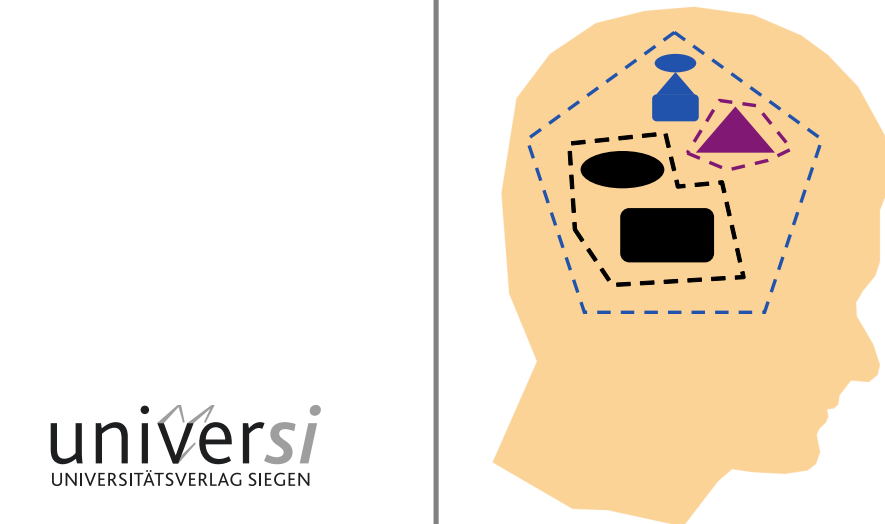
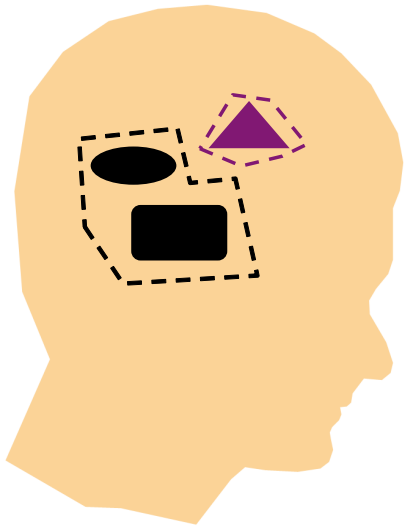


Gero Stoffels

(Re-)Konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu formal-abstrakten Auffassungen

theoretisch grundlegen,
historisch reflektieren und beim
Übergang Schule-Hochschule anwenden



Gero Stoffels

(Re-)Konstruktion von Erfahrungsbereichen bei
Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu
formal-abstrakten Auffassungen

Gero Stoffels

(Re-)Konstruktion von Erfahrungsbereichen bei
Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu
formal-abstrakten Auffassungen

Eine theoretische Grundlegung sowie Fallstudien zur
historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung
und individueller Entwicklungen mathematischer
Auffassungen von Lehramtsstudierenden beim
Übergang Schule-Hochschule

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation zur Erlangung eines Doktors der Pädagogik von der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der Universität Siegen angenommen.

Erster Gutachter: Prof. Dr. Ingo Witzke, Universität Siegen
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. habil. Horst Struve, Universität Siegen
Tag der mündlichen Prüfung: 03. Juli 2019

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Impressum

Umschlaggestaltung: Gero Stoffels
Druck und Bindung: UniPrint, Siegen

Siegen 2020: *universi* – Universitätsverlag Siegen
www.uni-siegen.de/universi

Gedruckt auf alterungsbeständigem holz- und säurefreiem Papier

ISBN 978-3-96182-076-4

Die Publikation erscheint unter der
Creative Commons Lizenz CC-BY-SA



Abstract

Research in mathematics education on students' transition from school to university is as multifaceted as the transition itself. Most common research focuses on two aspects. The first aspect is about an assumed lack of students' knowledge and competencies when they start at university. The second aspect deals with the differences between school and university mathematics regarding their nature, culture and way of doing mathematics.

My research can be associated best with the second research area. I reconstructed student's difficulties and his reflections upon them as well as the benefits of his experiences regarding his transition, from the perspective of a change of belief systems (Auffassungen). The student shared the information during an intervention seminar addressing the transition. The perspective of reconstruction is based on the distinction between empirical-concrete and formal-abstract belief systems which were theoretically connected to the concept of subjective domains of experience (Bauersfeld, 1983). The adequacy of this distinction is shown in two historical case studies on von Mises' (1931) "Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik" and Kolmogorov's (1933) "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" as well as a qualitative content analysis of school and higher educational textbooks.

The conducted intensive case study research on one student showed, that the belief changes students experience during their transition are crucial for a successful transition from school to university. Their reflections upon belief changes within the development of mathematics can be supportive.

Zusammenfassung

Die mathematikdidaktische Forschung bezüglich des Übergangs von der Schule zur Hochschule der Studierenden des Fachs Mathematik ist so facettenreich wie der Übergang selbst. Zwei besonders prominente Forschungsrichtungen fokussieren einerseits auf vermutete Wissenslücken sowie fehlende Kompetenzen in der Studieneingangsphase und andererseits auf Unterschiede zwischen Schul- und Hochschulmathematik in Bezug auf deren Natur, Kultur oder verschiedene Arten mathematischer Praxis.

Meine Forschung ist der zweiten Forschungsrichtung zuzuweisen, insofern die Schwierigkeiten wie auch positiven Auswirkungen der Erfahrung des Übergangs der Studierenden, die sie im Rahmen eines Interventionsseminars mitteilen, sowie deren Reflexion, aus der Perspektive von Auffassungswechseln rekonstruiert werden. Diese Perspektive fußt auf der Unterscheidung einer empirisch-gegenständlichen und formal-abstrakten Auffassung von Mathematik, die auf theoretischer Ebene mit dem Konzept der „subjektiven Erfahrungsbereiche“ (Bauersfeld, 1983) verknüpft wird. Die Adäquatheit dieser Unterscheidung wird dabei anhand historischer Fallstudien zu von Mises' (1931) „Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik“ und Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ sowie einer qualitativen Inhaltsanalyse verschiedener Schul- und Hochschullehrbücher gezeigt.

Die intensive Fallstudie von einem Studierenden zeigt einerseits, dass die Erfahrung von Auffassungswechseln, die Studierende während ihres Übergangs erleben, wesentlich für einen erfolgreichen Übergang von der Schule zur Hochschule ist und zugleich die Reflexion von Auffassungswechseln in der historischen Entwicklung der Mathematik ähnlich positiv wirken kann.

Geleitwort

Nach einer kurzen Einleitung beginnt David Hilbert seine berühmten „Grundlagen der Geometrie“ aus dem Jahr 1899, deren „Überzeugungskraft“ nach Hans Freudenthal „in einer Philosophie [liegt], die nicht programmatisch verkündet, sondern handgreiflich durchexerziert wird,“ mit den Worten:

„Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des e r s t e n Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit A, B, C, \dots ; die Dinge des z w e i t e n Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit a, b, c, \dots ; die Dinge des d r i t t e n Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; die Punkte heißen die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heißen die *Elemente der ebenen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heißen die Elemente der *räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „l i e g e n“, „z w i s c h e n“, „p a r a l l e l“, „c o n g r u e n t“, „s t e t i g“; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.“

(Hilbert, 1899, S. 4)

Freudenthal beschreibt dieses Werk und seine Folgen als revolutionär, wurde damit doch „[...] die Nabelschnur zwischen Realität und Geometrie durchgeschnitten“.

Auffassungen, darüber ist man sich in der mathematikdidaktischen Community seit einiger Zeit im Klaren, sind ein wesentlicher Faktor dafür, wie Wissensentwicklungsprozesse in mathematischen Kontexten ablaufen. A. Schoenfeld hat in seinen Studien erarbeitet, dass der Erfolg von Schülerinnen und Schülern wesentlich von ihrem „belief system“, d.h. ihrer Auffassung von Mathematik abhängt. Er hat dabei den Begriff eines (pure) empiricist belief systems als archetypisch für Schülerinnen und Schüler geprägt – vereinfacht gesagt glauben viele Schülerinnen und Schüler nur dem, was sie auch „sehen können“; d.h. anders als mit Hilbert beschrieben, ist für diese beispielsweise Geometrie eine Theorie von

tatsächlich gezeichneten Figuren und ein Satz genau dann wahr, wenn die zeichnerische Umsetzung in einer Konstruktion gelingt.

Gero Stoffels hat es sich in seiner Dissertationsschrift zur Aufgabe gemacht für den Übergang von der Schule zur Hochschule relevante Auffassungen auf verschiedenen Ebenen (Lehrbücher, Schulbücher, Forschungstagebücher von Studierenden etc.) zu beschreiben und zu diskutieren. Dabei ist es kein Zufall, dass er sich für die Wahrscheinlichkeitsrechnung entschieden hat. Zum einen handelt es sich dabei um einen Inhaltsbereich, der in den letzten Jahren in den Curricula der Schulen deutlich an Gewicht gewonnenen hat, zum Anderen besteht die Möglichkeit einen Übergang von einer *empirisch-gegenständlichen* zu einer *formal-abstrakten* Auffassung von Mathematik mit Blick auf die historische Entwicklung prägnant nachzuzeichnen. So ist das im dritten Kapitel analysierte und diskutierte Werk von A. Kolmogoroff in direkter Folge eines der sogenannten Hilbertprobleme entstanden und so etwas wie das historische Pendant zu den Grundlagen der Geometrie – eben für die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Gero Stoffels gelingt es in seiner Schrift für den Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie auf erkenntnistheoretischer Ebene eine Brücke zu schlagen zwischen der Rekonstruktion und Diskussion (historischer) Lehrbuchauffassungen auf der einen Seite und der Interpretation und Diskussion individueller Erfahrungen von Lehramtsstudierenden zu nachhaltigen Auffassungswechseln im Fach Mathematik auf der anderen Seite. Die der Arbeit unterliegende Fragestellung ist dabei, ob die explizite Bewusstmachung des historischen Übergangs (bzw. von fundamentalen Unterscheidungsmerkmalen) hilfreiche Erkenntnisse für den individuellen Übergang zwischen einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung von Mathematik liefern kann.

Besonders zu würdigen ist es, dass es Gero Stoffels auf kohärente und stringente Art und Weise in seiner Arbeit gelingt, verschiedene Theorieelemente für seine Rekonstruktionen, Diskussionen und Interpretationen zusammenzuführen. Die konzeptionelle Idee, Auffassungen von Mathematik als Äquivalenzklassen von subjektiven Erfahrungsbereichen (H. Bauersfeld) zu modellieren ist innovativ und überzeugend. Handelt es sich um Äquivalenzklassen für die sich die zu Grunde liegenden Erfahrungsbereiche als empirische Theorien (W. Balzer, J. Sneed, W. Stegmüller et al.) rekonstruieren lassen, so spricht Gero Stoffels von einer *empirisch-gegenständlichen Auffassung*. Handelt es sich hingegen um eine

Äquivalenzklasse von Erfahrungsbereichen in der ein empirischer Gehalt bewusst außen vorgelassen wird, spricht er von einer *formal-abstrakten* Auffassung. Damit ist es dem Autor gelungen auf stimmige Art und Weise den Begriff der Auffassungen von Mathematik mit dem theoretischen Konzept subjektiver Erfahrungsbereiche zusammenzubringen; für den für die Ausführungen in der Arbeit so wichtigen Wechsel von Auffassungen bedient sich Gero Stoffels als Hintergrundtheorie des Enaktivismus (H. Maturana und F. J. Varela) und dabei insbesondere dem Konzept der strukturellen Kopplung.

Im dritten Teil der vorliegenden Arbeit findet sich – nach der konzisen Zusammenfassung der theoretischen Erkenntnisse – schließlich der empirische Teil der Arbeit; gegliedert in fünf fallstudienartige „Untersuchungen“. Diese Untersuchungen stehen in direktem Rückbezug zu den Forschungsfragen am Anfang der Arbeit. Der Autor beginnt dabei zunächst mit der Betrachtung von zwei einschlägigen Lehrbuchwerken: Zum einen den „Vorlesungen aus dem Gebiet der Angewandten Mathematik (Bd. 1)“ von R. von Mises (1931) und zum anderen A. Kolmogoroffs „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (1933). Beide können als Klassiker der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet werden. Gero Stoffels arbeitet sehr sorgfältig die unterschiedlichen zu Grunde liegenden Auffassungen im Sinne des Theorieteils heraus: Während von Mises' Werk (gestützt auf eine sachgerechte strukturalistische Rekonstruktion) als prototypisch für eine empirisch-gegenständliche Wahrscheinlichkeitsrechnung beschrieben wird, zeigt sich Kolmogoroffs Wahrscheinlichkeitstheorie als formalistische Theorie im modernen hilbertschen Sinne. Ergänzt werden diese Betrachtungen durch die systematische Analyse einer Schulbuchreihe sowie zweier gebräuchlicher universitärer Lehrbücher.

Herauszuheben sind zudem die Ausführungen zum, von Gero Stoffels an der Universität Siegen in einigen Durchgängen selbst konzipierten und durchgeführten Seminars für Lehramtsstudierende, genannt ÜberPro_WR. Hier setzte der Autor darauf, durch explizite Thematisierung mathematischer Auffassungen für Bedingungen des Auffassungswechsels von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik zu sensibilisieren. Die Beschreibungen dazu im Case Study Design und die Auswertung der vielfältigen Datensätze ist sehr interessant und zeigt auf eindrucksvolle Weise wie wichtig eine derartige Veranstaltung für die Bildungsbiographie von (Lehramts-)Studierenden des Faches Mathematik sein kann.

Mit Blick auf die Entstehung der Dissertation möchte ich zum Ausdruck bringen, dass es große Freude bereitet hat Gero Stoffels zu dieser wichtigen Wegmarke seiner wissenschaftlichen Emanzipation zu begleiten. Sein scharfer analytischer Blick auf seinen Forschungsgegenstand, sein unbedingter Wille es genauer wissen zu wollen und seine tief verankerte Motivation die Dinge nur dann zu formulieren, wenn Sie sorgsam begründet werden können, haben die Erfahrung sein Dissertationsvorhaben betreuen zu können zu einer sehr bereichernden gemacht. Und wenn Gero auf Grund seiner empirischen und theoretischen Erkenntnisse von einem Ergebnis überzeugt ist, kämpft er leidenschaftlich dafür – ist aber genauso immer bereit die Hinweise und Bedenken seines Gegenübers aufzunehmen. In diesem Sinne wünsche ich ihm alles Gute für seinen weiteren akademischen Weg und wünsche viel Freude und Erkenntnis beim Lesen dieser Schrift.

Siegen, 30. Mai 2020

Ingo Witzke

Vorwort & Dank

„Iacta alea est“

Sueton: Divus Iulius, 32

Diese Arbeit basiert – natürlicherweise – auf den vielfältigen Erfahrungen, die ich während meines bisherigen Bildungswegs, und somit Lebens (schließlich geschieht Bildung permanent) sammeln konnte. Für die Vielfältigkeit von Erfahrungen bilden Übergänge insofern eine besondere Rolle, da sie neue Erfahrungsbereiche ermöglichen. Was bedeutet dies konkret?

Der Forschungsgegenstand dieser Arbeit ist der Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik mit besonderem Fokus auf das gymnasiale Lehramt, den ich zum einen selbst und auch durch Beobachtung von und Gesprächen mit Studierenden erleben konnte. Dieser Übergang wird schon seit über 100 Jahren als „problematisch“ beschrieben. Das bedeutet allerdings nicht zwingend, dass dieser „zur Katastrophe“ wird. Man kann – und dies ist die Grundauffassung, die von mir vertreten wird – solche Übergänge auch als Herausforderung und Chance begreifen, neue Erfahrungen zu machen, bzw. zu ermöglichen, und so seine eigenen Auffassungen von Mathematik und darüber hinaus kennenzulernen, zu hinterfragen und zu erweitern. Eine Bedingung dafür, dass solche Übergänge zu Chancen und eben nicht zu Katastrophen werden, liegt in der Ausgestaltung der Erfahrungsbereiche in der diese Übergänge stattfinden. Für mich waren folgende Übergänge und Erfahrungsbereiche mit zugehörigen Begleitern besonders wichtig.

Der erste Übergang, der mir besonders in Erinnerung geblieben ist, ist derjenige von der Grundschule zum Gymnasium, das ich trotz lediglich befriedigender Leistungen in den Fächern Deutsch und Mathematik besuchen durfte, da – so die Lehrkraft im Eingangsgespräch – wir am gleichen Tag Geburtstag haben. Meiner Mutter Renate Stoffels, die wohl am positiven Ausgang des Eingangsgesprächs einen großen Anteil hatte, danke ich besonders für ihr Engagement bei diesem Übergang. Insgesamt kann ich mich gar nicht genug bei meinen Eltern Heinz und Renate Stoffels bedanken, die mich bei jedem Übergang, den ich bewältigen wollte, nicht nur unterstützten, sondern mir auch genügend Freiheiten verschafft haben, diese in Angriff nehmen zu können. Seit meiner Gymnasialzeit und bis zum heutigen Tag haben Benjamin J. Peters und ich uns bei vielen Übergängen,

nicht nur intellektueller, sondern auch handfester Art gegenseitig begleitet. Einen besseren Freund, der konsequent mein Nachdenken über Grundauffassungen dieser Arbeit befeuert hat, kann man sich wohl nicht vorstellen.

Meinen Übergang von der Schule zur Universität, mit den Fächern Mathematik und Physik im gymnasialen Lehramt, würde ich auch als Herausforderung bezeichnen. Dass dieser Übergang positiv verlaufen und nicht in einer Katastrophe geendet ist, habe ich wohl meinem großartigen Kommilitonen Felix Frankeser zu verdanken, der mit mir die (Un-)Tiefen eines Mathematik- und Physik-Studiums ergründet hat. Ein besonderer Dank im Rahmen meines Studiums und für das entfachen des Interesses an Fragen zu Übergängen in Lernbiographien gilt Herrn Prof. Dr. Wilfried Plöger, der mir in seinem Seminar zu den „Grundformen des Lehrens“ die Augen geöffnet hat, dass man wohl erst „ab dem 3. Fachsemester wisse, ob man einen erfolgreichen Übergang in das Mathematikstudium geschafft hat“. Während dieser Zeit an der Universität zu Köln konnte ich bei meinem Übergang zur studentischen Hilfskraft vielfältige Erfahrungen, bei der Begleitung von Studierenden mathematischer Lehrämter, sammeln. Dass diese so vielfältig waren, liegt vor allem daran, dass mir von vielen Mitarbeitern des Instituts für Mathematikdidaktik (früher noch Seminar für Mathematik und ihre Didaktik) Vertrauen entgegengebracht und Verantwortung übertragen wurde. Bedanken möchte ich mich dabei besonders bei Prof. Dr. Andreas Büchter und Prof. Dr. em. Joseph Steenbrink. Besonders hervorzuheben ist Prof. Dr. Horst Struve, der mir nicht nur als studentische Hilfskraft das Gefühl gegeben hat, wertgeschätzt zu werden, sondern diese Grundhaltung auch während unserer gemeinsamen Zeit kooperativen Arbeitens an getrennten und gemeinsamen Standorten konsequent beibehalten hat. Zusätzlich bedanke ich mich bei ihm an dieser Stelle auch für die Bereitschaft ein Gutachten dieser Arbeit erstellt zu haben. Neben den professoralen Mitgliedern des Instituts hatte ich das Glück auch von anderen Mitarbeitern des Instituts nicht nur bei meiner Arbeit als SHK, sondern auch auf dem Weg zum Betriebssport und in die Wissenschaft Mathematikdidaktik begleitet zu werden. Besonders hervorzuheben sind dabei Dr. Stephan Berendonk, Dr. Stefan Heilmann, Dr. Katrin Schiffer und Dr. Simeon Schwob, die immer ein offenes Ohr hatten und in der Regel auch bereit waren mit mir zu diskutieren.

Nach meiner Zeit als studentische Hilfskraft habe ich die Chance bekommen eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Siegen anzutreten.

Also einen Übergang von der Universität zur Universität zu erleben. Auch dort hatte ich das Glück vielfältige positive Erfahrungen zu sammeln, was der gesamten Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik zuzuschreiben ist, die sich ebenfalls durch eine besondere Offenheit und Diskussionsbereitschaft auszeichnet. Besonders tiefe Diskussionen konnte ich mit Ronny Becker, Dr. Melanie Platz, Dr. Christoph Neugebauer und Dr. Anna-Marietha Vogler führen, die insbesondere deshalb an dieser Stelle namentlich genannt sind, da sie nur eine begrenzte Zeit Teil der Arbeitsgruppe waren. In einem noch größeren Maß gilt dies für meine Freundin und geschätzte Kollegin Prof. Kathleen M. Clark, mit der ich neben der Kunst der Fallstudie auch verschiedene europäische und amerikanische Städte entdecken konnte. Aus der Arbeitsgruppe möchte ich zusätzlich Kathrin Holten besonders hervorheben, da sie mit mir seit mittlerweile mehr als vier Jahren ein Büro und damit auch viele meiner Gedanken geteilt und diskutiert hat, herzlichen Dank!

Im Oktober 2018 habe ich dann meinen Übergang von der Universität in die Schule als Referendar am Studienseminar Bonn erfahren. Auch dieser bot die Chance für vielfältige – vor allem positive – Erfahrungen. Einen großen Beitrag dazu haben meine Kernseminarleiterin Maria Nelles und meine Fachleiter, Dr. Michael Neffgen und Jörg Schmallenbach, geleistet, die sich alle durch ihre besondere Wertschätzung der Seminarteilnehmer*innen auszeichneten. Die Mitreferendar*innen haben natürlich einen ebenso großen Anteil für einen erfolgreichen Übergang zurück in die Schule gehabt. Besonders hervorheben möchte ich aus dieser Gruppe natürlich meine Schulgruppe, Hannah Heese, Judith Frenzel, Sören Seyfarth, Christina Silva mit denen man im wahrsten Sinne des Wortes Freud und Leid teilte. Der letzte besonders wichtige Faktor für einen erfolgreichen Übergang in das Referendariat sind nette und offene Kolleg*innen, die bereit sind, eine gute praktische Ausbildung sicherzustellen und mir durch ihre reflektierte Praxis neue Perspektiven auf die hier dargestellte Forschung ermöglichen. Besonders folgende Kolleg*innen möchte ich dafür danken Anna Azzam, Sandra Huser, Claudia Jockers, Peter Koehn, Elke Krause-Brandt und Roland Rothe.

Die beiden zuletzt beschriebenen Übergänge hätte ich nicht so gewinnbringend und reibungslos bewältigen können ohne Prof. Dr. Ingo Witzke, der nicht nur der Erstbetreuer dieser Arbeit ist, sondern mir die Möglichkeit gegeben hat den Übergang von der Universität zur Universität zu beschreiten und mir auch nicht

den Weg verbaut hat den Übergang von der Universität zurück an die Schule in Angriff zu nehmen, trotz vermutlich besseren Wissens und schlechten Gewissens (bei dieser Anmerkung handelt es sich um eine Rekonstruktion). Als Betreuer und Vorgesetzter hat sich Ingo dadurch ausgezeichnet, dass er mir die Verfolgung meiner mathematikdidaktischen Forschungsinteressen als wissenschaftlicher Mitarbeiter stets, unter anderem auch durch die Ermöglichung vielfältiger Tagungsbesuche und der Teilnahme an zahlreichen Kooperationsprojekten, ermöglicht hat. Dieser Förderung des Wechselspiels von Vielfältigkeit und Fokus verdanke ich meiner Ansicht nach die zahlreichen Erfahrungen, die ich als Mitarbeiter der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik an der Universität Siegen sammeln konnte und die erst die verschiedenen Perspektiven der vorliegenden Arbeit ermöglichten.

Im Kontext der praktischen Fertigstellung dieser Arbeit danke ich meiner Schwiegermutter Birgitt Barz, meinem Freund Felix Frankeser, meiner Schwester Silke Peters, meinem Vater Heinz und meiner Mutter Renate Stoffels, meiner Kollegin Amelie Vogler sowie meiner Frau Janna Stoffels, die Teile meiner Arbeit in Bezug auf sprachliche und grammatikalische Richtigkeit durchgesehen haben.

Zum Schluss dieses Vorworts möchte ich meiner Frau Janna Stoffels ganz besonders danken, die mich bei allen meinen Vorhaben sowohl beruflicher wie auch privater Natur immer unterstützt hat und besonders am Ende die für mich nötige Geduld, Strenge und Unterstützung aufgebracht hat, die die Fertigstellung einer solchen Arbeit erfordert.

Newton und Einstein danke ich besonders für die Begleitung in stillen Denkphasen und dem empirischen Beleg dafür, dass der Enaktivismus zahlreiche Phänomene adäquat beschreiben kann.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	iii
Zusammenfassung.....	iv
Geleitwort	vii
Vorwort & Dank	xi
Inhaltsverzeichnis	xv
Einleitung.....	1
Der Übergang Schule-Hochschule im Fach Mathematik.....	11
1 Ein kurzer Blick durch die Jahrhunderte	15
2 „Andersartigkeit“ vs. „Fehlende Basisfähigkeiten und Fertigkeiten“	25
2.1 Fehlende Basisfähigkeiten und Fertigkeiten	27
2.2 Die Andersartigkeit der Mathematik an Schule und Hochschule	31
Zusammenschau der betrachteten Perspektiven	43
Theoretischer Teil	47
3 Enaktivismus: Modell von (Inter-)Aktionen	51
3.1 Grundbegriffe des Enaktivismus.....	54
3.1.1 Vorüberlegungen: Entitäten, ihre Struktur und Organisation.....	57
3.1.2 Autopoietische Systeme.....	58
3.1.3 Strukturelle Kopplung	59
3.1.4 Operationale Abgeschlossenheit	60
3.1.5 Strukturelle Determination	61
3.1.6 Koordination von Verhalten und eine enaktivistische Konzeption von Wissen	62
3.1.7 Soziale Phänomene und Kommunikation	64
3.1.8 „Spracheln“ (linguaging).....	66
3.1.9 Identität und Selbst-Bewusstsein	67
3.2 Enaktivistische Perspektiven auf Interaktionsprozesse	68
3.2.1 Tom und sein Hund	69

3.2.2	Deborah.....	74
3.3	„Bedingungen der Möglichkeit von Lernen“	78
3.4	Notiz: Forschen im Sinne des Enaktivismus.....	79
4	Das Konzept „Subjektive Erfahrungsbereiche“	89
4.1	Spezifische Elemente subjektiver Erfahrungsbereiche.....	92
4.2	Subjektive Erfahrungsbereiche in der „society of mind“	95
4.2.1	Distinktion subjektiver Erfahrungsbereiche.....	96
4.2.2	Aktivierung von subjektiven Erfahrungsbereichen	96
4.2.3	Konstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche	97
4.2.4	Mathematikspezifischer „Sonderfall“ für die Konstruktion neuer SEB: Das metonymische Fortsetzen.....	99
4.3	(Subjektive) Erfahrungsbereiche im Rahmen von Interaktionen	100
4.3.1	Konstruktion von Erfahrungsbereichen durch Interaktionen zwischen Trägern subjektiver Erfahrungsbereiche	101
4.3.2	Probleme der (Re-)Konstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche	106
4.4	Wissen als spezifisches Element subjektiver Erfahrungsbereiche.....	109
4.4.1	Ziele, Chancen und Herausforderungen der strukturalistischen Rekonstruktion (mathematischen) Wissens	110
4.4.2	Struktur von (mathematischem) Wissen im Sinne des strukturalistischen Theorienkonzepts: Eine wissenschafts- theoretische Beschreibung von Wissen	115
4.4.3	Ontogenese von Wissen im Sinne des „theory theory“-Ansatzes: Eine psychologisch-erkenntnistheoretische Beschreibung von Wissensbildung.....	140
4.5	Konsequente Anwendung des SEB-Konzepts im „Fall Deborah“	145
5	Auffassungen: Cluster subjektiver Erfahrungsbereiche.....	151
5.1	Definition von Auffassungen.....	151
5.2	Empirisch-gegenständliche und formal-abstrakte Auffassungen.....	156
5.2.1	Die empirisch-gegenständliche Auffassung.....	158

5.2.2	Die formal-abstrakte Auffassung	160
5.3	Definition von Auffassungswechseln	169
	Zusammenschau der theoretischen Ergebnisse	171
	Untersuchungen.....	175
6	Empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 20. Jahrhundert	181
6.1	Ziele der Untersuchung 1	182
6.2	Kontext der Quelle zur Untersuchung 1.....	184
6.3	Methodik der Untersuchung 1	191
6.4	Ergebnisse der Untersuchung 1	191
6.4.1	Partielle strukturalistische Rekonstruktion des Theorie-Elements „einfachstes Kollektiv oder Alternative“	191
6.4.2	Ergebnisse der partiellen strukturalistischen Rekonstruktion im Kontext.....	198
6.4.3	Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 1	202
6.4.4	Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 1 ergeben	202
7	Formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 20. Jahrhundert	203
7.1	Ziele der Untersuchung 2	204
7.2	Kontext der Quelle zur Untersuchung 2.....	204
7.3	Methodik der Untersuchung 2	223
7.4	Ergebnisse der Untersuchung 2	224
7.4.1	Zusammenfassende qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring.....	225
7.4.2	Übersicht und Einordnung der zusammenfassenden Kategorien.....	233
7.4.3	Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 2	235
7.4.4	Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 2 ergeben	236
8	Empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Schulbüchern	237
8.1	Ziele der Untersuchung 3	238

8.2	Kontext der Quelle zur Untersuchung 3	239
8.2.1	Stochastik in den Kernlehrplänen Nordrhein-Westfalens	239
8.2.2	Systematischer Aufbau der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer im Themengebiet der Stochastik	250
8.3	Methodik der Untersuchung 3.....	276
8.4	Ergebnisse der Untersuchung 3.....	278
8.4.1	Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 3.....	333
8.4.2	Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 3 ergeben	334
9	Formal-abstrakte Auffassung der Stochastik an der Hochschule.....	335
9.1	Ziele der Untersuchung 4	336
9.2	Kontext der Quellen zur Untersuchung 4.....	337
9.2.1	Kontext von Georgiis Hochschullehrwerk	338
9.2.2	Kontext von Henzes Hochschullehrwerk	351
9.3	Methodik der Untersuchung 4.....	374
9.4	Ergebnisse der Untersuchung 4.....	375
9.4.1	Zusammenfassende qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring	375
9.4.2	Ergebnisse der zusammenfassenden qualitativen Inhaltsanalyse im Kontext der Werke	379
9.4.3	Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 4.....	380
9.4.4	Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 4 ergeben	380
10	Auffassungsentwicklungen im Rahmen des Projekts ÜberPro_WR.....	383
10.1	Ziele der Untersuchung 5	387
10.2	Methodik der Untersuchung 5.....	388
10.2.1	Bestimmung der Methodik der Fallstudienforschung.....	389
10.2.2	Definition der Grundbegriffe der Fallstudienforschung	391
10.2.3	Typisierung der Fallstudie in dieser Untersuchung	393
10.2.4	Charakterisierung des Prozesses der Fallstudienforschung	394
10.3	Ergebnisse der Untersuchung 5.....	411

10.3.1	Der gemeinsame Erfahrungsbereich des Seminars „ÜberPro_WR“	412
10.3.2	Der Fall „Emil“	418
10.3.3	Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 5.....	444
10.3.4	Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 5 ergeben	444
	Fazit.....	449
	Rückschau	451
	Ergebnisse der ersten beiden Teile und der Untersuchungen dieser Arbeit.....	451
	Verbindung der Untersuchungen der historischen Arbeiten und die Verbindung der Untersuchungen der aktuellen Lehrwerke für Schule und Hochschule	465
	Verbindung der Untersuchung zur Wahrscheinlichkeitstheorie von von Mises und der Untersuchung der Schulbuchreihe sowie Verbindung der Untersuchung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung von Kolmogoroff und der Untersuchung der Hochschullehrbücher.....	467
	Verbindung der fünften Untersuchung mit den übrigen Untersuchungen	468
	Ausblick.....	469
	Forschungsdesiderate aus dieser Arbeit	469
	Hinweise zum Übergang Schule-Hochschule im Bereich Mathematik für Schüler*innen und Studierende	474
	Hinweise zum Übergang Schule-Hochschule im Bereich Mathematik für Lehrer*innen	475
	Hinweise zum Übergang Schule-Hochschule im Bereich Mathematik für Dozierende	476
	Hinweise zum Übergang Schule-Hochschule im Bereich Mathematik für weitere Interessierte	477
	Literaturverzeichnis	479
	Bildquellen.....	495
	Anhang A: Fragebogen des Pre- und des Post-Tests	497

Anhang B: Übersicht der Sitzungsthemen, zugehörige Aktivitäten & Materialien.....	503
Anhang C: Übersicht aller Fragen des Reflexionsbuchs.....	511
Anhang D: Protokoll zur Fallstudie aus Untersuchung 5	519
Anhang E: Aufbereitung der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer zur Analyse des Bildungsgangs von Schüler*innen.....	525

Einleitung

Der Übergang von der Schule zur Hochschule sollte aufgrund seiner Komplexität aus verschiedenen Perspektiven betrachtet werden. Dabei sind dieser Übergang und mögliche Übergangsprobleme zunächst kein originär mathematikdidaktisches Forschungsfeld, sondern bilden aufgrund des Facettenreichtums eine breite Forschungslandschaft verschiedener Disziplinen, wie den Bildungswissenschaften, der Soziologie sowie der Allgemein-, Fach- und Hochschuldidaktik. Beispielsweise können folgende Aspekte beim Übergang Schule-Hochschule betrachtet werden (vgl. Terhart, Bennewitz, & Rothland, 2014; Hoppenbrock, Biehler, Hochmuth, & Rück, 2016):

- der Wechsel des persönlichen Umfelds,
- neue Lehr-, Lern- und Leistungsformen,
- eine neue Fachkultur.

Wohingegen die beiden erstgenannten Aspekte fachunabhängig bei der Aufnahme jedes Studiums eintreten können, weshalb deren Untersuchung eher im Bereich allgemeiner Bildungswissenschaften zu verorten ist, ist die Untersuchung der Änderung der Fachkultur¹ ein mathematikdidaktisch spezifisches Forschungsfeld. Dieses wurde in den letzten Jahren unter verschiedenen Gesichtspunkten in der Mathematikdidaktik und Hochschulmathematikdidaktik bearbeitet, was einerseits an der großen Zahl von Veröffentlichungen² zu diesem Thema andererseits auch an einer größeren institutionellen Verankerung entsprechender Fachbereiche mit diesem Forschungsschwerpunkt deutlich wird. Beispiele für diese institutionalisierte Forschung sind das in Deutschland etablierte „Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik“ (khdm) in Paderborn, aber auch spezielle Fachzeitschriften, wie etwa das internationale RUME³-Journal.

¹ Diese Fachkultur kann die Studentin oder den Studenten überraschen, da das Studienfach „Mathematik“ denselben Namen wie das Schulfach „Mathematik“ trägt. In anderen Fächern wird ein möglicher Wechsel der Fachkulturen bereits durch Änderung der Fachbezeichnung, bspw. vom Schulfach „Deutsch“ zur „Germanistik“, oder vom Schulfach „Religion“ zur „Theologie“, angezeigt.

² Einen kleinen Einblick, insbesondere in deutsche Forschungsliteratur können die khdm-Reporte 1–3 (verfügbar unter www.khdm.de/publikationen) oder Übersichten zu diesem Thema einschlägiger Verlage geben.

³ International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education

Das Engagement in und die Förderung von mathematikdidaktischer Forschung in diesem Themenbereich ist neben dem fachdidaktischen Interesse an Lehr-Lernprozessen (junger) Erwachsener im Umgang mit „höherer“, „formaler“ oder „abstrakter“⁴ Mathematik, auch dem (politischen) Interesse einer Verringerung von Studienabbruchquoten geschuldet. So ermittelt Dieter (2012, S. 181) eine Studienabbruchquote von ca. 80% im Fach Mathematik und 65% im Fach Wirtschaftsmathematik.

Gerade diese umfassende Beschäftigung mit dem Übergang von der Schule zur Hochschule scheint einen Hinweis darauf zu geben, dass dieses Forschungsfeld – strenggenommen aber auch der Lehrbereich, da dieser Übergang auch universitäre Lehre beeinflusst – besonders innovativ sei. Entsprechendes gilt für die Betrachtung des Übergangs von Lehramtsstudierenden von der Hochschule zurück in die Schule. Diese Einschätzung ist falsch. Die Problematik des Übergangs – gerade in der Lehrer*innenbildung – ist bereits seit mehr als hundert Jahren bekannt und akut⁵. Entsprechend wird in aktuellen Diskussionen vielfach die Beschreibung der doppelten Diskontinuität in konziser Form von Felix Kleins Darstellung der *doppelten Diskontinuität* bemüht. Klein beschreibt den Übergang folgendermaßen:

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte [sic!] mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt [sic!] er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbstständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm

⁴ Diese Begriffe zur Charakterisierung von Mathematik, die in der Hochschule insbesondere der Universität vorkommt, werden in dieser Arbeit hinsichtlich ihres Beitrags zur Beschreibung oder Erläuterung von Übergangphänomenen diskutiert. Schlussendlich wird das Begriffspaar „formal-abstrakte“ Hochschulmathematik genutzt werden. (vgl. 5.2.2)

⁵ Entsprechend dieses langen Zeitraums in dem der Übergang nun bemerkt worden ist, kann man auch von chronischen Übergangsproblemen in der Lehrer*innenbildung sprechen, was deren Lösung durch Sofortmaßnahmen „irgendwelcher Art“ höchst unwahrscheinlich macht.

nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluß [sic!] hat.“

(Klein, 1933, S. 1)

Er belässt es allerdings nicht bei dieser⁶ Beschreibung des Übergangs, sondern formuliert entsprechend seines Ansinnens der Vorlesungsreihe „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte [sic!] aus“ auch Lösungswege zur Überwindung der Diskontinuität. Nämlich:

„Diese doppelte Diskontinuität [Herv. im Original], die gewiß [sic!] weder der Schule noch der Universität jemals Nutzen gebracht hat, bemüht man sich neuerdings aus der Welt zu schaffen, einmal indem man den Unterrichtsstoff der Schulen mit neuen, der modernen Entwicklung der Wissenschaft und der allgemeinen Kultur angepaßten [sic!] Ideen zu durchtränken sucht [...], andererseits aber durch Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer im Universitätsunterricht.“

(Klein, 1933, S. 1)

Bis heute scheint es keinen Nutzen der beschriebenen doppelten Diskontinuität für Schulen wie auch Universitäten zu geben, was öffentlich bemerkbar in Form sog. „Brandbriefe“ (Warnecke, Burchard, & Kühne, 2017a) und Gegenreden (Koepl, Röckner, Eichler, Heckmann, 2017) aber auch durch Initiativen zur Verabschiedung eines Mindestanforderungskatalogs (bspw. cosh, 2014) deutlich wird. Auch in Gesprächen mit Kolleg*innen an Schulen und Universitäten wird häufig über Übergangsprobleme, insbesondere Defizite im Bereich grundlegender Fähigkeiten und Fertigkeiten von Studienanfänger*innen, berichtet und diskutiert. Zudem gibt es, auch aufgrund der Reichhaltigkeit dieses Forschungsfelds, mittlerweile vielfältige Angebote für Schulen und Universitäten, die versuchen den Übergang abzumildern. Andere Initiativen sehen eine Chance in der Reflexion und Ausbildung eines reichhaltigen Bildes von Mathematik in der aktiven Auseinandersetzung mit dieser Diskontinuität oder zumindest der Ermöglichung von Lerngelegenheiten mit Bezug auf spezielle mathematische Arbeitsweisen.

⁶ Das direkte Zitieren von Kleins Arbeit in mathematikdidaktischer Forschung zum Übergang beschränkt sich zumeist auf diesen Textabschnitt (Hefendehl-Hebeker, 2013, S. 1; Bauer & Partheil, 2009, S. 86; Loos & Ziegler, 2016, S. 162).

Diese Arbeit und das damit verbundene Projekt ÜberPro_WR (Forschungsseminar zur Übergangsproblematik im Kontext der Wahrscheinlichkeitsrechnung) lässt sich der zweiten Forschungsrichtung zuordnen, was im ersten Teil dieser Arbeit dargestellt wird. Dabei bildet die Grundlage der Forschungsarbeit und des Projektseminars folgende Forschungshypothese:

Der Wechsel von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung von Mathematik⁷ ist eine wesentliche Hürde für den Übergang von der Schule zur Hochschule. Ein ähnlicher Wechsel von Auffassungen ist auch in der Geschichte der Mathematik zu finden (bspw. in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung). Ihre Analyse des historischen Auffassungswechsels unterstützt die Studierenden bei ihrem individuellen Übergang von der Schule zur Hochschule.

Aus dieser Hypothese lassen sich die folgenden fünf Forschungsfragen ableiten:

1. Ist eine empirisch-gegenständliche Auffassung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen und, wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
2. Ist eine formal-abstrakte Auffassung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen und, wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
3. Ist eine empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulkontext nachzuweisen und, wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
4. Ist die formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Hochschulkontext nachzuweisen und, wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
5. Inwieweit kann ein Blick von Studierenden in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von ÜberPro_WR die Reflexion ihrer Übergangserfahrungen unterstützen und ihre Auffassung von Mathematik diversifizieren?

Diese Forschungsarbeit gliedert sich entsprechend der dargestellten Forschungsfragen wie folgt. Im ersten Teil wird diese Arbeit im Forschungsfeld „Übergangsproblematik von der Schule zur Universität im Bereich Lehramt Mathematik“

⁷ Eine Erläuterung der Begriffe „empirisch-gegenständliche Auffassung“ und „formal-abstrakte Auffassung“ wird in Kapitel 5.2 vorgenommen.

verortet. Im zweiten Teil wird ein dieser Fragestellung angemessener Theorie-
rahmen entwickelt, um den Auffassungsbegriff für diese Arbeit festzulegen. Den
Schlüssel zum Auffassungsbegriff, im Sinne dieser Arbeit, bildet das Konzept der
„subjektiven Erfahrungsbereiche“ (im folgenden SEB) (Bauersfeld, 1983), wobei
die Clusterung verschiedener SEB verschiedene Auffassungsdimensionen abbil-
det. Neben spezifischen Elementen von SEB, wie Emotionen, Ich-Identität und
Wertungen, ist das Element des (propositionalen) Wissens besonders wichtig für
die folgenden Untersuchungen, da Fragen über die Auffassung von Mathematik
in der Regel auch Fragen zu Auffassungen über mathematisches Wissen beinhal-
ten. Dass solches Wissen in Form von (Eigen-)Theorien analog zur Entwicklung
von Wissen in den Wissenschaften entwickelt wird – und zwar nicht nur von
Erwachsenen, sondern auch von Kindern – ist eine etablierte (psychologische)
Deutung (Gopnik & Meltzoff, 1997). Diese „epistemologische Auffassung“ kog-
nitiver Prozesse, „als würde der Wissende über eine Theorie verfügen“
(Schlicht, 2016, S. 45), ist von methodischen Gesichtspunkten aus für eine Rekon-
struktion von Auffassungen auf Basis des strukturalistischen Theorienkonzepts
(Sneed, 1971; Balzer, Moulines, & Sneed, 1987) tragfähig und wurde vielfach er-
folgreich im Rahmen von mathematikdidaktischen Untersuchungen angewen-
det (Struve, 1990; Witzke, 2009; Burscheid & Struve, 2018; Schlicht, 2016). Die in
diesem Kapitel vorgestellten Theorien und ihre Anwendung im Verbund sind in
der Mathematikdidaktik nicht neu, allerdings bildet die konsequente Rückfüh-
rung von Auffassungen auf das Konzept der SEB neue theoretische wie auch me-
thodische Perspektiven.

Den dritten Teil dieser Arbeit bilden fünf Untersuchungen zu den aus der For-
schungshypothese abgeleiteten Forschungsfragen. In der ersten Untersuchung
wird mithilfe einer strukturalistischen Rekonstruktion und qualitativ-inhaltsana-
lytischen Verfahren aufgezeigt, dass es sich bei von Mises (1928, 1931) Konzep-
tion der Wahrscheinlichkeitstheorie um eine empirische Theorie handelt. Durch
diese Analyse wird zudem gezeigt, dass von Mises eine empirisch-gegenständli-
che Auffassung der Wahrscheinlichkeitstheorie, und auch der Wahrscheinlich-
keitsrechnung, zugeschrieben werden kann. In der zweiten Untersuchung wird

mit qualitativ inhaltsanalytischen Mitteln⁸ das Werk „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von Kolmogoroff⁹ (1933) untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass Kolmogoroff in diesem Werk, in Anlehnung an Hilberts (1899) „Grundlagen der Geometrie“, eine formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugeschrieben werden kann. In der dritten Untersuchung wird exemplarisch eine Schulbuchreihe dahingehend untersucht, ob eine empirisch-gegenständliche Auffassung von der Wahrscheinlichkeitsrechnung, im Kontext der Stochastik, nachgewiesen werden kann. Auch hier werden ähnliche Methoden wie in der historischen Analyse verwandt. Die vierte Untersuchung bezieht sich auf die Untersuchung von Auffassungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die in Lehrwerken für universitäre Stochastik zu Tage treten. Die Methodik folgt dabei den Herangehensweisen der dritten Untersuchung, wobei eine Auswahl von einschlägigen Lehrbüchern vorgenommen wurde, die vornehmlich für Veranstaltungen zur Stochastik für die Lehrämter im Bereich der Sekundarstufen I und II ausgewiesen sind. In der fünften Untersuchung wird das Forschungsprojekt „ÜberPro_Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (im Folgenden kurz: ÜberPro_WR) vorgestellt. Das Seminar wurde konzipiert, um Forschungsfrage fünf zu beantworten und Lehramtsstudierende, insbesondere aus dem gymnasialen Lehramt, bei ihrem Übergang und der Reflexion eigener Übergangserfahrungen zu unterstützen. Aufgrund des Settings konnten Daten im Rahmen eines Pre- und Post-Tests sowie eines kontinuierlich von den Studierenden zu führenden Reflexionsbuch aufgenommen werden. Dadurch werden nicht nur Anfangs- und Endzustände des Übergangs rekonstruierbar (Gueudet, 2016), sondern es können auch Einblicke in die Entwicklung von Auffassungen über den Zeitraum von einem Semester genommen werden. Dabei ist der grundlegende Gedanke die Studierenden mithilfe eines Interventionsseminars zu befähigen, ihre eigenen Auffassungen von Schul- und Hochschulmathematik zu reflektieren und – angeregt durch historische Quellen aus der Entwicklung der

⁸ Eine strukturalistische Rekonstruktion ist bei diesem Werk nicht nötig, da es einerseits keine empirische Theorie darlegt und andererseits bereits den formalen und mengentheoretischen Ansprüchen des strukturalistischen Theorienkonzepts genügt.

⁹ Es gibt verschiedene Schreibweisen des Namens *КОЛМОГОРОВ*, international gebräuchlich wird zumeist die Transkription „Kolmogorov“, im Deutschen auch „Kolmogorow“ verwendet. Da Kolmogoroff allerdings die „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ in ihrer Originalfassung in deutscher Sprache veröffentlicht hat und somit auch die Transkription seines Namens in dieser Form freigegeben hat, werde ich im Folgenden die dort verwendete Schreibweise „Kolmogoroff“ verwenden.

Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert – neue oder erweiterte Perspektiven zu entwickeln. Dabei geht es nicht darum den Übergang in irgendeiner Form zu erleichtern oder zu glätten, sondern den Studierenden die Möglichkeit zu geben die eigenen Übergangserfahrungen als Teil ihrer Lehrer*innenprofessionalisierung zu verstehen und für sich nutzbar zu machen. Methodisch wird in dieser Untersuchung hauptsächlich der Fallstudienansatz nach Yin (2014) verfolgt.

Im Anschluss an die Untersuchungen werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengestellt und ein Ausblick auf mögliche Anknüpfungspunkte für weitere mathematikdidaktische Forschung sowie Hinweise zum ((hoch)schulischen) Lehren und Lernen von Mathematik gegeben.

Der Übergang
Schule-Hochschule im
Fach Mathematik

Der Übergang Schule-Hochschule im Fach Mathematik

Innerhalb der (hochschul-)mathematikdidaktischen Forschung werden verschiedene Übergänge in den Blick genommen. Ein Blick in das „Handbuch der Mathematikdidaktik“ (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015) zeigt, dass

- in der Geschichte der Mathematik (Loos & Ziegler, 2015; Büchter & Henn, 2015; Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015; Hattermann, Kadunz, Rezat, & Sträßer, 2015);
- zwischen verschiedenen Darstellungsebenen/-niveaus (Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015; Biehler & Engel, 2015; Schmidt-Thieme & Weigand, 2015);
- mit Bezug auf Auffassungen oder Kognition (Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015; vom Hofe, Lotz, & Salle, 2015; Schmidt-Thieme & Weigand, 2015; Struve, 2015);
- in curricularen Entwicklungen (Leuders, 2015);
- zwischen Inhaltsbereichen (Büchter & Henn, 2015; Hefendehl-Hebeker & Schwank, 2015); und
- zwischen Schulformen (Leuders, 2015)

Übergänge in vielfältigen Kontexten im Rahmen mathematischen Lehrens und Lernens betrachtet werden.

Einen Überblick des internationalen Forschungsstandes zum Thema „Übergänge“ hat das Plenary Panel zum Thema „Transitions in mathematics education“, im Rahmen der ICME 13 in Hamburg 2016 geben können (Gueudet, Bosch, diSessa, Kwon, & Verschaffel, 2016). Dabei identifizierten die Mitglieder des Panels drei Merkmale, die zukünftige Forschung zum Thema „Übergänge“ als besonders fruchtbar kennzeichnen:

- The need for combining approaches.
- From gaps and obstacles to commonalities and opportunities.
- Research results and interventions on transitions.

(Gueudet et al., 2016, S. 26–28)

Neben diesen Forschungsdesideraten zu Übergängen in verschiedenen Forschungsfeldern der Mathematikdidaktik, wurde in den vergangenen 20 Jahren

der Übergang von der Schule zur Hochschule intensiv und auf vielfältige Weisen erforscht. Entsprechend wurde mittlerweile eine größere Anzahl von Übersichtsartikeln veröffentlicht, die versuchen, einzelne Forschungsansätze und -ziele zusammenzufassen (Gueudet, 2008; Gueudet et al., 2016). Zugleich liegt eine kaum überschaubare Fülle von Artikeln in Sammel- und Tagungsbänden vor (Hoppenbrock, Biehler, Hochmuth, & Rück, 2016; Hoppenbrock, Schreiber, Göller, Biehler, Hochmuth, & Rück, 2013). Neben diesen forschungsorientierten Arbeiten tauchen vermehrt auch normative beziehungsweise präskriptive Empfehlungen von Kommissionen, Zentren und anderen Vereinigungen auf, die in den vergangenen Jahren explizit zur Erforschung und Lösung der Übergangsproblematik gegründet wurden (Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule, n.d.; Hoppenbrock et al., 2016; DMV, GDM, MNU, 2019). Einen entscheidenden Einfluss auf diese Entwicklung in Deutschland hatte die „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“, die im Jahre 2011 vom Bildungsministerium für Bildung und Forschung gestartet wurde (vgl. Hoppenbrock, et al. 2016).

Die Forschungs- und Entwicklungsarbeit in diesem Bereich lässt sich grob zwischen zwei Polen vermuteter Ursachen für Herausforderungen beim Übergang von der Schule zur Hochschule verorten. Eine Ursache wird darin gesehen, dass Studienanfänger nicht die nötigen Vorkenntnisse und Fähigkeiten besitzen (können) um ein Studium im MINT Bereich – und damit auch in der Lehrer*innen-ausbildung – aufzunehmen. Eine andere Ursache wird in der „Andersartigkeit“ von Schul- und Hochschulmathematik vermutet. Hefendehl-Hebeker beschreibt die „Andersartigkeit“ von Schul- und Hochschulmathematik, indem sie neben Unterschieden im Inhalt, auch „ein schnelleres Tempo, eine größere Fülle an Inhalten, einen höheren Grad der Abstraktion und ein stärkeres Maß an Formalisierung“¹⁰ (Hefendehl-Hebeker, 2013) feststellt.

Das in dieser Arbeit beschriebene Promotionsprojekt ÜberPro_WR legt ebenfalls den Schwerpunkt auf die Untersuchung der „Andersartigkeit“ von Schul- und Hochschulmathematik sowie dessen Einfluss auf Studierende beim Übergang von der Schule zur Hochschule. Dabei schließt das Projekt an Überlegungen von Hefendehl-Hebeker an, die darauf hinweist, dass in der Schulmathematik die „ontologische Bindung an die Realität bestehen [bleibt], wie es bildungstheore-

¹⁰ Ein Ziel dieser Arbeit liegt darin, mögliche mathematikdidaktische Kriterien zur Identifikation solcher „Abstraktion“ und „höherer Formalisierungsgrade“ anzugeben. (vgl. 5.2.2)

tisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgaben und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt ist. Damit geht die Schulmathematik kaum über das begriffliche Niveau und den Wissensstand des 19. Jahrhunderts hinaus.“ (Hefendehl-Hebeker, 2013, S. 16). Dagegen sei „Mathematik als wissenschaftliche Disziplin [...] heute zu einem Geflecht hoch spezialisierter abstrakter Teilgebiete geworden.“ (Hefendehl-Hebeker, 2013, S. 16). Die zentrale Idee, die hinter diesem Projekt steht, liegt darin die mathematikspezifischen Herausforderungen des Übergangs von der Schule zur Hochschule nicht als unüberwindliche und defizitäre Hürde zu diagnostizieren, sondern als Chance für die Reflexion der eigenen Perspektive auf das Fach durch Studierende wahrnehmbar und nutzbar werden zu lassen.

1 Ein kurzer Blick durch die Jahrhunderte

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt nicht in einer vollständigen Darstellung und Analyse einer chronischen Übergangsproblematik in der gesamten Entwicklungsgeschichte der Mathematik bzw. der mathematischen Lehre und Wissenschaft. Trotzdem lohnt ein Blick auf die Probleme, Lösungsansätze und Anforderungen, die mathematisches Lehren und Lernen beim Übergang von der Schule an die Universität in verschiedenen Epochen bereithält.

Es ist klar, dass die Betrachtung dieses speziellen Übergangsphänomens erst zu einem Zeitpunkt beginnen konnte, als zwei differenzierte Systeme „Schule“ und „Universität“ gegründet wurden.

Laut Wußing (2009) gab es bereits in den Jahren 320–544 n.Chr. in Indien (Wußing, 2009, S. 91), 701 n.Chr. in Japan (Wußing, 2009, S. 70) und im 9. Jahrhundert in Konstantinopel (Wußing, 2009, S. 213) erste Einrichtungen, die den Universitäten im mittelalterlichen Europa ähnlich waren. Diese wurden maßgeblich von Boethius geprägt, der als Themenfelder das Trivium (Grammatik, Logik und Dialektik) sowie das mathematische Quadrivium (Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Harmonielehre) auszeichnete. Beide Bereiche bildeten zusammen die freien Künste – artes liberales) (Wußing, 2009, S. 268).

Im 11. und 12. Jahrhundert wurden in Europa – gebilligt von kirchlicher Seite – mehrere Universitäten gegründet. Diese waren ein Vorbild für weitere Universitätsgründungen in den folgenden Jahren. An diesen Universitäten verortet Wußing (2009, S. 281) auch die „Heimatstatt“ der Mathematik und Naturwissenschaften. Den Übergang an die Universität zu jener Zeit beschreibt Wußing wie folgt:

„Nach dem Besuch einer Lateinschule wurde der Student im Allgemeinen im Alter von 14 oder 15 Jahren an einer Universität immatrikuliert, d. h. in die Matrikel (Aufnahmeverzeichnis) eingetragen. Am Anfang stand das Studium der drei grundlegenden sprachlichen Fächer Grammatik, Rhetorik und Dialektik (Trivium); hieraus leitet sich das Wort „trivial“ im Sinne von einfach, grundlegend, elementar ab.

Es schlossen sich die vier Fächer des Quadriviums an: Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik. [...] Das Niveau war meist bescheiden. Gelehrt wurden die vier Grundrechenarten mit ganzen Zahlen; aber schon die Division bot oft genug unüberwindliche Schwierigkeiten. Auch die vermittelten geometrischen Kenntnisse blieben elementar. Auf geozentrischer Basis lehrte man Einiges über die Bewegung von Sonne, Mond und den Planeten. Die arithmetischen und astronomischen Kenntnisse reichten aus für den Computus, die Berechnung der beweglichen kirchlichen Feiertage. Die Lehre von der Musik – Musik spielt in der christlichen Liturgie eine wichtige Rolle – stützte sich auf eine elementare, mathematisch begründete Harmonielehre und knüpfte an pythagoreische Vorstellungen an: Oktave, Quarte, Quinte usw. entstehen, wenn die Saitenlängen in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen. Dies lief auf das Rechnen mit Proportionen hinaus.“

(Wußing, 2009, S. 283–284)

Diese Institutionalisierung der Wissenschaften und damit auch der Mathematik schritt stetig voran, auch wenn es laut Wußing (2009, S. 304) im 14. Jahrhundert zu einer Stagnation des wissenschaftlichen Betriebes kam, der durch den konkurrierenden Austausch zwischen Praktikern und Universalgelehrten in der Renaissance jedoch aufgelöst wurde. So haben viele bekannte Persönlichkeiten wie Pacioli, Kepler und Newton an Universitäten studiert und später an diesen gelehrt¹¹. Auch über die Verwobenheit zwischen den Mitgliedern der Familie Bernoulli und Euler an der Universität Basel ist einiges überliefert. Letzterer ging bspw. bereits mit 13 Jahren auf die Universität, laut Wußing (2009, S. 47), ein normales Alter.

Die deutsche Universitätslandschaft wurde durch die Besetzung der Franzosen in der Wende vom 18. in das 19. Jahrhundert maßgeblich beeinflusst. Beispielsweise wurde die Universität zu Köln geschlossen und erst nach dem 2. Weltkrieg neu gegründet. Im 19. Jahrhundert wandelte sich das Universitätswesen maßgeblich, so spricht Felix Klein von einer größeren Zahl Studierender in einem Grundtenor, der an Diskussionsbeiträge heutiger Zeit erinnert:

¹¹ Über den Übergang von Lateinschulen, Klosterschulen und Gymnasien zu Universitäten war im Rahmen meiner Recherche nichts aufzufinden.

„Die Demokratisierung aller Anschauungen führt zu einer Verbreiterung der Kultur und innerhalb derselben zur strengen Spezialisierung der einzelnen Zweige der Wissenschaft. Der Forderung der Zeit entsprechend gewinnt die Lehrtätigkeit eine große Bedeutung. Das nicht mehr durch Standes- und Klassenunterschiede gehemmte Berufsleben schafft einen Andrang zu wissenschaftlichen Studien, wie er früher undenkbar gewesen wäre, nämlich unter dem gänzlich neuen Gesichtspunkte [sic!] der Ausbildung zu dem nun so bedeutungsvoll gewordenen Lehrerberuf. Damit beginnt eine Verschiebung des Hauptgewichts wissenschaftlichen Lebens; seine Träger sind nun nicht mehr die Akademien, sondern die Hochschulen.“

(Klein, zit. nach Wußing, 2009, S. 115)

Eine interessante Übergangserfahrung zwischen Schule und Universität ist anekdotisch von David Hilbert überliefert. Wußing (2009, S. 446) schreibt, dass Hilbert in seiner Gymnasialzeit in Königsberg unter „dem vorherrschenden Zwang bloßen Auswendiglernens sehr gelitten“ hätte. Dies führte dazu, dass er die Frage, ob er sich bereits in der Schule viel mit Mathematik beschäftigt habe, mit „[i]ch habe mich auf der Schule nicht besonders mit Mathematik beschäftigt, denn ich wußte [sic!] ja, daß [sic!] ich das später tun würde“ (Hilbert, zit. nach Wußing, 2009, S. 447) beantwortete.

Bevor nun die beiden Schwerpunkte der aktuellen Sicht auf die Übergangsproblematik hinsichtlich der fehlenden Basisfähigkeiten und -fertigkeiten sowie der Andersartigkeit von Schul- und Hochschulmathematik illustriert werden, soll an dieser Stelle auf zwei Klassiker und eine vermutlich weniger bekannte Quelle zum Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik aus dem 20. Jahrhundert eingegangen werden.

Der erste hier besprochene Klassiker zum Übergang von der Schule zur Hochschule ist Felix Kleins Beschreibung und Benennung der doppelten Diskontinuität in der Lehrer*innenbildung¹², die neben dem Übergang von der Schule zur Hochschule auch den Übergang von der Hochschule zur Schule thematisiert (vgl.

¹² Liest man Felix Kleins Schrift fällt auf, dass er nur von „dem Student“ und „dem Lehrer“ spricht, was der Studierendenschaft und dem Lehrkörper dieser Zeit entspricht.

Einleitung). Hierbei legt Klein, wie bereits Allmendinger (2014) in ihrer Dissertation feststellt, einen Schwerpunkt auf eine zwar episodische aber doch schwerpunktmäßige inhaltliche Behandlung in seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“ und hofft so, insbesondere die zweite Diskontinuität (von der Universität in die Schule) der „doppelten Diskontinuität“ zu lösen. Interessanterweise sind nicht alle Inhalte elementar in dem Sinne, dass sie Schulmathematik behandeln würden, sondern gehen wesentlich über diese hinaus, was Allmendinger (2014, S. 131–135) zur Frage veranlasst, ob es sich bei Kleins Werk nicht auch um eine „höhere Mathematik vom elementaren Standpunkt“ handelt. Sie bestätigt diese These unter anderem damit, dass Klein verschiedene Darstellungswechsel zur Veranschaulichung von „höherer Mathematik“ nutzt. Weitere Hinweise dieser Schwerpunktsetzung Kleins werden an seiner Antizipation des Leserkreises deutlich, den er vor allem im mathematischen Publikum „und ganz besonders den Lehrern der Mathematik an [...] höheren Schulen“ (Klein, 1933, S. V), die die doppelte Diskontinuität im Rahmen ihrer Bildungsbiographie selbst erlebt oder gelöst haben, vermutet. Das stoffliche Ziel Kleins liegt darin „Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen“ (Klein, 1933, V).

Den ausschlaggebenden Impuls für sein Werk sieht Klein in einem größeren Interesse der Universitätslehrer an einer „allen Bedürfnissen gerecht werdenden *Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramts* [Herv. im Original]“ (Klein, 1933, S. 1). Die Aktualität sieht er dadurch gegeben, dass zuvor in den Universitäten „ausschließlich hohe Wissenschaft“ betrieben wurde, ohne Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse der Lehrer*innenbildung (Klein, 1933, S. 1). Diese fehlende Rücksichtnahme konstatiert Klein dahingehend, dass nicht dafür gesorgt wurde eine Verbindung zur Schulmathematik herzustellen. Um eine solche Verbindung aufzubauen und auch zukünftige Lehrer*innen zu unterstützen, sieht Klein seine Vorlesung als „wichtiges Hilfsmittel“ (Klein, 1933, S. 1)¹³ an, was sein Werk zu

¹³ Die Universität Siegen hat basierend auf dieser Idee der Unterstützung und Erfahrungen aus dem Projekt „Mathematik Neu Denken“ (Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies, & Wickel, 2010) in allen Lehramtsstudiengängen elementarmathematische Veranstaltungen in der Studienordnung verbindlich verankert. Diese ermöglichen gerade im gymnasialen Lehramt eine weitere Perspektive auf die für die Schule typischen Stoffgebiete der Analysis, Algebra und Stochastik.

dem – zumindest in der nationalen Mathematikdidaktik – meist rezipierten Klassiker in Bezug auf die Übergangsproblematik macht.

Der zweite Klassiker, der hier besprochen werden soll, ist Toeplitz Vortrag „Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule“ von der 99. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Hamburg im Jahr 1928. Auch Toeplitz sieht eine Spannung zwischen der Schule und Hochschule, die maßgeblich dadurch verursacht wird, dass die Infinitesimalrechnung nach der Meraner Reform nun auch an Schulen unterrichtet wird, was zu entsprechenden Änderungen der Einführungsveranstaltungen der Universitäten führte und laut Toeplitz auch geführt haben musste (Toeplitz, 1928, S. 1). In der Analyse des Verhältnisses von Schule und Hochschule vor dieser Reform kommt Toeplitz trotzdem zu dem Schluss, dass die „akute Grenzstreitigkeit, [wohl nicht, G.S.] in ein bestehendes harmonisches Verhältnis störend eingegriffen hätte“ (Toeplitz, 1928, S. 1). Die Lösung der Spannung kann laut Toeplitz nur in einer differenzierten Betrachtung der mathematischen Ziele von Schule und Hochschule erfolgen. Entsprechend formuliert er:

„Vielmehr vollzog sich hier die *erste Berührung zweier Welten* [Herv. G.S.], die bisher getrennt voneinander existiert hatten, viel stärker getrennt, als man bei der Breite der gegenseitigen Berührungsfläche es für möglich halten sollte. Die vielen Erörterungen, die über jener [sic!] Grenzstreitigkeit ausgebrochen sind, sind zur *Unfruchtbarkeit verurteilt, wenn sie das Problem nicht aus dem Hintergrunde dieser bestehenden Kluft* [Herv. G.S.] in ihrem vollen Umfang heraus begreifen, wenn sie es nicht nur als einen Ausschnitt aus dem gesamten Ausgleich der mathematischen Ziele von Schule und Hochschule betrachten.“

(Toeplitz, 1928, S. 1)

Interessanterweise sieht Toeplitz die Überbrückung dieser Kluft nicht in einer besonders zu behandelnden Stoffauswahl, wie beispielsweise der Elementarmathematik¹⁴, sondern vielmehr im Aufzeigen der mathematischen Methoden, die

¹⁴ Entsprechend dieser Einsicht kommentiert Toeplitz (1928) Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“ folgendermaßen: „Felix Klein hat eine Vorlesung über „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“ geschaffen, die zweifellos eine große Wirkung ausgeübt hat. Indessen hat dieser Versuch wenig Nachahmung durch andere Dozenten gefunden, und mit

auch geschichtlich zu bestimmten mathematischen Ideen geführt hat. Hierbei ist es Toeplitz besonders wichtig dieses Wechselspiel zwischen Stoff und Methode für Studierende der Mathematik erfahrbar zu machen, oder in den Worten von Toeplitz, „daß [sic!] man dieses Wechselspiel in seiner Buntheit sich vor den Studenten entwickeln läßt [sic!]“¹⁵ (Toeplitz, 1928, S. 4).

Der gesamte Vortrag von Toeplitz ist sehr reichhaltig und fokussiert im Anschluss an diese allgemeinere Analyse der Ursachen für die Spannungen zwischen Schule und Universität auf zwei Aspekte. Ersterer hat eine besondere Aktualität, nämlich die zu seiner Zeit starke Erhöhung der Studierendenzahl aufgrund eines akuten Lehrermangels (Toeplitz, 1928, S. 4). Als Zweites nennt Toeplitz die bereits erwähnte Einführung der Infinitesimalrechnung in den Schulen, der Toeplitz recht kritisch gegenübersteht (Toeplitz, 1928, 13ff.), da die Schule entgegen ihres Anspruchs der Allgemeinbildung einen Schwerpunkt auf die Kalküle der Infinitesimalrechnung legt, was wiederum ein vornehmlich stofflicher Aspekt ist (vgl. Fußnote 21).

Zuletzt soll auf die von Toeplitz angestrebte Lockerung der Spannung eingegangen werden. Er sieht die Lösung in einer Fokussierung auf die mathematische Methodik in beiden Institutionen, die dann „eine stetige Linie vom Unterricht der Schule bis zu dem der Hochschule“ (Toeplitz, 1928, S. 16) ermöglicht.

Die vermutlich unbekanntere Quelle, die nun vorgestellt wird, ist aus den frühen 70er Jahren und befasst sich mit dem Studium und der Forschung der Mathematik bis zu diesem Zeitpunkt. Sie wurde im Sammelband „Mathematiker über die Mathematik“ (Otte, 1974) abgedruckt. Die abgedruckten Kapitel lassen klar erkennen, dass dieses Sammelwerk durch Fragen und Herausforderung, die sich

Recht. Sieht man nämlich von der außerordentlichen persönlichen Note ab, die Klein dieser Vorlesung aufgeprägt hatte, so erscheint hier eine Materie von dem übrigen Stoff der Universitätsmathematik losgelöst und für sich behandelt: die Elementarmathematik und was stofflich mit ihr verwandt ist. Also der grundlegende Gesichtspunkt dieser Vorlesung ist ein stofflicher.“ (Toeplitz, 1928, S. 3).

¹⁵ An dieser Formulierung von Toeplitz ist besonders interessant, dass er den Studierenden quasi eine „Beobachter“-Rolle zuweist. Dies mag aus einer konstruktivistischen Sichtweise merkwürdig erscheinen. Allerdings fokussiert Toeplitz einerseits auf die Veranstaltungsart der Vorlesung und andererseits halte auch ich es für sinnvoll, dass durch Vorleben bestimmter Haltungen und Betrachtungsweise Studierende die Möglichkeit bekommen, ihre Perspektive zu ähnlicher Betrachtungsweisen zu öffnen und entsprechend selbst ihre eigenen mathematischen Erkundungen im Wechselspiel von Methode und Stoff durchführen zu können.

im Rahmen der durchgeführten Reform zur „Neuen Mathematik“ (vgl. Hamann, 2018) ergeben haben, beeinflusst wurde.

Der Vortrag hat den Titel „Mathematik, Studium und Forschung“ von Friedrich Hirzebruch und wurde anlässlich der Preisverleihung des Bundeswettbewerbs Mathematik im „Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft“ am 20.10.1972 in Hannover gehalten (Otte, 1974, S. 481). Er ist für diese Arbeit besonders relevant, da er die hier vermuteten Probleme beim Übergang in den Unterschieden zwischen Schul- und Hochschulmathematik thematisiert. Direkt zu Beginn schildert Hirzebruch die Anforderungen an Einführungsvorlesungen der Differential- und Integralrechnung sowie deren tatsächliche Folgen:

„Diese Vorlesung sollte für den Studenten ein aufregendes Erlebnis sein, Einblicke in die Entwicklung der Mathematik seit Pythagoras und Euklid bis zu heutigen Forschungen vermitteln, ihre Rolle in der Geistesgeschichte und ihre Bedeutung für uns heute herausstellen. Manchmal gelingt dies, manchmal ist der Übergang von der Schule zur Universität, in dieser Vorlesung über Differential- und Integralrechnung, *ein Schock* [Herv. G.S.], der sich nur schwer überwinden lässt. Aller Erfahrung nach sind das Erlebnis der Differential- und Integralrechnung in den ersten beiden Semestern und seine geistige Verarbeitung ausschlaggebend für die mathematische Zukunft des Studenten.“

(Hirzebruch, 1974, S. 451)

Für Hirzebruch folgt aus dieser Darstellung die Frage, „[w]as Mathematik [überhaupt] ist?“. Da eine Beantwortung derselben von den Erfahrungen abhängig ist, die man mit Mathematik gemacht oder eben noch nicht gemacht hat, so zumindest Courant, dessen gleichnamiges Werk Hirzebruch (1974, S. 451–452) zitiert, erläutert Hirzebruch die „Grundaufgaben der Differentialrechnung“. Diese sind die Bestimmung der Tangenten und Flächenberechnungen an Kurven, die bereits für bestimmte Kurven in der Antike gelöst werden konnten. Von Leibniz und Newton wurden später verallgemeinerte Lösungsverfahren entwickelt. Dieses mathematische und historische Wissen sollte laut Hirzebruch (1974, S. 453–454) jedem gut ausgebildetem Gymnasiasten bekannt sein¹⁶. Entsprechend sollte

¹⁶ In der aktuellen Schulpraxis – zumindest in NRW – scheinen diese geschichtlichen Zusammenhänge kaum eine Rolle zu spielen und sind auch in der Schulbuch Literatur vornehmlich fakultativ als Exkurs vorgesehen.

die Vorlesung zur Differential- und Integralrechnung auch keine größeren Schwierigkeiten bereiten. Dass dies trotzdem der Fall ist, begründet Hirzebruch mit

1. dem axiomatisch-deduktiven Aufbau, zusammen mit der präzisierten mathematischen Sprache und
2. dem großen Abstraktionsgrad.

Beide Gründe sind für Hirzebruch einerseits nicht klar zu trennen, was u.a. die Wahl des Begriffs „formal-abstrakt“ in dieser Arbeit begründet (vgl. 5.2.2), andererseits aber auch für die großen Erfolge mathematischer Forschung – und damit auch für die Anfängervorlesung – unentbehrlich. Nichtsdestotrotz sieht er zugleich Gefahren in diesen Aspekten und damit Schwierigkeiten beim Übergang von der Schule zur Hochschule, die beide mitbringen und laut ihm (1974, S. 454) „nicht unerwähnt bleiben dürfen“.

Hirzebruch (1974, S. 456) versteht unter der axiomatisch-deduktiven Methode einerseits die typisch mathematische Grundlegung mathematischer Theorien und sieht andererseits auch „pädagogisch-methodische“ Gründe für die Verwendung dieser Methode in den Anfängervorlesungen, nämlich die Verständnisförderung, die durch einen geordneten Überblick erreicht werden kann. Gleichzeitig bekräftigt er aber, dass eine konsequente axiomatisch-deduktive Darstellung der Mathematik in der Schule wohl weder allgemein möglich noch didaktisch zweckmäßig sei¹⁷, was somit eine längere Eingewöhnungszeit in der Universität notwendig mache. Die Gefahren beim Kennenlernen der axiomatisch-deduktiven Methode in den Anfängervorlesungen sieht Hirzebruch (1974, S. 456–457) in einer Überbetonung dieser Sichtweise, insofern die mathematischen Probleme in den Hintergrund treten und die Fehlvorstellung auftritt, Mathematik sei lediglich Axiomatik und mengentheoretische Sprache. Eine entsprechende Fehlvorstellung sieht Hirzebruch in der Reform zur „Neuen Mathematik“ verwirklicht, die er zwar als Resultat guten Willens einordnet, aber dennoch aufgrund der beschriebenen Fehlvorstellungen besonders kritisch bewertet (Hirzebruch, 1974, S. 457–458).

¹⁷ Diesen Standpunkt teile ich, aus ähnlichen Gründen wie Hefendehl-Hebeker (2016), nämlich dem psychologischen Zugang der Schüler*innen sowie der Entwicklung gewisser Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995).

Der bereits erwähnte höhere Abstraktionsgrad hilft jedoch, mathematische Theorie in verschiedenen mathematischen Disziplinen anzuwenden. Hirzebruch (1974, S. 460) erwähnt explizit die Wahrscheinlichkeitstheorie sowie die Physik und Naturwissenschaften im Allgemeinen. Besonders der Übergang zu mehrdimensionalen und allgemeineren Funktionenräumen illustriert den höheren Abstraktionsgrad, durch den Funktionen wiederum als Elemente eines Funktionenraums aufgefasst werden können (vgl. 2.2). Die Gefahren die aus dieser fruchtbaren Abstraktheit entstehen können sind Forschungsarbeiten, die weder durch innermathematische noch außermathematische Anwendungen motiviert sind und somit für die mathematische Community nicht interessant bzw. relevant sind (Hirzebruch, 1974, S. 463).

Da somit beide vermuteten Gründe für die Problematik des Übergangs einerseits notwendig für den mathematisch-wissenschaftlichen Betrieb, gleichzeitig aber auch in einem gewissen Sinne gefährlich sind, lohnt sich eine Betrachtung und insbesondere Reflexion dieser beiden Aspekte der Hochschulmathematik, die gerade heute noch weiter von der Schulmathematik entfernt zu sein scheint, als dies zur Zeit des beschriebenen Vortrags der Fall war.

2 „Andersartigkeit“ vs. „Fehlende Basisfähigkeiten und Fertigkeiten“

In diesem Abschnitt soll nun, nach der Feststellung der bereits langanhaltenden aber sich stetig verändernden Übergangsprobleme, mindestens zurückreichend bis in das frühe 20. Jahrhundert (vgl. 1), ein Einblick in den heutigen Forschungsstand gegeben werden. Wie bereits in der Einleitung dargelegt, gibt es eine sehr große Zahl von Veröffentlichungen, die den Übergang von der Schule zur Hochschule behandeln. Daher ist es nicht möglich alle Forschungsergebnisse an dieser Stelle zu diskutieren. Meiner Ansicht nach ist es sogar sehr schwierig einen aktuellen Überblick über die Forschungsliteratur zu erhalten wie ihn Gueudet (2008) mehr als zehn Jahre vor dieser Arbeit veröffentlicht hat. Entsprechend handelt es sich bei der Erfassung des Forschungsstandes um ein weiteres mathematikdidaktisches Forschungsdesiderat, was möglichst zeitnah untersucht werden sollte, da auch aktuelle Arbeiten noch immer diese wertvolle aber mittlerweile veraltete Quelle von Gueudet zitieren (z.B. Kempen, 2019, S. 2).

Gueudet (2008) stellt bereits in ihrer Arbeit fest, dass eine umfassende mathematikdidaktische Literaturrecherche gewisse Schwierigkeiten beinhaltet:

- Es gibt verschiedene Ansichten innerhalb des Forschungsfelds, wann der Übergang geschieht bzw. abgeschlossen ist;
- Es gibt verschiedene Übergänge, die von den Forschenden adressiert werden:
 - ein Übergang zwischen verschiedenen Arten des Denkens
 - Übergänge zum formalen Beweis,
 - usw.
- Verschiedene Forschungsziele und -methoden:
 - die Beobachtung und Analyse von Schwierigkeiten der Studierenden;
 - die Überprüfung von Lernumgebungen, die den Übergang abmildern oder adressieren sollen.

Internationale Vergleiche bergen zusätzlich Schwierigkeiten, da je nach betrachtetem Land verschiedene Schul- und Universitätssysteme vorliegen, die sich auch in Bezug auf die vorherrschenden Lehr- und Lernprozesse stark unterscheiden.

Gueudet (2008, S. 239) verweist neben ihrer eigenen, eben zusammengefassten Kategorisierung auch auf weitere, die bspw. zwischen epistemologischen, kognitiven, sozio-kulturellen und didaktischen Perspektiven unterscheiden. Meiner Ansicht nach gibt es eine einfachere Kategorisierung, des Themenfeldes „Ursachen von Übergangsproblemen von der Schule zur Hochschule“, die bereits viel über die Auffassung der Forschenden bzw. über die Eingrenzung ihres Forschungsgegenstandes aussagt. Und zwar die Unterscheidung von Forschung, die *auf fehlende Basisfähigkeiten und Fertigkeiten* von Studierenden in der Studieneingangsphase ausgerichtet ist einerseits und die Forschung, die auf die *Andersartigkeit von Schul- und Hochschulmathematik* eingeht andererseits. Mithilfe dieser Unterscheidung lässt sich ein großer Teil der Forschungsliteratur einordnen. In Tabelle 1 wurde dies beispielhaft mit den Beiträgen des khdm-Reports 13-01¹⁸ (Hoppenbrock et al., 2013) durchgeführt. Dieser beinhaltet insgesamt 84 Extended-Abstracts zur zweiten khdm-Arbeitstagung vom 20.02.–23.02.2013 mit dem Thema „Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr“. Nach einer einfachen Kategorisierung (s. Tabelle 1) hat sich gezeigt, dass über 70% der Artikel im Report mithilfe der eben genannten Kategorien klassifiziert werden können. In den Artikeln, die nicht unter eine der Kategorien fallen, steht die Problematik von Übergängen nicht im Vordergrund, sondern die Verwendung innovativer Methoden in der Lehre oder die Beschreibung internationaler Unterschiede sowie Betrachtung anderer Adressatenkreise in Bezug auf den Übergang von der Schule zur Hochschule.

Betrachtet man die Ergebnisse der Kategorisierung genauer fällt auf, dass im Report fast doppelt so viele Artikel „fehlende Fähigkeiten und Fertigkeiten“ im Vergleich zu Artikeln mit Bezug auf die „Andersartigkeit“ von Schul- und Hochschulmathematik behandeln. Dies mag an der thematischen Eingrenzung des Tagungsbandes auf die Studieneingangsphase liegen.

Beide Perspektiven auf den Übergang, sowohl hinsichtlich fehlender Fähigkeiten und Fertigkeiten bei Studierenden als auch der Andersartigkeit der Mathematik, sollen im Folgenden exemplarisch anhand ausgewählter aktueller Quellen illustriert werden.

¹⁸ Dieser Report eignet sich zur Erprobung der Einteilung besonders gut, da er einen breiten Überblick über die Interessenlage der verschiedenen Forschenden und Lehrenden in Deutschland im Jahre 2013 gibt. Entsprechend vielfältig sind auch die Themenfelder, die durch die Artikel abgedeckt werden.

Tabelle 1: Übersicht der Anzahl der Artikel mit dem ausgewiesenen inhaltlichen Fokus innerhalb des khdm Reports 13-01

Inhaltlicher Fokus	# Artikel
Fehlende Fähigkeiten und Fertigkeiten	36
Andersartigkeit der Mathematik	19
Andere Methoden	9
Andersartigkeit der Mathematik und Fehlende Fähigkeiten und Fertigkeiten	7
Spezifität eines anderen Faches	3
Nutzung von neuen Medien	2
Spezifität internationale Unterschiede	1
Erprobung Curriculum	1
Evaluation von Intervention	1
Interesse von Grundschullehrantsstudierenden	1
Kompetenzorientierung der Hochschullehre	1
Problemorientierung	1
Tutorenschulung	1
unklar	1

2.1 Fehlende Basisfähigkeiten und Fertigkeiten

Zur Perspektive der fehlenden Basisfähigkeiten und Fertigkeiten soll auf drei Quellen genauer eingegangen werden. Die erste betrachtete Quelle ist der sogenannte Brandbrief gegen Mängel im Mathematikunterricht aufgrund der Kompetenzorientierung (Warnecke, Burchard, & Kühne, 2017b) sowie eine darauf antwortende Stellungnahme der Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule (Koepf, Röckner, Eichler, & Heckmann, 2017). Als letzte Quelle in diesem Abschnitt wird der cosh Mindestanforderungskatalog Mathematik in den Blick genommen, da dieser in seiner aktuellen Version von verschiedenen Seiten als exemplarisches Lösungsbeispiel zur Vorbeugung und Behebung von Übergangsproblemen aufgrund von fehlenden Basisfähigkeiten und Fertigkeiten gesehen wird (cosh, 2014).

Im Frühjahr 2017 wurde durch den sogenannten Brandbrief, der laut Tagesspiegel von etwa 130 Professor*innen und Lehrer*innen unterzeichnet wurde (Warnecke et al. 2017a), die Debatte zu Übergangsproblemen von Schüler*innen, die im WiMINT Bereich ein Studium beginnen möchten, in die Öffentlichkeit gebracht.

Die Auslöser für diesen Brief waren, laut der Autor*innen, die Abiturprüfungen in Niedersachsen und Hamburg, die sie als „Symptome für die Krise der Mathematikausbildung an den Schulen“ (Abel et al. 2017, S. 1) identifizierten. Die Ursache dieser Krise sehen die Autor*innen in der Kompetenzorientierung des Mathematikunterrichts nach aktuellen Bildungsstandards, die den Schulstoff soweit reduziert hätten, dass ein erfolgreiches WiMINT-Studium nicht (mehr) möglich sei. Hierbei sehen die Autor*innen das größte Problem in Defiziten des Mittelstufenstoffs, wie Bruchrechnung, Potenzrechnung, Termumformungen, usw. Diese Defizite seien laut Brandbrief so groß, dass sie „schon längst kaum aufholbar – weder in Vorkursen noch in Brückenkursen –“ seien (Abel et al., 2017, S. 1). Besonders schwerwiegend wird die Ersetzung mathematischer Ausdrucksweisen und „abstrakter Aufgaben“¹⁹ durch sperrige Textgebilde und konstruierte Modellierungsaufgaben gesehen. Vermutlich richtet sich diese Kritik vor allem gegen textreiche Aufgaben des Zentralabiturs (Klein & Jahnke, 2012). Besonders interessant ist die Kritik im Brandbrief für diese Arbeit aber nicht wegen der Forderung einer besseren Übung und Durcharbeitung elementarer Rechentechniken aus der Mittelstufe, was die Einordnung in diesem Abschnitt begründet, sondern die vorletzte und letzte Forderung an die für Bildung im Land und Bund zuständigen Stellen. Diese lauten:

5) symbolische, formale und technische Elemente der Mathematik und abstrakte Inhalte stärker gewichte[n, G.S.]

6) [in, G.S.] Abiturklausuren anstelle von Modellierungsaufgaben wieder Aufgaben mit inhaltlich-fachlicher Ausrichtung [stellen, G.S.], die auch international üblich und anerkannt sind.

(Abel et al., 2017, S. 3)

Es bleibt im besprochenen Brief leider unklar, was die Autoren unter den „formalen“ Elementen der Mathematik und abstrakten Inhalten verstehen. Vermutlich geht es um eine kalkülorientiertere Ausbildung. Dieser Anspruch entspricht dann allerdings nicht dem, was in dieser Arbeit unter einer formal-abstrakten Auffassung verstanden wird (vgl. 5.2.2). Interessanterweise passt die Forderung

¹⁹ An dieser Stelle werden die Autor*innen nicht konkret, was sie unter abstrakten Aufgaben verstehen. Auf Basis der angegebenen Beispiele (Abel et al. 2017, S. 7,8), gehe ich davon aus, dass damit vor allem eine häufigere Verwendung von mathematischen Symbolen gemeint ist.

der Autoren auch nicht zu den Argumenten von Toeplitz in Bezug auf die Analysis in Schulen (vgl. 1), die eine bewusste Reduzierung von Kalkülen einfordert (vgl. 2.2).

In der Stellungnahme der Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule gibt es dementsprechend keinen Rückbezug auf die letztgenannten Forderungen. Dafür wird auf die Aspekte zu den fehlenden Fähigkeiten und Fertigkeiten, sowie dessen Ursachen eingegangen. Auch die Kommission stellt fest, dass seit Langem ein Großteil der Studierenden große Defizite hinsichtlich mathematischer „Grundkenntnisse und -fertigkeiten sowie [dem] konzeptuelle[n] Verständnis mathematischer Inhalte“ hat (Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule, 2017, S. 1). Ursachen sieht die Kommission allerdings nicht in der Kompetenzorientierung, dem Einsatz von Taschenrechnern oder der Verwendung von Modellierungs- und Textaufgaben. Vielmehr stellt die Kommission fest, „dass mit den Bildungsstandards der richtige bildungspolitische Weg eingeschlagen wurde.“ (Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule, 2017, S. 2). Entsprechend liegen die vermuteten Ursachen an anderer Stelle, die folgende von der Kommission geforderten Änderungen beheben sollen:

- einer Ausdehnung der Studentafeln im Rahmen der mathematischen Schulausbildung, da in den vergangenen Jahren eine Reduktion stattgefunden hat;
- Zusatzangebote für Schülerinnen und Schüler zur Vorbereitung auf ein WiMINT-Studium und eine Einstellung der Hochschulen auf eine heterogenere Hörschaft, da die Absolventenzahlen mit allgemeiner Hochschulreife wesentlich zugenommen haben;
- eine wissenschaftlich fundierte Curriculumentwicklung, die sowohl die Wissenschaftspropädeutik als auch den allgemeinbildenden Charakter des Fachs Mathematik klarer bedient; und zuletzt
- die Betonung einer guten Aus- und Fortbildung von Lehrkräften als „wichtigste Akteure“, qualitätvollen Unterrichts.

(Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule, 2017, S. 3)

Aufgrund des Antwortcharakters dieser Stellungnahme findet keine Auseinandersetzung mit Fragen zur Andersartigkeit der Mathematik zwischen Schul- und

Hochschulmathematik statt. Auffallend ist, dass auch in anderen Veröffentlichungen der Kommission, diese Perspektive nur selten aufgegriffen wird (vgl. 2.2).

Eine Lösung der Übergangsprobleme in Bezug auf die fehlenden Fähigkeiten und Fertigkeiten können sogenannte Mindestanforderungskataloge sein. Der in dieser Diskussion bekannteste Mindestanforderungskatalog ist der Katalog der cooperation schule:hochschule (cosh) aus Baden-Württemberg, der seit 2014 in einer revidierten Version vorliegt (cosh, 2014). Der cosh Katalog ist das Ergebnis zweier Tagungen in den Jahren 2012 und 2014, deren Teilnehmer*innen sowohl Professor*innen der Hochschulen und Universitäten als auch Lehrer*innen aus Baden-Württemberg waren. Insgesamt kann festgehalten werden, dass dieser Katalog eine „breite Akzeptanz durch alle Hochschulen und Fachverbände“ und darüber hinaus erfährt (vgl. cosh, 2014, S. 1; Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule, 2017; Abel et al., 2017, S. 2). Der Ausgangspunkt von cosh bildete, wie in den anderen Fällen, die Übergangsproblematik von Studienanfänger*innen im Fach Mathematik, wobei laut cosh empirische Analysen nahelegen, dass sich „diese Problematik verschärft“ (cosh, 2014, S. 1) habe. Diese Übergangsprobleme werden von cosh folgendermaßen, mit Rückbezug auf fehlende Kompetenzen der Studienanfänger*innen, beschrieben:

„Durch die Hochschulreife erhalten SchülerInnen die formale Berechtigung, alle Fächer an Hochschulen studieren zu können. Offensichtlich beherrschen aber nicht alle die in der Schule vermittelten mathematischen Inhalte und Kompetenzen mit der Sicherheit, die für das Studium eines wirtschafts-, informations-, ingenieur- oder naturwissenschaftlichen Faches (im Folgenden mit WiMINT bezeichnet) erforderlich ist.“

(cosh, 2014, S. 1)

Entsprechend dieser Feststellung wird im Anschluss an dieses Vorwort ein Katalog mit Mindestanforderungen gegeben, der Kompetenzen auflistet, die Studienanfänger*innen vor Beginn eines WiMINT-Studiums erworben haben sollten. Diese Kompetenzen stammen aus dem Bereich „Allgemeine Mathematische Kompetenzen“, wie etwa Probleme lösen, systematisches Vorgehen, Anstellen von Plausibilitätsüberlegungen, mathematisches Kommunizieren oder Argumentieren, sowie aus den Inhaltsfeldern der Elementaren Algebra, der Elementaren Geometrie/Trigonometrie, der Analysis und der Linearen Algebra. Alle

diese Inhaltsfelder werden im jeweiligen Abschnitt konkretisiert und durch beigefügte Aufgaben illustriert. Auffallend ist, dass die Universitäten keine Vorkenntnisse im Bereich der Stochastik erwarten, auch wenn diese die Behandlung stochastischer Problemstellungen im Sinne des Allgemeinbildungsauftrags der Schule, begrüßen.

Die unterschiedlichen Ziele der Bildungseinrichtungen Schule und Hochschule stellt der cosh-Katalog differenziert dar. So sehen die Autor*innen des Katalogs den „allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts“ (cosh, 2014, S. 1), mit prozessbezogenen Kompetenzen wie Argumentieren, Problemlösen oder Modellieren für den Schulunterricht im Vordergrund. Wohingegen, vor allem in den mathematikaffinen Studiengängen des „WiMINT“-Bereichs, Mathematik häufig „zielgerichtet als Werkzeug und Sprache zur Lösung von komplexen berufsrelevanten Problemen“ eingesetzt wird. Auf diese Weise wird der Fokus dieser Quelle klar, der auf den fehlenden Fähigkeiten und Fertigkeiten der Studienanfänger*innen liegt. Zudem wird auch auf die Andersartigkeit, zumindest hinsichtlich der Verwendung, von Mathematik in der Schule und Hochschule hingewiesen, die der folgende Abschnitt ausführlicher behandelt.

2.2 Die Andersartigkeit der Mathematik an Schule und Hochschule

Zur Perspektive der „Andersartigkeit der Mathematik an Schule und Hochschule soll an dieser Stelle ebenfalls auf drei Quellen eingegangen werden. Zunächst auf den Artikel „Der Übergang von der Schule in die Hochschule: Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen“ von Blömeke (2016), die die Andersartigkeit von Schul- und Hochschulmathematik insbesondere in ihre Analyse der Ausgangslage von Studierenden einbezieht. Daran anschließend wird aufgrund ihrer Aktualität und Passung die Dissertation von Kempen (2019) mit dem Titel „Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule“ betrachtet, der unter anderem die Verwendung verschiedener Beweisarten in Schule und Hochschule klassifiziert sowie eine Auswahl im Sinne eines Enkulturationsprozesses in einer Lehrveranstaltung mit eigenverantwortetem Übungsbetrieb evaluiert hat. Zum Abschluss dieses Abschnitts wird ein Einblick in den Artikel „Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule“ von Hefendehl-Hebeker (2016) gegeben, da dieser Artikel maßgeblich die Diskussion zur Übergangsproblematik in der deutschen mathematikdidaktischen For-

schungsgemeinschaft beeinflusst hat (Hoppenbrock et al., 2013) und die dort vertretenen Auffassungen große Ähnlichkeiten zu der in dieser Arbeit vertretenen Auffassung hat.

Im Rahmen der khdm-Tagung zum Thema „Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Schuljahr“ wurden zwei Hauptvorträge gehalten. Der erste Hauptvortrag von Blömeke (2016) stellt einige empirische Erkenntnisse zum Übergang bei mathematikhaltigen Studiengängen dar. Blömeke stellt fest, dass der Übergang von der Schule zur Hochschule ebenso schwierig ist wie vorige Übergänge in der Bildungsbiographie, bspw. vom Kindergarten in die Grundschule oder von der Grundschule auf eine weiterführende Schule (Blömeke, 2016, S. 3). Die Übergangsprobleme von der Schule zur Hochschule sieht Blömeke in den „unterschiedlichen Denkweisen und Lehrstilen an Schule und Hochschule, die unterschiedliche Organisation der Ausbildungsgänge verbunden mit unterschiedlichen Erwartungen an die Lernstrategien und das Selbstmanagement sowie d[er] neue[n] soziale[n] Situation an der Hochschule.“ (Blömeke, 2016, S. 3).

Indikatoren für besonders große Schwierigkeiten im Fach Mathematik sind die große Zahl früher Studienabbrüche. Blömeke (2016, S. 4) verweist in ihrem Artikel auf die zur Zeit der Verfassung des Artikels aktuellen Zahlen zur Studienabbruchquote aus dem Bildungsbericht 2012, die bei 55% im Bachelor Fach Mathematik lag, wohingegen die Studienabbrüche im Mittel desselben Jahres nur bei 35% lagen. Insbesondere stellt Blömeke mit erneutem Bezug zum Bildungsbericht 2012 fest,

„dass sich diese Negativentwicklung für die mathematikbezogenen Studiengänge möglicherweise zu drehen beginnt. Die Studienbedingungen wurden unter Betreuungsgesichtspunkten und im Hinblick auf den Umfang des Angebots neuerdings besser beurteilt als in den übrigen Studiengängen – und die didaktische Qualität scheint ebenfalls zu steigen“.

(Blömeke, 2016, S. 4)

Eine Ursache dieser Trendwende sieht Blömeke in den stärkeren Bemühungen von Lehrenden-Seite aus dem Fach heraus diese Schwierigkeiten abzubauen. Tatsächlich war in den Folgejahren eine solche Wende zu erkennen. Aktuell ist die Studienabbruchquote aber wieder auf einem ähnlichen Niveau wie 2012. Im

Mittel liegt die Studienabbruchquote, laut der Autor*innen der Bildungsberichterstattung, mit knapp 30% noch immer auf „hohem Niveau“ (Autorengruppe Bildungsberichterstattung, 2018, S. 10). Für die Hochschulausbildung im Fach Mathematik ist eine erneute Trendwende zu beobachten. Mittlerweile liegt die Studienabbruchquote des Jahres 2016 wieder bei 54%, sodass nach der Datenaufnahme des Bildungsberichts 2012 die Quote wieder gestiegen ist, und zwar nach einem vorherigen Abfall im Jahr 2012 auf 47% von 55% im Jahr 2010 über eine von 51% im Jahr 2014 und dann einem erneuten Anstieg auf 54% im Jahr 2016. Diese letzte Quote entspricht dem letzten Messpunkt im Bildungsbericht 2018 (Autorengruppe Bildungsberichterstattung, 2018, S. 346). Als Hauptgründe für den Studienabbruch identifiziert Blömeke unter Verweis auf Heublein und andere eine Überforderung hinsichtlich der erwarteten Leistungen und fehlende Sinnkonstruktion (Blömeke, 2016, S. 4).

Ein weiterer Aspekt in Blömekes Artikel ist die Diskussion eines Wandels des gymnasialen Bildungsauftrags, der aus dem größeren Anteil der Schüler*innen am Gymnasium pro Jahrgang resultiert. Daraus folgt laut Blömeke (2016, S. 5) ebenfalls eine Verringerung der Übergangquote für ein Studium von zuvor 90% auf 70%, sodass das Hauptziel gymnasialer Bildung nicht mehr die Wissenschaftspropädeutik ist, sondern die Allgemeinbildung stärker in den Mittelpunkt rückt. Gleichzeitig wurden, als Reaktion auf den PISA-Schock in den Jahren 2001/2002, die Curricula der Länder an Output-orientierten Bildungsstandards mit einer Betonung von prozessbezogenen Kompetenzen angepasst. Diese Veränderung wird sowohl kritisch als auch positiv in der Gesellschaft, Politik und Wissenschaft gesehen (vgl. 2.1). Interessant ist Blömekes kritische Reflexion dieser Entwicklungen, in denen sie im „Rückgang einer Orientierung an der Inhaltssystematik und der Routinisierung von Fähigkeiten“ (Blömeke, 2016, S. 6) eine Gefährdung für den Erwerb von Voraussetzungen für ein wissenschaftliches Studium im Bereich Mathematik sieht. Gleichzeitig schätzt Blömeke das Lehr- bzw. Lerntempo an der Universität als so groß ein, dass dieser Verlust an Voraussetzungen nur einen kleinen Einfluss auf die Probleme beim Übergang habe und die stärkere Prozessorientierung ebenfalls besser genutzt werden könne. Ein empirischer Beleg dieses Einflusses steht allerdings nach aktuellem Forschungsstand noch aus. Im weiteren Teil des Artikels geht Blömeke auch auf Aspekte der fehlenden Fähigkeiten und Fertigkeiten im Sinne von Studierendenvoraussetzungen (Blömeke, 2016, S. 7–9) und Interventionen (Blömeke, 2016, S. 9–11) ein.

Diese sind aber für diesen Teil der vorliegenden Arbeit nicht interessant und werden hier entsprechend nicht behandelt.

Die aktuellste Quelle zur Andersartigkeit von Mathematik in der Schule und Hochschule im deutschen Sprachraum ist zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit die Dissertation von Kempen (2019) mit dem Titel „Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule“. In diesem untersucht er neben einer theoretischen Begründung der Enkulturationsfunktion von Beweisen die Weiterentwicklung einer Veranstaltung mit dem Titel „Einführung in die Kultur der Mathematik“ im Rahmen eines Design-Based-Research-Ansatzes hinsichtlich der Beweiskompetenz und Beweisakzeptanz von Studierenden im Haupt-, Real- und Gesamtschul-Lehramt. Besonders interessant für meine Arbeit sind zwei Aspekte, die auch unmittelbar zur Einordnung Kempens Arbeit mit Fokus auf die „Andersartigkeit von Mathematik“ beigetragen haben. Zum einen diskutiert er anhand einer ausführlichen Darstellung einschlägiger mathematikdidaktischer Forschungsliteratur, welche Arten von Beweisen zentral für die Hochschulmathematik sind und welche Vorformen, bzw. anderen Beweistypen für die Schule relevant sind. Zum anderen ist die Erhebung und Einordnung von Vorerfahrungen der Studierenden durch Eigenreflexion für diese Arbeit von besonderer Relevanz.

Mathematische Beweise sind, wie Kempen (2019, S. 26) unter Verweis auf Heintz feststellt, das „konstituierende Moment der Wissenschaft und zugleich das Charakteristikum, welches dieses von anderen Wissenschaften unterscheidet“. Allgemein kann ebenfalls festgestellt werden, dass Beweise eine Begründung benötigen und diese in der Mathematik in der Regel durch ein deduktives Argument erfolgt, das bestimmte Schlussfolgerungsarten benötigt. Die Klassifizierung von verschiedenen Beweistypen erfolgt dann entsprechend einer Klassifizierung von Schlussregeln beziehungsweise möglichen Argumentationsbasen.

Kempen (2019, S. 29–30) stellt fest, dass „das Idealbild eines (strengen) mathematischen Beweises“ der formale Beweis ist. Hierbei versteht Kempen unter formalem Beweisen, dass diese innerhalb eines axiomatischen formalen Systems mit Symbolen ohne Rücksicht auf semantische Bedeutung im Sinne Tarskis durch logische Schlussweisen durchgeführt werden. Das Produkt des formalen Beweises, also die Fixierung der genutzten Symbole, Axiome, und Schlussweisen, wird dann als Beweis bezeichnet (vgl. Kempen, 2019, S. 31). Zugleich stellt Kempen fest, dass solche formalisierten Beweise in der Mathematik nur selten so

streng durchgeführt werden, wie der von ihm angegebene Anspruch erfordert (vgl. 4.4). Diese pragmatischeren Beweise werden auch semi-formal genannt (Kempen, 2019, S. 31). Kempen illustriert dies an einem typischen Beispiel, einem Beweis der Aussage, dass die Summe zweier ungerader Zahlen immer eine gerade ist (Kempen, 2019, S. 32). Entsprechend kommt er zu folgender Revision seines Ausgangsverständnisses von formalen Beweisen:

Vor dieser Unterscheidung wird deutlich, dass ‚formale‘ Beweise, wie sie etwa in der universitären Ausbildung auftreten, im engeren Sinne nicht als formale Beweise gelten können. So wäre etwa der folgende Beweis der Behauptung, dass die Summe von zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist, ein semi-formaler Beweis im Sinne von Reid (2001). Innerhalb dieses Beweises werden u.a. nicht alle Schlussweisen expliziert (etwa der Schluss aus einer Existenzaussage bei der Einführung und Verwendung der Buchstabenvariablen n und m oder der finale implizite Schluss auf eine Allaussage), die Zeichen innerhalb des Beweises tragen noch semantische Bedeutung und es werden keine Bezüge zu Axiomen, Definitionen und Sätzen expliziert. *Da solche oder ähnlich formulierte Beweise allerdings in der Praxis üblich sind, werden diese im Allgemeinen auch als formale Beweise bezeichnet* [Herv. G.S.].

(Kempen, 2019, S. 32)

Diese Aussage ist insofern für die vorliegende Arbeit besonders relevant, da auch die in 5.2.2 beschriebene *formal-abstrakte Auffassung* auf diesem typischen Verständnis formaler Mathematik basiert, was insbesondere an den zur Illustration verwendeten Quellen von Hilbert (1899) und Kolmogoroff (1933) deutlich wird.

Kempen stellt auch klar, dass dieser formale Beweistyp „offensichtlich [...] erst ab einer gewissen Ausbildungsstufe im unterrichtlichen Kontext sinnvoll eingebunden werden [kann]“ (Kempen, 2019, S. 32), sodass die Mathematikdidaktik Vorstufen solcher stark formalisierten Beweise entwickelt hat. Kempen stellt im Rahmen seiner Arbeit die Operativen und generischen Beweise besonders intensiv als entsprechende Beispiele vor, weil er diese Beweisformen auch in der von ihm untersuchten Lehrveranstaltung nutzt. Da diese in dieser Arbeit keine größere Rolle spielen, sei an dieser Stelle lediglich darauf verwiesen (Kempen, 2019, S. 32–38).

Die Forschungshypothese dieser Arbeit postuliert einen Auffassungswechsel von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung von Mathematik. Entsprechend interessant ist das Ergebnis der lehrveranstaltungsbegleitenden Studien von Kempen (2019, 311ff.), in der die 149 Studierenden, von denen 71 Studierende in ihrem ersten Hochschulsesemester und 78 in höheren Semestern eingeschrieben waren, im Rahmen der Veranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ im Wintersemester 2014/15 zu ihren Vorerfahrungen mit Beweisen in der Schulzeit, Kompetenzaspekten zum Beweisen und Einstellungen zum Themenkomplex des Beweisens und zur Mathematik befragt wurden. Die Befragung erfolgte zu drei Messzeitpunkten, dem Beginn und dem Ende der Lehrveranstaltung sowie auf freiwilliger Basis im Rahmen der abschließenden Modulklausur.

Bezüglich der Vorerfahrungen ermittelt Kempen (2019, S. 334), dass Studierende nur wenig Kontakt in der Schulzeit mit Beweisen hatten. Insgesamt gaben 62% der Befragten an, nicht mehr als zwei Beweise in der Sekundarstufe I kennengelernt zu haben. Für die Sekundarstufe II gilt dieselbe Aussage für 32% der Befragten. In Bezug auf das eigenständige Entwickeln von Beweisen sagen 39% der Befragten, dass sie keinen Beweis und etwa 74% höchstens zwei Beweise selbst geführt haben. Kempen (2019) weist allerdings darauf hin, dass nicht sicher ist, was die Studierenden als Beweis erkannt haben, da die Angaben nur auf ihren subjektiven Erinnerungen basierten. Neben dem interessanten Ergebnis, dass die Befragten die von der Mathematikdidaktik geförderten Beweisformen, wie operationale generische und Beweise am Punktmuster, kaum kennen ist interessant, dass etwa 52% formale Beweisformen aus der Schule kennen. Bei der Erhebung der Bekanntheit der letztgenannten Beweisform ist auffällig, dass Studierende höheren Semesters wesentlich seltener angaben formale Beweise in der Schule behandelt zu haben als Studierende im ersten Semester. Kempen kommentiert dieses Ergebnis in Fußnote 62 seiner Arbeit:

„Bei der Zustimmung bzgl. des formalen Beweises (insgesamt 51,6%) ist der Unterschied in den Subgruppen (Erstsemester: 67,8% und Höhere Semester: 37,3%) statistisch hoch signifikant (Chi²-Test, $p < 0,001$). Dieser Unterschied kann dahingehend interpretiert werden, dass sich bei den „Höheren Semestern“ ein Verständnis von formalen

Beweisen herausgebildet hat, welches sich von den in der Schule kennengelernten formalen Beweisen unterscheidet.“

(Kempen, 2019, S. 334, Herv. G.S.)

Kempens Kommentar passt somit zur Einschätzung, dass eine neue Auffassung von Mathematik, auch am Beispiel des Beweisens, im Rahmen der Hochschule ausgebildet wird. Das Ergebnis seiner Studie zur Vorerfahrung von Studierenden lautet entsprechend:

„Insgesamt werden somit große Diskrepanzen zwischen der Mathematik der Schule und der Hochschule deutlich: Spielten Beweise in der Schule eine eher untergeordnete Rolle, werden sie in der Hochschulmathematik zu einem zentralen mathematischen Werkzeug; auch verändern sich die Aktivitäten, die die Beweise konstituieren.

Es muss festgehalten werden, dass die Studienanfängerinnen und -anfänger in ihrem schulischen Mathematikunterricht anscheinend keine Möglichkeiten hatten, ein Verständnis von ‚Beweisen‘ aufzubauen, das dem an einer Universität entspricht.“

(Kempen, 2019, S. 336–337)

Dieser Einschätzung entsprechen auch die Ergebnisse zur Frage, wie gut die Befragten argumentieren. Diese Fragestellung wurde mithilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet am Beispiel der Frage, ob die Summe zweier gerader Zahlen immer gerade ist. Kempen (2019, S. 338–339) kommt dabei zu dem Ergebnis, dass insgesamt nur 19,5% aller Bearbeitungen als vollständige Argumentationen gewertet werden können. Besonders auffällig ist zudem, dass nur 19,7% der Erstsemester Studierenden „überhaupt korrekte Aspekte“ (Kempen, 2019, S. 339), das sind fragmentarische Argumentationen, vollständige Argumentationen und Argumentationen mit Lücke, nennen, wohingegen die Bearbeitungen der Studierenden höheren Semesters immerhin zu 67,9% unter diese vereinigte Kategorie fallen.

Zuletzt soll an dieser Stelle noch auf Kempens Ergebnisse bzgl. der Einstellungen zu Beweisen und zur Mathematik eingegangen werden. Grundsätzlich geben die Studierenden an, dass in der Grundschule keine Beweise durchgeführt werden sollen, wohingegen im Gymnasium, insbesondere der Sekundarstufe II Beweise Teil des Unterrichts werden sollten. Im Unterricht der Hauptschule sind sich die

Studierenden uneins, ob Beweise Teil des Unterrichts sein sollten oder eher nicht (vgl. Kempen, 2019, S. 366). Kempen (2019, S. 375) kann trotzdem mithilfe seiner Erhebung in Bezug auf die von ihm untersuchten Studierenden eine hohe Motivation zum Erlernen von Beweisaktivitäten feststellen. Dies betrifft alle Ebenen der Beweisaktivitäten sowohl das Finden, Aufschreiben, Lesen, Verstehen, Nachvollziehen des Grundes für das Beweisen wie auch das Kennenlernen verschiedener Beweisarten. Bezüglich der Einstellung zur Mathematik zeigt sich ein relativ ausgeglichenes Bild bezüglich der intendierten Skalen „Mathematik als System“, „Mathematik als Toolbox“, „Mathematik als Prozess“ und „praktische Relevanz von Mathematik“ (Kempen, 2019, S. 380–381). Etwas höher ist der Aspekt „Mathematik als Toolbox“ bei den Studierenden im ersten Semester ausgeprägt. In Bezug auf die Ausgangsbefragung stellt Kempen (2019, S. 405–406) fest, dass die Studierenden insgesamt affiner gegenüber dem Beweisbegriff sind und den Prozesscharakter der Mathematik betonen. Alles in allem kann Kempen (2019) somit seine Intervention zu Beginn des Semesters als Erfolg werten, auch wenn Unterschiede zwischen den Einstellungen von Studierenden im ersten und höheren Semester auftreten, auch nach Belegung des Seminars, was verschiedene Gründe wie Lebensalter, längere Auseinandersetzung mit Universitätsmathematik, ein Auffassungswechsel oder eine Kombination dieser Gründe haben kann.

Als letzte Quelle soll nun der Hauptvortrag von Hefendehl-Hebeker (2016), in dem sie die Unterschiede der Wissensbildung zwischen Schule und Hochschule unter besonderer Berücksichtigung der historischen Genese von Mathematik als Wissenschaft darstellt, betrachtet werden. Dieser Artikel ist besonders einflussreich für die Betrachtung der Übergangsproblematik, insbesondere für viele andere Artikel aus dem bereits erwähnten khdm-Report (Hoppenbrock et al., 2013). Der Hauptvortrag wurde im Anschluss im Rahmen eines Sammelwerkes von Hefendehl-Hebeker (2016) ausgearbeitet, auf welchen sich die folgende Darstellung bezieht. Bereits in den ersten beiden Sätzen der Zusammenfassung ihres Artikels stellt die Autorin fest:

„Mathematik als Wissenschaft hat eine Jahrtausende währende Entwicklungsgeschichte. Die Umgangsweisen mit Mathematik an

Schule und Hochschule entsprechen verschiedenen Stadien in diesem Entwicklungsprozess und unterscheiden sich in Bezug auf Inhalte, theoretischen Anspruch und Darstellungsmittel.“

(Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 15)

Entsprechend dieser Stadien erleben Studierende Mathematik an der Hochschule anders als in der Schule, was allerdings auch an methodischen Aspekten der Lehre liegt (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 15). Die genannten Unterscheidungsmerkmale wie Inhalt und Abstraktionsniveau, Begriffsbildungshierarchien, Darstellungsmittel sowie der Zusammenhang zwischen Zeichen und Bedeutung bezieht Hefendehl-Hebeker auf epistemologische oder historische Grundlagen.

Hinsichtlich des Merkmals Inhalt und Abstraktionsniveau bestimmt Hefendehl-Hebeker in Anlehnung an Freudenthal die „phänomenologischen Ursprünge“ der Begriffe und Inhalte der Schulmathematik in der „uns umgebenden Realität“²⁰, die natürlich lokal geordnet werden können, deren „ontologische Bindung an die Realität“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 16) allerdings bestehen bleibt. Dies ist aus Hefendehl-Hebekers Sicht auch auf der Basis mathematikdidaktischer Überlegungen sinnvoll. Insgesamt bedeutet dies aber auch, dass „die Schulmathematik kaum über das begriffliche Niveau und den Wissensstand des 19. Jahrhunderts hinaus“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 16) geht. Im Vergleich dazu ist „Mathematik als wissenschaftliche Disziplin heute zu einem Geflecht hoch spezialisierter abstrakter Teilgebiete geworden“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 16). Diese Einschätzung steht in einem engen Zusammenhang mit der für diese Arbeit grundlegenden Forschungshypothese (vgl. Einleitung), die zwar nicht die ontologische Bindung im starken Sinne wie Hefendehl-Hebeker vertritt, wohl aber zwei verschiedene Auffassungen, eine *empirisch-gegenständliche* (vgl. 5.2.1) in der Schule und klassischen Mathematik sowie eine *formal-abstrakte* (vgl. 5.2.2) in der Universität und modernen Mathematik, vermutet.

Mit verschiedenen Begriffsbildungshierarchien beschreibt Hefendehl-Hebeker den Prozess mathematische Begriffe oder Prozesse auf höherer Ebene zu Klassen

²⁰ Mit dieser „uns umgebenden Realität“ ist von Hefendehl-Hebeker vermutlich vor allem ein Bezug von Mathematik auf die physikalisch-empirische Welt gemeint. Entsprechende Belege dafür sind das von ihr genutzte Zitat von Dörfler, das mathematische Schulkonzepte auf materialphysikalische Aktivitäten, wie zählen, messen, zeichnen und konstruieren, zurückführt sowie ihre Erläuterung zur Erfassung von Strukturen in der Umwelt durch Geometrie und von Zufallserscheinungen in alltagsweltlichen Situationen der Stochastik (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 16.).

zusammenzufassen um dann wiederum Eigenschaften eben solcher Klassen zu betrachten (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 17). In der Schule verbleibt man dagegen, bis auf Einzelfälle wie bei Termumformungen oder der Vektorrechnung, ohne diese Technik der Superzeichenbildung. Insbesondere weist Hefendehl-Hebeker darauf hin, dass diese Denkweise nicht nur die Konstruktion solcher Superzeichen beinhaltet, sondern auch „einen flexiblen Wechsel zwischen der Gesamtsicht des Objektes und der Auflösung in seine einzelnen Zustände bzw. Bestandteile“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 17) notwendig macht.

In Bezug auf die Darstellungsmittel fokussiert die Autorin (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 18) auf die „große Informationsdichte auf kleinen Raum“, die insbesondere in der hoch konventionalisierten Fachsprache und Symbolik liegt. Dies macht die mathematische Kommunikation allerdings auch so universal, dass es bei etablierten Konventionen kaum zu Meinungsverschiedenheiten und groben Deutungsdifferenzen innerhalb des formalen Kalküls kommt. Gleichzeitig wird in der Schule, auch zum besseren Verständnis und Lernen mathematischer Inhalte, nur beschränkt von dieser Symbolik und Fachsprache Gebrauch gemacht (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 18). Zudem sind einige dieser Aspekte expliziter Lerngegenstand in der Schule, wie der Wechsel zwischen verschiedenen Zahlschreibweisen, die Angabe von Funktionstermen oder die Angabe von Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Mengensymbolik²¹.

Anders als mit der grundsätzlichen Schwierigkeit inhaltlich dichter Darstellungsweisen liegt in der Mathematik auch noch die Herausforderung vor, dass „[m]athematische Bedeutungen [...] nicht identisch mit ihren materialisierten Ausdrucksformen“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 18) sind. In der Mathematikdidaktik und -philosophie wurde diese Problematik und Chance für Mathematik mehrfach diskutiert. Hefendehl-Hebeker rekurriert in ihrer Darstellung besonders auf Charles S. Peirce Konzept diagrammatischen Denkens, das sowohl die Konstruktion von, die Kommunikation mit als auch die Interpretation und Veränderungen solcher Diagramme als Ausdrucksformen der Mathematik behandelt (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 18). Die Unterschiede zwischen Schule und

²¹ Diese „Symbolik als Lerngegenstand“ ist besonders auffällig in den Mengenschreibweisen der Stochastik, die in der Schule (und auch in mancher Hochschulliteratur) oft unmotiviert erfolgt und auch nicht konsequent beibehalten wird – bspw. ohne eine symbolische Unterscheidung zwischen Ergebnis und Ereignis (Lambacher Schweizer, 2014, S. 150–151).

Hochschule ergeben sich dabei aus ähnlichen Gründen wie bei den Aspekten „Begriffsbildungshierarchien“ und „Darstellungsmitteln“.

Zusätzlich zu diesen Aspekten, die für diese Arbeit in Bezug auf die Feststellung verschiedener Auffassungen in den Institutionen Schule und Hochschule relevant sind, geht Hefendehl-Hebeker auch auf verschiedene Kulturen ein, die insbesondere auf das Verhältnis von Experten und Novizen rückführbar sind und meiner Ansicht nach nicht mathematikspezifisch für den Übergang von der Schule zur Hochschule, sondern eben grundsätzlich für Übergänge eines Novizen in eine professionelle Kultur, gelten. Dazu gehören Perspektivunterschiede zwischen Experten und Novizen (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 23–25), der Umgang mit Fachsprache (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 19–23) sowie implizite Regeln der mathematischen [oder allgemein: wissenschaftlichen, G.S] Praxis (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 25–26).

In ihrem letzten Abschnitt diskutiert Hefendehl-Hebeker Möglichkeiten und Grenzen der Schulmathematik. Aus diesem Abschnitt sollen hier zwei wesentliche Aspekte herausgegriffen werden. Zum einen stellt Hefendehl-Hebeker fest, dass

„[e]in prinzipieller Unterschied zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik [im] Ideal der theoretischen Geschlossenheit [besteht]. In der Stregewelle der 1970-er Jahre hat man im Mathematikunterricht des Gymnasiums diesbezüglich einen hohen Anspruch aufgerichtet. Schon in der Mittelstufe wurden Inhalte axiomatisch aufgebaut, die reellen Zahlen wurden exakt konstruiert, in der Kreismessung erarbeitete man nicht nur infinitesimale Methoden zur Bestimmung von Länge und Umfang, man problematisierte auch die Frage, wie diese Begriffe hier exakt zu fassen seien. Diese Ansprüche sind inzwischen wieder stark zurückgenommen, weil man zu der Überzeugung gelangt ist, dass sie didaktisch falsch tariert, d.h. der Entwicklungsstufe der Adressaten nicht angepasst waren.“

(Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 27)

Entsprechend wurde also in den 70er Jahren bereits ein Testlauf hinsichtlich der Anpassung des Schulunterrichts zur Überbrückung der Übergangsproblematik zu Gunsten der Hochschulauffassung vorgenommen (Hamann, 2018).

Zum anderen sieht Hefendehl-Hebeker (2016, S. 28) eine Möglichkeit zur Überwindung der Übergangsproblematik in „einer wissenschaftstheoretischen Reflexion“ in den Sekundarstufen um so das „Bewusstsein für spezifisch mathematische Erkenntnisweisen und ihre Artikulationsformen zu schärfen“. Grenzen sieht sie allerdings, mit Verweis auf Vohns, darin, dass ein gewisses Maß an „operativen Fähigkeiten für gehaltvolle Reflexionen“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 28) nötig sei. Dies ist einer der Gründe, warum ich mich dazu entschieden habe die in Untersuchung 5 (vgl. 10.3.1) beschriebene Intervention erst in einem fortgeschrittenen Semester, frühestens ab dem 2. Semester, anzubieten. So konnten die Studierenden bereits die Differenzen zwischen Schul- und Hochschulmathematik erfahren, sodass die Reflexion nicht auf einem zunächst zu erlernenden, oder – noch schlechter – vorgegebenen, Inhalt basieren muss.

Zusammenschau der betrachteten Perspektiven

Die während der Erstellung dieser Arbeit aktuellste Quelle, die sich mit Übergängen in das Mathematikstudium beschäftigt, ist der Maßnahmenkatalog „Mathematik: 19 Maßnahmen für einen konstruktiven Übergang Schule-Hochschule“, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und dem Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) (DMV, GDM, & MNU, 2019). In diesem stellen die Autoren fest, dass im Wintersemester 2017/2018 rund 2,8 Millionen Studierende an Universitäten und Hochschulen eingeschrieben waren, wovon 47% ein sogenanntes WiMINT-Fach studieren, das somit „prüfungsrelevante Anteile in Mathematik“ beinhaltet (DMV, GDM, & MNU, 2019, S. 1). Die Autoren stellen weiterhin fest, dass ein konstruktiver Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik nur durch „gemeinsame Anstrengungen von Politik in Bund und Ländern, von Schule, Hochschule und Wissenschaft“ (DMV, GDM, & MNU, 2019, S. 1) möglich ist. Entsprechend schlagen die Verbände insgesamt neunzehn Maßnahmen vor, die zu einem solchen konstruktiven Übergang führen können. Von diesen Maßnahmen können vier Maßnahmen (2,4,6,14) im weitesten Sinne zur Andersartigkeit von Schul- und Hochschulmathematik gezählt werden. Sechs Maßnahmen beziehen sich dagegen klar auf den Aspekt der fehlenden Basisfähigkeiten und Fertigkeiten (3,5,8,9,10,13). Entsprechend der vorangehenden Betrachtungen ist klar, dass beide Aspekte eine große Rolle für den Übergang spielen. Maßnahmen für einen konstruktiven Übergang mit Berücksichtigung der Andersartigkeit von Mathematik in der Schule und Hochschule scheinen allerdings laut dem Maßnahmenkatalog nicht direkt erforderlich. Entsprechend ist eine Maßnahme des Katalogs (12) zur „Gestaltung des Übergangs Schule – Hochschule“ die Forderung nach einer Intensivierung „mathematikspezifische[r] und allgemeine[r] Forschung zum Übergang von Schule zu Hochschule“ (DMV, GDM, & MNU, 2019, S. 2). Solche Forschung wäre insbesondere für das identifizierte Forschungsdesiderat – einer Erfassung und eines Vergleichs des aktuellen Forschungsstandes, auch auf internationaler Ebene, bezüglich des Übergangs von der Schule zur Hochschule – sehr zu begrüßen. Insbesondere um besonders erfolgreiche Best Practice Beispiele zu identifizieren um diese an verschiedenen Standorten weiterzuentwickeln.

Ein weiterer Aspekt, der in diesem Maßnahmenkatalog nicht auftaucht, ist der Hinweis darauf, dass ähnliche Übergangsprobleme, gerade im Fach Mathematik, bereits seit mindestens 100 Jahren vorliegen und auch diverse Lehrplanänderungen nichts an diesem Phänomen geändert haben (vgl. 1). Das bedeutet nicht, dass Universitäten und Schulen ihre Curricula nicht entsprechend ausreichender Basisfähigkeiten und Fertigkeiten der Studierenden einander anpassen sollen. Dies ist in jedem Fall nötig, beispielsweise beim, sowohl an Schulen, Universitäten, als auch der mathematikdidaktischen Community, viel diskutiertem Thema „Nutzung digitaler Werkzeuge beim Lehren und Lernen von Mathematik“²². Nichtsdestotrotz benötigt ein solches vielschichtiges Phänomen eine eingehende Untersuchung und gegebenenfalls andere Perspektive auf dieses Phänomen.

In dieser Arbeit werden, entgegen der meisten der hier vorgestellten Arbeiten, die mathematikspezifischen Herausforderungen an den Übergang nicht (nur) als defizitäre Abstimmung zwischen Schule und Hochschule gesehen. Vielmehr werden die Chancen betrachtet, die solch ein Übergang zur Reflexion der eigenen Vorstellungen des Faches Mathematik ermöglicht und somit gewinnbringend für die Fach- und insbesondere gymnasiale Lehrer*innenausbildung wirken kann. Dabei soll es nicht darum gehen den Übergang zu glätten, was meiner Ansicht nach und in Bezug auf Erfahrungen aus vorangehenden Reformen nicht möglich ist.

²² Dieser Aspekt des Übergangs ist nicht zu verachten, zumal das Hilfsmittel des grafikfähigen Taschenrechners momentan den Oberstufenunterricht – zumindest in NRW dominiert – und somit gewisse Übungen zu kalkülorientierten Verfahren vor allem in der Algebra und der Analysis, die von den Universitäten und Fachhochschulen eingefordert werden, nicht mehr an Schulen durchgeführt werden, sondern durch kalkülhaftes Bedienen des Taschenrechners ersetzt wurden.

Theoretischer Teil

Theoretischer Teil

„Begriffliche Strukturen und Systeme implizieren nie eine unbeschränkte Generalität ... Jedes individuelle kognitive System ist seinem Wesen nach beschränkt auf die Situationen, in denen es erarbeitet wurde.“

(Seiler, 1973, S. 266, zit. nach Bauersfeld, 1983, S. 1)

„Man kann hinzufügen: Eine didaktische Theorie wird ohne Aussagen über die fundamentale Natur des Lernens nicht zureichend erklärungs-fähig sein.“

(Bauersfeld, 1985, S. 12)

Der zweite Teil dieser Arbeit widmet sich der Darstellung eines angemessenen Theorierahmens zur Untersuchung der identifizierten Forschungsdesiderate in Form der Forschungshypothese und den daraus abgeleiteten Forschungsfragen. Die generellen Fragen, die der theoretische Rahmen beantworten soll, sind:

- wie werden Auffassungen gebildet,
- wie verändern sie sich und
- welche Rolle spielen sie für (Inter-)Aktionen derjenigen, die eine bestimmte Auffassung besitzen?

Zudem sollte der theoretische Rahmen auch Hinweise darauf geben, ob und wie Auffassungen von Individuen durch Forschende rekonstruiert und klassifiziert werden können.

Die zur Beantwortung dieser Fragen in diesem Kapitel vorgestellten Theorien, das Konzept der „subjektiven Erfahrungsbereiche“ (Bauersfeld, 1983), das strukturalistische Theorienkonzept für rationale Rekonstruktionen (Balzer, Moulines, & Sneed, 1987; Stegmüller, 1987; Sneed, 1971), der „theory theory“ Ansatz (Gopnik & Meltzoff, 1997) und Aspekte aus der Auffassungs-/Belief-Forschung (Schoenfeld, 1985; Grigutsch, Raatz, & Törner, 1998; Rolka, 2006) sowie ihre gemeinsame Anwendung in der Mathematikdidaktik sind nicht neu, sondern vielfach auf verschiedene Themenbereiche – von elementarer Arithmetik, über Geometrie bis zur Analysis (vgl. Struve, 1990; Witzke, 2009; Burscheid & Struve, 2010; Schlicht, 2016) – angewandt und erprobt worden.

Ein neues theoretisches Ergebnis dieser Arbeit liegt allerdings in der Grundlegung der Begriffe „Auffassung“ und „Auffassungswechsel“ auf der Basis des Konzepts der subjektiven Erfahrungsbereiche, womit ein Beitrag zur Forschung im Bereich Auffassungen oder Beliefs geleistet werden kann. Auf dieser Begriffsklärung aufbauend wird die Dichotomie des Begriffspaars „empirisch-gegenständliche Auffassung“ und „formal-abstrakte Auffassung“ dargestellt, indem einerseits die epistemologische Frage nach dem Gegenstandsbereich mathematischen Wissens und andererseits weitere spezifische Elemente subjektiver Erfahrungsbereiche (Wertungen, prozedurales Wissen, usw.) identifiziert und für die Charakterisierung beider Auffassungen genutzt werden. Gerade hinsichtlich mathematischen Wissens und dessen Entwicklung folge ich der Deutung des „theory theory“ Ansatzes. Durch diese Deutung und der darin vermuteten Ähnlichkeit des Wissenserwerbs von Lernenden mit dem Wissenserwerb in Form von Theorien als Teil wissenschaftlicher Forschung ist der Einsatz der rationalen Rekonstruktion im Sinne des strukturalistischen Theorienkonzepts gerechtfertigt. Neben den Fragen der Wissensentwicklung und der Aktivierung von subjektiven Erfahrungsbereichen im Individuum spielen gerade zur Beantwortung der fünften Forschungsfrage, ob man Studierende im Rahmen eines Forschungsseminars zur Reflektion ihres eigenen Übergangs und ihrer Auffassung durch den Umgang mit historischen Quellen anregen kann, interaktionistische Aspekte eine große Rolle. Bauersfeld konzipiert die subjektiven Erfahrungsbereiche und darauf aufbauend auch die Idee der „(gemeinsamen) Erfahrungsbereiche“ durch (ähnliche) Erfahrungen in der Umwelt²³ der (interagierenden) Subjekte als „Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens“ (Bauersfeld, 1983, S. 1). Zur Beantwortung der Frage, wie solche Interaktionen trotz der Subjektivität der Erfahrung einzelner Individuen zwischen denselben zustande kommen können, benötigt man eine allgemeinere Theorie (oder auch „Hintergrundtheorie“ (Bikner-Ahsbals, 2003, S. 208)) zur Beschreibung der Erfahrungs- und Handlungsmöglichkeit eines Individuums in und mit seiner Umwelt. Einige Grundideen des Enaktivismus, die im ersten Kapitel vorgestellt werden und damit den Hintergrund für die Darstellung des Konzepts subjektiver Erfahrungsbereiche im darauffolgenden Kapitel bilden, können Lösungen

²³ Der Umweltbegriff (z.B. Mertens, 1998), ist grundsätzlich auf ein bestimmtes Individuum bezogen. Dennoch kann, aufgrund „hinreichend ähnlicher“ Sinnes-, Kultur- und Selbsterfahrung (Bauersfeld, 1983, S. 33), von einer genügenden Übereinstimmung der SEB in Interaktionsprozessen ausgegangen werden (vgl. 4.3.1).

für diese Frage bieten. Entsprechend der zuvor angestellten Überlegungen wird im Kapitel zum Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche in Bezug auf das spezifische Element „Wissen“ ein Überblick über das strukturalistische Theorienkonzept und dessen Anwendung mithilfe des „theory theory“ Ansatzes gegeben. Den Abschluss dieses Teils bildet dann ein Kapitel, in dem die zuvor vorgestellten Theorien zur Klärung der Begriffe „Auffassungen“ und „Beliefs“ genutzt und in der (aktuellen) Belief-Forschung verortet werden.

3 Enaktivismus: Modell von (Inter-)Aktionen

„Key Sayings:

„all doing is knowing and all knowing is doing.’

‘Everything said is said by someone.’“

(Maturana & Varela, 2008, S. 27)

Dass der Mensch lernt ist ein Faktum! Diese Aussage ist so einfach wie problematisch. Einfach ist sie, da sie die Grundvoraussetzung jedes Forschens und auch Lehrens ist (vgl. 3.4), sofern man davon ausgeht, dass auch Forscher*innen und Lehrende bei oder zumindest vor ihrer Tätigkeit lernen oder gelernt haben müssen (vgl. 4.4.3). Problematisch ist diese Aussage, da nicht klar ist, ob jeder „Mensch“ lernt und was an dieser Stelle mit „Faktum“ gemeint ist²⁴. Bezüglich des Lernens scheint sich zumindest herausgestellt zu haben, dass „Lernen“ nicht nur von Menschen betrieben werden kann. Was „Lernen“ ist und wie „Lernen“ funktioniert, ist die Fragestellung aller Wissenschaften, die sich mit Erkenntnisgewinnung beschäftigen. Auch diese Fragen sind wie die Übrigen nicht endgültig geklärt, wobei eine vollständige Klärung kaum möglich erscheint.

Welchen Zweck können diese Fragen oder ihre bloße Benennung in einer mathematikdidaktischen Arbeit, die sich aus ihrem Fachverständnis heraus als Beitrag zur Wissenschaft vom „Lehren und Lernen von Mathematik“ (Bruder et al., 2015, S. IV) versteht, bei bereits abzusehender Unzulänglichkeit möglicher Antworten erfüllen? Eben weil Lernen die Grundvoraussetzung für Forschung – und insbesondere ein Forschungsgegenstand für mathematikdidaktische Forschung – ist, stellt sich die Frage wie Lernen, in dieser Forschungsarbeit verstanden wird. Auch wenn im Folgenden keine Definition von „Lernen“ gegeben wird, ist es trotzdem im Sinne der Leser*innen nützlich, die in dieser Arbeit vertretene Auffassung von Lernen sowie die Bedingung der Möglichkeit von Lernen vorzustellen. Diese, meine (momentane) Auffassung hat sich natürlich ebenfalls durch Lernen bzw. Erfahrungen gebildet, wobei letztere meiner Ansicht nach den in diesem Kapitel vorgestellten Entwicklungsprinzipien folgen. Unter anderem hat sich diese Auffassung durch die Auseinandersetzung mit diverser Literatur, die hier nicht vollständig dargestellt wird, ausgebildet. Einen zentralen Einfluss hat

²⁴ Beide Fragen können nicht in dieser Arbeit und vermutlich auch nicht in einer anderen leicht beantwortet werden. Im Rahmen des Enaktivismus führen sie allerdings durch den Diskurs, um Wissen und auch Kognition von der im Folgenden dargestellten Perspektive zu betrachten.

Bauersfelds Konzept der „subjektiven Erfahrungsbereiche“ (vgl. 4), das ein mögliches Modell für Lernprozesse auf der Basis totaler Erfahrung durch ein konstruierendes und interagierendes Subjekt innerhalb subjektiver Erfahrungsbereiche liefert. Ein anderer Einfluss, der sich speziell der Entwicklung von propositionalem Wissen widmet, ist der „theory theory“-Ansatz (vgl. 4.4.3), aus dessen Perspektive Lernen als Entwicklung von Theorien und Wissen als die Verfügbarkeit von Theorien durch Wissende verstanden wird. Je nachdem „was“ gelernt wird, bieten diese Theorien also eine Möglichkeit Lernen aus verschiedenen Perspektiven und damit auf verschiedene Weisen zu betrachten, welche je nach zu beobachtendem Phänomen mehr oder weniger zweckmäßig sind, was auch die Untersuchungen im dritten Teil dieser Arbeit (vgl. Untersuchungen) zeigen werden.

Der Überblick über die soeben genannten und in dieser Arbeit dargestellten theoretischen Grundlagen zeigt, dass diese zwar ein Modell zur Beschreibung von Lernprozessen bieten, allerdings nicht die „Bedingungen der Möglichkeiten des Lernens“ behandeln. So verweist Bauersfeld auf die Grundfähigkeit der „spontanen Sinnkonstruktion“ (vgl. 4.2.3) und Gopnik und Meltzoff (1997, S. 128) sprechen von „initial theorylike structures“, die bereits angeboren sind und aus denen sich mit der Zeit Theorien (weiter-)entwickeln. Der Enaktivismus, im Sinne von Maturana und Varela (2008)²⁵, kann als Hintergrundtheorie („grand theory“,

²⁵ Der Enaktivismus und verschiedene Elemente dieses Konzeptes haben auf diverse Weisen Einfluss auf mathematikdidaktische Forschung ausgeübt. So identifiziert Reid (2014, S. 140) vier verschiedene Zeitpunkte/-intervalle in denen enaktivistische Theorien auf mathematikdidaktische Forschung einwirkten:

„The first references come from radical constructivists who sought to incorporate the concept of consensual domains in order to address criticisms that radical constructivism did not address learning in social situations. Tom Kieren’s work then introduced the full range of enactivist concepts, and he was the first to use the word ‘enactivist’ to describe his research. At about the same time, the concept of embodied cognition began to be used by a number of other researchers with interests in bodily metaphors and gestures in mathematics. Finally, the concept of autopoiesis, as reframed by Niklas Luhmann, has been used by Heinz Steinbring to describe interactions in mathematics classrooms.“

(Reid, 2014, S. 140)

Entsprechend dieser verschiedenen Einflüsse und Veränderungen in der Theorienkonzeption, insbesondere im späteren Werk von Varela, bspw. (Varela, Thompson, & Rosch, 1991), gibt es nicht die eine Form des Enaktivismus und zusätzlich verschiedene Lesarten (vgl. Reid & Mgom-

Reid, 2014, S. 137) wirken und bietet als Theorie autopoietischer Systeme und daraus folgend einer neurobiologischen Theorie der Kognition (Reid, 2014, S. 138) Perspektiven zur Identifizierung von „Bedingungen der Möglichkeit des Lernens“ verschiedener Entitäten.

Entsprechend dieser Vorüberlegungen wird ein Überblick über die Grundbegriffe des Enaktivismus gegeben (3.1), deren Darstellung neben Maturana und Varela (2008)²⁶ vor allem auf Reid (2014) sowie Reid und Mgombelo (2015) zurückgreift. Im Anschluss an diese Darstellung werden die Konzepte auf zwei Fallbeispiele (3.2) angewendet, wobei deutlich wird, welche Perspektiven der Enaktivismus eröffnet. Im dritten Unterkapitel (3.3) werden auf der Basis der Terminologie des ersten Unterkapitels aus einer enaktivistischen Perspektive „Bedingungen der Möglichkeit von Lernen“ identifiziert und erörtert. Diese bilden die Grundlage zur Analyse und Beschreibung der „Bedingungen der Möglichkeiten“ für die Konzepte der subjektiven Erfahrungsbereiche von Bauersfeld (1983, 1985) sowie der „theory theory“-Ansatz von Gopnik und Meltzoff (1997). Im vierten Unterkapitel (3.4) sind einige Notizen darüber zu finden, welche Auswirkungen die enaktivistische Perspektive auf die bisherige mathema-

belo, 2015). In dieser Arbeit wird eine Perspektive vergleichbar zu Reid (2014, S. 138) eingenommen und somit der Schwerpunkt auf enaktivistische Theorien im Sinne von Maturana und Varela (2008) und ihrer Arbeit „The tree of knowledge: The Biological Roots of Human Understanding“ gelegt.

²⁶ Die Erstveröffentlichung des Werkes „Tree of knowledge“ stammt aus dem Jahr 1987. Die Lektüre, auch der späteren Ausgaben, ist gerade wegen des später hinzugefügten Nachwortes von Varela sehr lesenswert. Erstens aufgrund einer ausführlicheren Darstellung der hier nur skizzierten Konzepte, zweitens wegen der konsequent enaktivistischen Ideen folgender zwingend zirkulären, eher spiraligen Anlage des Buches (Maturana & Varela, 2008, S. 239) und nicht zuletzt wegen der didaktischen Ideen, die hinter der Konzeption standen:

„We wanted to write an advanced introduction, a text that would require no previous knowledge on the part of the reader but that would convey some fundamental and novel ideas even to the professional. The only way to accomplish these apparently opposing goals was to pretend that we were writing an elementary textbook, while knowing that the book presented a parallel or alternative viewpoint that could only be fully appreciated if the subject used in undergraduate courses throughout North America.“

(Maturana & Varela, 2008, S. 251)

tikdidaktische Forschung hatte und welche Aspekte des enaktivistischen Forschens besonders auszeichnungswert erscheinen und zugleich Einsichten in die in dieser Arbeit vertretenen Auffassung geben können.

3.1 Grundbegriffe des Enaktivismus

Maturana und Varela formulieren als Richtlinien oder Haltepunkte zwei Aphorismen, die einerseits die Grundlage ihres Werkes bilden – sowohl im Sinne der Ausgangsposition als auch der späteren Zielposition²⁷, die aufzeigen sollen, wie man wissen kann etwas zu wissen. Beide Aphorismen sind im Eingangszitat dieses Kapitels zu finden und lauten:

„All doing is knowing and all knowing is doing“

(Maturana & Varela, 2008, S. 27)

„Everything said is said by someone“

(Maturana & Varela, 2008, S. 27)

Im ersten Aphorismus ist klar die Zirkularität oder Äquivalenz zwischen dem, was Maturana und Varela unter „*doing*“ und was sie unter „*knowing*“ verstehen, zu erkennen. Hierbei fassen sie „*doing*“ sehr weit und verstehen darunter neben dem konkreten physischen Handeln auch Wahrnehmungs- und Verarbeitungsprozesse, also alle Dimensionen menschlicher Aktivität im (alltäglichen) Leben (Maturana & Varela, 2008, S. 26). Ausgehend von dieser Beschreibung, die im Verlauf näher spezifiziert wird, erfolgt eine Definition von *wissen*²⁸ (*knowing*):

„Knowing is effective action, that is, operating effectively in the domain of existence of living beings.“

(Maturana & Varela, 2008, S. 29)

²⁷ Diese „zirkuläre Route“ des Buches vergleichen Maturana und Varela (2008, S. 239) in ihrem 10. Kapitel mit der Zeichnung „Drawing Hands“ von M.C. Escher, einer Lithografie aus dem Jahr 1945 auf der zwei Hände abgebildet sind, die sich gegenseitig zu zeichnen scheinen.

²⁸ Sowohl im englischen Original „*knowing*“ als auch hier in der deutschen Übersetzung „*wissen*“ ist bewusst die Verbform gemeint, also nicht im Sinne von „*Wissen*“ (*knowledge*). Dies wird klar an der Definition von „*wissen*“, das als effektive Handlung verstanden wird. Entsprechend scheint der Titel „*Tree of Knowledge*“ in die Irre zu führen, da nicht „*Knowledge*“, bspw. im Sinne von propositionalem Wissen, gemeint ist, sondern der Prozess des „etwas wissen“. Im Untertitel des Werkes wird dieser Aspekt allerdings deutlich, da hier von „*human understanding*“ gesprochen wird, was im Sinne der Autoren vermutlich mit dem menschlichen „*knowing*“ gleichzusetzen ist.

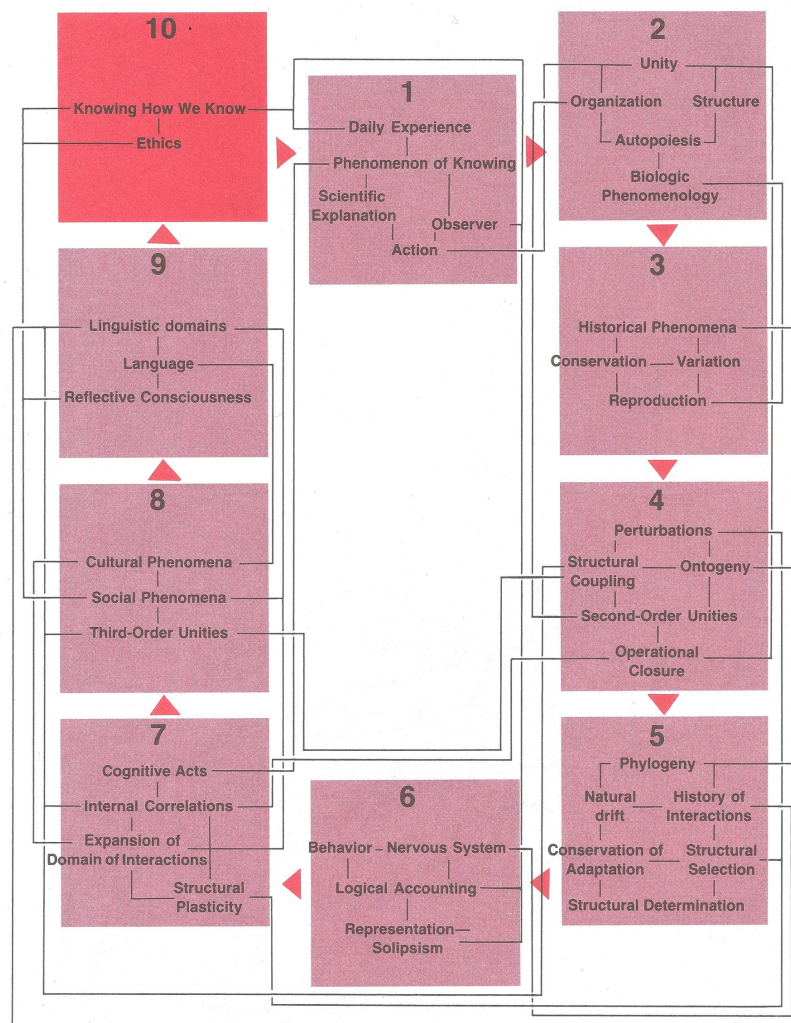


Abbildung 1: „Conceptual map of salient ideas“ – Aus „The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding“ (Maturana & Varela, 2008, S. 238), © 1987 by Humberto R. Maturana and Francisco J. Varela. Reprinted by arrangement with The Permissions Company, LLC on behalf of Shambhala Publications Inc., www.shambhala.com

Der zweite Aphorismus wird deutlicher unter Berücksichtigung des ersten Aphorismus. Geht man davon aus, dass Gesagtes ein Beitrag zum Wissen ist, oder vielmehr, wenn etwas gesagt wird, dass dieses Sprechen als effektive Handlung verstanden wird, so ist klar, dass dieses Gesagte abhängig von demjenigen ist, der es gesagt hat und entsprechend auch auf seiner Perspektive basiert bzw. seinem Erfahrungsbereich entstammt. Diese Verknüpfung von Sprecher, Erfahrungsbereich und entsprechender Perspektive fassen Maturana und Varela unter dem Begriff des „Observers“ also Beobachter*in zusammen. Die Entwicklung von Wissen kann dann in der Sprechweise von Maturana und Varela auch in

dem Sinne verstanden werden, dass „*every act of knowing brings forth a world*“ (Maturana & Varela, 2008, S. 26). Auch dies gliedert sich nahtlos an die Beschreibung von „wissen“ als effektive Handlung in dem Erfahrungsbereich des Lebewesens an.

Ausgehend von dieser ersten Beschreibung von „wissen“ geben sie einen Überblick über die aus ihrer Perspektive notwendigen Elemente einer wissenschaftlichen Erklärung²⁹ von Kognition:

„Explaining Cognition

- I. Phenomenon [knowing, G.S.] to be explained: the effective action of a living being in its environment
- II. Explanatory hypotheses: autonomous organization of living beings; phylogenetic and ontogenic drift with conversation of adaptation (structural coupling)
- III. Obtaining other phenomena: behavioral coordination in interactions recurring between living beings and recursive behavioral coordination upon behavioral coordination
- IV. Further observations: social phenomena, linguistic domains, language, and self-consciousness“

(Maturana & Varela, 2008, S. 29)

Für diese Arbeit sind davon die Konzepte zur *autopoiesis*, *effective action*, *operational closure* und *structural coupling* zur Erläuterung der Bedingungen der Möglichkeiten von Lernen besonders interessant. Zusätzliche Beiträge, insbesondere in Bezug auf Interaktionsprozesse, bieten die Konzepte *behavioral coordination* sowie Aspekte des *languageing*, der *social phenomena* und *self-consciousness*. Diese sollen im Folgenden im Rahmen von Maturanas und Varelas Enaktivismus geklärt werden.

²⁹ Eine wissenschaftliche Erklärung benötigt laut Maturana und Varela vier Elemente:

- „a. Describing the phenomenon (or phenoma) to be explained in a way acceptable to a body of observers
- b. Proposing a conceptual system capable of generating the phenomenon to be explained in a way acceptable to a body of observers (explanatory hypothesis)
- c. Obtaining from (b) other phenomena not explicitly considered in that proposition, as also describing its conditions for observation by body of observers
- d. Observing these other phenomena obtained from (b).“

(Maturana & Varela, 2008, S. 28)

3.1.1 Vorüberlegungen: Entitäten, ihre Struktur und Organisation

Als Beobachter*in, auch als Beobachter*in im Alltag, treffen wir eine Unterscheidung, sobald wir auf eine Entität hinweisen. Maturana und Varela formulieren dies in einem ihrer Key Sayings folgendermaßen:

„The act of indicating any being, object, thing, or unity involves making an *act of distinction* which distinguishes what has been indicated as separate from its background.“

(Maturana & Varela, 2008, S. 40)

Zudem weisen sie darauf hin, dass mit dem expliziten oder impliziten Referenzieren auf eine Entität (bei Maturana und Varela auch *Unity*³⁰) das Spezifizieren eines Kriteriums zur Unterscheidung (*specifying a criterion of distinction*) einhergeht, welches anzeigt worüber gesprochen wird und spezifiziert welche Eigenschaften die bezeichnete Entität hat³¹ (Maturana & Varela, 2008, S. 40).

Solche Entitäten werden im Enaktivismus, insbesondere zur Erklärung kognitiver Prozesse, als strukturbestimmte Systeme (*structural determined systems*) aufgefasst (Reid & Mgombelo, 2015, S. 173). Hierbei differenzieren Maturana und Varela den Strukturbegriff durch ihre Unterscheidung von Organisation (*organization*) und Struktur (*structure*) aus. Mit Organisation einer Entität meinen sie Zusammenhänge, die zwischen den Komponenten eines Systems bestehen müssen, damit sie zu einer bestimmten Objektklasse gehören, wogegen die Struktur gerade die Komponenten und ihre Zusammenhänge meint, die eine bestimmte Entität und ihre Organisation verwirklicht³² (Maturana & Varela, 2008, S. 47).

³⁰ Maturana und Varela nutzen den Begriff „unity“, wobei sie an gleicher Stelle synonym „entity“ und „object“ nutzen. Wichtiger als die Bezeichnung ist, dass eine solche Entität durch die Indizierung einer Beobachter*in eine Beobachtungseinheit ist. Der Begriff „Einheit“ ist in der deutschen Sprache mehrdeutig, daher wird im Folgenden immer der Begriff Entität genutzt.

³¹ Auch hier ist (vgl. Fußnote 28) die Wiedergabe der Kernidee in deutscher Übersetzung – wie in für diese Arbeiten typischen Entpersonalisierung – schwer herauszustellen. Maturana und Varela sprechen konsequent von sich als Beobachter.

³² Mit dem Begriff der Verwirklichung (*make real*) meinen Maturana und Varela, dass Konstituenten einer Entität diese zu einem Teil der Welt machen, sodass letztere auch beobachtet werden kann. Die Identifikation solcher Komponenten erfordert natürlich erneut eine Beobachter*in, wodurch sie auch beobachter*inabhängig sind. Die Organisation ist dagegen eher als Begriffsschema zur Klassifikation identifizierter Entitäten zu verstehen. Im betreffenden Key Saying wenden Maturana und Varela die Begriffe am anschaulichen Beispiel einer Toilettenspülung an (vgl. Maturana & Varela, 2008, S. 47).

3.1.2 Autopoietische Systeme

Die vorigen Begriffsbestimmungen legen die Frage nahe, was ein Lebewesen zu einer lebenden Entität macht, sprich welche Organisation solche Entitäten aufweisen müssen, um von einer Beobachter*in als Lebewesen indiziert werden zu können, und daran anschließend möglicherweise dessen Kognition zu beobachten. Diese Auszeichnung liegt laut Maturana und Varela in ihrer *autopoietischen* Organisation. Systeme deren Organisation autopoietisch sind zeichnen sich dadurch aus, dass sie ihre konstitutiven Elemente selbst erzeugen, ähnlich wie eine Zelle Stoffwechsel („cell metabolism“, Maturana & Varela, 2008, S. 44) betreibt und so ihre Bestandteile selbst erzeugt, beziehungsweise am Beispiel einiger Zellen sich diese durch Zellteilung selbst reproduzieren. Luhmann hat den Begriff der autopoietischen Systeme auf psychologische und soziale Systeme erweitert, indem er die Reproduktion von Gedanken im Individuum und die Kommunikation in sozialen Systemen als autopoietische Prozesse der jeweiligen Systeme auffasst (vgl. Steinbring, 2015, S. 283; Reid, 2014, S. 144,145). Diese Sichtweise hatte laut Reid (2014, S. 145) bisher allerdings nur einen beschränkten Einfluss auf die mathematikdidaktische Forschung. Insbesondere Maturana sieht diese Erweiterung kritisch, da für ihn

„[e]in System in einem Bereich der Kommunikation [dies ist eine Referenz auf Luhmanns Konzeption sozialer Systeme, G.S.] und ein System in einem Bereich der Verwirklichung von menschlichen Wesen [...] zwei völlig verschiedene Systeme [sind]. Das erste beinhaltet die Erhaltung der Kommunikationen, das zweite die Erhaltung der menschlichen Verwirklichungen. Im ersten Fall impliziert die Erhaltung des Systems die Unterordnung der Menschen unter die Handlungen, Rollen und Institutionen, die das System konstituieren. Im zweiten Fall dagegen beinhaltet die Erhaltung des Systems die Unterordnung der im Verlauf seiner Verwirklichung entstehenden Handlungen, Rollen und Institutionen unter die Verwirklichung der Menschen, die das System konstituieren.“

(Krüll, Luhmann, & Maturana, 1987)

Hiermit legt Maturana einen Schwerpunkt darauf, dass soziale Systeme und die in ihnen ablaufenden Kommunikations- und Interaktionsprozesse nicht losgelöst von menschlichem Handeln und anderem menschlichen Verhalten, insbesondere aber nicht vom Menschen, der handelt, verstanden werden sollen. Diese

Einschätzung wird in den Abschnitten 3.1.6, 3.1.7 und zusätzlich in 3.1.8 illustriert.

3.1.3 Strukturelle Kopplung

Neben der *Autopoiesis*, die speziell lebenden Entitäten zugewiesen wird, nutzen Maturana und Varela den Begriff der Ontogenese, mit dem sie die Geschichte der strukturellen Veränderungen (*structural change*) einer Entität (*unity*) ohne Änderung oder Verlust dessen Organisation bezeichnen (Maturana & Varela, 2008, S. 74). Strukturelle Veränderungen können sowohl durch interne Dynamiken der Entität als auch durch Auslöser (*trigger*) aus ihrer Umwelt induziert werden (Maturana & Varela, 2008, S. 74). Diese Veränderungsprozesse veranschaulichen Maturana und Varela in einem Diagramm (s. Abbildung 2), wobei die Veränderungsprozesse aufgrund interner Dynamiken durch einen kreisförmigen Pfeil ausgewiesen werden und die Veränderungsprozesse durch Auslöser aus ihrer Umwelt (dargestellt durch gewellte Linie) durch einen speziellen Doppelpfeil (\rightleftharpoons). Betrachtet man nicht nur die Ontogenese einer Entität, sondern die Ontogenesen zweier benachbarter Entitäten in ihrem Medium der Interaktion (vgl. 3.1.6), so kann dies diagrammatisch ebenfalls wie in Abbildung 2 dargestellt werden. Auffallend ist, dass in der Darstellung der gleiche spezielle Doppelpfeil (\rightleftharpoons) zwischen den benachbarten Entitäten verwendet wurde wie zwischen einer Entität und dessen Umwelt. Diese Darstellung weist darauf hin, dass lediglich die Beobachter*in (Observer) die zwei Entitäten als solche identifiziert und durch seine Unterscheidung trennt. Die Entitäten – Maturana und Varela (2008, S. 75) weisen an dieser Stelle erneut explizit auf Zellen als solche Entitäten hin³³ – können nicht zwingend unterscheiden, ob es sich bei den Auslösern, die ihre strukturelle Veränderung induzieren, um andere autopoietische Systeme oder ihre Umwelt im weiteren Sinne handelt (Maturana & Varela, 2008, S. 75). Treten solche Interaktionen (\rightleftharpoons) als wechselseitige Auslöser der strukturellen Veränderung länger- bzw. mittelfristig auf, sprechen Maturana und Varela von einer strukturellen Kopplung (*structural coupling*, Maturana & Varela, 2008, S. 75). Diese führt zu Kongruenzen in dem Sinne, dass sich die Entitäten wechselseitig beeinflussen und so ihre Strukturen gegenseitig anpassen, integrieren oder eine Entität aufgelöst wird. Nach einer Integration zweier Entitäten als Resultat einer strukturellen

³³ Diese Beschränkung auf Zellen als autopoietische Systeme wird allerdings innerhalb dieses vierten Kapitels mithilfe der im Folgenden beschriebenen strukturellen Kopplung auf metazelluläre Systeme, also mehrzellige Organismen, erweitert.

