Universität Bielefeld/IMW

Working Papers
Institute of Mathematical Economics

Arbeiten aus dem
Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung

Nr. 133

Geordnete einfache Spiele

Axel Ostmann

April 1984

H. G. Bergenthal

Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung
an der
Universität Bielefeld
Adresse/Address:
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1
Bundesrepublik Deutschland
Federal Republic of Germany

EINLEITUNG - Die vermachtete Gruppe

Betrachten wir eine Gruppe, deren Mitglieder gemeinsam Entscheidungen treffen. Läßt die Beobachtung die Vermutung zu, daß die Gruppen in Fraktionen zerfällt und ihre Entscheidungen im wesentlichen bereits danach trifft, welche Fraktionen für einen vorgelegten Vorschlag sind, so vermuten wir einen Typ von Vermachtung für diese Gruppe, der es nahelegt, den Entscheidungskörper mit Hilfe der formalen Struktur eines monotonen einfachen Spieles (N,v) zu studieren. N ist die Menge der Spieler, wobei ein Spieler die formale Wiedergabe einer Fraktion ist; v ist eine Funktion auf den Teilmengen von N, die wir Koalitionen nennen; sie hat spezielle noch zu diskutierende Eigenschaften und wird interpretiert als Fürsprecher-Ergebnis-Funktion; ihre Werte seien 0 oder 1, wobei 0 für einen negativen und 1 für einen positiven Bescheid (etwa: angenommen oder ausgeführt) steht. Ist S eine Koalition und $v(S) = 1$, so heiße S eine Gewinnkoalition. Im folgenden interessiert uns die Konstruktion von (N,v) aufgrund empirischer Daten. Dazu liege eine Beobachtung der Gruppe vor, die eine Aufstellung ihrer Entscheidungen in Form einer Liste - Vorschlag, wer dafür, ob positiv oder negativ beschieden - zulasse und zudem eine Identifikation der Fraktionen. Aus dieser Liste und der Fraktionierung lassen sich unter Umständen den Koalitionen eindeutige Werte zuordnen, 0 falls die von der Koalition gestützten Vorschläge immer negativ, 1 falls sie immer positiv beschieden werden.

Ist in der Liste eine Koalition vorhanden, deren Anträge nicht immer gleich behandelt werden, so ist in dem bisher gebrauchten Sinne die Gruppe nicht vermachtet, d.h. die Entscheidungen werden nicht lediglich danach getroffen, wer dafür ist. Oft stößt man jedoch bei der Beobachtung von Gruppen auf Fakten, die zeigen, daß die Gruppe Entscheidungen (bzw. Anträge) typisiert, z.B. in primitiver Form: normale Entscheidung / wichtige Entscheidung, wobei die Gruppe z.B. die Entscheidung dann als wichtig einstuft, wenn es ein Spieler verlangt.

In solchen Fällen gehe man zu Listen für je einen Entscheidungstyp über, und sehe man die Gruppe als vermachtet an, wenn jede Liste in obiger Weise eine Funktion liefert.

Im Normalfall werden unsere Listen nicht alle Koalitionen enthalten. Wir sind dann gezwungen, die Liste auf sinnvolle Weise zu vervollständigen. Dazu dient die folgende Annahme (monotone Fortsetzung):

> Ist S Teil von T, und Vorschläge mit Fürsprecher T werden negativ beschieden, so nehmen wir dasselbe für S an.
> Ist S Teil von T, und Vorschläge mit Fürsprecher S werden positiv beschieden, so nehmen wir dasselbe für T an.

Führt dieses Verfahren zu Widersprüchen, so gibt es eine Gewinnkoalition, der es schadet, wenn andere derselben Meinung sind (also ihr beitreten). Sie ist somit unsicher, da abhängig von bestimmten anderen. In diesen Fällen mag uns die Funktion v interessieren, die durch Streichung dieser "unsicheren" Koalition entsteht. Das Paar (N,v) heißt einfaches (monotones) Spiel. Es gibt wieder, welche Koalitionen die Macht haben, einen Antrag (evtl. von bestimmten Typ) durchzusetzen.

Die beobachtete Gruppe ist nicht der einzige Fall, in dem Strukturanalyse via einfachem Spiel angezeigt erscheint. Denken wir etwa an ein Gremium, für das explizit Entscheidungsregeln festgesetzt sind. Sind diese Regeln statisch, so lassen sie sich unschwer mit einfachen Spielen identifizieren (z.B. via benötigter Mehrheiten). Im dynamischen Falle lassen sich die Prozeßregeln für nach endlich vielen Schritten abbrechende Prozesse durch die Hypothese optimalen strategischen Verhaltens auf ein einfaches Spiel hin abstrahieren.

Auch bei komplizierten Entscheidungskörpern, etwa mehreren interdependenten Gremien mit einer Vielfalt von Entscheidungstypen, kann man via Fürsprecher-Ergebnis-Funktionen v versuchen, die Machtverhältnisse und auch die Leistungsfähigkeit des Entscheidungskörpers zu beurteilen.

Im folgenden Beitrag betrachten wir je einen Aspekt der Leistungsfähigkeit und der Macht.

Wenden wir uns zunächst der Leistungsfähigkeit zu. Der zu untersuchende Leistungsaspekt sind mögliche Inkonsistenzen, die eine Gruppe trotz konsistentem Einzelverhaltens produzieren kann. Um einem Mißverständnis vorzubeugen:
Eine Gruppe ist nicht unbedingt leistungsbesser, weil sie konsistentere Ergebnisse produziert, aber sie ist entlasteter. Jede Entlastung hat jedoch auch ihren Preis.

Gilt für (N,v): die Summe der v-Werte zweier disjunkter Koalitionen ist nicht größer als der v-Wert ihres Zusammenschlusses, so heißt (N,v) superadditiv.

Superadditivität hat folgende Bedeutung: es kann nicht gleichzeitig eine Aussage A und ihre Negation, die Aussage non A, auf direktem Wege akzeptiert werden. Im Lichte dessen, daß in solch einer Gruppe keine Entscheidungsfolgen "mal so, mal so - mal dafür, mal dagegen" auftreten, nennen wir eine Gruppe mit superadditivem Spiel "effektiv".

