

Thomas Reppel

**Flexible Materialien für die additive Fertigung:  
hyperelastische, viskoelastische Eigenschaften  
und der Einfluss unsicherer Materialparameter**

Dissertationsschrift

**Impressum**

Prof. Dr.-Ing. Kerstin Weinberg  
Lehrstuhl für Festkörpermechanik  
Institut für Mechanik und Regelungstechnik – Mechatronik  
Universität Siegen  
57068 Siegen  
ISSN 2193-5629  
URN urn:nbn:de:hbz:467-15868  
DOI: 10.25819/ubsi/1477  
Zugl.: Siegen, Univ., Diss., 2020

Flexible Materialien für die additive Fertigung:  
hyperelastische, viskoelastische Eigenschaften und der  
Einfluss unsicherer Materialparameter

genehmigte  
DISSERTATION  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von  
**Thomas Reppel, M. Sc.**  
geb. in Siegen

eingereicht bei der  
Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Universität Siegen  
Siegen 2019

Betreuerin und erste Gutachterin  
Prof. Dr.-Ing. Kerstin Weinberg  
Universität Siegen

Zweiter Gutachter  
PD Dr.-Ing. habil. Jörg Hohe  
Universität Siegen

Tag der mündlichen Prüfung  
25. November 2019

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Festkörpermechanik bei Professorin Kerstin Weinberg im Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik der Universität Siegen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die mich in den letzten Jahren unterstützt haben. Insbesondere bedanke ich mich bei Professorin Weinberg für die fachliche Betreuung meiner Arbeit sowie für das ehrliche und konstruktive Feedback. Auch für die eingeräumten Freiheiten bei der Gestaltung meiner Themenwahl möchte ich mich bedanken.

Ein großes Dankeschön gilt Dr. Jörg Hohe für die Übernahme des Korreferates und den Input aus vielen interessanten Gesprächen sowie aus Vorträgen auf Fachtagungen.

Professor Holger Foysi danke ich vielmals für die Übernahme des Vorsitzes der Promotionskommission.

Ich bedanke mich bei den Professoren des Departments Mathematik. Herausheben möchte ich die Professoren Bernd Dreseler, Edgar Kaufmann, Alfred Müller, Gregor Nickel und Hans-Peter Scheffler sowie die ehemaligen Mitarbeiter Dr. Alexander Hoffmann und Professor Denis Anders, die den Grundstein meiner Begeisterung für Analysis, Stochastik und Statistik gelegt haben.

Professor Kaufmann danke ich auch für seine Mitarbeit in der Kommission meines Promotionsverfahrens sowie für die vielen angenehmen Gespräche.

Bei Professor Hans-Jürgen Christ bedanke ich mich für die Nutzung seiner Universalprüfmaschine.

Meinen Kollegen im Lehrstuhl danke ich für die intensiven fachlichen Gespräche und für das wohlwollende Feedback.

Ein besonderer Dank gilt meiner Frau Christina und meinen Kindern Ina und Luisa, die mir immer den Rücken freigehalten haben. Auch meinen Eltern Susanne und Bernd danke ich für ihren Einsatz und ihre Unterstützung in den letzten Jahren.

Siegen, im Februar 2020

Thomas Reppel



# Zusammenfassung

Additive Fertigung, umgangssprachlich als 3D-Druck bezeichnet, hat sich zu einer etablierten Produktionsmethode in vielen Anwendungsbereichen entwickelt. Gerade für die Produktion kleinerer Serien oder individueller Komponenten ist es die bevorzugte Technik. Sollen diese gedruckten Teile konventionell hergestellte Teile ersetzen, so müssen die mechanischen Eigenschaften mindestens vergleichbar sein. Wünschenswert wären sogar verbesserte Eigenschaften.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den hyperelastischen und viskoelastischen Eigenschaften verschiedener flexibler Materialien, die in der additiven Fertigung eingesetzt werden. Ergänzt wird dies durch eine Untersuchung des Einflusses von Unsicherheiten im Material, z.B. hervorgerufen durch Einschlüsse.

Generell werden zwei verschiedene Druckverfahren untersucht, zum einen die Schmelzschichtung (FDM), zum anderen das Verfahren der Stereolithografie (SLA). Während das FDM-Verfahren einen schmelzfähigen Kunststoff als Ausgangsmaterial verwendet, basiert das SLA-Verfahren auf dem Aushärten eines harzförmigen Photopolymers.

Zur Untersuchung des hyperelastischen Materialverhaltens werden uniaxiale Zugversuche bis zum Versagen durchgeführt und ausgewertet. Bei den verwendeten Proben werden verschiedene Druckparameter variiert. Für die Bestimmung der viskoelastischen Eigenschaften dienen uniaxiale Spannungsrelaxationsversuche. Die Ermittlung der Parameter verschiedener hyper- und viskoelastischer Materialmodelle erfolgt mittels nicht-linearer Regression unter Nebenbedingungen. In FEM-Simulationen werden die gewonnenen Materialparameter validiert.

Abschließend erfolgt eine Untersuchung des Einflusses von unsicheren Parametern auf verschiedene Materialeigenschaften. Dazu wird zum einen die Größenverteilung kugelförmiger Einschlüsse in geschlossenzelligen Materialien bestimmt, gefolgt von einer statistische Analyse der Verteilung der Kugelradien. Zum anderen wird der Einfluss unsicherer Materialparameter auf eine Ausgangsgröße am Beispiel eines Euler-Bernoulli-Balkens untersucht.



# Abstract

Additive manufacturing, commonly called 3D printing, has become an established method in many fields of production. It is a preferred method to produce small series or individual parts of components. If such printed parts shall replace traditionally produced parts, the mechanical properties have to be at least comparable. Even enhanced properties are desirable.

This work addresses the hyperelastic and viscoelastic properties of different flexible materials in additive manufacturing. Additionally an investigation of the influence of material uncertainties, e.g. by voids, is presented.

In particular two different printing methods are examined: on the one hand fused deposition modeling (FDM) and on the other hand stereolithography (SLA). While FDM technique uses a meltable plastic as the basic material, the SLA method is based on the hardening of a photopolymeric resin material.

To investigate the hyperelastic material properties, uniaxial tensile tests are performed until rupture. For the used specimens, different printing parameters are varied. Uniaxial stress relaxation tests serve to determine the viscoelastic properties. Parameters of different hyper- and viscoelastic material models are identified by a conditional nonlinear regression. The gained parameters are verified in a FEM-simulation.

In conclusion the influence of uncertain parameters on different material properties is investigated. On the one hand the size distribution of spherical voids in closed-cell materials is determined, followed by a statistical analysis of the void radii distribution. On the other hand the influence of uncertain material parameters on an output parameter is studied on the example of an Euler-Bernoulli-beam.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen der additiven Fertigung</b>	<b>5</b>
2.1	Die Geschichte der additiven Fertigung . . . . .	6
2.2	Gängige Verfahren in der additiven Fertigung . . . . .	6
2.2.1	Stereolithografie . . . . .	7
2.2.2	Schmelzschiichtung . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>11</b>
3.1	Kinematische Grundlagen . . . . .	11
3.2	Verzerrungs- und Verformungsmaße . . . . .	15
3.3	Spannungstensoren . . . . .	22
3.3.1	Der Cauchy'sche Fundamentalsatz . . . . .	22
3.3.2	Weitere Spannungstensoren . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Hyperelastizität</b>	<b>25</b>
4.1	Konstitutive Gleichungen für hyperelastische Materialien . . . . .	25
4.1.1	Isotropes hyperelastisches Material . . . . .	30
4.1.2	Inkompressible hyperelastische Materialien . . . . .	31
4.1.3	Inkompressible, isotrope Materialien . . . . .	32
4.1.4	Konstitutive Gleichungen in Abhängigkeit der Hauptstreckungen . . . . .	33
4.1.5	Konstitutive Gleichungen für einfache Deformationszustände . . . . .	35
4.2	Hyperelastische Materialmodelle . . . . .	37
4.2.1	Das Neo-Hooke-Modell . . . . .	37
4.2.2	Das Mooney-Rivlin-Modell . . . . .	39
4.2.3	Ogden . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Lineare Visokoelastizität</b>	<b>43</b>
5.1	Kriech- und Relaxationsversuch . . . . .	43
5.1.1	Kriechversuch und Retardationsfunktion . . . . .	43
5.1.2	Relaxationsversuch und Relaxationsfunktion . . . . .	45
5.2	Rheologische Modelle . . . . .	46
5.2.1	Elastisches und viskoses Grundelement . . . . .	46
5.2.2	Kelvin-Voigt und Maxwell-Element . . . . .	47

5.2.3	Lineares Standardelement . . . . .	49
5.2.4	Verallgemeinertes Maxwell-Modell . . . . .	50
5.3	Fraktionale Viskoelastizität . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Experimentelle Untersuchung 3D gedruckter Materialien</b>	<b>57</b>
6.1	FDM-gedruckte Prüfkörper . . . . .	58
6.1.1	Wichtige Filamentmaterialien . . . . .	58
6.1.2	Erstellung FDM-gedruckte Zugproben . . . . .	59
6.2	SLA-gedruckte Zug- und Druckproben . . . . .	62
6.3	Einachsiger Zugversuch FDM-gedruckter Proben . . . . .	64
6.3.1	Monotoner Zugversuch . . . . .	65
6.3.2	Relaxationsversuch . . . . .	71
6.4	Einachsige Zug- und Druckversuche SLA-gedruckter Proben . . . . .	74
6.4.1	Monotoner Zugversuch . . . . .	76
6.4.2	Zyklischer Druckversuch . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Parameteridentifikation und Simulation</b>	<b>79</b>
7.1	Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	79
7.1.1	Lineare Regression . . . . .	80
7.1.2	Nichtlineare Regression . . . . .	83
7.1.3	Nichtlineare Regression unter Nebenbedingungen . . . . .	83
7.2	Parameteridentifikation und Simulation FDM gedruckter Proben . . . . .	84
7.2.1	Monotoner Zugversuch . . . . .	85
7.2.2	Relaxationsversuch . . . . .	91
7.2.3	FEM-Simulation zur Validierung . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Unsichere Materialparameter</b>	<b>99</b>
8.1	Stochastische Grundlagen . . . . .	99
8.1.1	Eigenschaften von Zufallsvariablen . . . . .	101
8.1.2	Standardisierung von Zufallsvariablen . . . . .	102
8.1.3	Die lineare Transformation einer normalverteilten Zufallsvariable . . . . .	102
8.1.4	Überdeckungswahrscheinlichkeit . . . . .	103
8.2	Porenverteilung in homogenen Materialien . . . . .	104
8.2.1	Das Wicksell'sche Korpuskelproblem . . . . .	106
8.2.2	Parametrische Verteilung von Porenradien . . . . .	109
8.2.3	Stochastische Abstandsmaße . . . . .	113
8.2.4	Berechnungsmethoden der Wicksell-Transformationen . . . . .	115
8.2.5	Beurteilung der Unsicherheit für das Wicksell-Problem . . . . .	117
8.2.6	Die Kugelgrößenverteilung in FDM-gedruckten Proben . . . . .	118
8.3	Der Einfluss unsicherer Materialparameter . . . . .	121
8.3.1	Unsichere Einzelkraft am Balkenende . . . . .	123
8.3.2	Unsichere Balkenlänge . . . . .	124

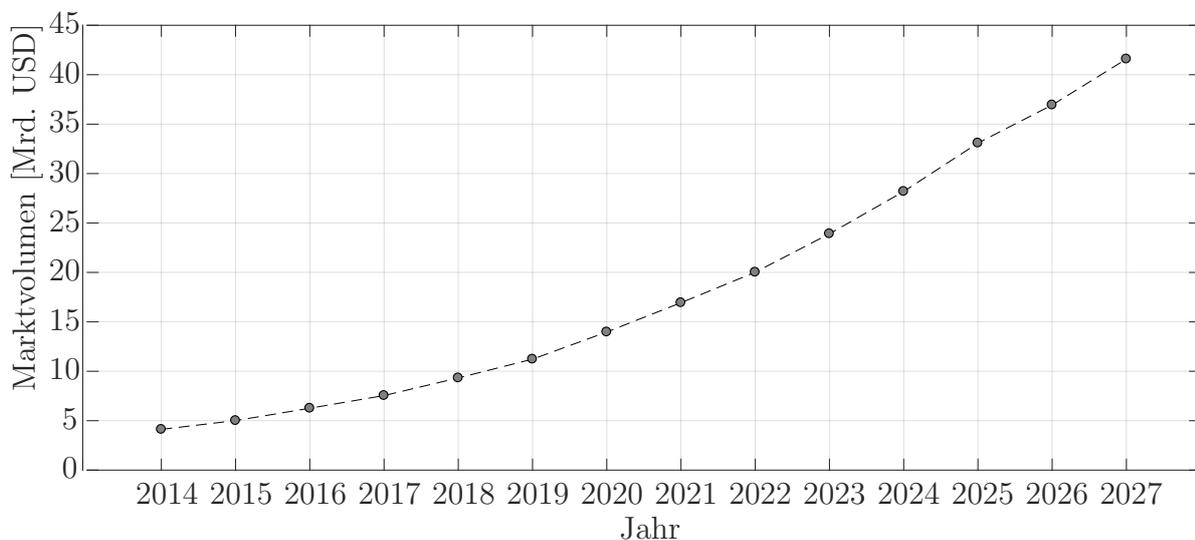
8.3.3	Unsicherer konstanter E-Modul . . . . .	125
8.3.4	Analytisches Beispiel . . . . .	125
8.3.5	Modellierung des Euler-Bernoulli-Balkens mittels Zufallsfeldern .	126
8.3.6	Modellierung des E-Moduls mittels Zufallsfeldern . . . . .	128
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>135</b>
	<b>Literatur</b>	<b>149</b>



# 1 Einleitung und Motivation

---

Die additive Fertigung bzw. das umgangssprachliche Pendant des 3D-Drucks hat in den letzten Jahren in vielen Bereichen stark an Bedeutung gewonnen. Belegen lässt sich dies anhand verschiedener Zahlen. So ist der reine Marktanteil der additiven Fertigung im industriellen Bereich in den letzten Jahren stark angestiegen. Die Analysten von SmarTech Analysis berichten für das Jahr 2018 ein weltweites Marktvolumen in Höhe von 9,3 Milliarden US-Dollar. Dies ist ein Anstieg von 23,63% gegenüber 7,5 Milliarden US-Dollar. Für das Jahr 2019 wird das Marktvolumen mit 11,2 Milliarden US-Dollar prognostiziert<sup>1</sup>.



**Abbildung 1.1:** Entwicklung des weltweiten Marktvolumens in der additiven Fertigung<sup>1</sup>.

Ein anderes Marktforschungsunternehmen, die International Data Corporation (IDC), untersuchte, wie sich die Ausgaben auf verschiedene Industriezweige sowie auf private

---

<sup>1</sup>[www.smartechanalysis.com/news/smartech-publishing-issues-2019-additive-manufacturing-market-outlook/\[03.07.2019\]](http://www.smartechanalysis.com/news/smartech-publishing-issues-2019-additive-manufacturing-market-outlook/[03.07.2019])

Nutzung aufteilen<sup>2</sup>. Danach stellt der Bereich Automobildesign und Rapid Prototyping mit 29,6% den größten Posten dar. Gefolgt wird dies mit 17,8% von weiteren Industrieanwendungen wie der Herstellung von Bauteilen in der Raum- und Luftfahrttechnik sowie in der Verteidigungsindustrie. Weitere 14,4% der Ausgaben fallen im Bereich Werkzeugbau und Architektur an. Im privaten Sektor werden lediglich 3,3% der Ausgaben angegeben. Über die restlichen 34,8% in der Kategorie „Sonstiges“ wird keine Aussage getroffen.

Anwendungsbeispiele für die Automobilindustrie sind Ersatzteile für Oldtimer, die nicht mehr hergestellt werden, komplett 3D-gedruckte Reifen von Michelin, oder Fahrzeugteile aus dem 3D-Drucker für Formel 1-Rennwagen bei Renault<sup>3</sup>.

Ein weiterer Beleg für den wachsenden Einfluss der additiven Fertigung ist der Anteil der wissenschaftlichen Publikationen zu diesem Thema, gemessen im Web of Science. Dieser ist vom Jahr 2011 zum Jahr 2014 um 75% gestiegen [126]. Auch die Anzahl der angemeldeten Patente zur additiven Fertigung weisen einen positiven Trend auf [126].

Mit dem gleichzeitig auftretenden rapiden Wachstum kommt die Frage auf, inwieweit additiv gefertigte Bauteile und Produkte dieselben Eigenschaften haben, wie klassische Herstellungsverfahren. Im Arbeitsbericht Nr. 175 des Büros für Technikfolgen-Abschätzungen beim deutschen Bundestag wird zum Thema additive Fertigungsverfahren gesagt [38]:

*Ein großes Manko für den industriellen Einsatz ist, dass beim gegenwärtigen Stand der Technik und Forschung bereits kleine Abweichungen in den Ausgangsbedingungen große Wirkungen entfalten können.*

Daraus lässt sich die Handlungsempfehlung ableiten, den Einfluss dieser Abweichungen zu quantifizieren und die wesentlichen Einflussfaktoren zu identifizieren.

Die vorliegende Arbeit beleuchtet den Einfluss einiger dieser Faktoren auf die Materialeigenschaften insbesondere flexibler Materialien. Neben fertigungsbedingten Einflüssen wie der Schichtdicke, der Druckgeometrie oder der Druckorientierung wird der Einfluss sogenannter unsicherer Parameter untersucht.

### **Aufbau der Arbeit**

In Kapitel 2 werden nach einer geschichtlichen Einordnung die Grundlagen der additiven Fertigung vorgestellt. Besonders wird auf das Verfahren der Stereolithografie (SLA) und

---

<sup>2</sup>[3druck.com/visionen-prognosen/idc-weltweite-ausgaben-fuer-3d-druck-wachsen-jaehrlich-um-223-bis-2020-0253310/](http://3druck.com/visionen-prognosen/idc-weltweite-ausgaben-fuer-3d-druck-wachsen-jaehrlich-um-223-bis-2020-0253310/) [03.07.2019]

<sup>3</sup>[www.3d-grenzenlos.de/magazin/thema/3d-druck-automobilindustrie/](http://www.3d-grenzenlos.de/magazin/thema/3d-druck-automobilindustrie/) [03.07.2019]

---

der Schmelzschichtung (FDM) eingegangen, die den Kern der experimentellen Untersuchungen darstellen. In Kapitel 3 werden die Grundlagen der nichtlinearen Festigkeitslehre zur Beschreibung großer Deformationen eingeführt. Im Mittelpunkt steht die kontinuumsmechanische Betrachtungsweise und ihre Modelle von Spannung und Dehnung. Ausgehend von diesen Aspekten wird in Kapitel 4 auf das Konzept der Hyperelastizität eingegangen. Der Fokus liegt hierbei auf drei hyperelastischen Materialmodellen. Kapitel 5 beschäftigt sich mit dem zeitabhängigen Phänomen der Elastizität, der sogenannten Viskoelastizität. Es werden zwei Modelle zur Beschreibung von Relaxationsversuchen vorgestellt. In Kapitel 6 werden die experimentellen Untersuchungen additiv gefertigter Proben und ihre Ergebnisse vorgestellt. Dazu wird zunächst der Einfluss verschiedener Parameter auf das resultierende Materialverhalten untersucht. Diese spielen vor allem bei Proben, die im FDM-Verfahren gefertigt worden sind, eine wichtige Rolle. Es werden Empfehlungen für die innere Geometrie solcher gedruckter Proben ausgesprochen. Die Zugproben werden hierfür nach Normen für Proben aus Vollmaterial hergestellt. Es wird untersucht, inwiefern diese Wahl gerechtfertigt ist, und welche Schwierigkeiten hierbei auftreten.

Kapitel 7 schlägt die Brücke zwischen der experimentellen Untersuchung und der Materialmodellierung. Nach einer Einführung in das Konzept der linearen und nichtlinearen Regression, auch unter Nebenbedingungen, werden die Parameter der hyper- und viskoelastischen Materialmodelle an die experimentellen Daten angepasst. Hierbei wird darauf geachtet, dass die Parameter nicht „blind“ gefittet werden. Vielmehr, dass die Parameter mittels Nebenbedingungen stets zu physikalisch sinnvollen Ergebnissen führen. Für jedes untersuchte Material werden die Parameter der drei hyperelastischen und der beiden viskoelastischen Modelle, sofern möglich, angegeben. Schließlich werden die gewonnen Erkenntnisse in Simulationen validiert. Dazu werden die Versuche in der kommerziellen FEM-Software Abaqus simuliert und an einem Materialpunkt in der Mitte der Probe ausgewertet. Abschließend werden die simulierten Werte mit den experimentellen Werten verglichen und kritisch beurteilt.

Kapitel 8 beleuchtet zwei Aspekte der Unsicherheit, die im Zusammenhang zur Beschreibung der Mikrostruktur additiv gefertigter Werkstoffe stehen. Zunächst wird ein Konzept zur Extrapolation von zweidimensionalen Daten auf deren dreidimensionale Größenverteilung vorgestellt. Im Mittelpunkt stehen kugelförmige Einschlüsse, die auf Mikroskopaufnahmen als Kreise erscheinen. Mittels der Wicksell'schen Methode kann man die Größenverteilung der Kugelradien aus der Verteilung der Kreisradien bestimmen. Abschließend wird der Einfluss von stochastisch modellierten Euler-Bernoulli-Balken auf die Durchbiegung untersucht. Dazu werden die einzelnen Einflussfaktoren als unsichere Größe aufgefasst. Modelliert werden sie als Zufallsvariable oder Zufallsfeld mit bekanntem Erwartungswert und vorgegebener Streuung. Es werden verschiedene Konzepte stochastischer Prozesse vorgestellt und ihr Einfluss auf die Durchbiegung ermittelt. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung.



## 2 Grundlagen der additiven Fertigung

---

Die grundlegende Idee der additiven Fertigung ist die Zerteilung und anschließende Rekonstruktion eines Objektes in mehrere Schichten, sog. Layern. Grundlage für die Verarbeitung dieser Schichten ist ein 3D-CAD-Modell, welches in einem der gängigen Dateiformate (.stl, .stp oder .obj) vorliegt. Diese Dateien dienen als Schnittstelle zwischen dem 3D-Modell und dem Drucker. Während des Druckens verarbeitet der 3D-Drucker diese Layer und baut das Objekt Schicht für Schicht wieder auf. Entscheidend für diese Art der Fertigung ist das Attribut „additiv“. Im Gegensatz zu subtraktiven Herstellungsverfahren wie Fräsen, Bohren oder Drehen entsteht das Objekt durch das Hinzufügen von Material. Im Vergleich zu konventionellen Druckern wird die Druckauflösung durch die weitere Dimension der Schichtdicke charakterisiert. Je nach Druckmethode liegt diese Dicke im Bereich von  $10\ \mu\text{m}$  bis  $300\ \mu\text{m}$ <sup>1</sup>. Diese Schichtdicke ist in der Regel eine fixe Größe und kann während des Druckprozesses nicht verändert werden. Somit stellt die dritte Dimension keine kontinuierliche Größe dar. Dies hat zur Folge, dass ein gedrucktes Objekt eine hohe Genauigkeit in der Layerebene ( $x/y$ ) besitzen kann, in der Schichtrichtung ( $z$ ) jedoch eine stufenförmige Struktur aufweisen kann. Dies kann nur durch eine Verringerung der Schichtdicke verbessert, jedoch nicht völlig behoben werden.

In jedem Verfahren aus dem Bereich der additiven Fertigung erfolgen nach dem Druckprozess ein oder mehrere Arbeitsschritte, der sogenannten Post-Prozess. In diesem werden z.B. Stützstrukturen entfernt oder die Oberflächengüte verbessert [140].

Das Hauptaugenmerk der additiven Fertigung liegt auf dem schnellen Erzeugen komplexer Geometrien mit einer hohen Genauigkeit. Es steht nicht die Frage im Vordergrund, wie etwas fertigt wird. Vielmehr die Frage, wie eine optimale Struktur bei gegebenen Einflussgrößen, wie z.B. der Steifigkeit aussehen muss [34].

In diesem Kapitel erfolgt in Abschnitt 2.1 zunächst eine kurze geschichtliche Beleuchtung der Entwicklung der additiven Fertigung. In dem folgenden Abschnitt 2.2 werden dann zwei Verfahren aus dem Bereich 3D-Druck vorgestellt, die als Grundlage für die weiteren Kapitel dieser Arbeit dienen.

---

<sup>1</sup>[www.3dhubs.com/knowledge-base/impact-layer-height-3d-print](http://www.3dhubs.com/knowledge-base/impact-layer-height-3d-print) [05.07.2019]

### 2.1 Die Geschichte der additiven Fertigung

In den frühen 1980er Jahren wurden gleichzeitig in Japan, den USA und Frankreich die ersten Versuche mit additiver Fertigung durchgeführt [63, S. 37]. Das erste Patent zur additiven Fertigung wurde 1984 von Charles W. Hull angemeldet und im Jahre 1986 bewilligt [75]. Das Stereolithografie (SLA) genannte Verfahren erzeugt 3D-Objekte durch das Aushärten von dünnen Schichten eines flüssigen Photopolymers durch UV-Licht. Damit stellt die SLA-Technologie das ursprüngliche Verfahren im Bereich 3D-Druck dar. Hull gilt ferner als Begründer des .stl-Dateiformats, einer Schnittstelle zwischen dem 3D-CAD-Modell und dem Drucker [68].

Drei Jahre später wurde das erste Patent zum Verfahren des selektiven Lasersinterns (SLS) angemeldet [45]. Die Erfinder Carl R. Deckard und Joe Beaman gründeten ihre eigene Firma Nova Automation/DTM und vertrieben ihre SLS-Drucker. Im Jahre 2001 wurde die Firma durch die Firma 3D systems übernommen<sup>2</sup>.

Die dritte wichtige Technologie im Bereich der additiven Fertigung ist die Schmelzschichtung (fused deposition modeling, FDM). Der erste FDM-Drucker wurde Ende der 1980er Jahre von S. Scott Crump erfunden [44]. Das Patent wurde von Crump im Oktober 1989 eingereicht und im Jahre 1992 bewilligt. Crump ist außerdem Mitbegründer der Firma Stratasys.

Abschließend sei erwähnt, dass der Begriff des 3D-Druckers erst im Jahre 1993 von Michael Cima und Emanuel Sachs [118] patentiert wurde. Für eine Zusammenfassung der Geschichte der additiven Fertigung sei exemplarisch auf die Arbeit von Gross et al. verwiesen [68].

### 2.2 Gängige Verfahren in der additiven Fertigung

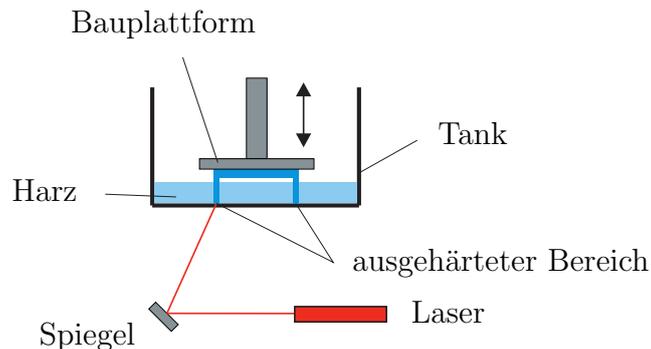
Wie im letzten Abschnitt erwähnt, gibt es drei gängige Verfahren in der additiven Fertigung. Diese sind das selektive Lasersintern (SLS), die Schmelzschichtung (FDM) und das Verfahren der Stereolithografie (SLA). Während Objekte im SLA Verfahren durch das Aushärten eines flüssigen Harzes in einem lichtinduzierten Polymerisationsprozess erzeugt werden, basieren die Methoden SLS und FDM auf der Verarbeitung fester Materialien. Die beiden letztgenannten kann man wiederum in Extrusions- (FDM) und pulverbettbasierte (SLS) Verfahren unterteilen. Für einige dieser Drucktechnologien gibt es weitere verschiedene Untertechniken, z.B. kann statt eines Lasers im SLA-Verfahren ein Projektor verwendet werden. In diesen Fall nennt man das Verfahren *Digital Light Processing* (DLP). Im Folgenden werden zwei für diese Arbeit relevante Technologien in der additiven Fertigung näher vorgestellt.

---

<sup>2</sup><http://www.me.utexas.edu/news/news/selective-laser-sintering-birth-of-an-industry>[05.07.2019]

### 2.2.1 Stereolithografie

Die VDI Richtlinie 3405 [140] beschreibt das SLA-Verfahren als *Schicht-für-Schicht-Bauprozess durch lokales Verfestigen von Fotoprepolymeren-Kunstharzen (Prepolymere mit Fotoaktivatoren) unter Einwirkung von Laserlicht*. Das Ausgangsmaterial ist ein UV-aktivierbarer Kunstharz (englisch: Resin).



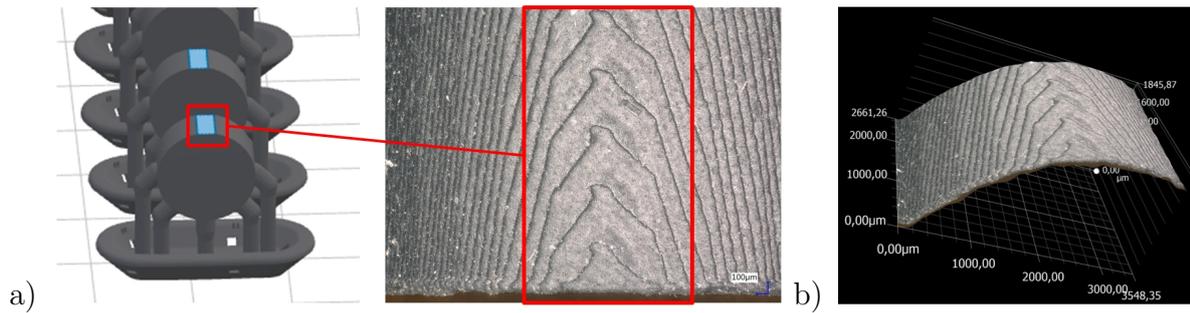
**Abbildung 2.1:** Funktionsprinzip Stereolithografie.

Die Funktionsweise eines SLA-Druckers ist in Abb. 2.1 dargestellt. Das lichtaushärtende Kunstharz befindet sich in einem klarsichtigen Tank. Die Bauplattform, an der das zu druckende Objekt entsteht, taucht nun in das Harz ein. Ein Laser härtet die gewünschten Bereiche von unten lokal aus, es entsteht die erste Schicht an der Bauplattform. Nun fährt die Plattform nach oben aus dem Harz hinaus, und dieser wird mit einem Wischer zum Zirkulieren gebracht. Außerdem werden durch den Wischer Rückstände von nicht vollkommen ausgehärtetem Harz entfernt. Nun senkt sich die Bauplattform wieder ab und positioniert sich um die gewählte Schichtdicke höher als beim Druck der vorherigen Schicht. So entsteht das Objekt Schicht für Schicht an der Bauplattform.

Die Schichtdicke liegt bei SLA-Druckern unter  $10\ \mu\text{m}$  [89]. In Abb. 2.2 ist die Oberfläche einer zylindrischen Probe dargestellt. Man erkennt die einzelnen gedruckten Schichten.

Die Proben, die für die vorliegende Arbeit hergestellt worden sind, wurden mit einem Form 2-Drucker der Firma Formlabs gedruckt. Für diesen Drucker sind verschiedene Kunstharztypen verfügbar. Neben sogenannten Standardmaterialien, die sich nur durch den Farbton unterscheiden, werden technische Materialien für verschiedene Einsatzzwecke angeboten. Eine Übersicht über verschiedene technische Ausgangsmaterialien ist in Tab. 2.1 dargestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde das *Flexible Resin* untersucht.

Der Post-Prozess bei SLA-Druckern besteht aus mehreren Schritten. Zunächst wird das gedruckte Objekt in Isopropylalkohol gereinigt und anschließend eingeweicht. Dadurch wird verbliebenes flüssiges Harz von der Oberfläche entfernt. Im zweiten Schritt müssen



**Abbildung 2.2:** a) Mikroskopaufnahme der Oberfläche einer zylindrischen Probe (links in der Software mit Stützstruktur) und b) dreidimensionale Darstellung der gekrümmten Oberfläche.

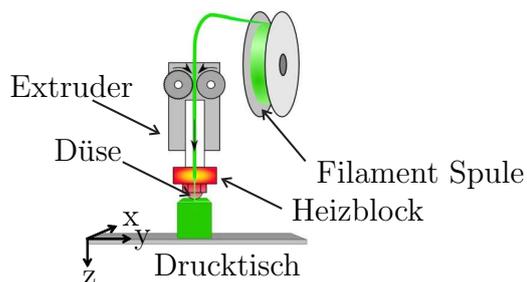
**Tabelle 2.1:** Technische Harze der Firma Formlabs und ihre minimale Schichtdicke

Resin, Firmenbezeichnung	Tough	High Temp	Durable	Flexible	Elastic
Schichtdicke, minimal [ $\mu\text{m}$ ]	50	25	50	50	100

einige Harztypen nachgehärtet werden. Dies ist notwendig, da die Energie des Laserstrahls glockenförmig verteilt wird. Dadurch entsteht im Material eine inhomogene Mikrostruktur in Form von einem überhöhten und einem zu niedrigen Grad der Polymerisation [120]. Es sind noch polymerisierbare Gruppen vorhanden, man spricht von einem sogenannten *grünen Zustand*. Durch die Nachhärtung wird schließlich der gewünschte Grad der Polymerisation erreicht. In Abschnitt 6.4.1 wird der Einfluss der Nachhärtezeit auf den E-Modul untersucht. Im letzten Schritt werden die Stützstrukturen entfernt und die Oberfläche wird ggf. mittels Polieren und Schleifen nachbehandelt.

### 2.2.2 Schmelzschtichtung

Die VDI Richtlinie 3405 [140] beschreibt das FDM-Verfahren (auch Fused Layer Modeling genannte) als *Schicht-für-Schicht-Bauprozess durch Erweichen und lokales Auftragen thermoplastischen Materials mittels einer beheizten Düse oder eines Druckkopfs [...]*. Der prinzipielle Aufbau eines FDM-Druckers ist in Abb. 2.3 (links) dargestellt. Das Filament wird in der Regel auf einer Spule aufgerollt geliefert. Der Durchmesser des Filaments liegt im Bereich von 1,75 mm bis 2,85 mm. Es wird durch ein beheizten Druckkopf geführt in dem das Material bei einer spezifischen Temperatur geschmolzen wird. Das zähflüssige Material wird dann durch eine oder mehrere Düsen an der gewünschten Stelle Schicht



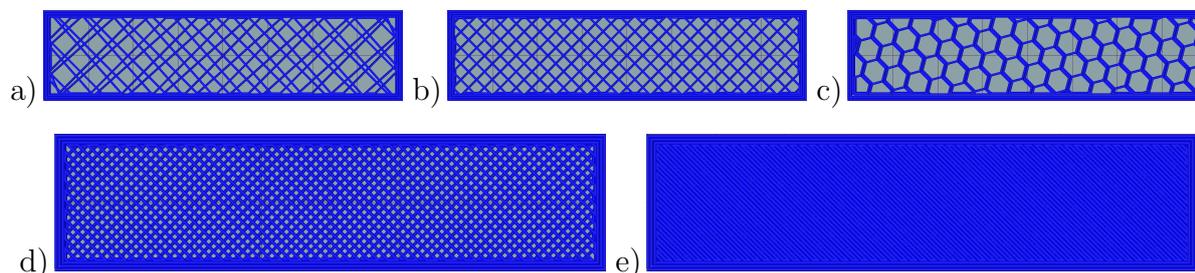
**Abbildung 2.3:** Schematische Darstellung der Funktionsweise eines FDM Druckers (links, angelehnt an Clone3D<sup>3</sup>) und Druckkopf mit dual Extruder in einem Leapfrog Xeed Drucker (rechts)

für Schicht aufgebracht. Nachdem eine Schicht vollständig gedruckt worden ist, verarbeitet der Drucker die nächste Schicht, indem er entweder den Drucktisch absenkt, oder den Druckkopf anhebt. Der Druckprozess kann für jeden Layer in zwei wichtige Schritte eingeteilt werden. Zunächst druckt der Drucker die Kontur des Objekts: die äußere Hülle (englisch: shell). Anschließend wird der innere Bereich jeder Hülle mit einer gewünschten Geometrie gefüllt (englisch: Infill). Gängige Infill-Geometrien sind geradlinig, dreieckig, diagonal, wiggly und in Bienenwabenform (Honeycomb), vgl. Abb. 2.4 a) bis c). Ein weiterer Parameter ist die Fülldichte des Infills. Diese wird in Prozent angegeben und variiert zwischen 10% und 80%. Bei einer Dichte von 100% spricht man von einem *festen Bauteil*, vgl. Abb. 2.4 d) und e).

Eine Übersicht über den Zusammenhang zwischen einigen mechanischen Eigenschaften und der Infill-Geometrie und Fülldichte ist in [57] zu finden.

Historisch sind im Bereich des FDM-Drucks Acrylnitril-Butadien-Styrol-Copolymere

<sup>3</sup>[www.clone3d.co.nz/printer-and-plastic](http://www.clone3d.co.nz/printer-and-plastic)[05.07.2019]



**Abbildung 2.4:** Vergleich verschiedener Infill-Geometrien und Fülldichten: a) diagonal 20%, b) geradlinig 20%, c) bienenwabenförmig 20%, d) geradlinig 50%, e) geradlinig 100%

(ABS) und Polylactide (PLA) gängige Filamentmaterialien. Eine Zusammenfassung der wichtigsten mechanischen Eigenschaften dieser Filamente ist z.B. in [138] dargestellt. Heutzutage gibt es eine höhere Vielfalt an Materialien für den FDM-Druck wie PET, Nylon und andere flexible Filamente, die auf thermoplastischen Polyurethanverbindungen basieren.

Die Schichtdicke liegt für FDM-Drucker im Bereich von  $25\ \mu\text{m}$  bis  $1,25\ \text{mm}$ , also oberhalb der Dicke, die im Bereich der SLA-Drucker üblich ist. Der Post-Prozess beschränkt sich auf die Entfernung der Stützstrukturen [140].

# 3 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

---

Im Folgenden werden die Grundlagen der nichtlinearen Festigkeitslehre im Sinne der klassischen Kontinuumsmechanik zusammengefasst. Ausgehend von den Grundgleichungen der Kinematik wird das Konzept von Spannung und Dehnung dargestellt. Dazu werden wichtige Spannungs- und Dehnungstensoren eingeführt. Die Inhalte dieses Kapitels basieren im wesentlichen auf dem Lehrbuch *Nonlinear Solid Mechanics* von G. A. Holzapfel [73]. In der Kontinuumsmechanik werden physikalische Prozesse von einer makroskopischen Sichtweise betrachtet. Mikroskopische Phänomene werden nicht betrachtet. Die makroskopischen Größen jedes Mediums werden durch Feldgrößen wie Dichte, Verschiebung, Spannung oder Dehnung beschrieben. Diese Feldvariablen ersetzen die unstetige reale Mikrostruktur und werden als hinreichend oft stetig differenzierbare Funktionen modelliert [29].

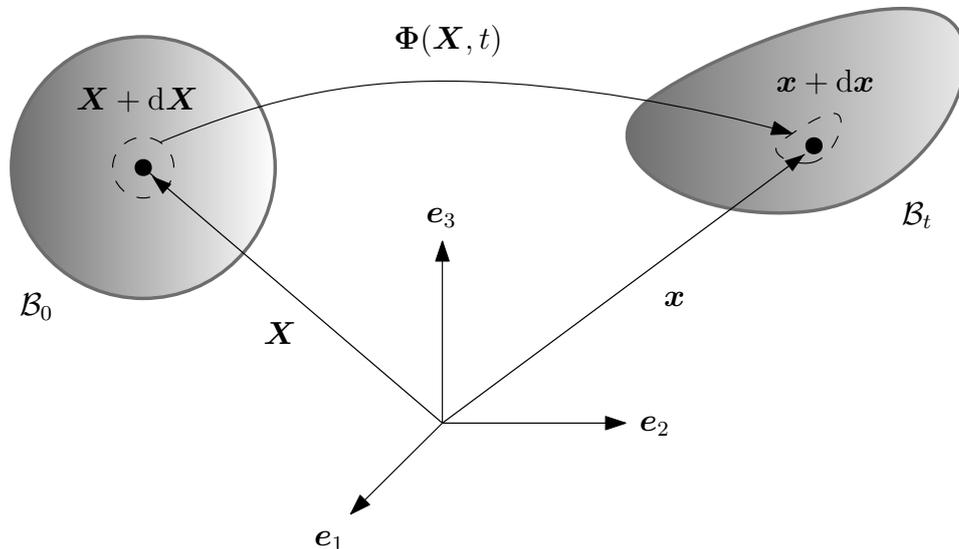
## 3.1 Kinematische Grundlagen

Jeder verformbare Körper  $\mathcal{B}$  kann im Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^3$  eindeutig als eine Menge von Materialpunkten beschrieben werden. Wählt man als Raum einen euklidischen Punktraum versehen mit einem kartesischen Koordinatensystem, d.h.  $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3$ , so kann man zu jedem Zeitpunkt  $t \geq 0$  jeden Materialpunkt mit einem Ortsvektor  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  identifizieren. Man bestimmt einen Zeitpunkt  $t_0$  in dem sich der Körper in der sogenannten Referenzkonfiguration befindet. Für  $t_0 = 0$  lautet diese  $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^3$ . Die entsprechenden Materialpunkte in der Referenzkonfiguration werden dann durch die Vektoren  $\mathbf{X} = \mathbf{x}(0)$  beschrieben. Die Kinematik des Körpers wird durch die zeitliche Änderung der Menge aller Vektoren des Körpers bestimmt. Für alle  $t > 0$  wird die Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$  überführt. Dies geschieht durch die bijektive Abbildung  $\Phi$ , vgl. Abbildung 3.1.

$$\mathcal{B}_t \ni \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0, \forall t > 0. \quad (3.1)$$

Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die Abbildung  $\Phi$  in  $\mathbf{X}$  und  $t$  hinreichend oft stetig differenzierbar ist. Die Abbildung selbst wird als Bewegung bezeichnet, für

jedes feste  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$  wird bezeichnet man  $t \mapsto \Phi(\mathbf{X}, t)$  als die Trajektorie. Aufgrund der Bijektivität existiert  $\mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t)$  eindeutig. Die Umkehrabbildung  $\Phi^{-1}$  wird als inverse Bewegung bezeichnet.



**Abbildung 3.1:** Körper  $\mathcal{B}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  in der Referenzkonfiguration und zum Zeitpunkt  $t > 0$  in der Momentankonfiguration

Man unterscheidet in der Kontinuumsmechanik zwischen der materiellen und räumlichen Betrachtungsweise. In der materiellen oder Lagrange'schen Betrachtungsweise charakterisiert man eine Feldgröße durch ihre materiellen Koordinaten  $X_1, X_2, X_3$ , vgl. Abb. 3.1. Analog beschreibt man in der räumlichen oder Euler'schen Betrachtungsweise die Feldvariablen durch ihre räumlichen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ .

## Kinematische Feldgrößen

Für beide Betrachtungsweisen der Kontinuumsmechanik definiert man Feldgrößen zur Beschreibung der Verschiebung, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung.

Das Vektorfeld

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \Phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} =: \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (3.2)$$

bezeichnet die Verschiebung in Lagrange'scher oder materieller Betrachtungsweise. In der räumlichen oder Euler'schen Betrachtungsweise lautet die Verschiebung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x} =: \mathbf{X} - \mathbf{x}. \quad (3.3)$$

Es gilt  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathbf{U}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$  für alle  $\mathbf{X}$ , da für  $t = 0$  die Referenzkonfiguration mit der Momentankonfiguration übereinstimmt.

Zur Beschreibung der materiellen Geschwindigkeit in der Lagrange'schen Betrachtungsweise bildet man die zeitliche Ableitung der Bewegung  $\Phi$ :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Alternativ kann man die materielle Geschwindigkeit über die Verschiebung ausdrücken. Setzt man die zeitliche Ableitung von (3.2) in (3.4) ein, so gilt für jedes feste  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}}_{=0} = \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}.$$

Für die räumliche Geschwindigkeit in Euler'scher Betrachtungsweise gilt

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\Phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \quad (3.5)$$

Analog zum Verschiebungsfeld gilt die Eigenschaft, dass die Geschwindigkeit in beiden Betrachtungsweisen übereinstimmt.

Durch zweifaches Ableiten der Bewegung erhält man analog die materielle Beschleunigung in Lagrange'scher Betrachtungsweise

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

und die räumliche Beschleunigung in Euler'scher Betrachtungsweise

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\Phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \quad (3.7)$$

Bisher wurden nur zeitliche Ableitungen zur Beschreibung von Geschwindigkeit und Beschleunigung betrachtet. Zur Beschreibung der Deformation eines Körpers betrachtet man einen Punkt  $\mathbf{X}$  und eine Umgebung  $d\mathbf{X}$  um diesen. Mit (3.1) gilt

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t), \quad \forall t > 0. \quad (3.8)$$

Eine Taylor-Entwicklung erster Ordnung von  $\Phi(\mathbf{X} + d\mathbf{X})$  um den Punkt  $\mathbf{X}$  ergibt

$$\Phi(\mathbf{X} + d\mathbf{X}) = \Phi(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X} + d\mathbf{X} - \mathbf{X}) + o(|\mathbf{X} + d\mathbf{X} - \mathbf{X}|). \quad (3.9)$$

Hierbei wurde die qualitative Taylor-Formel mit Landau-Symbolik  $o$  verwendet, vgl. z.B. [85, S. 66]

Mit (3.8) und (3.1) folgt

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{x} + \frac{\partial\Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial\mathbf{X}} d\mathbf{X} + o(|d\mathbf{X}|) \iff d\mathbf{x} = \frac{\partial\Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial\mathbf{X}} d\mathbf{X} + o(|d\mathbf{X}|) . \quad (3.10)$$

Der Ausdruck

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial\Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial\mathbf{X}} \quad (3.11)$$

wird als Deformationsgradient bezeichnet. Es handelt sich um einen Tensor zweiter Stufe, der in Matrixschreibweise aus neun Komponenten besteht. Der Deformationsgradient bildet einen infinitesimalen Tangentenvektor<sup>1</sup>  $d\mathbf{X}$  aus der Referenzkonfiguration auf den infinitesimalen Tangentenvektor  $d\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration ab. Man verwendet die Kurzschreibweise

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} . \quad (3.12)$$

Zum Überführen eines Linienelementes von der Momentan- in die Referenzkonfiguration verwendet man den inversen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^{-1}$ :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} . \quad (3.13)$$

Der Deformationsgradient überführt nicht nur infinitesimale Tangentenvektoren von der Referenz- in die Momentankonfiguration. Für ein infinitesimales Flächenelement  $dA \subset \partial\mathcal{B}_0$  in der Referenzkonfiguration gilt mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{N}$  folgender Zusammenhang zum entsprechenden infinitesimalen Flächenelement  $da \subset \partial\mathcal{B}_t, t > 0$  in der Momentankonfiguration:

$$da \mathbf{n} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} dA \mathbf{N} . \quad (3.14)$$

In (3.14) wird der äußere Normaleneinheitsvektor in der Momentankonfiguration mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet.

Der Ausdruck  $\det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T}$  wird auch als Kofaktor von  $\mathbf{F}$  bezeichnet. Er lässt sich in Matrixschreibweise auch aus der adjunkten Matrix berechnen:

$$\text{cof}(\mathbf{F}) = \text{adj} \mathbf{F}^T = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} . \quad (3.15)$$

Die Formel (3.14) wird auch als die Nanson-Formel bezeichnet.

---

<sup>1</sup>In der Literatur wird auch die Bezeichnung (gerichtetes) Linienelement verwendet

*Beweis von (3.14).* Mit (3.12) gilt:

$$d\mathbf{a}\mathbf{n} = d\mathbf{x} \times d\mathbf{y} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \times \mathbf{F}d\mathbf{Y} = \text{cof}\mathbf{F}(d\mathbf{X} \times d\mathbf{Y}) = \text{cof}\mathbf{F}dA\mathbf{N}.$$

Die Gültigkeit der Identität  $\mathbf{F}d\mathbf{X} \times \mathbf{F}d\mathbf{Y} = \text{adj}\mathbf{F}^T(d\mathbf{X} \times d\mathbf{Y})$  folgt aus der Definition des Kreuzproduktes.  $\square$

Abschließend wird gezeigt, wie der Deformationsgradient ein infinitesimales Volumenelement  $dV$  von der Referenz- in ein infinitesimales Volumenelement  $dv$  in der Momentankonfiguration überführt. Es gilt

$$dv = JdV, \tag{3.16}$$

wobei  $J = \det \mathbf{F}$  die Jacobi-Determinante bezeichnet.

