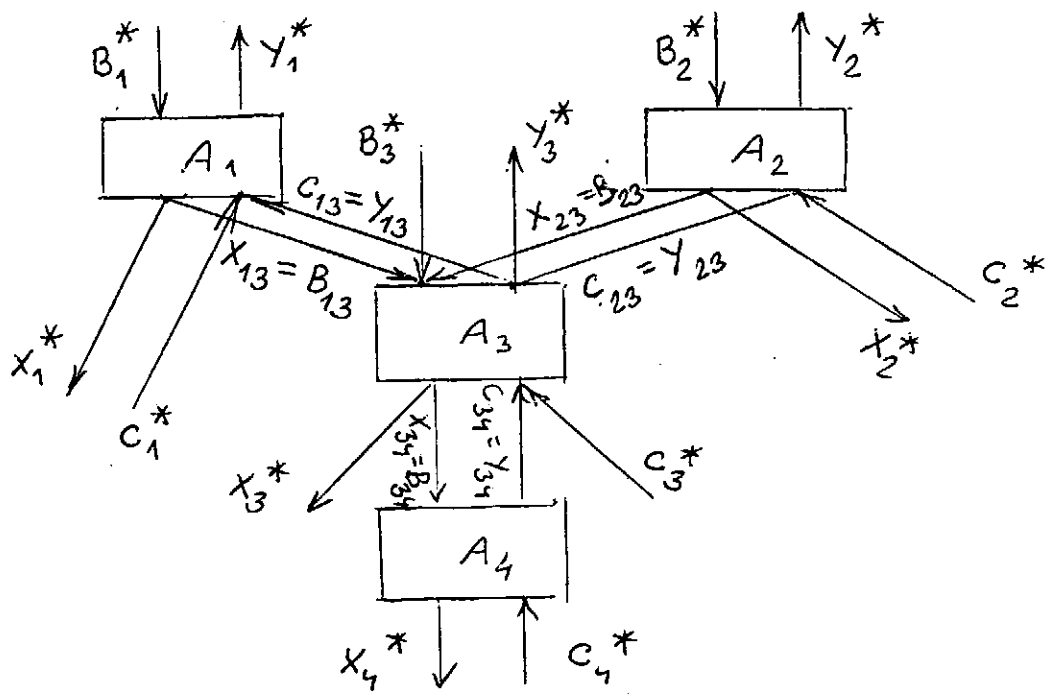

Abb. 5

Umreißen wir jetzt einen Untergraphen $\mathcal{G}^M = \langle M,G^M\rangle$ des Graphen $\mathcal{G} = \langle J,G\rangle$ (es muß also $M \subset J$ und $G^M = G \cap (M \times M)$ sein) mit einer Kontur. Wenn der Graph $\mathcal{G}$ kein planarer ist, muß man eigentlich von einer umgrenzenden Fläche sprechen; wir bleiben aber bei der Konturbezeichnung. Im Spezialfall kann man $M = J$ und daher $\mathcal{G}^M = \mathcal{G}$ setzen. Den Untergraph $\mathcal{G}^M$ darf man als ein Produktionssystem (und zwar als ein Untersystem des Produktionssystems $\mathcal{G}$) auffassen, das mit Ressourcen $B^M = \sum_{j\in M} B_j$ versorgt wird und die Produktion $X^M = \sum_{j\in M} X_j$ liefert. Er verarbeitet

B^M in X^M unter Produktionsfunktion A^M, die linear ist. Die Produktion des Systems wird unter Knoten $k \in G\ M$ verteilt nach den von den dort befindenden Käufern zu bestimmenden Preisen realisiert.

Auf diese Weise erhalten wir ein Paar Linearprogramme (P^M, D^M) und zwar:

$$P^M : X^M A^M \leq B^m, \qquad D^M : A^M Y^{MT} \geq C^{MT},$$

$$X^M \geq 0, \qquad Y^{MT} \geq 0,$$

$$X^M C^{MT} \to \max_{X^M} \qquad B^M Y^{MT} \to \min_{Y^M}.$$

Das explizite Aufschreiben sowohl der Produktionsmatrix A als auch der Probleme P^M und D^M ist im Artikel [2] angeführt.

