Universität Bielefeld/IMW

Working Papers
Institute of Mathematical Economics

Arbeiten aus dem
Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung

Nr. 141

Für Abhängige keinen Zugewinn?

Axel Ostmann

September 1985

H. G. Bergenthal

Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung
an der
Universität Bielefeld
Adresse/Address:
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1
Bundesrepublik Deutschland
Federal Republic of Germany

Für Abhängige keinen Zugewinn?

Vorbemerkung

Im Rahmen der **experimentellen Spiele** trifft man öfters auf Spiele mit Spielern, die sich aufgrund des **Mangels an Alternativen** im Argumentieren besonders schwer tun. Mangel an Alternativen läßt sich auch als **Abhängigkeit** verstehen. Für Spiele, die den Koalitionen nur die Werte 1 = "erhält den gesamten Gewinn" und 0 = "erhält nichts/ verliert" zuweisen, ist Abhängigkeit (von einem anderen Spieler) an den minimalen Gewinnkoalitionen ablesbar. Im folgenden soll die Frage präzisiert werden, wann und inwiefern abhängige Spieler leer ausgehen müssen, falls ein (fairer) **Konsens der Gesamtgruppe** über die Verteilung des Gewinnes gesucht wird. Man kann dann auch fragen, wann Lösungskonzepte wie Core, Kernel, Nukleolus "**Kooperation für nichts**" verlangen. Empirisch wird man - selbst bei Verhandlungen die i.w. Argumentationsfiguren des Core, Kernel, Nukleolus (bzw. des Bargaining Sets) verwenden - im Ergebnis diese Nulldividenden nicht zu sehen bekommen; jedoch sieht man u.U. im Verhandlungsprozeß die fortgesetzte Reduzierung der Ansprüche der Abhängigen - z.B. deshalb, weil man andere gegen einen Abhängigen immer wieder ausspielen kann. Im Verhandlungsprozeß wird diese Entwicklung irgendwann aus "Gnade" gestoppt - oder, von der anderen Seite aus gesehen, aus "Klugheit", denn bei einer **Nulldividende** besteht kein Anreiz mehr für Kooperation.
Die Situation des Mangels an Alternativen bzw. der Abhängigkeit wurde im Rahmen der experimentellen Spiele erstmals von Kravitz als ein zentrales Problem studiert. Von ihm stammen

die Beispiele a.,e. und f. im Anhang.
Alle mir bekannten Beispiele weisen im **Nukleolus** den Abhängigen (auch höherer Ordnung, vgl. 3.7) Nulldividenden zu; es ist unbekannt, ob dieses allgemein gilt. Allerdings gibt es Spiele ohne Abhängige, in denen Nicht-Dummy-Spieler Null-Dividenden erhalten (z.B. (7;3,3,3,1,1,1), s. Aumann/Peleg/ Rabinowitz 1965).
Will man das Lösungskonzept **Kernel** prozedural verstehen, bietet sich Regel C aus Maschler/Peleg 1967 an. Dort wird

1. der Ausgleich zwischen **Präkoalitionen** gesucht,
2. **Binnenfairness** in jeder Präkoalition und
3. nochmalige globale Überprüfung des Ergebnisses im Sinne von Fairness zwischen allen.

Aus der Empirie ist besonders 3. kritisch. Versuchspersonen sind, nachdem sie 1. und 2. durchlaufen haben, schwer davon zu überzeugen, das Verfahren neu zu eröffnen (mit anderen Präkoalitionen), es sei denn, andere Präkoalitionen brächten Vorteile. Nach 3. müssen aber Präkoalitionen gesucht werden, die die Verluste erhöhen: Sinn der Präkoalitionen ist es nämlich, die maximalen Verluste auszugleichen.
Aus der Theorie füge ich zur Kritik von 3. einen Fall (Bsp.l., Anhang) hinzu, der zudem ein Beispiel für maximale Stärke von Abhängigen ist: ohne sie geht nichts, aber von den anderen ist jeder einzelne verzichtbar (siehe 3.4).

1. Grundbegriffe und Problemstellung

1.1 Definition: Ein Paar (N,v) heißt **einfaches Spiel**, falls $N=\{1,2,\ldots,n\}$ eine endliche Menge ist, deren Elemente **Spieler** heißen, und v eine Funktion auf P(N), den Teilmengen von N, die die Werte 0 und 1 annehmen kann, wobei $v(N)=1$ und $v(\emptyset)=0$.

Die Teilmengen von N heißen **Koalitionen**. Ist ein einfaches Spiel (N,v) vorgegeben, so zerfällt P(N) gemäß v in die **Gewinnkoalitionen** W(v)=W, die den Wert 1 annehmen, und die **Verlustkoalitionen** L(v)=L, die den Wert 0 annehmen.
Eine Gewinnkoalition heißt **minimal** falls jede echte Teilmenge von ihr eine Verlustkoalition ist. Die Menge der minimalen Gewinnkoalitionen sei mit W' bezeichnet.
(N,v) heißt **monoton**, falls für alle Paare von Koalitionen S,T mit $S\subset T$ gilt $v(S)\leq v(T)$.
Konvention: Im folgenden werden nur monotone einfache Spiele betrachtet. Es seien zudem alle Spiele ausgeschlossen, in denen ein Spieler alleine gewinnen kann.
(N,v) heißt **Nullsummenspiel** falls für alle Koalitionen S gilt $v(S)+v(N\setminus S)=1$.
Definition: Eine Permutation p von N heißt **Symmetrie** von (N,v) falls sie das Spiel erhält, d.h. für alle Koalitionen S ist $v(S)=v(p(S))$.
Die Symmetrien bilden eine Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung: die Symmetriegruppe von (N,v). Spieler i und j heißen **vom selben Typ**, falls eine Symmetrie p von (N,v) existiert mit $i=p(j)$; die ineinander überführbaren Spieler bilden eine Äquivalenzklasse. Diese Äquivalenzklassen heißen **Typen**.

1.2 Definition: Wir definieren folgende Relation als ein Stärkemaß auf den Spielern (vgl. Ostmann 1985, vgl. Maschler/Peleg 1966):

Spieler i **ersetzt** Spieler j in (N,v), notiert als i ers j, falls für alle Teilkoalitionen S des Restes N-(i,j) gilt: $v(S\cup(i))\geq v(S\cup(j))$. Gilt i ers j und j ers i, so heißen die Spieler i und j **austauschbar** (i atb j); gilt weder i ers j noch j ers i, so heißen sie **unvergleichbar** (i uv j). Die Stärkerelation ers ist transitiv, braucht aber nicht vollständig zu sein. Ist ers vollständig, so heißt das Spiel (N,v) **geordnet**.

Bemerkung: Sind i und j vom selben Typ, so gilt entweder i atb j oder i uvb j; in geordneten Spielen sind Spieler genau dann atb, wenn sie vom selben Typ sind.

