# Universität Bielefeld/IMW

## Working Papers
## Institute of Mathematical Economics

## Arbeiten aus dem
## Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung

Nr. 184


**Fusionen:**
**Ein einfaches Spiel als Beispiel**
**sowie eine neue Charakterisierung**
**des Banzhafwertes**

von


Axel Ostmann


Februar 1990

H. G. Bergenthal


Institut für Mathematische Wirtschaftsforschung
an der
Universität Bielefeld
Adresse/Address:
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1
Bundesrepublik Deutschland
Federal Republic of Germany

Ergänzung

30.März 1990

So – nun ist es also doch passiert: das Diskussionspapier in Druck und beim Mittagessen von Eyal Winter und Benny Moldovanu der Hinweis (ihnen sei Dank), daß es da doch schon so eine Arbeit gibt:

Ehud Lehrer: An Axiomatization of the Banzhaf Value,
IJGT 17 (1988), 89–99

In der Tat, eine einschlägige wichtige Arbeit, deren Verhältnis zum folgenden in dieser kurzen Ergänzung angesprochen werden soll:

Theorem A dieser Arbeit charakterisiert den mit $2^{1-n}$ normierten Banzhaf–Wert $\eta$ (die folgende Arbeit benutzt $\beta=\eta/2$) durch die Axiome:

D ein erweitertes Dummy–Axiom,

ET Symmetrie,

sowie Dubey's "Binärlinearität" und ein Axiom

SA keine 2er–Fusion schadet.

Die hier vertretene Sicht hat einen bis auf die ersten beiden Axiome fast entgegengesetzten Ausgangspunkt:

1. jeder einzelne frägt sich, wieviel er im Fusionsfalle den anderen auszahlen müßte

(*) s.S.4f dieser Arbeit –

der für ihn verbleibende Rest konstituiert seine Forderung;

2. sinnvolle Forderung für einen Fusionswerte ist eher

$SA^*$ keine 2er–Fusion lohnt sich –

denn mit den entsprechenden Forderungen verbleibt man dann im Ausgangsspiel, während eine lohnende Fusion Anreiz wäre, das Spiel durch Fusionieren zu verändern.

In Lehrer 1988 wird nun gezeigt, daß der Banzhaf–Wert die Eigenschaft verschwindender 2er–Fusionsgewinne hat: das ist eine Verschärfung von

$$\text{für alle i gilt } \sum_{j\neq i} \pi(v)(ij)=0 \text{ (S.15), zu}$$

$$(**)\quad \pi(v)(S)=0 \text{ für alle Paarkoalitionen S,}$$

wobei $\pi$ den Fusionsgewinn bedeutet. In Lehrer 1988, Rem.3 wird festgestellt, daß nach der Fundierung des Wertes für Zweipersonenspiele durch (**) der Wert festgelegt ist.

Die Eigenschaft (*) ist schwächer als (**), leistet jedoch mit der Spieläquivalenz (Dummies vergessen + ET) und mit der Fundierung zusammen dasselbe.

**Ein Wort zuvor:** Dargelegt werden Ergebnisse aus dem DFG–Projekt "komplexe einfache Spiele". Die folgenden Darlegungen setzen eine gewisse Vertrautheit mit den klassischen Konzepten der kooperativen Spieltheorie voraus. Wo sie nicht verfügbar sind kann auch auf die beiden Projektpapiere 'Ostmann/Schmitt: Einfache Spiele – eine Einführung' und 'Ostmann: APL–Programme für monotone einfache Spiele' zurückgegriffen werden. In Ökonomie und Politik spielen Fusionen eine gewichtige Rolle: im folgenden wird aber nicht die Anwendung der vorgetragenen Konzepte für diesen Bereich diskutiert. Diese wichtige Diskussion bleibt einem späteren Beitrag vorbehalten. Im Projekt "komplexe einfache Spiele" wird darüber hinaus im Rahmen experimenteller Spiele das Verhalten in entsprechenden Situationen untersucht. Auch diese Ergebnisse werden mit den hier diskutierten formalen Konzepten zu konfrontieren sein.

## 1. Fusionen in einfachen Spielen

Betrachten wir die folgende Darstellung eines gewichteten Majoritätsspieles (Ein–Ressourcen–Spieles):

(51;32,20,15,13,11,10)

Die erste Koordinate gibt das Mehr (den Abstimmungslevel), die folgenden können als Sitzverteilung bzw. Ressourcenausstattung gedeutet werden. Das Spiel hat die Minimalrepräsentation (5;3,2,1,1,1,1). Diese erzeugt im Konstantsummenfall, der hier vorliegt, Nucleolus und einfache Hauptlösung.

Der Nucleolus ist in diesem Spiel einziges Element des Kernels. Gemäß dieser Lösungskonzepte kann aus der Fusion von Spielern kein Gewinn gezogen werden.

Betrachtet sei nun im vorgelegten Spiel die Fusion der 2–ten mit der 6–ten Partei, also

(51;32,30,15,13,10), bzw. in der Minimalrepräsentation (5;3,3,1,1,1).

Betrachtet man die Shapley–Werte

(12,6,3,3,3,3)/30 resp. (9,9,4,4,4)/30,

so lohnt diese spezielle Fusion nicht: statt zuvor 6+3=9 stehen nunmehr ebenso 9 Dreißigstel zur gemeinsamen Verfügung. Auch bzgl. des (unnormierten, d.h. nicht mit

Gesamtmasse 1) Banzhaf–Wertes läßt sich für die Fusionierenden keine Verbesserung feststellen:

(344,156,94,94,94,94)/1000 wird zu

(250,250,125,125,125)/1000

Die Fusion hat jedoch (jeweils) **externe Effekte**: sie schwächt den Starken und stärkt die anderen Schwachen. Übrigens, beide Werte lassen sich als Vektor bedingter Erwartungen bei Gleichwahrscheinlichkeit auffassen, und zwar der Banzhaf–Wert bzgl. der sich bildenden Koalitionen, der Shapley–Wert hingegen bzgl. der als Hinzutritt interpretierten Spielerpermutationen (vgl. Straffin 1983, Dubey/Shapley 1979).

