

Modellbasierte Diagnose auf Basis  
Differential-Algebraischer Systeme mit  
Nichtlinearen Kalman-Filtern

Ilja Alkov

2021-07-07

Ilja Alkov

*Modellbasierte Diagnose auf Basis Differential-Algebraischer Systeme  
mit Nichtlinearen Kalman-Filtern*

2021-07-07

Dissertation

zur Erlangung des Grades Doktor der Ingenieurwissenschaften

Universität Bielefeld, Technische Fakultät

Erster Gutachter

Prof. Dr.-Ing. Ulrich Rückert

Zweiter Gutachter

Prof. Dr.-Ing. Harald Aschemann

Dritter Gutachter

Prof. Dr.-Ing. Dirk Weidemann

# Vorwort

Die vorliegende Dissertation begann während meiner Tätigkeit am Institut für Systemdynamik und Mechatronik (ISyM) der Fachhochschule Bielefeld. Wesentliche Teile der Arbeit entstanden im Forschungsprojekt ESEMO (Entwicklung Selbstüberwachender Energieoptimierter Montagesysteme). Das Projekt wurde aus den Mitteln der Europäischen Union und des Landes Nordrhein-Westfalen gefördert. Die Promotion wurde an der Technischen Fakultät der Universität Bielefeld in Kooperation mit der Universität Rostock und der Fachhochschule Bielefeld durchgeführt.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Ulrich Rückert, der mir bei der thematischen Ausgestaltung und dem strukturellen Aufbau der Arbeit stets ein sehr hohes Maß an Eigenverantwortung einräumte. Seine konstruktiven Hinweise trugen vielfach entscheidend zum Fortschritt der Arbeit bei.

Ebenso sehr danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Harald Aschemann für die Übernahme des Koreferates, für die vielen wertvollen Verbesserungs- und Korrekturvorschläge und sein anhaltendes ehrliches Interesse an meiner Arbeit. Mit seiner fachlichen Expertise und seiner sehr genauen strukturierten Arbeitsweise trug er wesentlich zur Qualität der Arbeit bei.

Die intensive Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr.-Ing. Dirk Weidemann am Institut für Systemdynamik und Mechatronik war die Grundlage für meine Dissertation. Er übernahm maßgeblich die fachliche Betreuung der Arbeit. Ich danke ihm besonders für die detaillierten Verbesserungsvorschläge, für die gemeinsamen Veröffentlichungen, vor allem jedoch für die vielen konstruktiven Diskussionen, für seine Geduld und die meiner Arbeit gewidmete Zeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Franz Kummert und Herrn Dr.-Ing. Sebastian Wrede danke ich ganz herzlich für die Leitung bzw. Teilnahme an der Prüfungskommission.

Weiterhin danke ich allen wissenschaftlichen Hilfskräften und Studenten, die den Fortschritt meiner Arbeit vielfach unterstützt haben.

# Kurzfassung

Die modellbasierte Diagnose ist eine Methodik zur Charakterisierung des Verhaltens eines Systems mit Bezug auf ein definiertes Referenzverhalten. Das Referenzverhalten wird in dem Zusammenhang mit mathematischen Modellen beschrieben. Die Modelle werden in dieser Arbeit als differential-algebraische Gleichungen (engl. Differential-Algebraic Equation, DAE) formuliert.

Die Basis für die Entwicklung der Diagnoseverfahren bildet die Zustandsschätzung mit der Anwendung nichtlinearer Kalman-Filter. Folglich sind die zentralen Bestandteile der Arbeit: die Methoden der Zustandsschätzung sowie die Formulierung der Kalman-Filter mit nichtlinearen DAE. Die Verallgemeinerung des Kalman-Filter-Algorithmus für die nichtlinearen DAE mit höherem Index ist ein grundlegender Beitrag zur Entwicklung modellbasierter Verfahren mit der Modellklasse. Die Grundlage für die Formulierung der Kalman-Filter ist die Behandlung der Eigenschaften und der Lösungsverfahren der DAE.

Die Diagnosemethoden mit der Anwendung der Zustandsschätzung werden behandelt. Die hybride Zustandsschätzung, d.h. die simultane Schätzung des wertkontinuierlichen Zustandes und des wertdiskreten Verhaltensmodes des Systems, wird detailliert beschrieben. Der Interacting-Multiple-Model-Algorithmus (IMM) wird mit Bezug auf die praktische Anwendbarkeit eingehend vorgestellt. Fortwährend wird die Beschreibung des Systemverhaltens mit den differential-algebraischen Gleichungen vorausgesetzt und die Verfahren entsprechend formuliert.

Die oben angeführten Methoden werden im Rahmen eines Forschungsprojekts auf ein komplexes technisches System angewandt. Die Diskussion der Verfahren wird durch die Anwendung vertieft. Vor allem werden die praktische Relevanz der DAE und der entwickelten Methoden erläutert. Die mathematische Modellbildung sowie die erzielten Ergebnisse der Zustandsschätzung und der Diagnose werden für ein reales System aus dem Bereich industrieller Fertigungstechnik dargestellt.

# Abstract

The model-based diagnosis is an approach for the characterizing of the behavior of a system in respect of an appropriately defined reference behavior. In this context, the reference behavior is described by mathematical models. This thesis considers the models formulated as Differential-Algebraic Equations (DAE) for the model-based diagnosis.

The foundation for the development of the diagnosis methods is the state estimation with nonlinear Kalman-filters. Consequently, the state estimation approaches as well as the formulations of the Kalman-filters with nonlinear DAE are central parts of this thesis. The generalization of the Kalman-filter algorithm to nonlinear higher index DAE is a substantial contribution to the development of model-based approaches with models of this class. The basis for the formulations of the Kalman-filter is the discussion of the properties and solution methods of DAE.

The diagnosis methods based on state estimation are treated. The hybrid state estimation, i.e. a simultaneous estimation of the continuous valued state and the discrete valued behavioral mode of the system is described in detail. Therefore, the Interacting Multiple Model (IMM) algorithm is introduced in-depth with focus on the practical application. Throughout the thesis, the system behavior is supposed to be described by nonlinear differential-algebraic equations and thus the approaches are formulated according to the model class.

The methods referenced above are applied to a complex industrial plant within the framework of a research project. Thereby, the discussion of the approaches is intensified. Particularly, the practical relevance of the DAE and of the developed algorithms are illustrated. The mathematical modeling as well as the results achieved with the state estimation and the diagnosis are presented for a real system from the field of the industrial manufacturing.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Notationen</b>	<b>viii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Stand der Technik und Forschung . . . . .	3
1.2 Struktur der Arbeit . . . . .	12
<b>2 Differential-Algebraische Gleichungen</b>	<b>13</b>
2.1 Grundlagen und Definitionen . . . . .	14
2.2 Inhärente Differentialgleichung . . . . .	15
2.3 Übersicht der Lösungsverfahren . . . . .	19
2.4 Beispiele . . . . .	21
2.5 Zusammenfassung . . . . .	30
<b>3 Zustandsschätzung</b>	<b>31</b>
3.1 Grundlagen und Definitionen . . . . .	32
3.2 Kalman-Filter mit linearen expliziten Modellen . . . . .	33
3.3 Kalman-Filter mit nichtlinearen expl. Modellen . . . . .	38
3.3.1 Approximation der Modellgleichungen . . . . .	40
3.3.2 Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte . . . . .	41
3.4 Kalman-Filter mit DAE . . . . .	43
3.4.1 Generalisierte Zustandsstörung . . . . .	43
3.4.2 Kalman-Verstärkung mit Restriktionen . . . . .	47
3.4.3 Inkonsistente Zustandsschätzung . . . . .	52
3.5 Beispiele . . . . .	65
3.6 Zusammenfassung . . . . .	73

<b>4</b>	<b>Modellbasierte Diagnose</b>	<b>74</b>
4.1	Grundlagen und Definitionen . . . . .	75
4.2	Substantielle Systemveränderungen . . . . .	77
4.3	Schätzung der Verhaltensmodes . . . . .	80
4.3.1	Hidden Markov Modell . . . . .	80
4.3.2	Probabilistic Hybrid Automaton . . . . .	82
4.3.3	Interacting Multiple Model . . . . .	85
4.4	Beispiele . . . . .	87
4.5	Zusammenfassung . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Anwendung modellbasierter Methoden</b>	<b>92</b>
5.1	Ziele und Rahmenbedingungen . . . . .	93
5.2	Demonstratorsystem RIVSET Vario . . . . .	94
5.3	Analyse des Demonstratorsystems . . . . .	97
5.3.1	Empirische Analyse . . . . .	98
5.3.2	Modellbildung . . . . .	99
5.4	Optimierung . . . . .	114
5.4.1	Parameteridentifikation . . . . .	115
5.4.2	Minimierung des Energieverbrauches . . . . .	116
5.5	Modellbasierte Diagnose . . . . .	122
5.5.1	Modellbildung . . . . .	123
5.5.2	Zustandsschätzung . . . . .	124
5.5.3	Diagnose . . . . .	125
5.6	Verallgemeinerung des Vorgehens . . . . .	130
5.7	Zusammenfassung . . . . .	134
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>135</b>
<b>A</b>	<b>Mathematisches Pendel</b>	<b>138</b>
<b>B</b>	<b>Hydraulischer Zylinder</b>	<b>142</b>
B.1	Komponenten . . . . .	142
B.2	Variablen und Parameter . . . . .	144
B.3	Konstitutive Gleichungen . . . . .	146
B.4	Konnektivitätsgleichungen . . . . .	146
B.5	DAE-Formulierung . . . . .	146
B.6	Substantielle Systemveränderungen . . . . .	150
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>151</b>

# Notationen

Eine Formatierung der Variablensymbole mit Bezug auf die Dimension des zugehörigen Vektorraums wird nicht vorgenommen. Folglich werden kursive Standardsymbole u.a. sowohl für skalare, vektorielle und matrixwertige Größen, als auch für Funktionen verwendet. Für eingeführte Operatorbezeichnungen werden Standardschriftsymbole (nicht kursiv) verwendet. Eine spezifizierte Zuweisung von Großbuchstaben und Kleinbuchstaben wird nicht vorgenommen.

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	Menge der reellen Vektoren der Dimension $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Menge der reellen Matrizen der Dimension $n \times m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
$\emptyset$	Leere Menge
$\dim(v)$	Dimension des Vektorraums, dessen Element $v$ ist
$\forall$	Für alle
$\exists$	Existiert
$\in$	Element von
$\notin$	Kein Element von
$\subset$	Echte Teilmenge von
$\not\subset$	Keine echte Teilmenge von
$\subseteq$	Teilmenge von
$\not\subseteq$	Keine Teilmenge von
$0$	Null-Element eines Vektorraums nicht spezifizierter Dimension
$0_n$	Null-Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
$0_{n \times m}$	Null-Matrix in $\mathbb{R}^{n \times m}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
$1_n$	Eins-Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
$1_{n \times m}$	Eins-Matrix in $\mathbb{R}^{n \times m}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$
$I_n$	Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$



$\det(m)$	Determinante einer Matrix $m$
$\text{diag}(v)$	Diagonalmatrix mit Elementen gegeben durch einen Vektor $v$
$\text{rank}(m)$	Rang einer Matrix $m$
$\text{trace}(m)$	Spur einer Matrix $m$
$m^T$	Transponierte einer Matrix $m$
$m^{-1}$	Inverse einer Matrix $m$
$r \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilte Zufallsvariable $r$ mit $E(r) = \mu$ und $\text{Var}(r) = \sigma^2$
$E(r)$	Erwartungswert einer Zufallsvariablen $r$
$\text{Var}(r)$	Varianz einer Zufallsvariablen $r$
$\text{Cov}(r_1, r_2)$	Kovarianz der Zufallsvariablen $r_1$ und $r_2$
$P(r)$	Wahrscheinlichkeit einer Zufallsvariablen $r$
$\min_x(f(x))$	Minimum einer reellen Funktion $f$ des Argumentes $x$
$\max_x(f(x))$	Maximum einer reellen Funktion $f$ des Argumentes $x$
$\arg(f(x) = 0)$	Funktion zur Bestimmung des Arguments $x$ der Funktion $f$ aus der Gleichung $f(x) = 0$
$\arg \min_x(f(x))$	Funktion zur Bestimmung des Arguments $x$ des Minimums einer reellen Funktion $f$
$\arg \max_x(f(x))$	Funktion zur Bestimmung des Arguments $x$ des Maximums einer reellen Funktion $f$
$\exp(x)$	Exponentialfunktion eines reellen $x$
$\text{abs}(x)$	Absolutwert-Funktion des reellen $x$ komponentenweise
$\text{sign}(x)$	Signum-Funktion des reellen $x$ komponentenweise
$\lceil x \rceil$	Aufrundungsfunktion des reellen $x$ komponentenweise
$\lfloor x \rfloor$	Abrundungsfunktion des reellen $x$ komponentenweise
$\dot{x}$	Erste Ableitung bzgl. der Zeit
$\ddot{x}$	Zweite Ableitung bzgl. der Zeit
$x^{(n)}$	$n$ -te Ableitung bzgl. der Zeit mit $n \in \mathbb{N}$

Die vorangestellten Notationen werden durchgehend in dem vorliegenden Beitrag genutzt. Im Einzelfall werden abweichende Notationen unmittelbar bei der Einführung erläutert.



# Kapitel 1

## Einleitung

Der technische Fortschritt bedingt im Allgemeinen eine stetige Zunahme der Komplexität der technischen Systeme. Diese Entwicklung äußert sich unter anderem in der zunehmenden Anzahl der Funktionen, dem steigenden Anteil automatisierter Abläufe und der vielschichtigen Interaktion der Systeme. Oft angeführte Beispiele für die aktuell wichtigen Entwicklungsfelder sind automatisierte Fertigungsanlagen, autonome Fahrzeuge und Fluggeräte, Mensch-Maschine-Kollaboration sowie vernetzte Systeme. Moderne technische Systeme können unter Umständen aufgrund der hohen Leistung deren Aktoren erhebliche physische Einwirkungen auf ihr Umfeld ausüben oder folgenreiche Entscheidungen im Bereich der Informationsverarbeitung übernehmen. Diese Aspekte der Entwicklung stellen wesentliche Herausforderungen im Bezug auf die technische Zuverlässigkeit und funktionale Sicherheit dar. Die Sicherstellung der Zuverlässigkeit und die Gewährleistung der Sicherheit können generell durch zwei Arten der Maßnahmen erreicht werden, diese sind: der Einsatz redundanter Hardwarekomponenten und die Verwendung geeigneter, erweiterter Softwarekomponenten. Die Anwendung beider Maßnahmen sowie deren Kombination sind weit verbreitet. Die Sicherheitskonzepte berücksichtigen im Allgemeinen die Kritikalität der Fehlfunktionen des Systems bzw. des Versagens dessen Komponenten über den gesamten Lebenszyklus. Folglich sind entsprechende Untersuchungen und die Bewertung der Kritikalität in der Entwicklungsphase erforderlich.

Die softwaretechnische Implementierung der Sicherheitsfunktionen kann meist kostengünstig realisiert werden. Zudem können die Sicherheitsfunktionen detaillierte Informationen über die eintretenden Systemveränderungen protokollieren und ausgeben, sodass bedarfsgerechte Wartung bzw. Instandsetzung effizient ermöglicht werden. Die notwendige Voraussetzung für den wirksamen Einsatz der Softwarekomponenten ist das Fortbestehen intakter Wirkketten bzw. Teilsysteme zur Feststellung der Fehlfunktionen oder des Versagens der Systemkomponenten sowie zur physischen Umsetzung der erforderlichen Reaktionen der Sicherheitsfunktion in derartigen Fehlerfällen. Diese Voraussetzungen sind für komplexe Systeme mit einer Vielzahl von Sensoren, Aktoren und Leis-

tungsquellen oft gegeben, denn der ganzheitliche Ausfall des Systems wird damit unwahrscheinlich. Anderenfalls kann das System bei hoher Kritikalität der Fehlfunktionen mit den erforderlichen Hardwarekomponenten erweitert werden. Hingegen kann eine physische Reaktion bei geringer Kritikalität ggf. nicht notwendig sein. Die Indikation der Fehlfunktion und die zweckdienlichen Information für die Instandsetzung haben jedoch beiderfalls eine sehr hohe Bedeutung.

Der wesentliche Teilbereich der softwaretechnischen Sicherheitskonzepte ist die Systemdiagnose. Synonym werden hierzu die Begriffe Überwachung und Monitoring verwendet. Die prinzipiellen Ziele der Diagnose sind das Zusammenführen der messtechnisch erfassten Informationen über das aktuelle Verhalten des betrachteten Systems, das Aufbereiten dieser Informationen und die Bewertung bezüglich eines definierten Referenzverhaltens. Der Einsatz mathematischer Modelle in der Verfolgung dieser Ziele begründet das Gebiet der modellbasierten Diagnose.

Die mathematischen Modelle werden in unterschiedlichen Bereichen der Diagnose zu unterschiedlichen Zwecken verwendet. Generell ermöglichen die Modelle in Ergänzung und Kombination mit Sensoren eine redundante analytische Beschreibung des Systemverhaltens. Die Abweichung zwischen den zugeordneten, alternativ ermittelten Größen wird als ein Maß für die Diskrepanz des Verhaltens des Modells und des realen Systems festgelegt. Grundsätzlich kann die Abweichung durch Modellungenauigkeiten, nicht modellierte Störgrößen oder durch Systemveränderungen gegenüber dem modellierten Stand verursacht werden. Entsprechend impliziert die modellbasierte Diagnose zwei Probleme: die Reduktion des Einflusses der Modellungenauigkeiten und der Störgrößen sowie die Bewertung der verbleibenden Abweichung zwischen dem modellierten und dem realen Systemverhalten zur Charakterisierung der ggf. eintretenden Systemveränderungen. Das erstgenannte Problem erfordert den Einsatz der Methoden der Zustandsschätzung. Hingegen werden das letztgenannte Problem und die zugehörigen Analyseverfahren der eigentlichen Diagnose zugeordnet. Eine Sonderstellung nehmen hierbei stochastische Zustandsschätzer ein. Diese können Modellungenauigkeiten in Form stochastischer Störungen berücksichtigen und ermöglichen ferner die Bewertung von Systemveränderungen.

Die elementare Voraussetzung für die Anwendung der Zustandsschätzung im Kontext der modellbasierten Diagnose ist offensichtlich das Vorliegen eines geeignet formulierten mathematischen Modells. Die Entwicklung des Modells ist somit eine notwendige vorbereitende Arbeit für die Implementierung der modellbasierten Diagnose. In der Praxis sind verschiedene Modellierungstechniken etabliert, die Art des produktiven Ergebnisses der Modellierung hängt jedoch durchaus von der eingesetzten Technik ab.

Die erwähnte zunehmende Komplexität der technischen Systeme lässt die unmittelbare Modellbildung und die direkte Formulierung einer entsprechenden expliziten gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE) oft nicht zu. Folglich werden mathematische Modelle realer praxisnaher Systeme überwiegend mo-

dular entwickelt. Hierbei wird das betrachtete System hierarchisch mit der Einbeziehung mehrerer Modellierungsebenen gegliedert, sodass das Verhalten der damit definierten Teilsysteme der untersten Ebenen direkt mathematisch beschrieben werden kann. Die Beziehungen der erstellten Teilmodelle werden entsprechend den Wechselwirkungen der korrespondierenden Teilsysteme definiert. Das Vorgehen wird als objektorientierte Modellierung (OOM) bezeichnet. Die Vorteile des OOM sind evident: die Komplexität der technischen Systeme wird beherrschbar, die modular aufgebauten Modelle können mit einem geringen Aufwand modifiziert und erweitert werden, die entwickelten Teilmodelle können weiterverwendet werden, u.v.a.m. Generell wird damit die Effizienz in der Modellierung wesentlich gesteigert. Die Folge der hierarchischen Modellierung ist jedoch die Formulierung des Modells als eine differential-algebraische Gleichung (DAE). Ursächlich dafür sind die Beschreibungen des Verhaltens der Teilsysteme überwiegend mit Differentialgleichungen und deren Beziehungen vor allem in Form algebraischer Bedingungen. Im Allgemeinen kann diese Konsequenz ohne Nachteile nicht vermieden werden, daher gewinnen DAE mit der zunehmenden Komplexität der technischen Systeme an Bedeutung. Darüber hinaus führen unter anderem die Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen, die Anwendung von Optimierungsverfahren im Zusammenspiel mit dynamischen Modellen, die Approximation schneller dynamischer Prozesse in ODE durch algebraische Gleichungen und die spezifische Beschreibung der mechanischen Mehrkörpersysteme zu Modellen in Form differential-algebraischer Gleichungen.

## 1.1 Stand der Technik und Forschung

**Zustandsbeobachtung und -schätzung.** Die Methoden der Zustandsbeobachtung und -schätzung werden zur Ermittlung der messtechnisch nicht erfassten Systemgrößen sowie zur Reduktion des Einflusses der Modellungenauigkeiten und der Störgrößen eingesetzt. Die Unterscheidung zwischen Beobachtung und Schätzung wird vor allem mit den Annahmen hinsichtlich der Störgrößen motiviert. Die Beobachtung wird mit impulsartigen und sprungartigen Störgrößen entworfen, hingegen gründet die Schätzung auf der Annahme rauschartiger Störungen mit stochastischen Charakteristika. Die Techniken sind weitgehend etabliert in der Wissenschaft und Anwendung für unterschiedliche Systemklassen, setzen jedoch vielfach ein Modell in Form gewöhnlicher Differentialgleichungen voraus.

Ein verbreiteter effizienter Ansatz basierend auf den Modellen in Form linearer, zeitinvarianter Differentialgleichungen ist der Luenberger-Beobachter (vgl. [Lue64]). Das modellierte und reale Systemverhalten werden hierbei mit einer geeigneten Rückführung der Differenz zwischen den modellierten und den realen Messgrößen asymptotisch angeglichen. Die kennzeichnenden Vorteile des Ansatzes sind der geringe Aufwand für die Synthese und die Parametrierung des Beobachters sowie die Effektivität des Algorithmus im Ausgleichen des Einflusses impulsartiger Störungen und Anfangswertunsicherheiten.

Hingegen sind der Entwurf und die Parametrierung der Beobachter mit zeitvarianten und nichtlinearen Modellen im Allgemeinen sehr aufwändig. Eine große Gruppe der Ansätze zur Erweiterung des Luenberger-Beobachters für nichtlineare Differentialgleichungen basiert auf der Überführung des Beobachters mittels einer Zustandstransformation in die nichtlineare Beobachternormalform (vgl. [KI83], [BZ83], [Kel87], [Isi95]). Die Beobachternormalform ist bezüglich des transformierten Zustandes linear, sodass die Transformation oft auch als exakte Linearisierung bezeichnet wird. Die Ermittlung der nichtlinearen Beobachternormalform erfordert jedoch einen sehr hohen Aufwand und stellt deutliche Einschränkungen hinsichtlich der Modellklasse auf. Die Einschränkungen und der Aufwand werden mit der Einführung der Approximation der Fehlerdynamik in der Beobachternormalform reduziert (vgl. [Zei87b], [BZ88], [KM91]). Eine weitere Gruppe umfasst die sogenannten asymptotischen Beobachter. Hierzu gehören u.a. exponentielle Beobachter (vgl. [XG88], [XG89], [Tsi89], [Tsi90], [Adj93]). Ebenso werden dieser Gruppe High-Gain-Beobachter zugeordnet, deren Grundidee darin besteht, ausgehend von der nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform mit einer hinreichend großen Fehleraufschaltung die Nichtlinearitäten des beobachteten Systems zu dominieren (vgl. [Tha73], [NT89], [BH91], [BBG10]). Das Problem der Beobachtung mit nichtlinearen Modellen unter Betrachtung der Modellunsicherheiten wird mit den robusten Beobachtern behandelt. Eine Gruppe darunter sind die  $H_\infty$ -Beobachter basierend auf nichtlinearen Optimierungstechniken für den Beobachterentwurf (vgl. [Fra87], [NK91], [RH94]). Eine andere wichtige Gruppe der robusten Beobachter sind die Sliding-Mode-Beobachter mit variabler Struktur (vgl. [SHM86], [WŻ87], [SHM87], [MHSV89], [Dra92]). Der Stimulatorterm in dieser Art von Beobachtern wird durch eine geeignet zu ermittelnde, diskontinuierliche Funktion ersetzt und der Verlauf der Beobachtung kann als ein Wechseln unter verschiedenen wertkontinuierlichen Strukturen interpretiert werden. Detaillierte vergleichende Untersuchungen der Beobachteransätze mit nichtlinearen Modellen sind u.a. [WCŻ87], [Zei87a] und [Jel95].

Eine weitere wichtige Gruppe der Methoden der Zustandsapproximation sind die Moving Horizon Schätzer (engl. Moving Horizon Estimator, MHE). MHE können sowohl der Zustandsschätzung als auch der Beobachtung zugeordnet werden (vgl. [Jel95]). Diese Algorithmen verwenden zur Minimierung des Schätzfehlers innerhalb eines Zeitintervalls nichtlineare Optimierung, damit werden die Einschränkungen hinsichtlich der verwendbaren Modellklassen wesentlich abgeschwächt (vgl. [Zim93]). Die Zustandsschätzung mit MHE wird in [MM95] mit nichtlinearen Modellen beschrieben. Die Verwendung der dynamischen Modelle mit Nebenbedingungen wird für MHE in [Raw13] und [RRM03] diskutiert. Damit sind MHE mit differential-algebraischen Gleichungen realisierbar (vgl. [TB91], [AB97]). Der zentrale Nachteil der Methoden ist der erforderliche große Rechenaufwand für die Ausführung der Optimierung. Dieser Aspekt wird im Zusammenhang mit der Anwendung mit großen Modellen unter anderem in [BBB<sup>+</sup>01] detailliert behandelt.

Die Anwendung der Beobachter mit differential-algebraischen Gleichungen ist aufgrund der allgemeineren Modellklasse deutlich erschwert. Die Verallgemeinerung des Luenberger-Beobachters für lineare differential-algebraische Gleichungen wird in [Dua10] ausführlich diskutiert. Anwendbare Entwurfsverfahren der Beobachter für nichtlineare DAE implizieren u.a. entsprechende Probleme wie für nichtlineare ODE, sodass nur wenige Ansätze verfügbar sind. Der Beobachterentwurf in [ZM97] basiert auf der Umformung der ursprünglichen nichtlinearen DAE in die inhärente ODE und die restriktive Mannigfaltigkeit und weiter auf der Anwendung der Methoden für nichtlineare ODE. Ein Vorschlag des Beobachters für nichtlineare semiexplizite DAE mit Index 1 wird in [ÅF06] entwickelt. Eine Entwurfsmethode der  $H_\infty$ -Beobachter für eine Klasse nichtlinearer DAE in zeitdiskreter Form wird in [DBBZ13] vorgeschlagen. Der Ansatz in [Ber19] ist für eine spezielle Klasse der nichtlinearen DAE geeignet und verwendet die Riccati-Ungleichung zur Auslegung des Beobachters.

Die Zustandsschätzung verwendet im Allgemeinen Modelle mit der Annahme rauschartiger Störgrößen mit entsprechender Beschreibung der zugeordneten stochastischen Eigenschaften. Eine besonders verbreitete Art dieser Algorithmen sind die Kalman-Filter. Die primären Vorteile der Kalman-Filter sind der geringe Aufwand in der Synthese und der Parametrierung und der moderate Rechenaufwand in der Anwendung. Die ursprüngliche Variante für lineare, zeitinvariante, zeitdiskrete Modelle [Kal60] wird vielfach weiterentwickelt und auf lineare und nichtlineare ODE sowie auf weitere Modellklassen adaptiert.

Die besonders verbreitete Variante des Kalman-Filters für nichtlineare Modelle ist das Extended Kalman-Filter (EKF). Die Grundidee des EKF ist die Linearisierung der Modellgleichungen mit der Taylor-Reihenentwicklung um die geschätzte Trajektorie (vgl. [SSM62], [McE66]). Der offensichtlich implizierte Linearisierungsfehler wird in der Weiterentwicklung des EKF reduziert. Eine Iteration des Zustandes für die Taylor-Reihenentwicklung wird in [Jaz70] und [Kre80] vorgeschlagen. Die Anwendung der Taylor-Reihen mit höherer Ordnung wird in [Ein19] beschrieben. Weitere Varianten des EKF mit Maßnahmen zur Reduktion des Linearisierungsfehlers sind z.B. [Res97] und [BRD97]. Die Maßnahmen zur Reduktion des Linearisierungsfehlers im EKF führen erwartungsgemäß zu einem höheren Aufwand und höherer Komplexität des Algorithmus.

Die Schwächen des EKF können mit der Anwendung ableitungsfreier Approximationsmethoden der Wahrscheinlichkeitsdichte interessierender stochastischer Größen vermieden werden. Eine besonders verbreitete Gruppe derartiger Algorithmen wird als Sigma-Punkte-Kalman-Filter bezeichnet. Die Grundlage dieser Filter ist die unmittelbare Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der in Kalman-Filter einbezogenen stochastischen Größen und der erforderlichen stochastischen Momente mit deterministisch festgelegten Mengen der Realisierungen der Zufallsvariablen und deren Transformation durch die nichtlinearen Modellgleichungen. Die Realisierungen der Zufallsvariablen in den Mengen werden Sigma-Punkte benannt. Die Approximation

gelingt, wenn die Art der stochastischen Verteilung der Zufallsvariablen vor und nach der Transformation bekannt ist bzw. durch eine bekannte approximiert werden kann. Hierbei wird konventionell die Normalverteilung angenommen. Die vermutlich bekannteste Variante der Sigma-Punkte-Kalman-Filter ist das Unscented Kalman-Filter (UKF) vorgestellt in [JUDW95] und weiterentwickelt in [Jul02]. Die Finiten- bzw. Zentralen-Differenzen-Filter erfordern den gleichen Rechenaufwand wie UKF, nutzen jedoch eine alternative Methode zur Bildung der Sigma-Punkte (vgl. [NPR00], [IX00]). Eine weitere verwandte Variante des Kalman-Filters nutzt die Gauß-Hermite-Approximation, womit eine sehr genaue Berechnung der stochastischen Momente unter deutlich höherem Aufwand möglich ist (vgl. [IX00]).

Die weitere Verallgemeinerung der Kalman-Filter lässt die Annahme beliebiger Verteilungen der involvierten Zufallsvariablen zu. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen können im einfachsten Fall mit mehrdimensionalen äquidistanten Gitternetzen und die stochastischen Momente mit finiten Summen approximiert werden (vgl. [BS71], [PWH88]). Allerdings ist der Rechenaufwand dieser Methoden erheblich, sodass deren praktische Relevanz stark begrenzt ist. Die weiterentwickelten Methoden verwenden adaptive Gitternetze basierend auf sequentiell Importance Sampling (vgl. [LC98], [DdFG01]). Diese Gitter werden durch Punkte benannt als Partikel definiert, die sich an Orten mit hoher Wahrscheinlichkeitsdichte konzentrieren. Die stochastischen Filter auf der Grundlage dieses Ansatzes werden als Partikel-Filter bezeichnet (vgl. [RAG03]). Der grundsätzliche Unterschied zu den Sigma-Punkte-Kalman-Filtern ist die zufallsbasierte Generierung der Partikel entsprechend einer Ansatzverteilung. Die Wahl der Ansatzverteilung hat daher eine wichtige Bedeutung in den Algorithmen. Ein grundlegendes Problem der Partikel-Filter ist die überdominante Gewichtung eines oder einiger wenigen Partikel und die Gewichtung der übrigen Partikel nahe null im Verlauf der rekursiven Berechnung der Gewichte. Dieser Effekt wird Degenerierung der Partikel genannt und mit der Implementierung eines Resampling-Schrittes beschränkt. Das Resampling unterscheidet oft die Varianten der Partikel-Filter. Die Beispiele unterschiedlicher Varianten der Partikel-Filter sind u.a. Auxiliary Particle Filter (vgl. [Fea98], [PS99]), Gaussian Sum Particle Filter (vgl. [KD03]) und Kernel Particle Filter (vgl. [CA05]). Die Algorithmen erfordern im Allgemeinen einen höheren Aufwand und haben eine höhere Komplexität als die Sigma-Punkte-Kalman-Filter. Hingegen können mit Partikel-Filtern Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen beliebiger, auch multimodaler Verteilungen der involvierten Variablen hinreichend für die Zustandsschätzung approximiert werden. Ferner können höhere Momente der Verteilungen, wie Schiefe oder Wölbung, mit hoher Genauigkeit ermittelt werden. Vergleichende Untersuchungen unterschiedlicher Filtervarianten werden u.a. in [Sor85] und [Bey08] vorgestellt.

Die Synthese der Kalman-Filter auf der Basis linearer differential-algebraischer Gleichungen wird mehrfach untersucht. Die zeitdiskreten linearen zeitinvarianten Modelle werden in [DZM93] für die Synthese der Kalman-



Filter verwendet. Die Kalman-Filter mit linearen zeitinvarianten DAE und unbekanntem Eingang werden in [NCD99] entwickelt. Die Kalman-Filter mit linearen zeitvarianten DAE werden in [NWL92] und in [ITC05] beschrieben. Der Entwurf der robusten Kalman-Filter auf der Basis zeitdiskreter linearer zeitvarianter DAE wird unter Berücksichtigung der Modellungenauigkeiten in [ITC06] entwickelt.

Die Synthese der Kalman-Filter mit nichtlinearen differential-algebraischen Gleichungen erfordert den Einsatz grundsätzlich anderer Methoden und ist aufgrund meist impliziter, algebraischer Abhängigkeiten der Zustände grundlegend aufwändiger. Folglich behandeln die Ansätze nichtlineare DAE mit einer speziellen Struktur und Einschränkungen hinsichtlich der stochastischen Störung. Eine Umsetzung des Extended Kalman-Filters mit nichtlinearen DAE mit dem Index 1 und der stochastischen Störung ausschließlich im differentiellen Zustand wird in [BRG99] und [BRG01] vorgeschlagen. Die Messgrößen werden in diesen Varianten der Kalman-Filter nur von differentiellen Zuständen abhängig angenommen. Eine weiterführende Entwicklung des EKF mit den Messgrößen abhängig sowohl von differentiellen als auch von algebraischen Zuständen und eine Implementierung eines UKF wird in [MRN09] vorgestellt. Die letztgenannte Variante des Unscented Kalman-Filters wird in [AW13b] überarbeitet. Darin werden ausschließlich erforderliche Schritte im Algorithmus erhalten und die skalierte Unscented Transformation eingeführt. Die stochastische Störung beeinflusst in [BRG99], [BRG01], [MRN09] und [AW13b] nur die differentiellen Gleichungen der DAE, tritt aber in den algebraischen Gleichungen nicht auf. Dadurch wird implizit sichergestellt, dass ein wohlgestelltes (engl. well posed) stochastisches DAE-System formuliert wird. Somit existiert für die stochastische DAE eine Lösung, welche eindeutig und stetig bzgl. der Anfangswerte und der Eingangsgröße ist.

Die Einführung der stochastischen Störung in DAE mit höherem Index und die Bedingungen für das Vorliegen einer wohlgestellten stochastischen DAE in zeitkontinuierlicher Form werden in [Ger06], [GS06] untersucht. Hierfür wird das DAE-System mittels Indexreduktion in ein strangeness-freies System überführt. Dadurch wird gezeigt, dass die zeitkontinuierliche stochastische DAE wohlgestellt formuliert wird, wenn nach der Indexreduktion die differentiellen Gleichungen der DAE affin bzgl. der Störung sind, während die Störung die algebraischen Gleichungen nicht beeinflusst. Damit werden die zeitliche Differentiation der stochastischen Störung und nichtlineare Operationen mit der Störgröße im Zusammenhang mit stochastischen Integralen vermieden. Diese Operationen sind für die Störgröße, welche typischerweise durch einen weißen Rauschprozess repräsentiert wird, nicht zulässig. Basierend auf dem strangeness-freien DAE-System wird in [Ger06], [GS06] ein Partikel-Filter zur Zustandsschätzung konzipiert, dessen Implementierung anhand eines mathematischen Pendels diskutiert wird.

Stochastische differential-algebraische Gleichungen mit höherem Index in zeitkontinuierlicher Form werden analog zu [Ger06], [GS06] in [Sei99], [SBR00]

behandelt. Die Betrachtung wird auf bzgl. der Störung streng propere DAE, d.h. auf Modelle ohne direkten Durchgriff der Störung, beschränkt. Diese geforderte Eigenschaft stellt sicher, dass die restriktive Mannigfaltigkeit der DAE nur von dem Zustand, der Stellgröße sowie deren zeitlichen Ableitungen abhängt, die Differentiation der Störung bezüglich der Zeit vermieden wird und eine stetige Lösung der DAE existiert. Die Zustandsschätzung erfolgt in [Sei99], [SBR00] basierend auf der inhärenten ODE mit einem kontinuierlich-diskreten Kalman-Filter. Dafür wird die inhärente ODE entlang der gewählten Referenztrajektorie mittels Taylor-Reihe linearisiert. Die geschätzten Zustandswerte sind folglich inkonsistent. Die Konsistenz der Schätzung wird durch die anschließende orthogonale Projektion auf die Mannigfaltigkeit erreicht. Damit wird die restriktive Mannigfaltigkeit nicht direkt, sondern unabhängig von der Zustandsschätzung berücksichtigt.

Abweichend von den oben beschriebenen Ansätzen wird in [AW14a] auf der Grundlage einer zeitdiskreten Betrachtung nichtlinearer DAE mit höherem Index eine generalisierte Zustandsstörung sowie die Implementierung eines Unscented Kalman-Filters vorgeschlagen und in [AW14b] vom Autor der vorliegenden Arbeit wesentlich weiterentwickelt. Diese Implementierung des UKF wird detailliert in Kap. 3 beschrieben.

**Diagnose.** Die Diagnose behandelt unmittelbar drei Probleme:

- a) die Detektion, das Erkennen des Auftretens der Systemveränderungen,
- b) die Isolation, das Eingrenzen der veränderten Systemregionen und
- c) die Identifikation, die Ermittlung der quantitativen Bewertung der Systemveränderungen.

Die Abweichung des aktuellen Systemverhaltens von dem Modellverhalten, genannt Residuen, genauer die Differenz der zugeordneten Größen, stellt in der Diagnose einen Indikator bzw. ein Symptom für die eintretenden Systemveränderungen dar.

**zu a)** Die Detektion der Systemveränderungen erfordert die Ermittlung und Bewertung der Residuen. Deren Berechnung wird aus dem Vergleich der Messgrößen des Systems und der zugehörigen Modellgrößen ermittelt mit einem linearen Beobachter in [Bea71] und [Jon73] vorgestellt. Die Ansätze werden mit nichtlinearen Beobachtern in [FSAG99], Sliding-Mode-Beobachtern in [ESP00] und Beobachtern mit hoher Verstärkung (engl. high-gain observer) in [HKEY99] auf nichtlineare Modelle übertragen. Ferner geben [CP12] und [Din12] einen Überblick über Verfahren der Detektion mit robusten Beobachtern und Beobachtern mit unbekanntem Eingang. Die Detektion der Systemveränderungen auf Basis der Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern wird in [Din12] und [HC00], mit Extended Kalman-Filtern in [AS03] und [Wit07] sowie mit Unscented Kalman-Filtern in [SS10] beschrieben.

Die Beobachter und Kalman-Filter zeichnen sich durch die Rekursion in der Berechnung der Zustandsschätzung und somit der Residuen. Hingegen kombinieren Paritätsraumverfahren nichtrekursiv gemessene oder analytisch

berechnete Eingangs- und Ausgangsgrößen zu Residuen. Die Detektion mit Paritätsraumverfahren auf Basis linearer Modelle wird in [CW84] methodisch beschrieben und in [NZD06] auf nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen erweitert.

Die Parameteridentifikationsverfahren werden im Bereich der Diagnose, speziell auch in der Detektion, unter Annahme eingesetzt, dass sich die Systemveränderungen bzw. Fehler in geänderten physikalischen Systemparametern widerspiegeln. Hierbei ergeben sich die Residuen aus der Differenz der geschätzten Parameter und der Parameter zugeordnet zum Modell des nominellen Systemverhaltens. Analog zu den beobachtergestützten Verfahren und den Paritätsraumverfahren werden auch die Parameteridentifikationsverfahren zunächst mit linearen ODE entwickelt (vgl. [Ise93]) und in geeigneter, angepasster Form im Weiteren auch mit nichtlinearen Modellen angewandt (vgl. [Wit07]).

**zu b)** Die Isolation der Systemveränderungen kann als das auf die Detektion anschließende Problem bezeichnet werden. Im Allgemeinen erfordert die Isolation die Ermittlung mehrerer Residuen, sodass unter verschiedenen Systemregionen, d.h. hier unter Aktor-, Sensor- und/oder Prozessteilsystemen, mit potentiellen Veränderungen bzw. Fehlern differenziert werden kann. Die Verfahren können in Gruppen mit dedizierten strukturierten, generalisierten strukturierten und mit gerichteten Residuen gegliedert werden (vgl. [CP12]). Die dedizierten strukturierten Residuen hängen direkt von den zugeordneten Systemveränderungen ab (vgl. [CP12], [Din12]). Die Isolation mit den dedizierten strukturierten Residuen mit Beobachtern auf Basis linearer Modelle wird originär in [Cla78] als das dedizierte Beobachterschema (engl. Dedicated Observer Schema, DOS) vorgestellt und in [CS07] für eine spezielle Klasse nichtlinearer Modelle erweitert. Die generalisierten strukturierten Residuen werden derart definiert, dass deren Werte von allen jedoch ausgenommen der zugeordneten Systemveränderungen abhängen. Das korrespondierende generalisierte Beobachterschema (engl. Generalized Observer Schema, GOS) wird in [FSAG99] beschrieben. Die Verfahren mit gerichteten Residuen bewerten die Richtung des Residuenvektors (vgl. [CP12]). Die ersten Ansätze für die Isolation auf Basis gerichteter Residuen werden als Fehler-Detektionsfilter (engl. fault detection filter) in [Bea71] und [Jon73] vorgestellt. Diese zeigen jedoch eine unzureichende Robustheit gegenüber Modellungenauigkeiten und Störungen. Ein robustes Verfahren wird in [CPZ96] beschrieben. Ein geometrieorientierter Ansatz zum Entwurf eines Detektionsfilters wird mit linearen Modellen in [Mas86] entwickelt und darauf aufbauend in [PI01] mit differentialgeometrischen Betrachtungen auf nichtlineare Modelle erweitert.

**zu c)** Die Identifikation setzt eine geeignete quantitative Modellierung der Systemveränderungen voraus. Daher sind die korrespondierenden Konzepte oft auf Spezialfälle beschränkt. Die Diagnose mit der Modellierung der Systemveränderungen als Veränderungen der Modellparameter mit linearen Differentialgleichungen wird in [Ise93] vorgestellt. Die Identifikation der Fehler in Aktoren und Sensoren wird mit einem Sliding-Mode-Beobachter auf Basis

linearer ODE in [TE03] vorgeschlagen. Eine Verallgemeinerung des Ansatzes für die Anwendung mit einer speziellen Klasse der nichtlinearen ODE wird in [CS07] gegeben.

Die umfassende Behandlung der Diagnoseprobleme kann unter anderem basierend auf der hybriden Zustandsschätzung gelingen (vgl. [Hof05]). Hierbei erfolgt eine simultane Schätzung des wertkontinuierlichen Zustandes und des wertdiskreten Verhaltensmodes des Systems. Die Verhaltensmoden werden unterschiedlichen Systemkonfigurationen mit den jeweiligen Veränderungen zugeordnet und mit wertdiskreten Variablen beschrieben. Ein wichtiger, spezieller Ansatz aus dieser Gruppe der Diagnosemethoden ist das Interacting Multiple Model (IMM). Dieser Ansatz wird in [BBS88] für die Zustandsschätzung von stochastischen Systemen entwickelt und in [MRS97] und [ZX97] für die Diagnose eingesetzt. Die einzelnen Verhaltensmoden werden im Rahmen der Diagnose mit dem IMM mit eigenständigen Modellen beschrieben. Die Detektion und Isolation der Systemveränderungen gelingen mit der Schätzung des Moden. Indessen erfolgt die Schätzung der wertkontinuierlichen Zustände mit stochastischen Filtern, unter anderem werden in [ZX97] und [TK05] das Extended und in [TSTK06] das Unscented Kalman-Filter verwendet. Das IMM ist nur ein suboptimales hybrides Zustandsschätzverfahren. Die optimale hybride Zustandsschätzung scheitert allerdings bisher in der Praxis an dem nicht akzeptablen Rechenaufwand (vgl. [Hof05]). Aufgrund dessen werden in [Hof05] mehrere alternative suboptimale Verfahren der hybriden Zustandsschätzung konzipiert und für die Diagnose angewandt. Die hybride Zustandsschätzung kann weitgehend universell mit verschiedenen Modellklassen angewandt werden, vorausgesetzt, ein geeigneter stochastischer Filteralgorithmus ist mit dem Modell realisierbar.

Die vorgenannten Ansätze in der Diagnose behandeln weit überwiegend lineare und nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen bzw. deren zeitdiskrete Formen als zugrundeliegende Modellklassen (vgl. [Ise06], [BSK<sup>+</sup>13]). Differential-algebraische Gleichungen werden, ungeachtet ihrer stetig wachsenden Bedeutung in den Bereichen Modellbildung und Simulation, in der modellbasierten Diagnose wesentlich seltener als Zustandsraumdarstellungen eingesetzt.

Grundsätzlich werden die Diagnoseverfahren mit differential-algebraischen Gleichungen basierend auf den entsprechenden Methoden mit gewöhnlichen Differentialgleichungen entwickelt. Die Verallgemeinerung eines Beobachters mit endlichem Gedächtnis (engl. finite memory observer) mit linearen zeitinvarianten DAE wird in [KBN95] zur Detektion und Isolation der Fehler in Sensoren eingesetzt. Die Detektion der Systemveränderungen wird in [DHP99] mit einem robusten Beobachter mit unbekanntem Eingang mit linearen zeitinvarianten DAE beschrieben. Die Generierung der Residuen für die Detektion und Isolation der Systemveränderungen mit der gleichen Modellklasse werden in [KYK01] mit einem robusten PI-Beobachter (engl. proportional integral observer) mit unbekanntem Eingang vorgeschlagen. Darüber hinaus werden

quantitative Eigenschaften der Diagnosefähigkeit (engl. diagnosability) für stochastische lineare zeitinvariante DAE in zeitdiskreter Form in [EFK13] eingehend untersucht. Insbesondere werden in dem Beitrag für diese Modellklasse Definitionen für die Unterscheidbarkeit, Detektierbarkeit und Isolierbarkeit von Systemveränderungen vorgeschlagen.

Die modellbasierte Diagnose kann mit nichtlinearen DAE, wie mit nichtlinearen ODE, über die Linearisierung der Modellgleichungen realisiert werden. In diesem Zusammenhang werden unter anderem die linearen parametervarianten differential-algebraischen Modelle (LPV DAE), auch LPV-Descriptor-Modelle genannt, eingesetzt. Die Detektion und Isolation der Fehler der Sensoren mit einem Beobachter basierend auf LPV DAE werden in [AZTPR09] entsprechend dem generalisierten Beobachterschema umgesetzt. Eine Implementierung des robusten PI-Beobachters mit unbekanntem Eingang wird in [AGTAM<sup>+</sup>12] mit LPV DAE für die Detektion, Isolation und Identifikation der Sensorfehler ebenfalls mit dem generalisierten Beobachterschema vorgestellt. Die Modelle in Form der LPV DAE werden in [HRC<sup>+</sup>09] zur Detektion, Isolation und Identifikation der Aktorfehler mit einem robusten Beobachter mit unbekanntem Eingang eingesetzt. Ferner werden mit dieser Modellklasse die Detektion und Isolation der Fehler sowohl der Aktoren als auch der Sensoren mit dem dedizierten Beobachterschema mit einer Implementierung des robusten Beobachters in [HRCB10] beschrieben. Der robuste PI-Beobachter basierend auf LPV DAE wird in [HRC<sup>+</sup>12] zur Detektion und Isolation der Aktorfehler auch mit dem dedizierten Beobachterschema verwendet. Die Detektion, Isolation und Identifikation der Sensorfehler werden in [LEPAZT13] mit dem Beobachter basierend auf LPV DAE mit nicht messbaren Gain-Scheduling-Funktionen und in [LEPAZ<sup>+</sup>15] mit dem robusten Beobachter mit unbekanntem Eingang behandelt.

Die Diagnose, inbegriffen die Detektion, Isolation und Identifikation von Aktorfehlern wird direkt mit einer speziellen Klasse nichtlinearer DAE mit linearen Messgrößenmodellen in [CSS04] mit einem iterativ lernenden und in [GD07] mit einem robusten Beobachter realisiert. Ein adaptiver Beobachter wird zur Identifikation der Systemveränderungen in [MAZ13] mit einer weiteren speziellen Klasse der nichtlinearen DAE entwickelt. Das Modell wird jedoch für die Synthese des Beobachters in eine zeitdiskrete explizite Zustandsraumdarstellung überführt. Das Extended Kalman-Filter wird in [TBD<sup>+</sup>11] mit nichtlinearen semiexpliziten DAE mit Index 1 zur Detektion und in [LÅFE11] mit regulären nichtlinearen DAE zur Detektion, Isolation und Identifikation der Systemveränderungen angewandt. Allerdings werden auch in diesen Ansätzen zur Formulierung der EKF die DAE in gewöhnliche Differentialgleichungen transformiert. Im Unterschied hierzu wird in [AW13a] eine Variante zur Detektion der Systemveränderungen mit einer Formulierung des Unscented Kalman-Filters direkt mit nichtlinearen DAE mit Index 1 umgesetzt. Dieser Ansatz wird in [WA16] mit der Anwendung von IMM mit UKF zur Identifikation der Systemveränderungen auf Basis nichtlinearer DAE weiterentwickelt. Die DAE

mit einem höherem Index werden in dem Beitrag auf semiexplizite Index 1 zurückgeführt.

## 1.2 Struktur der Arbeit

Die primären Ziele der vorliegenden Arbeit sind: die Fortführung der Entwicklung der Zustandsschätzmethoden mit Kalman-Filtern basierend auf nichtlinearen differential-algebraischen Gleichungen und die Konzeption der hybriden Zustandsschätzung für die modellbasierte Diagnose mit den entwickelten Ansätzen. Die praktische Anwendung der modellbasierten Methoden hat innerhalb der Arbeit einen hohen Stellenwert.

Einführend werden in Kap. 2 die grundlegenden Eigenschaften differential-algebraischer Gleichungen diskutiert und die Unterschiede zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen herausgestellt. Anschließend wird die Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern in Kap. 3 ausführlich beschrieben. Kalman-Filter mit linearen und nichtlinearen ODE werden in Abschn. 3.2 und Abschn. 3.3 entsprechend vorgestellt. Aufbauend auf diesen Grundlagen wird die Formulierung der Kalman-Filter mit nichtlinearen DAE in Abschn. 3.4 konzipiert. Dieser zentrale Abschnitt der Arbeit behandelt im Einzelnen: die generalisierte stochastische Zustandsstörung in Abschn. 3.4.1, die Kalman-Verstärkung mit algebraischen Restriktionen in Abschn. 3.4.2 und die inkonsistente Zustandsschätzung in Abschn. 3.4.3. Abschließend wird die inkonsistente Zustandsschätzung mit dem Unscented Kalman-Filter mit DAE in Abschn. 3.4.3 detailliert beschrieben. Die Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern, formuliert mit DAE, dient als die notwendige Grundlage für die modellbasierte Diagnose mit dieser Modellklasse in Kap. 4. Nach einer einführenden allgemeinen Beschreibung der Diagnose wird die hybride Zustandsschätzung in Abschn. 4.3 diskutiert. Die wesentlichen Themen sind die Formulierung des Probabilistic Hybrid Automaton in Abschn. 4.3.2 und die Anwendung des Interacting-Multiple-Model-Ansatzes in Abschn. 4.3.3.

Die konzipierten und erläuterten Methoden finden Einsatz im praktischen Teil der Arbeit in Kap. 5. Das Forschungsprojekt ESEMO, Entwicklung Selbstüberwachender Energieoptimierter MOntagesysteme, wird eingehend vorgestellt. Die unmittelbaren Ziele des Projekts sind die modellbasierte Optimierung des Energieverbrauches des Demonstratorsystems (vgl. Abschn. 5.4) sowie die Konzeption und die Implementierung der Diagnose (vgl. Abschn. 5.5). Die Komplexität des Demonstratorsystems erfordert die objektorientierte Modellbildung, infolgedessen liegt das Modell in Form einer differential-algebraischen Gleichung vor. Somit können im Rahmen des Projekts die Herausforderungen für die praktische Anwendung der modellbasierten Methoden und die Relevanz der DAE in diesem Zusammenhang besonders herausgestellt werden.

# Kapitel 2

## Differential-Algebraische Gleichungen

Differential-algebraische Gleichungen (engl. Differential-Algebraic Equation, DAE) sind Differentialgleichungen in Kombination mit algebraischen Nebenbedingungen, die die Klasse der gewöhnlichen Differentialgleichungen als einen Spezialfall enthalten. DAE treten unter anderem bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen, Optimierung, Approximation schneller dynamischer Prozesse in ODE durch algebraische Gleichungen, Beschreibung mechanischer Mehrkörpersysteme und in vielen weiteren Bereichen mathematischer Modellierung auf. Eine zunehmend große Bedeutung erlangen DAE vor allem infolge der wachsenden Verbreitung der objektorientierten Modellierung (OOM). Die OOM ermöglicht eine besonders effiziente Beschreibung dynamischer Systeme hoher Komplexität durch hierarchische Strukturierung. Die Systemstruktur wird auf das Modell übertragen, indem Systemkomponenten verschiedener hierarchischer Ebenen zunächst unabhängig von einander modelliert und anschließend zum Gesamtmodell entsprechend der Systemstruktur verknüpft werden. Bedingt durch das Vorgehen ist das Gesamtmodell eine DAE. Die OOM ist nicht auf technische oder physikalische Systeme beschränkt, sondern wird z.B. auch für die Beschreibung biologischer (vgl. [Pro13]) oder chemischer (vgl. [WD03]) Prozesse eingesetzt. Die Flexibilität der OOM macht diese Methode besonders interessant für die Modellierung mechatronischer und allgemeiner multidisziplinärer Systeme (vgl. [Ott95], [Bor10]).

In diesem Kapitel werden differential-algebraische Gleichungen beschrieben: eine Definitionen der DAE wird gegeben, ein Indexkonzept, speziell der Differentiationsindex, wird dargestellt, ein Vorgehen zur Bestimmung der inhärenten Differentialgleichung und der restriktiven Mannigfaltigkeit wird erläutert, eine Übersicht der Lösungsverfahren für DAE wird vorgestellt. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt auf den Eigenschaften der DAE, die für die weiterführende Entwicklung modellbasierter Diagnoseverfahren und Methoden der Zustandsschätzung wesentlich sind. Eine umfassende Behandlung nichtlinearer differential-algebraischer Gleichungen wird z.B. in [KM06] gegeben.

## 2.1 Grundlagen und Definitionen

**Def. 2.1:** Eine implizite Funktion

$$f(x, \dot{x}, u, t) = 0 \quad (2.1)$$

mit  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ , ist eine allgemeine nichtlineare DAE. Darin sind  $x$  der Zustand,  $u$  die Eingangsgröße und  $t$  die Zeit. Die zugeordneten Dimensionen sind entsprechend  $n_x, n_u \in \mathbb{N}$ . Die Eingangsgröße  $u$  ist eine bekannte, ausschließlich von der Zeit abhängige Größe.

**Def. 2.2:** Die Lösung der DAE (2.1) auf einem vorgegebenen Zeitintervall  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  ist die Funktion  $x(t) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ , wenn für alle  $t \in \mathbb{I}$  die Gleichung  $f(x, \dot{x}, u, t) = 0$  erfüllt ist.

**Def. 2.3:** Das Anfangswertproblem für die DAE (2.1) auf einem vorgegebenen Zeitintervall  $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$  ist das Gleichungssystem (2.1) mit der Bedingung  $x(t_0) = x_0$  für die Lösung der DAE mit  $t_0 \in \mathbb{I}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ .

Die Eingangs-Zustands-Darstellung (2.1) schränkt die Allgemeinheit der Definition Def. 2.1 nicht ein (vgl. [KM01]). Diese Darstellung folgt der konventionellen Unterscheidung der Variablen mit Bezug auf ihre steuerungstechnische Charakteristik. Somit wird die Eingangsgröße als bekannt und ausschließlich zeitabhängig angenommen, während der Zustand zunächst unbekannt ist.

Gilt für (2.1)  $\det(\partial f / \partial \dot{x}) \neq 0$ , so lässt sich die implizite Darstellung zumindest lokal nach  $\dot{x}$  auflösen. Folglich sind gewöhnliche Differentialgleichungen eine Spezialform von DAE-Systemen. Die Einführung des Begriffs des Index ermöglicht eine weiterführende Charakterisierung der differential-algebraischen Gleichungen.

**Def. 2.4:** Der Differentiationsindex einer eindeutig lösbaren DAE der Form (2.1) ist die kleinste erforderliche Zahl  $\mu \in \mathbb{N}$  wiederkehrender Differentiationen für die Zusammensetzung des Derivative-Arrays  $f_{(\mu)}$

$$f_{(\mu)} = \begin{bmatrix} f(x, \dot{x}, u, t) \\ \frac{d}{dt} f(x, \dot{x}, u, t) \\ \dots \\ \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(x, \dot{x}, u, t) \end{bmatrix} = 0, \quad (2.2)$$

so dass eine algebraische Lösung

$$\dot{x} = \phi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\mu)}, t) = \arg_{\dot{x}}(f_{(\mu)} = 0) \quad (2.3)$$

möglich ist.

**Def. 2.5:** Die Gleichung (2.3) wird als die inhärente Differentialgleichung (engl. Underlying ODE, UODE) zugeordnet zur betrachteten DAE bezeichnet und kann eine implizite Form haben.



Für gewöhnliche Differentialgleichungen wird die Lösbarkeit der entsprechenden impliziten Funktion nach dem differenzierten Zustand mit ausschließlich algebraischen Mitteln gefordert. Somit können ODE als DAE mit dem Differentiationsindex 0 betrachtet werden. Ferner kann nach dem Theorem über die impliziten Funktionen für ODE in der Form (2.1) die Regularität der Jacobi-Matrix der Gleichung bezüglich des differenzierten Zustandes vorausgesetzt werden, somit gilt  $\det(\partial f/\partial \dot{x}) \neq 0$ . Im Gegensatz dazu ist die entsprechende Jacobi-Matrix der DAE im Allgemeinen singular. Mit dieser Feststellung kann eine der verbreiteten Bezeichnungen der DAE als singuläre Systeme begründet werden (vgl. [Dua10]).

Der Differentiationsindex ist nur ein Konzept zur Beschreibung der Komplexität der DAE. Ein häufig eingewandter Nachteil dieses Konzepts ist die eingeschränkte Anwendbarkeit. Entsprechend der Definition Def. 2.4 ist der Differentiationsindex ausschließlich auf eindeutig lösbare DAE anwendbar. Eindeutig lösbare DAE werden oft als strukturell regulär oder vereinfachend als regulär bezeichnet. Andere Indexkonzepte, wie Strangeness-, Perturbation-, Tractability-Index, geometrischer Index oder struktureller Index, bieten für spezifische Problemstellungen und verallgemeinerte Betrachtungen sowohl Vor- als auch Nachteile (vgl. [Meh15]). Im Bezug auf reguläre DAE sind diese Indexkonzepte weitgehend äquivalent. Eine sinnvolle Beschreibung des Verhaltens realer Systeme führt vor allem zu regulären DAE. Folglich ist der Differentiationsindex das wahrscheinlich am weitesten verbreitete Indexkonzept. In dieser Arbeit wird ausschließlich der Differentiationsindex verwendet, im Weiteren vereinfachend als Index bezeichnet.

## 2.2 Inhärente Differentialgleichung

Die Begriffe der inhärenten Differentialgleichung und der restriktiven Mannigfaltigkeit sind zentral in der Analyse differential-algebraischer Gleichungen. Eine reguläre hinreichend oft stetig differenzierbare DAE kann durch ein Ersatzsystem aus der zugeordneten UODE und der restriktiven Mannigfaltigkeit beschrieben werden. Dieses Ersatzsystem kann als eine Grundform für eine weiterführende Analyse und eine Lösung der DAE verwendet werden. Die nachfolgende Herleitung der inhärenten Differentialgleichung und der restriktiven Mannigfaltigkeit entspricht weitgehend der Darstellung in [WA16] und basiert auf [Gea88].

Nachfolgend wird eine reguläre DAE der Form (2.1) mit dem Index  $\mu$  betrachtet. In der Herleitung wird  $\mu \geq 2$  angenommen, jedoch gilt das Ergebnis für beliebige Differentiationsindizes. Nach der Def. 2.4 ist die Jacobi-Matrix  $\partial f/\partial \dot{x}$  für die betrachtete Gleichung singular. Zwei Permutationsmatrizen  $P_{x,0}$  und  $P_{f,0}$  werden bestimmt, so dass

$$P_{x,0} \cdot x = \begin{bmatrix} x_0^T \\ z_0^T \end{bmatrix}^T, \quad (2.4)$$

$$P_{f,0} \cdot f = [f_0^T, g_0^T]^T, \quad (2.5)$$

$$P_{f,0} \cdot \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \cdot P_{x,0}^T = \begin{bmatrix} \partial f_0 / \partial \dot{x}_0 & \partial f_0 / \partial \dot{z}_0 \\ \partial g_0 / \partial \dot{x}_0 & \partial g_0 / \partial \dot{z}_0 \end{bmatrix} \wedge \det \left( \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_0} \right) \neq 0. \quad (2.6)$$

Damit ist die originäre DAE äquivalent zu der Zerlegung

$$f_0(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0, u, t) = 0, \quad (2.7)$$

$$g_0(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0, u, t) = 0. \quad (2.8)$$

Nach dem Theorem über die impliziten Funktionen existiert infolge der Regularität der Jacobi-Matrix  $\partial f_0 / \partial \dot{x}_0$  eine lokale algebraische Lösung

$$\dot{x}_0 = \phi_0(x_0, z_0, \dot{z}_0, u, t) = \arg_{\dot{x}_0} (f_0(x_0, \dot{x}_0, z_0, \dot{z}_0, u, t) = 0). \quad (2.9)$$

Das Ergebnis wird in  $g_0$  eingesetzt und führt zu

$$g_0(x_0, z_0, u, t) = 0. \quad (2.10)$$

Die Funktion  $g_0$  ist nach der Umformung unabhängig von  $\dot{z}_0$ , denn anderenfalls ergäben sich zusätzliche Komponenten in  $x_0$  in der vorangestellten Zerlegung.

Anschließend wird  $g_0$  nach der Zeit differenziert, somit

$$\frac{\partial g_0}{\partial x_0} \cdot \dot{x}_0 + \frac{\partial g_0}{\partial z_0} \cdot \dot{z}_0 + \frac{\partial g_0}{\partial u} \cdot \dot{u} + \frac{\partial g_0}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

Aus der getroffenen Annahme  $\mu \geq 2$  folgt  $\partial g_0 / \partial z_0$  ist singulär, denn anderenfalls existierte nach dem Theorem über die impliziten Funktionen eine lokale algebraische Lösung für  $\dot{z}_0$  und folglich auch für

$$\dot{x} = P_{x,0}^T \cdot [\dot{x}_0^T, \dot{z}_0^T]^T \quad (2.12)$$

bereits nach einmaliger Bildung der zeitlichen Ableitung der Gleichung (2.1) in dem Derivative-Array (2.2).

