Tempered Operator Scaling Stable Random Fields

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
M. Sc. Andreas Stahl

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen
Siegen 2019

Betreuer und erster Gutachter
Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler
Universität Siegen

Zweiter Gutachter
Prof. Dr. Alexander Schnurr
Universität Siegen

Tag der mündlichen Prüfung
29.11.2019

Eidesstattliche Erklärung

Ich, Andreas STAHL, erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulaässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer, nicht angegebener Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt. Es wurden keine Dienste eines Promotionsvermittlers oder einer ähnlichen Organisation in Anspruch genommen.

Unterschrift:

Datum:

„Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet..“

David Hilbert

UNIVERSITÄT SIEGEN

Zusammenfassung

Fakultät 4

Mathematik

Dissertation

Tempered Operator Scaling Stable Random Fields

von Andreas STAHL

Der Inhalt der neuen Forschungsergebnisse dieser Arbeit stammen aus Kapitel 3 bis Kapitel 5, während sich die restlichen Kapitel mit Einleitung, Grundlagen und Ausblick beschäftigen. Es werden zwei Darstellungen skalarer Zufallsfelder $\left\{ X(t) \middle| t \in \mathbb{R}^d \right\}$ betrachtet. Diese umfassen die *moving average* Darstellungen sowie die *harmonizable* Darstellungen, welche sich explizit durch das Hinzufügen eines sogenannten *temperings* von den bereits bekannten Darstellungen (vgl. [13]) unterscheiden. Grundlegend dazu wiederholen und führen wir im zweiten Kapitel zunächst verallgemeinerte Polarkoordinaten und E-homogene Funktionen sowie *indepdently scattered random measures* beziehungsweise multi stabile *independently scattered random measures* ein, um die entsprechenden Integraldarstellungen tätigen zu können. Anschließend studieren wir diese Darstellungen genauer und zeigen im dritten Kapitel die Existenz sowie die Eigenschaften der Pfade. Letzteres wird durch stationäre Zuwächse, stochastische Stetigkeit und das lokale Verhalten deutlich. Wir sind in der Lage, explizit Elemente des Tangentialraumes nach [11] anzugeben. Durch das hinzugefügte *tempering* ist es zudem möglich eine weitere Familie von Zufallsfeldern anzugeben, welche durch „Abschneiden“ des entsprechenden Integranden entsteht. Allerdings bezieht sich dieses bis jetzt nur auf die *moving average* Darstellung. Diese durch „Abschneiden“ entstandene Zufallsfelder unterscheiden sich maßgeblich von den anderen, da sie stationär sind. In den darauffolgenden Kapiteln vier und fünf erweitern wir die *getemperten* Zufallsfelder nach der Idee von [6] sowie [4] durch die multi Stabilität, sodass der Stabilitätsparameter α nun vom Ort der Betrachtung abhängt. In diesem Fall konnten wir ebenfalls die Existenz der oben genannten beiden Darstellungen sowie Eigenschaften wie stochastische Stetigkeit zeigen und das lokale Verhalten untersuchen.

Abstract

The content of the new research results are displayed in the chapters three, four and five and follow an introduction in chapter one as well as a repetition and provision of basics in chapter two. The main objects throughout the dissertation are two special representations of scalar random fields, namely the *moving average* and the *harmonizable* representation. We were able to add a tempering to the already known integrand of the operator scaling stable random fields, which allows us to define several new random fields in chapter three. Moreover, the chapters four and five cover an application of the known generalisation of stable random fields by adding a dependence on time or place of the stable parameter α onto our new fields. Furthermore, we were able to show properties like stochastic continuity and stationary increments as well as explicit elements of the tangent field space for the representations. Last but not least, the new tempering allowed a definition of an isolated random field which differs from the other mentioned ones by stationarity.

Danksagung

Ich bedanke mich sehr bei Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler für die begleitende Betreuung der Promotion und zugleich sein offenes Ohr, welches stets einen Austausch über die Forschungsergebnisse und einen mathematischen Dialog ermöglichte. Des Weiteren möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Alexander Schnurr für die Erstellung des zweiten Gutachtens bedanken. Weiterer Dank gilt der kompletten Kollegschaft, die stets ein gutes Arbeitsklima förderte sowie mich durch reichhaltige und hilfreiche Gespräche unterstützte. Abschließend möchte ich mich noch bei meinen Eltern sowie meiner Freundin bedanken, welche mich stets emotional unterstützten und motivierten.

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung iii

Zusammenfassung vii

Danksagung ix

1 Einleitung 1

2 Grundlagen 5
- 2.1 Exponentialmatritzen 5
- 2.2 Verallgemeinerte Polarkoordinaten 8
- 2.3 E-homogene Funktionen 12
- 2.4 Zufallsfelder 13
- 2.5 Das Tangentenfeld für Zufallsfelder 14
- 2.6 Independently scattered random measures 17

3 Tempered Operator Scaling Stable Random Fields 25
- 3.1 *Moving Average* Darstellung 25
- 3.2 *Harmonizable* Darstellung 39

4 Operator Scaling Multistable Random Fields 47
- 4.1 Multi stable independently scattered random measures 47
- 4.2 *Moving Average Darstellung* 55
- 4.3 *Harmonizable* Darstellung 64

5 Tempered Operator Scaling Multistable Random Fields 71
- 5.1 *Moving Average* Darstellung 71
- 5.2 *Harmonizable* Darstellung 80

6 Schluss und Ausblick 85
- 6.1 Schluss 85
- 6.2 Ausblick 85

Literatur 91

Abkürzungsverzeichnis

SαS	**s**ymmetrisch α **s**tabil
ISRM	**i**ndependently **s**cattered **r**andom **m**easure
OSSRF	**o**perator **s**caling **s**table **r**andom **f**ield
TOSSRF	**t**empered **o**perator **s**caling **s**table **r**andom **f**ield
ITOSSRF	**i**solated **t**empered **o**perator **s**caling **s**table **r**andom **f**ield
TOSMSRF	**t**empered **o**perator **s**caling **m**ulti **s**table **r**andom **f**ield
ITOSMSRF	**i**solated **t**empered **o**perator **s**caling **m**ulti **s**table **r**andom **f**ield

Symbolverzeichnis

E:	reellwertige $d \times d$ Matrix mit positiven Realteilen der Eigenwerte
λ:	Temperingparameter
α:	Stabilitätsparameter
Z_α:	Reellwertiges ISRM mit Lebesgueschem Kontrollmaß
W_α:	Komplexwertiges isotropes ISRM mit Lebesgueschem Kontrollmaß
$Z_\alpha(\cdot)$:	Reellwertiges multi stabiles ISRM mit Lebesgueschem Kontrollmaß
$W_\alpha(\cdot)$:	Komplexwertiges isotropes multi stabiles ISRM mit Lebesgueschem Kontrollmaß
$\tau_E(\cdot)$:	Verallgemeinrte Radialkomponente
$l_E(\cdot)$:	Verallgemeinerte Winkelkoordinate
$\varphi(\cdot)$:	E-homogene Funktion
$\psi(\cdot)$:	E^t-homogene Funktion
$\alpha(\cdot)$:	Stabilitätsfunktion
$\alpha_x(z)$:	$\alpha(x+z)$
$\|\|\cdot\|\|^{a,b}$:	$\|\|\cdot\|\|^a + \|\|\cdot\|\|^b$
$\mathrm{Tan}(Y)$:	Tangentialraum zu Y

Kapitel 1

Einleitung

Das Gebiet der stochastischen Prozesse und der in beliebiger Dimension gehaltenen stochastischen Zufallsfelder spielt seit langer Zeit eine bedeutende Rolle in der Mathematik. Neben zahlreichen Modellierungsmöglichkeiten in der Finanzmathematik sind in den letzten Jahren stets neue Anwendungsmöglichkeiten entstanden, welche neue Prozesse oder Verallgemeinerungen bereits bestehender Prozesse fordern.
Dazu seien kurz und ohne Anspruch auf Vollständigkeit Anwendungen im Bereich der Hydrologie oder des Hochwasserschutzes genannt, siehe [12]. Ebenso erforderlich werden stochastische Prozesse und Zufallsfelder bei der Analyse von Internet Traffic, siehe [17], oder Bemühungen zur Bildung von neuralen Netzwerken wie in [16].

Jede Modellierung bevorzugt dabei verständlicherweise verschiedene Eigenschaften eines stochastischen Zufallsfeldes. Dabei spielen das asymptotische Verhalten und die Beschaffenheit der Pfade eine wichtige Rolle. Neben der Stetigkeit dieser Pfade ist eine Skalierungsstruktur beziehungsweise Abhängigkeitsstruktur von großem Interesse. Zur Veranschaulichung dieser Eigenschaften bilden drei Beispiele, welche in diesem Abschnitt genannt werden, eine gute Grundlage. Zudem spiegeln sie gleichwohl die inhaltlichen Felder der hier vorliegenden Arbeit.

Zum Einen wurden von Farzad Sabzikar und Mark M. Meerschaert in [5] zwei Klassen von stochastischen Prozessen betrachtet, welche sich durch das Hinzufügen eines sogenannten *temperings* des Integranden ergeben. Dabei ist dieser ursprüngliche Integrand bereits als *fraktionierte brownsche Bewegung* bekannt. Man konnte unter anderem zeigen, dass die beiden dort betrachteten Darstellungen, die *moving average* Darstellung und die *harmonizable* Darstellung, existieren und stochastisch stetig sind. Das zweite Beispiel, welches in dieser Einleitung genannt wird, sind die *operator scaling stable random fields*, welche von Hermine Biermé, Hans-Peter Scheffler und Mark M. Meerschaert in [13] eingeführt und studiert wurden. Eine wichtige Eigenschaft in dieser Arbeit ist das sogenannte *operator scaling*, also die Eigenschaft eines skalarwertigen Zufallsfeldes $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$, dass, falls eine reelle $d\times d$ Matrix E mit positiven Realteilen der Eigenwerte existiert, für ein $H>0$

$$\left\{X(c^E t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d} \stackrel{fdd}{=} \left\{c^H X(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d} \quad \text{für alle } c>0$$

gilt. Mit $\stackrel{fdd}{=}$ bezeichnen wir die Übereinstimmung der endlich dimensionalen Randverteilungen gemeint. Im letzten hier genannten Beispiel wurde von Kenneth J. Falconer und Lining Liu die Verallgemeinerung von α-stabilen Prozessen in [4] untersucht. Dabei entstand die sogenannte multi Stabilität, welche eine Betrachtung einer stetigen Funktion $\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ statt einer rellen Zahl α zulässt.

Die Forschungsfrage dieser Arbeit beinhaltet die Zusammenführung der drei oben beschriebenen Verallgemeinerungen in ein neues skalarwertiges Zufallsfeld, um gleichzeitig von allen Vorteilen profitieren zu können. Wir möchten also in den nächsten Seiten zwei Darstellungen entwickeln, die *moving average* sowie die *harmonizable* Darstellung, da diese neuen Zufallsfelder eine sehr reichhaltige und große Klasse von Funktionen als Integranden erlauben. Die Skalierung ist hierbei bis auf eine Einschränkung operator skalierend. Zudem möchten wir sowohl das *Tempering* wie in [5] also auch die multi Stabilität aus [4] hinzufügen. Abschließend betrachten wir zusätzlich auf der einen Seite das lokale Verhalten der Felder durch das in [11] eingeführte Tangentenfeld und zum Anderen ist es uns durch das Hinzufügen des *temperings* möglich, eine weitere Klasse von Zufallsfeldern zu definieren, welche ebenfalls sehr interessante Eigenschaften erfüllen werden. Insbesondere werden wir in der Lage sein, sogar Stationarität zu beweisen.

Auf die obengenannten Punkte gehen wir im Rahmen dieser Arbeit logisch aufeinander aufbauend näher ein. Die Arbeit unterliegt folgendem Aufbau:

Nach der Einleitung folgt im **zweiten Kapitel** zunächst eine Zusammenstellung von nötigen Grundlagen, um die mathematischen Objekte der folgenden Kapitel verständlich definieren und für den Leser nachvollziehbar darstellen zu können. Wir werden explizit auf E-homogene Funktion und verallgemeinerte Polarkoordinaten eingehen sowie die Theorie der *independently scattered random measures* wiederholen. Das Kapitel schließt mit einer Wiederholung der Tangentenfelder.
Im **dritten Kapitel** werden wir uns mit dem Hinzufügen des *temperings* auseinandersetzen und sowohl eine *moving average* als auch eine *harmonizable* Darstellung definieren. Wir werden die jeweilige Existenz zeigen und anschließend Eigenschaften wie zum Beispiel stationäre Zuwächse, stochastische Stetigkeit oder auch die Skalierungsabhängigkeitsstruktur beweisen. Außerdem erlaubt uns das Hinzufügen die Definition und Betrachtung eines weiteren Zufallsfeldes, welches wir durch Veränderung des Integranden der *moving average* Darstellung erhalten.
Das **vierte Kapitel** beschäftigt sich mit der Untersuchung der multi Stabilität, welche für die *moving average* Darstellung bereits allgemeiner als hier dargestellt in [6] zu finden ist. Wir werden diesen Fall in dem für uns speziellen Setting angeben und zudem eine multi stabile *harmonizable* Darstellung definieren.
Im anschließenden **fünften Kapitel** kombinieren wir die Verallgemeinerungen aus dem dritten und vierten Kapitel und studieren demnach multi stabile skalarwertige Zufallsfelder, welchen ebenso ein *tempering* hinzugefügt wird. Ebenso wie im dritten Kapitel ist auch das Studium eines weiteren skalarwertigen Zufallsfeldes möglich.

Diese Arbeit abschließen wird das **sechste Kapitel**, in welchem sich ein Fazit aus den vorangegangen Rechnungen und Ergebnissen schließt. Zudem ist dort ein Ausblick auf weitere mögliche Verallgemeinerungen zu finden.

Kapitel 2

Grundlagen

Da im Zuge dieser Arbeit mit exakter mathematischer Beweisführung neue Objekte eingeführt und deren Eigenschaften vorgestellt werden, ist es notwendig zunächst einige Grundlagen zu klären. Dieses sich damit auseinandersetzende Kapitel folgt und dient schließlich dem Zweck, die neuen Objekte samt ihrer Eigenschaften auf verständliche Weise erkennen und nachvollziehen zu können. Wir werden demnach zunächst die Exponentialmatrix wiederholen, um anschließend die verallgemeinerten Polarkoordinaten bezüglich einer Matrix E sowie die Klasse der E-homogenen Funktionen einzuführen, da diese eine wichtige Grundlage der auftretenden Integranden bilden. Im Anschluss daran befassen wir uns mit Grundlagen der Stochastik und der Wahrscheinlichkeitstheorie. Hierbei werden wir insbesondere die Klasse der *independently scattered random measures* definieren und analysieren. Darüberhinaus handelt es sich bei der zu Grunde liegenden Mathematik, speziell Stochastik und Analysis, oft um Fakten und Ergebnisse, welche als bekannt vorausgesetzt werden. Dabei orientiere ich mich sehr an den Werken [9] sowie [15].

2.1 Exponentialmatritzen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Wiederholung der sogenannten Exponentialmatrix. Diese erlaubt es uns, statt den bisherigen skalaren Werten auch Matritzen als Exponenten zuzulassen. Zur besseren Verständigung halten wir vor der Einführung gewisse, nun nachstehende Konventionen fest.

2.1.1 Definition

Sei A eine $d \times d$-Matrix mit reellen Einträgen a_{ij}, so schreiben wir $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$. In diesem Fall bezeichnet $\mathbb{R}^d$ das d-fache kartesische Produkt der reellen Zahlen, also $\mathbb{R}^d = \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{d-mal}$. Des Weiteren halten wir fest, dass wir unter A^0 stets die Einheitsmatrix verstehen, welche wir im Folgenden mit I_d bezeichnen werden. Ist im Zusammenhang die Dimension der Einheitsmatrix ersichtlich, werden wir auf den Index d verzichten. Da wir im Laufe der Arbeit Konvergenzen und Abschätzungen tätigen müssen, ist es unabdingbar diesbezüglich die entsprechende Schreibweise festzuhalten.

2.1.2 Definition

Sei $||\cdot||$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^d$, so definieren wir für $A \in L(\mathbb{R}^d)$ die induzierte Operatornorm des $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ durch

$$||A|| := \sup_{||x||=1} ||Ax||,$$

welche wir auch als Standardnorm des $L\left(\mathbb{R}^d\right)$ bezeichnen. Eine äquivalente Darstellung ist mit

$$||A|| := \sup_{||x||\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

gegeben. Wir halten zusätzlich fest, dass wir für eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(\mathbb{R}^d)$ von Matrizen unter der Bezeichnung $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ die Konvergenz $||A_n - A|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ verstehen. Des Weiteren versehen wir ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ sowie auf $\mathbb{R}^n$ mit dem gleichen Symbol $< \cdot, \cdot >$ und induzieren die Dimension, sollte sie nicht aus dem Sachzusammenhang ersichtlich sein.

Eine zu betrachtete Darstellung in dieser Arbeit, die sogenannte *harmonizable Darstellung*, behandelt die Theorie in einem weiten Sinne komplexwertig. Den Zusammenhang dazu möchten wir in folgender Definition festhalten.

2.1.3 Definition

Sei $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$, so kann A ebenfalls als Operator auf $L\left(\mathbb{C}^d\right)$ verstanden werden. Sei dazu $z \in \mathbb{C}^d$, so gilt für die entsprechenden reellen Vektoren x und y mit $z = x + iy$, dass $Az = A(x+iy) = Ax + iAy$. Des Weiteren bezeichnen wir die Realteile der Eigenwerte einer Matrix $B \in L\left(\mathbb{C}^d\right)$ stets mit a_j für $1 \leq j \leq d$, wobei $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_d$ gelten soll. Zu guter Letzt benötigen wir für diverse Umformungen wie zum Beispiel den Transformationssatz die Spur $\mathrm{tr}(A)$ einer Matrix A, welche wir stets mit dem Buchstaben q_A abkürzen. Dabei verzichten wir auf die Induzierung, wenn die betrachtete Matrix im Zusammenhang ersichtlich ist. Da wir sowohl im dritten als auch im fünften Kapitel ein exponentielles *tempering* hinzufügen möchten, halten wir nachstehend die Definition der Exponentialmatrix fest.

2.1.4 Definition

Sei $A \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$, so definieren wir die Exponentialfunktion dieser Matrix durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Aufgrund der Abschätzung

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{||A||^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||}$$

konvergiert die Reihe absolut, sodass die oben getroffene Definition auch stets wohldefiniert ist. Dabei sei mit $||\cdot||$ eine beliebige Matrixnorm gemeint, welche, resultierend aus der Äquivalenz der Normen über $\mathbb{R}^d$, nicht weiter spezifiziert werden muss. Durch die Wohldefiniertheit erhalten wir damit insgesamt das Matrixexponential durch

$$t^A := \exp\left(A \log(t)\right).$$

Zum besseren Verständnis führen wir in der folgenden Proposition Eigenschaften des Matrixexponentials auf, welche das Rechnen und Umformen erleichtern werden.

2.1.5 Proposition

Seien $A, B \in L\left(\mathbb{C}^d\right)$ und $s, t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $s > 0$, $t > 0$ sowie $x \in \mathbb{C}^d$. So gelten folgende Rechenregeln:

$a)$ $t^A = I_d$, falls $t = 1$ gilt.

$b)$ Kommutieren A und B, so gilt $t^A\, t^B = t^{A+B}$.

$c)$ $s^A\, t^A = (st)^A$.

$d)$ Die Inverse von t^A existiert und es gilt $t^{-A} = \left(\frac{1}{t}\right)^A = \left(t^A\right)^{-1}$.

$e)$ Die Abbildung $(0,\infty) \ni t \mapsto t^A$ ist stetig.

$f)$ Sind die Realteile aller Eigenwerte der Matrix A kleiner als β, so existiert für jedes $t_0 > 0$ ein $C > 0$, sodass $||t^A\, x|| \leq C\, t^{\beta}||x||$ für alle $t \geq t_0$.

$g)$ Die adjungierte Matrix von t^A erhalten wir durch $t^{A^*} := \overline{(t^A)^T}$.

$h)$ Es gilt $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

Anschließend möchten wir noch zwei Ungleichungen angeben, welche in vielen Beweisen der nachfolgenden Kapitel Anklang finden. Dabei formulieren wir diese Ungleichungen direkt so, dass sie in dieser Form für jedes Kapitel benutzt werden können. Dabei sei angemerkt, dass die zweite Ungleichung als höchst unscharf zu bewerten ist und lediglich dem Zweck dient, eine obere Abschätzung zu finden.

2.1.6 Lemma

Sei $\alpha : \mathbb{R}^d \to [a,b] \subset (0,2]$ eine stetige Funktion, so gilt für alle $x, x_1, ..., x_n, y \in \mathbb{R}$

a) $|x+y|^{\alpha(s)} \leq 2^{\alpha(s)} \left(|x|^{\alpha(s)} + |y|^{\alpha(s)}\right)$

b) $\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right|^{\alpha(s)} \leq 2^{(n-1)\alpha(s)} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{\alpha(s)}$

Beweis: Für $s \in \mathbb{R}^d$ beliebig aber fest, folgt die Ungleichung a) direkt aus der Jensenschen Ungleichung. Wendet man a) induktiv auf jeweils zwei Summanden aus b) an und beachtet die Positivität aller Summanden, so erhält man diese Aussage. □

2.2 Verallgemeinerte Polarkoordinaten

In diesem Kapitel befassen wir uns mit den verallgemeinerten Polarkoordinaten. Diese bilden eine essentielle Grundlage für alle später betrachteten Objekte, welche ohne ein einleitendes Studium dieser Verallgemeinerung nicht verstanden werden können. Zunächst werden wir diese präzise definieren, um im Anschluss Eigenschaften und Abschätzungen zu zeigen. Dieses Kapitel orientiert sich dabei weitestgehend an [8] sowie [2]. Für die entsprechende Definition benötigen wir vorerst jedoch folgendes Lemma.

2.2.1 Lemma

Sei $B \in L\left(\mathbb{R}^d\right)$ mit $a_1 > 0$ und sei weiter $||\cdot||$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^d$, so wird für alle $x \in \mathbb{R}^d$ durch

$$||x||_B := \int_0^1 ||t^B x|| \frac{dt}{t}$$

eine weitere Norm auf $\mathbb{R}^d$ definiert. Setzen wir nun

$$S_B := \{x \in \mathbb{R}^d : ||x||_B = 1\}$$

als die von $||.||_B$ induzierte Einheitssphäre, so erfüllt erfüllt diese Norm die Eigenschaft, dass für alle $x \neq 0$ die Abbildung

$$t \mapsto ||t^B x||_B$$

streng monoton wachsend ist und wir erhalten zusätzlich, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi_B : (0,\infty) \text{ x } S_B &\longrightarrow \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \\ (t,\vartheta) &\longmapsto t^B \vartheta \end{aligned}$$

einen Homöomorphismus darstellt.

Mit Hilfe der obigen Aussage können wir nun die verallgemeinerten Polarkoordinaten definieren.

2.2.2 Definition

Sei die Funktion Ψ, wie in 2.2.1 definiert. Dann erhalten wir die verallgemeinerten Polarkoordinaten durch die Definition

$$\begin{aligned} \tau_B(x) &:= \pi_1\left(\Psi^{-1}(x)\right) \\ l_B(x) &:= \pi_2\left(\Psi^{-1}(x)\right), \end{aligned}$$

wobei π_i dabei als die Projektion auf die $i-te$ Komponente zu verstehen ist. Wir nennen $\tau_B(x)$ die verallgemeinerte Radialkomponente und $l_B(x)$ die verallgemeinerte Winkelkoordinate. Dabei halten wir fest, dass $l_B(x)$ und $\tau_B(x)$ eindeutig festgelegt sind.

Im Folgenden wird aus Gründen der Übersicht der Index B - sollte er im Zusammenhang klar sein - bei den verallgemeinerten Polarkoordinaten weggelassen. Angrenzend an die Definition möchten wir im nächsten Lemma elementare Rechenregeln angeben und festhalten.

2.2.3 Lemma

Seien $\tau(x)$ und $l(x)$ wie in Definition 2.2.2, dann gelten folgende Aussagen:

a) $\tau(x) = \tau(-x) > 0$, für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \tau(x) = \infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \tau(x) = 0$.

d) $x \mapsto \tau(x)$ ist eine stetige Abbildung.

e) $\tau(x+y) \leq K\left(\tau(x) + \tau(y)\right)$, für ein $K \geq 1$.

f) $\tau\left(c^B x\right) = c\ \tau(x)$, für alle $c > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

g) $l(x) = -l(-x)$, für alle $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

h) $x \mapsto l(x)$ ist eine stetige Abbildung.

i) $l\left(c^B l(x)\right) = l(x)$, für alle $c > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$.

Wir erkennen also, dass es sich bei der verallgemeinerten Radialkomponente um eine symmetrische Funktion handelt. Zudem erfüllt sie nach $f)$ eine Eigenschaft, welche wir in diesem Kapitel noch einführen werden, die sogenannte E-Homogenität. Des Weiteren wird ersichtlich, dass die verallgemeinerte Winkelkoordinate nach $i)$ invariant unter verallgemeinerten Dilatationen ist. Diese Eigenschaften werden uns die Beweisführung in den Kapiteln drei, vier und fünf erheblich erleichtern.
Anschließend betrachten wir einige Abschätzungen, die unser Verständnis der verallgemeinerten Polarkoordinaten weiter festigen. Wir betrachten außerdem den Zusammenhang der verallgemeinerten Radialkomponente mit der neu definierten Norm $||.||_0$.

2.2.4 Lemma

Für hinreichend kleines $\delta > 0$ existieren Konstanten $C_1,...,C_4 \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass sowohl für $||x||_0 < 1$ oder $\tau(x) < 1$

$$C_1\, ||x||_0^{\frac{1}{a_1}+\delta} \leq \tau(x) \leq C_2\, ||x||_0^{\frac{1}{a_p}-\delta}$$

als auch für $||x||_0 \geq 1$ oder $\tau(x) \geq 1$

$$C_3\, ||x||_0^{\frac{1}{a_p}-\delta} \leq \tau(x) \leq C_4\, ||x||_0^{\frac{1}{a_1}+\delta}$$

gelten. Wir sehen also, dass das Verhalten der verallgemeinerten Radialkomponente stark von den Realteilen der Eigenwerte der zugehörigen Matrix abhängt. Liegt ein enges Spektrum vor, so lässt sich das asymptotische Verhalten gut mit Hilfe der Norm $||.||_0$ abschätzen. Liegt jedoch ein großes Spektrum vor, liegen also a_1 und a_p weit auseinander, so wird die Güte der obigen Abschätzung geringer.
Anschließend möchten wir eine weitere Aussage betrachten, die die zuvor definierte verallgemeinerte Radialkomponente mit der Exponentialfunktion verbindet.

2.2.5 Lemma

Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetige stets positive Funktion mit $\lim\limits_{y\to\infty} \varphi(y) = \infty$. Weiter sei x als hinreichend groß vorausgesetzt, sodass $\varphi(x) > 1$ gilt. So folgt, dass für alle $\gamma > 0$ eine Konstante C existiert, sodass

$$e^{-\varphi(x)} \leq C\varphi(x)^{-\gamma}$$

gilt.

Beweis: Zunächst betrachten wir die Rechnung

$$e^{\varphi(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\varphi(x))^k}{k!} \geq \frac{\varphi(x)^{k_0}}{k_0!}.$$

Wählen wir nun als Konstante $k_0 = \lceil \gamma \rceil$ ergibt sich

$$e^{-\varphi(x)} = \left(e^{\varphi(x)}\right)^{-1} \leq \left(\frac{\varphi(x)^{k_0}}{k_0!}\right)^{-1} = C\varphi(x)^{-k_0} \leq C\varphi(x)^{-\gamma}.$$

Dabei meinen wir für $y \in \mathbb{R}$ mit $\lceil y \rceil$ gerade die ganze Zahl, sodass $\lceil y \rceil - 1 < \; y \; \leq \lceil y \rceil$ gilt. □

Abschließend geben wir eine weitere Aussage an, welche im Laufe der Arbeit an mehreren Stellen benutzt wird, wenn Substitutionen des Integranden vorgenommen werden und sich auf die zu integrierende Menge auswirkt.

2.2.6 Lemma

Sei τ die verallgemeinerte Radialkomponente wie in Definition 2.2.2. Dann gilt für hinreichend großes $R > 0$

$$\begin{aligned} &a)\ \{y : \tau(x-y) \leq R\} \subset \{y : \tau(y) \leq K(R+\tau(x))\} \\ &b)\ \{y : \tau(x+y) > R\} \subset \{y : \tau(y) > \widetilde{R}\}, \text{ für ein } \widetilde{R} = \tilde{R}(x) > 0. \end{aligned}$$

Beweis: $a)$: Sei $y \in \{y : \tau(x-y) \leq R\}$ gegeben, so folgt

$$\tau(y) = \tau(-y) = \tau(x-y-x) \leq K(\tau(x-y)+\tau(x)) \leq K(R+\tau(x))$$

Also $y \in \{y : \tau(y) \leq K(R+\tau(x))\}$.
$b)$: Sei $y \in \{y : \tau(x+y) > R\}$. So folgt

$$\begin{aligned} &\tau(x+y) \leq K(\tau(x)+\tau(y)) \\ &\Leftrightarrow \tau(y) \geq \frac{1}{K}\tau(x+y) - \tau(x) > \frac{R}{K} - \tau(x) =: \widetilde{R}. \end{aligned}$$

Sollte $\widetilde{R}$ in diesem Fall negativ sein, so ist lediglich der Wert von R zu vergrößern. □

2.3 E-homogene Funktionen

In diesem Kapitel führen wir die für diese Arbeit äußerst relevante Klasse der E-homogenen Funktionen ein. Wir haben bereits ein Beispiel einer solchen Funktion in der vorherigen Sektion definiert und kennengelernt, die verallgemeinerte Radialkomponente $\tau(x)$. Zunächst geben wir eine allgemeine Definition an.

