Multivariate stochastische Integrale mit Anwendung am Beispiel Operator-stabiler und Operator-selbstähnlicher Zufallsfelder

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

M.Sc. Dustin Kremer

Eingereicht bei der naturwissenschaftlich-technischen Fakultät
der Universität Siegen

Siegen 2016

gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

Gutachter
Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler, Universität Siegen
Prof. Dr. Peter Kern, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Tag der mündlichen Prüfung: 03.02.2017

„Mathematik ist Musik des Geistes, Musik ist Mathematik der Seele."

Daniil Charms (1905-1942)

Zusammenfassung

Der Inhalt dieser Arbeit kann grundsätzlich in zwei Teile gegliedert werden. So betrachten wir einerseits multivariate Zufallsfelder der Form $\{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$, wobei $X(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}^d$ ein $\mathbb{R}^m$-wertiger Zufallsvektor ist, und untersuchen dann die Existenz solcher Felder, die Operator-selbstähnlich im Sinne von [29] sind und darüber hinaus echt Operator-stabile Randverteilungen besitzen. Dies geschieht anhand einer harmonischen sowie einer moving-average Integraldarstellung, jeweils bezüglich geeigneter independently scattered random measures (kurz: Zufallsmaße) und verallgemeinert somit die entsprechenden Beiträge von [40], [5] beziehungsweise [29], wobei der Aspekt der Operator-Stabilität in diesem Zusammenhang neuartig ist und für den Umgang mit multivariaten Fragestellungen als natürlichere Verteilungseigenschaft angesehen werden kann. Des Weiteren werden wir für beide Darstellungen noch zusätzliche Eigenschaften herausarbeiten können, insbesondere erlaubt die harmonische Darstellung für einen Spezialfall die Konstruktion stetiger Modifikation und bildet somit einen von vielen Ausgangspunkten für nachfolgende Untersuchungen.
Andererseits bedingt die gewünschte Operator-Stabilität der Randverteilungen, dass bereits die verwendeten Zufallsmaße diese Eigenschaft besitzen. Und auch die resultierenden stochastischen Integrale, die zur Konstruktion dieser Felder herangezogen werden, müssen entsprechend verstanden werden. Diesem Umstand wird auf besondere Weise Rechnung getragen, indem wir die sehr allgemeinen, aber univariaten Ergebnisse in [35] vereinheitlichen, um die komplexwertige Betrachtungsweise wie in [40] erweitern und schließlich mit Hilfe vektorieller Maße auf den multivariaten Fall übertragen. Zugleich können wir zeigen, dass die Atomfreiheit der betrachteten Zufallsmaße auch stets ihre unendliche Teilbarkeit impliziert. Dabei erfahren diese Ergebnisse durch ihre Allgemeinheit einen eigenständigen Wert und könnten auch hier die Beantwortung zukünftiger Fragestellungen zur Modellierung komplexer, zufälliger Phänomene erlauben.
Zusätzlich geben wir eine mögliche Definition für den Anziehungsbereich multivariater Zufallsfelder an, die zwar zum einen sehr breit ausfällt, zum anderen aber dennoch eine elegante Charakterisierung der Operator-Selbstähnlichkeit eines gegebenen Zufallsfelds erlaubt und dabei das entsprechende univariate Resultat in [17] umfasst.
Trotz aller Flexibilität zieht sich der Umgang mit linearen Operatoren und verallgemeinerten Polarkoordinaten (man vergleiche [5]) auf der deterministischen Seite wie ein roter Faden durch die vorliegende Arbeit, was die Angabe von anschaulichen und praktikablen Beispielen ermöglichen wird.

Abstract

Roughly speaking, the content of this thesis can be divided into two parts. On the one hand, we will deal with multivariate random fields in form of $\{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$, where $X(t)$ is an $\mathbb{R}^m$-valued random vector for each $t \in \mathbb{R}^d$, and then we will investigate the existence of such fields which are operator-self-similar in the sense of [29] and whose margins, at the same time, have a real operator-stable distribution. This will be done in terms of a harmonizable and a moving-average integral representation with respect to an appropriate independently scattered random measure, respectively. Hence, we actually extend the results in [40], [5] and [29], whereas the aspect of operator-stability is mentionable and seems to be more natural in the context of multivariate questions. Additionally, we will be able to present some further properties. In particular, a special case of the harmonizable representation permits us to construct continuous modifications and can therefore - among other examples - be regarded as a source for subsequent researches.
On the other hand, we have to ensure that the applied random measures already provide the property of operator-stability which is intended for the resulting margin distributions of the random field. So we have to cope with the challenges that occur concerning the related stochastic integrals as this will be the method for constructing these random fields. This problem will be solved in a very comprehensive way by unifying and extending the results in [35] for the univariate case towards the multivariate one via vector valued measures and even by adding a complex-valued perception as proposed in [40]. In this context we will also be able to show that these random measures always have to be infinitely divisible as long as they are atomless. In view of their universality our results appear rather self-contained and could also serve as a useful tool for extensive modeling problems in the future.
Furthermore, we state a potential definition for the domain of attraction of multivariate random fields which looks quite general, but which still allows a nice characterization for the operator-self-similarity (of a given random field) by extending the corresponding univariate result in [17].
In spite of the mentioned flexibility it will turn out that the consideration of linear operators and generalized polar coordinates (see [5]) is some kind of central theme throughout the whole thesis which finally leads to interesting and practicable examples.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

1.1 Motivation und Ziele

Die Untersuchung stochastischer Prozesse und Felder ist traditionell mit der Frage nach Selbstähnlichkeitsprinzipien verbunden, sodass im Verlauf der letzten Jahrzehnte und ausgehend von [25] eine sukzessive Verallgemeinerung dieser Prinzipien stattfand. Dies ist neben ihrer Anwendung in der Natur und anderen Wissenschaften insbesondere durch ihre hohe theoretische Relevanz für die zugrunde liegenden stochastischen Objekte begründet. So bestimmt der *Hurst-Exponent* im Falle der (gebrochenen) Brownschen Bewegung bereits die grundlegenden Verteilungs- und Pfadeigenschaften entsprechender Modifikationen.
Insofern leisten die Ausführungen in [29] mit der Einführung *Operator-selbstähnlicher* Felder (vergleiche (1.2)) nicht nur einen aktuellen Beitrag zu diesem Thema, sondern haben die vorliegende Dissertationsschrift zusammen mit [5] und [40] wesentlich motiviert. Genauer betrachten Xiao und Li in [29] gegenüber [5] vektorwertige Felder, beschränken sich dabei jedoch weiterhin auf solche mit *(α-)stabilen* Randverteilungen. Nun sind die *Operator-stabilen* Verteilungen zum einen eine unmittelbare Verallgemeinerung der stabilen, zum anderen erscheinen sie aber auch natürlicher im Kontext von vektorwertigen Feldern und für den Umgang mit linearen Operatoren (man vergleiche später Definition 2.4.2). Insbesondere sei daran erinnert, dass die (vollen) Operator-stabilen Verteilungen gerade den möglichen schwachen Grenzwerten von geeignet normierten Partialsummen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvektoren entsprechen (siehe Theorem 2.4.4). Primäres Ziel dieser Arbeit ist also die Konstruktion und Untersuchung von Operator-stabilen sowie Operator-selbstähnlichen Zufallsfeldern (synonym: *Vektorfeldern*) der Form $\{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$, wobei $X(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ ein $\mathbb{R}^m$-wertiger Zufallsvektor auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei.
Dabei hat sich methodisch die Verwendung von stochastischen Integralen nach so ge-

nannten Zufallsmaßen (*independently scattered random measures*) als äußerst praktikabel erwiesen, wobei die Ausführungen in [29] bereits Zufallsmaße nahelegen, die auf geeigneten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ definiert sind, um schlussendlich die Eigenschaft der Operator-Selbstähnlichkeit zu etablieren. Zugleich ist der nicht-deterministische Anteil der resultierenden Zufallsvektoren $X(t)$ im Wesentlichen bereits in dem zugrunde liegendem Zufallsmaß kodiert; die Realisierung Operator-stabiler Objekte bedingt also, dass das verwendete Zufallsmaß bereits entsprechend verteilt ist. In diesem Zusammenhang hat sich jedoch gezeigt, dass es in der Literatur kaum explizite oder zumindest ausreichend allgemeine Beiträge zu Operator-stabilen Zufallsmaßen auf möglichst variablen Mengensystemen (man vergleiche später Definition 3.3.1) gibt. Vielmehr entsteht gerade im Kontext α-stabiler Integraldarstellungen der Eindruck, dass bei der Verwendung vektorwertiger Zufallsmaße stillschweigend auf die lediglich univariaten Ausführungen in [40] verwiesen wird, so auch in [29]. Diese wahrgenommene Diskrepanz mündete - aus zunächst rein pragmatischer Motivation - in einem zweiten Schwerpunkt dieser Arbeit, nämlich der fundierten Ausarbeitung multivariater Zufallsmaße auf so genannten *δ-Ringen* sowie des resultierenden Integralbegriffs für operatorwertige Funktionen. Dabei erwiesen sich die univariaten Ergebnisse in [35] als passende Grundlage, um diese in möglichst breiter Form zu ergänzen und auf den vektorwertigen Fall zu übertragen. Die damit einhergehenden technischen Probleme konnten einerseits mit Hilfe der Beiträge in [9] zu *vektoriellen Maßen* überwunden werden. Andererseits, nämlich im Zusammenhang mit der sich anschließenden Integrationstheorie, gelang dank einiger Ideen aus [37] der Übergang zu höheren Dimensionen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass der Zugang von [37] zwar die Konstruktion von stochastischen Objekten mit Werten in abstrakteren Banachräumen erlaubt, dass diese dadurch aber von Beginn an auf eine spezielle *homogene* Sichtweise (siehe später (3.4) und Beispiel 3.6.3 (b)) eingeschränkt sind und, dass darüber hinaus eine reichhaltige Folgerung für den Spezialfall endlicher Vektorräume erschwert wird. Dieses tiefe Verständnis ist aber gerade von Nöten, um auch in diesem Fall noch praktikable Existenzbedingungen interessanter Beispielfelder herausarbeiten zu können und um schließlich eine durch [40] motivierte komplexwertige Sichtweise einzunehmen. Der zuletzt genannte Aspekt findet dabei seit [40] noch seltener Eingang in die Literatur, sodass die hier geleisteten Beiträge zur multivariaten stochastischen Integration insgesamt einen eigenständigen Wert erfahren.
Abschließend möchten wir den Begriff der Operator-Selbstähnlichkeit in Anlehnung an [29] recht weit fassen, um die Frage, ob ein gegebenenes Zufallsfeld diese Eigenschaft besitzt, in möglichst allgemeiner Form charakterisieren zu können. Dazu führen wir auch eine denkbare Definition für den *Anziehungsbereich* eines Vektorfelds ein.

1.2 Aufbau und zentrale Ergebnisse der Arbeit

In **Kapitel 2** ist der Name zunächst Programm, so werden neben einigen Konventionen in Abschnitt 2.1 vor allem die stets wiederkehrenden Eigenschaften des *Matrixexponentials* wiederholt, ehe wir in Anlehnung an [5] die so genannten *verallgemeinerten Polarkoordinaten* einführen können. Letztere erlauben insbesondere die Betrachtung von *homogenen*

und *zulässigen Funktionen*, von denen wir gegen Ende dieser Arbeit profitieren werden. Mit Hinblick auf [31], [40] und [19] können die Abschnitte 2.3 und 2.4, in denen der Leser sprichwörtlich abgeholt wird, weitestgehend auch zu den Grundlagen gezählt werden. Wir ergänzen die Inhalte jedoch an manchen Stellen, nicht zuletzt, um später auf einige Ideen verweisen zu können. Dabei lösen wir die Definition der Operator-Stabilität zunächst von der Voraussetzung der *Vollheit*, um die angestrebten Integraldarstellungen nachher universell mit dieser Eigenschaft versehen zu können. Ferner soll die Teilklasse der *strikt* Operator-stabilen Verteilungen akzentuiert werden, da diese wiederum eine Obermenge der symmetrisch Operator-stabilen Verteilungen bilden, was auf eine weitere Verallgemeinerung der bereits bekannten α-stabilen Integraldarstellungen hinausläuft.
Wie zuvor bereits angekündigt, streben wir stochastische Integrale der Form $\int f\,dM$ an, wobei M ein independently scattered random measure ist und somit gewissermaßen die Rolle des Integrators übernimmt. Dabei bildet **Kapitel 3** in erster Linie einen Teil der gewünschten Verallgemeinerung von [35] ab. Insbesondere wird sich herausstellen, dass ein bijektiver Zusammenhang zwischen solchen Zufallsmaßen auf der einen und gewissen deterministischen Objekten auf der anderen Seite besteht (siehe Abschnitte 3.3 und 3.6). Zu diesem Zweck werden wir vorbereitend vektorwertige Maße betrachten, müssen jedoch einige Modifikationen der Ausführungen in [9] vornehmen, da die zugrunde liegende Struktur dort im Allgemeinen eine σ-Algebra statt eines δ-Rings ist. Letztere werden in [35] jedoch zu knapp dargestellt, sodass sich in Abschnitt 3.1 zunächst eine grundlegende Untersuchung dieser Systeme empfiehlt, was im Übrigen überhaupt erst die zentrale Aussage von Abschnitt 3.5 erlauben wird.
Kapitel 4 bildet das entsprechende Gegenstück zu Kapitel 3, wobei die Charakterisierung der bezüglich M integrierbaren Funktionen im Mittelpunkt steht und in Abschnitt 4.2 erfolgt. Die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Erweiterung steht hingegen eher in der Tradition von [40]; während dort, in einem univariat α-stabilen Spezialfall, die Klassen der reell- respektive komplex-integrierbaren Funktionen jedoch zusammenfallen, ergeben sich hier im Allgemeinen Unterschiede, die letztlich zu dem in Abschnitt 4.4 entwickelten Kompromiss führen, während Abschnitt 4.5 den für die geplanten Anwendungen benötigten Spezialfall beleuchtet.
Den Übergang zum zweiten Teil dieser Arbeit stellt nun **Kapitel 5** dar: Während wir zunächst im Wesentlichen den Ausführungen in [29] folgen werden, wird uns dann in Abschnitt 5.2 eine Charakterisierung der Operator-Selbstähnlichkeit eines gegebenen Vektorfeldes über den zugehörigen Anziehungsbereich gelingen, den wir zuvor geeignet definieren werden.
Die Anwendungs**kapitel 6 und 7** markieren schließlich den zentralen Inhalt des zweiten Teils der vorliegenden Arbeit und untersuchen dabei die *moving-average Integraldarstellung*

$$X_{\phi,D}(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right] M(ds), \quad t \in \mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

beziehungsweise die *harmonische Integraldarstellung*

$$\widetilde{X}_{\phi,D}(t) := \mathrm{Re} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} - 1 \right) \phi(s)^{-D} \phi(s)^{-qB} \, \widetilde{M}(ds), \quad t \in \mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

Statt die beteiligten Komponenten sowie gefundenen Existenzbedingungen in (1.1) und (1.2) näher zu beschreiben, beschränken wir uns für den Moment auf die Feststellung, dass beide Darstellungen die entsprechenden Felder aus [29], [5] und [40] als Spezialfall beinhalten, im Allgemeinen jedoch echt Operator-stabile Randverteilungen besitzen. Ferner erfüllen beide Darstellungen eine *strikte* Form der Operator-Selbstähnlichkeit, nämlich

$$\forall r > 0 : \qquad \{X_{\phi,D}(r^E t) : t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{fdd}{=} \{r^D X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}, \tag{1.3}$$

analog für $\widetilde{X}_{\phi,D}$. Unter der Vielzahl an weiteren Eigenschaften wird sich herausstellen, dass beide Darstellungen sowohl Gemeinsamkeiten als auch signifikante Unterschiede besitzen. Insbesondere können wir für einen echt Operator-stabilen Spezialfall der harmonischen Darstellung, die überhaupt erst mit Hilfe unserer komplexwertigen Überlegungen zur Integrationstheorie möglich ist, die Existenz stetiger Modifikationen zeigen, man vergleiche Abschnitt 7.3.
Der zuletzt genannte Abschnitt wird nicht nur den inhaltlichen Abschluss bilden, sondern motiviert stellvertretend auch einen der zahlreichen anknüpfenden Aspekte, die Gegenstand von **Kapitel 8** sind. Ferner findet dort implizit eine weiterführende Einordnung dieser Arbeit in die bisherige Literatur statt.
Ein ausführliches Symbol- und Abkürzungsverzeichnis sowie eine Liste der zitierten Quellen befinden sich schließlich im Anhang.

1.3 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ausdrücklich bei Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler für sein jederzeit offenes Ohr, das in mich gesetzte Vertrauen und die Vielzahl an Ratschlägen bedanken, auch abseits des Campus. Seine Unterstützung steht zugleich beispielhaft für das harmonische und stimulierende Arbeitsklima des Departments Mathematik an der Universität Siegen. Auch der andauernden Hilfe und Geduld meiner Angehörigen gebührt großer Dank. Schließlich freue ich mich, dass Herr Prof. Dr. Peter Kern sich bereit erklärt hat, die vorliegende Arbeit zu begutachten.

KAPITEL 2

Grundlagen

Neben einigen Bezeichnungen sollen in diesem Kapitel jene Ergebnisse bereitgestellt werden, die wir wiederkehrend benutzen werden. Ausgehend von absoluten Grundlagen betrifft dies zunächst das Matrixexponential und seine Vielzahl an Eigenschaften, mit deren Hilfe wir auch das Konzept der verallgemeinerten Polarkoordinaten angeben können. Im Anschluss werden wir dann die notwendigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen ansprechen.

Vorab sei bemerkt, dass wir hinsichtlich ihrer Darstellung zwischen Skalaren und (endlich-dimensionalen) Vektoren in der Regel nicht unterscheiden möchten, insbesondere kann die 0 kontextbezogen auch für den Nullvektor $(0, ..., 0)$ oder gar den Nulloperator stehen. Ferner stellen wir Vektoren meistens in Komponentenform (bezüglich der Standardbasis) dar und identifizieren $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ et cetera.

Wir beginnen mit einem allgemein bekannten Ergebnis, von dem man sich alternativ aber auch mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung sowie der Konvexität von $x \mapsto x^r$ (für $r > 1$) leicht überzeugen kann. Demnach gilt

$$(a+b)^r \leq \max\{1, 2^{r-1}\} (a^r + b^r) \quad \text{für alle } a, b, r \geq 0. \tag{2.1}$$

Da wir nun im weiteren Verlauf ausschließlich *multivariate* Felder betrachten werden und Aussagen über die zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen (*Randverteilungen*) treffen möchten, kommt man im Gegensatz zum univariaten Fall mit Hilfe des *Cramér-Wold-Devices* häufig nicht mehr zum Ziel. Die nachfolgende Beobachtung wird sich daher für uns trotz ihrer Einfachheit als wichtig erweisen.

Lemma 2.0.1
Seien $\{X(j) : j \in J\}$ und $\{Y(j) : j \in J\}$ zwei Familien von $\mathbb{R}^n$-wertigen Zufallsvektoren

(auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum) zu einer beliebigen Indexmenge J. Falls man für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j_1, ..., j_k \in J$ sowie $u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}^n$ zeigen kann, dass

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{l=1}^{k}\langle X(j_l),u_l\rangle}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{l=1}^{k}\langle Y(j_l),u_l\rangle}\right),$$

so gilt:

$$\{X(j) : j \in J\} \overset{fdd}{=} \{Y(j) : j \in J\}.$$

Beweis. Gemäß der Definition der endlich-dimensionalen Verteilungen (solcher Familien von Zufallsvektoren) ist eben für all jene $j_1, ..., j_k$ zu zeigen, dass

$$X := (X(j_1), ..., X(j_k)) \overset{d}{=} (Y(j_1), ..., Y(j_k)) =: Y.$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz (der Fouriertransformation) genügt also der Nachweis von

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle X,u\rangle}\right) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle Y,u\rangle}\right) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^{k\cdot n}.$$

Dabei lässt sich jedes solche $u \in \mathbb{R}^{k\cdot n}$ in eindeutiger Weise schreiben als $u = (u_1, ..., u_k)$ mit $u_l \in \mathbb{R}^n$ (für $l = 1, ..., k$). Per Definition des Standardskalarprodukts folgt dann die Behauptung. □

2.1 Lineare Operatoren und Matrixexponential

Wir werden in einem der kommenden Abschnitte sehen, dass Operator-stabile Verteilungen maßgeblich durch lineare Operatoren beschrieben werden. Gleiches gilt später für das Konzept der Operator-Selbstähnlichkeit. Insbesondere die so genannten Exponentialmatrizen werden sich dabei als zentral erweisen, sodass sich an dieser Stelle eine ausführliche Wiederholung dieser Konzepte empfiehlt. Aufsetzend auf obigen Bemerkungen beginnen wir jedoch mit einigen Vereinbarungen; man beachte auch das Symbolverzeichnis.

Konvention 2.1.1
Wenn nicht anders gekennzeichnet, bezeichne $\|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^n$ die euklidische Norm. In gleicher Weise unterstellen wir als Operatornorm die von der jeweiligen Vektorraumnorm induzierte Norm, für $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ gelte also

$$\|A\| := \max_{\|x\|\leq 1}\|Ax\| = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|. \tag{2.2}$$

Dies hat den Vorteil, dass sich die Operatornorm einerseits submultiplikativ verhält und andererseits verträglich gegenüber der zugrunde liegenden Vektorraumnorm zeigt, d.h. für alle $A, B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{sowie} \quad \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Dabei ordnen wir den Elementen aus $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ stets in eindeutiger Weise eine entsprechende $n \times n$ Matrix mit reellen Einträgen zu (et vice versa) und stellen Vektoren des $\mathbb{R}^n$ in Koordinatenform dar, jeweils bezüglich der Standardbasis im $\mathbb{R}^n$.

Definition 2.1.2
Jede Matrix $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ kann via $A(x+\mathrm{i}y) := Ax+\mathrm{i}Ay$ auch als linearer Operator auf $\mathbb{C}^n$ interpretiert werden. Insbesondere definieren wir die Eigenwerte eines linearen Operators stets als *komplexe* Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Dabei bezeichne $\sigma(A)$ das *Spektrum* von A, d.h. die (nichtleere) Menge der Eigenwerte. Weiter definieren wir für $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda_A := \min\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}, \quad \Lambda_A := \max\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Schließlich sei $Q(\mathbb{R}^n) := \{A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) : \lambda_A > 0\}$.

Wir definieren nun für $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ und $s > 0$ beliebig das *Matrixexponential* als die (stets konvergente) Potenzreihe

$$s^A := \exp\{(\ln s)A\} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(\ln s)^j A^j \quad \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $A^0 := I_n$. Die nachfolgenden Rechenregeln ähneln dabei den üblichen Potenzgesetzen und werden daher im weiteren Verlauf intuitive Verwendung finden.

Eigenschaft 2.1.3
Für alle $A, B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ und $s, t > 0$ gilt:

(a) $s^0 = I_n$, wobei 0 der Nulloperator auf $\mathbb{R}^n$ sei.

(b) $s^{I_n} = s \cdot I_n$.

(c) $s^A s^B = s^{A+B} = s^B s^A$ und $s^A t^B = t^B s^A$, falls A und B kommutieren.

(d) $s^A t^A = (st)^A$.

(e) s^A ist invertierbar mit der Inversen $s^{-A} = (1/s)^A$.

(f) $\sigma(s^A) = \{s^\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ für alle $s > 0$.

(g) Die Abbildung $(0, \infty) \ni s \mapsto s^A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.

(h) $\det(s^A) = s^{\mathrm{tr}(A)}$.

(i) Die Adjungierte (hier: Transponierte) von s^A ist durch s^{A^*} gegeben.

Beweis. (a) und (b) folgen unmittelbar per Definition, (c)-(e) und (g) sind die Aussagen von Proposition 2.2.2 respektive Proposition 2.2.11 in [31], wobei die zweite Teilaussage von (c) aus der ersten folgt, da mit A und B auch $(\ln s)A$ und $(\ln t)B$ kommutieren.

Teil (f) entnimmt man Satz 19.7 in [15], während Aussage (h) der Folgerung 5.1.5 in [14] entspricht. Da schließlich

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}(\ln s)^j A^j\right)^* = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}(\ln s)^j (A^j)^* = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}(\ln s)^j (A^*)^j$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, bleibt die Aussage auch im Grenzwert erhalten, d.h. (i) gilt. □

Absolut essentiell ist für uns in diesem Zusammenhang die folgende Abschätzung der Operatornorm, für die wir der Idee von Proposition 2.1 in [30] folgen. Man vergleiche auch Lemma 3.2 in [2], wo sich unter Berücksichtigung der *Spektralzerlegung* des entsprechenden Operators (wie in Theorem 2.1.4 bei [31]) sogar eine noch schärfere findet, die für unsere Zwecke jedoch vorerst nicht von Vorteil ist.

Proposition 2.1.4
Sei $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann existieren für alle $s_0 > 0$ und $\delta > 0$ Konstanten $C_1, C_2 > 0$, sodass

$$\|s^A\| \leq \begin{cases} C_1\, s^{\lambda_A - \delta} & \text{für } 0 < s \leq s_0, \\ C_2\, s^{\Lambda_A + \delta} & \text{für } s \geq s_0. \end{cases}$$

Beweis. Nach Theorem 2.2.4 in [31] gilt zunächst allgemein: $\|s^{-\alpha} s^A x\| \to 0$ kompakt gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}^n$ und für $s \to \infty$, solange $\alpha > \Lambda_A$. Durch Betrachtung der (kompakten) Menge S^{n-1} zusammen mit (2.2) folgt also, dass $\|s^{-\alpha} s^A\|$ für $s \to \infty$ ebenfalls gegen Null konvergiert. Sei $\delta > 0$ beliebig, dann erhält man für $\alpha := \Lambda_A + \delta$ unmittelbar:

$$\lim_{s \to \infty} \|s^{-(\Lambda_A + \delta)} s^A\| = 0. \tag{2.3}$$

Wir nehmen nun zunächst an, dass $\lambda_A > 0$. Dann gilt für $B := -A$ insbesondere, dass $\Lambda_B = -\lambda_A$ und es folgt:

$$\lim_{s \to 0} \|s^{-(\lambda_A - \delta)} s^A\| = \lim_{s \to \infty} \|s^{\lambda_A - \delta} s^{-A}\| = \lim_{s \to \infty} \|s^{-(\Lambda_B + \delta)} s^B\| = 0,$$

indem wir (2.3) auf B anwenden. Zusammen mit der Stetigkeit der Abbildung $s \mapsto s^A$ implizieren also die beiden letzten Aussagen die Endlichkeit der Ausdrücke

$$C_1 := \sup_{0 < s \leq s_0} \|s^{-(\lambda_A - \delta)} s^A\| \quad \text{und} \quad C_2 := \sup_{s \geq s_0} \|s^{-(\Lambda_A + \delta)} s^A\|. \tag{2.4}$$

Dank der Homogenität der Norm schreibe man schließlich $\|s^A\| = s^{\lambda_A - \delta} \|s^{-(\lambda_A - \delta)} s^A\|$, dann folgt die gewünschte Abschätzung für $0 < s \leq s_0$, ganz analog für $s \geq s_0$.
Bleibt der Fall, dass $\lambda_A \leq 0$. Dann wähle man ein $\gamma > |\lambda_A|$, sodass die Behauptung nach dem bisher Gezeigten und wegen $\lambda_{A + \gamma I_n} = \lambda_A + \gamma > 0$ für $A' := A + \gamma I_n$ mit gewissen $C_1', C_2' > 0$ gilt. Somit folgt aber für $0 < s \leq s_0$ auch, dass

$$\|s^A\| = s^{-\gamma} \|s^{A'}\| \leq C_1' s^{-\gamma} s^{\lambda_A + \gamma - \delta} = C_1' s^{\lambda_A - \delta}.$$

Analog geht man unter Berücksichtigung von $\Lambda_{A + \gamma I} = \Lambda_A + \gamma$ für $s \geq s_0$ vor. □

Falls A diagonal ist, so kann das zugehörige Exponential explizit angegeben werden, was zur folgenden Verbesserung der Aussage führt.

Korollar 2.1.5
Falls $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ von der Form $A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$ ist, so gilt $s^A = \mathrm{diag}(s^{a_1}, ..., s^{a_n})$ für alle $s > 0$. Ist A zumindest diagonalisierbar, so kann die Abschätzung der Operatornorm wie in Proposition 2.1.4 auch für $\delta = 0$ vorgenommen werden.

Beweis. Sei A zunächst diagonal. Wegen $A^j = \mathrm{diag}(a_1^j, ..., a_n^j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt die Darstellung von s^A in diesem Falle unmittelbar per Definition (komponentenweise Betrachtung der Potenzreihe). Mit Hinblick auf die nachstehende Bemerkung betrachten wir nun ohne Einschränkung die $\|\cdot\|_1$-Norm und erhalten für alle $0 < s \leq s_0$ (fest):

$$\|s^A\|_1 = \sum_{k=1}^{n} s^{a_k} = \sum_{k=1}^{n} (s/s_0)^{a_k} s_0^{a_k} \leq \max\{s_0^{a_1}, ..., s_0^{a_n}\} \cdot n \cdot (s/s_0)^{\lambda_A} =: C\, s^{\lambda_A}.$$

Unter Berücksichtigung von $\max\{a_1, ..., a_n\} = \Lambda_A$ geht man ganz analog für $s \geq s_0$ vor, wobei dann $(s/s_0) \geq 1$ gilt.
Wenn schließlich A nur diagonalisierbar ist, dann existieren also ein $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ und eine Diagonalmatrix D, sodass $A = PDP^{-1}$. Somit folgt nach Proposition 2.2.2 (e) in [31] für alle $s > 0$, dass $s^A = Ps^DP^{-1}$. Bekanntlich besitzen aber D und A das gleiche Spektrum, sodass die gewünschte Abschätzung wegen

$$\|s^A\| = \|Ps^DP^{-1}\| \leq \|P\|\, \|P^{-1}\|\, \|s^D\|$$

mit obiger Überlegung folgt. □

Bemerkung 2.1.6. Da auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ alle Normen äquivalent sind, gelten die genannten Abschätzungen natürlich auch für jede andere Operatornorm, lediglich mit anderen Konstanten $C_1, C_2 > 0$. Ferner erkennt man sofort, dass $\|s^A\| \to 0$ für $s \to 0$, sofern $\lambda_A > 0$.

2.2 Verallgemeinerte Polarkoordinaten

Uns werden im weiteren Verlauf immer wieder so genannte *verallgemeinerte Polarkoordinaten* als zentrales Hilfsmittel begegnen. Darüber hinaus werden wir gewisse Funktionenklassen definieren, die nur mit dem Konzept dieser Polarkoordinaten verstanden werden können. Dabei beginnen wir in Anlehnung an [31] und [5] mit Letzteren.

Lemma und Definition 2.2.1
Sei $B \in Q(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann ist mittels

$$\|x\|_B := \int_0^1 \|s^B x\|\, ds, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

eine Norm $\|\cdot\|_B$ auf $\mathbb{R}^n$ erklärt, sodass die Abbildung $\Psi_B : (0,\infty) \times S_B \to \Gamma_n := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, definiert durch

$$\Psi_B(s,\theta) = s^B\theta,$$

ein Homöomorphismus ist, wobei $S_B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_B = 1\}$. Wir bezeichnen das (eindeutige) Paar $(\tau_B(x), l_B(x)) := \Psi_B^{-1}(x)$ als *verallgemeinerte Polarkoordinaten* von x (unter B); $\tau(x) = \tau_B(x)$ wird *radiale Komponente* und $l(x) = l_B(x)$ wird *Richtungskomponente* genannt.

Beweis. Dies ist die Aussage von Lemma 6.1.5 in [31]. □

Offensichtlich ist S_B eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, während die Abbildungen $\tau(\cdot)$ und $l(\cdot)$ insbesondere stetig sind. Die folgenden Rechenregeln wurden größtenteils in [5] gelistet und unterstreichen dabei noch einmal die Sinnhaftigkeit der jüngsten Bezeichnungen. Aus Gründen der Vollständigkeit geben wir auch einen kurzen Beweis an.

Eigenschaft 2.2.2
In der Situation von Lemma und Definition 2.2.1 gilt:

(a) $\tau(x) = \tau(-x)$ für alle $x \in \Gamma_n$.

(b) $l(-x) = -l(x)$ für alle $x \in \Gamma_n$.

(c) $\tau(s^B x) = s\,\tau(x)$ für alle $s > 0$ und $x \in \Gamma_n$.

(d) $l(s^B l(x)) = l(x)$ für alle $s > 0$ und $x \in \Gamma_n$.

(e) $S_B = \{x \in \mathbb{R}^n : \tau(x) = 1\}$.

(f) $\tau(s^B\theta) = s$ für alle $s > 0$ und $\theta \in S_B$.

Beweis. Mit der Polarkoordinatendarstellung von $x \in \Gamma_n$ gilt zunächst

$$-x = -\tau(x)^B l(x) = \tau(x)^B(-l(x)).$$

Da mit $l(x)$ auch $-l(x) \in S_B$, folgen (a) und (b) aus Gründen der Eindeutigkeit. Mit dem gleichen Argument folgt (d) und wegen

$$s^B x = s^B \tau(x)^B l(x) = (s\tau(x))^B l(x)$$

auch $\tau(s^B x) = s\,\tau(x)$, d.h. (c) gilt. Weiterhin liegt auch Teil (e) wieder die Eindeutigkeitsaussage zugrunde: So folgt wegen $x = I_n x = 1^B x$, dass $\tau(x) = 1$, wenn $x \in S_B$ (gemäß der ursprünglichen Definition von S_B). Gelte umgekehrt $\tau(x) = 1$, so erhalten wir

$$\|x\|_B = \|\tau(x)^B l(x)\|_B = \|1^B l(x)\|_B = \|l(x)\|_B = 1,$$

da $l(x) \in S_B$. Somit folgt aber auch, dass $x \in S_B$ und daher insgesamt die Behauptung. Für (f) liest man schließlich (c) zusammen mit (e). □

Das nächste Ergebnis entspricht im Wesentlichen der Aussage von Lemma 2.1. in [5] und ist ebenso von zentraler Bedeutung, da es einen fundamentalen Zusammenhang zwischen $\tau(\cdot)$ und $\|\cdot\|$ herstellt. Auch hier existieren inzwischen präzisere Abschätzungen, die für unsere Zwecke jedoch zu unhandlich sind, man vergleiche beispielsweise Corollary 3.4 in [2] und Lemma 2.2 in [27].

Proposition 2.2.3
Sei $B \in Q(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle $\delta > 0$ und $s_0 > 0$:

(a) Es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1\|x\|^{1/\lambda_B+\delta} \leq \tau_B(x) \leq C_2\|x\|^{1/\Lambda_B-\delta} \quad \text{für alle } x \text{ mit } \tau_B(x) \leq s_0.$$

(b) Es existieren Konstanten $C_3, C_4 > 0$ mit

$$C_3\|x\|^{1/\Lambda_B-\delta} \leq \tau_B(x) \leq C_4\|x\|^{1/\lambda_B+\delta} \quad \text{für alle } x \text{ mit } \tau_B(x) \geq s_0.$$

Falls B diagonalisierbar ist, so kann wieder $\delta = 0$ gewählt werden.

Beweis. Ohne Einschränkung betrachte man $\|\cdot\|_B$. Dann kann man - unter Berücksichtigung von Proposition 2.1.4 und Korollar 2.1.5 - die Ausführungen zu Lemma 2.1 in [5] (für $0 < \delta < 1/\Lambda_B$) in analoger Weise aufgreifen. Für $\delta \geq 1/\Lambda_B$ gelten die obigen Ungleichungen dann mit dem nachfolgenden Korollar aber insbesondere. □

Vor allem wissen wir also für $B \in Q(\mathbb{R}^n)$, dass $\tau_B(x) \to 0$ (für $x \to 0$) beziehungsweise $\tau_B(x) \to \infty$ (für $\|x\| \to \infty$). Somit kann $\tau_B(\cdot)$ durch $\tau_B(0) := 0$ stetig fortgesetzt werden. Aus Gründen der Übersicht notieren wir noch die folgende Beobachtung.

Korollar 2.2.4
τ_B bildet (von der Null weg) beschränkte Mengen in Γ_n auf (von der Null weg) beschränkte Mengen in $(0, \infty)$ ab. Gleiches gilt entsprechend für das Urbild τ_B^{-1}.

Wie schon in (2.5) stehe dx nachfolgend für das Lebesguemaß respektive für die Integration nach dem Lebesguemaß.

Lemma 2.2.5
Sei $B \in Q(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert ein eindeutiges, endliches Maß $\sigma = \sigma_B$ auf $(S_B, \mathcal{B}(S_B))$, sodass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty s^{\operatorname{tr}(B)-1} \int_{S_B} f(s^B\theta)\, \sigma(d\theta)\, ds.$$

Beweis. Dies ist die Aussage von Proposition 2.3 in [5]. □

Selbstverständlich kann mit Hilfe der vorangegangenen Formel auch getestet werden, ob $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ gilt (für meßbares f). Wie bereits angekündigt, sollen noch zwei spezielle Klassen von Funktionen definiert werden. Dabei wird sich die gerade genannte Integrationsformel vor allem für die Betrachtung homogener Funktionen als nützlich erweisen.

Definition 2.2.6
Sei $B \in Q(\mathbb{R}^n)$. Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ heißt B-*homogen*, falls $\phi(s^B x) = s\,\phi(x)$ für alle $s > 0$ und $x \in \Gamma_n$.

Mit $\tau_B(0) = 0$ handelt es sich bei τ_B gemäß Eigenschaft 2.2.2 (c) also um ein (stetiges) Beispiel für eine B-homogene Funktion. Generell ist eine B-homogene Funktion ϕ wegen

$$\phi(x) = \phi(\tau_B(x)^B l_B(x)) = \tau_B(x)\,\phi(l_B(x)), \quad x \in \Gamma_n$$

bereits vollständig durch ihre Werte auf $S_B \cup \{0\}$ festgelegt. Ist ϕ darüber hinaus zumindest auf S_B stetig sowie strikt positiv (häufig fordern wir dies sogar auf Γ_n), so folgt wegen der Kompaktheit von S_B, dass

$$0 < m_\phi := \min_{\theta \in S_B} \phi(\theta) \le M_\phi := \max_{\theta \in S_B} \phi(\theta) < \infty. \tag{2.6}$$

Die Voraussetzung für (2.6) ist also insbesondere durch die folgenden Funktionen gegeben.

Definition 2.2.7
Seien $\beta > 0$ und $B \in Q(\mathbb{R}^n)$. Eine stetige Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ heißt (β, B)-*zulässig*, falls gilt:

(i) $\phi(x) > 0$ für alle $x \in \Gamma_n$.

(ii) Für $0 < A < B$ beliebig existiert jeweils eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \le \|x\| \le B$ und für alle $y \in \mathbb{R}^n$ die folgende Implikation gilt:

$$\tau_B(y) \le 1 \quad \Rightarrow \quad |\phi(x+y) - \phi(x)| \le C\,\tau_B(y)^\beta. \tag{2.7}$$

Konstruktive Beispiele für die beiden genannten Klassen finden sich in [5], wir werden später darauf zurückkommen. Dabei gilt nach Remark 2.9 in [5] notwendigerweise $\beta < \lambda_B$ für jede (β, B)-zulässige Funktion.

2.3 Unendlich-teilbare Verteilungen

Der Titel dieses Abschnitts zeigt bereits an, dass es sich auch hier weitestgehend um Grundlagen (der Wahrscheinlichkeitstheorie) handelt. Dabei sind die Operator-stabilen Verteilungen, auf die im nächsten Abschnitt sowie dem hinteren Teil dieser Arbeit unser

Hauptaugenmerk gerichtet sein wird, eine Teilklasse der unendlich-teilbaren Verteilungen, welche wiederum geeignete Werkzeuge liefern, allem voran die *Lévy-Khintchine-Darstellung*. Ferner dient dieser allgemeinere Standpunkt der Vorbereitung auf die angestrebte Erweiterung der Ergebnisse aus [35]. Wir folgen dabei im Wesentlichen den Ausführungen in [31] und beschränken uns auf die für uns relevanten Aspekte. Ähnlich umfangreiche Darstellungen findet man diesbezüglich beispielsweise auch in [41].

Vorab sei bemerkt, dass sich die folgenden Definitionen und Aussagen stets äquivalent in die Sprache von Zufallsvektoren, charakteristischen Funktionen und Maßen bzw. Verteilungen übersetzen lassen. Folglich beschränken wir uns stets auf jeweils eine dieser Sichtweisen, wobei wir den $\mathbb{R}^n$ (beziehungsweise kontextbezogen entsprechende Teilmengen) stillschweigend immer mit der Borelschen (Spur-)σ-Algebra versehen und ihre Elemente Borelmengen nennen.

Bekanntlich heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ *unendlich-teilbar*, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $\mu_k \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass

$$\mu_k^k := \mu_k * \cdots * \mu_k = \mu, \tag{2.8}$$

wobei $*$ die Faltung bezeichne und μ_k die (eindeutige) *k-te Wurzel* von μ genannt wird.

Theorem 2.3.1
Sei $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ unendlich-teilbar mit Fouriertransformierter $\widehat{\mu}$. Dann gilt:

(a) $\widehat{\mu}(t) \neq 0 \quad$ für alle $t \in \mathbb{R}^n$.

(b) Es existiert eine eindeutige stetige Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit $\psi(0) = 0$ und

$$\widehat{\mu}(t) = \mathrm{e}^{\psi(t)}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

ψ wird *log-charakteristische Funktion* von μ genannt (und ist im Allgemeinen nicht als komplexe Logarithmusfunktion zu verstehen).

Beweis. Theorem 3.1.2 in [31]. □

Die Aussage in Teil (b) gilt generell für jede Fouriertransformierte $\varphi = \widehat{\mu}$ (eines beschränkten Maßes μ) ohne Nullstellen, insbesondere definieren wir in diesem Fall für $c > 0$ beliebig:

$$\varphi^c(t) := \mathrm{e}^{c \cdot \psi(t)}, \quad t \in \mathbb{R}^n. \tag{2.9}$$

Falls φ jedoch die Fouriertransformierte eines unendlich-teilbaren Maßes μ ist, so erkennt man mit Hilfe des folgenden Theorems unmittelbar, dass φ^c dann die Fouriertransformierte eines ebenfalls unendlich-teilbaren Maßes ist, welches wir mit μ^c bezeichnen. Aus Gründen der Eindeutigkeit entspricht $\mu^{1/k}$ der k-ten Wurzel von μ.

Theorem 2.3.2 (Lévy-Khintchine-Formel) (a) Sei $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ unendlich-teilbar. Dann besitzt μ die log-charakteristische Funktion

$$\psi(t) = \mathrm{i}\langle a, t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, Qt\rangle + \int\limits_{\Gamma_n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle} - 1 - \frac{\mathrm{i}\langle t, x\rangle}{1 + \|x\|^2} \right) \nu(dx), \quad t \in \mathbb{R}^n \tag{2.10}$$

für ein $a \in \mathbb{R}^n$, eine symmetrische und positiv-semidefinite Matrix $Q \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ sowie ein Lévymaß ν auf Γ_n (siehe Bemerkung 2.3.3 (b)).

(b) Die Darstellung in (a) ist eindeutig, d.h. falls ψ eine weitere Darstellung wie in (2.10) für entsprechende a', Q' sowie ν' genießt, so folgen $a = a', Q = Q'$ und $\nu = \nu'$. Wir schreiben: $\mu \sim [a, Q, \nu]$.

(c) Gegeben ein $a \in \mathbb{R}^n$, eine symmetrische und positiv-semidefinite Matrix $Q \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ sowie ein Lévymaß ν auf Γ_n, dann existiert ein unendlich-teilbares $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$, dessen log-charakteristische Funktion durch (2.10) gegeben ist.

Beweis. Theorem 3.1.11 in [31] oder Theorem 8.1 sowie Remark 8.4 in [41]. □

Bemerkung 2.3.3. (a) Der Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ wird *Shift* oder *Punktmaßanteil* genannt, während die quadratische Form $\mathbb{R}^n \ni t \mapsto \langle t, Qt\rangle$ bereits eindeutig durch Q bestimmt ist (man vergleiche Corollary 2.1.9 in [31]). Q bzw. die dadurch erzeugte quadratische Form werden *Gaußanteil* genannt.

(b) Ein (σ-endliches) Maß ν auf Γ_n heißt *Lévymaß*, falls

$$\int\limits_{\Gamma_n} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu(dx) < \infty. \tag{2.11}$$

Gegebenenfalls kann man Lévymaße auch mit jenen Maßen ν auf $\mathbb{R}^n$ identifizieren, für die neben (2.11) gilt, dass $\nu(\{0\}) = 0$.

Die Bestandteile der Lévy-Khintchine-Formel erlauben die nachstehenden Konvergenzkriterien, die wir uns im Anschluss entsprechend zunutze machen werden. Insbesondere möchten wir die mutmaßlich bekannte Aussage von Theorem 2.3.5 formulieren und der Vollständigkeit halber auch beweisen. Vorbereitend:

Lemma 2.3.4
Eine Folge von unendlich-teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}^n$ mit Lévy-Khintchine-Darstellungen $\mu_k \sim [a_k, Q_k, \nu_k]$ konvergiert genau dann schwach gegen ε_0, wenn gilt:

(a') Für alle von der Null weg beschränkten Borelmengen $A \subset \Gamma_n$ gilt: $\nu_k(A) \to 0$.

(b') $a_k \to 0$.

(c_1) $Q_k \to 0$ (in $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$).

(c_2) Für alle $t \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{k \to \infty} \int\limits_{\{x: 0 < \|x\| < \varepsilon\}} \langle t, x \rangle^2 \, \nu_k(dx) = 0.$$

Beweis. Es gilt $\varepsilon_0 \sim [0,0,0]$. Beachtet man nun die dortigen Sprechweisen (insbesondere die so genannte *Konvergenz in* $\mathcal{M}$), so folgt nach Theorem 3.1.16 in [31] (speziell für ε_0 als Grenzmaß): μ_k konvergiert genau dann schwach gegen ε_0, wenn neben (a') und (b') die folgende Aussage für alle $t \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{k \to \infty} \left[\int\limits_{\{x: 0 < \|x\| < \varepsilon\}} \langle t, x \rangle^2 \, \nu_k(dx) + \langle t, Q_k t \rangle \right] = 0. \tag{2.12}$$

Dabei haben wir erneut den eindeutigen Zusammenhang zwischen positiv-semidefiniten quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^n$ und den sie erzeugenden Matrizen dieser Art genutzt. Bleibt zu zeigen, dass (c_1) und (c_2) zusammen äquivalent zu (2.12) sind. Gelte also zunächst (2.12), so definieren wir

$$\xi_k(\varepsilon, t) := \xi_k^{(1)}(\varepsilon, t) + \xi_k^{(2)}(t) := \int\limits_{\{x: 0 < \|x\| < \varepsilon\}} \langle t, x \rangle^2 \, \nu_k(dx) + \langle t, Q_k t \rangle, \quad k \in \mathbb{N},$$

wobei $\xi(\varepsilon, t) \in [0, \infty)$ für $\varepsilon > 0$ und $t \in \mathbb{R}^n$ beliebig, aber fest den nach (2.12) existenten Limes bezeichne. Dann ist die Folge $(\xi_k^{(2)}(t))_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt (andernfalls wäre wegen der Nichtnegativität von $(\xi_k^{(1)}(\varepsilon, t))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\xi_k^{(2)}(t))_{k \in \mathbb{N}}$ insbesondere $(\xi_k(\varepsilon, t))_{k \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt, Widerspruch). Damit besitzt jede Teilfolge von $(\xi_k^{(2)}(t))$ eine konvergente Teilfolge; bezeichne $(\xi_{k_l}^{(2)}(t))_{l \in \mathbb{N}}$ eine solche konvergente Teilfolge. Dann konvergiert auch $(\xi_{k_l}^{(1)}(\varepsilon, t))_{l \in \mathbb{N}}$ entlang dieser Teilfolge und wir erhalten

$$\xi(\varepsilon, t) = \underbrace{\lim_{l \to \infty} \xi_{k_l}^{(1)}(\varepsilon, t)}_{\in [0, \infty)} + \underbrace{\lim_{l \to \infty} \xi_{k_l}^{(2)}(t)}_{\in [0, \infty)}.$$

Mit (2.12) folgt sogar, dass $\xi_{k_l}^{(2)}(t) \to 0$ (für $l \to \infty$), da dieser Limes unabhängig von ε ist. Zusammenfassend besitzt also jede Teilfolge von $(\xi_k^{(2)}(t))$ eine weitere gegen 0 konvergente Teilfolge, was äquivalent dazu ist, dass $(\xi_k^{(2)}(t))$ bereits eine Nullfolge ist. Damit folgt (c_1) nach Corollary 2.1.9 in [31]. Dies zusammen mit (2.12) liefert dann aber unmittelbar auch (c_2). Dass (c_1) und (c_2) umgekehrt (2.12) implizieren, ist offensichtlich. $\square$

Die folgende Charakterisierung beinhaltet darüber hinaus auch ein Argument, auf das wir uns später beziehen werden.

Theorem 2.3.5
Eine Folge von unendlich-teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}^n$ mit Lévy-Khintchine-Darstellungen $\mu_k \sim [a_k, Q_k, \nu_k]$ konvergiert genau dann schwach gegen ε_0, wenn gilt:

(a) $a_k \to 0$,

(b) $Q_k \to 0$ (in $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$),

(c)
$$\int\limits_{\Gamma_n} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx) \to 0. \tag{2.13}$$

Beweis. Vor dem Hintergrund von Lemma 2.3.4 müssen wir lediglich zeigen, dass (2.13) äquivalent zu (a') und (c_2) aus Lemma 2.3.4 ist.
Gelte zunächst (2.13) und sei $A \subset \Gamma_n$ eine von der Null weg beschränkte Borelmenge, dann existiert insbesondere ein $0 < \delta < 1$ mit $A \subset \{x : \|x\| \geq \delta\}$ und wir erhalten, dass

$$\begin{aligned}
\nu_k(A) &\leq \nu_k(\{x : \|x\| \geq \delta\}) \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{\{x:\delta\leq\|x\|\leq 1\}} \|x\|^2\, \nu_k(dx) + \int\limits_{\{x:\|x\|>1\}} 1\, \nu_k(dx) \\
&\leq \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{\{x:0<\|x\|\leq 1\}} \|x\|^2\, \nu_k(dx) + \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{\{x:\|x\|>1\}} 1\, \nu_k(dx) \\
&= \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{\Gamma_n} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx),
\end{aligned}$$

d.h. (a') gilt bereits nach (2.13). Andererseits folgt mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für alle $\varepsilon > 0$ und $t \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \langle t, x\rangle^2\, \nu_k(dx) \\
&\leq \|t\|^2 \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \|x\|^2\, \nu_k(dx) \\
&\leq \|t\|^2 \left[\int\limits_{\{x:0<\|x\|\leq 1\}} \|x\|^2\, \nu_k(dx) + \varepsilon^2 \int\limits_{\{x:1<\|x\|<\varepsilon\}} 1\, \nu_k(dx) \right] \\
&\leq \|t\|^2 (1+\varepsilon^2) \int\limits_{\Gamma_n} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx).
\end{aligned}$$

Der letztgenannte Ausdruck konvergiert nun nach (2.13) wieder gegen Null (unabhängig von ε) für $k \to \infty$, somit folgt insbesondere (c_2).
Umgekehrt erkennt man sofort, dass mit (a') für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\int\limits_{\{x:\|x\|\geq\varepsilon\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx) \leq \int\limits_{\{x:\|x\|\geq\varepsilon\}} 1\, \nu_k(dx) = \nu_k(\{x : \|x\| \geq \varepsilon\}) \to 0,$$

d.h.

$$\int\limits_{\{x:\|x\|\geq\varepsilon\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx) \to 0.$$

für alle $\varepsilon > 0$. Wir zeigen nun noch, dass

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \|x\|^2\, \nu_k(dx) = 0. \tag{2.14}$$

Denn dann würde nach endlicher Anwendung der Subadditivität des Limessuperiors sowie der Tatsache, dass wir ohne Einschränkung $\varepsilon \leq 1$ unterstellen können, insgesamt folgen:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\Gamma_n} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx) \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \left[\ \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx) + \int\limits_{\{x:\|x\|\geq\varepsilon\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx)\right] \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \|x\|^2\, \nu_k(dx) \\
&\qquad\qquad + \limsup_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:\|x\|\geq\varepsilon\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu_k(dx) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d.h. (2.13) gilt, da die betrachtete Folge nichtnegativ ist. Also bleibt mit Hilfe von (c_2) zu zeigen, dass (2.14) gilt. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst für alle $a = (a_1, ..., a_n) \in \{-1, 1\}^n =: J$ die Mengen

$$M_a := \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i x_i > 0 \text{ oder } a_i \mathbb{1}_{\{0\}}(x_i) = 1 \text{ für alle } i = 1, ..., n\}.$$

Dann ist der $\mathbb{R}^n$ als endliche sowie disjunkte Vereinigung der $M_a, a \in J$ darstellbar und für $a \in J$ beliebig, aber fest folgt:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \|x\|^2 \mathbb{1}_{M_a}\, \nu_k(dx)$$

$$
\begin{aligned}
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} (|x_1|^2 + ... + |x_d|^2)\mathbb{1}_{M_a}\, \nu_k(dx) \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} (|x_1| + ... + |x_d|)^2\mathbb{1}_{M_a}\, \nu_k(dx) \\
&= \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \langle a, x\rangle^2\mathbb{1}_{M_a}\, \nu_k(dx) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \langle a, x\rangle^2\, \nu_k(dx) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

indem man (c_2) speziell für $t = a$ liest, d.h. der usprüngliche Ausdruck hat ebenfalls den Wert Null. Die folgende Ungleichung (vergleiche oben) liefert nach dem zuvor Gezeigten also (2.14):

$$
\limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \|x\|^2\, \nu_k(dx) \leq \sum_{a\in J} \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:0<\|x\|<\varepsilon\}} \|x\|^2\mathbb{1}_{M_a}\, \nu_k(dx).
$$

$\square$

2.4 Operator-stabile Verteilungen und weitere Spezialfälle

Wie angekündigt also nun jene Verteilungen, die als direkte Verallgemeinerung der α-stabilen Verteilungen verstanden werden können, wobei die Begrifflichkeiten für $n = 1$ zusammenfallen; die genaueren Zusammenhänge sollen gegen Ende dieses Kapitels in aller Kürze beleuchtet werden. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, Operator-stabile Verteilungen zu definieren. Jene in [31] beispielsweise geht jedoch a priori davon aus, dass die betrachtete Verteilung hinreichend *interessant* ist. Das bedeutet:

Definition 2.4.1
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ heißt *voll*, falls keine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(H) = 1$ existiert. Entsprechend nennen wir einen $\mathbb{R}^n$-wertigen Zufallsvektor voll, falls dies auf die zugehörige Verteilung zutrifft.

Wir möchten den zentralen Begriff dieses Abschnitts zunächst ohne diese Einschränkung einführen, ehe wir im Anschluss wieder die Verbindung zu den Resultaten in [31] herstellen (vergleiche auch [19]). Dabei betrachten wir Zufallsvektoren auf einem nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum, denn die folgenden Aussagen sind nur von den jeweiligen Verteilungen abhängig.

Definition 2.4.2
Ein $\mathbb{R}^n$-wertiger Zufallsvektor X (respektive die zugehörige Verteilung $\mu := \mathcal{L}(X)$) heißt *Operator-stabil*, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $A_k \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ und ein $a_k \in \mathbb{R}^n$ existieren, sodass

$$A_k(X_1 + ... + X_k) + a_k \stackrel{d}{=} X, \tag{2.15}$$

wobei $(X_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter (kurz: *i.i.d.*) Zufallsvektoren mit $\mathcal{L}(X_1) = \mu$ sei. Falls $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so nennen wir X *strikt* Operator-stabil.

Der Vorteil dieser Definition ist unter anderen, dass man die Klasse der Operator-stabilen Verteilungen anhand von (2.8) unmittelbar als Teilmenge der unendlich-teilbaren Verteilungen erkennt. Genauer sind die k-ten Wurzeln einer Operator-stabilen Verteilung μ durch $\mu_k := \mathcal{L}(A_kX + a_k/k)$ gegeben. Außerdem ist (2.15) natürlich äquivalent zu der Forderung

$$X_1 + ... + X_k \stackrel{d}{=} \widetilde{A}_kX + \widetilde{a}_k \tag{2.16}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und geeignete $\widetilde{A}_k \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ sowie $\widetilde{a}_k \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2.4.3
$Y, Y_1, Y_2, ...$ sei eine Folge von i.i.d. Zufallsvektoren in $\mathbb{R}^n$ und X ein weiterer $\mathbb{R}^n$-wertiger Zufallsvektor. Wir sagen, dass Y im *verallgemeinerten Anziehungsbereich von* X liegt, falls eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ und eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ existieren, sodass

$$A_k(Y_1 + ... + Y_k) + a_k \Rightarrow X. \tag{2.17}$$

Schreibweise: $Y \in \mathrm{GDOA}(X)$.

Folgendes Theorem zeigt somit, dass unsere Definition - zumindest im Falle voller Verteilungen - äquivalent zu der in [31] ist.

Theorem 2.4.4
Sei X ein voller, $\mathbb{R}^n$-wertiger Zufallsvektor. Es gilt: X ist Operator-stabil genau dann, wenn $\mathrm{GDOA}(X) \neq \emptyset$.

Beweis. Sei X (mit Verteilung $\mu := \mathcal{L}(X)$) zunächst Operator-stabil, d.h. (2.15) gelte entsprechend. Dann ist für diese Folge von Operatoren (A_k) und Vektoren (a_k) auch insbesondere (2.17) erfüllt, indem man eine Folge von i.i.d. Zufallsvektoren $Y, Y_1, Y_2, ...$ mit $\mathcal{L}(Y) = \mu$ betrachtet, d.h. $X \in \mathrm{GDOA}(X)$, insbesondere: $\mathrm{GDOA}(X) \neq \emptyset$.
Gelte umgekehrt $\mathrm{GDOA}(X) \neq \emptyset$, so ist X zusammen mit der vorausgesetzten Vollheit gerade Operator-stabil im Sinne von Definition 3.3.24 in [31]. Damit greift für einen geeigneten Operator $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ und eine geeignete Folge $(a_s)_{s>0} \subset \mathbb{R}^n$ die Aussage des nachfolgenden Theorems. Insbesondere ist (2.16) dann auf Basis von (2.18) mit $A_k := k^B$ erfüllt, d.h. X ist auch Operator-stabil gemäß unserer Definition. $\square$

Das folgende Ergebnis stellt für uns die wichtigste Charakterisierung dieses Abschnitts dar, wobei wir nun stellvertretend wieder die Sichtweise von Maßen einnehmen.

Theorem 2.4.5
Ein volles Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann Operator-stabil, wenn es unendlich-teilbar ist und wenn ein Operator $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ sowie geeignete Vektoren $(a_s)_{s>0} \subset \mathbb{R}^n$ existieren, sodass für alle $s > 0$ gilt:

$$\mu^s = (s^B \mu) * \varepsilon_{a_s}. \tag{2.18}$$

Beweis. Das ist nach dem zuvor Gezeigten die Aussage von Theorem 7.2.1 in [31]. □

Bemerkung 2.4.6. (a) Solch ein Operator B ist im Allgemeinen nicht eindeutig (man vergleiche Theorem 7.2.11 in [31]) und wird *Exponent* von μ genannt. Wir definieren allgemein für eine volle, Operator-stabile Verteilung $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ (beziehungsweise für X mit $\mathcal{L}(X) = \mu$):

$$\mathcal{E}(\mu) := \mathcal{E}(X) := \{B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n) : B \text{ ist Exponent von } \mu\}.$$

Für alle $B \in \mathcal{E}(\mu)$ gilt jedoch $\lambda_B \geq \frac{1}{2}$ und $\lambda_B > \frac{1}{2}$, wenn μ keinen Gaußanteil besitzt. In jedem Falle sind die Eigenwerte mit Realteil $\frac{1}{2}$ einfache Nullstellen des Minimalpolynoms von E.
Weiter besagt Theorem 7.2.1 in [31], dass μ in eindeutiger Weise als Faltungsprodukt $\mu = \mu_1 * \mu_2$ geschrieben werden kann, wobei μ_i ein auf V_i konzentriertes Wahrscheinlichkeitsmaß und V_i ein B-invarianter Unterraum $(i = 1, 2)$ mit $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ ist. Dabei ist μ_1 ein volles Operator-stabiles Maß (auf V_1) ohne Gaußanteil und μ_2 eine volle Normalverteilung (auf V_2). Schließlich enthält das Spektrum von $B|_{V_1}$ nur Eigenwerte mit Realteil größer $\frac{1}{2}$ und das von $B|_{V_2}$ entsprechend nur Eigenwerte mit Realteil gleich $\frac{1}{2}$.

(b) Nach Remark 7.2.10 in [31] besitzen alle Exponenten von X (voll) sogar das gleiche reelle Spektrum und für $B \in \mathcal{E}(X)$ beliebig gilt:

$$\mathbb{E}(\|X\|^\rho) < \infty \quad \text{für alle } 0 \leq \rho < 1/\Lambda_B.$$

Falls $\Lambda_B > 1/2$ (vergleiche Teil (a)), so gilt zusätzlich

$$\mathbb{E}(\|X\|^\rho) = \infty \quad \text{für alle } \rho \geq 1/\Lambda_B.$$

(c) Gelegentlich rechnen wir (2.15) nur für Operatoren der Form $A_k = k^B$ nach und nennen die zugrunde liegende Verteilung dann (strikt) Operator-stabil mit Exponenten B; selbst dann, wenn die Frage der Vollheit von X offen ist. Falls X jedoch voll ist, so ist mit $\mu := \mathcal{L}(X)$ in jedem Falle klar (siehe Lemma 2.2 in [24]): μ ist genau dann strikt Operator-stabil, wenn (2.18) ohne *Shifts* erfüllt ist, d.h. wenn $a_s = 0$ gewählt werden kann (für alle $s > 0$).

Mit der Eindeutigkeit des Lévy-Khintchine-Tripels und Proposition 4.3.2 in [19] erkennt man, dass (2.18), wobei $\mu \sim [\gamma, Q, \nu]$, stets

$$s \cdot Q = s^B Q s^{B^*} \quad \text{und} \quad s \cdot \nu = (s^B \nu) \tag{2.19}$$

für alle $s > 0$ impliziert; insbesondere erbt $(s^B \nu)$ die Lévymaßeigenschaft von ν. Umgekehrt ist mit (2.19) auch stets (2.18) für geeignete a_s erfüllt. Diese Shifts sind dann aber in jedem Falle eindeutig, wie der Beweis von Proposition 4.3.2 in [19] zeigt, nämlich:

$$a_s = (s^{I_n} - s^B)\gamma - \int\limits_{\Gamma_n} \left(\frac{s^B x}{1 + \|s^B x\|^2} - \frac{s^B x}{1 + \|x\|^2} \right) \nu(dx), \quad s > 0. \tag{2.20}$$

Bemerkung 2.4.7. Falls $1 \notin \sigma(B)$ für ein volles, Operator-stabiles Maß μ mit $B \in \mathcal{E}(\mu)$, so existiert nach Corollary 4.9.3 in [19] immer ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $\mu' := \mu * \varepsilon_{x_0}$ *strikt* Operator-stabil ist (ebenfalls mit $B \in \mathcal{E}(\mu')$).

Da die Exponentialfunktion im Komplexen prinzipiell nicht injektiv ist, lohnt es sich noch, die folgende Beobachtung zu notieren.

Korollar 2.4.8
$\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ erfülle (2.18) für ein $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$ sowie eine Familie von Shifts $(a_s)_{s>0}$. Ferner bezeichne ψ die log-charakteristische Funktion von μ. Dann gilt für alle $s > 0$ und $t \in \mathbb{R}^n$:

$$s \cdot \psi(t) = \psi(s^{B^*} t) + \mathrm{i}\langle a_s, t \rangle.$$

Beweis. Rechnet man mit dem gleichen Eindeutigkeitsargument wie zuvor beziehungsweise dem Beweis zu Proposition 4.3.2 in [19] unmittelbar nach, man vergleiche (2.9). □

Wir möchten einerseits noch kurz auf den wichtigen Spezialfall der stabilen Verteilungen eingehen. Andererseits ergeben sich Vorteile, wenn man strikte oder gar symmetrische Operator-stabile Verteilungen betrachtet. Vor dem Hintergrund von Korollar 2.4.8 werden sich die strikt Operator-stabilen Verteilungen für uns sogar als ausreichend praktikabel erweisen. Genauer ist ψ dann eine B^*-homogene Funktion. Dass dies in der Regel keine nennenswerte Einschränkung darstellt, zeigte bereits Bemerkung 2.4.7, soll aber auch mit der folgenden Aussage unterstrichen werden. In diesem Zusammenhang erinnern wir daran, dass ein Maß μ auf dem $\mathbb{R}^n$ *symmetrisch* genannt wird, falls $\mu(A) = \mu(-A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Eigenschaft 2.4.9
Falls $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ Operator-stabil und symmetrisch ist, so ist μ auch strikt Operator-stabil.

Beweis. Bekanntlich ist $\mu \sim [\gamma, Q, \nu]$ genau dann symmetrisch, wenn ν symmetrisch ist und wenn $\gamma = 0$ gilt (erneutes Eindeutigkeitsargument). Falls nun (2.15) also für alle

$k \in \mathbb{N}$ mit einem $A_k \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ und einem $a_k \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist, so folgert man wie im Kontext von (2.20), dass

$$a_k = (k^I - A_k)\gamma - \int\limits_{\Gamma_n} \left(\frac{A_k x}{1 + \|A_k x\|^2} - \frac{A_k x}{1 + \|x\|^2} \right) \nu(dx), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Das liefert wegen $\gamma = 0$ sowie der Symmetrie von ν die Behauptung, da der zuvor genannte Integrand ungerade ist (für alle $k \in \mathbb{N}$). □

Die Umkehrung der obigen Aussage ist im Allgemeinen falsch, wie bereits die Einpunktmaße zeigen. Wir möchten nun noch eine konkrete Darstellung für das Lévymaß Operator-stabiler Verteilungen angeben, die einen klaren Bezug zu *dem* entsprechenden Exponenten herstellt. Das folgende Theorem ist also mit (2.19) zu lesen, jedoch nicht mit Lemma 2.2.5 zu vermischen.

Theorem 2.4.10
Seien ν ein Lévymaß auf Γ_n und $B \in Q(\mathbb{R}^n)$ derart, dass für alle $s > 0$ gilt: $s \cdot \nu = (s^B \nu)$. Dann existiert ein endliches Maß Λ auf S_B (vergleiche Lemma und Definition 2.2.1), sodass für alle Borelmengen $A \subset \Gamma_n$ gilt:

$$\nu(A) = \int\limits_{S_B} \int\limits_0^\infty \mathbb{1}_A(s^B \theta) \frac{1}{s^2} \, ds \, \Lambda(d\theta),$$

wobei Λ die Darstellung

$$\Lambda(D) = \nu(\{s^B \theta : \theta \in D, s > 1\}), \quad D \in \mathcal{B}(S_B)$$

genießt. Λ wird *Spektralmaß* von ν genannt.

Beweis. Nach Definition von $\|\cdot\|_B$ und $Q(\mathbb{R}^n)$ ist dies die Aussage von Theorem 6.1.7 in [31], insbesondere gehören Lévymaße zu der dort definierten Klasse $\mathcal{M}$. □

Wir möchten die gerade zitierte Darstellung natürlich auch konkret für die Integration nach solchen Maßen nutzen, was uns zu so genannten *Mischungsintegralen* führt. Durch Betrachtung einfacher Funktionen und Anwendung des Satzes von Beppo-Levi überzeuge man sich daher von der folgenden Aussage.

Bemerkung 2.4.11. In der Situation von Theorem 2.4.10 gilt für alle meßbaren Abbildungen $f : \Gamma_n \to [0, \infty)$:

$$\int\limits_{\Gamma_n} f(x) \, \nu(dx) = \int\limits_{S_B} \int\limits_0^\infty f(s^B \theta) \frac{1}{s^2} \, ds \, \Lambda(d\theta).$$

Natürlich kann man ν auch wieder als trivial fortgesetztes Maß auf $\mathbb{R}^n$ interpretieren und entsprechend Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ betrachten. Schließlich sind wir an konkreten Beispielen Operator-stabiler Verteilungen interessiert, genauer an einer Art Umkehrung der Aussage in Bemerkung 2.4.6 (a). Aus Gründen der Einfachheit verzichten wir hier auf Beispiele mit Gaußanteil, übernehmen jedoch die Konstruktionsidee aus Theorem 2.4.10. Über den Fall $\lambda_B = \frac{1}{2}$ wird darüber hinaus in Theorem 4.6.12 in [19] eine entsprechende Aussage getroffen, insbesondere erhebt das folgende Beispiel keinen Anspruch auf Exklusivität.

Beispiel 2.4.12
Sei $B \in Q(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda_B > \frac{1}{2}$ beliebig. Dann existiert ein Operator-stabiles Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $B \in \mathcal{E}(\mu)$.

Beweis. Sei also solch ein B gegeben, dann wähle man ein beliebiges, endliches Maß Λ auf S_B und definiere damit ein weiteres Maß ν (auf Γ_n) durch

$$\nu(A) := \int\limits_{S_B} \int\limits_0^\infty \mathbb{1}_A(s^B\theta) \frac{1}{s^2}\, ds\, \Lambda(d\theta), \quad A \in \mathcal{B}(\Gamma_n).$$

Die Maßeigenschaft ist klar, bleibt zu zeigen, dass ν sogar ein Lévymaß ist. Dazu fixieren wir ein $0 < \delta < \frac{1}{2}$ und machen uns klar, dass einerseits ein $C_1 > 0$ existiert, sodass für alle $0 < s \leq 1$ und $\theta \in S_B$ gilt:

$$\|s^B\theta\| \leq C_1 s^{\lambda_B - \delta}.$$

Andererseits existiert ein $C_2 > 0$, sodass für alle $s \geq 1$ und $\theta \in S_B$ gilt:

$$\|s^B\theta\| \geq C_2 s^{\lambda_B - \delta}.$$

Neben $\|\theta\|_B = 1$ folgen beide Aussagen nach Proposition 2.1.4, wobei man für die zweite Aussage mit Hilfe von Proposition 2.1.3 (b) in [31] schreibt: $\|s^B\theta\| \geq \|\theta\|/\|(s^{-1})^B\|$. Wegen $\lambda_B - \delta > 0$ existieren also insbesondere ein $0 < s_1 \leq 1$ und ein $s_2 > 1$, sodass für alle $\theta \in S_B$ gilt:

$$\|s^B\theta\| < 1, \quad \text{falls } 0 < s \leq s_1$$

beziehungsweise

$$\|s^B\theta\| > 1, \quad \text{falls } s \geq s_2.$$

Damit rechnet man schließlich unter Einbeziehung von Bemerkung 2.4.11 nach:

$$\int\limits_{\Gamma_n} \min\{1, \|x\|^2\}\, \nu(dx)$$

$$= \int\limits_{S_B} \int\limits_0^\infty \|s^B\theta\|^2 \mathbb{1}_{\{x:0<\|x\|\leq 1\}}(s^B\theta) \frac{1}{s^2}\, ds\, \Lambda(d\theta) + \int\limits_{S_B} \int\limits_0^\infty \mathbb{1}_{\{x:\|x\|>1\}}(s^B\theta) \frac{1}{s^2}\, ds\, \Lambda(d\theta)$$

$$\leq \int_{S_B} \int_0^\infty \|s^B\theta\|^2 \mathbb{1}_{(0,s_2)}(s) \frac{1}{s^2}\, ds\, \Lambda(d\theta) + \int_{S_B} \int_0^\infty \mathbb{1}_{(s_1,\infty)}(s) \frac{1}{s^2}\, ds\, \Lambda(d\theta).$$

Wähle nun ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\lambda_B - \varepsilon > \frac{1}{2}$. Dann schätzen wir den Normausdruck wieder mit Proposition 2.1.4 und einer geeigneten Konstante $C > 0$ ab, wobei ohne Einschränkung $\|\theta\| \leq 1$ für alle $\theta \in S_B$ gelte.

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{S_B} \int_0^\infty s^{2(\lambda_B-\varepsilon)} \mathbb{1}_{(0,s_2)}(s) \frac{1}{s^2}\, ds\, \Lambda(d\theta) + \int_{S_B} s_1^{-1}\, \Lambda(d\theta) \\
&= \Lambda(S_B) \left[C \int_0^{s_2} s^{2(\lambda_B-\varepsilon-1)}\, ds + s_1^{-1} \right] \\
&< \infty
\end{aligned}$$

nach Wahl von ε und da Λ endlich ist. ν ist also ein Lévymaß, nach Theorem 2.3.2 (c) existiert folglich ein $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu \sim [0, 0, \nu]$. Weiter rechnet man mittels Substitution (beachte $t^B\theta \in s^{-B}(A) \Leftrightarrow (st)^B \in A$) für eine beliebige Borelmenge $A \subset \Gamma_n$ sowie $s > 0$ nach:

$$\begin{aligned}
(s^B\nu)(A) &= \nu(s^{-B}(A)) \\
&= \int_{S_B} \int_0^\infty \mathbb{1}_{s^{-B}(A)}(t^B\theta) \frac{1}{t^2}\, dt\, \Lambda(d\theta) \\
&= \int_{S_B} \int_0^\infty \mathbb{1}_A(z^B\theta) \frac{1}{(z/s)^2} s^{-1}\, dz\, \Lambda(d\theta) \\
&= s \int_{S_B} \int_0^\infty \mathbb{1}_A(z^B\theta) \frac{1}{z^2}\, dz\, \Lambda(d\theta) \\
&= s \cdot \nu(A).
\end{aligned}$$

μ erfüllt wegen des fehlenden Gaußmaßanteils also insgesamt (2.19), d.h. μ ist Operator-stabil mit B als Exponenten und die Shifts berechnen sich entsprechend über (2.20). □

Bemerkung 2.4.13. (a) Meistens ist man wieder an vollen Beispielen interessiert. Dies ist nach Proposition 3.1.20 in [31] für μ genau dann der Fall, wenn das zugehörige Lévymaß ν auf keiner Hyperebene von $\mathbb{R}^n$ getragen ist. Man kann zeigen, dass dies im Falle $< \text{supp}(\Lambda) >= \mathbb{R}^n$ sichergestellt ist. Eine mögliche Wahl für Λ wäre beispielsweise die Gleichverteilung auf S_B.