*Beweis.* Für ein infinitesimales Volumenelement in der Momentankonfiguration gilt  $dv = d\mathbf{z} \cdot d\mathbf{a}\mathbf{n}$ . Mit (3.12), sowie der Nanson Formel (3.14) folgt dann

$$\begin{aligned} dv &= d\mathbf{z} \cdot d\mathbf{a}\mathbf{n} = \mathbf{F}d\mathbf{Z} \cdot \det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-T}dA\mathbf{N} = \det \mathbf{F}(\mathbf{F}d\mathbf{Z})^T \mathbf{F}^{-T}dA\mathbf{N} \\ &= \det \mathbf{F}(d\mathbf{Z})^T \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T}dA\mathbf{N} \\ &= \det \mathbf{F}(d\mathbf{Z})^T dA\mathbf{N} \\ &= \det \mathbf{F}d\mathbf{Z} \cdot dA\mathbf{N} = JdV. \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass für das transponierte Matrix-Vektor-Produkt die Regel  $(\mathbf{A}\mathbf{b})^T = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T$  gilt.  $\square$

Bei inkompressiblen Materialien gilt für die Jacobi-Determinante des Deformationsgradienten

$$J = 1, \tag{3.17}$$

die zugehörige Bewegung bzw. Deformation wird als isochor bezeichnet. Beschreibt die Bewegung eine reine Translation bzw. Rotation, so gilt für den Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ .

## 3.2 Verzerrungs- und Verformungsmaße

Wie in dem vorherigen Abschnitt dargelegt worden ist, spielt der Deformationsgradient bei der Beschreibung der Kinematik eine zentrale Rolle. Im Folgenden werden davon ausgehend verschiedene Verzerrungs- und Spannungstensoren abgeleitet.

Betrachtet werden zwei infinitesimal nah benachbarte Punkte  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  in der Referenzkonfiguration, d.h. der Abstand der Punkte betrage  $d\varepsilon = |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|$ . Wird der zugrundeliegende Körper nun deformiert, so gilt nun für den Abstand der Punkte in der Momentankonfiguration

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \lambda d\varepsilon. \quad (3.18)$$

In Gleichung (3.18) bezeichnet  $\lambda$  die Streckung. Sie gibt das Verhältnis an, um wie viel der normierte Vektor

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{Y} - \mathbf{X}}{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|}$$

gestreckt ( $\lambda > 1$ ) bzw. gestaucht ( $0 < \lambda < 1$ ) worden ist. Der Zusammenhang zwischen dem Vektor  $\mathbf{a}_0$  in der Referenzkonfiguration und dem gestreckten oder gestauchten Vektor  $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}$  in der Momentankonfiguration erfolgt wieder über den Deformationsgradient. Es gilt

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0} = \mathbf{F} \mathbf{a}_0, \quad (3.19)$$

sowie

$$\lambda = |\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}|. \quad (3.20)$$

Der Zusammenhang zwischen der Streckung und dem Deformationsgradienten wird nun verwendet, um verschiedene Verformungs- und Verzerrungsoren zu definieren. Zunächst wendet man (3.11) auf die quadrierte Streckung an und erhält mit (3.19)

$$\lambda^2 = \mathbf{F} \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F} \mathbf{a}_0 = (\mathbf{F} \mathbf{a}_0)^T \mathbf{F} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \mathbf{a}_0. \quad (3.21)$$

Die Größe  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  wird als rechter Cauchy-Green-Tensor bezeichnet

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (3.22)$$

Analog definiert man den linken Cauchy-Green-Tensor mittels

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (3.23)$$

Für eine Herleitung sei exemplarisch auf [73, S. 81] verwiesen.

Beide Cauchy-Green-Tensoren sind symmetrisch

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C}, \quad \mathbf{b}^T = \mathbf{b}, \quad (3.24)$$

positiv definit

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \implies \mathbf{x} \cdot \mathbf{C}\mathbf{x} > 0, \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}\mathbf{x} > 0, \quad (3.25)$$

und regulär

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{b} = (\det \mathbf{F})^2 = J^2 > 0. \quad (3.26)$$

Wendet man den Deformationsgradienten auf einen infinitesimalen Vektor  $d\mathbf{a} = \mathbf{X} - \mathbf{Y}$  an, so können sich Richtung, Orientierung und Länge des Vektors ändern. Betrachtet man eine reine Bewegung ohne Deformation, z.B. eine Rotation oder Verschiebung, so ist die Länge des Vektors konstant. Zwischen Referenz- und Momentankonfiguration gilt dann der Zusammenhang

$$|d\mathbf{a}| = |d\boldsymbol{\lambda}|. \quad (3.27)$$

Man spricht von einer Starrkörperbewegung. In diesem Fall stellt der Deformationsgradient eine isometrische Transformation  $\mathbf{R}$  dar. Es muss also gelten:

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} \stackrel{!}{=} d\boldsymbol{\lambda} \cdot d\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.28)$$

Wendet man hierauf den Zusammenhang (3.19) mit der Schreibweise  $\mathbf{R}$  für den Deformationsgradient an, so erhält man mit den Regeln des Skalarproduktes

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} \stackrel{!}{=} d\boldsymbol{\lambda} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}d\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}d\mathbf{a} = d\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{R}d\mathbf{a}. \quad (3.29)$$

Aus der Gleichung (3.29) folgt unmittelbar, dass der Ausdruck  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$  dem Einheitstensor  $\mathbf{I}$  entsprechen muss. Daraus folgt, dass  $\mathbf{R}$  ein orthogonaler Tensor sein muss, d.h. es gilt

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T. \quad (3.30)$$

Für die Beschreibung einer Bewegung getrennt nach einer Starrkörperbewegung und einer Deformation, verwendet man eine polare Zerlegung des Deformationsgradienten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}. \quad (3.31)$$

In (3.31) bezeichnet  $\mathbf{U}$  den rechten Streckungstensor. Mathematisch gesehen handelt es sich um einen symmetrischen und positiv definiten Tensor. Es sei angemerkt, dass die Reihenfolge der Zerlegung wesentlich ist. Die Deformation erfolgt vor der Starrkörperbewegung.

Mit (3.31) ergibt sich für den rechten Cauchy-Green-Tensor (3.22) folgende Darstellung:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2. \quad (3.32)$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Starrkörperbewegung und der Deformation, so erhält man den linken Streckungstensor  $\mathbf{V}$ . Damit erhält man folgende Darstellung für den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (3.33)$$

sowie für den linken Cauchy-Green-Tensor

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2. \quad (3.34)$$

Neben dem linken und rechten Streckungstensen sowie dem linken und rechten Cauchy-Green-Tensor existieren noch weitere gängige Verzerrungstensen. Betrachtet man eine Verzerrung als Abstand zweier Linienelemente in der Momentan- und Ausgangskonfiguration, so erhält man

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\lambda} \cdot d\boldsymbol{\lambda} - d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} &= \mathbf{F}d\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{a} - d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = (\mathbf{F}d\mathbf{a})^T \mathbf{F}d\mathbf{a} - d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} \\ &= d\mathbf{a}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F}d\mathbf{a} - d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = d\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}d\mathbf{a} - d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} \\ &= d\mathbf{a} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I})d\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Die Größe  $\mathbf{C} - \mathbf{I}$  wird mit  $2\mathbf{E}$  bezeichnet und als der Green-Lagrange-Verzerrungstensor definiert:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (3.35)$$

Der Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  spielt eine wichtige Rolle bei dem Zusammenhang zur linearen Theorie der kleinen Deformationen. Für kleine Verschiebungen  $\mathbf{u}$  gilt mit der geometrischen Linearisierung [20, S. 118]

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) + \mathcal{O}(\|\mathbf{F} - \mathbf{I}\|^2) \approx \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.36)$$

## Einfache Deformationszustände für homogene Materialien

Zur Bestimmung von Materialeigenschaften werden in der Regel einfache Belastungsfälle untersucht. Dazu führt man verschiedene ein- und zweiachsige Zug- bzw. Druckversuche durch. Es wird vorausgesetzt, dass das Volumen des Materials während der experimentellen Untersuchung konstant bleibt. Ferner wird das Material als homogen angesehen. Im folgenden Abschnitt werden die wichtigsten Deformationsfälle vorgestellt.

Der einfachste Fall ist der sogenannte einachsige Zugversuch. Dieser ist für verschiedene Materialien in unterschiedlichen Normen definiert. Für Kunststoffe werden die Normen DIN EN ISO 527-1/2 [8, 9] und ASTM D638 [3] verwendet. Zugversuche für vulkanisier-

tes Gummi und thermoplastische Elastomere werden in den Normen ISO 37 [14], ASTM D412 [2] und DIN 53504 [6] definiert.

Für einen Zug in Richtung  $X_1$  lautet die zugehörige Deformationsvorschrift mit der Streckung  $\lambda > 1$  in kartesischen Koordinaten:

$$\Phi \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X_1 \\ \lambda_2 X_2 \\ \lambda_3 X_3 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Unter der Annahme der Volumenkonstanz gilt mit (3.17)

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \iff \lambda \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (3.38)$$

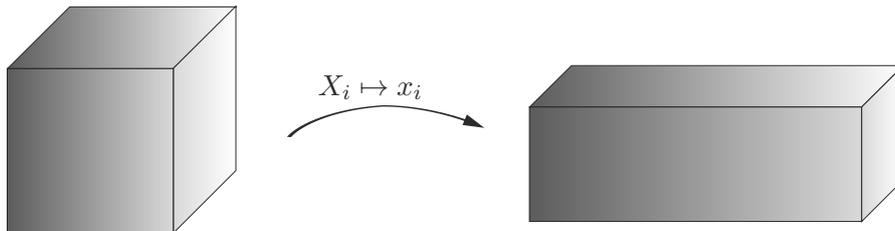
Fordert man, dass die Stauchung in  $X_2$  und  $X_3$  Richtung identisch erfolgt, d.h.  $\lambda_2 = \lambda_3$ , so erhält man

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3.39)$$

Damit lautet der Deformationsgradient für einen Deformationszustand des einachsigen Zugs

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

In Abbildung 3.2 ist der einachsige Zug unter Volumenkonstanz dargestellt.



**Abbildung 3.2:** Darstellung des einachsigen Zugs unter Volumenkonstanz mit  $x_1 = \lambda X_1$ ,  $x_2 = \lambda^{-1/2} X_2$  und  $x_3 = \lambda^{-1/2} X_3$

Zweiachsige Belastungszustände werden in mehrere Unterformen unterteilt. Das zweiachsige Pendant zum einachsigen Zug ist der äquibiaxiale Zug. Im Gegensatz zum einachsigen Zug existiert für den zweiachsigen äquibiaxialen Zug keine Norm oder Richtlinie für den Versuchsaufbau und die Prüfkörpergeometrie [23]. In derselben Quelle werden verschiedene Prüfmethode vorgestellt und verglichen.

Beim äquibiaxialen Zug erfolgt eine identische Streckung in zwei orthogonale Richtungen, d.h. die Deformation lautet beispielsweise

$$\Phi \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X_1 \\ \lambda X_2 \\ \lambda_3 X_3 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

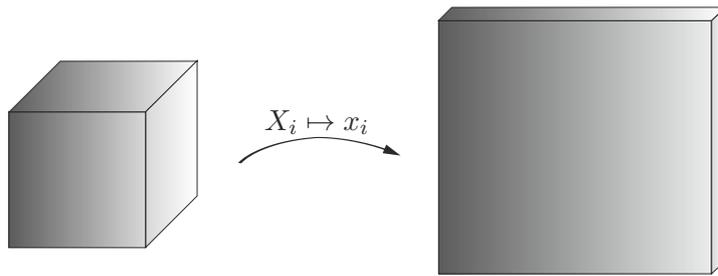
Aus der Inkompressibilität folgt für die Stauchung in  $X_3$ -Richtung

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \iff \lambda^2 \lambda_3 = 1 \iff \lambda_3 = \lambda^{-2}. \quad (3.42)$$

Damit lautet der Deformationsgradient für den äquibiaxialen Zug

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Der äquibiaxiale Zug ist in Abbildung 3.3 dargestellt.



**Abbildung 3.3:** Darstellung des äquibiaxialen Zugs unter Volumenkonstanz mit  $x_1 = \lambda X_1$ ,  $x_2 = \lambda X_2$  und  $x_3 = \lambda^{-2} X_3$

Neben dem ein- und zweiachsigen Zug existieren zwei verschiedene Deformationen, die auf einer Scherung basieren. Bei der einfachen Scherung erfolgt eine Verschiebung der Koordinate  $X_1$  in Richtung  $X_2$  gewichtet mit der Scherbeanspruchung  $\gamma$ . Diese kann sowohl durch den Winkel  $\phi$  als auch durch eine Streckung  $\lambda_1$  ausgedrückt werden [135, S. 84].

$$\gamma = \tan \phi = \lambda_1 - \lambda_1^{-1}. \quad (3.44)$$

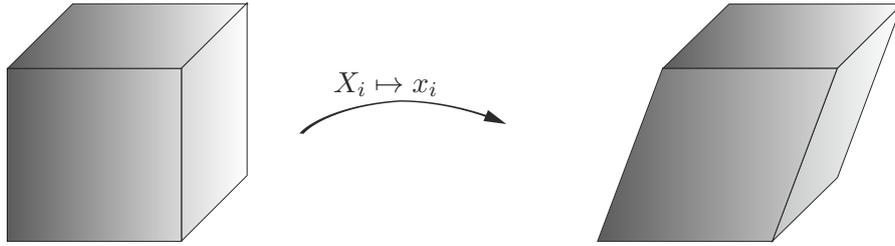
Bei der einfachen Scherung handelt es sich um eine strikt isochore Deformation, unabhängig von der Scherbeanspruchung  $\gamma$ :

$$\Phi \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Der zugehörige Deformationsgradient lautet

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Offenbar gilt immer  $J = 1$ . Die einfache Scherung ist in Abbildung 3.4 dargestellt.



**Abbildung 3.4:** Darstellung der einfachen Scherung mit  $x_1 = \gamma X_2$ ,  $x_2 = X_2$  und  $x_3 = X_3$

Die zweite Scherdeformation wird als ebener Zug (englisch: pure shear) bezeichnet. Hierbei erfolgt eine Streckung in eine Richtung, während eine zweite Richtung unverändert gelassen wird. Die Deformationsvorschrift lautet in diesem Fall

$$\Phi \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X_1 \\ X_2 \\ \lambda_3 X_3 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

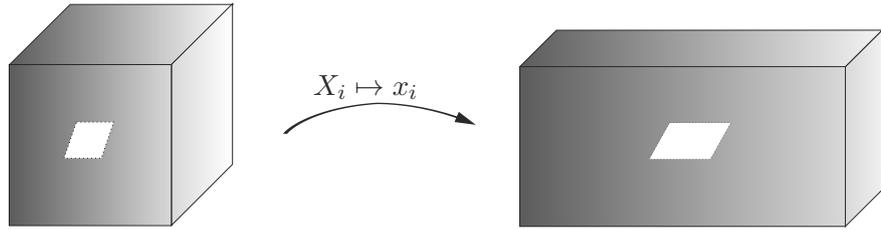
Wie zuvor bestimmt man die Stauchung  $\lambda_3$  aus der Inkompressibilitätsbedingung

$$J = \det \mathbf{F} = 1 \iff \lambda \lambda_3 = 1 \iff \lambda_3 = \lambda^{-1}. \quad (3.48)$$

Damit lautet der Deformationsgradient für den ebenen Zug

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Der Deformationszustand des ebenen Zugs ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Ein Vergleich zwischen dem ebenen Zug und der einfachen Scherung für inkompressible Materialien ist in [99] dargestellt. Jones und Treloar charakterisierten beide Deformationszustände so, dass sich die Deformationszustände nur in einer zusätzlichen Rotation bei der einfachen Scherung unterscheiden [78]. Dies gilt jedoch nur für kleine Deformationen. Moreira und Nunes beschreiben, dass Abweichungen in der Spannung für Dehnungen ab ca. 30% auftreten, vgl. Abb. 11 in [99]. Für große Deformationen gibt es keinen funktionalen Zusammenhang zwischen den Spannungen beider Belastungszustände.



**Abbildung 3.5:** Darstellung des ebenen Zugs (pure shear) unter Volumenkonstanz mit  $x_1 = \lambda X_1$ ,  $x_2 = X_2$  und  $x_3 = \lambda^{-1} X_3$

### 3.3 Spannungstensoren

Zur Beschreibung von Spannungen in einem deformierbaren Körper  $\mathcal{B}$  betrachtet man ein infinitesimales Oberflächenelement  $da$  auf einem ebenen Schnitt durch den Körper in der Momentankonfiguration. Das zugehörige infinitesimale Oberflächenelement in der Referenzkonfiguration wird mit  $dA$  bezeichnet. Für eine auf die Fläche wirkende resultierende Kraft  $d\mathbf{f}$  der Zusammenhang zur Spannung, repräsentiert durch den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  bzw.  $\mathbf{T}$  über

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (3.50)$$

bzw.

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{f}}{dA}. \quad (3.51)$$

Aus den Gleichungen (3.50) und (3.51) folgt der Zusammenhang

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}da = \mathbf{T}dA. \quad (3.52)$$

Die Spannungsvektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{T}$  werden als Cauchy'scher Spannungsvektor bzw. als erster Piola-Kirchhoff'scher Spannungsvektor bezeichnet. Sie repräsentieren die wahre bzw. die nominelle Spannung [73, S. 111].

#### 3.3.1 Der Cauchy'sche Fundamentalsatz

Versieht man die infinitesimalen Oberflächenelemente mit ihren äußeren Einheitsnormalenvektoren  $\mathbf{n}$  bzw.  $\mathbf{N}$ , so ergibt sich ein Zusammenhang zu den Spannungsvektoren  $\mathbf{t}$  bzw.  $\mathbf{T}$ . Diese Zusammenhänge werden über lineare Abbildungen  $\boldsymbol{\sigma}$  bzw.  $\mathbf{P}$  hergestellt.

Diese Tensoren zweiter Stufen ergeben sich aus dem Cauchy'schen Fundamentalsatz:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{N}. \quad (3.54)$$

Für eine Herleitung sei auf [20, S. 142 ff.] verwiesen. Der Tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  in (3.53) wird als Cauchy'scher Spannungstensor bezeichnet. Aus der Drehimpulsbilanz ergibt sich die Symmetrie des Tensors:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (3.55)$$

In Matrixschreibweise lässt sich der Cauchy'scher Spannungstensor wie folgt darstellen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.56)$$

Ausgedrückt mit Normal- und Schubspannungen gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Der Tensor  $\mathbf{P}$  in (3.54) wird als 1. Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor bezeichnet. Er ist im Allgemeinen nicht symmetrisch und dient als dreidimensionale Erweiterung der nominellen Spannung, d.h. bezogen auf die Referenzkonfiguration, also den Ausgangsquerschnitt. Zur Umrechnung der beiden Spannungstensoren ineinander verwendet man die Piola-Transformationen [73, S. 113]

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.58)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (3.59)$$

*Beweis.* Aus der Gleichung (3.52) folgt mit dem Cauchy'schen Fundamentalsatz (3.53) bzw. (3.54) und der Nanson-Formel (3.14):

$$\begin{aligned} \mathbf{t} da = \mathbf{T} dA &\iff \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da = \mathbf{P} \mathbf{N} dA \iff \boldsymbol{\sigma} J \mathbf{F}^{-T} dA \mathbf{N} = \mathbf{P} \mathbf{N} dA \\ &\iff \boldsymbol{\sigma} \mathbf{N} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T \mathbf{N} \end{aligned}$$

Da dies für beliebige  $\mathbf{N}$  gilt, folgt die Behauptung  $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T$ .  $\square$

Aus der Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors folgt

$$\mathbf{P} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{P}^T. \quad (3.60)$$

Folgendes Beispiel zeigt, dass der 1. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor im allgemeinen nicht symmetrisch ist. Gegeben sei die Deformation  $x_1 = -X_2$ ,  $x_2 = X_1$  und  $x_3 = X_3$  und der Cauchy'sche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ . Es gilt

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad \text{und} \quad J = 1.$$

Damit lautet die Matrixdarstellung des 1. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors

$$\mathbf{P} = \sigma_{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \mathbf{F}^{-\text{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{P}^{\text{T}}.$$

### 3.3.2 Weitere Spannungstensoren

Eine symmetrische Alternative zum 1. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor ist der 2. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor  $\mathbf{S}$ . Der Zusammenhang zum Cauchy'schen Spannungstensor besteht über die Transformation

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\text{T}}. \tag{3.61}$$

Mit der Gleichung (3.58) sowie (3.60) folgt der Nachweis der Symmetrie von  $\mathbf{S}$ :

*Beweis.*

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\text{T}} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{P}^{\text{T}}\mathbf{F}^{-\text{T}} = \mathbf{P}^{\text{T}}\mathbf{F}^{-\text{T}} = (\mathbf{F}^{-1}\mathbf{P})^{\text{T}} = \mathbf{S}^{\text{T}}$$

□

Aus der Symmetrie von  $\mathbf{S}$  folgt unmittelbar die wichtige Relation

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}. \tag{3.62}$$

# 4 Hyperelastizität

---

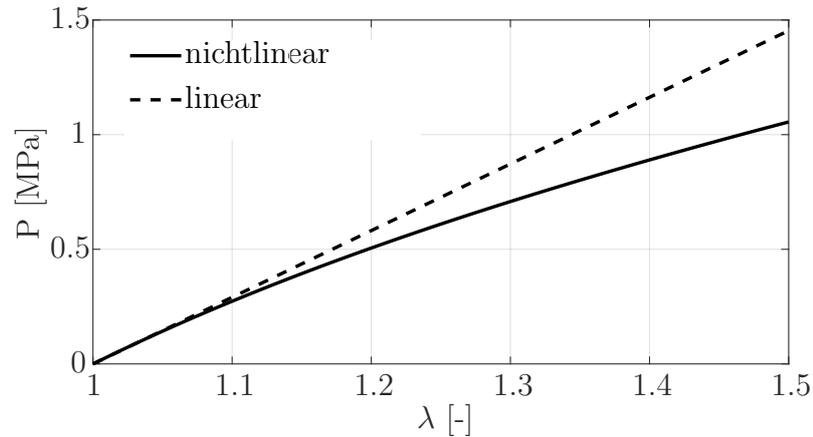
Die in Kapitel 3 eingeführten Konzepte von Dehnung und Spannung werden im Folgenden dazu verwendet, konstitutive Gleichungen für hyperelastische Materialien zu formulieren. Nach [73, S. 205] approximiert eine konstitutive Gleichung die beobachteten physikalischen Eigenschaften eines realen Materials. Sie stellt einen funktionalen Zusammenhang zwischen zwei oder mehr anderen Feldgrößen sowie der Spannung zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  und in jedem Punkt  $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$  eines Körpers  $\mathcal{B}$  her. Aufgrund der makroskopischen Betrachtungsweise spricht man auch von einem phänomenologischen Ansatz, da die zugrundeliegenden Effekte auf niedrigeren Skalen nicht betrachtet werden.

Zur Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens wird ein rein mechanischer Ansatz verwendet, thermodynamische Größen wie die Temperatur oder die Entropie werden nicht betrachtet [73, S. 206]. Die Bezeichnung „nichtlinear“ wird in diesem Zusammenhang nicht im mathematischen Sinne verwendet. Ein nichtlinear elastisches Materialverhalten bedeutet, dass die Steigung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm nicht konstant ist, was bei linear elastischen Materialien der Fall ist, vgl. Abbildung 4.1. Für gummiartige Materialien nimmt die Steigung nach einem steileren Anfangsbereich ab. Dennoch ist das Material auch in diesem Bereich elastisch.

## 4.1 Konstitutive Gleichungen für hyperelastische Materialien

Hyperelastische Materialien werden in der Literatur als elastische Materialien beschrieben, für die eine Verzerrungsenergiefunktion  $W(\boldsymbol{F})$  existiert [73, 106, jew. S. 206]. Eine solche stetige, skalarwertige Tensorfunktion wird auch freie Helmholtzenergiefunktion oder Formänderungsenergiegedichte bezeichnet. Es werden nun einige definierenden Eigenschaften von Verzerrungsenergiefunktionen näher betrachtet. Zunächst muss gelten:

$$W(\boldsymbol{R}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{R} \in \text{SO}(3). \quad (4.1)$$



**Abbildung 4.1:** Vergleich des linearen und nichtlinearen Spannungs-Dehnungsverhaltens.

In (4.1) bezeichnet  $\text{SO}(3)$  die Drehgruppe

$$\text{SO}(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T \text{ und } \det \mathbf{R} = 1\}, \quad (4.2)$$

d.h. die Menge aller orthogonalen Tensoren mit Determinante eins.

Die Eigenschaft (4.1) bedeutet, dass  $W$  für alle Starrkörperbewegungen den Wert Null annimmt. Daraus ergibt sich sofort, dass  $W$  nicht bijektiv sein kann. Als Spezialfall ergibt sich außerdem

$$W(\mathbf{I}) = 0, \quad (4.3)$$

d.h. in der Referenzkonfiguration ist keine Energie im Körper gespeichert. Erfolgt neben der Deformation zusätzlich eine Starrkörperbewegung  $\mathbf{R}$ , d.h.  $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{R}\mathbf{F}$ , dann muss für jede Verzerrungsenergiefunktion folgende Eigenschaft erfüllt sein:

$$W(\hat{\mathbf{F}}) = W(\mathbf{R}\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}). \quad (4.4)$$

Das heißt die innere Energie hängt nur von der Deformation ab. Als weitere Folgerung ergibt sich aus Gleichung (4.4)

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{R}\mathbf{U}) = W(\mathbf{U}), \quad (4.5)$$

wobei die polare Zerlegung (3.31) verwendet worden ist.

Eine Deformation des Körpers führt niemals zu einer negativen inneren Energie:

$$W(\mathbf{F}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{F}. \quad (4.6)$$

Für Volumenänderungen gilt folgendes Grenzverhalten:

$$\lim_{\det \mathbf{F} \rightarrow \infty} W(\mathbf{F}) = \infty, \quad (4.7)$$

$$\lim_{\det \mathbf{F} \rightarrow 0} W(\mathbf{F}) = \infty. \quad (4.8)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass man kein Kontinuum unendlich ausdehnen, bzw. auf einen Punkt komprimieren kann.

Zur Beschreibung der Spannungen aufgrund von Deformationen in hyperelastischen Materialien verwendet man den Zusammenhang

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}. \quad (4.9)$$

Die Gültigkeit folgt aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, formuliert in der Clausius-Planck-Ungleichung für eine rein mechanische Betrachtungsweise. Nach [73, S. 173] gilt

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{W} \geq 0, \quad (4.10)$$

wobei mit  $\mathcal{D}_{\text{int}}$  die interne Dissipation bezeichnet wird. Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\dot{W} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} \quad (4.11)$$

und somit

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \left( \mathbf{P} - \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} \geq 0. \quad (4.12)$$

Für rein elastisches Material gilt die Gleichheit in (4.12):

$$\mathcal{D}_{\text{int}} = \left( \mathbf{P} - \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} = 0. \quad (4.13)$$

Da dies für alle  $\mathbf{F}$  mit  $\dot{\mathbf{F}}$  gelten muss, ergibt sich

$$\mathbf{P} - \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = 0, \quad (4.14)$$

was aber genau Gleichung (4.9) entspricht.

Beschreibt man die Deformation mittels des rechten Cauchy-Green-Tensors (3.22), so

gilt

$$W(\mathbf{F}) = \hat{W}(\mathbf{C}). \quad (4.15)$$

Zur Bestimmung der Ableitung  $\partial\hat{W}(\mathbf{C})/\partial\mathbf{F}$  benötigt man einige Rechenregeln für Tensoren zweiter und vierter Stufe. Für Tensoren zweiter Stufe gelten nach [76] folgende Eigenschaften:

$$\mathbf{X} : \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{B}^T, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{X} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^t = (\mathbf{X} : (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}))^T. \quad (4.17)$$

wobei  $(\bullet)^t$  für Tensoren vierter Stufe  $\mathcal{A}$  wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{A}^t : \mathbf{X} = \mathcal{A} : \mathbf{X}^T.$$

Zum Bestimmen der Ableitung von  $\partial\hat{W}(\mathbf{C})/\partial\mathbf{F}$  verwendet man nun die Kettenregel:

$$\frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{F}} = \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\mathbf{F}}, \quad (4.18)$$

da die Ableitung  $\partial\mathbf{C}/\partial\mathbf{F}$  ein Tensor vierter Stufe ist. Für diese gilt nach [76, S. 162]

$$\frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\mathbf{F}} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})^t + (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}). \quad (4.19)$$

Einsetzen von (4.19) in (4.18) ergibt mit dem Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{F}} &= \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\mathbf{F}} = \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : ((\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})^t + (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I})) \\ &= \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})^t + \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}). \end{aligned}$$

Wendet man (4.17) auf den ersten und (4.16) auf den zweiten Summanden an, so ergibt sich mit den Eigenschaften der Identität  $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}$  für beliebige Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{F}} &= \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})^t + \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{I}) \\ &= \left( \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) \right)^T + (\mathbf{F}^T)^T \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} \mathbf{I}^T \\ &= \left( \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) \right)^T + \mathbf{F} \frac{\partial\hat{W}(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

Erneutes Anwenden von (4.16) auf den ersten Summanden ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{F}} &= \left( \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} : (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) \right)^{\mathbf{T}} + \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= \left( \mathbf{I} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^{\mathbf{T}} \right)^{\mathbf{T}} + \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= (\mathbf{F}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} \left( \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \right)^{\mathbf{T}} + \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \\
 &= \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} + \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}.
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Ableitung von  $\hat{W}(\mathbf{C})$  symmetrisch ist. Somit gilt der Zusammenhang zwischen dem ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor und der Verzerrungsenergiefunktion formuliert im rechten Cauchy-Green-Tensor:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (4.20)$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass andere Autoren die Ableitung von  $W(\mathbf{F})$  nach  $\mathbf{F}$  nicht als den ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor, sondern als dessen transponierte definieren, vgl. z.B. [106, S. 153].

Zur Bestimmung des Cauchy'schen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  in Abhängigkeit von  $W(\mathbf{F})$  bzw.  $\hat{W}(\mathbf{C})$  wird die Piola-Transformation (3.59) angewendet. Es ergeben sich folgende Darstellungen:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^{\mathbf{T}} = J^{-1} \mathbf{F} \left( \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\mathbf{T}}, \quad (4.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^{\mathbf{T}}. \quad (4.22)$$

Schließlich ergeben sich mit der Identität (3.62) die Darstellungen des 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors in Abhängigkeit von  $W(\mathbf{F})$  bzw.  $\hat{W}(\mathbf{C})$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}. \quad (4.24)$$

### 4.1.1 Isotropes hyperelastisches Material

Ein Material wird als isotrop bezeichnet, falls die Materialantwort durch eine Belastung in allen Raumrichtungen identisch ist. In Falle der Hyperelastizität definiert man ein Material als isotrop, falls Verzerrungsenergiefunktion invariant gegenüber einer affinen Transformation

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{c} + \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (4.25)$$

ist. Hierbei ist  $\mathbf{c}$  eine Translation und  $\mathbf{R}$  eine Rotation mit  $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$ . Bildet man den zugehörigen Deformationsgradienten, so gilt

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* \mathbf{R}, \quad (4.26)$$

wobei  $\mathbf{F}^*$  den Deformationsgradienten nach der affinen Transformation bezeichnet. Da  $\mathbf{R}$  orthogonal ist, gilt

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} \mathbf{R}^T. \quad (4.27)$$

Schließlich ergibt sich als definierende Eigenschaft der Isotropie:

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F} \mathbf{R}^T), \quad \forall \mathbf{R} \in \text{SO}(3). \quad (4.28)$$

Anschaulich bedeutet dies, dass die Deformation, die nach einer Translation und / oder Rotation erfolgt, zu derselben inneren Energie führt, wie bei der reinen Deformation. Drückt man die Verzerrungsenergiefunktion durch den rechten oder linken Cauchy-Green-Tensor aus, so gilt für isotropes Material die wichtige Eigenschaft

$$\hat{W}(\mathbf{C}) = \hat{W}(\mathbf{b}). \quad (4.29)$$

Skalarwertige isotrope Tensorfunktionen werden auch als Invarianten des Arguments bezeichnet [136, S. 22]. Für symmetrische Tensoren gilt zusätzlich, dass das Argument durch die Hauptinvarianten des Arguments ersetzt werden können. Der Beweis ist in [136, S. 28] angegeben. Da das Argument in (4.29) ein symmetrischer Tensor ist, existiert folgende Darstellung der Verzerrungsenergiefunktion:

$$\hat{W}(\mathbf{C}) = \hat{W}(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) = \hat{W}(I_1(\mathbf{b}), I_2(\mathbf{b}), I_3(\mathbf{b})). \quad (4.30)$$

Die Hauptinvarianten sind definiert als die Koeffizienten des zugehörigen charakteristischen Polynoms. Für den Tensor  $\mathbf{C}$  lauten diese:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3, \quad (4.31)$$

mit

$$I_1 = \operatorname{tr}(\mathbf{C}) , \quad (4.32)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\operatorname{tr}(\mathbf{C}))^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{C}^2)] , \quad (4.33)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \left[ \operatorname{tr}(\mathbf{C}^3) - \frac{3}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{C}^2) \operatorname{tr}(\mathbf{C}) + \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(\mathbf{C}))^3 \right] = \det(\mathbf{C}) . \quad (4.34)$$

Zur Bestimmung der konstitutiven Gleichungen für isotropes hyperelastisches Material werden nun die Gleichungen (4.22) und (4.24) verwendet. Mit der Kettenregel gilt zunächst

$$\frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \hat{W}(I_1)}{\partial I_1} \frac{\partial I_1(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \hat{W}(I_2)}{\partial I_2} \frac{\partial I_2(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \hat{W}(I_3)}{\partial I_3} \frac{\partial I_3(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} . \quad (4.35)$$

Die entsprechenden Ableitungen der Invarianten lauten nach Beispiel 6.10 in [76, S. 146]:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} , \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left( 2 \operatorname{tr}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{I} - \frac{\partial \operatorname{tr}(\mathbf{C}^2)}{\partial \mathbf{C}} \right) = I_1 \cdot \mathbf{I} - \mathbf{C} , \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \cdot \mathbf{C}^{-1} . \quad (4.38)$$

Setzt man dies in Gleichung (4.35) ein, so ergibt sich

$$\mathbf{S} = 2 \left[ \left( \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \cdot \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right] . \quad (4.39)$$

Mittels der Transformation (3.61) ergibt sich die Darstellung des Cauchy'schen Spannungstensors für isotrope Materialien

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left[ I_3 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_3} \mathbf{I} + \left( \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \mathbf{b}^2 \right] . \quad (4.40)$$

### 4.1.2 Inkompressible hyperelastische Materialien

Viele gummiartige Materialien wie Naturkautschuk oder thermoplastische Elastomere werden bei moderaten Belastungen als annähernd inkompressibel angesehen [103, 110]. Dies bedeutet, dass die zugrundeliegende Deformation isochor ist, vgl. Gleichung (3.17), d.h.  $\det \mathbf{F} = J = 1$ . Zur Bestimmung der konstitutiven Gleichungen für inkompressible

hyperelastische Materialien wird dies nun als Nebenbedingung in der Ableitung formuliert. Mit dem Lagrange-Multiplikator  $p$ , der gleichzeitig den hydrostatischen Druck beschreibt, gilt:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} (W(\mathbf{F}) - p(J - 1)) . \quad (4.41)$$

Die Ableitung der Determinante von  $\mathbf{F}$  nach  $\mathbf{F}$  lautet nach [73, S. 103]

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = J\mathbf{F}^{-\text{T}} . \quad (4.42)$$

Insgesamt erhält man mit der Nebenbedingung  $J = 1$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-\text{T}} . \quad (4.43)$$

Über Gleichung (3.59) erhält man den Cauchy'schen Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \left( \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\text{T}} - p\mathbf{I} , \quad (4.44)$$

sowie mittels Gleichung (3.62) die Darstellung des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors ausgedrückt durch die Verzerrungsenergiefunktion formuliert in  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p\mathbf{C}^{-1} . \quad (4.45)$$

### 4.1.3 Inkompressible, isotrope Materialien

Kombiniert man die Eigenschaft der Inkompressibilität mit der Isotropie, so kann man die Verzerrungsenergiefunktion wieder mittels ihrer Invarianten formulieren. Versieht man Gleichung (4.30) mit der Nebenbedingung der Inkompressibilität, d.h. mit

$$I_3 = \det \mathbf{C} = 1 , \quad (4.46)$$

so ergibt sich die Darstellung des zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors durch

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left( \hat{W}(I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C})) - \frac{p}{2}(I_3 - 1) \right) . \quad (4.47)$$

Wendet man die Regeln (4.36), (4.37) und (4.38) an, so ergibt sich

$$\mathbf{S} = 2 \left( \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - 2 \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p \mathbf{C}^{-1}. \quad (4.48)$$

Schließlich ergibt sich aus der Gleichung (3.61) die Darstellung des Cauchy'schen Spannungstensors für inkompressible, isotrope Materialien

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \left( \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial I_2} \right) \mathbf{b} - 2 \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{C})}{\partial I_2} \mathbf{b}^2. \quad (4.49)$$

#### 4.1.4 Konstitutive Gleichungen in Abhängigkeit der Hauptstreckungen

Für isotropes Material kann man die Verzerrungsenergiedichte auch in den Hauptstreckungen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  formulieren. Diese ergeben sich wie in Abschnitt 3.2 dargestellt aus der Deformation

$$\boldsymbol{\Phi} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 \\ \lambda_2 X_2 \\ \lambda_3 X_3 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Daraus ergibt sich der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

sowie der linke bzw. rechte Cauchy-Green-Verzerrungstensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Damit lautet die Gleichung (4.30)

$$\hat{W}(\mathbf{C}) = \hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (4.53)$$

Die Bedingung  $\hat{W}(\mathbf{I})$  des Zustands in der Referenzkonfiguration lautet nun

$$W(1, 1, 1) = 0. \quad (4.54)$$

## 4 Hyperelastizität

---

Nach [73, S. 219] ergeben sich die Hauptspannungen der Cauchy-Spannung  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  über

$$\sigma_i = J^{-1} \lambda_i \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_i}, i = 1, 2, 3, \quad (4.55)$$

mit

$$J = \det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (4.56)$$

Formuliert man die Transformationen (3.58) und (3.61) in den Hauptstreckungen, so lauten diese jeweils für  $i = 1, 2, 3$ :

$$P_i = J \frac{1}{\lambda_i} \sigma_i, \quad (4.57)$$

$$S_i = J \frac{1}{\lambda_i^2} \sigma_i. \quad (4.58)$$

Damit ergeben sich die Darstellungen der Hauptspannungen für den ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor

$$P_i = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_i}, i = 1, 2, 3, \quad (4.59)$$

bzw. für den zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor

$$S_i = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_i}, i = 1, 2, 3. \quad (4.60)$$

Ist das Material zusätzlich inkompressibel, so erhält man durch Ableiten von

$$\hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - p(J - 1) \quad (4.61)$$

die Darstellungen der Hauptspannungen für den Cauchy'schen Spannungstensor sowie für den ersten und zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_i} - p, \quad (4.62)$$

$$P_i = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_i} - \frac{p}{\lambda_i}, \quad (4.63)$$

$$S_i = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_i} - \frac{p}{\lambda_i^2}, \quad (4.64)$$

jeweils für  $i = 1, 2, 3$ .

### 4.1.5 Konstitutive Gleichungen für einfache Deformationszustände

Für die in Abschnitt 3.2 eingeführten einfachen Deformationszustände werden im Folgenden die entsprechenden konstitutiven Gleichungen für eine beliebige Verzerrungsenergiefunktion hergeleitet. Dabei wird stets vorausgesetzt, dass das Material isotrop und inkompressibel ist. Da es sich bei den vorgestellten einfachen Deformationen um höchstens ebene Spannungszustände handelt, verschwindet die Spannung stets in einer Richtung. Es gelte o.B.d.A die Bedingung

$$\sigma_3 = 0. \quad (4.65)$$

Für den einachsigen Zug gilt zusätzlich, dass die Spannung in eine weitere Richtung verschwindet.

Mit der Gleichung (4.62) gilt für ebene Spannungszustände

$$\sigma_3 = \lambda_3 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_3} - p = 0 \iff p = \lambda_3 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_3}. \quad (4.66)$$

Zur Bestimmung von  $p$  benötigt man die Ableitung  $\partial \hat{W} / \partial \lambda_3$ . Mit der Kettenregel gilt analog zu Gleichung (4.35)

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_3} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_3}. \quad (4.67)$$

Die Invarianten lauten für den Deformationsgradienten (4.51):

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C} = \text{tr} \mathbf{F}^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (4.68)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - \text{tr} \mathbf{C}^2] = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2, \quad (4.69)$$

$$I_3 = \det \mathbf{C} = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \quad (4.70)$$

Setzt man dies abgeleitet nach  $\lambda_3$  in (4.66) ein, so ergibt sich

$$p = \lambda_3 \left[ \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} 2\lambda_3 + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} (2\lambda_3 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)) \right] = 2\lambda_3^2 \left[ \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right]. \quad (4.71)$$

Damit berechnet man die Darstellung der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  der Cauchy-Spannung. Einsetzen von  $p$  in

$$\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \lambda_1} - p \quad (4.72)$$

ergibt

$$\sigma_1 = 2\lambda_1 \left[ \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2} \right] - p = 2 [\lambda_1^2 - \lambda_3^2] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 [\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_2^2 \lambda_3^2] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}. \quad (4.73)$$

Analog lautet

$$\sigma_2 = 2 [\lambda_2^2 - \lambda_3^2] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 [\lambda_1^2 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_3^2] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}. \quad (4.74)$$

Mit der Inkompressibilitätsbedingung  $I_3 = 1$  eliminiert man die Größe  $\lambda_3$ . Dies vereinfacht die Darstellung der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  der Cauchy-Spannung:

$$\sigma_1 = 2 \left[ \lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}, \quad (4.75)$$

$$\sigma_2 = 2 \left[ \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_2^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}. \quad (4.76)$$

Es werden nun Konstitutivgesetze für die einfachen Belastungszustände aus Abschnitt 3.2 hergeleitet. Für einen uniaxialen Zugversuch gilt  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\lambda}$ . Damit lautet das Konstitutivgesetz mit  $\sigma := \sigma_1$

$$\sigma = 2 \left[ \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}. \quad (4.77)$$

In Gleichung (4.77) hängt die Spannung somit nur noch von der Streckung  $\lambda$  und der konkreten Verzerrungsenergiefunktion ab. Die Spannung  $\sigma_2$  verschwindet, was man durch Einsetzen der Hauptstreckungen in (4.76) nachprüfen kann. Dies ist konsistent mit den Annahmen des einachsigen Zugversuchs für inkompressible Materialien. Formuliert man Gleichung (4.77) mittels der ersten Piola-Kirchhoff-Spannung, so gilt mit Gleichung (4.57)

$$P = 2 \left[ \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}. \quad (4.78)$$

Für einen äquibiaxialen Zug lauten die Hauptspannungen  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  und  $\lambda_3 = \lambda^{-2}$ . Damit lautet das Konstitutivgesetz für die Hauptspannung  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$  der Cauchy-

Spannung:

$$\sigma = 2 \left[ \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda^4 - \frac{1}{\lambda^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}. \quad (4.79)$$

Analog zum uniaxialen Fall berechnet man die Darstellung durch die erste Piola-Kirchhoff-Spannung

$$P = 2 \left[ \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}. \quad (4.80)$$

Für den ebenen Zug (pure shear) gilt  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = 1$  und  $\lambda_3 = \lambda^{-1}$ . Damit lauten die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  der Cauchy-Spannung:

$$\sigma_1 = 2 \left[ \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}, \quad (4.81)$$

$$\sigma_2 = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda^2 - 1 \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}, \quad (4.82)$$

sowie der ersten Piola-Kirchhoff-Spannung

$$P_1 = 2 \left[ \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}, \quad (4.83)$$

$$P_2 = 2 \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_1} + 2 \left[ \lambda^3 - \frac{1}{\lambda} \right] \frac{\partial \hat{W}}{\partial I_2}. \quad (4.84)$$

## 4.2 Hyperelastische Materialmodelle

Im folgenden Abschnitt werden die wichtigsten Materialmodelle vorgestellt, die im Verlauf dieser Arbeit dazu verwendet werden, das Spannungs-Dehnungsverhalten additiv gefertigter Proben zu beschreiben. Im Detail werden das Neo-Hooke-Modell, Mooney-Rivlin-Modell und Ogden-Modell vorgestellt. Eine Übersicht über weitere gängige Materialmodelle sind in [74, 95, 114] zu finden. Aus Gründen der Lesbarkeit wird in diesem Kapitel die isotrope Verzerrungsenergiefunktion stets mit  $W$  statt mit  $\hat{W}$  bezeichnet. Viele Autoren, wie z.B. Holzapfel, unterscheiden generell nicht zwischen  $\hat{W}$  und  $W$  [73].

### 4.2.1 Das Neo-Hooke-Modell

Die Struktur und die Eigenschaften von Polymeren lassen sich am besten durch ein Kettenmodell beschreiben [84]. Hierbei bilden  $n$  Kettenglieder der Länge  $l$  eine Gesamtkette

der Länge  $L = nl$ .

Bei der sogenannten Gauß-Kette handelt es sich um eine zufällige Aneinanderreihung der Kettenglieder nach dem Random-Walk-Modell unter der Annahme von frei, ungehinderter Drehbarkeit der Kettenglieder, d.h. jedes Kettenglied ist mit seinem nächsten in einem zufälligen Winkel verbunden. Fasst man jedes Kettenglied als Vektor  $\mathbf{l}_j$  auf, so kann man den Anfangs-End-Vektor  $\mathbf{r}$  einer Kette als Summe der Einzelvektoren auffassen [84]:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{l}_i \quad (4.85)$$

Die mögliche Anzahl von Anordnungen der Kettenglieder ist abhängig vom Abstand der beiden Enden der Kette. Ist die Kette komplett ausgedehnt, gibt es genau eine Möglichkeit, da alle Winkel  $180^\circ$  betragen. Je geringer der Abstand, desto mehr Möglichkeiten gibt es. Die Anzahl der Anordnungen ist normalverteilt [73, 84].

Mit diesem Modell als Grundlage wurde von Leslie Ronald George Treloar in den 1940er Jahren das Neo-Hooke-Modell entwickelt. Ausgehend von Wall's Arbeiten über statistische Thermodynamik von Gummi [142, 143] entwickelte Treloar in seinen Arbeiten über die Elastizität eines Netzwerkes langkettiger Moleküle [133, 134] das schließlich als Neo-Hooke-Modell bekannte Materialmodell. Die Namensgebung erfolgte im Jahre 1948 in der Arbeit von Rivlin [115].

Die Verzerrungsenergiefunktion lautet

$$W = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) , \quad (4.86)$$

wobei  $\mu$  den anfänglichen Schubmodul bezeichnet. Dieser ergibt sich aus

$$\mu = NkT , \quad (4.87)$$

wobei  $N$  die Anzahl der Molekülsegmente pro Einheitsvolumen,  $k$  die Boltzmann-Konstante und  $T$  die absolute Temperatur bezeichnet.