Die Gleichung  $d g_0 / d t$  wird äquivalent zerlegt. Somit werden zwei Permutationsmatrizen  $P_{x,1}$  und  $P_{f,1}$  ermittelt, so dass

$$P_{x,1} \cdot z_0 = [x_1^T, z_1^T]^T, \quad (2.13)$$

$$P_{f,1} \cdot \frac{d g_0}{d t} = [f_1^T, g_1^T]^T, \quad (2.14)$$

$$P_{f,1} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{z}_0} \frac{d g_0}{d t} \cdot P_{x,1}^T = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial \dot{x}_1 & \partial f_1 / \partial \dot{z}_1 \\ \partial g_1 / \partial \dot{x}_1 & \partial g_1 / \partial \dot{z}_1 \end{bmatrix} \wedge \det \left( \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_1} \right) \neq 0 \quad (2.15)$$

und

$$f_1(x_0, x_1, \dot{x}_0, \dot{x}_1, z_1, \dot{z}_1, u, \dot{u}, t) = 0, \quad (2.16)$$

$$g_1(x_0, x_1, \dot{x}_0, \dot{x}_1, z_1, \dot{z}_1, u, \dot{u}, t) = 0. \quad (2.17)$$

Mit der vorausgesetzten Regularität der Jacobi-Matrix  $\partial f_1/\partial \dot{x}_1$  existiert eine lokale algebraische Lösung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \phi_1(x_0, x_1, \dot{x}_0, z_1, \dot{z}_1, u, \dot{u}, t) = \\ &= \arg_{\dot{x}_1}(f_1(x_0, x_1, \dot{x}_0, \dot{x}_1, z_1, \dot{z}_1, u, \dot{u}, t) = 0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die algebraischen Lösungen für  $\dot{x}_0$  und  $\dot{x}_1$  werden in  $g_1$  eingesetzt mit dem Ergebnis

$$g_1(x_0, x_1, z_1, u, \dot{u}, t) = 0. \quad (2.19)$$

Nach dieser Umformung hängt die Funktion  $g_1$  nicht von  $\dot{z}_1$  ab, denn anderenfalls ergäben sich zusätzliche Komponenten in  $x_1$  in der vorangestellten Zerlegung.

Die Prozedur bestehend aus der Zerlegung und der zeitbezogenen Differentiation wird  $\mu$ -fach wiederholt und ergibt

$$f_m(x_0, \dots, x_m, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_m, z_m, \dot{z}_m, u, \dots, u^{(m)}, t) = 0, \quad (2.20)$$

$$\det\left(\frac{\partial f_m}{\partial \dot{x}_m}\right) \neq 0, \quad (2.21)$$

$$g_m(x_0, \dots, x_m, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_m, z_m, \dot{z}_m, u, \dots, u^{(m)}, t) = 0 \quad (2.22)$$

und

$$\dot{x}_m = \phi_m(x_0, \dots, x_m, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{m-1}, z_m, \dot{z}_m, u, \dots, u^{(m)}, t) \quad (2.23)$$

für alle  $m \in \{0, 1, \dots, \mu\}$ . Ferner folgt aus der Definition des Differentiationsindex

$$\dim(g_\mu) = 0 \wedge \dim(z_\mu) = 0. \quad (2.24)$$

Damit können nach wiederholter Substitution der Gleichungen

$$\dot{x}_m = \phi_m \quad \forall m \in \{\mu, \dots, 2, 1, 0\}, \quad (2.25)$$

$$z_{m-1} = P_{x,m}^T \cdot [x_m^T, z_m^T]^T \quad \forall m \in \{\mu, \dots, 2, 1\} \quad (2.26)$$

in (2.20) bis (2.22) und der Rekonstruktion des Zustandes

$$x = \left( \prod_{m=0}^{\mu} \begin{bmatrix} I_{n_x - \dim(x_m) - \dim(z_m)} & 0 \\ 0 & P_{x,m}^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_\mu \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

die inhärente Differentialgleichung  $\phi$  und die zugeordnete restriktive Mannigfaltigkeit  $g$

$$\phi = \left( \prod_{m=0}^{\mu} \begin{bmatrix} I_{n_x - \dim(x_m) - \dim(z_m)} & 0 \\ 0 & P_{x,m}^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \dots \\ \phi_\mu \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$g = [g_0^T, \dots, g_\mu^T]^T \quad (2.29)$$

als ein äquivalentes Ersatzsystem

$$\dot{x} = \phi(x, u_{(\mu)}, t) \quad (2.30)$$

$$0 = g(x, u_{(\mu)}, t) \quad (2.31)$$

$$u_{(\mu)} = [u, \dot{u}, \dots, u^{(\mu)}] \quad (2.32)$$

für die originäre DAE (2.1) angegeben werden.

Die erforderlichen Permutationsmatrizen  $P_{f,m}$  und  $P_{x,m}$  für die Umformungsschritte  $m \in \{0, 1, \dots, \mu\}$  können aus der Analyse der Jacobi-Matrizen ermittelt werden. Das grundlegende Problem kann in Form eines bipartiten Graphen beschrieben und mit geeigneten Zuordnungsalgorithmen (engl. matching algorithm) gelöst werden. Eine Übersicht zu Matching-Algorithmen für den Einsatz bei der Umformung differential-algebraischer Gleichungen geben [FKF12] und [DKU11].

Reguläre hinreichend stetig differenzierbare DAE mit beliebigem Differenzationsindex können entsprechend der gegebenen Herleitung als ein System aus der inhärenten Differentialgleichung (2.30) und der restriktiven Mannigfaltigkeit (2.31) angegeben werden. Dieses System entspricht einer Differentialgleichung definiert auf einer Mannigfaltigkeit und ist offensichtlich überbestimmt. Die restriktive Mannigfaltigkeit beschreibt eine algebraische Zwangsbedingung, der die Lösung der inhärenten Differentialgleichung zu jedem Zeitpunkt genügen muss.

**Def. 2.6:** Konsistente Werte des Zustandes einer DAE sind die Werte, die der restriktiven Mannigfaltigkeit genügen.

Somit unterscheiden sich die Eigenschaften des Zustandes einer DAE grundlegend von den einer ODE. Unter den Komponenten des Zustandes einer DAE bestehen algebraische Abhängigkeiten. Folglich ist eine unabhängige Vorgabe der Initialwerte dieser Komponenten bei einem Anfangswertproblem für DAE nicht möglich. Diesen Eigenschaften entsprechend werden DAE verallgemeinerte Zustandsraumsysteme (engl. generalized state space systems) oder restringierte Systeme (engl. constrained systems) genannt. Der Zustand einer DAE wird als der verallgemeinerte bzw. generalisierte Zustand (engl. generalized state) bezeichnet.

Die nachgewiesene Abhängigkeit des generalisierten Zustandes von den nach Zeit differenzierten Eingangsgrößen entsprechend (2.30) - (2.32) ist kennzeichnend. In der Modellierung und in der Anwendung steuerungstechnischer Konzepte werden oft in das bestehende mathematische Modell den Eingangsgrößen äquivalente Variablen eingeführt. Ein verbreitetes Beispiel für das Vorgehen ist die Einführung externer Stör- oder Fehlergrößen. Ferner führt eine Veränderung der Deklaration interner Größen zu identischen Konsequenzen. So können in einem Modellkonzept als konstante Parameter deklarierte Größen in

weiterführenden Betrachtungen als zeitabhängige externe Variablen deklariert werden. Derartige Größen in DAE müssen entsprechend dem Differentiationsindex hinreichend stetig differenzierbar definiert sein. Anderenfalls kann die Lösbarkeit der DAE verloren gehen.

Die Lösung des Anfangswertproblems für DAE weist für inkonsistente Initialbedingungen und nicht stetige bzw. nicht stetig differenzierbare Eingangsgrößen impulsartiges Verhalten auf. Die Verläufe des Zustands und des differenzierten Zustandes können sprungartige oder impulsartige Unstetigkeiten enthalten. Die Darstellung der Zustandantwort erfordert in diesen Fällen die Einführung geeigneter Impulsdistributionen. Die Lösung linearer differential-algebraischer Gleichungen kann für die abgeschwächten Forderungen an den Anfangswert und die Eingangsgröße mit der Verwendung der Dirac-Distribution erfolgen (vgl. [Dua10]). Einen Ansatz für eine entsprechende Lösung der nichtlinearen DAE beschreibt [LT12]. Die verfügbaren numerischen Lösungsverfahren für DAE sind für die Bestimmung der Lösung des Anfangswertproblems mit nicht stetigem Verhalten im Allgemeinen nicht geeignet. Auch ist die praktische Bedeutung der Lösung der DAE mit der Verwendung der Distributionen in der Simulation sehr eingeschränkt. Die grundsätzliche Existenz der Lösung bei derartigen Problemen ist allerdings für die Entwicklung modellbasierter Methoden in dieser Arbeit sehr wichtig. In Kap. 3 wird mehrfach Bezug auf die nicht stetige Lösung des Anfangswertproblems für DAE genommen.

## 2.3 Übersicht der Lösungsverfahren

Eine analytische geschlossene Lösung der DAE ist nur in Sonderfällen möglich. Numerische Lösungsverfahren basieren überwiegend auf Integrationsverfahren entwickelt für ODE. Effiziente Lösungsalgorithmen für differential-algebraische Gleichungen sind ein bedeutender Bestandteil aktueller Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet (vgl. [Hög15], [TOBB14]).

Eine direkte, d.h. unmittelbare Anwendung numerischer Integrationsverfahren ohne vorausgehende geeignete Reformulierung des zugrunde liegenden DAE-Systems ist nur in wenigen Fällen möglich. Erforderliche Voraussetzungen dafür sind u.a. ein niedriger Index und/oder eine spezifische Form der DAE (vgl. [DHZ87], [BP89]). Direkte numerische Methoden basierend auf der Taylor-Reihen-Entwicklung (vgl. [NP05]) und der nichtlinearen Optimierung (vgl. [HASPE14]) werden in der Wissenschaft und der industriellen Praxis angewandt.

Eine evidente Lösungsstrategie für DAE kann auf der Basis der vorliegenden inhärenten Differentialgleichung und der zugeordneten restriktiven Mannigfaltigkeit (2.30) - (2.32) entwickelt werden. Ausgehend von einem konsistenten Anfangszustand, der mit der restriktiven Mannigfaltigkeit bestimmt wird, kann die inhärente ODE ohne weitere Berücksichtigung der algebraischen Zwangsbedingung integriert werden. Die nach diesem Vorgehen bestimmte Lösung genügt der originären DAE, wenn der Anfangszustand exakt der Zwangsbedingung

genügt, und wenn die UODE exakt integriert wird. Diese Anforderungen können offensichtlich nur in Sonderfällen erfüllt werden. Die endliche Genauigkeit der numerischen Verfahren führt jedoch zu einem als Drift bekannten Problem (vgl. [CL91]). Die Lösung der UODE genügt folglich der in der restriktiven Mannigfaltigkeit formulierten Zwangsbedingung nicht. Die Abweichung ist nicht prädizierbar und hängt vor allem von der betrachteten DAE und der gewählten numerischen Integrationsmethode ab, folglich ist eine Berücksichtigung der Zwangsbedingung im Verlauf der Integration erforderlich. Die Vermeidung oder die Unterdrückung des Drift-Effekts wird als Stabilisierung bezeichnet. Die Ansätze der Stabilisierung sind konzeptionell verschieden und basieren u.a. auf geeigneten Projektionen der Lösung der UODE auf die restriktive Mannigfaltigkeit, lokalen Zustandstransformationen und auf weiteren Methoden (vgl. [Bau72], [Ost85], [Gea88], [EFLR90]).

Der wahrscheinlich am weitesten verbreitete Lösungsansatz ist eine symbolische Umformung, genannt Indexreduktion, und die anschließende numerische Integration. Die Methoden der Indexreduktion überführen eine DAE mit einem höheren Index durch algebraische Umformungen und Differentiationen in ein äquivalentes System mit einem niedrigeren Index. Somit ist die Bestimmung der UODE und der restriktiven Mannigfaltigkeit ein Indexreduktionsverfahren. Die Behandlung der Zwangsbedingung und damit der Überbestimmtheit ist für die Indexreduktionsmethoden kennzeichnend. Während die Stabilisierungsverfahren die Lösung der originären UODE unter Einhaltung der algebraischen Zwangsbedingung ermöglichen, verfolgt eine Gruppe der Lösungsverfahren einen prinzipiell anderen Ansatz. Die symbolische Umformung der DAE erfolgt schrittweise analog der Transformation für die Bestimmung der UODE (vgl. Abschn. 2.2). Das Ziel der Umformung ist jedoch die Ermittlung eines Ersatzsystems der Form

$$\dot{x}_d = \phi_d(x_d, x_a, u_{(\mu)}, t), \quad (2.33)$$

$$0 = g_d(x_d, x_a, u_{(\mu)}, t) \wedge \det\left(\frac{\partial g_d}{\partial x_a}\right) \neq 0, \quad (2.34)$$

$$u_{(\mu)} = [u, \dot{u}, \dots, u^{(\mu)}] \quad (2.35)$$

mit  $x_d(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x,d}}$ ,  $x_a(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x,a}}$ ,  $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$ ,  $\phi_d : \mathbb{R}^{n_{x,d}} \times \mathbb{R}^{n_{x,a}} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x,d}}$ ,  $g_d : \mathbb{R}^{n_{x,d}} \times \mathbb{R}^{n_{x,a}} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x,a}}$ . Darin sind  $x_d$  der differentielle Zustand,  $x_a$  der algebraische Zustand,  $u$  die Eingangsgröße und  $t$  die Zeit. Die zugeordneten Dimensionen sind entsprechend  $n_{x,d}, n_{x,a}, n_u \in \mathbb{N}$ . Das System (2.33), (2.34) ist eine semiexplizite Index 1 DAE. Aus den Zustandsvariablen  $x_d$  und  $x_a$  kann der Zustand der originären DAE durch die Rücktransformation rekonstruiert werden. Die geforderte Regularität der Jacobi-Matrix  $\partial g_d / \partial x_a$  stellt die Lösbarkeit der algebraischen Zwangsbedingung nach dem algebraischen Zustand sicher. Der Vorteil dieser Formulierung ist die Anwendbarkeit der numerischen Integration für die semiexplizite Index 1 DAE. Die Lösung genügt der in der restriktiven Mannigfaltigkeit formulierten

Zwangsbedingung und damit der originären DAE. Der Drift-Effekt wird durch die spezifische Umformung unterbunden. Die wahrscheinlich bekanntesten Algorithmen für die Indexreduktion sind die Dummy-Derivative-Methode (engl. dummy derivative method, vgl. [MS93]) und GENDA (engl. solution of GEneral Nonlinear Differential-Algebraic equations, vgl. [KMS02]). Die Lösungsverfahren für DAE mit der Indexreduktion sind universell anwendbar und relativ effizient. Die wesentlichen Anforderungen der Methoden sind die Regularität der DAE sowie die hinreichende stetige Differenzierbarkeit der Gleichungen und der Eingangsvariablen. Ein signifikanter Nachteil der Verfahren ist die fehlende Eindeutigkeit der symbolischen Umformung und der Transformation des generalisierten Zustandes in den differentiellen und den algebraischen Teil. Proprietäre und offene Simulationssoftware, wie Dymola <sup>1</sup>, MapleSim <sup>2</sup> und OpenModelica <sup>3</sup> setzen derartige Lösungsalgorithmen ein.

Ein generelles Problem in der Lösung nichtlinearer differential-algebraischer Gleichungen ist deren strukturelle Variabilität. Sowohl der Index, als auch die inhärente ODE und die restriktive Mannigfaltigkeit sind lokal definiert. Folglich können diese grundlegenden Attribute einer betrachteten DAE global innerhalb des Definitionsraumes variieren und damit die strukturellen Eigenschaften der DAE, wie die Regularität, die Stabilität, die Steuerbarkeit und ferner die Beobachtbarkeit. In der Praxis erfolgt daher die Lösung der DAE oft in mehreren geschlossenen Intervallen, innerhalb derer die strukturellen Eigenschaften invariant sind (vgl. [MOE00]).

## 2.4 Beispiele

**Konstruiertes Beispiel für DAE mit Index 3.** Die dargestellten theoretischen Grundlagen können an dem konstruierten nicht-physikalischen Beispiel veranschaulicht werden. Die betrachtete DAE ist

$$f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - \sin(q_1) - u_1 \\ \dot{q}_2 - \exp(q_3) - u_2 \\ \dot{q}_4 - \exp(q_5) - u_3 \\ \dot{q}_5 \cdot \exp(q_5) - \exp(q_6) - u_4 \\ q_7 - q_1 - u_5 \\ q_2 - u_6 \\ q_4 - u_7 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.36)$$

mit der Eingangsgröße  $u \in \mathbb{R}^7$

$$u = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7]^T \quad (2.37)$$

und den Komponenten des generalisierten Zustandes  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  mit  $n_x = 7$

$$x = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7]^T. \quad (2.38)$$

---

<sup>1</sup>Dassault Systèmes

<sup>2</sup>Maplesoft

<sup>3</sup>Open Source Modelica Consortium

Die Herleitung der inhärenten ODE und der restriktiven Mannigfaltigkeit erfolgt in einer Reihe aufeinander folgender algebraischer Umformungen und Differentiationen. Die eingeführten Größen und Funktionen werden in Abschn. 2.2 beschrieben. Die Nummerierung der Schritte beginnt mit 0 und entspricht damit der Anzahl der durchgeführten Differentiationen der Teile der DAE.

*Schritt 0:*

Die DAE wird zerlegt. Die Jacobi-Matrix der originären Gleichung bezüglich des differenzierten Zustandes

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(q_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

ist singulär, daher ist der Index der DAE ungleich null. Die Zerlegung der DAE folgt mit den Permutationsmatrizen

$$P_{x,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

und

$$P_{f,0} = I_7. \quad (2.41)$$

Damit sind

$$x_0 = [x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{0,4}]^T = [q_1, q_2, q_4, q_5]^T, \quad (2.42)$$

$$z_0 = [z_{0,1}, z_{0,2}, z_{0,3}]^T = [q_3, q_6, q_7]^T \quad (2.43)$$

die festgelegten Teile des generalisierten Zustandes und

$$f_0 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - \sin(q_1) - u_1 \\ \dot{q}_2 - \exp(q_3) - u_2 \\ \dot{q}_4 - \exp(q_5) - u_3 \\ \dot{q}_5 \cdot \exp(q_5) - \exp(q_6) - u_4 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.44)$$

$$g_0 = \begin{bmatrix} q_7 - q_1 - u_5 \\ q_2 - u_6 \\ q_4 - u_7 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.45)$$



die Teile der Gleichung in diesem Schritt.

*Schritt 1:*

Ein Teil der DAE wird bezüglich der Zeit differenziert

$$\frac{dg_0}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{q}_7 - \dot{q}_1 - \dot{u}_5 \\ \dot{q}_2 - \dot{u}_6 \\ \dot{q}_4 - \dot{u}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_7 - \sin(q_1) - u_1 - \dot{u}_5 \\ \exp(q_3) + u_2 - \dot{u}_6 \\ \exp(q_5) + u_3 - \dot{u}_7 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.46)$$

und das Ergebnis der vorangehenden Zerlegung  $\dot{x}_0$  wird eingesetzt. Die Jacobi-Matrix des differenzierten Teils der Gleichung bezüglich des noch nicht ermittelten Teils des differenzierten Zustandes

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}_0} \frac{dg_0}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

ist singular. Eine äquivalente Zerlegung wird mit den Permutationsmatrizen

$$P_{x,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

und

$$P_{f,1} = I_3 \quad (2.49)$$

wiederholt. Die festgelegten Teile des generalisierten Zustandes und der Gleichung sind in diesem Schritt

$$x_1 = [x_{1,1}]^T = [q_7]^T, \quad (2.50)$$

$$z_1 = [z_{1,1}, z_{1,2}]^T = [q_3, q_6]^T, \quad (2.51)$$

$$f_1 = [\dot{q}_7 - \sin(q_1) - u_1 - \dot{u}_5] = 0, \quad (2.52)$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} \exp(q_3) + u_2 - \dot{u}_6 \\ \exp(q_5) + u_3 - \dot{u}_7 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.53)$$

*Schritt 2:*

Ein Teil der DAE wird wiederholt bezüglich der Zeit differenziert

$$\frac{dg_1}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \cdot \exp(q_3) + \dot{u}_2 - \dot{u}_6 \\ \dot{q}_5 \cdot \exp(q_5) + \dot{u}_3 - \dot{u}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \cdot \exp(q_3) + \dot{u}_2 - \ddot{u}_6 \\ \exp(q_6) + u_4 + \dot{u}_3 - \ddot{u}_7 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.54)$$

und die Ergebnisse der vorangehenden Zerlegungen  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{x}_1$  werden eingesetzt. Die Jacobi-Matrix des differenzierten Teils der Gleichung bezüglich des noch nicht ermittelten Teils des differenzierten Zustandes

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}_1} \frac{dg_1}{dt} = \begin{bmatrix} \exp(q_3) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

ist erneut singulär. Die Zerlegung wird fortgeführt mit den Permutationsmatrizen

$$P_{x,2} = I_2, \quad (2.56)$$

$$P_{f,2} = I_2 \quad (2.57)$$

sowie den Teilen des generalisierten Zustandes

$$x_2 = [x_{2,1}]^T = [q_3]^T, \quad (2.58)$$

$$z_2 = [z_{2,1}]^T = [q_6]^T \quad (2.59)$$

und den Teilen der Gleichung

$$f_2 = \left[ \dot{q}_3 \cdot \exp(q_3) + \dot{u}_2 - \ddot{u}_6 \right] = 0, \quad (2.60)$$

$$g_2 = \left[ \exp(q_6) + u_4 + \dot{u}_3 - \ddot{u}_7 \right] = 0. \quad (2.61)$$

*Schritt 3:*

Ein Teil der DAE wird in diesem abschließenden Schritt nochmals bezüglich der Zeit differenziert

$$\frac{dg_2}{dt} = \left[ \dot{q}_6 \cdot \exp(q_6) + \dot{u}_4 + \ddot{u}_3 - \dddot{u}_7 \right] = 0 \quad (2.62)$$

und die Ergebnisse aller vorangehenden Zerlegungen  $\dot{x}_0$ ,  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$  werden eingesetzt. Die Jacobi-Matrix des differenzierten Teils der Gleichung bezüglich des verbleibenden, nicht ermittelten Teils des differenzierten Zustandes

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}_2} \frac{dg_2}{dt} = \left[ \exp(q_6) \right] \quad (2.63)$$

ist regulär. Die Permutationsmatrizen

$$P_{x,3} = I_1, \quad (2.64)$$

$$P_{f,3} = I_1, \quad (2.65)$$

die Teile des generalisierten Zustandes

$$x_3 = [x_{3,1}]^T = [q_6]^T, \quad (2.66)$$

$$z_3 = \left[ \right] \quad (2.67)$$

und die Teile der Gleichung

$$f_3 = \left[ \dot{q}_6 \cdot \exp(q_6) + \dot{u}_4 + \ddot{u}_3 - \dddot{u}_7 \right] = 0, \quad (2.68)$$

$$g_3 = \left[ \right] \quad (2.69)$$

vervollständigen die Umformungen.

Die Rekonstruktion des Zustandes erfolgt mit

$$\begin{aligned} x &= \psi \cdot [x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, x_{0,4}, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}]^T = \\ &= \psi \cdot [q_1, q_2, q_4, q_5, q_7, q_3, q_6]^T \end{aligned} \quad (2.70)$$

und

$$\begin{aligned} \psi &= \prod_{m=0}^3 \begin{bmatrix} I_{n_x - \dim(x_m) - \dim(z_m)} & 0 \\ 0 & P_{x,m}^T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.71)$$

entsprechend (2.27).

Die inhärente ODE und die restriktive Mannigfaltigkeit sind damit

$$\dot{x} = \phi(x, u_{(\mu)}, t) = \begin{bmatrix} \sin(q_1) + u_1 \\ \exp(q_3) + u_2 \\ \exp(-q_3) \cdot (-\dot{u}_2 + \ddot{u}_6) \\ \exp(q_5) + u_3 \\ \exp(-q_5) \cdot (\exp(q_6) + u_4) \\ \exp(-q_6) \cdot (-\dot{u}_4 - \dot{u}_3 + \ddot{u}_7) \\ \sin(q_1) + u_1 + \dot{u}_5 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.72)$$

$$0 = g(x, u_{(\mu)}, t) = \begin{bmatrix} q_7 - q_1 - u_5 \\ q_2 - u_6 \\ q_4 - u_7 \\ \exp(q_3) + u_2 - \dot{u}_6 \\ \exp(q_5) + u_3 - \dot{u}_7 \\ \exp(q_6) + u_4 + \dot{u}_3 - \ddot{u}_7 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.73)$$

und die originäre DAE hat den Index 3 übereinstimmend mit der Anzahl der durchgeführten Differentiationen.

**Mathematisches Pendel.** Ein deutlich komplexeres Beispiel ist die Bewegung des mathematischen Pendels in kartesischen Koordinaten. Das Bezugskoordinatensystem wird in Abb. 2.1 eingeführt. Die Komponenten des generalisierten Zustandes  $x \in \mathbb{R}^5$  beschreiben die Position der Masse in dem Koordinatensystem mit  $x_1, x_2$ , die zugeordneten Geschwindigkeit mit  $x_3, x_4$  und die erforderliche Kraft der Bahnführung mit  $x_5$ .

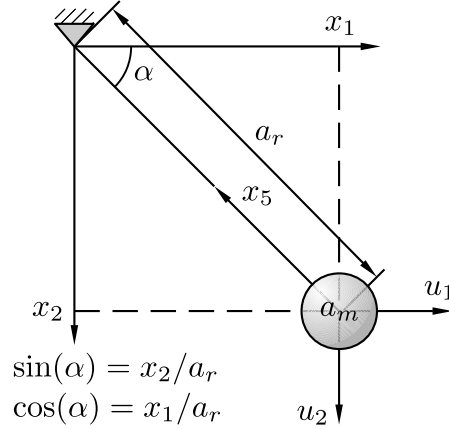


Abbildung 2.1: Mathematisches Pendel

Die zugehörige DAE ist

$$f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 - x_4 \\ \dot{x}_3 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_1 \cdot x_5 - u_1 \\ \dot{x}_4 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_2 \cdot x_5 - u_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - a_r^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.74)$$

mit der Eingangsgröße  $u \in \mathbb{R}^2$

$$u = [u_1, u_2]^T = [0, a_g]^T. \quad (2.75)$$

Darin sind  $a_m$  die Masse,  $a_r$  der Radius der Bewegungsbahn und  $a_g$  die Gravitationsbeschleunigung. Die Anwendung der vorgestellten Umformung (vgl. Abschn. 2.2) führt nach dem dreimaligen Differenzieren auf die inhärente ODE und die zugehörige restriktive Mannigfaltigkeit

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_1 \cdot x_5 + u_1 \\ \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_2 \cdot x_5 + u_2 \\ \frac{a_m}{a_r} \cdot (3 \cdot x_3 \cdot u_1 + 3 \cdot x_4 \cdot u_2 + x_1 \cdot \dot{u}_1 + x_2 \cdot \dot{u}_2) \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

$$0 = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - a_r^2 \\ x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 \\ \frac{-a_r}{a_m} \cdot x_5 + x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3^2 + x_4^2 \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Die erforderlichen Umformungen sind in Anh. A äquivalent dem vorangestellten Beispiel detailliert angegeben. Die DAE hat übereinstimmend mit der Anzahl

der durchgeführten Differentiationen den Index 3. Im Allgemeinen ist die Überführung der inhärenten ODE und der restriktiven Mannigfaltigkeit in eine semiexplizite Index 1 DAE nicht eindeutig. Für das mathematische Pendel sind unter anderem die Definitionen

$$x_{d1} = [x_{d1,1}, x_{d1,2}]^T = [x_1, x_3]^T \quad (2.78)$$

$$x_{a1} = [x_{a1,1}, x_{a1,2}, x_{a1,3}, x_{a1,4}, x_{a1,5}, x_{a1,6}]^T = [x_2, x_4, x_5, \dot{x}_2, \dot{x}_4, \dot{x}_5]^T \quad (2.79)$$

oder

$$x_{d2} = [x_{d2,1}, x_{d2,2}]^T = [x_2, x_4]^T \quad (2.80)$$

$$x_{a2} = [x_{a2,1}, x_{a2,2}, x_{a2,3}, x_{a2,4}, x_{a2,5}, x_{a2,6}]^T = [x_1, x_3, x_5, \dot{x}_1, \dot{x}_3, \dot{x}_5]^T \quad (2.81)$$

des differentiellen  $x_{d\{1,2\}}$  und des algebraischen Zustandes  $x_{a\{1,2\}}$  möglich. Damit werden zwei alternative semiexplizite Index 1 DAE

$$\dot{x}_{d1} = \phi_{d1}(x_{d1}, x_{a1}, u_{(3)}, t) = \begin{bmatrix} x_{d1,2} \\ \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{d1,1} \cdot x_{a1,3} + u_1 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$0 = g_{d1}(x_{d1}, x_{a1}, u_{(3)}, t) =$$

$$\begin{bmatrix} x_{a1,4} - x_{a1,2} \\ x_{a1,5} - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{a1,1} \cdot x_{a1,3} - u_2 \\ x_{a1,6} - \frac{a_m}{a_r} \cdot (3 \cdot x_{d1,2} \cdot u_1 + 3 \cdot x_{a1,2} \cdot u_2 + x_{d1,1} \cdot \dot{u}_1 + x_{a1,1} \cdot \dot{u}_2) \\ x_{d1,1}^2 + x_{a1,1}^2 - a_r^2 \\ x_{d1,1} \cdot x_{d1,2} + x_{a1,1} \cdot x_{a1,2} \\ \frac{-a_r}{a_m} \cdot x_{a1,3} + x_{d1,1} \cdot u_1 + x_{a1,1} \cdot u_2 + x_{d1,2}^2 + x_{a1,2}^2 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

und

$$\dot{x}_{d2} = \phi_{d2}(x_{d2}, x_{a2}, u_{(3)}, t) = \begin{bmatrix} x_{d2,2} \\ \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{d2,1} \cdot x_{a2,3} + u_2 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$0 = g_{d2}(x_{d2}, x_{a2}, u_{(3)}, t) =$$

$$\begin{bmatrix} x_{a2,4} - x_{a2,2} \\ x_{a2,5} - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{a2,1} \cdot x_{a2,3} - u_1 \\ x_{a2,6} - \frac{a_m}{a_r} \cdot (3 \cdot x_{a2,2} \cdot u_1 + 3 \cdot x_{d2,2} \cdot u_2 + x_{a2,1} \cdot \dot{u}_1 + x_{d2,1} \cdot \dot{u}_2) \\ x_{a2,1}^2 + x_{d2,1}^2 - a_r^2 \\ x_{a2,1} \cdot x_{a2,2} + x_{d2,1} \cdot x_{d2,2} \\ \frac{-a_r}{a_m} \cdot x_{a2,3} + x_{a2,1} \cdot u_1 + x_{d2,1} \cdot u_2 + x_{a2,2}^2 + x_{d2,2}^2 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

entsprechend festgelegt. Diese äquivalenten DAE sind für den vollständigen Definitionsraum der Variablen nicht anwendbar, denn die Jacobi-Matrizen  $\partial g_{d1} / \partial x_{a1,1}$  und  $\partial g_{d2} / \partial x_{a2,1}$  sind für  $x_{a1,1} = x_2 = 0$  bzw.  $x_{a2,1} = x_1 = 0$  jeweils

singulär. In allen übrigen Punkten des Definitionsraumes ist die Lösung der beiden Index 1 DAE definiert und identisch mit der Lösung der originären DAE. Folglich werden die angeführten semiexpliziten Systeme zur Ermittlung der Lösung der originären DAE in disjunkten geeignet definierten Teilen des Definitionsraumes eingesetzt. An der Grenze der Teilräume erfolgt ein Wechsel der verwendeten Index 1 DAE. Das Vorgehen wird als dynamische Auswahl des Zustandes (engl. dynamic selection of state, vgl. [MOE00]) bezeichnet.

**CLR-Reihenschaltung.** Das weitverbreitete akademische Beispiel der elektrischen Reihenschaltung mit einem Kondensator, einer Induktivität, einem Widerstand und einer Spannungsquelle kann ebenfalls als eine DAE formuliert werden (vgl. Abb. 2.2).

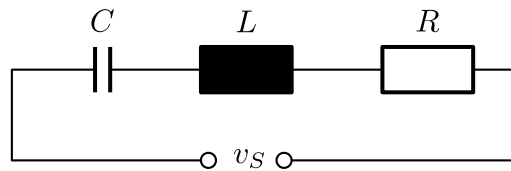


Abbildung 2.2: Elektrische CLR-Reihenschaltung

Die Gleichungen

$$i_C - C \cdot \frac{dv_C}{dt} = 0, \quad (2.86)$$

$$v_L - L \cdot \frac{di_L}{dt} = 0, \quad (2.87)$$

$$v_R - R \cdot i_R = 0, \quad (2.88)$$

$$v_S - u = 0 \quad (2.89)$$

beschreiben das Verhalten der Komponenten und werden oft als konstitutive Gleichungen (engl. constitutive equations) bezeichnet. Darin sind  $v_C$ ,  $v_L$ ,  $v_R$ ,  $v_S$  Spannungen an dem Kondensator, der Induktivität, dem Widerstand und an der Spannungsquelle entsprechend,  $i_C$ ,  $i_L$ ,  $i_R$ ,  $i_S$  die zugeordneten Ströme,  $C$ ,  $L$ ,  $R$  die entsprechenden Parameter,  $u = u(t)$  eine geeignete Eingangsgröße und  $t$  die Zeit. Die Struktur des System wird mit den Konnektivitätsgleichungen (engl. connection equations)

$$i_L - i_C = 0, \quad (2.90)$$

$$i_L - i_R = 0, \quad (2.91)$$

$$i_L - i_s = 0, \quad (2.92)$$

$$v_C + v_L + v_R - v_S = 0 \quad (2.93)$$

beschrieben.

Das Modell des Systems wird mit dem generalisierten Zustandsvektor

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T = [v_C, i_C, v_L, i_L, v_R, i_R, v_S, i_S]^T \quad (2.94)$$

formuliert. Somit ist

$$f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} x_2 - C \cdot \dot{x}_1 \\ x_3 - L \cdot \dot{x}_4 \\ x_5 - R \cdot x_6 \\ x_7 - u \\ x_4 - x_2 \\ x_4 - x_6 \\ x_4 - x_8 \\ x_1 + x_3 + x_5 - x_7 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.95)$$

das implizite Modell des Systems. Die Jacobi-Matrix  $\partial f / \partial \dot{x}$  ist offensichtlich singulär, folglich ist der Differentiationsindex größer null und das Modell ist keine implizite ODE.

Nach einmaliger Differentiation kann die zugeordnete inhärente Differentialgleichung

$$\dot{x} = \phi(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \cdot x_2 \\ \frac{1}{L} \cdot x_3 \\ \dot{u} - \frac{1}{C} \cdot x_2 - \frac{R}{L} \cdot x_3 \\ \frac{1}{L} \cdot x_3 \\ \frac{R}{L} \cdot x_3 \\ \frac{1}{L} \cdot x_3 \\ \dot{u} \\ \frac{1}{L} \cdot x_3 \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

und die restriktive Mannigfaltigkeit

$$0 = g(x, \dot{x}, u, \dot{u}, t) = \begin{bmatrix} x_5 - R \cdot x_6 \\ x_7 - u \\ x_4 - x_2 \\ x_4 - x_6 \\ x_4 - x_8 \\ x_1 + x_3 + x_5 - x_7 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

ermittelt werden. Die originäre DAE hat daher den Index 1.

Eine evidente Form der semiexpliziten Index 1 DAE ist

$$\dot{x}_d = \phi_d(x_d, x_a, u, \dot{u}, t) = \frac{1}{C \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} L \cdot x_{a,1} \\ C \cdot x_{a,2} \end{bmatrix}, \quad (2.98)$$

$$0 = g_d(x_d, x_a, u, \dot{u}, t) = \begin{bmatrix} x_{a,3} - R \cdot x_{a,4} \\ x_{a,5} - u \\ x_{d,2} - x_{a,1} \\ x_{d,2} - x_{a,4} \\ x_{d,2} - x_{a,6} \\ x_{d,1} + x_{a,2} + x_{a,3} - x_{a,5} \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

mit

$$x_d = [x_{d,1}, x_{d,2}]^T = [x_1, x_4]^T, \quad (2.100)$$

$$x_a = [x_{a,1}, x_{a,2}, x_{a,3}, x_{a,4}, x_{a,5}, x_{a,6}]^T = [x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_8]^T. \quad (2.101)$$

Auch für diese einfache DAE existieren verschiedene Formen der zugeordneten semiexpliziten Index 1 DAE.

## 2.5 Zusammenfassung

Der Kapitel fasst wesentliche Eigenschaften differential-algebraischer Gleichungen zusammen. Die wichtigsten Punkte in dem Kapitel sind der Begriff des Index, die Ermittlung der inhärenten ODE und der restriktiven Mannigfaltigkeit sowie einer semiexpliziten Index 1 DAE für eine nichtlineare DAE. Die dargestellten Grundlagen werden in den nachfolgenden Kapiteln aufgegriffen. Das Verständnis der Unterschiede zwischen den gewöhnlichen Differentialgleichungen und den differential-algebraischen Gleichungen ist für die Behandlung zentraler Methoden in dieser Arbeit unverzichtbar.



# Kapitel 3

## Zustandsschätzung

In technischen Anwendungen werden oft Rückschlüsse über das Verhalten und somit über den Zustand eines betrachteten Systems aus aufgenommenen Beobachtungen gezogen. Prinzipiell bedarf jede Beobachtung, d.h. Messung, einer methodischen Interpretation. Diese Interpretation erfordert vor allem umfassende Kenntnisse des eigentlichen Systems und des Messsystems. Die Kenntnisse können durch ein mathematisches Modell ausgedrückt werden. Das Modell ist eine notwendige Voraussetzung für eine Rekonstruktion des Systemzustandes. Allerdings kann das mathematische Modell nur in Sonderfällen vollständig sein. In der Modellierung werden vielfach sowohl äußere Einflüsse, als auch interne Prozesse in der Betrachtung ausgeschlossen. Mögliche Gründe dafür sind: der Einfluss wird als geringfügig bewertet, der Modellierungsaufwand wird als nicht gerechtfertigt eingeschätzt oder ein wesentlicher physikalischer Effekt wird schlicht nicht identifiziert. Folglich beschreibt das mathematische Modell des Systems im Allgemeinen dessen idealisiertes Verhalten. Damit ist die Rekonstruktion des Systemzustandes aus den Messwerten nicht trivial. Die Unterschiede zwischen dem realen System und dem Modell müssen in der Interpretation der Messwerte und in der Rekonstruktion des Systemzustandes berücksichtigt werden. Das Vorgehen wird im Allgemeinen als Zustandsschätzung bezeichnet.

Die Zustandsschätzverfahren werden vielseitig eingesetzt. Naheliegender ist die erwähnte Rekonstruktion des Systemverhaltens aus aufgenommenen Messwerten. In diesem Fall kompensiert die Zustandsschätzung den Einfluss der im mathematischen Modell nicht enthaltenen Prozesse. Die Aufgabenstellung der Fusion der Messwerte ist damit verwandt. Das Ziel dieser Anwendung ist ebenfalls eine Rekonstruktion des Systemzustandes, jedoch unter Berücksichtigung mehrerer redundanter Messgrößen, womit eine Steigerung der Genauigkeit und der Zuverlässigkeit der Rekonstruktion angestrebt wird. Ferner sind die Systemdiagnose, die Überwachung und das Monitoring wichtige Einsatzbereiche der Zustandsschätzung. In diesen Anwendungen wird das rekonstruierte Systemverhalten bezüglich einer Referenz bewertet mit dem Ziel der Detektion und der Identifikation systeminterner Veränderungen.

In diesem Kapitel wird die Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern ausführlich behandelt. Die Grundlagen des Algorithmus werden an dem KF mit linearen expliziten Modellen beschrieben. Darauf aufbauend werden die erforderlichen Erweiterungen des Verfahrens mit nichtlinearen expliziten Modellen diskutiert. Anschließend wird eine Verallgemeinerung des Kalman-Filters mit nichtlinearen differential-algebraischen Gleichungen mit höherem Index dargestellt. Diese Verallgemeinerung ist ein wesentlicher Beitrag dieser Arbeit. Die entwickelte Methodik lässt die Anwendung des Kalman-Filters mit nichtlinearen DAE mit höheren Index ohne spezifische Reformulierung zu. Folglich können objektorientiert entwickelte Modelle in dem Zustandsschätzverfahren direkt verwendet werden. Das Vorgehen bietet offensichtlich prinzipielle Vorteile für die Konzeption, den Entwurf und die Implementierung der Zustandsschätzung auf der Basis objektorientierter Modelle.

### 3.1 Grundlagen und Definitionen

Die Zustandsschätzung rekonstruiert den Systemzustand aus den aufgenommenen Messwerten. Dieser Prozess erfordert vor allem detaillierte Kenntnisse über das betrachtete System und das Messsystem. Das mathematische Modell fasst diese Kenntnisse geeignet zusammen.

Die Zustandsschätzung ist das Vorgehen zur Ermittlung des Zustandes eines realen Systems auf der Basis der aufgenommenen Messwerte sowie der mathematischen Modelle des Systems und des Messsystems. Der mit einem Zustandsschätzverfahren ermittelte Zustandswert wird als Schätzwert des Zustandes oder auch als Zustandsschätzung bezeichnet. Ferner wird entsprechend dem Modell des Messsystems mit dem Schätzwert des Zustandes der Schätzwert der Messgröße ermittelt.

In der Praxis kann das mathematische Modell bei Weitem nicht alle Einflussgrößen des realen Systems berücksichtigen. Somit ist die Differenz zwischen dem Zustand des realen Systems und der Zustandsschätzung stets ungleich null. Die Differenz zwischen dem Zustand des betrachteten realen Systems  $x_s$  und dem Schätzwert des Zustandes  $x$  wird als Schätzfehler des Zustandes oder vereinfachend als Schätzfehler  $e_x$  bezeichnet,

$$e_x = x_s - x. \quad (3.1)$$

Entsprechend wird die Differenz zwischen dem Wert der Messgröße des betrachteten realen Systems  $y_s$  und dem Schätzwert der Messgröße  $y$  als Schätzfehler der Messgröße  $e_y$  bezeichnet,

$$e_y = y_s - y. \quad (3.2)$$

Die Ursachen dieser Differenz können prinzipiell sowohl deterministisch als auch stochastisch sein, jedoch ist das zeitliche und quantitative Verhalten der

Einflussgrößen auf der Grundlage der im Modell enthaltenen Informationen nicht vorhersehbar. Die Zustandsschätzung greift die Ursachen des Schätzfehlers auf, berücksichtigt aber diese nicht physikalisch sondern kumulativ. Die unbekanntenen Einflussgrößen werden als eine stochastische Störung betrachtet. Die häufig angeführten Formen der Störung sind: impulsartige, sprungartige und rauschartige Störung (vgl. [Lun13]). Ferner wirkt sich eine Unsicherheit des Schätzwertes des Anfangszustandes als eine impulsartige Störung des realen Systems aus. Die Zustandsschätzung der Systeme mit impulsartigen und sprungartigen Störgrößen wird konventionell mit den Beobachtern realisiert. Hingegen werden die stochastischen Filter für Systeme mit rauschartigen Störgrößen konzipiert und angewandt.

Die Minimierung des Schätzfehlers kann als die primäre Aufgabe der Zustandsschätzung aufgefasst werden. Diese Zielsetzung ist durch unterschiedliche Ansätze erreichbar. Das Grundprinzip basiert auf der Lösung des Modells parallel zum Betrieb des realen Systems. Die Eingangsgrößen des Systems werden für das Modell übernommen. Eine geeignete Rückführung des Schätzfehlers der Messgröße in das mathematische Modell minimiert den Schätzfehler. Der Zustand des Modells entspricht damit dem Schätzwert des Zustandes des realen Systems. Folglich ist die Zustandsschätzung mit einem Regelungsproblem vergleichbar, darin entsprechen das Modell des System der Regelstrecke, die mit dem Modell ermittelte Messgröße der regelungstechnischen Messgröße und die Messgröße des realen Systems der Führungsgröße (vgl. [Lun13], Dualität). Somit sind die Zustandsschätzverfahren sehr mit den korrespondierenden Regelungsmethoden verwandt.

Das Angleichen der Messgrößen des Modells und des System hat jedoch nicht zwingend das Angleichen der Zustände zufolge. Die notwendige Voraussetzung für diesen Zusammenhang ist die Beobachtbarkeit.

**Def. 3.1:** Ein System heißt beobachtbar, wenn der Systemzustand im Anfangszeitpunkt eines endlichen Zeitintervalls aus dem Verlauf der Eingangsgröße und der Messgröße in diesem Intervall bestimmt werden kann (vgl. [Lun13]).

Die Beobachtbarkeit linearer und nichtlinearer ODE und DAE kann auf Basis entsprechender Kriterien überprüft und ggf. nachgewiesen werden (vgl. [Lun13],[GK94], [HK77],[Dua10],[Ter97], [HSK99]). In der Arbeit wird Beobachtbarkeit für die Anwendung der Zustandsschätzverfahren vorausgesetzt.

## 3.2 Kalman-Filter mit linearen expliziten Modellen

Das Kalman-Filter ist ein stochastisches Zustandsschätzverfahren. Mit Bezug auf seine Struktur wird der Algorithmus auch als optimaler linearer Minimum-Varianz-Schätzer bezeichnet. Die Grundform des KF für explizite lineare zeitdiskrete Modelle (vgl. [Kal60]) wird im Folgenden detailliert diskutiert.

Ein lineares zeitdiskretes Modell wird im Weiteren betrachtet

$$x_j = F_{x,j} \cdot x_i + F_{u,j} \cdot u_j + v_{x,j} \quad (3.3)$$

$$y_j = H_{x,j} \cdot x_j + H_{u,j} \cdot u_j + v_{y,j} \quad (3.4)$$

mit dem Zustand  $x_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , der Eingangsgröße  $u_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_u}$  und der Mess- bzw. Ausgangsgröße  $y_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$ . Die Indizes  $i$  und  $j = i + 1$  kennzeichnen die Größen in den aufeinander folgenden Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_j$ . Das Modell ist durch normalverteiltes weißes Rauschen  $v_{x,\{i,j\}} \sim \mathcal{N}(0, C_{v_x, v_x, \{i,j\}})$  und  $v_{y,\{i,j\}} \sim \mathcal{N}(0, C_{v_y, v_y, \{i,j\}})$  mit den Erwartungswerten 0 und bekannten Kovarianzen gestört. Die Zustandsstörung  $v_{x,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$  und die Messstörung  $v_{y,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$  repräsentieren den Einfluss der nicht modellierten Effekte auf das System und das Messsystem. Die stochastischen Prozesse werden unabhängig von einander und den übrigen Modellgrößen angenommen. Ferner sind  $F_{x,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $F_{u,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ ,  $H_{x,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ ,  $H_{u,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$  die Koeffizientenmatrizen und  $n_x, n_y, n_u \in \mathbb{N}$  die entsprechenden Dimensionen.

Das zeitdiskrete Modell wird mit der linearen Korrekturgleichung des Modellzustandes

$$x_{e,j} = x_j + K_j \cdot (y_{s,j} - y_j) \quad (3.5)$$

erweitert. Diese Operation impliziert die Rückführung des Schätzfehlers der Messgröße in das Modell. Darin sind der Modellzustand nach der Berücksichtigung der Korrektur bzw. der korrigierte Modellzustand  $x_{e,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , die Messgröße des realen Systems  $y_{s,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$  und die Kalman-Verstärkung (engl. Kalman-Gain)  $K_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ . Das Angleichen der Zustände des Modells und des realen Systems erfolgt im Kalman-Filter somit rekursiv. Die Bestimmung der Kalman-Verstärkung gründet auf einem im Weiteren erläuterten Optimierungsproblem, das in jedem diskreten Zeitschritt ausgewertet wird. Der Zustand, die Messgröße des Modells sowie der korrigierte Modellzustand sind infolge der Einführung der stochastischen Zustands- und der Messstörung ebenfalls stochastisch verteilte Größen. Der eigentliche Schätzwert des Zustandes (engl. state estimate) ist der Erwartungswert des korrigierten Modellzustandes  $E(x_{e,j})$ .

Die Erwartungswerte und die Kovarianzen der Modellvariablen werden mit

$$E(x_j) = F_{x,j} \cdot E(x_i) + F_{u,j} \cdot u_j, \quad (3.6)$$

$$E(y_j) = H_{x,j} \cdot E(x_j) + H_{u,j} \cdot u_j \quad (3.7)$$

und

$$\text{Cov}(x_j, x_j) = F_{x,j} \cdot \text{Cov}(x_i, x_i) \cdot F_{x,j}^T + C_{v_x, v_x, j}, \quad (3.8)$$

$$\text{Cov}(y_j, y_j) = H_{x,j} \cdot \text{Cov}(x_j, x_j) \cdot H_{x,j}^T + C_{v_y, v_y, j}, \quad (3.9)$$

$$\text{Cov}(x_j, y_j) = \text{Cov}(x_j, x_j) \cdot H_{x,j}^T \quad (3.10)$$

sowie nach der Berücksichtigung der Korrektur mit

$$\mathbb{E}(x_{e,j}) = \mathbb{E}(x_j) + K_j \cdot (y_{s,j} - \mathbb{E}(y_j)) \quad (3.11)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_{e,j}, x_{e,j}) &= \text{Cov}(x_j, x_j) + K_j \cdot \text{Cov}(y_j, y_j) \cdot K_j^T \\ &\quad - K_j \cdot \text{Cov}(x_j, y_j)^T - \text{Cov}(x_j, y_j) \cdot K_j^T \end{aligned} \quad (3.12)$$

berechnet. Ferner wird konventionell im Kalman-Filter die kompakte Notation mit den dualen Indizes  $\{i|i, j|i, j|j\}$  eingeführt. Die linke Komponente des Index bezeichnet den Zeitpunkt der Modellauswertung für die Bestimmung der indizierten Größe. Die rechte Komponente gibt den Zeitpunkt des verwendeten Messwertes des realen Systems an. Damit können die Indizes auch mit Bezug auf die bedingte Wahrscheinlichkeit interpretiert werden. Die betrachteten Modellgrößen werden folglich mit

$$x_{i|i} := \mathbb{E}(x_{e,i}) \quad C_{x,x,i|i} := \text{Cov}(x_{e,i}, x_{e,i}) \quad (3.13)$$

$$x_{j|i} := \mathbb{E}(x_j) \quad C_{x,x,j|i} := \text{Cov}(x_j, x_j) \quad (3.14)$$

$$x_{j|j} := \mathbb{E}(x_{e,j}) \quad C_{x,x,j|j} := \text{Cov}(x_{e,j}, x_{e,j}) \quad (3.15)$$

$$y_{j|i} := \mathbb{E}(y_j) \quad C_{y,y,j|i} := \text{Cov}(y_j, y_j) \quad (3.16)$$

bezeichnet und deren Beziehungen mit

$$x_{j|i} = F_{x,j} \cdot x_{i|i} + F_{u,j} \cdot u_j \quad (3.17)$$

$$y_{j|i} = H_{x,j} \cdot x_{j|i} + H_{u,j} \cdot u_j \quad (3.18)$$

$$C_{x,x,j|i} = F_{x,j} \cdot C_{x,x,i|i} \cdot F_{x,j}^T + C_{v_x,v_x,j} \quad (3.19)$$

$$C_{y,y,j|i} = H_{x,j} \cdot C_{x,x,j|i} \cdot H_{x,j}^T + C_{v_y,v_y,j} \quad (3.20)$$

$$C_{x,y,j|i} = C_{x,x,j|i} \cdot H_{x,j}^T \quad (3.21)$$

und

$$x_{j|j} = x_{j|i} + K_j \cdot (y_{s,j} - y_{j|i}) \quad (3.22)$$

$$C_{x,x,j|j} = C_{x,x,j|i} + K_j \cdot C_{y,y,j|i} \cdot K_j^T - K_j \cdot C_{x,y,j|i}^T - C_{x,y,j|i} \cdot K_j^T \quad (3.23)$$

in der kompakten Schreibweise angegeben. Unmittelbar verständlich wird damit die konventionelle Gliederung des KF-Algorithmus in zwei aufeinander folgende Teile: die Prädiktion, die Betrachtung der Größen  $x_{j|i}$  und  $y_{j|i}$ , und die Korrektur, die Betrachtung der Größe  $x_{j|j}$ . Die Prädiktion verwendet ausschließlich das mathematische Modell. Hingegen geht in der Korrektur die Messgröße des realen Systems ein. Die Größen in den Teilen des Kalman-Filters werden als prädierte und korrigierte Größen entsprechend bezeichnet.

Die Kalman-Verstärkung wird in dem Zustandsschätzalgorithmus aus dem unrestringierten Optimierungsproblem

$$\min_{K_j} (\mathbb{E}(\|x_{s,j} - x_{e,j}\|_2)) \quad (3.24)$$

ermittelt, darin ist  $x_{s,j}$  der Zustand des betrachteten realen Systems. Äquivalent kann

$$\min_{K_j} \left( \text{trace} \left( C_{x,x,j|j} \right) \right) \quad (3.25)$$

gelöst werden mit der Zielfunktion (eng. objective function) des Optimierungsproblems

$$f_o(K_j) = \text{trace} \left( C_{x,x,j|j} \right) \quad (3.26)$$

übereinstimmend mit der totalen Varianz des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur. Die Kalman-Verstärkung ist folglich

$$K_j = \arg \min_{K_j} \left( \text{trace} \left( C_{x,x,j|j} \right) \right). \quad (3.27)$$

Die Komponenten der eingeführten Matrizen werden zugeordnet mit

$$C_{x,x,j|j} = \left\{ c_{x,x,j|j,m,n} \right\}_{m=1\dots n_x, n=1\dots n_x} \quad (3.28)$$

$$C_{x,x,j|i} = \left\{ c_{x,x,j|i,m,n} \right\}_{m=1\dots n_x, n=1\dots n_x} \quad (3.29)$$

$$C_{y,y,j|i} = \left\{ c_{y,y,j|i,m,n} \right\}_{m=1\dots n_y, n=1\dots n_y} \quad (3.30)$$

$$C_{x,y,j|i} = \left\{ c_{x,y,j|i,m,n} \right\}_{m=1\dots n_x, n=1\dots n_y} \quad (3.31)$$

$$K_j = \left\{ k_{j,m,n} \right\}_{m=1\dots n_x, n=1\dots n_y} \quad (3.32)$$

bezeichnet. Damit kann (3.23) als Komponentengleichung für  $m, n \in \{1, \dots, n_x\}$

$$\begin{aligned} c_{x,x,j|j,m,n} &= c_{x,x,j|i,m,n} \\ &+ \sum_{v=1}^{n_y} k_{j,m,v} \cdot \left( \sum_{w=1}^{n_y} c_{y,y,j|i,v,w} \cdot k_{j,n,w} \right) \\ &- \sum_{v=1}^{n_y} k_{j,m,v} \cdot c_{x,y,j|i,n,v} \\ &- \sum_{w=1}^{n_y} c_{x,y,j|i,m,w} \cdot k_{j,n,w} \end{aligned} \quad (3.33)$$

formuliert werden. Die Zielfunktion des Optimierungsproblems (3.26) kann entsprechend für  $m \in \{1, \dots, n_x\}$  und  $n \in \{1, \dots, n_y\}$  als

$$\begin{aligned} f_o(k_{j,m,n}) &= \sum_{q=1}^{n_x} c_{x,x,j|i,q,q} \\ &+ \sum_{q=1}^{n_x} \left( \sum_{v=1}^{n_y} k_{j,q,v} \cdot \left( \sum_{w=1}^{n_y} c_{y,y,j|i,v,w} \cdot k_{j,q,w} \right) \right) \\ &- 2 \cdot \sum_{q=1}^{n_x} \left( \sum_{v=1}^{n_y} c_{x,y,j|i,q,v} \cdot k_{j,q,v} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

angegeben werden. Folglich sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_o}{\partial k_{j,m,n}} = & \sum_{q=1}^{n_x} \left( \sum_{v=1}^{n_y} \frac{\partial k_{j,q,v}}{\partial k_{j,m,n}} \cdot \left( \sum_{w=1}^{n_y} c_{y,y,j|i,v,w} \cdot k_{j,q,w} \right) \right) \\ & + \sum_{q=1}^{n_x} \left( \sum_{v=1}^{n_y} k_{j,q,v} \cdot \left( \sum_{w=1}^{n_y} c_{y,y,j|i,v,w} \cdot \frac{\partial k_{j,q,w}}{\partial k_{j,m,n}} \right) \right) \\ & - 2 \cdot \sum_{q=1}^{n_x} \left( \sum_{v=1}^{n_y} c_{x,y,j|i,q,v} \cdot \frac{\partial k_{j,q,v}}{\partial k_{j,m,n}} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

die Komponenten des Gradienten der Zielfunktion bezüglich der Komponenten der Kalman-Verstärkung. Die Ausführung der Ableitungsoperationen ergibt

$$\frac{\partial f_o}{\partial k_{j,m,n}} = \sum_{w=1}^{n_y} c_{y,y,j|i,n,w} \cdot k_{j,m,w} + \sum_{v=1}^{n_y} k_{j,m,v} \cdot c_{y,y,j|i,v,n} - 2 \cdot c_{x,y,j|i,m,n}. \quad (3.36)$$

Ferner sind für  $m, p \in \{1, \dots, n_x\}$  und  $n, q \in \{1, \dots, n_y\}$

$$\frac{\partial}{\partial k_{j,p,q}} \frac{\partial f_o}{\partial k_{j,m,n}} = c_{y,y,j|i,n,q} \cdot \frac{\partial k_{j,m,q}}{\partial k_{j,p,q}} + \frac{\partial k_{j,m,q}}{\partial k_{j,p,q}} \cdot c_{y,y,j|i,q,n} \quad (3.37)$$

die Komponenten der Hesse-Matrix. Die Hesse-Matrix ist damit offensichtlich positiv definit und das Extremum der Zielfunktion ist ein Minimum der totalen Varianz des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur. Die Kalman-Verstärkung wird aus der Gleichung

$$\frac{\partial f_o}{\partial k_{j,m,n}} = 0 = 2 \cdot \sum_{v=1}^{n_y} k_{j,m,v} \cdot c_{y,y,j|i,v,n} - 2 \cdot c_{x,y,j|i,m,n} \quad (3.38)$$

bestimmt (vgl. (3.36)). Diese Komponentengleichung wird in die entsprechende Matrixgleichung

$$\frac{\partial f_o}{\partial K_j} = 0 = 2 \cdot K_j \cdot C_{y,y,j|i} - 2 \cdot C_{x,y,j|i} \quad (3.39)$$

überführt. Die Kalman-Verstärkung ist damit

$$K_j = C_{x,y,j|i} \cdot C_{y,y,j|i}^{-1} \quad (3.40)$$

Die Kovarianz des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur (vgl. (3.23)) wird mit der ermittelten Kalman-Verstärkung berechnet und ergibt

$$C_{x,x,j|j} = C_{x,x,j|i} - K_j \cdot C_{y,y,j|i} \cdot K_j^T \quad (3.41)$$

Der Kalman-Filter-Algorithmus für lineare zeitdiskrete Modelle wird hiermit abschließend im Folgenden zusammenhängend wiedergegeben.

**Kalman-Filter Algorithmus  
mit linearen zeitdiskreten expliziten Modellen**

*Modell*

$$x_j = F_{x,j} \cdot x_i + F_{u,j} \cdot u_j + v_{x,j} \quad v_{x,j} \sim \mathcal{N}(0, C_{v_x, v_x, j}) \quad (3.42)$$

$$y_j = H_{x,j} \cdot x_j + H_{u,j} \cdot u_j + v_{y,j} \quad v_{y,j} \sim \mathcal{N}(0, C_{v_y, v_y, j}) \quad (3.43)$$

$$j = i + 1 \quad (3.44)$$

*Prädiktion*

$$x_{j|i} = F_{x,j} \cdot x_{i|i} + F_{u,j} \cdot u_j \quad (3.45)$$

$$y_{j|i} = H_{x,j} \cdot x_{j|i} + H_{u,j} \cdot u_j \quad (3.46)$$

$$C_{x,x,j|i} = F_{x,j} \cdot C_{x,x,i|i} \cdot F_{x,j}^T + C_{v_x, v_x, j} \quad (3.47)$$

$$C_{y,y,j|i} = H_{x,j} \cdot C_{x,x,j|i} \cdot H_{x,j}^T + C_{v_y, v_y, j} \quad (3.48)$$

$$C_{x,y,j|i} = C_{x,x,j|i} \cdot H_{x,j}^T \quad (3.49)$$

*Korrektur*

$$K_j = \arg \min_{K_j} \left( \text{trace} \left( C_{x,x,j|j} \right) \right) = C_{x,y,j|i} \cdot C_{y,y,j|i}^{-1} \quad (3.50)$$

$$x_{j|j} = x_{j|i} + K_j \cdot (y_{s,j} - y_{j|i}) \quad (3.51)$$

$$C_{x,x,j|j} = C_{x,x,j|i} - K_j \cdot C_{y,y,j|i} \cdot K_j^T \quad (3.52)$$

Die Zustandsschätzung mit dem KF erfolgt rekursiv ausgehend von einer initialen Schätzung des Erwartungswertes des Zustandes  $x_{i|i}$  und der Kovarianz  $C_{x,x,i|i}$ . Die Berechnungen in der Prädiktion und der Korrektur werden für jeden aufgenommenen Messwert des realen Systems durchgeführt. Die totale Varianz  $\text{trace} \left( C_{x,x,j|j} \right)$  korrespondiert mit der Güte der Schätzung.

Die vorangestellte Betrachtung des Kalman-Filters gibt die grundlegende Problemstellung und die zugehörige Lösung für das Zustandsschätzverfahren wieder. Kennzeichnend für das KF ist die optimalitätsbasierte Auslegung der Verstärkung der Rückführung des Schätzwertes der Messgröße in der Korrekturgleichung.

### 3.3 Kalman-Filter mit nichtlinearen expliziten Modellen

Das Kalman-Filter auf Basis nichtlinearer expliziter Modelle wird mit den nichtlinearen, zeitdiskreten Gleichungen

$$x_j = f(x_i, u_j, t_j) + v_{x,j} \quad (3.53)$$



$$y_j = h(x_j, u_j, t_j) + v_{y,j} \quad (3.54)$$

betrachtet, mit dem Zustand  $x_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , der Eingangsgröße  $u_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_u}$  und der Mess- bzw. Ausgangsgröße  $y_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$ . Die Indizes  $i$  und  $j = i + 1$  kennzeichnen die Größen in den aufeinander folgenden Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_j$ . Das Modell ist durch normalverteiltes weißes Rauschen  $v_{x,\{i,j\}} \sim \mathcal{N}(0, C_{v_x, v_x, \{i,j\}})$  und  $v_{y,\{i,j\}} \sim \mathcal{N}(0, C_{v_y, v_y, \{i,j\}})$  mit den Erwartungswerten 0 und bekannten Kovarianzen gestört. Die Zustandsstörung  $v_{x,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$  und die Messstörung  $v_{y,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$  repräsentieren den Einfluss der nicht modellierten Effekte auf das System und das Messsystem. Die stochastischen Prozesse werden unabhängig von einander und den übrigen Modellgrößen angenommen. Ferner sind  $f: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  und  $h: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  nichtlineare, bezüglich deren Argumente stetig differenzierbare Funktionen und  $n_x, n_y, n_u \in \mathbb{N}$  die entsprechenden Dimensionen. Das zeitdiskrete Modell kann durch geeignete Diskretisierung der zugehörigen Differentialgleichung ermittelt werden.

Das nichtlineare, zeitdiskrete Modell wird mit der linearen Korrekturgleichung

$$x_{e,j} = x_j + K_j \cdot (y_{s,j} - y_j) \quad (3.55)$$

erweitert, mit dem Modellzustand nach der Berücksichtigung der Korrektur  $x_{e,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$ , der Messgröße des realen Systems  $y_{s,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$  und der Kalman-Verstärkung (engl. Kalman-Gain)  $K_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ .

Der Zustand, die Messgröße des Modells und der korrigierte Modellzustand sind wie im linearen Fall infolge der Einführung der stochastischen Zustands- und der Messstörung ebenfalls stochastisch verteilte Größen. Der Schätzwert des Zustandes ist der Erwartungswert des korrigierten Modellzustandes  $E(x_{e,j})$ . Die Erwartungswerte und Kovarianzen der Modellgrößen können jedoch im nichtlinearen Fall nicht unmittelbar angegeben werden. Im Weiteren werden übereinstimmend zum Algorithmus für lineare Modelle für die kompakte Notation der Erwartungswerte und der Kovarianzen die dualen Indizes  $\{i|i, j|j\}$  eingeführt (vgl. Abschn. 3.2).