Nach dem Dualitätssatz im Fall der optimalen Arbeit wird gelten

$$X^M C^{MT} + B^M Y^{MT} = 0.$$

Das entspricht etwa dem wohlbekannten Kirchhoff'schen Gesetz über die Stromverteilung im Leiternetz.

Darüber hinaus gilt der (gleichfalls in [2] angeführte) Satz.

Satz 1:

1. Seien $M_1 \subset M \subset J$ und das Paar (M^{*M}, Y^{*M}) aus optimalen Lösungen der Probleme bzw. P^M und D^M besteht. Dann sind die Projektionen X^{*M_1} und Y^{*M_1} optimale Lösungen von Problemen P^{M_1} und D^{M_1}.

2. Seien $M_1, M_2 \subset J$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ und $M_1 \cup M_2$.

Ferner bestehe das Paar (X^{*M}, Y^{*M}) aus zugelassenen Lösungen der Probleme (P^M, D^M) und die Projektionen (X^{*M_1}, Y^{*M_1}) und (X^{*M_2}, Y^{*M_2}) seien optimale Lösungen bzw. Problempaare (P^{M_1}, D^{M_1}) und (P^{M_2}, D^{M_2}).

Dann besteht das Paar (X^{*M}, Y^{*M}) aus optimalen Lösungen der Probleme (P^M, D^M).

In [3] wurde sowohl die Problemstellung als auch der Satz auf den nichtlinearen (nämlich auf den konvexen) Fall übertragen.

5. Wir wollen uns jetzt mit einer mehr allgemeinen Zelle der Wirtschaft A befassen.

Hier haben wir eine Menge $I = \{1,2,\ldots,n\}$ ökonomischer Agenten, die wir kurzerhand als Spieler bezeichnen werden. Die elementare Zelle A der Wirtschaft kann als eine Form der Zusammenarbeit dieser Spieler aufgefaßt werden.
Dabei ergeben sich vier verschiedene Möglichkeiten.

A. Die Ressourcen $B_1,\ldots,B_n$ werden den einzelnen Agenten (z.B. Betrieben) überreicht und diese verarbeiten die Ressourcen unabhängig voneinander und realisieren die Produktion unter festgesetzten Preisen $C_1,\ldots,C_n$. (siehe Abb.6)

$$
\begin{array}{lcccc}
B: & \boxed{B_1} & \boxed{B_2} & \cdots & \boxed{B_n} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
A: & \boxed{A_1} & \boxed{A_2} & \cdots & \boxed{A_n} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
X: & \boxed{X_1} & \boxed{X_2} & \cdots & \boxed{X_n} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
C: & \boxed{C_1} & \boxed{C_2} & \cdots & \boxed{C_n}
\end{array}
$$

Abb. 6

So etwa verlaufen die Produktionsprogramme unter *ausgeprägter administrativer Planung.*

Aus solchen Problemen kann man ein System und dessen optimale Lösungen erbauen, ebenso wie es über die einfachen linearen programme in 4. gezeigt wurde.

Das optimale Verhalten seitens jeden Spielers $i \in I$ besteht in diesem Falle darin, daß das Paar von (linearen oder nicht) Optimisationsproblemen (P^i, D^i) zu lösen ist, und diese unabhängigen Lösungen bilden zusammen die gemeinsame Lösung des Problems.