Gilt für (N,v): eine Koalition gewinnt genau wenn ihre Opposition (= N minus die Koalition) verliert, so heißt (N,v) Nullsummenspiel. Eine Gruppe mit Nullsummenspiel ist, wenn kein einzelner "entscheidungsschwach" ist, auch insgesamt nicht "entscheidungsschwach"; d.h. kann jeder Einzelne entscheiden zwischen A und non A, dann auch die Gruppe. Wir nennen solche Gruppen konstruktiv.

Nicht jede effektive Gruppe ist auch konstruktuv. Sei (N,v) z.B. die Einstimmigkeitsregel v(S)=1 genau wenn S=N. Ist einer in N für A und einer in N für non A, so kann die Gruppe weder für A noch für non A sich entscheiden: sie ist entscheidungsschwach.

Gilt für (N,v): der Durchschnitt aller Gewinnkoalitionen, er heiße E, ist ungleich leer, so heißt (N,v) ein Spiel mit Veto. Die Spieler in E sind nämlich für einen positiven Bescheid unverzichtbar, sie haben ein Veto, sie sind Vetospieler. Nur Spiele mit Vetospielern sind frei von "inkonsistenten Folgen". Als inkonsistente Folgen bezeichnen wir folgende Situationen: Vorschläge A(1),...,A(r), B werden akzeptiert und es gilt (aus irgendwelchen Gründen): aus A(1) und..... und A(r) folgt non B. Bekannt ist diese Situation bei wechselnden Mehrheiten in Abstimmungen als Condorcet-Paradox. Gibt es keinen Vetospieler, so gibt es Koalitionen S(1),...,S(r), T, die Aussagen A(1),...,A(r) bzw. B stützen und deren Schnitt leer ist. Der Schnitt der S(i)-Koalitionen stützt auch die Folgerungen, die sich aus den A(i) ergeben, weil konsistente Einzelspieler unterstellt sind, nicht aber T. Ist aber E nicht leer, so verhindern die Spieler in E inkonsistente Folgen.

Wir nennen Gruppen, die ein Spiel mit Veto spielen, logisch konsistent. Ist eine Gruppe konstruktiv und logisch konsistent, so hat sie einen Diktator, dh. es existiert ein Spieler i derart, daß S genau dann eine Gewinnkoalition ist, wenn i zu S gehört.

Der hier betrachtete Machtaspekt unterstellt die Frage nach der Art der Skala, auf der Vergleiche zwischen Einzelspielern "i ist stärker als j" gemessen werden kann.

Ein Spiel heißt geordnet, wenn die Stärkerelation eine lineare Ordnung auf N ergibt (s.2.1-3). Die Gruppe heiße dann "ordinal vermachtet".

Das Spiel heißt gewichtetes Majoritätsspiel und die Gruppe "kardinal vermachtet", wenn der Entscheidungsmechanismus durch ein Parlament dargestellt werden kann, mit entsprechend der skalierten Stärke vielen Sitzen (Stimmen) für jede Fraktion. Jeder Vorschlag, auf den sich mehr als eine bestimmte Anzahl von Stimmen (Abstimmungslevel) vereinigen lassen, gilt als beschlossen. Das bedeutet, daß die Stärkeeskalierung additiv interpretiert werden kann: die Stärke einer Koalition erhält man aus der Summe der Stärken ihrer Mitglieder.

Der Stärkebegriff verlangt eine genauere Analyse, die in diesem Beitrag vorangetrieben wird. Auf zwei Ergebnisse sei hier gesondert verwiesen:

a. aus Effektivität und ordinaler Vermachtung folgt nicht die Kardinalität der Vermachtung (s. 2.12.4/3.4 c)),

und es gilt sogar:

b. aus Konstruktivität und ordinaler Vermachtung folgt nicht die Kardinalität der Vermachtung (s.3.6).

Für Beispiele hierzu ist jedoch eine gewisse Mindestgruppengröße erforderlich. Die genauen Grenzgrößen sind nicht bekannt, aber sicherlich bleibt die Lage bei bis zu sieben Einzelspielern überschaubar und komplikationslos.

§1 Einfache Spiele, Dualität und Nullsumme

(1.1) DEFINITION: 1. Ein Paar (N,v) mit $N = \{1,\dots,n\} \subset \mathbb{N}$ und $v : 2^N \to \{0,1\}$, $v(\emptyset) = 0$, heißt einfaches Spiel.

I.f. werden Teilmengen S von N oft mit ihren Indikatorfunktionen 1_S identifiziert, also $v(S) := v(1_S)$.

2. Ein einfaches Spiel heißt monoton, falls für alle S,T aus $S \subset T$ folgt $v(S) \leq v(T)$. Die monotonen Spiele werden mit V bezeichnet.

Die Elemente von N werden als Spieler, die Elemente von 2^N werden als Koalitionen bezeichnet. Die monotonen Spiele mit n Spielern sei mit V^n notiert.

3. Für disjunkte Koalitionen sei $S \cap T$ als $S + T$ notiert. Oft schreiben wir, wenn es nicht zu Verwechslungen führen kann statt $\{i\}$ nur i.

4. Ein einfaches Spiel heißt superadditiv, falls für alle S,T gilt $v(S+T) \geq v(S) + v(T)$. Die superadditiven Spiele werden mit V_S bezeichnet; V_S^n entsprechend.

5. Ein einfaches Spiel hat Nullsumme, falls für alle S gilt $v(S) = 1 - v(N \setminus S)$. Die Menge der Nullsummenspiele heißt V_0; V_0^n entsprechend.

BEMERKUNG: Es gilt $V_0 \subsetneq V_S \subsetneq V$ und $V_S^n \subsetneq V^n$ für $n \geq 1$,

$V_0^n \subsetneq V_S^n$ für $n \geq 2$.

(1.2) DEFINITION: Sei $\overset{*}{.} : V \to V$, $(N,v)^* := (N,v^*)$
mit $v^*(S) = 1 - v(N \setminus S)$.
$(N,v)^*$ heißt das zu (N,v) duale Spiel.

BEMERKUNG: 1. $V_0^* = V_0$, also Nullsummenspiele sind selbstdual.

2. $\overset{*}{.}$ ist idempotent $(v^{**} = v)$

3. $V_S \cup V_S^* \neq V$. Man betrachte z.B. das Spiel
$N = \{1,2,3,4\}$, $v(S) = 1$ genau wenn
$|S| \geq 3$ oder $S = \{1,2\}$ oder $S = \{3,4\}$.

