Über operator-stable-like Prozesse und ihre Eigenschaften

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von

M.Sc. Daniel Schulte

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen

Siegen 2018

gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

GUTACHTER
Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler, Universität Siegen
Prof. Dr. Alexander Schnurr, Universität Siegen

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 07.12.2018

Zusammenfassung

In dieser Arbeit führen wir im ersten Teil eine neue Klasse von stochastischen Prozessen ein, die operator-stable-like Prozesse. Diese verhalten sich lokal wie operator-stabile Prozesse, aber lassen räumliche Inhomogenitäten zu. Die operator-stable-like Prozesse bilden eine Teilklasse der Feller-Prozesse und enthalten als Spezialfall die stable-like Prozesse.
Wir modifizieren das Lévy-Maß einer operator-stabilen Verteilung ohne Gaußanteil, sodass der Exponent nicht länger konstant ist, sondern eine matrixwertige Funktion $E(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) des Ortes ist. Falls der Exponent gewisse Bedingungen erfüllt, definieren wir über diese modifizierte Darstellung eine Familie von Lévy-Maßen $\phi(x, \cdot)$, die wir operator-stable-like Lévy-Maße nennen. Zu dem operator-stable-like Lévy-Maß stellen wir eine zugehörige stochastische Differentialgleichung (SDE) auf und zeigen, dass die Lösung dieser SDE ein Feller-Prozess ist. Für symmetrische operator-stable-like Lévy-Maße leiten wir eine Symboldarstellung des konstruierten Feller-Prozesses über diese Lévy-Maße $\phi(x, \cdot)$ her. Den zugehörigen Prozess bezeichnen wir als operator-stable-like Prozess.
Der zweite Teil beschäftigt sich zunächst mit der Untersuchung der Eigenschaften des Symbols der operator-stable-like Prozesse. Wir zeigen eine Skalierungseigenschaft. Aus der Skalierungseigenschaft leiten wir obere und untere Abschätzungen her. Mithilfe dieser Abschätzungen des Symbols analysieren wir mehrere Eigenschaften der Prozesse. Wir bestimmen Maximalabschätzungen, die Existenz von Momenten, das asymptotische Kurz- und Langzeitverhalten der Pfade sowie die p-Variation.

Abstract

In this thesis, we will introduce a new class of stochastic processes, so-called operator-stable-like processes. Roughly speaking, they behave locally like operator stable processes, but they need not to be homogenous in space. They are a subclass of Feller processes. A special case of operator-stable-like processes are stable-like processes.

We modify the Lévy measure of a operator stable law without normal component in such a way that the exponent E ($d \times d$ matrix) is no longer constant but depends on the position $x \in \mathbb{R}^d$ in space. If the exponent $E(x)$ satisfies certain conditions, we call the resulting family of Lévy measures $\phi(x, \cdot)$ operator-stable-like Lévy measures. According to the Lévy measure, we construct an associated stochastic differential equation (SDE) and prove that the solution of this SDE is a Feller process. We show that for symmetric operator-stable-like Lévy measures the symbol of the constructed Feller process can be represented with these Lévy measures. We call the associated process operator-stable-like process.

In the second part we investigate the properties of the symbol. We show a scaling property. The scaling property is helpful to get lower and upper bounds for the symbol. Then we use these estimations to study the properties of the processes. We will focus on maximal estimations, the existence of moments, the short- and long-time behaviour of the sample paths and the p-variation.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler für die ausgezeichnete Betreuung bedanken. Außerdem danke ich Herrn Prof. Dr. Alexander Schnurr, dass er sich bereit erklärt hat, die vorliegende Arbeit zu begutachten.

Schließlich danke ich meinen Eltern und meiner Schwester Anna für die vielfältige und ständige Unterstützung, die ich durch sie in den vergangenen Jahren erhalten habe.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine wichtige Klasse von stochastischen Prozessen sind Feller-Prozesse, die in den letzten Jahren sehr gründlich theoretisch untersucht wurden. Sie stellen eine Teilklasse der Markov-Prozesse dar. Feller-Prozesse sind eine natürliche Verallgemeinerung von Lévy-Prozessen und beinhalten diese als einen Spezialfall, aber sie sind im Gegensatz zu Lévy-Prozessen im Allgemeinen nicht homogen im Raum. Lévy-Prozesse werden durch ihren charakteristischen Exponenten eindeutig beschrieben. Eine ähnliche Funktion existiert für Feller-Prozesse, falls die Funktionen $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ im Definitionsbereich des Erzeugers liegen. In diesem Fall lässt sich der Erzeuger des Feller-Prozesses durch

$$Au(x) = -\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} q(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi \qquad \text{für alle } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

darstellen. Die Funktion $q : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ wird Symbol genannt und besitzt die Lévy-Khinchin-Darstellung

$$q(x,\xi) = -\,i\langle l(x),\xi\rangle + \frac{1}{2}\langle \xi, Q(x)\xi\rangle + \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y,\xi\rangle} + 1_{\{\|y\|<1\}} i\langle \xi, y\rangle\right)\,\phi(x,dy),$$

wobei $(l(x), Q(x), \phi(x,\cdot))$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ein Lévy-Tripel und $\Gamma = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ist. Für Lévy-Prozesse ist das Symbol der charakteristische Exponent und hängt nicht vom Ort x ab. Ansonsten ist das Symbol, wie der Prozess, abhängig von der Position im Raum. Außerdem ist das Symbol ein wichtiges Hilfsmittel, um das Verhalten des Feller-Prozesses zu beschreiben.

Lévy-Prozesse werden in der stochastischen Modellierung häufig verwendet. Dabei stellt ihre räumliche Homogenität eine große Einschränkung dar, da die empirischen Daten und theoretischen Überlegungen oft auf einen inhomogenen Prozess hinweisen. Diese Einschränkung lässt sich mit Feller-Prozessen beheben, da sie nicht homogen im Raum sein müssen. In vielen Anwendungsgebieten würden sie für realistischere Modelle sorgen. Beispiele für mögliche Anwendungsgebiete, in denen bisher vor allem Lévy-Prozesse benutzt werden, sind die Finanzmathematik, Geologie, Hydrologie und die Physik (siehe die Literatur in [9]). Ein möglicher Feller-Prozess für die Anwendung ist der **α-stable-like Prozess**, der sich lokal wie ein α-stabiler Lévy-Prozess verhält. Dabei wird das Verhalten des stable-like Prozesses durch eine Funktion $\alpha(x) \in (0,2)$ ($x \in \mathbb{R}$), den sogenannten Stabilitätsindex, bestimmt, d.h. das Verhalten hängt somit von der aktuellen Position x im Raum ab. Falls $\alpha(x) = \alpha$ konstant ist, gelangt man zu dem α-stabilen Lévy-Prozess. Der stable-like Prozess ist ein univariater Prozess. Für die Modellierung im Raum sind jedoch besonders vektorwertige stochastische Prozesse interessant. In der mehrdimensionalen Situation wurden bisher nur stable-like Prozesse betrachtet, deren Stabilitätsindex $\alpha(x) \in (0,2)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) in jeder Komponente des Zufallsvektor identisch ist.

Im Mehrdimensionalen gibt es die Klasse von **operator-stabilen Lévy-Prozessen** und Verteilungen, die in [22] theoretisch untersucht wurden. Diese enthalten als Speziallfall die α-stabilen Lévy-Prozesse. Bei den operator-stabilen Lévy-Prozessen wird der Stabilitätsindex durch eine Matrix $E \in GL(\mathbb{R}^d)$ ersetzt, die Exponent genannt wird. Dies hat den Vorteil, dass der Stabilitätsindex in jeder Komponente des Vektors ein $\alpha^{(i)} \in (0,2)$ ($i = 1,\dots,d$) sein kann und nicht in jeder Komponente identisch ist. Dadurch lassen sich viele Phänomene flexibler beschreiben. Aber operator-stabile Prozesse haben wiederum den Nachteil in der Modellierung, dass sie als Lévy-Prozesse räumlich homogen sind, da der Exponent konstant ist.

Das Ziel der Arbeit ist die Konstruktion einer neuer Teilklasse von Feller-Prozessen, die im Gegensatz zu operator-stabilen Lévy-Prozessen nicht mehr räumlich homogen sein müssen, sondern im Allgemeinen von der Position im Raum abhängen. Diese Klasse von Prozessen werden wir dementsprechend **operator-stable-like Prozesse** nennen, da sie sich lokal wie operator-stabile Prozesse verhalten. Nach der Konstruktion und Definition der operator-stable-like Prozesse werden wir im zweiten Teil der Arbeit, wie es der Titel schon erwähnt, ihre Eigenschaften untersuchen.

Den Ausgangspunkt für die Konstruktion der operator-stable-like Prozesse bildet das Lévy-Maß einer operator-stabilen Verteilung bzw. Prozesses ohne Gaußanteil. Dieses lässt sich konkret für einen orthogonal diagonalisierbaren Exponenten E und ein endliches Maß σ auf der $d-1$-dimensionalen Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ darstellen (siehe Theorem 7.2.5 in [22]):

$$\phi(A) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_A(r^E\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta), \quad A \in \mathcal{B}(\Gamma). \tag{1.1}$$

Da die operator-stable-like Prozesse im Allgemeinen nicht mehr räumlich homogen sein sollen, ersetzen wir den Exponenten durch eine matrixwertige Funktion des Ortes $E(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$). Die so entstehende Modifikation nutzen wir für die Definition einer Familie von Lévy-Maßen $(\phi(x,\cdot))_{x\in\mathbb{R}^d}$, den sogenannten **operator-stable-like Lévy-Maßen**.

Wir werden uns bei der Konstruktion auf x-abhängige Lévy-Tripel ohne Drift und ohne Gaußanteil beschränken, deren x-abhängiges Lévy-Maß die operator-stable-like Lévy-Maße sind. Nun erschwert eine Tatsache die Konstruktion der operator-stable-like Prozesse. Anders als bei Lévy-Prozessen gehört nicht jedes x-abhängige Lévy-Tripel bzw. Symbol zu einem korrespondierenden Feller-Prozess: Einen Überblick über die verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten eines Feller-Prozesses aus einem gegebenen Symbol liefern [10] bzw. [16]. Unser Ansatz ist das Lösen einer stochastischen Differentialgleichung (SDE). Bei der Wahl der SDE und der Voraussetzungen an das Lévy-Tripel orientieren wir uns an einer SDE-Darstellung von stable-like Prozessen, die wir unter anderem mit dem Exponenten verallgemeinern, siehe Proposition 2.1 in [32].

Für die Konstruktion und Analyse der operator-stable-like Prozesse benötigen wir Resultate aus verschiedenen Bereichen, die wir im zweiten bis vierten Kapitel kurz erwähnen. In Kapitel 2 geben wir zunächst einen Überblick über die wichtigsten Räume und Notationen, die in der Arbeit auftauchen. Danach wiederholen wir die Eigenschaften des Matrixexponentials und führen die sogenannten verallgemeinerten Polarkoordinaten ein. Das Kapitel 3 beschäftigt sich mit den Markov-Prozessen und seiner Teilklasse den Feller-Prozessen. Das vierte Kapitel über die stochastische Integrationstheorie benötigen wir für das Lösen der stochastischen Differentialgleichung. Nach einer kurzen Einführung von Poisson-Zufallsmaßen und des kompensierten Poisson-Zufallsmaßes definieren wir das stochastische Integral. Im dritten Abschnitt des Kapitels beschreiben wir das Verfahren des Interlacings, um eine Lösung der SDE zu konstruieren. Im letzten Abschnitt erinnern wir kurz an die Itô-Formel, die wir bei der Berechnung des Erzeugers brauchen.

In Kapitel 5 definieren wir zunächst für eine Klasse von Matrizen $E(x)$ (den Exponenten), die gewisse Eigenschaften erfüllen, die operator-stable-like Lévy-Maße über die Darstellung:

$$\phi(x,A) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_A(r^{E(x)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta), \quad A \in \mathcal{B}(\Gamma) \text{ und } x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.2}$$

wobei σ ein endliches Maß auf $\mathbb{S}^{d-1}$ ist. Aus den Bedingungen an den Exponenten folgt dabei, dass die durch (1.2) definierten Maße für festes x Lévy-Maße sind. In Abschnitt 5.2 führen wir die stochastische Differentialgleichung

$$X_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(X_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(X_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr) \qquad (1.3)$$

ein. Statt die SDE genauer zu beschreiben, möchten wir an dieser Stelle nur festhalten, dass mit $E(x)$ die Exponenten aus der Definition des operator-stable-like Lévy-Maßes gemeint sind und dass die SDE für diese Exponenten eine Lösung besitzt. Die Existenz einer eindeutigen pfadweisen Lösung zeigen wir mithilfe der Lipschitz- und linearen Beschränktheitsbedingung. Danach weisen wir nach, dass die Lösung ein universeller Markov-Prozess ist und bestimmen seinen Erzeuger. Dabei sehen wir, dass die Funktionen $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ im Definitionsbereich des Erzeugers liegen. Dann beweisen wir, dass die Lösung tatsächlich ein Feller-Prozess ist. In Abschnitt 5.3 bestimmen wir sein Symbol. Dieses kann jedoch nicht mit dem operator-stable-like Lévy-Maß dargestellt werden, d.h. der bisher konstruierte Feller-Prozess besitzt nicht das x-abhängige Lévy-Tripel $(0, 0, \phi(x, \cdot))$.

Im sechsten Kapitel beschäftigen wir uns mit einer Teilklasse der oben konstruierten Feller-Prozesse. Wir stellen die zusätzliche Bedingung auf, dass das Maß σ symmetrisch auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ ist. Dabei ist die Symmetrie von σ äquivalent zur Symmetrie des operator-stable-like Lévy-Maßes. Mit dieser zusätzlichen Bedingung leiten wir eine Symboldarstellung für den konstruierten Feller-Prozess über das operator-stable-like Lévy-Maß her:

$$q(x, \xi) = \int_\Gamma (1 - \cos(\langle y, \xi \rangle))\, \phi(x, dy), \quad x \in \mathbb{R}^d. \qquad (1.4)$$

Den zugehörigen Feller-Prozess, d.h. die Lösung der SDE (1.3), nennen wir operator-stable-like Prozess. Diese Klasse von Prozessen enthält als Spezialfall die stable-like Prozesse. Außerdem gelangt man für konstante Exponenten zu einem operator-stabilen Prozess (ohne Drift und Gaußanteil sowie mit symmetrischen Lévy-Maß). Anschließend beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften des Symbols und beweisen eine Skalierungseigenschaft:

$$q(x, t^{E(x)}\xi) = tq(x, \xi) \quad \text{für alle } t > 0. \qquad (1.5)$$

Die Skalierungseigenschaft ist hilfreich um (scharfe) obere und untere Abschätzungen für das Symbol zu finden. Im Abschnitt 6.3 leiten wir eine weitere komplexe Darstellung des Symbols über das operator-stable-like Lévy-Maß her. Dabei müssen wir aber unter anderem den zulässigen Bereich der Realteile der Eigenwerte des Exponenten weiter einschränken, so dass die Definition der Prozesse über dieses Symbol weniger Sinn ergibt. Für die komplexe Symboldarstellung leiten wir ähnliche Eigenschaften wie für das Symbol des operator-stable-like Prozesses (1.4) her.

Das siebte Kapitel beinhaltet die Untersuchung der Pfadeigenschaften des operator-stable-like Prozesses. Dazu verwenden wir die Abschätzungen für das Symbol. Wir leiten Maximalabschätzungen aus den allgemeinen Resultaten für Feller-Prozesse her. Diese benutzen wir für die Untersuchung der Momente. Für die Betrachtung des asymptotischen Verhaltens bestimmen wir die verallgemeinerten Blumenthal-Getoor-Pruitt Indizes des operator-stable-like Prozesses. Mit den Indizes können wir das Kurz- und Langzeitverhalten der Pfade beschreiben. Abschließend bestimmen wir die Endlichkeit der p-Variation der Prozesse.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich nochmals mit Eigenschaften des konstruierten Feller-Prozesses aus Kapitel 5, d.h. der Lösung der SDE (1.3) ohne die Symmetrie des Maßes σ vorauszusetzen. Wir betrachten die einzelnen Terme der SDE (1.3), d.h.

$$M_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})} \theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \tag{1.6}$$

und

$$Z_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(Z_{s-})} \theta N(ds, d\theta, dr) \tag{1.7}$$

separat. Für die Lösungen der beiden SDEs untersuchen wir die Eigenschaften ihrer Symbole. Außerdem analysieren wir für die Lösung von (1.6) ihre Pfadeigenschaften (Maximalabschätzungen, Momente, Kurz- und Langzeitverhalten).

2 Grundlagen

2.1 Notationen und Räume

Die verwendeten Notationen in dieser Arbeit sind meistens Standard. Nichtsdestotrotz geben wir einen kurzen Überblick.

Wir schreiben $\mathbb{N} := \{1, 2, ...\}$ für die positiven ganzen Zahlen, die bei eins starten, und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\mathbb{R}$ sind die reellen, $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ und $\mathbb{C}$ die komplexen Zahlen. Mit $d \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Raumdimension. Um die Notation kurz zu halten, schreiben wir Γ für die Menge $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Das Minimum von zwei Zahlen oder zwei reellwertiger Funktionen wird auch abgekürzt durch $x \wedge y := \min\{x, y\}$ und das Maximum durch $x \vee y := \max\{x, y\}$. Der positive Teil einer rellwertigen Funktion ist $f_+(x) := f(x) \vee 0$ und der negative Teil $f_-(x) := -(f(x) \wedge 0)$. Für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \sim g$, falls Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren mit $C_1 f(x) \leq g(x) \leq C_2 f(x)$.

Vektoren im $\mathbb{R}^d$ sind Spaltenvektoren. Für den transponierten Vektor benutzen wir ^{t} und die Komponenten des Vektors sind $x^{(j)}$ $(j = 1, ..., d)$. Für die Komponenten einer $d \times n$ Matrix A benutzen wir kleine Buchstaben und schreiben a^{jk} $(j = 1, \ldots d, k = 1, \ldots, n)$ für seine Komponenten. Das euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren x, y bezeichnen wir mit $\langle x, y\rangle$ und $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{l^2}$ ist die euklidische Norm. $|\cdot|$ ist der Betrag im eindimensionalen Fall bzw. die Betragssummennorm auf $\mathbb{R}^d$ oder $L(\mathbb{R}^d)$. Die Supremumsnorm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_\infty$. Für die Menge aller Endomorphismen schreiben wir $L(\mathbb{R}^d)$, die wir als $d \times d$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ auffassen, und $GL(\mathbb{R}^d)$ für die Menge aller invertierbaren Endomorphismen .

Die offene Kugel mit Radius R um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ ist $B_R(x) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| < R\}$, $\overline{B}_R(x)$ die abgeschlossene Kugel mit Radius R sowie $B_R^c(x)$ bzw. $\overline{B}_R^c(x)$ für das Komplement der offenen bzw. abgeschlossenen Kugel. Allgemein schreiben wir $\overline{A}$ für den Abschluss einer Menge A.

Die partiellen Ableitungen einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$. Für den Gradienten schreiben wir $\nabla := (\partial_1, ..., \partial_d)^t$ und für die Divergenz eines Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ schreiben wir $\operatorname{div} F := \langle \nabla, F\rangle$. Allgemein ist für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha^{(1)}} \ldots \partial_d^{\alpha^{(d)}}.$$

Den Raum der beschränkten Maße auf $\mathbb{R}^d$ wird mit $M^b(\mathbb{R}^d)$ bezeichnet und der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße mit $M^1(\mathbb{R}^d)$. $\mathbb{E}$ bzw. $\mathbb{E}^x$ ist der (bedingte) Erwartungswert bzgl. $\mathbb{P}$ bzw. $\mathbb{P}^x$. Dabei beschreibt $\mathbb{P}^x$ für $x \in \mathbb{R}^d$ die Wahrscheinlichkeit eines stochastischen Prozesses, der in x startet. Die Varianz bzgl. $\mathbb{P}$ bezeichnen wir mit Var. Für das Dirac-Maß in x schreiben wir δ_x. $\mathcal{B}^d$ ist die Borelsche $\sigma-$Algebra des $\mathbb{R}^d$, im eindimensionalen Fall schreiben wir auch $\mathcal{B} := \mathcal{B}^1$. Das d-dimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}^d$ wird abgekürzt durch λ^d.

Wir betrachten verschiedene Räume von Funktionen: $B(\mathbb{R}^d) := B(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ sind die Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $B_b(\mathbb{R}^d)$ die beschränkten Borel-messbaren Funktionen. Die stetigen Funktionen bezeichnen wir mit $C(\mathbb{R}^d)$. Entsprechend ist $C_b(\mathbb{R}^d)$, $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ oder $C_c(\mathbb{R}^d)$ der Raum der stetigen Funktionen, die beschränkt, im Unendlichen verschwinden bzw. kompakten Träger besitzen. Der obere Index $C^i(\mathbb{R}^d)$ bzw. $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ steht für die i-mal stetig differenzierbaren bzw. unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen. Den Raum der μ-integrierbaren Funktionen kürzen wir mit $L^1(\mu)$ ab und entsprechend für $p \geq 1$ den Raum der p-fach μ-integrierbaren Funktionen mit $L^p(\mu)$. Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ heißt càdlàg, falls sie rechtsseitig stetig ist und linksseitige Grenzwerte besitzt. Den Schwartz-Raum bezeichnen wir mit $S(\mathbb{R}^d)$. Er ist wie folgt definiert, siehe Abschnitt V.2 in [31]: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ heißt schnell fallend, falls

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^m f(x) = 0 \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$S(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \partial^\beta f(x) \text{ ist schnell fallend für alle } \beta \in \mathbb{N}_0^d \right\}.$$

Der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt dicht im Schwartz-Raum. Für $u \in S(\mathbb{R}^d)$ heißt

$$\hat{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x) dx \tag{2.1}$$

die **Fourier-Transformierte**. Insbesondere gilt für $u \in S(\mathbb{R}^d)$ die Rücktransformation

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{u}(\xi) d\xi. \tag{2.2}$$

2.2 Matrixexponential und lineare Operatoren

In diesem Abschnitt führen wir kurz das Matrixexponential ein. Dies ist elementar wichtig für den weiteren Verlauf der Arbeit. Deswegen stellen wir einige Eigenschaften des Matrixexponential dar und leiten abschließend Abschätzungen für dieses her. Dabei orientieren wir uns an den Ausführungen in [22] und [18].
Zunächst führen wir jedoch ein wichtige Norm in der Arbeit ein. Die Operatornorm auf $L(\mathbb{R}^d)$ ist definiert durch

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|. \tag{2.3}$$

Wichtige Eigenschaften der Operatornorm zusätzlich zu den Normaxiomen sind, dass sie submultiplikativ und verträglich mit der zugrunde liegenden Vektorraumnorm ist, d.h. für alle $A, B \in L(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \text{ und } \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Außerdem gilt für die Operatornorm die Abschätzung

$$\|Ax\| \geq \|x\|/\|A^{-1}\| \tag{2.4}$$

für alle $A \in GL(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Definition 2.1. Für einen linearen Operator $A \in L(\mathbb{R}^d)$ und $r > 0$ definieren wir das **Matrixexponential** über die Potenzreihe

$$r^A := \exp(A \ln r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} (\ln r)^k \quad \in L(\mathbb{R}^d), \tag{2.5}$$

mit $A^0 := id$.

Ähnlich wie die klassischen Potenzgesetze besitzt das Matrixexponential die folgenden Eigenschaften:

Proposition 2.2. *Für alle $A, B \in L(\mathbb{R}^d)$ und $r, s > 0$ gilt:*

(a) $r^A = id$, *falls* $r = 1$.

(b) $r^0 = id$ *mit* 0 *als Nulloperator auf* $\mathbb{R}^d$.

(c) $r^A r^B = r^{A+B}$, *falls* A *und* B *kommutieren.*

(d) $r^A s^A = (rs)^A$.

(e) r^A *ist invertierbar mit der Inversen* $r^{-A} = (1/r)^A = (r^A)^{-1}$.

(f) $r \mapsto r^A \in GL(\mathbb{R}^d)$ *ist stetig.*

(g) $r^{ABA^{-1}} = Ar^B A^{-1}$.

Wir interessieren uns vor allem für lineare Operatoren, die variablenabhängig sind, d.h.

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto E(x) \in L(\mathbb{R}^d).$$

Die Komponenten der Matrix sind nicht mehr konstant, sondern hängen insbesondere von dem Ort x ab. Für $E(x) \in L(\mathbb{R}^d)$ definieren wir

$$\lambda(x) := \min\{\text{Re } \sigma(x) : \sigma(x) \text{ ist Eigenwert von } E(x)\}$$

und

$$\Lambda(x) := \max\{\text{Re } \sigma(x) : \sigma(x) \text{ ist Eigenwert von } E(x)\}.$$

Um Missverständnisse in der Notation zu vermeiden, kennzeichnen wir das Minimum und Maximum des Realteils der Eigenwerte von weiteren Matrizen mit einem zusätzlichen Subskript der entsprechenden Matrix.

Essentiell für unsere Arbeit sind die folgenden Abschätzungen des Matrixexponentials durch seine Eigenwerte. Dabei verallgemeinern wir die Resultate aus [18] auf Matrizen mit nicht konstanten Komponenten.

Satz 2.3. *Sei $E : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d)$. Dann existieren für alle $r_0 > 0$ und $\delta > 0$ Konstanten $C_1(x), C_2(x) > 0$, so dass*

$$\|r^{E(x)}\| \leq \begin{cases} C_1(x) r^{\lambda(x)-\delta} & \text{für } 0 < r < r_0, \\ C_2(x) r^{\Lambda(x)+\delta} & \text{für } r \geq r_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Beweis. Mit Theorem 2.2.4 in [22] gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\lim_{r\to\infty} \|r^{-\alpha} r^{E(x)} y\| = 0$$

kompakt gleichmäßig in $y \in \mathbb{R}^d$, falls $\alpha > \Lambda(x)$. Es folgt durch Betrachtung der kompakten Menge $\mathbb{S}^{d-1}$, dass

$$\lim_{r\to\infty} \|r^{-\alpha} r^{E(x)}\| = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Für beliebige $\delta > 0$ erhalten wir somit mit $\alpha := \Lambda(x) + \delta$:

$$\lim_{r\to\infty} \|r^{-(\Lambda(x)+\delta)} r^{E(x)}\| = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.7}$$

Nun betrachten wir den Fall $\lambda(x) > 0$. Für $B(x) := -E(x)$ ist $\Lambda_{B(x)}(x) = -\lambda(x)$ und wir bekommen mit (2.7):

$$\lim_{r\to 0} \|r^{-(\lambda(x)-\delta)} r^{E(x)}\| = \lim_{r\to\infty} \|r^{\lambda(x)-\delta} r^{-E(x)}\| = \lim_{r\to\infty} \|r^{-(\Lambda_{B(x)}(x)+\delta)} r^{B(x)}\| = 0.$$

Wir setzen

$$C_1(x) := \sup_{0<r\leq r_0} \|r^{-(\lambda(x)-\delta)} r^{E(x)}\| \quad \text{und} \quad C_2(x) := \sup_{r\geq r_0} \|r^{-(\Lambda(x)+\delta)} r^{E(x)}\|.$$

Damit ist für $0 < r \leq r_0$

$$\|r^{E(x)}\| = r^{\lambda(x)-\delta} \|r^{-(\lambda(x)-\delta)} r^{E(x)}\| \leq C_1(x) r^{\lambda(x)-\delta}$$

und entsprechend für $r \geq r_0$

$$\|r^{E(x)}\| = r^{\Lambda(x)+\delta} \|r^{-(\Lambda(x)+\delta)} r^{E(x)}\| \leq C_2(x)^{\Lambda(x)+\delta}.$$

Für den Fall $\lambda(x) \leq 0$ siehe den Beweis von Proposition 2.1.4 in [18]. □

Für orthogonal diagonalisierbare Matrizen $E(x)$ erhalten wir für $r_0 = 1$ die schärfere Abschätzung. Diese hat zusätzlich den Vorteil, dass die Konstanten unabhänigig von dem Ort x sind.

Satz 2.4. *Sei $E : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d)$ orthogonal diagonalisierbar. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|r^{E(x)}\| \leq \begin{cases} Cr^{\lambda(x)} & \text{für } 0 < r < 1, \\ Cr^{\Lambda(x)} & \text{für } r \geq 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Beweis. Falls $E(x)$ orthogonal diagonalisierbar ist, existieren orthogonale Matrizen $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto O(x) \in GL(\mathbb{R}^d)$ und eine Diagonalmatrix $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto D(x) \in GL(\mathbb{R}^d)$, so dass

$$E(x) = O(x)D(x)O(x)^{-1}$$

ist. Für $r > 0$ gilt mit Proposition 2.2 (g):

$$r^{E(x)} = O(x)r^{D(x)}O(x)^{-1}.$$

Somit folgt mit Ausnutzen der Submultiplikativität der Operatornorm

$$\|r^{E(x)}\| \leq \|O(x)\|\|r^{D(x)}\|\|O(x)^{-1}\| = \|r^{D(x)}\|.$$

Für Diagonalmatrizen $D(x) := \operatorname{diag}(a_1(x), \dots, a_d(x))$ ist

$$r^{D(x)} = \operatorname{diag}(r^{a_1(x)}, \dots, r^{a_d(x)}).$$

Mit der Betragssummennorm $|\cdot|$ erhalten wir für $0 < r < 1$:

$$|r^{D(x)}| = \sum_{k=1}^{d} r^{a_k(x)} \leq dr^{\lambda_{D(x)}(x)}.$$

Da $D(x)$ und $E(x)$ die gleichen Eigenwerte besitzen, folgt die Behauptung in diesem Fall. Der Beweis des zweiten Falls erfolgt unter Beachtung von $\max\{a_1(x), \dots, a_d(x)\} = \Lambda_{D(x)}(x)$ und $r \geq 1$ analog. Im $\mathbb{R}^d$ bzw. $L(\mathbb{R}^d)$ sind alle Normen äquivalent, so dass die Abschätzung für beliebige Operatornormen mit anderer Konstanten $C > 0$ gilt. $\square$

Bemerkung 2.5. Eine orthogonal diagonalisierbare Matrix $E(x)$ ist notwendigerweise symmetrisch, da orthogonale Matrizen $O(x) \in GL(\mathbb{R}^d)$ und eine Diagonalmatrix $D(x) \in GL(\mathbb{R}^d)$ existieren mit

$$\begin{aligned} E(x)^t &= \left(O(x) \cdot D(x) \cdot O(x)^t\right)^t = \left(D(x) \cdot O(x)^t\right)^t \cdot O(x)^t \\ &= \left(O(x)^t\right)^t \cdot D(x)^t \cdot O(x)^t = O(x) \cdot D(x) \cdot O(x)^t \\ &= E(x). \end{aligned}$$

Umgekehrt ist eine symmetrische Matrix auch orthogonal diagonalisierbar.

2.3 Verallgemeinerte Polarkoordinaten

In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Überblick über die sogenannten verallgemeinerten Polarkoordinaten. Dabei orientieren wir uns am Abschnitt 2 von [6] sowie [22].

Sei $E(x) \in L(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Nach Lemma 6.1.5 in [22] ist durch

$$\|\xi\|_0 := \int_0^1 \|r^{E(x)}\xi\| \frac{dr}{r}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{2.9}$$

eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}^d$ definiert, so dass die Abbildung $\Psi : (0,\infty) \times S_0 \to \Gamma, \Psi(r,\theta) = r^{E(x)}\theta$ ein Homöomorphismus ist, wobei $S_0 := \{\xi \in \mathbb{R}^d : \|\xi\|_0 = 1\}$ ist. Da für jedes $\xi \in \Gamma$ und jedes feste $x \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $r \mapsto \|r^{E(x)}\xi\|$ monoton wachsend ist, ist jedes $\xi \in \Gamma$ eindeutig darstellbar durch

$$\xi = \tau_x(\xi)^{E(x)} l_x(\xi),$$

wobei $\tau_x(\xi) > 0$ **radiale Komponente** und $l_x(\xi) \in S_0$ **Richtung** genannt wird. Das Paar

$$(\tau_x(\xi), l_x(\xi)) \tag{2.10}$$

nennen wir **verallgemeinerte Polarkoordinaten** von ξ unter der Matrix $E(x)$. Die Funktionen τ_x und l_x sind stetig. Sie besitzen die Eigenschaften:

(i) $\tau_x(\xi) \to \infty$ für $\|\xi\| \to \infty$ und $\tau_x(\xi) \to 0$ für $\|\xi\| \to 0$;

(ii) $\tau_x(-\xi) = \tau_x(\xi)$ und $l_x(-\xi) = -l_x(\xi)$;

(iii) $\tau_x(r^{E(x)}\xi) = r\tau_x(\xi)$ und $l_x(r^{E(x)}\xi) = l_x(\xi)$ für alle $r > 0$.