1.3 Definition: $R(i)=\{j\varepsilon N;$ i ers j und nicht j ers i$\}$.
R(i) sind die kleineren (=Rest-)Spieler bzgl. i.
Ein Spieler i heißt **Summe**, falls in W' Koalitionen S mit $i\varepsilon S$ und $S\backslash i+R$ mit $R\subset R(i)$ existieren. Eine Summe ist substituierbar durch kleinere Spieler. Ist i keine Summe so heißt er **Stufe**. Ein Spieler heißt **Dummy**, falls er in keiner Koalition von W' enthalten ist. Enthält (N,v) nur Stufen j für die R(j) die Menge der Dummies ist, so heißt (N,v) **stufenfrei**.

Beispiel: Für Beispiel f. aus dem Anhang ist
$R(1)=R(2)=\{3,4,5,6\}$, $R(3)=\{4,5,6\}$, $R(4)=R(5)=R(6)=\emptyset$.
Die ersten drei Spieler sind Summen, die letzten drei sind Stufen; das Spiel ist stufenfrei.

Bemerkung: Sei $X=X(N,v)=(1_S)_{S\varepsilon W'}$,
dann existiert eine Teilmatrix X' von X - im Sinne von Herausnahme von Zeilen, für die nach Setzung der Gewichte m_i der Stufen i, das Gleichungssystem $X'm=\mu 1$ rekursiv lösbar ist, wobei die Lösung bis auf einen Streckungsfaktor bestimmt ist. (Vgl. Ostmann 1983, Kap.3).

1.4 Definition: Das Spiel heißt **gewichtetes Majoritätsspiel** oder **repräsentierbar**, falls sein "Entscheidungsmechanismus durch ein Parlament" dargestellt werden kann, mit entsprechend vielen Sitzen (Stimmen) für jede Fraktion. Jeder Vorschlag, auf den sich mehr als eine bestimmte Anzahl von Stimmen (Abstimmungslevel) vereinigen lassen, gilt als beschlossen.

Formal lautet die Definition: (N,v) ist repräsentierbar, falls nichtnegative ganze Zahlen μ, m_1, ..., m_n existieren, so daß $v(S)=1$ genau wenn $m(S):=\Sigma(m_i\,;i\in S)\geq\mu$. Im folgenden wird mit m der entsprechende Vektor oder das entsprechende Maß (auf den Koalitionen) bezeichnet.

Das Paar (μ,m) heißt **Repräsentation** von (N,v). Die Menge aller Repräsentationen eines Spieles ist entweder leer oder ist gleich der Menge aller Rasterpunkte (= Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) eines n+1-dimensionalen Kegels (ohne den Nullpunkt). Im allgemeinen ist somit die durch die Repräsentation gegebene Messung der Stärke der Spieler unscharf.

Betrachtet man besonders die minimalen Gewinnkoalitionen, so wird unter Umständen eine Verschärfung der Messung möglich:

Eine Repräsentation (μ,m) eines Spieles heißt **homogen**, wenn für alle minimalen Gewinnkoalitionen S kein Stimmgewicht "verschwendet" wird, also $m(S)=\mu$ gilt. (Das ist $Xm=\mu 1$.)

Nicht jedes repräsentierbare Spiel hat auch eine homogene Repräsentation. Voraussetzung ist, daß es überhaupt nicht-negative nichttriviale (= ungleich Nullvektor) Lösungen des Gleichungssystems $m(S)=\mu$ $(S\varepsilon W')$ gibt. Die homogenen Repräsentationen stammen von einem Kegel.

Ist ein Spiel homogen repräsentierbar so heißt es **homogen**, sonst heißt es inhomogen. Inhomogene Spiele haben grob gesprochen "zuviele Koalitionen in W'". Es bekommen dann Spieler gleiche Gewichte zugewiesen, die von verschiedenen Typ sind, oder Verlustkoalitionen bekommen zuviel.

Von von Neumann/Morgenstern stammt der Satz: **homogene Nullsummenspiele** haben, wenn Dummies das Stimmgewicht 0 zugewiesen wird, bis auf einen multiplikativen Faktor nur eine Repräsentation. Der zugehörige Kegel ist also eindimensional, und die Stärkemessung "scharf".

Repräsentierbare Spiele haben eine **vollständige Stärkerelation**, d.h. je zwei Spieler sind vergleichbar.

Wie man leicht sieht, folgt aus $m_i > m_j$ nämlich i ers j .

Es gibt aber geordnete Spiele, die nicht repräsentierbar sind; sogar geordnete Nullsummenspiele, die nicht repräsentierbar sind

(Ostmann 1984). Repräsentierbare Spiele sind also eine echte Unterklasse der geordneten Spiele. Repräsentationen respektieren ers (aus $m_i > m_j$ folgt i ers j).

Definition: Eine Repräsentation (μ,m) heißt **Minimalrepräsentation**, falls die Gesamtmasse m(N) minimal unter den Gesamtmassen aller Repräsentationen ist.
Für homogene Spiele gibt es genau eine Minimalrepräsentation; Verfahren zur Bestimmung finden sich in Ostmann 1983 und Rosenmüller 1984.

Wir betrachten im folgenden ein fixiertes Spiel (N,v).

1.5 **Auszahlungen**
Ein N-Vektor $x=(x_1,...,x_n)$ mit nicht-negativen Komponenten x_i heißt in diesem Zusammenhang **Auszahlungsvektor**; er definiert durch $x(S)=\Sigma\{x_i;i\varepsilon S\}$ ein **Auszahlungsmaß.**
I.f. wird nicht immer zwischen Auszahlungsmaß und Auszahlungsvektor unterschieden, und wird auch einfach von der Auszahlung gesprochen.
Mit Z(x) sei die Menge der Spieler i bezeichnet, die $x_i=0$ erhalten. Z(x) sind die Spieler mit **Nulldividenden.**

Ist (μ,m) eine Repräsentation, so ist Z(m) Teilmenge der Menge der Dummies. Ist die Repräsentation minimal, so ist Z(m) gleich der Menge der Dummies.

Ist x ein Auszahlungsvektor, so sei mit $x':=x/x(N)$ das normierte Maß bezeichnet (x(N)=v(N)).
Mit K(x) sei die Menge der Koalitionen S bezeichnet, für die $x(S)\leq v(S)$ gilt. K(x) ist die Menge der Koalitionen, die ihren Mitglieder die Ansprüche auf Auszahlung, die mit x verbunden sind, bezahlen/erfüllen können (x kann somit als Forderungsprofil aufgefaßt werden, vgl. Albers 1979a,b). K(x) heiße deshalb die Menge der **realisierenden Koalitionen** für x.
Für x' gilt N.

Ist eine Auszahlung vorgelegt, so ist der **Exzeß** e(x,S) einer Koalition S definiert durch e(x,S)=(v-x)(S). Positive

Exzesse signalisieren also Verluste, negative Zugewinne gegenüber der bezogenen Koalition.
Für **einfache Spiele** haben die Exzesse besonders einfache Form:
$e(x,S)=1-x(S)$ für eine Gewinnkoalition S und
$e(x,T)= -x(T)$ für eine Verlustkoalition T.