(1.3) DEFINITION: Sei $\hat{.} : V_S \to V_0$, $(N,v)\hat{} := (N \cup \{n+1\}, \hat{v})$
mit $\hat{v}(S) = 1$ genau wenn
$(n+1 \in S$ und $v(N \setminus S) = 0)$ oder
$(n+1 \notin S$ und $v(S) = 1)$.
$(N,v)\hat{}$ heißt Nullsummenerweiterung von (N,v).

DEFINITION: (N,v) gegeben, $i \in N$. Gilt für alle S
$v(i+S) = v(S)$, so heißt i Dummy.
$D = D(N,v)$ sei die Menge (Koalition) aller Dummies.

BEMERKUNG: 1. Ist $\overset{n}{.} : V_0^n \to V_S^{n-1}$, $(N,v)^n := (N \setminus \{n\}, \overset{n}{v})$
mit $\overset{n}{v}(S) = 1$ genau wenn $v(S) = 1$,
so ist $(N,v)^{\hat{}\, n} = (N,v)$.

2. Ist $(N,v) \in V_0$, so ist $n+1$ Dummy (in $(N,v)\hat{}$) .

(1.4.) DEFINITION: $E = E(N,v) = \cap \{S;\ vS = 1\}$ heißt Vetoblock. $i \in E$ heißt unverzichtbar (oder Veto-)Spieler

LEMMA Ist $(N,v) \in \mathbb{V}_0^n$, dann ist entweder $/E/ = 1$ und $N \setminus E = D$, oder es ist $E = \emptyset$.

Beweis: Seien $i,j \in E$, $i \neq j$.
Es gibt ein S mit $\{i,j \subseteq S\}$ und $v(S) = 1$. Also ist $v(S \setminus i) = 0$ und $v(N \setminus (S \setminus i)) = 1$, somit wäre $j \notin E$ nach Definition.
Also ist E höchstens einelementig.
Sei nun $E \neq \emptyset$, dann ist $v(N \setminus E) = 0$ und $v(E) = 1$; somit ist $N \setminus E = D$ nach Definition

§2 Geordnete Spiele: Die Umworbenheitsrelation

(2.1) DEFINITION: Sei $(N,v) \in V$. $\succsim \; = \; \succsim(N,v) \subset N^2$ heißt Umworbenheitsrelation (zu (N,v)), falls $i \succsim j$ genau wenn für alle S gilt $v(i+S) \geq v(j+S)$.

Die Spiele i und j heißen symmetrisch oder vom gleichen Typ, falls $i \succsim j$ und $j \succsim i$. Wir schreiben dann $i \sim j$. $\tilde{N} := \{\tilde{i},\ i \in N\}$ mit $\tilde{i} = \{j;\ i \sim j\}$ heißt Menge der Typen.
Wir definieren $\succ \; := \; \succsim \setminus \sim$,
und $\parallel \; := N^2 \setminus (\succsim \cup \precsim)$. Gilt $i \parallel j$, so heißen i und j unvergleichbar.

(2.2) BEMERKUNGEN:

1. $\succsim$ ist reflexiv und transitiv (MASCHLER/PELEG Theorem 9.2)
2. $\succsim$ ist i.a. nicht vollständig.

(2.3) DEFINITION: Sei $(N,v) \in V$. (N,v) heißt <u>geordnet</u>, falls $\succsim(N,v)$ vollständig ist. Die geordneten Spiele seien mit $V_{\geq}$ bezeichnet; $V^n_{\geq}$ entsprechend. (N,v) heißt <u>strikt geordnet</u>, falls (N,v) geordnet ist und für alle $i \in N$ gilt $|\tilde{i}| = 1$. $V_{>}$ und $V^n_{>}$ sind entsprechend definiert.

(2.4) DEFINITION: Sei $S \in 2^N$, $i,j \in N$. Mit S^{ij} sei die Koalition bezeichnet, die aus S durch Vertauschen der Spieler i und j entsteht.

BEMERKUNG: Sei $(N,v) \in V$ und $i \succsim j$.
Dann gilt: $j \in S \wedge v(S) = 1 \Rightarrow v(S^{ij}) = 1$,
$i \in S \wedge v(S) = 0 \Rightarrow v(S^{ij}) = 0$.

(2.5) DEFINITION: Sei $(N,v) \in V_{\geq}$, und $S,T \in 2^N$. S heißt gewichtiger als T, in Zeichen $S \geq T$ falls S Obermenge einer durch π permutierten Version T^{π} von T ist, wobei $\pi(i) \succsim i$. $S \parallel T$ genau wenn S und T bzgl. $\geq$ unvergleichbar sind.

BEISPIEL: Sei $N = \{1,2,3,4\}$ und $i \succsim i+1$ $(i=1,2,3)$. $(1,0,0,1)$ und $(0,1,1,0)$ sind unvergleichbar.

BEMERKUNG: Aus $S \geq T$ folgt $v(S) \geq v(T)$.

(2.6) BEMERKUNG: (2.5) erlaubt eine sparsame Wiedergabe eines vorgelegten geordneten Spieles durch Angabe der bzgl. $\geq$ minimalen Gewinnkoalitionen:
Dazu sei $i \succsim i+1$
$(i=1, \ldots, n-1)$.
Sei $W = W(N,v) = \{S \in 2^N;\ v(S) = 1\}$, die "Gewinnkoalitionen". Dann sei W^* die Menge der minimalen Elemente von W bzgl. $\geq$.

Wir schreiben dann $(N,v) := < W^* >$.

BEISPIEL (Aumann): $(N,v) := <\{(1,0,0,1,1,0,0,1),\ (0,1,1,0,0,1,1,0)\}>$
Wir bemerken $(1,1,0,0,0,0,1,1)$ und $(0,0,1,1,1,1,0,0)$ sind nicht aus W. Das bedeutet:

$$V_S \cup V_S^* \not\supset V_{\geq}$$

(2.7) BEISPIEL: $N = \{1,2,3,4\}$
$v(S)$ sei 1 genau wenn $(1 \in S$ und $S \cap \{2,3\} \neq \emptyset)$ oder $S \supset \{2,3,4\}$.
Dann gilt $1 \succ 2 \sim 3 \succ 4$.
Wir betrachten nun $(N,v)^*$:
$v^*(S)$ ist 1 genau wenn $(1 \in S$ und $S \cap \{2,3,4\} \neq \emptyset)$ oder $S \supset \{2,3\}$.
Es gilt ebenfalls $1 \succ 2 \sim 3 \succ 4$.