Außerdem ist $S_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \tau_x(\xi) = 1\}$ eine kompakte Menge.

Bemerkung 2.6. Falls $E(x)$ symmetrisch bzw. orthogonal diagonalisierbar ist, kann man $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$ wählen, so dass $S_0 = \mathbb{S}^{d-1}$ ist.

Das folgende Lemma liefert uns Schranken für das Wachstumsverhalten von $\tau_x(\xi)$ in Abhängigkeit von dem Realteil des kleinsten und größten Eigenwertes von $E(x)$.

Lemma 2.7. *Sei $E : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d)$ orthogonal diagonalisierbar. Dann existieren Konstanten $C_1, \ldots, C_4 > 0$, so dass*

(i) für alle $\|\xi\| \leq 1$ oder $\tau_x(\xi) \leq 1$ gilt:

$$C_1\|\xi\|^{1/\lambda(x)} \leq \tau_x(\xi) \leq C_2\|\xi\|^{1/\Lambda(x)};$$

(ii) für alle $\|\xi\| \geq 1$ oder $\tau_x(\xi) \geq 1$ gilt:

$$C_3\|\xi\|^{1/\Lambda(x)} \leq \tau_x(\xi) \leq C_4\|\xi\|^{1/\lambda(x)}.$$

Beweis. Wir zeigen nur die ersten beiden Ungleichungen, die anderen beiden folgen analog. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Satz 2.4 folgt

$$\|\xi\| = \|\tau_x(\xi)^{E(x)} l_x(\xi)\| \leq \|\tau_x(\xi)^{E(x)}\| \cdot \|l_x(\xi)\| \leq C\tau_x(\xi)^{\lambda(x)}$$

für alle $\tau_x(\xi) \leq 1$ und einer Konstanten $C > 0$. Umformen ergibt

$$\tau_x(\xi) \geq C_1 \|\xi\|^{1/\lambda(x)}$$

für $\tau_x(\xi) \leq 1$. Dabei ist $\tau_x(\xi) \leq 1$ wegen der Definition der Norm $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$ (siehe Formel (2.9)) äquivalent zu $\|\xi\| \leq 1$.
Für die obere Abschätzung impliziert Satz 2.4:

$$\|\tau_x(\xi)^{-E(x)}\| \leq C\tau_x(\xi)^{-\Lambda(x)}$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Außerdem gilt die Darstellung $l_x(\xi) = \tau_x(\xi)^{-E(x)}\xi$ und somit folgt

$$1 = \|l_x(\xi)\| \leq \|\tau_x(\xi)^{-E(x)}\| \cdot \|\xi\| \leq C\tau_x(\xi)^{-\Lambda(x)}\|\xi\|.$$

Umschreiben nach $\tau_x(\xi)$ liefert die Behauptung. $\square$

3 Markov- und Feller-Prozesse

In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Überblick über die (universellen) Markov-Prozesse und deren Teilklasse die Feller-Prozesse. Bei der Einführung eines Markov-Prozesses orientieren wir uns an Kapitel 42 in [4] und an Kapitel 3 in [15]. Für die Theorie der Feller-Prozesse ist [10] unsere Standardreferenz.

Wir betrachten eine Familie von stochastischen Prozessen gegeben durch

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}^x, (X_t)_{t\geq 0})_{x\in\mathbb{R}^d}\,, \tag{3.1}$$

d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}^x)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein darauf definierter stochastischer Prozess, wobei der Zustandsraum der Prozesse $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ ist. Mit $\mathcal{F}_t^X := \sigma\,(X_s : s \leq t)$ bezeichnen wir die natürliche Filtration, die die Informationen über den Verlauf des Prozesses bis zur Zeit t beinhaltet.

Definition 3.1. Wir nennen die Familie (3.1) einen **universellen Markov-Prozess**, falls

(MP1) für alle $A \in \mathcal{A}$ die Abbildung $x \mapsto \mathbb{P}^x(A)$ messbar ist;

(MP2) für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$;

(MP3) für alle $s, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ und $B \in \mathcal{B}^d$ gilt

$$\mathbb{P}^x(X_{s+t} \in B|\mathcal{F}_s^X) = \mathbb{P}^{X_s}(X_t \in B) \quad \mathbb{P}^x\text{-f.s.}$$

Prozesse mit der Eigenschaft (MP2) werden **normal** genannt und die Eigenschaft (MP3) heißt **universelle Markov-Eigenschaft** (bezüglich der natürlichen Filtration).

Zur Konstruktion eines universellen Markov-Prozesses: Dieser wird charakterisiert durch eine zeithomogene Übergangsfunktion $p_t(x, B)$ definiert auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}^d$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(ÜF1) $p_t(x, \cdot)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß für alle $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$,

(ÜF2) $p_\cdot(\cdot, B)$ ist messbar für alle $B \in \mathcal{B}^d$,

(ÜF3) $p_0(x, \cdot) = \delta_x(\cdot)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$,

(ÜF4) $p_{t+s}(x, B) = \int p_t(y, B)\, p_s(x, dy)$ für $s, t \geq 0, B \in \mathcal{B}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Die Eigenschaft (ÜF4) wird Chapman-Kolmogorov-Gleichung genannt. Die Familie von Funktionen $(p_t)_{t\geq 0}$ bezeichnen wir als **Übergangshalbgruppe**. Die Übergangsfunktion beschreibt beispielsweise die Bewegung eines Teilchens im Raum.
Wir erhalten mit der Übergangsfunktion und einer Startverteilung ν, die ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ ist, durch

$$\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n) := \int_{\mathbb{R}^d}\int_{B_1}\cdots\int_{B_n} p_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)\ldots p_{t_1}(x, dx_1)\nu(dx), \tag{3.2}$$

wobei $B_j \in \mathcal{B}^d$ für $j = 1, \ldots, n$ und $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ ist, eine projektive Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Wegen des Konsistenzsatzes von Kolmogorov existiert ein Prozess

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (X_t)_{t\geq 0}) = \Big((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}_+}), \mathbb{P}^\nu, (X_t)_{t\geq 0}\Big) \tag{3.3}$$

mit den endlich dimensionalen Verteilungen (3.2). Mit $\nu := \delta_x$ und $\mathbb{P}^x := \mathbb{P}^{\delta_x}$ ist (3.3) ein Markov-Prozess, siehe Satz 42.6 in [4].
Umgekehrt wird durch

$$p_t(x, B) := \mathbb{P}^x(X_t \in B) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}^d \tag{3.4}$$

eine Übergangshalbgruppe definiert, siehe Satz 42.7 in [4].
Der Zusammenhang zwischen $\mathbb{P}^x$ und $\mathbb{P}^\mu$ ist gegeben durch

$$\mathbb{P}^\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}^x(B)\, \mu(dx) \quad \text{für } B \in \mathcal{A},$$

siehe Satz 42.9 in [4]. Die Markov-Eigenschaft lässt sich damit wie folgt formulieren:

$$\mathbb{P}^\mu\left(X_{s+t} \in B | \mathcal{F}_s^X\right) = \mathbb{P}^{X_s}\left(X_t \in B\right) \quad \mathbb{P}^\mu\text{-f.s.}$$

für jedes $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$ und $B \in \mathcal{B}^d$.

Bei der Übergangsfunktion haben wir $p_t(x, \mathbb{R}^d) = 1$ für alle $t \geq 0$ vorausgesetzt. Ein Markov-Prozess mit dieser Eigenschaft heißt **konservativ**. Anschaulich bedeutet es, dass der Prozess $\mathbb{P}^x$-fast sicher unendliche Lebenszeit hat.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass alle betrachteten Markov-Prozesse rechtsseitig stetige Pfade besitzen.

Oft ist es erforderlich, dass die Filtration die sogenannten **üblichen Bedingungen** erfüllt. Damit ist gemeint:

Definition 3.2. Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ genügt den **üblichen Bedingungen**, falls

(i) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist vollständig, d.h. $\mathcal{F}_0$ enthält alle $\mathbb{P}$-Nullmengen.

(ii) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist rechtsseitig stetig, d.h.

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Von der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ gelangen wir zu einer vollständigen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, indem wir alle Nullmengen hinzufügen, d.h. wir betrachten

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)} \sigma\left(\mathcal{F}_t^X, \mathcal{N}^\mu\right),$$

wobei $\mathcal{N}^\mu$ die Familie aller Nullmengen ist, die zu dem Wahrscheinlichkeitsmaß μ gehören. Da der Prozess rechtsseitig stetig ist, ist diese vollständige Filtration automatisch rechtsseitig stetig und sie erfüllt somit die üblichen Bedingungen.

Die Markov-Eigenschaft lässt sich erweitern, in dem man auch Stoppzeiten anstelle von deterministischen Zeiten zulässt.

Definition 3.3. Der (universelle) Markov-Prozess X besitzt die **starke Markov-Eigenschaft**, falls für jede Stoppzeit T, alle $x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$ und $B \in \mathcal{B}^d$ gilt:

$$1_{\{T<\infty\}} \mathbb{P}^x \left(X_{t+T} \in B | \mathcal{F}_T \right) = 1_{\{T<\infty\}} \mathbb{P}^x \left(X_{t+T} \in B | X_T \right) \quad \mathbb{P}^x\text{-f.s.} \tag{3.5}$$

Den Prozess nennen wir entsprechend **(universellen) starken Markov-Prozess**.

Aus der starken Markov-Eigenschaft folgt direkt die Markov-Eigenschaft. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

Zu jedem universellen Markov-Prozess erhalten wir eine Familie von Operatoren $(T_t)_{t\geq 0}$ auf $B_b(\mathbb{R}^d)$ durch

$$T_t u(x) := \mathbb{E}(u(X_t)|X_0 = x) = \mathbb{E}^x(u(X_t)) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\mathbb{P}^x(X_t \in dy) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)p_t(x, dy) \tag{3.6}$$

für alle $t \geq 0$ und $u \in B_b(\mathbb{R}^d)$.

Satz 3.4. *Die Familie von Operatoren $(T_t)_{t\geq 0}$ ist eine Markovsche Halbgruppe, d.h. für alle $s, t \geq 0$ und $u \in B_b(\mathbb{R}^d)$ gilt:*

(a) $T_t : B_b(\mathbb{R}^d) \to B_b(\mathbb{R}^d)$;

(b) $T_0 = id$;

(c) $T_{s+t} = T_s \circ T_t$;

(d) $u \geq 0 \Rightarrow T_t u \geq 0$;

(e) $\|T_t u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$;

(f) $T_t 1 = 1$.

Beweis. Dies folgt direkt aus den Eigenschaften der Übergangsfunktion $p_t(x, B)$. □

Ein wichtiges Konzept in der Theorie von Halbgruppen ist der Erzeuger.

Definition 3.5. Der **Erzeuger** einer Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ ist eine lineare Abbildung $A : D(A) \to B_b(\mathbb{R}^d)$ mit

$$Au := \lim_{t\to 0} \frac{T_t u - u}{t}, \qquad u \in D(A), \tag{3.7}$$

wobei

$$D(A) := \left\{ u \in B_b(\mathbb{R}^d) : \lim_{t\to 0} \frac{T_t u - u}{t} \text{ existiert in } \| \cdot \|_\infty \right\} \tag{3.8}$$

der **Definitionsbereich** des Erzeugers ist.

Nun sammeln wir einige Eigenschaften des Erzeugers.

Proposition 3.6. *(a) Für $u \in D(A)$ und $t \geq 0$ ist $T_t u \in D(A)$.*

(b) Es gilt für $u \in D(A)$:

$$\frac{d}{dt} T_t u = AT_t u = T_t Au.$$

(c) Für $u \in B_b(\mathbb{R}^d)$ ist

$$T_t u - u = A \int_0^t T_s u \, ds.$$

Außerdem gilt für $u \in D(A)$:

$$\begin{aligned} T_t u - u &= \int_0^t A T_s u \, ds \\ &= \int_0^t T_s A u \, ds. \end{aligned}$$

Beweis. siehe [11], Kap.1, Proposition 1.5. □

Definition 3.7. Ein **Feller-Prozess** $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ist ein universeller Markov-Prozess, deren zugehörige Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ folgendes erfüllt:

(i) $T_t : C_\infty(\mathbb{R}^d) \to C_\infty(\mathbb{R}^d)$ für alle $t \geq 0$;

(ii) $\lim\limits_{t \to 0} \|T_t u - u\|_\infty = 0$ für alle $u \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Die Halbgruppe nennen wir auch **Feller-Halbgruppe**.

Die Bedingung (i), dass die Halbgruppe ein Operator auf $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist, heißt **Feller-Eigenschaft** und eine Halbgruppe mit Eigenschaft (ii) wird **stark stetig** genannt.

Für die Struktur des Erzeugers eines Feller-Prozesses lässt sich eine explizite Darstellung aus dem Satz von Courrège herleiten.

Satz 3.8. *Der Erzeuger $(A, D(A))$ eines Feller-Prozesses hat für $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$ die folgende Gestalt:*

$$\begin{aligned} Au(x) = &\langle l(x), \nabla u(x) \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{div} Q(x) \nabla u(x) \\ &+ \int_\Gamma \left(u(x+y) - u(x) - 1_{\{\|y\|<1\}} \langle \nabla u(x), y \rangle \right) \phi(x, dy), \end{aligned} \tag{3.9}$$

wobei $(l(x), Q(x), \phi(x, \cdot))$ für festes $x \in \mathbb{R}^d$ ein Lévy-Tripel ist mit $l(x) \in \mathbb{R}^d$, $Q(x) \in L(\mathbb{R}^d)$ eine symmetrische positiv semidefinite Matrix und $\phi(x, \cdot)$ ein Lévy-Maß.

Beweis. siehe Theorem 2.21 in [10]. □

Dabei wird (3.9) auch **integro-Differential Darstellung** genannt und die Formel ist auch auf $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ definiert. Aus der Formel (3.9) lässt sich über die Fourier-Transformierte eine weitere Darstellung ableiten. Dazu definieren wir einen speziellen Operator, der in diesem Rahmen auftaucht.

Definition 3.9. Ein Operator $q(x, D)$ auf dem Schwartz-Raum $S(\mathbb{R}^d)$ heißt **Pseudo Differentialoperator**, falls

$$q(x, D)u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} q(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi \quad \text{für } u \in S(\mathbb{R}^d),$$

wobei die Funktion $q : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lokal beschränkt in x und ξ ist. Außerdem ist $q(\cdot, \xi)$ messbar für alle ξ und $q(x, \cdot)$ ist stetig negativ definit für alle x. Wir nennen $q(x, \xi)$ das Symbol des Operators.

Das Integral in der Defintion existiert, da das Symbol als negativ definite Funktion in ξ polynomiell beschränkt ist und $\widehat{u} \in S(\mathbb{R}^d)$. Für eine ausführliche Beschreibung von stetig negativ definiten Funktionen, insbesondere ihrer Eigenschaften, verweisen wir auf das Buch [14] von N. Jacob.

Korollar 3.10. *Falls $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$, dann besitzt der Erzeuger $(A, D(A))$ die folgende Gestalt*

$$Au(x) = -q(x, D)u(x) = -\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} q(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi \qquad \text{für alle } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{3.10}$$

Dabei ist für jedes feste $x \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $q(x, \cdot)$ eine stetig negativ definite Funktion mit Lévy-Tripel $(l(x), Q(x), \phi(x, \cdot))$, d.h.

$$\begin{aligned} q(x,\xi) = &- i\langle l(x), \xi\rangle + \frac{1}{2}\langle \xi, Q(x)\xi\rangle \\ &+ \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y,\xi\rangle} + 1_{\{\|y\|<1\}} i\langle \xi, y\rangle\right) \phi(x, dy). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Bemerkung 3.11. Falls ein Feller-Prozess nicht konservativ ist, taucht ein zusätzlicher Term in der integro-Differential Darstellung $-c(x)u(x)$ mit $c(x) \geq 0$ und in der Symboldarstellung $q(x, 0)$ auf. Für die zugehörige Halbgruppe würde in dem Fall Eigenschaft (f) in Satz 3.4 nicht gelten.

Da die integro-Differential Darstellung (3.9) auch für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ definiert ist, lässt sich das Symbol durch den Erzeuger darstellen.

Proposition 3.12. *Das Symbol besitzt die Darstellung*

$$q(x,\xi) = -e_{-\xi}(x)Ae_\xi(x) \tag{3.12}$$

mit $e_\xi(x) := e^{i\langle x,\xi\rangle}$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt durch Einsetzen von $e^{i\langle x,\xi\rangle}$ in die integro-Differential Darstellung (3.9), da diese auch für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ gültig ist. □

Dass nicht jedes x-abhängige Lévy-Tripel $(l(x), Q(x), \phi(x, \cdot))$ oder negativ definite Symbol zu einem Feller-Prozess führt, sehen wir an Example 2.26 aus [10].

Beispiel 3.13. *Das Symbol $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $q(x, \xi) = i\xi x^3$ gehört zu dem deterministischen Prozess*

$$X_t = \frac{x}{\sqrt{1 + 2tx^2}}.$$

Dann ist

$$T_t u(x) = \mathbb{E}^x(u(X_t)) = u\left(\frac{x}{\sqrt{1 + 2tx^2}}\right)$$

eine Halbgruppe, die $C_\infty(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ erfüllt. Aber für geeignete $u \in C_\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{|x|\to\infty} T_t u(x) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right) \neq 0.$$

Der Erzeuger eines Feller-Prozesses erfüllt aufgrund der Positivität der Halbgruppe das sogenannte positive Maximumsprinzip.

Lemma 3.14. *Der Erzeuger $(A, D(A))$ erfüllt das positive Maximumsprinzip, d.h.*

$$u \in D(A), x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ und } u(x_0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} u(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Au(x_0) \leq 0. \tag{3.13}$$

Beweis. Wir wählen $u \in D(A)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$ so, dass

$$u(x_0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} u(x) \geq 0.$$

Wegen der Kontraktionseigenschaft und der Positivität der Feller Halbgruppe $(T_t)_{t \geq 0}$ folgt für $t \geq 0$

$$T_t u(x_0) \leq \|T_t u\|_\infty = \|T_t u_+ - T_t u_-\|_\infty \leq \|T_t u_+\|_\infty \leq \|u_+\|_\infty \leq u(x_0).$$

Damit ist

$$T_t u(x_0) - u(x_0) \leq 0$$

und wir erhalten mit Grenzwertbildung die Behauptung

$$Au(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{T_t u(x_0) - u(x_0)}{t} \leq 0.$$

□

Ein spezielles Beispiel für Feller-Prozesse sind **Lévy-Prozesse**. Dies sind Feller-Prozesse, deren Halbgruppen translationsinvariant sind.

Beispiel 3.15. *Die Halbgruppe eines Lévy-Prozesses $L = (L_t)_{t \geq 0}$ ist gegeben durch*

$$T_t u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x + y)\, \mu_t(dy),$$

wobei $(\mu_t)_{t \geq 0}$ eine vage stetige Faltungshalbgruppe von Maßen ist, d.h.

1. $\mu_t(\mathbb{R}^d) \leq 1$ *für alle* $t \geq 0$*;*
2. $\mu_s * \mu_t = \mu_{s+t}$ *für alle* $s, t \geq 0$*;*
3. $\mu_0 = \delta_0$*;*
4. $\int_{\mathbb{R}^d} u(y)\, \mu_t(dy) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\, \delta_0(dy) = u(0)$ *für* $t \to 0$ *und alle* $u \in C_c(\mathbb{R}^d)$*.*

Der Erzeuger hat für $u \in C^2_\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$ die Form

$$\begin{aligned} Au(x) = &\langle l, \nabla u(x) \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{div} Q \nabla u(x) \\ &+ \int_\Gamma \big(u(x+y) - u(x) - 1_{\{\|y\| < 1\}} \langle \nabla u(x), y \rangle \big)\, \phi(dy) \end{aligned}$$

mit Lévy-Tripel (l, Q, ϕ). Das Symbol des Lévy-Prozesses ist der charakteristische Exponent.

4 Stochastische Integrationstheorie

In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Überblick über die Grundlagen, die wir bei der Betrachtung der im nächsten Kapitel eingeführten stochastischen Differentialgleichung (SDE) brauchen. Nach der Einführung des Poisson-Zufallsmaß und des kompensierten Poisson-Zufallsmaßes werden wir das stochastische Integral definieren. Danach beschreiben wir ein Verfahren, das sogenannte Interlacing. Dies ist hilfreich, um eine Lösung der SDE zu konstruieren. Abschließend erinnern wir an die Itô-Formel, wobei wir die angegebene Version auf stochastische Integrale bzgl. des (kompensierten) Poisson-Zufallsmaßes beschränken. Die meisten Resultate stammen dabei aus dem Buch [1] von D. Applebaum.

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ stets ein Wahrscheinlichkeitsraum und eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $t \geq 0$, die die üblichen Bedingungen erfüllt.

4.1 Poisson-Zufallsmaß

In diesem Abschnitt führen wir zunächst allgemein kurz Zufallsmaße ein und gehen dann insbesondere auf das Poisson-Zufallsmaß ein. Der Abschnitt orientiert sich an Kapitel 2.3 in [1] und zusätzlich an Kapitel 19 in [25].

Definition 4.1. Sei $(S, \mathcal{A})$ ein Messraum. Ein **independently scattered Zufallsmaß** M auf $(S, \mathcal{A})$ ist eine Familie von Zufallsvariablen $(M(B), B \in \mathcal{A})$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) $M(\emptyset) = 0$;

(2) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweiser disjunkter Mengen in $\mathcal{A}$ mit $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ gilt:

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(A_n) \quad \text{fast sicher.}$$

(3) Für jede endliche Auswahl von paarweisen disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_n$ aus $\mathcal{A}$ sind die Zufallsvariablen $M(A_1), \ldots, M(A_n)$ stochastisch unabhängig.

Definition 4.2. Ein independently scattered Zufallsmaß N heißt **Poisson-Zufallsmaß mit Intensitätsmaß** ν, falls für alle $B \in \mathcal{A}$ die Zufallsvariable $N(B)$ Poisson-verteilt ist mit Parameter $\nu(B)$.

Das Intensitätsmaß ν erhalten wir durch $\nu(B) = \mathbb{E}(N(B))$ für alle $B \in \mathcal{A}$. Umgekehrt haben wir den folgenden Existenzsatz für Poisson-Zufallsmaße:

Satz 4.3. *Für jedes σ-endliche Maß ν auf dem Messraum $(S, \mathcal{A})$ existiert ein Poisson-Zufallsmaß N auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\nu(A) = \mathbb{E}(N(A))$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*

Beweis. siehe Proposition 19.4 in [25]. □

Wir betrachten nun $S = \mathbb{R}_+ \times E$, wobei E ein messbarer Raum mit $\sigma-$Algebra $\mathcal{E}$ ist, und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$. Im späteren Verlauf der Arbeit ist $E = \mathbb{S}^{d-1} \times (0, \infty)$. Das Intensitätsmaß ν fassen wir auf als das Produktmaß

$$\nu([0, t] \times A) = t\mu(A), \quad t \geq 0, \quad A \in \mathcal{E}.$$

Für eine messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}^d$ definieren wir das Integral bzgl. des Poisson-Zufallsmaßes als eine endliche Summe

$$\int_A f(x)\, N(t,dx)(\omega) = \sum_{x\in A} f(x) N(t,\{x\})(\omega).$$

Das Integral ist eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable und besitzt die folgenden Eigenschaften, siehe Theorem 2.3.4 in [1]:

Satz 4.4. *Sei $f : E \to \mathbb{R}^d$ messbar. Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Für jedes $t \geq 0$ besitzt $\int_A f(x)\, N(t,dx)$ eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung, so dass für jedes $u \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\left\langle u, \int_A f(x) N(t,dx)\right\rangle\right)\right] = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u,x\rangle} - 1)\,(f\mu)(dx)\right).$$

(2) Falls $\int_A \|f(x)\|\mu(dx) < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}\left(\int_A f(x)N(t,dx)\right) = t\int_A f(x)\mu(dx).$$

(3) Falls $\int_A \|f(x)\|^2\mu(dx) < \infty$, dann gilt

$$\mathrm{Var}\left(\left\|\int_A f(x)N(t,dx)\right\|\right) = t\int_A \|f(x)\|^2\mu(dx).$$

Zur Konstruktion des Poisson-Zufallsmaßes auf $\mathbb{R}_+$:
Im Fall $E = \mathbb{R}_+$ kann ein Poisson-Zufallsmaß N aus einem Lévy-Prozess $L = (L_t)_{t\geq 0}$ mit Lévy-Tripel $(0,0,\pi)$ hergeleitet werden. Für alle $s,t \in \mathbb{R}_+$ und $A \in \mathcal{B}((0,\infty))$ definieren wir

$$N([s,t],A) = \#\{u \in [s,t] : \Delta L_u \in A\} = \sum_{s\leq u\leq t} 1_A(\Delta L_u),$$

wobei $\Delta L = (\Delta L_t)_{t\geq 0}$ den Sprungprozess $\Delta L_t = L_t - L_{t-}$ beschreibt. Dann nennen wir N das zum Lévy-Prozess zugehörige Poisson-Zufallsmaß mit Intensität $\lambda^1 \otimes \pi$. Mit den Folgen $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir die Sprungzeiten bzw. die Sprunghöhen von L. Wir erhalten die Darstellung

$$N(dt,dz) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{(T_n,Z_n)}(dt,dz).$$

Da $N(t,\{x\}) > 0$ genau dann gilt, wenn $\Delta L_u = x$ für ein $u \in [0,t]$ ist, können wir das Integral auch schreiben als

$$\int_A f(x)\, N(t,dx) = \sum_{0\leq u\leq t} f(\Delta L_u) 1_A(\Delta L_u).$$

Zwischen Zufallsmaßen und Martingalen besteht ein wichtiger Zusammenhang. Für ein Zufallsmaß M auf $S = \mathbb{R}_+ \times E$ definieren wir für jedes $A \in \mathcal{E}$ den Prozess $M_A = (M_A(t))_{t\geq 0}$ durch $M_A(t) := M([0,t),A) := M([0,t) \times A)$. Wir bezeichnen M als **Martingalmaß**, falls jedes M_A ein Martingal ist.

Definition 4.5. Sei N ein Poisson-Zufallsmaß auf S mit Intensitätsmaß ν. Dann nennen wir

$$\tilde{N} = N - \nu$$

das **kompensierte Poisson-Zufallsmaß**.

Für jedes $A \in \mathcal{E}$ ist $(\tilde{N}(t, A))_{t \geq 0}$ ein Martingal und $\tilde{N}$ ist ein Martingalmaß.
Das kompensierte Poisson-Integral ist definiert durch

$$\int_A f(x) \tilde{N}(t, dx) := \int_A f(x) N(t, dx) - t \int_A f(x) \mu(dx)$$

für integrierbare Funktionen f und $t \geq 0$. Ähnlich wie das Poisson-Integral, besitzt das kompensierte Poisson-Integral die folgenden Eigenschaften:

Proposition 4.6. *Sei $\tilde{N}$ ein kompensiertes Poisson-Zufallsmaß und $f : E \to \mathbb{R}^d$ integrierbar. Dann gilt:*

(1) Für jedes $u \in \mathbb{R}^d$ ist

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\left\langle u, \int_A f(x) \tilde{N}(t, dx)\right\rangle\right)\right] = \exp\left(t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u, x\rangle} - 1 - i\langle u, x\rangle)\,(f\mu)(dx)\right);$$

(2) Falls $\int_A \|f(x)\|^2 \mu(dx) < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}\left(\left\|\int_A f(x) \tilde{N}(t, dx)\right\|^2\right) = t \int_A \|f(x)\|^2 \mu(dx);$$

(3) Der Prozess

$$\left(\int_A f(x) \tilde{N}(t, dx)\right)_{t \geq 0}$$

ist ein Martingal.

Nun betrachten wir Funktionen, die zusätzlich zeitabhängig sind, d.h. messbare Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \times E \to \mathbb{R}^d$. Das Integral lässt sich darstellen mithilfe des zusammengesetzten Poisson-Prozesses $P = (P_t)_{t \geq 0}$, wobei $P_t = \int_A x\, N(t, dx)$ ist:

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_A f(s, x)\, N(ds, dx) &= \sum_{x \in A} f(s, x) N(s, \{x\}) \\ &= \sum_{0 \leq u \leq t} f(u, \Delta P_u) 1_A(\Delta P_u)\end{aligned}$$

Wir erhalten die Eigenschaften:

Proposition 4.7. *Sei $f : \mathbb{R}_+ \times E \to \mathbb{R}^d$ messbar. Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) Für jedes $u \in \mathbb{R}^d$ ist

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\left\langle u, \int_0^t \int_A f(s, x)\, N(ds, dx)\right\rangle\right)\right] = \exp\left(\int_0^t \int_A (e^{i\langle u, f(s,x)\rangle} - 1)\, \mu(dx) ds\right);$$

(2) Falls $\int_A \|f(x)\|\mu(dx) < \infty$*, dann gilt*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_A f(s,x)\, N(ds,dx)\right) = \int_0^t \int_A f(s,x)\, \mu(dx)ds;$$

(3) Falls $\int_A \|f(x)\|^2\mu(dx) < \infty$*, dann gilt*

$$\mathrm{Var}\left(\left\|\int_0^t \int_A f(s,x)\, N(ds,dx)\right\|\right) = \int_0^t \int_A \|f(s,x)\|^2\, \mu(dx)ds,$$

$$\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t \int_A f(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right\|^2\right) = \int_0^t \int_A \|f(s,x)\|^2\, \mu(dx)ds.$$

4.2 Stochastische Integration

Hier geben wir einen kurzen Überblick über das stochastische Integral bezüglich des kompensierten Poisson-Zufallsmaßes $\tilde{N}$.
Dazu benötigen wir den Begriff der Vorhersagbarkeit. In diesem Abschnitt sei $E \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1} \times (0,\infty))$.

Definition 4.8. Eine Funktion $H : \mathbb{R}_+ \times E \times \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **vorhersagbar**, falls die Abbildung H $\mathcal{P}$-messbar ist, wobei $\mathcal{P}$ die kleinste σ-Algebra ist, zu der alle Abbildungen $G : \mathbb{R}_+ \times E \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften messbar sind:

(i) Die Abbildung $(x,\omega) \mapsto G(t,x,\omega)$ ist $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar für alle $t \geq 0$.

(ii) Die Abbildung $t \mapsto G(t,x,\omega)$ ist linksseitig stetig für alle (x,ω).

Wir nennen $\mathcal{P}$ die **vorhersagbare σ-Algebra**.

Bemerkung 4.9.

1. Wegen (i) ist der Prozess $t \mapsto H(t,x,\cdot)$ adaptiert, falls G vorhersagbar ist.
2. Falls H die Eigenschaft (i) erfüllt und linksseitig stetig ist, dann ist H vorhersagbar.

Nun führen wir zwei Klassen von Abbildungen ein, die als Integranden für das stochastische Integral in Frage kommen.

Definition 4.10. Mit $\mathcal{H}^j(E), (j = 1,2)$ bezeichnen wir die Klasse aller vorhersagbaren Abbildungen $H : \mathbb{R}_+ \times E \times \Omega \to \mathbb{R}$, die die folgende Bedingung erfüllen:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_E |H(s,x)|^j \mu(dx)ds\right) < \infty. \tag{4.1}$$

Für jeden Prozess $H \in \mathcal{H}^2(E)$ können wir das **stochastische Integral** von H bezüglich $\tilde{N}$ definieren:

$$I_t(H) := \int_0^t \int_E H(s,x)\tilde{N}(ds,dx) \tag{4.2}$$

Bemerkung 4.11. Allgemeiner kann als Integrator für das stochastische Integral ein Martingalmaß M auf $\mathbb{R}_+ \times E$ gewählt werden, das die zusätzlichen Bedingungen erfüllt:

(i) $M(\{0\}, A) = 0$ f.s.;

(ii) $M((s,t], A)$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$;

(iii) Es existiert ein σ-endliches Maß ρ auf $\mathbb{R}_+ \times E$ mit

$$\mathbb{E}\left(M(t,A)^2\right) = \rho(t \times A)$$

für alle $0 \leq s < t < \infty$ und $A \in \mathcal{B}(E)$.