(b) Falls Λ symmetrisch ist, so auch ν, was wegen dem fehlenden Punktmaßanteil impliziert, dass μ dann sogar symmetrisch (also insbesondere strikt) Operator-stabil ist.

Wie zuvor nähern wir uns dem Spezialfall der stabilen Verteilungen wieder über eine so genannte *Stabilitätsgleichung*:

Definition 2.4.14
Ein $\mathbb{R}^n$-wertiger Zufallsvektor X (beziehungsweise die zugehörige Verteilung $\mu := \mathcal{L}(X)$) heißt *stabil*, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $c_k \neq 0$ und ein $d_k \in \mathbb{R}^n$ existieren, sodass

$$c_k(X_1 + ... + X_k) + d_k \stackrel{d}{=} X, \tag{2.21}$$

wobei $(X_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvektoren mit $\mathcal{L}(X_1) = \mu$ sei. Falls $d_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so nennen wir X *strikt stabil*.

Es gelten nun analoge Aussagen und Charakterisierungen wie im Falle Operator-stabiler Verteilungen. Wir verzichten jedoch auf die zugehörigen Beweise, zumal es sich dabei im Wesentlichen um eine Abschrift der vorherigen handelt, man vergleiche [31].

Bemerkung 2.4.15. Die stabilen Verteilungen sind also eine Teilmenge der Operator-stabilen (man betrachtet konkret Operatoren der Form $A_k = c_k I_n$ in (2.15)), wobei die Begrifflichkeiten für $n = 1$ zusammenfallen und sich Gauß- und Lévymaßanteil dann vor dem Hintergrund von Bemerkung 2.4.6 gegenseitig ausschließen. Wenig überraschend ergeben sich daher die folgenden Beobachtungen:

(a) Man sagt, der Zufallsvektor Y liegt im *Anziehungsbereich* des Zufallsvektors X, wenn (2.17) für Operatoren der Form $A_k = c_k I_n$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Schreibweise: $Y \in \mathrm{DOA}(X)$. Und es gilt: Ein voller Zufallsvektor X ist genau dann stabil, wenn $\mathrm{DOA}(X) \neq \emptyset$.

(b) Weiterhin ist eine volle Verteilung $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$ genau dann stabil, wenn sie Operator-stabil mit $B = a\, I_n \in \mathcal{E}(\mu)$ ist, wobei $a \in \mathbb{R}$. Mit Hinblick auf Bemerkung 2.4.6 gilt dann notwendigerweise $a \geq 1/2$ und $\alpha := 1/a \in (0, 2]$ wird *Index* von μ genannt. Sprechweise: μ ist *α-stabil*.

Neben der oben genannten Quelle ist im Zusammenhang von stabilen Verteilungen insbesondere auch [40] als Referenz zu nennen. Zum Abschluss dieses Kapitels greifen wir noch eine gängige Konvention auf, die für $n = 1$ ebenfalls in [40] zu finden ist.

Definition 2.4.16
Wir nennen einen $\mathbb{C}^n$-wertigen Zufallsvektor Z unendlich-teilbar (Operator-stabil, stabil, voll et cetera), wenn dies entsprechend auf den $\mathbb{R}^{2n}$-wertigen Zufallsvektor $(\mathrm{Re}(Z), \mathrm{Im}(Z))$ zutrifft.
Ganz analog führt man die Unabhängigkeit von komplexwertigen Zufallsvektoren auf die Unabhängigkeit von reellwertigen Zufallsvektoren zurück.

KAPITEL 3

Independently scattered random measures

Fernziel ist die Konstruktion von Zufallsvektoren über stochastische Integrale; die Rolle des *Integrators* wird dabei von so genannten *independently scattered random measures* übernommen, die daher nun in möglichst allgemeiner Form untersucht werden sollen. Diese Zufallsmaße zeichnen sich durch ihre hohe Flexibilität hinsichtlich des zugrunde liegenden Definitionsbereichs aus, sodass wir uns an dem abstrakten Zugang aus [35] orientiert haben. Andere Beiträge zur stochastischen Integration nutzen alternativ stochastische Prozesse auf $\mathbb{R}_+$ als Integrator, zum Beispiel solche mit unabhängigen Zuwächsen. Dieser Zugang ist für unsere Zwecke und mit Hinblick auf Kapitel 5 jedoch eher ungeeignet.

3.1 δ-Ringe und Mengenfunktionen

Wir beginnen mit der Einführung von δ-Ringen, die sich im weiteren Verlauf als passende Struktur erweisen werden.

Definition 3.1.1
Sei S eine nicht-leere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathrm{Pot}(S)$ heißt *δ-Ring* (auf S), falls gilt:

(δ_0) $\emptyset \in \mathcal{S}$,

(δ_1) $A, B \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{S}$,

(δ_2) $A, B \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad A \setminus B \in \mathcal{S}$,

(δ_3) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$,

(δ_4) $\exists\, (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S$.

Gegeben $(\delta_0) - (\delta_3)$, so ist (δ_4) offensichtlich äquivalent zu der Existenz einer aufsteigenden oder auch paarweise disjunkten Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S$.

Lemma 3.1.2
Sei $\mathcal{S}$ ein δ-Ring auf S. Dann gilt:

$$\forall A \in \mathcal{S} \quad \forall M \in \sigma(\mathcal{S}) : \quad A \cap M \in \mathcal{S}.$$

Beweis. Indem wir $\mathcal{D} := \{M \in \sigma(\mathcal{S}) \,|\, \forall A \in \mathcal{S} : A \cap M \in \mathcal{S}\}$ definieren, genügt es zu zeigen, dass $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}$. Nun ist $\mathcal{S}$ nach (δ_3) insbesondere schnittstabil ist, d.h. wir erhalten $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Da $\sigma(\mathcal{S})$ zugleich die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{S}$ enthält, genügt es schließlich zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra auf S ist.
Wegen $A \cap S = A$ für alle $A \in \mathcal{S}$, ist $S \in \mathcal{D}$ offensichtlich. Dass $\mathcal{D}$ hingegen abgeschlossen unter Komplementbilldung (bezüglich S) ist, sieht man wie folgt ein: Sei $M \in \mathcal{D}$ beliebig, d.h. $A \cap M \in \mathcal{S}$ für alle $A \in \mathcal{S}$. Dann folgt nach (δ_2) und wegen der Schnittstabilität von $\mathcal{S}$ auch, dass

$$A \cap M^c = A \setminus M = A \setminus (A \cap M) \in \mathcal{S},$$

ebenfalls für alle $A \in \mathcal{S}$, d.h. $M^c \in \mathcal{D}$. Sei schließlich $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ beliebig, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad A \cap M_n \in \mathcal{S}.$$

Dann folgt für beliebiges $A \in \mathcal{S}$:

$$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A \setminus M_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A \setminus (A \cap M_n) \in \mathcal{S}$$

wie zuvor und unter Zuhilfenahme von (δ_3). Damit haben wir gezeigt, dass $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)^c$ in $\mathcal{D}$ liegt, dank der bereits gezeigten Abgeschlossenheit von $\mathcal{D}$ unter Komplementbildung folgt somit aber die Behauptung. $\square$

Das folgende Beispiel stellt eine gute Verbindung zu dem gerade formulierten Lemma her. Selbstverständlich ist jede σ-Algebra ein δ-Ring und jeder δ-Ring ein Ring (d.h. $(\delta_0) - (\delta_2)$ sind erfüllt). Insbesondere sei daran erinnert, dass Ringe bereits schnittstabil sind.

Beispiel 3.1.3
Sei (S, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Dann definiert

$$\mathcal{S}_\mu := \{A \in \Sigma \,|\, \mu(A) < \infty\}$$

einen δ-Ring (auf S). Weiter erzeugt $\mathcal{S}_\mu$ die σ-Algebra Σ, d.h. $\sigma(\mathcal{S}_\mu) = \Sigma$.

Beweis. (δ_4) ergibt sich gerade aus der geforderten σ-Endlichkeit von μ, während die anderen Eigenschaften unmittelbar aus der Monotonie und Subadditivität von μ sowie

$\mu(\emptyset) = 0$ folgen, d.h. $\mathcal{S}_\mu$ ist ein δ-Ring. Für die Zusatzaussage ist ähnlich wie zuvor nur $\Sigma \subset \sigma(\mathcal{S}_\mu)$ zu zeigen. Seien also $A \in \Sigma$ beliebig, aber fest und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\mu$ eine Folge wie in (δ_4). Dann können wir schreiben:

$$A = A \cap S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap S_n$$

mit $\mu(A \cap S_n) \leq \mu(S_n) < \infty$, da $S_n \in \mathcal{S}_\mu$. Insbesondere folgt $A \cap S_n \in \mathcal{S}_\mu \subset \sigma(\mathcal{S}_\mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Und da $\sigma(\mathcal{S}_\mu)$ als σ-Algebra abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist, erhalten wir schließlich $A \in \sigma(\mathcal{S}_\mu)$. □

Das vorangegangene Beispiel unterstreicht, dass δ-Ringe im Allgemeinen nicht abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen sind. Die folgende Eigenschaft wird sich für uns trotz ihrer Einfachheit jedoch als hilfreicher Ausweg erweisen.

Lemma 3.1.4
Sei $\mathcal{S}$ ein δ-Ring und $A \in \mathcal{S}$ beliebig. Dann gilt für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $A_n \subset A$ ($n \in \mathbb{N}$), dass $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

Beweis. Unter den genannten Voraussetzungen gilt offensichtlich:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \setminus \left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Wegen (δ_2) bleibt also zu zeigen, dass der hintere Ausdruck zu $\mathcal{S}$ gehört. Dazu schreiben wir

$$A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_n)$$

und nutzen (δ_2) sowie (δ_3). □

Wir möchten nun vektorwertige Abbildungen auf solchen Mengensystemen betrachten und führen zu diesem Zweck die nachstehenden Definitionen ein.

Definition 3.1.5
Sei $\mathcal{S}$ ein Ring (auf einer Menge $S \neq \emptyset$), V ein normierter Vektorraum und $T : \mathcal{S} \to V$ eine beliebige Abbildung (auch *Mengenfunktion* genannt).

(a) T heißt *additiv* oder *vektorieller Inhalt*, falls gilt:

   (i) $T(\emptyset) = 0$,

   (ii) $T(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = \sum_{n=1}^{k} T(A_n)$ für alle $A_1, ..., A_k \in \mathcal{S}$ disjunkt und $k \in \mathbb{N}$.

(b) T heißt *σ-additiv* oder *vektorielles Prämaß*, falls gilt:

(i) $T(\emptyset) = 0$,

(ii) $T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T(A_n)$ für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ disjunkt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

Ist $\mathcal{S}$ darüber hinaus eine σ-Algebra, so nennen wir T ein *vektorielles Maß*.

Bemerkung 3.1.6. (a) Ist V endlich-dimensional und $T : \mathcal{S} \to V$ (σ-)additiv, so ist offensichtlich auch jede der Komponentenfunktionen (σ-)additiv.

(b) Die Konvergenz der Reihe in (b)(ii) ist - bezüglich der Vektorraumnorm - absolut zu verstehen. V soll dabei in speziell gekennzeichneten Situationen auch $[0, \infty]$ entsprechen dürfen (man vergleiche den nächsten Abschnitt). Dann handelt es sich zwar um keinen (normierten) Vektorraum mehr, die absolute Konvergenz ist jedoch weiterhin erklärt (zumindest als Element in $[0, \infty]$).

Bei dem folgenden handelt es sich gewissermaßen um ein Standardresultat aus der klassischen Maßtheorie.

Proposition 3.1.7
Sei $\mathcal{S}$ ein Ring, V ein normierter Vektorraum und $T : \mathcal{S} \to V$ ein vektorieller Inhalt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) T ist ein vektorielles Prämaß.

(b) T ist *stetig von unten*, d.h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $A_n \uparrow A$ und $A \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} T(A_n) = T(A).$$

(c) T ist *stetig von oben*, d.h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $A_n \downarrow A$ und $A \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} T(A_n) = T(A).$$

(d) T ist *$\emptyset$-stetig*, d.h. (c) gilt entsprechend für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $A_n \downarrow \emptyset =: A$.

Dabei sind die jeweiligen Grenzwerte in bezüglich der entsprechenden Vektorraumnorm in V zu verstehen.

Beweis. Die Aussage entspricht einer Abschrift des bekannten Resultats für $[0, \infty]$-wertige Inhalte. Da wir jedoch hier fordern, dass $T(A) \in V$ für alle $A \in \mathcal{S}$, entfällt die sonst übliche Endlichkeitsbedingung in den Punkten (c) und (d), insbesondere gilt die Implikation $(c) \Rightarrow (b)$ ohne weitere Voraussetzungen. Siehe beispielsweise Satz 1.36 in [23]. □

3.2 Totale Variation

Ziel dieses Abschnitts ist es, die gerade eingeführten vektorwertigen Objekte wieder mit herkömmlichen (Prä-)Maßen zu assoziieren. Dies geschieht mit dem Begriff der totalen Variation, wobei wir uns in weiten Teilen an den entsprechenden Ausführungen in [9] und [26] orientieren. Da dort jedoch im Allgemeinen σ-Algebren anstelle von (δ)-Ringen betrachtet werden, müssen wir die jeweiligen Aussagen auf unsere Situation erweitern.

Definition 3.2.1
Seien $\mathcal{S}$ ein Ring und $T : \mathcal{S} \to V$ eine Mengenfunktion, wobei V ein normierter Vektorraum ist. Dann definieren wir die Abbildung $|T| : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ durch

$$|T|(A) := \sup \left\{ \sum_{A_j \in Q} \|T(A_j)\| : Q \in \Pi(A) \right\}, \quad A \in \mathcal{S},$$

wobei

$$\Pi(A) := \{\{A_1, ..., A_n\} : A_1, ..., A_n \in \mathcal{S} \text{ paarweise disjunkt mit } A_j \subset A, n \in \mathbb{N}\}.$$

Die Abbildung $|T|$ wird *totale Variation von* T genannt und T selbst ist *von beschränkter Variation*, falls $|T|(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{S}$.

Offensichtlich gilt $|T|(A) \leq |T|(B)$, falls $A \subset B$. Außerdem könnte man in der Definition von $\Pi(A)$ auch nur jene Familien $\{A_1, ..., A_n\}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{S}$ zulassen, deren Vereinigung bereits A entspricht, da sonst die Familie $\{A_1, ..., A_{n+1}\} \in \Pi(A)$ mit

$$A_{n+1} := A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{S}$$

stets einen mindestens gleich großen Beitrag zum Supremum leistet. Mit dem folgenden Theorem ist offensichtlich das zu Beginn des Abschnitts formulierte Vorhaben realisiert.

Theorem 3.2.2
Seien $\mathcal{S}$ ein Ring, V ein normierter Vektorraum und $T : \mathcal{S} \to V$ ein vektorielles Prämaß. Dann ist $|T|$ ein Prämaß auf $\mathcal{S}$ (mit Werten in $[0, \infty]$).

Beweis. $|T|(\emptyset) = 0$ ist klar. Dass $|T|$ hingegen additiv ist, zeigt man analog zu III 1., Lemma 6 in [9]. Insbesondere macht der entsprechende Beweis nicht davon Gebrauch, dass die zugrunde liegende Mengenstruktur dort stärker als ein Ring ist. Für die σ-Additivität von $|T|$ können wir uns an der Beweisidee zu III 4., Lemma 7 in genannter Quelle orientieren, selbst wenn die eigentliche Aussage dort eine andere ist. Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$. Dann folgt mit der zuvor bemerkten Monotonie sowie der gerade *gezeigten* (endlichen) Additivität von $|T|$ für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$|T|(A) \geq |T| \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n \right) = \sum_{n=1}^{k} |T|(A_n).$$

Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |T|(A_n) \leq |T|(A),$$

wobei auf beiden Seiten auch ∞ stehen kann. Andererseits gilt für $Q \in \Pi(A)$ beliebig, aber fest:

$$\begin{aligned}
\sum_{B \in Q} \|T(B)\| &= \sum_{B \in Q} \|T(B \cap A)\| \\
&= \sum_{B \in Q} \|T(\cup_{n=1}^{\infty} B \cap A_n)\| \\
&= \sum_{B \in Q} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T(B \cap A_n) \right\|
\end{aligned}$$

dank der σ-Additivität von T. Weiter:

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{B \in Q} \sum_{n=1}^{\infty} \|T(B \cap A_n)\| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{B \in Q} \|T(B \cap A_n)\|.
\end{aligned}$$

Schließlich gilt $\{A_n \cap B : B \in Q\} \in \Pi(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |T|(A_n).$$

Dabei ist der letzte Ausdruck unbhängig von $Q \in \Pi(A)$, sodass insgesamt auch die umgekehrte Ungleichung gilt. $\square$

Die folgende Aussage ist eng angelehnt an das entsprechende Resultat in [26]. Nichtsdestotrotz ist unsere Definition der totalen Variation etwas anders, sodass neben der Betrachtung von δ-Ringen (anstelle von σ-Algebren) ein verkürzter Beweis sinnvoll erscheint. Dabei beachte man stets, dass $|T(\cdot)| \neq |T|(\cdot)$.

Theorem 3.2.3
Seien $\mathcal{S}$ ein δ-Ring, V ein endlich-dimensionaler, normierter Vektorraum und $T : \mathcal{S} \to V$ ein vektorielles Prämaß. Dann ist T von beschränkter Variation.

Beweis. Besitze V die Dimension n, so können wir ohne Einschränkung den $\mathbb{K}^n$ betrachten (es existiert ein isometrischer Isomorphismus), wobei wir uns auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ konzentrieren (sonst Betrachtung von Real- und Imaginärteil). Gelte zunächst $n = 1$.
Angenommen, es existiert ein $A \in \mathcal{S}$ mit $|T|(A) = \infty$, so muss eine Folge $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Pi(A)$ mit $\sum_{j=1}^{l_k} |T(A_{j,k})| \geq 2k$ existieren, wobei $Q_k = \{A_{1,k}, ..., A_{l_k,k}\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Durch Unterscheidung der jeweiligen Vorzeichen muss dann aber für alle $k \in \mathbb{N}$ auch jeweils eine Teilauswahl $Q'_k \subset Q_k$ mit

$$\sum_{B\in Q'_k} T(B) \geq k \quad \text{oder} \quad \sum_{B\in Q_k\setminus Q'_k} T(B) \leq -k$$

existieren. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $Q'_k = Q_k$ (sonst C_k unten entsprechend definieren), d.h. $|\sum_{j=1}^{l_k} T(A_{j,k})| \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Indem wir $C_k := A_{1,k} \cup \cdots \cup A_{l_k,k} \in \mathcal{S}$ setzen und lediglich die endliche Additivität von T ausnutzen, folgt also, dass $|T(C_k)| \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Anders: Zu $A \in \mathcal{S}$ mit $|T|(A) = \infty$ und $K > 0$ beliebig existiert immer eine Teilmenge $A' \subset A$ aus $\mathcal{S}$ mit $|T(A')| \geq K$. Somit kann man nun analog zu Theorem 8 (Kapitel XI, Paragraph 3) in [26] verfahren, um - beginnend mit $D_1 = A$ - eine absteigende Folge $(D_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $|T(D_k)| \geq k$ zu konstruieren, wobei man davon Gebrauch macht, dass nach Theorem 3.2.2 für $B \subset A$ aus $\mathcal{S}$ insbesondere gilt: $|T|(A) = |T|(A \setminus B) + |T|(B)$. Dies liefert jedoch den gewünschten Widerspruch, denn T ist als σ-additive Abbildung stetig von oben (man vergleiche Proposition 3.1.7), während $\mathcal{S}$ gerade (δ_3) erfüllt, d.h.

$$V \ni T\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k\right) = \lim_{k\to\infty} T(D_k)$$

im Widerspruch zu $|T(D_k)| \geq k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Falls schließlich $n > 1$ gilt, so sind nach Bemerkung 3.1.6 (a) auch die Komponentenfunktionen $T^{(j)} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ für $j = 1, ..., n$ σ-additiv. Dann folgt für alle $A \in \mathcal{S}$ und $Q \in \Pi(A)$:

$$\sum_{A_j\in Q} \|T(A_j)\|_1 = \sum_{A_j\in Q} \sum_{l=1}^{n} |T^{(l)}(A_j)| = \sum_{l=1}^{n} \sum_{A_j\in Q} |T^{(l)}(A_j)| \leq \sum_{l=1}^{n} |T^{(l)}|(A)$$

per Definition der totalen Variation, wobei der letzte Ausdruck nicht nur unabhängig von $Q \in \Pi(A)$, sondern nach dem bereits Gezeigten auch endlich ist. Somit folgt aber wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ auch, dass $|T|(A) < \infty$. □

Wir haben gerade gesehen:

Korollar 3.2.4
Seien $\mathcal{S}$ ein δ-Ring und $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ ein vektorielles Prämaß. Dann existiert ein $C > 0$, sodass für alle $A \in \mathcal{S}$ gilt:

$$|T|(A) \leq C \sum_{l=1}^{n} |T^{(l)}|(A).$$

Nun würden wir (zumindest komponentenweise) gerne eine Aussage im Sinne der *Hahn-Jordan-Zerlegung* für unsere Abbildungen T nutzen können. Dies ist aber auf δ-Ringen nicht möglich; stattdessen werden wir mit den folgenden Objekten arbeiten.

Definition 3.2.5
Seien $\mathcal{S}$ ein δ-Ring und $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann definieren wir die *positive Variation* T^+ sowie die *negative Variation* T^- für alle $A \in \mathcal{S}$ durch

$$T^+(A) := \frac{1}{2}(|T|(A) + T(A)), \quad T^-(A) := \frac{1}{2}(|T|(A) - T(A)).$$

Eigenschaft 3.2.6
In der Situation von Definition 3.2.5 gilt:

(a) $T = T^+ - T^-$ sowie $|T| = T^+ + T^-$.

(b) T^+ und T^- sind σ-additiv mit Werten in $[0, \infty)$.

Beweis. Teil (a) ist klar, insbesondere sind nach Theorem 3.2.3 alle Ausdrücke wohldefiniert. Weiterhin wissen wir für alle $A \in \mathcal{S}$, dass $\{A\} \in \Pi(A)$, d.h. $|T(A)| \leq |T|(A)$, somit folgt die Nichtnegativität von T^+ beziehungsweise T^-. Wegen $T^+(\emptyset) = T^-(\emptyset) = 0$ bleibt also für (b) nur noch der Nachweis der σ-Additivität, wobei wir lediglich T^+ betrachten (für T^- analog). Sei dazu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ wieder eine beliebige Folge paarweise disjunkter Mengen, dessen Vereinigung zu $\mathcal{S}$ gehört. Dann folgt mit der σ-Additivität von T und $|T|$ (vergleiche Theorem 3.2.2):

$$T^+\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |T|(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} T(A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T^+(A_n).$$

□

Theorem 3.2.7
Seien $\mathcal{S}$ ein δ-Ring und $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{S}$:

$$T^+(A) = \sup\{T(B) : B \in \mathcal{S} \text{ und } B \subset A\}$$

sowie

$$T^-(A) = -\inf\{T(B) : B \in \mathcal{S} \text{ und } B \subset A\}.$$

Beweis. Unter den genannten Voraussetzungen kann man den zentralen Teil des Beweises von III 1., Theorem 8 in [9] auf unsere Situation anwenden, um die Behauptung für T^+ zu erkennen. Insbesondere sind die dortigen Argumente auch für δ-Ringe zulässig. Offensichtlich erfüllt nun auch $\widetilde{T} := -T$ die obigen Voraussetzungen und es gilt wegen $|-T| = |T|$ (im Sinne der Definition der totalen Variation):

$$\widetilde{T}^+ = \frac{1}{2}(|-T| - T) = \frac{1}{2}(|T| - T) = T^-.$$

Damit folgt der zweite Teil der Behauptung nach dem bisher Gezeigten (angewandt auf $\widetilde{T}$) und unter Berücksichtigung von $\sup -M = -\inf M$ (für eine Beispielmenge M). $\square$

Korollar 3.2.8
Seien $\mathcal{S}$ ein δ-Ring und $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ σ-additiv. Dann existieren für alle $A \in \mathcal{S}$ und für alle $\varepsilon > 0$ Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ mit $A_i \subset A$ (für $i = 1, 2$), sodass

$$|T|(A) \leq T(A_1) - T(A_2) + \varepsilon.$$

Beweis. Per Definition des Infimums beziehungsweise des Supremums folgt die Aussage unmittelbar nach Theorem 3.2.7, da $|T| = T^+ + T^-$. $\square$

3.3 Implikationen im unendlich-teilbaren Fall

In der Literatur finden sich verschiedene Definitionen für independently scattered random measures, die jedoch nur leicht voneinander abweichen. Während wir uns auf solche mit Werten in $\mathbb{R}^m$ (respektive später in $\mathbb{C}^m$) fokussieren, wird sich zeigen, dass δ-Ringe für unsere Zwecke der geeignetste und zugleich allgemeinste Definitionsbereich sind, um reichhaltige Ergebnisse zu erzielen. Daher machen wir dies von Beginn an zum Bestandteil der Definition. Weiter bezeichnen wir für einen abstrakten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ die Menge aller $\mathbb{R}^m$-wertigen Zufallsvektoren darauf durch

$$L^0(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{X : \Omega \to \mathbb{R}^m \,|\, X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\text{-meßbar}\}.$$

Wenn nicht anders gekennzeichnet, so ist der Zusatz *fast sicher* in diesem Zusammenhang immer hinsichtlich $\mathbb{P}$ zu verstehen.

Definition 3.3.1
Sei $\mathcal{S}$ ein δ-Ring auf einer Menge $S \neq \emptyset$. Eine Abbildung $M : \mathcal{S} \to L^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ wird *independtly scattered random measure* (auf $\mathcal{S}$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$) genannt, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für jede endliche Auswahl paarweise disjunkter Mengen $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ sind die Zufallsvektoren $M(A_1), ..., M(A_n)$ stochastisch unabhängig.

(2) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen mit $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ gilt:

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(A_n) \quad \text{fast sicher.}$$

Falls $M(A)$ darüber hinaus für alle $A \in \mathcal{S}$ unendlich-teilbar ist, so nennen wir M selbst unendlich-teilbar (vergleiche später Korollar 4.2.11).

Man beachte, dass die resultierende Nullmenge in (2) jeweils von der betrachteten Folge abhängt, insbesondere ist $M(\cdot,\omega)$ für festes $\omega \in \Omega$ im Allgemeinen kein vektorielles (Prä-)Maß auf $\mathcal{S}$. Nichtsdestotrotz werden wir ein solches M häufig als *Zufallsmaß* oder kurz *ISRM* bezeichnen. Weiter werden wir uns im Folgenden auf unendlich-teilbare Zufallsmaße beschränken, was vor dem Hintergrund der Ausführungen in Abschnitt 3.5 einerseits natürlich erscheint. Andererseits erlaubt uns diese Annahme die angestrebte Verallgemeinerung der Ergebnisse in [35] für die Fälle $m > 1$, wobei wir ohne explizite Betonung stets von einem δ-Ring (auf S) ausgehen.

Theorem 3.3.2
Sei M ein unendlich-teilbares und $\mathbb{R}^m$-wertiges ISRM auf $\mathcal{S}$ mit $M(A) \sim [\gamma_A, Q_A, \phi_A]$ für alle $A \in \mathcal{S}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Die Abbildung $A \mapsto \gamma_A$ ist ein vektorielles Prämaß auf $\mathcal{S}$ (mit Werten in $\mathbb{R}^m$).

(b) Q_A ist für alle $A \in \mathcal{S}$ symmetrisch sowie positiv-semidefinit und die Abbildung $A \mapsto Q_A$ ist ein vektorielles Prämaß auf $\mathcal{S}$ (mit Werten in $\mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$).

(c) ϕ_A ist für alle $A \in \mathcal{S}$ ein Lévymaß auf $\mathbb{R}^m$ (vergleiche Bemerkung 2.3.3 (b)) und für jede von der Null weg beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\Gamma_m)$ ist die Abbildung $A \mapsto \phi_A(B)$ ein endliches Prämaß auf $\mathcal{S}$ (also mit Werten in $[0,\infty)$).

Beweis. Aus (2) in Definition 3.3.1 folgt unmittelbar, dass $M(\emptyset) = 0$ fast sicher und somit auch, dass $\gamma_\emptyset, Q_\emptyset$ und $\phi_\emptyset$ dem jeweiligen Nullelement entsprechen, insbesondere gilt $\phi_\emptyset(B) = 0$ für jede Menge B wie oben angegeben. Seien nun $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ paarweise disjunkt, dann wissen wir mit dem gleichen Argument wie zuvor, dass

$$M(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = M(A_1) + \cdots + M(A_n) \quad \text{fast sicher.} \tag{3.1}$$

Dabei sind aber $M(A_1), ..., M(A_n)$ nach (1) auch stochastisch unabhängig, sodass für alle $t \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\widehat{\mathcal{L}}\left(M(A_1) + \cdots + M(A_n)\right)(t) = \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mathcal{L}}(M(A_j))(t) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \psi_{A_j}(t)\right),$$

wobei ψ_A allgemein für $A \in \mathcal{S}$ die log-charakteristische Funktion von $M(A)$ (beziehungsweise der zugehörigen Verteilung) sei. Bezeichne nun $x \mapsto h(t,x)$ den Integranden des Integrals in (2.10), so gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{A_j}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left[\mathrm{i}\langle \gamma_{A_j}, t\rangle - \frac{1}{2}\langle Q_{A_j} t, t\rangle + \int_{\Gamma_m} h(t,x)\, \phi_{A_j}(dx) \right].$$

Aus Gründen der Eindeutigkeit bedeutet dies aber vor dem Hintergrund von (3.1) (man beachte, dass die Summe symmetrischer und positiv-semidefiniter Matrizen wieder eine solche ist), dass

$$\gamma_{A_1\cup\dots\cup A_n} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{A_j}, \quad Q_{A_1\cup\dots\cup A_n} = \sum_{j=1}^{n} Q_{A_j}, \quad \phi_{A_1\cup\dots\cup A_n} = \sum_{j=1}^{n} \phi_{A_j},$$

d.h. die entsprechenden Abbildungen in (a)-(c) sind bereits (vektorielle) Inhalte, wobei wir bezüglich ϕ offensichtlich sogar noch mehr zeigen konnten. $\phi_{A_1\cup\dots\cup A_n}(B)$ (analog die rechte Seite) ist dabei aber in jedem Falle für eine Menge B der obigen Form endlich, da es sich um Lévymaße handelt. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine beliebige Folge mit $A_n \downarrow \emptyset$. Dann definieren wir die paarweise disjunkte Hilfsfolge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ durch

$$B_1 := \emptyset, \quad B_n := A_{n-1} \setminus A_n \quad (n \geq 2),$$

um zu erkennen, dass

$$\begin{aligned} M(A_1) &= M(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} M(B_n) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} [M(A_{n-1}) - M(A_n)] \\ &= \lim_{k\to\infty} [M(A_1) - M(A_k)] \quad \text{fast sicher,} \end{aligned}$$

wobei man sich den vorletzten Schritt mit Hilfe von Eigenschaft (2) eines ISRM überlegt (siehe unten). Wir konnten also zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} M(A_n) = 0$ fast sicher. Nach Lemma 2.3.4 folgt insbesondere:

$$\gamma_{A_n} \to 0, \quad Q_{A_n} \to 0, \quad \phi_{A_n} \to 0,$$

dabei meint Letzteres: Für jede von der Null weg beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\Gamma_m)$ gilt $\phi_{A_n}(B) \to 0$. Damit ist aber gemäß Proposition 3.1.7 gezeigt, dass die Abbildungen in (a)-(c) dieses Theorems σ-additiv sind, was insgesamt gerade der Behauptung entspricht. $\square$

Ebenfalls der Idee für $m = 1$ in [35] folgend, möchten wir nun zu gegebenem M das so genannte Kontrollmaß konstruieren, dessen Name im Anschluss und in Anlehnung an Proposition 2.1 der genannten Quelle gerechtfertigt werden soll. Dabei profitieren wir von den Vorbereitungen des vorangegangenen Abschnitts, insbesondere sei $A \mapsto |\gamma|_A$ die totale Variation der Abbildung $\gamma : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^m$.

Proposition 3.3.3
Sei M ein unendlich-teilbares ISRM wie in Theorem 3.3.2, wobei $M(A) \sim [\gamma_A, Q_A, \phi_A]$ für alle $A \in \mathcal{S}$. Dann existiert genau ein σ-endliches Maß λ_M auf $\sigma(\mathcal{S})$ mit

$$\lambda_M(A) = |\gamma|_A + \operatorname{tr}(Q_A) + \int_{\Gamma_m} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_A(dx) \tag{3.2}$$

für alle $A \in \mathcal{S}$. Wir nennen λ_M das *Kontrollmaß von M*.

Beweis. Wir definieren λ_M zunächst auf $\mathcal{S}$ wie in (3.2) beschrieben. Nach Theorem 3.3.2 (a) und Theorem 3.2.3 folgt dann, dass $|\gamma|$ ein endliches Prämaß auf $\mathcal{S}$ ist. Weiter ist Q_A für alle $A \in \mathcal{S}$ symmetrisch und somit ähnlich zu einer (reellen) Diagonalmatrix D_A mit nichtnegativen Diagonaleinträgen (dies sind gerade die nichtnegativen Eigenwerte der positiv-semidefiniten Matrix Q_A); somit gilt $\mathrm{tr}(Q_A) = \mathrm{tr}(D_A) \geq 0$. Andererseits ist die Spurabbildung als lineare Abbildung (zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen) stetig. Zusammen mit dem, was wir in Theorem 3.3.2 (b) gezeigt haben (und erneut unter Zuhilfenahme der Linearität der Spurabbildung), folgt also unmittelbar, dass auch $A \mapsto \mathrm{tr}(Q_A)$ ein Prämaß auf $\mathcal{S}$ ist. Schließlich ist auch der dritte Summand aus (3.2) nichtnegativ und - als Abbildung in A gelesen - additiv, da dies bereits auf die maßwertige Abbildung $A \mapsto \phi_A$ zutrifft (man vergleiche den Beweis von Theorem 3.3.2). Bleibt zu zeigen, dass die Abbildung

$$A \mapsto \int\limits_{\Gamma_m} \min\{1, \|x\|^2\} \, \phi_A(dx)$$

σ-additiv und somit insgesamt ein Prämaß ist. Nun ist aber ϕ_A für alle $A \in \mathcal{S}$ ein Lévymaß und das zugehörige Integral somit endlich, sodass es erneut genügt, die $\emptyset$-Stetigkeit nachzuweisen. Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine Folge mit $A_n \downarrow \emptyset$. Dann haben wir im vorangegangenen Beweis bereits zeigen können, dass $M(A_n)$ somit auch in Verteilung gegen 0 konvergiert, was uns nach (2.13) das Gewünschte liefert.
Als endliche Summe von $[0, \infty)$-wertigen Prämaßen auf $\mathcal{S}$ trifft dies also offensichtlich auch auf λ_M zu und da $\mathcal{S}$ als δ-Ring (δ_4) erfüllt, ist λ_M sogar σ-endlich. Das gesuchte Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$ entspricht somit der nun eindeutigen Fortsetzung von λ_M. □

Bemerkung 3.3.4. Offensichtlich hätte man das Kontrollmaß via (3.2) auch mit $|Q|_A$ anstelle von $\mathrm{tr}(Q_A)$ definieren können. Dies erschwert tendenziell jedoch die konkrete Berechnung von λ_M. In jedem Falle haben wir gesehen, dass λ_M auf $\mathcal{S}$ endlich ist.

Theorem 3.3.5
Sei M wie zuvor und λ_M das zugehörige (eindeutige) Kontrollmaß. Dann gilt für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$:

(i) Falls $\lambda_M(A_n) \to 0$, so konvergiert $M(A_n)$ in Verteilung gegen 0.

(ii) Falls $M(A'_n)$ für jede Folge $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $A'_n \subset A_n$ in Verteilung gegen 0 konvergiert, so folgt $\lambda_M(A_n) \to 0$, jeweils für $n \to \infty$.

Beweis. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine Folge wie angegeben und gelte $\lambda_M(A_n) \to 0$. Nun sind alle Summanden in (3.2) nichtnegativ, müssen also selbst jeweils gegen 0 konvergieren. Somit sind (c) und wegen $\|\gamma_{A_n}\| \leq |\gamma|_{A_n}$ (per Definition der totalen Variation) auch (a) in Theorem 2.3.5 erfüllt. Bleibt für (i) zu zeigen, dass folgende Implikation gilt:

$$\mathrm{tr}(Q_{A_n}) \to 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{A_n} \to 0 \quad (\text{in } \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)). \tag{3.3}$$

Wie zuvor liefert die Symmetrie von Q_{A_n}, dass sich $\mathrm{tr}(Q_{A_n})$ als Summe der ausschließlich nichtnegativen Eigenwerte darstellen lässt. Zugleich ist Q_{A_n} als symmetrische Matrix auch *normal*, somit können die Sätze VI.1.6 und VI.1.7 in [45] kombiniert werden, um insgesamt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|Q_{A_n}\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(Q_{A_n})\} \leq \sum_{\lambda \in \sigma(Q_{A_n})} |\lambda| = \sum_{\lambda \in \sigma(Q_{A_n})} \lambda = \mathrm{tr}(Q_{A_n}),$$

zu erhalten, d.h. (3.3) gilt.
Umgekehrt sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ solch eine Folge, dass für jede Folge $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $A'_n \subset A_n$ gilt: $M(A'_n) \to 0$ in Verteilung. Wir möchten nun zeigen, dass dann auch $\lambda_M(A_n) \to 0$ folgt, was sich auf den Nachweis von $|\gamma|_{A_n} \to 0$ reduziert, denn: Einerseits konvergiert der entsprechende Integralausdruck nach Theorem 2.3.5 (c) bereits gegen Null (betrachte die vorliegende Voraussetzung für die Folge (A_n) selbst). Andererseits wissen wir mit dem gleichen Argument, dass $Q_{A_n} \to 0$, also insbesondere komponentenweise, was hinreichend für $\mathrm{tr}(Q_{A_n}) \to 0$ ist. Nach Korollar 3.2.4 genügt es somit zu zeigen, dass die totalen Variationen aller Komponentenfunktionen $\gamma^{(1)}, ..., \gamma^{(m)}$ (von γ) gegen Null konvergieren. Seien also $j \in \{1, ..., m\}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Bekanntlich erben die reellwertigen Komponentenfunktionen die σ-Additivität von γ aus Theorem 3.3.2 (a), sodass nach Korollar 3.2.8 Folgen $(A_{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ mit $A_{n,i} \subset A_n$ (jeweils für $i = 1, 2$) und

$$|\gamma^{(j)}|_{A_n} \leq \gamma^{(j)}_{A_{n,1}} - \gamma^{(j)}_{A_{n,2}} + \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}$$

existieren. Indem wir nun für diese beiden Folgen die Voraussetzung lesen, folgt wie zuvor nach Theorem 2.3.5 (a), dass $\gamma_{A_{n,i}} \to 0$, also insbesondere, dass $\gamma^{(j)}_{A_{n,i}} \to 0$ (für $i = 1, 2$ und $n \to \infty$). Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, liefert dies aber die Behauptung, denn

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} |\gamma^{(j)}|_{A_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \left(\gamma^{(j)}_{A_{n,1}} - \gamma^{(j)}_{A_{n,2}} + \varepsilon\right) = \varepsilon,$$

d.h. $|\gamma^{(j)}|_{A_n} \to 0$. □

Angesichts des jeweils konstanten Grenzwertes kann das gerade gezeigte Theorem natürlich auch mittels stochastischer Konvergenz formuliert werden. Schließlich nennen wir solch ein unendlich-teilbares ISRM M *homogen*, falls für $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ beliebig die folgende Implikation gilt:

$$\lambda_M(A_1) = \lambda_M(A_2) \quad \Rightarrow \quad M(A_1) \overset{d}{=} M(A_2). \tag{3.4}$$

3.4 Faktorisierungstheorem

In diesem Abschnitt soll eine Verallgemeinerung von Lemma 2.3 in [35] gezeigt werden, wonach die Familie der Lévymaße $(\phi_A)_{A\in\mathcal{S}}$ ein eindeutiges Maß auf $\sigma(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ bestimmt, das wiederum mit Hilfe des Kontrollmaßes geeignet *faktorisiert* werden kann. Neben einer alternativen Darstellung der charakteristischen Funktionen von $M(A)$ wird sich die hier zu leistende Arbeit in erster Linie als grundlegend für die Integrationstheorie in Kapitel 4 erweisen. Wir beginnen mit einer Wiederholung:

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ zwei Meßräume, so nennt man eine Abbildung $\kappa : \Omega_1 \times \mathcal{A}_2 \to [0, \infty]$ einen (σ-)endlichen *Übergangskern von* Ω_1 *nach* Ω_2, falls gilt:

(i) $\omega_1 \mapsto \kappa(\omega_1, A_2)$ ist für alle $A_2 \in \mathcal{A}_2$ eine $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{B}([0, \infty])$-meßbare Abbildung.

(ii) $A_2 \mapsto \kappa(\omega_1, A_2)$ ist für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ ein (σ-)endliches Maß auf $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.
Im Falle $\kappa(\omega_1, \Omega_2) = 1$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ heißt κ *Markovkern.*

Definition 3.4.1
Wir nennen einen Übergangskern κ von Ω_1 nach Ω_2 *simultan σ-endlich*, falls eine (disjunkte) Folge $(A_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_2$ sowie eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ existieren, sodass gilt:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2,n} = \Omega_2 \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \omega_1 \in \Omega_1 : \kappa\,(\omega_1, A_{2,n}) \le a_n.$$

Offensichtlich sind Markovkerne Beispiele simultan σ-endlicher Übergangskerne. Wir verallgemeinern nun Korollar 14.23 und Satz 14.29 aus [23], was uns im Anschluss einigen Aufwand ersparen wird. Dazu seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Meßräume wie zuvor.

Proposition 3.4.2
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und κ ein simultan σ-endlicher Übergangskern von Ω_1 nach Ω_2. Dann existiert genau ein σ-endliches Maß $\mu \odot \kappa$ auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ mit der Eigenschaft:

$$(\mu \odot \kappa)(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \kappa(\omega_1, A_2)\, \mu(d\omega_1) \quad \text{für alle } A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2. \tag{3.5}$$

Weiter gilt für jede $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ meßbare Abbildung $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, die nichtnegativ oder aber $\mu \odot \kappa$-integrierbar ist, dass

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x)\, (\mu \odot \kappa)(dx) = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)\, \kappa(\omega_1, d\omega_2)\, \mu(d\omega_1). \tag{3.6}$$

Beweis. Falls κ im 1. Argument konstant ist, so entspricht $\mu \odot \kappa$ also gerade dem Produktmaß $\mu \otimes \kappa$. Dabei sind die Aussagen von (3.5) und (3.6) für den Fall, dass μ und κ endlich sind, bereits bekannt und in obiger Quelle festgehalten. Wir beginnen mit dem ersten Teil der Behauptung: Gemäß Voraussetzung existieren folgen $(A_{i,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_i$ mit $\cup_{n=1}^{\infty} A_{i,n} = \Omega_i$ für $i = 1, 2$, sodass $\mu(A_{1,n}) < \infty$ und $\kappa(\omega_1, A_{2,n}) \le a_n$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\pi = (\pi_1, \pi_2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ eine (stets existente) Bijektion, so definieren wir die Mengen $C_n := A_{1,\pi_1(n)} \times A_{2,\pi_2(n)}$ und es folgt, dass $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \Omega_1 \times \Omega_2$, wobei

$$\int\limits_{A_{1,\pi_1(n)}} \kappa(\omega_1, A_{2,\pi_2(n)})\, \mu(d\omega_1) \leq \int\limits_{A_{1,\pi_1(n)}} a_{\pi_2(n)}\, \mu(d\omega_1) = a_{\pi_2(n)}\, \mu\left(A_{1,\pi_1(n)}\right) < \infty.$$

Da das System $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ zugleich ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist, folgt die Eindeutigkeitsaussage. Insbesondere ist jedes Maß, das unter den genannten Voraussetzungen (3.5) erfüllt, σ-endlich. Die Existenz eines solchen Maßes ist aber nun in Gestalt von

$$(\mu \odot \kappa)(C) := \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Omega_2} \mathbb{1}_C(\omega_1, \omega_2)\, \kappa(\omega_1, d\omega_2)\, \mu(d\omega_1), \quad C \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$$

gesichert. Dabei ist die Maßeigenschaft genau so offensichtlich (Beppo-Levi) wie der charakterisierende Zusammenhang, der nach (3.5) erfüllt sein muss. Damit $\mu \odot \kappa$ jedoch wohldefiniert ist, muss das innere Integral (als Abbildung in ω_1 gelesen) meßbar sein. Dies wäre gemäß Lemma 14.20 in [23] der Fall, sofern κ ein endlicher Übergangskern ist. Nun können wir aber durch $\kappa^{(k)}(\omega_1, A_2) := \kappa(\omega_1, A_2 \cap A_{2,k})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ neue Übergangskerne definieren, die dann endlich sind. Damit folgt aus

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_2} \mathbb{1}_C(\omega_1, \omega_2)\, \kappa(\omega_1, d\omega_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_{2,k}} \mathbb{1}_C(\omega_1, \omega_2)\, \kappa(\omega_1, d\omega_2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_{2,k}} \mathbb{1}_C(\omega_1, \omega_2)\, \kappa^{(k)}(\omega_1, d\omega_2), \quad \omega_1 \in \Omega_1\end{aligned}$$

das Gewünschte (punktweiser Limes meßbarer Abbildungen ist meßbar). Wir kommen zum zweiten Teil der Aussage und definieren weiter für alle $n \in \mathbb{N}$ die endlichen Maße $\mu^{(n)}(\cdot) := \mu(\cdot \cap A_{1,n})$ sowie für jedes $l \in \mathbb{N}$ das Maß $(\mu \odot \kappa)^{(l)}(\cdot) := (\mu \odot \kappa)(\cdot \cap C_l)$. Dann folgt für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ sowie $l \in \mathbb{N}$ über (3.5):

$$\begin{aligned}(\mu \odot \kappa)^{(l)}(A_1 \times A_2) &= (\mu \odot \kappa)\left[(A_1 \times A_2) \cap (A_{1,\pi_1(l)} \times A_{2,\pi_2(l)})\right] \\ &= (\mu \odot \kappa)\left[(A_1 \cap A_{1,\pi_1(l)}) \times (A_2 \cap A_{2,\pi_2(l)})\right] \\ &= \int\limits_{A_1 \cap A_{1,\pi_1(l)}} \kappa(\omega_1, A_2 \cap A_{2,\pi_2(l)})\, \mu(d\omega_1) \\ &= \int\limits_{A_1} \kappa^{(\pi_2(l))}(\omega_1, A_2)\, \mu^{(\pi_1(l))}(d\omega_1) \\ &= (\mu^{(\pi_1(l))} \odot \kappa^{\pi_2(l)})(A_1 \times A_2),\end{aligned}$$

was mit dem gleichen Argument wie zuvor beweist, dass $(\mu \odot \kappa)^{(l)} = (\mu^{(\pi_1(l))} \odot \kappa^{\pi_2(l)})$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Um nun (3.6) zu zeigen, *partitioniert* man das Integral (mit Hilfe des

Satzes von Beppo-Levi) über die Mengen $C_l, l \in \mathbb{N}$ und nutzt, dass auf diesen eingeschränkten Mengen nach dem gerade Gezeigten auch nach den Maßen $(\mu^{(\pi_1(l))} \otimes \kappa^{\pi_2(l)})$ integriert werden kann, für die die Aussage nach Korollar 14.23 in [23] aber bereits gilt. Abschließend wende man erneut den Satz von Beppo-Levi an. □

Der Beweis des angestrebten Lemmas nutzt maßgeblich das folgende Ergebnis, wobei es sich lediglich um eine marginale Modifikation von Proposition 2.4 aus [35] handelt. Dort ist jedoch nur eine knappe Skizze des (nicht-trivialen) Beweises angegeben, die hier aus Gründen der Vollständigkeit entsprechend ergänzt werden soll. Q, Q_0 und λ_0 sind dabei nur temporäre Bezeichnungen und stehen in keiner Beziehung zu denen des vorherigen Abschnitts.

Theorem 3.4.3
Sei $Q_0 : \sigma(\mathcal{S}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \to [0, \infty]$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $Q_0(A, \cdot)$ ist für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$,

(b) $Q_0(\cdot, B)$ ist für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$,

(c) das speziell durch $\lambda_0(A) := Q_0(A, \mathbb{R}^m)$ definierte Maß ist σ-endlich.

Dann gibt es ein eindeutiges (und σ-endliches) Maß Q auf $\sigma(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, sodass für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$Q(A \times B) = Q_0(A, B). \tag{3.7}$$

Weiter existiert ein Markovkern κ von S nach $\mathbb{R}^m$ derart, dass $Q = \lambda_0 \odot \kappa$. Dieser Markovkern κ ist bis auf eine λ_0-Nullmenge bereits eindeutig festgelegt.

Zunächst zeigen wir das folgende Resultat, mit dem wir den Beweis des Theorems im Wesentlichen auf den Fall $m = 1$ herunterbrechen können.

Lemma 3.4.4
Die Meßräume $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sind *isomorph*, d.h. es existiert eine meßbare und bijektive Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, deren Inverse ebenfalls meßbar ist (jeweils zwischen den genannten σ-Algebren).

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $m > 1$. Bekanntermaßen ist der $\mathbb{R}^m$ (mit der durch $\|\cdot\|$ erzeugten Topologie) ein *Polnischer Raum*, nach Satz 8.35 in [23] ist $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ also ein *Borelscher Raum*, was gemäß der dortigen Definitionen die Existenz einer Menge $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (wobei im Allgemeinen $E \neq \mathbb{R}$) sowie die einer Bijektion $\Psi_1' : \mathbb{R}^m \to E$ liefert mit der Eigenschaft:

$$\Psi_1' \text{ ist } \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\text{-}\mathcal{B}(E)\text{-meßbar} \quad \text{und} \quad \Psi_1'^{-1} \text{ ist } \mathcal{B}(E)\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\text{-meßbar.}$$

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ und $(E, \mathcal{B}(E))$ sind also isomorph. Dann definieren wir die zunächst nur noch injektive Abbildung $\Psi_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ durch $\Psi_1(x) := \Psi_1'(x)$, d.h. $\Psi_1(\mathbb{R}^m) = E$ und erhalten hinsichtlich des Urbilds von Ψ_1 für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, dass

$$\Psi_1^{-1}(B) = \Psi_1^{-1}(B \cap E) = \Psi_1'^{-1}(B \cap E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m),$$

da $B \cap E \in \mathcal{B}(E)$, d.h. die Meßbarkeit bleibt erhalten. Andererseits können wir für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ schreiben (man unterscheide jeweils Inverse und Urbild):

$$\begin{aligned}\Psi_1(A) &= \Psi_1'(A)\\ &= \left(\Psi_1'^{-1}\right)^{-1}(A) \in \mathcal{B}(E),\end{aligned}$$

indem man die Meßbarkeit von $\Psi_1'^{-1}$ ausnutzt. Wegen $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ konnten wir also zeigen, dass $\Psi_1(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Damit ist Ψ_1 eine *bimeßbare* Injektion im Sinne von [44]. Umgekehrt ist eine bimeßbare Injektion $\Psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ offenbar sofort durch $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0, ..., 0)$ gefunden. Dass man aus Ψ_1 und Ψ_2 nun eine Abbildung Ψ wie angegeben konstruieren kann, ist die Aussage von Proposition 3.3.6 in [44]. $\square$

Beweis von Theorem 3.4.3. Vor dem Hintergrund von Proposition 3.4.2 (insbesondere (3.5)) genügt es, einen Markovkern κ von S nach $\mathbb{R}^m$ zu finden, sodass für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$Q_0(A, B) = \int_A \kappa(s, B)\, \lambda_0(ds). \tag{3.8}$$

Zuvor die Eindeutigkeitsaussage hinsichtlich κ: Sei $\widetilde{\kappa}$ ein weiterer Markovkern mit $Q = (\lambda_0 \odot \widetilde{\kappa})$. Dann handelt es sich bei κ und $\widetilde{\kappa}$ gemäß (3.7) um λ_0-Dichten des Maßes $Q_0(\cdot, B)$. Da λ_0 nach (c) jedoch σ-endlich ist, folgt nach dem Satz von Radon-Nikodým, dass $\kappa(s, B) = \widetilde{\kappa}(s, B)$ für λ_0-fast alle $s \in S$. Man betrachte nun beispielsweise den abzählbaren und schnittstabilen Erzeuger

$$\mathcal{M} := \{B = (-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_m] \,|\, a_j \in \mathbb{Q} \text{ für } j = 1, ..., m\}$$

von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Dann folgt also auch, dass

$$\kappa(s, B) = \widetilde{\kappa}(s, B) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{M} \text{ und } \lambda_0\text{-fast alle } s \in S.$$

Wegen $\kappa(s, B) \leq 1 < \infty$ (für alle $s \in S$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$) kann daher analog zu oben wieder für jedes solche $s \in S$ (außerhalb dieser λ_0-Nullmenge) der Eindeutigkeitssatz aktiviert werden, um

$$\kappa(s, B) = \widetilde{\kappa}(s, B) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \text{ und } \lambda_0\text{-fast alle } s \in S$$

zu erkennen. Somit bleibt die Existenz eines solchen Markovkerns κ zu zeigen, wobei wir den in Abschnitt 8.3 vorgestellten Ideen in [23] folgen, insbesondere betrachten wir zunächst den Fall $m = 1$. Sei dazu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ beliebig, aber fest. Dann besitzt das

Maß $Q_0(\cdot, B)$ eine λ_0-Dichte (mit Werten in $[0, \infty]$), die wir mit $q_0(\cdot, B)$ bezeichnen, denn mit der Monotonie von Q_0 im zweiten Argument folgt für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$, dass $Q_0(A, B) \leq \lambda_0(A)$ und somit insbesondere, dass $Q_0(\cdot, B) \ll \lambda_0(\cdot)$, wobei wir λ_0 als σ-endlich voraussetzen (man vergleiche VII, §2, Satz 2.3 in [10]). Weiter erfüllt die gerade gefundene Abbildung $q_0 : S \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ die folgenden Eigenschaften:

(i) Per Definition gilt für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$Q_0(A, B) = \int\limits_S q_0(s, B) \cdot \mathbb{1}_A(s)\, \lambda_0(ds) = \int\limits_A q_0(s, B)\, \lambda_0(ds), \tag{3.9}$$

d.h. die Abbildung q_0 erfüllt (3.8) anstelle von κ entsprechend für $m = 1$. Weiter erkennt man (aus Gründen der Eindeutigkeit im Satz von Radon-Nikodým), dass ohne Einschränkung $q_0(s, \mathbb{R}) = 1$ für alle $s \in S$ angenommen werden kann, denn

$$\int\limits_A 1\, \lambda_0(ds) = \lambda_0(A) = Q_0(A, \mathbb{R}), \quad A \in \sigma(\mathcal{S}).$$

(ii) Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjunkt. Dann erhalten wir mit der Maßeigenschaft im zweiten Argument für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$:

$$Q_0(A, B_1 \cup B_2) = Q_0(A, B_1) + Q_0(A, B_2) = \int\limits_A [q_0(s, B_1) + q_0(s, B_2)]\, \lambda_0(ds).$$

Bei $q_0(\cdot, B_1) + q_0(\cdot, B_2)$ handelt es sich also offensichtlich ebenfalls um eine λ_0-Dichte von $Q_0(\cdot, B_1 \cup B_2)$. Mit dem gleichen Eindeutigkeitsargument wie zuvor folgt somit:

$$q_0(s, B_1 \cup B_2) = q_0(s, B_1) + q_0(s, B_2) \quad \text{für } \lambda_0\text{-fast alle } s \in S.$$

(iii) Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ beliebig, aber fest. Dann gilt $q_0(s, B) \leq 1$ für λ_0-fast alle $s \in S$. Andernfalls würde für die Menge $A' := \{s : q_0(s, B) > 1\} \in \sigma(\mathcal{S})$ folgen, dass $\lambda_0(A') > 0$ und dass die nichtnegative Funktion $(q_0(s, B) - 1)\mathbb{1}_{A'}(s)$ auf A' sogar strikt positiv ist. Zugleich gilt:

$$Q_0(A', B) = \int\limits_{A'} (q_0(s, B) - 1 + 1)\, \lambda_0(ds) = \int\limits_{A'} (q_0(s, B) - 1)\, \lambda_0(ds) + \lambda_0(A'),$$

wobei der Wert des letztgenannten Integrals dann sicher nichtnegativ wäre, wegen $Q_0(A', B) \leq \lambda_0(A')$ sogar gleich Null. Das würde aber bedeuten, dass das Integral und somit auch der Integrand bis auf eine λ_0-Nullmenge verschwinden. Widerspruch zur Wahl von A'!

Ziel ist es nun, mit diesen Eigenschaften aus q_0 die eigentliche Abbildung κ zu konstruieren. Dazu definieren wir zunächst

$$f(s,x) := q_0(s,(-\infty,x]), \quad (s,x) \in S \times \mathbb{R}.$$

Dann existiert nach (ii) offensichtlich für alle $x \leq y$ eine λ_0-Nullmenge $A_{x,y}$ mit

$$f(s,x) = q_0(s,(-\infty,x]) \leq q_0(s,(-\infty,y]) = f(s,y) \quad \text{für alle } s \in S \setminus A_{x,y}.$$

Damit handelt es sich auch bei

$$B_x := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{x+\frac{1}{n+1},x+\frac{1}{n}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ um eine λ_0-Nullmenge und für alle $s \in S \setminus B_x$ sowie $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$0 \leq f\left(s, x + \frac{1}{n+1}\right) \leq f\left(s, x + \frac{1}{n}\right) \leq 1,$$

wobei wir im letzten Schritt abkürzend angenommen haben, dass die Ausnahmemengen aus (iii) bereits in $A_{x+\frac{1}{n+1},x+\frac{1}{n}}$ integriert seien. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig, dann existiert also für alle $s \in S \setminus B_x$ der monotone Limes

$$g(s,x) := \lim_{n\to\infty} f\left(s, x + \frac{1}{n}\right) \in [0,1]$$

(und wir setzen $g(s,x) = 0$ für $s \in B_x$). Dann folgt aber für jedes $A \in \sigma(\mathcal{S})$ nach dem Satz von Beppo-Levi sowie (3.9):

$$\int_A g(s,x)\,\lambda_0(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_A f\left(s, x+\frac{1}{n}\right) \lambda_0(ds) = \lim_{n\to\infty} Q_0\left(A, \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right).$$

Wir können an dieser Stelle nicht die Stetigkeit von oben anwenden, da die Ausdrücke nicht zwingend endlich sind. Daher sei $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge gemäß (δ_4), wobei wir nach Voraussetzung (c) ohne Einschränkung annehmen können, dass $\lambda_0(S_k) < \infty$. Dann können wir für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ die (aus Monotoniegründen) endlichen Maße $\mu^{(k,x)}(\cdot) := Q_0(\cdot \cap S_k, (-\infty, x])$ definieren und erhalten durch eine analoge Rechnung wie zuvor (an dessen Ende nun das gewünschte Argument greift), dass

$$\begin{aligned}\int_A g(s,x)\mathbb{1}_{S_k}(s)\,\lambda_0(ds) &= \lim_{n\to\infty} Q_0\left(A \cap S_k, \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right)\\ &= Q_0\left(A \cap S_k, (-\infty, x]\right)\\ &= \mu^{(k,x)}(A).\end{aligned}$$

Neben $f(s,x) \cdot \mathbb{1}_{S_k}(s)$ ist also offensichtlich auch $g(s,x) \cdot \mathbb{1}_{S_k}(s)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ eine Dichte von $\mu^{(k,x)}$. Erneut mit Radon-Nikodým folgt daher jeweils die Existenz einer λ_0-Nullmenge $C_{k,x}$, sodass

$$f(s,x) \cdot \mathbb{1}_{S_k}(s) = g(s,x) \cdot \mathbb{1}_{S_k}(s) \quad \text{für alle } s \in S \setminus C_{k,x},$$

d.h.

$$f(s,x) = g(s,x) \quad \text{für alle } s \in [(S \setminus C_{k,x}) \cap S_k] = S_k \setminus C_{k,x}.$$

Insgesamt gilt also $f(s,x) = g(s,x)$ für alle s aus der Menge

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(S_k \setminus C_{k,x}) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{k,x} = S \setminus \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{k,x}}_{=:D_x},$$

also insbesondere für alle $s \in S \setminus D_x$, wobei D_x nach wie vor eine λ_0-Nullmenge ist. Indem wir ohne Einschränkung annehmen, dass $B_x \subset D_x$ (sonst vereinigen), konnten wir also zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(s, x + \frac{1}{n}\right) = f(s,x) \quad \text{für alle } s \in S \setminus D_x. \tag{3.10}$$

In ähnlicher Weise finden wir nun eine λ_0-Nullmenge T, sodass für alle $s \in S \setminus T$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(s,-n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(s,n) = 1. \tag{3.11}$$

So wissen wir hinsichtlich der zweiten Aussage zunächst, dass der monotone Limes

$$h(s) := \lim_{n\to\infty} f(s,n) \quad \text{für alle } s \in S \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,n+1}\right)$$

existiert und vor dem Hintergrund von (iii) auch wieder als durch 1 beschränkt angenommen werden kann. Gegebenenfalls setze man $h(s) = 0$ auf der genannten λ_0-Nullmenge, für die der Limes nicht existiert. In jedem Falle erkennt man für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ nach Beppo-Levi und der Stetigkeit von unten:

$$\int\limits_A h(s)\, \lambda_0(ds) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f(s,n)\, \lambda_0(ds) = \lim_{n\to\infty} Q_0(A,(-\infty,n]) = \lambda_0(A).$$

Der Satz von Radon-Nikodým liefert also wieder die Existenz einer λ_0-Nullmenge T_1, sodass $h(s) = 1$ für alle $s \in S \setminus T_1$. Wie zuvor nehme man noch vereinfachend an, dass $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,n+1} \subset T_1$, um

$$\lim_{n\to\infty} f(s,n) = 1 \quad \text{für alle } s \in S \setminus T_1$$

zu folgern. Analog verfährt man mit dem anderen Grenzwert und erhält eine λ_0-Nullmenge T_2 mit

$$\lim_{n\to\infty} f(s,-n) = 0 \quad \text{für alle } s \in S \setminus T_2,$$

wobei man $Q_0(A,\emptyset) = 0$ berücksichtigt und die Stetigkeit von oben wie zuvor erst nach geeigneter Zerlegung des Problems anwenden kann. Setze $T := T_1 \cup T_2$. Schließlich definieren wir die λ_0-Nullmenge

$$N := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q},\\ r\geq q}} A_{q,r} \;\cup\; \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} D_q \;\cup\; T$$

und darauf aufbauend die Abbildung $F : S \times \mathbb{R} \to [0,1]$ durch

$$F(s,x) := \inf\{f(s,q) \,|\, q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q \geq x\} \cdot \mathbb{1}_{S\setminus N}(s) + F_0(x) \cdot \mathbb{1}_N(s),$$

wobei F_0 eine beliebige Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ sei. Dann folgt nach Wahl von N für alle $s \in S \setminus N$ (für $s \in N$ ohnehin offensichtlich, da F_0 eine Verteilungsfunktion ist):

(iv) $F(s,\cdot)$ ist monoton wachsend (mit wachsendem Argument wird das Infimum über eine kleinere Menge betrachtet).

(v) Mit der bereits erkannten Monotonie sowie (3.11) gilt offensichtlich:

$$\lim_{x\to-\infty} F(s,x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(s,x) = 1.$$

(vi) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest, dann existiert nach Definition des Infimums ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \geq x$ und $F(s,q) \leq F(s,x) + \frac{\varepsilon}{2}$. Weiter existiert nach (3.10) ein $K \in \mathbb{N}$ derart, dass $f(s, q + \frac{1}{K}) \leq f(s,q) + \frac{\varepsilon}{2}$. Somit folgt für dieses K zunächst:

$$F\left(s, q + \frac{1}{K}\right) = f\left(s, q + \frac{1}{K}\right) \leq f(s,q) + \frac{\varepsilon}{2} = F(s,q) + \frac{\varepsilon}{2},$$

indem man aus Monotoniegründen $f(s,q) = F(s,q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ beachtet. Und somit für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y \leq q + \frac{1}{K}$ schließlich, dass

$$F(s,y) \leq F\left(s, q + \frac{1}{K}\right) \leq F(s,q) + \frac{\varepsilon}{2} \leq F(s,x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = F(s,x) + \varepsilon.$$

Das beweist insgesamt die Rechtsstetigkeit von $F(s,\cdot)$.

Wir assoziieren nun für alle $s \in S$ mit $F(s,\cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\kappa(s,\cdot)$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, d.h. $F(s,\cdot)$ ist die Verteilungsfunktion von $\kappa(s,\cdot)$. Also bleibt der Nachweis der Meßbarkeitseigenschaft sowie der von (3.8). Für die Meßbarkeit betrachten wir zunächst die Menge $B = (-\infty, q]$ für ein $q \in \mathbb{Q}$ beliebig, aber fest. Dann ist die Abbildung

$$S \ni s \mapsto \kappa(s,B) = F(s,q)$$

$$= f(s,q) \cdot \mathbb{1}_{S\setminus N}(s) + F_0(x) \cdot \mathbb{1}_N(s)$$
$$= q_0(s,(-\infty,q]) \cdot \mathbb{1}_{S\setminus N}(s) + F_0(x) \cdot \mathbb{1}_N(s)$$

offensichtlich meßbar (q_0 ist ja im ersten Argument gerade eine Dichtefunktion). Nun ist aber das System $\{(-\infty,q] : q \in \mathbb{Q}\}$ ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, der die zu $\mathbb{R}$ aufsteigende Folge $((-\infty,n])_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Damit ist die obige Abbildung für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ meßbar und κ ist ein Markovkern, man vergleiche beispielsweise Bemerkung 8.25 in [23]. Schließlich sei $A \in \sigma(\mathcal{S})$ beliebig, aber fest und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zunächst wieder von der Form $B = (-\infty,q]$ für ein $q \in \mathbb{Q}$. Dann folgt, da N eine λ_0-Nullmenge ist und mit ähnlichen Argumenten wie zuvor:

$$\begin{aligned}
\int_A \kappa(s,B)\,\lambda_0(ds) &= \int_A F(s,q)\,\lambda_0(ds) \\
&= \int_{A\setminus N} f(s,q)\,\lambda_0(ds) \\
&= \int_{A\setminus N} q_0(s,B)\,\lambda_0(ds) \\
&= \int_A q_0(s,B)\,\lambda_0(ds) \\
&= Q_0(A,B),
\end{aligned}$$

Letzteres nach (3.9). Nun ist $Q_0(A,\cdot)$ - für festes A - ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Gleiches gilt wegen der Maßeigenschaft von $\kappa(s,\cdot)$ sowie des Satzes von Beppo-Levi auch für den ersten Ausdruck der vorangegangenen Rechnung. Wir wollen nun den Eindeutigkeitssatz anwenden, um (3.8) nachzuweisen, wobei wir also bereits die Gleichheit der beiden Maße auf dem schnittstabilen Erzeuger $\{(-\infty,q] : q \in \mathbb{Q}\}$ wissen. Wenn wir wie zuvor die aufsteigende Folge $((-\infty,n])_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten, fehlt noch die Endlichkeitsbedingung, die wir zumindest durch Einschränkung der Menge A erhalten: Genauer:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \quad \int_{A\cap S_k} \kappa(s,B)\,\lambda_0(ds) = Q_0(A \cap S_k, B) \tag{3.12}$$

mit S_k wie zuvor. Nun nutzt man abschließend, dass die beiden Ausdrücke (vor ihrer Einschränkung auf S_k) auch in A gelesen Maße sind, sodass wir mit (3.12) für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ beliebig, aber fest wie folgt zum Ziel gelangen:

$$\int_A \kappa(s,B)\,\lambda_0(ds) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A\cap S_k} \kappa(s,B)\,\lambda_0(ds) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_0(A\cap S_k, B) = Q_0(A,B).$$

Wir betrachten nun noch den Fall $m > 1$ und die entsprechende, in Lemma 3.4.4 gefundene Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Zu Q_0 mit den Eigenschaften (a)-(c) definiere man dann

$$\widetilde{Q}_0(A, B) := Q_0(A, \Psi^{-1}(B)) \quad \text{für } A \in \sigma(\mathcal{S}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Dank der Meßbarkeit von Ψ ist dann auch $\widetilde{Q}_0$ wohldefiniert und erfüllt offensichtlich (a)-(c) in entsprechender Weise für $m = 1$. Nach dem bereits Gezeigten existiert somit ein Markovkern $\widetilde{\kappa}$ von S nach $\mathbb{R}$, für den anstelle von (3.8) gilt:

$$\widetilde{Q}_0(A, B) = \int_A \widetilde{\kappa}(s, B)\, \lambda_0(ds), \tag{3.13}$$

jeweils für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann ist aber die gewünschte Abbildung $\kappa : S \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \to [0, 1]$ in Gestalt von

$$S \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \ni (s, B) \mapsto \widetilde{\kappa}\left(s, \left(\Psi^{-1}\right)^{-1}(B)\right)$$

gefunden, wobei man nun wiederum die Meßbarkeit der Umkehrfunktion Ψ^{-1} beachte. Dass κ dann die Eigenschaften eines Markovkerns (von S nach $\mathbb{R}^m$) erfüllt, ist offensichtlich, während wir (3.8) (und somit auch (3.7)) für $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ kurz nachrechnen:

$$\begin{aligned}
Q_0(A, B) &= Q_0(A, \Psi^{-1}(\Psi(B))) \\
&= \widetilde{Q}_0(A, \Psi(B)) \\
&= \int_A \widetilde{\kappa}(s, \Psi(B))\, \lambda_0(ds) \\
&= \int_A \widetilde{\kappa}\left(s, \left(\Psi^{-1}\right)^{-1}(B)\right) \lambda_0(ds) \\
&= \int_A \kappa(s, B)\, \lambda_0(ds).
\end{aligned}$$

Dabei ging neben den verschiedenen Definitionen im 3. Schritt (3.13) ein. Außerdem mache man sich klar, dass wir von allen Eigenschaften des Isomorphismus $\Psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Gebrauch gemacht haben. $\square$

Wir kommen zum angekündigten Hauptergebnis dieses Abschnitts.

Theorem 3.4.5
Zu der Familie von Lévymaßen $(\phi_A)_{A \in \mathcal{S}}$ aus Theorem 3.3.2 existiert genau ein σ-endliches Maß Φ auf $\sigma(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\Phi(A \times B) = \phi_A(B) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m). \tag{3.14}$$

Weiterhin existiert ein simultan σ-endlicher Übergangskern ρ von S nach $\mathbb{R}^m$ derart, dass $\rho(s,\cdot)$ für alle $s \in S$ ein Lévymaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ mit $\Phi = \lambda_M \odot \rho$ ist.

Beweis. Wir verstehen ϕ_A jeweils als geeignetes Lévymaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Setze nun

$$Q_0^*(A,B) := \int_B \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_A(dx) < \infty \tag{3.15}$$

für $A \in \mathcal{S}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Dann haben wir bereits im Beweis von Proposition 3.3.3 gesehen, dass $Q_0^*(\cdot, B)$ für festes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ein Prämaß auf $\mathcal{S}$ ist (insbesondere kann das Argument für die $\emptyset$-Stetigkeit aus Monotoniegründen auf alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ angewendet werden). Für jedes solche B bezeichne $Q_0(\cdot, B)$ die wegen (δ_4) und der Endlichkeit in (3.15) eindeutige Fortsetzung von $Q_0^*(\cdot, B)$ zu einem Maß auf $(S, \sigma(\mathcal{S}))$. Natürlich sind dann auch die Maße $Q_0(\cdot, B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ σ-endlich, insbesondere das Maß $\lambda_0(\cdot) := Q_0(\cdot, \mathbb{R}^m)$. Demzufolge erfüllt die Abbildung Q_0 bis auf (a) bereits alle Voraussetzungen von Theorem 3.4.3. Fur den Nachweis von (a) fixiere man also ein beliebiges $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und betrachte eine disjunkte Folge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Ferner sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine disjunkte Folge wie in (δ_4) vorausgesetzt. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} Q_0\left(A, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_0\left(A \cap S_n, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_0^*\left(A \cap S_n, \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \end{aligned}$$

nach Lemma 3.1.2. Nun nutzen wir, dass sich Q_0^* im zweiten Argument offensichtlich wie ein Maß verhält, während wir im darauf folgenden Schritt von der Nichtnegativität der betrachteten Ausdrücke profitieren.