2.3.1 Definition

Sei $E \in L(\mathbb{R}^d)$ eine Matrix, deren Eigenwerte durchweg positive Realteile besitzen. Eine Funktion

$$\begin{aligned} \varphi :& \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

heißt E-homogen, falls für $c > 0$ zusätzlich

$$\varphi\left(c^E x\right) = c\varphi(x)$$

gilt.
Bei genauerem Studium dieser Definition stellen wir fest, dass eine E-homogene Funktion bereits vollständig durch das Bild der Einheitssphäre S^1 erklärt wird, da

$$\varphi(x) = \varphi\left(\tau(x)^E l(x)\right) = \tau(x)\varphi\left(l(x)\right)$$

gilt. Aus Lemma 2.2.3 wissen wir bereits, dass $l(x)$ stetig ist. Da S_1 zusätzlich kompakt ist, folgt, dass für eine stetige E-homogene Funktion φ, die lediglich positive Werte annehmen kann,

$$M_\varphi := \max_{\vartheta \in S_0} \varphi\left(\vartheta\right) > 0, \text{ und } m_\varphi := \min_{\vartheta \in S_0} \varphi\left(\vartheta\right) > 0, \tag{2.1}$$

gilt. Zudem erhalten wir aus den Ergebnissen aus dem Lemma 2.2.3 c) und g), dass

$$\varphi(0) = 0$$

gelten muss. Folglich erhalten wir damit das nächste Lemma.

2.3.2 Lemma

Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ eine E-homogene Funktion. Dann gilt

$$m_\varphi \tau(x) \leq \varphi(x) \leq M_\varphi \tau(x).$$

Wir sind also in der Lage, jede E-homogenen Funktion durch ihre zugehörige verallgemeinerte Polarkoordinate abzuschätzen. Dies wird im Laufe der Arbeit aufgrund eines des aufgeführten Lemmas 2.6.7 die Existenz der mathematischen Objekte erleichtern.
Abschließend definieren wir eine weitere Eigenschaft, welche E-homogene Funktionen zusätzlich erfüllen können. Im Zuge der Arbeit wird diese Eigenschaft an mehreren Stellen Anklang finden und für die Beweisführung hilfreich sein.

2.3.3 Definition

Sei $\beta > 0$ beliebig und $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion. Sie heißt $(\beta, E) - admissible$, falls zum einen $\varphi(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt und zum anderen für jedes Paar $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < A < B$ ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $A \leq ||y|| \leq B$

$$\tau(x) \leq 1 \Rightarrow |\varphi(x+y) - \varphi(y)| \leq C\, \tau(x)^\beta$$

gilt. Die Eigenschaft (β, E)-admissible erlaubt es uns, das Verhalten des Zuwachses einer E-homogenen Funktion zu analysieren.

2.4 Zufallsfelder

2.4.1 Definition

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und T ein topologischer Raum. Eine Familie $X_T := (X_t)_{t \in T}$, wobei X_t eine Zufallsvariable auf $\mathbb{R}^d$ für jedes $t \in T$ ist, heißt $\mathbb{R}^d$-wertiges Zufallsfeld. Zusätzlich definieren wir in diesem Zuge das Attribut *voll*. Ein Zufallsfeld X_T heißt voll, falls die Verteilung nicht bereits durch eine Hyperebene $H \subset T$ vollständig beschrieben ist.

Im Anschluss geben wir eine wichtige Eigenschaft für Zufallsfelder an, welche im Laufe der Arbeit für viele der noch einzuführenden Felder untersucht wird.

2.4.2 Definition

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$ ein Zufallsfeld. Wir sagen, dass X_t *operator scaling* ist, wenn für eine Matrix $E \in L(\mathbb{R}^d)$ mit positiven Realteilen aller Eigenwerte und einer reellen Zahl $H > 0$

$$\{X(c^E x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \{c^H X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

gilt. Dies bedeutet also, dass eine Skalierung im Argument direkt zu einer des Bildraumes führt.

Im Anschluss befassen wir uns mit der Konvergenz von Zufallsfeldern, die ebenfalls eine wichtige Funktion hinsichtlich unserer Untersuchungen einnehmen.

2.4.3 Definition

Wir sprechen bei der Konvergenz von Zufallsfeldern - nach dem Konsistenzsatz von Kolmogorov - von Konvergenz der endlich dimensionalen Randverteilungen. Wir schreiben für $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ kurz

$$X_u \stackrel{fdd}{\Longrightarrow} X_v,$$

falls für $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X_u(t_j)}\right] \underset{u\to v}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X_v(t_j)}\right].$$

gilt. In der nächsten Definition beschreiben wir eine weitere Eigenschaft für stochastische Zufallsfelder, die stochastische Stetigkeit. Diese wird ebenfalls für viele der betrachteten Felder in den Kapiteln drei, vier und fünf bewiesen.

2.4.4 Definition

Ein stochastisches Zufallsfeld heißt stochastisch stetig, wenn für reelle Vektoren $t, t_1, t_2, ... \in \mathbb{R}^d$ stets

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} X(t_n) = X(t)$$

folgt. Dabei ist mit plim die stochastische Konvergenz gemeint.

2.5 Das Tangentenfeld für Zufallsfelder

In diesem Abschnitt führen wir das mathematische Objekt des Tangentenfelds für Zufallsfelder ein und zitieren ausgewählte Eigenschaften. Der gesamte Abschnitt orientiert sich dabei stark an den beiden Veröffentlichungen von Kenneth J. Falconer [4] und [3], die diese Betrachtung der Tangentenfelder eingeführt haben. Das Tangentenfeld wird als Grenzwert in Verteilung einer skalierten Erweiterung eines Zufallfeldes aufgefasst. Zunächst definieren wir einen Operator, welcher uns nachträglich die genaue mathematische Definition des Tangentenfeldes für Zufallsfelder erleichtert.

2.5.1 Definition

Sei $D\left(\mathbb{R}^d\right)$ der Raum der *cádlág*-Funktionen, also genau der Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die rechtsseitig stetig sind und deren linksseitigen Grenzwerte in allen $t \in \mathbb{R}^d$ existieren. Sei weiter $\mathscr{F}$ der Raum der stochastischen Prozesse auf $D\left(\mathbb{R}^d\right)$. Wir schreiben $Y \in \mathscr{F}_0$, falls die stochastischen Prozesse zusätzlich $Y(0) = 0$ fast sicher erfüllen. Dann ist für $z \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ der Skalierungsoperator $T_{z,r} : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}_0$ durch

$$(T_{z,r}X)(t) := X(z+rt) - X(z)$$

definiert.

Mit Hilfe dieses Operators können wir nun die folgende Definition wie folgt verfassen.

2.5.2 Definition

Sei X ein beliebiges Zufallsfeld, dann ist das Tangentenfeld für Zufallsfelder durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Tan}(X,z) := \{Y \in \mathscr{F}_0 :\ & \text{Es existieren zwei Folgen } (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } r_n \searrow 0 \\ & \text{und } c_n \searrow 0, \text{ sodass } c_n^{-1} T_{z,r_n} X \xrightarrow{D} Y\} \end{aligned}$$

definiert. Dementsprechend folgt, dass das Tangentenfeld als Grenzwert in Verteilung erfasst werden kann. Um nun das Verständnis über Tangentenfelder für Zufallsfelder zu verbessern, geben wir nachfolgend ein Lemma über Eigenschaften des Skalierungsoperators sowie ein Theorem über das Tangentenfeld an.

2.5.3 Lemma

Seien $X \in \mathscr{F}$, $z, w \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sowie Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $r_n \longrightarrow r$, $z_n \longrightarrow z$ und $X_n \xrightarrow{D} X$. Dann gelten

$$\begin{aligned} &a)\ T_{z,r} \circ T_{w,s} = T_{w+sz,rs} \\ &b)\ T_{\frac{z-w}{r},1} \circ T_{w,r} = T_{z,r} \\ &c)\ T_{z_n,r_n} X_n \xrightarrow{D} T_{z,r} X. \end{aligned}$$

Im nachfolgenden Theorem erhalten wir eine Aussage über die Struktur der Tangentenfelder und eine Folgerung für die Zufallsfelder, welche sich im Raum der Tangentenfelder eines anderen Zufallsfeldes befinden.

2.5.4 Theorem

Sei X ein Zufallsfeld über $D(\mathbb{R}^d)$, $z \in \mathbb{R}^d$ sowie $c \geq 0, r > 0$, so gilt für $Y \in \operatorname{Tan}(X,z)$

$$\begin{aligned} cY(rt) &\in \operatorname{Tan}(X,z) \\ \operatorname{Tan}(Y,0) &\subset \operatorname{Tan}(X,z) \\ T_{w,1}Y &\in \operatorname{Tan}(X,z) \end{aligned}$$

Abschließend möchten wir nun der Vollständigkeit halber weitere Eigenschaften der Tangentenfelder angeben. Zum einen lässt sich zeigen, dass der Raum $\operatorname{Tan}(X,z)$ gegenüber Shifts invariant bleibt und dass wir mit Hilfe von weiteren Eigenschaften des Erzeugers ebenso weitere Ergebnisse wie Selbstähnlichkeit oder stationäre Zuwächse zeigen können.

2.5.5 Lemma

Sei X ein Zufallsfeld auf dem $\mathbb{R}^d$. Weiter bezeichnen wir mit λ^d das d-dimensionale Lebesguemaß. Dann gilt für λ^d-fast alle $z \in \mathbb{R}^d$, dass $\operatorname{Tan}(X,z)$ bezüglich Shifts invariant ist. Dies bedeutet, dass falls $Y \in \operatorname{Tan}(X,z)$ und $w \in \mathbb{R}^d$ gelten, auch $T_{w,1}Y \in \operatorname{Tan}(X,Z)$ gilt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts halten wir einen weiteren Satz fest, welcher uns Aufschluss über stochastische Eigenschaften des Tangentenfelds gibt.

2.5.6 Satz

Sei $X \in \mathscr{F}$. Für fast alle $z \in \mathbb{R}^d$, in denen X ein Tangentenfeld Y_z mit $\mathbb{E}\left[Y_z(t)^2\right] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ besitzt, sind die Zuwächse des Feldes Y_z stationär. Des Weiteren ist $\{t : Y_z(t) \overset{f.s.}{=} 0\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^d$. Zusätzlich gilt für das Tangentenfeld Y_z entweder, dass eine d-dimensionale Gaußsche Zufallsvariable Z_z existiert, sodass

$$Y_z(t) = t \cdot Z_z$$

gilt oder, dass $\mathbb{E}\left[Y_z(t)\right] = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ und Y_z selbstähnlich ist. Zudem existiert in diesem Fall ein $0 < \alpha < 1$, sodass für alle $r \geq 0$

$$Y(rt) \overset{fdd}{=} r^\alpha Y(t)$$

folgt. Zudem gilt, dass falls $X \in \mathscr{F}$ Gaußsch ist, auch jedes $Y \in \operatorname{Tan}(X,z)$ ebenfalls Gaußsch ist.

2.6 Independently scattered random measures

Im anschließenden Kapitel befassen wir uns zunächst mit weiteren Konventionen zu stochastischen Objekten, um folgend eine spezielle Klasse von Maßen verständlich definieren zu können. Hinsichtlich der Schreibweise und den dazu nötigen Sätzen orientieren wir uns hierbei an [14]. Wir beginnen zunächst mit der Festlegung der zugrunde liegenden mathematischen Objekte.

2.6.1 Definition

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Den Raum aller reellen Zufallsvariablen auf Ω möchten wir mit $L^0(\Omega)$ bezeichnen. Zudem sei $(E, \mathscr{E}, m)$ ein σ-endlicher Maßraum. Zuletzt definieren wir

$$\mathscr{E}_0 := \{A \in \mathscr{E} : m(A) < \infty\}$$

als die Teilmenge von $\mathscr{E}$, sodass m dort stets endlich ist. Ausgehend von obiger Definition führen wir nun die charakterisierenden Eigenschaften der *independently scattered random measures* ein.

2.6.2 Definition

Sei $\{M(B) : B \in \mathscr{E}_0\}$ eine Familie von $\mathbb{R}^d$-wertigen Zufallsvariablen. Diese bezeichnen wir als *independently scattered random measure*, welches wir im Folgenden mit ISRM abkürzen, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$i)$ Für jede Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von disjunkten Mengen B_i in $\mathscr{E}_0$ mit
$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathscr{E}_0$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} M(B_n)$ fast sicher und entspricht fast sicher dem Wert von $M\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$.

$ii)$ Für jede endliche Folge $B_1, ..., B_n$ von disjunkten Mengen $B_i \in \mathscr{E}_0$ sind $M(B_1), ..., M(B_n)$ unabhängig.

Dabei halten wir zusätzlich fest, dass für eine aufsteigende Folge $B_1, B_2, ...$ in $\mathscr{E}_0$ mit $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathscr{E}_0$ sofort $M(B_n) \to M(B)$ folgt und $M(\emptyset) = 0$ gilt.

Hierbei bezeichnet 0 den Ursprung des $\mathbb{R}^d$. Die Existenz des ISRMs folgt direkt aus Definition 3.1.1 aus [14].
Anschließend möchten wir das Lévy-Khinchin-Tripel definieren, welches eine Charakterisierung aller unendlich teilbaren Maße angibt und es uns im Zuge der Arbeit erlaubt auftretende Maße konkret darstellen zu können.

2.6.3 Theorem

Sei μ ein unendlich teilbares Maß, so besitzt die zugehörige log-charakteristische Funktion von μ die Darstellung

$$\psi(t) = iat - \frac{1}{2}Q(t) + \int_{x\neq 0} \left(e^{i<t,x>} - 1 - \frac{i<t,x>}{1+||x||^2} \right) \phi(dx),$$

wobei $a \in \mathbb{R}^d$, $Q(t)$ eine nichtnegative quadratische Form und ϕ ein σ-endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ ist, welches zusätzlich

$$\int_{x\neq 0} \min(1, ||x^2||)\phi(dx) < \infty$$

erfüllt. Das zugehörige Triple $[a,Q,\phi]$ ist eindeutig und charakterisiert μ. Dabei sprechen wir bei der Variable a vom Shift, bei Q vom Gaußanteil. Das Maß ϕ lässt sich als Grenzwert von Poissonprozessen interpretieren. Wir schreiben kurz $\mu \sim [a,Q,\phi]$.

Beweis. Dies ist die Aussage von Theorem 3.1.11 aus [8]. □

Da wir uns im Zuge dieser Arbeit vorallem mit stabilen und multistabilen Verteilungen und Maßen auseinandersetzen, führen wir die nötigen Begriffe an dieser Stelle ein.

2.6.4 Definition

Eine nicht entartete Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt stabil, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ Parameter $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$a_n^{-1}(X_1 + ... + X_n - b_n) \stackrel{d}{=} X$$

für unabhängige Zufallsvariablen $X_1,...,X_n$ mit $X_i \stackrel{d}{=} X$ gilt. Ist in diesem Fall $b_n = 0$, so sprechen wir von strikter Stabilität. Äquivalent zu dieser Aussage ist, dass für die Zufallsvariable X Parameter $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$ und $\mu \in \mathbb{R}$ existieren, sodass die charakteristische Funktion durch

$$\mathbb{E}\left[e^{i\vartheta X}\right] = \begin{cases} \exp\left(-\sigma^\alpha|\vartheta|^\alpha(1-i\beta(\operatorname{sign}\vartheta)\tan(\frac{\pi\alpha}{2})) + i\mu\vartheta\right), & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-\sigma|\vartheta|(1+i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sign}\vartheta)\log(|\vartheta)|) + i\mu\vartheta\right), & \alpha = 1 \end{cases}$$

gegeben ist. Im Falle von symmetrisch α stabilen Verteilungen, kurz $X \sim S\alpha S$ oder $X \sim S_\alpha(\sigma)$, gilt zusätzlich $\beta = \mu = 0$.

2.6.5 Definition

Seien $(E,\mathscr{E},m)$ und $\mathscr{E}_0 := \{A \in \mathscr{E} : m(A) < \infty\}$ wie in 2.6.2. Weiter fordern wir $\alpha \in (0,2]$. Eine Familie von Zufallsvariablen M, wie in Definition 2.6.2 eingeführt und auf $\mathscr{E}_0$ eingeschränkt, nennen wir *independently scattered SαS random measure* auf $(E,\mathscr{E})$, falls zusätzlich

$$M(A) \sim S_\alpha\left(m(A)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

gilt. Dabei bezeichnen wir weiter m als das zugehörige Kontrollmaß des IS-SαS-RMs.

Als nächstes geben wir ein Lemma an, welches uns einen Nachweis zur Existenz der Integrale über ISRMs ermöglicht. Dazu halten wir zunächst fest, dass wir den Wert der Integrale bezüglich eines ISRMs M - beziehungsweise eines IS-SαS-RMs M - jeweils mit $I(f)$ bezeichnen, wenn das zu betrachtende Maß im Zusammenhang bereits klar wird. Den Raum der bezüglich M integrierbaren Funktionen charakterisieren wir durch

$$L^\alpha(E) := L^\alpha(E,\mathscr{E},M) := \left\{ f : f \text{ ist messbar und } \int_E f(x)\, M(dx) \text{ existiert} \right\}.$$

Wie bereits in Kapitel 3.2 in [14] eingeführt, handelt es sich bei diesem *stabilen* Integral für jeden Integrand f um eine stabile Zufallsvariable. Des Weiteren möchten wir angeben, wie die Integration bezüglich eines IS-SαS-RM zu interpretieren ist. Sei dafür $f : E \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion, das heißt, es existieren $c_j \in E$, sodass $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{A_j}$ für eine disjunkte Familie $(A_j) \subset \mathscr{E}_0$ gilt. Dann verstehen wir die Integration bezüglich dieser einfachen Funktion als

$$I(f) = \int_E f(x)\, M(dx) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, M(A_j). \tag{2.2}$$

Im Folgenden sei nun $f : E \to \mathbb{R}$ messbar und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ die zugehörige Folge einfacher Funktionen, welche zudem die punktweise Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ sowie die Existenz einer gleichmäßigen Majorante $\theta \in L^\alpha(E)$ mit $|f_n(x)| \leq \theta(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E$ erfüllt. Anschließend definieren wir die Integration über f durch

$$I(f) = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} I(f_n).$$

Wie bereits in Kapitel 3.4 aus [14] erwähnt, ist dieser Wert unabhängig von der gewählten Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nachfolgend halten wir die wichtigsten Aussagen in einem Lemma fest.

2.6.6 Lemma

Sei $0 < \alpha \leq 2$ sowie M ein IS-SαS-RM mit Kontrollmaß m. So gelten die folgenden Aussagen:

a) Für alle $f,g \in L^\alpha(m)$ sowie $a,b \in \mathbb{R}$ gilt

$$I(af+bg) = a\,I(f) + b\,I(g) \text{ fast sicher.}$$

b) Sei $f \in L^\alpha(m)$ sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\alpha(m)$ gegeben. Es existiert $X = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,M(dx)$ genau dann, wenn

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^\alpha\, m(dx) < \infty.$$

Sei weiter $X_j := \int_{\mathbb{R}^d} f_j(x)\,M(dx)$, so gilt

$$\operatorname*{plim}_{j\to\infty} X_j = X$$

genau dann, wenn

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_j(x) - f(x)|^\alpha\, m(dx) = 0$$

c) Die zugehörige charakteristische Funktion erhalten wir für $\vartheta \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{E}\left[e^{i\vartheta I(f)}\right] = \exp\left(-|\vartheta|^\alpha \int_E |f(x)|^\alpha\, m(dx)\right).$$

Beweis: Die Aussage a) entspricht Proposition 3.2.3, während Aussage b) Proposition 3.5.1 entnommen wird. Aussage c) erhalten wir aus der Gleichung (3.2.1) in [14]. □

Wir können im Folgenden also den Raum der bezüglich M integrierbaren Funktionen durch

$$L^\alpha(E) := \left\{ f : E \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ messbar}\,,\ \int_E |f(x)|^\alpha\, m(dx) < \infty \right\}$$

beschreiben. Im Anschluss geben wir ein Lemma an, welches die Existenz eines Spezialfalles abdeckt. Dieser Fall wird an dieser Stelle explizit erwähnt, da die Existenz in vielen Beweisen der folgenden Kapitel auf dieser Aussage beruht.

2.6.7 Lemma

Sei τ_E die verallgemeinerte Radialkomponente, wie sie in Definition 2.2.2 eingeführt wurde. Dann erhalten wir für ein $R > 0$, dass aus $\beta < -q = -\operatorname{tr}(E)$

$$\int_{\tau(x)>R} \tau_E(x)^\beta dx < \infty$$

sowie aus $\beta > -q$

$$\int_{\tau(x)\leq R} \tau_E(x)^\beta dx < \infty$$

folgt.

Beweis. Diese Aussage folgt direkt aus Korollar 2.5 in [13]. □

Als Nächstes möchten wir eine weitere Klasse von ISRMs einführen, welche wir für die *harmonizable* Darstellungen der mathematischen Objekte in Kapitel 3 benötigen. Dazu halten wir erneut kurz die nötigen Konventionen fest. Diese stammen aus Kapitel 6.1 in [14].

Seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sowie $L^0(\Omega)$ wie in Definition 2.6.1 gegeben. Zudem betrachten wir nun die Menge $L^0_c(\Omega)$ aller komplexen Zufallsvariablen. Dabei halten wir fest, dass für jedes $Z \in L^0_c(\Omega)$ Zufallsvariablen $X, Y \in L^0(\Omega)$ existieren, sodass $Z = X + i\,Y$ gilt.
Sei nun $(E, \mathscr{E})$ ein Maßraum sowie k ein symmetrisches Maß auf dem Produktraum $(E \times S^1, E \times \mathscr{B}(S^1))$. Wir betrachten im Folgenden den Raum $\mathscr{E}_0^c := \{A \in \mathscr{E} : k(A \times S^1) < \infty\}$. Ein komplex-wertiges IS-SαS-RM definieren wir nun als σ additive komplex-wertige Funktion $\widetilde{M} : \mathscr{E}_0^c \to L^0_c(\Omega)$, sodass $M^{(1)}(A) \equiv \mathrm{Re}\widetilde{M}(A)$ und $M^{(2)}(A) \equiv \mathrm{Im}\widetilde{M}(A)$ jeweils mit gleichem Parameter α IS-SαS-RMs mit Spektralmaß $k(A \times \cdot)$ sind. Nun folgt mit dem Konsistenzsatz von Kolomogorv, dass solch ein komplex-wertiges IS-SαS-RM existiert und die endlich dimensionalen Randverteilungen wie in (6.1.2) in [14] durch

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \left(\vartheta_j^{(1)} M^{(1)}(A_j) + \vartheta_j^{(2)} M^{(2)}(A_j)\right)}\right] = \exp\left(-\int_E \int_{S^1} \left|\sum_{j=1}^n \left(s_1 \vartheta_j^{(1)} + s_2 \vartheta_j^{(2)}\right) \mathbb{1}_{A_j}(x)\right|^\alpha k(dx \times ds)\right)$$

gegeben sind, wobei $A_1, ..., A_n \in \mathscr{E}_0^c$ sowie $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}^2$ mit $\vartheta_j = (\vartheta_j^{(1)}, \vartheta_j^{(2)})$. Unter der obigen Konstruktion erhalten wir die Existenz eines komplexwertigen isotropischen SαS Zufallsmaßes. Damit sind wir nun ebenso in der Lage, das komplexwertige Integral bezüglich dieses IS-SαS-RMs durch

$$I(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \widetilde{M}(dx) \tag{2.3}$$

zu definieren.

Um diesen Wert genauer zu verstehen, geben wir anschließend die Interpretation an. Für eine einfache Funktion $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$ mit $c_j \in \mathbb{C}$ und disjunkten Mengen $A_1, ..., A_n \in \mathscr{E}_0^c$ definieren wir analog zu (2.2)

$$I(f) = \int_E f(x)\, M(dx) = \sum_{j=1}^n c_j \widetilde{M}(A_j).$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (6.2.4) in [14]

$$\mathbb{E}\left[e^{i(\vartheta_1 I^{(1)}(f)+\vartheta_2 I^{(2)}(f))}\right] =$$
$$\exp\left(-\int_E\int_{S1}\left|\vartheta_1(s_1 f^{(1)}(x)-s_2 f^{(2)})+\vartheta_2(s_1 f^{(2)}(x)+s_2 f^{(1)}(x))\right|^\alpha k(dx\times ds)\right).$$

Wie im Kapitel 6.2 von [14] durchgeführt, lässt sich nun, ausgehend von der Definition des Integrals für einfache Funktion mit Hilfe einer algebraischen Induktion und des Konvergenzsatzes von Beppo-Lévy, das Integral auf beliebige messbare Funktionen $f = f^{(1)} + if^{(2)} : E \to \mathbb{C}$ definieren. Wir definieren dann für eine entsprechende Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit punktweiser Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in E$ sowie mit einer gleichmäßigen Majorante $\theta \in L^\alpha(k)$, sodass $|f - n(x)| \leq \theta(x)$ gilt, den Wert des Integrals durch

$$I(f) = \underset{nj\to\infty}{\text{plim}} I(f_n)$$

und schreiben $I(f) = \int_E f(x)M(dx)$.

Als nächstes halten wir den Begriff der Isotropie fest. Wir sprechen von einem isotropischen Zufallsmaß M, falls für jedes $\phi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\phi}M \stackrel{d}{=} M \tag{2.4}$$

gilt. In diesem Fall entspricht $k = m\gamma$, wobei γ ein gleichmäßiges Zufallsmaß auf S^1 ist und m ein Maß auf $(E,\mathscr{E})$ darstellt. Wir nennen m dabei, wie im reellen Fall, das Kontrollmaß des isotropen IS-SαS-RMs M. Nachfolgend halten wir die Eigenschaften von $I(f)$ fest.

2.6.8 Lemma

Sei $0 < \alpha \leq 2$ sowie $\widetilde{M}$ ein komplex-wertiges isotropisches IS-SαS-RM mit Kontrollmaß m. So gelten die folgenden Aussagen:

a) Für alle $f, g \in L^\alpha(m)$ sowie $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$I(af + bg) = a\,I(f) + b\,I(g) \text{ fast sicher.}$$

b) Sei $f \in L^\alpha(m)$ sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\alpha(m)$ gegeben. Es existiert $X = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\widetilde{M}(dx)$ genau dann, wenn

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^\alpha\, m(dx) < \infty.$$

Sei weiter $X_j := \int_{\mathbb{R}^d} f_j(x)\, \widetilde{M}(dx)$, so gilt

$$\operatorname*{plim}_{j\to\infty} X_j = X$$

genau dann, wenn

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_j(x) - f(x)|^\alpha\, m(dx) = 0$$

c) Die zugehörige charakteristische Funktion erhalten wir für $\vartheta \in \mathbb{C}$ durch

$$\mathbb{E}\left[e^{i\vartheta I(f)}\right] = \exp\left(-|\vartheta|^\alpha c_0 \int_E |f(x)|^\alpha\, m(dx)\right),$$

wobei

$$c_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |\cos(\phi)|^\alpha d\phi$$

gilt.

Beweis: Die Aussage a) entspricht Proposition 6.2.1, b) der Aussage 6.2.3 und c) der Aussage von Theorem 6.3.1 in [14]. □

Des Weiteren führen wir nun ein Lemma an, welches bei Beweisen der *harmonizable* Darstellung in den kommenden Kapiteln wichtig sein wird.

2.6.9 Lemma

Es existiert ein eindeutiges endliches Radonmaß σ auf der Menge S_0, sodass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ die Darstellung

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^1} f(r^E \vartheta)\sigma(d\vartheta) r^{q-1} dr$$

existiert.

Beweis: Diese Aussage erhalten wir aus Proposition 3.1 in [1]. □

Zusammengefassend haben wir nun, ausgehend von Exponentialmatrizen, verallgemeinerten Polarkoordinaten und E-homogenen Funktionen, die nötigen Grundlagen geschaffen, um in den folgenden Kapiteln genau jene Integranden zu definieren, welche durch Integration bezüglich der ISRMs entstehen. Auch sind die Begriffe der Tangentenfelder hinreichend geklärt, sodass wir mit der Analyse im nachfolgenden Kapitel beginnen können.