Das stochastische Integral bezüglich des kompensierten Poisson-Zufallsmaßes besitzt die Eigenschaften:

Satz 4.12. *Für alle $H \in \mathcal{H}^2(E)$ gilt:*

(a)

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_E H(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right) = 0;$$

(b)

$$\mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \int_E H(s,x)\tilde{N}(ds,dx)\right]^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_E |H(s,x)|^2 \mu(dx)ds\right);$$

(c) Der Prozess

$$t \mapsto \int_0^t \int_E H(s,x)\tilde{N}(ds,dx)$$

ist ein L^2-Martingal.

Beweis. siehe Theorem 4.2.3 in [1]. □

Zwischen dem Poisson-Zufallsmaß und seinem Kompensator besteht folgender Zusammenhang, siehe Seite 62 in [12].

Satz 4.13. *Für $H \in \mathcal{H}^1(E)$ gilt*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_E H(s,x)N(ds,dx)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_E H(s,x)\mu(dx)ds\right).$$

4.3 Interlacing

Um das Interlacing zu beschreiben, das insbesondere bei der Konstruktion der Lösung von stochastischen Differentialgleichungen (SDEs) eines besonderen Typs Anwendung findet, beginnen wir mit einem Beispiel, vergleiche Example 1.3.13 in [1].

Beispiel 4.14. *Sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein Markov-Prozess mit f.s. stetigen Pfaden, $N = (N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess und $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen, die unabhängig von N sind. Dann ist*

$$Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} W_n$$

ein zusammengesetzter Poisson-Prozess. Wir definieren den Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ durch

$$X_t = M_t + Y_t$$

für alle $t \geq 0$. Die Pfade von X haben Sprünge zufälliger Höhe zu zufälligen Zeiten. Den Prozess können wir beschreiben durch

$$X_t = \begin{cases} M_t & \text{für } 0 \leq t < T_1 \\ M_{T_1} + W_1 & \text{für } t = T_1 \\ X_{T_1} + M_t - M_{T_1} & \text{für } T_1 < t < T_2 \\ X_{T_2} + W_2 & \text{für } t = T_2 \\ \dots \end{cases}$$

und so rekursiv weiter, wobei $T_1, T_2, \dots$ die Sprungzeiten darstellen. Diese Vorgehensweise wird ***Interlacing*** *genannt, da wir einen Prozess mit stetigen Pfaden mit zufälligen Sprüngen verschachteln.*

Diese Vorgehensweise ist auch für die Konstruktion einer Lösung der folgenden SDE hilfreich:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\|x\|<1} F(X_{s-}, x)\tilde{N}(ds, dx) + \int_0^t \int_{\|x\|\geq 1} G(X_{s-}, x)N(ds, dx), \tag{4.3}$$

wobei $F, G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ messbare Abbildungen sind. Um diese SDE zu lösen, betrachten wir zunächst die modifizierte SDE, die die kleinen Sprünge beschreibt:

$$M_t = M_0 + \int_0^t \int_{\|x\|<1} F(M_{s-}, x)\tilde{N}(ds, dx). \tag{4.4}$$

Wir lösen zuerst diese SDE (4.4). Dazu führen wir die beiden folgenden Bedingungen ein:

Lipschitzbedingung: Es existiert eine Konstante $C_1 > 0$, so dass für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\int_{\|x\|<1} \|F(y_1, x) - F(y_2, x)\|^2 \nu(dx) \leq C_1 \|y_1 - y_2\|^2. \tag{4.5}$$

Beschränktheitsbedingung: Es existiert eine Konstante $C_2 > 0$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\int_{\|x\|<1} \|F(y, x)\|^2 \nu(dx) \leq C_2 \left(1 + \|y\|^2\right). \tag{4.6}$$

Falls die Lipschitz- und lineare Beschränktheitsbedingung erfüllt sind, existiert eine eindeutige Lösung, die càdlàg und adaptiert ist (siehe Theorem 6.2.3 in [1]). Dabei ist die Lösung pfadweise eindeutig, d.h. falls M und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ Lösungen von (4.4) sind, dann gilt:

$$\mathbb{P}\left(M_t = Y_t \text{ für alle } t \geq 0\right) = 1.$$

Die Lösung der gesamten SDE erhalten wir damit wie folgt, siehe Theorem 6.2.9 in [1]: Damit der Integrand G in (4.3) vorhersagbar ist, setzen wir nun voraus, dass die Abbildung $y \mapsto G(y, x)$ für alle $\|x\| \geq 1$ stetig ist. Seien $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Sprungzeiten des zusammengesetzten Poisson-Prozesses $(P_t)_{t\geq 0}$, wobei

$$P_t = \int_{\|x\|\geq 1} xN(t, dx)$$

ist, und der Sprungprozess $(\Delta P_t)_{t\geq 0}$ ist definiert durch

$$\Delta P_t := P_t - P_{t-}.$$

Wir lassen dann die SDE bis zum ersten Zeitpunkt T_1, wo ein Sprung x der Größe $\|x\| > 1$ passiert, laufen und lösen zunächst diese SDE. Dann fügen wir den Sprung hinzu und lösen die SDE, die im Zeitpunkt T_1 startet und bis zum Zeitpunkt T_2 des nächsten großen Sprunges x mit $\|x\| > 1$ läuft. Diese Vorgehensweise wiederholen wir nacheinander für alle Sprünge, die größer als $\|x\| > 1$ sind. Also erhalten wir als Lösung der ursprünglichen SDE (4.3):

$$X_t = \begin{cases} M_t & \text{für } 0 \leq t < T_1 \\ M_{T_1-} + G(M_{T_1-}, \Delta P_{T_1}) & \text{für } t = T_1 \\ X_{T_1} + \tilde{M}_t - \tilde{M}_{T_1} & \text{für } T_1 < t < T_2 \\ X_{T_2-} + G(X_{T_2-}, \Delta P_{T_2}) & \text{für } t = T_2 \\ \dots \end{cases}.$$

Dabei ist $(\tilde{M}_t)_{t\geq 0}$ die eindeutige Lösung der modifizierten SDE (4.4) mit Anfangsbedingung $\tilde{M}_0 = X_{T_1}$.

4.4 Itô-Formel

Die Itô-Formel wird im weiteren Verlauf ein wichtiges Hilfsmittel sein. Wir geben diese für einen $\mathbb{R}^d$-wertigen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ an, der durch

$$\begin{aligned} X_t = X_0 &+ \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty K(s,\theta,r) N(ds,d\theta,dr) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 H(s,\theta,r) \tilde{N}(ds,d\theta,dr) \end{aligned} \tag{4.7}$$

für alle $t \geq 0$ definiert ist. Die Darstellung (4.7) ist vektorwertig zu verstehen mit Komponenten

$$\begin{aligned} X_t^{(i)} = X_0^{(i)} &+ \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty K^{(i)}(s,\theta,r) N(ds,d\theta,dr) \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 H^{(i)}(s,\theta,r) \tilde{N}(ds,d\theta,dr) \end{aligned} \tag{4.8}$$

für alle $1 \leq i \leq d$. Dabei ist $H^{(i)} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{S}^{d-1} \times (0,1))$ und $K^{(i)}$ vorhersagbar. N ist ein Poisson-Zufallsmaß auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1} \times (0,\infty)$ mit Intensitätsmaß $\nu = \lambda^1 \otimes \sigma \otimes \pi$ und $\tilde{N}$ das kompensierte Poisson-Zufallsmaß.

Analog zum Eindimensionalen lässt sich das Poisson-Zufallsmaß konstruieren: Das Poisson-Zufallsmaß kann aus einem Lévy-Prozess L mit Lévy-Tripel $(0, 0, \sigma \otimes \pi)$ hergeleitet werden. Dabei fassen wir die Sprungzeiten und die Sprunghöhe des zugehörigen Lévy-Prozesses auf als eine Folge

$$(T_n, \Theta_n, R_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Der Zeitpunkt des Sprunges wird durch $T_n > 0$ gekennzeichnet, $\Theta_n \in \mathbb{S}^{d-1}$ beschreibt die Richtung des Sprunges und ist ein Vektor auf der Einheitssphäre. Die Sprunghöhe wird durch R_n beschrieben.

Das Integral bzgl. des Poisson-Zufallsmaßes ist darstellbar durch

$$W_t := \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty K(s,\theta,r) N(ds,d\theta,dr) = \sum_{T_n \le t} K(T_n, \Theta_n, R_n),$$

wobei $R_n \in (1,\infty)$ ist. Damit ist $t \mapsto W_t(\omega)$ eine Treppenfunktion mit Sprunghöhe $K(T_n, \Theta_n, R_n)$ zu dem Zeitpunkt T_n. Für beliebige $u \in C(\mathbb{R}^d)$ folgt

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(W_0) &= \sum_{T_n \le t} f(W_{T_n}) - f(W_{T_{n-1}}) \\ &= \sum_{T_n \le t} f(W_{T_n-} + K(T_n, \Theta_n, R_n)) - f(W_{T_n-}) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left[f(W_{s-} + K(s,\theta,r)) - f(W_{s-}) \right] N(ds,d\theta,dr). \end{aligned}$$

Das Integral bzgl. des Poisson-Zufallsmaßes ist eine Summe mit endlich vielen Termen und somit càdlàg. Das Integral bzgl. des kompensierten Poisson-Zufallsmaßes ist wegen Satz 4.12 (c) ein Martingal und ebenfalls càdlàg.
Die Itô-Formel lautet nun:

Satz 4.15. *Für alle $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und $t \ge 0$ besitzt* (4.7) *die Darstellung*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left[f(X_{s-} + K(s,\theta,r)) - f(X_{s-}) \right] N(ds,d\theta,dr) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left[f(X_{s-} + H(s,\theta,r)) - f(X_{s-}) \right] \tilde{N}(ds,d\theta,r) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \Bigg[f(X_{s-} + H(s,\theta,r)) - f(X_{s-}) \\ &\qquad - \sum_{i=1}^d H^{(i)}(s,\theta,r) \partial_i f(X_{s-}) \Bigg] \pi(dr)\sigma(d\theta) ds. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Beweis. siehe Theorem 1.1 in [2] für den Beweis im eindimensionalen Fall bzw. Theorem 4.4.7 in [1]. □

Bemerkung 4.16. Die Itô-Formel gilt auch allgemein für Funktionen $f \in C(\mathbb{R}^d)$, falls für alle $t > 0$ die folgende lokale Beschränktheitsbedingung gilt:

$$\sup_{0 \le s \le t} \sup_{\theta \in \mathbb{S}^{d-1}} \sup_{0<r<1} |H(s,\theta,r)| < \infty \quad \text{f.s.} \tag{4.10}$$

5 Operator-stable-like Lévy-Maße und Konstruktion eines Feller-Prozesses

Für jedes Lévy-Tripel (l, Q, ϕ) existiert wegen der Lévy-Khinchin-Formel ein zugehöriger Lévy-Prozess mit entsprechendem Tripel. Dieses Resultat kann nicht auf Feller-Prozesse erweitert werden, wie wir in Beispiel 3.13 gesehen haben. Es gehört nicht zu jedem stetig negativ definiten Symbol bzw. äquivalent zu jedem x-abhängigen Lévy-Tripel ein korrespondierender Feller-Prozess. Deshalb ist es erforderlich Bedingungen an das Symbol bzw. Lévy-Tripel zu stellen, um die Existenz eines korrespondierenden Feller-Prozesses zu gewährleisten.

Die Existenz und Konstruktion eines Feller-Prozesses aus einem gegebenen Symbol ist eine schwierige Fragestellung. In der Literatur gibt es verschiedene Ansätze, um dieses Problem zu lösen:

- der Satz von Hille-Yosida,
- Lösen einer stochastischen Differentialgleichung (SDE),
- Dirichlet Formen,
- Lösen einer Evolutionsgleichung,
- Martingal Problem.

Die meisten Resultate sind sehr restriktiv, da sie nur für Symbole einer bestimmten Form benutzt werden können. Für einen kurzen Überblick über die bekannten Resultate verweisen wir auf das Kapitel 3 in [10] und die dort angegebenen Referenzen.

Wir werden uns bei der Konstruktion auf x-abhängige Lévy-Tripel der Form $(0, 0, \phi(x, \cdot))$, d.h. ohne Drift und ohne Gaußanteil, beschränken. Als Familie von Lévy-Maßen wählen wir die operator-stable-like Lévy-Maße, die wir im Abschnitt 5.1 definieren. In Abschnitt 5.2 konstruieren wir einen Feller-Prozess als Lösung einer SDE und berechnen bzw. untersuchen sein Symbol im letzten Abschnitt des Kapitels.

5.1 Operator-stable-like Lévy-Maße

Die operator-stable-like Lévy-Maße sind eng verbunden mit den Lévy-Maßen einer operator-stabilen Verteilung (vergleiche Kap. 7 in [22]). Operator-stable-like Lévy-Maße sind im Prinzip Lévy-Maße von operator-stabilen Verteilungen, deren Exponent $E \in GL(\mathbb{R}^d)$ nicht länger konstant ist, sondern von der Position im Raum $x \in \mathbb{R}^d$ abhängt. Wir werden diese intuitive Beschreibung nun formalisieren.

Dazu benötigen wir lineare Operatoren ($d \times d$ Matrizen $E(x)$), die gewisse Bedingungen erfüllen.

Definition 5.1. Die Klasse von **Exponenten** umfasst die linearen Operatoren $E(x) \in GL(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, mit den folgenden Eigenschaften:

(E1) $E(x)$ ist orthogonal diagonalisierbar.

(E2) $E(x)$ ist Lipschitz-stetig, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\|E(y) - E(x)\| \leq C\|y - x\|. \tag{5.1}$$

(E3) Es existieren Konstanten $a > 1/2$ und $b \geq a$, so dass für die Realteile der Eigenwerte von $E(x)$ gilt:
$$\frac{1}{2} < a \leq \lambda(x) \leq \Lambda(x) \leq b < \infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d. \tag{5.2}$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir nur diese linearen Operatoren betrachten, ohne dies jedesmal explizit zu erwähnen. Insbesondere sind mit a und b stets die Konstanten aus der Eigenschaft (E3) gemeint.

Definition 5.2. Sei $E(x) \in GL(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d$, ein Exponent, d.h. $E(x)$ erfüllt die Bedingungen aus Definition 5.1. Wir nennen ϕ ein **operator-stable-like Lévy-Maß mit Exponent** $E(x)$, falls es die folgende Darstellung für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ besitzt
$$\phi(x, A) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_A(r^{E(x)}\theta) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta), \tag{5.3}$$
wobei σ ein endliches Maß auf $\mathbb{S}^{d-1}$ ist. Für das Maß ϕ verwenden wir auch die Schreibweise ϕ_x und die Abkürzung OSL Lévy-Maß.

Bemerkung 5.3.

(i) Das OSL Lévy-Maß ϕ_x erfüllt die Skalierungseigenschaft
$$\left(t^{E(x)}\phi_x\right)(A) = t\phi_x(A) \tag{5.4}$$
für $t > 0$ und $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$, da
$$\begin{aligned} t^{E(x)}\phi_x(A) = \phi_x(t^{-E(x)}A) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_{\{t^{-E(x)}A\}}(r^{E(x)}\theta) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_A((tr)^{E(x)}\theta) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty t 1_A(s^{E(x)}\theta) \frac{ds}{s^2} \sigma(d\theta) \\ &= t\phi_x(A), \end{aligned}$$
wobei wir in der vorletzten Zeile die Substitution $s = tr$ verwendet haben.

(ii) Das Maß ϕ_x ist symmetrisch, d.h. $\phi_x(A) = \phi_x(-A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$ und $x \in \mathbb{R}^d$, falls σ symmetrisch ist. Umgekehrt folgt aus der Symmetrie des OSL Lévy-Maßes ϕ_x auch die Symmetrie von σ.

Für die Integration bzgl. solcher Maße erhalten wir die folgende Aussage.

Lemma 5.4. *Für alle messbaren Funktionen $f : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ gilt:*
$$\int_\Gamma f(y)\phi_x(dy) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty f(r^{E(x)}\theta) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta). \tag{5.5}$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels algebraischer Induktion:

Schritt 1: Sei $f(y) = 1_A(y)$ für $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$. Dann ist
$$\int_\Gamma f(y)\phi_x(dy) = \int_\Gamma 1_A(y)\phi_x(dy) = \phi_x(A) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_A(r^{E(x)}\theta) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta).$$

Schritt 2: Sei $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ und $A_i \in \mathcal{B}(\Gamma)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $n \in \mathbb{N}$ eine Elementarfunktion. Dann erhalten wir wegen der Linearität des Integrals und Schritt 1

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(y)\phi_x(dy) &= \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(y) \right) \phi_x(dy) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_\Gamma 1_{A_i}(y)\phi_x(dy) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_{A_i}(r^{E(x)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(r^{E(x)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty f(r^{E(x)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta).
\end{aligned}$$

Schritt 3: Sei $f \geq 0$ eine beliebige messbare Funktion. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Elementarfunktionen mit $f_n \uparrow f$ für $n \to \infty$. Mit Beppo-Levi und Schritt 2 bekommen wir

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(y)\phi_x(dy) &= \int_\Gamma \lim_{n\to\infty} f_n(y)\phi_x(dy) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(y)\phi_x(dy) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty f_n(r^{E(x)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(r^{E(x)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty f(r^{E(x)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta).
\end{aligned}$$

Schritt 4: Für beliebige messbare Funktionen f schreibe $f = f_+ - f_-$. Dann folgt die Aussage aus Schritt 3. □

Für das Matrixexponential des Exponenten erhalten wir wegen der Stetigkeit und der Beschränktheit der Realteile der Eigenwerte die beiden Abschätzungen.

Korollar 5.5. *Für alle $r_0 > 0$ und $\delta > 0$ existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass*

$$\|r^{E(x)}\| \leq \begin{cases} C_1 r^{a-\delta} & \text{für } 0 < r < r_0, \\ C_2 r^{b+\delta} & \text{für } r \geq r_0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Beweis. Nach Satz 2.3 gilt die Abschätzung (5.6) allgemein mit $C_1(x), C_2(x) > 0$. Wir müssen also nachweisen, dass diese für alle $x \in \mathbb{R}^d$ beschränkt sind. Da $E(x)$ stetig ist, ist $r \mapsto r^{E(x)}$ nach Proposition 2.2.11(a) in [22] ebenfalls stetig und somit sind die beiden Konstanten aus Satz 2.3, also

$$C_1(x) = \sup_{0<r<r_0} \|r^{-(\lambda(x)-\delta)} r^{E(x)}\| \quad \text{und} \quad C_2(x) = \sup_{r\geq r_0} \|r^{-(\Lambda(x)+\delta)} r^{E(x)}\|,$$

endlich für alle $x \in \mathbb{R}^d$. □

Korollar 5.6. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|r^{E(x)}\| \leq \begin{cases} Cr^a & \text{für } 0 < r < 1, \\ Cr^b & \text{für } r \geq 1. \end{cases} \tag{5.7}$$

Beweis. Folgt wegen der Diagonalisierbarkeit von $E(x)$ direkt aus Satz 2.4. □

In der nächsten Proposition sehen wir, dass ϕ_x für festes x das Lévy-Maß einer operator-stabilen Verteilung ohne Gaußanteil ist und es seinen Namen verdient.

Proposition 5.7. *Für festes $x \in \mathbb{R}^d$ ist ϕ_x ein Lévy-Maß.*

Beweis. Die Maßeigenschaften von ϕ_x sind klar und wir müssen somit nur zeigen, dass

$$\int_\Gamma \left(1 \wedge \|y\|^2\right) \phi_x(dy) < \infty.$$

Nach Korollar 5.6 existiert ein $C_1 > 0$, so dass für alle $0 < r \leq 1$ und $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ gilt:

$$\|r^{E(x)}\theta\| \leq C_1 r^a.$$

Außerdem existiert ein $C_2 > 0$, so dass für alle $r \geq 1$ und $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ gilt:

$$\|r^{E(x)}\theta\| \geq \frac{\|\theta\|}{\|r^{-E(x)}\|} \geq C_2 r^a,$$

wobei wir für die zweite Aussage die Abschätzung (2.4) benutzt haben. Es existieren also ein $r_1 \in (0, 1]$ und ein $r_2 > 1$, so dass für alle $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ gilt:

$$\|r^{E(x)}\theta\| < 1, \qquad \text{falls } 0 < r \leq r_1,$$

und

$$\|r^{E(x)}\theta\| > 1, \qquad \text{falls } r \geq r_2.$$

Mit diesen Vorüberlegungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma \left(1 \wedge \|y\|^2\right) \phi_x(dy) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \|r^{E(x)}\theta\|^2 1_{\{y: 0 < \|y\| \leq 1\}}(r^{E(x)}\theta) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_{\{y: \|y\| > 1\}}(r^{E(x)}\theta) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \|r^{E(x)}\theta\|^2 1_{(0, r_2)}(r) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_{(r_1, \infty)}(r) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta).
\end{aligned}$$

Wir wählen nun ein $\delta > 0$ so, dass $a - \delta > \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Mit Korollar 5.5 existiert für dieses δ eine Konstante $C > 0$, so dass wir das erste Integral weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty r^{2(a-\delta)} 1_{(0, r_2)}(r) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{1}{r_1} \sigma(d\theta) \\
&= \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \left(C \int_0^{r_2} r^{2(a-\delta)-2} dr + \frac{1}{r_1} \right) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

wobei wir die Wahl von δ, d.h. $a - \delta > \frac{1}{2}$, ausgenutzt haben. □

Damit haben wir in diesem Abschnitt eine Familie von Lévy-Maßen $(\phi_x(\cdot))_{x\in\mathbb{R}^d}$ definiert. Wir möchten an dieser Stelle betonen, dass wir die operator-stable-like Lévy-Maße auch ohne die Bedingung (E2), die Lipschitz-Stetigkeit, des Exponenten $E(x)$ definieren können. Diese Bedingung haben wir für den Nachweis der Lévy-Maßeigenschaft in der vorherigen Proposition 5.7 nicht gebraucht. Die Lipschitz-Stetigkeit ist jedoch essentiell für die Konstruktion des Feller-Prozesses. Deswegen haben wir sie hier in die Definition des operator-stable-like Lévy-Maßes integriert.

5.2 Stochastische Differentialgleichung

Bei dem Ansatz mittels einer stochastischen Differentialgleichung einen Feller-Prozess aus einem vorgebenen Symbol bzw. Lévy-Tripel zu konstruieren, treten zwei Schwierigkeiten auf. In vielen Fällen ist es nicht trivial aus einem gegebenen x-abhängigen Lévy-Tripel eine zugehörige SDE herzuleiten. Außerdem besteht die Schwierigkeit der Wahl der Voraussetzungen an das x-abhängige Tripel, in unserer Situation an das OSL Lévy-Maß. Es ist unklar, welche Bedingungen das Tripel erfüllen muss, damit die zugehörige SDE lösbar ist und die Lösung auch tatsächlich ein Feller-Prozess ist. Für weitergehende Erläuterungen verweisen wir auf das Kapitel 3.2 in [10]. Bei der Wahl der SDE orientieren wir uns an einer SDE-Darstellung von stable-like Prozessen, siehe Beispiel 5.8. Die dortige Darstellung modifizieren wir mit dem Exponenten $E(x)$. Außer den Bedingungen (E1)-(E3), die der Exponent erfüllt, stellen wir keine weiteren Voraussetzungen an das OSL Lévy-Maß.

Im Folgenden betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $t \geq 0$, die die üblichen Bedingungen erfüllt (siehe Definition 3.2).

Wir führen die d-dimensionale stochastische Differentialgleichung ein:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(X_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(X_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr), \qquad (5.8)$$

wobei $E(x) \in GL(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d$, ein Exponent ist. Wir möchten an dieser Stelle nochmals betonen, dass diese Matrizen die Bedingungen aus Definition 5.1 erfüllen. Mit N bezeichnen wir ein Poisson-Zufallsmaß auf dem Produktraum $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1} \times (0, \infty)$ adaptiert an die Filtration $\mathcal{F}_t$ und mit Intensität $\lambda^1 \otimes \sigma \otimes \pi$. Dabei ist σ das endliche Maß auf $\mathbb{S}^{d-1}$ aus der Definition 5.2 des operator-stable-like Lévy-Maßes und $\pi(dr) = r^{-2}dr$ auf $(0, \infty)$. Für das kompensierte Poisson-Zufallsmaß schreiben wir $\tilde{N}$. Die Lösung $X = (X_t)_{t\geq 0}$ von (5.8) ist, falls sie existiert, ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess.

Beispiel 5.8. *Wir wählen in* (5.8) *für* σ *die Gleichverteilung auf* $\mathbb{S}^{d-1}$ *und* $E(x) = \frac{1}{\alpha(x)} id$, *wobei* $\alpha(x) \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ *Lipschitz-stetig ist mit*

$$0 < \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \alpha(x) \leq \alpha(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \alpha(x) < 2.$$

Dann erhalten wir die SDE-Darstellung von α-stable-like Prozessen (siehe Proposition 2.1 in [32]), d.h. die SDE besitzt eine eindeutige pfadweise Lösung und die Lösung ist ein Feller-Prozess. Die stable-like Prozesse wurden von R. Bass in [3] eingeführt.

Satz 5.9. *Für jedes $\mathcal{F}_0$-messbare X_0 existiert eine eindeutige pfadweise Lösung der stochastischen Differentialgleichung* (5.8)*:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(X_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(X_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr).$$

Die Lösung von (5.8) *ist càdlàg und* $(\mathcal{F}_t)$*-adaptiert.*

Um dies zu beweisen, brauchen wir eine obere Grenze für die Differenz zweier Matrixexponentiale.
Dabei ist die folgende Identität für das Matrixexponential sehr nützlich, siehe Formel (1.3) in [30].

Lemma 5.10. *Für* $A, B \in GL(\mathbb{R}^d)$ *und* $t \geq 0$ *gilt die Identität*

$$e^{(A+B)t} = e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} B e^{(A+B)s} \, ds. \tag{5.9}$$

Lemma 5.11. *Für* $\delta > 0$ *existieren Konstanten* $C, \tilde{C} > 0$*, so dass für alle* $r \in (0,1)$ *und alle* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *gilt:*

$$\|r^{E(x)} - r^{E(y)}\| \leq C \|E(x) - E(y)\| \cdot r^{a-\delta} \leq \tilde{C} \|x - y\| \cdot r^{a-\delta}. \tag{5.10}$$

Beweis. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit des Exponenten folgt direkt die zweite Ungleichung. Es bleibt somit nur die erste Ungleichung zu zeigen. Dazu verwenden wir vorheriges Lemma 5.10 und setzen $A := -E(y), B := E(y) - E(x)$ und $t := -\ln(r) \geq 0$ für $r \in (0,1)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
r^{E(x)} - r^{E(y)} &= e^{(A+B)t} - e^{At} \\
&= \int_0^t e^{A(t-s)} B e^{(A+B)s} \, ds \\
&= \int_0^{-\ln(r)} e^{(-E(y))(-\ln(r)-s)} (E(y) - E(x)) e^{-(E(x))s} ds \\
&= \int_0^{-\ln(r)} e^{E(y)(\ln(r)+s)} (E(y) - E(x)) e^{-E(x)s} \, ds.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\|r^{E(y)} - r^{E(x)}\| \leq \|E(y) - E(x)\| \int_0^{-\ln(r)} \|e^{E(y)(\ln(r)+s)}\| \cdot \|e^{-E(x)s}\| \, ds.$$

Mit der Substitution $s = -\ln(v)$ ist das vorherige Integral gleich

$$\int_r^1 \|e^{E(y)(\ln(r)-\ln(v))}\| \cdot \|e^{E(x)\ln(v)}\| \frac{1}{v} \, dv = \int_r^1 \left\| \left(\frac{r}{v} \right)^{E(y)} \right\| \cdot \|v^{E(x)}\| \frac{1}{v} \, dv.$$

Da $v \leq 1$ und $r/v \leq 1$ ist, können wir das Integral mit der Ungleichung aus Korollar 5.6 mit Konstanten $C_1, C_2 > 0$ abschätzen

$$\begin{aligned}
C_1 C_2 \int_r^1 \left(\frac{r}{v} \right)^a v^a \frac{1}{v} \, dv &= C_1 C_2 r^a \int_r^1 \frac{1}{v} \, dv \\
&= C_1 C_2 r^a (-\ln(r)) \\
&\leq C r^{a-\delta}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $r^\delta(-\ln(r))$ wegen $\delta > 0$ und $r \in (0,1)$ beschränkt. □

Bemerkung 5.12. Im weiteren Verlauf wählen wir die Konstante $\delta > 0$ aus dem Lemma 5.11 stets so, dass $a - \delta > \frac{1}{2}$ erfüllt ist, ohne dies jedesmal explizit zu erwähnen.

Beweis von Satz 5.9. Da die Anzahl an Sprüngen, die größer als Eins sind, auf jedem endlichen Intervall fast sicher endlich ist, reicht es nach Theorem 6.2.9 in [1] bzw. wegen der Argumente aus dem Abschnitt Interlacing zu zeigen, dass die folgende modifizierte stochastische Differentialgleichung eine pfadweise eindeutige Lösung besitzt:

$$M_t = M_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr). \tag{5.11}$$

Für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung müssen wir also die lineare Beschränktheits- und Lipschitzbedingung nachrechnen. Es reicht also nachzuweisen, dass Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(x)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \leq C_1(1 + \|x\|^2), \tag{5.12}$$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \leq C_2\|x - y\|^2. \tag{5.13}$$

Zur linearen Beschränktheitsbedingung:
Die Abschätzung des Matrixexponentials aus Korollar 5.6 für den Fall $r \in (0, 1)$ liefert die Existenz einer Konstanten $C > 0$ mit

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(x)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \leq C\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 r^{2a-2}dr = C_1 \leq C_1(1 + \|x\|^2).$$

Da die Realteile der Eigenwerte von $E(x)$ nach unten durch $a > \frac{1}{2}$ beschränkt sind, ist das Integral endlich.

Zur Lipschitzbedingung:
Für $\delta > 0$ existiert mit Lemma 5.11 eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(x)} - r^{E(y)}\|^2 \cdot \|\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &\leq C\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\|x - y\|^2 \int_0^1 r^{2a-2\delta-2}dr \\ &\leq C_2\|x - y\|^2,\end{aligned}$$

da $a - \delta > \frac{1}{2}$. □

Bemerkung 5.13. Die Menge $\{s \in [0, t] : X_s \neq X_{s-}\}$ ist fast sicher eine Lebesgue-Nullmenge, da $t \mapsto X_t(\omega)$ eine càdlàg Funktion mit abzählbar vielen Sprüngen auf $[0, t]$ ist. Falls wir bzgl. des Lebesgue-Maßes integrieren, können wir deshalb im Integranden zwischen den Prozessen X_s und X_{s-} wechseln, ohne den Wert des Integrals zu verändern.

Aus dem Beweis ergibt sich unmittelbar eine Eigenschaft der Lösung der SDE (5.8).

Lemma 5.14. *Der Prozess*

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \tag{5.14}$$

ist ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal im L^2, d.h. ein quadratisch integrierbares Martingal.

Beweis. Es ist nach Satz 4.12 (c) zu zeigen, dass für alle $t > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right) < \infty.$$

Dies haben wir im Beweis von Satz 5.9 beim Nachrechnen der linearen Beschränktheit gezeigt. □

Die Lösung der SDE lässt sich folglich in eine größere Klasse von stochastischen Prozessen einordnen.

Proposition 5.15. *Die Lösung X der SDE* (5.8) *ist ein Semimartingal.*

Beweis. Nach Lemma 5.14 ist

$$\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta\tilde{N}(ds, d\theta, dr)$$

für alle $t \geq 0$ ein L^2-Martingal und

$$\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(Z_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr)$$

ist ein Prozess, der von endlicher Variation ist (Pfade sind stückweise konstant, siehe Abschnitt 4.4). □

Im Folgenden zeigen wir, dass die Lösung der SDE (5.8) tatsächlich ein Feller-Prozess ist. Dazu werden wir die SDE mit der Anfangsbedingung $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$ f.s. betrachten, d.h.

$$X_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(X_{s-})}\theta\tilde{N}(ds, d\theta, dr) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(X_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr). \tag{5.15}$$

Für die Lösung von (5.15) schreiben wir $X^x = (X_t^x)_{t\geq 0}$. Diese wird insbesondere von der Anfangsbedingung abhängen.
Wie im Beweis von Satz 5.9 führen wir die Lösung $M^x = (M_t^x)_{t\geq 0}$ der modifizierten SDE

$$M_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta\tilde{N}(ds, d\theta, dr) \tag{5.16}$$

ein.