Was geschieht nun bei einer Fusion?
**Das Spiel wird verändert: eine Koalition tritt nun als ein einziger Spieler auf.** Bei Ressourcendarstellungen kann man dem neuen Spieler die Summe der Ausstattungen der Fusionspartner zuweisen, die Fusionspartner entfernen, und alle restlichen Daten des alten Spieles übernehmen. War die Ressourcendarstellung bisher minimal, so ist sie dieses nach der Fusion nicht mehr unbedingt. Sowohl die minimale Ressourcenanzahl kann sich verkleinern, wie auch die zur Darstellung benötigte Masse.
Um Überblick über alle möglichen Fusionen zu gewinnen, langt es (Schritt für Schritt) Fusionen mit nur zwei Fusionspartnern zu betrachten.
Zwei Spiele v und w seien **äquivalent**, wenn sie durch Umbenennung der Spieler und Hinzufügen oder Streichen von Dummies ineinander übergeführt werden können. Betrachten wir den Raum aller Äquivalenzklassen von Spielen, bzw. einen Raum geeigneter Repräsentanten (i.bes. ohne Dummies), so induziert die **Fusion von Paaren** eine asymmetrische Relation ↓ und über deren transitive Hülle eine Erreichbarkeitsrelation ❯ mit Endknoten id.
Beim Übergang ↓ bleiben die Eigenschaften Superadditivität, Konstantsumme und 1–Ressourcen–Spiel (weighted majority game) erhalten.
"veto" bezeichnet das Drei–Personenspiel mit den minimalen Gewinnkoalitionen 12 und 13, "et" das Zwei–Personen–Einstimmigkeitsspiel, und "id" das Ein–Personen–Spiel. Es gilt: veto↓et, veto↓id, et↓id.

Im folgenden betrachten wir zunächst Fusionen für das Spiel veto. Die Fusion der beiden schwachen Spieler in veto begründet Gleichwertigkeit mit dem Starken. Die Koalition der Schwachen begründet eine blockierende Koalition. Die Fusion einer minimalen Gewinnkoalition führt zu id. Es erschein sinnvoll, von einem Lösungskonzept die Berücksichtigung der Fusionsmacht (Macht, das Spiel durch Fusion zu verändern), zu fordern: In et erhalten dann beide Spieler aus Symmetriegründen 1/2. Die Fusionspartner 2 und 3 sind in veto symmetrisch und können deshalb davon jeweils die Hälfte, also 1/4, beanspruchen.

Die Ansprüche in einem Spiel würden sich dann aus **entlang möglicher Fusionspfade rückgerechneten Ansprüchen** ergeben. Dabei gibt es jedoch, wie wir sehen werden, gewisse Komplikationen. Eine erste liegt darin, daß Fusionen minimal gewinnender Koalitionen S in superadditiven Spielen v ein Spiel $w_S$ äquivalent zu id erzeugen und somit der durch Fusion entstandene Spieler "S den Wert 1 beansprucht. Im Beispiel veto wird der Widerspruch sichtbar: Während Spieler 1 und 3 über et gemeinsam nur 3/4 beanspruchen, aus veto jedoch als minimal gewinnende Koalition, also über id, eine Summe von 1 begründen können.

Wir werden im weiteren das 6–Personen–Spiel kra (Kravitz 1987, Ostmann 1985b) analysieren. Es ist durch folgende minimalen Gewinnkoalitionen gegeben: 12, 134, 135, 236, 2456. Die Spieler 4 und 5 sind symmetrisch.

Auch an diesem Spiel sei gezeigt, daß es unmöglich ist, die Forderungen aus allen möglichen Fusionen in nur einem Forderungsvektor zusammenzufassen:

Die Fusion der Spieler 2 und 3 führt zu veto (Spieler 4 und 5 werden Dummies): kra$\downarrow$veto. Wir notieren deshalb vorläufig als Lösung (1,a,b,0,0,1)/4 mit a und b positiv und a+b=2. Da 12 minimal gewinnend ist, also 1 beanspruchen, wäre aber a=3.

Wie bereits gesagt: Für jedes superadditive Spiel v könnten wir aus v$\succ$id für einen Anspruchsvektor x die Bedingung $x(S):=\Sigma\{x_i;i\in S\}=1$ für jede minimal–gewinnende Koalition S erhalten. Das daraus entstehende Gleichungssystem x(S)=1 für S minimal gewinnend ist aber unter Umständen nicht lösbar. Für kra ist das Gleichungssystem zwar lösbar, aber nicht eindeutig:

$x=(2a+b,3a,2a,a,a,b)$ mit $a,b\geq 0$ und $5a+b=1$.

Das obige Gleichungssystem wird üblicherweise gedeutet als:

$$x(S)=v(S) \text{ für S minimal–gewinnend;}$$

in unserer Interpretation rekurieren wir jedoch nicht auf, v sondern auf den Wert des durch Fusion von S entstandenen Spielers "S im neuen Spiel $w_S$, also

$$x(S)=(w_S)_{"S} \text{ für S minimal–gewinnend;}$$

(man beachtet, der Wert eines einzelnen Spielers i in einem Spiel u üblicherweise als $u_i$ an Stelle von u({i}) notiert wird).

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten, die Bedingungen für x zu modifizieren. Dabei spielt natürlich eine entscheidende Rolle, welche Interpretation der Lösung x gegeben werden soll.