1.6 Lösungsmengen für die große Koalition:

Das **Core** von (N,v) ist die Menge
von Auszahlungen x, die folgendes erfüllen:
1. $x(N)=v(N)$ (das ist hier $x=x'$),
2. der Exzeß $e(x,S)$ ist nicht positiv für alle Koalitionen S.

Macht jede Koalition S als Argument gegen eine vorgeschlagene Verteilung $x=(x_i)_{i\varepsilon N}$ (unter die Spieler) geltend:
als S bekommen wir schon mehr, also $v(S)>x(S)=\Sigma(x_i;i\varepsilon S)$,
so bilden die normierten Auszahlungen, denen mit solcherlei Argumenten nicht begegnet werden kann, das Core.

Für einfache Spiele hat das Core nur eine beschränkte Bedeutung, denn es gilt der Satz:
Das Core ist genau dann nicht leer, wenn es Vetospieler gibt.
Ein Vetospieler ist ein Spieler der Element jeder minimalen, also auch jeder Gewinnkoalition ist. Nur Vetospieler können im Core mehr als 0 erhalten.
Sind Vetospieler von der Mitwirkung anderer Spieler abhängig um eine Gewinnkoalition bilden zu können, so würden Core-Verteilungen, die Mitwirkung andererer nur mit "**Nulldividenden** entlohnen". So gesehen ist eine Core-Verteilung als Verhandlungsergebnis unrealistisch, wenn auch sie die Möglichkeit beschreibt, daß die "kleinen" Spieler einander immer wieder durch Unterbieten bisheriger Ansprüche Konkurrenz machen.

Betrachten wir nochmals den Begriff des Exzesses. Ein Exzeß $e(x,S)$ repräsentiert die kollektiven Gewinne oder Verluste für S, wenn die Mitglieder von S statt x anzunehmen, die Koalition S bilden. In diesem Sinne ist er ein Maß der "relativen Zufriedenheit bzw. Unzufriedenheit" mit x.

Die beiden nun folgenden Lösungskonzepte Kernel und Nukleolus vergleichen Auszahlungen mithilfe von Exzessen, um die "bestmöglichen" Auszahlungen zu finden. Dabei wird beim Kernel die Zufriedenheit der einzelnen Spieler (im paarweisen Vergleich) optimiert, während der Nukleolus die Zufriedenheit aller Koalitionen optimiert.
Bemerkt sei, daß auch eine andere Interpretation, die keinen Gebrauch von interpersorellen Nutzenvergleichen macht, möglich ist (vgl. Maschler/Peleg/Shapley 1979, p.330).

Der Vergleich der Exzesse nach Spielern benutzt die folgende Definition: $s(i,j,x):=\max\{e(x,S);\ i\in S \text{ und } j\in N\setminus S\}$.
Der **Kernel** (für die große Koalition) ker ist die Menge aller normierten Auszahlungen x, die "die maximalen Exzesse so weit wie möglich ausgleichen",
formal:
für alle Paare von Spielern $i,j\in N$ gilt
$s(i,j,x)\geqslant s(j,i,x)$ oder $x_i=v(\{j\})$.
Können die maximalen Exzesse nicht ausgeglichen werden, erhält der Spieler, von dem mehr Verzicht gefordert wird, seinen Wert $v(\{j\})$ - denn unter diesen kann er nicht gedrückt werden.

Es gilt der **Satz** (Maschler/Peleg 1967, Cor.3.9 sowie S.586):
In monotonen Spielen lassen sich alle maximalen Exzesse ausgleichen, also $s(i,j,x)=s(j,i,x)$ für $x\in$ ker.
Folgerung: Hat ein Spiel Vetospieler, so wird unter den Vetospielern gleich aufgeteilt und die Nicht-Vetospieler erhalten Nulldividenden. (Sei i Vetospieler, j Nicht-Vetospieler, so ist $s(j,i,x)=-x(\{j\})$).

Zum koalitionsweisen Vergleich der Exzesse sei L(x) der 2^n-Vektor, dessen Komponenten die Exzesse e(x,S) sind, angeordnet in der Reihenfolge nicht-wachsender Größe (i.e. $(L(x))_r\leqslant(L(x))_s$ für $r>s$).
Der **Nukleolus** nuc ist die Menge aller normierten Auszahlungen x, für die gilt:
L(x) ist lexikographisch minimal auf der Menge der normierten i Auszahlungen.
Der Nukleolus besteht aus einem Element (das wir dann auch Nukleolus nennen) (Schmeidler 1969, Kohlberg 1971).

1.7 **Maximale Exzesse**

In allen vorgestellten Lösungen spielen die maximalen Exzesse eine besondere Rolle. Deshalb sei zu einer vorgelegten Auszahlung x der maximale Exzeß mit $d(x)=\max\{e(x,S), S \text{ Koalition}\}$ und die Menge der Maximierer, i.e. die Koalitionen mit maximalem Exzeß mit $D(x)$ bezeichnet.

Sofort ergibt sich folgendes:

Lemma: 1. Sei x ohne Nulldividenden, so gilt $D(x)\subset W'$.
2. Für eine Core-Auszahlung ist $d(x)\leq 0$.
3. Für den Nukleolus ist $d(nuc)=\min\{d(x), x=x'\}$.

Letzteres, unter 3., läßt sich als lineares Programm $x(N)=1$, $x(S)\geq\xi$ $(S\in W)$, $\min \xi$ auffassen,
mit Lösungen in Ecken: somit ist $D(nuc)$ mindestens n-elementig.

Für den Kernel ist etas Vorarbeit erforderlich; Ansatzpunkt bildet folgende Überlegung:
Ist $x\in ker$ so tritt $d(x)$ für einige i,j als $s(i,j,x)$ auf.

Definition: Sei D eine Menge von Koalitionen. $D_i:=\{S\in D; i\in S\}$.
$D(i,j)$ sei die Menge von Koalitionen von D, von denen i Element, aber j nicht Element ist - also $D(i,j)=D_i\setminus D_j$.
D heißt **ausgleichend**, falls D unter den Spielern keine einseitigen Abhängigkeiten erzeugt, i.e. falls für alle $i,j\in N$ gilt:
aus $D_j\subset D_i$ folgt $D_j=D_i$.
D **trennt** T, falls für alle Spielerpaare $i,j\in T$ die Mengen $D(i,j)$ und $D(j,i)$ beide nicht leer sind.

Lemma und Bemerkung: Sei $x=x'$.
Ist $x\in ker$, so ist $D(x)$ ausgleichend.
$D(x)$ trennt alle Spieler(paare) genau wenn für alle i,j $s(i,j,x)$ konstant ist (nämlich gleich $d(x)$).
Trennt $D(x)$ alle Spieler, so gilt $x\in ker$.
(Vgl. Maschler/Peleg 1967, Regel A: falls für x die Koalitionen mit maximalen Exzessen $D(x)$ einseitig abhängigen Spielern, bzgl. $D(x)$, 0 zuteilen und die übrigen Spieler trennen,

gehört x zum Kernel.) Sonst hat D(x) Blöcke, und in jedem Block muß mit minderen Exzessen (d.h. die Blockspieler haben nur minderere, aber dennoch auszugleichende Alternativen gegeneinander) ausgeglichen werden. Die Alternativen mit denen argumentiert wird sind realisierbar, und die realisierenden Koalitionen für $x'':=x/(1-d(x))$ sind ausgleichend, denn $K(x'')=D(x'')=D(x)$.