Zunächst zeigen wir, dass die Lösung der SDE ein universeller Markov-Prozess ist, vergleiche Theorem 2.47 in [29].

Satz 5.16. *Die Lösung X^x der SDE* (5.15) *ist ein universeller Markov-Prozess.*

Beweis. O.B.d.A. beschränken wir uns für den Beweis auf die Lösung M^x der modifizierten SDE (5.16). Nach der Definition eines universellen Markov-Prozesses müssen wir die Markov-Eigenschaft (MP3) zeigen, dass für alle $u, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ und $B \in \mathcal{B}^d$ gilt:

$$\mathbb{P}^x\left(M_{u+t} \in B | \mathcal{F}_s^M\right) = \mathbb{P}^{M_u}\left(M_t \in B\right) \quad \mathbb{P}^x\text{ -f.s.} \tag{5.17}$$

Wir wählen $x, y \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest und ein $u \geq 0$, so dass $M_u^y = x$ erfüllt ist. Dann ist einerseits unter $\mathbb{P}^y(\cdot|M_u = x)$

$$\begin{aligned} M_{u+t} &= y + \int_0^{u+t} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \\ &= y + \int_0^{u} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) + \int_u^{u+t} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \\ &= x + \int_u^{u+t} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr). \end{aligned}$$

Wegen der stationären Zuwächse von Lévy-Prozessen folgt andererseits unter $\mathbb{P}^x$

$$\begin{aligned} M_t &= x + \int_0^{t} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \\ &= x + \int_u^{u+t} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \end{aligned}$$

mit Lösung M_t^x. Damit erhalten wir die Behauptung

$$\mathbb{P}^y(M_{u+t} \in B | M_u = x) = \mathbb{P}^x(M_t \in B).$$

Die Messbarkeitsbedingung (MP1) folgt direkt aus der Adaptiertheit der Lösung (siehe Satz 5.9) und die Bedingung (MP2) ist offensichtlich erfüllt, da der Prozess fast sicher in x startet. □

Um den zugehörigen Erzeuger zu bestimmen, führen wir einen linearen Operator $\tilde{A}$ ein, der definiert ist durch

$$\tilde{A}u(x) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - 1_{\{0<r<1\}} \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x) \rangle \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \tag{5.18}$$

für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 5.17. *Für alle $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ ist $\tilde{A}u \in C_b(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis. Mit einer Taylor-Entwicklung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt für beliebige $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ sowie $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$:

$$\begin{aligned} &\left| u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - 1_{\{0<r<1\}} \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x) \rangle \right| \\ &\qquad \leq \left| 1_{\{0<r<1\}} \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x) \rangle \right) \right| \\ &\qquad\quad + \left| 1_{\{r \geq 1\}} \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) \right) \right| \\ &\qquad \leq 1_{\{0<r<1\}} \left(\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|_\infty \|r^{E(x)}\theta\|^2 \right) + \left| 1_{\{r \geq 1\}} \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) \right) \right| \\ &\qquad \leq 1_{\{0<r<1\}} \left(\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|_\infty \|r^{E(x)}\|^2 \|\theta\|^2 \right) + 1_{\{r \geq 1\}} 2\|u\|_\infty \\ &\qquad \leq 1_{\{0<r<1\}} \left(\sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|_\infty C r^{2a} \right) + 1_{\{r \geq 1\}} 2\|u\|_\infty \\ &\qquad \leq 2C \left(1 \wedge r^{2a} \right) \left(\|u\|_\infty + \sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|_\infty \right), \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Korollar 5.6 mit einer Konstanten $C > 0$ benutzt haben. Wegen $a > 1/2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\tilde{A}u(x)| &\leq 2C \left(\|u\|_\infty + \sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|_\infty \right) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 \wedge r^{2a}\right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\
&= 2C \left(\|u\|_\infty + \sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u\|_\infty \right) \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \left(\int_0^1 r^{2a-2} dr + \int_1^\infty r^{-2} dr \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit des Exponenten $E(x)$ mit dem Satz von der dominierten Konvergenz. □

Dass der Operator $\tilde{A}$ der Erzeuger des Prozesses bzw. der zugehörigen Halbgruppe ist, zeigt der nächste Satz.

Satz 5.18. *Der Erzeuger der Lösung X^x der SDE* (5.15) *hat die folgende Gestalt für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$:*

$$Au(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - 1_{\{0<r<1\}} \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x) \rangle \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta). \tag{5.19}$$

Insbesondere gilt $A : C_\infty^2(\mathbb{R}^d) \to C_\infty(\mathbb{R}^d)$ und $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt im Definitionsbereich des Erzeugers.

Beweis. Wir verwenden die Itô-Formel für das Poisson-Integral, siehe Satz 4.15,

$$\begin{aligned}
u(X_t^x) = u(X_0^x) &+ \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x) \right) N(ds, d\theta, dr) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x) \right) \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x) - \langle r^{E(X_{s-}^x)}\theta, \nabla u(X_{s-}^x) \rangle \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds.
\end{aligned}$$

Wegen $|u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x)| \leq 2\|u\|_\infty < \infty$ für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ folgt für alle $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty |u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x)| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds \right] \\
\leq 2\|u\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{-2} dr \sigma(d\theta) ds \\
= 2t\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \|u\|_\infty < \infty.
\end{aligned}$$

Da die Vorhersagbarkeit wegen der linksseitigen Stetigkeit der Pfade erfüllt ist, liegt der Integrand in $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}^{d-1} \times (1, \infty))$ und mit Satz 4.13 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x) \right) N(ds, d\theta, dr) \right] \\
= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x) \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds \right].
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Integranden im Integral bzgl. des kompensierten Poisson-Zufallsmaßes. Es folgt mit dem Mittelwertsatz, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Abschätzung des Matrixexponentials aus Korollar 5.6 für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ und $r \in (0,1)$:

$$|u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x)|^2 \leq \|\nabla u\|_\infty^2 \|r^{E(x)}\theta\|^2 \leq \|\nabla u\|_\infty^2 \|r^{E(x)}\|^2 \|\theta\|^2 \leq C\|\nabla u\|_\infty^2 r^{2a}.$$

Damit gilt für alle $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 |u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x)|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right]& \\
\leq C\|\nabla u\|_\infty^2 \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{2a-2} dr\sigma(d\theta)ds& \\
= C\sigma(\mathbb{S}^{d-1})t\|\nabla u\|_\infty^2 \int_0^1 r^{2a-2}dr < \infty&,
\end{aligned}$$

da $a > 1/2$ ist. Der Integrand ist somit in $\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^{d-1} \times (1,\infty))$, wobei die Vorhersagbarkeit wegen der linksseitigen Stetigkeit der Pfade erfüllt ist, und somit folgt mit Satz 4.12 (b):

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x)\right) \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right] = 0.$$

Anwenden des Erwartungswertes ergibt mit diesen Überlegungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(X_t^x)] &= u(X_0^x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x)\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(X_{s-}^x + r^{E(X_{s-}^x)}\theta) - u(X_{s-}^x) - \langle r^{E(X_{s-}^x)}\theta, \nabla u(X_{s-}^x)\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right] \\
&= u(X_0^x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(u(X_s^x + r^{E(X_s^x)}\theta) - u(X_s^x)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \mathbb{1}_{\{0<r<1\}}\langle r^{E(X_s^x)}\theta, \nabla u(X_s^x)\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right],
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass wir bzgl. des Lebesgue-Maßes integrieren. Mit $\mathbb{E}^x(u(X_t)) = \mathbb{E}(u(X_t^x))$ folgt

$$\mathbb{E}^x(u(X_t)) = u(X_0) + \int_0^t \mathbb{E}^x(Au(X_s))ds.$$

Dies zeigt, dass A in der Tat der Erzeuger von $(X_t)_{t\geq 0}$ ist. Die restlichen Aussagen folgen mit der vorherigen Proposition 5.17 und dem Satz von der dominierten Konvergenz. □

Proposition 5.19. *Für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ ist*

$$u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t Au(X_s)ds \tag{5.20}$$

ein $(\mathcal{F}_t)$- Martingal im L^2.

Beweis. Mit der Itô-Formel erhalten wir für beliebige $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$:

$$u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t Au(X_s)ds = \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-})\right) N(ds, d\theta, dr)$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \Big(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-}) \Big) \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \\
&+\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \Big(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-}) - \langle r^{E(X_{s-})}\theta, \nabla u(X_{s-}) \rangle \Big) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds \\
&-\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \Big(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-}) \\
&\quad - 1_{\{0<r<1\}} \langle r^{E(X_{s-})}\theta, \nabla u(X_{s-}) \rangle \Big) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds \\
=&\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \Big(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-}) \Big) N(ds, d\theta, dr) \\
&+\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \Big(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-}) \Big) \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \\
&-\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \Big(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-}) \Big) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds \\
=&\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \Big(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-}) \Big) \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \\
&+\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \Big(u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-}) \Big) \tilde{N}(ds, d\theta, dr).
\end{aligned}
$$

Nach Satz 4.12 (c) reicht es zu zeigen, dass für alle $t > 0$

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty |u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-})|^2 \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds\right] < \infty
$$

und

$$
\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 |u(X_{s-} + r^{E(X_{s-})}\theta) - u(X_{s-})|^2 \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds\right] < \infty
$$

gilt. Dies haben wir bereits im vorherigen Satz 5.18 bei der Berechnung des Erzeugers nachgewiesen. □

Auf dem $B_b(\mathbb{R}^d)$ können wir für den Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ durch

$$
T_t u(x) := \mathbb{E}(u(X_t) \mid X_0 = x) \text{ für alle } t \geq 0 \text{ und } u \in B_b(\mathbb{R}^d) \tag{5.21}
$$

einführen. Da der Prozess ein universeller Markov-Prozess ist, ist die Familie von Operatoren $(T_t)_{t\geq 0}$ eine Markovsche Halbgruppe, siehe Satz 3.4. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Halbgruppe T_t eine Feller-Halbgruppe ist und somit der zugehörige Prozess ein Feller-Prozess ist.

Um zu zeigen, dass die Lösung X^x der SDE (5.15) ein Feller-Prozess ist, benötigen wir eine stetige Abhängigkeit der Lösung X^x von x, d.h. wir untersuchen die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto X_t^x(\omega)$ definiert für alle $\omega \in \Omega$ und $t \geq 0$. Dazu brauchen wir mehrere Ungleichungen. Die Abschätzung im nächsten Satz wird Kunitas Erste Ungleichung genannt, siehe Theorem 2.11 in [19] bzw. Theorem 4.4.23 in [1].

Satz 5.20. *Für alle $p \geq 2$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t} \|M_s^x\|^p\right) \leq C \Bigg\{ &\|x\|^p + \mathbb{E}\left(\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds\right]^{p/2}\right) \\
&+ \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^p \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) ds\right) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

Dabei ist die Konstante C abhängig von p und unabhängig von t.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zwei allgemein bekannte Ungleichungen, an die wir hier erinnern:

(i) Für alle $x, y > 0$ und $p', q' > 1$, die $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ erfüllen, gilt:

$$xy \leq \frac{x^{p'}}{p'} + \frac{y^{q'}}{q'}. \tag{5.23}$$

Diese wird in der Literatur Youngsche Ungleichung genannt.

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $p' \geq 0$ gilt:

$$|x+y|^{p'} \leq \left(2^{p'-1} \vee 1\right)\left(|x|^{p'} + |y|^{p'}\right). \tag{5.24}$$

Beweis von Satz 5.20. Wir nehmen $x = 0$ an, d.h. wir betrachten

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr).$$

Die Aussage für beliebige $x \in \mathbb{R}^d$ folgt mit der Subadditivität der Norm. Außerdem betrachten wir im Folgenden $p > 2$, da sich der Fall $p = 2$ direkt aus Satz 4.12 (b) ergibt.
Wegen Korollar 5.6 existiert eine Konstante $C > 0$, so dass gilt:

$$\sup_{s\leq t} \sup_{\theta\in\mathbb{S}^{d-1}} \sup_{0<r<1} \|r^{E(M_{s-})}\theta\| \leq \sup_{s\leq t} \sup_{\theta\in\mathbb{S}^{d-1}} \sup_{0<r<1} Cr^a\|\theta\| \leq C < \infty.$$

Mit Bemerkung 4.16 können wir die Itô-Formel somit auch auf die unbeschränkte Funktion $f(x) = \|x\|^p$ anwenden und erhalten

$$\|M_t\|^p = W_t + Y_t,$$

wobei die Prozesse $W = (W_t)_{t\geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ definiert sind durch

$$W_t := \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(\|M_{s-} + r^{E(M_{s-})}\theta\|^p - \|M_{s-}\|^p\right) \tilde{N}(ds, d\theta, dr)$$

und

$$Y_t := \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(\|M_{s-} + r^{E(M_{s-})}\theta\|^p - \|M_{s-}\|^p - p\|M_{s-}\|^{p-2}\langle M_{s-}, r^{E(M_{s-})}\theta\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds.$$

Zunächst schätzen wir den Prozess Y ab:
Mit der mehrdimensionalen Taylor-Formel (siehe Darstellung in Theorem 8.7 in [8]) folgt

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}p(p-2)\|J_s\|^{p-4}\langle J_s, r^{E(M_{s-})}\theta\rangle^2 + p\|J_s\|^{p-2}\|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds,$$

wobei $J_s^{(i)} = M_{s-}^{(i)} + \vartheta^{(i)}\left(r^{E(M_{s-})}\theta\right)^{(i)}$ mit $\vartheta^{(i)} \in (0,1)$ für alle $1 \leq i \leq d$ ist. Wir benutzen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Ungleichung (5.24), um den Prozess J_s abzuschätzen:

$$\begin{aligned} Y_t &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}p(p-1)\|J_s\|^{p-2}\|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds \\ &\leq C_1 \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(\|M_{s-}\|^{p-2}\|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2 + \|r^{E(M_{s-})}\theta\|^p\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds. \end{aligned}$$

Da nach Lemma 5.14 M_t ein Martingal ist, folgt mit der Doobschen Maximalungleichung

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\|M_s\|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left(\|M_t\|^p\right) \leq \mathbb{E}(W_t) + K_1(t) + K_2(t),$$

wobei

$$K_1(t) := C_2\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|M_{s-}\|^{p-2}\|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)$$

und

$$K_2(t) := C_2\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-})}\theta\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)$$

mit Konstante $C_2 > 0$ ist.
Für alle $\epsilon > 1$ ist

$$\begin{aligned}
K_1(t) &\leq C_2\epsilon^{-1}\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\|M_s\|^{p-2}\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \epsilon\|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right) \\
&\leq C_2\epsilon^{-1}\left[\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\|M_s\|^p\right)\right]^{\frac{p-2}{p}} \\
&\quad \cdot \left[\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \epsilon\|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)^{p/2}\right)\right]^{2/p} \\
&\leq C_2\epsilon^{-1}\frac{p-2}{p}\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\|M_s\|^p\right) \\
&\quad + C_2\epsilon^{-1}\frac{2}{p}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \epsilon\|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)^{p/2}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Abschätzung die Hölder-Ungleichung und in der letzten Abschätzung die Formel (5.23) mit $p' = \frac{p}{p-2}$ und $q' = \frac{p}{2}$ angewendet haben.
Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\|M_s\|^p\right) \leq \mathbb{E}(W_t) &+ C_3\epsilon^{-1}\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\|M_s\|^p\right) \\
&+ C_4\epsilon^{-1+p/2}\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-})}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)^{p/2}\right) \\
&+ C_2\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-})}\theta\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right).
\end{aligned}$$

Wir wählen dabei ϵ so groß, dass $C_3\epsilon^{-1} < 1$ erfüllt ist.
Es bleibt zu zeigen, dass der Erwartungswert von W_t Null ist. Dazu wählen wir eine Folge von Stoppzeiten

$$T_n := \inf\{t \geq 0 : \|W_t\| \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei wir die Konvention $\inf\emptyset := +\infty$ benutzen. Für die Stoppzeiten gilt:

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} T_n = \infty \text{ f.s.}$$

Der gestoppte Prozess $W_{t\wedge T_n}$ ist ein Martingal und folglich ist der Erwartungswert Null. Dann gilt die zu beweisende Ungleichung bis zur Stoppzeit $t \wedge T_n$ und für $n \to \infty$ schließlich für alle $t \in \mathbb{R}$ mit der Konstanten $C = C_4\epsilon^{-1+p/2} \vee C_2$. □

Daraus lässt sich eine weitere für unsere Ausführungen hilfreiche Abschätzung herleiten.

Korollar 5.21. *Für alle $p \geq 2$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\|M_s^x\|^p\right) \leq C\Bigg\{&\|x\|^p + \mathbb{E}\left(\int_0^t \left[\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right]^{p/2} ds\right)\\ &+\mathbb{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^p\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 5.20, indem wir die Hölder-Ungleichung anwenden auf

$$\begin{aligned}&\left[\int_0^t 1\cdot\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right)ds\right]^{p/2}\\ &\leq \left[\int_0^t 1ds\right]^{\frac{p}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{p}\right)}\cdot\left[\int_0^t\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right)^{p/2}ds\right]^{\frac{p}{2}\cdot\frac{2}{p}}\\ &= C\int_0^t\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right)^{p/2}ds,\end{aligned}$$

wobei die Konstante $C > 0$ insbesondere von t und p abhängt. □

Für die weitere Untersuchung in diesem Abschnitt orientieren wir uns an den Kapiteln 6.6 und 6.7 in [1].
Die Lösung M^x der modifizierten SDE (5.16) erfüllt die folgende Ungleichung:

Lemma 5.22. *Für alle $p \geq 2$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left(\|M_t^x - M_t^y\|^p\right) \leq C\|x-y\|^p. \tag{5.26}$$

Beweis. Für die Differenz

$$M_t^x - M_t^y = x - y + \int_0^t\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1\left(r^{E(M_{s-}^x)}\theta - r^{E(M_{s-}^y)}\theta\right)\tilde{N}(ds,d\theta,dr)$$

folgt mit Korollar 5.21

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\|M_t^x - M_t^y\|^p\right) &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}\|M_s^x - M_s^y\|^p\right)\\ &\leq C_1\Bigg\{\|x-y\|^p + \mathbb{E}\left(\int_0^t\left[\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta - r^{E(M_{s-}^y)}\theta\|^2\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right]^{p/2}ds\right)\\ &\qquad+\mathbb{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta - r^{E(M_{s-}^y)}\theta\|^p\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)\Bigg\}\\ &\leq C_1\Bigg\{\|x-y\|^p + C_2\mathbb{E}\left(\int_0^t\|M_{s-}^x - M_{s-}^y\|^p ds\right)\\ &\qquad+\mathbb{E}\left(\int_0^t\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta - r^{E(M_{s-}^y)}\theta\|^p\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)\Bigg\},\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Abschätzung die Lipschitz-Bedingung benutzt haben, die im Beweis von Satz 5.9 nachgewiesen wurde. Analog zur Lipschitz-Bedingung lässt sich der Term im zweiten

Erwartungswert abschätzen. Für $\delta > 0$ existiert mit Lemma 5.11 eine Konstante $C_3 > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M^x_{s-})}\theta - r^{E(M^y_{s-})}\theta\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M^x_{s-})} - r^{E(M^y_{s-})}\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\qquad \leq C_3 \|M^x_{s-} - M^y_{s-}\|^p \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{p(a-\delta)} \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\qquad = C_3 \|M^x_{s-} - M^y_{s-}\|^p \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 r^{p(a-\delta)-2} dr < \infty,
\end{aligned}$$

wobei die Endlichkeit des Integrals aus $a - \delta > \frac{1}{2}$ und $p \geq 2$ folgt. Insgesamt existieren Konstanten $C_1, C_2, C_4 > 0$, so dass wir die folgende Abschätzung bekommen:

$$\mathbb{E}\left(\|M^x_t - M^y_t\|^p\right) \leq C_1 \left\{ \|x - y\|^p + (C_2 + C_4) \int_0^t \mathbb{E}\left(\|M^x_s - M^y_s\|^p\right) ds \right\}.$$

Die Behauptung folgt mit dem Lemma von Gronwall. □

Satz 5.23. *Für jedes $t \geq 0$ besitzt der Prozess $x \mapsto X^x_t$ eine stetige Modifikation.*

Beweis. Mit Lemma 5.22 existiert für alle $p \geq 2$ eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(\|M^x_t - M^y_t\|^p\right) \leq C\|x - y\|^p.$$

Wir wählen $p > 2 \vee d$. Dann folgt die Existenz einer stetigen Modifikation von $x \mapsto M^x_t$ mit dem Satz von Kolmogorov-Chentsov, siehe Theorem 1.1.18 in [1]. Der allgemeine Fall folgt wegen der Stetigkeit von $x \mapsto r^{E(x)}\theta$ für alle $r \geq 1$ und $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ mit der Interlacing Struktur, siehe Abschnitt 4.3. □

Mit dieser Vorarbeit können wir das Hauptresultat dieses Abschnittes beweisen.

Satz 5.24. *Die Lösung X^x der SDE* (5.15)*, d.h. von*

$$X_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(X_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(X_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr),$$

ist ein Feller-Prozess.

Beweis. Zunächst erinnern wir an Definition 3.7, dass eine Feller-Halbgruppe folgende zwei Bedingungen erfüllen muss:

(i) $T_t : C_\infty(\mathbb{R}^d) \to C_\infty(\mathbb{R}^d)$ für alle $t \geq 0$,

(ii) $\lim_{t\to 0} \|T_t u - u\|_\infty = 0$ für alle $u \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Zur Feller-Eigenschaft (i):
Für $u \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$, und $t \geq 0$ ist

$$\mathbb{E}^x\left(u(X_t)\right) = \mathbb{E}\left(u(X^x_t)\right).$$

Wir wählen eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$ und betrachten

$$|\mathbb{E}^x\left(u(X_t)\right) - \mathbb{E}^{x_n}\left(u(X_t)\right)| = |\mathbb{E}\left(u(X^x_t) - u(X^{x_n}_t)\right)|.$$

Mit Satz 5.23 folgt für fast alle $\omega \in \Omega$:

$$\lim_{n\to\infty} X_t^{x_n}(\omega) = X_t^x(\omega).$$

Da $|u(X_t^x) - u(X_t^{x_n})| \leq 2\|u\|_\infty$ für $u \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ endlich ist, folgt die Stetigkeit mit dem Satz von der dominierten Konvergenz.

Es bleibt für festes $u \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ und $t \geq 0$ zu zeigen:

$$T_t u(x) = \mathbb{E}^x(u(X_t)) \to 0 \quad \text{für } \|x\| \to \infty,$$

d.h. für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge K, so dass auf deren Komplement gilt:

$$|\mathbb{E}^x(u(X_t))| < \epsilon.$$

Nun gehen wir zur Lösung der modifizierten SDE M^x über und definieren die zugehörige Halbgruppe $(S_t)_{t\geq 0}$ durch $S_t = \mathbb{E}^x\left(u(M_t)\right)$. Für diese zeigen wir

$$S_t u(x) := \mathbb{E}^x(u(M_t)) \to 0 \quad \text{für } \|x\| \to \infty.$$

Als erstes weisen wir nach, dass für festes $\delta, \epsilon > 0$ ein $k > 0$ existiert, so dass

$$\|x\| \geq k \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^x\left(\|M_t\| < \delta\right) < \epsilon. \tag{5.27}$$

Für $\|x\| > \delta$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x\left(\|M_t\| < \delta\right) &\leq \mathbb{P}^x\left(\|M_t - x\| > \|x\| - \delta\right) \\
&= \mathbb{P}^x\left(\|M_t - x\|^2 > (\|x\| - \delta)^2\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}^x\left(\|M_t - x\|^2\right)}{(\|x\| - \delta)^2} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left(\|M_t^x - x\|^2\right)}{(\|x\| - \delta)^2}.
\end{aligned}$$

Nun schauen wir uns den Zähler im letzten Audruck genauer an. Es ist

$$M_t^x - x = \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-}^x)}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr).$$

Wegen Korollar 5.6 existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \leq C\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 r^{2a-2} dr < \infty,$$

da $a > 1/2$. Wir können folglich den Satz 4.12 (b) auf den Zähler anwenden und bekommen

$$\mathbb{E}\left(\|M_t^x - x\|^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) ds\right) \leq \tilde{C}t$$

mit einer von x unabhängigen Konstanten $\tilde{C} > 0$. Damit haben wir (5.27) bewiesen.
Da $u \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist, existiert für festes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\|y\| > \delta \quad \Rightarrow \quad |u(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Außerdem existiert ein $k > 0$, so dass

$$\|x\| \geq k \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^x\left(\|M_t\| < \delta\right) < \frac{\epsilon}{2\|u\|_\infty}.$$

Somit erhalten wir für $\|x\| > \max\{k, \delta\}$:

$$\begin{aligned} |S_t u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(y)|\, p_t(x, dy) \\ &= \int_{\|y\|<\delta} |u(y)|\, p_t(x, dy) + \int_{\|y\|\geq\delta} |u(y)|\, p_t(x, dy) \\ &\leq \|u\|_\infty\, \mathbb{P}^x\left(\|M_t\| < \delta\right) + \frac{\epsilon}{2}\, \mathbb{P}^x\left(\|M_t\| \geq \delta\right) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt mit der Interlacing Struktur, siehe Beweis von Theorem 6.7.2 in [1].

Zur starken Stetigkeit (ii):
Nach Lemma 1.4 in [10] ist für eine Markovsche Halbgruppe, die die Feller-Eigenschaft (i) erfüllt, die starke Stetigkeit äquivalent zur punktweisen Konvergenz. Da X^x càdlàg Pfade besitzt, folgt

$$\lim_{t\to 0} X_t^x(\omega) = X_0^x(\omega) \quad \text{f.s.}$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir für $u \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\lim_{t\to 0} T_t u(x) = \lim_{t\to 0} \mathbb{E}u(X_t^x) = \mathbb{E}u(X_0^x) = u(x)$$

und die Behauptung folgt. □

Weitere Eigenschaften des konstruierten Feller-Prozesses zeigen wir im letzten Kapitel.

5.3 Symbol

Da die Lösung der SDE ein Feller-Prozess mit $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$ ist, besitzt es ein Symbol, dass wir wie folgt bestimmen können: Nach Proposition 3.12 lässt es sich direkt aus dem Erzeuger

$$Au(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - 1_{\{0<r<1\}} \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x) \rangle \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta)$$

für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ über die Beziehung

$$q(x, \xi) = -e_{-\xi}(x) A e_\xi(x), \tag{5.28}$$

mit $e_\xi(x) = e^{i\langle x, \xi\rangle}$ berechnen.

Satz 5.25. *Die Lösung X^x der SDE* (5.15) *besitzt das Symbol:*

$$q(x, \xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle} + 1_{\{0<r<1\}} i \langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta). \tag{5.29}$$

Beweis. Mit der Formel (5.28) bekommen wir

$$\begin{aligned} q(x,\xi) &= -e^{-i\langle x,\xi\rangle}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \left(e^{i\langle x+r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} - e^{i\langle x,\xi\rangle} - 1_{\{0<r<1\}} i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle e^{i\langle x,\xi\rangle}\right)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + 1_{\{0<r<1\}} i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta). \end{aligned}$$

□

Für die Herleitung einiger Eigenschaften des Symbols benötigen wir folgende Abschätzung:

Lemma 5.26. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ und $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ gilt:*

$$\left|1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle 1_{\{0<r<1\}}\right| \le 2C\left(1 + \|\xi\|^2\right)\left(1 \wedge r^{2a}\right). \tag{5.30}$$

Außerdem gilt:

$$\int_0^\infty \left(1 \wedge r^{2a}\right)\frac{dr}{r^2} < \infty. \tag{5.31}$$

Beweis. Wir betrachten

$$\begin{aligned} &\left|1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle 1_{\{0<r<1\}}\right| \\ &\quad\le \left|\left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}\right)1_{\{r\ge 1\}}\right| + \left|\left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right)1_{\{0<r<1\}}\right| \\ &\quad\le \left(2\cdot 1_{\{r\ge 1\}}\right) + \left(\left|\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right|^2 1_{\{0<r<1\}}\right) \\ &\quad\le \left(2\cdot 1_{\{r\ge 1\}}\right) + \left(\|r^{E(x)}\theta\|^2\|\xi\|^2 1_{\{0<r<1\}}\right) \\ &\quad\le \left(2\cdot 1_{\{r\ge 1\}}\right) + \left(\|r^{E(x)}\|^2\|\theta\|^2\|\xi\|^2 1_{\{0<r<1\}}\right) \\ &\quad\le \left(2\cdot 1_{\{r\ge 1\}}\right) + \left(Cr^{2a}\|\xi\|^2 1_{\{0<r<1\}}\right) \\ &\quad\le 2C\left(1 + \|\xi\|^2\right)\left(1 \wedge r^{2a}\right), \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Summanden eine Taylor-Entwicklung, die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Korollar 5.6 benutzt haben. Wegen $a > 1/2$ folgt

$$\int_0^\infty \left(1 \wedge r^{2a}\right)\frac{dr}{r^2} = \int_0^1 r^{2a-2}dr + \int_1^\infty r^{-2}dr < \infty.$$

□

Satz 5.27 (Eigenschaften des Symbols)**.** *Das Symbol besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) $q(x, 0) = 0$;

(ii) Es ist beschränkt, d.h. es existiert eine (von x und ξ unabhängige) Konstante $C > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |q(x,\xi)| \le C\left(1 + \|\xi\|^2\right);$$

(iii) $x \mapsto q(x,\xi)$ *ist stetig für alle* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Beweis. Die Eigenschaft (i) ist offensichtlich klar, da wir nur konservative Prozesse betrachten.

Zur Eigenschaft (ii): Mit Lemma 5.26 folgt

$$\begin{aligned}|q(x,\xi)| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} - 1 - i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle 1_{\{0<r<1\}} \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 2C\left(1+\|\xi\|^2\right)\left(1\wedge r^{2a}\right)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &\leq C\left(1+\|\xi\|^2\right).\end{aligned}$$

Zur Eigenschaft (iii): Dies folgt aus Theorem 2.30 in [10], da die Stetigkeit von $x \mapsto q(x,0)$ äquivalent zur Stetigkeit von $x \mapsto q(x,\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ ist. □

Abschließend zeigen wir einen alternativen (stochastischen) Weg auf, um das Symbol des im vorherigem Abschnitt konstruierten Feller-Prozesses zu berechnen. Wir führen in Anlehnung an die Ausführungen in [29] das stochastische Symbol ein.

Definition 5.28. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein universeller Markov-Prozess. Die Funktion $p : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$p(x,\xi) := -\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}^x\left(e^{i\langle X_t - x,\xi\rangle} - 1\right), \tag{5.32}$$

heißt **(stochastisches) Symbol**, falls der Grenzwert existiert.

Bei der Definition des stochastischen Symbols in [29] (Definition 4.1) wird gefordert, dass der Markov-Prozess konservativ und normal ist. Dies haben wir bereits bei unserer Definition bzw. Konstruktion des universellen Markov-Prozesses vorausgesetzt.
Um das (stochastische) Symbol der Lösung der stochastischen Differentialgleichung zu bestimmen, benötigen wir das folgende Lemma, siehe Lemma 2.51 in [29].

Lemma 5.29. *Sei $X^x = (X_t^x)_{t\geq 0}$ ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess, der fast sicher in x startet, rechtsseitig stetig und beschränkt ist. Dann gilt:*

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\int_0^t X_s^x\, ds\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} x.$$

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(\frac{1}{t}\int_0^t X_s^x - x\, ds\right)\right| &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{t}\int_0^t |X_s^x - x|\, ds\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\frac{1}{t} t \sup_{0\leq s\leq t} |X_s^x - x|\right) \\ &= \mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t} |X_s^x - x| \\ &\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

und der Rechtsstetigkeit des Prozesses folgt die Behauptung mit dem Satz von der dominierten Konvergenz. □

Bei der Berechnung des stochastischen Symbols werden wir sehen, dass dieses mit dem (analytischen) Symbol (5.29) aus dem Erzeuger übereinstimmt.