Kapitel 3

Tempered Operator Scaling Stable Random Fields

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit sogenannten *tempered operator scaling stable random fields*. Dabei unterscheiden wir zwischen der *moving average* Darstellung sowie der *harmonizable* Darstellung. Wir werden die jeweiligen Zufallsfelder in den Darstellungen definieren und ihre Existenz beweisen. Im Anschluss werden wir deren Eigenschaften studieren und feststellen, dass sie stochastisch stetig sind und zudem stationäre Zuwächse besitzen. Daraufhin untersuchen wir sie auf ihre Lokalisierbarkeit und wir werden in der Lage sein Elemente aus dem Tangentenraum explizit anzugeben. Im Laufe dieses Kapitels bezeichnet E dabei stets eine d x d Matrix mit positiven Realteilen der Eigenwerte. Wir beginnen mit der *moving average* Darstellung.

3.1 *Moving Average* Darstellung

In den Grundlagen haben wir bereits die nötige Basis geschaffen, um diese Klasse von Zufallsfeldern zu definieren.

3.1.1 Definition

Sei $H > 0$, $\lambda > 0$ und $\alpha \in (0,2]$. Des Weiteren sei $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ eine E-homogene stetige Funktion. Weiter sei durch Z_α ein IS-SαS-RM mit Lebesgueschem Kontrollmaß gegeben, wie es im Grundlagenkapitel 2.6 eingeführt wurde. Dann nennen wir das durch

$$X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left[e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)} \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right] Z_\alpha(dy) \tag{3.1}$$

definierte Zufallsfeld *moving average Darstellung* eines *tempered operator scaling stable random fields*. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir dieses Objekt mit *moving average* Darstellung eines TOSSRFs abkürzen. Dabei wird, wie wir später sehen werden, die Skalierung des Feldes durch den Parameter H beeinflusst. Der Parameter λ steuert das exponentielle *tempering*, also den Abfall im Unendlichen.

Nach obiger Definition folgt nun der Beweis zur Existenz der *moving average* Darstellung eines TOSSRFs. Dabei erinnern wir an die Ausführungen von Lemma 2.6.6 und halten die Aussage in folgendem Satz fest.

3.1.2 Satz

Seien die Voraussetzungen wie in Definition 3.1.1 gegeben. Dann existiert die *moving average* Darstellung eines TOSSRFs für alle $t \in \mathbb{R}^d$.

Beweis: Zunächst weisen wir nochmals auf die Aussage von Lemma 2.6.6 hin. Dies bedeutet, dass unser Zufallsfeld genau dann existiert, falls

$$\Gamma_{\alpha,\varphi}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^{\alpha} dy < \infty$$

gilt. Um die Endlichkeit dieses Integrals zu zeigen, separieren wir den $\mathbb{R}^d$ in Abhängigkeit von $R \in \mathbb{R}_+$ in die beiden disjunkten Mengen $\{\tau(y) \leq R\}$ und $\{\tau(y) > R\}$. Im Zuge des Beweises werden wir also $\Gamma_{\alpha,\varphi}(t)$ in die beiden Teilintegrale $\Gamma^{(1)}_{\alpha,\varphi}(t)$ sowie $\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t)$ aufteilen, wobei $\Gamma^{(1)}_{\alpha,\varphi}(t)$ das Integral mit dem Integrationsbereich $\left\{y \in \mathbb{R}^d : \tau(y) \leq R\right\}$ und dementsprechend $\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t)$ das Integral mit dem Bereich $\left\{y \in \mathbb{R}^d : \tau(y) > R\right\}$ bezeichnet. Befassen wir uns nachfolgend zunächst mit der Endlichkeit von $\Gamma^{(1)}_{\alpha,\varphi}(t)$. Dazu wenden wir die Ungleichung aus Lemma 2.1.6 für die konstante Funktion $\alpha(s) = \alpha$, der verbesserten Übersicht nochmals kurz wiederholt

$$|a-b|^{\alpha} \leq 2^{\alpha}\left(|a|^{\alpha} + |b|^{\alpha}\right), \tag{3.2}$$

auf den Integranden an und erhalten

$$\begin{aligned} &\left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^{\alpha} \\ \leq &2^{\alpha}\left(e^{-\alpha\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H\alpha-q} + e^{-\alpha\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H\alpha-q}\right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Integration der Ausdruck

$$\int_{\tau(y)\leq R} 2^{\alpha}\left(e^{-\alpha\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H\alpha-q} + e^{-\alpha\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H\alpha-q}\right) dy.$$

Im nächsten Schritt betrachten wir die Integrale nun getrennt über beide Summanden, schätzen die vorkommende Exponentialfunktion jeweils mit 1 nach oben ab und führen daraufhin die Substitution $t - y = -z$ durch. Wir betrachten weiterhin das erste Teilintegral $\Gamma^{(1)}_{\alpha,\varphi}(t)$, dessen Integrationsbereich wir zunächst vereinfachen möchten. Dazu benutzen wir die Aussage von Lemma 2.2.6 a), dass

$$\{z : \tau(t-z) \leq R\} \subset \{z : \tau(z) \leq K(R + \tau(t))\}$$

gilt und damit folgt

$$\Gamma_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t) \leq 2^{\alpha} \left(\int_{\tau(y)\leq R} \varphi(t-y)^{H\alpha-q} dy + \int_{\tau(y)\leq R} \varphi(-y)^{H\alpha-q} dy \right) \tag{3.3}$$

$$= 2^{\alpha} \left(\int_{\tau(t+z)\leq R} \varphi(-z)^{H\alpha-q} dz + \int_{\tau(y)\leq R} \varphi(-y)^{H\alpha-q} dy \right) \tag{3.4}$$

$$\leq 2^{\alpha} \left(\int_{\tau(z)\leq K(R+\tau(t))} \varphi(-z)^{H\alpha-q} dz + \int_{\tau(y)\leq R} \varphi(-y)^{H\alpha-q} dy \right). \tag{3.5}$$

Mithin schätzen wir nun die Funktion φ gemäß Lemma 2.3.2 ab, es folgt also

$$\varphi(y)^{H\alpha-q} \leq \left(M_{\varphi}^{H\alpha-q} + m_{\varphi}^{H\alpha-q} \right) \tau(y)^{H\alpha-q} \tag{3.6}$$

und wir erhalten die Abschätzung

$$\Gamma_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t) \leq 2^{\alpha} \left(M_{\varphi}^{H\alpha-q} + m_{\varphi}^{H\alpha-q} \right) \left(\int_{\tau(z)\leq K(R+\tau(t))} \tau(-z)^{H\alpha-q} dz + \int_{\tau(y)\leq R} \tau(-y)^{H\alpha-q} dy \right). \tag{3.7}$$

Die Endlichkeit des Integrals $\Gamma_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t)$ folgt nun direkt mit Hilfe von Lemma 2.6.7, da für den zugehörigen Exponenten

$$H\alpha - q > -q \Leftrightarrow H > 0$$

gilt.

Nachfolgend betrachten wir den Bereich $\tau(y) > R$ und möchten den noch fehlenden Aspekt, also die Endlichkeit des Integrals $\Gamma_{\alpha,\varphi}^{(2)}(t)$, zeigen. Zunächst benutzen wir analog die gleiche Ungleichung 2.1.6 $a)$ und erhalten

$$\Gamma_{\alpha,\varphi}^{(2)}(t) = \int_{\tau(y)>R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)} \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^{\alpha} dy$$

$$\leq 2^{\alpha} \left(\int_{\tau(y)>R} e^{-\lambda\alpha\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H\alpha-q} dy + \int_{\tau(y)>R} e^{-\lambda\alpha\varphi(-y)} \varphi(-y)^{H\alpha-q} dy \right).$$

Nach der Anwendung von Lemma 2.2.5 erhalten wir für $\gamma > 0$ die Abschätzung

$$e^{-\lambda\alpha\varphi(t-y)} \leq \varphi(t-y)^{-\gamma}.$$

Die Anwendung ist hier zulässig, da für R hinreichend groß, stets $\lambda\alpha\varphi(t-y) > 1$ angenommen werden kann. Nun setzen wir $\gamma = H\alpha + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ und führen die Substitution $t - y = -z$ durch.

Anschließend benutzen wir erneut Lemma 2.3.2 und es ergibt sich insgesamt

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t) \leq 2^{\alpha}\left(\int_{\tau(y)>R}\varphi(t-y)^{-q-\varepsilon}dy+\int_{\tau(y)>R}\varphi(-y)^{-q-\varepsilon}dy\right) \tag{3.8}$$

$$= 2^{\alpha}\left(\int_{\tau(t+z)>R}\varphi(-z)^{-q-\varepsilon}dz+\int_{\tau(y)>R}\varphi(-y)^{-q-\varepsilon}dy\right) \tag{3.9}$$

$$\leq 2^{\alpha}m_{\varphi}^{-q-\varepsilon}\left(\int_{\tau(t+z)>R}\tau(-z)^{-q-\varepsilon}dz+\int_{\tau(y)>R}\tau(-y)^{-q-\varepsilon}dy\right). \tag{3.10}$$

Im letzten Schritt benutzen wir Lemma 2.2.6 b), um den Integrationsbereich in die passende Form für Lemma 2.6.7 zu bringen. Die Endlichkeit des Integrals $\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t)$ folgt dann letztlich mit $\tilde{R}=\frac{R}{K}-\tau(t)$ und

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t) \leq 2^{\alpha}m_{\varphi}^{-q-\varepsilon}\left(\int_{\tau(z)>\widetilde{R}}\tau(-z)^{-q-\varepsilon}dz+\int_{\tau(y)>R}\tau(-y)^{-q-\varepsilon}dy\right), \tag{3.11}$$

da $-q-\varepsilon<-q$ gilt. Durch die nun bewiesene Endlichkeit von $\Gamma^{(1)}_{\alpha,\varphi}(t)$ und $\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t)$ für beliebige $t\in\mathbb{R}^d$ folgt also die Existenz der *moving average* Darstellung eines TOSSRFs.

□

Im Anschluss untersuchen wir weitere diverse Eigenschaften der *moving average* Darstellung eines TOSSRFs. Zunächst werden wir zeigen, dass dieses Zufallsfeld stationäre Zuwächse besitzt sowie eine Skalierungseigenschaft nachweisen, welche mit der Selbstähnlichkeit eines Feldes vergleichbar ist.

3.1.3 Korollar

Seien λ, H, α sowie $X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}$ wie in Definition 3.1.1 gegeben, so besitzt die *moving average* Darstellung eines TOSSRMs stationäre Zuwächse. Es gilt also

$$\{X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x+t)-X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t)\}_{x\in\mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \{X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}.$$

Beweis: Um die Stationarität der Zuwächse zu zeigen, betrachten wir zunächst das zugehörigen Verhalten des Integranden. Zur besseren Übersicht definieren wir

$$g_t(y):=e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}.$$

Mit dieser Konvention gilt

$$\begin{aligned} g_{x+t}(y)-g_t(y) =& e^{-\lambda\varphi(x+t-y)}\varphi(x+t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \\ &-e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}+e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \\ =& e^{-\lambda\varphi(x+t-y)}\varphi(x+t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir die charakteristische Funktion und erinnern an die Aussage von Lemma 2.6.6. Seien nun $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^d$ gegeben, so folgt mit der Substitution $t-y=-z$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_i\left(X^\alpha_{\varphi,\lambda}(x_j+t)-X^\alpha_{\varphi,\lambda}(t)\right)}\right]\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_i\left(g_{x_j+t}(y)-g_t(y)\right)\right|^\alpha dy\right)\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_i e^{-\lambda\varphi(x_j+t-y)}\varphi(x_j+t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha dy\right)\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_i e^{-\lambda\varphi(x_j-z)}\varphi(x_j-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha dz\right)\\
=&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_i X^\alpha_{\varphi,\lambda}(x_j)}\right].
\end{aligned}$$

□

Dies zeigt also, dass die Zuwächse stets stationär sind. Es folgt die Betrachtung der Skalierungseigenschaft, die einen weiteren wesentlichen Aspekt unserer Untersuchung ausmachen wird und es uns ermöglicht, ein besseres Verständnis des neu definierten Zufallsfeldes zu erhalten. Anschließend ebnet diese Eigenschaft uns den Beweis von Satz 3.1.6.

3.1.4 Korollar

Seien λ, H und $X^\alpha_{\varphi,\lambda}$ wie in Definition 3.1.1 gegeben. Sei weiter $c>0$. Dann erfüllt $X^\alpha_{\varphi,\lambda}$ die Eigenschaft

$$\left\{X^\alpha_{\varphi,\lambda}(c^E x)\right\}_{x\in\mathbb{R}^d} \stackrel{fdd}{=} \left\{c^H X^\alpha_{\varphi,c\lambda}(x)\right\}_{x\in\mathbb{R}^d}.$$

Beweis: Um die geforderte Eigenschaft zu zeigen, seien feste $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^d$ gegeben. So folgt die Behauptung mit dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen, wenn wir im Stande sind, für beliebige $\vartheta_1,...\vartheta_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X^\alpha_{\varphi,\lambda}(c^E x_j)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{ic^H\sum_{j=1}^n \vartheta_j X^\alpha_{\varphi,c\lambda}(x_j)}\right]$$

zu zeigen. Erinnern wir uns an dieser Stelle an die Definition einer E-homogenen Funktion, so erkennen wir, dass $\varphi(c^E x_j) = c\varphi(x_j)$ gilt. Zusätzlich führen wir die Substitution $y = c^E z$ durch. Dabei ist zu beachten, dass aufgrund des Transformationssatzes mit

$$\det\left(c^E\right) = c^{\mathrm{tr}(E)} = c^q \tag{3.12}$$

ein zusätzlicher Faktor zu beachten ist. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(c^E x_j)}\right] \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E x_j-y)}\varphi(c^E x_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha}dy\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E x_j-c^E z)}\varphi(c^E x_j-c^E z)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(-c^E z)}\varphi(-c^E z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha}c^q\,dz\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E (x_j-z))}\varphi(c^E (x_j-z))^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(-c^E z)}\varphi(-c^E z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha}c^q\,dz\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda c\varphi(x_j-z)}\left(c\varphi(x_j-z)\right)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda c\varphi(-z)}\left(c\varphi(-z)\right)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha}c^q\,dz\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j c^H\left(e^{-\lambda c\varphi(x_j-z)}\varphi(x_j-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda c\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha}dz\right) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j c^H X^{\alpha}_{\varphi,c\lambda}(x_j)}\right],
\end{aligned}$$

welches die Skalierungseigenschaft verdeutlicht. □

Diese Skalierungseigenschaft weist eine gewisse Gemeinsamkeit zu der Eigenschaft der Selbstähnlichkeit eines Zufallsfeldes auf. Neben der Skalierung im Argument, die zu einer Multiplikation mit c^H führt, wird zudem noch der Parameter λ des *Temperings* skaliert, also derjenige, der den Abfall im Unendlichen beeinflusst.

Anschließend untersuchen wir die stochastische Stetigkeit der *moving average* Darstellung eines TOSSRFs und halten das Ergebnis in nachstehendem Lemma fest.

3.1.5 Lemma

Seien H, λ und $X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t)$ wie in Definition 3.1.1, dann ist $X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t)$ stochastisch stetig. Dies bedeutet, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\operatorname*{plim}_{x\to 0} X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x_0+x) = X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x_0)$$

gilt.

Beweis: Um die stochastische Stetigkeit zu zeigen, beweisen wir die äquivalente Aussage aus Lemma 2.6.6 b). Sei dazu $x_0 \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Es gilt also nun zu verdeutlichen, dass

$$\lim_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{-\lambda\varphi(x_0+x-y)}\varphi(x_0+x-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}-e^{-\lambda\varphi(x_0-y)}\varphi(x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha}dy = 0$$

eine wahre Aussage stellt. Den ersten Schritt zur Erbringung dieses Nachweises erreichen wir zunächst mithilfe folgender Substitution $x_0 - y = z$, da

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{-\lambda\varphi(x-z)}\varphi(x-z)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha} dz = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \lim_{x\to 0}\Gamma_{\alpha,\varphi}(x) = 0 \end{aligned}$$

gilt. Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion sowie der Funktion φ folgt zudem

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0}\left|e^{-\lambda\varphi(x-z)}\varphi(x-z)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \Gamma_{\alpha,\varphi}(\lim_{x\to 0} x) = 0, \end{aligned}$$

sodass eine von x unabhängige Majorante in Verbindung mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue die Behauptung liefert. Diese Majorante bedarf jedoch noch weiteren rechnerischen Bemühungen, um sie verständlich darzustellen. Dies erreichen wir mit der Hilfe der Abschätzung (3.7)

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha,\varphi}(x) \le 2^{\alpha}\left(M_{\varphi}^{H\alpha-q} + m_{\varphi}^{H\alpha-q}\right)\left(\int_{\tau(z)\le K(R+\tau(x))}\tau(-z)^{H\alpha-q}dz + \int_{\tau(y)\le R}\tau(-y)^{H\alpha-q}dy\right)$$

sowie mit (3.11)

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(x) \le \quad 2^{\alpha} m_{\varphi}^{-q-\varepsilon}\left(\int_{\tau(z)>\tilde{R}}\tau(-z)^{-q-\varepsilon}dy + \int_{\tau(y)>R}\tau(-y)^{-q-\varepsilon}dy\right).$$

Wir schätzen die rechte Seite von (3.7) weiter nach oben ab, indem wir den Integrationsbereich vergrößern, um eine Unabhängigkeit von x zu erlangen. Dazu setzen wir im Folgenden voraus, dass sich x bereits nahe genug bei 0 befindet, also, dass $\tau(x) < 1$ gilt. Damit folgt für den Integrationsbereich

$$\{z : \tau(z) \le K(R+\tau(x))\} \subset \{z : \tau(z) \le K(R+1)\}.$$

Für die Abschätzung durch (3.11) verfolgen wir die gleiche Idee und möchten den Integrationsbereich so vergrößern, dass dieser nicht mehr von t abhängt. Damit erhalten wir folglich mit der Aussage aus 2.2.6 b) die Majorante

$$\mathbb{1}_{\{z:\tau(z)>\tilde{R}\}}(z)\; C_{\varepsilon,\alpha}\; \tau(-z)^{-q-\varepsilon} + \mathbb{1}_{\{z:\tau(z)\le K(R+1)\}}(z)\; C_{\alpha}\; \tau(z)^{H\alpha-q},$$

wobei wir $C_{\varepsilon,\alpha} := 2^{\alpha} m_{\varphi}^{-q-\varepsilon}$ sowie $C_{\alpha} := 2^{\alpha}\left(M_{\varphi}^{H\alpha-q} + m_{\varphi}^{H\alpha-q}\right)$ setzen. Dabei sei noch angemerkt, dass der Wert $\tilde{R}$ aus (3.11) theoretisch noch von t abhängt, aber mit $\tau(t) \le 1$ ebenfalls von t unabhängig nach unten abgeschätzt werden kann und somit die Menge der Indikatorfunktion vergrößert wird. $\square$

Nachdem wir nun die stochastische Stetigkeit sowie die zugehörigen konvergenten Majoranten zeigen konnten, wenden wir uns im Anschluss dem Tangentenfeld der *moving average* Darstellung eines

TOSSRFs zu. Wir werden zeigen, dass sich eine bereits bekannte und studierte Klasse, nämlich die *moving average* Darstellung eines *operator scaling stable random fields*, in diesem befindet. Dieses Ergebnis halten wir in folgendem Satz fest.

3.1.6 Satz

Sei $X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}$ wie in Definition 3.1.1 gegeben. Des Weiteren soll $H < \frac{q}{\alpha} - 1$ gelten sowie φ $(\beta, E)-$admissible sein. Unter diesen Voraussetzungen gilt für alle $t, x \in \mathbb{R}^d$

$$c^{-H}\left(X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x + c^E t) - X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x)\right) \underset{c\to 0}{\overset{fdd}{\Longrightarrow}} X^{\alpha\prime}_{\varphi,\lambda}(t),$$

wobei wir

$$X^{\alpha\prime}_{\varphi,\lambda}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} Z_\alpha(dy)$$

setzen. So handelt es sich bei $X^{\alpha\prime}_{\varphi,\lambda}(t)$ um die *moving average* Darstellung eines *operator scaling stable random fields*, wie es in [13] studiert wurde.

Beweis: Zunächst betrachten wir die Differenz der zu Grunde liegenden Aussage und erhalten

$$\begin{aligned}
X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x + c^E t) - X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda\varphi(x+c^E t-y)}\varphi(x + c^E - y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \\
&\quad - \left(e^{-\lambda\varphi(x-y)}\varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right) Z_\alpha(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda\varphi(x+c^E t-y)}\varphi(x + c^E - y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(x-y)}\varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\, Z_\alpha(dy).
\end{aligned}$$

als zusammengefasstes Integral. Anschließend gehen wir zur Betrachtung der zugehörigen charakteristischen Funktion über. Deren Darstellung entnehmen wir aus Lemma 2.6.6. Seien nun feste $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^d$ sowie $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Nachträglich führen wir zunächst die erste Substitution $x - y = -z$ durch, um diese anschließend durch eine weitere Substitution von $z = c^E v$ zu erweitern. Da es sich um die charakteristische Funktion bezüglich Z_α handelt, erhalten wir zusätzlich $dy = dz$ sowie nach dem Transformationssatz $dz = c^q dv$ wie in (3.12). Es folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^{-H}\left(X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x+c^E t_j) - X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x)\right)}\right] \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n c^{-H}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(x+c^E t_j-y)}\varphi(x + c^E t_j - y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(x-y)}\varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha dy\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n c^{-H}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j-z)}\varphi(c^E t_j - z)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha dz\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n c^{-H}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j-c^E v)}\varphi(c^E t_j - c^E v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-c^E v)}\varphi(-c^E v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha c^q dv\right).
\end{aligned}$$

Im Anschluss möchten wir Gebrauch der E-Homogenität der Funktion φ machen, verrechnen die auftretenden Faktoren beziehungsweise Potenzen von c und sehen, dass sich diese zu 1 zusammenfassen lassen. Dies bedeutet, wir erhalten

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n} c^{-H}\vartheta_j\left(e^{-\lambda c\varphi(t_j-v)}\left(c\varphi(t_j-v)\right)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda c\varphi(-v)}\left(c\varphi(-v)\right)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} c^q dv\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda c\varphi(t_j-v)}\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda c\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} dv\right).
\end{aligned}$$

Im Folgenden möchten wir aufgrund des Stetigkeitssatzes von Lévy die Konvergenz des obigen Ausdrucks für $c \to 0$ bestimmen. Betrachten wir im Zuge dessen den entsprechenden Integranden, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda c\varphi(t_j-v)}\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda c\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha}\\
&= \left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - \varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha}
\end{aligned}$$

gilt. Daraus resultierend benötigen wir nun eine von c unabhängige Majorante, sodass die Behauptung mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt, denn in diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0}\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(X_{\varphi,\lambda}(x+c^E t_j)-X_{\varphi,\lambda}(x)\right)}\right]\\
&= \lim_{c\to 0}\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda c\varphi(t_j-v)}\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda c\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} dv\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{c\to 0}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda c\varphi(t_j-v)}\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda c\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} dv\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - \varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha} dv\right)\\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X'_{\varphi,\lambda}(t_j)}\right].
\end{aligned}$$

Um die entsprechende Majorante zu erhalten, zeigen wir vorweg für alle $\lambda, x, y > 0$ sowie $\gamma < -1$ die Ungleichung

$$\left|e^{-\lambda c x}x^{\gamma} - e^{-\lambda c y}y^{\gamma}\right| \leq |x^{\gamma} - y^{\gamma}|, \tag{3.13}$$

wobei wir zudem voraussetzen, dass sich c bereits hinreichend nahe bei 0 befindet. Sei dazu ohne Beschränkung $x < y$. Wir können aufgrund des Betrags die Reihenfolge der Summanden und damit die Rolle von x und y vertauschen. Dann folgen sofort die beiden Ungleichungen

$$x^{\gamma} > y^{\gamma} \quad \text{und}$$

$$e^{-\lambda cx} > e^{-\lambda cy},$$

also insgesamt $e^{-\lambda cx}x^{\gamma} > e^{-\lambda cy}y^{\gamma}$. Wir setzen $g(\lambda) := e^{-\lambda cx}x^{\gamma} - e^{-\lambda cy}y^{\gamma}$ und erhalten damit

$$g'(\lambda) = -cxe^{-\lambda cx}x^{\gamma} + cye^{-\lambda cy}y^{\gamma} = c\left(e^{-\lambda cy}y^{\gamma+1} - e^{-\lambda cx}x^{\gamma+1}\right) < 0,$$

da $\gamma < -1$ nach Voraussetzung erfüllt ist. Für $\lambda > 0$ ist die Funktion g stets streng monoton fallend und daher gilt

$$\sup_{\lambda>0}\{g(\lambda)\} = g(0) = x^{\gamma} - y^{\gamma}.$$

Damit erhalten wir durch das bereits angesprochene Vertauschen der Rollen von x und y die gewünschte Aussage. Setzen wir abschließend $\gamma = H - \frac{q}{\alpha}$ sowie $x = \varphi(t_j - v)$ und $y = \varphi(-v)$, so erhalten wir mit der Aussage aus Lemma 2.1.6 b)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \vartheta_j \left(e^{-\lambda c\varphi(t_j-v)}\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda c\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} \tag{3.14}$$

$$\leq 2^{(n-1)\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left|\vartheta_j\right|^{\alpha}\left|e^{-\lambda c\varphi(t_j-v)}\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda c\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha} \tag{3.15}$$

$$\leq 2^{(n-1)\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left|\vartheta_j\right|^{\alpha}\left|\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - \varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha} \tag{3.16}$$

die gewünschte von c unabhängige Majorante. Also haben wir ein Feld im Tangentenraum der *moving average* Darstellung eines TOSSRFs gefunden. Dieses ergibt sich gerade durch das Weglassen des tempering und wurde bereits in [13] ausführlich studiert. □

Mit Hilfe des hinzugefügten Temperings ist es uns nun möglich, für eine weitere Klasse eine *moving average* Darstellung zu erhalten. Diese werden wir im Folgenden definieren und anschließend analysieren. Dabei wird unter anderem ein interessanter Unterschied erkennbar werden, da wir im Gegensatz zu den zuvor gezeigten stationären Zuwächsen im Anschluss Stationarität als Eigenschaft vorfinden.
Wir beginnen also mit nachstehender Definition.

3.1.7 Definition

Seien $H, \lambda > 0$ und $t \in \mathbb{R}^d$ beliebig und mit φ eine E-homogene Abbildung gegeben. Weiter sei $\alpha \in (0,2]$ und Z_α ein IS-SαS-RM, wie wir es in Definition 2.6.2 eingeführt haben. Dann definieren wir die *moving average* Darstellung des isolated tempered operator scaling stable random fields durch

$$Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\, Z_\alpha(dy).$$

Im Laufe der Arbeit kürzen wir diese Darstellung mit *moving average* Darstellung eines ITOSSRF ab.

Nachfolgend halten wir die Existenz des gerade definierten Objekts in einem Satz fest.

3.1.8 Satz

Seien die Voraussetzungen wie in Definition 3.1.7 gegeben. So existiert die *moving average* Darstellung eines ITOSSRF für alle $t \in \mathbb{R}^d$.