1.8 Der Koalitionenwürfel

Es ist hilfreich, sich die Koalitionen, Exzesse etc. im n-dimensionalen Vektorraum vorzustellen. Dazu werde eine Koalition S mit dem Vektor $1_S=(x_i)_{i\varepsilon N}$ mit
$x_i=1$ für $i\varepsilon S$ und $x_i=0$ sonst identifiziert.
W erzeugt dann als konvexe Hülle der den Gewinnkoalitionen entsprechenden Vektoren ein konvexes Polytop, das mit kv(W) bezeichnet sei. Entsprechend wird kv(L) erzeugt. Ist (μ,m) eine Repräsentation, so trennt die Hyperebene $H(\mu,m)=\{x;xm=\mu\}$ kv(W) und kv(L) ohne kv(L) zu berühren. Allgemein, auch für nicht repräsentierbare Spiele gilt: Wird eine Hyperebene $H(\mu,m)$ in Richtung m möglichst weit an kv(W) herangeschoben, bis die Hyperebene kv(W) berührt, so haben die auf der entstandenen Hyperebene liegenden Gewinnkoalitionen S die maximalen Exzesse, sind also gleich D(m'), nämlich $1-m'(S)=d(m')$; die entstandene Hyperebene ist $H(1-d(m'),m')$. Die zu einer Minimalrepräsentation gehörige Hyperebene ist von diesem Typ.
Will man D(m') groß machen, so sucht man Hyperebenen, die an einer ganzen (n-1)-dimensionalen Seite von kv(W) anliegen.
Will man d(m') klein machen, so sucht man Hyperebenen, die den in m'-Richtung gemessenen Abstand des Körpers kv(W) vom Nullpunkt maximieren.

1.9 Kernel und Nukleolus respektieren ers

Satz: Kernel und Nukleolus respektieren die Ersatzrelation (s. 1.8, Maschler/Peleg 1966): ist x Element des Kernels oder Nukleolus und gilt i ers j
(i ist "nicht schwächer" als j), so gilt $x_i \geq x_j$.

Damit folgt: Austauschbare Spieler erhalten gleich viel.
Es gilt auch: Dummies erhalten nichts.
Jedoch können auch Spieler unterschiedlichen Typs (gemäß Ersatzrelation) gleich viel erhalten, und Spieler können nichts erhalten, obwohl sie keine Dummies sind.
Dazu betrachte man etwa das Beispiel b. im Anhang:
(13;7,6,3,3,1,1) Nukleolus: (2,2,1,1,0,0)/6 (=Kernel)
Die Exzesse der minimal gewinnenden Koalitionen im Nukleolus sind jeweils 1/3, die der maximal verlierenden ordnen sich gemäß L als (-2,-3,-3,-3,-3)/6. Die Exzesse aller anderen Koalitionen liegen zwischen diesen Grenzen.
Ein weiteres Beispiel (Peleg 1966 p.47, s.Anhang Bsp.i):

$(5;3,2,1,1,1)=(\mu,m)=Rm$,

$m'=nuc$, $(1,1,0,0,0,0)\in ker$

Lemma: Symmetrische Spieler erhalten im Nukleolus gleich viel.
Beweis: Ist p Symmetrie mit $i=p(j)$, so ist $pW=W$. Damit haben x und $p(x)=(x_{p(k)})$ dieselben lexikographisch angeordneten Exzeßvektoren. Da der Nukleolus einpunktig ist, ist $x_i=x_{p(j)}$.
Lemma (Peleg 1966, Theorem 3.5): In homogenen Nullsummenspielen ist nuc Extremalpunkt der konvexen Hülle von ker.
Peleg vermutet (Peleg 1966, S.40), daß ker (für einfache Spiele) sternförmig ist.

1.10 **Das Problem der Nulldividenden**

In manchen Spielen verlangen Core, Kernel und Nukleolus von Nicht-Dummy-Spielern "Kooperation für nichts". Diese Nulldividende hat die Bedeutung, daß der Spieler aus Z(x) durch für das Lösungskonzept erlaubte Argumentationen von seinen Ansprüchen immer weiter heruntergehandelt werden kann.
Im folgenden geht es darum, in wieweit daran der Mangel an Alternativen, wie er in der Abhängigkeit eines Satelliten erscheint, schuld ist.

2. Satelliten

2.1 Definition: Eine Koalition B heißt **Block** falls für je zwei Spieler $i,j\varepsilon B$ gilt: für alle $S\varepsilon W'$ ist $i\varepsilon S$ genau wenn $j\varepsilon S$. (also $W'_i=W'_j$.)

Ein Spieler j heißt **Satellit** von i (j sat i) falls für alle $S\varepsilon W'$ gilt: aus $j\varepsilon S$ folgt $i\varepsilon S$. (also $W'_j\subset W'_i$.)

2.2 Bemerkungen:

a. Gilt j sat i und i sat j, so folgt i atb j; i und j sind dann durch W' nicht trennbar und sind Teilmenge eines Blocks.

b. Ist j Satellit von i, so gilt i ers j.

c. Ist j Satellit von i, so gilt entweder gibt es eine Koalition $S\varepsilon W'$ mit $i\varepsilon S$ und $j\notin S$ oder i atb j.

d. Die Relation sat ist reflexiv und transitiv.

2.3 **Satz:** Aus j ers k und j sat i folgt k sat i.

Beweis: Sei $k\varepsilon S\varepsilon W'$. Zu zeigen ist $i\varepsilon S$.
Ist $j\varepsilon S$, so gilt $i\varepsilon S$, da j sat i.
Also sei $j\notin S$.
Da j ers k, ist $S\backslash k+j\varepsilon W$. Ist $S\backslash k+j\varepsilon W'$, so ist $i\varepsilon S$.
Sei also $S\backslash k+j\notin W'$.
Es gibt $T\subset S\backslash k+j$ mit $T\varepsilon W'$. Ist $j\varepsilon T$, so auch $i\varepsilon T$. Damit ist $i\varepsilon S\backslash k+j$ und $i\varepsilon S$.
Sei also $j\notin T$. Dann ist $T\subset S\backslash k$.
Da $S\varepsilon W'$ ist $S\backslash k$ verlierend und somit auch T.
Das ist der gesuchte Widerspruch.

2.4 Definition: $F=F(v)$ sei die Menge aller einseitigen Satelliten also der Spieler $j\varepsilon N$ mit es existiert ein Spieler i mit j sat i aber nicht i sat j.
$G=G(v)$ sei die Menge der unabhängigen Spieler also $G=N\backslash F$.