Satz 5.30. *Die Lösung X^x der SDE* (5.15) *besitzt das stochastische Symbol:*

$$p(x,\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + 1_{\{0<r<1\}} i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta). \tag{5.33}$$

Beweis. Mit der Itô-Formel erhalten wir wie bei der Berechnung des Erzeugers

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{t}\mathbb{E}^x\left(e^{i\langle X_t - x,\xi\rangle} - 1\right) &= -\frac{1}{t}\mathbb{E}^x\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(e^{i\langle X_{s-} - x + r^{E(X_{s-})}\theta,\xi\rangle} - e^{i\langle X_{s-} - x,\xi\rangle}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. -\ 1_{\{0<r<1\}} i\langle r^{E(X_{s-})}\theta,\xi\rangle e^{i\langle X_{s-}-x,\xi\rangle} \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)\right)\\
&= -\frac{1}{t}\mathbb{E}^x\left(\int_0^t e^{i\langle X_s - x,\xi\rangle} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(e^{i\langle r^{E(X_s)}\theta,\xi\rangle} - 1\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. -\ 1_{\{0<r<1\}} i\langle r^{E(X_s)}\theta,\xi\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)\\
&\xrightarrow[t\to 0]{} -\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} - 1 - 1_{\{0<r<1\}} i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta),
\end{aligned}$$

wobei wir Lemma 5.29 und Lemma 5.26 im letzten Schritt verwendet haben. □

Bemerkung 5.31. Allgemein lässt sich zeigen, dass das stochastische Symbol $p(x,\xi)$ und das Symbol aus der Berechnung des Erzeugers $q(x,\xi)$ für Feller-Prozesse mit $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$ identisch sind, falls $x \mapsto q(x,\xi)$ stetig ist, siehe Corollary 4.5 in [29].

6 Operator-stable-like Prozess und Symbol

Im vorherigen Kapitel haben wir einen Feller-Prozess konstruiert, deren Erzeuger und Symbol die Darstellung

$$Au(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - 1_{\{0<r<1\}} \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x) \rangle \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta)$$

für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$q(x,\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi \rangle} + 1_{\{0<r<1\}} i \langle r^{E(x)}\theta, \xi \rangle \right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \tag{6.1}$$

besitzen. Dabei haben wir nur Bedingungen an den Exponenten $E(x)$ gestellt und σ als ein beliebiges endliches Maß auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ gewählt.

Das Ziel der Arbeit ist einen Feller-Prozess zu konstruieren, deren x-abhängiges Lévy-Tripel von der Form $(0, 0, \phi_x(\cdot))$ ist bzw. deren Symbol nur über das operator-stable-like Lévy-Maß ϕ_x dargestellt wird, d.h.

$$q(x,\xi) = \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y, \xi \rangle} + 1_{\{\|y\|<1\}} i \langle y, \xi \rangle \right) \phi_x(dy).$$

Wir erinnern an dieser Stelle an die Aussage von Lemma 5.4, dass für alle messbaren Funktionen $f : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ die Formel gilt:

$$\int_\Gamma f(y)\phi_x(dy) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty f(r^{E(x)}\theta) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta).$$

Aufgrund des Terms mit der Indikatorfunktion im Integranden lassen sich der Erzeuger und das Symbol nicht durch das OSL Lévy-Maß darstellen. Um dies zu erreichen, werden wir in diesem Kapitel eine zusätzliche Bedingung an Maß σ stellen. Außerdem leiten wir in Abschnitt 6.3 eine weitere Darstellung des Symbols über das OSL Lévy-Maß her, wobei wir neben einer (schwächeren) Bedingung an das Maß σ den zulässigen Bereich der Realteile der Eigenwerte des Exponenten weiter einschränken.

6.1 Prozess und Symbol

Im Folgenden fordern wir zusätzlich, dass das Maß σ symmetrisch auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ ist. Dies bedeutet, dass $\sigma(A) = \sigma(-A)$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ gilt.

Für das Integral einer stetigen ungeraden Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$) gilt die Tatsache:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\theta)\, \sigma(d\theta) = 0.$$

Insbesondere ist somit

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta\, \sigma(d\theta) = 0, \tag{6.2}$$

wobei mit 0 der Nullvektor im $\mathbb{R}^d$ gemeint ist. Das Integral ist vektorwertig zu verstehen, d.h. für den Vektor $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ mit den Einträgen

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^{(1)} \\ \vdots \\ \theta^{(d)} \end{pmatrix},$$

berechnet sich das Integral koordinatenweise:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta\sigma(d\theta) = \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta^{(1)}\sigma(d\theta) \\ \vdots \\ \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta^{(d)}\sigma(d\theta) \end{pmatrix}.$$

Für die Herleitung der Darstellung des Symbols benötigen wir ein Analogon zu dem eindimensionalen Fall, dass das Lebesgue-Integral linear bzgl. einer reellen Zahl ist. Das Integral ist im vektorwertigen Fall linear bzgl. einer Matrix.

Lemma 6.1. *Für eine Matrix $A \in L(\mathbb{R}^d)$ und einen Vektor $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ gilt:*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} A\theta\,\sigma(d\theta) = A\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta\,\sigma(d\theta). \tag{6.3}$$

Beweis. Wir beginnen mit der linken Seite und nutzen die Linearität des Integrals bzgl. eines Skalars aus:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} A\theta\,\sigma(d\theta) &= \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum\limits_{i=1}^{d} a^{1i}\theta^{(i)}\,\sigma(d\theta) \\ \vdots \\ \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sum\limits_{i=1}^{d} a^{di}\theta^{(i)}\,\sigma(d\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{d} a^{1i}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta^{(i)}\,\sigma(d\theta) \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{d} a^{di}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta^{(i)}\,\sigma(d\theta) \end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta^{(1)}\sigma(d\theta) \\ \vdots \\ \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta^{(d)}\sigma(d\theta) \end{pmatrix} \\ &= A\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta\,\sigma(d\theta).\end{aligned}$$

□

Wir erhalten mit der Symmetrie eine reelle Darstellung des Symbols:

Satz 6.2. *Falls das Maß σ symmetrisch auf der Einheitssphäre ist, dann besitzt das Symbol (6.1) für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ die Darstellung:*

$$q(x,\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \Big(1 - \cos(\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle)\Big)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) = \int_\Gamma (1 - \cos(\langle y, \xi\rangle))\,\phi_x(dy). \tag{6.4}$$

Beweis. Der Integrand in der Darstellung des Symbols ist komplexwertig und wir teilen den Integranden in den Realteil sowie Imaginärteil auf, d.h.

$$\begin{aligned}q(x,\xi) = &\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \Big(1 - \cos(\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle)\Big)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &+ i\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \Big(1_{\{0<r<1\}}\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle - \sin(\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle)\Big)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ =: &\; q_r(x,\xi) + i\cdot q_i(x,\xi).\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini können wir die Integrationsreihenfolge im Imaginärteil $q_i(x,\xi)$ vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} q_i(x,\xi) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1_{\{0<r<1\}}\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle - \sin(\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle)\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(1_{\{0<r<1\}}\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle - \sin(\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle)\right) \sigma(d\theta)\frac{dr}{r^2} \\ &=: \int_0^\infty \left(1_{\{0<r<1\}} I_1 - I_2\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta). \end{aligned}$$

Mit der Linearität des Skalarprodukts, Lemma 6.1 und der Symmetrie des Maßes σ folgt:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\sigma(d\theta) \\ &= \left\langle \int_{\mathbb{S}^{d-1}} r^{E(x)}\theta\sigma(d\theta),\xi \right\rangle \\ &= \left\langle r^{E(x)} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta\sigma(d\theta),\xi \right\rangle \\ &= \langle 0,\xi\rangle = 0. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von σ auf der Einheitssphäre folgt ebenso für alle $r>0$:

$$I_2 = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sin(\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle)\sigma(d\theta) = 0.$$

Mit diesen Überlegungen ist $q_i(x,\xi)=0$ und es folgt mit Lemma 5.4 die Behauptung

$$q(x,\xi) = q_r(x,\xi) = \int_\Gamma (1-\cos(\langle y,\xi\rangle))\,\phi_x(dy).$$

□

Die Symmetrie des Maßes σ ist nach Bemerkung 5.3 äquivalent zur Symmetrie des OSL Lévy-Maßes ϕ_x, d.h. $\phi_x(A)=\phi_x(-A)$ für alle $A\in\mathcal{B}(\Gamma)$ und $x\in\mathbb{R}^d$.

Für symmetrische operator-stable-like Lévy-Maße können wir die Klasse von operator-stable-like Prozessen, als einer Teilklasse von Feller-Prozessen, definieren:

Definition 6.3. Sei $X=(X_t)_{t\geq 0}$ ein Feller-Prozess, der das Symbol

$$q(x,\xi) = \int_\Gamma (1-\cos(\langle y,\xi\rangle))\,\phi_x(dy), \quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{6.5}$$

besitzt, wobei $\phi_x(\cdot)$ ein symmetrisches operator-stable-like Lévy-Maß ist. Wir nennen X einen **operator-stable-like Prozess**, kurz OSL Prozess.

Damit haben wir also einen Feller-Prozess als Lösung der SDE (5.15) konstruiert, der das x-abhängige Lévy-Tripel $(0,0,\phi_x(\cdot))$ besitzt.
Der Erzeuger eines OSL Prozesses lässt sich folglich auch mit dem OSL Lévy-Maß ϕ_x darstellen.

Proposition 6.4. *Der Erzeuger eines OSL Prozesses X besitzt die Darstellung*

$$Au(x) = \int_\Gamma \left(u(x+y)-u(x)+1_{\{\|y\|<1\}}\langle\nabla u(x),y\rangle\right)\phi_x(dy) \tag{6.6}$$

für $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Mit der Symmetrieeigenschaft des Maßes ϕ_x folgt wie bei der Berechnung des Symbols

$$\int_\Gamma \left(\sin(\langle y,\xi\rangle) - 1_{\{\|y\|<1\}}\langle y,\xi\rangle\right)\phi_x(dy) = 0.$$

Die Integrierbarkeit des Integranden erhalten wir aus Proposition 5.7, dass $\phi_x(\cdot)$ für festes $x \in \mathbb{R}^d$ ein Lévy-Maß ist, und der Abschätzung

$$\begin{aligned}
&|\sin(\langle y,\xi\rangle) - 1_{\{\|y\|<1\}}\langle y,\xi\rangle| \\
&\qquad \le 1 \cdot 1_{\{\|y\|\ge 1\}} + |\sin(\langle y,\xi\rangle) - \langle y,\xi\rangle| 1_{\{\|y\|<1\}} \\
&\qquad \le 1 \cdot 1_{\{\|y\|\ge 1\}} + |\langle y,\xi\rangle|^3 1_{\{\|y\|<1\}} \\
&\qquad \le 1 \cdot 1_{\{\|y\|\ge 1\}} + \|y\|^3\|\xi\|^3 1_{\{\|y\|<1\}} \\
&\qquad \le \left(1+\|\xi\|^3\right)\left(1 \wedge \|y\|^2\right),
\end{aligned}$$

wobei wir eine Taylor-Entwicklung und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung benutzt haben.
Zur Symboldarstellung fügen wir diesen Term hinzu

$$\begin{aligned}
q(x,\xi) &= \int_\Gamma (1-\cos(\langle y,\xi\rangle)\,\phi_x(dy) - i\int_\Gamma \left(\sin(\langle y,\xi\rangle) - 1_{\{\|y\|<1\}}\langle y,\xi\rangle\right)\phi_x(dy) \\
&= \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y,\xi\rangle} + 1_{\{\|y\|<1\}} i\langle y,\xi\rangle\right)\phi_x(dy).
\end{aligned}$$

Mit Korollar 3.10 folgt für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
Au(x) &= -\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} q(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\left(\int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y,\xi\rangle} + 1_{\{\|y\|<1\}} i\langle y,\xi\rangle\right)\phi_x(dy)\right)\hat{u}(\xi)d\xi \\
&= \int_\Gamma\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{i\langle x+y,\xi\rangle} - e^{i\langle x,\xi\rangle} + 1_{\{\|y\|<1\}} i e^{i\langle x,\xi\rangle}\langle y,\xi\rangle\right)\hat{u}(\xi)d\xi\phi_x(dy),
\end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini verwendet haben. Unter Beachtung der Differentiationsregeln der Fourier-Transformierten für den Teil mit der Indikatorfunktion im Integranden erhalten wir mit der Rücktransformation die behauptete Darstellung. □

Diese Darstellung lässt sich alternativ aus der allgemeinen Darstellung des Erzeugers des konstruierten Feller-Prozesses unter der Symmetriebedingung zeigen.

Beispiel 6.5. *Fortführend des Beispiels 5.8 bestimmen wir das Symbol eines α-stable-like Prozesses. Das Lévy-Maß lässt sich mit der Substitution $u = r^{1/\alpha(x)}$ darstellen durch*

$$\phi_x(dy) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty 1_{dy}(u\theta)\frac{\alpha(x)}{u^{1+\alpha(x)}}\,du\sigma(d\theta).$$

Da σ die Gleichverteilung auf $\mathbb{S}^{d-1}$ ist, vereinfacht sich die Darstellung mit entsprechender Skalierung zu

$$\phi_x(dy) = \frac{C_{\alpha(x)}}{\|y\|^{d+\alpha(x)}}dy.$$

Die Konstante $C_{\alpha(x)} > 0$ ist so gewählt, dass

$$\|\xi\|^{\alpha(x)} = C_{\alpha(x)}\int_\Gamma (1-\cos(\langle y,\xi\rangle))\,\frac{dy}{\|y\|^{d+\alpha(x)}}$$

gilt, d.h.

$$C_{\alpha(x)} = \frac{\alpha(x)2^{\alpha(x)-1}\Gamma\left(\frac{\alpha(x)+d}{2}\right)}{\pi^{d/2}\Gamma\left(1-\frac{\alpha(x)}{2}\right)},$$

siehe Exercise 18.23 in [5]. Dabei ist mit $\Gamma(x)$ *die Gamma-Funktion gemeint. Das Symbol des stable-like Prozesses lautet somit*

$$q(x,\xi) = \int_\Gamma (1-\cos(\langle y,\xi\rangle))\,\phi_x(dy) = \|\xi\|^{\alpha(x)}.$$

6.2 Eigenschaften des Symbols

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Symbol des OSL Prozesses. Zuerst listen wir die elementaren Eigenschaften auf:

Satz 6.6. *Das Symbol besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ *ist* $q(x,0) = 0$*;*

(ii) Es ist beschänkt, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ *mit*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |q(x,\xi)| \leq C\left(1+\|\xi\|^2\right) \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d;$$

(iii) $x \mapsto q(x,\xi)$ *ist stetig für alle* $\xi \in \mathbb{R}^d$*;*

(iv) Das Symbol $q(x,\cdot)$ *ist symmetrisch für alle* $x \in \mathbb{R}^d$*, d.h. es gilt*

$$q(x,\xi) = q(x,-\xi) \quad \textit{für alle } x,\xi \in \mathbb{R}^d.$$

(v) Das Symbol erfüllt die Sektor-Bedingung, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ *mit*

$$|\mathrm{Im}\, q(x,\xi)| \leq C\,\mathrm{Re}\, q(x,\xi) \quad \textit{für alle } x,\xi \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis. Für die Beweise von (i)-(iii) betrachte Satz 5.27. Die Eigenschaften (iv) und (v) ergeben sich unmittelbar aus der reellwertigen Darstellung des Symbols. □

Das Symbol besitzt eine sehr nützliche Skalierungseigenschaft im zweiten Argument, die aus der Skalierungseigenschaft des Lévy-Maßes folgt.

Satz 6.7. *Das Symbol* $q(x,\xi)$ *erfüllt die folgende Skalierungseigenschaft für alle* $t > 0$ *:*

$$q(x, t^{E(x)}\xi) = tq(x,\xi). \tag{6.7}$$

Beweis. Mit der Symmetrie des Exponenten, siehe Bemerkung 2.5, und der Skalierungseigenschaft des Lévy-Maßes $\phi_x(t^{-E(x)}A) = t\phi_x(A)$ für $t > 0$ und $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$, siehe Bemerkung 5.3, folgt:

$$\begin{aligned} q(x, t^{E(x)}\xi) &= \int_\Gamma \Big(1 - \cos(\langle y, t^{E(x)}\xi\rangle)\Big)\, \phi_x(dy) \\ &= \int_\Gamma \Big(1 - \cos(\langle t^{E(x)}y, \xi\rangle)\Big)\, \phi_x(dy) \\ &= \int_\Gamma (1 - \cos(\langle y, \xi\rangle)) \left(t^{E(x)}\phi_x\right)(dy) \\ &= \int_\Gamma (1 - \cos(\langle y, \xi\rangle))\, \phi_x(t^{-E(x)}dy) \\ &= \int_\Gamma (1 - \cos(\langle y, \xi\rangle))\, t\phi_x(dy) \\ &= tq(x, \xi). \end{aligned}$$

□

Mithilfe der Skalierungseigenschaft bekommen wir schärfere Abschätzungen für das Symbol.

Satz 6.8. *Sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. Dann existieren Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$, so dass*

(i) für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x,\xi)| \leq \begin{cases} C_1\|\xi\|^{1/\Lambda(x)} & \textit{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_2\|\xi\|^{1/\lambda(x)} & \textit{für } \|\xi\| \geq 1; \end{cases} \tag{6.8}$$

(ii) für alle $x \in K$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x,\xi)| \geq \begin{cases} C_3\|\xi\|^{1/\lambda(x)} & \textit{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_4\|\xi\|^{1/\Lambda(x)} & \textit{für } \|\xi\| \geq 1. \end{cases} \tag{6.9}$$

Beweis. Der Fall $\xi = 0$ ist wegen $q(x, 0) = 0$ offensichtlich erfüllt.
Für $\xi \in \Gamma$ benutzen wir die Darstellung mithilfe der verallgemeinerten Polarkoordinaten

$$\xi = \tau_x(\xi)^{E(x)} l_x(\xi),$$

wobei $\tau_x(\xi) > 0$ und $l_x(\xi) \in \mathbb{S}^{d-1}$ ist. Mit der Skalierungseigenschaft des Symbols folgt

$$q(x,\xi) = q(x, \tau_x(\xi)^{E(x)} l_x(\xi)) = \tau_x(\xi) q(x, l_x(\xi)). \tag{6.10}$$

Wir zeigen zuerst die beiden oberen Abschätzungen.
Wegen der Beschränktheit des Symbols (siehe Satz 6.6) existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|q(x,\xi)| \leq C\left(1 + \|\xi\|^2\right) \qquad \text{für alle } x, \xi \in \mathbb{R}^d$$

und somit folgt für $\|\xi\| \leq 1$ mit der Darstellung (6.10) und der Abschätzung für $\tau_x(\xi)$ aus Lemma 2.7 (i) :

$$|q(x,\xi)| = \tau_x(\xi)|q(x, l_x(\xi))| \leq \tau_x(\xi) C\left(1 + \|l_x(\xi)\|^2\right) = 2C\tau_x(\xi) \leq C_2\|\xi\|^{1/\Lambda(x)}.$$

Der Fall $\|\xi\| \geq 1$ folgt analog mit Lemma 2.7 (ii).

Für die unteren Abschätzungen nutzen wir aus, dass das Symbol $q(\cdot,\cdot)$ stetig und positiv auf der kompakten Menge $K \times \mathbb{S}^{d-1}$ ist. Folglich existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in K$ und $l_x(\xi) \in \mathbb{S}^{d-1}$ gilt:

$$|q(x, l_x(\xi)| \geq C > 0.$$

Mit der Darstellung (6.10) für das Symbol und den unteren Abschätzungen für das Wachstumsverhalten der radialen Komponente $\tau_x(\xi)$ aus Lemma 2.7 folgen die Behauptungen. □

Mit der Beschränktheitsbedingung (E3) an die Realteile der Eigenwerte von $E(x)$ aus Definition 5.1 bekommen wir ungenauere Abschätzungen, die jedoch den Vorteil haben, dass sie nicht mehr von x abhängen.

Korollar 6.9. *Sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. Dann existieren Konstanten $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$, so dass*

(i) für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x,\xi)| \leq \begin{cases} C_1\|\xi\|^{1/b} & \textit{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_2\|\xi\|^{1/a} & \textit{für } \|\xi\| \geq 1; \end{cases} \tag{6.11}$$

(ii) für alle $x \in K$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x,\xi)| \geq \begin{cases} C_3\|\xi\|^{1/a} & \textit{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_4\|\xi\|^{1/b} & \textit{für } \|\xi\| \geq 1. \end{cases} \tag{6.12}$$

Bemerkung 6.10. Mit der Skalierungseigenschaft ist das Symbol wegen

$$q(x,\xi) = \tau_x(\xi) q(x, l_x(\xi)), \quad x \in \mathbb{R}^d \text{ und } \xi \in \Gamma,$$

durch seine Werte auf $\mathbb{R}^d \times \left(\mathbb{S}^{d-1} \cup 0\right)$, wobei 0 der Nulloperator auf $\mathbb{R}^d$ ist, vollständig bestimmt.

Bemerkung 6.11. Wir definieren eine Funktion $\alpha(x) : \mathbb{R}^d \to (1/b, 1/a)$. Wegen der Voraussetzungen an die Realteile der Eigenwerte, siehe Definition 5.1, ist $(1/b, 1/a) \subset [0, 2]$. Mit den Abschätzungen aus Korollar 6.9 erkennt man, dass sich das Symbol des OSL Prozesses lokal wie $\|\xi\|^{\alpha(x)}$ verhält, d.h.

$$|q(x,\xi)| \sim \|\xi\|^{\alpha(x)} \tag{6.13}$$

für alle $x \in K$, wobei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt ist, und $\xi \in \Gamma$. [1] Falls $\alpha(x)$ Lipschitz-stetig ist, dann verhält es sich folglich lokal, wie das Symbol eines stable-like Prozesses, siehe Beispiel 6.5.

Über das Symbol leiten wir zusätzliche Aussagen bzgl. der Stetigkeit her.

Satz 6.12. *Das Symbol ist gleichmäßig stetig in $\xi = 0$.*

Beweis. Aus dem vorherigen Korollar 6.9 folgt direkt

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |q(x,\xi)| \leq \lim_{\|\xi\|\to 0} C_1\|\xi\|^{1/b} = 0.$$

□

[1] Zur Erinnerung: Für Funktionen $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ schreiben wir $f \sim g$, falls Konstanten $C_1, C_2 > 0$ existieren mit $C_1 f(x) \leq g(x) \leq C_2 f(x)$.

In Lemma 5.11 haben wir eine obere Schranke für die Differenz des Matrixexponentials in der Norm für kleine Werte von r, d.h. $r \in (0,1)$, hergeleitet. Eine ähnliche Abschätzung brauchen wir nun für den Fall $r \geq 1$.

Lemma 6.13. *Für $\delta > 0$ existieren Konstanten $C, \tilde{C} > 0$, so dass für alle $r \geq 1$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$\|r^{E(x)} - r^{E(y)}\| \leq C\|E(x) - E(y)\| r^{b+\delta} \leq \tilde{C}\|x - y\| r^{b+\delta}. \tag{6.14}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog dem Lemma 5.11, wo wir den Fall $r \in (0,1)$ behandelt haben. Sei $r \geq 1$. Wir setzen $t := \ln(r) \geq 0, A := E(y)$ und $B := E(x) - E(y)$. Mit Lemma 5.10 gilt die Identität

$$r^{E(x)} - r^{E(y)} = \int_0^{\ln(r)} e^{E(y)(\ln(r)-s)}(E(x) - E(y))e^{E(x)s}\, ds$$

und es folgt

$$\|r^{E(x)} - r^{E(y)}\| \leq \|E(x) - E(y)\| \int_0^{\ln(r)} \|e^{E(y)(\ln(r)-s)}\| \cdot \|e^{E(x)s}\|\, ds.$$

Mit der Substitution $s = \ln(v)$ ist das vorherige Integral gleich

$$\int_1^r \|e^{E(y)(\ln(r)-\ln(v))}\| \cdot \|e^{E(x)\ln(v)}\| \frac{1}{v}\, dv = \int_1^r \left\| \left(\frac{r}{v}\right)^{E(y)} \right\| \cdot \|v^{E(x)}\| \frac{1}{v}\, dv.$$

Da $v \geq 1$ und $r/v \geq 1$ ist, existieren mit Korollar 5.6 Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass wir weiter abschätzen können

$$\begin{aligned} \int_1^r \left\| \left(\frac{r}{v}\right)^{E(y)} \right\| \cdot \left\| v^{E(x)} \right\| \frac{1}{v}\, dv &\leq C_1 C_2 \int_1^r \left(\frac{r}{v}\right)^b v^b \frac{1}{v} dv \\ &= C_1 C_2 r^b \int_1^r \frac{1}{v} dv \\ &= C_1 C_2 r^b \ln(r) \\ &\leq C r^{b+\delta}. \end{aligned}$$

Dabei ist $r^{-\delta}\ln(r)$ wegen $\delta > 0$ und $r \geq 1$ beschränkt. □

Satz 6.14. *Für festes $\xi \in \mathbb{R}^d$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$|q(x,\xi) - q(y,\xi)| \leq C\left(\|x - y\| + \|x - y\|^\gamma\right) \tag{6.15}$$

mit $\gamma = 1$, falls $b < 1$, bzw. $\gamma = \frac{1}{2b}$, falls $b \geq 1$.
Insbesondere im Falle $b < 1$ ist $x \mapsto q(x,\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ Lipschitz-stetig.

Beweis. Wir wählen $\xi \in \mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest und erinnern an die trigonometrische Identität, die sich unmittelbar aus den Additionstheoremen ergibt,

$$\cos(w) - \cos(z) = -2\sin\left(\frac{w+z}{2}\right)\sin\left(\frac{w-z}{2}\right) \quad \text{für } w, z \in \mathbb{R}. \tag{6.16}$$

Mit der Identität (6.16) folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
|q(x,\xi) - q(y,\xi)| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \cos\left(\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle\right) - \cos\left(\langle r^{E(y)}\theta, \xi\rangle\right)\right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&= 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta + r^{E(y)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta, \xi\rangle}{2}\right)\right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta + r^{E(y)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta, \xi\rangle}{2}\right)\right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta, \xi\rangle}{2}\right)\right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&=: 2I_1 + 2I_2.
\end{aligned}$$

Zu I_1: Mit $|\sin(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{R}$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt einerseits

$$\begin{aligned}
\left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta + r^{E(y)}\theta, \xi\rangle}{2}\right)\right| &\leq \left|\langle r^{E(x)}\theta + r^{E(y)}\theta, \xi\rangle\right| \\
&\leq \|\xi\| \left(\|r^{E(x)}\| + \|r^{E(y)}\|\right)
\end{aligned}$$

und nach Korollar 5.6 existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für $r \in (0,1)$ gilt:

$$\|r^{E(x)}\| \leq C_1 r^a \quad \text{und} \quad \|r^{E(y)}\| \leq C_2 r^a.$$

Mit $C_3 := \|\xi\| \max\{C_1, C_2\}$ folgt

$$\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta + r^{E(y)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \leq C_3 r^a.$$

Andererseits existiert für $\delta > 0$ mit Lemma 5.11 eine Konstante $C_4 > 0$, so dass die folgende Abschätzung für $r \in (0,1)$ gilt:

$$\|r^{E(x)} - r^{E(y)}\| \leq C_4 \|x-y\| r^{a-\delta}.$$

Damit folgt für $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta, \xi\rangle}{2}\right)\right| \leq \|r^{E(x)} - r^{E(y)}\| \|\xi\| \leq C_5 \|x-y\| r^{a-\delta}$$

für eine Konstante $C_5 > 0$. Wir erhalten mit diesen Abschätzungen für den Integranden von I_1:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C_3 C_5 \|x-y\| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^a \cdot r^{a-\delta} \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&= C_3 C_5 \|x-y\| \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 r^{2a-\delta-2} dr < \infty,
\end{aligned}$$

da $a - \frac{\delta}{2} > \frac{1}{2}$.

Nun betrachten wir I_2: Mit der Ungleichung $|\sin(z)| \leq |z|^\gamma$ für $\gamma \in (0,1]$ und $z \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left| \langle r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta, \xi \rangle \right|^\gamma \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \| r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta \|^\gamma \cdot \|\xi\|^\gamma \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\
&\leq \|\xi\|^\gamma \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_1^\infty \| r^{E(x)} - r^{E(y)} \|^\gamma \frac{dr}{r^2}.
\end{aligned}$$

Im Fall $b \geq 1$ wählen wir $\gamma = \frac{1}{2b}$ sowie die Konstante $\delta > 0$ so, dass $\delta < b$ ist. Dann erhalten wir mit Lemma 6.13

$$\int_1^\infty \| r^{E(x)} - r^{E(y)} \|^{\frac{1}{2b}} \frac{dr}{r^2} \leq C_6 \|x-y\|^{\frac{1}{2b}} \int_1^\infty r^{\frac{b+\delta}{2b}-2} dr < \infty$$

mit einer Konstanten $C_6 > 0$.

Für $b < 1$ wählen wir $\gamma = 1$ sowie die Konstante $\delta > 0$ so, dass $b + \delta < 1$ gilt. Dann folgt wiederum mit Lemma 6.13 die Existenz einer Konstanten $C_7 > 0$ mit

$$\int_1^\infty \| r^{E(x)} - r^{E(y)} \| \frac{dr}{r^2} \leq C_7 \|x-y\| \int_1^\infty r^{b+\delta-2} dr < \infty,$$

da $b + \delta < 1$.

Mit den Abschätzungen für I_1 und I_2 folgt die Behauptung. □

Nun führen wir den Begriff einer $(\beta, E(x))$-zulässigen Funktion ein.

Definition 6.15. Sei $\beta > 0$. Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ heißt $(\beta, E(x))$-**zulässig**, falls $f(\xi) > 0$ für alle $\xi \in \Gamma$ ist und für alle $0 < A < B$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $A \leq \|\eta\| \leq B$ gilt:

$$\tau_x(\xi) \leq 1 \quad \Rightarrow |f(\xi + \eta) - f(\eta)| \leq C \tau_x(\xi)^\beta. \tag{6.17}$$

Im folgenden Satz zeigen wir, dass das Symbol im zweiten Argument eine $(\beta, E(x))$-zulässige Funktion ist. Dabei orientieren wir uns am Beweis von Theorem 2.11 in [6].

Satz 6.16. *Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist*

$$q(x,\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 - \cos(\langle r^{E(x)}\theta, \xi \rangle)\right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta)$$

eine $(\beta, E(x))$- zulässige Funktion mit $\beta < a \wedge \frac{a}{b}$, falls $a \leq 1$, und $\beta = 1$, falls $a > 1$.

Beweis. Für das Symbol haben wir $q(x,\xi) \geq 0$ und $q(x,\xi) = 0$ impliziert $\xi = 0$. Es bleibt nur (6.17) zu zeigen. Mit der Identität (6.16) folgt für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$:

$$|q(x, \xi+\eta) - q(x,\eta)| \leq 2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta, \xi + 2\eta \rangle}{2} \right) \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta, \xi \rangle}{2} \right) \right| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta). \tag{6.18}$$

Zunächst betrachten wir den Fall $a > 1$: Einerseits folgt für $r \in (0,1)$ mit $|\sin(w)| \leq |w|$ $(w \in \mathbb{R})$, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Korollar 5.6

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}{2}\right)\right|\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \left|\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right|\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \|r^{E(x)}\theta\|\cdot\|\xi\|\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &\leq C\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\|\xi\|\int_0^1 r^{a-2}dr < \infty, \end{aligned}$$

da $a > 1$. Für $r \geq 1$ folgt andererseits

$$2\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_1^\infty \left|\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}{2}\right)\right|\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \leq 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_1^\infty 1\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) < \infty.$$

Damit ist das Integral in (6.18) endlich. Außerdem folgt mit der Darstellung der verallgemeinerten Polarkoordinaten $\xi = \tau_x(\xi)^{E(x)}l_x(\xi)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |q(x,\xi+\eta)-q(x,\eta)| &\leq 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \left|\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}{2}\right)\right|\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &= 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \left|\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\tau_x(\xi)^{E(x)}l_x(\xi)\rangle}{2}\right)\right|\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &= 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \left|\sin\left(\frac{\langle (r\tau_x(\xi))^{E(x)}\theta,l_x(\xi)\rangle}{2}\right)\right|\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &= 2\tau_x(\xi)\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^\infty \left|\sin\left(\frac{\langle s^{E(x)}\theta,l_x(\xi)\rangle}{2}\right)\right|\frac{ds}{s^2}\sigma(d\theta), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution $r = s/\tau_x(\xi)$ benutzt haben. Das Integral ist wegen $a > 1$ endlich, siehe oben, und somit folgt die Behauptung mit $\beta = 1$.