Die Spannungstensoren nach Cauchy sowie der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor lauten mit (4.49) und (3.58).

$$\mathbf{P} = -p \mathbf{F}^{-T} + \mu \mathbf{F} , \quad (4.88)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \mu \mathbf{b} . \quad (4.89)$$

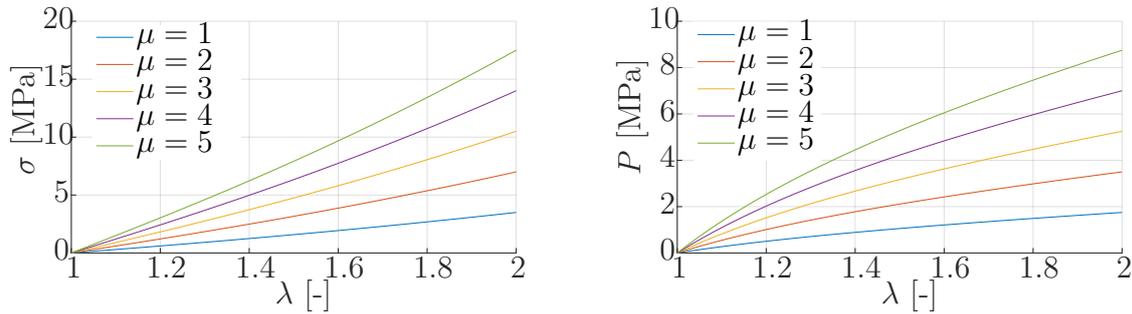
Das Neo-Hooke-Modell kann je nach Material zur Beschreibung von Dehnungen bis 30%–40% in uniaxialen Zugversuchen verwendet werden [62, S. 304]. Aus den Gleichungen (4.77) und (4.78) ergibt sich das Konstitutivgesetz für das Neo-Hooke-Modell für den

uniaxialen Zug formuliert in der Cauchy- bzw. in der ersten Piola-Kirchhoff-Spannung:

$$\sigma = \mu \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (4.90)$$

$$P = \mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (4.91)$$

Die Funktionen (4.90) und (4.91) sind für Dehnungen bis 100% und verschiedene Schubmoduln  $\mu$  in Abbildung 4.2 dargestellt.



**Abbildung 4.2:** Links: Uniaxiale Cauchy-Spannung  $\sigma$  des Neo-Hooke-Modells für  $\mu = 1, 2, \dots, 5$  [MPa]. Rechts: Uniaxiale erste Piola-Kirchhoff-Spannung  $P$  des Neo-Hooke-Modells für  $\mu = 1, 2, \dots, 5$  [MPa].

Zur Bestimmung des Parameters  $\mu$  aus experimentellen Daten reicht eine lineare Regression aus. Darauf wird in Kapitel 7 näher eingegangen.

### 4.2.2 Das Mooney-Rivlin-Modell

Das einfachste Modell, welches auch die zweite Invariante  $I_2$  berücksichtigt, ist das Mooney-Rivlin-Modell. Melvin Mooney, einer der beiden Namensgeber, schlug dieses Modell im Jahre 1940 erstmalig vor [98]. Ronald Rivlin formulierte das Modell von Mooney in Form der beiden Invarianten [116]. Die Verzerrungsenergiefunktion lautet

$$W = \frac{\mu_1}{2} (I_1 - 3) + \frac{\mu_2}{2} (I_2 - 3), \quad (4.92)$$

wobei sich der anfängliche Schubmodul  $\mu$  additiv aus  $\mu_1 + \mu_2 = \mu$  ergibt. Für die Parameter müssen die Bedingungen  $\mu_1 > 0$  und  $\mu_2 \geq 0$  erfüllt sein [70]. Die Spannungs-Dehnungs-Relationen lauten

$$\mathbf{P} = -p \mathbf{F}^{-T} + \mu_1 \mathbf{F} + \mu_2 (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{b}) \mathbf{F}, \quad (4.93)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \mu_1 \mathbf{B} - \mu_2 \mathbf{b}^{-1}. \quad (4.94)$$

Das Mooney-Rivlin-Modell kann je nach Material zur Modellierung von Zugversuchsdaten bei Dehnungen bis 80%–100% verwendet werden [62, S. 304]. Es ist genau wie das Neo-Hooke-Modell nicht in der Lage, die Verfestigung des Materials bei hohen Dehnungen abzubilden [62, S. 304].

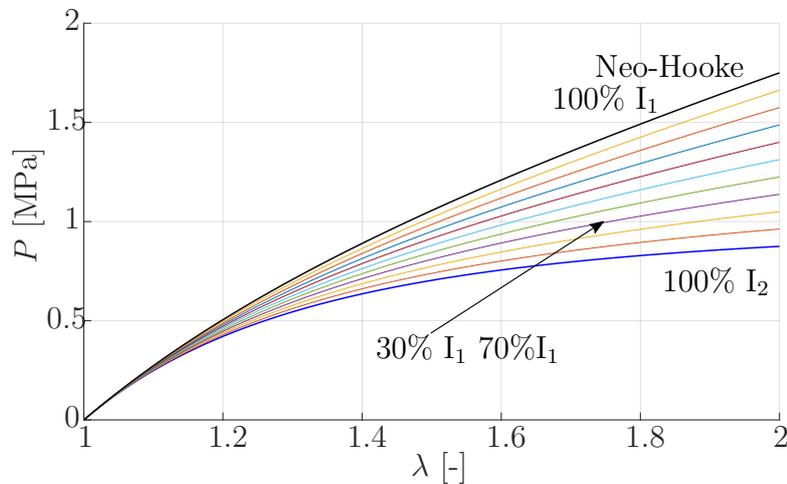
Für die einachsige Zugbelastung ergeben sich folgende Darstellung formuliert in der Cauchy- bzw. in der ersten Piola-Kirchhoff-Spannung:

$$\sigma = \mu_1 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + \mu_2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad (4.95)$$

$$P = \mu_1 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \mu_2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right). \quad (4.96)$$

Zur Bestimmung der Parameters  $\mu_1$  und  $\mu_2$  aus experimentellen Daten wird eine lineare Regression durchgeführt, vgl. Kapitel 7.

In Abbildung 4.3 sind verschiedene Gewichtungen der ersten bzw. zweiten Invariante in 10%-Punkte-Schritten für die erste Piola-Kirchhoff'sche Spannung im uniaxialen Zug dargestellt. Bei einer Gewichtung von 100% der ersten Invariante erhält man das Neo-Hooke-Modell, dargestellt in Schwarz. Die 100%ige Gewichtung der zweiten Invariante ist in Blau dargestellt. Man erkennt, dass eine reine Formulierung in der zweiten Invariante



**Abbildung 4.3:** Uniaxiale erste Piola-Kirchhoff-Spannung  $P$  des Mooney-Rivlin-Modells für  $\mu = 1$  [MPa] mit Gewichtung von  $I_2$  beginnend bei 0% (Neo-Hooke) in 10%-Punkte-Schritten bis 100%.

nicht sinnvoll ist. In diesem Fall würde für die erste Piola-Kirchhoff'sche Spannung gelten

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu_2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) = \mu_2 < \infty. \quad (4.97)$$

Dies ist ein Widerspruch, da man eine beliebig große Verformung mit einer beschränkten Spannung erreichen würde. Ebenfalls ist zu erkennen, dass eine Verfestigung nicht abgebildet werden kann, da die Funktion (4.96) für  $\lambda > 1$  und positive  $\mu_1, \mu_2$  streng konkav ist:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \left[ \mu_1 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \mu_2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right] = -\frac{6(2\mu_2 + \mu_1\lambda)}{\lambda^5} < 0.$$

### 4.2.3 Ogden

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Modellen ist das nach R. W. Ogden [104] benannte Materialmodell in den Hauptstreckungen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  formuliert. Die Verzerrungsenergiefunktion lautet

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3). \quad (4.98)$$

In unbelastetem Zustand gilt mit  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$W(1, 1, 1) = 0. \quad (4.99)$$

Aus den Parametern  $\mu_i$  und  $\alpha_i$  ergibt sich der Schubmodul durch den Zusammenhang

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i. \quad (4.100)$$

Es ist zu beachten, dass die Parameter  $\mu_i$  und  $\alpha_i$  in Gleichung (4.98) nicht beliebig gewählt werden dürfen. Zur Erfüllung des Postulats für stabiles Werkstoffverhalten nach D. C. Drucker [48] dient die als Hill's Stabilitätskriterium [72] bekannte Ungleichung:

$$d\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0. \quad (4.101)$$

Ogden leitet zur Erfüllung dieser Ungleichung die hinreichende Bedingung

$$\mu_i \alpha_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.102)$$

her [104]. Für  $N \geq 3$  muss die Bedingung (4.102) nicht für alle  $i$  erfüllt sein [105]. Wird zusätzlich an die Funktion die Eigenschaft der Polykonvexität gefordert, so lautet die Bedingung nach [39]

$$\mu_i > 0 \text{ und } \alpha_i \geq 1, \forall i = 1, \dots, N. \quad (4.103)$$

Aus dieser Bedingung folgt direkt die Gültigkeit von Gleichung (4.102).

Das Ogden-Modell kann auch zur Beschreibung von Spannungs-Dehnungs-Zusammenhängen bei sehr hohen Dehnungen von bis zu 700% verwendet werden [62, S. 304]. Es ist durch die variable Anzahl an Summanden mathematisch äußerst flexibel.

Für einen einachsigen Zug ergeben sich folgende Darstellungen der Cauchy- und der ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannung:

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_i} \right), \quad (4.104)$$

$$P = \sum_{i=1}^N \mu_i \left( \lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_i-1} \right). \quad (4.105)$$

Zum Anpassen der Materialparameter an experimentell gewonnene Messdaten benötigt man hier im Gegensatz zu dem Neo-Hooke- und dem Mooney-Rivlin-Modell einen nicht-linearen Regressionsansatz, vgl. Kapitel 7. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass die zu bestimmenden Parameter  $\alpha_i$  im Exponenten der Hauptstreckungen auftreten.

Durch eine passende Wahl der Parameter in (4.98) erhält man die zwei zu Beginn dieses Kapitels vorgestellten Modelle zurück. Für das Neo-Hooke-Modell (4.86) setzt man  $N = 1$ ,  $\mu_1 = \mu$  und  $\alpha_1 = 2$ . Für das Mooney-Rivlin-Modell (4.92) setzt man  $N = 2$ ,  $\alpha_1 = 2$  und  $\alpha_2 = -2$ .

Neben der oben dargestellten Variante (4.98) des Ogden-Modells existiert die Formulierung nach Valanis und Landel [139]. Diese lautet

$$W = \sum_{i=1}^N \frac{2\tilde{\mu}_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3). \quad (4.106)$$

Zum Umrechnen der Parameter  $\tilde{\mu}_i$  verwendet man die Gleichung

$$\tilde{\mu}_i = \frac{\mu_i \alpha_i}{2}. \quad (4.107)$$

Diese Formulierung ist z.B. in dem kommerziellen Finite-Elemente-Programm Abaqus implementiert.

# 5 Lineare Viskoelastizität

---

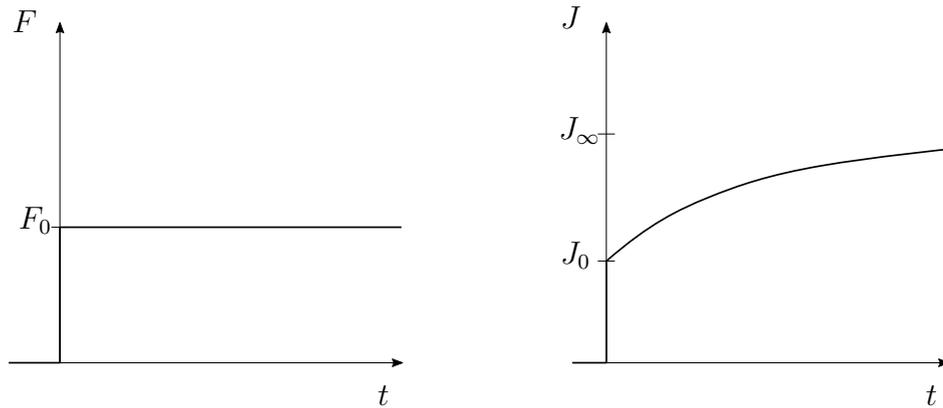
Zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens von Festkörpern wird angenommen, dass bei einer Be- bzw. Entlastung die Materialantwort stets zeitunabhängig erfolgt. Mit anderen Worten, es gilt das Hooke'sche Gesetz  $\sigma = E\varepsilon$  für alle Dehnraten  $\dot{\varepsilon}$ . Analog gilt für viskose Flüssigkeiten der Zusammenhang  $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ . Für viele Materialien, wie z.B. Polymere, reichen diese jeweils idealisierten Beschreibungen jedoch nicht aus [148]. Aus diesem Grund verwendet man zur Beschreibung der zeitabhängigen linearen Elastizität die sogenannte lineare Viskoelastizität, eine Kombination aus elastischen Festkörpern und viskosen Flüssigkeiten. In diesem Kapitel werden die Grundlagen dieser Theorie behandelt. Dazu werden zunächst die sogenannten Retardations- und Relaxationsfunktion zur Beschreibung des Kriech- und Relaxationsversuchs eingeführt. Zur Beschreibung dieser Funktionen verwendet man verschiedene, auf zwei Grundkörpern basierende rheologische Modelle. Neben der klassischen Beschreibung durch die Kombination von Federn und Dämpfern wird ein fraktionales Modell vorgestellt. Die Grundlagen, die in den Abschnitten 5.1 und 5.2 behandelt werden, basieren im Wesentlichen auf dem Buch von Schnell et al. [123].

## 5.1 Kriech- und Relaxationsversuch

Zur Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens wird in der Regel eins von zwei typischen Experimenten durchgeführt. Man unterscheidet zwischen dem sogenannten Kriechversuch und dem Relaxationsversuch. Diese einachsigen Zug- bzw. Druckversuche werden im Folgenden näher erläutert.

### 5.1.1 Kriechversuch und Retardationsfunktion

Zur Bestimmung des Kriechverhaltens von Materialien wird der namensgebende Kriechversuch durchgeführt. Im einfachsten Fall wird dieser anhand eines Zugstabs durchgeführt. In diesem Fall wird die Zugprobe mit einer definierten Kraft  $F_0$  belastet. Das Aufbringen der Kraft soll möglichst sprunghaft, jedoch nicht schlagartig erfolgen. Im weiteren Verlauf des Experiments wird diese Kraft für einen definierten Zeitraum konstant



**Abbildung 5.1:** Links: Verlauf der aufgebrachtten Kraft. Rechts: Verlauf der Retardationsfunktion  $J$ .

gehalten. Gemessen wird die aufgrund der aufgebrachtten Kraft resultierende Verschiebung  $u(t)$ . Berechnet man nun aus der Kraft  $F_0$  und dem Ausgangsquerschnitt  $A_0$  die technische Spannung zum Zeitpunkt  $t = 0$

$$\sigma_0 = \frac{F_0}{A_0}, \quad (5.1)$$

sowie den Verlauf der technischen Dehnung aus der ursprüngliche Messlänge des Probekörpers  $L_0$

$$\varepsilon(t) = \frac{u(t)}{L_0}, \quad (5.2)$$

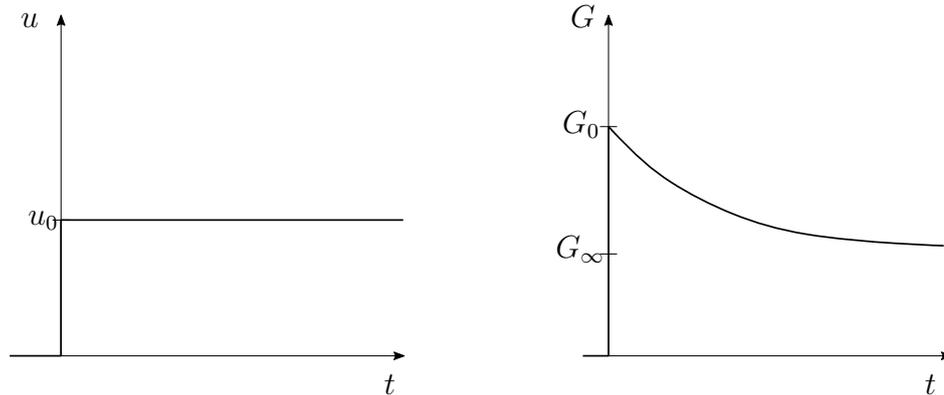
so ergibt sich die sogenannte Kriechfunktion, vgl. Abb. 5.1.

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}. \quad (5.3)$$

Die Kriechfunktion beschreibt die zeitlich verzögert eintretende Dehnung. Die Bezeichnung Retardationsfunktion stammt von dem lateinischen Wort *retardare* (verzögern) ab. Die Größe  $J_0$  wird als die momentane Nachgiebigkeit bezeichnet. Im Falle der Konvergenz von

$$J_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} J(t) \quad (5.4)$$

bezeichnet man den Grenzwert  $J_\infty$  als Gleichgewichtsnachgiebigkeit. Der Kriechversuch ist für *steife und halbsteife unverstärkte, gefüllte und faserverstärkte Kunststoff-Formmassen* z.B. in der Norm DIN EN ISO 899 definiert [11].



**Abbildung 5.2:** Links: Verlauf der aufgebrachtten Verschiebung. Rechts: Verlauf der Relaxationsfunktion  $G$ .

### 5.1.2 Relaxationsversuch und Relaxationsfunktion

Im Gegensatz zum Kriechversuch wird bei dem sogenannten Relaxationsversuch eine sprunghaft aufgebrachtte Verschiebung  $u_0$  über einen Zeitraum konstant gehalten. Analog zum Kriechversuch wird die aus der Verschiebung resultierende Kraft  $F(t)$  zu jedem Zeitpunkt  $t \geq 0$  gemessen. Bestimmt man den Verlauf der Spannung

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{A_0}, \quad (5.5)$$

sowie die quasi sprunghaft aufgebrachtte Dehnung

$$\varepsilon_0 = \frac{u_0}{L_0}, \quad (5.6)$$

so ergibt sich die Relaxationsfunktion

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \quad (5.7)$$

Die in Abb. 5.2 dargestellte Funktion beschreibt die zeitlich abnehmende Spannung. Die Größe  $G_0$  wird als die momentane Elastizität bezeichnet. Im Falle der Konvergenz von

$$G_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) \quad (5.8)$$

bezeichnet  $G_\infty$  den Gleichgewichtsmodul.

Beide Versuche beschreiben das viskoelastische Materialverhalten im geometrisch linearen Bereich. In der experimentellen Charakterisierung entspricht der Kriechversuch ei-

nem kraftgesteuerten Experiment, während der Relaxationsversuch einen weggesteuerten Versuch darstellt.

In der Theorie erfolgt die aufgebrachte Kraft bzw. Verschiebung in einem unendlich kleinen Zeitintervall. Mathematisch kann dies mit der Heaviside-Funktion (5.9) beschrieben werden:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , t > 0 \end{cases} . \quad (5.9)$$

Da solch ein Sprung in der Realität nicht durchführbar ist, soll die Belastung „schnell“ erfolgen. Dies wird beispielsweise in der Norm DIN EN ISO 899 [11] *als 1 s bis 5 s nach Beginn der Belastung* definiert. Im Allgemeinen sollte das Zeitintervall zur Aufbringung der Verschiebung bzw. Kraft im Vergleich zur Versuchsdauer sehr klein sein.

## 5.2 Rheologische Modelle

Zur Beschreibung des elastischen und viskosen Materialverhaltens werden nun zwei Grundelemente definiert. Aus diesen werden rheologische Modelle durch Reihen- und Parallelschaltungen erzeugt, mit denen man reale viskoelastische Festkörper und Flüssigkeiten modellieren kann. Der Begriff der Rheologie geht nach [123, S. 301] auf Eugene Cook Bingham und Marcus Reiner zurück. Ein Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Rheologie ist in Kapitel 3 in [130] zu finden.

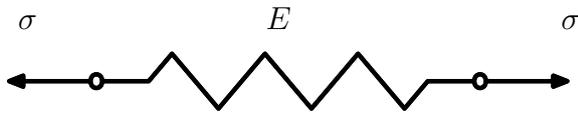
### 5.2.1 Elastisches und viskoses Grundelement

Das Hooke'sche Gesetz

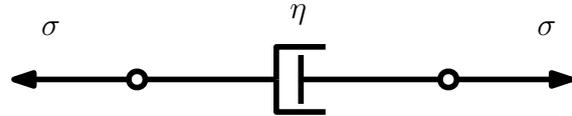
$$\sigma = E\varepsilon \quad (5.10)$$

kann in seiner eindimensionalen Form als lineares Federgesetz interpretiert werden. Das Aufbringen einer Spannung führt zu einer zur ihr proportionalen Dehnung. Entfernt man diese Belastung, so geht die Dehnung unmittelbar auf Null zurück. In diesem idealisierten Modell würde sich das Verhalten auch beim Aufbringen und Entfernen einer weiteren Belastung durch eine Spannung nicht verändern. Veranschaulicht wird dieses Verhalten durch eine Feder mit Federsteifigkeit  $E$ . Ein solcher Modellkörper wird als Hooke'sches Element oder als Federelement bezeichnet. Das Symbol des Elements ist in Abb. 5.3 dargestellt.

Das viskose Pendant zum Hooke'schen Element ist das Newton'sche Element, das vereinfacht als Dämpfer bezeichnet wird, vgl. Abb. 5.4. Das zugehörige Stoffgesetz, das



**Abbildung 5.3:** Hooke'sches Element mit E-Modul  $E$ .



**Abbildung 5.4:** Newton'sches Element mit Dämpfungskonstante  $\eta$ .

ursprünglich aus der Hydromechanik [123, S. 1] stammt, lautet

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}. \quad (5.11)$$

Bei Gleichung (5.11) handelt es sich ebenfalls um einen proportionalen Zusammenhang, hier zwischen der Spannung  $\sigma$  und der Dehnrates  $\dot{\epsilon}$ . Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  wird in der Hydromechanik als dynamische Viskosität bezeichnet. Im Kontext der Viskoelastizität wird sie Dämpfungskonstante genannt [123, S. 299].

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie aus diesen Grundelementen verschiedene rheologische Modelle entwickelt werden können.

## 5.2.2 Kelvin-Voigt und Maxwell-Element

Die vorgestellten Grundelemente Feder und Dämpfer können sowohl in Reihe als auch parallel geschaltet werden. Für genau zwei Elemente  $A$  und  $B$  gilt bei einer Parallelschaltung, dass die Dehnungen, die beide Elemente erfahren, gleich sind und dass sich die Spannungen addieren.

$$\epsilon = \epsilon_A = \epsilon_B, \quad (5.12)$$

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_B. \quad (5.13)$$

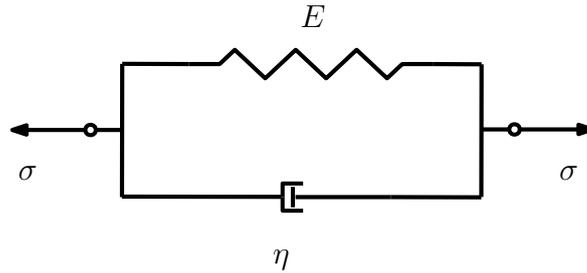
Bei einer Reihenschaltung von genau zwei Elementen  $A$  und  $B$  verhält es sich genau umgekehrt. Die Spannungen sind identisch und die Dehnungen addieren sich:

$$\sigma = \sigma_A = \sigma_B, \quad (5.14)$$

$$\epsilon = \epsilon_A + \epsilon_B. \quad (5.15)$$

Kombiniert man nun genau ein Hooke'sches Element mit einem Newton'schen Element, so erhält man für eine Parallelschaltung das sogenannte Kelvin-Voigt-Element, vgl. Abbildung 5.5. Nach Gleichung (5.13) gilt

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N. \quad (5.16)$$



**Abbildung 5.5:** Kelvin-Voigt-Element: Parallelschaltung von Feder und Dämpfer.

Hierbei bezeichnet  $\sigma_H$  die Spannung im Hooke'schen und  $\sigma_N$  die Spannung im Newton'schen Element. Einsetzen der Stoffgesetze (5.10) und (5.11) ergibt:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (5.17)$$

Zur Bestimmung der Kriechfunktion (5.3) modelliert man den sprunghaften Spannungsanstieg mit der Heaviside-Funktion

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t). \quad (5.18)$$

Schließlich erhält man mit der sog. Retardationszeit

$$\bar{\tau} = \frac{\eta}{E} \quad (5.19)$$

folgende inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\varepsilon + \bar{\tau}\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (5.20)$$

Als Lösung ergibt sich mit der Anfangsbedingung  $\varepsilon(0) = 0$  die Kriechfunktion

$$J(t) = \frac{1}{E} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}}\right) \right). \quad (5.21)$$

Schaltet man ein Hooke'sches Element mit einem Newton'schen Element in Reihe, so ergibt sich das sogenannte Maxwell-Element, dargestellt in Abbildung 5.6.



**Abbildung 5.6:** Maxwell-Element: Reihenschaltung von Feder und Dämpfer.

Aus der zeitlichen Ableitung von Gleichung (5.15) ergibt sich

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_H + \dot{\varepsilon}_N. \quad (5.22)$$

Differenziert man das Hooke'schen Gesetz (5.10) nach der Zeit und setzt dies zusammen mit dem Stoffgesetz für das Newton'sche Element (5.11) ein, so ergibt sich

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon} \quad (5.23)$$

mit der Relaxationszeit

$$\tau = \frac{\eta}{E}. \quad (5.24)$$

Gibt man eine sprunghafte Spannung  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  vor, so erhält man für das Maxwell-Element die Kriechfunktion

$$J(t) = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right). \quad (5.25)$$

Gibt man statt einer Spannung eine sprunghaft aufgebrachte Dehnung

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$$

vor, so ergibt sich die Relaxationsfunktion

$$G(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (5.26)$$

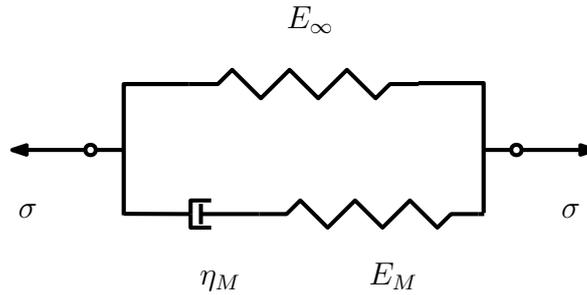
Für die Herleitungen sei auf [123, S. 337f] verwiesen.

### 5.2.3 Lineares Standardelement

Zur genaueren Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens reichen die bisher eingeführte Modelle nicht aus. Aus diesem Grund werden nun komplexere rheologische Modelle, bestehend aus mehreren Federn und Dämpfern, vorgestellt. Das einfachste Modell ist das lineare Standardelement. Hierbei kombiniert man eine zweite Feder entweder in Reihe mit einem Kelvin-Voigt-Element, oder parallel zu einem Maxwell-Element. Letzteres wird auch als Zener-Modell bezeichnet [150]. Es ist dargestellt in Abbildung 5.7.

Die mathematische Beschreibung erfolgt mittels der Differentialgleichung

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = E_\infty \varepsilon + (E_M + E_\infty) \tau \dot{\varepsilon}. \quad (5.27)$$



**Abbildung 5.7:** Lineares Standardelement, auch als Zener-Modell bezeichnet.

Zur Bestimmung der Relaxationsfunktion aus dieser Gleichung verwendet man das Superpositionsprinzip der Spannungen bei Parallelschaltungen (5.13). Damit gilt nach einer Normierung mit der aufgebrachten Dehnung  $\varepsilon_0$

$$G(t) = E_\infty + E_M \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (5.28)$$

Hierbei bezeichnet  $\tau = E_M/\eta_M$  wie zuvor die Relaxationszeit des Maxwell-Elements. An (5.28) erkennt man, dass lediglich die Steifigkeit des Maxwell-Elements abgebaut werden kann. Der Wert  $E_\infty$  des Hooke'schen Elements entspricht dem Gleichgewichtsmodul, der für  $t \rightarrow \infty$  erreicht wird. Es findet keine vollständige Spannungsrelaxation in endlicher Zeit statt. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ergibt sich eine momentane Elastizität von

$$E = E_\infty + E_M. \quad (5.29)$$

### 5.2.4 Verallgemeinertes Maxwell-Modell

Das im vorherigen Abschnitt behandelte Zener-Modell besitzt als Parameter lediglich eine Relaxationszeit. Zum Abbilden von Festkörpern, die mehrere Relaxationszeiten besitzen, verwendet man eine Erweiterung dieses Modells auf eine Parallelschaltung von einem Hooke'schen Element mit  $n$  Maxwell-Elementen, vgl. Abbildung 5.8. Man spricht von einem verallgemeinerten Maxwell-Modell, einer Maxwell-Gruppe oder einem Maxwell-Wiechert-Modell. Dieses Modell besteht aus  $2n + 1$  Parametern.

Die Relaxationsfunktion erhält man wiederum durch Superposition der Spannungen aufgrund von Eigenschaft (5.13). Es ergibt sich

$$G(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/\tau_i} \quad (5.30)$$

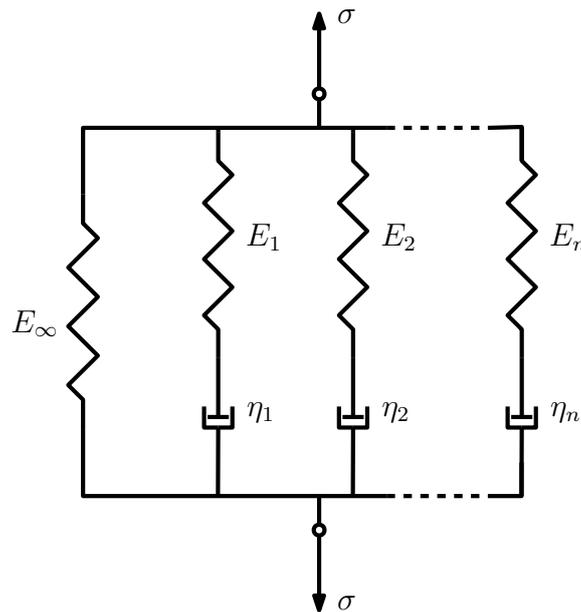


Abbildung 5.8: Verallgemeinertes Maxwell-Modell.

mit Relaxationszeiten

$$\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}. \quad (5.31)$$

Gleichung (5.30) wird auch als Prony-Reihe bezeichnet, obwohl es sich mathematisch gesehen um eine endliche Summe handelt.

## 5.3 Fraktionale Viskoelastizität

Das Konzept der fraktionalen Viskoelastizität wird seit Ende der 1970er Jahre intensiver behandelt [91], obwohl bereits in den 1930er Jahren erste Veröffentlichungen zu dem Thema erschienen sind [61]. Das Konzept der fraktionalen Viskoelastizität wird nun anhand des Gedächtnisintegrals der linearen Viskoelastizität motiviert [122]. Es gilt der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t G(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau. \quad (5.32)$$

Hierbei bezeichnet  $G(t)$  die Relaxationsfunktion. Eine mögliche Wahl für solch eine Funktion ist die Prony-Reihe (5.30). Andere Ansätze mit wenigen Parametern basieren auf

Potenzgesetzen der Form  $at^{-\alpha}$ . Setzt man dies in (5.32) ein, so erhält man

$$\sigma(t) = a \frac{d}{dt} \int_0^t \tau^{-\alpha} \varepsilon(t - \tau) d\tau. \quad (5.33)$$

Betrachtet werden nun die Stoffgesetze der Feder und des Dämpfers, Gleichungen (5.10) und (5.11) unter dem Gesichtspunkt des Ableitungsgrades. Die Spannung wird entweder über die nullte oder die erste Ableitung der Dehnung beschrieben. Dieses Konzept wird nun auf einen Parameter  $\nu \in (0, 1)$  erweitert. Man erhält ein fraktionales Element, welches zwischen einer Feder und einem Dämpfer interpoliert. Nach [82] gilt die Formulierung des Stoffgesetzes

$$\sigma = p \frac{d^\nu}{dt^\nu} \varepsilon(t) \quad (5.34)$$

mit Parameter

$$p = E \left( \frac{\eta}{E} \right)^\nu. \quad (5.35)$$

Durch die Grenzbetrachtungen  $\nu \rightarrow 0$ , bzw.  $\nu \rightarrow 1$  erhält man das Hooke'sche Gesetz respektive das Stoffgesetz des Dämpfers zurück.

Eine mögliche Definition der fraktionalen Ableitung vom Grad  $\nu \in (0, 1)$  ist die Riemann-Liouville-Definition, vgl. Gleichung (2.103) in [109, S. 68]. Es ergibt sich mit  $k = 1$  die Darstellung

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{-\nu} f(\tau) d\tau. \quad (5.36)$$

Hierbei bezeichnet  $\Gamma$  die Euler'sche Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (5.37)$$

Setzt man nun (5.34) in (5.36) ein, so erhält man

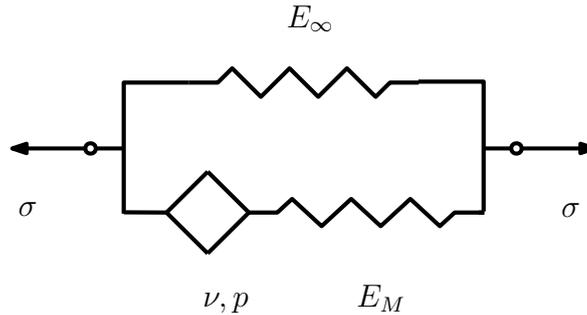
$$\sigma(t) = p \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \frac{d}{dt} \int_0^t \tau^{-\nu} \varepsilon(t - \tau) d\tau. \quad (5.38)$$

Ein Vergleich von (5.38) mit (5.33) ergibt mit  $a = p/(\Gamma(1 - \nu))$ , dass beide Gleichungen denselben Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung beschreiben.

Das neu definierte Element wird in der Literatur als *spring-pot* bezeichnet [82], einer Mischung aus den Wörtern *spring* für die Feder und *dash-pot* für den Dämpfer. Dieses

Element besitzt stets zwei Materialparameter  $\nu$  und  $p$  und wird üblicherweise durch eine Raute gekennzeichnet.

Zur Bestimmung der Relaxationsfunktion wird nun das fraktionale Zener-Modell verwendet. Dazu wird im konventionellen Zener-Modell der Dämpfer durch ein fraktionelles Element ersetzt, vgl. Abbildung 5.9.



**Abbildung 5.9:** Fraktionales Zener-Modell.

Die fraktionale Differenzialgleichung lautet nun nach Bagley und Torvik [25]

$$\sigma(t) + \tau \frac{d^\nu}{dt^\nu} \sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t) + (E_M + E_\infty) \tau \frac{d^\nu}{dt^\nu} \varepsilon(t). \quad (5.39)$$

Zur Beschreibung der Relaxation verwenden Bagley und Torvik [25] die vereinfachte Form der Relaxationsfunktion

$$G(t) = (E_m + E_\infty) H(t) + \sigma_0(t) \quad (5.40)$$

mit dem momentanen Elastizitätsmodul  $E_m + E_\infty$ . Die Funktion  $\sigma_0(t)$  stellt die eigentlich abnehmende Spannung dar. Für die Dehnung wird die Heaviside-Funktion verwendet:

$$\varepsilon(t) = H(t). \quad (5.41)$$

Setzt man die Gleichungen (5.40) und (5.41) in (5.39) ein, so ergibt sich

$$\sigma_0(t) + \tau \frac{d^\nu}{dt^\nu} \sigma_0(t) = -E_M H(t). \quad (5.42)$$

Mittels einer Laplace-Transformation ergibt sich die algebraische Gleichung

$$\sigma_0^*(s) + \tau s^\nu \sigma_0^*(s) = -\frac{E_m}{s} \quad (5.43)$$

mit der Lösung

$$\sigma_0^*(s) = -\frac{E_m}{(1 + \tau s^\nu)s}. \quad (5.44)$$

Die Lösung  $\sigma_0(t)$  ergibt sich nun nach einer inversen Laplace-Transformation:

$$\sigma_0(t) = -E_M + E_M \left( \int_0^\infty \frac{u^{\nu-1} \sin(\pi\nu) \exp(-ut\tau^{-1/\nu})}{\pi(1 + 2u^\nu \cos(\pi\nu) + u^{2\nu})} du \right). \quad (5.45)$$

Ein Beweis ist im Anhang von [25] angegeben.

Setzt man dies schließlich in (5.40) ein, so ergibt sich die Relaxationfunktion für das fraktionale Zener-Modell:

$$G(t) = E_\infty + E_M \left( \int_0^\infty \frac{u^{\nu-1} \sin(\pi\nu) \exp(-utb^{-1/\nu})}{\pi(1 + 2u^\nu \cos(\pi\nu) + u^{2\nu})} du \right). \quad (5.46)$$

In [25] wird gezeigt, dass das Integral für  $t = 0$  den Wert 1 ergibt und dass es für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert. Das bedeutet, dass die Gleichung (5.46) dieselben Eigenschaften wie das lineare Standardelement (5.28) besitzt:

$$G(0) = E_\infty + E_M \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = E_\infty. \quad (5.47)$$

Dieses numerisch schwierig zu handhabende Integral besitzt eine alternative Darstellung mittels der Mittag-Leffler-Funktion [97]. Diese geht auf den schwedischen Mathematiker Magnus Gösta Mittag-Leffler zurück. Neben einer zweiparametrischen Darstellung existiert eine Formulierung mit einem reellwertigen Parameter  $\nu$ . Dargestellt über eine Potenzreihe lautet sie

$$E_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\nu k + 1)}, \nu \in (0, 1), z \in \mathbb{C}. \quad (5.48)$$

Die Mittag-Leffler-Funktion stellt eine Interpolation zwischen einer Exponentialfunktion und einer funktionalen Repräsentation der geometrischen Reihe dar. Es ergeben sich die Grenzfälle für  $\nu = 1$

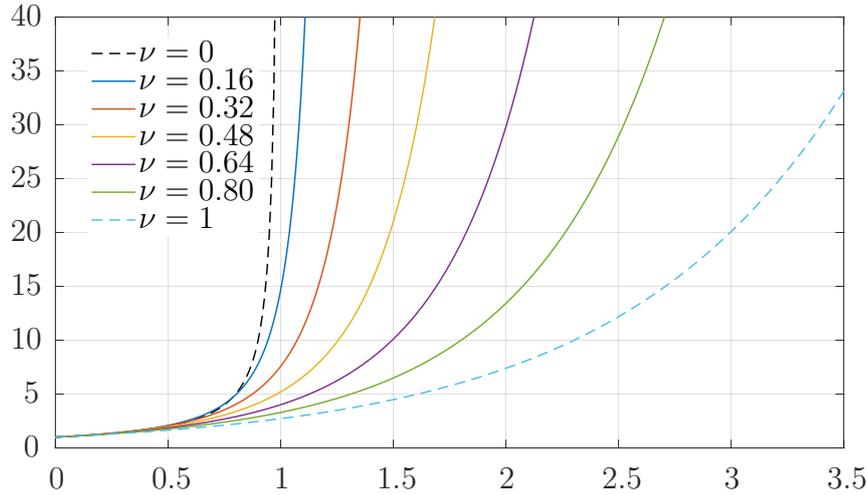
$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \exp(z), z \in \mathbb{C} \quad (5.49)$$

und für  $\nu = 0$

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1. \quad (5.50)$$

Hierbei wurden die Eigenschaften  $\Gamma(k+1) = k!$  und  $\Gamma(1) = 0! = 1$  der Euler'schen Gammafunktion verwendet.

Die Mittag-Leffler-Funktion ist in Abbildung 5.10 für verschiedene Parameter  $\nu \in [0, 1]$  dargestellt.



**Abbildung 5.10:** Darstellung der Mittag-Leffler-Funktion für verschiedene Parameter  $\nu$ .

Setzt man in die Mittag-Leffler Funktion (5.48) das Argument  $-t^\nu$  ein, so gilt

$$E_\nu(-t^\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + 1)}, \quad \nu \in (0, 1), t > 0. \quad (5.51)$$

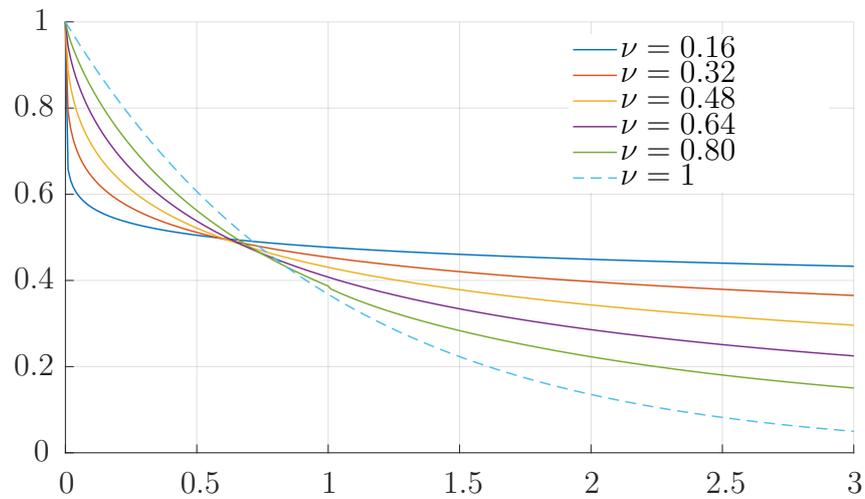
In diesem Fall stellt die Funktionenschar eine Familie streng monoton fallender Funktionen dar. Alle Graphen gehen durch den Punkt  $(0, 1)$ . Ferner konvergiert die Mittag-Leffler Funktion in der Darstellung (5.51) für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null [92], vgl. Abbildung 5.11.

Wie bereits erwähnt, kann Gleichung (5.46) durch die Mittag-Leffler-Funktion in der Formulierung (5.51) dargestellt werden, vgl. [66, 93, 94]. Hierbei fließt noch eine weitere Konstante  $\tau$  mit ein, die als Relaxationszeit interpretiert werden kann. Mainardi und Gorenflo formulieren das fraktionale Zener-Modell als Ersatz für ein verallgemeinertes Maxwell-Modell in [93] durch

$$G(t) = E_\infty + E_M E_\nu(-(t/\tau)^\nu), \quad t \geq 0. \quad (5.52)$$

Man erkennt dieselben Eigenschaften des linearen Standardelements (5.28)

$$G(0) = E_\infty + E_M \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = E_\infty. \quad (5.53)$$



**Abbildung 5.11:** Darstellung der Mittag-Leffler-Funktion mit Argument  $-t^\nu$  für verschiedene Parameter  $\nu$ .

Zu beachten ist, dass im fraktionalen Zener-Modell stets vier Parameter bestimmt werden müssen. In Kapitel 7 werden diese Parameter an experimentell ermittelte Daten angepasst.

## 6 Experimentelle Untersuchung 3D gedruckter Materialien

---

In diesem Kapitel wird das Prozedere der experimentellen Untersuchung vorgestellt. In den Abschnitten 6.1 und 6.2 wird auf die Erstellung der Proben und die damit verbundenen Schwierigkeiten eingegangen. Insbesondere wird gezeigt, dass die innere Struktur der Probe beim FDM-Druck eine entscheidende Rolle spielt. Für Proben, die mittels des SLA-Verfahrens gefertigt werden, treten diese Schwierigkeiten nicht auf, da die Proben bei hinreichender Nachbearbeitung annähernd isotrop und homogen sind [101]. Die Isotropie des gedruckten Materials wurde auch vom Hersteller selbst in einer Arbeit gezeigt [59].

Im Anschluss werden in Abschnitt 6.3 die verschiedenen einachsigen Zugversuche vorgestellt. Mittels monotoner Zugversuche bis zum Versagen wird zunächst das hyperelastische Verhalten FDM-gedruckter Proben untersucht. Der Fokus liegt hierbei zunächst auf der inneren Geometrie der FDM-gedruckten Proben und deren Einfluss auf die Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge, sowie auf den Versagensmoden. Ausgehend von einer optimalen inneren Struktur werden dann verschiedene Filamentmaterialien untersucht. Zur Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens werden zusätzlich Relaxationsversuche durchgeführt.

Die Probengeometrie für einachsige Zugversuche von Kunststoffen oder hochelastischen Materialien wie vulkanisiertem Gummi und thermoplastischen Elastomeren sind in verschiedenen Normen definiert. Bei Kunststoffen werden in der Regel die Geometrien z.B. nach den Normen DIN EN ISO 527-1/2 [8, 9], ASTM D638 [3] oder anderen verwendet. Für hochelastische Materialien findet man entsprechende Vorgaben in den den Normen ISO 37 [14], ASTM D412 [2] und DIN 53504 [6].

Für das SLA-Verfahren wird zusätzlich das Druckverformungsverhalten nach DIN ISO 7743 [13] untersucht.

### 6.1 FDM-gedruckte Prüfkörper

Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene flexible Filamente für den FDM-Druck untersucht. Der Schwerpunkt liegt auf thermoplastischen Elastomeren – thermoplastischen Polyurethanverbindungen (TPU) und thermoplastischen Copolyesterelastomeren (TPC). Die zentrale Frage ist hierbei, inwieweit man herkömmliche Materialgesetze für isotrope, inkompressible Materialien auf gedruckte Materialien anwenden kann, und unter welchen Bedingungen. Bevor auf die Probenerstellung eingegangen wird, werden zunächst die wichtigsten Materialien aus dem Bereich des FDM-Drucks vorgestellt

#### 6.1.1 Wichtige Filamentmaterialien

Wie in Kapitel 2.2.2 beschrieben wurde, werden beim FDM-Druck Kunststofffilamente aufgeschmolzen und an der gewünschten Position extrudiert. Durch das Abkühlen verfestigt sich das Material und härtet aus. Aus der Gruppe der Polymere, die man in der Regel in Thermoplaste, Duroplaste und Elastomere einteilt [28, S. 277], sind thermoplastische Polymere die einzigen Kunststoffe, die diese Eigenschaften erfüllen. Bei Erhitzung unterhalb der Zersetzungstemperatur lösen sich die intermolekularen Sekundärbindungen, und das Material geht in eine zähflüssige Form über. Die stärkeren primären Verbindungen bleiben hierbei jedoch intakt.

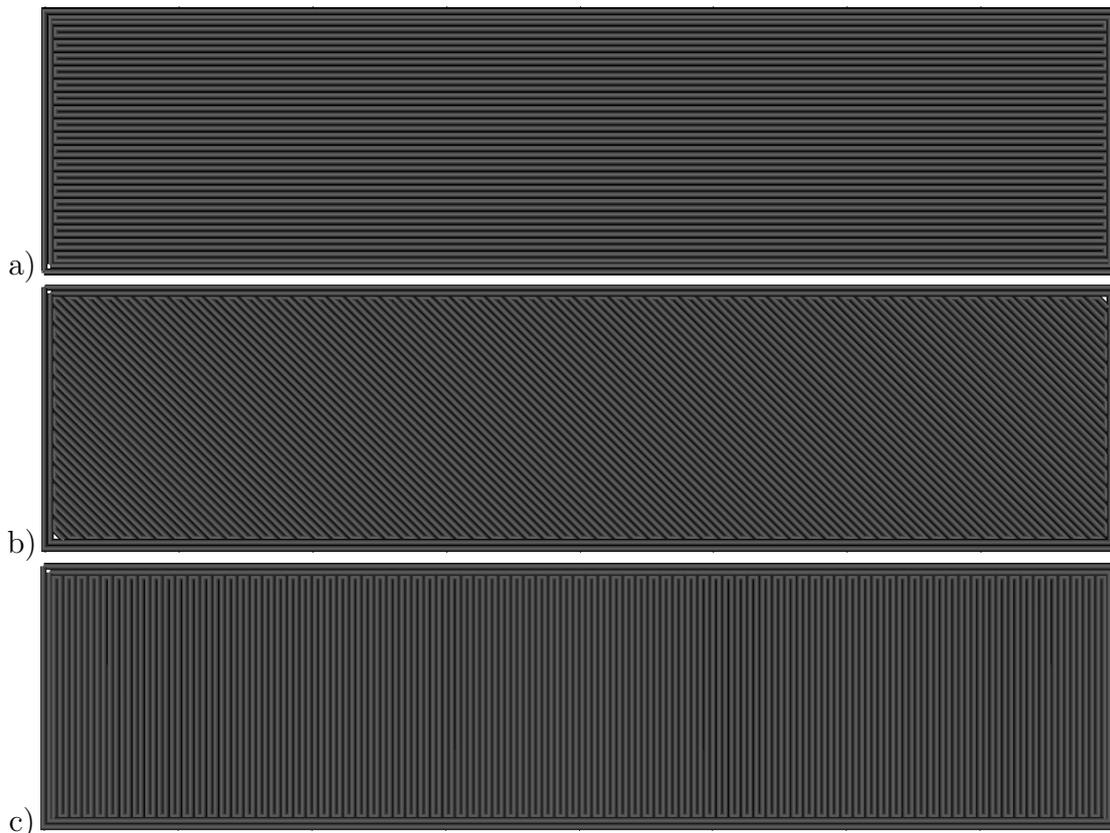
Die meisten FDM-Drucker können ohne weitere Modifikation Filamente aus Polylactid-Polymeren (PLA) und Acrylnitril-Butadien-Styrol-Copolymeren (ABS) verarbeiten. Polylactid-Polymere sind thermoplastische Kunststoffe auf Basis natürlicher Milchsäuren. Diese werden meist durch die Fermentation landwirtschaftlicher Erzeugnisse gewonnen [17]. Wie bei allen Filamentmaterialien, die im FDM-Druck eingesetzt werden, ist es schwierig, verlässliche Materialkennwerte zu finden. Grund hierfür ist, dass das gedruckte Material andere Materialeigenschaften aufweist, als das unverarbeitete Rohmaterial [79]. Gedruckte PLA-Zugproben weisen je nach Drucker einen E-Modul von 2000 - 2500 MPa auf, [49].