Zwei Verschärfungen werden üblicherweise diskutiert:
1. Erfüllt ein Vektor x obige Bedingung und zudem gewisse Stabilitätsbedingungen (die dafür sorgen, daß die Menge der $x_S$ eine von Neumann–Morgenstern–Lösung bilden), so heißt er einfache Hauptlösung. Es gilt der Satz (Hoffman/Richardson 1961): existiert eine blockierende Koalition die echte Teilmenge einer minimal–gewinnenden ist, so gibt es keine einfache Hauptlösung.
2. Erfüllt ein Vektor x obige Bedingung und zudem $x(S) \geq 1 > x(T)$ für alle S mit $v(S)=1$ und alle T mit $v(T)=0$, so heißt (1;x) homogene Repräsentation und v heißt homogenes gewichtetes Majoritätsspiel (homogenes 1–Ressourcen–Spiel) falls ein solches x existiert. Weiters: ist das Spiel ein homogenes 1–Ressourcen–Spiel mit Konstantsumme (d.h. $v(S)+v(N-S)=1$ für alle $S \subset N$), so ist x eindeutig und zudem einfache Hauptlösung.
Das Lösungskonzept "Kernel" kann man ebenfalls als Variante auffassen. Hier wird das Teilmengensystem der minimal–gewinnenden Koalitionen (auf erster Stufe; Maschler/-Peleg 1964, Ostmann 1985b) ersetzt durch ein Abhängigkeiten vermeidendes ausgeglichenes System von Koalitionen, auf die bei der Argumentation von zwei Spielern gegeneinander als "beste Alternative" Bezug genommen wird.

Unser Interesse, Fusionsmacht zu messen oder bezüglich möglicher Fusionen angemessene Forderungsprofile abzuleiten, verlangt eine andere Modifikation als die genannten. Jede Fusion kann vorgestellt werden als erzeugt von $\downarrow$, also durch nacheinander vollzogene Paarfusionen. Will man jedem Spiel eine Lösung zuweisen, so besteht damit ein Grund sich bei der Größe der Fusion auf Paare zu beschränken. Die weiteren Fusionen brauchen damit nicht unberücksichtigt zu bleiben, denn man kann rekursiv auf die Lösungen der Nachfolgerspiele zurückgreifen, bis man id erreicht. Diesen Weg werden wir bei der Definition unseres Fusionswertes gehen.
Das Mengensystem der Paare umfaßt $n(n-1)/2$ Koalitionen, so daß es auch hier wenig Hoffnung gibt, die Gleichungen $x_i+x_j=w_{ij}(\text{"}ij)$ simultan zu lösen. Was aber geht ist, die angemessenen Forderung eines Spielers i aus der Berücksichtigung der Forderungen seiner Partner abzuleiten. Da i in jedem Paar das gleiche fordert, nämlich seinen angemessenen Anteil $x_i$, ist

$$(*) \qquad \sum_{j \neq i} w_{ij}(\text{"}ij) = (n-1)x_i + (x(N)-x_i)$$

Der **Fusionswert** $\chi$ ordnet jedem n–Personen–Spiel v ein Maß $\chi(v)$ zu, das durch den Gewichtsvektor $(\chi_1,\ldots,\chi_n)(v)$ gegeben ist. Der Fusionswert ist bestimmt durch die drei folgenden Eigenschaften:

1. Schwache Effizienz $\chi_1(id)=1$
2. Schwache Symmetrie $\chi_1(et)=\chi_2(et)$ und $\chi_1(vel)=\chi_2(vel)$
3. Fusionswert in Paaren (Rekursionsformel)

$$\chi_i(v)=\frac{1}{n-2}(\{\sum_{j\neq i}\chi_{\min(i,j)}(w_{ij})\}-\chi(v)(N))$$

wobei $w_{ij}$ das aus v durch Fusionieren der Spieler i und j zu min(i,j) erzeugte Spiel ist; in min(i,j) ist eine nützliche Konvention für "ij.

Die Rekursionsformel entsteht aus (*) und bedeutet insbesondere, daß keine Vergleiche zwischen Konkurrenten angestellt werden. Ein Spieler ist in jeder Zweierfusion gleichviel wert: der Wert kann aufgefaßt werden als Vektor der Forderungen, die Spieler in Zweierfusionen begründet einbringen können, bzw. die sie bei einer Fusion beanspruchen (Forderungsprofil). Jeder Spieler weiß, wie er die anderen insgesamt auszahlen muß.

Man beachte auch: $\chi(v)(N)=\frac{1}{2(n-1)}\Sigma f_{ij}$ mit $f_{ij}=w_{ij}($"ij$)$

Die ersten zu errechnenden Fusionswerte sind:

| Spieleranzahl | Spiel | Minimalrepr. | $\chi$ |
|---|---|---|---|
| n=3 | maj | (2;1,1,1) | (1,1,1)/2 |
| | veto | (3;2,1,1) | (3,1,1)/4 |
| n=4 | tripod | (4;3,1,1,1) | (7,1,1,1)/8 |
| | step | (5;3,2,2,1) | (5,3,3,1)/8 |
| | – | (5;3,2,1,1) | (5,3,1,1)/8 |
| | apex | (3;2,1,1,1) | (3,1,1,1)/4 |

(Das Spiel step wird auch aufgrund der graphischen Repräsentation seiner minimalen Gewinnkoalitionen als diamond bezeichnet.)

Wir unterbrechen an dieser Stelle die Darstellung des Fusionswertes, um zunächst die möglichen Fusionspfade für das Spiel kra darzustellen und dann klassische Lösungskonzepte für die auftretenden Spiele zu errechnen. Dafür brauchen wir noch ein Paar Kleinigkeiten – zunächst die Definition zweier (ungeordneter, vgl. Ostmann 1985a) Spiele:

uo1 und uo2 sind zwei Fünf–Personen–Spiele. Das Spiel uo1 ist gegeben durch die minimal–gewinnenden Koalitionen 12,134,135,234,245 – das Spiel uo2 durch 12,134,235,245. Das Spiel uo1 hat die Minimalrepräsentation $\begin{bmatrix} 5;2,3,2,1,1 \\ 1;1,0,0,1,0 \end{bmatrix}$, das Spiel uo2 hat die Minimalrepräsentation $\begin{bmatrix} 4;2,3,1,1,0 \\ 1;1,0,0,0,1 \end{bmatrix}$ (vgl. Ostmann/Schmitt 1990); eine Koalition muß über beide Ressourcen im vorgeschriebenen Ausmaße verfügen, um gewinnen zu können. Man beachte: die Permutation (12)(34) ist für uo1 ein Automorphismus, also spielerhaltend.