B. Die Ressourcen $(B_1,\dots,B_n) = B$ werden als Ganzes der Gesamtheit der Spieler übergeben; die Spieler überarbeiten diese Ressourcen gemeinsam in Produktion $X = (x_1,\dots,X_n)$, wobei der Spieler i "seine eigene" Komponente der Produktion X_i erhält und realisiert sie unabhängig von den anderen, wiederum unter festgesetzten Preisen C_1 (siehe Abb.7). Das Verfahren entspricht ungefähr *dem Planungssystem unter Selbständighkeit der Betriebe.*

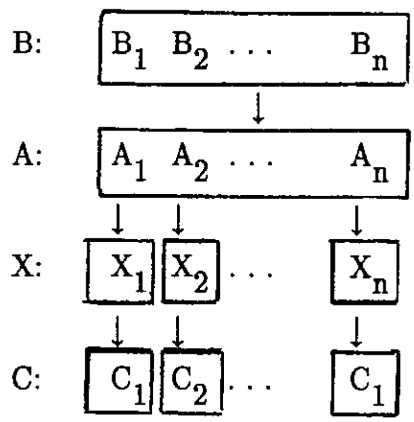

Abb. 7

Hier ergibt sich eine durch die bestehende Technologie bestimmte n–dimensionale Menge von zulässigen Einkommensmöglichkeiten

$$\mathcal{P} = \{P = (X_1\, C_1^T,\dots,X_n\, C_n^T)\}\,.$$

Wegen der gemeinsamen Verarbeitung der Ressourcen sind die $X_1,\dots,X_n$ und deshalb auch die $X_1\, C_1^T,\dots,X_n\, C_n^T$ nicht unabhängig. Folglich kann die Menge $\mathcal{P}$ sehr mannigfaltige Formen annehmen.

Mathematisch ist das Lösen der entstehenden Probleme auf das Lösung des "bargaining problem" zurückzuführen.

C. Es mögen nun die Ressourcen wie im Fall A den einzelnen Spielern übergeben und von diesen unabhängig verarbeitet werden. Die Realisation der Produktion dagegen sei gemeinsam, also durch einen Marktmechanismus ausgeführt (siehe Abb.8).

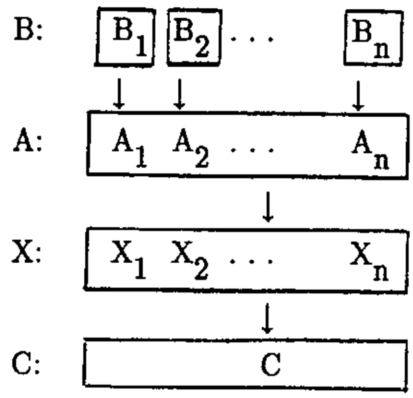

Abb. 8

Das entspricht der *oligopolistischen Marktökonomie* und wird mathematisch im Falle der eindimensionalen (scalaren) Produktion als ein wohlbekanntes Oligopolistenspiel (siehe z.B. [4]) beschrieben. Hier werden wir eine etwas allgemeinere Konstruktion beschreiben.

Nehmen wir an, daß jeder von den Spielern $i \in I$ die Produktion X_i aus einer festgestellten Menge $\mathcal{H}_i$ liefern kann. Die Spieler können ihre Produktion unabhängig voneinander herstellen, so daß die Menge aller entstehenden Produktionsmöglichkeiten dem Cartesischen Produkt $\mathcal{H} = \prod_{i \in I} \mathcal{H}_i$ gleich ist. Die Spieler realisieren ihre Produktion auf einem gemeinsamen Markt (jeder für sich), und jeder von ihnen erhält das Einkommen $C_i(X)$, das von $X \in \mathcal{H}$ abhängig ist. Daher erhalten wir ein nicht kooperatives Spiel

$$\Gamma = \langle I, \{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}, \{\mathcal{C}_i\}_{i \in I} \rangle \quad (\mathcal{C}_i : \mathcal{H} \to R^1).$$

Die diesem Falle entsprechende Möglichkeit, aus einzelnen wirtschaftlichen Spielzellen ein System zu bauen, wurde im Artikel [5] besprochen.