Kopplung – hier führen Maturana und Varela Mitochondrien an, die in eine Zelle integriert und auf diese Weise Teil einer neuen Einheit wurden – spricht man im Anschluss von **einer** Entität. Interessant zur Beschreibung des Verhaltens von Entitäten, sozialen Phänomenen und Kommunikation ist aber die strukturelle Kopplung ohne Integration, das heißt bei Beibehaltung der Grenzen einzelner Entitäten. Maturana und Varela führen hierfür das Beispiel von metazellulären Organismen an, in denen mehrere Zellen strukturell gekoppelt sind, ohne dass sie integriert sind, bspw. beim Organ der Haut, welche aus verschiedenen Hautzellen besteht.

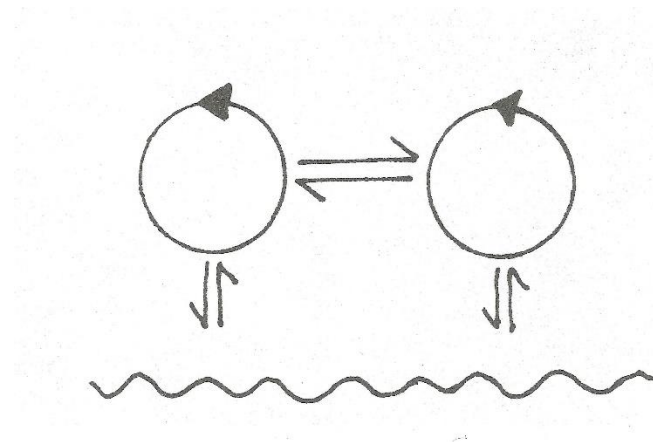


Abbildung 2: Ontogenese zweier benachbarter Entitäten – Aus „The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding“ (Maturana & Varela, 2008, S. 74), © 1987 by Humberto R. Maturana and Francisco J. Varela. Reprinted by arrangement with The Permissions Company, LLC on behalf of Shambhala Publications Inc., www.shambhala.com

3.1.4 Operationale Abgeschlossenheit

Mit der operationalen Abgeschlossenheit (*operational closure*) der Organisation bezeichnen Maturana und Varela, dass die Identität der Entität durch die Dynamiken, u.a. der strukturellen Kopplung, innerhalb eines Netzwerks bestimmt ist. Das Netzwerk ist dadurch bestimmt, dass die Prozesse nicht außerhalb dieses Netzwerks von statten gehen (vgl. Maturana & Varela, 2008, S. 89). Um von strukturellen Veränderungen **einer** Entität zu sprechen, muss diese operationale Abgeschlossenheit vorhanden sein, da sonst eine Beobachter*in die Entität nicht von ihrem Hintergrund unterscheiden kann (vgl. 3.1.1.). Mit anderen Worten bedeutet operationale Abgeschlossenheit, dass trotz struktureller Veränderungen die Organisation der Entität erhalten bleibt und somit auch die Identität der Entität in einem gewissen, von der Beobachter*in bestimmtem Sinne, stabil ist.

Diese operationalen Abgeschlossenheit gilt auch für sensori-motorische Koordinationen (*sensorimotor coordination*), die Maturana sowohl für autopoietische Systeme erster Ordnung (einzellige Organismen) (Maturana & Varela, 2008, S. 147–150), als auch autopoietische Systeme zweiter Ordnung (mehrzellige Organismen) (Maturana & Varela, 2008, S. 150ff.) beschreiben. Dabei sind sensori-motorische Koordinationen, etwa das Verhalten „Bewegung in der Umwelt“, ein Resultat aus dem Zusammenspiel, also der Koordination, von Sensorik und Motorik. Diese Koordination am Beispiel der „Bewegung in der Umwelt“ ist das Zusammenspiel zwischen sensorischen Oberflächen und motorischen (bewegungsdurchführenden) Bereichen der Entität. Bei Einzellern läuft diese Koordination auf Ebene von Zellbestandteilen oder zellimmanenten Botenstoffen ab. Zur Illustration wählen Maturana und Varela das Beispiel von Protozoen mit Cilien (Einzellern mit fadenähnlichem Antrieb) bei denen die sensori-motorische und die motorische Oberfläche zusammenfallen. Bei mehrzelligen/metazellularen Organismen können auch strukturell gekoppelte, aber unterscheidbare sensorische und motorische Zentren vorliegen. Deren strukturelle Kopplung kann unter anderem durch das Nervensystem und damit durch Nervenzellen geschehen, die so auch nicht direkt benachbarte Zentren verbinden. Auch das Nervensystem ist dabei insofern operational abgeschlossen, als dass die internen Prozesse des Nervensystems nicht aus diesem System heraustreten können (Maturana & Varela, 2008, S. 163–166). Dies bedeutet allerdings nicht, dass das Nervensystem nicht mit anderen Strukturen koppeln kann.

3.1.5 Strukturelle Determination

Strukturelle Veränderungen von Entitäten werden zwar von ihrer Umwelt, oder anderen Identitäten ausgelöst (getriggert), aber nicht ausschließlich von diesen determiniert. Maßgeblich werden solche Veränderungen durch die Struktur der sich verändernden Entität determiniert (*determined by the structure of the disturbed system*, Maturana & Varela, 2008, S. 96). Dies kann man sich an einem einfachen Beispiel klar machen. Führt man mit einem Golfschläger den „gleichen“³⁴ Schlag einmal auf einen Golfball, einen Medizinball und einer Maus (letzteres nur als Gedankenexperiment!) aus, so sind die strukturellen Änderungen der drei letztgenannten Entitäten unterschiedlich und von ihrer eigenen Struktur maßgeblich determiniert. Hierbei stellen Maturana und Varela klar, dass sich die strukturelle

³⁴ Mit der „Gleichheit der Schläge“ ist gemeint, dass man denselben Schläger und einen gleichen Schwung in allen drei nachfolgenden Abschlügen verwendet.

Determiniertheit einer Veränderung nicht nur auf naturwissenschaftlich betrachtete Komponenten auswirkt, sondern bspw. auch in sozialen Systemen. Zur Illustration nutzen sie das Beispiel, dass der Manager einer Firma ausgewechselt wird, wenn dieser nicht die erwartete Leistungsfähigkeit zeigt, mit der Hoffnung, dass die Leistungsfähigkeit durch die Umstrukturierung der Firma erhöht wird (Maturana & Varela, 2008, S. 97).

Hinsichtlich der Spezifizierung der Strukturänderung von Entitäten unterscheiden Maturana und Varela (2008, S. 97) vier Bereiche (oder Klassen):

- a. Bereich der Veränderung eines Zustands (*domain of changes of state*): Dieser umfasst alle strukturellen Veränderungen, die die Organisation der Entität erhalten.
- b. Bereich der zerstörenden Veränderungen (*domain of destructive change*): Dieser umfasst alle strukturellen Veränderungen, die die Organisation der Entität nicht erhalten, sodass auch die Identität der Entität aufgelöst wird.
- c. Bereich der Auslöser/Trigger (*domain of perturbations*): Dieser umfasst alle Interaktionen, die strukturelle Veränderungen auslösen.
- d. Bereich der zerstörenden Interaktionen (*domain of destructive interactions*): Dieser umfasst alle Interaktionen, die zu einer zerstörenden Veränderung führen.

Diese Spezifizierung wird bei der Beschreibung zur Aktivierung von subjektiven Erfahrungsbereichen (vgl. 4.2.2) und damit einhergehenden Auffassungen sowie zur Beschreibung von Auffassungswechseln (vgl. 5.3) hilfreich sein.

3.1.6 Koordination von Verhalten und eine enaktivistische Konzeption von Wissen

Unter der Koordination von Verhalten, oder auch Verhalten als solchem, verstehen Maturana und Varela (2008, S. 136) die strukturelle Veränderungen eines Lebewesens in Bezug auf ihre Position oder ihre Einstellung³⁵, die ein Beobachter

³⁵ Maturana & Varela verwenden an dieser Stelle im zugehörigen Key-Saying „Behavior“ den Begriff „attitude“:

„Behavior: By *behavior* [Herv. im Original] we mean the changes of a living being's position or attitude, which an observer describes as movements or actions in relation to a certain environment“ (Maturana & Varela, 2008, S. 136). Intuitiv ist die Sinnhaftigkeit der Verwendung dieses Begriffs klar, allerdings bleibt er bei Maturana und Varela unbestimmt. Eine tragfähige Ersetzung könnte durch den Begriff „interne Dynamiken“ erreicht werden, der zunächst umfangreicher als der Einstellungsbegriff erscheint, aber wesentlich auf strukturelle Veränderung innerhalb der Entität verweist, wobei die strukturelle Änderung der Position der Entität auf die Relation zur Umwelt der Entität verweist.

als Bewegungen oder Handlung in Bezug zu einer bestimmten Umwelt auffasst. Bei dieser Definition von Verhalten fällt auf, dass Maturana und Varela erneut die Perspektive einer Beobachter*in auf das Phänomen „Verhalten“ explizieren. Mit diesen bewusst eingenommenen Sichtweisen, die entsprechend auch auf die von Maturana und Varela vorgenommenen (begrifflichen) Unterscheidungen wirken, überbrücken sie die Einseitigkeit der epistemologischen Positionen des Repräsentationalismus. Dieser geht cursorisch dargestellt davon aus, dass auf der einen Seite die Kognition eines Subjekts auf Repräsentationen von der Außenwelt basiert. Der Solipsismus auf der anderen Seite geht davon aus, dass ein Subjekt keinen Zugriff auf eine Außenwelt hat (Maturana & Varela, 2008, S. 132–136). Die Perspektive der Beobachter*in kann eher als repräsentationalistische Sichtweise auf das Verhalten beschrieben werden, wohingegen die Perspektive der wahrnehmenden Entität eher als solipsistisch eingeordnet werden kann, da deren Selbstwahrnehmung von der eigenen Kognition und damit von ihren internen Dynamiken und Zuständen abhängt³⁶. Wichtig ist hierbei erneut festzuhalten, dass eine solche Kategorisierung von einer weiteren Beobachter*in – oder in der Reflexion der ersten Beobachter*in – erfolgen muss, die ebensolche Perspektiven verwendet, bzw. auf den ähnliche Perspektiven von weiteren Beobachter*innen angewendet werden können.

Passend zu dieser Konzeption von Verhalten bestimmen Maturana und Varela Wissen als kognitiven Akt, wenn eine Beobachter*in effektives Verhalten einer Entität hinsichtlich eines durch seine Frage(n) (explizit oder implizit) bestimmten Kontext beobachtet (Maturana & Varela, 2008, S. 173–176). Insbesondere hängt damit die Zuweisung von Wissen einer Entität mit der Beobachter*in zusammen, die ihre Beobachtung entsprechend klassifiziert und durch das Verhalten der Entität sowohl im Sinne von Sprachhandlungen als auch non-verbale Handlungen bestätigt sieht. Somit steht Wissen in einem relationalen Kontext zwischen der Frage einer Beobachter*in und dem Verhalten einer Entität, welches die Beobachter*in als effektiv hinsichtlich der Frage bewertet oder eben nicht. Diese Wissensbestimmung ist recht weit, was bereits durch das einleitende Key Saying „All

³⁶ Diese verschiedenen Perspektiven machen Maturana und Varela mithilfe einer Metapher deutlich, in der ein U-Boot Kapitän, der sein ganzes Leben in dem U-Boot verbracht hat, in seinem U-Boot von einem außenstehenden Beobachter beobachtet wird. Ersterer lenkt sein U-Boot durch Riffe und taucht zur Oberfläche auf. Als der Beobachter den Kapitän per Funk beglückwünscht, dass er die Riffe gut umfahren habe und aufgetaucht sei, antwortet der Kapitän, er hätte lediglich die Instrumente bedient, wie er es gelernt hat, und was zum Teufel Riffe oder die Oberfläche sei (Maturana & Varela, 2008, S. 136).

doing is knowing and all knowing is doing“ (vgl. 3) zu erwarten war. In den folgenden Abschnitten wird der Wissensbegriff für die Analyse von mathematischen Texten und mathematischem Wissen von Individuen näher spezifiziert (vgl. 4.4).

In Abschnitt 3.1.4 wurde das Nervensystem als operational geschlossenes System zur strukturellen Kopplung zwischen sensorischen und motorischen Bereichen eingeführt. Gerade in Bezug auf komplexere meta-zelluläre Lebewesen wie Menschen kann ein solches Nervensystem stark diversifiziert sein. Dies hat zur Folge, dass neben der Etablierung von sensori-motorischen Kopplungen auch interne Zustände des Nervensystems eine Rolle spielen und die Kognition so erweitern. Maturana und Varela sprechen dabei von neuen Phänomenen, die durch die Interaktionen des Nervensystems in Form neuer Dimensionen von strukturellen Kopplungen neue Phänomene erzeugen (Maturana & Varela, 2008, S. 176). Solche neuen Dimensionen können u.a. soziale Phänomene oder Sprache sein (vgl. 3.1.7, 3.1.8).

3.1.7 Soziale Phänomene und Kommunikation

Soziale Phänomene können als strukturelle Kopplungen dritter Ordnung (*Third-Order Couplings*, Maturana & Varela, 2008, S. 181) autopoietischer Systeme zweiter Ordnung (vgl. 3.1.6) identifiziert werden. Entsprechend formulieren Maturana und Varela recht allgemein, dass

„individual ontogenies of all the participating organisms occur fundamentally as part of the networks of co-ontogenies that they bring about in constituting third-order unities.“

(Maturana & Varela, 2008, S. 195)

Das bedeutet, dass die individuellen Entwicklungen der in sozialen Systemen beteiligten Organismen als Teil des Netzwerkes verstanden werden und durch entsprechende strukturelle Kopplungen (soziale Kopplungen) dieses Netzwerk entwickeln. Auch hier muss bedacht werden, dass die Beobachter*in die soziale Einheit als Einheit erkennt und dementsprechend eine Unterscheidung trifft. Beispiele für solche Systeme können dabei Rangfolgen von Tieren, Arbeits-Interims, oder Teile einer Schulklasse oder Arbeitsgruppe sein, wobei diese Systeme dann

durch soziale Kopplungen, also dem Verhalten der Entitäten miteinander beobachtet werden können³⁷.

Entsprechend unterscheiden Maturana und Varela in ihrem Key Saying zur „Communication“ kommunikatives Verhalten (*communicative behavior*, Maturana & Varela, 2008, S. 195) als soziale (reziprok strukturelle) Kopplungen in Form von koordiniertem Verhalten der Entitäten einer sozialen Einheit von Kommunikation (*communication*, Maturana & Varela, 2008, S. 195) als koordinierendes Verhalten der Entitäten, das eine Beobachter*in als Resultat kommunikativen Verhaltens identifizieren kann.

Neben der Kommunikation als von einer Beobachter*in festzustellendes kurz- bis mittelfristig koordinierendes Verhalten lässt sich auch längerfristig koordinierendes Verhalten feststellen, was Maturana und Varela mit kulturellem Verhalten (*cultural behavior*, Maturana & Varela, 2008, S. 201) bezeichnen. Hierbei ist das besondere am kulturellem Verhalten, dass es über Generationen hinweg stabile Verhaltensmuster konserviert, die von einer Entität durch kommunikatives Verhalten innerhalb einer sozialen Umwelt aufgebaut wird und dann in der Folge durch weitere soziale Kopplung in der Ontogenese der betrachteten sozialen Einheit weitergegeben wird (Maturana & Varela, 2008, S. 201). Durch die Summe solcher kulturellen Verhaltensweise und ihrer Veränderung einer sozialen Gruppe wird ihre Organisation und historische Entwicklung aufgezeigt – auch jenseits der historischen Entwicklung einzelner Individuen. Insbesondere zeichnet sich kulturelles Verhalten dadurch aus, dass es gelernt wird und zwar in dem Sinne, dass (jüngere) Individuen (Novizen in dem kulturellen Verhalten) (ältere) Individuen (Initiatoren oder Experten kulturellen Verhaltens) imitieren und so kulturelle Verhaltensweisen adaptieren und im Rahmen ihrer eigenen Ontogenese teilweise verändern.

³⁷ Aufgrund Maturanas und Varelas Konzeption von autopoietischen Einheiten stellt sich die Frage, inwiefern sich soziale Strukturen als strukturelle Kopplungen dritter Art von meta-zellulären Organismen, autopoietischen Systemen zweiter Art, die sich aus der strukturellen Kopplung autopoietischer Systeme erster Art ergeben, unterscheiden. Im Sinne der bisher dargestellten Sichtweise ist es einleuchtend, dass dies von der Unterscheidung der Beobachter*in abhängt. Zusätzlich geben Maturana und Varela aber als Kriterium zur Unterscheidung den Grad der Autonomie der Komponenten an, der von der geringen Autonomie autopoietischer Komponenten eines Organismus bis zur großen Autonomie autopoietischer Komponenten in menschlichen Gesellschaften reicht (Maturana & Varela, 2008, S. 198–199). Unter Autonomie verstehen Maturana und Varela dabei, dass das System (bewusst oder unbewusst) eigene Gesetze hinsichtlich seiner operationalen Fähigkeiten bestimmt (Maturana & Varela, 2008, S. 47–48).

3.1.8 „Spracheln“ (linguaging)

Eine Beobachter*in kann davon sprechen, dass erworbene kommunikative Verhaltensweisen von der Ontogenese der Entität und ihrer sozialen Interaktionen abhängen. Solche gelernten Kommunikationsformen verorten Maturana und Varela im linguistischen Bereich (*linguistic domain*, Maturana & Varela, 2008, S. 207), die die Basis für Sprache bildet aber nicht mit dieser identisch ist (Maturana & Varela, 2008, S. 209; Key Saying: Linguistic Domain). In diesem Sinne beschreiben Maturana und Varela auch den Zusammenhang zwischen der Beschreibung einer Beobachter*in und dem beschriebenen Verhalten von dem Beobachteten. Und zwar gibt die Beobachter*in eine Beschreibung von Verhalten unter Zuhilfenahme semantischer Ausdrücke (*description in semantic terms*, Maturana & Varela, 2008, S. 209) immer dann an, wenn sie Interaktionen zwischen zwei oder mehr Entitäten so beschreibt, als ob die von ihr zugewiesenen Bedeutungen den Verlauf der Interaktionen determinieren. Hierbei ist zu beachten, dass linguistische Bereiche nicht allein in sozialen Interaktionen zwischen Menschen verortet sind, sondern auch bei Interaktionen anderer Lebewesen oder Interaktionen zwischen verschiedenen Arten von Lebewesen.

Sprache ist ein spezifischer Teil des linguistischen Bereichs. Maturana und Varela definieren diesen dadurch, dass Sprache, oder das Operieren in Sprache (*linguaging*, Maturana & Varela, 2008, S. 211), in sozialen Interaktionen auftritt, wobei sich dieses Operieren im linguistischen Bereich in der Koordination von Sprachhandlungen bezüglich Operationen im linguistischen Bereich auf diese selbst bezieht³⁸, oder mit den Worten von Maturana und Varela:

„In other words, we ‘language’ only when through a reflexive action we made a linguistic distinction of a linguistic distinction. Therefore to operate in language is to operate in a domain of congruent, coontogenic structural coupling.“

(Maturana & Varela, 2008, S. 210)

³⁸ Diese Fähigkeit weisen Maturana und Varela exklusiv Menschen zu und unterscheiden damit Sprache in diesem engeren Sinne – der Selbstreferenzialität linguistischer Operationen auf linguistische Operationen – von üblichen Sprechweisen, wie der „Sprache von Bienen“, die zwar Kommunikation erlaubt aber eben nicht die beschriebene Selbstreferenzialität menschlicher Sprache aufweist (Maturana & Varela, 2008, S. 211–212). Eine gewisse Aufweichung dieser Exklusivität findet sich in ihrer Darstellung von Experimenten wieder in denen Affen Zeichensprache erlernen, die bis zu einem gewissen Grade ebenfalls selbstreferenzielle Züge annehmen kann (Maturana & Varela, 2008, S. 212–215).

In dieser Erklärung von Sprache findet man Luhmanns Anknüpfungspunkte für seine Konzeption der Kommunikation als selbstreferentielles soziales System, das zur Erhaltung der Kommunikation neue Kommunikation erzeugt, was Maturana nur autopoietischen, in seinem Sinne lebenden, Wesen zugestehen würde (vgl. 3.1.2).

Natürlich ist Maturana und Varela klar, dass eine Vielzahl der Besonderheiten menschlicher Sprache, bspw. Ironie, Metaphern und Witz, nicht umfassend in ihrem Werk dargestellt werden (können) – das gilt auch für diese Arbeit. Allerdings geht es für Maturana und Varela eher darum Grundkonzeptionen der Nutzung und des Zwecks von Sprache aufzuzeigen und diese als kognitive effektive Handlung auszuweisen. Insbesondere ist der linguistische Bereich, indem sich eine Entität bewegt, ein Teil seiner Umwelt, indem es wechselseitig mit anderen Entitäten interagiert und dabei diesen Bereich erzeugt. In der wesentlich pathetischeren Sprechweise Maturanas und Varelas drückt sich dies folgendermaßen aus:

„All this is what it is to be human. We make descriptions of the descriptions that we make (as this sentence is doing). Indeed, we are observers and exist in a semantic domain created by our operating in language where ontogenic adaptation is conserved.“

(Maturana & Varela, 2008, S. 211)

3.1.9 Identität und Selbst-Bewusstsein

Maturana und Varela erläutern das Phänomen des Geistes, der Identität und des Selbst-Bewusstseins auf der Basis der Darstellungen verschiedener Experimente. Diese zeigen u.a. das Selbst-Bewusstsein von Gorillas, die sich selbst in einem Spiegel erkennen, oder Versuche mit Personen, die einen Gehirndefekt haben, bspw. durch Trennung des Corpus callosum, der für die Koordination der Aktivitäten in beiden Hirnhälften des Menschen sorgt, die dann zweifach Merkmale einer Identität zeigen, je nachdem welche Hirnhälfte aktiviert wurde (Maturana & Varela, 2008, S. 223–230). Hierbei bezeichnen Maturana und Varela mit Bewusstsein, welches auf die Identität einer Person verweist, den alltäglichen Fluss von Reflexionen und der Einordnung eigener (geistiger) Handlungen. Fundamental für die Organisation und Kohärenz dieses Flusses ist einerseits die Sprache, welche maßgeblich das Phänomen der Erfahrung des eigenen Geistes ermöglicht, und andererseits die Ermöglichung von Erfahrungen, die nicht zwin-

gend direkt von einer Beobachter*in beobachtet werden können, und aus neurologischen Aktivitäten entstehen, die kohärent zu ontogenetischen Vorerfahrungen sind und entsprechend vom Individuum gedeutet und kommuniziert werden können. Dementsprechend formulieren Maturana und Varela bezüglich der Erfahrung des „Ichs“ innerhalb eines linguistischen Bereichs:

„This tells us that in the network of linguistic interactions in which we move, we maintain an ongoing descriptive recursion which we call the “I.” [sic!] It enables us to conserve our linguistic operational coherence and our adaptation in the domain of language. [Herv. im Original]“

(Maturana & Varela, 2008, S. 231)

Maturana und Varela bewerten diese Erkenntnis als nicht besonders überraschend, insofern eine solche Konstruktion des „Ichs“ analog zu bereits beschriebenen Mechanismen zur Erhaltung eines autopoietischen Systems im Sinne einer operationalen Abgeschlossenheit (vgl. 3.1.4), ihrer darauf basierenden strukturellen Determination (vgl. 3.1.5) und entsprechendem Verhalten wie auch Interaktion mit anderen Entitäten (vgl. 3.1.6) ist. Das hier beschriebene „Ich“ hängt klar vom linguistischen Bereich des Individuums und damit von seiner sozialen Kopplung mit anderen Entitäten ab. Insbesondere von der Reflexion und dem Selbst-Bewusstsein eines eigenen Standpunkts innerhalb einer solchen sozialen Kopplung (Maturana & Varela, 2008, S. 234).

3.2 Enaktivistische Perspektiven auf Interaktionsprozesse

Nach der vorangehenden Darstellung der theoretischen Grundlagen und Konzepte des Enaktivismus soll hier nun eine Anwendung der Begrifflichkeiten dargestellt werden. Zum einen an dem Beispiel „Tom und sein Hund“, das zur Illustration des Konzepts der strukturellen Kopplung von Reid und Mgombele (2015, S. 175) genutzt wurde, und darauf folgend an einem für die mathematikdidaktische Forschung relevanteren Beispiel von Deborah in einem Interview zum Stellenwertverständnis, das von Ginsburg (1977) vorgestellt und auch von Bauersfeld (1983) zur Diskussion seines Konzepts der subjektiven Erfahrungsbereiche genutzt wurde³⁹.

³⁹ Eine Anwendung des Konzeptes der subjektiven Erfahrungsbereiche, das in dieser Arbeit die Perspektive auf Auffassungen von Mathematik grundlegt, wird auch hier – allerdings intensiver und konsequenter als in Bauersfeld (1983) – am Beispiel von Deborah erläutert (vgl. 4.5).

3.2.1 Tom und sein Hund

Im Folgenden wird das Beispiel von „Tom und seinem Hund“ aus Reid und Mgombelo (2015, S. 175) wiedergegeben und im Anschluss mithilfe der enaktivistischen Theorie analysiert. Dabei werden auch die Gemeinsamkeiten zu Reid und Mgombelos Diskussion des Beispiels aufgezeigt.

3.2.1.1 Das Textstück „Tom und sein Hund“

Tabelle 2: Reid und Mgombelo (2015, S. 175), übersetzt von G.S..

1	Tom führt seinen Hund aus. Tom ist ein Teil der Umwelt seines Hundes,
2	und sein Hund ist ein Teil der Umwelt von Tom. Sie kommen zu einer
3	Straßenecke und Tom zieht an der Hundeleine und macht ein Geräusch,
4	das für eine Beobachter*in wie „Sitz!“ klingt. Es ist nicht das erste
5	Mal, dass das passiert. Tom und sein Hund haben eine gemeinsame Ge-
6	schichte bzgl. des Gassi-Gehens, des auf eine Straßenecke Treffens,
7	von Toms Ziehen an der Hundeleine und seiner Erzeugung dieses Ge-
8	räuschs. Nichts was Tom macht führt unausweichlich ⁴⁰ zum Sitzen seines
9	Hundes, aber mit der Zeit hat sich die Struktur seines Hundes so
10	entwickelt, dass er sich, unter solchen Umständen, setzt. Ihre Struk-
11	turen sind gekoppelt und ihre Handlungen sind koordiniert worden. Also
12	sitzt Toms Hund. Dann macht Tom ein anderes Geräusch, „OK, boy“, und
13	sie gehen weiter.
14	Mit der Zeit beginnt Toms Hund sich vor Straßenecken zu setzen ohne,
15	dass Tom etwas sagt oder tut. Toms Hund ist an seine Umwelt gekoppelt,
16	nicht nur an Tom, und als Teil der Geschichte des Hundes dieser struktu-
17	rellen Kopplung mit der Umwelt, entwickelt sich seine Struktur so,
18	dass sie an Straßenecken sitzen bleibt, wenn er mit Tom unterwegs
19	ist, ohne darauf zu warten, dass Tom ihm ein Signal [i. Original „trig-
20	ger“] gibt. Wie jeder, der einen Hund hat, weiß, ist das Aufbauen einer
21	solchen Koordinierung von Handlungen nicht trivial, aber sie passiert.
22	Um genau zu sein ist es angemessener festzustellen, dass das Aufbauen
23	solcher Muster trivial ist, aber die Muster aufzubauen, die der Hun-
24	desbesitzer möchte, ist nicht trivial, da zugleich auch der Hund ver-
25	sucht andere Koordinierungen von Handlungen zu etablieren.
26	An diesem Tag, als Tom mit seinem Hund einen Spaziergang macht, setzt
27	sich sein Hund lange bevor sie die Straßenecke erreichen. Tom schaut
28	seinen Hund an. Sein Hund schaut Tom an. Sein Hund schaut über die
29	Straße. Tom denkt sein Hund möchte die Straße überqueren, und inter-
30	pretiert das Sitzen seines Hundes als ein Zeichen für die Absicht
31	seines Hundes. Sie überqueren die Straße. Toms Struktur hat sich nun
32	so geändert, dass sie beim nächsten Mal, wenn sein Hund unerwartet
33	lange bevor sie die Straßenecke erreicht haben sitzen bleibt, Tom in

⁴⁰ Hier nutzen Reid und Mgombelo das Wort *makes* in einem Zusammenhang der nur schwer ins Deutsche zu übersetzen ist, ähnlich wie bei der Phrase „that makes sense“ häufig übersetzt mit „das macht Sinn“ oder „das ergibt Sinn“. Der gesamte Satz bei Reid und Mgombelo (2015, S. 175), lautet: „Nothing Tom does *makes* his dog sit, but over time his dog’s structure has become one that, in this circumstances, sits.“

34 beide Richtungen schaut (seine Struktur wurde bereits früher determi-
 35 niert dies zu tun bevor er eine Straße überquert) und die
 36 Straße überquert. Jemand könnte sagen, dass Toms Hund ihn trainierte, die
 37 Straße zu überqueren, aber aus einer enaktivistischen Perspektive ist
 38 all dies in der Co-Evolution zweier strukturell determinierter Systeme
 39 in ihrer Geschichte struktureller Kopplung aufgetreten.

3.2.1.2 Eine Analyse aus enaktivistischer Perspektive

Beim Lesen dieses Textauszugs wird gerade in den Zeilen⁴¹ 37–39 deutlich, dass Reid und Mgombelo dieses Beispiel zur Verdeutlichung der von ihnen zuvor explizierten Begriffe „perceptually guided action“ (Reid & Mgombelo, 2015, S. 174), „structure determinism“ (Reid & Mgombelo, 2015, S. 172–173), „operational closure“ (Reid & Mgombelo, 2015, S. 173–174) und dem Begriff des „structural coupling“ (Reid & Mgombelo, 2015, S. 174–175) angeführt haben. In dieser Analyse steht die Anwendung der Begriffe aus dem Abschnitt (3.1) im Vordergrund und erfolgt entsprechend ausführlicher als in Reids und Mgombelos Artikel.

Bereits im ersten Satz „Tom führt seinen Hund aus.“ (Z. 1) können verschiedene enaktivistische Konzepte angewendet werden. Die Autor*in des Textauszugs nimmt als Beobachter*in⁴² (*Observer*) eine Unterscheidung zwischen den Entitäten (*Unities*) „Tom“ und dessen „Hund“ vor. Zudem stellt sie einen Zusammenhang zwischen beiden Entitäten durch die Phrase „führt aus“ her. Diesen Zusammenhang kann man als strukturelle Kopplung (*structural coupling*) beschreiben, die beim Ausführen eines Hundes mit Leine auch physisch durch das Festhalten Toms der Leine und den angeleiteten Hund aufgebaut ist. Auch beim Führen ohne Leine z.B. durch das „Bei Fuß“ Gehen besteht eine Verbindung zwischen dem Hundehalter und dessen Hund. Diese strukturelle Kopplung äußert sich in der Koordination des Verhaltens (*coordinated behavior*) von Tom und seinem Hund, wobei sich ihre Strukturen wechselseitig anpassen, wie beschrieben beim Ausführen, aber ebenso, wenn ein nicht angeleiteter Hund ausreißt und der Ausführende versucht den Hund einzufangen.

⁴¹ Innerhalb dieses Abschnitts (3.2.1.2) beziehen sich alle Zeilennummer auf die im Textauszug (3.2.1.1) angegebenen Zeilen.

⁴² Selbst wenn dieses Beispiel nur konstruiert ist kann an dieser Stelle von einer Beobachter*in gesprochen werden, weil dieser den Ablauf und die beteiligten Entitäten vor ihrem inneren Auge sieht. Wäre das Beispiel nicht konstruiert, ist klarerweise vom Beobachten zu sprechen, selbst wenn der reflektierende Beobachter Tom selbst wäre und entsprechend als Autor die Situation scheinbar „von außen“ betrachtet.

Im folgenden Satz beschreibt die Autor*in, dass aus der Perspektive des Hundes, Tom zu dessen Umwelt gehört und vice versa (Z. 1–2). Hier wird erneut deutlich, dass die Unterscheidungen in dieser kurzen Episode von der Autor*in, der Beobachter*in, vorgenommen werden, die Tom und den Hund in einer zum Teil gemeinsamen Umwelt verortet. Wie in Abschnitt 3.1.3 und in diesem Satz von Reid und Mgombelo dargestellt wurde, ist sowohl diese Unterscheidung zwischen Tom und der Umwelt für den Hund als auch die Unterscheidung zwischen dem Hund und der Umwelt für Tom aus Toms Sicht und der Sicht des Hundes nicht zwingend. Die Beobachter*in beschreibt im nachfolgenden Satz, dass Tom und sein Hund an einer Straßenecke ankommen, die Teil ihrer gemeinsamen Umwelt ist. Daraufhin beschreibt die Autor*in/Beobachter*in, dass Tom zu diesem Zeitpunkt an der Hundeleine zieht und ein zusätzliches Geräusch macht. Eine Beobachter*in könnte Toms Verhalten (*behavior*) als sensori-motorische Koordination zwischen Tom und seiner Umwelt, dem Auftreten einer Straßenecke, beschreiben und zwar in dem Sinne, dass Tom diese Straßenecke wahrnimmt und entsprechend mit seinem Hund an dieser anhalten muss/möchte, was motorische Aktivität bei Tom auslöst, u.a. das Ziehen an der Leine und das Erzeugen eines Geräuschs. An dieser Stelle ist wichtig zu bemerken, dass Reid und Mgombelo diesen Zusammenhang nicht explizieren, also nicht das Verhalten im Sinne von Maturana und Varela aus Beobachter*innensicht deuten, sondern eher eine Beschreibung vornehmen. Diese Beschreibung ohne Feststellung des Verhaltens, sondern nur hinsichtlich der strukturellen Änderungen (*structural changes*) wird insofern dadurch beschränkt, dass im darauffolgenden Relativsatz das Geräusch so beschrieben wird, als würde es „[...] für eine Beobachter*in wie „Sitz!“ klingen.“ (Z. 4). Hier ist klar, dass eine potentielle Leser*in und die Autor*in über eine ähnliche Sprache verfügen und das Kommando als solches innerhalb ihrer strukturellen Kopplung dritter Ordnung – ihrer Sprachgemeinschaft – entsprechend ihres linguistischen Bereichs⁴³ verstehen.

Mit dem Verweis auf die gemeinsame Geschichte des „Gassi-Gehens“ von Tom und seinem Hund sowie den damit verbundenen Auslösern (*Triggern*), wie dem Erreichen einer Straßenecke und entsprechenden Kommandos, und ihrer Abfolge wird die Ontogenese der strukturellen Veränderung beider Interaktionspartner beschrieben (vgl. Z. 5–8). Hierbei stellt die Beobachter*in klar, dass keine

⁴³ Hier auch innerhalb des linguistischen Bereichs des Hundes, auch wenn dieser keine Sprachgemeinschaft mit Tom im Sinne von Maturana und Varela bildet.

Aktivität von Tom „unausweichlich“⁴⁴ (Z. 8) das Sitzen seines Hundes herbeiführt, was klar wird, wenn man den Hund als autopoietisches System zweiter Ordnung begreift, welches lediglich durch eine Koordination dritten Grades mit Tom gekoppelt und durch seine Struktur determiniert ist. Entsprechend beschreibt der Beobachter die Ontogenese des Hundes als Struktur-Veränderung, die zu der Anpassung des Hundes führt, dass dieser sich in solchen Situationen setzt (vgl. Z. 8–10). Diese Veränderung ergibt sich aus der wechselseitigen strukturellen Kopplung von Tom und seinem Hund und deren Koordination ihrer Handlungen (Z. 10–11), wodurch Toms Hund sitzt (Z.11–12). In dieser letzten Feststellung durch die Beobachter*in nutzt diese eine Beschreibung des Verhaltens durch semantische Ausdrücke, denn sie beschreibt diese Interaktionen zwischen Tom und seinem Hund so, „als ob die von ihr zugewiesenen Bedeutungen den Verlauf der Interaktionen determinieren“ (vgl. 3.1.8). Im folgenden Satz wird eine erneute strukturelle Kopplung zwischen Tom und dem Hund dargestellt, die mit dem Auslöser von Toms Kommando „Ok, boy“ wirksam wird. (Z. 12–13). An dieser Stelle deuten Reid und Mgombelo das Verhalten des Hundes noch nicht als Training oder Lernen. In den Zeilen 36–39 weisen sie diese Prozesse allerdings klar aus.

In den Zeilen 14–20 beschreibt die Beobachter*in, dass Toms Hund mit der Zeit von alleine an Straßenecken sitzen bleibt, ohne dass Tom die bereits beschriebenen Auslöser anwenden muss. Dies liegt laut der semantischen Beschreibung der Beobachter*in daran, dass der Hund nicht nur mit Tom eine strukturelle Kopplung eingeht, sondern auch mit der übrigen Umwelt, sodass seine Struktur so umgewandelt wurde, dass er sich, wenn sie an einer Straßenecke ankommen, setzt. Somit wird das Auftreten einer Straßenecke zu einem Kommando seiner strukturellen Änderung vom Laufen zum Sitzen. Man könnte auch davon sprechen, dass der Hund gelernt hat sich hinzusetzen, wenn eine Straßenecke erreicht wird. Diese spezielle Koordination des Verhaltens des Sitzenbleibens an einer Straßenecke ist laut der Autoren nicht trivial in dem Sinne, dass auch andere Koordinierungen auftreten und gelernt werden können (vgl. Z. 20–21), dies liegt unter anderem daran, dass auch der Hund versucht andere Koordinierungen

⁴⁴ Als Beispiel für diese „Nicht-Unausweichlichkeit“ können trotzig Kinder (oder Erwachsene) oder auch Hunde, die sich von der Leine losreißen, und so entsprechend den Kommandos ausweichen, angeführt werden.

von Handlungen in seiner strukturellen Verknüpfung mit der Umwelt festzulegen⁴⁵ (Z. 24–25). Dass Koordinierungen auftreten halten Reid und Mgombeo allerdings nicht für außergewöhnlich, schließlich versuchen autopoietische Entitäten ihre Autonomie und damit Abgrenzung von der Umwelt aufrechtzuerhalten, was dann zu strukturellen Veränderung durch Kopplung mit der Umwelt oder durch Interaktionen zweier solcher Entitäten zur Koordinierung deren Verhalten führt (Z. 22–24).

Im letzten Abschnitt des Textes beschreiben Reid und Mgombeo die grundsätzliche Symmetrie dieser Koordinierung des Verhaltens. Der Hund setzt sich (aus Beobachter*in Perspektive) bereits lange vor dem Auftreten der Straßenecke und ohne ein Kommando von Tom (vgl. Z. 26–27). Die dargestellte Interaktion, dass Tom seinen Hund anschaut, sein Hund ihn zurück anschaut und danach über die Straße blickt, zeigt die strukturelle Kopplung beider Entitäten an. Tom als (reflektierender) Beobachter gibt eine semantische Beschreibung⁴⁶ in Form einer Interpretation des Verhaltens an, indem er das Verhalten seines Hundes als Zeichen innerhalb des linguistischen Bereichs von sich und seinem Hund deutet, als Absicht des Letzteren die Straße überqueren zu wollen (vgl. Z. 29–31). Nach Toms Deutung wechseln sie gemeinsam die Straße, wobei sich dabei Toms Struktur so geändert hat, dass sie zukünftig genauso handelt, wenn sein Hund an der Straße sitzen bleibt (Z. 31–36). Diese strukturelle Veränderung ist ein Teil der Ontogenese von Tom, ähnlich wie der Lernprozess so zu handeln, dass man zunächst in beide Richtungen schaut bevor man die Straße überquert (vgl. Z. 33–36).

Im letzten Satz des Textauszuges zeigen Reid und Mgombeo zwei mögliche Beobachter*innenperspektiven auf die letztbeschriebene Episode. Zum einen könnte jemand sagen, „dass Toms Hund ihn trainiert hat, die Straße zu überque-

⁴⁵ In diesem Fall würde man von einem unerzogenen Hund sprechen, dies ist insofern falsch, dass er nicht nicht-erzogen ist, sondern falsch erzogen wurde in dem Sinne, dass eine Koordinierung von Verhalten stattgefunden hat, die von der Besitzer*in nicht erwünscht ist.

⁴⁶ Die Erzählperspektive ist diejenige des auktorialen Erzählers, zumindest wird dies an den semantischen Ausdrücken „Tom denkt sein Hund möchte die Straße überqueren“ (Z. 29) sowie „seine Struktur wurde bereits früher determiniert dies zu tun bevor er eine Straße überquert“ (Z. 34–35) deutlich. Entsprechend ist davon auszugehen, dass Tom zumindest implizit durch seine Interpretation eine Beschreibung durch semantische Ausdrücke angibt. Insofern kann man hier von Tom als reflektierenden Beobachter sprechen auch wenn man üblicherweise keinen direkten Zugang als Beobachter*in auf Denkprozesse anderer Entitäten hat.

ren“, was allerdings in dieser Analyse erneut als Koordination von Verhalten beider Entitäten deutbar ist, die von einer Beobachter*in durch semantische Ausdrücke beschrieben wird (Z. 36–37). Entsprechend wird die letzte Episode auch von Reid und Mgombeo analysiert, die die Interaktion zwischen dem Hund und Tom „aus enaktivistischer Perspektive“ als „Co-Evolution zweier strukturell determinierter Systeme in ihrer Geschichte struktureller Kopplung“ (Z. 37–39) beschreiben. Hiermit nehmen sie zuletzt eine Analyse einer Episode vor, wie sie hier (vgl. 3.2.1.2) für den gesamten Textauszug durchgeführt wurde.

3.2.2 Deborah

Im Folgenden wird das Beispiel von „Deborah“ aus (Bauersfeld, 1983, S. 3) wiedergegeben und im Anschluss mithilfe des enaktivistischen Begriffsgerüst analysiert. Der Vergleich dieser Analyse mit Bauersfelds Deutung des Beispiels auf Basis seiner Theorie subjektiver Erfahrungsbereiche wird erst nach Erläuterung des Konzepts der subjektiven Erfahrungsbereiche vorgenommen (vgl. 4.5).

3.2.2.1 Das Textstück „Deborah“

Tabelle 3: Ginsburg (1977, S. 150, zit. nach Bauersfeld, 1983, S. 3)

1	Die neuneinhalbjährige Deborah führt auf dem Papier eine schriftliche	
2	Addition aus (nebenstehend). Sie beschreibt recht genau, wie die Rech-	
3	nung ausgeführt wird: Die 3 und die 5 zusammenzählen und dann die 1	
4	und die 1.“ Der Interviewer fragt ergänzend:	
5	„I: Wofür stehen die zwei Einsen?“	13
6	D: Zwei.	<u>+15</u>
7	I: Aber da sind keine ‚zwei‘, da ist 28.	28
8	D: Da sind zwei Einsen hier und man zählt sie zusammen.	
9	I: Aber für was stehen die Einsen?	
10	D: Wie meinen Sie das? Für 13 und 15.	
11	I: Eins steht für 13?	
12	D: Ich verstehe nicht, was Sie meinen.“	

3.2.2.2 Eine Analyse aus enaktivistischer Perspektive

Auch hier greifen im ersten Satz „Die neuneinhalbjährige Deborah führt auf dem Papier eine schriftliche Addition aus [...]“ (Z. 1) verschiedene enaktivistische Konzepte ineinander. Der Autor des Textauszugs nimmt als Beobachter⁴⁷ (*Observer*) eine Unterscheidung zwischen einer Entität (*Unity*) „Deborah“ und ihrer

⁴⁷ Hier handelt es sich um Bauersfeld als Autor, der die Ausgangssituation darstellt, die er vermutlich aus der Forschungsarbeit von Ginsburg referiert. Dennoch kann auch hier insoweit von einem Beobachter gesprochen werden insofern dieser den Ablauf und die beteiligten Entitäten vor seinem inneren Auge sieht.

Umwelt, deren Element ein „Papier“ ist, vor. Zudem stellt er einen Zusammenhang zwischen der Entität und ihrer Umwelt durch die Phrase „führt auf dem [...] aus“ her. Diesen Zusammenhang kann man als strukturelle Kopplung (*structural coupling*) beschreiben, die beim Ausführen einer schriftlichen Addition auf dem Papier physisch durch Deborahs Schreiben mit einem Stift auf diesem Papier aufgebaut ist. Dadurch, dass der Beobachter Deborahs Verhalten als effektiv im Sinne des Lösen einer Rechenaufgabe, also einer Frage, beobachtet (vgl. Z. 1–2), kann man hier davon sprechen, dass Deborah über Wissen bezüglich schriftlicher Addition verfügt bzw. ihr Handeln vom Beobachter als solches aufgefasst wird (vgl. 3.1.6).

Im folgenden Satz beschreibt der Beobachter, dass Deborah ihre strukturelle Änderung gekoppelt mit der strukturellen Änderung des Papiers mit einer weiteren Entität (dem Interviewer) kommuniziert, in dem sie die Ausführung der Rechnung beschreibt (Z. 2–3). Dies geschieht innerhalb ihres linguistischen Bereichs (*linguistic domain*) in Form von kommunikativem Verhalten. Letzteres wird insbesondere durch den dritten Satz (Z. 3–4) deutlich, in welchem sie ihr eigenes Handeln, also selbst-bewusst (vgl. 3.1.9), kommuniziert, vermutlich mit Verweisen auf die Schriftzeichen auf dem Papier⁴⁸, aber auch selbst-referent – im Sinne des *Languaging* – auf bereits genutzte Wörter bezieht. Ein Beispiel für das *Languaging* ist die Explikation ihres Wissens über Addition einstelliger Zahlen mit den Phrasen „die 3 und die 5 zusammenzählen und dann die 1 und die 1“ (Z. 3–4).

Der Interviewer tritt ausgelöst durch Deborahs Erklärung mit ihr in Interaktion und setzt durch seine Nachfrage (Z. 4) im linguistischen Bereich, der damit zum Bereich der Störung (*domain of perturbation*) wird, einen weiteren Auslöser für das Beibehalten der Interaktion mit Deborah. Dieser Auslöser besteht in der Frage, wofür beide Einsen stehen würden (Z. 5). Auch hier koppelt der Interviewer vermutlich mit dem Papier, auf dem die Rechnung von Deborah niedergeschrieben wurde. Als Beobachter dieser Situation kann davon ausgegangen werden, dass

⁴⁸ Der Verweis auf das Papier ist nicht durch den Textauszug gegeben. Dieser scheint aber sprachlich angedeutet durch die Phrase „die 3 und die 5 zusammenzählen“ (Z. 3), denn das Ergebnis dieses Zusammenzählens findet sich auf dem Papier als Einerstelle von 28 (Z. 7). Insofern kann auf Basis der Datengrundlage nur von einem impliziten – und damit aus Beobachtersicht nur vermuteten – Verweis gesprochen werden.

der Interviewer hier eine Reaktion von Deborah aufgrund des vom Interviewer vermuteten Wissens⁴⁹ von Deborah erwartet⁵⁰.

Deborah reagiert mit der Antwort „Zwei.“ (Z. 6), die von einer Beobachter*in insofern nachvollziehbar ist, dass in dem von ihr genutzten schriftlichen Additionsalgorithmus beide Einsen als Zehnerstellen der Summanden eine Zwei in der Zehnerstelle der Summe ergeben. Diese Deutung entspricht ihrem bisherigen Verhalten basierend auf der strukturellen Kopplung mit der Rechnung auf dem Papier und ihres kommunikativen Verhaltens in Form ihrer Erläuterung des Rechenweges. Deborahs Antwort ist somit durch die vorangehende Ontogenese ihres Verhaltens strukturell determiniert.

Der Interviewer stellt – ausgelöst durch Deborahs Antwort – fest, dass da keine „zwei“, sondern eine 28 sei (Z. 7). Im Sinne der Idee des „Sprachelns“ (vgl. 3.1.8) nutzt der Interviewer hier eine Beschreibung durch semantische Ausdrücke, nämlich, dass die geschriebene Ziffernfolge „28“ nicht als „zwei“ und „acht“ zu lesen sein sollte, sondern eher als „zwanzig“ und „acht“ (vgl. Fußnote 49). Somit bleibt er im linguistischen Bereich der Störung, der die Interaktion mit Deborah aufrechterhält, wobei wechselseitig auch ihre Antwort als Auslöser eine Störung der Interaktion zwischen ihr und dem Interviewer verstanden werden kann.

Im Sinne von Maturanas und Varelas Konzeption von Sprache als Koordination von Sprachhandlungen bezüglich Operationen im linguistischen Bereich auf diese selbst (vgl. 3.1.8) ist Deborahs Erwiderung „Da sind zwei Einsen hier und man zählt sie zusammen“ (Z. 8) ein Verweis darauf, dass die betrachteten Objekte durch die Operation des „Zusammenzählens“, im Rahmen des linguistischen Bereichs der schriftlichen Addition durch stellenweises Addieren, zwei

⁴⁹ Bauersfeld geht bei seiner Analyse (Bauersfeld, 1983, S. 8) davon aus, dass der Interviewer auf den Stellenwert der „1“ in den Zahlen dreizehn und fünfzehn hinaus möchte. So formuliert er: „Die nachgeschobene Äußerung ‚da ist achtundzwanzig‘ unterstützt diese Deutung. (Könnte man das Tonband abhören, würde man auf eine mögliche Betonung der Silben ‚-zwanzig‘ achten, die ganz im Sinne der erwarteten Stellenwertbegründung läge.)“ (Bauersfeld, 1983, S. 8). Natürlich ist diese Einschätzung trotz hoher Plausibilität ebenso spekulativ.

⁵⁰ An dieser Stelle wird Maturanas und Varelas Definition deutlich, dass Wissen dann vorliegt, wenn eine Beobachter*in effektives Verhalten einer Entität hinsichtlich eines durch seine Frage(n) (explizit oder implizit) bestimmten Kontextes beobachtet (3.1.6). Wie in Fußnote 49 deutlich gemacht wurde bleibt hier der Kontext, den der Interviewer im Sinn hat, implizit bzw. kann nur in einer Zeigegeste oder einer sprachlichen Markierung auf die Zehnerstelle beider Zahlen vermutet werden. Dies führt schlussendlich auch zum Abbrechen der spezifischen Kommunikation (Z. 12).

Einsen darstellen. Somit passt ihre Erklärung zur Deutung ihres Verhaltens bzw. ihrer Sprachhandlungen zwei Abschnitte zuvor.

Daraufhin geht der Interviewer auf Deborahs Antwort ein, indem er nachfragt: „Aber für was stehen die Einsen?“ (Z. 9). Offenbar reicht dem Interviewer die Erklärung nicht, dass die „Einsen“ aus Deborahs Perspektive – ggf. nur im Rahmen des schriftlichen Algorithmus – losgelöst von den Zahlen betrachtet wurden, und somit Operand, also Bestandteil der Addition, sind. Auch wenn die Frage vom Interviewer relativ offen gestellt wird, ist aus dem Kontext, dies meint hier die bereits zuvor gestellte Frage (Z. 5), die darauffolgende Feststellung (Z. 7) und auch die folgende Frage (Z.11), der Sprachhandlung des Interviewers zu erkennen, dass er die Nachfrage mit einer spezifischen Absicht stellt. Und zwar eine Antwort von Deborah zu erhalten, die sich auf den Stellenwert beziehen soll (vgl. auch Fußnote 49). Somit versucht er mit verschiedenen Triggern eine entsprechende strukturelle Änderung von Deborah zu bewirken, damit sie den Begriff des Stellenwerts, oder zumindest „Zehner“, verwendet.

Deborah antwortet im Rahmen ihres linguistischen Bereichs bzgl. der schriftlichen Addition „[...] Für 13 und 15.“ (Z. 10), was natürlich insofern sinnvoll ist, da die Einsen in der Zehnerspalte auf beide Summanden rekurren. Interessanter für die Diskursanalyse dieses kurzen Dialogs ist Deborahs Nachfrage zu Beginn ihrer Sprachhandlung „Wie meinen Sie das? [...]“ (Z. 10). Mit dieser Nachfrage wird besonders der Aspekt der Sprache deutlich, dass sich eine sprechende Entität in einem linguistischen Bereich bewegt, der Teil dessen Umwelt ist, in der diese mit anderen Entitäten interagiert, und dabei diesen Bereich gemeinsam erzeugt (vgl. 3.1.8). Deborah hat erkannt, zumindest lässt ihre Aussage darauf schließen, dass es Differenzen zwischen ihr und dem Interviewer hinsichtlich der verwendeten Symbole oder ihrer Nutzung innerhalb des im Diskurs verwendeten linguistischen Bereichs, bzw. verschiedener linguistischer Bereiche, gibt. Entsprechend kann auch ihre Aussage als Trigger im Bereich der Störung des Bereichs, also des Diskurses, interpretiert werden. Sie expliziert die von ihr wahrgenommene Dissonanz im Rahmen der strukturellen Kopplung und möchte damit den Interviewer zu einer entsprechenden Strukturänderung veranlassen, im Folgenden die Grundlagen ihres Diskurses auf einer, von einer Beobachter*in als

solche identifizierte, Meta-Diskurs-Ebene zu verhandeln⁵¹. In diesem Fall, ob man über den Stellenwert der betrachteten Zahlen oder über die Operation und Operanden der schriftlichen Addition spricht.

Der Interviewer erfährt keine Strukturänderung – ob dies nun von ihm intendiert ist oder nicht. In jedem Fall nimmt er Deborahs Impuls (im Sinne des Triggers im Bereich der Störung) nicht auf und klärt den Kontext nicht, indem er beispielsweise darauf hinweist, dass er eine Aussage über Stellenwerte oder Zehner erwartet. Stattdessen bezieht er sich mit seiner Frage „Eins steht für 13?“ (Z. 11) nur auf Deborahs zweiten Teil ihrer Aussage. Er bleibt somit in dem von ihm durchgängig genutzten linguistischen Bereich.

Diese Frage des Interviewers hilft Deborah natürlich nicht in der Lösung des von ihr identifizierten Kommunikationsproblems, womit sie die strukturelle Koppelung des Interviewers und sich selbst in Bezug auf die Inhaltskomponente löst und nur noch auf die Möglichkeit des Meta-Diskurses, also des Diskurses beider struktureller Ausgangssituationen, verweist (Z. 12). Insbesondere wird die Interpretation hinsichtlich der gewünschten Strukturänderung des Interviewers in Bezug auf Zeile 10 verstärkt.

3.3 „Bedingungen der Möglichkeit von Lernen“

Aus enaktivistischer Perspektive gilt „All doing is knowing, and all knowing is doing“ (vgl. 3.1), dies liegt unter anderem am Verständnis von Wissen als effektives Handeln (vgl. 3.1). Entsprechend kann unter Lernen verstanden werden, dass neues Wissen, also neue effektive Handlungen, erzeugt und/oder verstetigt

⁵¹ Nach Sfard (2001) ist ein solches Verhandeln des Diskurses, oder wie hier ein konkretes Verhandeln der Meta-Diskurs-Regeln im Sinne des zugrundeliegenden Kontextes, bzw. linguistischen Bereichs häufig implizit. In ihren Worten:

„Because of the predominantly covert nature of inter-personal messages, the meta-level intentions conveyed through discourse often remain invisible even to those whom they affect (some interlocutors are more reflective and some other much less so, and thus people may be aware of their own meta-discursive intentions to varying degree; still, the concern about the meta-level is always present and we are always witnessing this coexistence of two agendas: the one related to content, and the other to the way the discourse evolves).“

(Sfard, 2001, S. 39)

Umso bemerkenswerter ist es, dass Deborah den Interviewer dazu auffordert, diesen Kontext mit ihr zu verhandeln bzw. zu klären.

werden. Solche Veränderungen des Wissens bilden sich aus enaktivistischer Perspektive als strukturelle Änderungen ab. Dazu muss die Entität natürlich eine Struktur haben, die zur strukturellen Veränderung fähig ist. Zur Induzierung solcher Änderungen muss die Entität zudem zur strukturellen Kopplung mit ihrer Umwelt fähig sein.

Für mathematisches Lernen, insbesondere gemeinsames Lernen, ist es notwendig, dass zusätzlich strukturelle Kopplungen zu anderen Entitäten, insbesondere anderen Menschen wie Vater und Mutter, Mitschüler*innen und Lehrer*innen, aufgebaut werden können. Zudem liegt das, was hauptsächlich unter Wissen verstanden wird, insbesondere wenn man bspw. von der „Wissengesellschaft“ spricht, und somit auch mathematisches deklaratives Wissen, in Form von sprachlichem oder versprachlichten Wissen vor. Dementsprechend muss als Bedingung mathematischen Lernens eine passende Sprachfähigkeit, über mathematische Sachverhalte zu sprechen oder in anderer Form zu kommunizieren, vorhanden sein. Also sollte die Entität fähig zum „spracheln“ in linguistischen Bereichen sein. Dieses „spracheln“ kann natürlich auf verschiedenen Niveaus kontextangemessen erfolgen.

Basierend auf diesen Bedingungen der Möglichkeiten des Lernens aus enaktivistischer Perspektive würde man das Phänomen „Lernen“ verschiedenen Entitäten mit einer hinreichend komplexen Struktur sowie struktureller Änderungsmöglichkeiten zugestehen. Besonders ist aber, dass die enaktivistische Perspektive interne strukturelle Prozesse, vergleichbar mit kognitiven und meta-kognitiven Prozessen, und strukturelle Kopplungen, wie Anpassung, Imitation, Interaktion und Sozialisation, gemeinsam betrachtet und als konstituierend für Wissen wie auch Wissensentwicklung ansieht (Reid, 2014; Reid & Mgombelo, 2015; Steinbring, 2015). Durch die Verknüpfung wird „eine Welt hervorgebracht“ (*bringing forth a world*, Maturana & Varela, 2008, S. 26).

3.4 Notiz: Forschen im Sinne des Enaktivismus

Zum Abschluss dieses Kapitels über den Enaktivismus als Hintergrundtheorie dieser Forschungsarbeit und der hier vertretenen Grundauffassung von Lernen sollen noch einige Hinweise gegeben werden, inwiefern eine solche Perspektive mathematikdidaktische Forschung beeinflusst. Dabei greift dieser Abschnitt insbesondere auf Arbeiten zurück, die einerseits den Einfluss der enaktivistischen Perspektive auf die Entwicklung mathematikdidaktischer Forschung genommen

hat (Reid, 2014) und andererseits den Einfluss der enaktivistischen Perspektive auf die genutzte Methodologie (Lozano, 2015) in den Blick nimmt oder aber auf den Forschenden (Brown, 2015) ausübt. Diese Arbeiten und die enaktivistische Perspektive als solche zeichnen sich durch die eng verknüpfte Betrachtungsweise interner und interaktionaler Prozesse/Strukturänderungen aber auch durch die Wertschätzung verschiedener Beobachtungs- und Forschungsperspektiven aus.

Reid weist darauf hin, dass die enaktivistische Perspektive immer dann Einfluss auf mathematikdidaktische Forschung genommen hat, wenn interne Prozesse, bspw. Beliefs, mentale Modelle oder Concept Images, mit interaktionalen oder sozialen Phänomenen, bspw. Diskursanalysen, Interaktionsschemata, kooperativen Lehr-/Lernsettings, verbunden werden sollten. Reid (2014) identifiziert so vier Phasen bzw. Schulen in der mathematikdidaktischen Forschungslandschaft, die enaktivistische Begriffe genutzt oder in die mathematikdidaktische Forschung eingeführt haben. Als erstes nennt Reid Paul Cobb, der einerseits der Doktorand von einem Kooperationspartner von Glasersfeld – Les Steffe – war und u.a. mit Bauersfeld intensiv kooperiert hat. Cobb hat den Begriff des „consensual domain“ von Maturana genutzt um „world views“ oder „beliefs“ zu beschreiben, die von verschiedenen Individuen geteilt werden (Reid, 2014, S. 140). Laut Reid hat diese, und vor allem Glasersfelds, Beschreibung der Möglichkeit zur Kommunikation zwischen Individuen als andauernde Interaktion durch wechselseitige Orientierung und Adaption zur Sichtweise geführt, Maturanas Arbeiten als Teil oder Typ des radikalen Konstruktivismus einzuschätzen. Diese Einschätzung sollte durch die Erläuterungen in den vorangehenden Abschnitten zerstreut worden sein. An zweiter Stelle nennt Reid seinen Doktorvater Tom Kieren, der verschiedene enaktivistische Konzepte erstmals explizit in die mathematikdidaktische Forschung einbrachte, an dritter Stelle die „Bristol school“ um Laurinda Brown. Als viertes nennt Reid die Forschungsrichtung „embodied mathematics“, die in der Mathematikdidaktik von Rafael Núñez und Laurie Edwards etabliert wurde und eng verwandt mit dem Enaktivismus ist, aber eher auf spätere Arbeiten von Varela fußt. Varelas „Embodied mind“ unterscheidet sich dahingehend von Maturanas Arbeiten (Reid, 2014), dass sich jede kognitive Aktivität auch in einer äußerlich sichtbaren körperlichen Veränderung zeigt, was die von Maturana und Varela vertretenen Auffassung einer internen Struktur, die auch getrennt von einer externen strukturellen Kopplung mit der Entität oder Umwelt wirken kann, stark eingrenzt.

Neben dieser exemplarischen Auswahl von Einflüssen enaktivistischer Perspektiven auf mathematikdidaktische Forschung lässt sich auch das ZDM Themenheft (Heftnummer 47, Issue 2) „Enactivist methodology in mathematics education research“ aus dem Jahre 2015 nennen, in dem verschiedene Autoren neben Grundbegriffen (Preciado-Babb, Metz, & Marcotte, 2015; Reid & Mgombele, 2015), empirischen Untersuchungen (Abrahamson & Trninic, 2015; Khan, Francis, & Davis, 2015; Lozano, 2015; Maheux & Proulx, 2015), im Sinne des Enaktivismus auch Grundüberlegungen zu daraus folgender Methodologie (Brown, 2015; Coles, 2015; Maheux & Proulx, 2015; Metz & Simmt, 2015), sowie deren Auswirkungen auf mathematikdidaktisches Forschen im Allgemeinen (Simmt & Kieren, 2015) darstellen.

Simmt und Kieren (2015) identifizieren hierbei drei Forschungsrichtungen mathematikdidaktischer Forschung aus enaktivistischer Perspektive, die Schwerpunkte abbilden, aber nicht unvereinbar sind.

Die erste Richtung zeichnet sich durch die besondere Beachtung der Beobachter*in/ „Observers“ aus, die auf verschiedenen Ebenen betrachtet werden, indem man die Lernenden, Lehrende aber auch Forschende als Beobachter*innen auffasst, deren Wissen daran deutlich wird, auf welche Weise sie in der Welt handeln (u.a. indem sie ihre Beobachtungen kommunizieren). Alle von Simmt und Kieren betrachteten Artikel aus dem entsprechenden ZDM Heft tragen dieser Perspektive Rechnung. Auch für die hier vorgestellte Forschungsarbeit spielt diese Perspektive eine große Rolle, da alle betrachteten Akteure, ob diese nun die Autoren der betrachteten historischen Quellen (vgl. 6,7), der aktuellen Schul- und Lehrbücher (vgl. 8,9) oder die Studierenden bzw. der Lehrend-Forschende (vgl. 10) des Forschungsseminars sind, als Beobachter*innen bestimmter inhaltlicher mathematischer Bereiche oder anderer Aktivitäten, bspw. im Seminar im Umgang mit Texten oder der eigenen Reflexion, aufgefasst werden.

Die zweite von Simmt und Kieren (2015) identifizierte Forschungsrichtung legt einen Fokus darauf, dass „wissen“ (vgl. Fußnote 28) als „sinnlich geleitete Handlung, die eine signifikante Welt⁵² hervorbringt“, aufgefasst wird. Simmt und Kie-

⁵² Simmt und Kieren (2015) nutzen hier die Begrifflichkeit „perceptually guided action that brings forth a world of significance“. Entsprechend ist *signifikant* immer in Bezug auf die an einer (Inter-)Aktion Beteiligten, die eine Welt voranbringen, die für sie signifikant ist, zu verstehen.

ren erläutern diese Perspektive mit Rückgriff auf ihre eigenen Arbeiten in Auseinandersetzung mit Maturanas und Varelas „Tree of Knowledge“ (2008), indem sie ihr Verständnis folgendermaßen erläutern:

„[...] we have come to understand *mathematics knowing as bringing forth a world of SIGNificance with others in a sphere of behavioral possibilities that an observer sees as involving mathematics* [Herv. im Original] (Kieren, Simmt, & Mgombelo, 1997)“

(Simmt & Kieren, 2015, S. 310)

In der hier vorgestellten Forschung wird diese Sichtweise abgebildet durch die Rekonstruktion von Wissens-elementen aber auch durch die übergeordnete Auffassung von Mathematik, die vor allem in sprachlicher Auseinandersetzung mit mathematischen Wissens-elementen im Sinne der später näher zu definierenden (Eigen-)Theorien (vgl. 4.4) oder der Reflexion und des Vergleichs eigener Auffassung von Mathematik im allgemeineren Sinn (vgl. 5) auftreten. Wichtig an Simmts und Kierens Darstellung dieses Kernelements, an der auch Mgombelo beteiligt war, ist der Bezug auf eine Beobachter*in dieses Verhaltens. Hierbei können Beobachter*innen von außen, aber auch Beobachter*innen, die sich selbst beobachten, zum Beispiel im Sinne des Reflektierens, gemeint sein. In den Darstellungen zur Methodik und den Ergebnissen dieser Forschungsarbeit wird daher ein großes Augenmerk daraufgelegt, die entsprechenden Beobachter*innenperspektiven, aber auch der Kontext in dem die Beobachtung stattfand, soweit dies rekonstruierbar ist, darzulegen.

Die dritte Forschungsrichtung, die Simmt und Kieren ausweisen, bezeichnen sie mit „Ethics“ (Simmt & Kieren, 2015, S. 313–316). Hiermit meinen Simmt und Kieren

„[...] the implications of the moment by moment and day to day interactions we have as autopoietic and structurally coupled beings to others and otherness. These are the ethics that ‘must reside in the action itself’ (Wittgenstein quoted in Foerster, 2003, S. 293).“

(Simmt & Kieren, 2015, S. 314)

Auch in dem Sinne, dass sie bspw. Objekte auszeichnen oder sprachliche Zeichen entwickeln und nutzen.

Diese Richtung kann mit der Idee der Ontogenese einer Identität in Bezug auf die Geschichte ihrer strukturellen Kopplungen aufgefasst werden. Für Forschung unter Nutzung/Berücksichtigung einer enaktivistischen Perspektive ist diese besonders relevant. Aber auch generell für Forschung im Allgemeinen, insbesondere empirische Forschung, da sie die Rolle einer Beobachter*in reflektiert. Und zwar betrifft dies einerseits den Status der Aussagen, die der Forschende als Beobachter*in macht, und andererseits seine Position in der Forschungssituation (Simmt & Kieren, 2015, S. 314). Kieren und Simmt stellen dabei fest, dass, sofern die Aussagen der Wissenschaftler*in das Wissen der Wissenschaftler*in betreffen und nicht das der Teilnehmenden, keine direkten Empfehlungen für das Lehren und Lernen und auch für die Arbeit im Klassenraum gegeben werden können⁵³ (Simmt & Kieren, 2015, S. 314). Fragen der Unterrichtspraxis sollen und können nur nachfolgend untersucht werden. Mögliche Forschungsfragen benennen beide Autoren mit „[...] what can our research say to us about teaching? How can we use our understanding to inform practice? What practice and whose practice?“ (Simmt & Kieren, 2015, S. 314). Mit einem Verweis auf die anderen Artikel der thematischen Ausgabe des ZDM diskutieren sie verschiedene Positionen, die Forscher*innen als Beobachter*innen einnehmen können, mit besonderen Unterschieden hinsichtlich der Möglichkeiten struktureller Kopplungen zwischen Beobachter*innenn, die aus dem hinteren Teil des Klassenzimmers oder nach einer Videoaufnahme im Rahmen der späteren Analyse beobachten, und teilnehmenden Beobachter*innen, die mit den Teilnehmenden in der Forschungssituation interagieren. In allen Forschungsumgebungen gilt aber für alle Beteiligten, „when we act, our acting changes the sphere of the possible for ourselves and for the other“ (Simmt & Kieren, 2015, S. 315).

Im Rahmen dieser Forschungsarbeit kommen verschiedene Positionen der Beobachter*in zum Tragen. Die Rekonstruktionen historischer Quellen und aktueller Schul- und Lehrbücher ähneln eher einem passiven Beobachter (vgl. 6, 7, 8, 9), wohingegen die Rekonstruktion der Auffassungen von Studierenden auf der Basis des Forschungsseminars durch eine teilnehmende Beobachtungsperspektive (vgl. 10) analysiert werden konnte, aber auch nur auf diese Weise in dieser Form erreicht werden konnte.

⁵³ Simmt und Kieren verweisen in ihrem Statement zur nicht trivialen Übertragbarkeit explizit auf Dissertationen, in denen wohl häufig eine solche Aussage getroffen wird (Simmt & Kieren, 2015, S. 314).

Laurinda Brown ergänzt in ihrem Artikel „Research as an enactivist mathematics education researcher“ die oben beschriebenen Perspektiven durch eine explizit autobiographische Ausführung, wie sie als mathematikdidaktische Forscherin mit enaktivistischen Konzepten und einer enaktivistischen Methodologie⁵⁴ umgeht. Insbesondere stellt sie fest, dass ihr Wirken als enaktivistische Forscherin mit der Zeit zu sinnlich-geleiteten Mustern von Handlungen [perceptually guided actions] geführt hat (Brown, 2015, S. 185). Sie selbst sieht ihren Weg als paradigmatisches Beispiel versierter in der enaktivistischen Forschungsmethodologie zu werden. Entsprechend formuliert Brown:

„Doing my first enactivist project, the decisions around the design led to interactions with the world triggering changes in my research practices over time, until those practices stabilised and I became aware that even though what I was researching changed, the principles behind the design of the projects was the same.“

(Brown, 2015, S. 185)

Diese Prinzipien ordnet Brown hinsichtlich vier Themen, die sie als Prozesse oder „ings“ identifiziert. Damit verweist sie auf den prozeduralen Charakter ihrer Themen, indem sie die Endung zur Konjugation von Verben in der present progressive Form nutzt. Dies ist analog zu Sprechweise über sog. „-ismen“. Die betrachteten Prozesse sind „learning“, „observing“, „interviewing“ und „finding(s)“.

Unter dem Begriff „learning“ versteht Brown mehr- oder vielseitiger zu Schauen⁵⁵ in einem rekursiven Prozess mit Bezug auf Handlungen in der Welt, durch die eine Rückkopplung generiert wird, die zu einer Adaption des Verhaltens führt, sodass dieses effektiv wird. Letzteres meint, dass keine Störungen durch dieses Verhalten induziert werden, womit die Handlung „gut genug“ ist,

⁵⁴ Es ist davon auszugehen, dass Laurinda Brown sich eher als enaktivistische Forscherin in der Mathematikdidaktik bezeichnen würde. Dies wird an ihrer Formulierung deutlich ab wann sie sich selbst als „Enaktivistin“ bezeichnet. „I began to call myself an enactivist as a label for my recognition that knowing is doing/doing is knowing.“ (Brown, 2015, S. 186). Wie in den vorangehenden Abschnitten deutlich wurde vertrete auch ich diese Auffassung der engen Verbindung, oder besser strukturellen Kopplung, von Wissen und Handlungen.

⁵⁵ Der Begriff des Schauens [i. Orig. „seeing“] bei Brown ist sicherlich – auch aus ihrer Perspektive – um weitere sinnliche Erfahrungen erweiterbar.

in der Welt zu bestehen (Brown, 2015, S. 192). Mit dieser Beschreibung identifiziert Brown ähnliche Bedingungen der Möglichkeiten des Lernens wie in Abschnitt 3.3 dargestellt.

Mit „observing“ meint Brown insbesondere den Prozess etwas Neues zu sehen. Hierbei geht sie von der Frage aus, wie es überhaupt möglich ist etwas Neues zu sehen, und verweist auf die strukturelle Kopplung zwischen geistiger und sinnlicher Aktivität, indem sie ein Zitat von Braham (1986) anführt „one can only see what one observes, and one observes only things which are already in the mind“ (Braham, 1986, zit. nach Brown, 2015, S. 192). Diese Kopplung illustriert Brown, indem sie darauf verweist, dass man durch wiederholtes Betrachten, durch eine wiederholte Analyse einer Videosequenz oder durch den Austausch über Beobachtungen mit weiteren Kolleg*innen, also anderen Beobachter*innen, „mehr sehen kann“, um so eine Erweiterung der eigenen Perspektive zu fördern (Brown, 2015, S. 192).

Brown gibt an, dass für sie Interviews ein essenzieller Bestandteil ihrer mathematikdidaktischen Forschung sind. Ihren Ausführungen stellt sie die Frage voran, wie Befragungen in einer strukturierten oder halb-strukturierten Form zur enaktivistischen Dualität des „knowing/doing“ passen. Brown antwortet darauf, dass auf der Basis einer enaktivistischen Perspektive auf Strukturen [der Entitäten bzw. ihres Wissens] diese durch die Direktheit der Erfahrungen [durch erleben des Interviews] illuminiert werden können. Diese Direktheit der Erfahrung erläutert Brown anhand ihrer Beobachtung, dass die Beschreibung was Mathematik für die Interviewpartner*innen ist nur durch Beschreibung der Aktionen, die von den Interviewpartner*innen erfahren wurden, hervorgebracht werden können, sofern jene von den Interviewpartner*innen erläutert werden konnten (Brown, 2015, S. 193). Insbesondere entstehen bei den Interviewten während der Beschreibung neue Verbindungen und Ideen, die sie zuvor nicht wahrgenommen aber vermutlich „gewusst“ (vgl. 3.1.6) haben. Solche Einsichten werden laut Brown häufig besonders energisch ausgedrückt (Brown, 2015, S. 193).

Als letztes Thema identifiziert Brown den Begriff der „find-ing(s)“ und grenzt ihn von der üblichen Bedeutung „findings“ im Sinne von allgemeinen Forschungsergebnissen dadurch ab, dass sie mit ersterem Begriff Prozesse identifiziert, die das beobachtete (Unterrichts-)Handeln bestimmen. Schon allein der Begriffsname „find-ing(s)“ kann gedeutet werden als „finde-„-ing(s)““ – also

„finde-Prozesse“. Brown gibt als Beispiel für solche Arten von Prozessen die Verwendung von Meta-Kommentaren in Bezug auf das Unterrichtsgeschehen während des Unterrichtsgeschehens an, die sie bei einer ihrer Studien beobachtet hat (Brown, 2015, S. 193). Insbesondere ist Brown nicht an den spezifischen Meta-Kommentaren als solchen, sondern daran interessiert, dass und wie sie verwendet werden. Entsprechend formuliert sie:

„The find-ing(s) of enactivist research shed light onto the journeys that are travelled in the professional learning that takes place when developing ones teaching.“

(Brown, 2015, S. 194)

Führt man diese thematischen Verortungen verschiedener wissenschaftlicher Tätigkeiten zusammen wird deutlich, dass Brown wie auch Reid und Mgombele (2015) Parallelen zwischen (schul-)typischen Lernprozessen und wissenschaftlichen Prozessen aufzeigen (Abschnitt 4.4.3). Womit nicht nur Lernprozesse, sondern auch die beobachtenden und analysierenden Forschungsprozesse, Teil der Darstellung und Reflexion enaktivistischer Forschung sein sollten (Brown, 2015, S. 195; Reid & Mgombele, 2015, S. 181). Auch Steinbring kommt zu einer ähnlichen Analyse, welche strukturellen Kopplungen relevant für mathematikdidaktische Forschung und damit auch für die Reflexion von Mathematikdidaktiker*innenn sind. Diese stellt er auch diagrammatisch dar (Steinbring, 2015, S. 290). Dabei identifiziert er drei Welten, die im Diagramm durch entsprechende Umrandungen dargestellt werden: die Welt mathematischer Zeichen und Symbole (1) für die Lernenden; die Welt der Lernenden, die mit der Mathematik umgehen (2) für die Lehrer*in; und die Welt der Lehrer*in-Lerner*in Interaktion über mathematisches Wissen (3) für die Wissenschaftler*in (Steinbring, 2015, S. 290).

Aus den vorangehenden Notizen bleibt zusammenfassend als Basis dieser Forschungsarbeit festzuhalten, dass sich die enaktivistische Perspektive bereits in der Entwicklung der mathematikdidaktischen Forschungslandschaft vielfach bewährt hat. Insbesondere in Bezug auf die Aspekte der besonderen Stellung der Beobachter*in [Observers] und der sinnlich-geleiteten Handlung sowohl von Lernenden als auch von Forschenden. Hierbei können verschiedene Beobachter*innen gerade in der Betrachtung von Lehr-Lernprozessen auf verschiedenen Ebenen – oder Welten wie Steinbring formuliert – vorkommen und von Beobach-

ter*innen – auch reflexiv – beobachtet werden. Zusätzlich zu Steinbrings Vorschlag drei Welten zu betrachten, ist es sinnvoll diese um die vierte Welt der „find –ing(s)“, der Interaktion der Forscher*innen mit Lehr-Lernprozessen, reflexiv für die Wissenschaftler*in oder die Gruppe seiner Wissenschaftscommunity zu erweitern.

4 Das Konzept „Subjektive Erfahrungsbereiche“

„Die für jeden SEB spezifischen Elemente – Sinnzuschreibungen, Sprache, Handlungsmöglichkeiten, verfügbare Routinen, Bedeutungen für das Ich usw. – erlauben es, Lernen (nicht nur im schulischen Kontext) als Erwerb neuer SEB zu beschreiben. Damit rücken auch Transfer-Probleme in ein anderes Licht, und gängige Begriffe wie Veranschaulichung im Mathematikunterricht oder Abstrahieren und Konkretisieren lassen sich anders interpretieren, nämlich als Beziehungs- und Verknüpfungsprobleme zwischen verschiedenen SEB'en.“

(Bauersfeld, 1983, S. VIII)

Neben der Rekonstruktion von spezifischen Auffassungen soll auch der Wechsel von Auffassungen in dieser Arbeit untersucht werden. Entsprechend scheint das im Eingangszitat dargestellte Konzept „subjektiver Erfahrungsbereiche“ (SEB) zur Beschreibung von Auffassungen passend zu sein, da auch bei Auffassungswechseln Transfer-Probleme vermutet werden können, ebenso wie Fragen der Veranschaulichung und Abstraktion, sofern es um spezielle Auffassungen geht, wie hier die empirisch-gegenständliche und formal-abstrakte Auffassung. Nach Bauersfeld handelt es sich bei den SEB'en um ein „Modell zum Verstehen von Lernprozessen“ (Bauersfeld, 1983, S. VIII). Hierbei nimmt Bauersfeld vornehmlich jüngere Schüler*innen zu Beginn ihrer Schulkarriere in den Blick, wie die zur Illustration von Bauersfeld verwendeten und auf Herbert Ginsburg zurückgehenden Fallgeschichten von George, Alexandria und Deborah (Bauersfeld, 1983, S. 3–10) belegen. Nichtsdestotrotz scheint das Modell auch auf Lernprozesse von Jugendlichen und Erwachsenen übertragbar⁵⁶ zu sein.

In der mathematikdidaktischen Literatur wird Bauersfelds Modell häufig antizipiert (vom Hofe, 1995; Witzke, 2009; Schlicht, 2016) und diskutiert. Vornehmlich wurde dabei eine Ausschärfung des Modells vorgenommen. Zum einen hinsichtlich kognitiver Komponenten der SEB, bspw. der Wissensdimension und damit auch der Bereichsspezifität von Wissen (Burscheid & Struve, 2010). Zum anderen in Bezug auf spezifisch soziale Elemente (Krummheuer, 1984; vom Hofe, 1995). Dies ist insofern verwunderlich, da Bauersfeld (1983, 2000) insbesondere die

⁵⁶ Insbesondere Untersuchung 5 (vgl. 10) zeigt, dass eine solche erweiterte Anwendung auf (junge) Erwachsene tragfähig ist.

Breite der Erfahrung betont und die daraus folgenden Auswirkungen einer sozialkonstruktivistischen Theorie des Lehrens und Lernens auf die mathematikdidaktische Forschung unter Beibehaltung dieser Grundintentionen und -verständnisse aktualisiert hat.

Auch mathematikdidaktische Arbeiten mit psychologischem Fokus, bspw. hinsichtlich Beliefs (Pehkonen, 1995), beziehen sich auf Bauersfelds Konzeption von SEB'en, betrachten aber auch dort vornehmlich einzelne Elemente.

Bauersfelds ursprüngliches Konzept, wie er es in seinen Arbeiten beschreibt (1983, 1985), geht dagegen von der Totalität der Erfahrung aus. Ein Problem eines solch ganzheitlichen Konzepts für die immer stärker geforderte und geförderte empirische⁵⁷ Mathematikdidaktik (Prediger, 2015, S. 653) bleibt dann eine geeignete Forschungsmethodik zu finden, die diesem Konzept gerecht wird. Diese Frage wird im Rahmen der Untersuchungen (vgl. Untersuchungen) mit spezifischem Fokus auf den Untersuchungsgegenstand und in diesem Kapitel in Abschnitt 4.3.2. diskutiert, sodass im Folgenden der Fokus auf der Darstellung des Modells der SEB liegen kann.

Auf Basis seiner Literaturrecherche baut Bauersfeld sein Konzept der SEB folgendermaßen auf, wobei er sich von rein kognitionspsychologischen Konzeptionen (bspw. den Mikrowelten von Lawler, 1981) folgendermaßen abgrenzt:

„Im Blick auf die zu verdeutlichenden Unterschiede spreche ich nicht von ‚Mikrowelten‘, sondern kehre zu der älteren und m.E. treffenderen Bezeichnung ‚*subjektiver Erfahrungsbereiche*‘ [Herv. im Original] zurück. Die Bezeichnung enthält den Hinweis auf das ‚Subjekt‘ als Träger. Sie thematisiert, daß [sic!] es um ‚Erfahrung‘ geht und nicht nur um Wissen, denn auch der mathematische Habitus (vgl. Bauersfeld, 1982) z.B. ist eingeschlossen ebenso wie die nicht-kognitiven Dimensionen der Motorik, ‚procedural knowledge‘ (vgl. Anderson, 1980), Emotionen, Wertungen, ‚Ich-Identität‘ (Krappmann, 1971) usw.

⁵⁷ Hier im Sinne empirischer Forschung und nicht im Sinne empirisch-gegenständlicher Auffassung gemeint.

Und schließlich ist der ‚Bereich‘ weniger universal als eine Welt. Gerade die Begrenztheit und Besonderheit trennen die Subjektiven Erfahrungsbereiche (im weiteren SEB) voneinander.“

(Bauersfeld, 1983, S. 28)

Folgt man dieser Deskription von SEB'en ergeben sich folgende Eigenschaften der SEB:

- SEB sind am/im Subjekt verortet
- SEB sind voneinander getrennt
- SEB sind bestimmt durch totale Erfahrung bzgl. einer Situation⁵⁸
- SEB sind nicht universal, bzw. umgekehrt: SEB sind bereichsspezifisch oder situationsabhängig

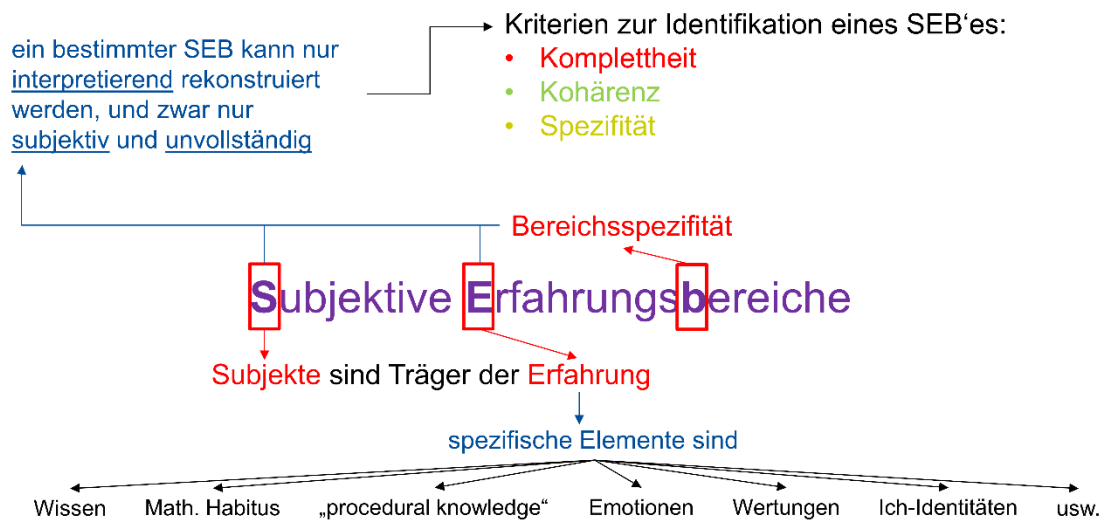


Abbildung 3: Spezifische Elemente und Kriterien zur Bestimmung subjektiver Erfahrungsbereiche.

In den folgenden Unterkapiteln 4.1–4.4 werden diese Eigenschaften (vgl. Abbildung 3) mit besonderem Bezug auf Bauersfelds Arbeiten (1983, 1985) erläutert. Dabei steht eine möglichst klare und konsequente Verwendung der von Bauersfeld vorgeschlagenen Begriffe und Konzepte im Vordergrund. Zusätzlich werden (Un-)Abhängigkeiten von SEB'en innerhalb der „society of mind“ und des-

⁵⁸ Dies wird klar durch die für Ergänzung offengelassenen genannten spezifischen Elemente wie „Wissen, [...], math. Habitus, [...], „Ich-Identität“ (Krappmann, 1971) usw. [Herv. G.S.]“ (Bauersfeld, 1983, S. 28; auch 4.1)

sen Auswirkungen auf Interaktionen, wie den dadurch erzeugten Erfahrungsbereichen, dargestellt. Hierbei steht u.a. Bauersfelds Einschätzung der Komplementarität zwischen dem SEB-Modell und Rahmenmodell im Wechselspiel individueller Lernprozesse und interaktionistischer Kommunikationsprozessen auf dem Prüfstand (Bauersfeld, 1983, S. 40). Zum Abschluss wird das Konzept und die zugehörigen Begriffe zur Illustration an Ginsburgs bereits aus dem vorangehenden Kapitel bekannten Fallbeispiel „Deborah“ (vgl. 3.2.2) angewendet.

4.1 Spezifische Elemente subjektiver Erfahrungsbereiche

Die *subjektive (totale) Erfahrung* ist prinzipiell in getrennte (vgl. 4.2.1) *subjektive Erfahrungsbereiche* gegliedert (Bauersfeld, 1983, S. VIII; Bauersfeld, 1985, S. 11). Die *Träger* subjektiver Erfahrung, und damit auch der subjektiven Erfahrungsbereiche, sind *Individuen* (Bauersfeld, 1983, S. 2, 28). Mit der *Totalität eines SEB'es* meint Bauersfeld, dass dieser „stets die Gesamtheit des als subjektiv wichtig Erfahrenen und Verarbeiteten“ (Bauersfeld, 1983, S. 2, 12; Bauersfeld, 1985, S. 11) umfasst. Zu dieser Gesamtheit gehören verschiedene *spezifische Elemente subjektiver Erfahrungsbereiche*, welche laut Bauersfeld bspw. *Wissen, Gefühle, Körpererfahrung, Motorik, „procedural knowledge“, Sinnzuschreibungen, Sprache, Handlungsmöglichkeiten, verfügbare Routinen, Bedeutungen für das Ich, Wertungen, Logik, Kontext, Ich-Identität usw.* sind (Bauersfeld, 1983, S. 2.; Bauersfeld, 1985, S. 17). Auffallend ist bei dieser Auflistung, dass Bauersfeld an verschiedenen Stellen seiner Arbeiten diese Liste der spezifischen Elemente offenhält, das heißt explizit jede Auflistung mit „usw.“ (nicht) beendet (Bauersfeld, 1983, S. 2; Bauersfeld, 1985, S. 17). Die Elemente der SEB werden *spezifische Elemente* genannt, da sie *bereichsspezifisch* sind und entsprechend zu einem spezifischen SEB gehören (Bauersfeld, 1983, S. 2, 6, 10, 28). Dabei betont Bauersfeld explizit, dass es sich bei den spezifischen Elementen nicht ausschließlich um Wissen, also kognitive Elemente, handelt (Bauersfeld, 1983, S. 38). Selbst wenn eine Beobachter*in mit *übergeordneten subjektiven Erfahrungsbereich* (vgl. 4.2.3) Ähnlichkeiten in Aufgabenstellungen oder „Kontexten“ wahrnimmt, können diese für Individuen mit einem nicht ähnlich übergeordneten SEB voneinander isoliert sein und verschiedene Bedeutung haben (Bauersfeld, 1983, S. 6), da die jeweils zum Verständnis der Situation herangezogenen (vgl. 4) SEB für das Individuum grundverschiedene spezifische Elemente enthalten (Bauersfeld, 1983, S. 6, 8). Analog zu Lawlers „Prozeduren“ in Mikrowelten (Lawler, 1981, S. 4–8) nutzt auch Bauersfeld die Begriffe *Perspektiven* und *Funktionen* um spezifische Elemente von SEB'en, insbesondere in Bezug auf

Wissenselemente, näher zu beschreiben (Bauersfeld, 1983, S. 17, 34). Hierbei sind Perspektiven⁵⁹ eines SEB'es explizite Indikationen von Entitäten oder konstruierten Begriffen. Funktionen eines SEB'es legen fest, was mit den durch Perspektiven explizit beschriebenen Entitäten oder konstruierten Begriffen gemacht werden kann (Bauersfeld, 1983, S. 17, 30). Die Bereichsspezifität der Prozeduren expliziert Bauersfeld an einem Beispiel in dem Miriam⁶⁰, die Tochter Lawlers – der Fall seiner „Intimate Studie“ – bei der schriftlichen Addition „auf 9 kürzt“ (Bauersfeld, 1983, S. 20, 30):

$$\begin{array}{r} |3|8| \\ + |3|4| \\ \hline |9|9| \end{array}$$

Hier treten nicht nur Zahlwörter als Miriams Perspektiven ihrer „Papiersummen-Welt“ auf, die Bauersfeld als SEB aufzufassen scheint, sondern auch Zerlegungsverfahren als Funktionen, die an spezifische SEB gebunden sind. Entsprechend sind auch „Konstruktionsprinzipien“ (ebd.), bspw. zur Bildung von Zahlwörtern, in SEB'en verortet. Allerdings sind letztere im Gegensatz zu den vorgeannten gegebenenfalls vorbewusst. Die *Vorbewusstheit* solcher Konstruktionsprinzipien versteht Bauersfeld so, dass sie zwar das Handeln regeln, man sich aber „nicht zu ihnen verhalten“ (Bauersfeld, 1983, S. 30, 40) kann und entsprechend „der Handelnde [diese] nicht selbst beschreiben kann“ (Bauersfeld, 1983, S. 30; Bauersfeld, 1985, S. 13–14). In neuen SEB'en (vgl. 4.2.3) können diese Konstruktionsprinzipien dann aber als Perspektiven oder Funktionen auftreten. Die Begriffe Perspektive und Funktion nutzt Bauersfeld zudem um die Überlegungen zur Bereichsspezifität durch ein Zitat von Lawler zur *inneren Logik* von Mikrowelten (Bauersfeld, 1983, S. 20, 35) zu unterstreichen, die ähnlich auch für SEB gültig sind (Bauersfeld, 1983, S. 40, 44, 50).

⁵⁹ In Fußnote 17 wertet Bauersfeld (1983, S. 56) Lawlers Wahl des Begriffs Perspektive als „glücklich“, da die Konnotation die Denotation des Begriffs unterstützt. Entsprechend bemerkt Bauersfeld „Die Perspektive besteht aus Repräsentationen der Elemente eines bestimmten SEB's (Denotation) und bezeichnet zugleich eine bestimmte Sichtorientierung oder eine Sichtweise, wie Realität dem Subjekt erscheint (Konnotation)“ (Bauersfeld, 1983, S. 56).

⁶⁰ Viele Falldaten hat Lawler auf seiner Webseite <http://nlcsa.net/> zur freien Einsicht zur Verfügung gestellt. Sodass man Miriam und ihre Art zu rechnen auf verschiedenen Video- und Textvignetten verfolgen kann.

„‘Right’ or ‘wrong’ is a judgement applicable to a calculation only in the terms of the microworld wherein it is going forward.”

(Lawler, 1981, S. 15)

Wobei Bauersfeld die Phrase “in the terms of the microworld where in it is going forward“ übersetzt mit, „das nur mit den Mitteln derjenigen Mikrowelt vollzogen werden kann, in der die Prozedur stattfindet“ (Bauersfeld, 1983, S. 20).

Mithilfe der angegebenen bereichsspezifischen Elemente erzeugen die Träger von SEB'en „ihre *subjektive Wirklichkeit* (Herv. G.S.)“ (Bauersfeld, 1983, S. 36), damit bezeichnet Bauersfeld die „subjektive Interpretation der gegebenen objektiven Wirklichkeit⁶¹ durch ihren jeweils aktivierten SEB“ (Bauersfeld, 1983, S. 36, 39, Bauersfeld, 1985, S. 14). Diese subjektive Wirklichkeit wirkt *unmittelbar* handlungsleitend (Bauersfeld, 1983, S. 36, 52). Entsprechend verortet Bauersfeld den für den Lernenden immer subjektiven *Kontext* (Bauersfeld, 1983, S. 36, 40, 53; 1985, S. 13) nicht in „irgendwelchen Lernarrangements“ (Bauersfeld, 1983, S. 36), sondern im aktuell aktivierten SEB der Lernenden. Aufgrund der Totalität der SEB sind die *Identitätserfahrungen* des Trägers „aus den zugehörigen Situationen innig und untrennbar in den Kontext eingewoben“ (Bauersfeld, 1983, S. 42). Dies betrifft auch die Ich-Identität des Trägers, die aufgrund der Totalität der SEB ebenfalls ein spezifisches Element von diesem SEB und entsprechend Teil des Kontexts ist (Bauersfeld, 1983, S. 42). Dabei äußert sich die Ich-Identität durch Präferenz verschiedener Prozeduren, die von der häufigen Aktivierung von SEB'en, die diese Prozeduren enthalten, bedingt ist (Bauersfeld, 1983, S.42, 43). Bauersfeld nutzt zur Einordnung der in SEB'en wirksam werdenden Ich-Identität die „psychosozialen Krisen“ von Erikson (1992, S. 36, 37) im Sinne seiner psychoanalytischen Theorie psychosozialer Entwicklung. Die Analyse eines Fallbeispiels von Lawler zeigt in Miriams Ausbruch nach einer fehlerhaft durchgeführten Rechnung, obwohl in einem vorhergehenden – vermutlich auch aus Miriams

⁶¹ Dass es so eine „objektive Wirklichkeit“ für Bauersfeld gibt, mit der Individuen umgehen können und mit der sie aktiv (inter-)agieren, scheint aufgrund dieses Zitates und anderer Textstellen, bspw. wenn Bauersfeld (1983, S. 37) von Theorien-bezogener Beobachtung spricht, eine plausible Deutung zu sein. Ob diese „objektive Wirklichkeit“ allerdings in ihrer Objektivität wahrgenommen werden kann, scheint fraglich (vgl. 3.4)

Perspektive – ähnlichen Kontext bereits ein zur korrekten Lösungsfindung passender SEB aktiviert wurde, die psychosoziale Krise zwischen „Werksinn⁶² vs. Minderwertigkeit“ (Erikson, 1992, S. 36–37; Bauersfeld, 1983, S. 42). Genau solche Identitätserfahrungen innerhalb der aktivierten SEB aus psychosozialen Krisen bedingen das (In-)Kompetenz-Erleben der Träger. Entsprechend Eriksons Verweises auf epigenetische Entwicklungsprozesse⁶³ sowohl in organischer, psychosexueller wie auch psychosozialer Hinsicht ist das Umgehen mit diesen Krisen ein permanenter Einflussfaktor der Identität von Individuen.

4.2 Subjektive Erfahrungsbereiche in der „society of mind“

Die *Speicherung* der subjektiven Erfahrungsbereiche beim Träger erfolgt *nicht-hierarchisch*, sondern *kumulativ* (Bauersfeld, 1983, S. 2, 48). Dabei besitzen SEB einen *Prozeßcharakter*, und entsprechend eine „*je eigene Wandlungsgeschichte ihrer Zustände vom Entstehen bis zum möglichen Verfall (Vergessenwerden [sic!])*“ (Bauersfeld, 1983, S. 2; Bauersfeld, 1985, S. 11). Die SEB bilden ein „selbstreferentielles System“ (Luhmann, 1982, nach Bauersfeld, 1983, S. 2) im Sinne einer „society of mind“ (Minsky, 1980, nach Bauersfeld, 1983, S. 2) in der *übergeordnete*⁶⁴ SEB auf Basis vorangehender SEB emergieren (vgl. 4.2.3, 4.3.1). Sowohl bei der Aktivierung (vgl. 4.2.2) als auch bei der Konstruktion (vgl. 4.2.3) von SEB'en ist „der bevorzugte Weg, dem ein Individuum folgt, welcher es auch sei, [der] den Aufwand des Verstehens wert ist.“ (Lawler, 1981, S. 29, zit. nach Bauersfeld, 1983, S. 27)

⁶² Bauersfeld (1983, S. 42) gibt genau die hier gewählten Bezeichnungen an. In der Ausgabe von Erikson (1992, S. 36) findet sich die Bezeichnung Regsamkeit. Hier erscheint mir die Übersetzung von Klüwer nicht geeignet, die englische Bezeichnung lautet nämlich „industry“.

⁶³ Im Rahmen dieser Arbeit ist es nicht möglich (und auch nicht sinnvoll) einen vollumfänglichen Überblick über Eriksons Theorie zu geben. Allerdings spielt die (In-)Kompetenz-Erfahrung gerade beim Übergang von der Schule zur Hochschule eine wichtige Rolle, was sich in Untersuchung 5 (vgl. 10) zeigt.

⁶⁴ An dieser Stelle verwende ich wie Schlicht (2016, S. 62) den Begriff der übergeordneten SEB. Eine andere Möglichkeit wäre von „Nachfahren“ von SEB'en im zeitlichen Sinne zu sprechen, wie auch Bauersfeld (1983, S. 32) von „Vorfahren“ eines SEB'es spricht. Der Begriff der übergeordneten SEB'e scheint mir aber aus zwei Gründen passender zu sein. Zum einen spricht Bauersfeld selbst von der Entwicklung „übergeordnete[r] und allgemeinere[r] Konzepte“ (Bauersfeld, 1985, S. 13), die dann in einem entsprechend weiteren SEB abgespeichert werden. Zum anderen hilft dieser Begriff die von Bauersfeld (1983, S. 32) beschriebene „Verknüpfung“ als Relation zwischen SEB'en in der „society of mind“ theoretisch im Modell zu verorten, was die Integration spezifischer Elemente der „Vorfahren“ und ggf. zugehöriger Vergleiche in spezifische Elemente des übergeordneten SEB'es meint.

4.2.1 Distinktion subjektiver Erfahrungsbereiche

Innerhalb der „society of mind“ liegen die SEB aufgrund der Bereichsspezifität und der konkurrierenden Aktivierung (vgl. 4.2.2) von SEB'en, getrennt vor und sind also nicht verbunden (Bauersfeld, 1983, S. 12, 16, 28; 1985, S. 11f.). Passend dazu zitiert Bauersfeld Minsky:

„Each part of the mind sees only a little of what happens in some others, ... most knowledge stays more or less where it was formed, and does its work there.“

(Minsky, 1980, S. 130; zit. nach Bauersfeld, 1983, S. 12)

Trotz der Bereichsspezifität und der Konkurrenz bei der Aktivierung von SEB'en kann aufgrund der Wandlungs- bzw. Entstehungsgeschichte eine Hierarchie „bei Bedarf“ (Bauersfeld, 1983, S. 26, 33) nämlich als Perspektive in übergeordneten SEB'en ausgebildet sein. Dies wird auch an dem spezifischen Element Sprache deutlich in dem „jeder SEB [...], zusammen mit seinen ‚Vorfahren‘, einen abgeschlossenen Kontext“ (Bauersfeld, 1983, S. 32) darstellt, indem das „Netz seiner [spezifischen] Begriffe nicht aus dem Verbund“ (Bauersfeld, 1983, S. 32) hinausreicht. Mit Verbund scheint an dieser Stelle nicht die gesamte „society of mind“, sondern der übergeordnete SEB und seine Nachfolger gemeint zu sein. Dies wird an der Feststellung deutlich, in der Bauersfeld klarstellt, dass „das gleiche Wort in unverbunden SEB'en in spezifisch verschiedenen Beziehungsnetzen benutzt wird und daher vom Sprecher nicht als ‚dasselbe‘ Wort wahrgenommen wird“ (Bauersfeld, 1983, S. 32). „Nicht als dasselbe wahrgenommen zu werden“ meint hier mit einer SEB-übergreifenden Bedeutung (Bauersfeld, 1983, S. 32; Bauersfeld, 1985, S. 12). Entsprechend gilt Bauersfeld (1985, S. 17) vierte These in diesem Modell:

„Es gibt keine allgemeinen Begriffe, Strategien oder Prozeduren. Man (das Subjekt) kann sie allgemein denken, aber sie sind nicht allgemein verfügbar, d.h. nicht bereichsunabhängig aktivierbar.“

(Bauersfeld, 1985, S. 17)

4.2.2 Aktivierung von subjektiven Erfahrungsbereichen

SEB werden „*konkurrierend aktiviert*“, das heißt wird ein SEB aktiviert werden die übrigen SEB nicht aktiviert (Bauersfeld, 1983, S. 2, 40, 50; 1985, S. 15). Die Aktivierung hängt von der Darstellung einer Aufgabe oder ihrer Präsentation innerhalb einer bestimmten Lernumgebung ab (Bauersfeld, 1983, S. 32). Das Prinzip

der konkurrierenden Aktivierung übernimmt Bauersfeld von Lawlers Konzeption der „Mikrowelten“ (Bauersfeld, 1983, S. 17–18). Zur Begründung wiederholt Bauersfeld Lawlers Gründe für eine „indirekte ‚Kontrolle durch Konkurrenz‘“ (Bauersfeld, 1983, S. 18), die zum einen in den „parallel funktionierenden“ (Bauersfeld, 1983, S. 18) Mikrowelten und der daraus entwickelten „strukturellen Vielgestaltigkeit (diversity)“ (Bauersfeld, 1983, S. 18) und zum anderen in der sich durch diese indirekte Kontrolle ergebende Erklärung des „Phänomens eines ‚problem-solver‘-Homunkulus“ (Bauersfeld, 1983, S. 18), welcher (un-)passende SEB aktiviert, liegt. Der aktivierte SEB bestimmt die *subjektive Wirklichkeit* der gegebenen aktuellen Situation und bestimmt so den Kontext der subjektiven Erfahrung (Bauersfeld, 1983, S. 2). SEB sind „umso wirksamer, je häufiger sie wiederaktiviert bzw. je intensiver sie gebildet worden sind.“ (Bauersfeld, 1985, S. 12), wobei mit dem Begriff der Wirksamkeit vermutlich die größere Wahrscheinlichkeit der Aktivierung gemeint ist (Bauersfeld, 1985, S. 11). Mit der *Intensität der Bildung von SEB'en* meint Bauersfeld vermutlich die Verknüpfung von SEB'en mit starken Emotionen und entsprechenden Identitätserfahrungen (Bauersfeld, 1983, S. 44). Dagegen können SEB auch in Vergessenheit geraten, durch eine seltenere Aktivierung (Bauersfeld, 1985, S. 12, 15). Dieses Phänomen nennt Bauersfeld u.a. „Verfall“ (Bauersfeld, 1983, S. 30) oder „Verblässen“ (Bauersfeld, 1985, S. 15). Von einer rein automatisch-mechanischen Deutung des beschriebenen Aktivierungsprozess grenzt sich Bauersfeld klar ab, indem er die „Selbstständigkeit und Verantwortlichkeit des handelnden Subjektes“ (Bauersfeld, 1983, S. 28) hervorhebt, „dem das Abbrechen oder konstruktive Verändern einer Situation prinzipiell immer möglich ist und spontan neue Bereiche eröffnen kann“ (Bauersfeld, 1983, S. 28–29) (vgl. 4.2.3). Zudem ist bei der Aktivierung eines SEB'es in einer Situation eine situationsspezifische „*aktive und konstruktive Ausformung*“ (Bauersfeld, 1983, S. 50) des SEB'es nötig.

4.2.3 Konstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche

Das Phänomen „Lernen“ kann im SEB-Modell als „Erwerb neuer SEB“ (Bauersfeld, 1983, S. 2) beschrieben werden. Die Konstruktion neuer SEB erfordert die „*spontane aktive Sinnkonstruktion aus zuhandenen Elementen* [Herv. im Original]“ (Bauersfeld, 1983, S. 29; Bauersfeld, 1985, S. 14, 15), bei der starke Emotionen auftreten können (Bauersfeld, 1983, S. 21). Aktiv sind die Sinnkonstruktionen

insofern, dass der Träger der SEB diese eigenständig konstruieren muss. Die Fähigkeit zur „eigenständigen Konstruktion“⁶⁵ ist eine Bedingung der Möglichkeit des Lernens im SEB Modell. Ohne diese könnte keine Konstruktion neuer SEB stattfinden (Bauersfeld, 1983, S. 31). Die Bestimmung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden spezifischer Elemente sowie das „In-Beziehung setzen“ von SEB'en (Bauersfeld, 1983, S. 7) kann vom Träger dieser SEB nur in einem weiteren SEB geleistet werden (Bauersfeld, 1983, S. 7). Auf diese Weise können dann auch vorbewusste „Konstruktionsprinzipien“ (vgl. 4.2.3) eines oder mehrerer SEB'es/SEB'e zu spezifischen Elementen, also auch entsprechender Perspektiven und Funktionen, in einem neu konstruierten SEB werden (Bauersfeld, 1983, S. 18, 20, 34, 50). Bauersfeld spricht in diesem Fall auch von der „Verbindung“ von SEB'en, was so viel bedeutet wie es liegt ein (neuer) SEB („Nachfahre“, Bauersfeld, 1983, S. 18) vor, der bei Aktivierung auf die spezifischen Elemente und damit auch die – je SEB ausgeprägten – Perspektiven und Funktionen enthält, so dass der Träger die Möglichkeit hat beide anzuwenden, Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen ihnen festzustellen und ggf. diese zu reflektieren (Bauersfeld, 1983, S. 19, 21, 35, 38). Entsprechend verwendet er folgende Sprechweisen, dass

„zwei Mikrowelten, die bisher stets *konkurrierend* [Herv. im Original] aktiviert wurden, plötzlich in eine *kooperative* [Herv. im Original] Beziehung treten. Die strenge Trennung, die *Nicht-Relation* [Herv. G.S.], wird in eine *Relation*⁶⁶ [Herv. G.S.] verwandelt.“

(Bauersfeld, 1983, S. 21)

Oder auch:

„[Es] werden die Perspektiven von drei Mikrowelten aufeinander bezogen, eine *strukturelle Äquivalenz* [Herv. im Original] wird entdeckt.“

(Bauersfeld, 1983, S. 23)

⁶⁵ Eine Deutung solcher Prozesse aus enaktivistischer Perspektive ist durch den Prozess der Autopoiesis autopoietischer Einheiten (Unity, vgl. 3.1) möglich. Eine weitere Interpretation mit Bezug auf „spezifische Gedächtniseinträge“ und ihre Diskussion zur Ermöglichung von Lernen findet sich in Mausfeld (2005). Aktive Sinnkonstruktionen können beim mathematischen Lernen aus dem Sonderfall des „metonymischen Fortsetzens“ (vgl. 4.2.4) entstehen.

⁶⁶ Relationen von SEB'en spielen in der in dieser Arbeit vorgenommenen Darstellung von Auffassungen eine fundamentale Rolle (vgl. 5). Natürlich ist damit dann eine andere Relation gemeint, die nicht zwingend zu einem neuen SEB wird.

Wenn ein neuer SEB konstruiert wurde, bedeutet dies nicht, dass dieser bereits „voll ausgebaut“ ist. Unter dem vollen Ausbau eines SEB'es scheint Bauersfeld eine korrekte Reaktivierung in ähnlichen Situationen zu verstehen, sodass auch bereits gebildete SEB'e (schnell) wieder verfallen können (Bauersfeld, 1985, S. 15).

Damit unterscheidet sich dieses Konzept der Neukonstruktion von SEB'en von Lawlers Konzeption von Mikrowelten, die er in *Instrumentale Welten*, *Serien Welten* und *konforme Welten* differenziert (Lawler, 1981, S. 19–26). Hierbei fasst Lawler Serien und Konforme Welten so auf, dass sie relational vorangehende Mikrowelten verbinden oder vergleichen. Somit besitzen diese Mikrowelten einen anderen Status als instrumentale Welten, nämlich den Status von Eigenschaften von (mehreren) instrumentalen Welten⁶⁷ (Lawler, 1981, S. 28). Für die folgende Darstellung von Auffassungswechseln und dem speziellen Fall einer Auffassungserweiterung ist aus theoretischer Perspektive eine solche Deutung übergeordneter (subjektiver) Erfahrungsbereiche mit einem anderen Status als Eigenschaft von zu verbindenden SEB nicht fruchtbar, da somit mehrere SEB gleichzeitig oder zumindest im schnellen Wechsel aktiviert werden müssten. Dies widerspricht der theoretischen Annahme, dass die *subjektive (totale) Erfahrung* prinzipiell in getrennte *subjektive Erfahrungsbereiche* gegliedert ist (vgl. 4.1).

4.2.4 Mathematikspezifischer „Sonderfall“ für die Konstruktion neuer SEB:

Das metonymische Fortsetzen

Bei der Konstruktion neuer SEB, also der aktiven Sinnkonstruktion, verweist Bauersfeld explizit auf den Sonderfall des *metonymischen Fortsetzens*. Darunter versteht er die „Fortsetzung geläufiger [mathematischer] Konstruktionsprinzipien in neue Gebiete hinein“ (Bauersfeld, 1983, S. 31). Durch diese Tätigkeit werden neue SEB gebildet, die wiederum aktiviert werden können. Insgesamt ergibt sich also eine höhere Aktivierungsmöglichkeit der Konstruktionsprinzipien (Bauersfeld, 1983, S. 31; 1985, S. 17), sofern die neu gebildeten SEB'e nicht in

⁶⁷ Eine entsprechende Deutung des Verständnisses von Lawlers Auffassung in Bezug auf seine Theorie von Mikrowelten stellen auch Burscheid und Struve (2018, S. 100–101) dar. Sie legen im entsprechenden Kapitel „Didaktisch relevante Theorien – Zahlaspekte und Mikrowelten“ eine rationale Rekonstruktion der Lawlerschen Konzeption von Mikrowelten vor. Hierbei fassen Burscheid und Struve das Ziel dieser Rekonstruktion folgendermaßen: „Indem wir die Begriffe der Serien – [sic!] Welt und der Konformen Welt durch Relationen zwischen Instrumentalen Welten ersetzen, gelingt es, die Lawlersche Idee so zu rekonstruieren, daß [sic!] an die Stelle von Vagheiten in der Formulierung von Serien – [sic!] Welt und Konformer Welt präzise Interpretationen treten, und das Konzept auch auf andere Beispiele übertragbar wird“ (Burscheid & Struve, 2018, S. 90).

Vergessenheit geraten. Zur Verdeutlichung dieses Prinzips zitiert Bauersfeld Felix Klein wie folgt:

„wenn er von dem ‚großen Anteil an der Entwicklung der Wissenschaft‘ (Mathematik) spricht, den ‚das algorithmische Verfahren als eine gewissermaßen *selbstständig vorwärtstreibende, den Formeln innewohnende Kraft* [Herv. im Original] unabhängig von der Absicht und Einsicht der jeweiligen Mathematiker und oft sogar ihm entgegen‘ gehabt hat.“

(Klein, 1933, S. 85, zit. nach Bauersfeld, 1983, S. 31)

Wenig überraschend teilt Bauersfeld Kleins Einsicht bzgl. der Unabhängigkeit der „den Formeln innewohnenden Kraft“ entsprechend des Modells der SEB'e nicht, denn die Konstruktionsprinzipien sind immer unter Berücksichtigung „spezifische[r] Bedeutungsverschiebungen“ an SEB'e gebunden. Eine „Generalisierung“ findet, laut Bauersfeld nur insofern statt, als es das „relative Explizit machen der Regel“ selbst meint, was erneut eine aktive Sinnkonstruktion und damit die Emergenz eines neuen SEB'es erfordert (Bauersfeld, 1983, S. 31). Wie Auffassungen und mathematisches Wissen generiert werden können, wird mit Rückblick auf diese Diskussion in Abschnitt 5.2 diskutiert.

4.3 (Subjektive) Erfahrungsbereiche im Rahmen von Interaktionen

Bauersfeld erkennt die Gefahr, dass das „SEB-Modell [...] in der Gefahr der Überschätzung strukturell-gegenständlicher Vorgaben [...] und die gedächtnistheoretische Grundlage [...] die Dominanz einer individualistischen Perspektive nahe“ (Bauersfeld, 1983, S. 40) legt. Entsprechend stellt Bauersfeld das Konzept der „Rahmen“ (Krummheuer, 1984, 1997) als komplementär zum SEB-Begriff vor. Meiner Ansicht nach ist dieses Vorgehen eine nicht notwendige Einschränkung des SEB-Begriffs im entsprechenden Modell, oder anders formuliert, halte ich die entsprechende Gefahr bei einem umfassenden Verständnis des SEB-Modells für nicht so hoch wie Bauersfeld dies selbst einschätzt.

Bevor es um den konkreten Zusammenhang zwischen SEB-Modell und Interaktionen zwischen Trägern subjektiver Erfahrungsbereiche geht, soll hier umrissen werden, wie Bauersfeld das Verhältnis der Konzeption von „Rahmen“ und „SEB'en“ darstellt.

Wie bereits in Kapitel 3 erwähnt (Reid, 2014, S. 139f.), hat Bauersfeld im Rahmen seiner interaktionistischen Perspektive auf mathematisches Lernen und Lehren immer neben einer kognitions-psychologischen Sichtweise, die die Entwicklung einzelner Individuen betrifft, auch soziologische Sichtweisen angewendet, die das Individuum innerhalb einer „soziale[n] Wirklichkeit“ (Bauersfeld, 1983, S. 38) verortet. Laut Bauersfeld reicht die in 4.1 dargestellte Erweiterung der SEB um nicht-kognitive Elemente nicht aus, um eine entsprechende soziologische Sichtweise mit diesem Konzept einzunehmen, „weil es in der Konzentration auf das *Individuum* die *soziale* Wirklichkeit der Institution vernachlässigt und damit die intensive Eingebundenheit aller individuellen Tätigkeiten in soziale Interaktionen und deren Funktion ignoriert“ (Bauersfeld, 1983, S. 38). Dagegen können laut Bauersfeld „geteilt geltende ‚Interpretationsschemata‘ für die ‚Definition einer Situation‘ (Goffman, 1981, S. 19), also ‚[...] interaktive Organisationsprinzipien von Wahrnehmen und Handeln‘“, mithilfe des Rahmen-Modells nach Krummheuer (1984, 1997) besser als mit dem SEB-Modell beschrieben werden.

Auch wenn ich, wie Bauersfeld als Mitglied der Arbeitsgruppe des IDM in Bielefeld, der Meinung bin, „daß [sic!] die Verfolgung alternativer Theorieansätze für die Diskussion innerhalb der Forschung sowie mit interessierten Lehrern gleichermaßen förderlich sein kann“ (Bauersfeld, 1983, S. 41), soll im Folgenden gezeigt werden, wie, insbesondere unter einer enaktivistischen Perspektive, das SEB-Modell so verstanden werden kann, dass damit auch Interaktionen gut beschreibbar sind.

4.3.1 Konstruktion von Erfahrungsbereichen durch Interaktionen zwischen Trägern subjektiver Erfahrungsbereiche

In Abschnitt 4.2.3 wurde die Konstruktion von neuen SEB'en innerhalb der „society of mind“ eines Individuums erläutert. Wie Bauersfeld anmerkt, reicht eine solche „individualistische Perspektive“ nicht um das Lehren und Lernen, insbesondere im Kontext des Schulunterrichts zu erklären. Bauersfeld begründet die Notwendigkeit für die Überschreitung einer solchen Perspektive durch Forschungsergebnisse „der Soziologie und Soziolinguistik unter vorwiegend ethnomethodologischen Ansätzen in der Interaktionsforschung und in Diskursanalysen“ (Bauersfeld, 1983, S. 39). Diese Notwendigkeit kann aber ebenso durch einschlägige mathematikdidaktische Forschungsarbeiten, wie Arbeiten zu Interaktionsmustern (Bauersfeld, 1978), Rahmungsprozessen (Krummheuer, 1984), so-

zial konstruktiver Bedeutungsentwicklung (Steinbring, 2000) sowie neueren Ansätzen, bspw. mathematikdidaktischer Inklusionsforschung (Häsel-Weide, 2017), aufgezeigt werden.

Solche individualistischen Perspektiven können im Rahmen des SEB-Modells überwunden werden. Nutzt man das Konzept der strukturellen Kopplung (vgl. Abschnitt 3.1.3) – bzw. der sozialen Kopplung (vgl. Abschnitt 3.1.7) – im enaktivistischen Sinne zwischen Individuen, so interagieren sie und sind wechselseitig Auslöser ihrer strukturellen Veränderungen. Die Struktur, die hier geändert wird ist die „society of mind“, und zwar in dem Sinne, dass durch die Interaktionen subjektive Erfahrungsbereiche gewechselt oder neu erzeugt werden. Dies heißt allerdings nicht, dass immer ein Wechsel oder eine Konstruktion von SEB'en bei der Interaktion zweier Individuen erfolgen muss, selbst dann nicht, wenn ein Interaktionspartner eine solche Veränderung intendiert (vgl. 4.5). Die Veränderung der „society of mind“ hängt von ihrer Struktur ab, sie ist also strukturell determiniert. Insbesondere hängt die strukturelle Veränderung der „society of mind“ vom momentan aktivierten SEB eines Individuums ab, bzw. davon ob eine „spontane Sinnkonstruktion“ stattfindet und bspw. ein übergeordneter SEB erzeugt wird. Entsprechend der Terminologie struktureller Determination (vgl. Abschnitt 3.1.5) liegt die Aktivierung eines SEB'es im Bereich der Veränderung der „society of mind“, wogegen eine getriggerte Konstruktion eines SEB'es im Bereich der zerstörenden Veränderung der „society of mind“ liegt. Hierbei muss zerstörend nicht negativ aufgefasst werden, da die „society of mind“ auch in dem Sinne zerstört werden kann, dass sie sich weiterentwickelt und somit einen weiteren Phänomenbereich oder zumindest weitere Deutungsmöglichkeiten des Individuums eröffnet.

Das beobachtete Verhalten eines Individuums in dessen Umwelt im Rahmen einer Interaktion mit einem weiteren Individuum ändert die Struktur des Individuums, die Struktur seiner Umwelt oder auch die Struktur der Individuen, mit denen es interagiert. Die Ursache des gezeigten Verhaltens wird durch den Beobachter, der natürlich auch das triggernde bzw. getriggerte Individuum sein kann, in der spezifischen Struktur der „society of mind“ verortet. Kommt es dagegen nicht zu einem Wechsel der SEB oder zu einer Neukonstruktion von

SEB'en⁶⁸ bei den Interaktanten, so könnte ein wie eben beschriebener Beobachter davon ausgehen, dass die SEB der Interaktanten insoweit hinreichend ähnlich sind, dass die Interaktion reibungslos verläuft. Dies bedeutet nicht, dass die SEB auch tatsächlich übereinstimmen. Beispiele aus dem Alltag für solche „reibungslosen Deutungsdifferenzen“ sind die Ironie, wobei ein Interaktant eine ironische Bemerkung macht, ein anderer diese aber für eine ernste Äußerung erachten kann. Ein anderes Beispiel ist das bereits erwähnte Trichtermuster, bei dem die Lehrkraft fälschlicherweise davon ausgehen könnte, dass bei ihren Schüler*innen nach entsprechendem Nachfragen ein passender SEB aktiviert wird, der dem von der Lehrperson aktivierten SEB weitestgehend entspricht. Auch wenn solche Deutungsdifferenzen vorkommen, bedeutet dies nicht, dass die SEB der Interaktanten niemals hinreichend ähnlich sind, um eine Interaktion ohne Störung aufrecht zu erhalten. Entsprechend führt Bauersfeld das Konzept der „*Erfahrungsbereiche*“ ein:

„Bei aller Verschiedenheit der aus Fallstudien⁶⁹ und anderen Dokumenten rekonstruierbaren⁷⁰ *Subjektiven Erfahrungsbereiche* [Herv. im Original] (SEB) und ihrer biographisch bedingten individuellen Besonderheiten⁷¹ lassen sich viele Ähnlichkeiten und Übereinstimmungen zwischen ihnen wie überindividuelle, gesellschaftlich-historische Wirklichkeiten⁷² behandeln. Aus soziologischer Sicht *sind* [Herv. im Original] sie Kernstück der gesellschaftlichen Wirklichkeit⁷³. Die weitreichende Normierung unseres Alltags, unterstützt von dem Einfluß [sic!] der Medien (Reklame, „Sesam-Straße“ usw.) und die Gemeinsamkeit der kulturellen Tradition erzeugen die Identität der bestehenden Gesellschaft⁷⁴. Sie ist eine wichtige Voraussetzung für das Funktionieren von Schule und Unterricht in

⁶⁸ In Bauersfelds (1985, S. 14) 3. These konstatiert er, dass „[d]ie entscheidende Grundlage für die Bildung eines SEB [...] die Handlungen des Subjekts und der von ihm konstruierte Sinnzusammenhang, genauer: deren Ausformung in der sozialen Interaktion“ (S. 14) sind.

⁶⁹ vgl. Einleitung zu 4.

⁷⁰ vgl. 4.3.1.

⁷¹ vgl. Begriff der „Ontogenese“ in 3.1.3.

⁷² vgl. der Begriff des kulturellen Verhaltens in 3.1.7.

⁷³ Diese gesellschaftliche Wirklichkeit stellt eine Beobachter*in, im Rahmen der Ethnomethodologie, eine Ethnomethodolog*in dar (Weingarten, Sack, & Schenkein, 1979, S. 19–21). Entsprechend beobachtet diese eine Übereinstimmung. Diese Übereinstimmung hängt natürlich wieder von den SEB'en der Ethnomethodolog*in ab. Mehr zu dieser Problematik in 4.3.2.

⁷⁴ vgl. Fußnote 72

den vorhandenen Formen. Diese gesellschaftlich-historische Identität ermöglicht es dem Lehrer, von einer hinreichenden Übereinstimmung zwischen SEB'en auszugehen, die je auf denselben Ausschnitt der objektiven Welt oder der gesellschaftlichen Wirklichkeit⁷⁵ bezogen sind. Zur Unterscheidung von den SEB'en sollen die interindividuellen Kongruenzen der subjektiven Erfahrungen entsprechend als ‚*Erfahrungsbereiche*‘ [Herv. im Original] bezeichnet werden. Eine Vorurteile vermeidende Rekonstruktion derartiger *intersubjektiv geteilter* [Herv. im Original] Erfahrungsbereiche scheint mir nur über die vergleichende Analyse von SEB'en möglich zu sein⁷⁶.“

(Bauersfeld, 1983, S. 33)

Auf verschiedene Aspekte dieses Zitats gehen die angefügten Fußnoten ein, die entweder bestimmte Begrifflichkeiten näher erläutern oder auf entsprechende Stellen in dieser Arbeit verweisen, insbesondere auf enaktivistische Begriffe zur Einbettung.

Zwei wichtige, von Bauersfeld synonym verwendete, Begriffe sollen hier allerdings gesondert besprochen werden. Dies sind zum einen der Begriff der *interindividuellen Kongruenzen der subjektiven Erfahrung* und zum anderen der Begriff *intersubjektiv geteilter Erfahrungsbereiche*. In seiner aktualisierten Version der Grundkonzepte subjektiver Erfahrungsbereiche nutzt Bauersfeld (2000) den Begriff des „geteilt geltende[n] Wissen[s]“ (S. 123), der eher der Sprechweise des zweiten Begriffs ähnelt. Im Folgenden wird der Begriff „Erfahrungsbereich“ im Sinne interindividueller Kongruenzen der subjektiven Erfahrung verwendet. Damit soll betont werden, dass nicht „dasselbe Wissen“ in zwei oder mehreren Interaktionspartnern „vorhanden ist“ oder „aufge- bzw. verteilt“ wird, sondern die subjektiven Erfahrungsbereiche der Interaktionspartner „hinreichend ähnlich“ sind. Die „hinreichende Ähnlichkeit“ wird hierbei am Erfolg der Interaktion gemessen, und zwar in einer negativen Form: es liegt keine hinreichende Ähnlichkeit zwischen SEB'en vor – sprich: es liegt keine interindividuelle Kongruenz der SEB vor, wenn die Interaktion gestört ist, indem bspw. ein Interaktionspartner die Interaktion thematisiert oder die Interaktion abgebrochen wird. Dies entspricht

⁷⁵ Vgl. den Umweltbegriff in Fußnote 23.

⁷⁶ Vgl. Abschnitt 4.3.2.

in großem Maße Bauersfeld aktualisiertem Verständnis von „Bedeutungs‘aushandlung“ [Anführungszeichen im Original]“ (Bauersfeld, 2000, S. 123):

„Da es kein direktes Vermitteln gibt, hat das aktive Aushandeln von Bedeutungen[*, G.S.] ("negotiation of meanings") für das Erwerben von hinreichend angemessenen Sinnkonstruktionen eine Schlüsselfunktion. Freilich entsteht dabei immer nur ein als geteilt-geltendes-Wissen[**, G.S.] (taken-as-shared) und mit diesem (implizit) auch die Mittel zu seiner Darstellung. Erst das jedoch ermöglicht die inhaltlich zunehmend differenziertere Diskussion mit anderen sowie insbesondere die subjektive Konstruktion auch neuen Wissens aus der Kombination bereits verfügbarer, als geteilt-geltender Elemente (was ein Beobachter als ein "Lernen von Anderen" oder ein "Lernen aus Texten" beschreiben könnte).“

(Bauersfeld, 2000, S. 123)

An der markierten Stelle * findet sich im Original Fußnote 7 (Bauersfeld 2000, S. 123), in der Bauersfeld ergänzt, dass das Aushandeln durch Interaktion keine beliebigen Produkte in Form von Deutungen und Handlungen hervorbringen kann. Entsprechend spricht er davon, dass diese Produkte „in der Auseinandersetzung mit den erfahrenen Widerständigkeiten“ angepasst werden. Diese Interpretation passt sich gut in die hier dargestellte Konzeption der strukturellen Kopplung der Interaktionspartner ein, die im wechselseitigen Austausch stehen.

In Fußnote 8, die hier durch ** markiert wird, erläutert Bauersfeld, warum er den Begriff geteilt geltendes Wissen nutzen möchte. Mit diesem Begriff wird laut ihm die „soziale Funktion des so Erworbenen in der betr. Kultur [...] genauer als durch „viabel“⁷⁷ beschrieben“ (Bauersfeld, 2000, S. 123). Allerdings ist diese genauere Beschreibung wohl vielmehr als Einschränkung zu sehen, da der Begriff

⁷⁷ Eine Diskussion des Begriffs viabel lässt sich im Kontext von Bauersfeld wohl auf von Glasersfelds Verständnis von Viabilität im Konstruktivismus zurückführen, auch wenn Bauersfeld die genaue Begriffsherkunft nicht angibt. Köck (2015) diskutiert von Glasersfelds Konzeption folgendermaßen, der ich mich an dieser Stelle anschließen möchte:

„Der hier auftretende Begriff der „Viabilität“ wurde von Ernst von Glasersfeld schon in den 1970er Jahren aus der Biologie übernommen und scharf von dem so oft missverstandenen Begriff „Anpassung“ abgegrenzt. „Viabilität“ umfasst all das, was Organismen in ihren Lebenswelten „überlebensfähig“ macht, im Besonderen auch alle durch „ontogenetisches Lernen“ erworbenen Fähigkeiten

der Viabilität im Rahmen des Konstruktivismus sehr ähnlich dem Konzept der strukturellen Kopplung im Enaktivismus ist (vgl. Fußnote 77). Diese Einschränkung des Begriffs von Bauersfeld ist wohl dessen großem Engagement für eine vor allem soziologische Perspektive geschuldet.

Wie bereits erwähnt nutze ich daher entgegen Bauersfelds Begriffsverwendung, um die Wechselseitigkeit von Erfahrungsbereichen hinsichtlich einer individualistischen und einer eher sozialen Perspektive zu betonen, den Begriff der interindividuellen Kongruenz.

4.3.2 Probleme der (Re-)Konstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche

In diesem Abschnitt soll erklärt werden, welche Herausforderungen die Rekonstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche an die Beobachter*in stellt, unter besonderer Berücksichtigung der Vor- und Nachteile einer teilnehmenden Beobachtung, das bedeutet in der hier verwendeten Terminologie, dass die rekonstruierende Beobachter*in Teil des Erfahrungsbereiches des Trägers der zu rekonstruierenden subjektiven Erfahrungsbereiche ist.

Bauersfeld (1983) führt zur Entwicklung und Begründung seines Konzepts der SEB'e vielfältige Fallstudien an, die er zwar nicht selbst durchgeführt hat, die aber seine Überlegungen zur Bereichsspezifität von Erfahrungen, Handlungen und Wissen informieren. Bereits zu Beginn dieses Kapitels wurden die drei Fallstudien zu George, Alexandria und Deborah von Ginsburg erwähnt, deren Interpretation durch Ginsburg von Bauersfeld angegeben werden, aber im Anschluss auch von ihm gedeutet werden und zwar mithilfe der Begriffe SEB und Rahmung (Bauersfeld, 1983, S. 4). An dieser Stelle soll nicht Bauersfelds Interpretation der Fallbeispiele dargestellt werden, sondern die Art und Weise wie Bauersfeld die Fallgeschichten interpretiert.

und Fertigkeiten, die immer wieder neuen Widerstände und Bedrohungen der Lebenssituation „kreativ“ zu meistern. „Viabilität“ ersetzt im Bereich der menschlichen Erfahrung den traditionellen philosophischen Begriff der „Wahrheit“, der auf „korrekte‘ Abbildung der Realität“ zielt: „Handlungen, Begriffe und begriffliche Operationen sind dann viabel, wenn sie zu den Zwecken oder Beschreibungen passen, für die wir sie benutzen“ (Glaserfeld, 1996, S. 43, Hervorhebung im Original).“

(Köck, 2015, S. 373)

Georges Verhalten, der zunächst die schriftliche Subtraktion zur Lösung einer Aufgabe verwendet wobei er den Algorithmus falsch umsetzt und dann diesen falschen Algorithmus konsistent und systematisch auf eine vom Interviewer als Hilfe intendierte Veranschaulichung des konkreten Abzählens von Büroklammern überträgt, wird von Bauersfeld so interpretiert, dass für George die Situation „wohl eindeutig bestimmt [ist, G.S.] als ‚ich soll vor dem Lehrer schriftlich rechnen‘“ (Bauersfeld, 1983, S. 4). Diese Interpretation trägt der systematischen und konsistenten Verwendung des falschen Subtraktionsalgorithmus Rechnung. Hierbei benennt Bauersfeld konkrete spezifische Elemente des von Bauersfeld vermuteten SEB des „schriftlichen Abziehens“ (Bauersfeld, 1983, S. 4), wie etwa „wesentliche Tätigkeiten“ des Arbeitens auf dem Papier, Schreiben von Zahl- und Rechenzeichen, bestimmte Sprechweisen, Interaktionsschemata mit anderen Personen, wobei Zahlen auf dem Blatt untereinander stehen, es einen Rechenstrich usw. gibt. Interessant ist, dass Bauersfeld darauf hinweist, dass Ginsburg nichts über die sprachliche Begleitung von Georges Handlungen mit den Klammern bemerkt, worin Bauersfeld, der nicht an diesem Interview teilgenommen hat, eine Lücke feststellt, die er interpretativ dadurch schließt, dass er im Rahmen seines subjektiven Erfahrungsbereiches solcher Situationen davon ausgeht, dass George sich wie üblich in diesem Erfahrungsbereich auch sprachlich bewegen kann. Auch das Verhalten des Interviewers interpretiert Bauersfeld dahin gehend, dass dieser überrascht durch Georges Verwendung der Büroklammern ist. Hier findet man eine Deutungsdifferenz zwischen Bauersfelds Interpretation und der Beschreibung von Ginsburg, der lediglich beschreibt, dass der Interviewer eine andere Erwartung zur Verwendung der Klammern durch George hat. Solche Unschärfen der Interpretation aufgrund von Lücken im beschriebenen Erfahrungsbereich der zu untersuchenden Träger spielen auch bei der Rekonstruktion der SEB in Bezug auf die drei übrigen Fallgeschichten eine große Rolle. So stellt Bauersfeld fest, dass der Kontext des Auftretens der Rechenaufgabe, die Alexandria lösen soll, nicht klar ist. Und auch bei der Analyse der Interaktion zwischen Deborah und ihrem Interviewer vermutet er, dass bestimmte Sinnstrukturen in der Betonung einzelner Silben des Interviewers (vgl. Fußnote 49) liegen, auf die er aufgrund des gegebenen Datenmaterials keinen Zugriff hat.

Hier erkennt man die Problematik der Rekonstruktion von SEB auf der Grundlage einer nicht-teilnehmenden Beobachtung. Verschiedene Deutungsaspekte aber auch Indikatoren werden lediglich vermutet bzw. in die (re-)konstruierten Erfahrungsbereiche eingepasst. Hierzu gehören auch vermutete Intentionen der

betrachteten Interaktionspartner. Dies bedeutet allerdings nicht, dass eine nicht-teilnehmende Beobachtung unzureichend und ohne wissenschaftlichen Mehrwert ist. Ein großer Vorteil der nicht-teilnehmenden Beobachtung liegt darin, dass ein größerer Abstand, insbesondere keine emotionalen Bindungen, zu den beobachteten Trägern der SEB besteht und man so gegebenenfalls mehrere Deutungsperspektiven einnimmt, die ein teilnehmender Beobachter aufgrund seiner subjektiven Erfahrungen im Kontext direkt als abwegig erachtet oder die durch die Aktivierung seiner subjektiven Erfahrungen überdeckt werden, sodass andere oder übergeordnete subjektive Erfahrungsbereiche nicht aktiviert werden.

Auch für die teilnehmende Beobachtung und damit (Re-)konstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche der Interaktanten, von denen einer die teilnehmende Forscher*in ist, können Vor- und Nachteile angeführt werden. Der bereits oben erwähnte Nachteil der Gefahr des fehlenden Abstands zum Forschungsgegenstand als teilnehmende Forscher*in ist bekannt und wird mit dem Begriff des „going native“ in der Literatur verortet (Hussy, Schreier, & Echterhoff, 2013, S. 206–207). Ein Vorteil einer solchen teilnehmenden Forschung kann aber bei ausreichender Reflexion und Aufmerksamkeit der Forscher*in hinsichtlich der Forschungsfrage darin liegen, spezielle Elemente, bspw. bestimmte spezifische Elemente der subjektiven Erfahrungsbereiche, in den Blick zu nehmen und so eine Reduzierung des Datenmaterials im Moment bzw. kurz nach der Datenentstehung in den Blick zu nehmen und entsprechende Daten aufzunehmen. Hierbei müssen natürlich verschiedene Methodenstandards, bspw. Triangulation der Daten, eingehalten werden. Ein weiterer, nicht zu unterschätzender Aspekt bei der teilnehmenden Beobachtung ist die Notwendigkeit der Explikation eigener aktivierter subjektiver Erfahrungsbereiche im Rahmen der Interaktion und Deutung, sofern diese von den Forschenden expliziert werden können. Diese Transparenz des Rahmens in dem die Forschungsergebnisse, also Darstellung der Erfahrungsbereiche und Deutung des Verhaltens der Interaktanten, erreicht werden sollen, scheint in einem infiniten Regress der Deutung enden zu müssen. Vielmehr ist es aber so, dass bei klarer Darstellung der Deutungshintergründe die Grenzen der Forschungsergebnisse besser eingeschätzt werden können und durch den Zugriff auf vermutete, eigene subjektive Erfahrungsbereiche zumindest teilweise der Erfahrungsbereich der potentiell an den Ergebnissen der Studien Interessierten erweitert werden kann.

Auch in Bauersfeld (1983, S. 9) findet sich eine mehr oder weniger deutliche Darstellung der Deutungsmöglichkeiten, die Bauersfeld in Betracht zieht – auch ohne selbst teilnehmender Beobachter zu sein. Wäre er selbst der Interviewer könnte er seine Intention als Fragesteller besser identifizieren.

„Die nächste Reaktion des Interviewers: ‚Eins steht für dreizehn?‘ kann Resignation ausdrücken, kann etwas herausfordernde Ironie erklingen lassen, kann als Denkanstoß mit Hilfe eines gespielten Mißverständnisses [sic!] gemeint sein u. manches mehr. Deborah jedenfalls scheint eine Herausforderung darin wahrzunehmen, denn sie beharrt auf dem Übergang zur Metakommunikation: ‚Ich verstehe nicht, was Sie meinen.‘ In der Tat, das gilt wohl für beide.“
(Bauersfeld, 1983, S. 9)

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass sowohl die teilnehmende als auch nicht-teilnehmende Beobachter*in den Erfahrungskontext, in dem sie zu ihrer Deutung gelangt, soweit es ihr möglich ist, explizieren sollte, da eine Deutung nur aufgrund eigener, je nach deutender Beobachter*in unterschiedlich differenzierter, subjektiver Erfahrungsbereiche⁷⁸ möglich ist.

4.4 Wissen als spezifisches Element subjektiver Erfahrungsbereiche

Bereits in Abschnitt 4.1 wurden verschiedene spezifische Elemente der grundsätzlich totalen subjektiven Erfahrung angeführt. In diesem Kapitel wird ein für die Übergangserfahrung und späteren Untersuchungen besonders wichtiges spezifisches Element von SEB'en vorgestellt. Hierzu werden weitere theoretische Konzepte, wie die Rekonstruktion von (empirischen) mathematischen Wissen mit Hilfe des strukturalistischen Theorienkonzepts sowie des „theory theory“-Ansatzes vorgestellt. Dieses Konzept dient insbesondere zur Distinktion subjektiver Erfahrungsbereiche anhand des spezifischen Elements „Wissen“.

⁷⁸ In einer objektivierten Form formuliert Einstein „[...] es mag heuristisch von Wert sein, sich daran zu erinnern, was man wirklich beobachtet. Aber vom prinzipiellen Standpunkt aus ist es ganz falsch, eine Theorie nur auf beobachtbare Größen gründen zu wollen. Denn es ist ja in Wirklichkeit genau umgekehrt. Erst die Theorie entscheidet darüber, was man beobachten kann.“ (Heisenberg, 2015, S. 31). Aus enaktivistischer Perspektive lässt sich ähnlich argumentieren, da nur eine strukturelle Kopplung zwischen Entitäten, die überhaupt koppeln können, bestehen kann.

Die in diesem Abschnitt dargestellte Möglichkeit zur Rekonstruktion von (empirischem) (mathematischen) Wissen kann mittlerweile als etabliert in der mathematikdidaktischen Forschung angesehen werden (Struve, 1990; Burscheid & Struve, 2010; Witzke, 2009; Burscheid & Struve, 2010; Schlicht, 2016; Steinbring, 1980). Grundzüge dieser Rekonstruktionsmethode, die auf dem strukturalistischen Theorienkonzept basieren, werden in Abschnitt 4.4.2 dargestellt. Hierbei verzichte ich auf die Darstellung von Beispielen, da sich einerseits vielfältige Beispiele aus den Naturwissenschaften sowie der historischen Entwicklung der Mathematik und der Mathematikdidaktik bzw. Elementarmathematik in verschiedenen Arbeiten (Stegmüller, 1987; Balzer et al., 1987; Burscheid & Struve, 2010; Schlicht, 2016; Burscheid & Struve, 2018) finden und andererseits eine neue partielle Rekonstruktion in diesem Sinne von von Mises frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff in Kapitel 6 gegeben ist. Gerade zur Illustration der theoretischen Konzepte lohnt sich ein Blick in eine der genannten Rekonstruktionen.

In Abschnitt 4.4.3 wird ein weiteres Argument für die Rekonstruktion von Wissen als (empirische) Theorie auf der Basis des „theory theory“-Ansatzes gegeben. Dieser Ansatz geht davon aus, dass Erwachsene und insbesondere auch Kinder schon im Säuglingsalter ihr Wissen in Form von Theorien aufbauen und weiterentwickeln. Es wird sich im Folgenden zeigen, wie nützlich diese Annahme ist, um einen Weg aufzuzeigen spezifische Wissens Elemente eines subjektiven Erfahrungsbereiches zu rekonstruieren.

4.4.1 Ziele, Chancen und Herausforderungen der strukturalistischen Rekonstruktion (mathematischen) Wissens

Wenn hier und im Folgenden der Begriff des strukturalistischen Theorienkonzeptes verwendet wird, ist damit immer das Ideengerüst gemeint, das von Joseph D. Sneed (1971) erstmals in seinem Werk „The Logical Structure of Mathematical Physics“ vorgestellt und von ihm und anderen Autoren (Balzer et al., 1987; Stegmüller, 1987) weiterentwickelt und verbreitet wurde. Das ursprüngliche Ziel von Sneeds Arbeiten liegt in einer, wie der Titel bereits nahelegt, Rekonstruktion der logischen Struktur von Theorien der mathematischen Physik⁷⁹ sowie ihrer Verbindung. Der Anwendungsbereich wurde in der Folgezeit auf ganz verschiedene

⁷⁹ Interessanterweise spart Sneed (1971) in seinen Rekonstruktionen physikalische Theorien, die einen probabilistischen Gehalt haben, wie etwa die Quantenmechanik oder statistische Mechanik, bewusst aus. Dies begründet er damit, dass seiner Ansicht nach Unklarheiten bestehen, wie Wahrscheinlichkeitsmaße in diesen Theorien interpretiert werden sollen, wobei er explizit auf

Bereiche der Erfahrungswissenschaften, bspw. in anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie aber auch Soziologie und Mathematikdidaktik ausgeweitet.

Sneeds Rekonstruktionen basieren dabei auf einer Idee, die bereits Suppes (1966) in die wissenschaftstheoretische Diskussion zur Darstellung von Theorien eingebracht hat (Stegmüller, 1987, S. 471), nämlich der Axiomatisierung einer Theorie durch die „Definition eines mengentheoretischen Prädikates“ (Stegmüller, 1987, S. 472). Er geht insofern mit seinem Formalismus über Suppes Ideen hinaus, als dass er zur Rekonstruktion von Theorien die Definition von mengentheoretischen Prädikaten für verschiedene Modellklassen einer Theorie nämlich Modelle M , potentielle Modelle der Theorie M_p und partiell-potentielle Modelle M_{pp} fordert, womit er die sogenannten theoretischen und nicht-theoretischen Terme einer Theorie klassifizieren kann, was die Möglichkeit eröffnet, theoretische Terme im Rahmen einer Theorie als theoretisch, in einer anderen Theorie dagegen als nicht-theoretisch auszuweisen. Die Unterscheidung von theoretischen Termen und nicht-theoretischen Termen sowie die Frage, in welchem Zusammenhang theoretische Terme mit konkreten Anwendungsfällen einer Theorie stehen, ist ein Problem, das schon früh in der Wissenschaftstheorie bemerkt wurde. So beschreibt Stegmüller die Genese dieses Problems anhand der Versuche empirische Behauptungen einer Theorie in einer sogenannten Beobachtungssprache zu formulieren, deren Begriffe sich „entweder unmittelbar auf Beobachtbares beziehen oder mit Hilfe solcher Begriffe definierbar sein“ (Stegmüller, 1987, S. 480) sollten. Es zeigte sich bald, dass eine solche Reduktion von Begriffen umfassenderer Theorien, wie bspw. des Kraft oder Masse Begriffs der Newtonschen Mechanik, nicht möglich ist. Sneed nutzt zur Lösung dieser Schwierigkeiten neben den bereits dargestellten Modellkategorien, die in 4.4.2 näher erläutert werden, das sogenannte Ramsey Substitut. Mit dessen Hilfe wird die empirische Prüfung einer Theorie dadurch bewerkstelligt, dass ein partiell-potentielles Modell, das durch ein mengentheoretisches Prädikat definiert ist, deren Begriffe nur auf beobachtbare Entitäten verweisen, durch Hinzufügen von theoretischen Begriffen zu Modellen so ergänzt werden können, dass das auf diese Weise erweiterte partiell potentielle Modell zu einem potentiellen Modell der Theorie wird. Dieses kann dann dahingehend empirisch geprüft werden, ob die fundamentalen Gesetze der

Vor- und Nachteile frequentistischer und subjektivistischer Auffassungen des Wahrscheinlichkeitskonzepts verweist (vgl. Sneed 1971, S. XI, XII). Die grundsätzlich leicht darstellbaren mathematischen Theorien, die diesen physikalischen Theorien zu Grunde liegen, sind dagegen laut Sneed nicht problematisch.

Theorie gelten und somit das partiell potentielle Modell mit der theoretischen Erweiterung ein Modell der betrachteten Theorie ist. Gerade diese Gliederung der Modellklassen mit besonderer Berücksichtigung der Einführung theoretischer Begriffe beim Übergang vom partiell potentiellen Modell zu einem potentiellen Modell hat auch für Kuhn (1976) den Mehrwert von Sneed's Formalisierung gegenüber anderen Konzeptionen ausgemacht. Diese Neueinführung der Modellklassen setzt Kuhn in Bezug zum Lernen physikalischer Theorien, indem er feststellt „teaching a student to make the transition from partial potential models to potential models is a large part of what scientific, or at least physics, education is about.“ (Kuhn, 1976, S. 181), womit er zugleich die kreative Leistung von Wissenschaftlern würdigt, neue Begriffe und Beschreibungsmöglichkeiten über Phänomene im Sinne von partiell potentiellen Modellen hinaus zu entwickeln, die bisherigen Beschreibungen überlegen sind, bspw. indem sie eine breitere Anwendbarkeit ermöglichen.

Für Kuhn sind noch folgende Vorteile durch die Beschreibung von Theorien im Sneed'schen Sinne gegeben, die auch Stegmüller (1987) besonders hervorhebt. Zum einen die Berücksichtigung der Frage, auf welche Weise solche Modelle im empirischen Kontext anwendbar sind und welche Beschränkungen für eine solche Anwendung gegeben sind (Kuhn, 1976, S. 182). Die Frage der Anwendbarkeit einer Theorie wird durch Sneed so geklärt, dass er zur Theorie paradigmatische Anwendungsfälle, also konkrete Beispiele, als intendierte Anwendungen ausweist, deren Menge gemäß der strukturalistischen Definition zu einer Theorie gehört. Die Anwendbarkeit einer Theorie wird dann dadurch geklärt, dass bei einem potentiellen Anwendungsfall überprüft wird, ob dieser hinreichend ähnlich⁸⁰ zu einem der paradigmatischen Anwendungsfälle ist. Die Beschränkungen der Anwendungen ergeben sich ebenfalls aus dem typischen Umgang mit wissenschaftlichen Theorien. Häufig haben als „gleich“ identifizierte empirische Entitäten je nach Anwendung der Theorie eine unterschiedliche Rolle. Ein klassisches illustrierendes Beispiel ist die Erde, um die einerseits der Mond eine Umlaufbahn beschreibt und die zugleich selbst eine Umlaufbahn um die Sonne beschreibt. Man könnte nun beide Anwendungen getrennt voneinander betrachten

⁸⁰ Hinreichende Ähnlichkeit ist natürlich in Bezug auf eine exakte Definition einer Theorie ein eher weiches Kriterium. Stegmüller beschreibt aber das auf diese Weise, analog zu Wittgensteins Betrachtungen des Spielbegriffs, die Schwierigkeiten umgangen werden hinreichende und notwendige Bedingungen angeben zu müssen, was ein vermutlich „hoffnungsloses Unterfangen“ (Stegmüller, 1987, S. 477) darstellen würde.

und Eigenschaften der Erde, wie z.B. ihre Masse, jeweils bezogen auf den Anwendungsfall angeben. Sneed schließt solche Fälle aus, indem er als Teil der Theorie die Menge C der „constraints“ also Beschränkungen⁸¹ nur solche Mengen von potentiellen Modellen angibt, die bestimmte Eigenschaften betrachteter Entitäten auch in verschiedenen Anwendungsfällen gleich belassen.

Neben dieser Chance der Beschreibung von Fragmenten von Theorien in der Wissenschaftstheorie oder eben Wissens-elementen, die schon Balzer et al. (1987) folgendermaßen beschreiben:

„However, we do believe that it [Rekonstruktionen im Sinne des strukturalistischen Theorienkonzepts, G.S.] is conceptually interesting, and perhaps even technologically and *didactically* [Herv. G.S.] useful to represent substantial fragments of knowledge in the way we describe here“

(Balzer et al., 1987, S. xii),

liegt eine weitere Chance, die diese Form der Rekonstruktion erlaubt, verschiedene *Entwicklungen einer Theorie oder eben von Wissen nachzuzeichnen*. Im Rahmen der Wissenschaftstheorie wird in diesem Zusammenhang von normalwissenschaftlichem Arbeiten in einem Paradigma oder von Paradigmenwechsel durch wissenschaftliche Revolutionen gesprochen (Kuhn, 1984). Balzer et al. (1987) sprechen bei ihrer Untersuchung solcher Phänomene der Theorieentwicklung von einer diachronischen Struktur von Theorien, die sie in Form von Veränderungen von Theorienetzen im Falle normalwissenschaftlichen Arbeitens und mit einer Ablösung von Theorienetzen im Falle von Paradigmenwechseln beschreiben, wobei sie sich in ihrem Werk „An Architectonic for Science“ auf die normalwissenschaftliche Entwicklung beschränken. Interessanterweise erweitern sie dazu den Formalismus um weitere pragmatische und sozio-historische Konzepte nämlich *historische Perioden, historisch vorangehend, Wissenschaftler*in, wissenschaftliche Gemeinschaft* und das Konzept der *wissenschaftlichen Generation*⁸². Mit diesen

⁸¹ Meiner Ansicht nach ist der Begriff von Sneed „constraint“ also „Beschränkungen“ besser gewählt als der Begriff Querverbindungen von Stegmüller, da in der zugehörigen Menge C nicht alle möglichen Kombinationen der potentiellen Modelle angegeben ist, d.h. $C \neq \mathcal{P}(M_p)$. Mit dem Begriff der Querverbindungen deutet Stegmüller an, dass die Modelle, die in der Menge C zusammengefasst sind, untereinander Querverbindungen haben, d.h. bspw. gleiche Werte für die Masse bestimmter Entitäten in verschiedenen Anwendungen.

⁸² Betrachtet man diese Konzepte aus einer enaktivistischen Perspektive stellt man fest, dass verschiedene Ontogenesen von Entitäten, hier Wissenschaftler*innen, wissenschaftliche Schulen

letzten beiden Aspekten ergibt sich auch der Nutzen bzw. die Chance für eine Nutzung dieses Werkzeugs zur Rekonstruktion von Wissens-elementen und Genese von Wissen für die mathematikdidaktische Forschung.

Es wurden mittlerweile sowohl verschiedene Elemente von Wissen rekonstruiert, bspw. die empirische Tast- und Seh-Geometrie von Struve (1990, S. 218–255), als auch die Entwicklung von Wissen betrachtet, bspw. parallele (weiter-)entwicklung von Eigentheorien zum Mengen- und Zahlbegriff von Vorschulkindern durch Schlicht (2016, S. 133–136).

Die Herausforderung, die sich für die Bewertung dieser Rekonstruktionen sowohl in der mathematikdidaktischen Forschung wie auch in Rekonstruktionen wissenschaftlicher Theorien ergibt, ist die Frage nach der *Adäquatheit* solcher Rekonstruktionen, insbesondere da durch die Angabe eines mengentheoretischen Prädikats häufig bereits zuvor gegebene normalsprachliche Definitionen präzisiert oder zumindest verändert werden. In dieser Arbeit folge ich, wie Burscheid und Struve (2010), Witzke (2009) und Schlicht (2016), daher folgenden Maßstäben, die bereits Stegmüller zur Abgrenzung der Methode rationaler Rekonstruktionen von der Methode der Direktinterpretation angegeben hat:

„(1) Die Theorie muß [sic!] in solcher Form dargeboten werden, daß [sic!] die Darstellung mit den Grundideen des betreffenden Philosophen [oder der betrachteten Person, G.S.] im Einklang bleibt.

(2) Soweit wie möglich soll die Theorie mittels *präziser Begriffe* [Herv. im Original] dargestellt werden.

(3) Sie soll als *konsistente Theorie* [Herv. im Original] entwickelt werden, falls dies möglich ist (d.h. falls sich nicht alle rationalen Deutungen, welche die Forderungen (1) und (2) erfüllen als inkonsistent erweisen).“⁸³

(Stegmüller, 1967, S. 2, zit. nach Burscheid & Struve, 2010, S. 195)

und wissenschaftliche Generationen, ihre strukturellen Kopplungen sowie Einbettung in eine gemeinsame Kultur betrachtet werden.

⁸³ Eine ausführliche Diskussion dieser drei Prinzipien findet sich in Burscheid und Struve (2010, S. 195–196).

Insbesondere liegt damit das *Ziel* der rationalen Rekonstruktion, auch bei Rekonstruktionen im Sinne des strukturalistischen Theorienkonzepts, in einer möglichst klaren und zur Diskussion nachvollziehbaren Darstellung der rekonstruierten Wissenselemente.

4.4.2 Struktur von (mathematischem) Wissen im Sinne des strukturalistischen Theorienkonzepts: Eine wissenschaftstheoretische Beschreibung von Wissen

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels dargelegt, werden in diesem Abschnitt die zur strukturalistischen Rekonstruktion von Theorien, und damit von Wissenselementen sowie deren Entwicklung, nötigen Begriffe und ihre Verknüpfungen dargestellt, ohne diese an einem Beispiel zu explizieren. Dabei folge ich in großem Maße der Darstellung von Balzer et al. (1987), wobei die symbolische Darstellung den Arbeiten von Burscheid und Struve (2010, 2018) in weiten Teilen entspricht. Für eine kurze Erläuterung eines Großteils der hier vorgestellten Konzepte sei verwiesen auf Schlicht (2016, S. 21–33) oder Witzke (2009, S. 47–55). Ausführlichere Darstellungen dieses Konzepts mit mathematikdidaktischen Beispielen sind in Struve (1990, S. 211–260), Burscheid und Struve (2010) sowie Burscheid und Struve (2018) zu finden. Eine relativ leicht verständliche, allgemeinere Darstellung des strukturalistischen Theorienkonzepts mit einem weniger großen Schwerpunkt auf den symbolischen Aspekten der Formalisierung, dafür aber mit einer Einbettung in den wissenschaftstheoretischen Kontext bietet Stegmüller (1987). Eine umfassende Darstellung mit zahlreichen Beispielen, auch zum besseren Verständnis der symbolischen Darstellung aus verschiedenen Anwendungsfeldern bietet das Werk von Balzer et al. (1987) in englischer Sprache, das die Hauptquelle der folgenden Abschnitte bildet.