Gemäß (2.6) ist $(N,v) = <\{(1,0,1,0),(0,1,1,1)\}>$
und $(N,v)^* = <\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}>$

Allgemein gilt:

(2.8) LEMMA: Das duale Spiel hat dieselbe Umworbenheitsrelation.
Beweis: Vorgelegt sei (N,v) mit der Umworbenheitsrelation $\succsim$. Die Umworbenheitsrelation von (N,v^*) sei mit $\supsetsim$ bezeichnet. Zu zeigen ist $i \succsim j \Longleftrightarrow i \supsetsim j$.
Nun ist $i \succsim j$ nach Definition gleichwertig mit

$$\bigwedge_{B \subset N \setminus \{i,j\}} v(B+i) \geq v(B+j)$$

Da $v^*(S) = 1 - v(N \setminus S)$ ist äquivalent

$$\bigwedge_{B \subset N \setminus \{i,j\}} v(N \setminus (B+i)) \leq v(N \setminus (B+j)$$

Weil $N \setminus (B+\nu) = (N \setminus B) \setminus \nu$, ersetzen wir B durch $N \setminus B$ und erhalten

$$\bigwedge_{C \supset \{i,j\}} v(C \setminus i) \leq v(C \setminus j)$$

und weiter mit $D := C \setminus \{i,j\}$

$$\bigwedge_{D \supset N \setminus \{i,j\}} v(C+j) \leq v(C+i) .$$

Das aber ist nach Definition gleich $i \supsetsim j$.

BEMERKUNG: Insbesondere gilt damit: ist $\succsim$ vollständig, so auch $\supsetsim$, d.h. $V^*_{\geq} = V_{\geq}$ und $V^*_{>} = V_{>}$.

(2.9) LEMMA: Sei $(N,v) \in V_S$.
Die Umworbenheitsrelation von $(N,v)^\wedge$ induziert auf N die Umworbenheitsrelation von (N,v) .

Beweis: Sei $\succsim$ die Umworbenheitsrelation von (N,v) und $\underset{\sim}{\supset}$ die von $\widehat{(N,v)}$. Zu zeigen ist:
Für alle $i,j \in N$ gilt $i \succsim j$ genau wenn $i \underset{\sim}{\supset} j$.

1. Wir zeigen: $i \succsim j \Rightarrow \bigwedge_{T \not\ni i,j} \hat{v}(T+\{i\}) \geq \hat{v}(T+\{j\})$.

   Da die Formel für $\hat{v}(T+j) = 0$ erfüllt ist, sei $\hat{v}(T+j) = 1$.

   Fall a): $(n+1) \notin T$. Dann ist
   $$\hat{v}(T+i) = v(T+i) \geq v(T+j) = \hat{v}(T+j)$$

   Fall b): $(n+1) \in T$. Dann ist $j \in N \setminus (T+i)$, $i \in N \setminus (T+j)$ und
   $$\hat{v}(T+i) = 1 - v(N \setminus (T+i)) \geq 1 - v(N \setminus (T+j)) = \hat{v}(T+j)$$

2. Noch zu zeigen: $i \underset{\sim}{\supset} j \Rightarrow i \succsim j$.
   Das gilt, da $\{T \in 2^{N+(n+1)} ; i,j \notin T\} \supset \{T \in 2^N ; i,j \notin T\}$.

(2.10) BEMERKUNG: Nach Lemma 2.7 und Bemerkung 2.2 gibt es für die Umworbenheitsrelation der Nullsummenerweiterung (superadditiver) geordneter Spiele Möglichkeit:

$$n+1 \parallel i \Leftrightarrow i_0 \leq i \leq i_1$$

mit den Extremfällen

a. $i_0 = 1$ und $i_1 = n$

b. $i_0 > i_1$.

Damit, daß der Extremfall b. nicht der Normalfall ist, also $\hat{V}_{\geq} \not\subset V_{\geq}$, beschäftigen wir uns in (2.11) und (2.12).

(2.11) LEMMA: Sei $(N,v) \in V_{\geq} \cap V_S$.
Genau dann ist $\widehat{(N,v)} \notin V_{\geq}$, wenn ein Spieler $i \in N$ existiert und zwei Koalitionen $S,T \subset N \setminus \{i\}$ mit $S \parallel T$, $S+i \parallel N \setminus T$, $T+i \parallel N \setminus S$ und $N \setminus S \parallel N \setminus T$, wobei $v(S+i) = v(N \setminus S) > v(N \setminus T) = v(T+i)$.

Beweis: 1. Sei $(N,v)^\wedge \notin V_{\geq}$. Dann gibt es einen Spieler i mit $i \parallel n+1$.

Das ist äquivalent zu

$$\bigwedge_{S,T \subset N \setminus \{i\}} v(S+i) > \hat{v}(S+(n+1)) \text{ und}$$

$$\hat{v}(T+(n+1)) > v(T+i) .$$

Das bedeutet $v(S+i) = v(N \setminus S) = 1$ und
$v(T+i) = v(N \setminus T) = 0$.

Wäre $T \geq S$, so ergibt $v(T+i) \geq v(S+i)$ einen Widerspruch;
wäre $T \leq S$, so mittels $\hat{v}(S+(n+1)) \geq \hat{v}(T+(n+1))$.

Wäre $S+i \geq N \setminus T$, so ergibt sich auch $S \geq N \setminus (T+i)$ und
$S+(n+1) \geq N \setminus (T+i) + (n+1)$.
Also ist $\hat{v}(S+(n+1)) = 1 - v(N \setminus S) \geq \hat{v}(N \setminus (T+i) + (n+1)$
$= 1 - v(T+i)$.
Da $v(N \setminus S) = 1$ und $v(T+i) = 0$ ergibt sich ein Widerspruch.

Wäre $S+i \leq N \setminus T$, so liefert $v(S+i) \leq v(N \setminus T)$ sofort den Widerspruch.
Die anderen Parallelitäten ergeben sich entsprechend.