D. Betrachten wir schließlich die Vereinigung der Züge der Fälle B. und C. Es werden also die Ressourcen der ganzen Spielergesellschaft ökonomisch unzerteilbar übergeben und von ihr gemeinsam verarbeitet. Hinterher wird die gemeinsame Produktion zu Markte getragen und unter den von der Nachfragefunktion verursachten Preisen realisiert (siehe Abb.9).

$$
\begin{array}{ll}
\text{B:} & \boxed{B_1 \; B_2 \; \ldots \qquad B_n} \\
& \qquad\quad\downarrow \\
\text{A:} & \boxed{A_1 \; A_2 \; \ldots \qquad A_n} \\
& \qquad\quad\downarrow \\
\text{X:} & \boxed{X_1 \; X_2 \; \ldots \qquad X_n} \\
& \qquad\quad\downarrow \\
\text{C:} & \boxed{\qquad\quad C \qquad\quad}
\end{array}
$$

Abb. 9

Hier muß man folgenden Umstand berücksichtigen. Wegen der gemeinsamen Verarbeitung der Ressourcen ist es manchmal unmöglich, irgendein n–Tupel $X = (X_1,...,X_n)$ zu produzieren, obwohl jede einzelne Produktionsmenge X_i durchaus in einem anderen n–Tupel auftreten kann. Das bedeutet, daß wir mit dem Spiel zu tun haben, in dem nicht alle Strategien n–Tupel zugelassen sind. Da solche Spiele (als partielle Spiele bezeichnete) alle in den Abschnitten A., B. und C. vorangehende Probleme umfassen, werden wir sie näher betrachten. Als erster hat solche Spiele vermutlich G. Debreu [6] eingeführt.

6. **Definition 1:**

Das System

$$\Gamma = \langle I, \{\mathscr{X}_i\}_{i \in I}, \mathscr{X}^{\sim}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$$

heißt *partielles Spiel* wenn $I = \{1,...,n\}$ – die Menge der Spieler ist, $\mathscr{X}_i$ – die Menge der Strategien der Spieler $i \in I$,

$$\mathscr{X}^{\sim} \subset \mathscr{X} = \prod_{i \in I} \mathscr{X}_i$$

und $H_i : \mathscr{X}^{\sim} \to R^1$ – Gewinnfunktion des Spielers $i \in I$.

Es ist dabei bequem, folgende Bezeichnungen einzuführen. Sei $\mathcal{X}^i = \prod_{j \neq i} \mathcal{X}_j$ und $x^i \in \mathcal{X}^i$. Sei ferner für beliebiges $i \in I$ und $x^i \in \mathcal{X}^i$

$$Z_i(x^i) = \{x_i : (x_j, x^i) \in \mathcal{T}\}.$$

Für partielle Spiele ist es möglich, über Gleichgewicht im folgenden Sinne zu sprechen.

Definition 2:

Ein n–Tupel $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ heißt ein *Gleichgewichtspunkt im Spiel* Γ, wenn

1) $x^* \in \mathcal{T}$,

2) für beliebige Spieler $i \in I$ und seine Strategie $x_i \in Z_i(x^{*i})$ sei

$$H_i(x^* \| x_i) \leq H_i(x^*).$$

Die Menge aller Gleichgewichtspunkte im Spiel Γ bezeichnen wir mit $\mathscr{C}(\Gamma)$.

Betrachten wir nun ein partielles Spiel Γ und nehmen folgende Voraussetzunge an:

1. Alle Strategienmengen sind konvcexe und kompakte Untermengen beliebiger topologischer linearer Räume.

   Da die Räume $\mathcal{X}_i$ kompakt sind, sind sie auch metrisierbar. Sei ρ_i die Metrik; diese Metrik erzeugt auf der Menge $2^{\mathcal{X}_i}$ aller Untermengen die $\mathcal{X}_i$ entsprechende Hausdorff'sche Metrik ρ_i^H.

   Die Metriken ρ_i erzeugen gleichfalls (cartesischerweise) die Metriken über $\mathcal{X}_i$ und jedem $\mathcal{X}^i$.

   Auf die Produkte von Mengen $\mathcal{X}_i$ wird auch trivialerweise die lineare Struktur von den $\mathcal{X}_i$ übertragen.

2. Sei die Menge aller zulässigen n–Tupel $\mathcal{T}$ konvex und kompakt. Daher muß jede Menge der Form $Z_i(x^I)$, die ein "Schnitt" von $\mathcal{T}$ ist, auch konvex und kompakt sein.