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} Q_0^*\left(A \cap S_n, B_k\right) \qquad (3.16) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Q_0^*\left(A \cap S_n, B_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} Q_0\left(A, B_k\right). \end{aligned}$$

Wie man beispielsweise anhand von (3.16) erkennt, gilt insbesondere $Q_0(A, \emptyset) = 0$. Damit greift die Aussage von Theorem 3.4.3, d.h. es existiert genau ein σ-endliches Maß Q auf $\sigma(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ mit $Q(A \times B) = Q_0(A, B)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Ferner betrachte man den zugehörigen Markovkern κ von S nach $\mathbb{R}^m$ mit $Q = \lambda_0 \odot \kappa$. Weiter erkennt man anhand der Definition der Prämaße, deren Fortsetzungen λ_0 und λ_M jeweils sind, dass $\lambda_0(A) \le \lambda_M(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$. Damit gilt diese Ungleichung aber offensichtlich auch auf $\sigma(\mathcal{S})$, indem man ein beliebiges $A \in \sigma(\mathcal{S})$ wieder als disjunkte Vereinigung der Mengen $(A \cap S_n) \in \mathcal{S}$ schreibt. Folglich: $\lambda_0 \ll \lambda_M$ und Radon-Nikodým liefert die Existenz einer λ_M-Dichte von λ_0, die wir mit $\tau_0(\cdot)$ bezeichnen und die bis auf eine λ_M-Nullmenge ebenfalls eindeutig bestimmt ist. Darauf aufbauend können wir zunächst die Abbildung ρ via

$$\rho(s,B) := \tau_0(s) \int\limits_{B\setminus\{0\}} \left(\min\{1,\|x\|^2\}\right)^{-1} \kappa(s,dx), \quad (s,B) \in S \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

definieren, d.h. $\rho(s,\cdot)$ ist für alle $s \in S$ das Maß mit $\kappa(s,\cdot)$-Dichte

$$x \mapsto \tau_0(s) \cdot \left(\min\{1,\|x\|^2\}\right)^{-1} \cdot \mathbb{1}_{\Gamma_m}(x). \tag{3.17}$$

Dann erkennt man beispielsweise mit Lemma 14.20 in [23] wieder, dass die Meßbarkeit von $\kappa(\cdot,B)$ sich für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ auf $\rho(\cdot,B)$ überträgt. Andererseits können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\tau_0(s) \leq 1$ für alle $s \in S$ (man beachte $\lambda_0 \leq \lambda_M$ zusammen mit den Ausführungen unter (iii) im Beweis zu Theorem 3.4.3). Denn dann folgt mit (3.17) sogar für alle $s \in S$, dass

$$\int\limits_{\Gamma_m} \min\{1,\|x\|^2\}\, \rho(s,dx) = \tau_0(s) \int\limits_{\Gamma_m} 1\, \kappa(s,dx) \leq 1,$$

da $\kappa(s,\cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. $\rho(s,\cdot)$ ist also nicht nur ein Lévymaß, sondern auch simultan σ-endlich, indem man beispielsweise die Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ mit $D_n := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \geq 1/n\}$ betrachtet und sich von der Existenz einer Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$ mit $\mathbb{1}_{D_n}(x) \leq d_n \cdot \min\{1,\|x\|^2\} \cdot \mathbb{1}_{D_n}(x)$ überzeugt. Weiter gilt für $A \in \mathcal{S}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ beliebig:

$$\int\limits_A \rho(s,B)\, \lambda_M(ds) = \int\limits_A \tau_0(s) \int\limits_{B\setminus\{0\}} (\min\{1,\|x\|^2\})^{-1}\, \kappa(s,dx)\, \lambda_M(ds).$$

Nun nutzen wir, was wir über τ_0 wissen und im Anschluss die Tatsache, dass $Q = \lambda_0 \odot \kappa$ zusammen mit (3.6).

$$\begin{aligned} &= \int\limits_A \int\limits_{B\setminus\{0\}} (\min\{1,\|x\|^2\})^{-1}\, \kappa(s,dx)\, \lambda_0(ds) \\ &= \int\limits_{A\times(B\setminus\{0\})} (\min\{1,\|x\|^2\})^{-1}\, Q(ds,dx). \end{aligned}$$

Um den nächsten Schritt zu verifizieren, beachte man, dass der Integrand quasi konstant im ersten Argument ist. Genauer betrachte man eine monoton wachsende Folge meßbarer Elementarfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) \to (\min\{1, \|x\|^2\})^{-1}\mathbb{1}_{B\setminus\{0\}}(x)$ (punktweise). Dann ist aber auch durch $g_n(s,x) := \mathbb{1}_A(s) \cdot f_n(x)$ eine solche Folge von Elementarfunktionen definiert, die nun punktweise gegen $(\min\{1, \|x\|^2\})^{-1}\mathbb{1}_{A\times(B\setminus\{0\})}(s,x)$ konvergiert. Daher folgt mit dem Satz von Beppo-Levi und nach Wahl von Q unmittelbar:

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{B\setminus\{0\}} (\min\{1, \|x\|^2\})^{-1}\, Q_0(A, dx) \\
&= \int\limits_{B\setminus\{0\}} (\min\{1, \|x\|^2\})^{-1}\, Q_0^*(A, dx),
\end{aligned}
$$

da $A \in \mathcal{S}$. Schließlich entnimmt man (3.15), dass $Q_0^*(A,\cdot)$ die ϕ_A-Dichte $x \mapsto \min\{1, \|x\|^2\}$ besitzt, also:

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{B\setminus\{0\}} 1\, \phi_A(dx) \\
&= \phi_A(B \setminus \{0\}) \\
&= \phi_A(B)
\end{aligned}
$$

nach obiger Vereinbarung, d.h. (3.14) ist erfüllt. Somit ist das gesuchte Maß naheliegenderweise in Gestalt von $(\lambda_M \odot \rho)$ gefunden. Insbesondere folgt die behauptete σ-Endlichkeit nach Proposition 3.4.2, wobei wir bereits gezeigt haben, dass λ_M ebenfalls σ-endlich ist. Für die noch offene Eindeutigkeit von Φ bietet sich vor dem Hintergrund von (3.14) die Betrachtung des schnittstabilen Erzeugers $\mathcal{C} := \{A \times B : A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\}$ von $\sigma(\mathcal{S}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ an, wobei Φ dann speziell auf den Mengen der Form

$$S_n \times (\{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \geq 1/n\}) \in \mathcal{C}, \quad n \in \mathbb{N}$$

endlich ist. □

Das folgende Korollar rechtfertigt, dass wir im Folgenden von *dem* Übergangskern $\rho = \rho_M$ sprechen können.

Korollar 3.4.6
Der Übergangskern ρ aus Theorem 3.4.5 ist bis auf eine λ_M-Nullmenge eindeutig festgelegt.

Beweis. Die Idee ist absolut analog zu der in Theorem 3.4.3, lediglich der dort betrachtete Erzeuger $\mathcal{M}$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ist ungeeignet. Wenn wir aber zeigen können, dass

$$\mathcal{M}' := \{A_{q_1,q_2} \,|\, q_1 \in \mathbb{Q}_{<0}, q_2 \in \mathbb{Q}_{>0}\} \quad \text{mit} \quad A_{q_1,q_2} := \{0\} \cup (-\infty, q_1] \cup [q_2, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ein (offensichtlich abzählbarer und schnittstabiler) Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, so ist

$$\mathcal{M} := \{M_1 \times \cdots \times M_m \,|\, M_j \in \mathcal{M}' \text{ für } j = 1, .., m\}$$

wegen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ auch ein abzählbarer und schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Dabei ist jedes $\rho(s, \cdot)$ ein Lévymaß (mit Masse 0 im Ursprung), also folgt die Endlichkeit von $\rho(s, \cdot)$ auf den Mengen

$$A_{-1/n,1/n} \times \cdots \times A_{-1/n,1/n} \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathbb{N},$$

die (für $n \to \infty$) gegen $\mathbb{R}^m$ aufsteigen. Schließlich reicht es offenbar zu zeigen, dass $\mathcal{M}^* \subset \sigma(\mathcal{M}')$, denn von $\mathcal{M}^* := \{(-\infty, q] \,|\, q \in \mathbb{Q}\}$ wissen wir bereits, dass es sich um einen Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ handelt. So erhalten wir für alle $q_1 \in \mathbb{Q}_{<0}$ zunächst, dass

$$\{0\} \cup (-\infty, q_1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\{0\} \cup (-\infty, q_1] \cup [n, \infty)) \in \sigma(\mathcal{M}')$$

und somit - neben $\{0\} \in \sigma(\mathcal{M}')$ - auch, dass

$$(-\infty, 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{0\} \cup (-\infty, -1/n]) \in \sigma(\mathcal{M}').$$

Durch sukzessive Differenzbildung gehören also auch Mengen vom Typ $(q_1, 0)$ sowie $(-\infty, q_1]$ für alle $q_1 \in \mathbb{Q}_{<0}$ zu $\sigma(\mathcal{M}')$. Insbesondere haben wir die zu zeigende Inklusion somit bereits für alle Mengen $(-\infty, q]$ mit $q \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$ nachgewiesen. Ganz analog überlegt man sich, dass auch die entsprechenden Symmetriemengen enthalten sind, z.B. $[0, \infty)$, $(0, q_2)$ sowie $[q_2, \infty)$ für alle $q_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$. Schreibe $(-\infty, q_2) = \mathbb{R} \setminus [q_2, \infty)$, dann folgt für alle $q_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$:

$$(-\infty, q_2] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, q_2 + 1/n) \in \sigma(\mathcal{M}'),$$

was insgesamt die Behauptung liefert. □

Wie angekündigt möchten wir noch eine alternative Darstellung der charakteristischen Funktion von $M(A)$ gewinnen. Das entsprechende Resultat für $m = 1$ in [35] besitzt jedoch bereits eine Ungenauigkeit, die nun zunächst korrigiert und auf unseren Fall angepasst werden soll.

Lemma 3.4.7
In der Situation von Theorem 3.3.2 existieren $\sigma(\mathcal{S})$-meßbare und bis auf λ_M-Nullmengen eindeutige Abbildungen $a : S \to \mathbb{R}^m$ und $b : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\int_A a(s)\, \lambda_M(ds) = \gamma_A \quad \text{sowie} \quad \int_A b(s)\, \lambda_M(ds) = Q_A$$

für alle $A \in \mathcal{S}$. Die genannten Integrale existieren insbesondere (komponentenweise). Wir nennen die Abbildungen a und b *(vektorielle Prä-)Dichten* von γ und Q.

Beweis. Wir beginnen mit einer allgemeinen Überlegung: Sei $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ ein vektorielles Prämaß, dann wissen wir, dass es sich bei der positiven Variation T^+ respektive der negativen Variation T^- um endliche Prämaße auf $\mathcal{S}$ (mit Werten in $[0, \infty)$) handelt. Insbesondere gilt $T = T^+ - T^-$ sowie $|T| = T^+ + T^-$. Weiter können wir diese drei Prämaße (auf eindeutige Weise) zu σ-endlichen Maßen $\widehat{T^+}, \widehat{T^-}$ und $\widehat{|T|}$ auf $\sigma(\mathcal{S})$ fortsetzen. Wenn wir nun noch voraussetzen, dass $\widehat{|T|} \ll \lambda_M$, dann folgt auch, dass $\widehat{T^+} \ll \lambda_M$ beziehungsweise $\widehat{T^-} \ll \lambda_M$, denn aus $T^+ \leq |T|$ folgt stets $\widehat{T^+} \leq \widehat{|T|}$ (man nutze (δ_4) und Lemma 3.1.2 wie früher); entsprechend für T^- und die zugehörige Fortsetung. Insgesamt liefert der Satz von Radon-Nikodým also die Existenz von $\sigma(\mathcal{S})$-meßbaren Abbildungen $f^+ : S \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ und $f^- : S \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, sodass für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ gilt:

$$\widehat{T^+}(A) = \int\limits_A f^+(s)\, \lambda_M(ds), \quad \widehat{T^-}(A) = \int\limits_A f^-(s)\, \lambda_M(ds). \tag{3.18}$$

Da es sich um Fortsetzungen von endlichen Prämaßen handelt, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ klar, dass $f^+(s)\mathbb{1}_{S_n}(s) < \infty$ für λ_M-fast alle $s \in S$ (wobei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine disjunkte Folge wie in (δ_3) sei). Nach abzählbarer Vereinigung erkennt man somit aber auch, dass $f^+(s) < \infty$ für alle $s \in S \backslash N_+$, wobei N_+ eine geeignete λ_M-Nullmenge sei. Entsprechend argumentiert man für f^- und erhält eine weitere λ_M-Nullmenge N_-. Setze $\widetilde{f^+} := f^+\, \mathbb{1}_{N_+^c}$ sowie $\widetilde{f^-} := f^-\, \mathbb{1}_{N_-^c}$, dann gilt (3.18) entsprechend weiterhin für die $[0, \infty)$-wertigen Abbildungen $\widetilde{f^+}$ und $\widetilde{f^-}$. Somit erfüllt die $\mathbb{R}$-wertige Abbildung $f := \widetilde{f^+} - \widetilde{f^-}$ für alle $A \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_A |f|(s)\, \lambda_M(ds) &\leq \int\limits_A \widetilde{f^+}(s)\, \lambda_M(ds) + \int\limits_A \widetilde{f^-}(s)\, \lambda_M(ds)\\ &= \widehat{T^+}(A) + \widehat{T^-}(A)\\ &= T^+(A) + T^-(A)\\ &< \infty,\end{aligned}$$

d.h. f ist über $A \in \mathcal{S}$ integrierbar und ganz analog erhält man, dass

$$\int\limits_A f(s)\, \lambda_M(ds) = T^+(A) - T^-(A) = T(A).$$

Damit ist unsere eigentliche Aussage im Wesentlichen gezeigt, denn die Abbildungen γ und Q sind gerade vektorielle Prämaße auf $\mathcal{S}$. Folglich sind auch die jeweiligen Komponentenabbildungen $\mathbb{R}$-wertige Prämaße, entsprechend lassen sich die gesuchten Abbildungen a und b komponentenweise mittels des gerade beschriebenen Verfahrens konstruieren. Lediglich die Zusatzvoraussetzung $\widehat{|T|} \ll \lambda_M$ muss für die vorliegende Situation noch überprüft werden. Dabei gilt nach (3.2) auf $\mathcal{S}$ sogar $|\gamma| \leq \lambda_M$ und somit mit der gleichen Argumentation wie zuvor auch wieder für die jeweiligen Fortsetzungen auf $\sigma(\mathcal{S})$. Insbesondere sind die (Fortsetzungen der) totalen Variationen aller Komponentenabbildungen von γ absolut stetig bezüglich λ_M, d.h. die obige Vorgehensweise kann angewendet werden. Bleibt zu zeigen, dass auf $\mathcal{S}$ auch die Beziehung $|Q| \leq \lambda_M$ gilt. Seien dazu $A \in \mathcal{S}$ und $R \in \Pi(A)$ beliebig, aber fest, wobei die Vereinigung der Mengen aus R ohne Einschränkung der Menge A selbst entspreche. Wir konnten bereits zeigen, dass $\|Q.\| \leq \mathrm{tr}(Q.)$ auf $\mathcal{S}$ und dass die Abbildung $\mathrm{tr}(Q.)$ ebenfalls ein Prämaß auf $\mathcal{S}$ ist (man vergleiche jeweils den Beweis zu Theorem 3.3.5). Also:

$$\sum_{B \in R} \|Q_B\| \leq \sum_{B \in R} \mathrm{tr}(Q_B) = \mathrm{tr}(Q_A),$$

d.h. $|Q|(A) \leq \mathrm{tr}(Q_A) \leq \lambda_M(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$, Letzteres wieder nach (3.2). Damit ist die Existenz der Abbildungen a und b bewiesen.
Hinsichtlich der Eindeutigkeitsaussage betrachte man exemplarisch die Abbildung a (analog für b). Dabei reicht es zu zeigen, dass die Komponenten von a jeweils eindeutig sind (bis auf eine λ_M-Nullmenge). So erkennt man durch Einschränkung von γ zu $\gamma_\cdot^{(n)} := \gamma_{\cdot \cap S_n}$ (mit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie zuvor), dass es sich bei den Komponenten von $a^{(n)}(s) := a(s)\mathbb{1}_{S_n}(s)$ um Dichten jener (endlichen) signierten Maße auf $\sigma(\mathcal{S})$ handelt, die man aus den Komponenten von $\gamma^{(n)}$ gewinnt (vergleiche erneut Lemma 3.1.2). Schließlich gilt die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Radon-Nikodým aber auch für signierte Maße, sodass diese abzählbare Zerlegung des Problems das Gewünschte liefert. $\square$

In diesem Zusammenhang bietet es sich an, noch die folgende Beobachtung zu notieren, die im nächsten Kapitel von Bedeutung sein wird.

Korollar 3.4.8
Sei $b : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ die Abbildung aus Lemma 3.4.7.

(i) Es existiert eine λ_M-Nullmenge B_0, sodass gilt:

$$\forall s \in B_0^c \;\; \forall x \in \mathbb{R}^m : \quad \langle b(s)x, x\rangle \geq 0.$$

(ii) $b(s)$ ist für λ_M-fast alle $s \in S$ symmetrisch.

Beweis. Betrachte $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in (δ_4). Für (i) seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^m$ zunächst beliebig, aber fest. Dann ist die Abbildung $A \mapsto Q_{A\cap S_n}$ nach Lemma 3.1.2 ein vektorielles Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$. Aus Stetigkeitsgründen beschreibt $A \mapsto \langle Q_{A\cap S_n}x, x\rangle$ folglich ein Maß (mit Werten in $[0,\infty)$, denn $Q_{A\cap S_n}$ ist positiv-semidefinit). Dieses Maß ist mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und früheren Überlegungen nun offensichtlich auch absolut stetig bezüglich λ_M, sodass eine nichtnegative λ_M-Dichte existiert, die wir mit $f_{n,x}$ bezeichnen. Andererseits bedeutet die komponentenweise Integrierbarkeit von $b(\cdot)$ (zumindest auf Mengen aus $\mathcal{S}$), dass für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ gilt:

$$\langle Q_{A\cap S_n}x, x\rangle = \left\langle \int_{A\cap S_n} b(s)\,\lambda_M(ds)\,x, x \right\rangle = \int_A \langle b(s)x, x\rangle \mathbb{1}_{S_n}(s)\,\lambda_M(ds).$$

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Radon-Nikodým liefert somit die Existenz einer λ_M-Nullmenge $B_{n,x}$ mit $\langle b(s)x, x\rangle \mathbb{1}_{S_n}(s) = f_{n,x}(s) \geq 0$ für alle $s \in B_{n,x}^c$. Dann argumentiert man wie an anderer Stelle die Existenz einer weiteren λ_M-Nullmenge B_x mit $\langle b(s)x, x\rangle \geq 0$ für alle $s \in B_x^c$. Schließlich gibt es also auch eine λ_M-Nullmenge B_0, sodass

$$\forall s \in B_0^c \ \ \forall x \in \mathbb{Q}^m : \quad \langle b(s)x, x\rangle \geq 0.$$

Da $\mathbb{Q}^m \subset \mathbb{R}^m$ dicht liegt und das Skalarprodukt sogar in beiden Argumenten (simultan) stetig ist, folgt (i).
Für (ii) seien nun $i, j \in \{1, ..., m\}$ sowie $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Wenn wir mit $Q_A^{i,j}$ die entsprechende Komponente von Q_A bezeichnen, so handelt es sich auch bei der Abbildung $A \mapsto Q_{A\cap S_n}^{i,j}$ um ein endliches, signiertes Maß; Gleiches gilt für $A \mapsto (Q_{A\cap S_n}^{i,j} - Q_{A\cap S_n}^{j,i})$. Diese Abbildung ist aber aufgrund der Symmetrie von Q. nun einerseits konstant 0, besitzt also die Nullfunktion als λ_M-Dichte, andererseits genießt sie gemäß Lemma 3.4.7 für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ die Darstellung

$$Q_{A\cap S_n}^{i,j} - Q_{A\cap S_n}^{j,i} = \int\limits_A (b(s)^{i,j} - b(s)^{ji})\mathbb{1}_{S_n}(s)\, \lambda_M(ds),$$

wobei $b(s)^{ij}$ und $b(s)^{ji}$ die entsprechenden Komponenten von $b(s)$ seien. Also argumentiert man wie zuvor, dass $(b(s)^{i,j} - b(s)^{ji})\mathbb{1}_{S_n}(s) = 0$ für λ_M-fast alle $s \in S$ und gelangt nach Vereinigung abzählbar vieler λ_M-Nullmengen zur Behauptung. □

In jedem Falle ist die folgende Abbildung $K : \mathbb{R}^m \times S \to \mathbb{C}$ in Anlehnung an [35] wohldefiniert und bis auf eine λ_M-Nullmenge bereits eindeutig durch M festgelegt.

$$K(t,s) := \mathrm{i}\langle a(s), t\rangle - \frac{1}{2}\langle b(s)t, t\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,x\rangle} - 1 - \mathrm{i}\frac{\langle t, x\rangle}{1 + \|x\|^2} \right) \rho(s, dx). \tag{3.19}$$

Außerdem bemerken wir, dass die Abbildung $t \mapsto K(t, s)$ für alle $s \in S$ stetig ist; dies ist für die beiden vorderen Summanden sofort klar, während der hintere gerade der log-charakteristischen Funktion der unendlich-teilbaren Verteilung mit Tripel $[0, 0, \rho(s, \cdot)]$ entspricht.

Proposition 3.4.9
Sei M ein ISRM wie in Theorem 3.3.2. Dann kann die charakteristische Funktion von $M(A)$ fur alle $A \in \mathcal{S}$ auch wie folgt geschrieben werden:

$$\widehat{\mathcal{L}}(M(A))(t) = \exp\left(\int\limits_A K(t,s)\, \lambda_M(ds) \right), \quad t \in \mathbb{R}^m.$$

Insbesondere existiert das genannte Integral.

Beweis. Seien $A \in \mathcal{S}$ und $t \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest. Dann erkennt man gemäß Lemma 3.4.7 wieder (komponentenweise Betrachtung), dass das folgende Integral existiert mit

$$\int_A \langle a(s), t \rangle \, \lambda_M(ds) = \left\langle \int_A a(s) \, \lambda_M(ds), t \right\rangle = \langle \gamma_A, t \rangle.$$

Ganz analog überzeugt man sich von der Existenz und dem Wert des Integrals

$$\int_A \langle b(s)t, t \rangle \, \lambda_M(ds) = \langle Q_A \, t, t \rangle.$$

Wegen $M(A) \sim [\gamma_A, Q_A, \phi_A]$ bleibt also lediglich zu zeigen, dass das folgende Integral existiert (wobei $h(t,x)$ der Integrand des Integrals in (3.19) sei) und dass gilt:

$$\int_A \left(\int_{\mathbb{R}^m} h(t,x) \, \rho(s,dx) \right) \lambda_M(ds) = \int_{\mathbb{R}^m} h(t,x) \, \phi_A(dx). \tag{3.20}$$

Nun ist aber für die Existenzfrage hinreichend, dass das entsprechende Doppelintegral über $|h(\cdot,\cdot)|$ endlich ist. In dieser Situation können wir jedoch (3.6) verwenden und wissen wegen $\lambda_M \odot \rho = \Phi$, dass

$$\int_A \left(\int_{\mathbb{R}^m} |h(t,x)| \, \rho(s,dx) \right) \lambda_M(ds) = \int_{S \times \mathbb{R}^m} |h(t,x)| \cdot \mathbb{1}_A(s) \, \Phi(ds,dx).$$

Andererseits gilt $\Phi(A \times B) = \phi_A(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, da $A \in \mathcal{S}$. Daher erlaubt die Struktur des Integranden, wie im Beweis zu Theorem 3.4.5 angedeutet, das Folgende:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^m} |h(t,x)| \, \phi_A(dx) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

da ϕ_A ein Lévymaß ist. Somit kann aber erneut die Aussage von (3.6) aktiviert werden, um ganz analog Gleichheit im Sinne von (3.20) zu erzielen. $\square$

3.5 Atomfreie Zufallsmaße

Wir kommen in diesem Abschnitt der Ankündigung nach, dass die unendliche Teilbarkeit der betrachteten Zufallsmaße unter einer gewissen Bedingung bereits implizit gegeben ist. Diese Bedingung entspricht der Atomfreiheit im Sinne von [34] und erscheint anhand der folgenden Definition natürlich.

Definition 3.5.1
Sei M ein ISRM wie in Definition 3.3.1.

(a) Eine Menge $A \in \mathcal{S}$ heißt *Atom von* M, falls für alle $B \in \mathcal{S}$ gilt:

$$M(A \cap B) = 0 \quad \text{fast sicher} \quad \text{oder} \quad M(A \cap B) = M(A) \quad \text{fast sicher.}$$

(b) M selbst heißt *atomfrei*, falls für jedes Atom A gilt: $M(A) = 0$ fast sicher.

Auch die nachfolgende Proposition ist analog zu der in [34], jedoch hier in etwas allgemeinerer Form. Insbesondere lohnt es sich, den dort ausgelassenen Beweis hier auszuführen, wobei M nach wie vor ein ISRM wie in Definition 3.3.1 sei.

Proposition 3.5.2
M ist genau dann atomfrei, wenn für alle $A \in \mathcal{S}$ mit $\mathbb{P}(M(A) \neq 0) > 0$ gilt: Es existieren $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ disjunkt, sodass $\mathbb{P}(M(A \cap A_i) \neq 0) > 0$ für $i = 1, 2$.

Beweis. Sei M zunächst atomfrei. Dann nehmen wir indirekt an, es gebe eine Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $\mathbb{P}(M(A) \neq 0) > 0$, sodass für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ disjunkt gilt:

$$\mathbb{P}(M(A \cap A_1) \neq 0) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbb{P}(M(A \cap A_2) \neq 0) = 0. \tag{3.21}$$

Sei nun $B \in \mathcal{S}$ beliebig, aber fest, so betrachte man konkret die disjunkten Mengen $A_1 := B$ und $A_2 := A \setminus B$ aus $\mathcal{S}$. Nach (2) in Definition 3.3.1 folgt dann, dass

$$M(A) = M(A \cap B) + M(A \cap (A \setminus B)) \quad \text{fast sicher.} \tag{3.22}$$

Gemäß (3.21) sind nun aber zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder gilt $M(A \cap B) = 0$ oder aber

$$M(A \cap (A \setminus B)) = 0 \quad \overset{(3.22)}{\Rightarrow} \quad M(A) = M(A \cap B),$$

jeweils fast sicher. Da $B \in \mathcal{S}$ beliebig gewählt war, ist A also in jedem Falle ein Atom und wegen der vorausgesetzten Atomfreiheit von M bedeutet dies im Widerspruch zu $\mathbb{P}(M(A) \neq 0) > 0$, dass $M(A) = 0$ fast sicher.
Gehen wir umgekehrt ebenfalls indirekt vor und nehmen an, M sei nicht atomfrei, so müsste ein Atom $A \in \mathcal{S}$ mit $\mathbb{P}(M(A) \neq 0) > 0$ existieren. Nach dem, was wir in dieser Beweisrichtung voraussetzen, existieren dann jedoch disjunkte Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ mit $\mathbb{P}(M(A \cap A_i) \neq 0) > 0$ für $i = 1, 2$. Da A zugleich ein Atom ist, folgt also

$$M(A \cap A_1) = M(A) = M(A \cap A_2) \quad \text{fast sicher.} \tag{3.23}$$

Nun schreiben wir $A \setminus (A_1 \cup A_2) = A \cap [A \setminus (A_1 \cup A_2)]$, um mit dem gleichen Argument zu erkennen, dass

$$M(A \setminus (A_1 \cup A_2)) = 0 \quad \text{fast sicher} \quad \text{oder} \quad M(A \setminus (A_1 \cup A_2)) = M(A) \quad \text{fast sicher.} \tag{3.24}$$

Somit liefert Eigenschaft (2) eines ISRM:

$$\begin{aligned} M(A) &= M(A \setminus (A_1 \cup A_2)) + M(A \cap A_1) + M(A \cap A_2) \\ &= M(A \setminus (A_1 \cup A_2)) + 2M(A) \end{aligned}$$

nach (3.23) und gemäß (3.24) schließlich ein $k \in \{2,3\}$, sodass

$$= k \cdot M(A) \quad \text{fast sicher.}$$

Daraus folgt aber in jedem Falle, dass $M(A) = 0$ fast sicher. Widerspruch! □

Da per Definition zwingend $M(\emptyset) = 0$ erfüllt ist, erkennt man also insbesondere, dass für alle Einpunktmengen $\{a\} \in \mathcal{S}$ folgt: $M(\{a\}) = 0$ fast sicher, sofern M atomfrei ist (die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht); unsere Definition ist somit beispielsweise stärker als die in [46]. Dies hängt damit zusammen, dass dort $\mathcal{S}$ in Gestalt von $\mathcal{B}([0,1])$ eine stärkere und viel konkretere Struktur besitzt. In jedem Falle können wir nun die gewünschte Aussage formulieren:

Theorem 3.5.3
Seien $\mathcal{S}$ ein δ-Ring und M ein darauf atomfreies ISRM mit Werten in $\mathbb{R}^m$. Dann ist der Zufallsvektor $M(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$ unendlich-teilbar.

Dass die Umkehrung der gerade formulierten Aussage nicht gilt, zeigt bereits das triviale Beispiel $\mathcal{S} = \{\emptyset, S\}$ mit $M(\emptyset) = 0$ und $M(S) = 1$ (jeweils konstant). Betrachtet man auf dem genannten $\mathcal{S}$ hingegen das nicht unendlich-teilbare ISRM M', definiert durch $M'(\emptyset) = 0$ und $M'(S) = X$ mit einem $\frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_x)$-verteilten Zufallsvektor X sowie $x \in \Gamma_m$ beliebig, dann erkennt man zugleich, dass unsere Definition der Atomfreiheit nicht zu stark ist, d.h. jene von [46] würde in unserem allgemeinen Rahmen nicht das gewünschte Ergebnis liefern. Für den Beweis der obigen Aussage müssen wir jedoch noch etwas Vorarbeit leisten. Dabei folgen wir zunächst im Wesentlichen den für $m = 1$ formulierten Ideen in [33] und [34].

Lemma 3.5.4
Sei $g : \mathbb{R} \to [-1,1]$ gegeben durch

$$g(y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } y = 0 \\ \frac{\sin(y)}{y}, & \text{falls } y \neq 0. \end{cases}$$

Dann lässt sich für alle $\delta > 0$ die Funktion $h_\delta : \mathbb{R}^m \to [0,2]$ durch

$$h_\delta((x_1, ..., x_m)) := 1 - \prod_{j=1}^{m} g(\delta x_j)$$

definieren und für alle $\gamma > 0$ existiert ein $C(\delta,\gamma) \in (0,1)$, sodass für alle x mit $\|x\| \geq \gamma$ gilt: $h_\delta(x) \geq C(\delta,\gamma)$.

Beweis. Fixiere ein $\varepsilon \in (1, \frac{\pi}{2})$, so folgt für $\rho > 0$ beliebig mit der Stetigkeit von $\sin(x)/x$ auf $[\min\{1, \delta\}, \varepsilon]$ (der Fall $|x| \geq \varepsilon$ ist offensichtlich) und dem Mittelwertsatz zunächst die Existenz eines $0 < \tilde{C}(\rho) < 1$ mit

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathbb{1}_{\{x:|x|\geq\rho\}} \leq \tilde{C}(\rho), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.25}$$

indem man beachtet, dass $|\cos(\xi)| < 1$ für alle $\xi \in (0, \varepsilon)$. Seien nun $\delta > 0$ und $\gamma > 0$ beliebig, aber fest. Wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^m$ existiert dann ein $K > 0$, sodass

$$M := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \geq \gamma\} \subset \{x \in \mathbb{R}^m : \|\delta x\|_\infty \geq K\delta\gamma\}.$$

Mit $\tilde{C}(K\delta\gamma)$ aus (3.25) ist dann die gesuchte Konstante $C(\delta, \gamma) := 1 - \tilde{C}(K\delta\gamma)$ gefunden, denn für $x = (x_1, ..., x_m) \in M$ beliebig muss per Definition von $\|\cdot\|_\infty$ ein $l \in \{1, ..., m\}$ mit $|\delta x_l| \geq K\delta\gamma$ existieren. Somit folgt aber in jedem Falle:

$$\left|\prod_{j=1}^{m} g(\delta x_j)\right| \leq 1^{m-1}|g(\delta x_l)| = \left|\frac{\sin(\delta x_l)}{\delta x_l}\right| \leq \tilde{C}(K\delta\gamma).$$

Wegen $\tilde{C}(K\delta\gamma) \in (0, 1)$ folgt schließlich über

$$h_\delta(x) \geq 1 - \left|\prod_{j=1}^{m} g(\delta x_j)\right| \geq 1 - \tilde{C}(K\delta\gamma)$$

die Behauptung. □

Das folgende Ergebnis ist eine direkte Verallgemeinerung des Falles $m = 1$ gemäß [33], für die wir gerade die geeignete Vorarbeit geleistet haben.

Proposition 3.5.5
Sei X ein $\mathbb{R}^m$-wertiger Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion ω. Dann existiert für alle $\delta > 0$ ein $C'(\delta) > 0$, sodass

$$\mathbb{P}(\|X\| \geq \delta) \leq C'(\delta) \int\limits_{[-\delta,\delta]^m} |1 - \omega(t)|\, dt.$$

Beweis. Sei $\mu = \mathcal{L}(X)$, dann gilt zunächst aus Symmetriegründen und wegen des Satzes von Tonelli:

$$\int\limits_{[-\delta,\delta]^m} (1 - \omega(t))\, dt = \int\limits_{[-\delta,\delta]^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,y\rangle}\right) \mu(dy)\, dt$$

$$= \int_{[-\delta,\delta]^m} \int_{\mathbb{R}^m} (1 - \cos\langle t, y\rangle)\, \mu(dy)\, dt - \mathrm{i} \int_{[-\delta,\delta]^m} \int_{\mathbb{R}^m} \sin\langle t, y\rangle\, \mu(dy)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{[-\delta,\delta]^m} (1 - \cos\langle t, y\rangle)\, dt\, \mu(dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left[(2\delta)^m - \int_{[-\delta,\delta]^m} \cos\langle t, y\rangle\, dt \right] \mu(dy) \qquad \in \mathbb{R},$$

wobei offensichtlich alle genannten Integrale existieren. Dabei lässt sich das Innere der letzten Zeile für $y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ und nach dem Satz von Fubini wie folgt lesen:

$$\int_{[-\delta,\delta]^m} \cos\langle t, y\rangle\, dt = \mathrm{Re} \int_{[-\delta,\delta]^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,y\rangle}\, dt$$
$$= \mathrm{Re} \prod_{j=1}^{m} \int_{[-\delta,\delta]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_j y_j}\, dt_j.$$

Wie zuvor leistet die Integration über den Imaginärteil aus Symmetriegründen jeweils keinen Beitrag, sodass der Realteil schließlich obsolet ist:

$$= \prod_{j=1}^{m} \int_{[-\delta,\delta]} \cos(t_j y_j)\, dt_j$$
$$= (2\delta)^m \prod_{j=1}^{m} g(\delta y_j)$$

mit g wie in Lemma 3.5.4. Insgesamt also:

$$\int_{[-\delta,\delta]^m} |1 - \omega(t)|\, dt \geq \mathrm{Re} \int_{[-\delta,\delta]^m} (1 - \omega(t))\, dt$$
$$= (2\delta)^m \int_{\mathbb{R}^m} h_\delta(y)\, \mu(dy)$$
$$\geq (2\delta)^m \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{[\delta,\infty)}(\|y\|)\, h_\delta(y)\, \mu(dy)$$
$$\geq (2\delta)^m\, \tilde{C}(\delta,\delta) \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{[\delta,\infty)}(\|y\|)\, \mu(dy)$$
$$= (2\delta)^m\, \tilde{C}(\delta,\delta)\, \mathbb{P}(\|X\| \geq \delta).$$

Dabei haben wir die Bezeichnungen sowie die Aussage von Lemma 3.5.4 aufgegriffen. Insbesondere gilt $\tilde{C}(\delta,\delta) > 0$, d.h. die Behauptung folgt mit $C'(\delta) := \left((2\delta)^m\, \tilde{C}(\delta,\delta)\right)^{-1}$.
□

Die Differenz $1-\omega(t)$ wird auch im nächsten Lemma von Bedeutung sein, sodass wir daraus im Anschluss eine Definition ableiten werden, die es uns ermöglichen wird, die zuvor eingeführten Zufallsmaße in geeigneter Weise mit deterministischen Objekten zu assoziieren.

Lemma 3.5.6
Sei X ein $\mathbb{R}^m$-wertiger Zufallsvektor und bezeichne ω seine charakteristische Funktion.

(a) Falls $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$, so gilt für alle $T > 0$:

$$\sup\{|1-\omega(t)| : \|t\|_\infty \leq T\} > 0. \tag{3.26}$$

(b) Gelte (3.26) für ein $T > 0$, so folgt stets $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$.

Beweis. Zu (a): Angenommen, es gäbe ein $T > 0$ mit $\sup\{|1-\omega(t)| : \|t\|_\infty \leq T\} = 0$, so folgt $\omega(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ mit $\|t\|_\infty \leq T$. Wir werden nun zeigen, dass dann aber auch $\omega(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ mit $\|t\|_\infty \leq 2T$ und somit (iterativ) $\omega(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ gelten muss. Dies würde aber im Widerspruch zur Voraussetzung $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$ bedeuten, dass $X = 0$ fast sicher. Dazu erinnern wir zunächst an Proposition 1.3.4 in [31], wonach für jede charakteristische Funktion ω' und für alle $t \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$1 - \mathrm{Re}\ \omega'(2t) \leq 4(1 - \mathrm{Re}\ \omega'(t)). \tag{3.27}$$

Sei nun Y ein von X unabhängiger Zufallsvektor mit $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X)$ und bezeichne ω' die charakteristische Funktion des Zufallsvektors $X - Y$. Wegen $\omega'(t) = |\omega(t)|^2 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ liefert (3.27) also, dass

$$0 \leq 1 - |\omega(2t)|^2 \leq 4(1 - |\omega(t)|^2),$$

ebenfalls für alle $t \in \mathbb{R}^m$. Gemäß Annahme folgt schließlich für alle $t \in \mathbb{R}^m$ mit $\|t\|_\infty \leq T$:

$$1 - |\omega(2t)|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega(2t) = 0.$$

Da $\{t : \|t\|_\infty \leq 2T\} = \{2t : \|t\|_\infty \leq T\}$ folgt der bereits angekündigte Widerspruch. Teil (b) erkennt man erneut indirekt, da $\mathbb{P}(X \neq 0) = 0$ zur Folge hat, dass $\omega(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$.
□

Sei M ein ISRM wie in Definition 3.3.1 und bezeichne $f(\cdot, A)$ die charakteristische Funktion von $M(A)$ für $A \in \mathcal{S}$. Dann definieren wir für alle $T > 0$ die Abbildung $g_T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$g_T(A) := \sup\{|1 - f(t,A)| : \|t\|_\infty \leq T\}, \quad A \in \mathcal{S}. \tag{3.28}$$

Nun ist g_T prinzipiell nicht σ-additiv, dafür jedoch die zugehörige totale Variation. Dabei nutzen wir die Beweisidee von Theorem 3.2.2, da die Aussage von Lemma 1 in [32] nicht greift (man beachte, dass die totale Variation von g_T im Allgemeinen nicht endlich ist).

Proposition 3.5.7
Die totale Variation von g_T ist für alle $T > 0$ ein Prämaß auf $\mathcal{S}$ (mit Werten in $[0, \infty]$).

Beweis. Sei $T > 0$ beliebig, aber fest. Dann ist $|g_T|(\emptyset) = 0$ klar, da $M(\emptyset) = 0$ fast sicher. Wir können nun den Beweis von Theorem 2.7 in [33] in analoger Weise abschreiben, um (mittels der *Weierstraßschen Produktungleichung*) zu erkennen, dass die Abbildung $\mathcal{S} \ni A \mapsto |1 - f(t, A)|$ für jedes feste $t \in \mathbb{R}^m$ zumindest σ-subadditiv ist, d.h. für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ paarweise disjunkter Mengen mit $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$ gilt:

$$|1 - f(t, A)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |1 - f(t, A_n)|.$$

Dann folgt aber aus Monotoniegründen und da sich das Supremum hier ebenfalls subadditiv verhält insbesondere:

$$g_T(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_T(A_n),$$

d.h. auch $A \mapsto g_T(A)$ ist σ-subadditiv. Nun erkennt man, dass die σ-Subadditivität zusammen (!) mit der Nichtnegativität von g_T ausreicht, um den wesentlichen Teil des Beweises von Theorem 3.2.2 entsprechend zu übertragen. Beides wird auch benötigt, um mit der dort genannten Quelle zuvor die endliche Additivität von $|g_T|$ zu beweisen. □

Indem wir Prämaße μ auf $\mathcal{S}$ via $\mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{S}$ als deterministische *Zufallsvariablen* (auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) verstehen, können die oben eingeführten Begriffe Atom, Atomfreiheit et cetera entsprechend übernommen werden; die betrachteten *Wahrscheinlichkeiten* sind dann lediglich Elemente aus $\{0, 1\}$. Somit können wir nun auch die letzte Hilfsaussage formulieren.

Lemma 3.5.8
Falls M atomfrei, so trifft dies auch für alle $T > 0$ auf die totale Variation von g_T zu. Existiert umgekehrt ein $T > 0$, für das die totale Variation von g_T atomfrei ist, so ist auch M atomfrei.

Beweis. Sei M zunächst atomfrei und $T > 0$ beliebig, aber fest. Zu jedem $A \in \mathcal{S}$ mit $|g_T|(A) > 0$ existiert dann ein $A' \in \mathcal{S}$ mit $A' \subset A$ und $g_T(A') > 0$. Vor dem Hintergrund von Lemma 3.5.6 (b) muss also $\mathbb{P}(M(A') \neq 0) > 0$ gelten. Somit existieren nach Proposition 3.5.2 auch $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ disjunkt mit $\mathbb{P}(M(A' \cap A_i) \neq 0) > 0$. Nach Lemma 3.5.6 (a) bedeutet dies aber schließlich, dass $g_T(A' \cap A_i) > 0$, jeweils für $i = 1, 2$. Insbesondere folgt: $|g_T|(A' \cap A_i) = |g_T|(A \cap (A' \cap A_i)) > 0$, was in Analogie zu Proposition 3.5.2 beweist, dass $|g_T|$ atomfrei ist.

Sei umgekehrt $|g_T|$ für ein $T > 0$ atomfrei, dann betrachte man wieder ein beliebiges $A \in \mathcal{S}$ mit $\mathbb{P}(M(A) \neq 0) > 0$. Wie zuvor und für das obige $T > 0$ folgt dann, dass $g_T(A) > 0$. Insbesondere gilt $|g_T| > 0$, sodass nach Voraussetzung und Proposition 3.5.2 $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ disjunkt mit $|g_T|(A \cap A_i) > 0$ existieren ($i = 1, 2$). Per Definition der totalen Variation müssen daher erneut $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ disjunkt mit $B_i \subset (A \cap A_i) \subset A$ existieren, sodass $g_T(B_i) > 0$. Dann gilt wieder $\mathbb{P}(M(B_i) \neq 0) > 0$, jeweils für $i = 1, 2$ und es folgt die Behauptung, erneut nach Proposition 3.5.2. $\square$

Beweis von Theorem 3.5.3. Wir gehen in mehreren Schritten vor. Dabei sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine disjunkte Folge wie in (δ_4) beschrieben.

<u>1. Schritt:</u> Sei X allgemein ein $\mathbb{R}^m$-wertiger Zufallsvektor mit charakteristischer Funktion $\omega(\cdot)$ und Verteilung μ, so ergibt sich in Anlehnung an Theorem 3.1 in [33] für alle $t \in \mathbb{R}^m$ die folgende Abschätzung, wobei man sich von der Existenz der jeweiligen Integrale überzeuge:

$$
\begin{aligned}
|1 - \omega(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,y\rangle} - 1\right) \mu(dy) \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^m} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,y\rangle} - 1\right) \mathbb{1}_{\|y\|\leq 1}\, \mu(dy) \right| + \int_{\mathbb{R}^m} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,y\rangle} - 1\right| \mathbb{1}_{\|y\|> 1}\, \mu(dy) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,y\rangle} - 1 - \mathrm{i}\langle t,y\rangle\right| \mathbb{1}_{\|y\|\leq 1}\, \mu(dy) + \int_{\mathbb{R}^m} |\langle t,y\rangle|\, \mathbb{1}_{\|y\|\leq 1}\, \mu(dy) + 2\mathbb{P}(\|X\| > 1) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} |\langle t,y\rangle|^2\, \mathbb{1}_{\|y\|\leq 1}\, \mu(dy) + \int_{\mathbb{R}^m} |\langle t,y\rangle|\, \mathbb{1}_{\|y\|\leq 1}\, \mu(dy) + 2\mathbb{P}(\|X\| > 1) \\
&\leq \frac{\|t\|^2}{2} \int_{\mathbb{R}^m} \|y\|^2 \mathbb{1}_{\|y\|\leq 1}\, \mu(dy) + \|t\| \int_{\mathbb{R}^m} \|y\| \mathbb{1}_{\|y\|\leq 1}\, \mu(dy) + 2\mathbb{P}(\|X\| > 1),
\end{aligned}
$$

beispielsweise mit Lemma 8.6 in [41] und nach doppelter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Indem wir kurzfristig die Funktion $h(y) := \|y\| \cdot \mathbb{1}_{\|y\|\leq 1}$ einführen, folgt:

$$
= \frac{\|t\|^2}{2} \operatorname{Var}(h(X)) + \frac{\|t\|^2}{2} \mathbb{E}(h(X))^2 + \|t\|\, \mathbb{E}(h(X)) + 2\mathbb{P}(\|X\| > 1).
$$

Nun gilt aber $|h(X)| \leq 1$ und somit $\mathbb{E}(h(X))^2 \leq \mathbb{E}(h(X))$, d.h.

$$
\leq \frac{\|t\|^2}{2} \operatorname{Var}(h(X)) + \left(\frac{\|t\|^2}{2} + \|t\|\right) \mathbb{E}(h(X)) + 2\mathbb{P}(\|X\| > 1). \tag{3.29}
$$

<u>2. Schritt:</u> Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ allgemein eine Folge unabhängiger und $\mathbb{R}^m$-wertiger Zufallsvektoren derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \|X_n\| < \infty$ fast sicher. Dann kann beispielsweise Satz 15.50 in [23]

auf die nichtnegative Folge $(\|X_n\|)_n$ angewendet werden, um mit der vorangegangenen Definition der Funktion h die (absolute) Konvergenz der folgenden Reihen zu erhalten (man betrachte $K = 1$ in genannter Quelle):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\|X_n\| > 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(h(X_n)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}(h(X_n)). \tag{3.30}$$

Wenn nun $\omega_n(\cdot)$ für $n \in \mathbb{N}$ die charakteristische Funktion von X_n bezeichne, so folgt durch Kombination von (3.29) und (3.30) sowie unter Berücksichtigung der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^m$ für alle $T > 0$, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{|1 - \omega_n(t)| : \|t\|_\infty \leq T\} < \infty. \tag{3.31}$$

3. Schritt: Definiere

$$g_T^{(n)}(A) := g_T(A \cap S_n), \quad A \in \sigma(\mathcal{S})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $T > 0$, wobei der vergrößerte Definitionsbereich dank Lemma 3.1.2 zulässig ist. Offensichtlich erben die Abbildungen $g_T^{(n)}$ dann die σ-Subadditivität von g_T und es gilt $g_T^{(n)}(A) \in [0, 2]$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$. Seien nun $T > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Weiter fixieren wir eine beliebige Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \sigma(\mathcal{S})$ disjunkter Mengen. Dann handelt es sich auch bei $(A_k \cap S_n)_{k\in\mathbb{N}}$ um eine disjunkte Folge aus $\mathcal{S}$. Und da $(A_k \cap S_n) \subset S_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$, folgt nach Lemma 3.1.4 sogar, dass die Vereinigung dieser Mengen (über $k \in \mathbb{N}$) wieder zu $\mathcal{S}$ gehört. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} M(A_k \cap S_n)$ fast sicher, wobei gemäß (1) in Definition 3.3.1 die gesamten Folge $(M(A_k \cap S_n))_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist (definitorisch). Weiter entnimmt man (2), dass die gerade formulierte Konvergenz der Reihe unabhängig von der Reihenfolge der Summation sein muss, d.h. die Reihe konvergiert absolut. Daher erfüllt die vorliegende Folge die entsprechenden Voraussetzungen des 2. Schritts und da die charakteristische Funktion von $M(A_k \cap S_n)$ durch $f(\cdot, A_k \cap S_n)$ gegeben ist, folgt analog zu (3.31), dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup\{|1 - f(t, A_k \cap S_n)| : \|t\|_\infty \leq T\} = \sum_{k=1}^{\infty} g_T^{(n)}(A_k) < \infty.$$

Damit erfüllt die Funktion $g_T^{(n)}$ die Voraussetzungen von Theorem 1.1 in [33] und das darauf folgende Theorem 1.2 liefert, dass die totale Variation von $g_T^{(n)}$, also $|g_T^{(n)}|$, ein endliches Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$ ist.
Andererseits wissen wir von $|g_T|$ bisher nur, dass es sich um ein Prämaß auf $\mathcal{S}$ mit Werten in $[0, \infty]$ handelt. Wie zuvor können wir daraus zunächst mittels $|g_T|^{(n)}(A) := |g_T|(A \cap S_n)$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$ definieren, das aber nun auch endlich ist, denn nach folgender Rechnung gilt $|g_T|^{(n)} \leq |g_T^{(n)}|$. Sei dazu $A \in \sigma(\mathcal{S})$ beliebig, aber fest:

$$|g_T|^{(n)}(A) = |g_T|(A \cap S_n)$$

$$= \sup_{Q \in \Pi(A \cap S_n)} \sum_{B_j \in Q} g_T(B_j)$$

mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.2 und da g_T nichtnegativ ist. Insbesondere gilt $B_j \subset (A \cap S_n) \subset S_n$ für jede solche Menge B_j, sodass der folgende Schritt unproblematisch ist, während der darauf folgende in ähnlicher Weise die *Monotonie* der Mengen $\Pi(\cdot)$ nutzt.

$$\begin{aligned} &= \sup_{Q \in \Pi(A \cap S_n)} \sum_{B_j \in Q} g_T(B_j \cap S_n) \\ &\leq \sup_{Q \in \Pi(A)} \sum_{B_j \in Q} g_T(B_j \cap S_n) \\ &= \sup_{Q \in \Pi(A)} \sum_{B_j \in Q} g_T^{(n)}(B_j) \\ &= |g_T^{(n)}|(A). \end{aligned}$$

<u>4. Schritt:</u> Wir kommen nun zur eigentlichen Aussage und greifen dabei mit Hilfe der geleisteten Vorarbeit zum Teil auf die Idee von Theorem 2.2 in [34] zurück. Sei $A \in \mathcal{S}$ beliebig, aber fest. Dann können wir im weiteren Verlauf eine Folge von (jeweils endlichen) Mengensystemen $\{C_0^{(l)}, C_1^{(l)}, ..., C_{k(l)}^{(l)}\}, l \in \mathbb{N}$ konstruieren, sodass für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $C_0^{(l)}, C_1^{(l)}, ..., C_{k(l)}^{(l)}$ gehören zu $\mathcal{S}$ und sind paarweise disjunkt.

(ii) $C_0^{(l)} \cup \cdots \cup C_{k(l)}^{(l)} = A$.

(iii) $\mathbb{P}(\|M(C_0^{(l)})\| \geq 1/l) \leq 1/l$.

(iv) $|g_{1/l}|(C_j^{(l)}) \leq \varepsilon_l$ für alle $j = 1, ..., k(l)$ mit

$$\varepsilon_l := l^{m-1} \, 2^{-m} \, C'(1/l)^{-1} > 0,$$

wobei $C'(\cdot)$ aus Proposition 3.5.5 stammt.

Sei also auch $l \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. So schreiben wir A zunächst als disjunkte Vereinigung der Mengen $(A \cap S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und erhalten

$$M(A) = \sum_{n=1}^{\infty} M(A \cap S_n) \quad \Leftrightarrow \quad M(A) - \sum_{n=1}^{\nu} M(A \cap S_n) \to 0$$

fast sicher, Letzteres also insbesondere stochastisch und für $\nu \to \infty$. Dabei besteht für alle $\nu \in \mathbb{N}$ fast sicher folgende Gleichheit:

$$M(A) - \sum_{n=1}^{\nu} M(A \cap S_n) = M(A) - M\left(\bigcup_{n=1}^{\nu} (A \cap S_n)\right) = M\left(\bigcup_{n=\nu+1}^{\infty} (A \cap S_n)\right).$$

Insgesamt existiert daher ein $\nu(l) \in \mathbb{N}$, sodass

$$\mathbb{P}\left(\left\|M\left(\bigcup_{n=\nu(l)+1}^{\infty}(A \cap S_n)\right)\right\| \geq \frac{1}{l}\right) \leq \frac{1}{l}.$$

Folglich definieren wir

$$C_0^{(l)} := A \setminus \bigcup_{n=1}^{\nu(l)}(A \cap S_n) = \bigcup_{n=\nu(l)+1}^{\infty}(A \cap S_n) \in \mathcal{S}$$

und Punkt (iii) der Konstruktion ist erfüllt. Betrachte nun die Menge $A \cap S_1$ beziehungsweise das Maß $|g_{1/l}|^{(1)}$ auf $(S, \sigma(\mathcal{S}))$. Nach dem 3. Schritt ist $|g_{1/l}|^{(1)}$ endlich, wir können also beispielsweise IV 9, Lemma 7 in [9] verwenden, wonach endliche viele, disjunkte Mengen $D_1^{(l)}, ..., D_{k(1,l)}^{(l)} \in \sigma(\mathcal{S})$ mit den den folgenden Eigenschaften existieren:

- $D_1^{(l)} \cup \cdots \cup D_{k(1,l)}^{(l)} = S$.
- Für jedes $j = 1, ..., k(1,l)$ gilt:

  $$|g_{1/l}|^{(1)}(D_j^{(l)}) \leq \varepsilon_l \quad \text{oder} \quad D_j^{(l)} \text{ ist ein } \mathit{Atom} \text{ von } |g_{1/l}|^{(1)}. \tag{3.32}$$

  Die zweite Möglichkeit bedeutet dabei im Sinne der Definition von [9], dass für alle $D \in \sigma(\mathcal{S})$ mit $D \subset D_j^{(l)}$ gilt:

  $$|g_{1/l}|^{(1)}(D) = |g_{1/l}|^{(1)}(D_j^{(l)}) \quad \text{oder} \quad |g_{1/l}|^{(1)}(D) = 0.$$

  Somit wäre die Menge $D_j^{(l)}$ aber offensichtlich auch ein Atom des Maßes $|g_{1/l}|^{(1)}$ im Sinne unserer Definition. Andererseits ist M jedoch als atomfrei vorausgesetzt, Gleiches trifft also nach Lemma 3.5.8 auch auf das Prämaß $|g_{1/l}|$ zu. Schließlich ist leicht einzusehen, dass dann auch die Maße $|g_{1/l}|^{(n)}$ (insbesondere für $n = 1$) diese Eigenschaft vererbt bekommen. Somit würde insgesamt $|g_{1/l}|^{(1)}(D_j^{(l)}) = 0$ folgen, was sich in die erste Möglichkeit von (3.32) integrieren lässt.

Ganz analog existieren nun auch disjunkte Mengen $D_{k(1,l)+1}^{(l)}, ..., D_{k(2,l)}^{(l)} \in \sigma(\mathcal{S})$ mit den den Eigenschaften:

- $D_{k(1,l)+1}^{(l)} \cup \cdots \cup D_{k(2,l)}^{(l)} = S$.
- Für jedes $j = k(1,l)+1, ..., k(2,l)$ gilt:

  $$|g_{1/l}|^{(2)}(D_j^{(l)}) \leq \varepsilon_l.$$

Indem man diese Prozedur nun endlich oft wiederholt, nämlich bis zur Betrachtung des Maßes $|g_{1/l}|^{(\nu(l))}$, erhält man also $D_1^{(l)}, ..., D_{k(l)}^{(l)} \in \sigma(\mathcal{S})$ (mit $k(l) := k(\nu(l), l)$) und wir definieren darauf aufbauend für $j = 1, ..., k(l)$:

$$C_j^{(l)} := D_j^{(l)} \cap A \cap S_n, \quad \text{falls } k(n-1, l) < j \leq k(n, l),$$

wobei $k(0, l) := 0$. Somit erfüllt die Folge nun dank Lemma 3.1.2 auch die Forderungen aus Punkt (i). Dabei ist (ii) wegen

$$A \cap S_n = C_{k(n-1,l)+1}^{(l)} \cup \cdots \cup C_{k(n,l)}^{(l)} \quad \text{für } n = 1, ..., \nu(l)$$

und nach Wahl von $C_0^{(l)}$ offensichtlich. Für (iv) fixiere man schließlich ein $j \in \{1, ..., k(l)\}$. Dann gilt $k(n-1, l) < j \leq k(n, l)$ für ein $n \in \{1, ..., \nu(l)\}$ und wir erhalten

$$|g_{1/l}|(C_j^{(l)}) = |g_{1/l}|^{(n)}(D_j^{(l)} \cap A) \leq |g_{1/l}|^{(n)}(D_j^{(l)}) \leq \varepsilon_l$$

nach Konstruktion.

5. Schritt: Sei $A \in \mathcal{S}$ wieder beliebig, aber fest. Dann wissen wir nach dem 4. Schritt (und den dort gefundenen Mengensystemen), dass für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=0}^{k(l)} M(C_j^{(l)}) = M(A) \quad \text{fast sicher,} \tag{3.33}$$

wobei die Gleichheit auch künstlich als Verteilungskonvergenz (für $l \to \infty$) gelesen werden kann. Nun sind aber $M(C_0^{(l)}), ..., M(C_{k(l)}^{(l)})$ für jedes feste $l \in \mathbb{N}$ unabhängig, folglich handelt es sich bei

$$\left\{M\left(C_j^{(l)}\right) : 0 \leq j \leq k(l), \quad l \in \mathbb{N}\right\}$$

um ein so genanntes *Dreieckssystem*, man vergleiche Definition 3.2.1 in [31] (ohne Einschränkung gelte $k(1) \geq 1$ und $k(l+1) > k(l)$, sonst trivial ergänzen). Die dortige Sprechweise aufgreifend, ist das Dreieckssystem vor dem Hintergrund von (iv) aber offensichtlich auch *infinitesimal*, denn für alle $l \in \mathbb{N}$ und $j = 1, ..., k(l)$ gilt nach Proposition 3.5.5:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\|M(C_j^{(l)})\| \geq 1/l\right) &\leq C'(1/l) \int\limits_{[-1/l,1/l]^m} |1 - f(t, C_j^{(l)})| \, dt \\
&\leq C'(1/l) \cdot g_{1/l}(C_j^{(l)}) \cdot (2/l)^m \\
&\leq C'(1/l) \cdot |g_{1/l}|(C_j^{(l)}) \cdot (2/l)^m \\
&\leq C'(1/l) \cdot \varepsilon_l \cdot (2/l)^m \\
&= 1/l
\end{aligned}$$

(für $j = 0$ ist dies jeweils die Aussage von (iii)). Diese Erkenntnis und (3.33) liefern angesichts Theorem 3.2.14 in [31], dass $M(A)$ unendlich-teilbar ist. $\square$

3.6 Existenz

Bisher sind wir noch nicht der Frage der Existenz solcher Zufallsmaße nachgegangen. Die Antwort wird nicht nur positiv, sondern in Anlehnung an den univariaten Fall in [35] (Beweis dort jedoch bestenfalls skizziert) auch reichhaltig ausfallen. Dabei handelt es sich zugleich um eine Art Umkehrung der Aussage in Theorem 3.3.2. Außerdem sind damit vor dem Hintergrund von Abschnitt 3.5 alle atomfreien Zufallsmaße auf δ-Ringen mit Werten in $\mathbb{R}^m$ charakterisiert.

Zu diesem Zweck wiederholen wir zunächst: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ heißt *positiv-semidefinit*, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ und $y_1, ..., y_k \in \mathbb{R}^m$ gilt, dass die durch $c_{il} := f(y_i - y_l)$ definierte Matrix $C = (c_{il})_{i,l=1,...,k} \in \mathrm{L}(\mathbb{C}^k)$ positiv-semidefinit ist. Letzteres bedeutet in diesem Zusammenhang, dass für alle $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{i,l=1}^{k} \lambda_i \overline{\lambda_l} c_{il} \geq 0.$$

Lemma 3.6.1
Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ eine positiv-semidefinite Funktion. Dann wird auch durch

$$\mathbb{R}^{n \cdot m} \ni x = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \mapsto f\left(\sum_{j=1}^{n} x^{(j)} \mathbb{1}_J(j)\right) \tag{3.34}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Menge $J \subset \{1, ..., n\}$ eine positiv-semidefinite Funktion auf $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ beschrieben.

Beweis. Seien also $n \in \mathbb{N}$ sowie $J \subset \{1, ..., n\}$ beliebig, aber fest und bezeichne g die resultierende Funktion in (3.34). Ebenso betrachte man $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ beliebig, aber fest, wobei $x_i = (x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)})$ für $i = 1, ..., k$. Dann rechnet man für alle $i, l \in \{1, ..., k\}$ nach:

$$c_{il} := g(x_i - x_l) = g\left((x_i^{(1)} - x_l^{(1)}, ..., x_i^{(n)} - x_l^{(n)})\right) = f\left(y_i - y_l\right),$$

d.h. g erbt die gewünschte Eigenschaft von f, indem man $y_i := \sum_{j=1}^{n} x_i^{(j)} \mathbb{1}_J(j) \in \mathbb{R}^m$ definiert (für $i = 1, ..., k$). $\square$

Theorem 3.6.2
Seien $\mathcal{S}$ ein δ-Ring auf einer Menge $S \neq \emptyset$ und γ, Q sowie ϕ Abbildungen auf $\mathcal{S}$ wie in Theorem 3.3.2 (a)-(c) beschrieben. Dann existiert ein unendlich-teilbares independently scattered random measure M (auf $\mathcal{S}$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$), sodass für alle $A \in \mathcal{S}$ gilt: $M(A) \sim [\gamma_A, Q_A, \phi_A]$. Ferner sind die Randverteilungen von M dadurch bereits eindeutig festgelegt.

Beweis. Zur Eindeutigkeit: Sei M' ein weiteres solches ISRM (zwecks Notation ohne Einschränkung auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum wie M). Wenn wir für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ sowie $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest zeigen können, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \langle t_j, M(A_j)\rangle \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{n} \langle t_j, M'(A_j)\rangle, \tag{3.35}$$

dann folgt das Gewünschte (man vergleiche Lemma 2.0.1). Wir betrachten nur den Fall $n = 2$ (sonst analog, siehe unten) und definieren die Mengen $B_1 := A_1 \setminus A_2, B_2 := A_1 \cap A_2$ und $B_3 := A_2 \setminus A_1$ (in $\mathcal{S}$). Dann gilt fast sicher:

$$\begin{aligned}\langle t_1, M(A_1)\rangle + \langle t_2, M(A_2)\rangle &= \langle t_1, M(B_1) + M(B_2)\rangle + \langle t_2, M(B_2) + M(B_3)\rangle \\ &= \langle t_1, M(B_1)\rangle + \langle t_1 + t_2, M(B_2)\rangle + \langle t_2, M(B_3)\rangle.\end{aligned}$$

Nun sind B_1, B_2 und B_3 disjunkt, sodass die drei zuletzt genannten Zufallsvariablen die Unabhängigkeit (unter den jeweils stetigen Abbildungen) vererbt bekommen. Entsprechend erhält man fast sicher, dass

$$\langle t_1, M'(A_1)\rangle + \langle t_2, M'(A_2)\rangle = \langle t_1, M'(B_1)\rangle + \langle t_1 + t_2, M'(B_2)\rangle + \langle t_2, M'(B_3)\rangle,$$

ebenfalls mit unabhängigen Summanden auf der rechten Seite. Dann folgt aber aus

$$M(B_j) \stackrel{d}{=} M'(B_j) \sim [\gamma_{B_j}, Q_{B_j}, \phi_{B_j}]$$

auch, dass $\langle v_j, M(B_j)\rangle \stackrel{d}{=} \langle v_j, M'(B_j)\rangle$, jeweils für $j = 1, 2, 3$, wobei $v_1 := t_1, v_2 := t_1 + t_2$ und $v_3 := t_2$. Das zeigt vor dem Hintergrund der festgestellten Unabhängigkeiten jedoch insgesamt (3.35) für $n = 2$. Die Existenzaussage selbst soll nun hingegen in mehreren Schritten bewiesen werden.

<u>1. Schritt:</u> Wir benötigen für den Rest des Beweises die durch

$$(A, y) \mapsto \mathrm{i}\langle \gamma_A, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Q_A\, y, y\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle y,x\rangle} - 1 - \mathrm{i}\frac{\langle y, x\rangle}{1 + \|x\|^2} \right) \phi_A(dx)$$

definierte Funktion $\Theta : \mathcal{S} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$, d.h. $\Theta(A, \cdot)$ ist die log-charakteristische (und somit stetige) Funktion der unendlich-teilbaren Verteilung auf $\mathbb{R}^m$ mit Tripel $[\gamma_A, Q_A, \phi_A]$. Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ (nicht notwendigerweise disjunkt) beliebig, aber fest, so möchten wir eine Funktion $\psi_{A_1,...,A_n} : \mathbb{R}^{n\cdot m} \to \mathbb{C}$ derart definieren, dass durch $\exp(\psi_{A_1,...,A_n}(\cdot))$ die Fouriertransformierte eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\mathbb{R}^{n\cdot m}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n\cdot m})$ beschrieben wird. Zu diesem Zweck führen wir zunächst für alle $J \subset \{1, ..., n\}$ die folgende Bezeichnung ein:

$$\mathcal{Z}_J^{(n)} := \mathcal{Z}_J(A_1, ..., A_n) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } J = \emptyset \\ \left[\bigcap_{j\in J} A_j \setminus \bigcup_{l\in J^c} A_l\right], & \text{sonst} \end{cases} \in \mathcal{S},$$

wobei das Komplement bezüglich $\{1, ..., n\}$ zu verstehen ist und die leere Vereinigung als leere Menge definiert ist. Dann ergeben sich folgende Beobachtungen:

(i) Für $J_1, J_2 \subset \{1, ..., n\}$ mit $J_1 \neq J_2$ gilt: $\mathcal{Z}_{J_1}^{(n)} \cap \mathcal{Z}_{J_2}^{(n)} = \emptyset$.

(ii) $\bigcup_{J \subset \{1,...,n\}} \mathcal{Z}_J^{(n)} = \bigcup_{j=1}^n A_j$.

(iii) Falls die Mengen $A_1, ..., A_n$ disjunkt sind, so gilt $\mathcal{Z}_J^{(n)} = A_j$, wenn immer $J = \{j\}$ (für ein $j \in \{1, ..., n\}$) und $\mathcal{Z}_J^{(n)} = \emptyset$ sonst.

Darauf aufbauend definieren wir für $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$:

$$\psi_{A_1,...,A_n}(t) := \sum_{J \subset \{1,...,n\}} \Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n)}, \sum\nolimits_{j \in J} t_j\right). \tag{3.36}$$

Wegen $\Theta(\emptyset, t) = 0$ (für alle $t \in \mathbb{R}^m$) folgt insbesondere (betrachte $n = 1$):

$$\psi_A(t) = \Theta(A, t) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{S} \text{ und } t \in \mathbb{R}^m. \tag{3.37}$$

Und gemäß (3.36) gilt allgemein:

$$\exp\left(\psi_{A_1,...,A_n}(t)\right) = \prod_{J \subset \{1,...,n\}} \exp\left(\Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n)}, \sum\nolimits_{j \in J} t_j\right)\right), \quad t \in \mathbb{R}^m.$$

Dabei liefert der *Satz von Bochner* (man vergleiche zum Beispiel Satz 15.29 in [23]), dass $\exp(\Theta(A, \cdot))$ für alle $A \in \mathcal{S}$ positiv-semidefinit ist, sodass nach Lemma 3.6.1 jeder der zuvor genannten 2^n Faktoren als jeweils positiv-semidefinite Funktion auf $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ verstanden werden kann. Dass hingegen das endliche Produkt positiv-semidefiniter Funktionen (auf $\mathbb{R}^{n \cdot m}$) wieder eine solche ist, sieht man leicht mit Lemma 3.5.9 in [18] ein. Und da $\Theta(A, \cdot)$ für alle $A \in \mathcal{S}$ stetig ist, trifft dies offensichtlich auch auf $\exp\left(\psi_{A_1,...,A_n}(\cdot)\right)$ zu. Schließlich ist wegen $\Theta(A, 0) = 0$ (für alle $A \in \mathcal{S}$) auch unmittelbar klar, dass $\exp\left(\psi_{A_1,...,A_n}(0)\right) = 1$. Insgesamt können wir also die umgekehrte Richtung des Satzes von Bochner anwenden, d.h. $\exp\left(\psi_{A_1,...,A_n}(\cdot)\right)$ ist die Fouriertransformierte eines (eindeutigen) Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}^{n \cdot m}$, das wir mit $\mu_{A_1,...,A_n}$ bezeichnen.