Die im Abschn. 3.2 diskutierten Grundlagen der Zustandsschätzung mit linearen Modelle lassen sich auf nichtlineare Modellgleichungen übertragen. Hierfür sollen zunächst die zugrunde liegenden Gleichungen (3.3), (3.4), (3.5) und (3.53), (3.54), (3.55) verglichen werden. Das in Abschn. 3.2) erläuterte Optimierungsproblem für die Bestimmung der Kalman-Verstärkung gründet ausschließlich auf der linearen Korrekturgleichung des Modellzustandes (3.5). Die Gleichung für den nichtlinearen Fall (3.55) ist mit dieser identisch. Folglich erhalten die Gleichungen ((3.50), (3.51), (3.52)) im Algorithmusteil des KF *Korrektur* ihre Gültigkeit auch für andere Modellklassen, wenn die lineare Korrekturgleichung beibehalten bleibt. Die Auswertung der Gleichungen im Algorithmusteil *Korrektur* benötigt allerdings die Erwartungswerte und die Kovarianzen des Zustandes und der Messgröße aus dem Algorithmusteil *Prädiktion*. Diese Ergebnisse werden unter Berücksichtigung der Modelle des Systems und

des Messsystems ermittelt. Somit sind in der Prädiktion wesentliche Erweiterungen für die Anwendung des KF mit nichtlinearen Modellgleichungen erforderlich. Die Berechnung der prädizierten Erwartungswerte und der Kovarianzen des Zustandes und der Messgröße folgt den zwei prinzipiellen Ansätzen:

- Approximation der nichtlinearen Modellgleichungen und
- Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der interessierenden stochastischen Größen.

### 3.3.1 Approximation der Modellgleichungen

Die wahrscheinlich bekannteste Variante des Kalman-Filters für nichtlineare Modelle ist das Extended Kalman-Filter (EKF, vgl. [Jaz70]). Die nichtlinearen Modellgleichungen (3.53), (3.54) werden durch zugehörige Taylor-Reihen des ersten Grades um die vom Kalman-Filter geschätzte Trajektorie approximiert. Die Linearisierung

$$x_j \approx F_{x,j} \cdot (x_i - x_{i|i}) + f(x_{i|i}, u_j, t_j) + v_{x,j}, \quad (3.56)$$

$$y_j \approx H_{x,j} \cdot (x_j - x_{j|i}) + h(x_{j|i}, u_j, t_j) + v_{y,j} \quad (3.57)$$

mit den korrespondierenden Jacobi-Matrizen

$$F_{x,j} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_{i|i}, u_j, t_j}, \quad (3.58)$$

$$H_{x,j} = \left. \frac{\partial h}{\partial x_j} \right|_{x_{j|i}, u_j, t_j} \quad (3.59)$$

führt unmittelbar zu der Approximation der prädizierten Erwartungswerte

$$x_{j|i} \approx f(x_{i|i}, u_j, t_j), \quad (3.60)$$

$$y_{j|i} \approx h(x_{j|i}, u_j, t_j) \quad (3.61)$$

und der Kovarianzen

$$C_{x,x,j|i} \approx F_{x,j} \cdot C_{x,x,i|i} \cdot F_{x,j}^T + C_{v_x,v_x,j}, \quad (3.62)$$

$$C_{y,y,j|i} \approx H_{x,j} \cdot C_{x,x,j|i} \cdot H_{x,j}^T + C_{v_y,v_y,j}, \quad (3.63)$$

$$C_{x,y,j|i} \approx C_{x,x,j|i} \cdot H_{x,j}^T \quad (3.64)$$

des Zustandes und der Messgröße.

Das EKF in der vorgestellten Grundform unterscheidet sich strukturell offenbar wenig von dem Kalman-Filter mit linearen Modellen. Darauf gründet die Popularität des Zustandsschätzverfahrens. Die Linearisierung der Modellgleichungen ist naheliegend, erfordert jedoch das Vorliegen expliziter Modellgleichungen und die Berechnung der benannten Jacobi-Matrizen. Sowohl die symbolische, als auch die numerische Bestimmung der Jacobi-Matrizen kann,

abhängig von den Modellgleichungen und der Modellgröße, zu einem erheblichen Aufwand führen. Ferner ist die Genauigkeit der Approximation der Erwartungswerte und der Kovarianzen durch die Variation der Modellgrößen bestimmt. Die Linearisierung führt im Fall einer hohen Variation des Zustandes und der Messgröße innerhalb der KF-Abtastintervalle zu einer hohen Abweichung der Erwartungswerte und der Kovarianzen von den wahren Werten der Transformation durch die nichtlinearen Modellgleichungen. Dadurch kann die Stabilität des Schätzers beeinträchtigt werden. Eine Verkleinerung der Abtastintervalle erhöht die Genauigkeit jedoch auch den Rechenaufwand wesentlich. Folglich ist EKF ohne weitere Modifikation nur bedingt mit hochgradig nichtlinearen Modellen einsetzbar.

### 3.3.2 Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte, genauer der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, unterscheidet sich grundlegend von der vorausgehend beschriebenen Approximation der Modellgleichungen im EKF. Die erforderlichen Methoden gründen auf den Prinzipien der Monte Carlo Algorithmen (vgl. [MGNR12]) bzw. der Importance Sampling Verfahren (vgl. [Sri02]). Die Berechnung der interessierenden Erwartungswerte und die Kovarianzen erfolgt im Zusammenhang mit dem Kalman-Filter mit den endlichen Mengen der Ausprägungen der zugeordneten stochastischen Größen. Eine verbreitete auf diesem Prinzip basierende Variante des Zustandsschätzverfahrens ist das Partikel-Filter.

Zunächst wird für  $q \in \{1, \dots, Q\} \subset \mathbb{N}$  eine endliche Menge

$$S_{x,i} = \{X_{i,q}\}_{q \in \{1, \dots, Q\}} \subset \mathbb{R}^{n_x} \quad (3.65)$$

der Ausprägungen der Variablen  $x_i$  mit zugehörigen Gewichten

$$W_i = \{w_{i,q}\}_{q \in \{1, \dots, Q\}} \subset \mathbb{R} \quad (3.66)$$

generiert. Damit können die korrespondierenden Mengen

$$S_{x,j} = \{X_{j,q}\}_{q \in \{1, \dots, Q\}} = \{f(X_{i,q}, u_j, t_j)\}_{q \in \{1, \dots, Q\}} \subset \mathbb{R}^{n_x} \quad (3.67)$$

$$S_{y,j} = \{Y_{j,q}\}_{q \in \{1, \dots, Q\}} = \{h(X_{j,q}, u_j, t_j)\}_{q \in \{1, \dots, Q\}} \subset \mathbb{R}^{n_y} \quad (3.68)$$

bestimmt werden. Die Approximation der Erwartungswerte

$$x_{j|i} \approx \frac{1}{Q} \cdot \sum_{q=1}^Q w_{i,q} \cdot X_{j,q} \quad (3.69)$$

$$y_{j|i} \approx \frac{1}{Q} \cdot \sum_{q=1}^Q w_{i,q} \cdot Y_{j,q} \quad (3.70)$$

und der Kovarianzen

$$C_{x,x,j|i} \approx \frac{1}{Q} \cdot \sum_{q=1}^Q w_{i,q} \cdot (X_{j,q} - x_{j|i}) \cdot (X_{j,q} - x_{j|i})^T \quad (3.71)$$

$$C_{y,y,j|i} \approx \frac{1}{Q} \cdot \sum_{q=1}^Q w_{i,q} \cdot (Y_{j,q} - y_{j|i}) \cdot (Y_{j,q} - y_{j|i})^T \quad (3.72)$$

$$C_{x,y,j|i} \approx \frac{1}{Q} \cdot \sum_{q=1}^Q w_{i,q} \cdot (X_{j,q} - x_{j|i}) \cdot (Y_{j,q} - y_{j|i})^T \quad (3.73)$$

folgt der empirischen Schätzung. Die Summen nähern faktisch die erforderlichen Integrale zur Bestimmung der Momente der stochastischen Größen an. Demnach wird diese Art der Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte auch als statistische Integration bezeichnet.

Eine besondere Bedeutung erhält in dem Vorgehen die Auswahl der Menge der Ausprägungen  $S_{x,i}$  und der Gewichte  $W_i$ . Die Idealforderung für die Auswahl der Ausprägungen

$$X_{i,q} \sim p(x_i) \quad (3.74)$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x_i)$  kann in der Anwendung oft nicht erfüllt werden, denn die Dichte der Zufallsgröße  $x_i$  ist nicht oder nicht vollständig bekannt. Mit dieser Begründung wird eine Importance Dichte  $\rho(x_i)$  eingeführt und für die Erzeugung der Menge der Ausprägungen entsprechend

$$X_{i,q} \sim \rho(x_i) \quad (3.75)$$

verwendet. Damit kann die Auswahl der Gewichte für eine bis auf eine Proportionalitätskonstante bekannte Dichte  $p(x_i)$  mit

$$w_{i,q} = \frac{p(X_{i,q})}{\rho(X_{i,q}) \cdot \sum_{q=1}^Q \frac{p(X_{i,q})}{\rho(X_{i,q})}} \quad (3.76)$$

getroffen werden.

Die approximierten Erwartungswerte und die Kovarianzen konvergieren nachweisbar für eine hinreichend große erzeugte Menge der Ausprägungen gegen die wahren Werte der Transformation durch die nichtlinearen Modellgleichungen. Damit kann eine beliebige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit einer beliebigen Genauigkeit approximiert werden. Die einfachste zulässige Wahl der Importance Dichte ist eine Gleichverteilung mit Gewichten  $w_{i,q} = 1/Q$ . Dieser Ansatz verwendet keine Kenntnisse über die zu zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung und ist daher oft besonders ineffizient. Eine geeignete Festlegung der Importance Dichte und die Auswahl der Menge der Ausprägungen haben einen wesentlichen Einfluss auf die Genauigkeit der Näherung. Eine akzeptable Genauigkeit der Approximation erfordert in der Anwendung dennoch oft eine erhebliche Anzahl der Elemente der verwendeten Mengen. Die limitierende Bedingung des Verfahrens ist folglich der zulässige Rechenaufwand.

## 3.4 Kalman-Filter mit DAE

Die Formulierung des Kalman-Filters mit einem Modell in Form einer differential-algebraischen Gleichung erfordert wesentliche Erweiterungen des Algorithmus. In diesem Abschnitt werden im Schwerpunkt die erforderlichen Erweiterungen des KF-Algorithmus für die Anwendung mit nichtlinearen DAE diskutiert. Die Zustands- und Messstörung werden additiv betrachtet. Die primäre Intention ist die Entwicklung geeigneter Formulierungen des KF mit nichtlinearen DAE mit höherem Index mit der Vermeidung spezifischer Modellreformulierungen unter der Verwendung allgemeiner Lösungsverfahren für DAE. Im Einzelnen werden die generalisierte Zustandsstörung, die Bestimmung der Kalman-Verstärkung mit Restriktionen für die Anwendung mit dem Extended Kalman-Filter, die inkonsistente Zustandsschätzung und das Unscented Kalman-Filter behandelt (vgl. [JUDW95], [Jul02]).

Eine reguläre nichtlineare DAE mit höherem Index mit einem zugehörigem Modell des Messsystems

$$f(x, \dot{x}, u, t) = 0 \quad (3.77)$$

$$y = h(x, u, t) \quad (3.78)$$

wird betrachtet, mit dem generalisierten Zustand  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ , der Eingangsgröße  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  und der Messgröße  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ . Darin sind  $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  und  $h : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$  geeignete Funktionen,  $n_x, n_u, n_y \in \mathbb{N}$  die zugeordneten Dimensionen und  $t \in \mathbb{R}$  die Zeit. Der Differentiationsindex der DAE sei  $\mu \in \mathbb{N}$ .

### 3.4.1 Generalisierte Zustandsstörung

Eine grundlegende erforderlich Erweiterung des Modells für die Formulierung des KF ist die Einführung einer geeigneten stochastischen Störung. Die formelle Einführung des zeitkontinuierlichen normalverteilten weißen Rauschens in (3.77) und damit die Erweiterung des Modells zur stochastischen DAE

$$f(x, \dot{x}, u, v_x, t) = 0 \quad (3.79)$$

stellt stark einschränkende Forderungen an die Zustandsstörung  $v_x \in \mathbb{R}^{n_{v,x}}$ . Die Dekomposition der DAE in einen differentiellen und einen algebraischen Teil, d.h. die Indexreduktion und Reformulierung für die numerische Integration als eine semiexplizite Index 1 DAE (vgl. (2.33), (2.34)), kann zum Nachweis der Einschränkungen verwendet werden (vgl. [GS06], [SBR00]).

Die Zustandsstörung wird bei der Dekomposition äquivalent zu der Eingangsgröße behandelt. Somit kann die Zustandsstörung nach der Indexreduktion mehrfach nach der Zeit differenziert in das Modell eingehen. Die zeitliche Ableitung zeitkontinuierlicher stochastischer Prozesse ist problematisch und für das weiße Rauschen unzulässig. Ferner kann die unendliche Varianz des

zeitkontinuierlichen weißen Rauschens zu Einschränkungen führen. Die Voraussetzungen für die Einführung der zeitkontinuierlichen stochastischen Störung in die DAE werden in [GS06] untersucht. Die Einführung der Zustandsstörung in dem Beitrag wird weiter auf den differentiellen Teil des Zustandes beschränkt. Anschaulich kann diese Bedingung u.a. als die Forderung eines konsistenten generalisierten Zustandes als Ergebnis nach jedem infinitesimalen Fortsetzen der Lösung der DAE interpretiert werden. Folglich ist die Implementierung einer generalisierten Zustandsstörung in die originäre DAE direkt nur bedingt möglich.

Ein etwas anderer Ansatz wird in [Sei99] bzw. [SBR00] vorgeschlagen. Darin wird zunächst die zeitkontinuierliche Zustandsstörung mit einem linearen Formfilter in die DAE eingeführt. Die Betrachtung wird auf bzgl. der Störung streng propere DAE beschränkt, d.h. auf Modelle ohne direkten Durchgriff der Störung. Die ermittelte linearisierte inhärente ODE wird für die Formulierung des Kalman-Filters verwendet. Die Konsistenz der Schätzung wird in der Formulierung des Kalman-Filters weder gefordert noch sichergestellt. Die restriktive Mannigfaltigkeit wird anschließend zur Projektion der Schätzung in geeignet gewählten Zeitabständen verwendet. Der offensichtliche Nachteil des Ansatzes ist die Anwendung der Projektion ohne Bezug auf das Zustandsschätzverfahren und damit eine nicht bewertete Korrektur des Ergebnisses der Zustandsschätzung.

Die Einführung der Zustandsstörung in die DAE ist auch in einer weiteren Hinsicht erschwert. Die Dekomposition der DAE in einen differentiellen und einen algebraischen Teil ist im Allgemeinen nur lokal möglich (vgl. Abschn. 2.2). Ferner ist diese Dekomposition nicht eindeutig. Folglich ist die Berücksichtigung und die Parametrierung der Zustandsstörung für die Zustandsschätzung mit dem Kalman-Filter ausschließlich in dem differentiellen Teil der DAE im Allgemeinen problematisch. Konventionell wird der Sonderfall der Existenz einer global gültigen Dekomposition der DAE angenommen. Das Kalman-Filter kann dann für das indexreduzierte semiexplizite Ersatzmodell der DAE mit Störung im differentiellen Zustand formuliert werden.

Die Einführung der Zustandsstörung im algebraischen Teil der DAE ist dennoch im Hinblick auf die Zustandsschätzung sehr wünschenswert (vgl. [MMBR16]). Die Störung bildet kumulativ den Einfluss der nicht modellierten physikalischen Effekte auf das reale System ab und ermöglicht die Einflussnahme des Zustandsschätzverfahrens. Der algebraische Teil der DAE kann mit der identischen Begründung wie der differentielle Teil wesentliche Modellidealisationen enthalten. Folglich ist die Möglichkeit der direkten Beeinflussung des algebraischen Teils der DAE durch den Zustandsschätzalgorithmus erforderlich. Genau diese unmittelbare Möglichkeit wird faktisch mit der Einführung der Zustandsstörung im algebraischen Teil der DAE implementiert.

Die allgemeine Formulierung des Kalman-Filters mit der Implementierung der zeitdiskreten Störung im gesamten generalisierten Zustand ist dennoch basierend auf den in Abschn. 3.2 diskutierten Grundlagen möglich. Mehrere

vom Autor der vorliegenden Arbeit maßgebend entwickelten Ansätze werden in [AW14a] und [AW14b] behandelt. In [Bus16] werden einige dieser Ansätze angewandt und bezüglich der Qualität der Zustandsschätzung und des Rechenaufwandes vergleichend bewertet.

Die DAE (3.77) wird für die weitere Diskussion geeignet (numerisch) auf dem Intervall  $[t_i, t_j]$  gelöst (vgl. Kap. 2). Damit wird das Modell (3.77), (3.78) zeitlich diskretisiert zu

$$x_j = \xi_j(x_i, u_{(\mu)}, t_i, t_j), \quad (3.80)$$

$$0 = g_j(x_j, u_{(\mu),j}, t_j), \quad (3.81)$$

$$y_j = h(x_j, u_j, t_j). \quad (3.82)$$

Darin bezeichnen  $x_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$  den generalisierten Zustand,  $u_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_u}$  die Eingangsgröße,  $u_{(\mu),\{i,j\}} = [u_{\{i,j\}}, \dot{u}_{\{i,j\}}, \dots, u_{\{i,j\}}^{(\mu)}]$  die Eingangsgröße mit den zugehörigen zeitlichen Ableitungen und  $y_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$  die Mess- bzw. Ausgangsgröße. Die Indizes  $i$  und  $j = i + 1$  kennzeichnen die Größen in den aufeinander folgenden Zeitpunkten  $t_i$  und  $t_j$ . Die Eingangsgröße mit den zugehörigen zeitlichen Ableitungen als Funktion der Zeit wird mit  $u_{(\mu)} = [u, \dot{u}, \dots, u^{(\mu)}]$  angegeben. Für eine kompakte Schreibweise wird auf die in der Literatur oft benutzte Kennzeichnung  $u_{(\mu)}(\cdot)$  verzichtet. Die vorausgesetzte Regularität der DAE (3.77) ist notwendig und hinreichend für die Existenz der Zustandsübergangsfunktion  $\xi_{\{i,j\}}$  in (3.80). Die Werte  $x_{\{i,j\}}$  des generalisierten Zustandes genügen, bedingt durch die Konsistenz der Lösung entsprechend der Zustandsübergangsfunktion, der Zwangsbedingung  $g_{\{i,j\}} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u \times \mu + 1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{g,\{i,j\}}}$ , die die restriktive Mannigfaltigkeit beschreibt. Die Anzahl der Komponenten der Gleichung  $n_{g,\{i,j\}} \in \mathbb{N}$  kann für verschiedene Zeitpunkte unterschiedlich sein. Die Indizierung der Funktionen  $\xi_{\{i,j\}}$  und  $g_{\{i,j\}}$  weist auf deren lokale Gültigkeit hin (vgl. Abschn. 2.2).

Das zeitdiskrete Modell wird mit der Zustandsstörung  $v_x \sim \mathcal{N}(0, C_{v_x, v_x})$ , der Messstörung  $v_y \sim \mathcal{N}(0, C_{v_y, v_y})$  und mit der linearen Korrekturgleichung des Modellzustandes erweitert

$$x_j = \xi_j(x_{e,i}, u_{(\mu)}, t_i, t_j) + v_{x,j}, \quad (3.83)$$

$$y_j = h(x_j, u_j, t_j) + v_{y,j}, \quad (3.84)$$

$$x_{e,j} = x_j + K_j \cdot (y_{s,j} - y_j). \quad (3.85)$$

Darin sind  $x_{e,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$  der Modellzustand nach der Berücksichtigung der Korrektur,  $y_{s,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$  die aufgenommenen Messwerte des realen Systems und  $K_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  die zu bestimmende Kalman-Verstärkung. Die zeitdiskreten Störgrößen  $v_{x,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$  und  $v_{y,\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_y}$  sind stochastisch unabhängig von einander und anderen Modellgrößen.

Der generalisierte Zustand und die Messgröße des Modells sind äquivalent dem linearen expliziten Fall infolge der Einführung der stochastischen Zustands- und der Messstörung ebenfalls stochastisch verteilte Größen und somit ist der

Schätzwert des Zustandes der Erwartungswert  $E(x_{e,j})$ . Die Erwartungswerte und Kovarianzen der Modellgrößen können wie im nichtlinearen expliziten Fall nicht unmittelbar angegeben werden. Übereinstimmend zum Algorithmus für lineare Modelle werden für die kompakte Notation der Erwartungswerte und der Kovarianzen die dualen Indizes  $\{i|i, j|j\}$  eingeführt (vgl. Abschn. 3.2).

Die Konsequenz der Implementierung der Zustandsstörung in allen Komponenten des generalisierten Zustandes ist der Verlust der Konsistenz des prädizierten Zustandes

$$0 \neq g_j(x_j, u_{(\mu),j}, t_j). \quad (3.86)$$

Die Feststellung (3.86) kann in Bezug auf die bereits beschriebene Problematik der Einführung der zeitkontinuierlichen stochastischen Störung in die originäre DAE (3.77) betrachtet werden. Ferner erfüllt der korrigierte Zustand  $x_{e,j}$  im Allgemeinen die algebraische Zwangsbedingung ebenfalls nicht

$$0 \neq g_j(x_{e,j}, u_{(\mu),j}, t_j). \quad (3.87)$$

Die Inkonsistenz der Prädiktion und der Korrektur widerspricht dem KF-Algorithmus nicht und ist grundsätzlich in der zeitlich diskretisierten DAE zulässig. Damit werden die Abweichungen im Verhalten des realen Systems und des Modells im algebraischen Teil der DAE ausgedrückt.

Das Modell (3.83) bis (3.85) entspricht weitgehend dem im Abschn. 3.3 diskutierten (3.53) bis (3.55). Die in Abschn. 3.3.1 und Abschn. 3.3.2 beschriebenen Methoden sind anwendbar in der Formulierung des Kalman-Filters mit nichtlinearen DAE. Der prinzipielle Unterschied zu der Formulierung des KF mit expliziten nichtlinearen Modellen ist die Zustandsübergangsfunktion  $\xi_{\{i,j\}}$  in (3.83). Diese Funktion ist lokal definiert, erfordert die Verwendung eines geeigneten Lösungsverfahrens für DAE und unter Umständen eines konsistenten Anfangszustandes. Der letzten Forderung widerspricht zunächst das zur DAE inkonsistente Ergebnis des Modells nach der Berücksichtigung der Korrektur. Die grundsätzliche Anwendbarkeit des zeitdiskreten Modells mit der Störung im generalisierten Zustand muss daher mit der nicht stetigen Lösung des Anfangswertproblems für DAE begründet werden (vgl. Abschn. 2.2). In der zeitdiskreten Form des Modells treten infolge der stochastischen Störungen, der Korrektur des Modellzustandes und der daraus resultierenden Inkonsistenz des generalisierten Zustandes impulsartige oder sprungartige Unstetigkeiten in jedem diskreten Zeitschritt auf. In der zeitkontinuierlichen Form des Modells führt die Inkonsistenz des Modellzustandes zu einem dauerhaften rauschartigen Verhalten. Daher bedarf die zeitkontinuierliche Formulierung des Kalman-Filters mit DAE einer gesonderten Behandlung und wird in dieser Arbeit nicht weiterverfolgt.

Die grundsätzliche theoretische Zulässigkeit des entwickelten zeitdiskreten Modells mit nicht stetigen Zustandsübergängen ist für die Formulierung des KF für die praktische Anwendung jedoch nicht hinreichend. Die Übergangsfunktion



des generalisierten Zustandes kann nur in Sonderfällen analytisch und explizit ermittelt werden. Im Allgemeinen erfordert die Berechnung daher die Anwendung geeigneter numerischer Lösungsverfahren. Die verfügbaren numerischen Lösungsverfahren für DAE setzen vielfach einen konsistenten Anfangswert voraus oder bestimmen diesen ausgehend vom übergebenen inkonsistenten Anfangswert vor bzw. während der ersten Schritte der numerischen Integration (vgl. [BP89], [BHP98]), wodurch faktisch die nicht stetigen Zustandsübergänge sehr grob angenähert werden. Folglich sind spezifische geeignete Ansätze für die Zustandsschätzung mit dem KF mit DAE unter Berücksichtigung des inkonsistenten Zustandswerts nach der Prädiktion und ggf. nach der Korrektur notwendig.

Der KF-Algorithmus enthält in dem Schritt *Prädiktion* die Ermittlung der Erwartungswerte des Zustandes  $x_{j|i}$  und der Messgröße  $y_{j|i}$  sowie deren Kovarianzen (vgl. Abschn. 3.2). Diese Berechnung erfordert für nichtlineare Modellgleichungen bei der Anwendung der in Abschn. 3.3.1 und Abschn. 3.3.2 beschriebenen Approximationsmethoden die Auswertung der Zustandsübergangsfunktion und des Modells des Messsystems. Ferner ist für das Vorgehen mit der Approximation des Modells eine numerische oder analytische Bestimmung der Jacobi-Matrizen der Zustandsübergangsfunktion und der Messgrößenfunktion bezüglich des generalisierten Zustandes notwendig. Die Ermittlung der Jacobi-Matrix der Zustandsübergangsfunktion bezüglich des generalisierten Zustandes erfordert einen geeigneten Ansatz und wird in der Arbeit nicht weiter behandelt. In der Entwicklung der KF-Formulierungen mit DAE wird in dieser Arbeit das Vorliegen eines konsistenten Anfangswertes für die numerische Auswertung der Zustandsübergangsfunktion als zwingend erforderlich vorausgesetzt, hingegen wird die Auswertung der Messgrößenfunktion für beliebige Werte des generalisierten Zustandes  $x_{\{i,j\}} \in \mathbb{R}^{n_x}$  als zulässig angenommen.

### 3.4.2 Kalman-Verstärkung mit Restriktionen

Die Forderung der Konsistenz kann in der Korrektur und in der Berechnung der Kalman-Verstärkung berücksichtigt werden. Das Optimierungsproblem für die Bestimmung der Verstärkung wird unter der Gleichheitsnebenbedingung betrachtet

$$\min_{K_j} (f_o) \quad (3.88)$$

s.t.

$$2 \cdot g_j(x_{j|j}, u_{(\mu),j}, t_j) = 0 \quad (3.89)$$

mit der in Abschn. 3.2 untersuchten Zielfunktion

$$f_o(K_j) = \text{trace}(C_{x,x,j|j}) \quad (3.90)$$

und der Gleichheitsnebenbedingung entsprechend der restriktiven Mannigfaltigkeit (vgl. (3.81)).

Das restringierte Optimierungsproblem kann mit dem Lagrange-Verfahren gelöst werden (vgl. [RHG13]). Die zugehörige Lagrange-Funktion ist

$$L(K_j, \Lambda_j) = f_o + 2 \cdot \Lambda_j^T \cdot g_j(x_{j|j}, u_{(\mu),j}, t_j) \quad (3.91)$$

mit dem Lagrange-Multiplikator  $\Lambda_j \in \mathbb{R}^{n_{g,j} \times 1}$ . Die notwendige Optimalitätsbedingung ist

$$\frac{\partial L}{\partial K_j} = \frac{\partial f_o}{\partial K_j} + 2 \cdot \frac{\partial}{\partial K_j} (\Lambda_j^T \cdot g_j) \Big|_{x_{j|j}, u_{(\mu),j}, t_j} = 0, \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Lambda_j} = 2 \cdot g_j(x_{j|j}, u_{(\mu),j}, t_j) = 0. \quad (3.93)$$

Der Term  $\partial f_o / \partial K_j$  wird in Abschn. 3.2 detailliert untersucht. Die partielle Ableitung  $\partial (\Lambda_j^T \cdot g_j) / \partial K_j \Big|_{x_{j|j}, u_{(\mu),j}, t_j}$  kann mit der Betrachtung der Komponenten der einbezogenen Matrizen bzw. Vektoren bestimmt werden. Hierfür werden

$$K_j = \{k_{j,m,n}\}_{m=1\dots n_x, n=1\dots n_y} \quad (3.94)$$

$$\Lambda_j = \{\lambda_{j,m}\}_{m=1\dots n_{g,j}} \quad (3.95)$$

$$g_j = \{g_{j,m}\}_{m=1\dots n_{g,j}} \quad (3.96)$$

$$x = \{x_m\}_{m=1\dots n_x} \quad (3.97)$$

$$y_{j|i} = \{y_{j|i,m}\}_{m=1\dots n_y} \quad (3.98)$$

$$y_{s,j} = \{y_{s,j,m}\}_{m=1\dots n_y} \quad (3.99)$$

eingeführt. Ferner kürzt  $(j|j)$  die Angabe  $x_{j|j}, u_{(\mu),j}, t_j$  der Stelle der Ableitung ab. Damit gilt für  $m \in \{1, \dots, n_x\}$  und  $n \in \{1, \dots, n_y\}$

$$\frac{\partial}{\partial k_{j,m,n}} \left( \sum_{q=1}^{n_{g,j}} \lambda_{j,q} \cdot g_{j,q} \right) \Big|_{(j|j)} = \quad (3.100)$$

$$\sum_{q=1}^{n_{g,j}} \lambda_{j,q} \cdot \left( \sum_{v=1}^{n_x} \frac{\partial g_{j,q}}{\partial x_v} \Big|_{(j|j)} \cdot \frac{\partial}{\partial k_{j,m,n}} \sum_{w=1}^{n_y} k_{j,v,w} \cdot (y_{s,j,w} - y_{j|i,w}) \right) = \quad (3.101)$$

$$\sum_{q=1}^{n_{g,j}} \lambda_{j,q} \cdot \left( \frac{\partial g_{j,q}}{\partial x_m} \Big|_{(j|j)} \cdot (y_{s,j,n} - y_{j|i,n}) \right). \quad (3.102)$$

Diese Komponentengleichung wird in die entsprechende Matrixgleichung überführt und ergibt

$$\frac{\partial}{\partial K_j} (\Lambda_j^T \cdot g_j) \Big|_{(j|j)} = \left( \Lambda_j^T \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x} \Big|_{(j|j)} \right)^T \cdot (y_{s,j} - y_{j|i})^T. \quad (3.103)$$

Mit (3.39) folgt aus der notwendigen Optimalitätsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial K_j} = 0 = & 2 \cdot K_j \cdot C_{y,y,j|i} - 2 \cdot C_{x,y,j|i} + \\ & 2 \cdot \left( \Lambda_j^\top \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x} \Big|_{(j|j)} \right)^\top \cdot (y_{s,j} - y_{j|i})^\top. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Das nichtlineare Gleichungssystem für die Bestimmung der Kalman-Verstärkung und des Lagrange-Multiplikators ist somit

$$K_j \cdot C_{y,y,j|i} - C_{x,y,j|i} + \left( \Lambda_j^\top \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x} \Big|_{(j|j)} \right)^\top \cdot (y_{s,j} - y_{j|i})^\top = 0, \quad (3.105)$$

$$g_j(x_{j|j}, u_{(\mu),j}, t_j) = 0 \quad (3.106)$$

und enthält  $n_x \cdot n_y + n_{g,j}$  skalare Gleichungen.

Vorausgesetzt die Lösung des Systems (3.105), (3.106) nach  $K_j$  und  $\Lambda_j$  existiert, genügt der unter Beachtung der gewählten Nebenbedingung ermittelte Erwartungswert  $x_{j|j}$  des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur der Zwangsbedingung formuliert in der restriktiven Mannigfaltigkeit der DAE. Die Kovarianz  $C_{x,x,j|j}$  kann äquivalent zu (3.23) berechnet werden. Ferner muss die Erfüllung der hinreichenden Optimalitätsbedingung nach der Lösung gefordert werden. Die Zustandsschätzung mit dem Kalman-Filter mit dem Modell (3.83) bis (3.85) kann unter Anwendung eines geeigneten numerischen Lösungsverfahrens für DAE mit dem konsistenten Anfangswert  $x_{i|i}$  in dem darauf folgenden Schritt *Prädiktion* fortgesetzt werden. Die entwickelte restriktierte optimale Lösung des Kalman-Ansatzes zur Bestimmung der Kalman-Verstärkung ermöglicht mit der Anwendung der Approximation der Modellgleichungen für die Bestimmung der Erwartungswerte und der Kovarianzen (vgl. Abschn. 3.3.1) die Zustandsschätzung mit dem Formalismus des Extended Kalman-Filters auf Basis nichtlinearer differential-algebraischer Gleichungen mit höherem Index. Die Zustandsstörung kann im generalisierten Zustand der DAE implementiert werden. Der Schätzwert des Zustandes ist dennoch konsistent.

**Spezielle Gleichheitsnebenbedingung.** Die weiterführende Analyse des formulierten allgemeinen nichtlinearen Optimierungsproblems mit der allgemeinen nichtlinearen Gleichheitsnebenbedingung führt zu keinem anwendungsrelevanten Ergebnis. Daher wird eine spezielle Klasse der Nebenbedingungen untersucht. Die Gleichung der Form

$$g_j(x_j, u_{(\mu),j}, t_j) = g_{x,j}(u_{(\mu),j}, t_j) \cdot x_j + g_{ut,j}(u_{(\mu),j}, t_j) \quad (3.107)$$

wird betrachtet. Darin sind  $g_j : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u \times \mu+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{g,j}}$ ,  $g_{x,j} : \mathbb{R}^{n_u \times \mu+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{g,j} \times n_x}$  und  $g_{ut,j} : \mathbb{R}^{n_u \times \mu+1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{g,j}}$  geeignete hinreichend differenzierbare Funktionen. Das Gleichungssystem (3.105), (3.106) reduziert sich für die

spezielle Nebenbedingung zu

$$K_j \cdot C_{y,y,j|i} - C_{x,y,j|i} + \left( \Lambda_j^T \cdot g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \right)^T \cdot \left( y_{s,j} - y_{j|i} \right)^T = 0, \quad (3.108)$$

$$g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \cdot x_{j|j} + g_{ut,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) = 0. \quad (3.109)$$

Die Kalman-Verstärkung kann in Abhängigkeit des Lagrange-Multiplikators mit

$$K_j = \left( C_{x,y,j|i} - \left( \Lambda_j^T \cdot g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \right)^T \cdot \left( y_{s,j} - y_{j|i} \right)^T \right) \cdot C_{y,y,j|i}^{-1} \quad (3.110)$$

angegeben werden. Folglich ist der Erwartungswert des Modellzustandes nach der Korrektur

$$x_{j|j} = x_{nr,j|j} + \left( \Lambda_j^T \cdot g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \right)^T \cdot (-\eta_j) \quad (3.111)$$

mit

$$x_{nr,j|j} = x_{j|i} + K_{nr,j} \cdot \left( y_{s,j} - y_{j|i} \right), \quad (3.112)$$

$$K_{nr,j} = C_{x,y,j|i} \cdot C_{y,y,j|i}^{-1}, \quad (3.113)$$

$$\eta_j = \left( y_{s,j} - y_{j|i} \right)^T \cdot C_{y,y,j|i}^{-1} \cdot \left( y_{s,j} - y_{j|i} \right). \quad (3.114)$$

Die eingeführten Hilfsgrößen  $x_{nr,j|j} \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $K_{nr,j} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$  entsprechen den Ergebnissen der nicht restringierten Optimierung in Abschn. 3.2 und  $\eta_j \in \mathbb{R}$  ist ein Skalar.

Die Lösung des Optimierungsproblems erfordert noch die Bestimmung des Lagrange-Multiplikators. Aus der Beziehung (3.93) folgt

$$g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \cdot \left( x_{nr,j|j} + \left( \Lambda_j^T \cdot g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \right)^T \cdot (-\eta_j) \right) + g_{ut,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) = 0. \quad (3.115)$$

Damit kann der Lagrange-Multiplikator mit

$$\Lambda_j = \left( g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \cdot g_{x,j}^T \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \right)^{-1} \cdot g_j \left( x_{nr,j|j}, u_{(\mu),j}, t_j \right) \cdot \frac{1}{\eta_j} \quad (3.116)$$

angegeben werden.

Das Kriterium für die Existenz der restringierten Lösung ist damit für die betrachtete spezielle Nebenbedingung

$$\det \left( g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \cdot g_{x,j}^T \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \right) \neq 0 \wedge \eta_j \neq 0. \quad (3.117)$$

Entsprechend (3.114) ist  $\eta_j$  offensichtlich verschieden von null, wenn der Schätzfehler der Messgröße verschieden vom Null-Vektor ist, denn  $C_{y,y,j|i}^{-1}$  ist positiv definit. Das Produkt der matrixwertigen Funktion  $g_{x,j}$  mit deren Transponierten

ist zumindest positiv semidefinit. Ferner folgt aus den Eigenschaften der Gram-Matrix

$$\begin{aligned} \det \left( g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \cdot g_{x,j}^T \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \right) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \text{rank} \left( g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \right) &= n_{g,j}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Diese Folgerung ist gleichbedeutend mit der Forderung der linearen Unabhängigkeit der Komponenten der Gleichung  $g_{x,j} \left( u_{(\mu),j}, t_j \right) \cdot x_j = 0$ .

Die hinreichende Optimalitätsbedingung ist für das restringierte Optimierungsproblem mit der betrachteten speziellen Nebenbedingung identisch der für das nicht restringierte. Die reduzierte Hesse-Matrix  $\partial^2 L / \partial K_j^2$  stimmt mit der Hesse-Matrix der Zielfunktion  $\partial^2 f_o / \partial K_j^2$  überein und ist positiv definit (vgl. Abschn. 3.2). Folglich ist das bestimmte Extremum der Zielfunktion ein Minimum der totalen Varianz des Zustandes des Modells nach der Berücksichtigung der Korrektur unter der betrachteten Nebenbedingung.

**Einordnung der optimalen Lösung für die Kalman-Verstärkung mit Restriktionen.** Die in Abschn. 3.4.2 entwickelte optimale restringierte Lösung für die Kalman-Verstärkung ist prinzipiell direkt für die Formulierung des Kalman-Filters mit nichtlinearen DAE mit der Approximation der Modellgleichungen anwendbar (vgl. Abschn. 3.3.1). Ein konsistenter Erwartungswert des generalisierten Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur kann in der Prädiktion unmittelbar für die Ermittlung des prädizierten Erwartungswertes des Zustandes in die Zustandsübergangsfunktion (3.80) als Anfangswert eingesetzt werden. Die Ermittlung der Jacobi-Matrix der Zustandsübergangsfunktion bezüglich des generalisierten Zustandes für die Bestimmung der Kovarianzen der Modellgrößen in der Prädiktion erfordert einen geeigneten Ansatz und wird in der Arbeit nicht weiter behandelt.

Die erreichbare Konsistenz des Erwartungswertes des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur ist für die Formulierung des Kalman-Filters mit nichtlinearen DAE mit der Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte irrelevant (vgl. Abschn. 3.3.2). Denn Elemente aus der endlichen Menge der Ausprägungen des generalisierten Zustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur und nicht dessen Erwartungswert werden in die Zustandsübergangsfunktion (3.80) als Anfangswerte für die Berechnung des prädizierten Erwartungswertes und der Kovarianz des Modellzustandes eingesetzt. Diese Mengenelemente werden entsprechend der Approximationsmethodik mit dem Erwartungswert und der Kovarianz des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur erzeugt. Die Erzeugung erfolgt zufallsbasiert mit einer angenommenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Auch damit kann prinzipiell keine algebraische Zwangsbedingung berücksichtigt werden. Die mengenbasierte Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte kann in der Anwendung mit Kalman-Filtern indessen essentielle Vorteile haben.

Ein wesentlicher evidenter Nachteil der optimalen restringierten Lösung für die Kalman-Verstärkung ist jedoch die Berechnungskomplexität. Die Bestimmung der optimalen Kalman-Verstärkung unter der Gleichheitsnebenbedingung erfordert die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems (vgl. (3.105), (3.106)). Die Existenz der Lösung kann für den allgemeinen Fall nicht nachgewiesen werden und hängt von der Nebenbedingung ab. Ferner beschränkt die Berücksichtigung der restriktiven Mannigfaltigkeit der DAE als einer Gleichheitsnebenbedingung in der Berechnung der Kalman-Verstärkung die Einflussnahme des KF. Damit werden die Vorteile der generalisierten Zustandsstörung teilweise revidiert.

### 3.4.3 Inkonsistente Zustandsschätzung

Die Formulierung des Kalman-Filters mit DAE mit der generalisierten Zustandsstörung ermöglicht inkonsistente Modellergebnisse sowohl in der Prädiktion, als auch in der Korrektur, sofern die Ermittlung der optimalen Kalman-Verstärkung ohne Nebenbedingung entsprechend der restriktiven Mannigfaltigkeit erfolgt (vgl. Abschn. 3.4.1). Die inkonsistenten Modellergebnisse bedeuten jedoch nur, dass die optimale Schätzung des Zustandes außerhalb der restriktiven Mannigfaltigkeit liegen kann. Hierbei kann die restriktive Mannigfaltigkeit, wie in Abschn. 3.4.1 ausführlich erläutert, mit der identischen Begründung wie der differentielle Teil des Modells wesentliche Modellidealisationen repräsentiert durch Störgrößen enthalten. Die inkonsistente Zustandsschätzung, d.h. die Schätzung mit inkonsistenten Modellergebnissen in der Prädiktion und Korrektur, ist folglich, erstens, für das reale System sinnvoll und kann, zweitens, die Qualität der Zustandsschätzung erhöhen. Des Weiteren kann die Entwicklung geeigneter Ansätze für die inkonsistente Zustandsschätzung mit den erläuterten Nachteilen der optimalen restringierten Lösung für die Kalman-Verstärkung motiviert werden (vgl. Abschn. 3.4.2). Wichtig für die weiterführenden Abschnitte ist nochmals, dass in dieser Arbeit das Vorliegen eines konsistenten Anfangswertes des Zustandes für die numerische Lösung der DAE, d.h. für die Auswertung der Zustandsübergangsfunktion (3.80), in der Prädiktion als zwingend erforderlich vorausgesetzt wird (vgl. Abschn. 3.4.1).

Die Konsistenz des Anfangswertes des Modellzustandes für die numerische Lösung der DAE kann durch die Anwendung einer geeigneter Funktion auf den vorliegenden inkonsistenten Zustandswert im Ablauf des KF-Algorithmus im Schritt *Prädiktion* unmittelbar vor der Auswertung der Zustandsübergangsfunktion hergestellt werden. Der konsistente Anfangswert wird aus der Betrachtung der restriktiven Mannigfaltigkeit ermittelt. Allerdings ist im Allgemeinen das Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen der restriktiven Mannigfaltigkeit für die Ermittlung des generalisierten Zustandswertes unterbestimmt. Anderenfalls hätte der generalisierte Zustand der DAE keine Komponenten, die aus der inhärenten ODE ermittelt würden, und der differentielle Zustand der DAE hätte keine Komponenten. Folglich entspricht die Überführung des

vorliegenden inkonsistenten Anfangswertes des Zustandes in einen konsistenten im Kontext der Zustandsschätzung weitgehend einer Vorschrift für die Ermittlung des konsistenten Anfangswertes für die numerische Lösung des Anfangswertproblems für DAE (vgl. Kap. 2), kann jedoch weitere spezielle Ziele berücksichtigen. Die Ermittlung der konsistenten Anfangswerte oder die konsistente Initialisierung der DAE ist in jedem diskreten Zeitschritt des Kalman-Filters wiederkehrend erforderlich. Daher wird für den Vorgang in der Arbeit der Begriff „konsistente Reinitialisierung“ oder verkürzt „Reinitialisierung“ verwendet (vgl. [AW14a], [AW14b], [Bus16]). Die Reinitialisierung kann ferner als eine Abbildung der nicht stetigen Zustandsübergänge in der Lösung des Anfangswertproblems für DAE interpretiert werden, denn die numerisch ermittelte Zustandsübergangsfunktion (3.80) setzt einen konsistenten Anfangswert voraus und bildet in der Regel die nicht stetigen Zustandsübergänge nicht ab.

Die konsistente Reinitialisierung verwendet je nach Variante des Kalman-Filters direkt oder indirekt den Erwartungswert und die Kovarianz des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur und verändert diese. Die Optimalität der Schätzung mit dem Kalman-Filter wird mit der Reinitialisierung prinzipiell revidiert. Qualitativ sind die Auswirkungen des Ansatzes mit der Einführung der Approximationsmethoden für die Berechnung der Erwartungswerte und der Kovarianzen mit nichtlinearen Modellgleichungen vergleichbar. Somit ist die Reinitialisierung grundsätzlich gerechtfertigt. Als wesentliche Informationen der Zustandsschätzung liegen nach der Korrektur im KF der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix des Zustandes vor. Damit wird durch die Reinitialisierung offensichtlich der in der Korrektur erzielte Informationsgehalt der Zustandsschätzung vermindert. Folglich kann die Reinitialisierung mit der Zielsetzung der Informationserhaltung konzipiert werden und impliziert damit ggf. eine Optimierung eines zu definierenden Kriteriums unter der Gleichheitsnebenbedingung entsprechend der restriktiven Mannigfaltigkeit der DAE. Die Definition des Ziels der Informationserhaltung und dessen Erreichen beeinflussen indessen maßgebend die Güte der Schätzung. Die Art der erforderlichen Implementierung hängt von der zu formulierenden Variante des nichtlinearen Kalman-Filters ab.

Im Extended Kalman-Filter wird der Erwartungswert des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur als Anfangswert in der Auswertung der Zustandsübergangsfunktion in der Prädiktion verwendet (vgl. Abschn. 3.3.1). Der inkonsistente Erwartungswert des Zustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur ermittelt im Rahmen der inkonsistenten Zustandsschätzung muss folglich durch die Reinitialisierung in einen konsistenten Anfangswert für die Prädiktion übergehen. Der konsistente Anfangswert kann aus der Betrachtung der restriktiven Mannigfaltigkeit ermittelt werden. Ein naheliegendes Optimalitätskriterium für die Informationserhaltung der Zustandsschätzung ist hierbei der Betrag der Differenz des inkonsistenten und des konsistenten Zustandswertes, also deren Abstand. Die Berechnung der Kalman-Verstärkung erfolgt äquivalent zu der Berechnung im nicht restringierten Fall, d.h. im KF mit einem

expliziten Modell. Mit diesem Ansatz kann im Vergleich zu der Bestimmung der Kalman-Verstärkung mit Restriktionen (vgl. Abschn. 3.4.2) der Rechenaufwand deutlich reduziert werden. Die Kovarianzen werden in der Prädiktion mit den linearisierten Modellgleichungen berechnet (vgl. Abschn. 3.3.1). Folglich kann die Kovarianz des Modellzustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur vollständig, d.h. ohne Informationsverlust, in die Prädiktion übernommen werden. Die Ermittlung der Jacobi-Matrix der Zustandsübergangsfunktion bezüglich des generalisierten Zustandes ist nicht trivial und wird in der Arbeit nicht weiter behandelt.

Die Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte mit diversen Varianten des Partikel-Filters verwendet in der Prädiktion endliche unter Annahme einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion generierte Mengen der Ausprägungen des Zustandes korrespondierend zu dessen Erwartungswert und Kovarianz nach der Berücksichtigung der Korrektur. Die Ausprägungen des Modellzustandes werden in die Auswertung der Zustandsübergangsfunktion der DAE als Anfangswerte einbezogen. Folglich muss vor der Auswertung die Konsistenz für jedes Element der Mengen gefordert werden. Die Formulierung eines geeigneten Optimalitätskriteriums und der zugehörigen Nebenbedingung ist für diese Verfahren erheblich komplexer. Ein mögliches Kriterium ist eine geeignet kombinierte Abweichung des empirischen Erwartungswertes und der Kovarianz der Menge der konsistenten Zustandsausprägungen und der inkonsistenten Schätzung des Erwartungswertes und der Kovarianz. Die Gleichheitsnebenbedingung entsprechend der restriktiven Mannigfaltigkeit der betrachteten DAE muss durch jedes Element in der Menge der Ausprägungen des Zustandes erfüllt sein. Der Berechnungsaufwand kann somit für die Approximationsverfahren mit der hohen Anzahl der Elemente erheblich sein. Hierbei wird jedoch die für EKF charakteristische Ermittlung der Jacobi-Matrizen der Modellgleichungen umgangen. Die Approximationsmethoden können demnach nicht pauschal bezüglich des Aufwandes verglichen werden.

Die inkonsistente Zustandsschätzung mit nichtlinearen Kalman-Filtern mit differential-algebraischen Gleichungen zeichnet sich somit durch die notwendige konsistente Reinitialisierung, d.h. durch die Überführung der inkonsistenten Schätzwerte in konsistente Anfangsbedingungen für die Auswertung der Zustandsübergangsfunktion in der Prädiktion, in jedem diskreten Zeitschritt des Kalman-Filters aus. Die Reinitialisierung kann unabhängig von der spezifischen Variante des KF auf folgende erforderliche Punkte zusammengefasst werden:

- Formulierung eines Kriteriums für die Erhaltung der in der Zustandsschätzung gewonnenen Information,
- Formulierung einer Nebenbedingung entsprechend der restriktiven Mannigfaltigkeit für alle in die Auswertung der Zustandsübergangsfunktion einbezogenen Anfangswerte des Zustandes,
- Formulierung eines Verfahrens für die Berechnung der konsistenten Anfangswerte unter Beachtung des Kriteriums und der Nebenbedingung.

Die Art des Berechnungsverfahrens ist nicht auf die Optimierungsmethoden



beschränkt, denn das zu formulierende Kriterium und somit die Optimalitätsbedingung sind nicht eindeutig. Folglich impliziert die Konzeption der Erweiterung heuristische Methoden. Unter anderem können geeignete Verfahren der konsistenten Initialisierung der DAE als eine Grundlage verwendet werden. Die Übertragung der Ansätze ist wegen gemeinsamer Grundlage mit einer Anpassung der Implementierung unter verschiedenen KF-Varianten grundsätzlich möglich.

**Inkonsistente Zustandsschätzung mit UKF.** Das Unscented Kalman-Filter verwendet eine spezifische mengenbasierte Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichte (vgl. [JUDW95], [Jul02]) und ist mit den Ansätzen beschrieben in Abschn. 3.3.2 verwandt. Die besondere Art der Approximation ermöglicht jedoch im UKF die Verwendung der Mengen mit einer relativ geringen Anzahl deterministisch ermittelter Elemente und die gleichzeitige Aufrechterhaltung der Qualität der Schätzung. Das Zustandsschätzverfahren ist ableitungsfrei. Der Berechnungsaufwand des UKF mit expliziten Modellen ist identisch dem des EKF und entspricht der Komplexitätsordnung  $\mathcal{O}(L^3)$  mit  $L$  der Anzahl der Komponenten der zu schätzenden Variablen (vgl. [vdMW01]). Diese Vorteile sind für die inkonsistente Zustandsschätzung mit DAE entscheidend.

Die substantielle namensgebende Unterstruktur des Verfahrens ist die Unscented Transformation (UT). Die UT ist eine Approximationsmethode zur Berechnung der Erwartungswerte und der Kovarianzen der in eine nichtlineare Transformation einbezogenen stochastischen Größen. Die zentrale Annahme der UT ist die hinreichende Genauigkeit der Näherung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer betrachteten Größe durch die Dichtefunktion einer Normalverteilung. Die Varianten der UT unterscheiden sich durch die Anzahl der verwendeten Elemente in den Mengen der Ausprägungen der stochastischen Größen, die Gewichte für die Berechnung der Erwartungswerte und der Kovarianzen, die frei wählbaren Parameter der Approximationsmethode und durch weitere Merkmale. In dem Abschnitt wird das UKF mit der skalierten Unscented Transformation (vgl. [Jul02]) diskutiert.

In der UT werden die Erwartungswerte und die Kovarianzen mit gewichteten Summen berechnet. Für eine normalverteilte Zufallsgröße  $r \in \mathbb{R}^{n_r}$  mit  $n_r \in \mathbb{N}$  kann eine endliche Menge mit  $2 \cdot n_r + 1$  Ausprägungen  $R_k$  mit  $k \in \{1, \dots, 2 \cdot n_r + 1\}$  ermittelt werden, sodass der Erwartungswert und die Kovarianz der Zufallsgröße mit

$$\mathbb{E}(r) = \sum_{k=1}^{2 \cdot n_r + 1} w_{m,k} \cdot R_k, \quad (3.119)$$

$$\text{Cov}(r, r) = \sum_{k=1}^{2 \cdot n_r + 1} w_{c,k} \cdot (R_k - \mathbb{E}(r)) \cdot (R_k - \mathbb{E}(r))^T \quad (3.120)$$

ausgedrückt werden können. Die Gewichte  $w_m, w_c \in \mathbb{R}^{2 \cdot n_r + 1}$  werden mit deren

Komponenten entsprechend

$$w_{m,k} = 1 - \frac{n_r}{\alpha^2 \cdot (n_r + \gamma)} \wedge k = 1 \quad (3.121)$$

$$w_{m,k} = \frac{1}{\alpha^2 \cdot (n_r + \gamma)} \wedge k \neq 1 \quad (3.122)$$

$$w_{c,k} = w_{m,k} + (1 - \alpha^2 + \beta) \wedge k = 1 \quad (3.123)$$

$$w_{c,k} = w_{m,k} \wedge k \neq 1 \quad (3.124)$$

definiert, mit skalaren reellen Parametern

$$0 < \alpha \leq 1, \quad (3.125)$$

$$0 \leq \beta, \quad (3.126)$$

$$0 \leq \gamma. \quad (3.127)$$

Zur kompakten Darstellung werden die Summen durch die Matrixoperationen

$$E(r) = S_r \cdot w_m, \quad (3.128)$$

$$\text{Cov}(r, r) = S_r \cdot W_c \cdot S_r^T \quad (3.129)$$

ersetzt, mit

$$S_r = [R_1, \dots, R_{2 \cdot n_r + 1}] \in \mathbb{R}^{n_r \times 2 \cdot n_r + 1}, \quad (3.130)$$

$$W_c = \psi \cdot \text{diag}(w_c) \cdot \psi^T \in \mathbb{R}^{2 \cdot n_r + 1 \times 2 \cdot n_r + 1}, \quad (3.131)$$

$$\psi = I_{2 \cdot n_r + 1} - w_m \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2 \cdot n_r + 1} \in \mathbb{R}^{2 \cdot n_r + 1 \times 2 \cdot n_r + 1}. \quad (3.132)$$

Die Matrix  $S_r$  wird mit

$$S_r = E(r) \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2 \cdot n_r + 1} + \alpha \cdot \sqrt{n_r + \gamma} \cdot d_r \quad (3.133)$$

und

$$d_r = [0_{n_r \times 1}, -\text{srm}(\text{Cov}(r, r)), \text{srm}(\text{Cov}(r, r))] \quad (3.134)$$

mit der bekannten Kovarianz  $\text{Cov}(r, r)$  und dem Erwartungswert  $E(r)$  ermittelt. Darin ist  $d_r \in \mathbb{R}^{n_r \times 2 \cdot n_r + 1}$  eine Hilfsgröße. Die Funktion  $\text{srm}(\cdot)$  kennzeichnet eine Matrixfaktorisierung der Form

$$\text{srm}(A) \cdot (\text{srm}(A))^T = A \quad (3.135)$$

einer quadratischen reellen Matrix  $A$ . Die positiv definite Kovarianz kann z.B. mit der Anwendung der Cholesky-Zerlegung effizient faktorisiert werden. Die Approximation des Erwartungswertes und der Kovarianz nach einer nichtlinearen Transformation erfolgt entsprechend (3.128), (3.129) mit transformierten Ausprägungen der Zufallsgröße  $r$ .

Die Parameter der UT  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  gehen in die Gewichte ein und beeinflussen die Menge der Ausprägungen. Eine geeignete Festlegung der Parameter ermöglicht eine problemspezifische Anpassung der Eigenschaften des Approximationsverfahrens. Eine detaillierte Diskussion der Parametrierung enthält [Jul02].

Die kompakte Matrixnotation erfordert eine Konvention zur Anwendung der Funktionen auf matrixwertige Argumente, die die vektorwertigen Argumente ersetzen. Die Funktionsauswertung entspricht hier einer sequentiellen Auswertung mit jeder Spalte der matrixwertigen Argumente. Jede vektorwertige Funktion, definiert mit vektorwertigen Argumenten, kann mit korrespondierenden matrixwertigen Argumenten ausgewertet werden. Wenn mehrere vektorwertige Argumente durch matrixwertige ersetzt werden, muss die Spaltenanzahl aller matrixwertigen Argumente gleich sein. Die Zeilenanzahl der matrixwertigen Argumente muss hierbei mit der Komponentenanzahl der vektorwertigen Argumente identisch sein. Das Ergebnis der Auswertung ist eine Matrix mit der Zeilenanzahl identisch der Funktionsdefinition und der Spaltenanzahl gleich der Spaltenanzahl der matrixwertigen Argumente.

Die inkonsistente Zustandsschätzung mit dem UKF mit DAE (3.83) bis (3.85) wird zusammenhängend dargestellt.

### Unscented Kalman-Filter Algorithmus mit nichtlinearen DAE

#### Modell

$$x_{c,i} = \zeta_i \left( x_i, u_{(\mu),i}, t_i \right) \quad (3.136)$$

$$0 = g_i \left( x_{c,i}, u_{(\mu),i}, t_i \right) \quad (3.137)$$

$$x_j = \xi_j \left( x_{c,i}, u_{(\mu)}, t_i, t_j \right) + v_{x,j} \quad v_{x,j} \sim \mathcal{N} \left( 0, C_{v_x, v_x, j} \right) \quad (3.138)$$

$$y_j = h \left( x_j, u_j, t_j \right) + v_{y,j} \quad v_{y,j} \sim \mathcal{N} \left( 0, C_{v_y, v_y, j} \right) \quad (3.139)$$

$$j = i + 1 \quad (3.140)$$

#### Prädiktion

$$d_{x,i|i} = \left[ 0_{n_x \times 1}, -\text{srn} \left( C_{x,x,i|i} \right), \text{srn} \left( C_{x,x,i|i} \right) \right] \quad (3.141)$$

$$S_{x,i|i} = x_{i|i} \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2 \cdot n_x + 1} + \alpha \cdot \sqrt{n_x + \gamma} \cdot d_{x,i|i} \quad (3.142)$$

$$S_{x,c,i|i} = \zeta_i \left( S_{x,i|i}, u_{(\mu),i}, t_i \right) \quad (3.143)$$

$$S_{x,j|i}^* = \xi_j \left( S_{x,c,i|i}, u_{(\mu)}, t_i, t_j \right) \quad (3.144)$$

$$x_{j|i} \approx S_{x,j|i}^* \cdot w_m \quad (3.145)$$

$$C_{x,x,j|i} \approx S_{x,j|i}^* \cdot W_c \cdot S_{x,j|i}^{*T} + C_{v_x, v_x, j} \quad (3.146)$$

$$d_{x,j|i} = \left[ 0_{n_x \times 1}, -\text{srn} \left( C_{x,x,j|i} \right), \text{srn} \left( C_{x,x,j|i} \right) \right] \quad (3.147)$$

$$S_{x,j|i} = x_{j|i} \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2 \cdot n_x + 1} + \alpha \cdot \sqrt{n_x + \gamma} \cdot d_{x,j|i} \quad (3.148)$$

$$S_{y,j|i} = h \left( S_{x,j|i}, u_j, t_j \right) \quad (3.149)$$

$$y_{j|i} \approx S_{y,j|i} \cdot w_m \quad (3.150)$$

$$C_{y,y,j|i} \approx S_{y,j|i} \cdot W_c \cdot S_{y,j|i}^T + C_{v_y,v_y,j} \quad (3.151)$$

$$C_{x,y,j|i} \approx S_{x,j|i} \cdot W_c \cdot S_{y,j|i}^T \quad (3.152)$$

*Korrektur*

$$K_j = \arg \min_{K_j} \left( \text{trace} \left( C_{x,x,j|j} \right) \right) = C_{x,y,j|i} \cdot C_{y,y,j|i}^{-1} \quad (3.153)$$

$$x_{j|j} = x_{j|i} + K_j \cdot \left( y_{s,j} - y_{j|i} \right) \quad (3.154)$$

$$C_{x,x,j|j} \approx C_{x,x,j|i} - K_j \cdot C_{y,y,j|i} \cdot K_j^T \quad (3.155)$$

Gesondert werden der konsistente Zustandswert  $x_{c,i} \in \mathbb{R}^{n_x}$  und die Funktion zu dessen Bestimmung  $\zeta_i : \mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}^{n_u \times \mu}, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$  eingeführt. Die Matrizen  $S_{x,i|i}$ ,  $S_{x,c,i|i}$ ,  $S_{x,j|i}^*$ ,  $S_{x,j|i}$ ,  $S_{x,j|j}$   $\in \mathbb{R}^{n_x \times 2 \cdot n_x + 1}$  und  $S_{y,j|i} \in \mathbb{R}^{n_y \times 2 \cdot n_x + 1}$  fassen in den Spalten die Ausprägungen der zugehörigen stochastischen Größen zusammen. Im Rahmen des UKF-Algorithmus werden diese Ausprägungen als Sigma-Punkte (oder  $\sigma$ -Punkte) bezeichnet. Die verbleibenden nicht erläuterten Größen sind Hilfsgrößen zur übersichtlichen Darstellung des Algorithmus. Die wesentlichen Unterschiede des UKF mit expliziten Modellen und mit DAE sind die Zustandsübergangsfunktion  $\xi_j$  in (3.144), die restriktive Mannigfaltigkeit  $g_i$  in (3.137) sowie die Berechnung deren konsistenten Zustandswerte  $x_{c,i}$  und  $S_{x,c,i|i}$  mit  $\zeta_i$  in (3.136) und (3.143). Die Zustandswerte zusammengefasst in  $S_{x,c,i|i}$ , d.h. die konsistenten Sigma-Punkte des Modellzustandes, gehen in die Auswertung der Zustandsübergangsfunktion  $\xi_j$  als Anfangswerte für die numerische Lösung der DAE ein. Die Funktion  $\zeta_i$  ist die Vorschrift für die konsistente Reinitialisierung. Damit kann die Zustandsübergangsfunktion  $\xi_j$  mit einem allgemeinen numerischen Lösungsverfahren berechnet werden.

Die konsistente Reinitialisierung bedarf hierbei einer besonderer Betrachtung. Die Menge der konsistenten Sigma-Punkte des generalisierten Zustandes  $S_{x,c,i|i}$  soll die stochastischen Eigenschaften der Menge der inkonsistenten Sigma-Punkte  $S_{x,i|i}$  möglichst beibehalten. Ein offensichtlich zu vermeidender Fehler in der Reinitialisierung ist z.B. die Ermittlung einer Menge der konsistenten Sigma-Punkte bestehend aus identischen Elementen. Somit kann die Definition der Funktion  $\zeta_i$  die Qualität der Zustandsschätzung wesentlich beeinflussen.

**Konsistente Reinitialisierung im UKF.** Das Ziel der Reinitialisierung im UKF-Algorithmus ist die Konsistenz der Sigma-Punkte des generalisierten Zustandes in  $S_{x,c,i|i}$  in (3.143). Folglich ist

$$S_{x,c,i|i} = \zeta_i \left( S_{x,i|i}, u_{(\mu),i}, t_i \right) \quad (3.156)$$

s.t.

$$0 = g_i \left( S_{x,c,i|i}, u_{(\mu),i}, t_i \right) \quad (3.157)$$

das zu betrachtende Reinitialisierungsproblem mit der unbekanntem Funktion  $\zeta_i$ . Damit wird die Konsistenz jedes Zustandswertes entsprechend jeder Spalte der Matrix  $S_{x,c,i|i}$  bezüglich der restriktiven Mannigfaltigkeit  $g_i$  vor der Auswertung der Zustandsübergangsfunktion  $\xi_j$  in (3.144) gefordert. Die Gleichheitsnebenbedingung (3.157) wird unabhängig von der spezifischen Implementierung der Reinitialisierung berücksichtigt, während die Funktion  $\zeta_i$  in (3.156) Optimierung oder auch heuristische Methoden zur Informationserhaltung der Zustandsschätzung implizieren kann.

Die vorausgesetzte Regularität der originären DAE ist notwendig und hinreichend für die Existenz zumindest eines konsistenten Zustandswertes zugeordnet zu jedem Zeitpunkt des Lösungsintervalls. Die Existenz einer endlichen Menge konsistenter Zustandswerte zu jedem Zeitpunkt kann im Allgemeinen damit nicht begründet werden. Allerdings kann nach der Indexreduktion und der Dekomposition der DAE für einen nicht verschwindenden differentiellen Zustand, d.h. für einen differentiellen Zustand mit mindestens einer Komponente, zu jedem Zeitpunkt des Lösungsintervalls eine unendliche Menge konsistenter Zustandswerte ermittelt werden. Denn der differentielle Zustand kann ohne Beachtung der restriktiven Mannigfaltigkeit initialisiert werden. Somit ist jeder Wert des generalisierten Zustandes rekombiniert aus dem frei wählbaren differentiellen und dem korrespondierend berechneten algebraischen Zustand konsistent (vgl. Abschn. 2.3). Für jede reguläre DAE mit einem differentiellen Zustand mit mindestens einer Komponente kann die erforderliche Menge der konsistenten generalisierten Zustände unter Berücksichtigung der restriktiven Mannigfaltigkeit zu jedem Zeitpunkt des Lösungsintervalls berechnet werden.