2.5 Korollar: Die Partition (G,F) von N ist mit ers verträglich:
Ist $j\varepsilon F$ und $i\varepsilon G$, so folgt i ers j oder i uvb j.

Das Korollar ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 2.3.

2.6 Folgerung: Nach der Konvention für geordnete Spiele (i ers i+1, i=1,...,n-1), steht G vor F, und G sei {1,...,g}.

2.7 Lemma: 1. Ist i Stufe und gilt i ers j, so ist j sat i.
2. In geordneten Spielen besteht F mindestens aus den Satelliten der ersten Stufe.

Bemerkung: Auch in geordneten Spielen ist nicht unbedingt jeder Satellit stufenerzeugt, z.b. (8;4,3,2,2,1); Spieler 5 ist Satellit von Spieler 2. F={5}.

2.8 Lemma: W' trennt i und j nicht genau wenn i sat j oder j sat i
Der Beweis ergibt sich aus äquivalenten Umformungen der Definition 1.8 für D=W'.

2.9 Folgerung: 1. aus i uvb j folgt W' trennt {i,j};
2. W' trennt G in Blöcke. W' trennt in G die Typen.
3. aus $i \varepsilon G$, $j \varepsilon F$ folgt W'(i,j) nicht leer.
4. aus i ers j und W'(j,i) nicht leer folgt

W'(j,i) leer - mit folgender Verschärfung (Konstruktion):
Sei $S \varepsilon W'(j,i)$, so gewinnt S\j+i (wegen i ers j) und es existiert $T \varepsilon W'$ mit $T \subset S \backslash j+i$. Dabei kann aber i nicht entfallen, sonst wäre T Teilmenge einer verlierenden Koalition. Entfallen können höchstens kleinere Spieler als i oder mit i unvergleichbare. Diese wichtige Konstruktion führt bei geordneten Spielen zur Existenz einer Koalition S_0 in W' der Form {1,2,...,s}, aus der alle Koalitionen in W' durch sukzessive Ersetzung durch kleinere (den Weg obiger Konstruktion in umgekehrter Richtung) erhältlich sind.

2.10 **Satz:** Nullsummenspiele haben keine Satelliten (weder Blöcke noch einseitige Satelliten). W' trennt die Spieler.

Beweis: Wäre j sat i, dann wäre für $j \varepsilon S \varepsilon W'$ auch $i \varepsilon S$. N\S ist maximal unter den Verlustkoalitionen und N\S+j ist gewinnend. Also gibt es eine Koalition $T \subset N \backslash S+i$ mit $T \varepsilon W'$. T enthält i, sonst wäre $T \subset N \backslash S$ und würde verlieren. Aber j ist nicht in T. Also ist j kein Satellit von i. Der Rest folgt.

2.11 **Lemma:** Seien G_* die bzgl. ers minimalen Elemente in G, so ist entweder $F=\cup\{R(g);g\varepsilon G_*\}$ oder es gibt $j\varepsilon F$ das mit allen Spielern in G_* unvergleichbar ist.

Beweis folgt aus 2.9.4.

Beispiele: Der erstere Fall tritt ein bei Bsp.j (Anhang) oder jedem Spiel mit Vetospielern: $G=G_*$; der zweite Fall bei Bsp.f : dort ist $G_*=\{4,5\}$ und $F=\{6\}$ mit 6 uvb 4 atb 5.

2.12 **Lemma:** Sei (N,v) repräsentierbar und stufenfrei. Gibt es $i,j\varepsilon N$ mit j sat i, so ist das Spiel inhomogen.

Zum Beweis: In homogenen Spielen gelten die Ersetzbarkeiten $R\sqsubset R(k)$ immer, solange R verfügbar ist. Repräsentierbare Spiele sind geordnet und somit kann aus S_0 zunächst i ersetzt werden, und dann sukzessive der jeweils kleinste, bis j in der konstruierten Koalition Mitglied ist; dann aber ist j kein Satellit.

Vgl. Beispiel g. im Anhang.

3. Das Spiel ohne Abhängige

Die Bildung einer Gewinnkoalition läßt die Menge der Spieler in die Koalitionsstruktur Koalition-Opposition zerfallen. Die Verhältnisse innerhalb der Koalition werden durch ein "Hilfsspiel" zu dem vorgelegten Spiel (N,v), das durch das Betrachten dieser Koalition entsteht, bestimmt:

3.1 Definition: Vorgelegt sei (N,v); sei S eine Gewinnkoalition;
das **reduzierte Spiel** (S,v_S)
ist gegeben durch $v_S(T)=v(T\cup N\setminus S)$.

Man kann sich vorstellen, daß innerhalb S diskutiert wird, was man alternativ machen kann.

Mit ers_S und sat_S seien die
Stärke- bzw. Satellitenrelationen im reduzierten
Spiel, mit ers und sat jene in (N,v) bezeichnet.

Im folgenden interessieren uns die reduzierten Spiele $v_{G(v)}$, kurz geschrieben v_G.

3.2 **Satz:** Ist (N,v) geordnet, so gewinnt G oder G ist die Menge der Vetospieler.

Beweis: Sei g der nach Konvention letzte Spieler in G. g+1 ist also aus F. Nach 2.9.4 existiert eine "erste" Koalition S_0 in W' und wenn G verliert, ist $G\subset S_0$.
Ist g Stufe, so ist g nicht ersetzbar und somit Vetospieler.
Dann ist G der Typ der Vetospieler.
Ist g Summe, so enthält G keine Stufen. Da $g+1\varepsilon F$ existiert $i\varepsilon G$ mit g+1 sat 1. $g+1\varepsilon S_0$, aber
i ist hier ersetzbar durch den verfügbaren Rest, sonst wäre i Stufe. Also ist g+1 kein Satellit von i. Also ist $S_0\subset G$.

3.3 **Lemma:** F verliert

Beweis: Sonst gäbe es $F'\subset F$ mit $F'\varepsilon W'$ und für $j\varepsilon F'$ wäre auch ein $i\varepsilon G$ mit j sat i in F': Widerspruch.

3.4 **Bemerkung:** Es gibt ungeordnete Vetospieler-freie Spiele, für die G nicht gewinnt, und sogar G in keiner minimal-gewinnenden Koalition enthalten ist.
Siehe Beispiel 1. im Anhang.

3.5 **Lemma:** Ist i in (G,v_G) Summe, so auch in (N,v).
Beweis klar.

3.6 **Lemma:** Ist (μ,m) Repräsentation von (N,v),
so ist $(\mu-m(N\setminus T),m_T)$ Repräsentation von (T,v_T).

Beweis klar.

3.7 **Bemerkung:** $W'(v_G)$ entsteht aus $\{S\cap G;S\varepsilon W'(v)\}$ durch eventuelle Streichung von Koalitionen, die nicht mehr minimal sind: dadurch könnten neue Blöcke und einseitige Abhängigkeiten entstehen. Es ist bisher unklar, unter welchen Bedingungen es "Satelliten zweiter Ordnung" geben kann. Daß Satelliten zweiter Ordnung tatsächlich auftreten können zeigt Beispiel m. (Anhang).