2. Schritt: Wir betrachten das System

$$\mathcal{P} := \{\mu_{A_1,...,A_n} \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ und } A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}\}$$

von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus dem 1. Schritt und möchten zeigen, dass dieses *projektiv* ist. Denn in diesem Fall würde nach dem *Existenzsatz von Kolmogorov* (man betrachte hier und im Folgenden beispielsweise Definition 35.2 sowie Korollar 35.4 in [1]) die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sowie einer darauf definierten Familie von $\mathbb{R}^m$-wertigen Zufallsvektoren $M = \{M(A) : A \in \mathcal{S}\}$ folgen, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\mathcal{L}\left((M(A_1), ..., M(A_n))\right) = \mu_{A_1,...,A_n}. \tag{3.38}$$

Insbesondere folgt dann nach (3.37), dass $M(A) \sim [\gamma_A, Q_A, \phi_A]$ für alle $A \in \mathcal{S}$. Wir werden nun zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ gilt:

(1) Für jede Permutation $\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ und für alle $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ ist

$$\exp\left(\psi_{A_{\pi(1)},...,A_{\pi(n)}}((t_{\pi(1)}, ..., t_{\pi(n)}))\right) = \exp\left(\psi_{A_1,...,A_n}((t_1, ..., t_n))\right).$$

(2) Für alle $1 \leq n' \leq n$ und $(t_1, ..., t_{n'}) \in \mathbb{R}^{n' \cdot m}$ gilt:

$$\exp\left(\psi_{A_1,...,A_n}((t_1, ..., t_{n'}, 0, ..., 0))\right) = \exp\left(\psi_{A_1,...,A_{n'}}((t_1, ..., t_{n'}))\right).$$

Angenommen, wir hätten (1) und (2) bereits gezeigt. Wenn man nun endliche Teilmengen $I_1 \subset I_2 \subset \mathcal{S}$ mit $\#I_1 = n'$ und $\#I_2 = n$ betrachtet, die ohne Einschränkung nicht leer seien, so können wir schreiben: $I_2 = \{A_1, ..., A_n\}$ und entsprechend $I_1 = \{A_{i_1}, ..., A_{i_{n'}}\}$ für $i_j \in \{1, ..., n\}$. Für die folgende Rechnung können wir wegen (1) weiterhin annehmen, dass $I_1 = \{A_1, ..., A_{n'}\}$. Wenn nun $\mathrm{pr}_{I_1}^{I_2}$ die (kanonische) Projektion von I_2 auf I_1 bezeichne, so folgt also für beliebiges $t = (t_1, ..., t_{n'}) \in \mathbb{R}^{n' \cdot m}$ mit $t^* := (t_1, ..., t_{n'}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$, wobei wir $n > n'$ annehmen können (sonst trivial):

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^{n' \cdot m}} e^{i\langle t, x\rangle} \, \mathrm{pr}_{I_1}^{I_2}(\mu_{A_1,...,A_n})(dx) &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n \cdot m}} e^{i\langle t, \mathrm{pr}_{I_1}^{I_2}(x)\rangle} \, \mu_{A_1,...,A_n}(dx) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{n \cdot m}} e^{i\langle t^*, x\rangle} \, \mu_{A_1,...,A_n}(dx) \\
&= \widehat{\mu}_{A_1,...,A_n}(t^*) \\
&= \widehat{\mu}_{A_1,...,A_{n'}}(t),
\end{aligned}$$

Letzteres nach (2), d.h. $\mathrm{pr}_{I_1}^{I_2}(\mu_{A_1,...,A_n}) = \mu_{A_1,...,A_{n'}}$, was gerade bedeutet, dass $\mathcal{P}$ ein projektives System ist. Stillschweigend haben wir über die Wahl der Indizes natürlich durchweg Mengen der Form $\prod_{i \in I} \mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ identifiziert, sofern $\#I = n$ et cetera. Dies ist der eigentliche Grund, warum (1) gezeigt werden muss, denn es gilt $\{A_1, A_2\} = \{A_2, A_1\}$, im Allgemeinen ist jedoch $\mu_{A_1,A_2} \neq \mu_{A_2,A_1}$.
Somit bleiben (1) und (2) zu zeigen, wobei also $n \in \mathbb{N}$ sowie $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ jeweils beliebig, aber fest seien. Weiter sei $\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ eine Permutation, dann ist auch die Umkehrfunktion π^{-1} eine solche und $\pi^{-1} : \mathrm{Pot}(\{1, ..., n\}) \to \mathrm{Pot}(\{1, ..., n\})$ (Bild unter π^{-1}) ist bijektiv. Indem wir schließlich $A'_j := A_{\pi(j)}$ setzen und für beliebiges $(t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ entsprechend $(t'_1, ..., t'_n)$ mit $t'_j := t_{\pi(j)}$ definieren, folgt also:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\psi_{A_{\pi(1)},...,A_{\pi(n)}}((t_{\pi(1)}, ..., t_{\pi(n)}))\right) &= \exp\left(\psi_{A'_1,...,A'_n}((t'_1, ..., t'_n))\right) \\
&= \prod_{J \subset \{1,...,n\}} \exp\left(\Theta\left(\mathcal{Z}'^{(n)}_J, \sum\nolimits_{j \in J} t'_j\right)\right),
\end{aligned}$$

wobei die Mengen $\mathcal{Z}'^{(n)}_J$ nun entsprechend auf Basis von $A'_1, ..., A'_n$ gebildet werden. Aus Gründen der Übersicht nennen wir das Bild von π^{-1} übergangsweise T. Dann:

$$= \prod_{J \subset \{1,...,n\}} \exp\left(\Theta\left(\mathcal{Z}'^{(n)}_{T(J)}, \sum\nolimits_{j \in T(J)} t'_j\right)\right)$$

$$= \prod_{J\subset\{1,...,n\}} \exp\left(\Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n)}, \sum\nolimits_{j\in J} t_j\right)\right)$$
$$= \exp\left(\psi_{A_1,...,A_n}((t_1, ..., t_n))\right)$$

anhand der vorangegangenen Definitionen. Für (2) betrachte man hingegen $1 \le n' \le n$, wobei ohne Einschränkung $n = n' + 1$ gelte ($n' = n$ klar, sonst induktiv). Somit erhalten wir folgende (disjunkte) Vereinigung:

$$\mathrm{Pot}(\{1, ..., n\}) = \mathrm{Pot}(\{1, ..., n'\}) \cup \{J \cup \{n\} \mid J \in \mathrm{Pot}(\{1, ..., n'\})\}.$$

Andererseits erkennt man für alle $J \in \mathrm{Pot}(\{1, ..., n'\}) \setminus \emptyset$, dass $\mathcal{Z}_J^{(n)} \cup \mathcal{Z}_{J\cup\{n\}}^{(n)} = \mathcal{Z}_J^{(n')}$, denn:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_J^{(n)} \cup \mathcal{Z}_{J\cup\{n\}}^{(n)} &= \left[\bigcap_{j\in J} A_j \setminus \bigcup_{\substack{l\in\{1,...,n\},\\ l\notin J}} A_l\right] \cup \left[\left(\bigcap_{j\in J} A_j \cap A_n\right) \setminus \bigcup_{\substack{l\in\{1,...,n'\},\\ l\notin J}} A_l\right] \\
&= \left[\bigcap_{j\in J} A_j \setminus \bigcup_{\substack{l\in\{1,...,n\},\\ l\notin J}} A_l\right] \cup \left[\bigcap_{j\in J} A_j \setminus \left(A_n^c \cup \bigcup_{\substack{l\in\{1,...,n'\},\\ l\notin J}} A_l\right)\right] \\
&= \bigcap_{j\in J} A_j \setminus \left[\bigcup_{\substack{l\in\{1,...,n\},\\ l\notin J}} A_l \cap \left(A_n^c \cup \bigcup_{\substack{l\in\{1,...,n'\},\\ l\notin J}} A_l\right)\right] \\
&= \bigcap_{j\in J} A_j \setminus \bigcup_{\substack{l\in\{1,...,n'\},\\ l\notin J}} A_l \\
&= \mathcal{Z}_J^{(n')}.
\end{aligned}$$

Wegen $J \neq (J\cup\{n\})$ ist die genannte Vereinigung in jedem Falle disjunkt (man vergleiche (i)) und für alle $t_1, ..., t_{n'} \in \mathbb{R}^m$ folgt, indem wir $t_n := 0$ setzen:

$$\begin{aligned}
\psi_{A_1,...,A_n}((t_1, ..., t_{n'}, 0)) &= \sum_{J\subset\{1,...,n\}} \Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n)}, \sum\nolimits_{j\in J} t_j\right) \\
&= \sum_{J\subset\{1,...,n'\}} \left[\Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n)}, \sum\nolimits_{j\in J} t_j\right) + \Theta\left(\mathcal{Z}_{J\cup\{n\}}^{(n)}, \sum\nolimits_{j\in J} t_j\right)\right]
\end{aligned}$$

mit Hilfe der obigen Zerlegung von $\mathrm{Pot}(\{1, ..., n\})$ und da $t_n = 0$. Die beiden Summanden für $J = \emptyset$ leisten somit offensichtlich keinen Beitrag:

$$= \sum_{\substack{J\subset\{1,...,n'\},\\ J\neq\emptyset}} \left[\Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n)}, \sum\nolimits_{j\in J} t_j\right) + \Theta\left(\mathcal{Z}_{J\cup\{n\}}^{(n)}, \sum\nolimits_{j\in J} t_j\right)\right].$$

Nun gewährleisten die Voraussetzungen dieses Theorems, dass $\Theta(B_1, t) + \Theta(B_2, t) = \Theta(B_1 \cup B_2, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ und $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$ disjunkt; insbesondere nutze man, dass in diesem Fall auch wieder $\phi_{B_1 \cup B_2} = \phi_{B_1} + \phi_{B_2}$ gilt (man schreibe eine beliebige Borelmenge $A \subset \Gamma_m$ als Vereinigung der Mengen $A \cap \{x : \|x\| \geq 1/j\}, j \in \mathbb{N}$ und nutze die Stetigkeit von unten). Nach dem zuvor Gezeigten erhalten wir also:

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,...,n'\}, \\ J \neq \emptyset}} \Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n')}, \sum\nolimits_{j \in J} t_j\right) \\
&= \sum_{J \subset \{1,...,n'\}} \Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n')}, \sum\nolimits_{j \in J} t_j\right) \\
&= \psi_{A_1,...,A_{n'}}((t_1, ..., t_{n'})),
\end{aligned}
$$

d.h. (2) gilt.

<u>3. Schritt:</u> Es bleibt zu zeigen, dass M die Eigenschaften eines Zufallsmaßes erfüllt. Seien zunächst wieder $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ beliebig, aber fest, wobei wir nun explizit voraussetzen, dass diese Mengen disjunkt sind. Wenn wir zeigen können, dass die gemeinsame Verteilung von $(M(A_1), ..., M(A_n))$, also $\mu_{A_1,...,A_n}$, dem Produktmaß der einzelnen Verteilungen entspricht, so folgt bereits die Unabhängigkeit der Zufallsvektoren $M(A_1), ..., M(A_n)$. Wir nutzen erneut $\Theta(\emptyset, \cdot) = 0$ sowie (iii), um für $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ beliebig folgende Rechnung und somit das Gewünschte zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu}_{A_1,...,A_n}(t) &= \prod_{J \subset \{1,...,n\}} \exp\left(\Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(n)}, \sum\nolimits_{j \in J} t_j\right)\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\Theta\left(A_j, t_j\right)\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_{A_j}(t_j),
\end{aligned}
$$

man vergleiche (3.37). Letzteres entspricht bekanntlich der Fouriertransformierten des Maßes $\mu_{A_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{A_n}$ (an der Stelle t). Für die zweite nachzuweisende Eigenschaft fixiere man zunächst beliebige disjunkte Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$. Wenn wir zeigen können, dass dann $M(A_1 \cup A_2) - M(A_1) - M(A_2) = 0$ fast sicher gilt, so wäre induktiv offensichtlich auch

$$
M(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = M(A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}) + M(A_k) = ... = \sum_{j=1}^{k} M(A_j) \quad \text{fast sicher}
$$

für jede disjunkte Auswahl $A_1, ..., A_k \in \mathcal{S}$ $(k \in \mathbb{N})$ bewiesen, d.h. M ist *endlich* additiv. Dabei gilt $M(A_1 \cup A_2) - M(A_1) - M(A_2) = 0$ fast sicher genau dann, wenn die zugehörige charakteristische Funktion konstant eins ist. Setze $B_1 := A_1 \cup A_2, B_2 := A_1$ und $B_3 := A_2$

sowie für $t \in \mathbb{R}^m$ beliebig $t_1 := t, t_2 := -t$ und $t_3 := -t$, dann folgt per Definition des Standardskalarprodukts:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}(M(A_1 \cup A_2) - M(A_1) - M(A_2))(t) &= \widehat{\mu}_{A_1 \cup A_2, A_1, A_2}((t, -t, -t)) \\ &= \widehat{\mu}_{B_1, B_2, B_3}((t_1, t_2, t_3)) \\ &= \prod_{J \subset \{1,\ldots,3\}} \exp\left(\Theta\left(\mathcal{Z}_J^{(3)}, \sum\nolimits_{j \in J} t_j\right)\right),\end{aligned}$$

wobei die Mengen $\mathcal{Z}_J^{(3)}$ nun bezüglich B_1, B_2 und B_3 zu bilden sind. Führt man dies aus, so ist aufgrund der Tatsache, dass A_1 und A_2 disjunkt sind, unmittelbar zu erkennen, dass $\mathcal{Z}_{\{1,2\}}^{(3)} = A_1$ respektive $\mathcal{Z}_{\{1,3\}}^{(3)} = A_2$ und $\mathcal{Z}_J^{(3)} = \emptyset$ in den verbleibenden sechs Fällen.

$$\begin{aligned}&= \prod_{j=2}^{3} \exp\left(\Theta\left(\mathcal{Z}_{\{1,j\}}^{(3)}, t_1 + t_j\right)\right) \\ &= 1,\end{aligned}$$

da $t_1 + t_2 = t_1 + t_3 = 0$. Schließlich betrachte man eine beliebige Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ disjunkter Mengen mit der Eigenschaft $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$. Dann ist zu zeigen, dass

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} M(A_j) = M(A) \quad \text{fast sicher.}$$

Definitorisch und nach dem bisher Gezeigten ist die Folge $(M(A_j))_{j \in \mathbb{N}}$ also unabhängig, somit lässt sich das Problem auf den Nachweis der stochastischen Konvergenz von

$$\sum_{j=1}^{k} M(A_j) \xrightarrow[(k \to \infty)]{\mathbb{P}} M(A) \quad \Leftrightarrow \quad \left(M(A) - \sum_{j=1}^{k} M(A_j)\right) \xrightarrow[(k \to \infty)]{\mathbb{P}} 0$$

reduzieren (vergleiche beispielsweise Theorem 9.7.1 in [8], offensichtlich auch auf den vorliegenden Fall von $\mathbb{R}^m$-wertigen Zufallsvektoren ausdehnbar); und da der potentielle Grenzwert konstant ist, im letztgenannten Fall sogar auch auf Konvergenz in Verteilung. Indem man nun von der zuvor bewiesenen endlichen Additivität Gebraucht macht, folgt aber offensichtlich für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$M(A) - \sum_{j=1}^{k} M(A_j) = M\left(\cup_{j=1}^{k} A_j\right) + M\left(\cup_{j=k+1}^{\infty} A_j\right) - M\left(\cup_{j=1}^{k} A_j\right) = M\left(\cup_{j=k+1}^{\infty} A_j\right),$$

jeweils fast sicher. Setze $B_k := \cup_{j=k+1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$ (nach Voraussetzung an die Folge (A_j)), dann wissen wir bereits für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $M(B_k) \sim [\gamma_{B_k}, Q_{B_k}, \phi_{B_k}]$. Daher genügt es nach Theorem 2.3.5 zu zeigen, dass neben $\gamma_{B_k} \to 0$ und $Q_{B_k} \to 0$ auch

$$\int_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|x\|^2\} \, \phi_{B_k}(dx) \to 0 \tag{3.39}$$

gilt, jeweils für $k \to \infty$. Die ersten beiden Aussagen sind klar, denn wir haben - erneut wegen $A \in \mathcal{S}$ und nach den Voraussetzungen dieses Theorems - für alle $k \in \mathbb{N}$ die Existenz der Reihen

$$\gamma_{B_k} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \gamma_{A_j} \quad \text{und} \quad Q_{B_k} = \sum_{j=k+1}^{\infty} Q_{A_j}.$$

Insbesondere konvergieren also diese *Reihenreste* gegen Null. Für die verbleibende Aussage folgen wir der entsprechenden Idee in [35]: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann existiert (da ϕ_{B_1} ein Lévymaß ist) ein $\delta > 0$ mit

$$\int\limits_{\{x:\|x\|\leq\delta\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_{B_1}(dx) < \varepsilon.$$

Andererseits ist die Folge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ absteigend (sogar gegen $\emptyset$, da wir (A_j) als disjunkt vorausgesetzt haben), daher kann man wie zuvor zeigen, dass $\phi_{B_k} = \phi_{B_{k+1}} + \phi_{B_k \setminus B_{k+1}}$, d.h. dass $\phi_{B_k} \geq \phi_{B_{k+1}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_{B_k}(dx) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:\|x\|\leq\delta\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_{B_k}(dx) + \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:\|x\|>\delta\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_{B_k}(dx) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \int\limits_{\{x:\|x\|\leq\delta\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_{B_1}(dx) + \limsup_{k\to\infty} \phi_{B_k}(\{x : \|x\| > \delta\}) \\
&= \int\limits_{\{x:\|x\|\leq\delta\}} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_{B_1}(dx) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir wegen $B_k \downarrow \emptyset$ von einer der Voraussetzungen - für die von der Null weg beschränkte Menge $\{x : \|x\| > \delta\}$ - Gebrauch machen konnten. Damit ist (3.39) gezeigt. □

Kommen wir zu attraktiven Beispielen solcher Zufallsmaße; dabei handelt es sich bei (c) um ein *inhomogenes* Beispiel. In (a) hingegen wäre es auch denkbar, einen Gaußanteil Q' vorzugeben, dann müssten die komponentenweise wirkenden Prämaße jedoch so gewählt werden, dass Symmetrie und positive Semidefinitheit erhalten bleiben.

Beispiel 3.6.3 (a) Seien $\mathcal{S}$ ein δ-Ring auf S und $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\nu_1, ..., \nu_m$ endliche, signierte Prämaße auf $\mathcal{S}$. Dann betrachte man eine unendlich-teilbare Verteilung $\mu \sim [\gamma', 0, \phi']$ auf $\mathbb{R}^m$ und definiere die folgende Abbildung auf $\mathcal{S}$:

$$\gamma_A := (\gamma_A^{(1)}, ..., \gamma_A^{(m)}) \quad \text{mit} \quad \gamma_A^{(i)} := \nu_i(A) \cdot \gamma_i', \quad A \in \mathcal{S},$$

wobei γ_i' die Komponenten von γ' seien (jeweils für $i = 1, ..., m$). Analog definiere man $\phi_A(\cdot) := \tau(A) \cdot \phi'(\cdot)$ für ein endliches Prämaß τ auf $\mathcal{S}$. Dann sind mit $Q_A = 0$ (für alle $A \in \mathcal{S}$) entsprechend die Voraussetzungen von Theorem 3.6.2 erfüllt.

(b) Seien nun Σ eine σ-Algebra (auf S) und ν darauf ein σ-endliches Maß. Gemäß Beispiel 3.1.3 handelt es sich bei $\mathcal{S} := \{A \in \Sigma : \nu(A) < \infty\}$ dann um einen δ-Ring auf S. Weiter sei $\mu \sim [\gamma', Q', \phi']$ eine unendlich-teilbare Verteilung auf $\mathbb{R}^m$ und wir definieren in Anlehnung an (a) die Abbildungen $\gamma_A := \nu(A) \cdot \gamma'$, $Q_A := \nu(A) \cdot Q'$ und $\phi_A(\cdot) := \nu(A) \cdot \phi'(\cdot)$ (jeweils für $A \in \mathcal{S}$). Das nach dem vorangegangenen Theorem resultierende independently scattered random measure $M = M_{\mu,\nu}$ nennen wir das von μ *und* ν *erzeugte*.

(c) Man betrachte $S := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ sowie die Mengen $C_a := S \cap M_a$ für $a \in \{-1, 1\}^2$ mit M_a wie im Beweis zu Theorem 2.3.5 . Dann ist

$$\mathcal{S} := \left\{ \bigcup_{a \in J} C_a : J \subset \{-1, 1\}^2 \right\}$$

eine σ-Algebra auf S (wobei wir für $J = \emptyset$ wieder die leere Menge als Element von $\mathcal{S}$ erhalten). Wenn nun ϕ' die Gleichverteilung auf $\mathcal{B}(S)$ sei (also das auf S eingeschränkte 2-dimensionale Lebesguemaß), so definieren wir für $A \in \mathcal{S}$ die (endlichen) Lévymaße $\phi_A(\cdot) := \phi'(\cdot \cap A)$. Nach Theorem 3.6.2 existiert also offensichtlich ein $\mathbb{R}^2$-wertiges Zufallsmaß M auf $\mathcal{S}$ mit $M(A) \sim [0, 0, \phi_A]$ und für das Kontrollmaß λ_M auf $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ gilt:

$$\lambda_M(A) = \int_A \|x\|^2 \, \phi'(dx), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Das zeigt aber auch, dass das vorliegende Beispiel inhomogen ist. Man betrachte dazu $A_1 := C_{(1,1)} \cup C_{(-1,-1)}$ sowie $A_2 = C_{(1,-1)} \cup C_{(-1,1)}$, dann gilt zwar offensichtlich $\lambda_M(A_1) = \lambda_M(A_2)$, aber $M(A_1)$ und $M(A_2)$ besitzen eine verschiedene Verteilung (sonst Widerspruch zur Eindeutigkeit des Lévymaßes).

Zufallsmaße des homogenen Typs in (b) werden für uns im hinteren Teil dieser Arbeit von großer Bedeutung sein. Daher notieren wir die folgenden Beobachtungen, wobei Teil (d) die Frage der Unabhängigkeit gegenüber Eigenschaft (2) in Definition 3.3.1 präzisiert.

Eigenschaft 3.6.4
Seien $\mu \sim [\gamma', Q', \phi']$ eine volle sowie unendlich-teilbare Verteilung auf $\mathbb{R}^m$ und ν ein σ-endliches Maß auf dem Meßraum (S, Σ). Dann gelten für das von μ und ν erzeugte Zufallsmaß M gemäß Beispiel 3.6.3 (b) folgende Eigenschaften:

(a) Für alle $A \in \mathcal{S}$ gilt:

$$|\gamma|_A = \nu(A) \cdot \|\gamma'\|, \quad |Q|_A = \nu(A) \cdot \|Q'\|, \quad \mathrm{tr}(Q_A) = \nu(A) \cdot \mathrm{tr}(Q')$$

sowie für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$:

$$\lambda_M(A) = \nu(A) \cdot \left(\|\gamma'\| + \operatorname{tr}(Q') + \int_{\Gamma_m} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi'(dx) \right) =: \nu(A) \cdot C_\mu. \quad (3.40)$$

(b) Der Übergangskern aus Theorem 3.4.5 ist konstant durch $\rho(s,\cdot) = C_\mu^{-1}\phi'(\cdot)$ für alle $s \in S$ gegeben.

(c) Die Dichten von γ und Q gemäß Lemma 3.4.7 sind durch $a = C_\mu^{-1}\gamma'$ beziehungsweise $b = C_\mu^{-1}Q'$ (jeweils konstant) gegeben. Weiter gilt $K(t,s) = C_\mu^{-1} \cdot \psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ und $s \in S$, wobei ψ die log-charakteristische Funktion von μ bezeichne.

(d) $M(A_1)$ und $M(A_2)$ sind genau dann unabhängig, wenn $\nu(A_1 \cap A_2) = 0$, wobei $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ beliebig.

Beweis. Wegen $\mu \neq \varepsilon_0$ (sonst sind die Aussagen trivialerweise zu übertragen) gilt zunächst $C_\mu > 0$. Dann folgt (a) mit der Homogenität der Norm sowie der Maßeigenschaft von ν unmittelbar anhand der Definition der totalen Variation. Dabei gilt (3.40) wegen der σ-Endlichkeit von ν und der Maßeigenschaft beider Seiten auch auf $\sigma(\mathcal{S})$. Weiter folgt $\Phi(A \times B) = \nu(A) \cdot \phi'(B)$ für alle $A \in \mathcal{S}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ und mit dem gleichen Argument wie zuvor somit auch für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ (vergleiche Theorem 3.4.5). Der genannte Übergangskern ist also nach (a) und vor dem Hintergrund von (3.5) zutreffend, sodass man auch (c) mit Hilfe von (a) und (b) unmittelbar nachrechnet. Nun sind $M(A_1)$ und $M(A_2)$ genau dann unabhängig sind, wenn die gemeinsame Verteilung dem Produktmaß der einzelnen Verteilungen entspricht, d.h. wenn gemäß der Konstruktion in Theorem 3.6.2 und der vorliegenden Situation für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\begin{aligned} &\exp(\nu(A_1)\psi(t_1) + \nu(A_2)\psi(t_2)) \\ &\quad = \exp(\nu(A_1 \setminus A_2)\psi(t_1) + \nu(A_2 \setminus A_1)\psi(t_2) + \nu(A_1 \cap A_2)\psi(t_1 + t_2)). \end{aligned}$$

Da das Produktmaß wieder eine unendlich-teilbare Verteilung beschreibt, trifft dies auch auf die gemeinsame Verteilung zu (sofern die gerade genannte Gleichheit gilt), was dann nach Lemma 3.1.10 in [31] die Gleichheit der entsprechenden log-charakteristischen Funktionen zur Folge hat. Die Unabhängigkeit von $M(A_1)$ und $M(A_2)$ kann also wiederum für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^m$ über folgende Identität charakterisiert werden:

$$\begin{aligned} &\nu(A_1)\psi(t_1) + \nu(A_2)\psi(t_2) \\ &\quad = \nu(A_1 \setminus A_2)\psi(t_1) + \nu(A_2 \setminus A_1)\psi(t_2) + \nu(A_1 \cap A_2)\psi(t_1 + t_2) \end{aligned} \quad (3.41)$$

beziehungsweise da ν auf $\mathcal{S}$ (!) ein endliches Maß ist schließlich

$$\nu(A_1 \cap A_2) \cdot (\psi(t_1) + \psi(t_2) - \psi(t_1 + t_2)) = 0.$$

Die hinreichende Bedingung ist also klar, während wir umgekehrt lediglich ausschließen müssen, dass

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^m : \quad \psi(t_1) + \psi(t_2) - \psi(t_1 + t_2) = 0. \quad (3.42)$$

Angenommen, (3.42) gelte doch, so würde insbesondere folgen, dass $\psi(-t) = -\psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt die Aussage aber auch für die Realteile beider Seiten, was wegen $\operatorname{Re} \psi(t) \leq 0$ sogar zur Folge hätte, dass $\operatorname{Re} \psi(t) = 0$, jeweils für alle $t \in \mathbb{R}^m$. Damit wäre aber $|\widehat{\mu}(t)| = 1$ (konstant), Widerspruch zur Vollheit von μ (man vergleiche Lemma 3.1.11 in [31]). □

Korollar 3.6.5
Sei M wie oben. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$: $M(A_1), ..., M(A_n)$ sind genau dann unabhängig, wenn sie paarweise unabhängig sind.

Beweis. Gelte die paarweise Unabhängigkeit, so folgt nach Eigenschaft 3.6.4 (d), dass $\nu(A_i \cap A_j) = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ (ohne Einschränkung für $n > 2$). Dies hat wegen

$$A_i = \mathcal{Z}_{\{i\}}^{(n)} \cup \left(A_i \cap \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} A_j \right)$$

sowie der Subadditivität und Monotonie von ν einerseits zur Folge, dass $\nu(A_i) = \nu(\mathcal{Z}_{\{i\}}^{(n)})$ für alle $i = 1, ..., n$. Ganz ähnlich liefert die Monotonie von ν, dass $\nu(\mathcal{Z}_J^{(n)}) = 0$ für alle $J \subset \{1, ..., n\}$ mit $\#J \geq 2$. In Analogie zu (3.41) überzeugt man sich also wieder davon, dass die gemeinsame Verteilung dem entsprechenden Produktmaß entspricht. □

3.7 Komplexwertige Zufallsmaße

Betrachtet man eine Familie von $\mathbb{C}^m$-wertigen Zufallsvektoren, also von Elementen aus

$$L^0(\Omega, \mathbb{C}^m) := \{X : \Omega \to \mathbb{C}^m \mid X \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{C}^m)\text{-meßbar}\},$$

wobei $\mathcal{B}(\mathbb{C}^m)$ geeignet mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2m})$ zu identifizieren ist, so kann die Definition eines $\mathbb{C}^m$-wertigen ISRM mit Hinblick auf Definition 2.4.16 absolut analog zum $\mathbb{R}^m$-wertigen Fall erfolgen. Insbesondere die resultierende Frage der Existenz lässt sich in aller Kürze auf Theorem 3.6.2 zurückführen: Denn offensichtlich gewinnt man mit jedem $\mathbb{R}^{2m}$-wertigen Zufallsmaß $M = \{M(A) : A \in \mathcal{S}\}$ und $M(A) = (M_1(A), ..., M_{2m}(A))$ auch ein $\mathbb{C}^m$-wertiges Zufallsmaß $\widetilde{M} = \{\widetilde{M}(A) : A \in \mathcal{S}\}$, indem man für alle $A \in \mathcal{S}$ entsprechend $\widetilde{M}(A) := (\widetilde{M}_1(A), ..., \widetilde{M}_m(A))$ mit

$$\widetilde{M}_j(A) := M_j(A) + \mathrm{i}\, M_{m+j}(A), \quad j = 1, ..., m \tag{3.43}$$

definiert. Wenn wir also im Folgenden $\mathbb{C}^m$-wertige Zufallsmaße aus solchen mit Werten in $\mathbb{R}^{2m}$ konstruieren, so unterstellen wir stillschweigend diesen Zusammenhang. Speziell gilt dann für alle $A \in \mathcal{S}$:

$$\operatorname{Re} \widetilde{M}(A) = (M_1(A), ..., M_m(A)), \quad \operatorname{Im} \widetilde{M}(A) = (M_{m+1}(A), ..., M_{2m}(A)).$$

Sei umgekehrt $\widetilde{M} = \{\widetilde{M}(A) : A \in \mathcal{S}\}$ ein beliebiges (unendlich-teilbares) $\mathbb{C}^m$-wertiges Zufallsmaß, so erkennt man sofort, dass es sich auch bei $\{\mathrm{Re}\,\widetilde{M}(A) : A \in \mathcal{S}\}$ sowie $\{\mathrm{Im}\,\widetilde{M}(A) : A \in \mathcal{S}\}$ um jeweils $\mathbb{R}^m$-wertige (und unendlich-teilbare) Zufallsmaße handelt. In ähnlicher Weise und unter erneuter Berücksichtigung von Definition 2.4.16 ist ersichtlich, dass dann schließlich die durch

$$M(A) := (\mathrm{Re}\,\widetilde{M}(A), \mathrm{Im}\,\widetilde{M}(A)), \quad A \in \mathcal{S}$$

definierte Familie $M = \{M(A) : A \in \mathcal{S}\}$ ein $\mathbb{R}^{2m}$-wertiges und unendlich-teilbares ISRM repräsentiert. Wir nennen M das zu $\widetilde{M}$ *(reell) assoziierte* ISRM.

KAPITEL 4

Stochastische Integrationstheorie

Wir möchten nun mit Hilfe der Objekte aus Kapitel 3 weitere Zufallsvektoren konstruieren, die jedoch alle auf dasselbe ISRM zurückgreifen, was somit in der Regel zu Abhängigkeiten führen wird. Dabei erinnern die Art der Konstruktion sowie die resultierenden Eigenschaften an die deterministische Integrationstheorie und begründen daher auch den Titel dieses Kapitels. Ferner wird sich herausstellen, dass die Verteilung dieser einzelnen Zufallsvektoren im Wesentlichen bereits durch die Verteilung des zugrunde liegenden Zufallsmaßes bestimmt ist.
Nun ist die Existenz von unabhängigen Zufallsvektoren mit vorgegebener Verteilung (auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum) wohlbekannt. Besonders im Rahmen des Konzepts, das im nächsten Kapitel vorgestellt werden soll, sind wir jedoch an bestimmten Abhängigkeiten interessiert.
Diesbezüglich wird sich die nachfolgende Konstruktion als geradezu prädestiniert erweisen. Dabei vergleiche man die Ausführungen und Ergebnisse in [35] für den Fall $m = 1$, da diese nun im ersten Teil dieses Kapitels entsprechend verallgemeinert werden sollen. Weiter sei beispielsweise auf [5] und [29] verwiesen, wo zwar jeweils nur die Situation von Beispiel 3.6.3 (b) mit einem speziellen, symmetrisch α-stabilen Erzeuger betrachtet wird, in der letztgenannten Quelle jedoch auch bereits für $m > 1$, was die Verwendung von $L(\mathbb{R}^m)$-wertigen Funktionen erlaubt.
Schließlich betonen wir noch einmal, dass sich die Existenz von (deterministischen) Integralen für komplexwertige Funktionen stets auf Real- und Imaginärteil bezieht, während die Integrierbarkeit von reellwertigen Funktionen äquivalent zu der Endlichkeit des Integrals über den Betrag der jeweiligen Funktion ist. Im Falle von vektorwertigen Integranden gelten die Vereinbarungen entsprechend komponentenweise.

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

In diesem und in dem nächsten Abschnitt sei $M = \{M(A) : A \in \mathcal{S}\}$ ein beliebiges, unendlich-teilbares Zufallsmaß auf einem δ-Ring $\mathcal{S}$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$, wobei wir *den* zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum mit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ bezeichnen. Weiter nennen wir eine Abbildung $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ *einfach (bezüglich $\mathcal{S}$)*, falls eine Darstellung

$$f(s) = \sum_{j=1}^{n} R_j \, \mathbb{1}_{A_j}(s) \tag{4.1}$$

existiert, wobei $R_1, ..., R_n \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ disjunkt (mit $n \in \mathbb{N}$). Falls $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist, so handelt es sich also gerade um alle $\mathcal{S}$-$\mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{R}^m))$-meßbaren Abbildungen, die nur endlich viele Werte annehmen.

Definition 4.1.1 (Teil 1)
Sei $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ wie in (4.1) einfach (bezüglich $\mathcal{S}$). Dann definieren wir (symbolisch) für jedes $A \in \sigma(\mathcal{S})$:

$$I_M(f\,\mathbb{1}_A) := I(f\,\mathbb{1}_A) := \int_A f\,dM := \int_A f(s)\,M(ds) := \sum_{j=1}^{n} R_j\,M(A \cap A_j). \tag{4.2}$$

Schreibe $I(f)$ et cetera, falls $A = S$.

Bemerkung 4.1.2. (a) Die vorangegangene Definition nutzt zwar nicht aus, dass M unendlich-teilbar ist, wir können uns jedoch jetzt bereits auf diesen Fall beschränken. Dies hat den Vorteil, dass $I(f\,\mathbb{1}_A)$ als Summe unabhängiger und unendlich-teilbarer Zufallsvektoren selbst wieder unendlich-teilbar ist (vergleiche Proposition 3.1.21 in [31]).

(b) Vor dem Hintergrund von Lemma 3.1.2 ist $I(f\,\mathbb{1}_A)$ überhaupt erst für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ wohldefiniert. Weiter ist die jüngste Definition fast sicher unabhängig von der Darstellung in (4.1), denn falls die Operatoren $R_1, ..., R_n$ nicht paarweise verschieden sind, so bleibt die rechte Seite in (4.2) nach entsprechender Zusammenfassung fast sicher unverändert (man beachte die Additivität von M). Andererseits ist die Darstellung von f gemäß (4.1) bis auf die Hinzunahme des Nulloperators eindeutig, wenn man neben der Disjunktheit der Mengen $A_j \in \mathcal{S}$ auch voraussetzt, dass die Operatoren R_j paarweise verschieden sind ($j = 1, ..., n$).

(c) Sei f einfach und $A \in \sigma(\mathcal{S})$ beliebig. Dann ist offensichtlich auch $g := f\,\mathbb{1}_A$ einfach bezüglich $\mathcal{S}$ und es gilt $I(g) = I(f\,\mathbb{1}_A)$ (fast sicher), was obige Bezeichnung rechtfertigt.

Eigenschaft 4.1.3 (a) Die Abbildung $f \mapsto I(f)$ ist fast sicher linear (über $\mathbb{R}$).

(b) Die charakteristische Funktion von $I(f\,\mathbb{1}_A)$ ist für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ gegeben durch

$$\widehat{\mathcal{L}}(I(f\,\mathbb{1}_A))(t) = \exp\left(\int_A K(f(s)^*t, s)\,\lambda_M(ds)\right), \quad t \in \mathbb{R}^m. \tag{4.3}$$

Beweis. Zu (a): Angenommen, f_1 und f_2 seien einfache Funktionen mit Darstellungen $f_i = \sum_{j=1}^{n_i} R_j^{(i)}\,\mathbb{1}_{A_j^{(i)}}$ $(i = 1, 2)$. Definiere

$$A_0^{(1)} := \bigcup_{j=1}^{n_2} A_j^{(2)} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_1} A_j^{(1)}, \quad A_0^{(2)} := \bigcup_{j=1}^{n_1} A_j^{(1)} \setminus \bigcup_{j=1}^{n_2} A_j^{(2)}$$

und $R_0^{(1)} = R_0^{(2)} = 0$, dann können wir auch die folgenden Darstellungen im Sinne von (4.1) nutzen:

$$f_1(s) = \sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2} R_{j_1}^{(1)}\mathbb{1}_{A_{j_1}^{(1)}\cap A_{j_2}^{(2)}}(s), \quad f_2(s) = \sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2} R_{j_2}^{(2)}\mathbb{1}_{A_{j_1}^{(1)}\cap A_{j_2}^{(2)}}(s).$$

Somit folgt unmittelbar für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2) \quad \text{(fast sicher)}.$$

Für (b) betrachte man ein einfaches f wie in (4.1). Dann wissen wir, dass die charakteristische Funktion des Zufallsvektors $R_j\,M(A\cap A_j)$ für alle $j = 1, ..., n$ durch die Abbildung

$$\mathbb{R}^m \ni t \mapsto \widehat{\mathcal{L}}(M(A\cap A_j))(R_j^*t) = \exp\left(\int_{A\cap A_j} K(R_j^*t, s)\,\lambda_M(ds)\right)$$

gegeben ist (vergleiche Proposition 3.4.9). Da $M(A_1), ..., M(A_n)$ unabhängig sind, folgt gemäß (4.2) für alle $t \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{L}}(I(f\,\mathbb{1}_A))(t) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{A\cap A_j} K(R_j^*t, s)\,\lambda_M(ds)\right) \qquad (4.4)\\ &= \exp\left(\int_A \left(\sum_{j=1}^{n} K(R_j^*t, s)\mathbb{1}_{A_j}(s)\right)\lambda_M(ds)\right).\end{aligned}$$

Nun gilt $K(0, s) = 0$ für alle $s \in S$. Angesichts der Darstellung von f folgt also das Gewünschte:

$$= \exp\left(\int_A K(f(s)^*t, s)\,\lambda_M(ds)\right).$$

Dabei entnimmt man der Rechnung insbesondere, dass $K(f(\cdot)^*t, \cdot)$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ integrierbar ist (bezüglich λ_M). $\square$

Bemerkung 4.1.4. Die Abbildung $t \mapsto \int_A K(f(s)^*t, s)\,\lambda_M(ds)$ ist vor dem Hintergrund von Theorem 2.3.1 wirklich *die* log-charakteristische Funktion von $I(f\,\mathbb{1}_A)$. Insbesondere entnimmt man (4.4) die Stetigkeit dieser Abbildung, da gemäß Proposition 3.4.9 für alle $t' \in \mathbb{R}^m$ und $A' \in \mathcal{S}$ gilt: $\int_{A'} K(t', s)\,\lambda_M(ds) = \Theta(A', t')$, wobei die letztgenannte Funktion als log-charakteristische Funktion (in t' gelesen) selbst bereits stetig ist.

Wir möchten nun wie üblich das Integral auf eine größere Klasse von Funktionen ausdehnen, wobei uns die gerade gezeigten Eigenschaften helfen werden. Ferner überzeuge man sich davon, dass die nachfolgende Definition konsistent mit der vorangegangenen ist. Insbesondere ist jede einfache Funktion integrierbar.

Definition 4.1.5 (Teil 2)
Sei $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ eine $\sigma(\mathcal{S})$-$\mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{R}^m))$-meßbare Abbildung. Dann nennen wir f *integrierbar bezüglich* M beziehungsweise M*-integrierbar*, falls eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bezüglich $\mathcal{S}$) mit den folgenden Eigenschaften existiert:

(1) $f_n(s) \to f(s)$ für λ_M-fast alle $s \in S$,

(2) die bereits erklärte (und jeweils fast sicher eindeutige) Folge $(I(f_n\,\mathbb{1}_A))_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvektoren konvergiert für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ stochastisch ($n \to \infty$).

Weiter sei

$$\mathcal{I}(M) := \{f : (S, \sigma(\mathcal{S})) \to (\mathrm{L}(\mathbb{R}^m), \mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{R}^m))) \,|\, f \text{ ist } M\text{-integrierbar}\}.$$

Proposition 4.1.6
Seien $f \in \mathcal{I}(M)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine zugehörige Folge einfacher Funktionen, wobei $\eta(A)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ den stochastischen Limes in (2) bezeichne. Dann gilt für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $t \in \mathbb{R}^m$:

$$\widehat{\mathcal{L}}(\eta(A))(t) = \exp\left(\int_A K(f(s)^*t, s)\,\lambda_M(ds)\right), \tag{4.5}$$

insbesondere ist $K(f(\cdot)^*t, \cdot)$ integrierbar (bezüglich λ_M).

Beweis. Wir orientieren uns an dem Beweis zu Proposition 2.6 in [35] und definieren für alle $t \in \mathbb{R}^m$ und $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\mu_{t,n} : \sigma(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ durch

$$\mu_{t,n}(A) := \int_A K(f_n(s)^*t, s)\,\lambda_M(ds), \quad A \in \sigma(\mathcal{S}).$$

Wir haben zuvor bereits bemerkt, dass $K(f_n(\cdot)^*t, \cdot)$ integrierbar ist. Somit erkennt man also, dass die Abbildung $A \mapsto \mu_{t,n}(A)$ (für alle $t \in \mathbb{R}^m$ und $n \in \mathbb{N}$) ein signiertes, endliches Maß ist. Offensichtlich gilt dabei: $\mu_{t,n} \ll \lambda_M$. Andererseits wissen wir, dass $I(f_n \mathbb{1}_A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unendlich-teilbar ist, somit aber auch $\eta(A)$, siehe Lemma 3.1.6 in [31]. Bezeichnen wir mit $\chi(A, \cdot)$ die log-charakteristische Funktion von $\eta(A)$, so folgt mit Lemma 3.1.10 in obiger Quelle und wegen Bemerkung 4.1.4 für festes $t \in \mathbb{R}^m$ sowie $A \in \sigma(\mathcal{S})$: $\mu_{t,n}(A) \to \chi(A, t)$ für $n \to \infty$. Nun besagt aber das Hahn-Saks-Vitali Theorem (siehe Kapitel IX, Theorem 11 in [7]), dessen Voraussetzungen nach dem bisher Gezeigten erfüllt sind, dass die Abbildung $A \mapsto \chi(A, t)$ ebenfalls für alle $t \in \mathbb{R}^m$ ein signiertes Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$ darstellt, wobei sich $\chi(\cdot, t) \ll \lambda_M(\cdot)$ offensichtlich überträgt. Der Satz von Radon-Nikodým liefert also für alle $t \in \mathbb{R}^m$ die Existenz einer λ_M-Dichte von $\chi(\cdot, t)$, die wir mit z_t bezeichnen. Angesichts der Endlichkeit von $\chi(\cdot, t)$ folgt sogar, dass $z_t : S \to \mathbb{R}$ und dass z_t für alle $t \in \mathbb{R}^m$ integrierbar ist (vergleiche VII, §2 , Korollar 2.4 in [10]). Wegen

$$\chi(A, t) = \int_A z_t(s)\, \lambda_M(ds), \quad A \in \sigma(\mathcal{S}), t \in \mathbb{R}^m$$

genügt es also zu zeigen, dass für $t \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest gilt: $z_t(s) = K(f(s)^* t, s)$ für λ_M-fast alle $s \in S$. Nun haben wir bereits an anderer Stelle betont, dass K im ersten Argument stetig ist, zusammen mit der Voraussetzung an die Folge (f_n) gilt also

$$K(f_n(s)^* t, s) \to K(f(s)^* t, s) \quad \text{für } \lambda_M\text{-fast alle } s \in S.$$

Weiter ist λ_M σ-endlich, nach dem Satz von Egorov (siehe VI, §3, Satz 3.5 und Aufgabe 3.1 in [10]) existiert somit eine Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \sigma(\mathcal{S})$, sodass $C_0 := S \setminus \cup_{k=1}^{\infty} C_k$ eine λ_M-Nullmenge ist und für die weiterhin gilt: $c_k := \lambda_M(C_k) < \infty$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{s \in C_k} |K(f_n(s)^* t, s) - K(f(s)^* t, s)| \right) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mit der Dreiecksungleichung und wegen $c_k < \infty$ folgt also nicht nur, dass $K(f(\cdot)^* t, \cdot) \mathbb{1}_{C_k}(\cdot)$ die Integrierbarkeit von den Funktionen $K(f_n(\cdot)^* t, \cdot) \mathbb{1}_{C_k}(\cdot), n \in \mathbb{N}$ erbt, sondern auch, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $A \in \sigma(\mathcal{S})$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{A \cap C_k} z_t(s)\, \lambda_M(ds) &= \chi(A \cap C_k, t) \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_{A \cap C_k} K(f_n(s)^* t, s)\, \lambda_M(ds) \\ &= \int_{A \cap C_k} K(f(s)^* t, s)\, \lambda_M(ds). \end{aligned}$$

Durch Betrachtung der eingeschränkten signierten Maße $\chi(\cdot \cap C_k, t)$ erkennt man schließlich wie früher für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $z_t(\cdot)\, \mathbb{1}_{C_k}(\cdot)$ und $K(f(\cdot)^* t, \cdot)\, \mathbb{1}_{C_k}(\cdot)$ jeweils zugehörige Dichten sind, sodass aus Gründen der Eindeutigkeit λ_M-Nullmengen $B_1, B_2, ...$ mit

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad z_t(s) = K(f(s)^* t, s) \quad \text{für alle } s \in C_k \setminus B_k$$

existieren. Damit besteht aber insgesamt Gleichheit bis auf jene λ_M-Nullmenge, die aus C_0 nach Vereinigung mit den Mengen $C_k \cap B_k, k \in \mathbb{N}$ hervorgeht. $\square$

Man beachte, dass Definition 4.1.5 (in dieser starken Form) bereits die Implikation $f \in \mathcal{I}(M) \Rightarrow f\,\mathbb{1}_A \in \mathcal{I}(M)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ liefert, inklusive einer geeigneten approximierenden Folge. Umgekehrt genügt es im Allgemeinen nicht, hinsichtlich der Bedingung (2) nur die Menge $A = S$ zu testen, da sonst $f\,\mathbb{1}_A \notin \mathcal{I}(M)$ gelten kann oder aber $(f_n \mathbb{1}_A)_{n\in\mathbb{N}}$ zumindest keine geeignete Folge ist (jeweils für gewisse $A \in \sigma(\mathcal{S})$). Von Letzterem haben wir jedoch im vorangegangenen Beweis massiv profitiert.

Beispiel 4.1.7
Sei M das von $\mu \sim [1,0,0]$ und dem auf $[-1,1]$ eingeschränkten Lebesguemaß erzeugte Zufallsmaß., d.h. $S = [-1,1]$ mit $\mathcal{S} = \mathcal{B}([-1,1])$. Dann gehört $f := 0$ zu $\mathcal{I}(M)$ (betrachte zum Beispiel $f_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$), während die durch

$$g_n(s) := n\left[(-1)^n \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},0)}(s) + (-1)^{n+1}\mathbb{1}_{(0,\frac{1}{n}]}(s)\right], \quad s \in [-1,1]$$

definierte Folge einfacher Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwar neben (1) offensichtlich auch (2) für $A = S = [-1,1]$ erfüllt (in Definition 4.1.5), jedoch nicht für $A = (0,1]$ (man vergleiche Eigenschaft 3.6.4).

Korollar und Definition 4.1.8
Seien $f \in \mathcal{I}(M)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine entsprechende Folge einfacher Funktionen, so definieren wir für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$

$$I_M(f\,\mathbb{1}_A) := I(f\,\mathbb{1}_A) := \int_A f\,dM := \int_A f(s)\,M(ds) := \mathbb{P}\text{ - }\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,dM \tag{4.6}$$

und schreiben $I(f)$ et cetera, falls $A = S$. Die resultierenden Grenzwerte sind dabei jeweils fast sicher unabhängig von der Wahl der Folge (f_n). Schließlich ist $I(f\,\mathbb{1}_A)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ unendlich-teilbar mit log-charakteristischer Funktion

$$\mathbb{R}^m \ni t \mapsto \int_A K(f(s)^* t, s)\,\lambda_M(ds).$$

Beweis. Gegeben eine solche Folge (f_n), so haben wir die jeweiligen Grenzwerte in Proposition 4.1.6 zunächst mit $\eta(A)$ bezeichnet und bereits als unendlich-teilbar erkannt. Betrachtet man nun eine weitere Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die (1) und (2) erfüllt, so liefern die Linearität des Integrals für einfache Funktionen sowie die Additivität des stochastischen Limes einerseits, dass durch $h_n := f_n - g_n$ eine Folge einfacher Funktionen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert wird, die $h := 0 \in \mathcal{I}(M)$ geeignet approximiert. Andererseits folgt dann aber nach (4.5) auch, dass die Differenz der resultierenden Grenzwerte eine ε_0-Verteilung besitzt, d.h. das Integral ist sogar fast sicher eindeutig bestimmt. Die angegebene log-charakteristische Funktion entnimmt man ebenfalls dem Beweis von Proposition 4.1.6 (und der Betrachtung von $\chi(A,t)$). $\square$

Die Darstellung der charakteristischen Funktion gemäß (4.3) gilt also nicht nur für einfache Funktionen f. Als Nächstes möchten wir auch die Linearitätsaussage übertragen, ehe wir im Anschluss weitere nützliche Eigenschaften gewinnen können. Dabei haben wir gerade bereits erkannt, dass alle Aussagen nur fast sicher gelten können. Genau genommen wäre also auch die Abbildung $f \mapsto I(f)$ erst nach Identifizierung fast sicher identischer Objekte in $L^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ wohldefiniert. Wir werden auf diese Unterscheidungen jedoch weitestgehend verzichten.

Eigenschaft 4.1.9
$\mathcal{I}(M)$ ist ein Vektorraum und die Abbildung $\mathcal{I}(M) \ni f \mapsto I(f)$ ist linear (über $\mathbb{R}$).

Beweis. Die meisten der zu zeigenden Vektorraumeigenschaften sind offensichtlich. Seien also nun $f_1, f_2 \in \mathcal{I}(M)$ mit approximierenden, einfachen Funktionenfolgen $(f_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Man betrachte weiter für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ die Abbildung $h := \alpha_1 f_1 + a_2 f_2$, so liefert die durch $h_n := \alpha_1 f_{n,1} + \alpha_2 f_{n,2}$ definierte Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insgesamt mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis zu Korollar und Definition 4.1.8 das Gewünschte und es gilt

$$I(h) = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} I(h_n) = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} (\alpha_1 I(f_{n,1}) + \alpha_2 I(f_{n,2})) = \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2)$$

fast sicher. □

Eigenschaft 4.1.10
Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{I}(M)$. Falls für λ_M-fast alle $s \in S$ gilt: $\|f_1(s)\| \cdot \|f_2(s)\| = 0$, dann sind $I(f_1)$ und $I(f_2)$ unabhängig.

Beweis. Für $A_i := \{s \in S : f_i(s) \neq 0\} \in \sigma(\mathcal{S})$ $(i = 1, 2)$ gelte also: $\lambda_M(A_1 \cap A_2) = 0$. Nun nutze man Theorem 3.3.5 (a), um aus Monotoniegründen für alle $A \in \mathcal{S}$ mit $A \subset (A_1 \cap A_2)$ zu erkennen, dass $M(A) = 0$ fast sicher. Weiter seien $(f_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ approximierende, einfache Funktionenfolgen von f_i für $i = 1, 2$. Dass nun auch $f_1 \mathbb{1}_{A_1}$ integrierbar und $(f_{n,1} \mathbb{1}_{A_1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine geeignete approximierende Folge ist, wissen wir bereits. Andererseits folgt jedoch nach Wahl von A_1, dass $f_1(s) = f_1(s) \mathbb{1}_{A_1}(s)$ für alle $s \in S$. Analog argumentiert man für f_2. Wegen der Unabhängigkeit von der Wahl Folge gilt also (jeweils fast sicher):

$$I(f_1) = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} I(f_{n,1} \mathbb{1}_{A_1}), \quad I(f_2) = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} I(f_{n,2} \mathbb{1}_{A_2}).$$

Wenn wir nun noch zeigen können, dass $I(f_{n,1} \mathbb{1}_{A_1})$ und $I(f_{n,2} \mathbb{1}_{A_2})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind, so liefert dies bekanntermaßen die Behauptung (siehe Problem 3.10 in [36]). Mit der Linearität und dem zuvor Gezeigten wissen wir aber, dass

$$I(f_{n,1} \mathbb{1}_{A_1}) = I(f_{n,1} \mathbb{1}_{A_1 \setminus A_2}) + I(f_{n,1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2}) = I(f_{n,1} \mathbb{1}_{A_1 \setminus A_2})$$

fast sicher und für jedes $n \in \mathbb{N}$ (siehe Definition 4.1.1). Analog zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $I(f_{n,2} \mathbb{1}_{A_2}) = I(f_{n,2} \mathbb{1}_{A_2 \setminus A_1})$ fast sicher. Somit werden aber bei der Definition des Integrals hinsichtlich $f_{n,1} \mathbb{1}_{A_1 \setminus A_2}$ und $f_{n,2} \mathbb{1}_{A_2 \setminus A_1}$ de facto jeweils disjunkte Mengen und somit unabhängige Zufallsvektoren betrachtet. □

Möchte man auch eine Charakterisierung der Unabhängigkeit erhalten, so wird man mehr Informationen von M benötigen. Denn falls beispielsweise $M = 0$, so gilt auch $I(f) = 0$ für alle meßbaren f, d.h. die Umkehrung stimmt im Allgemeinen nicht.

Lemma 4.1.11
Seien $f \in \mathcal{I}(M)$ und $R \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$. Dann gehört auch die durch $(R \cdot f)(s) := Rf(s)$ definierte Abbildung $R \cdot f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ zu $\mathcal{I}(M)$ und es gilt

$$I(R \cdot f) = R\, I(f) \quad \text{(fast sicher).} \tag{4.7}$$

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $R \neq 0$, wobei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine approximierende Folge einfacher Funktionen für f sei. Während die Meßbarkeit von $R \cdot f$ aus der von f folgt (komponentenweise Betrachtung), erkennt man auch, dass $Rf_n(s) \to Rf(s)$ für λ_M-fast alle $s \in S$. Weiter gilt (4.7) offensichtlich für alle einfachen Funktionen und wir erhalten für $A \in \sigma(\mathcal{S})$ sowie $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\|I(R \cdot f_n \mathbb{1}_A) - R\, I(f \mathbb{1}_A)\| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(\|R\, I(f_n \mathbb{1}_A) - R\, I(f \mathbb{1}_A)\| \geq \varepsilon) \\
&\leq \mathbb{P}(\, \|I(f_n \mathbb{1}_A) - I(f \mathbb{1}_A)\| \geq \varepsilon / \|R\|) \\
&\to 0
\end{aligned}$$

nach Wahl von (f_n). Dies liefert gleichermaßen, dass $R \cdot f \in \mathcal{I}(M)$ als auch, dass (4.7) gilt. □

Wir erinnern an Lemma 2.0.1 und die dem vorausgegangene Bemerkung. Diesbezüglich wird sich die nachfolgende Eigenschaft, die eine konkrete Darstellung der Fouriertransformierten der gemeinsamen Verteilung von $(I(f_1), ..., I(f_n))$ liefert, als geeignetes Scharnier erweisen.

Eigenschaft 4.1.12
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, ..., f_n \in \mathcal{I}(M)$ beliebig. Dann gilt für alle $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum_{j=1}^n \langle I(f_j), t_j \rangle}\right) = \exp\left(\int\limits_S K\left(\sum_{j=1}^n f_j(s)^* t_j, s \right) \lambda_M(ds) \right).$$

Beweis. Seien $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest. Setze $e := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$ und sei R_j für alle $j = 1, .., n$ die Diagonalmatrix mit $R_j e = t_j$. Dann folgt wegen (4.7) und der Linearität des Integrals (endlich oft angewendet):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum_{j=1}^n \langle I(f_j), t_j \rangle}\right) &= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum_{j=1}^n \langle R_j^* I(f_j), e \rangle}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \langle \sum_{j=1}^n I(R_j^* \cdot f_j), e \rangle}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \langle I(\sum_{j=1}^n R_j^* \cdot f_j), e \rangle}\right)
\end{aligned}$$

$$= \exp\left(\int_S K\left(\left(\left(\sum_{j=1}^n R_j^* f_j(s)\right)^* e, s\right)\lambda_M(ds)\right)\right.$$
$$= \exp\left(\int_S K\left(\sum_{j=1}^n f_j(s)^* R_j e, s\right)\lambda_M(ds)\right)$$
$$= \exp\left(\int_S K\left(\sum_{j=1}^n f_j(s)^* t_j, s\right)\lambda_M(ds)\right).$$

□

Eigenschaft 4.1.13
Seien $f, f_1, f_2, ... \in \mathcal{I}(M)$. Dann gilt:

$$I(f_n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{\mathbb{P}} I(f) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}^m : \int_S K\left((f_n(s) - f(s))^* t, s\right)\lambda_M(ds) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0.$$

Beweis. Zunächst konvergiert $I(f_n)$ genau dann stochastisch gegen $I(f)$, wenn $I(f_n) - I(f) = I(f_n - f)$ (Gleichheit gilt fast sicher) in Verteilung gegen 0 konvergiert. Nun kennen wir aber gemäß Korollar und Definition 4.1.8 die log-charakteristische Funktion von $I(f_n - f)$, somit folgt die Behauptung nach Lemma 3.1.10 in [31]. □

4.2 Charakterisierung der Klasse $\mathcal{I}(M)$

Der Name dieses Abschnitts ist weitestgehend Programm. Dabei sind wir einerseits an hinreichenden Kriterien für $f \in \mathcal{I}(M)$ interessiert, da die formale Definition generell nicht sehr praktikabel ist. Andererseits möchten wir über die notwendige Bedingung das Lévy-Khintchine-Tripel von $I(f)$ bestimmen, sofern $f \in \mathcal{I}(M)$. Dazu definieren wir zunächst die folgenden Abbildungen, die sich für die obige Frage als zentral erweisen werden.

$$U : \mathrm{L}(\mathbb{R}^m) \times S \to \mathbb{R}^m, \quad (R, s) \mapsto R\,a(s) + \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{R\,x}{1 + \|R\,x\|^2} - \frac{R\,x}{1 + \|x\|^2}\right)\rho(s, dx),$$

$$V : \mathrm{L}(\mathbb{R}^m) \times S \to \mathbb{R}_+, \quad (R, s) \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|R\,x\|^2\}\,\rho(s, dx).$$

Dass U wohldefiniert ist, d.h. dass das genannte Integral für alle $s \in S$ existiert, wird insbesondere mit Lemma 4.2.2 folgen. Dabei richten wir uns zwar im Wesentlichen wieder nach [35], können jedoch die dort verwendeten Methoden (für den Fall $m = 1$) nur bedingt aufgreifen. Insbesondere müssen wir beide Richtungen getrennt betrachten, wobei der Beweis der hinreichenden Bedingung einige Ideen aus [37] aufgreift.

Ist ϕ ein Lévymaß, so ist $h(t,\cdot)$ (Bezeichnung aus dem Beweis zu Theorem 3.3.2) bekanntlich für alle $t \in \mathbb{R}^m$ integrierbar bezüglich ϕ. Unter einer gewissen Voraussetzung gilt auch die Umkehrung, nämlich (vergleiche Theorem 3.3.10 in [37]):

Lemma 4.2.1
Sei ϕ ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ derart, dass

$$\mathbb{R}^m \ni y \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} (1-\cos\langle y,x\rangle)\,\phi(dx) \tag{4.8}$$

nach $[0,\infty)$ abbildet und stetig ist. Dann folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1,\|x\|^2\}\,\phi(dx) < \infty,$$

d.h. ϕ ist ein Lévymaß, sofern auch $\phi(\{0\})=0$ gilt.

Beweis. Existiert also (4.8) für alle $y \in \mathbb{R}^m$, so bezeichnen wir die entsprechende Abbildung mit $g(y)$. Weiter definieren wir für $t \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest die kompakte Menge $A_t := \{st : s \in [0,1]\}$. Nach Voraussetzung gilt also $\alpha(t) := \sup\{g(y) : y \in A_t\} < \infty$, insbesondere existiert $\int_{[0,1]} g(st)\,ds$ (als Lebesgue-Integral). Dabei können wir mit dem Satz von Tonelli schreiben:

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0,1]} g(st)\,ds &= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{[0,1]} (1-\cos\langle st,x\rangle)\,ds\,\phi(dx)\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(1-\frac{\sin\langle t,x\rangle}{\langle t,x\rangle}\right)\phi(dx),\end{aligned}$$

wobei wir den Integranden als Null verstehen, wenn immer $\langle t,x\rangle = 0$. In jedem Falle existiert eine Konstante $C>0$, mit der die folgende Abschätzung zulässig ist, denn für $|z| \le 1$ gilt $1-\frac{\sin z}{z} \ge \frac{1}{8}z^2$ (Potenzreihenentwicklung) und für $|z|>1$ vergleiche man beispielsweise die Aussage von Lemma 3.5.4:

$$\ge C\int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1,\langle t,x\rangle^2\}\,\phi(dx).$$

Zusammenfassend konnten wir also für alle $t \in \mathbb{R}^m$ zeigen, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1,\langle t,x\rangle^2\}\,\phi(dx) < \infty.$$

Nun liest man diese Aussage jeweils für $t = a \in \{-1,1\}^m$ und erhält durch Betrachtung der Mengen M_a wie im Beweis zu Theorem 2.3.5 die Behauptung. $\square$

Lemma 4.2.2
Für alle $R \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ und $x \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\left\| \frac{R\,x}{1+\|R\,x\|^2} - \frac{R\,x}{1+\|x\|^2} \right\| \leq \max\{2, \|R\| + \|R\|^3\} \, \min\{1, \|x\|^2\}.$$

Beweis. Für $\|x\| \leq 1$ schreibe man $\|Rx\| \leq \|R\|$ sowie

$$\left| \frac{1}{1+\|R\,x\|^2} - \frac{1}{1+\|x\|^2} \right| = \frac{\big|\, \|x\|^2 - \|Rx\|^2 \,\big|}{(1+\|Rx\|^2)(1+\|x\|^2)} \leq \|x\|^2 + \|R\|^2\|x\|^2.$$

Falls $\|x\| > 1$, so überlege man sich zunächst den trivialen Fall $\|Rx\| \leq 1$, während wir für $\|Rx\| > 1$ unmittelbar

$$\begin{aligned} \left\| \frac{R\,x}{1+\|R\,x\|^2} - \frac{R\,x}{1+\|x\|^2} \right\| &\leq \frac{\|Rx\|}{1+\|Rx\|^2} + \frac{\|Rx\|}{1+\|x\|^2} \\ &\leq \frac{\|Rx\|^2}{1+\|Rx\|^2} + \frac{\|R\|\,\|x\|}{1+\|x\|^2} \\ &\leq \frac{\|Rx\|^2}{1+\|Rx\|^2} + \frac{\|R\|\,\|x\|^2}{1+\|x\|^2} \\ &\leq 1 + \|R\| \end{aligned}$$

erhalten. □

Lemma 4.2.3
Für alle $t, y \in \mathbb{R}^m$ gilt.

$$\left| \frac{\langle t, y\rangle}{1+\|y\|^2} - \sin\langle t, y\rangle \right| \leq (1 + \|t\| + \|t\|^2) \min\{1, \|y\|^2\}.$$

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest. Dann ist der Fall $\|y\| > 1$ analog zu oben klar (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Für $\|y\| \leq 1$ betrachte man hingegen die folgende Rechnung, bei der wir erneut von der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie von $|\sin z - z| \leq z^2$ Gebrauch machen (Potenzreihenentwicklung und Restgliedabschätzung):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\langle t, y\rangle}{1+\|y\|^2} - \sin\langle t, y\rangle \right| &= \left| \frac{\langle t, y\rangle - \sin\langle t, y\rangle}{1+\|y\|^2} - \frac{\|y\|^2 \sin\langle t, y\rangle}{1+\|y\|^2} \right| \\ &\leq |\langle t, y\rangle - \sin\langle t, y\rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \langle t, y\rangle^2 + \|y\|^2 \\ &\leq (1 + \|t\|^2)\|y\|^2. \end{aligned}$$

□

Mit der geleisteten Vorarbeit können wir also nun das erste Hauptresultat dieses Abschnitts beweisen, man vergleiche Theorem 2.7 in [35].

Proposition 4.2.4
Es gelte $f \in \mathcal{I}(M)$, so existieren die folgenden Integrale:

$$\gamma_f := \int\limits_S U(f(s), s)\, \lambda_M(ds), \quad Q_f := \int\limits_S f(s)b(s)f(s)^*\, \lambda_M(ds)$$

und durch (vergleiche Theorem 3.4.5)

$$\phi_f(A) := \Phi(\{(s,x) \in S \times \mathbb{R}^m : f(s)x \in A \setminus \{0\}\}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

wird ein Lévymaß definiert. Weiter gilt: $I(f) \sim [\gamma_f, Q_f, \phi_f]$.

Beweis. Nach Korollar und Definition 4.1.8 wissen wir bereits, dass die Abbildung $t \mapsto \int_S K(f(s)^*t, s)\, \lambda_M(ds)$ wohldefiniert ist und der log-charakteristischen Funktion von $I(f)$ entspricht. Damit existiert aber definitorisch auch das folgende Integral für alle $t \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_S \operatorname{Re} K(f(s)^*t, s)\, \lambda_M(ds) \\
&= -\int\limits_S \left[\frac{1}{2}\langle b(s)f(s)^*t, f(s)^*t\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^m} (1 - \cos\langle f(s)^*t, x\rangle)\, \rho(s, dx) \right] \lambda_M(ds).
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Korollar 3.4.8 (a) ist nun die folgende Zerlegung zulässig:

$$\begin{aligned}
&= -\int\limits_S \frac{1}{2}\langle b(s)f(s)^*t, f(s)^*t\rangle\, \lambda_M(ds) - \int\limits_S \int\limits_{\mathbb{R}^m} (1 - \cos\langle f(s)^*t, x\rangle)\, \rho(s, dx)\, \lambda_M(ds) \\
&= -\int\limits_S \frac{1}{2}\langle f(s)b(s)f(s)^*t, t\rangle\, \lambda_M(ds) - \int\limits_{S \times \mathbb{R}^m} (1 - \cos\langle t, f(s)x\rangle)\, \Phi(ds, dx),
\end{aligned}$$

nach Theorem 3.4.5 und (3.6). Schließlich liefert die Anwendung der Transformationsformel (man beachte, dass $1 - \cos\langle t, 0\rangle = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$):

$$= -\int\limits_S \frac{1}{2}\langle f(s)b(s)f(s)^*t, t\rangle\, \lambda_M(ds) - \int\limits_{\mathbb{R}^m} (1 - \cos\langle t, x\rangle)\, \phi_f(dx).$$

Zusammenfassend konnten wir also zeigen, dass die beiden letztgenannten Integrale für alle $t \in \mathbb{R}^m$ existieren. Daraus möchten wir nun zunächst auf die Existenz von Q_f schließen, wobei aus Gründen der Übersicht $C(s) := f(s)b(s)f(s)^*$ sei mit $C(s) = (C(s)^{i,j})_{i,j=1,\dots,m}$. Zu $i \in \{1, ..., m\}$ beliebig betrachte man dann speziell den Vektor $t = e_i$, um

$$\int\limits_S |C(s)^{i,i}|\, \lambda_M(ds) = \int\limits_S |\langle C(s)t, t\rangle|\, \lambda_M(ds) < \infty$$

zu erkennen, d.h. die Diagonalelemente von $C(s)$ sind bezüglich λ_M integrierbar. Analog folgt für $1 \leq i, j \leq m$ beliebig durch Betrachtung von $t = e_i + e_j$, dass

$$\int\limits_S \left| C(s)^{i,i} + C(s)^{i,j} + C(s)^{j,i} + C(s)^{j,j} \right| \lambda_M(ds) < \infty.$$

Mit dem, was wir über die Diagonalelemente bereits wissen, ist dann auch $C(s)^{i,j} + C(s)^{j,i}$ integrierbar. Nach Korollar 3.4.8 (b) ist dies aber äquivalent zur Integrierbarkeit von $C(s)^{i,j}$, denn es gilt für λ_M-fast alle $s \in S$:

$$C(s)^* = f(s)b(s)^* f(s)^* = f(s)b(s)f(s)^* = C(s).$$

Das zeigt insgesamt, dass Q_f existiert. Indem wir die letzten Aussagen noch einmal bemühen, wissen wir aber auch, dass Q_f symmetrisch ist und dass für alle $t \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\langle Q_f t, t \rangle = \int\limits_S \langle f(s)b(s)f(s)^* t, t \rangle \, \lambda_M(ds) = \int\limits_S \langle b(s)f(s)^* t, f(s)^* t \rangle \, \lambda_M(ds) \geq 0,$$

d.h. Q_f ist eine symmetrische und positiv-semidefinite Matrix, somit also überhaupt zulässig als Gaußanteil von $I(f)$. Andererseits (siehe oben) wissen wir bereits die Stetigkeit der Abbildung

$$t \mapsto \int\limits_S \mathrm{Re}\, K(f(s)^* t, s) \, \lambda_M(ds) = -\frac{1}{2} \langle Q_f t, t \rangle - \int\limits_{\mathbb{R}^m} (1 - \cos\langle t, x \rangle) \, \phi_f(dx)$$

und somit aber auch die von $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} (1 - \cos\langle t, x \rangle) \, \phi_f(dx)$. Damit greift insgesamt die Aussage von Lemma 4.2.1, d.h.

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|x\|^2\} \, \phi_f(dx) &= \int\limits_{S \times \mathbb{R}^m} \min\{1, \|f(s)x\|^2\} \, \Phi(ds, dx) \\ &= \int\limits_S V(f(s), s) \, \lambda_M(ds) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

was zusammen mit $\phi_f(\{0\}) = 0$ insbesondere liefert, dass ϕ_f ein Lévymaß ist. Schließlich möchten wir argumentieren, dass γ_f existiert, wobei es genügt, für alle $t \in \mathbb{R}^m$ die Existenz von

$$\int\limits_S \langle t, U(f(s), s) \rangle \, \lambda_M(ds)$$

nachzuweisen, denn dann erhält man die j-te Komponente von $U(f(s), s)$ für $t = e_j$. Seien also $t \in \mathbb{R}^m$ und $s \in S$ beliebig, aber fest, so gelangen wir wie folgt zum Ziel:

$$\langle t, U(f(s), s) \rangle = \left\langle t, f(s)a(s) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{f(s)x}{1 + \|f(s)x\|^2} - \frac{f(s)x}{1 + \|x\|^2} \right) \rho(s, dx) \right\rangle$$

$$= \langle t, f(s)a(s)\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\langle t, f(s)x\rangle}{1+\|f(s)x\|^2} - \frac{\langle t, f(s)x\rangle}{1+\|x\|^2} \right) \rho(s,dx),$$

wobei wir von der Existenz des Integrals (für alle $s \in S$) gemäß Lemma 4.2.2 profitiert haben. Dass das zweite (und somit auch das erste) der beiden nachfolgenden Integrale existiert, erkennt man hingegen mit Lemma 4.2.3, wird im weiteren Verlauf jedoch impliziert präzisiert:

$$\begin{aligned} &= \langle t, f(s)a(s)\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\sin\langle t, f(s)x\rangle - \frac{\langle t, f(s)x\rangle}{1+\|x\|^2} \right) \rho(s,dx) \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\langle t, f(s)x\rangle}{1+\|f(s)x\|^2} - \sin\langle t, f(s)x\rangle \right) \rho(s,dx) \\ &= \operatorname{Im} K(f(s)^*t, s) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\langle t, f(s)x\rangle}{1+\|f(s)x\|^2} - \sin\langle t, f(s)x\rangle \right) \rho(s,dx) \end{aligned}$$

und daher mit Lemma 4.2.3 (setze $C(t) := 1 + \|t\| + \|t\|^2$)

$$|\langle t, U(f(s),s)\rangle| \le |\operatorname{Im} K(f(s)^*t,s)| + C(t) \int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|f(s)x\|^2\}\, \rho(s,dx)$$

beziehungsweise insbesondere

$$\int\limits_S |\langle t, U(f(s),s)\rangle|\, \lambda_M(ds) \le \int\limits_S |K(f(s)^*t,s)|\, \lambda_M(ds) + C(t) \int\limits_S V(f(s),s)\, \lambda_M(ds) < \infty$$

nach dem zuvor Gezeigten. Für die Angabe des Lévy-Khintchine-Tripels sei daran erinnert, dass wir die log-charakteristische Funktion von $I(f)$ bereits kennen. Dabei haben wir insbesondere für alle $t \in \mathbb{R}^m$ erkannt (mit $h(t,x)$ wie an früher Stelle), dass

$$\operatorname{Re} \int\limits_S K(f(s)^*t,s)\, \lambda_M(ds) = -\frac{1}{2} \langle Q_f\, t, t\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \operatorname{Re}\, h(t,x)\, \phi_f(dx).$$

In ähnlicher Weise überzeugt man sich mit den vorherigen Schritten schließlich von

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} \int\limits_S K(f(s)^*t,s)\, \lambda_M(ds) \\ &= \left\langle t, \int\limits_S U(f(s),s)\, \lambda_M(ds) \right\rangle + \int\limits_S \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\sin\langle t, f(s)x\rangle - \frac{\langle t, f(s)x\rangle}{1+\|f(s)x\|^2} \right) \rho(s,dx)\, \lambda_M(ds) \\ &= \langle t, \gamma_f\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \operatorname{Im}\, h(t,x)\, \phi_f(dx), \end{aligned}$$

d.h. $I(f) \sim [\gamma_f, Q_f, \phi_f]$. $\square$

Mit dem gerade erbrachten Nachweis der notwendigen Bedingung wird uns nun auch die hinreichende Bedingung für die Frage $f \in \mathcal{I}(M)$ gelingen. Zuvor einige Hilfsaussagen, die sich an Lemma 2.8 in [35] und Theorem 3.2.2. in [37] orientieren.