Im Gegensatz zu PLA handelt es sich bei Acrylnitril-Butadien-Styrol-Copolymeren um rein synthetisch hergestellte Kunststoffe. Eine bekannte Anwendungsform für ABS sind Legosteine und Playmobil-Figuren. Der E-Modul von FDM-gedruckten Zugproben aus ABS liegt mit 1300 - 1900 MPa unterhalb des E-Moduls von ABS [49].

Neben den klassischen Filamentmaterialien ABS und PLA existieren viele weitere, z.T. exotische Filamenttypen. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Schwerpunkt auf thermoplastische Elastomere (TPE) gelegt. Diese vereinen die thermischen Eigenschaften von thermoplastischen Polymeren mit den mechanischen Eigenschaften von Elastomeren [54, S. 167]. Wichtige Unterklassen von thermoplastischen Elastomeren sind thermoplastische Polyurethane (TPU) und thermoplastische Copolyester (TPC) [54, S. 172].

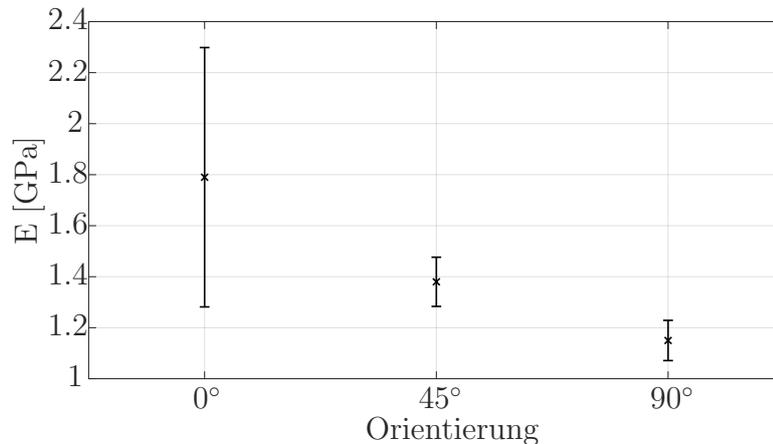
### 6.1.2 Erstellung FDM-gedruckte Zugproben

Im Gegensatz zum SLA-Verfahren existieren beim FDM-Druck prozessbedingte Anisotropien in den gedruckten Objekten [18, 59]. In [18] wird ebenfalls gezeigt, dass der Einfluss der inneren Orientierung einer der wichtigsten Faktoren ist. Dies wird in der Arbeit von Casavola et al. [37] aufgegriffen. Es werden Proben mit verschiedenen Druckorientierungen aus ABS gefertigt und unter einer einachsigen Belastung untersucht. Es wird gezeigt, dass in Zugrichtung gedruckte Proben, vgl. Abb. 6.1 a), mit  $1,79 \pm 0,18$  GPa den größten E-Modul aufweisen.



**Abbildung 6.1:** Orientierung des inneren Druckbereichs. a) Druck in Zugrichtung ( $0^\circ$ ), b) diagonale Orientierung ( $45^\circ$ ) und c) Druck senkrecht zur Zugrichtung ( $90^\circ$ ).

Die untere Grenze stellen Proben dar, die senkrecht zur Druckrichtung gedruckt worden sind, vgl. Abb. 6.1 c). Hier ergab sich ein E-Modul von  $1,15 \pm 0,094$  GPa. Schließlich liegt die diagonale Orientierung unter einem Winkel von  $45^\circ$ , Abb. 6.1 b), mit  $1,38 \pm 0,11$  GPa zwischen diesen Werten. Aus den berichteten Standardabweichungen und dem Stichprobenumfang wird ein 95% Konfidenzintervall für den unbekanntem mittleren E-Modul berechnet. Die Werte sind in Abbildung 6.2 dargestellt.



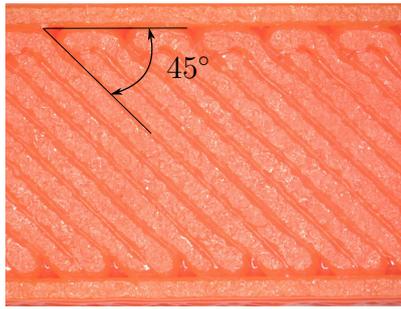
**Abbildung 6.2:** Mittelwert der E-Moduln mit 95% Konfidenzintervall der Daten aus [37]

Man erkennt, dass der größte mittlere E-Modul bei Druck in Zugrichtung erreicht wird. Allerdings streuen diese Werte sehr stark, sodass man zu einem Signifikanzniveau von 95% nicht zwischen der 0°- und der 45°-Orientierung unterscheiden kann. Lediglich der erwartete mittlere E-Modul bei einer 90°-Orientierung lässt sich scharf von den anderen Orientierungen trennen.

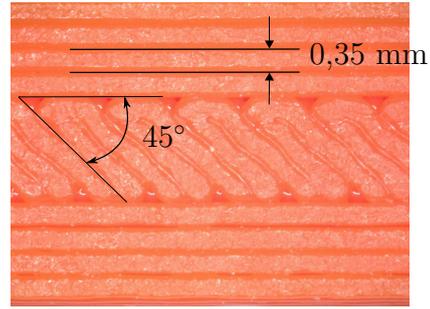
Aufgrund der hohen Streuung wird zur Untersuchung des Materialverhaltens von flexiblen Materialien eine Orientierung von 45° gewählt. Ein weiterer Grund für diese Wahl liegt in den schlechteren Haftungseigenschaften des gewählten Materials. Im Gegensatz zu dem härteren Acrylnitril-Butadien-Styrol ist es bei flexiblen Filamenten nicht möglich, eine Probe komplett in Zugrichtung zu drucken. Die Verbindungen der einzelnen Schichten haften bei 100% Füllmaterial und Druck in einer Richtung nicht mehr zusammen. Im Experiment führt dies zu Delamination im Bereich des Radius der Zugprobe. Nähere Ausführungen folgen in Abschnitt 6.3.

In Abbildung 3 in [37] erkennt man, dass die Zugproben mit jeweils zwei Randschichten gedruckt worden sind. Zur Untersuchung des Einflusses der Anzahl der Randschichten auf die mechanischen Eigenschaften und das Verhalten bei Versagen werden Proben mit der minimalen und maximalen Anzahl an Randschichten gedruckt. Die untere Grenze stellte genau eine Randschicht dar, vgl. Abbildung 6.3. Die obere Grenze ergab sich mit vier Randschichten, siehe Abbildung 6.4.

Die Proben werden zunächst mit einem Leapfrog Xeed FDM-Drucker erstellt. Der Düsendurchmesser, vgl. Abbildung 2.3, beträgt 0,35 mm. Um eine gewünschte Dicke von 2 mm zu erreichen, wird die Schichtdicke auf 0,286 mm gesetzt, was genau sieben Schichten entspricht. Nach dem Druck der Randschicht, bzw. der Randschichten wird das Innere der Probe diagonal in einem Winkel von 45° gedruckt. Hierbei wird die Orientierung nach jeder Schicht gespiegelt. Nach den ersten Versuchen zur Bestimmung der Anzahl der



**Abbildung 6.3:** Ausschnitt einer Zugprobe mit einer Randschicht.



**Abbildung 6.4:** Ausschnitt einer Zugprobe mit vier Randschichten.

Randschichten werden alle weiteren Proben mit einem Anycubic Prusa i3 FDM-Drucker erstellt. Hierbei wird die Schichthöhe auf 0,2 mm bei zehn Schichten gesetzt. Außerdem wird der Druck dahingehend optimiert, dass weniger Leerstellen in der gedruckten Probe vorhanden sind. Details über den Einfluss der Parameter werden in Abschnitt 6.3 beschrieben.

Bei den zu untersuchenden Materialien handelt es sich zum einen um ein thermoplastisches Elastomerfilament auf Urethanbasis (TPU) mit dem Handelsnamen NinjaFlex, sowie um ein thermoplastisches Copolyester (TPC) mit Namen Arflex 45. Zu dem erstgenannten Material existiert eine Veröffentlichung, in der einige Materialeigenschaften genannt werden [129]. Die Herstellerangaben zu verschiedenen Materialeigenschaften sind, soweit vorhanden in Tabelle 6.1 angegeben.

**Tabelle 6.1:** Materialeigenschaften von NinjaFlex (TPU) und Arflex 45 (TPC) (Herstellerangaben).

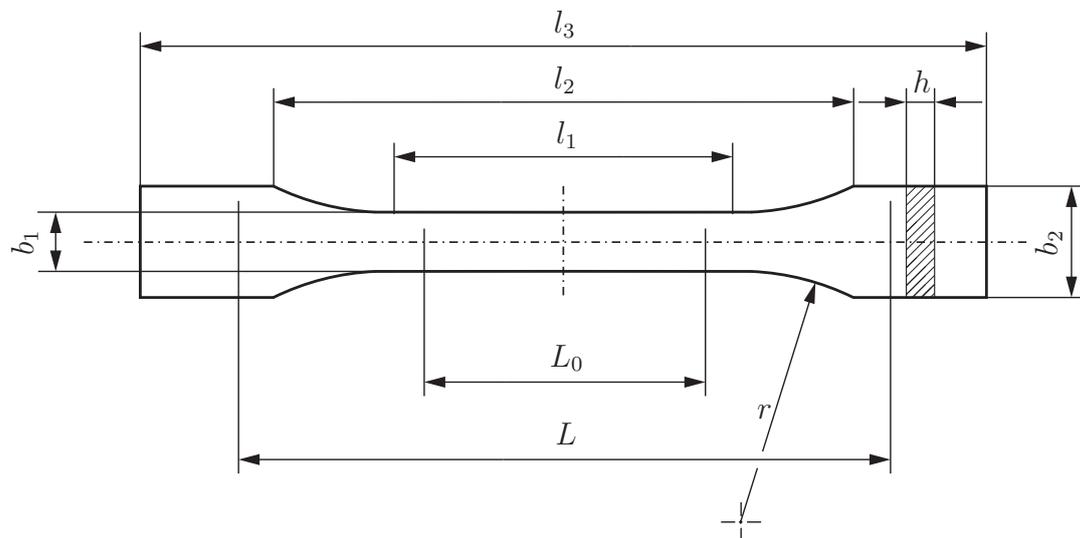
	TPU	Norm	TPC	Norm
SHORE-Härte	85A	ASTM D2240	45D	k.A.
E-Modul	12 MPa	ASTM D638	95 MPa	k.A.
Zugfestigkeit	4 MPa	ASTM D638	-	
Zugdehnung	65%	ASTM D638	-	
Zerreißfestigkeit	26 MPa	ASTM D638	24 MPa	k.A.
Bruchdehnung	660%	ASTM D638	530%	k.A.

Bei dem TPU beziehen sich die Angaben auf gedruckte Proben nach den den Normen ASTM D638 Typ IV [3] bzw. ASTM D2240 [1]. Das Innere der Zugproben wird in einer Orientierung von 45° gedruckt, es wird keine Aussage über die Anzahl der Randschichten getroffen. Die quaderförmigen Proben zur Bestimmung der Härte besitzen die Maße 50,8 mm (2 Zoll) für die Breite und Länge, und sind 19,05 mm (0,75 Zoll) hoch. Die Proben wurden auf einem TAZ5-Drucker mit einem Düsendurchmesser von 0,75 mm

hergestellt. Bei dem TPC sind keine Angaben zur verwendeten Norm oder Druckmethode zu finden.

Die Druckparameter zum Druck der Zugproben orientieren sich an den Herstellerangaben. Der Druck erfolgt mit einer Geschwindigkeit von 40 mm/s. Für das TPU ist eine Extrudertemperatur von 225-235°C angegeben. Für das TPC liegt sie mit 235-255°C etwas darüber. Das Druckbett wird auf 60°C (TPU) bzw. 90°C (TPC) beheizt.

Im Gegensatz zum Hersteller, der die Norm ASTM D638 verwendet hat, werden die Proben nach dem Probenkörper 1BA aus der DIN EN ISO 527-2 [9] gefertigt. Bei diesen Proben handelt es sich um eine überwiegend maßstabsgetreue verkleinerte Variante des Typs 1B, vgl. Abb. 6.5. Die Normen DIN EN ISO 527-1/2 bzw. ASTM D638 sind technisch äquivalent und liefern vergleichbare Ergebnisse<sup>1</sup>. Die Norm DIN EN ISO 16396-2 [7] behandelt die Herstellung von Probekörpern für Polyamid-Formmassen bei Extrusionsverfahren. Zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften wird ebenfalls auf die Norm DIN EN ISO 527-2 [9] verwiesen.



**Abbildung 6.5:** Probekörper 527-1BA [9] mit Werten:  $l_3 = 75$  mm,  $l_2 = 58 \pm 2$  mm,  $l_1 = 30,0 \pm 0,5$  mm,  $L_0 = 25,0 \pm 0,5$  mm,  $L = l_2 + 2$  mm,  $h = 2$  mm,  $r = 30$  mm,  $b_2 = 10,0 \pm 0,5$  mm and  $b_1 = 5,0 \pm 0,5$  mm

## 6.2 SLA-gedruckte Zug- und Druckproben

Wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben wurde, erfolgt das Aushärten des Harzes beim SLA-Druck durch einen Laser, sowie durch eine Nachbehandlung in einer UV-Kammer. Zur

<sup>1</sup>[www.zwickroell.com/de-de/kunststoff/thermoplastische-und-haertbare-formmassen/zugversuch-iso-527](http://www.zwickroell.com/de-de/kunststoff/thermoplastische-und-haertbare-formmassen/zugversuch-iso-527)[05.07.2019]

Untersuchung des Einflusses der Nachbehandlung auf die mechanischen Eigenschaften wird eine Gruppe von Zug- und Druckproben ausgehärtet und anschließend experimentell untersucht, die andere Gruppe wird nicht ausgehärtet. Die Notwendigkeit der Nachbehandlung wird z.B. in [120] begründet.

Das verwendete Harz ist das Resin Flexible FLGR02 der Firma Formlabs. Es besitzt laut dem Hersteller elastomere Eigenschaften und wird für biegsame und auf Druck belastete Objekte verwendet. Die maximale Dehnung wird mit 80% bei einer Zugfestigkeit von ca. 8 MPa angegeben. Als weitere Angabe ist die Shore-Härte mit 80–85A angegeben. Es wird keine Aussage zum E-Modul getroffen<sup>2</sup>

Zur Nachbehandlung des verwendeten flexiblen Harzes wird LED-Licht mit einer Wellenlänge von 450 nm verwendet. Hierdurch werden nicht komplett polymerisierte Bereiche in der Probe nachträglich vernetzt. Dieser Prozess wird durch eine zusätzliche thermische Nachbehandlung bei ca 45° C beschleunigt. Da sich der Probenkörper durch die Nachbehandlung verkleinert, ist der nicht nachbehandelte Ausdruck entsprechend größer.

Ein weiterer Einflussparameter auf die mechanischen Eigenschaften ist die Orientierung während des Druckvorgangs. In den Quellen [101, 59] wird der Einfluss der Druckorientierung auf nachbehandelte Proben untersucht. Gemäß dieser Quellen kann das Material als annähernd isotrop modelliert werden. In anderen Veröffentlichungen werden SLA-gedruckte Proben als transversal isotrop modelliert [149]. Um der Problematik der Anisotropie vorzubeugen, werden die Proben immer senkrecht zur Belastungsrichtung gedruckt.

Die Zugproben werden analog zu den FDM-gedruckten Proben nach dem Probenkörper 1BA aus der DIN EN ISO 527-2 [9] gefertigt. Die beim Druckverfahren der Stereolithographie verarbeiteten Photopolymere können als reaktive Formmasse aufgefasst werden [96, S. 890]. Dies rechtfertigt die Wahl der Norm. Ferner kommt die verwendete Norm, bzw. deren amerikanisches Pendant ASTM D638 [3] auch in anderen Veröffentlichungen [101, 128] zum Einsatz.

Die Gründe für die Wahl der verkleinerten Variante sind zum einen der begrenzte Verfahrensweg der Zugmaschine. Zum anderen ist es nicht möglich, größere Zugproben mit dem verwendeten Drucker senkrecht zur Zugrichtung zu drucken, da die maximale Druckhöhe mit Stützstrukturen 175 mm entspricht. Die minimale Länge des Probenkörpertyps 1B beträgt 150 mm. Eine stabile Stützstruktur würde mit ca. 40 mm hinzukommen. Versuche mit einer kleineren Stützstruktur sind fehlgeschlagen, da sich die unfertige Probe während des Druckvorgangs von der Bauplattform abgelöst hat. Alternativ kann man die Probe diagonal drucken. In diesem Fall müssen im Bereich der Länge  $L_0$  Stützstrukturen gedruckt werden, die den Querschnitt an diesen Stellen vergrößern.

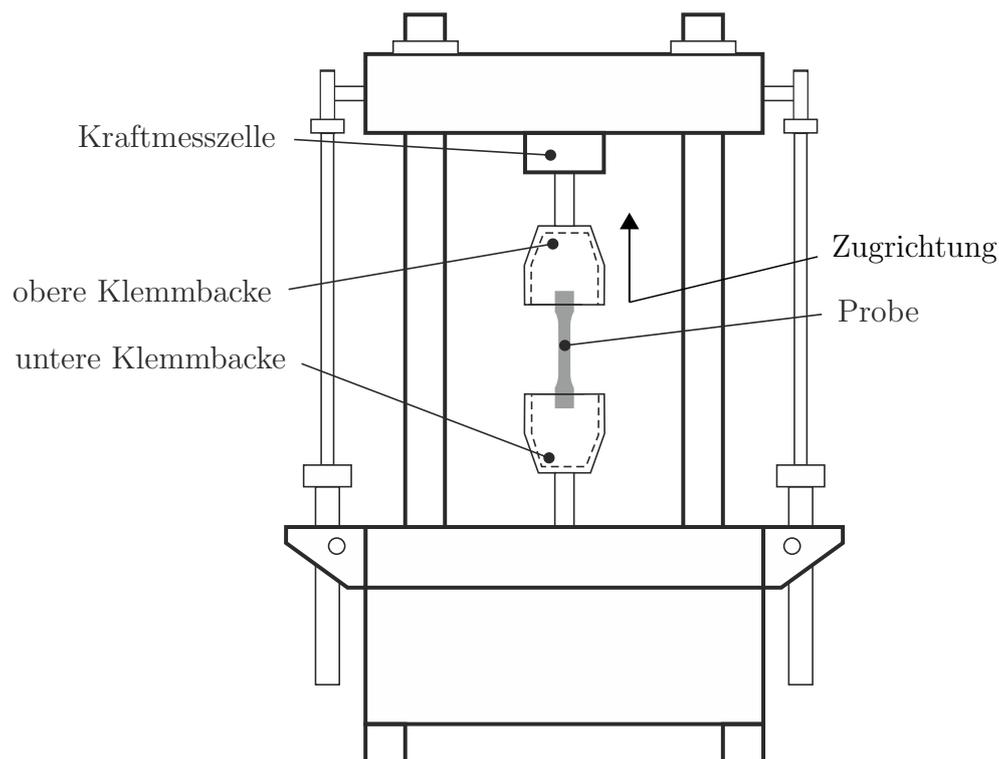
---

<sup>2</sup>[support.formlabs.com/s/article/Using-Flexible-Resin](https://support.formlabs.com/s/article/Using-Flexible-Resin). Zugriff am 07.06.2019

Zur Fertigung der Druckproben dient die Norm DIN ISO 7743 [13] als Grundlage. Diese Norm regelt die Bestimmung des Druckverformungs-Verhaltens von Elastomeren oder thermoplastischen Elastomeren. Als Probengeometrie wird der Standard-Prüfkörper Typ B verwendet. Hierbei handelt es sich um einen Zylinder mit einem Durchmesser von 17,8 mm mit einer Toleranz von 0,15 mm. Die Höhe beträgt  $25 \pm 0,25$  mm. Die Proben werden senkrecht zur Belastungsrichtung gedruckt. Der Druck erfolgt ohne Stützstrukturen auf den Stirnflächen, die das Verhalten beeinflussen können. Eine Darstellung der Orientierung der Druckproben ist in Abschnitt 2.2.1, Abbildung 2.2 zu finden.

### 6.3 Einachsiger Zugversuch FDM-gedruckter Proben

Die experimentellen Untersuchungen von FDM-gedruckten Proben werden an einer He-gewald & Peschke Inspekt 100-Universalprüfmaschine durchgeführt. Die verwendete Prüfmaschine ist in Abbildung 6.6 schematisch dargestellt. Als Kraftaufnehmer kommt eine bis 25 kN aufnehmende Kraftmesszelle zum Einsatz. Die Kraftmesszelle gehört nach DIN EN ISO 7500-1 [10] zur Fehlerklasse 1.



**Abbildung 6.6:** Schematische Darstellung des Zugversuchs, angelehnt an [46].

Die Probe wird entsprechend der Norm DIN ISO 23529 [12] vorkonditioniert und anschließend bei einer Vorkraft von 2 N hydraulisch mit 120 bar eingespannt.

### 6.3.1 Monotoner Zugversuch

Zunächst wird der Einfluss der Anzahl an Randschichten auf das Experiment untersucht. Dazu werden, wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, Proben mit einer und vier Randschichten hergestellt. Als Material wird das weichere TPU verwendet.

Der einachsige monotone Zugversuch erfolgt nach den Angaben der Norm DIN EN ISO 527-1 [8]. Die Probe wird mit einer Dehnrate von  $\dot{\varepsilon} = 0,067 \text{ s}^{-1}$  bis zum Versagen geprüft. Es werden die Daten Zeit, Kraft und Weg mit einer Frequenz von 50 Hz aufgenommen. Die Experimente sollen jeweils mindestens fünf mal wiederholt werden.

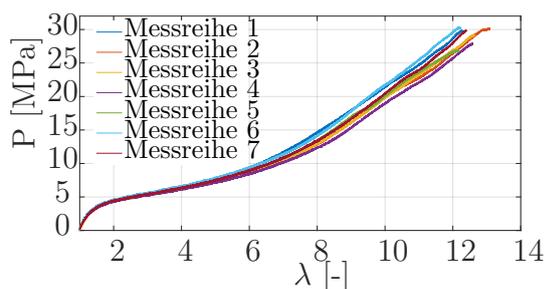
Vor der eigentlichen Datenauswertung werden die gemessenen Kraftwerte durch Division durch den Ausgangsquerschnitt in die technische Spannung umgerechnet. Dies entspricht der ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannung, vgl. Gleichung (3.54). Aus den gemessenen Werten der Verschiebung wird die technische Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{L_0} \quad (6.1)$$

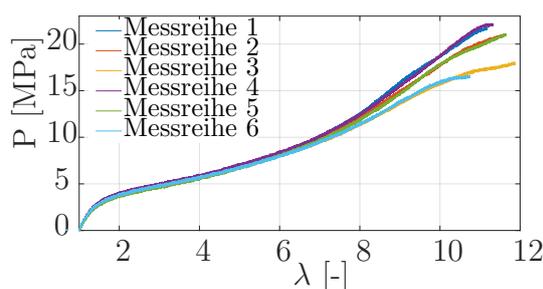
mit der Messlänge  $L_0$  berechnet. Anschließend erfolgt die Bestimmung der Hauptstreckung mittels

$$\lambda = \frac{L_0 + \Delta l}{L_0} = 1 + \varepsilon. \quad (6.2)$$

Die Rohdaten in Form von Spannung und Dehnung sind in den Abbildungen 6.7 und 6.8 dargestellt. Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, werden die Spannungswerte auf eins und die Dehnungen auf null zentriert.



**Abbildung 6.7:** Zentrierte Rohdaten der monotonen Zugversuche des TPU, gedruckt mit vier Randschichten.



**Abbildung 6.8:** Zentrierte Rohdaten der monotonen Zugversuche des TPU, gedruckt mit einer Randschicht.

Aus den so gewonnen Daten wird zunächst die kleinste Bruchdehnung bestimmt. Dies dient der Bestimmung der mittleren Spannung bei ausgewählten Dehnungen, da alle

Proben diese Bruchdehnung erreicht haben. Nach einer Überprüfung, ob die Dehnungswerte identisch sind, werden alle Spannungswerte der untersuchten Proben gemittelt. Hierfür wird das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6.3)$$

punktweise auf die Spannungswerte angewendet. Zur Bestimmung des statistischen Fehlers wird die Annahme getroffen, dass die Spannungswerte punktweise unabhängige Realisationen einer identischen, normalverteilten Zufallsvariablen sind. Zu einem Signifikanzniveau von 95% lautet das Konfidenzintervall für den unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  der zugrundeliegenden Normalverteilung dann

$$I = \left[ \bar{X} - t_{0,975;n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{0,975;n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]. \quad (6.4)$$

In Gleichung (6.4) bezeichnet  $n$  den Stichprobenumfang,  $t_{0,975;n-1}$  das 97,5%-Quantil der Student'schen t-Verteilung mit  $n - 1$  Freiheitsgraden [127] und  $S$  die Stichprobenstreuung, der Wurzel aus der Stichprobenvarianz

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (6.5)$$

Die Zufallsvariable  $\bar{X}$  wird als Stichprobenmittel der Zufallsvariablen  $X_i, i = 1, \dots, n$

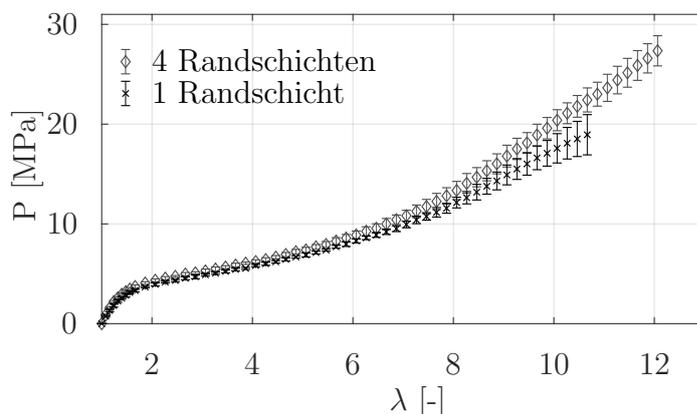
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (6.6)$$

bezeichnet.

Der unbekanntem Erwartungswert  $\mu$  liegt nach obiger Konstruktion mit 95%iger Wahrscheinlichkeit in diesem Intervall, d.h. es gilt

$$P \left( \bar{X} - t_{0,975;n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{0,975;n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 0,95. \quad (6.7)$$

Für die konkreten Spannungswerte erhält man nun jeweils ein 95%-Konfidenzintervall für den unbekanntem Erwartungswert. Zur Darstellung werden abschnittsweise äquidistante Punkte ausgewählt, vgl. Abbildungen 6.9 und 6.10. Dazu wird zunächst der linear elastische Bereich bestimmt. Mittels linearer Regression wird aus den ersten Messpunkten die Ausgleichsgerade bestimmt. Im Anschluss wird überprüft ab welcher Dehnung die darauffolgenden Punkte nicht mehr auf dieser Geraden liegen und eine Tendenz unterhalb der Regressionsgeraden ausbilden. Da der linear elastische Bereich eine größere Steigung

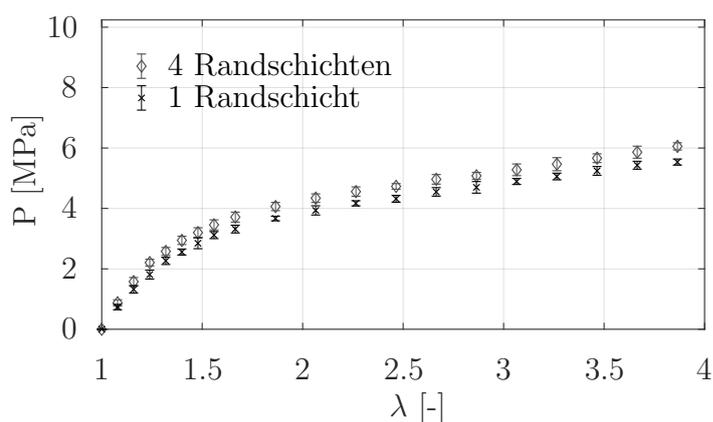


**Abbildung 6.9:** Spannungs-Dehnungs-Diagramme für TPU Proben mit einer bzw. vier Randschichten.

aufweist als der weitere Verlauf des Spannungs-Dehnungs-Diagramms, werden in diesem Bereich mehr Messwerte zur Darstellung ausgewählt.

Die Spannungs-Dehnungs-Diagramme für Proben mit einer bzw. vier Randschichten sind in Abbildung 6.9 dargestellt.

Man erkennt, dass die maximal mögliche Anzahl an Randschichten zu einer höheren Bruchdehnung und Zerreißfestigkeit führt. Dies liegt an der höheren Anzahl an Randschichten, d.h. mehr Material ist in Zugrichtung orientiert. Allerdings liegen die Kurven im Bereich bis ca. 600% Streckung nah beieinander, lassen sich zum gewählten Signifikanzniveau jedoch unterscheiden, vgl. Abbildung 6.10. Auch dies spricht für einen Einfluss der Anzahl der Randschichten auf die Versuchsergebnisse.



**Abbildung 6.10:** Spannungs-Dehnungs-Diagramme für TPU Proben mit einer bzw. vier Randschichten, Vergrößerung von Abbildung 6.9.

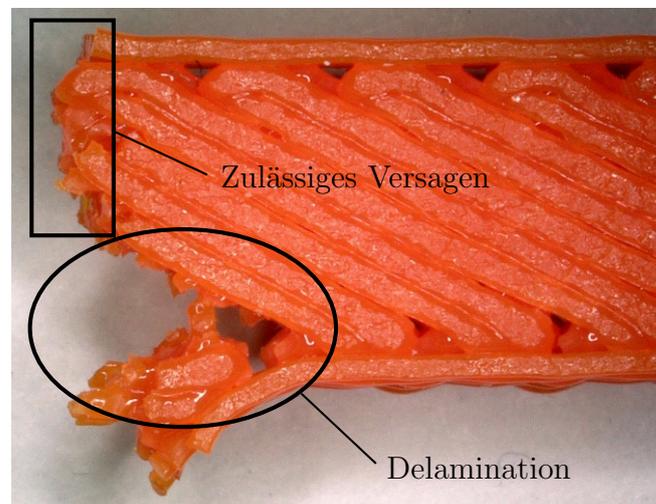
## 6 Experimentelle Untersuchung 3D gedruckter Materialien

In Tabelle 6.2 sind die aus den Daten gewonnen Materialeigenschaften aufgeführt. Im Vergleich zu den Herstellerangaben erkennt man eine starke Abweichung bei der Bruchdehnung. Die Zerreißfestigkeit liegt bei vier Randschichten nah an der Herstellerangabe. Jedoch liegt der berichtete Wert von 26 MPa nicht im 95%-Konfidenzintervall für die erwartete Zerreißfestigkeit bei vier Randschichten. Besser verhält es sich bei dem E-Modul, der mit  $12,2\pm 0,13$  MPa die Herstellerangabe von 12 MPa beinhaltet.

**Tabelle 6.2:** Durch monotonen Zugversuch gewonnene Materialeigenschaften des TPU-Filaments für eine und vier Randschichten mit einem Vergleich der Herstellerangabe.

Materialeigenschaft	Eine Randschicht	Vier Randschichten	Herstellerangabe
Bruchdehnung [%]	$1139\pm 42$	$1200\pm 36$	660
Zerreißfestigkeit [MPa]	$19,2\pm 1,98$	$27,8\pm 1,63$	26
E-Modul [MPa]	$10,7\pm 0,38$	$12,2\pm 0,13$	12

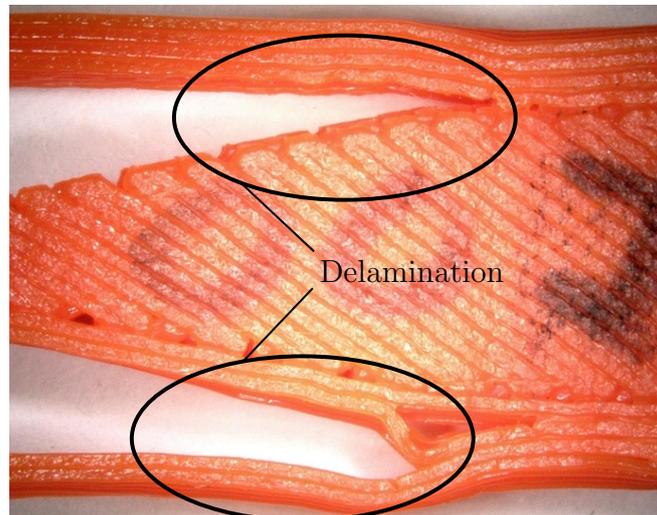
Die Güte des Experiments wird im Folgenden auch an der Art des Versagens der Proben beurteilt. Hierbei ergeben sich deutliche Unterschiede zwischen den beiden Randschichtzahlen. Bei einer Randschicht versagt die Probe im zulässigen Bereich innerhalb der Messlänge  $L_0$ , vgl. Abbildung 6.11. Jedoch kommt es an einer Stelle zu Delaminationen. Hier löst sich ein Teil der gedruckten Probe innerhalb des  $45^\circ$  orientierten Inneren ab.



**Abbildung 6.11:** Gerissene Zugprobe mit einer Randschicht.

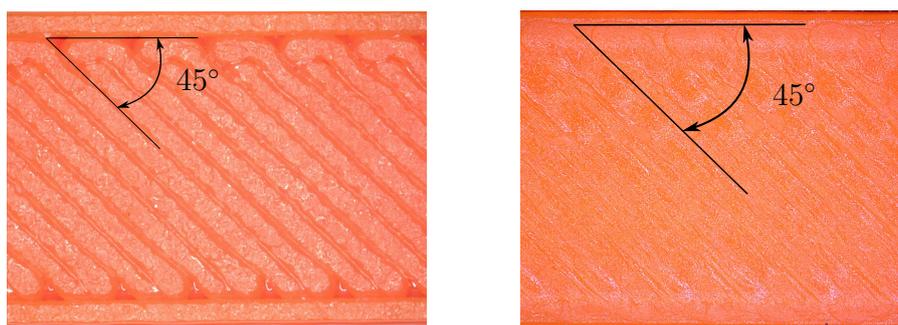
Bei der Probe mit vier Randschichten zeigt sich bereits während des Zugversuchs, dass die ermittelten Ergebnisse fehlerbehaftet sind. Teilweise reißt das  $45^\circ$  orientierte Innere ab, während die insgesamt acht Randschichten noch intakt sind. Es kommt bei allen

untersuchten Proben zu Delaminationen im Bereich des Radius aufgrund von Querkraften in der Probe, vgl. Abbildung 6.12. Aufgrund der äußerst schlechten Ergebnisse mit vier Randschichten werden sämtliche folgenden Versuche mit Zugproben mit einer Randschicht durchgeführt.



**Abbildung 6.12:** Gerissene TPU-Zugprobe mit vier Randschichten.

Im nächsten Schritt wird der Druckprozess dahingehend optimiert, dass die gedruckten Proben weniger prozessbedingte Fehlstellen aufweisen. Dazu wird der Drucker durch einen Anycubic Prusa i3 FDM-Drucker ausgetauscht, der eine höhere Auflösung für die Schichtdicke zulässt. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Layer auf zehn Schichten mit einer jeweiligen Schichtdicke von 0,2mm. Es werden nun auch erstmalig Proben aus dem TPC-Filament hergestellt. Ein Vergleich der alten und neuen Zugproben ist der Abbildung 6.13 dargestellt.

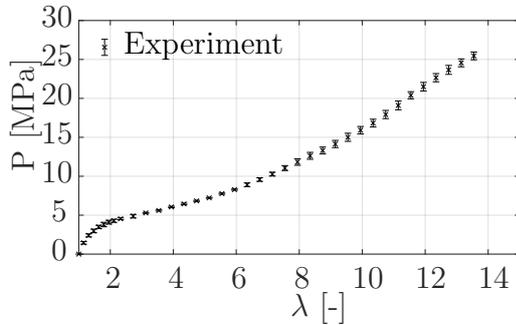


**Abbildung 6.13:** Ausschnitt einer TPU-Zugprobe mit einer Randschicht vor (links) und nach der Optimierung (rechts).

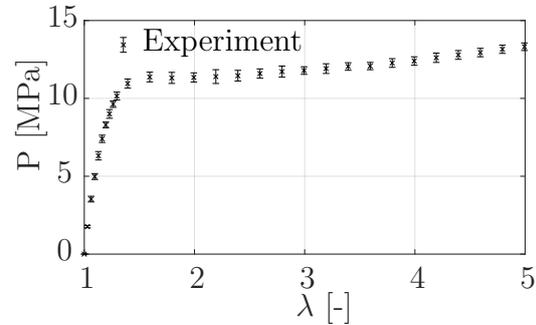
Analog zu den Vorversuchen werden die Spannungen gemittelt. Wie zuvor wird zur Bestimmung des statistischen Fehlers ein 95%-Konfidenzintervall an ausgewählten Stel-

## 6 Experimentelle Untersuchung 3D gedruckter Materialien

len berechnet. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 6.14 und 6.15 dargestellt. Die Abstände der Dehnung  $\varepsilon$  beträgt in diesem Bereich 0,033 für Arflex 45 und 0,16 für NinjaFlex. Im nichtlinearen Bereich betragen die Abstände der Dehnung 0,20 für Arflex 45 und 0,40 für NinjaFlex.



**Abbildung 6.14:** Ergebnisse der monotonen Zugversuche des TPU.



**Abbildung 6.15:** Ergebnisse der monotonen Zugversuche des TPC.

Im Vergleich zu den Proben mit sieben Schichten und nicht optimierten Druckparametern wird die Bruchdehnung nochmals erhöht. Sie liegt mit  $1390 \pm 24\%$  nochmals 22% höher. Zugleich erhöht sich die Zerreißfestigkeit auf  $26,0 \pm 0,77$  MPa. Die Änderungen wirken sich bei gleichem Stichprobenumfang auch auf die Streuung aus. Sowohl die Werte der Zerreißfestigkeit, also auch die Spannungswerte streuen weniger um ihr arithmetisches Mittel. Die erhöhte Anzahl der Schichten hat jedoch zum Niveau 95% keinen signifikanten Einfluss auf den E-Modul. Alle ermittelten Materialeigenschaften sowie ein Vergleich zum vorher genutzten Drucker und die Herstellerangaben sind in Tabelle 6.3 aufgelistet.

**Tabelle 6.3:** Durch monotone Zugversuche gewonnene Materialeigenschaften des TPU-Filaments. Vergleich der Drucker mit den Herstellerangaben.

Materialeigenschaft	Anycubic Prusa i3	Leapfrog Xeed	Herstellerangabe
Bruchdehnung [%]	$1390 \pm 24$	$1139 \pm 42$	660
Zerreißfestigkeit [MPa]	$26,0 \pm 0,77$	$19,2 \pm 1,98$	26
E-Modul [MPa]	$10,0 \pm 0,81$	$10,7 \pm 0,38$	12

Sämtliche getestete Proben versagen im zulässigen Bereich innerhalb der Messlänge  $L_0$ , es wird weitestgehend keine Delamination beobachtet.

Betrachtet man das Spannungs-Dehnungs-Diagramm für das TPC, Abbildung 6.15, so erkennt man ein anderes Verhalten als bei dem TPU. Zunächst ist der linear elastische Bereich deutlich steiler, gefolgt von einem fast horizontalen Verlauf, der sich fast

bis zur Bruchdehnung fortsetzt. Diese Bruchdehnung wird bei  $605 \pm 68\%$  erreicht, die Zerreißfestigkeit ergibt sich zu  $14,6 \pm 0,92$  MPa. Als E-Modul ergibt sich ein Wert von  $44,1 \pm 1,84$  MPa. Die ermittelten Materialeigenschaften und die Herstellerangaben sind in Tabelle 6.4 dargestellt.

**Tabelle 6.4:** Durch monotone Zugversuche gewonnene Materialeigenschaften des TPC-Filaments. Vergleich mit den Herstellerangaben.

Materialeigenschaft	Wert	Herstellerangabe
Bruchdehnung [%]	$605 \pm 68$	500
Zerreißfestigkeit [MPa]	$14,6 \pm 0,82$	24
E-Modul [MPa]	$44,1 \pm 1,84$	95

Die starke Abweichung des E-Moduls lässt sich zum einen dadurch begründen, dass der Hersteller nicht angibt, ob sich dieser Wert auf gedruckter Proben, oder auf das Ausgangsmaterials bezieht. Eine andere mögliche Erklärung ist die angegebene Shore-Härte D von 45. In der Arbeit von Qi et al. [111] wird eine Formel für den groben Zusammenhang zwischen diesen Größen hergeleitet.

$$S_D = 100 - \frac{20(-78,188 + \sqrt{6113,36 + 781,88E})}{E}. \quad (6.8)$$

Hier bezeichnet  $E$  den E-Modul und  $S_D$  die Shore-D-Härte. Setzt man den E-Modul von 95 MPa in Gleichung (6.8) ein, so ergibt sich eine Shore-Härte D von 56,77. Für die gegebene Shore-Härte D von 45 ergibt sich umgekehrt ein E-Modul von 46,525 MPa. Letzteres liegt nur 0,585 MPa oberhalb der oberen Grenze des 95%-Konfidenzintervalls für den E-Modul, berechnet aus den Zugversuchsdaten. Es gibt also Anzeichen dafür, dass der angegebene Wert für den E-Modul fehlerhaft ist. Für das TPU hingegen, liegen die gemessenen Werte sehr Nahe an der Herstellerangabe.

### 6.3.2 Relaxationsversuch

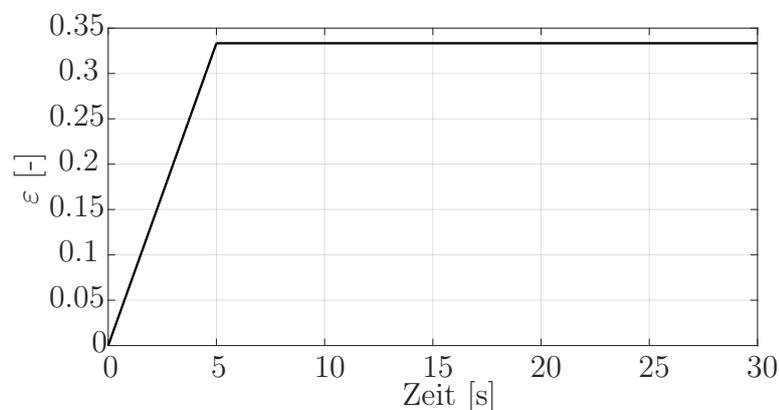
Für Spannungsrelaxationsversuche existiert zur Zeit keine gültige DIN-Norm. Die letzte verfügbare Version der DIN 53441 [5] aus dem Jahre 1984 wurde zurückgezogen. In der amerikanischen Norm ASTM E328 [4] wird bemerkt, dass die Testmethode zur Bestimmung von Spannungsrelaxationen in Kunststoffen ebenfalls zurückgezogen wurde. Beide Normen beschreiben den Versuch zur Bestimmung des Relaxationsverhaltens von Zugproben unter einachsiger Zugbelastung bei einer definierten Dehnung. Hierbei ist zu beachten, dass die aufgebraachte Dehnung nur so hoch ausfllt, dass man sich noch

im linearen Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms befindet. Die mathematische Beschreibung, sowie die in diesem Unterkapitel verwendeten Begriffe werden bereits in Abschnitt 5.1.2 behandelt.

Für das kraftgesteuerte Pendant, den Kriechversuch, existiert die Norm DIN EN ISO 899-1 [11]. In ihr ist auch der zu verwendende Probekörper nach DIN EN ISO 527-2 [9] angegeben. Da diese Norm deutlich jünger ist und die Versuche nach dem Korrespondenzprinzip äquivalent sind, werden die Prüfkörper nach der Norm DIN EN ISO 527-2 gefertigt.

Aufbauend auf den Erkenntnissen des letzten Abschnitts 6.3.1 werden alle Proben anhand der optimierten Druckparameter erstellt. Wie zuvor wird ein Anycubic Prusa i3 FDM-Drucker verwendet. Die Proben werden mit einer Randschicht und einer 45°-Orientierung im Inneren Gedruckt. Die Anzahl der Layer betrug wie bei den Zugproben für den monotonen Zugversuch 10 Schichten bei einer Schichtdicke von 0,2 mm.

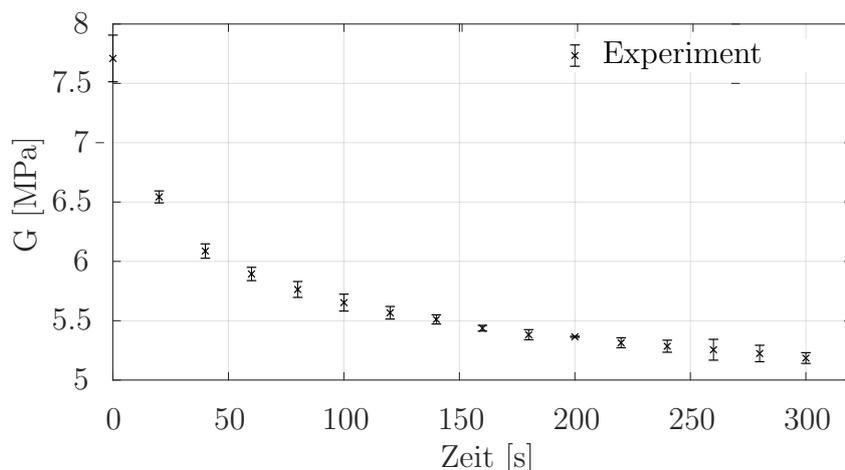
Vor der Versuchsdurchführung werden alle Proben für drei Stunden in einer Temperaturkammer bei 23° C konditioniert. Der Versuch selbst wird bei 22° C durchgeführt. Wie bei den monotonen Zugversuchen erfolgt die Untersuchungen mit einer Hegewald & Peschke Inspekt 100-Universalprüfmaschine. Die Relaxationsversuche werden bei einer Dehnung von  $\varepsilon = 0,33$  durchgeführt, die zuvor mit einer Dehnrate von  $\dot{\varepsilon} = 0,067 \text{ s}^{-1}$  aufgebracht wurde. Die Dehnung wird für einen Zeitraum von 300 s konstant gehalten, vgl. Abbildung 6.16.



**Abbildung 6.16:** Zeitlicher Dehnungsverlauf der ersten 30 s des Relaxationsversuchs.

Die Datenaufzeichnung (Zeit, Kraft und Weg) erfolgt mit einer Frequenz von 50 Hz. Die Experimente werden wie in der Norm gefordert jeweils fünf mal wiederholt. Die Daten aus den Relaxationsversuchen werden nach dem in Abschnitt 6.3.1 beschriebenen Verfahren ausgewertet.

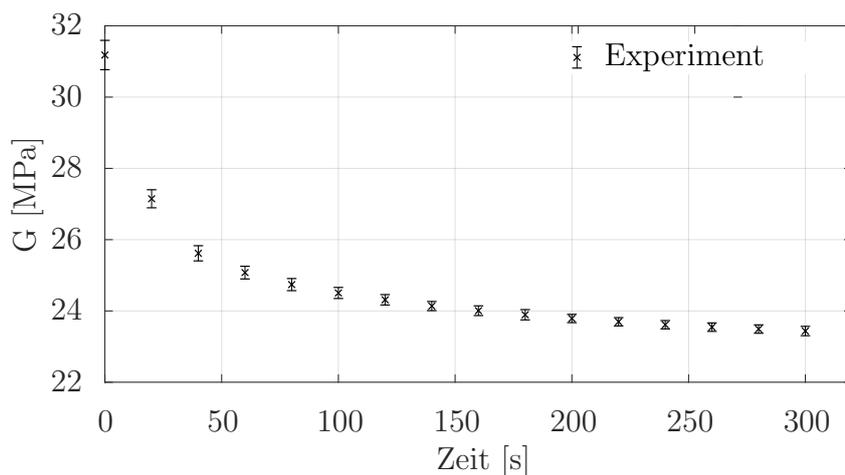
Für das TPU ergibt sich eine momentane Elastizität  $G_0 = 7,71 \pm 0,2687 \text{ MPa}$ . Der relative Fehler für diesen Wert beträgt 1,40%. Nach 300 s wird eine Relaxation von



**Abbildung 6.17:** Relaxationsfunktion FDM-gedruckter Proben aus dem TPU-Filament.

$G(t = 300 \text{ s}) = 5,1853 \pm 0,0620 \text{ MPa}$  gemessen. Die mittleren Werte der Spannungsrelaxationsfunktion sind zusammen mit einem 95%-Konfidenzintervall in Abbildung 6.17 dargestellt. Man erkennt den typischen Verlauf der Spannungsrelaxation. Die statistischen Fehler fallen für größere Zeitpunkte tendenziell niedriger aus, zu Beginn der Messung liegt dieser noch etwas höher.