4. Präkoalitionen

Das reduzierte Spiel aus 3. ist ein Spezialfall eines Spieles innerhalb einer Koalition B bei einer vorgelegten Auszahlung x=x' an alle Spieler:

Definition: $v_B{}^*(S) := \max\{v(S \cup T - x(T); T \subset N \setminus S\}$
für $S \subset B$, $S \neq B$,
$v_B{}^*(B) := x(B)$.

Diese Spiel repräsentiert das Spiel um das durch Zusammenschluß erhaltene Vermögen.

Ist K eine Partition der Spieler (Koalitionsstruktur) so sei $(v/K)(R) := v(\cup\{S, S \in R\})$.
Ist D ausgleichend, so sei $v/D := v/K(D)$, wobei K(D) die von D erzeugte Partition ist.

v/K repräsentiert das Spiel zwischen den als Einheit agierenden Koalitionen der Koalitionsstruktur.

Ist $x \in \ker$, so muß $D(x)(v)$ ausgleichend sein und für jeden davon erzeugten Block muß $D(x)(v_B)$ ausgleichend sein. Bei wiederholter Anwendung wird eine Hierarchie von Blöcken durchlaufen.

Regel C in Maschler/Peleg 1967 besagt nun, daß man jeden Punkt im Kernel so erhalten kann, genauer:

$x \in \ker$ genau wenn

1. x induziert (d.h. jeder Spieler B in $v/D(x)$ erhält $x(B)$) auf $v/D(x)$ ein Element von $\ker(v/D(x))$,
2. $x_B \in \ker(v_B{}^*)$ für alle Spieler von $v/D(x)$.
3. ("Blockexzesse sind minder") $d(x_B)(v_B{}^*) < d(x)(v/D(x))$ für alle Spieler von $v/D(x)$.

Man kann die Blöcke als Präkoalitionen auffassen, die untereinander das Spiel v/D(x) spielen - oder gegeben eine Koalitionsstruktur K, i.e. eine Partition der Spieler in Präkoalitionen, wird das zusammenfassende Spiel v/K gespielt. In einem zweiten Schritt verteilen die Spieler jeder Präkoalition ihren Gewinn aus v/K untereinander, unter Berücksichtigung der Alternativer für jeden. Die Bedingungen 1.,2.,3. sind interpretierbar als Fairness-Bedingungen:

1. Ausgleich zwischen den Blöcken
2. Ausgleich innerhalb der Blöcke (Binnenfairness)

3. Querausgleich oder Konsistenz der Blockbildung: Der Ausgleich zwischen den Blöcken erfordert die größten Verzichte.

Frage: sollen sich Satelliten ihren "Satellitenführern" oder anderen anschließen, um vielleicht doch nicht leer auszugehen?

5. Repräsentationen im Kernel

Peleg 1968 zeigt, daß in **homogenen Nullsummenspielen** der Nukleolus immer mit dem normierten Maß der Minimalrepräsentation übereinstimmt, und für **inhomogene Nullsummenspiele** sofern die kleinste ganzzahlige Version des Nukleolus eine Gesamtmasse von 2mal der minimalen Masse einer Gewinnkoalition minus eins aufweist.
Zudem ist das normierte Maß der Minimalrepräsentation eines Nullsummenspiels immer Element des Kernels.
Peleg vermutet, daß der Nukleolus fast eine Repräsentation ist, in dem Sinne, daß nuc zumindest am Rande des Repräsentationenkegels liegt.

5.1 Satz: Ist (μ,m) homogene Repräsentation und W' ist ausgleichend, so gilt $m' \epsilon$ ker.

Beweis: W' hat als Blöcke nur symmetrische Spieler, die bei homogener Repräsentation gleich viel erhalten. So sind die Bedingungen 1. und 2. aus Regel C klar. Da Blockspieler nur mit minderen Koalitionen (d.h. nicht aus W') gegeneinander argumentieren können, ist auch die dritte Bedingung erfüllt.

Anhang: Beispiele

a. **(7;4,3,2,2,1)** (aus Komorita/Nagao 1983)

Die Matrix der minimal gewinnenden Koalitionen $(1_S)_{S\varepsilon W'}$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

F={5}, Spieler 5 ist Satellit von 1. Nicht homogen.
(2,1,1,1,0)'εker.
v_6 ist gegeben durch (6;4,3,2,2) und (3;2,1,1,1).
W'(v_6) trennt G, v_6 ist homogenes Nullsummenspiel mit nuc=(2,1,1,1)'.

b. **(13;7,6,3,3,1,1)**

Die Matrix der minimal gewinnenden Koalitionen $(1_S)_{S\varepsilon W'}$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nukleolus: (2,2,1,1,0,0)/6 (=Kernel); Spieler 3 und 4 sind atb, bilden einen Block und sind Stufen. 5 und 6 sind aber auch Satelliten von 2.
v_6 ist gegeben durch (11;7,6,3,3) und (4;2,2,1,1), vgl. Beispiel k. W'(v_6) trennt Spieler verschiedener Typen (bzgl. v).

c. **(13;7,6,4,3,3,1,1)**

Ein Nullsummenspiel, aber inhomogen. Der Nukleolus stimmt mit dem auf eins normierten Maß der Minimalrepräsentation (7,6,4,3,3,1,1)/25 überein. Der Kernel ist gleich der Verbindungsstrecke von Nukleolus und (1,1,0,0,0,0,0)/2.
Es sei nochmals daran erinnert: Peleg 1968 zeigt, daß in **homogenen Nullsummenspielen** der Nukleolus immer mit dem normierten Maß der Minimalrepräsentation übereinstimmt, und für **inhomogene Nullsummenspiele** sofern die kleinste ganzzahlige Version des Nukleolus eine Gesamtmasse von 2mal der minimalen Masse einer Gewinnkoalition minus eins aufweist. Zudem ist das normierte Maß der Minimalrepräsentation eines Nullsummenspiels immer Element des Kernels.

d. **(8;5,4,2,2,1,1)** (Beispiel 10.6 aus Maschler/Peleg 1966)

Die Matrix der minimal gewinnenden Koalitionen $(1_S)_{S \in W'}$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

F ist leer. Das Spiel ist ein inhomogenes Nullsummenspiel.
Der Kernel ist die Vereinigung der Strecken [(1,1,0,0,0,0)',nuc] und [nuc,(1,1,1,1,0,0)'], wobei nuc gleich dem normierten Maß der Minimalrepräsentation (8;5,4,2,2,1,1) ist.