Lemma 4.2.5
Sei $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ meßbar. Dann gilt für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $s \in S$:

$$\|U(f(s)\mathbb{1}_A(s), s)\| \leq \|U(f(s), s)\|\mathbb{1}_A(s) + 2V(f(s), s). \tag{4.9}$$

Beweis. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
U(f(s)\mathbb{1}_A(s), s) &= \mathbb{1}_A(s)f(s)a(s) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\mathbb{1}_A(s)f(s)x}{1 + \|\mathbb{1}_A(s)f(s)x\|^2} - \frac{\mathbb{1}_A(s)f(s)x}{1 + \|x\|^2} \right) \rho(s, dx) \\
&= \mathbb{1}_A(s)f(s)a(s) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\mathbb{1}_A(s)f(s)x}{1 + \|f(s)x\|^2} - \frac{\mathbb{1}_A(s)f(s)x}{1 + \|x\|^2} \right) \rho(s, dx) \\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\mathbb{1}_A(s)f(s)x}{1 + \|\mathbb{1}_A(s)f(s)x\|^2} - \frac{\mathbb{1}_A(s)f(s)x}{1 + \|f(s)x\|^2} \right) \rho(s, dx) \\
&= \mathbb{1}_A(s)\, U(f(s), s) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{\mathbb{1}_A(s)f(s)x}{1 + \|\mathbb{1}_A(s)f(s)x\|^2} - \frac{\mathbb{1}_A(s)f(s)x}{1 + \|f(s)x\|^2} \right) \rho(s, dx).
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung nach Dreiecksungleichung und Anwendung von Lemma 4.2.2 (für $\mathbb{1}_A(s)I_m$ statt R und $f(s)x$ statt x). Insbesondere existieren alle Integrale. $\square$

Lemma 4.2.6
Seien $(X_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen unendlich-teilbarer Zufallsvektoren auf $\mathbb{R}^m$, wobei für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $X_n^{(1)}$ und $X_n^{(2)}$ sind unabhängig mit $X_n^{(i)} \sim [\gamma_n^{(i)}, Q_n^{(i)}, \phi_n^{(i)}]$, $i = 1, 2$. Falls nun $X_n^{(1)} + X_n^{(2)} \to 0$ stochastisch, so gilt auch jeweils

$$X_n^{(i)} - \gamma_n^{(i)} \to 0 \quad \text{stochastisch} \quad (n \to \infty).$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für $(X_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ zu argumentieren. Setze $X_n := X_n^{(1)} + X_n^{(2)}$, so wissen wir nach Proposition 3.1.21 in [31] für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $X_n \sim [\gamma_n, Q_n, \phi_n]$ mit

$$\gamma_n = \gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)}, \quad Q_n = Q_n^{(1)} + Q_n^{(2)}, \quad \phi_n = \phi_n^{(1)} + \phi_n^{(2)}.$$

Dabei liefert die eine Richtung von Theorem 2.3.5 insbesondere, dass $Q_n \to 0$ sowie $\int \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_n(dx) \to 0$. Lesen wir die erste dieser beiden Aussage, so bedeutet dies für alle $t \in \mathbb{R}^m$, dass $\langle Q_n t, t\rangle \to 0$. Wegen der positiven Semidefinitheit gilt jedoch stets:

$$0 \leq \langle Q_n^{(1)} t, t\rangle \leq \langle Q_n^{(1)} t, t\rangle + \langle Q_n^{(2)} t, t\rangle = \langle Q_n t, t\rangle, \quad n \in \mathbb{N},$$

d.h. $\langle Q_n^{(1)} t, t\rangle \to 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$, was nach Corollary 2.1.9 in oben genannter Quelle impliziert, dass $Q_n^{(1)} \to 0$. Mit einem ähnlichen Monotonieargument schließt man aus der zweiten Aussage, dass auch $\int \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_n^{(1)}(dx) \to 0$, jeweils für $n \to \infty$. Da nun $X_n^{(1)} - \gamma_n^{(1)}$ jedoch keinen Punktmaßanteil besitzt (für alle $n \in \mathbb{N}$), folgt die Behauptung mit der Rückrichtung von Theorem 2.3.5, da im vorliegenden Fall Konvergenz in Verteilung auch stochastische Konvergenz impliziert. $\square$

Lemma 4.2.7
Seien $f \in \mathcal{I}(M)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge im Sinne von Definition 4.1.5. Dann existiert für alle $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ein $N = N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, sodass

$$\forall n \geq N \;\; \forall A \in \sigma(\mathcal{S}): \quad \mathbb{P}(\|I(f\mathbb{1}_A) - I(f_n\mathbb{1}_A)\| \geq \varepsilon_1) \leq \varepsilon_2.$$

Beweis. Definiere $g_n := f - f_n$, so wissen wir, dass $g_n(s) \to 0$ für λ_M-fast alle $s \in S$ sowie, dass $I(g_n\mathbb{1}_A) \to 0$ stochastisch und für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ (jeweils für $n \to \infty$). Insbesondere folgt nach Proposition 4.2.4 und Theorem 2.3.5, dass

$$\gamma_{g_n}(A) := \int_S U(\mathbb{1}_A(s) g_n(s), s)\, \lambda_M(ds) = \int_A U(g_n(s), s)\, \lambda_M(ds) \to 0$$

für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$. Wir werden nun zeigen, dass diese Konvergenz sogar gleichmäßig in $A \in \sigma(\mathcal{S})$ gilt. Dazu wähle man zunächst ein *endliches* Maß λ_M^* auf $(S, \sigma(\mathcal{S}))$ mit $\lambda_M \ll \lambda_M^*$, dessen Existenz zum Beispiel durch

$$\lambda_M^*(E) := \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\lambda_M(E \cap S_l)}{1 + \lambda_M(S_l)}, \quad E \in \sigma(\mathcal{S})$$

gesichert ist, wobei man die Maßeigenschaft analog zu IV 10., Theorem 6 in [9] argumentiert und $(S_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ eine disjunkte Folge wie in (δ_4) sei. Andererseits folgt aus der Existenz von $\gamma_{g_n}(A)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ (insbesondere aus der von $\gamma_{g_n}(S)$), dass die Abbildung $A \mapsto \gamma_{g_n}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein vektorielles Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$ mit $\gamma_{g_n} \ll \lambda_M \ll \lambda_M^*$ definiert, die Komponenten $\gamma_{g_n}^{(k)}$ sind somit endliche, signierte Maße. Dabei vererbt sich die absolute Stetigkeit, d.h. $\gamma_{g_n}^{(k)} \ll \lambda_M^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, ..., m$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest. Dann liefert das Hahn-Saks-Vitali Theorem (man nutze die Variante in [39], Proposition C.3 für endliche Maße) die Existenz von $\delta_1, ...\delta_m > 0$, sodass folgende Implikationen für $k = 1, ..., m$ gelten:

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{S}): \qquad \left(\lambda_M^*(A) \leq \delta_k \quad \Rightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |\gamma_{g_n}^{(k)}(A)| \leq \varepsilon \right).$$

Sei $\delta := \min\{\delta_1, ..., \delta_m\} > 0$ und bezeichne $C > 0$ die Konstante, mit der $\|x\| \leq C\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt, so konnten wir zeigen:

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{S}): \qquad \left(\lambda_M^*(A) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\gamma_{g_n}(A)\| \leq C\, m\, \varepsilon \right). \tag{4.10}$$

Andererseits erkennt man mit Lemma 4.2.2 und dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass $U(\cdot,\cdot)$ im ersten Argument stetig ist, somit gilt

$$U(g_n(s), s) \to U(0, s) = 0 \quad \text{für } \lambda_M\text{-fast alle } s \in S.$$

Nun liefert das bereits an anderer Stelle genannte Egorov-Theorem (man beachte erneut, dass λ_M^* endlich ist) die Existenz einer Menge $D' \in \sigma(\mathcal{S})$ mit

$$U(g_n(s), s) \to 0 \quad \text{gleichmäßig für alle } s \in D' \tag{4.11}$$

und $\lambda_M^*(S \setminus D') \le \delta/2$. Mit (δ_4), der Stetigkeit von unten und Lemma 3.1.2 erkennt man dann auch die Existenz einer Teilmenge $D \subset D'$, die nun jedoch zu $\mathcal{S}$ gehört und $\lambda_M^*(S \setminus D) \le \delta$ erfüllt. Auf dieser bleibt insbesondere die Aussage von (4.11) erhalten, wobei nun $\lambda_M(D) < \infty$ gilt. Somit folgt für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $n \in \mathbb{N}$ nach (4.10):

$$\begin{aligned}
\|\gamma_{g_n}(A)\| &= \left\| \int\limits_{A \setminus D} U(g_n(s), s)\, \lambda_M(ds) + \int\limits_{A \cap D} U(g_n(s), s)\, \lambda_M(ds) \right\| \\
&\le C\, m\, \varepsilon + \sup_{s \in A \cap D} \|U(g_n(s), s)\| \cdot \lambda_M(A \cap D) \\
&\le C\, m\, \varepsilon + \sup_{s \in D} \|U(g_n(s), s)\| \cdot \lambda_M(D).
\end{aligned}$$

Also nach (4.11):

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{A \in \sigma(\mathcal{S})} \|\gamma_{g_n}(A)\| \right) \le C\, m\, \varepsilon + \lambda_M(D) \cdot \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{s \in D} \|U(g_n(s), s)\| \right) = C\, m\, \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, konnten wir somit wie gewünscht zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{A \in \sigma(\mathcal{S})} \|\gamma_{g_n}(A)\| \right) = 0. \tag{4.12}$$

Auf dem zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definieren wir nun die Abbildung $d : L^0(\Omega, \mathbb{R}^m) \times L^0(\Omega, \mathbb{R}^m) \to [0, 1]$ durch

$$d(X, Y) := \int\limits_{\Omega} \min\{1, \|X(\omega) - Y(\omega)\|\}\, \mathbb{P}(d\omega).$$

Dann ist d eine Metrik und die durch sie induzierte Konvergenz ist äquivalent zur stochastischen Konvergenz (bezüglich $\mathbb{P}$ auf $L^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und nach Identifizierung von fast sicher identischen Zufallsvektoren), man vergleiche beispielsweise den Beweis zu Satz 6.7 in [23] und die unten stehenden Ausführungen. Definiere weiter die Zufallsvektoren $X_n(A) := I(g_n \mathbb{1}_A) - \gamma_{g_n}(A)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \sigma(\mathcal{S})$ sowie

$$c_n := \sup_{A \in \sigma(\mathcal{S})} d(X_n(A), 0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Der nächste Schritt besteht darin, zu zeigen, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, ehe wir daraus die Behauptung schließen werden. Dazu wähle man für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $A_n \in \sigma(\mathcal{S})$ mit

$$0 \le c_n \le d(X_n(A_n), 0) + \frac{1}{n}, \tag{4.13}$$

wobei man beachte, dass $c_n \le 1 < \infty$. Schreibe nun mit der Linearität des Integrals:

$$I(g_n) = I(g_n \mathbb{1}_{A_n}) + I(g_n \mathbb{1}_{A_n^c}) = X_n(A_n) + I(g_n \mathbb{1}_{A_n^c}) + \gamma_{g_n}(A_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dabei erkennt man mit Eigenschaft 4.1.10, dass $I(g_n \mathbb{1}_{A_n})$ und $I(g_n \mathbb{1}_{A_n^c})$ unabhängig sind, somit ist aber $X_n(A_n)$ auch unabhängig von $I(g_n \mathbb{1}_{A_n^c}) + \gamma_{g_n}(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da wir bereits wissen, dass $I(g_n) = I(g_n \mathbb{1}_S) \to 0$ stochastisch, greift in jedem Falle die Aussage des vorangegangenen Lemmas, d.h. $X_n(A_n) \to 0$ stochastisch, da $X_n(A_n)$ per Definition keinen Punktmaßanteil besitzt für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies bedeutet aber gerade, dass $d(X_n(A_n), 0) \to 0$, sodass mit (4.13) wie gewünscht folgt: $c_n \to 0$, jeweils für $n \to \infty$. Wenden wir dies zusammen mit (4.12) auf folgende Ungleichung an:

$$\begin{aligned} d(I(g_n \mathbb{1}_A), 0) &= \int \min\{1, \|X_n(A) + \gamma_{g_n}(A)\|\}\, d\mathbb{P} \\ &\le d(X_n(A), 0) + \int \min\{1, \|\gamma_{g_n}(A)\|\}\, d\mathbb{P} \\ &\le d(X_n(A), 0) + \|\gamma_{g_n}(A)\|, \end{aligned}$$

die wegen $\min\{1, a+b\} \le \min\{1, a\} + \min\{1, b\}$ $(a, b \ge 0)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, so erhalten wir

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \left(\sup_{A\in\sigma(\mathcal{S})} d(I(g_n \mathbb{1}_A), 0) \right) = 0,$$

d.h. $d(I(g_n \mathbb{1}_A), 0)$ konvergiert gleichmäßig in $A \in \sigma(\mathcal{S})$ gegen Null (für $n \to \infty$). Indem man sich abschließend für beliebiges $0 < \varepsilon \le 1$ und $X \in L^0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ von

$$\mathbb{P}(\|X\| \ge \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \int \min\{1, \varepsilon\}\, \mathbb{1}_{\{\|X\| \ge \varepsilon\}}\, d\mathbb{P} \le \varepsilon^{-1} \int \min\{1, \|X\|\}\, d\mathbb{P} = \varepsilon^{-1} d(X, 0)$$

überzeugt, folgt für $A \in \sigma(\mathcal{S}), n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_1 > 0$ beliebig, aber fest (ohne Einschränkung $\varepsilon_1 \le 1$, sonst Monotonieargument):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|I(f\mathbb{1}_A) - I(f_n \mathbb{1}_A)\| \ge \varepsilon_1) &= \mathbb{P}(\|I(g_n \mathbb{1}_A)\| \ge \varepsilon_1) \\ &\le \sup_{A\in\sigma(\mathcal{S})} \mathbb{P}(\|I(g_n \mathbb{1}_A)\| \ge \varepsilon_1) \\ &\le \varepsilon_1^{-1} \sup_{A\in\sigma(\mathcal{S})} d(I(g_n \mathbb{1}_A), 0). \end{aligned}$$

Das liefert die Behauptung, indem wir die zuvor gezeigte Konvergenz lesen. □

Theorem 4.2.8
Sei $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ meßbar, dann gilt: $f \in \mathcal{I}(M)$ genau dann, wenn die drei Integrale γ_f, Q_f und

$$L_f := \int_S V(f(s), s)\, \lambda_M(ds) = \int_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|x\|^2\}\, \phi_f(dx)$$

existieren.

Beweis. Die eine Richtung entspricht der Aussage von Proposition 4.2.4, die andere soll hingegen nun in mehreren Schritten gezeigt werden. Dabei sei $(S_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ für den Rest des Beweises eine gegen S aufsteigende Folge, während wir mit $f^{i,j}(s)$ die Komponenten von $f(s) = (f^{i,j}(s))_{i,j=1,\dots,m}$ für $s \in S$ ansprechen.

<u>1. Schritt:</u> Wir werden nun eine Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren, die f in für uns geeigneter Weise approximiert, wobei $f_n(s) = (f_n^{i,j}(s))_{i,j=1,\dots,m}$. Definiere:

$$f_n^{i,j}(s) := \mathbb{1}_{S_n}(s) \cdot \begin{cases} \frac{l}{n}, & \text{falls } \frac{l}{n} \le f^{i,j}(s) < \frac{l+1}{n} \text{ für } l = 0, ..., n^2 - 1 \\ -\frac{l}{n}, & \text{falls } -\frac{l+1}{n} < f^{i,j}(s) \le -\frac{l}{n} \text{ für } l = 0, ..., n^2 - 1 \\ 0, & \text{falls } |f^{i,j}(s)| \ge n. \end{cases}$$

Jede der Komponentenfunktionen von f_n nimmt also endlich viele Werte auf disjunkten Mengen in $\sigma(\mathcal{S})$ an (Meßbarkeit wird von f geerbt); dank der Indikatorfunktion sowie Lemma 3.1.2 gehören diese Mengen sogar zu $\mathcal{S}$. Nun finde man wie in Eigenschaft 4.1.3 eine gemeinsame Partition für alle Komponenten, um zu erkennen, dass f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ einfach (bezüglich $\mathcal{S}$) ist. Weiter können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $|f^{i,j}(s)| < n$ für alle $s \in S_n$ und $1 \le i, j \le m$; denn andernfalls wird durch

$$S_n' := S_n \cap \{s \in S : |f^{i,j}(s)| < n \text{ für alle } 1 \le i, j \le m\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ebenfalls eine gegen S aufsteigende Folge $(S_n')_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ beschrieben. Dies hat den Vorteil, dass $|f_n^{i,j}(s) - f^{i,j}(s)| \le \frac{1}{n}$, falls $s \in S_n$, während $|f_n^{i,j}(s)| \le |f^{i,j}(s)|$ ohnehin für alle $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $S_n \uparrow S$ folgt in jedem Falle, dass $f_n^{i,j}(s) \to f^{i,j}(s)$ für alle $s \in S$ und $1 \le i, j \le m$, was gerade $f_n(s) \to f(s)$ bedeutet, jeweils für $n \to \infty$. Schließlich existieren $C_1, C_2 > 0$ mit $C_1\|A\| \le \|A\|_1 \le C_2\|A\|$ für alle $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$, sodass wir nach dem gerade Gezeigtem für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in S$ wissen:

$$\|f_n(s)\| \le \frac{C_2}{C_1}\,\|f(s)\|$$

und für alle $s \in S_n$ sogar

$$\|f_n(s) - f(s)\| \le \frac{m^2}{n \cdot C_1} \le \frac{m^2}{C_1}.$$

Damit folgt aber nach Wahl der Indikatorfunktionen für alle $j \geq n$ und $s \in S$:

$$\begin{aligned}\|f_n(s) - f_j(s)\| &= \|f_n(s) - f_j(s)\| \, \mathbb{1}_{S_n}(s) + \|f_j(s)\| \, \mathbb{1}_{S_j \setminus S_n}(s) \\ &\leq \frac{2m^2}{C_1} \, \mathbb{1}_{S_n}(s) + \frac{C_2}{C_1} \, \|f(s)\| \, \mathbb{1}_{S_j \setminus S_n}(s). \end{aligned} \tag{4.14}$$

<u>2. Schritt:</u> In diesem Schritt soll unter Verwendung des vorherigen gezeigt werden, dass $g^{(k)} := f \cdot \mathbb{1}_{S_k} \in \mathcal{I}(M)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei also $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, so definieren wir die Folge einfacher Funktionen $(g_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ durch $g_n^{(k)} := f_n \cdot \mathbb{1}_{S_k}$ mit f_n wie oben. Offensichtlich gilt dann auch $g_n^{(k)}(s) \to g^{(k)}(s)$ für alle $s \in S$ und $n \to \infty$, wobei wir mit Hilfe von (4.14) für alle $j \geq n$ und $s \in S$ schließen können, dass

$$\|g_n^{(k)}(s) - g_j^{(k)}(s)\| \leq \left(\frac{2m^2}{C_1} \, \mathbb{1}_{S_n}(s) + \frac{C_2}{C_1} \, \|f(s)\| \, \mathbb{1}_{S_j \setminus S_n}(s) \right) \mathbb{1}_{S_k}(s).$$

Insbesondere folgt für alle $n \geq k$, $j \geq n$ und $s \in S$:

$$\|g_n^{(k)}(s) - g_j^{(k)}(s)\| \leq \frac{2m^2}{C_1} \, \mathbb{1}_{S_k}(s). \tag{4.15}$$

Betrachtet man nun noch $A \in \sigma(\mathcal{S})$ beliebig, aber fest, so bleibt gemäß Definition 4.1.5 zu zeigen, dass die Folge $(I(g_n^{(k)} \mathbb{1}_A))_{n\in\mathbb{N}}$ einen stochastischen Limes besitzt (für $n \to \infty$). Dabei genügt aus Gründen der Vollständigkeit der Nachweis der Cauchy-Eigenschaft bezüglich stochastischer Konvergenz (siehe beispielsweise Korollar 6.15 in [23]). Schließlich können wir uns sogar auf den Nachweis von

$$I(g_n^{(k)} \mathbb{1}_A) - I(g_j^{(k)} \mathbb{1}_A) = I((g_n^{(k)} - g_j^{(k)}) \mathbb{1}_A) \Rightarrow 0 \quad (j, n \to \infty)$$

beschränken. Äquivalent dazu (entspricht einem indirekten Zugang) fixiere man eine beliebige, streng monoton wachsende Folge $n_1 < j_1 < n_2 < j_2 < ...$ natürlicher Zahlen und zeigt vor dem Hintergrund von Theorem 2.3.5 sowie den Erkenntnissen aus Proposition 4.2.4, dass

$$\int_S U\left((g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s)) \mathbb{1}_A(s), s \right) \lambda_M(ds) \to 0, \tag{4.16}$$

$$\int_A (g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s)) \, b(s) \, (g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s))^* \, \lambda_M(ds) \to 0, \tag{4.17}$$

$$\int_S V\left((g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s)) \mathbb{1}_A(s), s \right) \lambda_M(ds) \to 0, \tag{4.18}$$

jeweils für $l \to \infty$. Nun wissen wir, dass $g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s) \to 0$ für alle $s \in S$, insbesondere ist die Folge $(g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s))_{l\in\mathbb{N}}$ beschränkt (für festes $s \in S$). Somit argumentiert man leicht, dass die Integranden in (4.16)-(4.18) punktweise gegen Null konvergieren. Dabei ist zu beachten, dass sich neben U auch V im ersten Argument stetig verhält (ebenfalls majorisierte Konvergenz). Bleibt also die Angabe (λ_M-)integrierbarer Majoranten, wobei in jedem Falle ein $l_0 \in \mathbb{N}$ (zum Beispiel $l_0 = k$) mit $j_l > n_l \geq k$ für alle $l \geq l_0$ existiert. Dann folgt nach (4.15) für alle $l \geq l_0$ und $s \in S$:

$$\left\| \left(g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s) \right) \mathbb{1}_A(s) \right\| \leq \frac{2m^2}{C_1} \mathbb{1}_{A \cap S_k}(s). \tag{4.19}$$

Somit ist die gesuchte Majorante zumindest in (4.17) wegen der Integrierbarkeit von $\|b(s)\| \mathbb{1}_{A\cap S_k}(s)$ (man beachte Lemma 3.4.7 und dass $A \cap S_k \in \mathcal{S}$) bereits gefunden, denn das Verhalten der Folge für $l = 1, ..., l_0 - 1$ kann hier und im Folgenden jeweils vernachlässigt werden. Als nächstes betrachten wir für $l \geq l_0$ den Ausdruck in (4.18) und nutzen wieder (4.19) , wobei $C := \frac{2m^2}{C_1}$:

$$\begin{aligned}
&\int_S V\left((g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s)) \mathbb{1}_A(s), s \right) \lambda_M(ds) \\
&= \int_S \int_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|\mathbb{1}_A(s)(g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s))x\|^2\} \, \rho(s,dx) \, \lambda_M(ds) \\
&\leq \int_S \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{A\cap S_k}(s) \min\{1, C^2\|x\|^2\} \, \rho(s,dx) \, \lambda_M(ds) \\
&\leq (1+C^2) \int_{S\times\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{A\cap S_k}(s) \min\{1, \|x\|^2\} \, \Phi(ds,dx) \\
&= (1+C^2) \int_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|x\|^2\} \, \phi_{A\cap S_k}(dx) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

da $\phi_{A\cap S_k}$ gerade das Lévymaß von $M(A\cap S_k)$ ist. Dabei haben wir im vorletzten Schritt von Theorem 3.4.5 und Teilen des zugehörigen Beweises Gebrauch gemacht. In jedem Falle ist $V(C\mathbb{1}_{A\cap S_k}(s) I_m, s)$ eine geeignete Majorante. Analog folgt mit (4.19) für alle $l \geq l_0$:

$$\begin{aligned}
&\int_S \left\| U\left((g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s)) \mathbb{1}_A(s), s \right) \right\| \lambda_M(ds) \\
&\leq \int_S \Bigg[C\,\|a(s)\| \mathbb{1}_{A\cap S_k}(s) + \int_{\mathbb{R}^m} \Bigg\| \frac{\mathbb{1}_A(s)(g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s))\,x}{1 + \|\mathbb{1}_A(s)(g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s))\,x\|^2} \\
&\qquad\qquad - \frac{\mathbb{1}_A(s)(g_{n_l}^{(k)}(s) - g_{j_l}^{(k)}(s))\,x}{1+\|x\|^2} \Bigg\| \, \rho(s,dx) \Bigg] \lambda_M(ds).
\end{aligned}$$

Diese Darstellung lässt - erneut wegen (4.19) - erkennen, dass das innere Integral außerhalb von $A \cap S_k$ verschwindet, daher also mit der Indikatorfunktion dieser Menge versehen werden kann, ehe wir Lemma 4.2.2 (zusammen mit (4.19)) anwenden und ähnliche Argumente wie oben nutzen. Setze dazu $C' := \max\{2, C + C^3\}$.

$$\begin{aligned}
&\leq C \int\limits_{A\cap S_k} \|a(s)\| \, \lambda_M(ds) + C' \int\limits_{A\cap S_k} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|x\|^2\} \, \rho(s,dx) \, \lambda_M(ds) \\
&= C \int\limits_{A\cap S_k} \|a(s)\| \, \lambda_M(ds) + C' \int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|x\|^2\} \, \phi_{A\cap S_k}(dx) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Man wähle also hier beispielsweise die folgende Majorante:

$$s \mapsto \left(C\|a(s)\| + C' \int\limits_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|x\|^2\} \, \rho(s,dx) \right) \mathbb{1}_{A\cap S_k}(s).$$

<u>3. Schritt:</u> Wir zeigen nun, dass für jedes $A \in \sigma(\mathcal{S})$ eine Folge $(j_l^A)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ existiert, die ohne Einschränkung streng monoton wachsend sei (siehe unten), sodass

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{S}) \;\; \forall l \in \mathbb{N} \;\; \forall k_1, k_2 \geq j_l^A : \quad \mathbb{P}\left(\|I(g^{(k_1)}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_2)}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{l} \right) \leq \frac{1}{l}. \tag{4.20}$$

Sei also $A \in \sigma(\mathcal{S})$ beliebig, aber fest, so zeigen wir gleichbedeutend zu (4.20), dass $(I(g^{(k)}\mathbb{1}_A))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich stochastischer Konvergenz bildet und nutzen dabei das Vorgehen aus dem 2. Schritt, d.h. wir fixieren eine beliebige, streng monoton wachsende Folge $n_1 < l_1 < n_2 < l_2 < ...$ natürlicher Zahlen und zeigen, dass

$$\int\limits_S U\left((g^{(l_k)}(s) - g^{(n_k)}(s))\mathbb{1}_A(s), s \right) \lambda_M(ds) \to 0, \tag{4.21}$$

$$\int\limits_A \left(g^{(l_k)}(s) - g^{(n_k)}(s) \right) \, b(s) \, \left(g^{(l_k)}(s) - g^{(n_k)}(s) \right)^* \lambda_M(ds) \to 0, \tag{4.22}$$

$$\int\limits_S V\left((g^{(l_k)}(s) - g^{(n_k)}(s))\mathbb{1}_A(s), s \right) \lambda_M(ds) \to 0, \tag{4.23}$$

jeweils für $k \to \infty$. Dabei beachte man im Folgenden, dass (wegen $n_k < l_k$)

$$g^{(l_k)}(s) - g^{(n_k)}(s) = f(s) \, \left(\mathbb{1}_{S_{l_k}}(s) - \mathbb{1}_{S_{n_k}}(s) \right) = f(s) \, \mathbb{1}_{S_{l_k} \setminus S_{n_k}}(s)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $s \in S$. Mit $(S_{l_k} \setminus S_{n_k}) \subset (S \setminus S_k)$ und $S_k \uparrow S$ ist also bereits klar, dass $g^{(l_k)}(s) - g^{(n_k)}(s) \to 0$ für alle $s \in S$ und $k \to \infty$, sodass vor dem Hintergrund der bereits getroffenen Stetigkeitsaussagen zu U und V nur noch integrierbare Majoranten gefunden werden müssen. Hinsichtlich (4.22) ist diese wegen der vorausgesetzten Existenz von Q_f unmittelbar gegeben, denn

$$\|f(s)b(s)f(s)^*\| \, \mathbb{1}_{(S_{l_k}\setminus S_{n_k})\cap A}(s) \leq \|f(s)b(s)f(s)^*\|$$

für alle $s \in S$ und $k \in \mathbb{N}$. Dank der vorausgesetzten λ_M-Integrierbarkeit von $V(f(\cdot),\cdot)$ greifen ähnliche Monotonieargumente bezüglich (4.23). Um den Integranden von (4.21) für alle $s \in S$ und $k \in \mathbb{N}$ abzuschätzen, bemühen wir schließlich Lemma 4.2.5 und erhalten:

$$\begin{aligned}\|U(f(s)\mathbb{1}_{(S_{l_k}\setminus S_{n_k})\cap A}(s),s)\| &\leq \|U(f(s),s)\|\mathbb{1}_{(S_{l_k}\setminus S_{n_k})\cap A}(s) + 2V(f(s),s)\\ &\leq \|U(f(s),s)\| + 2V(f(s),s).\end{aligned}$$

Da wir die Existenz von γ_f, d.h. die λ_M-Integrierbarkeit von $U(f(\cdot),\cdot)$ (und weiterhin die von $V(f(\cdot),\cdot)$) unterstellen, ist also auch dieser Fall klar.

<u>4. Schritt:</u> Nach dem 2. Schritt gilt $g^{(k)} = f \cdot \mathbb{1}_{S_k} \in \mathcal{I}(M)$ für alle $k \in \mathbb{N}$; sei $(g_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils die dort gefundene, spezielle Folge approximierender Funktionen. Betrachten wir nun zunächst $k = 1$, dann existiert nach Lemma 4.2.7 ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{S}) \;\; \forall n \geq n_1 : \qquad \mathbb{P}\left(\|I(g^{(1)}\mathbb{1}_A) - I(g_n^{(1)}\mathbb{1}_A)\| \geq 1\right) \leq 1.$$

Mit dem gleichen Argument existiert ein $n_2' \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{S}) \;\; \forall n \geq n_2' : \qquad \mathbb{P}\left(\|I(g^{(2)}\mathbb{1}_A) - I(g_n^{(2)}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Setze $n_2 := \max\{n_2', n_1 + 1\}$ und so weiter. Dann erhalten wir also eine erneut streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ derart, dass gilt:

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{S}) \;\; \forall k \in \mathbb{N} : \qquad \mathbb{P}\left(\|I(g^{(k)}\mathbb{1}_A) - I(g_{n_k}^{(k)}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}. \tag{4.24}$$

Nun nehmen wir mittels $f_k := g_{n_k}^{(k)}$ eine neue Definition der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen vor (alte Bezeichnung aufgehoben). Dann erkennt man wegen $S_k \uparrow S$ und nach Wahl der Folgen $(g_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ (siehe 2. Schritt), dass $f_k(s) \to f(s)$ für sogar alle $s \in S$ und $k \to \infty$, da $n_k \to \infty$. Sei nun $A \in \sigma(\mathcal{S})$ beliebig, aber fest, so bleibt zu zeigen, dass die Folge $(I(f_k\mathbb{1}_A))_{k\in\mathbb{N}}$ stochastisch konvergiert. Gegeben $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ beliebig, aber fest, so wähle man ein $K_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $K_0^{-1} \leq \frac{1}{3}\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Weiter sei $K := \max\{K_0, j_{K_0}^A\}$ (mit $j_{K_0}^A$ aus (4.20)), so folgt für alle $k_1, k_2 \geq K$:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\|I(f_{k_1}\mathbb{1}_A) - I(f_{k_2}\mathbb{1}_A)\| \geq \varepsilon_1\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left(\|I(g_{n_{k_1}}^{(k_1)}\mathbb{1}_A) - I(g_{n_{k_2}}^{(k_2)}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{3}{K_0}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathbb{P}\Big(\|I(g^{(k_1)}_{n_{k_1}}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_1)}\mathbb{1}_A)\| + \|I(g^{(k_1)}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_2)}\mathbb{1}_A)\| \\
&\qquad + \|I(g^{(k_2)}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_2)}_{n_{k_2}}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{3}{K_0}\Big) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\|I(g^{(k_1)}_{n_{k_1}}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_1)}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{K_0}\right) + \mathbb{P}\left(\|I(g^{(k_1)}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_2)}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{K_0}\right) \\
&\qquad + \mathbb{P}\left(\|I(g^{(k_2)}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_2)}_{n_{k_2}}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{K_0}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\|I(g^{(k_1)}_{n_{k_1}}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_1)}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{k_1}\right) + \mathbb{P}\left(\|I(g^{(k_1)}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_2)}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{K_0}\right) \\
&\qquad + \mathbb{P}\left(\|I(g^{(k_2)}\mathbb{1}_A) - I(g^{(k_2)}_{n_{k_2}}\mathbb{1}_A)\| \geq \frac{1}{k_2}\right),
\end{aligned}
$$

da $k_1, k_2 \geq K \geq K_0$. Hinsichtlich der beiden äußeren Summanden wende man nun jeweils (4.24) an, für den inneren greift wegen $k_1, k_2 \geq K \geq j_{K_0^A}$ hingegen die Aussage von (4.20):

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{k_1} + \frac{1}{K_0} + \frac{1}{k_2} \\
&\leq \frac{3}{K_0} \\
&\leq \varepsilon_2.
\end{aligned}
$$

Da $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ beliebig gewählt waren, konnten wir also zeigen, dass die Folge $(I(f_k\mathbb{1}_A))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bildet und somit konvergiert (jeweils stochastisch). □

Korollar 4.2.9
Für meßbares $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ gilt: $f \in \mathcal{I}(M)$ genau dann, wenn

$$\int_S K(f(s)^* t, s)\, \lambda_M(ds) \tag{4.25}$$

für alle $t \in \mathbb{R}^m$ existiert und

$$t \mapsto \exp\left(\int_S K(f(s)^* t, s)\, \lambda_M(ds)\right) \tag{4.26}$$

die Fouriertransformierte einer Verteilung auf $\mathbb{R}^m$ ist.

Beweis. Die notwendige Richtung haben wir bereits gezeigt. Umgekehrt wissen wir insbesondere die Stetigkeit der Abbildung in (4.26), welche durch Betrachtung des Betrags und wegen der strengen Monotonie der reellen Exponentialfunktion zumindest die Stetigkeit von

$$t \mapsto \mathrm{Re} \int_S K(f(s)^* t, s)\, \lambda_M(ds) \tag{4.27}$$

impliziert. Weiter genügte die Voraussetzung (4.25), um im Beweis von Proposition 4.2.4 auf die Existenz von Q_f zu schließen, sodass man per Definition von K und auf Basis von (4.27) auch leicht die Stetigkeit der Abbildung

$$t \mapsto \int\limits_S \int\limits_{\mathbb{R}^m} (\cos\langle f(s)^* t, x\rangle - 1)\, \rho(s, dx)\, \lambda_M(ds) \tag{4.28}$$

einsieht. (4.25) und die Stetigkeit in (4.28) haben aber insgesamt im Beweis von Proposition 4.2.4 ausgereicht, um gerade jene Aussagen zu zeigen, die den Voraussetzungen von Theorem 4.2.8 entsprechen. □

Bemerkung 4.2.10. Genau genommen genügt also neben der Aussage von (4.25) die Stetigkeit der Abbildung in (4.26) oder der in (4.28).

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer weiteren Eigenschaft der zuvor konstruierten Integrale. Dabei nutzen wir die Idee für $m = 1$ aus [20], ergänzt um die zu klärende Frage der Integrierbarkeit, weshalb wir die Aussage erst an dieser Stelle beweisen. Außerdem folgt durch Betrachtung der einfachen Funktionen $f(s) := \mathbb{1}_A(s) I_m$ für $A \in \mathcal{S}$, dass die unendliche Teilbarkeit eines Zufallmaßes (vergleiche Abschnitt 3.5) implizit auch bereits für alle Randverteilungen von $\{M(A) : A \in \mathcal{S}\}$ gilt.

Korollar 4.2.11
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f_1, ...f_n \in \mathcal{I}(M)$ beliebig. Dann ist der $\mathbb{R}^{n \cdot m}$-wertige Zufallsvektor $(I(f_1), ..., I(f_n))$ unendlich-teilbar.

Beweis. Seien $f_1, ..., f_n$ wie angegeben, dann beschreibt

$$\varphi(t) := \exp\left(\int\limits_S K_M \left(\sum_{j=1}^n f_j(s)^* t_j, s \right) \lambda_M(ds) \right), \quad t = (t_1, ...t_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$$

nach Eigenschaft 4.1.12 die charakteristische Funktion von $(I_M(f_1), ..., I_M(f_n))$. Wenn wir nun für $l \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest zeigen können, dass auch $\varphi^{1/l}$ (analog zu (2.9)) die Fouriertransformierte (irgend)einer Verteilung auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n \cdot m})$ ist, so folgt nach (2.8) offensichtlich die Behauptung. Gelte also $M(A) \sim [\gamma_A, Q_A, \phi_A]$ für alle $A \in \mathcal{S}$, so erkennt man mit Theorem 3.3.2 und Theorem 3.6.2, dass auch ein Zufallsmaß M' mit $M'(A) \sim [l^{-1}\gamma_A, l^{-1}Q_A, l^{-1}\phi_A]$ für alle $A \in \mathcal{S}$ existiert. Entsprechend berechnet man (ähnlich wie in Eigenschaft 3.6.4), dass $K_{M'}(t, s) = l^{-1} K_M(t, s)$. Dies zeigt aber durch beidseitige Anwendung von Korollar 4.2.9 respektive der darauf folgenden Bemerkung, dass $\mathcal{I}(M) = \mathcal{I}(M')$. Insbesondere existiert $(I_{M'}(f_1), ..., I_{M'}(f_n))$ und besitzt die charakteristische Funktion $\varphi^{1/l}$. □

4.3 Komplexwertiger Fall

Die Ausführungen in [40] für den Fall $m = 1$ motivieren die Erweiterung des stochastischen Integrals für $\mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$-wertige Integranden bezüglich $\mathbb{C}^m$-wertiger Zufallsmaße, man vergleiche insbesondere Abschnitt 3.7. Für unsere Zwecke genügt dabei wieder die Betrachtung unendlich-teilbarer Zufallsmaße, sodass sich die Vorarbeit in diesem Kapitel hinsichtlich des reellwertigen Falls als äußerst hilfreich erweisen wird. Für den Rest dieses Abschnitts sei also $\widetilde{M} = \{\widetilde{M}(A) : A \in \mathcal{S}\}$ ein beliebiges, unendlich-teilbares Zufallsmaß auf einem δ-Ring $\mathcal{S}$ mit Werten in $\mathbb{C}^m$ und wir schreiben

$$\widetilde{M}(A) = M^{(1)}(A) + \mathrm{i}\, M^{(2)}(A), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Dabei haben bereits notiert, dass es sich dann bei $\{M^{(i)}(A) : A \in \mathcal{S}\}$ für $i = 1, 2$ um $\mathbb{R}^m$-wertige und ebenfalls unendlich-teilbare Zufallsmaße auf $\mathcal{S}$ handelt. Ebenso ist das zu $\widetilde{M}$ assoziierte Zufallsmaß M, wobei

$$M(A) = (M^{(1)}(A), M^{(2)}(A)), \quad A \in \mathcal{S},$$

ein unendlich-teilbares (mit Werten in $\mathbb{R}^{2m}$). Allgemein definieren wir für den weiteren Verlauf die bijektive Abbildung $\Xi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{2m}$ (eigentlich Ξ_m) durch

$$\Xi(\mathrm{Re}\ z + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\ z) := (\mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z), \quad z \in \mathbb{C}^m.$$

Analog zerlegen wir jedes $\tilde{f} : S \to \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$ via $\tilde{f}(s) = f^{(1)}(s) + \mathrm{i}\, f^{(2)}(s)$ und nennen solch ein $\widetilde{f}$ *einfach (bezüglich $\mathcal{S}$)*, falls $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ einfach im Sinne von (4.1) sind. In diesem Falle können wir also ohne Einschränkung davon ausgehen, dass Darstellungen der Form

$$f^{(i)}(s) = \sum_{j=1}^{n} R_j^{(i)}\, \mathbb{1}_{A_j}(s), \quad i = 1, 2 \tag{4.29}$$

mit $R_1^{(i)}, ..., R_n^{(i)} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}$ disjunkt existieren (man vergleiche erneut Eigenschaft 4.1.3).

Definition 4.3.1 (Teil 1)
Sei $\tilde{f} : S \to \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$ mit $\widetilde{f} = f^{(1)} + \mathrm{i}\, f^{(2)}$ wie in (4.29) einfach (bezüglich $\mathcal{S}$). Dann definieren wir (symbolisch) für jedes $A \in \sigma(\mathcal{S})$:

$$I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) := I(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) := \int_A \tilde{f}\, d\widetilde{M} := \int_A \tilde{f}(s)\, \widetilde{M}(ds) := \sum_{j=1}^{n} (R_j^{(1)} + \mathrm{i}\, R_j^{(2)})\, \widetilde{M}(A \cap A_j).$$

Schreibe $I(\widetilde{f})$ et cetera, falls $A = S$.

Offensichtlich gilt:

$$\mathrm{Re}\ I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) = \sum_{j=1}^{n} \Big(R_j^{(1)} M^{(1)}(A \cap A_j) - R_j^{(2)} M^{(2)}(A \cap A_j) \Big) \tag{4.30}$$

sowie

$$\mathrm{Im}\ I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) = \sum_{j=1}^{n} \Big(R_j^{(1)} M^{(2)}(A \cap A_j) + R_j^{(2)} M^{(1)}(A \cap A_j) \Big). \tag{4.31}$$

Somit ist die jüngste Definition kompatibel mit der im reellen Fall, d.h. falls $f^{(2)} = 0$ und $M^{(2)} = 0$, so gilt $I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}\,\mathbb{1}_A) = \mathrm{Re}\; I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}\,\mathbb{1}_A) = I_{M^{(1)}}(f^{(1)}\,\mathbb{1}_A)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$. Dies wird sich auch für Teil 2 der Definition bewahrheiten, sodass wir das stochastische Integral weiterhin mit I bezeichnen. Außerdem mache man sich wie früher klar, dass das Integral für einfache Funktionen wohldefiniert, also fast sicher unabhängig von der Darstellung in (4.29) ist. Wir definieren nun die zu $\tilde{f}$ *assoziierte Abbildung* $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^{2m})$ durch

$$f(s) := \begin{pmatrix} f^{(1)}(s) & -f^{(2)}(s) \\ f^{(2)}(s) & f^{(1)}(s) \end{pmatrix}, \quad s \in S.$$

Bemerkung 4.3.2. Für $\tilde{f} : S \to \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$ einfach gilt nach (4.30) und (4.31) fast sicher:

$$\Xi\left(I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}\,\mathbb{1}_A)\right) = I_M(f\,\mathbb{1}_A), \quad A \in \sigma(\mathcal{S}).$$

Somit erkennen wir auch wieder, dass $I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}\,\mathbb{1}_A)$ im Sinne von Definition 2.4.16 für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ unendlich-teilbar ist. Ferner ist die Konvergenz von komplexwertigen Objekten in der Regel immer als jene von Real- *und* Imaginärteil zu verstehen, sodass die nachfolgende Definition, bei der wir $\mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{C}^m))$ und $\mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{R}^{2m}))$ wie üblich identifizieren, natürlich erscheint.

Definition 4.3.3 (Teil 2)
Sei $\tilde{f} : S \to \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$ eine $\sigma(\mathcal{S})$-$\mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{C}^m))$-meßbare Abbildung. Dann nennen wir $\tilde{f}$ *integrierbar bezüglich* $\widetilde{M}$ bzw. $\widetilde{M}$*-integrierbar*, falls eine Folge von einfachen Funktionen $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bezüglich $\mathcal{S}$) mit den folgenden Eigenschaften existiert:

(1) Für λ_M-fast alle $s \in S$ gilt

$$f_n^{(1)}(s) \to f^{(1)}(s) \quad \text{und} \quad f_n^{(2)}(s) \to f^{(2)}(s),$$

d.h. $\tilde{f}_n(s) \to \tilde{f}(s)$.

(2) Die bereits erklärten Folgen $(\mathrm{Re}\; I(\tilde{f}_n\,\mathbb{1}_A))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}\; I(\tilde{f}_n\,\mathbb{1}_A))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ jeweils stochastisch. Dabei bezeichne $\eta^{(1)}(A)$ (für den Realteil) beziehungsweise $\eta^{(2)}(A)$ (für den Imaginärteil) den entsprechenden stochastischen Limes.

Weiter sei

$$\mathcal{I}(\widetilde{M}) := \{\tilde{f} : (S, \sigma(\mathcal{S})) \to (\mathrm{L}(\mathbb{C}^m), \mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{C}^m))) \mid \tilde{f} \text{ ist } \widetilde{M}\text{-integrierbar}\}.$$

Das folgende Theorem zeigt, dass die komplexe Betrachtungsweise im Wesentlichen den eleganten Zugang für ein eigentlich reelles Problem darstellt.

Theorem 4.3.4
Sei $\tilde{f} : S \to \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$ meßbar. Dann ist $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ äquivalent zu $f \in \mathcal{I}(M)$. In diesem Fall gilt überdies für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$:

$$\Xi(\eta^{(1)}(A) + \mathrm{i}\,\eta^{(2)}(A)) = I_M(f\,\mathbb{1}_A) \quad \text{fast sicher.} \tag{4.32}$$

Beweis. Falls $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ mit einfachen, approximierenden Folgen $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ (für $i = 1, 2$), so approximiert die Folge von Assoziierungen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (zu $\tilde{f}_n = f_n^{(1)} + \mathrm{i}\, f_n^{(2)}$) entsprechend f und nach Bemerkung 4.3.2 gilt für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $n \in \mathbb{N}$ fast sicher:

$$I_M(f_n \mathbb{1}_A) = \left(\mathrm{Re}\; I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}_n \, \mathbb{1}_A), \mathrm{Im}\; I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}_n \, \mathbb{1}_A)\right). \tag{4.33}$$

Da stochastische Konvergenz von Zufallsvektoren äquivalent zur Konvergenz aller Komponenten ist, folgt leicht, dass $(I_M(f_n \mathbb{1}_A))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls stochastisch konvergiert.
Gelte umgekehrt $f \in \mathcal{I}(M)$, so wähle man eine Folge einfacher Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die f entsprechend approximiert, wobei wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben können:

$$f_n(s) = \begin{pmatrix} f_{n,1}(s) & f_{n,2}(s) \\ f_{n,3}(s) & f_{n,4}(s) \end{pmatrix}$$

mit $f_{n,i}(s) \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ für alle $s \in S$ und $i = 1, ..., 4$. Da wir wissen, wie f, also die Assoziierung zu $\tilde{f}$ aussieht, können wir insbesondere $\tilde{f}_n(s) := f_{n,1}(s) + \mathrm{i}\, f_{n,3}(s)$ setzen, sodass auch $\tilde{f}_n(s) \to \tilde{f}(s)$ für λ_M-fast alle $s \in S$. Außerdem gilt (4.33) wieder für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \sigma(\mathcal{S})$ enstprechend, wobei mit der linken Seite nun auch die rechte (stochastisch) konvergiert, was nach Betrachtung geeigneter Komponenten bedeutet, dass $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ mit der behaupteten Gleichheit der Limiten, d.h. (4.32) gilt. □

Während $\eta^{(1)}(A)$ und $\eta^{(2)}(A)$ zunächst noch von der Folge $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängen konnten, zeigt (4.32), dass $\eta^{(1)}(A)$ und $\eta^{(2)}(A)$ doch nur von f und somit nur von $\tilde{f}$ abhängen (fast sicher eindeutig, wie der reelle Fall ergeben hat). Dies berechtigt zur folgenden Definition; insbesondere erkennen wir wieder, dass sich Teil 1 und Teil 2 der jüngsten Definitionen nicht widersprechen.

Definition 4.3.5
Seien $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ und $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine zugehörige Folge einfacher Funktionen, so definieren wir für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$:

$$I_{\widetilde{M}}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) := I(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) := \int_A \tilde{f}\, d\widetilde{M} := \int_A \tilde{f}(s)\, \widetilde{M}(ds) := \eta^{(1)}(A) + \mathrm{i}\, \eta^{(2)}(A)$$

und schreiben $I(\tilde{f})$ et cetera, falls $A = S$. Setze außerdem $I^{(1)}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) := \mathrm{Re}\; I(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) = \eta^{(1)}(A)$ respektive $I^{(2)}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) := \mathrm{Im}\; I(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) = \eta^{(2)}(A)$.

Damit werden wir nun die Eigenschaften des reellen Integrals mehr oder weniger analog übertragen können. Man beachte, dass * im Komplexen prinzipiell die Adjungierte meint.

Korollar 4.3.6
Sei $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$. Dann gilt für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{2m}$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \Xi(I(\tilde{f}\mathbb{1}_A)), t\rangle}\right) = \exp\left(\int_A K_M\left(\Xi\left(\tilde{f}(s)^*(t_1 + \mathrm{i}\, t_2)\right), s\right) \lambda_M(ds)\right). \tag{4.34}$$

Dabei sei $K_M : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{C}$ die zu M (der Assoziierung) gehörige Funktion aus (3.19).

Beweis. Die Aussage folgt neben Korollar und Definition 4.1.8 im Wesentlichen aus Theorem 4.3.4. Schließlich überzeuge man sich für alle $s \in S$ von

$$\begin{aligned} f(s)^* t &= \begin{pmatrix} f^{(1)}(s)^* & f^{(2)}(s)^* \\ -f^{(2)}(s)^* & f^{(1)}(s)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \\ &= \Xi\left(f^{(1)}(s)^* t_1 + f^{(2)}(s)^* t_2 + \mathrm{i}\left(f^{(1)}(s)^* t_2 - f^{(2)}(s)^* t_1\right)\right) \\ &= \Xi\left(\left(f^{(1)}(s)^* - \mathrm{i} f^{(2)}(s)^*\right)(t_1 + \mathrm{i}\, t_2)\right) \\ &= \Xi\left(\tilde{f}(s)^*(t_1 + \mathrm{i}\, t_2)\right). \end{aligned}$$

□

Gegenüber der reellen Betrachtung ist es nun hilfreich, folgendes Lemma vorzuziehen.

Lemma 4.3.7
Seien $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ und $\tilde{Q} \in \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$. Dann ist auch die durch $(\tilde{Q} \cdot \tilde{f})(s) := \tilde{Q}\tilde{f}(s)$ definierte Abbildung $\tilde{Q} \cdot \tilde{f} : S \to \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$ in $\mathcal{I}(\widetilde{M})$ und es gilt

$$I(\tilde{Q} \cdot \tilde{f}) = \tilde{Q}\, I(\tilde{f}) \quad \text{fast sicher.} \tag{4.35}$$

Beweis. Schreibe $\tilde{Q} = Q^{(1)} + \mathrm{i}\, Q^{(2)}$ und sei $\tilde{f}$ nun zunächst einfach, d.h. von der Form

$$\tilde{f}(s) = \sum_{j=1}^{n} (R_j^{(1)} + \mathrm{i}\, R_j^{(2)}) \mathbb{1}_{A_j}(s),$$

dann ist $\tilde{Q} \cdot \tilde{f}$ ebenfalls einfach und nimmt die Werte $\tilde{Q}(R_j^{(1)} + \mathrm{i}\, R_j^{(2)})$ auf den disjunkten Mengen A_j (für $j = 1, ..., n$) an. Damit ist die Aussage per Definition des Integrals für einfache Funktionen unmittelbar klar. Gelte nun allgemein $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ und sei $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine approximierende Folge einfacher Funktionen für $\tilde{f}$. Während die Meßbarkeit von $\tilde{Q} \cdot \tilde{f}$ wie früher aus der von $\tilde{f}$ folgt, erkennt man auch, dass $\tilde{Q}\tilde{f}_n(s) \to \tilde{Q}\tilde{f}(s)$ für λ_M-fast alle $s \in S$. Weiter können wir nach der vorangegangenen Überlegung für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ und $n \in \mathbb{N}$ schreiben:

$$I^{(1)}(\tilde{Q} \cdot \tilde{f}_n \mathbb{1}_A) = \mathrm{Re}\, \tilde{Q}\, I(\tilde{f}_n \mathbb{1}_A) = Q^{(1)}\, I^{(1)}(\tilde{f}_n \mathbb{1}_A) - Q^{(2)}\, I^{(2)}(\tilde{f}_n \mathbb{1}_A),$$

was nach Wahl von $(\tilde{f}_n)$ und wie in Lemma 4.1.11 (stochastische Konvergenz ist additiv und bleibt unter linearen Abbildungen erhalten) bedeutet, dass

$$I^{(1)}(\tilde{Q} \cdot \tilde{f}_n \mathbb{1}_A) \to Q^{(1)} I^{(1)}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) - Q^{(2)} I^{(2)}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) = \mathrm{Re}\, \tilde{Q}\, I(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A)$$

stochastisch. Ganz ähnlich argumentiert man folgende stochastische Konvergenz:

$$I^{(2)}(\tilde{Q} \cdot \tilde{f}_n \mathbb{1}_A) \to Q^{(1)} I^{(2)}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) + Q^{(2)} I^{(1)}(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A) = \mathrm{Im}\, \tilde{Q}\, I(\tilde{f}\, \mathbb{1}_A),$$

jeweils für $n \to \infty$. Die Aussagen $\tilde{Q} \cdot \tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ und (4.35) folgen also gleichermaßen. □

Eigenschaft 4.3.8
$\mathcal{I}(\widetilde{M})$ ist ein Vektorraum und die Abbildung $\mathcal{I}(\widetilde{M}) \ni \tilde{f} \mapsto I(\tilde{f})$ ist fast sicher linear (jeweils über $\mathbb{C}$).

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$, dann folgt mit (4.35) insbesondere, dass $I(\alpha\tilde{f}) = \alpha I(\tilde{f})$ fast sicher. Somit ist nach Betrachtung einer gemeinsamen Zerlegung klar, dass die Linearität bereits für einfache Funktionen gilt. Seien nun allgemein $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ und $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beziehungsweise $(\tilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approximierende Folgen, so folgt für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ beliebig, dass auch die Funktion $\tilde{h}_n := \alpha\tilde{f}_n + \beta\tilde{g}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ einfach ist und bis auf eine mögliche λ_M-Nullmenge punktweise gegen $\tilde{h} := \alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}$ konvergiert. Somit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \sigma(\mathcal{S})$, indem wir $\alpha = x_1 + \mathrm{i}\, y_1$ respektive $\beta = x_2 + \mathrm{i}\, y_2$ schreiben:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} I(\tilde{h}_n \mathbb{1}_A) &= \operatorname{Re} \left(\alpha I(\tilde{f}_n \mathbb{1}_A) + \beta I(\tilde{g}_n \mathbb{1}_A)\right) \\ &= x_1 I^{(1)}(\tilde{f}_n \mathbb{1}_A) - y_1 I^{(2)}(\tilde{f}_n \mathbb{1}_A) + x_2 I^{(1)}(\tilde{g}_n \mathbb{1}_A) - y_2 I^{(2)}(\tilde{g}_n \mathbb{1}_A).\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Argumenten wie zuvor folgt, dass der letztgenannte Ausdruck ebenfalls stochastisch konvergiert (für $n \to \infty$) mit Grenzwert

$$x_1 I^{(1)}(\tilde{f} \mathbb{1}_A) - y_1 I^{(2)}(\tilde{f} \mathbb{1}_A) + x_2 I^{(1)}(\tilde{g} \mathbb{1}_A) - y_2 I^{(2)}(\tilde{g} \mathbb{1}_A) = \operatorname{Re} \left(\alpha I(\tilde{f} \mathbb{1}_A) + \beta I(\tilde{g} \mathbb{1}_A)\right).$$

Ganz analog zeigt man:

$$\operatorname{Im} I(\tilde{h}_n \mathbb{1}_A) \to \operatorname{Im} \left(\alpha I(\tilde{f} \mathbb{1}_A) + \beta I(\tilde{g} \mathbb{1}_A)\right)$$

stochastisch. Man sieht leicht, dass dies beide Teile der Behauptung beweist. □

Eigenschaft 4.3.9
Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$. Falls für λ_M-fast alle $s \in S$ gilt: $\|\tilde{f}(s)\| \cdot \|\tilde{g}(s)\| = 0$, dann sind $I(\tilde{f})$ und $I(\tilde{g})$ unabhängig.

Beweis. Gelte die genannte Voraussetzung, so bedeutet dies für λ_M-fast alle $s \in S$:

$$\left(f^{(1)}(s) = 0 \text{ und } f^{(2)}(s) = 0\right) \quad \text{oder} \quad \left(g^{(1)}(s) = 0 \text{ und } g^{(2)}(s) = 0\right).$$

Somit erfüllen f und g - per Definition der Assoziierungen - aber die Voraussetzungen von Eigenschaft 4.1.10, d.h. $I_M(f)$ und $I_M(g)$ sind unabhängig. Nach Theorem 4.3.4 (man beachte die fast sichere Gleichheit) bedeutet dies aber gerade die Unabhängigkeit von $\Xi(I(\tilde{f}))$ und $\Xi(I(\tilde{g}))$, was nach Definition 2.4.16 der Behauptung entspricht. □

Eigenschaft 4.3.10
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_n \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ beliebig. Dann gilt für alle $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^{2m}$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\langle \Xi(I(\tilde{f}_j)), t_j\rangle}\right) = \exp\left(\int_S K_M\left(\Xi\left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(s)^*(t_{j,1} + \mathrm{i}\, t_{j,2})\right), s\right) \lambda_M(ds)\right),$$

wobei $t_j = (t_{j,1}, t_{j,2})$ für alle $j = 1, ..., n$.

Beweis. Betrachte $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^{2m}$ wie angegeben, so sei $R_{j,i}$ für alle $j = 1, .., n$ sowie $i = 1, 2$ die reelle Diagonalmatrix mit $R_{j,i}e = t_{j,i}$, wobei $e := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$. Dann erhalten wir per Definition von Ξ sowie der des Standardskalarprodukts (fast sicher):

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \langle \Xi(I(\tilde{f}_j)), t_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\langle R_{j,1}^* I^{(1)}(\tilde{f}_j), e \rangle + \langle R_{j,2}^* I^{(2)}(\tilde{f}_j), e \rangle \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle R_j^* I^{(1)}(\tilde{f}_j) - Q_j^* I^{(2)}(\tilde{f}_j) + Q_j^* I^{(1)}(\tilde{f}_j) + R_j^* I^{(2)}(\tilde{f}_j), e \rangle
\end{aligned}
$$

mit $R_j := \frac{1}{2}(R_{j,1} + R_{j,2})$ und $Q_j := \frac{1}{2}(R_{j,1} - R_{j,2})$. Indem wir weiter $V_j := R_j - \mathrm{i}\, Q_j$ mit $V_j^* = R_j^* + \mathrm{i}\, Q_j^*$ definieren (jeweils für $j = 1, .., n$), folgt also analog zu früheren Überlegungen:

$$
= \sum_{j=1}^{n} \langle \mathrm{Re}\ V_j^* I(\tilde{f}_j) + \mathrm{Im}\ V_j^* I(\tilde{f}_j), e \rangle.
$$

Im nächsten Schritt nutzen wir die Additivität von Real- und Imaginärteil sowie die Aussage von (4.35), im darauf folgenden die Linearität des Integrals:

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} I(V_j^* \cdot \tilde{f}_j) + \mathrm{Im} \sum_{j=1}^{n} I(V_j^* \cdot \tilde{f}_j), e \right\rangle \\
&= \left\langle I^{(1)} \left(\sum_{j=1}^{n} V_j^* \cdot \tilde{f}_j \right) + I^{(2)} \left(\sum_{j=1}^{n} V_j^* \cdot \tilde{f}_j \right), e \right\rangle \\
&= \left\langle \Xi \left(I \left(\sum_{j=1}^{n} V_j^* \cdot \tilde{f}_j \right) \right), \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} \right\rangle.
\end{aligned}
$$

Daher folgt die Behauptung mit (4.34), denn nach den obigen Definitionen gilt für alle $s \in S$:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} V_j^* \tilde{f}_j(s) \right)^* (e + \mathrm{i}\, e) &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(s)^* V_j (e + \mathrm{i}\, e) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(s)^* \left((R_j + Q_j)e + \mathrm{i}(R_j - Q_j)e \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_j(s)^* \left(t_{j,1} + \mathrm{i} t_{j,2} \right).
\end{aligned}
$$

□

Wir schließen die Liste der Eigenschaften mit dem folgenden Ergebnis ab. Dabei beachte man, dass die Integralfunktion in (4.34) vor dem Hintergrund von Theorem 4.3.4 und der Überlegungen im reellen Fall wirklich *der* log-charakteristischen Funktion von $\Xi(I(\tilde{f}))$ entspricht.

Eigenschaft 4.3.11
Seien $\tilde{f}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ... \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$. Dann gilt:

$$I(\tilde{f}_n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{\mathbb{P}} I(\tilde{f}) \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C}^m : \int\limits_S K_M\left(\Xi\left((\tilde{f}_n(s) - \tilde{f}(s))^* z\right), s\right) \lambda_M(ds) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0.$$

Beweis. (Stochastische) Konvergenz im Komplexen meint Konvergenz von Real- und Imaginärteil, wobei Letzteres jeweils äquivalent zur Konvergenz aller Komponenten ist, daher gilt:

$$I(\tilde{f}_n) \xrightarrow[(n\to\infty)]{\mathbb{P}} I(\tilde{f}) \quad \Leftrightarrow \quad \Xi\left(I(\tilde{f}_n)\right) \xrightarrow[(n\to\infty)]{\mathbb{P}} \Xi\left(I(\tilde{f})\right).$$

Da die Abbildung Ξ additiv (und bijektiv) ist, können nun mit der Bemerkung, die der Behauptung vorausgegangen ist, analoge Argumente wie im Beweis zu Eigenschaft 4.1.13 bemüht werden. □

Bemerkung 4.3.12. Natürlich erlaubt Theorem 4.3.4 eine direkte Anwendung von Theorem 4.2.8 und Korollar 4.2.9 zur Charakterisierung der Klasse $\mathcal{I}(\widetilde{M})$, was für konkrete Betrachtungen jedoch eine explizite Darstellung der Assoziierung von $\widetilde{M}$ bedingt.

4.4 Partiell integrierbare Funktionen

Die Einführung der Funktion Ξ deutete bereits an, dass man häufig wieder an reellwertigen Objekten interessiert ist, auf die *Vermischungseffekte* im Rahmen der komplexen Integration jedoch nicht verzichten möchte, d.h. man untersucht $I^{(1)}(\tilde{f})$ *oder* aber $I^{(2)}(\tilde{f})$, sofern $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$. Diesen verschenkten Teil an Information kann man sich vor dem Hintergrund von Definition 4.3.3 in folgender Weise vergüten lassen, wobei $\widetilde{M}$ und M wie im vorherigen Abschnitt seien.

Definition 4.4.1
Sei $\tilde{f} : S \to \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$ meßbar. Dann nennen wir $\tilde{f}$ *partiell (reell) integrierbar bezüglich* $\widetilde{M}$, falls eine Folge von einfachen Funktionen $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

(1) $\tilde{f}_n(s) \to \tilde{f}(s)$ für λ_M-fast alle $s \in S$,

(2) die Folge $(I^{(1)}(\tilde{f}_n \mathbb{1}_A))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ stochastisch.

Weiter sei

$$\mathcal{I}_p(\widetilde{M}) := \{\tilde{f} : (S, \sigma(\mathcal{S})) \to (\mathrm{L}(\mathbb{C}^m), \mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{C}^m))) \,|\, \tilde{f} \text{ ist partiell } \widetilde{M}\text{-integrierbar}\}.$$

Bemerkung 4.4.2. (a) Offensichtlich gilt $\mathcal{I}(\widetilde{M}) \subset \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$, diese Unterscheidung wurde jedoch beispielsweise in [40] und [29] nicht vorgenommen, da das zugrunde liegende Zufallsmaß dort einen symmetrisch α-stabilen Erzeuger (mit gleichverteiltem Spektralmaß) besitzt und die beiden Mengen dann übereinstimmen, man vergleiche später auch Beispiel 4.5.2 sowie Theorem 7.3.4. Umgekehrt können wir im Allgemeinen nicht davon ausgehen, dass für $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ eine Zerlegung gemäß (6.2.2) in [40] möglich ist, da die einzelnen Ausdrücke eventuell nicht existieren.

(b) Wann immer kontextbezogen klar ist, dass nur $I^{(1)}(\tilde{f})$ betrachtet wird, soll uns die Annahme respektive der Nachweis genügen, dass $\tilde{f} \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$. In diesem Fall gehen wir also von der folgenden Definition aus:

$$I^{(1)}(\tilde{f}) := \mathbb{P}\text{ - }\lim_{n\to\infty} I^{(1)}(\tilde{f}_n),$$

d.h. $I^{(1)}(\tilde{f}) \neq \operatorname{Re} I(\tilde{f})$, da das letztgenannte Objekt im Sinne von Definition 4.3.5 unter Umständen nicht existieren muss.

(c) Selbstverständlich kann man in analoger Weise auch definieren, wann eine Funktion $\tilde{f}$ partiell *imaginär* integrierbar ist. Wir beschränken uns jedoch auf die partiell reell integrierbaren Funktionen, da die beiden Fragestellungen nach Betrachtung von $\tilde{f}' := -\mathrm{i}\,\tilde{f}$ im Wesentlichen gleichwertig sind.

Nach Teil (b) der vorangegangenen Bemerkung wäre es unsauber, die Ergebnisse für den komplexwertigen Fall nun ohne Weiteres zu übertragen, beispielsweise (4.34) unmittelbar für $t_2 = 0$ zu lesen. Nichtsdestotrotz kann die Liste an Eigenschaften nachstehend in kompakter Form und ohne explizite Beweise angegeben werden, da die Argumente entweder als Spezialfall in den Ausführungen des vorherigen Abschnitts enthalten sind oder gar aus dem reellen Fall hervorgehen. In jedem Falle hilft es, anstelle von f die zu $\tilde{f}$ *partiell assoziierte* Abbildung

$$f_p(s) := \begin{pmatrix} f^{(1)}(s) & -f^{(2)}(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^{2m}), \quad s \in S$$

zu betrachten. Man erkennt daher, dass das Problem gegenüber dem strikt komplexwertigen Fall teilweise trivialisiert wird. Insbesondere beobachtet man wieder:

Bemerkung 4.4.3. Für meßbares $\tilde{f} : S \to \mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$ gilt $\tilde{f} \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$ genau dann, wenn $f_p \in \mathcal{I}(M)$ und in diesem Fall folgt für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$:

$$I_M(f_p \mathbb{1}_A) = \begin{pmatrix} I^{(1)}(\tilde{f}\,\mathbb{1}_A) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{fast sicher.}$$

Man erhält $I^{(1)}(\tilde{f}\,\mathbb{1}_A)$ also als entsprechende Projektion der linken Seite, sodass auch hier noch einmal folgt: $I^{(1)}(\tilde{f}\,\mathbb{1}_A)$ ist fast sicher eindeutig bestimmt, sofern $\tilde{f} \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$.

Theorem 4.4.4
Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(a) Falls $\tilde{f} \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$, so ist $I^{(1)}(\tilde{f}\mathbb{1}_A)$ für alle $A \in \sigma(\mathcal{S})$ unendlich-teilbar und die log-charakteristische Funktion ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^m \ni t \mapsto \int_A K_M\left(\Xi\left(\tilde{f}(s)^* t\right), s\right) \lambda_M(ds).$$

(b) $\mathcal{I}_p(\widetilde{M})$ ist ein Vektorraum und die Abbildung $\mathcal{I}_p(\widetilde{M}) \ni \tilde{f} \mapsto I^{(1)}(\tilde{f})$ ist fast sicher linear (jeweils über $\mathbb{R}$).

(c) Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$. Falls für λ_M-fast alle $s \in S$ gilt: $\|\tilde{f}(s)\| \cdot \|\tilde{g}(s)\| = 0$, dann sind $I^{(1)}(\tilde{f})$ und $I^{(1)}(\tilde{g})$ unabhängig.

(d) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_n \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$ beliebig. Dann gilt für alle $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^n \langle I^{(1)}(\tilde{f}_j), t_j\rangle}\right) = \exp\left(\int_S K_M\left(\Xi\left(\sum_{j=1}^n \tilde{f}_j(s)^* t_j\right), s\right) \lambda_M(ds)\right).$$

(e) Seien $\tilde{f}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ... \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$. Es gilt: $I^{(1)}(\tilde{f}_n)$ konvergiert genau dann stochastisch gegen $I^{(1)}(\tilde{f})$, wenn

$$\forall t \in \mathbb{R}^m : \int_S K_M\left(\Xi\left((\tilde{f}_n(s) - \tilde{f}(s))^* t\right), s\right) \lambda_M(ds) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0.$$

Beweis. Man beachte, dass das Lemma, welches Aussage (b) vorausgeht, nun nur noch für $Q \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ Bestand hat. Außerdem beweist man (d) unter Kenntnis von (a), kann dann aber die Argumente aus Eigenschaft 4.1.12 unmittelbar übernehmen. □

4.5 Anwendung: Operator-stabiler Erzeuger

Der eigentliche Inhalt der Integrationstheorie ist in seiner allgemeinen Form an dieser Stelle abgeschlossen. Wir möchten jedoch noch untersuchen, welche Vorteile sich ergeben, wenn das Zufallsmaß M ein Erzeugerpaar (μ, ν) im Sinne von Beispiel 3.6.3 (b) besitzt. Wie dann beispielsweise die charakteristischen Funktionen konkret aussehen, kann mit Hilfe von Eigenschaft 3.6.4, also insbesondere unter der Kenntnis von K_M und λ_M, schnell aus den allgemeinen Aussagen geschlossen werden (man vergleiche später Kapitel 6 und 7). Uns interessiert nun jedoch in erster Linie, wann in dieser Situation überhaupt erst $f \in \mathcal{I}(M)$ gilt. Angesichts Theorem 4.3.4 und Bemerkung 4.4.3 können wir uns dabei zunächst auf die reellwertige Situation beschränken. Sei $M = M_{\mu,\nu}$ also nachfolgend das von μ und ν erzeugte ISRM, wobei $(S, \mathcal{A}, \nu)$ ein σ-endlicher, nicht-trivialer Maßraum mit $\mathcal{S} := \{A \in \mathcal{A} : \nu(A) < \infty\}$ sei und $\mu \sim [\gamma', Q', \phi']$ eine unendlich-teilbare Verteilung auf $\mathbb{R}^m$ bezeichne, von der wir annehmen, dass sie voll ist. Schließlich sei ψ die log-charakteristische Funktion von μ. Wir beginnen mit:

Theorem 4.5.1
Falls $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ meßbar ist, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{I}(M)$.

(ii) Die folgenden Integrale existieren:

$$\gamma_f := \int_S \left(f(s)\gamma' + \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{f(s)x}{1 + \|f(s)x\|^2} - \frac{f(s)x}{1 + \|x\|^2} \right) \phi'(dx) \right) \nu(ds),$$

$$Q_f := \int_S f(s)\, Q'\, f(s)^*\, \nu(ds),$$

$$L_f := \int_S \int_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|f(s)x\|^2\}\, \phi'(dx)\, \nu(ds).$$

(iii) Das Integral

$$\int_S \psi(f(s)^* t)\, \nu(ds)$$

existiert für alle $t \in \mathbb{R}^m$ und die Abbildung

$$\mathbb{R}^m \ni t \mapsto \int_S \int_{\mathbb{R}^m} (\cos\langle f(s)^* t, x\rangle - 1)\, \phi'(dx)\, \nu(ds)$$

ist stetig.

Beweis. Folgt unter den getroffenen Annahmen unmittelbar durch Kombination von Eigenschaft 3.6.4 mit Theorem 4.2.8, Korollar 4.2.9 und Bemerkung 4.2.10. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass wir als Spezialfall insbesondere die Ergebnisse aus [29] zurück bekommen. Es zeigt uns aber auch die praktischen Grenzen zur Charakterisierung der Klasse $\mathcal{I}(M)$ auf, was im Anschluss diskutiert werden soll.

Beispiel 4.5.2
Sei $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ meßbar. Weiter besitze μ eine symmetrisch α-stabile Verteilung.

(i) Falls $\alpha = 2$, so ist $f \in \mathcal{I}(M)$ äquivalent zu

$$\int_S \|f(s)\|^2\, \nu(ds) < \infty. \tag{4.36}$$

(ii) Falls $\alpha < 2$, so ist $f \in \mathcal{I}(M)$ äquivalent zu

$$\int_S \int_{S_\alpha} \|f(s)\theta\|^\alpha \, \Lambda(d\theta) \, \nu(ds) < \infty, \tag{4.37}$$

wobei Λ das zu ϕ' gehörige Spektralmaß auf der Sphäre $S_\alpha := S_{\frac{1}{\alpha} I_m}$ sei, man vergleiche Theorem 2.4.10. Ferner ist

$$\int_S \|f(s)\|^\alpha \, \nu(ds) < \infty. \tag{4.38}$$

hinreichend für $f \in \mathcal{I}(M)$. Im Falle $\psi(\cdot) = -c \|\cdot\|^\alpha$ (mit einem $c > 0$) impliziert $f \in \mathcal{I}(M)$ sogar notwendiger Weise auch (4.38).