4.4.2.1 Theorie-Elemente

Balzer et al. (1987) bestimmen Theorie-Elemente $T = \langle K(T), I(T) \rangle$ als einfachste, kleinste und trotzdem noch genügend umfassende Teile einer empirischen Theorie, die als mengentheoretische Prädikate formulierbar sind. Sie enthalten einen rein formalen mathematischen Teil, den Theorie-Kern $K(T)$, und eine Klasse intendierter Anwendungen $I(T)$ (vgl. Balzer et al., 1987, S. xxiii).

Als mengentheoretisches Prädikat legen Balzer et al. das Theorie-Element folgendermaßen fest:

Definition 1: T ist ein *Theorie-Element* genau dann, wenn $K(T)$ und $I(T)$ existieren, sodass

- (1) $K(T)$ ein *Theorie-Kern* ist und
- (2) $I(T)$ der Bereich der *intendierten Anwendungen* von K ist.

Das Theorie-Element ist mit einer empirischen Behauptung (engl. empirical claim) über die empirische Welt verknüpft. Sie besagt, dass die Menge der intendierten Anwendungen ein Element des Gehalts (engl. content) des Theorie-Elements ist, wobei der Gehalt eines Theorie-Elements im Folgenden näher spezifiziert wird (Balzer et al., 1987, S. xxiv).

Der Kern $K(T) = \langle M_p(T), M(T), M_{pp}(T), GC(T), GL(T) \rangle$ eines Theorie-Elements enthält die potentiellen Modelle $M_p(T)$ des Theorie-Elements, die Modelle $M(T)$ des Theorie-Elements, die partiell potentiellen Modelle $M_{pp}(T)$ des Theorie-Elements, die Beschränkungen (engl. constraints) $GC(T)$ der Menge der potentiellen Modelle $M_p(T)$ des Theorie-Elements und die intertheoretischen Verbindungen $GL(T)$ des Theorie-Elements T zu anderen Theorie-Elementen T' . Entsprechend formulieren Balzer et al. (1987, S. 79) folgendes mengentheoretisches Prädikat zur Definition eines Theorie-Kerns K :

Definition 2: $K(T)$ ist ein *Theorie-Kern* der Theorie T genau dann, wenn $M_p(T)$, $M(T)$, $M_{pp}(T)$, $GC(T)$ und $GL(T)$ existieren, sodass

- (1) $K(T) = \langle M_p(T), M_{pp}(T), M(T), GC(T), GL(T) \rangle$
- (2) $M_p(T)$ ist eine *Klasse von potentiellen Modellen* der Theorie T
- (3) $M(T)$ ist eine *Klasse von Modellen* als Teilmenge von $M_p(T)$
- (4) $M_{pp}(T)$ ist die *Klasse von partiell potentiellen Modellen*, die durch $M_p(T)$ und $M(T)$ gegeben ist.
- (5) $GC(T)$ bezeichnet die *globale Beschränkung*, die zu $M_p(T)$ gehört.
- (6) $GL(T)$ ist die *globale intertheoretische Verbindung*, die zu $M_p(T)$ gehört.

Das übliche Verständnis von Modellen und damit auch von Modellen eines Theorie-Elements, sowohl in den Naturwissenschaften als auch in der Mathematik, erläutern Balzer et al. (1987) wie folgt:

„Models are, therefore, those ‘things’ depicted by a theory. A theory normally has many different models. By being all models of *the same* [Herv. im Original] theory, they have something in common. Roughly speaking, what they have in common is that they all share the *same structure* [Herv. im Original]. By ‘sharing the same structure’ we mean essentially two different things at the same time: That they can be all subsumed under the same ‘conceptual framework’ and that they all satisfy the same ‘laws’.”

(Balzer et al., 1987, S. 3)

Entsprechend dieser Beschreibung von Modellen definieren Balzer et al. (1987) potentielle Modelle als Dinge, die unter einen gemeinsamen begrifflichen Rahmen gefasst werden können. Die Menge aller potentiellen Modelle, die unter dem begrifflichen Rahmen des Theorie-Elements T gefasst werden können, wird im Folgenden mit $M_p(T)$ bezeichnet (Balzer, et al. 1987, S. 3).

Erfüllen potentielle Modelle $X \in M_p(T)$ des Theorie-Elements T zusätzlich die Gesetze des gleichen Theorie-Elements T bezeichnet man sie als (tatsächliche) Modelle $X \in M$ des Theorie-Elements (Balzer et al., 1987, S. 3). Üblicherweise enthält der begriffliche Rahmen von $M_p(T)$ T -theoretische und *nicht-T-theoretische* Begriffe. Erstere unterscheiden sich von letzteren Begriffen, dadurch, dass ihre Bedeutung von T und dessen Gültigkeit abhängen, wohingegen letztere ihre Bedeutung durch andere, von T verschiedene Theorien erhalten, die unabhängig von T und deren Gültigkeit sind. Schließt man aus den potentiellen Modellen $M_p(T)$ die T -theoretischen Begriffe und die von diesen abhängigen Relationen aus, erhält man die sogenannten *partiell potentiellen Modelle* $M_{pp}(T)$.

Ohne vertieft auf die Unterscheidung und Definition von Modellen, Typen, Strukturen und mengentheoretischen Prädikaten einzugehen, sollen hier trotzdem die konstituierenden Elemente zur Definition mengentheoretischer Prädikate von Modellen $M(T)$ und potentiellen Modellen $M_p(T)$ genannt werden. Ein mengentheoretisches Prädikat eines potentiellen Modelles $M_p(T)$ ist definiert durch (Balzer et al., 1987, S. 19–20):

- (a) die Aussagen zu den mengentheoretischen Eigenschaften der Basis-Mengen,
- (b) die Typisierung der Basis-Relationen und
- (c) die Charakterisierung der Basis-Relationen

Hierbei dienen die Basis-Mengen zur Formulierung der Basis-Relationen und bilden gemeinsam mit diesen den begrifflichen Rahmen des Theorie-Elements T . Balzer et al. (1987) unterscheiden zusätzlich mathematische und nicht-mathematische Basismengen, da zur Vereinfachung einer konkreten Rekonstruktion nicht zusätzlich die mengentheoretischen Eigenschaften der mathematischen Mengen, wie beispielsweise des Körpers der reellen Zahlen \mathbb{R} , in die Rekonstruktion aufgenommen werden. Von diesen rein mathematischen Begriffen wird angenommen, dass sie bereits in anderen mathematischen Theorien dargelegt wurden⁸⁴. Zudem weisen Balzer et al. (1987) darauf hin, dass in konkreten Rekonstruktionen nicht zwischen Typisierungen und Charakterisierungen der Basis-Relationen scharf unterschieden werden muss, da diese häufig in Form einer prägnanten Formel zusammengefasst werden können und so die Basis-Relation ausreichend beschreiben (Balzer et al., 1987, S. 19).

Für die Definition eines mengentheoretischen Prädikats eines (tatsächlichen) Modells werden noch Bedingungen in Form von

- (d) Gesetzen

hinzugefügt (Balzer et al., 1987, S. 20).

In der historischen Entwicklung der Wissenschaftstheorie stießen die Wissenschaftstheoretiker bei ihrem Versuch der Rekonstruktion bald auf das Problem der theoretischen Terme, bzw. theoretischen Begriffe, innerhalb einer Theorie (Stegmüller, 1987, S. 480ff.). Dies sind Terme, die in der traditionellen Sichtweise keine empirischen Referenzobjekte haben. Eine erste Umgangsweise mit

⁸⁴ Gerade in Anwendungen der strukturalistischen Rekonstruktion in der Mathematikdidaktik (Burscheid & Struve, 2010; Schlicht, 2016) geht es häufig darum die Entwicklung solch mathematischer Theorien zu beschreiben. In diesem Falle werden die entsprechenden mathematischen Konzepte nicht als Basis-Mengen oder Basis-Relationen vorausgesetzt. Diese Unterscheidung von mathematischen und nicht-mathematischen Basis-Mengen und Basis-Relationen erfolgt bei Balzer et al. (1987) ohnehin vornehmlich zur besseren Übersichtlichkeit und Darstellung insbesondere bei besonders umfassenden Rekonstruktionen.

diesen theoretischen Termen war ihre Identifizierung und der Versuch eine generelle und allgemeine Unterscheidung zwischen theoretischen und empirischen Begriffen zu treffen. Dies führt allerdings zu verschiedenen Problemen⁸⁵.

Sneed findet allerdings mithilfe seines strukturalistischen Theorienkonzepts ein wesentlich pragmatischeres, für die Rekonstruktion von empirischen Theorien tragfähigeres, neues Kriterium für die Theoretizität solcher Begriffe, indem er die „Eigenart der *Messung* [Herv. im Original] theoretischer Größen“ (Stegmüller, 1987, S. 481) in den Blick nimmt. Daher sprechen Balzer et al. (1987, S. 49) davon eine Unterscheidung vornehmen zu wollen zwischen Begriffen der Theorie T (*T-nicht-theoretischen Begriffen*), die nicht voraussetzen, dass die Gesetze von T gelten, was bedeutet, dass es partiell potentielle Modelle von T geben muss, und jenen Begriffen der Theorie T (*T-theoretische Begriffe*), deren Anwendung davon abhängt, ob es tatsächliche Modelle $M(T)$ der Theorie T gibt. Mit dieser Unterscheidung und Beschreibung machen Balzer et al. (1987, S. 49) deutlich, dass die Theoretizität von Begriffen aus T von der betrachteten Theorie T abhängig ist, was zugleich bedeutet, dass Begriffe in Bezug auf eine Theorie T T -theoretisch sein können, in einer anderen Theorie T' allerdings nicht T' -theoretisch sein müssen⁸⁶.

Ein wichtiger Aspekt dieser Konzeption der theoretischen Begriffe, der die strukturalistische Rekonstruktion so fruchtbar für die mathematikdidaktische Forschung in den dargelegten Bereichen und dieser Arbeit macht, liegt darin, dass die ontologische Basis der Theorie somit semantisch unabhängig von der Theorie ist, was so viel bedeutet wie, dass es tatsächliche Anwendungen gibt, in denen die Basismengen der Theorie bereits umgangssprachlich oder durch Vor-Theorien bestimmt werden können und so überhaupt eine empirische Testung der

⁸⁵ Balzer et al. (1987, S. 48) geben drei Begründungen an, die die Inadäquatheit eines solchen Versuchs aufzeigen sollen. Zunächst ist ein häufig verfolgter Ansatz die Theoretizität von Begriffen an ihrer Wahrnehmbarkeit, bzw. Erkennbarkeit oder Phänomenologie, festzumachen, was aber nur schwer zu verteidigen ist. Zudem würde eine solche Kategorisierung nach Beobachtbarkeit keinen Beitrag zum verfolgten Forschungsprogramm liefern, da es nur wenige unmittelbar beobachtbare Begriffe in fortgeschrittenen Theorien gibt. Und zuletzt die Tatsache, dass gezeigt werden kann, dass kein Begriff einer fortgeschrittenen Theorie allein auf der Basis von beobachtbaren Begriffen definiert werden kann.

⁸⁶ Hierbei stellt sich die Frage, ob es sich tatsächlich um die „gleichen“ Begriffe handelt. Balzer et al. (1987, S. 55) lösen diese Spannung auf, indem Sie darauf verweisen, dass ein solcher Begriff in einer Vor-Theorie T T -theoretisch sein kann.

Theorie möglich wird (Balzer et al., 1987, S. 49). Dies spezifizieren Balzer et al. (1987, S. 50) in einem nicht-formalen Kriterium der Theoretizität⁸⁷:

Definition 3 (nicht-formales Kriterium der Theoretizität): Ein Begriff einer Theorie T , dessen Bestimmung in irgendeinem Sinne eine Messung erfordert, wird *T-theoretisch* genannt, wenn alle Messmethoden, die zur Begriffsbestimmung benötigt werden als Modelle aus $M(T)$ vorausgesetzt werden.

Dieses nicht-formale Kriterium lässt sich in ein halb-formales Kriterium⁸⁸ im Rahmen des Begriffskonzept strukturalistischer Rekonstruktionen umwandeln, dass dann eine generelle Vermutung über die Unterscheidbarkeit theoretischer Konzepte ermöglicht. Balzer et al. (1987, S. 56) formulieren diese wie folgt:

Definition 4 (halb-formales Kriterium der Theoretizität): Ein Begriff t einer Theorie T heißt theoretisch in Bezug auf die Theorie T (oder *T-theoretisch*) genau dann, wenn jede Bestimmung von (einer Relation zugehörig zu) t in einer Anwendung von T voraussetzt, dass zumindest ein tatsächliches Modell $M(T)$ der Theorie T existiert.

⁸⁷ In ihrem Werk verdeutlichen Balzer et al. (1987, S. 53) diese Idee am Beispiel des Kraftbegriffs der Newtonschen Mechanik, wobei die Bestimmung des Kraftbegriffs nur mit Geräten möglich ist, die nur dann eine korrekte Messung der Kraft liefern, wenn bereits davon ausgegangen wird, dass die fundamentalen Gesetze in Bezug auf die Kraft für diese Messgeräte (bspw. Federkraftmesser oder Waage) bereits gelten müssen.

⁸⁸ Diese Kriterien werden, wie auch zusätzlich das formale Kriterium der Theorizität, mithilfe von Messmodellen M_m formalisiert. Diese Messmodelle sind Methoden zur Bestimmung theoretischer Begriffe t in der Theorie T (Balzer et al., 1987, S. 64, 75). Gerade das formale Kriterium der Theoretizität bestimmt letztere in einem „lokalen“ Sinne, dies meint, dass die Theoretizität anhand der Konstruktion des Theorie-Elements und damit dessen Elementen festgemacht wird. Dagegen ist das pragmatische Kriterium, als informales Kriterium, eher global in Bezug auf verschiedene Verknüpfung von (Vor-)Theorien aufzufassen. Im Folgenden zeigt sich, dass in dieser Arbeit vor allem diese globale Sicht interessant ist, da sowohl von Mises als auch Kolmogoroff ihre Theorien zur Wahrscheinlichkeitsrechnung mit anderen Theorien explizit vergleichen und diese dann auch von diesen unterscheiden. Entsprechend wird an dieser Stelle darauf verzichtet das formale Kriterium der Theorizität sowie die dazu nötigen Überlegungen zur Konstruktion von Messmodellen darzustellen. Eine ausführliche Darstellung findet sich in Balzer et al. (1987, S. 62–78).

Vermutung (Über die Einteilung von T -theoretischen und nicht- T -theoretischen Begriffen): In jeder hinreichend fortgeschrittenen empirischen Theorie T kann unter zu Hilfenahme des Kriteriums aus Definition 4 zwischen T -theoretischen und T -nicht-theoretischen Begriffen unterschieden werden.

Entsprechend der bereits dargestellten Elemente zur Rekonstruktion von Theorien liegt es nahe mithilfe eines mengentheoretischen Prädikats, diese Unterscheidung strukturell abzubilden. Entsprechend definieren Balzer et al. (1987, S. 56–57) *partiell potentielle Modelle* $M_{pp}(T)$, die nur die T -nicht-theoretischen Begriffe und darauf basierende Relationen der Theorie T enthalten.

Balzer et al. (1987, S. 57) bemerken noch folgende wichtige Zusammenhänge zwischen partiell potentiellen Modellen und potentiellen Modellen, die sich aufgrund ihrer Struktur ergeben:

- Zu jedem potentiellen Modell $X \in M_p(T)$ existiert genau ein partiell potentielles Modell $X^- \in M_{pp}(T)$, da das zugehörige partiell potentielle Modell $X^- \in M_{pp}(T)$ aus dem potentiellen Modell $X \in M_p$ abgeleitet werden kann durch Ausschluss der T -theoretischen Terme und zugehöriger Relationen.
- Zu jedem partiell potentiellen Modell $X^- \in M_{pp}(T)$ existieren gegebenenfalls mehrere potentielle Modelle in $M_p(T)$, da das partiell potentielle Modell $X^- \in M_{pp}(T)$ auf verschiedene Weisen durch T -theoretische Terme und zugehörige Relationen zu potentiellen Modellen aus M_p erweitert werden kann.

Der Theoriekern enthält neben den Klassen von ((partiell) potentiellen) Modellen $M_{((p)p)}(T)$ auch Beschränkungen $C(T)$, bzw. eine globale Beschränkung $GC(T)$. Diese sind dadurch gegeben, dass üblicherweise Theorien mehrere Anwendungen haben (vgl. *intendierte Anwendungen I*), die untereinander nicht zwingend überschneidungsfrei sind. Vielmehr ist es oft der Fall, dass sich verschiedene Anwendungen überlappen. Ein recht einfaches Beispiel findet sich erneut in der Anwendung der Newtonschen Mechanik, insbesondere des Gravitationsgesetzes, einerseits in Bezug auf das System Erde-Mond und andererseits in Bezug auf das System Sonne-Erde. Rein intuitiv, und auch in der üblichen Verwendung der Newtonschen Mechanik, wird davon ausgegangen, dass die Masse der Erde im System Erde-Mond gleich der Masse der Erde im System Sonne-Erde ist. Aus rein logischen Gründen ist eine solche Beschränkung möglicher Anwendungen der

Newtonschen Mechanik nur auf solche Systeme, die die Erde enthält bei der der Erde jeweils die gleiche Masse zugeschrieben wird, nicht notwendig. Balzer et al. (1987, S. 41) sprechen in diesem Zusammenhang davon, dass bestimmte Eigenschaften von Objekten der Theorie T bestehen bleiben, wenn die Objekte von einer Anwendung in eine andere „transferiert werden“⁸⁹. Jede solche Verbindung von Anwendungen dieser Art wird in der Theorie durch die Formulierung einer Beschränkung $C(T)$ festgehalten.

Da diese Beschränkungen vor allem auf den begrifflichen Apparat und die darin aufgehobenen Typisierungen und Charakterisierungen bezogen sind, ist es gewinnbringend die Beschränkungen als Mengen von potentiellen Modellen festzulegen. Entsprechend definieren Balzer et al. (1987, S. 47) folgendes mengentheoretisches Prädikat zur Bestimmung von Beschränkungen (s. Definition 5).

Definition 5: Wenn $M_p(T)$ eine Klasse potentieller Modelle ist, dann ist

(a) $C(T)$ eine Beschränkung von M_p genau dann, wenn

$$(1) C(T) \subseteq \mathcal{P}(M_p(T))$$

$$(2) C(T) \neq \emptyset \text{ und } \emptyset \notin C(T)$$

$$(3) \forall x \in M_p(T): \{x\} \in C(T)$$

(b) $C(T)$ ist eine transitive Beschränkung genau dann, wenn

(1) $C(T)$ eine Beschränkung von M_p ist und

$$(2) \forall X, Y: X \in C(T) \wedge Y \subseteq X \Rightarrow Y \in C(T)$$

Da eine Theorie häufig mehrere Beschränkungen hat ist es lohnenswert eine Notation einzuführen, die alle für die Theorie T relevanten Beschränkungen zu einer globalen Beschränkung $GC(T)$ zusammenfasst. Aufgrund des mengentheoretischen Formalismus ist es leicht eine solche zu formulieren. Balzer et al. (1987, S. 78) geben dazu folgendes mengentheoretisches Prädikat an:

⁸⁹ Im Englischen lautet der Satz: „Certain properties of T 's objects may remain the same if the objects are transferred from one application to another one.“ Es ist davon auszugehen, dass transferieren an dieser Stelle so zu verstehen ist, dass gleiche Objekte von demjenigen, der die Theorie anwendet, in verschiedenen Anwendungen erkannt werden, wobei gleichzeitig die „Gleichheit“ des Objekts in den verschiedenen Anwendungen erkannt wird. Eine Analogie bietet hier das klassische Beispiel der verschiedenen Bezeichnungen „Abendstern“ und „Morgenstern“ für den gleichen Planeten „Venus“.

Definition 5: Wenn $C_1(T), \dots, C_n(T)$ Beschränkungen von $M_p(T)$ und für T relevant sind, dann ist die globale Beschränkung $GC(T)$ für T definiert durch

$$GC(T) := \bigcap_{i=1}^n C_i(T)$$

Der Theoriekern enthält zusätzlich zu den bereits beschriebenen Elementen *intertheoretische Verbindungen* $L(T, T')$ zwischen den Theorien T und T' . Es stellt sich die Frage aus welchem Grund solche Verbindungen zwischen Theorien zum „Austausch von Informationen zwischen Theorien“, also bspw. Verwendung von Begriffen und Relationen aus Vor-Theorien, von Balzer et al. (1987) als Elemente des Theoriekerns $K \in T$ ausgewiesen werden. Dies liegt darin begründet, dass solche intertheoretischen Verbindungen einerseits die Position einer Theorie im Theorie-Netz ausweisen können und andererseits eine Theorie durch ihre intertheoretischen Verbindungen klarer charakterisiert und abgegrenzt werden kann. Das wichtigste Argument für die Integration solcher Verbindungen in den Theoriekern ist für Balzer et al. (1987, S. 58) aber, dass in vielen Theorien die T -nicht-theoretischen Begriffe nur durch andere Theorien T' interpretiert werden können, auf die allerdings häufig nicht explizit verwiesen wird. Eine Begründung kann darin liegen, dass in den verschiedenen Disziplinen eine spezifische Fachsprache vorherrscht, in der bereits viele Überlegungen implizit angenommen werden, die insbesondere bei einem Blick auf historische Quellen nicht immer leicht zu deuten sind, sodass es bei der Rekonstruktion solcher Theorien auch zu Fehldeutungen kommen kann (Balzer et al., 1987, S. 59).

Diese intertheoretischen Verbindungen können Verbindungen im Sinne von Relationen zwischen Basis-Mengen, Basis-Relationen und Basis-Charakterisierungen von potentiellen Modellen M_p und M'_p verschiedener Theorien T und T' sein. Entsprechend definieren Balzer et al. (1987, S. 61) folgendes mengentheoretisches Prädikat zur Bestimmung von Verbindungen zwischen Theorien (s. Definition 6).

Definition 6:

- (a) $L(T, T')$ ist eine *abstrakte theoretische Verbindung* von $M_p(T)$ zu $M'_p(T')$ genau dann, wenn $L(T, T') \subseteq M_p(T) \times M'_p(T')$
- (b) $L(T, T')$ ist eine (*konkrete*) *Verbindung* von $M_p(T)$ und $M'_p(T')$ genau dann, wenn
- (1) $M_p(T)$ und $M'_p(T')$ Klassen potentieller Menge mit Relationen m und m' sind, für die gilt
 - (2) $\exists i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, m\}$ und $\exists j_1, \dots, j_u \in \{1, \dots, m'\}$, sodass
 - a. $L(T, T') \subseteq M_p(T) \times \pi(T, i_1, \dots, i_t) \times M'_p(T') \times \pi(T', j_1, \dots, j_u)$
 - b. wenn $\langle X, \langle r_1, \dots, r_t \rangle, X', \langle s_1, \dots, s_u \rangle \rangle \in L(T, T')$ dann für

$$k \leq t \wedge l \leq u: r_k = R_{i_k}^X \wedge s_l = R_{j_l}^{X'}$$

Hierbei wird mit π eine Funktion angegeben, die durch die Belegung mit einer bestimmten Theorie in der ersten Stelle und in den übrigen Stellen mit der Stellenzahl der gewünschten Basis-Mengen und Basis-Relationen R eines potentiellen Modells $X \in M_p(T)$, die Tupel von Elementen aus $X' \in M'_p(T')$ ausgibt, und so eine Verbindung zwischen der Theorie T und anderen Theorien T' darstellen kann (Balzer et al., 1987, S. 61).

Da eine Theorie häufig mehrere intertheoretische Verbindungen hat, ist es lohnenswert eine Notation einzuführen, die alle zur Theorie T gehörenden intertheoretischen Verbindungen zu einer globalen Verbindung $GL(T)$ zusammenfasst. Aufgrund des mengentheoretischen Formalismus ist es vergleichsweise leicht eine solche zu formulieren. Balzer et al. (1987, S. 78) geben dazu folgendes mengentheoretisches Prädikat an (s. Definition 7):

Definition 7:

- (1) Wenn $L_1(T, \cdot), \dots, L_n(T, \cdot)$ alle intertheoretischen Verbindungen zwischen $M_p(T)$ und anderen Klassen $M_p(T_i)$, $i = 1, \dots, n$, die für T relevant sind, sind, dann wird für $i \leq n$ Folgendes definiert:

$$\lambda_i(T) = \{X \in M_p(T) : \exists \bar{a} \exists X' \in M_p(T') \exists \bar{a}' (\langle X, \bar{a}, X', \bar{a}' \rangle \in L_i)\}$$

- (2)

$$GL(T) := \bigcap_{i=1}^n \lambda_i(T)$$

Eine weitere wichtige Bemerkung von Balzer et al. (1987, S. 22, 36, 65) bezieht sich darauf, dass Strukturen deren Basis-Mengen keine empirischen Objekte enthalten als „mögliche Kandidaten“ für potentielle Modelle und damit für eine empirische Theorie ausgeschlossen werden sollen. Entsprechend dieser Feststellung schlagen sie als ein Kriterium zur Unterscheidung von reiner Mathematik und empirischen Wissenschaften vor, dass innerhalb der reinen Mathematik keine solchen (semantischen) Beschränkungen hinsichtlich der Empirizität von Basismengen bestehen wie sie für Basismengen empirischer Wissenschaften notwendig sind⁹⁰. Die Entscheidungen, die im Rahmen von semantischen Überlegungen getroffen werden, lassen sich nicht formal rekonstruieren, sondern schlagen sich in der Auswahl bestimmter „intendierter Anwendungen“ I durch Physiker*innen, bzw. allgemeiner Anwender*innen der Theorie, nieder (Balzer et al., 1987, S. 22–23)⁹¹. Diese intendierten Anwendungen I spielen für die Anwendung eines

⁹⁰ Dieses Kriterium ist nicht mit der Behauptung zu verwechseln, dass die Basismengen reiner Mathematik nicht empirisch gedeutet werden können. Eine solche empirische Interpretation, die dann auch häufig gewissen Querverbindungen zwischen verschiedenen Interpretationen solcher Basismengen genügen soll, impliziert dann häufig ähnliche semantische Beschränkungen, wie sie in der empirischen Wissenschaft nötig sind. Entsprechend einer solchen Loslösung formaler mathematischer Mengen von empirischen Gehalten wird hier die formale Auffassung definiert (Abschnitt 5.2.).

⁹¹ Die konkrete Auswahl durch Wissenschaftler*innen beschreiben Balzer et al. sehr plastisch:

„By collecting and lumping together everything that may be obtained from ‘surrounding’ theories by means of all relevant links we obtain the partial potential models of a theory, as already described. Thus, partial potential models in a natural way represent what is given for a particular theory T in terms of its surrounding theories. [...] We assume that $I(T) \subseteq M_{pp}(T)$. This assumption is not

Theorie-Elements T eine wichtige Rolle (Balzer et al. 1987, S. 23). Sie beschreiben die Anwendung eines Theorie-Elements T in drei Schritten.

1. Das Aufstellen einer Behauptung über die intendierten Anwendungen $I(T)$, deren Folgen experimentell geprüft werden können.
2. Das Aufstellen der These, dass die intendierten Anwendungen $I(T)$ das fundamentale Gesetz von T erfüllen. Dies hat zur Voraussetzung, dass $I(T)$ mithilfe der Begriffe aus T beschrieben werden kann. Die erste These lässt sich auch so verstehen, dass es sich bei dem potentiellen Modell M_p der intendierten Anwendungen auch um tatsächliche Modelle aus $M(T)$ handelt.
3. Wenn diese letzte empirische These gültig in Bezug auf die empirische Prüfung ist, kann man davon sprechen, dass das Theorie-Element T erfolgreich auf die intendierten Anwendungen $I(T)$ angewendet wurde.

Dieser Einbezug intendierter Anwendungen $I(T)$ als integraler Bestandteil der Theorie und damit wichtigen Aspekt der Rekonstruktion solcher Theorien kennzeichnet die vorgeschlagene Methode der strukturalistischen Rekonstruktion und unterscheidet sie von anderen möglichen Beschreibungen von Theorien durch Wissenschaftstheoretiker*innen (Balzer et al., 1987, S. 37). Auch in empirischen Theorien, dargelegt in Form von Fachbüchern (Balzer et al., 1987, S. 68), bleiben solche intendierten Anwendungen oft eher implizit⁹² (Balzer et al., 1987, S. 38). Die Entscheidung für die Integration der intendierten Anwendungen I in

only reasonable on the basis of general considerations, it also is backed by studying how scientists talk and how they argue in the context of an ‘application’ of a theory.“

(Balzer et al., 1987, S. 86)

⁹² Die in dieser Arbeit besprochenen Werke von Kolmogoroff (1933) und von Mises (1931) sind für diese These klare Gegenbeispiele, da sie explizit die Anwendbarkeit und damit auch bestimmte Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bzw. Wahrscheinlichkeitstheorie, thematisieren. Kolmogoroff schließt die Anwendungen dabei explizit aus seiner mathematischen Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus (vgl. Fußnote Kolmogoroff 1933, S. 2), wohingegen von Mises die empirischen Grundlagen seiner „neuen Auffassung“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Naturwissenschaft stets betont und den Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung als spezifische „Massenerscheinungen und Wiederholungsvorgänge“ identifiziert (Mises 1931, S. 7–9). Genau diese Besonderheit beider Werke, die intendierten Anwendungen explizit (nicht) in ihre Theorien der Wahrscheinlichkeitsrechnung einzubeziehen, hat zu ihrer Auswahl als Quellen im Rahmen dieser Arbeit und für das ÜberPro_WR Seminar geführt.

die „Identität“ einer Theorie begründen Balzer et al. (1987, S. 38) so vehement wie logisch:

„We [Balzer et al., Anm. G.S.] consider this concept to be a part of the identity of a theory because without it we would not even know whether we are dealing with an empirical theory at all.“

(Balzer et al., 1987, S. 38)

Die Konstruktion der Klasse der intendierten Anwendungen I erfolgt dabei zum einen durch die von Balzer et al. (1987, S. 88–89) beschriebene „paradigmatische Methode“:

1. Es werden bestimmte „grundlegende Beispiele“ (engl. „core examples“) von Anwendungsfällen der Theorie identifiziert.
2. Nach und nach wird darauf aufbauend intuitiv die Klasse der intendierten Anwendungen I durch zu den grundlegenden Beispielen analogen Beispielen erweitert.

Zum anderen kann auch die „Methode der Autodetermination“ verwendet werden, um die Klasse der intendierten Anwendungen I zu konstruieren. Hierbei wird der Formalismus der Theorie verwendet, um bestimmte mögliche Anwendungsfälle auszuschließen oder mit einzubeziehen, bspw. durch Prüfung des nötigen Begriffsrahmens für die Anwendung. Die Kombination und Verwendung dieser Methoden sind ein Teil dessen, was Balzer et al. (1987, S. 39) mit Rückgriff auf Kuhns Konzept als normalwissenschaftliche Entwicklung einer wissenschaftlichen Theorie bezeichnen⁹³. Diese Methode macht sich folgende formalisierte Eigenschaft der intendierten Anwendungen I zu Nutze:

Definition 8: I ist nur dann eine Menge *intendierter Anwendungen* von K , wenn

- (1) $K = \langle M_p, M, M_{pp}, GC, CL \rangle$ ist ein Theorie-Kern
- (2) $I \subseteq M_{pp}$

⁹³ Dieser Aspekt wird besondere Wichtigkeit bei der Identifikation von Auffassungswechseln 5.3 einnehmen, in dem diese u.a. dadurch rekonstruiert werden, dass das bisherige Wissen, in Form einer SEB-spezifischen Theorie nicht mehr bestimmte Phänomene zu beschreiben oder zu erklären. Dies erfordert eine Neukonstruktion von SEB'en oder die Aktivierung anderer SEB'e.

Zuletzt ist es lohnenswert zu bemerken, was der Gehalt eines Theorie-Elements $Cn(K)$ ist (Balzer et al., 1987, S. xxiv, 85). Dieser ist die Klasse aller Zusammenfassungen von partiell potentiellen Modellen, die so durch theoretische Begriffe ergänzt werden können, dass sie das fundamental Gesetz des Theorie-Elements, die Beschränkungen der potentiellen Modelle (engl. constraints) und die geforderten intertheoretischen Links L erfüllen. Daher ist klar, dass der Gehalt eines Theorie-Elements somit eine Teilmenge der Potenzmenge der partiell potentiellen Modelle $Cn(K) \subset \mathcal{P}(M_{pp}(T))$ sein muss. Ob intendierte Anwendungen zum Gehalt der Theorie gehören oder nicht, ist dabei aufgrund der informellen Semantik nicht direkt anhand der Struktur der Theorie feststellbar. Balzer et al. (1987, S. 91, 92) beschreiben zwei Fälle, in denen die empirische Behauptung falsch ist, bzw. trivialerweise korrekt, in denen also die Theorie T empirisch gehaltlos ist. Der erste Fall tritt ein, wenn die Theorie T inkonsistent ist. Dann gilt logischerweise für den Gehalt der Theorie $Cn(K) = \emptyset$ ⁹⁴, entsprechend kann auch keine intendierte Anwendung zur Theorie gehören, da die empirische Behauptung der Theorie sein würde, dass die intendierten Anwendungen ein Teil des Gehalts der Theorie wären ($I \in Cn(K)$). Auf der anderen Seite würde laut Balzer et al. (1987, S. 91) die Theorie T trivial sein, wenn $Cn(K) = \mathcal{P}(M_{pp})$, da dann jede theoretische Erweiterung eines partiell potentiellen Modells trivialer Weise eine intendierte Anwendung wäre. Auch dann sprechen Balzer et al. (1987, S. 92) davon, dass die Theorie empirisch gehaltlos ist.

4.4.2.2 Theorie-Netze

Komplexere oder umfassendere Theorien können mithilfe von Theorienetzen beschrieben werden, die durch intertheoretische Verbindungen auf spezifische Weise verbunden sind (Balzer et al., 1987, S. 36). Dies wurde bereits im Rahmen der Beschreibung von Theoriekernen deutlich. Die Einführung eines solchen Konzepts ist deshalb angebracht, da der Begriff der Theorie auf verschiedene Weisen und mit verschiedenen Begriffsumfängen verstanden und verwendet wird. Im Besonderen ist das Konzept aber auch nützlich um Theorieentwicklungen, bspw. im Verlauf der Zeit, darzustellen. In dieser Arbeit wird es genau für diese Fälle betrachtet, nämlich übergeordnete subjektive Erfahrungsbereiche darzustellen, die Theorie-Elemente aus verschiedenen Erfahrungsbereichen zu

⁹⁴ Hierbei wird vorausgesetzt, dass keine logisch widersprüchlichen Tatsachen in der empirischen Welt auftreten können. Dies ist eine weit verbreitete Position und daher nicht besonders merkwürdig. Wichtig ist allerdings festzustellen, dass auch Balzer et al. (1987) diese Position vertreten.

verbinden oder einen reflektierenden Vergleich dieser Theorie-Elemente zuzulassen.

Einen Sonderfall einer solchen Verbindung zweier Theorie-Elemente innerhalb eines Theorie-Netzes bildet die *Spezialisierungsrelation* σ . Diese besagt, dass eine Theorie T' ein Spezialfall einer Theorie T ist und dann nur einen Teil der intendierten Anwendungen sowie von Modellen aufgrund bestimmter Restriktionen im Fundamentalgesetz enthält. Entsprechend formalisieren Balzer et al. (1987, S. 170) die *Spezialisierung* und damit die *Spezialisierungsrelation* folgendermaßen mithilfe mengentheoretischer Prädikate (s. Definition 9).

Definition 9: Wenn $T = \langle M_p(T), M(T), M_{pp}(T), GC(T), GL(T), I(T) \rangle$ und $T' = \langle M'_p(T'), M'(T'), M'_{pp}(T'), GC'(T'), GL'(T'), I'(T') \rangle$ Theorie-Elemente sind, dann ist T' ein Spezialfall von T (Kurzschreibweise: $T' \sigma T$) genau dann, wenn

(A) $M'_p = M_p$ und $M'_{pp} = M_{pp}$
 (B) $M' \subseteq M, GC' \subseteq GC, GL' \subseteq GL$, und $I' \subseteq I$

Basierend auf dieser Spezialisierungsrelation lassen sich nun verschiedene Strukturen von Theorie-Netzen N identifizieren (vgl. Abbildung 4), in denen Theorie-Elemente entweder Spezialisierungen besitzen oder selbst Spezialisierungen anderer Theorie-Elemente sind. Entsprechend dieser Grundüberlegung lässt sich ein Theorie-Netz mithilfe eines mengentheoretischen Prädikats nach Balzer et al. (1987, S. 172) folgendermaßen definieren (s. Definition 10):

Definition 10: N ist ein *Theorie-Netz* genau dann, wenn eine Menge \bar{T} existiert, so dass

- (1) $N = \langle \bar{T}, \sigma \rangle$
- (2) \bar{T} ist eine nichtleere Menge von Theorie-Elementen.
- (3) $\sigma \subseteq \bar{T} \times \bar{T}$ ist eine Spezialisierungsrelation beschränkt auf \bar{T} .

Anhand dieser Definition von N und $\sigma(\bar{T})$ lässt sich leicht zeigen, dass N eine durch $\sigma(\bar{T})$ partiell geordnete Menge ist (Balzer et al., 1987, S. 172). Allerdings sollten im Sinne des intuitiven Begriffsverständnisses der Spezialisierung weder unverbundene Theorie-Elemente (Abbildung 4, ii.) noch Theorie-Elemente als

Spezialisierung zweier verschiedener Theorie-Elemente (Abbildung 4, i.) im Theorie-Netz auftreten.

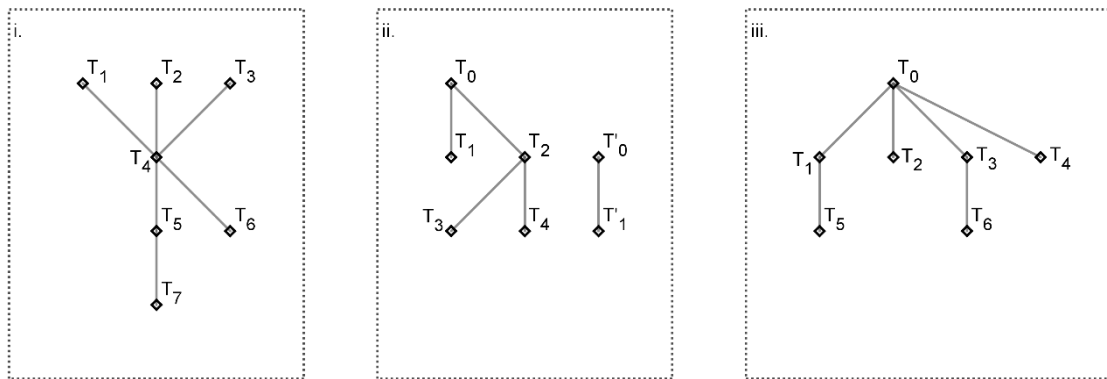


Abbildung 4: Verschiedene verbundene (i., iii.) und unverbundene (ii.) Theorie-Netze mit (iii.) oder ohne (i., ii.) Basis.

Entsprechend definieren Balzer et al. (1987, S. 173) den Begriff der *verbundenen Theorie-Netze* durch folgendes mengentheoretisches Prädikat:

Definition 11: N ist ein *verbundenes Theorie-Netz* genau dann, wenn \bar{T} und σ existieren, sodass

- (1) $N = \langle \bar{T}, \sigma \rangle$ ein Theorie-Netz ist
- (2) $\forall T_i, T_j \in \bar{T} \exists T_{k_1}, \dots, T_{k_n} \in \bar{T}$, sodass $(T_i \sigma T_{k_1} \vee T_{k_1} \sigma T_i) \wedge \dots \wedge (T_j \sigma T_{k_n} \vee T_{k_n} \sigma T_j)$

Zur Beschreibung der Eigenschaft, dass ein Theorie-Netz eine ausgezeichnete Basis hat, verwenden Balzer et al. (1987, S. 174) folgendes mengentheoretisches Prädikat:

Definition 12: Wenn N ein Theorie-Netz ist, dann ist die *Basis* des Theorie-Netzes definiert durch:

$$B(N) := \{T: T \in \bar{T} \wedge \forall T' \in \bar{T} \text{ mit } T' \neq T \text{ gilt dann nicht } T \sigma T'\}$$

Die Elemente von $B(N)$ werden *Basis-Elemente* von N genannt.

Hat ein Theorie-Netz genau eine Basis und ist es verbunden, so nennen Balzer et al. (1987, S. 175) dieses Theorie-Netz einen *Theorie-Baum*. Mit diesem Namen verweisen Sie auf analoge bereits aus der Logik und Mathematik bekannten Darstellungen, bspw. „Wahrscheinlichkeitsbäumen“. Hierbei ist nach ihrer Aussage die

Besonderheit mathematisch geprägter Wissenschaften, dass diese in der Regel eine im obigen Sinne „baumähnliche“ Struktur haben (Balzer et al., 1987, S. 176).

Eine wichtige Anwendung für die Nutzung von Theorie-Netzen in dieser Arbeit ist, dass innerhalb eines Theorie-Netztes, und damit insbesondere bei Theoriebäumen, die intendierten Anwendungen $I'(T') \subseteq I(T)$ der Spezialisierungen $T' \sigma T$ Teilmengen der intendierten Anwendung $I(T)$ der übergeordneten Theorie T sind. Ähnliche Inklusionsbeziehungen gelten auch für die Theoriekerne $K'(T') \subseteq K(T)$, wobei die Teilmengenrelation \subseteq auf die Elemente der Theoriekerne bezogen ist.

4.4.2.3 (Zeitliche) Entwicklung von Theorie-Netzen

Der Hauptgrund der Verwendung von Theorie-Netzen in dieser Arbeit liegt einerseits darin, die Vernetzung von Wissen – auch komplexeren Wissens – als Teil subjektiver Erfahrungsbereiche und damit auch von Auffassungen zu rekonstruieren. Die Mathematikdidaktik interessiert sich allerdings neben der Beschreibung und Erklärung konkreter mathematischer (Lehr- und Lern-) Gegenstände auch für die Darstellung und Erklärung von Lehr- und Lernprozesse, die die Entwicklung solchen Wissens und damit auch die Entwicklung von SEB'en und Auffassungen beschreibbar machen. In Abschnitt 4.4.3. wird ein entsprechender erkenntnistheoretisch-psychologischer Ansatz, der „theory theory“-Ansatz, vorgestellt, der Lernen als Erwerben und Weiterentwickeln von Theorien in Analogie zum Theorie-Erwerb in der Wissenschaft erklärt. Auch Balzer et al. (1987, S. 205–246) beschreiben die zeitliche Entwicklung von Theorien im Rahmen ihrer Architectonic for science, die entsprechend der Deutung von Lernen als Theorie-(weiter-)entwicklung nützliche Konzepte vorhält.

Balzer et al. (1987, S. 205) motivieren die Ergänzung des Konzepts der Theorie-Netze um eine zeitliche Komponente mit der historischen Weiterentwicklung von Theorien in den Wissenschaften und stellen fest, dass ihre bisher in dieser Arbeit dargestellte Konzeption von Theorien eher statisch zu verstehen ist. Entsprechend benennen sie das Phänomen der (Weiter-)Entwicklung von Theorien als „theory-evolution“⁹⁵, die Balzer et al. folgendermaßen beschreiben:

⁹⁵ Diese „theory-evolution“ im Strukturalismus kann aus einer enaktivistischen Perspektive als strukturelle Veränderung (vgl. Abschnitt 3.1.5) gedeutet werden. Hierbei ist die Idee, dass die Theorie trotz Veränderung eine Entität (Balzer et al., 1987, S. 205) bleibt, die im Zeitverlauf identifiziert werden kann. Analog zu den im Enaktivismus beschriebenen Veränderungen können

„Intuitively a theory-evolution is a *changing* [Herv. im Original] theory-net. More intuitively still, a theory-evolution may be visualized as a “living” net growing and/or shrinking in different directions over historical time.“

(Balzer et al., 1987, S. 205)

In ihrer „Architectonic for science“ unterscheiden Balzer et al. (1987, S. 206–210) in Anlehnung an Kuhns Kategorisierung zwischen „normalem“ wissenschaftlichen Betrieb und wissenschaftlichen Revolutionen verschiedene Arten der Veränderung von Theorien, wobei sie sich später auf Veränderungen der Theorie im Rahmen des normalwissenschaftlichen Betriebs beschränken und nicht auf historische Gründe eingehen, die zur Veränderung einer Theorie geführt haben. Die nicht abschließende Liste möglicher Veränderungen, die nicht im normalwissenschaftlichen Betrieb auftauchen, umfasst laut Balzer et al. (1987, S. 206–208):

1. Das erstmalige Auftreten eines Paradigmas im Kuhnschen Sinne. In Kuhns Terminologie handelt es sich dabei um „initial revolutions“, wenn zuvor noch kein ausgezeichneter Theorie-Kern einer wissenschaftlichen Disziplin vorhanden ist.
2. Das graduelle Auftreten eines neuen Paradigmas in einem Forschungsfeld, indem das bestehende Paradigma bereits ausgeblendet wurde und Forschung in verschiedene Richtung betrieben wurde, bis sich ein neues Paradigma herauskristallisiert.
3. Das plötzliche Auftreten eines neuen Paradigmas mit der Folge der totalen Ablehnung und des Ersatzes des bisher vorherrschenden Paradigmas. Dies bezeichnet Kuhn mit dem Begriff der „scientific revolutions“.
4. Der Wechsel von einem älteren zu einem neuen Paradigma, das Aussichten auf Erfolg hat, aber nicht alle Aspekte des alten Paradigmas ablehnt und das ältere als gute Approximation des neueren Paradigmas zulässt. Hier schlagen Balzer et al. (1987, S. 208) den Begriff der Approximation im Gegensatz zu Kuhns Begriff der Revolution vor.

Ähnlich wie bei der nicht-formalen Angabe intendierter Anwendung braucht auch die Beschreibung der diachronischen Entwicklung von Theorien gewisse Grundbegriffe, die nicht formal in ihrer Syntax und Semantik dargestellt werden

auch hier verschiedene Bereiche der strukturellen Veränderung oder Auswirkungen identifiziert werden.

können. Diese sind insbesondere für die Rekonstruktion historischer Quellen wichtig (vgl. Kapitel 6, & Kapitel 7). Die Grundbegriffe lauten:

- (A) *Historische Perioden* (Balzer et al., 1987, S. 211–212): Die historischen Perioden h_i bilden eine endliche Folge, bzw. ein geordnetes Tupel. Die erste historische Periode h_1 zu Beginn der Sequenz markiert die „Geburt“ und die letzte Periode h_n den „Tod“ einer Theorie (Balzer et al., 1987, S. 211). Je nach Rekonstruktion kann die Indizierung auch anders vorgenommen werden. Dies sollte in einer Rekonstruktion entsprechend deutlich gemacht werden. Die Sequenz der historischen Perioden $H := (h_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ wird Geschichte einer Theorie genannt. Zusätzlich bezeichnen Balzer et al. (1987, S. 211) die Menge aller historischen Perioden durch $HIST = \{h_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$. Für die Angabe historischer Perioden schlagen Balzer et al. (1987, S. 212) vor nicht zwingend eine numerische Angabe der Perioden zu machen, sondern diese vielmehr „fuzzy qualitative“ (Balzer et al., 1987, S. 212) zu unterteilen, da sie die Chronologie für die Darstellung der Entwicklung als wichtiger erachten als die Chronometrie.
- (B) *Historisch vorangehend (als Relation zwischen historischen Perioden)* (Balzer et al., 1987, S. 212–213): Entsprechend der Beschreibung der historischen Perioden, liegt es nahe, dass Balzer et al. (1987) die dyadische Relation $<\cdot$ mit der Bedeutung „historisch vorangehend“ einführen. Diese Relation ist entsprechend der alltäglichen Bedeutung antisymmetrisch und transitiv. Die Geschichte einer Theorie H ist dann die Folge, die sich aus der Verbindung der Menge der historischen Perioden einer Theorie $HIST$ und der Relation $<\cdot$ ergibt.
- (C) *Wissenschaftler*innen* (Balzer et al., 1987, S. 213): Die Beschreibung von „Wissenschaftler*innen“ durch Balzer et al. (1987, S. 213) mutet zunächst etwas merkwürdig an, da sie damit die (potentiellen) Nutzer*innen eines Theorie-Elements oder Theorie-Netztes meinen und explizit die Klasse der Wissenschaftler*innen $SOPH$ nicht als Teilmenge der Menschen auffassen, da sie ihre Definition bereits explizit auf potentielle Nutzer*innen im Bereich künstliche Intelligenz ausweiten (Balzer et al., 1987, S. 213)⁹⁶.

⁹⁶ Heute ist diese Offenheit der Definition noch zweckmäßiger, da künstliche Intelligenz mittlerweile im Rahmen von Big Data Analysen einige Aufgaben von menschlichen Wissenschaftler*innen, gerade im Bereich Wissensmanagement, übernehmen, was unter anderem an der großen Masse von Wissen liegt, dass die Menschheit generiert hat und stetig fortentwickelt. Das aktuell

(D) *Wissenschaftliche Gemeinschaften und Wissenschaftliche Generationen* (Balzer et al. 1987, S. 213–215): Wissenschaftliche Gemeinschaften sind Teilmengen der Menge der Wissenschaftler*innen *SOPH* mit folgenden Eigenschaften:

1. Eine wissenschaftliche Gemeinschaft *SC* besteht im Allgemeinen länger als die aktive Arbeitszeit jedes einzelnen Mitglieds der wissenschaftlichen Gemeinschaft.
2. Die Grenzen einer wissenschaftlichen Gemeinschaft *SC* sind ebenso „fuzzy“ wie die Grenzen historischer Perioden h_i . Es muss nicht so sein, dass wissenschaftliche Gemeinschaften institutionalisierte Gruppen sind. Vielmehr fasst man *SC*s als zu bestimmten Theorien zugehörig auf.
3. Jede wissenschaftliche Gemeinschaft *SC* setzt sich zusammen aus (mehreren) „wissenschaftlichen Generationen“ *G*s, die ebenfalls Teilmengen von *SOPH* sind. Jede wissenschaftliche Generation *G* einer wissenschaftlichen Gemeinschaft *SC* kann einer historischen Periode h_i zugeordnet werden, oder anders ausgedrückt ist jede Periode h_i wissenschaftlich aktuell während Wissenschaftler*innen zu einer wissenschaftlichen Gemeinschaft gehören. Darauf aufbauend kann eine Funktion *g* konstruiert werden sodass, wenn *COMM* die Klasse aller wissenschaftlichen Gemeinschaften ist, *g* folgendermaßen definiert ist: $g: HIST \times COMM \rightarrow \mathcal{P}(SOPH)$. Hierbei soll *g* bijektiv sein. Jeder Wert $g(h_i, SC_j)$ von *g* ist eine wissenschaftliche Generation. Balzer et al. (1987, S. 241) schreiben dann $g(h_i, SC_j) = G_k$ und nennen *g* eine „Generationen Funktion“. Die Umkehrfunktion wird ebenfalls auf den Wertebereich von *g* festgelegt. Entsprechend gilt dann: $(g^{-1}(G))_1 = h_G$ und $(g^{-1}(G))_2 = SC_G$.
4. Die Mitglieder einer wissenschaftlichen Generation *G* kommunizieren untereinander in einer spezifischen Fachsprache („scientific language“, im Original), die sie nur innerhalb ihrer Gruppe beherrschen und die sich mehr oder weniger stark von der Alltagssprache unterscheidet. Diese Fachsprache hat eigenes Vokabular und manchmal spezifische Regeln zur Formulierung.

wohl bekannteste Beispiel für so einen Sparrings Partner für Wissenschaftler*innen ist IBMs Watson, der bereits vielfältige Analysen vornehmen kann (vgl. High, 2012).

5. Die Mitglieder einer wissenschaftlichen Generation G teilen spezifische Techniken zur Beobachtung, Klassifizierung und Systematisierung ihrer Forschungsgegenstände. In der quantitativen Forschung gehören dazu auch spezifisch Messtechniken und Geräte sowie Berechnungsmöglichkeiten zum Test von Hypothesen.

Zusätzlich zu diesen Definitionen der Basis-Begriffe zur Betrachtung von diachronischen Entwicklungen von Theorien, die relativ nah am üblichen Verständnis dieser Begriffe sind, formulieren Balzer et al. (1987, S. 215) verschiedene Umgangsweisen wissenschaftlicher Gemeinschaften und Generationen mit Theorien, die sie vertreten.

- (a) Der Begriffsteil „intendiert“ der intendierten Anwendungen ist darauf zurückzuführen, dass bestimmte wissenschaftliche Generationen G einen gegebenen Theoriekern $K(T)$ nutzen möchten, um ein Phänomen $y \in M_{pp}$ zu erklären, Voraussagen darüber zu treffen oder es zu systematisieren. Die Menge solcher $y \in M_{pp}$, die diese Bedingungen erfüllen, ist eine Teilmenge von M_{pp} und entspricht der Menge der intendierten Anwendungen I . Entsprechend kann der Begriffsteil „intendiert“ nun so verstanden werden, dass jemand, also (eine Gruppe) Wissenschaftler*innen diese intendiert.
- (b) Wenn eine wissenschaftliche Generation G ein Theorie-Element $T = \langle K(T), I(T) \rangle$, nutzt, wobei $I(T)$ die Klasse intendierter Anwendungen ist und $I_0(T)$ die Teilmenge paradigmatischer Beispiele, dann sprechen Balzer et al. (1987, S. 215) davon, dass G die Elemente von $I_0(T)$ als *paradigmatisch* für andere Elemente der Menge $I(T)$ bewertet.
- (c) Mit der Sprechweise „ G teilt Proposition p “, ist gemeint, dass der Großteil der Mitglieder aus G die Proposition als durch Testprozesse der wissenschaftlichen Gemeinschaft bestätigt erkennt.

Mithilfe dieser grundlegenden Konzepte lassen sich nun Theorie-Evolutionen (Balzer et al., 1987, S. 216) beschreiben. Hierbei geht es darum die bisherigen synchronen Strukturen in diachrone Strukturen umzuwandeln und auf wissenschaftliche Generationen oder Gemeinschaften anzuwenden. Entsprechend definieren Balzer et al. (1987, S. 216) ein diachrones Theorie-Element als mengentheoretisches Prädikat folgendermaßen (s. Definition 13):

Definition 13: Wenn g eine „Generationen Funktion“ ist, dann ist T ein *diachrones Theorie-Element* genau dann, wenn K, I, SC, h, G existieren, sodass

- (A) $T = \langle K, I, G \rangle$
- (B) $\langle K, I \rangle$ ist ein Theorie-Element
- (C) SC ist eine wissenschaftliche Gemeinschaft
- (D) h ist eine historische Periode
- (E) $g(h, SC) = G$
- (F) Die wissenschaftliche Genrartion G intendiert K auf I anzuwenden.

Darauf aufbauend definieren Balzer et al. (1987, S. 216) eine Spezialisierungsrelation (vgl. Definition 9), die entsprechend der diachronen Struktur von Theorien erweitert wird:

Definition 14: Wenn g eine „Generationen Funktion“ ist, dann ist σ_D eine *diachrone Spezialisierungsrelation* auf X_g genau dann, wenn

- (A) $X_g \neq \emptyset$ und X_g eine Menge diachroner Theorie-Elemente ist
- (B) $\sigma_D \subseteq X_g \times X_g$
- (C) $\forall T, T' \in X_g: T = \langle K, I, G \rangle \wedge T' = \langle K', I', G' \rangle \Rightarrow T' \sigma_D T$ genau dann, wenn
 - (a) $K' \sigma K$
 - (b) $I' \cap I \neq \emptyset$
 - (c) $h_G < \cdot h_{G'}$
 - (d) $SC_{G'} = SC_G$

Bei dieser Definition 14 ist klar einzusehen, dass eine diachrone Spezialisierungsrelation nicht nur eine Spezialisierungsrelation ist, die sich diachron verändert, sondern vielmehr die Entdeckungsgeschichte historischer Gemeinschaften und deren Zugang zu Spezialisierungen von Theorien darstellt.

Mithilfe dieser Spezialisierungsrelation lassen sich nun diachrone Theorie-Netze definieren, die somit – quasi lebendig – die Theorie-Entwicklung einer wissenschaftlichen Gemeinschaft und, wie ich es später als Hintergrund nutzen werde, die Entwicklung von individuellem Wissen beschreibbar macht. Balzer et al. (1987, S. 217) definieren entsprechend ein mengentheoretisches Prädikat zur Beschreibung von diachronischen Theorie-Netzen wie folgt (s. Definition 15).

Definition 15: N ist ein *diachrones Theorie-Netz* genau dann, wenn $|N|$ und σ_D existieren, sodass

- (A) $N = \langle |N|, \sigma_D \rangle$
- (B) $|N|$ ist eine Menge diachroner Theorie-Elemente
- (C) σ_D ist eine diachrone Spezialisierungsrelation auf $|N|$
- (D) $\forall T, T' \in |N|: G(T) = G(T')$

Nutzt man die Eigenschaft der Bijektivität der Funktion g , so lässt sich leicht zeigen, dass alle Theorie-Elemente des diachronen Theorie-Netzes genau einer historischen Periode h und genau einer wissenschaftlichen Gemeinschaft SC zugeordnet werden. Entsprechend definieren (Balzer et al., 1987, S. 218) ein mengentheoretisches Prädikat für die Historizität des Theorie-Netzes N .

Definition 16: Wenn N ein diachrones Theorie-Netz ist, dann kann man diesem die historische Periode h_N und die wissenschaftliche Gemeinschaft SC_N zuordnen.

So kann das diachrone Theorie-Netz als eine synchrone Struktur, also als eine Entität, betrachtet werden.

Mithilfe dieser begrifflichen Vorarbeiten lässt sich nun die Abfolge von Theorie-Netzen, sowie die Theorien-Evolution beschreiben. Hierzu definieren Balzer et al. (1987, S. 218) zunächst den Begriff der direkten Nachfolge von Theorie-Netzen, welcher der umgangssprachlichen Bedeutung sehr nahe ist.

Definition 17: Wenn N, N' Theorien-Netze sind, dann folgt N' direkt auf N genau dann, wenn

- (A) $N \neq N'$
- (B) $SC_N = SC_{N'}$
- (C) $h_N < \cdot h_{N'}$
- (D) $\nexists N_i$:
 - (a) $N_i \neq N \wedge N_i \neq N'$
 - (b) $SC_{N_i} = SC_N$
 - (c) $h_N < \cdot h_{N_i} < \cdot h_{N'}$

Die Definition der Theorien-Evolution E ergibt sich daraus wie folgt (Balzer et al., 1987, S. 218)

Definition 18: E ist eine *Theorien-Evolution* genau dann, wenn E eine endliche Folge $(N)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ von Theorie-Netzen ist, sodass für alle $N_i, N_{i+1} \in (N)_{i \in \{0, \dots, n\}}$:

- (A) N_{i+1} folgt direkt auf N_i
 (B) $\forall T_{i+1} \in |N_{i+1}| \exists T_i \in |N_i|$, sodass $T_{i+1} \sigma_D T_i$

Es ist lohnenswert verschiedene Theorien-Evolutionen danach zu klassifizieren, ob ihr Anwendungsbereich durch die Theorienevolution vergrößert wird. Dabei ist wichtig zu klären, was es bedeutet, dass der Anwendungsbereich vergrößert wird. Von einem Fortschritt in der Theorienbildung wird üblicherweise dann gesprochen, wenn die nachfolgende Theorie einen größeren Anwendungsbereich hat als die vorangehende und diese neuen Anwendungen auch als solche im Rahmen der Theorie bestätigt werden können. Entsprechend zerlegen Balzer et al. (1987, S. 218–221) die Menge der intendierten Anwendungen $I = F(I) \cup A(I)$ in zwei disjunkte Mengen, den „Bereich der bestätigten Anwendungen“ $F(I)$ und den „Bereich der vermuteten Anwendungen“ $A(I)$ ⁹⁷. Bei dieser Aufteilung der intendierten Anwendung ist wichtig zu beachten, dass diese Unterteilung abhängig von der historischen Periode und der wissenschaftlichen Gemeinschaft ist, die die Theorie auf verschiedene Phänomene anwendet oder dies zumindest intendiert. Basierend auf dieser Unterteilung definieren Balzer et al. (1987, S. 221–223) progressive, perfekte und Kuhnsche (Paradigmen-geleitete) Theorie-Evolutionen.

Definition 19:

- (A) Wenn E eine Theorien-Evolution ist, dann ist E eine *progressive* Theorien-Evolution genau dann, wenn $\forall N_i, N_j \in E$ und $i < j$ folgt, dass $F(I(N_i)) \subseteq F(I(N_j))$
 (B) Wenn E eine progressive Theorien-Evolution ist, dann ist E eine *perfekte* Theorien-Evolution genau dann, wenn $\forall N_i \in E \exists N_j \in E: i \leq j \wedge A(I(N_i)) \subseteq F(I(N_j))$

⁹⁷ Die Nutzung der Kürzel $F(I)$ und $A(I)$ basiert auf den englischen Termini „(con)firmed“ für bestätigt und „assumed“ für vermutet.

Definition 20:

- (A) Wenn E eine Theorien-Evolution ist, $K_0 = \langle M_p^0, M^0, M_{pp}^0, GC^0, GL^0 \rangle$ ein Kern eines Theorie-Elements ist und $I_0 \subseteq M_{pp}^0$, dann ist $\langle K_0, I_0 \rangle$ ein *Kuhnsches Paradigma* für E genau dann, wenn
- $$\forall N \in E \wedge \forall T_i = \langle K_i, I_i, G_i \rangle \in |N|,$$
- (a) K_i eine Kern-Spezialisierung von K_0 ist,
 (b) I_0 als paradigmatische Menge für I_i von G_i angesehen wird.
- (B) Wenn E eine Theorien-Evolution ist, dann ist E eine *Kuhnsche (Paradigmen-geleitete) Theorien-Evolution* genau dann, wenn K_0 und I_0 existieren, sodass $\langle K_0, I_0 \rangle$ ein Kuhnsches Paradigma für E ist.

Als Spezialfall identifizieren Balzer et al. (1987, S. 223) noch die *Kuhnsche Theorien-Evolution im strengen Sinne*. Hierbei wird zusätzlich gefordert, dass alle in der Theorien-Evolution vorkommenden Netze Theorie-Bäume sind. Laut Balzer et al. (1987, S. 223) passt diese Definition eher zu dem, was Kuhn intuitiv unter einer Fortentwicklung von Theorien im normalwissenschaftlichen Sinne verstanden hat. Dies stimmt insofern, als das Kuhn von wissenschaftlicher Theorie-Entwicklung spricht, deren Theorien in der Regel eine baumähnliche Struktur haben (vgl. Abbildung 4).

Definition 21: Wenn E eine Kuhnsche (Paradigmen-geleitete) Theorien-Evolution ist, dann ist E eine *Kuhnsche Theorien-Evolution im strengen Sinne*, genau dann, wenn Alle $N \in E$ Theorien-Bäume sind.

Balzer et al. (1987) diskutieren und formalisieren in ihrem Werk „An Architectonic for Science“ außerdem den approximativen Charakter von Theorien und die globale Struktur von Wissenschaft im Allgemeinen, insbesondere unter einem formaleren Verständnis intertheoretischer Verbindungen. Im Rahmen dieser Arbeit ist allerdings das in diesem Abschnitt dargestellte Begriffsgerüst ausreichend um das Element Wissen der subjektiven Erfahrungsbereiche und dessen Weiterentwicklung zu beschreiben und zu diskutieren. Entsprechend wird für die Diskussion des approximativen Charakters und der globalen Struktur von Wissenschaftlichen Theorien auf Balzer et al. (1987) verwiesen.

4.4.3 Ontogenese von Wissen im Sinne des „theory theory“-Ansatzes:

Eine psychologisch-erkenntnistheoretische Beschreibung von Wissensbildung

Balzer et al. (1987, S. xvii, 423) verstehen unter ihrem strukturalistischen Theorienkonzept eine Methode Theorien und dessen Entwicklung zu rekonstruieren und stellen klar, dass sie keine generelle epistemologische Theorie anbieten und nicht versuchen „empirisches Wissen“ zu definieren. Dies wird besonders deutlich an ihrer Methode, intendierte Anwendung pragmatisch über paradigmatische Anwendungen und deren Ähnlichkeit zu weiteren Anwendungen zu identifizieren, die in ihren Worten „fuzzy“ bleibt. Dementsprechend stellt sich die Frage, inwiefern dieser Ansatz fruchtbar für die Beschreibung von subjektivem Wissen und dessen Entwicklung sein kann. Der „theory theory“-Ansatz von Gopnik und Meltzoff (1997) als erkenntnistheoretisch-psychologischer Ansatz kann hier eine Brücke zwischen wissenschaftlichen Theorien und individuellem Wissen sowie ihren Entwicklungen schlagen.

Dieser „theory theory“-Ansatz wurde bereits als Argument für die Nutzung der Rekonstruktion im Rahmen des strukturalistischen Theorienkonzepts in verschiedenen mathematikdidaktischen Arbeiten (Burscheid & Struve, 2014; Schlicht, 2016) genutzt. Eine ausführliche Darstellung des „theory theory“-Ansatzes insbesondere für die Entwicklung von Kindern im (Vor-)Schulalter findet sich in Schlicht (2016, S. 35–47). Entsprechend sollen hier, wie auch im Abschnitt zur Rekonstruktion mithilfe des strukturalistischen Theorien-Konzepts, nur die Kernideen wiedergegeben werden, wie sie zur Begründung der Nutzung der Rekonstruktion mithilfe des strukturalistischen Theorienkonzepts zweckmäßig sind.

Die Entscheidung für die Verwendung des „theory theory“-Ansatzes in dieser Arbeit ist unter anderem darin begründet, dass der These von Burscheid und Struve (2010, S. 38) für das Lernen von, insbesondere deklarativem, Wissen gefolgt⁹⁸ wird:

„Lernen [von Wissens-elementen; Einfügung G.S.] bedeutet das Konstruieren von Theorien für das adäquate Erfassen gewisser

⁹⁸ Allerdings wird in dieser Arbeit die Ansicht vertreten, dass diese These für jegliches Lernen von (deklarativen) Wissens-elementen gerade in der Mathematik gilt. Das bedeutet auch, dass es keine bestimmten Altersgrenzen oder Lebensphasen gibt, in denen die Wissenskonstruktion anders verläuft. Burscheid und Struve (2010, S. 38) grenzen diese These allerdings auf das Lernen von Mathematik in der Schule ein.

Phänomene. Dieses kann grundsätzlich auf verschiedene Arten geschehen, ist also durch die Phänomene keineswegs determiniert.“

(Burscheid & Struve, 2010, S. 38)

Zur Erläuterung dieser These verweisen Burscheid und Struve (2010, S. 39) auf Gopnik und Meltzoff (1997), die auch an dieser Stelle die Grundlage für die kurze Darstellung des „theory theory“-Ansatzes bilden soll, da Gopnik maßgeblich die (Weiter-)Entwicklung dieser kognitionspsychologisch-erkenntnistheoretischen Theorie in Zusammenarbeit mit wechselnden Kooperationspartnern angestoßen und weiterverfolgt hat.

Den Ausgangspunkt von Gopniks und Meltzoffs Arbeit bildet ein Rückgriff auf das alte philosophische Problem, auf welche Weise man „abstrakte Begriffe/Dinge“ wie bspw. „Tapferkeit“ auf der Basis empirischen Empfindens⁹⁹ lernen kann. Sokrates, dem die Behandlung dieses Problems zugeschrieben wird, und andere Denker*innen, die dem Rationalismus zugeschrieben werden können, u.a. Chomsky, lösen dieses Problem, indem sie die Annahme treffen, solche „abstrakten Strukturen“¹⁰⁰ (Gopnik & Meltzoff, 1997, S. 1) lägen primitiv im Geist von Menschen vor. Empiristen, wie Aristoteles oder die positivistische Schule, nehmen dagegen an, dass entweder im Laufe des Lernprozesses solche abstrakten Strukturen gebildet werden können oder dass es keinen „Weg“¹⁰¹ zu solchen „abstrakten Strukturen“ gibt. Im Spannungsfeld dieser Ansichten legen Gopnik und Meltzoff (1997, S. 3) die Grundpositionen des „theory theory“-Ansatzes vor:

„The central idea of this theory is that the processes of cognitive development in children are similar to, indeed perhaps even identical with, the processes of cognitive development in scientist. Scientific theory change is, after all, one of the clearest examples we

⁹⁹ Gopnik und Meltzoff (1997, S. 1) sprechen hier im Englischen von „sensory-experience“. Im Rahmen dieser Arbeit kann dies mit dem Begriff des empirischen Empfindens beschrieben werden.

¹⁰⁰ Auch Gopnik und Meltzoff verwenden an der angegebenen Stelle das Konzept von (abstrakten) Strukturen, insofern ist die Passung der bisher gegebenen Theorien, insbes. hinsichtlich der enaktivistischen Einbettung, gegeben (vgl. 3.1.5, 4.4.2).

¹⁰¹ Meiner Ansicht nach gibt es keine solchen abstrakten Strukturen im Sinne der Rationalisten und ebenso keinen Weg zu diesen im Sinne der Empiristen. Die „Abstraktion“ von Strukturen ist vielmehr ein Kennzeichen der eigenen Auffassung, bzw. Einstellung, gegenüber bestimmten Wissens-elementen. Und zwar die Loslösung empirisch intendierter Anwendungen und damit einer wesentlich breiteren Anwendungsmöglichkeit bzw. Möglichkeit der Verknüpfung von Wissen (vgl. 5.2).

know of the derivation of genuinely new abstract and complex representations of the world from experience¹⁰². The model of scientific change might begin to lead to answers to the developmental questions, and more broadly, might begin to answer Socrates' philosophical question."

(Gopnik & Meltzoff, 1997, S. 3)

In ihrer Einleitung zum ersten Kapitel formulieren Gopnik und Meltzoff (1997, S. 11) diese Grundposition noch schärfer. Und zwar, dass die konzeptuellen Strukturen von Kindern, wie die von Wissenschaftler*innen, Theorien sind und deren konzeptuelle Entwicklung mit der Entwicklung von Theorien im wissenschaftlichen Kontext vergleichbar ist. Insbesondere stellen sie aber, ähnlich zur Semantik von Theorien bei Balzer et al. (1987), fest, dass auch die semantische Entwicklung konzeptueller Strukturen von den zugrundeliegenden Theorien abhängt.

Diese Grundposition wird nicht nur rein theoretisch vertreten, sondern an einer Reihe von experimentellen Studien angewendet (Gopnik & Meltzoff, 1997, S. 3). Besonders illustrativ ist das Beispiel von Alisson, die den Begriff „allgone“ in Kontexten anwendet, in denen etwas verschwunden ist, was wiederum bedeutet, dass während des Sprechakts kein empirisches Referenzobjekt vorliegt. Man könnte davon sprechen, dass Alisson damit ein Prozessende bezeichnet (Gopnik & Meltzoff, 1997, S. 4–5).

Ein weiteres Auszeichnungsmerkmal des „theory theory“-Ansatzes ist die Verwobenheit zwischen der semantischen und kognitiven Entwicklung von Kindern, die von Gopnik und Meltzoff (1997, S. 8) als bidirektional identifiziert wird, insofern die frühen Bedeutungszuweisungen von Kindern ein gemeinsames Produkt ihrer eigenen kognitiven Verarbeitung und kognitiven Strukturen sind, die bereits von Erwachsenen entwickelt und auch tradiert werden¹⁰³.

Bei dieser Verwobenheit stellen Gopnik und Meltzoff (1997, S. 17) als Kognitionswissenschaftler*innen trotzdem die kognitiven Fähigkeiten derjenigen in den Vordergrund, die Erkenntnisse in irgendeiner Weise generieren. Somit kommen

¹⁰² Vgl. hier die Argumente für die Nutzung der Methode der strukturalistischen Rekonstruktion (vgl. 4.4.1)

¹⁰³ Entsprechend der enaktivistischen Grundlegung kann auch hier von der strukturellen Koppelung der kognitiven Strukturen der Kinder und der kognitiven Strukturen Erwachsener, also bestimmter Bezugspersonen, einer sozialen Gruppe oder Kultur gesprochen werden.

sie, auch in Abgrenzung zu anderen Formen der Rekonstruktion wissenschaftlicher Aktivität, wie etwa einer soziologischen, zu einer Antwort, warum die Wissenschaft „korrektes Wissen“ im Sinne von in der Realität anwendbarem Wissen erzeugen kann. Ihre Antwort lautet, aufgrund der Tatsache, dass die Wissenschaft – per Wissenschaftler*in – „psychological devices“ (Gopnik & Meltzoff, 1997, S. 17) nutzt, die aufgrund der evolutionären Entwicklung der Wissenschaftstreibenden dazu geschaffen wurden, korrekte Annahmen, Aussagen und Folgerungen in Bezug auf ihre Umwelt zu ermöglichen¹⁰⁴.

Das Theorie Konzept, das dem „theory theory“-Ansatz zu Grunde liegt ist dabei relativ weit, insofern es verschiedene Konzeptionen von Theorien im Rahmen der Wissenschaftstheorie zulässt. Wichtiger als mögliche Rekonstruktionsarten, bspw. einer Rekonstruktion durch Statements oder Modelle (vgl. 4.4.1), sind für Gopnik und Meltzoff (1997, S. 34–41) strukturelle, funktionale und dynamische Eigenschaften von Theorien. Diese werden angemessen mit dem strukturalistischen Theorienkonzept erfasst. Ähnlich zur strukturalistischen Rekonstruktion fordern Gopnik und Meltzoff (1997, S. 35) als strukturelle Eigenschaften von Theorien die Kohärenz und die ontologische Bindung von Theorien. Zusätzliche Eigenschaften sollen aber auch durch die „Abstraktheit“ solcher Theorien gegeben werden. Diese Eigenschaft kann mithilfe theoretischer Terme beschrieben werden, wobei die Deutung dieser Beschreibung von Eigenschaften eher im Sinne eines Unterschieds zur Beobachtungssprache vorgenommen wird. Eine weitere Eigenschaft, die von Gopnik und Meltzoff gefordert wird, ist die Annahme von kausalen Relationen innerhalb einer Theorie, die gewisse Regelmäßigkeiten in Daten erzeugt. Unter den funktionalen Eigenschaften von Theorien verstehen Gopnik und Meltzoff die Möglichkeit auf der Basis von Theorien Vorhersagen und Interpretationen vorzunehmen sowie Erklärungen für Phänomene zu geben. Dabei meinen Gopnik und Meltzoff mit Vorhersagbarkeit die Offenheit der

¹⁰⁴ Gopnik und Meltzoff (1997) diskutieren in diesem Zusammenhang auch die Frage, inwiefern künstliche Intelligenz Wissenschaft treiben kann und verweisen dazu auf die Beobachtung des menschlichen Wissenschaftsbetriebs. Meiner Ansicht nach ist dieser Transfer einerseits sehr leicht, andererseits hoch problematisch. Er ist zunächst sehr leicht, da auch die künstlichen Mittel, also Maschinen zur Erfassung der Umwelt, ebenfalls evolutionären Prozessen unterworfen sind. Ein einfaches Beispiel zur Illustration ist die historische Genese der Modelle zum Atomaufbau von Thomson über Rutherford und Bohr bis zur modernen Teilchenphysik, die maßgeblich von der Evolution der genutzten Messtechnik abhing. Auf der anderen Seite ist die Übertragung, insbesondere der Vergleich mit menschlicher Wissenschaftstätigkeit schwierig, da sich die Umwelten und insbesondere der Zugriff auf Umwelten durch künstliche Intelligenz stark von menschlichen Umwelten und Zugängen unterscheiden, zumindest bisher.

Menge von intendierten Anwendungen, also die Eigenschaft von Theorien über primär intendierte Anwendungsszenarien hinaus Anwendungen zu finden. Über diese Eigenschaft Voraussagen zu machen, unterscheidet Theorien von empirischen Generalisierungen, was von Gopnik und Meltzoff (1997, S. 36) am Beispiel der frühen Astronomie, der Beschreibung der Bewegung von Planeten, aber nicht deren Ursache, illustriert wird. Unter den funktionalen Eigenschaften der Interpretation verstehen Gopnik und Meltzoff (1997, S. 37) die Entscheidungsfähigkeit auf der Basis von Theorien Belege für Theorien von Störfaktoren loszulösen. Zuletzt erklären Gopnik und Meltzoff (1997, S. 38) die Eigenschaft der Entwicklung einer Erklärung durch folgende Vermutung:

„It may be that what we mean by saying that we’ve explain something is simply that we can give an abstract, coherent, causal account of it.“

(Gopnik & Meltzoff, 1997, S. 38)

Zu den dynamischen Eigenschaften von Theorien gehört, dass sie verworfen oder verbessert werden können (vgl. 4.4). Solche Theoriwechsel (vgl. 4.4.2.3), wie sie unter anderem von Kuhn (1984) beschrieben und klassifiziert wurden, machen Theorien überhaupt erst zu möglichen Kandidaten zur Beschreibung kognitiver Entwicklung und unterscheidbar von Klassifikationen und Schemata (Gopnik & Meltzoff, 1997, S. 39).

Zur Beschreibung kognitiven Verhaltens durch Theorien verweisen Gopnik und Meltzoff (1997, S. 39–40) auf typische Tätigkeiten, die Wissenschaftler*innen und – entsprechend der Annahme des „theory theory“-Ansatzes – auch andere Menschen mit (Eigen-)Theorien durchführen. Dazu gehören die Prüfung von Theorien durch Experimente¹⁰⁵, die Einführung von Hilfhypothesen zur Rettung einer bestehenden Theorie, sowie die Anwendung einer neuen Theorie und damit die Prüfung des Anwendungsbereichs.

Eine wichtige Frage der Erkenntnistheorie, auf die auch der „theory theory“-Ansatz eine Antwort geben sollte, ist, auf welcher Basis Wissen entsteht, bzw. was

¹⁰⁵ An dieser Stelle ist unter dem Experiment ein sehr weiter Begriff zu verstehen. Eine andere Möglichkeit wäre der Begriff der „Anwendung von Theorien“. Die Nutzung des Experiment Begriffs von Gopnik und Meltzoff scheint aber daher zu rühren, dass im typischen Sprachgebrauch der Begriff „Anwendung der Theorie“ in einem gewissen Sinne impliziert, dass die Anwendung auch erfolgreich ist. Wenn eine Theorie durch ein Experiment verworfen werden soll, sollte das Ergebnis des Experiments im Widerspruch zu den Voraussagen der Theorie stehen.

den Ausgangspunkt solcher Theorien bildet. Gopnik und Meltzoff (1997, S. 128) gehen davon aus, dass jedes Kind bei der Geburt initiale Theorie-ähnliche Strukturen besitzt. Dies könnte man auch mit dem Begriff „Grundausstattung zur Theoriebildung“ bezeichnen. Dieser evolutionäre Ansatz ist auch aus enaktivistischer Perspektive gerechtfertigt. Die Indizien für das Vorliegen einer solchen „Grundausstattung zur Theoriebildung“ sind kognitionspsychologische Studien mit Kleinkindern, deren Verhalten auch ohne Sprechakte auf solche theoriebildenden Tätigkeiten hinweisen (Gopnik, 2012). Zu dieser Grundausstattung gehören neben den dynamischen und funktionalen Eigenschaften der Theorien, die schon für initiale Theorien gelten, auch die Grundannahme, dass andere Menschen auf ähnliche Weise Denken und die Welt wie man selbst erleben, sowie die Fähigkeit verschiedene Sinneseindrücke auch von verschiedenen Sinnesinstrumenten miteinander zu verknüpfen. Gerade die letztgenannte Fähigkeit hängt eng mit der Möglichkeit der Imitation zusammen, die Menschen sowohl als Kind wie auch später als Erwachsener zu einem so erfolgreichen Lerner macht.

Natürlich stellen Gopnik und Meltzoff (1997, S. 49) andere Theorien zur Beschreibung kognitiver Entwicklung nicht grundsätzlich in Frage. Ihre empirischen Belege können aber zeigen, dass der „theory theory“-Ansatz tragfähig zur Beschreibung der kognitiven Entwicklung und deren Basis auch im präsprachlichen Bereich sinnvoll angewandt werden kann, und insbesondere erkenntnistheoretische Prozesse im Zusammenspiel von Wissen und Erfahrung in Form von Theorien beschreibbar und damit entsprechend des vorherigen Abschnitts auch rekonstruierbar sind.

4.5 Konsequente Anwendung des SEB-Konzepts im „Fall Deborah“

Als Abschluss der Darstellung der Konzeption der subjektiven Erfahrungsbereiche mit besonderem Fokus auf das spezifische Element des Wissens und dessen Rekonstruktionsmöglichkeiten mithilfe des strukturalistischen Theorienkonzepts soll nun das Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche am bereits bekannten Beispiel von Deborah angewendet werden.

In diesem kurzen Interview lassen sich neun *methodisch-fragmentarische* subjektive Erfahrungsbereiche rekonstruieren. Diese ergeben sich per Definition anhand der Struktur der Quelle. In diesem Fall einer Einleitung, vier Turns (Sprecherwechsel) zum Interviewer und vier Turns zu Deborah. Anhand der nachfolgenden Rekonstruktion wird sich zeigen lassen, dass aber eher von drei bis fünf

subjektiven Erfahrungsbereichen auszugehen ist, die hier *methodisch-übergeordnet* genannt werden. Diese ergeben sich durch die vom Subjekt explizierten Bezüge oder inhaltlichen Bezügen zwischen den identifizierten methodisch-fragmentarischen subjektiven Erfahrungsbereichen¹⁰⁶.

Tabelle 4: (Ginsburg 1977, S. 150, zit. nach Bauersfeld, 1983)

1	Die neuneinhalbjährige Deborah führt auf dem Papier eine schriftliche	
2	Addition aus (nebenstehend). Sie beschreibt recht genau, wie die Rech-	
3	nung ausgeführt wird: Die 3 und die 5 zusammenzählen und dann die 1	
4	und die 1.“ Der Interviewer fragt ergänzend:	
5	„I: Wofür stehen die zwei Einsen?“	13
6	D: Zwei.	+15
7	I: Aber da sind keine ‚zwei‘, da ist 28.	28
8	D: Da sind zwei Einsen hier und man zählt sie zusammen.	
9	I: Aber für was stehen die Einsen?	
10	D: Wie meinen Sie das? Für 13 und 15.	
11	I: Eins steht für 13?	
12	D: Ich verstehe nicht, was Sie meinen.“	

In der Einleitung wird Deborahs Lösung der Additionsaufgabe als schriftliche Addition klassifiziert, die sie durchführt und erläutert (vgl. Z. 1–4). Da diese Aktivität als kohärent beschrieben wird, ist davon auszugehen, dass sie innerhalb eines gefestigten subjektiven Erfahrungsbereich von Deborah passiert. Zur einfacheren Referenz wird dieser subjektive Erfahrungsbereich SEB_{D1} genannt. Dieser umfasst als spezifisches Element zumindest prozedurales Wissen in Bezug auf die Durchführung (Z. 1–2) und Beschreibung (Z. 2–4) schriftlicher Additionen.

Auch der Interviewer, der sich nach der Durchführung der Rechnung zu Wort meldet hat einen SEB, hier mit SEB_{I1} bezeichnet, aktiviert und fragt nach der Bedeutung der „Einsen“ in ihrer Rechnung. Hierbei ist noch nicht klar, welches spezifische Element eines SEB'es bei Deborah angesprochen werden soll, bzw. welches er anspricht. Mögliche Interpretationen sind, dass er sich auf Wissen oder prozedurales Wissen bezieht, das sich auf den Kontext des Zahlbegriffs („Eins ist die kleinste natürliche Zahl“, „Zahlen werden durch Ziffern in einem Stellen-

¹⁰⁶ Beiden Begriffen wird das Wort „methodisch“ vorgesetzt, da es sich natürlich nicht um die im Subjekt vorliegenden subjektiven Erfahrungsbereiche handelt, sondern um die rekonstruierten. Wie in Abschnitt 4.3.2 erläutert ist eigentlich nur eine Abgrenzung zwischen subjektiven Erfahrungsbereichen erkennbar, die einen Bruch im Verhalten oder der Interaktion des Subjekts zeigen, oder eine Verbindung von SEB, wenn diese Verbindung vom Subjekt expliziert wird.

wertssystem dargestellt“, ...) oder der Addition (stellenweises Addieren, Teilsummenbildung, ...) bezieht. Außerdem könnte dieser (in einem anderen Kontext, mit einem anderen Gesprächspartner) eine Diskussion über den mathematischen Habitus der Interaktionspartner initiieren (ontologischer Status der Einsen, symbolischer Umgang mit Einsen im Additionsverfahren, ...).

Deborah antwortet, innerhalb ihres SEB_{D1} , konsistent mit dem Wort „Zwei“, welche das Ergebnis der schriftlichen stellenweisen Addition ist, was somit die Rolle der Einsen im schriftlichen Additionsprozess deutlich macht, also prozedurales Wissen über den Umgang mit den Ziffern im schriftlichen Algorithmus indiziert.

Der Interviewer bezieht sich direkt auf die Aussage von Deborah und stellt fest, dass dort keine „zwei sei“, sondern 28 (vgl. Z. 7). Diese Aussage lässt darauf schließen, dass er auf den „Stellenwert“ (das spezifische Element Wissen) fokussiert, also einen subjektiven Erfahrungsbereich zum Stellenwert von Zahlen aktiviert hat, in denen Ziffern innerhalb einer Perspektive auch einen Stellenwert haben. In diesem Fall die Zehnerstelle. Diese Interpretation legt auch Bauersfeld in seiner Analyse nahe (vgl. 3.2.2). Entsprechend kann nun auch rückblickend die erste Aussage wofür die „Einsen“ stehen entsprechend gedeutet werden, auch wenn es zuvor verschiedene Interpretationsmöglichkeiten gab¹⁰⁷. Entsprechend dieser Deutung wird diese Aussage noch immer innerhalb des SEB_{I1} verortet.

Nach dieser Aussage des Interviewers bekräftigt Deborah ihre Perspektive auf das Problem, indem sie die Funktion der Ziffern in der schriftlichen Addition ausführlich erläutert. In der spaltenweisen Betrachtung stehen zwei Einsen, die dann entsprechend des Algorithmus „zusammengezählt“ werden. Interessant ist an dieser Stelle, dass sie nicht sagt, dass sie selbst Zahlen so zusammenrechnet, also im zweiten Teil des Satzes nicht sagt „ich zähle sie zusammen“, sondern davon spricht, dass „man sie zusammenzählt“. Entsprechend ist diese Aussage dem

¹⁰⁷ Ein solches Verfahren der Antizipation verschiedener Interpretation im Rahmen einer Sequenzanalyse sowie deren Bestätigung durch Daten nachfolgender Sequenzen gehört zur Methodologie der objektiven Hermeneutik. Wie bereits in den theoretischen Grundlagen dargelegt, folge ich nicht dem Anspruch der objektiven Hermeneutik, die als Ziel ihrer Rekonstruktion „objektive Bedeutungsstrukturen“ setzt (Oevermann, 2002, 1, S. 5–6). Die Methode der Sequenzanalyse ist dennoch sehr hilfreich, auch wenn ich die Objektivität von Bedeutungsstrukturen aus der objektiven Hermeneutik nicht teile.

mathematischen Habitus von Deborah zuzuordnen, in der sie auf typische Handlungsweisen beim Mathematik machen, also das was „Mathematiker*innen machen“ verweist. Da Sie immer noch innerhalb ihrer Perspektive der schriftlichen Addition bleibt kann auch hier davon gesprochen werden, dass sie im gleichen SEB_{D1} verbleibt.

Der Interviewer verbleibt – vermutlich auch im Folgenden – ebenfalls in SEB_{I1} , da er seine Ausgangsfrage wiederholt. (Z. 9). Das „Aber“ zu Beginn des Satzes kann allerdings auch darauf hindeuten, dass der Interviewer meint, Deborah würde lediglich ihre Erklärung der schriftlichen Addition aus der Einleitung wiederholen. Diese Einschätzung trifft insofern nicht zu, da Deborah ihren mathematischen Habitus und im speziellen ein Norm-Verhalten beschreibt als Reaktion auf das Auftreten einer solchen Aufgabe. Genau wie bei der ersten Frage des Interviewers ist allerdings nicht klar, welches spezifische Element bzw. welcher subjektiver Erfahrungsbereich von Deborah durch seine/ihre Initialfrage aktiviert werden sollte.

Deborah wechselt nun den subjektiven Erfahrungsbereich zu SEB_{D2} . Dies wird explizit durch ihre Indizierung des wahrgenommenen Deutungskonflikts „Wie meinen Sie das?“ (Z. 10). Offenbar ist sich Deborah im Klaren, bzw. handelt aus Erfahrung so, dass, wenn ihr bisheriger SEB nicht zu einer Lösung führt, ein Wechsel des SEB'es angemessen ist. Dieser SEB_{D2} ermöglicht somit eine Öffnung der Perspektive und eine Antizipation der Perspektive des Interaktionspartners, bei der Deborah den Interviewer (vgl. Z. 7) imitiert, indem sie sagt „für 13 und 15“ (Z. 10) analog zu „Aber da sind keine zwei, da ist 28“ (Z. 7). Diese Antizipation der Perspektive ist am ehesten den spezifischen Elementen der „Wertung“ oder der „Ich-Identität“ zuzuordnen, da sie einerseits die Interaktion als Missverständnis bewertet und andererseits durch Verwendung des Personalpronomens „Sie“ ihre Identität von der des Interviewers klar abgrenzt.

Der Interviewer formuliert eine weitere unklare Frage¹⁰⁸ (vgl. Z. 11), die wie die Fragen zuvor nicht eindeutig klassifiziert werden kann. Interessant ist hierbei aber, dass er die Imitation von Deborah nicht als passend zu seiner Perspektive erkennt, insofern er eine ähnliche Sprechweise in Zeile 7 selbst verwendet. Dies

¹⁰⁸ Bauersfeld gibt verschiedene Interpretationsmöglichkeiten an, als Resignation des Interviewers, herausfordernde Ironie, oder Denkanstoß (vgl. 4.3.2). Aufgrund des Vorliegens der Quelle in Textform, und dem Ende des Textauszugs kann über die Intention der Frage keine genaue Aussage getroffen werden.

könnte ein Indiz dafür sein, dass er den subjektiven Erfahrungsbereich wechselt, also ein SEB_{I_2} vorliegt oder die Perspektiven seines SEB_{I_1} so eng sind, dass er Deborahs Antwort nicht mit seiner Perspektive überein bringen kann.

Nach dem letzten Turn bekräftigt Deborah ihr Unverständnis indem sie erneut, aber jetzt mit deutlichem Bezug auf ihre Ich-Identität sagt „*Ich* [Herv. G.S.] verstehe nicht, was *Sie* [Herv. G.S.] meinen.“. Leider hört an dieser Stelle das Transkript auf, weswegen nicht klar dargelegt werden kann, ob und wie die Deutungsdifferenz behoben wird. Entsprechend ist auch nicht klar feststellbar, ob Deborah einen neuen SEB, dann SEB_{D_3} , aktiviert oder im vorangehenden, reflektierenden SEB_{D_2} verbleibt.

Es mag an dieser Stelle verwundern, dass in der Rekonstruktion vornehmlich auf spezifische Elemente eingegangen wurde, die nicht das Wissen von Deborah oder dem des Interviewers im Sinne des Strukturalismus rekonstruieren. Dies hat zwei Gründe. Einerseits ist die Passage sehr kurz, was die strukturalistische Rekonstruktion sehr vage machen würde, andererseits ähnelt Deborahs Verhalten beim schriftlichen Addieren demjenigen von Miriam, welches von Lawler (1981, S. 4, 14ff.) als Operieren in der Papiersummen-(Mikro-)welt identifiziert wurde. Eine Rekonstruktion dieser Papiersummenwelt im strukturalistischen Sinne liegt bereits von Burscheid und Struve (2018, S. 95–98) vor, auf die an dieser Stelle verwiesen wird.

An diesem Beispiel wird besonders deutlich, dass zwar die spezifischen Elemente eines/oder mehrerer) SEB'es/SEB'e relativ leicht zu identifizieren sind, dass aber ein Wechsel der SEB'e und damit die Abgrenzung von SEB'en nur relativ schwierig zu rekonstruieren ist. Kennzeichen eines Wechsels von SEB'en, die total, kohärent und abgeschlossen sein sollen (vgl. 4.2.1), sind ein plötzlicher Bruch im Diskurs oder Monolog, der zumindest von einem Subjekt expliziert werden muss, dies kann auch affektiv erfolgen. Ein solcher Bruch findet sich in der Nachfrage von Deborah, weshalb zumindest drei verschiedene SEB herangezogen werden können.

5 Auffassungen: Cluster subjektiver Erfahrungsbereiche

Die Grundbegriffe der Forschungshypothese (vgl. Einleitung) und aller darauffolgender Forschungsfragen bilden die Konzepte „Auffassung“, „Auffassungswechsel“, „empirisch-gegenständliche Auffassung von Mathematik“ und „formal-abstrakte Auffassung von Mathematik“. Gerade die letzten Begriffe verweisen auf die Spezifität der zu untersuchenden Auffassungen über bzw. von einer Wissenschaft. Im Rahmen dieses Abschnittes sollen diese Konzepte und ihre theoretischen Grundlagen erläutert werden, wobei die Besonderheit dieser Darstellung darin liegt, dass das Auffassungskonzept durch die Theorie subjektiver Erfahrungsbereiche grundgelegt wird und zwar als Cluster subjektiver Erfahrungsbereiche innerhalb der *society of mind* (vgl. 4.2). Vor allem in Untersuchung 5 (vgl. 10) wird sich zeigen, dass das Auffassungskonzept leichter mit den vorliegenden Forschungsdaten in Verbindung gebracht werden kann als das Konzept subjektiver Erfahrungsbereiche.

5.1 Definition von Auffassungen

Der Begriff der Auffassung oder des Belief-Systems gehört zwar zu einem etablierten Begriff innerhalb der mathematikdidaktischen Forschungslandschaft, der insbesondere im Bereich metakognitiver Prozesse beim Mathematiktreiben und -lernen fruchtbar genutzt wird, dennoch findet sich noch immer keine allgemein akzeptierte Definition des Begriffs „Auffassung“, „Belief-System“ oder „Weltbild“, die zum Teil synonym oder stark unterschiedlich verwendet werden. So gibt Rolka zu Beginn ihrer Dissertation einen Überblick über das „babylonische Sprachgewirr“ innerhalb der Mathematikdidaktik bei der Bezeichnung von Auffassungen. Es wurden viele Begriffe, bspw. „Auffassungen“, „Beliefs“, „Belief-Systeme“, „Weltbilder“, ..., für gleiche oder ähnliche Phänomene verwendet (Rolka, 2006, S. 2). Die Feststellung dieses Sprachgewirrs wurde bereits in Pehkonens Arbeit „Pupils' view of mathematics: Initial report for an international comparison project“ (Pehkonen, 1995) erwähnt und scheint bis heute zu bestehen (bspw. Bräunling, 2017, S. 51). Besonders interessant an Pehkonens Arbeit ist dessen Verweis auf die deutschen Sprechweisen während der Entstehungszeit seiner Arbeit, da die mathematikdidaktische Diskussion vornehmlich vom Begriff der „subjektiven Theorien“ geprägt wurde, deren zentraler Begriff laut Pehkonen (1995, S. 10f.) der der „subjektiven Erfahrungsbereiche“ (Bauersfeld, 1983) ist.

Diese Idee der Verknüpfung von „Auffassungen“ und „subjektiven Erfahrungsbereichen“, die bei Pehkonen nur angedeutet wurde, soll nun systematisch dargestellt werden, indem gezeigt wird, dass das Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche aus einer theoretischen Perspektive gut als konstituierendes Element von Auffassungen oder Belief-Systemen¹⁰⁹ gelten kann.

Bauersfelds (1983) Konzept subjektiver Erfahrungsbereiche zeichnet sich dadurch aus, dass Erfahrungen nicht-hierarchisch, kumulativ und entsprechend der situativen Bindung in deutlich getrennten subjektiven Erfahrungsbereichen vorliegen (vgl. 4.2). Dabei sind die spezifischen Elemente der subjektiven Erfahrungsbereiche Sinnzuschreibungen, Sprache, Handlungsmöglichkeiten, verfügbare Routinen, Bedeutungen für das Ich, usw. (vgl. 4.1). Die subjektive Wahrnehmung einer Situation erfolgt durch die Aktivierung eines subjektiven Erfahrungsbereichs, wobei die übrigen subjektiven Erfahrungsbereiche innerhalb der *society of mind* unterdrückt werden (vgl. 4.2.2).

Vergleicht man Bauersfelds Modell mit Schoenfelds theoretischem Rahmen in seinem Werk „Mathematical Problem Solving“ (Schoenfeld, 1985) oder dem Kapitel „Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics“ (Schoenfeld, 1992, S. 334–370) findet man einige Parallelen. Schoenfeld identifiziert fünf Aspekte der Kognition, die generell akzeptiert seien (Schoenfeld, 1992, S. 348):

- The knowledge base
- Problem solving strategies
- Monitoring and control
- Beliefs and affects
- Practices

Den Begriff der Beliefs bringt Schoenfeld mit dem Begriff „mathematical world view“ zusammen. Dieser mathematical world view kann als Belief-System auf-

¹⁰⁹ Auch wenn im Folgenden der Begriff der Auffassung verwendet wird, passt der Begriff „Belief-System“, vom Begriffsnamen her besser zur Konzeption, da dieser sich daraus konstituiert, dass eine Person verschiedene Beliefs hat und dieses zu einem System zusammengefasst werden können. Ein Nachteil dieses Begriffsnamen ist der, dass der Teilbegriff „Belief“ ebenso vielfältig verwendet wird und keine allgemeingültige Definition vorliegt. Dies führte zur Entscheidung den Begriff der „Auffassung“ zu verwenden, der zwar ebenso verschiedene Konnotationen besitzt, aber im Sinne der im Folgenden dargestellten Definition zu verstehen ist.

gefasst werden, das mehrere Beliefs über Mathematik vereinigt. Schoenfeld identifiziert diese Belief-Systeme als fundamental für das generelle Verhalten von Menschen in mathematischen Situationen (Schoenfeld, 1985, S. 186).

Sein Verständnis des Begriffs Belief scheint in seinem generellen Anspruch der Begrenztheit und „deutlichen Trennung“ der subjektiven Erfahrungsbereiche zu widersprechen. Allerdings fordert Schoenfeld nicht, dass Beliefs die subjektive Wahrnehmung einer spezifischen Situation charakterisieren, sondern diese Wahrnehmung vielmehr formen. Betrachtet man welche spezifischen Elemente der subjektiven Erfahrungsbereiche mit Schoenfelds Begriff der Beliefs oder Belief-Systeme als mathematische Weltbilder verträglich sind, scheinen die Elemente „Sinnzuschreibung“ und „Bedeutung für das Ich“ besonders geeignet.

Die Verknüpfung beider Modelle kann unter Beachtung der Trennung verschiedener subjektiver Erfahrungsbereiche und der Generalität von Beliefs oder Belief-Systemen folgendermaßen erfolgen:

Ein Belief-System verweist auf verschiedene subjektive Erfahrungsbereiche, die gleiche oder ähnliche *Perspektiven* und *Funktionen* für das Subjekt beinhalten (vgl. Abbildung 5). Die Zusammenfassung rekonstruierter subjektiver Erfahrungsbereiche zu Belief-Systemen anhand einer identifizierten Gleichheit oder Ähnlichkeit erfolgt durch eine Beobachter*in des Subjekts (vgl. 3). In dieser Arbeit wird diese Identifikation durch die Sprechweise beschrieben, dass Belief-Systeme gewisse subjektive Erfahrungsbereiche zusammenfassen. Eine Möglichkeit, diese Beobachtung zu präzisieren, liegt darin festzulegen, dass Belief-Systeme eines Subjekts Äquivalenzklassen subjektiver Erfahrungsbereiche bilden¹¹⁰. Der Begriff der Auffassung entspricht in dieser Konzeption dann der des Belief-Systems.

¹¹⁰ Eine symbolische Formalisierung der subjektiven Erfahrungsbereiche $s_i, i \in \mathbb{N}$ innerhalb der society of mind Σ sowie deren Zusammenhang in Form von Auffassungen $A_m, m \in \mathbb{N}$ als Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation α kann dann folgendermaßen erfolgen:

1. $\alpha \subseteq \Sigma \times \Sigma$
2. $\forall s_i \in \Sigma: (s_i, s_i) \in \alpha$
3. $\forall s_i, s_j \in \Sigma: (s_i, s_j) \in \alpha \Rightarrow (s_j, s_i) \in \alpha$
4. $\forall s_i, s_j, s_k \in \Sigma: (s_i, s_j) \in \alpha \wedge (s_j, s_k) \in \alpha \Rightarrow (s_i, s_k) \in \alpha$

Für die empirische Auswertung liegt der Fokus allerdings nicht auf der Rekonstruktion aller Äquivalenzklassen, respektiven Auffassungen, sondern vielmehr in der Frage welche Äquivalenzklasse vorliegt, d.h., welche Auffassung dem Subjekt zugeschrieben werden kann. Für diese Zuschreibung reicht dann entsprechend üblicher Beschreibungen von Äquivalenzklassen ein Repräsentant der Äquivalenzklasse.

Diese Formalisierung des Konzepts der Belief-Systeme ist gerade hinsichtlich des Nutzens für die empirische Feststellung solcher Auffassungen sinnvoll, indem ein (subjektiver) Erfahrungsbereich eines Subjekts rekonstruiert wird, dessen Perspektiven und Funktionen auf eine bestimmte Auffassung hindeuten. Treten bei der Beobachtung des Subjekts nur bestimmte Funktionen und Perspektiven in verschiedenen Erfahrungsbereichen auf, lässt sich davon sprechen, dass einem Subjekt eine bestimmte Auffassung zugeordnet werden kann.

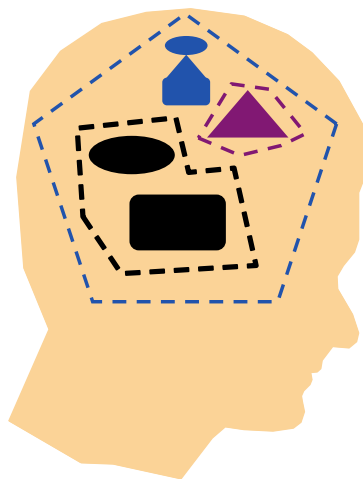


Abbildung 5: Diagramm zu verschiedenen SEB'en (schwarz, violett und blau gefüllte Figuren) innerhalb der „society of mind“ (gesamtes gelbes Polygon) und verschiedene indizierte Auffassungen (gestrichelte Polygone).

Diese theoretische Fundierung des Auffassungskonzepts ermöglicht interessante Deutungen der bisherigen Belief-Forschung und ihrer Ergebnisse. Ein Beispiel für eine solche Deutung soll kurz am Beispiel der bekannten Untersuchung von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) zu „Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern“ dargestellt werden. Bei der Untersuchung handelt es sich um einen Multiple Choice Test, der 77 Items mit fünfstufiger Likert-Skala beinhaltet und mithilfe der Faktoranalyse ausgewertet wurde. Die Erhebung umfasst insgesamt 310 von Lehrer*innen ausgefüllte Fragebögen. Die Faktoranalyse ergab vier Faktoren. Die den Faktoren zugeordneten Items wurden bei der Konstruktion auf der Basis von Überlegungen zu vier Dimensionen von Mathematik – dem Formalismus-Aspekt, dem Anwendungs-Aspekt, dem Prozess-Aspekt und dem Schema-Aspekt – entwickelt. Dass dieses Ergebnis trotzdem neue Erkenntnisse über Einstellungen von Lehrerinnen und Lehrern ermöglicht, diskutieren die Autoren ausführlich in Abschnitt 3.6.1 ihres Fazits (Grigutsch et al.,

1998, S. 21). Für den Zusammenhang von Belief-Systemen und subjektiven Erfahrungsbereichen ist aber wesentlich interessanter, welche persönlichen Gründe die Autoren zur Auswahl der vier Dimensionen auf theoretischer Ebene angegeben haben:

„1. Wir glauben, daß [sic!] diese vier Aspekte die zentralen und strategischen Elemente von mathematischen Weltbildern sind. Möglicherweise ist dies ein Ausdruck unseres eigenen Weltbildes. Aber vielfältige Beobachtungen – die sicherlich auch selektiv von unseren eigenen Einstellungen gelenkt werden – zeigten uns, daß [sic!] das Denken über Mathematik und Mathematikunterricht oftmals in diesen vier Dimensionen erfolgt.“

(Grigutsch et al., 1998, S. 13)

Hier geben Grigutsch et al. auf der Basis ihrer Reflexion ihre eigene Auffassung vom Zusammenhang zwischen ihrer subjektiven Wahrnehmung und ihrer Einstellung hinsichtlich wichtiger Aspekte mathematischer Weltbilder wieder. Unter Verwendung des Konzepts der subjektiven Erfahrungsbereiche eröffnet sich die Perspektive auf diese Reflexion, dass im Rahmen dieser Reflexion ein übergeordneter subjektiver Erfahrungsbereich konstruiert wird, der auf verschiedene Erfahrungen anderer subjektiver Erfahrungsbereiche zurückgreift, in denen die Autoren „Denken über Mathematik und Mathematikunterricht“ (Grigutsch et al., 1998, S. 13) wahrgenommen haben. Hierbei scheint zunächst offen zu sein, ob Grigutsch et al. subjektive Erfahrungsbereiche konsekutiv aktiviert haben oder bereits über einen übergeordneten subjektiven Erfahrungsbereich verfügen, der einen Überblick über die verschiedenen Aspekte der Weltbilder ermöglicht. Unter Berücksichtigung der Eigenschaft der deutlichen Trennung von subjektiven Erfahrungsbereichen kann eine solche Reflexion verschiedener Aspekte von Weltbildern oder Aspekten von Weltbildern *nur* dann kommuniziert werden, wenn ein übergeordneter subjektiver Erfahrungsbereich vorliegt, der alle *Perspektiven* zugleich erfahrbar werden lässt (vgl. 4.2). Entsprechend würde man bei Grigutsch et al. davon sprechen, dass die Auffassung über Mathematik vielfältig ist, insofern sie in der Mathematik den Formalismus-Aspekt, den Anwendungs-Aspekt, den Prozess-Aspekt und den Schema-Aspekt berücksichtigt und zwischen diesen Unterscheidungen und Verbindungen erkennt. Zugleich setzt diese Beschreibung auf der Basis des theoretischen Modells der subjektiven Erfahrungs-

bereiche voraus, dass diese Aspekte in verschiedenen subjektiven Erfahrungsbereichen erfahren wurden, was nicht ausschließt, dass einige Aspekte innerhalb des gleichen subjektiven Erfahrungsbereichs erworben wurden.

Daher muss, entsprechend der hier vorgenommenen theoretischen Konzeption, eine Reflexion eigener Auffassungen, die verschiedene *Perspektiven* berücksichtigt, immer auf der Basis eines übergeordneten subjektiven Erfahrungsbereiches erfolgen.

Neben dieser Möglichkeit, mithilfe des Konzepts der subjektiven Erfahrungsbereiche verschiedene Komplexitätsstufen¹¹¹ von subjektiven Erfahrungsbereichen, Auffassungen und deren Reflektion zu identifizieren, gibt es weitere Vorteile der Grundlegung des Auffassungsbegriffs mithilfe des Konzepts subjektiver Erfahrungsbereiche. Diese Vorteile werden in den nachfolgenden Begriffsklärungen deutlich.

5.2 Empirisch-gegenständliche und formal-abstrakte Auffassungen

„Es gibt keine allgemeinen Begriffe, Strategien oder Prozeduren. Man (das Subjekt [Anm. GS: oder Träger]) kann sie allgemein denken, aber sie sind nicht allgemein verfügbar, d.h. nicht bereichsunabhängig aktivierbar.“

(Bauersfeld, 1985, S. 17)

„Den unterrichtsmethodischen Entwürfen und üblichen Unterrichtspraktiken lassen sich zunächst oberflächlich nach den verschiedenen zugrundeliegenden Erwartungen zwei Veranschaulichungsmodelle zuordnen, ein *Abstraktions-Modell* [Herv. im Original] und ein *Übertragungs-Modell* [Herv. im Original]:

Beim Abstraktionsmodell wird vom Schüler erwartet, daß er das Gemeinsame zwischen zwei oder mehr SEB'en auf dem Wege über Strukturvergleiche durch Weglassen des mathematisch Irrelevanten erkennt.

¹¹¹ An dieser Stelle ist mit Komplexitätsstufen gemeint, wie viele Perspektiven in einem subjektiven Erfahrungsbereich oder einer Auffassung vorliegen. Dies meint nicht, dass der Erwerb gewisser oder vieler Perspektiven und Funktionen von subjektiven Erfahrungsbereichen a priori und für alle Individuen schwieriger ist als andere oder weniger Perspektiven. Somit sind die Komplexitätsstufen ein deskriptives Maß.

Beim Übertragungsmodell hingegen soll der Schüler unmittelbar, die in einem bestimmten SEB geläufigen Perspektiven und Funktionen (oder Teile davon) auf eine Darstellung der zu erklärenden mathematischen Struktur übertragen, indem er mit der Darstellung so handelt, als ob es der bestimmte (vertraute) SEB sei. (Es hätte deshalb auch „Transfer-Modell heißen können.)“

(Bauersfeld, 1983, S. 34)

Nach der Definition des Begriffs Auffassung im Rahmen dieser Arbeit als Äquivalenzklasse subjektiver Erfahrungsbereiche im vergangenen Abschnitt geht es nun darum bestimmte, für diese Arbeit relevante Auffassungen zu beschreiben und voneinander abzugrenzen. In der Forschungshypothese und den daraus folgenden Forschungsfragen werden die Begriffe einer „empirisch-gegenständlichen“ und einer „formal-abstrakten“ Auffassung von Mathematik verwendet. Neben der Definition beider Begriffe soll auch gezeigt werden, inwiefern beide Begriffe dichotom sind. In den Untersuchungen 1 (vgl. 6) und 2 (vgl. 7) soll mithilfe dieses Begriffspaares der Übergang zur modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgezeigt werden. In den Untersuchungen 3 (vgl. 8) und 4 (vgl. 9) wird dann gezeigt, welche Rolle empirisch-gegenständliche und formal-abstrakte Auffassungen für den Übergang von der Schule zur Hochschule spielen können. In Untersuchung 5 (vgl. 10) wird abschließend dieses Begriffspaar dazu genutzt, die Auffassung des Studierenden zu klassifizieren aber auch dessen Reflexion des eigenen Übergangs zu beschreiben.

Die empirisch-gegenständliche Auffassung war bereits Gegenstand vielfältiger Forschungsarbeiten (Struve, 1990; Witzke, 2009; Schlicht, 2016). Die formal-abstrakte Auffassung war in diesen Arbeiten zwar häufig implizit vorausgesetzt, eine explizite Abgrenzung wurde aber in keiner der mir bekannten Arbeiten bisher vorgenommen. Was für mich insofern verwunderlich ist, da die Fragen, ob Abstraktionsprozesse stattfinden und wenn ja, auf welche Weise sowie die Frage welchen Status mathematische Begriffe haben, schon seit jeher einer der zentralen Themen der Grundlagenforschung der Mathematikdidaktik und Philosophie der Mathematik waren. Diese Problematik wird besonders deutlich in den beiden Eingangszitaten, in denen Bauersfeld im ersten Zitat unter Verweis auf Seiler (1973) und im zweiten unter Verweis auf seine eigene Konzeption der subjektiven Erfahrungsbereiche die Problematik der Begriffe „allgemeine Begriffe“ und „Abstraktion“ in der Mathematik und mathematischem Lernen problematisiert.

Gerade das erste Zitat entspricht am ehesten dem, was im Folgenden unter einer formal-abstrakten Auffassung verstanden wird, nämlich nicht die Ontologiefreiheit von Entitäten, die durch formal-abstrakte Begriffe beschrieben werden, sondern die Fähigkeit eines Subjekts Begriffe und die durch sie bezeichneten Entitäten ontologie-frei zu denken (vgl. 5.2.2).

5.2.1 Die empirisch-gegenständliche Auffassung

Der Begriff der „empirisch-gegenständlichen“ Auffassung von Mathematik lässt sich auf Schoenfelds Analyse von Problemlöseprozessen von Schüler*innen zurückführen, wobei er den Schüler*innen eine empirische Auffassung zuschreibt:

„The empiricist axioms that provide the ‘belief structure’ underlying the model are as follows.

- Axiom 1 Insight and intuition come from drawings. The more accurate the drawing, the more likely one is to discover useful information in it.
- Axiom 2 Two factors dominate in generating and rank ordering hypotheses for solution. They are (1) the ‘intuitive apprehensibility’ of a solution and (2) the perceptual salience of certain physical features of the problem. [...]
- Axiom 3 Plausible hypotheses are tested seriatum: Hypothesis 1 is tested until it is accepted or rejected, then Hypothesis 2, and so forth.
- Axiom 4 Hypothesis verification is purely empirical. Constructions are tested by implementing them. A construction is correct if and only if performing it provides the desired result (within some tolerance set by the individual).
- Axiom 5 Mathematical proof is irrelevant to both the discovery and [...] verification processes.”

(Schoenfeld, 1985, S. 161)

Die Verknüpfung zum bisherigen Theoriegerüst von Auffassungen als Äquivalenzklassen subjektiver Erfahrungsbereiche erfolgt folgendermaßen:

Die Perspektiven und Funktionen des subjektiven Erfahrungsbereichs beziehen sich auch auf die Sprache, Routinen und Handlungsmöglichkeiten des Subjekts innerhalb des subjektiven Erfahrungsbereichs. Diese letzten drei Elemente können als spezifisches Wissen des subjektiven Erfahrungsbereichs zusammengefasst werden, ähnlich zu Schoenfelds Grundwissen (Schoenfeld, 1985). Entsprechend der Darstellung im Abschnitt 4.4 zum strukturalistischen Theorienkonzept und dem „theory theory“-Ansatz kann solches Wissen analog zu wissenschaftlichen Theorien rekonstruiert werden. Lernprozesse als Erweiterung von spezifischem Wissen können so als Veränderungen von Theorien verstanden werden. Betrachtet man Theorien aus wissenschaftstheoretischer Perspektive, stellt sich die Frage nach dem Anwendungsbereich, oder nach ihren „intendierten Anwendungen“ (vgl. 4.4.2.1). Handelt es sich um eine empirische Theorie, sind die Anwendungsbereiche empirischer Natur, d.h. ein Teil der Perspektiven haben eine empirische Referenz und sind somit sinnlich erfahrbar.

Die sinnliche Erfahrung und damit auch die Bedeutung des Begriffs „empirisch“ meint üblicherweise, wie auch in den vorangehenden Abschnitten beschrieben, auf (Vor-)Erfahrung beruhend. Meistens sind damit ausschließlich sinnliche Erfahrungen, wie Sehen, Hören, Riechen, Schmecken und Fühlen gemeint. Fragen zu solcher Wahrnehmung zwischen betrachteter Entität und Umwelt wurden bereits in Form struktureller Kopplungen im Abschnitt zum Enaktivismus dargestellt (vgl. 3.1.3). Wichtig für das Verständnis der hier entwickelten Definition einer empirisch-gegenständlichen Auffassung ist, dass zusätzlich zu den soeben genannten klassischen sinnlichen Erfahrungen auch Intuitionen, bspw. im Sinne von Vorstellungsbildern oder „inneren Anschauungen“, zu den sinnlichen Erfahrungen zugerechnet werden. Im Rahmen der Hintergrundtheorie des Enaktivismus ergeben sich diese durch interne strukturelle Kopplungen meta-zellulärer Systeme (vgl. Abschnitt 3.1.4).

Kann das spezifische Wissen von subjektiven Erfahrungsbereichen als empirische Theorie, empirisch im soeben beschriebenen Sinne, rekonstruiert werden, so sind einige erfahrene Entitäten empirischer Natur und Teil der Perspektive des subjektiven Erfahrungsbereichs in Form bestimmter intendierter Anwendungen (vgl. 4.4.2.1). Im Folgenden wird dies mit dem Begriff *empirischer subjektiver Erfahrungsbereich* bezeichnet.

Stellt eine Beobachter*in fest, dass ein Subjekt in der Regel nur empirische subjektive Erfahrungsbereiche in gewissen – von der Beobachter*in identifizierten –

Kontexten aktiviert, würde diese dem Subjekt mit Bezug auf den identifizierten Kontext¹¹² eine empirisch-gegenständliche Auffassung zuschreiben.

Eine solche empirisch-gegenständliche Auffassung kann von Mises (1931) im Kontext seines Werkes „Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Wissenschaft 1. Band Wahrscheinlichkeitsrechnung“ im Rahmen seiner Wahrscheinlichkeitstheorie zugeschrieben werden. Dies wird im Rahmen von Untersuchung 1 deutlich (vgl. 6).

5.2.2 Die formal-abstrakte Auffassung

Entsprechend der Erläuterung im vergangenen Abschnitt zur „empirisch-gegenständlichen Auffassung von Mathematik“ und üblichen Sprechweisen vom „Formalen“ oder „Abstrakten“ der Mathematik, könnte angenommen werden, dass sich eine *formal-abstrakte Auffassung* von Mathematik dadurch kennzeichnet, dass in der Regel nur nicht-empirisch-gegenständliche subjektive Erfahrungsbereiche in gewissen Situationen aktiviert werden würden, d.h. mit Perspektiven, die keine empirischen Referenzobjekte haben. Es ist fraglich, ob es solche nicht-empirisch-gegenständlichen subjektiven Erfahrungsbereiche überhaupt gibt (Rodenhausen, 2010). Dies ist aber nicht die Bedeutung der „formal-abstrakter Auffassung von Mathematik“, die hier angestrebt ist. Vielmehr folgt man Hilberts zugeschriebenen Worten „man solle jederzeit anstatt Punkte, Geraden und Ebenen, Tische, Stühle und Bierseidel sagen können“¹¹³ sehr genau, die nicht die empirische Deutung oder Interpretation einer mathematischen Theorie ausschließt sondern diese bewusst in der Betrachtung der Theorie außen vor lässt. Für Hilbert ist diese Betrachtung keine Form des sog. „Spielformalismus“, sondern nötig, um die aus seiner Sicht erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik offenzulegen und zu analysieren.

¹¹² Hier wird bewusst der Begriff des Kontexts verwendet. Grundsätzlich könnte auch von einem identifizierten Erfahrungsbereich gesprochen werden. Die Entscheidung für den Begriff des Kontexts liegt darin begründet, dass der vom Beobachter identifizierte Kontext, bspw. „Mathematik treiben“, mehrere subjektive Erfahrungsbereiche des beobachteten Subjekts umfassen kann, auch ohne, dass dies das beobachtende Subjekt erfahren kann. Nichtsdestotrotz muss zur Identifizierung eines Kontexts ein gemeinsamer Erfahrungsbereich zwischen Beobachter*in und Subjekt bestehen.

¹¹³ Die Überlieferungsgeschichte dieses Zitat wird von Toepell folgendermaßen dargestellt: „Otto Blumenthal (1876–1944; Kurzbiogr. s. [Toepell 1991]), der erste Doktorand Hilberts, gibt das Zitat in der ‚Lebensgeschichte‘ Hilberts [4 III, 402f.] wieder. Er stützt sich dabei auf eine mündliche Mitteilung Hilberts. Blumenthal war erst 1895 als 19-jähriger zum Studium nach Göttingen gekommen“ (Toepell 1999, S. 10).

Dies wird besonders deutlich an seiner Differenzierung „verschiedener Geometrien“ und den unterschiedlichen Zwecken der Betrachtung der „verschiedenen Theorien“. Da diese Kategorisierung der Geometrien viel über Hilberts Auffassung über Geometrie und deren Vielschichtigkeit aufzeigt, soll an dieser Stelle seine Einteilung vollständig wiedergegeben werden.

Die Einteilung der Geometrie ist laut Hilbert in drei Teilen vorzunehmen:

1. Die Geometrie der Anschauung, zerfällt in drei Teile;
 - a. Schulgeometrie;
 - b. Projektive Geometrie;
 - c. Analysis situs;
2. Axiome der Geometrie;
3. Die Analytische Geometrie.

Die Zwecke sind für den ersten Teil der ästhetische, pädagogische und praktische; im 2. der erkenntnistheoretische und im 3. Teil der wissenschaftlich-mathematische (Toepell, 1999, S. 11). Besonders wichtig zur historischen Einordnung dieser Klassifikation ist, dass diese Einteilung nicht aus Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ stammt, sondern aus einer Vorlesung zur Geometrie, einem Vortrag, der den „Grundlagen der Geometrie“ (Hilbert, 1899) voran ging. Entsprechend kann festgestellt werden, dass Hilbert eine sehr weite Auffassung von Geometrie hatte, die davon lebt je nach Zweck eine andere Perspektive auf Geometrie zu ermöglichen, die dann auch verschiedene Funktionen hat.

In den „Grundlagen der Geometrie“ (Hilbert, 1899) geht es dann darum aufzuzeigen, welche Axiome notwendig und welche hinreichend sowie untereinander unabhängig sind, um die in der euklidischen Geometrie bekannten Eigenschaften und Sätze definieren und ableiten zu können (Toepell, 1999, S. 13)¹¹⁴. Diese Analyse sollte dabei nicht davon getrübt sein, welche Auffassungen man von den Elementen der Geometrie, bspw. hinsichtlich ihres ontologischen Status, hat. Dieser Standpunkt Hilberts wird in mehreren Schriften deutlich und auch von verschiedenen Kommentatoren entsprechend expliziert.

¹¹⁴ Ein weiterer wichtiger Aspekt ist natürlich die Arithmetisierung der Geometrie, insbesondere in Bezug auf das Hilbert Programm (Hilbert, 1899, Kapitel 2ff.).

In Hilberts und Bernays Werk „Grundlagen der Mathematik“ (1968) tritt in der Einleitung diese bewusste Formalisierung in der Unterscheidung des sogenannten „weiteren“ und „engeren“ Sinne des Begriffs „axiomatisch“ hervor. Hierzu schreiben die Autoren:

„In der weitesten Bedeutung des Wortes nennen wir die Entwicklung einer Theorie axiomatisch, wenn die Grundbegriffe und Grundvoraussetzungen als solche an die Spitze gestellt werden und aus ihnen der weitere Inhalt der Theorie mit Hilfe von Definitionen und Beweisen logisch abgeleitet wird. In diesem Sinne ist die Geometrie von EUKLID, die Mechanik von NEWTON, die Thermodynamik von CLAUSIUS axiomatisch begründet worden.

Eine Verschärfung, welche der axiomatische Standpunkt in HILBERTS ‚Grundlagen der Geometrie‘ erhalten hat, besteht darin, daß man von dem sachlichen Vorstellungsmaterial, aus dem die Grundbegriffe einer Theorie gebildet sind, in dem axiomatischen Aufbau der Theorie nur dasjenige beibehält, was als Extrakt in den Axiomen formuliert ist, von allem sonstigen Inhalt aber abstrahiert. Bei der Axiomatik in der engsten Bedeutung kommt noch als weiteres Moment die existentielle Form hinzu. [...]

Charakteristisch ist für die verschärfte Form der Axiomatik, wie sie durch die Abstraktion vom Sachgehalt und durch die existentielle Fassung ergibt – wir wollen sie kurz die „formale Axiomatik“ nennen, daß sie einen Nachweis der Widerspruchsfreiheit erforderlich macht, während die inhaltliche Axiomatik, ihre Grundbegriffe durch den Hinweis auf bekannte Erlebnisse einführt und ihre Grundsätze entweder als evidente Tatsache hinstellt, die man sich klarmachen kann, oder sie als Extrakt von Erfahrungskomplexen formuliert und damit dem Glauben Ausdruck gibt, daß man Gesetzen der Natur auf die Spur gekommen ist, zugleich in der Absicht, diesen Glauben durch den Erfolg der Theorie zu stützen.“

(Hilbert & Bernays, 1968, S. 1f.)

Diese Beschreibung der formalen Abgrenzung zu bisherigen Formulierungen mathematischer Theorien im axiomatischen Sinne, wie bspw. in Pasch (1926) mit klarem Bezug zu inhaltlichen Anschauung, bzw. dem was Hilbert und Bernays

mit dem „Extrakt von Erfahrungskomplexen“ beschreiben, erfolgt dabei nicht in einem abwertenden Sinne sondern in klarer Explikation der Zwecke, bzw. Einschränkungen der Perspektiven. So stellen Hilbert und Bernays weiter fest:

„Für die richtige Würdigung des Verhältnisses von inhaltlicher und formaler Axiomatik in ihrer Bedeutung für die Erkenntnis sind vor allem folgende Gesichtspunkte zu beachten:

Die formale Axiomatik bedarf der inhaltlichen notwendig als ihrer Ergänzung, weil durch diese überhaupt erst die Anleitung zur Auswahl der Formalismen und ferner für eine vorhandene formale Theorie auch erst die Anweisung zu ihrer Anwendung auf ein Gebiet der Tatsächlichkeit gegeben wird.

Andererseits können wir bei der inhaltlichen Axiomatik deshalb nicht stehenbleiben, weil wir es in der Wissenschaft, wenn nicht durchweg, so doch vorwiegend mit solchen Theorien zu tun haben, die gar nicht vollkommen den wirklichen Sachverhalt wiedergeben, sondern eine vereinfachende Idealisierung des Sachverhaltes darstellen und darin ihre Bedeutung haben. Eine derartige Theorie kann gar nicht durch Berufung auf die evidente Wahrheit ihrer Axiome oder auf Erfahrung ihre Begründung erhalten, vielmehr kann diese Begründung nur in dem Sinne geschehen, daß die in der Theorie vollzogene Idealisierung, d. h. die Extrapolation, durch welche die Begriffsbildungen und Grundsätze der Theorie die Reichweite entweder der anschaulichen Evidenz oder der Erfahrungsdaten überschreitet, als eine widerspruchsfreie eingesehen wird. Für diese Erkenntnis der Widerspruchsfreiheit nützt uns auch die Berufung auf die approximative Gültigkeit der Grundsätze nichts, denn ein Widerspruch kann ja gerade dadurch zustande kommen, daß eine Beziehung als strikte gültig angenommen wird, die nur in eingeschränktem Sinne besteht.

Wir sind also genötigt, die Widerspruchsfreiheit von theoretischen Systemen losgelöst von der Betrachtung der Tatsächlichkeiten zu untersuchen, und damit befinden wir uns bereits auf dem Standpunkt der formalen Axiomatik.“

(Hilbert & Bernays, 1968, S. 2f.)

An dieser Beschreibung von formal-abstrakter und empirisch-gegenständlicher Auffassung (im eben beschriebenen Sinne) mathematischer Begriffe und Zusammenhänge wird deutlich, dass aus Hilberts und Bernays Sicht nicht die formal-abstrakte Auffassung vor der empirisch-gegenständlichen Auffassung entstehen kann und insbesondere im Rahmen einer Reflexion des formal-abstrakten Standpunkts auch Anwendungen im empirisch-gegenständlichen Sinne eingeschlossen sind.

Besonders eindrucksvoll stellt Freudenthal (1960)¹¹⁵ die Loslösung der Geometrie von der Realität, also von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung durch Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ (1899) dar:

„Ob die Axiome, wie bei KANT, aus der reinen Anschauung stammen, ob und wieweit sie idealisierte Erfahrung (HELMHOLTZ) oder hypothetisches Urteil über die Wirklichkeit (RIEMANN) sind – das ist immer wieder eine Streitfrage. Aber kein, Geometer oder Philosoph zweifelt daran, daß die Geometrie vom wirklichen Raume handelt und, seine Eigenschaften untersucht – PASCH, ENRIQUES, VERONESE, PIERI, KLEIN, sie alle betonen es, und kurz vor Toreschluß schreibt B. RUSSEL (An Essay on Foundations of Geometry 1897) noch eine Philosophie, in der wohl KANTS verwehte Fußstapfen, aber noch keine Spuren von der Tatze des Löwen [Anm. G.S.: Hiermit ist Hilbert gemeint, vgl. (Toepell 1999, S. 14)] sichtbar sind, ‚Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen ...‘ – damit ist die Nabelschnur zwischen Realität und Geometrie durchgeschnitten. Geometrie ist reine Mathematik geworden, und die Frage, ob und wie sie auf die Wirklichkeit angewandt werden kann, beantwortet sich bei ihr ganz wie bei irgendeinem anderen

¹¹⁵ Im gleichen Werk gibt Freudenthal auch folgenden wichtigen Kommentar, der insbesondere für die nachfolgenden historischen Untersuchungen leitend war: „Es ist wirklich erstaunlich, wie man so ganz andere Auffassungen nach Hilberts ‚Grundlagen‘ zwanglos im Hilbertschen Sinne interpretieren kann. Die menschliche Sprache ist offenbar ein merkwürdiges Instrument. Der Historiker nehme sich in Acht: ein ganzes Buch kann in einem anderen historischen Kontext etwas ganz anderes bedeuten [...]. Das Geheimnis jeder ernsthaften historischen Forschung ist: Quellenstudium. Die Quellen zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts sind in allgemein verständlichen Sprachen geschrieben und leicht erhältlich; außerdem ist das Material leicht zu sichten, man braucht noch nicht, wie in der modernsten Geschichte, zu fürchten, daß man im verfügbaren Material ertrinke. Die Quellen entspringen noch isoliert, und häufig dauert es lange, bis sie sich in einen Fluß ergießen.“ (Freudenthal, 1960, S. 4)

Zweige der Mathematik. Die Axiome sind nicht mehr evidente Wahrheiten, ja es hat nicht einmal mehr Sinn, nach ihrer Wahrheit, zu fragen.“

(Freudenthal, 1960, S. 14)

Die Metapher der durchtrennten Nabelschnur wirkt zunächst ein wenig skurril¹¹⁶, unterstützt aber ebenfalls die Deutung, die bereits aus den „Grundlagen der Mathematik“ (Hilbert & Bernays, 1968) gewonnen wurden. Nämlich, dass zunächst eine empirisch-gegenständliche Auffassung vorlag, die dann durch eine aktive Auseinandersetzung der handelnden Mathematiker*innen zu einer formal-abstrakten Auffassung wurde. Ein weiteres wichtiges Merkmal der Metapher der Nabelschnur ist, dass bestimmte Merkmale der empirisch-gegenständlichen Auffassung erhalten bleiben, ähnlich wie auch Bernays und Hilbert (1968, S. 2) die Auswahl formaler Systeme nach dem Interesse an empirisch-gegenständlichen Aspekten beschreiben.

Zuletzt soll noch auf ein weiteres Zitat von Freudenthal (1960, S. 16) eingegangen werden, dass die Erleichterung, die mit einer solchen formal-abstrakten Auffassung verbunden sein kann, auch wenn man die Verbindung zu einer empirisch-gegenständlichen Deutung verlässt, darstellt.

„HILBERTS Auffassung hat sich durchgesetzt. Die jüngeren Mathematiker ließen sich gerne erlösen von Definitionen wie ‚Punkt ist was keine Teile hat‘, ‚Einheit ist, wonach jedes Ding eins heißt‘ (Siehe A. KORSELT, Jahresbericht DMV 12 (1903). Mit der reinlichen Scheidung zwischen Mathematik und Wirklichkeitswissenschaft hat HILBERT einer neuen Methodologie den Weg gewiesen.“

(Freudenthal, 1960, S. 16)

Diese neue Auffassung sieht Freudenthal ebenfalls von anderen Wissenschaftler*innen vertreten, auch aus dem Bereich der Naturwissenschaften, so zitiert auch er Einstein, der die Frage stellt:

„Wie ist es möglich, daß [sic!] die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt?

¹¹⁶ Freudenthal (1960, S. 12) spricht im gleichen Aufsatz davon, dass Russel einen Vortrag auf dem Internationalen Philosophenkongress von Paris im Jahre 1900 hält, „der an unfreiwilligen Bierulk“ grenzt.

Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?“

(Einstein, 1921, S. 3)

Diese Fragen beantwortet Einstein mit Bezug auf die von Hilbert, Bernays und Freudenthal beschriebene Axiomatik:

„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit. Die volle Klarheit über die Sachlage scheint mir erst durch diejenige Richtung in der Mathematik Besitz der Allgemeinheit geworden zu sein, welche unter dem Namen „Axiomatik“ bekannt ist. Der von der Axiomatik erzielte Fortschritt besteht nämlich darin, daß [sic!] durch sie das Logisch-Formale vom sachlichen oder anschaulichen Gehalt sauber getrennt wurde; nur das Logisch-Formale bildet gemäß der Axiomatik den Gegenstand der Mathematik, nicht aber der mit dem Logisch-Formalen verknüpfte anschauliche oder sonstige Inhalt.“

(Einstein, 1921, S. 3f.)

Aus einer solchen Auffassung – wie der von Einstein, insbesondere über die Geometrie – folgt klar, dass die Mathematik „als solche weder über Gegenstände der anschaulichen Vorstellung noch über Gegenstände der Wirklichkeit etwas auszusagen vermag“ (Einstein, 1921, S. 5). Wenn Mathematik dennoch Aussagen über die Natur oder anschauliche Gegenstände machen soll, benötigt die entsprechende formal-abstrakte Theorie eine empirische Ergänzung. So schlägt Einstein für eine praktische Geometrie starrer Körper folgende Ergänzung vor, die „den leeren Begriffsschemen der axiomatischen Geometrie erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit (Erlebnisse)“ (Einstein, 1921, S. 5) zuordnet:

„Feste Körper verhalten sich bezüglich ihrer Lagerungsmöglichkeiten wie Körper der euklidischen Geometrie von drei Dimension; dann enthalten die Sätze der euklidischen Geometrie Aussagen über das Verhalten praktisch starrer Körper.“

(Einstein, 1921, S. 6)

Diese Konstruktion ist somit analog zum Vorgehen, dass bei der strukturalistischen Rekonstruktion (vgl. 4.4.2) genutzt wird, bei der verschiedene formale Modelle durch intendierte Anwendungen erweitert werden, sodass den Theorien ein empirischer Gehalt zugesprochen werden kann.

Mithilfe dieser historischen Zitate sollte die Auffassung von Mathematik aus der Perspektive der „engen Axiomatik“ deutlich geworden sein. Ein weiteres Beispiel dieser Sichtweise, allerdings im Themengebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung, findet sich in Untersuchung 2 in der Rekonstruktion der Auffassung von Kolmogoroff (1933) im Kontext seines Werkes „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (vgl. 7).

Um zu zeigen, dass es sich bei der formal-abstrakten Auffassung nicht um eine antiquierte Auffassung handelt wird in Untersuchung 4 (vgl. 9) gezeigt, dass die formal-abstrakte Auffassung auch heute in aktuellen Hochschullehrbüchern auftritt¹¹⁷. Nichtsdestotrotz lohnt sich auch in diesem Abschnitt ein Blick in einen aktuellen Artikel, der aufzeigt, dass eine formal-abstrakte Sicht im hier dargestellten Sinne noch immer modern und passend ist.

Das Handbuch der Mathematikdidaktik beginnt mit „Kapitel 1: Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik“ von Loos und Ziegler (2015), in denen sie anhand der Fragen „was ist Mathematik“ und „wie steht sie im gesellschaftlichen Kontext“ verschiedene Definitionen von Mathematik vergleichen und deren Unzulänglichkeiten aufzeigen. Am ehesten stimmen sie Hershs (1997) Idee einer „humanistischen Mathematik“ zu. Dies meint einerseits, dass Mathematik abhängig ist von denjenigen Menschen, die sie betreiben aber zugleich die Entscheidungen beim Mathematik treiben beeinflussen. Solche Einflüsse können einerseits aus der Anwendung oder aus neuen Definitionen hervortreten, die bewusst losgelöst von Anwendungskontexten sind (Loos & Ziegler, 2015, S. 7). Insgesamt erscheint Mathematik somit ein sozio-kulturelles Produkt zu sein, was scheinbar unverträglich zu mathematikphilosophischen Überlegungen im klassischen Sinne zu sein scheint. Diese Überzeugung von Loos und Ziegler wird in ihrem Zitat nach

¹¹⁷ Dieses Auftreten der Auffassung in aktuellen Hochschullehrbüchern und Veröffentlichungen ist in keiner Weise grundsätzlich kritisch zu sehen, vielmehr ist sie nötig, um Studierenden die mathematische Kultur nahe zu bringen und auch die Freiheiten mathematischen Denkens aufzuzeigen. Die hier angeführten Autoren sehen genau darin den Wert der formal-abstrakten Auffassung, einerseits in einem tieferen Verständnis der Grundlagen der Mathematik und andererseits in der Freiheit und Regelmäßigkeit mathematischer Begriffe (vgl. 9).

Crowe deutlich, dass folgendermaßen lautet: „Mathematik ist mehr und anderes als Empiriker, Formalisten, Intuitionisten oder Platoniker glauben“ (Loos & Ziegler, 2015, S. 7). Hierbei zeigt sich, dass die Sicht auf diese traditionellen, mathematikphilosophischen Kategorien recht einseitig ist. Wie anhand der obigen Beispiele verdeutlicht, stellt die formal-abstrakte Auffassung gerade die Entscheidungen für bestimmte Definitionen und Grundlagen mathematischer Teilgebiete in den Fokus und macht sie somit „humanistisch“ im Sinne von Hersh. Dies wird besonders deutlich an Loos und Zieglers (2015, S. 10) Aspekten zum Bereich „Mathematik als Wissenskultur“, in denen sie bemerken, dass Mathematik mehr ist als ein „Schweizer Taschenmesser“, das ein „handliches Allzweck- und Alltagswerkzeug“ ist. Zwei dieser vier Aspekte thematisieren dabei die Nicht-Notwendigkeit von Anwendungsbezügen, indem sie zum einen feststellen: „Im Laufe der Zeit stellten Menschen – sozusagen auch mathematisch ziselierte Dolche oder Schmuck-Hellebarden her – Kunstwerke der Mathematik, nie für eine Anwendung vorgesehen, aber durchaus wichtig für die Weiterentwicklung der Mathematik.“; und weiterhin: „Reduziert man Mathematik als Werkzeug für die Alltagsanwendung, dann besteht die Gefahr, die mit ihr verbundenen großen philosophischen Fragen auszublenden.“ (Loos & Ziegler, 2015, S. 10). Damit ist vermutlich nicht gemeint, dass Mathematik nicht grundsätzlich auch anwendbar ist! Zusammenfassend lässt sich nun eine formal-abstrakte Auffassung im in dieser Arbeit verwendeten Sinne aufgrund der angeführten Beispiele folgendermaßen bestimmen:

- Stellt eine Beobachter*in fest, dass ein Subjekt in der Regel subjektive Erfahrungsbereiche, in denen ein gegebenenfalls vorhandener empirischer Gehalt einer Theorie als Teil des spezifischen Wissens bewusst außen vor gelassen wird, bzw. die Auslassung des empirischen Gehalts eine mögliche Perspektive ist, in gewissen – von der Beobachter*in identifizierten – Kontexten aktiviert, würde diese dem Subjekt mit Bezug auf den identifizierten Kontext eine formal-abstrakte Auffassung zuschreiben.
- Die nicht zwingende Anwendbarkeit, sowie Rückführung auf empirische Entitäten wird als Entlastung für das mathematische Arbeiten verstanden.
- Mathematik wird als menschliche Konstruktion aufgefasst, deren Form auf normativen Entscheidungen beruht, die aber auch aufgrund empirisch-gegenständlicher Erfahrungen getroffen werden können.

5.3 Definition von Auffassungswechseln

In der Forschungshypothese wird davon gesprochen, dass es beim Übergang von der Schule zur Hochschule, sofern die Studierenden nicht durch die Hochschulausbildung „tunneln“¹¹⁸, zu einem Auffassungswechsel der Studierenden von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung kommt¹¹⁹. Beide Auffassungen sind hierbei so zu verstehen, wie in den vorangehenden Abschnitten (vgl. 5.2.1, 5.2.2) dargelegt.

Von einem Auffassungswechsel wird dann gesprochen, wenn vor dem Auffassungswechsel nur gewisse subjektive Erfahrungsbereiche aktiviert werden, die zu einer Auffassung gehören, und dann in späteren Zusammenhängen in der Regel subjektive Erfahrungsbereiche, die zu einer anderen Auffassung gehören, aktiviert werden. Entsprechend könnte man auch von einem Wechsel des Belief-Systems sprechen (vgl. Abbildung 6).

Wichtig für diese Erläuterung von Auffassungswechseln ist einerseits, dass die Menge aller subjektiven Erfahrungsbereiche nicht statisch ist, sondern dynamisch erweitert werden kann (vgl. 4.2.3). Und andererseits diese Zuschreibung eines Auffassungswechsels abhängig von der Beobachter*in des Trägers subjektiver Erfahrungsbereiche ist (vgl. 4.3.2).

Ein Beispiel eines solchen Auffassungswechsels im obigen Sinne beschreibt Toepell (1999, S. 14–15) im Vergleich verschiedener Werke von Hilbert, die schlussendlich zu den formal-abstrakten Definitionen in seinen „Grundlagen der Geometrie“ führen. Auch wenn Toepell zu dem Schluss kommt, dass sich „zusammen mit seiner Haltung in späteren Jahren zeigt [...], wie wenig sich Hilbert tatsächlich von der Anschauung gelöst hat. Erkannte er, daß die Sicherung seiner Axiomensysteme letzten Endes auf Inhaltlichem beruhen?“ (Toepell, 1999, S. 14–15), halte ich dessen Interpretation insbesondere in Bezug auf die letzte Frage für

¹¹⁸ Im Artikel „Was ist Mathematik? lernen und lehren“ nutzen Loos und Ziegler (2016) die Metapher des Tunnelns zur Verdeutlichung von Felix Kleins doppelter Diskontinuität, die insofern sehr glücklich gewählt ist, da die Studierenden durch die universitäre Ausbildung tunneln können, indem sie sich nicht von dieser beeinflussen lassen. In diesem Zusammenhang sprechen Loos und Ziegler (2016, S. 167) davon die doppelte Diskontinuität zu vermeiden, was aber nicht zwingend, wie vielfache Ansätze – gerade in der Hochschulmathematikdidaktik – versuchen bedeutet, dass Diskontinuität zwingend vermieden werden sollte.

¹¹⁹ Neben dem bereits erklärten Tunneln kann es auch sein, dass Studierende bereits vor der Universität zu einer formal-abstrakten Auffassung gelangt sind. Dies hängt natürlich von ihren subjektiven Erfahrungen vor dem Studium, bspw. durch mathematisches Talent, Einfluss von Lehrer*innen, usw. ab.

nicht produktiv. Denn wie im Abschnitt über die formal-abstrakte Auffassung dargestellt, ist es nicht zwingend notwendig immer „Anschauungen“ oder „Anwendungen“ auszublenden, vielmehr zeichnet sich eine formal-abstrakte Auffassung dadurch aus, dass (bei Bedarf) von der Anschauung und Anwendung abgesehen werden kann.

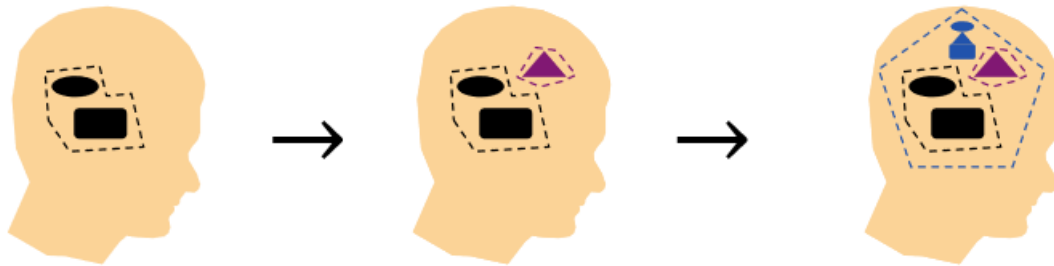


Abbildung 6: Diagramm zu verschiedenen SEB'en (schwarz, violett und blau gefüllte Figuren) innerhalb der „society of mind“ (hellgelb gefülltes Polygon) und verschiedene indizierte Auffassungen (gestrichelte Polygone).

Der Auffassungswechsel vollzieht sich hier in der Abfolge durch Erzeugen eines neuen SEB'es innerhalb der „society of mind“ (vom ersten zum zweiten Schritt in Leserichtung), die zunächst voneinander getrennt sind, und dann in einem übergeordneten subjektiven Erfahrungsbereich integriert werden (vom zweiten zum dritten Schritt).

Die Indizierung der verschiedenen Auffassungen erfolgt dabei durch eine Beobachter*in. Die Auffassungen liegen nicht (zwingend) in der „society of mind“ vor.

Zusammenschau der theoretischen Ergebnisse

Das Ziel dieses zweiten Teils war darzustellen, auf welche Weise Auffassungen gebildet werden können, wie sie sich verändern und welche Rolle sie für (Inter-) Aktionen derjenigen spielen, denen eine bestimmte Auffassung zugeschrieben werden kann. Natürlich können diese Fragen nur mithilfe eines theoretischen Rahmens beantwortet werden, der das Auffassungskonzept definiert.

In diesem zweiten Teil der Arbeit wurde eine solche Definition, die das wesentliche theoretische Ergebnis dieser Arbeit darstellt, durch eine Rückführung des Auffassungsbegriffs auf das Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche gegeben. Durch die Zusammenfassung von subjektiven Erfahrungsbereichen zu Äquivalenzklassen, die von einer Beobachter*in indiziert werden können, werden Auffassungen identifiziert.

Ein wichtiges spezifisches Element der subjektiven Erfahrungsbereiche zur Bildung der hier besonders interessierenden Auffassungen, einerseits einer empirisch-gegenständlichen und andererseits einer formal-abstrakten, ist das des deklarativen Wissens. Entsprechend der Notwendigkeit dessen Struktur und Empirizität darzustellen und zu analysieren wurde der Ansatz des strukturalistischen Theorienkonzepts dargestellt, welcher in Untersuchung 1 (vgl. 6) die Basis der Methode der strukturalistischen Rekonstruktion bildet.

Die Verortung dieser Konzepte in der Hintergrundtheorie des Enaktivismus erfolgte insbesondere wegen der Internalität subjektiver Erfahrungsbereiche. Durch das Konzept der strukturellen Kopplung zweier oder mehrerer Entitäten kann eine Wechselwirkung zwischen subjektiven Erfahrungsbereichen einer Person mit dessen Umwelt, bzw. weiteren Personen, bestehen und so im Umkehrschluss eigene Auffassungen aktivieren und deren Konstruktion initiieren. Auf der Basis dieses Grundkonzepts struktureller Kopplungen zwischen Entitäten ist es zudem überhaupt erst möglich, dass Forscher*innen Auffassungen von Individuen rekonstruieren und klassifizieren können. Die Perspektiven sind dabei entsprechend der eigenen Struktur der Forscher*innen festgelegt. Dies bedeutet, dass die Perspektiven abhängig von den subjektiven Erfahrungsbereichen und Auffassungen der Forscher*innen geprägt sind. Dieser besondere Zusammenhang wird vor allem in Untersuchung 5 (vgl. 10) deutlich, gilt aber auch für die übrigen Untersuchungen.

Untersuchungen

Untersuchungen

Im dritten Teil dieser Arbeit werden auf Basis der theoretischen Überlegungen aus dem zweiten Teil und den sich daraus ergebenden Methoden insgesamt fünf Untersuchungen angestellt, die zur Beantwortung der in der Einführung aufgezeigten Forschungsfragen beitragen sollen. Die zu beantwortenden Forschungsfragen lauten:

1. Ist eine empirisch-gegenständliche Auffassung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen und wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
2. Ist eine formal-abstrakte Auffassung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen und wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
3. Ist eine empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulkontext nachzuweisen und wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
4. Ist eine formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Hochschulkontext nachzuweisen und wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
5. Inwieweit kann ein Blick von Studierenden in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von ÜberPro_WR die Reflexion ihrer Übergangserfahrungen unterstützen und ihre Auffassung von Mathematik diversifizieren?

Jede dieser Forschungsfragen wird in einer zugehörigen Untersuchung behandelt. Jede Untersuchung gliedert sich in fünf Abschnitte. Den ersten Abschnitt bildet eine kurze Einleitung, die jeweils einen Überblick über die Untersuchung gibt. Im Anschluss daran folgt eine Übersicht der Ziele der Untersuchung. Entsprechend der Zielsetzung wird dann der Kontext der Quelle(n) dargestellt. Dieser enthält im Rahmen der rein schriftlichen Quellen (Untersuchungen 1 bis 4, vgl. 6, 7, 8, 9) bspw. die Entstehungszeit, eine Kurzvorstellung der Autoren oder die inhaltliche Struktur des Werkes. Bei den Fallstudien ergibt sich der Kontext aus der Seminarkonzeption ÜberPro_WR. Darauf folgt die Darstellung der verwendeten Methode(n). Zuletzt werden die Ergebnisse der jeweiligen Untersuchung und weitere Forschungsdesiderate vorgestellt.

Jede Untersuchung steht grundsätzlich für sich. Allerdings spielen die Ergebnisse der Untersuchungen 1-4 eine große Rolle für die Begründung der Intervention, die in Untersuchung 5 (vgl. 10) dargestellt ist, da im Seminar ÜberPro_WR den Studierenden des Seminars von Beginn an die in der Einleitung vorgestellte Hypothese transparent vorgestellt wurde, sodass die einzelnen Seminar-Aktivitäten auch von den teilnehmenden Studierenden sinnstiftend verknüpft werden können. In den folgenden Absätzen werden einige Hinweise auf die verbindenden Elemente der Untersuchungen gegeben.

In der 1. und 2. Untersuchung stehen zwei historische mathematische Quellen mit Fach- bzw. Lehrbuchcharakter im Vordergrund. In der ersten Untersuchung (vgl. 6) werden von Mises' (1931) „Vorlesungen aus dem Gebiete der Angewandten Mathematik: 1. Band Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik“ (im Folgenden kurz „Vorlesungen“) betrachtet und grundlegende Theorie-Elemente mit Bezug auf das Verhältnis von Kollektiv und Wahrscheinlichkeitsbegriff strukturalistisch partiell rekonstruiert. In der zweiten Untersuchung (vgl. 7) wird Kolmogoroffs (1973) Werk „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (im Folgenden kurz „Grundbegriffe“) untersucht. Dabei wird im Gegensatz zur Arbeit von von Mises auf eine strukturalistische Rekonstruktion verzichtet, da Kolmogoroffs Werk „Grundbegriffe“ von ihm nicht als empirische Theorie intendiert ist, was sich an der formal-abstrakten Auffassung Kolmogoroffs in diesem Werk zeigen wird. Zudem genügt Kolmogoroffs Arbeit mit seiner Axiomatik auf Basis der Mengentheorie den Präzisionsansprüchen des strukturalistischen Theorienkonzepts. Eine zusammenfassende qualitative Inhaltsanalyse zeigt dann, welche Auffassungen Kolmogoroff nicht nur implizit im Rahmen seiner „rein mathematischen Entwicklung“ (Kolmogoroff, 1973, S. 3) deutlich macht, sondern auch diejenigen, die Kolmogoroff explizit artikuliert.

Die Wahl dieser Quellen erfolgte aus folgenden Gründen:

- Kolmogoroffs „Grundbegriffe“ sind der Ausgangspunkt der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie;
- Kolmogoroff bezieht sich innerhalb seiner „Grundbegriffe“ explizit auf von Mises „Vorlesungen“ und rekurriert auf diese in Bezug auf anschauliche oder anwendungstheoretische Perspektiven;

- Kolmogoroffs „Grundbegriffe“, und davon insbesondere die Formulierung seiner Axiome, bilden heute noch die Grundlage für Stochastik-Vorlesungen an Universitäten und zeichnen sich durch ihren formal-abstrakten Charakter aus;
- von Mises „Vorlesungen“ waren in der mathematischen Gemeinschaft bekannt und wurden breit diskutiert (Shafer & Vovk, 2006, S. 43–44);
- von Mises Konzept des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist durch den Kollektivbegriff stark an Daten aus konkreten Zufallsversuchen gebunden und damit mit dem Konzept der relativen Häufigkeiten eng verknüpft. Dies entspricht dem mathematikdidaktisch und bildungspolitisch *gewünschten Verständnis* des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Schule (Arbeitskreis Stochastik, 2002; Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen, 2004);
- Beide Quellen zeigen, in welchem kurzem Zeitraum Auffassungen entstehen und sich verändern können, die die mathematische Community als Ganze maßgeblich beeinflusst haben (vgl. Abbildung 7).
- In beiden Quellen artikulieren die Autoren ihre Auffassung in Bezug auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr explizit.

Auffällig für eine Leser*in dieser Arbeit könnte sein, dass die frühe Wahrscheinlichkeitsrechnung, insbesondere das, was man heutzutage unter „klassischer Wahrscheinlichkeitsrechnung“ versteht, in dieser Arbeit nicht behandelt wird. Dies hat mehrere Gründe. Zum einen gibt es bereits eine Vielzahl von Arbeiten, die diese Periode – einzelne Klassiker sowie größere Abschnitte der stochastischen Entwicklung – sowohl aus fachlicher (Czuber, 1899; Struve & Struve, 1997) wie auch mathematikdidaktischer Perspektive (Steinbring, 1980a; Biehler & Engel, 2015) betrachten. Zum anderen sind die Auffassungen, die im aktuellen Schul- und Universitätskontext relevant sind, sehr ähnlich zu denen von von Mises und Kolmogoroff. Zwar werden im Schulkontext auch klassische Perspektiven, wie Laplace’sche Zufallsexperimente aufgegriffen, die intendierte Fundierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs im Schulkontext erfolgt dennoch in einem empirisch-gegenständlichen Sinne (vgl. 8).

Die Analogie der Auffassungsunterschiede zwischen von Mises und Kolmogoroff sowie zwischen Schul- und Hochschulkontext nachzuweisen ist das Ziel der Untersuchungen 3 und 4, die hinsichtlich des Mediums ähnliche Quellen, nämlich Schul- und Lehrbücher nutzen. Entsprechend vorsichtig sind die den

Untersuchungen grundlegenden Forschungsfragen formuliert. Denn durch die Analyse von Schul- und Lehrbuchtexten können natürlich höchstens die Auffassungen der Autor*innen der Quellen rekonstruiert werden (wenn überhaupt), nicht diejenigen der Nutzer*innen dieser Lehrbücher. Die Übernahme dieser Auffassungen durch Lernende und Lehrende müsste dann zusätzlich empirisch nachgeprüft werden (Fan, 2013), was im Rahmen dieser Arbeit nicht stattfinden konnte, aber für die Untersuchung von Auffassungen über Mathematik als Ganzes wie auch in Bezug auf domänenspezifische Auffassungen (z.B. Witzke & Spies, 2018) ein weiteres Forschungsdesiderat bildet.