Nun zum Fall $a \in \left(\frac{1}{2},1\right)$: Dann existiert mit Korollar 5.6 eine Konstante $C_1 > 0$, so dass für $r \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\xi+2\eta\rangle}{2}\right)\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}{2}\right)\right| &\leq \frac{1}{2}\left|\langle r^{E(x)}\theta,\xi+2\eta\rangle\right|\cdot\left|\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|\xi\|+2\|\eta\|\right)\|\xi\|\|r^{E(x)}\theta\|^2 \\ &\leq C_1\left(\|\xi\|+2\|\eta\|\right)\|\xi\|r^{2a}. \end{aligned}$$

Für $r > 1$ folgt wegen $|\sin(w)| \leq |w|^\gamma$ für $\gamma < 1 \wedge \frac{1}{b}$

$$\begin{aligned} \left|\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\xi+2\eta\rangle}{2}\right)\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}{2}\right)\right| &\leq \left|\sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}{2}\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\xi\|^\gamma\|r^{E(x)}\theta\|^\gamma \\ &\leq C_2\|\xi\|^\gamma r^{b\gamma}, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung Korollar 5.6 mit Konstante $C_2 > 0$ verwendet haben. Wegen

$$\int_0^1 r^{2a-2} dr < \infty$$

für $a > \frac{1}{2}$ und

$$\int_1^\infty r^{b\gamma-2} dr < \infty$$

für $\gamma < 1 \wedge \frac{1}{b}$ können wir (6.18) abschätzen und haben gezeigt, dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$|q(x, \xi + \eta) - q(x, \eta)| \leq C\|\xi\|^\gamma$$

für alle $\|\xi\| \leq 1$ und $A \leq \|\eta\| \leq B$. Wegen Lemma 2.7 (i) existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|\xi\| \leq C\tau_x(\xi)^{\lambda(x)} \leq C\tau_x(\xi)^a$$

für $\|\xi\| \leq 1$. Die Behauptung folgt dann mit $\beta = \gamma a < a \wedge \frac{a}{b}$. □

6.3 Komplexe Darstellung des Symbols

Nun stellt sich die Frage, ob wir eine Symboldarstellung über das operator-stable-like Lévy-Maß auch unter einer schwächeren Bedingung als der Symmetrie erhalten können. Diese Fragestellung werden wir in diesem Abschnitt untersuchen.

Dazu führen wir eine **Integrationsbedingung** an das Maß σ in der Darstellung des OSL Lévy-Maßes ϕ_x ein. Wir fordern, dass für das Maß σ gelten soll:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta \, \sigma(d\theta) = 0. \tag{6.19}$$

Offensichtlich ist die Bedingung für symmetrische Maße erfüllt. Die Integrationsbedingung ist jedoch nicht ausreichend, so dass wir eine weitere Bedingung an die Realteile der Eigenwerte des Exponenten $E(x)$ benötigen. Für diese muss gelten, dass sie echt größer Eins sind, d.h. $a > 1$. Dann können wir eine komplexe Darstellung des Symbols über das operator-stable-like Lévy-Maß herleiten.
Um dies zu beweisen, brauchen wir nachfolgende Abschätzung:

Lemma 6.17. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ und $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$*

$$\left|1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}\right| \leq C\,(1 + \|\xi\|)\,(1 \wedge r^a) \tag{6.20}$$

erfüllt ist. Für $a > 1$ ist

$$\int_0^\infty (1 \wedge r^a)\,\frac{dr}{r^2} < \infty. \tag{6.21}$$

Beweis. Mit einer Taylor-Entwicklung und Korollar 5.6 für $r \in (0, 1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left|1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}\right| &\leq 2 \cdot 1_{\{r \geq 1\}} + \left|1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}\right| 1_{\{0<r<1\}} \\
&\leq 2 \cdot 1_{\{r \geq 1\}} + \left|\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle\right| 1_{\{0<r<1\}} \\
&\leq 2 \cdot 1_{\{r \geq 1\}} + \|r^{E(x)}\|\|\xi\| 1_{\{0<r<1\}} \\
&\leq 2 \cdot 1_{\{r \geq 1\}} + C_1 r^a \|\xi\| 1_{\{0<r<1\}} \\
&\leq 2C_1\,(1 + \|\xi\|)\,(1 \wedge r^a)
\end{aligned}$$

mit Konstante $C_1 > 0$.
Für $a > 1$ gilt

$$\int_0^\infty (1 \wedge r^a) \frac{dr}{r^2} = \int_0^1 r^{a-2} dr + \int_1^\infty r^{-2} dr < \infty.$$

□

Satz 6.18. *Falls das Maß σ die Integrationsbedingung (6.19) erfüllt und $a > 1$ ist, dann besitzt das Symbol (6.1) für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ die Darstellung*

$$q(x,\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}\right) \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) = \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y, \xi\rangle}\right) \phi_x(dy). \tag{6.22}$$

Beweis. Wegen Lemma 6.17 (bzw. dem Beweis des Lemmas für den zweiten Integralterm) lässt sich das Integral auseinanderziehen

$$\begin{aligned} q(x,\xi) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + 1_{\{0<r<1\}} i \langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) + i \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty 1_{\{0<r<1\}} \langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\ &=: I_1 + i \cdot I_2 \end{aligned}$$

Mit der Linearität des Skalarproduktes, Lemma 6.1 und der Integrationsbedingung (6.19) folgt

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle \sigma(d\theta) \frac{dr}{r^2} \\ &= \int_0^1 \left\langle \int_{\mathbb{S}^{d-1}} r^{E(x)}\theta\sigma(d\theta), \xi \right\rangle \frac{dr}{r^2} \\ &= \int_0^1 \left\langle r^{E(x)} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta\sigma(d\theta), \xi \right\rangle \frac{dr}{r^2} \\ &= \int_0^1 \langle 0, \xi\rangle \frac{dr}{r^2} = 0. \end{aligned}$$

Mit Lemma 5.4 erhalten wir schließlich

$$q(x,\xi) = I_1 = \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y,\xi\rangle}\right) \phi_x(dy).$$

□

Proposition 6.19. *Unter den Bedingungen aus Satz 6.18 lässt sich der Erzeuger darstellen durch*

$$Au(x) = \int_\Gamma (u(x+y) - u(x))\, \phi_x(dy) \tag{6.23}$$

für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Beweis. Die Darstellung folgt für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ aus Korollar 3.10

$$\begin{aligned} Au(x) &= -\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} q(x,\xi)\hat{u}(\xi) d\xi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_\Gamma \left(e^{i\langle x,\xi\rangle} - e^{i\langle x+y,\xi\rangle}\right) \phi_x(dy)\right) \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int_\Gamma \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle x+y,\xi\rangle} - e^{i\langle x,\xi\rangle}\right) \hat{u}(\xi) d\xi \phi_x(dy), \end{aligned}$$

wobei wir den Satz von Fubini angewendet haben. Mit der Rücktransformation der Fourier-Transformierten erhalten wir die Behauptung. □

Bemerkung 6.20. Die hier hergeleitete komplexe Darstellung des Symbols hat den Nachteil, dass wir den Bereich der Realteile der Eigenwerte noch weiter einschränken. Dadurch ist z.B. die Klasse von α-stable-like Prozessen nur noch enthalten, falls $\alpha(x) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ist. Deshalb haben wir die Klasse von operator-stable-like Prozessen nicht über diese Symboldarstellung definiert. Nichtsdestotrotz haben wir eine weitere Darstellung des Symbols bzw. des Erzeugers der OSL Prozesse gezeigt, falls für den Realteil des kleinsten Eigenwertes die Bedingung $a > 1$ erfüllt ist.

6.4 Eigenschaften der komplexen Symboldarstellung

Abschließend untersuchen wir die im vorherigen Abschnitt hergeleitete komplexe Darstellung des Symbols. Dabei setzen wir voraus, dass das Maß σ die Integrationsbedingung (6.19) erfüllt, d.h.

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta \, \sigma(d\theta) = 0,$$

und der Realteil des kleinsten Eigenwertes nach unten durch Eins beschränkt ist, d.h. es gilt $a > 1$.

Für das Symbol listen wir wieder die elementaren Eigenschaften auf:

Satz 6.21. *Das Symbol besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist $q(x, 0) = 0$;

(ii) $x \mapsto q(x, \xi)$ ist stetig für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$;

(iii) Es ist beschänkt, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |q(x, \xi)| \leq C \, (1 + \|\xi\|) \qquad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}^d;$$

Beweis. Die Eigenschaft (iii) folgt direkt aus Lemma 6.17. □

Bemerkung 6.22. (i) Das Symbol erfüllt im Gegensatz zur reellen Darstellung nicht die Sektor Bedingung, d.h. es existiert keine Konstante $C > 0$, so dass

$$|\operatorname{Im} q(x, \xi)| \leq C \operatorname{Re} q(x, \xi) \qquad \text{für alle } x, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Außerdem ist es nicht symmetrisch.

Wie im reellen Fall besitzt das Symbol eine Skalierungseigenschaft.

Satz 6.23. *Das Symbol $q(x, \xi)$ erfüllt die folgende Skalierungseigenschaft für alle $t > 0$:*

$$q(x, t^{E(x)}\xi) = tq(x, \xi). \tag{6.24}$$

Beweis. Mit der Skalierungseigenschaft des Lévy-Maßes $\phi_x(t^{-E(x)}A) = t\phi_x(A)$ für $t > 0$ und $A \in \mathcal{B}(\Gamma)$, siehe Bemerkung 5.3, folgt

$$\begin{aligned} q(x, t^{E(x)}\xi) &= \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y, t^{E(x)}\xi\rangle}\right) \phi_x(dy) \\ &= \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle t^{E(x)}y, \xi\rangle}\right) \phi_x(dy) \\ &= \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y, \xi\rangle)}\right) \phi_x(t^{-E(x)}dy) \\ &= \int_\Gamma \left(1 - e^{i\langle y, \xi\rangle)}\right) t\phi_x(dy) \\ &= tq(x, \xi). \end{aligned}$$

□

Da die Beweise analog wie für das Symbol des OSL Prozesses mit der Skalierungseigenschaft erfolgen, nennen wir nur der Vollständigkeit halber die folgenden Abschätzungen für das Symbol und die Aussage bzgl. der Stetigkeit.

Satz 6.24. *Sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. Dann existieren Konstanten C_1, C_2, C_3, $C_4 > 0$, so dass*

(i) für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x,\xi)| \leq \begin{cases} C_1\|\xi\|^{1/\Lambda(x)} & \text{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_2\|\xi\|^{1/\lambda(x)} & \text{für } \|\xi\| \geq 1; \end{cases} \tag{6.25}$$

(ii) für alle $x \in K$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x,\xi)| \geq \begin{cases} C_3\|\xi\|^{1/\lambda(x)} & \text{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_4\|\xi\|^{1/\Lambda(x)} & \text{für } \|\xi\| \geq 1. \end{cases} \tag{6.26}$$

Korollar 6.25. *Sei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. Dann existieren Konstanten C_1, C_2, $C_3, C_4 > 0$, so dass*

(i) für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x,\xi)| \leq \begin{cases} C_1\|\xi\|^{1/b} & \text{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_2\|\xi\|^{1/a} & \text{für } \|\xi\| \geq 1; \end{cases} \tag{6.27}$$

(ii) für alle $x \in K$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x,\xi)| \geq \begin{cases} C_3\|\xi\|^{1/a} & \text{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_4\|\xi\|^{1/b} & \text{für } \|\xi\| \geq 1. \end{cases} \tag{6.28}$$

Bemerkung 6.26. Das Symbol ist gleichmäßig stetig in $\xi = 0$.

Satz 6.27. *Für festes $\xi \in \mathbb{R}^d$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$|q(x,\xi) - q(y,\xi)| \leq C\left(\|x-y\| + \|x-y\|^{\frac{1}{2b}}\right). \tag{6.29}$$

Beweis. Um den Imaginärteil des Symbols abzuschätzen, benutzen wir die trigonometrische Identität

$$\sin(w) - \sin(z) = 2\cos\left(\frac{w+z}{2}\right)\sin\left(\frac{w-z}{2}\right) \quad \text{für alle } w, z \in \mathbb{R}. \tag{6.30}$$

Mit dieser und der Identität (6.16) für den Realteil folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
|q(x,\xi) - q(y,\xi)| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| e^{i\langle r^{E(y)}\theta, \xi\rangle} - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle} \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&= 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \cos\left(\frac{\langle r^{E(y)}\theta + r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \sin\left(\frac{\langle r^{E(y)}\theta - r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(y)}\theta + r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \sin\left(\frac{\langle r^{E(y)}\theta - r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 4\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(y)}\theta - r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta).
\end{aligned}$$

Dann wählen wir eine Konstante $\delta > 0$ so, dass $a - \delta > 1$. Für dieses δ existiert wegen Lemma 5.11 eine Konstante $C > 0$, so dass für $r \in (0,1)$ und $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\langle r^{E(y)}\theta - r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) &\leq |\langle r^{E(y)}\theta - r^{E(x)}\theta, \xi\rangle| \\
&\leq \|r^{E(y)} - r^{E(x)}\| \cdot \|\xi\| \\
&\leq C\|y - x\| r^{a-\delta}\|\xi\|.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{a-\delta-2} dr < \infty$$

wegen $a - \delta > 1$. Der Fall $r \geq 1$ erfolgt analog wie im Beweis von Satz 6.14. □

Satz 6.28. *Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist*

$$q(x,\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)$$

eine $(\beta, E(x))$- zulässige Funktion mit $\beta = 1$.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog dem Beweis von Satz 6.16 für die reelle Symboldarstellung der OSL Prozesse, wobei wir den Imaginärteil des Symbols mit der trigonometrischen Identität (6.30) abschätzen. Damit folgt für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
|q(x,\xi+\eta) - q(x,\eta)| &\leq 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta, \xi + 2\eta\rangle}{2}\right) \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \cos\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta, \xi + 2\eta\rangle}{2}\right) \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 4\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \left| \sin\left(\frac{\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle}{2}\right) \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta).
\end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nun mit den Ausführungen für den Fall $a > 1$ im Beweis des Symbols der OSL Prozesse . □

7 Pfadeigenschaften der operator-stable-like Prozesse

In diesem Kapitel untersuchen wir die Pfadeigenschaften der operator-stable-like Prozesse, d.h. wir betrachten einen Feller-Prozess, deren Symbol gegeben ist durch

$$q(x,\xi) = \int_\Gamma (1-\cos(\langle y,\xi\rangle))\,\phi_x(dy), \quad x\in\mathbb{R}^d,$$

wobei $\phi_x(\cdot)$ ein symmetrisches operator-stable-like Lévy-Maß ist. Dabei ist der Exponent $E(x)$ des OSL Lévy-Maßes orthogonal diagonalisierbar, Lipschitz-stetig und für die Realteile der Eigenwerte gilt

$$\frac{1}{2} < a \le \lambda(x) \le \Lambda(x) \le b < \infty \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R}^d$$

mit Konstanten $a > 1/2$ und $b \ge a$.

Für die Beschreibung und Analyse der Pfadeigenschaften nutzen wir vor allem Resultate für Feller-Prozesse bzw. Markov-Prozesse aus der Literatur und wenden diese auf die OSL Prozesse, als einer Teilklasse von Feller-Prozessen, an. Wir konzentrieren uns dabei für den OSL Prozess auf Maximalabschätzungen, die Existenz von Momenten, das asymptotische Kurz- und Langzeitverhalten der Pfade sowie die p-Variation. Einen Überblick über die bekannten Resultate für Feller-Prozesse liefert Kapitel 5 in [10], aus dem wir hier zumeist zitieren. Es hat sich für Feller-Prozesse herausgestellt, dass das Symbol ein wichtiges Hilfsmittel ist, um die Pfadeigenschaften des Prozesses zu beschreiben und zu analysieren. In diesem Kapitel werden wir deshalb die in Abschnitt 6.2 hergeleiteten Eigenschaften des Symbols der OSL Prozesse, vor allem die unteren und oberen Abschätzungen, in den Beweisen verwenden.

7.1 Maximalabschätzungen

Wahrscheinlichkeitsabschätzungen sind ein wichtiges Hilfsmittel, um die Pfadeigenschaften eines stochastischen Prozesses zu untersuchen. Wir leiten hier Maximalabschätzungen für den OSL Prozess her, die wir im weiteren Verlauf für die Betrachtung der Existenz von Momenten, das asymptotische Verhalten und die starke p-Variation zumindest indirekt benutzen werden.

Dazu führen wir eine Stoppzeit ein, die Erstaustrittszeit.

Definition 7.1. Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und $R > 0$ definieren wir die **Erstaustrittszeit** T des Feller-Prozesses $X = (X_t)_{t\ge 0}$ mit Startpunkt $X_0 = x$ f.s. aus der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_R(x)$ durch

$$T := T_R^x := \inf\{t > 0 : \|X_t - x\| > R\}. \tag{7.1}$$

Die Erstaustrittszeit T ist eng verbunden mit dem Supremum des Prozesses über die Beziehung

$$\{T < t\} \subset \left\{\sup_{s\le t}\|X_s - x\| > R\right\} \subset \{T \le t\} \subset \left\{\sup_{s\le t}\|X_s - x\| \ge R\right\} \tag{7.2}$$

und daraus lassen sich Maximalabschätzungen für den Feller-Prozess in Abhängigkeit seines Symbols herleiten. Allgemein für Feller-Prozesse gelten folgende obere Abschätzungen für die Erstaustrittszeit und den Maximumsprozess, siehe Theorem 5.1 und Corollary 5.2 in [10].

Satz 7.2. *Sei X ein Feller-Prozess mit Erzeuger $(A, D(A))$, Symbol $q(x,\xi)$ und $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{s\le t}\|X_s - x\| > R\right) \le \mathbb{P}^x(T \le t) \le Ct \sup_{\|y-x\|\le R}\ \sup_{\|\xi\|\le 1/R} |q(y,\xi)| \tag{7.3}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ *und* $R, t > 0$.

Aus dem Beweis von Satz 7.2 lässt sich eine untere Grenze für den Erwartungswert der Erstaustrittszeit von Feller-Prozessen angeben, siehe Corollary 5.3 in [10].

Korollar 7.3. *Sei X ein Feller-Prozess wie in Satz 7.2. Dann gilt*

$$\mathbb{E}^x(T) \geq \frac{C}{\sup\limits_{\|y-x\|\leq R} \sup\limits_{\|\xi\|\leq 1/R} |q(y,\xi)|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d \text{ und } R > 0 \tag{7.4}$$

mit der Konstanten $C > 0$ *aus* (7.3).

Für OSL Prozesse, als einer Teilklasse von Feller-Prozessen, bekommen wir mithilfe dieser Resultate die Abschätzungen:

Korollar 7.4. *Sei X ein OSL Prozess. Dann existiert eine Konstante* $C > 0$*, so dass*

(i) *für alle* $x \in \mathbb{R}^d$*,* $t > 0$ *und* $R \geq 1$ *gilt:*

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\| > R\right) \leq CtR^{-1/b};$$

(ii) *für alle* $x \in \mathbb{R}^d$*,* $t > 0$ *und* $0 < R \leq 1$ *gilt:*

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\| > R\right) \leq CtR^{-1/a}.$$

Dieselben oberen Abschätzungen gelten jeweils für $\mathbb{P}^x(T \leq t)$.

Beweis. Für den Beweis benutzen wir die oberen Abschätzungen für das Symbol aus Korrollar 6.9, d.h. es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit

$$|q(x,\xi)| \leq \begin{cases} C_1\|\xi\|^{1/b} & \text{für } \|\xi\| \leq 1 \\ C_2\|\xi\|^{1/a} & \text{für } \|\xi\| \geq 1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Wähle nun $\tilde{C} := \max\{C_1, C_2\}$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $R > 0$:

$$\sup_{\|x-y\|\leq R} \sup_{\|\xi\|\leq 1/R} |q(y,\xi)| \leq \sup_{\|\xi\|\leq 1/R} \begin{cases} \tilde{C}\|\xi\|^{1/b} & \text{für } \|\xi\| \leq 1 \\ \tilde{C}\|\xi\|^{1/a} & \text{für } \|\xi\| \geq 1. \end{cases} \tag{$*$}$$

Nun betrachten wir zunächst den Fall $R \geq 1$ und somit das Supremum über alle $\|\xi\| \leq 1/R \leq 1$. Dann ist

$$(*) = \sup_{\|\xi\|\leq 1/R} \tilde{C}\|\xi\|^{1/b} = \tilde{C}R^{-1/b}.$$

Für $0 < R \leq 1$ haben wir

$$(*) = \sup_{\|\xi\|\leq 1/R} \tilde{C}\|\xi\|^{1/a} = \tilde{C}R^{-1/a}.$$

Die Behauptungen folgen nun mit Satz 7.2.

□

Für den Erwartungswert der Erstaustrittszeit des OSL Prozesses erhalten wir aus dem vorherigen Korollar und Korollar 7.3 die untere Abschätzung.

Korollar 7.5. *Sei X ein OSL Prozess. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$\mathbb{E}^x(T) \geq \begin{cases} CR^{1/b} & \text{für } R \geq 1 \\ CR^{1/a} & \text{für } R \leq 1. \end{cases} \tag{7.5}$$

Der folgende Gegenpart von Satz 7.2 liefert uns für Feller-Prozesse eine obere Grenze für die Tail Wahrscheinlichkeit der Erstaustrittszeit und mit der Beziehung (7.2) eine untere Maximalabschätzung, siehe Theorem 5.5 in [10].

Satz 7.6. *Sei X ein Feller-Prozess mit Erzeuger $(A, D(A))$, Symbol $q(x,\xi)$ und $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $R, t > 0$:*

$$\mathbb{P}^x(T \geq t) \leq C \left(t \sup_{\|\xi\| \leq 1/(Rk(x,R))} \inf_{\|y-x\| \leq R} \operatorname{Re} q(y,\xi) \right)^{-1} \tag{7.6}$$

und

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| \leq R\right) \leq C \left(t \sup_{\|\xi\| \leq 1/(Rk(x,r))} \inf_{\|y-x\| \leq R} \operatorname{Re} q(y,\xi) \right)^{-1} \tag{7.7}$$

mit Konstanten $C > 0$ und

$$k(x,R) := \inf\left\{ k \geq \left(\arccos\sqrt{2/3}\right)^{-1} : \inf_{\|\xi\| \leq 1/(kR)} \inf_{\|y-x\| \leq R} \frac{\operatorname{Re} q(y,\xi)}{\|\xi\| \, |\operatorname{Im} q(x,\xi)|} \geq 2R \right\}, \tag{7.8}$$

falls $\operatorname{Im} q(x,\xi) \not\equiv 0$, bzw. $k(x,R) = \left(\arccos\sqrt{2/3}\right)^{-1}$, falls $\operatorname{Im} q(x,\xi) \equiv 0$.

Bemerkung 7.7. Es lässt sich zeigen, dass sich der vorherige Satz vereinfacht, falls das Symbol die Sektor-Bedingung

$$|\operatorname{Im} q(x,\xi)| \leq C \operatorname{Re} q(x,\xi) \qquad \text{für alle } x, \xi \in \mathbb{R}^d \tag{7.9}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ erfüllt. Die Konstante $k(x,R)$ kann man in dem Fall abschätzen durch

$$k(x,R) \leq \max\left\{ 2C, \left(\arccos\sqrt{2/3}\right)^{-1} \right\}.$$

Aus dem Beweis lässt sich für Feller-Prozesse eine obere Schranke für den Erwartungswert der Erstaustrittszeit T herleiten, siehe Corollary 5.8 in [10].

Korollar 7.8. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.6 gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $R > 0$*

$$\mathbb{E}^x(T) \leq C \left(\sup_{\|\xi\| \leq 1/(Rk(x,R))} \inf_{\|y-x\| \leq R} \operatorname{Re} q(y,\xi) \right)^{-1}$$

mit der Konstanten $C > 0$ und $k(x,R)$ aus dem vorherigen Satz.

Der vorherige Satz lässt sich insbesondere auf reellwertige Symbole anwenden, die lokal die Abschätzung $|q(x,\xi)| \geq C\|\xi\|^\alpha$ mit $\alpha \in (0,2)$ und einer Konstanten $C > 0$ erfüllen, somit erhalten wir für OSL Prozesse:

Korollar 7.9. *Sei X ein OSL Prozess. Dann existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass* *(i) für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ und $R \geq \frac{1}{k_0}$ gilt:*

$$\mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| \leq R \right) \leq \frac{C_1}{t} R^{1/a};$$

(ii) für alle $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$ und $0 < R \leq \frac{1}{k_0}$ gilt:

$$\mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| \leq R \right) \leq \frac{C_2}{t} R^{1/b},$$

wobei $k_0 = \left(\arccos \sqrt{2/3} \right)^{-1}$ ist. Dieselben oberen Abschätzungen gelten jeweils für $\mathbb{P}^x (T \geq t)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt ähnlich wie in Korollar 7.4, wobei wir hier Satz 7.6 anwenden und das Symbol nach unten abschätzen müssen.
Da das Symbol des OSL Prozesses reellwertig ist, ist die Konstante aus Satz 7.6:

$$k_0 := k(x, R) = \left(\arccos \sqrt{2/3} \right)^{-1}.$$

Mit Korollar 6.9 existieren Konstanten $C_3, C_4 > 0$, so dass für alle $x \in K \subset \mathbb{R}^d$ (K kompakte Teilmenge) und alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(x, \xi)| \geq \begin{cases} C_3 \|\xi\|^{1/a} & \text{für } \|\xi\| \leq 1, \\ C_4 \|\xi\|^{1/b} & \text{für } \|\xi\| \geq 1. \end{cases}$$

Nun sei $\tilde{C} = C_3 \wedge C_4$. Dann ist für alle $R > 0$:

$$\sup_{\|\xi\| \leq 1/(Rk_0)} \inf_{\|y - x\| \leq R} | q(y, \xi)| \geq \sup_{\|\xi\| \leq 1/(Rk_0)} \begin{cases} \tilde{C} \|\xi\|^{1/a} & \text{für } \|\xi\| \leq 1, \\ \tilde{C} \|\xi\|^{1/b} & \text{für } \|\xi\| \geq 1. \end{cases}$$

Zunächst betrachten wir $R \geq \frac{1}{k_0}$, also $\frac{1}{Rk_0} \leq 1$. Diese untere Abschätzung für das Symbol ergibt mit Satz 7.6:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| \leq R \right) &\leq C \left(t \sup_{\|\xi\| \leq 1/(Rk_0)} \tilde{C} \|\xi\|^{1/a} \right)^{-1} \\ &= C \left(t \tilde{C} (Rk_0)^{-1/a} \right)^{-1} \\ &= \frac{C_1}{t} R^{1/a} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.
Der Fall $0 < R \leq \frac{1}{k_0}$ verläuft analog, wobei wir $\frac{1}{Rk_0} \geq 1$ beachten müssen:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| \leq R \right) &\leq C \left(t \sup_{\|\xi\| \leq 1/(Rk_0)} \tilde{C} \|\xi\|^{1/b} \right)^{-1} \\ &= C \left(t \tilde{C} (Rk_0)^{-1/b} \right)^{-1} \\ &= \frac{C_2}{t} R^{1/b}. \end{aligned}$$

□

Aus dem vorherigen Beweis folgt somit auch direkt eine obere Grenze für den Erwartungswert der Erstaustrittszeit des OSL Prozesses.

Korollar 7.10. *Sei X ein OSL Prozess. Dann existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$\mathbb{E}^x(T) \leq \begin{cases} C_1 \cdot R^{1/b} & \text{für } 0 < R \leq 1/k_0 \\ C_2 \cdot R^{1/a} & \text{für } R \geq 1/k_0 \end{cases}$$

mit $k_0 = \left(\arccos \sqrt{2/3}\right)^{-1}$.

7.2 Momente

Aus der oberen Maximalabschätzung bekommen wir die Existenz von Momenten des Maximumprozesses.

Satz 7.11. *Sei X ein OSL Prozess. Für alle $0 < p < \frac{1}{b}$ gilt:*

$$\mathbb{E}^x\left(\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\|\right)^p\right) < \infty.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt ähnlich dem Beweis von Theorem 6.8 in [29].
Mit der Identität des Erwartungswertes für positive Zufallsvariablen erhalten wir für $0 < p < \frac{1}{b}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x\left(\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\|\right)^p\right) &= p\int_0^\infty y^{p-1} \cdot \mathbb{P}^x\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\| > y\right) dy \\
&= p\int_0^1 y^{p-1} \cdot \mathbb{P}^x\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\| > y\right) dy + p\int_1^\infty y^{p-1} \cdot \mathbb{P}^x\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\| > y\right) dy \\
&\leq p\int_0^1 y^{p-1}\, dy + p\int_1^\infty y^{p-1} \cdot \mathbb{P}^x\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\| > y\right) dy \\
&\leq 1 + p \cdot C \cdot t\int_1^\infty y^{p-1-\frac{1}{b}}\, dy < \infty
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Dabei folgt die letzte Abschätzung mit Korollar 7.4. □

Nun leiten wir asymptotische Abschätzungen der fraktionalen Momente des OSL Prozesses her, d.h. wir betrachten das Kurz- und Langzeitverhalten von

$$\mathbb{E}^x\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\|^p\right) \qquad \text{für } p > 0.$$

Für das Verhalten für $t \in (0, 1)$ ist kein besseres Resultat als

$$\mathbb{E}^x\left(\sup_{s\leq t} \|X_s - x\|^p\right) \leq Ct$$

mit einer Konstanten $C > 0$ zu erwarten, da sonst wegen dem Satz von Kolmogorov-Chentsov die Existenz einer stetigen Modifikation folgen würde. Die Beweisideen der nächsten Aussagen stammen aus [20].

Satz 7.12. *Sei X ein OSL Prozess. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $t \geq 1$ und $0 < p < \frac{1}{b}$ gilt:*

$$\mathbb{E}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\|^p \right) \leq C t^{bp}. \tag{7.10}$$

Beweis. Mit Korollar 7.4 folgt für alle $t \geq 1$ und $0 < p < \frac{1}{b}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\|^p \right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| > y^{1/p} \right) dy \\
&\leq \int_0^{t^{bp}} 1 \, dy + \int_{t^{bp}}^\infty \mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| > y^{1/p} \right) dy \\
&= \int_0^{t^{bp}} 1 \, dy + C_1 \cdot t \cdot \int_{t^{bp}}^\infty y^{-\frac{1}{bp}} \, dy \\
&= t^{bp} + C_2 \cdot t \cdot t^{bp-1} = C t^{bp}
\end{aligned}$$

mit Konstanten $C, C_1, C_2 > 0$. □

Das Analogon für das Kurzzeitverhalten lautet:

Satz 7.13. *Sei X ein OSL Prozess. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $t \in (0,1)$ und $0 < p < \frac{1}{b}$ gilt:*

$$\mathbb{E}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\|^p \right) \leq C \left(t^{ap} + t \right). \tag{7.11}$$

Beweis. Mit Korollar 7.4 folgt für alle $t \in (0,1)$ und $0 < p < \frac{1}{b}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\|^p \right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| > y^{1/p} \right) dy \\
&\leq \int_0^{t^{ap}} 1 dy + \int_{t^{ap}}^1 \mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| > y^{1/p} \right) dy \\
&\quad + \int_1^\infty \mathbb{P}^x \left(\sup_{s \leq t} \|X_s - x\| > y^{1/p} \right) dy \\
&\leq t^{ap} + C_1 \cdot t \cdot \int_{t^{ap}}^1 y^{-\frac{1}{ap}} dy + C_2 \cdot t \cdot \int_1^\infty y^{-\frac{1}{bp}} dy \\
&= t^{ap} + \tilde{C}_1 t \left(1 - t^{ap-1} \right) - \tilde{C}_2 t \\
&= C \left(t^{ap} + t \right).
\end{aligned}$$

Dabei beachte, dass $0 < ap < 1$ und $bp < 1$. □

7.3 Asymptotisches Verhalten

Im Folgenden möchten wir das lokale und globale Wachstum der Pfade des OSL Prozesses charakterisieren. Wir zeigen, für welche $\gamma > 0$

$$\underline{\lim_{t}} \frac{\sup_{s \leq t} \|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} \quad \text{oder} \quad \overline{\lim_{t}} \frac{\sup_{s \leq t} \|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}}$$

unter $\mathbb{P}^x$ endlich oder unendlich für $t \to 0$ bzw. $t \to \infty$ ist.
Für Lévy-Prozesse beschreibt unter anderem das Gesetz vom iterierten Logarithmus das asymptotische Verhalten. Allgemein für Feller-Prozesse sind solche Resultate nicht verfügbar. In [28] bzw. Chapter 5.3 in [10] wurde das Grenzverhalten von Feller-Prozessen untersucht. Diese Ergebnisse geben hier wieder und wenden sie dann auf die in dieser Arbeit konstruierte Teilklasse an. Für Feller-Prozesse lassen sich polynomielle Abschätzungen des asymptotischen Verhaltens der Pfade zeigen. Das Grenzverhalten für $t \to 0$ bzw. $t \to \infty$ wird durch das Verhalten des Symbols für $\|\xi\| \to \infty$ bzw. $\|\xi\| \to 0$ bestimmt. Die Grenzen γ werden durch das Symbol bestimmt.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem lokalen Verhalten. Dazu führen wir Indizes für das Symbol des Feller-Prozesses ein. Diese sind Verallgemeinerungen der Indizes von R. M. Blumenthal und R. K. Getoor in [7] sowie von W. E. Pruitt in [24] und werden deshalb verallgemeinerte Blumenthal-Getoor-Pruitt Indizes genannt, siehe Definition 5.13 in [10].