Für das TPC ergeben sich aufgrund der höheren Steifigkeit generell niedrigere Werte für den statistischen Fehler. Für dieses Filamentmaterial liegt der momentane Elastizitätsmodul bei  $G_0 = 31,1800 \pm 0,3755 \text{ MPa}$ . Der relative Fehler für diesen Wert beträgt 1,15%. Am Ende des Experiments wird ein Wert von  $G(t = 300 \text{ s}) = 23,4366 \pm 0,1198$  ermittelt. Die Relaxationsfunktion ist für 16 ausgewertete Messwerte in Abbildung 6.18 samt einem 95%-Konfidenzintervall für die mittlere Spannung dargestellt.

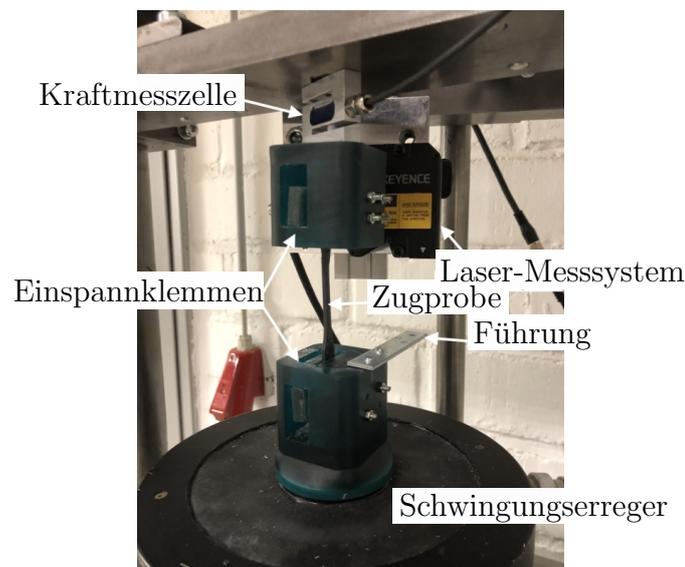


**Abbildung 6.18:** Relaxationsfunktion FDM-gedruckter Proben aus dem TPC-Filament

## 6.4 Einachsige Zug- und Druckversuche SLA-gedruckter Proben

Die Untersuchungen der mechanischen Materialeigenschaften SLA-gedruckter Proben unter Zug- und Druckbelastung werden an einer anderen Maschine als bei den FDM-gedruckten Proben durchgeführt. Der Grund hierfür ist, dass die Auflösung der Kraftmesszelle für kleine Kräfte nicht geeignet ist.

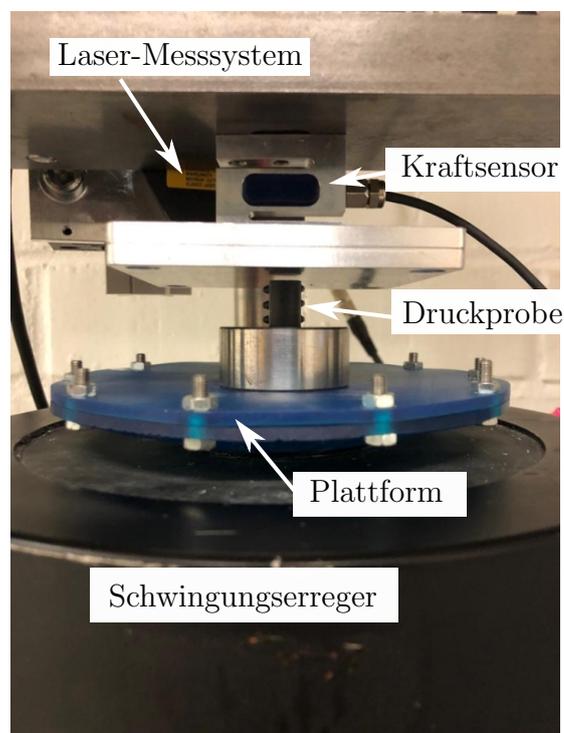
Die selbst konstruierte Messeinrichtung dient ursprünglich zur Untersuchung des Schwingungsverhalten geschäumter Elastomere unter dynamischer Belastung. Durch einige Modifikationen kann die Maschine sowohl für quasistatische Zug- als auch für Druckversuche, jeweils uniaxial, verwendet werden. Als Kraftmesszelle kommt ein Kraftsensor vom Typ KD40S der Firma ME-Meßsysteme GmbH zum Einsatz. Die Genauigkeitsklasse ist mit 0,1% angegeben. Die maximale Kraft, die aufgenommen werden kann beträgt 200 N. Die Wegmessung erfolgte mittels des Lasersystems LK-H052 der Firma Keyence. Dazu wird an der unteren Einspannklemme eine metallische Führung befestigt. Diese bewegt sich bei der Versuchsdurchführung, während das Laser-Messsystem in der Ausgangsposition verbleibt. Der maximale Verfahrensweg beträgt 4,22 mm. In Abbildung 6.19 ist der Versuchsaufbau zur Durchführung der Zugversuche dargestellt.



**Abbildung 6.19:** Versuchsaufbau zur Untersuchung SLA-gedruckter Zugproben [27]

Zur Bestimmung des Druckmoduls bei 10% Stauchung nach DIN ISO 7743 [13] werden zyklische Druckversuche an zylindrischen Proben durchgeführt. Dazu wird dieselbe selbst konstruierte Messeinrichtung verwendet, die bei den Zugversuchen zum Einsatz gekommen ist.

Zur Versuchsdurchführung wird eine zweiteilige Plattform auf dem Schwingungserreger angebracht. Der untere Teil dieser Plattform ist direkt mit dem Schwingungserreger verbunden. An dieser ist eine additiv gefertigte Kunststoffplattform mit Schrauben befestigt. Dieser Teil der Plattform wurde aus Harz vom Typ Tough FLTOTL05 gedruckt. Dieses Harz kam schon bei der Erstellung der Einspannklemmen für den Zugversuch zum Einsatz. Die Probe befindet sich zwischen einem metallischen Zylinder und einer Aluminiumplatte, die an der Kraftmesszelle befestigt ist. Das Laser-Messsystem misst während des Versuchs den Abstand zur Plattform. Um die Reflexion des Lasers zu verbessern, wird eine weiße Markierung auf der Plattform angebracht. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 6.20 dargestellt.



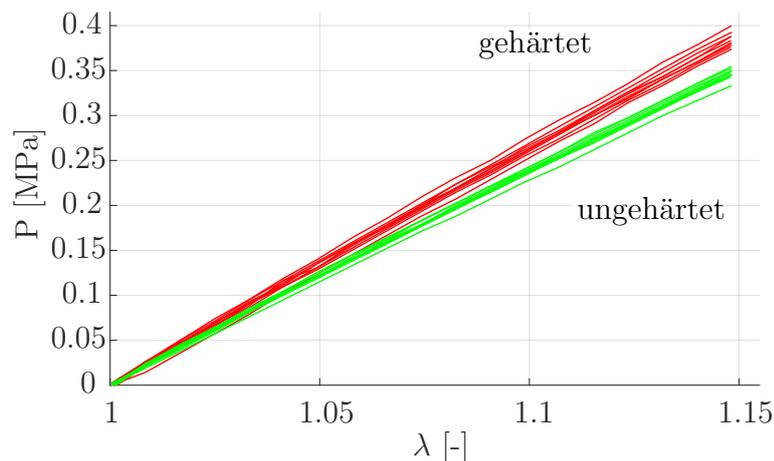
**Abbildung 6.20:** Versuchsaufbau der Druckversuche nach DIN ISO 7743.

Die Proben werden wie in Abschnitt 6.2 beschrieben mit einem Formlabs Form 2 SLA-Drucker erstellt. Die Druckauflösung für die Schichtdicke beträgt  $50\ \mu\text{m}$ . Neben dem E-Modul wird der Einfluss der Nachbehandlungszeit auf diese Werte untersucht. Dazu werden jeweils zwölf Proben direkt nach dem Druck mittels der Temperierkammer vorkonditioniert. Unmittelbar danach erfolgt die jeweilige Versuchsreihe aus Zug- oder die Druckversuchen. Eine weitere Gruppe von zwölf Proben wird gemäß den Herstellervorgaben in der Aushärtekammer nachbehandelt. Auch diese Gruppe wird vor der jeweiligen Versuchsdurchführung in der Temperierkammer vorkonditioniert.

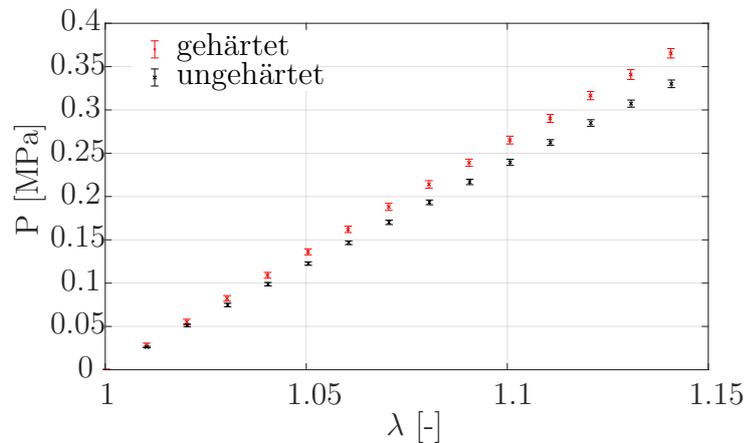
### 6.4.1 Monotoner Zugversuch

Für die Durchführung des monotonen Zugversuchs wird die vorkonditionierte Probe wie in Abbildung 6.19 dargestellt in die gedruckten Einspannklemmen eingespannt. Am oberen Ende der Zugmaschine befinden sich die Kraftmesszelle und das Laser-Messsystem. Letzteres misst während des Versuchs den Abstand zu der metallischen Führung, die an der unteren Einspannklemme befestigt ist. Der Schwingungserreger bewegt sich zur Versuchsdurchführung nach unten. Dies geschieht mit einer Geschwindigkeit, die einer Dehnrate von  $\dot{\epsilon} = 0,0172 \text{ s}^{-1}$  entspricht. Die maximale Dehnung beträgt in diesem Versuchsaufbau 14,79%. Dies liegt unter der Herstellerangabe der maximalen Dehnung von 80-90%. Die Daten Zeit, Kraft und Weg werden mit 600 Hz aufgezeichnet. Die Rohdaten - unterteilt nach gehärteten und ungehärteten Proben - sind in Abbildung 6.21 dargestellt. Von den zwölf Versuchen schlagen jeweils zwei Versuche fehl, sodass jede Gruppe einen Stichprobenumfang von zehn aufweist.

Die Daten werden analog zu dem Vorgehen aus Abschnitt 6.3.1 ausgewertet. Das Signifikanzniveau für die Konfidenzintervalle für die unbekannte mittlere Spannung wird wieder auf 95% gesetzt. Es wird wieder der relative Fehler bei der maximal erreichten Spannung berechnet. Gemessen mit dem Variationskoeffizient beträgt dieser in der Gruppe der ungehärteten Proben 1,58%. In der Gruppe der gehärteten Proben liegt er bei 5,82%. Dies belegt den optischen Eindruck, dass die gehärteten Proben (rote Kurven in Abbildung 6.21) stärker streuen als die ungehärteten Proben (grüne Kurven in Abbildung 6.21). Eine Darstellung ausgewählter Punkte des Spannungs-Dehnungs-Diagramms ist in Abbildung 6.22 zu finden.



**Abbildung 6.21:** Zentrierte Rohdaten der monotonen Zugversuche. Vergleich der ungehärteten (grün) und gehärteten Proben (rot).

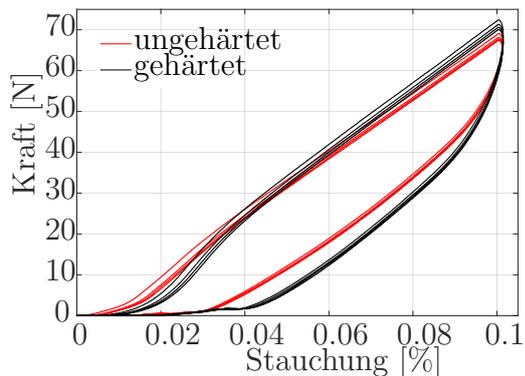


**Abbildung 6.22:** Mittelwert und 95%-Konfidenzintervall der Spannungen bei verschiedenen Streckungen.

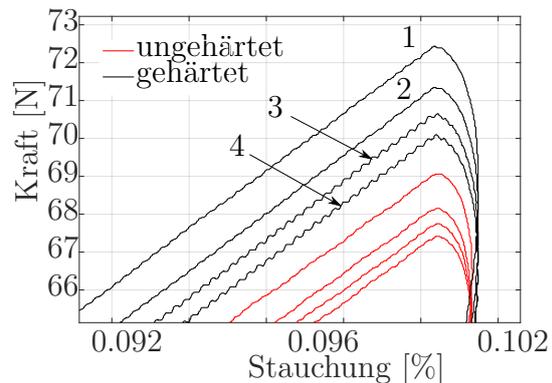
Da die Proben nicht innerhalb des verfügbaren Verfahrenswegs reißen, kann lediglich der E-Modul als Materialparameter bestimmt werden. Für die Gruppe der gehärteten Proben liegt dieser bei  $2,6267 \pm 0,0443$  MPa. Die ungehärteten Proben weisen mit  $2,3714 \pm 0,0325$  MPa einen geringeren E-Modul auf. Anhand der disjunkten Konfidenzintervalle zum Niveau 95% wird die Schlussfolgerung getroffen, dass ein signifikanter Unterschied zwischen den E-Moduln zum Niveau 5% vorliegt. Bestätigt wird dies durch einen Zweistichproben-Cramér-von Mises-Test [21] und einen Zweistichproben-Kolmogorov-Smirnov-Test [83, 124]. Beide Tests lehnen die Nullhypothese, dass beide Stichproben aus derselben Normalverteilung stammen, ab. Ein Vergleich mit den Angaben des Herstellers ist nicht durchzuführen, da die Firma Formlabs für dieses Harz keine numerischen Aussage zum E-Modul trifft.

### 6.4.2 Zyklischer Druckversuch

Der Versuch zur Bestimmung des Druckmoduls wird nach dem Verfahren C der Norm DIN ISO 7743 [13] durchgeführt. Dazu werden die Proben mit einer Geschwindigkeit von 10 mm/min um 10% gestaucht. Anschließend erfolgt eine Entlastung der Probe mit derselben Geschwindigkeit. Dazu fährt der Schwingungsanreger auf den zu Beginn des Experiments festgelegten Nullpunkt des Wegs zurück. Es werden insgesamt vier Be- und Entlastungszyklen abgefahren. Die Daten Zeit, Kraft und Weg werden mit 600 Hz aufgezeichnet. Aus den Wegdaten werden die zugehörigen Stauchungsdaten berechnet. Die Rohdaten jeweils eines Versuchs für ungehärtete und gehärtete Proben sind in den Abbildungen 6.23 und 6.24 dargestellt. In der Gruppe der ausgehärteten Proben sind zwei Versuche fehlgeschlagen, in der Gruppe der ungehärteten Proben werden alle zwölf



**Abbildung 6.23:** Rohdaten eines zyklischen Druckversuchs mit 4 Zyklen.



**Abbildung 6.24:** Vergrößerung von Abb. 6.23. Die Zahl bezeichnet den jeweiligen Zyklus.

Versuche erfolgreich durchgeführt.

Man erkennt zum einen, dass die Kurven der gehärteten Proben tendenziell oberhalb der Kurven der ungehärteten Proben liegen. Zum anderen erkennt man, dass sich das Material nicht rein elastisch verhält. Beim Entlasten ist die Probe bei ca. 4% (gehärtet) bzw. ca. 3% (ungehärtet) spannungsfrei. Beim jeweils nächsten Belastungszyklus verschiebt sich diese Stelle wieder nach links.

Zur Bestimmung des Druckmoduls teilt man nun die Kraft des vierten Zyklus bei einer Stauchung von 10% durch die Querschnittsfläche und die Stauchung von 0,1. Aus den jeweiligen Werten wird wie zuvor das arithmetische Mittel und ein 95%-Konfidenzintervall für den unbekanntem erwarteten Modul bestimmt. Es ergibt sich ein mittlerer Druckmodul von  $2,5424 \pm 0,0691$  MPa für die ungehärteten Proben. Die gehärteten Proben weisen einen Druckmodul von  $2,6708 \pm 0,0558$  MPa auf. Zum Signifikanzniveau von 95% sind die Druckmoduln verschieden.

# 7 Parameteridentifikation und Simulation

---

In diesem Kapitel werden die aus den Experimenten gewonnenen Daten verwendet, um die Parameter verschiedener hyper- und viskoelastischer Materialmodelle mittels einer Regressionsanalyse bestmöglich zu bestimmen. Von zentraler Bedeutung ist hierbei die Methode der kleinsten Quadrate nach Carl Friedrich Gauß [60], die zunächst eingeführt wird. Diese wird sowohl bei der linearen als auch bei der nichtlinearen Regression verwendet. Ferner wird auf die nichtlineare Regression unter Nebenbedingungen eingegangen. Nach der eigentlichen Parameteridentifikation werden die gefundenen Parameter abschließend in einer FEM-Simulation validiert.

## 7.1 Methode der kleinsten Quadrate

Nach Carl Friedrich Gauß ist die Methode der kleinsten Quadrate die geeignete Methode, um eine gewählte Modellfunktion bestmöglich an eine Punktwolke anzupassen. Die Modellfunktion besteht dabei aus einem oder mehreren Parametern, die so gewählt werden, dass die Summe der quadrierten vertikalen Abstände zwischen der Modellfunktion und den Punkten minimal wird:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min . \quad (7.1)$$

Hierbei bezeichnen  $(x_i/y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  die gegebenen Punkte und  $f = f(x, \mathbf{a})$  die Modellfunktion, die zusätzlich zu  $x$  auch von den Parametern  $a_1, \dots, a_m$  abhängt. Die Funktionswerte  $f(x_i)$  werden als erklärte Werte bezeichnet:

$$\hat{y}_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n . \quad (7.2)$$

Der Abstand zwischen dem echten  $y$ -Wert und dem erklärten Wert wird als das Residuum bezeichnet:

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, \dots, n . \quad (7.3)$$

Aus dieser Definition ergibt sich die alternative Formulierung der Kleinste-Quadrate-Methode: Bestimme die Parameter  $a_1, a_2, \dots, a_m$  so, dass die Summe der quadrierten Residuen minimal wird.

Die Residuen werden in der Regel als Realisationen einer unabhängig, identisch normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz  $\sigma^2$  angesehen [40] [56, S. 109] [121, S. 131].

Eine wichtige Größe zur Beurteilung der Güte der Approximation der Punkte durch die Modellfunktion ist das Bestimmtheitsmaß  $R^2$ . Für diese Größe gibt es in der Literatur diverse Definitionen, die im Allgemeinen nicht äquivalent sind [88]. In der Regel gilt

$$R^2 \in [0, 1]. \quad (7.4)$$

Hierbei gilt  $R^2 = 1$  genau dann, wenn alle Punkte exakt durch die Modellfunktion beschrieben werden, d.h. es gilt

$$\hat{u}_i = 0, \quad \forall i. \quad (7.5)$$

In einigen Definitionen von  $R^2$  treten bei der nichtlinearen Regression oder bei der linearen Regressionen ohne  $y$ -Achsenabschnitt Werte für  $R^2 > 1$  auf [88]. Die zweckmäßige Definition für  $R^2$ , lautet nach [65, S. 160]

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (7.6)$$

### 7.1.1 Lineare Regression

Besteht die Modellfunktion aus einer Linearkombination beliebiger Funktionen  $g_j$ , d.h.

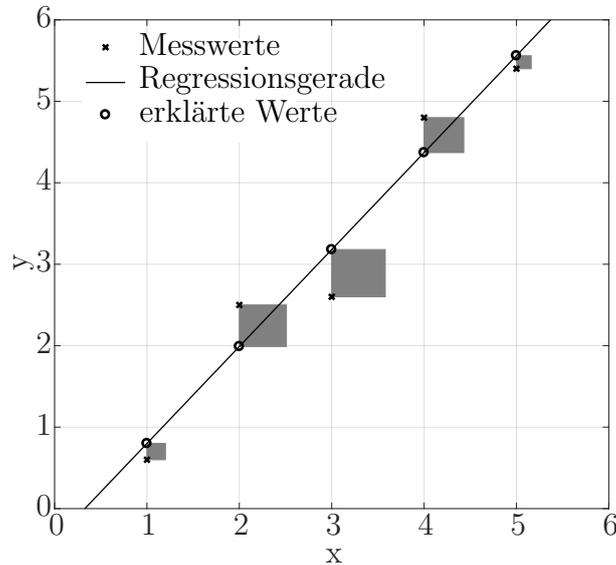
$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j g_j(x), \quad (7.7)$$

so spricht man von einer linearen Regression. Es ist anzumerken, dass die Linearität durch die Koeffizienten  $a_j$ , die in der Potenz 1 vorkommen, gewährleistet wird. Die Funktionen  $g_j$  müssen keine linearen Funktionen sein.

Das einfachste Modell ist die einfache lineare Regression mittels einer Regressionsgerade. In diesem Fall besteht das Modell aus zwei Parametern  $a_0$  und  $a_1$  mit Funktionen  $g_0(x) = 1$  und  $g_1(x) = x$ . Die Nummerierung orientiert sich hierbei an den Exponenten der  $x$ -Werte. Eine Regressionsgerade der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x. \quad (7.8)$$

ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Ebenfalls dargestellt sind die kleinsten Quadrate selbst.



**Abbildung 7.1:** Visualisierung der Methode der kleinsten Quadrate anhand einer Regressionsgerade.

Ein anderes Beispiel ist das allgemeine polynomiale Modell

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j. \quad (7.9)$$

Im allgemeinen linearen Fall (7.7) erhält man die Lösung für  $a_1, \dots, a_m$  durch partielles Differenzieren nach den Parametern und anschließendes Nullsetzen.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=0}^m a_j g_j(x_i) \right)^2 \\ \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=0}^m a_j g_j(x_i) \right)^2 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_m} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=0}^m a_j g_j(x_i) \right)^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n g_1(x_i) & \sum_{j=0}^m a_j g_j(x_i) \\ \sum_{i=1}^n g_2(x_i) & \sum_{j=0}^m a_j g_j(x_i) \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n g_m(x_i) & \sum_{j=0}^m a_j g_j(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i g_1(x_i) \\ \sum_{i=1}^n y_i g_2(x_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i g_m(x_i) \end{bmatrix}, \quad (7.11)$$

dessen Lösung man mit den bekannten Lösungsmethoden bestimmen kann.

Zur Bestimmung des Schubmoduls  $\mu$  im uniaxialen Neo-Nooke-Modell (4.91) aufgrund experimenteller Daten benötigt man einen linearen Regressionsansatz mit genau einem Parameter. Analog benötigt man ein zweiparametrisches Modell im uniaxialen Mooney-Rivlin-Modell (4.96) zur bestmöglichen Approximation von  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Im Folgenden werden analytische Lösungen für die lineare Regression mit einem bzw. zwei Parametern hergeleitet.

Für  $m = 1$  und eine beliebige Funktion  $g(x)$  lautet das lineare Ausgleichsproblem

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ag(x_i))^2 \rightarrow \min . \quad (7.12)$$

Differenzieren nach  $a$  und Nullsetzen ergibt

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^n (y_i - ag(x_i))^2 = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ag(x_i)) g(x_i) \stackrel{!}{=} 0 \iff a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i g(x_i)}{\sum_{i=1}^n (g(x_i))^2}, \quad (7.13)$$

wobei  $g(x_i) \neq 0$  für mindestens ein  $i$  gelten muss.

Es handelt sich offensichtlich um ein lokales Minimum, denn es gilt

$$\frac{d^2}{da^2} \sum_{i=1}^n (y_i - ag(x_i))^2 = 2 \sum_{i=1}^n (g(x_i))^2 > 0. \quad (7.14)$$

Für zwei Parameter lautet das lineare Ausgleichsproblem mit  $m = 2$  und zwei beliebigen Funktionen  $g(x)$  und  $h(x)$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_1 g(x_i) - a_2 h(x_i))^2 \rightarrow \min . \quad (7.15)$$

Nach Gleichung 7.10 ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (g(x_i))^2 & \sum_{i=1}^n g(x_i)h(x_i) \\ \sum_{i=1}^n g(x_i)h(x_i) & \sum_{i=1}^n (h(x_i))^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i g(x_i) \\ \sum_{i=1}^n y_i h(x_i) \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

Als Lösung ergeben sich

$$a_2 = \frac{[\sum_{i=1}^n y_i g(x_i)] [\sum_{i=1}^n g(x_i)h(x_i)] - [\sum_{i=1}^n y_i h(x_i)] [\sum_{i=1}^n (g(x_i))^2]}{[\sum_{i=1}^n g(x_i)h(x_i)]^2 - [\sum_{i=1}^n (h(x_i))^2] [\sum_{i=1}^n (g(x_i))^2]} \quad (7.17)$$

und

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i g(x_i)}{\sum_{i=1}^n (g(x_i))^2} - a_2 \frac{\sum_{i=1}^n g(x_i) h(x_i)}{\sum_{i=1}^n (g(x_i))^2}. \quad (7.18)$$

### 7.1.2 Nichtlineare Regression

Im Gegensatz zur linearen Regression enthalten die Modellfunktionen im nichtlinearen Fall die Parameter selbst als Argument. Beispiele für nichtlineare Modelle sind die Potenzfunktionen

$$f(x; a, b, c) = a + bx^c \quad (7.19)$$

oder die Exponentialfunktionen

$$f(x; a, b, c) = a + b^{cx}. \quad (7.20)$$

Durch Logarithmieren erhält man aus Gleichung (7.19) mit  $a = 0$  ein lineares Ausgleichsproblem. Diese Art der Vereinfachung ist aber im Allgemeinen nicht möglich.

Aus der Methode der kleinsten Quadrate ergibt sich durch partielles Differenzieren ein in der Regel nichtlineares Gleichungssystem, welches im Allgemeinen nicht analytisch lösbar ist. Zur Bestimmung der optimalen Parameter fasst man das Regressionsproblem in seiner ursprünglichen Formulierung (7.1) als Minimierungsproblem auf. Solche Minimierungsprobleme können mithilfe iterativer Verfahren gelöst werden [121, S. 133]. Ausgehend von einem oder mehreren Startwerten erfolgt nun eine schrittweise Verbesserung der Näherung, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Die Genauigkeit wird in diesem Kontext über die Summe der quadrierten Residuen charakterisiert.

Als numerisches Verfahren kommt im Rahmen dieser Arbeit die *Optimization Toolbox* des Programms *MATLAB* zum Einsatz. Angewendet auf Gleichung (7.1) mit einem Startwert  $\mathbf{a}_0$  verwendet diese den Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus [90, 102], um die beste Lösung des Parametervektors  $\mathbf{a}$  zu finden. Im Vergleich zu iterativen Gradientenverfahren wie dem Newton-Raphson-Verfahren arbeitet der Nelder-Mead-Simplex-Algorithmus direkt mit den Funktionswerten und kommt somit ohne Ableitungen aus.

Die nichtlineare Regression kommt bei der Bestimmung der optimalen Parameter der Relaxationsfunktion (5.52) im Rahmen der fraktionalen Viskoelastizität zum Einsatz.

### 7.1.3 Nichtlineare Regression unter Nebenbedingungen

Oftmals ist es nicht sinnvoll, die Parameter eines Materialmodells ohne Nebenbedingungen zu bestimmen. Bilgiliy gibt in [32] einen Überblick über Restriktionen, die an

Verzerrungsenergiefunktionen gesetzt werden. Eine Möglichkeit, dies umzusetzen, besteht darin, die Lösung des Minimierungsproblems unter einer oder mehreren Nebenbedingungen zu bestimmen. In diesem Fall spricht man auch von einem restringierten Optimierungsproblem. Für eine Funktion  $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  lautet dies

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{unter der Nebenbedingung } \mathbf{x} \in Z \subset \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Die Menge  $Z$  kennzeichnet einen zulässigen Bereich, in dem das Minimum gesucht wird.

Für das Ogden-Modell (4.105) lautet das nichtlineare Regressionsproblem

$$\min_{\alpha, \mu} \sum_{i=1}^n \left[ P_i - \sum_{j=1}^N \mu_j \left( \lambda_i^{\alpha_j-1} - \lambda_i^{-\frac{1}{2}\alpha_j-1} \right) \right]^2. \tag{7.22}$$

Hierbei stehen die Werte  $P_i$  für die mittleren Spannungen gemessen mittels der ersten Piola-Kirchhoff'schen Spannung und  $\lambda_i$  die entsprechenden Streckungen. Allerdings werden in dieser Formulierung keine Forderungen an die Parameter  $\alpha$  und  $\mu$  gestellt, was zu unphysikalischen Effekten führen kann, vgl. Abschnitt 4.2.3.

Formuliert man das Problem als restringiertes Optimierungsproblem, so ergibt sich die Formulierung

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \mu} \sum_{i=1}^n \left[ P_i - \sum_{j=1}^N \mu_j \left( \lambda_i^{\alpha_j-1} - \lambda_i^{-\frac{1}{2}\alpha_j-1} \right) \right]^2 \\ \text{unter der Nebenbedingung } \alpha_j \mu_j > 0, \quad \forall j = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{7.23}$$

Eine approximierte Lösung für dieses restringierte Optimierungsproblem erhält man ebenfalls mit der *Optimization Toolbox* in *MATLAB*. Als Nebenbedingungen werden reelle Intervalle für die Parameter vorgegeben.

Im Falle des Ogden-Modells ist die Nebenbedingung als Produkt von Parameterpaaren formuliert. Man kann als Intervall also entweder  $I_- = (-\infty, 0)$  oder  $I_+ = (0, \infty)$  angeben. Es existieren für  $N$  Parameterpaare insgesamt  $N + 1$  mögliche Kombinationen von negativen und positiven Vorzeichen.

## 7.2 Parameteridentifikation und Simulation FDM gedruckter Proben

Im Folgenden werden die in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Modelle an die experimentell ermittelten Mittelwerte der Experimentellen Daten angepasst. Dazu werden die

Methoden der kleinsten Quadrate aus den vorherigen Abschnitten verwendet.

### 7.2.1 Monotoner Zugversuch

Zur Bestimmung der optimalen Parameter in den Materialmodellen Neo-Hooke, Mooney-Rivlin und Ogden, jeweils für die uniaxiale erste Piola-Kirchhoff'schen Spannung, vgl. Gleichungen (4.91), (4.96) und (4.105), werden die Daten aus den uniaxialen Zugversuchen an den Proben aus NinjaFlex und Arflex 45 verwendet, vgl. Abschnitt 6.3.1.

#### Parameteridentifikation für das Neo-Hooke'sche Modell

Für das Neo-Hooke'sche Materialmodell ist das Vorgehen zur Ermittlung des Parameters  $\mu$  wie folgt. Aus den ersten  $n$  gemittelten Messwerten  $(\lambda_i, P_i)$  wird der Parameter  $\mu$  nach Gleichung (7.13) bestimmt:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \left( \lambda_i - \frac{1}{\lambda_i^2} \right)}{\sum_{i=1}^n \left( \lambda_i - \frac{1}{\lambda_i^2} \right)^2} \quad (7.24)$$

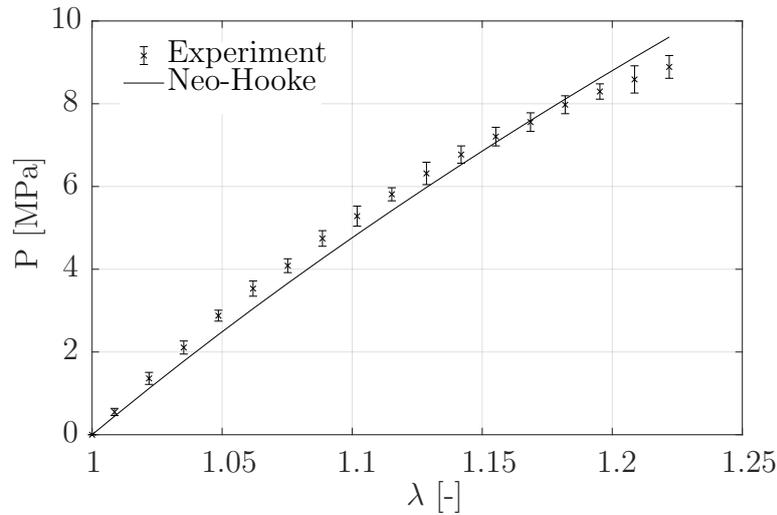
Die Schrittweite wird aufgrund des geringen numerischen Aufwands mit eins gewählt. Nach jedem Schritt berechnet man das Bestimmtheitsmaß  $R^2$ . Es wird nun das größtmögliche  $n$  bestimmt, so dass das Bestimmtheitsmaß (7.6) noch oberhalb von einer vorgegebenen Grenze liegt. Gewählt wird für das Neo-Hooke'sche Modell eine Grenze von 98%

Für das TPC-Filament ergibt sich eine maximale Streckung von  $\lambda = 1,2259$ , in der das Neo-Hooke'sche Modell noch mindestens 98% der Streuung der Messwerte statistisch erklären kann. Der optimale Parameter lautet für diese Streckung  $\mu = 17,4074$ . Aus der Annahme der Inkompressibilität ergibt sich  $\nu = 0,5$ . Daraus berechnet sich ein E-Modul durch

$$E = 3(1 + \nu)\mu \quad (7.25)$$

zu  $E = 52,2223$ . Dieser Wert liegt deutlich über dem experimentell bestimmten E-Modul von  $44,1 \pm 1,84$  MPa. Das Bestimmtheitsmaß liegt bei  $R^2 = 0,9841$ . Das Neo-Hooke'sche Modell ist zusammen mit den mittleren Messwerten und dem 95%-Konfidenzintervall in Abbildung 7.2 dargestellt.

Vergleicht man die Messwerte samt ihren Konfidenzintervallen mit den durch das Neo-Hooke'sche Modell erklärten Werten, so ergibt sich eine tendenzielle Unterschätzung der unteren Grenze der Konfidenzintervalle bis ca. 15% Dehnung. Im darauffolgenden



**Abbildung 7.2:** Vergleich des Neo-Hooke'schen Modells mit den experimentellen Daten für das TPC-Filament.

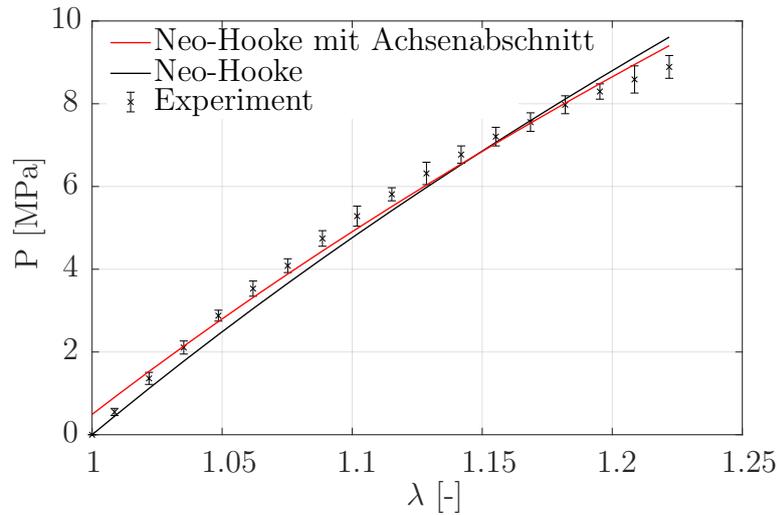
Bereich, ab ca. 18% Dehnung, werden die oberen Grenzen der Konfidenzintervalle der Messwerte generell überschätzt. Dies erklärt sich durch das Modell selbst. Bei einer Dehnung von 0% soll keine Spannung vorhanden sein. Folglich muss die lineare Regression durch den Ursprung gehen.

Lässt man diese Forderung aus rein mathematischer Sichtweise wegfallen und ermittelt die optimalen Parameter  $a_0$  und  $\mu$  im Modell

$$\hat{P}_i = a_0 + \mu \left( \lambda_i - \frac{1}{\lambda_i^2} \right), \quad (7.26)$$

so ergibt sich eine Verbesserung mit einem Bestimmtheitsmaß von  $R^2 = 0,9902$ . Der  $y$ -Achsenabschnitt nimmt einen Wert von  $a_0 = 0,4919$  MPa an. Dies entspricht einer Vorkraft von ca. 5 N, die im Experiment aber nicht verwendet wurde. Vergleicht man beide Ansätze, so zeigt sich, dass die erklärten Werte nun fast überall in den Konfidenzintervallen der mittleren Spannungswerte liegen. Bestimmt man den resultierenden E-Modul nach demselben Vorgehen wie bei einem Neo-Hooke'schen Modell ohne  $y$ -Achsenabschnitt, so ergibt sich ein Wert von  $E = 48,4215$  MPa. Dieser Wert liegt näher an dem experimentell bestimmten Wert von  $44,1 \pm 1,84$  MPa. Ein Vergleich der beiden Modelle ist in Abbildung 7.3 dargestellt.

Für das TPU ergibt sich nach demselben Vorgehen eine maximale Streckung für eine sinnvolle Verwendung des Neo-Hooke'schen Modells ( $R^2 > 0.98$ ) von  $\lambda = 1,3929$ . Der optimale Parameter lautet  $\mu = 3,2571$ , was zu einem E-Modul von  $E = 9,7712$  führt. Dieser Wert liegt im 95%-Konfidenzintervall des mittleren E-Moduls der experimentellen Daten ( $E = 10,0 \pm 0,81$  MPa). Das Bestimmtheitsmaß liegt bei 0,9879. In Abbildung



**Abbildung 7.3:** Vergleich der Neo-Hooke'schen Modelle mit und ohne Achsenabschnitt mit den experimentellen Daten für das TPC-Filament.

7.4 ist ein Vergleich der experimentell ermittelten Werte mit dem Materialmodell für diesen Streckungsbereich dargestellt.

Man erkennt, dass die erklärten Werte anfangs ebenfalls tendenziell unterhalb der gemittelten Spannungswerte liegen. Dies gilt bis ca. 25% Dehnung. Jedoch liegen sie fast immer innerhalb der jeweiligen Konfidenzintervalle, die zusätzlich eine geringere Breite aufweisen, als die Konfidenzintervalle der mittleren Spannungen des TPC. Ferner wird der in der Literatur angegebene Referenzwert von 40% Dehnung fast erreicht.

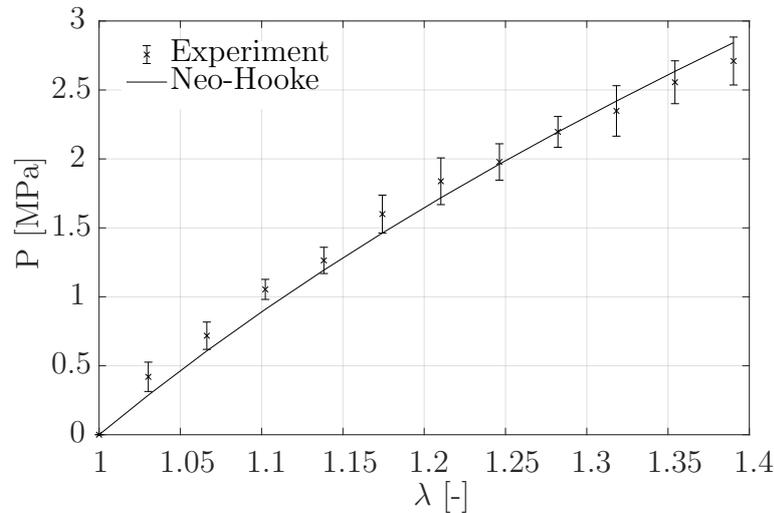
### Parameteridentifikation für das Mooney-Rivlin-Modell

In dem Materialmodell nach Mooney und Rivlin, Gleichung (4.96) müssen zwei Parameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  durch eine lineare Regression bestimmt werden. Die Lösungen ergeben sich aus den Gleichungen (7.18) und (7.17). Jedoch ist hierbei zu beachten, dass keine negativen Werte für  $\mu_1$  und  $\mu_2$  angenommen werden.

Für die experimentell ermittelten Werte des TPC ergeben sich jedoch unzulässige Lösungen  $\mu_1 = -12,6205$  und  $\mu_2 = 35,0259$ . Um dies zu korrigieren, wird nun eine lineare Regression unter Nebenbedingungen durchgeführt. Für das Mooney-Rivlin-Modell lautet dies

$$\min_{\mu_1, \mu_2} \sum_{i=1}^n \left[ P_i - \left( \mu_1 \left( \lambda_i - \frac{1}{\lambda_i^2} \right) + \mu_2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda_i^3} \right) \right) \right]^2 \quad (7.27)$$

unter der Nebenbedingung  $\mu_1 > 0, \mu_2 \geq 0$ .



**Abbildung 7.4:** Vergleich des Neo-Hooke'schen Modells mit den experimentellen Daten für das TPU-Filament.

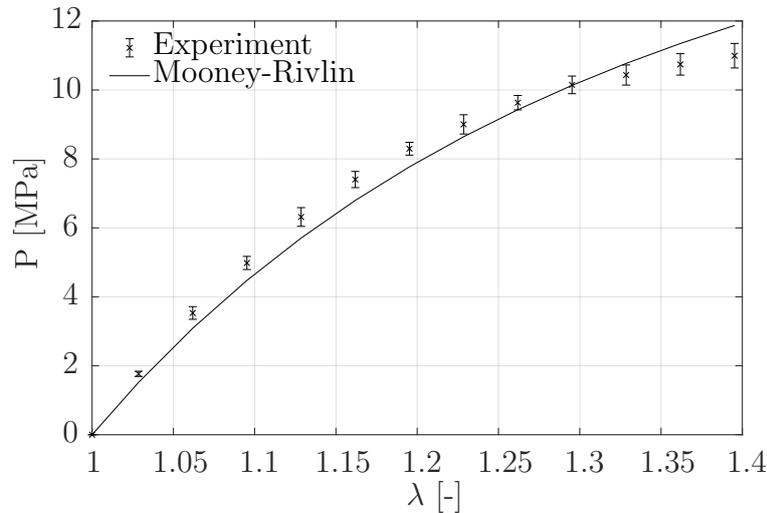
Es ergibt sich eine optimale Lösung von  $\mu_1 = 0,0000$  und  $\mu_2 = 18,7711$ . Wie in Gleichung (4.97) gezeigt, ist dies ebenfalls physikalisch nicht sinnvoll, da in diesem Fall die Verzerrungsenergiefunktion für  $\lambda \rightarrow \infty$  gegen  $\mu_2$  konvergieren würde.

Im Folgenden wird das größtmögliche  $\mu_1$  und die größtmögliche Streckung  $\lambda$  bestimmt, so dass das Bestimmtheitsmaß noch oberhalb von 0,98 liegt. Dazu werden die Parameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  aus den ersten  $m$  Werten für das Problem (7.27) bestimmt. Für den Fall, dass es keine Lösung für  $R^2 > 0,98$  und  $\mu_1 > 0$  gibt, wird  $m$  um eins reduziert.

Aus dieser Prozedur ergibt sich als Lösung eine Streckung von  $\lambda = 1,3952$ . Die zugehörigen Parameter lauten  $\mu_1 = 0,1717$  MPa und  $\mu_2 = 18,5500$  MPa. Der resultierende Schubmodul beträgt  $\mu = 18,7217$  MPa, was zu einem E-Modul von  $E = 56,1651$  MPa führt. Es gilt wie beim Neo-Hooke'schen Modell, dass der E-Modul rund 27% über dem experimentell bestimmten E-Modul liegt. Das Bestimmtheitsmaß beträgt  $R^2 = 0,9826$ . Die experimentellen Daten für diesen Bereich sowie das resultierende Modell sind in Abbildung 7.5 dargestellt.

Das Mooney-Rivlin-Modell unterschätzt wie das Neo-Hooke'sche Modell zunächst die Spannungen. Dies gilt für Dehnungen bis zu 30%.

Zur Bestimmung der optimalen Parameter des TPU wird aufgrund der Erfahrung, die bei der Bestimmung der Parameter des TPC gewonnen wurde, direkt die Formulierung des Minimierungsproblems unter Nebenbedingungen (7.27) verwendet. Wie zuvor werden zunächst die ersten  $m$  Messwerte verwendet und sukzessive erhöht. Hierbei wird als obere Grenze eine Dehnung von 100% aufgrund der Aussage in [62, S. 304] gewählt. Da das Modell jedoch bei dieser Streckung ein Bestimmtheitsmaß von  $R^2 = 0,9998$



**Abbildung 7.5:** Vergleich des Mooney-Rivlin-Modells mit den experimentellen Daten für das TPC-Filament.

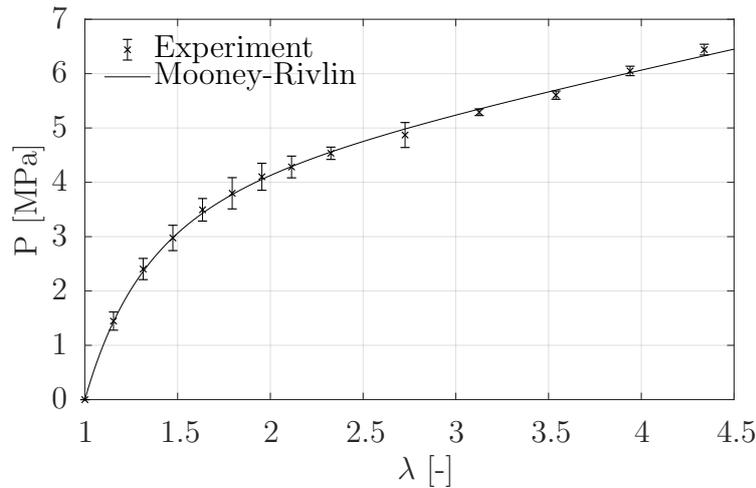
aufweist, wird die Streckung weiter erhöht. Es ergibt sich eine maximale Streckung von  $\lambda = 4,3396$ , die das Modell noch zufriedenstellend abbilden kann. Die Parameter lauten in diesem Fall  $\mu_1 = 0,7230$  MPa und  $\mu_2 = 3,2683$  MPa. Dies führt zu einem Schubmodul von  $\mu = 3,9913$  MPa und zu einem E-Modul von  $E = 11,9740$  MPa. Dieser Wert liegt rund 19% oberhalb des experimentell bestimmten E-Moduls. Das Bestimmtheitsmaß liegt bei  $R^2 = 0,9989$ . Ein Vergleich der experimentellen Daten und des Modells ist in Abbildung 7.6 dargestellt.

Wie das hohe Bestimmtheitsmaß andeutet, liegen alle Punkte sehr nah an den mittleren Spannungswerten. Das Modell ist in der Lage, sowohl den relativ steilen Anstieg als auch das weichere Verhalten im Bereich ab ca. 100% Dehnung abzubilden. Ab einer Streckung von  $\lambda = 4.5$  liegen die Messwerte stets oberhalb des Modells.

### Parameteridentifikation für das Ogden-Modell

Abschließend werden die optimalen Parameter für das Ogden-Modell bestimmt. Dazu wurde die Lösung des Minimierungsproblems (7.23) mit den experimentellen Daten numerisch approximiert. Zur Bestimmung der optimalen Anzahl an Summanden und der optimalen Verteilung der Vorzeichen auf die Parameter wird folgender Ablauf verwendet:

1. Starte mit  $N = 0$  und  $R_{ini}^2 = 0$ .
2. Erhöhe  $N$  um den Wert 1.
3. Bestimme alle  $N + 1$  möglichen Vorzeichenkombinationen, so dass  $\alpha_i \mu_i > 0$  gilt.



**Abbildung 7.6:** Vergleich des Mooney-Rivlin-Modells mit den experimentellen Daten für das TPU-Filament.

4. Bestimme zu den  $N + 1$  Möglichkeiten die optimalen Parameter  $\alpha_i, \mu_i$  mittels (7.23).
5. Wähle die Kombination mit dem größten  $R^2$ .
6. Falls  $R^2$  größer ist als  $R_{ini}^2$ , setze  $R_{ini}^2$  auf  $R^2$  und gehe zu 2.