2. Die andere Richtung folgt aus
$v(S+i) = v(N \setminus S) = 1$ und $v(T+i) = v(N \setminus T) = 0$
und den Definitionen von $\hat{v}$ und $\succsim$.

(2.12) BEISPIELE:

1. Sei $(N,v) = \langle\{(0,0,1,1,1)\}\rangle$ Dann ist $\tilde{N} = \{N\}$. Zudem ist $(N,v) \in V_0$ (vgl. 1.3.2).
2. Sei $(N,v) = \langle\{(0,1,0,1,1)\}\rangle$ Dann ist $\tilde{N} = \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$.
Es gilt für $(N,v)^\wedge$: $1 \succ 3 \succ n+1$.
3. Sei $(N,v) = \langle\{(0,1,1,0,1)\}\rangle$ Dann ist $\tilde{N} = \{\{1,2,3\}, \{4,5\}\}$.
Es gilt für $(N,v)^\wedge$: $1 \succ 4 \succ n+1$.

4. Sei $(N,v) = \langle\{(1,0,1,0,0,0,0,1,1),\ (0,1,0,1,1,1,1,0,1)\}\rangle$
Dann ist $\tilde{N} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5,6,7\},\{8,9\}\}$.
Es gilt $n+1 \not\succsim 9$:
$v(0,1,0,1,1,1,1,0,1) = 1$, aber $v(1,0,1,0,0,0,0,1,1) = 1$
also $\hat{v}(0,1,0,1,1,1,1,0,0,1) = 0$.

Weiters ist $n+1 \not\precsim 9$:
$v(0,1,1,0,0,0,1,0,1) = 0$, also $\hat{v}(1,0,0,1,1,1,0,1,0,1) = 1$.
Aber $v(1,0,0,1,1,1,0,1,1) = 0$.
$S = (1,0,1,0,0,0,0,1,0)$ und $T = (1,0,0,1,1,1,0,1,0)$
erfüllen die in (2.11) genannten Bedingungen.
(i.bes. $S \not\succeq T$, da $|T| > |S|$; und $T \not\succeq S$, da $3 \in S$).

BEMERKUNG: Mit dem Beispiel ist gezeigt:

$$(V_S \cap V_{\geq})^{\wedge} \not\subset V_{\geq}$$

DEFINITION: $V_{\geq(0)} := \{(N,v) \in V_{\geq} \cap V_S \quad ; (N,v)^{\wedge} \in V_{\geq}\}$.

(2.13) DEFINITION: Sei $\varphi^n : V^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi^1 \ldots \varphi^i \ldots)_{\mathbb{N}}$
φ erhält $\succsim$ genau wenn

$$\bigwedge_{(N,v)} \bigwedge_{i,j \in N} i \succsim j \Rightarrow \varphi_i \geq \varphi_j$$

φ erhält $\succ$ genau wenn

$$\bigwedge_{(N,v)} \bigwedge_{i,j \in N} i \succ j \Rightarrow \varphi_i > \varphi_j$$

BEMERKUNG: Der Shapley-Wert und der Banzhaf-Wert erhalten $\succ$ (und damit auch $\succsim$). Denn sie sind definiert als Vektor der (anzahlabhängig gewichteten) Summen der Marginalwerte $v(S) - v(S \setminus i)$. Ist aber $v(S) > v(S \setminus i)$ und $j \succ i$ so folgt, da $(S \setminus i)^{ij} = S^{ij} \setminus j$ und $[v(S) > v(S \setminus i) \Rightarrow i \in S]$ die Ungleichung
$v(S^{ij}) \geq v(S) > v(S \setminus i) \geq v(S^{ij} \setminus j)$.

Weiters ist für $j \succ i$ mindestens ein T mit $v(T) = 1$, $j \in T$ und $v(T^{ij}) \doteq 0$ vorhanden und somit ein positiver Summand mehr.

Auch der Lapidot-Vektor erhält $\succ$.
(Lapidot 1969/72).

Der Kern (Korrespondenz!) "erhält" $\succsim$ aber nicht $\succ$ (Maschler/Peleg Ex. 9.5).

Auf $V_{\geq}$ stimmen die vom Shapley-Wert, vom Banzhaf-Wert und vom Lapidot-Vektor induzierten Präordnungen mit der Umworbenheitsrelation überein.

(2.14) LEMMA: Sei $(N,v) \in V$. $D(N,v)$ und $E(N,v)$ sind Typen.

Beweis: klar

(2.15) DARSTELLUNGEN: Wir benutzen für $(N,v) \in V_{\geq}$ die Standarddarstellung aus 2.6.

Ist $|\tilde{N}| = r$, so sei $\tilde{N}$ mit $\{K_1,\dots,K_r\}$ identifiziert via: für $K_S \in \tilde{N}$ ist $K_{S+1} = \widetilde{i+1}$ wobei $i \in K_S$ und $i+1 \notin K_S$. Zu (N,v) gehört die Typendarstellung: $(k,\tilde{W}^*)$

wobei $k = k(N,v) = (|K_S|)_{S=1,\dots,r}$

und $\tilde{W}^* = \{(|S \cap K_S|)_{S=1,\dots,r}\ ;\ S \in W^*\}$

(2.16) W^* trennt die Typen : SATZ:
Sei $(N,v) \in V_{\geq}$ mit $i \succsim i+1$ $(i=1,\dots,n-1)$. Es gilt:
$i \succ i+1$ genau wenn ein $S \in W^*$ existiert mit $i \in S$ und $i+1 \notin S$.

Beweis: $\Leftarrow$: $v(S^{i,i+1})=0$, da S minimal bzgl. $\succsim$. Damit ist $i \not\sim i+1$.

$\Rightarrow$: Wäre für alle $S \in W^*$:
$\neg(i \in S \wedge i+1 \notin S)$, so gilt, da $i \succsim i+1$, für alle $S \in W^*$: $i+1 \notin S \Rightarrow i \notin S$.

Ist $T \in W$, so ist entweder $\{i, i+1\} \subseteq T$, oder $T \cap \{i, i+1\} = \emptyset$, oder es existiert ein $S \in W^*$ mit $T \succsim S$ und $S \cap \{i, i+1\} = \emptyset$. Also ist $i \sim i+1$.