3. Sei die Abbildung

$$Z_i : \mathscr{X}^i \to 2^{\mathscr{X}_i}$$

stetig (im Sinne der cartesischen Topologie über $\mathscr{X}^i$ und der Hausdorff'schen Matrix über $2^{\mathscr{X}_i}$).

4. Sei schließlich jede Funktion $H_i : \mathscr{X} \to R^1$ stetig in $x \in \mathscr{X}$ und bei jedem $x^i \in \mathscr{X}^i$ quasikonkav in x_i.

Satz:

Wenn für ein partielles Spiel Γ die Voraussetzungen 1. – 4. gelten, dann hat es Gleichgewichtspunkte.

Der Beweis beruht im wesentlichen auf dem wohlbekannten Beweis der Existenz von Gleichgewichtspunkten in dem nichtkooperativen Spiel, das den Bedingungen 1. und 4. unterliegt.

7. Haben wir endlich wieder einen Graphen $\mathscr{G} = <J,G>$ und sei jedem seiner Knoten $j \in J$ ein partielles Spiel

$$\Gamma^j = <I^j, \{\mathscr{X}_i^j\}_{i \in I^j}, \mathscr{X}^j, \{H_i^j\}_{i \in I}>$$

zugeordnet. Dies ist so zu verstehen, daß im Knoten j folgendes getan wird:

1. In jedem Knoten $k \in G^{-1}j$ wird die Produktion $x_i^k \in \mathscr{X}_i^k$ des Spielers i zerteilt und der Teil x_i^{kj} dem Spieler i im Knoten j zugewiesen. Die aus allen $k \in G^{-1}j$ stammenden Teile x_i^{kj} werden als die Ressourcen B_i^{kj} dem Spieler i in dem Knoten j vorgelegt. Der Spieler i sammelt alle diese Ressourcen auf und erhält auf diese Weise die Ressource B_i^j. Diese vereinigten Ressourcen B_i^j $(i \in I)$ werden in der gesamten Produktion $x^j = (x_1^j,\dots,x_n^j) \in \mathscr{X}^j$ verarbeitet. Jeder Spieler i erhält die Komponente x_i^j

zu seiner Verfügung, zerteilt sie in Teile x_i^{jl} und überreicht (verkauft) jedes von diesen Teilen dem Agenten desselben Spielers i, der sich in dem Knoten $1 \in Gj$ befindet.

Für beliebige Knotenmenge $M \subset G$ erhalten wir wieder einen Untergraphen $\mathcal{G}^M = <M, G^M>$. Diesen Untergraphen kann man ein partielles Spiele

$$\Gamma^M = <I, \{\mathcal{X}_i^M\}_{i \in I}, \mathcal{X}^M, \{H_i^M\}_{i \in I}> \qquad (*)$$

zuordnen.

8. Über die Familie der Spiele $\Gamma^M (M \subset J)$ gilt ein Satz, der bereits in [7] formuliert wurde und der den Satz 1 aus 4. erweitert.

Sei $\mathcal{G} = <J, G>$ ein Graph, dessen jedem Knoten $j \in J$ ein partielles Spiel Γ^j zugeordnet ist. Dabei werden diese Spiele als Produktionsspiele aufgefaßt und auf die in 7. beschriebene Weise wirtschaftlich zusammengefügt. Jedem Untergraphen $\mathcal{G}^M = <M, G^M>$ entspricht ein partielles Produktionsspiel der Form (*). Wir setzen voraus, daß die Menge $\mathcal{X}^M$ der zugelassenen n–Tupel entsprechenderweise koordiniert sind.