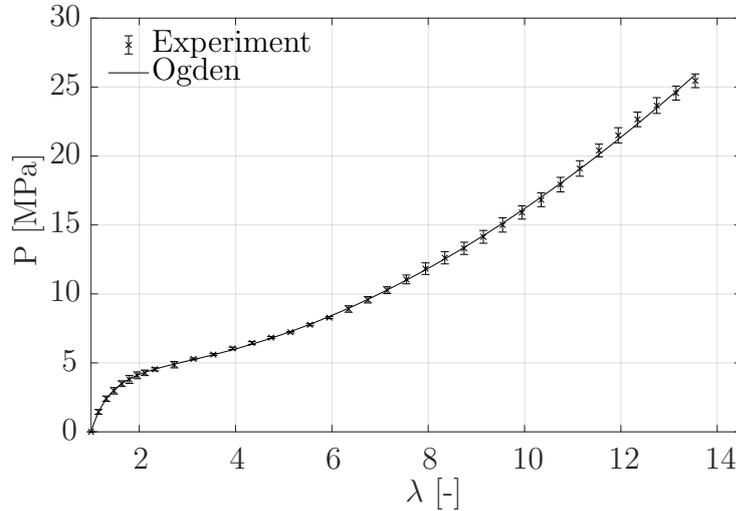
Zunächst werden die optimalen Parameter aufgrund der Daten der Zugversuche des TPC bestimmt. Hierbei zeigt sich, dass das Ogden-Modell den Spannungs-Dehnungs-Verlauf des TPC nicht besser abbilden kann als das Mooney-Rivlin-Modell. Es kommt zu einer generellen Unterschätzung der Werte im Bereich bis 40%. Das Bestimmtheitsmaß liegt mit  $R^2 = 0,9852$  zwar etwas höher, jedoch benötigt man dazu vier Parameter  $\mu_1, \alpha_1, \mu_2, \alpha_2$ , statt zwei wie im Mooney-Rivlin-Modell.

Für das TPU kann das Ogden-Modell den kompletten Spannungs-Dehnungs-Verlauf der einachsigen Zugversuchsdaten abbilden. Bei einem Bestimmtheitsmaß von  $R^2 = 0,9996$  ergibt sich die optimale Anzahl von vier Parametern, wobei ein Parameterpärchen ein negatives und das andere ein positives Vorzeichen aufweist. Der E-Modul liegt 13,7% über dem experimentell bestimmten E-Modul. Alle Parameter des Modells sind in Tabelle 7.1 aufgeführt.

**Tabelle 7.1:** Werte der Parameter im Ogden-Modell mit  $N = 2$  für das TPU-Filament.

Parameter	$\mu_1$ [MPa]	$\alpha_1$ [-]	$\mu_2$ [MPa]	$\alpha_2$ [-]	$\mu$ [MPa]	$E$ [MPa]	$R^2$
Wert	0,2388	2,772	-18,3098	-0,3778	3,7901	11,3704	0,9996

Das Ogden-Modell mit den optimalen Parametern ist zusammen mit den experimentellen Werte in Abbildung 7.7 dargestellt.



**Abbildung 7.7:** Vergleich des Ogden-Modells mit den experimentellen Daten für das TPU-Filmanet.

Es zeigt sich, dass das Modell sämtliche Bereiche des Spannungs-Dehnungs-Diagramms abbilden kann. Die Funktion ist im Bereich von  $\lambda = 1$  bis  $\lambda = 3,02$  konkav und anschließend konvex. Sie kann also sowohl das Aufweichen des Materials am Ende des linear-elastischen Bereichs als auch eine erneute Verfestigung für größere Dehnungen abbilden.

## 7.2.2 Relaxationsversuch

Zur Bestimmung der Parameter der Relaxationsfunktionen werden nichtlineare Regressionen, zum Teil unter Nebenbedingungen durchgeführt. Für das verallgemeinerte Maxwell-Modell (5.30) ergeben sich bei einer nichtrestringierten Optimierung teilweise negative Werte, so dass die Nebenbedingung der Nichtnegativität für alle Parameter als Nebenbedingung formuliert wird.

$$\min_{\mathbf{E}, \boldsymbol{\eta}} \sum_{i=1}^n \left( G_i - \left( E_{\infty} + \sum_{j=1}^m E_j e^{-t_i/\tau_j} \right) \right)^2 \quad (7.28)$$

unter der Nebenbedingung  $\mathbf{E} > \mathbf{0}, \boldsymbol{\eta} > \mathbf{0}$ .

Hierbei bezeichnen  $G_i$  die experimentell gemessenen Werte des Relaxationsversuchs.

Ebenfalls zu bestimmen ist die optimale Anzahl an Summanden der Prony-Reihe. Das Schema der Optimierung lautet in Anlehnung an den Algorithmus zur Bestimmung der

optimalen Anzahl von Parametern im Ogden-Modell:

1. Starte mit  $N = 0$  und  $R_{\text{ini}}^2 = 0$ .
2. Erhöhe  $N$  um den Wert 1.
3. Bestimme die optimalen Parameter  $E_\infty, E_j, \tau_j$  für  $j = 1, \dots, n$  unter der Nebenbedingung, dass alle Werte positiv sein müssen.
4. Falls  $R^2$  größer ist als  $R_{\text{ini}}^2$ , setze  $R_{\text{ini}}^2$  auf  $R^2$  und gehe zu 2.

Für das das fraktionale Zener-Modell basierend auf der Mittag-Leffler-Funktion (5.52) wird eine nichtlineare Regression ohne Nebenbedingungen durchgeführt, da der charakteristische Verlauf einer Relaxationsfunktion nur durch nichtnegative Parameter erreicht wird.

$$\min_{E_\infty, E_M, \tau, \nu} \sum_{i=1}^n (G_i - (E_\infty + E_M E_\nu(-(t_i/\tau)^\nu)))^2 . \quad (7.29)$$

### Parameteridentifikation für das TPC-Filament

Zunächst werden die optimalen Parameter für die Daten der Relaxationsversuche des TPC bestimmt. Für das verallgemeinerte Maxwell-Modell ergibt sich keine Verbesserung des Bestimmtheitsmaßes ab  $n = 4$ , was neun Parametern entspricht. Für diese Anzahl an Parametern beträgt das Bestimmtheitsmaß  $R^2 = 0,9999$ . Die optimalen Parameter sind in Tabelle 7.2 aufgeführt.

**Tabelle 7.2:** Werte der Parameter im verallgemeinerten Maxwell-Modell mit  $n = 4$  für das TPC-Filament.

Parameter	$E_1$ [MPa]	$E_2$ [MPa]	$E_3$ [MPa]	$E_4$ [MPa]
Wert	2,743	0,0226	1,9511	3,4622
Parameter	$\tau_1$ [s]	$\tau_2$ [s]	$\tau_3$ [s]	$\tau_4$ [s]
Wert	156,42	43393	17,09	17,08
Parameter	$E_\infty$ [MPa]	$G_0$ [MPa]	$R^2$	
Wert	23,0047	31,1837	0,9999	

Bei der Bestimmung der optimalen Parameter im fraktionalen Modell, formuliert mit der Mittag-Leffler-Funktion, ergeben sich stets vier Parameter. Das Bestimmtheitsmaß

**Tabelle 7.3:** Werte der Parameter im fraktionalen Zener-Modell für das TPC-Filament.

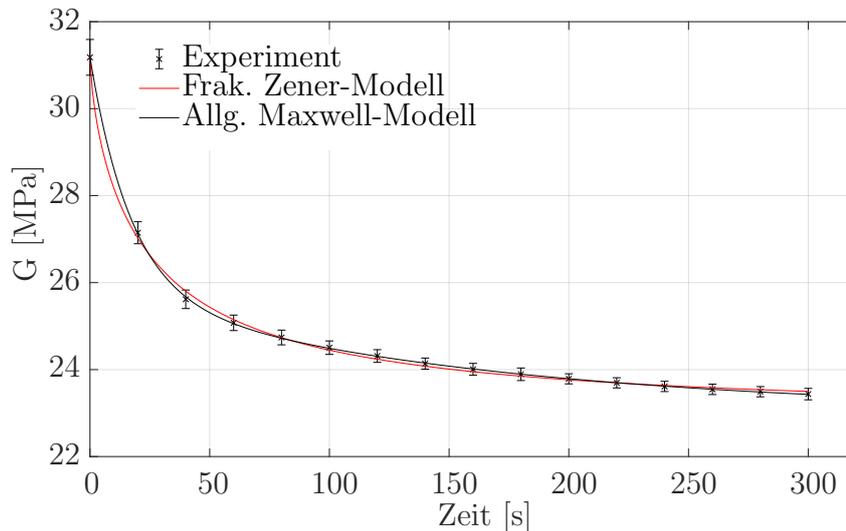
Parameter	$E_M$ [MPa]	$E_\infty$ [MPa]	$\tau$ [s]	$\nu$ [-]	$G_0$ [MPa]	$R^2$
Wert	8,4167	22,772	32,9726	0,6927	31,1887	0,9986

liegt mit  $R^2 = 0,9986$  ebenfalls nahe der Eins. Die ermittelten Werte sind in Tabelle 7.3 aufgeführt.

Vergleicht man die resultierenden Parameter mit den experimentellen Daten, so ergibt sich, dass beide Modelle den momentanen Elastizitätsmodul gut abbilden können. Beide Werte liegen mit 31,183 MPa (verallgemeinertes Maxwell-Modell) bzw. mit 31,189 MPa (fraktionales Zener-Modell) im Konfidenzintervall zum Niveau 95% des mittleren momentanen Elastizitätsmoduls der experimentellen Werte. Dies wurde in Kapitel 6 bestimmt und liegt bei  $G_0 = 31,1800 \pm 0,3755$  MPa.

Für den Gleichgewichtsmodul muss gelten, dass er unterhalb des Wertes von  $G(t = 300 \text{ s}) = 23,4366 - 0,1198 = 23,3168$  MPa liegt, da die Probe am Ende des Relaxationsversuchs noch nicht vollständig relaxiert ist. Es ergeben sich Werte von 23,0047 MPa (verallgemeinertes Maxwell-Modell) bzw. 22,772 MPa (fraktionales Zener-Modell).

Die experimentellen Daten sind mit beiden Modellfunktionen in Abbildung 7.8 dargestellt. Man erkennt, dass beide Kurven nah beieinander liegen, obwohl das fraktionale Zener-Modell mit fünf Parametern weniger auskommt.

**Abbildung 7.8:** Vergleich der Relaxationsfunktionen beider Modelle mit den experimentellen Daten für das TPC-Filament.

### Parameteridentifikation für das TPU-Filament

Im nächsten Schritt werden die optimalen Parameter zur Beschreibung des Relaxationsverhaltens des TPU bestimmt. Auch bei diesem Material ergibt sich im allgemeinen Maxwell-Modell keine Verbesserung des Bestimmtheitsmaßes ab  $n = 4$  Summanden. Bei dieser Anzahl beträgt das Bestimmtheitsmaß  $R^2 = 0,9998$ . Alle gewonnenen Parameter sind in Tabelle 7.4 dargestellt.

**Tabelle 7.4:** Werte der Parameter im verallgemeinerten Maxwell-Modell mit  $n = 4$  für das TPU-Filament.

Parameter	$E_1$ [MPa]	$E_2$ [MPa]	$E_3$ [MPa]	$E_4$ [MPa]
Wert	0,4451	1,1712	1,3385	0,4107
Parameter	$\tau_1$ [s]	$\tau_2$ [s]	$\tau_3$ [s]	$\tau_4$ [s]
Wert	85,00	853,91	15,62	84,99
Parameter	$E_\infty$ [MPa]	$G_0$ [MPa]	$R^2$	
Wert	4,3451	7,7107	0,9998	

Für das fraktionale Zener-Modell ergeben sich die vier optimalen Parameter bei einem Bestimmtheitsmaß von  $R^2 = 0,9992$ . Die Werte sind in Tabelle 7.5 aufgelistet.

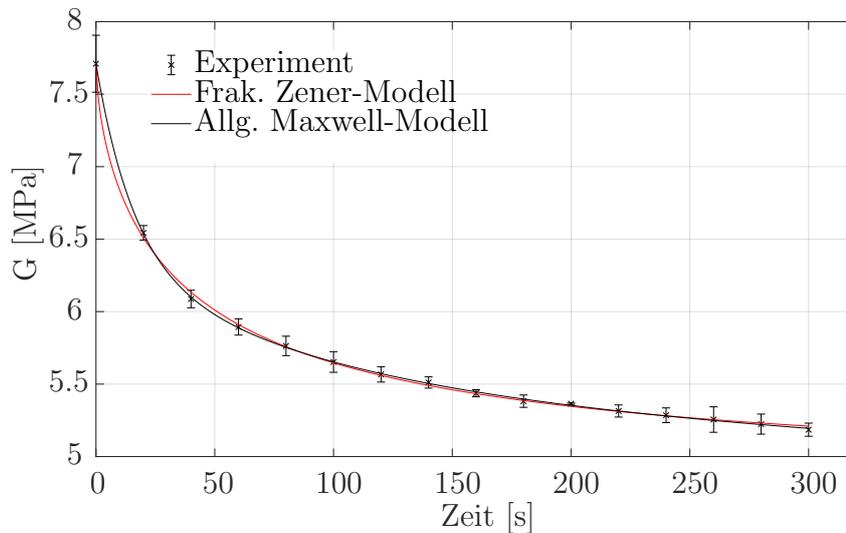
**Tabelle 7.5:** Werte der Parameter im fraktionalen Zener-Modell für das TPU-Filament.

Parameter	$E_M$ [MPa]	$E_\infty$ [MPa]	$\tau$ [s]	$\nu$ [-]	$G_0$ [MPa]	$R^2$
Wert	2,9614	4,7511	54,8156	0,6359	7,7125	0,9992

Zur Beurteilung der ermittelten Parameter werden die experimentellen Erkenntnisse hinzugezogen. Das 95%- Konfidenzintervall des momentanen Elastizitätsmoduls im Experiment  $G_0 = 7,71 \pm 0,2687$  überdeckt beide ermittelten Moduln. Bei dem verallgemeinerten Maxwell-Modell liegt dies bei 7,7107 MPa, im fraktionalen Zener-Modell ergibt sich ein Wert von 7,7125 MPa.

Beide Gleichgewichtsmoduln liegen mit 4,3451 MPa (verallgemeinertes Maxwell-Modell) sowie 4,7511 MPa (fraktionales Zener-Modell) unterhalb der unteren Grenze des Konfidenzintervalls zum Niveau 95% der Relaxationsfunktion zum Zeitpunkt  $t = 300$  s. Dies deutet darauf hin, dass das TPU deutlich langsamer relaxiert als das TPC.

Beide Modellfunktionen sowie die experimentellen Daten des TPU sind in Abbildung 7.9 dargestellt. Wie zuvor werden die Stärken des fraktionalen Zener-Modells deutlich, das eine fast identische Güte mit weniger als der Hälfte der Parameter erreicht.



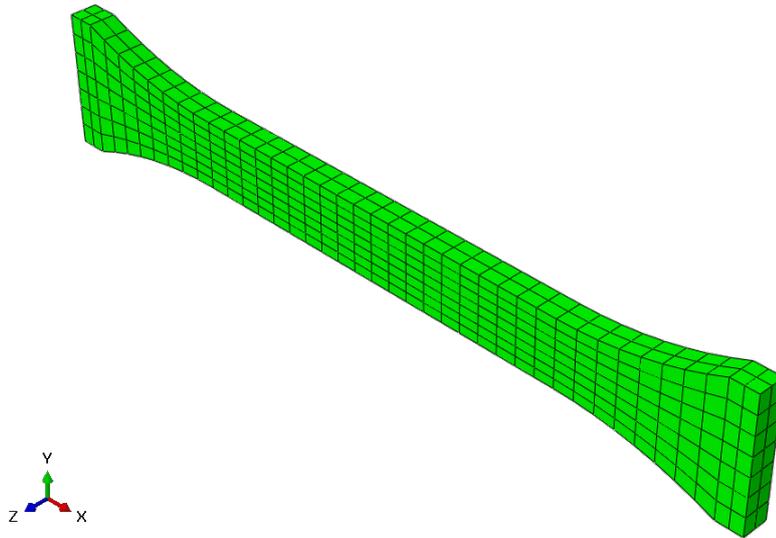
**Abbildung 7.9:** Vergleich der Relaxationsfunktionen beider Modelle mit den experimentellen Daten für das TPU-Filament.

### 7.2.3 FEM-Simulation zur Validierung

Die ermittelten Parameter werden im Folgenden in einer FEM-Simulation überprüft. Dazu wird das Material sowohl mit hyperelastischen als auch als viskoelastischen Eigenschaften modelliert. Als Probengeometrie dienen dieselben Bemaßungen wie bei der experimentellen Untersuchung. Das Modell wurde bereits in früheren Simulationen für andere hyperelastische Materialien verwendet [46]. Die Randbedingungen werden von den Experimenten übernommen, d.h. ein Ende der Probe ist fest eingespannt und an dem anderen Ende wird durch eine vorgegebene Verschiebung definiert. Als Elemente werden hexagonale, Hybridelemente verwendet. Diese Hybridelemente müssen zur Modellierung eines komplett inkompressiblen Materials verwendet werden [15, 36]. Sie besitzen einen weiteren Freiheitsgrad zur Berechnung des Drucks. Das Modell besteht aus 266 Elementen, die sich in der Dicke auf zwei Elemente und in der Breite auf sieben Elemente aufteilen, vgl. Abbildung 7.10.

Man bestimmt aus den Knotenverschiebungen die deviatorischen Schubdehnungen und Spannungen. Für die Beschreibung des Materialverhaltens dient ein Integrationspunkt eines Referenzelements im Modellzentrum. Die dort auftretenden Spannungen werden in jedem Berechnungsschritt bestimmt. Die durch die Verschiebung entstehenden Spannungen werden in Abaqus als Cauchy-Spannungen ausgegeben.

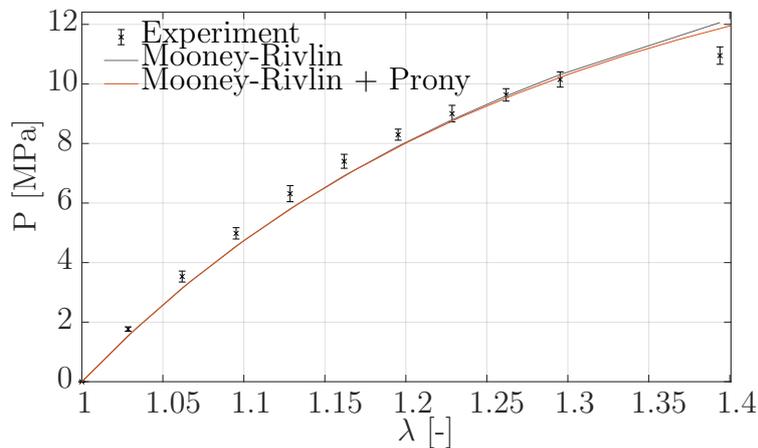
Als hyperelastisches Materialmodell dient das Mooney-Rivlin-Modell für das TPC-Filament bzw. das Ogden-Modell für das TPU-Filament. Für letzteres müssen die ermittelten Werte für  $\mu_1$  und  $\mu_2$  in die Formulierung nach Valanis und Landel [139], Gleichung



**Abbildung 7.10:** Vernetztes Modell der Zugprobe in Abaqus.

(4.107), umgerechnet werden. Ein fraktionales Zener-Modell ist in Abaqus nicht vorhanden, so dass die Daten der Prony-Reihen verwendet werden.

Zunächst wird eine Simulation mit den ermittelten Mooney-Rivlin-Parametern und den Parametern der Prony-Reihe für das TPC-Filament durchgeführt. Rechnet man die ermittelten wahren Spannungen in die erste Piola-Kirchhoff'sche Spannung um, so ergibt sich ein Verlauf wie in Abbildung 7.11 dargestellt.

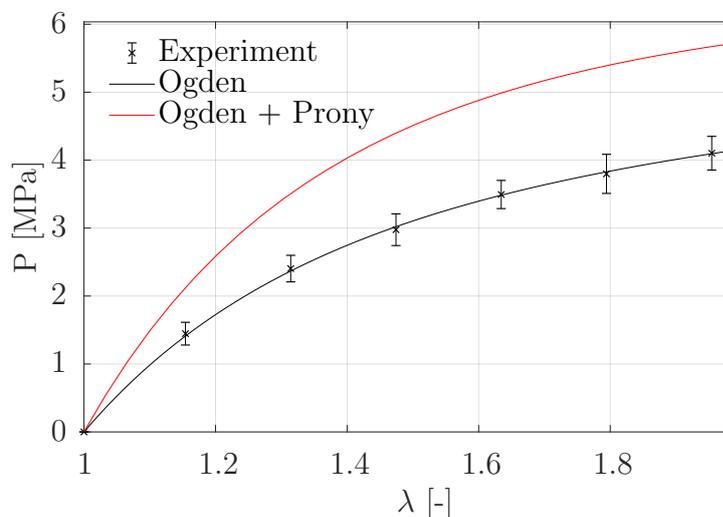


**Abbildung 7.11:** Vergleich der FEM-Simulation mit den experimentellen Daten für das TPC-Filament.

Aus den simulierten Werten und den experimentellen Daten ergibt sich ein Bestimmtheitsmaß von  $R^2 = 0,9894$ . Dies liegt etwas höher als bei der rein elastischen Betrachtung.

tung nur über das Mooney-Rivlin-Modell. Man erkennt, dass die simulierten Werte nahe der experimentell ermittelten Werte liegen. Andererseits weist das Modell dieselben Schwächen auf, die auch bei der reinen Betrachtung der Mooney-Rivlin-Parameter auftreten. Die Spannungswerte werden tendenziell etwas unterschätzt. Insgesamt gilt, dass die Kombination der hyperelastischen mit den viskoelastischen Effekten nur zu einer geringfügigen Verbesserung führt. Eine rein hyperelastische Rechnung führt zu denselben Ergebnissen, die bei der reinen Parameteridentifikation gewonnen wurden.

Für das TPU-Filament wird das Ogden-Modell samt der ermittelten Parameter mit den Werten der Prony-Reihe kombiniert. Hierbei zeigt sich eine deutliche Abweichung zwischen den simulierten und den experimentell ermittelten Werten, vgl. Abbildung 7.12.



**Abbildung 7.12:** Vergleich der FEM-Simulation mit den experimentellen Daten für das TPU-Filament.

Diese Abweichung tritt nur bei der Kombination mit den Prony-Reihen-Parametern auf. Eine rein hyperelastische Simulation stimmt mit dem Ogden-Modell, ermittelt aus den experimentellen Daten, überein. Erklären lässt sich dies durch eine zu hohe Dehnrates in den monotonen Zugversuchen. Dies führt zu einem stark viskoelastischen Materialverhalten im Versuch. Für genauere Aussagen sollten sowohl monotone Zugversuche mit einer geringeren Dehnrates, als auch längere Relaxationsversuche durchgeführt werden.



# 8 Unsichere Materialparameter

---

Dieses Kapitel behandelt zwei Arten von stochastischen Unsicherheiten im Material. Nach einem Überblick über die stochastischen Grundlagen wird in Abschnitt 8.2 eine Methode zur Bestimmung der Größenverteilung kugelförmiger Einschlüsse im Material vorgestellt. Als Grundlage dient eine geschätzte Verteilung der Größen von gemessenen Kreisradien aus zweidimensionalen Schnittbildern. In Abschnitt 8.3 wird der Einfluss unsicherer Materialparameter auf eine Ausgangsgröße anhand des Euler-Bernoulli-Balkens exemplarisch untersucht. Insbesondere wird der Einfluss eines nicht homogenen E-Moduls auf die Verteilung der maximalen Durchbiegung studiert.

## 8.1 Stochastische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden Grundlagen der Stochastik vorgestellt, die im weiteren Verlauf dieses Kapitels verwendet werden. Für eine grundlegende Einführung sei auf das Buch von A. Klenke [81] verwiesen.

**Definition 8.1** (Messraum und Wahrscheinlichkeitsraum). Ein Messraum ist das Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$ , bestehend aus einer Grundmenge  $\Omega \neq \emptyset$  und einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  über der Grundmenge  $\Omega$ . Das Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  bestehend aus einem Messraum sowie einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  wird als Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet.

Ist die Menge  $\Omega$  höchstens abzählbar, so verwendet man als  $\sigma$ -Algebra die Potenzmenge von  $\Omega$ . In diesem Fall wird der Messraum als diskret bezeichnet.

**Definition 8.2** (Reelle Zufallsvariable und Verteilung). Eine Abbildung  $X$  von einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  in die reellen Zahlen versehen mit der Borel'schen  $\sigma$ -Algebra  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  heißt reelle Zufallsvariable, falls für alle  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  gilt:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}. \quad (8.1)$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  aus dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  angewendet auf  $A$  wird als Verteilung von  $X$  bezeichnet.

Nimmt eine Zufallsvariable nur höchstens abzählbar viele Werte an, so wird sie als diskret bezeichnet.

**Definition 8.3** (Verteilungsfunktion). Zu einer reellen Zufallsvariable heißt die Funktion  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  mit

$$F_X(x) := P(X \leq x)$$

Verteilungsfunktion von  $X$ .

Verteilungsfunktionen erfüllen stets die Eigenschaften, dass Sie monoton wachsend und rechtsseitig stetig sind. Außerdem ergeben sich die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1. \quad (8.2)$$

Diese Eigenschaften sind definierende Eigenschaften, d.h. jede Funktion, die diese Eigenschaften erfüllt, ist eine Verteilungsfunktion.

**Definition 8.4** (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion). Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  heißt Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder nur Wahrscheinlichkeitsdichte, falls gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1.$$

Der Zusammenhang zwischen einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und der Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable  $X$  besteht über

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(\xi) \, d\xi. \quad (8.3)$$

In diesem Fall heißt die Zufallsvariable  $X$  absolutstetig, oder nur stetig.

**Definition 8.5** (Erwartungswert und Varianz). Das Integral einer Zufallsvariable bezüglich ihres Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  über  $\Omega$  heißt im Falle der Existenz der Erwartungswert der Zufallsvariable  $X$ :

$$E(X) = \int_{\Omega} X \, dP$$

Analog definiert man die Varianz als

$$\text{Var}(X) = \int_{\Omega} (X - E(X))^2 \, dP = E(X - E(X))^2.$$

Für Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  berechnen sich der Erwartungswert und die Varianz mittels

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

Zu einer Zufallsvariable  $X$  mit Erwartungswert  $E(X)$  definiert man das  $k$ -te zentrale Moment als

$$\mu_k = E\left((X - \mu)^k\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (8.4)$$

sofern das  $k$ -te Moment existiert:

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x) < \infty. \quad (8.5)$$

Das erste Moment ist offenbar genau der Erwartungswert, das zweite zentrierte Moment entspricht der Varianz. Die Schiefe einer Verteilung ist als das dritte zentrale Moment, dividiert durch die Standardabweichung, also die Wurzel aus der Varianz definiert:

$$\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = E\left(\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right). \quad (8.6)$$

Eine Verteilung wird als rechtsschief bezeichnet, falls  $\gamma > 0$  gilt. Analog heißt sie für  $\gamma < 0$  linksschief. Im Falle von  $\gamma = 0$  spricht man von einer symmetrischen Verteilung.

### 8.1.1 Eigenschaften von Zufallsvariablen

Für eine stetige Zufallsvariable  $X$  mit Erwartungswert  $E(X)$ , Varianz  $Var(X)$  und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f(x)$  gilt

$$E(a + bX) = a + bE(X) \quad (8.7)$$

$$Var(a + bX) = b^2 Var(X) \quad (8.8)$$

für alle  $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} E(a + bX) &= \int_{-\infty}^{\infty} (a + bx)f(x) \, dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \, dx \\ &= a + bE(X), \end{aligned}$$

denn für eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f$  gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1$ . Ferner ist  $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \, dx$  der Erwartungswert.

Zum Beweis der zweiten Eigenschaft wird (8.7) verwendet:

$$\begin{aligned} \text{Var}(a + bX) &= E((a + bX - E(a + bX))^2) = E((bX - bE(X))^2) \\ &= E(b^2(X - E(X))^2) = b^2E(X - E(X))^2 = b^2\text{Var}(X). \end{aligned}$$

□

### 8.1.2 Standardisierung von Zufallsvariablen

Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X$  mit Erwartungswert  $\mu \in \mathbb{R}$  und Varianz  $\sigma^2 > 0$ . Dann gilt

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{8.9}$$

ist eine Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mu = 0$  und Varianz  $\sigma = 1$ . Gleichung (8.9) wird als Standardisierung oder im Falle der Normalverteilung als  $Z$ -Transformation bezeichnet.

*Beweis.* Mit (8.7) und (8.8) gilt:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = 0, \\ \text{Var}(Z) &= \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\text{Var}(X) = 1. \end{aligned}$$

□

### 8.1.3 Die lineare Transformation einer normalverteilten Zufallsvariable

**Satz 8.1.** Sei  $X$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $E(X) = \mu$  und Varianz  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ . Dann gilt für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $b \neq 0$ , dass die Zufallsvariable

$$Y = a + bX$$

- (i) auch normalverteilt ist,  
(ii) den Erwartungswert  $E(Y) = a + b\mu$  und die Varianz  $Var(Y) = b^2\sigma^2$  besitzt.

*Beweis.* Die zweite Behauptung folgt direkt aus (8.7) und (8.8). Zum Beweis von (i) berechnet man die Verteilungsfunktion von  $Y$ :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(a + bX \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-a}{b}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{b}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2\right) d\xi. \end{aligned}$$

Die Substitution  $\xi = \frac{y-a}{b}$  ergibt

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(b\sigma)} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-a}{b}-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(b\sigma)} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a+b\mu)}{b\sigma}\right)^2\right) dy. \end{aligned}$$

Dies ist die Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert  $E(Y) = a + b\mu$  und Varianz  $Var(Y) = b^2\sigma^2$ .  $\square$

### 8.1.4 Überdeckungswahrscheinlichkeit

Sei  $X$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit bekanntem Erwartungswert  $\mu$ . Weiter seien  $\alpha, p \in (0, 1)$ . Mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  soll  $X$  in dem Intervall  $I = [\mu - p\mu, \mu + p\mu]$  liegen, d.h.

$$P(\mu - p\mu \leq X \leq \mu + p\mu) = 1 - \alpha. \quad (8.10)$$

Dann muss die Standardabweichung  $\sigma$  von  $X$  wie folgt gewählt werden:

$$\sigma = \frac{p\mu}{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}. \quad (8.11)$$

*Beweis.* Wendet man die  $Z$ -Transformation (8.9) auf (8.10) an, so gilt mit den Eigen-

schaften der Normalverteilung:

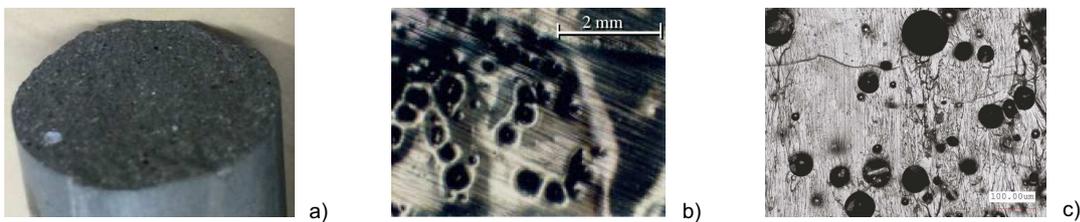
$$\begin{aligned}
 P(\mu - p\mu \leq X \leq \mu + p\mu) &= P\left(\frac{\mu - p\mu - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + p\mu - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= P\left(-\frac{p\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{p\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{p\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{p\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{p\mu}{\sigma}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{p\mu}{\sigma}\right) \\
 &= 2\Phi\left(\frac{p\mu}{\sigma}\right) - 1 \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \iff \Phi\left(\frac{p\mu}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \iff \frac{p\mu}{\sigma} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}.
 \end{aligned}$$

□

Hierbei bezeichnet  $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$  das  $1 - \alpha/2$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

## 8.2 Porenverteilung in homogenen Materialien

In vielen homogenen Materialien spielt der Einfluss von Hohlräumen auf die mechanischen Eigenschaften sowie auf das Verformungs- und Versagensverhalten eine wichtige Rolle. Beispiele hierfür sind der duktile Bruch durch das Entstehen und Zusammenwachsen von Poren [26, 41, 137], das Entstehen von Lunkern in Gusskomponenten [86, 112] oder Lufteinschlüsse in weichen biologischen Geweben [50]. Auch in den Druckvorgängen der additiven Fertigung entstehen prozessbedingte Einschlüsse im Material [138].



**Abbildung 8.1:** Beispiele für Porenverteilungen in verschiedenen Materialien: a) poröse Bruchfläche in einem ultrahochfesten Beton (b) Kavitationen in der Niere während einer extrakorporalen Stoßwellenlithotripsie [146] und (c) Poren in Polyurea.

Unter einer Pore versteht man bei Gussprozessen einen Hohlraum, der während des Erstarrens aus einer Gasblase entstanden ist [67, S. 399]. Im Folgenden wird dieser Begriff auch für Hohlräume in anderen Materialien verwendet. Beispiele für Poren in verschiedenen Materialien werden in Abbildung 8.1 dargestellt.

Zur Beschreibung der Porenverteilung in einem Material müssen verschiedene Aspekte betrachtet werden. Neben der Anzahl der Poren spielt die Form und ihre Größe eine wichtige Rolle. Der einfachste Ansatz zur Beschreibung ist die Porosität, die über das

Verhältnis des Porenvolumens zum Gesamtvolumen berechnet wird. Die Porosität dient zur Klassifizierung in offenzellige, geschlossenzellige oder gemischtzellige Materialien [64]. Eine Einteilung für zellulären Gummi ist in [55] zu finden.

Die optimale Methode zur Bestimmung der Größenverteilung von Poren ist die Mikro-Computertomographie. Sie wird z.B. zur Analyse der inneren Struktur geschäumter Materialien verwendet [107]. Im Gegensatz zur 2D-basierten Materialographie beinhalten 3D-Aufnahmen sämtliche räumliche Informationen wie die Verteilung der Porengrößen und -Formen. Außerdem ist diese Untersuchungsmethode zerstörungsfrei. Nachteile sind die sehr hohen Kosten, insbesondere bei sehr hohen Auflösungen, die Beschränkung auf kleine Volumen und die aufwändige Nachbearbeitung [107].

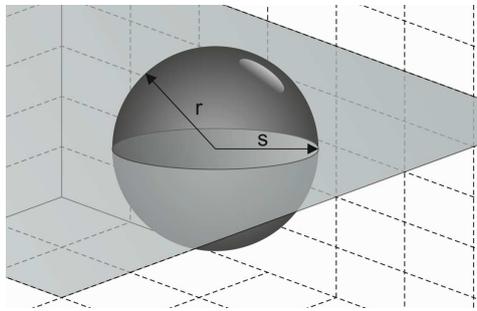
Eine Alternative zur Mikro-Computertomographie bei geschlossenzelligen Materialien mit kugelförmigen Poren ist die mikroskopische Analyse von Schnittbildern. Zunächst kann mittels vieler verschiedene Schnitte durch das Material die Hypothese der Geschlossenzelligkeit überprüft werden. Außerdem kann im Fall von stets kreisförmigen Schnitten durch Einschlüsse auf die Kugelförmigkeit der Poren geschlossen werden. Dem Vorteil der mikroskopische Analyse, wie beispielsweise der relativ niedrigen Kosten und der einfachen Handhabung, steht der Nachteil gegenüber, dass man nicht direkt von den Schnittbildern auf die Struktur der Materialien schließen kann. Ein Beispiel für eine Fehlinterpretation sind die auf Mikroskopaufnahmen sichtbaren nadelförmigen Strukturen in Martensit. In Wirklichkeit ist die Struktur plattenförmig [24, p. 18]. Ein weiteres bekanntes Beispiel ist die Struktur der Leber von Säugetieren, die lange Zeit falsch angenommen worden ist [50].

Für kugelförmige Einschlüsse ist das Problem einfacher zu lösen, da die Größe einer Kugel lediglich durch einen Parameter, z.B. durch den Radius, charakterisiert werden kann. Im Folgenden wird gezeigt, wie man mit den Mitteln der Stereologie von der im Schnittbild gemessenen Verteilung der Kreisradien auf die Verteilung der Kugelradien im Material schließen kann. Der Begriff der Stereologie beschreibt die räumliche Interpretation von ebenen Informationen. Sie wird in vielen Bereichen der Forschung angewendet wie beispielsweise der Materialwissenschaft, der Geologie und der Medizin [117]. Ziel der Stereologie ist nicht die exakte Rekonstruktion der räumlichen Struktur, sondern lediglich eine stochastische Beschreibung im Sinne einer Größenverteilung.

Ziel dieses Abschnitts ist eine Analyse der praktischen Anwendbarkeit der Stereologie bei der Modellierung der inneren Struktur geschlossenzelliger Materialien. Der Fokus liegt auf flexiblen Materialien mit kugelförmigen Einschlüssen, insbesondere der thermoplastischen Polyurethanverbindung aus Kapitel 6. Mittels des sogenannten Wicksell'schen Korpuskelproblems [147] werden Zusammenhänge zwischen der ebenen Kreisradienverteilung und der räumlichen Kugelradienverteilung hergestellt. Es wird untersucht, wie groß der Fehler ist, wenn man aus einer gemessenen Kreisradienverteilung auf eine falsche Kugelradienverteilung schließt. Dazu werden verschiedene stochastische Abstandsmaße betrachtet.

### 8.2.1 Das Wicksell'sche Korpuskelproblem

Im Folgenden wird ein Körper  $\mathcal{B}$  mit disjunkten kugelförmigen Poren betrachtet. Die Radien  $r$  können verschieden sein und liegen im Intervall  $(0, \mathcal{R}]$  für ein  $\mathcal{R} > 0$ . Die Porenmittelpunkte werden als gleichverteilt angesehen. Wird dieser Körper nun durch eine beliebige zufällige Ebene geschnitten, erkennt man auf der Schnittebene gerade die Kreise, deren Poren von der Ebene geschnitten wurde, vgl. Abb. 8.2. Die nun gemessenen Kreisradien sind fast sicher kleiner als die Kugelradien, der zugehörigen Poren, da die Kugeln fast sicher nicht genau in der Mitte geschnitten werden. Wicksell untersuchte in seiner Arbeit [147] wie man nun von der Kreisradienverteilung auf die unbekannte Kugelradienverteilung schließen kann.



**Abbildung 8.2:** Darstellung des Wicksell'schen Korpuskelproblems: Wahrer Kugelradius  $r$  und gemessener Kreisradius  $s < r$ .

Die Kreisradien der Schnitte durch die Poren werden mit  $s \leq r$  bezeichnet. Da es sich um Realisationen von Zufallsvariablen handelt, werden diese entsprechend mit  $R$  bzw.  $S$  bezeichnet. Die zugehörigen Verteilungsfunktionen lauten  $F(r)$  und  $G(s)$  mit korrespondierenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

$$f(r) = \frac{d}{dr} F(r), \quad (8.12)$$

$$g(s) = \frac{d}{ds} G(s). \quad (8.13)$$

Es wird weiterhin davon ausgegangen, dass die Zufallsvariablen einen Erwartungswert und eine Varianz besitzen. Ausgehend von einer bekannten Verteilung der Kreisradien, gegeben beispielsweise durch die Dichte  $g(s)$ , ist die unbekannte Verteilung der Kugelradien  $f(r)$  gesucht.

Es wird nun eine kugelförmige Pore  $\mathcal{K}_r \subset \mathcal{B}$  mit Radius  $r$  und eine zufällig orientierte Ebene  $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$  betrachtet. Wie in [147] gezeigt worden ist, lautet die Wahrscheinlich-

keitsdichte für Kugeln mit Radius  $r$ , die einen Schnittkreis in der Ebene  $\mathcal{T}$  erzeugen

$$n(r) = \frac{r f(r)}{E(R)}. \quad (8.14)$$

In (8.14) bezeichnet  $E(R)$  dem Erwartungswert von  $R$ . Der Schnittradius kann mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden:

$$s(z) = \sqrt{r^2 - z^2} \mathbb{1}_{[0,r)}(z), \quad (8.15)$$

wobei  $z$  der Abstand zwischen  $\mathcal{T}$  und dem Mittelpunkt der Pore  $\mathcal{K}_r$  ist. Für den Fall  $z > r$  wird die Pore nicht geschnitten und es entsteht entsprechend auch kein Schnittkreis mit Radius  $s$ . Dies wird mit der Indikatorfunktion dargestellt:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}. \quad (8.16)$$

Aus der Gleichverteilungsannahme der Ebene  $\mathcal{T}$  folgt, dass der Abstand  $z$  die Realisation einer gleichverteilten Zufallsvariable  $Z$  auf  $[0, r)$  ist. Daraus folgt die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$\psi(z|\mathcal{K}_r \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) = \frac{1}{r} \mathbb{1}_{[0,r)}(z). \quad (8.17)$$

Die Bedingung lautet, dass die Ebene  $\mathcal{T}$  die Pore  $\mathcal{K}_r$  schneidet. Durch Integration von (8.17) erhält man die bedingte Verteilungsfunktion

$$\Psi(z|\mathcal{K}_r \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) = \frac{z}{r} \mathbb{1}_{[0,r)}(z) + \mathbb{1}_{[r,\infty)}(z). \quad (8.18)$$

Durch den Zusammenhang von  $Z$  und  $S$  in (8.15) erhält man schließlich die bedingte Verteilungsfunktion der gemessenen Kreisradien  $s$ :

$$\begin{aligned} G(s|\mathcal{K}_r \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) &= P(S \leq s|\mathcal{K}_r \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{r^2 - s^2}}{r} \mathbb{1}_{(0,r]}(s) + \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(s) + \mathbb{1}_{(0,r]}(s). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Die Funktion  $G$  beschreibt also die Wahrscheinlichkeit für einen ebenen Kreisradius  $S \leq s$  unter der Bedingung, dass die Ebene  $\mathcal{T}$  die Pore  $\mathcal{K}_r$  tatsächlich schneidet. Differenziert man (8.19) nach  $s$  erhält man die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$g(s|\mathcal{K}_r \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) = \frac{s}{r\sqrt{r^2 - s^2}} \mathbb{1}_{[0,r]}(s). \quad (8.20)$$

Zur Bestimmung der unbedingten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aus der bedingten

Dichte 8.20 wendet man den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit für stetige Zufallsvariablen an:

$$g(s) = \int_0^\infty g(s|\mathcal{K}_r \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) P(\mathcal{K}_r \cap \mathcal{T} \neq \emptyset) dr = \int_0^\infty \frac{s}{r\sqrt{r^2 - s^2}} \mathbb{1}_{[0,r]}(s) \frac{rf(r)}{E[R]} dr. \quad (8.21)$$

Verzichtet man auf die Indikatorfunktion, so erhält man

$$g(s) = \frac{s}{E(R)} \int_s^\infty \frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr. \quad (8.22)$$

Diese Gleichung (8.22) wird im Folgenden als die Wicksell-Transformation bezeichnet. Sie stellt eine Abel'sche Integralgleichung dar. Bekannt ist lediglich die rechte Seite der Gleichung  $g(s)$ , die gesuchte Funktion  $f(r)$  befindet sich im Inneren des Integrals.

Für das konkrete Problem der gesuchten Funktion  $f(r)$  ergibt sich folgende Darstellung der zugehörigen inversen Wicksell-Transformation als Lösung von (8.22):

$$f(r) = -\frac{2r}{\pi} E(R) \int_r^\infty \frac{d}{ds} \left( \frac{g(s)}{s} \right) \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds. \quad (8.23)$$

Für den Beweis sei direkt auf die Arbeit von Wicksell [147] verwiesen. In dieser Arbeit wird eine obere Schranke  $\mathcal{R} > 0$  als maximaler Radius der Poren verwendet. In diesem Fall lautet die Wicksell-Transformation

$$g(s) = \frac{s}{E(R)} \int_s^{\mathcal{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr \quad (8.24)$$

bzw. deren inverse Transformation

$$f(r) = -\frac{2r}{\pi} E(R) \int_r^{\mathcal{R}} \frac{d}{ds} \left( \frac{g(s)}{s} \right) \frac{1}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds. \quad (8.25)$$

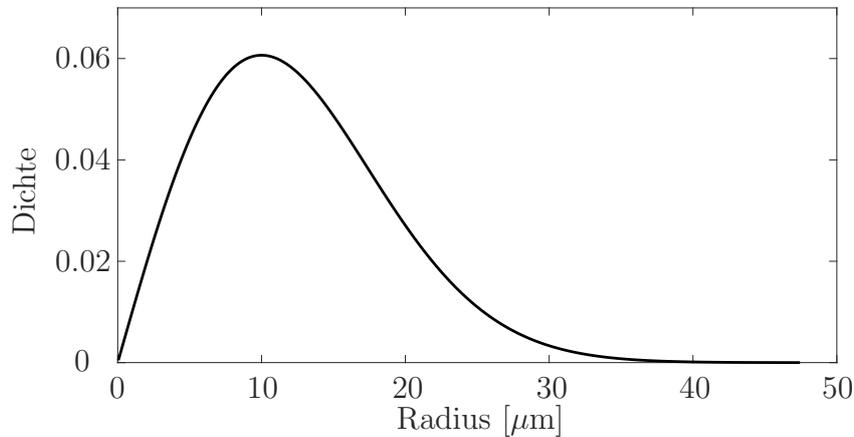
Wicksell zeigt außerdem, dass die einzige Verteilung, die invariant unter solch einer Transformation ist, die Rayleigh-Verteilung ist. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion lautet

$$f(x) = \frac{x}{c^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2c^2}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x). \quad (8.26)$$

Mit dem Skalenparameter  $c$  gilt für den Erwartungswert und die Varianz einer Rayleigh-verteilten Zufallsvariable

$$E(X) = c\frac{\pi}{2}, \quad Var(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) c^2 \quad (8.27)$$

Exemplarisch ist in 8.3 die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Rayleigh-verteilten Zufallsvariable mit Parameter  $c = 10$  dargestellt.



**Abbildung 8.3:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen einer Rayleigh-Verteilung mit Parameter  $c = 10$ .

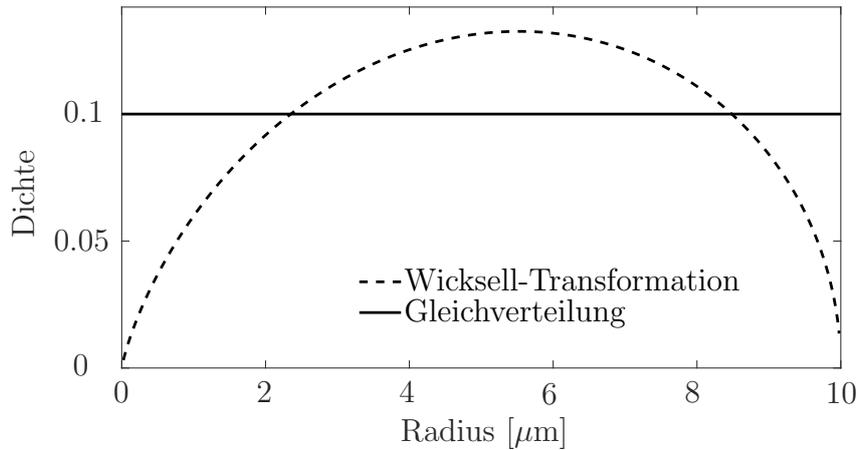
Die wichtigste Folgerung aus der Tatsache der Invarianz ist, dass keine andere Verteilung zur gleichzeitigen Beschreibung der Radienverteilung in den Kreisen und den Poren verwendet werden kann. Misst man beispielsweise logarithmisch normalverteilte Kreisradien, so folgt direkt, dass die zugrundeliegenden Kugelradien nicht logarithmisch normalverteilt sein können.

Ein Beispiel hierfür ist in Abbildung 8.4 dargestellt. Dort ist der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer auf  $[0, 10]$  gleichverteilten Zufallsvariable sowie ihre Wicksell-Transformation abgebildet.

Es gibt nur für wenige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen eine analytische Lösung der Wicksell-Transformation. Eine Auswahl ist in Tabelle 8.1 aufgelistet. Für die inverse Wicksell-Transformation ist bis auf die Rayleigh-Verteilung keine analytische Lösung möglich. Hier werden numerische Lösungsverfahren verwendet, um die Dichte zu approximieren.