§3 Abstimmungen

(3.1) DEFINITION: 1. $(N,v) \in V$ heißt gewichtetes Majoritätsspiel falls eine natürliche Zahl μ und ein nichtnegativ ganzzahliges Maß $m = (m_1,\dots,m_n)$ existieren, so daß $v = 1_{[\mu,mN]} \circ m$.

Wir schreiben mS für $m(S) = \sum_{i\in S} m_i = 1_S m$.

(μ,m) heißt dann Repräsentation von (N,v). Wir schreiben dafür $(\mu,m) \in R(N,v)$, und $(N,v) = \langle\mu, m\rangle$. Die Menge der gewichteten Majoritätsspiele sei mit V_m bezeichnet.

2. $V_{m^+} := V_m \cap V_S$ heißten Abstimmungen.

3. $V_{m^o} := V_m \cap V_o$ heißen Mehrheitsspiele.

(3.2) BEMERKUNGEN: 1. In OSTMANN 2.1 wurde aufgrund der von $R(N,v)$ induzierten Präordnungen eine natürliche Spielerordnung definiert. Diese stimmt nach Konstruktion und MASCHLER/PELEG 9.7 mit der Umworbenheitsrelation überein. Daraus folgt:

$$V_m \subset V_{\geq} .$$

2. Ist $(N,v) = \langle\mu,m\rangle$, so ist $(N,v)^* = \langle mN-\mu+1,m\rangle$. Denn $v^*(S) = 1-v(N\setminus S) = 1-(1_{[\mu,mN]} \circ m)(N\setminus S)$

$$= 1-(1_{[o,mN-\mu]} \circ m)(S)$$

$$= (1_{[mN-\mu+1,mN]} \circ m)(S).$$

3. Damit folgt auch: gilt $2\mu -1 = mN$, so ist (N,v) ein Nullsummenspiel: $\mu = mN - \mu + 1$.

4. Weiters gilt nach 2. (vgl. 2.6)

$$V_{m^+} \cup V^*_{m^+} = V_m$$

5. Zudem ist

$$V_{m^+} \cap V^*_{m^+} = V_{m^0}$$

(3.3) LEMMA: $\hat{V}_{m^+} \subset V_m$

Beweis. Wir zeigen: Ist $(N,v) = \langle\mu,m\rangle$, so ist $(N,v) = \langle\mu,m,m_{n+1}\rangle$ mit $m_{n+1} = 2\mu - 1 - mN$:

Nach 3.2.3 ist $\langle\mu,m, m_{n+1}\rangle$ ein Nullsummenspiel und falls $S \subset N$ gilt

$(1_{[\mu,mN]} \circ m)(S) = (1_{[\mu,mN+m_{n+1}]} \circ (m,m_{n+1}))(S)$.

(3.4) BEISPIELE: a) Die Beispiele 2.12.1,2,3 haben die $(N,v)^\wedge$ die Repräsentationen

1. (3;1,1,1,1,1,0), d.h. $(N,v) \in V_0$
2. (7;3,3,2,2,2,1)
3. (9; 4,4,4,2,2,1)

b) Die Formel in 3.3 für m_{n+1} zeigt insbesondere n+1 ist nicht immer der kleinste Spieler, z.B. $(N,v) = \langle 9;5,4,3,2,1\rangle$. Dann ist $(N,v)^\wedge = \langle 9;5,4,3,2,2,1\rangle$.

c) Beispiel 2.12.4 liefert $V_{m^+} \subsetneq V_S \cap V_{\geq}$, denn wäre $(N,v) \in V_m$, so wäre $(N,v) \in V_m$ nach 3.3 und somit $(N,v) \in V_{\geq}$ nach 3.2.1.

(3.5) LEMMA: Sei $(N,v) \in V$. Folgende Aussagen sind gleichwertig:

1. $(N,v) \in V_m$
2. Es existiert eine Hyperebene, die cv {S;vS=1} und cv {S;vS=0} strikt trennt.

3. $cv\{S;vS=1\} \cap cv\{S;vS=0\} = \emptyset$

4. $(N,v) \in V_S \cup V_S^*$ und $\frac{1}{2}1 \notin cv\{S \in 2^{N+(n+1)}, wS=1\}$

wobei $(N+(n+1),w) = (N,v)$ bzw. $= (N,v)^*$

Beweis:

1. ⇒ 2.: Sei $(N,v) = \langle\mu,m\rangle$, dann trennt die Hyperebene $H(\mu,m) := \{x \in \mathbb{R}^N ; mx \geq \mu\}$ die Mengen $\{S;vS=1\}$ und $\{S;vS=0\}$, und somit auch $cv\,\{S;vS=1\}$ und $cv\,\{S;vS=0\}$. Ebenso trennt $H(\mu-1,m)$.
Damit trennt $H(\mu-\frac{1}{2},m)$ strikt.

2. ⇒ 3.: Trivial

3. ⇒ 4.: A. Wäre $(N,v) \notin V_S \cup V_S^*$ so gäbe es $S,T \in 2^N$ mit $v(S+T) < v(S)+v(T)$, d.h. $v(S) = v(T) = 1$ und $S',T' \in 2^N$ mit $1-v(S'+T') < 1-v(S') + 1-v(T')$ i.e. $v(S'+T') + 1 > v(S') + v(T')$, d.h. $v(S') = v(T') = 0$.

Da v monoton, bleiben die Ungleichungen auch für die speziellen Wahlen $(S, N\setminus S)$ und $(T, N\setminus T)$ erhalten. Dann aber ist $\frac{1}{2}1 = \frac{1}{2}(1_S+1_{N\setminus S}) = \frac{1}{2}(1_T+1_{N\setminus T})$ aus $cv\,\{S;\, vS=1\} \cap cv\,\{S;\, vS=0\}$. Widerspruch.