Definition 7.14. Sei $q(x,\xi)$ ein negativ definites Symbol. Dann sind die **verallgemeinerten Blumenthal-Getoor-Pruitt Indizes (im Unendlichen)** die Zahlen

$$\begin{aligned}
\beta_\infty^x &:= \inf\left\{\gamma > 0 : \lim_{\|\xi\|\to\infty} \frac{\sup_{\|\eta\|\le\|\xi\|}\sup_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|}|q(y,\eta)|}{\|\xi\|^\gamma} = 0\right\},\\
\underline{\beta}_\infty^x &:= \inf\left\{\gamma > 0 : \varliminf_{\|\xi\|\to\infty} \frac{\sup_{\|\eta\|\le\|\xi\|}\sup_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|}|q(y,\eta)|}{\|\xi\|^\gamma} = 0\right\},\\
\overline{\delta}_\infty^x &:= \sup\left\{\gamma > 0 : \varlimsup_{\|\xi\|\to\infty} \frac{\inf_{\|\eta\|\ge\|\xi\|}\inf_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|}\operatorname{Re} q(y,\eta)}{\|\xi\|^\gamma} = \infty\right\},\\
\delta_\infty^x &:= \sup\left\{\gamma > 0 : \lim_{\|\xi\|\to\infty} \frac{\inf_{\|\eta\|\ge\|\xi\|}\inf_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|}\operatorname{Re} q(y,\eta)}{\|\xi\|^\gamma} = \infty\right\}.
\end{aligned}$$

Dabei beachte, dass in der Definition im Buch [10] der Druckfehler $\inf_{\|\eta\|\le\|\xi\|}$ anstatt von $\inf_{\|\eta\|\ge\|\xi\|}$ für $\overline{\delta}_\infty^x$ und δ_∞^x auftaucht. Zwischen den Indizes besteht der Zusammenhang

$$0 \le \delta_\infty^x \le \underline{\beta}_\infty^x \le \beta_\infty^x \le 2 \quad \text{und} \quad 0 \le \delta_\infty^x \le \overline{\delta}_\infty^x \le \beta_\infty^x \le 2.$$

Die Indizes des stable-like Prozesses wurden in Example 5.5 von [28] untersucht.

Beispiel 7.15. *Für das Symbol eines stable-like Prozesses $q(x,\xi) = \|\xi\|^{\alpha(x)}$ lauten die Indizes:*

$$\delta_\infty^x = \overline{\delta}_\infty^x = \underline{\beta}_\infty^x = \beta_\infty^x = \alpha(x).$$

Im Allgemeinen können wir jedoch nicht erwarten, dass die Indizes identisch sind.
Mit den Indizes im Unendlichen lässt sich das Kurzzeitverhalten von Feller-Prozessen beschreiben. Dieses wird insbesondere von $X_0 = x$ abhängen.

Satz 7.16. *Sei X ein Feller-Prozess mit Symbol $q(x,\xi)$.*
Dann gilt $\mathbb{P}^x$-fast sicher

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t}\|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = 0 \quad \text{für alle } \gamma > \beta_\infty^x, \tag{7.12}$$

$$\varliminf_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t}\|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = 0 \quad \text{für alle } \gamma > \underline{\beta}_\infty^x \tag{7.13}$$

und falls die Sektor Bedingung (7.9) erfüllt ist,

$$\overline{\lim_{t\to 0}} \frac{\sup_{s\le t}\|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = \infty \quad \textit{für alle } \gamma < \overline{\delta}^x_\infty, \tag{7.14}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t}\|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = \infty \quad \textit{für alle } \gamma < \delta^x_\infty. \tag{7.15}$$

Diese Resultate wurden mithilfe der Maximalabschätzungen für Feller-Prozesse, die wir zu Beginn des Kapitels dargestellt haben, bewiesen.

Die verallgemeinerten Blumenthal-Getoor-Pruitt Indizes im Unendlichen lauten für unser Symbol:

Proposition 7.17. *Der OSL Prozess besitzt die Indizes*

$$\beta^x_\infty = \underline{\beta}^x_\infty = \frac{1}{\lambda(x)} \qquad \textit{und} \qquad \overline{\delta}^x_\infty = \delta^x_\infty = \frac{1}{\Lambda(x)}.$$

Beweis. Zunächst bestimmen wir β^x_∞:
Wegen Satz 6.8 existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $y, \eta \in \mathbb{R}^d$ mit $\|\eta\| \ge 1$ gilt:

$$|q(y,\eta)| \le C\|\eta\|^{1/\lambda(y)}.$$

Außerdem ist

$$C \sup_{\|\eta\|\le\|\xi\|} \sup_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|} \|\eta\|^{1/\lambda(y)} = C \sup_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|} \|\xi\|^{1/\lambda(y)}.$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit des Exponenten $E(x)$ sind die Eigenwerte ebenfalls stetig, so dass folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|y-x\|\le 1/n} \|\xi\|^{1/\lambda(y)} = \lim_{\|y\|\to\|x\|} \|\xi\|^{1/\lambda(y)} = \|\xi\|^{1/\lambda(x)}.$$

Diese Überlegungen ergeben

$$\beta^x_\infty = \inf\left\{\gamma > 0 : \lim_{\|\xi\|\to\infty} \frac{\sup_{\|\eta\|\le\|\xi\|}\sup_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|} |q(y,\eta)|}{\|\xi\|^\gamma} = 0\right\} = \frac{1}{\lambda(x)}.$$

Analog für $\underline{\beta}^x_\infty$.

Nun zu δ^x_∞: Da das Symbol die Sektor Bedingung erfüllt, können wir in der Definition des Indizes Re $q(\cdot,\cdot)$ durch $|q(\cdot,\cdot)|$ ersetzen. Mit Satz 6.8 existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $\eta \in \mathbb{R}^d$ mit $\|\eta\| \ge 1$ und alle $y \in K$ aus einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|q(y,\eta)| \ge C\|\eta\|^{1/\Lambda(y)}.$$

Weiter ist

$$C \inf_{\|\eta\|\ge\|\xi\|} \inf_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|} \|\eta\|^{1/\Lambda(y)} = C \inf_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|} \|\eta\|^{1/\Lambda(y)}$$

und mit der Stetigkeit der Eigenwerte folgt

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\|y-x\|\le 1/n} \|\eta\|^{1/\Lambda(y)} = \|\xi\|^{1/\Lambda(x)}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\delta^x_\infty := \sup\left\{\gamma > 0 : \lim_{\|\xi\|\to\infty} \frac{\inf_{\|\eta\|\ge\|\xi\|}\inf_{\|y-x\|\le 1/\|\xi\|} \operatorname{Re} q(y,\eta)}{\|\xi\|^\gamma} = \infty\right\} = \frac{1}{\Lambda(x)}.$$

Analog für $\overline{\delta}^x_\infty$. □

Das Kurzzeitverhalten lässt sich mit Satz 7.16 wie folgt beschreiben.

Korollar 7.18. *Sei X ein OSL Prozess. Es gilt $\mathbb{P}^x$-fast sicher*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t} \|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = 0 \quad \textit{für alle } \gamma > \frac{1}{\lambda(x)},$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{\sup_{s\le t} \|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = \infty \quad \textit{für alle } \gamma < \frac{1}{\Lambda(x)}.$$

Um das Langzeitverhalten der Pfade zu charakterisieren, benötigen wir die verallgemeinerten Blumenthal-Getoor-Pruitt Indizes bei Null, siehe Definition 5.17 in [10].

Definition 7.19. Sei $q(x,\xi)$ ein negativ definites Symbol mit beschränkten Koeffizienten, d.h. $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |q(x,\xi)| \le C\left(1+\|\xi\|^2\right)$ mit Konstante $C>0$. Die **verallgemeinerten Blumenthal-Getoor-Pruitt Indizes (bei Null)** sind die Zahlen

$$\beta_0 := \sup\left\{\gamma \ge 0 : \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{\|\eta\|\le\|\xi\|} |q(x,\eta)|}{\|\xi\|^\gamma} = 0\right\},$$
$$\underline{\beta}_0 := \sup\left\{\gamma \ge 0 : \underline{\lim}_{\|\xi\|\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{\|\eta\|\le\|\xi\|} |q(x,\eta)|}{\|\xi\|^\gamma} = 0\right\},$$
$$\overline{\delta}_0 := \inf\left\{\gamma \ge 0 : \overline{\lim}_{\|\xi\|\to 0} \frac{\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\inf_{\|\eta\|\ge\|\xi\|} \operatorname{Re} q(x,\eta)}{\|\xi\|^\gamma} = \infty\right\},$$
$$\delta_0 := \inf\left\{\gamma \ge 0 : \lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\inf_{\|\eta\|\ge\|\xi\|} \operatorname{Re} q(x,\eta)}{\|\xi\|^\gamma} = \infty\right\}.$$

Dabei beachte, dass in der Definition im Buch [10] der Druckfehler $\inf_{\|\eta\|\le\|\xi\|}$ anstatt von $\inf_{\|\eta\|\ge\|\xi\|}$ für $\overline{\delta}_0$ und δ_0 auftaucht. Auch für die Indizes bei Null haben wir die Zusammenhänge

$$0 \le \beta_0 \le \underline{\beta}_0 \le \delta_0 \le 2 \quad \text{und} \quad 0 \le \beta_0 \le \overline{\delta}_0 \le \delta_0 \le 2.$$

Beispiel 7.20. *(a) Für den stable-like Prozess gilt*

$$\beta_0 = \underline{\beta}_0 = \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \alpha(x) \quad \textit{und} \quad \delta_0 = \overline{\delta}_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \alpha(x).$$

(b) Für den α-stabilen Lévy-Prozess sind alle Indizes (im Unendlichen und bei Null) gleich α.

Für das globale Wachstum der Pfade der Feller-Prozesse gelten die folgenden Abschätzungen:

Satz 7.21. *Sei X ein Feller-Prozess mit Symbol $q(x,\xi)$, welches beschränkte Koeffizienten besitzt.*
Dann gilt $\mathbb{P}^x$-fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\le t} \|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = 0 \quad \textit{für alle } \gamma < \beta_0, \tag{7.16}$$
$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\le t} \|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = 0 \quad \textit{für alle } \gamma < \underline{\beta}_0 \tag{7.17}$$

und falls die Sektor Bedingung (7.9) erfüllt ist,

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\le t} \|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = \infty \quad \textit{für alle } \gamma > \overline{\delta}_0, \tag{7.18}$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\le t} \|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = \infty \quad \textit{für alle } \gamma > \delta_0. \tag{7.19}$$

Die verallgemeinerten Blumenthal Indizes bei Null für das Symbol des OSL Prozess lauten:

Proposition 7.22. *Für den OSL Prozess gilt*

$$\beta_0 = \underline{\beta}_0 = \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{\Lambda(x)}.$$

Beweis. Nach Satz 6.8 existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|q(x,\eta)| \le C\|\eta\|^{1/\Lambda(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \text{ und } \|\eta\| \le 1.$$

Damit folgt für kleine Werte von ξ (d.h. $\|\xi\| \le 1$)

$$\begin{aligned}\lim_{\|\xi\|\to 0} \frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{\|\eta\|\le\|\xi\|}|q(x,\eta)|}{\|\xi\|^\gamma} &\le \lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\|\xi\|^{1/\Lambda(x)}}{\|\xi\|^\gamma} \\ &= \lim_{\|\xi\|\to 0}\frac{\|\xi\|^{\inf_{x\in\mathbb{R}^d} 1/\Lambda(x)}}{\|\xi\|^\gamma} = 0,\end{aligned}$$

falls $\gamma < \inf_{x\in\mathbb{R}^d} 1/\Lambda(x)$, und somit die Behauptung. Analog für $\underline{\beta}_0$. □

Da wir für das Symbol nur untere Abschätzungen auf kompakten Mengen haben, lassen sich die Indizes $\delta_0 = \overline{\delta_0}$ für den OSL nicht berechnen.
Für das Langzeitverhalten bekommen wir die Abschätzungen:

Korollar 7.23. *Sei X ein OSL Prozess. Es gilt $\mathbb{P}^x$-fast sicher*

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{\sup_{s\le t}\|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} &= 0 \quad \textit{für alle } \gamma < \inf_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{1}{\Lambda(x)}, \\ \lim_{t\to\infty}\frac{\sup_{s\le t}\|X_s - x\|}{t^{1/\gamma}} &= \infty \quad \textit{für alle } \gamma > \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus Satz 7.21 und der Darstellung der Indizes des OSL Prozesses. Um die zweite Aussage zu zeigen, orientieren wir uns am Beweis von Theorem 5.16 in [10] und führen die Abkürzung für den Maximumsprozess

$$(X_\cdot - x)^*_t := \sup_{s\le t}\|X_s - x\|$$

ein. Wir setzen $\gamma > \epsilon > \frac{1}{a}$ voraus. Mit Korollar 7.9 folgt für alle $t \ge 1$

$$\mathbb{P}^x\left((X_\cdot - x)^*_t \le t^{1/\epsilon}\right) \le \frac{C}{t}t^{\frac{1}{\epsilon a}} = Ct^{\frac{1}{\epsilon a}-1}$$

mit einer Konstante $C > 0$. Wir wählen $t = t_k = 2^k, k \in \mathbb{N}$, und summieren die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten auf, dann folgt

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}^x\left((X_\cdot - x)^*_{t_k} \le t^{1/\epsilon}\right) \le C\sum_{k=1}^\infty 2^{k\left(\frac{1}{\epsilon a}-1\right)} < \infty,$$

da $\epsilon > \frac{1}{a}$. Mit dem Lemma von Borel-Cantelli erhalten wir

$$\mathbb{P}^x\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\{(X_\cdot - x)^*_{t_k} > t_k^{1/\epsilon}\right\}\right) = 0$$

bzw.

$$(X_\cdot - x)^*_{t_k} > t_k^{1/\epsilon} \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wir wählen $t \in [t_k, t_{k+1}]$ und mit hinreichend großem k folgt für alle ω:

$$(X_\cdot(\omega) - x)^*_t \geq (X_\cdot(\omega) - x)^*_{t_k} > t_k^{1/\epsilon} \geq 2^{1/\epsilon} t^{1/\epsilon}.$$

Also folgt für alle $\gamma > \epsilon$

$$t^{-1/\gamma}\,(X_\cdot - x)^*_t > 2^{1/\epsilon} t^{1/\epsilon - 1/\gamma} \to \infty \quad \mathbb{P}^x\text{-f.s. für } t \to \infty$$

und somit die Behauptung, da wir $\epsilon > \frac{1}{a}$ gewählt haben. □

Wir haben gesehen, dass die Kurzzeitresultate von dem Realteil des größten und kleinsten Eigenwertes abhängen. Die Langzeitresultate dagegen werden von dem Infimum des größten Eigenwertes (Realteil) bzw. von $1/a$ bestimmt. Für das Langzeitverhalten verlieren wir den Einfluss des Startpunktes $X_0 = x$. Die Resultate des aymptotischen Verhaltens für $t \to 0$ sind folglich schärfer als für $t \to \infty$. Dies ist allgemein für Feller-Prozess der Fall, da wir bei den Indizes bei Null das Supremum oder Infimum über alle $x \in \mathbb{R}^d$ nehmen.

7.4 p-Variation

In diesem Abschnitt untersuchen wir die p-Variation des operator-stable-like Prozesses. Dazu erinnern wir zunächst an die Variation einer Funktion.

Definition 7.24. Für $p \in (0, \infty)$ und eine càdlàg Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ heißt

$$V_p(f, t) := V_p(f, [0, t]) := \sup_{\pi_n} \sum_{i=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|^p \tag{7.20}$$

(starke) p**-Variation** von f über $[0, t]$, wobei das Supremum über alle Partitionen $\pi_n = (0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t)\,, n \in \mathbb{N}$, genommen wird.
Wir sagen, dass f von **endlicher** p**-Variation** ist, falls $V_p(f, t) < \infty$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Im Fall von $p = 1$ sprechen wir von endlicher Variation. Jede monoton steigende Funktion ist von endlicher Variation. Umgekehrt kann jede Funktion von endlicher Variation als Differenz zweier monoton steigender Funktionen dargestellt werden. Die Funktionen von endlicher Variation bilden einen Vektorraum.

Definition 7.25. Ein stochastischer Prozess X ist von **endlicher** p**-Variation**, falls fast alle seine Pfade von endlicher p-Variation sind.

Allgemein gilt das folgende Resultat für die p-Variation von starken Markov-Prozessen, das im Artikel [21] hergeleitet wurde.

Satz 7.26. *Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein starker Markov-Prozess und es existieren Konstanten $\alpha > 0, \beta > (3 - e)/(e - 1) \approx 0,16395$ und $C, R_0 > 0$, so dass*

$$a(t, R) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{s \leq t} \mathbb{P}^x(\|X_s - x\| \geq R) \leq C t^\beta R^{-\alpha} \quad \textit{für alle } t > 0 \textit{ und } R \in [0, R_0).$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}^x(V_p(X_t, t) < \infty) = 1 \quad \textit{für alle } p > \frac{\alpha}{\beta} \textit{ und } x \in \mathbb{R}^d.$$

Da ein càdlàg Feller-Prozess die starke Markov-Eigenschaft besitzt (siehe in [27], A.25 Theorem), liefert uns der Satz eine Aussage über die p-Variation von OSL Prozessen.

Proposition 7.27. *Sei X ein OSL Prozess. Dann gilt*

$$\mathbb{P}^x(V_p(X_t,t)<\infty)=1 \qquad \textit{für alle } p>\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{1}{\lambda(x)} \textit{ und } x\in\mathbb{R}^d.$$

Beweis. Für alle $t,R>0$ ist

$$a(t,R)=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{s\le t}\mathbb{P}^x(\|X_s-x\|\ge R)\le\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{P}^x\left(\sup_{s\le t}\|X_s-x\|\ge R\right).$$

Nach Satz 7.2 existiert eine Konstante $C>0$, so dass für alle $R>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ und $t>0$ gilt:

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{s\le t}\|X_s-x\|\ge R\right)\le Ct\sup_{\|y-x\|\le R}\sup_{\|\xi\|\le 1/R}|q(y,\xi)|.$$

Für alle $p>\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\beta_\infty^x=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{1}{\lambda(x)}$ existiert wegen der Darstellung β_∞^x des OSL Prozesses eine Konstante $R_0>0$ mit

$$a(t,R)\le Ct\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{\|y-x\|\le R}\sup_{\|\xi\|\le 1/R}|q(y,\xi)|\le\tilde{C}tR^{-p} \qquad \text{für alle } t>0 \text{ und } R\in[0,R_0).$$

Für $\alpha=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\frac{1}{\lambda(x)}$, $\beta=1$ und $R_0>0$ folgt die Behauptung mit Satz 7.26. □

Bemerkung 7.28. Wie man an dem Beweis erkennt, gilt unter der Voraussetzung $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\subset D(A)$ die Aussage der vorherigen Proposition für $p>\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\beta_\infty^x$ auch allgemein für Feller-Prozesse.

8 Weitere Eigenschaften des konstruierten Feller-Prozesses

Falls in der Darstellung des operator-stable-like Lévy-Maß das Maß σ symmetrisch auf der Einheitssphäre ist, haben wir als Lösung der in Kapitel 5 eingeführten SDE

$$X_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(X_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(X_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr)$$

einen Feller-Prozess erhalten, der eine reelle Symboldarstellung über das operator-stable-like Lévy-Maß besitzt. Diesen Prozess haben wir operator-stable-like Prozess genannt. Für eine genaue Beschreibung der obigen SDE verweisen wir auf den Beginn von Abschnitt 5.2.

In diesem Kapitel lassen wir die Symmetrievoraussetzung an das Maß σ (bzw. das OSL Lévy Maß ϕ_x) fallen und betrachten wieder, wie in Kapitel 5, beliebige endliche Maße σ. Nun ist es interessant zu erfahren, welche weiteren Eigenschaften die Lösung der SDE für ein endliches, nicht notwendigerweise symmetrisches Maß besitzt. Dazu werden wir die Teile der SDE getrennt voneinander betrachten. Mit $M^x = (M_t^x)_{t\geq 0}$ bezeichnen wir die Lösung der modifizierten SDE, d.h

$$M_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr).$$

Der Teil des Prozesses beschreibt die kleinen Sprünge. Der andere Integralterm beschreibt die großen Sprünge und für dessen Lösung schreiben wir $Z^x = (Z_t^x)_{t\geq 0}$, d.h. er ist die Lösung von

$$Z_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(Z_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr).$$

Dabei ist der Integralterm eine Summe mit endlich vielen Termen. Die Pfade von Z^x sind stückweise konstant und Z^x ist also ein Sprungprozess (siehe Abschnitt 4.4). Deshalb werden wir uns bei der Betrachtung der Pfadeigenschaften auf den Prozess M^x beschränken.
Aus Kapitel 5 folgt, dass die Lösungen der beiden SDEs Feller-Prozesse mit $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset D(A)$ sind und sie Symbole besitzen. Im Folgenden werden wir zuerst die beiden Symbole vor allem hinsichtlich ihrer Stetigkeit untersuchen und im letzten Abschnitt des Kapitels einige Pfadeigenschaften von M^x analysieren.

8.1 Symbol der Lösung der SDE der kleinen Sprünge

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Symbol der Lösung M^x der SDE

$$M_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \tilde{N}(ds, d\theta, dr). \tag{8.1}$$

Zunächst bestimmen wir den Erzeuger:

Satz 8.1. *Der Erzeuger der Lösung M^x von (8.1) hat die folgende Gestalt für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$:*

$$Au(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x)\rangle \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta). \tag{8.2}$$

Insbesondere ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ im Definitionsbereich des Erzeugers.

Beweis. Mit der Itô-Formel folgt für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$:

$$u(M_t^x) = u(M_0^x) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(M_{s-}^x + r^{E(M_{s-}^x)}\theta) - u(M_{s-}^x) \right) \tilde{N}(ds, d\theta, dr)$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(M_{s-}^x + r^{E(M_{s-}^x)}\theta) - u(M_{s-}^x) - \langle r^{E(M_{s-}^x)}\theta, \nabla u(M_{s-}^x)\rangle \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds.$$

Im Beweis von Satz 5.18 haben wir gezeigt, dass

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(M_{s-}^x + r^{E(M_{s-}^x)}\theta) - u(M_{s-}^x) \right) \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right] = 0.$$

Anwenden des Erwartungswertes ergibt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(M_t^x)] &= u(M_0^x) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(M_{s-}^x + r^{E(M_{s-}^x)}\theta) - u(M_{s-}^x) \right.\right.\\ &\qquad \left.\left. - \langle r^{E(M_{s-}^x)}\theta, \nabla u(M_{s-}^x)\rangle \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right]\\ &= u(M_0) + \int_0^t \mathbb{E}^x[Au(M_s)]ds.\end{aligned}$$

Also ist der Erzeuger gegeben durch

$$Au(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x)\rangle \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta).$$

□

Das Symbol von M^x bezeichnen wir mit $q_1(x, \xi)$. Es hat die folgende Darstellung:

Satz 8.2. *Die Lösung M^x der SDE* (8.1) *besitzt das Symbol:*

$$q_1(x, \xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta). \tag{8.3}$$

Beweis. Aus der Darstellung des Erzeugers

$$Au(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) - \langle r^{E(x)}\theta, \nabla u(x)\rangle \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)$$

folgt mit der Proposition 3.12 für das Symbol

$$q_1(x, \xi) = -e_{-\xi}(x)Ae_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)$$

□

Wir kommen zur Untersuchung der Eigenschaften des Symbols, wobei wir für die Beschränktheit des Symbols die folgende Aussage erhalten.

Satz 8.3. *Das Symbol $q_1(x, \xi)$ ist beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |q_1(x, \xi)| \leq C\|\xi\|^2$$

gilt.

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 5.26 folgt für $r \in (0,1)$ mit einer Taylor-Entwicklung

$$\left|1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right| \leq |\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle|^2 \leq \|r^{E(x)}\|^2\|\xi\|^2 \leq Cr^{2a}\|\xi\|,$$

wobei wir $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ und Korollar 5.6 mit einer Konstanten $C > 0$ im letzten Schritt benutzt haben. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |q_1(x,\xi)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left|1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\\ &\leq C\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\|\xi\|^2 \int_0^1 r^{2a-2}dr.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wegen $a > \frac{1}{2}$. □

Im Gegensatz zum Symbol des operator-stable-like Prozesses bekommen wir keine schärferen Abschätzungen für das Symbol $q_1(x,\xi)$ in Form der Eigenwerte des Exponenten (Realteil des kleinsten bzw. größten). Dies liegt an der Tatsache, dass das Symbol keine Skalierungseigenschaft erfüllt. Falls wir das Symbol im zweiten Argument skalieren, bekommen wir die folgenden Abschätzungen.

Satz 8.4. *Für alle $t > 0$ existieren Konstanten $C_1(t), C_2(t) > 0$, so dass für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$|q_1(x, t^{E(x)}\xi)| \leq \begin{cases} t|q_1(x,\xi)| + C_1(t)\|\xi\|^2 & \text{, falls } 0 < t < 1\\ t|q_1(x,\xi)| + C_2(t)\|\xi\|^2 & \text{, falls } t > 1.\end{cases}$$

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall $0 < t < 1$. Wegen der Symmetrie des Exponenten $E(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} q_1(x, t^{E(x)}\xi) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta, t^{E(x)}\xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta, t^{E(x)}\xi\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left(1 - e^{i\langle (rt)^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle (rt)^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^t t\left(1 - e^{i\langle s^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle s^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right) \frac{ds}{s^2}\sigma(d\theta)\\ &= tq_1(x,\xi) - t\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_t^1 \left(1 - e^{i\langle s^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle s^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right) \frac{ds}{s^2}\sigma(d\theta),\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $s = rt$ verwendet haben. Das Integral ist endlich und lässt sich abschätzen mittels einer Taylorentwicklung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für den Integranden:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_t^1 \left|1 - e^{i\langle s^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle s^{E(x)}\theta,\xi\rangle\right| \frac{ds}{s^2}\sigma(d\theta)\\ &\qquad\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_t^1 \|s^{E(x)}\theta\|^2\|\xi\|^2 \frac{ds}{s^2}\sigma(d\theta)\\ &\qquad\leq \sigma(\mathbb{S}^{d-1})\|\xi\|^2 C_3 \int_t^1 s^{2a-2}ds\\ &\qquad= \sigma(\mathbb{S}^{d-1})\|\xi\|^2 C_3 \frac{1}{2a-1}\left(1 - t^{2a-1}\right).\end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile haben wir Korollar 5.6 mit einer Konstanten $C_3 > 0$ benutzt und die Behauptung folgt mit

$$C_1(t) := C_3\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\frac{1}{2a-1}\left(t - t^{2a}\right).$$

Der Fall $t > 1$ erfolgt analog, wobei wir dort das Matrixexpontial für den Fall $s \geq 1$ mit Korollar 5.6 durch

$$\|s^{E(x)}\| \leq C_4 s^b$$

abschätzen und die Konstante

$$C_2(t) := C_4\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\frac{1}{2b-1}\left(t^{2b} - t\right)$$

erhalten. □

Falls der Realteil des kleinsten Eigenwertes des Exponenten $E(x)$ echt größer Eins ist, folgt die stärkere Aussage bzgl. der Stetigkeit von $q_1(x,\xi)$ in x.

Satz 8.5. *Das Symbol $q_1(x,\xi)$ ist Lipschitz-stetig in x, falls $a > 1$.*

Beweis. Für $x, z, \xi \in \mathbb{R}^d$ folgt wegen der Lipschitz-Stetigkeit von $y \mapsto e^{iy}$, $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|q_1(x,\xi) - q_1(z,\xi)| &= \Bigg| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} + i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle \\
&\quad - \left(1 - e^{i\langle r^{E(z)}\theta,\xi\rangle} + i\langle r^{E(z)}\theta,\xi\rangle\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \Bigg| \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left| e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} - e^{i\langle r^{E(z)}\theta,\xi\rangle} \right| + \left| i\langle r^{E(x)}\theta - r^{E(z)}\theta, \xi\rangle \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 2C \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left| \langle r^{E(x)}\theta - r^{E(z)}\theta, \xi\rangle \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 2C \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(x)}\theta - r^{E(z)}\theta\| \|\xi\| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 2C\|\xi\|\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 \|r^{E(x)} - r^{E(z)}\| r^{-2} dr \\
&\leq 2C\|\xi\|\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\|x - z\| \int_0^1 r^{a-\delta-2} dr \\
&\leq \tilde{C}\|x - z\|,
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Ungleichung Lemma 5.11 benutzt haben und die Konstante $\delta > 0$ so gewählt haben, dass $a - \delta > 1$. □

Jedes Symbol ist stetig in ξ. Die folgenden Resultate zeigen die gleichmäßige Stetigkeit von $q_1(x,\xi)$ in $\xi = 0$ und die Lipschitz-Stetigkeit für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$, falls der Realteil des kleinsten Eigenwertes nach unten durch Eins beschränkt ist.

Satz 8.6. *Das Symbol $q_1(x,\xi)$ ist gleichmäßig stetig in $\xi = 0$, d.h.*

$$\lim_{\|\xi\|\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |q_1(x,\xi) - q_1(x,0)| = 0. \tag{8.4}$$

Beweis. Dies folgt direkt mit Satz 8.3, falls wir den Grenzwert $\|\xi\| \to 0$ betrachten. □

Satz 8.7. *Das Symbol $q_1(x,\xi)$ ist Lipschitz-stetig in ξ, falls $a > 1$.*

Beweis. Analog wie im Beweis von Satz 8.5 folgt für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
|q_1(x,\xi) - q_1(x,\eta)| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left| e^{i\langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle} - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\eta\rangle} \right| + \left| i\langle r^{E(x)}\theta, \xi - \eta\rangle \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 2C \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \left| i\langle r^{E(x)}\theta, \xi - \eta\rangle \right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 2C \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(x)}\theta\| \|\xi - \eta\| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq 2C\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \|\xi - \eta\| \int_0^1 r^{a-2} dr,
\end{aligned}$$

wobei wir Korollar 5.6 verwendet haben. Das Integral ist für $a > 1$ endlich. □

8.2 Symbol der Lösung der SDE der großen Sprünge

Hier bestimmen wir die Darstellung des Symbols der Lösung Z^x von

$$Z_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{E(Z_{s-})}\theta N(ds, d\theta, dr). \tag{8.5}$$

Dieses Symbol bezeichnen wir mit $q_2(x,\xi)$.