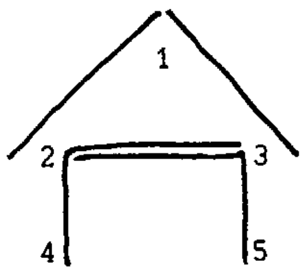
$D(5,4,2,2,1,1)=W'\setminus\{12,134\}$, $\qquad d(.)=7/15$,

$D(1,1,1,1,0,0)\cap W'=W'\setminus\{134,234\}$, $\qquad d(.)=1/2$,

$D(1,1,0,0,0,0)\cap W'=W'\setminus\{12\}$, $\qquad d(.)=1/2$.

e. **Das Hausspiel** (vgl. Komorita/Kravitz 1978)

Das Spiel hat seinen Namen von der Skizze:



Es ist ein homogenes repräsentierbares Fünfpersonenspiel mit der Minimalrepräsentation (7;4,3,3,1,1) und der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

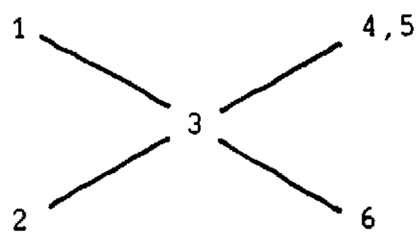
Spieler 2 und 3 sind Stufen. W' trennt die Spieler in G.

Koalition	reduziertes Spiel	Nukleolus
N		(1,1,1,0,0)/3
123	(2;1,1,1)	(1,1,1)/3

Bemerkung zum Kernel: Der Kernel ist dem Nukleolus jeweils gleich. Keine Nulldividenden führen zum Widerspruch. Die normierten Maße der homogenen Repräsentationen dieses Spieles sind die Verbindungsstrecke von Nukleolus und Minimalrepräsentation, minus Nukleolus. Das normierte Maß der Minimalrepräsentation liegt - anders als bei homogenen Nullsummenspielen - nicht im Kernel.

f. **Das ungeordnete 6-Personen-Spiel** (aus Kravitz 1985b)

Die minimalen Gewinnkoalitionen sind 12, 134, 135, 236, 2456. Das Spiel ist superadditiv, nicht repräsentierbar, nicht geordnet. Die Stärkerelation ers unterteilt in zwei starke, unvergleichbare Spieler, einen mittelstarken und drei schwache Spieler wie in folgender Skizze:



Spieler 6 ist Satellit von Spieler 2.

Koalition	reduziertes Spiel	Nukleolus
ohne 6	(5;2,3,2,1,1)	(2,3,2,1,1)/9
N		(2,3,2,1,1,0)/9

Das Spiel "ohne 6" ist ein homogenes Nullsummenspiel; i.bes. ist der Nukleolus gleich der normierten Minimalrepräsentation. Der Kernel soll berechnet werden:

Fall 1. $D(x) \sqsubseteq W'$. W' ist nicht ausgleichend.
$W' \setminus \{12\}$ ist ausgleichend. Rekursives Lösen der Gleichungen unter Beachtung von ers und bei Setzung der Stufen $x_4 = x_5 = b$ und $x_6 = a$ führt zusammen mit dem Ausgleich minderer Exzesse für 2 und 6: $x(12)=x(1346)$ zu den Lösungen $(2b+2a,3b+a,2b,b,b,a)$; da wegen ers $2b>a$ erhält man das Intervall $[(2,3,2,1,1,0)',(4,3,2,1,1,2)']$.
Der Extremalpunkt $(2,3,2,1,1,0)'$ mit $d(.)=4/9$ erfüllt aber nicht $D(.) \sqsubseteq W'$. $d(4,3,2,1,1,2)=8/17$.
Der einzige typentreue und ausgleichende Kandidat für $D(x)$ außer dem berechneten ist $\{134,135,2456\}$ mit den Blöcken $\{13,26,4,5\}$.
Wegen ers folgt $x \varepsilon [(2,3,2,1,1,0)',(2,2,1,0,0,1)']$ mit $x(12)=x(1346)$ und $x(12)=x(236)$.

Fall 2. $Z(x)$ ist nicht leer.

Es sind nur zwei Fälle möglich:
$Z(x)=\{6\}$ und $Z(x)=\{4,5\}$.
Im ersteren Fall erhält man (2,3,2,1,1,0) aus v_6.
Im zweiten erhält man (2,2,1,0,0,1) aus $v_{N\setminus Z(x)}$
mit d(.)=1/2.

g. **(6;4,3,2,2,1)** (Beispiel 2.14 aus Maschler/Peleg 1967)

Spieler 5 ist Satellit von 2. Nicht homogen.
Der Kernel besteht aus den beiden Strecken [(1,1,0,0,0)',m')] und [m',nuc], wobei m das Maß der (obigen) Minimalrepräsentation und nuc=(1,1,1,1,0)' ist. d(x) ist jeweils 1/2.
v_6 hat die Repräsentationen (5;4,3,2,2) und (3;2,2,1,1).
ker(v_6)=[(1,1,0,0)',nuc] mit nuc=(1,1,1,1); die Minimalrepräsentation entspricht dem Streckenmittelpunkt.

h. **Ein symmetrisches ungeordnetes Fünfeckspiel**

Die fünf Spieler seien vorgestellt als fünf Ecken eines Fünfecks W' besteht aus allen Dreierkoalitionen mit auf einander folgenden Ecken. Alle Spieler bilden einen Typ, sind aber uvb.

i. **(5;3,2,1,1,1)** (Peleg 1966, S.47)

Die Matrix der minimal gewinnenden Koalitionen $(1_S)_{S\in W'}$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Keine Satelliten, homogen, W' trennt; m'=nuc, (1,1,0,0,0)$\in$ker.

j. **Das ungeordnete Canada-Spiel**

Das Spiel hat zehn Spieler und vier Typen, mit den Anzahlen (Profil von N) 2, 4, 1, 3. Im folgenden sind die Typenprofile der Koalitionen aus W' angegeben:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Spieler von Typ 2 sind weder mit Spielern von Typ 3 noch von Typ 4 vergleichbar. Da es Vetospieler gibt (Typ 1), ist ker=nuc=(1,1,0,...,0)/2.

k. **(9;5,4,2,2,1)**

Die Matrix der minimal gewinnenden Koalitionen $(1_S)_{S \in W^m}$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Spieler 5 ist Satellit von 2, 3 und 4. Spieler 3 und 4 sind Stufen und bilden einen Block. Das Spiel ist homogen.
ker=[nuc,(4,3,1,1,1)'], nuc=(2,2,1,1,0).
v_6 hat die Repräsentationen (8;5,4,2,2) und (4;2,2,1,1).
$W'(v_6)$ ist ausgeglichen und trennt in v-Typen.
$ker(v_6)=[(1,1,0,0)',(2,2,1,1)']$ mit
D(1,1,0,0)={134,234} und d(.)=1/2,
$nuc(v_6)=(2,2,1,1)'$, $D(nuc(v_6))=W'(v_6)$.