B. Nehmen wir nunmehr an $\frac{1}{2}1 \in cv\,\{S \in 2^{N+(n+1)},\, wS=1\}$, also

$$(1)\quad \frac{1}{2}1 = \sum_{\substack{S \ni n+1\\ wS=1}} \lambda_S 1_S + \sum_{\substack{S \not\ni n+1\\ wS=1}} \lambda_S 1_S\,,\quad \sum_{wS=1} \lambda_S = 1$$

Ersetzen wir bei den Summationen S durch die Komplemente, so erhalten wir auch, daß
$\frac{1}{2}1 \in cv\,\{S \in 2^{N+(n+1)},\, wS = 0\}$, denn :

$$1 = \sum_{wS=1} \lambda_S \quad 1 = \sum_{\substack{S \ni n+1 \\ wS=1}} \lambda_S \,(1_S + 1_{N \setminus S}) + \sum_{\substack{S \not\ni n+1 \\ wS=1}} \lambda_S (1_S + 1_{N \setminus S}) \,.$$

Also gilt:

$$(2) \quad \tfrac{1}{2}\, 1 = \sum_{\substack{S \not\ni n+1 \\ wS=0}} \lambda_{N \setminus S}\, 1_S + \sum_{\substack{S \ni n+1 \\ wS=0}} \lambda_{N \setminus S}\, 1_S$$

für (N,v) ergeben sich aus (1) und (2):

$$(1') \quad \tfrac{1}{2}\, 1 = \sum_{\substack{T \in 2^N \\ vT=1}} \lambda_T\, 1_T + \sum_{\substack{T \in 2^N \\ vT=0}} \lambda_{N \setminus T}\, 1_{N \setminus T}$$

$$(2') \quad \tfrac{1}{2}\, 1 = \sum_{\substack{T \in 2^N \\ vT=0}} \lambda_{N \setminus T}\, 1_T + \sum_{\substack{T \in 2^N \\ vT=1}} \lambda_T\, 1_{N \setminus T}$$

Zudem gilt aber (letzte Koordinate von (1))

$$(3) \quad \sum_{v(T)=1} \lambda_T = \sum_{\substack{S \not\ni n+1 \\ wS=1}} \lambda_S = \tfrac{1}{2} = \sum_{\substack{S \ni n+1 \\ wS=1}} \lambda_S = \sum_{v(T)=0} \lambda_T$$

und somit

$$(4) \quad \sum_{v(T)=1} \lambda_T (1_T + 1_{N \setminus T}) = \tfrac{1}{2}\, 1 = \sum_{v(T)=0} \lambda_{N \setminus T}\, (1_T + 1_{N \setminus T})$$

Aus (1'), (2'), (4) folgt

$$(5) \quad \sum_{v(T)=1} \lambda_T\, 1_T = \sum_{v(T)=0} \lambda_{N \setminus T}\, 1_T =: x$$

und mit (3) und (5)

$$2x \in \mathrm{cv}\, \{T \in 2^N;\ vT = 1\} \cap \mathrm{cv}\, \{T \in 2^N;\ vT = 0\} \,.$$

4. $\Rightarrow$ 1. Da $(N,v) \in V_S \cup V_S^*$ betrachten wir die zugehörige Nullsummenerweiterung $(\bar{N},w)$ mit $\bar{N} := N + (n+1)$.

Ist $\frac{1}{2} 1 \notin \text{cv}\,\{S;\, wS=1\} \cap \text{cv}\,\{S;\, wS=0\} =: K$,

so ist K leer. Denn wäre $K \ni x = \sum_{wS=1} \alpha_S 1_S = \sum_{wS=0} \beta_S 1_S$

so auch $K \ni x^* := \sum_{wS=1} \beta_{\bar{N}\setminus S} 1_S = \sum_{wS=0} \alpha_{\bar{N}\setminus S} 1_S$ und somit

$\frac{1}{2} 1 = \frac{1}{2} (x+x^*)$. [Das ist 4. $\Rightarrow$ 3.] .

Dann aber existiert, da die konvexen Mengen kompakt sind, eine Hyperebene $H(\lambda,l)$, die strikt trennt. Weiters existiert in ihrer Umegebung eine Hyperebene $H(\lambda',l')$ mit rationalzahligen λ', l', die ebenfalls trennt. Durch skalare Multiplikation erhalten wir eine ganzzahlige Version λ'', l'' mit $H(\lambda',l') = H(\lambda'',l'')$. Also ist $(\bar{N},w) = \langle\lambda'', l''\rangle$.

Die gefundene Hyperebene (genauer: ihre Projektion) trennt aber auch im um eine Dimension niedrigeren "Würfel" (N,v) bzw. (N,v^*). Dann ist $(N,v) = \langle\lambda'', l_1'',\ldots,l_n''\rangle$ bzw. $\langle l''\, N-\lambda'', l_1'',\ldots,l_n''\rangle$.

(3.6) SATZ: Es gibt geordnete Nullsummenspiele, die keine Abstimmungen sind.

Beweis. Wir geben zwei Beispiele für die $\frac{1}{2} 1_N \in \text{cv}\, W$. Damit lassen sich cv W und cv $\{S;\, vS=0\}$ nicht trennen, s. Lemma 3.5.

Es ist $|N| = 13$, $k = (3,5,5)$.
$\tilde{W}_1^* = \{(3,1,0),(3,0,3),(2,3,1),(2,0,5),(1,3,3),(1,2,5),(0,5,3)\}$
$\tilde{W}_2^* = \{(3,1,0),(3,0,3),(2,3,1),(2,1,4),(1,5,0),(1,3,3),(1,2,5),(0,5,3)\}$

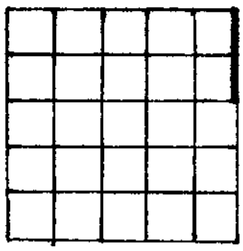
1. Beide Spiele sind geordnet. Die Ersetzung durch kleinere Spieler erhöht die Koalitionsgröße oder erhält sie. Wo sie erhalten wird: gelten Unvergleichbarkeiten

(3,0,3) || (2,3,1), (2,0,5) || (1,3,3) bzw. (1,5,0) || (2,3,1), (1,2,5) || (0,5,3).