Beweis. Wir nutzen Aussage (ii) des vorangegangenen Theorems. Zunächst impliziert die Symmetrieannahme wie an früherer Stelle, dass $\gamma' = 0$ und dass ϕ' symmetrisch ist, folglich verschwindet das innere Integral von γ_f für alle $s \in S$ und γ_f existiert unabhängig von f mit $\gamma_f = 0$. Weiterhin schließen sich Gaußanteil und Lévymaßanteil im stabilen Fall aus (vergleiche Bemerkung 2.4.6 (a)), sodass hier entweder $\mu \sim [0, Q', 0]$ oder $\mu \sim [0, 0, \phi']$ gilt. Wenn wir zunächst den Fall $\alpha = 2$ betrachten, so bedeutet dies: $f \in \mathcal{I}(M)$ genau dann, wenn Q_f existiert. Wegen

$$\int_S \|f(s)\, Q' \, f(s)^*\| \, \nu(ds) \leq \|Q'\| \int_S \|f(s)\| \|f(s)^*\| \, \nu(ds) = \|Q'\| \int_S \|f(s)\|^2 \, \nu(ds)$$

ist (4.36) also hinreichend für $f \in \mathcal{I}(M)$. Existiere umgekehrt Q_f, so ist (4.36) zu zeigen. Da wir $\mu \sim [0, Q', 0]$ als voll voraussetzen, folgt mit Lemma 1.3.11 in [31] leicht, dass Q' neben der Symmetrieeigenschaft sogar echt positiv-definit ist. Dann unterstellen wir zunächst, dass Q' diagonal, also von der Form $Q' = \operatorname{diag}(q'_1, ..., q'_m)$ mit $q'_1, ..., q'_m > 0$ (positive Definitheit) ist und nehmen indirekt an, dass (4.36) nicht gelte. Somit müsste $f = (f_{i,j})_{i,j=1,...,m}$ nach Übergang zur $\|\cdot\|_1$-Norm und Betrachtung von (2.1) jedoch eine Komponente f_{i_0,j_0} besitzen, für die

$$\int_S f^2_{i_0,j_0}(s) \, \nu(ds) = \infty \tag{4.39}$$

gilt (ebenfalls indirekt). Nachdem, was wir über Q_f wissen, gilt zugleich für alle $t \in \mathbb{R}^m$:

$$0 \leq \langle Q_f t, t \rangle = \int_S \langle Q' f(s)^* t, f(s)^* t \rangle \, \nu(ds) < \infty. \tag{4.40}$$

Speziell für $t = e_{i_0}$, gemäß Annahme an $Q' = (q_{i,j})_{i,j=1,..,m}$ und wegen $f^*_{i,j} = f_{j,i}$ folgt dann aber für alle $s \in S$:

$$\langle Q' f(s)^* t, f(s)^* t \rangle = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m q_{i,j} f_{i_0,j}(s) \right) f_{i_0,i}(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} q_i' \, f_{i_0,i}^2(s) \\
&\geq q_{j_0}' \, f_{i_0,j_0}^2(s),
\end{aligned}
$$

sodass wegen $q_{j_0}' > 0$ der gewünschte Widerspruch zwischen (4.39) und (4.40) entsteht! Im Allgemeinen muss Q' nicht diagonal sein, dann liefert die Hauptachsentransformation (man beachte die Symmetrie von Q') jedoch die Existenz einer Diagonalmatrix D mit positiven Diagonaleinträgen (also den Eigenwerten von Q') sowie einer orthogonalen Matrix $U \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ mit $Q' = UDU^*$. Setze $g(s) := f(s)U$, so folgt für alle $s \in S$ und $t \in \mathbb{R}^m$:

$$\langle Q' f(s)^* t, f(s)^* t \rangle = \langle DU^* f(s)^* t, U^* f(s)^* t \rangle = \langle Dg(s)^* t, g(s)^* t \rangle.$$

Dann argumentiert man wie zuvor, um dank der Existenz von Q_f zu erkennen, dass

$$\int_S \|g(s)\|^2 \, \nu(ds) < \infty.$$

Damit liefert aber die nachfolgende Ungleichung auch (4.36), wobei man beachte, dass U^* ebenfalls orthogonal ist und dass die *Frobeniusnorm* $\|\cdot\|_F$ (auf $\mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$) invariant unter orthogonalen Transformationen ist. Ferner seien $C_1, C_2 > 0$ geeignete Konstanten zwecks Wechsel der Normen:

$$\|g(s)\| = \|g(s)^*\| \geq C_1 \|U^* f(s)^*\|_F = C_1 \|f(s)^*\|_F \geq C_2 \|f(s)^*\| = C_2 \|f(s)\|, \quad s \in S.$$

Nun der Fall $\alpha < 2$. Nach obiger Überlegung ist also klar, dass $f \in \mathcal{I}(M)$ äquivalent zur Existenz von L_f ist. Dabei genießt L_f unter Zuhilfenahme von Bemerkung 2.4.11 folgende Darstellung:

$$
\begin{aligned}
&\int_S \int_{\mathbb{R}^m} \min\{1, \|f(s)x\|^2\} \, \phi'(dx) \, \nu(ds) \\
&= \int_S \int_{S_\alpha} \int_0^\infty \min\{1, \|f(s) t^{\frac{1}{\alpha} I_m} \theta\|^2\} \, t^{-2} \, dt \, \Lambda(d\theta) \, \nu(ds) \\
&= \int_S \int_{S_\alpha} \int_0^\infty \min\{1, t^{\frac{2}{\alpha}} \|f(s)\theta\|^2\} \, t^{-2} \, dt \, \Lambda(d\theta) \, \nu(ds) \qquad (4.41) \\
&= \int_S \int_{S_\alpha} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\|f(s)\theta\|) \left(\int_0^{\|f(s)\theta\|^{-\alpha}} t^{\frac{2}{\alpha}-2} \|f(s)\theta\|^2 \, dt + \int_{\|f(s)\theta\|^{-\alpha}}^\infty t^{-2} \, dt \right) \Lambda(d\theta) \, \nu(ds) \\
&= \int_S \int_{S_\alpha} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(\|f(s)\theta\|) \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \|f(s)\theta\|^\alpha + \|f(s)\theta\|^\alpha \right) \Lambda(d\theta) \, \nu(ds)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{2}{2-\alpha} \int\limits_S \int\limits_{S_\alpha} \|f(s)\theta\|^\alpha \, \Lambda(d\theta)\, \nu(ds).$$

Somit folgt die behauptete Äquivalenz zu (4.37) und wegen

$$\int\limits_S \int\limits_{S_\alpha} \|f(s)\theta\|^\alpha \, \Lambda(d\theta)\, \nu(ds) \leq C\Lambda(S_\alpha) \int\limits_S \|f(s)\|^\alpha \, \nu(ds)$$

schließlich auch, dass (4.38) hinreichend für $f \in \mathcal{I}(M)$ ist, denn Λ ist ein endliches Maß auf S_α, während $\|\theta\|^\alpha$ für alle $\theta \in S_\alpha$ beschränkt ist.
Betrachten wir nun noch den Spezialfall $\psi(\cdot) = -c\,\|\cdot\|^\alpha$ (für $\alpha < 2$ und $c > 0$), so impliziert $f \in \mathcal{I}(M)$ nach (iii) des vorangegangenen Theorems, dass $s \mapsto \|f(s)^* t\|^\alpha$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$ integrierbar ist (bezüglich ν). Dies nutze man jetzt wie im Kontext von (4.39), um durch Negation von (4.38) auf die Existenz einer Komponente f_{i_0,j_0} mit

$$\int\limits_S |f_{i_0,j_0}(s)|^\alpha \, \nu(ds) = \infty$$

zu schließen. Andererseits erhalten wir jedoch für $t = e_{i_0}$ wieder:

$$\|f(s)^* t\|^\alpha = \left(\sum_{j=1}^n f_{i_0,j}^2(s) \right)^{\frac{\alpha}{2}} \geq |f_{i_0,j_0}(s)|^\alpha, \quad s \in S.$$

Widerspruch zur oben festgestellten Integrierbarkeit der linken Seite! □

Ungeachtet der Frage, ob die Integrierbarkeit von f im Falle eines symmetrisch α-stabilen Erzeugers (voll) stets äquivalent zu (4.38) ist, erkennt man anhand des Beispiels $\alpha < 2, m = 2$ mit einem auf den Punkten $\pm e_1$ und $\pm e_2$ getragenen Spektralmaß Λ (Symmetrie von ϕ' übertragt sich), dass die genannte Bedingung scharf ist. Ferner haben wir in Schritt (4.41) maßgeblich davon profitiert, dass der Erzeuger α-stabil ist und dass $(1/\alpha)I_m$ mit jedem Operator kommutiert. Das vorangegangene, sehr spezielle Beispiel zeigt somit bereits: Will man die Frage $f \in \mathcal{I}(M)$ mit Hilfe von Theorem 4.5.1 weiter charakterisieren, so wird man in der Regel weitere Informationen von der konkreten Funktion f oder dem Erzeuger μ benötigen. Angesichts dieser Erkenntnis wollen wir uns im Folgenden mit möglichst scharfen hinreichenden Bedingungen auseinandersetzen, wobei (4.38) in gewisser Weise als Vorlage dienen soll. In diesem Zusammenhang wird sich Aussage (iii) der obigen Charakterisierung im Besonderen eignen, um attraktive Voraussetzungen an solch ein f zu stellen. Dafür benötigen wir jedoch weiterhin ein tieferes Verständnis des Lévymaßes ϕ', sodass wir im Folgenden annehmen, dass μ Operator-stabil ist und dass $B \in \mathcal{E}(\mu)$. Vor dem Hintergrund von Bemerkung 2.4.7 stellt es zudem keine große Einschränkung dar, wenn wir abschließend unterstellen, dass μ sogar *strikt* Operator-stabil ist.

Theorem 4.5.3
Sei $f : S \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ meßbar. Weiter besitze μ eine strikt Operator-stabile Verteilung mit B als Exponenten. Falls nun ein $R > 0$ derart existiert, dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind, so gilt $f \in \mathcal{I}(M)$.

(i) Es existiert ein $0 < \delta_1 \leq 1/\Lambda_B$ mit

$$\int\limits_{\{s:\|f(s)\| \leq R\}} \|f(s)\|^{\frac{1}{\Lambda_B} - \delta_1} \, \nu(ds) < \infty. \tag{4.42}$$

(ii) Es existiert ein $\delta_2 > 0$ mit

$$\int\limits_{\{s:\|f(s)\| > R\}} \|f(s)\|^{\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2} \, \nu(ds) < \infty. \tag{4.43}$$

Falls B diagonalisierbar ist, so kann $\delta_1 = 0$ beziehungsweise $\delta_2 = 0$ gewählt werden.

Beweis. Gelten (4.42) und (4.43) mit δ_1, δ_2 und R wie angegeben. Weiter sei $t \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest, so definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned}
A_0 := A_0(t) : &= \{s : \|f(s)\| \leq R \quad \text{und} \quad f(s)^* t \neq 0\}, \\
A_1 := A_1(t) : &= \{s : \|f(s)\| > R \quad \text{und} \quad 0 < \|f(s)^* t\| \leq 1\}, \\
A_2 := A_2(t) : &= \{s : \|f(s)\| > R \quad \text{und} \quad \|f(s)^* t\| > 1\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt wegen $\psi(0) = 0$ folgende Rechnung für alle $s \in S$:

$$\begin{aligned}
&|\psi(f(s)^* t)| \\
&= \left|\psi\left(\tau(f(s)^* t)^{B^*} l(f(s)^* t)\right)\right| \mathbb{1}_{\{s: f(s)^* t \neq 0\}}(s) \\
&= \left|\psi\left(\tau(f(s)^* t)^{B^*} l(f(s)^* t)\right)\right| (\mathbb{1}_{A_0}(s) + \mathbb{1}_{A_1}(s) + \mathbb{1}_{A_2}(s)),
\end{aligned}$$

wobei $(\tau(\cdot), l(\cdot))$ die verallgemeinerten Polarkoordinaten bezüglich B^* seien. Nun nutzen wir, dass μ strikt Operator-stabil mit $B \in \mathcal{E}(\mu)$ ist (vergleiche Korollar 2.4.8) und dass $l(\cdot)$ auf die kompakte Menge S_{B^*} abbildet, während $\psi(\cdot)$ stetig ist. Ohne Einschränkung sei $|\psi(\cdot)|$ auf S_{B^*} durch 1 beschränkt.

$$\leq \tau(f(s)^* t)(\mathbb{1}_{A_0}(s) + \mathbb{1}_{A_1}(s) + \mathbb{1}_{A_2}(s)).$$

Nun gilt $\|f(s)^* t\| \leq R \, \|t\|$ auf A_0, d.h. zusammen mit der Wahl von A_1 und A_2 existieren nach Proposition 2.2.3 und unter Berücksichtigung von Korollar 2.2.4 positive Konstanten $C_0 = C_0(R, t), C_1$ und C_2, sodass

$$\leq C_0 \|f(s)^* t\|^{\frac{1}{\Lambda_{B^*}} - \delta_1} \mathbb{1}_{A_0}(s) + C_1 \|f(s)^* t\|^{\frac{1}{\Lambda_{B^*}} - \delta_1} \mathbb{1}_{A_1}(s) + C_2 \|f(s)^* t\|^{\frac{1}{\lambda_{B^*}} + \delta_2} \mathbb{1}_{A_2}(s)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_0\|t\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\|f(s)\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\mathbb{1}_{A_0}(s)+C_1\|t\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\|f(s)\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\mathbb{1}_{A_1}(s)\\
&\qquad+C_2\|t\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\|f(s)\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\mathbb{1}_{A_2}(s),
\end{aligned}
$$

wobei wir neben $\|f(s)\| = \|f(s)^*\|$ benutzt haben, dass $\sigma(B) = \sigma(B^*)$. Schreibe nun $\|f(s)\| = R \cdot (\|f(s)\|/R)$, so folgt durch Vergrößerung des Exponenten im mittleren Summanden:

$$
\begin{aligned}
&\leq C_0\|t\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\|f(s)\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\mathbb{1}_{A_0}(s)+C_1(R\|t\|)^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}R^{-(\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2)}\|f(s)\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\mathbb{1}_{A_1}(s)\\
&\qquad+C_2\|t\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\|f(s)\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\mathbb{1}_{A_2}(s)\\
&\leq C_0\|t\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\|f(s)\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\mathbb{1}_{\{s:\|f(s)\|\leq R\}}(s)\\
&\qquad+\left[C_1(R\|t\|)^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}R^{-(\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2)}+C_2\|t\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\right]\|f(s)\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\mathbb{1}_{\{s:\|f(s)\|>R\}}(s).
\end{aligned}
$$

Damit ist die erste Bedingung von Aussage (iii) in Theorem 4.5.1 wegen (4.42) und (4.43) erfüllt. Für die zweite sei also $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige, konvergente Folge mit Grenzwert t. Insbesondere existiert ein $K > 0$ mit $\|t_n\| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist klar, dass $(\cos\langle f(s)^*t_n, x\rangle - 1) \to (\cos\langle f(s)^*t, x\rangle - 1)$ für alle $(s, x) \in S \times \mathbb{R}^m$. Weiter folgt wegen $|\cos z - 1| \leq 2\min\{1, z^2\}$ (Potenzreihenentwicklung oder Lemma 8.6 in [41]) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung unmittelbar, dass

$$
|\cos\langle f(s)^*t_n, x\rangle - 1| \leq 2\,\min\{1, \|f(s)\|^2\|t_n\|^2\|x\|^2\} \leq C(s)\min\{1, \|x\|^2\}, \quad n \in \mathbb{N},
$$

wobei $C(s) := 2\,\max\{1, \|f(s)\|^2K^2\}$. Der Konvergenzsatz von Lebesgue liefert also, dass

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^m}(\cos\langle f(s)^*t_n, x\rangle - 1)\,\phi'(dx) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int\limits_{\mathbb{R}^m}(\cos\langle f(s)^*t, x\rangle - 1)\,\phi'(dx) \tag{4.44}
$$

für alle $s \in S$. Hinsichtlich des äußeren Integrals möchten wir nun das gleiche Argument verwenden; dabei haben wir aber bereits für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in S$ zeigen können, dass

$$
\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{\mathbb{R}^m}(\cos\langle f(s)^*t_n, x\rangle - 1)\,\phi'(dx)\right|\\
&\leq \frac{1}{2}\langle Q'f(s)^*t_n, f(s)^*t_n\rangle + \int\limits_{\mathbb{R}^m}(1-\cos\langle f(s)^*t_n, x\rangle)\,\phi'(dx)\\
&= |\mathrm{Re}\ \psi(f(s)^*t_n)|\\
&\leq |\psi(f(s)^*t_n)|\\
&\leq C_0\|t_n\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\|f(s)\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}\mathbb{1}_{\{s:\|f(s)\|\leq R\}}(s)\\
&\qquad+\left[C_1(R\|t_n\|)^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1}R^{-(\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2)}+C_2\|t_n\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\right]\|f(s)\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\mathbb{1}_{\{s:\|f(s)\|>R\}}(s).
\end{aligned}
$$

Indem wir erneut von (4.42)-(4.43) Gebrauch machen, liefert dies wegen $\|t_n\| \leq K$ die gesuchte integrierbare Majorante. Dabei beachte man einerseits, dass wir $\delta_1 \leq 1/\Lambda_B$ unterstellen. Andererseits wurde oben ersichtlich, dass lediglich C_0 von t_n (und R) abhängt. Der Beweis von Proposition 2.2.3 sowie (2.4) zeigen jedoch, dass diese Konstante monoton in $R\,\|t_n\|$ gewählt werden kann, sodass insgesamt die Behauptung folgt. Die Zusatzaussage ergibt sich in analoger Weise mit Hilfe von Proposition 2.2.3 und der dortigen Aussage für den diagonalisierbaren Fall (wobei mit B auch B^* diagonalisierbar ist). □

Da im α-stabilen Fall $\lambda_B = \Lambda_B = 1/\alpha$ gilt, bleibt die Aussage von (4.38) also erhalten, konnte jedoch zugleich auf den strikten Fall erweitert werden. Außerdem konnten wir die hinreichende Bedingung für die Operator-stabile Situation wie beabsichtigt möglichst scharf und dennoch praktikabel formulieren, insbesondere wird nur das (eindeutige) Spektrum der Exponenten von μ berücksichtigt, d.h. die Informationen aus dem Spektralmaß werden vernachlässigt. Wir wollen nun noch zwei Eigenschaften untersuchen, die erst im Falle eines erzeugten Zufallsmaßes von Relevanz sind, wobei die nachfolgende auch für einen nicht notwendigerweise Operator-stabilen Erzeuger zu formulieren wäre. Dabei sei daran erinnert, dass wir μ bereits als voll voraussetzen.

Eigenschaft 4.5.4
Sei $f \in \mathcal{I}(M)$. Falls eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\nu(A) > 0$ und $f(s) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ für alle $s \in A$ existiert, so ist $I(f)$ voll.

Beweis. Angenommen, $I(f)$ wäre nicht voll, so müsste nach Lemma 1.3.11 in [31] ein $y \in \Gamma_m$ existieren, sodass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt: $|\widehat{\mathcal{L}}(I(f))(ay)| = 1$. Bezeichne nun $\psi^{(1)}$ den Realteil von ψ, so folgt in Kenntnis der charakteristischen Funktion von $I(f)$ für alle $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_S \psi^{(1)}(f(s)^* ay)\,\nu(ds) = 0.$$

Andererseits gilt $\psi^{(1)} \leq 0$, somit existiert für alle $a \in \mathbb{R}$ eine ν-Nullmenge $E_a \in \mathcal{A}$ mit

$$\psi^{(1)}(f(s)^* ay) = \psi^{(1)}(af(s)^* y) = 0 \quad \text{für alle } s \in E_a^c.$$

Folglich existiert auch eine ν-Nullmenge $E \in \mathcal{A}$ mit

$$\psi^{(1)}(af(s)^* y) = 0 \quad \text{für alle } s \in E^c \text{ und } a \in \mathbb{Q}. \tag{4.45}$$

Wegen der Stetigkeit von $\psi^{(1)}$ (die von ψ geerbt wird) und der Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gilt (4.45) also auch für alle $a \in \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gibt es aber nun ein $\tilde{s} \in A \cap E^c$. Dabei gilt insbesondere:

$$\psi^{(1)}(af(\tilde{s})^* y) = 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Wegen $\tilde{s} \in A$ ist $f(\tilde{s})$ invertierbar, somit aber auch $f(\tilde{s})^*$, was angesichts $y \neq 0$ zeigt, dass $\tilde{y} := f(\tilde{s})^* y \neq 0$. Damit folgt aber insgesamt:

$$\forall a \in \mathbb{R}: \quad |\widehat{\mu}(a\tilde{y})| = \exp(\psi^{(1)}(a\tilde{y})) = 1,$$

was nach obigem Lemma wiederum bedeutet, dass μ nicht voll ist. Widerspruch! □

Die etwas neuartige Voraussetzung des nachfolgenden Resultats ist im Falle eines α-stabilen Erzeugers redundant, wird sich für die späteren Operator-stabilen Anwendungen jedoch als zentral erweisen.

Eigenschaft 4.5.5
Sei $f \in \mathcal{I}(M)$ und μ voll sowie (strikt) Operator-stabil mit $B \in \mathcal{E}(\mu)$. Falls nun für ν-fast alle $s \in S$ gilt: $f(s) \cdot B = B \cdot f(s)$, so ist auch $I(f)$ (strikt) Operator-stabil mit $B \in \mathcal{E}(I(f))$.

Beweis. Nach Voraussetzung an μ liefert Korollar 2.4.8 zunächst für alle $r > 0$ die Existenz eines Vektors $a_r \in \mathbb{R}^m$ mit $r \cdot \psi(t) = \psi(r^{B^*}t) + \mathrm{i}\langle a_r, t\rangle$ für alle $t \in \mathbb{R}^m$. Andererseits zeigt man ähnlich wie in Eigenschaft 2.1.3 (i), dass aus $f(s)B = Bf(s)$ auch folgt:

$$\forall r > 0 \; \forall s \in S: \quad r^B f(s) = f(s) r^B,$$

zumindest jeweils bis auf eine mögliche ν-Nullmenge. Außerhalb dieser folgt dann jedoch insbesondere für alle $r > 0$ sowie $t \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned} r \cdot \psi\left(f(s)^* t\right) &= \psi\left(r^{B^*} f(s)^* t\right) + \mathrm{i}\langle a_r, f(s)^* t\rangle \\ &= \psi\left((f(s) r^B)^* t\right) + \mathrm{i}\langle a_r, f(s)^* t\rangle \\ &= \psi\left((r^B f(s))^* t\right) + \mathrm{i}\langle a_r, f(s)^* t\rangle \\ &= \psi\left(f(s)^* r^{B^*} t\right) + \mathrm{i}\langle a_r, f(s)^* t\rangle. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir unter dem Vorbehalt einer sich anschließenden Bemerkung auch die folgende Rechnung für alle $r > 0$ und $t \in \mathbb{R}^m$ (vergleiche (2.9)):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}(I(f))(t)^r &= \exp\left(r \cdot \int_S \psi(f(s)^* t)\, \nu(ds)\right) \\ &= \exp\left(\int_S \left[\psi(f(s)^* r^{B^*} t) + \mathrm{i}\langle a_r, f(s)^* t\rangle\right] \nu(ds)\right) \qquad (4.46) \\ &= \exp\left(\int_S \psi(f(s)^* r^{B^*} t)\, \nu(ds)\right) \cdot \exp\left(\mathrm{i} \int_S \langle f(s) a_r, t\rangle\, \nu(ds)\right) \\ &= \widehat{\mathcal{L}}(I(f))(r^{B^*} t) \cdot \exp\left(\mathrm{i}\left\langle \int_S f(s) a_r\, \nu(ds), t\right\rangle\right). \qquad (4.47) \end{aligned}$$

Dabei wissen wir wegen $f \in \mathcal{I}(M)$, dass (4.46) existiert, insbesondere sind Real- und Imaginärteil integrierbar. Gleichermaßen wissen wir, dass der Imaginärteil von $\psi(f(s)^* r^{B^*} t)$

für festes $(r,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ integrierbar ist. Dies rechtfertigte die anschließende Zerlegung; somit argumentiert man auch den letzten Schritt wie an früherer Stelle, indem man für t beispielsweise Einheitsvektoren betrachtet, um die Integrierbarkeit aller Komponenten von $f(s)a_r$ zu erkennen. □

Wir können die Shifts von $I(f)$ also explizit angeben, siehe (4.47). Ferner ist die obige Kommutativitätsbedingung im Allgemeinen herausfordernd. Vor dem Hintergrund von Eigenschaft 2.1.3 (c) erscheinen daher Integranden vom Exponentialtyp (mit festem Exponenten) besonders geeignet.

Bemerkung 4.5.6. Im Falle eines $\mathbb{C}^m$-wertigen ISRM $\widetilde{M}$, das wiederum aus einem $\mathbb{R}^{2m}$-wertigen mit Erzeugerpaar $(\tilde{\mu},\nu)$ hervorgeht, kann man die beiden vorherigen Eigenschaften für $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\widetilde{M})$ analog übertragen, indem man die assoziierte Abbildung f betrachtet. Dabei erkennt man mit den Methoden der linearen Algebra, dass $f^{(1)}(s) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ zusammen mit $f^{(2)}(s) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ hinreichend für $f(s) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2m})$ ist. Entsprechend erbt $I(\tilde{f})$ respektive $\Xi(I(\tilde{f}))$ die (strikte) Operator-Stabilität von $\tilde{\mu}$, sofern ein Exponent von $\tilde{\mu}$ existiert, der mit der Assoziierung kommutiert (bis auf eine mögliche ν-Nullmenge).

Die partielle Situation ist für uns im weiteren Verlauf jedoch von größerem Interesse:

Korollar 4.5.7
Sei $(S,\mathcal{A},\nu)$ wie zuvor und $\widetilde{\mu}$ eine volle, unendlich-teilbare Verteilung auf $\mathbb{R}^{2m}$. Ferner sei $\widetilde{M}$ das $\mathbb{C}^m$-wertige ISRM, das wir nach Identifizierung mit dem von μ und ν erzeugten ISRM M wie in Abschnitt 3.7 erhalten.

(i) Sei $\tilde{f} \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$. Falls eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\nu(A) > 0$ existiert, sodass für alle $s \in A$ gilt: $|\det(f^{(1)}(s))| + |\det(f^{(2)}(s))| > 0$, dann ist $I^{(1)}(\tilde{f})$ voll.

(ii) Sei $\widetilde{\mu}$ nun (strikt) Operator-stabil mit einem Exponenten der Form $\widetilde{B} = B \oplus B$ (direkte Summe) für ein $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$, d.h.
$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$
Ferner gelte für ν-fast alle $s \in S$: $f^{(i)}(s) \cdot B = B \cdot f^{(i)}(s)$, $i = 1,2$. Dann folgt: Falls $\tilde{f} \in \mathcal{I}_p(\widetilde{M})$, so ist $I^{(1)}(\tilde{f})$ (strikt) Operator-stabil und besitzt B als Exponenten. Seien die Shifts von $\tilde{\mu}$ durch $a_r = (a_{r,1}, a_{r,2}) \in \mathbb{R}^{2m}$ gegeben, so berechnen sich jene von $I^{(1)}(\tilde{f})$ über
$$\int_S (f^{(1)}(s)a_{r,1} - f^{(2)}(s)a_{r,2})\,\nu(ds), \quad r > 0.$$

Beweis. M ist also die Assoziierung von $\widetilde{M}$, sodass die log-charakteristische Funktion von $I^{(1)}(\tilde{f})$ durch
$$\mathbb{R}^m \ni t \mapsto \int_S \widetilde{\psi}((f^{(1)}(s)^* t, -f^{(2)}(s)^* t))\,\nu(ds)$$

gegeben ist (vergleiche Eigenschaft 3.6.4 sowie Theorem 4.4.4 (a)), wobei $\widetilde{\psi}$ die log-charakteristische Funktion von $\tilde{\mu}$ sei. Somit folgt (i) analog wie zuvor, während man hinsichtlich (ii) beachte, dass per Definition der direkten Summe sowie der des Matrixexponentials für alle $r > 0$ gilt:

$$r^{(B \oplus B)^*} = r^{B^* \oplus B^*} = r^{B^*} \oplus r^{B^*}.$$

Auch die Berechnung der Shifts erfolgt mit Hinblick auf die Definition des Standardskalarprodukts ähnlich wie zuvor. $\square$

KAPITEL 5

Operator-Selbstähnlichkeit

Theorem 4.2.8 und die Tatsache, dass die reine Existenz eines Zufallsvektors mit Tripel $[\gamma_f, Q_f, \phi_f]$ nach Theorem 2.3.2 bereits gesichert ist, mögen noch einmal die Frage aufwerfen, welchen Nutzen die umfangreiche Integrationstheorie der letzten Kapitel stiftet. Die Antwort besteht - wie bereits angekündigt - in der Möglichkeit, Abhängigkeiten zu modellieren; diese können vor allem durch eine geeignete Wahl der Integranden umgesetzt werden, während der verfügbare stochastische Anteil im Wesentlichen durch den Integrator, also dem Zufallsmaß bereitgestellt wird. Dabei beschränken wir uns auf das in [29] eingeführte und durch Anwendungen motivierte Konzept der Operator-Selbstähnlichkeit, mit dem Abhängigkeiten in recht allgemeiner und zugleich praktikabler Form (vergleiche später Theorem 5.1.3) beschrieben werden können. Ferner harmoniert dieses Konzept auf besondere Weise mit den zuvor erarbeiteten Eigenschaften des stochastischen Integrals. Wir wenden uns nun also ganzen Familien von Zufallsvektoren (auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) zu, genauer betrachten wir Zufallsfelder der Art

$$X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \quad \text{mit} \quad X(t) \in L_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

und nennen X kurz ein (d,m)-*Vektorfeld*. Dabei bezeichnen wir $\mathbb{R}^m$ typischerweise als *Zustandsraum* und $\mathbb{R}^d$ als *Zeit- oder Parameterraum*.

5.1 Definition und Skalierungsexponenten

Wie bereits in der Einleitung motiviert, hat die Untersuchung von Selbstähnlichkeitsbeziehungen eine jahrzehntelange Tradition, wobei sich in der Literatur viele verwandte, aber nicht einheitliche Definitionen finden. Wir orientieren uns weitestgehend an [29], was einer direkten Fortsetzung der univariaten Idee in [41] entspricht und vereinbaren folgende Sprechweisen, wobei wir auf die zum Teil übliche Bedingung der stochastischen Stetigkeit (oder der Stetigkeit in Verteilung) zunächst verzichten.

Definition 5.1.1
Sei $E \in Q(\mathbb{R}^d)$. Ein (d,m)-Vektorfeld $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ heißt *Operator-selbstähnlich im weiteren Sinne (kurz: WOSS) mit Zeit-skalierendem Exponenten* E, falls für alle $r > 0$ ein $B_r \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ und eine *Shiftfunktion* $b_r(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ existieren, sodass

$$\{X(r^E t) : t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{fdd}{=} \{B_r X(t) + b_r(t) : t \in \mathbb{R}^d\}. \tag{5.1}$$

Ist $b_r(\cdot) = b_r$ für alle $r > 0$ konstant, so nennen wir X *Operator-selbstähnlich (kurz: OSS)* und falls $b_r(t) = 0$ für alle $(r,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$, so heißt X *strikt Operator-selbstähnlich (kurz: strikt OSS).*

Mit E ist offensichtlich auch γE für jedes $\gamma > 0$ ein Zeit-skalierender Exponent von X. Falls alle $X(t)$ identisch verteilt und unabhängig sind, so ist sogar jeder Operator $E \in Q(\mathbb{R}^d)$ ein entsprechender Exponent. Auch die Familie $(B_r)_{r>0}$ von Operatoren ist (für gegebenes E) nicht eindeutig festgelegt, nicht einmal für den Fall, dass ein Raum-skalierender Exponent existiert (siehe unten). Die folgende Eigenschaft ist ähnlich zu Proposition 3.1 in [29] und besagt im Wesentlichen, dass die Selbstähnlichkeitseigenschaft entlang der Richtungen geeigneter Eigenvektoren von E erhalten bleibt. Die resultierenden multivariaten *Prozesse* ($d = 1$) sind dann OSS im Sinne von [30]. Man vergleiche auch Chapter 11 in [31].

Eigenschaft 5.1.2
Sei X ein WOSS (OSS, striktes OSS) Vektorfeld mit Zeit-skalierendem Exponenten E, sodass (5.1) entsprechend für alle $r > 0$ erfüllt ist. Falls nun λ ein positiver Eigenwert von E mit Eigenvektor ξ ist, so ist der durch $Y(u) := X(u\xi)$ definierte $\mathbb{R}^m$-wertige Prozess $Y = \{Y(u) : u \in \mathbb{R}\}$ ebenfalls WOSS (OSS, strikt OSS) mit Zeit-skalierendem Exponenten 1 (wobei d=1) und für alle $r > 0$ gilt:

$$\{Y(ru) : u \in \mathbb{R}\} \stackrel{fdd}{=} \{B_{r^{1/\lambda}} Y(u) + b_{r^{1/\lambda}}(u\xi) : u \in \mathbb{R}\}. \tag{5.2}$$

Beweis. Gelte also $E\xi = \lambda\xi$ für ein $\lambda > 0$ und ein $\xi \in \Gamma_d$, so wissen wir nach Proposition 2.2.2 (f) in [31], dass auch $r^E \xi = r^\lambda \xi$ für alle $r > 0$. Somit folgt nach (5.1) unmittelbar, dass

$$\{Y(r^\lambda u) : u \in \mathbb{R}\} = \{X(r^E u\xi) : u \in \mathbb{R}\} \stackrel{fdd}{=} \{B_r Y(u) + b_r(u\xi) : u \in \mathbb{R}\}.$$

Da $(0,\infty) \ni r \mapsto r^\lambda \in (0,\infty)$ bijektiv ist (man beachte erneut, dass $\lambda > 0$), folgt die Behauptung also durch einfache Substitution. $\square$

Wir nähern uns nun den Operatoren B_r. Dabei nennen wir die betrachteten (d,m)-Vektorfelder $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ *voll*, wenn dies jeweils auf die Verteilung aller $X(t)$ für $t \in \Gamma_d$ zutrifft. (5.1) und Lemma 2.3.5 in [31] lassen somit leicht erkennen, dass die Operatoren B_r für alle $r > 0$ invertierbar sein müssen, sofern X ein volles WOSS Vektorfeld ist. Dies impliziert mit (5.1) wiederum, dass $B_{r_1 r_2} = B_{r_1} B_{r_2}$ für alle $r_1, r_2 > 0$. Das folgende Resultat erscheint somit plausibel.

Theorem 5.1.3
Seien $E \in Q(\mathbb{R}^d)$ und X ein volles, stochastisch stetiges (d,m)-Vektorfeld.

(a) Falls X WOSS mit Zeit-skalierendem Exponenten E ist, dann existieren ein Operator $D \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $\lambda_D \geq 0$ und eine stetige Funktion $b_r(t) : (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, sodass für alle $r > 0$ gilt:

$$\{X(r^E t) : t \in \mathbb{R}^d\} \overset{fdd}{=} \{r^D X(t) + b_r(t) : t \in \mathbb{R}^d\}. \tag{5.3}$$

Weiter gilt genau dann $X(0) = a$ fast sicher (für ein $a \in \mathbb{R}^m$), wenn $D \in Q(\mathbb{R}^m)$. In diesem Fall kann die obige Funktion durch $b_0(t) = a$ (konstant) stetig auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ fortgesetzt werden.

(b) Falls X OSS mit Zeit-skalierendem Exponenten E ist, dann existieren ein Operator $D \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $\lambda_D \geq 0$ und eine stetige Funktion $b_r : (0,\infty) \to \mathbb{R}^m$, sodass für alle $r > 0$ gilt:

$$\{X(r^E t) : t \in \mathbb{R}^d\} \overset{fdd}{=} \{r^D X(t) + b_r : t \in \mathbb{R}^d\}. \tag{5.4}$$

Weiter gilt genau dann $X(0) = a$ fast sicher (für ein $a \in \mathbb{R}^m$), wenn $D \in Q(\mathbb{R}^m)$. In diesem Fall kann die obige Funktion durch $b_0 = a$ stetig auf $[0,\infty)$ fortgesetzt werden.

(c) Falls X strikt OSS mit Zeit-skalierendem Exponenten E ist, dann existiert ein Operator $D \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $\lambda_D \geq 0$, sodass für alle $r > 0$ gilt:

$$\{X(r^E t) : t \in \mathbb{R}^d\} \overset{fdd}{=} \{r^D X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}. \tag{5.5}$$

Weiter gilt $X(0) = 0$ fast sicher genau dann, wenn $D \in Q(\mathbb{R}^m)$.

Die Funktion $b_r(t)$ ist dabei durch E und D bereits eindeutig festgelegt.

Beweis. Entspricht unter Berücksichtigung der dortigen Definitionen einer Kombination von Theorem 2.1, Theorem 2.2 und Corollary 2.1 in [29], wobei der (dort nicht genannte) Zusatz von (b) unmittelbar aus (a) folgt. □

Die zitierten Beweise lassen erkennen, dass die Shifts b_r bzw. die Shiftfunktionen $b_r(t)$ in (5.3) und (5.4) nicht notwendiger Weise mit den ursprünglichen aus (5.1) übereinstimmen müssen. Kernaussage des vorangegangenen Theorems ist jedoch, dass die Abbildung $r \mapsto B_r$ in Gestalt von $B_r = r^D$ stetig gewählt werden kann und dass die Familie $(B_r)_{r>0}$ dann durch nur einen Operator D beschrieben ist. Ferner überzeugt man sich unter den Voraussetzungen von Theorem 5.1.3 schnell davon, dass für die Shiftfunktion aus (5.3) gilt:

$$\forall r_1, r_2 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}^d : \quad b_{r_1 r_2}(t) = b_{r_1}(r_2^E t) + r_1^D b_{r_2}(t) = b_{r_2}(r_1^E t) + r_2^D b_{r_1}(t). \tag{5.6}$$

Bezeichnung 5.1.4
Falls wir also $B_r = r^D$ für ein $D \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $\lambda_D \geq 0$ wählen können (für alle $r > 0$), so nennen wir D einen *Raum-skalierenden Exponenten* von X; und zwar unabhängig davon, ob X die Voraussetzungen von Theorem 5.1.3 erfüllt. Gilt entsprechend (5.5), so nennen wir X kurz (E, D)-*OSS*, unterstellen also stillschweigend den strikten Fall.

Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.1.3 und unter Zuhilfenahme von (5.6) kann man wie in [29] (Corollary 2.2) zeigen, dass die Funktion $b^* : \Gamma_d \to \mathbb{R}^m$, definiert durch

$$b^*(t) := b_{\tau_E(t)}(l_E(t)), \quad t \in \Gamma_d,$$

ebenfalls stetig ist und dass gilt:

$$\forall r > 0 \; \forall t \in \Gamma_d : \quad b_r(t) = b^*(r^E t) - r^D b^*(t). \tag{5.7}$$

b^* wird *Driftfunktion* von X genannt und kann, sofern $D \in Q(\mathbb{R}^m)$, durch $b^*(0) = a$ wieder stetig fortgesetzt werden; (5.7) gilt dann entsprechend auch für $t = 0$. Insbesondere kann in diesem Falle jedes Zufallsfeld X, das WOSS ist (respektive OSS, dann betrachte man $b^*(t) = b_{\tau_E(t)}$) via $Y(t) := X(t) - b^*(t)$ zu einem Vektorfeld $Y = \{Y(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ transformiert werden, das (E, D)-OSS ist, wie man mit (5.7) unmittelbar nachrechnet. Strikte OSS-Vektorfelder stellen also aus nicht-deterministischer Sicht keine wirkliche Einschränkung dar. Insofern verweisen wir an dieser Stelle auch lediglich auf Proposition 3.2 in [29], wo geeignete Bedingungen genannt werden, unter denen ein WOSS-Vektorfeld auch OSS ist. Schließlich sei daran erinnert, dass ein (d, m)-Vektorfeld X *stationäre Zuwächse* besitzt, falls für alle $h \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\{X(t + h) - X(h) : t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{fdd}{=} \{X(t) - X(0) : t \in \mathbb{R}^d\}.$$

Damit können wir noch das folgende Ergebnis formulieren, das eine Beziehung zwischen den Eigenwerten von D und den Momenten von X herstellt.

Korollar 5.1.5
Sei X ein volles (d, m)-Vektorfeld mit stationären Zuwächsen und $X(0) = 0$ fast sicher, das (5.5) erfüllt. Falls nun λ ein positiver Eigenwert von E (mit Eigenvektor ξ) ist und falls ein $0 < \gamma \leq 1$ mit $\mathbb{E}(\|X(\xi)\|^\gamma) < \infty$ existiert, so folgt $\Lambda_D \leq \lambda/\gamma$.

Beweis. Definiere $Y(u) := X(u\xi)$, dann ist offensichtlich auch $Y = \{Y(u) : u \in [0, \infty)\}$ voll und besitzt stationäre Zuwächse mit $Y(0) = 0$ fast sicher. Es gilt $\mathbb{E}(\|Y(1)\|^\gamma) < \infty$. Und da wir (5.5) voraussetzen, folgt außerdem nach Eigenschaft 5.1.2 für alle $r > 0$:

$$\{Y(ru) : u \in [0, \infty)\} \stackrel{fdd}{=} \{r^{D/\lambda} Y(u) : u \in [0, \infty)\}.$$

Damit lässt sich der Beweis von Property 2.2. in [30] imitieren und wir erhalten, dass $\Lambda_{D/\lambda} \leq \gamma^{-1}$, was äquivalent zur Behauptung ist. $\square$

5.2 Charakterisierung mittels der Anziehungsbereiche

Seien $X = \{X(u) : u \in [0, \infty)\}$ und $Y = \{Y(u) : u \in [0, \infty)\}$ stochastische Prozesse (also $d = 1$) mit Werten in $\mathbb{R}^m$, so definieren Meerschaert und Scheffler in [31] beispielsweise: Y gehört zum *verallgemeinerten Anziehungsbereich von X (kurz: GDOA(X))*, falls für alle $s > 0$ ein $A_s \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ und ein $a_s \in \mathbb{R}^m$ existieren, sodass

$$\{A_s Y(su) + a_s : u \in [0, \infty)\} \stackrel{fdd}{\Longrightarrow} \{X(u) : u \in [0, \infty)\} \tag{5.8}$$

für $s \to \infty$. Mit dieser Bezeichnung konnte dann in [17] gezeigt werden, dass für einen beliebigen, vollen Prozess X dieser Art gilt: X ist OSS genau dann, wenn $GDOA(X) \neq \emptyset$. (Die dort zusätzlich geforderte Stetigkeit in Verteilung hängt einzig mit einer anderen Definition der Operator-Selbstähnlichkeit zusammen). Neben der praktischen Relevanz des oben eingeführten Konzepts unterstreicht dieses Ergebnis zugleich die theoretische Bedeutung selbstähnlicher Prozesse. Wir möchten nun ein analoges Ergebnis für die von uns betrachteten (d, m)-Vektorfelder herleiten, benötigen dazu jedoch eine sinnvolle Erweiterung von (5.8). Zunächst folgt aus (5.8), dass auch

$$\{A_{s^\beta} Y(s^\beta u) + a_{s^\beta} : u \in [0, \infty)\} \stackrel{fdd}{\Longrightarrow} \{X(u) : u \in [0, \infty)\}$$

für alle $\beta > 0$ und $s \to \infty$. Die Skalierung der *Zeit* sollte also für alle $s > 0$ linear erfolgen und zugleich sollte es möglich sein, in allen Komponenten beziehungsweise Richtungen mit verschiedenen *Geschwindigkeiten* zu skalieren. Weiter kann es hilfreich sein, gegenüber (5.8) zuzulassen, dass die Vektoren a_s vom entsprechenden Zeitpunkt abhängen dürfen. Dies motiviert die folgende, noch etwas allgemeinere Herangehensweise.

Definition 5.2.1
Sei $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ ein (d, m)-Vektorfeld. Dann bezeichne der *verallgemeinerte Anziehungsbereich von X (kurz: GDOA(X))* die Menge aller (d, m)-Vektorfelder $Y = \{Y(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$, sodass neben einem $V \in Q(\mathbb{R}^d)$ für alle $s > 0$ ein Operator $A_s \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ und eine Abbildung $a_s(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ existieren mit

$$\{A_s Y(s^V t) + a_s(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{fdd}{\Longrightarrow} \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \tag{5.9}$$

für $s \to \infty$. Ist die Abbildung $a_s(\cdot)$ für alle $s > 0$ konstant (Null), so sagen wir, dass Y zum *(strikten) Anziehungsbereich von X (kurz: DOA(X) respektive DOA*$_s(X)$) gehört.

Wir lassen also im *Raum* zunächst auch die Skalierung mit nicht notwendigerweise invertierbaren Operatoren zu, wobei dies für große s immer dann folgt, wenn wir voraussetzen, dass X voll ist (man vergleiche Lemma 2.3.7 in [31]). Möchte man nun eine Charakterisierung wie im Falle $d = 1$ erhalten, so wird man s^V im Allgemeinen jedoch durch keinen beliebigen Operator B_s ersetzen können, was im Wesentlichen damit zusammenhängt, dass die Definition der Operator-Selbstähnlichkeit hinsichtlich der Skalierung in der Zeit bereits sehr restriktiv ist. Andererseits haben wir in der jüngsten Definition keine weiteren Voraussetzungen an X und Y gestellt.

Theorem 5.2.2
Sei $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ ein volles und stochastisch stetiges (d, m)-Vektorfeld. Dann gilt: X ist WOSS genau dann, wenn $GDOA(X) \neq \emptyset$. Dabei ist jeder Operator $V \in Q(\mathbb{R}^d)$, der (5.9) erfüllt, ein Zeit-skalierender Exponent von X und umgekehrt.

Die sehr allgemeine Definition der Operator-Selbstähnlichkeit erlaubt uns also, das gerade formulierte Theorem entsprechend breit anzulegen. Dabei dient uns der Beweis in [17] für den Fall $d = 1$ (bezogen auf die Aussage in Korollar 5.2.7, siehe unten) zwar zum Teil als Schablone, ist bei genauerer Betrachtung aber zu umständlich, denn der gesuchte Operator B_r in (5.1) (für $r > 0$ fest) kann mehr oder weniger explizit angegeben werden und muss nicht als Element eines speziellen, nicht-leeren Schnittes erkannt werden. Zu diesem Zweck formulieren wir die vorbereitenden Lemmata etwas präziser (teils auch unter schwächeren Voraussetzungen), man vergleiche später insbesondere Bemerkung 5.2.6. Das folgende erweist sich dabei als nützlich, um Widersprüche zu erzeugen.

Lemma 5.2.3
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ eine Folge von Operatoren mit $\|A_n\| \to \infty$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, für die gilt:

$$\|x_n\| \to 0 \quad \text{und} \quad \|A_n x_n\| = 1 \text{ bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere konvergiert $y_n := A_n x_n$ entlang einer Teilfolge und für den Grenzwert y gilt $\|y\| = 1$.

Beweis. Per Definition der induzierten Operatornorm existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ mit $\|A_n\| = \|A_n z_n\|$ und $\|z_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies liefert mit der Setzung

$$x_n := \begin{cases} \|A_n\|^{-1} z_n, & \text{falls } \|A_n\| \neq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

offensichtlich die gesuchte Folge (x_n). □

Lemma 5.2.4
Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ eine Folge von Vektoren. Falls nun gilt:

$$\mu_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \mu \quad \text{und} \quad \mu_n * \varepsilon_{a_n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \nu,$$

so ist die Folge der Vektoren beschränkt, d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty$ (relativ kompakt).

Beweis. Dies ist die Aussage von Lemma 2.3.9 in [31], wobei man jedoch auf die Vollheit der Grenzmaße μ und ν verzichten kann, denn die Menge

$$A := \{R > 0 : \mu(\{x : \|x\| = R\}) + \nu(\{x : \|x\| = R\}) > 0\}$$

ist wegen der Endlichkeit von μ und ν auch in diesem Falle höchstens abzählbar, wie man sich durch abzählbare und disjunkte Zerlegung der Menge A leicht überlegt. $\square$

Damit gelangen wir zu einem ersten wichtigen Zwischenergebnis, das der Aussage von Lemma 2.3.16 in [31] ähnelt, allerdings etwas schärfer ist und ausführlicher bewiesen werden soll.

Lemma 5.2.5
Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ und μ voll. Weiter seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ derart gegeben, dass

$$\mu_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \mu \quad \text{und} \quad (A_n\mu_n) * \varepsilon_{a_n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \nu.$$

Dann gilt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| < \infty. \tag{5.10}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Folge der Normen $\|A_n\| = \|A_n^*\|$ beschränkt ist und verwenden dabei die Idee von Lemma 2.3.8 in [31]. Angenommen, dies ist nicht der Fall, dann gilt also $\|A_{n_k}^*\| \to \infty$ (für $k \to \infty$) entlang einer entsprechenden Teilfolge. Lemma 5.2.3 liefert dann die Existenz einer Nullfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$, sodass $y_k := A_{n_k}^* x_k$ entlang einer weiteren Teilfolge konvergiert, sagen wir

$$A_{n_{k_l}}^* x_{k_l} \xrightarrow[(l\to\infty)]{} y \quad \text{mit } \|y\| = 1.$$

Dann folgt aber nach dem Stetigkeitssatz von Lévy für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$|\widehat{\mu}(ty)| = \lim_{l\to\infty} |\widehat{\mu}_{n_{k_l}}(ty_{k_l})|,$$

wobei wir die vorausgesetzte schwache Konvergenz von μ_n insbesondere entlang dieser Teilfolge lesen konnten und sogar die kompakt gleichmäßige Konvergenz benötigt haben.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{l\to\infty} |(\widehat{A_{n_{k_l}}\mu_{n_{k_l}}})(tx_{k_l})| \\
&= \lim_{l\to\infty} |(\widehat{A_{n_{k_l}}\mu_{n_{k_l}}})(tx_{k_l})| \cdot |\exp(\mathrm{i}\langle a_{n_{k_l}}, tx_{k_l}\rangle)| \\
&= \lim_{l\to\infty} |(A_{n_{k_l}}\widehat{\mu_{n_{k_l}} * \varepsilon_{a_{n_{k_l}}}})(tx_{k_l})|.
\end{aligned}$$

Nun lesen wir mit dem gleichen Argument wie oben die zweite Voraussetzung dieses Lemmas, erneut entlang der genannten Teilfolge, wobei man beachte, dass $(tx_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ für festes t ist eine Nullfolge ist, also:

$$\begin{aligned}
&= |\widehat{\nu}(0)| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Somit gilt $|\mu(ty)| = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Angesichts $y \neq 0$ und Lemma 1.3.11 in [31] kann μ somit nicht voll sein, Widerspruch. Also gilt: $\sup\{\|A_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Angenommen, die Folge $(\|a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre nun unbeschränkt, so müsste eine Teilfolge mit $\|a_{n_k}\| \to \infty$ existieren, wobei die Teilfolgen(bezeichnungen) von zuvor wieder aufgehoben seien. Dann existiert nach dem gerade Gezeigten aber eine weitere Teilfolge, entlang derer A_n konvergiert, sagen wir

$$A_{n_{k_l}} \xrightarrow[(l\to\infty)]{} A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^n).$$

Mit Proposition 2.1.8 in [31] folgt also $A_{n_{k_l}} x_l \to Ax$ für jede konvergente Folge $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ (mit Grenzwert x). Dies sichert die Anwendbarkeit von Theorem 1.2.8 in genannter Quelle und wir erhalten schließlich nach Voraussetzung, dass

$$\eta_l := (A_{n_{k_l}} \mu_{n_{k_l}}) \xrightarrow[(l\to\infty)]{w} (A\mu) =: \eta.$$

Zugleich wissen wir aber auch, dass

$$\eta_l * \varepsilon_{a_{n_{k_l}}} = (A_{n_{k_l}} \mu_{n_{k_l}}) * \varepsilon_{a_{n_{k_l}}} \xrightarrow[(l\to\infty)]{w} \nu,$$

sodass nach Lemma 5.2.4 folgt: $\sup\{\|a_{n_{k_l}}\| : l \in \mathbb{N}\} < \infty$; Widerspruch zur Wahl von (a_{n_k}). Damit folgt insgesamt (5.10). □

Wir sind nun in der Lage, das bereits formulierte Hauptresultat dieses Kapitels zu beweisen. Dafür werden wir gegenüber den Ausführungen in [17] etwas mehr Aufwand betreiben müssen, da wir den verallgemeinerten Anziehungsbereich schwächer definiert haben.

Beweis. (von Theorem 5.2.2)
„ $\Rightarrow$ “ Sei X also WOSS, sagen wir mit Zeit-skalierendem Exponenten $E \in Q(\mathbb{R}^d)$, dann existieren für alle $r > 0$ ein Operator $B_r \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ sowie eine Funktion $b_r(\cdot) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\{X(r^E t) : t \in \mathbb{R}^d\} \overset{fdd}{=} \{B_r X(t) + b_r(t) : t \in \mathbb{R}^d\}.$$

Somit folgt aber bereits, dass $X \in GDOA(X)$; dazu wähle man $Y := X$, $A_s := B_s^{-1}$ (man beachte die Ausführungen vor Theorem 5.1.3 und dass wir X als voll voraussetzen) sowie $a_s(t) := -B_s^{-1} b_s(t)$ für alle $s > 0$ und $t \in \mathbb{R}^d$. Dann erhalten wir mittels $V := E$ für alle $s > 0$, dass

$$\begin{aligned} \{A_s Y(s^V t) + a_s(t) : t \in \mathbb{R}^d\} &= \{B_s^{-1} X(s^E t) - B_s^{-1} b_s(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \\ &\overset{fdd}{=} \{B_s^{-1}(B_s X(t) + b_s(t)) - B_s^{-1} b_s(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \\ &= \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}. \end{aligned}$$

Insbesondere resultiert X als Verteilungslimes (für $s \to \infty$ und im Sinne aller Randverteilungen). Dabei war der zweite Schritt zulässig, da die fdd-Gleichheit *aller* nichtdeterministischen Ausdrücke genutzt wurde.

„$\Leftarrow$" Um zu zeigen, dass X WOSS ist, können wir also $GDOA(X) \neq \emptyset$ voraussetzen, d.h. es existieren ein (d,m)-Vektorfeld $Y = \{Y(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$, Operatoren $(A_s)_{s>0} \subset \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$, $\mathbb{R}^m$-wertige Funktionen $(a_r(\cdot))_{r>0}$ auf $\mathbb{R}^d$ und ein $V \in Q(\mathbb{R}^d)$, sodass gilt:

$$\{A_s Y(s^V t) + a_s(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \overset{fdd}{\Longrightarrow} \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \quad (s \to \infty).$$

Genauer gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$ beliebig:

$$\big(A_s Y(s^V t_1) + a_s(t_1), ..., A_s Y(s^V t_k) + a_s(t_k)\big) \Longrightarrow (X(t_1), ..., X(t_k)) \tag{5.11}$$

für $s \to \infty$. Aus Gründen der Übersicht führen wir nun zuerst einige Bezeichnungen ein. So setzen wir für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \nu_{t_1,...,t_k} &:= \mathcal{L}((Y(t_1), ..., Y(t_k))), \\ \mu_{t_1,...,t_k} &:= \mathcal{L}((X(t_1), ..., X(t_k))). \end{aligned}$$

Weiter definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die stetige Abbildung

$$G_k : \mathrm{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^{k \cdot m}), \quad A \mapsto \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix}.$$

Seien dann zunächst $r > 0$ und $t \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest. So erhalten wir nach (5.11) (für $k = 1$ und $s = nr$) einerseits:

$$A_{nr} \nu_{(nr)^V t} * \varepsilon_{a_{nr}(t)} \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \mu_t, \tag{5.12}$$

wobei wir im weiteren Verlauf auf die Klammern zur Beschreibung des Bildmaßes verzichten. Andererseits folgt, dass

$$A_n \nu_{(nr)^V t} * \varepsilon_{a_n(r^V t)} = A_n \nu_{n^V (r^V t)} * \varepsilon_{a_n(r^V t)} \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \mu_{r^V t}.$$

Indem wir für den Moment $t \neq 0$ annehmen, liefert die Vollheit von μ_t nach (5.12) und Lemma 2.3.7 in [31], dass die von t unabhängigen Operatoren A_{nr} für hinreichend große n invertierbar sind. Damit ohne Einschränkung aber auch für alle $n \in \mathbb{N}$ und die letztgenannte Konvergenz ist wie folgt zu schreiben:

$$\underbrace{A_n A_{nr}^{-1}}_{=:H_n} \Big(A_{nr} \nu_{(nr)^V t} * \varepsilon_{a_{nr}(t)}\Big) * \varepsilon_{\underbrace{a_n(r^V t) - A_n A_{nr}^{-1} a_{nr}(t)}_{=:h_n(t)}} \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \mu_{r^V t}, \tag{5.13}$$

wobei wir die jeweilige Abhängigkeit von r (fest) unterdrückt haben. Wenn wir nun diese Aussage zusammen mit (5.12) lesen, folgt nach Lemma 5.2.5, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|H_n\| < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|h_n(t)\| < \infty.$$

Also ist H_n entlang einer Teilfolge konvergent, ohne Einschränkung (vergleiche später Bemerkung 5.2.6) gelte $H_n \to H$ für $n \to \infty$ und ein $H \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$. Sei weiter $q_1, q_2, ...$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}^d$. Nach obigen Überlegungen ($t \in \mathbb{R}^d$ war beliebig) kennen wir die Folge $(h_n(q_1))_{n\in\mathbb{N}}$ und wissen, dass sie beschränkt ist, es existiert also eine konvergente Teilfolge $(h_{n_{l,1}}(q_1))_{l\in\mathbb{N}}$, dessen Grenzwert wir mit $h(q_1)$ bezeichnen. Ferner ist mit $(h_n(q_2))_{n\in\mathbb{N}}$ auch die Folge $(h_{n_{l,1}}(q_2))_{l\in\mathbb{N}}$ beschränkt, sodass eine weitere konvergente Teilfolge $(h_{n_{l,2}}(q_2))_{l\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $h(q_2)$ existiert. Dies liefert induktiv eine Familie von konvergenten Folgen $\{(h_{n_{l,j}}(q_j))_{l\in\mathbb{N}} : j \in \mathbb{N}\}$ mit Grenzwerten $h(q_j)$, wobei $(n_{l,j_2})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Teil(index)folge von $(n_{l,j_1})_{l\in\mathbb{N}}$ ist, wann immer $j_2 \geq j_1$. Seien nun $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_k \in \mathbb{Q}^d$ beliebig, aber fest. Weiter wähle man ein k' mit $\{t_1, ..., t_k\} \subset \{q_1, ..., q_{k'}\}$. Nach (5.11) wissen wir, dass

$$G_{k'}(A_{nr})\nu_{(nr)^V q_1,...,(nr)^V q_{k'}} * \varepsilon_{(a_{nr}(q_1),...,a_{nr}(q_{k'}))} \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \mu_{q_1,...,q_{k'}}$$

sowie (man wiederhole das Argument zu (5.13))

$$G_{k'}(H_n)\left(G_{k'}(A_{nr})\nu_{(nr)^V q_1,...,(nr)^V q_{k'}} * \varepsilon_{(a_{nr}(q_1),...,a_{nr}(q_{k'}))}\right) * \varepsilon_{(h_n(q_1),...,h_n(q_{k'}))} \xrightarrow[(n\to\infty)]{w} \mu_{r^V q_1,...,r^V q_{k'}}.$$

Dann gelten beide Aussagen auch entlang der oben gefundenen Teilfolge $(n_{l,k'})$, wobei wir per Konstruktion wissen (komponentenweise Betrachtung):

$$G_{k'}(H_{n_{l,k'}}) \xrightarrow[(l\to\infty)]{} G_{k'}(H) \quad \text{und} \quad (h_{n_{l,k'}}(q_1), ..., h_{n_{l,k'}}(q_{k'})) \xrightarrow[(l\to\infty)]{} (h(q_1), ..., h(q_{k'})).$$

Theorem 1.2.8 und Proposition 2.1.8 in [31] liefern somit aus Gründen der Eindeutigkeit:

$$G_{k'}(H)\mu_{q_1,...,q_{k'}} * \varepsilon_{(h(q_1),...,h(q_{k'}))} = \mu_{r^V q_1,...,r^V q_{k'}}.$$

Dies bedeutet jedoch gerade, dass

$$(X(r^V q_1), ..., X(r^V q_{k'})) \stackrel{d}{=} (HX(q_1) + h(q_1), ..., HX(q_{k'}) + h(q_{k'}))$$

und somit, dass

$$(X(r^V t_1), ..., X(r^V t_k)) \stackrel{d}{=} (HX(t_1) + h(t_1), ..., HX(t_k) + h(t_k))$$

nach simultaner Projektion respektive Permutation beider Seiten. Wir haben also bei gegebenem $r > 0$ bereits einen geeigneten Operator H sowie eine Abbildung $h : \mathbb{Q}^d \to \mathbb{R}^m$ definieren können, sodass gilt:

$$\{X(r^E t) : t \in \mathbb{Q}^d\} \stackrel{fdd}{=} \{HX(t) + h(t) : t \in \mathbb{Q}^d\}. \tag{5.14}$$

Sei nun $t \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ beliebig, aber fest. Dann existiert eine Folge $(q'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^d$ mit $q'_n \to t$ und nach Voraussetzung konvergiert also $X(r^E q'_n)$ stochastisch gegen $X(r^E t)$, insbesondere in Verteilung (jeweils für $n \to \infty$). Wegen

$$HX(q'_n) + h(q'_n) \stackrel{d}{=} X(r^E q'_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert schließlich auch die linke Seite in Verteilung, was nach Lemma 5.2.4 impliziert, dass $\sup\{\|h(q'_n)\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$, indem wir mit dem gleichen Argument wie zuvor nutzen, dass $HX(q'_n) \Rightarrow HX(t)$. Also existiert eine konvergente Teilfolge $(h(q'_{n_l}))_{l\in\mathbb{N}}$, dessen Grenzwert wir mit $h(t)$ bezeichnen. Ferner *merken* wir uns diese (Teil-)Folge und konnten genau genommen zeigen: Es existiert eine Folge $(q_{n,t})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^d$ mit $q_{n,t} \to t$ und $h(q_{n,t}) \to h(t)$ (jeweils für $n \to \infty$). Wegen der Beliebigkeit von $t \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ konnte also insgesamt eine Abbildung $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ konstruiert werden. Und indem wir $q_{n,t} = t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{Q}^d$ setzen, kennen wir sogar für alle $t \in \mathbb{R}^d$ eine Folge $(q_{n,t})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^d$ mit $q_{n,t} \to t$ und $h(q_{n,t}) \to h(t)$. Schließlich seien $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest. Da wir weiterhin stochastische Stetigkeit voraussetzen, folgt für alle $j = 1, ..., k$:

$$X(r^E q_{n,t_j}) \xrightarrow[(n\to\infty)]{\mathbb{P}} X(r^E t_j)$$

und somit auch

$$(X(r^E q_{n,t_1}), ..., X(r^E q_{n,t_k})) \xrightarrow[(n\to\infty)]{\mathbb{P}} (X(r^E t_1), ..., X(r^E t_k)), \tag{5.15}$$

also insbesondere in Verteilung. Andererseits wissen wir nach (5.14) für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$(X(r^E q_{n,t_1}), ..., X(r^E q_{n,t_k})) \stackrel{d}{=} (HX(q_{n,t_1}) + h(q_{n,t_1}), ..., HX(q_{n,t_k}) + h(q_{n,t_k})). \tag{5.16}$$

Nun liefern die stochastische Stetigkeit und Theorem 1.2.8 in [31] wie zuvor:

$$(HX(q_{n,t_1}) + h(q_{n,t_1}), ..., HX(q_{n,t_k}) + h(q_{n,t_k})) \Longrightarrow (HX(t_1) + h(t_1), ..., HX(t_k) + h(t_k)),$$

somit nach (5.16) aber auch, dass

$$(X(r^E q_{n,t_1}), ..., X(r^E q_{n,t_k})) \Longrightarrow (HX(t_1) + h(t_1), ..., HX(t_k) + h(t_k)), \tag{5.17}$$

jeweils für $n \to \infty$. Durch Kombination von (5.15) und (5.17) erhalten wir aus Gründen der Eindeutigkeit:

$$(X(r^E t_1), ..., X(r^E t_k)) \stackrel{d}{=} (HX(t_1) + h(t_1), ..., HX(t_k) + h(t_k)).$$

Da $r > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.2.6. Die Voraussetzungen von Theorem 5.2.2 können abgeschwächt werden: Statt zu fordern, dass X voll ist, genügt es, dies für ein $X(t')$ zu wissen, wobei $t' \in \mathbb{R}^d$ beliebig. In der notwendigen Richtung schreibe man dann $X(t') = X(r^E r^{-E} t')$, um in Analogie zu der Bemerkung vor Theorem 5.1.3 zu erkennen, dass B_r für alle $r > 0$ invertierbar ist. Umgekehrt war die Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwar genau genommen abhängig von $r > 0$, aber nicht von $t \in \mathbb{R}^d$. Mit Hilfe von Lemma 5.2.4, das ohne die Vollheit der Grenzverteilung auskommt, argumentiert man somit leicht, dass auch die Folgen $(h_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ (und $r > 0$) beschränkt sind, zumindest nach Einschränkung auf jene Teil(index)folge, entlang derer auch H_n konvergiert.

Andererseits folgt aus $X(t_n^{(1)}) \Rightarrow X(t^{(1)})$ und $X(t_n^{(2)}) \Rightarrow X(t^{(2)})$ im Allgemeinen nicht, dass $(X(t_n^{(1)}), X(t_n^{(2)})) \Rightarrow (X(t^{(1)}), X(t^{(2)}))$, daher haben wir stochastische Stetigkeit anstelle von Stetigkeit in Verteilung vorausgesetzt. Gelingt diese Implikation unter Umständen dennoch (für alle endlichen Auswahlen dieser Form), so genügt es auch, Stetigkeit in Verteilung zu fordern.

Der erste Teil der vorangegangenen Bemerkung gilt ebenso im Rahmen der folgenden Aussage, wobei wir auf die stochastische Stetigkeit beziehungsweise auf jene in Verteilung in jedem Falle verzichten können.

Korollar 5.2.7
Sei $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ ein volles (d, m)-Vektorfeld. Dann gilt: X ist (strikt) OSS genau dann, wenn $GDOA_{(s)}(X) \neq \emptyset$. Dabei ist jeder Operator $V \in Q(\mathbb{R}^d)$, der (5.9) entsprechend erfüllt, ein Zeit-skalierender Exponent von X und umgekehrt.

Beweis. Ist X (strikt) OSS, so erkennt man in der notwendigen Richtung der vorherigen Beweises, dass auch die Vektoren $a_s = -B_s^{-1} b_s$ für alle $s > 0$ unabhängig von t sind. Umgekehrt sieht man sofort: Ist $a_s(\cdot) = a_s$ für alle $s > 0$ konstant, so ist auch h_n jeweils unabhängig von t. Insbesondere entfällt die Betrachtung von X auf $\mathbb{Q}^d$ und die stochastische Stetigkeit wird nicht benötigt. $\square$

KAPITEL 6

Moving-average Darstellung

Die geleistete Vorarbeit ermöglicht es uns nun, die moving-average Darstellung aus [29] auf den Operator-stabilen (und zugleich strikt α-stabilen statt symmetrischen) Fall zu verallgemeinern und präzise Existenzbedingungen zu formulieren. Insbesondere werden wir sehen, dass die dort betrachteten Felder einem Spezialfall unserer Konstruktion entsprechen und dass die zugehörigen Voraussetzungen dann übereinstimmen. Diese Verallgemeinerung erfüllt jedoch keinen Selbstzweck; vielmehr sind Operator-stabile Verteilungen und ihre Exponenten gerade in der gleichen *Sprache* wie das vorgestellte Konzept der Operator-Selbstähnlichkeit formuliert. Genauer werden wir sehen, dass Operator-stabile und Operator-selbstähnliche Felder im Kern durch drei Operatoren, sprich Exponenten beschrieben werden.
Motiviert durch die in der Literatur übliche Definition von α-stabilen Feldern und Prozessen (man vergleiche beispielsweise Definition 3.1.1 in [40]) führen wir also zunächst die folgende Sprechweise ein.

Definition 6.0.1
Ein (d, m)-Vektorfeld $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ heißt *(strikt oder symmetrisch) Operator-stabil*, falls alle Randverteilungen (strikt oder symmetrisch) Operator-stabil sind. Existiert darüber hinaus ein Operator $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$, sodass alle endlichen Linearkombinationen der Form

$$\sum_{j=1}^{k} c_j X(t_j), \quad c_1, ..., c_k \in \mathbb{R} \text{ und } t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d \tag{6.1}$$

Operator-stabil mit B als Exponenten sind, so nennen wir B einen *Exponenten* von X.

Im stabilen Fall erkennt man schnell: Sind alle Randverteilungen stabil, so muss es einen *globalen* Index α geben. Dies ist im Operator-stabilen Kontext nicht zwingend gegeben, wie bereits das Beispiel von unabhängigen Zufallsvektoren $X(t), t \in \mathbb{R}^d$ zeigt, wobei jedes $X(t)$ Operator-stabil mit $B_t \in \mathcal{E}(X(t))$ sei. Denn in diesem Fall besitzen alle Vektoren der Form

$$(X(t_1), ..., X(t_k)), \quad t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$$

eine Operator-stabile Verteilung mit $B_{t_1} \oplus \cdots \oplus B_{t_k}$ als Exponenten. Insofern kann (6.1) unter Umständen helfen, die Angabe eines globalen Exponenten von der Dimension zu lösen.

6.1 Existenz der Darstellung

Für den Rest dieses Kapitels unterstellen wir folgendes Setting: $\mu \sim [\gamma, Q, \nu]$ sei eine strikt Operator-stabile und volle Verteilung auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ mit $B \in \mathcal{E}(\mu)$ und log-charakteristischer Funktion ψ. Ferner sei M das von μ und dem d-dimensionalen Lebesguemaß (auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$) erzeugte ISRM im Sinne von Beispiel 3.6.3 (b). Vor dem Hintergrund von Beispiel 3.1.3 können wir als mögliche Integranden somit Funktionen der Form $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to (\mathrm{L}(\mathbb{R}^m), \mathcal{B}(\mathrm{L}(\mathbb{R}^m))$ betrachten. Dass die Menge S also gerade dem $\mathbb{R}^d$ entspricht, wird sich in unserer Situation als vorteilhaft erweisen, prinzipiell muss die Indexmenge des Vektorfelds jedoch nicht zwingend in Verbindung zu der Struktur stehen, die dem Zufallsmaß zugrunde liegt, man vergleiche beispielsweise [20]. Ferner vereinbaren wir, dass 0^A für alle $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ dem Nulloperator in $\mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ entsprechen soll.
Schließlich sei an Definition 2.2.6 und Definition 2.2.7 erinnert; während die Zulässigkeit von ϕ technische Gründe hat und die Existenz des nachfolgenden Objekts sichern soll, wird sich die Homogenität von ϕ als geeignetes Werkzeug erweisen, um die gewünschte Operator-Selbstähnlichkeit zu erhalten. Demgegenüber legt Eigenschaft 4.5.5 die Hoffnung nahe, dass die Wahl von M bereits hinreichend für die Operator-Stabilität im Sinne der vorangegangenen Definition ist. Wir gehen zuerst der Frage der Existenz nach.