Die angestrebte Güte der inkonsistenten Zustandsschätzung mit dem UKF und der zulässige Aufwand für die Reinitialisierung legen den Rahmen für die Definition des Kriteriums zur Erhaltung der Information der Zustandsschätzung und für das Verfahren zu dessen Berücksichtigung fest. Für die konsistente Reinitialisierung im UKF werden in dieser Arbeit folgende Ansätze vorgeschlagen (vgl. [AW14b]):

- a) Konsistente Reinitialisierung des generalisierten Zustandes,
- b) Robuste konsistente Reinitialisierung des generalisierten Zustandes,
- c) Konsistente Reinitialisierung des differentiellen Zustandes,
- d) Konsistente Reinitialisierung optimaler Zustandspartition.

**zu a) Konsistente Reinitialisierung des generalisierten Zustandes im UKF.** Das beschriebene Reinitialisierungsproblem (3.156), (3.157) kann formal durch das multikriterielle restringierte Optimierungsproblem

$$S_{x,c,i|i} = \arg \min_{S_{x,c,i|i}} \left( \text{abs} \left( \left[ \begin{array}{c} (S_{x,c,i|i} \cdot w_m - x_{i|i})^T \\ S_{x,c,i|i} \cdot W_c \cdot S_{x,c,i|i}^T - C_{x,x,i|i} \end{array} \right] \right) \right) \quad (3.158)$$

s.t.

$$0 = g_i \left( S_{x,c,i|i}, u_{(\mu),i}, t_i \right) \quad (3.159)$$

ersetzt werden. Die darin verwendete Funktion  $\text{abs}(\cdot)$  bezeichnet die komponentenweise Auswertung des Absolutwertes der matrixwertigen Argumente. Das Optimalitätskriterium ist somit der komponentenweise Absolutwert der Abweichung des Erwartungswertes und der Kovarianz berechnet mit den konsistenten Zustandswerten in  $S_{x,c,i|i}$  von den entsprechenden Größen des geschätzten inkonsistenten Zustandes  $x_{i|i}$  und  $C_{x,x,i|i}$ .

Das Optimierungsproblem (3.158) s.t. (3.159) enthält  $(n_x + 1) \cdot n_x$  skalare Kriterien,  $n_{g,i} \cdot (2 \cdot n_x + 1)$  skalare Gleichheitsnebenbedingungen und  $n_x \cdot (2 \cdot n_x + 1)$  skalare Argumente. Die Lösung des Problems existiert grundsätzlich, wie bereits diskutiert. Die geforderten Eigenschaften der Menge der konsistenten Zustände werden durch die optimale Lösung und die Nebenbedingung erreicht.

Die praktische Anwendbarkeit des direkten Ansatzes für die konsistente Reinitialisierung des generalisierten Zustandes im UKF (3.158) s.t. (3.159) schränken die Problemgröße und die Komplexität wesentlich ein. Die Lösung des formulierten Optimierungsproblems ist in jedem diskreten Zeitschritt des KF notwendig. Somit steigt die Berechnungskomplexität der Zustandsschätzung mit der Modellgröße signifikant an. Die Vorteile des Kalman-Filters mit dem Reinitialisierungsansatz müssen für die Zustandsschätzung mit dem spezifischen Modell geprüft werden.

**zu b) Robuste konsistente Reinitialisierung des generalisierten Zustandes im UKF.** Die optimalitätsbasierte konsistente Initialisierung der DAE ausgehend von inkonsistenten generalisierten Zustandswerten ist auch ein relevantes Problem in der Simulationsmethodik. Die Lösungsverfahren für DAE müssen für die numerische Integration eines Modells auf bewusste oder fehlerbedingte Vorgabe eines inkonsistenten Anfangswertes durch den Anwender geeignet reagieren. Das grundlegende Problem ist mit der Reinitialisierung im Kalman-Filter vergleichbar: der zu bestimmende konsistente Anfangswert soll möglichst wenig von dem vorgegebenen inkonsistenten abweichen. Eine übertragbare Methode, die *robuste Initialisierung*, wird in [BAF06] vorgeschlagen. Das Grundkonzept für die Reinitialisierung des generalisierten Zustandes im UKF mit dem Ansatz der robusten Initialisierung, im Weiteren bezeichnet als robuste Reinitialisierung, ist die Reformulierung des Optimierungsproblems (3.158) s.t. (3.159) zum unrestringierten unikriteriellen Problem

$$S_{x,c,i|i} = \arg \min_{S_{x,c,i|i}} \left( \sum_{k=1}^{2 \cdot n_x + 1} g_i \left( X_{c,i|i,k}, u_{(\mu),i}, t_i \right)^T \cdot R_{g,i} \cdot g_i \left( X_{c,i|i,k}, u_{(\mu),i}, t_i \right) \right) \quad (3.160)$$

mit

$$S_{x,c,i|i} = \left[ X_{c,i|i,1}, \dots, X_{c,i|i,2 \cdot n_x + 1} \right] \quad (3.161)$$

Darin ist  $R_{g,i} \in \mathbb{R}^{n_{g,i} \times n_{g,i}}$  eine geeignete problemspezifische Skalierungsmatrix. Das Optimalitätskriterium (3.160) ist die Summe der quadrierten und skalierten Komponenten der Gleichheitsnebenbedingung (3.159) ermittelt für die gesuchten konsistenten Sigma-Punkte des generalisierten Zustandes  $X_{c,i|i,k}$  mit  $k \in \{1, \dots, 2 \cdot n_x + 1\}$  zusammengefasst in  $S_{x,c,i|i}$ . Die Zielfunktion (3.160) hat im Allgemeinen mehrere globale Minima mit dem Funktionswert 0. Jeder korrespondierende Wert des Arguments  $S_{x,c,i|i}$  ist gleichzeitig eine Menge der konsistenten Sigma-Punkte des generalisierten Zustandes, die als Anfangswerte in der Prädiktion im UKF verwendet werden. Der Einsatz eines lokalen Optimierungsalgorithmus mit den inkonsistenten Sigma-Punkten aus  $S_{x,i|i}$  als Startwerte (engl. initial guess) führt zu einer Lösung mit konsistenten Sigma-Punkten in der nahen Umgebung, vorausgesetzt, damit wird ein globales Optimum ermittelt.

Der Berechnungsaufwand für die robuste Reinitialisierung des generalisierten Zustandes im UKF mit (3.160) kann im Vergleich zu dem direkten Ansatz mit (3.158) s.t. (3.159) wesentlich reduziert werden. Die robuste Reinitialisierung enthält nur ein skalares Kriterium, keine Nebenbedingungen und  $n_x \cdot (2 \cdot n_x + 1)$  skalare Argumente. Dennoch ist der Aufwand erheblich. Im Gegensatz zum direkten Ansatz berücksichtigt die robuste Reinitialisierung die stochastischen Eigenschaften der Menge der inkonsistenten Sigma-Punkte des generalisierten Zustandes nicht. Folglich kann das Ergebnis der Optimierung die Qualität der Zustandsschätzung beeinträchtigen. Der offensichtliche wichtige Nachteil des Vorgehens ist die Abhängigkeit des Ergebnisses von dem spezifischen Optimierungsalgorithmus. Die Anwendung der robusten Reinitialisierung im UKF in [Bus16] mit verschiedenen Optimierungsalgorithmen zeigt eine stark variierende Güte der Zustandsschätzung (vgl. Abschn. 3.5, Abb. 3.3).

**zu c) Konsistente Reinitialisierung des differentiellen Zustandes im UKF.** Die numerische Auswertung der Zustandsübergangsfunktion (3.80) kann abhängig von dem angewandten Lösungsverfahren für DAE auf der semiexpliziten Index 1 DAE basieren (vgl. (2.33), (2.34)), das ggf. in einem symbolischen Algorithmusteil ermittelt wird (vgl. Abschn. 2.3). Die semiexplizite Index 1 DAE kann als ein lokales äquivalentes Ersatzmodell im UKF betrachtet werden. Ein naheliegender, darauf aufbauender Ansatz ist die Reinitialisierung der differentiellen Zustände mit den Werten aus  $S_{x,i|i}$  übereinstimmend mit dem Ergebnis der inkonsistenten Zustandsschätzung und die Berechnung der algebraischen Zustände mit der restriktiven Mannigfaltigkeit (vgl. [AW14b]). Die generalisierten Zustandswerte in  $S_{x,c,i|i}$  werden aus diesen differentiellen und algebraischen Zustandswerten rekombiniert und als Anfangswerte für die Prädiktion verwendet. Die Konsistenz der Anfangswerte wird durch das Vorgehen sichergestellt. Die Lösung existiert offensichtlich im Allgemeinen für jede reguläre DAE. Ferner ist die Kovarianz berechnet mit den konsistenten Sigma-Punkten des generalisierten Zustandes  $S_{x,c,i|i} \cdot W_c \cdot S_{x,c,i|i}^T$  nach diesem Ansatz von der Null-Matrix verschieden, wenn der differentielle Zustand der DAE

mindestens eine Komponente hat.

Der Ansatz definiert kein Kriterium für die Informationserhaltung der Zustandsschätzung. Stattdessen werden die Werte der differentiellen Zustände vollständig und unverändert aus der inkonsistenten Zustandsschätzung übernommen. Die Dekomposition des generalisierten Zustandes in einen differentiellen und einen algebraischen ist im Allgemeinen nicht eindeutig und nur lokal möglich. Somit können die physikalische Bedeutung und die Anzahl der Komponenten des differentiellen Zustandes im Verlauf der Zustandsschätzung variieren. Folglich kann dieser heuristische Ansatz hinsichtlich der Informationserhaltung nicht bewertet werden.

Die inkonsistente Schätzung des generalisierten Zustandes mit der konsistenten Reinitialisierung des differentiellen Zustandes unterscheidet sich dennoch grundlegend von der konventionellen Schätzung des differentiellen Zustandes und der ergänzenden Berechnung des algebraischen Zustandes mit der restriktiven Mannigfaltigkeit z.B. nach [MRN09] oder [GS06]. Der inkonsistente Schätzwert wird mit dem Kalman-Filter mit der originären DAE ggf. mit höherem Index berechnet. Dieses Modell ist global gültig. Entsprechend kann das KF unabhängig von der angewandten numerischen Lösung und der unterlagerten Umformung der DAE global parametrisiert werden. Der generalisierte Zustand korrespondiert mit den Variablen in der Modellerstellung und hat demnach seine ursprüngliche Bedeutung. Folglich ist die Parametrisierung der Zustandsstörung im KF mit Bezug auf das reale System möglich. Speziell im UKF für die inkonsistente Zustandsschätzung wird die Anzahl der Sigma-Punkte mit der Anzahl der Komponenten des generalisierten Zustandes global festgelegt. Die inkonsistente Schätzung ermöglicht in der Korrektur die Beeinflussung des gesamten generalisierten Zustandes, demnach ist die zu erwartende Qualität der Schätzung höher (vgl. [AW14b]). Im Gegenteil ist die von der originären abgeleitete semiexplizite Index 1 DAE für die Schätzung des differentiellen Zustandes nur lokal gültig. Die Anzahl der Sigma-Punkte des differentiellen Zustandes im UKF ist für diese Schätzung entsprechend der geringeren Anzahl dessen Komponenten im Allgemeinen deutlich geringer, kann aber im Verlauf der Schätzung variieren. Demnach ist der zu erwartende Rechenaufwand für die Schätzung des differentiellen Zustandes geringer, jedoch muss das KF hierfür ggf. in jedem diskreten Zeitschritt geeignet neu parametrisiert werden.

Die konsistente Reinitialisierung des differentiellen Zustandes in der inkonsistenten Zustandsschätzung mit dem UKF hat gegenüber anderen Reinitialisierungsansätzen einen wesentlichen Vorteil: den geringen Rechenaufwand. Die Indexreduktion und die Umformung der DAE in die zugehörige semiexplizite Index 1 DAE sind oft Bestandteile der allgemein verfügbaren Lösungsverfahren für DAE. Die Bestimmung der konsistenten Anfangsbedingungen basiert hierbei entsprechend auf dieser Umformung und kann verschieden implementiert werden (vgl. [BHP98]). Die Übernahme des differentiellen Zustandes und die Berechnung des algebraischen Zustandes mit der restriktiven Mannigfaltigkeit ist hierbei die einfachste Möglichkeit. Die konsistente Reinitialisierung des diffe-



rentiellen Zustandes im UKF kann somit mit den meisten allgemein verfügbaren Lösungsverfahren für DAE ohne etwaige Erweiterungen erfolgen.

Der offensichtliche Nachteil der konsistenten Reinitialisierung des differentiellen Zustandes ist der fehlende Bezug auf den Erwartungswert und die Kovarianz des Zustandes nach der Berücksichtigung der Korrektur in der inkonsistenten Zustandsschätzung. Die Festlegung eines differentiellen und eines algebraischen Zustandes erfolgt innerhalb des angewandten Lösungsverfahrens für DAE. Diese Festlegung ist im Allgemeinen weder eindeutig noch vollständig beeinflussbar, folglich werden signifikante Teile des Ergebnisses der Zustandsschätzung unbegründet beibehalten bzw. verworfen, basierend ausschließlich auf dem spezifischen Lösungsverfahren. Dieser Nachteil des Ansatzes kann nur durch eine geeignete Erweiterung mit der Betrachtung eines Kriteriums für die Informationserhaltung und damit einhergehend nur durch die Steigerung der Komplexität beseitigt werden.

**zu d) Konsistente Reinitialisierung optimaler Zustandspartition im UKF.** Die Reinitialisierung der optimalen Zustandspartition (engl. optimal substate) erweitert den Ansatz der Reinitialisierung des differentiellen Zustandes mit einer Optimalitätsbedingung (vgl. [AW14b]). Die Grundlage ist die Betrachtung der restriktiven Mannigfaltigkeit der DAE. Das Gleichungssystem (3.157) wird erweitert um einen Satz impliziter Initialisierungsgleichungen entsprechend der inkonsistenten Schätzung

$$\Psi_i \left( S_{x,c,i|i}, u_{(\mu),i}, t_i, S_{x,i|i}, P_i \right) = \begin{bmatrix} g_i \left( S_{x,c,i|i}, u_{(\mu),i}, t_i \right) \\ P_i \cdot \left( S_{x,c,i|i} - S_{x,i|i} \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.162)$$

mit der Partition  $P_i \in \mathbb{R}^{n_x - n_{g,i} \times n_x}$  der Permutationsmatrix  $\begin{bmatrix} P_i^T & Q_i^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . Die vorausgesetzte Regularität der DAE und der nicht verschwindende differentielle Zustand sind in Übereinstimmung mit der vorangestellten Diskussion hinreichend für die Existenz zumindest einer Permutationsmatrix  $\begin{bmatrix} P_i^T & Q_i^T \end{bmatrix}^T$ , mit der die erweiterte Zwangsbedingung (3.162) nach der Menge der konsistenten Sigma-Punkte zusammengefasst in

$$S_{x,c,i|i} = \left[ X_{c,i|i,1}, \dots, X_{c,i|i,2 \cdot n_x + 1} \right] \quad (3.163)$$

gelöst werden kann. Nach dem Theorem über implizite Funktionen gilt für die derart geeignet gewählte Matrix  $P_i$

$$\det \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial X_{c,i|i,k}} \right) \neq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, 2 \cdot n_x + 1\}. \quad (3.164)$$

Eine Partition des generalisierten Zustandes kann somit mit der restriktiven Mannigfaltigkeit der DAE und der Vorgabe der komplementären Partition berechnet werden. In der Reinitialisierung des differentiellen Zustandes wird der

differentielle Zustand vorgegeben. Dieser kann als eine durch das Lösungsverfahren für DAE bestimmte Partition des generalisierten Zustandes interpretiert werden.

Die Festlegung der Zustandspartition durch die Wahl der Permutationsmatrix  $[P_i^T, Q_i^T]^T$  ist jedoch unter den formulierten Forderungen nicht eindeutig. Die Existenz einer einzigen Möglichkeit für die Lösung des Gleichungssystems (3.162) ist unwahrscheinlich und in der praktischen Anwendung ein Sonderfall. Folglich kann die Matrix  $P_i$  mit der Betrachtung eines Optimalitätskriteriums bestimmt werden. Die zu minimierende Zielfunktion ist die bereits erläuterte multikriterielle Funktion (3.158)

$$\Phi_i(S_{x,c,i|i}, S_{x,i|i}) = \text{abs} \left( \begin{bmatrix} (S_{x,c,i|i} \cdot w_m - x_{i|i})^T \\ S_{x,c,i|i} \cdot W_c \cdot S_{x,c,i|i}^T - C_{x,x,i|i} \end{bmatrix} \right). \quad (3.165)$$

Das vollständige Optimierungsproblem ist demnach mit

$$\{S_{x,c,i|i}, P_i\} = \arg \min_{\{S_{x,c,i|i}, P_i\}} (\Phi_i(S_{x,c,i|i}, S_{x,i|i})) \quad (3.166)$$

s. t.

$$0 = \Psi_i(S_{x,c,i|i}, u_{(\mu),i}, t_i, S_{x,i|i}, P_i) \quad (3.167)$$

gegeben. Darin wird die Matrix  $S_{x,c,i|i}$  aus der Gleichheitsnebenbedingung ermittelt und die Optimalität durch die Variation der Permutationsmatrix erreicht. Somit ist das eigentliche Optimierungsproblem wertdiskret. Die Anzahl der möglichen nicht äquivalenten Permutationsmatrizen ist endlich, folglich kann die optimale Lösung im ungünstigsten Fall durch vollständige Enumeration ermittelt werden. Die Mächtigkeit der Parametermenge ist  $\binom{n_x}{n_{g,i}}$ . Der Rechenaufwand des Verfahrens ist daher sowohl von der Anzahl der Komponenten des generalisierten Zustandes  $n_x$  als auch von der veränderlichen Anzahl der Gleichungen der restriktiven Mannigfaltigkeit  $n_{g,i}$  abhängig.

Der Unterschied der konsistenten Reinitialisierung der optimalen Zustandspartition zu der Reinitialisierung des generalisierten Zustandes und zu der robusten Reinitialisierung des generalisierten Zustandes ist die Art des Optimierungsproblems. Jede zulässige Lösung erhält vollständig und unverändert eine Partition der geschätzten inkonsistenten Zustände. Damit ist die Erhaltung eines Teils der Information der Zustandsschätzung unabhängig von dem Optimierungsalgorithmus sichergestellt. Im Gegensatz zu der Reinitialisierung des differentiellen Zustandes berücksichtigt die Reinitialisierung der optimalen Zustandspartition ein Optimalitätskriterium der Informationserhaltung der Zustandsschätzung.

Die Effizienz des Ansatzes kann durch die Anwendung geeigneter Verfahren der diskreten Optimierung, wie z.B. Branch-and-Bound, im Vergleich zu der vollständigen Enumeration wesentlich gesteigert werden. Dennoch ist die Komplexität des formulierten Optimierungsproblems einschränkend für die

praktische Anwendung. Eine mögliche Maßnahme zur Reduktion der Komplexität ist die Ergänzung des Ansatzes um eine Analyse der restriktiven Mannigfaltigkeit der DAE (3.157). Die Zulässigkeit einer Permutationsmatrix als eines Wertes des Optimierungsparameters ist der Lösbarkeit der erweiterten Zwangsbedingung (3.162) nach dem generalisierten Zustand äquivalent. Folglich kann die Menge der zulässigen Optimierungsparameter durch die Untersuchung der Jacobi-Matrix der restriktiven Mannigfaltigkeit bezüglich des generalisierten Zustandes reduziert werden. Zum Beispiel müssen die Komponenten des generalisierten Zustandes vorgegeben werden, zu denen Null-Spalten in der Jacobi-Matrix zugeordnet sind. Das Vorgehen verkleinert die zu variierende Partition der Permutationsmatrix im Optimierungsproblem (3.166) s.t. (3.167).

Ferner kann die Vereinfachung der Zielfunktion (3.166) die Komplexität des Problems wesentlich reduzieren. Einerseits kann die multikriterielle Optimalitätsbedingung durch eine korrespondierende Fitnessfunktion ersetzt werden. Andererseits kann die Optimalität prinzipiell unabhängig von dem empirischen Erwartungswert und der Kovarianz formuliert werden. Eine naheliegende mögliche Zielfunktion ist eine geeignete Norm der Abweichung der konsistenten Sigma-Punkte von den inkonsistenten

$$f_o(S_{x,c,i|i}, S_{x,i|i}, Q_i) = \left\| Q_i \cdot R_{x,i} \cdot (S_{x,c,i|i} - S_{x,i|i}) \right\| \quad (3.168)$$

mit einer Skalierungsmatrix  $R_{x,i} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  (vgl. [AW14b]). Offensichtlich sind jedoch der Zielfunktion (3.168) und der (3.166) nicht äquivalent.

## 3.5 Beispiele

**KF mit DAE für die CLR-Reihenschaltung.** Das Modell des elektrischen CLR-Stromkreises in Form einer DAE, wie beschrieben in Abschn. 2.4, wird hier einerseits für die Überprüfung der Existenz der optimalen Lösung für die Kalman-Verstärkung mit Restriktionen und andererseits für die Ermittlung der konsistenten Zustandswerte nach dem Ansatz für die konsistente Reinitialisierung optimaler Zustandspartition im UKF verwendet.

Die Existenz der optimalen Lösung für die Kalman-Verstärkung mit Restriktionen kann mit der Bedingung (3.118) geprüft werden. Die restriktive Mannigfaltigkeit der DAE für die CLR-Reihenschaltung (2.97) ist ein lineares zeitinvariantes System und gehört offensichtlich zu der Klasse (3.107). Das

Gleichungssystem kann in jedem Zeitpunkt  $t_i$  entsprechend als

$$0 = g_{x,i}(u_{(\mu),i}, t_i) \cdot x_i + g_{ut,i}(u_{(\mu),i}, t_i) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \\ x_{i,3} \\ x_{i,4} \\ x_{i,5} \\ x_{i,6} \\ x_{i,7} \\ x_{i,8} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -u_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.169)$$

angegeben werden. Der Rang der Matrix  $g_{x,i}(u_{(\mu),i}, t_i)$  ist gleich der Anzahl der skalaren Gleichheitsnebenbedingungen  $n_{g,i} = 6$  unabhängig von dem Wert des skalaren Parameters  $R$ . Folglich kann für die DAE die Kalman-Verstärkung mit Restriktionen nach (3.110) ermittelt werden (vgl. Abschn. 3.4.2).

Die Lösbarkeit der erweiterten Zwangsbedingung (3.162) nach einer Menge konsistenter Zustandswerte für die konsistente Reinitialisierung optimaler Zustandspartition im UKF kann an dem akademischen Beispiel besonders einfach demonstriert werden. Das algebraische Gleichungssystem für die Berechnung der  $2 \cdot n_x + 1$  konsistenten Zustandswerte zusammengefasst in den Spalten der Matrix  $S_{x,c,i|i} \in \mathbb{R}^{n_x \times 2 \cdot n_x + 1}$  mit der Vorgabe der inkonsistenten Werte  $S_{x,i|i} \in \mathbb{R}^{n_x \times 2 \cdot n_x + 1}$  ist

$$A_i(P_i, R) \cdot S_{x,c,i|i} = B_i(u_i, S_{x,i|i}, P_i) \quad (3.170)$$

mit

$$A_i(P_i, R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & P_i & & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \quad (3.171)$$

und

$$B_i(u_i, S_{x,i|i}, P_i) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1}_{1 \times 2 \cdot n_x + 1} \\ P_i \cdot S_{x,i|i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times 2 \cdot n_x + 1}. \quad (3.172)$$

Darin ist die Matrix  $P_i \in \mathbb{R}^{n_x - n_{g,i} \times n_x}$  eine Partition der Permutationsmatrix  $[P_i^T, Q_i^T]^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ . Die Wahl der Matrix  $P_i$  legt die Initialisierungsgleichungen fest. Die Gleichung (3.170) hat eine eindeutige Lösung, u.a. wenn die Werte der festgelegten differentiellen Zustände  $x_1$  und  $x_4$  durch die Initialisierungsgleichungen vorgegeben werden und

$$P_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.173)$$

In diesem Sonderfall ist  $\text{rank}(A_i(P_i, R)) = n_x$  unabhängig von dem Wert des Parameters  $R$ .

Die konsistenten Zustandswerte können aus der erweiterten Zwangsbedingung auch mit anderen Matrizen  $P_i$  berechnet werden. Zur Vereinfachung wird  $R = 1$  angenommen. Damit führen 11 aus den 28 möglichen nicht äquivalenten Permutationen zur Regularität der Matrix  $A_i(P_i, R)$ . Darunter sind

$$P_{i,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.174)$$

$$P_{i,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.175)$$

$$P_{i,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

und weitere. Folglich ist die Anzahl der Elemente in der Menge der zulässigen Optimierungsparameter für die diskrete Optimierung in der konsistenten Reinitialisierung der optimalen Zustandspartition gleich 11.

Ferner ist die Gleichung (3.170) für die wie beschrieben gewählte Matrix  $P_i$  nach einer beliebigen Anzahl  $n_{s,x}$  konsistenter Zustandswerte lösbar. Somit können die Matrizen  $S_{x,c,i|i}$  und  $S_{x,c,i|i}$  entsprechend viele Spalten enthalten. Hierfür wird

$$B_i(u_i, S_{x,i|i}, P_i) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1}_{1 \times n_{s,x}} \\ P_i \cdot S_{x,i|i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{s,x}} \quad (3.177)$$

korrespondierend vorgegeben. Die Bedingung für die Existenz einer beliebigen Anzahl konsistenter Zustandswerte ist wie beschrieben die Existenz des differentiellen Zustandes. Für die DAE für die CLR-Reihenschaltung kann ein differentieller Zustand mit zwei Komponenten festgelegt werden. Dessen Wert kann beliebig vorgegeben werden, während die komplementäre Partition des generalisierten Zustandes davon abhängig aus der restriktive Mannigfaltigkeit berechnet wird.

**Inkonsistente Zustandsschätzung mit UKF für das mathematische Pendel.** Die inkonsistente Zustandsschätzung mit UKF kann am Beispiel des mathematischen Pendels in kartesischen Koordinaten demonstriert werden (vgl. Abb. 2.1). Die DAE für die Implementierung des UKF ist

$$f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 - x_4 \\ \dot{x}_3 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_1 \cdot x_5 - u_1 \\ \dot{x}_4 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_2 \cdot x_5 - u_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - a_r^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.178)$$

mit dem generalisierten Zustandes  $x \in \mathbb{R}^5$  und der Eingangsgröße  $u \in \mathbb{R}^2$

$$u = [u_1, u_2]^T = [0, a_g]^T. \quad (3.179)$$

Der differentielle Index der DAE ist 3 (vgl. Anh. A). Die Komponenten des Zustandes bezeichnen die Position der Masse in dem Koordinatensystem mit  $x_1, x_2$ , die zugeordneten Geschwindigkeit mit  $x_3, x_4$  und die erforderliche Kraft der Bahnführung mit  $x_5$ . Die skalaren Modellparameter darin sind die Masse  $a_m$ , der Radius der Bewegungsbahn  $a_r$  und die Gravitationsbeschleunigung  $a_g$ .

Das Verhalten des realen Systems wird mit einem realistischeren Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{s,1} - x_{s,3} \\ \dot{x}_{s,2} - x_{s,4} \\ \dot{x}_{s,3} - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{s,1} \cdot x_{s,5} + \frac{a_{d,1}}{a_m} \cdot \text{sign}(x_{s,3}) \cdot |x_{s,3}|^2 - u_1 \\ \dot{x}_{s,4} - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{s,2} \cdot x_{s,5} + \frac{a_{d,2}}{a_m} \cdot \text{sign}(x_{s,4}) \cdot |x_{s,4}|^2 - u_2 \\ x_{s,5} - \frac{1}{a_c} \cdot (\sqrt{x_{s,1}^2 + x_{s,2}^2} - a_r) - a_{d,3} \cdot \frac{x_{s,1} \cdot x_{s,3} + x_{s,2} \cdot x_{s,4}}{\sqrt{x_{s,1}^2 + x_{s,2}^2}} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.180)$$

simuliert (vgl. Abb. 3.1). Das simulierte, reale System berücksichtigt die Nachgiebigkeit der Verbindung zwischen der Masse und dem Lager mit  $a_c$  sowie die Dämpfung mit  $a_d = [a_{d,1}, a_{d,2}, a_{d,3}]^T$ .

Die Komponenten der generalisierten Zustände des simulierten, realen Systems  $x_s \in \mathbb{R}^5$  und des Modells für das Kalman-Filter  $x \in \mathbb{R}^5$  quantifizieren übereinstimmende physikalische Größen. Die Eingangsgrößen des realen Systems und des Modells sind identisch. Die Messgröße in der Zustandsschätzung ist im Modell

$$y = [x_1] \quad (3.181)$$

bzw. im simulierten, realen System

$$y_s = [x_{s,1}] \quad (3.182)$$

eine korrespondierende Komponente der Position des Pendels.

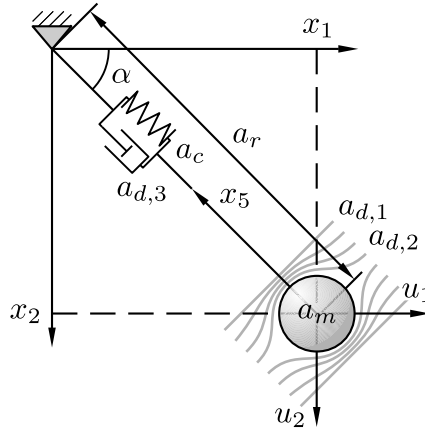


Abbildung 3.1: Pendel mit der Nachgiebigkeit und Dämpfung der Bahnführung sowie mit der Dämpfung infolge der Umströmung der Masse

Das Beispiel wird frei von physikalischen Einheiten betrachtet. Die Parameter des Modells und des simulierten, realen Systems sind damit

$$a_m = 1, \quad (3.183)$$

$$a_r = 1, \quad (3.184)$$

$$a_d = [0.5, 0.5, 10]^T, \quad (3.185)$$

$$a_c = 10^{-3}/9.81, \quad (3.186)$$

$$a_g = 9.81. \quad (3.187)$$

Die Zustandsschätzung wird mit zwei Typen des Kalman-Filters durchgeführt:

- UKF mit der Zustandsstörung im generalisierten Zustand  $x \in \mathbb{R}^5$  und der konsistenten Reinitialisierung des differentiellen Zustandes bezeichnet mit  $UKF_5$  (vgl. Abschn. 3.4.3) und
- UKF mit der Zustandsstörung im differentiellen Zustand  $x_d = [x_1, x_3]^T \in \mathbb{R}^2$  und der konsistenten Ermittlung des algebraischen Zustandes bezeichnet mit  $UKF_2$  (vgl. [MRN09]).

Die Kalman-Filter werden mit charakteristischen Größen

$$x_{ch} = [0.5, 0.5, 6, 3, 15]^T \quad (3.188)$$

$$x_{d,ch} = [0.5, 6]^T \quad (3.189)$$

$$y_{ch} = [0.5] \quad (3.190)$$

parametriert. Die Kovarianzen der Störgrößen des generalisierten bzw. des differentiellen Zustandes und der Messgröße sind

$$C_{v_x, v_x, UKF_5, j} = 10^{-6} \cdot \text{diag}(x_{ch}) \cdot \text{diag}(x_{ch}), \quad (3.191)$$

$$C_{v_x, v_x, UKF_2, j} = 10^{-6} \cdot \text{diag}(x_{d,ch}) \cdot \text{diag}(x_{d,ch}), \quad (3.192)$$

$$C_{v_y, v_y, UKF_{\{5,2\}}, j} = 10^{-4} \cdot \text{diag}(y_{ch}) \cdot \text{diag}(y_{ch}). \quad (3.193)$$

Die gewählten, allgemeinen Parameter der unscented Transformation sind

$$\alpha = 1/3, \quad (3.194)$$

$$\beta = 2, \quad (3.195)$$

$$\gamma = 1 \quad (3.196)$$

(vgl. Abschn. 3.4.3). Die Zustandsschätzung wird für das Zeitintervall  $t \in [0, 3]$  mit der Aufnahme des Messwerte mit in Zeitschritten von  $10^{-2}$  durchgeführt. Die Initialisierung des simulierten, realen Systems und der Kalman-Filter erfolgt mit

$$x_{s,i} = [0.87, 0.5, 0, 0, 4.91]^T \quad (3.197)$$

$$x_{UKF_{\{5,2\}}, i|i} = [0, 0.75, 0, 0, 0]^T, \quad (3.198)$$

$$C_{x,x, UKF_{\{5,2\}}, i|i} = 10^{-4} \cdot \text{diag}(x_{ch}) \cdot \text{diag}(x_{ch}). \quad (3.199)$$

Hierbei werden im  $UKF_2$  entsprechend dem Ansatz effektiv nur die Komponenten korrespondierend zum differentiellen Zustand  $x_d = [x_1, x_3]^T$  verwendet.

Die Position des mathematischen Pendels  $x_{s,\{1,2\}}$  sowie die Schätzung der Position mit den beiden Typen des UKF  $x_{UKF_5,\{1,2\}}$  und  $x_{UKF_2,\{1,2\}}$  werden in Abb. 3.2 dargestellt. Die Zustandsschätzung gleicht den Fehler im Anfangswert und den Einfluss der Störungen repräsentiert durch den Unterschied des simulierten, realen Systems und des Modells in den UKF innerhalb ca. einer halben Schwingungsperiode weitgehend aus. Die Schätzung der übrigen Komponenten des Zustandes ist mit der Schätzung der Position vergleichbar effizient. Der Unterschied der Schätzungen mit  $UKF_5$  und  $UKF_2$  ist mit der Einführung der integralen Residuen

$$r_{UKF_{\{5,2\}}} = \int_0^t (x_s - x_{UKF_{\{5,2\}}})^T \cdot R_x \cdot (x_s - x_{UKF_{\{5,2\}}}) \cdot d\tau \quad (3.200)$$

mit der Skalierung

$$R_x = (\text{diag}(x_{ch}))^{-1} \cdot (\text{diag}(x_{ch}))^{-1} \quad (3.201)$$

deutlich feststellbar (vgl. Abb. 3.2). Demnach ist für das mathematische Pendel die inkonsistente Zustandsschätzung mit dem  $UKF_5$  mit der Zustandsstörung im generalisierten Zustand und der konsistenten Reinitialisierung des differentiellen Zustandes deutlich effizienter als die Zustandsschätzung mit dem  $UKF_2$  mit der Zustandsstörung im differentiellen Zustand und der konsistenten Ermittlung des algebraischen Zustandes.

**Inkonsistente Zustandsschätzung mit UKF für das mathematische Pendel mit unterschiedlichen Ansätzen der Reinitialisierung.** Die Güte der inkonsistenten Zustandsschätzung mit UKF kann mit der Anwendung



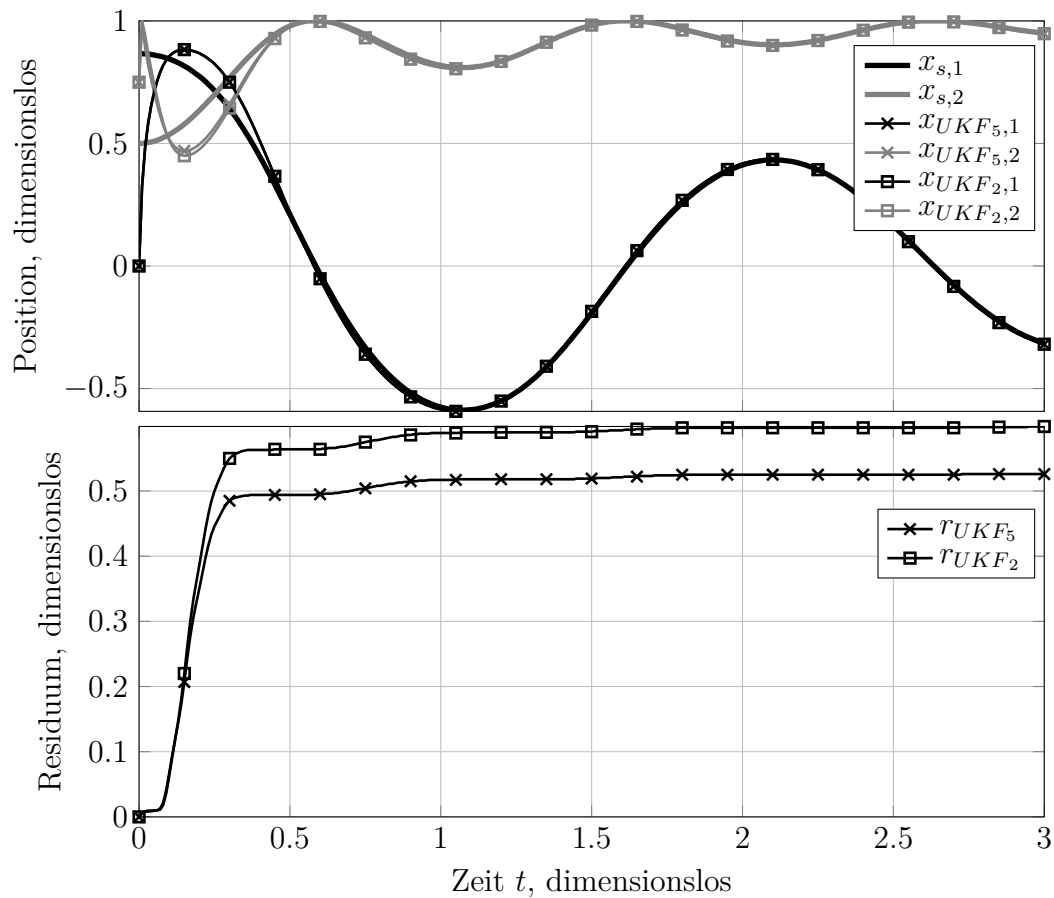


Abbildung 3.2: Position  $x_{s,\{1,2\}}$  des mathematischen Pendels und Schätzung der Position mit UKF für den generalisierten Zustand  $x_{UKF_{5,\{1,2\}}}$  und UKF für den differentiellen Zustand  $x_{UKF_{2,\{1,2\}}}$  sowie Residuen der Zustandsschätzung  $r_{UKF_{\{5,2\}}}$ , entsprechend

der in Abschn. 3.4.3 beschriebenen Reinitialisierungstechniken wesentlich gesteigert werden. Die Reduktion der Abweichung der Zustandsschätzung und der erforderliche erhöhte Rechenaufwand werden am Beispiel des mathematischen Pendels simulativ untersucht (vgl. [Bus16]). Das verwendete Modell und das simulierte reale System entsprechen (3.178) und (3.180) (vgl. Abb. 2.1).

Die Güte der Zustandsschätzung wird mit den integralen Residuen (3.200) bewertet. Der Verlauf der Residuen ist in Abb. 3.3 dargestellt. Das Residuum der Zustandsschätzung mit der konsistenten Reinitialisierung des differentiellen Zustandes liegt in dem Beispiel im Vergleich zu den anderen untersuchten optimalitätsbasierten Reinitialisierungsansätzen entsprechend der Erwartung im mittleren Wertebereich. Die Anwendung der optimalitätsbasierten Reinitialisierung kann somit offensichtlich zur Reduktion der Abweichungen führen. Bemerkenswert ist die erhebliche Variation der Güte der Zustandsschätzung

mit der robusten Reinitialisierung des generalisierten Zustandes abhängig von dem verwendeten Optimierungsverfahren. Die inkonsistente Zustandsschätzung mit der Reinitialisierung der optimalen Zustandspartition führt zu einem der besten Ergebnisse.

Die Bewertung des Rechenaufwandes basiert auf der Prozessorzeit und kann folglich von den Eigenschaften des eingesetzten Computers, dem verwendeten Optimierungsverfahren, der Implementierung der Reinitialisierung und ggf. weiteren Einflussfaktoren abhängig sein. Damit ist dennoch eine grobe relative Einordnung der Ansätze möglich. Die ermittelte Prozessorzeit für die robuste Reinitialisierung mit der lokalen nichtlinearen Optimierung mit dem Gradienten-, Newton- und Simplexverfahren ist vergleichbar mit der Prozessorzeit für die konsistente Reinitialisierung der optimalen Zustandspartition. Die Anwendung der globalen Optimierung mit dem Partikelschwarm- und Zufallsverfahren mit der lokalen Mutation erfordert einen um ca. eine Größenordnung höheren Aufwand, während der Aufwand für die konsistente Reinitialisierung des differentiellen Zustandes ca. eine Größenordnung geringer ist. Folglich zeigen der Rechenaufwand und die erreichte Güte der Zustandsschätzung keine wechselseitige Abhängigkeit.

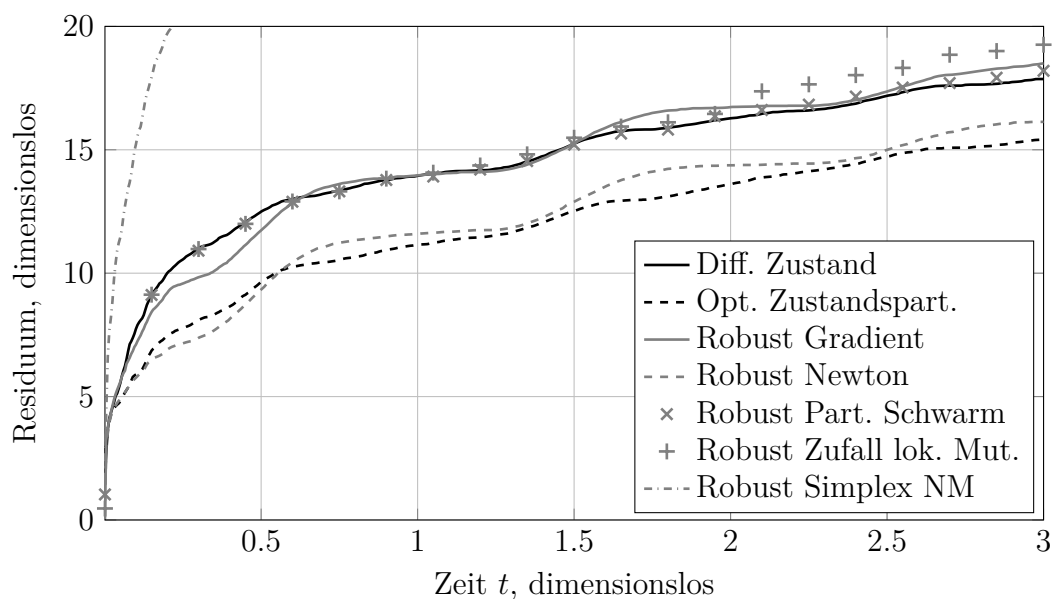


Abbildung 3.3: Residuen der inkonsistenten Zustandsschätzung des mathematischen Pendels mit UKF mit DAE aus [Bus16], mit der konsistenten Reinitialisierung des differentiellen Zustandes und der optimalen Zustandspartition sowie mit der robusten konsistenten Reinitialisierung des generalisierten Zustandes mit der Optimierung mit dem Gradienten-, Newton-, Partikelschwarm- und Zufallsverfahren mit lokaler Mutation und dem Simplexverfahren nach Nelder und Mead

## 3.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die notwendigen Grundlagen der Zustandsschätzung erläutert. Die Grundform des Kalman-Filters als eines Zustandsschätzverfahrens sowie dessen wichtigste Varianten für die Anwendung mit nichtlinearen expliziten Modellen werden beschrieben.

Die Anwendung des Kalman-Filters mit nichtlinearen DAE ist das zentrale Thema des Kapitels. Die Einführung der generalisierten Zustandsstörung wird beschrieben und ausführlich begründet. Die Ermittlung der Kalman-Verstärkung mit Restriktionen entsprechend der restriktiven Mannigfaltigkeit der DAE sowie die inkonsistente Zustandsschätzung und die Implementierung des Ansatzes im UKF-Algorithmus werden vorgestellt. Ein wesentlicher methodischer Bestandteil der inkonsistenten Zustandsschätzung mit KF basierend auf DAE ist die konsistente Reinitialisierung. Die Formulierung des Reinitialisierungsproblems im Kalman-Filter und die entsprechenden Lösungsansätze unterscheiden sich signifikant von den in der Literatur bekannten Konzepten. Die darunter entwickelte Reinitialisierung der optimalen Zustandspartition wird nach dem Kenntnisstand des Autors originär in [AW14a] vorgeschlagen. Die Bestimmung der konsistenten Anfangsbedingungen ist ein allgemeines Problem in der Behandlung der DAE, folglich ist die konsistente Initialisierung der optimalen Zustandspartition für die objektorientierte Modellierung und andere Anwendungsgebiete der DAE hochgradig relevant.

Der grundsätzliche Beitrag dieser Arbeit ist die Entwicklung der Ansätze für die Verwendung der nichtlinearen differential-algebraischen Gleichungen im Kalman-Filter. Damit wird die Anwendung eines wichtigen Zustandsschätzverfahrens, des Kalman-Filters, auf eine sehr allgemeine Modellklasse, nichtlineare DAE, übertragen, sodass die Notwendigkeit jeder Reformulierung des Modells für die Implementierung der Zustandsschätzung entfällt. Ferner können die Zustandsschätzverfahren als eine Grundlage für modellbasierte Diagnoseverfahren und Systemüberwachung verwendet werden. Die in dieser Arbeit beschriebenen Diagnoseverfahren stützen sich auf die Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern basierend auf nichtlinearen DAE.

# Kapitel 4

## Modellbasierte Diagnose

Reale Systeme sind permanent einer Vielzahl verschiedener Einflüsse ausgesetzt, somit laufen systemintern zeitgleich viele physikalische Prozesse ab. Das Verhalten realer Systeme kann, wie in Kap. 3 diskutiert, mit keinem Modell erschöpfend beschrieben werden. Jedes mögliche Modell gibt hierbei nur ein Verhaltensmuster mit einer eingeschränkten Auswahl berücksichtigter physikalischer Effekte wieder und hat einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Oft kann ein erwartbares nominales Verhaltensmuster durch ein geeignetes Modell definiert werden. Das Verhalten eines Systems kann ferner durch substantielle Veränderungen wesentlich und nachhaltig beeinflusst werden, sodass der Gültigkeitsbereich des nominalen Modells verlassen wird. Generell können alle Phänomene, die eine Modellmodifikation zu einer hinreichenden Beschreibung des Systems erfordern, ungeachtet deren Art als substantielle Systemveränderungen zu einer Klasse zusammengefasst werden.

Die primäre Aufgabe der modellbasierten Diagnoseverfahren ist das Erkennen und das Charakterisieren der substantiellen Systemveränderungen. Folgende grundsätzliche Problemstellungen werden mit den Methoden der modellbasierten Diagnose behandelt (vgl. [Ise06], [Ise11]):

- Detektion der Auswirkungen substantieller Systemveränderungen,
- Isolation oder Lokalisierung veränderter Komponenten und
- Identifikation bzw. quantitative Bewertung der Änderung.

In technischen Systemen führen u.a. der Verschleiß, die Alterung und das Komponentenversagen zu wesentlichen Veränderungen. Daher sind offensichtlich Fehler eine spezielle Klasse der substantiellen Systemveränderungen. In der praktischen Anwendung hat die Diagnose der Systemfehler wahrscheinlich die höchste Relevanz. Entsprechend dominiert in der Literatur der Begriff der modellbasierten Fehlerdiagnose und impliziert die oben genannten Teilprobleme mit diesem Bezug (Fehlerdetektion, -isolation und -identifikation, engl. Fault Detection, Isolation and Identification, FDI).

Das weiterführende Ziel der Diagnose ist die Gewährleistung der Steuerungsaufgaben in Anwesenheit substantieller Systemveränderungen. Infolge der Veränderungen weicht das Verhalten des betrachteten Systems von dem

erwartbaren ab. Ein mögliches Vorgehen zur Vermeidung damit verbundener Funktionsstörungen ist der Einsatz redundanter Hardwarekomponenten. Allerdings steigen infolgedessen die Realisierungskosten des Systems, sodass redundante Komponenten nur in sicherheitskritischen Fällen eingesetzt werden. Alternativ kann eine geeignete Anpassung der Steuerungs- bzw. Regelungsalgorithmen die Funktion des Systems aufrecht erhalten. Die methodische Grundlage hierfür ist die Systemdiagnose und die fehlertolerante Steuerung. Besonders einleuchtende Beispiele der beiden Strategien finden sich in der Kraftfahrzeugtechnik (vgl. [WR10], [Rei17]). In einem üblichen Fahrzeug aktueller Bauart mit einem Verbrennungsmotor verfügen sowohl das Fahrpedal als auch die Drosselklappe über mehrere redundante Positionssensoren. Die Komponenten unterliegen dennoch auch einer fortwährenden Diagnose, sodass der Ausfall eines Sensors zur Anpassung der Motorsteuerung führt. Die Steuerung gibt eine Fehlermeldung aus und geht in einen Ersatzbetrieb mit einer eingeschränkten Fahrgeschwindigkeit über.

In diesem Kapitel wird nach einer Einführung in die Grundlagen der modellbasierten Diagnose ein Diagnoseverfahren ausführlich erläutert. Die Grundlage des Verfahrens ist die hybride Zustandsschätzung konzipiert in [HW02]. Das Diagnoseverfahren verwendet die Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern mit differential-algebraischen Gleichungen mit höherem Index und erweitert damit die Methodik für die Anwendung mit den Modellen dieser Klasse (vgl. Kap. 3). Die Eignung der Kalman-Filter mit DAE für die Anwendung in der hybriden Zustandsschätzung wird eingehend gezeigt, vgl. auch [WA16].

## 4.1 Grundlagen und Definitionen

Die Grundlage der Diagnose ist die Analyse der Abweichungen des aktuellen Verhaltens des Systems von dem erwartbaren. Folglich sind zur Bildung der Abweichungen hinreichende Beobachtungen, d.h. Messwertaufnahme, an dem betrachteten realen System und eine Vorgabe des erwartbaren Verhaltens zwingend erforderlich.

**Def. 4.1:** Das nominale oder erwartbare Verhalten eines realen Systems ist das Verhalten, das mit dem korrespondierenden nominalen Modell innerhalb dessen Gültigkeitsbereiches mit hinreichender Genauigkeit beschrieben werden kann.

Das nominale Modell repräsentiert somit das Verhalten des betrachteten Systems in Abwesenheit substantieller Veränderungen. Dennoch weicht im Allgemeinen das Verhalten des Modells von dem des Systems auch unter diesen Betriebsbedingungen ab, sodass die Ermittlung des Systemzustandes die Anwendung der Zustandsschätzverfahren erfordert. Die Gründe dafür sind die Modellungenauigkeiten, die als externe Störung zusammengefasst werden (vgl. Kap. 3).

**Def. 4.2:** Die substantiellen Systemveränderungen sind die Verhaltensvaria-

tionen des betrachteten realen Systems, deren Auftreten eine Modifikation des nominalen Modells zur Beschreibung des Verhaltens des Systems mit hinreichender Genauigkeit erfordert.

**Def. 4.3:** Die Fehler sind substantielle Systemveränderungen, deren Ursachen bzw. Folgen die Erfüllung der angestrebten Systemfunktion beeinträchtigen oder verhindern.

Der Einfluss der substantiellen Systemveränderungen kann mit dem kumulativen Modell der Modellungenauigkeiten als einer externen Störung äquivalent dem Vorgehen in der Zustandsschätzung abgebildet werden. Doch kann hierbei in der Beschreibung des Systemverhaltens der Beitrag der unbekanntem externen Störung den Beitrag des bekannten nominalen Modells erheblich und nachhaltig übersteigen. Damit ist die Beschreibung des Verhaltens des realen Systems von einer unbekanntem stochastischen Größe dominiert und mit dem nominalen Modell nicht vorhersagbar. Derartige Auswirkungen der substantiellen Systemveränderungen sind charakteristisch.

Das infolge der substantiellen Systemveränderungen nachhaltig veränderte Verhalten des Systems kann die Qualität der mit dem nominalen Modell entwickelten Zustandsschätzung wesentlich beeinträchtigen. Folglich können die Modifikationen des Modells unter anderem zur Aufrechterhaltung einer hinreichenden Genauigkeit der Zustandsschätzverfahren notwendig sein. Die erforderlichen Modellmodifikationen werden im Rahmen einer Modellidentifikation bzw. einer Parameteridentifikation ermittelt.

Die Ursachen für die substantiellen Systemveränderungen können sowohl interne als auch externe Prozesse sein. Häufig angeführte Beispiele für die internen Prozesse sind Verschleiß, Erwärmung infolge erhöhter Reibung, Leckagen und Kurzschlüsse. Die naheliegenden externen Prozesse sind Erhöhung der Umgebungstemperatur, elektromagnetische Strahlung, chemische oder mechanische Einwirkung. Die Konsequenz der Prozesse ist grundsätzlich jedoch identisch: das Verhalten des Systems weicht erheblich und nachhaltig von dem Verhalten des nominalen Modells ab.

**Def. 4.4:** Die Symptome der substantiellen Systemveränderungen sind quantitative Größen zur Beschreibung der Abweichungen des aktuellen Verhaltens des realen Systems von dem Verhalten des nominalen Modells.

Die Bildung der Symptome beruht auf einem geeigneten Vergleich der aufgenommenen Messwerte des Systems und der korrespondierenden Referenzgrößen des nominalen Modells. Hierbei kann der Begriff des Modells sehr allgemein gefasst sein, z.B. können dafür ein Gleichungssystem, eine Reihe messtechnisch aufgenommener Signale oder quantitative Beobachtungen des Bedienungspersonals des realen Systems verwendet werden. Folglich werden die Symptome als quantitative Signale hinsichtlich ihrer Klasse im betrachteten Spezialfall definiert. In [Ise11] wird mit dem Bezug auf das zugrunde liegende Modell zwischen der analytischen und der heuristischen Symptomerzeugung unterschieden.

**Def. 4.5:** Die modellbasierte Diagnose ist das Erkennen und das Charakterisieren substantieller Systemveränderungen auf Basis eines Modells.

Die modellbasierte Diagnose setzt in der konventionellen Form eine Differentialgleichung als quantitatives Modell ein. Die Symptome der substantiellen Systemveränderungen können in diesem Fall als Differenzen der korrespondierenden Größen des Modells und des realen Systems definiert werden. In dem realen System sind allerdings ausschließlich die Messgrößen bekannt, somit sind die Symptome die Differenzen der Messgrößen. Die Symptome können jedoch

- in Abwesenheit substantieller Systemveränderungen temporär oder permanent ungleich null sein,
- in Anwesenheit substantieller Systemveränderungen temporär oder permanent gleich null sein.

Die möglichen Gründe hierfür sind verschieden. Einerseits führen die stets präsenten Modellungenauigkeiten, d.h. die externe Störung, zu erheblichen Abweichungen zwischen dem Verhalten des Modells und des Systems. Andererseits können die Systemveränderungen bedingt durch ihre Art keine Beeinflussung der Symptome hervorrufen. Daher haben die Symptome dieser Art sowohl als Momentanwerte als auch als zeitabhängige Wertefolgen ohne weitere Behandlung eine sehr beschränkte Bedeutung für die Diagnose.

Naheliegende Ansätze zur Bewertung der Symptome sind unter anderem die Vorgabe eines Toleranzbereiches, der Einsatz einer Verzögerung bzw. einer Entprellung oder die Einführung der Filterung. Ferner ist die Verwendung der in Kap. 3 diskutierten Zustandsschätzverfahren möglich. Diese werten die Differenz der Messgrößen des realen Systems und des Modells, also die Symptome aus, schätzen modellgestützt die systeminternen Größen und bilden verfahrensspezifische Kenngrößen, wie z.B. die Kovarianz des Schätzwertes im Kalman-Filter. Damit können umfassende und allgemein verwendbare Diagnoseverfahren methodisch entwickelt werden.

## 4.2 Substantielle Systemveränderungen

Das Auftreten der substantiellen Systemveränderungen erfordert, wie definiert, eine Modifikation des nominalen Modells zur hinreichenden Beschreibung des Systemverhaltens. Das Systemverhalten kann innerhalb der Menge möglicher Verhaltensmuster variieren. Derartige Vorgänge können folglich als Transitionen oder Schaltvorgänge unter den Modellen des Systemverhaltens zugeordnet zu den Verhaltensmustern beschrieben werden. Die substantiellen Systemveränderungen können grundsätzlich sowohl deterministische als auch stochastische Variationen des betrachteten realen Systems einbeziehen.

Das Auftreten eines Verhaltensmusters, d.h. des nominalen Verhaltens oder eines Verhaltens bei substantiellen Systemveränderungen, kann als ein Ereignis mit einem zu definierenden Wahrscheinlichkeitsmaß betrachtet werden. Formal

wird damit ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

$$(S_z, \mathcal{P}(S_z), P_z) \quad (4.1)$$

definiert, mit dem Ergebnisraum  $S_z = \{z_1, z_2, \dots\}$ , dem Ereignisraum  $\mathcal{P}(S_z)$  und dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_z : \mathcal{P}(S_z) \rightarrow [0, 1]$ . Hierbei ist  $\mathcal{P}(\cdot)$  die Potenzmenge. Der Ergebnisraum enthält alle möglichen Verhaltensmuster  $z_k$  mit  $k \in \{1, \dots, n_z\}$ ,  $n_z \in \mathbb{N}$  des betrachteten realen Systems, die als wertdiskrete Systemzustände interpretiert werden können. Im Kontext der modellbasierten Diagnose werden die Verhaltensmuster als Verhaltensmodes (engl. behavioral modes) bezeichnet. Der Verhaltensmode  $z_1$  wird ohne Einschränkung im Weiteren dem nominalen Systemverhalten zugeordnet. Folglich ist das Auftreten einer substantiellen Systemveränderung das Ereignis  $\{S_z \setminus \{z_1\}\}$ . Eine deterministisch spezifizierte Systemveränderung hat in dem Modell die Wahrscheinlichkeit 1.

Das Verhalten des realen Systems zugeordnet zu den einzelnen Verhaltensmodes wird durch spezifische wertkontinuierliche Modelle charakterisiert. Diese Modelle können sich untereinander prinzipiell sehr stark unterscheiden. In dieser Arbeit werden differential-algebraische Gleichungen als Modellklasse verwendet (vgl. Kap. 2). Damit wird jedem Mode  $z_k$  mit  $k \in \{1, \dots, n_z\}$  eine DAE zugeordnet. Folglich sind

$$P_z(\{z_k\}) = P_k, \quad (4.2)$$

$$f_k(x_k, \dot{x}_k, u_k, t) = 0, \quad (4.3)$$

$$y_k = h_k(x_k, u_k, t) \quad (4.4)$$

die vollständige Beschreibungen der Verhaltensmodes, mit den generalisierten Zuständen  $x_k \in \mathbb{R}^{n_{x,k}}$ , den Eingangsgrößen  $u_k \in \mathbb{R}^{n_{u,k}}$ , den Modellgleichungen in Form impliziter DAE  $f_k : \mathbb{R}^{n_{x,k}} \times \mathbb{R}^{n_{x,k}} \times \mathbb{R}^{n_{u,k}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x,k}}$ , den Messgrößen  $y_k \in \mathbb{R}^{n_{y,k}}$ , den Messgrößenfunktionen  $h_k : \mathbb{R}^{n_{x,k}} \times \mathbb{R}^{n_{u,k}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{y,k}}$  und der Zeit  $t \in \mathbb{R}$ . Die Dimensionen sind entsprechend  $n_{x,k}, n_{u,k}, n_{y,k} \in \mathbb{N}$ . Die Eingangsgrößen  $u_k$  werden als bekannt angenommen. Die Betrachtung wird auf ausschließlich reguläre DAE beschränkt, sodass Lösungen von (4.3) für alle  $k \in \{1, \dots, n_z\}$  auf jedem Intervall  $[t_i, t_j]$  mit den Zeitpunkten  $t_i, t_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = i + 1$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  existieren und die Zustandsübergangsfunktionen  $\xi_{j,k}$  in

$$x_{k,j} = \xi_{k,j}(x_{k,i}, u_{(\mu),k}, t_i, t_j) \quad (4.5)$$

geeignet (numerisch) ermittelt werden können (vgl. (3.80)). Darin sind  $x_{k,i}$ ,  $x_{k,j}$  Werte der generalisierten Zustände  $x_k \in \mathbb{R}^{n_{x,k}}$  zu den Zeitpunkten  $t_i$ ,  $t_j$  und  $u_{(\mu),k} = [u_k, \dot{u}_k, \dots, u_k^{(\mu)}]$  die Eingangsgrößen mit den zugehörigen zeitlichen Ableitungen. Die Wahrscheinlichkeiten  $P_k$  der Ereignisse  $\{z_k\}$ , also des Auftretens der korrespondierenden Verhaltensmodes, können grundsätzlich von der Zeit und den vorausgehenden Modes sowie weiteren Modellgrößen abhängen. Eine Kennzeichnung der Abhängigkeit wird zwecks kompakter Darstellung an der Stelle nicht angeführt.



Die Schätzung des aktuellen Verhaltensmodes erfolgt mit dem beschriebenen Modell durch eine geeignete Bewertung der zu ermittelnden Wahrscheinlichkeiten  $P_k$  aus (4.2). Der aktuelle Verhaltensmode kann als das Verhaltensmuster mit dem höchsten zugehörigen Wahrscheinlichkeitswert bestimmt werden. Eine eindeutige Schätzung des aktuellen Verhaltensmodes ist folglich nicht möglich, wenn die Wahrscheinlichkeitswerte nicht ausreichend unterscheidbar sind.

Das Auftreten einer Systemveränderung wird detektiert, wenn der geschätzte aktuelle Mode ein nicht-nominaler Mode ist. Die Bewertung der Wahrscheinlichkeiten und die Schätzung des Verhaltensmodes führen auch zur Lösung des Isolationsproblems der Diagnose. Die Modellgleichungen (4.3), (4.4) beschreiben das spezifische Verhalten des Systems unter substantiellen Veränderungen, folglich grenzt die Schätzung des Modes die veränderten Komponenten des Systems wesentlich ein.

Die Identifikation als ein Teilproblem der Diagnose erfordert eine geeignete Implementierung quantitativer Einflussgrößen zur Charakterisierung der substantiellen Systemveränderungen in die Modelle zugeordnet zu den Verhaltensmodes. Ein konventionelles Vorgehen zur Herleitung eines nicht-nominalen Modells von dem vorliegenden nominalen ist die Erweiterung des nominalen Modells des Systems mit den Gleichungen

$$\dot{x}_{st,k} = 0, \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_{ra,k} = 1 \quad (4.7)$$

zur Beschreibung sprungartiger Einflussgrößen (engl. step) mit  $x_{st,k} \in \mathbb{R}^{n_{x,st,k}}$  und rampenartiger (engl. ramp) mit  $x_{ra,k} \in \mathbb{R}^{n_{x,ra,k}}$  mit  $n_{x,st,k}, n_{x,ra,k} \in \mathbb{N}$  (vgl. [WA16]). Anwendungsspezifisch können weiterführende Modelle der Einflussgrößen sinnvoll und erforderlich sein. Die implementierten Einflussgrößen erweitern den wertkontinuierlichen Zustand des nominalen Modells, speziell in dieser Arbeit den generalisierten Zustand der DAE. Die Komponenten der Einflussgrößen können unter anderem korrespondierende Parameter in dem nominalen Modell ersetzen oder in die nominalen Modellgleichungen additiv, multiplikativ oder anderweitig eingehen. Die Lösung des Identifikationsproblems wird im Rahmen der Schätzung der Einflussgrößen erreicht. Die notwendige Bedingung für die Identifikation der substantiellen Systemveränderungen ist folglich die Beobachtbarkeit der erweiterten nicht-nominalen Modelle (vgl. Def. 3.1). Unter anderem können mehrere gleichzeitige Veränderungen des Systems mit einem entsprechend erweiterten nicht-nominalen Modell beschrieben werden. Die Erweiterung des nominalen Modells mit den Einflussgrößen mit einer größeren Anzahl der Komponenten kann allerdings zum Verlust der Beobachtbarkeit führen. Daher wird in der Praxis das nominale Modells mit Einflussgrößen mit einer bzw. mit einigen wenigen Komponenten erweitert, sodass die Beobachtbarkeit sichergestellt werden kann. Mit diesem Konzept ist jedoch die Identifikation mehrerer gleichzeitig auftretender Systemveränderungen nur eingeschränkt möglich. Außerdem steigt damit die Anzahl der modellierten Verhaltensmodes an, infolge dessen die eindeutige Schätzung des aktuellen Modes erschwert

wird. Somit ist eine anwendungsspezifische Analyse des Systems, der wahrscheinlichen Systemveränderungen und die zutreffende Entwicklung der Modelle unverzichtbar.