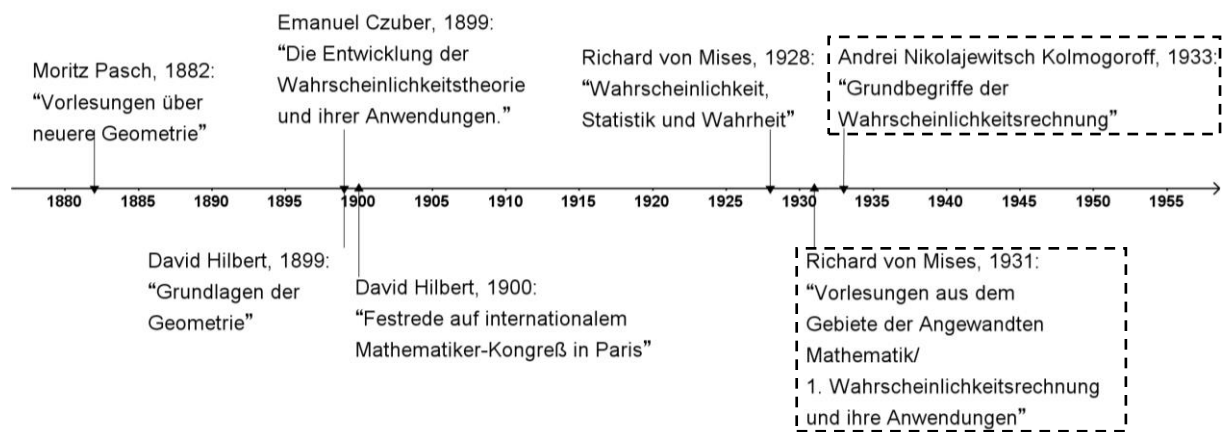


Abbildung 7: Historische Verortung der in den ersten beiden Untersuchungen zentralen Quellen (gerahmt).

In der 5. Untersuchung (vgl. 10) wird die Frage gestellt inwiefern das dort beschriebene Interventionsseminar ÜberPro_WR zur Reflexion eigener Übergangserfahrungen und Diversifizierungen des Mathematikbildes der teilnehmenden Studierenden führt. Die besprochenen Quellen in den Untersuchungen 1 bis 4 waren – zumindest in Auszügen – auch Lernmaterialien im Interventionsseminar, die den Studierenden als Reflexionsanlass angeboten wurden. Neben diesen Quellen umfasste das Seminar weitere Elemente, wie beispielsweise die explizite Selbstreflexion mithilfe eines Reflexionsbuchs. Denn eine Perspektiverweiterung, oder Diversifizierung in Bezug auf die subjektiven Erfahrungsbereiche, sowie der strukturellen Kopplung kann – laut der entwickelten theoreti-

schen Annahmen (vgl. Theoretischer Teil) – nur innerhalb eines reflexionsanregenden Erfahrungsbereiches möglich sein¹²⁰. Die Möglichkeiten, die eine solche Intervention für die Reflexion und Diversifizierung des eigenen Mathematikbildes bietet, werden durch eine intensive Fallstudie mit Bezug auf einen Teilnehmer des Seminars dargestellt.

¹²⁰ Dies bedeutet nicht, dass Reflexionen über die eigene Auffassung immer von außen induziert werden müssen. Allerdings konnte sich zeigen (vgl. Untersuchung 5), dass geeignete Reflexionsanlässe Selbstreflexionen fördern können. Entsprechend der Definition des Erfahrungsbereichs ist der subjektive Erfahrungsbereich für das betroffene Individuum zudem als eine Erweiterung des Erfahrungsbereichs zu sehen in dem es auf natürliche Weise Selbstreflexion betreiben kann (vgl. 4.3.1).

6 Empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 20. Jahrhundert

„Der leitende Gedanke dabei ist der, daß [sic!] die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit nur solche Erscheinungen erfassen kann, bei denen „Wahrscheinlichkeit“ wesentlich gleichbedeutend ist mit relativer Häufigkeit innerhalb eines bestimmten Wiederholungsvorgangs. [...] Meine Hoffnung geht dahin, mit der vorliegenden Darstellung nicht nur die Möglichkeit, sondern auch die Notwendigkeit der veränderten Grundauffassung nachgewiesen zu haben.“

Richard E. von Mises (1931, S. IV)

In dieser Untersuchung wird der Frage nachgegangen ob eine empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (WR) in ihrer historischen Entwicklung nachzuweisen ist. Dazu werden Auszüge aus der Quelle „Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik“ (im Folgenden kurz „Vorlesungen“) von von Mises untersucht, deren besonderes Merkmal eine starke – und vor allem explizite – Forderung nach und Förderung von einer empirisch-gegenständlichen Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Entsprechend handelt es sich bei von Mises' Auffassung um ein exemplarisches Beispiel einer empirisch-gegenständlichen Auffassung. Dies macht diese Quelle und auch den im Seminar behandelten Auszug „I. §1. 5. Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt“, so didaktisch wertvoll für die Ausbildung von Lehrer*innen an der Hochschule (vgl. 10).

Entsprechend dieses Verständnisses der Forschungsfrage wird hier nicht versucht eine vollständige (mathematik-)historische oder (mathematik-)philosophische Untersuchung der Quelle durchzuführen, sondern eine mathematikdidaktische mit einem besonderen Schwerpunkt auf den Fragen inwiefern und warum von Mises „Vorlesungen“ Reflexionsanlässe für die eigene Auffassung über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematik bieten kann.

Diese Untersuchung gliedert sich im Folgenden in vier weitere Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird das Ziel der Untersuchung (6.1) erläutert und begründet sowie in die theoretischen Überlegungen eingebettet. Im zweiten Abschnitt (6.2) wird die „Vorlesung“ in ihrem Kontext verortet. Dies beinhaltet zum einen Informationen zu von Mises, den Einfluss den diese Arbeit auf die mathematische

Gemeinschaft hatte sowie eine Übersicht ihres Zusammenhangs mit weiteren Werken von von Mises. Im dritten Abschnitt wird die Methode (6.3) der strukturalistischen Rekonstruktion erklärt. Das Ziel dieser Rekonstruktion liegt in der Offenlegung der Struktur der Theorie sowie deren empirischen Gehalt. Im letzten Teil (6.4) werden die Untersuchungsergebnisse der hier angestellten partiellen Rekonstruktion dargestellt und kommentiert.

6.1 Ziele der Untersuchung 1

Das Ziel dieser Untersuchung liegt in der Beantwortung der ersten Forschungsfrage, nämlich

1. Ist eine empirisch-gegenständliche Auffassung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen und wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?

Diese Frage mutet fast trivial an. Schließlich sind die Wahrscheinlichkeitsrechnung und gerade die Wahrscheinlichkeitstheorie seit Beginn ihrer Entwicklung eng mit ihren Anwendungen in Form von „realen“ Zufallsexperimenten verknüpft.

Als Ausgangspunkt mathematischer Stochastik wird die Analyse von Glücksspielen gesehen. So beschreiben, bspw. Kütting und Sauer (2014, S. 79) für diese frühe Periode der Wahrscheinlichkeitsrechnung u.a. das klassische Problem „Force majeure“, welches auch unter dem Namen Teilungsproblem bekannt ist. Dieses Problem beschäftigte verschiedene Mathematiker, u.a. Pacioli, Tartaglia und Leibniz. Das heute als Lösung des Problems angesehene Ergebnis und der zugehörige Briefwechsel durch Pascal und Fermat im Jahre 1654 markiert laut einschlägiger Literatur die „Geburtsstunde“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Czuber, 1899, S. 1; Wirths, 1999).

In der darauffolgenden Zeit haben vor allem statistische Fragestellungen aus dem Versicherungswesen und der Staatenkunde, aber auch juristische Fragestellungen die Entwicklung der Stochastik gefördert.

Große Anwendungsfelder bildeten seit dem 19. Jahrhundert physikalische Theorien und Modelle wie die Thermodynamik und zu Beginn des 20. Jahrhunderts die Quantenphysik insbesondere im Sinne der Kopenhagener Deutung (Baker, 2015). Umso „merkwürdiger“ erscheint folgende Feststellung von Czuber (1899,

S. 1), die vermutlich sowohl von Mises „Vorlesungen“, wie auch Kolmogoroffs „Grundbegriffe“ beeinflusst haben (vgl. 7):

„1. An der Schwelle der Wahrscheinlichkeitstheorie steht eine Reihe von Begriffen, welche der Mathematik fremd sind, und über deren Deutung die Discussion [sic!] nicht abgeschlossen ist, ja heute lebhafter geführt wird denn je. Und doch ist, ehe die Rechnung einsetzt, eine Einigung über dieselben erforderlich, wenn anders den Resultaten eine bestimmte Bedeutung zukommen soll. Denn auf dem Boden jener Begriffe ruht das oberste Princip der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das ist die Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs; von der Fassung jener Begriffe hängen aber auch die Grenzen des Anwendungsgebietes unserer in vielfacher Beziehung *merkwürdigen Theorie* [Herv. G.S.] ab.“

(Czuber, 1899, S. 1)

Das Ziel von von Mises Werk, das in dieser Untersuchung als Quelle dient, ist die Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als „mathematische Naturwissenschaft“ (von Mises, 1931, S. 1), als Teil der angewandten Mathematik – ohne Merkwürdigkeiten. Von Mises Methode für diese Grundlegung ist die Rückführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf den des Kollektivs und damit eine starke Beschränkung des Anwendungsfelds. Diese Beschränkung der Wahrscheinlichkeitsrechnung umfasst nur Gebiete „in denen ‚Wahrscheinlichkeit‘ wesentlich gleichbedeutend [...] mit *r e l a t i v e r H ä u f i g k e i t* [Herv. im Original] innerhalb eines bestimmten Wiederholungsvorgangs [ist]“ (von Mises, 1931, S. IV). Was „wesentlich gleichbedeutend“ meint wird in der strukturalistischen Rekonstruktion deutlich (vgl. 6.4). Dieser mit Bezug auf die Wiederholungsvorgänge „frequentistisch“ genannte Zugang, ist bis heute eine weitverbreitete Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und spiegelt eine empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitstheorie und für von Mises auch der Wahrscheinlichkeitsrechnung¹²¹ wieder, da das spezifische Element „(propositionales) Wissen“ der zugehörigen subjektiven Erfahrungsbereiche als empirische Theorie rekonstruiert werden kann (vgl. 4.4).

¹²¹ Von Mises nutzt in seiner „Vorlesung“ den Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf verschiedene Arten. Manchmal bezeichnet er damit nur die Berechnung nach Definition der vorliegenden Kollektive und vor der Interpretation der Ergebnisse, auch „engere Wahrscheinlichkeitsrechnung“ genannt (von Mises, 1931, S. 1; von Mises & Geiringer, 1972, S. 263). Dann spricht er

Die eben genannten Aspekte werden besonders deutlich im „§1 Das Kollektiv und die Wahrscheinlichkeit“ des I. Abschnitts „Die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ in von Mises' (1931, S. 7ff.) „Vorlesungen“, die in der folgenden Untersuchung im Zentrum stehen.

6.2 Kontext der Quelle zur Untersuchung 1

In diesem Abschnitt wird zunächst ein kurzer Überblick über Richard von Mises Leben und Werk gegeben, mit Berücksichtigung ausgesuchter weiterer Werke von von Mises, die seine „Vorlesungen“ beeinflusst haben, sowie die Auswirkungen, die seine „Vorlesungen“ auf die mathematische Gemeinschaft hatte.

Richard von Mises Leben sowie dessen vielfältige Stationen – akademisch wie geographisch – sind gut dokumentiert. Eingehende mathemathikhistorische Forschungen über von Mises liegen von Siegmund-Schultze vor, der sich in verschiedenen Arbeiten mit Richard von Mises sowohl im Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie (Siegmund-Schultze, 2010, 2006, 2004b) als auch der (mathematischen) Physik und angewandten Mathematik (Siegmund-Schultze, 2004a) auseinandergesetzt hat. Eine umfassende Übersicht gibt Stadler (2016) im Rahmen seiner Einführung einer Wiederauflage von von Mises „Kleinem Lehrbuch des Positivismus“¹²², welches ersterer ergänzt um eine Einführung herausgegeben hat.

davon, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Naturwissenschaft aufgefasst wird (von Mises, 1931, S. 1). Ich unterscheide die Wahrscheinlichkeitstheorie in dieser Arbeit von der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dadurch, dass unter der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur die Berechnungen und deren zugrundeliegenden Regeln gefasst werden, wohingegen die Anwendungen und Konstruktion der Wahrscheinlichkeiten zusätzlich zu den Berechnungen und entsprechenden zugrundeliegenden Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeitstheorie bilden.

¹²² Von Mises (2016) „Kleines Lehrbuch des Positivismus“ ist rein vom Seitenumfang (im Suhrkamp Tschenbuch Druck etwa 450 Seiten) nicht als klein anzusehen. In der Einleitung kommentiert von Mises den Titel seines Werkes folgendermaßen, wodurch auch seine Absichten mit diesem Werk klar hervortreten.

„Der Titel, den das Buch trägt, bedarf einer Erläuterung in mehrfacher Hinsicht.

Ich habe den Ausdruck „Positivismus“ zur Bezeichnung der von mir vertretenen Anschauungen gewählt, weil er der bisherigen Verwendung und seiner Wurzel nach der zutreffendste zu sein schien. [...] Die Bezeichnung „Lehrbuch“ weist darauf hin, daß der Verfasser nicht den Anspruch erhebt, was er vorbringt, als neu und original gelten zu lassen. Er fühlt sich als Wortführer einer seit Jahrhunderten fortwirkenden Entwicklung und wünscht nur, deren heutigen Stand deutlich und nicht allzu unvollständig dargestellt zu haben. Ein Blick auf die Inhaltsübersicht Seite 69 bis 73 zeigt, wie umfassend der in Betracht gezogene Gegenstandsbereich ist; die Einschränkung, die der Titel mit dem Worte ‚klein‘ vorsieht, wird somit nicht unbegründet erscheinen.“ (von Mises, 2016, S. 65).

Diese Einleitung stellt für den hier gegebenen kurzen Überblick über von Mises (akademischen) Lebens die Hauptquelle dar.

Richard von Mises – mit vollständigem Namen Richard Martin Edler von Mises – wurde im Jahre 1883 in Lemberg innerhalb der österreich-ungarischen Monarchie geboren. Dieser Geburtsort resultierte allerdings aus der beruflichen Reisetätigkeit seines Vaters, einen graduierten Techniker der ETH Zürich (vgl. Stadler, 2016, S. 8). Insgesamt kann davon gesprochen werden, dass von Mises klar in und von seiner Wiener Heimatstadt geprägt war. Er maturierte mit Auszeichnung am humanistisch Akademischen Gymnasium in Wien, auf das ein Maschinenbau Studium an der TU Wien folgte, während seine erste wissenschaftliche Arbeit „Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven“ entstand und in der Zeitschrift für Mathematik und Physik publiziert wurde. Darauf folgten über 150 weitere Veröffentlichungen, wobei von Mises' Interessensgebiete sehr weit reichten von der Mathematik, Aerodynamik, Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie, Wissenschaftsgeschichte bis zur Philosophie (Stadler, 2016, S. 10). Zudem hat er aufgrund seiner Rilke Leidenschaft mehrere Werke von ihm herausgegeben. Von Mises promovierte an der TU Wien und hat sich danach im Rahmen seiner Stelle als „Assistent und Konstrukteur an der Lehrkanzel für Mechanik der Deutschen Hochschule in Brünn“ habilitiert¹²³. Darauf folgte bis zum Ende des ersten Weltkriegs eine Anstellung als außerordentlicher Professor an der Universität in Straßburg, wobei seine Lehrtätigkeit durch den Kriegsdienst unterbrochen wurde (Stadler, 2016, S. 10). Während seiner Zeit in Straßburg und danach stand er im Kontakt zu Wien und pflegte seine Kontakte zum Wiener Kreis, insbesondere durch die Auseinandersetzung mit Werken von Mach und Popper (Stadler, 2016, S. 11ff.). Nach verschiedenen anderen wissenschaftlichen Stationen wurde er zum Ordinarius an der Universität Berlin in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts berufen. Zur gleichen Zeit wurde er Direktor des Instituts für angewandte Mathematik bis er 1933 von den Nationalsozialisten entlassen wurde¹²⁴. In Stadlers Übersicht über von Mises ist folgende Beschreibung hinsichtlich Fragen zur empirisch-gegenständlichen und formal-abstrakten Auffassung im Rahmen dieser Arbeit besonders beachtenswert:

¹²³ Diese Habilitation erfolgte bei Georg Hamel, dessen Verhältnis zu von Mises verschiedene kritische Phasen durchlief (vgl. Siegmund-Schultze, 2003).

¹²⁴ Von Mises war jüdischen Glaubens hat allerdings auch zum Katholizismus konvertiert und später konfessionslose Ansichten vertreten.

„In den 13 Berliner Jahren begründete er seinen internationalen Ruf als Pionier und Theoretiker der angewandten Mathematik. Dies geschah vor allem durch die Herausgabe der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik von 1921 bis 1933 mit der provokanten Zielsetzung, die angewandte Mathematik neben der ‚reinen Mathematik‘ als autonomes Teilgebiet zu etablieren. Diese Pragmatisierung der formal-theoretischen Disziplin mußte eine prominente Gegnerschaft wie die Göttinger Schule um Richard Courant und David Hilbert herausfordern, die für die Einheit der gesamten Disziplin eintraten und die programmatische Verkündung einer Teildisziplin nicht goutieren wollten, wie sie von Mises im ersten Band der von ihm gegründeten Zeitschrift vorgebracht hatte:

„Es ist im Laufe des letzten Jahrhunderts, namentlich in Deutschland, Brauch geworden, der ‚reinen‘ Mathematik eine ‚angewandte‘ begrifflich gegenüberzustellen. Gehen wir aber in der Geschichte der Wissenschaften weiter zurück, so geraten wir wohl in Verlegenheit mit der Frage, wohin die Leistungen eines Archimedes oder Newton, eines Euler oder Gauss zu rechnen seien. Kann man vielleicht noch bei Gauss die einzelnen Arbeiten in solche der einen und der andern Richtung [sic!] trennen, so bleibt es doch vollends unklar, ob wir Newtons Grundlegung der Differentialrechnung und der Mechanik als reine oder als angewandte Mathematik bezeichnen sollen. Auch die persönliche Einstellung des Urhebers scheint hier eine Entscheidung nicht immer zu ermöglichen: Man kennt die Überlieferung, die Archimedes als weitabgewandten Theoretiker auftreten läßt, während andererseits feststeht, daß er beim Bau von Kriegsmaschinen sehr wohl seine Kenntnisse in den praktischen Dienst des Vaterlandes zu stellen wußte.“

(Stadler, 2016, S. 13–14)

Bis heute ist diese begriffliche Unterscheidung Standard für die Unterteilung mathematischer Veranstaltungen in Studiengängen oder mathematischen Arbeitsgruppen der Mathematik. Die Anwendung klassischer reiner mathematischer Teilgebiete (Schroeder, 1994) findet ebenso statt, wie Studierende „angewandte

Mathematik“ als anwendungsfrei wahrnehmen. Unabhängig davon ist von Mises historischer Kommentar in Bezug auf die Frage, welche Auffassung Mathematiker der Vergangenheit hatten sehr interessant (Witzke, 2009; Burscheid & Struve, 1988).

Während seiner Berliner Zeit veröffentlichte von Mises in Wien ein Vielfach, unter anderem auch von Khinchine ins russische übersetzte, populärwissenschaftliches Buch „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit“ (von Mises, 1928), in dem von Mises seinen erkenntnistheoretischen Standpunkt der Wahrscheinlichkeitstheorie, teilweise auch sehr polemisch, in sechs Vorträgen darlegt (von Mises & Geiringer 1972, S. 262–265). Die Niederschrift seiner Gedanken zur Klärung der Begriffe „Wahrscheinlichkeit“ und „Statistik“ erfolgt dabei hauptsächlich im Prosatext, was das Nachvollziehen der mathematischen Konstruktion der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Basis des Kollektivbegriffs erschwert. Besonders interessant an diesem Werk, wie auch an von Mises „Vorlesungen“, ist sein didaktisches Vorgehen am Ende seiner Kapitel eine Zusammenfassung anzubieten. So findet sich auch am Ende von „Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit“ eine „Zusammenfassung der sechs Vorträge in sechzehn Lehrsätzen“ Eine Auswahl dieser Lehrsätze ist im Folgenden zum Verständnis der Auffassung von von Mises Wahrscheinlichkeitsbegriff gegeben:

„1. Die Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich nicht richtig fassen, wenn man die Bedeutung des Wortes ‚Wahrscheinlichkeit‘ dem allgemeinen Sprachgebrauch entnimmt; sie gelten vielmehr nur für einen bestimmten, künstlich abgegrenzten, rationellen Wahrscheinlichkeitsbegriff [Herv. im Original].

2. Von Wahrscheinlichkeit kann in rationellem Sinn erst dann die Rede sein, wenn in jedem einzelnen Fall das Kollektiv [Herv. im Original] genau beschrieben ist, innerhalb dessen die Wahrscheinlichkeit betrachtet wird; Kollektiv heißt eine gewissen Forderungen genügende Massenerscheinung, ein Wiederholungsvorgang, allgemein eine Folge von Beobachtungen, die man sich unbegrenzt fortsetzbar denkt.

3. Wahrscheinlichkeit eines Merkmals (Beobachtungsergebnisses) innerhalb eines Kollektivs heißt der Grenzwert, dem die relative

Häufigkeit [Herv. im Original] des Auftretens dieses Merkmals in der Beobachtungsfolge bei unbegrenzter Fortsetzung der Versuche sich nähert; dieser Grenzwert bleibt ungeändert, wenn man die Beobachtungsfolge einer beliebigen Stellenauswahl unterwirft: Prinzip der Regellosigkeit oder des ausgeschlossenen Spielsystems [Herv. im Original]. [...]

4. Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung im engeren Sinne besteht ausschließlich darin, aus den als gegeben vorausgesetzten Wahrscheinlichkeiten innerhalb gewisser „Ausgangskollektivs“ [Herv. im Original] die Wahrscheinlichkeiten innerhalb solcher Kollektivs zu rechnen, die aus den ersteren abgeleitet werden [Herv. im Original]; die hier gemeinte Ableitung neuer Kollektivs läßt sich stets auf die, eventuell wiederholte, Durchführung von vier einfachen Grundoperationen [Herv. im Original] zurückführen.

5. Von dem Zutreffen eines Wahrscheinlichkeitswertes in irgend einem konkreten Fall – es mag sich um die Ausgangswerte einer Rechnung oder ihre Ergebnisse handeln – kann man sich allein nur durch den statistischen Versuch [Herv. im Original], d.h. die Durchführung einer genügend langen Beobachtungsreihe, überzeugen; es gibt weder eine a-priori-Erkenntnis [Herv. im Original] der Wahrscheinlichkeit noch auch die Möglichkeit, mit Hilfe einer anderen Wissenschaft [Herv. im Original], etwa der Mechanik, auf Wahrscheinlichkeitswerte zu schließen.

6. Was man in der klassischen Theorie [Herv. im Original] als Definition der Wahrscheinlichkeit ansieht, ist nur der Versuch den allgemeinen Fall auf den speziellen der Gleichverteilung [Herv. im Original] (bei dem alle Merkmale innerhalb des Kollektivs gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen) zurückzuführen; [Herv. im Original] eine solche Zurückführung ist oft unmöglich, wie bei der Sterbenswahrscheinlichkeit, oft führt sie zu Widersprüchen, wie beim Bertrand'schen Problem [Herv. im Original]; keinesfalls enthebt sie der Notwendigkeit, die Wahrscheinlichkeit

im Falle der Gleichverteilung erst noch zu definieren. Ohne die Ergänzung durch die Häufigkeitsdefinition kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt zu keiner Aussage über den Ablauf von Erscheinungen führen.

7. Die sogenannten Gesetze der großen Zahlen [Herv. im Original] enthalten nur dann sinnvolle Aussagen über den Ablauf einer Beobachtungsfolge, wenn man von vornherein von der Häufigkeitsdefinition der Wahrscheinlichkeit ausgeht; sie stellen dann bestimmte, aus der Regellosigkeit folgende Eigenschaften der Anordnung der Beobachtungsergebnisse fest; bei Verwendung der klassischen ‚Definition‘ liefern die Gesetze der großen Zahlen lediglich rein arithmetische Eigenschaften gewisser Gruppen von ganzen Zahlen, also Aussagen, die in keinerlei Beziehung zum zeitlichen Ablauf von Vorgängen [Herv. im Original] stehen.

8. Die Aufgabe, die der Wahrscheinlichkeitsrechnung innerhalb der sogenannten mathematischen Statistik [Herv. im Original] zufällt, besteht darin, zu untersuchen, ob eine vorgegebene statistische Aufnahme ein Kollektiv bildet [Herv. im Original], bzw. ob und in welcher Weise sie sich auf Kollektivs von möglichst einfacher Verteilung zurückführen [Herv. im Original] läßt. Eine solche Zurückführung liefert eine zusammenfassende, systematische Beschreibung, also eine ‚Erklärung‘ der statistischen Erscheinung.

12. Die Sätze einer statistischen Theorie in der Physik [Herv. im Original] unterscheiden sich grundsätzlich von denen jeder deterministischen Theorie: sie stellen immer nur eine Behauptung darüber auf, welchen Verlauf ein Versuch oder eine größere Versuchsreihe bei hinreichend häufiger Wiederholung in der überwiegenden Mehrheit der Fälle [Herv. im Original] nehmen wird; diese Mehrheit kann eine so starke sein, daß praktisch [Herv. im Original] der Unterschied aufgehoben wird.

16. Daß eine statistische Theorie eine ‚nur vorläufige‘ Art der Naturerklärung gegenüber einer deterministischen, das ‚Kausalitätsbedürfnis‘ [Herv. im Original] befriedigenden darstellt, ist ein Vorurteil [Herv. im Original], das aus der geschichtlichen Entwicklung der Naturwissenschaften verstanden werden kann, das aber mit zunehmender Einsicht verschwinden muß.“

(von Mises & Geiringer, 1972, S. 262–265)

Aus diesen Lehrsätzen lässt sich für von Mises Auffassung entsprechend des dargestellten propositionalen und prozeduralen Wissens ableiten, dass

- er eine rationale und, im Sinne des Positivismus des Wiener Kreises, wissenschaftliche Begriffsbestimmung des Wahrscheinlichkeitsbegriff fordert; [Lehrsätze 1,2]
- der Zufall für von Mises Wahrscheinlichkeitsverständnis eine bedeutende Rolle spielt, der entsprechend auch in der mathematischen Grundlegung berücksichtigt werden sollte; [Lehrsatz 3]
- er einen engeren und weiteren Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung nutzt, wobei er unter dem ersten nur die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten aus gegebenen Wahrscheinlichkeiten versteht und beim zweiten, weiteren Verständnis zusätzlich geprüft werden muss, ob es sich bei einem vorliegenden Versuch, bzw. bei einer Datenreihe um ein Kollektiv handelt; [Lehrsatz 4,8]
- aus seiner Sicht eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur dann erfolgreich sein kann, wenn die Häufigkeitsdefinition zu Grunde gelegt wird. Ähnliches gilt dabei auch für die Nutzung und Erklärung des Gesetzes der großen Zahl; [Lehrsatz 6,7]
- seine Perspektiven maßgeblich von seinen physikalischen Denkweisen geprägt sind. [Lehrsatz 5,12,16]

Diese Auffassung findet sich in analoger Form auch in seinen „Vorlesungen“ wieder, in denen er allerdings zusätzlich den Wahrscheinlichkeitsbegriff durch eine geeignetere symbolische Darstellung präziser fasst (vgl. 6.4.1)

Im Jahre 1933 wurde von Mises aufgrund des Nazi-Regimes und durch Einsetzung des „Gesetzes zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums“ entlassen. 1934 erhielt er eine Stelle als ordentlicher Professor der Universität Istanbul. 1939 emigrierte von Mises dann in die USA, wo er an der Harvard

University arbeitete. Während dieser Zeit hat er viele seiner Arbeiten auch ins Englische übersetzt und dabei neu kommentiert. Dabei bleibt er trotz des Erfolgs der maßtheoretischen Grundlegung, bestärkt durch Kolmogoroffs Veröffentlichung der „Grundbegriffe“, bei seiner Auffassung von Wahrscheinlichkeitsrechnung und vertritt sie vehement (Mises & Geiringer, 1964).

Richard von Mises starb 1953 in Boston Massachusetts.

6.3 Methodik der Untersuchung 1

In der nachfolgenden Untersuchung wird die strukturalistische Rekonstruktion auf Auszüge des I. Abschnitts von von Mises „Vorlesungen“ angewendet. Die Methode der strukturalistischen Rekonstruktion basiert auf der Theorie des strukturalistischen Theorienkonzepts, welches ausführlich in Abschnitt 4.4 erläutert wurde.

Es gibt mittlerweile eine große Anzahl strukturalistischer Rekonstruktionen zu verschiedenen Bereichen, wie der Geometrie, der Analysis oder dem Mengen- und Zahlbegriff (Struve, 1990; Witzke, 2009; Burscheid & Struve, 2010; Schlicht, 2016). Die Darstellung der vorliegenden Rekonstruktionen orientiert sich an den Formen bisheriger Rekonstruktionen, die in den vorgenannten Werken durchgeführt wurden. Als Hauptvorlage, insbesondere hinsichtlich der Verwendung ausführlicher Erklärungen zur formalen Darstellung, haben mir die Rekonstruktionen von Struve (1990) gedient.

6.4 Ergebnisse der Untersuchung 1

Die Ergebnisse werden in zwei Abschnitten dargestellt. Der erste Abschnitt enthält eine partielle strukturalistische Rekonstruktion des Theorie-Elements **T(WRvM_Alt)** zum Konzept der Alternative als einfachstes Kollektiv in von Mises (1931) „Vorlesungen“. Im zweiten Abschnitt wird dieses Ergebnis in Beziehung zu weiteren Auszügen von von Mises Werken gesetzt.

6.4.1 Partielle strukturalistische Rekonstruktion des Theorie-Elements „einfachstes Kollektiv oder Alternative“

„Als einfachstes Kollektiv oder Alternative bezeichnen wir eine unendliche Folge gleichartiger Beobachtungen, deren jedesmaliges Ergebnis durch zwei Zeichen, etwa „0“ und „1“, dargestellt werden kann, wofern folgende zwei Forderungen erfüllt sind:

Erste Forderung: [Herv. im Original] Ist n_0 bzw. n_1 die Anzahl derjenigen unter den n ersten Beobachtungen, deren Ergebnis „0“ bzw. „1“ ist, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} = \omega_0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} = \omega_1.$$

Zweite Forderung: [Herv. im Original] Wird aus der Gesamtfolge durch „Stellenauswahl“ eine unendliche Teilfolge gebildet, so existieren auch innerhalb dieser Teilfolge die gleichen Grenzwerte

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_0}{n'} = \omega_0; \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_1}{n'} = \omega_1.$$

[...]

Die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten

$$\omega_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n}; \quad \omega_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n}$$

nennen wir die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten des Merkmals „0“ bzw. „1“ innerhalb des betrachteten Kollektivs.“

(von Mises, 1931, S. 14)

6.4.1.1 Vorüberlegungen zu $T(WRvM_{Alt})$

Neben dem einführenden Zitat von von Mises indem er das einfachste Kollektiv, die Alternative, definiert werden hier einige Vorüberlegungen dargestellt, insbesondere hinsichtlich einer ersten intuitiven Vorstellung der intendierten Anwendungen.

1. Die intendierten Anwendungen des Theorie-Elements $T(WRvM_{Alt})$ umfassen Massenerscheinungen oder Wiederholungsvorgänge durch deren Untersuchung sich eine „Folge von Beobachtungen“ ergibt (vgl. Def. ξ), wobei nur zwei Beobachtungsergebnisse ω_0 und ω_1 auftreten. Paradigmatische Beispiele sind hier der Münzwurf, das Auftreten von geraden und ungeraden Zahlen in einer Dezimaldarstellung oder ein Urnenexperiment aus dem bspw. mit „0“ und „1“ nummerierte Kugeln gezogen werden. In allen Fällen ist es nicht notwendig, dass es sich um einen Laplace-Versuch handelt, die beiden Ergebnisse also

eine gleichgroße (im Folgenden näher zu spezifizierende) Wahrscheinlichkeit haben.

2. Die Rekonstruktion der ((partiellen) potentiellen) Modelle erfolgt auf Grundlage der Darstellung „Das einfachste Kollektiv (Alternative)“ (Mises, 1931, S. 10–15, §1,2). Weitere Elemente des Kerns \mathbf{K} des Theorie-Elements, insbesondere die Beschränkungen (Constraints) \mathbf{C} ergeben sich aus den folgenden Paragraphen des 1. Abschnitts „Die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (Mises, 1931), da Sie auch für allgemeine Kollektive und allgemeine Wahrscheinlichkeitsbegriffe gelten. Dies ergibt sich daraus, dass $T(\mathbf{WRvM}_{Alt})$ eine Spezialisierung des Theorie-Elements $T(\mathbf{WRvM}_{All})$ für allgemeine Kollektive ist.

6.4.1.2 Definition 1: Menge partiell potentieller Modelle $\mathbf{M}_{pp}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$

$\mathbf{M}_{pp}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$: x ist ein partielles potentielles Modell von \mathbf{WRvM}_{Alt}

($x \in \mathbf{M}_{pp}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$) genau dann, wenn $\mathcal{E}, \varepsilon_j, \Omega, \omega_0, \omega_1, b, H_m, h_m$ existieren, sodass

- (1) $x = \langle \mathcal{E}, \Omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, b, X, H_m, h_m \rangle$

- (2) $\mathcal{E} = (\varepsilon_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ ist eine endliche Folge mit m Gliedern

- (3) $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$

- (4) $b: \mathcal{E} \rightarrow \Omega$

- (5) $X: \Omega \rightarrow \{0,1\}; X(\omega_i) = i; i \in \{0,1\}$

- (6) $H_m: \{0,1\} \rightarrow \{1, \dots, n\};$

$$H_m(i) = \left| \left\{ \varepsilon_j \in \mathcal{E} : X(b(\varepsilon_j)) = i; j \in \{1, \dots, m\} \right\} \right|, i \in \{0,1\}$$

- (7) $h_m: \{0,1\} \rightarrow \mathbb{Q}; h_m(i) = \frac{H_m(i)}{m} = \frac{\left| \left\{ \varepsilon_j \in \mathcal{E} : X(b(\varepsilon_j)) = i; j \in \{1, \dots, m\} \right\} \right|}{m}, i \in \{0,1\}$

Zu (2): Die Gegenstände der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind laut von Mises Massenerscheinungen oder Wiederholungsvorgänge (hier bezeichnet mit \mathcal{E}), die aus „einer sehr großen Zahl aufeinander folgender Elemente (Beobachtungen)“ (von Mises, 1931, S. 9) bestehen. Solche Beobachtungen werden hier als Elemente einer Folge ε_j dargestellt.

Zu (3): Diese Folgen von Beobachtungen haben im Falle der Alternative zwei Beobachtungsergebnisse, die von Mises auch Merkmale nennt. Entsprechend ist Ω die Ergebnismenge oder der Merkmalsraum, der im Falle der Alternative zwei Elemente ω_0 und ω_1 enthält.

Zu (4): Jeder Beobachtung ε_j wird genau ein Beobachtungsergebnis/Merkmal ω_i zugeordnet. Dies formuliert von Mises folgendermaßen:

„In allen Fällen sehen wir den Beobachtungsvorgang, die Messung nicht das physische Objekt selbst, als das Element der von uns betrachteten Massenerscheinung an. Wir werden daher auch statt Element des Kollektivs den konkreteren Ausdruck „Beobachtung“, statt Merkmal „Beobachtungsergebnis“ gebrauchen. Indem wir dies auch im Falle des Würfels oder der Losziehung tun (also das Ziehen aus der Urne und das Ablesen der Losnummer als eine „Beobachtung“ bezeichnen), erweitern wir nur unbedeutend den üblichen Sprachgebrauch. Wesentlich ist, daß der Einzelvorgang in sich abgeschlossen ist und sich nach einer dauernd gleichbleibenden Vorschrift vollzieht, die über die Bestimmung des Merkmals oder die eventuelle Ausscheidung des Versuches eindeutig verfügt.“

(von Mises, 1931, S. 9)

In dieser Rekonstruktion wurde dafür eine passende Zuordnung durch eine Funktion b definiert.

Zu (5): Entsprechend der Tatsache, dass bei den Anwendungen dieses Theorieelements nur zwei Beobachtungsergebnisse vorliegen sollen, möchte von Mises aus Gründen der „Vereinheitlichung“ oder Verallgemeinerung ein Merkmal immer mit „0“ und das andere immer mit „1“ bezeichnen. Dazu gibt er den Hinweis „oft nennt man das eine Merkmal „Ereignis“ und spricht dann von der Alternative „ob das Ereignis eintritt oder nicht eintritt“ (von Mises, 1931, S. 10). Diese Zuordnung wird in dieser Rekonstruktion mit einer Funktion X rekonstruiert, die wie üblich als Zufallsvariable verstanden werden kann.

Zu (6): Von Mises nutzt den Begriff der „absoluten Häufigkeit“ nicht. Allerdings bezeichnet er „[h]ier und im Folgenden [...] mit n_1 , bzw. n_0 die Anzahl derjenigen unter den ersten n Versuchen (Elementen), deren Ergebnis das Zeichen 1 bzw. 0 trägt“ (von Mises, 1931, S. 10). Dies entspricht der absoluten Häufigkeit H_n des Wertes der Zufallsvariable X . Der Notation von von Mises in Bezug auf n_0 und n_1 wird hier nicht gefolgt, da dies zu Verwirrung führen kann, insbesondere beim Grenzübergang der relativen Häufigkeiten in $M_p(WRvM_{Alt})$.

Zu (7): Basierend auf den Überlegungen zu (6) kann in üblicher Weise die relative Häufigkeit definiert werden, die von Mises folgendermaßen explizit definiert:

„Haben wir in einer beliebigen Zahl n von Beobachtungen n_0 -mal ein bestimmtes Ergebnis, so nennen wir $n_0:n$ die relative Häufigkeit dieses Ergebnisses und werden mit dieser Größe später den Wahrscheinlichkeitsbegriff in Verbindung bringen.“

(von Mises, 1931, S. 9)

6.4.1.3 Definition 2: Menge potentieller Modelle $M_p(WRvM_{Alt})$

$M_p(WRvM_{Alt})$: x ist ein potentielles Modell von $WRvM_{Alt}$ ($x \in M_p(WRvM_{Alt})$)

genau dann, wenn $\mathcal{E}, \varepsilon_j, \Omega, \omega_0, \omega_1, b, X, H_m, h_m, \bar{\mathcal{E}}, \bar{b}, \bar{h}_m, \bar{T}, \bar{h}_m^{(\bar{t})}$ existieren, sodass

- (1) $x = \langle \mathcal{E}, \Omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, b, X, H_m, h_m, \bar{\mathcal{E}}, \bar{b}, \bar{h}_m, p_0, p_1, \bar{T}, \bar{h}_m^{(\bar{t})} \rangle$
- (2) $\langle \mathcal{E}, \Omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, b, X, H_m, h_m \rangle$ ist $M_{pp}(WRvM_{Alt})$
- (3) $\bar{\mathcal{E}} = (\bar{\varepsilon}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine unendliche Folge; $\bar{\varepsilon}_j = \varepsilon_j; j \in \{1, \dots, m\}; \bar{\varepsilon}_j \in \bar{\mathcal{E}}; \varepsilon_j \in \mathcal{E}$
- (4) $\bar{b}: \bar{\mathcal{E}} \rightarrow \Omega$
- (5) $\bar{h}_m: \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}; \bar{h}_m(i) = \frac{|\{\bar{\varepsilon}_j \in \bar{\mathcal{E}}: X(\bar{b}(\bar{\varepsilon}_j))=i; j \in \{1, \dots, m\}\}|}{n}; n \in \mathbb{N}, i \in \{0,1\}$
- (6) $p_i \in [0,1]$
- (7) $\bar{T} = \{(\bar{\varepsilon}_{j_l})_{l \in \mathbb{N}}: (j_l)_{l \in \mathbb{N}} \text{ ist eine streng monoton wachsende Folge und es gilt } j_l \in J \subset \mathbb{N} \text{ und } |J| = \aleph_0\}$
- (8) $\bar{h}_m^{(\bar{t})}: \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}; \bar{h}_m^{(\bar{t})}(i) = \frac{|\{\bar{\varepsilon}_{j_l} \in \bar{\mathcal{E}}: X(\bar{b}(\bar{\varepsilon}_{j_l}))=i; \bar{t} \in \bar{T}\}|}{n}; i \in \{0,1\}; l, n \in \mathbb{N}$

Zu (2): Wie in Abschnitt 4.4 dargestellt ist jedes potentielle Modell auch ein partiell potentielles Modell. Dies liegt daran, dass zur Konstruktion der partiell potentiellen Modelle die theoretischen Begriffe aus den potentiellen Modellen ausgeschlossen werden. Mehr dazu in Zu (4), Zu (5), Zu (6) und Zu (7).

Zu (3): $\bar{\mathcal{E}}$ ist das, was von Mises unter einem *Kollektiv* versteht. Im Rahmen seiner ersten Forderung an die Existenz der Grenzwerte relativer Häufigkeiten formuliert er folgende Bedingungen an die betrachteten Massenerscheinungen, bzw. Beobachtungsfolgen:

„Es muß möglich sein, sich die Folge der Einzelercheinungen oder Beobachtungen (Elemente) unbeschränkt fortsetzbar zu denken, [...]“

(von Mises, 1931, S. 10)

Diese Denkmöglichkeit wird hier durch eine theoretische Erweiterung $\bar{\mathcal{E}}$ der konkreten Beobachtungsfolge \mathcal{E} erreicht. Diese zeichnet sich wie dargestellt dadurch

aus, dass sie in den ersten¹²⁵ n Stellen mit der konkreten Beobachtungsfolge \mathcal{E} übereinstimmt.

Zu (4): Auch für diese theoretische Erweiterung $\bar{\mathcal{E}}$, also insbesondere die Glieder, die nach der n -ten Stelle auftreten, sollen jeweils Beobachtungsergebnisse oder Merkmale zugeordnet werden. Entsprechend wird b theoretisch zu \bar{b} erweitert, die auch den Gliedern von $\bar{\mathcal{E}}$ nach der n -ten Stelle Beobachtungsergebnisse aus $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$ zuordnet.

Zu (5): Die relativen Häufigkeiten aus dem partiellen potentiellen Modell werden ebenso theoretisch erweitert wie die vorangehenden Größen. Entsprechend der Definition von $\bar{\mathcal{E}}$ ist die relative Häufigkeit \bar{h}_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ festgelegt und stimmt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ mit h_m aus dem partiell-potentiellen Modell überein.

Zu (6): p_i ist eine reelle Zahl, die im später zu bestimmenden Modell über eine Grenzwertbetrachtung der \bar{h}_n als Wahrscheinlichkeit einer Alternative festgelegt wird. Im Sinne des Begriffsgerüst des Theorie-Elements allerdings in $x \in \mathbf{M}_p(\mathbf{WRvM}_{Alt})$ bereits enthalten sein muss.

Zu (7): \bar{T} ist die Menge aller unendlichen Teilfolgen der Elemente der Menge $\bar{\mathcal{E}}$. Diese wird im Folgenden zur Definition des Modells $\mathbf{M}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$ benötigt um die Forderung zu erfüllen, dass jede unendliche Teilfolge – daher auch die Festlegung der Kardinalität \aleph_0 der Indexmenge J – den gleichen Grenzwert relativer Häufigkeiten besitzt, wie die Gesamtfolge aus der die Teilfolge gebildet wurde.

Zu (8): $\bar{h}_n^{(\bar{t})}$ ist die relative Häufigkeit, die den jeweiligen Alternativen zugeordnet wird, in Bezug auf die Teilfolgen.

Mithilfe dieser Begrifflichkeiten ist nun die Formulierung der Fundamentalsätze im Modell des Theorie-Elements möglich.

6.4.1.4 Definition 3: Menge der Modelle $\mathbf{M}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$

$\mathbf{M}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$: x ist ein potentielles Modell von \mathbf{WRvM}_{Alt} ($x \in \mathbf{M}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$) genau dann, wenn $\mathcal{E}, \varepsilon_j, \Omega, \omega_0, \omega_1, b, H_m, h_m, \bar{\mathcal{E}}, \bar{b}, \bar{h}_n, p_0, p_1, \bar{T}, \bar{h}_n^{(\bar{t})}$ existieren, sodass

¹²⁵ Es müssten nicht die ersten n Stellen sein. Man könnte bspw. auch davon ausgehen, dass die beobachtete Folge erst in der zwölften Stelle des Kollektivs beginnt. Zur leichteren Notation ist es aber zweckmäßig die hier vorgeschlagene Übereinstimmung der ersten n Stellen zu wählen.

- (1) $x = \langle \mathcal{E}, \Omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, b, H_m, h_m, \bar{\mathcal{E}}, \bar{b}, \bar{h}_n, p_0, p_1, \bar{T}, \bar{h}_n^{(\bar{t})} \rangle$
 (2) $\langle \mathcal{E}, \Omega, \mathbb{N}, \mathbb{Q}, b, H_m, h_m, \bar{\mathcal{E}}, \bar{b}, \bar{h}_n, p_0, p_1, \bar{T}, \bar{h}_n^{(\bar{t})} \rangle$ ist $\mathbf{M}_p(\mathbf{WRvM}_{Alt})$

und folgende Axiome gelten

- (A 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}_n(i) = p_i; p_i \in [0,1], i \in \{0,1\}$
 (A 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}_n^{(\bar{t})}(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{h}_n(i); \forall \bar{t} \in \bar{T}; i \in \{0,1\}$

Zu (A 1): Diese Darstellung entspricht der ersten Forderung, die von Mises im Einleitungszitat formuliert, dass die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten der Alternativen „0“ und „1“ bei Vorliegen des einfachsten Kollektivs konvergieren gegen je ein $p_i \in [0,1]; i \in \{0,1\}$.

Zu (A 2) Diese Darstellung entspricht der zweiten Forderung, die von Mises im Einleitungszitat formuliert, dass auch die relativen Häufigkeiten der Alternativen „0“ und „1“ der unendlichen Teilfolgen bei beliebiger „Stellenauswahl“ jeweils die gleichen Grenzwerte besitzen, wie die relativen Häufigkeiten der ursprünglichen Beobachtungsfolge.

6.4.1.5 Intertheoretische Verbindungen $\mathbf{L}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$ und Beschränkungen $\mathbf{C}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$: Ein Lösungsplan und Problemaufriss

Zur Vervollständigung eines Theorie-Kerns wie in Definition 2 (vgl. 4.4.2.1) beschrieben ist es erforderlich intertheoretische Verbindungen $\mathbf{L}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$ und Beschränkungen $\mathbf{C}(\mathbf{WRvM}_{Alt})$ für den Theorie-Kern auszuarbeiten, wobei erstere nicht zwingend erforderlich sind. Trotzdem lässt sich leicht ein Lösungsplan zum Auffinden intertheoretischer Verbindungen aufstellen. Von Mises (1931) bespricht nach der Einführung des einfachsten Kollektivs, der „Alternative“, die Verallgemeinerung zum „allgemeinen Kollektiv“ mit mehreren Merkmalen im Merkmalsraum, bzw. Ergebnissen in der Ergebnismenge. Wenn man eine strukturalistische Rekonstruktion des „allgemeinen Kollektivs“ formuliert, ergibt sich eine intertheoretische Verbindung durch den Spezialfall der „Alternative“ unter den „allgemeinen Kollektiven“.

Schwieriger ist dagegen der strukturalistische Zugriff auf die Beschränkungen, die Teil des Theorie-Kerns sein müssen. Analog zu typischen Beispielen solcher Beschränkungen – wie etwa die gleiche Verwendung der Erdmasse in den Systemen Erde-Sonne und Mond-Erde – geht es bei Beschränkungen darum gleiche Entitäten in verschiedenen Anwendungen in verschiedenen Rollen zu beobachten, denen dann bestimmte übergreifenden Eigenschaften zugeschrieben werden

sollen. Findet man keine solchen Beschränkungen hat das Theorie-Element keinen empirischen Gehalt, was das Ansinnen, eine Rekonstruktion zu versuchen, nutzlos werden ließe.

Einen Ausgangspunkt für eine Lösung, den ich im Rahmen dieser Dissertation nicht verfolgen konnte, scheint mir in der Rekonstruktion und Einbettung der „Grundoperationen“ (von Mises, 1931, S. 73ff.) zur Bildung neuer Kollektive von von Mises zu liegen. Gerade die Grundoperation der „Verbindung“ erscheint mir ein besonders guter Kandidat für die Rekonstruktion von Beschränkungen der Theorie-Elemente zu sein, in Analogie zum angeführten astronomischen Beispiel. Bei der Verbindung werden zwei Kollektive verbunden, wodurch sich die relativen Häufigkeiten der Merkmale entsprechend der neuen Beobachtungsfolge anpassen. Diese Veränderung der Häufigkeiten sollte gewissen Beschränkungen unterliegen, sodass ein Kollektiv in der einen Anwendung ähnliche Auswirkungen für die Wahrscheinlichkeiten der Merkmale der neuen Beobachtungsfolge in Abhängigkeit der weiteren Kollektive hat, wie in einer anderen Anwendung. Für diese Betrachtungen müssten zunächst diese „Grundoperationen“ in das Fundamentalgesetz des Theorie-Elements eingebracht werden. Eine typische intendierte Anwendung für diese „Grundoperation“ wäre bspw. das Werfen mit mehreren Münzen. Bei dieser Problemstellung handelt es sich um ein interessantes Forschungsdesiderat, das insbesondere tiefere Einblicke in den empirischen Gehalt von von Mises Wahrscheinlichkeitsrechnung geben kann, aber auch besonders geeignet erscheint Experimente in Bezug auf diese „Grundoperationen“ für den Stochastikunterricht an der Schule zu identifizieren.

6.4.2 Ergebnisse der partiellen strukturalistischen Rekonstruktion im Kontext

Die Zusammenstellung insbesondere aber Lehrsatz 7 reicht bereits aus um die gestellte Forschungsfrage positiv zu beantworten, da von Mises einerseits besonders starke **Wertungen** vornimmt und auch starke Emotionen innerhalb seines Erfahrungsbereichs zusätzlich zum rekonstruierten empirisch-gegenständlichen Wissen expliziert. Diese sind im nachfolgend wiederholten Lehrsatz entsprechend der vorhergehenden Hervorhebungen markiert.

7. Die sogenannten Gesetze der großen Zahlen enthalten **nur dann sinnvolle** Aussagen über den Ablauf einer Beobachtungsfolge, wenn man **von vornherein** von der Häufigkeitsdefinition der Wahrscheinlichkeit ausgeht; sie stellen dann bestimmte, aus der Regellosigkeit folgende Eigenschaften der Anordnung der

Beobachtungsergebnisse fest; bei Verwendung der klassischen „Definition“ liefern die Gesetze der großen Zahlen **lediglich** rein arithmetische Eigenschaften gewisser Gruppen von ganzen Zahlen, also Aussagen, die **in keinerlei Beziehung zum zeitlichen Ablauf von Vorgängen stehen**.

Kolmogoroff (1933) verweist in seinem ersten Kapitel „Die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung“, „§2 Das Verhältnis zur Erfahrungswelt“ in Fußnote 2 auf S. 3 auf „§5 Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt“ in von Mises (1931) „Vorlesungen“. Dieser Auszug bildet neben der wichtigen Querverbindung zu Kolmogoroffs „Grundbegriffen“ auch ein wichtiges Material im beschriebenen Seminar (vgl. 10). Entsprechend sollen hier zur Ergänzung der oben vorgenommenen Analyse noch einige Aspekte aus diesem Textstück behandelt werden um von Mises Standpunkt klarer darzustellen.

Von Mises zeigt in seinem Text eine Auffassung der exakten Naturwissenschaft, entsprechend des sog. EJASE-Modells von Einstein (Holton, 1981). Diese zeichnet sich durch ihr „Doppeltes Gesicht aus“ (von Mises 1931, S. 21). Einerseits wird die die Naturwissenschaft durch einen rein deduktiven Aufbau bestimmt. Dazu gehört eine Basis von begrifflich gefassten Axiomen und mathematische Schlussfolgerungen aus Axiomen (bestimmt durch Logik), wobei die Axiome selbst nur auf Forderungen bzgl. Widerspruchslosigkeit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit geprüft werden können. Auf der anderen Seite sollte „jede solche Theorie, wenn sie überhaupt einen *vernünftigen Zweck erfüllt* [Herv. G.S.], einem bestimmten Tatbestand von beobachtbaren, unserer sinnlichen Wahrnehmung zugänglichen Erscheinungen“ (von Mises, 1931, S. 21) beschreiben. In Auseinandersetzung mit der Axiomatisierung der Geometrie gibt er als Beispiel die Kugel an, deren Definition durch die Eigenschaft festgelegt wird, dass alle ihre Punkte den gleichen Abstand zum Mittelpunkt haben. Eine Eigenschaft, die nicht empirisch nachprüfbar ist¹²⁶. Grundsätzlich zählt von Mises (1931, S. 22) die Geometrie ebenfalls zur angewandten Mathematik und führt sie als Analogie zur Wahr-

¹²⁶ An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Überlegungen angestellt und Verfahren entwickelt wurden eine möglichst exakte Silizium Kugel herzustellen um die Masseneinheit Kilogramm neuzudefinieren. <https://www.ptb.de/cms/forschung-entwicklung/forschung-zum-neuen-si/ptb-experimente/kilogramm-und-mol-atome-zaehlen.html>

scheinlichkeitstheorie an. So erklärt von Mises den theoretischen Status des Kollektivs, der in der partiellen Rekonstruktion nachgewiesen wurde, folgendermaßen:

„Das Kollektiv, wie es durch unsere Axiome als abstrakter Begriff definiert wird, existiert natürlich nirgends in der Wirklichkeit, ebenso wenig wie etwa eine Ebene, eine Kugel oder sonst eine mathematische Fläche sich in der Erfahrungswelt nachweisen lässt. Das reale Spiel mit einem Würfel kann man nicht unbeschränkt wiederholen und daher läßt sich auch nicht feststellen, ob die relativen Häufigkeiten Grenzwerte zustreben oder nicht. Der genau gleiche Fall liegt vor, wenn man in der Mechanik voraussetzt, die Geschwindigkeit eines Punktes sei eine differenzierbare Funktion der Zeit, d.h. es existiere der Grenzwert des Differenzenquotienten Geschwindigkeit durch Zeit. *Kein Versuch, keine Messung kann diese Existenz bestätigen, die Annahme der Differenzierbarkeit rechtfertigt sich durch die Gesamtheit der Folgerungen, zu denen sie (mit anderen Annahmen zusammen) führt* [Herv. G.S.]“

(von Mises, 1931, S. 22–23)

Auch die Zweckmäßigkeit, die eine empirische Theorie hinsichtlich ihrer Passung auf das Phänomen hat, wird von von Mises am Beispiel der verschiedenen Anwendungsbereiche der Newtonschen und Einsteinschen Mechanik in Bezug auf Bewegungen im Sonnensystem erläutert, wobei „letztere[r] nur dann den Vorzug [gegeben wird], wenn man einem umfassenderen Erscheinungsgebiet gerecht werden will“ (von Mises, 1931, S. 23).

Besonders interessant in von Mises Darstellung ist die sog. Forderung nach einem ausgeschlossenem Spielsystem – in der Rekonstruktion mit Axiom (A2) bezeichnet, dessen Analogie er im physikalischen „Verbot des perpetuum mobile“ also dem Energieerhaltungssatz sieht. Beide zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich praktisch nicht überprüfen lassen, was sich darin zeigt, dass es viele Versuche gegeben hat ein „perpetuum mobile“ zu bauen bzw. in einem Casino ein Spielsystem zu erkennen. Alle diese Versuche blieben erfolglos (von Mises, 1931, S. 23–24). Insofern gibt es eine empirische Begründung, aber natürlich keinen Beweis, für die vorgestellten Verbotssätze.

Die Approximation der auftretenden relativen Häufigkeiten durch die aus der Theorie bestimmten Wahrscheinlichkeiten sind nur in dem Maße genau, wie die Ausgangswahrscheinlichkeiten genau sind (von Mises, 1931, S. 24–25). Diese Ausgangswahrscheinlichkeiten sind entsprechend von Mises Vorüberlegungen zum Kollektiv nur hinsichtlich dreier Fälle zu unterscheiden (von Mises, 1931, 25–27):

1. Glücksspiele, die er als künstliche Einrichtungen versteht „besonders gut“ Forderung (A2) zu erfüllen, und aus der Tradition heraus möglichst gleichverteilte Elementarereignisse zu erzeugen.
2. Statistik, in der die Genauigkeit der Aussagen der resultierenden Wahrscheinlichkeiten besonders von den Ausgangsdaten abhängt;
3. Aufgaben der theoretischen Physik, in denen von makroskopischen Größen, wie Druck und Temperatur auf Vielteilchensysteme und deren Eigenschaften geschlossen wird.

Zuletzt möchte ich noch auf von Mises Diskussion der Glücksspiele eingehen, die klar eine aprioristische Sichtweise solcher Glücksspiele ablehnt und die Entwicklung solcher Glücksspiele als Argument gegen diese Auffassung der Existenz von a-priori Wahrscheinlichkeiten ins Feld führt.

„Natürlich bedurfte es einer sehr langen Erfahrungsreihe, die eine gewisse Höhe des Kulturstandes voraussetzt, bis man wußte, *welche Eigenschaften* [Herv. im Original] etwa eines Würfels die Gleichwahrscheinlichkeit seiner sechs Seitenflächen einigermaßen verbürgen, – daß [sic!] es nicht auf die Schriftzeichen ankommt, die man auf die Seiten aufmalt, oder auf andere Zaubersprüche, auch nicht auf die biologische und geologische Vorgeschichte der einzelnen Teile des Würfels, sondern nur auf gewisse geometrische und mechanische Symmetrien. [...] Schließlich aber bekam man auf diesem Wege physikalische Objekte, durch die bei geeigneter Handhabung einfache, vorausgewählte Zahlen als Wahrscheinlichkeiten realisiert wurden, **und es konnte sich der Irrtum einstellen, als wären diese Zahlenwerte für die vorhandenen Objekte a priori, d.h. vor aller Erfahrung, bekannt gewesen.** [Herv. kursiv, im Original; Herv. fett, G.S.]“

(von Mises, 1931, S. 25–26)

6.4.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 1

Von Mises Auffassung ist exemplarisch für eine empirisch-gegenständliche Auffassung. Dies zeigt sich neben seiner Konzeption der Grundbegriffe seiner Wahrscheinlichkeitstheorie an den starken Bewertungen anderer Auffassungen und der hohen Emotionalität mit der von Mises seine Auffassung verteidigt und als einzig sinnvolle herausstellt.

6.4.4 Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 1 ergeben

- Inwiefern können die in dieser Untersuchung rekonstruierten partiellen Theorie-Elemente $\langle M_p(WRvM_{Alt}), M(WRvM_{Alt}), M_{pp}(WRvM_{Alt}) \rangle$ durch eine strukturalistische Rekonstruktion der von von Mises vorgeschlagenen Grundoperationen „Auswahl“, „Mischung“, „Teilung“ und „Verbindung“ um Verbindungen $L(WRvM_{Alt})$ und Beschränkungen $C(WRvM_{Alt})$ ergänzt werden? Und damit auch die Auswahl von Experimenten im Stochastikunterricht der Schule informieren?
- Welche weiteren Einblicke in den empirischen Gehalt von von Mises Wahrscheinlichkeitstheorie bieten strukturalistische Rekonstruktionen des allgemeinen Kollektivs und des allgemeinen Wahrscheinlichkeitsbegriffs sowie der Umgang mit geometrischen Verteilungen bei von Mises?
- Kann Kolmogoroffs Schema zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. 7.2, 7.4) als Bestandteil eines Theorienetzes in Zusammenhang mit von Mises Wahrscheinlichkeitsrechnung gebracht werden?

7 Formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 20. Jahrhundert

„Zweck des vorliegenden Heftes ist eine axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der leitende Gedanke des Verfassers war dabei, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildung der modernen Mathematik einzuordnen.“

A. N. Kolmogoroff (1933, S. III)

In dieser Untersuchung wird der Frage nachgegangen, ob eine formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer historischen Entwicklung nachzuweisen ist. Dazu wird die Quelle „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (im Folgenden kurz „Grundbegriffe“) von Kolmogoroff (1933) untersucht, deren besonderes Merkmal eine klare Explikation des formal-abstrakten Standpunkts des Autors in seinem Werk ist. Entsprechend handelt es sich bei Kolmogoroffs Auffassung, die in diesen „Grundbegriffen“ vertreten wird, um ein exemplarisches Beispiel für eine solche formal-abstrakte Auffassung. Dies macht diese Quelle, und auch die im Seminar ausgewählten Auszüge (Kolmogoroff, 1933, S. I-7), so didaktisch wertvoll für die Ausbildung von Lehrer*innen an der Hochschule (vgl. 10).

Entsprechend dieses Verständnisses der Forschungsfrage wird hier – genau wie in Abschnitt 6 – nicht versucht eine vollständige (mathematik-)historische oder (mathematik-)philosophische Untersuchung der Quelle anzustellen, sondern eine mathematikdidaktische Untersuchung mit einem Schwerpunkt auf der Frage durchzuführen inwiefern und warum Kolmogoroffs „Grundbegriffe“ Reflexionsanlässe für die eigene Auffassung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematik bieten können.

Diese Untersuchung gliedert sich im Folgenden in vier weitere Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird das Ziel der Untersuchung erläutert und begründet sowie in die theoretischen Überlegungen eingebettet. Im zweiten Abschnitt wird das Werk „Grundbegriffe“ in seinem Kontext verortet. Dies beinhaltet zum einen Informationen zu Kolmogoroff, den Einfluss den diese Arbeit auf die mathematische Gemeinschaft hatte, eine Übersicht ihres Zusammenhangs mit weiteren Werken anderer Autoren und einer Darstellung der Werkstruktur. Im dritten

Abschnitt wird die Methode der zusammenfassenden Inhaltsanalyse nach Mayring (2015b) erklärt. Im letzten Teil werden die Untersuchungsergebnisse dargestellt und kommentiert.

7.1 Ziele der Untersuchung 2

Das Ziel dieser Untersuchung liegt in der Beantwortung der zweiten Forschungsfrage, nämlich

1. Ist eine formal-abstrakte Auffassung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen und wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?

Im Gegensatz zur 1. Untersuchung ist diese Frage nicht (zwingend) direkt einleuchtend, zumal die Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. Stochastik (noch heute) zur sogenannten „angewandten Mathematik“ gehören. Welchen Zweck kann also eine formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung – auch anderer mathematischer Bereiche wie der Geometrie – überhaupt haben, wenn ihre Ursprünge klar in Anwendungsproblemen liegen (vgl. 6.1). Die Schwierigkeiten, die sich bei der Übertragung auf Anwendungen ergeben, wurden unter anderem von Czuber (1899, S. 1) dargestellt. Das zugehörige Zitat findet sich in Untersuchung 1 (vgl. 6.2). Der Kern dieser Anwendungsproblematik liegt in der Frage, auf welche Weise die Wahrscheinlichkeitsrechnung so grundgelegt werden kann, dass sie möglichst verschiedene Anwendungsfälle abdeckt, die beispielsweise einer eher subjektivistischen, aprioristischen oder frequentistischen Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs entsprechen. Kolmogoroff (1933) hat mit seinem Werk „Grundbegriffe“ eine solche Grundlegung vorgelegt und ist damit ein exemplarisches Beispiel für einen Träger einer formal-abstrakten Auffassung, wie sie in Abschnitt 5.2.2 beschrieben wurde. Das heißt, dass in der Regel nur subjektive Erfahrungsbereiche aktiviert wurden, in denen ein gegebenenfalls empirischer Gehalt einer Theorie als Teil des spezifischen Wissens bewusst außen vorgelassen wird. Das Ziel dieser Untersuchung 2 liegt nun darin, offenzulegen, an welchen Stellen seines Werkes diese formal-abstrakte Auffassung rekonstruiert werden kann und wie sich diese ausdrückt.

7.2 Kontext der Quelle zur Untersuchung 2

Eine sehr lesenswerte und ausführliche Darstellung der Genese der „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von Kolmogoroff (1933) findet sich in

Shafer und Vovk (2006), mit dem Schwerpunkt auf dem mathematischen Formalismus im Sinne einer Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der „Philosophie der Wahrscheinlichkeit“ (Shafer & Vovk, 2006, S. 70). Zusätzlich beinhaltet ihre Arbeit Fragen nach den Vorarbeiten von Kolmogoroffs „Grundbegriffen“ und der Art und Weise wie Kolmogoroff den Formalismus in Beziehung zur empirischen Welt setzt – wobei nach der Untersuchung (vgl. 7.3) die Frage gestellt werden sollte, ob und inwiefern diese Verbindung aus Kolmogoroffs Sichtweise überhaupt relevant für seine „Grundbegriffe“ ist. In der nachfolgenden Analyse wird sich zeigen, dass Kolmogoroff selbst explizit auf diese Fragekomplexe eingeht (vgl. 7.4).

In ihrer Einleitung zitieren Shafer und Vovk (2006, S. 70) Fréchet, der im Rahmen eines Kolloquiums in Genf 1937 die „organisatorische Fähigkeit“ von Kolmogoroff bei der Zusammenstellung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in seinem Werk „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ würdigt. Interessanterweise erinnern Fréchets Worte an Freudenthals Würdigung von Hilbers „Grundlagen der Geometrie“, der die explizite Durchführung von Hilberts Standpunkt hervorhebt. Fréchet lobt dagegen die Fähigkeit Kolmogoroffs, die bereits vorliegenden grundlegenden Konzepte gesammelt, zusammengestellt, geprüft und schlussendlich – besonders wichtig für den Erfolg von Kolmogoroffs „Grundbegriffen“ – grundgelegt hat, wobei er feststellt, dass die bereits in der mathematischen Gemeinschaft mehr oder weniger in Grundzügen bekannte Axiomatisierung hinreichend für eine Behandlung der Problemstellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Man könnte nun meinen, Fréchet hätte einen Fauxpas durch seine Rede erzeugt. Dem war allerdings nicht so. Ein Grund dafür kann darin gesehen werden, dass Kolmogoroff (1933, S. III) selbst im Vorwort seiner Grundbegriffe darauf hinweist, dass ein „entsprechender Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung [...] in den betreffenden mathematischen Kreisen seit einiger Zeit geläufig“ war und es nur noch einer „von überflüssigen Komplikationen freie Darstellung bedurfte“¹²⁷. Diese Vorarbeiten mit dem Schwerpunkt auf der Loslösung der Maßtheorie von der Geometrie zu einer Nutzung in der

¹²⁷ An dieser Stelle verweist er auch auf das Buch „*Récherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*“ von Fréchet (1950), das zur Zeit der Veröffentlichung von Kolmogoroffs „Grundbegriffen“ noch in Vorbereitung war und entsprechend im Literaturverzeichnis von Kolmogoroff (1933) einen leicht abweichenden Titel aufweist.

Wahrscheinlichkeitsrechnung ist heute kaum bekannt oder wird zumindest äußerst selten expliziert (Shafer & Vovk, 2006, S. 70).

Ein besonderer Grund für die Verwendung dieser Quelle im Seminar Über-Pro_WR (vgl. 10.3.1) liegt in der Transparenz und Klarheit mit der Kolmogoroff seine Auffassungen deutlich macht. Einerseits hinsichtlich der Notwendigkeit einer formal-abstrakten Konzeption der Wahrscheinlichkeitsrechnung und andererseits in der expliziten Darstellung, welche Rolle die Anwendbarkeit für einen formal-abstrakten Standpunkt (nicht) spielt. Diese Originalität stellen auch Shafer und Vovok fest:

„Like any textbook, its mathematics was novel for most of its readers, but its real originality was rhetorical and philosophical.“

(Shafer & Vovk, 2006, S. 71)

Nichtsdestotrotz waren die Konzepte, die Kolmogoroff in seinen „Grundbegriffen“ verwendete, aktuelle Forschungsgegenstände, über die er sich im Rahmen einer neunmonatigen Forschungsreise mit Alexandrow im Jahr 1930 mit verschiedenen prominenten Mathematikern im Bereich der Forschung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Maßtheorie besprach. Zu ihnen gehörten David Hilbert, Constantin Carathéodory, Maurice Fréchet, Richard Courant, und Richard von Mises. Letzterer erörterte mit Kolmogoroff die Korrekturfahnen seines Buches zur Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Grundlage der Kollektivmaßlehre (Girlich, 2003, S. 8), was sicherlich einen Einfluss auf Kolmogoroffs „Grundbegriffe“ hatte, wie man am Titel „§2 Das Verhältnis zur Erfahrungswelt“ im ersten Kapitel (Kolmogoroff, 1933, S. 3f.) ablesen kann, der sehr stark an von Mises (1931, S. 21ff.) Titel „Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrung“ des 5. Abschnitts von §1 im I. Abschnitt seiner „Vorlesungen“ erinnert. Zudem spricht Kolmogoroff in Fußnote 1 auf S. 3 davon, dass er

„[i]n der Darstellung der notwendigen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Welt der reellen Geschehnisse [...] im hohen Maße den Ausführungen von Herrn von Mises (vgl. insbesondere [von Mises, 1931] S. 21–27: „Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt“) [folgt].“

(Kolmogoroff, 1933, S. 3)

Neben diesem Werk war vermutlich Hilberts Forderung nach einer solchen axiomatischen Grundlegung als sechstes Problem seiner Rede 1900 in Paris besonders einflussreich, welches er folgendermaßen formulierte:

„6. Mathematische Behandlung der Axiome der Physik

Durch die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahegelegt, nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen [sic!] axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.“

(Hilbert, 1900, S. 272)

Natürlich hat Hilberts Rede auch viele andere Mathematiker seiner Zeit herausgefordert sich an diesem Problem zu versuchen. Dazu sei an dieser Stelle auf eine intensive Auseinandersetzung dieser Thematik von Hochkirchen (1999) verwiesen, der insbesondere einen Schwerpunkt auf die mathematische Entwicklung und Unterschiede verschiedener vorgeschlagener Axiomatisierungen legt.

Die Grundlage der nachfolgenden inhaltsanalytischen Untersuchung (7.4) bildet die Ausgabe des Werks „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von Andrei Nikolajewitsch Kolmogoroff (1933) im Nachdruck von 1973. Der im Folgenden dargestellte Überblick des systematischen Aufbaus des Lehrwerks unterscheidet sich von der qualitativen inhaltsanalytischen Untersuchung dadurch, dass nicht das Herausarbeiten bestimmter Kategorien und damit die Rekonstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche im Fokus steht, sondern die inhaltliche Abfolge und intendierte Struktur der Darstellung der mathematischen Themen und deren Kommentierung durch Kolmogoroff sowie deren Verknüpfung.

Das Grundlagenwerk gliedert sich in ein Vorwort, sechs inhaltliche Kapitel, einen Anhang zum „Null- oder Eins-Gesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und ein Literaturverzeichnis. Die Gesamtlänge des Buches mit 66 Seiten ist wesentlich kürzer als die der hier untersuchten Hochschullehrbücher (vgl. 9). Das liegt zum einen daran, dass statistische Methoden komplett aus diesem Grundlagenwerk ausgeschlossen sind¹²⁸. Zum anderen werden elementare Beweise

¹²⁸ Dies ist wenig verwunderlich, da es zum einen die Wahrscheinlichkeitsrechnung und nicht die Statistik grundlegen soll. Zum anderen würde dies auch je nach Behandlung der Statistik der von Kolmogoroff angestrebten bewussten formal-abstrakten Behandlung dieses mathematischen

größtenteils dem Leser überlassen, bzw. nur skizziert. Darum lohnt sich die Lektüre dieses Werks unter Zuhilfenahme von Stift und Papier. Ein weiterer Faktor für diese Kürze ist die Zielgruppe der „Grundbegriffe“ von Kolmogoroff (1933, S. III), die von Kolmogoroff explizit in der wissenschaftlichen Community der Mathematiker*innen seiner Zeit gesehen wird. Entsprechend kann er einige Elemente seiner Theorie als bekannt voraussetzen und (bekannte) Beweise lediglich skizzieren. Die Mehrzahl der Themen der einzelnen Kapitel weist eine Überschneidung mit den Inhalten der Kapitel der betrachteten Hochschullehrwerke in Untersuchung 4 auf. Beide Hochschullehrwerke verweisen auch explizit auf dieses Grundlagenwerk (vgl. 9).

Kolmogoroff setzte mit seinen „Grundbegriffen“ also Standards für die mathematische Community in Bezug auf die Diskussion der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hinsichtlich der inhaltlichen Vorgehensweise kann das Werk von Kolmogoroff (1933) in der Mitte zwischen den später in Untersuchung 4 betrachteten Lehrbüchern von Henze (2018) und Georgii (2009) verortet werden. Kolmogoroff (1933) beginnt wie Henze (2018) zunächst mit endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen und definiert bereits für diesen Fall wesentliche Grundbegriffe, bevor er diese in den nachfolgenden Kapiteln zu stetigen Wahrscheinlichkeitsfeldern durch sein Stetigkeitsaxiom erweitert. Ähnlich zu Georgiis (2009) Konzeption mit σ -Algebren nutzt Kolmogoroff aber bereits zu Beginn seiner Grundlegung Mengenkörper.

Besonders wichtig für die Interpretation dieser Quelle ist der Umstand, dass es sich bei ihr nicht um eine Übersetzung handelt. Kolmogoroff hat dieses Werk in Deutsch geschrieben. Betrachtet man verschiedene Übersetzungen (z.B. Kolmogorov, 1956) so weisen diese große Unterschiede hinsichtlich der verwendeten Begrifflichkeiten auf, die einerseits potentiell den Sinn verändern andererseits aber auch die Auffassung von Kolmogoroff verdecken. Ein besonders illustratives Beispiel stammt aus der Einleitung von „Chapter I: Elementary Theory of Probability“, bzw. „Erstes Kapitel. Die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung“. Im Besonderen soll dabei auf die hervorgehobenen Stellen der Zitate geachtet werden:

Teilgebietes widersprechen. Dies wird insbesondere an der später zu diskutierenden und bereits auszugsweise zitierten Fußnote 1 von Kolmogoroff (1933, S. 3) deutlich.

„The theory of probability, as a mathematical discipline, *can and should* [Herv. G.S.] be developed from axioms in exactly the same way as Geometry and Algebra. This means *after we have defined the elements to be studied and their basic relations, and have stated the axioms by which these relations are to be governed*, [Herv. G.S.] all further exposition must be based exclusively on these axioms, independent of the usual concrete meaning of these elements and their relations.“

(Kolmogorov, 1956, S. 1)

„Die Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Disziplin *soll und kann* [Herv. G.S] genau in demselben Sinne axiomatisiert werden wie die Geometrie oder die Algebra. Das bedeutet, daß nachdem *die Namen der zu untersuchenden Gegenstände und ihrer Grundbeziehungen sowie die Axiome, denen diese Grundbeziehungen zu gehorchen haben, angegeben sind*, [Herv. G.S] die ganze weitere Darstellung sich ausschließlich auf diese Axiome gründen soll und keine Rücksicht auf die konkrete Bedeutung dieser Gegenstände und Beziehungen nehmen darf.“

(Kolmogoroff, 1933, S. 1)

In beiden vorangehenden Zitaten fallen zwei Stellen besonders auf. Zum einen die Vertauschung von „kann und soll“ und die Formulierung, dass „die Namen der zu untersuchenden Gegenstände [...] angegeben sind“ im Vergleich zur englischen Übersetzung, die von einer „Definition der Elemente“ spricht.

Die Vertauschung kann aus mathemathikhistorischer Perspektive so gedeutet werden, dass zuerst, explizit durch Hilberts Problemaufriss (s.o.), die Forderung nach einer Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftauchte („soll“) und die Möglichkeit einer erfolgreichen Axiomatisierung erst durch Kolmogoroffs Arbeit erfolgte („kann“), zu der diese Einleitung gehört. Für den Übersetzer spielt diese Reihenfolge (außer aus mathemathikhistorischem Interesse) keine Rolle, schließlich ist ihm bekannt, dass eine solche Axiomatisierung durch Kolmogoroff vorgelegt wurde („can“) und dass eine solche entsprechend einer wissenschaftlichen Auffassung von Mathematik angestrebt werden sollte („should“).

Die Verwendung der Begriffe „Namen der zu untersuchenden Gegenstände“ (Kolmogoroff, 1933, S. 1) verweist in der deutschen Übersetzung klar auf Hilberts (1899, S. 2) „Grundlagen der Geometrie“ in denen dieser zu Beginn schreibt; „Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems *nennen* [Herv. G.S.] wir *Punkte* [Herv. im Original] und bezeichnen sie mit A, B, C, \dots ; [...]“. Im Unterschied dazu wird in der englischen Übersetzung von der Definition der verwendeten Elemente gesprochen.

Interessant sind neben den hervorgehobenen Stellen, die sich in ihrer Interpretation unterscheiden (können), auch, dass Kolmogoroff selbst den Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie in diesem Abschnitt verwendet. Dies ist insofern verwunderlich, da er in der Kapitelüberschrift, ebenso wie im ersten und letzten Abschnitt dieser Einleitung, den Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet. Vermutlich rührt dies daher, dass Kolmogoroff immer dann von Wahrscheinlichkeitsrechnung spricht, wenn das Ableiten von Sätzen oder die konkrete Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten auf der Basis eines gegebenen Wahrscheinlichkeitsraums behandelt wird. Diskutiert er dagegen Fragen der Axiomatisierung oder metamathematische Fragen der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so verwendet er den Terminus Wahrscheinlichkeitstheorie.

Im Folgenden sollen nun spezifisch das Vorwort, die inhaltlichen Kapitel und der Anhang hinsichtlich ihrer inhaltlichen Struktur beschrieben werden.

Zunächst ein Kommentar zum Titel „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (Kolmogoroff, 1933). Aus diesem Titel geht nicht deutlich hervor, ob es sich um eine mathematische oder philosophische Abhandlung – oder beides (Czuber, 1899) in Bezug auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt. Insbesondere bleibt im Titel offen, ob eine empirisch-gegenständliche oder formal-abstrakte Auffassung im Werk vertreten wird.

Das Vorwort umfasst insgesamt zwei Seiten (Kolmogoroff, 1933, S. III, IV). Zu Beginn erläutert Kolmogoroff (1933, S. III) den „leitenden Gedanken seines Werkes“, der einerseits im Zweck des Werkes, die Angabe einer axiomatischen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt, was beispielsweise bereits durch von Mises (1931) allerdings auf andere Weise und auch in Kenntnis von Kolmogoroff durchgeführt wurde. Andererseits, und dies zeigt den Stellenwert dieser Arbeit für die Entwicklung der modernen Stochastik, „die Grundbegriffe

der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche noch unlängst für ganz eigenartig galten, natürlicherweise in die Reihe der allgemeinen Begriffsbildungen der modernen Mathematik einzuordnen.“ (Kolmogoroff, 1933, S. III). Diese Einordnung soll laut Kolmogoroff in Analogie zur Grundlegung der Algebra oder Geometrie, im Hilbertschen Sinne formal-abstrakt erfolgen, was er in der Einleitung des ersten Kapitels weiter expliziert (Kolmogoroff, 1933, S. 1). Im Vorwort hebt Kolmogoroff besonders hervor, dass seine Begriffsbildung nicht möglich gewesen wäre ohne die Entwicklung der Maßtheorie in Bezug auf die „Befreiung“ der Lebesgue-Integrale von ihren geometrischen Elementen. Diese Lösung des Integralbegriffs von geometrischen Elementen wurde von Fréchet durchgeführt, den Kolmogoroff explizit erwähnt. Ein weiterer spannender Aspekt in Kolmogoroffs (1933, S. III) Vorwort ist seine Einschätzung, dass der Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung, „[d]er diesen allgemeinen Gesichtspunkten“ (Kolmogoroff, 1933, S. III) genügt den „betreffenden mathematischen Kreisen seit einiger Zeit geläufig“ (Kolmogoroff, 1933, S. III) war, es aber „eine vollständige und von überflüssigen Komplikationen freie Darstellung des ganzen Systems“ (Kolmogoroff, 1933, S. III) brauchte. Diese liefert Kolmogoroff, wobei er an dieser Stelle auch auf ein Werk von Fréchet verweist, das dieser allerdings erst wesentlich später veröffentlichte. Dabei bleibt er mit seinem Grundlagenwerk nicht nur bei den bereits bekannten Ergebnissen stehen, sondern führt weitere mathematische Erkenntnisse in den Ideenkreis ein. Dazu gehören „Wahrscheinlichkeitsverteilungen in unendlich-dimensionalen Räumen (III. Kap., §4), Differentiation und Integration der mathematischen Erwartungen nach einem Parameter (IV. Kap., §5), vor allem aber die Theorie der bedingten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen (V. Kap.)“ (Kolmogoroff, 1933, S. III). Insbesondere in Bezug auf eine strenge im hilbertschen Sinne formal-abstrakte Auffassung, die sowohl bei der Zielsetzung des Werkes als auch in dessen Inhalt von Kolmogoroff expliziert wird, hebt Kolmogoroff bereits im Vorwort hervor, „daß diese neuen Fragestellungen notwendigerweise aus einigen ganz konkreten physikalischen Fragestellungen entstanden sind“ (Kolmogoroff, 1933, S. III), die unter anderem in Veröffentlichungen von ihm und Leontowitsch betrachtet wurden. Damit an dieser Stelle keine Missverständnisse entstehen sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Anwendung einer mathematischen Theorie nicht einer formal-abstrakten Auffassung von dieser Theorie (vgl. 5.2.2) widerspricht, sondern diese beiden Begriffe („mathematische Theorie“ und „Anwendungen einer Theorie“) nur sau-

ber begrifflich voneinander trennt. Am Ende des Vorworts stellt Kolmogoroff (1933, S. IV) dar, dass das sechste Kapitel lediglich Ergebnisse, also keine ausführlichen Beweise, zu den Grenzen der Anwendung des „gewöhnlichen und starken Gesetzes der großen Zahlen“ (Kolmogoroff, 1933, S. IV) von ihm und Khintchine behandelt.

Bevor die inhaltlichen Kapitel vorgestellt werden, soll die generelle Struktur der inhaltlichen Kapitel dargestellt werden. Jedes Kapitel umfasst eine kurze Einleitung, in der eine Einführung und teilweise eine Übersicht des Themas gegeben wird, die das Kapitel behandelt. Darauf folgen dann die inhaltlichen Elemente des im Kapitel besprochenen Themas in Form von Paragraphen.

Das erste Kapitel behandelt das Thema „elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung“, wobei Kolmogoroff dort bereits auf die Grundlegung und Anwendung, aber auch typische Sprechweisen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeht. Kolmogoroff grenzt das Themengebiet der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung ein, indem er es auf die Behandlung von „Wahrscheinlichkeiten von nur endlich vielen zufälligen Ereignissen“ (Kolmogoroff, 1933, S. 1) beschränkt. Dabei gibt Kolmogoroff (1933, S. 1) auch einen Ausblick darauf, dass die in diesem ersten Kapitel gewonnenen Ergebnisse auch auf Fragen mit unendlich vielen Ereignissen angewendet werden können. Dies erfolgt allerdings erst im zweiten Kapitel, in dem er, zur Verallgemeinerung der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung, das Stetigkeitsaxiom einführt, das von Kolmogoroff (1933, S. 1) mit „Axiom VI“ bezeichnet wird. Danach expliziert Kolmogoroff in der Einleitung von Kapitel I seine formal-abstrakte Auffassung und wie eine mathematische Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Analogie zu den Grundlagen der Geometrie (Hilbert, 1899) von statten gehen soll, was bereits im entsprechenden Zitat und dessen Übersetzung diskutiert wurde (Kolmogoroff, 1933, S. 1).

Diese konzise Darstellung der formal-abstrakten Auffassung von Kolmogoroff selbst enthält alle Elemente mit denen in dieser Arbeit die formal-abstrakte Auffassung definiert wurde:

1. Mathematische Gegenstände und Grundbeziehung werden *bewusst* von jeglichen konkreten Bedeutungen und Referenzobjekten losgelöst und gehen in einem entsprechenden „Namen“ auf.
2. Die Grundbeziehungen der nur noch als Namen, zur Referenz und Formulierung von Grundbeziehungen, vorliegenden mathematischen Gegenstände, sind durch Axiome normativ und vollständig gegeben.

Basierend auf dieser Darstellung seiner Auffassung erläutert Kolmogoroff (1933, S. 1) die weitere Konzeption seines Werkes. Dazu gehört, dass er zunächst den Begriff des Wahrscheinlichkeitsfeldes auf der Basis von Mengenkörpern definiert, wobei er erneut betont, dass

„[w]as die Elemente dieser Mengen sind, ist dabei für die rein mathematische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung völlig gleichgültig (man vgl. die Einführung der geometrischen Grundbegriffe in HILBERTS „Grundlagen der Geometrie“ oder die Definition von Gruppen, Ringen und Körpern in der abstrakten Algebra).“

(Kolmogoroff, 1933, S. 1)

Natürlich weist er ebenso darauf hin, dass „[j]ede axiomatische (abstrakte) Theorie bekanntlich unbegrenzt viele konkrete Interpretationen“ (Kolmogoroff, 1933, S. 1) zulässt. Entsprechend benennt Kolmogoroff (1933, S. 1) Interpretationen, die zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung geführt haben, aber auch weitere Interpretationen die darüber hinaus gehen. Eine dieser Interpretationen, die über die Interpretationen zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinausgehen, führt im Anhang seines Werkes zum „Null- oder Eins-Gesetz“.

Weiterhin stellt Kolmogoroff (1933, S. 2) dar, dass die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf „verschiedene Weisen“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2) geschehen kann. Diese unterscheiden sich in der Auswahl der Axiome oder auch in Bezug auf die Wahl der „Grundbegriffe und Grundrelationen“. Die zweite Wahl hängt davon ab, ob eine „mögliche Einfachheit des Axiomensystems“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2) gewünscht ist, dann „scheint es am zweckmäßigsten die Begriffe eines zufälligen Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit zu axiomatisieren“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2), oder das Ziel der Axiomatisierung darin liegt, den „Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht zu den Grundbegriffen“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2) zählen zu lassen, sondern diesen durch andere Begriffe grundzulegen mit dem Ziel des „größtmögliche[n] Anschluß[es] der mathematischen Theorie an die empirische des Wahrscheinlichkeitsbegriffes“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2). Letzteres hat von Mises (1931) in seinen „Vorlesungen“ durchgeführt (vgl. 6).

Nach dieser Einleitung erfolgt in §1 die Einführung der Axiome für endliche Wahrscheinlichkeitsräume. Hierbei gibt Kolmogoroff die Menge E als Grundraum an, in der sich die elementaren Ereignisse¹²⁹ ξ, η, ζ, \dots , befinden. Zusätzlich fordert er noch eine „Menge von Teilmengen aus E “ \mathcal{F} , deren Elemente von Kolmogoroff „zufällige Ereignisse [Herv. im Original]“ genannt werden. Dann formuliert Kolmogoroff entsprechend der Axiomatik, die man auch in modernen Lehrbüchern findet, fünf Axiome, wobei die ersten beiden (I., II.) die Menge \mathcal{F} als Mengenkörper im Sinne von Hausdorff (1927) klassifizieren (Axiom I) und $E \in \mathcal{F}$ fordern (Axiom II). Die folgenden drei Axiome axiomatisieren das Wahrscheinlichkeitsmaß $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, als Zuordnung mit nichtnegativen Wertebereich \mathbb{R}_0^+ und Definitionsmenge \mathcal{F} (Axiom III), die normiert ist, d.h. es gilt $P(E) = 1$ (Axiom IV). Für die Additivität von unvereinbaren Ereignissen gilt zusätzlich: „Wenn A und B disjunkt sind, so gilt $P(A + B) = P(A) + P(B)$ “ (Kolmogoroff, 1933, S. 2) (Axiom V). Danach benennt er das Tupel (\mathcal{F}, P) als Wahrscheinlichkeitsfeld (Kolmogoroff, 1933, S. 2) und zeigt die Konsistenz dieses Axiomensystems bestehend aus den fünf Axiomen. Kolmogoroff (1933, S. 3) stellt dabei fest, dass sein Axiomensystem unvollständig ist. Entsprechend seiner Erläuterung der Unvollständigkeit ist davon auszugehen, dass er von semantischer Unvollständigkeit (Pavić, 2020, S. 78ff.) spricht. Zuletzt gibt er an, wie unter Berücksichtigung der Axiome elementare, also endliche, Wahrscheinlichkeitsfelder auf der Basis einer Menge $E = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, einer Menge $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ und $p_i \in \mathbb{R}_0^+$ sowie $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$ konstruiert werden können, wobei er für weitere Beispiele auf Kapitel II §3 verweist (Kolmogoroff, 1933, S. 3).

§2 behandelt „Das Verhältnis zur Erfahrungswelt“. Hiermit meint Kolmogoroff (1933, S. 3) zum einen „[d]ie Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die reelle Erfahrungswelt“ (Kolmogoroff, 1933, S. 3f.) und zum anderen im zweiten Teil des Paragraphen das von ihm „Empirische Deduktion der Axiome“ genannte Verfahren (Kolmogoroff, 1933, S. 4), sowie zwei zugehörige Bemerkungen. Für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt Kolmogoroff ein vierschrittiges Verfahren vor, das er selbst Schema nennt. Dieses Verfahren wird in Abbildung 8 dargestellt.

¹²⁹ Diese Durchmischung von Ergebnissen und Elementarereignissen findet man bis heute häufig in der Literatur, was zu gewissen Verständnisproblemen beim Erlernen der Stochastik führen kann. In moderner Notation würden die von Kolmogoroff als *Elementarereignisse* bezeichneten Elemente *Ergebnisse* $\xi, \eta, \zeta, \dots \in E$ heißen. Die *Elementarereignisse* wären dann $\{\xi\}, \{\eta\}, \{\zeta\}, \dots \subset E$.

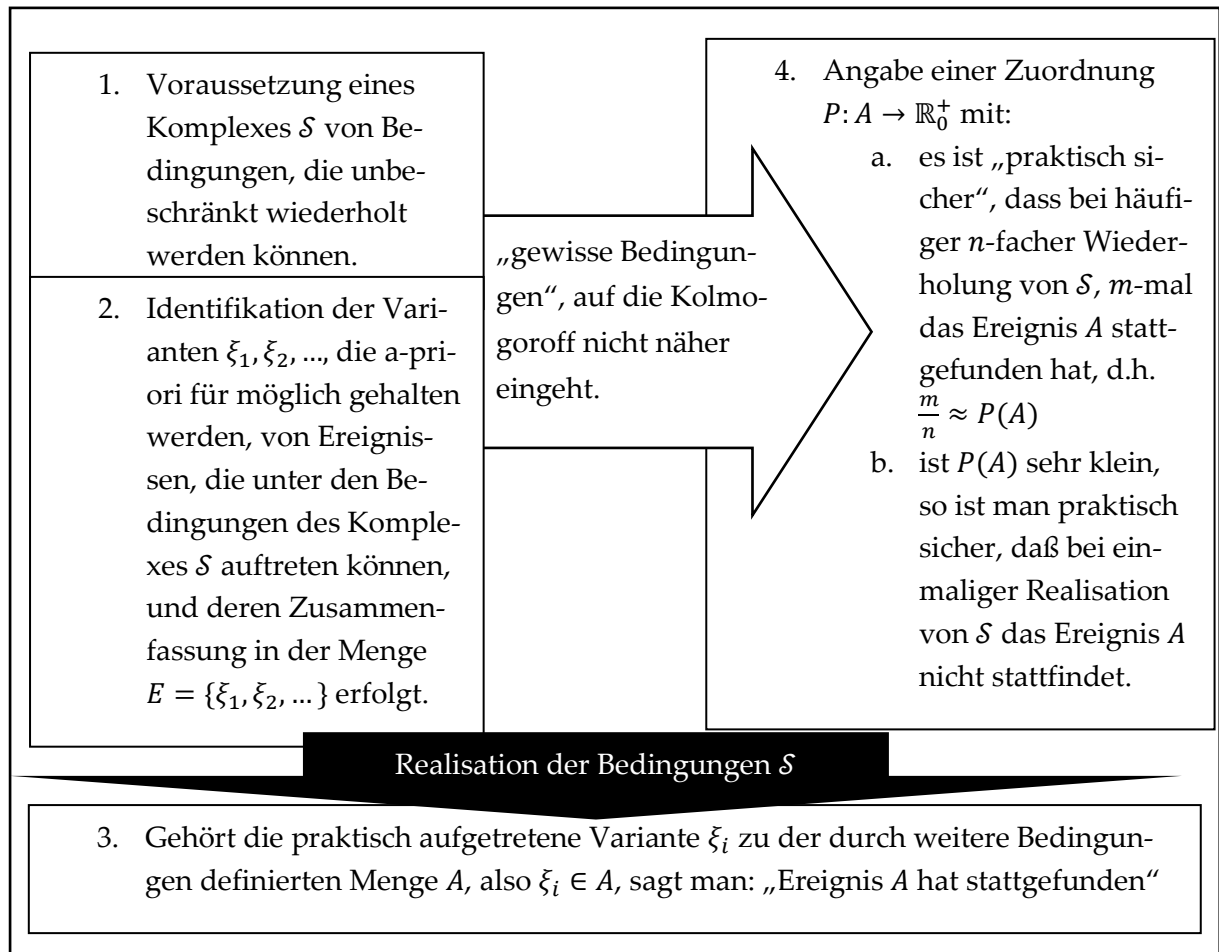


Abbildung 8: Schema zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erstellt nach dem vorgeschlagenen Verfahren der Anwendung von Kolmogoroff (1933, S. 3–4).

Bei der von ihm so genannten „empirischen Deduktion der Axiome“ illustriert Kolmogoroff (1933, S. 4), dass die Axiome „evident aus“ Anwendungssituationen abgeleitet werden können, insofern, dass das in Betracht kommende System \mathcal{F} der Ereignisse A, B, C, \dots die entsprechenden Axiome I und II erfüllt, sowie das $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$, womit Axiom III begründet ist. Axiom IV gilt, da für $m = n$ bei entsprechender Setzung des Wahrscheinlichkeitsmaß $P(E) = \frac{n}{n} = 1$ gilt. Auch die Unverträglichkeit zweier Ereignisse führt er aus, da für zwei unverträgliche Ereignisse A_1 und A_2 gilt, dass $P(A) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2)$. Im Anschluss an diese Betrachtung bemerkt Kolmogoroff (1933, S. 4) noch, dass aus der

„praktischen Sicherheit“¹³⁰ zweier Ereignisse auch die Behauptung ihrer praktischen gleichzeitigen Sicherheit folgt, wobei die Sicherheit des Eintretens leicht abnimmt. Wichtiger ist allerdings die Einschränkung, dass wenn die Anzahl der Behauptungen sehr groß ist, die praktische Sicherheit der „simultanen Behauptung“ nicht aus der praktischen Sicherheit aller einzelnen Behauptungen folgt (Kolmogoroff, 1933, S. 5). Dies bedeutet auch, dass das in Abbildung 8 mit a. bezeichnete Prinzip nicht so gedeutet werden kann, „daß [sic!] bei einer sehr großen Anzahl von Serien von Versuchen, von denen jede Serie aus n Versuchen besteht, in jeder [Herv. im Original] Serie der Quotient $\frac{m}{n}$ sich von $P(A)$ nur wenig unterscheiden wird“ (Kolmogoroff, 1933, S. 5).

In der zweiten Bemerkung diskutiert Kolmogoroff den Unterschied zwischen der Wahrscheinlichkeit $P(\emptyset) = 0$, als unmögliches Ereignis, und einem Ereignis A , das nicht unmöglich ist, dessen praktische Wahrscheinlichkeit aber dennoch bei $P(A) = 0$ liegt. Kolmogoroff (1933, S. 5) begründet dieses Phänomen damit, dass „nach dem Prinzip b. [vgl. Abbildung 8] [...] aus dem Nullwerden der Wahrscheinlichkeit nur [folgt], daß [sic!] bei einer einmaligen Realisation der Bedingungen \mathcal{S} das Ereignis A praktisch unmöglich ist“.

Besonders hervorzuheben in der bisherigen Beschreibung der inhaltlichen Struktur ist die enge Verknüpfung zwischen den Paragraphen „§1. Axiome“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2) und „§2. Das Verhältnis zur Erfahrungswelt“ (Kolmogoroff, 1933, S. 3), die durch zu den Titeln der Paragraphen zugehörigen Fußnoten erzeugt wird. Diese Verknüpfung wird hier, um den mathematischen Text der Paragraphen gekürzt, in Tabelle 5 dargestellt.

Tabelle 5: Titel der Paragraphen §1 und §2 des ersten Kapitels „Die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und zugehörige Fußnoten (Kolmogoroff, 1933, S. 2–3)

§1. Axiome ² .
² Ein Leser, der den folgenden Axiomen sofort einen konkreten Sinn geben will, soll sogleich den §2 lesen.
– Seitenumbruch von Seite 2 auf Seite 3 –

¹³⁰ Was Kolmogoroff unter „praktischer Sicherheit“ versteht bleibt offen. Vermutlich ist damit eine sehr hohe Wahrscheinlichkeit des realen Eintretens eines Ereignisses gemeint.

§2. Das Verhältnis zur Erfahrungswelt ¹.

¹ Ein Leser, der sich nur für die rein mathematische Entwicklung der Theorie interessiert, braucht diesen Paragraphen nicht zu lesen – die weitere Darstellung beruht auf den Axiomen des §1 und benutzt nicht die Überlegungen des gegenwärtigen Paragraphen. In diesem wollen wir uns mit dem bloßen Hinweis auf die empirische Entstehung der Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung begnügen und lassen deshalb eine eingehende philosophische Untersuchung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Erfahrungswelt bewußt beiseite. In der Darstellung der notwendigen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Welt der reellen Geschehnisse folgt der Verfasser im hohem Maße den Ausführungen von Herrn von Mises (vgl. insbesondere [von Mises, 1931, G.S.] S. 21–27: „Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt“)

Angenommen man folgt dieser konkreten Leseempfehlung¹³¹ von Kolmogoroff und sei an dem „konkreten Sinn“ (Kolmogoroff, 1933, S. 2) der Axiome interessiert. So kommt man direkt zum Titel „§2. Das Verhältnis zur Erfahrungswelt“ (Kolmogoroff, 1933, S. 3), dem ebenfalls eine Fußnote beigefügt ist, die aber darauf hinweist, dass dieser Paragraph nicht relevant für die „rein mathematische Entwicklung der Theorie“ ist (vgl. 7.4). Kolmogoroff expliziert seinen formal-abstrakten Standpunkt und kennzeichnet diesen als einzig relevanten für den Zweck seiner „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“.

Im Anschluss an diesen Paragraphen formuliert Kolmogoroff (1933, S. 5f.) einige terminologische Vorbemerkungen, die typische stochastische Sprechweisen („Im Falle der zufälligen Ereignisse.“; Kolmogoroff, 1933, S. 5) mit den Schreibweisen der Mengenlehre („Mengentheoretisch“; Kolmogoroff, 1933, S. 5) in Zusammenhang bringen. Zur Illustration kann man die Schreibweise $AB = 0$, betrachten, die laut Kolmogorff (1933, S. 5) mit „[d]ie Ereignisse A und B sind unvereinbar“ übersetzt werden kann. Betrachtet man diese Schreibweise fällt einiges auf, insbesondere im Vergleich zur neueren Schreibweise $A \cap B = \emptyset$, die inhaltlich mit obiger Aussage identisch ist. Da Kolmogoroffs „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ vor Bourbakis (Erstveröffentlichung 1939,

¹³¹ Dies bildete in jeder Durchführung des Seminars ÜberPro_WR einen Schlüsselmoment zur Initiierung der Reflexion der formal-abstrakten Auffassung (vgl. 10).

hier 2006) „Théorie des ensembles“ entstand, schrieb er für die leere Menge „0“ und beschrieb den Schnitt durch eine „Mengenmultiplikation“, die Vereinigung wird entsprechend als „Mengenaddition“ notiert. Diese semiotischen Fragen sind sowohl für die historische Entwicklung als auch mathematikdidaktische Fragestellungen interessant (vgl. Fußnote 129). Im Rahmen dieser Arbeit sind Fragen der Notation allerdings nicht wesentlich, da diese zunächst keine Aussagen darüber machen, inwiefern eine empirisch-gegenständliche oder eine formal-abstrakte Auffassung vertreten wird.

In §4 des Kapitels zur elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt Kolmogoroff (1933, S. 6) direkte Folgerungen aus den Axiomen an, führt bedingte Wahrscheinlichkeiten im klassischen Sinne, d.h. $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ mit $P(A) > 0$, ein und beweist den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, bei Kolmogoroff (1933, S. 7) „Satz über die vollständige Wahrscheinlichkeit“, sowie den „Satz von Bayes“ (Kolmogoroff, 1933, S. 7).

Die Paragraphen nach dem nun zu besprechenden §5 des ersten Kapitels werden hier wesentlich kürzer behandelt, da sie zwar in Bezug auf ihre Abfolge einen Einblick in die inhaltliche Struktur des Werkes „Grundbegriffe“ ermöglichen, aber keine wesentlichen weiteren expliziten Aussagen über die Auffassung von Kolmogoroff enthalten. In der Einleitung zu „§5. Unabhängigkeit“ wird diese dagegen erneut sehr deutlich. Kolmogoroff hält darin explizit fest, dass „die Unabhängigkeit von Versuchen und zufälligen Größen derjenige mathematische Begriff [ist], welcher der Wahrscheinlichkeitsrechnung ihr eigenartiges Gepräge gibt“ (Kolmogoroff, 1933, S. 8). Dies macht Kolmogoroff (1933, S. 8) einerseits an verschiedenen historischen Arbeiten von Laplace, Poisson Tschebyscheff, Markoff, Liapounoff, von Mises und Bernstein fest, und andererseits daran, dass gerade diese Eigenschaft die Wahrscheinlichkeitsrechnung von der „allgemeinen Theorie der additiven Mengenfunktionen“ unterscheidet. Beide Gründe sind mathematischer Natur. Im ersten Fall in Bezug auf die mathematische Wissenschaftscommunity, im zweiten Fall in Bezug auf die mathematische Theorieentwicklung. Kolmogoroff formuliert entsprechend rhetorisch geschickt:

„Man kommt also dazu, im Begriffe der Unabhängigkeit wenigstens den ersten Keim der eigenartigen Problematik der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erblicken – ein Umstand, welcher in

diesem Buch nur wenig hervortreten wird, da wir hier hauptsächlich *nur mit den logischen Vorbereitungen zu den eigentlichen wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen* [Herv. G.S., ähnlich zu Hilberts „Grundlagen der Geometrie“] zu tun haben werden.“

(Kolmogoroff, 1933, S. 8)

Womit Kolmogoroff erneut den Zweck seiner „Grundbegriffe“ als mathematische Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechend einer formal-abstrakten Auffassung hervorhebt.

Die Frage, die sich nun stellt, ist, welche Fachgebiete die Problemstellungen behandeln, die mit dem Begriff der „Unabhängigkeit“ insbesondere in konkreten Anwendungsfälle auftreten. Kolmogoroffs Antwort darauf lautet direkt im Anschluss an obiges Zitat:

„Es ist dementsprechend *eine der wichtigsten Aufgaben* [Herv. G.S.] *der Philosophie der Naturwissenschaften* [Herv. G.S.], nachdem sie die vielumstrittene [sic!] Frage über das Wesen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs selbst erklärt hat, die Voraussetzungen zu präzisieren, bei denen man irgendwelche gegebene reelle [sic!] Erscheinungen für gegenseitig unabhängig halten kann. *Diese Frage fällt allerdings aus dem Rahmen unseres Buches* [Herv. G.S.]“

(Kolmogoroff, 1933, S. 8f.)

Aus der Perspektive einer Beobachter*in fällt auf, dass Kolmogoroff hier eine Selbstverortung in Bezug auf sein Werk vornimmt und den oben erneut angegebenen Zweck der „Grundbegriffe“ wiederum bestärkt.

In den folgenden Paragraphen finden sich kaum explizite Kommentare zur Auffassung von Kolmogoroff, weshalb von ihnen nur recht konzise die Struktur der dargestellten mathematischen Theorie wiedergegeben wird.

Im §5 wird im Weiteren wie in der soeben besprochenen Einleitung angekündigt die Unabhängigkeit von Versuchen, die jeweils (verschiedenen) Zerlegungen der Ergebnismenge entsprechen, definiert. Dabei definiert Kolmogoroff die Unabhängigkeit dadurch, dass sie dann gegeben ist, wenn das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, bzw. alle Teilprodukte jeweils der Wahrscheinlichkeit der Schnitte der betrachteten Ereignisse bzw. aller Teil-

schnitte entsprechen (Kolmogoroff, 1933, S. 9). Im Anschluss daran beweist Kolmogoroff einige direkte Folgerungen aus der Definition der Unabhängigkeit, sowie einen Satz zur Frage, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen vorliegen müssen, um die Unabhängigkeit von Versuchen mathematisch festzustellen.

Der letzte Paragraph von Kapitel I „§6. Bedingte Wahrscheinlichkeiten als zufällige Größen, Markoffsche Ketten“ (Kolmogoroff, 1933, S. 11f.) führt Zufallsvariablen und Erwartungswerte im endlichen Fall ein und definiert „Markoffsche Ketten“ als „natürliche Verallgemeinerung“ (Kolmogoroff, 1933, S. 12) von unabhängigen Versuchen.

Im zweiten Kapitel wird das Konzept der endlichen Wahrscheinlichkeitsfelder auf „unendliche Wahrscheinlichkeitsfelder“ erweitert, indem Kolmogoroff in §1 das sog. „Stetigkeitsaxiom VI.“ einführt. Dies soll an dieser Stelle in moderner Notation wiedergegeben sein (Kolmogoroff, 1933, S. 13).

VI. *Für eine abnehmende Folge*

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$$

von Ereignissen aus \mathcal{F} mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$$

gilt die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

Kolmogoroff (1933, S. 13) diskutiert im Anschluss an die Angabe des Axioms auch, auf welche Weise der endliche Fall unter diese Definition fällt, und dass das so erweiterte Axiomensystem ebenfalls widerspruchsfrei und unvollständig, Axiom VI aber auch unabhängig von den Axiomen I–V ist. In einem kurzen Kommentar weist Kolmogoroff (1933, S. 14) dann darauf hin, dass man aus der konkreten Anwendung nur endliche Wahrscheinlichkeitsfelder erhält, unendliche Wahrscheinlichkeitsfelder dafür aber „nur als idealisierte Schemata reeller zufälliger Prozesse“¹³² erscheinen würden. Danach klärt Kolmogoroff unter Verwen-

¹³² Was diese „reellen zufälligen Prozesse“ genau auszeichnet bleibt in Kolmogoroff (1933) ungeklärt.

derung des erweiterten Additionssatzes den Zusammenhang des Wahrscheinlichkeitsbegriffes mit dem der additiven Mengenfunktionen und beweist im Anschluss den Überdeckungssatz. In §2 entwickelt Kolmogoroff das Konzept der „Borelschen Wahrscheinlichkeitsfelder“ unter Rückgriff auf Borelsche Körper und zeigt dann, dass die Betrachtung Borelscher Wahrscheinlichkeitsfelder unter Nutzung des Erweiterungssatzes ausreichend ist, insbesondere für die Anwendung reeller Ereignisse aus \mathcal{F} (Kolmogoroff, 1933, S. 16). §3 behandelt verschiedene Beispiele unendlicher Wahrscheinlichkeitsfelder, wie bspw. die reelle Zahlengerade als Ergebnismenge eines Zufallsversuchs (Kolmogoroff, 1933, S. 17), wobei unter anderem die Verteilungsfunktion (Kolmogoroff, 1933, S. 17) und Wahrscheinlichkeitsdichte definiert (Kolmogoroff, 1933, S. 18f.), ihr globales Verhalten diskutiert (Kolmogoroff, 1933, S. 17) und ihr Zusammenhang erläutert (Kolmogoroff, 1933, S. 18f.) wird.

Im dritten Kapitel (Kolmogoroff, 1933, S. 19–33) werden zufällige Größen – heute spricht man in der Regel von Zufallsvariablen – definiert und ihre Eigenschaften aus den Axiomen abgeleitet. Gerade in diesem Kapitel zeigt sich die bewusste Ablösung von Anwendungssituationen dadurch, dass diese und die Kommentierung von Fragen der Anwendung keine Rolle spielen. §1 behandelt die Definition von Wahrscheinlichkeitsfunktionen, also Abbildungen, deren Urbild eine vorgegebene Grundmenge E eines Wahrscheinlichkeitsfelds ist, und die resultierenden Wahrscheinlichkeitsmaße, die durch Wahrscheinlichkeitsfunktionen induziert werden. In §2 führt Kolmogoroff dann Zufallsvariablen und ihre Verteilungen ein (Kolmogoroff, 1933, S. 20–22), die in §3 durch Betrachtung mehrerer Zufallsvariablen zu mehrdimensionalen Verteilungen führen (Kolmogoroff, 1933, S. 22ff.). Darauf folgt im §4 die Entwicklung unendlich dimensionaler Wahrscheinlichkeitsfelder insbesondere unter Nennung des Beispiels reeller Zufallsvariablen (Kolmogoroff, 1933, S. 24f.), wobei Kolmogoroff auch zeigt, dass solche Wahrscheinlichkeitsfelder ebenfalls auf Mengenkörper basieren (Kolmogoroff, 1933, S. 25) und man diese auch borelsch erweitern kann (Kolmogoroff, 1933, S. 26). Den Abschluss des Kapitels bildet der Beweis des Hauptsatzes, der besagt, dass ein System mehrdimensionaler Verteilungsfunktionen unter speziellen Bedingungen ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem unendlich dimensionalen (borelsch erweiterten) Mengenkörper bestimmt (Kolmogoroff, 1933, S. 27). Im folgenden und letzten Paragraphen von Kapitel III behandelt Kolmogoroff verschiedene Arten der Konvergenz bei Folgen von Zufallsvariablen (Kolmogoroff, 1933, S. 30ff.).

Das vierte Kapitel behandelt das Konzept der Erwartungswerte und trägt den Titel „Mathematische Erwartung“. Auch in diesem Kapitel erweitert er ein Konzept aus dem ersten Kapitel für unendliche Wahrscheinlichkeitsfelder. Dazu führt Kolmogoroff im ersten Paragraphen das „abstrakte Lebesguesche Integral“ (Kolmogoroff, 1933, S. 33f.) und dessen Eigenschaften ein, welches die Basis für die Definition der (bedingten) Erwartung einer zufälligen Größe im nächsten Paragraphen bildet (Kolmogoroff, 1933, S. 35ff.). In §3 des Kapitels IV behandelt Kolmogoroff (1933, S. 37f.) dann die Tschebbycheffsche Ungleichung, die sich auch in beiden aktuellen Hochschullehrbüchern (vgl. 9) findet. Danach diskutiert Kolmogoroff auf der Basis der Tschebbycheffschen Ungleichung den Zusammenhang zwischen Konvergenzkriterien von Folgen von Zufallsvariablen und deren Erwartungswerte (Kolmogoroff, 1933, S. 38f.) sowie Fragen der Integration von Erwartungswerten von parameterabhängigen Zufallsvariablen (Kolmogoroff, 1933, S. 39ff.).

Im fünften Kapitel verallgemeinert Kolmogoroff das Konzept der bedingten Wahrscheinlichkeit auf Versuche mit unendlich vielen Versuchsausgängen. Dazu definiert er zunächst bedingte Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von verschiedenen Zerlegungen der Menge von Versuchsausgängen (Kolmogoroff, 1933, S. 41f.) und gibt dann an, wie die zugehörigen Verteilungen durch Integration bestimmt werden können (Kolmogoroff, 1933, S. 42f.) und welche Konvergenzkriterien dann für die Folge von Ereignissen notwendig werden (Kolmogoroff, 1933, S. 44). Im Anschluss daran diskutiert er die bedingte Wahrscheinlichkeit von Zufallsvariablen und beweist damit den „Bayesschen Satz für die stetigen Verteilungen“ (Kolmogoroff, 1933, S. 45f.). Im folgenden Paragraphen §4 greift Kolmogoroff das Konzept der bedingten Erwartungswerte auf und verknüpft es mit dem Konzept der allgemeinen bedingten Wahrscheinlichkeit (Kolmogoroff, 1933, S. 46f., 48ff.)

Das sechste Kapitel bildet den Abschluss der „Grundbegriffe“ und behandelt das (starke) Gesetz der großen Zahlen nachdem zunächst das Konzept der Unabhängigkeit verallgemeinert wird. In §1 beginnt Kolmogoroff (1933, S. 50) damit eine Definition der Unabhängigkeit für Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf unendlich dimensionalen Mengenkörpern zu bilden, die er direkt auf die Unabhängigkeit von Zerlegungen der Ergebnismenge zurückführt. Von den Wahrscheinlichkeitsfunktionen aus folgert er danach im §2 (Kolmogoroff, 1933, S. 51f.) eine Definition für unabhängige Zufallsvariablen und Kriterien für die Unabhängigkeit

dieser Zufallsvariablen (Kolmogoroff, 1933, S. 53). Im dritten Paragraphen behandelt Kolmogoroff das Gesetz der großen Zahlen ausgehend von der Stabilität von Zufallsvariablen mithilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung, wobei er die generelle Idee „aller Sätze, welche unter dem Namen *Gesetz der großen Zahl* [Herv. im Original] bekannt sind“ (Kolmogoroff, 1933, S. 56) darin sieht, dass eine Folge von Zufallsvariablen bei großem n nur wenig von den konkret durchgeführten Versuchen abhängig ist. Danach diskutiert Kolmogoroff (1933, S. 56ff.) eine alternative Definition des Erwartungswertes wobei er weitere Nebenbedingungen einführt. Den Abschluss des Kapitels und damit auch des Hauptteils der „Grundbegriffe“ bildet §5 in dem das starke Gesetz der Großen Zahlen (Kolmogoroff, 1933, S. 59f.) und auch die Konvergenz von Reihen von Zufallsvariablen, Erwartungswerten und Varianzen sowie Kriterien für deren Konvergenz diskutiert werden.

Im Anhang gibt Kolmogoroff (1933, S. 60f.) ein Ergebnis seiner Zusammenarbeit mit Khintchine und dessen Beweis an, das sogenannte Null oder Eins-Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Darauf folgt ein recht übersichtliches Literaturverzeichnis (Kolmogoroff, 1933, S. 61f.), das auch einige bis dahin unveröffentlichte Arbeiten ausweist.

7.3 Methodik der Untersuchung 2

Wie man im vorigen Abschnitt nachvollziehen konnte, finden die Reflexionen in Kolmogoroffs „Grundbegriffen“ der formal-abstrakten Auffassung vornehmlich nicht im mathematischen Text, sondern in Form von Meta-Kommentaren über den mathematischen Text statt. Diese Quelle wurde gerade deshalb ausgewählt, da sie solche Meta-Kommentare enthält, was gerade in modernen Texten nicht üblich ist. Dies ist wenig überraschend, da diese Auffassung erst in einem übergeordneten subjektiven Erfahrungsbereich reflektiert bzw. rekonstruiert werden kann, der eine Perspektive auf die Funktionen des untergeordneten subjektiven Erfahrungsbereichs in dem mathematisch gehandelt wird ermöglicht. Um diese Perspektiven rekonstruieren zu können benötigt man inhaltsanalytische Methoden (im weiten Begriffsverständnis) um deren Sinn zu erfassen und so auf die subjektiven Erfahrungsbereiche zu schließen, die während Kolmogoroffs Reflexionen aktiviert waren. Einige Hinweise konnten bereits im vorangehenden Abschnitt identifiziert werden. In der folgenden Untersuchung geht es zur Triangulierung der Erkenntnisse darum die „Grundbegriffe“ auch qualitativ inhaltsanalytisch auszuwerten, wogegen im vorigen Abschnitt der strukturelle Aufbau des

Werkes im Gesamten, unter besonderer Berücksichtigung auffassungsrelevanter Aspekte, im Vordergrund stand.

Eine zweckmäßige Methode für diese Untersuchung ist die zusammenfassende Inhaltsanalyse nach Mayring (2015b, S. 69ff.). Für diese hat Mayring (2015b, S. 70) ein siebenschrittiges Ablaufmodell entwickelt:

Bestimmung der Analyseeinheiten

1. Schritt: Paraphrasierung der inhaltstragenden Textstellen (Z1-Regeln)
2. Schritt: Bestimmung des angestrebten Abstraktionsniveaus. Generalisierung der Paraphrasen unter diesem Abstraktionsniveau (Z2-Regeln)
3. Schritt: Erste Reduktion durch Selektion, Streichen bedeutungsgleicher Paraphrasen (Z3-Regeln)
4. Schritt: Zweite Reduktion durch Bündelung, Konstruktion, Integration von Paraphrasen auf dem angestrebten Abstraktionsniveau (Z4-Regeln)
5. Schritt: Zusammenstellung der neuen Aussagen als Kategoriensystem
6. Schritt: Rücküberprüfung des zusammenfassenden Kategoriensystems am Ausgangsmaterial.

Neben diesem Ablaufschema formuliert Mayring (2015b, S. 72) Interpretationsregeln, deren Kennzeichnung (Z1 bis Z4-Regeln) im Ablaufmodell zu finden sind. Da das ganze Werk von Kolmogoroff in den Blick genommen wird, werden wie von Mayring (2015b, S. 71f.) vorgeschlagen die Schritte zwei bis fünf zusammengenommen, sodass sich das reduzierte Ablaufmodell wie folgt ergibt:

1. Schritt: Bestimmung der Analyseeinheit
2. Schritt: Paraphrasierung am Material
3. Schritt: Zusammenfassung des neuen Kategoriensystems
4. Schritt: Rücküberprüfung der zusammenfassenden Kategoriensystem am Ausgangsmaterial

Zusätzlich wurden zur Auswertung die Z1 bis Z4 Regeln bei der Paraphrasierung und Reduktion angewendet.

7.4 Ergebnisse der Untersuchung 2

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Untersuchung von Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ angegeben, wobei streng dem von Mayring vorgeschlagenem reduziertem Ablaufmodell aus

7.3 gefolgt wird. Entsprechend befindet sich im ersten Unterabschnitt (7.4.1.1) eine Bestimmung der genutzten Analyseeinheiten, die zwischen der Kodiereinheit der Kontexteinheit und der Auswertungseinheit unterscheiden. Im darauffolgenden Abschnitt (7.4.1.2) findet sich Tabelle 6 mit den Paraphrasen der herausgearbeiteten relevanten Auswertungseinheiten, sowie deren Reduktion zu generellen Kategorien. Diese Kategorien werden dann in Abschnitt 7.4.2 gesammelt und hinsichtlich der rekonstruierten Auffassung eingeordnet.

7.4.1 Zusammenfassende qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring

7.4.1.1 Bestimmung der Analyseeinheit

Die *Kodiereinheit* der Analyse ist jeweils ein vollständiger Satz.

Die *Kontexteinheit* ist jeweils ein Paragraph (bspw. §3 Terminologische Vorbemerkung)

Auswertungseinheit: Die Analyse wird entsprechend des Textflusses der „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (Kolmogoroff, 1933) vorgenommen.

Hierbei gibt es allerdings folgende Ausnahmen:

- Tritt kein Metakommentar zur Reflexion mathematischer Begriffe oder Verfahren in der Kodiereinheit auf, so wird diese nicht paraphrasiert.
- Dies gilt ebenso für Passagen, die lediglich Standardfloskeln umfassen, die beispielsweise nur der Strukturierung eines Beweises dienen und so einen angenehmen Lesefluss ermöglichen (Beispiel: „Wir wollen jetzt zum Beweise der zwei folgenden fundamentalen Eigenschaften von bedingten Wahrscheinlichkeiten übergehen“; Kolmogoroff, 1933, S. 43)

7.4.1.2 Paraphrasierung des Materials

Im Folgenden wird eine Paraphrasierung des Materials dargestellt. Diese Paraphrasierung erfolgt entsprechend des reduzierten Ablaufschemas einer zusammenfassenden Inhaltsanalyse (vgl. 7.3) und der Gliederung des Materials nach Analyseeinheiten (vgl. 7.4.1.1). Der Ablauf der Paraphrasierung erfolgt in diesem Fall in zwei Phasen. Zunächst einer *Generalisierung* der für diese Untersuchung relevanten Analyseeinheiten, die einer Paraphrase der entsprechenden Analyseeinheit hinsichtlich der Z3-Regel von Mayring entspricht. Nach der Generalisierung der gesamten „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von

Kolmogoroff (1933) erfolgt eine *Reduktion* der Paraphrasen durch eine weitere Gliederung in inhaltlich zusammenfassende Kategorien.

In Tabelle 6 ist die Reduktion der „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ nach dem oben beschriebenen Verfahren der zusammenfassenden Inhaltsanalyse nach Mayring dargestellt. Sie enthält die Seitenzahl und Nummer der Fundstelle, die Generalisierung als Paraphrase sowie die Reduktion in Form einer Zuordnung von Kategorien. In Abschnitt 7.4.2 wird eine weitere Reduktion vorgenommen, die zu insgesamt sieben Dimensionen führt.

Tabelle 6: Zusammenfassende Inhaltsanalyse nach Mayring von Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“.

S.	Nr.	Generalisierung	Reduktion
Vorwort			
III	1	Zweck des Hefts ist - die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (WR) - Grundbegriffe der WR natürlicherweise in moderne Mathematik einordnen	F1: Zweck der Grundbegriffe: - Axiomatisierung - WR Teil der modernen Mathematik
III	2	Grundbegriffe der WR galten als merkwürdig	K1: Merkwürdigkeit von WR
III	3	Analogie zwischen Maß und Wahrscheinlichkeit	F2: Analogie Maßtheorie und WR
III	4	Analogie Maßtheorie und WR benötigt Geometrie-freie Integrationstheorie	
III	5	Der allgemeine Aufbau der WR war in mathematischen Kreisen seit einiger Zeit geläufig	ME1: Aufbau der modernen WR war in mathematischer Gemeinschaft bekannt
III	6	Fehlen einer vollständigen und Komplikationsfreie Darstellung	ME2: Gewünschte konfliktfreie Darstellung
III	7	Neue Fragestellung basiert auf konkreten physikalischen Fragestellungen	E1: Anwendungsschema von Wahrscheinlichkeit auf reale Erfahrungswelt
I. Die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung			

1	8	Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Theorie soll und kann genauso axiomatisiert werden wie Geometrie und Algebra. D.h. nach Namensgebung der zu untersuchenden Gegenstände und Grundbeziehungen Angabe von passenden Axiomen. Die ganze weitere Darstellung ausschließlich auf Axiome. Keine Rücksicht auf konkrete Bedeutung.	F3: Moderne Mathematik nutzt formal-abstrakte implizite Definitionen
1	9	Wahrscheinlichkeitsfeld gewissen Bedingungen genügendes Mengensystem Was Mengen bedeuten ist unerheblich für „rein mathematische Entwicklung der WR“ (vgl. Hilberts „Grundlagen der Geometrie“)	
1	10	Vgl. Gruppen, Ringe, Körper	F3: Moderne Mathematik nutzt formal-abstrakte, implizite Definitionen
1	11	Jede axiomatisch abstrakte Theorie lässt bekanntlich unbegrenzt viele konkrete Interpretationen zu	E2: Formal-abstrakte Theorie lässt beliebig viele Interpretationen zu.
1	12	Mathematische WR lässt Interpretationen zu, die über klassische hinausgehen, haben mit konkretem Sinn von Wahrscheinlichkeit und Zufall nichts zu tun.	F3: Moderne Mathematik nutzt formal-abstrakte implizite Definitionen
2	13	Axiomatisierung möglich auf versch. Weisen: Unterschiede hinsichtlich Wahl Axiome, Grundbegriffe oder Relationen	PW1: Axiomatisierung Wahrscheinlichkeitsrechnung auf verschiedene Arten möglich
2	14	Ziel mögliche Einfachheit des Axiomensystems und nachfolgender Theorie, also Axiomatisierung zufälliges Ereignis und Wahrscheinlichkeitsbegriff	MH2: Wunsch nach Einfachheit einer Axiomatisierung

2	15	Andere Begründungssysteme WR, Wahrscheinlichkeit kein Grundbegriff, sondern wird durch andere Begriffe definiert; damit größtmöglicher Anschluss an Theorie empirische Entstehung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs.	E3: Grundbegriffe schließen an empirische Entstehung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs an.
§1. Axiome			
2 Fuß- note 2	16	Leser der Axiome will <i>konkreten Sinn</i> verstehen =>§2	E3: Grundbegriffe schließen an empirische Entstehung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs an.
2	17	E Ergebnismenge: Elemente, <i>nennt</i> man elementare Ereignisse	F3: Moderne Mathematik nutzt formal-abstrakte implizite Definitionen
2	18	Teilmenge aus \mathcal{F} werden zufällige Ereignisse <i>genannt</i>	
2	19	Mengensystem F mit bestimmter Zuordnung $P(A)$ <i>nennt</i> man Wahrscheinlichkeitsfeld	
2	20	Axiomensystem widerspruchsfrei; Axiomensystem unvollständig: in WR betrachtet man verschiedene Wahrscheinlichkeitsfelder	F4: Logische Kriterien der modernen WR: - Widerspruchsfreiheit - Unvollständigkeit
§2. Das Verhältnis zur Erfahrungswelt			
3 Fuß- note 1	21	Ein Leser nur mit Interesse für rein mathematische Entwicklung kann §2 überspringen Die weitere Darstellung beruht auf §1 und nutzt §2 nicht	F1: Zweck der Grundbegriffe: - Axiomatisierung - WR Teil der modernen Mathematik
3 Fuß- note 1	22	Hinweis auf empirische Entstehung der WR lässt philosophische Untersuchung bewusst außen vor.	P1: Kolmogoroff will keine philosophische Untersuchung durchführen.
3 Fuß- note 1	23	Darstellung der notwendigen Voraussetzungen für Anwendbarkeit folgt Verfasser in hohem Maße von Mises,	E4: Verweis auf von Mises Vorlesungen

		insbes. §5 Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt	
3	24	Anwendung WR auf reale Erfahrungswelt nach Schema: 1. Komplex \mathcal{S} von Bedingungen unbeschränkte Wiederholung 2. Definition Ergebnismenge 3. \mathcal{S} praktische Variante von E , dann hat A stattgefunden	E1: Anwendungsschema von Wahrscheinlichkeit auf reale Erfahrungswelt
4	25	4. Zuordnung von $P(A)$ zu A unter Bedingungen auf die wir nicht eingehen wollen	P2: Bedingungen für Anwendung des Wahrscheinlichkeitsmaßes
4	26	A Praktisch sicher relative Häufigkeit bei großer Versuchsdurchführung nahe $P(A)$	E5: „Praktische Sicherheit“ und ihre Implikationen
4	27	B $P(A)$ klein, dann praktisch sicher A findet nicht statt	
4	28	Empirische Deduktion der Axiome: Relative Häufigkeiten mit passender Ergebnismenge erfüllen Axiome	E7: Empirische Deduktion der Axiome durch relative Häufigkeiten, Ergebnismengen und Axiome
4–5	29	Bemerkung 1: Aus praktischer Sicherheit zweier Behauptungen folgt praktische Sicherheit für die Vereinigung beider Ereignisse, aber mit geringerer Wahrscheinlichkeit; Bei vielen praktisch sicheren Behauptungen folgt nicht die praktische Sicherheit der gemeinsamen Behauptungen	E5: Praktische Sicherheit und ihre Implikationen
5	30	Bemerkung 2: Dem unmöglichen Ereignis (der leeren Menge) <i>entspricht Kraft der Axiome</i> die Wahrscheinlichkeit $P(0) = 0$	E6: Unmögliche Ereignisse im Unterschied zu $P(A)=0$
5	31	$P(A) = 0$ folgt nicht Unmöglichkeit von A	

§3. Terminologische Vorbemerkungen			
5	32	Wir haben Objekte als Mengen definiert. Mehrere mengentheoretische Objekte bezeichnet man in WR mit anderen Namen. =>kurzes Verzeichnis der Begriffe	F5: Standardisierung von Bezeichnungen
§5 Unabhängigkeit			
8	33	Begriff <i>Unabhängigkeit</i> zweier oder mehrerer Versuche nimmt zentrale Stellung in WR ein	MH3: Unabhängigkeit zentraler Begriff in der WR
8	34	WR ist vom mathematischen Standpunkt aus eine spezielle Anwendung der allgemeinen Theorie additiver Mengenfunktionen.	F2: Analogie Maßtheorie und WR
8	35	Frage: Weshalb hat sich WR in selbstständige Wissenschaft mit eigenen Methoden entwickelt?	MH4: WR eigenständige Disziplin
8	36	Antwort bedeutet Spezialisierung additiver Mengenfunktionen angeben, die zu WR führt.	F2: Analogie Maßtheorie und WR
8	37	$P(E) = 1$ ist kein tiefliegender Grund für Besonderheit von WR	MH4: WR eigenständige Disziplin
8	38	Zufällige Größen (vgl. drittes Kapitel) sind vom mathematischen Standpunkt aus nichts anderes als meßbare Funktionen	MH4: WR eigenständige Disziplin
8	39	Mathematische Erwartung von zufälligen Größen sind abstrakte Lebesgue Integrale	MH4: WR eigenständige Disziplin
8	40	Die Einführung der Begriffe zufällige Größe und mathematische Erwartung keine Basis für Entwicklung einer „großen originellen Theorie“	MH4: WR eigenständige Disziplin
8	41	Geschichtlich ist Unabhängigkeit von Versuchen und zufälligen Größen der	MH3: Unabhängigkeit zentraler Begriff in der WR

		mathematische Begriff, der die Wahrscheinlichkeitsrechnung zum eigenständigen wissenschaftlichen Teilgebiet werden lässt.	
8	42	Verschiedene Mathematiker von Laplace bis von Mises haben Untersuchungen von Reihen unabhängiger Größen durchgeführt.	MH3: Unabhängigkeit zentraler Begriff in der WR
8	43	Der erste Keim der „eigenartigen Problematik“ der WR ist der Begriff der Unabhängigkeit	MH4: Unabhängigkeit zentraler Begriff in der WR
8	44	Ziel des Buches ist die logische Vorbereitung zu den eigentlichen wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen.	F1: Zweck der Grundbegriffe: - Axiomatisierung - WR Teil der modernen Mathematik
8–9	45	Eine der wichtigsten Aufgaben der Philosophie der Naturwissenschaften [Wissenschaftstheorie] ist 1. Wesen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs klären 2. Voraussetzungen präzisieren wann reelle Erscheinungen für gegenseitig unabhängig gehalten werden können Diese Fragen fallen „aus dem Rahmen“ der „Grundbegriffe“.	P3: Wissenschaftstheoretische Forschungsdesiderate: - „Wesen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs“ - Voraussetzungen für Unabhängigkeit in realen Anwendungen
11	46	Definition des Unabhängigkeitsbegriffes [$P(AB) = P(A)P(B)$] ohne Nutzung bedingter Wahrscheinlichkeit.	F6: Definition Unabhängigkeitsbegriff ohne bedingte Wahrscheinlichkeiten
11	47	Ziel war Bedeutung des Begriffs rein mathematisch möglichst klar darzustellen.	
11	48	Anwendungen der Unabhängigkeit beruhen aber meistens auf Eigenschaften bedingter Wahrscheinlichkeiten.	E8: Unabhängigkeit eng verknüpft mit bedingter Wahrscheinlichkeit.

§1 Das Stetigkeitsaxiom			
14	49	Für unendliche Wahrscheinlichkeitsfelder ist Axiom VI von den Axiomen I–V unabhängig.	F5: Logische Kriterien der modernen WR: -Widerspruchsfreiheit - Unvollständigkeit
14	50	Empirische Bedeutung von VI kaum zu erklären, da nur für unendliche Wahrscheinlichkeitsfelder von Bedeutung	E9: Keine empirischen Anwendungskontexte für unendliche Wahrscheinlichkeitsfelder
14	51	Bei Beschreibung beobachtbarer zufälliger Prozesse kann man nur endliche Wahrscheinlichkeitsfelder erhalten	
14	52	Unendliche Wahrscheinlichkeitsfelder erscheinen nur als „idealisierte Schemata realer zufälliger Prozesse.	
14	53	<i>Willkürliche Beschränkung auf Schemata, die Stetigkeitsaxiom VI erfüllen.</i> Diese Beschränkung erwies sich als zweckmäßig.	E10: Einschränkung auf Anwendungsbereiche für die das Stetigkeitsaxiom gilt.
§2 Borelsche Wahrscheinlichkeitsfelder			
15	54	<i>Ein Borelsches Wahrscheinlichkeitsfeld ist ein Wahrscheinlichkeitsfeld über einem Borelschen Körper. Nur in Borelschen Wahrscheinlichkeitsfeldern ist WR „vollständig handlungsfrei“ ohne Gefahr zu Ereignissen zu gelangen ohne Wahrscheinlichkeit</i>	MH4: Handlungsfreiheit mit Borel-Feldern in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
16	55	Wenn man Ereignisse A aus \mathcal{F} als reale beobachtbare Ereignisse deuten kann, dann heißt das nicht, dass A aus Borel \mathcal{F} eine ähnliche vernünftige Deutung als real beobachtbares Ereignis zugewiesen werden kann.	F8: Borel-Felder formal-abstraktes Konzept ohne direkten Bezug zu beobachtbarer Realität
16	56	Es ist möglich, dass (\mathcal{F}, P) ein (idealisiertes) Bild realer zufälliger Ereignisse werden kann.	E10: Mengenkörper als (idealisierte) zufällige Ereignisse

16	57	(\mathcal{BF}, P) bleibt rein mathematisches Konstrukt. A aus \mathcal{BF} werden „nur als „ideelle Ereignisse““ betrachtet, denen in der Erfahrungswelt nichts entspricht.	F7: Borel-Felder formal-abstraktes Konzept ohne direkten Bezug zu beobachtbarer Realität
16	58	Vom empirischen Standpunkt einwandfrei sollten Deduktionen der Wahrscheinlichkeit von Ereignissen aus \mathcal{F} aus Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen aus \mathcal{BF} sein.	F→E: Deduktion Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse aus Wahrscheinlichkeiten auf Borel-Feldern.

7.4.2 Übersicht und Einordnung der zusammenfassenden Kategorien

In den folgenden Tabellen sind erneut die inhaltlich zusammenfassenden Kategorien (Reduktion) der Paraphrasierungen angegeben. Zur besseren Einordnung wurden zusätzlich Dimensionen angegeben, die die Kategorien in eine größere Grobstruktur thematisch einordnen.

Dimension „formal-abstrakt“:

F1	Zweck der Grundbegriffe: - Axiomatisierung - WR Teil der modernen Mathematik
F2	Analogie Maßtheorie und WR
F3	Moderne Mathematik nutzt formal-abstrakte implizite Definitionen
F4	Logische Kriterien der modernen WR: - Widerspruchsfreiheit - Unvollständigkeit
F5	Standardisierung von Bezeichnungen
F6	Definition Unabhängigkeitsbegriff ohne bedingte Wahrscheinlichkeiten
F7	Borel-Felder formal-abstraktes Konzept ohne direkten Bezug zu beobachtbarer Realität

Dimension „empirisch-gegenständlich“:

E1	Anwendungsschema von Wahrscheinlichkeit auf reale Erfahrungswelt
E2	Formal-abstrakte Theorie lässt beliebig viele Interpretationen zu

E3	Grundbegriffe schließen an empirische Entstehung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs an
E4	Verweis auf von Mises Vorlesungen
E5	„Praktische Sicherheit“ und ihre Implikationen
E6	Unmögliche Ereignisse im Unterschied zu $P(A) = 0$
E7	Empirische Deduktion der Axiome durch relative Häufigkeiten, Ergebnismengen und Axiome
E8	Unabhängigkeit eng verknüpft mit bedingter Wahrscheinlichkeit
E9	Keine empirischen Anwendungskontexte für unendliche Wahrscheinlichkeitsfelder
E10	Einschränkung auf Anwendungsbereiche für die das Stetigkeitsaxiom gilt

Dimension „Von formal-abstrakter Theorie zur empirisch-gegenständlichen Anwendung“

F→E	Deduktion Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse aus Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Borel-Feldern
-----	---

Dimension „mathematischer Habitus“:

MH1	Axiomatisierung Wahrscheinlichkeitsrechnung auf verschiedene Arten möglich
MH2	Wunsch nach Einfachheit einer Axiomatisierung
MH3	Unabhängigkeit zentraler Begriff in der WR
MH4	WR eigenständige Disziplin

Dimension „philosophisch“:

P1	Kolmogoroff will keine philosophische Untersuchung durchführen
P2	Bedingungen für Anwendung des Wahrscheinlichkeitsmaßes
P3	Wissenschaftstheoretische Forschungsdesiderate: - „Wesen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs“ - Voraussetzungen für Unabhängigkeit in realen Anwendungen

Dimension „mathematische Entwicklung“:

ME1	Aufbau der modernen WR war in mathematischer Gemeinschaft bekannt
ME2	Gewünschte konfliktfreie Darstellung

Dimension „klassische Auffassung“

K1 | Merkwürdigkeit von WR

An dieser Stelle möchte ich in Bezug auf den dargestellten Kontext die Ergebnisse der Untersuchung diskutieren. Zunächst ist festzuhalten, dass die Aspekte, die Shafer und Vovk (2006) in den „Grundbegriffen“ identifizieren von Kolmogoroff selbst expliziert werden. Hierbei ist hinsichtlich der Leistung der Formalisierung von Kolmogoroff zu sagen, dass er selbst den Zweck dieses „Hefts“ (F1) benennt. Zugleich bezieht Kolmogoroff in seinem Werk stets die mögliche empirisch-gegenständliche Interpretation (Dimension „empirisch-gegenständlich“) seiner formal-abstrakten Theorie (Dimension „formal-abstrakt“) ein, was übergeordnete subjektive Erfahrungsbereiche notwendig macht um diese bewusste Loslösung vom empirischen Gehalt der Theorie (insbes. Dimension „mathematischer Habitus“, F3) zu ermöglichen. Auch wenn Kolmogoroff behauptet keine philosophischen Überlegungen anzustellen ist zu konstatieren, dass er solche Überlegungen anstellt, wie es auch Shafer und Vovk (2006, S. 70) behaupten, insbesondere im Kontext seiner Zeit mit expliziertem Bezug auf Hilberts (1899) Grundlagen der Geometrie. Ein weiteres Merkmal, das sich aus der inhaltsanalytischen Zusammenfassung ergibt, ist die hohe Vernetztheit von Kolmogoroff mit der mathematischen Fachgemeinschaft, die sich im gesamten Werk zeigt.

7.4.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 2

Kolmogoroffs Auffassung ist exemplarisch für eine formal-abstrakte Auffassung. Dies zeigt sich neben seiner Konzeption der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung an der Transparenz und Klarheit seines formal-abstrakten Standpunktes gegenüber seinen Leser*innen – besonders deutlich in den besprochenen Fußnoten 2 (Kolmogoroff 1933, S. 2) und Fußnote 1, (Kolmogoroff 1933, S. 3). Neben dieser klaren Transparenz und bewussten Perspektive der formal-abstrakten Auffassung, erwähnt er trotzdem die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrech-

nung und formuliert eine Möglichkeit, auf welche Weise mathematische Ergebnisse, die zunächst völlig abstrakt erscheinen, Einfluss auf die Anwendung der mathematischen Theorie haben können (vgl. $F \rightarrow E$).

7.4.4 Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 2 ergeben

- Inwiefern kann eine schriftliche Explikation der intendierten Auffassung des Erstellers oder der Erstellerin von Lernmaterialien, die Reflexionsfähigkeit und den Zugang zu mathematischen Inhalten – auch im schulischen Kontext – anregen?
- In dieser Arbeit wurden die Unterschiede der symbolischen Schreibweisen in Kolmogoroffs Grundbegriffen und der heutigen Darstellung der Mengenlehre erwähnt, allerdings nicht tiefer diskutiert, da die Darstellung kein sicherer Indikator für eine empirisch-gegenständliche oder formal-abstrakte Auffassung ist. Da die Mengennotation erfahrungsgemäß auch heute vielen Schüler*innen und Studierenden Schwierigkeiten bereitet, wäre ein interessantes Forschungsdesiderat, welche Rolle geeignete Notationen gerade beim Lehren und Lernen der Stochastik (insbesondere Semiotik der Mengennotation) spielen, mit Rücksicht auf die Unterscheidung des Mengen- und Zahlbegriffs.

8 Empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Schulbüchern

„In der Stochastik stehen der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Beziehung zu den relativen Häufigkeiten im Zentrum. Simulationen vertiefen die Zusammenhänge.“

(Lambacher Schweizer 7, Mathematik für Gymnasien,
Nordrhein-Westfalen, 2010, S. 3)

„Bevor man die Realität durch Wahrscheinlichkeitsmodelle beschreibt, muss man sie durch Messen und Zählen erfassen.“

(Lambacher Schweizer Qualifikationsphase, Mathematik für Gymnasien,
Nordrhein-Westfalen, 2015, S. 273)

In dieser Untersuchung wird der Frage nachgegangen, ob eine empirisch-gegenständliche Auffassung der Stochastik, mit besonderem Schwerpunkt auf der Wahrscheinlichkeitsrechnung, im Schulkontext (Schulunterricht, Medien für den Schulunterricht, usw.) nachzuweisen ist. Dazu wird die Schulbuchreihe „Lambacher Schweizer“ untersucht. Hierbei ist, wie auch bei der Untersuchung der Hochschullehrbücher (vgl. 9), zu beachten, dass sich die Konzeptionen verschiedener Schulbuchreihen natürlich hinsichtlich ihrer Schwerpunkte in der Wahl, Abfolge und Bearbeitung der Themen durch Aufgaben unterscheiden. Die Schulbuchreihe „Lambacher Schweizer“ wurde zum einen ausgewählt, da sie – auch bundesweit – zur einschlägigen Schulbuchliteratur gehört und zum anderen vollständig für die Untersuchung vorlag. Nach der Sichtung (vgl. Anhang E) des Schulbuchmaterials von der Jahrgangsstufe 5 bis zur Qualifikationsphase konnten wichtige Gelenkstellen, sowie für diese Arbeit interessante und relevante Textstellen (grau hinterlegt in Anhang E), identifiziert werden, die Hinweise darauf geben, dass die Schüler*innen zumindest in den durch die Schulbuchreihe eröffneten Erfahrungsbereichen empirisch-gegenständliche Auffassung entwickeln können. Dies entspricht den für die untersuchte Schulbuchreihe gültigen Vorgaben aus den Kernlehrplänen des Landes Nordrhein-Westfalen, die entsprechend der explizierten Konzeption des Werkes, insbesondere in den ausgewiesenen inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen deutlich werden. Im Rahmen des Abschnitts zum Kontext der Quelle (vgl. 8.2) wird auf die Standards, die den

Lehrwerken zugrunde lagen, und die aktuellen Kernlehrpläne für Gymnasien (und Gesamtschulen) Bezug genommen.

Diese Untersuchung gliedert sich in vier weitere Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird das Ziel der Untersuchung erläutert und begründet sowie in die theoretischen Überlegungen eingebettet. Im zweiten Abschnitt wird die Schulbuchreihe in ihrem Kontext verortet. Insbesondere wird dabei auf die Struktur der Schulbücher eingegangen, aber auch die der Schulbuchreihe zugrundeliegenden Standards werden in den Blick genommen. Im dritten Abschnitt wird die Methode der Time-Series-Analysis erläutert, die auch im Rahmen von Fallstudien (Yin, 2014) erprobt ist, um die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Schulbuchreihe nachzuzeichnen. Im letzten Teil werden die Untersuchungsergebnisse vorgestellt und zusammengefasst.

8.1 Ziele der Untersuchung 3

Das Ziel dieser Untersuchung liegt in der Beantwortung der dritten Forschungsfrage, nämlich

3. Ist eine empirisch-gegenständliche Auffassung im Schulkontext nachzuweisen und wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?

Wie in Teil I (Hefendehl-Hebeker, 2016) und Teil II (vgl. 3, 4) dieser Arbeit dargestellt, gibt es lern- und entwicklungspsychologische Gründe eine „weniger abstrakte“ und dafür handlungsorientierte Zugangsweise für den Mathematikunterricht zu wählen. Entsprechend lässt sich vermuten, dass die Schüler*innen wohl nicht eine formal-abstrakte Auffassung, wie sie bspw. Kolmogoroff in seinen „Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (1933) vertritt, besitzen. Um die eben aufgestellte Hypothese zu prüfen wurde diese Untersuchung auf Schulbücher ausgerichtet, die als Planungshilfe für Lehrer*innen, sowie Aufgabensammlung und Nachschlagewerk für Schüler*innen eine wichtige Rolle für den Mathematikunterricht spielen (Rezat, 2009).

Hierbei stehen, wie auch bei den übrigen Untersuchungen 1 (vgl. 6), 2 (vgl. 7), 4 (vgl. 9) und 5 (vgl. 10), explizite Hinweise auf eine empirisch-gegenständliche Auffassung bzw. deren Vermittlung im Vordergrund. Diese werden ergänzt durch die Betrachtung von Aufgaben und Lösungen in denen typische Perspektiven und Vorgehensweisen im Sinne einer empirisch-gegenständlichen Auffas-

sung gefordert oder durchgeführt werden (z.B. die Angabe intendierter Anwendungen oder Messprozesse theoretischer Terme, vgl. 4.4). Dies bedeutet allerdings nicht, dass nicht auch in der Schulbuchreihe auf theoretischer Ebene, das heißt mit theoretischen Begriffen, gearbeitet werden kann, da dies kein Indiz für nicht-empirisch-gegenständliches Arbeiten ist. Dies zeigt sich insbesondere an naturwissenschaftlichen Disziplinen wie der Physik oder Chemie, in denen selbstverständlich auch auf theoretischer Ebene gearbeitet wird.

8.2 Kontext der Quelle zur Untersuchung 3

Um den Kontext der Quelle adäquat zu beschreiben wird zunächst ein Blick in die zugrundeliegenden Standards, das sind die (aktuellen¹³³) Kernlehrpläne für die Sekundarstufe I (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2019, im Folgenden „KLPG9“; Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, im Folgenden „KLPG8“) und der Sekundarstufe II (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2014, im Folgenden „KLPSII“) geworfen um generelle Ansprüche an den Stochastikunterricht und die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule zu identifizieren. Im Anschluss wird der systematische Aufbau der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer auf verschiedenen Strukturebenen mit besonderem Fokus auf die inhaltliche Abfolge der mathematischen Themen sowie deren Verknüpfung dargestellt.

8.2.1 Stochastik in den Kernlehrplänen Nordrhein-Westfalens

Den untersuchten Schulbüchern des Lambacher Schweizer liegen die Kernlehrpläne der Sekundarstufe I in fünf Jahren (KLPG8) und der Sekundarstufe II (KLPSII) zugrunde. Durch die Rückkehr zum neunjährigen Gymnasium wurden im Jahr 2019 neue Kernlehrpläne für die Sekundarstufe I (KLPG9) eingeführt. Somit kann auch ein Ausblick auf zukünftige Rahmenbedingungen für und angestrebte Perspektiven auf die Stochastik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung angegeben werden.

Schulbuchreihen – da bildet die Reihe Lambacher Schweizer keine Ausnahme – sind aus pragmatischen und wirtschaftlichen Gründen lehrplankonform, da sie sonst in den Fachkonferenzen der Schulen nicht zur Anschaffung vorgeschlagen würden und gerade zur Vorbereitung auf zentrale Prüfung nicht genutzt werden

¹³³ Aktuell meint hier im Jahr 2019.

könnten. Nichtsdestotrotz ist es notwendig zu prüfen, ob der Lambacher Schweizer die Regelstandards erfüllt. Dies ist in Bezug auf das Themengebiet der Stochastik, die sowohl Elemente der Kombinatorik, der deskriptiven und beurteilenden Statistik wie auch der Wahrscheinlichkeitsrechnung beinhaltet, der Fall. Das kann leicht durch einen Vergleich der Kapitel 3 (KLPG8) und Kapitel 2 (KLPSII) der Kernlehrpläne für die Sekundarstufe I und II mit den stochastikbezogenen Elementen aus der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer (vgl. Anhang E) festgestellt werden. Im Folgenden stehen in Bezug auf die Forschungsfrage eher generelle durch die Kernlehrpläne intendierte Auffassungen im Fokus, die durch exemplarische Stellen des Lehrplans illustriert werden.

Die generellen Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichts werden mit Bezug auf die sogenannten „Winterschen Grunderfahrungen“ formuliert. Hierbei ist der Unterschied zwischen der Originalformulierung von Winter (1996) und der im KLPG8 besonders groß. Unter anderem enthält dieser nicht vollständig den Aspekt „mathematische Gegenstände und Sachverhalte [...] als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art [zu] erkennen und weiter[zu]entwickeln“ (Winter, 1996, S. 35) – häufig als Winters zweite Grunderfahrung bezeichnet. Im KLPSII und auch im neuen KLPG9 findet sich dieser Aspekt dagegen in ähnlicher Form wie im Original. Um überhaupt von einer formal-abstrakten Auffassung im Sinne dieser Arbeit sprechen zu können, wären Deduktionen als logische Schlussweise zwingend für das mathematische Arbeiten notwendig. Wobei dies allerdings nicht bedeutet, dass Deduktionen keine Rolle in empirischen Theorien spielen – das Gegenteil ist der Fall. Gerade Naturwissenschaften, die mathematische Modelle zur Beschreibung nutzen, sind besonders erfolgreich deduktive Schlüsse zu führen um so Theorien abzusichern oder zu spezialisieren (vgl. 4.4).

Desweiteren wird in allen Lehrplänen die Wichtigkeit der Behandlung inner- und außermathematischer Fragestellungen sowie Kontexte im Mathematikunterricht gefordert (KLPG8, S. 12; KLPG9, S. 9; KLPSII, S. 12), sodass prinzipiell intendierte Anwendungen in empirisch-gegenständlichen Erfahrungsbereichen ausgewiesen sein könnten. Die folgende Schulbuchanalyse zeigt, dass dies auch tatsächlich der Fall ist (vgl. 8.2.2 und 8.4)

Neben diesen Aspekten in Bezug auf den Mathematikunterricht im Allgemeinen wird auch das Gebiet der Stochastik in allen Kernlehrplänen charakterisiert. Im KLPG8 (S.12) werden übergreifende prozessbezogene Kompetenzen (Argumen-

tieren/Kommunizieren, Problemlösen, Modellieren und Werkzeuge) sowie inhaltsbezogene Kompetenzen (Arithmetik/Algebra, Funktionen, Geometrie und Stochastik) ausgewiesen. Jede dieser Kompetenzen wird zum einen in tabellarischer Form kurz und knapp erläutert, sodass bspw. die inhaltsbezogene Kompetenz „Stochastik“ durch „Arbeiten mit Daten und Zufall“ ergänzt wird. Außerdem werden ausführlicher Anforderungen einzelner Klassenstufen konkretisiert. An dieser Stelle werden die Anforderungen am Ende der Sekundarstufe I für die inhaltsbezogene Kompetenz wiedergegeben:

„Stochastik [Herv. im Original]

mit Daten und Zufall arbeiten [Herv. im Original]

Schülerinnen und Schüler erheben statistische Daten und werten sie aus. Sie beschreiben und beurteilen zufällige Ereignisse mit mathematischen Mitteln.

- Sie planen statistische Erhebungen, nutzen Methoden der Erfassung und Darstellung von Daten (Säulen- und Kreisdiagramme, Boxplots) und bewerten Darstellungen kritisch.
- Sie bestimmen relative Häufigkeiten, Mittelwerte (arithmetisches Mittel, Median) und Streumaße (Spannweite, Quartil) und interpretieren diese.
- Sie bestimmen Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Laplace-Regel, Baumdiagrammen und Pfadregeln, nutzen Häufigkeiten zum Schätzen von Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeiten zur Vorhersage von Häufigkeiten.“

(KLPG8, S. 12)

Besonders relevant mit Blick auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist natürlich der dritte Punkt. Trotzdem lohnt es sich diese Anforderungen der inhaltsbezogenen Kompetenz „Stochastik“ von Beginn an zu deuten.

Zunächst fällt auf, dass die generelle „verbindliche“ Kompetenzanforderung an Schüler*innen, ‚die mit Erfolg am Mathematikunterricht teilgenommen haben‘ in Bezug auf ‚Stochastik‘ darin liegt mit ‚statistischen Daten‘ umzugehen, das heißt diese zu Erheben und Auszuwerten, wie auch zufällige Ereignisse mit mathematischen Mitteln zu beschreiben und zu beurteilen. Somit passen auch die ausgewiesenen Kernkonzepte ‚Daten‘ und ‚Zufall‘.

Auch die ersten beiden Punkte in den Anforderungen legen einen klaren Fokus auf die beschreibende Statistik, und zwar auf die Datengenerierung, die Darstellung von Daten sowie ihrer kritischen Beurteilung. Der zweite Punkt behandelt verschiedene, in der Einführungsphase dann „empirische“ (vgl. Lambacher Schweizer Einführungsphase, S. 146), Kenngrößen aus der deskriptiven Statistik, die sich alle im Thema „Boxplot“ wiederfinden lassen. Im dritten Punkt wird zwar auch der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff im Sinne der „Laplace-Regel“ erwähnt sowie Darstellungen und Kalküle zur Bestimmung mehrstufiger Zufallsversuche angegeben, eine große Rolle spielt aber auch das „Schätzen von Wahrscheinlichkeiten“ mithilfe von Häufigkeiten wie auch die Vorhersage von Häufigkeiten auf der Basis von Wahrscheinlichkeiten. Dieser Zusammenhang rekurriert klar auf das empirische Gesetz der großen Zahlen, das (wie in 6.4.1.4 rekonstruiert) auch für von Mises, und damit für einen „frequentistischen“ Wahrscheinlichkeitsbegriff, die Grundlage bildet.

Mathematische Aktivitäten, die der Stochastik zugeschrieben werden, finden sich in den Lehrplänen als eine Art Prozessmuster dem „Erheben, Darstellen Auswerten und Beurteilen“ (KLPG8, S. 23, 28) wieder. Ebenso als Ganzes sowie in Teilprozessen in vielen Arbeitsaufträgen, Beispielen und Einstiegen im Lambacher Schweizer (vgl. 8.2.2 und 8.4).