Theorem 6.1.1 (Moving-average Darstellung)
Seien $E \in Q(\mathbb{R}^d)$ und $D \in Q(\mathbb{R}^m)$, wobei $q := \mathrm{tr}(E)$. Weiterhin sei $\phi : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ eine E-homogene und (β, E)-zulässige Funktion für ein $\beta > 0$. Falls nun die beiden Bedingungen

$$\lambda_{D-qB} + \lambda_{qB} > 0, \tag{6.2}$$
$$\Lambda_{D-qB} + \Lambda_{qB} < \beta \tag{6.3}$$

erfüllt sind, so existiert für alle $t \in \mathbb{R}^d$ das Integral

$$X_{\phi,D}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left[\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right] M(ds). \tag{6.4}$$

Das resultierende (d, m)-Vektorfeld $X_{\phi,D} = \{X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ nennen wir (ϕ, D)-*moving-average Darstellung (bezüglich M).*

Beweis. Der Beweis ist in weiten Teilen an den von Theorem 2.5 in [29] angelehnt. Dabei steht ds für die Integration nach dem d-dimensionalen Lebesguemaß, wobei wir - falls möglich - gelegentlich auch das gleichwertige (uneigentliche) Riemann-Integral betrachten werden. Weiter werden wir im Folgenden bei festem $t \in \mathbb{R}^d$ Überlegungen für $s \in \mathbb{R}^d$ vornehmen, die eventuell für $s = 0$ beziehungsweise $s = t$ nicht sinnvoll sind. Hinsichtlich der im Anschluss zu betrachtenden Integrale handelt es sich dabei jedoch um Lebesguesche Nullmengen, die für die Existenz und den Wert des stochastischen Integrals in (6.4) jeweils unerheblich sind, da das d-dimensionale Lebesguemaß im vorliegenden Fall bis auf eine Konstante auch dem Kontrollmaß λ_M entspricht, man vergleiche den Beweis zu Eigenschaft 4.1.10. Schließlich werden zahlreiche positive Konstanten einfließen, die aus Gründen der Übersichtlichkeit fortlaufend mit $C_1, C_2, \ldots$ bezeichnet werden sollen.
Nach obiger Konvention verschwindet der Integrand in (6.4) offensichtlich für alle $s \in \mathbb{R}^d$, sofern $t = 0$. $X_{\phi,D}(0)$ existiert somit und ist konstant 0. Sei nun $t \in \Gamma_d$ beliebig, aber fest, so ist zu zeigen, dass die Funktion

$$f_t(s) := \begin{cases} \phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}, & s \notin \{0,t\} \\ \phi(t)^{D-qB}, & s = 0 \\ -\phi(-t)^{D-qB}, & s = t \end{cases}$$

bezüglich M integrierbar ist, denn nach Voraussetzung gilt $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (siehe unten). Dabei folgt mit der Stetigkeit von ϕ und mit Eigenschaft 2.1.3 (g) leicht, dass $f_t(\cdot)$ meßbar ist. Unter den genannten Voraussetzungen werden wir nun zeigen können, dass ein $0 < \delta_1 \leq 1/\Lambda_B$ und ein $\delta_2 > 0$ existieren mit

$$I_1(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right\|^{\frac{1}{\Lambda_B} - \delta_1} ds < \infty \tag{6.5}$$

sowie

$$I_2(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left\| \phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right\|^{\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2} ds < \infty. \tag{6.6}$$

Somit würde nach Theorem 4.5.3 in besonderem Maße die Behauptung folgen. Dabei wählen wir δ_1 und δ_2 konkret derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind (unabhängig von t):

$$0 < \delta_1 = \delta_2 < \min\left\{ \frac{1}{\Lambda_B}, \frac{\zeta_1}{2|\lambda_{D-qB}|}, \frac{|\zeta_2|}{2|\Lambda_{D-qB} - \beta|} \right\}, \tag{6.7}$$

wobei

$$\zeta_1 := \frac{\lambda_{D-qB} + \lambda_{qB}}{\Lambda_B} > 0, \qquad \zeta_2 := \frac{\Lambda_{D-qB} + \Lambda_{qB} - \beta}{\Lambda_B} < 0$$

nach (6.2) und (6.3). Falls $\lambda_{D-qB} = 0$ oder $\Lambda_{D-qB} - \beta = 0$, so ignorieren wir die entsprechenden Beiträge zum Minimum in (6.7). Weiter definieren wir $\delta_3 > 0$ und $\delta_4 > 0$

derart, dass (ebenfalls unabhängig von t) gilt:

$$\delta_3 < \frac{\zeta_1}{2(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2)} \quad \text{und} \quad \delta_4 < \min\left\{ \frac{|\zeta_2|}{2(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2)}, \Lambda_{qB} \right\}. \tag{6.8}$$

Und da die Spur invariant unter Basistransformationen ist, folgt nach Übergang zur Jordanschen Normalform (man vergleiche später (7.19) und (7.20)) und wegen $\lambda_E > 0$, dass auch $q = \mathrm{tr}(E) > 0$. Seien $(\tau(\cdot), l(\cdot))$ nun die verallgemeinerten Polarkoordinaten bezüglich E, dann folgt mit der E-Homogenität von ϕ, dass $\phi(s) = \tau(s)\,\phi(l(s))$ für alle $s \in \Gamma_d$. In jedem Falle sichern die Voraussetzungen an ϕ die Anwendbarkeit von (2.6):

$$m_\phi := \min_{\theta \in S_E} \phi(\theta) > 0 \quad \text{und} \quad M_\phi := \max_{\theta \in S_E} \phi(\theta) > 0.$$

Insgesamt also, indem wir $\tau(0) := 0$ setzen (man beachte, dass $\phi(0) = 0$ wegen der Stetigkeit von ϕ sowie Proposition 2.2.3):

$$\forall s \in \mathbb{R}^d: \qquad m_\phi \tau(s) \le \phi(s) \le M_\phi \tau(s). \tag{6.9}$$

Folglich können wir $\phi(s) = \tau(s)\xi$ mit einem $0 < m_\phi \le \xi = \xi(s) \le M_\phi$ schreiben und erhalten für alle $s \in \mathbb{R}^d$:

$$\left\|\phi(s)^{D-qB}\right\| = \left\|\tau(s)^{D-qB}\xi^{D-qB}\right\| \le \left\|\tau(s)^{D-qB}\right\| \left\|\xi^{D-qB}\right\| \le C_1 \left\|\tau(s)^{D-qB}\right\| \tag{6.10}$$

aus Gründen der Stetigkeit und da $[m_\phi, M_\phi]$ kompakt ist. Mit dem gleichen Argument und der Tatsache, dass $\|r^E\| > 0$ für $r > 0$, erkennt man:

$$M_1 := \max_{m_\phi \le r \le M_\phi} \left\|r^E\right\| > 0 \quad \text{und} \quad M_2 := \max_{1/M_\phi \le r \le 1/m_\phi} \left\|r^E\right\| > 0.$$

Das Argument bleibt wegen $0 \notin S_E$ bestehen (nun die Kompaktheit von S_E), um

$$0 < \upsilon := \min_{\theta \in S_E} \|\theta\| \le \Upsilon := \max_{\theta \in S_E} \|\theta\| < \infty$$

einzusehen. Weiter können wir für alle $s \in \Gamma_d$ schreiben:

$$\phi(s)^{-E}s = \phi(s)^{-E}\tau(s)^E l(s) = \left(\phi(s)^{-1}\tau(s)\right)^E l(s).$$

Somit lässt sich auf Basis der vorangegangenen Bezeichnungen als erstes Zwischenergebnis formulieren:

$$\forall s \in \Gamma_d: \quad 0 < \frac{\upsilon}{M_1} \le \left\|\phi(s)^{-E}s\right\| \le M_2\Upsilon. \tag{6.11}$$

Dabei folgt die linke Ungleichung mit Proposition 2.1.3 (b) aus [31] und indem wir wieder $\phi(s) = \tau(s)\,\xi$ für ein $\xi \in [m_\phi, M_\phi]$ schreiben:

$$\left\|(\phi(s)^{-1}\tau(s))^E l(s)\right\| \ge \frac{\|l(s)\|}{\|(\phi(s)\tau(s)^{-1})^E\|} \ge \frac{\upsilon}{\|(\phi(s)\tau(s)^{-1})^E\|} = \frac{\upsilon}{\|\xi^E\|} \ge \frac{\upsilon}{M_1}.$$

Ganz analog erhält man auch die rechte Seite der Ungleichung via

$$\left\|(\phi(s)^{-1}\tau(s))^E l(s)\right\| \leq \left\|(\xi^{-1})^E\right\| \Upsilon \leq M_2\Upsilon.$$

Als nächstes soll die (β, E)-Zulässigkeit von ϕ genutzt werden. So folgt speziell für $A' := \frac{v}{M_1}$ und $B' := M_2\Upsilon$, dass ein $C_2 > 0$ mit folgender Implikation für alle $x, z \in \mathbb{R}^d$ existiert:

$$\big(A' \leq \|z\| \leq B' \text{ und } \tau(x) \leq 1\big) \quad \Rightarrow \quad |\phi(x+z) - \phi(z)| \leq C_2\,\tau(x)^\beta. \tag{6.12}$$

Schließlich wissen wir nach (6.9), dass $\phi(s) \geq m_\phi \tau(s) \Leftrightarrow \phi(s)^{-1} \leq m_\phi^{-1}\tau(s)^{-1}$ für alle $s \in \Gamma_d$. Wegen $\tau(s) = \tau(-s)$ und $\beta > 0$ existiert also ein $\gamma = \gamma(t) > 0$ derart, dass die folgenden drei Ungleichungen für alle $s \in \mathbb{R}^d$ mit $\tau(s) > \gamma$ gelten:

$$\phi(-s)^{-1}\tau(t) < 1, \quad C_2\,\phi(-s)^{-\beta}\tau(t)^\beta < \frac{1}{2}, \quad \phi(-s) > 1. \tag{6.13}$$

Damit kommen wir nun zur Endlichkeit von $I_1(t)$ sowie $I_2(t)$ und definieren für alle $\kappa > 0$ die Menge $A(\kappa) := \{s \in \mathbb{R}^d : \tau(s) \leq \kappa\}$. Nach Korollar 2.2.4 ist $A(\gamma(t))$ also beschränkt, sodass wir nachfolgend Proposition 2.1.4 für ein $C_3 = C_3(t, \delta_3) > 0$ mit $\delta_3 > 0$ von oben anwenden können. Zunächst erhalten wir jedoch nach (6.10) für alle $\rho > 0$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^\rho \mathbb{1}_{A(\gamma(t))}(s)\,ds \\
&\qquad \leq C_1^\rho \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\|\tau(-s)^{D-qB}\right\|^\rho \mathbb{1}_{A(\gamma(t))}(s)\,ds \\
&\qquad \leq C_1^\rho C_3^\rho \int\limits_{\mathbb{R}^d} \tau(s)^{\rho(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t))}(s)\,ds \\
&\qquad = C_1^\rho C_3^\rho \int\limits_0^\infty r^{q-1} \int\limits_{S_E} \tau(r^E\theta)^{\rho(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t))}(r^E\theta)\,\sigma(d\theta)\,dr \\
&\qquad = C_1^\rho C_3^\rho \int\limits_0^{\gamma(t)} r^{q-1} \int\limits_{S_E} r^{\rho(\lambda_{D-qB}-\delta_3)}\,\sigma(d\theta)\,dr \\
&\qquad = C_1^\rho C_3^\rho\,\sigma(S_E) \int\limits_0^{\gamma(t)} r^{\rho(\lambda_{D-qB}-\delta_3)+q-1}\,dr.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt benutzt, dass $\tau(r^E\theta) = r$ für $\theta \in S_E$ und entsprechend die Menge $A(\gamma(t))$ gelesen. Weiter haben wir Lemma 2.2.5 genutzt; insbesondere ist σ ein beschränktes Maß auf S_E, sodass für die Endlichkeit des obigen Integrals zu zeigen bleibt, dass $\rho(\lambda_{D-qB} - \delta_3) + q - 1 > -1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(\lambda_{D-qB} - \delta_3) + q > 0$. Nun gilt

$\sigma(qB) = q\sigma(B)$ mit $q > 0$ (siehe oben); somit folgt wegen $\Lambda_B \geq \lambda_B \geq 1/2$ insbesondere, dass $q\lambda_B = \lambda_{qB} > 0$ sowie $q\Lambda_B = \Lambda_{qB} > 0$. Betrachten wir dann zunächst $\rho = 1/\Lambda_B - \delta_1$, so erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\Lambda_B} - \delta_1\right)(\lambda_{D-qB} - \delta_3) + q &= \frac{\lambda_{D-qB}}{\Lambda_B} - \delta_1\lambda_{D-qB} - \delta_3\left(\frac{1}{\Lambda_B} - \delta_1\right) + q \\
&= \frac{\lambda_{D-qB} + \Lambda_{qB}}{\Lambda_B} - \delta_1\lambda_{D-qB} - \delta_3\left(\frac{1}{\Lambda_B} - \delta_1\right) \\
&\geq \frac{\lambda_{D-qB} + \lambda_{qB}}{\Lambda_B} - \delta_1\lambda_{D-qB} - \delta_3\left(\frac{1}{\Lambda_B} - \delta_1\right) \\
&\geq \zeta_1 - \delta_1\lambda_{D-qB} - \delta_3\left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2\right) \\
&> 0
\end{aligned}$$

nach (6.7) und (6.8). In ähnlicher Weise folgt für $\rho = 1/\lambda_B + \delta_2$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2\right)(\lambda_{D-qB} - \delta_3) + q &= \frac{\lambda_{D-qB} + \lambda_{qB}}{\lambda_B} + \delta_2\lambda_{D-qB} - \delta_3\left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2\right) \\
&\geq \frac{\lambda_{D-qB} + \lambda_{qB}}{\Lambda_B} + \delta_2\lambda_{D-qB} - \delta_3\left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2\right) \\
&= \zeta_1 + \delta_2\lambda_{D-qB} - \delta_3\left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2\right) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt noch einmal von (6.2) profitiert haben. Das beweist:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1} + \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2} \right) \mathbb{1}_{A(t)}(s)\, ds < \infty.$$

Nun hingen die beiden vorangegangenen Rechnungen nicht von $\gamma(t)$ ab, somit erhalten wir unmittelbar ein weiteres Ergebnis. Denn nach Lemma 2.2 in [5] existiert ein $C_4 \geq 1$ mit $\tau(x + y) \leq C_4(\tau(x) + \tau(y))$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$. Indem man nun für weiterhin festes $t \in \Gamma_d$ und beliebiges $s \in \mathbb{R}^d$ schreibt: $\tau(s) = \tau((t + s) + (-t))$, folgt wegen $\tau(-t) = \tau(t)$ folgende Inklusion:

$$\{s \in \mathbb{R}^d : \tau(t + s) \leq \gamma(t)\} \subset \{s \in \mathbb{R}^d : \tau(s) \leq C_4(\gamma(t) + \tau(t))\}. \tag{6.15}$$

Insbesondere erhalten wir mit $\gamma'(t) := C_4(\gamma(t) + \tau(t))$ nach offensichtlicher Substitution für alle $\rho > 0$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\|\phi(t - s)^{D-qB}\right\|^{\rho} \mathbb{1}_{A(\gamma(t))}(s)\, ds \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho} \mathbb{1}_{A(\gamma'(t))}(s)\, ds < \infty,$$

da wir das Problem vermöge $\gamma'(t)$ auf das vorherige zurückgeführt haben. Zusammenfassend existiert also nach (2.1) ein $C_5 > 0$ (auf Basis von $\delta_1 = \delta_2$), sodass

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{A(\gamma(t))} \left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho} ds \\
&\qquad \le \int\limits_{A(\gamma(t))} \left(\left\|\phi(t-s)^{D-qB}\right\| + \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|\right)^{\rho} ds \\
&\qquad \le C_5 \int\limits_{A(\gamma(t))} \left(\left\|\phi(t-s)^{D-qB}\right\|^{\rho} + \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho}\right) ds \\
&\qquad < \infty
\end{aligned}$$

für $\rho = 1/\Lambda_B - \delta_1$ und $\rho = 1/\lambda_B + \delta_2$, d.h. das Intergal

$$\int\limits_{A(\gamma(t))} \left(\left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1} + \left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\right) ds$$

ist endlich. Betrachten wir nun also die Menge $A(\gamma(t))^c = \{s \in \mathbb{R}^d : \tau(s) > \gamma(t)\}$. Dann ist zunächst bekannt (man vergleiche Satz 5.1.4 in [14]), dass

$$\frac{d}{dr} r^{D-qB} = (D-qB)\, r^{D-qB-I_m}$$

und somit für $\frac{1}{2} < u < \frac{3}{2}$ (komponentenweise als Riemannintegral)

$$\begin{aligned}
\left\|u^{D-qB} - I_m\right\| &= \left\| \int\limits_1^u (D-qB) r^{D-qB-I_m}\, dr \right\| \\
&= \left\| \int\limits_{\min\{1,u\}}^{\max\{1,u\}} (D-qB) r^{D-qB-I_m}\, dr \right\| \\
&\le C_6 \left\|D-qB\right\| \int\limits_{\min\{1,u\}}^{\max\{1,u\}} \left\|r^{D-qB-I_m}\right\| dr \\
&\le C_7\, C_6 \left\|D-qB\right\| |u-1|, \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

da $\max\{1,u\} - \min\{1,u\} = |u-1|$ und für $C_7 := \max\{\|r^{D-qB-I_m}\| : \frac{1}{2} \le r \le \frac{3}{2}\}$, während $C_6 > 0$ eine vorübergehende Betrachtung der $\|\cdot\|_1$-Norm erlaubte. Weiter liefert die E-Homogenität von ϕ für alle $s \in \Gamma_d$ die folgende Rechnung:

$$\left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left[\phi(-s)^{-1}\phi(t-s)\phi(-s)\right]^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right\| \\
&= \left\| \left[\phi\left(\phi(-s)^{-E}(t-s)\right)\, \phi(-s)\right]^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right\| \\
&= \left\| \phi\left(\phi(-s)^{-E}(t-s)\right)^{D-qB} \phi(-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right\| \\
&= \left\| \left[\phi\left(\phi(-s)^{-E}t - \phi(-s)^{-E}s\right)^{D-qB} - I_m\right] \phi(-s)^{D-qB} \right\| \\
&\leq \left\| \phi\left(\phi(-s)^{-E}t - \phi(-s)^{-E}s\right)^{D-qB} - I_m \right\| \left\| \phi(-s)^{D-qB} \right\|. \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

Andererseits wissen wir nach Eigenschaft 2.2.2 (c) und (6.13), dass

$$\tau(\phi(-s)^{-E}t) = \phi(-s)^{-1}\tau(t) < 1$$

für alle s mit $\tau(s) > \gamma(t)$, während dank der E-Homogenität von ϕ gilt:

$$\phi\left(-\phi(-s)^{-E}s\right) = \phi\left(\phi(-s)^{-E}(-s)\right) = \phi(-s)^{-1}\phi(-s) = 1.$$

Mit $x(s,t) := \phi(-s)^{-E}t$ und $z(s) := -\phi(-s)^{-E}s = \phi(-s)^{-E}(-s)$ haben wir insbesondere für alle s mit $\tau(s) > \gamma(t)$ gesehen:

$$\phi(z(s)) = 1, \quad \tau(x(s,t)) < 1, \quad \|z(s)\| \in [A', B'],$$

Letzteres nach (6.11). Es liegt also genau die Situation von (6.12) vor und somit folgt für alle $s \in A(\gamma(t))^c$:

$$\begin{aligned}
|\phi(x(s,t) + z(s)) - \phi(z(s))| &= \left|\phi\left(\phi(-s)^{-E}t - \phi(-s)^{-E}s\right) - 1\right| \\
&\leq C_2\, \tau\left(\phi(-s)^{-E}t\right)^{\beta} \\
&= C_2\, \phi(-s)^{-\beta}\tau(t)^{\beta}. \qquad (6.18)
\end{aligned}$$

Nun ist der letzte Ausdruck nach (6.13) kleiner als $\frac{1}{2}$, Gleiches gilt also auch für die Ausdrücke in der ersten Zeile. Daraus folgt aber unmittelbar, dass

$$\frac{1}{2} < u(s,t) := \phi\left(\phi(-s)^{-E}t - \phi(-s)^{-E}s\right) < \frac{3}{2},$$

was im Verlauf der folgenden Rechnung die Verwendung von (6.16) rechtfertigt (kombiniert mit (6.18)). Dabei gelte weiterhin $s \in A(\gamma(t))^c$ und wir starten für beliebiges $\rho > 0$ mit (6.17):

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho} \\
&\quad\leq \left\| \phi\left(\phi(-s)^{-E}t - \phi(-s)^{-E}s\right)^{D-qB} - I_m \right\|^{\rho} \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho} \\
&\quad\leq C_7^{\rho} C_6^{\rho} \|D - qB\|^{\rho} \left|\phi\left(\phi(-s)^{-E}t - \phi(-s)^{-E}s\right) - 1\right|^{\rho} \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho} \\
&\quad\leq C_7^{\rho} C_6^{\rho} C_2^{\rho} \|D - qB\|^{\rho}\, \phi(-s)^{-\rho\beta}\, \tau(t)^{\rho\beta} \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho}.
\end{aligned}$$

Nach (6.13) gilt $\phi(-s) > 1$, sodass wir Proposition 2.1.4 entsprechend für $s_0 = 1, \delta_4 > 0$ von oben und ein $C_8 = C_8(\delta_4) > 0$ anwenden können:

$$\leq C_8^\rho C_7^\rho C_6^\rho C_2^\rho \, \|D - qB\|^\rho \, \phi(-s)^{\rho(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)} \, \tau(t)^{\rho\beta}.$$

Dabei ist der Exponent von $\phi(-s)$ wegen (6.3) und (6.8) negativ. Unter Berücksichtigung von (6.9) und $\tau(s) = \tau(-s)$ folgt also mit $C_9 = C_9(\delta_4) := m_\phi^{\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta}$ schließlich:

$$\leq C_9^\rho C_8^\rho C_7^\rho C_6^\rho C_2^\rho \, \|D - qB\|^\rho \, \tau(s)^{\rho(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)} \, \tau(t)^{\rho\beta}. \tag{6.19}$$

Wir wenden nun zunächst (6.19) mit $C_{10} := C_9 C_8 C_7 C_6 C_2 \|D - qB\|$ an, ehe wir wieder von Lemma 2.2.5 Gebrauch machen (wobei sich die Indikatorfunktion in analoger Weise wie zuvor auf den Integrationsbereich von r überträgt):

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^\rho \mathbb{1}_{A(\gamma(t))^c}(s)\, ds \\
&\qquad \leq C_{10}^\rho \tau(t)^{\rho\beta} \int_{\mathbb{R}^d} \tau(s)^{\rho(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t))^c}(s)\, ds \\
&\qquad = C_{10}^\rho \tau(t)^{\rho\beta} \int_{\gamma(t)}^{\infty} r^{q-1} \int_{S_E} r^{\rho(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)} \, \sigma(d\theta)\, dr \\
&\qquad = C_{10}^\rho \tau(t)^{\rho\beta} \, \sigma(S_E) \int_{\gamma(t)}^{\infty} r^{\rho(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)+q-1} \, dr.
\end{aligned}$$

Für die Endlichkeit des Integrals bleibt also zu zeigen, dass $\rho(\Lambda_{D-qB} + \delta_4 - \beta) + q < 0$. Dabei betrachten wir zunächst wieder $\rho = 1/\Lambda_B - \delta_1$ und nutzen ähnliche Argumente wie an früherer Stelle:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\Lambda_B} - \delta_1\right)(\Lambda_{D-qB} + \delta_4 - \beta) + q \\
&\quad = \frac{\Lambda_{D-qB} + \Lambda_{qB} - \beta}{\Lambda_B} - \delta_1(\Lambda_{D-qB} - \beta) + \delta_4\left(\frac{1}{\Lambda_B} - \delta_1\right) \\
&\quad \leq \zeta_2 - \delta_1(\Lambda_{D-qB} - \beta) + \delta_4\left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2\right) \\
&\quad < 0
\end{aligned}$$

nach (6.7) und (6.8) Ganz analog folgt für $\rho = 1/\lambda_B + \delta_2$:

$$\left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2\right)(\Lambda_{D-qB} + \delta_4 - \beta) + q$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Lambda_{D-qB} + \lambda_{qB} - \beta}{\lambda_B} + \delta_2(\Lambda_{D-qB} - \beta) + \delta_4 \left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2 \right) \\
&\leq \frac{\Lambda_{D-qB} + \Lambda_{qB} - \beta}{\lambda_B} + \delta_2(\Lambda_{D-qB} - \beta) + \delta_4 \left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2 \right) \\
&\leq \frac{\Lambda_{D-qB} + \Lambda_{qB} - \beta}{\Lambda_B} + \delta_2(\Lambda_{D-qB} - \beta) + \delta_4 \left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2 \right) \\
&= \zeta_2 + \delta_2(\Lambda_{D-qB} - \beta) + \delta_4 \left(\frac{1}{\lambda_B} + \delta_2 \right) \\
&< 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir im drittletzten Schritt von $\Lambda_{D-qB} + \Lambda_{qB} - \beta < 0$ gemäß (6.3) profitiert haben. Damit konnten wir insgesamt (6.5) und (6.6) zeigen. □

6.2 Eigenschaften und Beispiele

Wie bereits zu Beginn von Kapitel 5 motiviert, gewinnen solche Felder wie in (6.4) erst durch weitere Eigenschaften an Attraktivität. Dabei sollten wir auf die Zusatzvoraussetzung der folgenden Aussage in der Regel nicht verzichten, da wir ja gerade an Operator-stabilen und Operator-selbstähnlichen Zufallsfeldern interessiert sind.

Eigenschaft 6.2.1
Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 6.1.1. Falls darüber hinaus $DB = BD$ gilt, so folgt für $X_{\phi,D} = \{X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$:

(a) $X_{\phi,D}$ ist ein strikt Operator-stabiles Vektorfeld mit B als Exponenten.

(b) $X_{\phi,D}$ ist (E, D)-OSS.

Beweis. Unter der herausgearbeiteten Zusatzvoraussetzung ähnelt Teil (b) dem Beweis der entsprechenden Aussage von Theorem 2.5 in [29].

(a) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest. Dann wissen wir nach Korollar 4.2.11 bereits, dass $(X_{\phi,D}(t_1), ..., X_{\phi,D}(t_k))$ unendlich-teilbar ist, wobei die charakteristische Funktion gemäß (6.4) und Eigenschaft 4.1.12 durch

$$
\mathbb{R}^{k \cdot m} \ni (u_1, ..., u_k) \mapsto \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^{k} (\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB})^* u_j \right) ds \right)
$$

gegeben ist. Nun gilt für alle $r > 0$ und $u = (u_1, ..., u_k) \in \mathbb{R}^{k \cdot m}$:

$$
\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right)^* r^{B^*} u_j \right) ds
$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^{k} \left(r^B \phi(t_j - s)^{D-qB} - r^B \phi(-s)^{D-qB} \right)^* u_j \right) ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} r^B - \phi(-s)^{D-qB} r^B \right)^* u_j \right) ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(r^{B^*} \sum_{j=1}^{k} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right)^* u_j \right) ds$$

$$= r \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right)^* u_j \right) ds$$

gemäß Korollar 2.4.8. Außerdem haben wir genutzt, dass unter den genannten Voraussetzungen auch B und $D-qB$ kommutieren. Sei nun $B_k := B \oplus \cdots \oplus B$, so zeigt dies wegen $r^{B_k^*} u = (r^{B^*} u_1, ..., r^{B^*} u_k)$ offensichtlich, dass $(X_{\phi,D}(t_1), ..., X_{\phi,D}(t_k))$ eine strikt Operator-stabile Verteilung mit B_k als Exponenten besitzt. Dass B hingegen ein Exponent von $X_{\phi,D}$ im Sinne von Definition 6.0.1 ist, erkennt man wie folgt: Für endliche Auswahlen $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^d$ und $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ (mit $n \in \mathbb{N}$) wissen wir aus Linearitätsgründen, dass

$$\sum_{j=1}^{n} c_j X_{\phi,D}(t_j) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \left[\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right] \right) M(ds)$$

fast sicher. Damit folgt die Behauptung nach Eigenschaft 4.5.5, indem man sich per Definition des Matrixexponentials überlegt, dass der Integrand der rechte Seite wegen $DB = BD$ für alle $s \in \mathbb{R}^d$ mit B kommutiert.

(b) Wir wollen für $c > 0$ beliebig zeigen, dass

$$\{X_{\phi,D}(c^E t) : t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{fdd}{=} \{c^D X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}.$$

Seien also $k \in \mathbb{N}$ sowie $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$ und $u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest, so liefert die folgende Rechnung gemäß Lemma 2.0.1 die Behauptung. Dabei nutzen wir wieder (6.4) sowie die E-Homogenität von ϕ:

$$\mathbb{E}\left(e^{i \sum_{j=1}^{k} \langle X_{\phi,D}(c^E t_j), u_j \rangle} \right)$$

$$= \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\phi(c^E t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right)^* u_j \right) ds \right)$$

$$= \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^{k} \left(c^{D-qB} \left(\phi(t_j - c^{-E} s)^{D-qB} - \phi(-c^{-E} s)^{D-qB} \right) \right)^* u_j \right) ds \right).$$

Wir substituieren nun $s \mapsto c^{-E}s$. Dabei beachte man, dass c^{-E} bijektiv ist mit $\det(c^{-E}) = c^{\mathrm{tr}(-E)} = c^{-q}$.

$$= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} c^q \cdot \psi \left(\sum_{j=1}^k \left(c^{D-qB} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right) \right)^* u_j \right) ds \right).$$

Jetzt nutzen wir wieder, dass ψ eine B^*-homogene Funktion ist, wobei offensichtlich $(c^q)^{B^*} = c^{qB^*}$ gilt. Weiter kommutieren qB und $D - qB$ unter der genannten Zusatzvoraussetzung.

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^k c^{qB^*} \left(c^{D-qB} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right) \right)^* u_j \right) ds \right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^k \left(c^{D-qB} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right) c^{qB} \right)^* u_j \right) ds \right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^k \left(c^{D-qB} c^{qB} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right) \right)^* u_j \right) ds \right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^k \left(c^{D} \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right) \right)^* u_j \right) ds \right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi \left(\sum_{j=1}^k \left(\phi(t_j - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB} \right)^* c^{D^*} u_j \right) ds \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum_{j=1}^k \langle X_{\phi,D}(t_j), c^{D^*} u_j \rangle} \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum_{j=1}^k \langle c^D X_{\phi,D}(t_j), u_j \rangle} \right).
\end{aligned}$$

□

Außerdem bekommen wir die beiden nachfolgenden Eigenschaften geliefert; jeweils ohne zusätzliche Voraussetzungen. Dabei profitieren wir einerseits von der sorgsamen Bezeichnung der Konstanten im Beweis zu Theorem 6.1.1. Andererseits sollten die stationären Zuwächse mit Hinblick auf die Struktur der Darstellung nicht überraschen.

Theorem 6.2.2
Unter den Voraussetzungen von Theorem 6.1.1 gilt: $X_{\phi,D} = \{X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ ist stochastisch stetig.

Beweis. Seien $t_0 \in \mathbb{R}^d$ und $u \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest, so ist nach *Auslöschung* und gemäß Eigenschaft 4.1.13 zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\left(\phi(t_0+t-s)^{D-qB} - \phi(t_0-s)^{D-qB}\right)^* u\right) ds \to 0$$

beziehungsweise nach Substitution, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\left(\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right)^* u\right) ds \to 0, \tag{6.20}$$

jeweils für $t \to 0$. Dazu schätzen wir den Integranden in Analogie zu Theorem 4.5.3 zunächst geeignet ab: Schreibe $\psi(x) = \tau_B(x)\psi(l_B(x))$ (gilt mit $\tau_B(0) = 0$ auch für $x = 0$) und bezeichne M_ψ das Maximum der stetigen Funktion $|\psi(\cdot)|$ auf der kompakten Menge S_B, so existieren nach Proposition 2.2.3 (von x unabhängige) Konstanten $K_1, K_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned}|\psi(x)| &\leq M_\psi K_1 \|x\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1} \mathbb{1}_{\tau_B(x)\leq 1} + M_\psi K_2 \|x\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2} \mathbb{1}_{\tau_B(x)>1} \\ &\leq M_\psi K_1 \|x\|^{\frac{1}{\Lambda_B}-\delta_1} + M_\psi K_2 \|x\|^{\frac{1}{\lambda_B}+\delta_2}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^m$, wobei δ_1 und δ_2 wie im Beweis zu Theorem 6.1.1 gewählt seien. Setze $\rho_1 := 1/\Lambda_B - \delta_1$ und $\rho_2 := 1/\lambda_B + \delta_2$, so folgt also für alle $s, t \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}&\left|\psi\left(\left(\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right)^* u\right)\right| \\ &\qquad \leq M_\psi \sum_{j=1}^{2} K_j \left\|\left(\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right)^* u\right\|^{\rho_j} \\ &\qquad \leq M_\psi \sum_{j=1}^{2} K_j \left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho_j} \|u\|^{\rho_j}\end{aligned} \tag{6.21}$$

wegen $\|A^*\| = \|A\|$. Andererseits haben wir im Beweis zu Theorem 6.1.1 (man vergleiche insbesondere die Rechnungen zu (6.14) und (6.19)) gesehen, dass für alle $s, t \in \mathbb{R}^d$ und $j = 1, 2$ gilt (mögliche Probleme für $s = 0$ ignorieren wir im Folgenden wieder):

$$\begin{aligned}&\left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho_j} \\ &\leq C_5 \left(\left\|\phi(t-s)^{D-qB}\right\|^{\rho_j} + \left\|\phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho_j}\right) \mathbb{1}_{A(\gamma(t))}(s) \\ &\qquad + \left\|\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho_j} \mathbb{1}_{A(\gamma(t))^c}(s) \\ &\leq C_5 \left(C_1^{\rho_j} \tilde{C}_3^{\rho_j} \tau(t-s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} + C_1^{\rho_j} C_3^{\rho_j} \tau(s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)}\right) \mathbb{1}_{A(\gamma(t))}(s) \\ &\qquad + C_{10}^{\rho_j} \tau(s)^{\rho_j(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)} \tau(t)^{\rho_j \beta} \mathbb{1}_{A(\gamma(t))^c}(s),\end{aligned} \tag{6.22}$$

wobei alle Bezeichnungen mit denen aus Theorem 6.1.1 übereinstimmen. Lediglich $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_3(t)$ ist neu und erlaubt die Anwendung von Proposition 2.1.4 hinsichtlich $\tau(t-s)^{D-qB}$ für $s \in A(\gamma(t))$.
Sei schließlich $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ eine beliebige (und insbesondere beschränkte) Nullfolge. Dann existiert ein n^* mit $\tau(t_n) \leq \tau(t_{n^*})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Vor dem Hintergrund von (6.13) kann man nun ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $\gamma(t_n) = \gamma(t_{n^*})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter waren C_3 respektive $\tilde{C}_3$ die einzigen Konstanten, die in (6.22) von t abhingen, nämlich C_3 von $\gamma(t)$ und $\tilde{C}_3$ von $\tau(t-s)$ für $s \in A(\gamma(t))$, sodass wir auch C_3 und wegen $\sup\{\tau(t_n - s) : s \in A(\gamma(t_{n^*})), n \in \mathbb{N}\} < \infty$ sogar $\tilde{C}_3$ nachfolgend als unabhängig von n annehmen können. Insgesamt konnten wir also für alle $s \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N}$ und $j = 1, 2$ zeigen:

$$\begin{aligned}
&\left\|\phi(t_n - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right\|^{\rho_j} \\
&\leq C_5 \left(C_1^{\rho_j} \tilde{C}_3^{\rho_j} \tau(t_n - s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} + C_1^{\rho_j} C_3^{\rho_j} \tau(s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)}\right) \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s) \\
&\qquad + C_{10}^{\rho_j} \tau(s)^{\rho_j(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)} \tau(t_n)^{\rho_j \beta} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))^c}(s) \\
&=: K_{3,j} \tau(t_n - s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s) + K_{4,j} \tau(s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s) \\
&\qquad + K_{5,j} \tau(s)^{\rho_j(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)} \tau(t_n)^{\rho_j \beta} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))^c}(s)
\end{aligned}$$

für geeignete Konstanten $K_{3,j}, K_{4,j} > 0$ und $K_{5,j} = C_{10}^{\rho_j}$. Indem wir schließlich noch $K_{6,j} := M_\psi K_j \|u\|^{\rho_j}$ setzen (ebenfalls für $j = 1, 2$), so folgt also mit (6.21) für alle $s \in \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\left|\psi\left(\left(\phi(t_n - s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right)^* u\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{2} \Big[K_{6,j} K_{3,j} \tau(t_n - s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s) \\
&\qquad + K_{6,j} K_{4,j} \tau(s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s) \\
&\qquad + K_{6,j} K_{5,j} \tau(s)^{\rho_j(\Lambda_{D-qB}+\delta_4-\beta)} \tau(t_n)^{\rho_j \beta} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))^c}(s)\Big] \\
&=: g_n(s). \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

Obwohl der Integrand in (6.20) mit der Stetigkeit von ψ und ϕ punktweise gegen $\psi(0) = 0$ konvergiert, lässt sich der Konvergenzsatz von Lebesgue nicht unmittelbar anwenden, da wir den ersten Term von $g_n(\cdot)$ im Allgemeinen nicht gleichmäßig majorisieren können (für $j = 1, 2$ jeweils); insbesondere kann der entsprechende Exponent negativ sein. Daher aktivieren wir wie in [29] eine verallgemeinerte Version des obigen Satzes (siehe Chapter 4, Theorem 19 in [38]). So gilt dank der Stetigkeit von $\tau(\cdot)$ mit $\tau(0) = 0$ und $\tau(-s) = \tau(s)$:

$$g_n(s) \to \sum_{j=1}^{2} K_{6,j}(K_{3,j} + K_{4,j}) \tau(s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s) =: g(s)$$

für alle $s \in \mathbb{R}^d$ und $n \to \infty$. Dabei folgt nach den Ausführungen im Beweis zu Theorem 6.1.1, dass $g, g_1, g_2, ...$ integrierbare Funktionen sind. Wenn wir nun noch zeigen können, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(s)\,ds \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int_{\mathbb{R}^d} g(s)\,ds, \tag{6.24}$$

so erhalten wir gemäß der oben genannten Quelle die Aussage von (6.20) und somit die Behauptung. Per Definition der auftretenden Funktionen und erneut aufgrund der Stetigkeit von $\tau(\cdot)$ genügt es nun offensichtlich zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau(t_n - s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s)\,ds \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \int_{\mathbb{R}^d} \tau(s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s)\,ds$$

für $j = 1, 2$. Dabei kann die linke Seite für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j = 1, 2$ als

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau(t_n - s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s)\,ds = \int_{\mathbb{R}^d} \tau(-s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{\{s:\tau(t_n+s)\le\gamma(t_{n^*})\}}(s)\,ds$$

geschrieben werden. Da (t_n) eine Nullfolge ist, erkennt man nun wegen $\tau(s) = \tau(-s)$, dass der Integrand der rechten Seite zumindest für alle $s \notin \{s : \tau(s) = \gamma(t_{n^*})\}$ punktweise gegen $\tau(s)^{\rho_j(\lambda_{D-qB}-\delta_3)} \mathbb{1}_{A(\gamma(t_{n^*}))}(s)$ konvergiert. Zugleich argumentiert man mit Hilfe von Lemma 2.2.5 leicht, dass $\{s : \tau(s) = \gamma(t_{n^*})\}$ eine Lebesguesche Nullmenge ist. Wegen

$$\{s : \tau(t_n+s) \le \gamma(t_{n^*})\} \subset \{s : \tau(s) \le C_4(\gamma(t_n^*)+\tau(t_n))\} \subset \{s : \tau(s) \le C_4(\gamma(t_n^*)+\tau(t_{n^*}))\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (man vergleiche (6.15)) folgt also mit Hilfe des klassischen Konvergenzsatzes von Lebesgue und nach dem zuvor Gezeigten das Gewünschte. □

Eigenschaft 6.2.3
Das Zufallsfeld $X_{\phi,D} = \{X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ besitzt unter den Voraussetzungen von Theorem 6.1.1 stationäre Zuwächse.

Beweis. Für $h \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest ist wegen $X_{\phi,D}(0) = 0$ zu zeigen, dass

$$\{X_{\phi,D}(t+h) - X_{\phi,D}(h) : t \in \mathbb{R}^d\} \overset{fdd}{=} \{X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}.$$

Seien also auch $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest, dann gilt dank der Linearität des Integrals und nach (6.4):

$$X_{\phi,D}(t_j + h) - X_{\phi,D}(h) = \int_{\mathbb{R}^d} \left[\phi(t_j + h - s)^{D-qB} - \phi(h - s)^{D-qB}\right] M(ds) =: Y_j$$

für $j = 1, ..., k$, sogar jeweils fast sicher. Somit liefert die folgende Rechnung nach Lemma 2.0.1 wieder die Behauptung, wobei $u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}^m$ beliebig seien:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^k \langle X_{\phi,D}(t_j+h)-X_{\phi,D}(h), u_j\rangle}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\langle Y_j, u_j\rangle}\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\phi(t_j+h-s)^{D-qB} - \phi(h-s)^{D-qB}\right)^* u_j\right) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\phi(t_j-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right)^* u_j\right) ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\langle X_{\phi,D}(t_j), u_j\rangle}\right)
\end{aligned}
$$

nach Substitution im dritten Schritt. Ferner haben wir im zweiten und letzten Schritt von Eigenschaft 4.1.12 profitiert. □

Schließlich sind wir natürlich speziell an vollen Vektorfeldern interessiert.

Eigenschaft 6.2.4
Wenn in der Situation von Theorem 6.1.1 zusätzlich gilt: $D - qB \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$, so ist das Vektorfeld $X_{\phi,D} = \{X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ voll.

Beweis. Zunächst ist die Zusatzvoraussetzung äquivalent zu $0 \notin \sigma(D - qB)$. Sei nun $t \in \Gamma_d$ beliebig, aber fest. Mit den Erkenntnissen aus (6.17) gilt dann für alle $s \in \mathbb{R}^d \setminus \{0, t\}$:

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\phi(t-s)^{D-qB} - \phi(-s)^{D-qB}\right) \\
&\quad = \det\left(\phi(\phi(-s)^{-E}(t-s))^{D-qB} - I_m\right) \cdot \det\left(\phi(-s)^{D-qB}\right).
\end{aligned}
$$

Nun ist die zweite Determinante verschieden von Null (Invertierbarkeit folgt wegen $\phi(x) > 0$ für $x \neq 0$). Falls wir dies auch für den ersten Faktor zeigen können, so folgt also die Invertierbarkeit des Integranden in (6.4) (bis auf eine Lebesguesche Nullmenge) und somit nach Eigenschaft 4.5.4 die Behauptung. Dabei gilt:

$$
\sigma\left(\phi(\phi(-s)^{-E}(t-s))^{D-qB} - I_m\right) = \{\lambda - 1 \mid \lambda \in \sigma\left(\phi(\phi(-s)^{-E}(t-s))^{D-qB}\right)\}.
$$

Ferner ist die Determinante das Produkt der entsprechenden Eigenwerte, daher bleibt zu zeigen, dass $1 \notin \sigma\left(\phi(\phi(-s)^{-E}(t-s))^{D-qB}\right)$. Zugleich besagt Eigenschaft 2.1.3 (f):

$$
\sigma\left(\phi(\phi(-s)^{-E}(t-s))^{D-qB}\right) = \{\phi(\phi(-s)^{-E}(t-s))^{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(D - qB)\}.
$$

Da $\phi(\phi(-s)^{-E}(t-s))$ nach Wahl von t und s positiv ist, liefert die obige Annahme das Gewünschte. □

Nun ist die Existenz der Zufallsfelder aus Theorem 6.1.1 an eine ganze Reihe von Voraussetzungen geknüpft, insbesondere dann, wenn der Wunsch nach den gerade betrachteten Eigenschaften besteht. Daher stellt sich die Frage nach nicht-trivialen und zugleich echt Operator-stabilen Beispielen, da wir ja gerade eine Verallgemeinerung der Darstellungen aus [29] (die wir für $\psi(\cdot) = -\|\cdot\|^{\alpha}$ erhalten) in Aussicht gestellt haben. Unter diesem Gesichtspunkt gibt das folgende Beispiel eine positive und reichhaltige Antwort. Je nach Interesse und Anwendung kann es natürlich sinnvoll sein, den Raum-skalierenden Exponenten $D \in Q(\mathbb{R}^m)$ in komplizierterer Form zu wählen. Auch kreativere Funktionen ϕ respektive andere Zeit-skalierende Exponenten $E \in Q(\mathbb{R}^d)$ sind mit Verweis auf Corollary 2.12 in [5] denkbar.

Beispiel 6.2.5
Gegeben sei eine volle sowie strikt Operator-stabile Verteilung μ auf $\mathbb{R}^m$ mit $B \in \mathcal{E}(\mu)$; sei M das von ihr erzeugte ISRM. Weiter seien $E := \mathrm{diag}(a_1, ..., a_d)$ für $a_1, ..., a_d \geq 1$ beliebig und $D := \gamma B$ für ein $0 < \gamma < 1/\Lambda_B$ mit $\gamma \neq q = \mathrm{tr}(E)$. Schließlich können wir die Funktion $\phi : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ durch

$$\phi(x) := \sum_{j=1}^{d} |x_j|^{\frac{1}{a_j}}, \quad x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$$

definieren. Dann existiert $X_{\phi,D} = \{X_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ mit den genannten Wahlen im Sinne von Theorem 6.1.1, besitzt stationäre Zuwächse und ist stochastisch stetig. Außerdem ist $X_{\phi,D}$ voll, strikt Operator-stabil mit B als Exponenten sowie (E, D)-OSS.

Beweis. Zunächst bildet die Funktion ϕ einen Spezialfall von Corollary 2.12 in [5] ab und ist demzufolge E-homogen sowie (β, E)-zulässig mit $\beta = 1$. Ferner gilt $DB = BD$, wobei $\sigma(D - qB) = (\gamma - q)\,\sigma(B)$. Wegen $\gamma \neq q$ und $\lambda_B \geq \frac{1}{2} > 0$ ist also klar, dass $0 \notin \sigma(D - qB)$, d.h. $D - qB \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$. Schließlich rechnen wir (6.2) und (6.3) nach:

$$\lambda_{D-qB} + \lambda_{qB} = (\gamma - q)\lambda_B + q\lambda_B = \gamma\lambda_B > 0,$$
$$\Lambda_{D-qB} + \Lambda_{qB} = (\gamma - q)\Lambda_B + q\Lambda_B = \gamma\Lambda_B < 1 = \beta$$

nach Wahl von γ. Damit folgt die Behauptung nach dem zuvor Gezeigten. □

Bemerkung 6.2.6. (a) Dass D und B im vorherigen Beispiel bis auf den Faktor γ übereinstimmen, sollte nicht unnatürlich erscheinen, da dies für $d = 1$ unter gewissen Voraussetzungen bereits notwendiger Weise der Fall ist, man vergleiche Theorem 7 in [17]. In diesem Zusammenhang sind auch die multivariaten Prozesse in [30] zu nennen, die wir für symmetrisches μ sowie $\phi(\cdot) = |\cdot|$ mit Theorem 6.1.1 zumindest symbolisch zurückbekommen; die dort präsentierte Konstruktion weicht jedoch von unserer ab und offenbart zudem einige Lücken.

(b) Proposition 6.1 in [2] besagt, dass jede Modifikation der moving-average-Darstellung im α-stabilen Fall $(0 < \alpha < 2)$ für $m = 1$ und $d \geq 2$ bereits fast sicher unstetige Pfade besitzt. Damit erscheint es naheliegend, dass dies für $d \geq 2$ auch auf die Komponenten von $X_{\phi,D}$ zutrifft. Die präzise Ausarbeitung dieser Vermutung bedingt jedoch eine Erweiterung der Ergebnisse von Chapter 10 in [40] auf den multivariaten beziehungsweise Operator-stabilen Fall und kann als offene Frage betrachtet werden. Schließlich ist nach Wahl von E und γ im obigen Beispiel klar, dass $d \geq 2$ hinreichend für $\gamma \neq q$ ist.

KAPITEL 7

Harmonische Darstellung

Motiviert durch Theorem 2.6 in [29] möchten wir zum Ende dieser Arbeit noch weitere Beispiele Operator-stabiler und Operator-selbstähnlicher Zufallsfelder konstruieren, nämlich in Form einer so genannten harmonischen Darstellung. Dabei zeigen bereits die Ergebnisse in [5] und [2] für $m = 1$, dass sich die resultierenden Eigenschaften dieser Felder im Allgemeinen von jenen der moving-average-Darstellung unterscheiden, insbesondere ergeben sich signifikante Unterschiede hinsichtlich der Pfadeigenschaften entsprechender Modifikationen. Diese Andersartigkeit wird sich auch in der vorliegenden Situation bewahrheiten, was in erster Linie an der Betrachtung von geeigneten $\mathrm{L}(\mathbb{C}^m)$-wertigen Integranden sowie $\mathbb{C}^m$-wertigen Zufallsmaßen liegt. Dank der in Kapitel 4 eingenommenen komplexwertigen Sichtweise sind wir dabei überhaupt erst in der Lage, die harmonische Darstellung auf den Operator-stabilen Fall zu erweitern. Gegenüber den speziellen α-stabilen Zufallsmaßen, die in obigen Quellen verwendet wurden, hat dies jedoch zur Konsequenz, dass die Existenzbedingungen prinzipiell restriktiver ausfallen. Diesem Problem versuchen wir dadurch zu begegnen, dass wir uns auf die partielle Integrierbarkeit im Sinne von Abschnitt 4.4 beschränken, denn letztlich sind wir ja wieder an $\mathbb{R}^m$-wertigen Objekten interessiert.

7.1 Existenz der Darstellung

Für diesen und den nächsten Abschnitt sei $\widetilde{\mu} \sim [\widetilde{\gamma}, \widetilde{Q}, \widetilde{\nu}]$ eine volle und strikt Operator-stabile Verteilung auf $\mathbb{R}^{2m}$ mit $\widetilde{B} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^{2m})$ als Exponenten sowie log-charakteristischer Funktion $\widetilde{\psi}$. Weiter nehmen wir an, dass dieser Exponent für ein $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ von der Form $\widetilde{B} = B \oplus B$ ist. Dann sei M das von $\widetilde{\mu}$ und dem d-dimensionalen Lebesguemaß erzeugte ISRM, das wir gemäß (3.43) mit einem $\mathbb{C}^m$-wertigen ISRM $\widetilde{M}$ identifizieren. Schließlich gelte wieder $0^A := 0 \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ für alle $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$.

Die nachfolgende Darstellung scheint auf den ersten Blick keine direkte Verallgemeinerung von Theorem 2.6 in [29] zu sein. Dass dies dennoch der Fall ist, werden wir später diskutieren. Für den Moment ermöglichen uns (7.1) und die partielle Herangehensweise jedoch die Formulierung schwacher Existenzbedingungen.

Theorem 7.1.1 (Harmonische Darstellung)
Seien $E \in Q(\mathbb{R}^d)$ und $D \in Q(\mathbb{R}^m)$, wobei $q := \mathrm{tr}(E)$. Weiterhin sei $\phi : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ eine stetige und E^*-homogene Funktion mit $\phi(x) > 0$ für alle $x \in \Gamma_d$. Falls ferner die Bedingung $\lambda_E > \Lambda_D$ erfüllt ist, so existiert für alle $t \in \mathbb{R}^d$ und im Sinne von Definition 4.4.1 das Integral

$$\widetilde{X}_{\phi,D}(t) := \mathrm{Re} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle t,s \rangle} - 1 \right) \phi(s)^{-D} \phi(s)^{-qB} \, \widetilde{M}(ds). \tag{7.1}$$

Das resultierende (d, m)-Vektorfeld $\widetilde{X}_{\phi,D} = \{\widetilde{X}_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ nennen wir *harmonische (ϕ, D)-Darstellung (bezüglich $\widetilde{M}$).*

Man erkennt also bereits, dass wir einerseits die - gegenüber den von B abhängigen Forderungen (6.2) und (6.3) vorteilhaftere - Voraussetzung $\lambda_E > \Lambda_D$ herausarbeiten konnten, während wir andererseits eine spezielle Struktur von B unterstellen, was letztlich auch dem Problem der verschiedenen Dimensionen Rechnung trägt. Zugleich können wir hinsichtlich der Funktion ϕ jedoch auf die wesentliche Forderung aus (2.7) verzichten. Wir werden ebenfalls sehen, dass $\widetilde{X}_{\phi,D}$ ohne weitere Voraussetzungen bereits voll ist.

Beweis. Ähnlich wie im Beweis zu Theorem 6.1.1 kann das Verhalten des Integranden in (7.1) auf Lebesgueschen Nullmengen wieder vernachlässigt werden. Auch der Schreibweise ds kommt die gleiche Bedeutung wie früher zu. Schließlich bezeichnen wir die auftretenden, häufig durch Maximumsbildung entstehenden Konstanten fortlaufend mit $C_1, C_2, ...$, wobei die Setzungen des vorherigen Kapitels aufgehoben seien.
Sei nun $t \in \Gamma_d$ beliebig, aber fest (für $t = 0$ ist wieder klar, dass $\widetilde{X}_{\phi,D}(0)$ existiert mit $\widetilde{X}_{\phi,D}(0) = 0$), so setzen wir gemäß der Eulerschen Formeln:

$$\tilde{f}_t(s) := (\cos\langle t, s \rangle - 1)\phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB} + i \sin\langle t, s \rangle \phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB}, \quad s \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist gemäß Bemerkung 4.4.3 zu zeigen, dass

$$g_t(s) := \begin{pmatrix} (\cos\langle t, s \rangle - 1)\phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB} & -\sin\langle t, s \rangle \phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

bezüglich M integrierbar ist, da M gerade der Assoziierung von $\widetilde{M}$ entspricht. Offensichtlich ist g_t meßbar, sodass wir Theorem 4.5.1 (iii) nutzen können. Dabei bezeichnen wir mit $(\tau(\cdot), l(\cdot))$ nun die verallgemeinerten Polarkoordinaten bezüglich E^*. Weiter halten wir fest, dass unter den genannten Voraussetzungen erneut die Aussage von (2.6) greift:

$$m_\phi := \min_{\theta \in S_{E^*}} \phi(\theta) > 0 \quad \text{sowie} \quad M_\phi := \max_{\theta \in S_{E^*}} \phi(\theta) > 0$$

und somit dank der E^*-Homogenität von ϕ wieder für alle $s \in \mathbb{R}^d$ (mit $\tau(0) = 0$):

$$m_\phi \tau(s) \leq \phi(s) \leq M_\phi \tau(s). \tag{7.3}$$

Fixiere außerdem ein $0 < \delta < 1/\Lambda_B$ und setze $\delta_1 = \delta_2 = \delta$; darüber hinaus existiert nach Voraussetzung (ebenfalls unabhängig von t) ein

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\lambda_D, \frac{\lambda_E - \Lambda_D}{2}\right\}.$$

Wenn wir nun $\rho_1 := 1/\Lambda_B - \delta_1 > 0$ und $\rho_2 := 1/\lambda_B + \delta_2 > 0$ setzen, dann erhalten für alle $s \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{1}_{\{\tau(s)\geq 1\}}(s) \left\|\phi(s)^{-D}\right\|^{\rho_j} \leq C_j \tau(s)^{-(\lambda_D - \varepsilon)\rho_j} \tag{7.4}$$

sowie

$$\mathbb{1}_{\{\tau(s)< 1\}}(s) \left\|\phi(s)^{-D}\right\|^{\rho_j} \leq C_{j+2} \tau(s)^{-(\Lambda_D + \varepsilon)\rho_j}, \tag{7.5}$$

jeweils für $j = 1, 2$ und geeignete Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$. Wir führen lediglich (7.4) für $j = 1$ aus, die anderen Fälle verhalten sich analog. Man betrachte also jene s mit $\tau(s) \geq 1$ und folgert aufgrund der E^*-Homogenität von ϕ:

$$\begin{aligned}
\left\|\phi(s)^{-D}\right\|^{\rho_1} &= \left\|\tau(s)^{-D} \phi\left(l(s)\right)^{-D}\right\|^{\rho_1} \\
&\leq C_0^{\rho_1} \left\|\tau(s)^{-D}\right\|^{\rho_1} \\
&\leq C_0^{\rho_1} \tilde{C}_0^{\rho_1} \tau(s)^{-(\lambda_D - \varepsilon)\rho_1} \\
&=: C_1 \tau(s)^{-(\lambda_D - \varepsilon)\rho_1}.
\end{aligned}$$

Dabei beschreibe C_0 das Maximum der stetigen Abbildung $\theta \mapsto \|\phi(\theta)^{-D}\|$ auf der kompakten Menge S_{E^*}, während $\tilde{C}_0$ aus der Anwendung von Proposition 2.1.4 für das genannte $\varepsilon > 0$ mit $s_0 = 1$ resultiert. Damit erhalten wir für $s \in \Gamma_d$ und $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2m}$ beliebig die folgende Rechnung (man beachte, dass wie früher $q > 0$ gilt):

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(g_t(s)^* u) &= \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} (\cos\langle t, s\rangle - 1)\left(\phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB}\right)^* & 0 \\ -\sin\langle t, s\rangle \left(\phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB}\right)^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} (\cos\langle t, s\rangle - 1)\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u_1 \\ -\sin\langle t, s\rangle \phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u_1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \widetilde{\psi}\left(\left(\phi(s)^{-qB^*} \oplus \phi(s)^{-qB^*}\right)\begin{pmatrix} (\cos\langle t, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*}u_1 \\ -\sin\langle t, s\rangle \phi(s)^{-D^*}u_1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \widetilde{\psi}\left(\phi(s)^{-q\widetilde{B}^*}\begin{pmatrix} (\cos\langle t, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*}u_1 \\ -\sin\langle t, s\rangle \phi(s)^{-D^*}u_1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \phi(s)^{-q}\, \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} (\cos\langle t, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*}u_1 \\ -\sin\langle t, s\rangle \phi(s)^{-D^*}u_1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Letzteres, da $\widetilde{\psi}$ sich hier wie eine $\widetilde{B}^*$-homogene Funktion verhält. Außerdem haben wir wieder genutzt, dass $r^{B^*} \oplus r^{B^*} = r^{\widetilde{B}^*}$ für alle $r > 0$. Andererseits überzeuge man sich wie im Beweis zu Theorem 6.2.2 davon, dass es Konstanten $C_5, C_6 > 0$ mit

$$|\widetilde{\psi}(x)| \leq C_5\|x\|^{\frac{1}{\lambda_{\widetilde{B}}}-\delta_1} + C_6\|x\|^{\frac{1}{\lambda_{\widetilde{B}}}+\delta_2} = C_5\|x\|^{\rho_1} + C_6\|x\|^{\rho_2} \tag{7.7}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^{2m}$ gibt, denn offensichtlich gilt $\sigma(\widetilde{B}) = \sigma(B)$. Weiter liefert Proposition 2.1.4 die Existenz einer hinreichend großen Konstante $C_7 > 0$ mit

$$\|r^{E^*}\theta\|^{\rho_j} \leq C_7\, r^{\rho_j(\lambda_E - \varepsilon)} \tag{7.8}$$

für alle $0 < r \leq 1, \theta \in S_{E^*}$ (beschränkt) und $j = 1, 2$, wobei man $\sigma(E^*) = \sigma(E)$ beachte. Dass zudem eine Konstante $C_8 > 0$ mit

$$|1 - \cos\langle x, y\rangle|^{\rho_j} + |\sin\langle x, y\rangle|^{\rho_j} \leq C_8 \min\{1, \|x\|^{\rho_j}\|y\|^{\rho_j}\} \tag{7.9}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $j = 1, 2$ existiert, erkennt man unmittelbar durch Anwendung des Mittelwertsatzes ($|1 - \cos z| \leq |z|$ sowie $|\sin z| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{R}$) respektive der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Schließlich folgt, zum Beispiel nach zwischenzeitlicher Betrachtung der $\|\cdot\|_1$-Norm und mit (2.1), dass eine Konstante $C_9 > 0$ existiert, sodass für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2m}$ und $j = 1, 2$ gilt:

$$\|x\|^{\rho_j} \leq C_9(\|x_1\|^{\rho_j} + \|x_2\|^{\rho_j}). \tag{7.10}$$

Durch geeignete Anwendung von (7.3)-(7.10), $\|A^*\| = \|A\|$, der Submultiplikativität der Norm und Lemma 2.2.5 (man beachte, dass $\mathrm{tr}(E^*) = q$) erhalten wir schließlich für $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2m}$ beliebig, aber fest:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left|\widetilde{\psi}(g_t(s)^* u)\right| ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s)^{-q} \left|\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} (\cos\langle t, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*}u_1 \\ -\sin\langle t, s\rangle\phi(s)^{-D^*}u_1 \end{pmatrix}\right)\right| ds \\
&\leq \sum_{j=1}^{2} C_{4+j} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s)^{-q} \left\|\begin{pmatrix} (\cos\langle t, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*}u_1 \\ -\sin\langle t, s\rangle\phi(s)^{-D^*}u_1 \end{pmatrix}\right\|^{\rho_j} ds \\
&\leq C_9 \sum_{j=1}^{2} C_{4+j} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(s)^{-q} \left(\left\|(\cos\langle t, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*}u_1\right\|^{\rho_j} + \left\|-\sin\langle t, s\rangle\phi(s)^{-D^*}u_1\right\|^{\rho_j}\right) ds \\
&\leq C_9 \sum_{j=1}^{2} C_{4+j} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi(s)^{-q} \left\|(\cos\langle t, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*}\right\|^{\rho_j} \|u_1\|^{\rho_j}\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\left. + \phi(s)^{-q} \left\|\sin\langle t, s\rangle\phi(s)^{-D^*}\right\|^{\rho_j} \|u_1\|^{\rho_j}\right) ds
\end{aligned}$$

$$= C_9 \sum_{j=1}^{2} C_{4+j} \|u_1\|^{\rho_j} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi(s)^{-q} \left(|\cos\langle t,s\rangle - 1|^{\rho_j} + |\sin\langle t,s\rangle|^{\rho_j} \right) \left\|\phi(s)^{-D}\right\|^{\rho_j} \, ds.$$

Setze $C_{10,j}(u) := C_9 C_{4+j} \|u_1\|^{\rho_j} \max\{C_j, C_{j+2}\} m_\phi^{-q}$ für $j = 1, 2$, so folgt weiter nach (7.3) und (7.4)-(7.5):

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) \int\limits_{\{s:\tau(s)<1\}} (|\cos\langle t,s\rangle - 1|^{\rho_j} + |\sin\langle t,s\rangle|^{\rho_j}) \tau(s)^{-q} \tau(s)^{-(\Lambda_D+\varepsilon)\rho_j} \, ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) \int\limits_{\{s:\tau(s)\geq 1\}} (|\cos\langle t,s\rangle - 1|^{\rho_j} + |\sin\langle t,s\rangle|^{\rho_j}) \tau(s)^{-q} \tau(s)^{-(\lambda_D-\varepsilon)\rho_j} \, ds.
\end{aligned}$$

Auf die Summanden der zweiten Zeile wenden wir nun die gröbere Abschätzung aus (7.9) an, während wir die feinere jeweils in der ersten Zeile nutzen:

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) C_8 \|t\|^{\rho_j} \int\limits_{\{s:\tau(s)<1\}} \|s\|^{\rho_j} \tau(s)^{-q-(\Lambda_D+\varepsilon)\rho_j} \, ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) C_8 \int\limits_{\{s:\tau(s)\geq 1\}} \tau(s)^{-q-(\lambda_D-\varepsilon)\rho_j} \, ds.
\end{aligned}$$

Man nutze jetzt Lemma 2.2.5 (mit dem genannten Maß σ) und im Anschluss (7.8):

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) C_8 \|t\|^{\rho_j} \int_0^1 r^{q-1} \int\limits_{S_{E^*}} \|r^{E^*}\theta\|^{\rho_j} r^{-q-(\Lambda_D+\varepsilon)\rho_j} \, \sigma(d\theta) \, dr \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) C_8 \int_1^\infty r^{q-1} \int\limits_{S_{E^*}} r^{-q-(\lambda_D-\varepsilon)\rho_j} \, \sigma(d\theta) \, dr \\
&\leq \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) C_8 C_7 \, \sigma(S_{E^*}) \|t\|^{\rho_j} \int_0^1 r^{-1+\rho_j(\lambda_E-\Lambda_D-2\varepsilon)} \, dr \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) C_8 \, \sigma(S_{E^*}) \int_1^\infty r^{-1-(\lambda_D-\varepsilon)\rho_j} \, dr \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

da σ ein endliches Maß auf S_{E^*} ist und nach Wahl von δ_1, δ_2 sowie ε. Da $u \in \mathbb{R}^{2m}$ beliebig gewählt war, ist somit die erste Teilaussage von Theorem 4.5.1 (iii) gezeigt. Dabei haben wir insbesondere gesehen, dass $|\widetilde{\psi}(g_t(s)^* u)| \leq h(t,u,s)$ für alle $t \in \mathbb{R}^d, u \in \mathbb{R}^{2m}$ und $s \in \Gamma_d$, wobei

$$\begin{aligned} h(t,u,s) :&= \mathbb{1}_{\{s:\tau(s)<1\}} \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) C_8 \|t\|^{\rho_j} \|s\|^{\rho_j} \tau(s)^{-q-(\Lambda_D+\varepsilon)\rho_j} \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{s:\tau(s)\geq 1\}} \sum_{j=1}^{2} C_{10,j}(u) C_8 \tau(s)^{-q-(\lambda_D-\varepsilon)\rho_j} \end{aligned} \tag{7.11}$$

jeweils eine in s integrierbare Funktion ist (Wert für $s = 0$ unerheblich). Bleibt zu zeigen, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^{2m} \ni u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^{2m}} (\cos\langle g_t(s)^* u, x\rangle - 1)\, \widetilde{\nu}(dx)\, ds \tag{7.12}$$

für $t \in \Gamma_d$ ($t = 0$ klar) beliebig, aber fest stetig ist. Sei dazu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2m}$ eine beliebige, konvergente Folge mit Grenzwert $u \in \mathbb{R}^{2m}$, dann existiert insbesondere ein $M > 0$ mit $\|u_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter zeigt man wie in (4.44) (majorisierte Konvergenz), dass

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} (\cos\langle g_t(s)^* u_n, x\rangle - 1)\, \widetilde{\nu}(dx) \to \int_{\mathbb{R}^{2m}} (\cos\langle g_t(s)^* u, x\rangle - 1)\, \widetilde{\nu}(dx)$$

für alle $s \in \mathbb{R}^d$ und $n \to \infty$. Ebenfalls wie im Anschluss an (4.44) sowie nach (7.11) überzeugt man sich dann für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \Gamma_d$ von folgender Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^{2m}} (\cos\langle g_t(s)^* u_n, x\rangle - 1)\, \widetilde{\nu}(dx) \right| &\leq \left| \widetilde{\psi}(g_t(s)^* u_n) \right| \\ &\leq h(t, u_n, s). \end{aligned}$$

Dabei schlägt sich die Abhängigkeit von u_n ausschließlich in $\|u_{n,1}\|^{\rho_j}$ für $j = 1, 2$ nieder, wobei $u_n = (u_{n,1}, u_{n,2})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun folgt aber offensichtlich, dass $\|u_{n,1}\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\rho_1, \rho_2 > 0$ erkennt man also beispielsweise mit $\tilde{u} := (M, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{2m}$:

$$\leq h(t, \widetilde{u}, s),$$

d.h. die gesuchte integrierbare Majorante ist gefunden, und der Konvergenzsatz von Lebesgue liefert (hinsichtlich des äußeren Integrals in (7.12)) abermals die Behauptung. □

Bemerkung 7.1.2. Betrachtet man nun den α-stabilen Spezialfall, also $\widetilde{B} = \frac{1}{\alpha} I_{2m}$, so folgt stets, dass D und $B = \frac{1}{\alpha} I_m$ kommutieren. Insbesondere gilt dann:

$$\widetilde{X}_{\phi,D}(t) := \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle t,s\rangle} - 1 \right) \phi(s)^{-D-\frac{q}{\alpha} I_m}\, \widetilde{M}(ds),$$

wir bekommen also die Felder aus Theorem 2.6 in [29] zurück, wobei dort wieder $\widetilde{\psi}(\cdot) = -\|\cdot\|^\alpha$ betrachtet wurde. Bemerkenswert ist jedoch, dass wir in Gestalt von $\lambda_E > \Lambda_D$ exakt die gleiche Existenzbedingung finden konnten (auch für allgemeines B). Dabei haben wir im vorangegangenen Beweis massiv davon profitiert, dass wir anstelle von $\phi(\cdot)^{-D-qB}$ zunächst die Abbildung $\phi(\cdot)^{-D}\phi(\cdot)^{-qB}$ betrachtet und im Anschluss mit der Charakterisierung aus Theorem 4.5.1 weitergearbeitet haben. Nutzt man stattdessen direkt die hinreichende Bedingung aus Theorem 4.5.3, so erhält man komplexere Existenzbedingungen, die für den Spezialfall $B = \frac{1}{\alpha} I_m$ zwar wieder auf $\lambda_E > \lambda_D$ führen (bei scharfer Abschätzung), im Allgemeinen aber erzwingen, dass die Differenz $\Lambda_B - \lambda_B$ sehr klein ausfällt. Demgegenüber unterscheiden sich (6.2) und (6.3) zunächst von der Bedingung aus Theorem 2.5 in [29], sind aber für $B = \frac{1}{\alpha} I_m$ auch wieder äquivalent zu der dort genannten Voraussetzung $\Lambda_D < \beta$ (da $D \in Q(\mathbb{R}^m)$).

7.2 Eigenschaften und Beispiele

Die nachfolgenden Aussagen bilden im Wesentlichen das Pendant zu Abschnitt 6.2; wie angekündigt werden sich jedoch einige Unterschiede ergeben. Dabei beginnen wir wieder mit den beiden Eigenschaften, denen unser vorrangiges Interesse gehört.

Eigenschaft 7.2.1
Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 7.1.1. Falls D und B darüber hinaus kommutieren, so folgt für $\widetilde{X}_{\phi,D} = \{\widetilde{X}_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$:

(a) $\widetilde{X}_{\phi,D}$ ist ein strikt Operator-stabiles Zufallsfeld mit B als Exponenten.

(b) $\widetilde{X}_{\phi,D}$ ist (E, D)-OSS.

Beweis. Unter den genannten Voraussetzungen können wir also für alle $t \in \mathbb{R}^d$ schreiben:

$$\widetilde{X}_{\phi,D}(t) := \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle t,s\rangle} - 1 \right) \phi(s)^{-D-qB}\, \widetilde{M}(ds). \tag{7.13}$$

(a) Seien $k \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest. Da die unendliche Teilbarkeit eines Zufallsvektors unter Projektionen sowie Permutationen seiner Komponenten offensichtlich erhalten bleibt, folgt mit Korollar 4.2.11 und Bemerkung 4.4.3 leicht, dass $(\widetilde{X}_{\phi,D}(t_1), ..., \widetilde{X}_{\phi,D}(t_k))$ eine unendlich-teilbare Verteilung besitzt. Dabei ist die charakteristische Funktion gemäß (7.13) und Theorem 4.4.4 (d) gegeben durch

$$\mathbb{R}^{k\cdot m} \ni (u_1, ..., u_k) \mapsto \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle t_j, s\rangle \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix} \right) ds \right).$$

Dann verwende man $DB = BD$ analog zu Eigenschaft 6.2.1 sowie die Tatsache, dass $\widetilde{\psi}$ eine $\widetilde{B}^* = B^* \oplus B^*$-homogene Funktion ist, um für alle $r > 0$ sowie $u =$

$(u_1, ..., u_k) \in \mathbb{R}^{k \cdot m}$ zu schließen, dass

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*-qB^*} r^{B^*} u_j \\ \sum_{j=1}^k -\sin\langle t_j, s\rangle \phi(s)^{-D^*-qB^*} r^{B^*} u_j \end{pmatrix}\right) \\
&= \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} r^{B^*} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ r^{B^*} \sum_{j=1}^k -\sin\langle t_j, s\rangle \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix}\right) \\
&= \widetilde{\psi}\left(r^{\widetilde{B}^*} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ \sum_{j=1}^k -\sin\langle t_j, s\rangle \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix}\right) \\
&= r \cdot \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ \sum_{j=1}^k -\sin\langle t_j, s\rangle \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Für $B_k := B \oplus \cdots \oplus B$ folgt also wieder, dass der Vektor $(\widetilde{X}_{\phi,D}(t_1), ..., \widetilde{X}_{\phi,D}(t_k))$ strikt Operator-stabil mit B_k als Exponenten ist. Indem man schließlich die Linearität gemäß Theorem 4.4.4 (b) sowie Korollar 4.5.7 (ii) nutzt, zeigt man ebenfalls wie in Eigenschaft 6.2.1, dass B ein Exponent von $\widetilde{X}_{\phi,D}$ gemäß Definition 6.0.1 ist.

(b) Für $c > 0$ beliebig ist zu zeigen, dass

$$\{\widetilde{X}_{\phi,D}(c^E t) : t \in \mathbb{R}^d\} \overset{fdd}{=} \{c^D \widetilde{X}_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}.$$

Zu $k \in \mathbb{N}$ betrachte man also $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$ und $u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest. Dann liefert die folgende (an Eigenschaft 6.2.1 (b) angelehnte und daher verkürzte) Rechnung gemäß Lemma 2.0.1 das Gewünschte, wobei wir das Problem jeweils wieder mit Theorem 4.4.4 (d) übersetzen und obige Zusatzvoraussetzung in bekannter Weise verwerten (mehrfach).

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^k \langle \widetilde{X}_{\phi,D}(c^E t_j), u_j\rangle}\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle c^E t_j, s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle c^E t_j, s\rangle \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix}\right) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, c^{E^*} s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle t_j, c^{E^*} s\rangle \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix}\right) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} c^{-q} \cdot \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1)\phi(c^{-E^*} s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle t_j, s\rangle \phi(c^{-E^*} s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix}\right) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(c^{-q\widetilde{B}^*} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1) c^{D^*+qB^*} \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle t_j, s\rangle c^{D^*+qB^*} \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix}\right) ds\right)
\end{aligned}$$

wegen $\phi(c^{-E^*}) = c^{-1}\phi(s)$ und zuvor nach Substitution, wobei man erneut beachte, dass $\mathrm{tr}(E^*) = q$.

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi} \left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1) c^{-qB^*} c^{D^*+qB^*} \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle t_j, s\rangle c^{-qB^*} c^{D^*+qB^*} \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix} \right) ds \right) \\
&= \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi} \left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1) c^{D^*} \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle t_j, s\rangle c^{D^*} \phi(s)^{-D^*-qB^*} u_j \end{pmatrix} \right) ds \right) \\
&= \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi} \left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j, s\rangle - 1) \phi(s)^{-D^*-qB^*} c^{D^*} u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle t_j, s\rangle \phi(s)^{-D^*-qB^*} c^{D^*} u_j \end{pmatrix} \right) ds \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum_{j=1}^k \langle \widetilde{X}_{\phi,D}(t_j), c^{D^*} u_j \rangle} \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum_{j=1}^k \langle c^D \widetilde{X}_{\phi,D}(t_j), u_j \rangle} \right).
\end{aligned}$$

□

Wie bereits vorweg genommen können wir nun ohne weitere Annahmen an die jeweiligen Eigenwerte beweisen:

Eigenschaft 7.2.2
Unter den Voraussetzungen von Theorem 7.1.1 ist $\widetilde{X}_{\phi,D} = \{\widetilde{X}_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ ein volles (d, m)-Vektorfeld.

Beweis. Sei $t \in \Gamma_d$ beliebig, aber fest. Für alle $s \in \Gamma_d$ gilt: $\phi(s) > 0$ und $\phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB}$ ist als Produkt invertierbarer Matrizen invertierbar. Wegen $\det(rA) = r^m \det(A)$ (für alle reellen Skalare r und $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$) stört der Vorfaktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} - 1$ nur dann die Invertierbarkeit von Real- und zugleich Imaginärteil des Integranden, wenn

$$\cos\langle t, s\rangle = 1 \quad \text{und} \quad \sin\langle t, s\rangle = 0$$

gilt, wobei die Erfüllung der linken Seite auch die der rechten impliziert. Die kritische Menge im Sinne von Korollar 4.5.7 (i) lautet somit $K := \{s \in \mathbb{R}^d : \langle t, s\rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\}$. Bleibt also zu zeigen, dass K^c positives Lebesguemaß besitzt. Man betrachte beispielsweise $\tilde{t} := (t/\|t\|^2)$, dann folgt $\langle t, \tilde{t}\rangle = 1$. Nun ist die Abbildung $s \mapsto \langle t, s\rangle$ aber stetig, demnach existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\langle t, s\rangle \in (0, 2\pi) \quad \forall s \in B_\varepsilon(\tilde{t}),$$

wobei $B_\varepsilon(\tilde{t}) \subset K^c$. Aus Monotoniegründen besitzt also auch K^c positives Maß. □

Wir möchten nun noch zeigen, dass die Vektorfelder der harmonischen Darstellung ebenfalls stochastisch stetig sind und unter einer bestimmten Zusatzvoraussetzung sogar stationäre Zuwächse besitzen. Beide Eigenschaften sind miteinander verknüpft und benötigen etwas Vorleistung.

Lemma 7.2.3
Unter den Voraussetzungen von Theorem 7.1.1 gilt für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}^d$ und $u \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \widetilde{X}_{\phi,D}(t+t_0)-\widetilde{X}_{\phi,D}(t_0),u\rangle}\right) = \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(A_1(t_0,s)A_2(t,s)\,\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u\right)ds\right)$$

mit $A_1(t_0,s) \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}$ und $A_2(t,s) \in \mathbb{R}^{2m\times m}$, genauer:

$$A_1(t_0,s) = \begin{pmatrix} \cos\langle t_0,s\rangle I_m & \sin\langle t_0,s\rangle I_m \\ -\sin\langle t_0,s\rangle I_m & \cos\langle t_0,s\rangle I_m \end{pmatrix}, \qquad A_2(t,s) = \begin{pmatrix} (\cos\langle t,s\rangle - 1)I_m \\ -\sin\langle t,s\rangle I_m \end{pmatrix}.$$

Beweis. Aus Linearitätsgründen gilt für $t, t_0 \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest:

$$\begin{aligned}\widetilde{X}_{\phi,D}(t+t_0) - \widetilde{X}_{\phi,D}(t_0) &= \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t+t_0,s\rangle} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_0,s\rangle}\right)\phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB}\,\widetilde{M}(ds) \\ &= \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_0,s\rangle}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} - 1\right)\phi(s)^{-D}\phi(s)^{-qB}\,\widetilde{M}(ds) \qquad (7.14)\end{aligned}$$

fast sicher. Die Gesetze der komplexen Zahlen und Theorem 4.4.4 (a) liefern somit für alle $u \in \mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \widetilde{X}_{\phi,D}(t+t_0)-\widetilde{X}_{\phi,D}(t_0),u\rangle}\right) = \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widetilde{\psi}(\zeta(t_0,t,s,u))\,ds\right),$$

wobei

$$\begin{aligned}\zeta(t_0,t,s,u) :&= \begin{pmatrix} (\cos\langle t_0,s\rangle(\cos\langle t,s\rangle - 1) - \sin\langle t_0,s\rangle\sin\langle t,s\rangle)\,\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u \\ -(\cos\langle t_0,s\rangle\sin\langle t,s\rangle + (\cos\langle t,s\rangle - 1)\sin\langle t_0,s\rangle)\,\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\cos\langle t_0,s\rangle(\cos\langle t,s\rangle - 1) - \sin\langle t_0,s\rangle\sin\langle t,s\rangle)\,I_m \\ -(\cos\langle t_0,s\rangle\sin\langle t,s\rangle + (\cos\langle t,s\rangle - 1)\sin\langle t_0,s\rangle)\,I_m \end{pmatrix}\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u.\end{aligned}$$

Nun rechnet man die Behauptung mit den angegebenen Darstellungen für $A_1(t_0,s)$ sowie $A_2(t,s)$ und den Rechenregeln für Blockmatrizen unmittelbar nach. □

Wenn wir also unter Berücksichtigung der Surjektivität von $(t_0,s) \mapsto \langle t_0,s\rangle$ (zwischen $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ und $\mathbb{R}$) sowie der Periodizität von $\cos(\cdot)$ und $\sin(\cdot)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$\mathcal{T}(2m) := \{A_1(t_0,s) : t_0, s \in \mathbb{R}^d\} = \left\{\begin{pmatrix} (\cos\beta)I_m & (\sin\beta)I_m \\ -(\sin\beta)I_m & (\cos\beta)I_m \end{pmatrix} : \beta \in [0,2\pi)\right\}$$

definieren, so können wir zeigen:

Eigenschaft 7.2.4
In der Situation von Theorem 7.1.1 gilt: Falls $(A\widetilde{\mu}) = \widetilde{\mu}$ für alle $A \in \mathcal{T}(2m)$ (womit $\mathcal{T}(2m)$ insbesondere Teilmenge der *Symmetriegruppe* von $\widetilde{\mu}$ ist, man vergleiche Theorem 2.3.10 in [31]), so besitzt das Zufallsfeld $\widetilde{X}_{\phi,D} = \{\widetilde{X}_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ stationäre Zuwächse.