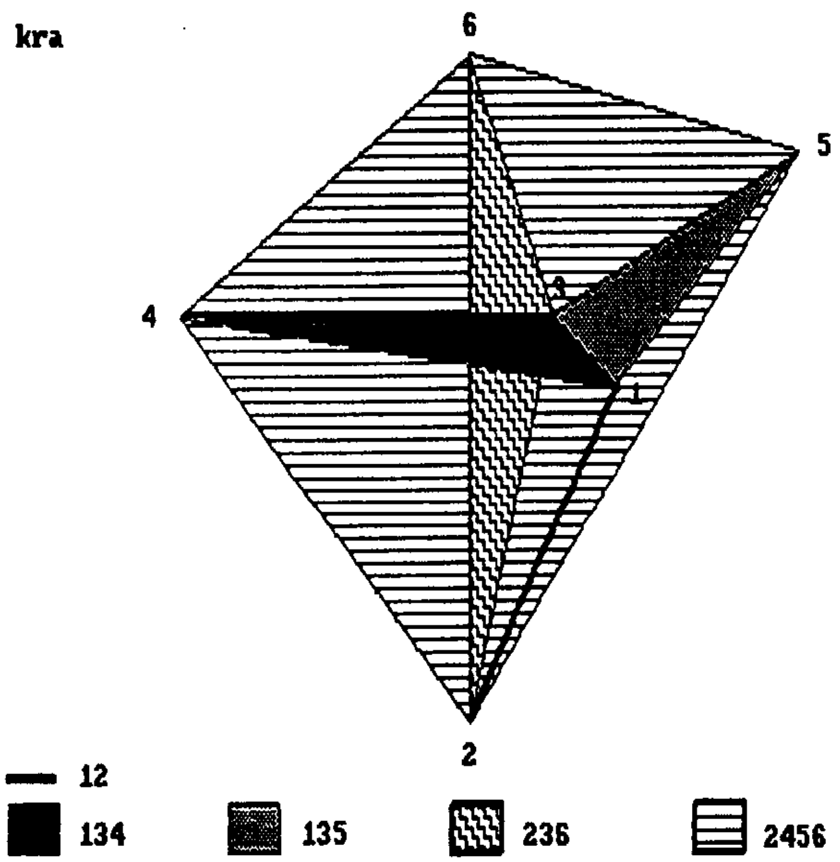
Eine kurze Bemerkung zur "Größe" externer Fusionseffekte:
Die Stärkerelation $\succsim(v)$ (desirability relation, Maschler/Peleg 1964) bleibt bei den Fusionen schwach erhalten:

Für Spieler i und j, die nicht zu S fusionieren (i,j∈N–S) gilt:
aus i $\succsim(v)$ j folgt i $\succsim(w_S)$ j.

Das heißt aber nicht, daß die externen Effekte unbedeutend wären: durch die Fusion von S kann ein Spieler ja bedroht sein, auf eine nächst kleinere Stärkestufe hinabgedrückt zu werden; er könnte natürlich auch davon profitieren, auf eine nächst größere Stärkestufe angehoben zu werden.

Schließlich mag die folgende Skizze für das Spiele kra der Vorstellungskraft helfen:

**kra**



## 2. Der Kernel und der Nucleolus der von kra aus erreichbaren Spiele

Bis auf kra, uo1 und uo2 sind alle von kra aus bzgl. ↓ erreichbaren Spiele geordnet und sogar 1–Ressourcen–Spiele (weighted majority games). Die Spiele kra, uo1 und uo2 sind 2–Ressourcen–Spiele. Die Symmetriegruppen der Spiele werden für die letzteren von jeweils einer Permutation erzeugt, nämlich (45) für kra, (12)(34) für uo1 und (34) für uo2.
Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die durch alle möglichen Fusionen erzeugten Spiele, und indirekt auch über die Fusionswege.

| Spiel | tritt auf bei folgenden Fusionen: |
|---|---|
| uo1 | 46 () |
| uo2 | 24 (); 45 |
| (8;5,3,2,1,1) | 16 |
| (7;4,3,3,1,1) | 36 |
| (7;5,2,2,2,1) | 13 |
| (5;3,2,2,1,1) | 26 |
| step | 14 (); 34 (); 13 24 (); 13 45; 14 25 (); 14 56 () 24 35 (); 24 56 (); 26 34 (); 34 56 () |
| (5;3,2,1,1) | 16 24 () |
| tripod | 136 |
| apex | 13 26; 13 46 (); 26 45 |
| veto | 23; 14 23 (); 16 34 (); 23 45; 23 46 (); 23 14 56; 16 24 35 () |
| maj | 346; 14 26 (); 14 36 (); 13 24 56 (); 14 25 36 (); 13 26 45 |
| et | viele, i.bes.: 16 23; 16 23 45 |
| id | viele |

Die Eintragung () steht für die durch Vertauschen von 4 und 5 entstehende Fusion.
Das Spiel (7;4,3,3,1,1) wird auch aufgrund der graphischen Repräsentation seiner minimalen Gewinnkoalitionen als house bezeichnet.

Kernel und Nucleolus sind im folgenden tabelliert. Der im folgende ebenfalls tabellierte Stress eines Spieles ist die relative Anzahl der sich im Spiel und seinem Dualen im Werte unterscheidenden Koalitionen. Er ist also bei Konstantsummenspielen 0.

| Spiel | Stress | Kernel (hier einpunktig, gleich Nucleolus) |
|---|---|---|
| kra | 0.15625 | (2,3,2,1,1,0)' |
| uo1 | 0.125 | (2,2,1,1,1)' |
| uo2 | 0.1875 | (1,2,1,1,0)' |
| (8;5,3,2,1,1) | 0.3125 | (1,0,0,0,0) |
| (7;4,3,3,1,1) | 0.0625 | (1,1,1,0,0)' |
| (7;5,2,2,2,1) | 0.0625 | (2,1,1,1,0)' |
| (5;3,2,2,1,1) | 0 | (3,2,2,1,1)' |
| step | 0.125 | (1,1,1,0)' |
| (5;3,2,1,1) | 0.375 | (1,0,0,0) |
| tripod | 0.126 | (1,0,0,0) |
| apex | 0 | (2,1,1,1)' |
| veto | 0.25 | (1,0,0) |
| maj | 0 | (1,1,1)' |
| et | 0.5 | (1,1)' |
| id | 0 | 1 |

Die Abbildung ' normiert Vektoren auf Gesamtmasse 1.