### 4.3 Schätzung der Verhaltensmodes

Die Detektion und die Isolation der substantiellen Veränderungen erfordern, wie beschrieben, die Schätzung des aktuellen Modes als eines wertdiskreten stochastischen Systemzustandes. Die Identifikation erfolgt mit der Schätzung des wertkontinuierlichen Zustandes mit den dynamischen Modellen des Systemverhaltens zugeordnet zu den Modes. Folglich entspricht das Vorgehen der modellbasierten Diagnose einer simultanen Schätzung des wertdiskreten Modes und des wertkontinuierlichen Zustandes, also einer hybriden Zustandsschätzung.

#### 4.3.1 Hidden Markov Modell

Ein geeigneter Ansatz zur Modellierung der Transitionen der Verhaltensmodes ist das Hidden Markov Modell (HMM). Der Übergang zwischen den Verhaltensmodes kann als ein zeitdiskreter stochastischer Prozess betrachtet werden. Die Übergangswahrscheinlichkeit des Modes hängt von der Zeit, den vorausgehenden Modes und weiteren Modellgrößen ab. Ferner ist die unmittelbare Beobachtung der wertdiskreten stochastischen Zustände, d.h. der Verhaltensmodes, nicht möglich. Die aufgezählten Eigenschaften des vorgestellten Modells sind die grundlegenden Eigenschaften des Hidden Markov Modells (vgl. [BP66]). Im HMM erster Ordnung hängt die Übergangswahrscheinlichkeit der wertdiskreten Zustände lediglich von einer Eingangsgröße und dem wertdiskreten Zustand zum vorausgehenden Zeitpunkt ab. Im Weiteren werden ausschließlich die HMM erster Ordnung betrachtet, daher wird auf die explizite Angabe der Ordnung verzichtet.

Das HMM für den Betrieb eines realen Systems mit der Einbeziehung der Verhaltensmodes ist

$$(S_z, S_{u,d}, S_{y,d}, P_{z,t,j}, P_{z,0}, P_{y,d,j}) \quad (4.8)$$

mit der Menge der Verhaltensmodes

$$S_z = \{z_k | k \in \{1, \dots, n_z\}, n_z \in \mathbb{N}\}, \quad (4.9)$$

der Menge der zulässigen wertdiskreten Eingangsgrößen

$$S_{u,d} = \{u_{d,k} | k \in \{1, \dots, n_{u,d}\}, n_{u,d} \in \mathbb{N}\} \quad (4.10)$$

und der Menge der zulässigen wertdiskreten Beobachtungen

$$S_{y,d} = \{y_{d,k} | k \in \{1, \dots, n_{y,d}\}, n_{y,d} \in \mathbb{N}\} \quad (4.11)$$

sowie mit den Wahrscheinlichkeiten der Verhaltensmodes im initialen Zeitpunkt  $P_{z,0}$ , der Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion der Verhaltensmodes  $P_{z,t,j}$  und den Wahrscheinlichkeiten der wertdiskreten Beobachtungen  $P_{y,d,j}$  zum Zeitpunkt  $t_j$ . Die eingeführten wertdiskreten Beobachtungen und Eingangsgrößen sind nur bedingt mit DAE als der festgelegten Modellklasse in der Diagnose vereinbar. Diese Größen dienen der Erläuterung des diskreten HMM als eine Grundlage der weiterführenden Verallgemeinerung.

Die Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion der Verhaltensmodes kann für zwei aufeinander folgende Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_j$  mit  $j = i + 1$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  mit

$$P_{z,t,j}(U_{d,j}) = \{p_{z,t,j,l,k}\}_{l,k \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}, \quad (4.12)$$

$$p_{z,t,j,l,k} = P(Z_j = z_l | Z_i = z_k, U_{d,j}) \quad (4.13)$$

angegeben werden. Darin sind  $Z_{\{i,j\}} \in S_z$  die Verhaltensmodes und  $U_{d,\{i,j\}} \in S_{u,d}$  die wertdiskreten Eingangsgrößen zu den Zeitpunkten  $t_i, t_j$ .

Die Wahrscheinlichkeiten der wertdiskreten Beobachtungen sind

$$P_{y,d,j}(Y_{d,j}, U_{d,j}) = \{p_{y,d,j,l}\}_{l \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (4.14)$$

$$p_{y,d,j,l} = P(Y_{d,j} | Z_j = z_l, U_{d,j}) \quad (4.15)$$

mit der wertdiskreten Beobachtung  $Y_{d,j} \in S_{y,d}$  zum Zeitpunkt  $t_j$ .

Die Wahrscheinlichkeiten der Modes zum Zeitpunkt  $t_j$

$$P_{z,j} = \{p_{z,j,l}\}_{l \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (4.16)$$

$$p_{z,j,l} = P(Z_j = z_l). \quad (4.17)$$

werden rekursiv ermittelt

$$P_{z,j} = \frac{\text{diag}(P_{y,d,j}(Y_{d,j}, U_{d,j})) \cdot P_{z,t,j}(U_{d,j}) \cdot P_{z,i}}{P_{y,d,j}^T(Y_{d,j}, U_{d,j}) \cdot P_{z,t,j}(U_{d,j}) \cdot P_{z,i}} \quad (4.18)$$

mit den initialen Wahrscheinlichkeiten der Verhaltensmodes

$$P_{z,0} = \{p_{z,0,k}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (4.19)$$

$$p_{z,0,k} = P(Z_0 = z_k) \quad (4.20)$$

und den Wahrscheinlichkeiten der Verhaltensmodes  $P_{z,i}$  zum vorausgehenden Zeitpunkt  $t_i$

$$P_{z,i} = \{p_{z,i,k}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (4.21)$$

$$p_{z,i,k} = P(Z_i = z_k), \quad (4.22)$$

den aufgenommenen wertdiskreten Beobachtungen

$$\{Y_{d,0}, Y_{d,1}, \dots, Y_{d,i}, Y_{d,j}\} \quad (4.23)$$

und den wertdiskreten Eingangsgrößen

$$\{U_{d,0}, U_{d,1}, \dots, U_{d,i}, U_{d,j}\} \quad (4.24)$$

für jede betrachtete Sequenz der Modes

$$\{Z_0, Z_1, \dots, Z_i, Z_j\} \quad (4.25)$$

zu den Zeitpunkten

$$\{t_0, t_1, \dots, t_i, t_j\} \quad (4.26)$$

(vgl. [HW02]). Die Wahrscheinlichkeiten der Modes  $P_{z,j}$  werden bewertet und hiermit kann der aktuelle Mode in jedem Zeitpunkt geschätzt werden. Allerdings kann das HMM ausschließlich die Transitionen der Modes in Abhängigkeit der wertdiskreten Eingangsgrößen und der wertdiskreten Beobachtungen des realen Systems beschreiben.

### 4.3.2 Probabilistic Hybrid Automaton

Das eigentliche Verhalten der realen Systeme kann oft mit wertkontinuierlichen Größen wesentlich zutreffender modelliert werden. Vor allem in Modellen physikalischer Systeme haben die wertkontinuierlichen Größen eine vorrangige Bedeutung. Das formulierte Modell (4.2), (4.3), (4.4) berücksichtigt diese Feststellung und verwendet DAE zur Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens. Mit dem Ziel der Identifikation der substantiellen Systemveränderungen ist die Betrachtung sowohl der wertkontinuierlichen als auch der wertdiskreten Größen dieses Modells erstrebenswert.

Ein geeigneter Ansatz zur Modellierung der Transitionen der Verhaltensmodes und des dynamischen Systemverhaltens mit DAE ist der Probabilistic Hybrid Automaton (PHA). Der PHA kann als ein HMM interpretiert werden, dessen Modes geeignete wertkontinuierliche, ggf. zeitdiskrete Modelle des dynamischen Verhaltens des realen Systems zugeordnet werden (vgl. [HW02]). Der PHA wird definiert als

$$(S_z, S_{u,d}, S_x, S_u, S_y, S_{v,x}, S_{v,y}, S_\xi, S_h, P_{z,t,j}, P_{z,0}, P_{y,j}) \quad (4.27)$$

mit der Menge der Verhaltensmodes

$$S_z = \{z_k | k \in \{1, \dots, n_z\}, n_z \in \mathbb{N}\}, \quad (4.28)$$

der Menge der zulässigen wertdiskreten Eingangsgrößen

$$S_{u,d} = \{u_{d,k} | k \in \{1, \dots, n_{u,d}\}, n_{u,d} \in \mathbb{N}\}, \quad (4.29)$$

der Menge der generalisierten Zustände der DAE

$$S_x = \{x_k | x_k \in \mathbb{R}^{n_{x,k}}, n_{x,k} \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, n_z\}\}, \quad (4.30)$$

der Menge der Eingangsgrößen

$$S_u = \{u_k | u_k \in \mathbb{R}^{n_{u,k}}, n_{u,k} \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, n_z\}\}, \quad (4.31)$$

der Menge der Messgrößen

$$S_y = \{y_k | y_k \in \mathbb{R}^{n_{y,k}}, n_{y,k} \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, n_z\}\}, \quad (4.32)$$

der Menge der stochastisch beschriebenen Störgrößen der generalisierten Zustände

$$S_{v,x} = \{v_{x,k} | v_{x,k} \in \mathbb{R}^{n_{x,k}}, n_{x,k} \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, n_z\}\}, \quad (4.33)$$

der Menge der stochastisch beschriebenen Störgrößen der Messgrößen

$$S_{v,y} = \{v_{y,k} | v_{y,k} \in \mathbb{R}^{n_{y,k}}, n_{y,k} \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, n_z\}\} \quad (4.34)$$

sowie der Menge der generalisierten Zustandsübergangsfunktionen (vgl. (4.5))

$$S_\xi = \{\xi_{k,j} | \xi_{k,j} : \mathbb{R}^{n_{x,k}} \times \mathbb{U}_{(\mu),k} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{x,k}}, k \in \{1, \dots, n_z\}\} \quad (4.35)$$

und der Menge der Messgrößenfunktion (vgl. (4.4))

$$S_h = \{h_k | h_k : \mathbb{R}^{n_{x,k}} \times \mathbb{R}^{n_{u,k}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{y,k}}, k \in \{1, \dots, n_z\}\}. \quad (4.36)$$

Die Funktionenräume  $\mathbb{U}_{(\mu),k}$  enthalten die Eingangsgrößen mit den zugehörigen zeitlichen Ableitungen  $u_{(\mu),k} = [u_k, \dot{u}_k, \dots, u_k^{(\mu)}]$ . Die korrespondierenden zeitdiskreten Modelle des dynamischen Systemverhaltens und des Messsystems zugeordnet zu den Verhaltensmodes sind (4.5), (4.4). Die Wahrscheinlichkeiten der Verhaltensmodes im initialen Zeitpunkt enthält  $P_{z,0}$ . Die Ermittlung der Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion der Verhaltensmodes  $P_{z,t,j}$  und der Wahrscheinlichkeiten der Messgrößen  $P_{y,j}$  zum Zeitpunkt  $t_j$  setzt eine Zustandsschätzung mit einer Bank den Verhaltensmodes zugeordneter Kalman-Filter voraus. Hierbei nutzt jedes der  $n_z$  Kalman-Filter das jeweilige dynamische Modell des Systems. Die Formulierungen der KF mit nichtlinearen DAE werden im Abschn. 3.4 ausführlich erläutert.

Die Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion der Verhaltensmodes für zwei aufeinander folgende Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_j$  mit  $j = i + 1$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$

$$P_{z,t,j} (X_{j|j}, U_j, U_{d,j}) = \{p_{z,t,j,l,k}\}_{l,k \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}, \quad (4.37)$$

$$p_{z,t,j,l,k} = P (Z_j = z_l | Z_i = z_k, x_{k,j|j}, u_k(t_j), U_{d,j}) \quad (4.38)$$

wird abhängig von den Erwartungswerten der geschätzten generalisierten Zustände nach der Korrektur aus den Kalman-Filtern  $X_{j|j} = \{x_{k,j|j}\}$  und den Eingangsgrößen  $U_j = \{u_k(t_j)\}$  mit  $k \in \{1, \dots, n_z\}$  sowie den wertdiskreten Eingangsgrößen  $U_{d,j} = \{u_{d,k}(t_j)\}$  mit  $k \in \{1, \dots, n_{d,u}\}$  zum Zeitpunkt  $t_j$  definiert. Die Größen  $X_{j|j}$  und  $U_j$  sind die Variablen der Modelle des dynamischen

Systemverhaltens. Die Wahrscheinlichkeit des Modeüberganges kann bedingt durch verschiedene Zusammenhänge von diesen Variablen beeinflusst werden. Ein naheliegendes Beispiel ist der Übergang des Systems zwischen unterschiedlichen Betriebszuständen, die durch zugeordnete Wertebereiche der Größen beschrieben werden. Die wertdiskreten Eingangsgrößen  $U_{d,j}$  können abgesehen von deren initialen Bestimmung im HMM zur Initiierung der Schaltvorgänge und zur Verhinderung der Modeübergänge verwendet werden.

Die Wahrscheinlichkeiten der Messgrößen werden mit der im KF getroffenen Annahme der Normalverteilung der Modellgrößen (vgl. [Hof05]) berechnet

$$P_{y,j}(y_{s,j}) = \{p_{y,j,l}\}_{l \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (4.39)$$

$$p_{y,j,l} = P(y_{s,j} | Z_j = z_l, x_{l,j|j}, C_{x,x,l,j|j}) \quad (4.40)$$

$$p_{y,j,l} = \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot e_{y,l,j|j}^T \cdot C_{y,y,l,j|j}^{-1} \cdot e_{y,l,j|j}\right)}{\sqrt{(2 \cdot \pi)^{n_{y,l}} \cdot \det(C_{y,y,l,j|j})}} \quad (4.41)$$

mit den Erwartungswerten der generalisierten Zustände  $x_{l,j|j}$ , den Kovarianzmatrizen der generalisierten Zustände  $C_{x,x,l,j|j}$ , den Schätzfehlern der Messgrößen  $e_{y,l,j|j} = y_{s,j} - y_{l,j|j}$  und den Kovarianzmatrizen der geschätzten Messgrößen  $C_{y,y,l,j|j}$  nach der Korrektur aus den Kalman-Filtern sowie mit der Messgröße des realen Systems  $y_{s,j}$  zum Zeitpunkt  $t_j$ . Der unmittelbare Einfluss der Eingangsgrößen der dynamischen Modelle und der wertdiskreten Eingangsgrößen ist in der Berechnung nicht berücksichtigt. Dieser Einfluss kann, wenn erforderlich, entsprechend der Definitionen der Wahrscheinlichkeiten der Messgrößen in HMM einbezogen werden.

Die Wahrscheinlichkeiten der Modes zum Zeitpunkt  $t_j$

$$P_{z,j} = \{p_{z,j,l}\}_{l \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (4.42)$$

$$p_{z,j,l} = P(Z_j = z_l). \quad (4.43)$$

werden rekursiv ermittelt

$$P_{z,j} = \frac{\text{diag}(P_{y,j}(y_{s,j})) \cdot P_{z,t,j}(X_{j|j}, U_j, U_{d,j}) \cdot P_{z,i}}{P_{y,j}^T(y_{s,j}) \cdot P_{z,t,j}(X_{j|j}, U_j, U_{d,j}) \cdot P_{z,i}} \quad (4.44)$$

mit den initialen Wahrscheinlichkeiten der Verhaltensmodes

$$P_{z,0} = \{p_{z,0,k}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (4.45)$$

$$p_{z,0,k} = P(Z_0 = z_k), \quad (4.46)$$

den Wahrscheinlichkeiten der Verhaltensmodes zum vorausgehenden Zeitpunkt  $t_i$

$$P_{z,i} = \{p_{z,i,k}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}} \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad (4.47)$$

$$p_{z,i,k} = P(Z_i = z_k), \quad (4.48)$$

den aufgenommenen Messgrößen des realen Systems

$$\{y_{s,0}, y_{s,1}, \dots, y_{s,i}, y_{s,j}\}, \quad (4.49)$$

den Eingangsgrößen

$$\{U_0, U_1, \dots, U_i, U_j\} \quad (4.50)$$

und den wertdiskreten Eingangsgrößen

$$\{U_{d,0}, U_{d,1}, \dots, U_{d,i}, U_{d,j}\} \quad (4.51)$$

für jede betrachtete Sequenz der Modes

$$\{Z_0, Z_1, \dots, Z_i, Z_j\} \quad (4.52)$$

zu den Zeitpunkten

$$\{t_0, t_1, \dots, t_i, t_j\} \quad (4.53)$$

(vgl. [HW02]). Die Wahrscheinlichkeiten der Modes  $P_{z,j}$  werden bewertet und hiermit kann der aktuelle Mode in jedem Zeitpunkt geschätzt werden. Die Erwartungswerte der generalisierten Zustände der Kalman-Filter werden zur Schätzung des wertkontinuierlichen Zustandes des realen Systems verwendet. Sowohl der Mode als auch der Wert des wertkontinuierlichen generalisierten Zustandes werden simultan geschätzt, daher wird das Vorgehen als hybride Zustandsschätzung bezeichnet.

### 4.3.3 Interacting Multiple Model

Die Wahrscheinlichkeiten der Modes  $P_{z,j}$  können mit dem PHA entsprechend (4.44) für jede betrachtete Sequenz der Modes  $\{Z_0, Z_1, \dots, Z_i, Z_j\}$  zu den Zeitpunkten  $\{t_0, t_1, \dots, t_i, t_j\}$  rekursiv ermittelt werden. Die Anzahl der möglichen Sequenzen nimmt mit jedem Zeitschritt exponentiell zu. Die optimale Schätzung des aktuellen Modes des realen Systems zum Zeitpunkt  $t_j$  erfordert allerdings die Bewertung der Wahrscheinlichkeiten der Modes für alle möglichen Sequenzen der Modes (vgl. [WA16] engl. optimal hybrid estimation, [Hof05] engl. full-hypothesis hybrid estimation). Der Rechenaufwand beschränkt daher die Anwendung der optimalen hybriden Zustandsschätzung auf Sonderfälle. Die Reduktion des Aufwandes der hybriden Zustandsschätzung kann mit verschiedenen Ansätzen erreicht werden. Diese Ansätze vereinfachen die Betrachtung, führen jedoch zum Verlust der Optimalität der Schätzung. Relevante Beispiele dafür sind die generalisierten Pseudo-Bayesian-Ansätze [AF70], die Detektionsschätzung [Tug81], die Residual-Korrelation-Bank der Kalman-Filter [HM00], und der Interacting-Multiple-Model-Algorithmus (IMM) [BBS88], [BSLK04].

Die nachfolgende Darstellung der hybriden Zustandsschätzung mit IMM setzt für die generalisierten Zustände  $x_k \in \mathbb{R}^{n_x, k}$  der verwendeten DAE (4.3) eine übereinstimmende Anzahl der Komponenten  $n_{x, k} = n_{x, l} \forall k, l \in \{1, \dots, n_z\}$  und deren übereinstimmende physikalische Bedeutung voraus. Die hybride Zustandsschätzung kann grundsätzlich mit sehr unterschiedlichen Modellen des dynamischen Verhaltens des Systems für jeden Verhaltensmode implementiert werden. Die Zustände der Modelle können folglich Elemente unterschiedlicher Zustandsräume sein. Die Zustandsschätzung wird in diesem Fall mit den Modellen mit unterschiedlichen, heterogenen Zustandsräumen entworfen (vgl. [WS19]). Die Ansätze werden jedoch in dieser Arbeit nicht weiter erläutert.

Das IMM verwendet den in Abschn. 4.3.2 erläuterten PHA. Ein Kalman-Filter wird für jeden betrachteten Verhaltensmode mit dem zugeordneten Modell des Systemverhaltens, hier eine reguläre DAE, eingesetzt. Die Wahrscheinlichkeiten der Modes  $P_{z, j}$  in (4.44) werden ermittelt und bewertet, wodurch der aktuelle Mode des betrachteten realen Systems geschätzt wird. Der kombinierte Zustandswert

$$X_{c, j|j} = [x_{1, j|j}, \dots, x_{n_z, j|j}] \cdot P_{z, j} \quad (4.54)$$

ist das Ergebnis der hybriden Zustandsschätzung für den wertkontinuierlichen Zustand des realen Systems mit den Erwartungswerten der generalisierten Zustände der einzelnen Kalman-Filter nach der Korrektur  $x_{k, j|j}$ ,  $k \in \{1, \dots, n_z\}$ .

Die Fortsetzung der Zustandsschätzung mit den Kalman-Filtern erfolgt mit den kombinierten Erwartungswerten  $x_{c, k, j|j}$

$$[x_{c, 1, j|j}, \dots, x_{c, n_z, j|j}] = [x_{1, j|j}, \dots, x_{n_z, j|j}] \cdot P_{c, j}^T \quad (4.55)$$

sowie den zugeordneten kombinierten Kovarianzmatrizen  $C_{c, x, k, j|j}$

$$C_{c, x, k, j|j} = (C_{x, k, j|j} - D_{c, k, j|j}) \cdot P_{c, j}^T \quad (4.56)$$

$$D_{c, x, k, j|j} = (x_{k, j|j} - x_{c, k, j|j}) \cdot (x_{k, j|j} - x_{c, k, j|j})^T \quad (4.57)$$

mit den Erwartungswerten  $x_{k, j|j}$  und Kovarianzmatrizen  $C_{x, k, j|j}$  der generalisierten Zustände der einzelnen Kalman-Filter nach der Korrektur für  $k \in \{1, \dots, n_z\}$  entsprechend den Verhaltensmodes. Darin bezeichnet  $P_{c, j}$  die Misch- bzw. Kombinationswahrscheinlichkeit (engl. mixing probability)

$$P_{c, j} = \psi^{-1} \cdot P_{z, t, j} (X_{j|j}, U_j, U_{d, j}) \cdot \text{diag}(P_{z, i}), \quad (4.58)$$

$$\psi = \text{diag}(P_{z, t, j} (X_{j|j}, U_j, U_{d, j}) \cdot P_{z, i}), \quad (4.59)$$

die den Grad der Interaktion der Modelle der Modes festlegt. Die kombinierten Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen  $\{x_{c, k, j|j}, C_{c, x, k, j|j}\}$  ersetzen die Werte  $\{x_{k, j|j}, C_{x, k, j|j}\}$  im darauf folgenden diskreten Zeitschritt der Kalman-Filter entsprechend. Die in Abschn. 3.4 beschriebenen KF mit DAE sind ohne etwaige Modifikationen für die hybride Schätzung der generalisierten Zustände geeignet.



Die Kombination der Schätzungen in der hybriden Zustandsschätzung mit IMM kann mit der Einbeziehung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der geschätzten Zustände allgemeiner dargestellt werden

$$\left[ p_{c,1,j|j}, \dots, p_{c,n_z,j|j} \right] = \left[ p_{1,j|j}, \dots, p_{n_z,j|j} \right] \cdot P_{c,j}^T. \quad (4.60)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Schätzungen der wertkontinuierlichen Zustände  $p_{k,j|j}$  und die kombinierten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der hybriden Zustandsschätzung  $p_{c,k,j|j}$  mit  $k \in \{1, \dots, n_z\}$  für die modellierten Verhaltensmodes mit entsprechend unterschiedlichen Modellen des dynamischen Systemverhaltens können hierbei beliebige, nicht Gaußsche stochastische Verteilungen beschreiben.

## 4.4 Beispiele

Ein akademisches Beispiel für ein technisches System, das substantiellen Veränderungen unterliegen kann, ist das mathematische Pendel (vgl. Abb. 2.1). Die Modellbildung für die Anwendung der hybriden Zustandsschätzung wird an diesem Beispiel erläutert.

Das Modell des nominalen Verhaltens des Systems mit der Verwendung der eingeführten kartesischen Koordinaten ist eine Index 3 DAE

$$f_1(x_1, \dot{x}_1, u_1, t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{1,1} - x_{1,3} \\ \dot{x}_{1,2} - x_{1,4} \\ \dot{x}_{1,3} - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{1,1} \cdot x_{1,5} - u_{1,1} \\ \dot{x}_{1,4} - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{1,2} \cdot x_{1,5} - u_{1,2} \\ x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2 - a_r^2 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.61)$$

$$u_1 = [u_{1,1}, u_{1,2}]^T = [0, a_g]^T. \quad (4.62)$$

Darin sind  $a_m$  die Masse,  $a_r$  der Radius der Bewegungsbahn,  $a_g$  die Gravitationsbeschleunigung und  $u_1$  die Eingangsgröße. Die Komponenten des generalisierten Zustandes  $x_1$  beschreiben die Position der Masse in dem Koordinatensystem mit  $x_{1,1}$ ,  $x_{1,2}$ , die Geschwindigkeit mit  $x_{1,3}$ ,  $x_{1,4}$  und die erforderliche Kraft der Bahnführung mit  $x_{1,5}$ . Der vorangestellte Index 1 der Variablen gibt den Mode an und wird für das Kennzeichnen des nominalen Systemverhaltens sowie des nominalen Modells verwendet.

Eine offensichtlich mögliche substantielle Systemveränderung ist das Versagen der Bahnführung, d.h. der mechanischen Verbindung zwischen dem Lager und der Masse des Pendels. Die Index 1 DAE

$$f_2(x_2, \dot{x}_2, u_2, t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{2,1} - x_{2,3} \\ \dot{x}_{2,2} - x_{2,4} \\ \dot{x}_{2,3} - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{2,1} \cdot x_{2,5} - u_{2,1} \\ \dot{x}_{2,4} - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_{2,2} \cdot x_{2,5} - u_{2,2} \\ x_{2,5} \end{bmatrix} = 0, \quad (4.63)$$

$$u_2 = [u_{2,1}, u_{2,2}]^T = [0, a_g]^T \quad (4.64)$$

beschreibt das Systemverhalten zugeordnet zum Mode 2 unter diesen Betriebsbedingungen. Entsprechend werden die Variablen vorangestellt mit 2 indiziert. Der generalisierte Zustand und weitere Variablen und Parameter repräsentieren in diesem Modell korrespondierende Größen des realen Systems übereinstimmend zu dem Modell des Modes 1. Folglich ist die Kombination der Zustände in der hybriden Zustandsschätzung möglich.

Das Auftreten weiterer substantieller Veränderungen des Systems wird zunächst nicht betrachtet. Damit ist die Menge der modellierten Verhaltensmodes  $S_z$  des Systems 'Mathematisches Pendel'

$$S_z = \{z_1, z_2\}, \quad (4.65)$$

$$z_1 = \text{'mit Bahnführung'}, \quad (4.66)$$

$$z_2 = \text{'ohne Bahnführung'} \quad (4.67)$$

und die Anzahl der Modes  $n_z = 2$  (vgl. Abschn. 4.3.2). Folglich sind zwei Kalman-Filter für die hybride Zustandsschätzung mit dem IMM erforderlich. Der Aufbau der KF mit DAE mit höherem Index wird in Abschn. 3.4 behandelt und in dem Beispiel nicht weiter erläutert. Ferner werden die Aufnahme einer Messgröße an dem realen System in geeigneten Zeitabständen und die Sicherstellung der Beobachtbarkeit vorausgesetzt.

Das Versagensmechanismus der Bahnführung wird vereinfacht jedoch unter physikalischen Gesichtspunkten modelliert. Hierfür wird ein Grenzwert  $a_{x,5}$  des Betrages der Zustandskomponente  $x_{1,5}$  definiert, dessen Annäherung und Überschreitung zur Steigerung der Versagenswahrscheinlichkeit führen. Der Grenzwert kann als der Betrag der maximal ertragbaren Kraft der Bahnführung interpretiert werden. Ferner wird das Beispiel mit einer Möglichkeit zum gesteuerten Lösen der Bahnführung, d.h. zum Trennen der mechanischen Verbindung zwischen dem Lager und der Masse des Pendels, erweitert. Hierfür werden

$$S_{u,d} = \{u_{d,1}\}, \quad (4.68)$$

$$u_{d,1} \in \{\text{'aktive Bahnführung'}, \text{'inaktive Bahnführung'}\} \quad (4.69)$$

die Menge der wertdiskreten Eingangsgrößen  $S_{u,d}$  mit der einzelnen wertdiskreten Eingangsgröße  $u_{d,1}$  in die Modelle der Verhaltensmodes eingeführt.

Die Modellbildung des Pendels mit der substantiellen Systemveränderung wird mit der Betrachtung der aufeinander folgenden Zeitpunkte  $t_i, t_j$  mit  $j = i + 1, i, j \in \mathbb{N}$  fortgesetzt. Die Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion der Modes  $P_{z,t,j}$  wird abhängig von den Erwartungswerten der geschätzten generalisierten Zustände nach der Korrektur aus den Kalman-Filtern

$$X_{j|j} = \{x_{1,j|j}, x_{2,j|j}\} \quad (4.70)$$

und den wertdiskreten Eingangsgrößen  $U_{d,j}$  mit

$$P_{z,t,j}(X_{j|j}, U_j, U_{d,j}) = \{p_{z,t,j,l,k}\}_{l,k \in \{1,2\}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (4.71)$$

$$p_{z,t,j,l,k} = P \left( Z_j = z_l | Z_i = z_k, x_{k,j|j}, u_k(t_j), U_{d,j} \right) \quad (4.72)$$

$$p_{z,t,j,1,1} = p_{u,d,j} \cdot p_{x,j} \quad (4.73)$$

$$p_{z,t,j,1,2} = a_{p,1,2} \cdot p_{u,d,j} \cdot p_{x,j} \quad (4.74)$$

$$p_{z,t,j,2,1} = 1 - p_{u,d,j} \cdot p_{x,j} \quad (4.75)$$

$$p_{z,t,j,2,2} = 1 - a_{p,1,2} \cdot p_{u,d,j} \cdot p_{x,j} \quad (4.76)$$

$$p_{u,d,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } u_{d,1}(t_j) = \text{'aktive Bahnführung'} \\ 0 & \text{für } u_{d,1}(t_j) = \text{'inaktive Bahnführung'} \end{cases} \quad (4.77)$$

$$p_{x,j} = \frac{1}{1 + \exp \left( a_{p,x,5} \cdot \left( \text{abs} \left( x_{1,j|j,5} \right) - a_{x,5} \right) \right)} \quad (4.78)$$

zum Zeitpunkt  $t_j$  definiert. Die explizite Abhängigkeit der Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion von den Eingangsgrößen  $u_1$  und  $u_2$  wird in dem Beispiel nicht betrachtet. Die eingeführten Variablen  $p_{u,d,j}$  und  $p_{x,j}$  können als die Wahrscheinlichkeiten für das Verbleiben des Systems im Mode  $z_1$  abhängig von der wertdiskreten Eingangsgröße und dem geschätzten Zustand entsprechend interpretiert werden. Der reelle Parameter  $a_{p,x,5} > 0$  charakterisiert die Abhängigkeit der Versagenswahrscheinlichkeit der Bahnführung  $1 - p_{x,j}$  von dem Betrag der geschätzten Kraft  $x_{1,i|i,5}$  mit Bezug auf den Grenzwert  $a_{x,5}$ . Die Komponente  $p_{z,t,j,1,2}$  der Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von dem Mode  $z_2$  im Zeitpunkt  $t_i$  zum  $z_1$  im Zeitpunkt  $t_j$ , also für das Wiedererlangen des nominalen Verhaltens an. Der Wert der Komponente ist für das reale System aus physikalischen Gründen offensichtlich gleich null. In der Parametrierung der hybriden Zustandsschätzung wird dennoch ein geeignet kleiner Wert größer null festgelegt. Damit wird das permanente Beharren des Schätzalgorithmus in dem temporär nicht zutreffend geschätzten Mode  $z_2$  vermieden. Der reelle Parameter  $0 < a_{p,1,2} < 1$  wird zur Vorgabe der Wahrscheinlichkeit verwendet.

Die Identifikation der modellierten substantiellen Systemveränderung ist mit den vorgestellten Modellen der Verhaltensmodes  $z_1$  und  $z_2$  nicht möglich, denn diese enthalten keine zugeordneten Einflussgrößen zur quantitativen Bewertung der Veränderung. Für die Darstellung des Vorgehens wird ein weiterer Mode eingeführt, indem das nominale Modell mit zwei Effekten erweitert wird. Zum einen wird eine Möglichkeit der gleichmäßig beschleunigten Bewegung des Bezugskoordinatensystems des Pendels angenommen. In der Realität könnte diese Situation in einem Fahrzeug eintreten. Zum anderen wird eine mögliche Veränderung der Bewegungsbahn modelliert. Dieser Fall ist im realen System wahrscheinlich, wenn die mechanische Verbindung zwischen der Masse und dem

Lager während des Bewegungsvorganges deformiert wird. Das Modell

$$f_3(x_3, \dot{x}_3, u_3, t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{3,1} - x_{3,3} \\ \dot{x}_{3,2} - x_{3,4} \\ \dot{x}_{3,3} - \frac{-x_{3,1} \cdot x_{3,5}}{a_m \cdot (a_r + a_{ra,3,1} \cdot x_{ra,3,1})} - u_{3,1} + x_{st,3,1} \\ \dot{x}_{3,4} - \frac{-x_{3,2} \cdot x_{3,5}}{a_m \cdot (a_r + a_{ra,3,1} \cdot x_{ra,3,1})} - u_{3,2} \\ x_{3,1}^2 + x_{3,2}^2 - (a_r + a_{ra,3,1} \cdot x_{ra,3,1})^2 \\ \dot{x}_{st,3,1} \\ \dot{x}_{ra,3,1} - 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.79)$$

$$u_3 = [u_{3,1}, u_{3,2}]^T = [0, a_g]^T \quad (4.80)$$

des möglichen Modes  $z_3$  implementiert diese Effekte. Die eingeführten Zustandskomponenten  $x_{st,3,1}$  und  $x_{ra,3,1}$  repräsentieren die konstante Beschleunigung des Bezugskoordinatensystems und die Veränderung des Radius der Bewegungsbahn des Pendels entsprechend. Diese Einflussgrößen charakterisieren quantitativ die substantiellen Veränderungen und können im Rahmen der Zustandsschätzung mit dem KF geschätzt werden. Der Parameter  $a_{ra,3,1}$  wird zur geeigneten Skalierung der Einflussgröße  $x_{ra,3,1}$  verwendet. Die Modelle der Verhaltensmodes  $z_1$  und  $z_2$  werden entsprechend mit

$$x_{st,\{1,2\},1} = 0, \quad (4.81)$$

$$x_{ra,\{1,2\},1} = 0 \quad (4.82)$$

erweitert, damit die Kombination der generalisierten Zustände in der hybriden Zustandsschätzung mit dem Zustand des Modes  $z_3$  möglich wird.

## 4.5 Zusammenfassung

Die modellbasierte Diagnose ist ein umfassendes Fachgebiet. Eine hinreichende Übersicht zu den Verfahren der modellbasierten Diagnose ist in der Arbeit weder möglich noch angestrebt. Hierzu wird auf [Ise93], [Ise06], [Ise11], [SB08] verwiesen. In dem Kapitel wird nur eine kurze Einführung in die modellbasierte Diagnose mit der Darstellung der notwendigen Grundlagen für die Diskussion eines speziellen Verfahrens gegeben.

Ein Ansatz zur Behandlung der grundlegenden Problemstellungen der Diagnose wird ausführlich beschrieben. Das Verfahren gründet auf einer stochastischen Beschreibung alternativer Systemverhaltensmuster, bezeichnet als Modes. Der Mode wird als ein wertdiskreter Zustand des Systems aufgefasst. Die Ursachen des Übergangs innerhalb der Menge des Verhaltensmodes sind sowohl intern als auch extern induzierte Variationen des Systems, bezeichnet als substantielle Systemveränderungen. Zu der Klasse der substantiellen Systemveränderungen werden auch die möglichen Systemfehler gezählt, deren Ursache oder Wirkung nachteilig für den Betrieb des Systems sind. Das Verhalten

des Systems innerhalb der Modes wird durch eigenständige dynamische Modelle mit wertkontinuierlichen Zuständen beschrieben, in dieser Arbeit durch differential-algebraische Gleichungen. Das Diagnoseverfahren schätzt simultan den Mode und den wertkontinuierlichen Zustand des Systems. Folglich wird die Methodik als hybride Zustandsschätzung bezeichnet. Die hybride Zustandsschätzung mit dem Interacting-Multiple-Model-Ansatz wird diskutiert. Die Modellierung der Einflussgrößen zur quantitativen Charakterisierung der substantiellen Systemveränderungen wird erläutert. Die Identifikation der substantiellen Systemveränderungen wird als eine Schätzung der Einflussgrößen interpretiert. Die Modellierung des Systemverhaltens mit der Einbeziehung der substantiellen Systemveränderungen wird am Beispiel des mathematischen Pendels demonstriert.

Ein Beitrag der Arbeit ist die methodische Einführung der Modelle des Systemverhaltens in Form nichtlinearer differential-algebraischer Gleichungen mit höherem Index in das Diagnoseverfahren auf der Basis der hybriden Zustandsschätzung. Die notwendige Voraussetzung für die Erweiterung der hybriden Zustandsschätzung ist die Formulierung des Kalman-Filters mit DAE.

# Kapitel 5

## Anwendung modellbasierter Methoden im industriellen Montagesystem

Die Anwendung modellbasierter Methoden in einem industriellen System ist ein wesentlicher Teil der vorliegenden Arbeit. Das Forschungsprojekt ESEMO, Entwicklung Selbstüberwachender Energieoptimierter MOntagesysteme, wird mit dem Ziel initiiert, geeignete Methoden der Optimierung und der Überwachung für industrielle Montagesysteme zu entwickeln und zu implementieren. Das Projekt bietet somit unmittelbar in der Form der gesetzten Ziele und der Rahmenbedingungen sowohl die Problemstellungen als auch die Anwendungsmöglichkeiten für die Konzeption und Umsetzung der vorgestellten modellbasierten Analysetechniken. Im Rahmen des Projekts werden mit der maßgebenden Beteiligung des Autors der vorliegenden Arbeit die Kalman-Filter mit differential-algebraischen Gleichungen (vgl. Kap. 3) und die darauf basierenden Diagnoseverfahren (vgl. Kap. 4) entwickelt und angewandt.

In diesem Kapitel wird die Relevanz der DAE für die praktische Anwendung herausgestellt. Hierfür wird mit dem Bezug auf das Forschungsprojekt die Modellbildung realer Systeme am Beispiel eines industriellen Montagesystems mit der Verwendung einer objektorientierten Modellierungstechnik eingehend vorgestellt. Der Einsatz der modellbasierten Verfahren wird in Abschn. 5.5 diskutiert. Zur vollständigen Darstellung des Forschungsprojekts wird die Optimierung der Steuerung in Abschn. 5.4 beschrieben. Die Anwendung der Zustandsschätzung und der modellbasierten Diagnose bilden den thematischen Schwerpunkt des Kapitels. Die Einordnung der Methoden in den Kontext des Forschungsprojekts weist deren Relevanz für die industrielle Praxis nach und erfordert eine ausführliche Beschreibung des Projekts. Die Beschreibung wird unmittelbar auf das Demonstratorsystem bezogen (vgl. Abschn. 5.2, Abschn. 5.3). Das prinzipielle Vorgehen wird in Abschn. 5.6 für industrielle Montagesysteme verallgemeinert.

## 5.1 Ziele und Rahmenbedingungen

Die Energieeffizienz ist eine stets aktuelle Problematik und ein wichtiger Wettbewerbsfaktor in der industriellen Produktion. Der Energiebedarf der Produktionsprozesse und der Energieverbrauch der Produkte sind die wesentlichen in diesem Zusammenhang zu untersuchenden Größen. Im Bereich des Maschinen- und Fahrzeugbaus wird die Energieeffizienz vor allem als eines der wichtigsten Produktcharakteristika aufgefasst. Ferner gewinnt die Energieeffizienz eine zunehmend größere Bedeutung als ein Marketingmerkmal. Der Gegenstand des Forschungsprojekts ESEMO ist vor diesem Hintergrund die Energieeffizienz der Montagesysteme in industriellen Fertigungsprozessen.

Das übergreifende Ziel des Projekts ist die Entwicklung eines weitgehend verallgemeinernden Vorgehens zur Steigerung der Energieeffizienz der Montagesysteme durch die Modifikation der Systemsteuerung und die Variation deren Parameter. Die Modifikation mechanischer, elektrischer und weiterer physischer Komponenten des Systems wird grundsätzlich vermieden. Die Grundlage der Entwicklung ist die modellbasierte Analyse des Systems, der Steuerung und der technologischen Randbedingungen sowie die Anwendung geeigneter mathematischer Optimierungsmethoden. Hierbei ist die Zielgröße der Optimierung der Energieverbrauch des betrachteten Montagesystems, die Argumente sind die Parameter der Systemsteuerung und die Restriktionen sind die technologischen sowie die ökonomischen Randbedingungen des Montageprozesses. Unter diesen Bedingungen werden mathematische Methoden und empirische Ansätze in der Optimierung kombiniert angewandt.

Die Steigerung der Energieeffizienz wird unter realen Betriebsbedingungen angestrebt. Somit erfordert die Zielsetzung offensichtlich die Berücksichtigung der möglichen und im Allgemeinen stets präsenten Störeinflüsse. Des Weiteren ist die Bewertung der möglichen Systemveränderungen notwendig. Sowohl die Störungen als auch die gegebenenfalls eintretenden Systemveränderungen können wesentliche Auswirkungen auf die Leistungsaufnahme des betrachteten Montagesystems haben und folglich den Energiebedarf des Montageprozesses erheblich beeinflussen. Die Ermittlung des Systemzustandes erfolgt unter Berücksichtigung der Störeinflüsse mit der Anwendung der Verfahren der Zustandsschätzung (vgl. Kap. 3). Die Diagnose basiert auf der Zustandsschätzung, verallgemeinert sowie erweitert dieselbe, und ermöglicht damit die Charakterisierung der betriebsrelevanten Systemveränderungen (vgl. Kap. 4). Diese Teilaufgaben umfasst der Begriff der Selbstüberwachung in dem Titel des Forschungsprojekts. Die Selbstüberwachung wird in dem Zusammenhang zur Umschreibung der algorithmischen Zustandsschätzung und der modellbasierten Systemdiagnose verwendet.

Das Vorgehen zur Steigerung der Energieeffizienz der Montagesysteme wird zunächst für einen Demonstrator entwickelt. Das Demonstratorsystem ist in dem Forschungsprojekt die Stanznietanlage RIVSET Vario des Herstellers Böllhoff Automation GmbH (vgl. Abschn. 5.2). Die Übertragbarkeit des Vorgehens

wird durch die Verallgemeinerung, die Abstraktion und die Strukturierung sichergestellt (vgl. Abschn. 5.6). Die Strukturierung des Vorgehens sieht die Definition mehrerer Analysemethoden und korrespondierender Teilziele vor.

Das Projekt wird in der Zeit 2011-09-01/2014-02-28 durchgeführt. Das Konsortium bilden die Böllhoff Automation GmbH, die Fluidon GmbH, die ITQ GmbH und die Fachhochschule Bielefeld. Das Projekt wird aus Mitteln der EU und des Landes Nordrhein-Westfalen gefördert.

## 5.2 Demonstratorsystem RIVSET Vario

Die Entwicklung des Vorgehens zur Steigerung der Energieeffizienz der Montagesysteme basiert auf der Untersuchung des Stanznietensystems RIVSET Vario des Herstellers Böllhoff Automation GmbH. Das Montagesystem wird zum Fügen dünnwandiger Werkstücke in der industriellen Fertigung eingesetzt.

Das zugrunde liegende Fügeverfahren ist das Halbhohlstanznieten (vgl. [BG15]). Der Niet ist zum Teil hohl. Das Setzen der Nietverbindung erfolgt ohne das Vorbohren und kann in sechs Schritte aufgeteilt werden (vgl. Abb. 5.1):

1. das Positionieren des Werkzeugs bzw. der Werkstücke,
2. der Vorhub und das Aufsetzen des Niederhalters, das Fixieren der Werkstücke,
3. der Vorhub und das Aufsetzen des Setzstempels, das Aufsetzen des Nietes,
4. der Vorhub des Setzstempels, das Stanzen der Werkstücke mit dem Niet,
5. der Vorhub des Setzstempels, das Formen der Nietverbindung,
6. der Rückhub, das Entformen der Verbindung.

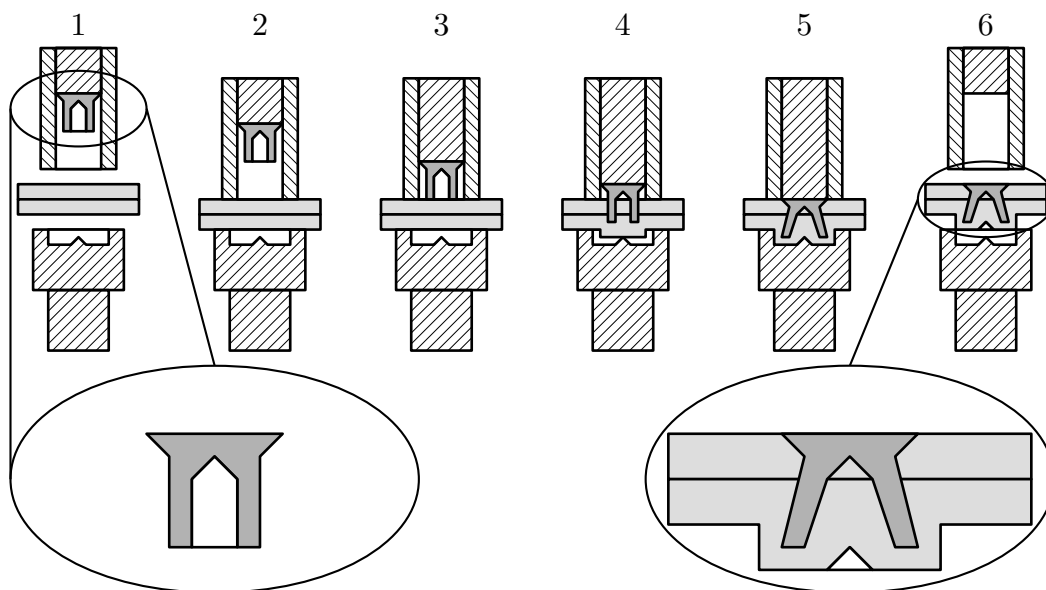


Abbildung 5.1: Prinzipschaubild des Fügeprozesses Halbhohlstanznieten



Das Ergebnis des Fügeprozesses ist eine hochfeste, flüssigkeits- und gasdichte Verbindung. Die wichtigsten Vorteile des Fügeverfahrens sind evident. Die Werkstücke erfahren keine thermische Belastung. Die Verbindung kann für eine Kombination nahezu beliebiger Werkstoffe hergestellt werden. Der Arbeitsvorgang erfordert keine Vorbereitung der Werkstücke und wird in einer sehr kurzen Zeit durchgeführt.

Ein wesentlicher Nachteil des Stanznietens ist der hohe Kraftaufwand für das Setzen der Nietverbindung. Ferner muss die Setzkraft zur Sicherstellung der Qualität der Verbindung innerhalb des Vorganges kontrolliert vorgegeben werden. Eine derartige Bereitstellung der Kraft setzt unter realisierbaren technischen und ökonomischen Bedingungen eine Leistungstransformation voraus. Unter diesen Anforderungen werden in den Stanznietensystemen hydraulische oder elektromechanische Antriebskonzepte mit Spindelgetrieben umgesetzt. Hierbei weisen die Stanznietanlagen mit dem Spindelgetriebe aufgrund des Konstruktionsprinzips einen höheren Wirkungsgrad, jedoch eine geringere Lebensdauer vor. Daher ist die Steigerung der Effizienz ein primäres Ziel vor allem in der Entwicklung hydraulischer Stanznietensysteme. Die Leistungstransformation reduziert jedoch unabhängig von deren Art den Wirkungsgrad des Arbeitsprozesses. Der Energiebedarf ist folglich im Allgemeinen eine zentrale Charakteristik der Stanznietanlagen.

Das untersuchte Stanznietensystem RIVSET Vario (vgl. Abb. 5.2) des Konsortialmitgliedes Böllhoff Automation GmbH im Forschungsprojekts ESEMO ist eine hydraulische Stanznietanlage. Die Anlage kann in fünf Bereiche unterteilt werden:

1. Schaltschrank,
2. Hydraulikaggregat,
3. Ventilblock,
4. Werkzeug,
5. Nietzuführung.

Der Schaltschrank integriert elektrische Signalverarbeitung und Leistungstransformation, enthält unter anderem die Bedieneinheit (engl. Human Machine Interface, HMI) und die Speicherprogrammierbare Steuerung (SPS, engl. Programmable Logic Controller, PLC). Das Hydraulikaggregat stellt hydraulische Leistung bereit und besteht im Wesentlichen aus einem Elektromotor, einer hydraulischen Pumpe, einem Überdruckventil, einem Rücklaufilter, einem Behälter und einer Vorrichtung zur Kühlung des Arbeitsfluides. Der Ventilblock ist eine Baugruppe aus integrierten hydraulischen Ventilen zur Verteilung der Leistung. Das Werkzeug ist eine mechanisch gekoppelte Kombination aus einem einfach- und einem doppeltwirkenden hydraulischen Zylinder zur Betätigung des Niederhalters und des Setzstempels entsprechend. Ferner enthält das Werkzeug den Setzkopf und die Matrize zum Formen der Nietverbindung sowie den C-Rahmen zur Montage und der Aufnahme der Reaktionskräfte. Die Nietzuführung ist eine automatisierte Einheit zur Vereinzelung und Zuführung der Niete aus einem Behälter zu dem Setzkopf des Werkzeugs.

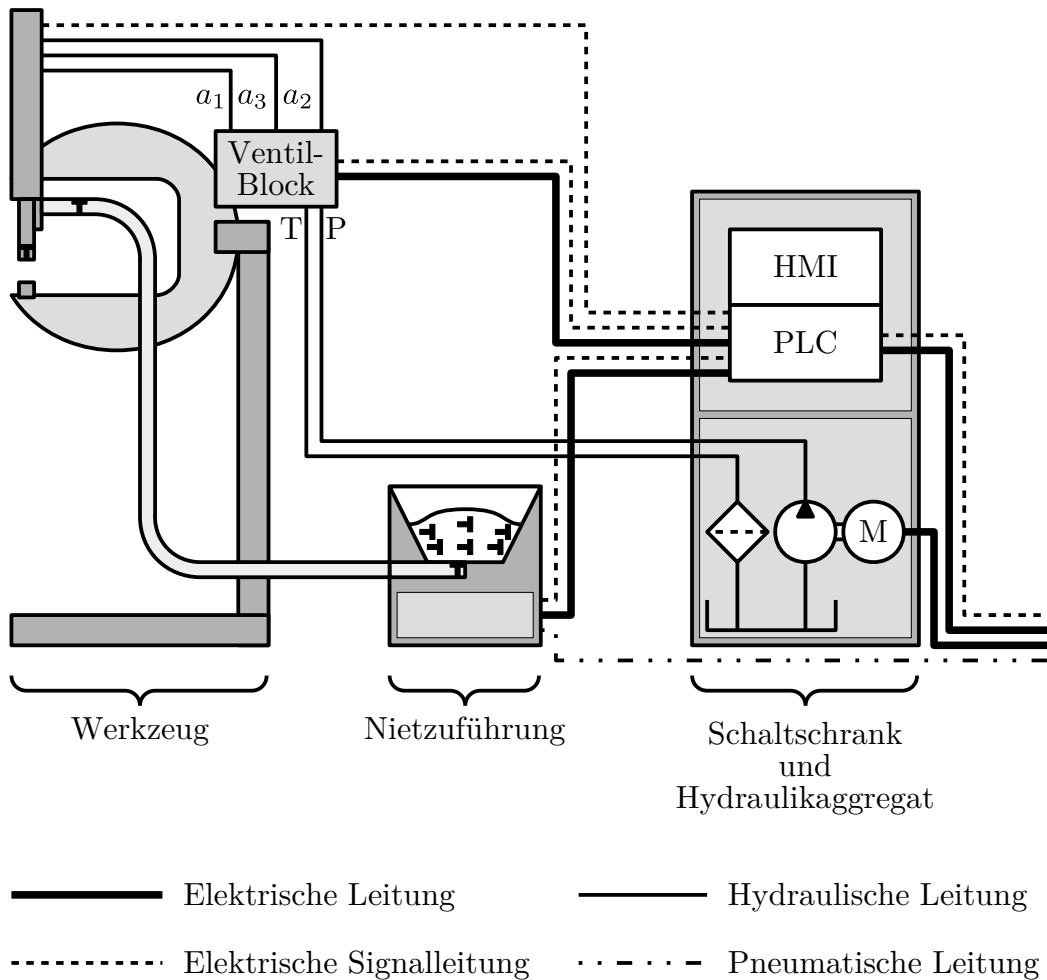


Abbildung 5.2: Prinzipschaubild Stanznietensystem RIVSET Vario, Böllhoff Automation GmbH

Den maßgebenden Anteil der Leistung fordert das Hydraulikaggregat in den Prozessschritten des Vorhubs an (vgl. Abb. 5.1, Schritte vier und fünf). In den Schritten erfährt der Setzstempel unter einer hohen Kraft eine bezogen auf den Gesamthub geringe Verschiebung. Der erforderliche Kraftaufwand ist von den geometrischen und stofflichen Parametern der Werkstücke sowie des Nietes abhängig. Die untersuchte Anlage lässt die Stanznietvorgänge mit dem Kraftbetrag von bis zu 70 kN zu.

Das kennzeichnende Merkmal der Anlage RIVSET Vario ist die große Variabilität der Anwendungsmöglichkeiten im Vergleich zu den anderen verfügbaren Lösungen des Herstellers. Das Stanznietensystem ist geeignet für die manuelle Handhabung, für die Integration in einer Fertigungsanlage und für eine Kombination mit einem Industrieroboter. Entsprechend komplex ist die Steuerung des Systems. Einen besonderen Stellenwert nehmen in der Steuerung die Sicherheits-

funktionen sowie die Funktionen der Prozess- und der Qualitätsüberwachung ein. Die industrielle Ausführung der Stanznietanlage verwendet vier Sensoren zur Realisierung dieser Funktionen. Die Drücke in den Vorhubkammern der hydraulischen Zylinder und die Position des Kolbens des Setzzyinders sowie die Temperatur des Öls im Behälter des Hydraulikaggregats werden messtechnisch erfasst. Aus diesen Größen werden die Niederhalterkraft, die Kraft und die Position des Setzstempels basierend auf einem statischen Modell ohne die Berücksichtigung der Störeinflüsse geschätzt.

Die Steuerung enthält mehrere Regelkreise. Die Regelfunktionen werden zum Teil dezentral in den Komponenten der Anlage umgesetzt. Die Drücke in den Vorhubkammern der hydraulischen Zylinder werden abhängig von der Position des Setzstempels gesteuert. Die Regelung der Drücke erfolgt in den zugeordneten Druckregelventilen. Die technologischen Parameter des Vorganges werden abhängig von der gemessenen Temperatur des Arbeitsfluides in der Steuerung angepasst.

Die Überwachung des Prozesses gründet auf empirischen Modellen. Die Kraft und die zugeordnete Position des Setzstempels werden als ein Datensatz unter anderem bezüglich eines parametrierbaren Toleranzbereichs bewertet. Damit können die Abweichungen von den technologischen Prozessvorgaben sowie die Variation der Parameter der Werkstücke und der Niete charakterisiert werden. Ferner kann die Zuführung der Niete überwacht werden. Das Vorliegen des Nietes und seine korrekte Positionierung im Setzkopf können mit der Auswertung des Kraft-Position-Datensatzes detektiert werden.

Die Stanznietanlage RIVSET Vario ist sehr einfach und robust konzipiert. Die Störeinflüsse haben geringfügige Auswirkungen auf die Funktionalität des Systems. Die Zustandsschätzverfahren und die modellbasierte Überwachung sind dennoch im Hinblick auf die Sicherheitsfunktionen und die Qualitätsüberwachung sehr wichtige verfügbare Methoden in der möglichen weiteren Entwicklung der Anlage. Der Nachweis der Anwendbarkeit, die Bewertung des Aufwandes und der Vorteile der modellbasierten Methoden und die Optimierung der Energieeffizienz bilden aus der Sicht des Herstellers des Stanznietensystems das wesentliche Ziel des Forschungsprojekts.

### 5.3 Analyse des Demonstratorsystems

Die Analyse des betrachteten Systems ist die notwendige Voraussetzung für die Identifikation geeigneter Optimierungs- und Überwachungsmethoden sowie für deren Anwendung. Die Untersuchung des Demonstratorsystems RIVSET Vario schließt die empirische Analyse und die Modellbildung ein. In diesem Abschnitt werden das Vorgehen in der Analyse und die wichtigsten Ergebnisse beschrieben. Die Bildung des mathematischen Modells des Systems und die Begründung der Modellbildung sind die thematischen Schwerpunkte des Abschnittes.

Die Ergebnisse der Analyse spiegeln sowohl die Komponentenstruktur als auch die Funktionsstruktur der Stanznietanlage RIVSET Vario wider. Die

Dokumentation der Ergebnisse unterliegt weitgehend der mit dem Hersteller vereinbarten Geheimhaltung. Ferner übersteigt die vollständige Dokumentation den Rahmen der vorliegenden Arbeit. Die Ergebnisse der Analyse werden folglich unter diesen Einschränkungen dargestellt.

### 5.3.1 Empirische Analyse

Die empirische Analyse ist für reale technische Systeme ein grundlegender Untersuchungsschritt. Hierbei wird das betrachtete System nach einer formalisierbaren wissensbasierten Methodik strukturiert. Das Vorgehen erfordert detailliertes Wissen über das System. Die Wissensbasis kann die Spezifikation des Systems oder das Pflichtenheft aus dem Entwicklungsvorhaben darstellen. Einen besonderen Stellenwert nehmen in dem Zusammenhang die Befragungen und die Diskussionen mit den Entwicklungsverantwortlichen und den Anwendern des Systems ein. Die Ergebnisse des Untersuchungsschrittes werden oft unter anderem graphisch dokumentiert. Die Beispiele der verbreiteten Darstellungsformen sind der Komponentenstrukturbaum, der Funktionsstrukturbaum und die allgemeine Funktionsstruktur.

Die wichtigsten Ergebnisse der empirischen Analyse sind für das Forschungsprojekt die Beschreibung der Struktur des Demonstrators und die Identifikation der für die Modellbildung erforderlichen Bereiche des Systems. Die Analyse bezieht sich unmittelbar auf die Ziele des Projekts. Folglich werden mit der Kenntnis der Systemstruktur die Bereiche mit der hohen Leistungsaufnahme und mit dem erkennbaren Einfluss auf die Sicherheitsfunktionen sowie die Funktionen der Prozess- und der Qualitätsüberwachung identifiziert.

Ein Ausschnitt aus dem Komponentenstrukturbaum der Stanznietanlage ist in Abb. 5.3 dargestellt. In der Analyse werden als relevante Komponenten für die mathematische Modellierung des Systems die Ablaufsteuerung, der Motor, die Pumpe und die Ventile des Hydraulikaggregats, der Setzzyylinder, der Niederhalterzylinder, der Ventilblock und die hydraulischen Schläuche festgestellt. Die nutzbare Leistung wird jeweils in dem Elektromotor, der Pumpe und den hydraulischen Zylindern transformiert. Diese Komponenten sind die Grundelemente in der Leistungsbereitstellung und damit auch in der Realisierung des Stanznietvorganges. Die Ventile des Hydraulikaggregats, der Ventilblock und die hydraulischen Schläuche ermöglichen die Verteilung und den Transport der Energie. Die Leistungsaufnahme dieser Komponenten ist vor allem auf die Dissipation zurückzuführen. Ferner weisen die Schläuche in hydraulischen Systemen eine erhebliche Energiespeicherfähigkeit auf und haben somit einen wesentlichen Einfluss auf das dynamische Verhalten der Anlage. Die Ablaufsteuerung, genauer die Steuerungsfunktionen der aufgezählten überwiegend hydraulischen Komponenten, hat einen unmittelbaren Einfluss auf die Einhaltung der technologischen Prozessvorgaben und gleichermaßen auf die Leistungsaufnahme des Systems. In dem hervorgehobenen Bereich der Anlage treten außerdem elektrische Spannungen, hydraulische Drücke und mechanische Kräfte mit

sicherheitsrelevanten Beiträgen auf. Diese Eigenschaften begründen die Notwendigkeit der weiterführenden Untersuchung der benannten Systemkomponenten.

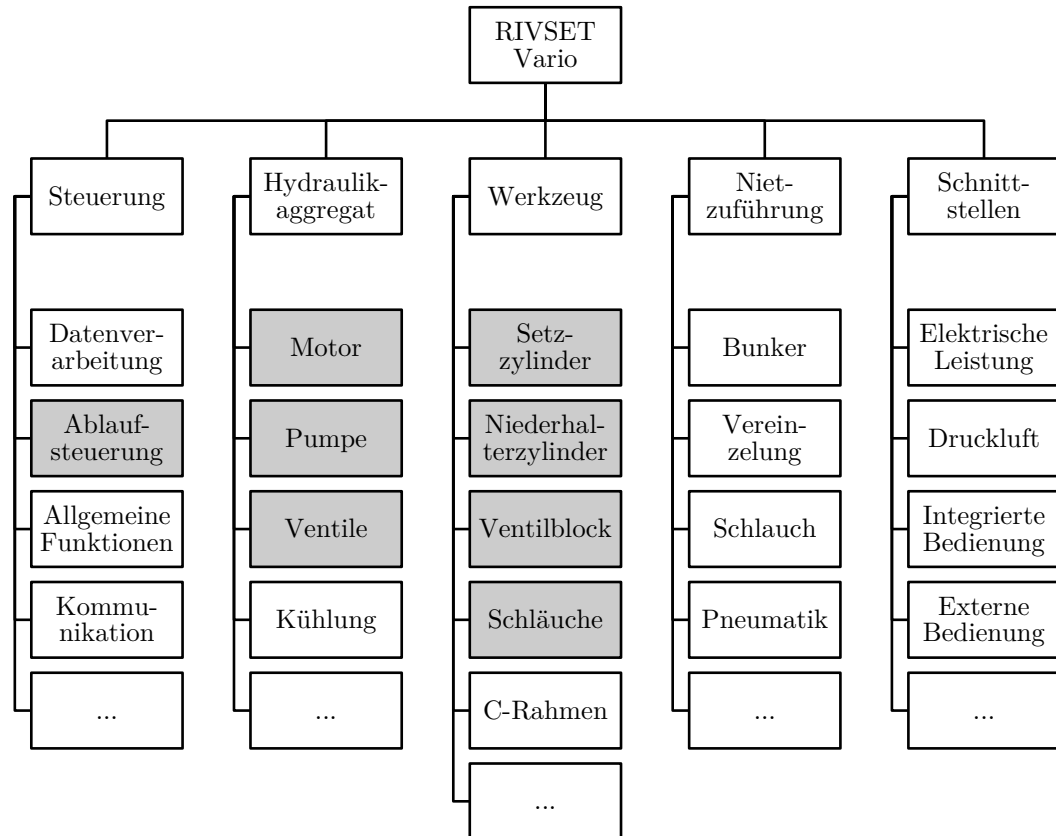


Abbildung 5.3: Ausschnitt aus dem Komponentenstrukturbaum RIVSET Vario

Die übrigen Komponenten und Funktionen der Anlage haben im Bezug auf die Zielsetzung des Forschungsprojekts eine nachrangige Bedeutung. Entsprechend wird der gegebenenfalls zu berücksichtigende Einfluss des nicht modellierten Teils der Anlage weitgehend idealisiert beschrieben. Ein sehr deutliches Beispiel hierfür ist die Verarbeitung der Daten, darunter insbesondere der Messdaten, in der Steuerung. Die Verarbeitung wird als instantan und exakt vorausgesetzt und die Messstörungen werden als externe stochastische Größen modelliert.