Beweis: Um die Existenz zu zeigen, müssen wir nach Satz 2.6.6 beweisen, dass sich der zugehörige Integrand im $\mathrm{L}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda^d\right)$ befindet. Dies bedeutet wir zeigen folgend für alle $t \in \mathbb{R}^d$ die Existenz des Integrals

$$\zeta_{\alpha,\varphi}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^{\alpha} dy.$$

Das Vorgehen entspricht in ihrem groben Schema dem Beweis von Satz 3.1.2. Analog teilen wir dazu zunächst für ein $R > 0$ den Integrationsbereich in die beiden Teile $\tau(y) \leq R$ und $\tau(y) > R$ auf. Wir setzen

$$\zeta_{\alpha,\varphi}(t) = \zeta_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t) + \zeta_{\alpha,\varphi}^{(2)}(t),$$

wobei wir

$$\zeta_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t) := \int_{\tau(y)\leq R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^{\alpha} dy$$
$$\zeta_{\alpha,\varphi}^{(2)}(t) := \int_{\tau(y)> R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^{\alpha} dy$$

meinen. Im Anschluss zeigen wir die Endlichkeit von $\zeta_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t)$. Dazu schätzen wir die Exponentialfunktion mit 1 nach oben ab und führen die Substitution $t - y = -z$ durch. Es gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t) &= \int_{\tau(y)\leq R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^{\alpha} dy && (3.17)\\
&\leq \int_{\tau(y)\leq R} \left| \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^{\alpha} dy && (3.18)\\
&= \int_{\tau(y)\leq R} \varphi(t-y)^{H\alpha-q} dy && (3.19)\\
&= \int_{\tau(t+z)\leq R} \varphi(-z)^{H\alpha-q} dz && (3.20)\\
&\leq \int_{\tau(t+z)\leq R} \left(M_{\varphi}^{H\alpha-q} + m_{\varphi}^{H\alpha-q} \right) \tau(-z)^{H\alpha-q} dz && (3.21)\\
&= C_{\alpha} \int_{\tau(t+z)\leq R} \tau(-z)^{H\alpha-q} dz. && (3.22)
\end{aligned}$$

Dabei ist $C_\alpha := M_\varphi^{H\alpha-q} + m_\varphi^{H\alpha-q}$ und die Ungleichung (3.21) folgt mit der Aussage aus Lemma 2.3.2. Im Anschluss wenden wir Lemma 2.2.6 an und erhalten mit Satz 2.6.7 die Endlichkeit des Integrals $\zeta_\varphi^{\alpha,1}$ durch

$$\zeta_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t) \leq C_\alpha \int_{\tau(z)\leq K(R+\tau(t))} \tau(-z)^{H\alpha-q}\,dz < \infty,$$

da $H\alpha - q > -q \Leftrightarrow H > 0$ gilt. Für die Existenz der *moving average* Darstellung eines ITOSSRFs benötigen wir im Folgenden des weiteren noch die Endlichkeit des Integrals

$$\begin{aligned}\zeta_{\alpha,\varphi}^{(2)}(t) &= \int_{\tau(y)>R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^\alpha dy \\ &= \int_{\tau(y)>R} e^{-\lambda\alpha\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H\alpha-q}\,dy.\end{aligned}$$

Um dies zu zeigen, benutzen wir zunächst die Aussage von Lemma 2.2.5 und erhalten damit

$$e^{-\lambda\varphi(x)} \varphi(x)^{H\alpha-q} \leq \varphi(x)^{-\gamma}.$$

Für ein $\varepsilon > 0$ wählen wir $\gamma := q + \varepsilon$ und damit folgt mit der Substitution $t - y = -z$ sowie den Aussagen von Lemma 2.2.6 und Satz 2.6.7 die Endlichkeit des Integrals durch

$$\begin{aligned}\zeta_{\alpha,\varphi}^{(2)}(t) &= \int_{\tau(t+z)>R} e^{-\lambda\alpha\varphi(-z)} \varphi(-z)^{H\alpha-q} dz && (3.23)\\ &\leq \int_{\tau(z)>\tilde{R}} e^{-\lambda\alpha\varphi(-z)} \varphi(-z)^{H\alpha-q} dz && (3.24)\\ &\leq \int_{\tau(z)>\tilde{R}} \varphi(-z)^{-\gamma-\varepsilon} dz && (3.25)\\ &\leq C_{\gamma,\varepsilon} \int_{\tau(z)>\tilde{R}} \tau(-z)^{-\gamma-\varepsilon} dz && (3.26)\\ &< \infty. && (3.27)\end{aligned}$$

Hierbei entspricht $C_{\gamma,\varepsilon} := M_\varphi^{-\gamma-\varepsilon} + m_\varphi^{-\gamma-\varepsilon}$ und die Ungleichung (3.26) folgt mit Lemma 2.3.2. Aus der Endlichkeit der beiden Integrale $\zeta_{\alpha,\varphi}^{(1)}(t)$ und $\zeta_{\alpha,\varphi}^{(2)}(t)$ folgt die Behauptung des Satzes und die Existenz der *moving average* Darstellung eines ITOSSRFs. □

Nachdem wir die Existenz nun beweisen konnten, betrachten wir im nächsten Lemma, wie schon bei der *moving average* Darstellung eines TOSSRFs die Zuwächse. Dabei stellen wir fest, dass es sich bei der neu definierten Klasse aus Definition 3.1.7 um stationäre Zufallsfelder handelt.

3.1.9 Lemma

Seien H, λ, α und $Z_{\varphi,\lambda}(t)$ wie in Definition 3.1.7 gegeben, so ist $Z_{\varphi,\lambda}(t)$ für $t \in \mathbb{R}^d$ stationär. Es gilt also:

$$\{Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x+t)\}_{x\in\mathbb{R}^d} \stackrel{fdd}{=} \{Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}.$$

Beweis: Um die Stationarität des Zufallsfeldes $Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t)$ zu zeigen, seien nun $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^d$ sowie $\vartheta_1,...,\vartheta_n$ gegeben. Wir betrachten anschließend die charakteristische Funktion und daraufhin benutzen wir die Substitution $t-y=-z$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x_j+t)}\right]\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(x_j+t-y)}\varphi(x_j+t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right| Z_\alpha(dy)\right)\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(x_j-z)}\varphi(x_j-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right| Z_\alpha(dz)\right)\\
=&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x_i)}\right].
\end{aligned}$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen folgt die Stationarität der *moving average* Darstellung eines ITOSSRFs. □

Im Anschluss betrachten wir, ähnlich wie im vorausgegangenen Abschnitt, eine Skalierungseigenschaft des in Definition 3.1.7 eingeführten Zufallsfeldes. Dafür zeigen wir folgendes Lemma.

3.1.10 Lemma

Seien H, λ, α und $Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t)$ wie in Definition 3.1.7 gegeben. Dann erfüllt $Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t)$ für $c>0$ die Skalierungseigenschaft

$$\{Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(c^E x)\}_{x\in\mathbb{R}^d} \stackrel{fdd}{=} \{c^H Z^{\alpha}_{\varphi,c\lambda}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}.$$

Beweis: Seien $\vartheta_1,...,\vartheta_n \in \mathbb{R}$ sowie $x_1,...,x_n \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(c^E x_j)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{ic^H\sum_{j=1}^n \vartheta_j Z^{\alpha}_{\varphi,c\lambda}(x_j)}\right]$$

gilt. Anschließend substituieren wir $y=c^E v$, beachten dabei den Transformationssatz wie in (3.12) und nutzen anschließend die E-Homogenität der Funktion φ aus. Es folgt

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(c^E x_j)}\right] = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E x_j-y)}\varphi(c^E x_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} dy\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E x_j - c^E v)}\varphi(c^E x_j - c^E v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} c^q dv\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-c\lambda\varphi(x_j - v)}c^{H-\frac{q}{\alpha}}\varphi(x_j - v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} c^q dv\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}c^H\vartheta_j\left(e^{-c\lambda\varphi(x_j - v)}\varphi(x_j - v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} dv\right)\\
&= \mathbb{E}\left[e^{ic^H\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j Z^{\alpha}_{\varphi,c\lambda}(x_j)}\right]
\end{aligned}
$$

und damit folgt die zuvor aufgestellte Behauptung. Das Zufallsfeld unterliegt demnach der oben genannten Skalierungseigenschaft. □

Im Folgenden greifen wir einen weiteren Aspekt auf, den es ebenfalls bei der *moving average* Darstellung eines ITOSSRFs zu untersuchen gibt, das Tangentenfeld. Hierfür konstruieren wir nachstehenden Satz.

3.1.11 Satz

Seien λ, α und $Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t)$ wie in Definition 3.1.7 gegeben. Zudem sei φ (β, E)-admissible und wir fordern, dass $0 < H < \min(\beta, \frac{q}{\alpha} - 1)$ sowie $q > \alpha$ gilt. So folgt für $c > 0$ und $t \in \mathbb{R}^d$

$$
c^{-H}\left(Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x + c^E t) - Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x)\right) \underset{c\to 0}{\overset{fdd}{\Longrightarrow}} Z^{\alpha\prime}_{\varphi,\lambda}(t),
$$

wobei

$$
Z^{\alpha\prime}_{\varphi,\lambda}(t) := X^{\alpha\prime}_{\varphi,\lambda}(t) = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} Z_{\alpha}(dy).
$$

Beweis: Den Beweis führen wir sehr ähnlich zum Satz 3.1.6. Zunächst betrachten wir für $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^d$ sowie $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von $\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x_j + c^E t) - Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x_j)\right)$ und erhalten mit der E-Homogenität der Funktion φ und der Substitutionen $x - y = -z$ und $z = c^E v$. Bei letzterer Substitution erhalten wir aufgrund Transformationssatzes den Faktor c^q. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x+c^E t_j) - Z^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(x)\right)}\right]\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(x+c^E t_j - y)}\varphi(x + c^E t_j - y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(x-y)}\varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} dy\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j - z)}\varphi(c^E t_j - z)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} dz\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j - c^E v)}\varphi(c^E t_j - c^E v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-c^E v)}\varphi(-c^E v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^{\alpha} c^q dv\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E(t_j-v))}\varphi(c^E(t_j-v))^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-c^E v)}\varphi(-c^E v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha c^q dv\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-c\lambda\varphi(t_j-v)}c^{H-\frac{q}{\alpha}}\varphi((t_j-v))^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-c\lambda\varphi(-v)}c^{H-\frac{q}{\alpha}}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha c^q dv\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n c^H\vartheta_j\left(e^{-c\lambda\varphi(t_j-v)}\varphi((t_j-v))^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-c\lambda\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha dv\right).
\end{aligned}
$$

Anschließend benötigen wir für den Integranden noch eine von c unabhängige Majorante, welche wir mir den Mitteln aus dem Beweis von Satz 3.1.6 erhalten. Wir verwenden erneut die Aussage aus Lemma 2.1.6 b) und demnach gilt

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-c\lambda\varphi(t_j-v)}\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-c\lambda\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha\\
\leq &C_\alpha\sum_{j=1}^n\left|\vartheta_j\right|^\alpha\left|\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - \varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha
\end{aligned}
$$

für $C_\alpha = 2^{(n-1)\alpha} > 0$. Abschließend gelingt uns das Ende des Beweises mit Hilfe des Konvergenzsatzes von Lebesgue durch

$$
\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0}\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^{-H}\left(Z^\alpha_{\varphi,\lambda}(x+c^E t_j)-Z^\alpha_{\varphi,\lambda}(x)\right)}\right]\\
&\quad= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{c\to 0}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-c\lambda\varphi(t_j-v)}\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-c\lambda\varphi(-v)}\varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha dv\right)\\
&\quad= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(t_j-v)^{H-\frac{q}{\alpha}} - \varphi(-v)^{H-\frac{q}{\alpha}}\right)\right|^\alpha dv\right)\\
&\quad= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(Z^{\alpha\prime}_{\varphi,\lambda}(t_j)\right)}\right].
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir mit dem Stetigkeitssatz von Lévy das gewünschte Ergebnis der aufgestellten Behauptung. □

3.2 *Harmonizable* Darstellung

Im weiteren Verlauf des Kapitels beschäftigen wir uns nun mit der sogenannten *harmonizable* Darstellung eines tempered operator stable random fields und werden ähnliche Ergebnisse wie im bisherigen Verlauf für die *moving average* Darstellung zeigen. Zunächst halten wir das zu studierende Objekt in einer Definition fest.

3.2.1 Definition

Seien $t \in \mathbb{R}^d$, $0 < H < a_1$ und $\lambda > 0$ sowie $0 < \alpha \leq 2$. Weiter sei $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetige E^t-homogene Abbildung. So definieren wir die *harmonizable* Darstellung eines tempered operator scaling stable random fields durch

$$X^{\alpha}_{\psi,\lambda}(t) := \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i<t,\xi>} - 1\right) (\lambda - i\psi(\xi))^{-H-\frac{q}{\alpha}} W_\alpha(d\xi),$$

wobei wir mit W_α im Folgenden ein isotropisches IS-SαS-RM, wie wir es im Grundlagenkapitel mit (2.3) und (2.4) eingeführt haben, mit Lebesgueschem Kontrollmaß bezeichnen. Im weiteren Verlauf bezeichnen wir dieses Zufallsfeld immer abkürzend als *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs.

Im Anschluss an diese Definition beweisen wir die Existenz im nachfolgenden Satz.

3.2.2 Satz

Seien t, H, λ, α sowie ψ wie in Definition 3.2.1 gegeben. So existiert die *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs.

Beweis: Um diesen Beweis zu erbringen, tätigen wir zunächst die Abschätzung

$$\left|e^{i<t,\xi>} - 1\right| |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H-\frac{q}{\alpha}} \leq \left|e^{i<t,\xi>} - 1\right| \psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha}}.$$

Diese ist gültig, da für festes ξ sowohl λ als auch $\psi(\xi)$ rein reelle Zahlen darstellen und somit mit $i\psi(\xi)$ eine rein imaginäre Zahl gegeben ist und zusätzlich der Exponent stets negativ ist. Betrachten wir anschließend mit der Aussage aus Lemma 2.6.8, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha,\psi,\lambda}(t) :=& \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{i<t,\xi>} - 1\right|^{\alpha} |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha-q} d\xi \\
\leq& \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{i<t,\xi>} - 1\right|^{\alpha} |\psi(\xi)|^{-H\alpha-q} d\xi \\
=& \Gamma_{\alpha,\psi}(t).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\Gamma_{\alpha,\psi}(t)$ das entsprechende Pendant zu $\Gamma_{\alpha,\psi,\lambda}(t)$ von der *harmonizable* Darstellung eines operator scaling stable random fields aus [13]. Da wir die Endlichkeit von $\Gamma_{\alpha,\psi}(t)$ aus eben dieser Arbeit bereits kennen, überträgt sich mit der getroffenen Abschätzung die Endlichkeit auf $\Gamma_{\alpha,\psi,\lambda}(t)$ und nach der Aussage von Satz 2.6.8 haben wir die Existenz der *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs gezeigt. Zur Vollständigkeit möchten wir die nötigen Rechenschritte jedoch in knapper Form wiedergeben, da wir im Laufe des Abschnitts auf eine Majorante angewiesen sind, welche sich aus diesen ergibt. Wir möchten also im Folgenden zeigen, dass

$$\Gamma_{\alpha,\psi}(t) < \infty.$$

Mit Hilfe der Integration durch verallgemeinrte Polarkoordinaten nach Lemma 2.6.9 erhalten wir damit

$$\Gamma_{\alpha,\psi}(t) = \int_0^\infty \int_{S_0} \left| e^{i<t,r^{E^t}\vartheta>} - 1 \right|^\alpha \psi(r^{E^t}\vartheta)^{-H\alpha-q} r^{q-1} \sigma(d\vartheta) dr$$
$$= \int_0^\infty \int_{S_0} \left| e^{i<t,r^{E^t}\vartheta>} - 1 \right|^\alpha \psi(\vartheta)^{-H\alpha-q} r^{-H\alpha-1} \sigma(d\vartheta) dr.$$

Im Anschluss wenden wir für $\delta \in (0, a_1 - H)$ die Ungleichung

$$\left| e^{i<t,r^{E^t}\vartheta>} - 1 \right|^\alpha \leq C(1 + ||t||^\alpha) \min(r^{\alpha(a_1-\delta)}, 1)$$

an und erhalten die beiden Teilintegrale

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha,\psi}(t) := \int_0^1 \int_{S_0} C(1 + ||t||^\alpha) \min(r^{\alpha(a_1-\delta)}, 1) \psi(\vartheta)^{-H\alpha-q} r^{-H\alpha-1} \sigma(d\vartheta) dr \tag{3.28}$$
$$\Gamma^{(2)}_{\alpha,\psi}(t) := \int_1^\infty \int_{S_0} C(1 + ||t||^\alpha) \min(r^{\alpha(a_1-\delta)}, 1) \psi(\vartheta)^{-H\alpha-q} r^{-H\alpha-1} \sigma(d\vartheta) dr. \tag{3.29}$$

Durch Auflösen der beiden Minima und der Nullstellenfreiheit der E^t-homogenen Funktion ψ erhalten wir die Existenz der beiden Integrale. Damit haben wir die Existenz der *harmonizable* Darstellung eines OSSRFs bewiesen und damit folgt die Existenz für die *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs. □

3.2.3 Lemma

Seien H, λ, α sowie ψ und $X^\alpha_{\psi,\lambda}$ wie in Definition 3.2.1 gegeben. Dann hat die *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs stationäre Zuwächse.

Beweis: Um die aufgestellte Behauptung zu zeigen, müssen wir für $t \in \mathbb{R}^d$ analog zur Aussage von Lemma 3.1.3

$$\{X^\alpha_{\psi,\lambda}(x+t) - X^\alpha_{\psi,\lambda}(t)\}_{x\in\mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \{X^\alpha_{\psi,\lambda}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$$

zeigen. Dazu betrachten wir zunächst die charakteristische Funktion der Differenz, wie wir sie in diesem Fall in Lemma 2.6.8 c) festgehalten haben, und erhalten für $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ sowie $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$, dass

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(X^\alpha_{\psi,\lambda}(x_j+t) - X^\alpha_{\psi,\lambda}(t) \right)} \right]$$
$$= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^n \vartheta_j (e^{i<x_j+t,\xi>} - 1) - (e^{i<t,\xi>} - 1) \right|^\alpha |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha-q} d\xi \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j (e^{i<x_j+t,\xi>} - e^{i<t,\xi>}\right|^\alpha |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha - q} d\xi\right) \\
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{i<t,\xi>}\right|^\alpha \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j (e^{i<x_j,\xi>} - 1)\right|^\alpha |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha - q} d\xi\right) \\
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j (e^{i<x_j,\xi>} - 1)\right|^\alpha |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha - q} d\xi\right) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X^\alpha_{\psi,\lambda}(x_j)}\right]
\end{aligned}
$$

gilt. Mit dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen folgt damit die Aussage des Lemmas. □

3.2.4 Lemma

Seien t, H, λ, α sowie ψ wie in Definition 3.2.1 gegeben. So erfüllt die *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs folgende Skalierungseigenschaft:

$$
\{X^\alpha_{\psi,\lambda}(c^E x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{fdd}{=} \{c^H X^\alpha_{\psi,c\lambda}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}.
$$

Beweis: Seien $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ sowie $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Äquivalent zum Beweis der oben genannten Aussage ist der Nachweis von

$$
\mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^n \vartheta_j X^\alpha_{\psi,\lambda}\left(c^E x_j\right)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(ic^H \sum_{j=1}^n \vartheta_j X^\alpha_{\psi,c\lambda}(x_j)\right)\right].
$$

Für diesen Nachweis betrachten wir die charakteristische Funktion der linken Seite und stellen zunächst das Skalarprodukt im Integranden um. Zudem substitutieren wir anschließend $c^{E^t}\xi = \eta$, sodass wir auf Grund des Transformationssatzes zusätzlich $c^q d\xi = d\eta$ erhalten. Insgesamt folgt also mit der entsprechenden charakteristischen Funktion bezüglich des ISRMs W_α aus Lemma 2.6.8 c), dass

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^n \vartheta_j X^\alpha_{\psi,\lambda}\left(c^E x_j\right)\right)\right] \\
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{i<c^E x_j,\xi>} - 1\right)(\lambda - \psi(\xi))^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha d\xi\right) \\
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{i<x_j,c^{E^t}\xi>} - 1\right)(\lambda - \psi(\xi))^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha d\xi\right) \\
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{i<x_j,\eta>} - 1\right)\left(\lambda - \psi(c^{-E^t}\eta)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha c^{-q} d\eta\right)
\end{aligned}
$$

gilt. Im Anschluss benutzen wir die E^t-Homogenität der Funktion ψ und fassen alle Potenzen von c zusammen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{i<x_j,\eta>} - 1\right) \left(\lambda - \frac{1}{c}\psi(\eta)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha}} \right|^\alpha c^{-q} d\eta\right) \\
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{i<x_j,\eta>} - 1\right) c^{H+\frac{q}{\alpha}} \left(c\lambda - \psi(\eta)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha}} \right|^\alpha c^{-q} d\eta\right) \\
&= \exp\left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} c^H \left| \sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{i<x_j,\eta>} - 1\right) \left(c\lambda - \psi(\eta)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha}} \right|^\alpha d\eta\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(ic^H \sum_{j=1}^n \vartheta_j X^\alpha_{\psi,c\lambda}(x_j)\right)\right].
\end{aligned}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz über charakteristische Funktionen folgt damit die zu zeigende Behauptung. □

3.2.5 Lemma

Seien H, λ, α sowie ψ wie in Definition 3.2.1 gegeben, so ist die *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs stochastisch stetig.

Beweis: Äquivalent zum Beweis der Behauptung ist nach der Aussage von Lemma 2.6.8 b) für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ der Nachweis der Aussage

$$\lim_{x\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(e^{i<x+x_0,\xi>} - 1\right) - \left(e^{i<x_0,\xi>} - 1\right) \right|^\alpha |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha-q} d\xi = 0. \tag{3.30}$$

Da der Integrand für den betrachteten Grenzwert für $x \to 0$ gegen 0 strebt, reicht zur Erbringung des Beweises die Angabe einer von x unabhängigen Majorante. Dafür fordern wir nachfolgend, dass bereits $||x|| \leq 1$ gilt und erhalten diese Majorante nach Anwendung von Lemma 2.6.9 auf den Integranden von (3.30) mit den Ergebnissen aus Satz 3.2.2 durch die Abschätzung $(1 + ||x||)^\alpha \leq 2^\alpha$ angewandt auf (3.28) und (3.29). □

3.2.6 Satz

Sei für $t \in \mathbb{R}^d$ das Zufallsfeld $X^\alpha_{\psi,\lambda}(t)$ die *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs mit den Parametern H, λ und α, wie wir sie in 3.2.1 definiert haben. Dann gilt für $c > 0$

$$c^{-H}\left(X^\alpha_{\psi,\lambda}\left(x + c^E t\right) - X^\alpha_{\psi,\lambda}(x)\right) \underset{c\to 0}{\overset{fdd}{\Longrightarrow}} X'_{\psi,\lambda}(t),$$

wobei

$$X^{\alpha\prime}_{\psi,\lambda}(t) = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{i<t,\xi>}-1\right)\psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha}}W_\alpha(d\xi).$$

Beweis: Zunächst betrachten wir die Differenz $X^{\alpha}_{\psi,\lambda}\left(x+c^E t\right)-X^{\alpha}_{\psi,\lambda}(x)$. Aufgrund der stationären Zuwächse erhalten wir

$$X^{\alpha}_{\psi,\lambda}\left(x+c^E t\right)-X^{\alpha}_{\psi,\lambda}(x)\overset{fdd}{=}X^{\alpha}_{\psi,\lambda}\left(c^E t\right),$$

sodass wir anschließend mit der Skalierungseigenschaft aus Lemma 3.2.4

$$X^{\alpha}_{\psi,\lambda}\left(c^E t\right)\overset{fdd}{=}c^H X^{\alpha}_{\psi,c\lambda}(t)$$

erhalten. Nachfolgend gehen wir zur Betrachtung der charakteristischen Funktion über und weiter seien $\vartheta_1,...,\vartheta_n\in\mathbb{R}$ sowie $t_1,...,t_n\in\mathbb{R}^d$ gegeben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(ic^{-H}\sum_{j=1}^n\vartheta_j X^{\alpha}_{\psi,\lambda}\left(x+c^E t_j\right)-X^{\alpha}_{\psi,\lambda}(x)\right)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left(ic^{-H}\sum_{j=1}^n\vartheta_j X^{\alpha}_{\psi,\lambda}\left(c^E t_j\right)\right)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n\vartheta_j X_{\psi,c\lambda}\left(t_j\right)\right)\right]\\
=&\exp\left(-c_0\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)(c\lambda-i\psi(\eta))^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha d\eta\right).
\end{aligned}$$

Um den Beweis zu vollenden benötigen wir nun eine konvergente von c unabhängige Majorante. Diese erhalten wir mit der Abschätzung

$$(c\lambda-i\psi(\eta))^{-H-\frac{q}{\alpha}}\le\psi(\eta)^{-H-\frac{q}{\alpha}},$$

da $-H-\frac{q}{\alpha}<0$ und $\lambda\in\mathbb{R}$ sowie $i\psi(\eta)\in i\mathbb{R}$. Daraus resultierend erhalten wir als zugehörige Majorante also

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)(c\lambda-i\psi(\eta))^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha d\eta\\
\le&\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\psi(\eta)^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^\alpha d\eta.
\end{aligned}$$

Wenden wir nun den Konvergenzsatz von Lebesgue an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0}\mathbb{E}\left[\exp\left(ic^{-H}\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X^{\alpha}_{\psi,\lambda}\left(x+c^{E}t_j\right)-X_{\psi,\lambda}(x)\right)\right]\\
=&\lim_{c\to 0}\exp\left(-c_0\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\left(c\lambda-i\psi(\eta)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha}d\eta\right)\\
=&\exp\left(-c_0\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{c\to 0}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\left(c\lambda-i\psi(\eta)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha}d\eta\right)\\
=&\exp\left(-c_0\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\psi(\eta)^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha}d\eta\right)\\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X^{\alpha\prime}_{\psi,\lambda}\left(t_j\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Mit dem Stetigkeitssatz von Lévy folgt die zu zeigende Behauptung. □

Nachfolgend bietet es sich an, nach einem Analogon der ITOSSRF für die *harmonizable* Darstellung zu suchen. Dies ist jedoch nicht in natürlicherweise mit positivem bzw. interessantem Ausgang möglich. Betrachtet man beispielsweise das Zufallsfeld

$$Z^{\alpha}_{\psi,\lambda}(t):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{i<t,\xi>}\left(\lambda-i\psi(\xi)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha}}W_{\alpha}(d\xi),$$

wie man es auf natürliche Weise aus der *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs erhalten könnte, so stellt sich heraus, dass die zugehörige charakteristische Funktion

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\vartheta Z^{\alpha}_{\psi,\lambda}(t)}\right]&=\exp\left(-c_0\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{i<t,\xi>}\left(\lambda-i\psi(\xi)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha}}\right|^{\alpha}d\xi\right)\\
&=\exp\left(-c_0\int_{\mathbb{R}^d}\left|\lambda-i\psi(\xi)\right|^{-H\alpha-q}\xi\right)
\end{aligned}$$

unabhängig von t ist. Dementsprechend handelt es sich bei $Z^{\alpha}_{\psi,\lambda}(t)$ um ein konstantes Zufallsfeld und die einhergende Analyse wäre obsolet.

Kapitel 4

Operator Scaling Multistable Random Fields

In diesem Kapitel befassen wir uns nun mit einer Verallgemeinerung der Klasse der *operator scaling stable random fields*, der sogenannten *operator scaling multistable random fields*. Diese werden im Laufe der Arbeit stets mit OSMSRF abgekürzt. Wie im vorausgegangen Kapitel unterscheiden wir erneut zwischen der *moving average* Darstellung und der *harmonizable* Darstellung. Bevor wir uns jedoch der Betrachtung der beiden Darstellungen widmen, benötigen wir zunächst eine Erweiterung unseres ISRM Begriffs aus Definition 2.6.2.

4.1 Multi stable independently scattered random measures

Dieser Abschnitt orientiert sich sehr nah an [6], [7] sowie [11]. Dabei gehen wir wie in Kapitel 2.6 der Grundlagen vor und bezeichnen mit $(E,\mathscr{E},\nu)$ einen σ endlichen Maßraum. Des Weiteren definieren wir mathematische Begriffe konventionsgemäß so, wie sie in den oben genannten Referenzen eingeführt wurden.

Unter der Multistabilität verstehen wir dabei die Orts- beziehungsweise Zeitabhängigkeit des Parameters α. Dieser wird nun nicht wie im zweiten und dritten Kapitel als fester Wert, sondern als stetige Abbildung verstanden.

Zur Einführung der stochastischen Integration im reell-wertigen sowie komplex-wertigen Fall benötigen wir zunächst die Definition eines δ-Rings wie sie in Definition 3.1.1 in [10] aufgeführt ist. Ausgehend von einer nichtleeren Menge S erhalten wir einen δ-Ring $\mathbf{S} \subset \mathrm{Pot}(S)$, falls

$$(\delta_0)\ \emptyset \in \mathbf{S},$$
$$(\delta_1)\ A,B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathbf{S},$$
$$(\delta_2)\ A,B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \backslash B \in \mathbf{S},$$

$$(\delta_3)\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{S},$$

$$(\delta_4)\ \exists\ (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbf{S} \text{ mit } \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = S$$

gelten. Anschließend benötigen wir noch eine weitere Definition aus [6]. Haben wir mit σ ein endliches symmetrisches Maß auf $(S_0, \mathscr{B}(S_0))$ gegeben, so erhalten wir durch die Abbildung

$$\varphi(s,C) := \int_0^{\infty} \int_{S_0} \mathbb{1}_C \left(r^{\frac{1}{\alpha(s)}} \vartheta \right) r^{-2} \sigma(d\vartheta) dr,\ C \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \tag{4.1}$$

ein symmetrisches Lévymaß. Im Folgenden bezeichne $\mathbf{E}$ stets den δ-Ring über E, so erhalten wir durch Theorem 2.2 aus [6] die Existenz eines reell-wertigen multi stabilen IS-SαS-RMs

$$\mathbb{M} := \{M(A) : A \in \boldsymbol{E}\}. \tag{4.2}$$

Dabei sind die Randverteilungen von $\mathbb{M}$ durch $\mathbb{M}(A) \sim [0,0,\phi_A]$ für jedes $A \in \boldsymbol{E}$ eindeutig festgelegt, wobei ϕ_A für jedes A ein Lévymaß bezeichne, welches durch

$$\phi_A(C) := \int_A \varphi(s,C)\nu(ds)$$

gegeben ist.

Nach dieser Einführung von $\mathbb{M}$ betrachten wir im nächsten Schritt eine Charakterisiserung für die Existenz bezüglich der Integration eines solchen multistable IS-SαS-RMs. Es folgt die Darstellung der zugehörigen charakteristischen Funktion.