Eine Besonderheit des Kernel ist, daß zu jedem Kernelelement eine Koalitionsstruktur gehört, die angibt, wer mit Nulldividenden ausgesondert wird und zwischen welchen Gruppen von übrigen Spielern die größten Exzesse auftreten. Diese Gruppen werden üblicherweise als Präkoalitionen gedeutet (vgl. Maschler/Peleg 1964, Ostmann 1985b). Präkoalitionen treten bei den von kra aus erreichbaren Spielen nicht auf.

### 3. Werte und einfache Hauptlösung

| Spiel | einf.HL | ß×1000 | φ×1000 |
|---|---|---|---|
| kra | $23 \subset 236$ | 422;266,234,140,47,47,78 | 333,300,167,50,50,100 |
| uo1 | $23 \subset 234$ | $437_5;250,250,125,125,62_5$ | 317,317,150,150,67 |
| uo2 | $23 \subset 235$ | 406;219,281,94,94,94 | 283,367,117,117,117 |
| (8;5,3,2,1,1) | $1 \subset 12$ | 344;344,156,94,31,31 | 617,200,117,33,33 |
| (7;4,3,3,1,1) | $23 \subset 234$ | 469;281,219,219,31,31 | 367,283,283,33,33 |
| (7;5,2,2,2,1) | $234 \subset 2345$ | 469;406,94,94,94,31 | 550,133,133,133,50 |
| (5;3,2,2,1,1) | ja | $-;312_5,187_5,187_5,62_5,62_5$ | 400,233,233,67,67 |
| step | $23 \subset 234$ | $437_5;312_5,187_5,187_5,62_5$ | 417,250,250,83 |
| (5;3,2,1,1) | $1 \subset 12$ | $312_5;312_5,187_5,62_5,62_5$ | 583,250,83,83 |
| tripod | $1 \subset 12$ | $437_5;437_5,62_5,62_5$ | 750,83,83,83 |
| apex | ja | –;375,125,125,125 | 500,167,167,167 |
| veto | $1 \subset 12$ | 375;375,125,125 | 667,167,167 |
| maj | ja | –;250,250,250 | 333,333,333 |
| et | $1 \subset 12$ | 250;250,250 | 500,500 |
| id | ja | –;500 | 1000 |

einf.HL: "ja" ist eingetragen, falls eine einfache Hauptlösung existiert – sie ist dann identisch mit der Minimalrepräsentation.
"$B \subset S$" wurde eingetragen als Begründung warum sie nicht existiert; B ist dabei eine blockierende Koalition, die in einer minimal–gewinnenden Koalition S liegt (vgl. Hoffman/Richardson 1961; schon Richardson 1956 gibt Beispiele für die Existenz einfacher Hauptlösungen in Nichtkonstantsummen–Spielen)

ß: die erste Koordinate ß$_0$ gibt den Anteil der Gewinnkoalitionen in Tausendstel wieder. Für Konstantsummenspiele ist er 500/1000 und wurde nur als "–" vermerkt; die weiteren Koordinaten ß$_i$ geben die Werte für die Spieler

### 4. Fusionsgewinne nach klassischen Lösungskonzepten

Sei für das folgende zunächst ein Lösungskonzept L festgesetzt. Dann kann man vergleichen, was gemäß dieses Lösungkonzeptes eine Koalition S vor und was sie nach der Fusion beanspruchen kann, nämlich $L(v)(S)$ und $L(w_S)(''S)$ hernach – wobei ''S den Spieler in $w_S$ bezeichne, der aus S hervorgegangen ist. Wir bezeichnen $\pi(v)(S) := L(w_S)(''S) - L(v)(S)$ als **Fusionsgewinn** (von S in v). Im folgenden sind die Fusionsgewinne für Paare tabelliert.

| Fusion | Spiel | Nucleolus | $\phi$ | Gewinne |
|---|---|---|---|---|
| 12: | id | 5/9→1 | 13/30→1 | +,+ |
| 13: | | 4/9→2/5 | 1/2→11/20 | –,+ |
| 14(): | step | 1/3→1/3 | 38%→42% | =,+ |
| 16: | | 2/9→1 | 43%→62% | +,+ |
| 23: | veto | 5/9→1 | 47%→3/5 | +,+ |
| 24(): | uo2 | 4/9→2/5 | 7/20→37% | –,+ |
| 26: | | 1/3→1/3 | 2/5→2/5 | =,= |
| 34(): | step | 1/3→1/3 | 22%→1/4 | =,+ |
| 36: | house | 2/9→1/3 | 27%→28% | +,+ |
| 45: | uo2 | 2/9→1/5 | 1/10→12% | –,+ |
| 46(): | uol | 1/9→1/7 | 3/20→3/20 | +,= |

Die %–Angaben sind jeweils gerundet – und zwar jeweils um genau 1/3%.

Vorsicht: Weitere Fusionen können die vorläufigen Gewinne z.T. wieder zunichte machen. In der Spalte Gewinne bezieht sich das erste Zeichen auf den Nucleolus, das letzte auf den Shapley–Wert $\phi$.