Die vom Lehrplan intendierten Anwendungen finden sich ausführlicher in den konkretisierten Kompetenzerwartung am Ende der Jahrgangsstufe 9. Schüler*innen sollen „Wahrscheinlichkeiten zur Beurteilung von Chancen und Risiken und zur Schätzung von Häufigkeiten“ nutzen können. Eine konkrete Eingrenzung der Kontexte wird nicht vorgenommen, sondern lediglich die Ausweisung der Behandlung ein- und zweistufiger Zufallsversuche (KLPG8, S. 17).

Im neuen Kernlehrplan für die Sekundarstufe I (KLPG9) bildet sich diese starke Bindung des Wahrscheinlichkeitsbegriff an das Konzept der relativen Häufigkeiten noch deutlicher ab. Außerdem wird die Eigenständigkeit des Faches Mathematik besonders betont, was sich zum einen in der Formulierung der Grunderfahrungen zeigt, die der Mathematikunterricht ermöglichen soll, die nun die deduktive Ordnung der Mathematik einschließt und im Wortlaut tatsächlich sehr nahe an der Originalversion der zweiten Winterschen Grunderfahrung ist (vgl. Tabelle 7).

Tabelle 7: Gegenüberstellung der zweiten Winterschen Grunderfahrung und deren Variationen in Kernlehrplänen der Sekundarstufe I in NRW.

KLPG8 (S. 11)	KLPG9 (S. 8)	Winter (1996, S. 35)
<p>mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern,</p> <p>als geistige Schöpfungen,</p> <p>verstehen und weiterentwickeln (Mathematik als Struktur),</p>	<p>mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern,</p> <p>als geistige Schöpfungen,</p> <p>als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art erkennen und weiterentwickeln (Mathematik als Struktur),</p>	<p>mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln,</p> <p>als geistige Schöpfungen,</p> <p>als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,</p>

Zum anderen wird die Eigenständigkeit in der Charakterisierung des Faches Mathematik in der Einleitung der „Aufgaben und Ziele des Faches“ klar herausgestellt:

„Mathematik ist eine der bedeutsamsten globalen Kulturleistungen, die sich über tausende von Jahren *auf der Suche nach dem Schlüssel zum Verständnis der Welt entwickelt hat* [Herv. G.S.]. Sie stellt ein **eigenständiges Gebäude aus Begriffen, Theorien und Strukturen** [Herv. G.S.] dar, das *es ermöglicht, Ausschnitte der naturgegebenen Wirklichkeit und Vorgänge in komplexen Systemen wie der Wirtschaft und der Gesellschaft zu erfassen und zu verstehen* [Herv. G.S.]“

(KLPG9, S. 8)

Im obigen Zitat wird dabei die Anwendung der Mathematik (kursiv) und der erkenntnistheoretische Aspekt von Mathematik (fett) auf die Welt hervorgehoben. Dies entspricht der Idee durch Mathematik empirische Theorien zu formulieren, aber auch mathematische Konzepte aus der Auseinandersetzung mit der Wirklichkeit, also im Sinne einer empirisch-gegenständlichen Auffassung von

Mathematik, zu entwickeln. Interessant ist auch die in Fettschrift hervorgehobene Stelle, die eben die Eigenständigkeit des Faches Mathematik betont. Die Frage, die im entsprechenden Kernlehrplan offenbleibt, ist, inwiefern und wodurch Mathematik eigenständig ist, das heißt wovon sie sich abgrenzt. Eine mögliche Interpretation kann darin liegen, dass Mathematik eine eigenständige Form der Weltwahrnehmung im Vergleich zu anderen Wissenschaften, wie beispielsweise den Naturwissenschaften, bietet.

Grundsätzlich wurde dort – wie auch schon im KLPSII – nicht mehr zwischen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen, sondern zwischen „Kompetenzbereichen (Prozesse)“ und „Inhaltsfeldern (Gegenstände)“ unterschieden. Der Grund für diese Änderung liegt wohl darin, dass „im Gymnasium Fachlichkeit und Wissenschaftspropädeutik einen besonderen Stellenwert haben. Die neuen Kernlehrpläne stärken und schärfen diesen gymnasialen Bildungsauftrag, indem obligatorische Wissensbestände, Fähigkeiten und Fertigkeiten konkreter und klarer als bislang ausgewiesen werden.“ (KLPG9, S. 3). Damit wandelt sich die inhaltsbezogene Kompetenz „Stochastik: mit Daten und Zufall arbeiten“ zum Inhaltsfeld „Stochastik (Sto)“:

„In vielen gesellschaftlich relevanten Bereichen spielen stochastische Begriffe, Daten und Wahrscheinlichkeitsaussagen eine zentrale Rolle. In der Stochastik werden Daten mathematisch aufbereitet und dargestellt sowie durch die Bestimmung von relevanten Kenngrößen untersucht. *Auf der Basis eines tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriffs können Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen gedeutet werden* [Herv. G.S.]. Ausgehend von relativen Häufigkeiten werden mithilfe stochastischer Sätze statistische Aussagen in authentischen Texten beurteilt.“

(KLPG9, S. 16)

In dieser Charakterisierung bezieht sich vornehmlich der kursiv hervorgehobene Teil auf den Wahrscheinlichkeitsbegriff, der sowohl eng mit dem Zufallsbegriff verknüpft, als auch mit einem Schwerpunkt auf die Anwendung in „alltäglichen Situationen“ genutzt werden soll, also innerhalb eines empirischen Anwendungsfelds. Den Ausgangspunkt für die Stochastik bildet dabei offenbar das Konzept der relativen Häufigkeiten, wie im letzten Satz des obigen Zitats zu lesen ist. Auch dies ist ein Hinweis auf die Ausrichtung des Stochastikunterrichts entsprechend einer empirisch-gegenständlichen Auffassung und damit der

Wahrscheinlichkeitsrechnung als Deutungsinstrument in verschiedenen Anwendungssituationen.

Hinsichtlich der inhaltlichen Schwerpunkte überschneiden sich beide Kernlehrpläne. An dieser Stelle werden daher nur die für diese Arbeit interessanten Unterschiede aufgeführt, die Hinweise auf die im Mathematikunterricht zu fördernden Auffassungen geben.

Im KLPG9 wird als ein inhaltlicher Schwerpunkt für den Abschluss der Erprobungsstufe „Begriffsbildung: relative und absolute Häufigkeit“ (KLPG9, S. 26) explizit ausgewiesen. Dies findet sich in dieser Form nicht im älteren KLPG8. Insgesamt ist für die Erprobungsstufe festzuhalten, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff aufgrund einer Schwerpunktsetzung auf die deskriptive Statistik nicht ausgewiesen ist. Ein Grund liegt vermutlich darin, dass in der Erprobungsstufe gerade erst mit der Bruchrechnung begonnen wird.

Die intensive Behandlung von relativen Häufigkeiten und entsprechenden statistischen Kenngrößen ist allerdings für den weiteren Unterrichtsverlauf sehr wichtig, da sie – wie die Analyse der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer zeigt (vgl. 8.2.2 und 8.4) – die Grundlagen für die Wahrscheinlichkeitstheorie in der Schule legt und somit deren Einschätzung als empirische Theorie rechtfertigt. Diese Einschätzung wird dadurch gestützt, dass in der ersten Stufe der Kompetenzerwartung am Ende der Sekundarstufe I im neuen Kernlehrplan ein inhaltlicher Schwerpunkt durch das „empirische Gesetz der großen Zahlen“ (KLPG9, S. 31) gebildet wird. In der Verbindung von Inhaltsfeld und Kompetenzbereich bildet sich das Gesetz im „[S]chätzen [von] Wahrscheinlichkeiten auf der Basis von Hypothesen sowie auf der Basis relativer Häufigkeiten langer Versuchsreihen“ (KLPG9, S. 31) ab. Diese letzte Konkretisierung findet sich allerdings auch im älteren Kernlehrplan: „Schülerinnen und Schüler benutzen relative Häufigkeiten von langen Versuchsreihen zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten“ (KLPG8, S. 26), ein Vorgehen, das aber auch durch die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten durch die „Laplace-Regel“ und „Pfadregel“ ergänzt wird (KLPG8, S. 28). Die im KLPG8 am Ende der Jahrgangsstufe 9 ausgewiesene Kompetenzerwartung „Schülerinnen und Schüler nutzen Wahrscheinlichkeiten zur Beurteilung von Chancen und Risiken und zur Schätzung von Häufigkeiten“ (KLPG8, S. 32), findet sich in dieser Form nicht im neuen Kernlehrplan. Ein Analogon, je nach Deutung des Begriffs „Simulation“ kann gegebenenfalls in der Konkretisierung „simulieren Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen

mit einem stochastischen Modell“ (KLPG9, S. 31) im neuen Lehrplan verortet werden. Ein weiterer Grund für die Entscheidung, den Schluss von Wahrscheinlichkeiten auf (zu erwartende) relative Häufigkeiten nicht (mehr) in der Sekundarstufe I zu behandeln, kann darin liegen, dass dies eine typische mathematische Tätigkeit der beurteilenden Statistik darstellt, die vornehmlich in der Sekundarstufe II behandelt wird. Interessanterweise findet sich im Vorschlag für einen schulinternen Lehrplan zur Umsetzung des KLPG8 (QUA-LiS.NRW, 2015, S.17) ein „Hinweis zur Entlastung: nur ein- und zweistufige Zufallsexperimente; keine beurteilende Statistik (bedingte Wahrscheinlichkeiten, Vierfeldertafel \rightarrow EF)“. Entsprechend kann auch davon gesprochen werden, dass implizit eine solche „Verkürzung des KLPG8“ (zumindest nachträglich) bereits eingeplant wurde.

Um den Übergang von der Schule zur Hochschule in Bezug auf die Stochastik zu betrachten, ist ein Blick in die Richtlinien für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II notwendig. Zum einen besitzt der Großteil der Studierenden, zumindest in Deutschland, die allgemeine Hochschulreife und hat sie im Rahmen eines Bildungsgangs der Sekundarstufe II erworben, zum anderen bildet die Stochastik im aktuellen Kernlehrplan für die Sekundarstufe II eines der drei verbindlichen Themengebiete des Mathematikunterrichts der Oberstufe und hat damit im Vergleich zu früheren Jahren einen recht hohen verbindlichen Anteil im Unterricht der Sekundarstufe II. Hierbei weist der KLPSII einen Fokus auf die beurteilende Statistik aus, die eine hohe Relevanz für alltagsnahe und berufsbezogene Anwendungssituationen aufweist und eine empirisch-gegenständliche Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in ihrer Anwendung sowohl benötigt, als auch fördert.

Der Mathematikunterricht der Sekundarstufe II soll dieselben Grunderfahrungen (KLPSII, S. 11–12) ermöglichen, wie sie auch schon in der Sekundarstufe I nach dem neuen Kernlehrplan (KLPG9, S. 8) ausgewiesen sind. Wogegen im Vergleich der Kernlehrpläne der Sekundarstufe I die Variationen der zweiten Winterschen Grunderfahrung im Fokus stand, soll hier genauer die erste Grunderfahrung betrachtet werden (vgl. Tabelle 8). Wie der „Kurztitel“ in den Kernlehrplänen besagt, geht es in dieser ersten Grunderfahrung im weitesten Sinne um die „Mathematik als Anwendung“ (Tabelle 8). Neben den weniger wichtigen Aspekten, dass Winter (1996, S. 35) die Mathematik nicht explizit in seiner Grunderfahrung benennt und in den neueren Kernlehrplänen (KLPSII; KLPG9) tech-

nische Erscheinungen mit einbezogen werden, gibt es einen interessanten Unterschied in der Formulierung zwischen dem KLPG8 sowie der originalen Version von Winter und dem KLPSII, der, wie bereits erwähnt, dieselbe Formulierung wie der KLPG9 besitzt. Dieser Unterschied liegt darin, dass die Grunderfahrung fordert, dass man mithilfe der Mathematik die verschiedenen Erscheinungen der Welt, in den genannten Ausprägungen, *beeinflussen* können soll. Hiermit wird, zumindest in Bezug auf die technischen und natürlichen Erscheinungen und Vorgänge, klar auf empirisch-gegenständliche Anwendungsfelder verwiesen, die durch Mathematik offenbar auch verändert werden sollen.

Tabelle 8: Gegenüberstellung der ersten Winterschen Grunderfahrung mit deren Variation in Kernlehrplänen der Sekundarstufe I (G8) und Sekundarstufe II in NRW.

KLPG8 (S. 11)	KLPSII (S. 11)	Winter (1996, S. 35)
Erscheinungen aus Natur, Gesellschaft und Kultur	technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge	Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art
mithilfe der Mathematik wahrnehmen und verstehen	mithilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen, beurteilen und <i>beeinflussen</i> [Herv. G.S.]	wahrzunehmen und zu verstehen.
(Mathematik als Anwendung)	(Mathematik als Anwendung)	

Entsprechend der bereits dargestellten Ausrichtung des Mathematikunterrichts in Bezug zur Stochastik auf die beurteilende Statistik wird auch das „Inhaltsfeld Stochastik (S)“ definiert:

„Inhaltsfeld Stochastik (S) [Herv. im Original] Die Stochastik umfasst die Mathematik der Daten und des Zufalls, die durch das Auswerten von Stichproben und das Simulieren stochastischer Vorgänge verbunden sind. Stochastische Methoden ermöglichen es, viele Fragestellungen des Alltags rational quantitativ zu bearbeiten und Entscheidungen und Prognosen unter Unsicherheit zu treffen.

Zufallsbedingte Phänomene können durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen modelliert werden. Das Testen von Hypothesen ermöglicht es, diese Modelle hinsichtlich der gewählten Parameter zu beurteilen [Herv. G.S].“

(KLPSII, S. 18)

Diese Charakterisierung des Inhaltsfeldes beinhaltet einige interessante Hinweise auf die Auffassung, die durch den Stochastikunterricht der Sekundarstufe II angeregt werden soll. Zum einen, dass das Umgehen mit Daten und Zufall, wie auch schon in der Sekundarstufe I, die Stochastik als Gebiet charakterisiert. Neu ist dagegen, dass „Daten und Zufall“ durch statistische Auswertungen und Simulationen verbunden werden sollen. Dieser Aspekt wird nicht näher erläutert, es kann aber davon ausgegangen werden, dass Simulationen stochastischer Vorgänge „zufallsbehaftet“ sind und man dabei auftretende Muster mit Mustern in Daten in Zusammenhang bringen soll. Die bereits in der Variation des KLPSII der ersten Grunderfahrung angesprochene Beeinflussung der Erscheinungen kann nun exemplarisch in der Stochastik darin gesehen werden, dass „Fragestellungen des Alltags rational quantitativ zu bearbeiten und Entscheidungen und Prognosen unter Unsicherheit zu treffen [sind]“, d.h. mathematische Modelle bilden Instrumente zur Prognose und Entscheidungsfindung. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff findet sich explizit nur in den kursiv hervorgehobenen Passagen wieder, beinhaltet hier aber die Bildung von Modellen für zufallsbehaftete Phänomene, und die Testung dieser Modelle an der Erfahrung. Gerade diese letzten Aspekte sind klare Indikatoren für eine empirisch-gegenständliche Auffassung, da Wissen im Sinne empirischer Theorien (vgl. 4.4) aufgebaut und mithilfe von Tests an der Erfahrungswelt geprüft werden soll.

Diese generellen Aspekte werden in Bezug auf die Einführungsphase und die Qualifikationsphase wie im neuen KLPG9 konkretisiert. Wie in der Beschreibung der Kernlehrpläne der Sekundarstufe I sollen hier nun einige Konkretisierungen aufgeführt werden, die exemplarisch die Ausrichtung der Kernlehrpläne, auch der Sekundarstufe II, im Sinne einer empirisch-gegenständlichen Auffassung aufzeigen. In der Einführungsphase zeigt sich dies einerseits in der Kompetenzerwartung, dass Schüler*innen Alltagssituationen als Zufallsexperimente „deuten“ und solche Zufallsexperimente auch simulieren sollen. Dazu gehört die Nutzung von Urnenmodellen und die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten durch Pfadregeln oder Mehrfeldertafeln (KLPSII, S. 26).

In der Qualifikationsphase wird dieser enge Bezug zwischen Wahrscheinlichkeitsmodellen und ihrer Anwendung an konkreten Versuchen weiter verdeutlicht. So sollen mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung von Zufallsgrößen „prognostische Aussagen“ getroffen, „Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente“ verwendet und „anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit“ geschlossen werden (KLPSII, S. 30). Für den Leistungskurs kommt hinzu, dass Schüler*innen „Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse“ interpretieren und „stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen“ untersuchen sollen (KLPSII, S. 34).

Zum Abschluss der Kontextanalyse in Bezug auf die verbindlichen Kernlehrpläne für die im Folgenden untersuchte Schulbuchreihe soll nochmals festgehalten werden, dass es nicht problematisch ist, dass Schüler*innen die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Anwendungskontext erfahren und Stochastik im Sinne einer empirischen Theorie (vgl. 4.4) erlernen. Im Gegenteil, für eine flexible spätere Anwendung stochastischen Wissen in konkreten Anwendungssituationen ist eine solche empirisch-gegenständliche Auffassung der Stochastik sehr nützlich, da so Fragen der Anwendbarkeit der Theorie ausgeklammert werden können. Die Herausforderungen liegen dagegen zum einen darin, dass durch eine vornehmlich „frequentistische“ Sichtweise auf Wahrscheinlichkeiten das Anwendungsfeld der Stochastik, wie man in von Mises Ausführungen zu den von ihm intendierten Anwendungen sieht (vgl. 6.4.2), stark eingeschränkt werden muss, zum anderen darin inwiefern bestimmte stochastische Aussagen und Resultate, wie etwa das ausgewiesene „[S]chließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit“ (KLPSII; S. 30) zu einer – im Sinne der zweiten Grunderfahrung „eigenständigen Mathematik“ gehört oder einem Erfahrungssatz entspricht – wie etwa dem empirischen Gesetz der großen Zahl. Nach dieser Beschreibung des Kontexts, der durch die Kernlehrpläne der Sekundarstufe I und II gegeben ist, kann allerdings davon ausgegangen werden, dass eine solche Auffassung – aus guten Gründen – durch die Kernlehrpläne nicht verfolgt wird.

8.2.2 Systematischer Aufbau der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer im Themengebiet der Stochastik

Die Grundlage der nachfolgenden Time-Series-Analysis (8.4) bildet die Schulbuchreihe Lambacher Schweizer, Mathematik für Gymnasien in NRW für die Jahrgangsstufe 5, 6, 7, 8, 9, Einführungsstufe & Qualifikationsphase von je nach Jahrgangsstufe verschiedenen Autoren¹³⁴. Im Folgenden wird der systematische Aufbau der Schulbuchreihe dargestellt.

Dieser Überblick unterscheidet sich von der Time-Series-Analysis dadurch, dass nicht alle identifizierten Gelenkstellen dargestellt werden. Im Unterschied zu den vorangehenden Untersuchungen werden aufgrund der Größe des zugrundeliegenden Datenmaterials bereits hier erste Rekonstruktionen und Einordnungen der durch die Schulbuchreihe angeregten Auffassungen angestrebt. Zusätzlich wird auf einige exemplarische Beispiele verwiesen, die besonders deutlich zeigen, dass eine empirisch-gegenständliche Auffassung zur Stochastik durch die Schulbuchreihe grundgelegt werden kann.

Bei der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer handelt es sich um eine einschlägige Reihe, die von vielen Schulen durchgängig verwendet wird. Das heißt auch, dass viele Schüler*innen einen Großteil ihres Mathematikunterrichts zusammen mit diesen Büchern erfahren, die zumindest je nach Nutzertyp (Rezat, 2009, S. 320) durch die abgedruckten Aufgaben und Texte einen hohen Einfluss auf die Schüler*innen haben. Die folgende Time-Series-Analysis fokussiert auf die Mikrostruktur des Schulbuches und deren Zusammenhang zur Mesostruktur (Rezat, 2009, S. 108). In dieser Darstellung des Werkkontextes wird dagegen die *Megastruktur* der Schulbuchreihe in den Blick genommen. Analog zu den Strukturdefinitionen nach Rezat (2009) wird hier folgende Definition der Megastruktur von Schulbuchreihen gegeben:

Die *Megastruktur* bezieht sich auf die Schulbuchreihe und ihre Konzeption über mehrere Jahrgangsstufen. In der Betrachtung der Megastruktur können einerseits die Änderung und Ergänzung von

¹³⁴ Genaue bibliographische Daten finden sich zum einen im Literaturverzeichnis und zwar mit der Bezeichnung „Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe x : [...]“ $x \in \{5,6,7,8,9, \text{Einführungsphase (EF)}, \text{Qualifikationsphase(Q)}\}$ und zum anderen in Anhang E, der einen Überblick über die Elemente der Schulbuchreihe mit Bezug auf die Stochastik sowie die bibliographischen Daten der einzelnen Schulbücher enthält. In den Literaturverweisen im Fließtext findet sich die Abkürzung LS x für „Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe x : [...]“

Strukturelementtypen (Rezat, 2009, S. 94) aber auch Begriffsentwicklungen über die verschiedenen Bände der Schulbuchreihe in den Blick genommen werden. Bei der Betrachtung von Begriffsentwicklungen können Begriffe mehrfach aufgegriffen, erweitert, umgedeutet, (erneut) definiert, mit weiteren Begriffen in Zusammenhang gebracht oder abgegrenzt werden.

Hierbei unterscheidet sich die Megastruktur von der Makrostruktur dadurch, dass die Makrostruktur nach Rezat (2009, S. 93) nur ein Schulbuch, z.B. einen Jahrgangsband, umfasst und dann die Abfolge von Kapiteln, Verzeichnisse und weiteren makrostrukturellen Elementen im Schulbuch betrachtet.

Beispiele für solche zu untersuchenden Begriffe in der Megastruktur können mathematische Gebiete wie „die Geometrie“ oder „die Stochastik“ sein, ebenso wie die Begriffe „Zahl“, „Wahrscheinlichkeit“ oder „Division“. Eine Betrachtung von Strukturelementtypen in Bezug zur Megastruktur ist insbesondere dann sinnvoll, wenn man Bände der Reihe in den Blick nimmt, die zu Jahrgängen mit zentralen Tests (z.B. Lernstandserhebungen, Zentralabitur) gehören. Diese Tests behandeln häufig mehrere Klassenstufen, sodass sich Schulbuchinhalte auf mehrere Jahrgangsstufen beziehen. Ein sehr augenscheinliches Beispiel in Bezug zur Makrostruktur ist der Wiederabdruck des Kapitels zu quadratischen Funktionen im Lambacher Schweizer 9 (LS9, S. 214–243). Dieses Kapitel wurde aus schulpraktischen Gründen im Jahrgangsband der Klassen 8 und 9 abgedruckt. Daher findet sich in den Hinweisen zur Struktur, dem Abschnitt „Moderner Mathematikunterricht mit dem Lambacher Schweizer“, folgende Begründung:

„Die quadratischen Funktionen wurden im Band 8 bereits eingeführt. In diesem Band wird die Thematik durch „quadratische Gleichungen“ weitergeführt und mit außermathematischen Aspekten (Modellbildung) vernetzt. Für all diejenigen, die die quadratischen Funktionen in Klasse 8 nicht behandelt haben, befindet sich dieses Kapitel im Anhang.“

(LS9, S. 3)

Ein weiteres Beispiel, das an dieser Stelle erwähnt werden soll und sich inhaltlich auf die Megastruktur bezieht, ist ein Strukturelementtyp der Mikrostruktur, der bei Rezat (2009) noch nicht auftaucht: die Explikation des Lernstands und der Lernziele eines Kapitels auf den Einführungsseiten. Im Lambacher Schweizer

werden diese stichpunktartig in Kästen mit den Überschriften „Das kannst du schon“ und „Das kannst du bald“ in der Sekundarstufe I oder „Das kennen Sie schon“ und „In diesem Kapitel“ in der Sekundarstufe II zusammengefasst.

Wenn nun die Megastruktur in den Blick genommen wird, stellt sich die Frage inwiefern überhaupt davon auszugehen ist, dass die Schulbücher kohärent aufeinander aufbauen, geschweige denn in ihnen „durchgängig eine Auffassung“ vertreten wird. Dass dies in Bezug auf die Stochastik für diese Schulbuchreihe der Fall ist, zeigt einerseits die Beschreibung ihres systematischen Aufbaus und andererseits die Time-Series-Analysis mit dem Fokus auf die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs innerhalb der Schulbuchreihe (vgl. 8.4). Ein weiterer wichtiger Indikator ist, dass in der untersuchten Schulbuchreihe zumindest ein Autor über alle Jahrgangsstufen hinweg Teil des Autoren-Teams ist und auch weitere Autoren in der Regel an mehreren Schulbüchern der Reihe beteiligt waren. Ob Begriffsentwicklungen in den Bereichen außerhalb der Stochastik ebenso kohärent in dieser oder anderen Lehrbuchreihen sind, ist ein weiteres Forschungsdesiderat.

Tabelle 9: Strukturelementtypen der Megastruktur in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer.

Strukturelementtyp	Bezeichnung in der untersuchten Reihe des Lambacher Schweizer
Megastruktur	
jahrgangsübergreifende Aufgaben	Abiturvorbereitung, Fit für die Oberstufe, Kannst du das noch?, Zeit zu überprüfen
jahrgangsübergreifende Tests	Abiturvorbereitung Stochastik, Fit für die Oberstufe, Check-in, Teste dich selbst
Explikation des Lernstands	Das kannst du schon, Das kennen Sie schon

Betrachtet man die Makro-, Meso- & Mikrostruktur eines Jahrgangsbandes der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer so erhält man dieselben Strukturelementtypen wie Rezat (2009, S. 94–99). Die einzige Ausnahme bildet der Anhang

zur Bedienung des GTRs, der keinem der von Rezat vorgeschlagenen Strukturelementtypen gut zugeordnet werden kann. Entsprechend wurde ein neuer Strukturelementtyp „Bedienungsanleitung GTR“ (vgl. Tabelle 10) eingefügt. Die gute Passung der auftretenden Strukturelementtypen ist nicht verwunderlich, da drei der von Rezat als Materialgrundlage zur qualitativen Inhaltsanalyse zur Bestimmung der Struktur von Mathematikbüchern ausgewählten Jahrgangsbände und Lehrgänge geschlossener Sachgebiete aus der Schulbuchreihe „Lambacher Schweizer“ stammen (Rezat, 2009, S. 74, 78). Für Strukturelementtypen der Megastruktur wurde Rezats Katalog von Bezeichnungen analog erweitert und entsprechenden Elementen der hier untersuchten Schulbuchreihe gegenübergestellt (vgl. Tabelle 9). Eine ähnliche Gegenüberstellung findet sich auch für die Makro- (vgl. Tabelle 10), Meso- (vgl. Tabelle 11) und Mikrostruktur (vgl. Tabelle 12).

Tabelle 10: Strukturelementtypen der Makrostruktur in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer.

Strukturelementtyp (vgl. Rezat 2009, S. 94)	Bezeichnung in der untersuchten Reihe des Lambacher Schweizer
Makrostruktur	
Hinweise zur Struktur	Moderner Mathematikunterricht mit dem Lambacher Schweizer, Lernen mit dem Lambacher Schweizer, So lernen Sie mit dem Lambacher Schweizer
Inhaltsverzeichnis	Inhaltsverzeichnis
Kapitel	Kapitel
kapitelübergreifende Aufgaben	Sachthema, Selbsttraining, Abiturvorbereitung Stochastik, Kannst du das noch?, Zeit zu überprüfen
kapitelübergreifende Tests	Abiturvorbereitung, Fit für die Oberstufe
Projekt	Sachthema
Verzeichnis mathematischer Symbole	Mathematische Bezeichnungen
Übersicht über Maße und Maßeinheiten	[nicht enthalten]
Formelsammlung	[nicht enthalten]

Lösung zu ausgewählten Aufgaben	Lösungen
Bedienungsanleitung GTR	Anhang: Anleitung für GTR
Stichwortverzeichnis	Register

Tabelle 11: Strukturelementtypen der Mesostruktur in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer.

Strukturelementtyp (vgl. Rezat 2009, S. 96)	Bezeichnung in der untersuchten Reihe des Lambacher Schweizer
Mesostruktur	
Einführungsseite	Auftaktseite
Aktivitäten	Erkundungen
Lerneinheiten	Lerneinheiten, Wahlthema
Themenseiten	Exkurs, Geschichte
Lerneinheiten übergreifende Zusammenfassung	Rückblick, Das kannst du bald, In diesem Kapitel
Lerneinheiten übergreifende Aufgaben	Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen
Lerneinheiten übergreifende Tests	Training
Aufgaben zu Inhalten früherer Kapitel	Kannst du das noch?

Tabelle 12: Strukturelementtypen der Mikrostruktur in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer.

Strukturelementtyp (vgl. Rezat 2009, S. 99)	Bezeichnung in der untersuchten Reihe des Lambacher Schweizer
Mikrostruktur	
Einstieg	Einstieg
Einstiegsaufgaben	Einstieg
Weiterführende Aufgabe	Aufgaben
Lehrtext	[keine Bezeichnung]
Kasten mit Merkwissen	Merkkasten
Musterbeispiel	Beispiel
Übungsaufgaben	Aufgaben
Testaufgaben	Bist du sicher?, Zeit zu überprüfen

Aufgaben zur Wiederholung	Kannst du das noch?, Zeit zu Wiederholen
Zusatzinformationen	Randtext

Nach diesen generellen Aspekten soll nun die Megastruktur der Schulbuchreihe in Bezug auf Stochastik mit besonderem Fokus auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung hinsichtlich der Abfolge und Verknüpfung der Themen über die verschiedenen Jahrgänge hinweg dargestellt werden. Die für diese Darstellung illustrierenden Beispiele aus den Lehrbüchern der Jahrgangsstufe 5 bis zur Qualifikationsphase sind in der Tabelle der identifizierten Elemente für die Time-Series-Analysis grau hinterlegt (vgl. Tabelle 14). Jede Zeile in Tabelle 14 entspricht einem identifizierten Element, also einer Fundstelle (FN). Jeder Fundstelle wird eine dreistellige Fundstellen-Nummer (z.B. 002 was der zweiten Fundstelle, also Zeile zwei in Tabelle 14 entspricht) zugewiesen. Diese Fundstellen-Nummer ist in der ersten Spalte von Tabelle 14 vermerkt. Die Jahrgangsbände des Lambacher Schweizer werden durch folgende Bezeichnungen abgekürzt:

5. Klasse	6. Klasse	7. Klasse	8. Klasse	9. Klasse	Einführungsphase	Qualifikationsphase
LS5	LS6	LS7	LS8	LS9	LSEF	LSQ

Im ersten Jahrgangsband (Jahrgangsstufe 5) der untersuchten Schulbuchreihe des Lambacher Schweizer wird im ersten Kapitel „Zahlen, Zahlen, überall Zahlen“ (LS5, S. 8–45) bereits mit dem Inhaltsfeld der Stochastik begonnen. Entsprechend ist auch gemäß des KLPG8 auf der Auftaktseite die inhaltsbezogene Kompetenz „Stochastik: mit Daten und Zufall arbeiten“ ausgewiesen. Dabei beziehen sich die stochastischen Elemente dieses Kapitels ebenso wie stochastische Inhalte der Jahrgangsstufe 6 auf die deskriptive Statistik (8.4; Anhang E). In der Jahrgangsstufe 5 liegt dabei der Schwerpunkt (LS5, S. 14) auf dem Auszählen von Daten mithilfe absoluter Häufigkeiten (Strichlisten, Tabellen) und deren Darstellung durch verschiedene Diagramme (Säulendiagramme und Balkendiagramme). Dies liegt vermutlich daran, dass die Bruchrechnung in der Klasse 5 noch nicht eingeführt wurde. Trotzdem werden bereits Kontexte behandelt, die typische Zufallsversuche der Wahrscheinlichkeitsrechnung, z.B. den zweifachen Würfelwurf mit Spielwürfeln, nutzen. Im Würfelspiel „Nur einmal zweimal“ soll

beispielsweise die absolute Häufigkeit verschiedener Ereignisse nach der Versuchsdurchführung bestimmt werden oder Prognosen im Sinne einer Spielstrategie für das Würfelspiel „Die Uhr füllen“ entwickelt und am Versuch geprüft werden. Hier stellt man bereits die ersten beiden Stufen des Prozessschemas „Spekulieren → Experimentieren/Simulation → Bewerten → Berechnung/Simulation“ fest, das in der 7. Klasse expliziert wird (LS7, S. 46). Somit bilden von Anfang an Experimente und Simulationen einen festen Bestandteil des Stochastikunterrichts, was eine empirisch-gegenständliche Auffassung von Stochastik und insbesondere des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, wie sich auch in den höheren Klassenstufen zeigen wird, fördert. Die zugehörigen Aufgaben in der fünften Klasse sind typische Aufgaben der Statistik, wobei nominalskalierte Merkmale am häufigsten, ordinalskalierte Merkmale am zweithäufigsten und einmal ein metrisch skaliertes Merkmal (Laufzeiten) betrachtet werden. Letztere werden allerdings eher im ordinalen Sinne behandelt. Auch das Register zeigt, dass der zuvor identifizierte Schwerpunkt in der fünften Klasse auf absoluten Häufigkeiten und deren Darstellung liegt (001, 002, 003).

Wie eben erwähnt wird in der sechsten Klasse weiterhin ein Schwerpunkt auf die deskriptive Statistik gelegt. Hinweise darauf bietet bereits das Register, das neben absoluten und relativen Häufigkeiten auch alle empirischen Kennwerte des Boxplots sowie verschiedene Diagrammtypen ausweist (025, 026, 027). Ein weiterer wichtiger Bestandteil des Stochastikunterrichts bezüglich der deskriptiven Statistik bildet die Nutzung eines Tabellenkalkulationsprogramms in Form eines Exkurses (LS6, S. 188–192). Für die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist dagegen die Einführung der relativen Häufigkeiten unter Verwendung der Bruch und Prozentschreibweise wichtig (012). Eine wichtige Eigenschaft der relativen Häufigkeiten, die ebenso wichtig für Wahrscheinlichkeiten ist, ist deren Normiertheit, die nicht nur im Merkkasten zu den relativen Häufigkeiten ausgewiesen, sondern auch im Rahmen von Aufgaben genutzt wird (012, 013). Der in den späteren Jahrgangsstufen enge Zusammenhang mit den Wahrscheinlichkeiten zeigt sich bereits in der sechsten Klasse, indem die empirischen Kenngrößen einer Stichprobe (014) in den Zusammenhang mit Zufallsschwankungen gebracht werden. Hierbei werden Zufallsschwankungen in Bezug auf das Alltagswort „zufällig“ und deren „Mitte“ durch Bestimmung der Kenngrößen erläutert:

„Zufallsschwankungen [Herv. im Original]: Die Ergebnisse statistischer Untersuchungen schwanken meist zufällig. So liefern Umfragen an verschiedenen Tagen und Orten selten die gleichen Ergebnisse. Auf einer Personenwaage ist man an aufeinander folgenden Tagen meist unterschiedlich schwer. Mittelwerte dienen dazu, diese Zufallsschwankungen zu verringern.“

(LS6, S. 179)

Durch die anschließende gemeinsame Betrachtung empirischer Kennwerte der Lage- und Streumaße durch Boxplots werden solche „zufälligen“ Stichproben eingeordnet und verglichen. Das Schulbuch bietet zum Thema Stochastik, aber auch in anderen Bereichen vielfältige Zugänge über Experimente an (vgl. Tabelle 14). Ein eindrucksvolles Beispiel für die naturwissenschaftliche Herangehensweise ist ein Experiment im Rahmen der funktionalen Zusammenhänge in dem der Füllgrad von Gefäßen experimentell bestimmt sowie eigene Maßeinheiten entwickelt und reflektiert werden sollen¹³⁵ (024). Im zugehörigen Randtext steht: „Tipp: Denkt daran, dass Messwerte nicht immer exakt sind.“ (024). Dieses Wissen über Zufallsschwankungen von Messwerten wurde intensiv im eben beschriebenen Teil der deskriptiven Statistik behandelt und in vielfältigen Erfahrungsbereichen erlebt.

Im Abschnitt „Moderner Mathematikunterricht mit dem Lambacher Schweizer“, gibt es in den Bänden der Sekundarstufe I Hinweise zum Thema „Straffung des Lehrplans“ aufgrund des Gymnasiums in acht Jahren (G8). Wegen dieser Straffung liegt der Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von G8 in der Jahrgangsstufe 7, was in der vorliegenden Konzeption der Begriffsentwicklung in der Megastruktur der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer auch passend nach der intensiven Behandlung der relativen Häufigkeiten in der Jahrgangsstufe 6 ist. In den Hinweisen zur „Straffung“ im LS7 findet sich folgende Charakterisierung für die Behandlung der Stochastik in diesem Band:

¹³⁵ Analoge Experimente findet man im Inhaltsfeld Thermodynamik des Physikunterrichts der Erprobungsstufe bzw. des naturwissenschaftlichen Unterrichts mit dem Ziel, dass Schüler*innen Thermometer und Temperaturskalen entwickeln sollen.

„In der Stochastik stehen der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Beziehung zu den relativen Häufigkeiten im Zentrum. Simulationen vertiefen die Zusammenhänge.“

(LS7, S. 3)

Hiermit wird bereits der Schwerpunkt der Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in dessen Beziehungen zu relativen Häufigkeiten expliziert. Dabei wird die Begriffsentwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ebenso explizit an die Begriffsentwicklung der deskriptiven Statistik angeschlossen. Dies wird besonders deutlich an den Strukturelementtypen der Makrostruktur „Das kannst du schon“ (032) und „Das kannst du bald“ (033). Die in „Das kannst du bald“ ausgewiesenen mathematischen Tätigkeiten sind die Grundlage für das mathematische Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten in diesem Jahrgangsband und auch darüber hinaus, indem diese ein Prozessschema im Umgang mit und der Behandlung von Wahrscheinlichkeiten bilden. Zur Motivation des Prozessschemas wird die empirisch-gegenständliche Messung der theoretischen Wahrscheinlichkeit im Kontext als Grundlage des Wahrscheinlichkeitsbegriffs behandelt, wobei zunächst auf das Zufallsexperiment Würfeln mit dem Sechser Würfel eingegangen wird:

„Das Würfeln mit einem Spielwürfel ist ein ‚Zufallsexperiment‘, denn man kann das einzelne Ergebnis (die Augenzahl, die fallen wird) nicht vorhersagen. ‚Es hängt vom Zufall ab‘.“

(LS7, S. 46)

Daran anschließend wird das Würfeln mit einem Quader (sog. Riemer-Würfel) als intendierte Anwendung behandelt. Wobei die „Güte“ der Schätzung von Wahrscheinlichkeiten laut den Autoren experimentell geprüft werden muss. Entsprechend wird das Prozessschema: „Erst **spekulieren**, dann **experimentieren**, am Ende **bewerten**“ (035: Herv. im Original) im Randtext expliziert und am Zufallsgerät des Quaders vorgeführt. Zusätzlich wird erneut darauf hingewiesen, dass auch bei der Durchführung dieses Experiments „Zufallsschwankungen“ auftreten. Entsprechend wird die Bildung von Mittelwerten relativer Häufigkeiten zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten vorgeschlagen:

„Um die Wahrscheinlichkeiten nach einem Experiment anzugeben, bildet man mitunter die Mittelwerte der relativen Häufigkeiten ent-

sprechender Seiten. [Beispielberechnung]. Da die relativen Häufigkeiten sich aber von Versuch zu Versuch ändern, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten aus den Häufigkeiten prinzipiell nicht ‚genau‘ bestimmen.“

(LS7, S. 47)

Neben dem Prozessschema finden sich im Randtext auch eine Art „Gebrauchsanweisung“ oder „Versuchsanleitung“ im Umgang mit dem Zufallsgerät des Quaders, die nochmal deutlicher machen, dass die Wahrscheinlichkeiten quasi als Eigenschaft eines empirischen Objektes aufgefasst werden, die diesem allerdings nur innerhalb einer empirischen Theorie zugeschrieben werden. Dies ist ein Kennzeichen dafür, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff, wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie von von Mises (vgl. 6.4.3), als ein theoretischer Begriff einer empirischen Theorie mit einem zugeordneten Messprozess beschrieben werden kann:

„Der Quader muss mit einem Würfelbecher gewürfelt werden, der auf den Tisch gestülpt wird.“¹³⁶

(LS7, S. 47)

Außerdem werden Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten hinsichtlich ihrer Apriorizität und Aposteriorizität in zwei weiteren Randtexten unterschieden:

„**Wahrscheinlichkeiten** machen **Vorhersagen** auf lange Sicht. Beim Quader sind die Wahrscheinlichkeiten von Gegenseiten gleich groß.

Relative Häufigkeiten werden **nach** einem Experiment ermittelt, beim Quader sind die relativen Häufigkeiten von Gegenseiten nur ungefähr gleich groß.“

(LS7, S. 47, Herv. im Original)

¹³⁶ Ein Grund für diese sehr präzise Durchführungsanleitung liegt vermutlich darin, dass man den Quader aufgrund seiner geometrischen Form beim Aufheben so in die Hand nimmt, dass er beim Würfeln immer um die Achse gewürfelt wird, die senkrecht zu den kleinsten Seitenflächen steht. Dies würde den Würfelprozess verändern und so Auswirkungen auf die Größe der relativen Häufigkeiten des Auftretens verschiedener Quaderseiten haben. Mit diesem Trick kann man mit ein wenig Übung auch die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln mit einem üblichen Spielwürfel erhöhen.

In diesen Randtexten findet sich neben dieser Unterscheidung der relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten ein Hinweis auf zu beachtende Aspekte der geometrischen Symmetrie von Zufallsgeräten, die eine weitere Vorgabe für die Schätzung, und damit Bestimmung, von Wahrscheinlichkeiten bilden – zumindest im Sinne dieser Schulbuchreihe.

Alle diese Aspekte finden sich in der „Definition“ von Wahrscheinlichkeiten wieder, die in Form eines Merkkastentexts vorliegt:

„Bei einem Zufallsexperiment kann man die einzelnen Ergebnisse nicht vorhersagen, man kann aber **Wahrscheinlichkeiten** [Herv. im Original] zuordnen, die zusammen 1 (100%) ergeben müssen. [Normiertheit, G.S.]

Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn bei vielen Versuchsdurchführungen die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen und Symmetrien beachtet werden. [Herv. G.S.]“

(LS7, S. 47)

Hierbei könnte zunächst angenommen werden, dass zumindest der erste Teil einer formal-abstrakten Auffassung entspricht, die lediglich eine Zuordnung von Maßen erfordert. Tatsächlich zeigt aber der zweite Teil des Merkkastens, dass Wahrscheinlichkeiten, einerseits auf der Basis empirisch-gegenständlicher Symmetrieeigenschaften der Zufallsgeräte und andererseits durch die Messung relativer Häufigkeiten, also einem eher frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff¹³⁷, gewählt werden sollen.

Ausgehend von diesem Wahrscheinlichkeitsbegriff werden verschiedene Zufallsversuche betrachtet. Eine besondere Klasse von Zufallsversuchen bilden typischer Weise sogenannte „Laplace-Experimente“, z.B. der Wurf eines nicht manipulierten symmetrischen Spielwürfels, der Wurf einer Münze, besonders bestückte Urnen und Glücksradversuche. Diese werden in einem Merkkasten folgendermaßen beschrieben:

¹³⁷ Interessanterweise handelt es sich hierbei sogar zwingend um einen theoretischen Begriff, denn die Symmetrieeigenschaften sind, wie schon von Mises herausstellt, nicht immer gerechtfertigt und eine theoretische Annahme. Man denke bspw. an einen manipulierten Würfel mit einem Gewicht in einer Seite.

„Zufallsexperimente bei denen man annehmen kann, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man **Laplace-Experimente**. Für diese Zufallsexperimente muss man keine Versuchsreihen durchführen, um Wahrscheinlichkeiten angeben zu können. Diese Wahrscheinlichkeiten nennt man **Laplace-Wahrscheinlichkeiten**. **Summenregel:** [...] [Herv. im Original]“

(LS7, S. 50)

Die Rechtfertigung für eine solche Annahme scheint eine im Schulbuch vorausgesetzte „stochastische Intuition“ zu sein, so findet sich folgende Formulierung im einleitenden Lehrtext:

„Häufig ist man bei der Angabe von Wahrscheinlichkeiten sicher. [...] Auch bei Glücksrädern mit gleich großen Feldern oder beim Ziehen aus Lostrommeln mit verschiedenen Kugeln besteht selten Anlass daran zu zweifeln, dass die einzelnen **Ergebnisse gleich wahrscheinlich** [Herv. im Original] sind.“

(LS7, S. 50)

Mithilfe dieser Einschätzungen werden dann in folgenden Aufgaben entsprechend des bereits angegebenen Prozessschemas verschiedene Zufallsexperimente untersucht und geprüft, ob man auch nach einer experimentellen Durchführung des Zufallsexperiments das „Prädikat Laplace“ vergeben kann (bspw. 045).

Zuletzt soll noch ein Blick auf Simulationen geworfen werden, die in dieser Schulbuchreihe relativ weit aufgefasst werden und zwar in dem Sinne, dass auch schon die Durchführung eines Zufallsexperiments als Simulation beschrieben wird. Auch zu diesem Konzept findet sich ein Merkkasten:

„Die Durchführung eines Zufallsexperiments oder die Nachahmung durch ein anderes Zufallsexperiment mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten bezeichnet man als **Simulation**. Die relativen Häufigkeiten, die sich dabei ergeben, kann man als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten des ursprünglichen Zufallsexperiments verwenden.“

(LS7, S. 58)

Neben dem Vergleich von Simulationen mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms und dem Durchführen mit empirischen Zufallsgeräten spielen Simulationen eine besondere Rolle bei der Betrachtung des Zusammenhangs von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten. Im Rahmen einer Aufgabe wird bspw. das empirische Gesetz der großen Zahlen, dass sich die relativen Häufigkeiten mit zunehmender Versuchszahl den geschätzten Wahrscheinlichkeiten immer weiter mit immer geringer werdenden Zufallsschwankung um die Wahrscheinlichkeiten annähern, mithilfe der Simulation eines „Laplace-Münzwurfs“ entdeckt und begründet (051). Entsprechend der Anregung einer empirisch-gegenständlichen Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, die sich einerseits durch dessen Beschreibung, andererseits durch den intendierten Umgang mit Wahrscheinlichkeiten ergibt, spielt dieses empirische Gesetz der großen Zahlen, analog zu von Mises Theorie (vgl. 6), eine wichtige Rolle.

Ein weiteres wichtiges Gesetz in von Mises empirischer Wahrscheinlichkeitstheorie bildet das „Prinzip der Regellosigkeit oder des ausgeschlossenen Spielsystems“ (vgl. 6.4.1.4). Wie in der Behandlung des Begriffs „Zufallsschwankungen“ in der sechsten Klasse erläutert, wird Zufälligkeit in der Schulbuchreihe nicht näher mathematisiert (eine Ausnahme bildet eine Lösungsskizze im LSQ), man geht vielmehr von einer alltäglichen Begriffsbestimmung aus. Umso interessanter ist der Fund folgender Aufgabe zu Beginn der achten Klasse, die das „Prinzip der Regellosigkeit“ nutzt, allerdings nicht im Bereich der Stochastik, sondern zur Einführung der reellen Zahlen. Dazu soll folgendes Experiment durchgeführt werden:

„Experiment:

1. Schreibe auf ein Blatt „0,“.
2. Würfle eine Ziffer aus.
3. Schreibe die Ziffer an die erste Stelle hinter dem Komma.
4. Würfle wieder und schreibe die Ziffer an die zweite Stelle hinter dem Komma.
5. Führe dies immer weiter fort.“

(LS8, S. 13)

Die Idee hinter diesem Experiment liegt darin, irrationale Zahlen als nichtperiodische nicht abbrechende Dezimalzahlen zu definieren. Diese Definition ist üblich und an sich wenig verwunderlich. Interessant ist, dass diese Nichtperiodizität

tät aus der empirisch-gegenständlichen Eigenschaft eines Sechserwürfels resultieren soll. Wie in von Mises Theorie der Kollektive, die ebenfalls durch unendliche regellose Folgen beschreibbar sind, ist dies eine Idealisierung, nicht untypisch für empirische Theorien. Interessanter in Bezug auf die verschiedenen Strukturebenen der Schulbuchreihe ist aber, dass diese Nichtperiodizität der Zufallsgeräte nur an dieser Stelle und in einer zugehörigen Übungsaufgabe genutzt wird und so nahezu keine Relevanz in Bezug auf das mithilfe der Schulbuchreihe zu erwerbende stochastische Wissen hat. In den Elementen mit Bezug zur Stochastik findet sich das „Prinzip der Regellosigkeit“ oder deren Anwendung nämlich nicht.

Der Schwerpunkt der Stochastik in der achten Klasse liegt in der Betrachtung mehrstufiger Zufallsversuche (061) auf der Grundlage des Wissens Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, mit ihnen Vorhersagen zu machen und Zufallsvorgänge zu simulieren (059). Wie in den bereits beschriebenen Kapiteln sind auch in diesem Kapitel mit dem Titel „Wahrscheinlichkeitsrechnung – Mit dem Zufall muss man rechnen“ (060) die Randtexte besonders interessant, da diese häufig explizit und konzise gewisse Auffassungen, ähnlich zu Kolmogoroffs Fußnoten (vgl. 7.2), explizieren. In dem ersten Einführungstext wird in den Randtexten zum einen auf die Gemeinsamkeit der Normiertheit von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten erinnert (062), zum anderen aber auch ein Verständnis des Zusammenhangs von Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten dargestellt:

„Wahrscheinlichkeiten sind Modelle, die relative Häufigkeiten (bis auf Zufallsschwankungen) vorhersagen“

(LS8, S. 80)

Diese Aussage kann gegebenenfalls problematisch sein, da die Prognosefähigkeit insbesondere von der Güte der gewählten Wahrscheinlichkeiten, entsprechend der Gütekriterien aus der empirischen „Definition“ der Wahrscheinlichkeit im Merkkasten der siebten Klasse abhängt. Praktisch umgesetzt wird diese Auffassung der Prognosefähigkeiten der Wahrscheinlichkeit in der dritten Lerneinheit in einer Aufgabe mit dem Titel „Theorie und Praxis (Wahrscheinlichkeiten als Prognose relativer Häufigkeiten“) in der die Schüler*innen den fünffachen Münzwurf in Bezug auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung, der experimentell bestimmten relativen Häufigkeiten und vergleichend nach Zusammenlegung

der Gruppenergebnisse (068) untersuchen sollen. Im LS8 gibt es die Besonderheit, dass sich zwei Kapitel themenübergreifenden Inhalten widmen, da in dieser Jahrgangsstufe auch die Lernstandserhebung in Nordrhein-Westfalen stattfindet. Im vorletzten Kapitel werden die Prozesse Definieren, Ordnen und Beweisen in den Blick genommen. Eine spannende Frage, die den Reflexionsfragen der Studierenden aus dem ÜberPro_WR-Seminar sehr ähnelt, ist zum Einstieg in dieses Kapitel gestellt:

„Definiere die Begriffe ‚Kongruenz‘, ‚Äquivalenz‘ und ‚Wahrscheinlichkeit‘. Suche dann nach Definitionen im Internet oder im Lexikon und vergleiche.“

(LS8, S. 146)

Hier wird entsprechend des Themas dieser Arbeit nur die Frage nach der Wahrscheinlichkeit näher untersucht. Für die Beantwortung der Forschungshypothese dieser Untersuchung wäre die Antwort der Autoren auf diese Frage besonders interessant. Zieht man den zugehörigen Serviceband (Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 8 Serviceband, 2011) hinzu, wird folgende Beispiellösung angegeben:

„Bei Zufallsversuchen ordnet man den einzelnen Ergebnissen Wahrscheinlichkeiten zu, die zusammen 1 bzw. 100% ergeben. Wahrscheinlichkeiten liegen daher stets zwischen 0 und 1 bzw. zwischen 0% und 100%. Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn bei vielen Versuchsdurchführungen die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen und Symmetrien beachtet werden. Bei einigen Zufallsversuchen, z.B. Würfelwurf, Münzwurf oder Roulette Spiel lassen sich Wahrscheinlichkeiten auch berechnen, weil man davon ausgeht, dass die Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten (Laplace-Wahrscheinlichkeiten).“

(LS8 Serviceband, S. L67)

Vergleicht man diese Lösungen mit den vorherigen Konzeptionen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, stellt man die Konsistenz der Formulierungen fest. Es wird die Eigenschaft der Normiertheit, der Prognosefähigkeit relativer Häufigkeiten sowie der Nutzung von Symmetrien zur Schätzung und zur Betrachtung von Laplace Versuchen erwähnt.

Eine ähnliche Frage wird auch im folgenden Kapitel in dem die verschiedenen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen vertieft und angewendet werden gestellt, wobei die Schüler*innen im Rahmen eines Selbsttests zu verschiedenen Aspekten Stellung nehmen sollen. Ein Aspekt lautet:

„Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sind das Gleiche, beide werden in Prozent angegeben“

(LS8, S. 176)

Die zugehörige Beispieleinschätzung in den Lösungen besagt:

„falsch – Man muss zwischen der Realität und dem **mathematischen Modell** [Herv. im Original] unterscheiden: Relative Häufigkeiten sind ‚reale, in Zufallsexperimenten ermittelte Werte, die beschreiben, wie häufig ein bestimmtes Ergebnis in einem Experiment bezogen auf die Gesamtzahl der Versuche aufgetreten ist, z.B.: Es trat bei 50 Münzwürfen 28-mal ‚Wappen‘ auf, die relative Häufigkeit für ‚Wappen‘ beträgt $\frac{28}{50} = 0,56 = 56\%$. Wahrscheinlichkeiten hingegen sind ‚theoretische Größen‘ eines **mathematischen Modells** [Herv. im Original], mit denen man versucht, relative Zufallsexperimenten vorherzusagen, z.B.: Die Wahrscheinlichkeit für ‚Wappen‘ beträgt 50% bedeutet, man erwartet bei 1000 Münzwürfen etwa $1000 \cdot 50\% = 500$ ‚Wappen‘.“

(LS8, S. 256)

An dieser Stelle wird erstmals explizit von der Theoretizität des Wahrscheinlichkeitsbegriffs innerhalb der Konzeption der Stochastik dieser Schulbuchreihe gesprochen. Diese Unterscheidung findet sich in der Oberstufe insbesondere bei der Behandlung der theoretischen Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung wieder. Zum Abschluss der Erläuterung des systematischen Aufbaus des Schulbuchs der Klasse 8 soll noch die zusammenfassende Definition der Stochastik angegeben werden, die sich im Einleitungstext zur Behandlung der inhaltsbezogenen Kompetenz „Stochastik: mit Daten und Zufall arbeiten“ befindet und die einerseits die Basis der relativen Häufigkeiten in der deskriptiven Statistik aber auch deren Verhältnis zur Wahrscheinlichkeit in verschiedenen Gebieten der Stochastik ausweist, wobei auch dort die „Theoretizität“ des Wahrscheinlichkeitsbegriff hervorgehoben wird:

„**Stochastik** umfasst drei Teilgebiete. In der **beschreibenden Statistik** sammelt man Daten, bestimmt relative Häufigkeitsverteilungen, stellt sie grafisch dar und beschreibt sie durch Kenngrößen. In der **Wahrscheinlichkeitsrechnung** geht es um ‚theoretische‘ Wahrscheinlichkeiten, mit denen man ‚reale‘ relative Häufigkeiten bei Zufallsexperimenten und statistischen Erhebungen vorhersagen möchte. In der **beurteilenden Statistik** prüft man, ob ‚angenommene‘ Wahrscheinlichkeiten zu relativen Häufigkeiten passen.

(LS8, S. 190)

Interessant ist hier die besondere Betonung der Abgrenzung von „Realität“ und „Wahrscheinlichkeit“ insofern, dass die Wahrscheinlichkeiten trotzdem zur Vorhersage „realer“ Größen genutzt werden können und sogar die Güte der Schätzung relativer Häufigkeiten durch Wahrscheinlichkeiten beurteilt werden kann.

In der neunten Jahrgangsstufe ist kein Kapitel schwerpunktmäßig der Stochastik gewidmet. Dies drückt sich auch in den Hinweisen zur Struktur des „Modernen Mathematikunterricht mit dem Lambacher Schweizer“ aus, dort wird darauf hingewiesen, dass die Stochastik nur in „Aufgaben aufgegriffen und im Rahmen einer Exkursion vertieft“ (083) wird. Diese Ankündigung trifft auch zu. Die Exkursion beinhaltet das Thema die „geometrische Verteilung“ am Beispiel des Wartezeitproblems bis zum ersten Erfolg als fakultatives Thema (086). Ansonsten werden verschiedene Aufgaben zur Wiederholung vor der Oberstufe mit einstufigen und mehrstufigen Zufallsexperimenten behandelt.

In der Einführungsphase bildet die Stochastik, wie auch in der Qualifikationsphase, eines der drei Themenfelder neben der Analysis und der Analytischen Geometrie bzw. Linearen Algebra. Die wesentliche Neuerung in der Einführungsphase ist vor allem die Mengenschreibweise, die insbesondere bei der Behandlung von mehrstufigen Zufallsversuchen, und damit zusammenhängenden bedingten Wahrscheinlichkeiten sowie (un-)abhängigen Ereignissen genutzt wird. Auch in der Einführungsphase werden Experimente im Sinne des bereits dargestellten Prozessschemas in den Erkundungen des Kapitels zur Stochastik mit einer besonderen Berücksichtigung von Simulationen mit dem GTR genutzt (vgl. 100). Auch hier wird direkt die Unterscheidung von Modell und Wirklichkeit, der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten sowie geometrischer Symmetrien der Zufallsgeräte betont (101, 102).

Im zugehörigen Merkkasten wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff allerdings ohne Verweis auf Symmetrien der Zufallsgeräte festgelegt:

„Den einzelnen Ergebnissen eines Zufallsversuchs kann man **Wahrscheinlichkeiten** zuordnen. Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn sie die relativen Häufigkeiten bei großer Versuchszahl gut vorhersagen.

Die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse summieren sich zu 100%. Sie bilden eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.“

(LSEF, S. 146)

Dieser enge Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten, der ein Indiz für eine empirisch-gegenständliche Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist, ist besonders für den Vergleich der empirischen Kenngrößen arithmetisches Mittel und empirische Standardabweichung mit den theoretischen Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung entscheidend. Entsprechend wird folgender Zusammenhang im Einführungstext zum Erwartungswert angegeben, bevor in einem Merkkasten die übliche Definition des Erwartungswerts für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen angegeben wird:

„Da die relativen Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeiten schwanken, schwanken auch die Mittelwerte zufallsbedingt um den Erwartungswert. Damit ist der Erwartungswert eine Prognose für den zu erwartenden Mittelwert. Man bezeichnet ihn kurz als ‚theoretischen Mittelwert‘.“

(LSEF, S. 147)

In diesem Einführungstext wird somit die „Theoretizität“ des Erwartungswerts auf die „Theoretizität“ des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zurückgeführt. Die empirische Aussagekraft wird dem Erwartungswert wie auch schon Wahrscheinlichkeiten durch dessen Prognosefähigkeit zugeschrieben.

„Wenn bei einer Datenerhebung die Ergebnisse x_1, x_2, \dots, x_n mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n auftreten, dann heißt

$\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$ der Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Er gibt an, welchen Mittelwert man bei ausreichend großer Versuchszahl auf lange Sicht erwartet.“

(LSEF, S. 147)

Typische Aufgaben in diesem Zusammenhang bietet die Simulation verschiedener Zufallsgeräte mithilfe des Zufallsgenerators der Tabellenkalkulation. Inwiefern dieser aber zufällig ist und auf welche Weise er Zahlen erzeugt wird nicht explizit in dieser Jahrgangsstufe diskutiert (106).

In der zweiten Lerneinheit des Kapitels werden mehrstufige Zufallsversuche behandelt, wobei ein besonderer Schwerpunkt auf die Einführung der Mengenschreibweise gelegt wird, die aber eher intuitiv erfolgt (107). Ein Beispiel dafür ist, dass Wahrscheinlichkeiten sowohl den Ergebnissen als Elementen der Ergebnismenge wie auch den Ereignissen als Teilmengen der Ergebnismenge zugeordnet werden. Aus einer formal-abstrakten Perspektive ist eine solche Setzung ungünstig, da so das Wahrscheinlichkeitsmaß in einer Anwendung bzw. in einem Kontext verschiedene Definitionsmengen hat. Auf der Basis des bisherigen Umgangs mit Wahrscheinlichkeiten ist eine solche Herangehensweise allerdings nachvollziehbar. Ein wichtiges Forschungsdesiderat, das sich bereits bei der Behandlung von Kolmogoroffs „Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ gezeigt hat, ist die Frage inwiefern die verwendete Symbolik insbesondere im Rahmen der Mengenlehre Auswirkungen auf das Verständnis und die Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs hat. Auch die Schulbuchanalyse zeigt, dass diese Frage weiteres Forschungspotential bietet.

Nach der Definition von bedingten Wahrscheinlichkeiten in Auseinandersetzung mit Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln wird der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit eingeführt. Auch dieser geht von der intuitiven Vorstellung von Unabhängigkeit im Sinne einer „nicht-Beeinflussung“ aufeinanderfolgender Ereignisse aus, bevor die Definition der Unabhängigkeit im üblichen Sinne sogar in der Produktdarstellung ($P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$) erfolgt (113, 114). Im Einführungstext vor dem zugehörigen Merkkasten findet sich folgende Einordnung:

„Mit ‚bedingten Wahrscheinlichkeiten‘ gelingt es, den Begriff der Unabhängigkeit mathematisch zu präzisieren und das Ziehen von Rückschlüssen aus Beobachtungen zu verstehen.“

(LSEF, S. 158)

Interessant ist auch hier das Wechselspiel zwischen Mathematik und Realität. Auf der einen Seite wird der Modellcharakter betont, auf der anderen Seite haben die Konzepte der Wahrscheinlichkeit eine hohe Prognosefähigkeit, was natürlich die Beschäftigung mit der Wahrscheinlichkeit auch in deren historischen Entwicklung besonders gefördert hat. So folgt nach der mathematischen Definition der Unabhängigkeit eine Einschätzung, weshalb die Unabhängigkeit von betrachteten Ereignissen eine häufige Modellannahme ist und was die Abhängigkeit in der Anwendung bedeuten kann:

„Da sich bei Abhängigkeit wegen $P_E(F) \neq P(F)$ durch die Beobachtung von E die Wahrscheinlichkeit von F ändert, schätzt man nach der Beobachtung von E die Realität anders ein. Man hat aus der Beobachtung von E etwas über F ‚gelernt‘.“

(LSEF, S. 158)

Diese Idee des Lernens aus Erfahrung tritt zum einen in weiteren Übungsaufgaben (bspw. 118), zum anderen auch in einem Exkurs zum Satz von Bayes, der hier „Regel von Bayes“ (120) genannt wird, auf. Hierbei wird, angelehnt an den Satz von Bayes, auch eine Auffassung dargestellt auf welche Weise menschliche Lernprozesse von statten gehen,:

„**Lernen aus Erfahrung:** Menschen lernen dadurch, dass sie verschiedene Annahmen („Hypothesen“) über einen Sachverhalt mit Beobachtungen und Erfahrungen („Indizien“) abgleichen. [...] Bedingte Wahrscheinlichkeiten helfen, diesen Erkenntnisprozess zu verstehen.“

(LSEF, S. 164)

Dieser Zusammenhang zwischen Indizien und geschätzten Wahrscheinlichkeiten wird dann folgendermaßen in dem Merkkasten zur „Regel von Bayes“ zusammengebracht:

„Die Regel von Bayes

(1) Im Alltag schenkt man verschiedene Hypothesen A, B, C gleiches, manchmal auch unterschiedlich großes Vertrauen. Man ordnet ihnen subjektive **a-priori** Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ zu.

(2) Wenn ein Indiz I unter diesen Hypothesen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten $P_A(I)$, $P_B(I)$, $P_C(I)$ auftreten würde, erwartet man das Indiz (a-priori) insgesamt mit der **totalen** Wahrscheinlichkeit $P(I) = P(A) \cdot P_A(I) + P(B) \cdot P_B(I) + P(C) \cdot P_C(I)$.

Wenn man dann I tatsächlich beobachtet, vergleicht man die Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Indiz von den fraglichen Alternativen stammen könnte. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten ändern sich dadurch zu den **a-posteriori** Wahrscheinlichkeiten.

$$P_1(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(I)}{P(I)}, \quad P_1(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(I)}{P(I)}, \quad P_1(C) = \frac{P(C) \cdot P_C(I)}{P(I)}$$

(Regel von Bayes)“

(LSEF, S. 165)

Neben der Auffassung von Lernprozessen wird an dieser Stelle ebenfalls deutlich, dass hier verschiedene Grundvorstellungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, nämlich subjektive und frequentistische Perspektiven, besprochen und miteinander verknüpft werden. Diese Regel bleibt aber nicht nur als Erfahrungssatz stehen, der an verschiedenen Beispielen begründet wird, sondern wird auch mithilfe einer „allgemeinen Vierfeldertafel“ rechnerisch begründet (LSEF, S. 165).

Zum Abschluss der Darstellung des systematischen Aufbaus und der intendierten Auffassung im Jahrgangsband der Einführungsphase soll noch eine zusammenfassende Aufgabe aus dem Lehrbuchabschnitt „Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen“ und dessen Beispiellösung diskutiert werden. Darin sollen Schüler*innen Stellung zu einer Tabelle (vgl. Tabelle 13) nehmen und eine Aussage „Aus Erwartung wird Erfahrung“ (117) zu a-posteriori Wahrscheinlichkeiten kommentieren.

Tabelle 13: Spickzettel zum Verhältnis relativer Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten (LSEF, S. 163)

Zufallsexperiment/Datenerhebung mit möglichen Ergebnissen x_1, x_2, \dots, x_n	
Realität	Modell
Relative Häufigkeiten h_1, h_2, \dots, h_n	Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n
$0 \leq h_i \leq 1$	$0 \leq p_i \leq 1$
Summe 1	Summe 1
nach Experiment	vor Experiment
schwanken	festgelegt
Bei Symmetrien	
ungefähr gleich	genau gleich
Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \dots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$

In der Beispiellösung kann erneut die hohe Kohärenz des empirisch-gegenständlichen Begriffs der Wahrscheinlichkeit festgestellt werden, zum einen die Prognosefähigkeit von Wahrscheinlichkeiten hinsichtlich erwarteter relativer Häufigkeiten und zum anderen die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten auf der Basis von relativen Häufigkeiten durchgeführter Zufallsversuche.

„Mit Wahrscheinlichkeiten sagt man relative Häufigkeiten voraus. Wahrscheinlichkeiten liegen also zeitlich gesehen vor den nächsten Versuchen. Das ist der in der Tabelle notierte Zusammenhang. Andererseits gehen in Fällen, in denen man Wahrscheinlichkeiten schätzen muss, die Erfahrungen vergangener Versuchsserien mit ein.“

(LSEF, S. 249)

Interessant ist in diesem Zitat das Kriterium, dass Wahrscheinlichkeiten „zeitlich gesehen vor“ der Versuchsdurchführung aufgestellt werden sollen, was den „Prognoseaspekt“ besonders betont.

In der Qualifikationsphase liegt der Schwerpunkt auf dem Gebiet der beurteilenden Statistik, insbesondere dem Testen von Hypothesen und der Anwendung von Signifikanzregeln. Bereits im Bereich der Analysis werden einerseits auf Basis der Definition des arithmetischen Mittels der Mittelwert einer stetigen Funktion über das Integral definiert (125,126) und andererseits auch Kontexte mit Bezug zur Stochastik, wie bspw. der radioaktive Zerfall, behandelt. Hierzu findet sich folgender Randtext:

„Radioaktiver Zerfall ist ein stochastischer Vorgang, wie man an dem Graphen (Fig. 1) sieht. Jedes Radon-Atom zerfällt in der nächsten Sekunde mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p . Wie groß ist p ? Wieso nimmt die Aktivität exponentiell ab?“

(LSQ, S. 127)

Interessant ist, dass man anhand des Graphen sehen soll, dass es sich um einen stochastischen Vorgang handelt. Vermutlich soll die Einschätzung daraus resultieren, dass die in der Aufgabenstellung betrachtete Exponentialfunktion nicht im Messgraphen direkt ablesbar ist, da dieser kleine „zufallsbedingte“ Schwankungen aufweist.

Im ersten Kapitel des Teils zur Stochastik wird dagegen bereits auf den Auftaktseiten erneut die Stochastik in verschiedene Gebiete unterteilt. Auch hierbei werden die Gebiete im Sinne der Schulbuchreihe kohärent dargestellt:

„In der beschreibenden Statistik sammelt man Daten. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnet man Modelle. In der beurteilenden Statistik prüft man Modelle.“

(LSQ, S. 268)

Dazu werden in einem Bild, passend zur Auffassung in der Einführungsphase, die theoretischen Kennwerte (Erwartungswert und Standardabweichung) am Modell und die empirischen Kennwerte (arithmetisches Mittel und empirische Standardabweichung) in der Realität verortet.

Betrachtet man die Strukturelemente „Das kennen Sie schon“ und „In diesem Kapitel“ hinsichtlich der Megastruktur, so zeigt sich erneut, dass die Themen der Qualifikationsphase kohärent an das Wissen vorheriger Jahrgangsstufen anschließen. Neben erwartbaren Wissens-elementen – vor allem aus der Einführungsphase – wie bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit werden auch weiter zurückliegende immer wieder aufgegriffene Themen in den Fokus gerückt, wie das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten durch Simulation, aber auch die Bestimmung von Mittelwerten von Häufigkeitsverteilungen und deren Zusammenhang mit Erwartungswerten (129). Darauf aufbauend wird dann insbesondere die Binomialverteilung in den Vordergrund gerückt (269). Trotz der Betrachtung komplexerer Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird auch in der Qualifikationsphase eine empirisch-gegenständliche Auffassung sichtbar und zwar insofern, dass „von Strichproben auf die Gesamtheit, von relativen

Häufigkeiten auf die Wahrscheinlichkeiten“ (130) geschlossen wird, hier aber mit Methoden der beurteilenden Statistik.

Ein interessanter Zugriff auf die Realität wird im Einleitungstext zur Motivation der ersten Lerneinheit, einer Rekapitulation empirischer Kennwerte, gegeben. Dort stellen die Autoren folgenden Mathematisierungsprozess fest:

„Bevor man Realität durch Wahrscheinlichkeitsmodelle beschreibt, muss man sie durch Messen und Zählen erfassen“

(LSQ, S. 273)

Entsprechend wird an die Definition des arithmetischen Mittels erinnert und die Standardabweichung definiert (134). Diese Größen werden dann anhand verschiedener Stichproben bestimmt und mit der Gauß'schen Faustformel (135) in Zusammenhang gebracht, welche in folgenden Kapiteln aufgegriffen wird.

In der nächsten Lerneinheit wird erneut auf die Prognosefähigkeit der theoretischen Kennwerte eingegangen

„Häufigkeitsverteilungen charakterisiert man durch die Kenngrößen Mittelwert \bar{x} und empirische Standardabweichung s . Wenn man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung als Modell angeben kann, so werden entsprechende **theoretische** [Herv. im Original] Kenngrößen festgelegt, die man Erwartungswert μ (lies Mü) und Standardabweichung σ (lies Sigma) nennt. Sie ermöglichen eine Prognose der **empirischen** [Herv. im Original] Kenngrößen \bar{x} und s .“

(LSQ, S. 277–278)

Diese Prognosefähigkeit wird an den Kenngrößen von Wahrscheinlichkeits- und Häufigkeitsverteilungen verschiedener Beispiele und Simulationen diskutiert (141,143,146).

Wie das Lehrwerk bereits zu Beginn des Kapitels in Aussicht stellt, wird mithilfe der Definition von Schwankungsintervallen (148,149) von Wahrscheinlichkeiten auf relative Häufigkeiten und mit Vertrauensintervallen (150) von relativen Häufigkeiten auf Wahrscheinlichkeiten geschlossen. Damit wird das Verhältnis beider Größen mathematisch noch stärker verbunden, wobei in der Herleitung bereits von einer entsprechend normalverteilten Zufallsvariable ausgegangen wird (148), also beide Intervalle in der Annahme einer Normalverteilung begründet sind. Im Anschluss daran sollen Aussagen über beide Intervalle eingeordnet

werden (153) und – für diese Arbeit besonders relevant – in einer Aufgabe mit dem empirischen Gesetz der Großen Zahlen in Verbindung gebracht werden:

„Unter die Lupe genommen: Das Schwankungsintervall [klassische Abbildung zum empirischen Gesetz der großen Zahl, G.S.]
Das Gesetz der großen Zahl besagt: Je größer der Versuchsumfang, desto näher liegt die relative Häufigkeit an der Wahrscheinlichkeit. [...]“

(LSQ, S. 299)

Nach der Behandlung dieser Vertrauensintervalle wird das Thema Hypothesentests behandelt. Dieses nutzt ebenfalls das Konzept der Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Beschreibung des systematischen Aufbaus. Zur Rekonstruktion des intendierten Wahrscheinlichkeitsbegriff sind diese vor allem eher schemalastigen Rechenoperationen dagegen weniger relevant. Interessant sind aber die Hinweise, die über adäquate Datenerhebungen in Form eines Merkkastens gegeben werden und an Henzes (2018) Lehrbuch (vgl. 9.2.2) erinnern:

- Es ist unzulässig, aus mehreren Datenerhebungen im Nachhinein eine mit signifikantem Ergebnis auszuwählen.
- Es kann im Hinblick auf signifikante Ergebnisse sinnlos sein, den Stichprobenumfang n so groß zu wählen, dass selbst kleinste Unterschiede nachweisbar werden, die völlig irrelevant sind.

(LSQ, S. 311)

Dieses Wissen soll anschließend von den Schüler*innen genutzt werden um signifikante Ergebnisse zu erzeugen, die nicht besonders aussagekräftig sind, um dann ebenfalls von ihnen kritisch eingeordnet zu werden (vgl. LSQ, S. 312).

Im darauffolgenden Kapitel wird die Normalverteilung als ein Beispiel stetiger Verteilungen in den Blick genommen und deren Stellenwert in Bezug zur Fehlerrechnung und -einschätzung von Messwerten hervorgehoben. Hier wird erneut der hohe Anwendungscharakter der Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit auch die empirisch-gegenständliche Auffassung von Wahrscheinlichkeiten deutlich. So wird im Einleitungstext formuliert:

„Messfehler, Größen und Gewichte von Lebewesen und Naturprodukten sind glockenförmig verteilt. Aber auch wenn man viele ‚unabhängige‘ Zufallsgrößen addiert, erhält man stets eine glockenförmige Verteilung und es gilt die Sigmaregel. Das soll in den folgenden Erkundungen mit simulierten und realen Experimenten untersucht und belegt werden.“

(LSQ, S. 311)

In diesem Zitat ist besonders interessant, dass als Erkenntnisweisen sowohl die Simulation, als auch das reale Experiment ausgewiesen werden. Womit die Begründung der genannten mathematischen Sätze auf der Basis einer empirischen Erprobung folgt. Es ist davon auszugehen, dass diese Wahl der Begründung vor allem darin liegt, dass die zum Beweis nötigen Kenntnisse nicht in der Schule erworben werden, sondern Teil einer Stochastik Vorlesung der Hochschule sind. Ein Beispiel für eine Erprobung im Schulbuch angekündigten Sinn findet sich in verschiedenen Aufgaben mit Simulationen am GTR (165, 169) sowie mit Experimenten (170).

Auch im Rahmen der Definition der theoretischen Kenngrößen für stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird erneut hervorgehoben, dass diese zur Prognose der entsprechenden empirischen Kenngrößen genutzt werden (167). Besonders deutlich wird dies in der Darstellung des Zusammenhangs von Modell und durchgeführten Zufallsversuch auf der Rückblicksseite. Dort beschreiben die Autoren „Modellieren“ mithilfe der Normalverteilung folgendermaßen:

„Wenn man zu einer Häufigkeitsverteilung mit Mittelwert \bar{x} und empirische Standardabweichung s eine Normalverteilung $\varphi_{\mu,\sigma}$ als Modell angeben möchte, schätzt man die Parameter durch $\mu \approx \bar{x}$ und $\sigma \approx s$. Im Modell kann man Wahrscheinlichkeiten berechnen.“

(LSQ, S. 345)

Wichtig für die Entwicklung des Begriffs „Wahrscheinlichkeit“ ist hier die Einschätzung, dass man nach geschätzter Verteilung aus empirischen Kenngrößen Wahrscheinlichkeiten berechnen kann. Hier wird das beschriebene Konzept der „Mathematisierung“ vom Anfang des Teils zur Stochastik in der Qualifikationsphase sehr deutlich.

Das letzte Kapitel zur Stochastik bilden stochastische Prozesse, mit besonderer Berücksichtigung von Markovketten, die die Inhaltsfelder Analytische Geometrie/Lineare Algebra mit der Stochastik verbinden. Dort wird der Wahrscheinlichkeitsbegriff analog zu den vorherigen Kapiteln interpretiert.

Zum Abschluss soll noch ein Blick auf die Check-In Aufgaben zur Stochastik geworfen werden, da diese auch mit Lösungen versehen sind und wieder die hohe Kohärenz der Begriffsbildung und den engen Zusammenhang von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten, der in dieser Schulbuchreihe konsequent im Mittelpunkt steht, aufzeigen; zum einen in Bezug auf die Bestimmung einer krummlinig begrenzten Fläche im Vergleich zur Auswertung mithilfe der Monte-Carlo Simulation, bei der festgehalten wird, dass „die relativen Häufigkeiten [...] (bis auf Zufallsschwankungen) den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten [entsprechen].“ (189), zum anderen in Bezug auf die Interpretation des Begriffs „zufällig“, der im Kontext „gleichverteilt“ auf einer vorgegebenen Fläche meint.

Insgesamt ist an der Schulbuchreihe „Lambacher Schweizer“ bemerkenswert, wie kohärent der Wahrscheinlichkeitsbegriff hinsichtlich seiner Verwendung als theoretische Größe in einer empirisch-gegenständlichen Stochastik auf der Basis relativer Häufigkeiten aus der beschreibenden Statistik ist. Wobei auch empirisch-gegenständliche Symmetrien von Zufallsgeräten – im Sinne des Laplace’schen Wahrscheinlichkeitsbegriff – sowie ihre „Prognosefähigkeit“ für auftretende Ereignisse im Rahmen der beurteilenden Statistik betrachtet werden. Gerade in Bezug auf die theoretische Annahme der Symmetrie wird das Fundamentalgesetz im Vergleich zu von Mises Theorie (vgl. 6) weiter spezialisiert.

8.3 Methodik der Untersuchung 3

In dieser Untersuchung wird eine Time-Series-Analysis vorgenommen (vgl. 10.2.4.5; Yin, 2014, S. 150–155) und zwar mit den Untersuchungszielen, dass zum einen die Begriffsentwicklungsprozesse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der zeitlichen Abfolge verschiedener Jahrgangsstufen dargestellt werden und zum anderen die Frage beantwortet wird, warum ein Auffassungswechsel von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik – zumindest in der Stochastik – aus Sicht der Schulmathematik notwendig wird, unter der Annahme einer formal-abstrakten Auffassung – von Stochastik – in der Hochschule (vgl. 9).

Die hier dargestellte Zeit-Serie (vgl. Tabelle 14) für diese Untersuchung basiert auf einer zusammenfassenden qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. 7 & 9) zur Auslese von Mikrostrukturelementen aller Jahrgangsstufenbände des Lambacher Schweizer, die einen Bezug zur Stochastik aufweisen. Dieser Bezug kann dabei durch dessen Zugehörigkeit zu einem Mesostrukturelement, wie bspw. einem Kapitel, einem explizierten Bezug zur inhaltsbezogenen Kompetenz oder dem Inhaltsfeld der Stochastik im Schulbuch (LS7, S. 47), oder der Erwähnung einschlägiger Zufallsexperimente, der Verwendung von Zufallsgeräten oder Begriffen der deskriptiven Statistik, beurteilenden Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Kombinatorik hergestellt werden (LS8, S. 13; LSQ, S. 127). Das Ergebnis dieser Auslese ist in Anhang E zu finden.

Insbesondere aufgrund der Länge des Anhang E wurde eine weitere Tabelle, die Zeit-Serie (vgl. Tabelle 14), erstellt. Diese beinhaltet sowohl Gelenkstellen in Bezug auf die Begriffsentwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, wie Merkkästen in wörtlicher Form, Auszüge und Paraphrasierungen von Einführungstexten sowie typische Tätigkeiten im Kontext der Stochastik, exemplarische Aufgaben und Lösungen. Sie bildet das erste Ergebnis dieser Untersuchung.

Laut Yin (2014) reicht es für eine Time-Series-Analysis im Sinne von Fallstudienforschung nicht aus Daten im Sinne einer chronologischen Abfolge anzugeben, sondern es ist erforderlich, dass diese zur Beantwortung von Kausal- oder Modalfragen genutzt werden. Eine der übergeordneten Kausalfragen dieser Arbeit ist, warum Übergangsprobleme von der Schule zur Hochschule entstehen können. Die Forschungshypothese dieser Arbeit beantwortet diese Frage durch die Feststellung eines Übergangs von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung, zumindest im Umfeld der jeweiligen Institutionen. Damit dieser Auffassungswechsel problematisch beim Übergang von der Schule zur Hochschule wirkt, dürfte er natürlich nicht bereits während der Schulzeit vollzogen werden. Dies würde bedeuten, dass jahrgangsübergreifend eine empirisch-gegenständliche-Auffassung vorliegen müsste, was dann einen Aspekt der Frage „wie wird Schulmathematik – hier am Beispiel der Stochastik – gelernt bzw. gelehrt“ klärt. Im Anschluss an die Zeit-Serie in Tabellenform (vgl. Tabelle 14) wird dieser Frage hinsichtlich der folgenden Fragestellungen nachgegangen:

- Welches Verhältnis besteht zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer?
- Was sind und wie werden „Zufallsgeräte“ im Sinne der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer genutzt?

- Welche Vorgehensweisen im Stochastikunterricht, insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechnung, werden in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer vorgeschlagen bzw. angeregt?

Um diese Fragestellungen zu beantworten wird die Zeit-Serie, welche nach obigen Kriterien eine Eingrenzung des Materials bildet (Mayring, 2010, S. 86), angelehnt an eine qualitative Inhaltsanalyse zur induktiven Kategorienbildung (Mayring, 2010, S. 85ff.), untersucht.

Abschließend wird die Kohärenz der Begriffsentwicklung und der mathematischen Aktivitäten zusammenfassend in den Blick genommen.

Eine ausführlichere Darstellung mit Fokus auf den Zusammenhang des Lehrgangs findet sich bereits in der Behandlung des Kontexts der Quelle zum systematischen Aufbau der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer (vgl. 8.2.2).

8.4 Ergebnisse der Untersuchung 3

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Untersuchung entsprechend ihrer Ziele (vgl. 8.1) und Methodik (vgl. 8.3) dargestellt.

In Tabelle 14 werden für eine grobe Orientierung der behandelten Inhalte mit Bezug zur Stochastik der einzelnen Klassenstufen jeweils die Registereinträge wiedergegeben. Zudem werden alle Merkkästen sowie die Elemente „Das kannst du schon/Das kennen Sie schon“ und „Das kannst du bald/In diesem Kapitel“ mit besonderem Bezug zum Wahrscheinlichkeitsbegriff und dessen Begriffsentwicklung im Wortlaut angegeben. Die weiteren Einträge in der folgenden Tabelle sind Verweise auf Teile des Lehrtextes, der Aufgabenstellungen oder Beispiellösungen. Diese werden im Sinne der Time-Series-Analysis (vgl. 8.3) angegeben, um die Begriffsentwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und zugehörige mathematische Tätigkeiten beim Umgang mit den Aufgaben nachzuzeichnen. Die Beschreibungen beinhalten in der Regel den (realen) Anwendungskontext der Aufgabe und nachfolgend in Klammern die zu bestimmenden Größen oder durchzuführenden mathematischen Tätigkeiten. Damit bildet die hier wiedergegebene Tabelle einen Auszug des „Anhang E: Aufbereitung der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer zur Analyse des Bildungsgangs von Schüler*innen“, der alle Elemente der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer mit Bezug zur Stochastik von der Jahrgangsstufe 5 bis zur Qualifikationsphase umfasst.

In Tabelle 14 finden sich einige Abkürzungen, die in der ersten Spalte die Fundstellen-Nummer [FN], in der zweiten Spalte das Stoffgebiet [G] (beurteilende Statistik, deskriptive Statistik, Kombinatorik oder Wahrscheinlichkeitsrechnung), in den nächsten vier Spalten eine Verortung innerhalb der verschiedenen Strukturebenen (Mega- [J], Makro-[K], Meso- [A] und Mikrostruktur [E]), in der siebten Spalte entweder den wörtlichen Inhalt (DKB, DKS, MK oder REG) oder eine Beschreibung und in der letzten Spalte die zugehörige Seitenzahl im jeweiligen Jahrgangsband enthalten.

Eine Analyseeinheit bildet ein Element der Mikrostruktur.

Liste der auftretenden Abkürzungen:

- Stoffgebiet (G)
 - beurteilende Statistik (bS)
 - deskriptive Statistik (dS)
 - Kombinatorik (KB)
 - Wahrscheinlichkeitsrechnung (WR)
- Jahrgangsstufe (J)
- Kapitel (K)
 - Moderner Mathematikunterricht mit dem Lambacher Schweizer (ML)
 - Kapitelnummer (I, II, III, ...)
 - Sachthema (ST)
 - Check-in (CI) (Abschnitt Kapitelnummer eingefügt)
 - Check-in Lösung (CL)
 - Selbsttraining (SELBST)
 - Abiturvorbereitung Stochastik (AVS)
 - Anhang: Anleitung für GTR (GTR)
 - Register (REG)
- Abschnitt (A)
 - Auftaktseite (AUF)
 - Erkundungen (ERK)
 - Lerneinheit (LE1, LE2, LE3, ...)
 - Wahlthema: Mittelwerte von Funktionen (WT)
 - Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen (WVV)
 - Geschichte (GES)
 - Rückblick[seiten](RBS)
 - Training (TRA)
 - Exkurs (EXK)
 - Teste dich selbst (TDS)
- Element (E)

- Auftaktseite (AUF)
 - Das kannst du schon/Das kennen Sie schon (DKS)
 - Das kannst du bald/In diesem Kapitel (DKB)
- Lerneinheit (LE)
 - Einstieg (EIN)
 - Teste dich selbst! (TDS)
 - Merkkasten (MK) [vollständig zitiert]
 - Beispiel[aufgaben] (BSP)
 - Aufgabennummer (1, 2, 3, ...)
 - Kannst du das noch? (KANN)
 - Bist du sicher? (BDS)
 - Zeit zu Wiederholen (ZZW)
 - Zeit zu überprüfen (ZZÜ)

Bis auf die Bezeichnung der Stoffgebiete sind alle Elemente in der Reihenfolge je obiger Listenstufen aufgeführt in der sie in den Lehrwerken erstmalig aufgetreten sind. Es kann sein, dass eine Analyseeinheiten mehreren Stoffgebieten des Inhaltsfelds Stochastik zugeordnet ist. Der Schwerpunkt des jeweiligen Stoffgebiets liegt im erstgenannten Stoffgebiet.

Unterstrichen sind die Textbestandteile dargestellt, die explizit darauf verweisen, dass Wahrscheinlichkeiten auf relative Häufigkeiten rekurren oder umgekehrt, sie experimentell oder durch Simulation bestimmt oder als (theoretische) Eigenschaft von empirischen Gegenständen wahrgenommen werden. Diese Perspektiven und Funktionen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sind Indikatoren dafür, dass eine empirisch-gegenständliche Theorie des Wahrscheinlichkeitsbegriffs naheliegender Weise im Sinne von von Mises (vgl. 6) angebahnt wird (vgl. 8.4.2). Die übrigen Hervorhebungen finden sich in dieser Form im Lehrbuchtext.

Tabelle 14: Identifizierte Analyseeinheiten für die Time-Series-Analysis auf der Basis von Anhang E

FN	G	J	K	A	E	Inhalt/Zusammenfassung	S.
5. Jahrgangsstufe							
001	dS	5	REG			Balkendiagramm (S. 14)	248
002	dS	5	REG			Säulendiagramm (S. 14)	249
003	dS	5	REG			Strichliste (S. 14), Tabelle (S. 14), Zahlen darstellen (S. 14)	250
6. Jahrgangsstufe							
004	dS	6	I	LE4	6	Brüche würfeln (mögl. Ergebnisse und deren rel. Häufigkeit im Diagramm darstellen)	29
005	dS	6	I	LE9	EIN	Relative Häufigkeiten von Wurfserien unterschiedlicher Länge mit 6er Würfel	46
006	WR	6	I	TRA	9	Intuitive Verwendung von drehenden Zielscheiben im Sinne geometrischer Wahrscheinlichkeit	55
007	WR	6	IV	LE1	3	Ergebnismengen von Würfelwürfen mit mehreren (gezinkten) Würfeln	109
008	dS	6	VI	AUF	DKS	Zahlenlisten auszählen; Tabellen lesen; Säulendiagramm erstellen; Anteile in Prozent schreiben;	168
009	dS	6	VI	AUF	DKB	Mit relativen Häufigkeiten umgehen; Kreisdiagramme erstellen und lesen; Zahlenlisten durch Kennzahlen charakterisieren; Boxplots erstellen und lesen	169
010	dS/ WR	6	VI	ERK	2	<u>Unabhängigkeit beim Roulette-Spiel (qualitativ, subjektive Wahrscheinlichkeit, Strichliste)</u>	171
011	dS/ WR	6	VI	ERK	3	Sind <u>Münzen vergesslich?</u> (Wurfsequenzen analysieren durch Experiment, Strichliste, [subjektiver und frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff])	171

012	dS	6	VI	LE1	MK	<p>Anzahlen nennt man in der Statistik absolute Häufigkeiten.</p> <p>Die zugehörigen Anteile an der Gesamtzahl nennt man relative Häufigkeiten.</p> <p>relative Häufigkeit = $\frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$</p> <p>Die Summe aller relativen Häufigkeiten muss 1 oder 100% ergeben.</p>	172
013	dS	6	VI	LE1	1	Liegen relative Häufigkeiten vor? (Kreisdiagramm erstellen)	174
014	dS	6	VI	LE2	MK	<p>Für Zahlenlisten gibt es zwei Mittelwerte, das arithmetische Mittel und den Median:</p> <p>arithmetisches Mittel = $\frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Anzahl der Werte}}$</p> <p>Der Median liegt in der Mitte der Liste.</p> <p>Unterhalb und oberhalb des Medians liegen gleich viele Zahlen der Liste.</p>	178
015	dS/ WR	6	VI	LE2	EIN	<p>„Zufallsschwankungen: Die Ergebnisse statistischer Untersuchungen schwanken meist zufällig. So liefern Umfragen an verschiedenen Tagen und Orten selten die gleichen Ergebnisse. Auf einer Personewaage ist man an aufeinander folgenden Tagen meist unterschiedlich schwer. Mittelwerte dienen dazu, diese Zufallsschwankungen zu verringern.“</p>	179
016	dS/ WR	6	VI	LE2	11	Muster bei mehrfachem Münzwurf entdecken (Zufallsexperiment durchführen, Schätzen von Spieldauer)	181
017	dS/ WR	6	VI	LE2	12	Startposition Spiel (wie lange im Mittel)	181

018	dS/ WR	6	VI	LE2	13	Auslaufen des Fahrrads (arithmetisches Mittel von Umdrehungszeiten bestimmen)	181
019	dS	6	VI	LE3	MK	<ul style="list-style-type: none"> - Der Median der unteren Datenhälfte heißt unteres Quartil - Der Median der oberen Datenhälfte heißt oberes Quartil - Zwischen den beiden Quartilen liegt ungefähr die Hälfte der Daten <p>darunter und darüber liegt jeweils etwa ein Viertel der Daten.</p>	182
020	dS	6	VI	LE3	MK	<p>[Bild Boxplot]</p> <ul style="list-style-type: none"> - In der Box liegt ca. die Hälfte aller Daten, im Bereich der Antennen je ca. ein Viertel. - Je kürzer die Box, desto weniger streuen die Daten um den Median - Die Länge der Box heißt Quartilsabstand. Der Quartilsabstand ist ein Streuungsmaß. 	183
021	dS	6	VI	LE3	3	Pulsschlag (Boxplot erstellen, interpretieren, Selbstversuch)	185
022	dS/ WR	6	VI	WVV	8	Mehrfacher Münzwurf mit Strafwurf (Experiment, frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff) [im Randtext steht: <u>Halte erst deine Vermutung im Logbuch fest; Notiere markante Versuchsergebnisse; Halte fest, was du aus dem Versuch dazu gelernt hast</u>]	187
023	dS/ WR	6	VI	EXK	2	Lebensdauer von Seifenblasen (Versuchsdurchführung, Auswertung, ingenieurmäßiges Arbeiten)	193

024		6	VII	ERK	1	Experimentieren und Messen (Gefäße vergleichen durch Befüllen, Auswerten und eigene Maßeinheiten entwickeln und vergleichen. [Analog zu physikalischem Messen; Randtext: „Tipp: Denkt daran, dass Messwerte nicht immer exakt sind!“; funktionaler Zusammenhang]	198
025	dS	6	REG			Absolute Häufigkeit, Anteil, arithmetisches Mittel, Ausreißer, Boxplot, Daten sortieren, Diagramm, Häufigkeit (absolut, relativ), Kreisdiagramm	268
026	dS	6	REG			Maximum, Median, Minimum, Mittel (arithmetisch), Mittelwert, oberes Quartil, Quartil (oberes, unteres), Quartilsabstand, relative Häufigkeit, Säulendiagramm, Sortieren von Daten, Statistik, Streifendiagramm, Strichliste, Tabellenkalkulationsprogramm	269
027	dS/ WR	6	REG			Unteres Quartil, Urliste, Zahlenliste auswerten, Zufallsschwankungen	270
7. Jahrgangsstufe							
028	WR	7	ML			Straffung des Lehrplans [...] <u>In der Stochastik stehen der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Beziehung zu den relativen Häufigkeiten im Zentrum. Simulationen vertiefen die Zusammenhänge.</u>	3
029	dS	7	I	LE2	EIN	<u>Gewinnchance Tombola vergleichen (relative Häufigkeiten)</u>	15
030	dS/ WR	7	I	EXK	5	Tierordnungen (relative Häufigkeiten bestimmen, aus bedingten relativen Häufigkeiten)	39
031	dS	7	II	AUF		Bild: Dodekaeder Würfel; Bild: Altersaufbau von Menschen aufgeteilt	42

						in Männer & Frauen; Text: „Zufälle gehören zum Leben, denn vieles lässt sich nicht oder nur schwer vorhersagen. Den meisten Menschen ist es jedoch wichtig, Vorgänge, bei denen Zufall eine Rolle spielt, einzuschätzen – es sind gute Prognosen gefragt. Die Mathematik kann dabei helfen.“	
032	WR	7	II	AUF	DKS	Mit dem Zufall umgehen; Versuchsergebnisse relative Häufigkeiten (in %) und Mittelwerte beschreiben und grafisch darstellen; Daten mit Tabellenkalkulation auswerten.	42
033	WR	7	II	AUF	DKB	<u>Wahrscheinlichkeiten von relativen Häufigkeiten unterscheiden</u> ; <u>Wahrscheinlichkeiten schätzen und berechnen</u> ; <u>Mit Wahrscheinlichkeiten vorhersagen machen</u> ; <u>Wahrscheinlichkeiten bewerten</u> ; <u>Zufallsversuch simulieren</u> , auch mit Tabellenkalkulation.	43
034	WR	7	II	ERK	3	Noten würfeln mit 5 Münzen oder einem Würfel (<u>Spekulieren</u> → <u>Experimentieren</u> → <u>Bewerten</u> [→ <u>Berechnung LE 2</u> → <u>Simulation LE4</u>] (Herv. G.S.))	44
035	WR	7	II	LE1	EIN	[Besprechen] „Das Würfeln mit einem Spielwürfel ist ein ‚Zufallsexperiment‘, denn man kann das einzelne Ergebnis (die Augenzahl, die fallen wird) nicht vorhersagen. ‚Es hängt vom Zufall ab.‘“ Bsp. Würfeln mit Rieme-Würfel; <u>Ob eine gute oder schlechte Schätzung vorliegt „muss“ experimentell geprüft werden.</u>	46

						<p><u>Randtext: „Erst spekulieren, dann experimentieren, am Ende bewerten.“</u></p> <p>[...]</p> <p><u>„Um die Wahrscheinlichkeiten nach einem Experiment anzugeben, bildet man mitunter die Mittelwerte der relativen Häufigkeiten entsprechender Seiten. [Beispielberechnung]. Da die relativen Häufigkeiten sich aber von Versuch zu Versuch ändern, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten aus den Häufigkeiten prinzipiell nicht „genau“ bestimmen.“</u></p> <p><u>Randtext: „Der Quader muss mit einem Würfelbecher gewürfelt werden, der auf den Tisch gestülpt wird.“</u></p> <p>Randtext: <u>Wahrscheinlichkeiten machen Vorhersagen auf lange Sicht. Beim Quader sind die Wahrscheinlichkeiten von Gegenseiten gleich groß. Relative Häufigkeiten werden nach einem Experiment ermittelt, beim Quader sind die relativen Häufigkeiten von Gegenseiten nur ungefähr gleich groß.]</u></p>	47
036	WR	7	II	LE1	MK	<p>Bei einem Zufallsexperiment kann man die einzelnen Ergebnisse nicht vorhersagen, man kann aber Wahrscheinlichkeiten (Herv. im Original) zuordnen, die zusammen 1 (100%) ergeben müssen. [Normiertheit, G.S.]</p>	47

						<u>Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn bei vielen Versuchsdurchführungen die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen und Symmetrien beachtet werden.</u> (Herv. G.S.)	
037	WR	7	II	LE1	1	Wahrscheinlichkeit schätzen bei verschiedenen Legosteinen (<u>Schätzen -> relative Häufigkeiten Liste ->Experiment-> verbessern</u>)	48
038	WR	7	II	LE1	4	<u>Umfrage Schuld an schlechten Noten (relative Häufigkeiten vs. Wahrscheinlichkeiten)</u>	48
039	WR	7	II	LE1	BDS	Flügelmutter werfen (drei Ergebnisse betrachten, relative Häufigkeiten -> kommentieren -> Ergebnisraum anpassen)	49
040	WR	7	II	LE2	MK	Zufallsexperimente bei denen man <u>annehmen</u> kann, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man Laplace-Experimente . <u>Für diese Zufallsexperimente muss man keine Versuchsreihen durchführen, um Wahrscheinlichkeiten angeben zu können. Diese Wahrscheinlichkeiten nennt man Laplace-Wahrscheinlichkeiten.</u> Summenregel: Bei Situationen mit mehreren Ergebnissen erhält man die Wahrscheinlichkeit, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addiert.	50
041	WR	7	II	LE2	5	<u>Würfelwerfen (verschiedene Ereignisse, Wahrscheinlichkeit bestimmen mit relativen Häufigkeiten)</u>	52

042	WR	7	II	LE2	6	Eis bezahlen (unsymmetrische Ereignisse, Hochrechnen, „gerechtes“ Spiel, Zufallsversuch anpassen)	52
043	WR	7	II	LE2	13	Annahme und Begründung für Gleichverteilung in verschiedenen Kontexten; Randtext: „Ob Laplace-Annahmen gerechtfertigt sind?“	53
044	WR	7	II	LE2	14	<u>Stiftrollen (Gleichverteilung gerechtfertigt? Versuch durchführen (120-mal), Prädikat „Laplace“-Bleistift); Randtext: Man kann auch mit Bleistiften experimentieren, die statt 6 nur 3 Seiten haben.</u>	54
045	WR	7	II	LE2	15	<u>Glücksrad basteln (Schätzung relativer Häufigkeit bei gegebenem n, Experiment, vgl. mit Mitschüler*innen, Prädikat „Laplace“)</u>	54
046	WR	7	II	LE4	MK	<u>Die Durchführung eines Zufallsexperiments oder die Nachahmung durch ein anderes Zufallsexperiment mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten bezeichnet man als Simulation. Die relativen Häufigkeiten, die sich dabei ergeben, kann man als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten des ursprünglichen Zufallsexperiments verwenden.</u>	58
047	WR	7	II	LE4	BSP	Prinzessinnen vorsprechen (Schätzen, wie viele Prinzessinnen sprechen im Mittel vor), Randtext: Prinz=Personalchef	58
048	WR	7	II	LE4	1	<u>Würfel statt Glücksrad (quasi Zufallsvariable bilden, Wahrscheinlichkeit schätzen, Simulation durchführen, vgl. mit Glücksrad) [Hier verschiedene Zufallsobjekte miteinander vergleichen, G.S.]</u>	59
049	WR	7	II	LE4	7	<u>Güte Computerwürfel (relative Häufigkeiten von Zufallszahlen</u>	60

						<u>gleichwahrscheinlich, Vergrößerung der Simulationszahl, Augensummen von zwei oder mehr Würfeln)</u>	
050	dS/ WR	7	II	LE4	8	<u>Gesetz der großen Zahl (Simulation Excel, Laplace-Münze simulieren, berechnen der relativen Häufigkeit Wappen bei zunehmender Versuchszahl, graphisch darstellen, Formulierung [empirisches] Gesetz der großen Zahl, Erhöhung der Versuchszahl und Prüfung)</u>	61
051	dS/ WR	7	II	LE4	9	<u>Boxplot zu Wurfzahlen zum [empirischen] Gesetz der großen Zahl (Streuung nimmt mit zunehmender Versuchszahl ab)</u>	61
052	bS	7	II	EXK		<u>Schokoladentest (zufällige Wahl simulieren, Ergebnisse zusammentragen, in Tabelle, Säulendiagramm oder Boxplot darstellen, Entscheidungskriterium formulieren, Experiment durchführen, Wahrscheinlichkeit der zufälligen korrekten Auswahl angeben)</u>	64– 65
053	WR /dS	7	II	RBS		Zufallsexperiment; absolute & relative Häufigkeit; Wahrscheinlichkeit, Laplace-Wahrscheinlichkeit; Summenregel; Boxplot; Simulation;	66
054	dS/ WR	7	REG			Absolute Häufigkeiten, Boxplot, Ergebnis eines Zufallsversuchs, Gesetz der großen Zahlen, Häufigkeit (absolut, relativ), Kreisdiagramm, Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Lotto, Median,	259
055	dS/ WR	7	REG			Oberes Quartil, Pasch, Quartil, relative Häufigkeiten, Simulation eines Zufallsexperiments, Tabellenkalkulationsprogramm, unteres Quartil,	260

						Wahrscheinlichkeit (eines Ereignisses, Laplace), Zufallsexperiment, Zufallszahl,	
8. Jahrgangsstufe							
056	WR	8	I	LE1	EIN	<u>Randtext: „Experiment: 1. Schreibe auf ein Blatt „0,“. 2. Würfle eine Ziffer aus. 3. Schreibe die Ziffer an die erste Stelle hinter dem Komma. 4. Würfle wieder und schreibe die Ziffer an die zweite Stelle hinter dem Komma. 5. Führe dies immer weiter fort.“ [Würfel als nicht periodisches Zufallsgerät, G.S.]</u>	13
057	WR	8	I	LE1	1	<u>Irrationalzahl mit weiteren Zufallsgeräten erzeugen (Zufallsgerät auswählen, Experimente durchführen, Zahlen addieren ist Summe wieder Irrationalzahl)</u>	13
058	WR /KB	8	II	LE4	KAN N 7	Karte aus Skatspiel ziehen (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen)	58
059	WR	8	III	AUF	DKS	Wahrscheinlichkeiten bestimmen; mit Wahrscheinlichkeiten Vorhersagen machen; Zufallsvorgänge simulieren	76
060	WR	8	III	AUF		Titel: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Mit dem Zufall muss man immer rechnen	77
061	WR	8	III	AUF	DKB	Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagrammen berechnen; Rechnungen mit Gegenwahrscheinlichkeiten vereinfachen; Binomialverteilung als Werkzeug nutzen; Probleme lösen und Entscheidungen fällen durch Modellieren und Simulieren	77
062	WR	8	III	LE1	EIN	Begriffsklärung Baumdiagramm, mehrstufiger Zufallsversuch, Er-	80

						<p>gebnisse als Pfade des Baumdiagramms, Wahrscheinlichkeitsverteilung</p> <p><u>Randtext: „Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten liegen zwischen 0% und 100%.“</u></p> <p><u>Randtext: „Wahrscheinlichkeiten sind Modelle, die relative Häufigkeiten (bis auf Zufallsschwankungen) vorhersagen“.</u></p>	
063	WR	8	III	LE1	MK	<p>Pfadregel</p> <p>Mehrstufige Zufallsexperimente kann man durch Baumdiagramme beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad (ein Ergebnis des mehrstufigen Experiments) erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades multipliziert.</p>	80
064	WR	8	III	LE1	MK	<p>Summenregel: Ein Ereignis besteht aus mehreren Ergebnissen. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addiert.</p> <p>Gegenereignis: Die Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses und des zugehörigen Gegenereignisses ergänzen sich zu 1 (100%).</p>	81
065	WR /KB	8	III	LE1	1	<p><u>Schlüsselanhängersfiguren (Anzahl Variationen bestimmen, Wahrscheinlichkeit eines Pfades bestimmen, Wahrscheinlichkeit möglicher Ereignisse bestimmen, zugehörige Annahme angeben, Simulation und relative Häufigkeiten mit Wahrscheinlichkeiten vergleichen)</u></p> <p>Randtext: „In b) kann man die Farbe der Bluse auswürfeln. Zum Beispiel</p>	82

						könnte 1;2 für „blau“ stehen. Die Farbe der Hose könnte man mit einer Münze bestimmen. In c) können zweimal 10 Karten bei der Simulation helfen.“	
066	WR	8	III	LE1	6	<u>Dreifaches Ziehen aus Urne (Experiment mit Spielkarten simulieren, Baum erstellen, „Experiment und Theorie“ vergleichen)</u>	83
067	WR	8	III	LE1	9	Würfeln mit zwei Würfeln (Aussage bewerten und durch Simulation begründen, „Denkfehler“ erläutern)	83
068	WR	8	III	LE3	7	<u>„Theorie und Praxis (Wahrscheinlichkeiten als Prognosen relativer Häufigkeiten)“</u> <u>Fünffacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bestimmen, Experiment durchführen, Vergleich mit den Wahrscheinlichkeiten auch nach Zusammenfassung aller Gruppenergebnisse)</u>	91
069	WR	8	III	WVV	1	Tür öffnen durch Schlüssel ausprobieren (Vorgeschlagene Simulationen begründet einordnen, prüfen welches Ereignis am wahrscheinlichsten ist durch Experiment, Begründung durch Rechnung)	92
070	WR	8	III	WVV	9	<u>Rohe und gekochte Eier ziehen (Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Experiment simulieren, Wissensfrage zu Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten)</u>	93
071	WR	8	V	LE1		„Definiere die Begriffe „Kongruenz“, Äquivalenz“ und „Wahrscheinlichkeit“. Suche dann nach Definitionen im Internet oder im Lexikon und vergleiche.“	146

						<p>Lösung (aus dem Serviceband, zur Wahrscheinlichkeit):</p> <p><u>„Bei Zufallsversuchen ordnet man den einzelnen Ergebnissen Wahrscheinlichkeiten zu, die zusammen 1 bzw. 100% ergeben. Wahrscheinlichkeiten liegen daher stets zwischen 0 und 1 bzw. zwischen 0% und 100%. Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn bei vielen Versuchsdurchführungen die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen und Symmetrien beachtet werden. Bei einigen Zufallsversuchen, z.B. Würfelwurf, Münzwurf oder Roulette Spiel lassen sich Wahrscheinlichkeiten auch berechnen, weil man davon ausgeht, dass die Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten (Laplace-Wahrscheinlichkeiten)“</u></p>	
072	WR	8	V	LE2	8	<u>Mathematischer Aufsatz über Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit</u> (Hinweise für mathematischen Aufsatz, mathematischer Aufsatz zu einem der Themen Zahlenmenge, Vierecke sowie Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit)	150
073	WR	8	VI	TDS		„Daten und Zufall“	176
074	WR	8	VI	TDS	13	<u>Verschiedene Zufallsversuche</u> (Würfelwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignis bestimmen), Quaderwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignis bestimmen), Zweifacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeit von	176

					<p>Ereignissen vergleichen), Gegenereignis bestimmen, „<u>Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sind das Gleiche, beide werden in Prozent angegeben</u>“ [Lösung von S. 256: falsch – Man muss zwischen der Realität und dem mathematischen Modell [Herv. im Original] unterscheiden: <u>Relative Häufigkeiten sind „reale“ in Zufallsexperimenten ermittelte Werte, die beschreiben, wie häufig ein bestimmtes Ergebnis in einem Experiment bezogen auf die Gesamtzahl der Versuche aufgetreten ist, z.B.: Es trat bei 50 Münzwürfen 28-mal „Wappen“ auf, die relative Häufigkeit für „Wappen“ beträgt $\frac{28}{50} = 0,56 = 56\%$. Wahrscheinlichkeiten hingegen sind „theoretische Größen“ eines mathematischen Modells, mit denen man versucht, relative Zufallsexperimenten vorherzusagen, z.B.: Die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ beträgt 50% bedeutet, man erwartet bei 1000 Münzwürfen etwa $1000 \cdot 50\% = 500$ „Wappen“], dreifacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse berechnen)</u></p>	
075	WR	8	VI	TDS	<p>Auswertung und Selbsteinschätzung: „[...] 13. Ich kann Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sicher berechnen, 14. Ich kenne den Unterschied zwischen Median und Mittelwert und kann beides bestimmen, Ich kann Kreisdiagramme, Säulendiagramme und</p>	177

						Boxplots zeichnen und interpretieren.“	
076	WR	8	VI	LE4	EIN	„ Stochastik umfasst drei Teilgebiete. In der beschreibenden Statistik sammelt man Daten, bestimmt relative Häufigkeitsverteilungen, stellt sie grafisch dar und beschreibt sie durch Kenngrößen. <u>In der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es um „theoretische“ Wahrscheinlichkeiten, mit denen man „reale“ relative Häufigkeiten bei Zufallsexperimenten und statistischen Erhebungen vorhersagen möchte. In der beurteilenden Statistik prüft man, ob „angenommene“ Wahrscheinlichkeiten zu relativen Häufigkeiten passen.“</u>	190
077	WR	8	VI	LE4	4	Würfeln mit Lego-Vierer (Vorgehen der Schätzung der Wahrscheinlichkeiten, mehrfacher Wurf und Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse, Zusammensetzen von zwei Vierern, Überlegungen prüfen durch Durchführung eines Versuchs)	192
078	WR	8	VI	LE7	BSP3	„ <u>Stochastische Modelle</u> “ – Reißzwecken Wurf (Gewinnwahrscheinlichkeit bestimmen, durch experimentelle Bestimmung relativer Häufigkeit, daraus Schätzung Wahrscheinlichkeit, Bestimmung gesuchter Wahrscheinlichkeit durch Baumdiagramm, prüfen des Modells und der Gewinnwahrscheinlichkeit in <u>Abhängigkeit der Schätzung der Wahrscheinlichkeit beim einfachen Wurf</u>)	203

079	WR /dS	8	VI	LE7	11	<u>Zufallsgerät zu Säulendiagramm zuordnen (Zuordnung, Achsenbeschriftung, für übriges Zufallsgerät weiteres Säulendiagramm bestimmen)</u>	205
080	WR	8	VI	LE8	16	<u>Lostrommel (Änderung von Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Veränderung des Inhalts der Lostrommel)</u>	209
081	WR /dS/ KB	8	REG			Anzahl Pfade, Baumdiagramm, Beurteilende Statistik, Binomialkoeffizient, Binomialverteilung, Boxplot, Ereignis, Galilei, Galileo, Galton, Sir Francis, Galtonbrett, Gegenereignis	264
082	WR /dS	8	REG			n über k, Niete, Pascal, Blaise, Pascalsches Dreieck, Pfadregel, relative Häufigkeit, Simulation (mit Tabellenkalkulation), Summenregel, Testen einer Hypothese, Treffer, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Zufallsversuch (mehrstufig)	265
9. Jahrgangsstufe							
083	WR /dS/ KB	9	ML			„ Zu den Inhalten: [...] Inhalte der Stochastik werden in Form von Aufgaben aufgegriffen und im Rahmen einer Exkursion vertieft.“	3
084	WR	9	III	WVV	9	<u>Mit verschiedenen geometrischen Körpern würfeln (Wahrscheinlichkeit schätzen, Körpernetze zeichnen, Flächen berechnen, Wahrscheinlichkeiten auf Basis von Flächeninhalten schätzen, durch einen Versuch prüfen)</u>	100
085	WR	9	IV	LE3	EIN	<u>Ereigniswahrscheinlichkeit vorgeben (Zufallsgeräte zu Ereigniswahrscheinlichkeiten zuordnen)</u>	118
086	WR	9	V	EXK	EIN	Die geometrische Verteilung: Warten bis zum ersten Erfolg (Abschnitt	146

						Baumdiagramm betrachten, Formel entwickeln, Säulendiagramm erstellen)	
087	WR	9	V	EXK	5	<u>Realistische oder gefälschte Münzwurfreihe untersuchen (Wartezeiten betrachten)</u>	147
088	WR /dS	9	VII	Sich selbst einschätzen	1,2	Mindmap in Gruppe oder individuell erstellen, u.a. zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	188
089	WR /dS	9	VII	Sich selbst einschätzen	3	Stochastik (Mittelwerte berechnen, Diagramme erstellen und deuten, Wahrscheinlichkeit mithilfe von Baumdiagrammen bestimmen)	189
090	WR	9	VII	Aufgaben zur Stochastik	4	CD-Herstellung (Mehrstufiger Zufallsversuch Ereigniswahrscheinlichkeiten berechnen)	207
091	WR /dS	9	REG			geometrische Verteilung, Mogeln mit Diagrammen,	284
092	WR /dS	9	REG			Moore, Gordon, Mooresches Gesetz,	285
Einführungsphase							
093	WR	EF	IV	LE2	ZZW 13	<u>Zweimal ziehen mit Zurücklegen aus Lostrommel (Wahrscheinlichkeit bestimmen, relative Häufigkeit aus absoluter Häufigkeit berechnen und mit Wahrscheinlichkeiten vergleichen)</u>	119
094	WR	EF	IV	LE 3	ZZW 17	<u>Wahrscheinlichkeiten beim Quaderwürfel schätzen (Wahrscheinlichkeit von Elementarereignissen bestimmen, Schätzen anhand relativer Häufigkeiten)</u>	123

095	WR	EF	V	AUF		Schlüsselkonzept: Wahrscheinlichkeit „Wahrscheinlichkeiten helfen uns dabei, Prognosen nicht nur „aus dem Bauch heraus“ zu treffen.“; Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten werden die Pfadregel und die Summenregel angewandt. Baumdiagramme veranschaulichen die Regel (Bild von einem Baumdiagramm); Bild von zwei Blitzen; „Bedingte Wahrscheinlichkeiten erklären, warum Produkte meist mit prominenten und attraktiven Modellen beworben werden. [...] [Werbebild]	142
096	WR /dS	EF	V	AUF	DKS	Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsversuchen; Würfel und Urne als Zufallsgeräte; Prozentangaben für Wahrscheinlichkeiten; Anteile von Anteilen; Mittelwerte	142
097	WR	EF	V	AUF	DKB	Zufallsversuche durch Mengen und Erwartungswerte beschreiben; Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen bestimmen; Ereignisse auf Unabhängigkeit untersuchen; Simulationen zur Abschätzung unbekannter Wahrscheinlichkeiten durchführen; z.B. Lernprozesse durch bedingte Wahrscheinlichkeiten beschreiben.	143
098	WR /dS	EF	V	AUF		[Alle Prozessbezogenen Kompetenzen (Argumentieren/Kommunizieren, Modellieren, Werkzeuge) sind ausgewiesen, außer Problemlösen]	143
099	WR /dS	EF	V	AUF		<u>„Wissen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Reißzwecke auf die eine oder die andere Seite fällt? Im Gegensatz zum Blitz bei einem</u>	143

						<p><u>Gewitter kann man mit der Reißzwecke experimentieren. Durch häufiges Werfen erhält man Hinweise auf die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.“</u> (Bild von zwei Blitzen und Reißzwecken); „Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Auftreten von Sechsen beim zweimaligen Wurf eines Würfels (Bild: Hand mit zwei Würfeln; Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Sechsen als Säulendiagramm beim zweimaligen Wurf)</p>	
100	WR	EF	V	ERK	1	<p><u>Laplace-Bleistifte „fair“? (Experimentieren -> Simulieren (Mit Würfeln im Becher, GTR oder Tabellenkalkulation) -> Nachdenken. (Entscheidungsregel, Erwartungswert, Qualität der Würfe))</u></p>	144
101	WR /dS	EF	V	LE1	EIN	<p><u>Wahrscheinlichkeiten als Modelle für die Wirklichkeit</u> <u>(relative Häufigkeiten hängen vom Zufall ab, Wahrscheinlichkeiten so festzulegen, dass sie relative Häufigkeiten auf lange Sicht gut vorhersagen, zugleich nutzt man mögliche Symmetrien)</u></p>	146
102	WR /dS	EF	V	LE1	MK	<p>Den einzelnen Ergebnissen eines Zufallsversuchs kann man Wahrscheinlichkeiten zuordnen. <u>Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn sie die relativen Häufigkeiten bei großer Versuchszahl gut vorhersagen.</u> Die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse summieren sich zu 100%. Sie bilden eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.</p>	146

103	WR /dS	EF	V	LE1	EIN	<u>Mittelwerte charakterisieren Häufigkeitsverteilungen; nutzt man statt relativer Häufigkeiten in der Formel des arithmetischen Mittels \bar{x} so erhält man den Erwartungswert μ (Herv. im Original). [...] „Da die relativen Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeiten schwanken, schwanken auch die Mittelwerte zufallsbedingt um den Erwartungswert. Damit ist der Erwartungswert eine Prognose für den zu erwartenden Mittelwert. Man bezeichnet ihn kurz als ‚theoretischen Mittelwert‘“.</u>	146 – 147
104	WR /dS	EF	V	LE1	MK	<u>Wenn bei einer Datenerhebung die Ergebnisse x_1, x_2, \dots, x_n mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n auftreten, dann heißt $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$ der Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Er gibt an, welchen Mittelwert man bei ausreichend großer Versuchszahl auf lange Sicht erwartet.</u>	147
105	WR	EF	V	1	ZZÜ 7	<u>Wurf mit Dreiecksprisma (Wahrscheinlichkeitsverteilung aus gegebenen relativen Häufigkeiten schätzen, prüfen warum sinnvolle Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmten Erwartungswert haben [Symmetrieargument])</u>	148
106	WR	EF	V	LE1	10	<u>Zufallsgeräte mit Tabellenkalkulation simulieren (Zufallsgenerator zu Zufallsgerät zuordnen, Mittelwert von häufiger Durchführung der einzelnen Simulationen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgeräte und Erwartungsgeräte</u>	149

						bestimmen und mit Mittelwerten bestimmen)	
107	WR	EF	V	LE2	EIN	Mehrstufige Zufallsversuche beschrieben durch Baumdiagramme und Bestimmung durch Pfad und Summenregel am Beispiel des mehrfachen Drehens eines Glücksrads. Zugleich Einführung der Begriffe Ergebnismenge, Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, Teilmenge Eigenschaft der Ereignisse als Teilmenge der Ergebnismenge, Einführung Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Rückführung auf Wahrscheinlichkeiten zugehöriger Ergebnisse und Definition des Gegenereignisses.	150
108	WR	EF	V	LE2	MK	<p>Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsexperiments erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert.</p> <p>Summenregel: Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses E erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addiert.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen ergänzen sich zu 1: $P(D) + P(\bar{D}) = 1$.</p>	150
109	WR	EF	V	LE2	7	Rohe und gekochte Eier (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Erwartungswertbestimmen oder das Experiment simulieren und Mittelwert bestimmen)	153

110	WR	EF	V	LE3	MK	$P_A(B)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, wenn man weiß, dass A eingetreten ist. Es gilt $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ bzw. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	155
111	WR	EF	V	LE3	11	Haarfarbe und Geschlecht (Beispiel Vierfeldertafel zu Aussagen angeben, Aussagen symbolisch notieren, Wahrscheinlichkeit bestimmen)	157
112	WR	EF	V	LE3	12	Vierfeldertafel zu gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeitsaussagen konstruieren, Beweis von $P_A(B) > P(B) \Rightarrow P_B(A) > P(A)$	157
113	WR	EF	V	LE4	EIN	[...] <u>Mit ‚bedingten Wahrscheinlichkeiten‘ gelingt es, den Begriff der Unabhängigkeit mathematisch zu präzisieren und das Ziehen von Rückschlüssen aus Beobachtungen zu verstehen.</u> “ Erklärung von <u>stochastischer (Un-)Abhängigkeit im Urnenmodell mit und ohne Zurücklegen.</u>	158
114	WR	EF	V	LE4	MK	Zwei Ereignisse E und F heißen stochastisch unabhängig , wenn gilt: $P_E(F) = P(F)$. Da nach der Pfadregel stets gilt $P(E \cap F) = P(E) \cdot P_E(F)$, folgt: Zwei Ereignisse E und F sind genau dann unabhängig, wenn gilt: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.	158
115	WR	EF	V	LE4	EIN	<u>Unabhängigkeit ist häufige Modellannahme, Prüfung ob Unabhängigkeit vorliegt durch Formel, „Da sich bei Abhängigkeit wegen $P_E(F) \neq P(F)$ durch die Beobachtung von E die Wahrscheinlichkeit von F ändert, schätzt man nach der</u>	159

						<u>Beobachtung von E die Realität anders ein. Man hat aus der Beobachtung von E etwas über F „gelernt“.</u>																	
116	WR	EF	V	LE4	ZZÜ 8	Geschlecht und ein Ereignis A (Unabhängigkeit zeigen, (bedingte) Wahrscheinlichkeiten aus Vierfeldertafel bestimmen, Vierfeldertafel in Baumdiagramm übersetzen, ein Anwendungsbeispiel konstruieren)	160																
117	WR	EF	V	WVV	12	<p><u>Spickzettel zum Verhältnis von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten</u></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;">Zufallsexperiment/ Datenerhebung mit möglichen Ergebnissen x_1, x_2, \dots, x_n</td> </tr> <tr> <td style="width: 50%;">Realität Relative Häufigkeiten h_1, h_2, \dots, h_n</td> <td style="width: 50%;">Modell Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n</td> </tr> <tr> <td>$0 \leq h_i \leq 1$</td> <td>$0 \leq p_i \leq 1$</td> </tr> <tr> <td>Summe 1</td> <td>Summe 1</td> </tr> <tr> <td>nach Experiment schwanken</td> <td>vor Experiment festgelegt</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;">Bei Symmetrien</td> </tr> <tr> <td>ungefähr gleich</td> <td>genau gleich</td> </tr> <tr> <td>Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \dots + x_n \cdot h_n$</td> <td>Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$</td> </tr> </table> <p>(Tabelle erläutern, mit Beispiel illustrieren, Bei Wahrscheinlichkeit auch auf Ergebnis von Experiment zurückführen [Lösung: „Mit Wahrscheinlichkeiten sagt man relative Häufigkeiten voraus. Wahrscheinlichkeiten liegen also zeitlich gesehen vor den nächsten Versuchen. Das ist der in der Tabelle notierte Zusammenhang. Andererseits gehen in Fällen, in denen man Wahrscheinlichkeiten schätzen muss, die Erfahrungen vergangener Versuchsserien mit ein. Unter diesem Aspekt ist auch Tinas Position gerechtfertigt.“])</p>	Zufallsexperiment/ Datenerhebung mit möglichen Ergebnissen x_1, x_2, \dots, x_n		Realität Relative Häufigkeiten h_1, h_2, \dots, h_n	Modell Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n	$0 \leq h_i \leq 1$	$0 \leq p_i \leq 1$	Summe 1	Summe 1	nach Experiment schwanken	vor Experiment festgelegt	Bei Symmetrien		ungefähr gleich	genau gleich	Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \dots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$	163
Zufallsexperiment/ Datenerhebung mit möglichen Ergebnissen x_1, x_2, \dots, x_n																							
Realität Relative Häufigkeiten h_1, h_2, \dots, h_n	Modell Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n																						
$0 \leq h_i \leq 1$	$0 \leq p_i \leq 1$																						
Summe 1	Summe 1																						
nach Experiment schwanken	vor Experiment festgelegt																						
Bei Symmetrien																							
ungefähr gleich	genau gleich																						
Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \dots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$																						

118	WR	EF	V	WVV	15	Wahrscheinlichkeit in binomialverteilten Versuch erraten (bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen, erläutern „mit bedingten Wahrscheinlichkeiten das Lernen aus Erfahrung modellieren können“)	163
119	WR	EF	V	EXK	EIN	<p><u>„Lernen aus Erfahrung: Menschen lernen dadurch, dass sie verschiedene Annahmen („Hypothesen“) über einen Sachverhalt mit Beobachtungen und Erfahrungen („Indizien“) abgleichen. [...] Bedingte Wahrscheinlichkeiten helfen, diesen Erkenntnisprozess zu verstehen.“</u></p> <p>Vorstellung eines Experiments mehrfach eine Kugel ziehen nach Wahl einer Urne, bis man „intuitiv davon ausgeht“, welche Urne gezogen wurde.</p>	164
120	WR	EF	V	EXK	MK	<p>Die Regel von Bayes</p> <p>(1) Im Alltag schenkt man verschiedenen Hypothesen A, B, C gleiches manchmal auch unterschiedlich großes Vertrauen. Man ordnet ihnen subjektive a-priori Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ zu.</p> <p>(2) Wenn ein Indiz I unter diesen Hypothesen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten $P_A(I)$, $P_B(I)$, $P_C(I)$ auftreten würde, erwartet man das Indiz (a-priori) insgesamt mit der totalen Wahrscheinlichkeit $P(I) = P(A) \cdot P_A(I) + P(B) \cdot P_B(I) + P(C) \cdot P_C(I)$.</p>	165

						Wenn man dann I tatsächlich beobachtet, vergleicht man die Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Indiz von den fraglichen Alternativen stammen könnte. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten ändern sich dadurch zu den a-posteriori Wahrscheinlichkeiten. $P_1(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(I)}{P(I)}$, $P_1(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(I)}{P(I)}$, $P_1(C) = \frac{P(C) \cdot P_C(I)}{P(I)}$ (Regel von Bayes)	
121	WR /dS	EF	V	TRA	3	Aussagen einordnen (Erwartungswert und Mittelwert, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit, Simulationen von Zufallsgeräten und Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten [Lösung: a) Falsch, der Mittelwert ist zufallsabhängig, nicht der Erwartungswert. Der Mittelwert schwankt um den Erwartungswert, f) <u>Richtig, durch geeignete Simulationen erhält man relative Häufigkeiten, mit denen man bei hohem Versuchsumfang die Wahrscheinlichkeiten gut abschätzen kann.</u>])	167
122	WR /dS	EF	V	TRA	5	Unterschied zwischen Mittelwert und Erwartungswert [Lösung: „Wenn es sich in der Tabelle um relative Häufigkeiten handelt, stellt 4,15 den Mittelwert, ansonsten den Erwartungswert dar.]	167
123	WR /dS	EF	REG			Bedingte Wahrscheinlichkeit, Ereignis, Ergebnis, Ergebnismenge, Erwartungswert, Gegenereignis, mehrstufige Zufallsexperimente, Mengenschreibweise, Mittelwert	277

124	WR /dS/ kB	EF	REG			Pfadregel, relative Häufigkeiten, Schnittmenge, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Ziehen mit Zurücklegen, Ziehen ohne Zurücklegen	278
Qualifikationsphase							
125	dS	Q	II	WT	MK	Die Zahl $\bar{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ heißt Mittelwert der Funktion f auf [a; b].	84
126	dS	Q	II	WT	6	Funktionen zu gegebenem Mittelwert finden	85
127		Q	III	TRA	10	Radioaktiver Zerfall Radon [Randtext: Radioaktiver Zerfall ist ein stochastischer Vorgang, wie man an dem Graphen (Fig. 1) sieht. Jedes Radon-Atom zerfällt in der nächsten Sekunde mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p. Wie groß ist p? Wieso nimmt die Aktivität exponentiell ab?	127
128	WR /dS/ bS	Q	VIII	AUF		Schlüsselkonzept: Wahrscheinlichkeit – Statistik „In der beschreibenden Statistik sammelt man Daten. <u>In der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnet man Modelle. In der beurteilenden Statistik prüft man Modelle.</u> “ [dazu passendes Bild, in dem beurteilende Statistik dargestellt wird als <u>das Vermuten eines Modells mit den Kennwerten μ, σ aus der Realität mit den empirischen Kennwerten \bar{x} und s und der Testung des Modells an der Realität</u>], gibt es gedächtnislose Münzen und warum (passendes Bild)	268

129	WR /dS	Q	VIII	AUF	DKS	bedingte Wahrscheinlichkeiten, mit Pfadregel und Summenregel Wahrscheinlichkeit berechnen, mit Simulationen Wahrscheinlichkeiten schätzen, Mittelwert einer Häufigkeitsverteilung, Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, stochastische Unabhängigkeit,	268
130	WR /dS	Q	VIII	AUF	DKB	mit Bernoulli-Ketten zu arbeiten, mit Binomialverteilungen Probleme zu lösen, Standardabweichung und Erwartungswert (auch von Binomialverteilung) wird eingeführt, Hypothesen über unbekannte Wahrscheinlichkeiten zu testen, <u>von Stichproben auf die Gesamtheit, von relativen Häufigkeiten auf die Wahrscheinlichkeit schließen</u>	269
131	WR /bS	Q	VIII	ERK	2	<u>Vierfacher Zufallsversuch mit verschiedenen Zufallsgeräten (sieben Zufallsgeräte besorgen, Experiment mit großem n durchführen, Wahrscheinlichkeiten je Zufallsgerät schätzen, Trefferzahl für ein Zufallsgerät schätzen, mehrfache Wurf Wahrscheinlichkeit schätzen, Galtonbrett Simulation)</u>	270
132	WR /bS	Q	VIII	ERK		25 Testaufgaben zur Stochastik (aus den vorhergehenden Klassenstufen): beschreibenden Statistik (Mittelwerte, Boxplots, relative Häufigkeit, absolute Häufigkeit, Säulendiagramm), zur Begriffsbildung („mit relativen Häufigkeiten kann man Wahrscheinlichkeiten schätzen“, <u>„Wahrscheinlichkeiten sagen den Ausgang einzelner Zufallsexperimente vorher“</u> , <u>„Wahrscheinlichkeiten sehen relative Häufigkeiten</u>	271

						auf lange Sicht vorher“ „Wenn man es genau nimmt, gibt es in Wirklichkeit keine echten Laplace-Würfel“), Pfadregel (mehrstufige Zufallsversuche, verschiedene mehrstufige Ereignisse, Pfadregel, Summenregel, Wahrscheinlichkeitsverteilungen)	
133	dS	Q	VIII	LE1	EIN	„Bevor man die Realität durch <u>Wahrscheinlichkeitsmodelle</u> beschreibt, muss man sie durch <u>Messen</u> und <u>Zählen</u> erfassen.“, Kennwerte und Darstellung, Bsp. Statistische Messung von gehäuften und gestrichenen Esslöffeln (Bestimmung Mittelwert und empirische Standardabweichung),	273
134	dS	Q	VIII	LE1	MK	Gegeben ist eine Urliste $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. die zugehörigen Kenngrößen sind: der Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ und die empirische Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)}$. Bei Messungen charakterisiert die Standardabweichung die Messgenauigkeit.	273
135	dS	Q	VIII	LE1	EIN	Erklärung der Gauß'schen Faustregel in Bezug auf Messwerte innerhalb des Standardabweichungs-Intervalls, „Hinter dieser Faustregel, die den Sinn der Standardabweichung verdeutlicht, steckt ein tief liegender Satz, der zentrale Grenzwertsatz. Den kann man in der Schule nicht beweisen. Ein Spezialfall, der Satz von De Moivre-Laplace, wird auf S. 335 thematisiert.“	273

136	dS	Q	VIII	LE1	4	Minute schätzen (Kennwerte aus Urlisten bestimmen, verglichen mit geschätzten Kennwerten aus Säulendiagramm, Beurteilung ob sich Schätzfähigkeit verbessert hat, mit Gauß'scher Faustregel vergleichen, Experiment selbst durchführen mit gegebener Versuchsanleitung)	274
137	dS	Q	VIII	LE1	8	Kreiszahl π durch Messen bestimmen (Klassenbreite im Säulendiagramm angeben, absolute Häufigkeit vermessener Objekte rekonstruieren, Kennwerte der Messwerte bestimmen, Bewertung auf wie viele Nachkommastellen die Messung angegeben werden sollte)	275
138	dS	Q	VIII	LE1	10	Fallexperimente am Schulgebäude (Fallzeiten experimentell bestimmen, Kennwerte der aufgenommenen Daten bestimmen und vergleichen, Höhe des Gebäudes bestimmen)	275
139	WR /dS	Q	VIII	LE2	EIN	„ <u>Häufigkeitsverteilungen charakterisiert man durch die Kenngrößen Mittelwert \bar{x} und empirische Standardabweichung s. Wenn man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung als Modell angeben kann, so werden entsprechende theoretische [Herv. im Original] Kenngrößen festgelegt, die man Erwartungswert μ (lies Mü) und Standardabweichung σ (lies Sigma) nennt. Sie ermöglichen eine Prognose der empirischen [Herv. im Original] Kenngrößen \bar{x} und s. Das wird an einem Beispiel erläutert.“</u> Lotteriebeispiel, Begriffsklärung von Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung der	277 – 278

						Zufallsgröße, Begriffsklärung des Erwartungswert im Kontext als mittlerer Gewinn, die Standardabweichung gibt Streuung um Erwartungswert an. [Randtext: Analogie: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ermöglicht eine Prognose seiner relativen Häufigkeit]	
140		Q	VIII	LE2	MK	Für eine Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ definiert man folgende Kenngrößen: Erwartungswert von X : $\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$ Standardabweichung von X : [Verkürzt dargestellt, G.S.] $\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots}$	278
141	WR /dS	Q	VIII	LE2	BSP1	„ <u>Modell und Realität</u> “ (Augensumme beim Würfeln mit zwei Würfeln, Bestimmung der theoretischen Kennwerte, Vergleich mit Experiment oder Simulation) [insbes. wird auf das unterschiedliche Aussehen zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Häufigkeitsverteilung der Simulation hingewiesen, G.S.]	278
142	WR /dS	Q	VIII	LE2	3	<u>Katzendrillingsgeburt</u> (Wahrscheinlichkeitsverteilung und theoretische Kenngrößen bestimmen, Simulation mit Münzwürfen oder „elektronischem Rechenhilfsmittel“, erläutern des Zusammenhangs zwischen theoretischen und empirischen Kenngrößen)	279
143	WR /bS	Q	VIII	LE2	14	„Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz experimentell prüfen“ Simulation durch Zufallsexperiment (theoretische Kennwerte be-	281

						<u>rechnen, bestätigen durch Simulation mit steigender Versuchsanzahl, Mittelwert und Standardabweichung betrachten, Prüfen der Gauß'schen Faustregel mit der Simulation.</u>	
144	WR	Q	VIII	LE3	MK	<p>Eine Bernoulli-Kette der Länge n besteht aus n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit den Ergebnissen 1 („Treffer“) und 0 („Niete“).</p> <p>Beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer und ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für r Treffer mithilfe der Bernoulli-Formel:</p> $B_{n,p}(r) = \binom{n}{r} p^r \cdot (1-p)^{n-r}; r = 0, \dots, n$ <p>Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $B_{n,p}$ heißt Binomialverteilung. Die Zufallsgröße X heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p.</p>	283
145	KB	Q	VIII	LE3	EIN	Berechnungsmöglichkeit des Binomialkoeffizienten („mit dem GTR oder Excel, mit dem Pascal-Dreieck, per Hand mit der Formel)	283
146	WR /dS	Q	VIII	LE3	10	Dreifacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeitsverteilung prüfen und kommentieren, <u>Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, theoretische Kenngrößen ermitteln, Experiment mit „Rechenhilfsmittel“ simulieren und Vergleich von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sowie Mittelwert und empirische Standardabweichung</u>	285

						mit entsprechenden theoretischen Größen vergleichen)	
147	WR /bS	Q	VIII	LE4	MK	Bei einer binomialverteilten Zufallsgröße X kann man alle Berechnungen mit zwei Grundfunktionen durchführen. a) Die erste Funktion berechnet zur Trefferzahl r die Wahrscheinlichkeit $P(X = r) = B_{n,p}(r)$ b) Die zweite Funktion berechnet die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq r)$, also die Summe $P(X = 0) + \dots + P(X = r) = F_{n,p}(r)$.	287
148	bS	Q	VIII	WT	EIN	<u>Messgenauigkeit lässt sich steigern durch Mittelwertbildung und mehrfache Messung, „Von Wahrscheinlichkeiten auf relative Häufigkeiten schließen – Schwankungsintervall</u> Bei einer n -stufigen Bernoullikette mit der Trefferwahrscheinlichkeit p gilt nach der 2σ -Regel [Dies ist eine Regel über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die „unserer Erfahrung nach“ auch für Häufigkeitsverteilungen gilt, G.S.] für $n \cdot p - 2\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq X \leq n \cdot p + 2\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Hieraus erhält man nach Division durch n für die relative Häufigkeit h [hier muss dann gelten, dass die absoluten Häufigkeiten bereits binomialverteilt sind!, G.S.] $p - 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X}{n} = h \leq p + 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$ „	295
149	bS	Q	VIII	WT	MK	<u>$\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz für Schwankungsintervalle</u> Bei einer Bernoullikette mit	295

						<p><u>Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p liegen fast alle (ca. 95,4%) der relativen Häufigkeiten im Schwankungsintervall</u></p> $\left[p - 2 \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2 \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$ <p>Die Länge des Intervalls halbiert (drittelt ...) sich, wenn man den Versuchsumfang vervierfacht (verneunfacht ...).</p> <p>Diese Intervalle lassen sich für Überschlagsrechnungen griffig nach oben abschätzen durch $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.</p>	
150	bS	Q	VIII	WT	MK	<p>Wenn bei einer Bernoullikette der Länge n die relative Trefferhäufigkeit h beobachtet wird, bestimmt man die Grenzen des Vertrauensintervalls $I=[a;b]$, indem man die Gleichungen $p \pm \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = h$ nach p auflöst. Man erhält näherungsweise</p> $I \approx \left[h - 2 \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + 2 \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right].$	296
151	bS	Q	VIII	WT	ZZÜ 9	Schätzung des Vertrauensintervalls und der nötigen Stichprobengröße. („Schätzen Sie bevor Sie rechnen“)	298
152	bS	Q	VIII	WT	12	<p><u>„Die Schwankungsintervalle relativer Häufigkeiten sind symmetrisch zur Wahrscheinlichkeit, aber die Konfidenzintervalle der Wahrscheinlichkeiten sind nicht symmetrisch zur relativen Häufigkeit. Erläutern Sie diese Aussage anhand von Beispielen“</u>, Diagrammform und Berechnung</p>	299
153	bS	Q	VIII	WT	13	<p>„Unter die Lupe genommen: Das Schwankungsintervall [klassische Abbildung zum empirischen Ge-</p>	299

						<p>setz der großen Zahl, G.S.] <u>Das Gesetz der großen Zahl besagt: Je größer der Versuchsumfang, desto näher liegt die relative Häufigkeit an der Wahrscheinlichkeit. [...]“</u>, Zusammenhang zwischen Schwankungsintervall und dem Gesetz der großen Zahlen angeben.</p>							
154	bS	Q	VIII	LE6	1	<p><u>Reißnagelwurf (Test bei verschiedenen Stichproben ob Gleichverteilungshypothese verworfen werden kann, Testgröße und Annahmebereich angeben durch schätzen und Berechnung, Test durchführen)</u></p>	301						
155	bS	Q	VIII	LE7	MK	<p>Einseitiger Signifikanztest einer Nullhypothese $H_0: p = p_0$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Man legt den Stichprobenumfang n und das Signifikanzniveau α (die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit, z.B. $\alpha = 5\%$) fest. 2. Als Testgröße X verwendet man die Trefferzahl. 3. <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">Linksseitiger Test</th> <th style="text-align: left;">Rechtsseitiger Test</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \geq p_0$ Alternative: $H_1: p < p_0$</td> <td>Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \leq p_0$ Alternative: $H_1: p > p_0$</td> </tr> <tr> <td>Man bestimmt den Annahmebereich $[a; n]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Ta-</td> <td>Man bestimmt den Annahmebereich $[0; b]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten</td> </tr> </tbody> </table>	Linksseitiger Test	Rechtsseitiger Test	Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \geq p_0$ Alternative: $H_1: p < p_0$	Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \leq p_0$ Alternative: $H_1: p > p_0$	Man bestimmt den Annahmebereich $[a; n]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Ta-	Man bestimmt den Annahmebereich $[0; b]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten	305
Linksseitiger Test	Rechtsseitiger Test												
Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \geq p_0$ Alternative: $H_1: p < p_0$	Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \leq p_0$ Alternative: $H_1: p > p_0$												
Man bestimmt den Annahmebereich $[a; n]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Ta-	Man bestimmt den Annahmebereich $[0; b]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten												

						<p>belle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl a heraus, sodass $P(X \leq a) > 5\%$</p> <p>Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl a heraus, sodass $P(X \leq a) > 95\%$</p>	
						<p>4. Man erhebt oder zieht eine Stichprobe vom Umfang n. H_0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmereich liegt, sonst wird H_0 verworfen.</p>	
156	bS	Q	VIII	LE9	EIN	Hypothese Frauen intelligenter als Männer, es wird nur das signifikante Ergebnis des einen Forschers veröffentlicht, da „signifikant“, Randtext: „signifikant bedeutet: ‚vermutlich nicht zufällig‘ relevant bedeutet: „bedeutsam, wichtig“	311
157	bS	Q	VIII	LE9	MK	<ul style="list-style-type: none"> - Es ist unzulässig, aus mehreren Datenerhebungen im Nachhinein eine mit signifikantem Ergebnis auszuwählen. - Es kann im Hinblick auf signifikante Ergebnisse sinnlos sein, den Stichprobenumfang n so groß zu wählen, dass selbst kleinste Unterschiede nachweisbar werden, die völlig irrelevant sind. 	311
158	bS	Q	VIII	LE9	2	Selbst „schummeln beim Münzwurf“ (Münzwurf Experiment durchführen bis man Ergebnis Hypothese zu verwerfen, ggf. mit Zufallsgenerator, wie würde man	312

						Mitschüler „verkaufen“ im Besitz einer nicht fairen Münze zu sein, kritische Antwort des Mitschülers erstellen)	
159	WR /dS	Q	VIII	WVV	2	<u>Neunmaliges Drehen eines Glücksrads (theoretische Kenngrößen bestimmen, Simulieren und empirische Kenngrößen bestimmen (Mittelwert und empirische Standardabweichung) und mit theoretischen Kenngrößen vergleichen, Gaußsche Faustformel prüfen)</u>	313
160	bS	Q	VIII	WVV	15	Erfolg Werbeagentur bewerten (Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse auf Basis der Entscheidungsregeln bestimmen, Signifikanztest konstruieren hinsichtlich verschiedener Interessengruppen, Begründung weshalb in diesem Fall Signifikanztest wenig sinnvoll) Randtext: „ Erinnerung: Statistiker sind konservativ Beim Hypothesentest wählt man in der Regel die Hypothese als Nullhypothese H_0 , an die man möglichst lange glauben möchte. Wenn mehrere Hypothesen „im Raum stehen, ist diese Wahl von eigenen Interessen geleitet. Man verwirft die Nullhypothese erst dann, ‚wenn es gar nicht mehr anders geht‘. Das nennt man den ‚konservativen (bewahrenden) Standpunkt‘ der beurteilenden Statistiker“	315
161	WR /dS	Q	VIII	WVV	16	Experiment zum Messen des Flächeninhalts von Dreiecken (Experiment durchführen, Messwerte gra-	315

						fisch darstellen und mit Kenngrößen aus, Genauigkeit des Arbeitens vergleichen)	
162	bs	Q	VIII	RBS		empirische Kenngrößen (Mittelwert, empirische Standardabweichung) und theoretische Kenngrößen (Erwartungswert Standardabweichung), Sigmaregeln (und Näherung), Signifikanztest (zweiseitig, Signifikanzniveau, Annahmehereich, einseitiger (linksseitig und rechtsseitig) Test), Signifikanz Test und dabei auftretender Fehler	319
163	WR	Q	IX	ERK	1	<u>Zufalls-Dezimalzahlen im GTR (Liste mit GTR erzeugen, Säulendiagramm anzeigen lassen, empirische Kennwerte bestimmen, vgl. mit vorgegebenem Ergebnis der theoretischen Kenngrößen, Prüfen ob Sigma-Regeln gelten, vergleich mit größerer Summandenzahl, vgl. mit Normalverteilung im GTR,</u>	324
164	WR	Q	IX	ERK	EIN	„Messfehler, Größen und Gewichte von Lebewesen und Naturprodukte sind glockenförmig verteilt. Aber auch wenn man viele „unabhängige“ Zufallsgrößen addiert, erhält man stets eine glockenförmige Verteilung und es gilt die Sigmaregel. Das soll in den folgenden Erkundungen mit simulierten und realen Experimenten untersucht und belegt werden.“	324
165	WR	Q	IX	ERK	1	Zufalls-Dezimalzahlen im GTR (Liste mit GTR erzeugen, Säulendiagramm anzeigen lassen, empirische Kennwerte bestimmen, vgl. mit vorgegebenem Ergebnis der theoretischen Kenngrößen, Prüfen	324

						ob Sigma-Regeln gelten, vergleich mit größerer Summandenzahl, vgl. mit Normalverteilung im GTR)	
166	WR	Q	IX	LE1	MK	<p>Eine Funktion f heißt Wahrscheinlichkeitsdichte über einem Intervall I, z.B. $I=[a; b]$ oder $I=(a; b)$, wenn gilt:</p> <p>(1) $f(x) \geq 0$ für alle x aus I und</p> <p>(2) $\int_a^b f(x) dx = 1$.</p> <p>Eine reellwertige Zufallsgröße X mit Werten im Intervall I heißt stetig verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f, wenn für alle r, s aus I gilt $P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$.</p>	327
167	WR	Q	IX	LE1	EIN	<p>Prognosefähigkeit der theoretischen Kennwerte der stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung des Erwartungswerts und der Standardabweichung für empirische Kennwerte der aufgenommenen Häufigkeitsverteilung von Datensätzen dem Mittelwert und die empirische Standardabweichung. „Erwartungswert und Standardabweichung sind ‚theoretische Modellgrößen‘, die sich aus der Wahrscheinlichkeitsdichte berechnen lassen. Mittelwert und empirische Standardabweichung ergeben sich dagegen im Anschluss an eine Datenerhebung.</p>	327
168	WR	Q	IX	LE1	MK	<p>Eine Zufallsgröße X mit Werten a und b und der Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt den</p> <p>Erwartungswert</p> $\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$ <p>Standardabweichung</p>	327

						$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx}$	
169	WR	Q	IX	LE1	BSP2	„Theorie und Experiment: Ein Vergleich mit dem GTR“ (GTR-Zufallszahlen gleichmäßig stetig verteilt, theoretische Kenngrößen berechnen, Simulation vergleich der empirischen Kenngrößen der Simulation mit theoretischen Kenngrößen)	328
170	WR	Q	IX	LE3	EIN	Gauß'sche Glockenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte (Körpergröße: <u>Säulendiagramme „Realität“ vs. „Modell“</u> , Randtext: <u>„Von der relativen Häufigkeit zur Normalverteilung“</u>) und nach de-Moivre-Laplace auch als Approximation der Binomialverteilung sowie zur <u>Begründung der Sigmaregeln</u> .	334
171	WR	Q	IX	LE3	MK	Eine stetige Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ , wenn sie eine Gauß'sche Glockenfunktion $\varphi_{\mu;\sigma}$ als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt.	334
172	WR	Q	IX	LE3	MK	Satz von de Moivre-Laplace: Für binomialverteilte Zufallsgrößen X mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1 - p)}$ gilt: (a) $P(X = k) = B_{n,p}(k) \approx \varphi_{\mu;\sigma}(k)$ und $P(a \leq X \leq b) \approx \int_{a-0,5}^{b+0,5} \varphi_{\mu;\sigma}(x) dx$. [Es erfolgt kein Beweis, siehe nachfolgend]	335
173	WR	Q	IX	LE3	EIN	<u>„Dabei wird die Näherung mit wachsendem Versuchsumfang n tendenziell immer besser. Der Satz von de Moivre-Laplace macht im Nachhinein verständlich, warum man die Standardabweichung bei</u>	335

						<p><u>Binomialverteilungen über den Wendepunkt</u> „definieren“ kann – und begründet auch die auf <u>S. 288 experimentell gewonnene Sigmaregel für binomialverteilte Zufallsgrößen.</u></p> $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} \varphi_{\mu; \sigma}(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi_{0; 1}(x) dx \approx 0,683''$	
174	WR	Q	IX	WVV	2	Tisch und Regentropfen (Funktion anpassen um Wahrscheinlichkeitsdichte zu erhalten, Begründung, dass konstruierte Funktion zum Kontext passt, Simulation mit GTR begründen, Verallgemeinern für beliebige rechteckige Tischmaße)	340
175	WR	Q	IX	WVV	3	Normalverteilung untersuchen (Mit gegebenen theoretischen Kennwerten den Graphen skizzieren, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse schätzen, Mit GTR Schätzungen prüfen)	340
176	WR	Q	IX	WVV	11	Verteilungsfunktionen betrachten (Diagramme verschiedener Verteilungen durch berechnen einzelner Werte prüfen, begründen weshalb alle Verteilungsfunktionen monoton steigen, anschauliche Erklärung, warum Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsgrößen keine und Verteilungsfunktionen diskreter Zufallsgrößen Sprünge aufweisen können)	342
177	WR	Q	IX	RBS		Stetig verteilte Zufallsgrößen (Wahrscheinlichkeitsdichte), Normalverteilung (Wendestellen bei $\pm\sigma$, Satz von Moivre-Laplace, „ Modellieren <u>Wenn man zu einer Häufigkeitsverteilung mit Mittelwert \bar{x}</u>	345

						<u>und empirischer Standardabweichung s eine Normalverteilung $\varphi_{\mu,\sigma}$ als Modell angeben möchte, schätzt man die Parameter durch $\mu \approx \bar{x}$ und $\sigma \approx s$. Im Modell kann man Wahrscheinlichkeiten berechnen.“</u>	
178	WR	Q	IX	TRA	5	Verschiedene Ereigniswahrscheinlichkeiten aus einem Integral abschätzen, Kontexte angeben in denen Fragen auftreten, die durch die Wahrscheinlichkeiten beantwortet werden,	346
179	WR	Q	X	AUF		„Man kann viele zufallsgesteuerte Vorgänge wie das Warten auf bestimmte Ereignisse oder die Entwicklung von (z.B. biologischen oder physikalischen Systemen als Irrfahren auf Graphen mit endlich vielen Knoten deuten. Man spricht dann von stochastischen Prozessen. Einfachstes Beispiel sind Bernoulliketten, Bild: Irrfahrt durch Münzwurf auf dem Zahlenstrahl, Bild: Vögel auf Kabeln)	348
180	WR	Q	X	AUF	DKS	Grenzwerte, Gleichungssysteme, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Baumdiagramme und Pfadregeln,	348
181	WR	Q	X	AUF	DKB	Stochastische Prozesse durch Prozessdiagramme und Zustandsverteilungen beschreiben, Entwicklung von Prozessen mit Matrizen berechnen, Entwicklung stochastischer Prozesse auf lange Sicht beurteilen, Methoden der Analysis, Lineare Algebra und Stochastik zur Problemlösung einsetzen [interessanterweise bei den inhaltsbezogenen Kompetenzen nicht ausgewiesen]	349

182	WR	Q	X	LE1	EIN	Glücksspiel 0€ oder 3€ (Versuch selbst durchführen, erläutern, dass das Spiel „prinzipiell unendlich lange dauern kann“)	352
183	WR	Q	X	LE1	MK	Die Folge der Zustandsverteilungen, die zu einem Prozessdiagramm gehören, wird als stochastischer Prozess bezeichnet. Aus einer Zustandsverteilung kann man die folgende Verteilung mithilfe einer Berechnungsvorschrift aus linearen Gleichungen berechnen, deren Koeffizienten man dem Prozessdiagramm entnimmt.	353
184	WR	Q	X	LE2	7	Prozessdiagramm zur Übergangsmatrix konstruieren, Folgeverteilungen berechnen, Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis bestimmen im Zusammenhang mit einem Wartezeitproblem, Kontext zur Übergangsmatrix angeben	358
185	WR	Q	X	LE3	6	Nachweis, dass die Produktmatrix zweier stochastischer Matrizen wieder eine stochastische Matrix ist (an selbst gewählten Beispielen, allgemein für 2x2 Matrizen)	361
186	WR /dS	Q	CI	KVIII	CL	<u>Relative Häufigkeiten berechnen, Unterschied zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten benennen, arithmetisches Mittel aus relativen Häufigkeiten bestimmen, Laplace-Wahrscheinlichkeiten berechnen und sinnvollen Einsatz angeben, Berechnungen am Baumdiagramm, „Realsituationen“ durch Zufallsexperimente simulieren/modellieren</u>	386
187	WR /dS	Q	CI	KVIII	2	<u>Mit Quadern würfeln (Wahrscheinlichkeiten vs. relative Häufigkeiten</u>	386

						<u>[Lösung: „Die Zeilen 1 und 3 enthalten Wahrscheinlichkeiten. Gegenüberliegende Quaderseiten [...], ordnet man aus Symmetriegründen gleiche Wahrscheinlichkeiten zu. Die relativen Häufigkeiten gegenüberliegender Quaderseiten sind wegen Zufallsschwankungen in der Regel nur annähernd gleich.“ (S. 476)], welche Zeile gehört zu welchem Quader, Unterschied zu Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Quader)</u>	
188	WR /KB	Q	CI	KVIII	7	<u>Schlüssel an der Tür (Simulation mit Kugelziehung entwickeln, „Franka meint, die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Schlüssel beim dritten Versuch zu erwischen, sei am größten. Prüfen Sie rechnerisch und experimentell.“</u>	387
189	WR	Q	CI	KIX	1	<u>Einheitsquadrat, eingeschriebener Kreis & eingeschriebene Parabel (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Ergebnisse der Monte-Carlo Simulation einordnen [Lösung: „Die relativen Häufigkeiten entsprechen (bis auf Zufallsschwankungen) den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten.“ (S. 477)])</u>	388
190	QR	Q	CI	KIX	2	<u>Münze auf Bierdeckel („Wie interpretieren Sie das Wort „zufällig?“ [Lösung: „Zufällig“ bedeutet hier: Der Mittelpunkt der Münze befindet sich überall auf dem Bierdeckel mit gleicher Wahrscheinlichkeit.“ (S. 477)])</u>	388
191	WR	Q	AVS		4	<u>Stetig verteilte Zufallsgrößen (Unterschied zu diskreten angeben,</u>	400

					Wahrscheinlichkeitsdichte graphisch anpassen, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, theoretische Kenngrößen ermitteln)	
192	WR /bS/ dS/ KB	Q	REG		$\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz für Schwankungsintervalle, Ablehnungsbereich, absorbierender Zustand, Absorptionswahrscheinlichkeiten, Annahmebereich, Austauschprozess, Baumdiagramm, begrenztes Wachstum, Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Formel, Bernoulli-Kette, Binomialkoeffizient, Binomialverteilung, Daten, de Moivre-Laplace (Satz von), Dichtefunktion, Einseitiger Signifikanztest, empirische Standardabweichung, erste Mittelwertsregel, Erwartungswert, Exponentialfunktion (natürliche), Exponentialgleichung, exponentialverteilte Zufallsgröße, fair, Faustregel nach Gauß, Fehler bei Hypothesentests, Fehler erster Art, Fehler zweiter Art, Gauß'sche Faustregel, Gauß'sche Glockenfunktion, geometrisch verteilte Zufallsgröße, Grenzverteilung, Grenzverteilung exakt bestimmen, Grundgesamtheit	517
193	WR /bS/ dS	Q	REG		Hypothese, innerer Zustand, Irrtumswahrscheinlichkeit, Kenngrößen (theoretische), kumulierte Wahrscheinlichkeit, linksseitiger Test, Matrix (stochastische), Messfehler zufällige, Mittelwert, Mittelwerte von Funktionen, Mittelwertsregeln, mittlere Wartezeiten, normalverteilt, Normalverteilung (tes-	518

					ten), Nullhypothese, Operationscharakteristik, Prozessdiagramm, Prozess (stochastischer), rechtsseitiger Test, reellwertige Zufallsgröße, Relevanz statistischer Tests, Ringpfeil	
194	WR /bS/ dS	Q	REG		Satz von de Moivre-Laplace, Schwankungsintervall, Sigmaregeln, Signifikanzniveau, Signifikanz statistischer Tests, Signifikanztest (einseitig, zweiseitig), stabile Verteilung, Standardabweichung, Standardabweichungs-Intervall, Standard-Glockenfunktion, Startverteilung, stetige Zufallsgröße, Stetigkeitskorrektur, stetig verteilt, stetig verteilte Zufallsgröße, Stichprobe, Stichprobenumfang, stochastische Matrix, stochastischer Prozess, Testen bei Normalverteilung, theoretische Kenngröße, Übergangswahrscheinlichkeit, Verteilungsfunktion, Verteilung, stabile, Vertrauensintervall, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit, kumulierte, Wahrscheinlichkeitsdichte, Wahrscheinlichkeitsverteilung, zufällige Messfehler, Zufallsgröße (exponentialverteilt, reellwertig, stetige), Zufallszahlen erzeugen, Zustandsverteilung, Zustandsverteilungen bestimmen, zweiseitiger Signifikanztest, zweiseitiger Test, zweite Mittelwertsregel	519

In den nachfolgenden Abschnitten werden die übergeordneten Fragestellungen der Time-Series-Analysis mithilfe einer induktiven Kategorienbildung auf der

Basis der Zeit-Serie (vgl. Tabelle 14) beantwortet. Dabei werden alle identifizierten Fundstellen (FN) zu einer vorgegebenen Kategorie angegeben. Wichtig ist, dass beachtet wird, dass sich die folgende Tabelle nicht zur quantitativen Auswertung der gesamten Schulbuchreihe eignet. Dazu müsste der Anhang E als Datengrundlage dienen.