Zur verbesserten Handhabung definieren wir wie in Kapitel 2.6 für $f : E \to \mathbb{R}$ die Menge

$$I(\mathbb{M}) := \left\{ f : f \text{ ist messbar und } \int_E f(s)\ \mathbb{M}(ds) \text{ existiert} \right\}. \tag{4.3}$$

Wie bereits im Grundlagenkapitel 2.6 verstehen wir hierbei die Integration von $\mathbb{M}$ zunächst durch Integration einer einfachen Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{1}_{A_j}(x)$, für $c_j \in E$ sowie disjunkten Mengen $A_j \in \mathbf{E}$ für $j \in \{1,...,n\}$, als

$$I_{\mathbb{M}}(f\ \mathbb{1}_A) := I(f\ \mathbb{1}_A) := \int_A f(s)\ \mathbb{M}(ds) := \sum_{j=1}^{n} c_j\ M(A \cap A_j),$$

wie in Kapitel 5 von [7].

Anschließend gehen wir erneut zur Betrachtung von Grenzwerten über. Hierbei zitieren wir Definition 5.1 aus dem gleichen Werk. Wir bezeichnen eine $(\sigma(\mathbf{E}) - \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}$

als bezüglich $\mathbb{M}$ integrierbar, falls eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{E}$ existiert, sodass $f_n \to f$ punktweise ν-fast überall konvergiert und $I(f_n\ \mathbb{1}_A)$ für jedes $A \in \sigma(\mathbf{E})$ stochastisch konvergiert.

In nachfolgendem Lemma halten wir gewisse Eigenschaften bezüglich dieser stochastischen Integration fest und betrachten zudem $(E,\mathbf{E},\nu) = (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$.

4.1.1 Lemma

Sei $\alpha : \mathbb{R}^d \to [a,b] \subset (0,2]$ eine stetige Abbildung und sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Zudem bezeichne $\mathbb{M}$ das IS-SαS-RM aus der Einführung des Kapitels. So gilt

a) $I(\mathbb{M})$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $I(f)$ ist fast sicher linear.

b) $I(\mathbb{M}) = L^{\alpha(\cdot)}(\lambda^d) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^d} |f(s)|^{\alpha(s)} \lambda^d(ds) < \infty\}$.

c) Außerdem sei $f \in L^{\alpha(\cdot)}(\lambda^d)$ sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{\alpha(\cdot)}(\lambda^d)$ gegeben.
Es existiert $X := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ \mathbb{M}(dx)$ genau dann, wenn

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{\alpha(x)}\, \lambda^d(dx) < \infty.$$

Sei weiter $X_j := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f_j(x)\ \mathbb{M}(dx)$, so gilt

$$\begin{aligned} &\operatorname*{plim}_{j\to\infty} X_j = X \\ \Leftrightarrow &\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_j(x) - f(x)|^{\alpha(x)}\, \lambda^d(dx) = 0 \end{aligned}$$

d) Die zugehörige charakteristische Funktion erhalten wir für $\vartheta \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{E}\left[e^{i\vartheta I(f)}\right] = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} |\vartheta f(x)|^{\alpha(x)}\, \lambda^d(dx)\right).$$

Beweis. Aussage a) ergibt sich aus Proposition 5.3 in [7], Aussage b) entspricht dem Beispiel 2.9 in [6]. Aussage c) erhalten wir durch Eigenschaft 4.1.13 in [10] und Aussage d) folgt letztlich ebenfalls durch Beispiel 2.9 in [6], welches wiederum auf die Ausführungen in [11] verweist, genauer auf Lemma 2.1. □

Der nächste Abschnitt befasst sich mit der Bereitstellung eines isotropen komplexwertigen multi stabilen ISRSMs. Dafür orientieren wir uns zunächst an Kapitel 3.7 aus [10].

Wir werden ein $\mathbb{R}^2$-wertiges Zufallsmaß $M(A) = (M_1(A), M_2(A))$ in folgender Weise als komplexwertig auffassen, dass die Konvention $\widetilde{M}(A) := M_1(A) + iM(A)$ gelten möge. Des Weiteren übernehmen wir die Definition aus Kapitel 4.3 [10], sodass wir $\widetilde{f}: S \to \mathbb{C}$ stets als $\widetilde{f}(s) = f^{(1)}(s) + if^{(2)}(s)$ für $f^{(i)}: S \to \mathbb{R}$ annehmen. Im Laufe dieses Kapitels beschreibe $\mathbf{S}$ den δ-Ring über S. Zudem sei mit $\Xi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ die Funktion mit der Eigenschaft

$$\Xi_2(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$$

bezeichnet. Hierbei interpretieren wir die dabei entstehenden Integralen analog zu Definition 4.3.1 sowie zu den Gleichungen (4.30) und (4.31) aus [10] folgendermaßen:

Sei $\widetilde{f}: S \to \mathbb{C}$ eine einfache Funktion, so gilt für $i = 1,2$, wie in den Grundlagen, $f^{(i)}(s) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(i)} \mathbb{1}_{A_j}(s)$ für reelle Zahlen $c_j^{(i)}$ und disjunkte Mengen $A_j \in \mathbf{E}$. Damit interpretieren wir die Integration bezüglich einfacher Funktionen als

$$I_{\widetilde{M}}(\widetilde{f}\,\mathbb{1}_A) := \sum_{j=1}^{n} (c_j^{(1)} + ic_j^{(2)}) \widetilde{M}(A \cap A_j)$$

und

$$\operatorname{Re}\, I_{\widetilde{M}}(\widetilde{f}\,\mathbb{1}_A) = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^{(1)} M^{(1)}(A \cap A_j) - c_j^{(2)} M^{(2)}(A \cap A_j) \right)$$
$$\operatorname{Im}\, I_{\widetilde{M}}(\widetilde{f}\,\mathbb{1}_A) = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^{(1)} M^{(2)}(A \cap A_j) + c_j^{(2)} M^{(1)}(A \cap A_j) \right).$$

Im Zuge dessen nennen wir eine $(\sigma(\mathbf{S}) - \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ messbare Funktion $\widetilde{f}: S \to \mathbb{C}$ bezüglich $\widetilde{M}$ nach Definition 5.1 in [7] integrierbar, falls eine zugehörige Folge $(\widetilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher Funktionen in S existiert, sodass $\widetilde{f}_n$ $\lambda_{\widetilde{M}}/\lambda_{\Xi}$ fast überall punktweise gegen f konvergiert sowie $I(\widetilde{f}_n)$ stochastisch für jedes $A \in \sigma(\mathbf{S})$.
Weiterhin sprechen wir von der assoziierten Abbildung $f: S \to \mathbb{R}^2$, falls

$$f(s) = \begin{pmatrix} f^{(1)}(s) & -f^{(2)}(s) \\ f^{(2)}(s) & f^{(1)}(s) \end{pmatrix}, \; s \in S$$

der Fall ist. Für diese Abbildung gilt nun, dass

$$\Xi_2\left(I_{\widetilde{M}}(\widetilde{f}\,\mathbb{1}_A)\right) = I_M(f\,\mathbb{1}_A), \;\; \text{f.s.} \;\; \forall\, A \in \sigma(\mathbf{S}).$$

Außerdem definieren wir zur Beschreibung der Integrierbarkeit einer Funktion bezüglich des Maßes $\widetilde{M}$ analog zu (4.3)

$$I(\widetilde{M}) := \{\widetilde{f}: (S, \sigma(\mathbf{S})) \to (\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C})) : \widetilde{f} \text{ ist } \widetilde{M}\text{-integrierbar}\}.$$

Theorem 4.3.4 aus [10] liefert uns nun den Zusammenhang zwischen der komplexwertigen Betrachtungsweise und der assoziierten Abbildung zur Auslegung der reellen multi stabilen IS-SαS-RMs. Dieser Zusammenhang äußerst sich darin, dass für eine messbare Funktion $\widetilde{f} : S \to L(\mathbb{C})$ die Aussagen $\widetilde{f} \in f(\widetilde{M})$ sowie $f \in f(M)$ äquivalent sind.

Anschließend erläutern wir, wie genau die obige Integration zu verstehen ist. Sei dazu $\widetilde{f} \in I(\widetilde{M})$ sowie $(\widetilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von einfachen Funktionen, so definieren wir in Manier von Definition 4.3.5 aus [10] für alle $A \in \sigma(\mathbf{S})$

$$I_{\widetilde{M}}(\widetilde{f}\,\mathbb{1}_A) := \int_A \widetilde{f}(s)\,\widetilde{M}(ds) := \operatorname{Re} I(\widetilde{f}\,\mathbb{1}_A) + \operatorname{Im} I(\widetilde{f}\,\mathbb{1}_A).$$

Auf Grund der Übersichtlichkeit zitieren wir im Folgenden ein Lemma, welches die Existenz eines Übergangskerns liefert. Für den interessierten Leser sei die angegebene Quelle im Beweis für eine intensivere Recherche zur Nachvollziehbarkeit angegeben.

4.1.2 Lemma

Sei M ein $\mathbb{R}^2$-wertiges IS-SαS-RM auf $\mathbf{S}$ mit $M(A) \sim [0,0,\phi_A]$ für $A \in \mathbf{S}$. So gilt

a) Es existiert eine σ-endliche Abbildung λ_M auf $\sigma(\mathbf{S})$, welche eindeutig durch

$$\lambda_M(A) := \int_{\mathbb{R}^2} \min(1, ||x||^2)\,\phi_A(dx)$$

definiert ist. Wir nennen λ_M das zugehörige Kontrollmaß des ISRM M.

b) Es existiert ein σ-endlicher Übergangskern $\rho_M : S \to \mathbb{R}^2$ mit $(\lambda_M \odot \rho_M)(A \times B) = \phi_A(B)$.

c) Es existiert die Abbildung

$$K_M(t,s) := \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i<t,x>} - 1 - \frac{i<t,x>}{1+||x||^2} \right) \rho_M(s,dx).$$

Beweis: Die Aussage a) erhalten wir aus Theorem 3.2, die Aussage b) aus Theorem 3.4 (i) und die Aussage c) aus Proposition 3.5.1 in [7]. □

Bevor wir nun zu einer weiteren Aussage in diesem Abschnitt gelangen, benötigen wir eine weitere Definition, welche die Integrierbarkeit leicht abschwächt und keine Vermischung fordert.

4.1.3 Definition

Sei $\widetilde{f} : S \to \mathbb{C}$ messbar. Wir nennen $\widetilde{f}$ partiell integrierbar bezüglich $\widetilde{M}$, falls eine Folge von einfachen Funktionen $(\widetilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass

a) $\widetilde{f}_n(s) \to \widetilde{f}(s)$ für λ_M fast alle $s \in S$ und

b) die Folge $(I^{(1)}(\widetilde{f}_n \, \mathbb{1}_A))$ für alle $A \in \sigma(\mathbf{S})$ stochastisch konvergiert.

Dies erlaubt es uns nun, für

$$I_p(\widetilde{M}) := \{\widetilde{f} : (S, \sigma(S)) \to (\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C})) : \widetilde{f} \text{ ist partiell integrierbar}\}$$

folgenden Satz zu formulieren:

4.1.4 Satz

Für obige Konventionen gelten die nachstehenden Eigenschaften:

a) Falls $\widetilde{f} \in f_p(\widetilde{M})$, so ist $I^{(1)}(\widetilde{f} \, \mathbb{1}_A)$ für alle $A \in \sigma(\mathbf{S})$ unendlich teilbar und die log-charakteristische Funktion ist durch

$$\mathbb{R}^2 \ni t \to \int_A K_M \left(\Xi(\widetilde{f}(s)^* t), s \right) \lambda_M(ds)$$

gegeben.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{f}_1, ..., \widetilde{f}_n \in I_p(\widetilde{M})$. Dann gilt für beliebige $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}\left[e^{i \Sigma_{j=1}^n < I^{(1)}(\widetilde{f}_j), t_j >} \right] = \exp\left(\int_S K_M \left(\Xi\left(\sum_{j=1}^n \widetilde{f}_j(s)^* t \right), s \right) \lambda_M(ds) \right)$$

c) Seien $\widetilde{f}, \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, ... \in I_p(\widetilde{M})$. So konvergiert $I^{(1)}(\widetilde{f}_n)$ genau dann stochastisch gegen $I^{(1)}(\widetilde{f})$, wenn

$$\forall t \in \mathbb{R}^2 : \int_S K_M \left(\Xi\left((\widetilde{f}_n(s) - \widetilde{f}(s))^* t \right), s \right) \lambda_M(ds) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

d) $I_p(\widetilde{M})$ ist ein Vektorraum und die Abbildung $I(\widetilde{M}) \ni \widetilde{f} \mapsto I^{(1)}(\widetilde{f})$ ist fast sicher linear.

e) Die Aussage

$$\widetilde{f} \in I(\widetilde{M})$$

ist äquivalent zur Existenz von

$$\int_S K_M(\widetilde{f}(s)^* t, s) \lambda_M(ds)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Dies ist die Aussage von Theorem 4.4.4 a), b), d) sowie e) aus [10]. Die Aussage e) entspricht der Aussage von Theorem 5.8 aus [7]. □

Wir erhalten nun aus Theorem 3.1.11 aus [8] die Aussage, dass es sich bei der Abbildung

$$\psi_s(u) := \int_{\mathbb{R}^m} (\cos < x,u > -1)\, \varphi(s,dx)$$

um die log-charakteristische Funktion einer symmetrisch operatorstabilen Verteilung μ_s auf $\mathbb{R}^2$ handelt, wobei es sich bei der Funktion φ um das Levymaß aus (4.1) handelt. Die genaue Darstellung der Funktion $\psi_s(u)$ ist dabei nach Remark 2.3 aus [6] für uns interessant, da sie in direktem Zusammenhang mit der Funktion K_M und damit der Darstellung der charakteristischen Funktion steht. Es gilt folgender Satz.

4.1.5 Satz

Sei $\alpha : \mathbb{R}^d \to [a,b] \subset (0,2)$ eine stetige Funktion. Des Weiteren seien die Funktionen $\psi_s(u)$ und $\varphi(s,C)$ wie zuvor definiert. Ist mit σ nun ein isotropisches Maß gegeben, so gilt für jeden Einheitsvektor $v = \frac{u}{||u||}$

$$\psi_s(u) = -||u||^{\alpha(s)} \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \cos(< x,v >))\, \varphi(s,dx).$$

Beweis: Wir beginnen mit der Darstellung für $\psi_s(u)$. Für $u = 0$ ist die Behauptung trivial, denn es gilt $\psi_s(0) = 0$, daher setzen wir ohne Einschränkung $u \neq 0$ voraus. Es gilt für $\varphi(s,dx) = \varphi_s(dx)$

$$\begin{aligned}
\psi_s(u) &= \int_{\mathbb{R}^2} (\cos < x,u > -1)\, \varphi(s,dx) \\
&= ||u||^{\alpha(s)} \int_{\mathbb{R}^2} (\cos < x,u > -1) \left(||u||^{-\alpha(s)} \cdot \varphi_s\right)(dx) \\
&= ||u||^{\alpha(s)} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\cos < \frac{x}{||u||}, u > -1\right) \varphi(s,dx) \\
&= ||u||^{\alpha(s)} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\cos < x, \frac{u}{||u||} > -1\right) \varphi(s,dx)
\end{aligned}$$

Anschließend setzen wir die Definition der Funktion $\varphi(s,dx)$ ein und verweisen dabei auf Bemerkung 2.4.11 aus [10] und die damit verbunde algebraische Induktion, sodass wir dies folgendermaßen interpretieren: Für alle messbaren Abbildungen $f : \Gamma_2 := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to [0,\infty)$ gilt:

$$\int_{\Gamma_2} f(x)\varphi(s,dx) = \int_{S_0} \int_0^\infty f(r^{\frac{1}{\alpha(s)}} \vartheta) r^{-2} \sigma(d\vartheta) dr.$$

Des Weiteren halten wir fest, dass wir ausgehend von einem Vektor v durch Drehung mit einer Orthogonalen Matrix A jeden anderen Einheitsvektor mit Av erhalten können. Wir wählen also die Matrix A so, dass $Av = \frac{u}{||u||}$ gilt. Damit ergibt sich

$$\psi_s(u) = ||u||^{\alpha(s)} \int_0^\infty \int_{S_0} \left(\cos < r^{\frac{1}{\alpha(s)}} \vartheta, \frac{u}{||u||} > -1\right) r^{-2} \sigma(d\vartheta)\, dr$$

$$
\begin{aligned}
&= ||u||^{\alpha(s)} \int_0^\infty \int_{S_0} \left(\cos < r^{\frac{1}{\alpha(s)}} \vartheta, Av > -1\right) r^{-2} \sigma(d\vartheta)\, dr \\
&= ||u||^{\alpha(s)} \int_0^\infty \int_{S_0} \left(\cos < r^{\frac{1}{\alpha(s)}} A^t \vartheta, v > -1\right) r^{-2} \sigma(d\vartheta)\, dr.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir in der letzten Umformung eine Eigenschaft des Skalarprodukts ausgenutzt und merken zusätzlich an, dass es sich bei A^t ebenfalls um eine orthogonale Matrix handelt. Nun folgt aufgrund der Isotropie beziehungsweise durch die Rotationsinvarianz des Maßes σ, dass

$$
\psi_s(u) = ||u||^{\alpha(s)} \int_0^\infty \int_{S_0} \left(\cos < r^{\frac{1}{\alpha(s)}} \vartheta, v > -1\right) r^{-2} \sigma(d\vartheta)\, dr
$$

gilt. Berücksichtigen wir nun erneut die Darstellung der Funktion $\varphi(s,dx)$, so erhalten wir

$$
\psi_s(u) = ||u||^{\alpha(s)} \int_{\mathbb{R}^2} (\cos < x, v > -1)\, \varphi(s,dx).
$$

□

Den Wert $\int_{\mathbb{R}^2} (\cos < x,v > -1)\, \varphi(s,dx)$ kürzen wir im Folgenden stets mit $-c_0(s)$ ab. Dabei sei angemerkt, dass durch die Eigenschaft des Lévy Maßes φ stets $0 < c_0(s) < \infty$ gilt. Durch diese Darstellung der Abbildung $\psi_s(u)$ erhalten wir mit Remark 2.3 aus [6] für $c(s) := \int_{\mathbb{R}^2} \min(1, ||x||^2)\varphi(s,dx)$ nun den Zusammenhang

$$
K_M(s,u) = c(s)^{-1} \psi_s(u) = -c(s)^{-1} c_0(s) ||u||^{\alpha(s)} =: -\tilde{c}(s) ||u||^{\alpha(s)}, \tag{4.4}
$$

wobei $c(s) = \int_{\mathbb{R}^2} \min(1, ||x||^2)\varphi(s,dx) > 0$, sodass $\tilde{c}$ wohldefiniert ist. Im Laufe dieses und des fünften Kapitels benötigen wir Majoranten, welche oft unabhängig von gewissen Parametern sein müssen. Aufgrund dessen schätzen wir die Konstante $\tilde{c}(s)$ nun an dieser Stelle stellvertretend ab, in dem wir Majoranten für $c_0(s)$ sowie $c(s)$ finden. Dazu sei noch angemerkt, dass die Schreibweise $x^{a,b} := x^a + x^b$ beziehungsweise $x^{\frac{1}{a,b}} := x^{\frac{1}{a}} + x^{\frac{1}{b}}$ gelten soll. Es ist

$$
\begin{aligned}
c(s) &= \int_{\mathbb{R}^2} \min(1, ||x||^2)\varphi(s,dx) \qquad (4.5)\\
&= \int_0^\infty \int_{S_0} \min\left(1, ||r^{\frac{1}{\alpha(s)}} \vartheta||^2\right) r^{-2} \sigma(d\vartheta)\, dr \qquad (4.6)\\
&\leq \int_0^\infty \int_{S_0} \min\left(1, ||r^{\frac{1}{a,b}} \vartheta||^2\right) r^{-2} \sigma(d\vartheta)\, dr \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
c(s) \geq \int_0^\infty \int_{S_0} \min\left(1, ||r^{\frac{1}{a}} \vartheta||^2, ||r^{\frac{1}{b}} \vartheta||^2\right) r^{-2} \sigma(d\vartheta)\, dr, \tag{4.8}
$$

sodass wir sowohl eine von s unabhängige Majorante als auch Minorante von $c(s)$ gefunden haben. Da diese Abschätzung lediglich durch die Abschätzung der Funktion $\alpha(s)$ in der Definition von $\varphi(s,dx)$ getroffen wurde, erhalten wir analog eine von s unabhängige Minorante und Majorante von

$c_0(s)$ und durch diese schlussendlich zwei Abschätzungen von $\tilde{c}(s)$. Dabei bezeichnen wir im Laufe der Arbeit die Majorante mit $\bar{c}$ und die Minorante mit $\underline{c}$.

In den nachstehenden zwei Unterkapiteln betrachten wir nun die *moving average* sowie die *harmonizable* Darstellung eines OSMSRFs und studieren diese.

4.2 *Moving Average Darstellung*

Wir beginnen das Kapitel mit der *moving average* Darstellung eines OSMSRFs. Dabei sei angemerkt, dass die folgenden Ergebnisse in allgemeinerer Form bereits in den Ausführungen in [6] zu finden sind. Aufgrund der Vollständigkeit und späterer Verweise auf die geführten Rechnungen in diesem speziellen Fall geben wir die Beweise an und starten mit der Definition. Im Laufe dieses Kapitels sowie des fünften Kapitels sei E stets eine reellwertige Matrix, dessen kleinster Eigenwert einen Realteil größer als $\frac{1}{2}$ besitzt. Dies folgt aus den Voraussetzungen aus Theorem 3.1.11 aus [8]

4.2.1 Definition

Seien β, H zwei positive reelle Zahlen mit $\beta > H$ sowie $\alpha : \mathbb{R}^d \to [a,b] \subset (0,2]$ eine stetige Funktion. Weiter sei $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetige E-homogene und (β,E)-*admissible* Funktion. Mit $Z_{\alpha(\cdot)}$ bezeichnen wir das zugehörige *multistable independently scattered symmetric* α *stable random measure* aus (4.2) mit Lebesgueschem Kontrollmaß, welches wir kurz MSIS-SαS-RM nennen werden. Damit definieren wir die *moving average* Darstellung eines OSMSRFs für alle $t \in \mathbb{R}^d$ durch

$$X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t-x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} - \varphi(-x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} Z_{\alpha(\cdot)}(dx).$$

Folgend zeigen wir, dass unsere soeben definierte Darstellung existiert:

4.2.2 Satz

Seien β, H sowie α, φ und $X_\varphi^{\alpha(\cdot)}$ wie in Definition 4.2.1. So existiert die *moving average* Darstellung eines OSMSRF.

Beweis: Wie zu Beginn des Kapitels in Lemma 4.1.1 bereits dargelegt, müssen wir zeigen, dass der Integrand von $X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(t)$ im $L^{\alpha(\cdot)}(\nu, m)$ liegt. Mit anderen Worten möchten wir zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \varphi(t-x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} - \varphi(-x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} \right|^{\alpha(x)} dx < \infty$$

gilt. Dazu gehen wir zunächst analog zum Beweis von Satz 3.1.2 vor und zerlegen den Integrationsbereich für ein $R > 0$ in die beiden Teilbereiche $\{\tau(x) \leq R\}$ sowie $\{\tau(x) > R\}$. Wir schreiben konventionsgemäß

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi}(t) := \int_{\tau(x)\leq R} \left|\varphi(t-x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} - \varphi(-x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\right|^{\alpha(x)} dx$$

sowie

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi}(t) := \int_{\tau(x)> R} \left|\varphi(t-x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} - \varphi(-x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\right|^{\alpha(x)} dx.$$

Zudem benötigen wir die Ungleichung aus Lemma 2.1.6 a), welche

$$|y+z|^{\alpha(x)} \leq 2^{\alpha(x)} \left(|y|^{\alpha(x)} + |z|^{\alpha(x)}\right).$$

besagt und so erhalten wir für $\Gamma^{(1)}_{\alpha,\phi}(t)$ in Verbindung mit $a \leq \alpha(x) \leq b$ die Aussage

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi}(t) &\leq \int_{\tau(x)\leq R} 2^{\alpha(x)} \left(|\varphi(t-x)|^{H\alpha(x)-q} + |\varphi(-x)|^{H\alpha(x)-q}\right) dx \\ &\leq \int_{\tau(x)\leq R} 2^{b} \left(\varphi(t-x)^{Ha-q} + \varphi(t-x)^{Hb-q} + \varphi(-x)^{Ha-q} + \varphi(-x)^{Hb-q}\right) dx.\end{aligned}$$

Anschließend benutzen wir die Abschätzungen für E-homogene Funktionen aus der Gleichung (2.1) und erlangen

$$\begin{aligned}&\leq 2^b \int_{\tau(x)\leq R} (M_\varphi + m_\varphi)^{Ha-q}\, \tau(t-x)^{Ha-q} + (M_\varphi + m_\varphi)^{Hb-q}\, \tau(t-x)^{Hb-q} \\ &\quad + (M_\varphi + m_\varphi)^{Ha-q}\, \tau(-x)^{Ha-q} + (M_\varphi + m_\varphi)^{Hb-q}\, \tau(-x)^{Hb-q}\, dx \\ &= 2^b \int_{\tau(x)\leq R} (M_\varphi + m_\varphi)^{Ha-q} \left(\tau(t-x)^{Ha-q} + \tau(-x)^{Ha-q}\right) \\ &\quad + (M_\varphi + m_\varphi)^{Hb-q} \left(\tau(t-x)^{Hb-q} + \tau(-x)^{Hb-q}\right) dx.\end{aligned}$$

Mit der Linearität des Integrals aus Lemma 2.6.6 a) und der Aussage aus Lemma 2.6.7 erhalten wir die Endlichkeit der vier Integrale, die sich ergeben, wenn man jeden Summanden des Integranden einzeln integriert, durch die beiden wahren Aussagen

$$\begin{aligned}&Ha - q > -q, \text{ sowie} \\ &Hb - q > -q.\end{aligned}$$

Im Anschluss bleibt noch die Endlichkeit des Integrals $\Gamma^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi}(t)$ zu zeigen. Da die Funktion φ E-homogen ist, ergibt sich zuerst

$$\varphi(t+x) = \varphi\left(\varphi(x)^{E}\varphi(x)^{-E}(x+t)\right) = \varphi(x)\varphi\left(\varphi(x)^{-E}x + \varphi(x)^{-E}t\right).$$

Da zusätzlich $\varphi\left(\varphi(x)^{-E}x\right) = \varphi(x)^{-1}\varphi(x) = 1$ gilt, folgt nun aufgrund von φ (β, E)-*admissible* folgende Ungleichung

$$\left|\varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right) - 1\right| \leq C_1 \tau(t)^{\beta}\tau(x)^{-\beta}.$$

Des Weiteren wenden wir den ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf die Funktion $f(y) = y^{H-\frac{q}{\gamma}}$ für $\gamma > 0$ mit $a = \varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}$ sowie $b = 1$ in Verbindung mit der Abschätzung $a \leq \alpha(x) \leq b$ an, sodass die betrachtete Differenz mit einem Produkt nach oben abgeschätzt werden kann, dessen Faktoren wenig Mühe bereiten. Mit diesen Vorüberlegungen erhalten wir nun insgesamt

$$\left|\varphi(t+x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} - \varphi(x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\right| = \varphi(x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\left|\varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} - 1\right| \tag{4.9}$$

$$\leq \varphi(x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\left(\left|\varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{a}} - 1\right| + \left|\varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{b}} - 1\right|\right) \tag{4.10}$$

$$\leq \varphi(x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\Bigg(\left(H-\frac{q}{a}\right)\xi^{H-\frac{q}{a}-1}\left|\varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right) - 1\right| \tag{4.11}$$

$$+\left(H-\frac{q}{b}\right)\xi^{H-\frac{q}{a}-1}\left|\varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right) - 1\right|\Bigg) \tag{4.12}$$

$$\leq C_{a,b}(x)\varphi(x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\varphi(x)^{-\beta}\tau(t)^{\beta}, \tag{4.13}$$

wobei

$$C_{a,b}(x) := \left(H-\frac{q}{a}\right)\xi^{H-\frac{q}{a}-1} + \left(H-\frac{q}{b}\right)\xi^{H-\frac{q}{a}-1}$$

mit

$$\xi \in \left(\varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}, 1\right) \tag{4.14}$$

bzw. im Falle von $\varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} > 1$

$$\xi \in \left(1, \varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\right) \tag{4.15}$$

gilt. Für die Endlichkeit von $\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t)$ benötigen wir also eine obere, von x unabhängige Schranke für $C_{a,b}(x)$, beziehungsweise eine obere Abschätzung für den Parameter ξ.
Im Fall (4.14) können wir direkt $\xi \leq 1$ benutzen, während im Fall 4.15) - ohne Einschränkung nur für einen Summanden - mit Hilfe von $x = \tau(x)^{E}l(x)$ die nachstehende Aussage

$$\begin{aligned}
\xi \leq & \varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} \\
\leq & \varphi\left(\varphi(x)^{-E}t + \varphi(x)^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{a}} \\
= & \varphi\left(\varphi(\tau(x)^{E}l(x))^{-E}t + \varphi(\tau(x)^{E}l(x))^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{a}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi\left(\tau(x)^{-E}\varphi(l(x))^{-E}t + \tau(x)^{-E}\varphi(l(x))^{-E}x\right)^{H-\frac{q}{a}} \\
&= \varphi\left(\tau(x)^{-E}\varphi(l(x))^{-E}t + \tau(x)^{-E}\varphi(l(x))^{-E}\tau(x)^{E}l(x)\right)^{H-\frac{q}{a}} \\
&= \varphi\left(\tau(x)^{-E}\varphi(l(x))^{-E}t + \varphi(l(x))^{-E}l(x)\right)^{H-\frac{q}{a}}.
\end{aligned}
$$

gilt. Da nun das Bild einer kompakten Menge unter eine stetigen Abbildung ebenfalls wieder kompakt ist und ebenso $l(x) \in S_0$ gilt, folgt mit $\lim_{x\to\infty} \tau(x)^{-E}\varphi(l(x))^{-E}t = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$

$$
\varphi\left(\tau(x)^{-E}\varphi(l(x))^{-E}t + \varphi(l(x))^{-E}l(x)\right)^{H-\frac{q}{a}} \leq C
$$

für eine Konstante $C > 0$. Damit folgt schlussendlich die Existenz von $\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t)$ durch

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi}(t) &\leq \int_{\tau(x)>R} \left(C_{a,b}(x)\varphi(x)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\varphi(x)^{-\beta}\tau(t)^{\beta}\right)^{\alpha(x)} dx && (4.16)\\
&\leq \int_{\tau(x)>R} C^{\alpha(x)}_{a,b}(x)\varphi(x)^{(H-\beta)\alpha(x)-q}\tau(t)^{\alpha(x)\beta}\, dx && (4.17)\\
&\leq \int_{\tau(x)>R} \left(C^{b}_{a,b}+C^{a}_{a,b}\right)\left(\varphi(x)^{(H-\beta)a-q}+\varphi(x)^{(H-\beta)b-q}\right)\left(\tau(t)^{b\beta}+\tau(t)^{a\beta}\right) dx && (4.18)\\
&= (C^{b}_{a,b}+C^{a}_{a,b})(\tau(t)^{a\beta}+\tau(t)^{b\beta})\left(\int_{\tau(x)>R}\varphi(x)^{(H-\beta)a-q}+\int_{\tau(x)>R}\varphi(x)^{(H-\beta)b-q}\right) < \infty, && (4.19)
\end{aligned}
$$

wobei die Endlichkeit der beiden Integrale aus der letzten Zeile durch die Aussage von Lemma 2.6.7 folgt, denn es gelten sowohl $(H-\beta)a-q < -q$ als auch $(H-\beta)b-q < -q$.
Zuletzt sei noch angemerkt, dass $C_{a,b}$ aus $C_{a,b}(x)$ durch obige Abschätzung von ξ entsteht und damit nicht mehr von x abhängt. Damit haben wir nun die Existenz von $\Gamma^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi}(t)$ sowie $\Gamma^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi}(t)$ zeigen können, aus denen schließlich die Existenz der *moving average* Darstellung eines OSMSRFs folgt. □

Im Anschluss beschreiben wir in folgendem Lemma das Skalierungsverhalten der *moving average* Darstellung eines OSMSRFs.