### 5.3.2 Modellbildung

Das mathematische Modell der Stanznietanlage bildet das dynamische Verhalten der priorisierten Bereiche des Systems ab. Mit dieser Einschränkung enthält das Modell dennoch die Wechselwirkungsmechanismen aus vier technischen Disziplinen: die Informationsverarbeitung, die Elektrotechnik, die Mechanik

und die Hydraulik. Folglich wird das Modell sowie das System als multidisziplinär (engl. multi-domain) bezeichnet. Die Zuordnung der zu modellierenden Systemkomponenten zu den technischen Bereichen ist in Abb. 5.4 gegeben. Eine derartige Unterteilung des Systems ist nicht eindeutig und kann abhängig von dem Detaillierungsgrad der Betrachtung unterschiedlich vorgenommen werden. Die Darstellung weist zugleich auf die wesentliche Herausforderung in der Modellierung multidisziplinärer Systeme hin: die Beschreibung der unterschiedlichen physikalischen Größen und deren Transformation ineinander. Die Leistungstransformation erfolgt offensichtlich vielfach in den Komponenten des Systems, die in sich multidisziplinäre Teilsysteme sind.

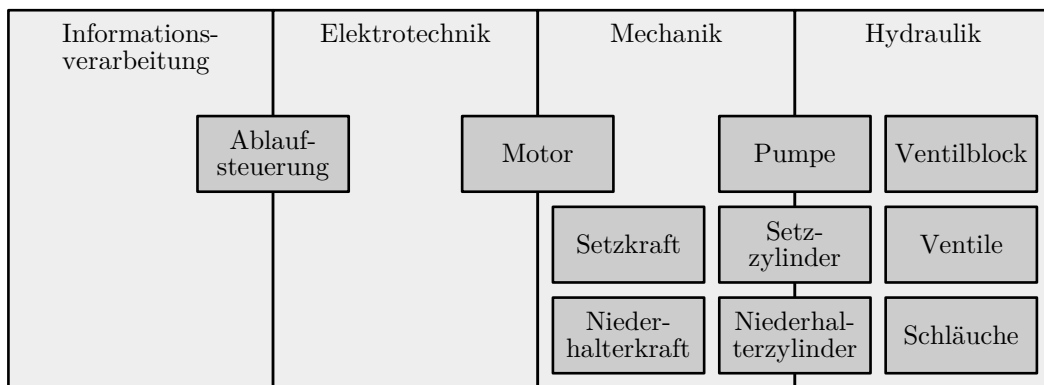


Abbildung 5.4: Zuordnung der Systemkomponenten zu technischen Disziplinen

**Bondgraphen.** Das mathematische Modell für die angestrebte Untersuchung der Energieeffizienz muss vor allem die Leistung übergreifend beschreiben. Ein besonders geeigneter Modellierungsansatz ist in dieser Hinsicht die Methodik der Bondgraphen. Diese Modellierungsmethodik wird originär in [Pay61] beschrieben. Die grundlegende Voraussetzung für das Vorgehen ist die Beschreibung der zu modellierenden Vorgänge mit zwei wesentlichen Größen, deren Produkt die Leistung entsprechend einer festgelegten Definition ergibt. Diese Abstraktion ermöglicht die uniforme Modellierung multidisziplinärer Systeme mit der Verwendung einer gemeinsamen Modellierungstechnik.

Im Hinblick auf technische bzw. physikalische Systeme erscheint der Ansatz der Bondgraphen weitgehend naheliegend, denn in diesen entspringen jegliche dynamische Prozesse grundsätzlich zugeordneten Energieformen und den korrespondierenden Energietransportmechanismen. Prägende Beispiele für diese Feststellung sind die Formulierungen der Energieerhaltungssätze. Die nicht physikalischen Prozesse, wie soziologische oder ökonomische, können mit den Bondgraphen mit einer geeigneter Definition der Leistung gleichermaßen jedoch mit dem höheren Abstraktionsgrad modelliert werden. Die Methodik der Bondgraphen und deren Anwendung werden zur Erläuterung der Modellbildung

im erforderlichen Umfang beschrieben. Eine umfassende Darstellung ist unter anderem in [Bor10] gegeben.

Der initiale Schritt in der Modellierung mit den Bondgraphen ist die Festlegung der Leistungsvariablen und damit die Definition der Leistung für die betrachteten technischen Disziplinen. Die Leistungsvariablen beschreiben in den dynamischen Vorgängen eine Potentialgröße  $e$  (engl. effort) und eine zugehörige Flussgröße  $f$  (engl. flow). Die Potential- und Flussgrößen werden in Tab. 5.1 für das Modell der Stanznietanlage RIVSET Vario zusammengefasst.

Tabelle 5.1: Festlegung der Potential- und der Flussgrößen für ausgewählte technische Disziplinen

Disziplin	Potentialgröße $e$	Flussgröße $f$
Elektrotechnik	Spannung	Stromstärke
Hydraulik	Druck	Volumenstrom
Mechanik, rotatorisch	Drehmoment	Winkelgeschwindigkeit
Mechanik, translatorisch	Kraft	Geschwindigkeit

Der Ansatz der Bondgraphen ist eine objektorientierte und entsprechend der Bezeichnung eine graphenbasierte Modellierungsmethodik. Die Objekte der Modelle werden in zwei Grundklassen, Knoten und Kanten, aufgeteilt. Die Knoten, auch als Elemente bezeichnet, enthalten Schnittstellen (engl. interfaces), genannt Ports, und werden an diesen mit den Kanten untereinander verbunden. Die Ports werden mit dem Bezug auf die übertragene Information untergliedert in die Leistungsports und die Signalports. Die Leistungsports werden zur Übergabe der Leistungsvariablen verwendet. Die korrespondierenden Kanten werden als Bonds (von engl. to bond verbinden) bezeichnet und repräsentieren bidirektionale akausale Verbindungen der Knoten. Genauer verknüpft ein Bond zwei Ports und übermittelt den Wert einer Leistungsvariablen von einem Port zu dem anderen und gleichzeitig den Wert der komplementären Leistungsvariablen in die entgegengesetzte Richtung. Die Richtung der Übermittlung der Potentialvariablen an einen Port wird nach deren Festlegung mit einem Querstrich, genannt Kausalitätsstrich (engl. causal stroke), an dem Port gekennzeichnet. Ferner enthalten die Bonds die Information über die Vorzeichen der Leistungsvariablen und stellen diese graphisch mit einem Halbpfel dar. Die Signalports entsprechen konventionellen Schnittstellen in einem Signalfussplan und werden übereinstimmend mit gerichteten Signalkanten verbunden.

Die Knoten der Bondgraphen repräsentieren mathematische Teilmodelle. Die grundlegenden Prozesse werden mit linearen zeitinvarianten Modellen (engl. linear time-invariant models, LTI) beschrieben. Eine Übersicht der elementaren skalaren Knoten gibt Tab. 5.2. Darin sind die Potentialgröße  $e$  und die Flussgröße  $f$  sowie die Parameter der Knoten reelle skalare Größen. Die Zeit

wird mit  $t$ , die Integrationsvariable mit  $t^*$  und der initiale Zeitpunkt mit  $t_0$  bezeichnet.

Tabelle 5.2: Elementare skalare Knoten der Bondgraphen

Element	Symbol	Konstitutive Gleichung	Parameter
Potentialquelle	$Se$	$e = e_S$	$e_S$
Flussquelle	$Sf$	$f = f_S$	$f_S$
Kapazität	$C$	$e = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t f(t^*) dt^* + e_{C,0}$	$C, e_{C,0}$
Induktivität	$I$	$f = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t e(t^*) dt^* + f_{I,0}$	$L, f_{I,0}$
Widerstand	$R$	$e = R \cdot f$	$R$
Transformator	$TF$	$e_1 = R_{TF} \cdot e_2,$ $f_1 = \frac{1}{R_{TF}} \cdot f_2$	$R_{TF}$
Gyrator	$GY$	$e_1 = R_{GY} \cdot f_2,$ $f_1 = \frac{1}{R_{GY}} \cdot e_2$	$R_{GY}$

Die Potentialquelle und die Flussquelle sind elementare Teilmodelle zur Vorgabe der entsprechenden Leistungsvariablen, deren Parameter  $e_S$  und  $f_S$  den Wert der konstanten Potential- bzw. Flussgröße bemessen. Die Kapazität und die Induktivität sind die Energiespeicherelemente, die neben den gleichnamigen Parametern  $C$  und  $L$  auch die Initialwerte der Leistungsvariablen  $e_{C,0}$  und  $f_{I,0}$  enthalten. Der Widerstand ist ein dissipativer Energieverbraucher mit dem Koeffizienten  $R$ . Die Potentialquelle, die Flussquelle, die Kapazität, die Induktivität und der Widerstand sind grundlegende Elemente mit einem Port (engl. single-port elements). Der Transformator und der Gyrator sind die Leistungstransformationselemente. Diese elementaren Knoten enthalten zwei Ports (engl. two-port elements), entsprechend werden deren Leistungsvariablen indiziert. Mit den zugehörigen Parametern  $R_{TF}$  und  $R_{GY}$  wird eine verlustfreie Leistungstransformation beschrieben.

Ferner werden zwei Verknüpfungs- und Verzweigungsknoten, genannt Junction-Elemente (engl. junction), definiert (vgl. Tab. 5.3). Diese Elemente beschreiben die Art des Leistungsaustausches der Teilmodelle und können eine beliebige Anzahl der Ports enthalten (engl. multi-port elements). Die Anzahl der Ports wird mit  $n_{J,0}$  bzw.  $n_{J,1}$  bezeichnet. Die Vorzeichen in der Summation definieren die Bonds (vgl. Tab. 5.3, Variable  $s_k$ ). Hierbei werden die Leistungsvariablen der eingehenden Bonds positiv  $s_k = 1$  und der ausgehenden negativ  $s_k = -1$  gezählt. Entsprechend dem Formalismus der Bondgraphen ist die Verbindung der Teilmodelle ausschließlich mit den Junction-Elementen zulässig.

Die Verwendung der linearen zeitinvarianten Elemente der Bondgraphen kann offensichtlich ausschließlich zu komplexeren, jedoch linearen zeitinvariant-



Tabelle 5.3: Skalare Junction-Elemente der Bondgraphen

Junction	Symbol	Konstitutive Gleichung	Parameter
0-Junction	$0$	$\sum_{k=1}^{n_{J,0}} s_k \cdot f_k = 0,$ $e_1 = e_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n_{J,0}\}$ $s_k \in \{-1, 1\}$	$n_{J,0}$
1-Junction	$1$	$\sum_{k=1}^{n_{J,1}} s_k \cdot e_k = 0,$ $f_1 = f_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n_{J,1}\}$ $s_k \in \{-1, 1\}$	$n_{J,1}$

en Modellen entsprechend führen. Eine wesentliche Erweiterung der Methodik ist die Einführung der modulierten Elemente (engl. modulated elements) und der Sensoren (vgl. [Bor10]). Die modulierten Elemente der Bondgraphen substituieren die Parameter der LTI-Elemente (vgl. Tab. 5.2) durch extern zugeführte Signale. Die Sensoren nehmen zugeordnete Variablenwerte auf und geben diese als Signale weiter. Damit ist die Erstellung beliebig komplexer nichtlinearer wert- und zeitkontinuierlicher Modelle möglich. Zeitdiskrete bzw. schaltende Dynamik wird mit der Einführung hybrider Elemente abbildbar (vgl. [Mos02]). Ferner können die Elemente der Bondgraphen als Modelle mit vektorwertigen Variablen und entsprechenden matrixwertigen Parametern definiert werden. Folglich kann die Methodik sehr variationsreich und effizient in der Modellierung angewendet werden.

Die graphische Darstellung der Bondgraphen wird an dem Modell eines linearen Oszillators erläutert (vgl. Abb. 5.5). In dem mechanischen System wird die Kraft als die Potentialgröße und die Geschwindigkeit als die Flussgröße definiert. Die Potentialquelle  $Se_I$  gibt eine konstante auf die Masse des Oszillators angewandte Kraft an, die im initialen Zeitschritt als eine Sprunganregung wirkt. Die Flussquelle  $Sf_I$  definiert eine konstante Geschwindigkeit der Befestigungsstelle der Feder und des Dämpfers. Die Induktivität repräsentiert die Masse, die Kapazität die Feder und der Widerstand den Dämpfer. Die Junction-Elemente  $1$  entsprechen den Kraftsummationsstellen und das Junction-Element  $0$  der Geschwindigkeitssummationsstelle.

Die Bondgraphen können mit der Kenntnis der konstitutiven Gleichungen und der Parameter der eingebundenen Elemente unmittelbar in eine differential-algebraische Gleichung konvertiert werden. Eine besondere Stellung nehmen in diesem Prozess die Kausalitätsstriche ein, deren Setzung einem festgelegten Schema folgt und eigentlich bereits ein Teil der Lösungsverfahren der Modelle ist. Die wesentlichen Vorschriften für die Setzung der Kausalitätsstriche sind

- die notwendige Bestimmung der zugeordneten Leistungsvariablen in den Quellen,
- die bevorzugte Ermittlung der Leistungsvariablen in den Speicherelementen durch die Integration der konstitutiven Gleichungen und

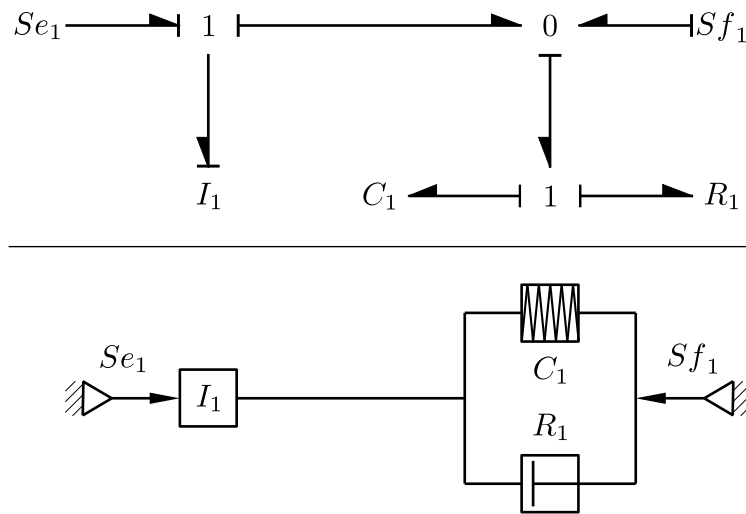


Abbildung 5.5: Linearer Oszillator als Bondgraph-Modell und als ikonisches Modell

- die Propagation der kausalen Zusammenhänge im Graphen.

Das Ergebnis der Konvertierung des graphischen Modells ist eine DAE mit dem Differentiationsindex eins, wenn die bevorzugte Setzung der Kausalitätsstriche im Gesamtmodell vollständig erreicht werden kann. Im anderen Fall führt die Konvertierung zu einer DAE mit höherem Index. Die grundsätzliche Regularität des Modells ist gegeben, wenn die Propagation ohne die Verletzung der notwendigen Setzung der Kausalitätsstriche vollständig durchgeführt werden kann.

Die Vorteile der Modellbildung mit den Bondgraphen sind vielseitig (vgl. [Bor10]). In dem Forschungsprojekt ESEMO sind in der Modellierung des Demonstratorsystems vor allem die stricte Objektorientierung, die uniforme Modellierung multidisziplinärer Systeme und die graphische Darstellung der Struktur des Leistungsaustausches der Teilsysteme wesentliche Motivationsgründe für den Einsatz der Methodik. Ferner ist die Struktur des Modells weitgehend identisch mit der Struktur des Systems. Damit ist die Definition der Messstellen zur Verifikation der Simulationsergebnisse und zur Validierung des Modells von dem betrachteten System übertragbar. In dieser Hinsicht ermöglichen die Bonds als graphische Repräsentation des Leistungsaustausches im Modell das unmittelbare Sensieren der Leistungsvariablen und die Bestimmung der Leistung. Die oft genannten Nachteile der Modellierungsmethodik sind der erforderliche Abstraktionsgrad und die eingeschränkte Auswahl der Standardelemente. Der Letztere kann mit der Definition problemspezifischer Elemente umgangen werden. Dieses Vorgehen steigert erheblich die Effizienz der Modellierung mit Bondgraphen mit nichtlinearen Teilmodellen.

**Modelica und Modellbibliothek BondGraph.** Die praktische Anwendung der Methodik der Bondgraphen erfordert den Einsatz einer computergestützten Modellierungs- und Simulationsumgebung. Die Anforderungen an die Umgebung sind vielschichtig. Unverzichtbar sind offensichtlich die Eignung der Umgebung für die Implementierung des Ansatzes der Bondgraphen sowie für die Definition problemspezifischer Teilmodelle. Zu dem primären notwendigen Funktionsumfang gehören unter anderem: die graphische Modellierung und die Parametrierung der Teilmodelle, das automatisierte Kompilieren des Gleichungssystems des Gesamtmodells, die Bereitstellung geeigneter Lösungsverfahren und der Funktionen zur Darstellung der Simulationsergebnisse.

In dem Forschungsprojekt wird für die Modellierung des Demonstratorsystems die Sprache Modelica <sup>1</sup> eingesetzt. Modelica ist eine objektorientierte gleichungsbasierte nicht-proprietäre Modellierungssprache (vgl. [Fri15]). Diese Eigenschaften führen zu drei entscheidenden Vorteilen: grundsätzliche Festlegung der DAE als allgemeine Modellklasse, weitgehende symbolische Behandlung der Modellgleichungen und mehrere verfügbare Modellierungs- und Simulationsumgebungen.

Die Objektorientierung in der Modellierung führt prinzipiell zu differential-algebraischen Gleichungen. Modelica beschränkt diese Methodik nicht. Folglich werden reguläre Modelle in Form differential-algebraischer Gleichungen mit höherem Index zugelassen. Die Forderung der Regularität impliziert den Ausschluss unter- und überbestimmter DAE (vgl. [KM01]). Damit können Modelle als reguläre bzw. eindeutig lösbare DAE formuliert werden. Jedes in Modelica zulässige Modell hat somit eine eindeutige numerische Lösung.

Kennzeichnend für die objektorientierte Modellbildung mit Modelica ist die Verwendung der Modellbibliotheken neben den Standardelementen der Sprache. Die Bibliotheken werden hierarchisch konzipiert, lassen die Einbeziehung der Objekte der anderen Bibliotheken zu und sind generell quelloffen. Das typische Modell enthält im Wesentlichen die Einbeziehung der externen Objekte (engl. *instancing*), die Deklaration der Variablen und der Schnittstellen sowie die Formulierung der Modellgleichungen. Entsprechend den Grundsätzen der Objektorientierung vererben die einbezogenen Objekte ihre Eigenschaften den übergeordneten. Die Attribute der Objekte, unter anderem in Form der Modellparameter, werden in interne (engl. *private*) und öffentliche (engl. *public*) unterteilt. Die Zuweisung der Werte kann ausschließlich für die öffentlichen Attribute in der Einbeziehung der Objekte vorgenommen werden. Die Übergabe der Werte der Variablen der Objekte findet in den Schnittstellen (engl. *interfaces*) statt.

Die gleichungsbasierte Definition der Modelle mit Modelica setzt symbolische Umformung der Modellgleichungen voraus. Diese Umformung ermöglicht die Formulierung des Gleichungssystems des Gesamtmodells geeignet für die numerische Lösung, d.h. Integration. Der Prozess schließt unter anderem ein: die Zuordnung der Unbekannten zu den Gleichungen für deren Ermittlung

---

<sup>1</sup>Modelica Association

(engl. matching algorithm), die Bestimmung und ggf. die Reduktion des Index (vgl. [MS93]) sowie die Formulierung des Gesamtmodells als eine semiexplizite Index 1 DAE.

Mehrere Modellierungsumgebungen verwenden Modelica und haben jeweils spezifische Einsatzschwerpunkte. Hierzu gehören unter anderem kommerzielle Softwarepakete Dymola <sup>2</sup>, MapleSim <sup>3</sup> sowie freie Software OpenModelica <sup>4</sup>. Die Verbreitung der Modellierungssprache kann vor allem mit der offenen Spezifikation und der Objektorientierung begründet werden.

Der Formalismus und die Elemente der Bondgraphen werden in der Modellbibliothek BondGraph mit der Sprache Modelica implementiert (vgl. [ADW14], [KAD13]). Die Bibliothek wird maßgebend vom Autor der vorliegenden Arbeit entwickelt und mit Dymola intensiv getestet. Die realisierte Implementierung setzt methodisch Modelica ein und stellt eine effiziente Modellbildung und anschließende Lösung der Gleichungen in den Vordergrund. Abweichend von der originären Konzeption in der Methodik der Bondgraphen enthalten die Kanten der Graphen, sowohl die Bonds als auch die Signalkanten, keine Information über die Richtung, die Vorzeichen der Variablen sowie über die kausalen Zusammenhänge. Die erforderlichen Informationen werden entsprechend den Spezifikationen der Modellierungssprache in den Schnittstellen der Knoten berücksichtigt. Folglich können in der Modellierung unmittelbar die allgemeinen Verbindungselemente (engl. connections) der Sprache Modelica verwendet werden. Die kausalen Zusammenhänge werden im Lösungsprozess festgelegt. Damit ist eine wirksame Setzung der Kausalitätsstriche weder notwendig noch möglich. Die Simulationsumgebungen stellen überlegene Algorithmen zur Lösung der Modelle in der Form differential-algebraischer Gleichungen zur Verfügung. Die Setzung der Kausalitätsstriche behält damit eine nachrangige akademische Bedeutung und wird daher in der Modellbibliothek nicht behandelt.

Neben der Methodik der Bondgraphen werden in der Modellbibliothek detaillierte Modelle hydraulischer Vorgänge und Komponenten implementiert. Die Vorgänge werden isotherm, jedoch mit der Vorgabe der Prozesstemperatur als ein Parameter modelliert. Die Basis der Modelle ist die Beschreibung der Eigenschaften des Arbeitsfluides. Die Dichte und die Viskosität werden druck- und temperaturabhängig modelliert. Die Kompressibilität des Arbeitsfluides und der Einfluss der gelösten Luft werden hierbei beschrieben. Die Energiespeicherfähigkeit wird infolge der Dehnbarkeit der Leitungen und der Trägheit des Fluides berücksichtigt. Die Rohrströmung wird im Wesentlichen mit der Bernoulli-Gleichung berechnet. Die Beschreibung der dissipativen Verluste erfolgt mit mehreren Modellen. Hierzu gehören viskositäts- und dichte proportionale Verluste mit parametrierbaren Potenzfunktionen des Volumenstromes sowie die Formulierung der Rohrreibungsverluste mit der Darcy-Weisbach-Gleichung (vgl. [Mur16]). Die Rohrreibungszahl wird mit einer expliziten stetig differen-

---

<sup>2</sup>Dassault Systèmes

<sup>3</sup>Maplesoft

<sup>4</sup>Open Source Modelica Consortium

zierbaren Funktion umfassend für den laminaren und den turbulenten Bereich ermittelt (vgl. [ADW14], [Haa83]).

Eine weitere Besonderheit der nichtlinearen Modelle der Bibliothek BondGraph ist die Bereitstellung komplementärer Sätze der konstitutiven Gleichungen. Die geeignete Formulierung wird mit Bezug auf die Lösung des Gesamtmodells über die Vorgabe der korrespondierenden Parameter festgelegt. Die numerische Invertierung der nichtlinearen Gleichungen kann damit vermieden werden. Offensichtlich ist die Voraussetzung hierfür ist die Kenntnis der kausalen Zusammenhänge im dem Gesamtmodell. Die Steigerung der Effizienz und der Stabilität der Lösung wird ferner in den Modellen mit der generellen Vermeidung nicht stetiger und nicht stetig differenzierbarer Funktionen sowie mit der Einführung der Grenz- und der Nominalwerte der einbezogenen Variablen erreicht.

**Modell des Demonstratorsystems.** Das Modell des Demonstratorsystems bildet mathematisch das dynamische Verhalten der priorisierten Systembereiche ab (vgl. Abb. 5.4). Das System wird mit Dymola und der Bibliothek BondGraph modelliert. Ergänzend zu den Elementen der Bondgraphen verwendet das Modell die Elemente der Bibliothek Modelica Standard Library <sup>5</sup>. Hierzu gehören vor allem die grundlegende Signalverarbeitung und die Komponenten der hierarchischen Zustandsautomaten der Bibliothek StateGraph.

Die oberste hierarchische Ebene des Modells ist in Abb. 5.6 dargestellt. Das Verhalten des Hydraulikaggregats, des Ventilblocks, der mechanisch gekoppelten hydraulischen Zylindern und der hydraulischen Leitungen (engl. pipe) werden mit den Elementen der Bibliothek BondGraph abgebildet. Die Ablaufsteuerung der Stanznietanlage ist ein zeit- und wertdiskretes System, folglich ist die Abbildung dessen Verhaltens mit einem Zustandsautomaten mit den Elementen der Bibliothek StateGraph naheliegend. In diesem Zusammenhang wird zugunsten des geringeren Aufwandes auf die Möglichkeit des Einsatzes der hybriden Bondgraphen verzichtet.

Die grundlegenden Zusammenhänge im Modell des Demonstrators gibt die Darstellung in Abb. 5.6 wieder. Die mechanische Leistung wird im Hydraulikaggregat durch den Elektromotor bereitgestellt. Der Motor wird als ein Element zur Erzeugung des Drehmoments modelliert und weist damit in der Übertragung auf die Methodik der Bondgraphen die Quellcharakteristik aus. Die dynamischen Anlaufeffekte werden berücksichtigt, jedoch nicht die Transformation der elektrischen Leistung in die mechanische. Die Aktivierung des Motors erfolgt mit dem Signal der Ablaufsteuerung  $s_{start,masy}$ . Die bereitgestellte mechanische Leistung wird in der Pumpe in die hydraulische Leistung an dem Anschluss  $P$  transformiert. Diese Transformation berücksichtigt den mechanischen und den volumetrischen Wirkungsgrad sowie die Energiespeicherfähigkeit aufgrund der Trägheit der bewegten Komponenten und der Nachgiebigkeiten. Die Ausführung des Nietvorganges wird mit dem Signal  $s_{uc}$  gesteuert, dieses initiiert den

---

<sup>5</sup>Modelica Association

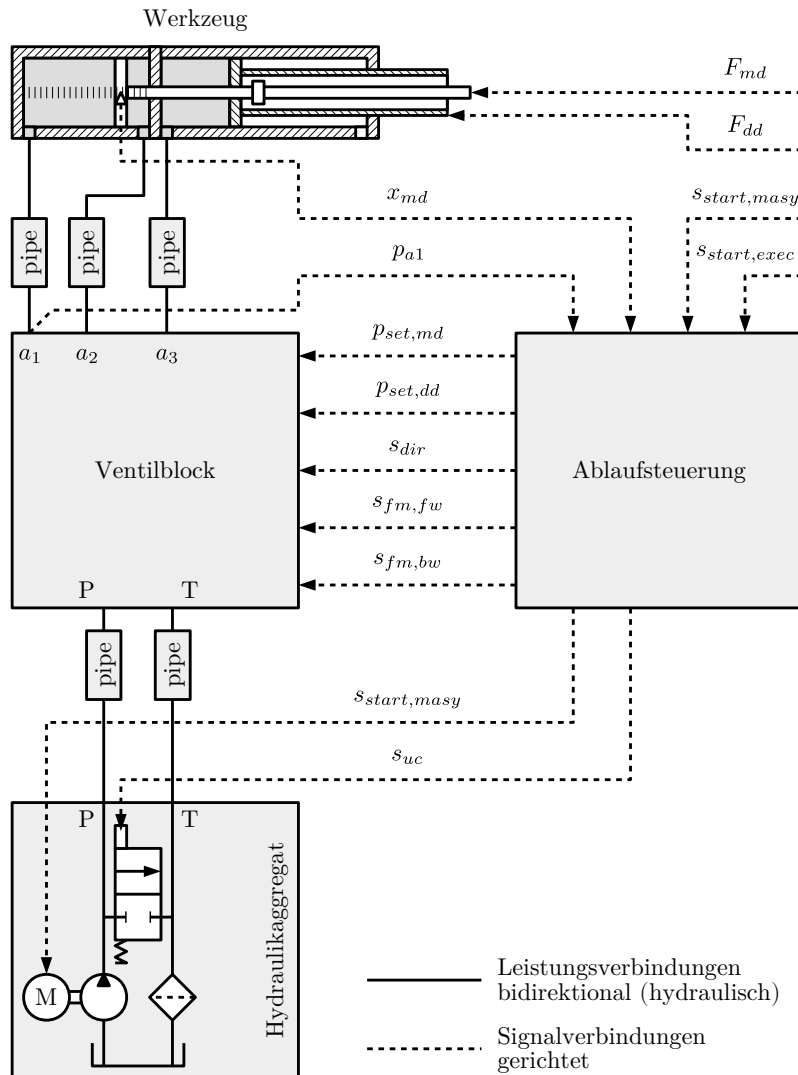


Abbildung 5.6: Modell des Demonstrators

Wechsel zwischen dem hydraulischen Leerlauf und dem Arbeitsgang. Der Rücklaufanschluss  $T$  im Modell des Hydraulikaggregats führt das Arbeitsfluid über den Strömungswiderstand des Rücklauffilters auf das Umgebungsdruckniveau im Behälter zurück.

Der Ventilblock ist der zentrale Bereich zur Verteilung der hydraulischen Leistung. Mehrere Schalt- und Proportionalventile sind in dem Ventilblock integriert. Die kurze Prozesszeit der Stanznietanlage erfordert eine detaillierte Modellierung dynamischer Vorgänge in den Komponenten des Hydrauliksystems. Folglich wird das Schaltverhalten der Ventile neben den oben genannten allgemeinen Effekten eingehend modelliert (vgl. [Alk12], [DAW13], [ADW14]). Der Aufbau des Ventilblocks ist eines der wichtigen Differenzierungsmerkmale der Stanznietanlage RIVSET Vario und unterliegt daher der Geheimhaltung.

Die hydraulische Leistung wird an dem Anschluss  $P$  von dem Hydraulikaggregat bereitgestellt. Die Rückführung des Arbeitsfluides zum Hydraulikaggregat erfolgt an dem Anschluss  $T$ . Diese Anschlüsse werden mit Schläuchen, bezeichnet mit  $pipe$ , mit den korrespondierenden Anschlüssen des Hydraulikaggregats verbunden. Die Länge der Schläuche kann abhängig von der Gestaltung der Montagestation mehrere Meter betragen, damit weisen die Schläuche eine erhebliche Energiespeicherfähigkeit und ein ausgeprägtes Zeitverhalten auf. Die Anschlüsse  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  halten entsprechend der Schaltung der Ventile die hydraulische Leistung bereit oder führen das Arbeitsfluid zurück. Die Verbindung mit den zugehörigen Anschlüssen des Werkzeugs wird mit den Schläuchen mit der Länge ca. 1 m ausgeführt und ermöglicht hochdynamische Reaktionen des Antriebes auf die Ansteuerung. In dem Anschluss  $a_1$  ist ein Drucksensor verbaut, der den gemessenen Druckwert  $p_{a1}$  an die Ablaufsteuerung übergibt. Mit den Signalen der Steuerung werden die momentanen Drücke für den Setzzyylinder  $p_{set,md}$  und für den Niederhalterzylinder  $p_{set,dd}$  vorgegeben, die Hubrichtung zwischen dem Vorhub und dem Rückhub mit  $s_{dir}$  gewählt sowie der Eilgang im Vor- bzw. Rückhub mit  $s_{fm,fw}$  und  $s_{fm,bw}$  entsprechend aktiviert. Die Eilgangschaltungen werden durch geeignetes Verbinden der Zylinderkammern ausgeführt. Das Arbeitsfluid wird hierbei durch den Ventilblock zwischen diesen Kammern umgewälzt. Der Volumenstrom des Hydraulikaggregats ersetzt nur die Differenz aufgrund unterschiedlicher Kolbenflächen.

Das Werkzeug ist eine mechanisch gekoppelte Kombination aus einem einfach- und einem doppeltwirkenden hydraulischen Zylinder. Drei Kammern werden in den Ablaufschritten mit dem Arbeitsfluid befüllt. Die mechanische Kopplung wird über einen Mitnehmer an der Kolbenstange des Setzzyinders realisiert. Damit wird im Vorhub der Kolben des Setzzyinders von dem Kolben des Niederhalters bis zum Fixieren der Werkstücke verschoben. Im Rückhub treibt der Kolben des Setzzyinders den Kolben des Niederhalters bis zur Endposition an. Das Modell berücksichtigt die Trägheitseffekte und die Elastizität der Werkzeugkomponenten, die mechanischen und hydraulischen Reibungseffekte sowie die Leckagen in den Dichtungen. Die Kräfte  $F_{md}$  und  $F_{dd}$  auf die Kolbenstangen des Setz- und des Niederhalterzylinders aus dem Nietprozess werden im Modell als externe positions- und zeitabhängige Signale implementiert. Die Signale werden aus Messungen rekonstruiert und entsprechen den Kräften für das Setzen eines durchschnittlichen Nietes ohne etwaige Störungen infolge der Variation der Eigenschaften der Niete und der Werkstücke. Im Kolben des Setzzyinders ist ein Positionssensor integriert. Die aufgenommene Position  $x_{md}$  wird der Ablaufsteuerung übergeben.

Die beschriebenen Modelle der physischen Systemkomponenten haben zwar eine wesentliche Bedeutung für das Forschungsprojekt, dienen jedoch unter den gesetzten Rahmenbedingungen der Abbildung des unbeeinflussbaren Systemverhaltens. Im Gegensatz dazu ist die Ablaufsteuerung der Bereich des Systems, dessen Verhalten im Rahmen der Optimierung variiert werden soll. Der Steuerungsalgorithmus wird vereinfacht von der realen Steuerung der An-

lage übernommen und kann daher nicht veröffentlicht werden. Die Bildung der Ausgangsgrößen  $p_{set,md}$ ,  $p_{set,dd}$ ,  $s_{dir}$ ,  $s_{fm,fw}$  und  $s_{fm,bw}$  wird abhängig von den Messwerten der Position  $x_{md}$  und des Drucks  $p_{a1}$  durchgeführt. Abweichend von der realen Steuerung werden die Messwerte der Temperatur des Arbeitsfluides im Behälter und des Druckes in dem Anschluss  $a_2$  des Ventilblocks nicht berücksichtigt. Die Aktivierung des Elektromotors und die Initiierung des Setzvorganges erfolgen durch den Anwender oder eine übergeordnete Steuerung der Montagestation. Übereinstimmend werden diese Eingriffe als externe Signale  $s_{start,masy}$  und  $s_{start,exec}$  im Modell vorgegeben und an das Hydraulikaggregat übergeben. Damit kann der vollständige Setzzyklus im Modell automatisiert ausgeführt werden. Diese Betriebsart ist maßgebend in der Untersuchung und wird daher ausschließlich im Modell der Steuerung implementiert. Die Möglichkeiten der manuellen Eingriffe werden in dem Ablauf nicht betrachtet.

Das Zeitverhalten der Steuerung setzt sich aus den programmierten zeitabhängigen Ablaufschritten und der Ausführung des Steuerungsalgorithmus zusammen. In dieser Hinsicht ist das Verhalten der verwendeten Steuerung bemerkenswert für die weitere Analyse. Die Steuerungsfunktionen werden auf mehrere Tasks verteilt. Die Tasks werden mit festgelegten Frequenzen ausgeführt, folglich werden die Rückgabewerte und die Eingangsgrößen der Funktionen in den zugehörigen Zeitintervallen aktualisiert. Die somit zyklisch zur Verfügung stehende Zeit ist im Fall der zulässigen Auslastung der Steuerung hinreichend für die Ausführung der Funktionen. Der Steuerungsalgorithmus wird nach der Ausführung erst wieder im darauf folgenden Zeitintervall fortgesetzt. Die Überlastung der Steuerung tritt ein, wenn die Ausführung der Funktionen bedingt durch ihre Komplexität und die begrenzte Leistungsfähigkeit der Hardware den Zeitintervall überschreitet. Der Betrieb unter diesen Bedingungen kann zu unerwarteten bzw. chaotischen Reaktionen der Steuerung führen. Die modellierten Funktionen der Ablaufsteuerung sind in der Stanznietanlage dem Task mit der Frequenz 100 Hz zugeordnet. Entsprechend werden diese Funktionen im Modell in simulierten Zeitintervallen von 10 ms berechnet.

Die Modellierung des Demonstrators ist mit den beschriebenen Mitteln weitgehend realitätsnah möglich. Das Gesamtmodell ist eine nichtlineare DAE mit höherem Index. Hierbei kann der Index des bestehenden Modells dennoch durch die Optionen des Modells und des Lösungsverfahrens beeinflusst werden. Die abschließende symbolische Indexreduktion führt zur Index 1 DAE mit 4923 Gleichungen und 107 differentiellen Zuständen. Damit sind die meisten Modellvariablen algebraische Zustände. Eine derartige Modellstruktur ist charakteristisch für die objektorientierte Modellierung. Die Vorteile der Objektorientierung tragen entscheidend zur Beherrschung der Komplexität in der Modellierung der Stanznietanlage bei. Die mehrfache hierarchische Unterteilung des Systems ermöglicht die übersichtliche Formulierung und den Test der Teilmodelle. Die anschließende Verknüpfung der Teilmodelle definiert im Gesamtmodell algebraische Abhängigkeiten, deren Behandlung im verwendeten Lösungsprozess umgesetzt wird.



Reale Systeme können stets mit einem uneingeschränkt steigenden Detaillierungsgrad betrachtet werden. Daher ist die empirische Analyse die notwendige Basis für die Modellbildung (vgl. Abschn. 5.3.1). Die damit erzielte Einschränkung der zu modellierenden Systembereiche entspricht dem Auslassen der Bereiche mit der als untergeordnet bewerteten Bedeutung aus der detaillierten Untersuchung. Die anschließende Verifikation des Modells führt infolgedessen oft zur Identifikation der erforderlichen Modellmodifikationen. Die Objektorientierung im Allgemeinen und die Methodik der Bondgraphen im Forschungsprojekt ermöglichen eine besonders effiziente Implementierung derartiger Modifikationen. Die unabhängige Modellierung der Teilsysteme und die Definition der Schnittstellen sind hierfür die wesentlichen Voraussetzungen. Die Reduktion des Aufwandes für die Erstellung und die Modifikation des Modells rechtfertigt somit die Entwicklung und die Anwendung komplexerer DAE basierter Verfahren.

Das Gesamtmodell wird mit Bezug auf verfügbare umfangreiche Messdaten verifiziert. Die Aufnahme der Messdaten wird an einer modifizierten Anlage RIVSET Vario vorgenommen. Mehrere Messstellen erweitern den Demonstrator im Vergleich zu der industriellen Serienausführung der Anlage. Damit wird die formelle optimalitätsbasierte Parameteridentifikation für geeignet definierte Modellbereiche durchgeführt (vgl. [DHAW14], Abschn. 5.4). Die Messgrößen des Systems und die korrespondierenden Variablen des Modells können durch die Variation der Modellparameter hinreichend angeglichen werden, sofern die externen Bedingungen und die Eigenschaften der Messgeräte berücksichtigt werden.

Die externen Einflussgrößen sind bezogen auf das Modell vor allem die Temperatur des Arbeitsfluides sowie die Reaktionskräfte des Werkzeugs, der Werkstücke und des Nietes. Diese Einflussgrößen werden für die Übernahme in das Modell mit hoher Genauigkeit messtechnisch erfasst. Die Temperatur weist verglichen mit den anderen Systemgrößen ein langsames dynamisches Verhalten auf. Ferner hat der Wärmetransport aufgrund des kurzen Arbeitszyklus eine untergeordnete Bedeutung. Folglich ist die Erfassung der Temperatur im Behälter des Hydraulikaggregats mit dem Sensor entsprechend der Serienausführung der Anlage hinreichend. Die gemessene Temperatur wird im Modell als ein Parameter übernommen. Die Aufnahme der Reaktionskräfte erfolgt mit einem Sensor unmittelbar an der Matrize des Werkzeugs. Die Messstelle ermöglicht damit die Erfassung der Summe der Kräfte des Setz- und des Niederhalterzylinders. Dieser konzeptionelle Nachteil kann nur mit einem erheblichen technischen Aufwand vermieden werden. Allerdings erfahren die Reaktionskräfte der Werkstücke und des Werkzeugs in Abhängigkeit der Verschiebung des Niederhalterzylinders infolge der Störgrößen nur eine geringfügige Variation und können daher reproduzierbar im manuellen Betrieb der Anlage gemessen werden. Dieser Ansatz ermöglicht die Definition der externen Signale zur Modellierung der Zylinderkäufe.

Das Verhalten der Messgeräte kann unter anderem durch die rauschartige

Störungen, den Messwertdrift, die Verzögerung und den eingeschränkten Messbereich gekennzeichnet sein. Abhängig von dem Typ und der Anwendung des Messgerätes können einige der aufgezählten Einflüsse das Verhalten dominieren. Die geeignete Auslegung der Messtechnik auf die Erfordernisse der Anwendung vermindert derartige Einflüsse erheblich. Die Messtechnik des Demonstratorsystems wird mit den Erkenntnissen aus dem Betrieb und der Simulation der Anlage ausgelegt. Die erweiterte Sensorik wird intensiv getestet und zur Erreichung des erforderlichen Verhaltens mehrfach modifiziert. Damit werden die Störeinflüsse auf die Messgrößen weitgehend eingeschränkt. Eine besondere Anforderung in der Untersuchung der Stanznietanlage stellt der kurze Arbeitszyklus dar. Unter dieser Bedingung hat die Betrachtung der Verzögerung der Sensoren eine wesentliche Bedeutung. Die elektrische Versorgungsspannung und die Stromstärke werden aus diesem Grund als momentane Werte mit der Frequenz 1000 Hz aufgenommen. Daraus werden in der Auswertung der Messung die Effektivwerte bestimmt und die Wirkleistung ermittelt. Die verwendeten Positions-, die Kraft- und die Drucksensoren weisen nach deren Spezifikation für die Parameteridentifikation des Modells keine zu berücksichtigende Verzögerung auf. Dem entgegen ist die Verzögerung der Volumenstromsensoren bauartbedingt erheblich. Der Volumenstrom wird in den eingesetzten Messgeräten aus der Drehzahl des im Arbeitsfluid befindlichen Flügelrades ermittelt. Das Verhalten dieser Sensoren wird in der Parameteridentifikation durch die PT2-Glieder modelliert, deren Parameter gleichermaßen in der Identifikation bestimmt werden.

Der Verlauf ausgewählter normierter Variablen des verifizierten Modells ist in Abb. 5.7 dargestellt. Der Graph enthält  $x_{md}$  die Verschiebung des Setzzyinders,  $p_{a1}$  den Druck im Anschluss  $a_1$  des Ventilblocks,  $E_{masy}$  die abgegebene mechanische Energie des Elektromotors sowie  $x_{md,max}$ ,  $p_{a1,max}$ ,  $E_{masy,max}$  die zugehörigen Maximalwerte der Variablen im Arbeitszyklus.

Eine detaillierte Interpretation des Modellverhaltens ist nur mit der Kenntnis des Steuerungsalgorithmus möglich. Dennoch können charakteristische Arbeitsschritte des Nietprozesses der Darstellung in Abb. 5.7 entnommen werden. Der Verlauf der abgegebenen Energie des Elektromotors hat für die Optimierung eine hohe Relevanz und wird daher im Weiteren diskutiert (vgl. Abschn. 5.4). Der Arbeitszyklus beginnt bei 0 s, der hydraulische Leerlauf wird deaktiviert, der Druck im Anschluss  $a_1$  wird aufgebaut und der Kolben des Setzzyinders wird verschoben. Nach ca. 0.25 s wird die Eilgangschaltung im Vorhub deaktiviert, das äußert sich in der Reduktion der Geschwindigkeit entsprechend in der zeitlichen Ableitung der Verschiebung. Der Druck erreicht nach einem schwingenden Übergang ein geringeres Niveau. Die Werkstücke werden nach ca. 0.5 s fixiert. Hierbei bleibt der Wert der Verschiebung des Setzzyinders konstant und der Druck im Anschluss  $a_1$  wird durch einen Eingriff der Steuerung reduziert. Nach ca. 0.65 s wird das Setzen des Nietes ausgeführt. Hierfür wird der Druck bis auf sein Maximalwert erhöht, der Setzzyylinder treibt den Niet ein und formt die Verbindung aus. Anschließend setzt der Rückhub mit

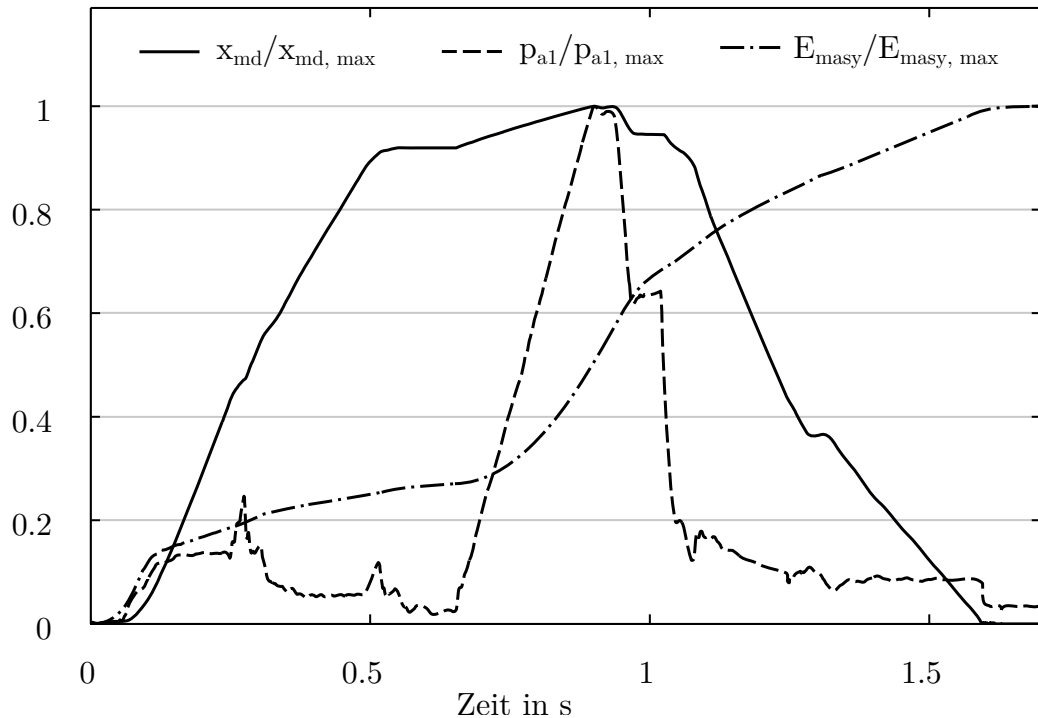


Abbildung 5.7: Simulierter Arbeitszyklus des Demonstrators

dem Druckabbau ein. Nach ca. 1.25 s wird die Eilgangschaltung im Rückhub deaktiviert. Die Verschiebung des Kolbens erreicht zum Ende des Arbeitszyklus nach ca. 1.6 s den Initialwert.

Die Modellbildung ist ein essentieller Teil der Systemanalyse, denn die mathematische Beschreibung des Verhaltens des betrachteten Systems, dessen Teilsysteme und deren Komponenten dokumentiert die beobachteten Zusammenhänge und deren Charakteristik. Die wichtigsten Ergebnisse der Modellbildung im Forschungsprojekt ESEMO sind

- die geeignete hierarchische Unterteilung der Systems,
- die Feststellung der physikalischen Phänomene in den zu modellierenden Systembereichen,
- die Bewertung des nichtlinearen Verhaltens der hydraulischen Komponenten und des Einflusses der Nichtlinearität auf das Gesamtmodell,
- die Verifikation, die Modifikation und die Validierung des Modells und damit der Nachweis dessen hinreichender Genauigkeit,
- die Identifikation der beeinflussbaren Bereiche für die Optimierung der Energieeffizienz sowie
- die Identifikation der Systemkomponenten mit der Neigung zu relevanten substantiellen Veränderungen für die modellbasierte Diagnose.

Ferner führt die Übertragung des Steuerungsalgorithmus in das Modell und die Simulation des Arbeitszyklus zur Revision der Ablaufes. Damit werden

nachteilige Steuerungseingriffe identifiziert. Mehrere Verbesserungen können mit den Erkenntnissen aus der Modellbildung begründet und durchgeführt werden. Diese Verbesserungen betreffen sowohl die Energieeffizienz, als auch die Dauer des Arbeitszyklus und die technologischen Kenngrößen des Nietprozesses.

## 5.4 Optimierung

Die Optimierung verfolgt im Allgemeinen das Ziel, basierend auf einem mathematischen Modell die Bedingungen für das angestrebte Systemverhalten zu ermitteln und das Verhalten unter diesen Bedingungen zu charakterisieren (vgl. [AG96]). Offensichtlich haben hierbei die Erstellung des Modells und die geeignete Definition des angestrebten Verhaltens die entscheidende Bedeutung. Die Art des untersuchten Systems ist dagegen unerheblich. Die Methoden der mathematischen Optimierung sind in technischen Bereichen weitgehend etabliert und finden intensiven Einsatz (vgl. [RHG13], [Gri13]). Auch in regelungstechnischen Anwendungen ist die Optimierung ein wesentliches Verfahren. Das grundsätzliche Vorgehen in der Optimierung impliziert stets zwei aufeinander folgende und von einander abhängige Schritte: die Bewertung des modellierten Systemverhaltens und die Variation der Modellparameter. Die praxisrelevanten Verfahren sind überwiegend iterativ und wenden die Schritte mit einer hinreichenden Anzahl der Wiederholungen ausgehend von einem oder mehreren Startpunkten an.

In der Bewertung des modellierten Systemverhaltens werden das Modell im Sinne einer funktionellen Abhängigkeit und dessen Parameter als Funktionsargumente verwendet. Folglich entspricht die Antwort des Modells dem Rückgabewert der Funktion. Dieser Rückgabewert kann im Allgemeinen in der Optimierung nur mittelbar eingesetzt werden. Die Bewertung des Systemverhaltens erfolgt mit einer zu definierenden Zielfunktion (engl. objective function). Die Zielfunktion verwendet die Antwort des Modells und gibt einen quantitativen Rückgabewert wieder. Damit entspricht die Optimierung einer formalisierten Suche des minimalen oder des maximalen Wertes bzw. einer in dieser Hinsicht geeigneten Kombination der Rückgabewerte der Zielfunktion in Abhängigkeit von den Modellparametern. Dieser Wert bzw. diese Kombination wird als Optimum bezeichnet. Die Klasse des Modells und die Art der Modellantwort werden infolge der Verwendung der Zielfunktion nicht eingeschränkt. Die Definition der Zielfunktion nimmt eine zentrale Bedeutung ein. Nach der Klasse der Zielfunktion wird die Optimierung einerseits in stetige und diskrete, andererseits in uni- und multikriterielle unterteilt.

Die Bewertung des Systemverhaltens in einer Umgebung des Parameter-raumes des Modells begründet die anschließende formalisierte Variation der Parameter. Die Optimierungsverfahren streben damit über eine Anzahl der Iterationen das Optimum der Zielfunktion an. Die Variationsvorschriften der Parameter werden folglich unter Beachtung dieser Zielsetzung konzipiert und können unter anderem in lokale und globale, ableitungsfreie und nicht ablei-

tungsfreie, deterministische und stochastische unterteilt werden. Die Variation der Parameter berücksichtigt ferner das Definitionsgebiet der Zielfunktion. Die Werte der Parameter in der Optimierung müssen im Allgemeinen Elemente dieses Definitionsgebietes sein. Die zulässige Teilmenge wird durch algebraische Nebenbedingungen beschrieben. Die Optimierung mit den Nebenbedingungen wird als die restringierte Optimierung bezeichnet. Die Optimierungsprobleme zeichnen sich vor allem in der Praxis durch vielschichtige Nebenbedingungen aus, die oft technische, technologische oder ökonomische Einschränkungen beschreiben.

Die Optimierung im Forschungsprojekt verwendet das erläuterte dynamische Verhaltensmodell der Stanznietanlage RIVSET Vario (Abschn. 5.3). Das Modell ist eine differential-algebraische Gleichung, folglich wird die Antwort des Modells mit der Lösung der DAE ermittelt. Die Antwort des Modells auf die Anregung mit den Eingangsgrößen in einem geschlossenen Zeitintervall ist die Gesamtheit des differentiellen und des algebraischen Zustandes sowie der modellierten Messgrößen. Eine geschlossene Lösung der DAE ist aufgrund der Komplexität des Problems nicht möglich, damit wird der Einsatz eines numerischen Verfahrens notwendig. Aufgrund verschiedener Problemstellungen des Forschungsprojekts werden basierend auf dem Modell mehrere Optimierungsprobleme behandelt. Die Optimierung wird einerseits zur Parameteridentifikation, andererseits zur Reduktion des Energieverbrauches der Anlage eingesetzt. Entsprechend verschieden sind die definierten Zielfunktionen und die variierten Modellparameter.

Die Anwendung der Optimierungsalgorithmen wird mit den Funktionen der Software Matlab <sup>6</sup> durchgeführt. Diese stellt eine umfangreiche Sammlung ausführlich dokumentierter, allgemeiner Optimierungsverfahren bereit (vgl. [Mat17]). Im Forschungsprojekt werden abhängig von dem jeweiligen Optimierungsproblem unterschiedliche Algorithmen verwendet. Vor allem werden die sequentielle quadratische Programmierung (SQP) und das Nelder-Mead Simplex-Verfahren eingesetzt. Der Gradient wird in SQP numerisch mit finiten Differenzen ermittelt. Das Modell wird nach der symbolischen Indexreduktion und der Lösung in Dymola über eine Schnittstelle für die Variation der Parameter in Matlab freigegeben. Die Algorithmen in Matlab steuern die Ausführung der Lösung an, werten die Antwort des Modells aus und setzen die Parameter.

### 5.4.1 Parameteridentifikation

Die Identifikation der Modellparameter ist im Allgemeinen ein anspruchsvolles und aufwendiges Vorhaben. Im Besonderen gilt diese Aussage für den Fall der nichtlinearen Modelle. Eine ausführliche Einführung in das Themengebiet gibt z.B. [IM11]. Das untersuchte Modell und das System müssen abhängig von dem angewandten Verfahren für die Ermittlung der Parameter mehrere Voraussetzungen erfüllen, die unter anderem wesentlichen sind die Steuerbarkeit,

---

<sup>6</sup>MathWorks

die Beobachtbarkeit und die Identifizierbarkeit. Zusammenfassend stellen die Kriterien für die Identifikation die Anforderungen für die eindeutige Rekonstruktion der Modellparameter aus einer Menge erfasster Messwerte und für die Anregung entsprechender Messwerte dar.

Die Reduktion der Komplexität der Parameteridentifikation im Forschungsprojekt erfolgt durch die Unterteilung des Modells in mehrere Bereiche (vgl. Abschn. 5.3.2). Dieses Vorgehen betrifft ausschließlich die Modellbereiche zur Abbildung des physikalischen Systemverhaltens, jedoch nicht das Modell der Steuerung. Die involvierten Modellvariablen und Parameter sind reelle stetige Größen. Ausgewählte Messgrößen und ggf. Eingangsgrößen werden als dynamische Anregung der Modellbereiche aufgefasst, mit weiteren Messgrößen und zugeordneten Modellvariablen wird eine Differenz als eine zeitabhängige Funktion gebildet. Die Zielfunktion ist der Wert des zeitlichen Integrals der geeignet skalierten und quadrierten Differenz für ein definiertes Zeitintervall. Somit wird eine unikriterielle stetige Optimierung in der optimalitätsbasierten Parameteridentifikation ausgeführt. Allerdings ist die Bildung des Gradienten und der Hesse-Matrix wegen der numerischen Lösung der DAE symbolisch nicht möglich. Die Gültigkeit der Parameterwerte wird in der Variation durch entsprechende Beschränkungen, d.h. algebraische Nebenbedingungen, sichergestellt.

Ein prägendes Beispiel für die Parameteridentifikation ist die Bestimmung der Verlust-, Dehnbarkeits- und Trägheitscharakteristika der hydraulischen Leitungen zwischen dem Hydraulikaggregat und dem Ventilblock (vgl. Abb. 5.6, [DHAW14]). Diese Kennwerte beeinflussen signifikant das Verhalten des Modells, können jedoch aus den geometrischen und stofflichen Systemparametern mit hinreichender Genauigkeit nicht ermittelt werden. Die Parameteridentifikation verwendet die Messwerte des Drucks unmittelbar an beiden Enden der Leitungen und des Volumenstroms an dem Hydraulikaggregat. Die getrennt betrachteten Modelle der hydraulischen Leitungen werden mit den Messwerten des Drucks angeregt. Die Zielfunktion in der Optimierung ist somit die quadrierte und zeitlich integrierte Differenz des gemessenen Volumenstromes und der zugeordneten Modellvariablen. Das Modell wird zur Abbildung des Verhaltens der Volumenstromsensoren mit jeweils einem PT2-Glied erweitert (vgl. Abschn. 5.3.2). Ferner wird eine zeitabhängige Wichtung der Differenz in die Zielfunktion einbezogen.

## 5.4.2 Minimierung des Energieverbrauches

Das Problem der Minimierung des Energieverbrauches der Anlage für den Arbeitszyklus unterscheidet sich deutlich von der Parameteridentifikation. Die Zielfunktion der Optimierung ist der Wert des zeitlichen Integrals der Leistung bereitgestellt durch den Elektromotor für den Zeitintervall gleich dem Arbeitszyklus. Das Produkt des Drehmoments und der Winkelgeschwindigkeit des Elektromotors gibt den momentanen Leistungswert wieder. Die Potential- und Flussgröße an dem Leistungsport des Modells des Elektromotors entsprechen

nach der Methodik der Bondgraphen den Variablen, somit sind diese direkt verfügbar (vgl. Tab. 5.1). Der Rückgabewert der Zielfunktion ist ein Skalar, folglich ist die Optimierung unikriteriell. Die Ermittlung des Rückgabewertes erfordert die Lösung des Gesamtmodells und erfolgt numerisch. Die zu variierenden Parameter des Modells sind die Parameter der Ablaufsteuerung, d.h. die Transitionsbedingungen und die Definitionen der Stelleingriffe. Physikalisch stellen diese Parameter unter anderem Zeitintervalle, Druckwerte, Positionen und Temperaturen dar.

Die Optimierung schließt mehrere Nebenbedingungen ein. Die Transitionsbedingungen definieren im Allgemeinen die logisch begründete Abfolge der Arbeitsschritte und können daher nur sehr begrenzt variiert werden. Grundsätzlich ist die Variation der technologischen Parameter zur Festlegung des eigentlichen Nietprozesses nicht zulässig. Das betrifft den Druck in dem Setz- und Niederhalterzylinder sowie die festgelegten Zeitintervalle in den Ablaufschritten das Stanzen der Werkstücke und das Formen der Verbindung (vgl. Abb. 5.1, Ablaufschritte 4 und 5). Somit ist die effektive Veränderung der Steuerungsparameter ausschließlich im Vorhub bis zum Aufsetzen des Nietes und im Rückhub möglich (vgl. Abb. 5.1, Ablaufschritte 1, 2, 3 und 6). Die Variation der Steuerungsparameter in diesen Ablaufschritten kann unter anderem zur Verlängerung des Arbeitszyklus führen. Die Dauer des Arbeitszyklus ist ein maßgebender wirtschaftlicher Kennwert der Stanznietanlage, deren Steigerung nur in Sonderfällen der Anwendung ohne nachteilige Folgen möglich ist.

Die umgesetzte Energie im Modell stellt in den veränderlichen Ablaufschritten einen bedeutenden Anteil dar (vgl. Abb. 5.7). Die Reduktion des Energieverbrauches des Systems ist damit grundsätzlich unter den beschriebenen Einschränkung möglich. Die Parameter der Optimierung werden unter der Beachtung der Nebenbedingungen durch die Sensitivitätsanalyse und die messtechnische Verifikation identifiziert. Diese Untersuchungsschritte zeigen einen wesentlichen Einfluss der Taskfrequenz der Steuerung auf den Energieverbrauch der Anlage. Die zulässigen Veränderungen der Transitionsbedingungen ergeben hingegen nur eine geringfügige Variabilität des Energieverbrauches. Ferner wird die Temperatur des Arbeitsfluides als ein zu betrachtender Parameter mit der erheblichen Auswirkung festgestellt. Die Temperatur kann in der realen Steuerung durch die Bedingung für die Aktivierung der Kühlung des Arbeitsfluides beeinflusst werden.

Die Begründung für den Einfluss der Temperatur des Arbeitsfluides auf den Energieverbrauch der Anlage ist physikalisch trivial. Die Viskosität und die Dichte der Hydrauliköle hängen stark von der Temperatur ab (vgl. [WG15]). Mit der steigenden Temperatur nehmen deren Werte exponentiell ab. Als eine Folge werden die dissipativen Verluste im Arbeitsfluid entsprechend vermindert. Dieser Einfluss wird im Modell durch die Vorgabe der Temperatur der hydraulischen Elemente berücksichtigt (vgl. Abschn. 5.3.2), damit ist die modellbasierte Optimierung mit dem Parameter möglich. Die Variation der Zielfunktion infolge der Variation der Temperatur ist unabhängig von den

anderen Parametern. Folglich kann die unikriterielle Optimierung mit einem skalaren reellen Parameter gesondert ausgeführt werden.

Die Reduktion des Energieverbrauches setzt sich mit der steigenden Temperatur im untersuchten Wertebereich monoton fort. Das Verhalten belegen sowohl die erzielten Simulations- als auch die Messergebnisse. Allerdings kann eine hohe Einsatztemperatur zur Schädigung und beschleunigten Alterung des Arbeitsfluides führen. Der Hersteller der Stanznietanlage RIVSET Vario gibt die maximale Betriebstemperatur für das verwendete Hydrauliköl HLP ISO VG 32 mit 65 °C an (vgl. [FMuB06]). Das globale Minimum entspricht somit offensichtlich der maximalen Betriebstemperatur und liegt auf dem Rand des zulässigen Bereiches.

Die Optimierung des Energieverbrauches in Abhängigkeit von der Taskfrequenz der Steuerung ist der Untersuchungsschritt mit der maßgebenden Relevanz. Die Auswirkungen auf den physikalischen Prozess sind mittelbar und aus der technologischen Sicht hinnehmbar. Die Beeinflussung der Anlage durch die Variation des Parameters hat vor allem steuerungstechnische Ursachen. Der grundsätzliche Zusammenhang kann mit einem vereinfachten Modell eines allgemeinen sequentiell gesteuerten Prozesses erläutert werden, dessen Steuerungsfunktionen mit einer festen Frequenz aufgerufen werden.

Der zu analysierende Prozess enthalte mehrere Ablaufschritte indiziert mit  $k \in K \subset \mathbb{N}$ , deren Ausführung jeweils eine feste Dauer  $t_{y,k}$  in Anspruch nehmen. Ein realistisches Beispiel für einen derartigen Prozess ist eine Folge automatisierter Fertigungsschritte. Die Steuerung des Prozesses werte die Eingangsgrößen mit einer festen Taskfrequenz  $f_c$  aus und gebe die Stellgrößen im selben Zeitintervall nach Ablauf der Taskdauer  $t_c = f_c^{-1}$  zurück. Damit wird die Ausführung jedes nachfolgenden Ablaufschrittes erst nach der vollständigen Ausführung des vorangegangenen in dem darauf folgenden Zeitintervall begonnen. Die Initialisierung des Prozesses werde mit dem Beginn des ersten Ablaufschrittes festgestellt. Die Dauer dieses modellierten Prozesses  $t_u$  kann aus der Dauer der einzelnen Ablaufschritte  $t_{u,k}$  mit

$$t_u = \sum_{k \in K} t_{u,k} = \sum_{k \in K} t_c \cdot \left\lceil \frac{t_{y,k}}{t_c} \right\rceil = \sum_{k \in K} \frac{\lceil f_c \cdot t_{y,k} \rceil}{f_c} \quad (5.1)$$

bestimmt werden.