Nichtsdestotrotz erhält man durch die Beantwortung folgender Fragen in Bezug auf die Zeit-Serie einen guten Überblick inwiefern die Schulbuchreihe des Lambacher Schweizers eine empirisch-gegenständliche Auffassung fördert. Und ob dies über alle Jahrgangsstufen beibehalten wird.

Zur einfacheren Zuordnung der Fundstellen zu den einzelnen Jahrgangsstufen wird folgender „Fundstellenstrahl“ (vgl. Abbildung 9) angegeben.

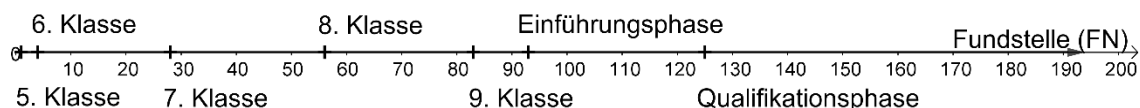


Abbildung 9: Zuordnung der Fundstellen zu den Jahrgangsstufen.

Die Fundstellen, die einer Kategorie zugeordnet werden, wurden mit „-“ voneinander getrennt.

Welches Verhältnis besteht zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer? (R)

Kategoriennr.	Kategorie	Kategoriendefinition	Fundstellen (FN)
R1	Unabhängigkeit von Wahrscheinlichkeiten aus Häufigkeitsliste	Wenn Element die Eigenschaft „Unabhängigkeit“ auf der Basis von Häufigkeiten behandelt	010-011
R2	Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zueinander in Beziehung setzen	Offener Vergleich von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten (nicht nur Größenvergleich)	028-070-072

R3	Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten vergleichen	Größenvergleich	029-049-052-065-074-078-093-146-189
R4	Relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten unterscheiden	Aspekte angeben, die relative Häufigkeiten von Wahrscheinlichkeiten unterscheiden	033-038-386
R5	Prognose für Relative Häufigkeiten durch Wahrscheinlichkeiten	Auf der Basis von Wahrscheinlichkeiten werden relative Häufigkeiten abgeschätzt oder diese Prognoseeigenschaft thematisiert	033-068-095-101-113-117-132-135-148-165
R6	Wahrscheinlichkeiten a priori und relative Häufigkeiten a posteriori	Eigenschaften der Apriorizität von Wahrscheinlichkeiten und Aposteriorizität werden (kritisch) diskutiert	035-037-071-117-132-133
R7	Wahrscheinlichkeiten gut gewählt, wenn relative Häufigkeiten nahe bei Wahrscheinlichkeiten liegen	Explizite Nennung der Kategorie	036-102
R8	Wahrscheinlichkeiten berücksichtigen [geometrische] Symmetrien des Zufallsgeräts	Explizite Nennung der Kategorie	036-071-074-101-117-187
R9	Laplace Wahrscheinlichkeit „benötigt keine“ relativen Häufigkeiten	Explizite Nennung der Kategorie	040-071
R10	(empirisches) Gesetz der großen Zahlen	Empirisches Gesetz der großen Zahl wird thematisiert oder in	050-104-153

		Element/Bearbeitung verwendet	
R11	Prognose von Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten	Auf der Basis von relativen Häufigkeiten werden Wahrscheinlichkeiten abgeschätzt oder deren Prognoseeigenschaft thematisiert	051-076-094-099-102-115-117-121-128-149-150
R12	Normiertheit relativer Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	Eigenschaft benannt, nicht zwingend durch Fachbegriff „Normiertheit“	062-071-102-117
R13	Wahrscheinlichkeit bildet Modell für relative Häufigkeiten	Modellbildung, Modellfunktion, Modellcharakter oder Modellierung werden explizit genannt	062-074-078-101-115-117-128-130-132-170-174-177-184-186
R14	Experiment und Theorie	Explizite Nennung der Kategorie	066
R15	„empirische“ und „theoretische“ Kennwerte	Empirische und theoretische Kennwerte werden ausgewiesen, genannt oder bestimmt	074-067-103-117-121-127-128-129-130-133-134-143-146-159-163-165-167-169-177-191
R16	Relative Häufigkeiten zufallsabhängig, Wahrscheinlichkeiten nicht	Explizite Nennung der Kategorie	101-117-121-152-153-187-189

Man kann feststellen, dass ein besonderer Schwerpunkt auf die Prognoseeigenschaften der Wahrscheinlichkeiten in Bezug auf relative Häufigkeiten (R5, R7) sowie umgekehrt von relativen Häufigkeiten auf Wahrscheinlichkeiten gelegt

wird (R11). Diese Verbindung passt gut zur empirisch-gegenständlichen Auffassung, dass Wahrscheinlichkeiten als theoretische Begriffe Teil einer empirischen Wahrscheinlichkeitstheorie sind, insofern die Wahrscheinlichkeiten durch einen theoriegeleiteten „Messprozess“ bestimmt werden. Dies drückt sich ebenso im häufigen Vergleich empirischer und theoretischer Kennwerte (R15), dem Verhältnis der Wahrscheinlichkeitstheorie und deren Anwendung (R14) und dem (empirischen) Gesetz der großen Zahlen aus (R10). Laplace Wahrscheinlichkeiten (R9) sind zwar auch Teil des Stochastikunterrichts dienen aber vor allem dazu einfache Wahrscheinlichkeitsmodelle zur Verfügung zu stellen und (geometrische) Symmetrien von Zufallsgeräten für die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten zu nutzen (R8). Insgesamt sind die Konzepte der Wahrscheinlichkeit und der relativen Häufigkeit eng miteinander verbunden und zwar durchgängig von der Sekundarstufe I bis zur Sekundarstufe II.

Was sind und wie werden „Zufallsgeräte“ im Sinne der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer genutzt?

Kategoriennr.	Kategorie	Kategoriendefinition	Fundstellen (FN)
Z0	Zufallsschwankungen, Ausgänge nicht vorhersagbar	Explizite Nennung der Elemente der Kategorie	015-031-035-036-056-103
Z1:	Zufällig meint gleichverteilt	Explizite Nennung der Kategorie	190
Z2	(mehrfacher) sechser Würfelwurf	Zufallsgerät wird verwendet im Experiment, oder als Kontext	005-034-041-067-074-096
Z3	(mehrfacher) Münzwurf	Zufallsgerät wird verwendet im Experiment, oder als Kontext	022-034-068-074-087
Z4	Quader-Wurf	Zufallsgerät wird verwendet im Experiment, oder als Kontext	035-074-094-187
Z5	(mehrfache) Urnenziehung	Zufallsgerät wird verwendet im Experiment, oder als Kontext	066-093-096-113

Z6	Andere & verschiedene Zufallsgeräte	Treten höchstens dreimal in der Schulbuchreihe auf oder im Element werden verschiedene Zufallsgeräte betrachtet.	006-007-010-023-037-039-045-085-065-066-071-084-105-107-131-174
Z7	Symmetrie von Zufallsgerät wichtig für die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit	Kategorie explizit genannt	036-071-074-101-105-117
Z8	Zufallsgerät verändern	Kategorie ist expliziter Arbeitsauftrag der Schüler*innen	080

Hinsichtlich der Zufallsgeräte gibt es drei Aspekte.

Zunächst ein Aspekt zur Frage was meint „zufällig“ im Lambacher Schweizer. Durchgängig wird in dieser Schulbuchreihe unter etwas „Zufälligem“ etwas „unvorhergesehenes“ verstanden, insofern man nicht sicher voraussagen kann, dass bestimmte Ereignisse eintreten (Z0). Dies lässt sich laut Lambacher Schweizer auch in der Realität anhand von zu messenden Zufallsschwankungen (Z0) belegen. Interessanterweise findet sich ganz am Ende der Schulbuchreihe eine Deutung des Begriffs „zufällig“ als gleichverteilt, wobei die Modellierung des Phänomens der „zufälligen Position“ einer Münze auf einem Bierdeckel im Fokus steht (Z1). Im Großen und Ganzen kann festgehalten werden, dass das Verständnis des Zufallsbegriffs kohärent in der Schulbuchreihe verwendet wird.

Hinsichtlich der verwendeten Zufallsgeräte werden „Klassiker“ der Stochastik, wie ein typischer Sechserwürfel (Z2), Münzen (Z3), Quader (Z4) und Urnenexperimente (Z5) genutzt. Hierbei werden sowohl einstufige als auch mehrstufige Zufallsversuche betrachtet, die die Schüler*innen auch konkret mit den genannten Materialien durchführen (vgl. Frage zu: Vorgehensweisen im Stochastikunterricht). Natürlich werden zum Wechsel der Kontexte auch noch andere Zufallsgeräte zum Experimentieren oder zum Modellieren verwendet (Z6).

Bei diesen Zufallsgeräten stehen zum einen (geometrische) Symmetrieeigenschaften im Vordergrund für die Schätzung der Wahrscheinlichkeiten (Z7), zum anderen aber auch die Veränderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Änderung des Zufallsgeräts (z.B. Veränderung des Urneninhalts) (Z8).

Welche Vorgehensweisen im Stochastikunterricht, insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechnung, werden in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer vorgeschlagen bzw. angeregt?

Kategoriennr.	Kategorie	Kategoriendefinition	Fundstellen (FN)
V1	Experimentieren	Im Element wird ausschließlich das „Experimentieren“ als Vorgehensweise adressiert.	005-006-011-023-052-099-161-164-165-182
V2:	Daten auswerten	Im Element wird ausschließlich das „Daten auswerten“ als Vorgehensweise adressiert.	010-023-087
V3	Dokumentation (Versuchsprotokoll/Tagebuch erstellen)	Das Dokumentieren von Ergebnissen steht im Vordergrund.	022-023
V4	Simulation(en) durchführen	Im Element wird ausschließlich das „Simulationen durchführen“ als Vorgehensweise adressiert.	028-033-046-048-049-050-052-065-097-106-109-121-129-143-146-158-165-164-169-174
V5	Prozessschema: Spekulieren, Experimentieren, Bewerten, Berechnen, Simulieren	Mindestens zwei der Prozessschritte werden im Element miteinander verknüpft oder aufeinander aufgebaut	034-035-037-039-041-067-068-070-077-078-084-094-100-131-150-154-175-188

V6	Prüfen ob Laplace Wahrscheinlichkeit gerechtfertigt ist	Experimentelle oder argumentative Prüfung, ob Laplace-Experiment vorliegt	043-044-045-100-132-154-186
V7	Versuchszahl wird erhöht (in der Regel für bessere Passung zwischen empirischen und theoretischen Kenngrößen)	In Element wird Erhöhung der Versuchszahl gefordert oder betrachtet	050-051-106-131-153-173-181
V8	Wahrscheinlichkeiten berechnen (mit Pfadregeln, Satz von Bayes)	Im Element werden Wahrscheinlichkeiten durch Anwendung von Rechenregeln bestimmt	061-063-064-065-074-075-075-086-089-090-095-097-107-108-116-118-127-129-132-180-183-184
V9	Gruppenergebnisse zusammenführen	Im Element sollen Versuchsreihen verschiedener Gruppen zu einer gesamten Versuchsreihe zusammengestellt werden.	068
V10	Zufallsgerät zu vorgegebener Datenliste zuordnen	Element beinhaltet Auftrag der Kategorie	079-085
V11	Stellungnahme zu Wahrscheinlichkeitsaussage (mit Bezug zur Empirie) abgeben	Element fordert zur Stellungnahme auf.	118-119-120-152

In Bezug auf die empirisch-gegenständliche Auffassung der Stochastik im Schulunterricht lässt sich festhalten, dass diese nicht nur auf theoretischer Ebene im engen Verhältnis von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten, sondern

auch durch die verwendeten Zufallsgeräten und deren Eigenschaften angeregt wird. Schaut man auf das intendierte Vorgehen im Umgang, sowohl mit den (theoretischen) Konzepten als auch den empirischen Zufallsgeräten, so wird der Fokus auf die Funktionen der Perspektiven in subjektiven Erfahrungsbereichen gelegt. Hierbei fällt auf, dass insbesondere das in Klasse 7 etablierte und konsequent in jeder Jahrgangsstufe bis in die Qualifikationsphase verwendete Prozessschema: „Spekulieren → Experimentieren/Simulation → Bewerten → Berechnung/Simulation“ (V5) ein fester Bestandteil des Stochastikunterrichts ist. Dies ist ein Hauptindiz dafür, dass eine empirisch-gegenständliche Auffassung, entsprechend der Charakterisierung in dieser Arbeit, konsequent im Stochastikunterricht von der Sekundarstufe I bis in die Sekundarstufe II angeregt und gefördert wird. Natürlich werden auch in einigen Fundstellen nur Teilprozesse des Prozessschemas in den Blick genommen (V1, V2, V3, V4, V8).

Weitere Vorgehensweisen liegen darin die Passung von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zu prüfen, zu kommentieren und zu reflektieren. Insbesondere hinsichtlich der Unterscheidung theoretischer und empirischer Konzepte (V6, V7, V9, V10, V11).

8.4.1 Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 3

Die Untersuchung zeigt, dass im Schulkontext eine empirisch-gegenständliche Auffassung nachweisbar ist. Dies stützt sich auf den Ergebnissen einer Time-Series-Analysis sowie der Kontextanalyse mit Bezug zu den für die untersuchte Schulbuchreihe gültigen Lehrpläne, die ebenso eine empirisch-gegenständliche Auffassung konsequent von der Sekundarstufe I bis zur Sekundarstufe II im Bereich der Stochastik fordern.

Neben diesen konkreten inhaltlichen Ergebnissen, die in weiten Teilen dem der Untersuchung 1 von von Mises Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechen (vgl. 6), wurde eine Schulbuchreihe hinsichtlich ihrer Megastruktur also ihrem Aufbau innerhalb der Schulbuchreihe untersucht. Das Konzept der Megastruktur bildet dabei eine natürliche Erweiterung der Strukturebenen nach Rezat (2009). Hierbei zeigt sich, dass die in der Reihe Lambacher Schweizer dargestellte Stochastik kohärente Perspektiven und Funktionen von subjektiven Erfahrungsbereichen ermöglicht, die so auch eine homogene empirisch-gegenständliche Auffassung fördern können.

An dieser Stelle sei erneut auf den Unterschied zwischen empirisch-gegenständlichen und naiv empirisch-gegenständlichen Auffassungen hingewiesen. Letztere sind häufig in Bezug auf das Wissen theorielos. Der Lambacher-Schweizer stellt dagegen eine Stochastik auf der Basis einer empirischen Wahrscheinlichkeitstheorie zur Verfügung.

8.4.2 Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 3 ergeben

- Durch die hier durchgeführte Time-Series-Analysis erhält man bereits eine gute Vorstellung davon, wie eine empirisch-gegenständliche Auffassung konsequent und kohärent aufgebaut werden kann. Die hier vorgenommene Time-Series-Analysis zeigt dabei Elemente zwischen der Mikro- und der Megastrukturebene. Eine tiefere Aufgabenanalyse der Nanostruktur, d.h. eine Analyse des Aufgabentexts, der verwendeten (realen) Anwendungskontexte sowie deren Zusammenhang zu den übergeordneten Strukturebenen könnte mehr darüber verraten, welche konkrete Verbindung zwischen den Stoffgebieten des Inhaltsfelds der Stochastik vorliegen und ob gegebenenfalls Inkohärenzen innerhalb von Aufgabenstellungen vorliegen. Insbesondere ist zu vermuten, dass ein Blick auf die Nanostruktur von Aufgaben verschiedener Inhaltsfelder, eine inhaltspezifische Aufgabentypologie ermöglicht, die an Forschung zu domänenspezifischen Auffassungen anschließt (Witzke & Spies, 2018)
- Inwiefern können verschiedene Mengennotationen das Verständnis und die Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes beeinflussen, insbesondere in Bezug zu lehr- und lernpraktischen Fragen, ob bei Verwendung der Mengennotation noch Ergebnissen oder doch nur Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden sollten. Auch eine Entscheidung für den zweiten Fall erscheint im Rahmen einer empirisch-gegenständlichen Auffassung gut möglich.
- Da es sich bei der durch dieses Schulbuch vermittelten mathematischen Theorie um eine empirisch-gegenständliche Theorie handelt, wäre es sicherlich lohnenswert eine strukturalistische Rekonstruktion vorzunehmen und diese mit von Mises Theorie zu vergleichen.
- Wie kohärent sind die Begriffsentwicklungen und vertretenen Auffassungen innerhalb der Megastrukturen von Schulbuchreihen in weiteren mathematischen Inhaltsfeldern außerhalb der Stochastik.

9 Formal-abstrakte Auffassung der Stochastik an der Hochschule

„Erfreulicherweise hängt die Gültigkeit der mathematischen Aussagen über ein Wahrscheinlichkeitsmodell nicht von ihrer Interpretation ab. Die Mathematik wird nicht durch die Begrenztheiten menschlicher Interpretationen relativiert.“

(Georgii, 2009, S. 14)

In dieser Untersuchung wird der Frage nachgegangen, ob eine formal-abstrakte Auffassung der Stochastik, mit besonderem Schwerpunkt auf der Wahrscheinlichkeitstheorie, im Hochschulkontext nachzuweisen ist. Dazu werden zwei Hochschullehrbücher untersucht. Das erste Hochschullehrbuch ist das Werk „Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“ von Georgii (2009), welches das Lehrbuch ist, das ich selbst in meinem 3. Fachsemester als Begleitbuch zur von mir besuchten Vorlesung „Einführung in die Stochastik“ an der Universität zu Köln genutzt habe. Das besondere Merkmal dieses Lehrwerks liegt in der mathematischen Allgemeinheit, die sich unter anderem darin ausdrückt, dass von Beginn an Elemente der Maßtheorie genutzt werden. Das zweite Hochschullehrbuch ist das Werk „Stochastik für Einsteiger“ von Henze (2018), das sich durch eine von klassischen Lehrbüchern unterschiedliche didaktische, hinsichtlich der Gestaltung im Layout sowie Fülle und Varianz der Übungsaufgaben, und mediale Aufarbeitung, durch zu den einzelnen Passagen passende Erklärvideos, auszeichnet, was sicherlich zu ihrem Erfolg und der mittlerweile 12. Auflage geführt hat. Natürlich gibt es eine Vielzahl weiterer Lehrbücher zur Stochastik. Die Gründe für die Auswahl dieser Quellen liegen zum einen in der unterschiedlichen Organisation der Werke, bei Georgii die klassische Aufteilung zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik und bei Henze ein eher problemorientierter Aufbau, ausgehend von einer elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik und zum anderen darin, dass in beiden Werken trotz dieser Unterschiede eine formal-abstrakte Auffassung rekonstruierbar ist.

Ein weiterer für diese Arbeit wichtiger Aspekt ist der Unterschied, dass Georgii, in die Wahrscheinlichkeitstheorie mit maßtheoretischen Grundlagen einsteigt, wogegen Henze erst bei elementaren Überlegungen beginnt, um dann die Komplexität der von ihm behandelten Gegenstände zu erhöhen. Er begründet dies folgendermaßen:

„Um den Leser möglichst behutsam in die Stochastik, die Kunst des geschickten Vermutens, einzuführen, wurden die mathematischen Vorkenntnisse bewusst so gering wie möglich gehalten.“

(Henze, 2018, S. V)

Entsprechend handelt es sich um eine Auswahl, die verschiedene Ausrichtungen im breiten Spektrum der Hochschullehrbücher zur Stochastik umfasst.

Diese Untersuchung gliedert sich im Folgenden in vier weitere Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird das Ziel der Untersuchung erläutert und begründet sowie in die theoretischen Überlegungen eingebettet. Im zweiten Abschnitt werden beide Lehrwerke in ihrem Kontext verortet. Dies beinhaltet vor allem den anvisierten Leser*innenkreis, den Zweck, bzw. das Ziel des betreffenden Lehrwerks und eine überblicksartige Darstellung der jeweiligen Werkstruktur. Im dritten Abschnitt wird auf die bereits in Untersuchung 2 verwendete Methode der zusammenfassenden Inhaltsanalyse nach Mayring (2015a) verwiesen und hinsichtlich ihrer Anwendung in dieser Untersuchung eingeordnet. Im letzten Teil werden die Untersuchungsergebnisse dargestellt und untereinander, sowie mit dem Ergebnis der Untersuchung 2 (vgl. 7.4.3) verglichen.

9.1 Ziele der Untersuchung 4

Das Ziel dieser Untersuchung liegt in der Beantwortung der vierten Forschungsfrage, nämlich

4. Ist eine formal-abstrakte Auffassung im Hochschulkontext nachzuweisen und wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?

Es ist zu erwarten, dass nach der Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Sinne der modernen Mathematik nach Kolmogoroff diese moderne Grundfassung auch Einzug in die Hochschullehrwerke gehalten hat. Natürlich könnte es sein, dass Lehrbuchautor*innen nicht eine wie in 5.2.2 beschriebene Auffassung vertreten¹³⁸, oder diese von den Autor*innen nicht im Lehrbuch expliziert wird, was dann ebenso nicht nachweisbar wäre. Entsprechend der vorichtig formulierten Forschungsfrage geht es daher auch nur um den Nachweis,

¹³⁸ Dieser Fall wird durch meine Untersuchung von lediglich zwei Lehrbüchern nicht entkräftet. Nach Davis, Hersh und Marchisotto (2012) ist aber zu vermuten, dass ein großer Teil aktiver Mathematiker*innen die hier dargelegte formal-abstrakte Auffassung vertreten würde.

dass sich diese Auffassung auch in modernen Hochschullehrwerken wiederfinden lässt und auf welche Weise sich diese dann äußert.

9.2 Kontext der Quellen zur Untersuchung 4

Nach einem kurzen Vergleich beider Lehrwerke wird überblicksartig deren Werkstruktur dargestellt.

Georgii (2009) hat sein Hochschullehrwerk anhand typischer Standardthemen entwickelt. Entsprechend gliedert sich sein Buch in zwei Teile: Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Der erste Teil enthält die Kapitel mathematische Beschreibung von Zufallssituationen, stochastische Standardmodelle, bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit, Erwartungswert und Varianz, Gesetz der großen Zahl und der zentrale Grenzwertsatz sowie Markov-Ketten. In der Statistik werden u.a. Schätzer und Tests behandelt. Dieser Teil wird allerdings nicht in dieser Untersuchung betrachtet, da in der Statistik zwar Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle getestet werden, diese Testung aber kein Thema der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Trotzdem wird auch in diesem Teil Georgiis formal-abstrakte Auffassung deutlich, was sich unter anderem darin zeigt, dass mit den wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen aus dem 1. Teil ohne Bezug auf konkrete Daten umgegangen wird um mathematische Sätze der Statistik zu beweisen. Dieses Handeln wird allerdings nicht von Georgii explizit im formal-abstrakten Sinne kommentiert.

Seine Zielgruppe bilden:

„Studierende der Mathematik ab dem dritten Semester und ebenso [...] Naturwissenschaftler und Informatiker, welche die Stochastik nicht nur anwenden, sondern auch von ihrer mathematischen Seite her verstehen wollen“

(Georgii, 2009, S. v)

Ein Ziel seines Lehrwerks ist die Verbindung von Statistik und Wahrscheinlichkeit, auch wenn diese aus Georgiis Sicht geteilt sind, nutzt die Statistik Konzepte der Wahrscheinlichkeitstheorie und Modelle womit „Brückenschläge“ zwischen Wahrscheinlichkeit und Realität eröffnet werden. Wie bereits zu Beginn gesagt steht dies nicht im Fokus dieser Untersuchung.

Henze (2018) sieht dafür im Wechsel von Prosa und dem üblichen „Definition – Satz-Beweis“-Schema die Besonderheit der Stochastik als interdisziplinäres Fach.

Das Lehrwerk zeichnet sich durch einen überlegten didaktischen Aufbau aus, der neben Übungsaufgaben auch passende Online-Videos bereitstellt. Seine Zielgruppe sind insbesondere Lehrer*innen aber auch Studienanfänger*innen an Hochschulen und der Universität. In seinem Aufbau wechseln Themen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik ab, wobei die Leser*innen insgesamt von elementaren zu allgemeineren Konzepten geführt werden.

9.2.1 Kontext von Georgiis Hochschullehrwerk

Eine Grundlage der nachfolgenden inhaltsanalytischen Untersuchung (9.4) bildet das Werk „Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“ von Hans-Otto Georgii (2009) – die vierte überarbeitete und erweiterte Auflage des gleichnamigen Lehrbuchs aus dem Jahr 2002. Im Folgenden wird der systematische Aufbau des Werkes dargestellt, wobei wie eben erläutert ein besonderer Schwerpunkt auf Teil I des Lehrbuchs zur Wahrscheinlichkeitstheorie gelegt wird.

Dieser Überblick des systematischen Aufbaus des Lehrwerks unterscheidet sich von der qualitativen Untersuchung dadurch, dass nicht das Herausarbeiten bestimmter Kategorien und damit die Rekonstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche im Fokus steht, sondern die inhaltliche Abfolge der mathematischen Themen sowie deren Verknüpfung.

Das Lehrbuch gliedert sich in ein Vorwort, eine Einleitung zum Verhältnis von „Zufall und Mathematik“ und anschließend zwei inhaltlichen Hauptteilen. Der erste Teil behandelt Wahrscheinlichkeitstheorie, der zweite Teil Statistik.

Das Vorwort in Georgiis (2009, S. v–vi) Werk erfüllt verschiedene Funktionen, zum einen soll es das mathematische Gebiet der Stochastik im „Zusammenspiel von Anwendungsnähe und mathematischer Präzision“ (Georgii, 2009, S. v) zeigen. Hierbei unterscheidet Georgii direkt zu Beginn eine klassische empirische Wissenschaft von „echte[r] Mathematik mit systematischem Aufbau, klaren Konzepten, tiefen Theoremen und manchmal überraschenden Querverbindungen“ (Georgii, 2009, S. v). Zum anderen wird die zu erwartende Kompetenzerweiterung der Leser*innen, die der Autor mit seinem Werk zu erreichen sucht, expliziert. Diese Erweiterungen lägen in der Einführung „typische[r] Denkweisen, Methoden und Ergebnisse[n] der Stochastik“ (Georgii, 2009, S. v). Eine weitere Funktion des Vorworts liegt in der Begründung den Ausgangspunkt des

Teils zur Wahrscheinlichkeitstheorie auszuwählen, den er nicht als Verallgemeinerungen aus der Betrachtung diskreter Wahrscheinlichkeitsräume, sondern mithilfe maßtheoretischer Überlegungen grundlegt. Weitere Elemente des Vorworts bilden eine Leseempfehlung zum Selbststudium, eine Anleitung zum Umgang mit den angegebenen Übungsaufgaben und ein Verweis auf weitere Lehrwerke, die Georgii (2009, S. vi) als Quellen gedient haben.

Die Einleitung trägt den Titel „Zufall und Mathematik“. Ausgehend von einer Begriffsbestimmung des Begriffs „Stochastik“ mit Rückgriff auf ein Lexikon des Altgriechischen formuliert Georgii eine Beschreibung des Gebiets der Stochastik, die laut ihm dem heutigen Sprachgebrauch entspräche: „Stochastik ist die Lehre von den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls“ (Georgii, 2009, S. 1). Diese Sichtweise auf die Stochastik stützt Georgii damit, dass die Mathematik „eine exakte Sprache bereit [halte], die es erlaubt Gesetzmäßigkeiten im Zufall präzise zu formulieren und zu beweisen.“ (Georgii, 2009, S. 1). Dies scheint zunächst ein Hinweis darauf zu sein, dass Stochastik ähnlich wie eine Naturwissenschaft aufzufassen sei. Die Frage was Zufall dagegen ist, klärt Georgii bewusst nicht und verweist darauf, dass dies eine philosophische Frage sei, auf die es „noch keine definitiven Antworten“ (Georgii, 2009, S. 1) gebe. Diese Entscheidung der bewussten Ausklammerung wird besonders dadurch deutlich, dass nach diesem eher philosophischen Absatz die Frage gestellt wird „[w]ie kommt nun die Mathematik ins Spiel?“ Diese Frage beantwortet Georgii, indem er ein vereinfachtes Modellierungsschema zur Erstellung, durch „Abstraktion“ und „mathematische Idealisierung“ (Georgii, 2009, S. 2), und Prüfung, durch „Vorhersage“ sowie „Überprüfung und Korrektur“, eines mathematischen Modells eines gegebenen Ausschnitts der Wirklichkeit angibt (Georgii, 2009, S. 2). Auffällig an diesem Modellierungsschema ist die strikte Trennung zwischen Wirklichkeit und Modell, die einen klaren Verweis auf eine formal-abstrakte Auffassung darstellt (vgl. 5.2.2). Die Auswahl eines korrekten Modells erfordert dabei laut Georgii „viel Fingerspitzengefühl“ (Georgii, 2009, S. 3) und liegt „außerhalb der eigentlichen Mathematik“ (Georgii, 2009, S. 3). Diese Formulierung ähnelt in hohem Maße Kolmogoroffs (1933, S. 2) Formulierung in Fußnote 1 zu §2 seiner „Grundbegriffe“. Im letzten Absatz seiner Einleitung „Zufall und Mathematik“ verweist Georgii auf die bereits beschriebenen Unterschiede und Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastik.

Bevor nun ein detaillierterer Blick auf den ersten Teil des Werks, die Wahrscheinlichkeitstheorie, geworfen wird, soll kurz ein Überblick über den „Teil II Statistik“ gegeben werden. Die Statistik nutzt die Wahrscheinlichkeitsmodelle aus Teil I um ihre zentrale Aufgabe zu erfüllen: die „Entwicklung von Methoden, mit denen aus zufallsgesteuerten Beobachtungen auf die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten“ (Georgii, 2009, S. 193) geschlossen werden kann. Es gibt verschiedene Verfahren der Statistik aus solchen Beobachtungen Schlüsse auf konkrete Zufallsexperimente und deren zugehörige Verteilung zu ziehen. Im zweiten Teil von Georgiis Werk werden entsprechend, ausgehend von einem motivierenden Beispiel der Apfelsinenlieferung klassische Instrumente der Statistik vorgestellt. Er beginnt mit einer allgemeineren Vorstellung statistischer Fragen und Ansätze (Georgii, 2009, S. 193–197) und diskutiert dann den Begriff der statistischen Schätzer (Georgii, 2009, S. 198ff.). Die Eigenschaften solcher Schätzer und deren Gütekriterien, wie Maximum-Likelihood-Prinzip, Erwartungstreue, quadratische Fehler, Beste Schätzer und die Konsistenz von Schätzern werden von ihm im Anschluss diskutiert (Georgii, 2009, S. 201ff.). Den Abschluss des Kapitels über statistische Schätzer bildet das Konzept der Bayes-Schätzer für die sowohl a-priori als auch a-posteriori Dichten genutzt werden um einen Schätzer zu konstruieren (Georgii, 2009, S. 220ff.). Im Anschluss folgen 29 Aufgaben um das Wissen über Schätzer anzuwenden und zu vertiefen. Für einen Teil der Aufgaben hält Georgii Lösungsskizzen bereit, einem „weit verbreiteten Wunsch [der Leserschaft] entsprechend“ (Georgii, 2009, S. vi). Wobei Georgii dadurch hofft, dass die „für den Lerneffekt wichtige eigene Aktivität der Leser dadurch nicht zurückgedrängt [sic!], sondern befördert wird.“ (Georgii, 2009, S. vi). Diesem grundsätzlichen Aufbau des Kapitels in Bezug auf einen inhaltlich-präsentierenden und im Anschluss übenden Teil entsprechen auch die übrigen inhaltlichen Kapitel des Lehrbuchs im ersten und zweiten Teil und wird daher nicht mehr im Einzelnen ausgewiesen.

Nach den Schätzern folgt im II. Hauptteil, der Statistik das Thema „Konfidenzintervalle“ (Georgii, 2009, S. 229ff.). Bereits im ersten Teil zum Ansatz der Statistik ist Georgii auf die Grundideen dieses Themenbereichs eingegangen. Ein großer Vorteil der Konfidenzintervalle liegt darin, dass über die Breite der Konfidenzintervalle die Wahrscheinlichkeit angepasst werden kann, wohingegen Schätzer genau einen Wert angeben, was in der Anwendung und vor allem im Versuch einen Kennwert durch Messung festzustellen wesentlich zufallsbehafteter ist.

Das Kapitel zu den Konfidenzbereichen gliedert sich in drei Unterkapitel. Georgii beginnt mit der Definition und möglichen Konstruktionsverfahren von Konfidenzintervallen (Georgii, 2009, S. 229ff.). Im Anschluss daran werden Konfidenzintervalle im Kontext von Binomialmodellen (Georgii, 2009, S. 235ff.) und schließlich Ordnungsintervalle (Georgii, 2009, S. 241ff.) behandelt.

Die bereits im ersten Teil im Kapitel „Gesetz der großen Zahl und zentraler Grenzwertsatz“ als Approximation der Binomialverteilung eingeführte Normalverteilung wird im 3. Kapitel des Teiles zwei „Rund um die Normalverteilung“ auf mehrere Dimensionen erweitert (Georgii, 2009, S. 249ff.), sowie in der Betrachtung der χ^2 -, F - und t -Verteilung angewendet (Georgii, 2009, S. 252ff.).

Die beiden anschließenden Kapitel zehn und elf behandeln Tests. Dabei steht in Kapitel zehn das Testen von Aussagen im Sinne von Entscheidungsproblemen im Vordergrund, d.h. es werden „Alternativtests“ (Georgii, 2009, S. 269ff.) und einseitige Tests (Georgii, 2009, S. 274ff.) behandelt, wohingegen in Kapitel elf asymptotische Tests und Rangtests thematisiert werden. Erstere testen, ob die Daten einer vorliegenden Stichprobe entsprechend einer erwarteten Verteilung vorliegen. „Ordnungs- und Rangtests“ (Georgii, 2009, S. 311,ff.) ordnen Merkmale einer Stichprobe mit Rückgriff auf die Ordnung der reellen Zahlen ohne eine bestimmte Verteilung anzunehmen. Beide Arten von Tests zur Verteilung und zum Rang, bzw. zur Ordnung bauen inhaltlich auf den Begriffen und Verfahren des Kapitels zehn auf.

Den Abschluss des zweiten Teils der Statistik bildet das Kapitel „12 Regressions- und Varianzanalyse“. In diesem Kapitel geht es um Verfahren, die prüfen, ob die Abweichungen von Daten, bspw. durch zwingend auftretende Messfehler, normalverteilt und unabhängig sind. Ist dies der Fall, so lassen sich Rückschlüsse auf Abhängigkeiten von Parametern und entsprechenden statistischen Kenngrößen bestimmen.

Zusammenfassend ist die Struktur des Teiles zwei, wie Georgii (2009, S. 139) auch in seiner Einleitung dieses Teils feststellt, an den fundamentalen Ideen – oder besser Methoden – der Schätzung, der Festlegung von Konfidenzbereichen und der Testung von Hypothesen oder Testung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen ausgerichtet.

Nun soll der erste Teil „Wahrscheinlichkeitstheorie“ (Georgii, 2009, S. 5–190) von Georgiis Lehrbuch intensiver in den Blick genommen werden. Rein quantitativ

ist der erste Teil des Lehrwerkes etwas länger. Zwanzig Seiten um genau zu sein. Grundsätzlich kann aber davon gesprochen werden, dass beide Teile in Georgiis Konzeption gleichberechtigt behandelt werden. Wie auch im Teil zur Statistik gibt es insgesamt sechs Kapitel, wobei die ersten fünf „Mathematische Beschreibung von Zufallssituationen“, „Stochastische Standardmodelle“, „Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit“, „Erwartungswert und Varianz“, „Gesetz der Großen Zahl“ direkt aufeinander aufbauen und stark inhaltlich verknüpft sind. Die Abfolge dieser Themen ist in großem Maße analog zu Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (vgl. 7.2). Das sechste Kapitel „Markov-Ketten“ behandelt Folgen von Zufallsvariablen, die nicht unabhängig sind, deren Form der Abhängigkeit aber recht einfach modellierbar ist. Auch Kolmogoroff (1933, S. 11ff.) behandelt in Kapitel 1 §6 Markov-Ketten als diesen Sonderfall einer einfachen Verallgemeinerung von unabhängigen Zufallsvariablen. Da der Unabhängigkeitsbegriff aber wesentlich für die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist (Georgii, 2009, S. 153; Kolmogoroff, 1933, S. 8–9) fällt dieses Kapitel ein wenig aus den übrigen Kapiteln von Georgiis Wahrscheinlichkeitstheorie heraus, wird aber auch im Schulunterricht der Oberstufe am Beispiel der Übergangsmatrizen thematisiert, einer natürlichen Verbindung von Stochastik und Linearer Algebra. Im Folgenden werden die einzelnen Teilkapitel und deren Verknüpfung thematisiert.

Direkt zu Beginn des Kapitels „Mathematische Beschreibung von Zufallssituationen“ stellt Georgii fest, dass dieses Kapitel „einige Grundsatzfragen“ behandelt. Diese Grundfragen sieht er einerseits in der konkreten Beschreibung eines „Zufallsgeschehen“ mit mathematischen Mitteln und den allgemeinen mathematischen Eigenschaften, die ein solches stochastisches Modell innerhalb einer formalen Mathematik haben muss. Diese Konstruktion wird besonders deutlich in der Konstruktion der mathematischen Basiskonzepte, wie der Ergebnis- und Ereignismenge, sowie den Ereignis-Systemen. Dann werden die für die Stochastik „fundamentalen Begriffe“ (Georgii, 2009, S. 8) der Stochastik, der „Wahrscheinlichkeitsraum“ und die „Zufallsvariable“ eingeführt. Hierbei wählt – wie bereits zu Beginn dieses Teilkapitels dargestellt – Georgii eine maßtheoretische Grund-

legung ohne zunächst begrifflich den Spezialfall diskreter Wahrscheinlichkeitsräume zu behandeln¹³⁹. Das Kapitel ist dabei strukturell gegliedert in ein Teilkapitel zur Konstruktion von „Wahrscheinlichkeitsräumen“ (Georgii, 2009, S. 7ff.), der Konstruktion und den Eigenschaften von „Wahrscheinlichkeitsmaßen“ (Georgii, 2009, S. 15ff.) und der Konstruktion und Eigenschaften von „Zufallsvariablen“ (Georgii, 2009, S. 20ff.) abhängig von den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsräumen. Den Konstruktionsprozess untergliedert Georgii in drei Abschnitte, der Festlegung eines Ergebnisraums, wobei dieser als „Menge Ω relevanter Ergebnisse“ (Georgii, 2009, S. 8), in Auseinandersetzung mit konkreten Beispielen, sowohl finiter als auch infiniten Ergebnisräume, auf der Basis einer für diesen Zweck ausreichenden naiven Mengenlehre definiert wird. Entsprechend einer Beschreibung des typischen Interesses an Zufallsversuchen, bei denen man häufig nicht am konkreten Eintreten eines Ergebnisses, sondern am Eintreten eines Ereignisses interessiert sei, das gegebenenfalls beim Auftreten verschiedener Ergebnisse eintreten kann, entwickelt er die Idee einer Ereignismenge, die schlussendlich zur Konstruktion einer Ereignis- σ -Algebra führt¹⁴⁰. Aufgrund der Komplexität der verschiedenen Mengensysteme bietet Georgii (2009, S. 11) zur Visualisierung ein sehr übersichtliches Diagramm an, das die Element-Mengen-Relation in verschiedenen Systemen aufzeigt. Der letzte Schritt der Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsräumen bildet dann wie üblich die sog. „Wahrscheinlichkeitsbewertung der Ereignisse“ (Georgii, 2009, S. 13), entweder durch explizite Angabe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse im diskreten oder als Wahrscheinlichkeitsverteilung im infiniten Fall. Diesen Schritt bezeichnet Georgii (2009, S. 13) als entscheidend, wobei Wahrscheinlichkeitsmaße als Zuordnung $A \rightarrow P(A)$, mit $P(A) \in [0,1]$ beschrieben werden für die die Axiome

- der Normierung (N): $P(\Omega) = 1$ und
- der σ -Additivität (A): $\forall A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$, \mathcal{F} ist eine σ -Algebra, gilt $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$,

¹³⁹ Dieses Vorgehen bezeichnet Georgii (2009, S. 7) als Klärung „technische[r], anfangs vielleicht etwas unangenehme[r] Fragen“.

¹⁴⁰ Hier diskutiert Georgii (2009, S. 9) die Probleme, die sich ergeben würden, wenn man anstatt einer σ -Algebra auf der Basis der Ergebnismenge Ω die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ wählt, welche mit unendlich großer Ergebnismenge unter Berücksichtigung des Auswahlaxioms und entsprechender gewünschten Eigenschaften wie Fairness und Unabhängigkeit zu Problemen führt.

gelten. Interessanterweise spricht Georgii (2009, S. 13) nicht von Axiomen im Lehrtext, sondern davon, dass diese Zuordnung der Maßzahl „[s]innvollerweise“ so geschehen solle, dass (N) und (A) und die Nichtnegativität gelten. Somit scheint hier die Axiomatisierung aus pragmatischen bzw. konventionellen Gründen zu geschehen. Die bewusste Setzung und deren Diskussion wie in Kolmogoroff (1933, S. 1f.) fehlt, bzw. wird nur durch einen Verweis auf die Wichtigkeit Kolmogoroffs Arbeit geliefert. Diese historische Note soll hier vollständig wiedergegeben werden:

„Die Eigenschaften (N) und (A) sowie die Nichtnegativität eines Wahrscheinlichkeitsmaßes heißen manchmal auch die Kolmogorov’schen Axiome [Herv. im Original], denn es war Andrej N. Kolmogorov (1903–1987), der 1933 den Nutzen des Maß-Begriffes für die mathematische Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie hervorhob und so einen entscheidenden Anstoß zur Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie gab“

(Georgii, 2009, S. 13).

Aus diesen drei Bestandteilen kann nun ein Wahrscheinlichkeitsraum gebildet werden, der die Grundlage einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung bildet. Entsprechend definiert Georgii (2009, S. 13) (Ω, \mathcal{F}) als Ereignisraum die Funktion $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ ¹⁴¹, die die Axiome (N) und (A) erfüllt, als Wahrscheinlichkeitsmaß bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilung und das Tripel (Ω, \mathcal{F}, P) als Wahrscheinlichkeitsraum. Zum Abschluss dieses dritten Teils merkt Georgii (2009, S. 14) einige Aspekte zur „*Interpretation von Wahrscheinlichkeitsmaßen* [Herv. im Original]“ (Georgii, 2009, S. 14) an. Zunächst, dass dessen Interpretation – wie in der Einleitung bemerkt – eine philosophische Frage sei und dass es „übliche“ Interpretationen gäbe. Hier wird deutlich, dass Georgii die Mathematik bewusst und konsequent von ihrer Anwendung unterscheidet. Er nennt folgende Interpretationsarten: die „*naive Interpretation* [Herv. im Original]“ (Georgii, 2009, S. 14) bei der es um eine Einschätzung des Grades des möglichen Eintretens geht; die „*frequentistische Interpretation* [Herv. im Original]“ (Georgii, 2009, S. 14) bei der das Wahrscheinlichkeitsmaß den relativen Häufigkeiten bei mehrfacher Ver-

¹⁴¹ Mit dieser Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes als Abbildung aus einer σ -Algebra auf das Intervall $[0,1]$ erfüllt das von ihm definierte Wahrscheinlichkeitsmaß zugleich das Axiom der Nichtnegativität (Kolmogoroff 1933, S. 2).

suchsdurchführung entspräche; und die „*subjektive Interpretation* [Herv. im Original]“ (Georgii, 2009, S. 14) bei der das Wahrscheinlichkeitsmaß einer individuellen Bereitschaft zum Wetten auf den Eintritt eines Ereignisses entspräche.

Im zweiten Teilkapitel (Georgii, 2009, S. 15ff.) werden Wahrscheinlichkeitsmaße insbesondere in Bezug auf ihre Konstruktion und deren Eigenschaften betrachtet. Georgii (2009, S. 15) beginnt dabei mit einem elementaren Satz in dem fünf Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus der σ -Additivität gefolgert werden. Dazu gehört die Bemaßung des unmöglichen Ereignisses $P(\emptyset) = 0$, Aber auch die endliche Additivität, Monotonie, σ -Subadditivität und σ -Stetigkeit (Georgii, 2009, S. 15f.). Im Anschluss daran folgen Sätze zur Eindeutigkeit der Wahrscheinlichkeitsmaße auf Erzeugendensysteme und die Verknüpfung von Erzeugenden- und Dynkin-Systemen (Georgii, 2009, S. 16f.). Im letzten Teil des Teilkapitels nutzt Georgii (2009, S. 18ff.) Lebesgue-Integrale um einerseits Folgerungen zur Existenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus der Existenz von Lebesgue-Integralen zu ziehen und andererseits eine recht einfache Grundlage für stetige Wahrscheinlichkeitsdichten zu schaffen. Das letzte Teilkapitel des ersten Kapitels behandelt die Einführung von Zufallsvariablen. Auch hier nutzt Georgii (2009, S. 20) ein einführendes Beispiel, eine Zufallsvariable gibt die Anzahl des Auftretens des Ergebnisses „Zahl“ beim mehrfachen Münzwurf an und erhält so eine geringere Beobachtungstiefe, da es so keine Rolle spielt in welcher Durchführung ein bestimmtes Ergebnis auftritt, sondern nur wie oft es auftritt¹⁴². Die Definition (Georgii, 2009, S. 21) erfolgt entsprechend üblicher Konventionen. Zum Schluss (Georgii, 2009, S. 22ff.) des dritten Teilkapitels wird noch die kumulative Verteilungsfunktion F von P und die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ von P definiert.

Im zweiten Kapitel „Stochastische Standardmodelle“ behandelt Georgii (2009, S. 27ff.) einige klassische Beispiele und dafür typische Modelle. Diese folgen typischen Modellierungen sowohl in Bezug auf deren Konstruktion als auch symbolischer und struktureller Formulierung. Daher werden an dieser Stelle lediglich die behandelten Modelle benannt und auf entsprechende Stellen im Lehr-

¹⁴² Beim n -Fachen Münzwurf mit der Ergebnismenge $\Omega = \{W, Z\}^n$ und der Ergebnismenge der Anzahl von bspw. aufgetretenem Kopf $\Omega' = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kann man eine Zufallsvariable $X: \Omega \rightarrow \Omega'$ definieren, die jedem Ergebnis des Zufallsversuchs die Anzahl der aufgetretenen Seiten mit Kopf zuordnet.

buch verwiesen. Zunächst werden Gleichverteilungen behandelt (diskrete (Georgii, 2009, S. 27f.) und stetige (Georgii, 2009, S.28ff.)), im letzten Abschnitt wird dabei das Bertrand'sche Paradoxon diskutiert, das ebenfalls ein inhaltliches Element des ÜberPro_WR-Seminars bildete (vgl. 10.3.1). Die nächsten Teilkapitel behandeln die klassischen Standard-Urnenmodelle (Georgii, 2009, S. 30ff.). Danach erläutert Georgii die „Poisson-Verteilungen“ (Georgii, 2009, S. 39ff.), die „Wartezeit-Verteilungen“ (Georgii, 2009, S. 40ff.), „Gamma-Verteilungen“ (Georgii, 2009, S. 42f.), „Beta-Verteilungen“ (Georgii, 2009, S.43ff.) und zuletzt „Normalverteilungen“ (Georgii, 2009, S. 46ff.).

Die Themen im Kapitel drei des Lehrbuchs bilden die Konzepte der bedingten Wahrscheinlichkeit sowie der Unabhängigkeit (Georgii, 2009, S. 52ff.). Georgii (2009, S. 52) stellt, wie auch Kolmogoroff (1933, S. 8f.), bereits in seiner Einleitung des Kapitels fest, dass in diesem Kapitel „einige zentrale Begriffe der Stochastik“ behandelt werden, wobei „von besonderem Interesse [...] der Fall der Unabhängigkeit“ ist. Ausgehend vom Beispiel des mehrfachen Ziehens einer Kugel aus einer Urne entwickelt der Autor (Georgii, 2009, S. 53) die klassische Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit mit

$$P_A(B) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ für } B \in \mathcal{F} \text{ mit } P(A) > 0.$$

Zusätzlich führt Georgii auch die Schreibweise $P(B|A) := P_A(B)$ ein, die zwar die Neuheit des Wahrscheinlichkeitsmaßes in den Hintergrund treten lässt, dafür aber mehrere Bedingungen leichter in der Notation darstellbar machen kann. Nach der Einführung der bedingten Wahrscheinlichkeiten diskutiert Georgii (2009, S. 54) kurz verschiedene Interpretation solcher bedingten Wahrscheinlichkeiten, wobei laut ihm auf keinen Fall Interpretationen im Sinne eines Kausalzusammenhangs vorgenommen werden sollen. Dann behandelt er den Satz zur vollständigen Wahrscheinlichkeit – Georgii (2009, S. 54) nennt diesen „Fallunterscheidungsformel“ – sowie den Satz von Bayes. Darauf folgen verschiedene Beispiele zur Anwendung, sowohl im Kontext eines medizinischen Tests (Georgii, 2009, S. 55f.) als auch anhand des allgemein bekannten Ziegenproblems (Georgii, 2009, S. 56ff.). Im zweiten Teilkapitel betrachtet Georgii (2009, S. 59ff.) mehrstufige Modelle, d.h. die Angabe von Wahrscheinlichkeitsräumen für mehrstufige Zufallsversuche, wie auch Zufallsvariablen, die solche Versuche beschreiben. Dazu entwickelt er die Pfadmultiplikationsregeln (Georgii, 2009, S. 59) und

auch Wahrscheinlichkeitsdichten unter Einbeziehung von Zufallsvariablen (Georgii, 2009, S. 59f.) mit entsprechender Verallgemeinerung zu unendlichen Produktmaßen (Georgii, 2009, S. 63f.). Das nächste Teilkapitel behandelt das Konzept der Unabhängigkeit, ausgehend von der ‚intuitiven Einsicht‘, dass Unabhängigkeit bedeuten solle, dass das „Eintreten von A keine Veranlassung zu einer Neubewertung der Wahrscheinlichkeit von B “ (Georgii, 2009, S. 66) geben soll. Symbolisch lässt sich dies nach entsprechender Interpretation und Wahl von $A, B \subset \Omega$ und P folgendermaßen notieren: $P_A(B) = P(B)$. Die Definition gibt Georgii (2009, S. 66) dann allerdings in symmetrischer Form für die Ereignisse A und B an, dass zwei Ereignisse A und B unabhängig sind, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Diese Form hat unter anderem den Vorteil, dass die Fälle $A = \emptyset$ und $B = \emptyset$ nicht gesondert betrachtet werden müssen. Auch diese Definition der Unabhängigkeit erweitert Georgii (2009, S. 67) auf abzählbar viele Ereignisse und die Betrachtung entsprechender Indexmengen, wobei er betont, dass die Unabhängigkeit von Ereignisfamilien eine stärkere Forderung als die paarweise Unabhängigkeit zweier Ereignisse darstellt. Im Anschluss an die Diskussion dieser verschiedenen Abstufungen von Unabhängigkeit diskutiert Georgii (2009, S. 68ff.) die Unabhängigkeit von (mehreren, unendlichdimensionalen) Zufallsvariablen. Den Abschluss des Kapitels bilden Betrachtungen von Prozessen, bzw. Reihen von Zufallsvariablen, dazu gehören der Poisson-Prozess (Georgii, 2009, S. 76f.) sowie die Faltung von Poisson- und Gammaverteilungen (Georgii, 2009, S. 78ff.). Das nächste Teilkapitel behandelt Simulationen anhand verschiedener Beispiele (die Simulation von „Binomialverteilungen“ (Georgii, 2009, S. 81), „Exponentialverteilungen“ (Georgii, 2009, S. 81), „Poisson-Verteilungen“ (Georgii, 2009, S. 81), „Verwerfungsmethode und bedingte Verteilungen“ (Georgii, 2009, S. 82), „Monte-Carlo-Simulation mit der Verwerfungsmethode“ (Georgii, 2009, S. 82f.) und die „Polarmethode zur Simulation von Normalverteilungen“ (Georgii, 2009, S. 83f.). Im dritten Teilkapitel werden „Asymptotische Ereignisse“ behandelt. Sie sind so definiert, dass $A \in \mathcal{F}$ asymptotisch für eine Folge von Zufallsvariablen $(Y_k)_{k \geq 1}$ ist, wenn für alle $n \geq 0$ gilt, dass A nur von $(Y_k)_{k > n}$ abhängt. Ihre Formalisierung erfolgt von Georgii (2009, S. 85) unter Zuhilfenahme einer Produkt- σ -Algebra, was an dieser Stelle nicht dargestellt werden soll. Für diese Arbeit interessanter sind die behandelten Fragen nach der Existenz von Langzeit-Mittelwerten (Georgii, 2009, S. 86) und das im gleichen Teilkapitel behandelte „Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov“ (Georgii, 2009, S.86). Dieses Gesetz besagt, dass alle Asymptotischen Ereignisse A einer Folge von Zufallsvariablen eines

Wahrscheinlichkeitsraums entweder die Wahrscheinlichkeit $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$ haben. Der Satz und dessen Beweis ist für diese Arbeit insofern interessant, da sie dem Anhang der „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (Kolmogoroff, 1933, S. 60f.) entsprechen und wichtige Ergebnisse in Kolmogoroffs Grundlagenarbeit bilden.

Im fünften Kapitel werden laut Georgii (2019, S. 93) „fundamentale Kenngrößen“, der Erwartungswert – als mittleres Maß – und die Varianz – als Streuparameter – betrachtet. Im ersten Teilkapitel wird der Erwartungswert thematisiert, zunächst im diskreten Fall (Georgii, 2009, S. 93ff.) und dann im „allgemeinen Fall“ (Georgii, 2009, S.98ff.). Bevor der Erwartungswert in größeren Anwendungsfällen, dem Wartezeitparadoxon und der Bestimmung eines fairen Optionspreises (Georgii, 2009, S. 101ff.) im folgenden Teilkapitel besprochen wird, gibt Georgii noch den Zentralwert, bzw. Median an. Dieser ist ein Kennwert für die Mitte einer Zufallsvariable, der im Gegensatz zum Erwartungswert immer definiert ist. Im dritten Teilkapitel (Georgii, 2009, S. 108ff.) werden dann die Kennwerte Varianz und Kovarianz für die Streuung einer bzw. Korrelation mehrerer Zufallsvariablen kanonisch in Abhängigkeit vom Erwartungswert eingeführt. Auch in diesem Teilkapitel werden nach der Definition beider Kennwerte Rechenregeln und Eigenschaften dieser Werte angegeben und in die Theorie eingebettet (Georgii, 2009, S. 109–110). Am Schluss des Teilkapitels werden verschiedene Beispiele in Bezug auf verschiedene Verteilungen, wie die Binomialverteilung, die Normalverteilung und die Beta-Verteilung betrachtet (Georgii, 2009, S. 110f.). Das letzte Teilkapitel (Georgii, 2009, S. 111) behandelt Erzeugende Funktionen und deren Rechenregeln. Auch diese werden anhand verschiedener Verteilungen und deren Faltung behandelt.

Im fünften Kapitel werden die, laut Georgii (2009, S. 120), „fundamentalen Grenzwertsätze“, das Gesetz der großen Zahl und der zentrale Grenzwertsatz diskutiert. Diese sind insbesondere auch in Bezug auf den Kollektivbegriff bei von Mises (vgl. 6.4) wichtig, bilden aber schon seit Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung, spätestens seit Jakob Bernoullis „Ars conjectandi“ (Steinbring, 1980b), einen festen Bestandteil dieser mathematischen Disziplin. Im ersten Teilkapitel wird das Gesetz der großen Zahl behandelt (Georgii, 2009, S. 120ff.). Dieses Teilkapitel gliedert sich in drei Unterkapitel. Im ersten Unterkapitel wird das schwache Gesetz der großen Zahl behandelt, wobei Georgii dieses Gesetz aus der Erfahrung heraus motiviert, nämlich daraus, dass die Häufigkeitsinterpretation

des Wahrscheinlichkeitsbegriffs für große Durchführungszahlen gut geeignet zu sein scheint. Dabei klärt Georgii, dass „eine *genaue* Übereinstimmung des Mittelwerts mit dem Erwartungswert [...] nur mit vernachlässigbar kleiner Wahrscheinlichkeit eintritt.“ (Georgii, 2009, S. 120). Dies zeigt er konkret anhand einer Berechnung der Wahrscheinlichkeit der genauen Übereinstimmung mithilfe des Bernoulli-Experiments des fairen Münzwurfs. Auf der Basis dieses Ergebnisses definiert Georgii im üblichen Sinne die stochastische Konvergenz einer Folge von Zufallsvariablen. Daraufaufgehend beweist Georgii (2009, S. 121f.) zur Vorbereitung des Satzes zum schwachen Gesetz der großen Zahl die Markov-Ungleichung und die daraus folgende Tschebyscheff-Ungleichung. Das schwache Gesetz der großen Zahl formuliert Georgii dann in zwei Versionen (Georgii, 2009, S. 122ff.). Im zweiten Unterkapitel werden verschiedene Anwendungen des schwachen Gesetzes der großen Zahl behandelt, darunter fällt das „Ehrenfest-Modell“ (Georgii, 2009, S. 124f.), „Bernstein-Polynome“ (Georgii, 2009, S. 125f.), die „Monte-Carlo-Integration“ (Georgii, 2009, S. 126) sowie die „Asymptotische Gleichverteilung und Entropie“ (Georgii, 2009, S. 127ff.). Das dritte Unterkapitel behandelt das sogenannte „Starke Gesetz der großen Zahl“. Auch hier nutzt Georgii (2009, S. 129) zur Motivation das intuitive Münzbeispiel, bei dem man erwarten würde, dass auch die Streuung um den Erwartungswert abnehmen müsste. Um diese Intuition mathematisch zu modellieren benötigt man einen weiteren Konvergenzbegriff, der bei Georgii (2009, S. 129) „*P*-fast sichere“ Konvergenz genannt wird. Eine Eigenschaft dieses Konvergenzbegriffs ist beispielsweise, dass wenn eine Folge von Zufallsvariablen *P*-fast sicher konvergiert die Folge auch stochastisch, also in Wahrscheinlichkeit, konvergiert (Georgii, 2009, S. 129). Mithilfe dieser Definition beweist Georgii (2009, S. 130ff.) das starke Gesetz der großen Zahlen und das Borel'sche Gesetz über normale Zahlen. Im nächsten Teilkapitel zeigt Georgii (2009, S. 134ff.), dass die Normalverteilung durch Binomialverteilungen approximiert werden kann indem eine wachsende Versuchszahl n als Parameter der Binomialverteilung im Grenzwert gegen unendlich betrachtet wird. Das nächste Teilkapitel behandelt den zentralen Grenzwertsatz, der die Aussagen in Bezug auf die Konvergenzaussagen der Binomialverteilungen gegen die Normalverteilungen auf weitere approximierende Verteilungen erweitert. Hierzu ist es allerdings notwendig eine weitere Form der Konvergenz zu betrachten: die Konvergenz in Verteilung (Georgii, 2009, S. 140). In den folgenden Abschnitten des Teilkapitels diskutiert Georgii (2009, S. 141f.) äquivalente Aussagen über Verteilungen und deren Kennwerte in Bezug auf diese Konvergenz und beweist

nach einer Plausibilisierung der Aussage des zentralen Grenzwertsatzes (Georgii, 2009, S. 142ff.). Im letzten Teilkapitel unterscheidet Georgii (2009, S. 145ff.) die Kriterien in welchen Fällen die Binomialverteilung anstelle der Normalverteilung eine Poisson-Verteilung approximiert. Entsprechend formuliert Georgii geeignete Entscheidungsregeln, in welchen Fällen – abhängig vom Parameter p der Binomialverteilung – welche Approximation gewählt werden sollte (Georgii, 2009, S. 147).

Das letzte Kapitel des Lehrbuchs „Stochastik“ von Georgii (2009, S. 153ff.) behandelt „Markov-Ketten“, die sich dadurch auszeichnen, dass nicht nur von unabhängigen Ereignissen oder Zufallsvariablen ausgegangen wird, „das Gegenteil ist richtig“ (Georgii, 2009, S. 153). Markov-Prozesse zeichnen sich dabei dadurch aus, dass Sie ausschließlich vom vorherigen Glied der Markov-Kette abhängen. Das mathematische Modell eines solchen Prozesses benötigt dementsprechend neben einem Wahrscheinlichkeitsraum und der Markov-Kette in Form einer Folge von Zufallsvariablen einen zugeordneten Zustandsraum und eine Übergangsmatrix (Georgii, 2009, S. 153ff.). Solche Übergangsprozesse werden, wie bereits zu Beginn erwähnt, auch in der gymnasialen Oberstufe behandelt um die mathematischen Disziplinen Lineare Algebra und Stochastik zu verbinden. Das Kapitel zu Markov-Ketten gliedert sich in 4 Teilkapitel, in denen die Markov-Eigenschaft definiert wird und Eigenschaften anhand von Beispielen illustriert werden (Georgii, 2009, S. 153ff.), (Grenzprozesse von) Absorptionswahrscheinlichkeiten (Georgii, 2009, S. 157), die mögliche Stationarität von Markov-Ketten (Georgii, 2009, S. 162ff.), Fragen zur Rückkehr zum Ausgangszustand des Systems (Georgii, 2009, S. 174ff.). Ein anschauliches Beispiel des letzten Themas ist die sogenannte einfache symmetrische Irrfahrt. In Georgiis (2009, S. 175) eigenen Worten verbindet man „mit dieser Irrfahrt die Vorstellung von einem ziellosen Spaziergänger (oder einem Betrunkenen), der sich auf einer (unendlich langen) Allee von Baum zu Baum oder in der Ebene in einem großen schachbrettartig angelegten Park [...] bewegt“.

Insgesamt zeigt der systematische Aufbau des Werkes, zumindest in Bezug auf den ersten, hier im Vordergrund stehenden Teil zur Wahrscheinlichkeitstheorie, große Parallelen zu Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“. Natürlich hat sich die Symbolsprache, insbesondere durch Ein-

flüsse der Bourbaki-Gruppe, und die Konzeption gewisser mathematischer Konzepte wie der σ -Algebra¹⁴³ im Laufe der Zeit und der Weiterentwicklung der Maßtheorie verändert. Die von Georgii als „fundamental“ bezeichneten Elemente finden sich aber bereits in ähnlicher mathematischer Formulierung und systematischer Anordnung auch bei Kolmogoroff (1933). Somit kann festgehalten werden, dass Kolmogoroffs Konzeption als Archetyp einer modernen Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung angesehen werden kann und bis heute in Bezug auf ihre Struktur, insbesondere ihre Grundlegung in der Maßtheorie mit entsprechender Nutzung der Mengentheorie und dem deduktiven Aufbau der Theorie auf der Basis formal-abstrakter Axiome, Anwendung findet.

9.2.2 Kontext von Henzes Hochschullehrwerk

Eine weitere Grundlage der nachfolgenden inhaltsanalytischen Untersuchung (9.4) bildet auch das Werk „Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls“ von Norbert Henze (2018) – die zwölfte verbesserte und erweiterte Auflage des gleichnamigen Lehrbuchs aus dem Jahr 1997. Im Folgenden wird der systematische Aufbau des Werkes dargestellt, wobei ein besonderer Schwerpunkt auf den Kapiteln zur Wahrscheinlichkeitstheorie liegt.

Dieser Überblick des systematischen Aufbaus des Lehrwerks unterscheidet sich, wie bei den vorangehenden Kontextbeschreibungen auch, von der qualitativen inhaltsanalytischen Untersuchung dadurch, dass nicht das Herausarbeiten bestimmter Kategorien und damit die Rekonstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche im Fokus steht, sondern die inhaltliche Abfolge der mathematischen Themen sowie deren Verknüpfung.

Das Lehrbuch gliedert sich in ein Vorwort, eine Danksagung, Lesehinweise, 34 inhaltliche Kapitel und ein Nachwort sowie diverse Verzeichnisse. Die Gesamtlänge des Buches mit 410 Seiten entspricht etwa der des Lehrwerks von Georgii (2009), allerdings sind die einzelnen inhaltlichen Themen etwas breiter ausgeführt, was zum einen an Formatierungen, wie bspw. farbigen Kästen für wichtige Definitionen, und zum anderen an einer größeren Anzahl von Bildern liegt. Ein Großteil der Kapitel hat Überschneidungen zu Kapiteln, bzw. Teilkapiteln von Georgii (2009). Allerdings wählt Henze den stoffdidaktischen Weg von diskreten

¹⁴³ Kolmogoroff (1933, S. 2) nutzt das Hausdorff'sche Konzept des Mengenkörpers.

Wahrscheinlichkeitsräumen zu allgemeineren Wahrscheinlichkeitsräumen, wohingegen Georgii (2009) von Anfang an sehr allgemeine maßtheoretische Überlegungen zur Grundlage seiner Einführung in die Stochastik nutzt. Im Folgenden werden die einzelnen Teile von Henzes Lehrbuch dargestellt.

Henze (2018, S. V) beginnt sein Vorwort mit alltäglichen Assoziationen zum Zufall, wobei er bemerkt, dass vom Zufall meistens in Bezug auf Glücks- oder Pechmomente gesprochen wird. Sein Ziel des Lehrbuchs liegt darin den Leser*innen einen „ersten Einblick in die faszinierende Welt des Zufalls“ zu ermöglichen. Dabei spielt für ihn die Förderung von stochastischer Urteilskompetenz eine große Rolle, da auch in der Alltagssprache „stochastische Begriffe“ wie Wahrscheinlichkeit oder Signifikanz vorkommen. Das Lehrbuch richtet sich laut Henze (2018, S. V) „insbesondere an Lehrer/-innen, Lehramtsstudierende, Studienanfänger an Fachhochschulen, dualen Hochschulen und Universitäten sowie Quereinsteiger aus Industrie und Wirtschaft“. Entsprechend der Vielfältigkeit der Zielgruppe nutzt Henze in seinem Buch verschiedene Methoden, bzw. Wissenselemente. Dazu gehören Lernkontrollen am Ende des Kapitels, viele Übungsaufgaben, verschiedene Verzeichnisse zum Nachschlagen und Videos zu einzelnen Inhaltsbereichen. Zugleich möchte er gerne die Leser*innen „möglichst behutsam in die Stochastik, die Kunst des geschickten Vermutens“¹⁴⁴ einführen, weshalb er kein größeres mathematisches Vorwissen, bspw. Vorkenntnisse im Bereich der Maßtheorie, voraussetzt. Dies bedeutet konkret, dass Begriffe und Methoden der Analysis erst ab Kapitel 22 erforderlich sind. Diese Entscheidung basiert didaktisch darauf, dass die „Modellierung zufallsabhängiger Vorgänge“ ein wichtiges Feld der Stochastik, aber laut Henze (2018, S. VI) auch ein „harte[s] Geschäft“ ist. Ebenso stellt Henze (2018, S. VI) dar, dass er bewusst Begriffsbildungen und Grundannahmen motivieren und diskutieren möchte, wobei er verschiedene stochastische Konzepte anführt, und insbesondere keine „Rezepte“ vermitteln möchte, sondern „prinzipielle Vorgehensweisen“. Zum Schluss des Vorworts hebt Henze (2018, S. VI) besonders hervor, dass das klassische „Definition-Satz-Beweis-Schema“ der Mathematik auf natürliche Weise in der Stochastik durchbrochen wird, da „Stochastik – wenn man sie nicht auf die *Mathematische Stochastik* [Herv. im Original]“ reduziert kein Teilgebiet der Mathematik, sondern eine „interdisziplinäre Wissenschaft mit vielseitigen Anwendungen

¹⁴⁴ Mit der Beschreibung der Stochastik als „Kunst des Vermutens“ verweist Henze (2018, S. V) implizit auf die Arbeit von Jacob Bernoulli und seine „Ars Conjectandi“.

[sei], deren formale Sprache die Mathematik ist.“ (Henze, 2018, S. VI). An dieser Stelle wird besonders deutlich, dass Henze den mathematischen Teil der Stochastik klar von ihrer Anwendung trennen kann. In den Lesehinweisen gibt Henze dann an, welche Kapitel besser zusammenhängend gelesen werden sollten und welche Kapitel übersprungen werden können. Dazu unterscheidet Henze einen Block zur diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie (Kapitel 1–4, 6–9, 11–18) zusammen mit dem Schwachen Gesetz der großen Zahlen sowie dem Zentralen Grenzwertsatz (Kapitel 20–28); einen weiteren Block zu stetigen Verteilungen (Kapitel 31–33) sowie ein Block zur (schließenden) Statistik (Kapitel 5, 29, 30, 34). Gerade der letzte Block zur Statistik ist aufgrund des Fokus dieser Arbeit – wie auch bei Georgii – nicht besonders relevant für diese Arbeit und wird daher weniger intensiv behandelt.

Die 34 inhaltlichen Kapitel sind analog strukturiert. Nach der Vorstellung der Fachinhalte, die den größeren Anteil des jeweiligen Kapitels bilden, werden thematisch passende Übungsaufgaben angeboten. Den Abschluss bilden jeweils die Lernziele des Kapitels. In der folgenden Beschreibung der inhaltlichen Kapitel folge ich der Struktur der von Henze explizierten und vermutlich intendierten Lernziele.

Henze (2018, S. 1ff.) behandelt im ersten Kapitel „Zufallsexperimente, Ergebnismenge“, die Begriffe „*ideales Zufallsexperiment, Ergebnismenge (Grundraum), n-Tupel und kartesische Produkt[e] von Mengen* [Herv. im Original]“ (Henze, 2018, S. 4). Hierbei beginnt er analog zu Georgii (vgl. 9.2.1) mit einer Begriffsklärung, worum es sich bei der Stochastik handelt. Henze (2018, S. 1) versteht unter Stochastik dabei wie üblich einen Sammelbegriff der mathematischen Gebiete „*Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* [Herv. im Original]“, oder wie er es prägnant zusammenfasst die „*Mathematik des Zufalls*“. Entgegen des eher wechselseitigen Modellierungsschemas zwischen Mathematik und einem Ausschnitt der Wirklichkeit von Georgii (vgl. 9.2.1) spricht Henze (2018, S. 1), von einem „*stochastische[m] Modell* [als] eine Nachbildung eines zufallsabhängigen Vorgangs in der Sprache der Mathematik“. In dieser Sichtweise tritt eine Art Werkzeug-Aspekt (Grigutsch et al., 1998) hervor. Bei dieser Entwicklung des „*stochastischen Modells*“ sollen wesentliche Merkmale beachtet werden. Welche dies sind stellt Henze (2018, S. 1) nicht explizit heraus, verweist aber darauf, dass diese im Laufe der Begriffsbildung in diesem und folgenden Kapiteln geklärt werden. Eine erste Annäherung bildet der von ihm verwendete Begriff „*ideales*

Zufallsexperiment“ (Henze, 2018, S. 1), den er mithilfe verschiedener typischer Spiele, wie Karten-, Münz- oder Würfelspiele motiviert. Ein solches ideales Zufallsexperiment wird unter festgelegten Bedingungen (Versuchsbedingungen) durchgeführt. Die Menge dessen möglicher Ergebnisse (Ausgänge) ist von vornherein bekannt und der Vorgang kann prinzipiell beliebig oft unter gleichen Bedingungen wiederholt werden. Eine solche Beschreibung von idealen Zufallsexperimenten unterscheidet sich zunächst nicht wesentlich von intendierten Anwendungen empirischer Theorien (vgl. 4.4.2.1). Das stochastische Modell, als der von Henze (2018, S. 2) für die Stochastik und das mathematische Arbeiten ausgewiesene relevante Teil, unterscheidet er aber explizit vom idealen Zufallsexperiment. Dies wird besonders deutlich an seiner Beschreibung der Ergebnismenge Ω , bzw. des Grundraumes, die er im üblichen Sinne definiert, nämlich, dass sie alle möglichen Ergebnisse des idealen Zufallsexperiments umfasst, wobei sie „als *mathematisches Objekt* [...] eine *Menge* [Herv. im Original]“ (Henze, 2018, S. 2) ist. Die Definition von Ω sei dabei immer der erste Schritt der stochastischen Modellierung laut Henze. Anhand der Frage, wie oft man würfeln müsse bis man beim Mensch-Ärgere-Dich-Nicht-Spiel aus dem Häuschen setzen kann, führt Henze (2018, S. 2) unendliche diskrete Ergebnismengen ein und gibt an, dass nur solche finiten oder abzählbar-unendlichen Ergebnismengen behandelt werden, bis im Kapitel 30 stetige Verteilungen thematisiert werden (Henze, 2018, S. 4). Die letzten Begriffe, die in Kapitel eins eingeführt werden, sind n -Tupel als Elemente einer Ergebnismenge (Henze, 2018, S. 2). Zur Illustration dieser Begriffe wählt Henze (2018, S. 3f.) das Zufallsexperiment des mehrfachen Münzwurfs.

Im zweiten Kapitel (Henze, 2018, S. 5ff.) werden „Ereignisse“ behandelt. Auch Henze (2018, S. 5) erläutert bei der Definition von Ereignissen, dass man bei stochastischen Fragestellungen weniger am Eintreten des konkreten Ergebnisses sondern daran interessiert ist, ob das „Ergebnis zu einer *gewissen Menge von Ergebnissen*“ gehört. Entsprechend werden Ereignisse wie üblich als Teilmengen der Ergebnismenge Ω betrachtet, wobei Henze auf die Notation mit Großbuchstaben verweist. Er betrachtet auch die von ihm sog. „extremen Fälle“ (Henze, 2018, S. 5) des sicheren Ereignisses $A = \Omega$ und des unmöglichen Ereignisses $B = \emptyset$, sowie Elementarereignisse $C = \{\omega\}$, $\omega \in \Omega$. Im Anschluss daran erläutert Henze wie man durch (mehrfachen) Schnitt, (mehrfache) Vereinigung, (mehrfaches) „Mengen-Minus“ ($A \setminus B$) und Komplementbildung (Gegenereignis) A^c weitere Ereignisse erhalten kann und wie diese inhaltlich in Bezug auf das Ein-

treten bestimmter Ergebnisse zu interpretieren sind. Auch die Teilmengen Relation $A \subset B$ wird betrachtet und als „Aus A folgt B “ interpretiert, das meint, wenn das Ereignis A eingetreten ist, auch das Ereignis B eingetreten ist. Damit folgt Henze (2018, S. 6) seiner eigenen Einschätzung: „Wir sehen also, dass der Umgang mit mengentheoretischen Operationen ein unerlässliches Handwerkszeug der Stochastik bildet“, weshalb er im Anschluss an die obigen Verknüpfungen und Relationen die Eigenschaft der Unvereinbarkeit, bzw. Disjunktheit, definiert. Alle diese Eigenschaften illustriert Henze (2018, S. 6ff.) mit dem zweifachen Würfelwurf, wobei er dabei auch die Darstellung mithilfe von Venn-Diagrammen einführt. „Zum Abschluss dieses Ausflugs in die Mengenlehre sei betont, dass für mengentheoretische Verknüpfungen grundlegende Regeln [...] gelten“ (Henze, 2018, S. 8). Entsprechend nennt Henze das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz sowie die ‚de Morganschen Regeln‘.

Henze (2018, S. 10ff.) stellt im dritten Kapitel das Konzept der Zufallsvariable vor. Hierbei betont er, dass die Motivation der Verwendung von Zufallsvariablen auf dem üblichen Sprachgebrauch basiert, indem man recht einfach Ereignisse beschreiben kann, bspw. „die größte Augenzahl oder die Summe der Augenzahl beim wiederholten Würfelwurf“ (Henze, 2018, S. 10). Besonders auffällig ist, dass Henze betont, dass diese Namensgebung „auch hält was sie verspricht, nämlich eine mit dem Zufall variierende Größe [zu sein], dies zeigt die folgende formale Definition“ (Henze, 2018, S. 10). Die Definition folgt dabei der Konvention in der die Ergebnismenge Ω als Definitionsmenge der Zufallsvariable und die reellen Zahlen \mathbb{R} als Zielmenge betrachtet werden. Es handelt sich bei X also um eine reellwertige Funktion. Er betont dabei auch verschiedene Sprechweisen wie bspw. $X(\omega)$ als „Realisierung der Zufallsvariable zum Ausgang ω [Herv. im Original]“ (Henze, 2018, S. 10). Auch dieses Konzept erläutert Henze (2018, 10f.) am Beispiel des zweifachen Münzwurfs. Im Anschluss daran folgen drei weitere Teilkapitel zur Arithmetik mit Zufallsvariablen, Indikatorfunktionen und Zählvariablen als Indikatorsummen (Henze, 2018, S. 12ff.).

Bevor Henze (2018, S. 36ff.) in Kapitel sechs „Endliche Wahrscheinlichkeitsräume“ behandelt und damit der Frage nachgeht „auf welche Fundamente [...] sich jedoch eine ‚Mathematik des Zufalls‘ gründen“ solle, motiviert er die Behandlung von Wahrscheinlichkeitsmaßen durch die Betrachtung von „relativen Häufigkeiten in Kapitel“ vier und „Grundbegriffen der deskriptiven Statistik“ in Kapitel fünf.

Im vierten Kapitel mit dem Titel „Relative Häufigkeiten“ (Henze, 2018, S. 16ff.) appelliert Henze an die stochastische Intuition der Leser*innen, indem er die subjektive Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Elementarereignis „Zahl“ beim einfachen Münzwurf mit dem Elementarereignis „Sechs“ beim einfachen Würfelwurf vergleicht, wobei er auf eine Modellierung auf der Basis von Symmetrieüberlegungen (implizites Laplace-Argument) verweist. Bei der Schätzung der Wahrscheinlichkeiten des Reißzweckenwurfs hat man dagegen laut Henze keine direkte Intuition in Bezug auf die Wahrscheinlichkeit der beiden von ihm identifizierten Ausgänge. Ein laut Henze (2018, S. 16) durchgeführtes Experiment mit 300 Würfeln ergibt 124 Ausgänge in denen die Spitze nach oben zeigt und 176 Ausgänge bei denen die Spitze nach unten fällt. Die Abschätzung dieser „Chance [Herv. im Original]“ (Henze, 2018, S. 16) soll dann zahlenmäßig erfasst werden. Dazu definiert Henze (2018, S. 16f.) die relative Häufigkeit $r_{n,a}(A)$ eines Ereignisses A , wobei er nicht nur die Anzahl der Versuchsdurchführungen n , sondern auch den Datenvektor $a := (a_1, a_2, \dots, a_n)$ in die Notation einführt, der jeweils das Ergebnis zur Versuchsdurchführung in seinen Komponenten angibt¹⁴⁵. Dabei stellt Henze (2018, S. 17) fest, dass „ $r_{n,a}(A)$ umso größer ist“, je häufiger A in der Stichprobe vorkommt und dass $r_{n,a}(A)$ auch variabel in Abhängigkeit des betrachteten Ereignisses A ist. Betrachtet man die Ereignisse eines „idealen Zufallsversuchs“ stellt man fest, dass für die relativen Häufigkeiten die Nichtnegativität, Normiertheit und Additivität disjunkter Ereignisse gilt. In diesem Kapitel drückt Henze (2018, S. 17) diese Eigenschaften allerdings zunächst nur symbolisch aus ohne diese Eigenschaften mit diesen Namen zu bezeichnen. Im Anschluss daran stellt Henze einige empirisch-gegenständliche Eigenschaften der relativen Häufigkeiten fest. Zum einen, dass die relativen Häufigkeiten natürlich vom zugrundeliegenden Datenvektor abhängen und dass sich die relativen Häufigkeiten „bei einer wachsende[n] Anzahl von Experimenten, die wiederholt unter gleichen Bedingungen und unbeeinflusst voneinander durchgeführt werden, erfahrungsgemäß immer weniger fluktuieren und somit immer stabiler werden“ (Henze, 2018, S. 18). Henze nennt dieses Gesetz aus der Erfahrung „*empirisches Gesetz über die Stabilisierung relativer Häufigkeiten*“¹⁴⁶, oft auch empirisches

¹⁴⁵ Dieser Datenvektor kann analog zu den Massenerscheinungen oder Wiederholungsvorgängen \mathcal{E} in der Rekonstruktion der Menge partiell potentieller Modelle in von Mises Theorie aufgefasst werden (vgl. 6).

¹⁴⁶ Dieses Gesetz findet sich als Axiom (A1) in der Rekonstruktion der Menge von Modellen in von Mises Theorie (vgl. 6.4.1.4).

Gesetz der großen Zahl genannt. Zur Illustration dieses empirischen Gesetzes der Großen Zahl gibt er ein zum selbstdurchgeführten Reißzweckenversuch zugehöriges Diagramm (Henze, 2018, S. 18) an.

Die formal-abstrakte Sichtweise von Henze wird in seinem Kommentar, der hier vollständig wiedergegeben werden soll, zu dieser Illustration deutlich:

„Es erscheint verlockend, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A durch denjenigen „Grenzwert“ zu definieren, gegen den sich die relative Häufigkeit von A bei wachsender Anzahl wiederholter Experimente erfahrungsgemäß stabilisiert. Dieser naive Versuch einer Grenzwert-Definition scheitert jedoch schon an der mangelnden Präzisierung des Adverbs erfahrungsgemäß und an der fehlenden Kenntnis des Grenzwertes. Wie sollte dieser Grenzwert z.B. für das Ereignis {1} bei den Reißzwecken-Daten von Tabelle 4.1 aussehen? Man beachte insbesondere, *dass das empirische Gesetz über die Stabilisierung relativer Häufigkeiten nur eine Erfahrungstatsache und kein mathematischer Sachverhalt ist* [Herv. G.S.]. Zumindest logisch kann nicht ausgeschlossen werden, dass bei fortgesetztem Reißzweckenwurf die Folge $(r_n(\{\text{Spitze nach oben}\}))$ nicht konvergiert oder dass eine Person immer das Ergebnis Spitze schräg nach unten und die andere nur das Resultat Spitze nach oben beobachtet! Trotz dieser Schwierigkeiten versuchte R. v. Mises im Jahre 1919, Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Grenzwerten relativer Häufigkeiten unter gewissen einschränkenden Bedingungen zu definieren. Obwohl dieser Versuch einer Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht zum vollen Erfolg führte, beeinflusste er jedoch die weitere Grundlagenforschung in starkem Maße.“

(Henze, 2018, S. 18)

Henze geht in diesem Zitat zum einen darauf ein, dass die Definition der Wahrscheinlichkeit über die relativen Häufigkeiten einen gewissen Charme hat, das empirische Gesetz der großen Zahlen aber kein mathematischer Sachverhalt

ist¹⁴⁷, da er eben erfahrungsabhängig ist. Diese Sichtweise ist insofern sehr interessant, da Henze gerade die relativen Häufigkeiten offensichtlich zur Motivation von Wahrscheinlichkeitsmaßen unter besonderer Berücksichtigung der später formal-abstrakt axiomatisch eingeführten Eigenschaften, wie Nichtnegativität, Normiertheit und Additivität intensiv bespricht. Auch die historische Note ist interessant, wobei die Frage des Erfolgs der Axiomatisierung von von Mises Absicht mit dieser Axiomatisierung abhängt, eben eine explizit empirisch-gegenständlichen Wahrscheinlichkeitstheorie nach dem Vorbild einer Naturwissenschaft zu begründen. Mit dieser historischen Note endet auch das Kapitel zu den relativen Häufigkeiten.

Henze (2018, S. 20ff.) behandelt im fünften Kapitel die „Grundbegriffe der deskriptiven Statistik“. Hierbei antizipiert er an Alltagserfahrungen, in denen verschiedene Statistiken aus mannigfaltigen Bereichen einfließen. Zur Einführung nutzt Henze (2018, S. 20) unter anderem die Begriffsherkunft des Wortes „Statistik“ als Staatskunde. Heutzutage wird zwischen einer beschreibenden und beurteilenden Statistik unterschieden, wobei Henze (2018, S. 20) klarstellt, dass auch eine scheinbar beschreibende Statistik, insbesondere durch die Auswahl von Grafiken und Diagrammen, beurteilenden Charakter haben kann. Das Kapitel ist insgesamt in zehn Teilkapitel gegliedert. Im ersten Teilkapitel werden Untersuchungseinheiten und Merkmale (Henze, 2018, S. 20f.); im zweiten Grundgesamtheit (Population) und Stichprobe (Henze, 2018, S. 21f.); im dritten, vierten und fünften verschiedene graphische Darstellungen von Daten (Henze, 2018, S. 22ff.), im sechsten, siebten und achten Lagemaße, Streuungsmaße und der Variationskoeffizient (Henze, 2018, S. 27ff.) und im neunten und zehnten ein Beispiel der verschiedenen Maße sowie die Darstellung im Boxplot (Henze, 2018, S. 32f.) dargestellt.

Das sechste Kapitel behandelt wiederum die Wahrscheinlichkeitstheorie und hat den Titel „Endliche Wahrscheinlichkeitsräume“ (Henze, 2018, S. 36ff.). Wie bereits in der Beschreibung zu Kapitel 4 angedeutet, war dieses zur Motivation gedacht um eine empirische Chancenabschätzung bei einem idealen Zufallsver-

¹⁴⁷ Diese Explizierung der Auffassung in Bezug auf empirische Elemente einer Wahrscheinlichkeitstheorie paraphrasiert Kolmogoroffs Einschätzung, dass diese nicht relevant „für die rein mathematische Entwicklung der Theorie“ (Kolmogoroff, 1933, S. 3) ist. Eine ausführliche Diskussion dazu ist in Untersuchung 2 zu finden (vgl. 7).

such vorzunehmen. Nun stellt Henze allerdings die Frage „[a]uf welche Fundamente sollte sich jedoch eine „Mathematik des Zufalls“ gründen?“ (Henze, 2018, S. 36). Henze beantwortet diese Frage mit Verweis auf die lange Offenheit dieser Frage damit, dass die Lösung in Form einer „befriedigenden Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ durch Kolmogorffs (1933) Arbeit vorläge. An dieser Stelle wird erneut Henzes formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeit sehr deutlich, indem er feststellt, dass

„[d]er Schlüssel zum Erfolg einer mathematischen Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung [...] historisch gesehen darin [bestand], Wahrscheinlichkeiten nicht inhaltlich als „Grenzwerte“ relativer Häufigkeiten definieren zu wollen, sondern bescheidener zu sein und nur festzulegen, welche *formalen* [Herv. im Original] Eigenschaften Wahrscheinlichkeiten als mathematische Objekte *unbedingt besitzen sollten* [Herv. im Original].“

(Henze, 2018, S. 36)

Hierbei beschreibt er ähnlich wie Kolmogoroff, dass diese Axiomatisierung analog zu anderen mathematischen Disziplinen geschehen sollte nämlich nicht durch eine inhaltliche Definition der Grundbegriffe, „sondern nur *implizit durch Axiome* [Herv. im Original]“ (Henze, 2018, S. 36). Die Eigenschaften um die es sich handelt sind die bereits dargestellten Eigenschaften Nichtnegativität, Normiertheit und Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes. Aufgrund der Beschränkung auf endliche Wahrscheinlichkeitsräume ist die pragmatische Wahl der zugehörigen σ -Algebra (Georgii in 9.2.1) die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ bei endlichem Ω . Entsprechend definiert Henze (2018, S. 36) das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} im üblichen Sinne, den Wahrscheinlichkeitsraum aufgrund der eben beschriebenen Einschränkung auf abzählbare Ergebnismengen Ω als Tupel (Ω, \mathbb{P}) . Die formal-abstrakte Sicht wird zusätzlich deutlich durch Henzes Diskussion der Axiome in Bezug auf die Loslösung von konkreten Zufallsversuchen, der Bezeichnung von Wahrscheinlichkeiten als „mathematische Objekte“ sowie der durch die Loslösung von einer zwingenden inhaltlichen Deutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung breitem Anwendungsfeld der Stochastik als interdisziplinäre Wissenschaft (Henze, 2018, S. 37). Im Anschluss an diese allgemeineren Aspekte zur Begründung, weshalb eine Axiomatisierung im formal-abstrakten Sinne sinnvoll und zweckmäßig ist, folgt die Frage nach der Erstellung eines

Wahrscheinlichkeitsmodells zu konkreten Zufallsversuchen. Die Wahl des Modells soll natürlich zu möglicherweise a posteriori generierten Abschätzungen von Chancen passend sein (Henze, 2018, S. 37). Entsprechend stellt Henze (2018, S. 38) fest, dass „[i]m Hinblick auf Anwendungen [...] Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik untrennbar miteinander verbunden [sind]!“ Danach folgert Henze (2018, S. 38f.) verschiedene Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsräumen aus den angegebenen Axiomen. Im Anschluss daran gibt Henze (2018, S. 39) die Möglichkeit an das Wahrscheinlichkeitsmaß von Ereignissen mithilfe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse und dem Additionsgesetz zu bilden. Diese Punktwahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse veranschaulicht Henze zum besseren Verständnis mithilfe von Stab- und Kreisdiagrammen. Im nächsten Teilkapitel definiert Henze (2018, S. 40) die Verteilung von Zufallsvariablen, die er unter erneuter Verwendung des Beispiels der Zufallsvariable zur Summe der Augenzahl beim zweifachen Würfelwurf illustriert. Das letzte Teilkapitel (Henze, 2018, S. 42f.) behandelt die Kompatibilität der Kolmogoroffschen Axiome mit den sog. subjektiven Wahrscheinlichkeiten.

Im siebten Kapitel behandelt Henze (2018, S. 45ff.) Laplace-Modelle, also Zufallsversuche bei denen man die endlich vielen Ausgänge als gleichwahrscheinlich annimmt, sodass die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse als gleichgroß festgelegt werden. Dabei geht Henze wie üblich vor und führt den Begriff der Gleichverteilung sowie des Laplace-Experiments ein. Die folgenden Teilkapitel behandeln verschiedene Beispiele: den zweifachen Münzwurf (Henze, 2018, S. 45f.), die Betrachtung des gleichen Beispiels mit ununterscheidbaren Würfeln (Henze, 2018, S. 47), das Teilungsproblem (Henze, 2018, S. 47f.) und zuletzt das Ziegenproblem (Henze, 2018, S. 48f.).

Das achte Kapitel thematisiert die „Elemente der Kombinatorik“ (Henze, 2018, S. 50ff.). In der Kombinatorik geht es, bspw. zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten, um das Abzählen von Ereignissen. Entsprechend motiviert Henze (2018, S. 50) das Fundamentalprinzip des Zählens, das auch als Multiplikationsregel bekannt ist. Die weiteren Teilkapitel behandeln in üblicher Form die bekannten kombinatorischen Grundformen und passende Beispiele (Henze, 2018, S. 51ff.).

Henze (2018, S. 60f.) diskutiert im neunten Kapitel „Urnen- und Fächermodelle“, deren Nutzen darin läge, dass „alle unwesentlichen Aspekte der ursprünglichen Fragestellung aus[geblendet]“ werden. Dieses Ausblenden motiviert er durch

die Diskussion des häufig verwendeten Beispiels der statistischen Qualitätskontrolle von Schrauben in einer Werkstatt. Laut Henze (2018, S. 69) spielt es keine Rolle, bzw. es „ist völlig belanglos“, um welches Produkt es sich genau handelt und wie die Maßtoleranzen genau ausbuchstabiert sind. Im Folgenden modelliert er das gleiche kombinatorische Problem durch eine Urnenziehung mit farbigen Kugeln. Interessanterweise benennt Henze (2018, S. 60) solche Aufgabenstellungen, das Sammlerproblem gehört ebenfalls dazu, wie in der Mathematikdidaktik üblich als „eingekleidete Aufgaben“, die den Vorteil bringen können die mathematisch relevanten Größen einfacher begreifbar werden zu lassen, bspw. durch Aktivierung passender Grundvorstellungen. Das Sammlerproblem wird dabei im Gegensatz zum Qualitätskontrollen-Beispiel mithilfe eines Fächermodells erläutert. Entsprechend werden kombinatorische Grundformen und die jeweiligen Urnenmodelle (Henze, 2018, S. 61f.) bzw. Fächermodelle (Henze, 2018, S. 62f.) und passende einfache Beispiele angegeben.

Das Lernziel des zehnten Kapitels „Das Paradoxon der ersten Kollision“ lautet: „Das Phänomen der frühen ersten Kollision sollte Ihnen nicht mehr paradox erscheinen.“ (Henze, 2018, S. 69). Dieses Lernziel kann nach Bearbeitung des Kapitels dadurch erreicht werden, dass einerseits die Analogie zwischen dem Problem der ersten gleichen Ziehungszahlen in zwei Ziehungen in der Geschichte des Lottos und dem bekannteren und klassischen Beispiel des Geburtstagsproblems eingesehen wird (Henze, 2018, S. 69) und andererseits eine passende stochastische Modellierung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit des Auftretens beider Ereignisse schon bei geringer Versuchsdurchführungsanzahl überraschend hoch ist.

Im elften Kapitel beweist Henze (2018, S. 71) in üblicher Weise die sogenannte Siebformel, die er zu Beginn durch eine Erinnerung an das Additionsgesetz zweier Ereignisse motiviert (Henze, 2018, S. 70) und danach als Aussage über Zählvariablen formuliert (Henze, 2018, S. 72). Den Abschluss des Kapitels bildet das Koinzidenz-Paradoxon, gegebenenfalls besser bekannt als Rencontres-Problem (Henze, 2018, S. 72ff.), das ein gutes Anwendungsbeispiel für die Siebformel darstellt und nochmals illustriert, dass die Vereinigung vieler unwahrscheinlicher Ereignisse ein Ereignis mit recht großer Wahrscheinlichkeit ergeben kann (vgl. 7).

Das zwölfte Kapitel behandelt den für die Stochastik aber auch für die nachfolgenden Kapitel wichtigen Begriff des „Erwartungswerts“ (Henze, 2018, S. 76). In

Henzes Konzeption der einzelnen Kapitel wird besonders deutlich, dass er stets versucht die historische Genese einzelner mathematischer Begriff, die er dann formal-abstrakt definiert, zumindest schlaglichtartig zu beleuchten. In der Einleitung zum Erwartungswert macht er dieses Vorgehen explizit:

„Da diese Namensgebung historisch gesehen aus der Beschäftigung mit Glücksspielen entstand, wollen wir die formale Definition des Begriffes auch anhand einer Glücksspielsituation motivieren.“

(Henze, 2018, S. 76)

In einer zugehörigen Fußnote verweist er dabei auf das Werk „De ratiociniis in aleæ ludo“ von Christian Huygens (1656) in dem der Erwartungswert laut Henze (2018, S. 76) erstmals aufgetreten ist. Nach der Diskussion des einführenden Beispiels zu einem Glücksspiel, definiert Henze (2018, S. 77) wie üblich den Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariable auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum und zeigt einige Eigenschaften dieser Größe sowie zugehörige Sätze (Henze, 2018, S. 77f.).

Henze behandelt im 13. Kapitel die hypergeometrische Verteilung ausgehend vom klassischen Beispiel der Stichprobenziehung zur Feststellung defekter Produkte. Diese Verteilung ist laut Henze (2018, S. 86) besonders interessant, da sich der Urneninhalt mit jeder Ziehung verändert. Mit erneutem Verweis auf die (mathematische) Intuition erläutert er dies damit, dass die verschiedenen Ziehungen natürlich trotzdem die gleiche Verteilung in Bezug auf die später betrachtete Anzahl defekter Produkte in der Stichprobe haben. Für den folgenden formalen Beweis untersucht er die von ihm angegebene Definition der hypergeometrischen Verteilung (Henze, 2018, S. 87f.) und modelliert das Problem mit einem weiteren Grundraum auf der Basis von Kombinationen statt Permutationen. Natürlich erhält Henze (2018, S. 88f.) auch auf diese Weise die hypergeometrische Verteilung. Den Abschluss bildet eine Anwendung – die Keno-Lotterie – (Henze, 2018, S. 89ff.), von der laut Henze eher abzuraten ist, da man im Mittel etwa die Hälfte seines Einsatzes verliert.

Im nächsten Kapitel werden mehrstufige Zufallsexperimente betrachtet (Henze, 2018, S. 91ff.). Ausgehend von der Modellierung des Grundraums als kartesisches Produkt der Grundräume der Telexperimente begründet Henze die Pfadmultiplikationsregel mithilfe von sogenannten Übergangswahrscheinlichkeiten.

Diese werden dann mithilfe eines Baumdiagramms veranschaulicht, wobei er diese Baumdiagramme analog zu Wasserströmen auffasst (Henze, 2018, S. 92). Im Anschluss daran gibt er eine formal-abstrakte, also von konkreten Zufallsversuchen unabhängige, Modellierung solcher Versuche an, die dann auch formal zur ersten Pfadregel (Pfadmultiplikationsregel) und zweiten Pfadregel (Pfadaddition) führen (Henze, 2018, S. 93f.). Im nächsten Teilkapitel betrachtet Henze (2018, S. 95f.) den Fall, dass die Ereignisse in den Pfaden unabhängig voneinander sind. Den Abschluss des Kapitels bildet das Pólyasche Urnenschema.

In Kapitel 15 werden nun, aufbauend auf dem Konzept der Übergangswahrscheinlichkeiten, bedingte Wahrscheinlichkeiten eingeführt (Henze, 2018, S. 100). Wie in den vorangehenden Kapiteln motiviert Henze dieses Kapitel durch Beispiele, deren Gemeinsamkeit darin liegt, dass ein Ausgang des Experiments bekannt ist und daraus Rückschlüsse auf ein weiteres Ereignis gebildet werden sollen. Nach einer inhaltlichen Deutung, was die Bedingtheit von Ereignissen bei konkreten Zufallsversuchen bedeuten kann, schlägt Henze (2018, S. 101f.) vor, die Auswirkungen von Bedingungen auf relative Häufigkeiten zu untersuchen. Im Anschluss daran gibt er die Standarddefinition von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ an (Henze, 2018, S. 102) und stellt fest, dass durch bedingte Wahrscheinlichkeiten eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zur ursprünglichen Ergebnismenge gegeben ist (Henze, 2018, S. 102). Danach diskutiert Henze (2018, S. 103f.) die allgemeine Multiplikationsregel, die weitestgehend der ersten Pfadregel entspricht, mit beliebiger Anzahl von Ästen, und beweist im Anschluss analog zu Kolmogoroffs Darstellung den Satz zur totalen Wahrscheinlichkeit sowie die Bayes-Formel (Henze, 2018, S. 104f.). Beim Satz von Bayes geht Henze (2018, S. 105) insbesondere auf die Deutung ein, die die Bedingungen als Ursachen eines beobachteten Ereignisses konstatieren. Entsprechend kann man so „aus Erfahrung [lernen]“ (Henze, 2018, S. 105), seine zuvor aufgestellten Hypothesen sowie deren Wahrscheinlichkeit nach Durchführung eines Experiments überdenken, und dann sein Modell anpassen. In den folgenden sechs Teilkapiteln werden verschiedene Beispiele behandelt, in denen bedingte Wahrscheinlichkeiten, aber insbesondere der Satz von Bayes angewendet wird (Henze, 2018, S. 106ff.).

Im sechzehnten Kapitel steht „die stochastische Unabhängigkeit als eine weitere zentrale Begriffsbildung der Stochastik im Mittelpunkt“ (Henze, 2018, S. 118). Diese Begriffsbildung motiviert Henze (2018, S. 118) dadurch, dass er verschie-

dene Reihen von scheinbar unabhängigen Würfeleregebnissen vorstellt, von denen zwei ausgedacht sind, was leicht daran erkennbar ist, dass diese keine direkte Wiederholung von Augenzahlen aufweisen. In üblicher Weise definiert Henze (2018, S. 119) dann, ausgehend von einer Übergangswahrscheinlichkeit, deren Bedingung keine Auswirkung auf die Wahrscheinlichkeit des bedingten Ereignisses hat, die stochastische Unabhängigkeit durch die Formel

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

für beliebige Ereignisse $A, B \subset \Omega$.

In der folgenden Diskussion dieser Definition gibt Henze (2018, S. 119) einige stark formulierte Merkgeregeln und erneut passende Beispiele an. Erstere seien an dieser Stelle aufgrund ihrer Prägnanz zitiert:

„Unabhängigkeit muss strikt von realer Beeinflussung unterschieden werden!

Reale Beeinflussung und Unabhängigkeit schließen sich auch nicht gegenseitig aus!

Unabhängigkeit darf keinesfalls mit Disjunktheit verwechselt werden!“

(Henze, 2018, S. 119)

Im Anschluss daran diskutiert Henze (2018, S. 120) den häufigen Fehler, bei der Unabhängigkeit dreier Ereignisse lediglich folgende Formel prüfen zu wollen:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

Entsprechend definiert Henze (2018, S. 121ff.) dann im kanonischen Sinne die Unabhängigkeit endlich vieler Ereignisse A_i und Folgerungen aus dieser Definition. In den letzten Teilkapiteln werden vier Beispiele diskutiert: das „Lotto-glück“, inwiefern Unabhängigkeit und Gleichverteilung interagieren – aus stochastischer Perspektive gar nicht, naiv wird häufig an ein Gedächtnis der Los-trommel gedacht (Henze, 2018, S. 124f.); das medizinische Gruppenscreening (Henze, 2018, S. 125f.); das „Zwei-Finger-Morra“ (Henze, 2018, S. 126f.) sowie im letzten Beispiel die Frage, ob ein zweifacher plötzlicher Kindstod unabhängig oder abhängig voneinander geschieht, was konkrete juristische Auswirkungen hatte (Henze, 2018, S. 128).

Henze (2018, S. 131ff.) untersucht in Kapitel 17 gemeinsame Verteilungen von Zufallsvariablen. Dazu definiert Henze (2018, S. 131) direkt zu Beginn in formal-

abstrakter Weise einen „(zweidimensionalen) Zufallsvektor“, dessen Komponenten die jeweiligen Werte der beiden Zufallsvariablen bilden. Auch in diesem Kapitel nutzt Henze (2018, S. 131f.) das Beispiel des zweifachen Münzwurfs um die Verwendung der gemeinsamen Verteilung zu verdeutlichen. Dazu betrachtet er die Zufallsvariable die das Ergebnis des ersten Wurfs und eine Zufallsvariable, die das Maximum vom ersten und zweiten Wurf ausgibt. Diese Verteilung stellt er auf verschiedene Arten und Weisen dar mit besonderer Berücksichtigung der Marginalverteilungen (2018, S. 132ff.). Danach erläutert Henze (2018, S. 135f.), auf welche Weise der Erwartungswert einer solchen gemeinsam verteilten Zufallsvariable bestimmt werden kann und welche Rolle die Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen für die gemeinsame Verteilung spielt (Henze, 2018, S. 136f.), eine Frage die dann zum Standardmodell unabhängiger Zufallsvariablen führt (Henze, 2018, S. 139f.).

Mit Bezug auf häufig – gerade in der Psychologie, Medizin, Natur- und Sozialwissenschaften – genutzte Experimentiersettings, die auf unabhängige und gleichartige Experimente basieren sollen, werden in Kapitel 18 „die Binomialverteilung und die Multinomialverteilung“ definiert und angewendet. Den Ausgangspunkt bildet wiederum ein illustratives Beispiel, bei dem ein Experiment mit zwei Ausgängen in Bezug auf die Ausgangsfrage – ob ein Käfer eine chemische Substanz orten kann oder nicht – betrachtet wird. Hierbei stellt Henze klar, dass

„[d]ie Frage, ob eine konkrete Versuchsanordnung die Vorstellung eines wiederholten unabhängigen [Herv. im Original] Durchlaufens des Wahlapparates unter gleichen Bedingungen [Herv. im Original] rechtfertigt, [...] nicht einfach zu beantworten“

(Henze, 2018, S. 142)

ist. Nach einer Diskussion verschiedener Hypothesen, welche Bedingungen die Unabhängigkeit in Bezug auf die Durchführung der Versuche haben kann, stellt Henze fest, dass diese *Frage keine mathematische* sei, denn

„[o]b im Einzelfall Annahmen wie Unabhängigkeit und Gleichartigkeit der Versuchsbedingungen mit der Realität verträglich sind, muss in erster Linie von der jeweiligen Fachwissenschaft, also in obigem Beispiel von der Biologie, beantwortet werden.“

(Henze, 2018, S. 143)

Auch dieses Zitat zeigt im hohen Maße eine Perspektive auf die Stochastik als Werkzeug oder Hilfsmittel zur Erkenntnisgewinnung für andere Wissenschaften, dessen Interdisziplinarität in ihrer Anwendung deutlich wird. Das Standardmodell für solche Versuche mit zwei Ausgängen (Treffer und Niete) ist die sogenannte Bernoulli-Kette, dessen Wahrscheinlichkeitsraum Henze (2018, S. 143) in konventioneller Form angibt. Darauf aufbauend definiert Henze (2018, S. 144ff.) die Binomialverteilung; diskutiert die Faltung der Verteilung zweier binomialverteilter Zufallsvariablen (Henze, 2018, S. 146) und verallgemeinert diese Konzepte durch die Definition der Multinomialverteilung (Henze, 2018, S. 155ff.).

Das nächste Kapitel (Henze, 2018, S. 154ff.) behandelt Pseudozufallszahlen und Zufallsgeneratoren, wobei im besonderen Fokus der lineare Kongruenzgenerator steht. Besonders wichtig ist es für Henze (2018, S. 159), „zu einem vorsichtigen Umgang mit Zufallsgeneratoren zu mahnen [...] [und] Simulationen möglichst mit verschiedenen Generatoren und/oder verschiedenen Startwerten“ durchzuführen und zu vergleichen. Diese Mahnung gilt voraussichtlich insbesondere der anvisierten Zielgruppe, die stochastische Methoden nur als Werkzeug nutzt.

Im zwanzigsten Kapitel führt Henze (2018, S. 160) den Begriff der Varianz als Streuungsmaß im Anschluss an den Erwartungswert als Lagemaß ein. Nach dem Vergleich der Binomial- und Hypergeometrischen Verteilung einer Zufallsvariable, mit gleichem Erwartungswert in Form eines Stabdiagramms definiert Henze (2018, S. 160) die Varianz durch $V(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$ und gibt auch die Definition der Standardabweichung im üblichen Sinne auf Basis der Varianz an. Daraufhin wird erneut das Beispiel des doppelten Münzwurfes gewählt um das Konzept der Varianz zu illustrieren. Die folgenden Teilkapitel behandeln die physikalische Deutung der Varianz als Trägheitsmoment (Henze, 2018, S. 162), die Rechenregeln im Umgang mit Varianzen sowie deren Eigenschaften (Henze, 2018, S. 162ff.). In den beiden letzten Teilkapiteln zur Varianz wird die Standardisierung einer Zufallsvariable (Henze, 2018, S. 163) und die Tschebyscheff-Ungleichung im üblichen Sinne behandelt (Henze, 2018, S. 163f.).

Henze (2018, S. 166ff.) behandelt in Kapitel 21 sowohl die Kovarianz als auch Korrelationen und geht dabei in besonderem Maße auf den Zusammenhang zwischen Korrelation und Kausalität ein. Dazu definiert Henze (2018, S. 166) die Kovarianz und zeigt verschiedene ihrer Eigenschaften (Henze, 2018, S. 166ff.) Die nächsten Teilkapitel behandeln die Definition und Deutung des Korrelationsko-

effizienten nach Pearson (Henze, 2018, S. 169), ein Optimierungsproblem in Bezug auf das Quadrat des Erwartungswerts zweier Zufallsvariablen im linearen Zusammenhang (Henze, 2018, S. 170) und dessen Folgerungen (Henze, 2018, S. 170f.). Die letzten Teilkapitel behandeln verschiedene statistische Verfahren, dazu gehört die „Methode der kleinsten Quadrate“ und damit die Bestimmung einer (empirischen) Regressionsgerade sowie die Diskussion von Korrelation und Kausalität unter besonderer Berücksichtigung von Hintergrundvariablen sowie weiterer Korrelationskoeffizienten (Henze, 2018, S. 173ff.).

Im 22. Kapitel werden diskrete Wahrscheinlichkeitsräume behandelt, was die Betrachtung endlicher Grundräume Ω auf die Betrachtung abzählbar-unendlicher Grundräume erweitert (Henze, 2018, S. 179). Die Definition des Wahrscheinlichkeitsraums erfolgt analog zu Henzes Kapitel 6, wobei er nun entsprechend der abzählbar-unendlichen Ergebnismengen σ -Additivität für die Wahrscheinlichkeitsmaße fordert (Henze, 2018, S. 179). Den Wahrscheinlichkeitsraum erweitert er dann weiter auf abzählbar-unendliche Teilmengen der reellen Zahlen und erweitert entsprechend Zufallsvariablen (Henze, 2018, S. 181f.). Im Anschluss daran behandelt Henze zwei klassische Beispiele der Stochastik, die abzählbar-unendliche Wahrscheinlichkeitsräume erfordern. Diese sind das St. Petersburger Paradoxon (Henze, 2018, S. 182) und das Spieler-Ruin-Problem (Henze, 2018, S. 182ff.). Nach den Beispielen erläutert Henze (2018, S. 184), was es mit dem „ σ “ in der σ -Additivität auf sich hat und gibt ein nicht-konstruktives Beispiel einer Funktion an, die zwar endlich additiv, aber nicht σ -additiv ist, und dem er folgende Leserwarnung sowie einen entsprechenden Literaturhinweis zum Nachschlagen zur Seite stellt „Bitte versuchen Sie nicht, eine derartige Funktion konstruktiv anzugeben. Ihr Existenznachweis erfolgt mithilfe des Auswahlaxioms der Mengenlehre“. Den Abschluss des Kapitels bilden verschiedene Reihen, die nützlich für die Anwendungen in folgenden Kapiteln sind (Henze, 2018, S. 184ff.).

Wartezeitprobleme sind Klassiker in der Stochastik der mehrstufigen Zufallsversuche. Entsprechend behandelt Henze (2018, S. 187ff.) drei verschiedene Wartezeitprobleme unter Verwendung geeigneter Beispiele sowie einer historischen Einordnung in Kapitel 23 seiner Einführung.

In Kapitel 24 behandelt Henze (2018, S. 197ff.) die Poisson-Verteilung als Approximation der Binomialverteilung, bestimmt einige der Eigenschaften von Pois-

son-Verteilungen, die Grenzen ihrer Anwendung bei der stochastischen Modellierung (Henze, 2018, S. 201) sowie ihre Anwendung im physikalischen „Rutherford-Geiger-Experiment“ (Henze, 2018, S. 199ff.).

Henze (2018, S. 203ff.) diskutiert im 25. Kapitel das mathematische Konzept der erzeugenden Funktionen zur Lösung kombinatorischer Probleme oder \mathbb{N}_0 -wertiger Zufallsvariablen. Auch hier beginnt Henze mit der Definition erzeugender Funktionen, geht auf Rechenregeln von erzeugenden Funktionen ein (Henze, 2018, S. 205) und wendet schließlich dieses Konzept an verschiedenen Beispielen an (Henze, 2018, S. 205ff.).

Im Kapitel 26 werden die Begriffe bedingter Erwartungswert und bedingte Verteilung eingeführt, die insbesondere für stochastische Prozesse wesentlich sind, wobei sich die Definition des bedingten Erwartungswertes an den der bedingten Wahrscheinlichkeit anschließt (Henze, 2018, S. 211). Auch hier nutzt Henze (2018, S. 212) das Beispiel des zweifachen Münzwurfs und überträgt dann die bekannten Eigenschaften des Erwartungswerts auf die bedingten Erwartungswerte (Henze, 2018, S. 212ff.).

Besonders interessant für diese Arbeit ist wiederum Kapitel 27 mit dem Thema „Gesetz großer Zahlen“ (Henze, 2018, S. 223ff.). Hier expliziert Henze (2018, S. 223) direkt zu Beginn, dass ein ähnliches Gesetz – das empirische Gesetz großer Zahlen – bereits zur Motivation der Axiomatisierung von Wahrscheinlichkeiten aufgrund der Erfahrungstatsache der Stabilisierung relativer Häufigkeiten bei häufiger Durchführung von Zufallsversuchen verwendet wurde. Der Unterschied zwischen dem in diesem Kapitel und dem zuvor diskutierten Gesetz liegt laut Henze (2018, S. 223) darin, dass „das nachfolgende schwache Gesetz großer Zahlen vom axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriff aus[geht]“. In einem stochastischen Modell können so Beziehungen zwischen dem Mittelwert und dem Erwartungswert sowie in Bezug auf Indikatorfunktionen Zusammenhänge zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden. Nach dieser kurzen Einführung gibt Henze (2018, S. 223) das schwache Gesetz großer Zahlen in konventioneller Form an und folgert wie üblich dessen Gültigkeit aus der Tschebyscheff-Ungleichung. Im Anschluss daran definiert Henze (2018, S. 224) das Konzept der stochastischen Konvergenz und folgert wie angekündigt unter Berücksichtigung von Indikatorfunktionen das schwache Gesetz der großen Zahl in einer Formulierung analog zu Jakob Bernoullis „Ars Conjectandi“, die Henze (2018, S. 224f.) an dieser Stelle entsprechend würdigt. Eine

passende Deutung dieses Gesetzes diskutiert Henze ausführlich mit besonderer Berücksichtigung bereits genutzter Beispiele, bspw. dem Lotto-Spiel (Henze, 2018, S. 225).

Häufig folgt in Lehrbüchern auf das schwache Gesetz der großen Zahl der zentrale Grenzwertsatz – so auch bei Henze (2018, S. 227ff.). In der Einleitung dieses Kapitels weist er dabei auf die Wichtigkeit und Ästhetik eines der „wichtigsten Resultate [...] der Wahrscheinlichkeitstheorie“ (Henze, 2018, S. 227) hin. Zur Motivation betrachtet Henze (2018, S. 227) die typische Standardisierung der Binomialverteilung und passende Histogramme für das Beispiel einer Binomialverteilung mit $p = 0,3$ und wachsendem n . Henze (2018, S. 228) appelliert mithilfe dieser Diagramme an den empirisch-gegenständlichen Eindruck, dass sich das Histogramm bei dieser Skalierung und mit wachsendem n der Gaußschen Glockenkurve annähert, die der Dichte der standardisierten Normalverteilung entspricht. Henze (2018, S. 228) beschreibt diesen Zusammenhang wie folgt „als ‚idealisiertes Histogramm [der Binomialverteilung, G.S.] bei unendlich feiner Klasseneinteilung‘“, was einer klassischen Deutung der Konstruktion des Riemann-Integrals entspricht. Nach dieser Motivation beweist er den „zentralen Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace“ (Henze, 2018, S. 229ff.). Im Anschluss an den, im Vergleich zu den übrigen Beweisen in Henzes Lehrbuch recht langem Beweis, erläutert Henze (2018, S. 232), wie das Integral mithilfe einer Tabelle der Normalverteilung bestimmt werden kann und wie das Gesetz in Anwendungskontexten genutzt wird. Der zentrale Grenzwertsatz wird dann in einem Beispiel zum 600-fachen Wurf angewendet und mit der exakten Berechnung der Binomialverteilung mithilfe der Software MAPLE verglichen, was Henze in Bezug auf das Beispiel folgendermaßen kommentiert,

„dass angesichts leistungsfähiger Computeralgebrasysteme der numerische Aspekt des ZGWS [Zentralen Grenzwertsatz, G.S.] von de Moivre–Laplace, nämlich die Approximation von Summen von Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung, an Bedeutung verliert. Für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie waren diese Ergebnisse der Anfang zahlreicher Untersuchungen über das Verteilungsverhalten von Summen unabhängiger Zufallsvariablen.“

(Henze, 2018, S. 235)

Im Anschluss an diese aktuelle und historische Einordnung des Zentralen Grenzwertsatzes gibt Henze (2018, S. 235f.) noch eine Verallgemeinerung dieses Satzes nach Lindeberg-Lévy über unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen an und stellt die häufig verwendeten „Sigma-Regeln“ vor.

Die Kapitel 29 und 30 behandeln ausschließlich statistische Methoden der schließenden Statistik, die zwar die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen (vgl. 9.2.1) aber nicht zur Grundlagenfrage der Wahrscheinlichkeitstheorie beitragen. Daher werden sie hier nicht ausführlich betrachtet. Henze beginnt sein Kapitel 29 über „Parameterschätzung und Konfidenzbereiche“ mit den Worten „Wir betrachten jetzt vieles bislang Erlernte aus einer völlig neuen Perspektive.“ (Henze, 2018, S. 238). Diese neue Perspektive ergibt sich daraus, dass nicht zuvor festgelegte Wahrscheinlichkeitsräume in den Blick genommen werden, sondern dass nun, ausgehend von einer gegebenen Zufallsvariable auf deren Verteilung, oder zumindest deren Parameter, geschlossen werden soll. In Kapitel 30 werden statistische Tests von Henze (2018, S. 267ff.) behandelt. Hierbei problematisiert er folgenden Zustand in den empirischen Wissenschaften und setzt den Fokus des Kapitels darauf, dass er die Grenzen und Möglichkeiten solcher Tests aufzeigen möchte, vermutlich insbesondere für „rituelle“ Anwender solcher beschriebener Statistik-Software:

„Mit der Verfügbarkeit von Statistik-Softwarepaketen erfolgt das Testen statistischer Hypothesen in den empirischen Wissenschaften vielfach nur noch per Knopfdruck nach einem beinahe schon rituellen Schema. Statistische Tests erfreuen sich u.a. deshalb einer ungebrochenen Beliebtheit, weil

- ihre Ergebnisse objektiv und exakt zu sein scheinen,
- alle von ihnen Gebrauch machen,
- der Nachweis der statistischen Signifikanz eines Resultates durch einen Test vielfach zum Erwerb eines Dokortitels notwendig ist.

In diesem Kapitel geben wir einen Einblick in die Problematik von Hypothesentests. Dabei geht es insbesondere darum, die grundsätzlichen Möglichkeiten und Grenzen solcher Tests aufzuzeigen.“

(Henze, 2018, S. 267)

Entsprechend dieser Ankündigung und dem üblichen Aufbau von Henzes Kapiteln in diesem Lehrbuch, folgt ein klassisches aber sehr ausführlich besprochenes Beispiel der „tea tasting lady“, welches auch als Wahrsagerproblem bekannt ist (Henze, 2018, S. 267ff.). Danach definiert er ausgehend von diesem Beispiel und der bisherigen Begriffsbildung eines statistischen Modells die Grundbegriffe, die für das Testen von Hypothesen genutzt werden und die Eigenschaften solcher Hypothesentests (Henze, 2018, S. 269ff.). Den Abschluss des Kapitels bilden zwei Teilkapitel, in denen zuerst auf typische Fehler im Umgang mit statistischen Tests, wie der naive Rückschluss auf Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen, die Unterstellung, dass die Alternative H_1 gültig ist und zuletzt – vielleicht am wichtigsten, dass die Hypothese nicht anhand derselben Daten getestet werden darf, aufgrund dieser die Hypothese formuliert wurde, da sie sonst offenbar nicht stochastisch unabhängig sind (Henze, 2018, S. 289). In der Bewertung der wissenschaftlichen Community bemerkt Henze (2018, S. 298) die Problematik, dass nicht-signifikante Ergebnisse nicht veröffentlicht werden und so folgende „Jagd“ nach signifikanten Ergebnissen, auch publication bias genannt, geschieht:

„Auf der Jagd nach Signifikanz wird manchmal auch verzweifelt nach einem Test gesucht, der gegebenen Daten diese höhere Weihe erteilt (für kompliziertere, hier nicht behandelte Testprobleme existieren häufig mehrere Tests, die jeweils zur „Aufdeckung bestimmter Alternativen“ besonders geeignet sind). Hat man etwa nach neun vergeblichen Anläufen endlich einen solchen Test gefunden, so ist es ganz analog zu dem im nächsten Abschnitt beschriebenen Sachverhalt ein Ermöglichen von Signifikanz, das Nichtablehnen der Hypothese durch die neun anderen Tests zu verschweigen.“

(Henze, 2018, S. 289)

Wie im obigen Zitat angedeutet, behandelt das letzte Teilkapitel das Thema „Wie erschleicht man sich Signifikanz“ (Henze, 2018, S. 290f.). Eine Möglichkeit des „Erschleichens von Signifikanz“ kann dadurch erreicht werden, dass Daten der Stichprobe weggelassen werden, was Henze sehr deutlich und anhand eines prägnanten Beispiels zur Frage des Zusammenhangs zwischen dem Auftreten von Leukämie in der Nähe von Kernkraftwerken an einem realen Beispiel disku-

tiert. Besonders wichtig für diese Arbeit ist aber seine bemerkenswerte Unterscheidung zwischen dem realen Phänomen¹⁴⁸ des „Zufall[s, der] jedoch keine Wahrscheinlichkeit besitzt“ (Henze, 2018, S. 290) und einem mathematischen Modell, denn nur dort „existiert“ (Henze, 2018, S. 290) Wahrscheinlichkeit.

In den letzten vier Kapiteln werden nun allgemeine Wahrscheinlichkeitsmodelle mit stetigen Verteilungen in den Blick genommen und damit die Ergebnisse aus den vorangehenden Kapiteln zur Wahrscheinlichkeitstheorie aber auch Statistik verallgemeinert.

Dazu motiviert Henze (2018, S. 294) den Übergang von diskreten zu stetigen Verteilungen einerseits inhaltlich an verschiedenen Größenbereichen, wie Temperatur, Windgeschwindigkeit, etc. und nutzt dann einen Zufallszahlengenerator sowie passende Histogramme um eine stetige Kurve zu approximieren. Im ersten Teilkapitel gibt er die Definition eines „(allgemeinen) Wahrscheinlichkeitsraums“ nach Kolmogoroff (1933) an, wobei er explizit historisch auf Kolmogoroff verweist. Trotzdem nutzt er den modernen Begriff der σ -Algebra und fordert für diesen Wahrscheinlichkeitsraum in üblichem Sinne die σ -Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes. Henze (2018, S. 295) weist dabei darauf hin, dass ohne den Ausschluss gewisser Teilmengen bedeutende Wahrscheinlichkeitsmaße nicht mehr betrachtet werden können, was wie Georgii (vgl. 9.2.1) beweist, ein Grundlagenproblem der Maßtheorie bildet und von Henze bewusst und explizit nicht in seiner Einführung in die Stochastik behandelt wird. Im nächsten Teilkapitel widmet sich Henze (2018, S. 295f.) der Definition von Borelmengen und folgert, dass jedes Intervall in \mathbb{R} eine Borelmenge ist, was das Arbeiten mit entsprechenden wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen ermöglicht. Im Anschluss daran wird die Messbarkeit von Zufallsvariablen (Henze, 2018, S. 296), Verteilungsfunktionen und ihre Eigenschaften (Henze, 2018, S. 298) sowie Dichten (Henze, 2018, S. 299ff.) formal-abstrakt definiert. Den Abschluss des Kapitels bildet der Sonderfall der Cantorschen Verteilungsfunktion, die zwar eine stetige Verteilungsfunktion aber keine Dichtefunktion besitzt (Henze, 2018, S. 302f.).

Nach dieser Einführung in die Grundbegriffe allgemeiner Wahrscheinlichkeitsräume führt Henze (2018, S. 305ff.) stetige Verteilungen und ihre Kennwerte ein.

¹⁴⁸ Was genau Zufall ist, wird wie in den anderen Arbeiten, die einen formal-abstrakten Standpunkt vertreten (bewusst) nicht geklärt, oder als philosophische und somit nicht mathematische Frage identifiziert.

Grundsätzlich erläutert Henze aber direkt zu Beginn des Kapitels, dass die Rechenweise in Bezug auf diese Kennwerte analog zu den diskreten Fällen ist. Entsprechend wird dieses Kapitel hier nicht vertieft.

Im nächsten Kapitel wird das Konzept der Verteilung erneut erweitert und zwar werden mehrdimensionale stetige Verteilungen von Henze behandelt. Ausgehend von gemeinsamen Verteilungen und Dichten von Zufallsvariablen (Henze, 2018, S. 321ff.) werden dann verschiedene Beispiele (Henze, 2018, S. 324), Eigenschaften – wie die Unabhängigkeit (Henze, 2018, S. 325) und weitere Kennwerte wie die Kovarianz Korrelation betrachtet (Henze, 2018, S. 327).

Im letzten inhaltlichen Kapitel, Kapitel 34, werden nun die statistischen Verfahren, die von Henze in den Kapiteln 29 und 30 behandelt wurden auf stetige Merkmale erweitert. Hierbei geht er von der inhaltlichen Grundstruktur analog zu den vorangehenden Kapiteln vor. Da es sich einerseits um statistische Methoden handelt und zum anderen Verfahren vorgestellt werden, wird auch dieser Teil nicht weiter dargestellt.

Vor dem Anhang mit verschiedenen Tabellen, den Lösungen der Übungsaufgaben, usw. formuliert Henze (2018, S. 363) ein Nachwort, indem er rückblickend seine generellen Ziele in den Blick nimmt. Dazu gehören das Kennenlernen elementarer Grundbegriffe und zentraler Ideen der Stochastik aber auch die Ausschärfung der stochastischen Intuition. Letztere grenzt Henze (2018, S. 363) von den formalen Grundlagen der Mathematik des Zufalls ab, „um bei der Kunst des stochastischen Modellierens von Zufallsphänomenen auf sicherem Boden zu stehen“ (Henze, 2018, S. 363). Zum Weiterlesen im Bereich der mathematischen Stochastik empfiehlt Henze unter anderem das zuvor besprochene Lehrbuch von Georgii¹⁴⁹ (vgl. 9.2) und endet mit folgendem Ausdruck seiner Hoffnung:

„Stochastik gilt gemeinhin als schwierig; ein Hauptgrund hierfür ist die Verbindung von Mathematik und beobachteten Zufallsphänomenen über die stochastische Modellbildung. Ich hoffe, dass dieses Buch möglichst vielen den Zugang zu dieser faszinierenden Wissenschaft erleichtert hat.“

(Henze, 2018, S. 363)

¹⁴⁹ Auch das hier besprochene Lehrbuch von Henze findet sich im Literaturverzeichnis von Georgii (2009, S. 390).

Insgesamt lässt sich auch für dieses Lehrbuch konstatieren, dass es dem systematischen Aufbau nach Parallelen zu Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffen“ besitzt. Der Wechsel zwischen statistischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Themen wie auch der Beginn mit einer Beschränkung auf diskrete Wahrscheinlichkeitsräume unterscheidet sich zwar stark von den in dieser Arbeit besprochenen Werken von Kolmogoroff (1933) und Georgii (2009), alle drei Autoren unterscheiden aber zwischen einer formal-abstrakten Mathematik und empirisch-gegenständlichen Zufallsphänomenen, was auch bedeutet, dass Henze – wie in seinem Kapitel 6 dargestellt – eine formale implizite axiomatische Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie fordert und nur eine solche insbesondere im Wechselspiel mit anderen mathematischen Disziplinen als „befriedigend“ (Henze, 2018, S. 36) empfindet.

9.3 Methodik der Untersuchung 4

Da die Auffassung beider Autoren, entsprechend der Definition von Auffassungen in dieser Arbeit, nicht direkt aus dem mathematischen Formel-Text ablesbar ist (vgl. 7) sondern in den Zwischenkommentaren zu erwarten ist, benötigt man inhaltsanalytische Methoden, im weiten Begriffsverständnis, um deren Sinn zu erfassen, um so die subjektiven Erfahrungsbereiche rekonstruieren zu können, die beim Verfassen der Lehrbücher von den Autoren aktiviert wurden.

Eine mögliche Methode für diese Untersuchung ist die zusammenfassende Inhaltsanalyse nach Mayring (2015b), die bereits in Kapitel 7 verwendet wurde. Zur Erinnerung und Vollständigkeit dieser Untersuchung seien hier erneut die Ablaufschritte des Analyseschemas benannt:

1. Schritt: Bestimmung der Analyseeinheit
2. Schritt: Paraphrasierung am Material
3. Schritt: Zusammenfassung des neuen Kategoriensystems
4. Schritt: Rücküberprüfung der zusammenfassenden Kategoriensysteme am Ausgangsmaterial

Zusätzlich wurden zur Auswertung die Z1 bis Z4 Regeln bei der Paraphrasierung und Reduktion angewendet.

9.4 Ergebnisse der Untersuchung 4

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Untersuchung von den Einführungen in die Stochastik von Georgii (2009) und Henze (2018) angegeben, wobei streng dem von Mayring (2015b) vorgeschlagenem Ablaufmodell aus 9.3 gefolgt wird. Entsprechend befindet sich im ersten Unterabschnitt eine Bestimmung der genutzten Analyseeinheit, die zwischen der Kodiereinheit, der Kontexteinheit und der Auswertungseinheit unterscheidet. Im darauffolgenden Abschnitt (9.4.1.2) findet sich eine Tabelle mit den Paraphrasen der herausgearbeiteten relevanten Auswertungseinheiten, sowie dessen Reduktion zu generellen Kategorien. Diese Kategorien werden dann in Abschnitt 9.4.1.3 mit Bezug zum dargestellten Kontext (9.2) vergleichend diskutiert.

9.4.1 Zusammenfassende qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring

9.4.1.1 Bestimmung der Analyseeinheit

Die *Kodiereinheit* der Analyse ist ein Satz oder Nebensatz.

Die *Kontexteinheit* ist ein Abschnitt (bspw. „4.1 Der Erwartungswert“ (Georgii, 2009, S. 93–101) oder „12 Der Erwartungswert“ (Henze, 2018, S. 76–85))

Auswertungseinheit: Die Analyse geht entsprechend des Textflusses der „Lehrwerke“ vor.

Hierbei gibt es allerdings folgende Ausnahme:

- Tritt keine explizite Beschreibung typischer Auffassungen, Bewertungen oder Haltungen in Bezug auf formal-abstrakte oder empirisch-gegenständliche Erfahrungsbereiche auf, wird diese nicht paraphrasiert.

9.4.1.2 Paraphrasierung des Materials

Im Folgenden wird eine Paraphrasierung des Materials vorgenommen. Diese Paraphrasierung erfolgt entsprechend des modifizierten Ablaufschemas einer zusammenfassenden Inhaltsanalyse (vgl. 9.3) und der Gliederung des Materials nach Analyseeinheiten (vgl. 9.4.1.1). Die Paraphrasierung erfolgt in diesem Fall in zwei Phasen. Zunächst einer *Generalisierung* der für diese Untersuchung relevanten Analyseeinheiten, die einer Paraphrase der entsprechenden Analyseeinheit hinsichtlich der Z3-Regel von Mayring (2015b) entspricht. Nach der Genera-

lisierung aller relevanten Analyseeinheiten in Bezug auf die jeweiligen Lehrwerke erfolgt eine *Reduktion* der Paraphrasen in inhaltlich zusammenfassende Kategorien.

In den nachfolgenden Tabellen (Tabelle 15 und Tabelle 16) findet sich je untersuchtem Lehrbuch eine Aufstellung, die die Seitenzahl der Fundstelle, die Nummer der Fundstelle, die Generalisierung und die Reduktion in Form einer Kategorien-Zuordnung aufweist.

Tabelle 15: Zusammenfassende Inhaltsanalyse nach Mayring von Georgiis (2009) „Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“.

S.	Nr.	Generalisierung	Reduktion
V	1	Zufall bei Alltagsphänomenen	Alltagsbezug & Anwendung
5	2	Stochastik hoch angewandte Wissenschaft	Alltagsbezug & Anwendung
103	3	Anwendungen mit Erwartungswert	Alltagsbezug & Anwendung
11	9	Was Zufall ist, ist philosophische Frage und noch nicht geklärt. Was ist eigentlich Zufall?	Zufall
V	10	Rationale Entscheidung unter Unsicherheit	Zufall
2	11	Zufall zwischen Unkenntnis und Rahmenbedingung der Situation	Zufall
11	12	Stochastik als Lehre von Gesetzmäßigkeiten ein Widerspruch?! Nein!	Zufall
2	13	Modellieren durch Abstraktion oder mathematische Idealisierung	Modellieren
12	14	Modell wird mathematisch untersucht, Ergebnisse aus Wirklichkeit werden geprüft	Modellieren
157	15	Passt Modell zur Erfahrung?	Modellieren
5–6	16	Statt diskreter Modelle, Maßtheorie zur Motivation und Auseinandersetzung mit theoretischen Aspekten	Formale Mathematik
11	17	„Faszinierend“, dass trotz regellosem Phänomen exakte Sprache und Beweise möglich sind	Formale Mathematik

11	18	Gesetz der Großen Zahl ist mathematisches Theorem	Formale Mathematik
12	19	es gibt gute Gründe für Ausklammern der Frage nach dem Zufall an sich	Formale Mathematik
13	20	Die Bildung eines Modells liegt eigentlich außerhalb der Mathematik. Die Bildung des richtigen Modells ist im Allgemeinen schwierig	Formale Mathematik
17	21	Grundsatzfrage: womit geht man um?	Formale Mathematik
17	22	Unangenehme technische Fragen!	Formale Mathematik
32	23	mathematische Fachsprache	Formale Mathematik
24	24	Mathematisches Konzept Wahrscheinlichkeit gibt keine Antwort auf philosophische Frage nach Wahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
24	25	naive Interpretation – unsichere Natur	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
24	26	die frequentistische Interpretation relativer Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
24	27	subjektive Interpretation der Wahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
24	28	Es ist generell nicht klar, welche Interpretation „die Beste“ ist	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
62	29	Anknüpfung an Intuition von Abhängigkeit von Wahrscheinlichkeiten	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
64	30	Interpretation bedingter Wahrscheinlichkeiten frequentistisch	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
64	31	Interpretation bedingter Wahrscheinlichkeiten subjektivistisch	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
64	32	naive Deutung ist gefährlich bei Behandlung bedingter Wahrscheinlichkeiten	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
157	33	Mittelwert und Häufigkeitsinterpretation	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)

Tabelle 16: Zusammenfassende Inhaltsanalyse nach Mayring von Henzes (2018) „Stochastik für Einsteiger“.

S.	Nr.	Generalisierung	Reduktion
V	1	Der Zufall spielt in vielen Alltagssituationen eine Rolle	Alltagsbezug & Anwendung
V	2	Stochastische Begriffsbildung im Alltag	Alltagsbezug & Anwendung
VI	3	Henze fordert auch die Bewährung an der Empirie, zumindest bei Modellierung	Alltagsbezug & Anwendung
1	4	Pragmatischer Standpunkt von Henze	Alltagsbezug & Anwendung
1	5	1. Definition Zufallsexperiment (nutzt frequentistische Auffassung der „beliebigen Wiederholbarkeit“)	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
42	6	Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
45	7	Laplace Wahrscheinlichkeitsrechnung	Wahrscheinlichkeit (Interpretation)
VI	8	Erläuterung der Vorteile der Formalisierung durch breiteres Anwendungsfeld	Formale Mathematik
36	9	Beschreibt Formalisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Kolmogoroff und benennt die formalen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit	Formale Mathematik
184	10	Sinn von σ -Additivität für Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie	Formale Mathematik
295	11	Henze zeigt Problem zu Intuition auf, dass bei stetigen Wahrscheinlichkeitsmaßen nicht für alle Teilmengen der Grundmenge eine Wahrscheinlichkeit definiert wird	Formale Mathematik
	12	Formale Grundlagen der Mathematik um Modellierungen erfolgreich durchzuführen	Formale Mathematik

18	13	Frequentistischer Ansatz für ihn falsch und insbesondere kein mathematischer Sachverhalt	Formale Mathematik
VI	14	Durch Modellieren zur Anwendung	Modellieren

9.4.1.3 Übersicht und Einordnung der zusammenfassenden Kategorien

In den nachfolgenden Listen sind erneut die inhaltlich zusammenfassenden Kategorien der Paraphrasierung angegeben.

Georgii (2009): „Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“

- Alltagsbezug & Anwendung
- Zufall
- Modellieren
- Formale Mathematik
- Wahrscheinlichkeiten (Interpretation)

Henze (2018): „Stochastik für Einsteiger“

- Alltagsbezug & Anwendung
- Modellieren
- Formale Mathematik
- Wahrscheinlichkeiten (Interpretation)

9.4.2 Ergebnisse der zusammenfassenden qualitativen Inhaltsanalyse im Kontext der Werke

An dieser Stelle möchte ich in Bezug auf den dargestellten Kontext die Ergebnisse der Untersuchung diskutieren und beide Lehrbücher miteinander vergleichen. Der Unterschied, der zwischen den zusammenfassenden Kategorien besteht ist, dass Georgii in seinem Hochschullehrwerk über den Zufall als solchen und nicht nur über Zufall in Anwendungskontexten spricht. In beiden Lehrwerken zeigen sich bis auf die stärkere Auseinandersetzung mit dem Zufall bei Georgii, im Rahmen seines Einleitungskapitels gleiche Kategorien, d.h. es wird in beiden Lehrwerken über die Anwendung der Wahrscheinlichkeit und insbesondere über Modellieren als spezifische Tätigkeit gesprochen. Hierbei stellt Georgii allerdings fest, dass das Modellieren eigentlich nicht mehr zur mathematischen Tätigkeit gehöre, wohingegen Henze dies nicht direkt expliziert. In beiden Lehrwerken

wird über verschiedene Interpretationen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gesprochen, also eine frequentistische, laplacesche oder subjektivistische Wahrscheinlichkeit. Das Hauptaugenmerk liegt aber bei beiden Lehrwerken auf der formalen Mathematik. Auch die ausführliche Kontextbeschreibung hinsichtlich der inhaltlichen Strukturierung zeigt, dass beide Lehrwerke einerseits klar eine moderne Begriffsbildung im Rahmen ihrer Lehrwerke vermitteln wollen, bzw. zur Auseinandersetzung damit anregen möchten, sie aber zugleich auch die historische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und das Spannungsfeld zwischen einer formal-abstrakten Mathematik und ihrer Anwendung beschreiben und auch kommentieren.

Entsprechend der identifizierten Perspektiven und Umgangsweisen mit den mathematischen Objekten der Wahrscheinlichkeitstheorie und deren Reflexion, sowohl in der qualitativen Inhaltsanalyse als auch der Kontextbeschreibung, kann davon ausgegangen werden, dass subjektive Erfahrungsbereiche einer formal-abstrakten Auffassung (vgl. 5.2.2) von den Autoren während der Verfassung der Lehrwerke aktiviert wurden. Man kann meiner Einschätzung nach sogar davon sprechen, dass ein Ziel, neben der Ausschärfung der stochastischen Intuition der Studierenden, wie bspw. bei Henze, darin liegt, ihnen einen Zugang zur formal-abstrakten Auffassung zu bieten, obwohl die Konzeption der Lehrbücher recht unterschiedlich ist.

9.4.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 4

Die Untersuchung zeigt, dass im Hochschulkontext eine formal-abstrakte Auffassung nachweisbar ist. Es zeigte sich sogar in beiden untersuchten Lehrwerken, dass eine solche formal-abstrakte Auffassung sehr explizit, d.h. sowohl in der inhaltlichen Darstellung als auch in den Metakommentaren, von den Autoren vertreten wurde, insbesondere hinsichtlich der Vorteile, die eine solche Auffassung bietet, aber auch ihrer Notwendigkeit für eine moderne Wahrscheinlichkeitstheorie und ihren Erfolg in der Anwendung.

9.4.4 Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 4 ergeben

- Bei dieser Fallstudie wurden zwei Lehrwerke exemplarisch betrachtet. Die Analyse der inhaltlichen Struktur zeigt verschiedene Herangehensweisen der mathematischen Theorieentwicklung auf Seiten der Lehrbuchautoren. Hier wäre eine weiterführende empirische Analyse, welche Herangehensweise besonders geeignet ist, eine angemessene Auffassung von Mathematik bei den Studierenden zu befördern, interessant.

- Wie auch schon die historischen Analysen zeigen konnten, bietet gerade die relativ junge mathematische Disziplin der Stochastik auf Grund ihrer Entwicklung und besonderen inhaltlichen Struktur das Potential, Fragen zur Mathematik und ihrer Anwendung/Anwendbarkeit aufzuwerfen und zu diskutieren. Entsprechend kann der Dialog über stochastische Fragestellungen, aber auch bezüglich der Stochastik als mathematisches Gebiet, als Nebelkammer für Auffassungen (über die Anwendbarkeit auf die Empirie) von Mathematik in weiteren mathematikdidaktischen Untersuchungen dienen.

10 Auffassungsentwicklungen im Rahmen des Projekts ÜberPro_WR

„Kolmogoroff trennt klar in einen formal-abstrakten Ansatz (§1, 3, 4) und einen empirisch-gegenständlichen Transfer (§2). Dem Leser macht er das Angebot mittels der Fußnoten, entweder dem einen oder dem anderen zu folgen. Ich bin der Meinung, dass zu einem umfassenden Verständnis beide Seiten gehören und würde seiner Empfehlung des Überspringens somit nicht folgen. Beide Seiten stützen sich gegenseitig und ergeben nur verbunden eine gelungene Einsicht.“

(Aus Emils [Pseudonym] Reflexionsbuch zur 11. Sitzung, Frage 2)

„Insgesamt war es eine sehr angeregte Seminarsitzung. Unter anderem wurde auch darüber gesprochen welche Haltung man in Analysis I vermittelt. Insgesamt hat es trotz meiner Einsetzung von „Treu“, „Leben“ und „Wal“ in die Axiome der Grundlagen der Geometrie nicht gefruchtet. Bis ich schließlich gesagt habe, dass Hilbert sich bewusst gegen den empirischen Gehalt ausspricht. Eine weitere Frage für das Tagebuch: Inwiefern Hilberts Grundlegung mit der Forschungshypothese zusammenhängt.“

(Aus G. Stoffels Feld- und Reflexionsbuch zur 9. Sitzung)

Die fünfte und abschließende Forschungsfrage dieser Arbeit lautet:

5. Inwieweit kann ein Blick von Studierenden in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von ÜberPro_WR die Reflexion ihrer Übergangserfahrungen unterstützen und ihre Auffassung von Mathematik diversifizieren?

Entsprechend wird in dieser Untersuchung die Auffassungsentwicklung von Teilnehmer*innen des Seminars ÜberPro_WR in dessen Kontext und den darin verwendeten Materialien und Methoden dargestellt. Die zentralen Materialien dieses Seminars bildeten Auszüge der Originalquellen von Kolmogoroff (1933) und von Mises (1931), die bereits in den vorangehenden Untersuchungen (vgl. 6, 7) vorgestellt wurden. Beide wurden als paradigmatische Vertreter einer formal-

abstrakten und empirisch-gegenständlichen Auffassung, die sie auch, wie in Untersuchung 1 und 2 gezeigt, innerhalb der Quellen explizit als solche zu erkennen geben, als Anlass zur Eigenreflexion der Studierenden genommen.

Trotz der Notwendigkeit der Darstellung des Kontexts des Seminars liegt der Schwerpunkt in dieser Arbeit auf der Rekonstruktion der Auffassungsentwicklung des in dieser Untersuchung betrachteten Teilnehmers dieses Seminars und nicht auf einer umfassenden Darstellung¹⁵⁰ dieses Seminars. Daher werden im Abschnitt über den Kontext der Fallstudie, der gemeinsame Erfahrungsbereich des Seminars ÜberPro_WR (vgl. 10.3.1), lediglich die Struktur des Seminars und ein Verweis auf die in den Seminarsitzungen verwendeten Materialien angegeben.

Erste theoretische Überlegungen, um ein besseres Verständnis der Übergangproblematik zu erlangen, indem man den Auffassungswechsel von Studierenden im Rahmen eines Interventionsseminars betrachtet, wurden von Witzke (2013) im Rahmen der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vorgestellt. Im Jahr 2015 wurde dann erstmals in Zusammenarbeit von Witzke, Struve, Clark & Stoffels (2016) ein dreitägiges Intensivseminar zur „Übergangproblematik am Beispiel der Geometrie“ durchgeführt. Im Sommersemester 2017 wurde dieses Seminar mit Bezug zur Entwicklung der Geometrie zum dritten Mal durchgeführt, nachdem verschiedene Verbesserungen inhaltlicher, methodischer und forschungsmethodischer Natur vorgenommen wurden¹⁵¹.

¹⁵⁰ Eine solche Darstellung insbesondere mit einer ausführlichen Darstellung der didaktischen Entscheidungen und Hinweisen zur Durchführung ist als Praxisbuch mit dem Titel „ÜberPro_LeSe: Lehr- und Seminarbuch zur Übergangproblematik von der Schule zur Hochschule in Auseinandersetzung mit der historischen Entwicklung der Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung“ geplant.

¹⁵¹ Die maßgeblichen Änderungen auf inhaltlicher Ebene sind einerseits eine Straffung der besprochenen Themen u.a. durch eine verbesserte Kürzung verwendeter (Original-)Quellen, einer noch umfassenderen Explikation der verschiedenen Auffassungen, die den besprochenen Quellen zuzuordnen sind, und der Explikation der Intention der Dozierenden gerade diese Quellen ausgewählt zu haben. Beide Aspekte wurden wie in den vorangehenden Durchführungen ausführlich im Rahmen der Seminarsitzungen mit den Studierenden diskutiert. In methodischer Hinsicht wurden gerade für die Erarbeitung projektiver und nicht-euklidischer Geometrie, aufgrund der Kürze in der diese Themen behandelt werden mussten, vielfältige Zugangsweisen genutzt, die so bzw. in abgewandelter Form auch von den Studierenden auf den Schulunterricht übertragbar sind. Eine weitere wichtige Änderung, die auf den positiven Erfahrungen mit Reflektionsbücher im ÜberPro_WR Seminar basierte, war deren Einführung auch in den Seminaren mit Bezug zur Geometrie. Diese Änderung erscheint zunächst nur methodischer Art zu sein, ist aber aufgrund der Möglichkeit zur längerfristigen Beobachtung der Teilnehmer*innen und deren

Die Grundidee dieser Seminare wird in der Forschungshypothese deutlich. Die Untersuchungen 1 und 2 konnten zeigen, dass ein Auffassungswechsel von einer „empirisch-gegenständlichen“ zu einer „formal-abstrakten“ Auffassung in der historischen Entwicklung der mathematischen Gemeinschaft stattgefunden hat (vgl. Einleitung, 4.4.2.3). Durch die Auseinandersetzung der Teilnehmer*innen des Seminars mit historischen Quellen (vgl. 6, 7), die paradigmatisch diese Auffassungen widerspiegeln, können diese dann einerseits gegebenenfalls Parallelen zu ihrem eigenen Übergang erkennen (vgl. 8, 9) und andererseits auch dabei unterstützt werden, ihre eigene Auffassung von Mathematik zu diversifizieren, indem sie verschiedene Auffassungen von Mathematik explizit kennenlernen.

Die Vorteile der Betrachtung der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegenüber der Entwicklung der Geometrie im Interventionsseminar liegen zum einen in der Möglichkeit nur einen relativ kurzen Ausschnitt der geschichtlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachten zu müssen um einen fundamentalen Auffassungswechsel in dieser Entwicklung festzustellen, der bei den ausgewählten zentralen Quellen von von Mises (1931) und Kolmogoroff (1933) nur 2 Jahre umfasst (vgl. Untersuchungen). Ein anderer Vorteil ist die Möglichkeit der Nutzung von Quellen im Originaltext/-druckbild, die ohne größere Schwierigkeiten auch heute noch gut lesbar und vor allem nicht durch Geschichtsschreibung oder Übersetzung verfälscht wurden. Außerdem ist es ein Glücksfall, dass in diesen historischen Quellen von beiden Autoren sehr explizit ihre Auffassung dargestellt wurde (vgl. 6, 7), was den Studierenden einen leichteren Zugang zur Deutung der Quelle ermöglicht (vgl. Eingangszitat aus dem Feld- und Reflexionsbuch von G. Stoffels).

Die Nachteile der Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Gegensatz zur Geometrie liegen zum einen aus pragmatischer Perspektive in den heterogenen Vorkenntnissen der Teilnehmer*innen im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Zeitpunkt der Durchführung des Seminars¹⁵² und zum anderen

eigener Perspektiventwicklung im Rahmen des Seminars und dessen Inhalte ebenso in forschungsmethodischer Hinsicht zentral (vgl. 10.2.1).

¹⁵² Zum Veröffentlichungsdatum dieser Arbeit kann davon ausgegangen werden, dass (Erstsemester-)Studierende aus NRW mittlerweile umfassendere stochastische Kenntnisse über Verteilungen und – zumindest auf symbolischer Ebene – über Ereignismengen und Zufallsvariablen besitzen, als es im Durchführungszeitraum der ÜberPro_Seminare der Fall war. Ein Grund dafür liegt in Veränderungen der Vorgaben zur Erlangung der allgemeinen Hochschulreife.

darin, dass dem Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dem Wahrscheinlichkeitsmaß, nur schwer ein empirisches Referenzobjekt zuzuordnen ist (vgl. Kontext der Quelle zur Untersuchung 1), wohingegen Punkten, Geraden und Ebenen auf natürliche Weise in Form von Zeichenblattfiguren empirische Referenzobjekte zugewiesen werden können¹⁵³. Dieser letzte Nachteil ist insofern zugleich ein Vorteil, da die Studierenden auf diese Weise einen direkteren Einstieg und vor allem Motivation für das Einnehmen einer formal-abstrakten Auffassung gewinnen können. Diese Problematik kann gut am paradigmatischen Beispiel für die formal-abstrakte Auffassung im Seminar ÜberPro_Geo, dem Werk „Grundlagen der Geometrie“ von Hilbert (1899) illustriert werden, das laut Freudenthal (1960) überaus überzeugend ist, vor allem aus mathematisch-praktischer Perspektive:

„Es gibt wohl kein schöneres Zeugnis als diese Poincarésche Besprechung für die Überzeugungskraft von Hilberts Grundlagen, die Überzeugungskraft einer Philosophie, die nicht programmatisch verkündet, sondern handgreiflich durchexerziert wird – exempla trahunt.“

(Freudenthal, 1960, S. 24)

Das Problem dieser „handgreiflich durchexerzierten“ Grundlegung liegt in der Schwierigkeit, die Besonderheit des hilbertschen Standpunkts hinsichtlich der Abhängigkeiten der Grundbegriffe durch die impliziten Definitionen mithilfe von Axiomen anhand des Textes zu verstehen (vgl. Eingangszitat aus dem Feld- und Reflexionsbuch von G. Stoffels), da die Absicht dieses Standpunkts nicht explizit in der Quelle artikuliert wird. Wie in Untersuchung 2 (vgl. 7) gezeigt wurde macht Kolmogoroff (1933) diesen neuen Standpunkt und dessen Nutzen durch die Formalisierung explizit, was seine „Grundbegriffe“ zu einer so wertvollen Quelle macht, in der die Intention des Autors leichter zu rekonstruieren und entsprechend auch für Studierende leichter zu erfassen ist. Dadurch wird den Studierenden die Möglichkeit gegeben Kolmogoroffs Auffassung mit ihrer eigenen

¹⁵³ Dies meint nicht, dass die empirischen Referenzobjekte, im Sinne einer empirischen Theorie alle Eigenschaften des Begriffs umfassen müssen, sondern dass es eine prototypische Zeichenblattfigur oder einen physikalischen Gegenstand gibt, der als Prototyp dieses Begriffs gilt. Im Falle der Geraden ist dies beispielsweise eine Strecke, die über zwei vermeintliche Endpunkte der Strecke hinaus gezeichnet wird. Eine ausführliche Definition dieses Beispiels sowie der Identifikation der Gerade als theoretischer, allerdings für die besprochene Schulgeometrie nicht notwendiger, Begriff findet sich in Struve (1990, S. 8–57).

Auffassung zu vergleichen und ihre dann gegebenenfalls zu erweitern (vgl. Eingangszitat aus Emils [Pseudonym] Reflexionsbuch zur 11. Sitzung, Frage 2).