4.2.3 Korollar

Seien β, H sowie α, φ und $Z_{\alpha(\cdot)}$ wie in Definition 4.2.1. So gilt für $c > 0$ die folgende Skalierungseigenschaft

$$
\left\{X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi}\left(c^{E}x\right)\right\}_{x\in\mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \left\{c^{H}X^{\alpha(c^{E}\cdot)}_{\varphi}(x)\right\}_{x\in\mathbb{R}^d},
$$

wobei die Schreibweise $X_{\varphi}^{\alpha(c^E \cdot)}(x)$ für $\vartheta \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{E}\left[e^{i\vartheta X_{\varphi}^{\alpha(c^E \cdot)}(x)}\right] := \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left|\vartheta\left(e^{-\lambda\varphi(x-y)}\varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E y)}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(c^E y)} dy\right) \tag{4.20}$$

eindeutig beschrieben wird. Ebenso wie bei der Darstellung der *tempered operator stable scaling random fields* erhalten wir auch hier keine Selbstähnlichkeit.
Der Unterschied liegt jedoch darin, dass sich die Skalierung im Argument mit c^E nicht auf den Parameter λ auswirkt, sondern sie im Falle der *moving average* Darstellung eines OSMSRFs skalierend auf die Stabilitätsfunktion α Einfluss nimmt.

Beweis: Um den Beweis zu erbringen, betrachten wir ähnlich zu Beweis von Lemma 4.2.2 die charakteristische Funktion des entsprechenden Zufallsfeldes und substituieren anschließend $y = c^E z$. Daraus erhalten wir, resultierend aus dem Transformationssatz, zusätzlich den Faktor c^q. Demnach folgt mit $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ und $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X_{\varphi}^{\alpha(\cdot)}(c^E x_j)}\right] &= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(c^E x_j - y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right)\right|^{\alpha(y)} dy\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(c^E x_j - c^E y)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E y)}} - \varphi(-c^E y)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(c^E y)} c^q\, dy\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(c^E (x_j - y))^{H-\frac{q}{\alpha(c^E y)}} - \varphi(-c^E y)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(c^E y)} c^q\, dy\right) \\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^H\left(\varphi(x_j - y)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E y)}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(c^E y)} dy\right) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^H X_{\varphi}^{\alpha(c^E \cdot)}(x_j)}\right].
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung und die oben definierte Skalierungseigenschaft bewiesen. □

Bei der *moving average* Darstellung eines OSMSRFs existiert keine Selbstähnlichkeit, da eine Skalierung des Arguments zwingend mit einer Skalierung des Stabilitätsparameters einhergeht. Analog zu unserer bisherigen Vorgehensweise beschäftigt sich das nachfolgende Lemma mit dem Nachweis der stochastischen Stetigkeit.

4.2.4 Lemma

Seien H,λ und sei $X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}$ wie in Definition 4.2.1. Dann ist $X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}$ stochastisch stetig, also gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\operatorname*{plim}_{x\to 0} X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x_0+x) = X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x_0).$$

Beweis: Zur Erbringung des Beweises des Lemmas zeigen wir die nach der Aussage von Lemma 4.1.1 c) äquivalente Aussage

$$\lim_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{-\lambda\varphi(x+x_0-y)}\varphi(x+x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - e^{-\lambda\varphi(x_0-y)}\varphi(x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right|^{\alpha(y)} dy = 0.$$

Wir erhalten durch die Substitution $x_0 - y = -z$ den Integranden

$$\left|e^{-\lambda\varphi(x-z)}\varphi(x-z)^{H-\frac{q}{\alpha(x_0+z)}} - e^{-\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha(x_0+z)}}\right|^{\alpha(x_0+z)}.$$

Diesen Integranden schätzen wir zudem mithilfe des Satzes 4.2.2 für ein $R > 0$ und den Gleichungen (4.13) sowie (4.19) wie folgt ab:

$$\begin{aligned}&\left|e^{-\lambda\varphi(x-z)}\varphi(x-z)^{H-\frac{q}{\alpha(x_0+z)}} - e^{-\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha(x_0+z)}}\right|^{\alpha(x_0+z)}\\ \le&\mathbb{1}_{\{\tau(z)\le R\}}(z)\, C_{a,b}^{a,b}\,\varphi(z)^{(H-\beta)\alpha(x_0+z)-q}(\tau(x)^{\beta})^{a,b} + \mathbb{1}_{\{\tau(z)>R\}}\, C_{a,b}^{a,b}(\tau(x)^{\beta})^{a,b} C_{\varphi},\end{aligned}$$

wobei

$$C_{\varphi} := \int_{\tau(z)>R}\varphi(z)^{(H-\beta)a-q}\,dz + \int_{\tau(z)>R}\varphi(z)^{(H-\beta)b-q}\,dz$$

ist. Setzen wir nun voraus, dass x bereits hinreichend nahe an 0 ist, genauer, dass $\tau(x) \le 1$ gilt, so erhalten wir mit

$$\mathbb{1}_{\{\tau(z)\le R\}}(z)\, C_{a,b}^{a,b}\,\varphi(z)^{(H-\beta)\alpha(x_0+z)-q} + \mathbb{1}_{\{\tau(z)>R\}}(z)\, C_{a,b}^{a,b} C_{\varphi}$$

eine konvergente von x unabhängige Majorante und mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt demnach

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{-\lambda\varphi(x+x_0-y)}\varphi(x+x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - e^{-\lambda\varphi(x_0-y)}\varphi(x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right|^{\alpha(y)} dy\\ =&\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{x\to 0}\left|e^{-\lambda\varphi(x+x_0-y)}\varphi(x+x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - e^{-\lambda\varphi(x_0-y)}\varphi(x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right|^{\alpha(y)} dy\\ =&0.\end{aligned}$$

Also ist die *moving average* Darstellung eines OSMSRFs stochastisch stetig. □

Nachdem die stochastische Stetigkeit nun belegt wurde, widmen wir uns im nächsten Satz der Untersuchung das Tangentenfeldes der *moving average* Darstellung eines OSMSRFs und erhalten damit Aufschluss über die lokale Struktur.

4.2.5 Satz

Seien β, H sowie α, φ und $Z_{\alpha(\cdot)}$ wie in Definition 4.2.1. Dann gilt für die *moving average* Darstellung eines OSMSRFs für $x, t \in \mathbb{R}^d$

$$c^{-H}\left(X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t) - X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(x)\right) \underset{c\to 0}{\overset{fdd}{\Longrightarrow}} X_\varphi'^{\alpha(\cdot)}(t).$$

Hierbei setzen wir

$$X_\varphi'^{\alpha(\cdot)}(t) := X_\varphi^{\alpha(x)}(t).$$

Beweis: Um den Beweis zu führen, betrachten wir zunächst die Differenz $X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t) - X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(x)$. Es folgt mit der Substitution $x - y = -z$

$$\begin{aligned}
&X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t) - X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+c^E t - y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - \left[\varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right] Z_{\alpha(\cdot)}(dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x+c^E t - y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - \varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\, Z_{\alpha(\cdot)}(dy)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(c^E t - z)^{H-\frac{q}{\alpha(x+z)}} - \varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha(x+z)}}\, Z_{\alpha(\cdot)}(dz)\\
&=: X_\varphi^{\alpha_x(\cdot)}(c^E t).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Skalierungseigenschaft, die wir in Lemma 4.2.3 gezeigt haben, folgt nun

$$\left\{X_\varphi^{\alpha_x(\cdot)}(c^E t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \left\{c^H X_\varphi^{\alpha_x(c^E\cdot)}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d}.$$

Diese Überlegungen liefern uns nun für $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ und $t_1, ...t_n \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^{-H}\left(X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t_j) - X_\varphi^{\alpha(\cdot)}(x)\right)\right)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X_\varphi^{\alpha_x(c^E\cdot)}(t_j)\right)\right]\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(x+c^E y)} dy\right).
\end{aligned}$$

Nehmen wir jetzt an, dass wir Limes und Integration vertauschen dürften, so würde aufgrund der Stetigkeit der Funktionen $\varphi(\cdot)$ und $\alpha(\cdot)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0}\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(x+c^E y)}dy\right)\\
&=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{c\to 0}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(x+c^E y)}dy\right)\\
&=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\right)\right|^{\alpha(x)}dy\right)\\
&=\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X_\varphi^{\alpha(x)}(t_j)\right)\right]
\end{aligned}$$

folgen und somit in Verbindung mit dem Stetigkeitssatz von Levy die zu zeigende Aussage. Um diesen Schluss zu ziehen, benötigen wir allerdings abschließend eine von c unabhängige Majorante des Integranden. Um diese zu bestimmen, betrachten wir

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha_x(c^E\cdot),\varphi}(t_j):=\int_{\tau(y)\le R}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(x+c^E y)}dy$$

sowie

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha_x(c^E\cdot),\varphi}(t_j):=\int_{\tau(y)> R}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(x+c^E y)}dy$$

Für die Majorante von $\Gamma^{(1)}_{\alpha_x(c^E\cdot),\varphi}(t_j)$ benutzen wir zunächst die Abschätzung (3.16). Es resultiert

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha_x(c^E\cdot),\varphi}(t_j)\le 2^{(n-1)\alpha(x+c^E y)}\sum_{j=1}^n|\vartheta_j|^{\alpha(x+c^E y)}\left|\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right|^{\alpha(x+c^E y)}.$$

Anschließend benutzen wir die Ungleichung aus Lemma 2.1.6 b) und anschließend a) und erhalten

$$\begin{aligned}
&\le 2^{n\alpha(x+c^E y)}\sum_{j=1}^n|\vartheta_j|^{\alpha(x+c^E y)}\left(\varphi(t_j-y)^{H\alpha(x+c^E y)-q}+\varphi(-y)^{H\alpha(x+c^E y)-q}\right)\\
&\le 2^{nb}\sum_{j=1}^n\left(|\vartheta_j|^a+|\vartheta_j|^b\right)\left(\varphi(t_j-y)^{Ha-q}+\varphi(t_j-y)^{Hb-q}+\varphi(-y)^{Ha-q}+\varphi(-y)^{Hb-q}\right).
\end{aligned}$$

Damit haben wir also eine von c unabhängige Majorante gefunden und es folgt aufgrund von $Hb-q>-q$ sowie $Ha-q>-q$ die Existenz von $\Gamma^{(1)}_{\alpha_x(c^E\cdot),\varphi}(t_j)$.

Um die entsprechende Existenz einer von c unabhängigen Majorante von $\Gamma^{(2)}_{\alpha_x(c^E\cdot),\varphi}(t_j)$ zu finden, benutzen wir zuerst die Abschätzung (3.16) und erkennen

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n} \vartheta_j \varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right|^{\alpha(x+c^E y)} \\
&\leq 2^{(n-1)\alpha(x+c^E y)} \sum_{j=1}^{n} |\vartheta_j|^{\alpha(x+c^E y)} \left|\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right|^{\alpha(x+c^E y)}.
\end{aligned}$$

Im Anschluss verwenden wir Abschätzung (4.13) und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{(n-1)b} C_{a,b}(y)^{\alpha(x+c^E y)} \sum_{j=1}^{n} |\vartheta_j|^{\alpha(x+c^E y)} \varphi(y)^{(H-\beta)\alpha(x+c^E y)-q} \tau(t_j)^{\beta\alpha(x+c^E y)} \\
&\leq 2^{(n-1)b} \left(C_{a,b}^{b} + C_{a,b}^{a}\right) \sum_{j=1}^{n} \left(|\vartheta_j|^a + |\vartheta_j|^b\right) \left(\varphi(y)^{(H-\beta)a-q} + \varphi(y)^{(H-\beta)b-q}\right) \left(\tau(t_j)^{a\beta} + \tau(t_j)^{b\beta}\right).
\end{aligned}$$

Durch diese Ungleichung haben wir aber unsere konvergente, von c unabhängige Majorante gefunden, denn, da $H-\beta<0$, folgt, dass

$$(H-\beta)a-q<-q$$

sowie

$$(H-\beta)b-q<-q$$

gilt. Nach Lemma 2.6.7 existieren damit die Integrale

$$\int_{\tau(y)>R} \varphi(y)^{(H-\beta)a-q} dy < \infty$$

und

$$\int_{\tau(y)>R} \varphi(y)^{(H-\beta)b-q} dy < \infty.$$

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen und wir halten zusammenfassend fest, dass sich im Tangentenfeld der *moving average* Darstellung eines OSMSRFs die *moving average* Darstellung eines OSSRFs wiederfindet. □

Mit diesem Satz haben wir nun die abschließende Eigenschaft gezeigt.

Wir rufen noch einmal kurz in Erinnerung, dass die *moving average* Darstellung eines OSMSRFs demnach existiert, stochastisch stetig ist und wir mit Hilfe der speziellen Skalierungseigenschaft in der Lage waren, die lokale Struktur zu untersuchen.

4.3 *Harmonizable* Darstellung

In diesem Abschnitt des Kapitels beschäftigen wir uns mit der *harmonizable* Darstellung eines OSMSRFs. Dazu definieren wir folgend das zu studierende Objekt.

4.3.1 Definition

Seien $0 < H < a_1$, wobei $H \in \mathbb{R}$ und a_1 der kleinste Realteil aller Eigenwerte der zugehörigen Matrix E sind. Weiter sei $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine E^t-homogene stetige Funktion und $\alpha : \mathbb{R} \to [a,b] \subset (0,2)$ ebenfalls stetig. So definieren wir die *harmonizable* Darstellung eines *operator scaling multistable random fields* für $t \in \mathbb{R}^d$ durch

$$X_\psi^{\alpha(\cdot)}(t) := \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i<t,\xi>} - 1\right) \psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}} W_{\alpha(\cdot)}(d\xi),$$

wobei wir mit $W_{\alpha(\cdot)}$ als das *multistable isotropic* IS-SαS-RM bezeichnen, welches durch die spezielle Darstellung $\psi_s(u)$ aus Satz 4.1.5 in Verbindung mit dem lebesgueschen Kontrollmaß eindeutig charakterisiert wird.

Nachfolgend klären wir die Existenz des zuvor definierten Zufallsfeldes.

4.3.2 Satz

Seien H sowie ψ, α und für $t \in \mathbb{R}^d$ zudem $X_\psi^{\alpha(\cdot)}(t)$ wie in Definition 4.3.1 gegeben, so existiert die *harmonizable* Darstellung eines OSMSRFs.

Beweis: Für die Existenz des Zufallsfeldes müssen wir gemäß der Aussage aus Satz 4.1.4 e) die Endlichkeit von

$$\Gamma_{\alpha(\cdot),\psi}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} K_M\left(\left(\left(e^{i<t,\xi>} - 1\right) \psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\right)^* t, \xi\right) d\xi$$

nachweisen. Dazu verwenden wir zuerst die Darstellung von K_M aus (4.4) und betrachten anschließend die Schreibweise in verallgemeinerten Polarkoordinaten aus Lemma 2.6.9 bezüglich E^t. Die Endlichkeit der auftretenden Funktion $\tilde{c}(s)$ haben wir dabei bereits in (4.7) und (4.8) gezeigt, sodass wir damit folgenden Ausdruck betrachten:

$$\int_0^\infty \int_{S_0} \left| e^{i<t,r^{E^t}\vartheta>} - 1 \right|^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)} \psi(r^{E^t}\vartheta)^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-q} r^{q-1} \sigma(d\vartheta)\, dr.$$

Anschließend nutzen wir die E^t-Homogenität der Funktion ψ aus und es ergibt sich

$$= \int_0^\infty \int_{S_0} \left| e^{i<t,r^{E^t}\vartheta>} - 1 \right|^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)} \psi(\vartheta)^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-q} \, r^{H\alpha(r^{E^t}\vartheta-1)} \sigma(d\vartheta)\, dr.$$

Des Weiteren betrachten wir nun, um uns die Rechnung zu erleichtern, den Ausdruck $\left| e^{i<t,r^{E^t}\vartheta>} - 1 \right|^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)}$ und erhalten für $\delta \in (0, a_1 - H)$, entsprechend zu [13]

$$\begin{aligned} \left| e^{i<t,r^{E^t}\vartheta>} - 1 \right|^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)} &\leq C \left(1 + ||t||^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)}\right) \min\left(1, r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}\right) \\ &\leq C \left(1 + ||t||^a + ||t||^b\right) \min\left(1, r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}\right). \end{aligned}$$

Damit können wir also nun

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{S_0} C \left(1 + ||t||^a + ||t||^b\right) \min\left(r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}, 1\right) \psi(\vartheta)^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-q} r^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-1} \sigma(d\vartheta)\, dr \\ = &\int_0^\infty \int_{S_0} C_{a,b,t} \min\left(r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}, 1\right) \psi(\vartheta)^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-q} r^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-1} \sigma(d\vartheta)\, dr \end{aligned}$$

betrachten, wobei $C_{a,b,t} := C\left(1 + ||t||^a + ||t||^b\right)$ gilt. Hier schätzen wir im nächsten Schritt die Funktion α ab und erhalten

$$\leq \int_0^\infty \int_{S_0} C_{a,b,t} \min\left(r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}, 1\right) \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) r^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-1} \sigma(d\vartheta)\, dr.$$

Die Positivität des Integranden nutzen wir nun aus, in dem wir mit dem Satz von Fubini zeigen, dass

$$= \int_{S_0} \int_0^\infty C_{a,b,t} \min\left(r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}, 1\right) \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) r^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-1} dr\, \sigma(d\vartheta) \tag{4.21}$$

$$= \int_{S_0} \int_0^1 C_{a,b,t} \min\left(r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}, 1\right) \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) r^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-1} dr\, \sigma(d\vartheta) \tag{4.22}$$

$$+ \int_{S_0} \int_1^\infty C_{a,b,t} \min\left(r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}, 1\right) \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) r^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-1} dr\, \sigma(d\vartheta) \tag{4.23}$$

$$=: I_{(0,1)} + I_{(1,\infty)} \tag{4.24}$$

gilt. Für das erste Integral $I_{(0,1)}$ erhalten wir aus dem Faktor $\min\left(r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}, 1\right)$ in diesem Fall $r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}$, da $r < 1$ gilt. Insgesamt ergibt sich also nachstehendes Konstrukt

$$\begin{aligned} &\int_{S_0} C_{a,b,t} \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) \int_0^1 r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)} r^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-1} dr\, \sigma(d\vartheta) \\ = &\int_{S_0} C_{a,b,t} \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) \int_0^1 r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta-H)-1} dr\, \sigma(d\vartheta), \end{aligned}$$

das wir mit einer Abschätzung der Funktion $\alpha(\cdot)$ weiter bearbeiten und zu

$$\leq \int_{S_0} C_{a,b,t} \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) \int_0^1 r^{a(a_1-\delta-H)-1} + r^{b(a_1-\delta-H)-1} dr\, \sigma(d\vartheta) \tag{4.25}$$

$$= \int_{S_0} C_{a,b,t} \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) \left(\frac{1}{a(a_1-\delta-H)} + \frac{1}{b(a_1-\delta-H)}\right) \sigma(d\vartheta). \tag{4.26}$$

transformieren. Da ψ und damit der gesamte obige Integrand von der 0 weg beschränkt ist, folgt die Endlichkeit des Integrals $I_{(0,1)}$.

Es bleibt also noch die Existenz des Integrals $I_{(1,\infty)}$ zu zeigen. In diesem Fall gehen wir zunächst analog vor und erhalten durch den Faktor $\min\left(r^{\alpha(r^{E^t}\vartheta)(a_1-\delta)}, 1\right)$ nun die Zahl 1 als beschränkendes Element, da $r \geq 1$ gilt.
Dies führt zu dem Ausdruck

$$\int_{S_0} C_{a,b,t} \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) \int_1^\infty r^{-H\alpha(r^{E^t}\vartheta)-1} dr\, \sigma(d\vartheta).$$

Im Anschluss schätzen wir die Funktion α ab und erhalten wegen $r \geq 1$

$$\leq \int_{S_0} C_{a,b,t} \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) \int_1^\infty r^{-Ha-1} + r^{-Hb-1} dr\, \sigma(d\vartheta) \tag{4.27}$$

$$= \int_{S_0} C_{a,b,t} \left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q} + \psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right) \left(\frac{1}{Ha} + \frac{1}{Hb}\right) \sigma(d\vartheta) \tag{4.28}$$

und der Positivität des Integranden die Endlichkeit des Integrals $I_{(1,\infty)}$. Aus der nun gezeigten Endlichkeit beider Teilintegrale folgt die Existenz der *harmonizable* Darstellung eines OSMSRFs. □

Im Anschluss folgt eine Analyse der charakteristischen Eigenschaften unserer Darstellung. Wir beginnen mit der Einsicht der stationären Zuwächse.

4.3.3 Lemma

Seien die Voraussetzungen wie in Definition 4.3.1 gegeben. Dann besitzt die *harmonizable* Darstellung eines OSMSRFs stationäre Zuwächse.

Beweis: Zum Nachweis der stationären Zuwächse betrachten wir für $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^d$ sowie $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j (X_\psi^{\alpha(\cdot)}(s+t_j) - X_\psi^{\alpha(\cdot)}(s))}\right]$$
$$= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\, \tilde{c}(\xi) \left((e^{i<s+t_j,\xi>} - 1) - (e^{i<s,\xi>} - 1)\right) \psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\right|^{\alpha(\xi)} d\xi\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j \, \tilde{c}(\xi) \left(e^{i<s+t_j,\xi>} - e^{i<s,\xi>} \right) \psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}} \right|^{\alpha(\xi)} d\xi \right) \\
&= \exp\left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i<s,\xi>} \right|^{\alpha(\xi)} \left| \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j \, \tilde{c}(\xi) \left(e^{i<t_j,\xi>} - 1 \right) \psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}} \right|^{\alpha(\xi)} d\xi \right) \\
&= \exp\left(- \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j \, \tilde{c}(\xi) \left(e^{i<t_j,\xi>} - 1 \right) \psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}} \right|^{\alpha(\xi)} d\xi \right) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{i \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j X_\psi^{\alpha(\cdot)}(t_j)} \right].
\end{aligned}
$$

Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt damit aufgestellte Behauptung. □

Nachfolgend betrachten wir nun das Pfadverhalten und zeigen die stochastische Stetigkeit.

4.3.4 Lemma

Seien die Voraussetzungen wie in Definition 4.3.1 gegeben. Dann ist die *harmonizable* Darstellung eines OSMSRFs stochastisch stetig.

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ aus Lemma 4.3.3 die zu zeigende Aussage folgt, falls

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{plim}_{x\to 0} X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x+x_0) - X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x_0) = 0 \\
&\qquad \Leftrightarrow \operatorname*{plim}_{x\to 0} X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Erinnern wir uns nun an die Darstellung der charakteristischen Funktion mit Hilfe der Funktion K_M aus (4.4), so erhalten wir die Aussage, falls wir

$$
\lim_{x\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i<x,\xi>} - 1 \right|^{\alpha(\xi)} \psi(\xi)^{-H\alpha(\xi)-q} d\xi = 0
$$

zeigen. Wir erkennen, dass für den Integranden sofort

$$
\lim_{x\to 0} \left| e^{i<x,\xi>} - 1 \right|^{\alpha(\xi)} \psi(\xi)^{-H\alpha(\xi)-q} = 0
$$

folgt, sodass wir den Beweis mit der Anwendung des Satzes von Lebesgue abschließen. Dazu benötigen wir eine von x unabhängige Majorante, welche wir aus dem Beweis von Satz 4.3.2 erhalten. Die zugehörige Majorante ergibt sich aus den Abschätzung (4.24), (4.26) sowie (4.28) und der Rechnung

$$
\int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i<x,\xi>} - 1 \right|^{\alpha(\xi)} \psi(\xi)^{-H\alpha(\xi)-q} d\xi \le I_{(0,1)} + I_{(1,\infty)}
$$

$$\begin{aligned}\leq & C_{a,b,x}\int_{S_0}\left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q}+\psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right)C_{a,b,a_1,\delta,H}\,\sigma(d\vartheta)\\ &+C_{a,b,x}\int_{S_0}\left(\psi(\vartheta)^{-Ha-q}+\psi(\vartheta)^{-Hb-q}\right)\left(\frac{1}{Ha}+\frac{1}{Hb}\right)\sigma(d\vartheta).\end{aligned}$$

Dabei ist $C_{a,b,a_1,\delta,H} := \frac{1}{a(a_1-\delta-H)} + \frac{1}{b(a_1-\delta-H)}$ und $C_{a,b,x} := C(1+||x||^a+||x||^b)$. Setzen wir nun voraus, dass $0<x<1$ gilt, so können wir $C_{a,b,x}\leq 3$ abschätzen und haben eine konvergente von x unabhängige Majorante gefunden, sodass die Behauptung folgt. $\square$

4.3.5 Lemma

Seien H, a_1 sowie ψ, α und $W_{\alpha(\cdot)}$ wie in 4.3.1 gegeben, so erfüllt die *harmonizable* Darstellung eines OSMSRFs die Skalierungseigenschaft

$$\left\{X_\psi^{\alpha(\cdot)}\left(c^E t\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \left\{c^H X_\psi^{\alpha(c^{-E^t}\cdot)}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d}.$$

Beweis: Um die oben genannte Skalierung bei den endlichdimensionalen Randverteilungen nachzuweisen betrachten wir für $\vartheta_1,...,\vartheta_n\in\mathbb{R}$ sowie $t_1,...,t_n\in\mathbb{R}^d$ die folgende Rechnung. Dabei nutzen wir zunächst eine Eigenschaft des Skalarprodukts und substituieren anschließend $c^{E^t}\xi=\eta$, sodass wir durch das multi stabile IS-SαS-RM in Verbindung mit dem Transformationsatzes $d\eta = c^q d\xi$ erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X_\psi^{\alpha(\cdot)}(c^E t_j)\right)\right]\\ &=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n\vartheta_j\,\tilde{c}(\xi)\left(e^{i<c^E t_j,\xi>}-1\right)\right|^{\alpha(\xi)}\psi(\xi)^{-H\alpha(\xi)-q}d\xi\right)\\ &=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n\vartheta_j\,\tilde{c}(\xi)\left(e^{i<t_j,c^{E^t}\xi>}-1\right)\right|^{\alpha(\xi)}\psi(\xi)^{-H\alpha(\xi)-q}d\xi\right)\\ &=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n\vartheta_j\,\tilde{c}(c^{-E^t}\eta)\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\right|^{\alpha(c^{-E^t}\eta)}\psi(c^{-E^t}\eta)^{-H\alpha(c^{-E^t}\eta)-q}c^{-q}d\eta\right).\end{aligned}$$

Nun wenden wir die E^t-Homogenitä der Funktion ψ an und erhalten

$$\begin{aligned}&=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n\vartheta_j\,\tilde{c}(c^{-E^t}\eta)\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\right|^{\alpha(c^{-E^t}\eta)}\psi(\eta)^{-H\alpha(c^{-E^t}\eta))-q}c^{H\alpha(c^{-E^t}\vartheta)}d\eta\right)\\ &=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(c^{-E^t}\eta)\sum_{j=1}^n\left(\vartheta_j c^H\right)\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\psi(\eta)^{-H-\frac{q}{\alpha(c^{-E^t}\eta)}}\right|^{\alpha(c^{-E^t}\eta)}d\eta\right)\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\left(\vartheta_j c^H\right) X_\psi^{\alpha(c^{-E}\cdot)}(t_j)\right)\right],$$

sodass die zu zeigende Behauptung folgt. □

4.3.6 Satz

Seien H, a_1 sowie ψ, α und $W_{\alpha(\cdot)}$ wie in 4.3.1 gegeben. Wir fordern weiter, dass der Grenzwert $\lim_{x\to\infty}\alpha(x) = \alpha \in [a,b]$ existiert. So ergibt sich die Aussage

$$c^{-H}\left(X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t) - X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x)\right) \overset{fdd}{\underset{c\to 0}{\Longrightarrow}} X_\psi^{\prime\alpha(\cdot)}(t),$$

wobei wir

$$X_\psi^{\prime\alpha(\cdot)}(t) := X_\psi^{\alpha}(t)$$

setzen.