Zur Erläuterung des Modells wird zunächst ein sehr einfacher Fall mit  $K = \{1\}$  und  $\{t_{y,k}\}_{k \in K} = \{1\}$  betrachtet. Damit besteht der Prozess aus nur einem Ablaufschritt, dessen Dauer 1 s beträgt. Die Dauer des Prozesses ist in Abhängigkeit von der Taskdauer der Steuerung in Abb. 5.8 dargestellt. Der Verlauf ist sägezahnartig. Besonders charakteristische Merkmale sind die Häufung der lokalen Extrema und die Abnahme des Wertes der Funktion der lokalen Maxima mit abnehmender Taskdauer sowie die Übereinstimmung des globalen und der lokalen Minima mit der Dauer des Ablaufschrittes. Die Argumente der lokalen Minima und Maxima sind nachweislich entsprechend

$$t_{c,min} = \frac{t_{y,1}}{n}, \quad (5.2)$$



$$t_{c,max} = \frac{t_{y,1}}{n} - |\varepsilon| \quad (5.3)$$

für  $n \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ferner ist offensichtlich

$$t_u = t_c \quad \forall t_c \geq t_{y,1}. \quad (5.4)$$

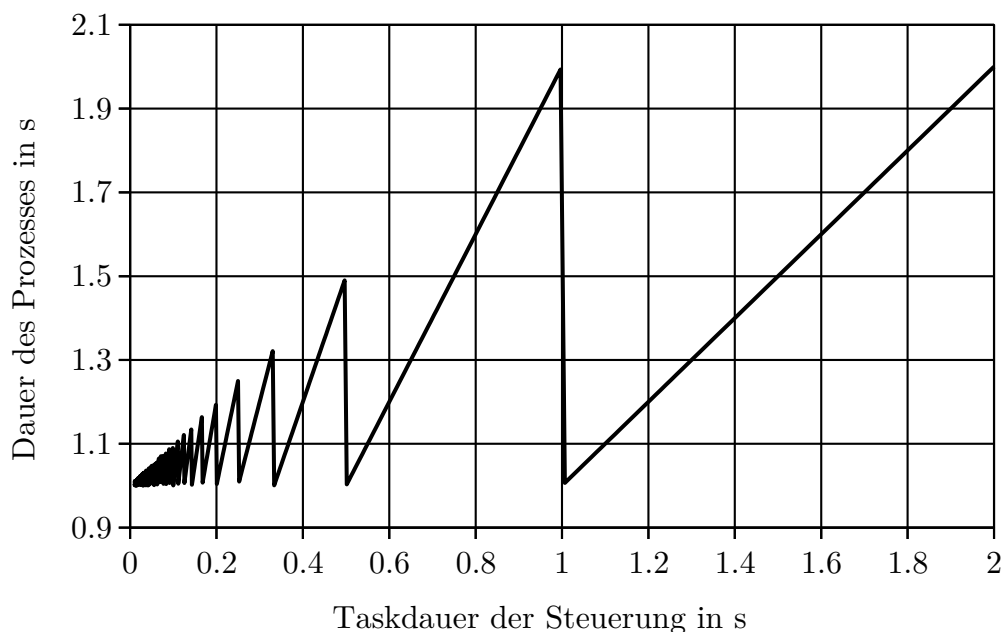


Abbildung 5.8: Dauer des Prozesses  $t_u$  in Abhängigkeit von der Taskdauer  $t_c$  für  $K = \{1\}$  und  $\{t_{y,k}\}_{k \in K} = \{1\}$  s nach (5.1)

Weitere Prozesse der beschriebenen Klasse können als eine additive Überlagerung deren einzelner Ablaufschritte interpretiert werden. Die charakteristischen Eigenschaften werden für

$$K = \{1, \dots, 5\}, \quad (5.5)$$

$$\{t_{y,k}\}_{k \in K} = \{1, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8\} \text{ s} \quad (5.6)$$

diskutiert. Die Dauer der Ablaufschritte  $t_{y,k}$  ist willkürlich festgelegt. Diese Parametrierung des Modells zeigt eine besonders typische Überlagerung mit ausgeprägten lokalen Extrema. Die Dauer des Prozesses in Abhängigkeit von der Taskfrequenz nach der Beziehung (5.1) ist in Abb. 5.9 dargestellt. Die Darstellung zeigt die Art des globalen Minimums besonders illustrativ. Die Dauer des Prozesses konvertiert gegen das globale Minimum  $t_{u,min} = 4.5$  s asymptotisch für die Taskfrequenz der Steuerung  $f_c \rightarrow \infty$  bzw. für die Taskdauer  $t_c \rightarrow 0$ .

Im Allgemeinen treten mit dem konzipierten Modell die lokalen Extrema nur für

$$t_c < t_{y,max} \quad (5.7)$$

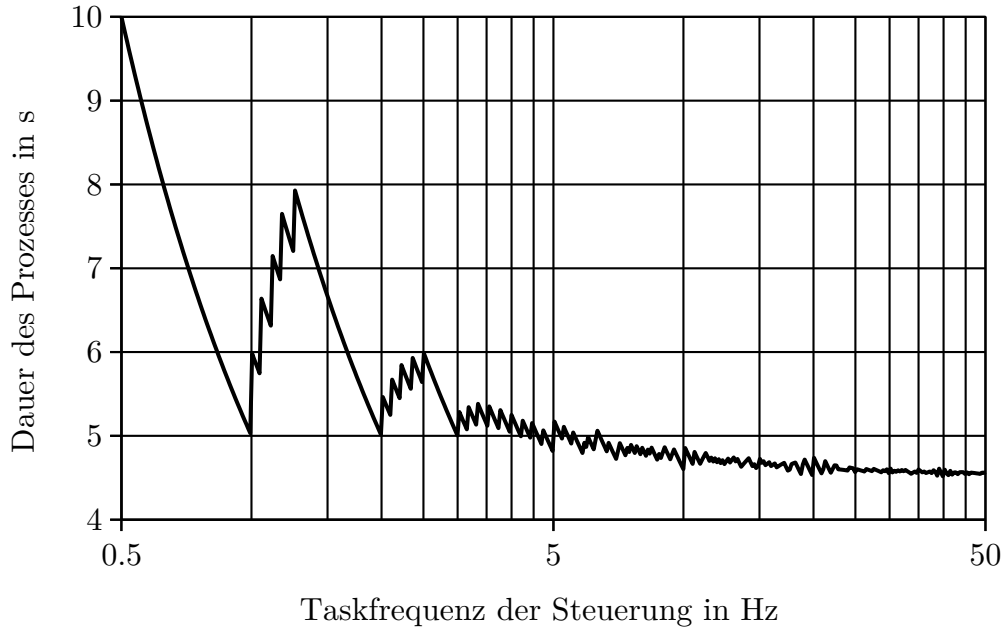


Abbildung 5.9: Dauer des Prozesses  $t_u$  in Abhängigkeit von der Taskfrequenz  $f_c$  für  $K = \{1, \dots, 5\}$  und  $\{t_{y,k}\}_{k \in K} = \{1, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8\}$  s nach (5.1)

mit

$$t_{y,max} \in \{t_{y,k}\}_{k \in K} \wedge t_{y,max} \geq t_{y,k} \quad \forall k \in K \quad (5.8)$$

und der Zusammenhang

$$t_u = t_c \cdot \sum_{k \in K} 1 \quad \forall t_c \geq t_{y,max} \quad (5.9)$$

gilt. Ferner können allgemein die Häufung der lokalen Extrema mit abnehmender Taskdauer der Steuerung nachgewiesen und das globale Minimum der Dauer des Prozesses mit

$$t_{u,min} = \lim_{t_c \rightarrow 0} \left( \sum_{k \in K} t_c \cdot \left\lceil \frac{t_{y,k}}{t_c} \right\rceil \right) = \sum_{k \in K} t_{y,k} \quad (5.10)$$

ermittelt werden.

Die Eigenschaften des vereinfachten Modells der Steuerung (5.1) mit der unveränderlichen Taskfrequenz und Dauer der Ablaufschritte können auf das Verhalten der realen Steuerung der Stanznietanlage nur zum Teil übertragen werden. Die Funktionen der Steuerung des Demonstrators werden in definierte Tasks unterteilt und mit einer zugeordneten festgelegten Frequenz ausgeführt (vgl. Abschn. 5.3.2). Hingegen ist die Dauer der Ablaufschritte variabel und hängt einerseits von den Eigenschaften des physikalischen Systems und andererseits von dem Verhalten der Steuerung ab. Die Dauer für die Verschiebung

des Kolbens in eine festgelegte Position ist z.B. von den wirkenden Kräften und diese von der Ansteuerung der hydraulischen Ventile abhängig. Ferner ist der Zustand des physikalischen Systems in den Zeitpunkten der Transitionen des Zustandes der Steuerung für die Dauer des darauf folgenden Ablaufschrittes maßgebend. Ein einleuchtendes Beispiel hierfür ist die Geschwindigkeit des Kolbens.

Trotz des komplexeren Verhaltens zeigt die Dauer des Arbeitszyklus der Stanznietanlage als Funktion der Taskdauer der Steuerung die diskutierten charakteristischen Merkmale des vereinfachten Modells des Steuerung (vgl. Abb. 5.10). Die Werte für die Darstellung werden mit dem Modell des Demonstrators berechnet, hierbei wird die Taskdauer mit der Schrittweite von  $10 \mu\text{s}$  zwischen dem Nominalwert  $10 \text{ ms}$  und  $0 \text{ ms}$  variiert, entsprechend liegt die Taskfrequenz im Bereich  $[10^2, \infty) \text{ Hz}$ . Die Funktion ist nicht stetig, besitzt eine Vielzahl lokaler Extrema und weist die Häufung der Extrema sowie die Abnahme des Funktionswertes mit abnehmender Taskdauer auf. Allerdings liegt das globale Minimum der Dauer des Arbeitszyklus nicht bei der Taskdauer  $0 \text{ ms}$ . Die Ursache hierfür ist die variable Dauer der Ablaufschritte.

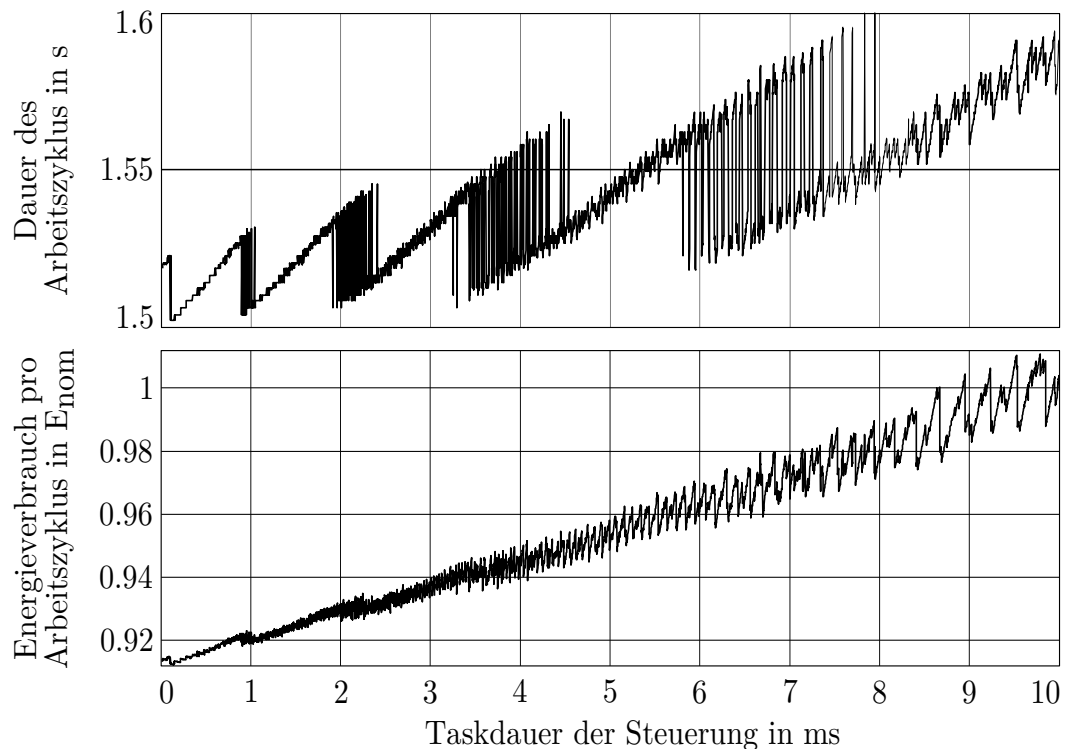


Abbildung 5.10: Dauer des Arbeitszyklus der Stanznietanlage und Energieverbrauch pro Arbeitszyklus in Abhängigkeit von der Taskdauer der Steuerung ermittelt mit dem mathematischen Modell

Der Energieverbrauch der Stanznietanlage pro Arbeitszyklus wird mit dem gleichen Vorgehen mit dem Modell des Demonstrators berechnet. Die Abhän-

gigkeit des Energieverbrauches von der Taskdauer zeigt eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zur Dauer des Arbeitszyklus (vgl. Abb. 5.10). Diese Ähnlichkeit hat vielschichtige systemspezifische Ursachen. Die Definition des Energieverbrauches, als der Wert des zeitlichen Integrals der Leistung bereitgestellt durch den Elektromotor für den Zeitintervall gleich dem Arbeitszyklus, kann zur Plausibilisierung der Ähnlichkeit verwendet werden. Hiernach ist der Energieverbrauch proportional der Dauer des Arbeitszyklus, wenn die bereitgestellte Leistung konstant ist. Dieser Zusammenhang trifft offensichtlich für das Modell des Demonstrators approximativ zu.

Die wichtigsten Erkenntnisse für die Minimierung des Energieverbrauches aus der Betrachtung des vereinfachten Modells der Steuerung und der Analogie mit der realen Steuerung der Stanznietanlage sind die Unstetigkeit der Zielfunktion und die Abnahme des Funktionswertes mit der steigenden Taskfrequenz. Damit erfordert die Optimierung die Anwendung eines Algorithmus für diskrete Probleme. Das Suchgebiet in der Optimierung kann auf die nähere Umgebung des Nominalwertes der Taskfrequenz und deren steigende Werte eingeschränkt werden.

Die eingesetzte Ablaufsteuerung der Stanznietanlage RIVSET Vario ermöglicht die Zuordnung der Steuerungsfunktionen zu den Tasks mit den Frequenzen  $\{10^0, 10^1, 10^2, 10^3\}$  Hz. Die modellierten Steuerungsfunktionen sind dem Task mit der Frequenz  $10^2$  Hz zugeordnet. Unter diesen Bedingungen ist eine Reduktion des Energieverbrauches nur mit der Taskfrequenz von  $10^3$  Hz realisierbar (vgl. Abb. 5.10) und die formale Ausführung der Optimierung wird folglich nicht erforderlich. Der berechnete Energieverbrauch der Stanznietanlage wird mit der Veränderung der Taskfrequenz um ca. 8% reduziert. Ferner führt die identifizierte Maßnahme zur Reduktion der Dauer des Arbeitszyklus um ca. 5%. Diese relativen Verbesserungen werden mit einer korrespondierenden Messreihe bestätigt. Die mittleren relativen Abweichungen der Messwerte bezüglich der Berechnungsergebnisse liegen unter 4%. Das Systemverhalten mit der umgesetzten Veränderung der Taskfrequenz unterliegt aufgrund der Störeinflüsse in den durchgeführten Messreihen einer moderaten und für die Anwendung akzeptablen Variation. Im Hinblick auf die Eigenschaften des vereinfachten Modells des Verhaltens der Steuerung (5.1) kann diese Feststellung nicht verallgemeinert werden. Die Robustheit der optimalen Lösung mit dem Parameter Taskfrequenz ist wegen der hohen Anzahl und der Häufung der lokalen Extrema im Allgemeinen nicht gegeben. Der Nachweis der hinreichenden Robustheit kann in Form einer messtechnischen oder modellbasierten Untersuchung erfolgen.

## 5.5 Modellbasierte Diagnose

Die Methoden der modellbasierten Diagnose im Forschungsprojekt ESEMO werden in den Rahmen der Selbstüberwachung eingeordnet. Die Konzeption und die Anwendung der automatisierten Zustandsschätzung und der algorithmischen Systemdiagnose werden in diesem Zusammenhang behandelt. Die

Zustandsschätzung verwendet eine Implementierung der entwickelten Kalman-Filter für differential-algebraische Gleichungen. Die Diagnose gründet auf der Zustandsschätzung. Damit werden der Zustand der Anlage aus den verfügbaren Messsignalen rekonstruiert sowie die ggf. eintretenden betriebsrelevanten Systemveränderungen detektiert und charakterisiert.

Die Konzeption der Zustandsschätzung und der Überwachung für die Stanznietanlage setzt offenbar mehrere Voruntersuchungen voraus (vgl. Kap. 4). Eine anwendungsspezifische Analyse des Systems erfolgt in Abschn. 5.3. Auf der Grundlage der Analyseergebnisse werden die Bereiche des Systems für die Umsetzung der Zustandsschätzung und der Diagnose ermittelt. Das primäre Ziel der Voruntersuchungen ist die Erstellung eines geeigneten Verhaltensmodells für die Zustandsschätz- und Diagnoseverfahren. Die möglichen betriebsrelevanten Systemveränderungen werden modelliert und erweitern das Modell des Verhaltens der Stanznietanlage. Die wesentliche Anforderung an das Modell ist die Beobachtbarkeit der Zustände in der Zustandsschätzung, der Verhaltensmodes in der Detektion und der Isolation sowie der Einflussgrößen in der Identifikation der substantiellen Systemveränderungen (vgl. Abschn. 4.2).

### 5.5.1 Modellbildung

Das Modell der Stanznietanlage wird in Abschn. 5.3.2 zur quantitativen Beschreibung des Verhaltens ausgewählter Systembereiche, zur Abbildung der Wechselwirkungen mit der Ablaufsteuerung und zur Optimierung des Energieverbrauches durch die Variation der Steuerungsparameter entwickelt. Der Verwendung dieses Modells in der Zustandsschätzung und der Diagnose widerspricht vor allem dessen Komplexität. Folglich ist eine Reduktion der Komplexität erforderlich. Die Systembereiche werden hierfür im Modell bezüglich deren Relevanz für die Aufgaben der Überwachung bewertet.

Der Fügevorgang wird durch den Setzzyylinder ausgeführt, daher beeinflusst dieser Systembereich die technologischen Größen des Nietprozesses unmittelbar. Die Eigenschaften der Werkstücke wirken sich in der Anwendung der Anlage gleichermaßen signifikant auf den Nietvorgang aus. Die übrigen Systembereiche dienen der Bereitstellung der hydraulischen Leistung in den Anschlüssen des Zylinders. Der Niederhalterzylinder fixiert die Werkstücke und verrichtet keine erwägenswerte Nutzarbeit aufgrund der geringen Verformung. Diese Beobachtungen in der Systemanalyse begründen die Konzeption der Zustandsschätzung und der Diagnose ausschließlich für den Setzzyylinder. Der Hersteller der Anlage misst in der Selbstüberwachung vorrangige Bedeutung der Aufrechterhaltung der Qualität der Nietverbindung und der Sicherheit der Anwendung bei. Diese Anforderungen werden in der Eingrenzung des modellierten Systembereiches berücksichtigt.

Das Modell des Setzzyinders ist in Anh. B detailliert beschrieben. Die Modellparameter werden für den Setzzyylinder der Stanznietanlage nicht veröffentlicht. Ein exemplarischer Parametersatz wird vorgeschlagen und in der

weiterführenden Diskussion der modellbasierten Diagnose verwendet. Das Modell kann zur Abbildung eines allgemeinen doppelwirkenden hydraulischen Zylinders gesteuert mit den Drücken in den Anschlüssen verwendet werden. Die Variablen zur Vorgabe der Drücke sind folglich die Eingangsgrößen des Modells. Die formulierte DAE mit dem Index 1 enthält 5 differentielle und 41 algebraische Gleichungen. Die Komponenten des differentiellen Zustandes sind die Drücke in den Kammern des Zylinders, die Positionen des Kolbens und des Stempels sowie die Geschwindigkeit der bewegten Masse. Die Geschwindigkeiten der bewegten Masse, des Kolbens und des Stempels sind algebraisch gekoppelte Variablen. Die Messgröße fasst die Drücke in den Zylinderkammern und die Positionen des Kolbens und des Stempels zusammen. Die Eingangs- und die Messgrößen des Modells können in dem realen System mit einem begrenzten Aufwand und mit einer hinreichenden Genauigkeit messtechnisch erfasst werden. Die Stanznietanlage RIVSET Vario enthält die entsprechenden Messstellen.

Ferner implementiert das Modell zwei substantielle Systemveränderungen bzw. fehlerhafte Verhaltensmuster. Hierbei wird das Systemverhalten unter Annahme des Verschleißes der Kolben- und der Kolbenstangendichtung modelliert. Die hydraulischen Widerstände der Dichtungen gegen die Leckagen werden in diesen Verhaltensmoden deutlich reduziert. Die Folgen des fortschreitenden Verschleißes der Dichtungen können unter Umständen erhebliche Auswirkungen auf das reale System haben. Daher sind die rechtzeitige Detektion des signifikant veränderten Verhaltens, die Lokalisierung der Ursache und die Identifikation des Ausmaßes der Veränderung sehr wichtig für die Gewährleistung des sicheren Betriebs der Anlage und die Aufrechterhaltung der Qualität der Nietverbindung. Die quantitativen Einflussgrößen der Systemveränderungen werden entsprechend Abschn. 4.2 eingeführt.

Die Verläufe der Drücke in den Anschlüssen  $u_1$  und  $u_2$ , der Drücke in den Kammern des Zylinders  $p_{c,1}$  und  $p_{c,2}$  sowie der Position des Stempels  $d_{pt,3}$  für das nominale Modell des hydraulischen Zylinders mit dem exemplarischen Parametersatz sind in Abb. 5.11 dargestellt. Das Aufprägen der modellierten Systemveränderungen führt zu einer Veränderung der Verläufe. Die qualitativen Charakteristika bleiben jedoch erhalten. Der simulierte Prozess kann in vier Abschnitte unterteilt werden: der Vorhub, der Arbeitshub, der Rückhub und der Ruhezustand. Diese Abschnitte sind in Abb. 5.11 hervorgehoben.

## 5.5.2 Zustandsschätzung

Die Zustandsschätzung wird mit dem Unscented Kalman-Filter umgesetzt (vgl. Abschn. 3.4). Das UKF schätzt ausschließlich den differentiellen Zustand der DAE. Die Schätzung des algebraischen Zustandes wird aufgrund der stark begrenzten Leistungsfähigkeit der verwendbaren Hardware nicht verfolgt. Die konsistente Initialisierung des UKF erfordert in jedem diskreten Zeitschritt folglich keinen erhöhten Aufwand. Die direkte Schätzung der Volumenströme der Leckagen ist jedoch damit in der Diagnose nicht zugänglich. Die Vorteile und

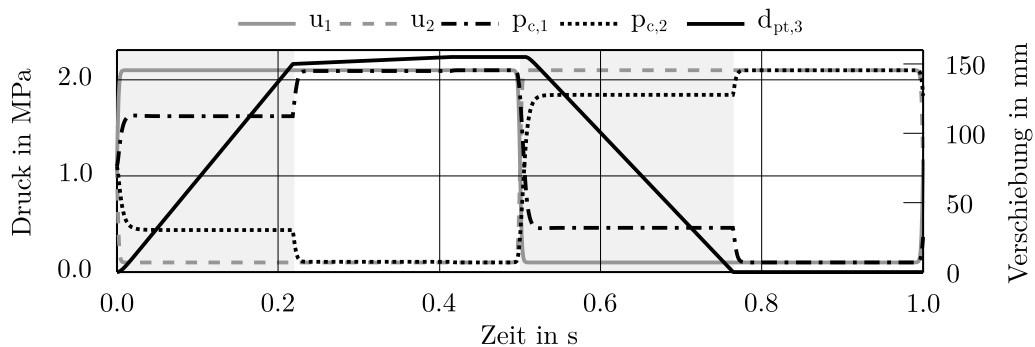


Abbildung 5.11: Nominales Modellverhalten des hydraulischen Zylinders

die Effizienz des UKF mit dem erläuterten Modell des hydraulischen Zylinders behandeln mit Schwerpunkt die Beiträge des Autors der vorliegenden Arbeit [AW13a] und [AW13b].

Das Modell des hydraulischen Zylinders enthält Variablen mit sehr unterschiedlichen Größenordnungen. Die Drücke erreichen die Werte in der Größenordnung von  $10^6$  Pa, während die Verschiebung und die Volumenströme im Bereich von  $10^{-3}$  m bzw.  $10^{-3}$  m<sup>3</sup>/s variieren. Die Variablen des Modells werden zur Vermeidung erhöhter Auswirkungen numerischer Fehler in der Anwendung des Kalman-Filters geeignet skaliert. Die Skalierungsfaktoren werden als quadratische Mittelwerte der Variablen für den Arbeitszyklus ermittelt.

Eine differenzierte Beurteilung des Stanznietprozesses gestützt auf das dynamische Modell und damit eine belastbare Bewertung der Qualität der Nietverbindung werden mit der Implementierung der Zustandsschätzung ermöglicht. Die wesentlichen Größen hierfür sind die Geschwindigkeit und die Position des Setzstempels. Mit den Größen sowie der Kenntnis der Eigenschaften der zu fügenden Werkstücke und des Nietes kann ergänzend die Kraft für den Setzvorgang aus einer algebraischen Beziehung berechnet werden. Hierbei werden entsprechend dem Ansatz der Schätzung des differentiellen Zustandes keine externen Störeinflüsse in der algebraischen Gleichung berücksichtigt. Die Auswertung der Schätzwerte kann sowohl unmittelbar auf deren Ermittlung anschließen, als auch nach einer definierten Anzahl der Verbindungen erfolgen. Eine grundsätzliche Erweiterung der Qualitätsüberwachung stellt in diesem Zusammenhang die ganzheitliche Berücksichtigung der dynamischen Effekte in dem Fügeprozess dar.

### 5.5.3 Diagnose

Die modellbasierte Diagnose wird gestützt auf die Zustandsschätzung mit dem Interacting Multiple Model Ansatz implementiert (vgl. Abschn. 4.3). Die betrachteten substantiellen Systemveränderungen sind die veränderten Leckagen der Kolben- und der Kolbenstangendichtung. Diese Verhaltensmoden

werden mit den quantitativen Einflussgrößen modelliert. Die Einflussgrößen erweitern das Modell und werden äquivalent zu den differentiellen Zuständen behandelt (vgl. Anh. B). Damit ist die Schätzung der Einflussgrößen mit den korrespondierenden UKF möglich.

Die Einflussgrößen der Systemveränderungen werden sprunghaft angenommen, folglich wird der Verschleißgrad als eine stationäre Größe abgebildet. Das Fortschreiten des Verschleißes mit wahrnehmbaren Auswirkungen auf die Messgröße findet im regulären Fall nach mehreren zehntausend Arbeitszyklen der Stanznietanlage statt. Ein außerordentliches Ereignis, z.B. das Reißen einer Dichtung, führt offensichtlich zu den gleichen Folgen, wie der ausgeprägte Verschleiß. Das dynamische Verhalten der Einflussgrößen wird mit der getroffenen Annahme in beiden Fällen realitätsnah wiedergegeben. Ferner erfordert die Annahme über das dynamische Verhalten der Einflussgrößen keine weiterführenden Untersuchungen des Verschleißverhaltens der Dichtungen. Das Auftreten der Systemveränderungen wird unabhängig von einander und ausschließlich einzeln angenommen. Die Möglichkeit des simultanen Auftretens der Veränderungen ist in dem realen System zwar gegeben, jedoch weitgehend unwahrscheinlich, denn sowohl die Geometrie als auch die Betriebsbedingungen der Dichtungen unterscheiden sich erheblich voneinander.

Eine eingehende Beschreibung des Diagnosemodells gelingt gestützt auf die Definition des Probabilistic Hybrid Automaton (4.27). Die Menge der modellierten Verhaltensmodes  $S_z$  ist darin

$$S_z = \{z_1, z_2, z_3\} \quad (5.11)$$

mit den Verhaltensmodes

$$z_1 = \text{'nominales Systemverhalten'}, \quad (5.12)$$

$$z_2 = \text{'Systemverhalten mit verschlissener Kolbendichtung'}, \quad (5.13)$$

$$z_3 = \text{'Systemverhalten mit verschlissener Kolbenstangendichtung'}. \quad (5.14)$$

Die Anzahl der Modes wird mit  $n_z = 3$  notiert. Entsprechend werden drei DAE mit dem Index 1 und drei UKF in der Diagnose der Stanznietanlage mit dem IMM-Ansatz verwendet. Die Menge der zulässigen wertdiskreten Eingangsgrößen  $S_{u,d} = \{u_{d,k}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}}$  wird als die leere Menge definiert. Die Menge der wertkontinuierlichen differentiellen Zustände  $S_x = \{x_k \in \mathbb{R}^{n_{x,k}}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}}$  ersetzt in der Anwendung die Menge der generalisierten Zustände in der Definition des PHA ohne Einschränkungen. Hierbei werden die differentiellen Zustände der DAE zugeordnet zu den Modes in das Diagnosemodell einbezogen, denn diese werden mit den UKF geschätzt. Die algebraischen Zustände fungieren als interne Variablen der Verhaltensmodelle. Zugeordnet zu den differentiellen Zuständen wird die Menge der stochastisch beschriebenen Störgrößen der differentiellen Zustände  $S_{v,x} = \{v_{x,k} \in \mathbb{R}^{n_{x,k}}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}}$  festgelegt. Die Menge der Eingangsgrößen  $S_u = \{u_k \in \mathbb{R}^{n_{u,k}}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}}$  fasst die Drücke in den Anschlüssen des hydraulischen Zylinders für die Modelle zusammen. Die Elemente



$u_k$  sind daher für alle  $k$  identisch. Die Menge der modellierten Messgrößen  $S_y = \{y_k \in \mathbb{R}^{n_y, k}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}}$  enthält äquivalente Variablen der dynamischen Verhaltensmodelle der Modes. So werden die Mengen der Messgrößenfunktion  $S_h = \{h_k\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}}$  und der stochastisch beschriebenen Störgrößen der Messgrößen  $S_{v,y} = \{v_{y,k} \in \mathbb{R}^{n_y, k}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}}$  mit jeweils drei identischen Elementen definiert. Die Zustandsübergangsfunktionen in der Menge  $S_\xi = \{\xi_{k,j}\}_{k \in \{1, \dots, n_z\}}$  werden durch die Lösung der DAE numerisch bestimmt (vgl. (4.5)).

Die Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion der Verhaltensmodes  $P_{z,t,j}$  hat in der Diagnose mit dem IMM eine zentrale Bedeutung. Diese definiert für zwei aufeinander folgende Zeitpunkte  $t_i$  und  $t_j$  mit  $j = i + 1$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$  die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von dem Mode  $Z_i = z_k$  im Zeitpunkt  $i$  zu dem Mode  $Z_j = z_l$  im Zeitpunkt  $j$  mit  $z_k, z_l \in S_z$ . Die Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion für die Diagnose der Stanznietanlage wird nicht veröffentlicht. Eine geeignete Definition für den angeführten exemplarischen Parametersatz des Modells des hydraulischen Zylinders ist eine konstante Matrix

$$P_{z,t,j} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

somit gilt im Einzelfall

$$P_{z,t,i} = P_{z,t,j}. \quad (5.16)$$

Die Definition der Funktion soll einerseits die Eigenschaften des realen Systems wiedergeben, andererseits die Anwendbarkeit der Algorithmen der Methodik sicherstellen. Unter dieser Bedingung wird im Diagnosemodell die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Verhaltensmode mit einer verschlissener Dichtung zu dem nominalen Verhalten ungleich null festgelegt, obwohl für das reale System die Möglichkeit dieses Übergangs ausgeschlossen ist. Damit wird das Verharren des Algorithmus in einem vorübergehend falsch geschätzten Mode verhindert. Des Weiteren wird die Wahrscheinlichkeit der Verhaltensmodes im initialen Zeitpunkt mit

$$P_{z,0} = 1/3 \cdot [1, 1, 1]^T \quad (5.17)$$

vorgegeben und die Wahrscheinlichkeiten der Messgrößen  $P_{y,i}$  in einem Zeitpunkt  $t_i$  mit (4.39), (4.40) und (4.41) ermittelt.

Die modellbasierte Diagnose des hydraulischen Zylinders mit dem exemplarischen Parametersatz wird für das simulierte System mit stochastischer Störung ausgeführt (vgl. [WA16], [Bor15]). Die zwei modellierten Systemveränderungen werden in den vier beschriebenen Abschnitten des Arbeitszyklus aufgeprägt und zurückgenommen (vgl. Abb. 5.11). Somit werden 8 Arbeitszyklen simuliert, in den jeweils eine Einflussgröße für einen Abschnitt des Arbeitszyklus den Wert von 0 auf  $-2.5$  ändert und das System folglich einen Modeübergang erfährt. Hierbei erfolgen die Aufnahme der Messgrößen und die Ausführung der UKF mit der Frequenz 1 kHz.

Die Ergebnisse der Schätzung der Verhaltensmodes stellt Abb. 5.12 dar. Darin bezeichnen

$$\{z_{s,1}, z_{s,2}, z_{s,3}\} \quad (5.18)$$

die Modes im simulierten System und

$$\{z_1, z_2, z_3\} \quad (5.19)$$

die Modes im Diagnosemodell (vgl. (5.12), (5.13), (5.14)). Die mit IMM geschätzten Wahrscheinlichkeiten der Modes im Modell

$$\{P(z_1), P(z_2), P(z_3)\} \quad (5.20)$$

werden mit (4.44) ermittelt.

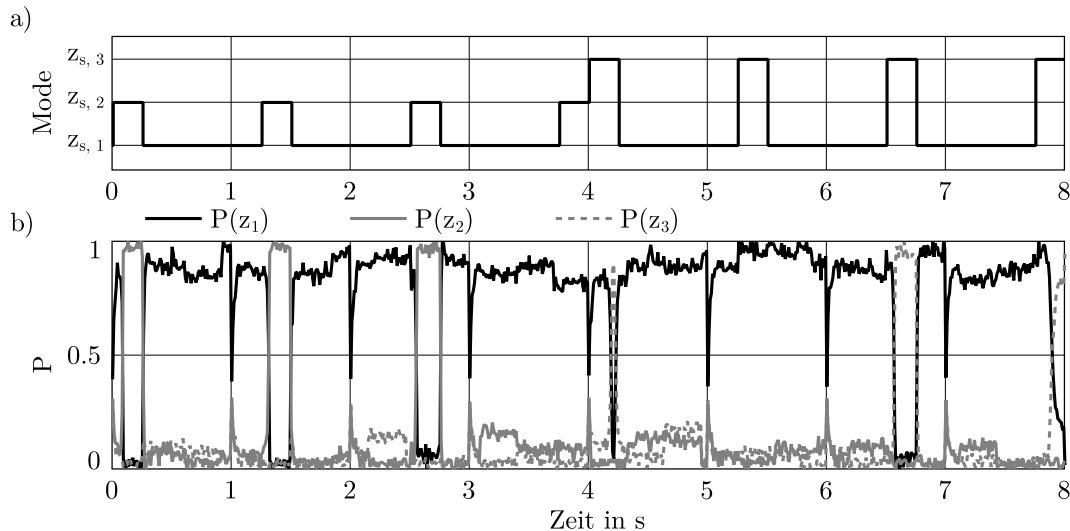


Abbildung 5.12: Schätzung der Verhaltensmodes des hydraulischen Zylinders  
a) Modes im simulierten System, b) geschätzte Wahrscheinlichkeit der Modes

Die Schätzung der Modes und damit die Detektion sowie die Lokalisierung der Systemveränderungen gelingt offensichtlich in verschiedenen Abschnitten des Arbeitszyklus mit unterschiedlicher Genauigkeit und misslingt in ausgewählten Abschnitten. Die variierende Effektivität des Diagnosealgorithmus kann mit den Eigenschaften des Systems begründet werden. Die Auswirkungen der modellierten Systemveränderungen sind in den Abschnitten des Arbeitszyklus unterschiedlich (vgl. [WA16]). Folglich ist eine eindeutige Schätzung der Modes aus physikalischen Gründen nicht fortlaufend möglich. Dennoch ist die Leistungsfähigkeit der Diagnose für die definierten Bedingungen bemerkenswert. Die korrekte Schätzung des Modes gelingt in überwiegender Anzahl der simulierten Fälle innerhalb ca. eines Viertels der Dauer des Arbeitszyklus. Die Reaktion des

Algorithmus findet innerhalb einiger weniger Zeitschritte der UKF statt. Die Effektivität und die Effizienz der hybriden Zustandsschätzung mit IMM gründen unmittelbar auf der Güte der Schätzung der wertkontinuierlichen Zustände mit den UKF. Die Formulierung des UKF für die differential-algebraischen Gleichungen ist damit eine wesentliche Voraussetzung für die Implementierung der Diagnose mit IMM auf der Basis der praxisrelevanten Modellklasse.

Die Ergebnisse der Schätzung der Einflussgrößen werden in Abb. 5.13 gegeben. Darin sind

$$x_{s,st} = [x_{s,st,1}, x_{s,st,2}]^T \quad (5.21)$$

die Einflussgrößen im simulierten System und

$$x_{st} = [x_{st,1}, x_{st,2}]^T \quad (5.22)$$

die Einflussgrößen im Diagnosemodell.

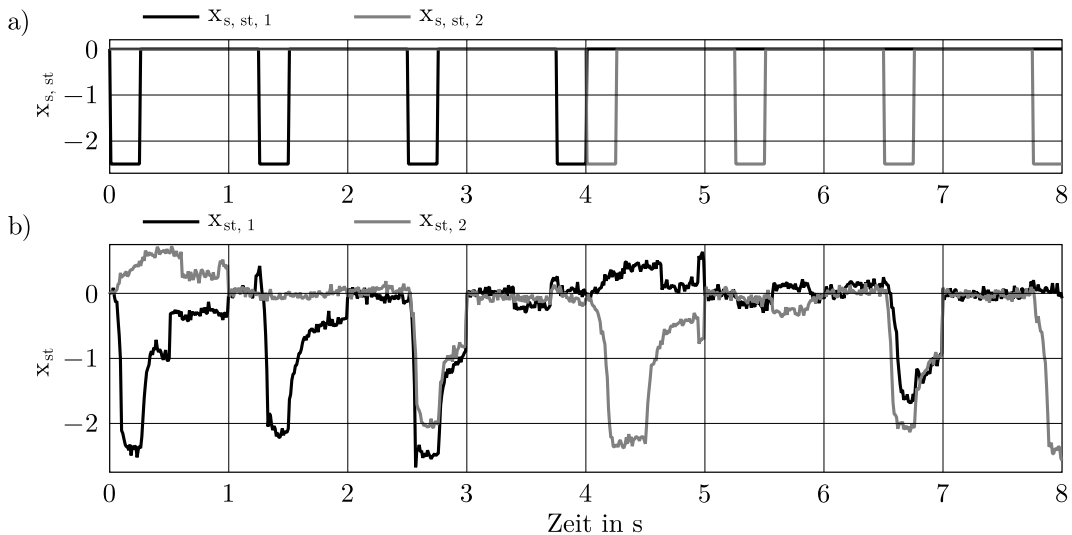


Abbildung 5.13: Schätzung der Einflussgrößen des hydraulischen Zylinders, a) Einflussgrößen im simulierten System, b) geschätzte Einflussgrößen

Die Güte der Schätzung der Einflussgrößen korrespondiert mit der Güte der Schätzung der Modes. Die physikalischen Eigenschaften des Systems lassen die Schätzung mit hoher Genauigkeit zu, jedoch nicht in allen Abschnitten des Arbeitszyklus. Ferner ist das unterschiedliche dynamische Verhalten der Schätzung für das Aufprägen und die Rücknahme der Systemveränderungen bemerkenswert. Nach dem Aufprägen der Veränderungen nähern sich die Schätzwerte der Einflussgrößen den tatsächlichen Werten deutlich schneller als nach der Rücknahme. Dieses Verhalten kann einerseits mit der Festlegung der Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion und andererseits der nominalen Eigenschaften der Dichtungen begründet werden. Die geringen Werte für die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Verhaltensmode mit einer verschlissener Dichtung

zu dem nominalen Verhalten führen zu einer zeitlichen Verzögerung in der Schätzung. Ferner ist der Widerstand der Dichtungen gegen die Leckagen im nominalen Zustand des Systems sehr hoch, d.h. für die Werte der Einflussgrößen gleich 0. Die Leckagevolumenströme sind daher in der Umgebung der nominalen Werte der Widerstände sehr gering bezogen auf die Volumenströme in anderen Systembereichen. Folglich sind die Auswirkungen der Systemveränderungen für diese Bedingungen verschwindend. Für die praktische Anwendung des Diagnosealgorithmus ergeben sich daraus keine Nachteile, denn die betrachteten Veränderungen der Dichtungen sind im realen System unumkehrbar.

Die Bedingungen in der simulierten Anwendung der Diagnose für den hydraulischen Zylinder mit der exemplarischen Parametrierung des Modells übertreffen die realen Anforderungen weitgehend. Die aufgezeigte kurze Reaktionszeit des Algorithmus ermöglicht damit nicht nur die genaue Diagnose der Zunahme des Verschleißes über mehrere tausend Arbeitszyklen, sondern auch eine Reaktion auf das instantane Versagen der Dichtungen. Die Auswirkungen des Verschleißes auf die Qualität des Stanznietprozesses können somit durch die bedarfsgerechte Wartung nahezu gänzlich ausgeschlossen werden. Die schnelle Detektion des Versagens der Dichtungen und dessen Ausmaßes bilden die Grundlage für die sinnvolle Definition und die Implementierung des Ersatzbetriebes oder der Not-Aus-Funktionen. Die Erkenntnisse aus der Untersuchung des Modells des hydraulischen Zylinders mit dem exemplarischen Parametersatz lassen sich auf die Anwendung in der Stanznietanlage weitgehend übertragen.

## 5.6 Verallgemeinerung des Vorgehens

Die Verallgemeinerung der Anwendung der mathematischen Optimierung, der modellbasierten Zustandsschätzung und Diagnose wird im Forschungsprojekt ESEMO im Bereich der Montagesysteme angestrebt. Die Übertragbarkeit kann durch die Definition geeigneter Teilziele und der zugeordneten Analysemethoden erreicht werden. Hierfür wird das diskutierte Vorgehen für das Demonstrator-system durchgehend untergliedert und die Voraussetzungen für die Anwendung der einzelnen Methoden auf Montagesysteme erweitert. Das Ziel ist hierbei die Definition des ESEMO-Vorgehens, also eines speziellen Konzepts für die Entwicklung selbstüberwachender energieoptimierter Montagesysteme. Folglich wird offensichtlich eine Definition der Montagesysteme als eine Klasse und die Abgrenzung der Systeme von anderen industriellen Anwendungen erforderlich.

**Def. 5.1:** Ein Montagesystem ist eine Einrichtung, die dem Zusammenbau von Teilen und/oder Gruppen zu Gruppen höherer Ebenen bzw. Ordnung in der Fertigung dient.

**Def. 5.2:** Der Montageprozess ist somit eine Umwandlung von Material, Energie und Information zum Zweck der Herstellung der Gruppen höherer Ebenen.

Die Montagesysteme bestehen entsprechend der festgelegten Definition aus Teilsystemen zur Wandlung des Materials, der Energie und der Information. Diese Größen werden hier als Größen der allgemeinen Funktionsstruktur interpretiert. Das ESEMO-Vorgehen greift die allgemeine Funktionsstruktur der Montagesysteme auf. Die Grundlage für die Optimierung und die Überwachung bildet die ganzheitliche Analyse des Systems, d.h. der Teilsysteme und deren Wechselwirkung. Die Steigerung der Energieeffizienz der Montagesysteme wird durch die Modifikation der Systemsteuerung und die Variation ihrer Parameter angestrebt. Damit wird die Beeinflussbarkeit der Teilsysteme zur Wandlung des Materials und der Energie durch das Teilsystem zur Wandlung der Information vorausgesetzt. Das ESEMO-Vorgehen wird wie folgt strukturiert:

1. Analyse
  - (a) Empirische Analyse
  - (b) Modellbildung
2. Modellbasierte Optimierung
  - (a) Parameteridentifikation
  - (b) Minimierung des Energieverbrauches
3. Modellbasierte Diagnose
  - (a) Modellbildung
  - (b) Zustandsschätzung
  - (c) Diagnose

**Analyse.** Die Phase der Analyse eines bestehenden oder zu entwickelnden Montagesystems impliziert zwei Schritte: die empirische Analyse und die mathematische Modellbildung. Die empirische, erfahrungsbasierte Analyse identifiziert die Teilsysteme und charakterisiert diese qualitativ. Die Teilsysteme werden bezüglich der technischen Disziplinen klassifiziert. Ferner werden die Wechselwirkungsmechanismen der Teilsysteme beschrieben. Das Ergebnis der empirischen Analyse ist eine belastbare Grundlage für die Festlegung der mathematisch zu modellierenden Systembereiche.

Das mathematische Modell wird mit dem Ziel der quantitativen Beschreibung des Systemverhaltens entwickelt. Die physikalischen und logischen Wechselwirkungen der Teilsysteme zur Wandlung des Materials, der Energie und der Information werden mathematisch formuliert. Die geeignete Formulierung der internen Zusammenhänge der Teilsysteme vervollständigt die Modellbildung. Die Gesamtheit der mathematischen Teilmodelle repräsentiert das Verhalten der betrachteten Montagesystems. Folglich sind die notwendigen Voraussetzungen für das Fortführen des ESEMO-Vorgehens:

- die Lösbarkeit des Gesamtmodells mit dem vertretbaren Aufwand,
- die erreichbare, hinreichende Genauigkeit der Lösung und
- die hinreichenden Variationsmöglichkeiten der Parameter der Teilmodelle.

Das Ziel der Optimierung des Systemverhaltens durch die Variation der Parameter des Teilmodells zur Wandlung der Information, d.h. der Steuerung, wird somit fortwährend der Analysephase beachtet.

Die hierarchische Strukturierung des Systems in Teilsysteme und die Verknüpfung der Teilmodelle zum Gesamtmodell sind Ansätze der Objektorientierung. Somit ist die objektorientierte Modellierung in dem Zusammenhang die naheliegende einsetzbare Modellierungstechnik. Die Erstellung der Teilmodelle kann mit der Objektorientierung parallelisiert bzw. verteilt werden. Die Verknüpfung der Teilmodelle resultiert jedoch im Gesamtmodell in Form einer DAE. Damit ist die Anwendung geeigneter Lösungsverfahren und Diagnosekonzepte erforderlich.

**Modellbasierte Optimierung.** Die modellbasierte Optimierung ist eine etablierte Methodik in der Entwicklung technischer Systeme. Die wesentliche Voraussetzung für die Anwendung der Methodik ist die geeignete Definition der Zielfunktion, der Argumente und der Nebenbedingungen der Optimierung gestützt auf ein mathematisches Verhaltensmodell des Systems. Die Optimierung impliziert im Rahmen des ESEMO-Vorgehens zwei voneinander unabhängige Teilziele: die Parameteridentifikation und die Minimierung des Energieverbrauches. Diese Teilziele werden entsprechend mit unterschiedlichen Mitteln verfolgt.

Die optimalitätsbasierte Parameteridentifikation ist eine rechenintensive Technik. Die Zielfunktion wird hierbei als eine geeignet formulierte Abweichung der berechneten Modell- und der gemessenen Systemreaktion auf eine spezifizierte Anregung definiert. Die Argumente der Optimierung sind im Allgemeinen die Parameter des Modells. In dem speziellen Fall der Montagesysteme werden vor allem die Parameter der Teilmodelle zur Wandlung des Materials und der Energie identifiziert. Die Parameter des Teilmodells zur Wandlung der Information werden der realen Implementierung des Steuerungsalgorithmus entnommen. Die Parameteridentifikation ist zum Erreichen der hinreichenden Genauigkeit des entwickelten Modells erforderlich. Die hierbei zu berücksichtigenden Nebenbedingungen folgen im Wesentlichen aus der Deklaration der Parameter und deren Verwendung in dem Modell.

Die Minimierung des Energieverbrauches des betrachteten Montagesystems ist eines der grundlegenden Ziele des ESEMO-Vorgehens. Die Zielfunktion in dem Optimierungsproblem wird als der Energiebedarf für eine Arbeitseinheit des Montageprozesses definiert. Die Argumente sind entsprechend dem gesetzten Ziel des Vorgehens ausschließlich die Parameter der Steuerung. Die Formulierung der Nebenbedingungen in der Optimierung schließt die technischen, technologischen und ökonomischen Randbedingungen des Montageprozesses ein. Folglich erschweren die vielseitigen Nebenbedingungen die Ermittlung der optimalen und zulässigen Lösung. Das Ergebnis der Optimierung wird auf das reale System übertragen, daher sind die Verifikation und die Untersuchung der Robustheit der Lösung notwendig.

Der Abschnitt 'Modellbasierte Optimierung' des ESEMO-Vorgehens setzt die Durchführung der messtechnischen Untersuchungen des Montagesystems unverzichtbar voraus. Hierzu gehören die Messungen der Systemreaktionen

auf eine Reihe spezifizierter Anregungen für die Parameteridentifikation sowie die Messungen zur Verifikation der ermittelten optimalen Lösung und zum Nachweis der Robustheit der Lösung unter variierenden Umgebungs- und Prozessbedingungen. Damit ist in dieser Phase des Vorgehens die Bereithaltung des Prototyps des Montagesystems und der geeigneten Messtechnik erforderlich. Ferner werden Vorrichtungen zur Erfassung, Verarbeitung und Auswertung der Messgrößen benötigt. Die messtechnischen Untersuchungen werden unter realen Betriebsbedingungen angestrebt, daher wird die Bereitstellung der Teile oder Gruppen für die Ausführung des Montageprozesses sichergestellt.

**Modellbasierte Diagnose.** Die Implementierung der modellbasierten Diagnose ist das abschließende grundsätzliche Ziel des ESEMO-Vorgehens. Die Voraussetzungen hierfür sind die Erstellung eines geeigneten Diagnosemodells und die Umsetzung der Zustandsschätzung auf dieser Basis. Darauf aufbauend wird die Schätzung der Verhaltensmodes sowie der Einflussgrößen der Systemveränderungen durchgeführt und somit die Detektion, die Isolation und die Identifikation der modellierten Systemveränderungen realisiert.

Die Modellbildung greift die bereits erzielten Analyseergebnisse auf. Die Analyse der Teilsysteme zur Wandlung des Materials und der Energie wird weitergeführt. Speziell werden für diese Teilsysteme die betriebsrelevanten Systemveränderungen beschrieben. Anschließend wird die Komplexität des Gesamtmodells aus dem Abschnitt der Optimierung reduziert, sodass die Bereiche zur Abbildung der Systemveränderungen erhalten bleiben und die Berechnungen mit dem Modell für die Diagnose auf der verfügbaren Hardware in der zur Verfügung stehenden Zeit durchgeführt werden können. Die Vereinfachung des Gesamtmodells in Form einer DAE kann zu einem Modell geringerer Komplexität und gleicher Klasse führen. Das Erhalten der objektorientierten Struktur ist in diesem Abschnitt sehr empfehlenswert, denn dadurch können die nicht relevanten Bereiche des Modells effizient entfernt werden. Die Sicherstellung der Beobachtbarkeit des vereinfachten Modells wird währenddessen für die vorhandenen Messgrößen und die hinzugefügten Einflussgrößen gefordert.

Die Zustandsschätzung wird mit den Kalman-Filtern einer geeigneten Formulierung für das entwickelte nominale Modell des Montagesystem und für die jeweiligen Modelle mit den Systemveränderungen umgesetzt. Damit wird eine Bank der Kalman-Filter implementiert, deren Schätzungen im Rahmen des IMM zusammengeführt werden. Hierfür wird der korrespondierende Probabilistic Hybrid Automaton vollständig parametrisiert. Das IMM stellt die Grundlage für die Kombination der übereinstimmenden Komponenten der Schätzwerte und für die Schätzung des Verhaltensmodes mit der Ermittlung der zugeordneten Wahrscheinlichkeiten dar. Die Detektion und die Isolation der Systemveränderungen erfolgt auf der Basis der Schätzung der Modes, während die Identifikation des Ausmaßes der Veränderungen mit der Schätzung der Einflussgrößen gelingt.

## 5.7 Zusammenfassung

Die differential-algebraischen Gleichungen werden als Modellklasse im Forschungsprojekt ESEMO intensiv eingesetzt. Die Bedeutung und die Vorteile des Einsatzes werden aus verschiedener Sicht aufgezeigt. Die exemplarische Anwendung der entwickelten Ansätze der Zustandsschätzung und der Diagnose auf der Basis dieser Modellklasse weist die praktische Anwendbarkeit der Methoden nach.

Das Demonstratorsystem, eine industrielle Stanznietanlage, wird im Zusammenhang des Projekts umfassend beschrieben. Die objektorientierte Modellierung des Montagesystems ermöglicht unter anderem die Beherrschung der Komplexität. Das resultierende Modell liegt bedingt durch das Vorgehen in Form einer DAE vor. Das Modell des Demonstratorsystems wird vielfach zum Erreichen der Ziele des Projekts eingesetzt. Einerseits werden die etablierten Methoden der Optimierung und der Parameteridentifikation, andererseits die entwickelte Formulierung des Kalman-Filters für DAE und darauf aufbauend die modellbasierte Diagnose mit dem IMM-Ansatz angewandt. Die wesentlichen Ergebnisse der Analyse, der Optimierung und der Diagnose werden vorgestellt und im Hinblick auf die praktische Anwendung bewertet.

Die Folge der eingesetzten Techniken wird gegliedert zusammengefasst. Damit wird ein Vorgehen für die Entwicklung selbstüberwachender energieoptimierter Montagesysteme für eine mögliche Definition der Systemklasse verallgemeinernd vorgeschlagen. Sachdienliche Eigenschaften der festgelegten Systemklasse werden in dem Vorgehen berücksichtigt. Ein erreichtes Ziel und hiermit wesentliches Ergebnis des Forschungsprojekts ist die Beschreibung des nachweislich realisierbaren ESEMO-Vorgehens für die Implementierung der modellbasierten Methoden in industriellen Montagesystemen.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Die Diagnose auf Basis nichtlinearer differential-algebraischer Gleichungen wird in dieser Arbeit mit der hybriden Zustandsschätzung mit zeitdiskreten Kalman-Filtern umgesetzt (vgl. Kap. 4). Hierbei nimmt die Entwicklung der Kalman-Filter mit nichtlinearen DAE einen wesentlichen Teil der Arbeit ein (vgl. Kap. 3). Die Diskussion der DAE als einer eigenständigen und wichtigen Modellklasse zeigt das grundlegende Problem bei ihrer Verwendung in der Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern (vgl. Kap. 2).

Eine DAE kann als ein überbestimmtes Gleichungssystem interpretiert werden, das zur anschaulichen Demonstration dieser Eigenschaft als die inhärente Differentialgleichung und restriktive Mannigfaltigkeit umformuliert wird (vgl. Kap. 2). Die inhärente ODE kann mit konventionellen Integrationsmethoden gelöst werden. Die Lösung der DAE ist aber nur dann mit der Lösung der inhärenten ODE identisch, wenn diese in jedem Zeitpunkt auf der restriktiven Mannigfaltigkeit liegt, also die entsprechende algebraische Zwangsbedingung erfüllt. Das bedeutet, dass die Komponenten des generalisierten Zustandes der DAE von einander algebraisch abhängen können. Die Lösung des Anfangswertproblems für eine DAE kann effizient ermittelt werden, indem algorithmisch ausgewählte Komponenten des generalisierten Zustandes und deren Zeitableitungen als algebraisch abhängige Variablen deklariert werden (z.B. Dummy-Derivative-Methode, vgl. [MS93]). Dieser sehr verbreitete, etablierte Ansatz hat jedoch zwei grundsätzliche Probleme. Einerseits ist die Festlegung der algebraisch abhängigen Zustandskomponenten im Allgemeinen nicht eindeutig. Andererseits muss der initiale generalisierte Zustand für die Lösung des Anfangswertproblems konsistent sein, d.h. die algebraische Zwangsbedingung entsprechend der restriktiven Mannigfaltigkeit erfüllen. Ein inkonsistenter Anfangswert kann jedoch wohl begründet sein. Zum Beispiel kann der Anfangswert aus der Beobachtung des realen Systems ermittelt werden, dessen Verhalten zwar mit der DAE modelliert wird, sich jedoch aufgrund der Störungen oder getroffenen Idealisierungen von dem modellierten Verhalten unterscheidet. Der geforderte konsistente Zustandswert lässt sich durch unterschiedliche Ansätze aus dem inkonsistenten berechnen. Hier ist es allerdings sehr wichtig festzuhal-

ten, dass dadurch offensichtlich unvermeidbar der vorgegebene Anfangswert verändert wird.

Die Zustandsschätzung wird in dieser Arbeit mit zeitdiskreten Kalman-Filtern auf Basis nichtlinearer DAE umgesetzt (vgl. Kap. 3). Die geschätzte Variable, die den Zustand des realen Systems repräsentiert, ist entsprechend der generalisierte Zustand der DAE. Das zeitdiskrete Kalman-Filter kann hierbei als eine Abfolge von Anfangswertproblemen interpretiert werden. Die Prädiktion des Erwartungswertes und der Kovarianz des stochastisch gestörten Zustandes erfordert in jedem Zeitschritt des Filters die Ermittlung der Lösung der DAE mit einem oder mehreren Anfangswerten des generalisierten Zustandes. Diese Anfangswerte werden im Kalman-Filter-Algorithmus bestimmt und sind folglich im Allgemeinen inkonsistent. Die Berechnung der konsistenten Anfangswerte im Kalman-Filter, hier bezeichnet als die Reinitialisierung, muss daher die Zielsetzung der Zustandsschätzung berücksichtigen, z.B. durch eine geeignete Optimalitätsbedingung. Anderenfalls wird die Effektivität des Filters beeinträchtigt. In der Arbeit wird dieses Problem ausführlich beschrieben. Mehrere Ansätze werden für die Reinitialisierung entwickelt.

Die Diagnose, also die Detektion, die Isolation und die Identifikation von substantiellen Systemveränderungen, wird in dieser Arbeit mit der Anwendung der hybriden Zustandsschätzung realisiert (vgl. Kap. 4). Hierbei beschreibt ein wertdiskreter Zustand, der Mode, die Art des Systemverhaltens bzw. die Kondition des realen Systems. Jedem Mode wird ein eigenständiges Modell in Form einer DAE zugeordnet. Folglich entspricht das Auftreten einer Systemveränderung einem Wechsel der zugehörigen DAE für die Beschreibung des veränderten Systemverhaltens. Die Schätzung des wertdiskreten Modes erfolgt mit dem Interacting-Multiple-Model-Ansatz und des wertkontinuierlichen Zustandes mit einer Bank von Kalman-Filtern. Damit wird gezeigt, dass die hybride Zustandsschätzung als ein leistungsfähiger Diagnoseansatz mit nichtlinearen DAE anwendbar ist.

Die modellbasierten Methoden auf Basis nichtlinearer DAE werden im Rahmen eines Forschungsprojekts eingesetzt (vgl. Kap. 5). Für eine industrielle Stanznietanlage werden die Zustandsschätzung und die Diagnose realisiert. Ferner werden mit DAE konventionelle Optimierungsmethoden für die Identifikation der Modellparameter und die Minimierung des Energieverbrauchs der untersuchten Anlage angewandt. Die wichtigsten Vorteile für den Einsatz der DAE im Projekt sind die effiziente Modellierung komplexer technischer Systeme, die Wiederverwendbarkeit der Modelle der Teilsysteme und die sehr einfache Erweiterung der Modellgleichungen z.B. mit den Einflussgrößen für die Diagnose.

Die differential-algebraischen Gleichungen bieten unbestreitbar viele Vorteile. Vor allem kann mit der hierarchischen, objektorientierten Modellierung mit DAE der Aufwand für die Modellerstellung erheblich reduziert und effizient auf mehrere Bearbeiter verteilt werden. In dieser Hinsicht sind DAE eine sehr wichtige Modellklasse für modellbasierte Methoden und für deren Einsatz in

komplexen realen Systemen. Offensichtlich erfordert der Einsatz von DAE aber auch eine Weiterentwicklung der Ansätze der Zustandsschätzung und der Diagnose. Diese Arbeit zeigt einige Erschwernisse in diesem Zusammenhang.

Der Bereich der Diagnose ist sehr vielseitig, sodass für thematisch anschließende Arbeiten nur sehr allgemein ein Ausblick gegeben werden kann (vgl. Kap. 1). Speziell die Verwendung von DAE in der hybriden Zustandsschätzung kann zu Modellen der Verhaltensmodes mit unterschiedlichen, heterogenen Zustandsräumen führen (vgl. [WS19]). Folglich ist die Weiterentwicklung der Ansätze für die hybride Zustandsschätzung mit DAE in die Richtung erforderlich. In der Praxis scheitert die Anwendung der modellbasierten Diagnose oft an der Komplexität realer Systeme und an stark limitierten Hardware-Ressourcen der Steuerungen. Die differential-algebraischen Gleichungen können hierbei einerseits ein Teil der Lösung, andererseits eine potentielle Ursache für die Hemmnisse sein. Das Aufzeigen der praktischen Einsatzmöglichkeiten für DAE in Diagnosemethoden, wie in dieser Arbeit, ist daher sehr wichtig.

Im Bereich der Zustandsschätzung mit Kalman-Filtern bleiben spezielle Fragen für thematisch anschließende Arbeiten offen. Generell kann der prinzipielle Vorteil der Verwendung von DAE inklusive der implizierten algebraischen Zwangsbedingung entsprechend der restriktiven Mannigfaltigkeit als Grundlage für die Zustandsschätzung hinterfragt werden. Alternativ hierzu können z.B. die Zustandsschätzung auf Basis der inhärenten ODE und eine geeignete Berücksichtigung der algebraischen Zwangsbedingung in den Algorithmusteilen Prädiktion und/oder Korrektur erwogen werden. Thematisch etwas weiter entfernt, jedoch ebenso wichtig sind zeitkontinuierliche Konzepte der Kalman-Filter mit DAE, die in dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Weiterhin kann speziell aufgrund der praktischen Relevanz die inkonsistente Zustandsschätzung mit dem Extended Kalman-Filter mit DAE noch intensiver untersucht werden.

# Anhang A

## Mathematisches Pendel

In diesem Abschnitt wird das Modell der Bewegung des mathematischen Pendels in kartesischen Koordinaten nach dem Vorgehen, vorgeschlagen in Abschn. 2.2, in die inhärente ODE und die zugeordnete restriktive Mannigfaltigkeit überführt. Die Darstellung des Systems ist in Abb. 2.1 gegeben. Die originäre DAE ist

$$f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - x_3 \\ \dot{x}_2 - x_4 \\ \dot{x}_3 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_1 \cdot x_5 - u_1 \\ \dot{x}_4 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_2 \cdot x_5 - u_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - a_r^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.1})$$

mit der Eingangsgröße  $u \in \mathbb{R}^2$

$$u = [u_1, u_2]^T = [0, a_g]^T. \quad (\text{A.2})$$

Darin sind  $a_m$  die Masse,  $a_r$  der Radius der Bewegungsbahn und  $a_g$  die Gravitationsbeschleunigung. Die Komponenten des generalisierten Zustandes  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  mit  $n_x = 5$  beschreiben die Position der Masse in dem Koordinatensystem, die zugeordnete Geschwindigkeit und die erforderliche Kraft der Bahnführung in der gegebenen Reihenfolge. Die Bezeichnung der Komponenten des generalisierten Zustandes der DAE wird für die Umformungen zur Vermeidung der mehrfachen Verwendung der Variablenamen geändert in

$$x = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]^T, \quad (\text{A.3})$$

somit ist die DAE

$$f(x, \dot{x}, u, t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - q_3 \\ \dot{q}_2 - q_4 \\ \dot{q}_3 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot q_1 \cdot q_5 - u_1 \\ \dot{q}_4 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot q_2 \cdot q_5 - u_2 \\ q_1^2 + q_2^2 - a_r^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Die Herleitung der inhärenten ODE und der restriktiven Mannigfaltigkeit erfolgt in einer Reihe aufeinander folgender algebraischer Umformungen und Differentiationen. Die eingeführten Größen und Funktionen werden in Abschn. 2.2 beschrieben. Die Nummerierung der Schritte beginnt mit 0 und entspricht damit der Anzahl der durchgeführten Differentiationen der Teile der DAE.