Betrachten wir nun, was geschieht, wenn einer Paarfusion eine weitere folgt. Es gibt dabei zwei verschiedene Möglichkeiten: entweder wird ein weiterer Spieler aufgenommen oder es entsteht ein weiterer Spieler, der für ein Paar agiert.
Wir nennen eine Fusion für ein Lösungskonzept **L–erreichbar**, wenn es einen Pfad von Paarfusionen gibt, der zu ihr führt und für den jede Paarfusion des Pfades einen positiven Fusionsgewinn ermöglicht.
Sei im folgenden L der Nucleolus. Von id und et aus sind keine weiteren Spiele erreichbar. Die Spiele maj und apex haben genau einen Nachfolger, nämlich id. Das Spiel veto hat auch genau einen Nachfolger: die beiden schwachen Spieler fusionieren, um et zu erreichen.
Für unser Beispiel kra erhielten wir als erreichbare erste Fusionen:
(8;5,3,2,1,1), uol, (7;4,3,3,1,1), veto und id.
Eine nun folgende zweite (Paar)Fusion ist als Erweiterung und als Entgegnung vorstellbar:

A. Erweiterungen

| Fusion | Spiel | Nucleolus–erreichbar über |
|---|---|---|
| 136 | tripod | 36 |
| 236 | id | 36 |
| 346 () | maj | 46 |
| 146 () | veto | 46 |

B. Entgegnungen

| Spiel | Nucleolus–erreichbar über |
|---|---|
| id | 36→36 12, 46→46 12 |
| veto | 46→46 23 |
| et | 16→16 23, 23→16 23 |
| tripod | 36→136 |

Es stellt sich nun die Frage, in welchen Partitionen der ursprünglichen Spieler keine weiteren Fusionen mehr lohnen, oder anders, wo die Fusionspfade für ein vorgelegtes Lösungskonzept enden. Dazu langt es nurmehr die Spiele zu betrachten, die bisher erreichbar sind:

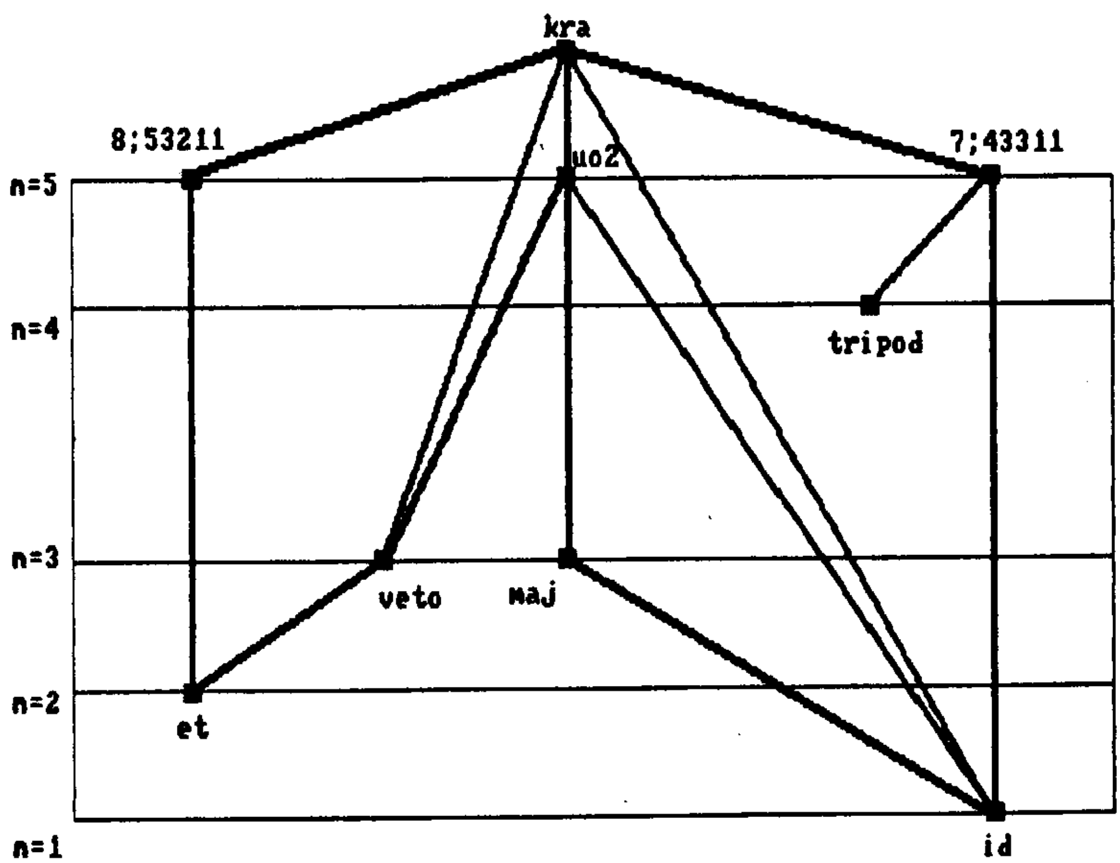
in den Spielen tripod und et lohnt keine weitere Paarfusion, von maj, veto und aus lohnen Übergänge. Damit ist klar, daß für den Nucleolus nur aus obigen Listen entsprechend vervollständigte Fusionspfade enstehen. Die zu den Endknoten gehörigen Spiele sind immer nur id, et und tripod.

Der **Zugriff** auf den Spielwert kann durch folgende Koalitionen von Spielern des Ausgangsspieles geschehen:

12, 236, 1346 (), 2346 () über id; 1236 und 12346 () über et; sowie N über tripod.

Man beachte, daß die Dynamik auch zum Entstehen übergroßer (=nicht minimaler) Gewinnkoalitionen führt. Werden **Forderungen** mit der Verteilung des Spielwertes durch diese Koalitionen begründet, so wäre z.B. (2,2,1,0,0,1)/4 ein zulässiges Forderungsniveau. Tatsächlich werden durch die Fusion 46 der Spieler 5 und durch die Fusion 23 die Spieler 4 und 5 Dummies.

Das folgende Schaubild skizziert die Gesamtheit der gemäß Nucleolus lohnenden Fusionspfade.