Beweis: Zuerst betrachten wir zur Erbringung des Beweises die angegebene Differenz $X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t) - X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t) - X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x)\\
=&\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\left(e^{i<x+c^E t,\xi>}-1\right)-\left(e^{i<x,\xi>}-1\right)\right]\psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\,W_{\alpha(\cdot)}(d\xi)\\
=&\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{i<x+c^E t,\xi>}-e^{i<x,\xi>}\right)\psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\,W_{\alpha(\cdot)}(d\xi)\\
=&\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^d}e^{i<x,\xi>}\left(e^{i<c^E t,\xi>}-1\right)\psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\,W_{\alpha(\cdot)}(d\xi).
\end{aligned}$$

Damit können wir nun die charakteristische Funktion von $c^{-H}\left(X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t) - X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x)\right)$ für $\vartheta_1,...,\vartheta_n \in \mathbb{R}$ sowie $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}^d$ aufgrund von $|e^{i<x,\xi>}| = 1$ zu

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\, c^{-H}\left(X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t_j) - X_\psi^{\alpha(\cdot)}(x)\right)\right)\right]\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^{n}c^{-H}\vartheta_j e^{i<c^E t_j,\xi>}-1\right|^{\alpha(\xi)}\psi(\xi)^{-H\alpha(\xi)-q}\,d\xi\right)\\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j c^{-H} X_\psi^{\alpha(\cdot)}(c^E t_j)\right)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X_\psi^{\alpha(c^{-E^t}\cdot)}(t_j)\right)\right]
\end{aligned}$$

umformen, wobei der letzte Schritt die Anwendung der Aussage aus Lemma 4.3.5 ist. Betrachten wir nun die Grenzwertbildung für $c \to 0$ unter der Prämisse eine konvergente von c unabhängige Majorante zu finden. Unter Berücksichtigung von

$$\lim_{c\to 0} \alpha(c^{-E^t}\vartheta) = \alpha,$$

da $-E$ lediglich negative Eigenwerte besitzt, folgt unter obiger Prämisse durch den Konvergenzsatz von Lebesgue, dass

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0} \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X_\psi^{\alpha(c^{-E^t}\cdot)}(t_j)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j \lim_{c\to 0} X_\psi^{\alpha(c^{-E^t}\cdot)}(t_j)\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X_\psi^{\alpha}(t_j)\right)\right]\end{aligned}$$

und damit die zu beweisende Aussage. Anschließend zeigen wir, dass eine von c unabhängige Majorante des Integranden existiert. Dazu benutzen wir die Ungleichung aus Lemma (2.1.6) b) und erhalten

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{c}(c^{-E^t}\eta)\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\psi(\eta)^{-H}\right|^{\alpha(c^{-E^t}\vartheta)}\psi(\eta)^{-q}\\ &\leq \bar{c}^{\alpha(c^{-E^t}\vartheta)}\, 2^{(n-1)\alpha(c^{-E^t}\vartheta)}\sum_{j=1}^{n}\left|\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\psi(\eta)^{-H}\right|^{\alpha(c^{-E^t}\vartheta)}\psi(\eta)^{-q}\\ &\leq \bar{c}^{a,b}\, 2^{(n-1)b}\sum_{j=1}^{n}\left|\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\psi(\eta)^{-H}\right|^{a,b}\psi(\eta)^{-q}.\end{aligned}$$

Dies ist konvergent, da die zwei Summanden, die wir erhalten, gerade, bis auf Konstanten, den Integranden der *harmonizable* Darstellung eines OSSRFs entsprechen. □

Kapitel 5

Tempered Operator Scaling Multistable Random Fields

In diesem Kapitel verbinden wir die Erweiterungen aus Kapitel 3 mit jenen aus Kapitel 4. Dies bedeutet, wir erhalten ein *Tempering* des Integranden bei gleichzeitiger Hinzunahme der Multistabilität des ISRMs. Nachfolgend werden wir uns erneut mit der Unterscheidung zwischen der *moving average* und der *harmonizable* Darstellung auseinander setzen. Durch das *Tempering* ist es, analog zum dritten Kapitel, möglich, eine „abgeschnittene“ Version zu definieren. Diese Untersuchung wird das Ende des ersten Unterkapitels bilden.

5.1 *Moving Average* Darstellung

Wir beginnen nachfolgend mit dem Studium der *moving average* Darstellung. Dabei definieren wir zunächst das mit *tempering* versehene multistabile Zufallsfeld, weisen im Anschluss die Existenz nach, um abschließend die Skalierung und das zugehörige Tangentenfeld zu betrachten.

5.1.1 Definition

Seien $H > 0$, $\lambda > 0$, $t \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha : \mathbb{R}^d \to [a,b] \subset (0,2]$ eine stetige Funktion. Des Weiteren sei $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetige E-homogene Funktion. Mit $Z_{\alpha(\cdot)}$ bezeichnen wir das multi stabile IS-SαS-RM, wie es in (4.2) eingeführt wurde. Dabei sei das Kontrollmaß in diesem Fall das Lebesguemaß. So definieren wir die *moving average* Darstellung eines *tempered operator scaling multistable random fields* (TOSMSRF) für $t \in \mathbb{R}^d$ durch folgendes Integral

$$X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left[e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right] Z_{\alpha(\cdot)}(dy).$$

Der nachstehende Satz widmet sich nun der Existenz unserer gerade definierten Darstellung.

5.1.2 Satz

Seien H, λ, t und α, φ sowie $X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(t)$ wie in Definition 5.1.1 gegeben, so existiert die *moving average* Darstellung eines TOSMSRFs.

Beweis: Die Existenz des Zufallsfeldes folgt nach der Aussage von Lemma 4.1.1 b) durch die Endlichkeit des Integrals

$$\Gamma_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right|^{\alpha(y)} dy.$$

Wie bereits im Beweis von Satz 3.1.2 zeigen wir für ein $R > 0$ die Endlichkeit der beiden Integrale

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) := \int_{\tau(y)\le R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right|^{\alpha(y)} dy \text{ und}$$
$$\Gamma^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) := \int_{\tau(y)> R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right|^{\alpha(y)} dy.$$

separat. Beginnend mit der Existenz von $\Gamma^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t)$ wenden wir zunächst die Ungleichung (3.2) an und erhalten

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) &\le \int_{\tau(y)\le R} 2^{\alpha(y)} \left(\left(e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right)^{\alpha(y)} + \left(e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right)^{\alpha(y)} \right) dy \\
&\le 2^b \int_{\tau(y)\le R} \left(e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H} \right)^{\alpha(y)} \varphi(t-y)^{-q} + \left(e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H} \right)^{\alpha(y)} \varphi(-y)^{-q} dy \\
&\le 2^b \int_{\tau(y)\le R} \left(e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H} \right)^{a,b} \varphi(t-y)^{-q} + \left(e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H} \right)^{a,b} \varphi(-y)^{-q} dy \\
&\le 2^b \left(\int_{\tau(y)\le R} \left(\varphi(t-y)^{Ha-q} + \varphi(t-y)^{Hb-q} \right) dy + \int_{\tau(y)\le R} \left(\varphi(-y)^{Ha-q} + \varphi(-y)^{Hb-q} \right) dy \right).
\end{aligned}$$

Die Endlichkeit der letzten Zeile erhalten wir aber direkt aus dem Beweis von Satz 3.1.2, in dem man sich die Rechnungen aus (3.3) - (3.7) in Erinnerung ruft, denn damit folgt

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) \le\, & 2^b \left(\left(M_\varphi^{Ha-q} + m_\varphi^{Ha-q} \right) \left(\int_{\tau(z)\le K(R+\tau(t))} \tau(-z)^{Ha-q} dz + \int_{\tau(y)\le R} \tau(-y)^{Ha-q} dy \right) \right) \\
&+ 2^b \left(\left(M_\varphi^{Hb-q} + m_\varphi^{Hb-q} \right) \left(\int_{\tau(z)\le K(R+\tau(t))} \tau(-z)^{Hb-q} dz + \int_{\tau(y)\le R} \tau(-y)^{Hb-q} dy \right) \right).
\end{aligned}$$

Es bleibt die Endlichkeit von $\Gamma^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t)$ zu zeigen. Dazu benutzen wir erneut die Ungleichung aus Lemma 2.1.6 a) und erhalten

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) &\le \int_{\tau(y)> R} 2^{\alpha(y)} \left(\left(e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right)^{\alpha(y)} + \left(e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right)^{\alpha(y)} \right) dy \\
&\le 2^b \int_{\tau(y)> R} \left(e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H} \right)^{\alpha(y)} \varphi(t-y)^{-q} + \left(e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H} \right)^{\alpha(y)} \varphi(-y)^{-q} dy
\end{aligned}$$

$$\leq 2^b \int_{\tau(y)>R} \left(e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^H\right)^{a,b}\varphi(t-y)^{-q} + \left(e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^H\right)^{a,b}\varphi(-y)^{-q}\,dy$$
$$\leq 2^b \int_{\tau(y)>R} \left(\varphi(t-y)^{-\gamma}\right)^{a,b}\varphi(t-y)^{-q} + \left(\varphi(-y)^{-\gamma}\right)^{a,b}\varphi(-y)^{-q}\,dy$$
$$= 2^b \int_{\tau(y)>R} \left(\varphi(t-y)^{-a\gamma-q} + \varphi(t-y)^{-b\gamma-q}\right) + \left(\varphi(-y)^{-a\gamma-q} + \varphi(-y)^{-b\gamma-q}\right)\,dy$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Aussage von Lemma 2.2.5 benutzt. Wie bereits für das Teilintegral $\Gamma^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t)$ weisen wir an dieser Stelle erneut auf den Beweis von Satz 3.1.2 hin. Wenden wir nun die Schritte (3.8) - (3.11) an erhalten wir die Existenz von $\Gamma^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t)$ durch

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) \leq 2^b m_\varphi^{-a\gamma-q}\left(\int_{\tau(z+t)>R}\tau(-z)^{-a\gamma-q}dz + \int_{\tau(y)>R}\tau(-y)^{-a\gamma-q}\right)$$
$$+ 2^b m_\varphi^{-b\gamma-q}\left(\int_{\tau(z+t)>R}\tau(-z)^{-b\gamma-q}dz + \int_{\tau(y)>R}\tau(-y)^{-b\gamma-q}dy\right).$$

Aufgrund der Tatsache, dass beide Teilintegrale existieren können wir nun auf die Existenz der *moving average* Darstellung eines TOSMSRFs schließen. □

Durch die Multistabilität besitzt die *moving average* Darstellung eines TOSMSRFs, ähnlich zu der *moving average* Darstellung eines OSMSRFs aus Kapitel 4, keine stationären Zuwächse, wie es bei den Darstellungen TOSSRFs aus dem dritten Kapitel der Fall war. Dementsprechend wenden wir uns direkt der Skalierung zu. Erinnern wir uns an Kapitel 3 und Kapitel 4, so erhalten wir neben des Faktors c^H sowohl die Skalierung des Parameters λ wie in 3.1.4 als auch die entsprechende Skalierung der Stabilitätsfunktion α, wie wir es in 4.2.3 gesehen haben.

5.1.3 Lemma

Seien H, λ, t und α, φ sowie für $t \in \mathbb{R}^d$ sei $X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(t)$ wie in Definition 5.1.1 gegeben, so folgt für $c > 0$, dass

$$\left\{X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(c^E t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \left\{c^H X^{\alpha(c^E\cdot)}_{\varphi,c\lambda}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d}$$

gilt. Dabei erinnern wir an die entsprechende Konvention der Schreibweise aus (4.20).

Beweis: Um die oben formulierte Skalierungseigenschaft der endlich dimensionalen Randverteilungen zu zeigen, seien $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}^d$ sowie $\vartheta_1,...,\vartheta_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Anschließend gehen wir zur Betrachtung der charakteristischen Funktion über und erhalten

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(c^E t_j)\right)\right]$$

$$=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j-y)}\varphi(c^E t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}-e^{-\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right)\right|^{\alpha(y)}dy\right).$$

Ähnlich zum Beweis von Lemma 3.1.4 substituieren wir nun $y=c^E z$, sodass wir aufgrund des Transformationssatzes $dy=c^q dz$ erhalten. Im Anschluss nutzen wir die E-Homogenität der Funktion φ und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j-c^E z)}\varphi(c^E t_j-c^E z)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}-e^{-\lambda\varphi(-c^E z)}\varphi(-c^E z)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}\right)\right|^{\alpha(c^E z)}c^q\,dz\right)\\
&=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(c^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}e^{-c\lambda\varphi(t_j-z)}\varphi(t_j-z)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}-c^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}e^{-c\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}\right)\right|^{\alpha(c^E z)}c^q\,dz\right)\\
&=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n (\vartheta_j c^H)\left(e^{-c\lambda\varphi(t_j-z)}\varphi(t_j-z)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}-e^{-c\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}\right)\right|^{\alpha(c^E z)}dz\right)\\
&=\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n(\vartheta_j c^H)X_{\varphi,c\lambda}^{\alpha(c^E\cdot)}(t_j)\right)\right],
\end{aligned}$$

sodass die Behauptung nach dem Eindeutigkeitssatz über charakteristische Funktionen folgt. □

Nachdem wir nun das Verhalten bezüglich des Skalierens betrachtet haben, zeigen wir im nachstehendem Lemma wie bereits in den beiden voraussgegangenen Kapiteln die stochastische Stetigkeit des Zufallsfelds.

5.1.4 Lemma

Unter den Bedingungen von Definition 5.1.1 ist die *moving average* Darstellung eines TOSMSRFs stochastisch stetig.

Beweis: Zur Erbringung des Beweises sei $x_0\in\mathbb{R}^d$ beliebig, aber fest. Damit das Zufallsfeld stochastisch stetig ist, müssen wir

$$\operatorname*{plim}_{x\to 0} X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x+x_0)=X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x_0)$$

zeigen. Nach der Aussage von Lemma 4.1.1 c) ist es äquivalent

$$\lim_{x\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{-\lambda\varphi(x+x_0-y)}\varphi(x+x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}-e^{-\lambda\varphi(x_0-y)}\varphi(x_0-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right|^{\alpha(y)}dy$$

zu beweisen, was uns durch unsere Vorarbeit leichter fällt. Hier führen wir zunächst die Substitution $x_0 - y = -z$ durch und erhalten

$$= \lim_{x \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\lambda \varphi(x-z)} \varphi(x-z)^{H - \frac{q}{\alpha(x_0+z)}} - e^{-\lambda \varphi(-z)} \varphi(-z)^{H - \frac{q}{\alpha(x_0+z)}} \right|^{\alpha(x_0+z)} dz$$

Nach den Ausführungen des Beweises von Satz 5.1.2 in Verbindung mit der Aussage aus Lemma 2.2.6 erhalten wir auch in diesem Fall für ein $R > 0$ - eigentlich ein $\widetilde{R} > 0$ - eine Majorante durch

$$\begin{aligned} &\mathbb{1}_{\{\tau(y) \leq K(R+\tau(x))\}}(y) \left(C^{(1)}_{a,b} \tau(-y)^{Ha-q} + C^{(1)}_{b,b} \tau(-y)^{Hb-q} \right) \\ +&\mathbb{1}_{\{\tau(y) > R\}}(y) \left(C^{(2)}_{a,b} \tau(-y)^{-a\gamma-q} + C^{(2)}_{b,b} \tau(-y)^{-b\gamma-q} \right), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} C^{(1)}_{a,b} &:= 2^b (M_\varphi^{Ha-q} + m_\varphi^{Ha-q}) \\ C^{(1)}_{b,b} &:= 2^b (M_\varphi^{Hb-q} + m_\varphi^{Hb-q}) \\ C^{(2)}_{a,b} &:= 2^b m_\varphi^{-a\gamma-q} \\ C^{(2)}_{b,b} &:= 2^b m_\varphi^{-b\gamma-q} \end{aligned}$$

gilt. Setzen wir nun voraus, dass sich x bereits hinreichend nahe bei 0 befindet, so schätzen wir die obenstehende Majorante mit $\tau(x) \leq 1$ ab und erhalten eine von x unabhängige konvergente Majorante. Damit folgt die Aussage mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue. □

Nachfolgend untersuchen wir die *moving average* Darstellung eines TOSMSRFs auf ihre Lokalisierbarkeit und halten das Ergebnis in folgendem Satz fest.

5.1.5 Satz

Seien H, λ und α sowie $X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}$ wie in Definition 5.1.1 gegeben, weiter fordern wir, dass für alle y zudem $H - \frac{q}{\alpha(y)} < -1$ gelten soll. Zudem benötigen wir die Eigenschaft (β, E)-admissible für die E-homogene Funktion φ.

So folgt für $c > 0$ sowie $x \in \mathbb{R}^d$, dass

$$c^{-H} \left(X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(x + c^E t) - X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(x) \right) \underset{c \to 0}{\overset{fdd}{\Longrightarrow}} X'^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(t),$$

wobei

$$X'^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda} := X^{\alpha(x)}_{\varphi}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t-y)^{H - \frac{q}{\alpha(x)}} - \varphi(-y)^{H - \frac{q}{\alpha(x)}} Z_{\alpha(x)}(dy)$$

gilt.

Beweis: Um den Beweis zu erbringen betrachten, wir zunächst die Differenz $X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(x+c^E t)-X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(x)$ und erhalten für $\vartheta_1,...,\vartheta_n \in \mathbb{R}$ sowie $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}^d$ nach der Aussage über die Skalierung aus Lemma 5.1.3 mit der Substitution $x-y=-z$ und nachfolgender Rechnung das Ergebnis

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(x+c^E t_j)-X^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(x)\right)}\right]\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(x+c^E t_j-y)}\varphi(x+c^E t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}-e^{-\lambda\varphi(x-y)}\varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right)\right|^{\alpha(y)}dy\right)\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j-z)}\varphi(c^E t_j-z)^{H-\frac{q}{\alpha(x+z)}}-e^{-\lambda\varphi(-z)}\varphi(-z)^{H-\frac{q}{\alpha(x+z)}}\right)\right|^{\alpha(x+z)}dz\right)\\
=&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X^{\alpha_x(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(c^E t_j)}\right]\\
=&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X^{\alpha_x(c^E\cdot)}_{\varphi,c\lambda}(t_j)}\right]
\end{aligned}
$$

Dabei sei $\alpha(x+z)$ abkürzend als $\alpha_x(z)$ definiert. Des Weiteren liefert uns die Aussage

$$
\left|e^{-c\lambda x}x^\gamma - e^{-c\lambda y}y^\gamma\right| \leq |x^\gamma - y^\gamma|
$$

eine von c unabhängige Majorante für den Integranden, welche wir bereits im Beweis von Satz 3.1.6 gezeigt haben.

Demnach folgt mit der Abschätzung (4.13), dass

$$
\begin{aligned}
&\left|e^{-c\lambda\varphi(t_j-y)}\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-e^{-c\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right|\\
\leq&\left|\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right|
\end{aligned}
$$

gilt. Mithilfe von φ (β,E)-admissible können wir zudem eine weitere Abschätzung

$$
\left|\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right| \leq C_{a,b}\varphi(y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\varphi(y)^{-\beta}\tau(t_j)^\beta,
$$

tätigen, die uns die von c unabhängige integrierbare Majorante für den Integranden durch

$$
\begin{aligned}
&\left|e^{-c\lambda\varphi(t_j-y)}\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-e^{-c\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right|^{\alpha(x+c^E y)}\\
\leq& C_{a,b}^{\alpha(x+c^E y)}\varphi(y)^{(H-\beta)\alpha(x+c^E y)-q}\tau(t_j)^{\beta\alpha(x+c^E y)}\\
\leq& C_{a,b}^{a,b}\varphi(y)^{(H-\beta)(a,b)-q}\tau(t_j)^{\beta(a,b)}
\end{aligned}
$$

zeigt.

Damit folgt die Behauptung mit dem Stetigkeitssatz von Levy und dem Konvergenzsatz von Lebesgue durch

$$
\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0}\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j c^{-H}\left(X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t_j)-X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\right)\right)\right]\\
&=\lim_{c\to 0}\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X_{\varphi,c\lambda}^{\alpha_x(c^E\cdot)}(t_j)\right)\right]\\
&=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\lim_{c\to 0}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{-c\lambda\varphi(t_j-y)}\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}-e^{-c\lambda\varphi(-y)}\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x+c^E y)}}\right)\right|^{\alpha(x+c^E y)}dy\right)\\
&=\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(\varphi(t_j-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}-\varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}}\right)\right|^{\alpha(x)}dy\right)\\
&=\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X_{\varphi}^{\alpha(x)}(t_j)\right)\right].
\end{aligned}
$$

□

Wie schon in Kapitel 3, erlaubt uns das *Tempering* auch hier nun aus der Klasse von Zufallsfeldern aus Definition 5.1.1 eine weitere Klasse abzuleiten. Diese trägt folgenden Namen und wir werden sie im nächsten Abschnitt analysieren.

5.1.6 Definition

Sei $H>0,\ \lambda>0,\ t\in\mathbb{R}^d$ und $\alpha:\mathbb{R}^d\to[a,b]\subset(0,2]$ eine stetige Funktion. Des Weiteren sei $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ eine stetige E-homogene Funktion. Mit $Z_{\alpha(\cdot)}$ bezeichnen wir das multi stabile IS-SαS-RM, wie in (4.2). Dann definieren wir die *moving average* Darstellung eines *isolated tempered operator scaling multistable random fields* (ITOSMSRF) durch

$$Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(t):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}Z_{\alpha(\cdot)}(dy).$$

Analog zur bisherigen Vorgehensweise erfolgt an dieser Stelle der Nachweis über die Existenz.

5.1.7 Satz

Für die angegebenen Parameter in Definition 5.1.6 existiert die *moving average* Darstellung eines ITOSMSRFs.

Beweis: Wie bereits im Beweis von Satz 5.1.2 folgt die Existenz des Zufallsfeldes nach Lemma 4.1.1 durch die Endlichkeit des Integrals

$$\zeta_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t):=\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right|^{\alpha(y)}dy.$$

Diese Endlichkeit zeigen wir erneut durch Betrachtung der beiden Teilintegrale

$$\zeta^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) := \int_{\tau(y)\leq R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right|^{\alpha(y)} dy$$
$$\zeta^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) := \int_{\tau(y)> R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} \right|^{\alpha(y)} dy.$$

für ein $R > 0$. Wir erhalten die Endlichkeit von $\zeta^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t)$ direkt durch die Abschätzung der Funktion α. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned}\zeta^{(1)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) &= \int_{\tau(y)\leq R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H} \right|^{\alpha(y)} \varphi(t-y)^{-q}\, dy \\ &\leq \int_{\tau(y)\leq R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H} \right|^{a,b} \varphi(t-y)^{-q}\, dy \\ &= \zeta^{(1)}_{a,\varphi,\lambda}(t) + \zeta^{(1)}_{b,\varphi,\lambda}(t),\end{aligned}$$

wobei wir die Endlichkeit von $\zeta^{(1)}_{a,\varphi,\lambda}(t)$ und $\zeta^{(1)}_{b,\varphi,\lambda}(t)$ bereits aus dem Beweis von Satz 5.1.2 kennen. Die noch zu zeigende Endlichkeit von $\zeta^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t)$ erhalten wir ebenfalls direkt durch

$$\begin{aligned}\zeta^{(2)}_{\alpha(\cdot),\varphi,\lambda}(t) &= \int_{\tau(y)> R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H} \right|^{\alpha(y)} \varphi(t-y)^{-q}\, dy \\ &\leq \int_{\tau(y)> R} \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)}\varphi(t-y)^{H} \right|^{a,b} \varphi(t-y)^{-q}\, dy \\ &= \zeta^{(2)}_{a,\varphi,\lambda}(t) + \zeta^{(2)}_{b,\varphi,\lambda}(t).\end{aligned}$$

Die Endlichkeit dieser beiden Integrale kennen wir ebenfalls bereits aus dem Beweis von 5.1.2. □

Das nächste Ziel ist die Untersuchung des Tangentialfelds der *moving average* Darstellung eines ITOSMSRFs. Dazu betrachten wir zunächst die Auswirkung der Skalierung von c^E im Argument.

5.1.8 Lemma

Seien h, λ sowie α, φ und $Z_{\varphi,\lambda}$ wie in Definition 5.1.6 gegeben. So gilt für $c > 0$

$$\left\{ Z^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(c^E t) \right\}_{t\in\mathbb{R}^d} \stackrel{fdd}{=} \left\{ c^H Z^{\alpha(c^E\cdot)}_{\varphi,c\lambda}(t) \right\}_{t\in\mathbb{R}^d}$$

Beweis: Um die oben formulierte Aussage zu beweisen, seien $\vartheta_1,...,\vartheta_n \in \mathbb{R}$ sowie $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Damit erhalten wir durch Substitution $y = c^E z$ und anschließender Benutzung der E-Homogenität der Funktion φ

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j Z^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(c^E t_j) \right) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j - y)}\varphi(c^E t_j - y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right)\right|^{\alpha(y)} dy\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{-\lambda\varphi(c^E t_j - c^E z)}\varphi(c^E t_j - c^E z)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}\right)\right|^{\alpha(c^E z)} c^q\, dz\right)\\
&= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^H \left(e^{-c\lambda\varphi(t_j - z)}\varphi(t_j - z)^{H-\frac{q}{\alpha(c^E z)}}\right)\right|^{\alpha(c^E z)} dz\right)\\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n (\vartheta_j c^H) Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(c^E\cdot)}(t_j)\right)\right],
\end{aligned}
$$

sodass die Behauptung folgt. □

Mit obiger Aussage lässt sich nun das Tangentenfeld für die *moving average* Darstellung eines ITOSMS-RFs untersuchen.

5.1.9 Satz

Sei $Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}$ das in Definition 5.1.6 eingeführte Zufallsfeld. Zusätzlich fordern wir $H - \frac{q}{\alpha(y)} < -1$ und dass φ (β, E)-admissible ist. Dann gilt die folgende Aussage:

$$
c^{-H}\left(Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x + c^E t) - Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\right) \underset{c\to 0}{\overset{fdd}{\Longrightarrow}} Z'^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda}(t),
$$

wobei

$$
Z'^{\alpha(\cdot)}_{\varphi,\lambda} := X_\varphi^{\alpha(x)}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} - \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha(x)}} Z_{\alpha(x)}(dy).
$$

Beweis: Für den Beweis der Aussage betrachten wir für $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}^d$ und $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ zunächst, dass

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \vartheta_j Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x + c^E t_j) - Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(e^{-\lambda\varphi(x+c^E t_j - y)}\varphi(x + c^E t_j - y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}} - e^{-\lambda\varphi(x-y)}\varphi(x-y)^{H-\frac{q}{\alpha(y)}}\right) Z_{\alpha(\cdot)}(dy)\\
&= \sum_{j=1}^n \vartheta_j \left(X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x + c^E t_j) - X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\right)
\end{aligned}
$$

gilt, sodass wir mit der Aussage aus Satz 5.1.5 zu dem gewünschten Ergebnis

$$
\begin{aligned}
c^{-H}\left(Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x + c^E t) - Z_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\right) &\overset{fdd}{=} c^{-H}\left(X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x + c^E t) - X_{\varphi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\right)\\
&\underset{c\to 0}{\overset{fdd}{\Longrightarrow}} X_\varphi^{\alpha(x)}(t)
\end{aligned}
$$

kommen. □

Im Anschluss gehen wir zur Betrachtung einer weiteren Darstellung über.