Satz 8.8. *Die Lösung Z^x der SDE* (8.5) *besitzt das Symbol:*

$$q_2(x,\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle}\right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta). \tag{8.6}$$

Beweis. Analog zu Satz 8.2 folgt für die SDE (8.5) mit der Itô-Formel für $u \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$:

$$u(Z_t^x) = u(Z_0^x) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(Z_{s-}^x + r^{E(Z_{s-}^x)}\theta) - u(Z_{s-}^x) \right) N(ds, d\theta, dr).$$

Nach dem Beweis von Satz 5.18 ist

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(Z_{s-}^x + r^{E(Z_{s-}^x)}\theta) - u(Z_{s-}^x) \right) N(ds, d\theta, dr) \right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(Z_{s-}^x + r^{E(Z_{s-}^x)}\theta) - u(Z_{s-}^x) \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) ds \right].
\end{aligned}$$

und somit ist

$$\mathbb{E}^x[u(Z_t)] = u(Z_0) + \int_0^t \mathbb{E}^x[Au(Z_s)] ds$$

wobei

$$Au(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left(u(x + r^{E(x)}\theta) - u(x) \right) \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta).$$

Die Darstellung des Symbols folgt mit Proposition 3.12. □

Das Symbol ist beschränkt durch eine Konstante und nur im Fall $b < 1$ erhalten wir eine schärfere Abschätzung.

Satz 8.9. *Falls $b < 1$, dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |q_2(x,\xi)| \leq C\|\xi\|.$$

Beweis. Mit Korollar 5.6 existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\begin{aligned} |q_2(x,\xi)| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left| \langle r^{E(x)}\theta, \xi\rangle \right| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \leq \|\xi\| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \|r^{E(x)}\| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &\leq C_1 \|\xi\| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty r^{b-2} dr \sigma(d\theta) < \infty, \end{aligned}$$

da $b < 1$. □

Wie für das Symbol $q_1(x,\xi)$ erhalten wir Ungleichungen, falls wir das Symbol im zweiten Argument skalieren.

Satz 8.10. *Für alle $t > 0$ existieren Konstanten $C_1(t), C_2(t) > 0$, so dass für alle $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:*

$$|q_2(x, t^{E(x)}\xi)| \leq \begin{cases} t|q_2(x,\xi)| + C_1(t) & , \text{ falls } 0 < t < 1 \\ t|q_2(x,\xi)| + C_2(t) & , \text{ falls } t > 1. \end{cases}$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog wie in Satz 8.4. Deswegen deuten wir ihn hier nur an. Für $q_2(x,\xi)$ ist

$$q_2(x, t^{E(x)}\xi) = t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_t^\infty \left(1 - e^{i\langle s^{E(x)}\theta, \xi\rangle}\right) \frac{ds}{s^2} \sigma(d\theta).$$

Nun betrachten wir zuerst den Fall $t > 1$. Dann folgt

$$q_2(x, t^{E(x)}\xi) = tq_2(x,\xi) - t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^t \left(1 - e^{i\langle s^{E(x)}\theta, \xi\rangle}\right) \frac{ds}{s^2} \sigma(d\theta).$$

Für das Integral erhalten wir

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^t \left|1 - e^{i\langle s^{E(x)}\theta, \xi\rangle}\right| \frac{ds}{s^2} \sigma(d\theta) \leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^t 2\frac{ds}{s^2} \sigma(d\theta) = 2\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Die Abschätzung ergibt sich mit

$$C_2(t) := 2\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\,(t-1)\,.$$

Für $0 < t < 1$ erhalten wir analog als Konstante

$$C_1(t) := 2\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\,(1-t)\,.$$

□

Wir bekommen zusätzliche Aussagen über die Stetigkeit des Symbols: Falls der Realteil des größten Eigenwertes des Exponenten $E(x)$ nach oben durch Eins beschränkt ist, ist das Symbol $q_2(x,\xi)$ in x und in ξ Lipschitz-stetig.

Satz 8.11. *Das Symbol $q_2(x,\xi)$ ist Lipschitz-stetig in x, falls $b < 1$ ist.*

Beweis. Mit der Lipschitz-Stetigkeit von e^{ix} ($x \in \mathbb{R}$) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}|q(x,\xi) - q(y,\xi)| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left| e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} - e^{i\langle r^{E(y)}\theta,\xi\rangle} \right| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left| i\langle r^{E(x)}\theta - r^{E(y)}\theta, \xi\rangle \right| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \|r^{E(x)} - r^{E(y)}\| \cdot \|\xi\| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &\leq C\|\xi\|\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\|x-y\| \int_1^\infty r^{b+\delta-2} dr,\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung Lemma 6.13 benutzt haben. Dabei haben wir $\delta > 0$ so gewählt, dass $b + \delta < 1$ ist. Folglich ist das Integral in der letzten Zeile endlich. □

Satz 8.12. *Das Symbol $q_2(x,\xi)$ ist Lipschitz-stetig in ξ, falls $b < 1$.*

Beweis. Mit der gleichen Vorgehensweise wie im Beweis von Satz 8.7 folgt für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}|q_2(x,\xi) - q_2(x,\eta)| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left| 1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\xi\rangle} - \left(1 - e^{i\langle r^{E(x)}\theta,\eta\rangle}\right) \right| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \left| i\langle r^{E(x)}\theta, \xi - \eta\rangle \right| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_1^\infty \|r^{E(x)}\theta\| \|\xi - \eta\| \frac{dr}{r^2} \sigma(d\theta) \\ &\leq C\sigma(\mathbb{S}^{d-1})\|\xi-\eta\| \int_1^\infty r^{b-2} dr,\end{aligned}$$

da das Integral für $b < 1$ endlich ist. □

8.3 Pfadeigenschaften der Lösung der SDE der kleinen Sprünge

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Pfadeigenschaften von M^x, d.h. wir betrachten die Lösung der d-dimensionalen stochastischen Differentialgleichung:

$$M_t = x + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \, \tilde{N}(ds, d\theta, dr).$$

Dabei interessieren wir uns vor allem wieder für Maximalabschätzungen, Momente und das asymptotische Verhalten. Bevor wir dies analysieren, erinnern wir an die Eigenschaft aus Kapitel 5, dass

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)$$

ein L^2-Martingal ist.
Die Martingaleigenschaft ist hilfreich für das folgende Resultat, vergleiche Theorem 4.3.4 in [1].

Satz 8.13. *Es existiert eine monotone Folge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\epsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$, so dass fast sicher*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_n}^1 r^{E(M_{s-})}\theta \, \tilde{N}(ds, d\theta, dr) = \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-})}\theta \, \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \tag{8.7}$$

gilt, wobei die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Intervallen von $[0,t]$ ist.

Beweis. Wir definieren eine monotone Nullfolge $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$\epsilon_n := \sup\left\{0 < r_0 \leq 1 : \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^{r_0} \|r^{E(M_s)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right) \leq \frac{1}{8^n}\right\}. \tag{8.8}$$

Wegen Lemma 5.14 ist

$$t \mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)$$

ein L^2-Martingal. Mit der Doobschen Maximalungleichung und Satz 4.12 (b) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq t}\left\|\int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{1} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr) - \int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_n}^{1} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right\|^2\right) \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq t}\left\|\int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right\|^2\right) \\
&\qquad \leq 4\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right\|^2\right) \\
&\qquad = 4\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} \|r^{E(M_s)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right) \\
&\qquad \leq \frac{4}{8^n}.
\end{aligned}$$

Somit folgt wieder mit der Doobschen Maximalungleichung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq u\leq t}\left\|\int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right\| \geq \frac{1}{2^n}\right) \\
&\qquad \leq 4^n\mathbb{E}\left(\left\|\int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right\| \geq \frac{1}{2^n}\right) \\
&\qquad \leq \frac{4}{2^n}
\end{aligned}$$

und mit dem Lemma von Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sup_{0\leq u\leq t}\left\|\int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right\| \geq \frac{1}{2^n}\right\}\right) = 0.$$

Also ist:

$$\mathbb{P}\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\sup_{0\leq u\leq t}\left\|\int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr)\right\| < \frac{1}{2^n}\right\}\right) = 1.$$

Für $\delta > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m > N$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt:

$$\sup_{0 \le u \le t} \left\| \int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_{n+1}}^{\epsilon_n} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \right\|$$
$$\le \sum_{k=m}^{n-1} \sup_{0 \le u \le t} \left\| \int_0^u \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\epsilon_k}^{\epsilon_{k+1}} r^{E(M_{s-})}\theta\, \tilde{N}(ds, d\theta, dr) \right\|$$
$$\le \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{2^k} < \delta.$$

Folglich gilt die Konvergenz fast sicher gleichmäßig auf kompakten Intervallen von $[0, t]$.

□

8.3.1 Wahrscheinlichkeitsabschätzungen

In diesem Abschnitt leiten wir Wahrscheinlichkeitsabschätzungen für den Prozess M^x her. Für die Herleitung benutzen wir an dieser Stelle nicht die allgemeinen Resultate für Feller-Prozesse aus dem vorherigen Kapitel, sondern leiten diese aus dem Erzeuger her.

Wir erinnern an die Erstaustrittszeit: Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und $R > 0$ ist die **Erstaustrittszeit** des Prozesses M^x der Lösung der SDE (8.1) aus der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_R(x)$ durch

$$T = \inf\{t > 0 : \|M_t^x - x\| > R\} \tag{8.9}$$

gegeben.

Satz 8.14. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $R > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $t > 0$ gilt:*

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{s \le t} \|M_s - x\| > R\right) \le C\frac{t}{R^2}. \tag{8.10}$$

Beweis. Wir wählen $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, so dass $\operatorname{supp} u \subset B_1(0)$ und $0 \le u \le 1 = u(0)$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und $R > 0$ setzen wir

$$u_R^x(\cdot) := u\left(\frac{\cdot - x}{R}\right).$$

Dann ist $u_R^x \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} u_R^x \subset B_R(x)$ und es ist

$$1_{\{T \le t\}} \le 1 - u_R^x(M_{t \wedge T}) \tag{8.11}$$

Für den Fall $T \le t$ beachte

$$u_R^x(M_{t\wedge T}) = u_R^x(M_T) = 0,$$

da $\operatorname{supp} u_R^x \subset B_R(x)$ und $M_T \notin \overline{B}_R(x)$.
Aus Satz 5.19 wissen wir, dass

$$u(X_t) - u(X_0) - \int_0^t Au(X_s)\, ds$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ein Martingal unter $\mathbb{P}^x$ bzgl. der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t\ge 0}$ ist. Aus dem Beweis folgt, dass auch der Prozess $(S_t)_{t\ge0}$ gegeben durch

$$S_t := 1 - u_R^x(M_{t\wedge T}) + \int_0^{t\wedge T} Au_r^x(M_s)\, ds, \quad t \ge 0, \tag{8.12}$$

ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_t^M)_{t\geq 0}$ unter $\mathbb{P}^x$ ist. Außerdem ist

$$S_0 = 1 - u_R^x(M_0) = 1 - u\left(\frac{x-x}{R}\right) = 1 - u(0) = 0$$

und somit für alle $t \geq 0$

$$\mathbb{E}^x(S_t) = \mathbb{E}^x(S_0) = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\mathbb{E}^x\left(1 - u_R^x(M_{t\wedge T})\right) = \mathbb{E}^x\left(\int_0^{t\wedge T} Au_r^x(M_s)\, ds\right). \tag{8.13}$$

Mit einer Taylor-Entwicklung erhalten wir

$$|u(z+y) - u(z) - \langle y, \nabla u(z)\rangle| \leq \frac{1}{2}\sum_{j,k} |\partial_j\partial_k u(y)|\, \|y\|^2 \leq \frac{1}{2}C_1\|y\|^2,$$

wobei wir $C_1 := \sup_y |\sum_{j,k}\partial_j\partial_k u(y)|$ setzen. Damit gilt:

$$|u_R^x(z+y) - u_R^x(z) - \langle y, \nabla u_R^x(z)\rangle| \leq C_1\frac{\|y\|^2}{2R^2}.$$

Für den Erzeuger bekommen wir die folgende Abschätzung mit Korollar 5.6:

$$\begin{aligned}
|Au_R^x(z)| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \left|u_R^x(z + r^{E(z)}\theta) - u_R^x(z) - \langle r^{E(z)}, \nabla u_R^x(z)\rangle\right| \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \frac{C_1}{2R^2}\|r^{E(z)}\theta\|^2\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \\
&\leq \sigma(\mathbb{S}^{d-1})\frac{C_1}{2R^2}\int_0^1 r^{2a-2}dr \\
&\leq \frac{C}{2R^2},
\end{aligned}$$

da $a > 1/2$. Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x\left(\sup_{s\leq t}\|M_s - x\| > R\right) &\leq \mathbb{P}^x(T \leq t) = \mathbb{E}^x\left(1_{\{T\leq t\}}\right) \\
&\leq \mathbb{E}^x(1 - u_R^x(M_{t\wedge T})) \\
&= \mathbb{E}^x\left(\int_0^{t\wedge T} Au_R^x(M_s)ds\right) \\
&\leq \mathbb{E}^x\left(t\wedge T\right)\frac{C}{R^2} \\
&\leq t\frac{C}{R^2}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.15. Die Abschätzung aus diesem Abschnitt folgt auch aus den Resultaten für Feller-Prozesse, die wir in Satz 7.2 präsentiert haben, und der Abschätzung des Symbols aus Satz 8.3.

8.3.2 Momente

In diesem Abschnitt betrachten wir die Existenz von Momenten der Lösung M^x der SDE (8.1) und geben obere Schranken an.

Korollar 8.16. *Für alle $p \geq 2$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $t > 0$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t} \|M_s^x - x\|^p\right) \leq C\left(t^{p/2} + t\right). \tag{8.14}$$

Beweis. Mit Satz 5.20 existiert für alle $p \geq 2$ eine Konstante $C_1 > 0$, so dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t} \|M_s^x - x\|^p\right) \leq C_1 \Bigg\{ &\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)^{p/2}\right) \\ &+ \mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right)\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Mit Korollar 5.6 folgt einerseits

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^2 \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \leq C_2\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 r^{2a-2}dr < \infty$$

und andererseits

$$\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \leq C_3\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 r^{ap-2}dr < \infty$$

mit Konstanten $C_2, C_3 > 0$, da $a > 1/2$ und $p \geq 2$ ist.
Insgesamt ist:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t} \|M_s^x - x\|^p\right) \leq C\left\{\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t ds\right)^{p/2}\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^t ds\right)\right\} = C\left(t^{p/2} + t\right).$$

□

Für kleine Momente des Prozesses haben wir die folgende Abschätzung.

Satz 8.17. *Das Maß σ erfülle die Integrationsbedingung* (6.19), *d.h.*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta\sigma(d\theta) = 0.$$

Dann existiert für alle $a > 1$ und $p \in (\frac{1}{a}, 1]$ eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $t > 0$ gilt:

$$\mathbb{E}(\|M_t^x - x\|^p) \leq Ct. \tag{8.15}$$

Beweis. Wir teilen das kompensierte Poisson-Zufallsmaß in das Poisson-Zufallsmaß und seinen Kompensator auf. Mit der Ungleichung (5.24), d.h.

$$(x+y)^p \leq \left(2^{p-1} \vee 1\right)(x^p + y^p) \quad \text{für alle } x, y, p \geq 0,$$

folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\|M_t^x - x\|^p\right) &\leq \mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-}^x)}\theta N(ds, d\theta, dr)\right\|^p\right) \\ &\quad + \mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-}^x)}\theta \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right\|^p\right) \\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Zunächst zu I_1: Mit der Itô-Formel, der Subadditivität der Norm und der Ungleichung (5.24) folgt

$$\begin{aligned}I_1 &= \mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 r^{E(M_{s-}^x)}\theta N(ds, d\theta, dr)\right\|^p\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|M_{s-}^x + r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^p - \|M_{s-}^x\|^p N(ds, d\theta, dr)\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^p N(ds, d\theta, dr)\right), \qquad (*)\end{aligned}$$

wobei wir $p \leq 1$ ausgenutzt haben. Mit Korollar 5.6 folgt

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta) \leq C\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) \int_0^1 r^{ap-2}dr < \infty,$$

da $p > \frac{1}{a}$. Der Integrand von $(*)$ liegt somit in $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}^{d-1} \times (0,1))$, da M^x rechtsseitig stetig und adaptiert ist. Wir benutzen Satz 4.13 und erhalten

$$(*) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_{s-}^x)}\theta\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right).$$

Für den Term I_2 folgt mit der Integrationsbedingung

$$I_2 = \mathbb{E}\left(\left\|\int_0^t \int_0^1 r^{E(M_{s-}^x)} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \theta\sigma(d\theta)\right) \frac{dr}{r^2}ds\right\|^p\right) = 0,$$

wobei wir den Satz von Fubini angewendet haben.

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|M_t^x - x\|^p) &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^t \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 \|r^{E(M_s^x)}\theta\|^p \frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)ds\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\int_0^t C\,ds\right) = Ct.\end{aligned}$$

□

Der nächste Satz zeigt uns, wann die Momente des Maximumsprozesses endlich sind. Dafür verwenden wir die Maximalabschätzung aus vorherigem Abschnitt 8.3.1.

Satz 8.18. *Für $0 < p < 2$ gilt:*

$$\mathbb{E}^x\left(\left(\sup_{s \leq t} \|M_s - x\|\right)^p\right) < \infty.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog dem Satz 7.11, wobei wir hier abweichend die Abschätzung aus Satz 8.14:

$$\mathbb{P}^x\left(\sup_{s\le t}\|M_s - x\| > y\right) \le Cty^{-2}$$

mit Konstante $C > 0$ benutzen. □

Zuletzt untersuchen wir die Existenz von exponentiellen Momenten der Lösung der SDE. Wir geben eine obere Schranke für das exponentielle Moment an. Dabei orientieren wir uns an Theorem 5.11 in [10].

Satz 8.19. *Für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ existiert eine Konstante $C(\xi) > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ folgendes gilt:*

$$\mathbb{E}^x\left(e^{\langle M_t - x,\xi\rangle}\right) < e^{tC(\xi)}. \tag{8.16}$$

Dabei ist $C(\xi) := C_1\|\xi\|^2 + \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{r_1}^1 e^{C_2 r^a\|\theta\|\|\xi\|}\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)$ mit Konstanten $C_1, C_2 > 0$ und $r_1 \in (0,1)$.

Beweis. Wir wählen eine Funktion $v_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $1_{B_m(0)} \le v_m \le 1_{B_{2m}(0)}$ für alle $m \ge 1$ und setzen

$$u_m(z) := v_m(z-x)e_{-i\xi}(z-x) = v_m(z-x)e^{\langle z-x,\xi\rangle} \quad \text{für alle } x, z, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Für $k \ge 1$ bezeichnet $T_k = T_k^x = \inf\{t > 0 : \|M_t - x\| > k\}$ die Erstaustrittszeit aus der abgeschlossenen Kugel $\overline{B}_k(x)$ und $M_{t\wedge T_k}$ den gestoppten Prozess. Da $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, folgt für alle $m \ge 1$ und $t > 0$ aus Satz 5.19 wie im Beweis von Satz 8.14:

$$\mathbb{E}^x\left[u_m(M_{t\wedge T_k})\right] - u_m(x) = \mathbb{E}^x\left[\int_0^{t\wedge T_k} Au_m(M_s)ds\right].$$

Für $z \in B_k(x)$ und $m \ge k+1$ ist $v_m(z-x) = 1$ und es folgt

$$\begin{aligned}
Au_m(z) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \left(u_m(z + r^{E(z)}\theta) - u_m(z) - \langle r^{E(z)}\theta, \nabla u_m(z)\rangle\right)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\\
&= e_{-i\xi}(z-x)\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \left(v_m(z + r^{E(z)}\theta - x)e_{-i\xi}(r^{E(z)}\theta) - 1 - \langle r^{E(z)}\theta, \xi\rangle\right)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\\
&= e_{-i\xi}(z-x)\left[\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \left(e_{i\xi}(r^{E(z)}\theta) - 1 - \langle r^{E(z)}\theta,\xi\rangle\right)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right.\\
&\quad\left.+ \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \left(v_m(z + r^{E(z)}\theta - x) - 1\right)e_{-i\xi}(r^{E(z)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right]\\
&= e_{-i\xi}(z-x)\left[-q(z,-i\xi) - \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_0^1 \left(1 - v_m(z + r^{E(z)}\theta - x)\right)e_{-i\xi}(r^{E(z)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right].
\end{aligned}$$

Es ist $v_m(z + r^{E(x)}\theta - x) = 1$ für $\|r^{E(x)}\theta\| \le 1$ und $z \in B_k(x)$ für $m \ge k+1$. Nach Korollar 5.6 existiert eine Konstante $C_1 > 0$, so dass für alle $r \in (0,1)$ gilt:

$$\|r^{E(x)}\| \le C_1 r^a.$$

Also existiert ein $r_1 \in (0,1)$, so dass für alle $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ und $0 < r \le r_1$ gilt:

$$\|r^{E(x)}\theta\| < 1.$$

Insgesamt erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}|Au_m(z)| &\leq e_{-i\xi}(z-x)\left(|q(z,-i\xi)| + \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{r_1}^1 |1 - v_m(z + r^{E(z)}\theta - x)| e_{-i\xi}(r^{E(z)}\theta)\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right)\\ &\leq e_{-i\xi}(z-x)\left(|q(z,-i\xi)| + \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{r_1}^1 e^{\langle r^{E(z)}\theta,\xi\rangle}\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right)\\ &\leq e_{-i\xi}(z-x)\left(C_1\|\xi\|^2 + \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{r_1}^1 e^{C_2 r^a\|\theta\|\|\xi\|}\frac{dr}{r^2}\sigma(d\theta)\right)\\ &=: e_{-i\xi}(z-x)C(\xi),\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Term die Beschränktheit des Symbols (Satz 8.3) und im zweiten Term die Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie Korollar 5.6 benutzt haben. Für alle $s < T_k$ ist $M_{s\wedge T_k} \in B_k(x)$ $\mathbb{P}^x$- f.s. und wir bekommen für $m \geq k+1$:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}^x\left[e_{-i\xi}(M_{t\wedge T_k} - x)\right] - 1\right| &\leq \left|\mathbb{E}^x\left[\int_0^{T_k\wedge t} Au_m(M_{s\wedge T_k} - x)ds\right]\right|\\ &\leq C(\xi)\int_0^t \mathbb{E}^x\left[e_{-i\xi}(M_{s\wedge T_k} - x)\right]ds.\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt für alle $k \geq 1$ und $x, \xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{E}^x\left(e^{\langle M_{t\wedge T_k} - x,\xi\rangle}\right) \leq e^{tC(\xi)}.$$

Wegen Satz 8.14 gilt $\lim_{k\to\infty} T_k = \infty$ in Wahrscheinlichkeit und mit dem Lemma von Fatou angewendet auf eine geeignete Teilfolge erhalten wir

$$\mathbb{E}^x\left(e^{\langle M_t - x,\xi\rangle}\right) \leq \varliminf_{j\to\infty}\mathbb{E}^x\left(e^{\langle M_{t\wedge T_{k(j)}} - x,\xi\rangle}\right) \leq e^{tC(\xi)}.$$

□

8.3.3 Asymptotische Verhalten

Da wir für das Symbol nur eine obere Abschätzung haben, bekommen wir für das Kurz- und Langzeitverhalten die folgenden Aussagen:

Satz 8.20. *Für die Lösung der SDE* (8.1) *gilt* $\mathbb{P}^x$*-fast sicher*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sup_{s\leq t}\|M_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = 0 \text{ für alle } \gamma > 2 \tag{8.17}$$

und

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sup_{s\leq t}\|M_s - x\|}{t^{1/\gamma}} = 0 \text{ für alle } 0 < \gamma < 2. \tag{8.18}$$

Beweis. Mit der Abschätzung des Symbols aus Satz 8.3

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|q_1(x,\xi)| \leq C\|\xi\|^2$$

folgt für die Indizes unmittelbar $\beta_\infty^x = 2$ und $\beta_0 = 2$. Mit Satz 7.16 bzw. 7.21 folgen die Aussagen. □

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$Au(x)$	Erzeuger einer Halbgruppe
$(A, D(A))$	Erzeuger einer Halbgruppe mit Definitionsbereich
$x \vee y$	Maximum von $x, y \in \mathbb{R}$
$x \wedge y$	Minimum von $x, y \in \mathbb{R}$
$B(\mathbb{R}^d)$	Borel-messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^d$
$B_b(\mathbb{R}^d)$	beschränkte Borel-messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}(\Gamma), \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$	Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$, Γ bzw. $\mathbb{S}^{d-1}$
$B_R(x), \overline{B}_R(x)$	offene bzw. abgeschlossene Kugel um x mit Radius R
càdlàg	rechtsseitig stetig mit linksseitigen Grenzwerten
$C_b(\mathbb{R}^d)$	Menge der stetigen und beschränkten Funktionen
$C_c(\mathbb{R}^d)$	Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger
$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$	Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger
$C_\infty(\mathbb{R}^d)$	Menge der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden
$D(A)$	Definitionsbereich des Erzeugers
δ_x	Dirac-Maß im Punkt x
ΔX	Sprünge eines Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$
$E(x)$	Exponent, vgl. Definition 5.1
$e_\xi(x)$	$\exp(i\langle x, \xi\rangle)$, $x, \xi \in \mathbb{R}^d$
$(f\mu)$	Bildmaß von μ unter der Abbildung f
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	Filtration
$\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\geq 0}$	natürliche Filtration eines Prozesses $X = (X_t)_{t\geq 0}$
f.s.	fast sicher
Γ	$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$
$GL(\mathbb{R}^d)$	Menge aller invertierbaren Endomorphismen auf $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{H}^p(E)$	Raum aller p-fach integrierbaren, vorhersagbaren Abbildungen auf $\mathbb{R}_+ \times E \times \Omega$ $(p = 1, 2)$
i	imaginäre Einheit
$\operatorname{Im} z$	Imaginärteil von z (komponentenweise)
id	Identitätsoperator
1_A	Indikatorfunktion auf der Menge A
$L(\mathbb{R}^d)$	Menge aller Endomorphismen auf $\mathbb{R}^d$ (dargestellt als $d \times d$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$)
$L = (L_t)_{t\geq 0}$	Lévy-Prozess
λ^d	d-dimensionales Lebesgue-Maß
$\lambda(x)$	Realteil des kleinsten Eigenwertes des Exponenten $E(x)$
$\Lambda(x)$	Realteil des größten Eigenwertes des Exponenten $E(x)$
$\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$	Limes inferior, Limes superior

$M^1(\mathbb{R}^d)$	Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}^d$
$M^b(\mathbb{R}^d)$	Menge aller beschränkten Maße auf $\mathbb{R}^d$
N	Poisson-Zufallsmaß
$\tilde{N}$	kompensierte Poisson-Zufallsmaß
$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
OSL	operator-stable-like
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
$p_t(x, B)$	Übergangsfunktion
$q(x, \xi)$	Symbol
$q(x, D)$	Pseudodifferentialoperator
$\mathbb{R}_+$	$[0, \infty)$
$r^{E(x)}$	Matrixexponential $r^{E(x)} = \exp(E(x)\ln(r))$ für $r > 0$
$\operatorname{Re} z$	Realteil von z (komponentenweise)
$S(\mathbb{R}^d)$	Schwartz-Raum
$\mathbb{S}^{d-1}$	Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$
$\operatorname{supp}(u)$	Träger der Funktion u
$(\tau_x(\xi), l_x(\xi))$	verallgemeinerte Polarkoordinaten von ξ unter $E(x)$
T	Erstaustrittszeit
$(T_t)_{t\geq 0}$	Halbgruppe
$\widehat{u}$	Fourier-Transformierte
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$
$\| \cdot \|$	euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ oder
	die von ihr erzeugte Operatornorm auf $L(\mathbb{R}^d)$
$\lvert \cdot \rvert$	Betragsfunktion auf den reellen oder komplexen Zahlen bzw.
	Betragssummennorm auf $\mathbb{R}^d$ oder $L(\mathbb{R}^d)$
$\| \cdot \|_\infty$	Supremumsnorm auf $\mathbb{R}^d$ oder $L(\mathbb{R}^d)$
(l, Q, ϕ)	Lévy-Tripel

Literatur

[1] Applebaum, D.: *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 2009.

[2] Balan, R. und Ndongo, C.: *Itô formula for integral processes related to space-time Lévy noise.* Applied Mathematics, (6):S. 1755–1768, 2015.

[3] Bass, R. F.: *Uniqueness in law for pure jump Markov processes.* Probability Theory and Related Fields, 79(2):271–287, 1988.

[4] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* de Gruyter, Berlin, 2002.

[5] Berg, C. und Forst, G.: *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups.* Springer, 1975.

[6] Biermé, H. und Meerschaert, M. M. und Scheffler H.-P.: *Operator scaling stable random fields.* Stochastic Processes and their Applications 117, (3):S. 312–332, 2007.

[7] Blumenthal, R. M. und Getoor, R. K.: *Sample functions of stochastic processes with stationary independent increments.* J. Math. Mech. **10**, Seiten 493–516, 1961.

[8] Burkill, J. C.: *A First Course in Mathematical Analysis.* Cambridge University Press, New York, 1962.

[9] Böttcher, B.: *Feller Processes: The Next Generation in Modeling. Brownian Motion, Lévy Processes and Beyond.* PLoS One 5, e15102, 2010.

[10] Böttcher, B., Schilling R. L. und Wang J.: *Lévy Matters III: Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties.* Springer, Berlin, 2013.

[11] Ethier, S. N. und Kurtz, T. G.: *Markov Processes: Characterization and Convergence.* Wiley, New York, 1986.

[12] Ikeda, N. und Watanabe, S.: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, Band 24. North-Holland Mathematical Library, Tokio, 2 Auflage, 1989.

[13] Jacob, N.: *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes.* Akademie, Berlin, 1996.

[14] Jacob, N.: *Pseudo Differential Operators and Markov Processes. Vol. 1: Fourier Analysis and Semigroups.* Imperial College Press, London, 2001.

[15] Jacob, N.: *Pseudo Differential Operators and Markov Processes. Vol. 3: Markov Processes and Applications.* Imperial College Press, London, 2005.

[16] Jacob, N. und Schilling, R. L.: *Lévy-Type Processes and Pseudodifferential Operators.* In: *Barndorff-Nielsen, O.E., Mikosch, T., Resnick, S.I. (eds.) Lévy Processes: Theory and Applications*, Seiten 139–168. Birkhäuser, Boston, 2001.

[17] Kallenberg, O.: *Foundations of Modern Probability.* Springer, New York, 2002.

[18] Kremer, D.: *Multivariate stochastische Integrale mit Anwendung am Beispiel Operator-stabiler und Operator-selbstähnlicher Zufallsfelder.* Doktorarbeit, Universität Siegen, 2016.

[19] Kunita, H.: *Real and Stochastic Analysis New Perspectives*, Kapitel Stochastic differential equations based on Levy processes and stochastic flows of diffeomorphisms, Seiten 305–375. Birkhäuser, Boston, 2004.

[20] Kühn, F.: *Existence and estimates of moments for Lévy-type processes.* Stochastic Processes and their Applications, 127(3):1018 – 1041, 2017.

[21] Manstavičius, M.: *A Non-Markovian Process with Unbounded p-Variation.* Electron. Commun. Probab., 10:17–28, 2005.

[22] Meerschaert, M. M. und Scheffler, H.-P.: *Limit distributions for Sums of Independent Random Vectors.* Wiley Series in Probability and Statistics, 2001.

[23] Protter, P.: *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer, Berlin, 1990.

[24] Pruitt, W. E.: *The Growth of Random Walks and Lévy Processes.* Ann. Probab. **9**, Seiten 948–956, 1981.

[25] Sato, K.: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 1999.

[26] Schilling, R. L. und Wang, J.: *Some Theorems on Feller Processes: Transience, Local Times and Ultracontractivity.* Transactions of the American Mathematical Society, 365, 2011.

[27] Schilling, R. L., Partzsch L. und Böttcher B.: *Brownian Motion. An Introduction to Stochastic Processes.* De Gruyter, 2014.

[28] Schilling, R. L.: *Growth and Hölder conditions for the sample paths of Feller processes.* Probab. Theory Rel. Fields **112**, Seiten 565–611, 1998.

[29] Schnurr, A.: *The symbol of a Markov semimartingale.* Doktorarbeit, TU Dresden, 2009.

[30] Van Loan, C.: *The Sensitivity of the Matrix Exponential.* SIAM Journal on Numerical Analysis, 14(6):971–981, 1977.

[31] Werner, D.: *Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, 2011.

[32] Yang, X.: *Hausdorff dimension of the range and the graph of stable-like processes.* ArXiv e-prints, 2015.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer, nicht angegebener Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Es wurden keine Dienste eines Promotionsvermittlungsinstituts oder einer ähnlichen Organisation in Anspruch genommen.

Lennestadt, den 03.09.2018 Daniel Schulte