l. **Die diamantenen Ohrringe**

Als Diamantspiel wird (5;3,2,2,1) bezeichnet.
Das hier zu betrachtende Spiel hat acht Spieler, die in zwei Kammern versammelt werden:
die Kammer der ungeradzahligen und die der geradzahligen.
Eine Koalition gewinnt, wenn sie in einer Kammer alle und in der anderen eine Gewinnkoalition des Kammerspiels umfaßt, wobei das Kammerspiel ein Diamantspiel ist.
(Die Spieler 1 und 2 haben das Gewicht 3 jeweils, die Spieler 3 bis 6 das Gewicht 2 und Spieler 7 und 8 je 1.)
Es gibt drei Typen: {1,2}, {3,4,5,6} und {7,8}, aber Spieler aus verschiedenen Kammern sind unvergleichbar.
F={7,8} und G gewinnt nicht. Es gilt sogar:

Keine minimalgewinnende Koalition umfaßt G.
Die Matrix der minimal gewinnenden Koalitionen ist:

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0 \\ 1&1&0&1&1&1&0&1 \\ 1&0&1&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Der Kernel ist einpunktig und gleich (1,1,1,1,1,1,0,0)/6.
Man beachte jedoch:
Bilden die Spieler 7 und 8 eine Präkoalition, so treten sie im Zusammengefaßten Spiel als Vetospieler auf, und zwingen (soll die anderen nicht leer ausgehen und soll zudem ers nicht verletzt werden) den anderen die Präkoalitionen {1,2}, {3,4}, {5,6} bzw. {3,6}, {5,4} auf: alles nunmehr Vetospieler, was zu (1,1,1,1)/4 führt. Exzeßausgleich in den Präkoalitionen führt dann zu (1,1,1,1,1,1,1,1)/8. Bedingung 3 aus Regel C ist jedoch nicht erfüllt, D(.) ist nicht ausgleichend.
Es ist auffallend, daß (in ungeordneten Spielen) sogar eine Veto-Präkoalition leer ausgehen kann.

m. (8;4,3,3,2,1) (aus Kravitz/Iwaniszek 1984)

Die Matrix der minimal gewinnenden Koalitionen $(1_S)_{S \in W}$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \\ 1&0&1&1&0 \\ 1&0&1&0&1 \\ 0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

5 ist Satellit von 1; das Spiel ist nicht homogen; ist $x \varepsilon ker$, so hat x Nulldividenden - der einzige Kandidat für D(x) hat die Lösungen [(3,2,2,1,0)', (1,1,1,0,0)'], wobei aber nur für (1,1,1,0,0)' D(x) ausgleichend ist; (1,1,1,0,0)' ist einziges Element im Kernel.
4 ist Satellit zweiter Ordnung.

Koalition	reduziertes Spiel	Nukleolus
N		(1,1,1,0,0)/3
ohne 5	(5;3,2,2,1)	(1,1,1,0)/3
123	(2;1,1,1)	(1,1,1)/3

n. **(8;5,3,3,2,1)**

F={5}, v_6=(3;2,1,1,1); ein homogenes Spiel mit einpunktigem Kernel, nämlich (2,1,1,1,0)'.
Dieses Spiel sei erwähnt weil es in Parlamenten relativ häufig war (z.B. Landtag des Saarlandes 1960, Ständerat der Schweiz 1979, und mit zusätzlich einem Dummy in Dänemark 1947).

Literatur

Albers, W.: Grundzüge einiger Lösungskonzepte, die auf Forderungsniveaus der Spieler basieren, in: Albers/Bamberg/ Selten (eds.): Entscheidungen in kleinen Gruppen, Meisenheim/ Glan 1979a

- : Core- and kernel-variants based on imputations and demand profiles, in: Moeschlin/Pallaschke (eds.): Game Theory and Related Topics, Amsterdam 1979b

Aumann, R.J. and J.H. Drèze: Cooperative games with coalition structures, Int.J.Game Th. 3, 1974, 217-37

Aumann,R.J., B. Peleg and P. Rabinowitz: A method for computing the kernel of n-person games, Math.Computation **19**, 1965, 531-51

Davis, M. and M. Maschler: The kernel of a cooperative game, Naval Res. Logist. Q. **12**, 1965, 223-59

- : Existence of stable payoff configurations for cooperative games, in: M. Shubik (ed.): Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern, Princeton 1967, 39-52

Kohlberg, E.: On the nucleolus of a characteristic function game, SIAM J.Appl.Math **20**, 1971, 62-6

Kopelowitz, A.: Computation of the kernel of simple games and the nucleolus of n-person games, Res.Memo.31, Dept. of Math., Hebrew Univ. of Jerusalem 1967

Maschler, M. and B. Peleg: A characterization, existence proof and dimension bounds for the kernel of a game, Pacif. J. Math. **18**, 1966, 289-328

- : The structure of the kernel of a cooperative game, SIAM J.Appl.Math. **15**, 1967, 569-604

Maschler, M., B. Peleg and L.S. Shapley: The kernel and the nucleolus of a cooperative game as locuses in the strong ε-core, Dept.Math. of the Hebrew Univ. of Jerusalem,RM 60, 1970

Ostmann, A.: On the minimal representation of homogeneous games, IMW WP 124, Univ. Bielefeld 1983

- : Decisions by players of comparable strength, Z.f.Nat.ök. 1985

Peleg, B.: On the kernel of constant-sum simple games with homogeneous weights, Ill.J.Math.**10**(1966), 39-48

- : On weights of constant-sum majority games, SIAM J.Appl.Math. 16 (1968), 527-32

Rosenmüller, J.: The structure of homogeneous games, IMW WP 137, Universit{t Bielefeld 1984a

- : Homogeneous games: recursive structure and computation, IMW WP 137, Universit{t Bielefeld 1984b

- : The theory of games and markets, Amsterdam: North Holland, 1981

Schmeidler, D.: The nucleolus of a characteristic function game, SIAM J.Appl.Math.17, 1969, 1163-1170

Shapley, L.S.: Simple games: an outline of the descriptive theory, Beh.Sc. 7, 1962, 59-66

Empirische Arbeiten

Komorita, S.S.: An equal excess model of coalition formation, Beh.Sc. **24**, 1979, 369-91

Komorita, S.S. and D.A. Kravitz: Some tests of four descriptive theories of coalition formation, in: H.Sauermann: Contributions to experimental economics, Vol.8, T}bingen 1978, 207-30

Komorita, S.S. and D. Nagao: The functions of resources in coalition behaviour, J.Personality&Soc.Psy. **44**, 1983, 95-106

Kravitz, D.A.: Effects of resources and alternatives on coalition formation, J.Personality&Soc.Psy. **41**, 1981, 87-98

- : Extensions of bargaining theory to simple weighted majority games in which players lack alternative minimal winning coalitions. To appear in H.W.Crott & R.W.Scholz (eds.): Current issues in West-German decision research. Ffm 1985a

- : Size of smallest coalition as a source of power in coalition bargaining, Manuscript submitted for publication, 1985b

Kravitz, D.A. and M. Dobson: Motivations and cognitions in coalition formation, in: R.Tietz (ed.): Aspiration Levels in Bargaining and Economic Decision Making, Berlin 1973

Kravitz, D.A. and J. Iwaniszek: Number of coalitions and resources as sources of power in coalition bargaining, J.Personality&Soc.Psy. **47**, 1984, 534-48

Index

Beispiele