Beweis. Mit $\widetilde{\mu}$ ist auch $(A\widetilde{\mu})$ für alle $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^{2m})$ unendlich-teilbar und besitzt die log-charakteristische Funktion $u \mapsto \widetilde{\psi}(A^*u)$. Nach Voraussetzung folgt daher, dass $\widetilde{\psi}(u) = \widetilde{\psi}(A^*u)$ für alle $A \in \mathcal{T}(2m)$ und $u \in \mathbb{R}^{2m}$ (siehe Lemma 3.1.10 in [31]). Sei nun $h \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest, so ist also wegen $\widetilde{X}_{\phi,D}(0) = 0$ zu zeigen, dass

$$\{\widetilde{X}_{\phi,D}(t+h) - \widetilde{X}_{\phi,D}(h) : t \in \mathbb{R}^d\} \stackrel{fdd}{=} \{\widetilde{X}_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}.$$

Betrachte dazu $k \in \mathbb{N}$ sowie $t_1, ..., t_k \in \mathbb{R}^d$ und $u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest. Dann liefert die folgende Rechnung, in der wir wieder Theorem 4.4.4 (d) verwenden und die Überlegungen aus Lemma 7.2.3 aufgreifen, angesichts Lemma 2.0.1 die Behauptung:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^k \langle \widetilde{X}_{\phi,D}(t_j+h) - \widetilde{X}_{\phi,D}(h), u_j\rangle}\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(\sum_{j=1}^k A_1(h,s) A_2(t_j,s)\,\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u_j\right) ds\right),
\end{aligned}$$

wobei die fast sichere Aussage von (7.14) den jüngsten Schritt rechtfertigte, man vergleiche den Beweis zu Eigenschaft 6.2.3. Nun nutzen wir die bereits zuvor gelesene Voraussetzung, für die man wegen $A_1(h,s)^* = A_1(-h,s)$ erkennt, dass auch $A_1(h,s)^* \in \mathcal{T}(2m)$.

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left((A_1(h,s)^*)^* \sum_{j=1}^k A_2(t_j,s)\,\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u_j\right) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(\sum_{j=1}^k A_2(t_j,s)\,\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u_j\right) ds\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k (\cos\langle t_j,s\rangle - 1)\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u_j \\ -\sum_{j=1}^k \sin\langle t_j,s\rangle\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u_j \end{pmatrix}\right) ds\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^k \langle \widetilde{X}_{\phi,D}(t_j), u_j\rangle}\right).
\end{aligned}$$

□

Ob und - wenn ja - unter welchen Voraussetzungen auch die Umkehrung der obigen Aussage gilt, erscheint für den Moment offen. Weiter nennen wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *isotrop*, falls für alle Drehmatrizen A, d.h. für alle $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ mit $\det(A) = 1$ und $A^{-1} = A^*$ gilt: $(A\nu) = \nu$ (siehe Definition 2.6.2 in [40] für $n = 2$).

Insofern zeigt die folgende Eigenschaft wegen $|\exp(\mathrm{i}x)| = 1$ (für $x \in \mathbb{R}$) und der Eulerschen Formeln insbesondere, dass auch die Elemente aus $\mathcal{T}(2m)$ Drehmatrizen sind; die Isotropie von $\widetilde{\mu}$ ist also stets hinreichend für die stationären Zuwächse von $\widetilde{X}_{\phi,D}$.

Eigenschaft 7.2.5
Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $m \in \mathbb{N}$ ist

$$R(z) := \frac{1}{|z|} \begin{pmatrix} (\mathrm{Re}\ z)\, I_m & (\mathrm{Im}\ z)\, I_m \\ -(\mathrm{Im}\ z)\, I_m & (\mathrm{Re}\ z)\, I_m \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{2m})$$

eine Drehmatrix.

Beweis. Mit ähnlichen Überlegungen wie zuvor zeigen wir zunächst die Orthogonalität:

$$\begin{aligned} R(z)R(z)^* &= \frac{1}{|z|^2} \begin{pmatrix} (\mathrm{Re}\ z)\, I_m & (\mathrm{Im}\ z)\, I_m \\ -(\mathrm{Im}\ z)\, I_m & (\mathrm{Re}\ z)\, I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathrm{Re}\ z)\, I_m & -(\mathrm{Im}\ z)\, I_m \\ (\mathrm{Im}\ z)\, I_m & (\mathrm{Re}\ z)\, I_m \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|z|^2} \begin{pmatrix} \left((\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2\right) I_m & 0 \\ 0 & \left((\mathrm{Im}\ z)^2 + (\mathrm{Re}\ z)^2\right) I_m \end{pmatrix} \\ &= I_{2m}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Determinante von $R(z)$ beziehungsweise $|z| \cdot R(z)$ betrachten wir zunächst den Fall, dass $\mathrm{Re}\ z \neq 0$. Dann multiplizieren wir die erste Zeile mit $\frac{\mathrm{Im}\ z}{\mathrm{Re}\ z}$ und addieren sie auf die $(m+1)$-te Zeile. Entsprechend multiplizieren wir die zweite Zeile, um sie auf die $(m+2)$-te zu addieren et cetera. Dabei bleibt die Determinante unverändert, führt aber auf die Berechnung der Determinante einer oberen Dreiecksmatrix:

$$\begin{aligned} \det(R(z)) &= |z|^{-2m} \det \begin{pmatrix} (\mathrm{Re}\ z)\, I_m & (\mathrm{Im}\ z)\, I_m \\ -(\mathrm{Im}\ z)\, I_m & (\mathrm{Re}\ z)\, I_m \end{pmatrix} \\ &= |z|^{-2m} \det \begin{pmatrix} (\mathrm{Re}\ z)\, I_m & (\mathrm{Im}\ z)\, I_m \\ 0 & \left(\mathrm{Re}\ z + \frac{(\mathrm{Im}\ z)^2}{\mathrm{Re}\ z}\right) I_m \end{pmatrix} \\ &= |z|^{-2m} (\mathrm{Re}\ z)^m \left(\mathrm{Re}\ z + \frac{(\mathrm{Im}\ z)^2}{\mathrm{Re}\ z}\right)^m \\ &= |z|^{-2m} \left((\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2\right)^m \\ &= 1. \end{aligned}$$

Gilt andererseits $\mathrm{Re}\ z = 0$, so ist $|\mathrm{Im}\ z| = |z|$ und wir erhalten in diesem Fall

$$R(z) = \begin{pmatrix} 0 & \pm I_m \\ \mp I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Indem wir die erste Zeile mit der $(m+1)$-ten, die zweite mit der $(m+2)$-ten vertauschen et cetera, folgt:

$$\det(R(z)) = (-1)^m \det\begin{pmatrix} \mp I_m & 0 \\ 0 & \pm I_m \end{pmatrix} = (-1)^m(-1)^m = 1.$$

□

Bemerkung 7.2.6. Nach dem zuvor Gezeigten bildet $\mathcal{T}(2m)$ offensichtlich eine (kompakte) abelsche Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Matrizen als Gruppenoperation. Für $m = 1$ entspricht $\mathcal{T}(2m) = \mathcal{T}(2)$ dabei gerade der Menge aller Drehmatrizen auf $\mathbb{R}^2$, also der *Drehgruppe*

$$\mathrm{SO}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} : \beta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Ansonsten ist $\mathcal{T}(2m)$ zumindest für alle $m \in \mathbb{N}$ isomorph zu SO(2).

Wie erhofft können wir schließlich zeigen, dass die Zufallsfelder der harmonischen Darstellung stochastisch stetig sind; anders als zuvor auch ohne weitere Voraussetzungen.

Theorem 7.2.7
Das Vektorfeld $\widetilde{X}_{\phi,D} = \{\widetilde{X}_{\phi,D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ ist unter den Voraussetzungen von Theorem 7.1.1 stochastisch stetig.

Beweis. Seien $t_0 \in \mathbb{R}^d$ und $u \in \mathbb{R}^m$ beliebig, aber fest. Weiter sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ eine beliebige Nullfolge, so genügt es nach Theorem 4.4.4 (e) und den Überlegungen aus Lemma 7.2.3, zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\psi}\left(\zeta(t_0, t_n, s, u)\right) ds \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0.$$

Nun konvergiert $\zeta(t_0, t_n, s, u)$ für alle $s \in \mathbb{R}^d$ und $n \to \infty$ gegen Null. Wegen der Stetigkeit von $\widetilde{\psi}$ mit $\widetilde{\psi}(0) = 0$ bleibt also nur noch die Angabe einer integrierbaren Majorante, um nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue die Behauptung zu erhalten. Dazu schreiben wir für alle $s \in \Gamma_d$ und $n \in \mathbb{N}$ wie an früherer Stelle:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\psi}(\zeta(t_0, t_n, s, u)) \\
&\quad = \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} (\cos\langle t_0, s\rangle(\cos\langle t_n, s\rangle - 1) - \sin\langle t_0, s\rangle \sin\langle t_n, s\rangle)\, \phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u \\ -(\cos\langle t_0, s\rangle \sin\langle t_n, s\rangle + (\cos\langle t_n, s\rangle - 1)\sin\langle t_0, s\rangle)\, \phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*}u \end{pmatrix}\right) \\
&\quad = \widetilde{\psi}\left(\phi(s)^{-q\widetilde{B}^*} \begin{pmatrix} (\cos\langle t_0, s\rangle(\cos\langle t_n, s\rangle - 1) - \sin\langle t_0, s\rangle \sin\langle t_n, s\rangle)\, \phi(s)^{-D^*}u \\ -(\cos\langle t_0, s\rangle \sin\langle t_n, s\rangle + (\cos\langle t_n, s\rangle - 1)\sin\langle t_0, s\rangle)\, \phi(s)^{-D^*}u \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$= \phi(s)^{-q} \cdot \widetilde{\psi}\left(A_1(t_0,s)A_2(t_n,s)\,\phi(s)^{-D^*}u\right),$$

sodass mit (7.7) und den dortigen Bezeichnungen folgt:

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\psi}(\zeta(t_0,t_n,s,u))\right| &\le \phi(s)^{-q}\sum_{j=1}^{2} C_{4+j}\left\|A_1(t_0,s)A_2(t_n,s)\,\phi(s)^{-D^*}u\right\|^{\rho_j} \\
&= \phi(s)^{-q}\sum_{j=1}^{2} C_{4+j}\left\|A_2(t_n,s)\,\phi(s)^{-D^*}u\right\|^{\rho_j} \\
&= \phi(s)^{-q}\sum_{j=1}^{2} C_{4+j}\left\|\begin{pmatrix}(\cos\langle t_n,s\rangle - 1)\phi(s)^{-D^*}u \\ -\sin\langle t_n,s\rangle\phi(s)^{-D^*}u\end{pmatrix}\right\|^{\rho_j} \\
&\le h(t_n,\widehat{u},s),
\end{aligned}$$

wie der Beweis zu Theorem 7.1.1 gezeigt hat, beispielsweise mit $\widehat{u} = (u,0) \in \mathbb{R}^{2m}$. Dabei haben wir im zweiten Schritt benutzt, dass $A_1(t_0,s)$ für alle $s \in \mathbb{R}^d$ orthogonal ist (die euklidische Norm bleibt also invariant). Nun ist (t_n) als Nullfolge beschränkt, d.h. es existiert ein $M > 0$ mit $\|t_n\| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließlich zeigt (7.11) wieder, dass wir $\tilde{t} := (M,0,...,0) \in \mathbb{R}^d$ wählen können, um insgesamt folgende Abschätzung (für alle $s \in \Gamma_d$ sowie $n \in \mathbb{N}$) und somit die gesuchte integrierbare Majorante zu erhalten:

$$\left|\widetilde{\psi}(\zeta(t_0,t_n,s,u))\right| \le h(\widetilde{t},\widehat{u},s).$$

□

Zum Abschluss noch das folgende Beispiel, dem die gleiche Motivation wie Beispiel 6.2.5 zugrunde liegt. Auch hier sind natürlich wieder viele weitere Konstellationen denkbar.

Beispiel 7.2.8
Gegeben sei eine volle sowie strikt Operator-stabile Verteilung $\widetilde{\mu}$ auf $\mathbb{R}^{2m}$ mit $\widetilde{B} \in \mathcal{E}(\widetilde{\mu})$, wobei dieser Exponent von der Form $\widetilde{B} = B \oplus B$ für ein $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ sei. Bezeichne M das von $\widetilde{\mu}$ (sowie dem d-dimensionalen Lebesguemaß) erzeugte Zufallsmaß und $\widetilde{M}$ das entsprechend mit M identifizierte $\mathbb{C}^m$-wertige ISRM. Weiter seien $E := \mathrm{diag}(a_1,...,a_d)$ für $a_1,...,a_d > 0$ beliebig und $D := \gamma B$ für ein $0 < \gamma < \Lambda_B^{-1}\min\{a_1,...,a_d\}$. Schließlich definieren wir die Funktion $\phi : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ durch

$$\phi(x) := \sum_{j=1}^{d} |x_j|^{\frac{1}{a_j}}, \quad x = (x_1,...,x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert $\widetilde{X}_{\phi,D} = \{\widetilde{X}_{\phi.D}(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ mit den genannten Wahlen im Sinne von Theorem 7.1.1 und ist stochastisch stetig. Außerdem ist $\widetilde{X}_{\phi,D}$ voll, strikt Operator-stabil mit B als Exponenten sowie (E,D)-OSS.

Beweis. Die konkrete Gestalt von E liefert hier $r^{E^*}x = (r^{a_1}x_1, ..., r^{a_d}x_d)$ für alle $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$ wie angegeben. Damit ist insbesondere klar, dass ϕ neben der offensichtlichen Stetigkeit und strikten Positivität auf Γ_d auch E^*-homogen ist. Ebenso ist klar, dass $DB = BD$ gilt, während die Wahl von γ und erneut die von E gerade gewährleisten, dass $\Lambda_D = \gamma\Lambda_B < \min\{a_1, ..., a_d\} = \lambda_E$. Somit folgt die Behauptung nach dem zuvor Gezeigten. $\square$

Die Frage, ob $\widetilde{X}_{\phi,D}$ im Rahmen dieses Beispiels auch stationäre Zuwächse besitzt, ist also mit Hilfe von Eigenschaft 7.2.4 zu klären.

Bemerkung 7.2.9. Unter Umständen mag die Vorgabe einer strikt Operator-stabilen Verteilung μ auf $\mathbb{R}^m$ (voll) mit Exponenten $B \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ natürlicher erscheinen. Dann definiert das Produktmaß $\mu \otimes \mu$ aber eine Verteilung $\widetilde{\mu}$ auf $\mathbb{R}^{2m}$ wie oben beschrieben, was der Betrachtung unabhängiger Komponenten entspricht. Beispiel 2.4.12 und die darauf folgende Bemerkung liefern jedoch auch die Möglichkeit zur Modellierung von Abhängigkeiten (über das Spektralmaß Λ).

7.3 Stetige Modifikationen

Wir möchten schließlich noch einen wichtigen Spezialfall diskutieren, der gegenüber der moving-average Darstellung eine erste Untersuchung von Pfadeigenschaften erlaubt. Zugleich wird sich herausstellen, dass dieser Spezialfall nichtsdestotrotz die α-stabilen harmonischen Darstellungen aus [29] und [5] ($m = 1$) abdeckt, im Allgemeinen sogar echt Operator-stabil ist. Dabei nutzen wir einige Ideen aus [43], was letztlich auf die Verwendung der Ergebnisse in [3] hinausläuft.

Für den Rest dieses Kapitels gelte grundsätzlich das gleiche Setting wie in Abschnitt 7.1, wobei wir den Erzeuger $\widetilde{\mu}$ nun auf zwei Weisen beschränken: Einerseits nehmen wir an, dass $\widetilde{\mu}$ isotrop (somit insbesondere symmetrisch) ist und andererseits unterstellen wir, dass für den Exponenten $\widetilde{B} = B \oplus B$ gilt:

$$B = B^* = \mathrm{diag}\,(\alpha_1^{-1}, ..., \alpha_m^{-1}), \quad \alpha_1, ..., \alpha_m \in (0, 2). \tag{7.15}$$

Wir verzichten der Einfachheit halber also auf einen Gaußanteil. Ferner gelten die Annahmen aus Theorem 7.1.1, ergänzt um $DB = BD$, wobei wir mit $X := \{X(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ statt $\widetilde{X}_{\phi,D}$ abkürzend die resultierende harmonische Darstellung aus (7.1) (auf einem entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) bezeichnen.

Schreibt man nun $X(t) = (X_1(t), ..., X_m(t))$, so besteht die Idee gemäß [43] darin, die skalarwertigen Komponentenfelder $X_j = \{X_j(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ zu verstehen. Genauer müssen wir zwecks Anwendung von Proposition 5.1 in [3] einen Bezug zu den harmonischen Darstellungen aus [5] herstellen. Dabei ist der zuletzt genannte Aspekt der eigentliche Grund für die getroffene Isotropieannahme.

Proposition 7.3.1
Unter den zuvor genannten Voraussetzungen gilt für alle $j \in \{1,...,m\}, n \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}^n$ und $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n X_j(t_k)u_k}\right) = \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\sum_{k=1}^n (\mathrm{e}^{i\langle t_k,s\rangle}-1)u_k|^{\alpha_j}|f_j(s)|^{\alpha_j}\,ds\right), \tag{7.16}$$

wobei $u=(u_1,...,u_n)$ und

$$f_j(s) := \left|\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix}\phi(s)^{-D^*-qB^*}e_j\\ 0\end{pmatrix}\right)\right|^{1/\alpha_j}, \quad s\in\mathbb{R}^d.$$

Beweis. Die Symmetrie von $\widetilde{\mu}$ impliziert insbesondere, dass $\widetilde{\psi}(\cdot)\in(-\infty,0]$. Fixiere nun j,n,u und $t_1,...,t_n$ wie angegeben, so folgt zunächst:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n X_j(t_k)u_k}\right)\\
&\quad= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n \langle X(t_k),u_ke_j\rangle}\right)\\
&\quad= \exp\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^n(\cos\langle t_k,s\rangle-1)\phi(s)^{-D^*-qB^*}u_ke_j\\ -\sum_{k=1}^n\sin\langle t_k,s\rangle\phi(s)^{-D^*-qB^*}u_ke_j\end{pmatrix}\right)ds\right)\\
&\quad= \exp\left(-\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left|\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix}(\sum_{k=1}^n(\cos\langle t_k,s\rangle-1)u_k)\,\phi(s)^{-D^*-qB^*}e_j\\ -(\sum_{k=1}^n\sin\langle t_k,s\rangle u_k)\,\phi(s)^{-D^*-qB^*}e_j\end{pmatrix}\right)\right|ds\right).
\end{aligned}\tag{7.17}$$

Setze $z:=z(s):=\sum_{k=1}^n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_k,s\rangle}-1)u_k$. Wegen $\mathrm{Re}\ z=\sum_{k=1}^n(\cos\langle t_k,s\rangle-1)u_k$ und $\mathrm{Im}\ z=\sum_{k=1}^n\sin\langle t_k,s\rangle u_k$ verschwindet der Integrand in (7.17), sofern $z(s)=0$. Andernfalls greift für alle $s\in\mathbb{R}^d$ die folgende Rechnung, wobei wir aus Gründen der Übersicht vorübergehend $A:=A(s):=\phi(s)^{-D^*-qB^*}$ definieren.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix}(\sum_{k=1}^n(\cos\langle t_k,s\rangle-1)u_k)\,\phi(s)^{-D^*-qB^*}e_j\\ -(\sum_{k=1}^n\sin\langle t_k,s\rangle u_k)\,\phi(s)^{-D^*-qB^*}e_j\end{pmatrix}\right)\\
&\quad=\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix}(\mathrm{Re}\ z)Ae_j\\ -(\mathrm{Im}\ z)Ae_j\end{pmatrix}\right)\\
&\quad=\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix}(\mathrm{Re}\ z)A & (\mathrm{Im}\ z)A\\ -(\mathrm{Im}\ z)A & (\mathrm{Re}\ z)A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_j\\ 0\end{pmatrix}\right)\\
&\quad=\widetilde{\psi}\left(\frac{1}{|z|}\begin{pmatrix}(\mathrm{Re}\ z)I_m & (\mathrm{Im}\ z)I_m\\ -(\mathrm{Im}\ z)I_m & (\mathrm{Re}\ z)I_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|z|e_j\\ 0\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z|e_j \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (|z|^{\alpha_j})^{B^*} e_j \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} (|z|^{\alpha_j})^{\widetilde{B}^*} \begin{pmatrix} e_j \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \widetilde{\psi}\left((|z|^{\alpha_j})^{\widetilde{B}^*} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= |z|^{\alpha_j} \cdot \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_j \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= |z|^{\alpha_j} \cdot \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \phi(s)^{-D^*-qB^*} e_j \\ 0 \end{pmatrix}\right). \qquad (7.18)
\end{aligned}
$$

Der Fall $z = 0$ ist also in (7.18) inbegriffen. Dabei haben wir, neben den inzwischen bekannten Argumenten wie im vorletzten und drittletzten Schritt (dort mit $DB = BD$), maßgeblich von Eigenschaft 7.2.5 sowie der vorausgesetzten Isotropie profitiert. Weiter haben wir von $r^A e_j = r^{a_j} e_j$ für $A = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_m)$ Gebrauch gemacht. (7.17) und (7.18) liefern also nach Definition von $z(s)$ beziehungsweise $f_j(s)$ die Behauptung. □

Diese multiplikative Trennung des Integranden in (7.16) wird sich im Anschluss als zielführend erweisen, wobei wir für $f_j(s)$ noch eine möglichst scharfe Abschätzung in s benötigen. Vorbereitend zeigen wir:

Lemma 7.3.2
Für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt: $\tau_B(x) = \tau_{\widetilde{B}}((x, 0))$.

Beweis. Für $x = 0$ entspricht dies unserer Konvention. Ansonsten würde die Behauptung aus Gründen der Eindeutigkeit und wegen

$$\tau_B(x)^{\widetilde{B}} \begin{pmatrix} l_B(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_B(x)^B l_B(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgen, solange wir zeigen können, dass $(l_B(x), 0) \in S_{\widetilde{B}}$. Dies erkennt man aber anhand von Lemma und Definition 2.2.1, denn:

$$\left\| \begin{pmatrix} l_B(x) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\widetilde{B}} = \int_0^1 \left\| s^{\widetilde{B}} \begin{pmatrix} l_B(x) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| s^{-1}\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left\| \begin{pmatrix} s^B l_B(x) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| s^{-1}\, ds \\
&= \int_0^1 \|s^B l_B(x)\| s^{-1}\, ds \\
&= \|l_B(x)\|_B \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

□

Für das nächste Resultat wiederholen wir aus der linearen Algebra (siehe beispielsweise Theorem 2.1.16 in [31]): Ein Operator $J \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ liegt in *(reeller) Jordanform* vor, falls $J = \operatorname{diag}\,(J_1, ..., J_p)$ für ein $1 \leq p \leq m$, wobei für alle $1 \leq l \leq p$ gilt: J_l besitzt die Form

$$
J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & & & \\ & \lambda_l & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_l \end{pmatrix} \tag{7.19}
$$

für ein $\lambda_l \in \mathbb{R}$ (*reeller Jordanblock*) oder aber die Form

$$
J_l = \begin{pmatrix} \Lambda_l & I_2 & & & \\ & \Lambda_l & I_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & I_2 \\ & & & & \Lambda_l \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Lambda_l = \begin{pmatrix} a_l & -b_l \\ b_l & a_l \end{pmatrix} \tag{7.20}
$$

für ein $\lambda_l := a_l + \mathrm{i}\, b_l \in \mathbb{C}$ (*komplexer Jordanblock*). $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sind also gerade die (nicht notwendiger Weise verschiedenen) Eigenwerte von J. Ferner bezeichne $n(l)$ für $l = 1, ..., p$ die entsprechende Größe des Blocks, d.h. J_l ist eine $n(l) \times n(l)$-Matrix.
Insbesondere ist wohlbekannt, dass zu $A \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^m)$ beliebig stets ein $P \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ existiert, sodass $\widetilde{A} := P^{-1}AP$ eine (reelle) Jordanform besitzt. Da das Spektrum einer Matrix invariant unter Ähnlichkeitstransformationen ist, folgt für jeden Jordanblock von $\widetilde{A}$ wie in (7.19) oder (7.20), dass $\lambda_l \in \sigma(A)$. Dabei kann durch geeignetes Vertauschen der Spalten von P stets eine beliebige Reihenfolge der Jordanblöcke erzielt werden. Jedoch impliziert $AB = BA$ nicht zwingend, dass auch $\widetilde{A}B = B\widetilde{A}$.

Lemma 7.3.3
Seien $L > 0$ und $j \in \{1, .., m\}$ beliebig, aber fest. Dann folgt unter den zuvor genannten Voraussetzungen:

(i) Für alle $0 < \varepsilon < \lambda_D$ existiert ein $K_1 > 0$ mit

$$f_j(s) \leq K_1\, \tau_{E^*}(s)^{-(\lambda_D - \varepsilon) - q/\alpha_j}, \quad \|s\| \geq L.$$

(ii) Besitzt der Operator D speziell die Form $D = \operatorname{diag}(D_1, ..., D_p)$ für ein $1 \leq p \leq m$ mit D_l wie in (7.19) oder (7.20) für $l = 1, ..., p$, so sei $j_+ \in \{1, ..., p\}$ die eindeutige Zahl mit

$$\sum_{l=1}^{j_+ - 1} n(l) < j \leq \sum_{l=1}^{j_+} n(l).$$

Dann existiert für alle $0 < \varepsilon < \operatorname{Re} \lambda_{j_+}$ ein $K_2 > 0$ mit

$$f_j(s) \leq K_2\, \tau_{E^*}(s)^{-(\operatorname{Re} \lambda_{j_+} - \varepsilon) - q/\alpha_j}, \quad \|s\| \geq L.$$

Beweis. Per Definition von f_j (mit $DB = BD$) folgt zunächst wie in (7.6) für alle $s \in \Gamma_d$:

$$f_j(s) = \phi(s)^{-q/\alpha_j} \left| \widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} \phi(s)^{-D^*} e_j \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right|^{1/\alpha_j}.$$

Andererseits nutze man die verallgemeinerten Polarkoordinaten bezüglich $\widetilde{B} = \widetilde{B}^*$, um zu erkennen, dass eine Konstante $C_1 > 0$ mit $|\widetilde{\psi}(x)| \leq C_1 \tau_{\widetilde{B}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2m}$ existiert. Somit folgt nach Lemma 7.3.2 und (7.3) für alle $s \in \Gamma_d$:

$$\begin{aligned} f_j(s) &\leq C_1^{1/\alpha_j} \phi(s)^{-q/\alpha_j}\, \tau_{\widetilde{B}} \left(\begin{pmatrix} \phi(s)^{-D^*} e_j \\ 0 \end{pmatrix} \right)^{1/\alpha_j} \\ &\leq C_1^{1/\alpha_j} m_\phi^{-q/\alpha_j}\, \tau_{E^*}(s)^{-q/\alpha_j}\, \tau_B \left(\phi(s)^{-D^*} e_j \right)^{1/\alpha_j}. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ jeweils wie angegeben beliebig, aber fest, so bleibt gemäß (7.21) also die Existenz von Konstanten $C_3, C_4 > 0$ mit

(i) $\tau_B(\phi(s)^{-D^*} e_j) \leq C_3 \tau_{E^*}(s)^{-\alpha_j(\lambda_D - \varepsilon)}$,

(ii) $\tau_B(\phi(s)^{-D^*} e_j) \leq C_4 \tau_{E^*}(s)^{-\alpha_j(\operatorname{Re} \lambda_{j_+} - \varepsilon)}$

für alle $\|s\| \geq L$ zu zeigen. Zunächst (i), dann können wir dank der B-Homogenität von τ_B und der Gestalt von B (insbesondere gilt hier $D^* B = B D^*$) schreiben:

$$\begin{aligned} \tau_B(\phi(s)^{-D^*} e_j) &= \phi(s)^{-\alpha_j(\lambda_D - \varepsilon)} \tau_B \left(\phi(s)^{\alpha_j(\lambda_D - \varepsilon)B} \phi(s)^{-D^*} e_j \right) \\ &= \phi(s)^{-\alpha_j(\lambda_D - \varepsilon)} \tau_B \left(\phi(s)^{-D^*} \phi(s)^{\alpha_j(\lambda_D - \varepsilon)B} e_j \right) \\ &= \phi(s)^{-\alpha_j(\lambda_D - \varepsilon)} \tau_B \left(\phi(s)^{-D^*} \phi(s)^{\lambda_D - \varepsilon} e_j \right). \end{aligned}$$

Wegen $\sigma(D) = \sigma(D^*)$ und

$$\begin{aligned}\left\|\phi(s)^{-D^*}\phi(s)^{\lambda_D-\varepsilon}e_j\right\| &\leq \phi(s)^{\lambda_D-\varepsilon}\,\|\phi(s)^{-D^*}\| \\ &\leq C_0\,\phi(s)^{\lambda_D-\varepsilon}\phi(s)^{-(\lambda_D-\varepsilon)} \\ &= C_0\end{aligned}$$

für $\|s\| \geq L$, wobei C_0 aus Proposition 2.1.4 stammt (man beachte erneut (7.3)), genügt es also zusammen mit Korollar 2.2.4, wenn wir

$$C_3 := m_\phi^{-\alpha_j(\lambda_D-\varepsilon)}\ \sup\{\tau_B(\phi(s)^{(\lambda_D-\varepsilon)I_m-D^*}e_j) : \|s\| \geq L\} < \infty$$

setzen. In der Situation von (ii) folgt ganz analog, dass

$$\tau_B(\phi(s)^{-D^*}e_j) = \phi(s)^{-\alpha_j(\mathrm{Re}\ \lambda_{j_+}-\varepsilon)}\tau_B\left(\phi(s)^{-D^*}\phi(s)^{\mathrm{Re}\ \lambda_{j_+}-\varepsilon}e_j\right).$$

Somit bleibt zu zeigen, dass dann auch

$$\left\|\phi(s)^{-D^*}\phi(s)^{\mathrm{Re}\ \lambda_{j_+}-\varepsilon}e_j\right\| = \phi(s)^{\mathrm{Re}\ \lambda_{j_+}-\varepsilon}\,\|\phi(s)^{-D^*}e_j\|$$

für alle $\|s\| \geq L$ beschränkt ist. Dies folgt aber aufgrund der Annahme, dass D eine (reelle) Jordanform besitzt und nach marginaler Modifikation (siehe unten) von Corollary 2.2 (b) in [43], da dann eine Konstante C_0' mit

$$\|\phi(s)^{-D^*}e_j\| \leq C_0'\,\phi(s)^{-\mathrm{Re}\ \lambda_{j_+}+\varepsilon}, \quad \|s\| \geq L$$

existiert. Dabei beachte man einerseits, dass die Definition von j_+ gerade dem Umstand Rechnung trägt, dass die oben genannte Quelle eine Sortierung der Blöcke von D in aufsteigender Reihenfolge der Realteile (der korrespondierenden Eigenwerte) unterstellt. Andererseits erkennt man wegen $D^* = \mathrm{diag}(D_1^*, ..., D_p^*)$ unmittelbar, dass das jüngste Resultat auch auf D^* anwendbar ist. □

Für den Spezialfall $B = (1/\alpha)I_m$ bekommen wir mit dem folgenden Theorem also insbesondere die Aussage von Proposition 4.1 in [43] zurück. Dabei sei daran erinnert, dass zwei Zufallsfelder $X_i = \{X_i(t) : t \in I\}, i = 1, 2$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit Indexmenge I *Modifikationen* voneinander sind, falls für alle $t \in I$ gilt: $X_1(t) = X_2(t)$ fast sicher. Weiterhin verzichten wir im Folgenden darauf, die jeweils komplexwertigen Objekte auf besondere Weise kenntlich zu machen (so wie etwa früher M und $\widetilde{M}$ et cetera).

Theorem 7.3.4
Es gelten die Voraussetzungen dieses Abschnitts. Falls D darüber hinaus eine Jordanform wie in Lemma 7.3.3 (ii) besitzt, setze $\beta_j := \mathrm{Re}\ \lambda_{j_+}$ für alle $j = 1, ..., m$; andernfalls sei $\beta_j := \lambda_D$ (konstant). Dann existiert für jede nicht-leere, kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ und

für alle $\delta > 0$ sowie $\varepsilon > 0$ (klein) eine Modifikation $X^* := \{(X_1^*(t), ..., X_m^*(t)) : t \in K\}$ von X (auf K), sodass für alle $j = 1, ..., m$ gilt:

$$\sup_{\substack{s,t \in K \\ s \neq t}} \frac{|X_j^*(s) - X_j^*(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j - \varepsilon} [\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_j}}} < \infty \quad \text{fast sicher.} \tag{7.22}$$

Weiter existiert für jedes $\varepsilon > 0$ (klein) eine Modifikation X^* von X (auf K), sodass für alle $j = 1, ..., m$ und geeignete $[0, \infty)$-wertige Zufallsvariablen A_j gilt:

$$\forall s, t \in K : \qquad |X_j^*(s) - X_j^*(t)| \leq A_j \, \tau_E(s-t)^{\beta_j - \varepsilon} \quad \text{fast sicher.}$$

Beweis. Seien K, δ und ε (wie angegeben) beliebig, aber fest, wobei ε *klein* gerade bedeutet, dass $0 < \varepsilon < \beta_j$ für alle $j = 1, ..., m$. Wir definieren nun zunächst für $j = 1, ..., m$ (auf weiteren Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega_j, \mathcal{A}_j, \mathbb{P}_j)$) die $\mathbb{C}$-wertigen Felder $Y_j' := \{Y_j'(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ durch

$$Y_j'(t) := \int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} - 1) f_j(s) \, M_{\alpha_j}(ds), \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

wobei M_{α_j} (nach Identifizierung) das $\mathbb{C}$-wertige ISRM sei, das von dem d-dimensionalen Lebesguemaß und einer α_j-stabilen Verteilung μ_j auf $\mathbb{R}^2$ mit $\widehat{\mu_j}(x) = \exp(-\|x\|^{\alpha_j})$ erzeugt wird. Nun können wir analog zu (7.17) (für $n = 1$ und $u_1 = 1$) wieder schreiben:

$$\left|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} - 1) f_j(s)\right|^{\alpha_j} = \left|\widetilde{\psi}\left(\begin{pmatrix} (\cos\langle t,s\rangle - 1)\phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*} e_j \\ -\sin\langle t,s\rangle \phi(s)^{-qB^*}\phi(s)^{-D^*} e_j \end{pmatrix}\right)\right|,$$

um wie im Beweis von Theorem 7.1.1 zu erkennen, dass diese Funktion für alle $t \in \mathbb{R}^d$ jeweils in $L^1(\mathbb{R}^d, ds)$ liegt. Indem wir dann beispielsweise die Frobeniusnorm betrachten und nachrechnen, dass

$$\left\|\begin{pmatrix} (\cos\langle t,s\rangle - 1) f_j(s) & -\sin\langle t,s\rangle f_j(s) \\ \sin\langle t,s\rangle f_j(s) & (\cos\langle t,s\rangle - 1) f_j(s) \end{pmatrix}\right\|_F^{\alpha_j} = 2^{\alpha_j/2} \left|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t,s\rangle} - 1) f_j(s)\right|^{\alpha_j},$$

folgt nach Theorem 4.3.4 und Beispiel 4.5.2 unmittelbar die Existenz von $Y_1', ..., Y_m'$. Bis auf eine hier zu vernachlässigende, multiplikative Konstante genießen alle Y_j' also eine Darstellung wie in (17) bei [3] (man vergleiche auch (6.3.1) in [40] und die Ausführungen weiter unten). Damit kann Proposition 5.1 in [3] benutzt werden, um nach Lemma 7.3.3 und wegen $0 < \beta_j - \varepsilon < \beta_j \leq \Lambda_D < \lambda_E$ (gemäß Voraussetzung) zu folgern, dass eine Modifikation Y_j von Y_j' auf K existiert ($j = 1, ..., m$), sodass gilt:

$$\sup_{\substack{s,t \in K \\ s \neq t}} \frac{|Y_j(s) - Y_j(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j - \varepsilon} [\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_j}}} < \infty \quad \text{fast sicher.} \tag{7.23}$$

Insbesondere sind $\{\text{Re } Y_j(t) : t \in K\}$ und $\{\text{Re } Y_j'(t) : t \in K\}$ für alle $j = 1, ..., m$ Modifikationen voneinander mit

$$\sup_{\substack{s,t\in K\\ s\neq t}} \frac{|\text{Re } Y_j(s) - \text{Re } Y_j(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}}} < \infty \quad \text{fast sicher.} \tag{7.24}$$

Ferner erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^d$ sowie $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n (\text{Re } Y_j'(t_k))u_k}\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left\| \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n (\cos\langle t_k, s\rangle - 1) f_j(s) u_k \\ -\sum_{k=1}^n \sin\langle t_k, s\rangle f_j(s) u_k \end{pmatrix} \right\|^{\alpha_j} ds\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left(\left(\sum_{k=1}^n (\cos\langle t_k, s\rangle - 1) u_k\right)^2 f_j(s)^2 + \left(\sum_{k=1}^n \sin\langle t_k, s\rangle u_k\right)^2 f_j(s)^2\right)^{\alpha_j/2} ds\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} |\sum_{k=1}^n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle t_k, s\rangle} - 1\right) u_k|^{\alpha_j} |f_j(s)|^{\alpha_j} ds\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{k=1}^n X_j(t_k)u_k}\right)
\end{aligned}$$

nach (7.16), d.h. $\{X_j(t) : t \in \mathbb{R}^d\} \overset{fdd}{=} \{\text{Re } Y_j'(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$. Folglich gilt insbesondere für alle $j = 1, ..., m$:

$$\{X_j(t) : t \in K\} \overset{fdd}{=} \{\text{Re } Y_j'(t) : t \in K\} \overset{fdd}{=} \{\text{Re } Y_j(t) : t \in K\}. \tag{7.25}$$

Um die gewünschte Modifikation zu definieren, folgen wir nun der Idee aus dem Beweis zu Proposition 5.1 in [3]. Sei $D \subset K$ eine dichte, abzählbare Teilmenge (beispielsweise $D = K \cap \mathbb{Q}^d$), so ist auch $D' := \{(x, y) : x, y \in D, x \neq y\}$ abzählbar. Sei weiter $d_1', d_2', ...$ eine Abzählung von D', dann definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die endlichen Mengen $D_k' := \{d_1', ..., d_k'\}$. Somit folgt aber wegen (7.25) und (7.24) für alle $j = 1, ..., m$, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{\substack{s,t\in D\\ s\neq t}} \frac{|X_j(s) - X_j(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}}} < \infty\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{\substack{s,t\in D\\ s\neq t}} \frac{|X_j(s) - X_j(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}}} \leq n\right)
\end{aligned}$$

mit der Stetigkeit von unten. Mit der Stetigkeit von oben weiter:

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|X_j(s) - X_j(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}}} \leq n \quad \forall (s,t) \in D_k'\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\ \mathbb{P}_j\left(\frac{|\mathrm{Re}\ Y_j(s)-\mathrm{Re}\ Y_j(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}}}\leq n\quad\forall(s,t)\in D_k'\right)\right)$$
$$= \mathbb{P}_j\left(\sup_{\substack{s,t\in D\\ s\neq t}}\frac{|\mathrm{Re}\ Y_j(s)-\mathrm{Re}\ Y_j(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}}}<\infty\right)$$
$$= 1.$$

Daher existieren auch Nullmengen $N_1,...,N_m\in\mathcal{A}$ mit

$$C_j(\omega):=\sup_{\substack{s,t\in D\\ s\neq t}}\frac{|X_j(s,\omega)-X_j(t,\omega)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}}}<\infty,\quad\omega\in N_j^c \tag{7.26}$$

für alle $j=1,...,m$. Via $C_j(\omega):=0$ für $\omega\in N_j$ ist also insgesamt jeweils eine $[0,\infty)$-wertige Zufallsvariable $C_j=C_j(\varepsilon,\delta)$ definiert (wobei sich die Meßbarkeit offensichtlich vererbt). Sei $N:=N_1\cup\cdots\cup N_m$, so setzen wir $X^*(t,\omega):=0$ für alle $\omega\in N$ und $t\in K$ sowie $X^*(t,\omega):=X(t,\omega)$ für alle $\omega\in N^c$ und $t\in D$. Für $\omega\in N^c$ und $t\in K\setminus D$ erfolgt die Definition von $X^*(t,\omega)$ nun komponentenweise. Sei dazu $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (beliebige, aber von nun an fixierte) konvergente Folge aus D mit Grenzwert t; dann ist $(X_j^*(t_n,\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ wegen

$$|X_j(s,\omega)-X_j(t,\omega)|\leq C_j(\omega)\,\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}} \tag{7.27}$$

(für alle $s,t\in D$ mit $s\neq t$) und dank der Stetigkeit von τ_E mit $\tau_E(0)=0$ eine Cauchy-Folge, indem man weiter unten das Argument hinsichtlich der Zusatzaussage dieses Theorems beachtet. Den resultierenden Grenzwert taufen wir jeweils $X_j^*(t,\omega)$ und somit $X^*(t,\omega):=(X_1^*(t,\omega),...,X_m^*(t,\omega))$, d.h. $X^*(t)$ ist für alle $t\in K$ wohldefiniert. Ferner ist für $t\in D$ klar, dass X^* eine Modifikation von X ist. Für $t\in K\setminus D$ konnten wir $X^*(t)$ hingegen als fast sicheren Grenzwert von $X^*(t_n)=X(t_n)$ realisieren. Zugleich konvergiert $X(t_n)$ nach Theorem 7.2.7 jeweils stochastisch gegen $X(t)$, die fast sichere Eindeutigkeit des stochastischen Limes liefert also auch hier die Modifikationsaussage. Schließlich folgt per Konstruktion (siehe (7.27)) und erneut wegen der Stetigkeit von τ_E, dass auch

$$|X_j^*(s,\omega)-X_j^*(t,\omega)|\leq C_j(\omega)\,\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}[\log(1+\tau_E(s-t)^{-1}))]^{\delta+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha_j}}$$

für alle $j=1,...,m$ und $\omega\in N^c$ sowie $s,t\in K$ mit $s\neq t$. Für $\omega\in N$ ist die Aussage trivial, was insgesamt (7.22) liefert, sogar für alle $\omega\in\Omega$.
Da der Logarithmus langsamer als jedes Polynom von positivem Grad wächst und indem man $\tau_E(s-t)^{\beta_j-\frac{\varepsilon}{2}}=\tau_E(s-t)^{\beta_j-\varepsilon}\tau_E(s-t)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ schreibt, folgt die Zusatzaussage leicht aus (7.22) (gelesen für $\frac{\varepsilon}{2}$). $A_j(\omega)$ würde dann zum Beispiel dem Produkt aus $C_j(\frac{\varepsilon}{2},\delta,\omega)$ und einer hinreichend großen Konstante entsprechen. □

Offensichtlich könnte man in (7.22) auch für alle $j=1,...,m$ jeweils ein $\delta_j>0$ respektive $\varepsilon_j>0$ (klein) wählen; interessanter ist jedoch die folgende Beobachtung.

Korollar 7.3.5
In der Situation von Theorem 7.3.4 kann man sogar auf ganz $\mathbb{R}^d$ eine Modifikation X^* von X konstruieren, die dann für jede nicht-leere kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ und jedes $\delta > 0$ sowie $\varepsilon > 0$ (klein) die Aussage von (7.22) jeweils fast sicher erfüllt.

Beweis. So wie wir im vorherigen Beweis die Modifikationen X_j^* auf Basis von Y_j und (7.23) für alle $j = 1, ..., m$ konstruiert haben, wurde im Beweis von Proposition 5.1 in [3] (dank der wir ja gerade $Y_1, ..., Y_m$ gewonnen haben) mit Hilfe eines $\mathbb{C}$-wertigen Zufallsfelds auf $\mathbb{R}^d$ argumentiert, das die Bezeichnung S_m trägt (und einer fast sicher konvergenten *LePage-Reihe* entspricht). Der dortige Beweis zeigt unter den Voraussetzungen von Theorem 7.3.4 aber auch, dass S_m die Aussage von (7.23) in analoger Weise bereits für *jede* nicht-leere, kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ und *alle* $\delta > 0$ sowie $\varepsilon > 0$ (klein) erfüllt, jeweils fast sicher. Dass man daraus nun für $j = 1, ..., m$ auf die Existenz einer Modifikation Y_j von Y_j' schließen kann, die auf ganz $\mathbb{R}^d$ definiert ist und für alle nicht-leeren, kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^d$ und alle $\delta > 0$ sowie $\varepsilon > 0$ (klein) jeweils

$$\sup_{\substack{s,t \in K \\ s \neq t}} \frac{|Y_j(s) - Y_j(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta_j - \varepsilon} [\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_j}}} < \infty \quad \text{fast sicher} \tag{7.28}$$

erfüllt, folgt wiederum in gleicher Weise, wie wir nun aus der Annahme von (7.28) auf die Behauptung dieses Korollars schließen werden. Dabei können wir aufgrund der komponentenweisen Betrachtung ohne Einschränkung den Fall $m = 1$ annehmen (seien $\beta := \beta_1$ und $\alpha := \alpha_1$). Dann nutze man zunächst wieder (7.25), hier also mit fdd-Gleichheit auf $\mathbb{R}^d$, um nun mit (7.28) (analog zu (7.26)) für jede nicht-leere, kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ und alle $\delta > 0$ sowie $\varepsilon > 0$ (klein) eine Nullmenge $N(K, \delta, \varepsilon)$ mit

$$C(K, \delta, \varepsilon, \omega) := \sup_{\substack{s,t \in K \cap \mathbb{Q}^d \\ s \neq t}} \frac{|X(s,\omega) - X(t,\omega)|}{\tau_E(s-t)^{\beta - \varepsilon} [\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}}} < \infty \tag{7.29}$$

für alle $\omega \in N(K, \delta, \varepsilon)^c$ zu erhalten. Betrachte man speziell $N_n := N([-n, n]^d, n^{-1}, n^{-1})$ mit $C_n(\omega) := C([-n, n]^d, n^{-1}, n^{-1}, \omega)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so definieren wir die Nullmenge $N := N_1 \cup N_2 \cup \cdots$. Dann erfolgt die Definition von $X^*(t, \omega)$ für $\omega \in N$ beziehungsweise für $(t, \omega) \in D \times N^c$ wie zuvor, wobei nun $\mathbb{Q}^d$ die Rolle von D übernimmt. Da ferner für jedes $t \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ und für jede gegen t konvergente Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^d$ ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $(t_n) \subset [-\tilde{n}, \tilde{n}]^d$ existiert, kann man (7.29) nach Wahl von $N_{\tilde{n}} \subset N$ analog zu (7.27) verwenden, um $X^*(t, \omega)$ für alle $(t, \omega) \in (\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d) \times N^c$ zu definieren; insbesondere ist X^* wieder eine Modifikation von X. Seien schließlich K, δ und ε beliebig (wie angegeben), aber fest, so bleibt zu zeigen, dass

$$\sup_{\substack{s,t \in K \\ s \neq t}} \frac{|X^*(s) - X^*(t)|}{\tau_E(s-t)^{\beta - \varepsilon} [\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}}} < \infty \quad \text{fast sicher.}$$

Dazu wähle man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subset [-n_0, n_0]^d, \quad n_0^{-1} < \delta, \quad n_0^{-1} < \varepsilon.$$

Vor dem Hintergrund von (7.29) sowie der Definition von X^* gilt dann insbesondere für alle $s, t \in K \cap \mathbb{Q}^d$ $(s \neq t)$ und $\omega \in N^c$:

$$\begin{aligned}
&|X^*(s,\omega) - X^*(t,\omega)| \\
&\leq C_{n_0}(\omega)\, \tau_E(s-t)^{\beta - n_0^{-1}} [\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})]^{n_0^{-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}} \\
&\leq \eta^2(n_0, \varepsilon, \delta)\, C_{n_0}(\omega)\, \tau_E(s-t)^{\beta - \varepsilon} [\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})]^{\delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

mit der nach Wahl von n_0 endlichen Zahl

$$\eta(n_0, \varepsilon, \delta) := \sup\{\tau_E(s-t)^{\varepsilon - n_0^{-1}} + [\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})]^{n_0^{-1} - \delta} : s, t \in [-n_0, n_0]^d, s \neq t\}.$$

Dabei beachte man, dass $[-n_0, n_0]^d$ beschränkt und die Werte von $\log(1 + \tau_E(s-t)^{-1})$ somit wiederum von der Null weg beschränkt sind. Daher folgt wie im Beweis von Theorem 7.3.4 die Behauptung. Auch die dortige Zusatzaussage kann in ähnlicher Weise übertragen werden. $\square$

KAPITEL 8

Fazit und Ausblick

Während wir in Kapitel 3 durch die Einführung von vektoriellen (Prä-)Maßen in der Lage waren, die Zufallsmaße aus [35] auf den $\mathbb{R}^m$-wertigen Fall zu verallgemeinern, benötigten wir im Rahmen der Integrationstheorie (siehe Kapitel 4) einige Ideen aus [37], wenngleich die dort betrachteten Objekte auf andere Weise eingeschränkt sind. Dies könnte aus theoretischer Sicht die Betrachtung unendlich-teilbarer Zufallsmaße mit Werten in (beliebigen) Banachräumen motivieren, um dann eine weitere Verallgemeinerung der Ergebnisse aus Kapitel 3 und 4 vorzunehmen. Möchte man jedoch an der Aussage von Theorem 3.5.3 festhalten, so erscheint es unwahrscheinlich, die zugrunde liegenden δ-Ringe durch noch schwächere Systeme zu ersetzen. In jedem Falle könnte der hintere, bisher nicht berücksichtigte Teil von [35] der Ausgangspunkt für zwei weitere Fragestellungen sein: Einerseits könnte man den Vektorraum $\mathcal{I}(M)$ topologisch einem tieferen Studium unterziehen (Stichwort *Musielak-Orlicz-Räume*). Andererseits ist damit die Frage verbunden, welche Vektorfelder - für gegebenes Zufallsmaß M - überhaupt eine entsprechende Integraldarstellung erlauben und wie dann die Integranden zu wählen sind.

Für den Moment erweisen sich die in dieser Arbeit konstruierten Objekte jedoch als reichhaltig genug, um daran anknüpfende Ideen zu entwickeln. So könnte man ausgehend von den Darstellungen in Kapitel 6 und 7 weitere Zufallsfelder definieren, deren Ränder eine noch allgemeinere Verteilung besitzen, beispielsweise eine *semi Operator-stabile* oder eine *temperierte Operator-stabile Verteilung*, man vergleiche dazu die Ausführungen in [31] und [6]; dann wird sich das zuvor erprobte Zusammenspiel mit den verallgemeinerten Polarkoordinaten vermutlich jedoch als sehr herausfordernd erweisen. Hält man also zunächst an der Operator-Stabilität fest, so dürfte es spannend sein, weitere α-stabile Beispiele aus der Literatur in ähnlicher Weise auszudehnen, wie es uns für die Darstellungen in [29] und [5] gelungen ist. In diesem Zusammenhang vergleiche man die Quellen [16] und [4]: Während die *Operator-skalierenden* Felder aus [16] verschiedene

Zeit-skalierende Exponenten auf geeigneten Unterräumen des $\mathbb{R}^d$ zulassen, variiert der Exponent $E = E(t) \in Q(\mathbb{R}^d)$ in [4], abhängig von der Position t des Zufallsfelds. Die Operator-Skalierung (siehe Definition 5.1.1 für $m = 1$) bleibt dabei nicht mehr erhalten, sondern wird durch eine schwächere, lokale Selbstähnlichkeitsbeziehung ersetzt. Ausgehend von (6.4) und (7.1) kann man sich in ähnlicher Weise nach der Existenz und den resultierenden Eigenschaften von Feldern mit *variablen* Exponenten $D(t)$ respektive $B(t)$ fragen. Diesbezüglich beachte man auch die Arbeiten [11], [12] und [13], in denen skalarwertige und stabile Prozesse dieses Typs behandelt werden.

Dabei könnte es in jedem der zuvor genannten Fälle hilfreich sein, Zufallsmaße zu betrachten, die nicht von der homogenen oder gar erzeugten Form wie im hinteren Teil dieser Arbeit sind; auch Integraldarstellungen mit beschränktem Integrationsbereich, also der Verwendung von Indikatorfunktionen sind denkbar. Andererseits wird man womöglich das Konzept der (strikten) Operator-Selbstähnlichkeit aufgeben beziehungsweise über Definition 5.1.1 hinaus verallgemeinern müssen (siehe oben). Ferner wird man aller Voraussicht nach schärfere Abschätzungen für die Normausdrücke des Matrixexponentials benötigen, so wie auf Basis von [43] im Beweis zu Lemma 7.3.3 bereits geschehen (man vergleiche auch [2] und [28]).

Noch konkreter lässt sich der Ausblick natürlich hinsichtlich Abschnitt 7.3 formulieren. Dieser zeigte für den dort behandelten Spezialfall bereits, dass die harmonische Darstellung sich von der moving-average Darstellung im Allgemeinen unterscheidet, insbesondere hat der komplexwertige Zugang uns wie erhofft einen zusätzlichen Nutzen gestiftet. Somit ergibt sich als erste weiterführende Frage, ob auch die Voraussetzungen von Theorem 7.1.1 oder Eigenschaft 7.2.1 genügen, um die Existenz stetiger Modifikationen zu erhalten. Andererseits zeigen gerade die Ergebnisse in [42] und [43], dass Theorem 7.3.4 genutzt werden kann, um eine obere Schranke für die Hausdorff-Dimension der Pfade und Graphen (dieser Modifikation auf kompakten Mengen) zu erhalten. Sofern also eine geeignete Verallgemeinerung von Lemma 5.2 in [43] gelingt, besteht die berechtigte Hoffnung, auch in diesem Falle Aussagen über die entsprechenden Hausdorff-Dimensionen et cetera treffen zu können. Ferner läge dann sogar die Vermutung nahe, exakt die gleichen Resultate wie in [43], Theorem 5.1 und [42], Theorem 4.1 etablieren zu können.

Ungeachtet der bereits angedeuteten Frage, ob die Selbstähnlichkeitseigenschaft aus Kapitel 5 für zukünftige (d, m)-Vektorfelder aufrecht erhalten werden kann, ist die Aussage von Theorem 5.2.2 in ihrer Allgemeinheit natürlich recht abstrakt. Das bedeutet insbesondere, dass - neben Ausschmückungen wie beispielsweise in [31], Chapter 11 für den Fall $d = 1$ geschehen - der Wunsch besteht, den Anziehungsbereich eines gegebenen OSS-Zufallsfelds besser zu verstehen. Ausgehend von der grundlegenden Fragestellung in [31] könnte man sich diesem Problem nähern, indem man zunächst nur solche Felder $\{Y(t) : t \in \mathbb{R}^d\}$ des Anziehungsbereichs betrachtet, die eine spezielle Struktur aufweisen, beispielsweise für jeden Zeitpunkt t aus endlich vielen Elementen einer zugrunde liegenden Familie von i.i.d. Zufallsvektoren gebildet werden.

Gerade im Kontext der beiden bewiesenen Darstellungen in dieser Arbeit ergibt sich die Frage nach möglichen Grenzwertsätzen. Denn auch hier fällt die Antwort, die wir bislang geben können, abstrakt aus: Da M im Falle der moving-average Darstellung (harmonische Darstellung analog) von einer strikt Operator-stabilen Verteilung μ mit $B \in \mathcal{E}(\mu)$ und dem d-dimensionalen Lebesguemaß λ_d erzeugt wird, erkennt man leicht, dass $\lambda_d(A)^B X \stackrel{d}{=} M(A)$ für alle $A \in \mathcal{S} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : \lambda_d(A) < \infty\}$, wobei $\mathcal{L}(X) = \mu$. Zugleich konnten wir zeigen, dass der Integrand in (6.4) für alle $t \in \mathbb{R}^d$ in $\mathcal{I}(M)$ liegt, gemäß Definition 4.1.5 existiert also für alle $t \in \mathbb{R}^d$ eine Folge einfacher Funktionen $(f_{n,t})_{n\in\mathbb{N}}$ wie in (4.1), sagen wir

$$f_{n,t}(s) = \sum_{j=1}^{k(n,t)} R_{j,n,t} \mathbb{1}_{A_{j,n,t}}(s), \quad s \in \mathbb{R}^d$$

mit

$$\sum_{j=1}^{k(n,t)} R_{j,n,t} \lambda_d(A_{j,n,t})^B X_j \to X_{\phi,D}(t) \tag{8.1}$$

stochastisch und für $n \to \infty$, wobei $X_1, X_2, ...$ eine Folge unabhängiger und identisch μ-verteilter Zufallsvektoren sei.
Die Konvergenzaussage in (8.1) ist jedoch in aller Regel nicht sehr praktikabel, sodass man geneigt ist, explizite Folgen einfacher Funktionen $(f_{n,t})$ zu suchen, die auch in geschlossener Form von t abhängen. Dabei könnte das Vorgehen in [22] für die Darstellungen aus [5] als Schablone dienen, wenngleich dort keine Konvergenz im *fdd*-Sinne gezeigt wird, sondern schlussendlich der Simulationsaspekt und die zugehörige Implementierung im Vordergrund stehen. Unter dem Vorbehalt, dass die Simulation Operator-stabiler Verteilungen im Allgemeinen noch Schwierigkeiten bereitet, wäre es unter Umständen dennoch möglich, zumindest das theoretische Fundament zur Simulation der Darstellungen aus Kapitel 6 und 7 zu erarbeiten, man vergleiche auch [21]. Nichtsdestotrotz erscheinen *echte* Grenzwertsätze (anstelle von *Diskretisierungen*) umso spannender, als diese uns gegebenenfalls erlauben würden, die Folge $X_1, X_2, ...$ in Darstellungen wie (8.1) durch solche i.i.d.-Folgen zu ersetzen, die zum Anziehungsbereich von μ (im Sinne von [31]) gehören und dann eventuell auch wieder leichter zu simulieren sind.

Abschließend wäre es denkbar, die Definition 5.2.1 des Anziehungsbereichs eines (d, m)-Vektorfeldes dahingehend abzuschwächen, dass man in (5.9) statt $s \mapsto s^V$ eine beliebige Abbildung $B(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^d)$ (respektive $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^d)$) zulässt und sich nach den Konsequenzen hinsichtlich Theorem 5.2.2 fragt. Um diese Aussage in analoger Weise zu konservieren, wird man dann aber vermutlich mehr von der Konvergenz in (5.9) (mit $B(s)$ statt s^V) fordern müssen, was auf einen alternativen Begriff des Anziehungsbereichs hinauslaufen würde.

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$A \subset B$	A ist eine (nicht notwendiger Weise echte) Teilmenge von B
A^*	Adjungierte von A (beispielsweise für $A \in \mathrm{L}(\mathbb{K}^n)$)
A^c	Komplement der Menge A (bezüglich eines Universums)
∂A	(topologischer) Rand der Menge A
$A_1 \oplus A_2$	direkte Summe der linearen Operatoren A_1 und A_2
$A_n \uparrow A$	Folge (A_n) mit $A_n \subset A_{n+1}$ und $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$
$A_n \downarrow A$	Folge (A_n) mit $A_{n+1} \subset A_n$ und $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = A$
$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$	Produkt-σ-Algebra von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$
$\mathcal{B}(\Omega)$	Borelsche σ-Algebra des (topologischen) Raums Ω
$B_\varepsilon(x)$	offene Kugel um x (beispielsweise für $x \in \mathbb{R}^n$) mit Radius ε
$\overset{d}{=}$	Verteilungsgleichheit
$\mathrm{diag}(a_1, ..., a_n)$	$n \times n$ Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $a_1, ..., a_n$, entsprechend für Blockmatrizen
$\det(A)$	Determinante von A (beispielsweise für $A \in \mathrm{L}(\mathbb{K}^n)$)
(d, m)-Vektorfeld	Zufallsfeld mit Werten in $\mathbb{R}^m$ und Indexmenge $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{E}(\mu)$	Menge der Exponenten der Operator-stabilen Verteilung μ
e	Eulersche Zahl
e	Vektor $(1, ..., 1)$ (Dimension kontextbezogen)

e_j	j-ter Einheitsvektor
$\mathbb{E}_{(\mathbb{P})}(X)$	Erwartungswert der $\mathbb{C}$-wertigen Zufallsvariable X (bezüglich $\mathbb{P}$)
ε_x	Punktmaß in x (beispielsweise für $x \in \mathbb{R}^n$)
$f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$	f ist eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-meßbare Abbildung von Ω nach Ω'
f^{-1}	kontextbezogen die Inverse oder die Urbildabbildung von f
$\stackrel{fdd}{=}$	Gleichheit aller endlich-dimensionalen Verteilungen
$\stackrel{fdd}{\Rightarrow}$	Verteilungskonvergenz aller endlich-dimensionalen Verteilungen
Γ_n	Menge $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
$\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$	Menge aller invertierbaren Endomorphismen auf $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{I}_{(p)}(M)$	Menge der bezüglich M (partiell) integrierbaren Funktionen
i	imaginäre Einheit
i.i.d.	unabhängig und identisch verteilt
$\mathrm{Im}\ z$	Imaginärteil des komplexen Vektors z (komponentenweise)
I_n	Identitätsoperator auf $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion der Menge A
$\mathbb{K}$	Körper (der reellen oder komplexen Zahlen)
$\ker(A)$	Kern von A (beispielsweise für $A \in \mathrm{L}(\mathbb{K}^n)$)
λ_M	Kontrollmaß des Zufallsmaßes M
$L^0(\Omega, \mathbb{K}^m)$	Menge aller $\mathbb{K}^m$-wertigen (und meßbaren) Zufallsvektoren auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
$L^1(S, \mu)$	$\{f : S \to \mathbb{C} : f$ ist meßbar und μ-integrierbar$\}$, wobei (S, Σ, μ) ein beliebiger Maßraum ist
$\mathrm{L}(\mathbb{K}^n)$	Menge aller Endomorphismen auf $\mathbb{K}^n$ (dargestellt als $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$)
$\mathcal{L}(X)$	Verteilung des Zufallsvektors X
$\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^n)$	Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$
$\mu_{\vert A}$	Einschränkung des Maßes μ auf eine geeignete Teilmenge A, entsprechend für Vektorräume et cetera

$\widehat{\mu}$	Fouriertransformierte des (beschränkten) Maßes μ
$\mu \ll \nu$	μ ist absolut stetig bezüglich ν
$\mu_1 * \mu_2$	Faltung der (beschränkten) Maße μ_1 und μ_2
$\mu_1 \otimes \mu_2$	Produktmaß der Maße μ_1 und μ_2
$\mu \odot \kappa$	Maß aus Proposition 3.4.2 (mit μ und κ wie dort beschrieben)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	abstrakter Wahrscheinlichkeitsraum
$\mathrm{Pot}(S)$	Potenzmenge der Menge S
pr^I_J	(kanonische) Projektion von I auf J (wobei $J \subset I$)
$Q(\mathbb{R}^n)$	Menge aller Matrizen auf $\mathbb{R}^n$, deren Eigenwerte
	strikt positive Realteile besitzen
$\mathrm{Re}\, z$	Realteil des komplexen Vektors z (komponentenweise)
$\sigma(A)$	Spektrum des linearen Operators A
$\sigma(\mathcal{S})$	erzeugte σ-Algebra des Mengensystems $\mathcal{S}$
S_B	die durch $\Vert\cdot\Vert_B$ induzierte Einheitssphäre
S^{n-1}	die (durch $\Vert\cdot\Vert$ induzierte) Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n : \Vert x\Vert = 1\}$
$\mathrm{supp}(\mu)$	Träger des Maßes μ
$\vert T\vert, T^+, T-$	totale, positive und negative Variation der Mengenfunktion T
t^A	das Matrixexponential $\exp((\ln t)A)$
$(T\mu)$	Bildmaß von μ unter der Abbildung T
$(\tau_B(x), l_B(x))$	verallgemeinerte Polarkoordinaten von x unter B
$\mathrm{tr}(A)$	Spur von A (beispielsweise für $A \in \mathrm{L}(\mathbb{K}^n)$)
$V_1 \oplus V_2$	direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2
$\mathrm{Var}_{(\mathbb{P})}(X)$	Varianz der reellen Zufallsvariable X (bezüglich $\mathbb{P}$)
W(OSS)	Operator-selbstähnlich (im weiteren Sinne)
$\overline{z}$	komplexe Konjugation des Vektors z (komponentenweise)
$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}_{(0,<0)}$	Menge der ganzen, rationalen, reellen, komplexen
	und natürlichen Zahlen (inklusive Null, kleiner Null et cetera)
$\#A$	Kardinalität der Menge A
$\vert \cdot \vert$	Betragsfunktion auf den reellen oder komplexen Zahlen

$\|\cdot\|$	die euklidische Norm (beispielsweise auf $\mathbb{R}^n$)
	oder die von ihr erzeugte Operatornorm (auf $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$)
$\|\cdot\|_1$	Betragssummennorm (auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$)
$\|\cdot\|_\infty$	Maximumsnorm (auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$)
$\|\cdot\|_B$	die von $B \in Q(\mathbb{R}^n)$ induzierte Norm (auf $\mathbb{R}^n$)
$\|\cdot\|_F$	Frobeniusnorm auf $\mathrm{L}(\mathbb{R}^n)$
$\Longrightarrow$	Konvergenz in Verteilung
$\xrightarrow{w}$	schwache Konvergenz
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	stochastische Konvergenz (auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$)
$< A >$	lineare Hülle der Menge A
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Standardskalarprodukt (beispielsweise auf $\mathbb{R}^n$)
$[\cdot, \cdot, \cdot]$	Lévy-Khintchine Tripel

Literaturverzeichnis

[1] Bauer, H. : *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Walter de Gruyter, 2001

[2] Biermé, H. ; Lacaux, C. : Hölder regularity for operator scaling stable random fields. In: *Stochastic Processes and their Applications* 119 (2009), Nr. 7, S. 2222–2248

[3] Biermé, H. ; Lacaux, C. u. a.: Modulus of continuity of some conditionally sub-Gaussian fields, application to stable random fields. In: *Bernoulli* 21 (2015), Nr. 3, S. 1719–1759

[4] Biermé, H. ; Lacaux, C. ; Scheffler, H.-P. : Multi-operator scaling random fields. In: *Stochastic Processes and their Applications* 121 (2011), Nr. 11, S. 2642–2677

[5] Biermé, H. ; Meerschaert, M. M. ; Scheffler, H.-P. : Operator scaling stable random fields. In: *Stochastic Processes and their Applications* 117 (2007), Nr. 3, S. 312–332

[6] Bouk Ali, A. : *Tempered operator stabile Verteilungen*, Universität Siegen, Diss., 2014

[7] Doob, J. L.: *Measure theory.* Bd. 143. Springer Science & Business Media, 2012

[8] Dudley, R. M.: *Real analysis and probability.* Bd. 74. Cambridge University Press, 2002

[9] Dunford, N. ; Schwartz, J. T. ; Bade, W. G. ; Bartle, R. G.: *Linear operators.* Wiley-interscience New York, 1971

[10] Elstrodt, J. : *Maß-und Integrationstheorie.* Springer, 2006

[11] Falconer, K. ; Liu, L. : Multistable processes and localizability. In: *Stochastic Models* 28 (2012), Nr. 3, S. 503–526

[12] Falconer, K. J. ; Le Guével, R. ; Véhel, J. L.: Localizable moving average symmetric stable and multistable processes. In: *Stochastic Models* 25 (2009), Nr. 4, S. 648–672

[13] Falconer, K. ; Véhel, J. L.: Multifractional, multistable, and other processes with prescribed local form. In: *Journal of Theoretical Probability* 22 (2009), Nr. 2, S. 375–401

[14] Forst, W. ; Hoffmann, D. : *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer, 2005

[15] Goldhorn, K.-H. ; Heinz, H.-P. : *Mathematik für Physiker 2: Funktionentheorie-Dynamik-Mannigfaltigkeiten-Variationsrechnung.* Springer, 2007

[16] Hoffmann, A. : *Operator Scaling Stable Random Sheets with application to binary mixtures*, Universität Siegen, Diss., 2011

[17] Hudson, W. N. ; Mason, J. D.: Operator-self-similar processes in a finite-dimensional space. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 273 (1982), Nr. 1, S. 281–297

[18] Jakob, N. : *Pseudo Differential Operators and Markov Processes. Vol. 1.* Imperial College Press, London, 2001

[19] Jurek, Z. J. ; Mason, J. D.: *Operator-limit distributions in probability theory.* Wiley, 1993

[20] Karcher, W. ; Scheffler, H.-P. ; Spodarev, E. : Infinite divisibility of random fields admitting an integral representation with an infinitely divisible integrator. In: *arXiv preprint arXiv:0910.1523* (2009)

[21] Karcher, W. ; Scheffler, H.-P. ; Spodarev, E. : Simulation of infinitely divisible random fields. In: *Communications in Statistics-Simulation and Computation* 42 (2013), Nr. 1, S. 215–246

[22] Kegel, T. : *Simulation and estimation of operator scaling stable random fields*, Universität Siegen, Diss., 2011

[23] Klenke, A. : *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Bd. 1. Springer, 2006

[24] Kozubowski, T. J. ; Meerschaert, M. M. ; Scheffler, H.-P. : The operator ν-stable laws. In: *Publ. Math. Debrecen* 63 (2003), Nr. 4, S. 569–585

[25] Lamperti, J. : Semi-stable stochastic processes. In: *Transactions of the American mathematical Society* 104 (1962), Nr. 1, S. 62–78

[26] Lang, S. : *Real Analysis.* Addison-Wesley, 1983

[27] Li, Y. ; Wang, W. ; Xiao, Y. u. a.: Exact moduli of continuity for operator-scaling Gaussian random fields. In: *Bernoulli* 21 (2015), Nr. 2, S. 930–956

[28] Li, Y. ; Wang, W. ; Xiao, Y. u. a.: Exact moduli of continuity for operator-scaling Gaussian random fields. In: *Bernoulli* 21 (2015), Nr. 2, S. 930–956

[29] Li, Y. ; Xiao, Y. : Multivariate operator-self-similar random fields. In: *Stochastic Processes and their Applications* 121 (2011), Nr. 6, S. 1178–1200

[30] Maejima, M. ; Mason, J. D.: Operator-self-similar stable processes. In: *Stochastic Processes and their Applications* 54 (1994), Nr. 1, S. 139–163

[31] Meerschaert, M. M. ; Scheffler, H.-P. : *Limit distributions for sums of independent random vectors: Heavy tails in theory and practice*. Bd. 321. John Wiley & Sons, 2001

[32] Prékopa, A. : Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra. In: *Acta Mathematica Hungarica* 7 (1956), Nr. 2, S. 201–213

[33] Prékopa, A. : On stochastic set functions. I. In: *Acta Mathematica Hungarica* 7 (1956), Nr. 2, S. 215–263

[34] Prékopa, A. : On stochastic set functions. III. In: *Acta Mathematica Hungarica* 8 (1957), Nr. 3-4, S. 375–400

[35] Rajput, B. S. ; Rosinski, J. : Spectral representations of infinitely divisible processes. In: *Probability Theory and Related Fields* 82 (1989), Nr. 3, S. 451–487

[36] Resnick, S. I.: *Heavy-tail phenomena: probabilistic and statistical modeling*. Springer Science & Business Media, 2007

[37] Rosiński, J. : *Bilinear random integrals*. Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk Warszawa, 1987

[38] Royden, H. L. ; Fitzpatrick, P. : *Real analysis*. Macmillan New York, 1988

[39] Ryan, R. A.: *Introduction to tensor products of Banach spaces*. Springer Science & Business Media, 2013

[40] Samoradnitsky, G. ; Taqqu, M. S.: *Stable non-Gaussian random processes: stochastic models with infinite variance*. Bd. 1. CRC press, 1994

[41] Sato, K.-I. : *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge university press, 1999

[42] Sönmez, E. : The Hausdorff dimension of multivariate operator-self-similar Gaussian random fields. In: *arXiv preprint arXiv:1511.09311* (2015)

[43] Sönmez, E. : Sample path properties of multivariate operator-self-similar stable random fields. In: *arXiv preprint arXiv:1602.01282* (2016)

[44] Srivastava, S. M.: *A course on Borel sets*. Bd. 180. Springer Science & Business Media, 2008

[45] Werner, D. : *Funktionalanalysis*. Springer, 2006

[46] Woyczyński, W. A.: *Ind-additive functionals on random vectors*. Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk Warszawa, 1970