*Schritt 0*

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$P_{x,0} = I_{n_x} \quad (\text{A.6})$$

$$P_{f,0} = I_{n_x} \quad (\text{A.7})$$

$$x_0 = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T \quad (\text{A.8})$$

$$z_0 = [q_5]^T \quad (\text{A.9})$$

$$f_0 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - q_3 \\ \dot{q}_2 - q_4 \\ \dot{q}_3 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot q_1 \cdot q_5 - u_1 \\ \dot{q}_4 - \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot q_2 \cdot q_5 - u_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$g_0 = [q_1^2 + q_2^2 - a_r^2] = 0 \quad (\text{A.11})$$

*Schritt 1*

$$\frac{dg_0}{dt} = [2 \cdot q_1 \cdot \dot{q}_1 + 2 \cdot q_2 \cdot \dot{q}_2] = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}_0} \frac{dg_0}{dt} = [0] \quad (\text{A.13})$$

$$P_{x,1} = I_1 \quad (\text{A.14})$$

$$P_{f,1} = I_1 \quad (\text{A.15})$$

$$x_1 = [ ] \quad (\text{A.16})$$

$$z_1 = [q_5]^T \quad (\text{A.17})$$

$$f_1 = [ ] \quad (\text{A.18})$$

$$g_1 = [2 \cdot q_1 \cdot q_3 + 2 \cdot q_2 \cdot q_4] = 0 \quad (\text{A.19})$$

*Schritt 2*

$$\frac{dg_1}{dt} = [2 \cdot q_1 \cdot \dot{q}_3 + 2 \cdot q_2 \cdot \dot{q}_4 + 2 \cdot \dot{q}_1 \cdot q_3 + 2 \cdot \dot{q}_2 \cdot q_4] = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}_1} \frac{dg_1}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$P_{x,2} = I_1 \quad (\text{A.22})$$

$$P_{f,2} = I_1 \quad (\text{A.23})$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$z_2 = [q_5]^T \quad (\text{A.25})$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$g_2 = \left[ 2 \cdot \frac{-a_r}{a_m} \cdot q_5 + 2 \cdot q_1 \cdot u_1 + 2 \cdot q_2 \cdot u_2 + 2 \cdot q_3^2 + 2 \cdot q_4^2 \right] = 0 \quad (\text{A.27})$$

Schritt 3

$$\begin{aligned} \frac{dg_2}{dt} = & \left[ 2 \cdot \frac{-a_r}{a_m} \cdot \dot{q}_5 + \right. \\ & 2 \cdot \dot{q}_1 \cdot u_1 + 2 \cdot q_1 \cdot \dot{u}_1 + 2 \cdot \dot{q}_2 \cdot u_2 + 2 \cdot q_2 \cdot \dot{u}_2 + \\ & \left. 4 \cdot q_3 \cdot \dot{q}_3 + 4 \cdot q_4 \cdot \dot{q}_4 \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{z}_2} \frac{dg_2}{dt} = \left[ 2 \cdot \frac{-a_r}{a_m} \right] \quad (\text{A.29})$$

$$P_{x,3} = I_1 \quad (\text{A.30})$$

$$P_{f,3} = I_1 \quad (\text{A.31})$$

$$x_3 = [q_5]^T \quad (\text{A.32})$$

$$z_3 = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} f_3 = & \left[ 2 \cdot \frac{-a_r}{a_m} \cdot \dot{q}_5 + \right. \\ & 6 \cdot q_3 \cdot u_1 + 6 \cdot q_4 \cdot u_2 + \\ & \left. 2 \cdot q_1 \cdot \dot{u}_1 + 2 \cdot q_2 \cdot \dot{u}_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$g_3 = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Die inhärente ODE und die restriktive Mannigfaltigkeit sind damit entsprechend

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot q_1 \cdot q_5 + u_1 \\ \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot q_2 \cdot q_5 + u_2 \\ \frac{a_m}{a_r} \cdot (3 \cdot q_3 \cdot u_1 + 3 \cdot q_4 \cdot u_2 + q_1 \cdot \dot{u}_1 + q_2 \cdot \dot{u}_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.36})$$

$$0 = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - a_r^2 \\ q_1 \cdot q_3 + q_2 \cdot q_4 \\ \frac{-a_r}{a_m} \cdot q_5 + q_1 \cdot u_1 + q_2 \cdot u_2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

und die originäre DAE hat den Index 3 übereinstimmend mit der Anzahl der durchgeführten Differentiationen. Die Übernahme der originären Bezeichnung der Komponenten des generalisierten Zustandes

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \quad (\text{A.38})$$

ergibt die gesuchte Formulierung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_1 \cdot x_5 + u_1 \\ \frac{-1}{a_m \cdot a_r} \cdot x_2 \cdot x_5 + u_2 \\ \frac{a_m}{a_r} \cdot (3 \cdot x_3 \cdot u_1 + 3 \cdot x_4 \cdot u_2 + x_1 \cdot \dot{u}_1 + x_2 \cdot \dot{u}_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.39})$$

$$0 = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - a_r^2 \\ x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 \\ \frac{-a_r}{a_m} \cdot x_5 + x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3^2 + x_4^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.40})$$





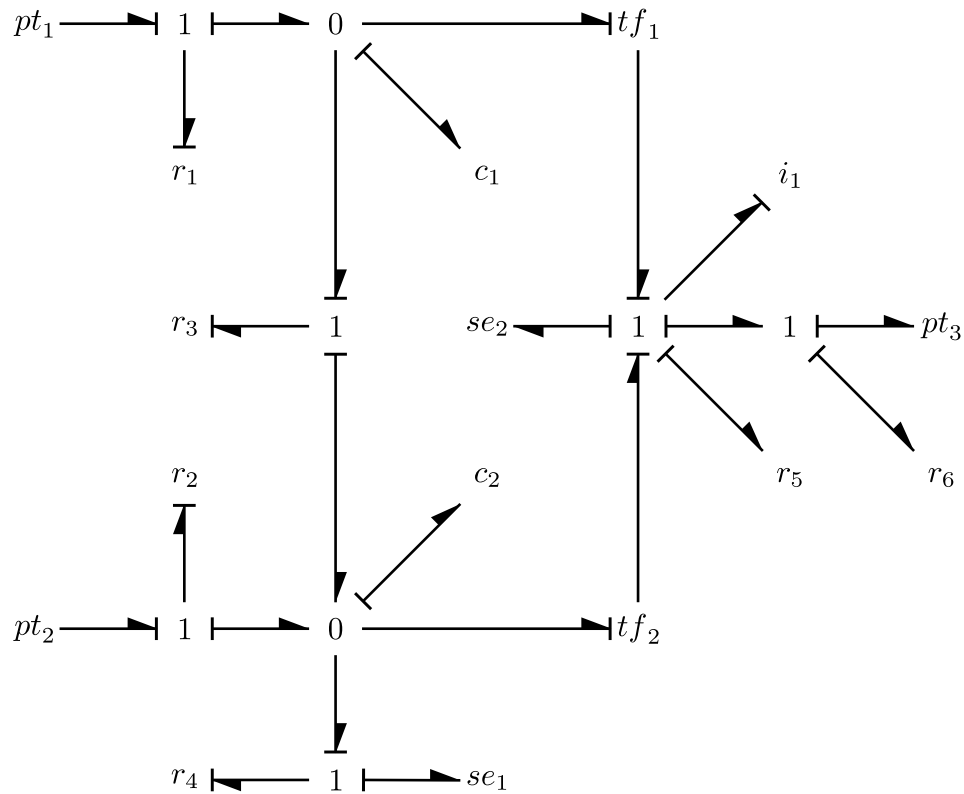


Abbildung B.2: Bond-Graph-Modell des hydraulischen Zylinders

Tabelle B.1: Modellkomponenten des hydraulischen Zylinders

Komponente	Beschreibung
$pt_1$	Hydraulischer Anschluss, Druckkammer 1
$pt_2$	Hydraulischer Anschluss, Druckkammer 2
$pt_3$	Mechanischer Anschluss, Kolbenstange
$se_1$	Umgebungsdruck
$se_2$	Mechanische Begrenzung der Kolbensverschiebung
$r_1$	Hydraulischer Widerstand, Druckkammer 1, Anschluss
$r_2$	Hydraulischer Widerstand, Druckkammer 2, Anschluss
$r_3$	Hydraulischer Widerstand, Kolbendichtung
$r_4$	Hydraulischer Widerstand, Kolbenstangendichtung
$r_5$	Mechanischer Widerstand, Kolbendichtung
$r_6$	Mechanischer Widerstand, Kolbenstangendichtung
$c_1$	Hydraulische Nachgiebigkeit, Druckkammer 1
$c_2$	Hydraulische Nachgiebigkeit, Druckkammer 2
$i_1$	Mechanische Induktivität, bewegte Masse
$tf_1$	Leistungstransformation, Kolbenfläche Druckkammer 1
$tf_2$	Leistungstransformation, Kolbenfläche Druckkammer 2

## B.2 Variablen und Parameter

Die Variablen werden in drei Klassen unterteilt. Hierbei bezeichnen  $e$  die Potentialgrößen (engl. effort variable),  $f$  die Flussgrößen (engl. flow variable) und  $q$  sonstige Variablen. Ferner werden die Parameter  $a$  eingeführt. Die Potential- und Flussvariablen sind für die mechanischen Komponenten die Kraft und die Geschwindigkeit und für die hydraulischen der Druck und der Volumenstrom entsprechend. Das Produkt der Größen ist die Leistung, folglich werden die Variablen als Leistungsvariablen bezeichnet. Eine Übersicht der Variablen gibt Tab. B.2. Die Variablen  $u_1 \in \mathbb{R}$  und  $u_2 \in \mathbb{R}$  bezeichnen die externen zeitabhängigen Eingangsgrößen zur Festlegung des Drucks in den hydraulischen Anschlüssen des Zylinders  $pt_1$  und  $pt_2$  (vgl. Abb. B.1).

Die numerischen Werte der Modellparameter werden in Tab. B.3 vorgeschlagen. Dieser Parametersatz beschreibt sinnvoll einen hydraulischen Zylinder mit dem Kolbendurchmesser von 50 mm, dem Kolbenstangendurchmesser von 20 mm, dem maximalen Hub von 200 mm, dem Vorhub von 150 mm, dem Arbeitshub von 5 mm und der bewegten Masse von 1.1 kg für den Betrieb unter Umgebungsdruck von  $10^5$  Pa. Die Beschreibung eines realen Systems erfordert offensichtlich eine spezifische Vorgabe der Parameter. Die Verwendung der einzelnen Parameter im Modell wird in Tab. B.4 dargestellt.

Tabelle B.2: Modellvariablen des hydraulischen Zylinders

Komp.	e-Variable	f-Variable	Sonstiges
$pt_1$	$e_{pt,1} \in \mathbb{R}$	$f_{pt,1} \in \mathbb{R}$	
$pt_2$	$e_{pt,2} \in \mathbb{R}$	$f_{pt,2} \in \mathbb{R}$	
$pt_3$	$e_{pt,3} \in \mathbb{R}$	$f_{pt,3} \in \mathbb{R}$	$a_{pt,3} \in \mathbb{R}^6, q_{pt,3} \in \mathbb{R}$
$se_1$	$e_{se,1} \in \mathbb{R}$	$f_{se,1} \in \mathbb{R}$	$a_{se,1} \in \mathbb{R}$
$se_2$	$e_{se,2} \in \mathbb{R}$	$f_{se,2} \in \mathbb{R}$	$a_{se,2} \in \mathbb{R}^4, q_{se,2} \in \mathbb{R}$
$r_1$	$e_{r,1} \in \mathbb{R}$	$f_{r,1} \in \mathbb{R}$	$a_{r,1} \in \mathbb{R}^3, q_{r,1} \in \mathbb{R}^2$
$r_2$	$e_{r,2} \in \mathbb{R}$	$f_{r,2} \in \mathbb{R}$	$a_{r,2} \in \mathbb{R}^3, q_{r,2} \in \mathbb{R}^2$
$r_3$	$e_{r,3} \in \mathbb{R}$	$f_{r,3} \in \mathbb{R}$	$a_{r,3} \in \mathbb{R}^3, q_{r,3} \in \mathbb{R}^2$
$r_4$	$e_{r,4} \in \mathbb{R}$	$f_{r,4} \in \mathbb{R}$	$a_{r,4} \in \mathbb{R}^3, q_{r,4} \in \mathbb{R}^2$
$r_5$	$e_{r,5} \in \mathbb{R}$	$f_{r,5} \in \mathbb{R}$	$a_{r,5} \in \mathbb{R}$
$r_6$	$e_{r,6} \in \mathbb{R}$	$f_{r,6} \in \mathbb{R}$	$a_{r,6} \in \mathbb{R}$
$c_1$	$e_{c,1} \in \mathbb{R}$	$f_{c,1} \in \mathbb{R}$	$a_{c,1} \in \mathbb{R}$
$c_2$	$e_{c,2} \in \mathbb{R}$	$f_{c,2} \in \mathbb{R}$	$a_{c,2} \in \mathbb{R}$
$i_1$	$e_{i,1} \in \mathbb{R}$	$f_{i,1} \in \mathbb{R}$	$a_{i,1} \in \mathbb{R}$
$tf_1$	$e_{tf,1} \in \mathbb{R}^2$	$f_{tf,1} \in \mathbb{R}^2$	$a_{tf,1} \in \mathbb{R}$
$tf_2$	$e_{tf,2} \in \mathbb{R}^2$	$f_{ft,2} \in \mathbb{R}^2$	$a_{ft,2} \in \mathbb{R}$

Tabelle B.3: Modellparameter des hydraulischen Zylinders

Komponente	Parameter
$a_{pt,3}$	$\left[10^6 \frac{\text{s}}{\text{m}}, 10^6 \frac{1}{\text{m}}, 1.5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}, 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{N}}, 0.15 \text{ m}, 0.155 \text{ m}\right]$
$a_{se,1}$	$10^5 \text{ Pa}$
$a_{se,2}$	$\left[10^6 \frac{1}{\text{m}}, 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{N}}, 0 \text{ m}, 0.2 \text{ m}\right]$
$a_{r,1}$	$\left[10^9 \frac{1}{\text{Pa}}, 5 \cdot 10^5 \frac{\text{Pa}^{0.5}\cdot\text{s}}{\text{m}^3}, 10^5 \text{ Pa}\right]$
$a_{r,2}$	$\left[10^9 \frac{1}{\text{Pa}}, 5 \cdot 10^5 \frac{\text{Pa}^{0.5}\cdot\text{s}}{\text{m}^3}, 10^5 \text{ Pa}\right]$
$a_{r,3}$	$\left[10^9 \frac{1}{\text{Pa}}, 10^9 \frac{\text{Pa}^{0.5}\cdot\text{s}}{\text{m}^3}, 10^5 \text{ Pa}\right]$
$a_{r,4}$	$\left[10^9 \frac{1}{\text{Pa}}, 10^9 \frac{\text{Pa}^{0.5}\cdot\text{s}}{\text{m}^3}, 10^5 \text{ Pa}\right]$
$a_{r,5}$	$3 \cdot 10^3 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$
$a_{r,6}$	$5 \cdot 10^2 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$
$a_{c,1}$	$1.5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Pa}}$
$a_{c,2}$	$1.5 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{Pa}}$
$a_{i,1}$	$1.1 \text{ kg}$
$a_{tf,1}$	$\frac{1}{\frac{\pi}{4} \cdot (50 \cdot 10^{-3})^2} \frac{1}{\text{m}^2}$
$a_{tf,2}$	$\frac{-1}{\frac{\pi}{4} \cdot ((50 \cdot 10^{-3})^2 - (20 \cdot 10^{-3})^2)} \frac{1}{\text{m}^2}$

### B.3 Konstitutive Gleichungen

Die eingeführten Komponenten werden mit den zugeordneten Gleichungen definiert. Diese Gleichungen beschreiben das Verhalten der Komponenten und werden als konstitutive Gleichungen bezeichnet. Eine Übersicht der Gleichungen gibt Tab. B.4.

### B.4 Konnektivitätsgleichungen

Die Konnektivitätsgleichungen beschreiben vorliegende Beziehungen der Komponenten und definieren damit das Netzwerkmodell. Die Konnektivitätsgleichungen des Modells des hydraulischen Zylinders sind in Tab. B.5 gegeben.

### B.5 DAE-Formulierung

Die in den vorausgehenden Abschnitten angeführten Gleichungen werden als eine DAE mit dem Index 1 formuliert.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e_{c,1} \\ e_{c,2} \\ f_{i,1} \\ q_{se,2} \\ q_{pt,3} \end{pmatrix} = \text{diag} \begin{pmatrix} a_{c,1} \\ a_{c,2} \\ a_{i,1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_{c,1} \\ f_{c,2} \\ e_{i,1} \\ f_{se,2} \\ f_{pt,3} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$e_{pt,1} - u_1 = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$e_{pt,2} - u_2 = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$e_{pt,3} - \frac{\frac{a_{pt,3,3} \cdot f_{pt,3}}{1 + \exp(-a_{pt,3,1} \cdot f_{pt,3})}}{1 + \exp(-a_{pt,3,2} \cdot (q_{pt,3} - a_{pt,3,5}))} - \frac{\frac{q_{pt,3} - a_{pt,3,6}}{a_{pt,3,4}}}{1 + \exp(-a_{pt,3,2} \cdot (q_{pt,3} - a_{pt,3,6}))} = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$e_{se,1} - a_{se,1} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$e_{se,2} - \frac{\frac{q_{se,2} - a_{se,2,3}}{a_{se,2,2}}}{1 + \exp(a_{se,2,1} \cdot (q_{se,2} - a_{se,2,3}))} - \frac{\frac{q_{se,2} - a_{se,2,4}}{a_{se,2,2}}}{1 + \exp(-a_{se,2,1} \cdot (q_{se,2} - a_{se,2,4}))} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Tabelle B.4: Konstitutive Modellgleichungen des hydraulischen Zylinders

Komp.	Konstitutive Gleichung
$pt_1$	$e_{pt,1} = u_1$
$pt_2$	$e_{pt,2} = u_2$
$pt_3$	$e_{pt,3} = \frac{\frac{a_{pt,3,3} \cdot f_{pt,3}}{1 + \exp(-a_{pt,3,1} \cdot f_{pt,3})}}{1 + \exp(-a_{pt,3,2} \cdot (q_{pt,3} - a_{pt,3,5}))} + \frac{\frac{q_{pt,3} - a_{pt,3,6}}{a_{pt,3,4}}}{1 + \exp(-a_{pt,3,2} \cdot (q_{pt,3} - a_{pt,3,6}))}$ $\frac{d}{dt}(q_{pt,3}) = f_{pt,3}$
$se_1$	$e_{se,1} = a_{se,1}$
$se_2$	$e_{se,2} = \frac{\frac{q_{se,2} - a_{se,2,3}}{a_{se,2,2}}}{1 + \exp(a_{se,2,1} \cdot (q_{se,2} - a_{se,2,3}))} + \frac{\frac{q_{se,2} - a_{se,2,4}}{a_{se,2,2}}}{1 + \exp(-a_{se,2,1} \cdot (q_{se,2} - a_{se,2,4}))}$ $\frac{d}{dt}(q_{se,2}) = f_{se,2}$
$r_1$	$e_{r,1} = q_{r,1,2} \cdot f_{r,1}$ $q_{r,1,1} = \tanh(a_{r,1,1} \cdot e_{r,1}) \cdot e_{r,1} + a_{r,1,3} \cdot \left(1 - \tanh\left(\frac{\tanh(a_{r,1,1} \cdot e_{r,1}) \cdot e_{r,1}}{a_{r,1,3}}\right)\right)$ $q_{r,1,2} = a_{r,1,2} \cdot \sqrt{q_{r,1,1}}$
$r_2$	$e_{r,2} = q_{r,2,2} \cdot f_{r,2}$ $q_{r,2,1} = \tanh(a_{r,2,1} \cdot e_{r,2}) \cdot e_{r,2} + a_{r,2,3} \cdot \left(1 - \tanh\left(\frac{\tanh(a_{r,2,1} \cdot e_{r,2}) \cdot e_{r,2}}{a_{r,2,3}}\right)\right)$ $q_{r,2,2} = a_{r,2,2} \cdot \sqrt{q_{r,2,1}}$
$r_3$	$e_{r,3} = q_{r,3,2} \cdot f_{r,3}$ $q_{r,3,1} = \tanh(a_{r,3,1} \cdot e_{r,3}) \cdot e_{r,3} + a_{r,3,3} \cdot \left(1 - \tanh\left(\frac{\tanh(a_{r,3,1} \cdot e_{r,3}) \cdot e_{r,3}}{a_{r,3,3}}\right)\right)$ $q_{r,3,2} = a_{r,3,2} \cdot \sqrt{q_{r,3,1}}$
$r_4$	$e_{r,4} = q_{r,4,2} \cdot f_{r,4}$ $q_{r,4,1} = \tanh(a_{r,4,1} \cdot e_{r,4}) \cdot e_{r,4} + a_{r,4,3} \cdot \left(1 - \tanh\left(\frac{\tanh(a_{r,4,1} \cdot e_{r,4}) \cdot e_{r,4}}{a_{r,4,3}}\right)\right)$ $q_{r,4,2} = a_{r,4,2} \cdot \sqrt{q_{r,4,1}}$
$r_5$	$e_{r,5} = a_{r,5} \cdot f_{r,5}$
$r_6$	$e_{r,6} = a_{r,6} \cdot f_{r,6}$
$c_1$	$f_{c,1} = \frac{d}{dt}(a_{c,1} \cdot e_{c,1})$
$c_2$	$f_{c,2} = \frac{d}{dt}(a_{c,2} \cdot e_{c,2})$
$i_1$	$e_{i,1} = \frac{d}{dt}(a_{i,1} \cdot f_{i,1})$
$tf_1$	$e_{tf,1,1} = a_{tf,1} \cdot e_{tf,1,2}$ $f_{tf,1,2} = a_{tf,1} \cdot f_{tf,1,1}$
$tf_2$	$e_{tf,2,1} = a_{tf,2} \cdot e_{tf,2,2}$ $f_{tf,2,2} = a_{tf,2} \cdot f_{tf,2,1}$

Tabelle B.5: Konnektivitätsgleichungen des Modells des hydraulischen Zylinders

Konnektivitätsgleichungen
$e_{pt,1} - e_{c,1} - e_{r,1} = 0$
$f_{r,1} - f_{pt,1} = 0$
$e_{pt,2} - e_{c,2} - e_{r,2} = 0$
$f_{r,2} - f_{pt,2} = 0$
$e_{c,1} - e_{tf,1,1} = 0$
$f_{r,1} - f_{c,1} - f_{tf,1,1} - f_{r,3} = 0$
$e_{c,2} - e_{tf,2,1} = 0$
$f_{r,2} - f_{c,2} - f_{tf,2,1} + f_{r,3} - f_{r,4} = 0$
$e_{c,2} - e_{r,4} - e_{se,1} = 0$
$f_{r,4} - f_{se,1} = 0$
$e_{c,1} - e_{c,2} - e_{r,3} = 0$
$e_{tf,1,2} + e_{tf,2,2} - e_{i,1} - e_{r,5} - e_{se,2} - e_{r,6} - e_{pt,3} = 0$
$f_{i,1} - f_{tf,1,2} = 0$
$f_{i,1} - f_{tf,2,2} = 0$
$f_{i,1} - f_{r,5} = 0$
$f_{i,1} - f_{se,2} = 0$
$f_{i,1} - f_{r,6} = 0$
$f_{i,1} - f_{pt,3} = 0$

$$e_{r,1} - q_{r,1,2} \cdot f_{r,1} = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$q_{r,1,1} - \tanh(a_{r,1,1} \cdot e_{r,1}) \cdot e_{r,1} - a_{r,1,3} \cdot \left(1 - \tanh\left(\frac{\tanh(a_{r,1,1} \cdot e_{r,1}) \cdot e_{r,1}}{a_{r,1,3}}\right)\right) = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$q_{r,1,2} - a_{r,1,2} \cdot \sqrt{q_{r,1,1}} = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$e_{r,2} - q_{r,2,2} \cdot f_{r,2} = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$q_{r,2,1} - \tanh(a_{r,2,1} \cdot e_{r,2}) \cdot e_{r,2} - a_{r,2,3} \cdot \left(1 - \tanh\left(\frac{\tanh(a_{r,2,1} \cdot e_{r,2}) \cdot e_{r,2}}{a_{r,2,3}}\right)\right) = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$q_{r,2,2} - a_{r,2,2} \cdot \sqrt{q_{r,2,1}} = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$e_{r,3} - q_{r,3,2} \cdot f_{r,3} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$q_{r,3,1} - \tanh(a_{r,3,1} \cdot e_{r,3}) \cdot e_{r,3} - a_{r,3,3} \cdot \left(1 - \tanh\left(\frac{\tanh(a_{r,3,1} \cdot e_{r,3}) \cdot e_{r,3}}{a_{r,3,3}}\right)\right) = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$q_{r,3,2} - a_{r,3,2} \cdot \sqrt{q_{r,3,1}} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$e_{r,4} - q_{r,4,2} \cdot f_{r,4} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$q_{r,4,1} - \tanh(a_{r,4,1} \cdot e_{r,4}) \cdot e_{r,4} - a_{r,4,3} \cdot \left(1 - \tanh\left(\frac{\tanh(a_{r,4,1} \cdot e_{r,4}) \cdot e_{r,4}}{a_{r,4,3}}\right)\right) = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$q_{r,4,2} - a_{r,4,2} \cdot \sqrt{q_{r,4,1}} = 0 \quad (\text{B.18})$$

$$e_{r,5} - a_{r,5} \cdot f_{r,5} = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$e_{r,6} - a_{r,6} \cdot f_{r,6} = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$e_{tf,1,1} - a_{tf,1} \cdot e_{tf,1,2} = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$f_{tf,1,2} - a_{tf,1} \cdot f_{tf,1,1} = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$e_{tf,2,1} - a_{tf,2} \cdot e_{tf,2,2} = 0 \quad (\text{B.23})$$

$$f_{tf,2,2} - a_{tf,2} \cdot f_{tf,2,1} = 0 \quad (\text{B.24})$$

$$e_{pt,1} - e_{c,1} - e_{r,1} = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$f_{r,1} - f_{pt,1} = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$e_{pt,2} - e_{c,2} - e_{r,2} = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$f_{r,2} - f_{pt,2} = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$e_{c,1} - e_{tf,1,1} = 0 \quad (\text{B.29})$$

$$f_{r,1} - f_{c,1} - f_{tf,1,1} - f_{r,3} = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$e_{c,2} - e_{tf,2,1} = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$f_{r,2} - f_{c,2} - f_{tf,2,1} + f_{r,3} - f_{r,4} = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$e_{c,2} - e_{r,4} - e_{se,1} = 0 \quad (\text{B.33})$$

$$f_{r,4} - f_{se,1} = 0 \quad (\text{B.34})$$

$$e_{c,1} - e_{c,2} - e_{r,3} = 0 \quad (\text{B.35})$$

$$e_{tf,1,2} + e_{tf,2,2} - e_{i,1} - e_{r,5} - e_{se,2} - e_{r,6} - e_{pt,3} = 0 \quad (\text{B.36})$$

$$f_{i,1} - f_{tf,1,2} = 0 \quad (\text{B.37})$$

$$f_{i,1} - f_{tf,2,2} = 0 \quad (\text{B.38})$$

$$f_{i,1} - f_{r,5} = 0 \quad (\text{B.39})$$

$$f_{i,1} - f_{se,2} = 0 \quad (\text{B.40})$$

$$f_{i,1} - f_{r,6} = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$f_{i,1} - f_{pt,3} = 0 \quad (\text{B.42})$$

## B.6 Substantielle Systemveränderungen

Die betrachteten substantiellen Systemveränderungen betreffen in dem Modell des hydraulischen Zylinders die Kolben- und die Kolbenstangendichtung. Das Modell bildet eine mögliche Zunahme der Leckagen an diesen Dichtstellen ab. Die Veränderung der Kolbendichtung wird durch das Ersetzen der Gleichung (B.13) mit

$$e_{r,3} - 10^{x_{st,1}} \cdot q_{r,3,2} \cdot f_{r,3} = 0 \quad (\text{B.43})$$

und das Erweitern der Gleichung (B.1) mit

$$\dot{x}_{st,1} = 0 \quad (\text{B.44})$$

implementiert. Entsprechend wird die Veränderung der Kolbenstangendichtung durch das Ersetzen der Gleichung (B.16) mit

$$e_{r,4} - 10^{x_{st,2}} \cdot q_{r,4,2} \cdot f_{r,4} = 0 \quad (\text{B.45})$$

und das Erweitern der Gleichung (B.1) mit

$$\dot{x}_{st,2} = 0 \quad (\text{B.46})$$

modelliert. Die Variablen  $q_{r,3,2}$  und  $q_{r,4,2}$  entsprechen den Koeffizienten der hydraulischen Widerstände  $r_3$  und  $r_4$ . Die hinzugefügten differentiellen Zustände  $x_{st,1}$  und  $x_{st,2}$  repräsentieren damit die Einflussgrößen der Veränderungen der Kolben- und der Kolbenstangendichtung.



# Literaturverzeichnis

- [AB97] J. S. Albuquerque and L. T. Biegler. Decomposition algorithms for on-line estimation with nonlinear DAE models. *Computers and Chemical Engineering*, 21(3):283–299, 1997.
- [Adj93] K. H. Adjallah. *Contribution au Diagnostic de systèmes par Observateur d'état*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1993.
- [ADW14] I. Alkov, R. Diekmann, and D. Weidemann. A generalized power-based Modelica library with application to an industrial hydraulic plant. In *Proc. of the 10th International Modelica Conference*, number 096, pages 617–626, Lund; Sweden, 2014.
- [AF70] G. Ackerson and K. Fu. On state estimation in switching environments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(1):10–17, 1970.
- [ÅF06] J. Åslund and E. Frisk. An observer for non-linear differential-algebraic systems. *Automatica*, 42(6):959–965, 2006.
- [AG96] M. Avriel and B. Golany. *Mathematical Programming for Industrial Engineers*. Industrial Engineering: A Series of Reference Books and Textbooks. Chapman and Hall, 1 edition, 1996.
- [AGTAM<sup>+</sup>12] A. Aguilera-Gonzalez, D. Theilliol, M. Adam-Medina, C.-M. Astorga-Zaragoza, and M. Rodrigues. Sensor fault and unknown input estimation based on proportional integral observer applied to LPV descriptor systems. In *Proc. of the IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, volume 45, pages 1059–1064, Mexico City, Mexico, 2012.
- [Alk12] I. Alkov. Verallgemeinertes Modell hydraulischer Ventile. In *Proc. of the Fluidon Conference*, Aachen, Germany, 2012. Fluidon GmbH.
- [AS03] L. An and N. Sepeshri. Hydraulic actuator circuit fault detection using extended Kalman filter. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 4261–4266, Denver, CO, USA, 2003.

- [AW13a] I. Alkov and D. Weidemann. Fault detection with unscented Kalman filter applied to nonlinear differential-algebraic systems. In *Proc. of the MMAR 2013 - 18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, pages 166–171, Miedzyzdroje, Poland, 2013. IEEE. ISBN 9781467355063.
- [AW13b] I. Alkov and D. Weidemann. Improved unscented Kalman filter formulation for nonlinear differential-algebraic systems. In *Proc. of the REM 2013 - 14th International Workshop on Research and Education in Mechatronics*, pages 149–154, Vienna, Austria, 2013. Association for Supporting Automation and Robotics. ISBN 9783902759078.
- [AW14a] I. Alkov and D. Weidemann. State estimation with unscented Kalman filter for higher index nonlinear differential-algebraic systems. In *Proc. of the ASIM-Treffen STS/GMMS 2014 - Treffen der Arbeitsgemeinschaft Simulation ASIM in der Gesellschaft für Informatik GI, Fachgruppe Simulation technischer Systeme STS, Fachgruppe Grundlagen und Methoden in Modellbildung und Simulation GMMS*, pages 65–72, Reutlingen, Germany, 2014. ISBN 9783901608438.
- [AW14b] I. Alkov and D. Weidemann. Unscented Kalman filter for higher index nonlinear differential-algebraic equations. In *Proc. of the MMAR 2014 - 19th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, pages 88–93, Miedzyzdroje, Poland, 2014. IEEE. ISBN 9781479950829.
- [AZTPR09] C. M. Astorga-Zaragoza, D. Theilliol, J.-C. Ponsart, and M. Rodrigues. Sensor fault diagnosis for a class of lpv descriptor systems. In *Proc. of the IFAC Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, Zielona Gora, Poland, 2009.
- [BAF06] B. Bachmann, P. Aronsson, and P. Fritzson. Robust initialization of differential algebraic equations. In *Proc. of the 5th International Modelica Conference*, pages 607–614, Vienna, Austria, 2006.
- [Bau72] J. Baumgarte. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(1):1–16, 1972. ISSN 00457825.
- [BBB<sup>+</sup>01] T. Binder, L. Blank, H. G. Bock, R. Bulirsch, W. Dahmen, M. Diehl, T. Kronseider, W. Marquardt, J. P. Schlöder, and O. Stryk. *Online Optimization of Large Scale Systems*, chapter

- Introduction to Model Based Optimization of Chemical Processes on Moving Horizons, pages 295–339. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001. ISBN 9783662043318.
- [BBG10] N. Boizot, E. Busvelle, and J.-P. Gauthier. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems. *Automatica*, 46(9):1483–1488, 2010.
- [BBS88] H. Blom and Y. Bar-Shalom. The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8):780–783, 1988.
- [Bea71] R. Beard. *Failure Accomodation in Linear Systems through Self-Reorganization*. PhD thesis, Boston, MIT, 1971.
- [Ber19] T. Berger. On observers for nonlinear differential-algebraic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64:2150–2157, 2019.
- [Bey08] M.-A. Beyer. *Methodische Evaluierung von Wahrscheinlichkeitstheoretischen Inferenzverfahren für Dynamische Systeme*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, 2008.
- [BG15] Böllhoff Group. RIVSET, self-pierce riveting, for perfect joints. Brochure, Version 6701/15.02, <https://www.boellhoff.com/de-en>, 2015. Wilhelm Böllhoff GmbH & Co. KG, Bielefeld, Germany.
- [BH91] G. Bornard and H. Hammouri. A high gain observer for a class of uniformly observable systems. In *Proc. of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1494–1496, 1991.
- [BHP98] P. N. Brown, A. C. Hindmarsh, and L. R. Petzold. Consistent initial condition calculation for differential-algebraic systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 19(5):1495–1512, 1998.
- [Bor10] W. Borutzky. *Bond Graph Methodology Development and Analysis of Multidisciplinary Dynamic System Models*. Springer, London, UK, 2010.
- [Bor15] H. Borchard. Hybride Zustandsschätzung für nichtlineare DAE-Systeme mittels Unscented-Kalman Filter. Master Thesis, University of Applied Sciences Bielefeld, 2015.
- [BP66] L. E. Baum and T. Petrie. Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains. *The Annals of Mathematical Statistics*, 37(6):1554–1563, 1966.

- [BP89] K. E. Brenan and L. R. Petzold. The numerical solution of higher index differential-algebraic equations by implicit methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26(4):976–996, 1989.
- [BRD97] M. Boutayeb, H. Rafaralahy, and M. Darouach. Convergence analysis of the extended Kalman filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(4):581–586, 1997.
- [BRG99] V. M. Becerra, P. D. Roberts, and G. W. Griffiths. Dynamic data reconciliation for a class of nonlinear differential-algebraic equation models using the extended Kalman filter. In *Proc. of the 14th IFAC - International Federation of Automatic Control World Congress*, pages 303–308, Oxford, UK, 1999.
- [BRG01] V. M. Becerra, P. D. Roberts, and G. W. Griffiths. Applying the extended Kalman filter to systems described by nonlinear differential-algebraic equations. *Control Engineering Practice*, 9(3):267–281, 2001.
- [BS71] R. S. Bucy and K. D. Senne. Digital synthesis of non-linear filters. *Automatica*, 7(3):287–298, 1971.
- [BSK<sup>+</sup>13] M. Blanke, J. Schröder, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer, 2013.
- [BSLK04] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. John Wiley & Sons, 2004.
- [Bus16] D. Buschmann. Verfahren zur Reinitialisierung von Kalman-Filtern für DAE-Systeme mit höherem Index. Bachelor Thesis, University of Applied Sciences Bielefeld, 2016.
- [BZ83] D. Bestle and M. Zeitz. Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *International Journal of Control*, 38(2):419–431, 1983.
- [BZ88] J. Birk and M. Zeitz. Extended Luenberger observer for non-linear multivariable systems. *International Journal of Control*, 47(6):1823–1836, 1988.
- [CA05] C. Chang and R. Ansari. Kernel particle filter for visual tracking. *IEEE Signal Processing Letters*, 12(3):242–245, 2005.
- [CL91] S. L. Campbell and B. Leimkuhler. Differentiation of constraints in differential-algebraic equations. *Mechanics of Structures and Machines*, 19(1):19–39, 1991.

- [Cla78] R. N. Clark. Instrument fault detection. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronics*, 14(3):456–465, 1978.
- [CP12] J. Chen and R. J. Patton. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. The International Series on Asian Studies in Computer and Information Science. Springer, 2012.
- [CPZ96] J. Chen, R. J. Patton, and H. Y. Zhang. Design of unknown input observers and robust fault-detection filters. *International Journal of Control*, 63(1):85–105, 1996.
- [CS07] W. Chen and M. Saif. Observer-based strategies for actuator fault detection, isolation and estimation for certain class of uncertain nonlinear systems. *IET Control Theory and Applications*, 1(6):1672–1680, 2007.
- [CSS04] W. Chen, M. Saif, and B. Shafai. Fault diagnosis in a class of differential-algebraic systems. In *Proc. of the American Control Conference*, volume 5, pages 4398–4402, Boston, MA, USA, 2004. IEEE.
- [CW84] E. Chow and A. Willsky. Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(7):603–614, 1984.
- [DAW13] R. Diekmann, I. Alkov, and D. Weidemann. BondGraph - an open source library for Modelica. In *Proc. of the REM 2013 - 14th International Workshop on Research and Education in Mechatronics*, pages 46–51, Vienna, Austria, 2013. Association for Supporting Automation and Robotics. ISBN 9783902759078.
- [DBBZ13] M. Darouach, L. Boutat-Baddas, and M. Zerrougui.  $H_\infty$  filter design for a class of nonlinear discrete-time singular systems. *International Journal of Control*, 86(9):1597–1606, 2013.
- [DdFG01] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Information Science and Statistics. Springer, New York, USA, 1 edition, 2001.
- [DHAW14] R. Diekmann, J. Heinze, I. Alkov, and D. Weidemann. Control strategies for energy-optimized operation of assembly systems. In *Proc. of the ASIM-Treffen STS/GMMS 2014 - Treffen der Arbeitsgemeinschaft Simulation ASIM in der Gesellschaft für Informatik GI, Fachgruppe Simulation technischer Systeme STS, Fachgruppe Grundlagen und Methoden in Modellbildung und Simulation GMMS*, pages 217–223, Reutlingen, Germany, 2014. ISBN 9783901608438.

- [DHP99] G. R. Duan, D. Howe, and R. J. Patton. Robust fault detection in descriptor linear systems via generalised unknown input observers. In *Proc. of the IFAC Triennial World Congress*, pages 7729–7724, Beijing, China, 1999.
- [DHZ87] P. Deuffhard, E. Hairer, and J. Zugck. One-step and extrapolation methods for differential-algebraic systems. *Numerische Mathematik*, 51(5):501–516, 1987.
- [Din12] S. Ding. *Model-Based Fault Diagnosis Techniques: Design Schemes, Algorithms and Tools*. Advances in Industrial Control. Springer, 2012.
- [DKU11] I. S. Duff, K. Kaya, and B. Ucar. Design, implementation, and analysis of maximum transversal algorithms. *Association for Computing Machinery Transactions on Mathematical Software*, 38(13):1–31, 2011.
- [Dra92] S. V. Drakunov. Sliding-mode observers based on equivalent control method. In *Proc. of the 31st CDC - IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 2368–2369, Tucson, AZ, USA, 1992. IEEE. ISBN 0780308727.
- [Dua10] G.-R. Duan. *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*, volume 23 of *Advances in Mechanics and Mathematics*. Springer, 2010.
- [DZM93] M. Darouach, M. Zasadzinski, and D. Mehdi. State estimation of stochastic singular linear systems. *International Journal of Systems Science*, 24(2):345–354, 1993.
- [EFK13] D. Eriksson, F. Frisk, and M. Krysander. A method for quantitative fault diagnosability analysis of stochastic linear descriptor models. *Automatica*, 49(6):1591–1600, 2013.
- [EFLR90] E. Eich, C. Führer, B. Leimkuhler, and S. Reich. Stabilization and projection methods for multibody dynamics. Technical Report, No. A281, Helsinki University of Technology, 1990.
- [Ein19] G. A. Einicke. *Smoothing, Filtering and Prediction: Estimating the Past, Present and Future*. Amazon Prime Publishing, 2 edition, 2019.
- [ESP00] C. Edwards, S. K. Spurgeon, and R. J. Patton. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36(4):541–553, 2000.

- [Fea98] P. Fearnhead. *Sequential Monte Carlo Methods in Filter Theory*. PhD thesis, University of Oxford, 1998.
- [FKF12] J. Frenkel, G. Kunze, and P. Fritzson. Survey of appropriate matching algorithms for large scale systems of differential algebraic equations. In *Proc. of the 9th International Modelica Conference*, Munich, Germany, 2012.
- [FMuB06] FAM Fachausschuss Mineralöl- und Brennstoffnormung. DIN 51524-2:2006-04, Druckflüssigkeiten - Hydrauliköle - Teil 2: Hydrauliköle HLP; Mindestanforderungen. Industrial Standard, 2006.
- [Fra87] B. A. Francis. *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 1987.
- [Fri15] P. Fritzson. *Principles of Object-Oriented Modeling and Simulation with Modelica 3.3: A Cyber-Physical Approach, 2nd Edition*. Wiley-IEEE Press, 2 edition, 2015.
- [FSAG99] P. M. Frank, G. Schrier, and E. Alcorta Garcia. *New Directions in Nonlinear Observer Design*, chapter Nonlinear Observers for Fault Detection and Isolation, pages 399–422. Springer, 1999.
- [GD07] Z. Gao and S. X. Ding. Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems. *Automatica*, 43(5):912–920, 2007.
- [Gea88] C. Gear. Differential-algebraic equation index transformations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 9(1):39–47, 1988.
- [Ger06] M. Gerdin. *Identification and Estimation for Models Described by Differential-Algebraic Equations*. PhD thesis, Linköpings Universitet, 2006.
- [GK94] J.-P. Gauthier and I. Kupka. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 32(4):975–994, 1994.
- [Gri13] P. Gritzmann. *Grundlagen der Mathematischen Optimierung, Diskrete Strukturen, Komplexitätstheorie, Konvexitätstheorie, Lineare Optimierung, Simplex-Algorithmus, Dualität*. Aufbaukurs Mathematik. Springer, 2013.
- [GS06] M. Gerdin and J. Sjöberg. Nonlinear stochastic differential-algebraic equations with application to particle filtering. In *Proc. of the 45th CDC - IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6630–6635, San Diego, CA, USA, 2006.

- [Haa83] S. E. Haaland. Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. *Journal of Fluids Engineering*, 105(1):89–90, 1983. American Society of Mechanical Engineers.
- [HASPE14] J. D. Hedengren, R. Asgharzadeh Shishavan, K. M. Powell, and T. F. Edgar. Nonlinear modeling, estimation and predictive control in APMonitor. *Computers and Chemical Engineering*, 70:133–148, 2014.
- [HC00] C. Hajiyev and F. Caliskan. Sensor/actuator fault diagnosis based on statistical analysis of innovation sequence and robust Kalman filtering. *Aerospace Science and Technology*, 4(6):415–422, 2000.
- [HK77] R. Hermann and A. Krener. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5):728–740, 1977. ISSN 00189286.
- [HKEY99] H. Hammouri, M. Kinnaert, and E. H. El Yaagoubi. Based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems. *Automatica*, 44(10):1879–1884, 1999.
- [HM00] P. D. Hanlon and P. S. Maybeck. Multiple-model adaptive estimation using a residual correlation Kalman filter bank. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 36(2):393–406, 2000.
- [Hof05] M. W. Hofbaur. *Hybrid Estimation of Complex Systems*, volume 319. Springer, 2005.
- [Hög15] C. Höger. Faster structural analysis of differential-algebraic equations by graph compression. *IFAC International Federation of Automatic Control - PapersOnLine*, 48(1):135–140, 2015. 8th Vienna International Conference on Mathematical Modelling, MATHMOD 2015, ISSN 24058963.
- [HRC<sup>+</sup>09] H. M. Habib, M. Rodrigues, M. Chokri, D. Theilliol, and N. B. Braiek. State estimation for polytopic LPV descriptor systems: Application to fault diagnosis. In *Proc. of the IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, Barcelona, Spain, 2009.
- [HRC<sup>+</sup>12] H. M. Habib, M. Rodrigues, M. Chokri, D. Theilliol, and N. B. Braiek. Fault detection and isolation in linear parameter-varying descriptor systems via proportional integral observer. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 26(3):224–240, 2012.



- [HRCB10] H. M. Habib, M. Rodrigues, M. Chokri, and N. B. Braiek. Robust  $H_\infty$  fault diagnosis for multi-model descriptor systems: A multi-objective approach. In *Proc. of the Mediterranean Conference on Control and Automation*, Marrakech, Morocco, 2010.
- [HSK99] W. Haas, K. Schlacher, and A. Kugi. A software package for the analysis of DAE control systems. In *Proc. of the ECC - European Control Conference*, pages 1540–1545, 1999.
- [HW02] M. W. Hofbaur and B. C. Williams. Mode estimation of probabilistic hybrid systems. In C. J. Tomlin and M. R. Greenstreet, editors, *Proc. of the 5th International Workshop, HSCC, Hybrid Systems, Computation and Control*, volume 2289 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 253–266, Stanford, CA, USA, 2002. Springer. ISBN 9783540458739.
- [IM11] R. Isermann and M. Münchhof. *Identification of Dynamic Systems, an Introduction with Applications*. Springer, 1 edition, 2011.
- [Ise93] R. Isermann. Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing - tutorial paper. *Automatica*, 29(4):815–835, 1993. ISSN 00051098.
- [Ise06] R. Isermann. *Fault-Diagnosis Systems: An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*, volume 1. Springer, 2006.
- [Ise11] R. Isermann. *Fault-Diagnosis Applications: Model-Based Condition Monitoring: Actuators, Drives, Machinery, Plants, Sensors, and Fault-Tolerant Systems*. Springer, 2011.
- [Isi95] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*, volume 3 of *Communications and Control Engineering*. Springer, 1995.
- [ITC05] J. Y. Ishihara, M. H. Terra, and J. C. T. Campos. Optimal recursive estimation for discrete-time descriptor systems. *International Journal of Systems Science*, 36(10):605–615, 2005.
- [ITC06] J. Y. Ishihara, M. H. Terra, and J. C. T. Campos. Robust Kalman filter for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8):1354–1354, 2006. ISSN 00189286.
- [IX00] K. Ito and K. Xiong. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5):910–927, 2000.
- [Jaz70] A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1970.

- [Jel95] M. Jelali. Systematischer Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme. *Forschungsbericht Nr. 1/95, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg Meß-, Steuer- und Regelungstechnik*, 1995.
- [Jon73] H. Jones. *Failure Detection in Linear Systems*. PhD thesis, Boston, MIT, 1973.
- [JUDW95] S. J. Julier, J. K. Uhlmann, and H. F. Durrant-Whyte. A new approach for filtering nonlinear systems. In *Proc. of the ACC - American Control Conference*, volume 3, pages 1628–1632, Seattle, WA, USA, 1995.
- [Jul02] S. J. Julier. The scaled unscented transformation. In *Proc. of the ACC - American Control Conference*, volume 6, pages 4555–4559, Anchorage, AK, USA, 2002.
- [KAD13] M. Kaspar, I. Alkov, and R. Diekmann. BondGraph BG\_nonlinear documentation. Modelica Association, PELAB, IDA, Linköpings Universitet, Modelica Libraries, 2013. Linköping, Sweden.
- [Kal60] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.
- [KBN95] F. Kratz, S. Bousgkiri, and W. Nuninger. A finite memory observer structure of continuous descriptor systems. In *Proc. of the American Control Conference*, volume 5, pages 3900–3904, Seattle, WA, USA, 1995. IEEE.
- [KD03] J. H. Kotecha and P. M. Djuric. Gaussian sum particle filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(10):2602–2612, 2003.
- [Kel87] H. Keller. Entwurf nichtlinearer Beobachter mittels Normalformen. *Fortschrittsbericht VDI*, 8(124):1–154, 1987.
- [KI83] A. J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems and Control Letters*, 3(1):47–52, 1983. ISSN 01676911.
- [KM91] A. J. Krener and B. Maag. *Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty*, chapter Controller and Observer Design for Cubic Systems, pages 224–239. Progress in Systems and Control Theory. Birkhauser, Boston, 1991.
- [KM01] P. Kunkel and V. Mehrmann. Analysis of over- and underdetermined nonlinear differential-algebraic systems with application

- to nonlinear control problems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 14(3):233–256, 2001.
- [KM06] P Kunkel and V. Mehrmann. *Differential-Algebraic Equations Analysis and Numerical Solution*. European Mathematical Society, Zürich, Switzerland, 2006.
- [KMS02] P. Kunkel, V. Mehrmann, and I. Seufer. GENDA: A software package for the solution of general nonlinear differential-algebraic equations. Technical Report 730-02, Institute für Mathematik, Technische Universität Berlin, 2002.
- [Kre80] V. Krebs. *Nichtlineare Filterung*. Oldenbourg, Munich, Germany, 1980.
- [KYK01] H. S. Kim, T. K. Yeu, and S. Kawaji. Fault detection in linear descriptor systems via unknown input pi observer. *Transactions on Control, Automation and Systems Engineering*, 3(2):77–82, 2001.
- [LÅFE11] E. Larsson, J. Åslund, E. Frisk, and L. Eriksson. Health monitoring in an industrial gas turbine application by using model based diagnosis techniques. In *Proc. of the Turbo Expo: Turbine Technical Conference and Exposition*, pages 487–495, Vancouver, Canada, 2011. American Society of Mechanical Engineers.
- [LC98] J. S. Liu and R. Chen. Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems. *Journal of the American Statistical Association*, 93(443):1032–1044, 1998.
- [LEPAZ<sup>+</sup>15] F.-R. López-Estrada, J.-C. Ponsart, C. M. Astorga-Zaragoza, J.-L. Camas-Anzueto, , and D. Theilliol. Robust sensor fault estimation for descriptor-LPV systems with unmeasurable gain scheduling functions: Application to an anaerobic bioreactor. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 25(2):233–244, 2015.
- [LEPAZT13] F.-R. López-Estrada, J.-C. Ponsart, C. M. Astorga-Zaragoza, and D. Theilliol. Fault estimation observer design for descriptor-LPV systems with unmeasurable gain scheduling functions. In *Proc. of the Conference on Control and Fault-Tolerant Systems*, pages 269–274, Nice, France, 2013. IEEE.
- [LT12] D. Liberzon and S. Trenn. Switched nonlinear differential algebraic equations: Solution theory, Lyapunov functions, and stability. *Automatica*, 48(5):954–963, 2012.

- [Lue64] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74–80, 1964. ISSN 05361559.
- [Lun13] J. Lunze. *Regelungstechnik 2, Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer-Lehrbuch. Springer, 7 edition, 2013.
- [Mas86] M. A. Massoumnia. A geometric approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31:839–846, 1986.
- [Mat17] MathWorks. Optimization toolbox user’s guide, version 7.6, release 2017a. Online, <https://www.mathworks.com/help/optim>, 2017. The MathWorks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, MA 01760-2098.
- [MAZ13] A. Moussa Ali and Q. Zhang. Adaptive observer based fault diagnosis applied to differential-algebraic systems. In *Proc. of the IFAC Symposium on System Structure and Control*, pages 929–934, Grenoble, France, 2013.
- [McE66] B. A. McElhoe. An assessment of the navigation and course corrections for a manned flyby of Mars or Venus. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-2(4):613–623, 1966.
- [Meh15] V. Mehrmann. *Encyclopedia of Applied and Computational Mathematics*, chapter Index Concepts for Differential-Algebraic Equations, pages 676–681. Springer, Berlin, Heidelberg, 2015. ISBN 9783540705291.
- [MGNR12] T. Müller-Gronbach, E. Novak, and K. Ritter. *Monte Carlo-Algorithmen*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2012.
- [MHSV89] E. A. Misawa, J. K. Hedrick, J.-J. E. Slotine, and G. C. Vergheese. Sliding observer design for nonlinear state estimation. In A. Isidori, editor, *Proc. of the IFAC Symposium on Nonlinear Control System Design*, Capri, Italy, 1989. Pergamon Press.
- [MM95] H. Michalska and D. Q. Mayne. Moving horizon observers and observer-based control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6):995–1006, 1995. ISSN 00189286.
- [MMBR16] P. Mobed, S. Munusamy, D. Bhattacharyya, and R. Rengaswamy. State and parameter estimation in distributed constrained systems. 1. extended Kalman filtering of a special class of differential-algebraic equation systems. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 56(1):206–215, 2016. ACS Publications.

- [MOE00] S. E. Mattsson, H. Olsson, and H. Elmqvist. Dynamic selection of states in Dymola. In *Proc. of the Modelica Workshop 2000*, pages 61–67, Lund, Sweden, 2000.
- [Mos02] P. J. Mosterman. HyBrSim - a modelling and simulation environment for hybrid bond graphs. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part I, Journal of Systems and Control Engineering*, 216(1):35–46, 2002. SAGE Publications, UK, London.
- [MRN09] R. K. Mandela, R. Rengaswamy, and S. Narasimhan. Nonlinear state estimation of differential-algebraic systems. *Advanced Control of Chemical Processes*, 7:792–797, 2009.
- [MRS97] R. K. Mehra, C. Rago, and S. Seereeram. Failure detection and identification using a nonlinear interactive multiple model (IMM) filtering approach with aerospace applications. In *Proc. of IFAC Symposium on System Identification*, pages 407–412, Kitakyushu, Fukuoka, Japan, 1997.
- [MS93] S. E. Mattsson and G. Söderlind. Index reduction in differential-algebraic equations using dummy derivatives. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 14(3):677–692, 1993.
- [Mur16] H. Murrenhoff. *Grundlagen der Fluidtechnik, Teil 1: Hydraulik, 8. korrigierte Auflage 2016*. Reihe Fluidtechnik. Shaker, 8 edition, 2016.
- [NCD99] R. Nikoukhah, S. L. Campbell, and F. Delebecque. Kalman filtering for general discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10):1829–1839, 1999. ISSN 00189286.
- [NK91] K. M. Nagpal and P. P. Khargonekar. Filtering and smoothing in an  $H_\infty$  setting. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(2):152–166, 1991.
- [NP05] N. S. Nedialkov and J. D. Pryce. Solving differential-algebraic equations by Taylor series (i): Computing Taylor coefficients. *BIT Numerical Mathematics*, 45(3):561–591, 2005.
- [NPR00] M. Nørgaard, N. Poulsen, and O. Ravn. New developments in state estimation of nonlinear systems. *Automatica*, 36(11):1627–1638, 2000.
- [NT89] S. Nicosia and A. Tornambè. High-gain observers in the state and parameter estimation of robots having elastic joints. *Systems and Control Letters*, 13(4):331–337, 1989.

- [NWL92] R. Nikoukhah, A. S. Willsky, and B. C. Levy. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9):1325–1342, 1992.
- [NZD06] S. K. Neguang, P. Zhang, and S. Ding. Parity based fault estimation for nonlinear systems: an LMI approach. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 5141–5146, Minneapolis, MN, USA, 2006.
- [Ost85] G. P. Ostermeyer. Die Stabilisierung von Bindungen und ersten Integralen als Regelungsproblem und ihre Konsequenzen. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 65(3):185–188, 1985. ISSN 15214001.
- [Ott95] M. Otter. Objektorientierte Modellierung Mechatronischer Systeme am Beispiel Geregelter Roboter. *Fortschrittsberichte VDI, Reihe 20*, 147, 1995. ISBN 3183147203.
- [Pay61] H. M. Paynter. *Analysis and Design of Engineering Systems*. MIT Press, 1961.
- [PI01] C. D. Persis and A. Isidori. A geometric approach to nonlinear fault detection and isolation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(6):853–865, 2001.
- [Pro13] S. Proß. *Hybrid Modeling and Optimization of Biological Processes*. PhD thesis, Bielefeld University, 2013.
- [PS99] M. K. Pitt and N. Shephard. Filtering via simulation: Auxiliary particle filters. *Journal of the American Statistical Association*, 94(466):590–599, 1999.
- [PWH88] A. Pole, M. West, and P. J. Harrison. *Bayesian Analysis of Time Series and Dynamic Models*, chapter Non-Normal and Nonlinear Dynamic Bayesian Modelling. Marcel Dekker, New York, USA, 1988.
- [RAG03] B. Ristic, S. Arulampalam, and N. Gordon. *Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications*. Artech House, 2003.
- [Raw13] J. B. Rawlings. *Encyclopedia of Systems and Control*, chapter Moving Horizon Estimation, pages 1–7. Springer, London, UK, 2013. ISBN 9781447151029.
- [Rei17] K. Reif. *Grundlagen Fahrzeug- und Motorentchnik*. Bosch Fachinformation Automobil. Springer, 2017.

- [Res97] Oki Scientific Research. Nonlinearity-compensation extended Kalman filter and its application to target motion analysis. *Oki Electric Industry Co*, 63(159), 1997.
- [RH94] S. Raghavan and J. K. Hedrick. Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2):515–528, 1994.
- [RHG13] R. Reinhardt, A. Hoffmann, and T. Gerlach. *Nichtlineare Optimierung, Theorie, Numerik und Experimente*. Springer, 1 edition, 2013.
- [RRM03] C. Rao, J. Rawlings, and D. Mayne. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48:246–258, 2003.
- [SB08] A. K. Samantaray and B. O. Bouamama. *Model-Based Process Supervision: A Bond Graph Approach*. Advances in Industrial Control. Springer, 2008.
- [SBR00] U. Seidel, H. Buchta, and K. J. Reinschke. Variablen- und Parameterschätzung für Regelstreckenmodelle in Deskriptorform. *Automatisierungstechnik Methoden und Anwendungen der Steuerungs-, Regelungs- und Informationstechnik*, 48(12):602–610, 2000.
- [Sei99] U. Seidel. *Ein Beitrag zur Variablen- und Parameterschätzung für Regelstreckenmodelle in Deskriptorform*. PhD thesis, Technische Universität Dresden, 1999.
- [SHM86] J. J. E. Slotine, J. K. Hedrick, and E. A. Misawa. On sliding observers for nonlinear systems. In *Proc. of the ACC - American Control Conference*, pages 1794–1800, Seattle, WA, USA, 1986. IEEE.
- [SHM87] J.-J. E. Slotine, J. K. Hedrick, and E. A. Misawa. On sliding observers for nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 109(3):245–252, 1987.
- [Sor85] H. W. Sorenson. *Kalman Filtering: Theory and Application*. IEEE Press selected reprint series. IEEE, 1985.
- [Sri02] R. Srinivasan. *Importance Sampling: Applications in Communications and Detection*. Engineering Online Library. Springer, 2002.

- [SS10] M. Sepasi and F. Sassani. On-line fault diagnosis of hydraulic systems using unscented Kalman filter. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 8(1):149–156, 2010.
- [SSM62] G. L. Smith, S. F. Schmidt, and L. A. McGee. Application of statistical filter theory to the optimal estimation of position and velocity on board a circumlunar vehicle. NASA STI Program - NTRS, Technical Report, NASA-TR-R-135, 1962.
- [TB91] I. B. Tjoa and L. T. Biegler. Simultaneous solution and optimization strategies for parameter estimation of differential-algebraic equation systems. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 30(2):376–385, 1991.
- [TBD<sup>+</sup>11] A. Thabet, M. Boutayeb, G. Didier, S. Chniba, and M. N. Abdelkrim. Fault diagnosis for dynamic power system. In *Proc. of the International Multi-Conference on Systems, Signals Devices*, pages 1–7, Sousse, Tunisia, 2011.
- [TE03] C. P. Tan and C. Edwards. Sliding mode observers for reconstruction of simultaneous actuator and sensor faults. In *Proc. of the 42nd CDC - IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1455–1460. IEEE, 2003. ISSN 01912216.
- [Ter97] W. J. Terrell. Observability of nonlinear differential algebraic systems. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 16(2):271–285, 1997. ISSN 15315878.
- [Tha73] F. E. Thau. Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 17(3):471–479, 1973.
- [TK05] N. Tudoroiu and K. Khorasani. Fault detection and diagnosis for satellite’s attitude control system using an interactive multiple model (IMM) approach. In *Proc. of the IEEE Conference on Control Applications*, pages 1287–1292, Toronto, Canada, 2005.
- [TOBB14] P. Täuber, L. Ochel, W. Braun, and B. Bachmann. Practical realization and adaptation of Cellier’s tearing method. In *Proc. of the 6th International Workshop on Equation-Based Object-Oriented Modeling Languages and Tools, EOOLT ’14*, pages 11–19, New York, NY, USA, 2014. ACM. ISBN 9781450329538.
- [Tsi89] J. Tsinias. Observer design for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 13(2):135–142, 1989.
- [Tsi90] J. Tsinias. Further results on the observer design problem. *Systems and Control Letters*, 14(5):411–418, 1990.



- [TSTK06] N. Tudoroiu, E. Sobhani-Tehrani, and K. Khorasani. Interactive bank of unscented Kalman filters for fault detection and isolation in reaction wheel actuators of satellite attitude control system. In *Proc. of the IEEE Conference on Industrial Electronics*, pages 264–269, Paris, France, 2006.
- [Tug81] J. K. Tugnait. Detection and estimation for abruptly changing systems. In *Proc. of the 20th CDC - IEEE Conference on Decision and Control Including the Symposium on Adaptive Processes*, pages 1357–1362, San Diego, California, USA, 1981. IEEE.
- [vdMW01] R. van der Merwe and E. A. Wan. The square-root unscented Kalman filter for state and parameter-estimation. In *Proc. of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 6, pages 3461–3464, Salt Lake City, UT, USA, 2001. IEEE. ISBN 0780370414.
- [WA16] D. Weidemann and I. Alkov. *Variable-Structure Approaches, Analysis, Simulation, Robust Control and Estimation of Uncertain Dynamic Processes*, chapter Fault Diagnosis of Nonlinear Differential-Algebraic Systems Using Hybrid Estimation, pages 283–307. Mathematical Engineering. Springer, 1 edition, 2016. ISBN 9783319315379.
- [WCŽ87] B. L. Walcott, M. J. Corless, and S. H. Žak. Comparative study of non-linear state-observation techniques. *International Journal of Control*, 45(6):2109–2132, 1987.
- [WD03] T. Wack and G. Deerberg. Generative objektorientierte Modellierung GenOOM in der Verfahrenstechnik. *Chemie Ingenieur Technik*, 75(8), 2003.
- [WG15] D. Will and N. Gebhardt. *Hydraulik: Grundlagen, Komponenten, Systeme*. Springer, 2015.
- [Wit07] M. Witczak. *Modelling and Estimation Strategies for Fault Diagnosis of Non-Linear Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer, 2007.
- [WR10] H. Wallentowitz and K. Reif. *Handbuch Kraftfahrzeugelektronik: Grundlagen - Komponenten - Systeme - Anwendungen*. ATZ/MTZ-Fachbuch. Vieweg + Teubner, 2010.
- [WS19] D. Weidemann and E. Skeli. Multiple-model estimation applied to unequal, heterogeneous state space models. In R. Moreno-Díaz, F. Pichler, and A. Quesada-Arencia, editors, *Proc. of the*

*EUROCAST 2019 - 17th International Conference on Computer Aided Systems Theory*, pages 12–19, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, 2019. Springer. ISBN 9783030450960.

- [WŽ87] B. Walcott and S. Žak. State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(2):166–170, 1987.
- [XG88] X.-H. Xia and W.-B. Gao. On exponential observers for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 11(4):319–325, 1988.
- [XG89] X.-H. Xia and W.-B. Gao. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(1):199–216, 1989.
- [Zei87a] M. Zeitz. Comments on 'comparative study of non-linear state-observation techniques'. *International Journal of Control*, 46(5):1861–1863, 1987.
- [Zei87b] M. Zeitz. The extended luenberger observer for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 9(2):149–156, 1987.
- [Zim93] G. Zimmer. A new algorithm for approximating the state of nonlinear systems. *International Journal of Systems Science*, 24(4):777–788, 1993.
- [ZM97] G. Zimmer and J. Meier. On observing nonlinear descriptor systems. *Systems and Control Letters*, 32(1):0167–6911, 1997.
- [ZX97] Y. Zhang and R.L. Xiao. Detection and diagnosis of sensor and actuator failures using interacting multiple-model estimator. In *Proc. of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4475–4480, San Diego, CA, USA, 1997.