Man kann jedoch auch der Ansicht sein, daß **vorübergehend Fusionsverluste** in Kauf genommen werden müssen. Das Spiel tripod war nur deshalb Endpunkt, weil es mit Paarfusionen nicht verlassen werden konnte. Die Fusion der drei kleinen Spieler jedoch führt zu et. Nehmen wir also bei Paaren vorübergehend Verluste in Kauf, so vergleichen wir nur mit möglichen Endzuständen möglicher Fusionswege: ob diese verglichen mit dem Ausgangspiel vorteilhaft erscheinen. Als Endknoten von Fusionen kommen dann in unserem Beispiel etwa auch die folgenden infrage:

| Spiel | Endknoten |
|---|---|
| maj | 1 2 3456 (nur für 1 ein Gewinn gegenüber kra), |
| | 13 245 6, 13 24 56, 13 26 45, 13 2 456, 13 246 5, |
| | 14 2 356, 14 25 36, 14 256 3 |
| et | 16 2345, 136 245, 1456 23 |
| id | für die minimal–gewinnenden Koalitionen in kra: 5/9-1 |

## 5. Der Fusionswert

Es gilt folgender Satz: $\chi_i=2\text{ß}_i$.

Der verdoppelte Banzhafwert gibt also genau die Forderungen an, die aufgrund der Fusionsmöglichkeiten begründbar sind.

Beweis:
Seien $b_i$ der Banzhaf–Count für i; k die Anzahl der Gewinnkoalitionen; $k_i$ die Anzahl der Gewinnkoalitionen , in denen i Mitglied ist; $k_{ij}$ die Anzahl der Gewinnkoalitionen , in denen sowohl i als auch j Mitglied ist; $k_{\bar{i}j}$ die Anzahl der Gewinnkoalitionen , in denen i nicht Mitglied ist, aber j; entsprerchend ist $k_{\bar{i}\bar{j}}$ und $k_{i\bar{j}}$ zu verstehen.
Bekanntlich gilt $b_i=2k_i-k$. Wir zeigen: $2\text{ß}_i=b_i/2^{n-1}=\chi_i$.

Für id (n=1), et und vel (n=2) ist die Gleichung erfüllt.
Für das folgende wichtig sind die beiden folgenden Gleichungen, in denen wir b und k für das Ausgangsspiel v ohne Nennung der Variablen v notieren, für das durch die Fusion der Spieler i und j entstehende Spiel $w_{ij}$ jedoch $b(w_{ij})$ und $k(w_{ij})$ schreiben:

(1) $k_i(w_{ij}) = k_{ij}$

(2) $k_{\bar{i}}(w_{ij}) = k_{\bar{i}\bar{j}} = k - k_i - k_j + k_{ij}$

Das Spiel v hat n, das Spiel $w_{ij}$ hat n–1 Spieler.

Es folgt $b_i(w_{ij})=k_i(w_{ij})-k_{\bar{i}}(w_{ij})=-k+2k_i-k_i+k_j$

Also (3) $b_i(w_{ij})=(b_i+b_j)/2$

Die rechte Seite der Rekursionsgleichung liest sich unter der Induktionsannahme als:

$$\frac{1}{n-2}\Big(\Big\{\sum_{j\neq i} b_{\min(i,j)}(w_{ij})/2^{n-2}\Big\} - b(v)/2^{n-1}\Big)$$

Nach Einsetzen von (3) entsteht:

$$\frac{1}{n-2}\Big(\Big\{\sum_{j\neq i} (b_i+b_j)/2^{n-1}\Big\} - b(N)/2^{n-1}\Big)$$

und weiters: $\frac{n-2}{n-2}(b_i/2^{n-1})$

Dieser Ausdruck ist der linken Seite der Rekursionsgleichung ($2\beta_i = b_i/2^{n-1} = \chi_i$) gleich, womit alles gezeigt ist.

Mit diesem Satz kennt man nunmehr eine weitere Charakterisierung des Banzhafwertes: nämlich als Forderungsprofil aufgrund von Fusionmöglichkeiten. Anders als in der Analyse boolescher Funktionen war bisher in der Spieltheorie das Verschmelzen zweier Spieler keine gut untersuchte Operation. Wir sind der Meinung, daß sich dies nun ändern dürfte, zumal die paarweise Fusion eine Operation darstellt, die einige Vorgänge und Strategien, die aus der Verhandlungsforschung bekannt sind, in einem neuen Licht erscheinen läßt.

| Spiel | Fusionswert |
|---|---|
| kra | (17,15,9,3,3,5)/32 |
| uo1 | (4,4,2,2,1)/8 |
| uo2 | (7,9,3,3,3)/16 |
| (8;5,3,2,1,1) | (11,5,3,1,1)/16 |
| (7;4,3,3,1,1) | (9,7,7,1,1)/16 |
| (7;5,2,2,2,1) | (13,3,3,3,1)/16 |
| (5;3,2,2,1,1) | (5,3,3,1,1)/8 |
| step | (5,3,3,1)/8 |
| (5;3,2,1,1) | (5,3,1,1)/8 |
| tripod | (7,1,1,1)/8 |
| apex | (3,1,1,1)/4 |
| veto | (3,1,1)/4 |
| maj | (1,1,1)/2 |
| et | (1,1)/2 |
| id | 1 |

In 4. wurde der Fusionsgewinn $\pi$ definiert. Mit diesem Begriff können wir das Rekursionsaxiom besonders einfach und anschaulich reformulieren:

$$\text{für alle i gilt } \sum_{j \neq i} \pi(v)(ij) = 0.$$

Im Fall des Spieles kra gilt sogar $\pi(\text{kra})(S)=0$ für alle Paarkoalitionen S.