5.2 *Harmonizable* Darstellung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der *harmonizable* Darstellung und der Verknüpfung der beiden Verallgemeinerungen aus Kapitel 3 und Kapitel 4. Wir ziehen also sowohl das tempering als auch die Multistabilität in Betracht.

5.2.1 Definition

Seien $\lambda > 0$, $a_1 > H > 0$, $t \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha : \mathbb{R}^d \to [a,b] \subset (0,2]$ eine stetige Abbildung sowie $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetige E^t-homogene Funktion. Desweiteren bezeichnen wir mit $W_{\alpha(\cdot)}$ das isotropische multistabile IS-SαS-RM mit dem Lebesguemaß als Kontrollmaß. Dann definieren wir die *harmonizable* Darstellung eines *tempered operator scaling multistable random fields* (TOSMSRF) durch

$$X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(t) := \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i<t,\xi>} - 1 \right) (\lambda - i\psi(\xi))^{-H - \frac{q}{\alpha(\xi)}} \, W_{\alpha(\cdot)}.$$

5.2.2 Satz

Unter den angegebenen Bedingungen aus Definition 4.3.1 existiert die *harmonizable* Darstellung eines TOSMSRFs.

Beweis: Nach der Aussage aus Lemma 4.1.4 e) in Verbindung mit der Darstellung der Funktion K_M aus (4.4) und der bereits gezeigten Endlichkeit der Funktion $\tilde{c}(s)$ zeigen wir die Existenz des Zufallsfelds durch die Endlichkeit des Integrals

$$\Gamma_{\alpha(\cdot),\psi,\lambda}(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(e^{i<t,\xi>} - 1 \right) (\lambda - i\psi(\xi))^{-H - \frac{q}{\alpha(\xi)}} \right|^{\alpha(\xi)} d\xi.$$

Da λ reell ist und $i\psi$ für $\psi(x) \neq 0$ stets rein imaginär ist, folgt aufgrund der Negativität des Exponenten, dass wir direkt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha(\cdot),\psi,\lambda}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i<t,\xi>} - 1 \right|^{\alpha(\xi)} |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha(\xi) - q} \, d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i<t,\xi>} - 1 \right|^{\alpha(\xi)} \psi(\xi)^{-H\alpha(\xi) - q} \, d\xi \\ &= \Gamma_{\alpha(\cdot),\psi}(t) \end{aligned}$$

tätigen können. Damit ist $\Gamma_{\alpha(\cdot),\psi}(t)$ aus dem Beweis von Satz 4.3.2 eine konvergente Majorante und wir erhalten damit sofort die Existenz der *harmonizable* Darstellung eines TOSMSRFs. □

Im Anschluss zeigen wir, dass auch die *harmonizable* Darstellung eines TOSMSRFs stationäre Zuwächse besitzt.

5.2.3 Lemma

Seien H, λ, α sowie ψ und $X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}$ wie in Definition 5.2.1 gegeben. Dann besitzt die *harmonizable* Darstellung eines TOSMSRFs stationäre Zuwächse.

Beweis: Um die aufgestellte Behauptung zu zeigen, müssen wir für $t \in \mathbb{R}^d$

$$\{X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x+t) - X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(t)\}_{x\in\mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \{X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$$

zeigen. Dazu betrachten wir zunächst die charakteristische Funktion der Differenz, wie wir sie in diesem Fall in Lemma 4.1.4 e) festgehalten haben, und erhalten für $\vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}$ sowie $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x_j+t) - X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(t)\right)}\right] \\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j(e^{i<x_j+t,\xi>}-1)-(e^{i<t,\xi>}-1)\right|^{\alpha(\xi)} |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha(\xi)-q}\,d\xi\right) \\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j(e^{i<x_j+t,\xi>}-e^{i<t,\xi>})\right|^{\alpha(\xi)} |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha(\xi)-q}\,d\xi\right) \\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{i<t,\xi>}\right|^{\alpha(\xi)}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j(e^{i<x_j,\xi>}-1)\right|^{\alpha(\xi)} |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha(\xi)-q}\,d\xi\right) \\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j(e^{i<x_j,\xi>}-1)\right|^{\alpha(\xi)} |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha(\xi)-q}\,d\xi\right) \\
=&\mathbb{E}\left[e^{i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x_j)}\right]
\end{aligned}$$

gilt. Mit dem Stetigkeitssatz von Lévy folgt damit die Aussage des Lemmas. □

Abschließend möchten wir erneut das Tangentenfeld betrachten. Dazu studieren wir zunächst das Skalierungsverhalten.

5.2.4 Lemma

Unter den angegebenen Bedingungen aus Definition 4.3.1 erfüllt die *harmonizable* Darstellung eines TOSMSRFs die Eigenschaft

$$\left\{X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(c^E t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d} \overset{fdd}{=} \left\{c^H X_{\psi,c\lambda}^{\alpha(c^{-E^t}\cdot)}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}^d}.$$

Beweis: Zur Erbringung des Beweises seien zunächst $\vartheta_1,...,\vartheta_n \in \mathbb{R}$ sowie $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Durch Betrachtung der charakteristischen Funktion der endlich-dimensionalen Randverteilungen erhalten wir durch Umstellen des Skalarprodukts und anschließender Substitution $c^{E^t}\xi = \eta$ sowie Ausnutzung der E^t-Homogenität der Funktion ψ, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \vartheta_j X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(c^E t_j)\right)\right]\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{i<c^E t_j,\xi>}-1\right)(\lambda - i\psi(\xi))^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\right|^{\alpha(\xi)} d\xi\right)\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{i<t_j,c^{E^t}\xi>}-1\right)(\lambda - i\psi(\xi))^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\right|^{\alpha(\xi)} d\xi\right)\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(c^{-E^t}\eta)\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\left(\lambda - i\psi(c^{-E^t}\eta)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)}}\right|^{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)} c^{-q}\eta\right)\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(c^{-E^t}\eta)\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\left(\lambda - \frac{i}{c}\psi(\eta)\right)^{-H-\frac{q}{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)}}\right|^{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)} c^{-q}d\eta\right)\\
=&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(c^{-E^t}\eta)\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^H\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)(c\lambda - i\psi(\eta))^{-H-\frac{q}{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)}}\right|^{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)} d\eta\right)\\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n (\vartheta_j c^H) X_{\psi,c\lambda}^{\alpha(c^{-E^t}\cdot)}(t_j)\right)\right]
\end{aligned}$$

gilt. Durch die Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion folgt damit die Behauptung. □

5.2.5 Lemma

Sei $X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}$ sowie die entsprechenden Parameter wie in Definition 5.2.1 gegeben. So ist die *harmonizable* Darstellung eines TOSMSRFs stochastisch stetig.

Beweis: Die stochastische Stetigkeit erhaten wir, wie bereits in den anderen Unterkapiteln erwähnt, durch die Angabe einer von x unabhängigen konvergenzen Majorante des Integranden von

$X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x+x_0)$ für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Die Existenz einer solchen folgt direkt aus der Beziehung

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha(\cdot),\psi,\lambda}(x+x_0) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{i<x+x_0,\xi>} - 1\right|^{\alpha(\xi)} |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha(\xi)-q}\, d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{i<x+x_0,\xi>} - 1\right|^{\alpha(\xi)} \psi(\xi)^{-H\alpha(\xi)-q}\, d\xi \\ &= \Gamma_{\alpha(\cdot),\psi}(x+x_0),\end{aligned}$$

da nach dem Beweis von Lemma 4.3.4 eine konvergente von x unabhängige Majorante von $\Gamma_{\alpha(\cdot),\psi}(x+x_0)$ existiert. □

Mit der Aussage von Lemma 5.2.4 betrachten wir nun das Tangentenfeld der *harmonizable* Darstellung eines TOSMSRFs.

5.2.6 Satz

Unter den Bedingungen von Definition 5.2.1 und der Zusätzlichen Forderung, dass $\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = \alpha$ existiert, erfüllt die *harmonizable* Darstellung eines TOSMSRFs die Eigenschaft

$$c^{-H}\left(X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t) - X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\right) \underset{c\to 0}{\overset{fdd}{\Longrightarrow}} X_{\psi,\lambda}^{\prime\alpha(\cdot)}(t),$$

wobei

$$X_{\psi,\lambda}^{\prime\alpha(\cdot)}(t) := X_{\psi}^{\alpha}(t) = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{i<t,\xi>} - 1\right)\psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha}}\, W_\alpha(d\xi)$$

ist.

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass für $t_1,...,t_n \in \mathbb{R}^d$ sowie $\vartheta_1,...,\vartheta_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^{-H}\left(X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t_j) - X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\right)\right)\right] \\ =&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(\left(e^{i<x+c^E t_j,\xi>} - 1\right) - \left(e^{i<x,\xi>} - 1\right)\right)\left(\lambda - i\psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\right)\right|^{\alpha(\xi)} d\xi\right) \\ =&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|e^{i<x,\xi>}\right|^{\alpha(\xi)}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{i<x+c^E t_j,\xi>} - e^{i<x,\xi>}\right)\left(\lambda - i\psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\right)\right|^{\alpha(\xi)} d\xi\right) \\ =&\exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d}\left|\tilde{c}(\xi)\sum_{j=1}^n \vartheta_j\left(e^{i<c^E t_j,\xi>} - 1\right)\left(\lambda - i\psi(\xi)^{-H-\frac{q}{\alpha(\xi)}}\right)\right|^{\alpha(\xi)} d\xi\right) \\ =&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n \vartheta_j c^{-H} X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(c^E t)\right)\right]\end{aligned}$$

$$=\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X_{\psi,c\lambda}^{\alpha(c^{-E^t}\cdot)}(t)\right)\right]$$

gilt, wobei wir zuerst $e^{i<x,\xi>}$ ausgeklammert und anschließend $\left|e^{i<x,\xi>}\right| = 1$ benutzt haben. Der letzte Schritt ist die Anwendung der Aussage aus Lemma 4.3.5. Desweiteren suchen wir nun eine von c unabhängige Majorante des Integranden von $X_{\psi,c\lambda}^{\alpha(c^{-E}\cdot)}(t)$. Diese erhalten wir durch die Abschätzungen für $\tilde{c}(c^{-E^t}\eta)$ aus (4.7), (4.8) sowie

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\left|\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)(c\lambda-i\psi(\eta))^{-H-\frac{q}{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)}}\right|^{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)}d\eta\\
\leq&\int_{\mathbb{R}^d}2^{(n-1)\alpha(c^{-E}\eta)}\sum_{j=1}^{n}\left|\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)(c\lambda-i\psi(\eta))^{-H-\frac{q}{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)}}\right|^{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)}d\eta\\
=&\int_{\mathbb{R}^d}2^{(n-1)\alpha(c^{-E}\eta)}\sum_{j=1}^{n}\left|\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)(c\lambda-i\psi(\eta))^{-H}\right|^{\alpha\left(c^{-E^t}\eta\right)}\psi(\eta)^{-q}d\eta\\
\leq&2^{(n-1)b}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{j=1}^{n}\left|\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)(c\lambda-i\psi(\eta))^{-H}\right|^{a,b}\psi(\eta)^{-q}d\eta\\
\leq&2^{(n-1)b}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{j=1}^{n}\left|\vartheta_j\left(e^{i<t_j,\eta>}-1\right)\psi(\eta)^{-H}\right|^{a,b}\psi(\eta)^{-q}d\eta.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der ersten Umformung die Aussage von Lemma 2.1.6 b) getätigt. Die letzte Zeile liefert uns direkt eine von c unabhängige Majorante, da es sich um zwei Summanden handelt, bei denen jeder als Integrand, unter Berücksichtigung der Multiplikation mit einer Konstanten, die jeweils als endlich-dimensionale Randverteilungen einer *harmonizable* Darstellung eines OSSRFs verstanden werden können. Demnach folgt nun mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0}\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j c^{-H}\left(X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x+c^E t_j)-X_{\psi,\lambda}^{\alpha(\cdot)}(x)\right)\right)\right]\\
=&\lim_{c\to 0}\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X_{\psi,c\lambda}^{\alpha(c^{-E^t}\cdot)}(t_j)\right)\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{n}\vartheta_j X_{\psi}^{\alpha}(t_j)\right)\right],
\end{aligned}$$

denn es ist $\lim_{c\to 0}\alpha(c^{-E^t}\xi) = \alpha$ nach Voraussetzung erfüllt, da $-E^t$ nur negative Eigenwerte besitzt. $\square$

Wie bereits in Kapitel 3 an entsprechender Stelle erwähnt, lässt sich auch im multistabilen Fall keine *harmonizable* Darstellung eines isolated tempered operator scaling multi stable random fields in natürlicher Weise finden, da die zugehörige charakteristische Funktion ebenfalls nicht mehr von t abhängen würde und damit konstant wäre.

Kapitel 6

Schluss und Ausblick

6.1 Schluss

In dieser Arbeit haben wir die Idee des *temperings*, wie es in [5] betrachtet wurde, mit unserer mathematischen Basis aus [13] verbunden. Wir sind nun in der Lage, für fast beliebige E-homogene Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ die *moving average* sowie analog für eine E^t-homogene Funktion ψ die *harmonizable* Darstellung mit *tempering* zu betrachten. Dabei haben wir gesehen, dass diese Zufallsfelder viele interessante Eigenschaften, wie das Skalierungsverhalten, die stochastische Stetigkeit und die Untersuchung des Tangentialraumes erfüllen. Anschließend konnten wir auf Basis der Ausführungen in [10] zusätzlich zum *tempering* die multi Stabilität betrachten und in diesem Fall die entsprechenden Eigenschaften beweisen. Dies lässt nun also eine flexible Anwendung der *tempered operator scaling stable random fields* zu, in der mit einem weiteren Parameter der Abfall im Unendlichen des Integranden gesteuert werden kann. Explizit erwähnt sei hier des Weiteren die Möglichkeit der Bildung der *isolated* Zufallsfelder, welche durch „Abschneiden“ des jeweiligen Integranden entsteht. Diese war uns in natürlicher Weise bisher nur in der *moving average* Darstellung möglich und spiegelt eine neue Klasse von Zufallsfeldern wider, welche sich essentiell von den anderen Untersuchten unterscheidet. Die Stationarität kann bei vielen Phänomenen in der Anwendung der Finanzmathematik, Hydrologie, Geologie oder der Untersuchung des Internettraffics von Nutzen sein.

6.2 Ausblick

In diesem Abschnitt gehen wir auf mögliche Projekte ein, die im Anschluss an die Ergebnisse dieser Arbeit untersucht werden könnten. Dabei handelt es sich zum Einen um die Erweiterung der Zufallsfelder auf beliebige Dimensionen und zum Anderen um die Untersuchung der Langzeitabhängigkeit der verschiedenen Felder. Ein letzter Aspekt kann die Verallgemeinerung der Nullstellen von E-homogenen Funktionen sein. Die Ideen oder Ansätze haben dabei nicht den Anspruch, diese Themen zu beantworten oder in ihrer Darbietung mathematisch vollständig zu sein, sondern liefern nur erste Untersuchungen.

6.2.1 Erweiterung auf beliebige Dimension

Ausgehend von den Arbeiten [10], [7] und [6] wäre es möglich, das entsprechende ISRM in beiden Darstellungen für eine beliebige Dimension m zu betrachten. Dabei müsste man - statt skalarer Exponenten H und α beziehungsweise $\alpha(x)$ - verallgemeinert Matrizen betrachten. Zudem wären die E-homogenen Funktionen φ respektive ψ nun nicht mehr skalarwertig, sondern vektorwertig. Die Beweistechniken dieser Arbeit wären nur noch partiell anwendbar, allerdings könnten sich in den drei oben genannten Ausführungen entsprechende Ideen befinden, um das *Tempering* auch in beliebiger Dimension hinzuzufügen.

6.2.2 Langzeitabhängigkeit

Eine Idee zur Untersuchung der Langzeitabhängigkeit wäre das Vorgehen analog zu den Theoremen 2.5, 2.6 und der Remark 2.7 in [5], in welchen für einen Spezialfall eines TOSSRFs bereits die Langzeitabhängigkeit bearbeitet wurde. Zur besseren Übersicht gehen wir im Folgenden nur auf die *moving average* Darstellung eines TOSSRFs ein. Zunächst benötigen wir das zugehörige Verhalten der Zuwächse und definieren dafür für alle $t \in \mathbb{R}^d$ und einen Einheitsvektor e_k

$$Y^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t) := X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t+1e_k) - X^{\alpha}_{\varphi,\lambda}(t). \tag{6.1}$$

Im Anschluss betrachten wir für $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$

$$r(t) := \mathbb{E}\left[e^{i(\vartheta_1 Y_{\varphi,\lambda}(t)+\vartheta_2 Y_{\varphi,\lambda}(0))}\right] - \mathbb{E}\left[e^{i\vartheta_1 Y_{\varphi,\lambda}(t)}\right] - \mathbb{E}\left[e^{i\vartheta_2 Y_{\varphi,\lambda}(0)}\right]. \tag{6.2}$$

Wie bereits in [5] aufgezeigt, handelt es sich bei $r(t)$ um eine Erweiterung der Autokovarianzfunktion. Die Aufgabe ist es nun, das Verhalten der Funktion $r(t)$ im Unendlichen asymptotisch zu bestimmen, um anschließend mit Remark 2.7 aus [5] und der Betrachtung von $\sum_{n=0}^{\infty} r(n)$ die Langzeitabhängigkeit untersuchen zu können. Halten wir uns an die entsprechende Notation des obigen Papers, definieren wir

$$g_t(x) := e^{-\lambda\varphi(t-x)}\varphi(t-x)^{H-\frac{q}{\alpha}} \tag{6.3}$$

sowie

$$r(t) = K(\vartheta_1, \vartheta_2)\left(e^{-I(t)} - 1\right), \tag{6.4}$$

wobei

$$K(\vartheta_1, \vartheta_2) := \mathbb{E}\left[e^{i\vartheta_1 Y_{\varphi,\lambda}(t)}\right] + \mathbb{E}\left[e^{i\vartheta_2 Y_{\varphi,\lambda}(0)}\right] \tag{6.5}$$

und

$$I(t) := \int_{\mathbb{R}^d} |\vartheta_1(g_{t+1}(x) - g_t(x)) + \vartheta_2(g_1(x) - g_0(x))|^\alpha \, dx \tag{6.6}$$
$$- \int_{\mathbb{R}^d} |\vartheta_1(g_{t+1}(x) - g_t(x))|^\alpha \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} |\vartheta_2(g_1(x) - g_0(x))|^\alpha \, dx. \tag{6.7}$$

Eine Idee, das Langzeitverhalten der Funktion $r(t)$ zu untersuchen, besteht nun darin, das Verhalten von $I(t)$ zu studieren. Betrachten wir das Verhalten der Integranden, so erhielte man zum Beispiel

$$e^{\lambda \varphi(t)} \varphi(t)^{H+\frac{q}{\alpha}} (g_{t+1}(x) - g_t(x)) = \vartheta_1 \left(e^{-\lambda(\varphi(t-x) - \varphi(t))} \left(\frac{\varphi(t-x)}{\varphi(t)} \right)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right). \tag{6.8}$$

Nun wären nicht zu restriktive Bedingungen an die E-homogene Funktion φ zu stellen, sodass sowohl die auftretende Differenz als auch der gebildete Quotient in Abhängigkeit von t zu analysieren ist. Findet man so das asymptotische Verhalten für alle Teile der Integranden von $I(t)$, könnte eine Aussage über das Langzeitverhalten folgen.

6.2.3 Verallgemeinerung der Nullstellen

In diesem Abschnitt möchten wir auf die Erweiterung der Klasse der Integranden eingehen. Dies ist gleichbedeutend mit einer Erweiterung der Klasse der E-homogenen Funktionen, wie wir sie in Definition 2.3 eingeführt haben. Dabei beschränken wir uns in diesem Kapitel auf die *moving average* sowie *harmonizable* Darstellung der *tempered operator scaling stable random fields*.

Sei dazu $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine E-homogene stetige Funktion. Bis jetzt gilt die Äquivalenz

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \tag{6.9}$$

Dies möchten wir nun durch Zulassung weiterer Nullstellen auf der Sphäre S_0 verallgemeinern. Wir fordern also, dass

$$N_\varphi := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) = 0 \right\} \neq \{0\} \tag{6.10}$$

gilt. Betrachten wir die Beweise im Laufe dieser Arbeit, so stellen wir fest, dass zusätzliche Nullstellen sowohl bei der *moving average* Darstellung als auch bei der *harmonizable* Darstellung Probleme bei der Existenz mit sich bringen. Diese werde ich folgend erläutern.

Moving average Darstellung

Zuerst betrachten wir in diesem Unterkapitel die *moving average* Darstellung eines TOSSRFs im Punkt $t \in \mathbb{R}^d$. Im Folgenden bezeichnen wir den Träger der E-homogenen Funktion φ mit M_φ. Dann erhalten wir die Existenz der *moving average* Darstellug nach Lemma 2.6.6 durch die Endlichkeit des

Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{M_\varphi}(y) \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)} \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^\alpha dy < \infty. \tag{6.11}$$

In diesem Punkt unterteilen wir die Integration, wie wir es bereits im Laufe der Arbeit bei *moving average* Darstellung durchgeführt haben, in zwei Teilintegrale in Abhängigkeit einer reellen Zahl $R > 0$. Wir erhalten demnach

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha,\varphi,\lambda}(t) := \int_{\tau(y)\leq R} \mathbb{1}_{M_\varphi}(y) \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)} \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^\alpha dy \tag{6.12}$$

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi,\lambda}(t) := \int_{\tau(y)> R} \mathbb{1}_{M_\varphi}(y) \left| e^{-\lambda\varphi(t-y)} \varphi(t-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} - e^{-\lambda\varphi(-y)} \varphi(-y)^{H-\frac{q}{\alpha}} \right|^\alpha dy. \tag{6.13}$$

Für das erste Integral erhalten wir ähnlich zu der Vorgehensweise in 3.1.2 die Abschätzung

$$\Gamma^{(1)}_{\alpha,\varphi,\lambda}(t) \leq 2^\alpha \int_{\tau(y)\leq R} \mathbb{1}_{M_\varphi}(y) \left(\varphi(t-y)^{H\alpha-q} + \varphi(-y)^{H\alpha-q} \right) dy. \tag{6.14}$$

Dementsprechend benötigen wir zur Existenz die Aussage

$$\int_{M_\varphi \cap \{\tau(y)\leq R\}} \varphi(-y)^{H\alpha-q} dy < \infty. \tag{6.15}$$

Betrachten wir anschließend das zweite Teilintegral, so erhalten wir analog zum Beweis von Satz 3.1.2 die Abschätzung

$$\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi,\lambda}(t) := \int_{\tau(y)>R} \mathbb{1}_{M_\varphi}(y) \varphi(-y)^{-\gamma} dy \tag{6.16}$$

für beliebiges γ. Somit erlangen wir die Existenz von $\Gamma^{(2)}_{\alpha,\varphi,\lambda}(t)$, falls für die allgemein gehaltene Funktion $\varphi(y)$ ein Paramter γ existiert, sodass

$$\int_{M_\varphi \cap \{\tau(y)>R\}} \varphi(-y)^{-\gamma} dy < \infty. \tag{6.17}$$

***Harmonizable* Darstellung**

In diesem Abschnitt möchten wir die *harmonizable* Darstellung unter der oben genannten Problematik betrachten. Aus dem Grundlagenkapitel erhalten wir, dass für einen entsprechenden Träger M_ψ einer E^t-homogenen stetigen Funktion ψ für die Existenz des Zufallsfeldes

$$\int_{M_\psi} \left| e^{i<x,\xi>} - 1 \right|^\alpha |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha-q} d\xi < \infty \tag{6.18}$$

gelten muss. Wir wählen den Träger

$$M_\psi := \left\{ s^{E^t}\vartheta : s > 0, \vartheta \in \operatorname{supp}(\psi_0) \right\}, \tag{6.19}$$

um auf mehrere Nullstellen zu erweitern. Damit erhalten wir mit der Überführung in die verallgemeinerten Polarkoordinaten aus Lemma 2.6.9 die Rechnung

$$\int_{M_\psi} \left| e^{i<x,\xi>} - 1 \right|^\alpha |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha - q} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{M_\psi}(\xi) \left| e^{i<x,\xi>} - 1 \right|^\alpha |\lambda - i\psi(\xi)|^{-H\alpha - q} d\xi \tag{6.20}$$

$$= \int_0^\infty \int_{S_0} \mathbb{1}_{M_\psi}(r^{E^t}\vartheta) \left| e^{i<x,r^{E^t}\vartheta>} - 1 \right|^\alpha \left| \lambda - i\psi(r^{E^t}\vartheta) \right|^{-H\alpha - q} r^{q-1} \sigma(d\vartheta)\, dr \tag{6.21}$$

$$\leq \int_0^\infty \int_{S_0} \mathbb{1}_{M_\psi}(r^{E^t}\vartheta) C(1 + ||x||^\alpha) \min(r^{\alpha(a_1 - \delta)}, 1) \left| \lambda - i\psi(r^{E^t}\vartheta) \right|^{-H\alpha - q} r^{q-1} \sigma(d\vartheta)\, dr. \tag{6.22}$$

An dieser Stelle ist es essentiell, den Ausdruck

$$\mathbb{1}_{M_\psi}(r^{E^t}\vartheta) \tag{6.23}$$

zu betrachten. Es gilt für $r > 0$ sowie $\vartheta \in S_0$

$$r^{E^t}\vartheta \in M_\psi \tag{6.24}$$

$$\Leftrightarrow \vartheta \in \operatorname{supp}(\psi_0). \tag{6.25}$$

Dementsprechend benötigen wir die Existenz von

$$\int_0^\infty \int_{\operatorname{supp}(\psi_0)} \min(r^{\alpha(a_1 - \delta)}, 1) \left| \lambda - i\psi(r^{E^t}\vartheta) \right|^{-H\alpha - q} r^{q-1} \sigma(d\vartheta)\, dr. \tag{6.26}$$

Diese Existenz ist äquivalent zu

$$\int_{\operatorname{supp}(\psi_0)} \psi(\vartheta)^{-H\alpha - q} \sigma(d\vartheta) < \infty. \tag{6.27}$$

Diese Voraussetzung ist in ihrer Allgemeinheit zu fordern, um die Existenz der *harmonizable* Darstellung eines TOSSRFs in Bezug auf die Erweiterung der Nullstellen zu gewährleisten.

Literatur

[1] Hermine Bierme und Celine Lacaux und Hans-Peter Scheffler. *Multi-operator scaling random fields*. Mathematics Subject Classification, 2011.

[2] Hermine Bierme und Celine Lacaux. *Hölder regularity for operator scaling stable random fields*. http://www.math-info.univ-paris5.fr/~bierme/Recherche/Publications/2009BL.pdf, 2008.

[3] Kenneth Falconer. *Tangent Fields and the Local Structure of Random Fields*. Plenum Publishing Corporation, 2002.

[4] Kenneth Falconer. *The local structure of random processes*. London Mathematical Society, 2003.

[5] Mark M. Meerschaert und Farzad Sabzikar. *Tempered Fractional Stable Motion*. J Theor Probab, 2016.

[6] Dustin Kremer und Hans-Peter Scheffler. *Multi operator-stable random measures and fields*. https://arxiv.org/pdf/1809.10933.pdf, 2018.

[7] Dustin Kremer und Hans-Peter Scheffler. *Multivariate stochastic integrals with respect to independently scattered random measures on δ-rings*. https://arxiv.org/pdf/1711.00890.pdf, 2018.

[8] Mark M. Meerschaert und Hans-Peter Scheffler. *Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice*. John Wiley & Sons Inc., 2001.

[9] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Verlag, 2013.

[10] Dustin Kremer. *Multivariate stochastische Integrale mit Anwendung am Beispiel Operator-stabiler und Operator-selbstähnlicher Zufallsfelder*. https://dokumentix.ub.uni-siegen.de/opus/volltexte/2017/1108/pdf/Dissertation_Dustin_Kremer.pdf, 2016.

[11] Kenneth Falconer und Lining Liu. *Multistable processes and localisability*. https://arxiv.org/pdf/1007.4932.pdf, 2010.

[12] David A. Benson und Mark M. Meerschaert und Boris Baeumer und Hans-Peter Scheffler. *Aquifer operator scaling and the effect on solute mixing and dispersion*. Water Resources Research Vol. 42, 2006.

[13] Hermine Bierme und Mark M. Meerschaert und Hans-Peter Scheffler. *Operator scaling stable random fields*. Stochastic Processes und their Applications 117, 2007.

[14] Gennady Samorodnitsky und Murad S. Taqqu. *Stable non gaussian random processes*. Chapman & Hall/CRC, 2000.

[15] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. R. R. Donnelley & Sons Company, 1976.

[16] Shuai Zheng und Sadeep Jayasumana und Bernardino Romera-Paredes et al. *Conditional Random Fields as Recurrent Neural Networks*. IEEE, 2015.

[17] Thomas Mikosch und Sidney Resnick und Holger Rootzen und Alwin Stegeman. *Is network traffic approximated by stable levy motion or fractional brownian motion?* Annals of Applied Probability, 2002.