### 8.2.2 Parametrische Verteilung von Porenradien

Zur Modellierung der Verteilung der Porenradien werden nun bestimmte Anforderungen an die Verteilung gestellt. Da es trivialerweise nur positive Radien  $r > 0$  gibt, beschränkt man sich auf positive Verteilungen. Des Weiteren gibt es viele Beispiele für Porenverteilungen, bei denen größere Porenradien weniger wahrscheinlich sind als kleinere, vgl. [144, 145]. Dies führt zu der Anforderung, dass die Verteilung rechtsschief modelliert wird.



**Abbildung 8.4:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen einer Gleichverteilung  $\mathcal{U}(0, 10)$  und ihre Wicksell-Transformationen.

**Tabelle 8.1:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen  $f(r)$  mit Parameter  $c \in \mathbb{R}^+$  und die zugehörigen Wicksell-Transformationen  $g(s)$ .

Verteilung	$f(r)$	$g(s)$
$R \equiv c$	$\delta(r - c)$	$\frac{s}{c\sqrt{c^2 - s^2}} \mathbb{1}_{[0,c)}(s)$
$R \sim \mathcal{U}(0, c)$	$\frac{1}{c} \mathbb{1}_{[0,c]}(r)$	$\frac{2s}{c^2} \cosh^{-1}\left(\frac{c}{s}\right) \mathbb{1}_{[0,c]}(s)$
$R \sim \text{beta}(2, 2)$	$6(r - r^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(r)$	$6s \left( \sqrt{1 - s^2} + s^2 \ln \left( \frac{s}{\sqrt{1 - s^2} + 1} \right) \right) \mathbb{1}_{[0,1]}(s)$

Im Folgenden werden parametrische Verteilungen betrachtet, d.h. Verteilungen, deren Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion neben  $x$  von weiteren Parametern abhängen, die z.B. Form und Lage der Verteilung beeinflussen. Einige Verteilungen sind generell links- oder rechtsschief, bei anderen wird die Schiefe durch eine passende Wahl der Parameter gewährleistet. Beispielsweise ist die zweiparametrische Weibull-Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} \exp(-\alpha x^\beta) \tag{8.28}$$

rechtsschief für  $\alpha = \beta = 2$ .

Die verallgemeinerte Extremwertverteilung (GEV) besitzt die Wahrscheinlichkeitsdich-

tefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \begin{cases} (1 + \xi x)^{(-1/\xi)-1} \exp(-(1 + \xi x)^{-1/\xi}) & \xi \neq 0, \\ \exp(-x) \exp(-\exp(-x)) & \xi = 0 \end{cases}, \quad (8.29)$$

mit  $x > -1/\xi$  für  $\xi > 0$  und  $x < -1/\xi$  für  $\xi < 0$ . In allen anderen Fällen ist  $f = 0$ . Diese Verteilung ist für  $\xi \geq 0$  rechtsschief. Eine Anwendung zur Beschreibung der Größenverteilung von Einschlüssen in Stahl ist in [22] zu finden.

Eine nichtnegative rechtsschiefe Verteilung ist die logarithmische logistische Verteilung, die auch als Fisk-Verteilung bezeichnet wird [58]. Die Namensgebung entsteht aus dem Logarithmus einer logistisch verteilten Zufallsvariable. Sie wird verwendet zur Analyse der Häufigkeit von Hochwasser [16], in der Ereigniszeitanalyse [42] sowie im Bereich der Wirtschaftswissenschaften [80, S. 223]. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion lautet

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x} \frac{\exp(z)}{(1 + \exp(z))^2} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) \quad \text{mit} \quad z = \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}. \quad (8.30)$$

In (8.30) bezeichnet der Parameter  $\mu > 0$  den Erwartungswert der logarithmierten Werte,  $\sigma > 0$  ist ein Skalenparameter.

Die wichtigste rechtsschiefe Verteilung ist die logarithmische Normalverteilung. Sie beschreibt die Verteilung einer Zufallsvariablen, deren natürlicher Logarithmus normalverteilt ist. Hier lautet die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2x}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x), \quad (8.31)$$

wobei die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  der zugrundeliegenden Normalverteilung entsprechen. Der Erwartungswert kann über

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \quad (8.32)$$

berechnet werden. Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Z$  gilt, dass

$$X = \exp(\mu + \sigma Z) \quad (8.33)$$

lognormal verteilt ist.

Die logarithmische Normalverteilung wird in vielen Naturphänomenen zur Beschreibung der Größenverteilung von kugelförmigen Einschlüssen verwendet. Beispielsweise in mikrozellulären geschlossenzelligen Schwämmen [113] oder zur Modellierung der Größenverteilung von Bläschen in Basalt [119]. In [19, 47] werden summen lognormalverteilter Zufallsvariablen verwendet, um die Größenverteilung von Zuschlagstoffen in

Zementstein zu beschreiben. Mit demselben Ansatz werden in [151] die Porengrößen in Membranen beschrieben. Weitere Anwendungen sind im Bereich des Spritzgusses zu finden [86, 131, 132].

Eine weitere rechtsschiefe Verteilung ist die Gammaverteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{c^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-cx) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad (8.34)$$

wobei  $\Gamma(p)$  die Euler'sche Gammafunktion bezeichnet. Für die Parameter gilt  $c > 0$  und  $p > 0$ . Sie wird in der Hydrologie verwendet, um die Porengröße in permeablen Membranen und anderen porösen Medien zu beschreiben [35].

Die Birnbaum-Saunders-Verteilung [33] ist eine dreiparametrische Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \left( \frac{1}{2\alpha(x-\lambda)} \left( \sqrt{\frac{x-\lambda}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{x-\lambda}} \right) \right) \phi \left( \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x-\lambda}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x-\lambda}} \right) \right) \quad (8.35)$$

für  $x > \lambda$  und  $\beta, \gamma > 0$ . Hierbei kennzeichnet  $\lambda$  einen Lokationsparameter,  $\beta$  einen Skalenparameter und  $\gamma$  einen Gestaltparameter. Die Funktion  $\phi$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Standardnormalverteilung. Für den Fall  $\lambda = 0$  spricht man von einer Standard-Birnbaum-Saunders-Verteilung mit Erwartungswert

$$E(X) = \beta \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right). \quad (8.36)$$

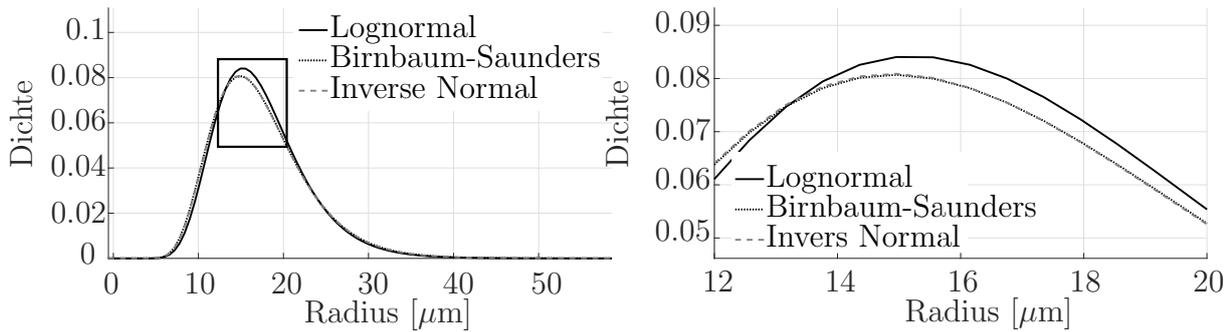
Für positive Gestaltparameter ist die Verteilung stets rechtsschief

Abschließend sei die inverse Normalverteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \left( \frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{1/2} \exp \left( \frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x} \right), \quad x, \mu, \lambda > 0, \quad (8.37)$$

erwähnt. In (8.37) bezeichnet  $\mu$  den Erwartungswert,  $\lambda$  ist ein Gestaltparameter. Die inverse Normalverteilung ist positiv und rechtsschief. Sie wird wie die Birnbaum-Saunders-Verteilung zur Beschreibung von Versagensmodellen verwendet [31].

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Birnbaum-Saunders und der inversen Normalverteilung sind in Abbildung 8.5 dargestellt. Sie besitzen eine ähnliche Form und dienen zusammen mit der lognormalen- und der Gammaverteilung als Grundlage zur Beschreibung der Größenverteilung von Poren.



**Abbildung 8.5:** Links: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Lognormalverteilung (Erwartungswert 17,39), einer Birnbaum-Saunders-Verteilung (Erwartungswert 17,32) und einer inverse Normalverteilung (Erwartungswert 17,32). Rechts: Ausschnitt der oberen Abbildung.

### 8.2.3 Stochastische Abstandsmaße

Zur Beurteilung der Ähnlichkeit zweier stetigen Verteilungen mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion können sogenannte stochastische Abstandsmaße verwendet werden, die im Folgenden vorgestellt werden. Betrachtet werden der Totalvariationsabstand, der Hellinger-Abstand und der Bhattacharyya-Abstand.

Der klassische statistische Abstands begriff zweier Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist der Totalvariationsabstand. Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße  $P, Q$  mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x)$  und  $q(x)$  definiert man den Totalvariationsabstand als

$$\delta(P, Q) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |p(x) - q(x)| dx. \quad (8.38)$$

Der Totalvariationsabstand entspricht bis auf den Vorfaktor der  $L^1$ -Norm der Differenz der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen. Aus den Eigenschaften der Norm folgt unmittelbar

$$\delta(P, Q) = 0 \iff p(x) = q(x) \text{ f.s.} \quad (8.39)$$

Für disjunkte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen gilt

$$\delta(P, Q) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |p(x) - q(x)| dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} p(x) dx + \int_{\mathbb{R}} q(x) dx \right] = 1, \quad (8.40)$$

da die  $p$  und  $q$  über  $\mathbb{R}$  integriert jeweils eins ergeben. Somit gilt  $\delta(P, Q) \in [0, 1]$ .

Der Hellinger-Abstand [71] korrespondiert zur  $L^2$ -Norm der Quadratwurzel der Wahr-

scheinlichkeitsdichtefunktionen.

$$H(P, Q) = \left( \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( \sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8.41)$$

Mit demselben Argument wie beim Totalvariationsabstand gilt

$$H(P, Q) = 0 \iff p(x) = q(x) \text{ f.s.} \quad (8.42)$$

Aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt  $H(P, Q) \leq 1$ . Somit gilt ebenfalls  $H(P, Q) \in [0, 1]$ . Es gilt der Zusammenhang

$$H^2(P, Q) \leq \delta(P, Q) \leq \sqrt{2}H(P, Q). \quad (8.43)$$

Der Hellinger-Abstand (8.41) besitzt einige, dem Skalarprodukt geschuldete, technische Vorteile gegenüber dem Totalvariationsabstand, ist aber äquivalent zu (8.38).

Der quadrierte Hellinger-Abstand  $H^2$  besitzt folgende Darstellung:

$$H^2(P, Q) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( \sqrt{p(x)} - \sqrt{q(x)} \right)^2 dx = 1 - \int_{\mathbb{R}} \sqrt{p(x)q(x)} dx, \quad (8.44)$$

was einfach mittels der binomischen Formel und der Eigenschaft einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gezeigt werden kann.

Eine weitere Möglichkeit, den Abstand zweier Verteilungen zu charakterisieren, ist der Bhattacharyya-Abstand [30].

$$B(P, Q) = -\ln \left( \int_{\mathbb{R}} \sqrt{p(x)q(x)} dx \right). \quad (8.45)$$

Es gilt  $B(P, Q) \in [0, \infty)$ , was direkt aus den Eigenschaften des Logarithmus folgt. Für  $p = q$  fast sicher gilt

$$B(P, P) = -\ln \left( \int_{\mathbb{R}} \sqrt{p(x)^2} dx \right) = -\ln(1) = 0. \quad (8.46)$$

Für disjunkte  $p, q$  ergibt das Integral den Wert Null. Es gilt der Zusammenhang zum quadrierten Hellinger-Abstand (8.44) über

$$H^2(P, Q) = 1 - \exp(-B(P, Q)). \quad (8.47)$$

Da der Bhattacharyya-Abstand die Dreieckungleichung nicht erfüllt, handelt es sich im Gegensatz zu den anderen Abstandsmaßen nicht um eine Metrik.

### 8.2.4 Berechnungsmethoden der Wicksell-Transformationen

Wie in Abschnitt 8.2.1 erwähnt, existieren nur sehr wenige analytische Lösungen für die Wicksell-Transformation (8.22) und die inverse Wicksell-Transformation (8.23). Deshalb werden im Folgenden numerische Methoden zur Approximation der entsprechenden Lösungen vorgestellt.

#### Monte-Carlo-Simulation zur Bestimmung der Wicksell-Transformation

Zur Generierung eines Datensatzes von ebenen Kreisradien wird eine Monte-Carlo-Methode verwendet. Der Grundgedanke solcher Simulationen ist das Erzeugen einer großen Zahl von Realisationen einer Zufallsvariable. Nach dem starken Gesetz der großen Zahl konvergiert das Stichprobenmittel einer Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (8.48)$$

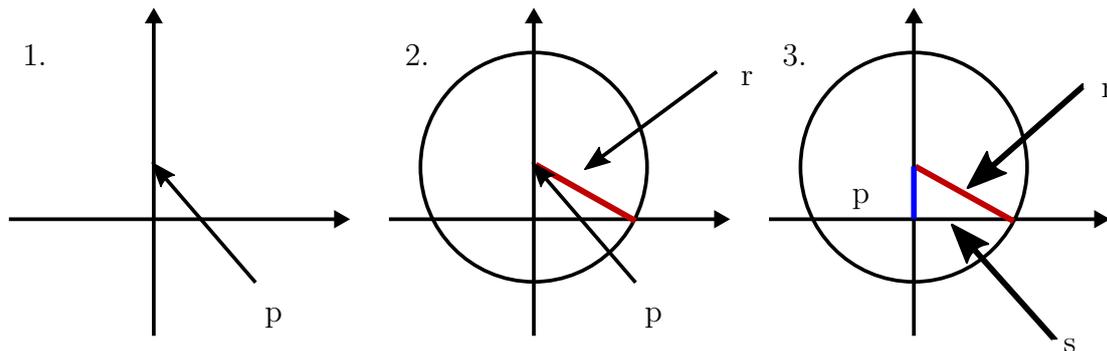
mit Wahrscheinlichkeit eins gegen den Erwartungswert  $\mu$  der Verteilung. Aus dem simulierten Datensatz können auch Histogramme erzeugt, Verteilungen angepasst und weitere statistische Parameter bestimmt werden.

Zur Erzeugung des Datensatzes von Schnittradien durch kugelförmige Einschlüsse ist es unerheblich, ob man einen gegebenen Körper samt Poren mit einer zufälligen Ebene schneidet, oder ob man in einem Körper mit gegebener Ebene zufällige Poren erzeugt. Im ersten Fall spricht man von einem designbasierten Ansatz, im zweiten Fall von einem modellbasierten Ansatz. Im designbasierten Ansatz erzeugt man zunächst eine Kugelverteilung in einem Gebiet  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ . Anschließend wird dieses Gebiet zufällig mit einer Ebene geschnitten. Dann werden die ebenen Schnittradien der geschnittenen Poren bestimmt. Dieses Vorgehen ist numerisch relativ aufwändig, da das Gebiet einerseits groß genug sein muss, dass sich keine Kugeln überlappen. Andererseits muss man zur Verwendung des Gesetzes der großen Zahlen auch sehr viele Kugeln schneiden. Für eine Monte-Carlo-Simulation ist dieser Ansatz eher ungünstig. In [77] wird gezeigt, dass beide Ansätze, sowohl der designbasierte als auch der modellbasierte Ansatz zur Lösung des Wicksell'schen Korpuskelproblems für kugelförmige Poren verwendet werden können.

Im modellbasierten Ansatz würde man in einem Körper  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  mit einer festen Ebene, z.B. der  $x_1, x_2$ -Ebene, zufällige Kugeln erzeugen. Wenn eine solche Kugel nun die Ebene schneidet, so berechnet man den Schnittradius und wiederholt diesen Vorgang solange, bis genügend Daten von Kreisradien erzeugt worden sind. Das schematische Vorgehen lautet:

1. Erzeuge einen in  $\mathcal{B}$  gleichverteilten Punkt  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ .

2. Erzeuge einen Radius  $r$  nach einer vorgegebenen positiven Verteilung.
3. Wenn die Kugel  $\mathcal{K}_r$  mit Mittelpunkt  $\mathcal{P}$  eine gegebene Ebene  $\mathcal{T}$  schneidet, berechne den Radius des Kreises  $\mathcal{C} = \mathcal{K}_r \cap \mathcal{T}$ .
4. Wenn die erreichte vorgegebene Anzahl  $n$  an Datenpunkten noch nicht erreicht worden ist, gehe zu 1.



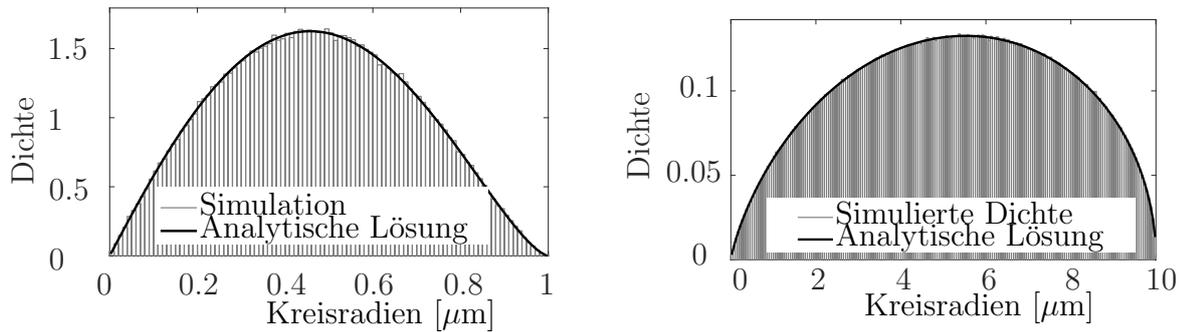
**Abbildung 8.6:** Illustration des Algorithmus zur Erzeugung von Daten für das Wicksell'sche Korpuskelproblem im modellbasierten Design. 1. Erzeugung eines Punktes  $p$ , 2. Erzeugung eines Kreises mit Radius  $r$ . 3. Berechnung der Größe  $s$ .

Da die Position der Kugel in der  $x_1, x_2$ -Ebene aufgrund der Symmetrie einer Kugel keine Rolle spielt, kann man diese Simulation in eine zweidimensionale Beschreibung überführen. Dazu betrachtet man ein Intervall  $I = [-2\mathcal{R}, 2\mathcal{R}]$ , wobei  $\mathcal{R}$  den maximalen Kugelradius bezeichnet. Das Vorgehen lautet dann:

1. Erzeuge einen auf  $I$  gleichverteilten Punkt  $p$ .
2. Erzeuge einen Radius  $r$  nach einer vorgegebenen positiven Verteilung.
3. Ist  $p < r$ , so berechne  $s = \sqrt{r^2 - p^2}$
4. Wenn die erreichte vorgegebene Anzahl  $n$  an Datenpunkten noch nicht erreicht worden ist, gehe zu 1.

Das Vorgehen ist in Abbildung 8.6 schematisch dargestellt.

Um die Funktionalität des Algorithmus zu verifizieren, werden die Verteilungen mit analytischer Lösung verwendet, vgl. Tabelle 8.1. Die Ergebnisse der Simulation werden mit den entsprechenden analytischen Lösungen verglichen. Wie in Abbildung 8.7 dargestellt, stimmen die Histogramme der simulierten Werte für  $10^{10}$  Datenpunkten gut mit der analytischen Lösung überein.



**Abbildung 8.7:** Vergleich der simulierten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit der analytischen Lösung. Links: Beta-Verteilung mit Parametern  $p = q = 2$ . Rechts: Stetige Gleichverteilung  $\mathcal{U}(0, 10)$ .

### Numerische Berechnung der inversen Wicksell-Transformation

Zur Bestimmung der inversen Wicksell-Transformation (8.25) werden verschiedene numerische Methoden verwendet. Zunächst wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der gegebenen Verteilung auf einem diskreten Intervall

$$I = 0, h, 2h, \dots, \mathcal{R} \quad (8.49)$$

mit Schrittweite  $h$  punktweise ausgewertet. Nach einer punktweisen Division durch das Intervall erfolgt eine numerische Differentiation

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}, \quad i = 1, 2, n - 1 \quad (8.50)$$

mit  $n = \mathcal{R}/h$ . Dies entspricht dem Ausdruck  $d/dsg(s)/s$  in (8.25). Das Integral wird nach der Division durch den Wurzalausdruck mit der Trapezregel

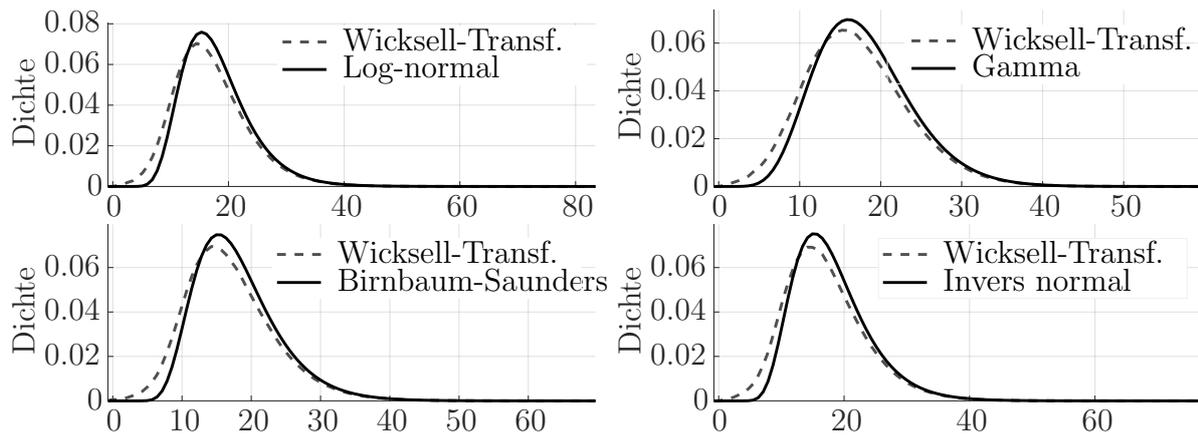
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (8.51)$$

approximiert. Schließlich wird das Integral mit dem Vorfaktor  $-2r/\pi$  multipliziert. Der unbekannte Erwartungswert  $E(R)$  in (8.25) berechnet sich über die Normiertheit der Wahrscheinlichkeitsdichte.

### 8.2.5 Beurteilung der Unsicherheit für das Wicksell-Problem

Im Folgenden wird der Fehler bestimmt, der unter der Annahme entsteht, dass sich eine Verteilung unter einer Wicksell- bzw. unter einer inversen Wicksell-Transformation nicht

ändert. Dazu werden die Abstandsmaße aus Kap. 8.2.3 verwendet. Praktisch bedeutet dies, dass man die Größenverteilung der Kreisradien in mehreren Schnitten bestimmt und die Parameter einer passenden Verteilung bestimmt. Nun wird dieselbe Verteilung mit anderen Parametern auch für die Verteilung der Kugelradien angenommen. Dies ist natürlich nicht korrekt, da nur die Reyleigh-Verteilung invariant unter einer Wicksell-Transformation ist, vgl. [147].



**Abbildung 8.8:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen verschiedener Verteilungen  $f(r)$  mit Parametern aus Tab. 8.2 und ihre Wicksell-Transformation.

Wie in Abbildung 8.8 dargestellt, ändert sich der generelle Verlauf einer rechtsschiefen Verteilung unter der Wicksell-Transformation nicht. Für die Beispiele werden Potenzverteilungen erzeugt, deren Erwartungswerte der zugrundeliegenden Zufallsvariablen  $\mu = 18 \mu\text{m}$  beträgt. Die Standardabweichung beträgt  $\sigma = 6 \mu\text{m}$ . Die Schiefe variiert zwischen den Verteilungen. Alle Parameter sind in Tabelle 8.2 aufgeführt. Zur Bestimmung der Wicksell-Transformierten wird die in Abschnitt 8.2.4 vorgestellte Monte-Carlo-Simulation verwendet. Anschließend werden die Parameter der entsprechenden Verteilung aus den erzeugten Daten mittels Matlab geschätzt.

Schließlich werden die Abstände mittels der in Abschnitt 8.2.3 eingeführten Abstandsmaße berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8.3 aufgeführt.

Es zeigt sich, dass der mittlere Kreisradius kleiner ist als der mittlere Kugelradius. Dies stimmt mit der Überlegung überein, dass man die Kugel fast sicher nicht genau in der Mitte schneiden kann. Für die Standardabweichung und die Schiefe gilt das Gegenteil, sie werden bei den vorgestellten Beispielen kleiner.

### 8.2.6 Die Kugelgrößenverteilung in FDM-gedruckten Proben

Die in den vorherigen Abschnitten etablierten Methoden werden nun auf ein konkretes Material angewendet. Betrachtet man Mikroskopaufnahmen flexibler FDM-gedruckter

**Tabelle 8.2:** Erwartungswert, Standardabweichung und Schiefe verschiedener rechtsschiefer Verteilungen und approximierte Parameter der Wicksell-Transformierten Verteilung

	Kugelradienverteilung			Kreisradienverteilung		
	Originalfunktion $f(r)$			Wicksell-Transformation $g(s)$		
	$E(X)$	$\sigma$	$\gamma$	$E(X)$	$\sigma$	$\gamma$
Log-normal	18	6	1,0370	16,9560	6,4152	0,8422
Gamma	18	6	0,6667	17,0203	6,3830	0,5232
Birnbaum-Saunders	18	6	0,9800	16,9597	6,4191	0,7854
Invers normal	18	6	1	16,9514	6,4172	0,8060

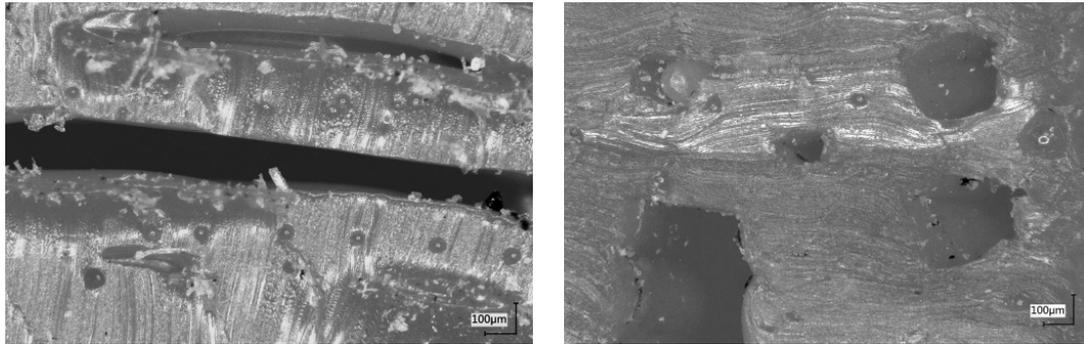
**Tabelle 8.3:** Abstände  $\delta$ ,  $H$  und  $B$  zwischen der Wahrscheinlichkeitsdichte der Verteilungen aus Tabelle 8.2 und ihrer Wicksell-Transformierten.

	$\delta$	$H$	$B$
Log-normal	0,0814	0,1168	0,0138
Gamma	0,0692	0,0956	0,0092
Birnbaum-Saunders	0,0810	0,1201	0,0145
Invers normal	0,0818	0,1211	0,0148

Materialien, so erkennt man kugelförmige Einschlüsse im gedruckten Vollmaterial, vgl. Abbildung 8.9. Schneidet man die Probe senkrecht zur Druckrichtung, so erkennt man außerdem die prozessbedingten Fehlstellen im Material. Sie repräsentieren die Röhren, die beim Drucken zwischen den einzelnen Schichten entstehen. Da sich die Wicksell-Transformation auf kugelförmige Einschlüsse beschränkt, wird nur die Verteilung der kugelförmigen Einschlüsse untersucht.

Nun werden die entwickelten stereologischen Methoden verwendet, um die unbekanntete Verteilung der Kugelradien aus der Kreisradienverteilung mittels parametrischer Verteilungen abzuschätzen. Der Ablauf lautet wie folgt:

Zunächst werden die Kreisradien im Material mittels eines Keyence VHX-900F Lasermikroskops vermessen. Aus den gewonnenen Daten wird die empirische Schiefe bestimmt, um zu überprüfen, dass es sich tatsächlich um eine rechtsschiefe Verteilung handelt. Anschließend werden die vorgestellten rechtsschiefen Verteilungen an die Daten angepasst. Um die Wahl der Verteilung zu überprüfen, werden verschiedene statische Nullhypothese-Teste durchgeführt. Dies sind der Cramér-von Mises-Test [43, 141], der Kuiper-Test [87] und der Kolmogorov-Smirnov-Test [83, 124]. Sollte keiner dieser Tests die Nullhypothese, dass die Daten einer Population mit entsprechender Verteilung entstammen, verwerfen, so wird die inverse Wicksell-Transformierte numerisch approximiert. Dazu



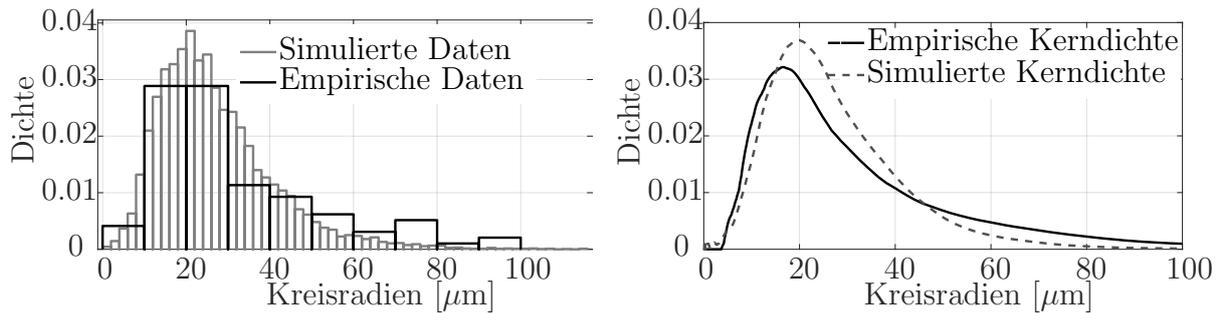
**Abbildung 8.9:** Mikroskopaufnahmen FDM-gedruckter Proben aus TPU. Links: Hohlraum zwischen zwei Schichten und kugelförmige Poren im Material. Rechts: Senkrechter Schnitt mit Röhren zwischen den Schichten, sichtbar als runde Löcher.

wird das in Abschnitt 8.2.4 vorgestellte Verfahren verwendet. Wie angemerkt, kann die Kugelradienverteilung nicht derselben Verteilung entsprechen.

Als nächstes wird der Fehler bei einer falschen Wahl der Verteilung bestimmt. Aus den Daten der inversen Wicksell-Transformation werden nun die Parameter derselben Verteilung bestimmt, die für die Kreisradien verwendet wurde. Dies geschieht mittels der nichtlinearen kleinsten-Quadrate-Methode, die in Abschnitt 7.1.2 beschrieben ist. Nun liegt eine parametrische Kugelradienverteilung vor. Aus dieser Verteilung wird nun ein Datensatz geschnittener Kreisradien generiert. Dazu wird die Monte-Carlo-Methode aus Abschnitt 8.2.4 verwendet. Schließlich erhält man zwei Verteilungen. Die ursprüngliche empirische Kreisradienverteilung und die simulierte Kreisradienverteilung, die unter der falschen Annahme entstanden ist, die parametrischen Verteilungen wären bis auf die konkreten Parameter identisch. Beide Verteilungen werden nun in Form ihrer Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. Zähldichte auf ihren Abstand untersucht. Dazu werden die Abstandsmaße aus Abschnitt 8.2.3 verwendet.

Bei der Untersuchung der geschnittenen Proben werden insgesamt  $n = 97$  Poren vermessen. Das Histogramm der empirischen Daten ist in Abbildung 8.10 (links) dargestellt. Es ergab sich eine empirische Schiefe von  $\gamma = 1,3418 > 0$ , somit liegt eine rechtschiefe Verteilung vor. Beim Anpassen der Verteilungen an die Daten erwies sich eine Log-Normalverteilung als die am besten geeignetste. Keiner der statistischen Nullhypotesentests konnten die Hypothese verwerfen, dass die Daten einer solch verteilten Population entspringen. Die  $p$ -Werte lauten  $p_1 = 0,6465$ ,  $p_2 = 0,2609$  und  $p_3 = 0,4785$  für den Cramér-von Mises-Test, den Kuiper-Test und den Kolmogorov-Smirnov-Test. Die Parameter der Log-Normalverteilung lauten  $\mu = 3,2646$  und  $\sigma = 0,5929$ .

Aus der gewählten Verteilung wird nun die inverse Wicksell-Transformierte bestimmt. Der Kleinste-Quadrate-Fit an diese approximierete Dichte ergab die Parameter  $\mu =$



**Abbildung 8.10:** Links: Empirische und simulierte log-normalverteilte Zählendichte der Kugel- und Kreisradien eines FDM-gedruckten TPU. Rechts: Vergleich der nichtparametrischen Kerndichten.

3,2139 und  $\sigma = 0,4675$  für die Verteilung der Kugelradien. Nun wird aus der Kugelradienverteilung mittels der Monte-Carlo-Simulation ein Datensatz von Schnittradien erzeugt. Die resultierende Verteilung ist in 8.10 (links) dargestellt.

Um die empirische mit der simulierten Verteilung zu vergleichen, wird zunächst das Bestimmtheitsmaß aus den Daten beider empirischen Verteilungsfunktionen bestimmt. Es liegt mit  $R^2 = 0,9922$  relativ nah an der Eins und deutet an, dass die falsche Wahl der Verteilung zu keinem gravierenden Fehler führt. Um diese Aussage zu überprüfen, werden nun die Abstandsmaße zwischen den Histogrammen bestimmt. Dazu wird zunächst eine nichtparametrische Kerndichteverteilung an die Daten angepasst. Als Kern wird der Epanechnikov-Kern verwendet [53]. Kerndichteschätzer werden verwendet, um unstetige Histogramme mit einer stetigen Funktion zu beschreiben. Diese können dann verwendet werden, um die Abstandsmaße aus Abschnitt 8.2.3 zu berechnen. Die Kerndichten für die empirischen und simulierten Daten sind in Abbildung 8.10 (rechts) dargestellt.

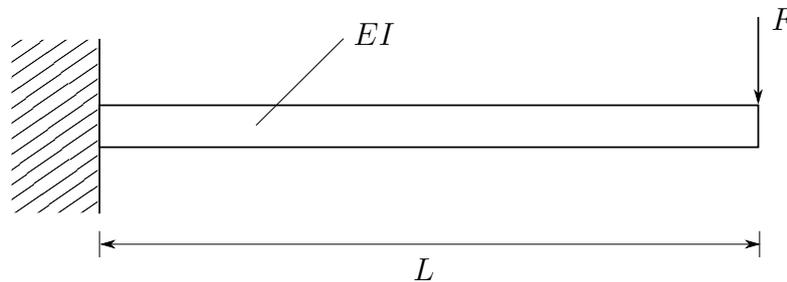
Die Abstandsmaße lauten nun  $\delta = 0,1378$ ,  $H = 0,1410$  und  $B = 0,0319$ . Es liegt also eine maximale Abweichung von 14% vor. Desweiteren liefert die Simulation weniger große Kreisradien ab ca.  $50 \mu\text{m}$ , als in der Wirklichkeit beobachtet wurde. Dennoch ist diese Methode geeignet, um die Porenverteilung in FDM-gedruckten Materialien mittels der Lognormalverteilung zu beschreiben, sofern die ebenen Kreisradien auch lognormalverteilt sind.

## 8.3 Der Einfluss unsicherer Materialparameter

In diesem Abschnitt wird ein Ansatz zur stochastischen Beschreibung von unsicheren Größen in Materialien, beispielsweise aufgrund der Existenz von Inhomogenitäten vorgestellt. Inhomogenitäten in Materialien, z.B. Hohlräume oder Fremdmaterial, werden zusammenfassend als Defekte bezeichnet [69, S. 223]. Der Einfluss dieser mikroskopischen

Größen auf das makroskopische Materialverhalten wird im Rahmen der Mikromechanik untersucht. Hierbei erfolgt in der Regel eine Homogenisierung. Diese versucht, das inhomogene Material durch ein vereinfachtes Modell zu beschreiben, welches möglichst dieselben effektiven Eigenschaften besitzt. Die hier behandelte stochastische Betrachtung geht nun von lokal verschiedenen Materialparametern, z.B. E-Moduln aus. Es wird der Einfluss dieser unsicheren Größen auf eine Ausgangsgröße untersucht.

In der klassischen Euler-Bernoulli-Balkentheorie beschreibt die Biegelinie  $w$  an jeder Stelle  $x$  des linear elastischen Balkens die Durchbiegung in Abhängigkeit des Belastungszustands. Im Folgenden wird ein Kragträger der Länge  $L$  betrachtet, der an seinem freien Ende mit einer Kraft  $F$  belastet wird, vgl. Abbildung 8.11.



**Abbildung 8.11:** Eingespannter Balken der Länge  $L$  mit Biegesteifigkeit  $EI$ , belastet durch die Kraft  $F$ .

Es gilt der Zusammenhang zwischen der zweiten Ableitung der Biegelinie und dem Verlauf des Biegemoments  $M(x)$ :

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E(x)I(x)}, \quad (8.52)$$

mit E-Modul  $E(x)$  und Flächenträgheitsmoment  $I(x)$ . Für das Biegemoment gilt

$$M(x) = F(x - L). \quad (8.53)$$

Für eine konstante Biegesteifigkeit  $E(x)I(x) = EI$  ergibt sich die Biegelinie  $w(x)$  bzw. die maximale Durchbiegung  $w_{\max}$

$$w(x) = \frac{F}{6EI} (3Lx^2 - x^3), \quad (8.54)$$

$$w_{\max} = \frac{FL^3}{3EI}. \quad (8.55)$$

Im Folgenden wird die Verteilung von  $w_{\max}$  unter unsicheren Werten  $F$ ,  $L$  und  $EI$  untersucht. Dazu werden die Einflussgrößen  $F$  und  $L$  als unabhängige Zufallsvariablen modelliert. Zur Beschreibung des E-Moduls  $E(x)$  wird ein Zufallsfeld, d.h. ein Vektor, dessen Elemente Zufallsvariablen sind, verwendet. In der Literatur finden sich viele Beispiele für die stochastische Modellierung des Euler-Bernoulli-Balkens mittels Zufallsfeldern [52, 100, 108]. In anderen Arbeiten wird ein deterministischer Balken mit einer zufällig verteilten Streckenlast beansprucht [51]. Ein Vergleich von stochastischen und deterministischen Modellen ist z.B. in [125] zu finden.

Statt dem E-Modul kann auch das Flächenträgheitsmoment  $I(x)$  als Zufallsfeld verwendet werden. Da beide Größen in (8.55) im Nenner in der ersten Potenz auftreten, wird nur eine der Größen stochastisch, die andere deterministisch modelliert. Dasselbe gilt für die Zufallsvariablen. Im Folgenden wird jeweils eine Größe in (8.55) als Zufallsvariable oder Zufallsfeld beschrieben, während alle anderen als Konstant angesehen werden.

### 8.3.1 Unsichere Einzelkraft am Balkenende

Im einfachsten Fall ist die Einzelkraft  $F$  selbst mit einer Unsicherheit versehen. Da die Kraft durch eine reelle Zahl beschrieben wird, modelliert man  $F$  als stetige reellwertige Zufallsvariable  $X_F$ .

Für diese Zufallsvariable soll eine Verteilungsfunktion  $F_{X_F}(x)$  und eine Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{X_F}(x)$  existieren. Ferner soll die Zufallsvariable einen endlichen Erwartungswert  $E(X_F)$  und eine endliche Varianz  $Var(X_F)$  besitzen. In diesem Fall stellt die Zufallsvariable

$$X_{w_{\max}} = \frac{X_F L^3}{3EI} \quad (8.56)$$

lediglich eine lineare Transformation der Zufallsvariable  $X_F$  dar. Erwartungswert und Varianz berechnen sich mit (8.7) und (8.8) zu:

$$E(X_{w_{\max}}) = \frac{L^3}{3EI} E(X_F), \quad (8.57)$$

$$Var(X_{w_{\max}}) = \left( \frac{L^3}{3EI} \right)^2 Var(X_F). \quad (8.58)$$

Die Verteilungsfunktion der maximalen Durchbiegung berechnet sich durch

$$\begin{aligned} F_{w_{\max}}(x) &= P(X_{w_{\max}} \leq x) = P\left(\frac{X_F L^3}{3EI} \leq x\right) = P\left(X_F \leq \frac{3EIx}{L^3}\right) \\ &= F_{X_F}\left(\frac{3EIx}{L^3}\right). \end{aligned} \quad (8.59)$$

Durch Differenzieren von (8.59) nach  $x$  ergibt sich die transformierte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{w_{\max}}(x) = \frac{d}{dx} F_{w_{\max}}(x) = \frac{3EI}{L^3} f_{X_L} \left( \frac{3EIx}{L^3} \right). \quad (8.60)$$

### 8.3.2 Unsichere Balkenlänge

Für eine unsichere Balkenlänge wird die Größe  $X_L$  als stetige und positive Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion  $F_{X_L}(x)$  und Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{X_L}(x)$  sowie endlichem Erwartungswert und endlicher Varianz modelliert. In diesem Fall ist die Größe

$$X_{w_{\max}} = \frac{FX_L^3}{3EI} \quad (8.61)$$

eine nichtlinear transformierte Zufallsvariable. Es ergeben sich Erwartungswert und Varianz zu

$$E(X_{w_{\max}}) = E\left(\frac{FX_L^3}{3EI}\right) = \frac{F}{3EI} E(X_L^3) = \frac{F}{3EI} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx, \quad (8.62)$$

$$\begin{aligned} Var(X_{w_{\max}}) &= Var\left(\frac{FX_L^3}{3EI}\right) = \left(\frac{F}{3EI}\right)^2 Var(X_L^3) \\ &= \left(\frac{F}{3EI}\right)^2 [E(X_L^6) - (E(X_L^3))^2] \\ &= \left(\frac{F}{3EI}\right)^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x^6 f(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Hierbei ist anzumerken, dass die Existenz des Erwartungswerts bzw. der Varianz voraussetzt, dass für die Zufallsvariable  $X_L$  das dritte bzw. das sechste Moment existieren, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx < \infty \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^6 f(x) dx < \infty.$$

Die Verteilungsfunktion von  $X_{w_{\max}}$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} F_{X_{w_{\max}}} &= P(X_{w_{\max}} \leq x) = P\left(\frac{FX_L^3}{3EI} \leq x\right) = P\left(X_L \leq \left(\frac{3EIx}{F}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= F_{X_L}\left(\left(\frac{3EIx}{F}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \end{aligned} \quad (8.64)$$

Schließlich ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte durch Ableiten nach  $x$  zu

$$f_{X_{w_{\max}}} = f_{X_L} \left( \left( \frac{3EIx}{F} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \left( \frac{3EIx}{F} \right)^{-\frac{2}{3}} \frac{EI}{F}. \quad (8.65)$$

### 8.3.3 Unsicherer konstanter E-Modul

Geht man von einem homogenen E-Modul, versehen mit einer Unsicherheit, aus, so wird dies durch eine stetige und positive Zufallsvariable  $X_E$  mit Verteilungsfunktion  $F_{X_E}(x)$  und Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{X_E}(x)$  beschrieben. Wiederum wird die Existenz eines endlichen Erwartungswerts und Varianz vorausgesetzt. Hierbei ergibt sich eine transformierte Zufallsvariable

$$X_{w_{\max}} = \frac{FL^3}{3X_E I}$$

zur Beschreibung der maximalen Durchbiegung. Die Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte lauten dann

$$F_{X_{w_{\max}}} = 1 - F_{X_E} \left( \frac{FL^3}{3Ix} \right), \quad (8.66)$$

$$f_{X_{w_{\max}}} = f_{X_E} \left( \frac{FL^3}{3Ix} \right) \frac{FL^3}{3Ix^2}. \quad (8.67)$$

Da die Zufallsvariable im Nenner steht, können keine Verteilungen verwendet werden, mit einer positiven Wahrscheinlichkeit den Wert Null annehmen können. Insbesondere existieren keine Momente für einen normalverteilten E-Modul. Für  $X_E \sim \mathcal{N}_{\mu, \sigma}$  gilt

$$E(X_{w_{\max}}) = \frac{FL^3}{3I} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-1} \varphi(x) dx = \infty, \quad (8.68)$$

wobei  $\phi(x)$  die Dichte der Normalverteilung darstellt.

### 8.3.4 Analytisches Beispiel

Im Folgenden wird für jeden vorgestellten Fall ein Beispiel vorgestellt. Gegeben sei ein Balken der Länge  $L = 1000 \text{ mm}$  mit  $I = 13333 \text{ mm}^4$  und  $E = 10 \text{ GPa}$ . Die Kraft am freien Ende ist mit  $F = 40 \text{ N}$  gegeben.

Die Kraft wird als normalverteilte Zufallsvariable modelliert. Die Unsicherheit wird so modelliert, dass Realisationen der Kraft in 95% der Fälle höchstens eine Abweichung

von 1% der Kraft aufweisen. D.h.

$$P(X_F \in I = [39,6 \text{ N}, 40,4 \text{ N}]) = 0,95. \quad (8.69)$$

Für  $X_F$  gilt also  $\mu = 40$ . Der Parameter  $\sigma$  berechnet sich nach (8.11) mit  $p = 0,01$  und  $1 - \alpha = 0,95$  zu

$$\sigma = \frac{p\mu}{z_{0,975}} = \frac{0,01 \cdot 40 \text{ N}}{1,96} = 0,2041 \text{ N}. \quad (8.70)$$

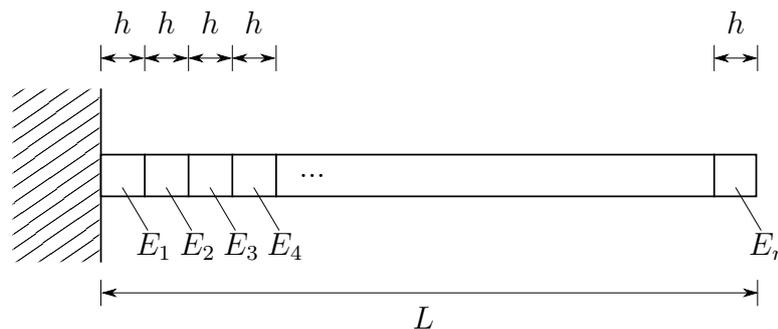
Nach Satz 8.1 gilt für die Zufallsvariable  $X_{w_{\max}}$

$$\begin{aligned} E(X_{w_{\max}}) &= 10 \text{ mm}, \\ Std(X_{w_{\max}}) &= 0,0510 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die maximale Durchbiegung mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall  $I = [9,9 \text{ mm}, 10,1 \text{ mm}]$  liegt.

### 8.3.5 Modellierung des Euler-Bernoulli-Balkens mittels Zufallsfeldern

Zur Modellierung eines Euler-Bernoulli-Balkens mittels Zufallsfeldern wird dieser zunächst in  $n$  Elemente der Breite  $h$  eingeteilt. In jedem Element wird nun ein E-Modul  $E_1, \dots, E_n$  vorgegeben, vgl. Abbildung 8.12.