Unter den beschriebenen Umständen gilt folgender Satz:

Satz 2:

1. Sei im Spiel Γ^M

$$x^{*M} \in \mathcal{X}^M .$$

Sei $M_1 \subset M$ und x^{*M_1} die natürliche Projektion von x^{*M} auf $\mathcal{X}^{M_1}$. Dann gilt

$$x^{*M} \in \mathcal{C}(\Gamma^M) \rightarrow x^{*M_1} \in \mathcal{C}(\Gamma^{M_1}).$$

2. Sei im Spiel Γ^M

$$x^{*M} \in \mathscr{X}^M,\ M = M_1 \cup M_2 \text{ und } M_1 \cap M_2 = \emptyset,$$

wobei x^{*M_1} und x^{*M_2} die natürlichen Projektionen von x^{*M} entsprechend auf $\mathscr{X}^{M_1}$ und $\mathscr{X}^{M_2}$ sind. Dann gilt:

$$x^{*M_1} \in \mathscr{C}(\Gamma^{M_1}),\ x^{*M_2} \in \mathscr{C}(\Gamma^{M_2}) \rightarrow x^{*M} \in \mathscr{C}(\Gamma^M).$$

Der Beweis dieses Satzes ist auf fast triviale Weise aus dem Satz 1 abzuleiten. Hier beschrtänken wir uns auf den etwas komplizierteren Beweis des Teiles 2.

Betrachten wir also M für die besagten M_1, M_2 und M die partiellen Spiele Γ^{M_1}, Γ^{M_2} und Γ^M mit Gewinnfunktionen $H_i^{M_1}$, $H_i^{M_2}$ und H_i^M (für jeden Spieler $i \in I$). Betrachtet sei ferner das zugelassene n–Tupel $x^{*M} \in \mathscr{X}^M$, dessen Projektionen x^{*M_1} und x^{*M_2} Gleichgewichtspunkte in den Spielen Γ^{M_1} und Γ^{M_2} sind.

Das letztere bedeutet, daß für jeden Spieler $i \in I$ die Strategien $x_i^{*M_1}$ und $x_i^{*M_2}$ optimale Lösungen der folgenden Probleme sind:

$$H_i^{M_1}(x_i^{M_1}, x^{*Mi}) \rightarrow \max_{x_i^{M_1} \in Z_i(x^{*M_1 i})}$$

$$H_i^{M_2}(x_i^{M_2}, x^{*M_2}) \rightarrow \max_{x_i^{M_2} \in Z_i(x^{*M_2 i})}.$$

Nach dem Satz 1 folgt daraus, daß die Strategie x_i^{*M} eine optimale Lösung des Problems

$$H_i^M\,(x_i^M, x^{*Mi}) \longrightarrow \max_{x_i^M \in Z_i^M(x^{*Mi})}$$

ist, also daß die Gleichung

$$H_i^M\,(x_i^{*M}, x^{*Mi}) = \max_{x_i^M \in Z_i^M(x^{*Mi})} x_i^M\,(x_i^m, x^{*Mi}) \qquad (**)$$

gilt. Da der Spieler i beliebig aus der Menge I gewählt wurde, bedeutet die Gleichung (**), daß $x^{*M} \in \mathscr{C}(\Gamma^M)$.

LITEERATUR:

[1] Lange, O.: Wholes and Parts. Pergamon Press, 1965

[2] Worobjoff, N.N., Malinnikov, W.W., Sobolew, A.I: Über die Probleme der linearen Optimierung auf den orientierten Graphen. Ekonomika i matematic.metody, Bd.4 (1968), Nr.4, S.622–258 (russ.)

[3] Borißow, K.Yu.: Über die konvexen extremalen Probleme auf Graphen. Sammelband: Perspektivnoe Territorialno–otraslevoe planirowanie i upravlenije, Leningrad, 1982 (russ.)

[4] Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele. W. de Gruyter, 1959

[5] Worobjoff, N.N. Eine spieltheoretische Variante des Maximum–Prinzips mit der diskreten, teilweise geordneten Zeit. Technieeskaja Kibernetiks, 1987, Nr.1 (russ.)

[6] Debreu, G.: A social equilibrium existence theorem. Pros.Nat.Acad.Sci., USA, 1952, 38, Nr.9, pp.886–893

[7] Vorob'ev, N.N.: A game–theoretical version of the maximum principle with discrete partially ordered time. Mathematische Spieltheorie, Tagungsbericht 3/1989, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.