Literatur:

Aumann, R.J. & J.H. Drèze: Cooperative games with coalition structures, IJGT 3, 1975, 217–37

Aumann, R.J., Peleg, B. & P. Rabinowitz: A method for computing the kernel of n–person games, Math. Computation 19, 1965,531–51

Banzhaf, J.F.: Weighted voting doesn't work, Rutgers Law Review 19, 1965, 317–43

Banzhaf, J.F.: Multi–member electoral districts: Do they violate the "one man, one vote" principle?, Yale Law Journal 75, 1966, 1309

Birnbaum, Z.W. & J.D. Esary: Modules of coherent binary systems, SIAM Journal of Applied Mathematics 13, 1965, 442–62

Black, D.: The theory of committees and elections, Cambridge England, 1958

Brams, S.J.: Measuring the concentration of power in political systems, Am.Pol.Sc.Rev. 62, 1968, 461–75

Brams, S.J.: Game Theory and Politics, New York, 1975

Chow, C.K.: On the characterization of threshold functions, in: Switching circuit theory and logical design (ed. R.S.Ledley), New York 1961

Davis, M. & M. Maschler: The kernel of a cooperative game, Naval Res. Logistic Quaterly 12, 1965, 223–59

Dubey, P. & L.S. Shapley: Mathematical properties of the Banzhaf power indes, Math. of O.R. 4, 1979, 99–131

Eisenman, R.L.: A profit–sharing interpretation of Shapley values for n–person games, Behavioral Sc. 12, 1967, 396–98

Gurk, H.M. & J.R. Isbell: Simple solutions, Ann. of Math. St. 40, 1959, 247–65

Hoffman, A. J. & M. Richardson: Block design games, Can.J.Math. 13, 1961, 110–28

Hu, S.–T.: Threshold logic, Berkeley 1965

Jablonski, S.W. et al.: Boolesche Funktionen und Postsche Klassen, Berlin 1970 (russ. Moskau 1966)

Kravitz, D. A.: Size of smallest coalition as a source of power in coalition bargaining, European J.Soc.Psy. 17, 1987, 1–21

Lapidot, E.: The counting vector of a simple game, Procedings AMS 31, 1972, 228–31

Lapidot, E.: On symmetry groups of games, in: Developement in O.R.. Proc. 3rd Ann.Israel Conference on O.R. 1969, London 1970, pp.571–83

Lucas, W. F.: A game with no solution, Bull. AMS 74, 1968, 237–39

Lucas, W. F.: Finite solution theory for coalitional games, SIAM J. Alg. Disc. Math. 3, 1982, 551–65

Maschler, M.: The inequalities that determine the bargaining set, Israel J. Math. 4, 1966, 127–33

Maschler, M., & B. Peleg: A characterization, existence proof and dimension bounds for the kernel of a game, Pacific J. Math., 1964, 316

Maschler, M., B. Peleg & L.S. Shapley: The kernel and nucleolus of a cooperative game as locuses in the strong $\epsilon$–Core, Res. Memo. 60, Research program in game theory and matheamatical economics, Hebrew University, Jerusalem 1970

McKelvey, R.D. & P. C. Ordeshook: An undiscovered von Neumann–Morgenstern solution for the (5,3) majority rule game, IJGT 6, 1977, 33–4

Megiddo, N.: The kernel and the nucleolus of a product of simple games, Israel J. Math. 9, 1971, 210–21

Megiddo, N.: Kernels of compound games with simple components, Pacific J. Math. 50, 1974, 531–55

Megiddo, N.: Nucleoluses of compound simple games, SIAM J. Appl. Math. 26, 1974, 607–21

Ostmann, A.: On the Minimal Representation of Homogeneous Games, IMW Working Paper 124, 1983a, Universität Bielefeld

Ostmann, A.: Decisions by Players of Comparable Strength, Zeitschrift für Nationalökonomie 45, 1985a, 145–59

Ostmann, A.: Für Abhängige keinen Zugewinn?, IMW Working Paper 141, 1985b, Universität Bielefeld

Ostmann, A.: Gremien und Spiele, Habilitationsschrift, Universität Bielefeld 1986

Ostmann, A.: On the Minimal Representation of Homogeneous Games, International Journal of Game Theory 16, 1987a, 69–81

Ostmann, A.: Life–length of process with elements of decreasing importance, IMW Working Paper 156, 1987b, Universität Bielefeld

Ostmann, A.: Theorie und Anwendung einfacher Spiele, SFB 303 Discussion Paper B–101, 1988, Universität Bonn

Ostmann, A.: Simple Games: On Order and Symmetry, IMW Working Paper 169, 1989, Universität Bielefeld

Owen, G.: The tensor composition of non–negative games, Ann.Math.St. 52, 1966, 307–26

Parthasarathy, T.: A note on compound simple games, Proc.AMS 17, 1966, 1334–40

Peleg, B.: On the kernel of constant–sum simple games with homogeneous weights, Ill. J. Math. 10, 1966, 39–48

Peleg, B.: On weights of constant sum majority games, SIAM J. Appl. Math. 16, 1968, 527–32

Post, E. L.: The two–valued iterative systems of mathema– tical logic, Ann.Math.St. 5, Princeton 1951

Ramamurthy, K. G. & T. Parthasarathy: Probabilistic impli– cations of the assumption of homogeneity, Tech.Rep. 8301, Indian Statistical Institute, New Delhi 1983

Richardson, M. : On finite projective games, Proceedings AMS 7(1956), 458–65

Rosenmüller, J.: The role of nondegeneracy and homogeneity in n–person game theory: an equivalence theorem, Zeit– schrift für Nat.ök. 48, 1988,

Schmeidler, D.: The nucleolus of characteristic function games, SIAM J.Appl.Math. 17, 1969, 1163–70

Shapley,L.S.: A value for n–person games, in: Contributions to the theory of games II (eds. H.Kuhn & A.W.Tucker), Princeton 1953, pp. 307–17

Shapley, L.S.: Simple games: an outline of the descriptive theory, Behavioral Sc. 7, 1962, 59–66

Shubik, M.: Games, decisions and industrial organisation, Management Sc. 6, 1960, 455–73

Straffin, Ph. D.: Power indice in politics, in: Modules in Appl.Math.2 – Political and Related Models (eds. S.J. Brams et al.), New York 1983