**Abbildung 8.12:** Eingespannter Balken der Länge  $L$  mit Biegesteifigkeit  $EI$ , belastet durch die Kraft  $F$ .

Dies kann entweder durch einen deterministischen Wert oder durch eine Zufallsvariable

umgesetzt werden. Der Verlauf des E-Moduls ist gegeben durch

$$E(x) = \begin{cases} E_1 & 0 \leq x \leq h \\ E_2 & h \leq x \leq 2h \\ \vdots & \vdots \\ E_n & (n-1)h \leq x \leq L \end{cases} . \quad (8.71)$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung (8.52) ein, so ergibt sich durch Integration

$$Iw'(x) = \begin{cases} \frac{1}{E_1} f_1(x) + C_1 & 0 \leq x \leq h \\ \frac{1}{E_2} f_1(x) + C_2 & h \leq x \leq 2h \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{E_n} f_1(x) + C_n & (n-1)h \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.72)$$

mit der abkürzenden Schreibweise

$$f_1(x) = F \left( Lx - \frac{1}{2}x^2 \right) . \quad (8.73)$$

Aus den Rand- und Übergangsbedingungen

$$w'(0) = 0 \quad (8.74)$$

$$w'(ih_-) = w'(ih_+) \quad , \quad i = 1, \dots, (n-1)h \quad (8.75)$$

ergeben sich die Konstanten

$$C_1 = 0 \quad (8.76)$$

$$C_i = f_1((i-1)h) \left[ \frac{1}{E_{i-1}} - \frac{1}{E_i} \right] + C_{i-1} \quad , \quad i = 2, \dots, n . \quad (8.77)$$

Erneute Integration ergibt

$$Iw(x) = \begin{cases} \frac{1}{E_1} f_0(x) + C_1 x + D_1 & 0 \leq x \leq h \\ \frac{1}{E_2} f_0(x) + C_2 x + D_2 & h \leq x \leq 2h \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{E_n} f_0(x) + C_n x + D_n & (n-1)h \leq x \leq L \end{cases} \quad (8.78)$$

mit

$$f_0(x) = F \left( \frac{1}{2}Lx^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) . \quad (8.79)$$

Hier lauten die Randbedingungen

$$w(0) = 0 \quad (8.80)$$

$$w(ih_-) = w(ih_+) \quad , \quad i = 1, \dots, (n-1)h. \quad (8.81)$$

Daraus ergeben sich die Konstanten

$$D_1 = 0 \quad (8.82)$$

$$D_i = f_0((i-1)h) \left[ \frac{1}{E_{i-1}} - \frac{1}{E_i} \right] + C_{i-1}((i-1)h) - C_i((i-1)h) + D_{i-1} \quad (8.83)$$

für  $i = 2, \dots, n$ . Eine Modellierung des E-Moduls durch Zufallsvariablen  $E_i$  führt nach Gleichung (8.83) zu der Verteilung der Durchbiegung gegeben durch die Zufallsvariable

$$E_{ij} = \left[ \frac{1}{E_{i-1}} - \frac{1}{E_i} \right], \quad i = 2, \dots, n. \quad (8.84)$$

### 8.3.6 Modellierung des E-Moduls mittels Zufallsfeldern

Für eine realistische Beschreibung der Unsicherheit werden im Folgenden Bedingungen an die zu simulierenden Balken gesetzt. Zunächst sollen die erzeugten Balken einen mittleren E-Modul aufweisen, der in einem vorgegebenen Bereich liegt. Für einen vorgegebenen deterministischen E-Modul  $E_{\text{det}}$  soll für den gemittelten E-Modul  $\bar{E}$  gelten

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i \quad \in \quad \mathcal{I} = \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) E_{\text{det}}, \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) E_{\text{det}} \right], \quad \alpha \in (0, 1). \quad (8.85)$$

Der Wert von  $\alpha$  soll hierbei klein gewählt werden. Für  $\alpha = 0,2$  ergäbe sich exemplarisch die Aussage, dass nur Balken betrachtet werden sollen, deren mittlerer E-Modul höchstens  $\pm 10\%$  von einem gegebenen E-Modul abweichen darf.

Neben der globalen Bedingung (8.84) soll der Balken elementweise eine lokale Eigenschaft erfüllen. Das bedeutet, dass der E-Modul pro Element nicht zu extrem ausfallen darf, obwohl der mittlere E-Modul noch im vorgegebenen Bereich liegt. Ein Vorteil ist, dass das Modell somit in der Lage ist weicherer Materialverhalten z.B. durch Einschlüsse abbilden zu können. Diese Bedingung lautet dann

$$\forall i : E_i \in [1 - \alpha_1 E, 1 + \alpha_2 E], \quad \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1) \quad (8.86)$$

Hierbei regulieren die Parameter  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  den lokalen E-Modul.

Das Vorgehen zur Erzeugung der erwarteten maximalen Durchbiegung lautet nun:

1. Erzeuge solange eine Realisation eines Balkens nach einer vorgegebenen Verteilung, bis der erzeugte Balken die Eigenschaften (8.84) und (8.86) erfüllt.
2. Berechne und speichere  $w_{\max}$  sowie  $\bar{E}$

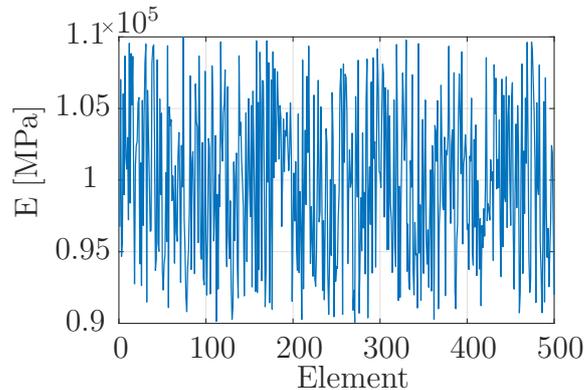
Führt man dieses Verfahren nach der Monte-Carlo-Methode oft durch, so konvergieren die Mittelwerte von  $w_{\max}$  und  $\bar{E}$  gegen den unbekanntem Erwartungswert dieser Verteilungen. Im Folgenden werden verschiedene Modelle vorgestellt und auf ihre Anwendbarkeit in diesem Kontext hin untersucht.

### Unabhängig identisch verteilte E-Moduln

Im einfachsten Fall werden die E-Moduln der Elemente als unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen aufgefasst. Als Basis dient die beschränkte Normalverteilung. Diese gewährleistet, dass die E-Moduln nicht den Wert Null annehmen. Diese ist gegeben durch ihre Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left(\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\right)} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (8.87)$$

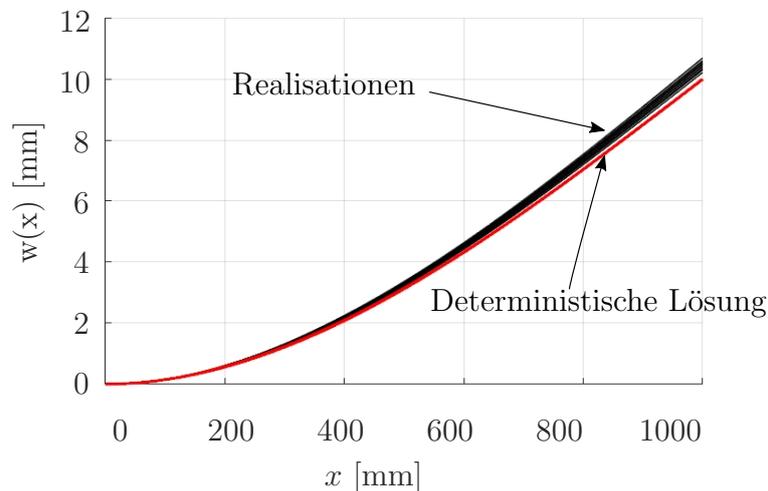
Hierbei bezeichnen  $\varphi$  und  $\Phi$  die Wahrscheinlichkeitsdichte bzw. die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Die Parameter  $a$  und  $b$  grenzen den Bereich der Verteilung, wo sie nicht null ist. Ein Beispiel dieses Zufallsfelds ist in Abbildung 8.13 dargestellt. Man erkennt das Bild eines weißen Rauschens.



**Abbildung 8.13:** Realisation unabhängig identisch verteilter E-Moduln mit beschränkter Normalverteilung.

Dies stellt für realistische Balken kein gutes Modell dar, da die Verteilung des E-Moduls in zwei benachbarten Elementen nicht als unabhängig angenommen werden kann. Um

dies zu überprüfen, wird das Beispiel aus Abschnitt 8.3.4 verwendet. Eine Monte-Carlo-Simulation wird mit 1000 Elementen jeweils  $10^6$  mal durchgeführt. Die globale Bedingung lautet in diesem Fall, dass der mittlere E-Modul um  $\pm 5\%$  schwanken darf. Lokal dürfen die E-Moduln um bis zu  $\pm 10\%$  schwanken.

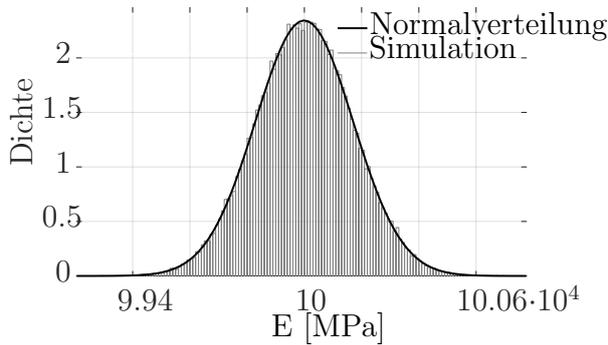


**Abbildung 8.14:** Realisationen der Biegelinie unabhängig identisch verteilter E-Moduln mit beschränkter Normalverteilung.

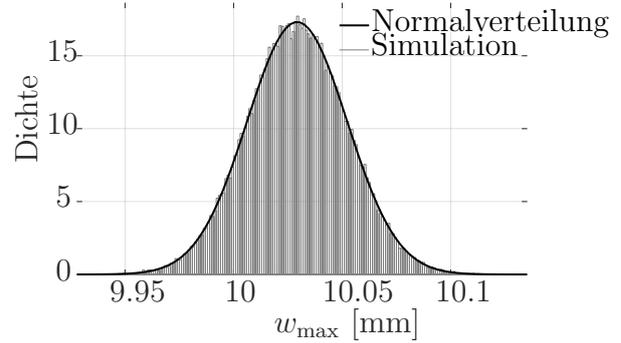
Beispiele von Realisationen sowie ein Vergleich mit der analytischen Lösungen für einen deterministischen E-Modul sind in Abbildung 8.14 dargestellt. Man erkennt, dass alle Biegelinien oberhalb der analytischen Lösung der Biegelinie liegen. Die Verteilung des mittleren E-Moduls ist in Abbildung 8.15 dargestellt. Sie kann durch eine Normalverteilung approximiert werden. Die Verteilung der maximalen Durchbiegung am Balkenende ist in Abbildung 8.16 dargestellt. Auch hier ist eine Approximation durch eine Normalverteilung erfolgt. Es ergibt sich ein Mittelwert von 10,03 mm der maximalen Durchbiegung, obwohl der mittlere E-Modul im Mittel genau 10 GPa beträgt. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die lokalen Abweichung des mittleren E-Moduls von 10% symmetrisch um die Null verteilt sind, diese Werte in der Biegelinie jedoch im Nenner auftreten. Ein 10% niedrigerer E-Modul führt zu einer 11%igen Steigerung der Biegung, während ein um 10% erhöhter E-Modul die Biegung nur um 9,09% verringert.

### Einfache stochastische Irrfahrt

Als nächstes Modell wird eine einfache stochastische Irrfahrt (englisch: Random Walk) simuliert. Dazu wird zunächst der erste E-Modul nach der beschränkten Normalverteilung modelliert. Das jeweils nächste Element besitzt den Wert des vorherigen Elements



**Abbildung 8.15:** Verteilung des mittleren E-Moduls.



**Abbildung 8.16:** Verteilung der maximalen Durchbiegung am Balkenende.

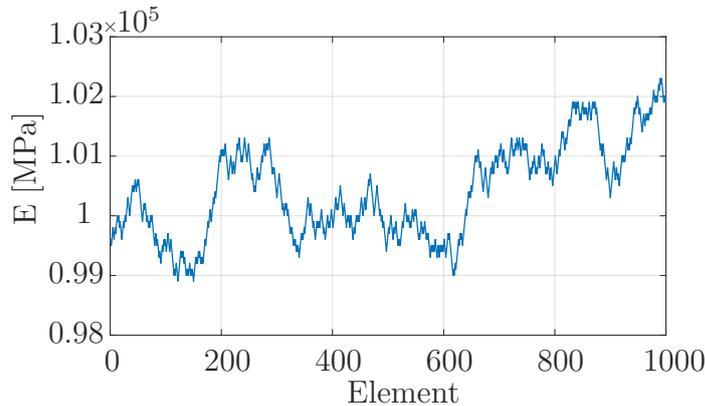
als Ausgangswert, plus oder minus eines Anteils des deterministischen E-Moduls. Hierbei ist dieser Zuwachs bzw. der Abgang diskret gleichverteilt auf den Zahlen  $\{-1;1\}$ .

$$E_1 \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma} \mathbb{1}_{\mathcal{I}}, \tag{8.88}$$

$$E_{i+1} = E_i + \beta E_{\text{det}} U, \beta \in (0, 1), \tag{8.89}$$

$$U \sim \mathcal{U}_{\{-1;1\}}, i = 2, \dots, n \tag{8.90}$$

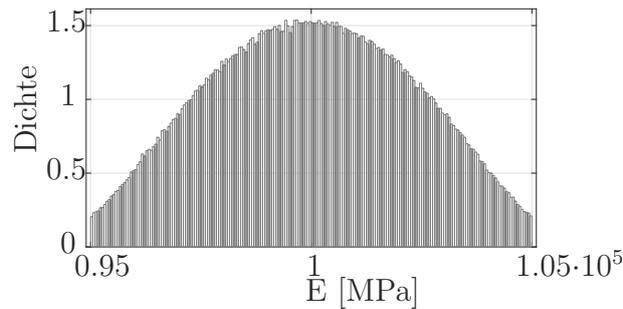
Eine Realisation einer solch einfachen stochastischen Irrfahrt ist in Abbildung 8.17 dargestellt.



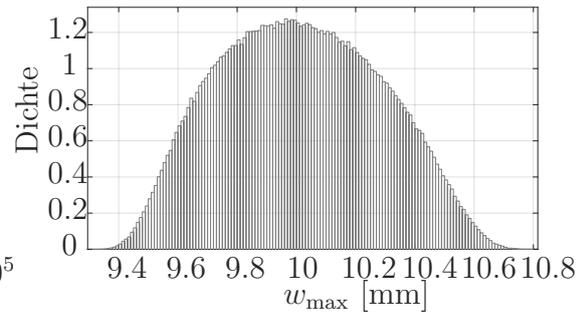
**Abbildung 8.17:** Realisation der E-Moduln nach der einfachen stochastischen Irrfahrt.

Man erkennt gut, dass der E-Modul nun nicht mehr stark von Element zu Element springt, sondern sich kontinuierlich entwickelt.

Die Simulation wird unter denselben Bedingungen durchgeführt, die bereits beim unabhängigen Modell genutzt wurde. Der Wert  $\beta$  wird auf 8% gesetzt. Es ergibt sich ein mittlerer E-Modul, welcher dem deterministischen E-Modul entspricht. Auch die maximale Durchbiegung ergibt im Mittel 10 mm. Die Histogramme sind in Abbildungen 8.18 und 8.19 dargestellt.



**Abbildung 8.18:** Verteilung des mittleren E-Moduls.



**Abbildung 8.19:** Verteilung der maximalen Durchbiegung am Balkenende.

### Autoregressives Modell

Abschließend wird ein autoregressives Modell zur Modellierung der Verteilung der E-Moduln verwendet. Im Unterschied zur einfachen stochastischen Irrfahrt sind die Zuwächse nun nicht mehr gleichverteilt, sondern ergeben sich aus einem Anteil des vorherigen E-Moduls und einer standardnormalverteilten Streuung. Der Wert des ersten Elements wird wieder nach einer beschränkten Normalverteilung bestimmt:

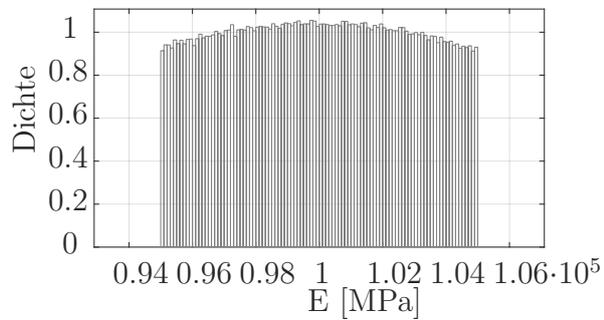
$$E_1 \sim \mathcal{N}_{\mu, \sigma} \mathbb{1}_{\mathcal{I}}, \quad (8.91)$$

$$E_{i+1} = E_i (1 + \beta Z_i), \beta \in (0, 1), \quad (8.92)$$

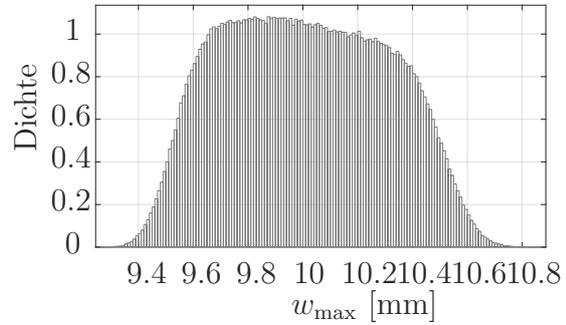
$$Z_i \sim \mathcal{N}_{0,1}, i = 2, \dots, n \quad (8.93)$$

Der Pfad des Modells unterscheidet sich nicht von dem des Modells der einfachen stochastischen Irrfahrt. Der mittlere E-Modul und die mittlere maximale Durchbiegung entsprechen wieder den deterministischen Werten bzw. der analytischen Lösung. Das Histogramm der maximalen Durchbiegung, vgl. Abbildung 8.21, weist einen asymmetrischen Anteil auf. Ähnlich wie beim unabhängigen Modell könnte dies mit dem gleichen Anteil von erhöhten und geminderten E-Moduln begründet werden. Andererseits wurde ein solches Phänomen bei der einfachen stochastischen Irrfahrt nicht beobachtet. Die Verteilung der E-Moduln, Abbildung 8.20, zeigt deutlicher die beschränkte Normalverteilung. Der Grund hierfür ist, dass bei diesem Modell mehr Balken simuliert werden, die die

globale oder die lokale Bedingung des bzw. der E-Modul(n) nicht erfüllen und somit verworfen werden.



**Abbildung 8.20:** Verteilung des mittleren E-Moduls.



**Abbildung 8.21:** Verteilung der maximalen Durchbiegung am Balkenende.

Insgesamt hat sich das Modell der einfachen stochastischen Irrfahrt als das geeignete Verfahren herausgestellt, Balken mit einer Unsicherheit in Form eines Zufallsfeldes der E-Moduln zu modellieren.



## 9 Zusammenfassung

---

In dieser Arbeit wurde das hyper- und das viskoelastische Materialverhalten verschiedener Materialien aus dem Bereich der additiven Fertigung anhand uniaxialer Zugversuche untersucht. Ferner wurden zwei Aspekte der Unsicherheiten im Material beleuchtet: Zum einen die Abschätzung der Größenverteilung von Radien kugelförmiger Einschlüsse aufgrund zweidimensionaler Daten, zum anderen der Einfluss von Unsicherheiten im Material auf Ausgangsgrößen, exemplarisch durchgeführt für die maximale Durchbiegung von Euler-Bernoulli-Balken.

Als Ergebnis ergab sich zunächst, dass FDM-gedruckte Proben generell nach denselben Normen hergestellt werden können, die auch für Vollmaterial gelten. Es wurde der Einfluss der Anzahl an Randschichten auf den E-Modul und das Spannungs-Dehnungsverhalten charakterisiert. Ferner wurde gezeigt, dass die Versagensmoden bei vier Randschichten nicht zulässig sind. Es wird die generelle Empfehlung ausgesprochen, solche Proben mit einer Randschicht und einer inneren Orientierung von  $45^\circ$ , gespiegelt nach jeder Schicht, zu drucken. Es wurde weiter überprüft, ob eine Erhöhung der Druckauflösung einen Einfluss auf die Zugproben und deren Eigenschaften hat. Auch dies konnte für ein Material bestätigt werden, so dass alle weiteren Zugproben nach den ermittelten Parametern hergestellt wurden. Beim Versuch, Herstellerangaben zu Materialparametern zu verifizieren, wurde festgestellt, dass viele dieser Angaben teilweise nicht korrekt oder unvollständig sind. Für zwei verschiedene Materialien, einem thermoplastischen Polyurethan (TPU) mit Handelsnamen NinjaFlex und einem thermoplastischen Copolyester (TPC) wurden die Materialeigenschaften für einachsige Zugversuche ermittelt. Im Zugversuch zeigte das weichere TPU eine geringere Streuung bei den Spannungswerten, allerdings eine größere Streuung bei der Bruchdehnung. Für dieses Material stimmte der E-Modul weitestgehend mit den Herstellerangaben überein. Für das TPC mit Namen Arflex 45 konnte der E-Modul aufgrund einer fehlerhaften Herstellerangabe nicht bestätigt werden. Bestimmt man eine Abschätzung für den E-Modul über die Shore-Härte, so liegt der gemessene E-Modul in der Nähe der korrigierten Herstellerangabe.

Zur Bestimmung des viskoelastischen Materialverhaltens auf der Grundlage von Relaxationsversuchen wurden dieselben Probentypen verwendet, die bereits bei den monotonen Zugversuchen zum Einsatz kamen. Auch hier wies das weichere TPU eine geringere

Streuung auf. Zusätzlich wurde noch ein flexibles Material untersucht, welches bei SLA-Druckern zum Einsatz kommt. Hier wurde der E-Modul bestimmt. Dieser kann aufgrund fehlender Werte nicht mit der Herstellerangabe verglichen werden. Verifiziert wurde der E-Modul durch Druckversuche, die annähernd denselben Wert ergaben. Als weitere Erkenntnis zeigte sich, dass das Aushärten des Harzes einen signifikanten Einfluss auf den E-Modul hat. Das Signifikanzniveau beträgt in dieser Arbeit stets 95%.

Aus den gemessenen Daten wurden die Parameter für die entsprechenden Modelle ermittelt. Dazu wurde zunächst die Methodik der nichtlinearen Regression mit und ohne Nebenbedingungen erläutert. Aus den ermittelten Daten können folgende Ergebnisse abgeleitet werden. Alle verwendeten Materialmodelle, namentlich Neo-Hooke, Mooney-Rivlin und Ogden, können das Verhalten des weicheren Materials besser abbilden als das des härteren Filamentmaterials. Für ein vorausgesetztes Bestimmtheitsmaß  $R^2$  von mindestens 0,98 wurden die Dehnungen berechnet, in denen die Modelle die Punkte mit dieser Güte approximieren. Das Neo-Hooke'sche Modell ist in der Lage, das Verhalten des TPC in monotonen Zugversuchen bis ca. 23% Dehnung zu beschreiben. Für dasselbe Material liefert das Mooney-Rivlin-Modell verlässliche Werte bis zu einer Dehnung von rund 40%. Das Ogden-Modell war nicht in der Lage, die Daten für dieses Material besser zu beschreiben, als das Mooney-Rivlin-Modell.

Für das TPU-Filament ergaben sich Dehnungen von 40% für das Neo-Hooke'sche Modell und 334% für das Mooney-Rivlin-Modell. Bei letzterem ist zu beachten, dass dieser Wert aufgrund eines sehr hohen Anteils der zweiten Invariante zustande gekommen ist. Zur Beschreibung von solch hohen Dehnungen ist das Ogden-Modell zu empfehlen, das den kompletten Spannungs-Dehnungs-Bereich mit vier Parametern sehr gut abbilden kann ( $R^2 = 0,9996$ ).

Bei den viskoelastischen Modellen wurde gezeigt, dass das auf vier Parametern basierende fraktionale Zener-Modell dieselbe Güte wie ein verallgemeinertes Maxwell-Modell mit mehr Parametern erreichen kann. Zur Validierung der ermittelten Daten wurden die Werte der hyper- und der viskoelastischen Materialmodelle gemeinsam in einer FEM-Simulation in Abaqus verwendet. Für das TPC liegen die ermittelten Spannungs-Dehnungs-Werte etwas näher an den experimentell ermittelten Werten, als bei der rein hyperelastischen Betrachtung. Für das weichere TPU gilt dies nicht. Hier ergeben die ermittelten viskoelastischen Parameter eine starke Abweichung zwischen Experiment und Simulation. Dies lässt sich durch eine zu hoch gewählte Dehnrates in den monotonen Zugversuchen erklären.

In zukünftigen Experimenten muss nun das Verhalten unter mehrachsigen Belastungszuständen untersucht werden. Ferner sollten die Relaxationsversuche als Langzeitversuche wiederholt und ausgewertet werden. Auch von Interesse sind das temperaturabhängige Materialverhalten, sowie eine Untersuchung hinsichtlich des Mullins-Effekts bei FDM-gedruckten Proben.

---

Zur Modellierung der Unsicherheiten im Material wurde das Wicksell'sche Korpuskelproblem auf additiv gefertigte Materialien angewendet. Dazu wurde ein auf der Monte-Carlo-Methode basierender Algorithmus vorgestellt, mit dem man den Fehler abschätzen kann, der bei der falschen Wahl einer Verteilung gemessener Kreisradien entsteht. Es wurde gezeigt, dass Kugelradien als log-normalverteilte Größe angesehen werden können, wenn die Kreisradien ebenfalls log-normalverteilt sind. Hierbei ist zu beachten, dass das Modell weniger große Poren abbilden kann als in Wirklichkeit vorhanden sind.

Abschließend wurde der Einfluss von unsicheren Parametern auf die maximale Durchbiegung eines Euler-Bernoulli-Balkens untersucht. Für diesen Fall wurden analytische Lösungen der Verteilung der maximalen Durchbiegung für Zufallsvariablen hergeleitet. Für eine räumliche Verteilung von E-Moduln innerhalb des Balkens wurde der Balken in einer Dimension diskretisiert. Für verschiedene Zufallsfelder wurde die maximale Durchbiegung am Balkenende mittels der Monte-Carlo-Methode berechnet. Dabei wurde gezeigt, dass der E-Modul nicht in jedem Element unabhängig angenommen werden sollte. Ferner wurden zwei Modelle mit Abhängigkeiten zwischen den E-Moduln vorgestellt. Zum einen das Modell der einfachen stochastischen Irrfahrt, zum anderen ein autoregressives Modell. Das Modell der einfachen stochastischen Irrfahrt stellte sich als das bessere der beiden Modelle heraus.



# Literaturverzeichnis

- [1] ASTM D2240-15e1: Standard test method for rubber property – Durometer hardness, 2015.
- [2] ASTM D412-16: Standard test methods for vulcanized rubber and thermoplastic elastomers – Tension, 2016.
- [3] ASTM D638-14: Standard test method for tensile properties of plastics, 2014.
- [4] ASTM E328-13: Standard test methods for stress relaxation tests for materials and structures, 2013.
- [5] DIN 53441:1984-01: Prüfung von Kunststoffen – Spannungsrelaxationsversuch, 1984.
- [6] DIN 53504:2017-03: Prüfung von Kautschuk und Elastomeren – Bestimmung von Reißfestigkeit, Zugfestigkeit, Reißdehnung und Spannungswerten im Zugversuch, 2017.
- [7] DIN EN ISO 16396-2:2017-07: Kunststoffe – Polyamid (PA)-Formmassen für das Spritzgießen und die Extrusion – Teil 2: Herstellung von Probekörpern und Bestimmung von Eigenschaften, 2017.
- [8] DIN EN ISO 527-1:2012-06: Kunststoffe – Bestimmung der Zugeigenschaften – Teil 1: Allgemeine Grundsätze, 2012.
- [9] DIN EN ISO 527-2:2012-06: Kunststoffe – Bestimmung der Zugeigenschaften – Teil 2: Prüfbedingungen für Form- und Extrusionsmassen, 2012.
- [10] DIN EN ISO 7500-1:2018-06: Metallische Werkstoffe – Kalibrierung und Überprüfung von statischen einachsigen Prüfmaschinen – Teil 1: Zug- und Druckprüfmaschinen – Kalibrierung und Überprüfung der Kraftmesseinrichtung, 2018.
- [11] DIN EN ISO 899-1:2018-03: Kunststoffe – Bestimmung des Kriechverhaltens – Teil 1: Zeitstand-Zugversuch, 2018.
- [12] DIN ISO 23529:2012-10: Elastomere – Allgemeine Bedingungen für die Vorbereitung und Konditionierung von Probekörpern für physikalische Prüfverfahren, 2012.
- [13] DIN ISO 7743:2016-08: Elastomere oder thermoplastische Elastomere – Bestimmung des Druckverformungs-Verhaltens, 2016.

- [14] ISO 37:2017-11: Elastomere oder thermoplastische Elastomere – Bestimmung der Zugfestigkeitseigenschaften, 2017.
- [15] Abaqus. Abaqus user's manual. version 6.14, 2014.
- [16] M. Ahmad, C. Sinclair und A. Werritty. Log-logistic flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*, 98(3-4):205–224, 1988.
- [17] J. Ahmed und S. K. Varshney. Polylactides – Chemistry, properties and green packaging technology: a review. *International journal of food properties*, 14(1):37–58, 2011.
- [18] S.-H. Ahn, M. Montero, D. Odell, S. Roundy und P. K. Wright. Anisotropic material properties of fused deposition modeling abs. *Rapid prototyping journal*, 8(4):248–257, 2002.
- [19] K. K. Aligizaki und P. D. Cady. Air content and size distribution of air voids in hardened cement pastes using the section-analysis method. *Cement and concrete research*, 29(2):273–280, 1999.
- [20] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik*. Springer, 2018.
- [21] T. W. Anderson. On the distribution of the two-sample cramer-von mises criterion. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 1148–1159, 1962.
- [22] H. Atkinson und G. Shi. Characterization of inclusions in clean steels: a review including the statistics of extremes methods. *Progress in Materials Science*, 48(5):457–520, 2003.
- [23] H. Baaser, A. Schobel, W. Michaeli und U. Masberg. Vergleich von äquibiaxialen Prüfständen zur Kalibrierung von Werkstoffmodellen. *KGK. Kautschuk, Gummi, Kunststoffe*, 64(5):20–24, 2011.
- [24] A. Baddeley und E. B. V. Jensen. *Stereology for statisticians*. CRC Press, 2004.
- [25] R. L. Bagley und P. J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30(1):133–155, 1986.
- [26] C. Beachem und G. Yoder. Elastic-plastic fracture by homogeneous microvoid coalescence tearing along alternating shear planes. *Metallurgical Transactions*, 4(4):1145–1153, 1973.
- [27] S. Beciri. Experimentelle Untersuchung der Materialeigenschaften additiv gefertigter Proben im Zug- und Druckbereich. Bachelorarbeit, Universität Siegen, 2018.
- [28] W. Bergmann. *Werkstofftechnik 1: Struktureller Aufbau von Werkstoffen-Metallische Werkstoffe-Polymerwerkstoffe-Nichtmetallisch-anorganische Werkstoffe*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2013.

- 
- [29] J. Betten. *Kontinuumsmechanik: Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer, 2001.
- [30] A. Bhattacharyya. On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distribution. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 35:99–109, 1943.
- [31] G. Bhattacharyya und A. Fries. Fatigue failure models – Birnbaum-Saunders vs. inverse gaussian. *IEEE Transactions on Reliability*, 31(5):439–441, 1982.
- [32] E. Bilgiliy. Restricting the hyperelastic models for elastomers based on some thermodynamical, mechanical, and empirical criteria. *Journal of Elastomers & Plastics*, 36(2):159–175, 2004.
- [33] Z. W. Birnbaum und S. C. Saunders. A new family of life distributions. *Journal of applied probability*, 6(2):319–327, 1969.
- [34] D. Brackett, I. Ashcroft und R. Hague. Topology optimization for additive manufacturing. In *Proceedings of the solid freeform fabrication symposium, Austin, TX*, Ausgabe 1, pages 348–362. S, 2011.
- [35] W. Brutsaert. Probability laws for pore-size distributions. *Soil Science*, 101(2):85–92, 1966.
- [36] S. Buchen. FEM Simulation des hyperelastischen und viskoelastischen Materialverhaltens von Polyurea mit Abaqus. Bachelorarbeit, Universität Siegen, 2017.
- [37] C. Casavola, A. Cazzato, V. Moramarco und C. Pappalettere. Orthotropic mechanical properties of fused deposition modelling parts described by classical laminate theory. *Materials & design*, 90:453–458, 2016.
- [38] C. Caviezel, R. Grünwald, S. Ehrenberg-Silies, S. Kind, T. Jetzke und M. Boven-schulte. Additive Fertigungsverfahren (3-D-Druck). *vom Büro für Technikfolgen-Abschätzung beim Deutschen Bundestag. Arbeitsbericht*, (175), 2017.
- [39] P. Ciarlet. *Lectures on Three-Dimensional Elasticity*. Springer, 1983.
- [40] R. D. Cook und C.-L. Tsai. Residuals in nonlinear regression. *Biometrika*, 72(1):23–29, 1985.
- [41] R. Cortés. Dynamic growth of microvoids under combined hydrostatic and deviatoric stresses. *International journal of solids and structures*, 29(13):1637–1645, 1992.
- [42] M. K. Cowles. Modelling survival data in medical research. *Journal of the American Statistical Association*, 99(467):905–907, 2004.
- [43] H. Cramér. On the composition of elementary errors: First paper: Mathematical deductions. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1928(1):13–74, 1928.

- [44] S. Crump. Apparatus and method for creating three-dimensional objects, June 9 1992. U.S. Patent 5,121,329.
- [45] C. R. Deckard. Method and apparatus for producing parts by selective sintering, Sept. 5 1989. US Patent 4,863,538.
- [46] J. Decker. Experimentelle Untersuchungen und Simulation des elastischen sowie viskoelastischen Materialverhaltens von Polyurea. Masterarbeit, Universität Siegen, 2014.
- [47] S. Diamond und W. L. Dolch. Generalized log-normal distribution of pore sizes in hydrated cement paste. *Journal of Colloid and Interface Science*, 38(1):234–244, 1972.
- [48] D. C. Drucker. A definition of stable inelastic material. Technical report, BROWN UNIV PROVIDENCE RI, 1957.
- [49] E. Ebel und T. Sinnemann. Fabrication of fdm 3d objects with abs and pla and determination of their mechanical properties. *RTejournal*, 2014(1), 2014.
- [50] H. Elias. A re-examination of the structure of the mammalian liver. i. parenchymal architecture. *American Journal of Anatomy*, 84(2):311–333, 1949.
- [51] I. Elishakoff. *Probabilistic Methods in the Theory of Structures: Strength of Materials, Random Vibrations, and Random Buckling*. World Scientific, 2017.
- [52] I. Elishakoff, Y. Ren und M. Shinozuka. Some exact solutions for the bending of beams with spatially stochastic stiffness. *International Journal of Solids and Structures*, 32(16):2315–2327, 1995.
- [53] V. A. Epanechnikov. Non-parametric estimation of a multivariate probability density. *Theory of Probability & Its Applications*, 14(1):153–158, 1969.
- [54] P. Eyerer, T. Hirth und P. Elsner. *Polymer engineering*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [55] J. Falbe und E. Amelingmeier. *Römpf-Lexikon Chemie*. Thieme, 1996.
- [56] M. Falk, R. Becker und F. Marohn. *Angewandte Statistik: Eine Einführung mit Programmbeispielen in SAS*. Springer, 2004.
- [57] M. Fernandez-Vicente, W. Calle, S. Ferrandiz und A. Conejero. Effect of infill parameters on tensile mechanical behavior in desktop 3d printing. *3D printing and additive manufacturing*, 3(3):183–192, 2016.
- [58] P. R. Fisk. The graduation of income distributions. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pages 171–185, 1961.

- 
- [59] Formlabs. Validating isotropy in SLA 3D printing. [https://archive-media.formlabs.com/upload/formlabs\\_validating-isotropy-in-sla.pdf](https://archive-media.formlabs.com/upload/formlabs_validating-isotropy-in-sla.pdf), 2016. [Online; Zugriff am 07.06.2019].
- [60] C. F. Gauss. *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Ausgabe 7. Perthes et Besser, 1809.
- [61] A. Gemant. A method of analyzing experimental results obtained from elastoviscous bodies. *Physics*, 7(8):311–317, 1936.
- [62] A. N. Gent. *Engineering with rubber: how to design rubber components*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2012.
- [63] I. Gibson, D. W. Rosen, B. Stucker et al. *Additive manufacturing technologies*, Ausgabe 17. Springer, 2014.
- [64] L. J. Gibson und M. F. Ashby. *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge university press, 1999.
- [65] A. S. Goldberger et al. Econometric theory. *Econometric theory.*, 1964.
- [66] R. Gorenflo und F. Mainardi. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. *arXiv preprint arXiv:0805.3823*, 2008.
- [67] G. Gottstein. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik: Physikalische Grundlagen*. Springer, 2013.
- [68] B. C. Gross, J. L. Erkal, S. Y. Lockwood, C. Chen und D. M. Spence. Evaluation of 3d printing and its potential impact on biotechnology and the chemical sciences. *Analytical Chemistry*, 86(7):3240–3253, 2014.
- [69] D. Gross und T. Seelig. *Bruchmechanik*, Ausgabe 4. Springer, 2006.
- [70] S. Hartmann. Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 38(44-45):7999–8018, 2001.
- [71] E. Hellinger. Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 136:210–271, 1909.
- [72] R. Hill. Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 314(1519):457–472, 1970.
- [73] G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science*. Springer, 2002.

- [74] L. Hoss und R. J. Marczak. A new constitutive model for rubber-like materials. *Mecánica Computacional*, 29:2759–2773, 2010.
- [75] C. Hull. Apparatus for production of three-dimensional objects by stereolithography, Mar. 11 1986. U.S. Patent 4,575,330.
- [76] M. Itskov. *Tensor algebra and tensor analysis for engineers, fourth ed.* Springer, 2014.
- [77] E. Jensen. A design-based proof of wicksell’s integral equation. *Journal of Microscopy*, 136(3):345–348, 1984.
- [78] D. Jones und L. Treloar. The properties of rubber in pure homogeneous strain. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 8(11):1285, 1975.
- [79] K. Kirchner, H. Jäschke, H.-J. Franke, T. Vietor und K.-H. Grote. Mechanisch-technologische Eigenschaften generativ gefertigter Bauteile in Abhängigkeit von der Bauteilorientierung. In *RTejournal-Forum für Rapid Technologie*, Ausgabe 7, 2010.
- [80] C. Kleiber und S. Kotz. *Statistical size distributions in economics and actuarial sciences*, Ausgabe 470. John Wiley & Sons, 2003.
- [81] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie, 3., überarbeitete und ergänzte auflage (2012)*, 2005.
- [82] R. Koeller. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2):299–307, 1984.
- [83] A. Kolmogorov. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari*, 4:83–91, 1933.
- [84] S. Koltzenburg, M. Maskos und O. Nuyken. *Polymere: Synthese, Eigenschaften und Anwendungen*. Springer, 2014.
- [85] K. Königsberger. *Analysis 2, 5. überarbeitete Auflage*. Springer, 2004.
- [86] T. F. Korzeniowski und K. Weinberg. A markov chain approach to damage evolution in die-cast zamak. *Technische Mechanik*, 38(2):135–147, 2018.
- [87] N. H. Kuiper. Tests concerning random points on a circle. In *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A*, Ausgabe 63, pages 38–47, 1960.
- [88] T. O. Kvålseth. Cautionary note about  $R^2$ . *The American Statistician*, 39(4):279–285, 1985.
- [89] R. Lachmayer, R. B. Lippert und T. Fahlbusch. *3D-Druck beleuchtet. Additive Manufacturing auf dem Weg in die Anwendung*. Springer, 2016.

- 
- [90] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright und P. E. Wright. Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization*, 9(1):112–147, 1998.
- [91] F. Mainardi. An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 15(4):712–717, 2012.
- [92] F. Mainardi. On some properties of the mittag-leffler function  $E_\alpha(-t^\alpha)$ , completely monotone for  $t > 0$  with  $0 < \alpha < 1$ . *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 19(7):2267–2278, 2014.
- [93] F. Mainardi und R. Gorenflo. Time-fractional derivatives in relaxation processes: a tutorial survey. *arXiv preprint arXiv:0801.4914*, 2008.
- [94] F. Mainardi und G. Spada. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal Special Topics*, 193(1):133–160, 2011.
- [95] G. Marckmann und E. Verron. Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber chemistry and technology*, 79(5):835–858, 2006.
- [96] G. Menges, W. Michaeli und P. Mohren. *Spritzgießwerkzeuge: Auslegung, Bau, Anwendung*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2007.
- [97] G. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction  $E_\alpha(x)$ . *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 137(2):554–558, 1903.
- [98] M. Mooney. A theory of large elastic deformation. *Journal of applied physics*, 11(9):582–592, 1940.
- [99] D. Moreira und L. Nunes. Comparison of simple and pure shear for an incompressible isotropic hyperelastic material under large deformation. *Polymer Testing*, 32(2):240–248, 2013.
- [100] G. Muscolino, A. Sofi und M. Zingales. One-dimensional heterogeneous solids with uncertain elastic modulus in presence of long-range interactions: Interval versus stochastic analysis. *Computers & Structures*, 122:217–229, 2013.
- [101] D. L. Naik und R. Kiran. On anisotropy, strain rate and size effects in vat photopolymerization based specimens. *Additive Manufacturing*, 23:181–196, 2018.
- [102] J. A. Nelder und R. Mead. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4):308–313, 1965.
- [103] Y. Obata, S. Kawabata und H. Kawai. Mechanical properties of natural rubber vulcanizates in finite deformation. *Journal of Polymer Science Part A-2: Polymer Physics*, 8(6):903–919, 1970.

- [104] R. Ogden. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 326(1567):565–584, 1972.
- [105] R. Ogden, G. Saccomandi und I. Sgura. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 34(6):484–502, 2004.
- [106] R. W. Ogden. *Non-linear elastic deformations*. Courier Corporation, 1997.
- [107] J. Ohser und K. Schladitz. *3D images of materials structures: processing and analysis*. John Wiley & Sons, 2009.
- [108] M. Papadrakakis und V. Papadopoulos. Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using monte carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134(3-4):325–340, 1996.
- [109] I. Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Ausgabe 198. Elsevier, 1998.
- [110] P. Przybylo und E. Arruda. Experimental investigations and numerical modeling of incompressible elastomers during non-homogeneous deformations. *Rubber Chemistry and Technology*, 71(4):730–749, 1998.
- [111] H. Qi, K. Joyce und M. Boyce. Durometer hardness and the stress-strain behavior of elastomeric materials. *Rubber chemistry and technology*, 76(2):419–435, 2003.
- [112] R. Rajkolhe und J. Khan. Defects, causes and their remedies in casting process: A review. *International Journal of Research in Advent Technology*, 2(3):375–383, 2014.
- [113] N. S. Ramesh, D. H. Rasmussen und G. A. Campbell. The heterogeneous nucleation of microcellular foams assisted by the survival of microvoids in polymers containing low glass transition particles. part i: Mathematical modeling and numerical simulation. *Polymer Engineering & Science*, 34(22):1685–1697, 1994.
- [114] T. Reppel, T. Dally und K. Weinberg. On the elastic modeling of highly extensible polyurea. *Technische Mechanik*, 33(1):19–33, 2013.
- [115] R. Rivlin. Large elastic deformations of isotropic materials. i. fundamental concepts. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 240(822):459–490, 1948.
- [116] R. S. Rivlin und D. Saunders. Large elastic deformations of isotropic materials vii. experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 243(865):251–288, 1951.

- 
- [117] J. C. Russ und R. T. Dehoff. *Practical stereology*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [118] E. M. Sachs, J. S. Haggerty, M. J. Cima und P. A. Williams. Three-dimensional printing techniques, Apr. 20 1993. US Patent 5,204,055.
- [119] A. A. Sahagian, D. L. and Proussevitch. 3d particle size distributions from 2d observations: stereology for natural applications. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 84(3-4):173–196, 1998.
- [120] G. Salmoria, C. Ahrens, V. Beal, A. Pires und V. Soldi. Evaluation of post-curing and laser manufacturing parameters on the properties of somos 7110 photosensitive resin used in stereolithography. *Materials & Design*, 30(3):758–763, 2009.
- [121] R. Schlittgen. *Regressionsanalysen mit R*. Walter de Gruyter, 2013.
- [122] A. Schmidt und L. Gaul. Bestimmung des komplexen Elastizitätsmoduls eines Polymers zur Identifikation eines viskoelastischen Stoffgesetzes mit fraktionalen Zeitableitungen. *Proc. Deutsche Gesellschaft für Zerstörungsfreie Prüfung Jahrestagung (Berlin,)*, 75, 2001.
- [123] W. Schnell, D. Gross, W. Hauger und P. Wriggers. *Technische Mechanik: Band 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer, 2006.
- [124] N. Smirnov. Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *The annals of mathematical statistics*, 19(2):279–281, 1948.
- [125] A. Sofi und G. Muscolino. Static analysis of euler–bernoulli beams with interval young’s modulus. *Computers & Structures*, 156:72–82, 2015.
- [126] O. Som, A. Thielmann, E. Schnabl, S. Daimer, H. Berghäuser und O. Rothengatter. Anwendungs- und Entwicklungsperspektiven der additiven Fertigung für den Wirtschaftsstandort Deutschland. *Fraunhofer, ISI*, 2016.
- [127] Student. The probable error of a mean. *Biometrika*, pages 1–25, 1908.
- [128] K. Szykiedans und W. Credo. Mechanical properties of fdm and sla low-cost 3-d prints. *Procedia Engineering*, 136:257–262, 2016.
- [129] N. G. Tanikella, B. Wittbrodt und J. M. Pearce. Tensile strength of commercial polymer materials for fused filament fabrication 3d printing. *Additive Manufacturing*, 15:40–47, 2017.
- [130] R. I. Tanner und K. Walters. *Rheology: an historical perspective*, Ausgabe 7. Elsevier, 1998.

- [131] X. Teng, H. Mae, Y. Bai und T. Wierzbicki. Pore size and fracture ductility of aluminum low pressure die casting. *Engineering Fracture Mechanics*, 76(8):983–996, 2009.
- [132] M. Tiryakioğlu. Pore size distributions in AM50 Mg alloy die castings. *Materials Science and Engineering: A*, 465(1):287–289, 2007.
- [133] L. Treloar. The elasticity of a network of long-chain molecules. i. *Rubber Chemistry and Technology*, 16(4):746–751, 1943.
- [134] L. Treloar. The elasticity of a network of long-chain molecules-ii. *Transactions of the Faraday Society*, 39:241–246, 1943.
- [135] L. R. G. Treloar. *The physics of rubber elasticity*. Oxford University Press, 1975.
- [136] C. Truesdell und W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer, 2004.
- [137] V. Tvergaard. Material failure by void growth to coalescence. In *Advances in applied Mechanics*, Ausgabe 27, pages 83–151. Elsevier, 1989.
- [138] B. M. Tymrak, M. Kreiger und J. M. Pearce. Mechanical properties of components fabricated with open-source 3-d printers under realistic environmental conditions. *Materials & Design*, 58:242–246, 2014.
- [139] K. Valanis und R. F. Landel. The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios. *Journal of Applied Physics*, 38(7):2997–3002, 1967.
- [140] VDI Richtlinie 3405: Additive Fertigungsverfahren - Grundlagen, Begriffe, Verfahrensbeschreibungen, 2014.
- [141] R. Von Mises. Statistik und Wahrheit. *Julius Springer*, 20, 1928.
- [142] F. T. Wall. Statistical thermodynamics of rubber. *The Journal of Chemical Physics*, 10(2):132–134, 1942.
- [143] F. T. Wall. Statistical thermodynamics of rubber. ii. *The Journal of Chemical Physics*, 10(7):485–488, 1942.
- [144] K. Weinberg und T. Böhme. Mesoscopic modeling for continua with pores: application in biological soft tissue. *Journal of Nonequilibrium Thermodynamics*, 33(1):1–24, 2008.
- [145] K. Weinberg und T. Böhme. Mesoscopic modeling for continua with pores: Dynamic void growth in viscoplastic materials. *Journal of Nonequilibrium Thermodynamics*, 33(1):25–45, 2008.
- [146] K. Weinberg und M. Ortiz. Shock wave induced damage in kidney tissue. *Computational Materials Science*, 32:588–593, 2005.

- [147] S. D. Wicksell. The corpuscle problem: a mathematical study of a biometric problem. *Biometrika*, 17(1/2):84–99, 1925.
- [148] C. Wrana. *Polymerphysik: Eine physikalische Beschreibung von Elastomeren und ihren anwendungsrelevanten Eigenschaften*. Springer, 2014.
- [149] K. K. Yang, J. H. Zhu, C. Wang, D. S. Jia, L. L. Song und W. H. Zhang. Experimental validation of 3d printed material behaviors and their influence on the structural topology design. *Computational Mechanics*, 61(5):581–598, 2018.
- [150] C. Zener. *Elasticity and anelasticity of metals*. University of Chicago press, 1948.
- [151] A. L. Zydney, P. Aimar, M. Meireles, J. M. Pimbley und G. Belfort. Use of the log-normal probability density function to analyze membrane pore size distributions: functional forms and discrepancies. *Journal of Membrane Science*, 91(3):293–298, 1994.



Schriftenreihe des Lehrstuhls für Festkörpermechanik an der Universität Siegen

Herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. Kerstin Weinberg