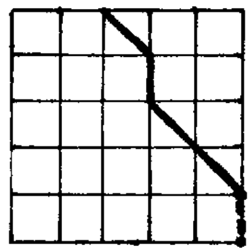
2. Die Spiele haben Nullsumme. Wir skizzieren den Typenquader

$$\mathop{\mathsf{X}}_{s=1}^{r} \{1,\ldots,k_r\}$$

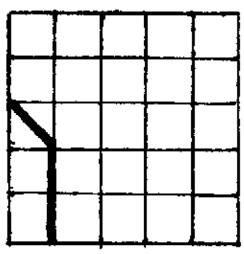
$|S \cap K_1| = 0$



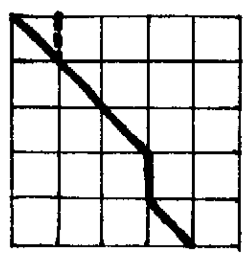
$|S \cap K_1| = 1$



$|S \cap K_1| = 3$



$|S \cap K_1| = 2$



Auf der Waagerechten ist $|S \cap K_2|$, auf der Senkrechten $|S \cap K_3|$ eingetragen. Die eingetragene Trennungslinie ist von W_1^* (bzw. gestrichelt von W_2^*) und $\sum$ erzeugt.

3. Es gilt $\frac{1}{3}(3,1,0) + \frac{1}{3}(0,5,3) + \frac{1}{6}(1,2,5) + \frac{1}{6}(2,1,4)$
$= \frac{1}{6}(9,15,15) = \frac{1}{2}k$

(3.7) FOLGERUNG: Sei $(N,v) \in V_{\geq(0)}$ (s.2.12) und $\frac{1}{2}1 \notin cv(W(N,v)^{\wedge}))$.
Dann ist $(N,v) \in V_m$.

Beweis. $(N,v)^{\wedge} \in V_{m0}$ nach 3.5.
Sei $(N,v)^{\wedge} = \langle\mu,m,m_{n+1}\rangle$. Dann
ist $(N,v) = \langle\mu,m\rangle$.

Entsprechend für Spiele, die dual zu superadditiven sind.

(3.8) DEFINITION: Sei $T : V \to V : (N,v) \to (\tilde{N},\tilde{v})$
mit $\tilde{v}(S) = v\,(\bigcup_{\tilde{i}\in S} \tilde{i})$ für $S \in 2^{\tilde{N}}$
$T(N,v)$ heißt (1.) Typenspiel zu (N,v),
$T^k(N,v)$ heißt k-tes Typenspiel zu (N,v).

BEMERKUNG: Ist $(N,v) \in V_>$, so ist $T(N,v) = (N,v)$.
Ist $(N,v) \in V$ und $\bigwedge_{i,j} i \sim j \Rightarrow i = j$, so ist $T(N,v) = (N,v)$.

(3.9) LEMMA: $TV_m \subset V_m$ und $TV_S \subset V_S$.

Beweis. Sei $(N,v) = \langle\mu,m\rangle$. Wir zeigen:
$T(N,v) = \langle\mu,\tilde{m}\rangle$ mit $\tilde{m}_{\tilde{i}} = m\tilde{i} = \sum_{j\in\tilde{i}} m_j$.

$\tilde{v}(S) = v\,(\bigcup_S \tilde{i}) = (1_{[\mu,mN]} \circ m)\,(\bigcup_S \tilde{i})$

$= (1_{[\mu,\tilde{m}\tilde{N}]} \circ m)\,(\bigcup_S \bigcup_{\tilde{i}} j)$

$= 1_{[\mu,\tilde{m}\tilde{N}]}\,(\sum_S \sum_{\tilde{i}} m_j)$

$= 1_{[\mu,\tilde{m}\tilde{N}]}\,(\sum_S \tilde{m}_i) = (1_{[\mu,\tilde{m}\tilde{N}]} \circ \tilde{m})\,(S)$.

Der zweite Teil ist evident.

LITERATUR:

ISBELL, J.R.: A class of simple games. Duke Math.J.25 (1958), p. 423-39

LAPIDOT, E.: On Symmetry-groups of Games..., Proc. 3rd Ann. Israel Conf. on OR (1969), London 1970, p. 571-83

LAPIDOT, E.: The Counting Vector of a Simple Game, in: Proc.Am.Math.Soc. 31 (1972), p. 228-31

MASCHLER, M./ PELEG, B.: A Characterization, Exist. Proof and Dimension Bounds for the Kernel of a Game, in: Pac. J. Math. 18 (1966), p. 289-328

OSTMANN, A.: On the Minimal Representation of Homogeneous Games, 1983, subm. to Int.J.Game Theory

PELEG, B.: A Theory of Coalition Formation in Committees, J.Math.Ec.7 (1980), p. 115-34

SHAPLEY, L.: Simple Games: An Outline of the Descriptive Theory, Beh.Sc.7 (1962), p. 59-66

" WIRTSCHAFTSTHEORETISCHE ENTSCHEIDUNGSFORSCHUNG"

A series of books published by the Institute of Mathematical Economics, University of Bielefeld.

Wolfgang Rohde
Ein spieltheoretisches Modell eines Terminmarktes (A Game Theoretical Model of a Futures Market)
The model takes the form of a multistage game with imperfect information and strategic price formation by a specialist. The analysis throws light on theoretically difficult empirical phenomena.

Vol. 1 176 pages price: DM 24,80

Klaus Binder
Oligopolistische Preisbildung und Markteintritte (Oligopolistic Pricing and Market Entry)
The book investigates special subgame perfect equilibrium points of a three-stage game model of oligopoly with decisions on entry, on expenditures for market potential and on prices.

Vol. 2 132 pages price: DM 22,80

Karin Wagner
Ein Modell der Preisbildung in der Zementindustrie (A Model of Pricing in the Cement Industry)
A location theory model is applied in order to explain observed prices and quantities in the cement industry of the Federal Republic of Germany.

Vol. 3 170 pages price: DM 24,80

Rolf Stoecker
Experimentelle Untersuchung des Entscheidungsverhaltens im Bertrand-Oligopol (Experimental Investigation of Decision-Behavior in Bertrand-Oligopoly Games)
The book contains laboratory experiments on repeated supergames with two, three and five bargainers. Special emphasis is put on the end-effect behavior of experimental subjects and the influence of altruism on cooperation.

Vol. 4 197 pages price: DM 28,80

Angela Klopstech
Eingeschränkt rationale Marktprozesse (Market processes with Bounded Rationality)
The book investigates two stochastic market models with bounded rationality, one model describes an evolutionary competitive market and the other an adaptive oligopoly market with Markovian interaction.

Vol. 5 104 pages price: DM 29,80

Orders should be sent to:

Pfeffersche Buchhandlung, Alter Markt 7, 4800 Bielefeld 1, West Germany.