Entsprechend der vorangehenden Untersuchungen wird auch hier zunächst das Ziel der Untersuchung stärker ausdifferenziert. Darauf folgt anders als in den bisherigen Untersuchungen eine Darstellung der Methodik der Fallstudienanalyse (Case Study Research), die für diese Untersuchung ausgewählt wurde, da sie die Möglichkeit bietet ein sehr differenziertes und tiefes Bild der Auffassungsentwicklung von Studierenden rekonstruierbar zu machen. Erst dann folgt als erstes Ergebnis dieser Untersuchung die Darstellung des Kontexts, in den der intensiver betrachtete Fall Emil eingebettet ist. Dieser umfasst die allgemeine Seminarkonzeption (vgl. 10.3.1) sowie die Ergebnisse der Pre- und Postfragebögen von Emil [Pseudonym], die Informationen über diesen Fall vor und nach dem Interventionsseminar geben können (vgl. 10.3.2.1 und 10.3.2.2). Man kann hier von einem gemeinsamen Kontext oder Erfahrungsbereich sprechen, da die Angebote zur Selbstreflexion für alle Teilnehmer*innen des Seminars identisch sind. Zuletzt wird die Entwicklung der Auffassung von Emil im Rahmen des Seminars ÜberPro_WR in der Fallstudie Θ_E dargestellt.

10.1 Ziele der Untersuchung 5

Das übergeordnete Ziel der Untersuchung liegt in der Beantwortung der Forschungsfrage:

5. Inwieweit kann ein Blick von Studierenden in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von ÜberPro_WR die Reflexion ihrer Übergangserfahrungen unterstützen und ihre Auffassung von Mathematik diversifizieren?

Eine Antwort auf diese Frage muss sowohl

- die Konzeption des Seminars ÜberPro_WR als auch
- die (subjektiven) Erfahrungsbereiche berücksichtigen, die vor, während und im Anschluss an das Seminar ÜberPro_WR konstruiert und verändert wurden.

Besonders wichtige Aspekte der Rekonstruktion der Erfahrungsbereiche sind entsprechend:

- die Rekonstruktion der Auseinandersetzung der Studierenden mit dem Seminar ÜberPro_WR und dessen Teilnehmer*innen (hiermit ist auch der Leiter des Seminars gemeint)
- die Rekonstruktion der Reflexion eigener Übergangserfahrungen in Bezug auf die angebotenen Reflexionsanlässe im Seminar von Studierenden mit besonderer Berücksichtigung von Reflexionsanlässen

Die hier genannten Ziele sind eine revidierte Form der Ziele im Protokoll zur Durchführung einer Fallstudie als Teil der multiplen Fallstudie im Projekt ÜberPro_WR (vgl. Anhang D)

In den Kapiteln 4 und 5 wurden mit der Aufarbeitung des Konzepts subjektiver Erfahrungsbereiche von Bauersfeld aus einer enaktivistischen Perspektive ein für diese Betrachtung ausreichend breiter Theorierahmen dargestellt. Nichtsdestotrotz sind die vorgegebenen Ansprüche an eine Rekonstruktion, die obige Aspekte *umfassend* behandeln soll, herausfordernd und müssen daher durch eine entsprechende Methodik der Rekonstruktion Rechnung getragen werden. Eine solche Methodik bietet die Fallstudienforschung (Case Study Research), die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

10.2 Methodik der Untersuchung 5

Diese Untersuchung nutzt aufgrund der Komplexität des Untersuchungsgegenstandes, (subjektiver) Erfahrungsbereiche von Teilnehmer*innen des Seminars, die Methodik der Fallstudienforschung (Case Study Research). In der Regel sind Arbeiten der Fallstudienforschung der qualitativen Forschung zuzuordnen. Auch diese Arbeit nutzt die Methodik der Fallstudienforschung in diesem Sinne. Trotzdem können Fallstudienforschungen auch quantitative Elemente enthalten (vgl. Yin, 2014, S. 65–67). Betrachtet man verschiedene Arbeiten, die der Methodik der Fallstudienforschung folgen, ist leicht festzustellen, dass sich die Herangehensweisen und Schwerpunkte der Arbeiten sehr unterscheiden können, je nachdem welcher Forschende oder welche Forschungsgruppe Fallstudienforschung betreibt (vgl. Stake, 1995, S. xi–xii; Yin, 2014, S. 15ff.).

Diese Untersuchung orientiert sich stark an dem Forschungsprozess und der Darstellung von Fallstudien, die von Yin (2014) vorgeschlagen wird, wobei einige Konzepte von Stake (1995) berücksichtigt werden, insbesondere auf welche Weise ein Fall θ hinsichtlich einer Forschungsfrage charakterisiert und ausgewählt werden kann, bzw. sollte.

10.2.1 Bestimmung der Methodik der Fallstudienforschung

Stake (1995, S. xi) beginnt die Einführung seines Werks „The Art of Case Study Research“ indem er beschreibt, was durch eine Fallstudie erfasst werden kann und soll:

„A case study is expected to catch the complexity of a single case. [...] We study a case when itself is of very special interest. We look for the detail of interaction with its contexts. Case Study is the study of the particularity and complexity of a single case, coming to understand its activity within important circumstances.“

(Stake 1995, S. xi)

Mit ihrem besonderen Fokus auf die Einzigartigkeit der Fälle und Bezug auf die Interaktionen dieser Fälle mit dem Kontext des besprochenen Falls passt die Methodik der Fallstudienanalyse gut zur Rekonstruktion von Auffassungen, die sich aus subjektiven Erfahrungsbereichen in Auseinandersetzung mit verschiedenen Erfahrungsbereichen aus ihrer Umwelt und Interaktionen mit anderen Subjekten entwickeln.

Trotz dieser Stärken der Methode ist auffällig, dass in Handbüchern zu dieser Methode und in wissenschaftlichen Beiträgen, die diese Methode nutzen, häufig ein Abschnitt darüber zu finden ist, warum die Methode eine wissenschaftliche Methode sei oder zumindest sein kann und inwiefern sie mittlerweile im Rahmen verschiedener wissenschaftlicher Gemeinschaften – wie den Fachdidaktiken, der Pädagogik, der Psychologie oder Soziologie – anerkannt, oder mittlerweile sogar populär sind (Harrison, Birks, Franklin, & Mills, 2017; Yin, 2014, S. 19–21).

Dies liegt unter anderem daran, dass es keine feststehende, von allen Fallstudienforschern geteilte Definition einer „Fallstudie“ gibt (Harrison et al., 2017, S. 6). Neben der bereits zu Beginn zitierten Definition von Stake lässt sich u.a. auch die zweifaltige Definition von Yin nennen, in der er zunächst die Beschreibungsweite (*scope of a case study*) der Fallstudie und danach die Eigenschaften einer Fallstudie (*features of a case study*) angibt:

1. A case study is an empirical inquiry that
 - investigates a contemporary phenomenon (The ‘case’) in depth and within its real-world context, especially when

- the boundaries between phenomenon and context may not be clearly evident.
2. A case study inquiry
- copes with the technically distinctive situation in which there will be many more variables of interest than data points and as one result
 - relies on multiple sources of evidence, with data needing to converge in a triangulation fashion, and as another result
 - benefits from the prior development of theoretical propositions to guide data collection and analysis.

(Yin, 2014, S. 16–17)

Neben diesen Fragen der Definition gibt es auch traditionelle Bedenken hinsichtlich der Strenge der Methode, der Verwechslungsgefahr mit Fallstudien zur Lehre oder Unterrichtsgestaltung, der Generalisierung von Fallstudien, dem unabhsehbaren Aufwand sowie den Vorurteilen gegenüber der Fallstudienforschung, die Yin (2014, S. 19–22) benennt und anschließend durch die Forderung nach Transparenz der Quellen, die die Fallstudie informieren, und der Abläufe bei der Durchführung der Fallstudienforschung sowie Ökonomie hinsichtlich der durchgeführten Methode entkräftet.

Mittlerweile kann allerdings davon gesprochen werden, dass Fallstudien im Sinne des Case Study Research eine etablierte Methodik darstellen, die sowohl international (Mills, Durepos, & Wiebe, 2010) als auch national (Helsper, Kelle, & Koller, 2016) anerkannt wird. Diese Anerkennung basiert einerseits auf der Erarbeitung von Kriterien zur Bewertung der Qualität von Fallstudien und andererseits auf einer Standardisierung im Sinne interindividuell-nachvollziehbarer Prozessbeschreibungen. Eine Möglichkeit der Beschreibung des Prozesses der Fallstudienforschung wird von Yin (2014) ausgearbeitet, der diesen in folgende Schritte unterteilt:

1. Planung,
2. Design,
3. Vorbereitung der Datensammlung für eine Fallstudie,
4. Datensammlung,
5. Analyse und

6. wissenschaftlicher Austausch über die Fallstudie.

Die Abfolge der Prozessschritte ist entsprechend seiner Formulierung zwar linear¹⁵⁴, aber auch iterativ, insofern, dass es verschiedene Wechselspiele zwischen den Prozessschritten gibt. So kann die Datensammlung einen Einfluss auf eine erneute Durchführung und Planung einer Fallstudie haben, oder Ergebnisse der Analyse von Fallstudien Daten erneute Datensammlungsprozesse erfordern. Ein weiteres auffälliges Merkmal der Beschreibungen von Fallstudienforschung in Handbüchern zu diesem Thema (Stake, 1995, S. 121–130; Yin, 2014, S. 177–207) ist die explizierte Notwendigkeit des Mitteilens der Forschungsergebnisse, welche laut beiden auf bestimmte Arten und Weisen erfolgen soll.

Welche Methoden quantitativer oder qualitativer Art in der Datensammlung und Analyse verwendet werden ist grundsätzlich offen. Bei der Auswahl der Methoden steht allerdings im Vordergrund, dass diese den Fall hinsichtlich der Forschungsfrage möglichst gut erfassen können, um so die mit den Fällen verbundenen issues besser beantworten zu können¹⁵⁵ (vgl. 10.2.2).

10.2.2 Definition der Grundbegriffe der Fallstudienforschung

Ein Fall (Case) Θ ist ein „gebundenes System“, also im Sinne des Enaktivismus eine operational abgeschlossene Entität, und somit laut Stake eher ein Objekt als ein Prozess. Aus dieser Kerneigenschaft eines Falls ergibt sich auch die Aufgabe einer Fallstudienforscher*in, die in der Partikularisierung und nicht der Generalisierung des Falls und der Ergebnisse der Fallstudienforschung liegt. Damit meint Stake ein wirkliches tiefes Kennenlernen des Falls und nicht eine vor-schnelle Typisierung (Stake, 1995, S. 8).

Stake (1995, S. 3) unterscheidet verschiedene Arten von Fallstudien in Abhängigkeit der Art des Falls. Zunächst beschreibt Stake *intrinsische Fallstudien*, in denen der Fall als solcher interessant und von dem nicht erwartet wird, dass man aus diesem zwingend etwas über andere spezifische Fälle oder ein generelles Prob-

¹⁵⁴ Dem Begriff „linear“ bei Yin (2014) entspricht in diesem Zusammenhang am ehesten die Bedeutung von sukzessiv.

¹⁵⁵ Eine Überblicksartige Diskussion der Frage, welche Methoden im Rahmen der Fallstudienforschung angewendet werden und wurden sowie ob es sich bei der Fallstudienforschung um eine Methode oder Methodologie handelt, wobei die Antwort auf letzte Frage häufig ein sowohl als auch ist, bieten Harrison et al. (2017) mit einem reichhaltigen Verweis auf weiterführende Literatur.

lem lernt. Auf der anderen Seite beschreibt Stake *instrumentelle Fallstudien*, in denen nicht der Fall als solcher, sondern die Beantwortung einer Forschungsfrage im Mittelpunkt der Fallstudie steht, sodass die Fälle über den Fall hinaus informieren. Zuletzt beschreibt Stake *kollektive Fallstudien*, die verschiedene Einzelfälle zusammenfassen und ihre Koordination beschreiben.

Die Fallauswahl erfolgt nach dem „Prinzip der maximalen Erkenntnisgewinnung aus einem Fall“, d.h. es geht weder darum, dass man eine randomisierte Auswahl trifft noch zwingend typische Fälle in den Blick nimmt. Gerade an untypischen Fällen lassen sich bestimmte Phänomene in Abgrenzung typischer Fälle beobachten (Stake, 1995, S. 4). Ein weiteres Prinzip der Fallauswahl ist das „Kriterium der Zugänglichkeit eines Falls“. Hiermit ist gemeint, dass die Fallstudienforscher*in praktischen Zugriff auf den Fall erhalten kann.

Stake sieht sich selbst als naturalistischen Feldforscher, dies bedeutet allerdings nicht, dass es ausreicht sich als Feldforscher*in in das Umfeld des betrachteten Falls zu begeben und lediglich „ein scharfes Auge zu besitzen, und offen für neue Erfahrungen zu sein“ (Stake, 1995, S. 15). Vielmehr beschreibt Stake die Voraussetzung für einen guten Fallstudienforschenden folgendermaßen:

„Open minds and sharp eyes are important, but good case study depends on discipline. One needs to think through, in advance, some of what may come to pass. For some of it will pass too quickly or too subtly to notice. Perhaps the most difficult task of the researcher is to design good questions, research questions, that will direct the looking and thinking enough and not too much.“

(Stake, 1995, S. 15)

Die Forschungsfragen, die Stake anspricht, formuliert er in Form von Issues ι , die auf die Auseinandersetzungen und Problematik der Fälle mit ihrem Kontext hinweisen bzw. den Forschungsfokus auf diese Prozesse lenken sollen. Je nachdem welche Art von Fallstudie durchgeführt werden soll, ändert den Schwerpunkt. Dieser liegt bei intrinsischen Fallstudien auf dem Fall θ und bei instrumentellen Fallstudien auf den Issues ι .

Basierend auf dieser Unterscheidung von Fällen wird im Folgenden die Typisierung der vorliegenden Fallstudie (vgl. 10.2.3) vorgenommen.

10.2.3 Typisierung der Fallstudie in dieser Untersuchung

Diese Untersuchung ist als *instrumentelle Fallstudie* angelegt. Das bedeutet, dass die Forschungsfrage(n) im Vordergrund stehen und davon ausgehend der betrachtete Fall identifiziert wurde.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Fall „Emil“ Θ_E betrachtet. Der Student, der diesem Fall zugrunde liegt, zeichnete sich dadurch aus, dass er im Rahmen seines Reflexionsbuchs sehr offen war, was eine leichte Zugänglichkeit für den Forschenden ermöglicht. Gleichzeitig ist seine Auffassung – wie sich in der Fallstudie (vgl. 10.3.2) zeigen wird – sehr differenziert. Das „Kriterium der Zugänglichkeit“ des Falls ist ebenso gegeben, was sich insbesondere in der Datenaufnahme zeigt, die bei diesem Fall vollständig vorliegt.

Da es sich bei dieser Untersuchung um eine instrumentelle Fallstudie handelt stehen die Issues ι und der Umgang des Falls Θ_E mit diesen Issues ι im Vordergrund. Die für die in der Forschungshypothese generelle Forschungsfrage 5 identifizierten Issues lauten:

- ι_1 : Was macht den Übergang von der Schule zur Hochschule für Mathematiklehramtsstudierende problematisch?
 - $\iota_{1.1}$: Welche Auffassung haben Mathematiklehramtsstudierende über die Schulmathematik? Wie verändert sich diese Auffassung im Verlauf des Seminars ÜberPro_WR?
 - $\iota_{1.2}$: Welche Auffassung haben Mathematiklehramtsstudierende über die Hochschulmathematik? Wie verändert sich diese Auffassung im Verlauf des Seminars ÜberPro_WR?
 - $\iota_{1.3}$: Inwiefern hängen die Auffassungen zur Schulmathematik und Hochschulmathematik mit dem Erfahrungsbereich „Übergang von der Schule zur Hochschule“ der Mathematiklehramtsstudierenden zusammen?
- ι_2 : Inwiefern lässt sich eine empirisch-gegenständliche oder formal-abstrakte Auffassung bei den Studierenden rekonstruieren?
 - $\iota_{2.1}$: Wie gehen Studierende mit mathematischen Objekten um?
 - $\iota_{2.2}$: Wie sprechen Studierende über mathematische Objekte, bzw. Mathematik?

- $t_{2.3}$: Wie rekonstruieren Studierende Vermutungen über Auffassungen von Mathematik Anderer?
- t_3 : Inwiefern unterscheiden sich die Auffassungen der Mathematiklehramtsstudierenden über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematik? Welche Gemeinsamkeiten oder Unterschiede artikulieren sie?
- t_4 : Wie nutzen Mathematiklehramtsstudierende die Materialien aus dem Seminar, insbesondere die historischen Quellen von Kolmogoroff und von Mises, um ihre eigene Auffassung von Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie ihren Übergang von der Schule zur Hochschule zu reflektieren?

10.2.4 Charakterisierung des Prozesses der Fallstudienforschung

Nach Yin (2014) erfolgt die Fallstudienforschung in einem linearen und iterativen Prozess mit den bereits beschriebenen Schritten der Planung, dem Design, der Vorbereitung, der Datensammlung, der Analyse und dem wissenschaftlichen Austausch über die Fallstudie (vgl. 10.2.1). In diesem Abschnitt werden die einzelnen Phasen und die methodischen Entscheidungen innerhalb der jeweiligen Phasen dargestellt, die zur nachfolgenden Fallstudie führen. Hierbei halte ich mich konsequent an die Methodologie von Yin (2014).

10.2.4.1 Planung der Fallstudie

Vor der eigentlichen Planung einer Fallstudie muss entschieden werden, ob die – recht aufwendige – Methode der Fallstudienforschung überhaupt passend zur Beantwortung der Forschungsfrage ist, auch unter Berücksichtigung möglicher Bedenken gegen den Fallstudienansatz (vgl. 10.2.1).

Dazu ist festzuhalten, dass Fallstudien dann besonders geeignet zur Untersuchung eines Phänomens sind (Yin, 2014, S. 9), wenn

1. die leitende Forschungsfrage nach einer Begründung oder einem Prozess fragt („Warum“- oder „Wie“-Fragen)
2. die Forschenden wenig Kontrolle über das Forschungssetting oder das auftretende Verhalten habe
3. das zu untersuchende Phänomen gegenwärtig ist.

Entsprechend dieser Entscheidungsregeln ist die Forschungsmethode der Fallstudienforschung geeignet, um die Forschungsfrage dieser Untersuchung zu beantworten. Denn

zu 1. die Forschungsfrage behandelt einen Prozess, entsprechend handelt es sich um eine „Wie“-Frage:

„Inwieweit kann ein Blick von Studierenden in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von ÜberPro_WR die Reflexion ihrer Übergangserfahrungen unterstützen und ihre Auffassung von Mathematik diversifizieren?“

zu 2. auch wenn der zum untersuchenden Fall gehörige Teilnehmer an dem vom Forscher durchgeführten und geplanten Seminar teilgenommen hat sind die im Fokus stehenden Reflexionen sehr stark individuell geprägt und abhängig von den Vorerfahrungen der untersuchten Personen.

zu 3. die Übergangserfahrung und deren Reflexion ist ein im Leben der Studierenden aktueller Prozess, der zudem ständiger Veränderung unterworfen ist. Daher ist ein zwar begrenzter aber doch längerer Zeitraum der Intervention vorgesehen.

Nach entsprechender Feststellung der grundsätzlichen Eignung der Methodik zur Beantwortung der Forschungsfrage wird im folgenden Abschnitt das Design der Fallstudie erläutert.

10.2.4.2 Design der Fallstudie

Yin (2014, S. 26) erinnert daran, dass das Forschungsdesign die Forschungsdaten und die daraus folgenden Forschungsergebnisse mit den Forschungsfragen logisch verbinden soll. Im Rahmen von Fallstudiendesigns sind fünf Aspekte des Forschungsdesigns besonders wichtig (Yin, 2014, S. 29):

1. Die Forschungsfragen, die der Fallstudie zu Grunde liegen.
2. Die Voraussetzungen dieser Forschungsfragen, sofern es diese gibt.
3. Die zu betrachtenden Analyseeinheiten.
4. Die logische Verknüpfung der Daten mit den Annahmen.
5. Die Kriterien zur Interpretation der Beobachtungen (findings).

In der hier durchgeführten Fallstudie werden diese Aspekte folgendermaßen bedient:

zu 1. Die Forschungsfrage dieser Untersuchung lässt sich hinsichtlich verschiedener Issues ι untergliedern (vgl. 10.2.3) und ermöglicht so einen differenzierten Blick auf die Daten und deren Analyse.

- zu 2. Die Voraussetzungen der Forschungsfragen liegen insbesondere in ihrer theoretischen Einbettung, die im Sinne einer enaktivistischen Grundhaltung voraussetzt, dass Auffassungen rekonstruiert werden können, indem einerseits gemeinsame Erfahrungsbereiche expliziert sowie auftretende strukturelle Kopplungen zwischen den Fällen und diesen Erfahrungsbereichen analysiert werden können. Ein weiterer Aspekt ist die Einschränkung der hier untersuchten Dimensionen der subjektiven Erfahrungsbereiche, auf Wissen, Wertungen, Emotionen, prozeduralem Wissen, math. Habitus und die Ich-Identität, obwohl im Sinne der Totalität von Erfahrungsbereichen auch weitere Aspekte eine Rolle spielen könnten, die allerdings mit der hier verwendeten Datenaufnahme, bzw. theoretischen Grundlagen, nicht erfassbar wären.
- zu 3. Die Analyseeinheit ist entsprechend der Frage nach Auffassungen von Individuen und deren Reflexion ein Teilnehmer des Kontexts des Seminars ÜberPro_WR. Entsprechend kann nur ein holistisches Einzelfall Design gewählt werden (Yin, 2014, S. 50).
- zu 4. Annahmen, die der Forschungsfrage und den Issues zugrunde liegen, sind die bereits in der Forschungsliteratur vermuteten Problematik von Übergängen (vgl. Der Übergang Schule-Hochschule im Fach Mathematik) zwischen der Schule und der Hochschule auch im Hinblick auf eine Veränderung des Bildes oder der Auffassung von Mathematik, sowie der spezifischen Annahme dieses Projekts, dass ein Interventionsseminar durch Nutzung historischer Quellen Reflexionsanlässe für Studierende schaffen kann. Es wird weiterhin angenommen, dass diese Reflexionen solcher Übergangserfahrungen rekonstruierbar sind, unter Berücksichtigung der generellen Schwierigkeiten solcher Rekonstruktionen (vgl. 4.3.2), und zusätzlich im Sinne des hier grundgelegten Auffassungskonzepts mit den Ausprägungen einer empirisch-gegenständlichen und formal-abstrakten Auffassung sowie der Grundlegung in verschiedene oder übergreifende SEB eingeordnet werden können. Der Nutzen dieses theoretischen Modells wird dann deutlich, wenn die Studierenden ihre eigenen Übergangserfahrungen reflektieren, neue Einsichten aufgrund dieser Reflexion entwickeln und benennen und unter Rückgriff auf die im Seminar behandelten historischen Quellen deuten sowie auf die darin vermittelten Auf-

fassungen beziehen. Eine weitere Verbindung zwischen Daten und Theorie findet im Rahmen der Analyse (vgl. 10.2.4.5) statt, die durch Kombination der Verfahren Pattern-Matching (Yin, 2014, S. 143ff.) und Time-Series-Analysis erfolgt (Yin, 2014, S. 150ff.).

- zu 5. In quantitativen Studien ist das Kriterium für eine korrekte „Interpretation“ häufig die „statistische Signifikanz“ und weitere Messgrößen, wie etwa die Effektstärke. In der Fallstudie liegt die Hauptstrategie darin die Interpretationen zu begründen indem man rivalisierende Theorien in den Blick nimmt und damit die betrachteten Daten auswertet. Mögliche rivalisierende Theorien wurden bereits in der theoretischen Grundlegung dieser Arbeit thematisiert, etwa das Rahmen-Konzept (Krummheuer, 1997), die rationale Rekonstruktion (Balzer & Moulines, 1996), bisherige Konzeptionen des „belief“-Begriffes (Schoenfeld, 1985; Green, 1971; Rolka, 2006). Der dabei bereits herausgestellte hauptsächliche Unterschied zwischen der vorgelegten theoretischen Grundlegung und den eben genannten Theorien liegt in der Totalität der subjektiven Erfahrungsbereiche und damit auch der Totalität der Auffassung, die die Aspekte der rivalisierenden Theorien miteinander vereint und somit eine Gesamtperspektive eröffnet. Sind die Übergangserfahrungen tatsächlich in dem Sinne total, dass innerhalb eines subjektiven Erfahrungsbereichs bezüglich der Übergangssproblematik verschiedene spezifische, und insbesondere nicht nur kognitive, Elemente subjektiver Erfahrungsbereiche auftreten, ist dies ein Hinweis auf die Vorteile dieses umfassenderen theoretischen Rahmens.

Ein weiterer Aspekt, der bereits beim Design aber auch in den späteren Prozessphasen einer Fallstudie eine große Rolle spielt, ist die Frage inwiefern die Qualität der Fallstudie sichergestellt werden kann.

Yin (2014) gibt zur Prüfung der Qualität vier typische Kriterien aus der Sozialforschung sowie Taktiken an, wie diese im Rahmen einer Fallstudienforschung sichergestellt werden kann. Die Kriterien lauten (Yin, 2014, S. 46):

- Konstruktvalidität: Identifizierung korrekter operationaler Maße für die untersuchten Konzepte

- Interne Validität: (lediglich ein Kriterium für erklärende oder kausale, nicht aber deskriptive und entdeckende Fallstudien): Versuch der Etablierung kausaler Beziehungen, wobei einzelne Annahmen zur Voraussetzung erhoben werden und andere davon abgeleitet werden.
- Externe Validität: Bestimmung des Bereichs auf den die Forschungsergebnisse generalisiert werden können.
- Reliabilität: Demonstration, dass die Operationen der Fallstudie – wie bspw. die Datensammlung – wiederholt werden kann, mit den gleichen Ergebnissen¹⁵⁶.

Ein Auszug der Tabelle von Yin (2014, S. 45) zu gewählten Taktiken zur Erfüllung der oben genannten Kriterien wird hier in Bezug auf diese Untersuchung in Tabelle 17 gegeben:

Tabelle 17: Auszug aus Yins (2014, S. 45) Taktiken zur Erfüllung der Kriterien an das Fallstudiendesign.

Kriterien	Taktik zur Erfüllung der Kriterien im Rahmen der Fallstudienforschung
Konstruktvalidität	- Nutzung verschiedener Quellen zum Beleg der Hypothesen - Erzeugung von Begründungsketten mithilfe der Belege
Interne Validität	- Auffindung von Mustern in den Daten - Bildung von Erklärungen - Antizipation von Alternativerklärungen
Externe Validität	- Nutzung von Theorie im Falle von Einzelfallstudien
Reliabilität	- Verwendung eines Fallstudienprotokolls - Entwicklung einer Fallstudien Datenbank

Zusätzlich zu diesen Kriterien schlägt Yin (2014, S. 50) vier Basis-Typen von Fallstudien vor, die er innerhalb einer 2x2 Matrix vorstellt. Danach gibt es:

- Einzelfallstudien Designs in einem Kontext
 - Holistische Fallstudien (Einzelne Analyseeinheit)
 - Eingebettete Fallstudien (Vielzahl von Analyseeinheiten)
- Mehrfache Fallstudien Designs in verschiedenen Kontexten
 - Holistische Fallstudien (Einzelne Analyseeinheit)

¹⁵⁶ Yin (2014, S. 46) nutzt tatsächlich den Begriff „same results“. Im Folgenden erklärt er, dass damit gemeint ist, dass andere Forschende die gleichen Ergebnisse bezüglich desselben Falls erhalten sollen. Es geht explizit nicht darum die Ergebnisse in einem anderen Fall zu replizieren.

- Eingebettete Fallstudien (Vielzahl von Analyseeinheiten)

In dieser Arbeit wird – wie bereits in der Diskussion der Analyseeinheiten diskutiert – ein holistisches Einzelfall Design gewählt, da die individuelle Auffassungsentwicklung eines Teilnehmers im Mittelpunkt steht und so einen Fall bildet. Dieses Design ist einerseits dadurch begründbar, dass die theoretische Deutung des Auffassungsbegriff als Konstruktion und Interdependenz von subjektiven Erfahrungsbereichen zunächst nur für einzelne Analyseeinheit bestimmt werden kann und andererseits dadurch, dass der Beobachtungszeitraum der Fälle im Rahmen des Reflexionsbuchs ein vollständiges Semester umfasst, sodass hinsichtlich der Menge an Daten und des möglichen Umfangs dieser Arbeit ein Fall ausreichend ist. Es wird der Fall Θ_E gewählt, dessen betrachtetes Subjekt im Rahmen des Seminars durch ein besonderes Maß aktiver Mitarbeit hervorstach.

10.2.4.3 Vorbereitung der Datensammlung für eine Fallstudie

Die Vorbereitung der Datensammlung umfasst neben Fähigkeiten und Fertigkeiten der Forschenden, wie gute Fragen zu stellen, gut zuzuhören oder adaptiv hinsichtlich möglicher Veränderungen der Fallstudie zu sein (Yin, 2014, S. 71–83) die Erstellung eines Fallstudienprotokolls. Da dieses auch zur Qualitätskontrolle in Bezug auf die Reliabilität der Fallstudie dient, soll die Konstruktion, sowie das abgeschlossene Fallstudienprotokoll (vgl. Anhang D) hier zusammenfassend vorgestellt werden.

Das Fallstudienprotokoll gliedert sich in vier Abschnitte

- (A) Überblick über die Fallstudie
- (B) Vorgehensweisen bei der Datensammlung
- (C) Fragen zur Datensammlung
- (D) Leitfaden für den Fallstudienbericht

Im ersten Abschnitt, dem Überblick über die Fallstudie, werden sowohl die Ziele der Untersuchung als auch das Mindestmaß an zugrunde liegender Literatur benannt (vgl. Anhang B). Beide ergeben sich auf natürliche Weise aus den Vorüberlegungen (vgl. 10.2.4.2). Das Fallstudienprotokoll leitete die Durchführung der Fallstudie, sodass sich während der Durchführung der Fallstudie eine Verfeinerung der Ziele aus der Analyse erster Fallstudien Daten ergeben hat.

Im zweiten Abschnitt der Darstellung der Vorgehensweise bei der Datensammlung werden die Aspekte zum Schutz der Teilnehmer*innen (insbesondere der

Identifizierung von Teilnehmer*innen), sowie die Identifikation möglicher Datenquellen und Zugang zu den Datenquellen behandelt.

Besonders wichtig ist natürlich der Schutz der Teilnehmer*innen einer solchen Fallstudie, da eine Fallstudie entsprechend ihrer Ziele einen Fall besonders tiefgehend beschreibt und analysiert. Damit dennoch keine Identifikation der Teilnehmer*innen per Namen möglich ist, erstellt jeder Teilnehmende einen vierstelligen Identifikationscode, der lediglich zur Zuordnung der Daten aus den verschiedenen Datenquellen zum Fall dient und später durch ein Pseudonym ersetzt wird. Zudem habe ich mich verpflichtet, dass wenn in den Ur-Daten personenbezogene Daten auftreten, die zur Identifikation der Person führen könnten, diese bei der ersten Sichtung der Daten entfernt oder unkenntlich gemacht werden. Zur Transparenz gegenüber den Teilnehmer*innen, aber auch zum Schutz des Fallstudienforschers wurde die Einverständniserklärung zur Erhebung der Daten zu Forschungszwecken im Rahmen des Seminars ÜberPro_WR von den Teilnehmer*innen eingeholt.

Die Haupt-Datenquellen dieser Fallstudien bilden die Pre- und Post-Tests¹⁵⁷ sowie die Reflexionsbücher, die von Emil angefertigt wurden. Der Pre- und Post-Test wurde digital mithilfe der Web-Anwendung Limesurvey durchgeführt. Dabei wurde der Pre-Test in vier thematische Abschnitte geteilt, die in Teil I personenbezogene Daten und Frage Nr. 1, in Teil II die Fragen Nr. 2–11, in Teil III die Fragen Nr. 12–23 und in Teil IV die Fragen Nr. 24–26 behandeln (vgl. Anhang A). Der Post-Test unterscheidet sich vom Pre-Test dahingehend, dass durch Abfrage des Codes die personenbezogenen Daten wie Alter und Schulabschluss nicht erneut abgefragt wurden. Ansonsten sind beide Tests identisch. Das Reflexionsbuch wurde von Emil analog, von den anderen Studierenden digital per moodle-Journal geführt (vgl. Anhang B: Übersicht der Sitzungsthemen, zugehörige Aktivitäten & Materialien). Nach jeder der insgesamt 13 Sitzungen sollten die Studierenden den Inhalt und die Aktivitäten im Seminar in Bezug auf ihre eigenen Auffassungen reflektieren. Dazu wurden je nach Sitzung zwei bis sieben Reflexionsfragen mit unterschiedlichem Umfang gestellt (vgl. Anhang C). Die schriftliche Auseinandersetzung mit den Reflexionsanlässen bildete die Studienleistung der Studierenden. Bei Krankheit oder fehlender Ideen zur Reflexion

¹⁵⁷ Der Pre-Test kann unter: <https://umfragen.uni-siegen.de/index.php/749252> eingesehen werden. Der Post-Test kann unter: <https://umfragen.uni-siegen.de/index.php/532639> eingesehen werden.

konnten natürlich einzelne Sitzungen oder Fragen nicht beantwortet werden, ohne Auswirkung auf den Erwerb der Studienleistung¹⁵⁸. Für den Fall Emil liegt der Datensatz vollständig vor, was u.a. dazu geführt hat, dass dieser Fall hier betrachtet wird. Der letzte Teil des Abschnitts zur Datensammlung soll den Zugang zu den Datenquellen erläutern. Dieser Zugang wurde mir dadurch ermöglicht, dass ich das Seminar eigenständig¹⁵⁹ durchführen konnte, was sowohl die Planung und Durchführung der Seminarsitzung als auch die Konzeption der Pre-, Post- und Reflexionsfragen betraf.

Im dritten Abschnitt des Fallstudienprotokolls werden die Fragen gesammelt, die während der Datensammlung und Auswertung den Fallstudienforschenden leiten soll. Yin (2014, S. 90–91) unterscheidet fünf Ebenen solcher Fragen:

1. Fragen, die spezifischen Interviewpartner*innen gestellt werden;
2. Fragen, die zum individuellen Fall gestellt werden (dies sind Fragen im Fallstudienprotokoll, die vom Fallstudienforschenden im Rahmen einer Einzelfallstudie oder mehrfachen Fallstudie gestellt werden);
3. Fragen, die in Bezug zu Mustern innerhalb der Ergebnisse aus den (mehrfachen) Fallstudien gefragt werden;
4. Fragen, die die gesamte Studie betreffen – bspw. Fragen die über die Hinweise aus den Fallstudien hinaus gehen und auf andere Literatur oder publizierte Daten zurückgreifen;
5. Normative Fragen zu politischen Empfehlungen und Schlussfolgerungen, die über den beschränkten Umfang der Fallstudie hinaus gehen.

Gleichzeitig stellt er aber fest, dass im Fallstudienprotokoll vor allem auf Fragen der Ebene 2 fokussiert werden sollte (Yin, 2014, S. 91). Entsprechend finden sich in den vergegenwärtigten Fragen für meine Forschung nur Fragen der Ebenen zwei und drei (vgl. Kasten Spezifische Fragen zur Vergegenwärtigung während der Durchführung der Feldforschung).

¹⁵⁸ In den vier Veranstaltungen ÜberPro_WR_I, ÜberPro_Geo_II, ÜberPro_WR_II und ÜberPro_Geo_III, in denen die Studierenden ein Forschungstagebuch führen sollten, um die Studienleistung zu erreichen, haben sich alle Studierenden, die die Veranstaltung bis zum Ende besucht haben, mit den Reflexionsbüchern beschäftigt. Natürlich gab es verschiedene Niveaus der Auseinandersetzung und Umfänge. Die Reflexionsleistung wurde allerdings nicht bewertet, es ging lediglich um die aktive Auseinandersetzung mit den Reflexionsfragen in dem Umfang, den die Studierenden selbst für sich als sinnvoll erachteten.

¹⁵⁹ Für diese Möglichkeit und das Vertrauen möchte ich mich an dieser Stelle recht herzlich bei Prof. Dr. Ingo Witzke bedanken, da diese Möglichkeiten nicht jedem Doktoranden offenstehen.

Der letzte Teil des Fallstudienprotokolls – der Leitfaden für den Fallstudienbericht – umfasst eine erste Planung der Gliederung des Fallstudienberichts, der hier dargestellten Fallstudie als Grundlage dient (vgl. 10.3). Entsprechend wird hier die Gliederung nicht wiedergeben, sondern auf Anhang D verwiesen. Zudem gibt dieser Abschnitt des Protokolls Informationen über das Format der Daten, die in dieser Untersuchung aber bereits in schriftlicher Form vorliegen. Die Grundlagen für die Analyse bilden allerdings nicht die Ur-Daten, sondern die anonymisierten Daten, sodass nicht die Gefahr besteht, in der Fallstudie persönliche Daten der Teilnehmer*innen weiterzugeben. Diese Originalquellen werden im Rahmen des Fallberichts und insbesondere bei der Darstellung des Kontexts des Seminars durch Verweise und Auszüge aus Seminarmaterialien und Beobachtungen aus meinem persönlichen Feld- und Reflexionsbuch ergänzt.

10.2.4.4 Datensammlung

Für die Datensammlung weist Yin (2014, S. 105–118) auf verschiedene Quellen hin, die eine Fallstudie informieren können sowie auf vier Prinzipien (Yin, 2014, S. 118–129), die bei der Datensammlung und der Zusammenstellung der Daten beachtet werden sollten.

Zu den Quellen gehören laut Yin (2014, S. 106) Dokumente, Archiv-Daten, Interviews, direkte Beobachtungen, teilnehmende Beobachtungen und materielle Artefakte. Für die hier vorgestellte Fallstudie sind Dokumente, materielle Artefakte und die teilnehmende Beobachtung relevant. Alle diese Quellen haben gewisse Stärken und Schwächen. Dokumente haben den großen Vorteil, dass sie mehrfach durchgesehen werden können – also stabil sind, dass sie auf Aktivitäten und Details rekurren – also sehr spezifisch sind – und auch längere Betrachtungszeiträume ermöglichen, wie es beim Reflexionsbuch der Fall ist. Schwächen dieser Quellenart sieht Yin (2014, S. 108f.) in der Auffindbarkeit passender Dokumente, der möglichen Unvollständigkeit durch den Reduktionsschritt der Verschriftlichung, die auch eine Veränderung des Dokuments durch die Autorin oder den Autor oder dessen Perspektive betreffen kann. Gerade die letzten Schwächen sichtbar zu machen, ist für die Rekonstruktion der Auffassungen der Autorin oder des Autors sehr interessant.

Spezifische Fragen zur Vergegenwärtigung während der Durchführung der Feldforschung:

1. Welches Wissen zur Entwicklung der WR aktiviert der Studierende und inwiefern lässt sich dieses zur Rekonstruktion vermuteter SEB'e nutzen?
 - a. Welche konkreten Fachinhalte werden verwendet? Ist die Verwendung adäquat hinsichtlich der Referenz, d.h. wird die Quelle über-/unterschätzt?
 - b. Welche Quellen/Autoren werden aus welchem SEB heraus genannt [Pre-/Post-Test, Reflexionsbuch Studierende, Interview]?
2. Wie werden Bezüge zur Entwicklung der WR hergestellt?
 - a. Inwiefern werden Bezüge selbstständig hergestellt oder vom Lehrend-Forschenden eingefordert?
3. Inwiefern lässt sich eine empirisch-gegenständliche oder formal-abstrakte Auffassung bei den Studierenden rekonstruieren?
 - a. Wie gehen Studierende mit mathematischen Objekten um?
 - b. Auf welche Weise sprechen Studierende über mathematische Objekte, bzw. Mathematik?
 - c. Wie reflektieren Studierende ihre eigene Auffassung von Mathematik?
 - d. Wie rekonstruieren Studierende Vermutungen über die Auffassung von Mathematik Anderer?
4. Auf welche Weise rekonstruieren Studierende ihre Erfahrungen im Kontext des Übergangs Schule-Hochschule bzgl. Mathematik?
 - a. Welche Auffassung haben Studierende von „Schulmathematik“ und „Hochschulmathematik“?
 - b. Inwiefern gibt es Schlüsselpersonen/-erlebnisse, die die Übergangserfahrung illustrieren?
 - c. Welche Rolle spielt das ÜberPro_WR Seminar für die Übergangserfahrung der Studierenden aus Studierendensicht?
5. Welche Rolle nimmt der Studierende im Seminar ÜberPro_WR ein und inwiefern beeinflusst diese Rolle die Reflektion der eigenen Übergangserfahrung?
 - a. Welche Rolle(n) schreibt er/sie sich selbst zu?
 - b. Welche Rolle(n) werden aus der Perspektive des Lehrend-Forschenden (re-)konstruiert?
 - c. [Welche Rollenzuschreibungen gibt es von Seiten der übrigen Teilnehmenden]

Die Auffindbarkeit spielt in dieser Fallstudie keine größere Rolle, da die schriftlichen Auseinandersetzungen eine Pflichtleistung innerhalb der Veranstaltung bildeten. Dies muss natürlich bei der Auswertung der Quelle berücksichtigt werden. Dies gilt ebenso für die materiellen Artefakte des Seminars, wie etwa den Folien zur Unterstützung des Seminars oder verschiedenen Texten und anderen Materialien. Die teilnehmende Beobachtung hat dagegen Vorteile durch ihre Unmittelbarkeit zum Fallgeschehen, ihrer Kontextualität und vor allem dadurch, dass sie sehr aufschlussreich in Bezug zu interpersonalem Verhalten und Motiven ist (Yin, 2014, S. 106). Die größten Schwierigkeiten bei der teilnehmenden Beobachtung liegt in der Beeinflussung des Geschehens durch den Fallstudienforschenden (vgl. 3.4, 4.3.2). Diese sind in dieser Seminarkonstruktion natürlich gegeben und gewünscht, wurden aber auch den Studierenden in der ersten Sitzung transparent gemacht¹⁶⁰. Ich habe meine Rolle in diesem Seminar als lehrender Forscher gesehen, d.h. es ging mir darum Reflexionsprozesse durch geeignete Lernumgebungen zu ermöglichen und gleichzeitig den Umgang der Studierenden mit diesen Materialien zu beobachten. So konnten die Studierenden Erkenntnisse über ihre Übergangserfahrung sammeln und ihre negativen Erfahrungen produktiv wenden. Gleichzeitig habe ich ebenso die Meinung offensiv vertreten, dass Studierenden vor allem in ihrem späteren Schuldienst forschende Lehrer*innen sein sollten, um geeignete Lernumgebungen im Sinne des aktuellen mathematikdidaktischen Forschungsstands auszuwählen, Lernschwierigkeiten zu diagnostizieren und auch selbst Lernumgebungen zu entwickeln und zu evaluieren. Insofern liegen beide Rollen recht nah beieinander. Lediglich die Schwerpunkte sind leicht verschoben, was durch die unterschiedlichen Attribute und Nomen verdeutlicht werden soll. Als wichtigste Quelle einer Fallstudie erachtet Yin (2014, S. 110) das Interview. Am Ende des ersten Seminars ÜberPro_Geo_I der Seminarreihe ÜberPro, welches als Intensiv-Seminar von drei Tagen umgesetzt wurde, wurden mit einzelnen Teilnehmer*innen Interviews geführt. Diese waren sehr ertragreich hinsichtlich tiefer Einsichten einzelner Aspekte der Übergangserfahrung (Witzke, Clark, Struve, & Stoffels 2018; Witzke et al. 2016), allerdings fiel es einigen Teilnehmer*innen schwer in dem Moment des Interviews

¹⁶⁰ Entsprechend ließe sich diese Art der Forschung als Aktionsforschung bezeichnen. Altrichter, Posch, & Spann (2018) geben verschiedene Methoden der Lehrer(fort)bildung an, diesen „Forschenden-Blick“ auch in der Praxis zu behalten bzw. dort zu entwickeln. Dies geschieht an zahlreichen Beispielen und ist daher äußerst lesenswert.

eine vergleichbare Reflexionsleistung zu erreichen wie Teilnehmer*innen schriftlich in ihren Reflexionstagebücher. Zudem liegt der Schwerpunkt der hier vorgestellten Fallstudie darauf herauszufinden, ob und wie sich Auffassungen über Mathematik und zum Übergang von der Schule zur Hochschule in Auseinandersetzung mit dem Seminar entwickelt haben. Entsprechend sollte eine kontinuierliche und trotzdem ökonomische Datenaufnahme stattfinden, was dazu führte, dass ich mich gegen die Durchführung von Interviews mit den Teilnehmer*innen entschieden habe¹⁶¹.

Die vier bereits in der Einleitung erwähnten Prinzipien zur Datensammlung sind

1. Die Nutzung verschiedener Datenquellen, die die Fallstudie informieren sollen, um eine Konvergenz der Ergebnisse der Fallstudie zu erreichen.
2. Die Erstellung einer Fallstudien-Datenbank.
3. Der Aufbau einer Kette von Indizien.
4. Die Vorsicht beim Umgang mit digitalen Daten.

Dass verschiedene Datenquellen in den Fallstudien genutzt wurden, ist bereits im vorangehenden Absatz deutlich geworden. Alle Daten sind digital in entsprechenden Ordnern, bspw. einem Ordner mit den Ur-Daten, einem weiteren mit aufgearbeiteten Daten und einem Ordner mit zusätzlichem Material archiviert. Die Auswertung der Daten erfolgte analog in Form von Tabellen je Datenquelle (Emil_Pre, Emil_FLT, Emil_Post, Stoffels_FR). Die Kopfzeile dieser Tabellen umfasst Informationen zur Datenquelle und zum Codierer. Zudem umfasst die Tabelle, die sich über mehrere Seiten erstreckt, vier Spalten. In der ersten Spalte ist die Nummer der Frage in der Datenquelle (QN) angegeben, in der zweiten Spalte die zugehörige Frage, in der dritten Spalte die Antwort oder Reflexion von Emil und in der letzten Spalte ist Platz für die Codierung¹⁶². Die Kette der Indizien findet sich bereits in der Struktur der Fallstudie. Zunächst werden mit Hilfe des Pre- und Post-Tests die Ausgangs- und Endlage der Studierenden

¹⁶¹ Ein weiterer Aspekt ist natürlich, dass ein offenes Seminargespräch sowieso Elemente von Interviews enthält, sofern die Seminarleiter*in tatsächlich an der Meinung der Studierenden interessiert ist. Dies war entsprechend meiner Rolle als lehrender Forscher in jeder Sitzung gegeben. Aber auch die Studierenden schätzten die „Offenheit und Ehrlichkeit“ (Lehrveranstaltungsevaluation ÜberPro_WR_II) sowie die „Diskussionsphasen“ (Lehrveranstaltungsevaluation ÜberPro_Geo_III) in den beschriebenen Interventionsseminaren.

¹⁶² Zusätzlich zur Codierung wurden, wenn erforderlich, Memos eingefügt. Diese wurden an der entsprechenden Stelle neben der Tabelle eingefügt.

aufgezeigt. Entsprechend der dort identifizierten, für die Beantwortung der Forschungsfrage relevanten, Gemeinsamkeiten und Unterschiede wird das Reflexionsbuch (Emil_FLT) herangezogen umso dessen Entwicklung nachzuvollziehen (vgl. 10.2.4.5). Die Vorsicht beim Umgang mit digitalen Daten bezieht Yin (2014, S. 129) vornehmlich auf soziale Medien, die als Datenquelle dienen sollen. Dies betrifft daher die nachfolgende Fallstudie nicht. Zumal alle identifizierten Datenquellen ebenso in analoger Form vorliegen könnten. Digitalisierte Ur-Daten sind aber wesentlich komfortabler bei der Datenaufbereitung und -analyse.

10.2.4.5 Analyse

Wenn Daten vorliegen, sollten diese analysiert werden. Yin (2014, S. 133) weist daraufhin, dass es keine feststehenden Verfahren gibt, die zwingend bei einer Fallstudie zum Einsatz kommen müssen. Es gibt allerdings einige Analysetechniken, die erfolgreich eingesetzt werden können. Eine nicht zu unterschätzende Rolle spielt aber auch die Erfahrung des Fallstudienforschenden.

Yin (2014, S. 136–142) gibt vier allgemeine Strategien zur Analyse der Daten an. Die erste ist die Rückführung auf theoretische Annahmen, die die Forschungsfragen der Fallstudie grundlegen und so „helfen die Fallstudie(nalyse) strukturell zu organisieren“ (Yin, 2014, S. 136). Die zweite generelle Strategie ist ähnlich zu den Methoden des „grounded theory“-Ansatzes (Kautt, 2017), statt von einer theoretischen Grundlegung auszugehen, Erkenntnisse direkt aus den Daten zu extrahieren, also im Sinne einer induktiven Rekonstruktion („ground up“ Yin, 2014, S. 136). Eine dritte allgemeine Strategie ist lediglich den Fall umfassend zu beschreiben, ohne eine konzeptorientierte oder -erzeugende Auswertung der Daten vorzunehmen. Die letzte generelle Strategie ist eine Ausarbeitung mithilfe von rivalisierenden Erklärungsmöglichkeiten, die in diesem Fall andere Erklärungen zu einer Veränderung des Auffassungswechsel oder der Perspektiverweiterung der Studierenden bieten. In dieser Fallstudie gehe ich vor allem im Sinne der ersten Strategie vor, das bedeutet entsprechend theoretischer Annahmen die Daten der Fallstudie auszuwerten. Bei der Auswertung unter diesen Gesichtspunkten werden natürlich auch rivalisierende Erklärungsmöglichkeiten mit einbezogen und benannt.

Im zweiten Teil von Yins Kapitel zur Datenauswertung geht er auf fünf Analysetechniken (Yin, 2014, S. 142–168) ein:

1. Das Auffinden von Mustern innerhalb der Daten, bzw. das in Bezug setzen dieser Muster zu erwarteten theoretischen Mustern (Pattern Matching).
2. Das Bilden von Erklärungen für bestimmtes Verhalten und Ereignisse (Explanation Building).
3. Die Zeitreihen Analyse (Time-Series-Analysis), in der verschiedene Trends einer Entwicklung herausgearbeitet werden.
4. Die Entwicklung logischer Modelle (Logic Models), welche sich durch ihren sequentiellen Aufbau auszeichnen.
5. Die Synthese mehrerer Fallstudien (Cross-Case Synthesis) in denen Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Fällen sowie allgemeinere fallübergreifende Muster erarbeitet werden sollen.

In dieser Analyse wird vor allem die erste und dritte Technik eingesetzt, da zu erwarten ist, dass gewisse spezifische Elemente innerhalb von subjektiven Erfahrungsbereichen aktiv werden, die dann auch in den Daten nachweisbar sein sollten. Ähnliches gilt für die Auseinandersetzung und zunehmende Diversifizierung der rekonstruierbaren Perspektiven.

Der letzte Teil des Kapitels von Yin ist eine explizite Forderung für Analysen, die höchsten Ansprüchen genügen soll (vgl. Yin, 2014, S. 168). Dazu soll die Analyse alle relevanten Hinweise aus der Datenquelle enthalten, auf rivalisierende Deutungsmöglichkeiten eingegangen werden, die gestellten Forschungsfragen sollen fokussiert beantwortet werden und auf das Vorwissen der Fallstudienforscher*in soll verwiesen werden, so dass deren Perspektive klar wird und die Forschungsergebnisse auch in den Forschungsstand des Forschungsgebiets eingebettet werden können.

Das sechste und letzte Kapitel von Yin (2014, S. 176–207) enthält wie auch das Buch von Stake (1995, S. 121–131) Hinweise zur Erstellung des Fallstudienberichts, in denen insbesondere auf die Anpassung an den Adressatenkreis (hier hauptsächlich die Leser*innen dieser Dissertation), eine genügende und ansprechende Wahl geeigneter Indizien aus dem Daten sowie auf eine insgesamt stringente und ansprechende Sprache geachtet werden soll. Im Rahmen der Handbücher ist ein solcher Abschnitt sehr nützlich. Im Rahmen dieser Dissertation allerdings nicht relevant, weshalb interessierte Leser*innen an dieser Stelle auf die genannten Originalwerke verwiesen werden.

10.2.4.6 Nutzung von Elementen der Qualitativen Inhaltsanalyse bei der Durchführung der Fallstudie

Da es in der folgenden Fallstudie (und auch in den historischen Fallstudien) vornehmlich um die Rekonstruktion von Auffassungen geht und diese als Äquivalenzklassen von subjektiven Erfahrungsbereichen verstanden werden (vgl. 5.1), stellt sich die Frage wie erstere praktisch rekonstruiert werden. In den Fallstudien wird wie in dem dargestellten Fall von Deborah (vgl. 4.5) vorgegangen. Und zwar ergeben sich die methodisch-fragmentarischen subjektiven Erfahrungsbereiche beispielsweise durch die Zergliederung der Beantwortung des Pre-Tests in die einzelnen Antworten. Dies liegt darin begründet, dass davon ausgegangen wird, dass die Fragen nacheinander beantwortet wurden, konkret: dass die Frage erst von Emil gelesen und dann die Antwort direkt von ihm gegeben wurde. Entsprechend lässt dies auf eine Reihenfolge der Beantwortung von Fragen und somit auch eine Abfolge der Aktivierung (verschiedener) subjektiver Erfahrungsbereiche schließen. Diese Abfolge der Aktivierung würde deutlich, wenn Rückbezüge von Antworten auf vorherige Antworten in dem Datenmaterial auftauchen. Solche Rückbezüge tauchen in θ_E tatsächlich auf und zwar bezieht sich beispielsweise Emil_Pre_6¹⁶³ auf Emil_Pre_5. Dies ist hier durch Fettdruck und einen Pfeil in dunkelblauer Farbe dargestellt:

Was gefällt Ihnen am besten beim Mathematik machen? Bitte erläutern Sie Ihre Antwort.

„**Beweisen, weil so ohne Zweifel und unter Ausschluss der Falschheit die Gültigkeit einer Aussage offenbart wird. Diese Vollkommenheit fasziniert mich an der Mathematik**“

(Emil_Pre_4)

Was gefällt Ihnen am wenigsten beim Mathematik machen? Bitte erläutern Sie Ihre Antwort.

„**Auch das Beweisen, da das Finden der richtigen Beweisidee oft so schwierig ist. Beweise halte ich also für das faszinierendste und schwerste an der Mathematik zugleich.**“

(Emil_Pre_5)

¹⁶³ Die Schreibweise Emil_Pre_5 ist die Kennzeichnung von „**Emils 5. Antwort im Pre-Test**“. Entsprechend bedeutet die Schreibweise Emil_Post_4 „**Emils 4. Antwort im Post-Test**“ und Emil_FLT_2_1 „**Emils Reflexion zur Reflexionsfrage 1 im Reflexionsbucheintrag 2**“

Zugleich lässt sich darauf schließen, dass diese Aussagen in einem (übergeordneten) SEB auftreten, da Emil diesen Bezug selbst hergestellt hat. Genau dieses explizite „In-Beziehung-Setzen“ ist meiner Ansicht nach ein wichtiges Indiz für ein hohes Reflexionsniveau.

Die kleinste betrachtete Analyseeinheit bei der im Zitat dargestellten Codierung kann sogar nur ein Wort sein, wie man im obigen Beispiel am Wort „Auch“ sehen kann. Die Kontexteinheit wird beim Pre- und Post-Test als gesamter Test festgelegt. Bei den Reflexionsbüchern wird die Kontexteinheit als ein Reflexionsbucheintrag sowie die vorangehenden Reflexionsbucheinträge festgelegt, da dies die zeitliche Folge des Seminars beschreibt. Die Auswertungseinheit bildet in der Regel ein Item des Pre- oder Post-Tests oder die Antwort auf eine Frage innerhalb eines Reflexionsbucheintrags. Ausnahmen sind bspw. strukturelle Verknüpfungen wie im obigen Beispiel blau eingezeichnet und mit Pfeil versehen.

Außerdem ist es möglich, ausgehend von diesem Beispiel, auf die von mir verwendete Codierung spezifischer Elemente subjektiver Erfahrungsbereiche einzugehen. Im Rahmen der Fallstudie wurden die Kategorien „Wissen“, „prozedurales Wissen“, „Emotionen“, „Wertungen“, „Ich-Identität“ und „usw.“ genutzt¹⁶⁴. Die Codierung erfolgte nach den Überlegungen aus dem vorangehenden Abschnitt (vgl. 10.2.4.5) mit entsprechender farblicher Zuordnung wie im obigen Zitat dargestellt. In einigen Fällen wurde auch ein zusammenfassender Kommentar in der Kodierungsspalte angegeben. Die verwendete Codierung, der Farbcode sowie passende Ankerbeispiele sind in Tabelle 18 angegeben.

Tabelle 18: Kategorien zur Fallstudie von „Emil“.

Kategorie	Definition	Ankerbeispiele	Kodierregeln
Emotionen	Das Subjekt drückt Emotionen ¹⁶⁵ aus.	Emil_Pre_1: „spannendes Fach“	

¹⁶⁴ Bei der Darstellung der Kategorien und dem grundsätzlichen Ablauf orientiere ich mich an dem Verfahren, der Strukturierung/deduktiven Kategorienanwendung im Sinne einer *inhaltlichen Strukturierung* (Mayring, 2015b, S. 99). Die Fallstudienforschung ist grundsätzlich offen gegenüber solchen unterstützenden Methoden. Gerade dieses Verfahren von Mayring scheint mir am besten zur Unterscheidung und Auffindung von spezifischen Elementen subjektiver Erfahrungsbereiche geeignet zu sein und kann mittlerweile als weitverbreitet im Rahmen mathematikdidaktischer Forschung angesehen werden (Mayring, 2015a; Schwarz, 2015).

¹⁶⁵ Emotionen werden vielfältig und mit verschiedenen Hilfsmitteln untersucht (Ulich & Mayring, 2003, S. 144–152; Brandstätter, Schüler, Puca, & Lozo, 2012). Für diese Codierung reichen

Ich-Identität	Das Subjekt benennt seinen Standpunkt explizit oder grenzt sich von anderen Subjekten ab.	Emil_FLT_5_1: „Auch nach Czubers und Laplaces Ausführungen bleibe ich bei dieser Vorstellung [vom Wahrscheinlichkeitsbegriff, G.S.]“	
Math. Habitus	Das Subjekt reflektiert auf einer Metaebene sein (prozedurales) Wissen über Mathematik.	Emil_FLT_2_2: „Für junge Studierende ist dieser Übergang schwer zu meistern, da sich dann erst entscheidet, ob man für das Studium der Mathematik, wie sie ‚wirklich ist‘, überhaupt geeignet ist.“	Jede Kategoriezuordnung zum math. Habitus benötigt auch die Kategoriezuordnung zur Wertung.
Wertungen	Das Subjekt bewertet Tatsachen im Rahmen seiner Perspektiven und Funktionen.	Emil_Post_7: „Keins [unbeliebtestes Thema, G.S.], alles interessant.“	Vgl. Math. Habitus
Wissen (propositional)	Das Subjekt tätigt eine Aussage von der es überzeugt ist, gibt Faktenwissen an.	Emil_Pre_13: „Grundsätzlich können beide [Argumentationen, vgl. Anhang A, G.S.] im Rahmen der Mathematik wahr sein, da wir nichts über die Umstände und Bedingungen von A wissen. Gelten für beide Aussagen dieselben Voraussetzungen, können nicht beide wahr sein. Gelten unterschiedliche, ist unter der	

die kognitiven Inhalte einer Emotion entsprechend des angegebenen Katalogs von (Ulich & Marving, 2003, S. 151–191) aus.

		einen vielleicht 1. unter einer anderen vielleicht 2. wahr.“	
Wissen (prozedural)	Das Subjekt beschreibt einen Prozess, einen Algorithmus oder ein Schema das es selbst durchführt oder dessen Durchführung es beobachtet hat.	Emil_Post_19: „[Funktion eines Beweises ist, G.S.] [d]ie Gültigkeit einer Aussage zeigen, den Grund für diese Gültigkeit zeigen, sich selbst und anderen die Gültigkeit klarmachen.“	
usw.	Das Subjekt tätigt eine Aussage, die nicht den obigen Kategorien zugeordnet werden kann.	Emil_FLT_8_7: [...] Dazu habe ich in Frage 4 [Emil_FLT_8_4] weitere Ausführungen gemacht. [...]“	Hier insbesondere strukturelle Kommentare zum Text.

Gerade die Abgrenzung der Kategorien „math. Habitus“ und „Wertung“ fällt außerordentlich schwer. Diese Schwierigkeit stellt allerdings kein grundsätzliches Problem dar, da sich auch andere spezifische Elemente überlappen können. Das bedeutet die Kategorien sind nicht trennscharf, was zur theoretischen Annahme der Totalität subjektiver Erfahrungsbereiche passt (vgl. 4.2). In der praktischen Codierung kam es daher auch zu Mehrfach-Codierung einer Analyseeinheit. Trotz dieser Schwierigkeiten in der Abgrenzung der Kategorien hilft dieses an die Qualitative Inhaltsanalyse (Mayring 2015b) angelehnte Verfahren das Datenmaterial zu strukturieren und so die Fallstudie insgesamt zu informieren.

10.3 Ergebnisse der Untersuchung 5

Nach der Darstellung der Ziele und der Methodik der Fallstudienforschung sollen nun die Ergebnisse der Fallstudie aufgezeigt werden. Dazu wird zunächst der Kontext, in dem die Fallstudienforschung stattfand, erläutert (10.3.1). Darauf

folgt die Einzelfallstudie zu Emil Θ_E (10.3.2). Zum Abschluss wird eine Übersicht der Ergebnisse (10.3.3) und weitere Forschungsdesiderate (10.3.4) angegeben.

10.3.1 Der gemeinsame Erfahrungsbereich des Seminars „ÜberPro_WR“

„Wir sind acht Personen. Insgesamt ein sehr nettes Klima.“

(aus Reflexionsbuch G. Stoffels; Eintrag nach der ersten Seminar-
sitzung von ÜberPro_WR_II)

Vermutlich war das „Klima“ dieser Veranstaltung unter anderem deshalb so gut, weil wir in dem Semester – dem zweiten Durchgang des Übergangsseminars mit Bezug zur Wahrscheinlichkeitsrechnung – eine recht kleine Gruppe waren. Das bedeutet allerdings nicht, dass diese Veranstaltung nur in kleinen Gruppen durchführbar ist. In den anderen Seminaren ähnlicher Konzeption (ÜberPro_Geo_I, ÜberPro_Geo_II, ÜberPro_Geo III, ÜberPro_WR_I) lag die Teilnehmerzahl zwischen zehn und zwanzig Personen. Unter den acht Personen des Eingangszitats habe ich mich selbst als teilnehmender Beobachter mitgezählt. Diese kleine Teilnehmerzahl erleichterte das Kennenlernen der Teilnehmer*innen untereinander und gab auch mir die Möglichkeit alle Teilnehmer*innen gut kennenzulernen. Die Gruppe war hinsichtlich des Geschlechts recht ausgeglichen, vier männliche und drei weibliche Studierende. Ihre Hochschulreife haben alle Teilnehmer*innen an Gymnasien erworben und bis auf zwei Studierende vollständig in NRW.

Zum Zeitpunkt der Durchführung des Seminars waren alle Teilnehmer*innen in ihrem Bachelorstudium für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen eingeschrieben. Drei Teilnehmer*innen waren im fünften Studiensemester, zwei Teilnehmer*innen im siebten Studiensemester, ein*e Teilnehmer*in im elften Studiensemester und ein Teilnehmer im ersten Semester, allerdings hat letzterer bereits ein Mathematikdiplom. Alle Teilnehmer*innen haben die Einführungsvorlesungen zur Analysis I und Linearen Algebra besucht. Bis auf ein*e Teilnehmer*in haben alle Teilnehmer*innen auch die Veranstaltung Analysis II besucht. Alle Teilnehmer*innen bis auf ein*e Teilnehmer*in haben ebenso die Einführung in die Stochastik besucht. Hinsichtlich der anderen Vorlesungen, die besucht wurden, ist die Belegung sehr unterschiedlich. Bei der Vorstellung des Falls in der Einzelstudie wird eine spezifische Aufschlüsselung der belegten Kurse erfolgen (vgl. 10.3.2).

Zu Beginn dieses Abschnittes wurde im Zitat erwähnt, dass sich bereits in der ersten Sitzung gezeigt hat, dass ein „ganz nettes Klima“ im Seminar vorherrschen würde. Dieses positive und vor allem auch produktive Klima hat sich durch alle Sitzungen hindurchgezogen. Dies wird besonders deutlich an den Notizen zum Arbeitsverhalten und zur von mir wahrgenommenen Grundstimmung im Seminar. So stellte ich in der ersten Sitzung fest, dass „[m]ein Gefühl bisher sehr gut [ist], da es sich um eine sehr gute Gruppe handelt.“ Auch wenn ich aufgrund der Seminarkonzeption, die vor allem eine Kennenlernphase, organisatorisches und erste Reflexionen des eigenen Übergangs umfasste – auch um eine offene Lernatmosphäre herzustellen, die mathematischen Kompetenzen nicht in der ersten Sitzung, feststellen konnte, habe ich vermutet, dass „das Reflexionsniveau dieser Gruppe sehr hoch“ ist. Zu diesem Kennenlernen gehörte unter anderem eine Blitzlicht-Runde, in denen man seinen Namen, seine Fächer und seine Lieblingsmathematikaufgabe oder Aufgabenklasse nennt. Der Großteil der Studierenden gibt an, dass die Lieblingsaufgabenklasse Kurvendiskussionen sind. Einzelnenungen waren ansonsten Anwendungsaufgaben, Aufgaben im Zusammenhang mit Differentialgleichungen und Problemaufgaben. Im Anschluss daran folgte eine Phase unter Verwendung der Kugellager-Methode zu den Fragen:

1. Was ist Mathematik?
2. Warum möchte ich Mathematiklehrer*in werden?
3. Was ist eine guter Mathematiklehrer*in?
4. Wie kann das Studium mir helfen eine gute Mathematiklehrer*in zu werden?
5. Wie habe ich meinen Übergang von der Schule zur Hochschule erlebt und wie hat das meine Vorstellung von mir als Mathematiklehrer*in beeinflusst?

Die ersten drei Fragen waren vor allen Dingen als warm-up gedacht, da die Studierenden diese Fragen bereits im Rahmen des Pre-Tests beantwortet hatten, der vor der ersten Sitzung ausgefüllt wurde. Die fünfte und sechste Frage war dagegen neu. Besonders getroffen hat mich, dass im Kugellagergespräch zu Frage 4 gesagt wurde „Nichts.“. Außerdem zeigte sich zum Abschluss der Runde, dass einige Studierende laut eigener Aussage Übergangsprobleme hatten. Betrachtet man im Reflexionsbuch der 2. Sitzung Frage 2, in der die Studierenden begründet

Stellung dazu nehmen sollen, inwiefern sie der Forschungshypothese (vgl. Einleitung) zustimmen oder nicht, fällt auf, dass *jede* Teilnehmer*in angibt eigene Probleme beim Übergang von der Schule zur Hochschule gehabt zu haben.

Nach Abschluss der ersten Seminarsitzung habe ich entsprechend festgehalten: „Insgesamt wird es, glaube ich, ein erfolgreiches Seminar“. Dieser Eindruck bestätigte sich im gesamten Seminarverlauf und wurde auch von anderen Teilnehmer*innen so wahrgenommen. „Friederike“ (Pseudonym) schrieb beispielsweise in ihrem 1. Reflexionsbucheintrag zu Frage 10 „Was ist mir sonst noch aufgefallen?“: „Die Gruppe scheint motiviert und es könnte tatsächlich sinnvoll werden“. Zur selben Frage schreibt der Teilnehmer Caesar (Pseudonym): „Da der Kurs recht klein ist, kann vielleicht besser und gründlicher diskutiert werden“. Auch externe teilnehmende Beobachter stellten fest, dass das Arbeitsklima sehr gut war. In der zweiten Präsenzsitzung¹⁶⁶ wurde ich durch meine Kollegin Kathrin Holten vertreten, die in ihrem zur Sitzung gehörigen Feld- und Reflexionsbucheintrag während der Sitzung feststellt: „Anmerkung: Ich glaube, Deine Gym-Studis sind eine tolle Truppe!“ und in ihrer Abschlussreflexion: „Das war das Seminar. Ich fand es gut. Du hast da glaube ich, eine Gruppe mit Potential! Viel Spaß im weiteren Verlauf!“. Einzig in der 7. Sitzung zur Grundlagenkrise der Mathematik, in der die Studierenden ein Schreibgespräch zu einem Auszug des „Logicomix“ (Doxiadēs et al. 2009) führen sollten finde ich in meinen Feldnotizen einen Eintrag der belegt, dass ich den Eindruck hatte, die Studierenden seien nicht ganz zufrieden mit der Sitzung gewesen (vgl. Stoffels_FR_7). In den zugehörigen Reflexionsbüchern der Studierenden zeigt sich auch, dass der Großteil der Studierenden, bis auf zwei, die Methode des Schreibgesprächs im Vergleich zu einer offenen Gesprächsrunde als wenig ökonomisch und nicht verständnisfördernd bewerteten.

¹⁶⁶ Die 2. Sitzung entfiel aufgrund einer Forschungsreise von mir in die USA. Statt dieser Sitzung sollten die Studierenden eine ausführlichere Reflexion über Felix Kleins doppelte Diskontinuität und die Forschungshypothese des Seminars im Rahmen ihrer Reflexionsbücher durchführen. Entsprechend gehört zur n . Präsenzsitzung (für $1 < n \leq 12, n \in \mathbb{N}$) der $(n + 1)$. Reflexionseintrag.

Alles in allem hat mir das Seminar mit dieser Gruppe besonders viel Freude bereitet¹⁶⁷ und war aus meiner Sicht sehr produktiv. In den beiden folgenden Abschnitten wird die Entwicklung des Seminars ÜberPro_WR und die konkrete Seminarkonzeption zum Interventionsseminar ÜberPro_WR_II dargestellt.

10.3.1.1 Die Entwicklung des Seminars ÜberPro_WR

Das Seminar ÜberPro_WR habe ich zunächst in Form eines Pilotseminars „ÜberPro_WR_I“ im Wintersemester 2015/2016 mit Lehramtsstudierenden im Haupt-, Real-, Sekundar- & Gesamtschulbereich durchgeführt. Der Schwerpunkt lag darauf Materialien und Methoden hinsichtlich ihrer Möglichkeiten zur Initiierung der Eigenreflexion von Studierenden über ihr Mathematikbild und ihre Übergangserfahrungen zu testen. Es zeigte sich allerdings im Seminarverlauf, dass einerseits – wie erwartet – zum Umgang mit den genutzten Originalquellen ein tieferes Verständnis der Mathematik notwendig war, über welches die Mehrzahl der Teilnehmer*innen nicht verfügten, sodass der Schwerpunkt des Seminars die fachinhaltliche Seite betonte, was weniger Zeit zur Reflexion über die Fachinhalte und Auffassung über diese sowie den Umgang mit ihnen ließ. Es zeigte sich andererseits, dass viele Studierende eher Übergangsprobleme hinsichtlich der Methodik der Vorlesung beschrieben haben, also keine Übergangserfahrung im Sinne einer „anderen Auffassung von Mathematik“ erlebt hatten. Auf Basis des theoretischen Rahmens lässt sich eine Erklärung dieses Phänomens geben. Es tritt erst dann ein Auffassungswechsel auf, wenn vermehrt SEB'e einer anderen Auffassung auftreten. Die Verständnisschwierigkeiten in Bezug auf den fachinhaltlichen Umgang mit den Originalquellen geben einen Hinweis darauf, dass die Perspektiven zum verständigen Umgang mit den Originalquellen (noch) nicht ausgebildet waren. Das heißt, dass die Teilnehmer*innen dieses Seminars nicht über SEB'e verfügten, in denen sie passendes (Handlungs-)Wissen abrufen konnten, um den Gehalt der Quellen zu erfassen. Die Konstruktion eines solchen subjektiven Erfahrungsbereichs hätte zu einem „Aha-Erlebnis“ oder ähnlichem geführt, sodass in einem nächsten Schritt auch die Reflexion dieses Perspektivwechsels innerhalb eines (neuzubildenden) übergeordneten SEB'es möglich wäre. Entsprechend dieser im Seminarverlauf recht frühen Diagnose habe ich im

¹⁶⁷ Leider wurde weder in der Lehrveranstaltungsevaluation noch durch meine Reflexions- oder Post-Test-Fragen erhoben, inwiefern die Studierenden „Freude“ an diesem Seminar empfunden haben. Aus der aktiven Mitarbeit und dem beschriebenen guten Arbeitsklima schließe ich allerdings, dass es vermutlich keinem der Teilnehmer*innen missfallen hat.

Seminar dann vor allem versucht, den Erwerb einer Perspektive im Sinne einer Stochastik der Sekundarstufe I vom höheren Standpunkt aus zu fördern.

Um zu prüfen, ob die Originalquellen überhaupt die Zugänglichkeit und Reflexionsmöglichkeiten besitzen, wie dies andere Originalquellen aus der historischen Entwicklung der Geometrie bereits in dem Seminar ÜberPro_Geo_I vermuten ließen (vgl. Witzke et al., 2016), wurden diese Quellen mit begabten Schüler*innen in einem zweiwöchigen Intensivseminar im Rahmen der Deutschen Schülerakademie erneut erprobt (ÜberPro_WR_S). Dort zeigte sich, dass bei entsprechender Auseinandersetzung auch entsprechende Reflexionen stattfinden konnten. Durch die besonders starke Explikation der Auffassung durch die Autoren selbst, sogar in der Form, dass die Texte direkt als Reflexionsanlass wirkten und keine besondere Intervention von den Kursleitenden erfolgen musste.

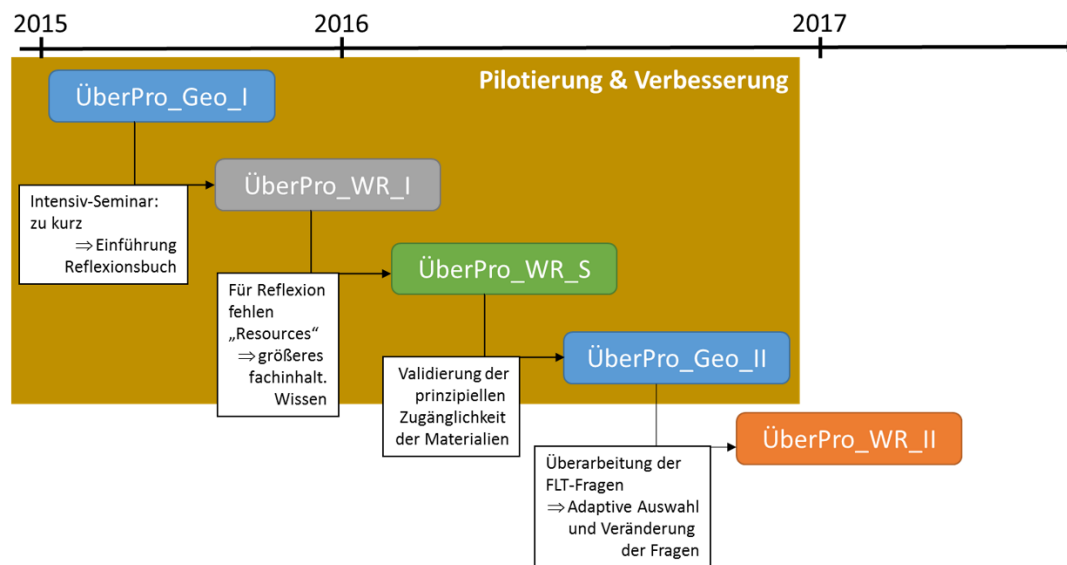


Abbildung 10: Strukturelle und zeitliche Abfolge der Seminare des Projekts-ÜberPro mit verschiedenen inhaltlichen Schwerpunkten.

In dem Seminar ÜberPro_Geo ist die Rekonstruktion der Auffassung von Hilbert schwieriger – insbesondere für Studierende schwieriger, da er diese Auffassung innerhalb der Quelle nicht expliziert, was die Verwendung weiterer Quellen erfordert. Die Seminare im ÜberPro-Projekt fanden im Wechsel mit thematischen Schwerpunkten zur Geometrie und zur Wahrscheinlichkeit statt, sodass die Ergebnisse der vorangehenden Seminare voneinander profitierten (vgl. Abbildung 10). Das in dieser Arbeit vorgestellte Seminar ÜberPro_WR_II fand im Wintersemester 2016/2017 statt. Aus den bereits oben beschriebenen Gründen allerdings

mit Studierenden des gymnasialen Lehramts, die entsprechende Übergangserfahrung erlebt haben und gleichzeitig aufgrund ihrer Vorerfahrung den mathematischen Gehalt der historischen Originalquellen leichter erfassen konnten.

10.3.1.2 Die inhaltliche Konzeption des Seminars ÜberPro_WR

Das Seminar ÜberPro_WR_II lässt sich inhaltlich in fünf Teile gliedern, die allerdings nicht alle den gleichen zeitlichen Anteil am Seminar haben. Diese Teile sind

1. Reflexion der eigenen Auffassung von Mathematik, auch aus der Perspektive mathematikdidaktischer Forschung mit Bezug zum Auffassungskonzept.
2. Klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung, als Einstieg und Erinnerung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Schule oder der Universität.
3. Formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie Umgang mit formalisierter Wahrscheinlichkeitsrechnung.
4. Empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
5. Rückblick auf das Spannungsfeld empirisch-gegenständliche vs. formal-abstrakte Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Bezug auf eigene Übergangserfahrungen.

Nach der Diskussion verschiedener Kategorisierungen von Auffassungen (Schoenfeld, 1985; Rolka, 2006; Grigutsch et al., 1998) im Rahmen des ersten Teils, bildet das Erarbeiten von historischen Quellen und deren Reflexion den Großteil des Seminars (Teile 2, 3 und 4). Die Quellen sind Auszüge aus der „Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen“, in der Czuber (1899) – im Sinne von Laplace – eine klassische Konzeption des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vertritt; Auszüge aus den „Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik“, in der von Mises (1931) eine empirisch-gegenständliche Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs vertritt (vgl. Kapitel 6); und Auszüge aus den „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ von Kolmogoroff (1933), in der dieser eine formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertritt (vgl. 7). Diese bieten aufgrund der sehr unterschiedlichen Auffassungen der Autoren in den im Seminar besprochenen Auszügen das Potential eigene Auffassungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff und der Mathematik im Allgemeinen zu reflektieren.

Diese Reflexion erfolgte einerseits in den 1,5-stündigen Seminarsitzungen, von denen insgesamt 12 Sitzungen stattgefunden haben, und andererseits in Form der bereits beschriebenen Reflexionsbücher, die die Teilnehmer*innen verpflichtend am Ende jeder Seminarsitzung anfertigen sollten. Eine vollständige Liste der Reflexionsfragen der Reflexionsbücher findet sich in Anhang C. Diese bilden Reflexionsanlässe mit Bezug auf die im Seminar verwendeten Quellen, im Seminar durchgeführten Aktivitäten sowie den eigenen Erfahrungen der Studierenden. In Anhang B ist eine Übersicht der Sitzungsthemen, der durchgeführten Aktivitäten und verwendeten Materialien sowie eine Zuordnung der Sitzungen zu den Reflexionsbucheinträgen zu finden.

Besonders auffällig in der Konzeption mag möglicherweise die Entscheidung sein, dass man nicht analog zum vermuteten Übergang erst bei der empirisch-gegenständlichen Theorie von von Mises beginnt und dann über Kolmogoroff spricht. Dafür gibt es zwei Gründe, einen didaktischen und einen methodischen, der in der Verwendung der Quelle von Kolmogoroff liegt. Der didaktische Grund liegt darin, dass sich in den Übergangsseminaren zur Geometrie folgendes gezeigt hat: Es ist für die Studierenden schwierig sich nach einer besonders expliziten Aktivierung ihrer Erfahrungsbereiche zur Betrachtung vorhilbertscher Quellen auf der Basis einer empirisch-gegenständlichen Auffassung, Hilberts Grundlagen als unterschiedlich zu den vorangehenden Quellen wahrzunehmen. Dies liegt vor allem daran, dass die von Hilbert genutzten Begriffsnamen der geometrischen Objekte mit denen von Euklid übereinstimmen, was natürlich auch sinnvoll ist, sofern die euklidische Geometrie grundgelegt werden soll. Zum anderen hat Hilbert seine Auffassung nicht so stark und direkt expliziert wie Kolmogoroff in seinen „Grundbegriffen“ (vgl. 10, 7.2). Der methodische Grund auf Basis der Quelle von Kolmogoroff liegt darin, dass er in §2 selbst auf die Arbeit von von Mises verweist, was die Studierenden somit im Rahmen des Erarbeitens der Quelle selbst entdecken können. Die übrigen didaktischen Entscheidungen werden, wie in 10 dargestellt, in einer separaten Veröffentlichung erscheinen (vgl. Fußnote 150).

10.3.2 Der Fall „Emil“

In diesem Abschnitt wird der Fall „Emil“ (Pseudonym) Θ_E betrachtet. Dazu werden einleitend neben wichtigen personenbezogenen Daten auch meine generellen Eindrücke von „Emil“ beschrieben, mit Rückgriff auf mein Feld- und Reflexionsbuch. In den folgenden Unterabschnitten wird dann vornehmlich auf den

Daten des Pre- und Post-Tests der Ausgangspunkt (10.3.2.1) und Endpunkt (10.3.2.2) von Θ_E in Bezug auf das Interventionsseminar dargestellt. Die darin festgestellten Gemeinsamkeiten und Unterschiede bilden dann einen Ausgangspunkt für die Beschreibung der Entwicklung von Θ_E . Das zentrale Ziel dieser Untersuchung bildet die Darstellung der Reflexion des eigenen Übergangs von „Emil“ in Bezug zur strukturellen Kopplung von Θ_E und dem Seminar sowie der Diversifizierung von „Emils“ Auffassung, die ebenfalls in Wechselwirkung mit dem Seminar beschrieben wird. Diesem Ziel ist der letzte Unterabschnitt (10.3.2.3) gewidmet.

„Emil“ ist männlich und 22 Jahre alt. Er hat auf dem Gymnasium einen Leistungskurs besucht und ist mittlerweile im 7. Fachsemester. Im Laufe seines Mathematikstudiums hat er die Veranstaltungen Analysis I, Analysis II, Lineare Algebra, Einführung in die Stochastik, Elemente der Algebra¹⁶⁸, Didaktik der Algebra, Didaktik der Geometrie, Geometrie und Philosophie der Mathematik besucht. Parallel zum ÜberPro_WR_II Seminar, das als fachdidaktische Ergänzung angeboten wurde, hat er eine Seminarveranstaltung zur computergestützten Mathematik besucht.

¹⁶⁸ Die Veranstaltung Elemente der Stochastik ist, wie andere elementarmathematische Veranstaltungen der Universität Siegen, als Schnittstellenangebot gedacht, das als Innovation aus dem Projekt „Mathematik Neu Denken“ erfolgte. Hierbei sind die Ziele einer solchen Elementarmathematik durch die Forderungen von Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies, & Wickel (2011, S. 14) folgendermaßen gegeben:

- „Elementarmathematik ermöglicht den Erwerb typischer mathematischer Denk- und Arbeitsweisen und repräsentiert so die ‚Erfahrung Mathematik‘ im Kleinen.
- Elementarmathematik knüpft an grundlegende kognitive Erfahrungen an und ist so dem Denken und Verstehen in besonderer Weise zugänglich.
- Elementarmathematik trägt zur Erweiterung der mathematischen Erfahrungswelt der Lernenden bei und ist anschlussfähig für fachliche Vertiefungen.
- In der Elementarmathematik kann der innermathematische Beziehungsreichtum ihrer Inhalte erfahren werden; dies kann sowohl mit semantischem als auch mit syntaktischem Akzent geschehen.“

Somit ist mit solchen elementarmathematischen Veranstaltungen bereits der Grundstein für eine Reflexion im Rahmen dieser Seminarkonzeption oder in den im Projekt „Mathematik Neu Denken“ vorgeschlagenen Veranstaltungen gegeben, in denen auch eine Reflexion über Mathematik stattfinden soll. Das Ziel der Reflexion in den ÜberPro-Projektseminaren ist im Vergleich zu den allgemeineren Zielen des umfassenden Projekts „Mathematik Neu Denken“ die Frage, warum Mathematik in der Universität überhaupt formal-abstrakt im beschriebenen Sinne ist und welchen Nutzen die Erfahrung solcher Mathematik und des entsprechenden Übergangs auch für den Übergang zurück in die Schule für die Lehramtsstudierenden bietet.

„Emil“ hat jede Seminarsitzung besucht und als einziger der Teilnehmer*innen sein Reflexionsbuch handschriftlich verfasst. Dieses zeichnet sich durch große Sauberkeit und Ordnung aus und enthält umfassende sowie, sowohl auf sprachlicher wie auch inhaltlich-struktureller Ebene, ausgezeichnete Reflexionen¹⁶⁹. Sowohl in den Präsenzsitzungen, die ich selbst gehalten habe, wie auch in der vertretenen Sitzung zeigte sich, dass „Emil“ ein aktiver und diskussionsfreudiger Student ist, der sich auch verbal gut ausdrücken kann. Seine Vorerfahrungen aus seinem bisherigen Studium bringt er in den Seminarveranstaltungen ein und ist insbesondere an philosophischen Aspekten des Seminars und den zugehörigen Fragen sehr interessiert. So erläutert er in der zweiten Sitzung, nachdem er sich mit dem „Mathematikerprotokoll“ und der Kategorisierung von Schoenfeld (vgl. Anhang B) auseinandergesetzt hat, auf Nachfrage zu den Begrifflichkeiten in der Forschungshypothese, „dass formal-abstraktes Arbeiten durch eine präzise Formelsprache und eine deduktive Vorgehensweise geprägt sei“. Schon an dieser Stelle lässt sich vermuten, dass „Emil“ entweder selbst eine formal-abstrakte Auffassung hat oder über einen subjektiven Erfahrungsbereich verfügt, der die Perspektiven bietet, eine solche zu beschreiben. Diese Deutung setzt natürlich voraus, dass die Formelsprache von der „Emil“ spricht, nicht zwingend empirische Sachverhalte beschreiben muss. Solche Fragen durch bloße Feldbeobachtungen zu beantworten, ist nur dann im Sinne des besprochenen theoretischen Rahmens möglich, wenn ein entsprechendes Verhalten von „Emil“ im Umgang mit mathematischen Objekten vorliegt, wie etwa in Hilberts Grundlagen der Geometrie; oder wenn „Emil“ expliziert, dass er eine empirische Betrachtung bewusst außen vor lässt. Entsprechend lässt sich an dieser Stelle ohne Daten, die „Emil“ selbst erzeugt hat, keine adäquate Deutung durchführen. Diese erfolgen erst in den folgenden Abschnitten auf der Basis einer entsprechenden Datenlage.

¹⁶⁹ Bereits in der ersten Sitzung habe ich den Studierenden mitgeteilt, dass der Inhalt der Reflexionen nicht bewertet wird, was weder im Sinne der Anregung zur Reflexion noch vom Grundgedanken her sinnvoll wäre. Entsprechend erfolgt in der hier vorgestellten Fallstudie keine solche – unangebrachte – Bewertung.

10.3.2.1 Rekonstruktion des Ausgangspunkts von Θ_E vor der Intervention

Was ist Mathematik?

*„eine Sprache und Strukturwissenschaft als Grundlage aller anderen
Wissenschaften“*

(Emil_Pre_2)

Was ist Mathematik für Sie?

„eine Sprache, vollkommen, Mittel zur Beschreibung der Welt“

(Emil_Pre_3)

In dieser Fallstudie stehen wie in Abschnitt 10.2.3 dargestellt, folgende Fragestellungen (Issues) im Vordergrund:

- ι_1 : Was macht den Übergang von der Schule zur Hochschule für Mathematiklehramtsstudierende problematisch?
- ι_2 : Inwiefern lässt sich eine empirisch-gegenständliche oder formal-abstrakte Auffassung bei den Studierenden rekonstruieren?
- ι_3 : Inwiefern unterscheiden sich die Auffassungen der Mathematiklehramtsstudierenden über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematik? Welche Gemeinsamkeiten oder Unterschiede artikulieren sie?
- ι_4 : Wie nutzen die Mathematiklehramtsstudierenden die Materialien aus dem Seminar, insbesondere die historischen Quellen von Kolmogoroff und von Mises um ihre eigene Auffassung von Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie ihren Übergang von der Schule zur Hochschule zu reflektieren?

Es ist klar, dass in diesem Unterabschnitt nichts über ι_4 gesagt werden kann, da das Seminar ÜberPro_WR_II zum Zeitpunkt der Pre-Erhebung noch nicht stattgefunden hat. Entsprechend wird diese Fragestellung erst in den beiden nachfolgenden Abschnitten mit einbezogen.

„Emil“ möchte gerne Mathematiklehrer werden, da es seiner Ansicht nach „ein spannendes Fach“ ist, aber gerade hier eine gute Vermittlung nötig sei [vgl. Emil_Pre_1]. Ob diese gute Vermittlung nötig ist, um den Übergang von der Schule zur Hochschule zu erleichtern, formuliert Emil nicht. Im gesamten Pre-Test erwähnt Emil den Übergang nicht. Allerdings stellt er deutliche Unterschiede zwischen der Schul- und Hochschulmathematik fest. Für ihn ist

Schulmathematik [Emil_Pre_9]	Hochschulmathematik [Emil_Pre_10]
reduziert	endlos
unpräzise	exakt
unakademisch	wissenschaftlich
Grundverständnis vermittelnd	detailverliebt
für alle wichtig	für Spezialisten wichtig

Emil hat seine Assoziationen nicht in Form einer Tabelle angegeben, sondern entsprechend der Form der digitalen Umfrage in Form einer Liste konzipiert. Dennoch ist auffallend, dass diese Assoziationen genau gegenübergestellt werden können hinsichtlich der Dimensionen „Umfang“, „Präzision“, „Wissenschaftlichkeit“, „Inhaltliche Tiefe“ und „Adressatenkreis“. Hier scheint also ein übergeordneter SEB vorzuliegen, in dem Perspektiven vorliegen, die den Blick auf die eben genannten Dimensionen ermöglichen und so die Schul- und Hochschulmathematik innerhalb dieses übergeordneten SEB'es vergleichbar werden lassen. Die beiden letzten Dimensionen könnten durch den subjektiven Erfahrungsbereich beeinflusst sein, den „Emil“ in seiner Beantwortung zu Frage 8, weshalb sich Menschen mit Mathematik beschäftigen sollten, bereits aktiviert hat. Er schreibt:

„Mathematik ist so elementar in unserer Welt und Umwelt, dass sie zur Grundbildung einer jeden Person gehören sollte. Jeder ist unfreiwillig mit ihr konfrontiert, oft auch unbemerkt.“

[Emil_Pre_8]

An diesem Zitat wird der Allgemeinbildungsgedanke der (Schul-)mathematik besonders deutlich.

Die Darstellung von Emils Auffassung zur Schul- und Hochschulmathematik, die sich dadurch auszeichnet, dass sie vernetzt ist, also Schul- und Hochschulmathematik klar voneinander abgrenzt, was auch die wahrgenommene Andersartigkeit der Schul- und Hochschulmathematik durch Studierende bekräftigt (vgl. 2), ermöglicht noch keine Aussage darüber, ob „Emil“ eher eine empirisch-gegenständliche oder doch formal-abstrakte Auffassung zuzuweisen ist.

Mit seiner Antwort auf die Frage was Mathematik sei, gibt „Emil“ an, dass Mathematik „eine Sprache und Strukturwissenschaft als Grundlage aller anderen

Wissenschaften ist“. Der verwendete Begriff „Strukturwissenschaft“ kann auf eine formal-abstrakte Auffassung von Mathematik hindeuten. Dagegen spricht, dass Emil diesen Begriff in der nachfolgenden Frage, die besonders das spezifische Element der Ich-Identität seines subjektiven Erfahrungsbereichs ansprechen soll, weglässt und formuliert, dass Mathematik für ihn „eine Sprache, vollkommen [und] Mittel zur Beschreibung der Welt“ ist. Auch bei seiner Wahl des ihm unbeliebtesten Themas, der Topologie gibt er als Grund für seine Wahl an, dass dieses Themenfeld eine „schwierige Anschauung“ hätte und „kaum vorstellbar“ wäre [Emil_Pre_7]. Sein Umgang mit mathematischen Objekten, bspw. auch bei seinen Erläuterungen mathematischer Konzepte, weist aber darauf hin, dass er zumindest Mathematik als deduktiv geordnetes System ansieht und dass diejenigen, die mit Mathematik umgehen, vielfältigen Aktivitäten nachgehen, etwa hinsichtlich seines Verständnisses von Axiomen, „die von vornherein als wahr angenommen werden und nicht mehr zu beweisen sind“ und der Beweisführung dienen, eben „da sie einfach so (ohne weiteren Beweis) verwendet werden können.“ [Emil_Pre_15]. Insgesamt zeichnen sich „Emils“ Erläuterungen der mathematischen Begriffe „Definition“ [Emil_Pre_14], „Axiom/Postulat“ [Emil_Pre_15], „Vermutung“ [Emil_Pre_16], „Satz“ [Emil_Pre_17], „Beweis“ [Emil_Pre_18 und 19] durch eine hohe Kohärenz aus, insofern sich die Erläuterungen des einen Konzepts auf das der anderen Konzepte beziehen. Ein gutes Beispiel, das diese Kohärenz zeigt, ist seine Erläuterung zum Begriff „Satz“, die ebenso wie die anderen Erläuterungen verschiedene mathematische Tätigkeiten aufzeigen:

„**Sätze** sind **Aussagen**, die im Unterschied zu **Axiomen** einmal bewiesen werden müssen, damit man sie benutzen kann. Ist dies gelungen, verhält es sich mit ihnen wie mit **Axiomen** und sie dienen zum Beweisen anderer **Aussagen**. Sie entstehen aus **Vermutungen**.“

[Emil_Pre_17, Herv. G.S.]

Die Auffassung, dass Mathematik als deduktiv-geordnetes System aufgefasst wird, passt gut zu einer zugeschriebenen formal-abstrakten Auffassung, aber kann ebenso für eine empirisch-gegenständliche Auffassung gelten (vgl. 6). Auch Emils Antwort zur Frage 12, wann eine mathematische Aussage als „wahr“ gilt, hilft bei der Entscheidung für eine mögliche Auffassung nicht weiter, da seine Antwort lautet „Wenn sie nicht falsch ist.“ [Emil_Pre_12]. Wesentlich aufschlussreicher ist dagegen seine Antwort auf die letzte Frage des Pre-Tests, welche der

vorgeschlagenen Argumentationen er für einen mathematischen Beweis hält. Die Argumentationen 2 und 3 sind für „Emil“ keine Beweise, „da sie ikonisch bzw. mit einem Beispiel arbeiten“. Argumentation 1 ist für „Emil“ ein Beweis, „weil aus der Definition als Voraussetzung mittels Umformung die Aussage gefolgert wird“ [Emil_Pre_26]. Geht man davon aus, dass in dem subjektiven Erfahrungsbereich, den „Emil“ bei der Bewertung der Argumentation aktiviert hat, ein ähnliches Verständnis von Definition wie in seiner Erläuterung vorliegt, wird noch deutlicher, dass er tatsächlich formal-abstrakte Tätigkeiten beschreibt. Denn

„Definitionen beschreiben und legen fest, was unter einem Begriff zu verstehen ist und was nicht, welche Eigenschaften ihm zuzurechnen sind und welche nicht, was der Begriff umfasst und was nicht. Definitionen sind ein zentraler Bestandteil der Mathematik, da bei der Verwendung desselben Begriffs z.B. in einem Beweis nur bei gleicher Definition auch dasselbe Ergebnis möglich ist.“

[Emil_Pre_14]

Dieses Verständnis des Umgangs und der Beschreibung von Eigenschaften von Begriffen passt zu „Emils“ Ausgangsbeschreibung was Mathematik sei, „eine *Sprache und Strukturwissenschaft* als Grundlage aller anderen Wissenschaften“ [Emil_Pre_2; Herv. G.S.].

Entsprechend dieser Indizien in Form des Auffassens mathematischer Tätigkeit als formal-abstraktes Operieren sowie seinem dazu passenden Verständnis von Mathematik als Sprache und Strukturwissenschaft ist festzuhalten, dass „Emil“ eine formal-abstrakte Auffassung in Bezug auf mathematische Beweistätigkeiten zugeschrieben werden kann. Insbesondere gibt es innerhalb des Pre-Tests kein Indiz, dass für eine empirisch-gegenständliche Auffassung und gegen eine formal-abstrakte Auffassung von „Emil“ in diesem Bereich sprechen würde. (vgl. 6, 7). Ob mathematische Objekte außerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung als formal-abstrakt aufgefasst werden, kann aufgrund der Daten aus dem Pre-Test nicht entschieden werden.

Zuletzt bleibt zur Beschreibung des Ausgangspunkts von Θ_E noch die Frage zu klären, inwiefern sich die Auffassungen von „Emil“ über Wahrscheinlichkeitsrechnung von denen zur Mathematik unterscheiden. Interessanterweise scheint es so zu sein, dass für Emil nicht alle Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie der Begriff „Wahrscheinlichkeit“, mathematische Begriffe sind. Dies

wird deutlich an der ersten Frage im Pre-Test zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die zugehörige Frage und Emils Antwort lauten:

Was ist an der Wahrscheinlichkeitsrechnung typisch mathematisch für Sie?

„Dass hier selbst Größen wie Unsicherheit und Wahrscheinlichkeit versucht werden mathematisch präzise zu fassen und zu quantifizieren.“

[Emil_Pre_11]

Es bestehen aber auch Gemeinsamkeiten zwischen diesem Statement und den mathematischen Begriffen, die „Emil“ danach erläutert, nämlich einen Schwerpunkt auf die mathematische Tätigkeit. Dieser Fokus auf die Tätigkeit bestimmt auch „Emils“ Antwort auf die Frage, welche Rückschlüsse sich aus dem empirischen Gesetz der großen Zahlen für den Wahrscheinlichkeitsbegriff ergeben, und zwar eine präzisere Bestimmbarkeit der Wahrscheinlichkeit aufgrund der stärkeren Annäherung der relativen Häufigkeit bei einer höheren Versuchszahl [Emil_Pre_22].

Dementsprechend lässt sich vermuten, dass Emil die mathematischen Tätigkeiten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung als ebenso wichtig erachtet wie in anderen mathematischen Bereichen. Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung scheinen dagegen eher empirisch-gegenständlich geprägt zu sein und weisen somit größere Unterschiede zu den Begriffen „Definition“, „Axiom/Postulat“ oder „Satz“ auf.

10.3.2.2 Rekonstruktion des Endpunkts von Θ_E nach der Intervention

Was ist Mathematik?

„Eine Strukturwissenschaft als Basis aller anderen Wissenschaften und eine Sprache“

(Emil_Post_2)

Was ist Mathematik für Sie?

„Genau dasselbe: Eine Strukturwissenschaft als Basis aller anderen Wissenschaften und eine Sprache“

(Emil_Post_3)

In diesem Abschnitt stehen, als Teil der Fallstudie dieselben Fragen im Vordergrund wie für den Ausgangspunkt (vgl. 10.3.2.1). Allerdings kann in diesem Abschnitt, da es um die Beschreibung von Θ_E nach dem Seminar ÜberPro_WR_II geht, auch Frage vier behandelt werden, inwiefern „Emil“ die Materialien aus dem Seminar nutzt, um die eigene Auffassung von Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und den Übergang von der Schule zur Hochschule zu reflektieren. In den nachfolgenden Absätzen wird vornehmlich auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Ausgangs- und Endpunkt von Θ_E eingegangen.

Der Vergleich der Eingangszitate dieses Unterabschnitts und des vorangehenden Unterabschnitts zeigen bereits, dass die Wahrnehmung der Mathematik als Strukturwissenschaft in den Vordergrund gerückt ist, sofern man die Satzstellung entsprechend berücksichtigt.

Emils Auffassung von der Schul- und Hochschulmathematik hat sich dahingehend verändert, dass er die Begriffe aus der Forschungshypothese, die im Seminar explizit behandelt und diskutiert wurden, konsequent verwendet. Eine ähnliche Tabelle zum vorangehenden Unterabschnitt sähe dann folgendermaßen aus:

Schulmathematik [Emil_Post_9]	Hochschulmathematik [Emil_Post_10]
anschaulich	formal
gegenständlich	abstrakt
wenig formal	wenig anschaulich
wenig auf tiefgehendes Verständnis ausgerichtet	auf tiefgehendes Verständnis ausgerichtet
anwendungsorientiert	beweislastig

Auch hier fällt auf, dass die Assoziationen erneut Paare bilden, die „Emils“ Perspektive der Andersartigkeit von Schul- und Hochschulmathematik belegen. Entsprechend können analoge Vermutungen wie zuvor über die Verknüpfung der subjektiven Erfahrungsbereiche angestellt werden. Eine Frage, die sich direkt aus „Emils“ Verwendung der Begriffe aus der Forschungshypothese ergibt, ist, ob diese Begriffe bei „Emil“ nur sehr eng, also nur mit Bezug auf die Unterschiede zwischen Schule und Hochschule bezogen sind oder ob er die Konzepte in vielfältigen Zusammenhängen nutzt. „Emils“ Antworten im Post-Test zeigen,

dass letzteres der Fall ist. So nutzt er die Begriffe in seiner Antwort auf die Frage, was ihm am besten beim Mathematiktreiben gefällt, nämlich „das formale Niveau und die Präzision und Ordnung“ [Emil_Post_4]. Wie bereits im Ausgangspunkt missfällt ihm die „Ansatzfindung bei Beweisen“ [Emil_Post_5]. Aber auch bei der Bewertung von Argumentationen also in Situationen, in denen Emil selbst Mathematik betreibt, nutzt er die in der Forschungshypothese verwendeten Begriffe, um die aus seiner Sicht beste Argumentation der drei gegebenen Argumentationen auszuwählen, und stellt fest:

„Ich halte die erste Argumentation für die beste, weil sie formal und widerspruchsfrei den Satz von Bayes über Umformungen beweist. Sie verlässt sich nicht auf Anschauung und konkrete Beispiele und ist damit universell wahr.“

[Emil_Post_24]

Diese Antwort hängt vom Verständnis des Begriffs der „Wahrheit“ mathematischer Aussagen ab. Wo „Emil“ am Ausgangspunkt bemerkt eine mathematische Aussage sei dann wahr, wenn sie nicht falsch ist, zeigt sich hier, dass sich in der Zwischenzeit vom Ausgangspunkt zum Endpunkt des Seminars sein Verständnis und seine Perspektive auf den „Wahrheitsbegriff“ verändert hat. Emil formuliert nun:

Wann gilt eine mathematische Aussage als „wahr“?

„sie muss für jeden konkreten Anwendungsfall zum selben Ergebnis führen, sie muss logisch widerspruchsfrei sein.“

[Emil_Post_12]

Der zweite Satz entspricht dem, was auch aus einer formal-abstrakten Auffassung im hilbertschen Sinne als Wahrheitskriterium gelten würde (vgl. 5.2.2). Entsprechend bestätigt sich auch hier, dass Emil eine formal-abstrakte Auffassung zugeordnet werden kann [Emil_Post_4]. Ein wenig merkwürdig erscheint die Formulierung des ersten Teilsatzes, auch wenn Anwendungen aus einer formal-abstrakten Perspektive nicht problematisch sind. Diesem liegt aber vermutlich die Idee der nachfolgenden Antwort zu Grunde, die in der Formulierung dem ersten Teilsatz nicht unähnlich ist:

Ist es möglich, dass beide unten genannten mathematischen Aussagen im Rahmen der Mathematik wahr sein können. Begründen Sie Ihre Antwort.

- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ist $P(A) = 50\%$.
- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ist $P(A) = 10\%$.

„Ist A in beiden Fällen dasselbe Ereignis, so nein, denn es wird jedem Ereignis nur genau ein $P(A)$ zugeordnet. Ist A jeweils verschieden, so ja.“

[Emil_Post_13]

Allerdings behält „Emil“ bei der Diskussion grundlegender Begriffe wie „Definition“, „Axiom/Postulat“ und „Satz“ seine Formulierungen bei, was ein starker Indikator dafür ist, dass ähnliche oder sogar gleiche subjektive Erfahrungsbereiche vor und nach dem Seminar in Bezug auf diese Begriffe aktiviert werden.

Die formal-abstrakte Auffassung zeigt sich aber auch in Bezug auf die dritte Forschungsfrage t_3 , inwiefern es Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Auffassungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und zur Mathematik gibt. In der Voruntersuchung gab es Hinweise darauf, dass gerade die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus Sicht von „Emil“ nicht Teil der Mathematik zu sein schienen. Im Post-Test schreibt Emil passend zu der ihm zugeschriebenen formal-abstrakten Auffassung von Mathematik, was an der Wahrscheinlichkeitsrechnung typisch mathematisch für ihn ist:

„die formal-abstrakte Axiomatisierung bzw. ihr logischer Aufbau, insbesondere auf einem mengentheoretischen Fundament.“

[Emil_Post_11]

Dies bedeutet allerdings nicht – und dies zeigte sich bereits im obigen Zitat, dass „Emil“ die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mehr berücksichtigt. Noch immer erklärt er, „die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses drückt das Ausmaß aus, wie gewiss es ist, dass das Ereignis eintritt“ [Emil_Post_20]. Ähnlich deutet er auch die Zusammenhänge im und Rückschlüsse aus dem empirischen Gesetz der großen Zahl. In diesem Zitat wird besonders deutlich auf welche Weise „Emil“ die Materialien aus dem Seminar nutzt, um den Wahrscheinlichkeitsbegriff darzustellen. „Emil“ schreibt:

„Das [empirische, G.S.] Gesetz [der großen Zahl, G.S.] bietet theoretisch wie praktisch eine zentrale Methode, den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu definieren. Von Mises tut dies bspw. außerdem dient

es der Veranschaulichung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, da relative Häufigkeiten im Konkreten leichter zu fassen sind.“

[Emil_Post_24]

Die zuvor genannte Antwort, was an der Wahrscheinlichkeitsrechnung typisch mathematisch ist, scheint dabei auf die Auseinandersetzung mit Auszügen aus Kolmogoroffs „Grundbegriffen“ rückführbar zu sein.

Gegebenenfalls hat diese tiefere Auseinandersetzung im Seminar auch dazu geführt, dass sich „Emils“ liebste und unbeliebteste Bereiche in der Mathematik verändert haben. Hierzu zwei abschließende Auszüge aus dem Pre-Test und Post-Test.

Was ist Ihr Lieblingsthema/Lieblingsbereich in der Mathematik-
Bitte begründe Sie Ihre Antwort?

„Analysis, Geometrie; Weil in der Analysis die Schlüssigkeit und die Logik für mich am zentralsten ist und weil in der Geometrie Beweise am leichtesten nachzuvollziehen sind.“

[Emil_Pre_4]

„Stochastik, Analysis; reines eigenes Interesse“

[Emil_Post_4]

Was ist Ihr unbeliebtestes Thema/ unbeliebtester Bereich in der Mathematik- Bitte begründe Sie Ihre Antwort.

„Topologie; schwierige Anschauung, kaum vorstellbar.“

[Emil_Pre_4]

„keins, alles ist interessant“

[Emil_Post_5]

10.3.2.3 Die Entwicklung von Θ_E vom Ausgangspunkt zum Endpunkt der Intervention

Welche Meinung haben Sie zum Forschungs-Reflexionstagebuch?

„Ich halte die Methode für sehr geeignet, Erlerntes zu sichern und zu reflektieren. Beides ist im Rückblick nach zeitlichem Abstand lohnend hinsichtlich tiefgehender Wissensaneignung und Prüfungsvorbereitung.“

Außerdem lassen sich die Linien der Entwicklung von Begriffsverständnissen o.ä. nachvollziehen.“

[Emil_FLT_4_5]

Insgesamt lässt sich im Vergleich des Ausgangspunkts (vgl. 10.3.2.1) mit dem Endpunkt (vgl. 10.3.2.2) von Θ_E festhalten, dass

- „Emil“ die formal-abstrakte Auffassung von Mathematik beibehält, die er bereits vor dem Seminar in vielen Bereichen vertreten hat.
- „Emil“ die Möglichkeiten nutzt neue Begrifflichkeiten zu verwenden um seine Auffassungen in verschiedenen. Bereichen (Schulmathematik, Hochschulmathematik, Mathematik im Allgemeinen, Wahrscheinlichkeitsrechnung) zu explizieren.
- „Emil“ zur Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs explizit auf Konzeptionen in den historischen Quellen aus dem Seminar zurückgreift.
- „Emil“ die Wahrscheinlichkeitsrechnung als Teilgebiet im Sinne seiner Auffassung von Mathematik als Strukturwissenschaft begreifen und einordnen kann.

In diesem Abschnitt bleibt also zu klären, welche Einflüsse des Seminars „Emil“ dazu bewegt haben, die entsprechenden Begrifflichkeiten zu erwerben und dann auch zu nutzen, sowie inwiefern „Emil“ die historischen Quellen zur Reflexion nutzt. Auch ist noch offengeblieben, inwiefern die Auffassungen zur Schulmathematik und Hochschulmathematik mit dem Erfahrungsbereich „Übergang von der Schule zur Hochschule“ von „Emil“ in Zusammenhang stehen. Da das zugrunde liegende Datenmaterial recht umfangreich ist und die Entwicklung von „Emil“ während des Seminars detailreich nachgezeichnet werden soll, lohnt sich hier eine explizite Auszeichnung der behandelten Forschungsfragen in einzelnen Abschnitten.

10.3.2.3.1 Welche Auffassung haben Mathematiklehramtsstudierende über die Schulmathematik? Wie verändert sich diese Auffassung im Verlauf des Seminars ÜberPro_WR? ($t_{1.1}$)

„Emils“ Auffassung der Schulmathematik enthält sowohl den Anwendungsaspekt der Mathematik als auch den des symbolisch-technischen Arbeitens. Für ihn ist Mathematik eines der „wichtigsten Schulfächer, weil sie die Grundlage für fast alle Studienfächer und Disziplinen legt“ [Emil_FLT_1_1]. Zugleich bewertet

er, dass das „Fach aber oft sehr lebensfremd und unzureichend vermittelt“ wird. Es wird nicht klar, auf welchen Grundlagen Emil seine Bewertung aufbaut, allerdings schließt er daraus Mathematiklehrer werden zu wollen. An diese Aspekte der unzureichenden Vermittlung und Lebensfremdheit schließt „Emil“ seine Vorstellungen eines guten Mathematiklehrers an, „der sich an die eigenen und typischen Probleme des Matheunterrichts“ [Emil_FLT_1_2] erinnert, um so „gezielt auf diese eingehen und helfen“ zu können. Diese Einschätzung von Emil erinnert an die von Felix Klein (1933) viel zitierte doppelte Diskontinuität (vgl. Einleitung), in der der Lehrer die „althergebrachte Unterrichtstradition“ wieder aufnimmt. Diese Einschätzung kann insofern abgeschwächt werden, dass „Emil“ klar den Lehrer*innen eine Entscheidungsgewalt zugesteht und nicht denkt sie seien fundamentale Traditionalisten, indem sie „einen gesunden Mittelweg zwischen nötigem Formalismus und möglicher Lebensnähe“ [Emil_FLT_1_2] finden. Entsprechend glaubt er, dass das Studium ihm helfen kann „funktionierende Methoden an die Hand“ zu bekommen und zugleich eine „profunde sachliche Grundlage“ [Emil_FLT_1_3] zu schaffen. Alle diese Aussagen greifen ineinander, was darauf schließen lässt, dass durch die ersten drei Fragen ein subjektiver Erfahrungsbereich aktiviert wurde, nämlich derjenige, der die oben beschriebenen Perspektiven zur Reflexion „(Ich als) Mathematiklehrer“ bietet. Auch seine Übergangserfahrung kann er mit dieser Reflexion zusammenbringen, was dafür spricht, dass „Emil“ diesen Übergang als Teil seiner Berufsausbildung („Sie [Die Übergänge der doppelten Diskontinuität] mögen schwer sein, aber notwendig“ [Emil_FLT_1_2]) begreift und ihn für sich als Lehrer, der gegebenenfalls auch zukünftige Mathematikstudierende ausbildet, nutzbar macht. Diese Nutzbarmachung zeichnet sich schon in [Emil_FLT_1_2] ab, indem er den „gesunden Mittelweg zwischen Formalismus und Lebensnähe“ fordert. Entsprechend formuliert Emil:

Wie habe ich meinen Übergang von der Schule zur Hochschule erlebt und wie hat das meine Vorstellungen von mir als Mathematiklehrer beeinflusst?

„Ich habe den Übergang als sehr schwierig erlebt, da mich der hohe Abstraktionsgrad in der universitären Mathematik erst überforderte. Jedoch gewöhnte man sich daran. Als angehender Lehrer habe ich mir vorgenommen, die SuS [Schüler*innen, G.S.] bereits in Ansätzen auf das hohe formale Niveau vorzubereiten.“

[Emil_FLT_1_4]

Dieser letzte Vorsatz entspricht auch Emils Erwartungen an das ÜberPro_WR_II Seminar, von dem er sich einen schulpraktischen Nutzen erhofft, nämlich „methodisch zu lernen, wie man Probleme des Übergangs dämpfen kann“ [Emil_FLT_1_5]. Diese Erwartung ist typisch für Erwartungen, die von Studierenden, aber auch Forschenden und Lehrenden im Diskurs, an das Projekt ÜberPro_WR und auch ÜberPro_Geo gestellt werden. Entsprechend offensiv wurde vom Lehrenden die Haltung vertreten, und auch immer wieder explizit artikuliert, dass der Übergang von der Schule zur Hochschule eine zwar herausfordernde Situation aber zugleich ein fruchtbarer Reflexionsanlass für die eigene Auffassung von (Schul- und Hochschul-) Mathematik bilden kann. Umso interessanter ist folgender Reflexionseintrag nach der 7. Sitzung von „Emil“, der eine völlig andere Zielsetzung unterstellt, damit bleibt er allerdings seiner Erwartung an das Seminar treu, was die hohe Stabilität subjektiver Erfahrungsbereiche und deren Ermöglichung von Perspektiven zeigt:

Geben Sie aus Ihrer Erinnerung (in eigenen Worten) meine Forschungshypothese für das Seminar wieder. Inwiefern sehen Sie zwischen dieser und dem bisherigen Seminarverlauf eine Verbindung?

„Ihre Forschungshypothese stellt die These in den Mittelpunkt, dass die größte Hürde beim Übergang von schulischer zu akademischer Mathematik der Wechsel von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Behandlung mathematischer Fragen ist. Im bisherigen Seminarverlauf fiel mir (positiv) auf, dass die stochastischen Themen sowohl wissenschaftlich-formal als auch schulisch-methodisch betrachtet werden. *In diesem Vorgehen sehe ich den Versuch, die genannte Hürde möglichst zu minimieren.*“

[Emil_FLT_8_1; Herv. G.S.]

Eine Frage, die sowohl relevant hinsichtlich „Emils“ Anforderungen an einen guten Mathematiklehrer, in Bezug auf seine Schwierigkeiten und Einschätzung des Übergangs von der Schule zur Hochschule (vgl. 10.3.2.3.3) sowie seiner Auffassung von Mathematik in der Schule ist, lautet: wie war sein Schulunterricht. Dies bespricht er in seinem letzten Reflexionsbucheintrag zu seinem Stochastikunterricht an Schule und Universität:

Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede sehen Sie zwischen dem Stochastikunterricht in Ihrer Schulzeit und Ihrer Stochastik Vorlesung?

„Bei der Beantwortung dieser Frage möchte ich in die beiden Sekundarstufen unterscheiden. In der Sek. I machte es den Eindruck, als sei der Laplace'sche WK-Raum [Wahrscheinlichkeitsraum. G.S.] alles, womit sich die Stochastik beschäftigt. Wir haben damals kaum experimentelle Zugänge ausprobiert, sondern lediglich konkret ‚herumgerechnet‘. In der Sek. II war mein Stochastik Unterricht tatsächlich sehr formal und mathematisch statt anschaulich. Auch thematisch haben wir den Stoff der Stochastik-Vorlesung voll abgedeckt. Lediglich das Abstraktionsniveau liegt an der Uni deutlich höher.“

[Emil_FLT_13_1]

Dies erklärt auch, weshalb Emil eher eine formal-abstrakte Auffassung zugeordnet werden kann, da er experimentelle Zugänge, die im aktuellen Stochastikunterricht eine fundamentale Rolle spielen und eine empirisch-gegenständliche Auffassung vermutlich fördern würden, nicht erlebt hat.

Insgesamt zeigt sich, dass Emils Auffassung über die Schulmathematik stabil bleibt, und dass er auch neue Erfahrungen aus dem Seminar zur Schulmathematik in seine bisherige Sicht einordnen kann. Das bedeutet, dass wohl keine Neukonstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche von Emil in Bezug auf die Schulmathematik stattfindet.

10.3.2.3.2 Welche Auffassung haben Mathematiklehramtsstudierende über die Hochschulmathematik? Wie verändert sich diese Auffassung im Verlauf des Seminars ÜberPro_WR? ($t_{1,2}$)

Im Rückblick auf das letzte Zitat im vorhergehenden Unterabschnitt bleibt die Frage offen, was das „deutlich höhere Abstraktionsniveau“ an der Universität bedeuten kann. Dies soll in diesem Unterabschnitt beantwortet werden.

Der „hohe Abstraktionsgrad“ der Hochschulmathematik [Emil_FLT_13_1] ist eine konstante Auffassung von „Emil“, die vom Ausgangs- bis zum Endpunkt von Θ_E identifizierbar und häufig emotional gefärbt ist. Dies zeigt bspw. [Emil_FLT_1_4] „Ich habe den Übergang als sehr schwierig erlebt, *da mich der hohe*

Abstraktionsgrad der universitären Mathematik erst überforderte.“ [Herv. G.S.], oder [Emil_FLT_2_2] „In der Schule wird Mathematik eher anwendungsorientiert, beispielhaft und schematisch betrieben. *Im Studium erfährt sie eine neue Formalität und Abstraktion*“ [Herv. G.S.]. Etwas spezifischer wird „Emil“ nach der Sitzung, in der wir intensiv über Hilberts Grundlagen der Geometrie und Euklids „Elemente“ gesprochen haben. Die erste Frage des Reflexionsbucheintrags zur Sitzung und „Emils“ Antwort lauten:

Wie werden Grundbegriffe in der modernen Mathematik eingeführt? Geben Sie bitte ein konkretes Beispiel an.

„Die moderne Mathematik zeichnet sich insbesondere durch ihre schematische Struktur ‚Definition-Satz-Beweis‘ aus. Hinter dem Wort ‚Definition‘ verbirgt sich dabei die Einordnung von Begriffen. Grundsätzlich müssen in der Mathematik alle Begriffe definiert werden, damit alle sie gleich benutzen. Grundbegriffe werden eingeführt, indem entweder ihre Eigenschaften genau wichtigsten Kerneigenschaften oder ihre Zweckbestimmung genannt werden. Bsp.: ‚Punkt‘: Euklid definiert Punkte, indem er ihre zentrale Eigenschaft nennt, die sie von allen anderen geometrischen Objekten unterscheidet: Ein Punkt hat keine Teile.“

[Emil_FLT_9_1]

Offenbar bestimmt „Emil“ die moderne Mathematik aufgrund ihrer typischen axiomatisch-deduktiven Vorgehensweise „Definition-Satz-Beweis“, ihrer Darstellung und geht von einem mathematisch-pragmatischen Grund aus, Definitionen zu verwenden. Was von Emil unter dem Begriff „Kerneigenschaft“ verstanden wird, wird in seinem Beispiel zum geometrischen Objekt des Punktes bei Euklid¹⁷⁰ deutlich. Die Kerneigenschaft des Punktes ist bei Euklid, dass dieser „keine Teile hat“. Interessanterweise ist dies eine Definition, die beim von „Emil“ beschriebenen Vorgehen zum Beweis geometrischer Sätze wenig nützlich ist. Aber auch an diesem Beispiel wird deutlich, wie schwierig es ist das „Moderne“ in Hilberts Ansatz zu erkennen. „Emil“ fällt dies im Verlauf des Seminars bei der Auseinandersetzung mit Kolmogoroffs „Grundlagen“ wesentlich leichter, was

¹⁷⁰ Insgesamt ist es merkwürdig, dass „Emil“ als Beispiel der modernen Mathematik Euklid anführt. Ein Grund liegt sicher darin, dass er unter Definitionen, Definitionen im Sinne von Euklid (1975) versteht und nicht im Sinne Hilberts, der eine implizite Definition über die Axiome der Geometrie vornimmt (vgl. 5). Eine weitere Interpretationsmöglichkeit liegt darin, dass Emil gegebenenfalls innerhalb des Zitats den SEB wechselt.

den Vorteil der Betrachtung der Quellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung im Vergleich zur Geometrie zeigt.

10.3.2.3.3 Inwiefern hängen die Auffassungen zur Schulmathematik und Hochschulmathematik mit dem Erfahrungsbereich „Übergang von der Schule zur Hochschule“ der Mathematiklehramtsstudierenden zusammen? ($t_{1.3}$)

Bereits in den vorangehenden Abschnitten ist teilweise auf den Zusammenhang zwischen den Auffassungen von Schul- und Hochschulmathematik eingegangen sowie der Übergang von der Schule zur Hochschule betrachtet worden. Das liegt vermutlich daran, dass die Reflexionsfragen, die die Auffassung von Schul- und Hochschulmathematik behandeln, häufig auch den Kontext des Übergangs behandeln. Die erste Auseinandersetzung von „Emil“ mit dem Übergang Schule-Hochschule im Rahmen des Reflexionsbuchs erfolgte in Eintrag 1 Frage 4 (vgl. 10.3.2.3.1). Dort beschrieb „Emil“ den Übergang wegen des „höheren Abstraktionsgrad[s]“ der Hochschulmathematik als persönlich schwierig, wobei man sich daran „gewöhnte“. Das heißt konkret, dass „Emil“ einerseits über problematische „Übergangserfahrungen“ verfügt und andererseits aber auch der Meinung ist, er habe diesen Übergang durch Gewöhnung bewältigt. Ein Indikator ist die konsequente Nutzung der Vergangenheitsform und die Tatsache, dass er diese Übergangserfahrung und dessen „Lösung“ in einem übergeordneten subjektiven Erfahrungsbereich reflektieren kann. Das spezifische Element, das an dieser Stelle besonders im Mittelpunkt steht, ist das der Ich-Identität, das in der Verwendung der Personalpronomen einen, in der mathematikdidaktischen Forschung beschriebenen, Enkulturationsprozess anzeigen kann. Dieser beschreibt den Prozess von dem persönlichen Problem des schwierigen Übergangs zu einem Teil der mathematischen Gemeinschaft zu werden, die sich an das höhere Abstraktionsmaß gewöhnt hat. Dieser Übergang benötigt im Rahmen dieses Ansatzes die Konstruktion neuer Erfahrungsbereiche. Diese Konstruktion muss laut Emil vor diesem Seminar stattgefunden haben.

„Emil“ benennt klar die Übergangsproblematik aber auch dessen Notwendigkeit. Dies wird besonders deutlich in seiner Auseinandersetzung mit Felix Kleins „Doppelter Diskontinuität“, die zugleich in Wort und vor allem Schrift das besondere Engagement von „Emil“ in solchen Diskussionen zeigt:

„Die erste Hypothese formuliert sehr absolut, dass KEIN [Herv. im Original] Inhalt der als Schüler gelernten Mathematik an der Universität mehr relevant ist und dass anschließend NICHTS [Herv.

im Original] vom Studium die Lehrtätigkeit beeinflusst. In dieser Tragweite stimme ich der Hypothese nicht zu. Ohne die fachlichen Grundlagen, die in der Schule gelegt werden, ist ein Studium der Mathematik schlicht aussichtslos, der Zugang völlig unmöglich. Genauso schärft das Studium das mathematische Verständnis und schafft eine profunde Basis sowie einen notwendigen Überblick, um Mathematik in der Schule zu betreiben. Als Schüler weiß man bei dem einen Thema nicht, was folgt. Als Lehrer sieht man die schulmathematischen Inhalte im Verbund und richtet danach seine Unterrichtsplanung aus. Außerdem lehrt die Mathematikdidaktik insbesondere methodische Zugänge¹⁷¹ zum Fach in der Schule, die ohne ein tiefgehendes Studium nicht anwendbar wären. *Letztlich beeinflussen schulische Vorerfahrungen und das Mathematik-Studium die spätere Lehrtätigkeit sehr stark. Die Sinnlosigkeit, die die Hypothese mit Blick auf die Übergänge formuliert, lehne ich ab. Sie mögen schwer sein, aber notwendig.*“

[Emil_FLT_2_1, Herv. G.S.]

Auch hier zeigt sich, wie auch schon bei meinem Eindruck von „Emil“ im Seminar (vgl. 10.3.2.3), seine tiefe Reflexions- und Vernetzungsfähigkeit. Interessant ist dabei, dass „Emil“ selbst darauf verweist, dass er durch das Mathematikstudium einen „notwendigen Überblick“ erhält, was in etwa dem entspricht, was Felix Klein unter dem Konzept „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“ versteht. Natürlich muss man bei „Emils“ Auseinandersetzung beachten, dass er zur Auseinandersetzung nur den Auszug von Felix Kleins Beschreibung zur doppelten Diskontinuität zur Verfügung hatte, der von Klein sehr polemisch formuliert¹⁷² wird und im Kontext des Seminars entsprechend „Emils“ Ansicht ausgelöst hat.

¹⁷¹ Man muss hierbei beachten, dass es sich um die erste fachdidaktische Veranstaltung von „Emil“ handelt. Entsprechend tritt das bekannte Phänomen auf, dass er davon ausgeht, dass klarerweise in der Fachdidaktik ein Schwerpunkt auf der Methodik liegen sollte.

¹⁷² Eine Möglichkeit, den Übergang von der Schule zur Hochschule und wieder zurück zu überwinden, wäre natürlich auch den „Umweg“ über die Universität einzusparen. Bspw. im Sinne einer nicht hochschulischen Ausbildung von Lehrern. Ein Grund für die Auswahl dieses Falls liegt genau darin begründet, dass „Emil“ den Übergang von der „Schule zur Hochschule“ für notwendig erachtet, wie ich selbst im übrigen auch, und andere Studierende wie bspw. „Friederike“ [Pseudonym] eher als „nicht-notwendiges Übel“ also – im wahrsten Sinne des Wortes – eine Hürde.

Im gleichen Forschungsbucheintrag wird auch die Forschungshypothese diskutiert, allerdings gekürzt um die Explikation der Nutzung des Reflexionsanlasses für die Studierenden, um auf die Ähnlichkeit zwischen der historischen Genese und dem Übergang Schule-Hochschule zu fokussieren. An dieser Antwort „Emils“ ist besonders interessant, dass er ein Kriterium der Studieneignung angibt, das nur dann erfüllt oder nicht erfüllt werden kann, nachdem man sich am Übergang Schule-Hochschule probiert hat. Auch wenn „Emil“ nicht beschreibt, vielleicht sogar nicht beschreiben kann, was für ihn die „wirkliche“ Mathematik ist, ein Begriff, den er zur Formulierung des Kriteriums nutzt. Hinsichtlich des Blicks auf die historische Entwicklung des Faches ist er sich noch nicht sicher, führt aber selbstständig Beispiele aus der Geschichte an, um den zweiten Teil der Hypothese, die Ähnlichkeit des Auffassungswechsel in der Geschichte der Mathematik, zu belegen. Auch dieser Reflexionsbucheintrag ist abgedruckt um den Kontext der obigen Aspekte darzustellen und einen weiteren Beleg für die hohe Reflexionsfähigkeit „Emils“ anzugeben.

„Die zweite Hypothese dagegen unterstütze ich schon eher. In der Schule wird Mathematik eher anwendungsorientiert, beispielhaft und schematisch betrieben. Im Studium erfährt sie eine neue Formalität und Abstraktion. Für junge Studierende ist dieser Übergang schwer zu meistern, da sich dann erst entscheidet, ob man für das Studium der Mathematik, wie sie "wirklich" ist, überhaupt geeignet ist. Die erste Aussage der Hypothese stimmt meines Erachtens also vollumfänglich. Inwiefern dieser Auffassungswechsel auch in der Geschichte des Faches zu finden ist, kann ich kaum beurteilen. Vor dem Hintergrund der Beschäftigung mit geometrischen Figuren bei den Griechen und einer äußerst abstrakten Behandlung von Topologien in der heutigen Analysis, scheint aber auch diese Aussage der Wahrheit zu entsprechen.“

[Emil_FLT_2_2]

Die übrigen Stellen, an denen der Übergang in den Reflexionsbucheinträgen eine Rolle spielt, wurde bereits in den vorangehenden Unterabschnitten diskutiert.

10.3.2.3.4 Was macht den Übergang von der Schule zur Hochschule für Mathematiklehramtsstudierende problematisch? (t_1)

„Emil“ beschreibt in seiner Deutung der für diese Arbeit grundlegenden Forschungshypothese, dass ihn die neue Formalität und Abstraktion an der Universität Schwierigkeiten bereitet hat. Diese Darstellung der Schwierigkeiten zieht sich durch sein Erleben des Übergangs. Entsprechend deutlich ist dies im bereits besprochenen Reflexionsbucheintrag [Emil_FLT_1_4] dargestellt. Besonders bemerkenswert an diesem Eintrag finde ich, dass er den Übergang als Chance und als notwendig für ihn als zukünftigen Lehrer angesehen hat [Emil_FLT_2_1].

10.3.2.3.5 Inwiefern lässt sich eine empirisch-gegenständliche oder formal-abstrakte Auffassung bei den Studierenden rekonstruieren? (t_2)

„Emil“ schätzt sich selbst im Spektrum eines formal-abstrakten und empirisch-gegenständlichen Umgangs mit mathematischen Objekten folgendermaßen ein:

„Grundsätzlich ordne ich meinen Umgang mit mathematischen Objekten eher als formal und abstrakt ein. Ich denke, dies wird aus der Antwort zu Frage 6 deutlich. Jedoch dienen empirisch-gegenständliche Anwendungen oft zu Beginn einer Bearbeitung als Stütze und Einstieg.“

[Emil_FLT_3_7]

Weder die positive Bewertung von Anschauungsmaterialien noch die eigenständige Konstruktion ist ein Problem dafür, dass man davon ausgehen könnte, dass „Emil“ recht klar eine formal-abstrakte Auffassung zugewiesen werden kann. Insbesondere imitiert Emil im folgenden Zitat den als formal-abstrakt arbeitenden Mathematiker aus Schoenfelds (1985) Fallbeispiel.

„Eine Zeichnung oder Skizze veranschaulicht das zu erweisende Problem. In diesem Sinne sorgt sie für mehr Einsicht und Verständnis. Ist ein Beweis zu führen, so können Beweisansätze aus der Skizze heraus entstehen oder Schritte anhand der Skizze gedanklich überprüft werden. Ist bereits ein Beweis gegeben, lassen sich dessen Schritte mittels der Zeichnung nachvollziehen. Insofern erleichtert eine Zeichnung das Beweisverständnis.“

[Emil_FLT_3_1]

Dennoch fällt auf, dass „Emil“ im Rahmen der Wahrscheinlichkeit leichter formal-abstrakte Perspektiven einnehmen kann, als in Bezug zur Geometrie. Dies

wird besonders gut an folgendem Beispiel deutlich, in dem er die Frage der Intuition bei Hilbert und Kolmogoroff reflektiert:

„In meinen Augen wird Kolmogoroff Hilberts Grundsätzen eher gerecht als Hilbert selbst. Kolmogoroffs Axiome sind keine Aussagen (die bewiesen werden könnten) wie bei Hilbert, sondern Festlegungen mit eher definatorischem Charakter. Somit ist keine Intuition nötig um diese nachzuvollziehen, es reicht bloße Akzeptanz. Auf den Axiomen baut Kolmogoroff seine Theorie konsistent auf, so wie Hilbert es fordert. Hilbert selbst schließt zwar Intuition aus, jedoch halte ich sie in seinen Grundlegungen trotzdem für nötig, bei Kolmogoroff weniger. Schließt man aber §2 mit ein, setzt auch er auf Intuition.“

[Emil_FLT_11_4]

10.3.2.3.6 Inwiefern unterscheiden sich die Auffassungen der Mathematiklehramtsstudierenden über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematik?

Welche Gemeinsamkeiten oder Unterschiede artikulieren sie? (t_3)

Bereits zu Beginn dieses Unterkapitels wurde „Emils“ Grundauffassung der Mathematik dargestellt, die Mathematik als Sprache bezeichnet und Objekte strukturell und formal ausdrückt. In den Worten von „Emil“:

„Mathematik ist eine Sprache, die die Struktur von Sachverhalten oder Objekten formal ausdrücken kann, sodass sie unabhängig von Disziplin oder Fach verständlich sind. Insofern ist Mathematik auch eine Strukturwissenschaft.“

[Emil_FLT_3_5]

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff von „Emil“ und damit auch der Zweck der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in Fragen der Unsicherheit von Ereignissen und deren Bewertung gesehen und zwar in ganz praktischen Fragestellungen. Hierbei steht „Emil“ natürlicherweise unter dem Eindruck des Auszugs aus der Quelle von Czuber (1899), von der er sich folgendermaßen abgrenzt:

„Ich verstehe den Begriff der Wahrscheinlichkeit als mathematische Messung bzw. Erfassung der Unsicherheit des Eintretens eines Ereignisses. Daraus resultierend ergibt sich die Zahl, die uns in der Praxis meistens interessiert, nämlich das Maß der Gewissheit. Auch

nach Czubers und Laplaces Ausführungen bleibe ich bei dieser Vorstellung.“

[Emil_FLT_5_1]

Dies wird nochmals stärker in folgendem Reflexionsbucheintrag formuliert, der zudem einen Eindruck darauf gibt, wie „Emil“ das Verhältnis von „Mathematik“ und ihren „Disziplinen“ einschätzt. Dieses Verhältnis ist insbesondere durch die Differenz der verschiedenen Disziplinen in Bezug auf die betrachteten Konzepte geprägt, aber zugleich auch durch ihre Verbundenheit im „akademischen Vorgehen“.

„Czubers Aussage deutet an, dass die Stochastik sich in der Verwendung einiger Begriffe grundsätzlich vom Rest der Mathematik unterscheidet. Deren Bedeutungen seien bis heute diskutiert und unklar. Ich distanziere mich von dieser Aussage. *Jedes Teilgebiet der Mathematik definiert sich selbst* seine Begriffe, folgert Grundsätze und Gesetze. In diesem Vorgehen unterscheidet sich die Stochastik nicht vom Rest der Wissenschaft. Die Gegenstände, die sie behandelt, mögen etwas untypisch für die Mathematik sein: Ungewissheiten, Unsicherheit, Irrtum, Fehler, Zufall. Die Mathematik beschäftigt sich ja eigentlich eher mit klaren, verifizierbaren Aussagen. Jedoch halte ich es für eine komplementäre Aufgabe der Mathematik, ein Teilgebiet aufzubauen, das ebendiese sonst untypischen Begriffe in den Fokus nimmt. *Das akademische Vorgehen bleibt dasselbe.* Darüber hinaus denke ich, dass auch Begriffe aus der Analysis u.a. in Wissenschaftskreisen bis heute stark diskutiert sind. Ich teile Czubers Auffassung in diesem Ausmaß also nicht.“

[Emil_FLT_7_2, Herv. G.S.]

10.3.2.3.7 Wie nutzen Mathematiklehramtsstudierende die Materialien aus dem Seminar, insbesondere die historischen Quellen von Kolmogoroff und von Mises, um ihre eigene Auffassung von Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie ihren Übergang von der Schule zur Hochschule zu reflektieren? (l_4)

„Emil“ kann aufgrund seiner hohen mathematischen Kompetenz die Quellen von Kolmogoroff und von Mises nicht nur qualitativ hinsichtlich vermuteter Auffassungen, sondern auch bezüglich ihres mathematischen Gehalts gegenüberstellen und vergleichen. Auch an diesen Stellen wird „Emils“ hohes Reflexionsniveau deutlich.

„Kolmogoroff definiert die Wahrscheinlichkeit als funktionalen Zusammenhang zwischen einer Menge A und einer Zahl $P(A) \in [0,1]$. Dabei ist A ein Element des Mengen Systems \mathcal{F} , das Teilmengen der Menge E enthält. Von Mises bezieht sich weder auf die Mengentheorie noch auf die Abbildungstheorie und definiert die WK als Grenzwert der relativen Häufigkeiten. Im Begriff ‚Kollektiv‘ fasst er diesen Grenzwertprozess und deren Unveränderlichkeit zusammen. Der zentrale Unterschied ist also: Abbildungen zwischen Mengen vs. Grenzwertprozess.“

[Emil_FLT_13_3]

Ebenso ist er in der Lage aus den Quellen die für ihn wichtigen Aspekte insbesondere für sein Wahrscheinlichkeits- und Mathematikbild zu identifizieren.

„Von besonderer Bedeutung sind für mich folgende drei Aspekte:

- Das doppelte Gesicht der Wissenschaft: Sie folgt einer streng aufgebauten Ordnung und der Logik, hat aber zugleich keine Existenzberechtigung ohne Bezug zur konkreten Erfahrungswelt.
- Die WK-Theorie lässt sich neben Zufallsexperimenten auch auf physikalische und statistische Gebiete anwenden. Das verleiht ihr eine größere Existenzberechtigung
- Keine mathematische Aussage beschreibt jemals einen Prozess, der tatsächlich so existiert. Jede Theorie passt so gesehen niemals auf irgendeinen existierenden Gegenstand. Sie liefert nur Näherungen.“

[Emil_FLT_13_4]

10.3.2.3.8 Inwiefern nutzt „Emil“ das Seminar ÜberPro_WR zur Reflexion des eigenen Übergangs und Diversifizierung seiner Auffassung von Mathematik?

Emil nutzt das Seminar an vielfältigen Stellen um seine Auffassung zu reflektieren. Allerdings hat er eine sehr stabile Auffassung, nämlich, dass Mathematik eine Sprache ist. Dies bekräftigt er an verschiedenen Stellen und zu verschiedenen Zeitpunkten der Intervention, wie folgende Auszüge aus seinem Reflexionsbuch darlegen. Nach der 2. Sitzung:

„Mathematik ist eine Sprache, die die Struktur von Sachverhalten oder Objekten formal ausdrücken kann, sodass sie unabhängig von

Disziplin oder Fach verständlich sind. Insofern ist Mathematik auch eine Strukturwissenschaft.“

[Emil_FLT_3_5]

Nach der 3. Sitzung:

„Vor den ersten Kurssitzungen habe ich Mathematik als Sprache verstanden, die es erlaubt, übergreifend überwissenschaftliche Disziplinen, die Mathematik benötigen und gebrauchen, Sachverhalte und Zusammenhänge darzustellen. Mathematik als Sprache legt damit die Basis für wissenschaftliches Arbeiten und Kommunikation zwischen den Disziplinen und disziplinintern.“

Auch nach einigen Sitzungen halte ich an diesem Bild fest. Ich würde sogar sagen, dass es sich verstärkt hat.“

[Emil_FLT_4_1]

Diese Verstärkung zeigt sich auch im bereits besprochenen Pre- (vgl. 10.3.2.1) und Post-Test (10.3.2.2).

Dies sind Indizien dafür, dass Auffassungen sehr stabil sind und aufgrund ihrer Konstruktion nur bestimmte Perspektiven zulassen.

Selbst in folgendem Reflexionsbucheintrag schafft es „Emil“ klar die Intention des Hilbert Programms aus einer Unterhaltung in Comicform (Doxiadēs, Papadimitriou, Papadatos, & Di Donna, 2009) herauszukristallisieren. Besonders auffällig im Vergleich zu den übrigen Zitaten ist seine starke Bewertung und emotionale Sprache, die darauf schließen lässt – zusammen mit Formulierungen wie „wohl“, dem Konjunktiv im zweiten Absatz, dass er sich nicht sicher ist, inwiefern seine Einschätzung über Hilberts (1899) „Grundlagen der Geometrie“ zutreffen. Da sie seiner Sichtweise der Mathematik als Sprache, deren Worte einen (intuitiven) Sinn besitzen, obwohl sie wie in den vorigen beiden Zitaten von ihm als formal-abstrakt eingeschätzt wird, widerspricht. „Emil“ erläutert nicht, inwiefern Hilbert wohl nicht Intuition aus seinen Axiomen ausschließen kann.

„In der ersten Aussage fordert Hilbert, dass mathematische Aussagen sich künftig nicht auf intuitive Richtigkeit, sondern auf einen Beweis stützen müssen. So entsprechen zum Beispiel Euklids Axiome eher intuitiv nachvollziehbaren Aussagen über das Ganze und seine Teile. Hilbert würde diese Intuition *wohl* ablehnen.“

In der zweiten Aussage beschwört [?] er Axiome in seiner eigenen begrifflichen Verwendung als Ausgangspunkt mathematischer Beweise. Allerdings dürfe man sie nicht als natürliche Wahrheiten betrachten, sondern lediglich als logisch passend. Dies entspricht meinen Ausführungen zu seiner Grundlegung der Mathematik. Persönlich halte ich seine Argumentation für schwach, weil auch er Intuition in seinen Axiomen nicht ausschließen kann.“

[Emil_FLT_9_3]

In Kolmogoroffs (1933) Arbeit stellt „Emil“ dagegen die formal-abstrakte Auffassung klar fest:

„In seiner Einleitung verspricht Kolmogoroff eine axiomatische Erfassung der Stochastik in der Art, dass ihre Aussagen und Gesetze einzig auf ebendiese Axiome zurückzuführen sind. Dabei erhebt er den Anspruch, dass die Theorie allgemein und abstrakt gilt und nicht von der konkreten Bedeutung ihrer Bestandteile abhängt. Er hält sich exakt an dieses Programm. In §1 definiert er fünf Axiome und zwar so allgemein, dass sie auf jede konkrete Ausfüllung[?] (z.B. Verteilungen) angewendet werden können. Darüber hinaus stellt er sie widerspruchsfrei auf. In §3 trifft er begriffliche Festlegungen und steigert so nochmal das Abstraktionsniveau. In §4 findet sich mit dem Beweis des Satzes von Bayes die erste Anwendung seiner axiomatisch aufgebauten Theorie. Ihm gelingt die Formalisierung und Axiomatisierung also genau wie angekündigt.“

[Emil_FLT_11_1]

Somit konnte Emil seine Auffassung was es heißt, dass etwas „formal“ ist weiter ausdifferenzieren.

Zum Abschluss der Fallstudie soll noch einmal der interessante Fußnoten-Verweis in Kolmogoroffs Arbeit (vgl. 7.2) in Form des Reflexionsbucheintrags von „Emil“ in den Blick genommen werden, der zeigt wie er mithilfe der Begriffe aus der Forschungshypothese seinen eigenen Standpunkt klarer darlegen kann:

Was halten Sie von Kolmogoroffs Fußnote 2 auf S. 2 und Fußnote 3 auf S. 3?

„Kolmogoroff trennt klar in einen *formal-abstrakten* Ansatz (§1,3,4) und einen *empirisch-gegenständlichen* Transfer (§2). Dem Leser macht er das Angebot mittels der Fußnoten, entweder dem einen oder dem anderen zu folgen. *Ich bin der Meinung, dass zu einem umfassenden Verständnis beide Seiten gehören und würde seiner Empfehlung des Überspringens somit nicht folgen. Beide Seiten stützen sich gegenseitig und ergeben nur verbunden eine gelungene Einsicht.*“

[Emil_FLT_11_2, Herv. G.S.]

Dieser Einschätzung kann man sich wohl nur anschließen.

10.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse von Untersuchung 5

Untersuchung 5 zeigt, am Fall „Emil“ θ_E , dass ein Blick von Studierenden in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von ÜberPro_WR die Reflexion ihrer Übergangserfahrungen unterstützen und ihre Auffassung von Mathematik diversifizieren kann, insbesondere durch neue Begriffe zur Beschreibung eigener Auffassungen, aber auch in Bezug zu einer Positionierung hinsichtlich der im Seminar besprochenen Quellen.

10.3.4 Forschungsdesiderate, die sich aus Untersuchung 5 ergeben

- Es liegt noch weiteres – sehr vielversprechendes – Datenmaterial der anderen Kursteilnehmer*innen vor. Es wäre sicherlich gewinnbringend diese im Rahmen einer multiplen holistischen Studie zu vergleichen, nicht um statistische Generalisierbarkeit zu erreichen, sondern den, sofort nach ersten Durchsichten, gewonnen Eindruck der Subjektivität und Totalität solcher Reflexionen, sowohl in Bezug auf den eigenen Übergang als auch in Bezug auf die unterschiedlichen Mathematikbilder zu erfassen. Dafür wäre vermutlich bereits eine weitere Fallanalyse hilfreich.
- In dieser Untersuchung wurde besonders das hohe „Reflexionsmaß“ von „Emil“ deutlich und einige Aspekte, die die Güte der Reflexion zeigen, wie etwa das „Verstehen des Impulses der Reflexion“, das „Einordnen des Impulses der Reflexion“ und der „eigenen Verortung in der Reflexion“. Es ist sicherlich lohnenswert, diese Aspekte eingehender zu betrachten, um so die hier beschriebenen Reflexionsprozesse wie auch deren Güte qualitativ und ggf. sogar quantitativ erforschen zu können.
- Als weitere Frage stellt sich, ob und wie diese intensiven Reflexionen auch auf andere Veranstaltungen übertragen werden können. Damit Studie-

rende jede Chance erhalten, nicht dem zweiten Teil der doppelten Diskontinuität zu erliegen, und ihnen ihr Studium bloß noch in mehr oder weniger freudiger Erinnerung bleibt.

- Entsprechend bleibt natürlich die Frage, welchen langfristigen Einfluss solche Interventionen auf die spätere Unterrichtspraxis der Teilnehmer*innen des Seminars haben können, sodass, wie im vorhergehenden Punkt, die zweite Diskontinuität in den Blick genommen werden müsste.

Fazit

Fazit

Das Ziel dieser Arbeit war es folgende Forschungshypothese zu Übergängen von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und dem Übergang von der Schule zur Hochschule in Bezug auf die Stochastik zu überprüfen:

Der Wechsel von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung von Mathematik ist eine wesentliche Hürde für den Übergang von der Schule zur Hochschule. Ein ähnlicher Wechsel von Auffassungen ist auch in der Geschichte der Mathematik zu finden (bspw. in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung). Ihre Analyse des historischen Auffassungswechsels unterstützt die Studierenden bei ihrem individuellen Übergang von der Schule zur Hochschule.

Aus dieser Hypothese wurden die folgenden fünf Forschungsfragen abgeleitet:

1. Ist eine empirisch-gegenständliche Auffassung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen und, wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
2. Ist eine formal-abstrakte Auffassung in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung nachzuweisen und, wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
3. Ist eine empirisch-gegenständliche Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulkontext nachzuweisen und, wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
4. Ist die formal-abstrakte Auffassung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Hochschulkontext nachzuweisen und, wenn ja, wodurch zeichnet sich diese aus?
5. Inwieweit kann ein Blick von Studierenden in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von ÜberPro_WR die Reflexion ihrer Übergangserfahrungen unterstützen und ihre Auffassung von Mathematik diversifizieren?

Entsprechend dieser Forschungsfragen ergibt sich die Struktur dieser Arbeit, die in Abbildung 11 zusammen mit ihren Verbindungen untereinander dargestellt ist.

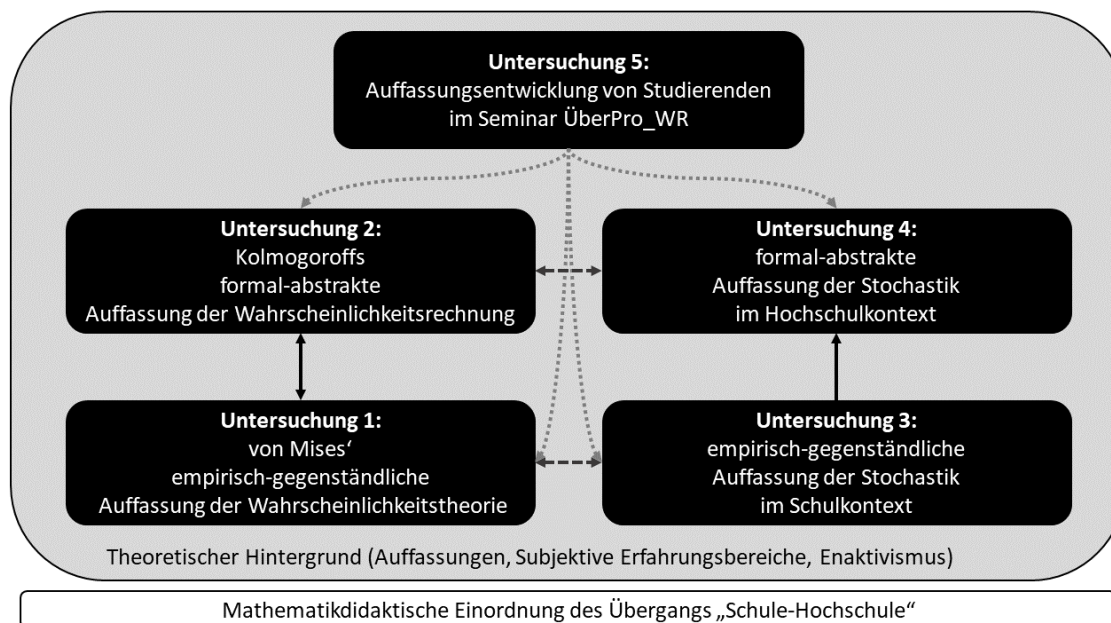


Abbildung 11: Überblick über die Elemente dieser Arbeit und der Verbindungen der einzelnen Untersuchungen.

Der Nachweis der Auffassungen in den verschiedenen Kontexten der Forschungsfragen eins bis vier ist gelungen und in den zugehörigen Untersuchungen 1–4 (vgl. 6, 7, 8 & 9) ebenso hinsichtlich der Auszeichnungsmerkmale der jeweiligen Auffassung mit Bezug zur untersuchten Quelle näher erläutert. In Untersuchung 5 (vgl. 10) konnte gezeigt werden, dass sich die Auffassung der Mathematik durch eine Reflexion der eigenen Übergangsproblematik unter Berücksichtigung der historischen Entwicklung diversifizieren kann, und zwar im untersuchten Fall insbesondere dadurch, dass Begriffe aus dem Seminar zur Beschreibung eigener Übergangserfahrungen genutzt und diese im Verlauf des Seminars präzisiert wurden.

Alle fünf Untersuchungen dieser Arbeit basieren auf dem Konzept der Auffassungen (vgl. 5), die in dieser Arbeit auf die Theorie subjektiver Erfahrungsbereiche theoretisch zurückgeführt (vgl. 4) und in die Hintergrundtheorie des Enaktivismus eingebettet wurden (vgl. 3).

Im Folgenden wird nach diesem eher generellen Fazit eine Rückschau auf die erreichten theoretischen Ergebnisse dieser Arbeit, den Ergebnissen der fünf Untersuchungen, deren Fragestellungen aus der Forschungshypothese entwickelt wurden, sowie deren Verknüpfung durchgeführt. Zum Schluss wird ein Ausblick auf Forschungsdesiderate, die sich aus dieser Arbeit ergeben, sowie einige

Hinweise für mathematische Lehr- und Lernprozesse beim Übergang von der Schule zur Hochschule für verschiedene Adressaten gegeben.

Rückschau

In Abbildung 11 ist die Struktur der Arbeit und die Verbindungen zwischen den Untersuchungen ausgewiesen. In dieser Rückschau wird zunächst ein Überblick der Ergebnisse der beiden ersten Teile dieser Arbeit und der fünf Untersuchungen dieser Arbeit getrennt voneinander gegeben, bevor die Verbindung der Untersuchungen der historischen Arbeiten und die Verbindung der Untersuchungen der aktuellen Lehrwerke für Schule und Hochschule dargestellt werden. Daran anschließend werden die Verbindungen der Untersuchungen mit ähnlichen Auffassungen in den Blick genommen, d.h. die Verbindung der Untersuchung zur Wahrscheinlichkeitstheorie von von Mises und der Untersuchung der Schulbuchreihe sowie die Verbindung der Untersuchung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung von Kolmogoroff und der Untersuchung der Hochschulwerke. Zum Schluss dieser Rückschau wird die Verbindung der fünften Untersuchungen mit den übrigen Untersuchungen dargestellt.

Ergebnisse der ersten beiden Teile und der Untersuchungen dieser Arbeit

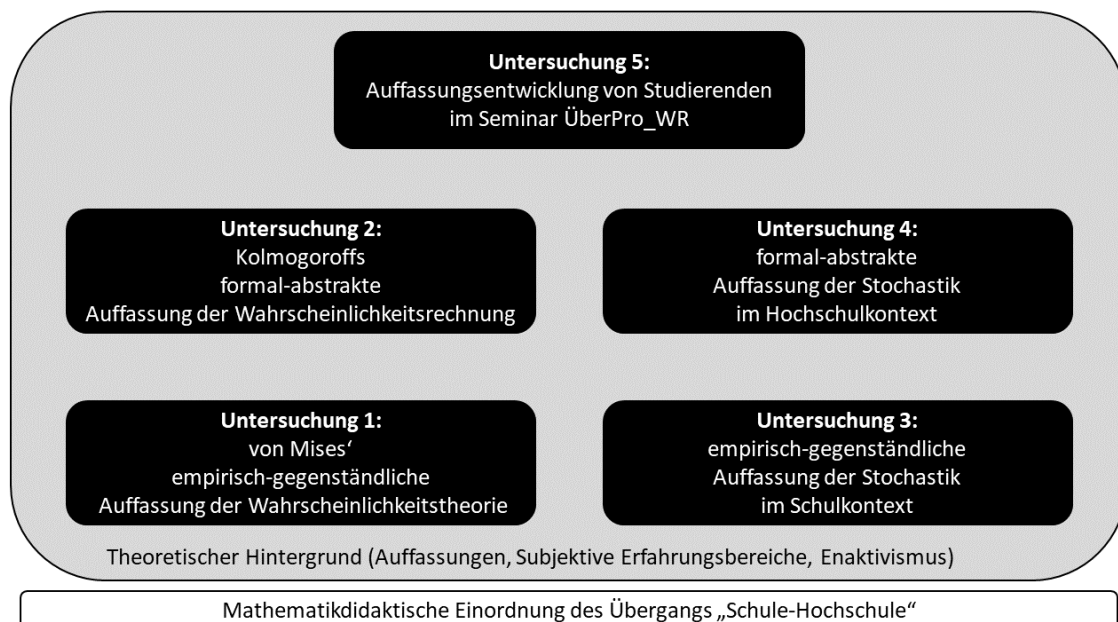


Abbildung 12: Überblick über die Elemente dieser Arbeit.

Sowohl die ersten beiden Teile dieser Arbeit, d.h. die mathematikdidaktische Einordnung (vgl. Der Übergang Schule-Hochschule im Fach Mathematik) und

der theoretische Hintergrund (vgl. Theoretischer Teil), wie auch die Untersuchungen (vgl. Untersuchungen) weisen bereits die zugehörigen Ergebnisse aus. An dieser Stelle werden sie zusammenfassend dargestellt.

Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet eine Problematisierung des Phänomens der „Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule“ und fungiert zur Einordnung dieser Arbeit in die mathematikdidaktische Forschungslandschaft. Dass es eine solche „Übergangsproblematik“, gerade in der universitären Ausbildung von Lehrer*innen, gibt, ist seit über hundert Jahren bekannt und wurde im vergangenen Jahrzehnt intensiv beforscht (vgl. 1). In diesem ersten Teil dieser Arbeit wurde durch eine Auswertung einer Sammlung von Forschungsarbeiten gezeigt, dass sich die Forschungs- und Praxisliteratur grob hinsichtlich zweier Perspektiven möglicher Ursachen der Übergangsproblematik Schule-Hochschule im Fach Mathematik einordnen lassen und zwar hinsichtlich „fehlender Fähigkeiten und Fertigkeiten“ einerseits und „der Andersartigkeit von Schul- und Hochschulmathematik“ andererseits (vgl. 2). Dabei wurde zudem festgestellt, dass in der Forschungsliteratur diese „Übergangsproblematik“ in der Regel negativ konnotiert wird, bspw. als Hürde die es zu glätten gilt oder als Auftrag Schüler*innen oder Studierende zu Beginn ihrer Universitätszeit „besser“, „intensiver“ aber in der Regel „anders“ auf diesen Übergang „vorzubereiten“. Diese Arbeit zeigt (vgl. 10), dass die Übergangserfahrung zum einen wichtig für das Kennenlernen vielfältiger und vor allem in der aktuellen mathematischen Forschung verbreiteten Auffassungen ist. Zum anderen eine gute Reflexionsmöglichkeit zur Reflexion eigener Auffassungen und – mit besonderer Relevanz für Lehrer*innen – Reflexionen ermöglicht, welche Auffassungen von Mathematik man auch bei anderen Personen feststellen kann und später bei seinen Schüler*innen fördern sollte und möchte. Mit Rückgriff auf Hefendehl-Hebbers (2016) Arbeit und der theoretischen Konzeption übergeordneter Erfahrungsbereiche wurde zudem festgestellt, dass solche Reflexionsprozesse wohl eher nicht in der Studieneingangsphase initiiert werden können, sondern es bereits einer gewissen Enkulturation in den Erfahrungsbereich „Hochschulmathematik“ bedarf. Die Ergebnisse von Untersuchung 5 (vgl. 10) belegen diese Einschätzung.

Der zweite Teil dieser Arbeit bildet den theoretischen Hintergrund, insbesondere für die fünf Untersuchungen im dritten Teil dieser Arbeit. Das wesentliche theo-

retische Ergebnis dieses Teils liegt darin Auffassungen (vgl. 5) als Äquivalenzklassen subjektiver Erfahrungsbereiche (vgl. 4) grundzulegen, die durch Beobachter indiziert werden. Durch diese Perspektive auf das Auffassungskonzept wird überhaupt erst ein methodischer Zugang zu „Auffassungen“ von Personen durch (mathematikdidaktische) Forschung ermöglicht. Zugleich bleibt die Individualität und „Privatheit“ der subjektiven Erfahrungsbereiche eines Subjekts gewahrt, sodass mit dieser Konzeptualisierung auf einfache Weise eine Trennung der Perspektiven der forschenden und der beforschten Akteure erreicht werden kann. Der Schlüssel für diese Trennung des eher kognitionspsychologischen Konzepts der subjektiven Erfahrungsbereiche und des in dieser Arbeit eher interaktionistisch verstandenen Konzepts der Auffassung liegt in den Grundideen des Enaktivismus und zwar der strukturellen Determiniertheit von Entitäten sowie ihrer strukturellen Kopplung. Auf eine natürliche Weise findet so die Perspektive der Forschenden Eingang in ihre Untersuchungsprozesse, Untersuchungsergebnisse und deren Reflexion.

Neben diesem eher allgemeinen theoretischen Ergebnis wurden auch Definitionen für zwei für den Übergang Schule-Hochschule relevanten Auffassungszuschreibungen erarbeitet, die in allen Untersuchungen forschungsleitend waren. Diese sind die „empirisch-gegenständliche“ und „formal-abstrakte“ Auffassung, die folgendermaßen beschrieben wurden.

empirisch-gegenständliche Auffassung (zuschreiben):

Stellt ein Beobachter fest, dass ein Subjekt in der Regel nur empirische subjektive Erfahrungsbereiche in gewissen – vom Beobachter identifizierten – Kontexten aktiviert, würde dieser dem Subjekt mit Bezug auf den identifizierten Kontext eine empirisch-gegenständliche Auffassung zuschreiben. (vgl. 5.2.1)

formal-abstrakte Auffassung (zuschreiben):

Stellt ein Beobachter fest, dass ein Subjekt in der Regel subjektive Erfahrungsbereiche, in denen ein gegebenenfalls vorhandener empirischer Gehalt einer Theorie als Teil des spezifischen Wissens bewusst außen vorge lassen wird, bzw. die Auslassung des empirischen Gehalts eine mögliche Perspektive ist, in gewissen – vom Beobachter identifizierten – Kontexten aktiviert, würde dieser dem Subjekt mit Bezug auf den identifizierten Kontext eine formal-abstrakte Auffassung zuschreiben. Die nicht zwingende Anwendbarkeit, sowie Rückführung auf empirische Entitäten wird

vom Subjekt als Entlastung für das mathematische Arbeiten verstanden. Mathematik wird von diesem als menschliche Konstruktion aufgefasst, deren Form auf normativen Entscheidungen beruht, die aber auch aufgrund empirisch-gegenständlicher Erfahrungen getroffen werden können. (vgl. 5.2.2)

Die „empirisch-gegenständliche“ Auffassung wurde in ähnlicher Form bereits in verschiedenen mathematikdidaktischen Arbeiten (vgl. 4.4) mit Rückgriff auf das strukturalistische Theorienkonzept der Wissenschaftstheorie intensiv sowohl in Bezug auf historische Texte als auch verschiedenen mathematischen Gebieten behandelt. Dagegen wurde die formal-abstrakte Auffassung wesentlich seltener in den Blick genommen. Diese Arbeit trägt damit dazu bei Fragen zur Bedeutung solcher Begriffe wie „abstrakter Mathematik“ oder „abstrakten Konzepten“ im mathematikdidaktischen Kontext zu beantworten und in den Kontext der Auffassungsforschung einzuordnen.

In Bezug auf die Forschungshypothese zum Übergang Schule-Hochschule stehen aber nicht nur die Auffassungen von Personen in den verschiedenen Institutionen, oder verschiedenen historischen Perioden, im Fokus sondern auch die Zuschreibung von Auffassungswechseln, die gegebenenfalls beim Wechsel von Erfahrungsbereichen beobachtet werden können. Auch für das Konzept des Auffassungswechsels konnte entsprechend der Rückführung des Auffassungsbegriffs auf das Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche folgende Definition als weiteres theoretisches Ergebnis dieser Arbeit entwickelt werden:

Auffassungswechsel (zuschreiben):

Von einem Auffassungswechsel wird dann gesprochen, wenn vor dem Auffassungswechsel nur gewisse subjektive Erfahrungsbereiche aktiviert werden, die zu einer Auffassung gehören, und dann in späteren Zusammenhängen in der Regel subjektive Erfahrungsbereiche, die zu einer anderen Auffassung gehören, aktiviert werden.

Nicht nur theoretisch, sondern auch in methodischer Hinsicht wurde in dieser Arbeit ein Ergebnis bezüglich der Rekonstruktion subjektiver Erfahrungsbereiche erreicht. Die Definition des Auffassungsbegriffs hat wie bereits erläutert die obige Form, da weder Forschende noch zwingend die Subjekte selbst, einen direkten Zugriff auf subjektive Erfahrungsbereiche der Subjekte haben können. Entsprechend wurde hier die Unterscheidung von methodisch-fragmentarischen

und methodisch-übergeordneten subjektiven Erfahrungsbereichen vorgeschlagen (vgl. 4.5). Beide sind die Ergebnisse der Rekonstruktion einer Interaktion des zu untersuchenden Subjekts. Erstere ergeben sich aus der Analyse einer Interaktion auf der Basis der vom Beobachter gewählten Analyseeinheiten der Interaktion und werden „fragmentarisch“ genannt, da sie gegebenenfalls nur einen Teil übergeordneter subjektiver Erfahrungsbereiche indizieren. Nach der Rekonstruktion der methodisch-fragmentarischen subjektiven Erfahrungsbereiche können diese ggf. durch explizite Bezüge des Subjekts zwischen verschiedenen Sinneinheiten zu methodisch-übergeordneten subjektiven Erfahrungsbereichen zusammengefasst werden. Auch letztere müssen nicht zwingend den vollständigen subjektiven Erfahrungsbereich, der vom Subjekt aktiviert wurde, beschreiben. Sie zeigen aber bereits eine Vernetzung von Elementen subjektiver Erfahrungsbereiche sowie die Aktivierungsdauer dieser subjektiven Erfahrungsbereiche in der Interaktion an.

Zuletzt soll in diesem Rückblick der Ergebnisse aus dem theoretischen Teil noch auf Aspekte der Haltung von Forschenden eingegangen werden, die sich aus den Grundpositionen des Enaktivismus ergeben. Das Konzept „finding(s)“ hat in Browns (2015) Perspektive sowohl die Funktion des statischen Ergebnisses als auch des zugehörigen dynamischen Entdeckungsprozesses (vgl. 3.4). Das Ergebnis der Forschenden beinhaltet, insbesondere aus einer enaktivistischen Perspektive, immer auch die Perspektiven der Forschenden. Diese Feststellung trifft eigentlich für jedes Forschungsergebnis zu, wird aber häufig nicht expliziert. Durch die Funktion der „finding(s)“ als Prozess soll der Findungsprozess in der Forschungsarbeit bewusst expliziert werden, der dann auch die Perspektiventwicklung der Forschenden im Forschungsprozess möglichst reflektiert abbilden soll. Ein Versuch diesen Anforderungen zu genügen wurde in Untersuchung 5 (vgl. 10) unternommen. Diese Haltung ist besonders wichtig um den Transfer mathematikdidaktischer Forschung auf ((hoch-)schulische) Lehr- und Lernprozesse von Mathematik zu übertragen. Denn sofern die Aussagen der Forschenden vornehmlich das Wissen der Forschenden betreffen haben diese nicht zwingend einen direkten Einfluss auf das Lehren und Lernen von Mathematik außerhalb der Gemeinschaft der Forschenden. Eine Möglichkeit diesen Transfer gelingen zu lassen liegt in der expliziten Reflexion der Perspektiven und damit der Ermöglichung dieser Perspektiven für Lehrende und Lernende. Das bedeutet konkret, dass sowohl die teilnehmende als auch nicht-teilnehmende Beobachter*in den Erfahrungskontext, in dem sie zu seiner Deutung gelangt, soweit es

ihr möglich ist, explizieren sollte, da eine Deutung nur aufgrund eigener, je nach deutender Beobachter*in unterschiedlich differenzierter, subjektiver Erfahrungsbereich möglich ist (vgl. 3).

Der dritte Teil dieser Arbeit enthält fünf Untersuchungen, die sich aus den fünf Forschungsfragen auf der Basis der Forschungshypothese ergeben.

In der ersten Untersuchung (vgl. 6) wird von Mises Konzeption der Wahrscheinlichkeitstheorie in den Blick genommen um nachzuweisen, dass in der historischen Entwicklung der Stochastik u.a. eine empirisch-gegenständliche Auffassung vertreten wurde. Von Mises (1931) „Vorlesungen“ zur Wahrscheinlichkeitstheorie wurden dabei als Grundlage dieser Untersuchung ausgewählt, da von Mises in dieser Arbeit eine systematische mathematische Arbeit im Sinne einer empirischen Theorie vorlegt, die zugleich exemplarisch für die identifizierte empirisch-gegenständliche Auffassung ist. Schon anhand der Bemerkungen innerhalb dieser Vorlesung, wie bspw. der Eingrenzung des Anwendungsbereichs der Wahrscheinlichkeitstheorie, „in denen ‚Wahrscheinlichkeit‘ wesentlich gleichbedeutend [...] mit *relativer Häufigkeit* [Herv. im Original] innerhalb eines bestimmten Wiederholungsvorgangs [ist]“ (von Mises, 1931, S. IV), expliziert von Mises seine Auffassung sehr klar und wird auch von Zeitgenossen entsprechend gedeutet, z.B. von Kolmogoroff (1933) in seinen „Grundbegriffen“.

Zur Prüfung ob dieser Eindruck auch durch von Mises mathematische Darstellung gestützt wird, wurde in der Untersuchung eine partielle strukturalistische Rekonstruktion des Theorie-Elements „einfachstes Kollektiv oder Alternative“ vorgenommen, indem das „empirische Gesetz der großen Zahl“ zusammen mit einer Mathematisierung des Zufalls durch das „Prinzip des ausgeschlossenen Spielsystems“ das Fundamentalgesetz des Theorieelements bildet. Zusätzlich weist er eine Menge intendierter Anwendungen aus, indem er exemplarische Beispiele, wie das Würfeln mit einem Spielwürfel, Sterbetafeln und thermodynamische Prozesse zu diesen zählt. Zufallsversuche, die nicht wiederholbar sind, schließt er dagegen aus. Insgesamt konnte mit dieser Untersuchung somit gezeigt werden, dass von Mises eine empirisch-gegenständliche Auffassung in Bezug auf die Wahrscheinlichkeitstheorie zugeordnet werden kann.

In Untersuchung 2 (vgl. 7) wird Kolmogoroffs Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung analysiert um nachzuweisen, dass in der historischen Entwick-

lung der Stochastik auch eine formal-abstrakte Auffassung vertreten wurde. Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffe“ wurden dabei als Grundlage dieser Untersuchung ausgewählt, da diese Arbeit bis heute als Schlüsselwerk der Formalisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriff angesehen wird und exemplarisch für die identifizierte formal-abstrakte Auffassung ist. Ein wichtiger Aspekt dieser Untersuchung, der besonders beachtenswert ist, liegt darin, dass die Rekonstruktion der formal-abstrakten Auffassung Kolmogoroffs nicht (nur) auf der Basis seiner Verwendung des Mengenformalismus und weiteren Elementen der Maßtheorie als solche identifiziert wurde, sondern aufgrund seiner klaren Transparenz und Explikation seiner Perspektive einer formal-abstrakten Wahrscheinlichkeitsrechnung, die insbesondere in seinen Bemerkungen innerhalb des Haupttextes und seinen Fußnoten hervortritt. Im Rahmen der Analyse des Kontextes zeigt sich, dass diese Auffassung konsequent vertreten wird, auch wenn Kolmogoroff die Anwendung der formal-abstrakten Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls thematisiert, diese aber explizit als außerhalb der Mathematik kennzeichnet (Kolmogoroff, 1933, S. 3). Mithilfe einer zusammenfassenden qualitativen Inhaltsanalyse konnten zudem folgende Dimensionen der Auffassung von Kolmogoroff identifiziert werden, die zeigen wie hoch vernetzt das Wissen von Kolmogoroffs ist und inwiefern er dieses Wissen explizit in seiner Grundlegung reflektiert hat:

- Dimension „formal-abstrakt“ (z.B. die Einschätzung, dass moderne Mathematik formal-abstrakte implizite Definitionen nutzt)
- Dimension „empirisch-gegenständlich“ (z.B. formal-abstrakte Theorie lässt beliebig viele Interpretationen zu.)
- Dimension „Von formal-abstrakter Theorie zur empirisch-gegenständlichen Anwendung“ (Deduktion Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse aus Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Borel-Feldern)
- Dimension „mathematischer Habitus“ (z.B. Wunsch nach Einfachheit einer Axiomatisierung)
- Dimension „philosophisch“ (z.B. Frage nach dem „Wesen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs“)
- Dimension „mathematische Entwicklung“ (z.B. gewünschte konfliktfreie Darstellung)
- Dimension „klassische Auffassung“ (Adressierung der „Merkwürdigkeit von Wahrscheinlichkeitsrechnung“)

An dieser Stelle sei noch einmal daran erinnert, dass die Zuordnung der Auffassung durch einen Forschenden entsprechend dem theoretischen Hintergrund danach erfolgt, welche Auffassung „in der Regel“ vertreten wird. Sowohl die Methodik als auch eine sukzessive Entwicklung der Grundlegung zeigen ein hohes Maß an Kohärenz in Bezug auf die von Kolmogoroff vertretene formal-abstrakte Auffassung.

Die dritte Untersuchung (vgl. 8) zeigt durch eine Analyse der Schulbuchreihe „Lambacher Schweizer“, dass eine empirisch-gegenständliche Auffassung im Schulkontext nachweisbar ist. Diese Einschätzung stützt sich auf den Ergebnissen einer Time-Series-Analysis der Schulbuchreihe sowie einer Kontextanalyse mit Bezug auf die für die untersuchte Schulbuchreihe gültigen Lehrpläne, die ebenso eine empirisch-gegenständliche Auffassung konsequent von der Sekundarstufe I bis zur Sekundarstufe II im Bereich der Stochastik fordern. Hierbei wurden alle Jahrgangsstufenbücher der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer von der 5. Klasse bis zur Qualifikationsphase in der Reihe zum Gymnasium in acht Jahren (G8) ausgewertet. Der Auswertungsprozess erfolgte in drei Schritten. Im ersten Schritt wurden alle Elemente der Schulbücher auf mikrostruktureller Ebene, die einen Bezug zur Stochastik haben, d.h. Zufallsgeräte und stochastische Anwendungskontexte oder Begriffe aus dem Inhaltsfeld der Stochastik nutzen, identifiziert und im Anhang E zusammengefasst. In einem zweiten Schritt wurde eine weitere Reduzierung dieser umfangreichen Datensammlung vorgenommen, indem die Gelenkstellen in der Begriffsentwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (bspw. Merkkästen, exemplarische Auszüge der Erklärtexpte) sowie typische Tätigkeiten im Kontext der Stochastik identifiziert wurden (bspw. typische Aufgaben und interessante Beispiellösungen, die weitere Einblicke in die Auffassung der Autoren der Schulbuchreihe geben konnten). Im dritten Schritt wurden auf der Basis dieser im zweiten Schritt erstellten Zeit-Serie, nach der Methode der Time-Series-Analysis von Yin (2009), drei übergeordnete Fragestellungen an die Daten gestellt und zwar:

- Welches Verhältnis besteht zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer? (z.B. Prognose für Relative Häufigkeiten durch Wahrscheinlichkeiten; „empirische“ und „theoretische“ Kennwerte)
- Was sind und wie werden „Zufallsgeräte“ im Sinne der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer genutzt? (z.B. „Zufallsschwankungen“, Ausgänge

sind nicht vorhersagbar; (mehrfacher) Münzwurf; Symmetrie von Zufallsgerät wichtig für die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit)

- Welche Vorgehensweisen im Stochastikunterricht, insbesondere der Wahrscheinlichkeitsrechnung, werden in der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer vorgeschlagen bzw. wurden angeregt? (z.B. Prozessschema: Spekulieren, Experimentieren, Bewerten, Berechnen, Simulieren; Versuchszahl wird erhöht (in der Regel für bessere Passung zwischen empirischen und theoretischen Kenngrößen))

Die in Klammern hinter den Fragen angegebenen Kategorien wurden dann teilweise je nach Fragestellung zusammengefasst. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung liegen zum einen im Nachweis der empirisch-gegenständlichen Auffassung im Kontext der Schulbuchreihe, zum anderen in ihrer hohen Kohärenz insbesondere in Bezug auf die Deutung der Grundbegriffe durch alle Jahrgangsstufen sowie der Identifikation typischer Zufallsgeräte für den Stochastikunterricht wie den (mehrfachen) Würfel- und Münzwurf aber auch die Simulation mithilfe des grafikfähigen Taschenrechners oder eines Tabellenkalkulationsprogramms. Besonders auffallend war eine konsequente Nutzung des Prozessschemas: „Spekulieren → Experimentieren/Simulation → Bewerten → Berechnung/Simulation“ von der 7. Klasse bis in die Qualifikationsphase in allen Jahrgangsstufen. Aus der Kontextanalyse mit Bezug zum Lehrplan konnte zudem herausgearbeitet werden, dass der Lambacher Schweizer sowohl hinsichtlich der Auffassung als auch des soeben angegebenen Prozessschemas dem Lehrplan in Bezug auf die Stochastik voll entspricht. Dass eine empirisch-gegenständliche Auffassung im Mathematikunterricht vermittelt werden soll findet sich explizit in den neueren Kernlehrplänen in NRW in denen bspw. in Variation der Winterschen Grunderfahrung davon gesprochen wird, dass Erscheinungen und Vorgänge in der Welt „mithilfe der Mathematik [...] beeinfluss[t]“ werden sollen, womit explizit eine Auswirkung der Mathematik auf die uns umgebende Welt gefordert wird und insbesondere die Schüler*innen diese Auswirkungen erleben und gestalten sollen.

Neben diesen konkreten inhaltlichen Ergebnissen wurde in dieser Untersuchung auch ein Ergebnis im Rahmen der methodischen Schulbuchforschung erzielt und zwar wurde das Konzept der Megastruktur einer Schulbuchreihe, das heißt ihr Aufbau innerhalb der Schulbuchreihe, eingeführt. Dieses Konzept bildet dabei

eine natürliche Erweiterung der von Rezat (2009) vorgeschlagenen Strukturebenen von Schulbüchern. Innerhalb dieser Megastruktur zeigen sich die in der Reihe Lambacher Schweizer intendierten kohärenten Perspektiven und Funktionen von subjektiven Erfahrungsbereichen zur Stochastik, die aufgrund ihrer Kohärenz auch eine homogene empirisch-gegenständliche Auffassung fördern können.

In der vierten Untersuchung (vgl. 9) werden zwei Hochschullehrbücher (Georgii, 2009, Henze, 2018) zur Einführung der Stochastik analysiert um nachzuweisen, dass im Hochschulkontext eine formal-abstrakte Auffassung nachweisbar ist. Beide Lehrbücher wurden ausgewählt um zwei von ihrer Konzeption her unterschiedliche Einführung in den Blick zu nehmen. Georgiis (2009) „Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“ baut das Konzept des allgemeinen Wahrscheinlichkeitsraums von Beginn an mithilfe der Maßtheorie auf, bevor er konkretere Wahrscheinlichkeitsverteilungen behandelt. Henze (2018) beginnt dagegen mit endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen und wechselt innerhalb seines Buches mehrfach zwischen den Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik im Gegensatz zu Georgii (2009), der den ersten Teil seines Lehrwerks der Wahrscheinlichkeitstheorie und dem anderen der Statistik vorbehält. Auch in dieser vierten Untersuchung wird die inhaltliche Struktur beider Lehrwerke im Abschnitt Kontext der Quelle ausführlich erläutert. Trotz dieser Unterschiede in der Konzeption der Lehrwerke ist in beiden eine formal-abstrakte Auffassung nachweisbar, die sich dadurch zeigt, dass beide Autoren darauf bestehen eine moderne Begriffsbildung anregen zu wollen und die historische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie zumindest ausschnittsweise im Spannungsfeld zwischen formal-abstrakter Mathematik und ihrer Anwendung darzustellen, wobei beide Autoren die Vorzüge einer formal-abstrakten Auffassung einerseits in ihrer mathematischen Sicherheit, andererseits aber auch in der damit eröffneten größeren Anwendbarkeit sehen. Die letztgenannten Aspekte ergeben sich aus den Kategorien einer zusammenfassenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring beider Lehrbücher, die sehr deutlich die Parallelen in den grundlegenden Auffassungen der Autoren mit Bezug zur Stochastik zeigen, was unter anderem auch das Ziel der Heranführung von Studierenden an typische mathematische Arbeitsweisen im Sinne einer formal-abstrakten Auffassung von Mathematik beinhaltet.

Mit Untersuchung 5 (vgl. 10) wurde geprüft ob und auf welche Weise Studierende durch eigene Auseinandersetzung mit Übergängen in der historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen von ÜberPro_WR die Reflexion ihrer eigenen Übergangserfahrungen unterstützen und ihre Auffassung von Mathematik diversifizieren können. Da die Übergangserfahrungen sehr umfassend sind und zugleich der Kontext in dem diese Übergangserfahrungen reflektiert wurden ebenfalls erläutert werden musste, wurde die Methodik der Fallstudienforschung (Yin 2009) genutzt, für die sich herausstellt, dass sie gut zur Rekonstruktion von subjektiven Erfahrungsbereichen geeignet ist. Dies lässt sich mit der „Totalität“ des Konzepts der „subjektiven Erfahrungsbereichen“ begründen, die sich dadurch ausdrückt, dass verschiedene spezifische Elemente subjektiver Erfahrungsbereiche gemeinsam auftreten. Wenn nun ein solches „totales“ Konzept, wie bspw. das der subjektiven Erfahrungsbereiche, untersucht werden soll ist ein im gleichen Maße holistisches Untersuchungsdesign sinnvoll, was sich in dieser Untersuchung in der Entscheidung für eine Einzelfallstudie zeigt und damit die Untersuchung der Partikularität des untersuchten Falls in den Mittelpunkt stellt.

Den Kontext dieser Untersuchung bildet das Seminar ÜberPro_WR_II, das in ähnlicher Form zuvor zweimal zum Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und zweimal zum Gebiet der Geometrie erprobt wurde. Hierbei konnte sich zeigen, dass obwohl Geometrie im Vergleich zur Wahrscheinlichkeitsrechnung als Inhaltsfeld des Seminars wesentlich beliebter war, die Vorteile der Wahrscheinlichkeitsrechnung überwogen, da im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur ein relativ kurzer Zeitraum betrachtet werden musste um einen fundamentalen Auffassungswechsel nachzuzeichnen und Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffe“ durch Randbemerkungen seine formal-abstrakte Auffassung expliziter macht als dessen Pendant in der Geometrie, die „Grundlagen der Geometrie“ von Hilbert (1899). Der inhaltliche Aufbau des Seminars ÜberPro_WR kann inhaltlich in fünf Teile gegliedert werden. Im ersten Teil reflektieren Studierende ihre Auffassungen, aber auch Auffassungen in Lehrwerken, aus mathematikdidaktischer Perspektive. In den nächsten drei Teilen werden historische Auffassungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in den Blick genommen, wobei Emanuel Czubers (1899) Bericht über die Wahrscheinlichkeitsrechnung an die DMV ein exemplarisches Beispiel für eine „klassische“ Auffassung ist, von Mises (1931) in seinen „Vorlesungen“ wie oben dargestellt eine empirisch-gegenständliche und

Kolmogoroff (1933) in seinen „Grundbegriffen“ eine „formal-abstrakte“ Auffassung vertritt. Diese Auffassungen werden von den Seminarteilnehmer*innen indiziert, diskutiert und mit ihrer eigenen Auffassung vergleichend reflektiert. Ihre Reflexion erfolgt zum einen innerhalb der Seminarsitzungen, aber auch in Form von Reflexionseinträgen in einem Reflexionstagebuch nach jeder Sitzung. Eine ausführlichere Version der Seminarkonzeption ist in Anhang B; und eine Liste der Reflexionsfragen in Anhang C zu finden.

Den Kern der Untersuchung bildet allerdings nicht die Entwicklung der Seminarkonzeption, sondern die Betrachtung des Falls „Emil“ (Pseudonym). Auch für diese Einzelfallstudie wurde eine Time-Series-Analysis (Yin, 2009) durchgeführt. „Emil“ war zur Zeit der Durchführung des Seminars im 7. Fachsemester seines Studiengangs für das gymnasiale Lehramt und konnte im Rahmen einiger Fachveranstaltungen der Mathematik die typischen Arbeitsweisen und Auffassungen, die mit der universitären Mathematik verbunden sind kennenlernen und konnte somit im Seminar ÜberPro_WR_II auf einen reichen Erfahrungsschatz zurückgreifen. Die Auswahl des Falls „Emil“ geht vor allem darauf zurück, dass zum einen sein Datensatz komplett ist, d.h. sein Pre- und Post-Test sowie alle Reflexionsbucheinträge vorliegen, zum anderen aufgrund „Emils“ engagierter und aktiver Mitarbeit im Seminar. Auf der Basis dieser Datensätze lässt sich sagen, dass die Auffassungen von „Emil“, insbesondere hinsichtlich der Überzeugung, dass Mathematik eine Sprache sei, sehr stabil ist. Trotzdem zeigt sich, dass das Seminar auch einem so erfahrenen Studenten Möglichkeiten an die Hand gibt seine Übergangserfahrungen zu reflektieren, zu formulieren und einzuordnen. Das äußert sich zum einen an seiner Verwendung der im Seminar behandelten Terminologie in Bezug auf verschiedene Auffassungen, die in den behandelten Quellen deutlich wurden, aber auch bei seiner Bewertung von mathematischen Argumentationen (vgl. 10.3.2.2). Besonders deutlich wird dies in seinen Einschätzungen zur Frage aus dem Pre- und Post-Test, was an der Wahrscheinlichkeitsrechnung typisch mathematisch für ihn sei:

„Dass hier selbst Größen wie Unsicherheit und Wahrscheinlichkeit versucht werden mathematisch präzise zu fassen und zu quantifizieren.“

[Emil_Pre_11]

„die formal-abstrakte Axiomatisierung bzw. ihr logischer Aufbau, insbesondere auf einem mengentheoretischen Fundament.“

[Emil_Post_11]

Dies bedeutet allerdings nicht, dass Emil im Post-Test die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung außen vor lässt oder vergessen würde, was in folgendem Zitat aus dem Post-Test besonders deutlich wird:

„Das [empirische, G.S.] Gesetz [der großen Zahl, G.S.] bietet theoretisch wie praktisch eine zentrale Methode, den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu definieren. Von Mises tut dies bspw. Außerdem dient es der Veranschaulichung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, da relative Häufigkeiten im Konkreten leichter zu fassen sind.“

[Emil_Post_24]

Im Anschluss an die in Untersuchung fünf dargestellte Bestimmung des Anfangs- und Endpunkts der Time-Series-Analysis durch Analyse der Antworten aus dem Pre- und Post-Test wird die Entwicklung zwischen diesen Zeitpunkten anhand von „Emils“ Reflexionsbucheinträgen dargelegt. Insgesamt zeigt sich auch dort eine stetige Diversifizierung seiner Auffassung insbesondere durch Abgrenzung von betrachteten historischen Auffassungen. Um dies zu illustrieren sollen zum Schluss dieser Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung 5 einige Zitate aus „Emils“ Reflexionsbuch angegeben werden, die im Rahmen der Untersuchung in Bezug zur Fallstudie eingeordnet und gedeutet wurden.

Wie habe ich meinen Übergang von der Schule zur Hochschule erlebt und wie hat das meine Vorstellungen von mir als Mathematiklehrer beeinflusst?

„Ich habe den Übergang als sehr schwierig erlebt, da mich der hohe Abstraktionsgrad in der universitären Mathematik erst überforderte. Jedoch gewöhnte man sich daran. Als angehender Lehrer habe ich mir vorgenommen, die SuS [Schülerinnen und Schüler, G.S.] bereits in Ansätzen auf das hohe formale Niveau vorzubereiten.“

[Emil_FLT_1_4]

Hat sich Ihre Vorstellung vom Wahrscheinlichkeitsbegriff im Laufe der Sitzung verändert? Wenn ja, wie?

„Ich verstehe den Begriff der Wahrscheinlichkeit als mathematische Messung bzw. Erfassung der Unsicherheit des Eintretens eines Ereignisses. Daraus resultierend ergibt sich die Zahl, die uns in der Praxis meistens interessiert, nämlich das Maß der Gewissheit. Auch nach Czubers und Laplaces Ausführungen bleibe ich bei dieser Vorstellung.“
[Emil_FLT_5_1]

Inwiefern löst Kolmogoroff innerhalb seiner Paragraphen §1, §3 und §4 sein Programm aus der Einleitung der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung ein? Begründen Sie Ihre Antwort.

„In seiner Einleitung verspricht Kolmogoroff eine axiomatische Erfassung der Stochastik in der Art, dass ihre Aussagen und Gesetze einzig auf ebendiese Axiome zurückzuführen sind. Dabei erhebt er den Anspruch, dass die Theorie allgemein und abstrakt gilt und nicht von der konkreten Bedeutung ihrer Bestandteile abhängt. Er hält sich exakt an dieses Programm. In §1 definiert er fünf Axiome und zwar so allgemein, dass sie auf jede konkrete Ausfüllung[?] (z.B. Verteilungen) angewendet werden können. Darüber hinaus stellt er sie widerspruchsfrei auf. In §3 trifft er begriffliche Festlegungen und steigert so nochmal das Abstraktionsniveau. In §4 findet sich mit dem Beweis des Satzes von Bayes die erste Anwendung seiner axiomatisch aufgebauten Theorie. Ihm gelingt die Formalisierung und Axiomatisierung also genau wie angekündigt.“
[Emil_FLT_11_1]

Was halten Sie von Kolmogoroffs Fußnote 2 auf S. 2 und Fußnote 3 auf S. 3?

„Kolmogoroff trennt klar in einen *formal-abstrakten* Ansatz (§1,3,4) und einen *empirisch-gegenständlichen* Transfer (§2). Dem Leser macht er das Angebot mittels der Fußnoten, entweder dem einen oder dem anderen zu folgen. *Ich bin der Meinung, dass zu einem umfassenden Verständnis beide Seiten gehören und würde seiner Empfehlung des Überspringens somit nicht folgen. Beide Seiten stützen sich gegenseitig und ergeben nur verbunden eine gelungene Einsicht.*“
[Emil_FLT_11_2, Herv. G.S.]

Verbindung der Untersuchungen der historischen Arbeiten und die Verbindung der Untersuchungen der aktuellen Lehrwerke für Schule und Hochschule

In diesem Abschnitt sollen nun die Verbindungen zwischen den historischen Quellen und den Lehrwerken untersucht werden. Diese Verbindungen sind graphisch in Abbildung 13 dargestellt. Auffallend ist, dass zwischen den historischen Quellen ein Doppelpfeil, zwischen den Lehrwerken aber nur ein einfacher Pfeil ausgehend vom Schulkontext zum Hochschulkontext eingezeichnet ist, was im Folgenden erläutert wird.

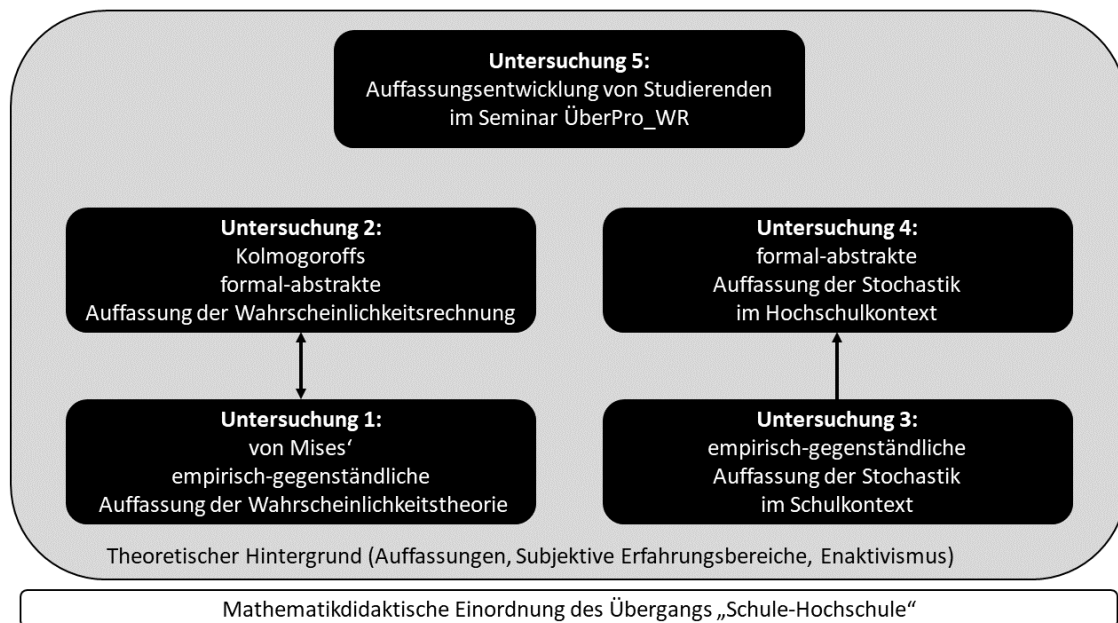


Abbildung 13: Überblick über die Elemente dieser Arbeit sowie Verbindung der Untersuchungen der historischen Arbeiten und die Verbindung der Untersuchungen der aktuellen Lehrwerke für Schule und Hochschule.

Ein Pfeil von der Untersuchung 1 der „Vorlesungen“ von von Mises (1931) zur Untersuchung von Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffen“ kann angegeben werden, da dieser der zeitlichen Abfolge der Veröffentlichung dieser für die mathematische Gemeinschaft sehr einflussreichen Arbeiten entspricht und damit einen Übergang von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung anzeigen. Außerdem vertritt von Mises seine Auffassung von einer adäquaten Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Basis von Kollektiven auch noch lange nach der Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Kolmogoroff (1933) weiterhin, sodass die als Untersuchungsergebnis rekonstruierte Auffassung von von Mises selbst in späteren Wiederauflagen seiner Arbeit (Mi-

ses & Geiringer, 1964) auch explizit von ihm von einer formal-abstrakten maßtheoretischen Grundlegung des Wahrscheinlichkeitsbegriff abgegrenzt wird. Die Rückrichtung des Pfeils spielt dagegen eine besonders große Rolle für die Seminarkonzeption und kann somit als eines der Untersuchungsergebnisse festgehalten werden. Kolmogoroff hat unter anderem im Rahmen einer Forschungsreise im Jahre 1930 Kontakt mit von Mises gehabt und über den Entwurf dessen „Vorlesungen“ gesprochen. So ist es wenig verwunderlich, dass Kolmogoroff einen expliziten Bezug zu einem Abschnitt dieser Vorlesungen „Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt“ in seinen „Grundbegriffen“ anführt im Zusammenhang mit der Anwendung seiner entwickelten Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hierbei expliziert Kolmogoroff die Reflexion seiner Auffassung in dem er feststellt, dass diese Anwendungsfrage „für die rein mathematische Entwicklung der Theorie“ (Kolmogoroff, 1933, S. 3) nicht interessant sei. Gerade dieser enge Zusammenhang hat dazu geführt genau diese beiden Quellen für den Nachweis einer empirisch-gegenständlichen und formal-abstrakten Auffassung in der historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auszuwählen.

Die Verbindungen der Untersuchungen der Schul- und Hochschulfächer weist dagegen nur einen Pfeil mit der Pfeilrichtung von der Untersuchung der Schulbuchreihe in Richtung der Hochschulfächer auf. Zwar sind auch grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten aus dem Mathematikunterricht der Schule für die Stochastik der Hochschule notwendig, was dieser Pfeil anzeigt. Viel wichtiger ist aber, dass durch die Hochschulfächer eine Auffassungsentwicklung, und hinsichtlich des betrachteten Auffassungswechsels eine Erweiterung, angeregt wird, indem sie eine formal-abstrakte Auffassung fördern, die dennoch die Anwendung dieser mathematischen Theorie im Blick behält. Wurde dieser Auffassungswechsel beim Übergang tatsächlich von den Studierenden vollzogen „benötigt es keinen Schritt zurück“, da eine Interpretation einer formal-abstrakten Theorie auch im empirisch-gegenständlichen Sinne möglich ist (vgl. 7, 9). Ein weiterer Aspekt dieser Verbindung liegt darin, dass in den untersuchten Hochschullehrbüchern kein Verweis auf den Stochastikunterricht der Schulbücher erfolgt, was nicht zwingend inhaltsfeldspezifisch ist, aber auch im Anforderungskatalog cosh (2014) entsprechend ausgewiesen wird:

„6 Stochastik Die Hochschulen setzen keine Vorkenntnisse der Stochastik zu Studienbeginn voraus, begrüßen aber im Sinne der

Allgemeinbildung, dass statistische sowie wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen in der Schule vermittelt werden.“

(cosh, 2014, S. 8)

Verbindung der Untersuchung zur Wahrscheinlichkeitstheorie von von Mises und der Untersuchung der Schulbuchreihe sowie Verbindung der Untersuchung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung von Kolmogoroff und der Untersuchung der Hochschullehrbücher

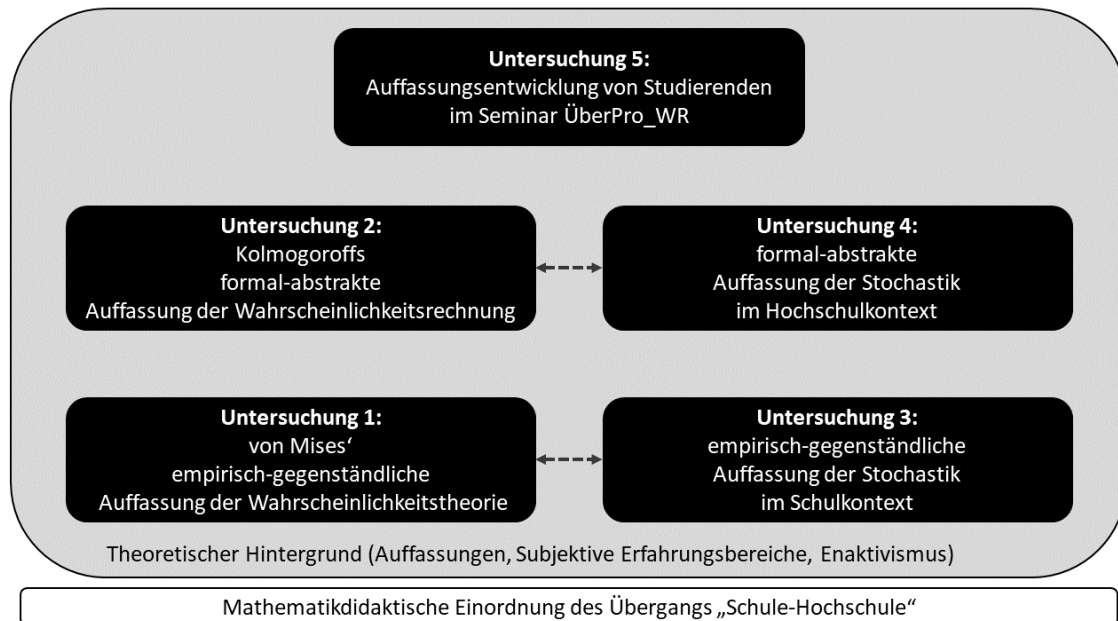


Abbildung 14: Überblick über die Elemente dieser Arbeit sowie Verbindungen zwischen Untersuchungen mit ähnlicher Auffassung.

Bereits aus den Einzelergebnissen der Untersuchungen eins bis vier lässt sich leicht feststellen, dass die Hochschullehrwerke eine ähnliche Auffassung wie Kolmogoroff (1931) in seinen „Grundbegriffen“ vertreten und in der Schulbuchreihe eine ähnliche Auffassung vertreten wird, wie sie auch von Mises (1931) in seinen „Vorlesungen“ vertritt. Ein wichtiger Unterschied zwischen von Mises Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriff und denen in der Schulbuchreihe liegt darin, dass er (geometrische) Symmetrieargumente eines betrachteten Zufallsgeräts nicht für die Bestimmung eines Kollektivs oder deren Eigenschaften nutzt. Hinsichtlich der Interpretation des Verhältnisses von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sind beide Theorien dagegen sehr ähnlich, insbesondere dadurch, dass für beide Theorien das empirische Gesetz der großen Zahlen zentral für die Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist.

Somit kann die in der Forschungshypothese postulierte Ähnlichkeit zwischen den Auffassungswechseln in der historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und dem Übergang von der Schule zur Hochschule als bestätigt angesehen werden.

Betrachtet man diesen Übergang sowohl in Bezug auf die historischen Quellen als auch den Lehrwerken so wäre wünschenswert, dass langfristig auch ein Rückbezug der Hochschullehrwerke auf die Schulstochastik sichtbar wird. Insbesondere damit die Studierenden das mathematische Arbeiten an der Hochschule zum einen an ihre Erfahrungen aus dem Stochastikunterricht der Schule anknüpfen können, zum anderen aber auch Anregungen bekommen welche Unterschiede es gibt und dass diese Unterschiede mit einem Mehrwert hinsichtlich der Reichweite der Gültigkeit der entwickelten Theorien der Hochschule in inner- wie auch außermathematischen Zusammenhänge verbunden sind. Dies sollte wie auch Kolmogoroff dies in Abgrenzung und Verbindung zu von Mises darstellt auch in den Hochschullehrbücher expliziert werden.

Verbindung der fünften Untersuchung mit den übrigen Untersuchungen

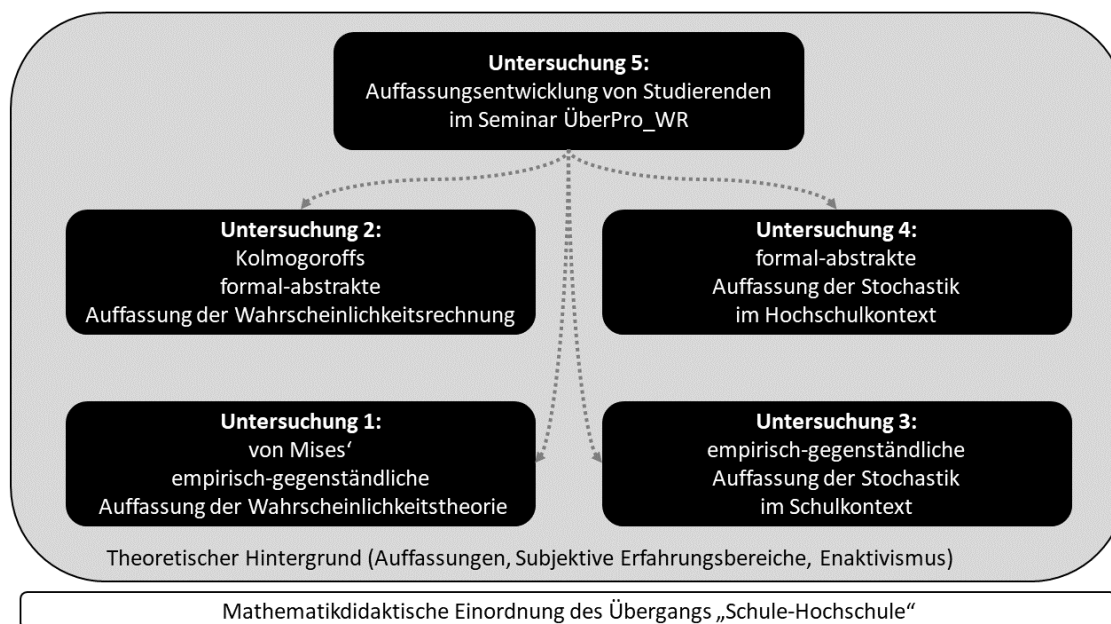


Abbildung 15: Überblick über die Elemente dieser Arbeit sowie Verbindung der fünften Untersuchung mit den übrigen Untersuchungen.

Die fünfte Untersuchung hat eine gewisse Sonderstellung im Vergleich zu den übrigen vier Untersuchungen dieser Arbeit. Das liegt daran, dass einerseits die Daten nicht in Form von veröffentlichten Büchern vorliegen und somit eher „klassischem“ empirischen Arbeiten zuzuordnen sind. Zum anderen beruht die

Konzeption des Seminars ÜberPro_WR auf den Ergebnissen aller übrigen vier Untersuchungen insofern die Teilnehmer*innen des Seminars die Auffassungswechsel in der historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und beim Übergang von der Schule zur Hochschule identifizieren und dann ihre eigene Übergangserfahrung in Auseinandersetzung mit den gegebenen Quellen reflektieren sollen. Die Fallstudie von Emil zeigt, dass diese Reflexion mit einhergehender Diversifizierung seiner Auffassung erfolgreich im Sinne der Seminar-konzeption war. Dies können die Pfeilrichtungen der Verbindungen in Abbildung 15 erklären. Insgesamt konnte sich auch für die Konstruktion des Seminars zeigen, dass es sinnvoll ist erst die formal-abstrakte Auffassung in einem solchen Seminar in den Blick zu nehmen und dann erst die empirisch-gegenständliche Perspektive zu betrachten, da dies die Reflexion der Abgrenzung beider Auffassungen maßgeblich erleichtert (vgl. 10.3.1.1). Aus diesen Erfahrungen und dieser Verknüpfung der Untersuchungsergebnisse ergeben sich im Folgenden direkte Hinweise für Adressatengruppen (vgl. Ausblick).

Ausblick

In diesem Ausblick werden zunächst weiterführende Forschungsdesiderate ausgewiesen und anschließend Hinweise für mathematische Lehr- und Lernprozesse beim Übergang von der Schule zur Hochschule für verschiedene Adressaten (Schüler*innen & Studierende, Lehrer*innen, Dozierende und weitere am Übergang von der Schule zur Hochschule Interessierte) auf der Basis der Ergebnisse dieser Arbeit gegeben.

Forschungsdesiderate aus dieser Arbeit

Die im Folgenden ausgewiesenen Forschungsdesiderate finden sich zusätzlich am Ende der zugehörigen Untersuchungen, in der Einordnung oder dem theoretischen Teil dieser Arbeit. Die Forschungsdesiderate werden hier in der Reihenfolge angeführt in der sie in dieser Arbeit aufgetreten sind.

Die mathematikdidaktische Einordnung (vgl. Der Übergang Schule-Hochschule im Fach Mathematik) dieser Arbeit hat gezeigt, dass es mittlerweile eine Vielzahl von Forschungsarbeiten zum Thema „Mathematik im Übergang von der Schule zur Hochschule“ gibt. Geuedet (2008) hat den Forschungsstand vor über einem Jahrzehnt systematisch dargestellt und so die Möglichkeit der Orientierung folgender Arbeiten zu diesem Thema gegeben. Es wäre lohnenswert eine „Neuaufgabe“ eines solchen systematischen Überblicks zu erstellen. Zum einen um eine

aktualisierte Möglichkeit zur Orientierung zu geben, andererseits aber auch um die Entwicklung der Forschung zum Thema Übergang von der Schule zur Hochschule seit 2008 nachzuzeichnen.

In dieser Arbeit stand die Betrachtung von nicht-schriftlichen Interaktionen nicht im Vordergrund. Dadurch wurden beispielsweise im Rahmen der Reflexionstagebücher in Untersuchung 5 (vgl. 10) hohe Reflexionsleistungen erreicht, die allerdings vermutlich nicht den spontanen Charakter von Reflexionen innerhalb einer verbalen Interaktion haben. Die Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche wurde zudem in die Hintergrundtheorie des Enaktivismus eingebettet. In der Beschreibung von verbalen Interaktionen durch soziale/strukturelle Kopplung (subjektiver) Erfahrungsbereiche ist eine differenzierte und vor allem sowohl individuelle als auch soziale Perspektiven berücksichtigende Beschreibungsmöglichkeiten von Interaktionsprozessen gegeben aus der Ergebnisse für eine prozedurale Beschreibung von Interaktionen hinsichtlich struktureller Entwicklungen der Interaktanten wie auch ihrer strukturellen Kopplung zu erwarten sind.

Auch innerhalb der Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche gibt es weiteres Forschungspotential. Bereits Bauersfeld (1983) beschreibt die aktive (spontane) Sinnkonstruktion von Lernenden (vgl. 4) und identifiziert als einen Schlüssel zu solchen Sinnkonstruktionen das metonymische Fortsetzen. Auch zur Untersuchung solcher spontanen Sinnkonstruktionen bietet sich wohl ein Vergleich der Arbeitsweisen der Schul- und Hochschulmathematik an, da der Prozess dieser spontanen Sinnkonstruktion, im Sinne der Theorie der subjektiven Erfahrungsbereichen und des „theory theory“-Ansatzes, in beiden Kontexten prinzipiell ähnlich sein sollte und daher einerseits in der Erweiterung des mathematischen Wissens der mathematischen Gemeinschaft und andererseits in individuellen Lernprozessen auftreten müsste.

In der Diskussion des strukturalistischen Theorienkonzepts wurde unter anderem auf Kuhns (1976) Rezeption der strukturalistischen Rekonstruktion eingegangen. Er betont, dass in der Physik schon der Übergang von partiell potentiellen Modellen zu potentiellen Modellen beim Lernen von Physik schwierig ist. Die Stochastik zeigt, dass die Begriffsentwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auch innerhalb einer empirisch-gegenständlichen Auffassung diese

Schwierigkeit aufweist und so eine komplexe Aufgabe hinsichtlich ihrer adäquaten Einführung bietet. Es wäre interessant, ob ähnliche Hürden auch in weiteren Inhaltsfeldern der (Schul-)mathematik auftreten und wie diese ausgestaltet sind.

Zusätzlich bietet die strukturalistische Rekonstruktion auch Methoden zur Betrachtung der Entwicklung von Theorienetzen an. Diese Modellierung von Wissensprozessen durch dynamische Theorienetze kann durch eine dynamische Darstellung vermutlich neue Methoden für die Forschungspraxis bieten, aber auch für die Visualisierung von Lernprozessen in der (Hoch-)Schulpraxis eingesetzt werden um individuelle Wissensentwicklungen zu beschreiben und gewisse Typen der Wissensentwicklung zu identifizieren. Aus mathematikdidaktischer Perspektive bietet sich damit die Gelegenheit (individuelle) Spiralcurricula, also Curricula einzelner Lehrkräfte (Eichler, 2006), über einen längeren Zeitraum zu betrachten.

Nach der Darstellung der Forschungsdesiderate aus der Einordnung und dem theoretischen Teil werden nun die Forschungsdesiderate, die sich aus den fünf Untersuchungen dieser Arbeit ergeben haben dargestellt.

In der ersten Untersuchung (vgl. 6) wurde nur eine partielle Rekonstruktion des Theorie-Elements $T(WRvM_{Alt})$ durchgeführt. Eine vollständige Rekonstruktion des Theorie-Elements $T(WRvM_{Alt})$, aber auch des Theorie-Elements allgemeiner Kollektive $T(WRvM)$ wäre lohnenswert, damit auch die intertheoretischen Verbindungen $L(WRvM_{Alt})$ und Beschränkungen $C(WRvM_{Alt})$ bestimmt werden können. Aus dieser erweiterten strukturalistischen Rekonstruktion sind dann tiefere Einblicke in den empirischen Gehalt von von Mises Wahrscheinlichkeitsrechnung, der Verknüpfung von Kolmogoroffs Schema zur Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit von Mises Wahrscheinlichkeitstheorie aber auch praktische Aspekte wie eine didaktische Begründung der Identifikation geeigneter Experimente, im Sinne intendierter Anwendungen einer empirisch-gegenständlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung für den Stochastikunterricht zu erwarten.

In Untersuchung 2 (vgl. 7) standen Kolmogoroffs (1933) „Grundbegriffe“ im Vordergrund aus deren Behandlung sich drei interessante Forschungsdesiderate ergeben. Obwohl Kolmogoroff in seinen „Grundbegriffen“ recht ausführlich auf die Anwendung seiner Wahrscheinlichkeitstheorie eingeht, die er selber nicht zur mathematischen Arbeit zählt, wird nicht deutlich, was er unter den von ihm

erwähnten „reellen zufälligen Prozessen“ versteht. Um diese Frage zu beantworten müssten sicherlich weitere Quellen in den Blick genommen werden, die dann weitere Erkenntnisse und exemplarische Beispiele über seine Auffassungen zur Anwendung von Mathematik liefern könnten.

Nichtsdestotrotz ist als ein Ergebnis der zweiten Untersuchung festgehalten worden, dass Kolmogoroff seine Auffassung – auch im Vergleich zu ähnlichen Werken – sehr explizit macht. Aufgrund der Erfahrungen von Untersuchung 5 (vgl. 10) stellt sich darauf aufbauend die Frage inwiefern eine schriftliche Explikation der intendierten Auffassung der Ersteller*in von Lernmaterialien, die Reflexionsfähigkeit und den Zugang zu mathematischen Inhalten – auch im schulischen Kontext – anregen könnte. Damit würden auch die Entwickler*innen solcher Materialien sichtbar für die Schüler*innen werden, was die Menschlichkeit mathematischen Arbeitens als Kulturleistung zusätzlich betonen würde.

Zuletzt sollen in Bezug auf die zweite Untersuchung (vgl. 7) – allerdings in Verbindung mit Untersuchung 3 (vgl. 8), die Unterschiede der symbolischen Schreibweisen in Kolmogoroffs Grundbegriffen und der heutigen Darstellung der Mengenlehre erwähnt werden. Diese wurden in Untersuchung 2 nicht tiefer diskutiert, da die Darstellung mathematischen Wissens kein sicherer Indikator für eine empirisch-gegenständliche oder formal-abstrakte Auffassung ist. Da die Mengennotation erfahrungsgemäß – auch heute noch – vielen Schüler*innen und Studierenden Schwierigkeiten bereitet, wäre ein interessantes Forschungsdesiderat, welche Rolle geeignete Notationen gerade beim Lehren und Lernen der Stochastik (insbesondere hinsichtlich der Semiotik der Mengennotation) spielen, mit Rücksicht auf die Unterscheidung des Mengen- und Zahlbegriffs und der Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

In Untersuchung 3 (vgl. 8) wurde eine Inhaltsanalyse einer Schulbuchreihe vorgenommen. Damit handelt es sich nicht um eine empirische Schulbuchforschung zur Verwendung von Schulbüchern. Die tatsächliche Initiierung von Auffassung bei Schüler*innen kann so natürlich nicht nachgewiesen werden. Entsprechend wäre dafür eine empirische Schulbuchforschung zur Nutzung dieser Schulbuchreihe im Sinne von Fan (2013) interessant mit einem besonderen Schwerpunkt auf den Einfluss verschiedener Schulbücher auf die Auffassungsentwicklung.

Ein Ergebnis der dritten Untersuchung (vgl. 8) war, dass sich die hier betrachtete Schulbuchreihe durch eine konsequente und kohärente Förderung einer empirisch-gegenständliche Auffassung auszeichnete. Die hier vorgenommene Time-Series-Analysis basierte dabei auf der Analyse von Elementen der Mikro- bis zur Megastrukturebene. Eine tiefere Aufgabenanalyse der Nanostruktur, d.h. eine Analyse des Aufgabentexts, der verwendeten (realen) Anwendungskontexte sowie deren Zusammenhang zu den übergeordneten Strukturebenen könnte mehr darüber verraten welche konkrete Verbindung zwischen den Stoffgebieten des Inhaltsfelds der Stochastik vorliegen und ob gegebenenfalls Inkohärenzen innerhalb von Aufgabenstellungen vorliegen. Insbesondere ist zu vermuten, dass ein Blick auf die Nanostruktur von Aufgaben verschiedener Inhaltsfelder, eine inhaltspezifische Aufgabentypologie ermöglicht, die an Forschung zu domänenspezifischen Auffassungen (Witzke & Spies, 2018) anschließt.

In Bezug auf die verschiedenen Strukturebenen fällt, wie im vorangehenden Forschungsdesiderat herausgestellt, auf, wie kohärent die Begriffsentwicklungen und vertretenen Auffassungen innerhalb der Megastruktur zum Inhaltsfeld der Stochastik in der untersuchten Schulbuchreihe waren. Entsprechend wären weitere Untersuchung interessant inwiefern eine ähnliche Kohärenz auch in anderen Inhaltsfeldern und anderen Schulbuchreihen feststellbar wäre.

Zuletzt sei noch zur Untersuchung 3 (vgl. 8) erwähnt, dass es sicherlich lohnenswert wäre eine strukturalistische Rekonstruktion der stochastischen Theorie der Schulbuchreihe vorzunehmen und diese mit von Mises Theorie (vgl. 6) zu vergleichen, da es sich bei der durch dieses Schulbuch vermittelten mathematischen Theorie um eine empirisch-gegenständliche Theorie handelt. Erkenntnisse sind hierbei insbesondere dahingehend zu erwarten, welche Grundvorstellungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffs kompatibel zur in der Schulbuchreihe vorliegenden Wahrscheinlichkeitstheorie wären.

Anschließend an die Forschungsdesiderate, die sich aus der Untersuchung 3 ergeben haben, stellt sich die Frage auf der Basis der Analyse von Lehrbüchern in Untersuchung 4 (vgl. 9), ob auch eine empirische Lehrbuchforschung im Sinne von Fan (2013) mit Studierenden sinnvoll wäre. Hierbei könnte eine interessante Frage lauten welche Herangehensweisen in der mathematischen Theorienentwicklung, bzw. deren Darstellung, besonders produktiv sein können um ein „angemessenes Bild“ von Mathematik bei den Studierenden zu befördern. Bei einer weiteren Inhaltsanalytischen Untersuchung weiterer Lehrbücher und einem

neuen Fokus der Untersuchung kann die Stochastik als Nebelkammer von Auffassungen über (Anwendbarkeit) der Mathematik weiter untersucht werden, da wie die vierte Untersuchung zeigt, sich gerade in diesem Feld Mathematiker*innen immer wieder mit Fragen der Anwendbarkeit auseinandersetzen.

In Untersuchung 5 (vgl. 10) konnte eine hohe Reflexionsleistung von „Emil“ nachgewiesen werden. Hierbei meint „hohe Reflexionsleistung“, dass viele übergeordnete subjektive Erfahrungsbereiche mit vernetztem Wissen von „Emil“ aktiviert wurden. Eine interessante weiterführende Frage ist, inwiefern solche Reflexionsleistungen überhaupt skalierbar und gegebenenfalls quantifizierbar sind. Dazu wäre es sinnvoll die „Reflexionsleistung“ geeignet zu operationalisieren und auch quantitativ zu untersuchen.

Zuletzt stellt sich insbesondere im Hinblick auf die Erfahrungen aus der Konzeption der ÜberPro-Seminare die normative Fragestellung, welche Zielgruppen welche Auffassung von Mathematik erwerben sollten, das heißt konkret, welche Zielgruppen sollten einen Einblick in eine formal-abstrakte Auffassung erhalten (meiner Einschätzung nach gilt dies insbesondere für Fachmathematikstudierende und Studierende des gymnasialen Lehramts), für welche wird eine empirisch-gegenständliche Auffassung als ausreichend angesehen (bspw. erachte ich eine empirisch-gegenständliche Auffassung für Schüler*innen für wenig problematisch).

Die folgenden Hinweise ergeben sich aus den Ergebnissen dieser Arbeit. Sie sind bewusst so formuliert, dass sie ohne Detailkenntnisse dieser Arbeit zu verstehen sind.

Hinweise zum Übergang Schule-Hochschule im Bereich Mathematik für Schüler*innen und Studierende

Mathematik an der Hochschule ist anders als in der Schule.

Die Hochschulmathematik baut natürlicherweise auf Kenntnisse der Schulmathematik auf. Einen guten Einblick welche Kenntnisse für einen mathematikbezogenen Studiengang vorausgesetzt werden bieten verschiedene Kataloge von Kompetenzanforderungen (z.B. cosh, 2014) oder Materialien zu Vorkursen für mathematikbezogene Studiengänge. Außerdem spielen bereits aus der Schule bekannte mathematische Aktivitäten wie das Anwenden von Algorithmen, Bestimmen von Größen sowie Verknüpfen von Begriffen, Argumentieren und das

Anwenden von Mathematik in verschiedenen Kontexten auch in der Hochschule eine große Rolle und werden dort weiter gefördert.

Die Andersartigkeit der Hochschulmathematik liegt darin, auf welche Weise an der Hochschule Begriffe gebildet und mithilfe deduktiver Schlussfolgerungen, die die Mathematik gerade zu einer so erfolgreichen Wissenschaft gemacht hat, verbunden werden. Das heißt konkret, dass bestimmte Konzepte und Regeln definiert werden, die nach bekannten oder im Verlauf des Studiums etablierten Regeln miteinander verknüpft werden. Bei der Entscheidung welche Konzepte und welche Regeln für die Hochschulmathematik ausgewählt werden ist nicht das alleinige Kriterium ihr Nutzen für (reale) Anwendungen, sondern ihr Nutzen für die mathematische Theorieentwicklung – also ihre Relevanz, die auch ohne direkte (reale) Anwendungskontexte vorliegen kann. Die Chancen, die sich aus dieser Arbeitsweise ergeben liegen in der Entwicklung von neuen mathematischen Begriffen und ihren Zusammenhängen. An diese „reglementierte Freiheit“ muss man sich zunächst – häufig auch eine gewisse Zeit lang – gewöhnen, lernt aber gerade im Austausch mit Kommiliton*innen und Mitarbeiter*innen an der Hochschule spannende Problemstellungen sowie deren Lösung kennen und lernt auch diese eigenständig zu erstellen um auf diese Weise selbst kreativ zu werden.

Hinweise zum Übergang Schule-Hochschule im Bereich Mathematik für Lehrer*innen

Als Lehrer*in des Fachs Mathematik kennen Sie vermutlich den Übergang von der Schule zur Hochschule und auch den Übergang zurück von der Hochschule in die Schule.

Diese Arbeit hat gezeigt, dass vor allem authentisch agierende Personen weitere Personen zur eigenen Reflexion anregen können. Nehmen Sie daher Ihre eigene Übergangserfahrung in den Blick und fokussieren Sie darauf, welche Herausforderungen Ihnen beim Übergang begegnet sind und was sie besonders an Ihrem Fach Mathematik schätzen. Vergleichen Sie Ihre Erfahrungen mit Auffassungen anderer Personen, mit denen Sie im Kontakt stehen oder deren Auffassungen Ihnen bspw. durch Literatur eröffnet werden. Eine weitere wichtige Maßgabe für die Auffassung, die Sie im Unterricht vertreten (sollen) und in gewisser Weise in der „Literatur“ vorliegt, bilden natürlich die verschiedenen für Sie gültigen Rahmenrichtlinien. Sie können insbesondere anhand der Untersuchung 3 (vgl. 9) dieser Arbeit nachvollziehen welche Auffassungen durch Rahmenrichtlinien intendiert werden (können) und wie diese festgestellt werden. Aus diesen Vergleichen

der verschiedenen Auffassungen können Sie für sich selbst eine Einschätzung treffen, welche Auffassungen Sie für besonders wichtig für Ihre Schüler*innen erachten und diese entsprechend auch bei ihren Schüler*innen wecken – gegebenenfalls durch Explikation Ihrer Auffassung oder Abgrenzung von anderen Auffassungen. Diese Adressierung anderer Auffassungen ist eine wichtige Vorbereitung Ihrer Schüler*innen für den Übergang Schule-Hochschule, da sie dazu dienen kann eine gewisse Offenheit gegenüber anderen Auffassungen bei den Schüler*innen zu fördern. Eine Diskussion der Auffassungen kann natürlich nicht inhaltsleer geschehen, sondern sollte ein natürlicher Bestandteil des mathematischen Arbeitens und Diskurses in ihrer Klasse, bzw. ihres Kurses sein/werden.

Hinweise zum Übergang Schule-Hochschule im Bereich Mathematik für Dozierende

Sie lieben, bzw. mögen Mathematik sehr gerne, oder sind einfach besonders gut darin¹⁷³.

Ein wichtiger Aspekt, der sich aus der vorliegenden Arbeit für Ihre Arbeit ergibt, ist, dass Sie im Rahmen Ihrer Lehre nicht nur die Fachinhalte vermitteln, sondern klar herausstellen, welche Kriterien und Eigenschaften für Sie „mathematisches Arbeiten“ auszeichnen und warum Sie gerade diese Kriterien für entscheidend halten. Diese Kriterien können Sie mit Ihren Studierenden explizit besprechen, wofür sicherlich geeignete Schlüsselstellen innerhalb der historischen Entwicklung der Mathematik zu finden sind. Einige Anregungen für solche Schlüsselstellen finden Sie mit Bezug zur Stochastik in dieser Arbeit. Da Ihre Studierenden, zumindest nach den Ergebnissen der hier besprochenen Fallstudien, höchstwahrscheinlich eine andere Auffassung von Mathematik und mathematischen Arbeiten haben als Sie, ist es wichtig, dass Sie Ihre Studierenden auch dazu anregen ihre eigenen Auffassungen mit ihren und den Auffassungen ihrer Kommiliton*innen zu vergleichen um ihnen so die Chance zu geben Ihre Kriterien zu prüfen und so mathematisch in Ihrem Sinne zu arbeiten. Ganz konkret kann dies beispielsweise anhand der Diskussion der bereits erwähnten Schlüsselstellen in der historischen Entwicklung der Mathematik geschehen oder auch anhand entsprechender aktueller Problemstellungen. Werden diese Kriterien des Arbeitens und der gegebenenfalls unterschiedlichen Auffassung von Ihnen nicht explizit benannt, kann dies dazu führen, dass fachliche Inhalte gegebenenfalls falsch gedeutet und ihre Reichweite für die mathematische Theorie von den Studierenden

¹⁷³ Persönlich halte ich es auch im Sinne der theoretischen Grundlage des Konzepts „subjektiver Erfahrungsbereiche“ für fraglich, dass man gut in einer Sache sein kann, die man nicht mag.

nicht erkannt werden kann. Oder – noch schlimmer – Wissen wird von Ihren Studierenden unverbunden in isolierten subjektiven Erfahrungsbereichen in passenden oder unpassenden Kontexten lediglich „aufgesagt“.

Hinweise zum Übergang Schule-Hochschule im Bereich Mathematik für weitere Interessierte

Kaum ein (Schul-)Fach polarisiert so sehr wie Mathematik.

Es zeigt sich (immer noch), bspw. an recht hohen Abbrecherquoten im Vergleich zu anderen Studienfächern, dass das Studienfach Mathematik eine besondere Herausforderung an Studierende stellt. Auch an Studierende, die gute schulische Leistungen im Fach Mathematik erreichen konnten. Diese Herausforderungen liegen darin begründet, dass nicht einfach das mathematische Wissen der Schule erweitert wird, sondern in gewisser Weise zusätzlich neu konstruiert werden muss, auf der Basis neuer Grundlagen und konsequent anzuwendender Regeln, die sich je nach Bereich der Mathematik oder mathematischer Theorie auch unterscheiden können. Ein auch populärwissenschaftlich gut aufgearbeitetes exemplarisches Beispiel bildet hier der Umgang mit dem Parallelenpostulat in der Entwicklung der Mathematik.

Entsprechend lässt sich der Übergang Schule-Hochschule mithilfe der Metapher eines Umzugs in eine neue (größere) Stadt vergleichen, bei dem man eine gewisse Zeit benötigt um in der neuen Stadt angekommen zu sein, sich dabei auch verlaufen kann und die übrigen Bewohner der neuen Stadt zunächst kennen und verstehen lernen muss. Hat man sich dann erst einmal zurechtgefunden, stellt man viele Gemeinsamkeiten zum Ausgangsort des Umzugs fest und sieht letzteren (hoffentlich) aus einer neuen Perspektive.

Literaturverzeichnis

- Abel, U., Altrichter, M., Auermann, M., et al. (17.03.2017). *Mathematikunterricht und Kompetenzorientierung. ein offener Brief*. Verfügbar unter <https://www.tagesspiegel.de/downloads/19549926/2/offener-brief.pdf>16.04
- Abrahamson, D., & Trninic, D. (2015). Bringing forth mathematical concepts. Signifying sensorimotor enactment in fields of promoted action. *ZDM*, 47(2), 295–306. doi: 10.1007/s11858-014-0620-0
- Allmendiger, H. (2014). *Felix Kleins Elementarmathematik vom höheren Standpunkt. Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht*. Siegen: universi - Universitätsverlag Siegen.
- Altrichter, H., Posch, P., & Spann, H. (2018). *Lehrerinnen und Lehrer erforschen ihren Unterricht* (5., grundlegend überarb. Aufl.). Bad Heilbrunn: UTB, Julius Klinkhardt.
- Anderson, J. R. (1980). *Cognitive Psychology and its Implications*. San Francisco: Freeman.
- Arbeitskreis Stochastik (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) (2002). *Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts (I)*. Herbsttagung. Verfügbar unter <https://www.math.uni-frankfurt.de/ak-stochastik/publikationen.html>
- Autorengruppe Bildungsberichterstattung (2018). *Bildung in Deutschland 2018. Ein indikatorengestützter Bericht mit einer Analyse zu Wirkungen und Erträgen von Bildung*. Bielefeld: wbv Media.
- Baker, J. (2015). Die Kopenhagener Deutung der Quantentheorie. In J. Baker (Hrsg.), *50 Schlüsselideen Quantenphysik* (S. 64–67). Berlin: Springer.
- Balzer, W., Moulines, C. U. , & Sneed, J. D. (1987). *An Architectonic for Science. The Structuralist Program*. Amsterdam: Springer.
- Balzer, W., & Moulines, C. U. (Eds.) (1996). *Structuralist Theory of Science. Focal Issues, New Results*. Berlin: De Gruyter.
- Bauer, T., & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, 56(1), 85–103. doi: 10.1007/s00591-008-0048-0
- Bauersfeld, H. (1978). Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht. Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antwortervartung. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht. Festschrift für Walter Breidenbach zum 85. Geburtstag* (S. 158–170). Hannover: Schroedel.

- Bauersfeld, H. (1982). Analysen zur Kommunikation im Mathematikunterricht. In H. Bauersfeld, H.-W. Heymann, G. Krummheuer, & J. Voigt (Hrsg.), *Analysen zum Unterrichtshandeln* (S. 1–40). Köln: Aulis.
- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–57). Köln: Aulis.
- Bauersfeld, H. (1985). Ergebnisse und Probleme von Mikroanalysen mathematischen Unterrichts. In W. Dörfler, & R. Fischer (Hrsg.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik* (S. 7–25). Beiträge zum 4. Internationalen Symposium für „Didaktik der Mathematik“ in Klagenfurt vom 24. bis 27.9.1984, Bd. 10. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Bauersfeld, H. (2000). Radikaler Konstruktivismus, Interaktionismus und Mathematikunterricht. In E. Begemann (Hrsg.), *Lernen verstehen – Verstehen lernen* (S. 117–144). Frankfurt am Main: Peter Lang.
- Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2011). *Mathematik Neu Denken. Lehrerbildung im Aufbruch*. Wiesbaden: Vieweg & Teubner.
- Biehler, R., & Engel, J. (2015). Stochastik: Leitidee Daten und Zufall. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 221–251). Berlin: Springer.
- Bikner-Ahsbahr, A. (2003). Empirisch begründete Idealtypenbildung. Ein methodisches Prinzip zur Theoriekonstruktion in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung. *ZDM*, 35(5), 208–223. doi: 10.1007/BF02655745
- Blömeke, S. (2016). Der Übergang von der Schule in die Hochschule. Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 3–14). Wiesbaden: Springer.
- Bourbaki, N. (2006). *Théorie des ensembles*. Berlin: Springer.
- Braham, S. (1986). *A hard core of wind: inside the Lords*. Reading: Cox & Wyman Ltd.
- Brandstätter, V., Schüler, J., Puca, R. M., & Lozo, L. (2012). Emotion als psychologisches Konzept. In V. Brandstätter (Hrsg.), *Allgemeine Psychologie für Bachelor: Motivation und Emotion. Lesen, Hören, Lernen im Web* (S. 129–143). Berlin: Springer.
- Bräunling, K. (2017). *Beliefs von Lehrkräften zum Lehren und Lernen von Arithmetik*. Wiesbaden: Springer.
- Brown, L. (2015). Researching as an enactivist mathematics education researcher. In *ZDM*, 47(2), 185–196. doi: 10.1007/s11858-015-0686-3

- Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin: Springer.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2007). *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls* (2., überarb. und erw. Aufl.). Berlin: Springer.
- Büchter, A., & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 19–49). Berlin: Springer.
- Burscheid, H. J., & Struve, H. (2018). *Empirische Theorien im Kontext der Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Burscheid, H. J., & Struve, H. (1988). The epistemological teaching-learning gap. In *Theory of mathematics education. Proceedings of the Third International Theories of Mathematics Education Conference* (pp. 34–45)
- Burscheid, H. J., & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*. Hildesheim: Franzbecker.
- Coles, A. (2015). On enactivism and language. Towards a methodology for studying talk in mathematics classrooms. *ZDM*, 47(2), 235–246. doi: 10.1007/s11858-014-0630-y
- cosh (2014). *Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0). der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern: Ergebnis einer Tagung vom 05.07.2012 und einer Tagung vom 24.-26.02.2014. Unter Mitarbeit von Hochschulen Baden-Württembergs, LehrerInnen der beruflichen und allgemeinbildenden Gymnasien und der Berufskollegs in Baden-Württemberg*. Verfügbar unter http://www.dzhw.eu/pdf/pub_fh/fh-201203.pdf
- Czuber, E. (1899). Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 7, 1–271.
- Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. (2012). *The mathematical experience*. New York: Springer.
- Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren* (Dissertation). Universität Duisburg-Essen. Verfügbar unter https://duepublico2.uni-due.de/servlets/MCRFileNodeServlet/duepublico_derivate_00030759/Dieter_Miriam.pdf
- DMV, GDM, & MNU (2019). *Mathematik. 19 Maßnahmen für einen konstruktiven Übergang Schule – Hochschule*. Verfügbar unter http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Massnahmenkatalog_DMV_GDM_MNU.pdf.
- Doxiadēs, A. K., Papadimitriou, C. H., Papadatos, A., & Di Donna, A. (2009). *Logicomix*. New York: Bloomsbury.

- Eichler, A. (2006). Individuelle Stochastikcurricula von Lehrerinnen und Lehrern. *JMD*, 27(2), 140–162.
- Einstein, A. (1921). *Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Berlin: Springer.
- Erikson, E. H. (1992). *Der vollständige Lebenszyklus* (2. Aufl.). Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Euklid, & Thaer, C. (1975). *Die Elemente. Buch I–XIII*. (6. unveränderte Auflage nach Heibergs Text aus dem Griechischen übers. u. heraus. von C. Thaer). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research. towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), 765–777. doi: 10.1007/s11858-013-0530-6.
- Foerster, H. von (2003). Perception of the future and the future of perception. In H. von Foerster (Ed.): *Understanding understanding. essays on cybernetics and cognition* (pp.199–210). New York: Springer.
- Fréchet, M. (1937). *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*. Paris: Gauthier-Villars.
- Freudenthal, H. (1960). Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts. *Math. -phys. Semesterberichte*, 7, 2–25.
- Georgii, H.-O. (2009). *Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* (4. Aufl.). Berlin: De Gruyter.
- Ginsburg, H. (1977). *Children's arithmetic. The learning process*. New York: D. Van Nostrand.
- Girlich, H.-J. (2003). *A. N. Kolmogoroff (1903 – 1987) und die Ursprünge der Theorie stochastischer Prozesse*. Universität Leipzig, Mathematisches Institut. Verfügbar unter <http://www.math.uni-leipzig.de/old/prp/2003/p8-2003.pdf>
- Goffman, E. (1981): *Forms of Talk*. Oxford: Blackwell.
- Gopnik, A. (2012). Scientific thinking in young children. Theoretical advances, empirical research, and policy implications. In *Science*, 1623–1627.
- Gopnik, A., & Meltzoff, A. N. (1997). *Words, thoughts, and theories*. Cambridge: MIT Press.
- Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha.
- Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellung gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: *JMD*, 19, 3–45.

- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. In: *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237–254. doi: 10.1007/s10649-007-9100-6
- Gueudet, G. (2016). Survey on the State of the Art. G. Gueudet, M. Bosch, A. A. diSessa, O. N. Kwon, & L. Verschaffel (Eds.), *Transitions in Mathematics Education* (S. 1–34). Cham: Springer.
- Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A. A., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. Cham: Springer.
- Hamann, T. (2018). *Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland*. Siegen: universi – Universitätsverlag Siegen. Verfügbar unter https://dokumentix.ub.uni-siegen.de/opus/volltexte/2018/1387/pdf/SieB_Band9.pdf
- Harrison, H., Birks, M., Franklin, R., & Mills, J. (2017). Case Study Research. Foundations and Methodological Orientations. In *Forum Qualitative Sozialforschung/Forum: Qualitative Social Research*, 18(1). doi: 10.17169/fqs-18.1.2655
- Häsel-Weide, U. (2017). Inklusiven Mathematikunterricht gestalten. In J. Leuders, T. Leuders, S. Prediger, & S. Ruwisch (Hrsg.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen. Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung* (S. 17–28). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hattermann, M, Kadunz, G., Rezat, S., & Sträßer, R. (2015). Geometrie: Leitidee Raum und Form. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 185–219). Berlin: Springer.
- Hausdorff, F. (1927). *Mengenlehre*. Berlin: De Gruyter.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen* (S. 1–15). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Hefendehl-Hebeker, L., & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77–115). Berlin: Springer.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 15–30). Wiesbaden: Springer Spektrum.

- Heisenberg, W. (2015). *Quantentheorie und Philosophie. Vorlesungen und Aufsätze* (Nachdr., Jürgen Busche (Hrsg.)). Stuttgart: Reclam.
- Helsper, W., Kelle, H., Koller, H. C. (2016). Qualitätskriterien der Begutachtung qualitativer Forschungsvorhaben in der Erziehungswissenschaft. Ergebnisse eines DFG-Roundtable. In *Zeitschrift für Pädagogik*, 62(5), 738–348.
- Henze, N. (2018). *Stochastik für Einsteiger*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?*. Oxford: Oxford University Press.
- High, R. (2012). *The Era of Cognitive Systems. An Inside Look at IBM Watson and How it Works. IBM Watson*. Verfügbar unter <https://developer.ibm.com/watson/wp-content/uploads/sites/19/2013/11/The-Era-of-Cognitive-Systems-An-Inside-Look-at-IBM-Watson-and-How-it-Works1.pdf>
- Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Hilbert, D. (1900). Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematikerkongress zu Paris 1900. In *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*, Göttingen, 253–297.
- Hilbert, D., & Bernays, P. (1968). *Grundlagen der Mathematik* (2. Aufl.) Berlin: Springer.
- Hirzebruch, F. (1974). Mathematik, Studium und Forschung. In M. Otte (Hrsg.), *Mathematiker über die Mathematik* (S. 450–467), Berlin: Springer.
- Hochkirchen, T. (1999). *Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Kontexte. Von Hilberts sechstem Problem zu Kolmogoroffs Grundbegriffen*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Holton, G. J. (1981). *Thematische Analyse der Wissenschaft. Die Physik Einsteins und seiner Zeit*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.) (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*. Wiesbaden: Springer.
- Hoppenbrock, A., Schreiber, S., Göller, R., Biehler, R., Büchler, B., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.) (2013). *Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr. Extended Abstracts zur 2. khdm-Arbeitstagung. Kassel, 20.02.2013–23.02.2013*. Verfügbar unter https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2013081343293/3/khdm_report_13_01.pdf
- Huygens, C. (1656). De ratiociniis in aleæ ludo. In F. Schooten, *Exercitationum mathematicarum libri quinque: Quibus accedit Christiani Hugenii tractatus De ratiociniis in aleæ ludo* (S. 521–534). Lugd. Batav.: Ex officina Johannis Elsevirii.

- Hussy, W., Schreier, M., & Echterhoff, G. (2013). *Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor* (2. überarb. Aufl.). Berlin: Springer.
- Kautt, Y. (2017). Grounded Theory as a Methodology and Method of Analyzing Visual Communication. In *Forum Qualitative Sozialforschung/Forum: Qualitative Social Research*, 18(3). doi: 10.17169/fqs-18.3.2859.
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule*. Wiesbaden: Springer. doi: 10.1007/978-3-658-24415-6
- Khan, S., Francis, K., & Davis, B. (2015). Accumulation of experience in a vast number of cases. Enactivism as a fit framework for the study of spatial reasoning in mathematics education. In *ZDM*, 47(2), 269–279. doi: 10.1007/s11858-014-0623-x.
- Kieren, T., Simmt, E., & Mgombelo, J. (1997). Occasioning understanding. Understanding occasioning. In John A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the nineteenth annual meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. October 18–21, 1997, Illinois State University, Bloomington/Normal, Illinois, Bd. 2. International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 627–633). Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Klein, F. (1933). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus (Band 1). Arithmetik – Algebra – Analysis* (4. Aufl.). Berlin Springer.
- Klein, H. P., & Jahnke, T. (2012). Die Folgen der Kompetenzorientierung im Fach Mathematik. In *Journal für Didaktik der Biowissenschaften*, 2, 1–9.
- Köck, W. K. (2015). Von der Wahrheit zur Viabilität. In B. Pörksen (Hrsg.): *Schlüsselwerke des Konstruktivismus* (2. aktualisierte und erweiterte Aufl., S. 367–385), Wiesbaden: VS.
- Koepf, W., Röckner, M., Eichler, A., & Heckmann, G. (2017). *Zur aktuellen Diskussion über die Qualität des Mathematikunterrichts*. Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule. Verfügbar unter <http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Stellungnahmen/pdf/Stellungnahme-DMVGDMMNU-2017.pdf>
- Kolmogoroff, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.
- Kolmogoroff, A. N. (1973). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Repr. d. Ausg. Berlin, Springer, 1933). Berlin: Springer.
- Kolmogorov, A. N. (1956). *Foundations of the Theory of Probability* (2nd English Edition, Translation ed. by N. Morrison). New Yourk: Chelsea.
- Korselt, A. (1903). Über die Grundlagen der Geometrie. In *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12, 402–407. Leipzig: Teubner.

- Krappmann, L. (1971). *Soziologische Dimensionen der Identität*. Stuttgart: Klett.
- Krüll, M., Luhmann, N., & Maturana H. R. (1987). Grundkonzepte der Theorie autopoietischer Systeme. Neun Fragen an Niklas Luhmann und Humberto Maturana und ihre Antworten [Basic concepts of the theory of autopoietic systems. Nine questions to Niklas Luhmann and Humberto Maturana and their answers]. In *Zeitschrift für Systemische Therapie*, 5(1), 4–25.
- Krummheuer, G. (1984). Zur unterrichtsmethodischen Dimension von Rahmungsprozessen. In *JMD*, 5(4), 285–306. doi: 10.1007/BF03339250.
- Krummheuer, G. (1997). Zum Begriff der „Argumentation“ im Rahmen einer Interaktionstheorie des Lernens und Lehrens von Mathematik. In *ZDM*, 29(1), 1–11. doi: 10.1007/BF02653126.
- Kuhn, T. S. (1984). *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen* (2. revidierte u. um d. Postskriptum von 1969 erg. 7. Aufl.). Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Kuhn, T. S. (1976). Theory-change as structure-change. Comments on the Sneed formalism. In *Erkenntnis*, 10(2). doi: 10.1007/BF00204969.
- Kütting, H., & Sauer, M. J. (2014). *Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte* (3., Aufl. [korr. Nachdr.]). Berlin: Springer.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 5: Baum, M., Bellstedt, M., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Haug, F., Hußmann, S., Jürgensen, T., Leuders, T., Richter, K., Riemer, W., & Schermuly, H. (2007). *Lambacher Schweizer 5, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (2. Auflage, Drucke 2011, 2010, 2009, 2008, 2007). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 6: Baum, M., Bellstedt, M., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Haug, F., Hußmann, S., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Leuders, T., Richter, K., Riemer, W., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., & Surrey, I. (2009). *Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2018, 2017, 2016, 2015). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 7: Blank, M., Brandt, D., Greulich, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Krivsky-Velten, R., Lind, D., Mutz, D., Petermann, A., Reimer, R., Riemer, W., von Saint-George, G., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., & Zimmermann, P. (2010). *Lambacher Schweizer 7, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2017, 2016, 2015). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 8: Brandt, D., Greulich, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Reimer, R., Riemer, W., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., Surrey, I., & Zimmermann, P. (2008). *Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2008, 2009, 2010, 2011, 2012). Stuttgart: Klett.

- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 8 Serviceband: Brandt, D., Frink, J., Giersemehl, I., Greulich, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Reimer, R., Riemer, W., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., Tomaschek, H., & Zimmermann, P. (2011). *Lambacher Schweizer 8 Serviceband, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2017, 2016, 2015, 2014). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 9: Baum, M., Bellstedt, M., Brandt, D., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Giersemehl, I., Haug, F., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W., Sonntag, R., & Spielmans, H. (2009). *Lambacher Schweizer 9, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (2. Auflage, Drucke 2016, 2015, 2014). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe Einführungsphase: Brandt, D., Giersemehl, I., Greulich, D., Herd, E., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., König, A., Reimer, R., Riemer, W., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., Spielmans, H., Stanzel, M., Stühler, A., Zimmermann, P., & Zinser, M. (2014). *Lambacher Schweizer Einführungsphase, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2020, 2019, 2018, 2017, 2016). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe Qualifikationsphase: Baum, M., Bellstedt, M., Brandt, D., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Greulich, D., Haug, F., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W., Sandmann, R., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., Spielmans, H., Wollmann, A., Zimmermann, P., Zinser, M. (2015). *Lambacher Schweizer Qualifikationsphase, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2020, 2019, 2018, 2017, 2016). Stuttgart: Klett.
- Laplace, P. S. de (1886). *Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit*. Übersetzt von Norbert Schwaiger (6. Aufl.). Leipzig: Duncker&Humblot.
- Lawler, R. (1981). The progressive construction of mind. In: *Cognitive Science*, 5(1), 1–30. doi: 10.1016/S0364-0213(81)80024-9
- Leuders (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 3–17). Berlin: Springer.
- Loos, A., & Ziegler, G. M. (2015). Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 3–17). Berlin: Springer.
- Loos, A., & Ziegler, G. M. (2016). „Was ist Mathematik“ lernen und lehren. In *Mathematische Semesterberichte*, 63(1), 155–169. doi: 10.1007/s00591-016-0167-y
- Lozano, M.-D. (2015). Using enactivism as a methodology to characterise algebraic learning. In *ZDM*, 47(2), 223–234. doi: 10.1007/s11858-015-0678-3.

- Luhmann, N. (1982). Autopoiesis, Handlung und kommunikative Verständigung. In *Zeitschrift für Soziologie*, 11(4), 366–379
- Maheux, J.-F., & Proulx, J. (2015). Doing mathematics. Analysing data with/in an enactivist-inspired approach. In *ZDM*, 47(2), 211–221. doi: 10.1007/s11858-014-0642-7.
- Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule. *S 05 Mindestanforderungskatalog Mathematik der Hochschulen Baden-Württembergs*. Verfügbar unter <http://www.mathematik-schule-hochschule.de/stellungnahmen/aktuelle-stellungnahmen/120-s-04-mindestanforderungskatalog-mathematik-der-hochschulen-baden-w%C3%BCrttembergs.html>, zuletzt geprüft am 17.04.2019.
- Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule (20.04.2017). *Zur aktuellen Diskussion über die Qualität des Mathematikunterrichts*. Verfügbar unter <http://www.mathematik-schule-hochschule.de/images/Stellungnahmen/pdf/Stellungnahme-DMVGDMMNNU-2017.pdf>
- Maturana, H. R., & Varela, F., J. (2008). *The tree of knowledge. The biological roots of human understanding* (Rev. ed., 8.). Boston: Shambhala.
- Mausfeld, R. (2005). Über die Bedingungen der Möglichkeit von Lernen. In M.-L. Käsermann, & A. Altorfer (Hrsg.), *Über Lernen. Ein Gedankenaustausch. Festschrift zum 75. Geburtstag von Klaus Foppa* (S. 218–236). Bern: EditionSolo.
- Mayring, P. (2015a). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 365–380). Dordrecht: Springer.
- Mayring, P. (2015b). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. (12., vollst. überarb. aktual. Aufl.) Weinheim: Beltz.
- Mertens, G. (1998). *Umwelten. Eine humanökologische Pädagogik*. Paderborn: Schöningh.
- Metz, M. L., & Simmt, E. S. M. (2015). Researching mathematical experience from the perspective of an empathic second-person observer. In *ZDM*, 47(2), 197–209. doi: 10.1007/s11858-014-0621-z
- Mills, A., Durepos, G., & Wiebe, E (2010). *Encyclopedia of Case Study Research*. Thousand Oaks California: SAGE Publications.
- Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2004). *Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (1. Aufl.). Frechen: Ritterbach.

- Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2019). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gymnasium in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (1. Aufl.). Verfügbar unter https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/195/g9_m_klp_3401_2019_06_23.pdf
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (1. Aufl.). Frechen: Ritterbach.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2014). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik* (1. Aufl.). Verfügbar unter https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf
- Minsky, M. (1980). K-Lines: A theory of Memory. In *Cognitive Science*, 4(2), 117–133. doi: 10.1207/s15516709cog0402_1
- Motzer, R. (2007). *Arbeiten mit Lerntagebüchern in Mathematikvorlesungen*. Beiträge zum Mathematikunterricht 2007, 41. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 25.3. bis 30.3.2007 in Berlin. Verfügbar unter <https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/31057/1/227.pdf>
- Oevermann, U. (2002). *Klinische Soziologie auf der Basis der Methodologie der objektiven Hermeneutik. Manifest der objektiv hermeneutischen Sozialforschung*. Institut für hermeneutische Sozial- und Kulturforschung e.V. Verfügbar unter https://www.ihsk.de/publikationen/Ulrich_Oevermann-Manifest_der_objektiv_hermeneutischen_Sozialforschung.pdf
- Otte, M. (1974). *Mathematiker über die Mathematik*. Berlin: Springer.
- Pasch, M. (1926). *Vorlesungen über die neuere Geometrie*. (2. Aufl. mit einem Anhang von M. Dehn). Berlin: Springer.
- Pavić, A. (2020). *Demonstrative Bezugnahme und die Semantik/Pragmatik-Unterscheidung*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Pehkonen, E. (1995). *Pupils' view of mathematics. Initial report for an international comparison project*. Helsinki: University of Helsinki, Department of Teacher Education.
- Preciado-Babb, A. P., Metz, M., & Marcotte, C. (2015). Awareness as an enactivist framework for the mathematical learning of teachers, mentors and institutions. *ZDM*, 47(2), 257–268. doi: 10.1007/s11858-014-0657-0
- Prediger, S. (2015). Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 643–662). Berlin: Springer.

- QUA-LiS.NRW (2015). *Beispiel für einen schulinternen Lehrplan Gymnasium – Sekundarstufe I (G8). Mathematik*. Verfügbar unter https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplane/upload/klp_SI/G8/m/SiLP_Gym_G8_Mathematik.pdf
- Reid, D. A. (2011). Understanding proof and transforming teaching. In Wiest, L., & Lamberger, T. (Eds.) *Proceedings of the Thirty-third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 15–30) Reno NV: University of Nevada.
- Reid, D. A. (2014). The coherence of enactivism and mathematics education research. A case study. *AVANT*, V(2), 137–172.
- Reid, D. A., & Mgombelo, J. (2015). Survey of key concepts in enactivist theory and methodology. *ZDM*, 47(2), 171–183, doi: 10.1007/s11858-014-0634-7
- Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Rodenhausen, H. (2010). *Logik – Sprache – Empirie. Metatheoretische Untersuchungen zur Semantik mathematischer Begriffe*. Aachen: Shaker.
- Rolka, K. (2006). Eine empirische Studie über Beliefs von Lehrenden an der Schnittstelle Mathematikdidaktik und Kognitionspsychologie (Dissertation). Universität Duisburg-Essen. Verfügbar unter <https://core.ac.uk/download/pdf/33799587.pdf>
- Schlicht, S. (2016). *Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs*. Wiesbaden: Springer.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.
- Schroeder, M. (1994). Zahlentheorie in der Physik. *Phys. Bl.*, 50(12), 1123–1128. doi: 10.1002/phbl.19940501206.
- Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77–115). Berlin: Springer.
- Schwarz, B. (2015). A Study on Professional Competence of Future Teacher Students as an Example of a Study Using Qualitative Content Analysis. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 381–399). Dordrecht: Springer.
- Seiler, T. B. (1973). Die Bereichsspezifität formaler Denkstrukturen – Konsequenzen für den pädagogischen Prozeß. In K. Frei & M. Lang (Hrsg.), *Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht* (S. 249–283). Bern: Huber.

- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears. Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1), 13–57. doi: 10.1023/A:1014097416157
- Shafer, G., & Vovk, V. (2006). The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. In: *Statistical Science*, 21(1), 70–98. doi: 10.1214/088342305000000467
- Siegmund-Schultze, R. (2003). „Deutsches Denken“ in „kulturfeindlicher Wiener Luft“. Ein Brief Georg Hamels aus dem Jahre 1908 an seinen Assistenten Richard von Mises. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 11(3). doi: 10.1515/dmvm-2003-0074
- Siegmund-Schultze, R. (2004a). A Non-Conformist Longing for Unity in the Fractures of Modernity: Towards a Scientific Biography of Richard von Mises (1883–1953). *Sci Context*, 17(3), 333–370. doi: 10.1017/S026988970400016X
- Siegmund-Schultze, R. (2004b). Mathematicians forced to philosophize: An introduction to Khinchin's paper on von Mises' theory of probability. *Science in Context*, 17(3), 373–390.
- Siegmund-Schultze, R. (2006). Probability in 1919/20: the von Mises-Pólya-Controversy. *Arch. Hist. Exact Sci.* 60(5), 431–515. doi: 10.1007/s00407-006-0112-x
- Siegmund-Schultze, R. (2010). Sets versus trial sequences, Hausdorff versus von Mises: "Pure" mathematics prevails in the foundations of probability around 1920. *Historia Mathematica*, 37(2), 204–241. doi: 10.1016/j.hm.2009.11.007
- Simmt, E., & Kieren, T. (2015). Three "Moves" in enactivist research. A reflection. *ZDM*, 47(2), 307–317. doi: 10.1007/s11858-015-0680-9
- Sneed, J. D. (1971). *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht: Springer.
- Stadler, F. (2016). Richard von Mises (1883–1953) – Wissenschaft im Exil. In R. E. von Mises, *Richard von Mises – Kleines Lehrbuch des Positivismus. Einführung in die empiristische Wissenschaftsauffassung* (2. Aufl., hrsg. u. eingeleitet von F. Stadler, S.7-). Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Stegmüller, W. (1967). Gedanken über eine mögliche rationale Rekonstruktion von Kants Metaphysik der Erfahrung. *Ratio*, 9(1), 1–30.
- Stegmüller, W. (1987). *Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie. Eine kritische Einführung* (8. Aufl.). Stuttgart: Alfred Kröner.
- Steinbring, H. (1980a). *Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Das Anwendungsproblem in der Wahrscheinlichkeitstheorie aus didaktischer Sicht*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

- Steinbring, H. (1980b). Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs — Bernoullis Theorem aus didaktischer Sicht. In *JMD*, 1(3), 115–141. doi: 10.1007/BF03338634
- Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion — Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *JMD*, 21(1), 28–49. doi: 10.1007/BF03338905
- Steinbring, H. (2015). Mathematical interaction shaped by communication, epistemological constraints and enactivism. *ZDM*, 47(2), 281–293. doi: 10.1007/s11858-014-0629-4
- Struve, H. (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim: BI.
- Struve, H., & Struve, R. (1997). *Leibniz als Wahrscheinlichkeitstheoretiker*. In *Studia Leibnitiana*, 29 (1), 112–122.
- Struve, H. (2015). Zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematikdidaktik als wissenschaftlicher Disziplin. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77–115). Berlin: Springer.
- Suppes, P. (1966). *Models of Data*. In: *Logic, Methodology and Philosophy of Science*. Proceeding of the 1960 International Congress (pp. 252–261): Elsevier.
- Terhart, E., Bennewitz, H., & Rothland, M. (2014). *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf*. Münster: Waxmann.
- Toepell, M. (1999). 100 Jahre „Grundlagen der Geometrie“ – David Hilberts entscheidender Beitrag zur Formalisierung der Mathematik. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 7(1), 10–16. doi: <https://doi.org/10.1515/dmvm-1999-0105>
- Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. 6 Vorträge, gehalten auf der 99. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 11(10), 1–17.
- Ulich, D., & Mayring, P. (2003). *Psychologie der Emotionen* (2. überarb. und erw. Aufl.). Stuttgart: W. Kohlhammer.
- Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge: MIT Press.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.
- vom Hofe, R., Lotz, J., & Salle, A. (2015). Analysis: Leitidee Zuordnung und Veränderung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & Hans-Georg Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77–115). Berlin: Springer.

-
- von Glasersfeld, E. (1996) *Der Radikale Konstruktivismus. Ideen, Ergebnisse, Probleme*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- von Mises, R. E. (1928): *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. Wien: Springer.
- von Mises, R. E. (1931). *Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik*. Leipzig: Deuticke.
- von Mises, R. E., & Geiringer, H. (1964). *Mathematical theory of probability and statistics*. New York: Academic Press.
- von Mises, R. E., & Geiringer, H. (1972). *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (4. Aufl. / durchges. von H. Geiringer). Wien: Springer.
- von Mises, R. E. (2016). *Richard von Mises – Kleines Lehrbuch des Positivismus. Einführung in die empiristische Wissenschaftsauffassung* (2. Aufl., hrsg. u. eingeleitet von F. Stadler). Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- Warnecke, T., Burchard, A., & Kühne, A. (2017a). *Der Aufstand der Mathelehrer. Ein Brandbrief von mehr als 130 Professoren und Lehrkräften kritisiert die mangelnde Qualität des Mathematik-Unterrichts: Die Schüler können immer weniger, sagen die Verfasser*. Verfügbar unter <http://www.tagesspiegel.de/wissen/brandbrief-gegen-bildungsstandards-der-aufstand-der-mathelehrer/19550928.html>
- Warnecke, T., Burchard, A., & Kühne, A. (2017b). *Der Aufstand der Mathelehrer. Brandbrief gegen Bildungsstandards*. In: *Der Tagesspiegel*, 22.03.2017. Verfügbar unter <https://www.tagesspiegel.de/wissen/brandbrief-gegen-bildungsstandards-der-aufstand-der-mathelehrer/19550928.html>
- Weingarten, E., Sack, F., & Schenkein, J. (1979). *Ethnomethodologie. Beiträge zu einer Soziologie des Alltagshandelns*. Frankfurt: Suhrkamp.
- Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4(2), 35–41.
- Wirths, H. (1999). Die Geburt der Stochastik. In: *Stochastik in der Schule* 19(3), 3–30.
- Witzke, I. (2009). *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik*. Hildesheim: Franzbecker.
- Witzke, I. (2013). Zur Übergangsproblematik im Fach Mathematik. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein, *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1098–1101). Münster: WTM.

- Witzke, I., Clark, K. M., Struve, H., & Stoffels, G. (2018). Addressing the Transition from School to University. In K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht, & C. Tzanakis (Eds.): *Mathematics, Education and History. Towards a Harmonious Partnership* (S. 61–82). Cham: Springer.
- Witzke, I., & Spies, S. (2018). Making Domain-Specific Beliefs Explicit for Prospective Teachers. K. M. Clark, T. H. Kjeldsen, S. Schorcht, & C. Tzanakis (Eds.), *Mathematics, Education and History. Towards a Harmonious Partnership* (pp. 283–304). Cham: Springer.
- Witzke, I., Struve, H., Clark, K., & Stoffels, G. (2016). ÜberPro – A Seminar Constructed to Confront the Transition Problem From School to University Mathematics, based on Epistemological and historical ideas of mathematics. In *MENON*, 2nd Thematic Issue (27), 66–93. Verfügbar unter http://www.edu.uowm.gr/site/system/files/uber-pro_-_a_seminar_constructed_scienc_en.pdf
- Wußing, H. (2009). *6000 Jahre Mathematik* (Korr. Nachdr.). Berlin: Springer.
- Yin, R. K. (2014). *Case study research. Design and methods* (5th ed.). Los Angeles: SAGE.

Bildquellen

Besonderer Dank an Frederick Courtright, der im Namen von Shambhala Productions, Inc. Abbildung 1 und Abbildung 2 dieser Arbeit aus *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding* von Humberto R. Maturana, Ph. D & Francisco J. Varela, Ph. D., ©1987 by Humberto R. Maturana and Francisco J. Varela für diese Arbeit freigegeben hat. (Reprinted by arrangement with The Permissions Company, LLC on behalf of Shambhala Publications Inc., www.shambhala.com)

Anhang A: Fragebogen des Pre- und des Post-Tests

Pre-Test:

Nr.	Frage
	Wählen Sie einen persönlichen Code aus vier Zeichen, an den Sie sich auch später noch erinnern können.
	Geschlecht:
	Alter:
	Studiensemester:
	In welchem Land/Bundesland, bzw. in welchen Bundesländern sind Sie zur Schule gegangen?
	Welche weiterführende(n) Schule(n) haben Sie besucht (z.B. Gesamtschule, Gymnasium, ...)?
	Wie viele (Schul-)Stunden Mathematikunterricht hatten Sie in Ihrer Oberstufenzeit pro Woche? (Bspw. in NRW: LK, 5 Stunden; GK, 3 Stunden)
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Analysis I]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Analysis II]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Lineare Algebra]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Einführung in die Stochastik]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Elemente der Analysis]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Elemente der Algebra]

	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Didaktik der Analysis]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Didaktik der Algebra]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Didaktik der Geometrie]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Didaktik der Stochastik]
	Geben Sie die von Ihnen bereits besuchten Vorlesungen und Seminare im Mathematikstudium an: [Sonstiges]
1	Warum möchten Sie gerne Mathematiklehrer(in) werden?
2	Was ist Mathematik?
3	Was ist Mathematik für Sie?
4	Was gefällt Ihnen am besten beim Mathematik machen? Bitte erläutere Sie Ihre Antwort.
5	Was gefällt Ihnen am wenigsten beim Mathematik machen? Bitte erläutern Sie Ihre Antwort.
6	Was ist Ihr Lieblingsthema/Lieblingsbereich in der Mathematik? Bitte begründe Sie Ihre Antwort.
7	Was ist Ihr unbeliebtestes Thema/unbeliebtester Bereich in der Mathematik? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
8	Warum sollten sich Menschen mit Mathematik beschäftigen? Bitte begründe Sie Ihre Antwort.
9	Bitte notieren Sie fünf Assoziationen zur „Schulmathematik“.
10	Bitte notieren Sie fünf Assoziationen zur „Hochschulmathematik“.
11	Was ist an der Wahrscheinlichkeitsrechnung typisch mathematisch für Sie?
12	Wann gilt eine mathematische Aussage als „wahr“?

13	<p>Ist es möglich, dass beide unten genannten mathematischen Aussagen im Rahmen der Mathematik wahr sein können. Begründen Sie Ihre Antwort.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ist $P(A) = 50\%$.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ist $P(A) = 10\%$.</p>
14	Erläutern/Beschreiben Sie den folgenden Begriff und seine Rolle in der Mathematik: „Definition“
15	Erläutern/Beschreiben Sie den folgenden Begriff und seine Rolle in der Mathematik: „Axiom/Postulat“
16	Erläutern/Beschreiben Sie den folgenden Begriff und seine Rolle in der Mathematik: „Vermutung“
17	Erläutern/Beschreiben Sie den folgenden Begriff und seine Rolle in der Mathematik: „Satz“
18	Was macht einen Beweis in der Mathematik aus?
19	Welche Funktion hat ein Beweis in der Mathematik?
20	Erklären Sie den Begriff „Wahrscheinlichkeit“.
21	<p>Das empirische Gesetz der großen Zahlen lautet:</p> <p>Mit wachsender Versuchszahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit eines beobachteten Ereignisses.</p> <p>Welche Zusammenhänge bestehen zwischen diesem Gesetz und den absoluten Häufigkeiten eines beobachteten Ereignisses? Begründen Sie Ihre Antwort.</p>
22	Welche Rückschlüsse ergeben sich aus diesem Gesetz für den Wahrscheinlichkeitsbegriff? Begründen Sie Ihre Antwort.
23	Welche Funktion hat das empirische Gesetz der großen Zahlen innerhalb der Mathematik? Begründen Sie Ihre Antwort.
24	Im Folgenden sind drei Argumentationen gegeben:

Argumentation I:

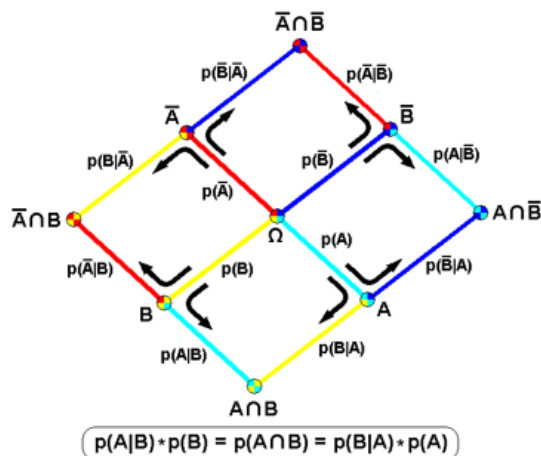
Der Satz folgt unmittelbar aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

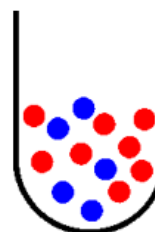
Hierbei ist:

- $P(A|B)$ die (bedingte) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist,
- $P(B|A)$ die (bedingte) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist,
- $P(A) \neq 0$ die A-priori-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A und $P(B) \neq 0$ die A-priori-Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B .

Argumentation II: Durch Überlagerung der beiden ihm zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsbäume:

**Argumentation III:**

Es wurde 100 mal ein Urnenexperiment mit einer Urne, die fünf blaue und acht rote Kugeln enthielt, durchgeführt. Je Durchführung wurde zweimal nacheinander ohne Zurücklegen eine Kugel aus der Urne gezogen.



- Die relative Häufigkeit, dass nach einer roten Kugel eine blaue Kugel gezogen wurde betrug 41,7 %.
- Die relative Häufigkeit, dass eine rote nach einer blauen Kugel gezogen wurde betrug ungefähr 66,7 %.
- Die relative Häufigkeit, dass eine blaue Kugel gezogen wurde betrug 38,8 %.
- Die relative Häufigkeit, dass eine rote Kugel gezogen wurde betrug ca. 62,1 %.

Damit gilt der Satz von Bayes, denn

$$41,7 \% = 66,7 \% \cdot 38,8 \% \div 62,1 \%$$

	Geben Sie an, welche Argumentation Sie für die Beste halten. Begründen Sie Ihre Wahl.
25	Geben Sie die Argumentation an, die für Sie am überzeugendsten ist. Begründen Sie Ihre Wahl.
26	Würden Sie eine oder mehrere Argumentationen als einen mathematischen Beweis bezeichnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Post-Test

Der Post-Test ist bezüglich der inhaltlichen Fragen – dies sind die nummerierten Fragen – identisch zum Pre-Test. Es wurde lediglich darauf verzichtet die personenbezogenen Daten, wie Geschlecht und Schulbildung erneut abzufragen. Die Zuordnung des Post-Tests zum Pre-Test erfolgte über den vierstelligen Code.

Bildnachweis im Anhang A

Bild in Argumentation II:

Beschreibung	English: Illustration of Bayes' Theorem by two joined 2-dimensional tree diagrams, vectorized from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bayes%27_Theorem_2D.png
Upload Datum	4 November 2015
Quelle	https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bayes%27_Theorem_2D.png
Autor	Qniemiec

Anhang B: Übersicht der Sitzungsthemen, zugehörige Aktivitäten & Materialien

In der folgenden Tabelle stehen die Abkürzung SN für die Sitzungsnummer und RN für die Nummer des zugehörigen Reflexionsbucheintrags.

SN	Themen	Aktivitäten	Materialien	RN
1	<p>Organisation des Seminars</p> <p>Erläuterungen zum Fragebogen</p> <p>Vorstellungsrunde & Reflexion</p> <p>Einführung in das Seminar</p>	<p>Vorstellung des Lehrenden;</p> <p>Vorstellung der Grundhaltung „Zusammen arbeiten im Seminar“;</p> <p>Hinweise zur Leistungsanforderung (Hinweis auf Reflexionsbücher; Informationen zur Lernplattform moodle);</p> <p>Darstellung Zweck des Fragebogens;</p> <p>erste Ergebnisse (als word-cloud);</p> <p>Vorstellungsrunde: Blitzlicht-Methode (Name, Fächer, Liebste Mathematikaufgabe), Kugellager-Methode (Was ist Mathematik? Warum möchte ich Mathematiklehrer*in werden? Was zeichnet eine gute Mathematiklehrer*in aus? Wie kann das Studium mir helfen eine gute Mathematiklehrer*in zu werden? Wie habe ich meinen Übergang von der Schule zur Hochschule erlebt und wie hat das meine Vorstellungen von mir als Mathematiklehrer*in beeinflusst?)</p> <p>Vorstellung der Grundkonzeption des Seminars; verschiedene Rollen im Seminar; Forschungstagebuch als Reflexionshilfe und Forschungsanlass für Lehrer*innen</p>	<p>Präsentation</p> <p>Ueber-Pro_WR_II_Gym-Ge_Sitzung_1</p> <p>Motzer (2007)</p>	1

SN	Themen	Aktivitäten	Materialien	RN
2	<p>Kartenabfrage</p> <p>Schoenfeld-Problemlöseprozesse und ihre Deutung</p> <p>Vorstellung der Forschungshypothese</p> <p>Karten ordnen</p>	<p>Kartenabfrage (Was ist Mathematik? Wie gehen Sie mit mathematischen Objekten um?)</p> <p>Gruppenpuzzle zu Schoenfelds Problemlöseprozessen; in Stammgruppe: Lösung des Problems einen Kreis zwischen zwei Geraden, dessen einer Berührungspunkt ein Punkt auf einer Gerade ist; Expertengruppe 1 beschäftigt sich mit Mathematikerlösung, Expertengruppe 2 beschäftigt sich mit Schülerlösung (Wie werden Hypothesen im Problemlöseprozess entwickelt? Wie werden die Hypothesen im Problemlöseprozess überprüft? Welche Bedeutung haben logische Ableitungen im Problemlöseprozess?); in Stammgruppen: Diskussion Gemeinsamkeiten und Unterschiede; Sammlung; Vortrag zu Deutung von Schoenfeld; Vorstellung der Forschungshypothese;</p> <p>Karten ordnen hinsichtlich formal-abstrakten und empirisch-gegenständlichen Umgang; Zuordnung zu Mathematikbildern.</p>	<p>Präsentation</p> <p>Ueber-Pro_WR_II_Gym-Ge_Sitzung_2</p> <p>Karten (Karton)</p>	3

SN	Themen	Aktivitäten	Materialien	RN
3	<p>Kolmogoroffs Ziele für seine Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung</p> <p>Zufall vs. Wahrscheinlichkeiten</p> <p>Czuber und Laplace Auffassungen von Wahrscheinlichkeiten</p>	<p>„Ich-Du-Wir“-Methode zum Vorwort von Kolmogoroff (Ich-Phase: Unbekannte Wörter markieren; Forschungsfragen formulieren (Was interessiert Sie bzgl. dieses Textauschnitts, welche Fragen bleiben offen nach Lesen des Textauszugs, ...); Du-Phase (Klären unbekannter Begriffe; Vergleich der Forschungsfragen); Wir-Phase (Sammlung der Forschungsfragen per Tafelabfrage und Diskussion); [Ergebnis der Studierenden (Welche physikalisch konkreten Fragestellungen liegen Kolmogoroffs Arbeit zugrunde? Welche Analogien gibt es zwischen dem Integral einer Funktion und Erwartung zufälliger Größe, Maß einer Menge und Wahrscheinlichkeit? Warum war Stochastik „Parallel-Disziplin“ der Mathematik? Was sind die geometrischen Elemente aus der Integrationstheorie? Was sind überflüssige Komplikationen bei der Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung?])</p> <p>Tafelsammlung (Was ist Zufall? Was ist Wahrscheinlichkeit?) [Ergebnis: Zufall: Das etwas auf eine bestimmte Art eintritt, wenn es auch anders hätte passieren können. Unvorhersehbares Ereignis; Wahrscheinlichkeit: Die Chance, dass ein best. Ereignis eintritt. Die Messung der Unsicherheit, ob etwas passiert];</p> <p>Partnerarbeit zu Czuber und Laplace (Teilnehmer liest Czuber, Partner*in liest Laplace)</p>	<p>Präsentation</p> <p>Ueber-Pro_WR_II_Gym-Ge_Sitzung_3</p> <p>Vorwort aus (Kolmogoroff, 1933)</p> <p>Auszug (Czuber 1899, S. I, III, 1–4)</p> <p>Auszug (Laplace, 1814/1886, Vorwort, I Über die Wahrscheinlichkeit)</p>	4

SN	Themen	Aktivitäten	Materialien	RN
4	<p>Czuber und Laplace Auffassungen von Wahrscheinlichkeiten;</p> <p>Klassische Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Galileo und der Fürst der Toskana, „Force majeure“</p>	<p>Partnerarbeit zu Czuber und Laplace (Erarbeitung beider Autoren im Quellenauszug; Vergleich der Ergebnisse mit Nachbar*in; Angabe der Ergebnisse in Tabelle auf OHP Folie; Plenumsdiskussion)</p> <p>Partnerarbeit Wahrscheinlichkeit Augensumme 10 und 9 (Lösen, ggf. unter Zuhilfenahme von Würfeln; Verwendung der Kenntnisse aus der Stochastik; Diskussion der Lösung im Plenum); Force majeure – Teilungsproblem, analoge Bearbeitung zu Problem von Galileo;</p>	<p>Präsentation Ueber-Pro_WR_II_GymGe_Sitzung_4</p> <p>Czuber und Laplace Quelle aus Sitzung 3</p>	5
5	<p>Klassische Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung</p> <p>Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Das Ziegenproblem & Gefangenenparadoxon;</p>	<p>Diskussion verschiedener historischer Lösungen zum Teilungsproblem</p> <p>Lerntempo-Duett: Gruppe A löst Ziegenproblem, Gruppe B Gefangenenparadoxon; Zusammenfinden mit Partner*innen gemischter Gruppen; Diskussion im Plenum;</p>	<p>Präsentation Ueber-Pro_WR_II_GymGe_Sitzung_5</p> <p>Problemstellung des Ziegenproblems und des Gefangenenparadoxon</p>	6
6	<p>Das Sankt-Petersburg-Paradoxon;</p> <p>Das Sehnenparadoxon von Bertrand</p> <p>Ausblick auf nächste Sitzung</p> <p>Grundlagenkrise der Mathematik</p>	<p>Vorstellung des Sankt-Petersburg-Paradoxon, eigenständige Lösung; Diskussion der Ergebnisse;</p> <p>Plakatgestaltung zum Sehnenparadoxon von Bertrand (eigenständige Lösung; Durcharbeiten verschiedener Lösungen aus Quellen; Kriterien der Plakatgestaltung; Erarbeitung des Posters in Kleingruppen je Lösung; Museumsrundgang)</p> <p>Nur Vorstellung der Themenüberschrift</p>	<p>Präsentation Ueber-Pro_WR_II_GymGe_Sitzung_6</p> <p>(Büchter & Henn, 2007, S. 252–258)</p> <p>Plakate</p>	7

SN	Themen	Aktivitäten	Materialien	RN
7	Das Sehnepara- daxon von Ber- trand Grundlagen- krise	Plakatbesprechung zum Sehnepara- daxon von Bertrand (Museumsrund- gang) Erinnerung an Forschungshypothese & Vorwort von Kolmogoroffs Grund- begriffen; Schreibgespräch zu Grund- lagenkrise Mathematik auf der Basis des „Logicomix“ (Fokusfragen beim Lesen: Welches Problem versucht Russel zu lösen? Welche Antworten geben die auftretenden Personen in dem Comic? Wer sind die (wissen- schaftlich wichtigen) Personen in dem Comic?)	Präsentation Ueber- Pro_WR_II_Gym- Ge_Sitzung_7 (Doxiadēs et al., 2009, S. 112–115, 142–152, 186–190, 272–274, 283–287, 315–316)	8
8	Die Grundlagen- krise der Mathe- matik zu Beginn des 20. Jhdt.	Erinnerung an Vorwort von Kolmo- goroffs Grundbegriffen; Vorstellung Hilberts Auftrag zur Formalisierung der Wahrscheinlichkeitsrech- nung (1900); Einschub Euklids Axio- matisierung der Elemente; Diskussion der wichtigen Personen aus dem Logi- comix hinsichtlich Grundlagenfrage;	Präsentation Ueber- Pro_WR_II_Gym- Ge_Sitzung_8	9
9	Grundlagenkrise und Forschungs- hypothese; Kolmogoroffs Axiomensystem in seinen „Grundbegriffen der Wahrschein- lichkeitsrech- nung“	Diskussion, was die Grundlagenkrise mit der Forschungshypothese zu tun hat; Durcharbeiten von Kolmogoroffs „Grundbegriffen der Wahrscheinlich- keitsrechnung“ (Einleitung; §1, lesen; Plenumsdiskussion); HA: „Zeigen Sie, dass Kolmogoroffs Axiome wider- spruchsfrei sind, indem Sie nachwei- sen, dass sein Beispiel auf S. 2 ein Mo- dell ist, d.h. das für das angegebene Modell alle Axiome gelten.	Präsentation Ueber- Pro_WR_II_Gym- Ge_Sitzung_9 (Kolmogoroff, 1933, S. 1–3)	10

SN	Themen	Aktivitäten	Materialien	RN
10	Kolmogoroffs Axiomensystem in seinen „Grundbe-griffe[n] der Wahrscheinlichkeitsrechnung“; Unmittelbare Folgerungen aus den Axiomen, bedingte Wahr-scheinlichkeiten, der Satz von Bayes	Präsentation der Hausaufgabe aus Sit-zung 9; Diskussion ob Wahr-scheinlichkeitsrechnung ähnlich zur hilbert-schen Geometrie axiomatisiert ist; Nutzen einer formal-abstrakten Theo-rie durch Anwendungsvielfalt; Lesen von §3 mit Sammlung von Nachfra-gen zur Symbolik [es lagen keine vor] Gemeinsames Beweisen (1. Lesen Sie „§4 Unmittelbare Folge-rungen aus den Axiomen, bedingte Wahrscheinlichkeiten, der Satz von Bayes “; 2. Teilen Sie den Text in x zusammen-hängende Abschnitte ein, die unge-fähr den gleichen Beweisaufwand zu haben scheinen.; 3. Verteilen Sie in der Gesamtgruppe die Abschnitte.; 4. Beweisen Sie die Abschnitte auf Ba-sis der Axiome.; 5. Stellen Sie Ihren Abschnitt Ihren Kommiliton*innen vor.)	Präsentation Ueber- Pro_WR_II_Gym- Ge_Sitzung_10 (Kolmogoroff, 1933, S. 2, 3, 5–7)	11
11	Bedingte Wahr-scheinlichkeiten, der Satz von Bayes Wahrscheinlich-keit und Erfah-rungswelt: In Kolmogoroffs Grundbegriffen	Gemeinsames Beweisen (5. Stellen Sie Ihren Abschnitt Ihren Kommiliton*in-nen vor). Texterarbeitung zu „§2 das Verhältnis zur Erfahrungswelt“ von Kolmogoroffs Grundbegriffen mit den Eulen der Weisheit (1. Suchen Sie sich 2 „Eulen der Weis-heit“ aus; 2. Lesen Sie „§2 Das Verhältnis der Er-fahrungswelt“, mit dem Leseauftrag der „Eulen der Weisheit“, die Sie aus-gesucht haben.; 3. Stellen Sie Ihre Ergebnisse Ihren Kommiliton*innen vor.)	Präsentation Ueber- Pro_WR_II_Gym- Ge_Sitzung_11 (Kolmogoroff, 1933, S. 3–7)	12

SN	Themen	Aktivitäten	Materialien	RN
12	<p>Wahrscheinlichkeit und Erfahrungswelt: In Kolmogoroffs Grundbegriffen Konzeption empirischer WR in von Mises „Wahrscheinlichkeit, Statistik, Wahrheit“</p> <p>Kurz: Reflexion Wahrscheinlichkeitsrechnung in Schule und Hochschule</p>	<p>Texterarbeitung zu „5. Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt“ von von Mises Vorlesung mit den Eulen der Weisheit (</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Suchen Sie sich 2 „Eulen der Weisheit“ aus; 2. Lesen Sie „Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt“, mit dem Leseauftrag der „Eulen der Weisheit“, die Sie ausgesucht haben; 3. Stellen Sie Ihre Ergebnisse Ihren Kommiliton*innen vor.) <p>Erarbeitung des Textauszugs anhand Arbeitsauftrag (</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Schauen Sie in das Inhaltsverzeichnis auf S. XV und XVI. 2. Was ist Ihr Vorschlag um die Konstruktion der Wahrscheinlichkeitstheorie von von Mises zu rekonstruieren? 3. Erarbeiten 4. Zusammentragen) <p>Vergleich zwischen Schule und Hochschule im Plenum mit Rückbezug auf die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.</p>	<p>Präsentation</p> <p>Ueber-Pro_WR_II_Gym-Ge_Sitzung_4</p> <p>(von Mises, 1931, S. 21–27)</p> <p>(von Mises, 1928, S.14, 21–24, 30, 43–45, 75–76)</p>	13

Anhang C: Übersicht aller Fragen des Reflexionsbuchs

Eintrag:	Frage- nr.:	Frage:
1	1	Warum möchte ich Mathematiklehrer*in werden?
1	2	Was ist eine gute Mathematiklehrer*in?
1	3	Wie kann das Studium mir helfen eine gute Mathematiklehrer*in zu werden?
1	4	Wie habe ich meinen Übergang von der Schule zur Hochschule erlebt und wie hat das meine Vorstellungen von mir als Mathematiklehrer*in beeinflusst?
1	5	Welche Erwartungen habe ich an das Seminar?
1	6	Haben sich meine Erwartungen an das Seminar geändert von vor bzw. nach der Seminarsitzung?
1	7	Welche Erwartungen habe ich an das Führen der Forschungs-/Lerntagebücher?
1	8	Wie müsste das Seminar aussehen, damit es für mich ein nützliches/interessantes Seminar wird?
1	9	Wie müsste das Seminar aussehen, sodass es für mich uninteressant/unnützlich ist?
1	10	Was ist mir sonst noch aufgefallen?
2	0	Inwiefern stimmen Sie folgenden beiden Hypothesen zur doppelten Diskontinuität/Übergangsproblematik zu? Begründen Sie Ihre Antwort.

2	1	<p>Hypothese 1:</p> <p>„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat.“</p>
2	2	<p>Hypothese 2:</p> <p>„Der Wechsel von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung von Mathematik ist eine wesentliche Hürde für den Übergang von der Schule zur Hochschule.</p> <p>Ein ähnlicher Auffassungswechsel von empirisch-gegenständlich => formal-abstrakt ist in der Geschichte der Mathematik zu finden. (Bspw. in der Entwicklung der Stochastik)“</p>
3	1	Welche Rolle spielt für Sie eine Zeichnung bei einem geometrischen Beweis?
3	2	Welche Rolle spielen Zirkel und Lineal bei einem geometrischen Beweis für Sie?
3	3	Beschreiben Sie Ihr Vorgehen (Stichpunkte erlaubt) bei der Lösung des Konstruktionsproblems aus dem Seminar und vergleichen Sie es anschließend mit dem Vorgehen des Mathematikers und der Schülerinnen und Schüler aus den Transkripten.
3	4	Was ist eine geometrische Konstruktion?
3	5	Was ist Mathematik?

3	6	Auf welche Weise gehen Sie mit mathematischen Objekten um? Geben Sie Beispiele und Situationen an.
3	7	Wie würden Sie Ihren Umgang mit mathematischen Objekten einordnen im Sinne der schoenfeldschen Auffassungen von Mathematik (empirisch vs. formal)?
3	8	Vergleichen Sie Ihr Mathematikbild vor und nach der Sitzung. Hierzu können Sie zum einen ein Bild/mehrere Bilder zeichnen oder beschreiben. Begründen Sie Ihre Wahl.
4	1	Vergleichen Sie Ihr Mathematikbild vor und nach den bisherigen Kurssitzungen. Hierzu können Sie auch ein Bild/mehrere Bilder zeichnen oder beschreiben. Erläutern Sie, warum Sie dieses Bild ausgewählt haben.
4	2	Was unterscheidet für Sie Zufall von Wahrscheinlichkeit? Inwiefern unterscheidet sich Ihre Auffassung von Laplace und Czuber?
4	3	Warum denken Sie habe ich gerade diese Texte für die Seminarsitzung ausgewählt?
4	4	Würden Sie Czubers und Laplace Auffassung von Wahrscheinlichkeit eher als formal-abstrakt oder eher empirisch-gegenständlich einordnen? Begründen Sie Ihre Antwort.
4	5	Welche Meinung haben Sie zum Forschungs-Reflexionsbuch?
5	1	Hat sich Ihre Vorstellung vom Wahrscheinlichkeitsbegriff im Laufe der Sitzung verändert? Wenn ja, wie?
5	2	Hat sich Ihre Vorstellung vom Zufallsbegriff im Laufe der Sitzung verändert? Wenn ja, wie?
5	3	Wie schätzen Sie die Quelle von Laplace und Czuber hinsichtlich der Anregung von Diskussionen zur Wahrscheinlichkeit und zum Zufall ein?

5	4	In der Präsentation dieser Woche finden Sie den Schulbuchauszug, der in der Sitzung vorgestellt wurde. Diskutieren Sie, inwiefern Sie diesen Auszug für tragfähig hinsichtlich des Wahrscheinlichkeitsbegriffs halten.
5	5	Welches Problem „Würfelproblem von Galileo“ oder „Force Majeure“ hat Ihnen besser gefallen? Warum?
5	6	Was ist Ihre Lösung zur gerechten Aufteilung des Einsatzes beim Problem „Force Majeure“?
6	1	XXX hat gesagt, dass nach dem Spielstand 4:3 (A:B), B im folgenden Wurf eine höhere Wahrscheinlichkeit hat zu gewinnen. Nennen Sie Argumente für oder gegen diese Position und teilen Sie mit, welche Position Sie vertreten.
6	2	Was verstehen sie unter einem „Zufallsexperiment“? Geben Sie mindestens ein Beispiel an.
6	3	Inwiefern hat das „Zufallsexperiment“ in der vergangenen Sitzung eine Rolle gespielt? Hat sich Ihr Verständnis von diesem Begriff im Verlauf der Sitzung geändert/nicht geändert? Wenn ja, wie hat er sich geändert?
6	4	Was ist Ihre Lösung des Ziegenproblems? Begründen Sie.
6	5	Was ist Ihre Lösung des Gefangenenparadoxons? Begründen Sie.
6	6	Inwiefern halten Sie die vergangene Plenumsdiskussion des Ziegenproblems für hilfreich/nicht hilfreich? Begründen Sie Ihre Antwort.
6	7	Halten Sie das Ziegenproblem und das Gefangenenparadoxon für ähnlich oder eher unähnlich? Begründen Sie Ihre Antwort.
7	1	Wir haben nun vier Paradoxa der Stochastik untersucht. Welches hat Ihnen am besten und welches am wenigsten gefallen? Begründen Sie Ihre Antwort.
7	2	Welche Meinung haben Sie zu Czubers Aussage, dass „an der Schwelle der Wahrscheinlichkeitstheorie eine Reihe von Begriffen [steht], welche der Mathematik fremd sind und über deren

		Deutung die Discussion nicht abgeschlossen ist, ja heute lebhafter geführt wird denn je.“ (Czuber, 1898)?
8	1	Geben Sie aus Ihrer Erinnerung (in eigenen Worten) meine Forschungshypothese für das Seminar wieder. Inwiefern sehen Sie zwischen dieser und dem bisherigen Seminarverlauf eine Verbindung?
8	2	Welche Modellierung des Sehnen-Paradoxons ist für Sie besonders zugänglich, bzw. gar nicht zugänglich?
8	3	Wie hat Ihnen die Methode des Postererstellens gefallen? Konnten Sie durch die Poster Ihrer Kommiliton*innen die übrigen Modellierungen verstehen?
8	4	Was ist mit der Grundlagenkrise der Mathematik gemeint? Inwiefern waren Ihnen einige der im Comic auftretenden Fragen/Probleme bereits vor dem Seminar bekannt?
8	5	Welche Lösungen bieten die Personen im Comic für die Grundlagenkrise?
8	6	Inwiefern hat Ihnen die Methode „Schreibgespräch“ genützt, den Comic (und die übrigen Texte zur Grundlagenkrise der Mathematik) zu verstehen? Beziehen Sie sich bei Ihrer Antwort auf Ihre Ergebnisse aus der 4. und 5. Reflexionsfrage.
8	7	Welche Rolle spielt Ihrer Ansicht nach die Grundlagenkrise für Kolmogoroffs Werk „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“?
9	1	Wie werden Grundbegriffe in der modernen Mathematik eingeführt. Geben Sie bitte ein konkretes Beispiel an.
9	2	Worin unterscheidet sich Euklids von Hilberts Grundlegung der Geometrie? Begründen Sie Ihre Antwort mit den Auszügen von Euklids „Die Elemente Buch 1 – Anfang“ (II_2 euklid thaer_S. 1–4.pdf) und Hilberts „Grundlagen der Geometrie – Anfang“ (III_5 Auszug aus Grundlagen der Geometrie Hilbert(1).pdf)

9	3	Was könnte Hilbert mit den folgenden Aussagen (1 und 2, vgl. rote Zahlen im Bild) meinen? Wie passen diese Aussagen zu Ihrer Bearbeitung von Frage 2?
9	4	Was sagen Sie zu Hilberts Aussage aus seiner Rede über „23 mathematische Probleme“?
10	1	Was bedeutet es für Sie, dass etwas intuitiv wahr ist? Geben Sie ein konkretes Beispiel an.
10	2	Inwiefern löst sich Hilbert innerhalb seiner Grundlagen der Geometrie von der Intuition?
10	3	Widerspricht sich „Comic-Hilbert“ in dem Comic selbst? Er behauptet, dass die Intuition keinen Platz in mathematischen Beweisen haben soll und die neue Mathematik nichts als „intuitiv klar“ klassifiziert, denn es existiert keine Wahrheit für die Mathematiker außerhalb eines strengen Beweises. Zudem sollen die Axiome der Theorie der Startpunkt für den logischen Prozess sein, ohne dass sie „natural“ wahr sind. Sie sollen lediglich logisch widerspruchsfrei sein. Begründen Sie Ihre Antwort!
10	4	Warum sollte eine (mathematische) Theorie widerspruchsfrei sein?
10	5	Beschreiben Sie, auf welche Weise Hilberts Grundlagen mit der Forschungshypothese des Seminars zusammenhängt.
11	1	Inwiefern löst Kolmogoroff innerhalb seiner Paragraphen §1, §3 und §4 sein Programm aus der Einleitung der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung ein? Begründen Sie Ihre Antwort.
11	2	Was halten Sie von Kolmogoroffs Fußnote 2 auf S. 2 und Fußnote 3 auf S. 3?
11	3	Wie stellen Sie sich ein Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor, das den „Wahrscheinlichkeitsbegriff“ nicht als Grundbegriff enthält? Versuchen Sie sich an einer Formulierung (diese muss natürlich nicht zwingend konsistent sein).

11	4	Inwiefern wird Kolmogoroff Hilberts Programm gerecht, das im Logicomix dargestellt wurde?
11	5	Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede sehen Sie zwischen Kolmogoroffs „Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und Ihren bisherigen Erfahrungen aus dem Mathematiklehramtsstudium?
12	1	Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten sehen Sie zwischen einer naturwissenschaftlichen Theorie (bspw. der Physik) und einer mathematischen Theorie, wie Sie in Kolmogoroffs „Grundbegriffen der WR“, aber auch in Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ abgebildet ist.
12	2	Welche Vorteile und Nachteile hat eine formale mathematische Theorie, wie Sie sie in §4 genutzt und erweitert haben?
12	3	Was ist für Sie eine formale Theorie?
12	4	Welche Zusammenhänge können zwischen einer formal-abstrakten Theorie und Anwendungen in der Realität bestehen?
12	5	Diskutieren Sie Bemerkung II aus §2 von Kolmogoroffs „Grundbegriffen der WR“ (S. 5).
12	6	Was lehrt uns §2 der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung? Kann man ein Fazit ziehen, das eventuell auch Schlussfolgerungen für Handeln und Verhalten impliziert?
13	1	Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede sehen Sie zwischen dem Stochastikunterricht in ihrer Schulzeit und ihrer Stochastik Vorlesung?
13	2	Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede haben Kolmogoroffs und von Mises Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Ihrem bisherigen Kenntnisstand?
13	3	Worin unterscheiden sich die Grundbegriffe von von Mises (Wahrscheinlichkeit, Kollektiv) und Kolmogoroff (Menge von Ereignissen E , Mengenkörper \mathcal{F} und Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A)?

13	4	Welche drei Aspekte aus dem Text „Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt“ halten Sie für am wichtigsten?
----	---	---

Anhang D: Protokoll zur Fallstudie aus Untersuchung 5

PROTOKOLL ZUR DURCHFÜHRUNG EINER FALLSTUDIE ALS TEIL DER MULTIPLLEN FALLSTUDIE IM PROJEKT ÜBERPRO_WR_II

(NACH YIN, 2014, S. 85)

Überblick über die Fallstudie

Ziele:

Rekonstruktion der Übergangserfahrung von Studierenden und ihrer eigenen Reflexion

- in Auseinandersetzung mit der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im frühen 20. Jh.
- hinsichtlich der Relevanz ihrer Belief-Systeme zur Mathematik (empirisch-gegenständlich vs. formal-abstrakt).
- unterstützt durch das Lehr- und Forschungsseminar Über-Pro_WR_II.
 - in Auseinandersetzung mit den angebotenen Materialien
 - in Auseinandersetzung mit den übrigen Teilnehmer*innen des Seminars
 - in Auseinandersetzung mit dem „Lehrenden-Forscher“

Relevante Literatur zur Thematik der Fallstudie (Minimum):

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–57, Analysen zum Unterrichtshandeln, Vol. 2). Köln: Aulis

Kolmogoroff, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Stoffels, Gero (2016). Auffassungswechsel als eine wesentliche Hürde beim Übergang Schule – Hochschule: Ein Blick aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In GDM (2016), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 943–946). Münster: WTM Verlag.

von Mises, R. E. (1928). *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. Wien: Springer.

Witzke, I., Struve, H., Clark, K., & Stoffels, G. (2016). ÜberPro – A Seminar Constructed to Confront the Transition Problem From School to University Mathematics, based on Epistemological and historical ideas of mathematics. In MENON, 2nd Thematic Issue (27), 66–93. Verfügbar unter http://www.edu.uowm.gr/site/system/files/uber-pro_-_a_seminar_constructed_scienc_en.pdf

Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods*. Los Angeles: SAGE

Vorgehensweisen bei der Datensammlung

Vorgehensweisen zum Schutz der Teilnehmer*innen an der Fallstudie:

- Alle Teilnehmer*innen des Seminares wählen einen vierstelligen Identifikationscode (im Folgen Id.-Code), sodass verschiedene analoge und elektronische Datenquellen zueinander in Beziehung gesetzt werden können. Dieser Id.-Code wird später durch ein Pseudonym zur einfacheren Datenanalyse ersetzt.
- Tauchen in den Ur-Daten personenbezogene Daten auf, die zur Identifikation der Person führen können (bspw. Name, Geburtsdatum, Matrikelnummer), werden diese bei der ersten Sichtung/Transkription der Daten entfernt oder unkenntlich gemacht.
- Die Teilnehmer*innen haben ihr Einverständnis zur Erhebung von Daten zu Forschungszwecken im Rahmen dieser Fallstudien gegeben und sind mit dem Verfahren der Anonymisierung und Verwendung des Id.-Codes einverstanden.

Identifikation möglicher Datenquellen:

- Pre- und Post-Test (vor und nach dem Seminar) mit halboffenem Fragebogen [online via Lime Survey, gehosted von Universität Siegen]
- Reflexionsbuch mit Einträgen je Seminarsitzung auf der Basis von offenen Initialfragen [online via moodle oder handschriftlich; spätere Anonymisierung/Transkription der ursprünglichen Daten]

- Seminar Materialien (bspw. Fotos von Tafelbildern, Quelltexte, verwendete Präsentationen, ...)
- Reflexionsbuch des Lehrenden/Forschenden [handschriftlich, je Seminarsitzung]

Dank für die Ermöglichung des Feldkontaktes

- Dank an Prof. Dr. Ingo Witzke, der dieses Seminar (zu diesem Zeitpunkt das vierte im Rahmen von ÜberPro) zugelassen und in das Lehrveranstaltungsangebot des Departments Mathematik im WS 2016/2017 integriert hat.

Fragen zur Datensammlung

Spezifische Fragen zur Vergegenwärtigung während der Durchführung der Feldforschung:

1. Welches Wissen zur Entwicklung der WR aktivieren die Studierenden und inwiefern lässt sich dieses zur Rekonstruktion vermuteter SEB'e nutzen?
 - a. Welche konkreten Fachinhalte werden verwendet? Ist die Verwendung adäquat hinsichtlich der Referenz, d.h. wird die Quelle über-/unterschätzt?
 - b. Welche Quellen/Autoren werden aus welchem SEB heraus genannt? [Pre-/Post-Test, Reflexionsbuch Studierende]
2. Wie werden Bezüge zur Entwicklung der WR hergestellt?
 - a. Inwiefern werden Bezüge selbstständig hergestellt oder vom Lehrend-Forschenden eingefordert?
3. Inwiefern lässt sich eine empirisch-gegenständliche oder formal-abstrakte Auffassung bei den Studierenden rekonstruieren?
 - a. Wie gehen Studierende mit mathematischen Objekten um?

- b. Auf welche Weise sprechen Studierende über mathematische Objekte, bzw. Mathematik?
 - c. Wie reflektieren Studierende ihre eigene Auffassung von Mathematik?
 - d. Wie rekonstruieren Studierende Vermutungen über die Auffassung von Mathematik anderer?
4. Auf welche Weise rekonstruieren Studierende ihre Erfahrungen im Kontext des Übergangs Schule-Hochschule bzgl. Mathematik?
- a. Welche Auffassung haben Studierende von „Schulmathematik“ und „Hochschulmathematik“?
 - b. Inwiefern gibt es Schlüsselpersonen/-erlebnisse, die die Übergangserfahrung illustrieren?
 - c. Welche Rolle spielt das ÜberPro_WR Seminar für die Übergangserfahrung der Studierenden aus Studierendensicht?
5. Welche Rolle nehmen Studierende im Seminar ÜberPro_WR ein und inwiefern beeinflusst diese Rolle die Reflexion ihrer eigenen Übergangserfahrung?
- a. Welche Rolle(n) schreibt er/sie sich selbst zu?
 - b. Welche Rolle(n) werden aus der Perspektive des Lehrend-Forschenden konstruiert?
 - c. [Welche Rollenzuschreibungen gibt es von Seiten der übrigen Teilnehmer*innen]

Leitfaden für den Fallstudienbericht

Gliederung des Fallstudienberichts:

1. Einführung in Untersuchung, mit Untersuchungsziel, Untersuchungsmethode Begründung der Fall-Auswahl
2. Allgemeine Daten des Studierenden, mein persönlicher Eindruck hinsichtlich Leistungsstärke, Charakterzüge, auch retrospektiv aus eigenem Reflexionsbuch

3. Konstantes und Veränderliches Pre→Post (Verwendete Begrifflichkeiten und (Fach-)Sprache, Rezeption der historischen Entwicklung, vermutete Auffassungen beim Studierenden ([hoch spekulativ! Explizieren!])
4. Analyse des Reflexionsbuchs (Stagnation vs. Evolution/Stabilisierung vs. Konstruktion SEB'e, Impuls geleitet vs. Eigenständig, Aha-Effekte, reflexive Momente)
5. Triangulation und Zusammenfassung des Falls hinsichtlich Übergangserfahrung und Rekonstruktion dieser Übergangserfahrung (auch charakterisierende Eigenzitate aus den Quellen)

Format der Daten:

- Transkribiert, bzw. bereits schriftlich vorliegend.

Präsentation weiterer Dokumente

- Ggf. zur Verdeutlichung oder Explikation Material aus dem Seminar.

Bibliographische Informationen

Vgl. Relevante Literatur, insbes. Yin (2014) und Witzke et al. (2016)

Anhang E: Aufbereitung der Schulbuchreihe

Lambacher Schweizer zur Analyse des Bildungsgangs von Schüler*innen

- Stoffgebiet (G)
 - beurteilende Statistik (bS)
 - deskriptive Statistik (dS)
 - Kombinatorik (KB)
 - Wahrscheinlichkeitsrechnung (WR)
- Jahrgangsstufe (J)
- Kapitel (K)
 - Moderner Mathematikunterricht mit dem Lambacher Schweizer (ML)
 - Kapitelnummer (I, II, III, ...)
 - Sachthema (ST)
 - Check-in (CI) (Abschnitt Kapitelnummer eingefügt)
 - Check-in Lösung (CL)
 - Selbsttraining (SELBST)
 - Abiturvorbereitung Stochastik (AVS)
 - Anhang: Anleitung für GTR (GTR)
 - Register (REG)
- Abschnitt (A)
 - Auftaktseite (AUF)
 - Erkundungen (ERK)
 - Lerneinheit (LE1, LE 2, LE 3, ...)
 - Wahlthema: Mittelwerte von Funktionen (WT)
 - Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen (WVV)
 - Geschichte (GES)
 - Rückblick[seiten](RBS)
 - Training (TRA)
 - Exkurs (EXK)
 - Teste dich selbst (TDS)
- Element (E)
 - Auftaktseite (AUF)
 - Das kannst du schon/Das kennen Sie schon (DKS)
 - Das kannst du bald/In diesem Kapitel (DKB)
 - Lerneinheit (LE)
 - Einstieg (EIN)
 - Teste dich selbst! (TDS)

- Merkkasten (MK) [vollständig zitiert]
- Beispiel[aufgaben] (BSP)
- Aufgabennummer (1, 2, 3, ...)
- Kannst du das noch? (KANN)
- Bist du sicher? (BDS)
- Zeit zu Wiederholen (ZZW)
- Zeit zu überprüfen (ZZÜ)

G	J	K	A	E	Zusammenfassung	S.
dS	5	I	AUF		Inhaltsbezogene Kompetenz Stochastik ausgewiesen	8
dS	5	I	AUF	DKB	Diagramme zeichnen und lesen	9
dS	5	I	ERK	1	„Computerchips“ (Hochrechnen von Stichprobe auf Grundgesamtheit 1000)	10
WR	5	I	ERK	2	„Nur einmal zweimal“ (Pasch nacheinander)	11
WR	5	I	ERK	2	„Die Uhr füllen“ (zwei Würfel, Augensumme oder eine Augenzahl)	11
dS	5	I	LE1	EIN	Klassensprecherwahl – Stimmzettel auswerten	14
dS	5	I	LE1	MK	Strichlisten helfen beim Zählen. Tabellen und Diagramme helfen beim Darstellen und Vergleichen von Zahlen.	14
dS	5	I	LE1	BSP	1 Tabelle und Diagramm erstellen (Elternvertreter, Vereinsmitgliederzahlen)	15
dS	5	I	LE1	BSP	2 Eine Umfrage selbst durchführen (Strichliste)	15
dS	5	I	LE1	1	Umfrage zum Alter in der Klasse (Tabelle, Säulendiagramm, Strichliste/eigene Umfrage)	15
dS	5	I	LE1	2	Umfrage zu Anzahl Geschwister (Tabelle, Säulendiagramm)	15
dS	5	I	LE1	3	Anzahl Ferientage (Daten aus Säulendiagramm ablesen und Aussagen zum Säulendiagramm bewerten)	16
dS	5	I	LE1	4	Lebensdauer von Tieren (Balkendiagramm, Tabelle, ablesen und erstellen)	16
dS	5	I	LE1	5	Umfrage Anzahl/Art Haustiere (geeignete Darstellung finden)	16

dS	5	I	LE1	6	Umfrage Lieblingssportart (geeignete Darstellung finden)	16
dS	5	I	LE1	7	Umfrage lieber Hund oder Katze in Bezug zum Geschlecht (geeignete Darstellung finden & Textproduktion)	16
dS	5	I	LE1	8	Umfrage Verkehrstüchtigkeit Fahrräder (Liste und Diagramm erstellen)	17
dS	5	I	LE1	9	Geheimschrift entschlüsseln (Cäsar-Code Buchstabenhäufigkeit)	17
dS	5	I	LE1	RBS	Tabellen und Diagramme Mithilfe von Tabellen, Säulendiagrammen und Balkendiagrammen kann man Zahlen darstellen und vergleichen	44
dS	5	I	LE1	TRA	1 Flusslänge: Balkendiagramm	45
dS	5	VII	LE5	KANN	Laufzeiten (Häufigkeitstabelle & Säulendiagramme)	187
dS	5	ST	1		Pegelstand Bodensee (Datenentnahme aus Liniendiagrammen)	210
dS	5	ST	2		Diagramme zur Befragung zum Thema Pferd; Diagramm zu Anzahl Pferde pro Jahr, Diagramm zu Pferd- und Menschenwachstum	212
dS	5	REG			Balkendiagramm (S. 14)	248
dS	5	REG			Säulendiagramm (S. 14)	249
dS	5	REG			Strichliste (S. 14), Tabelle (S. 14), Zahlen darstellen (S. 14)	250
6. Jahrgangsstufe						
dS	6	I	ERK	6	Umfrage auswerten (rel. Häufigkeiten als Anteile)	13
dS	6	I	LE4	6	Brüche würfeln (mögliche Ergebnisse und deren rel. Häufigkeit im Diagramm darstellen)	29
dS	6	I	LE7	14	Baumbestand (Diagramm und Tabelle mit rel. Anteilen)	40
dS	6	I	LE9	EIN	Rel. Häufigkeiten von Wurfserien unterschiedlicher Länge mit 6er Würfel	46
dS	6	I	LE9	BSP2	Rel. Anteil Gewinnlose zweier Urnen im Vergleich	47

dS	6	I	LE9	4	Anteil Gewinnlose zueinander im Vergleich	48
WR	6	I	TRA	9	Intuitive Verwendung von drehenden Ziehscheiben im Sinne geometrischer Wahrscheinlichkeit	55
dS	6	II	TRA	13	Geschlechterverhältnis von Klassen unterschiedlicher Größe	55
dS	6	II	LE3	10	Wahlergebnis mit Kreisdiagramm und absoluten Häufigkeiten	71
dS	6	III	WV	17	Hausaufgabenbelastung (Säulen- & Balkendiagramm, Abschätzung hinsichtlich befragter Personen)	78
dS	6	IV	WV	1	Camembert Reifegrad (Kreisdiagramm bewerten und darstellen)	97
dS/ WR	6	IV	AUF		Stochastik als inhaltsbezogene Kompetenz ausgewiesen	104
dS	6	IV	ERK	3	Zum arithmetischen Mittel Altersliste bestimmen	107
WR	6	IV	LE1	3	Ergebnismengen von Würfelwürfen mit mehreren (gezinkten) Würfeln	109
WR	6	IV	LE2	4	Ergebnismenge und spezielle Ergebnisse bei dreifachem Münzwurf	111
KB	6	IV	LE2	6	Uhrzeiten mit Quersummen auf Digitaluhr	111
dS	6	IV	LE2	3	„Schulforschung“ (Schätzung von Ergebnissen typischer Fragen zu diesem Thema)	114
dS	6	VI	AUF		Landtagswahl NRW 2005 (Kreis und Balkendiagramm gegeben im Bild)	168
dS	6	VI	AUF		Stochastik als inhaltsbezogene Kompetenz ausgewiesen	168
dS	6	VI	AUF	DKS	Zahlenlisten auszählen	168
dS	6	VI	AUF	DKS	Tabellen lesen	168
dS	6	VI	AUF	DKS	Säulendiagramm erstellen	168
dS	6	VI	AUF	DKB	Mit relativen Häufigkeiten umgehen	168
dS	6	VI	AUF		Körpergröße Jungen und Mädchen (Boxplot abgebildet)	169
dS	6	VI	AUF	DKB	Kreisdiagramme erstellen und lesen	169
dS	6	VI	AUF	DKB	Zahlenlisten durch Kennzahlen charakterisieren	169

dS	6	VI	AUF	DKB	Boxplots erstellen und lesen	169
dS	6	VI	ERK	1.1	Was Kassenzettel erzählen (Mittelwerte)	170
dS	6	VI	ERK	1.2	Kassenbedienung (absolute Häufigkeit, Mittelwerte)	170
dS	6	VI	ERK	1.3	Kaufbeträge und Waren (absolute Häufigkeit, Mittelwerte)	170
dS	6	VI	ERK	1.4	Kunden (rel. Häufigkeit)	170
dS/ WR	6	VI	ERK	2	Unabhängigkeit beim Roulette Spiel (qualitativ, subjektive Wahrscheinlichkeit, Strichliste)	171
dS/ WR	6	VI	ERK	3	Sind Münzen vergesslich? (Wurfsequenzen analysieren durch Experiment, Strichliste, [subjektiver und frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff])	171
dS	6	VI	LE1	EIN	Gefälschte Banknoten (Kreisdiagramme interpretieren)	172
dS	6	VI	LE1	EIN	Erklärung der Begriffe Statistik, Anteile in Bezug auf Grundmenge, relative Häufigkeit	172
dS	6	VI	LE1	MK	Anzahlen nennt man in der Statistik absolute Häufigkeiten . Die zugehörigen Anteile an der Gesamtzahl nennt man relative Häufigkeiten . $relative\ Häufigkeit = \frac{absolute\ Häufigkeit}{Gesamtzahl}$ Die Summe aller relativen Häufigkeiten muss 1 oder 100% ergeben.	172
dS	6	VI	LE1	EIN	Erklärung Diagramme (Säulen-, Kreis- & Streifendiagramme)	173
dS	6	VI	LE1	BSP1	Anzahl Geschwister (Kreisdiagramm erstellen)	173
dS	6	VI	LE1	BSP2	Kreisdiagramm überschlagsmäßig lesen	173
dS	6	VI	LE1	1	Liegen relative Häufigkeiten vor? (Kreisdiagramm erstellen)	174
dS	6	VI	LE1	2	Rel. Häufigkeiten bestimmen, Kreisdiagramm skizzieren	174
dS	6	VI	LE1	3	Relative Häufigkeiten <-> Winkel im Kreisdiagramm <-> absolute Häufigkeiten (ablesen aus Kreisdiagramm)	174

dS	6	VI	LE1	4	Schreibgeräte (Diagrammtypen vergleichen)	174
dS	6	VI	LE1	BDS	Ablezen aus Kreisdiagramm (Prozent, absolute Häufigkeit)	175
dS	6	VI	LE1	5	Ski-Freizeit (relative Häufigkeit, Vergleich von relativen Häufigkeiten)	175
dS	6	VI	LE1	6	Beliebteste Freizeitparks (Diagramm Vergleich und Manipulation)	175
dS	6	VI	LE1	7	Verhältnis Inhalt zur Verpackung (darstellen mit Diagramm)	176
dS	6	VI	LE1	8	Einschaltquoten (Diagramm erstellen)	176
dS	6	VI	LE1	9	Verkehrssünder (absolute & relative Häufigkeiten, Diagramm erstellen)	176
dS	6	VI	LE1	10	Benotung (Einschätzung rel. Häufigkeiten hinsichtlich Normiertheit, Diagramm erstellen)	176
dS	6	VI	LE1	11	Einschaltquoten (relative Häufigkeiten, Diagramm erstellen)	177
dS	6	VI	LE1	12	Frühstücksumfrage (Daten geeignet auswählen)	177
dS	6	VI	LE2	EIN	Kinderwunsch (Mittelwert)	178
dS	6	VI	LE2	EIN	Erklärung der Begriffe Mittelwerte, Median, arithmetisches Mittel, Urlisten, Ausreißer,	178
dS	6	VI	LE2	EIN	Median gegenüber Ausreißern stabiler als der Mittelwert	178
dS	6	VI	LE2	MK	Für Zahlenlisten gibt es zwei Mittelwerte, das arithmetische Mittel und den Median: arithmetisches Mittel = $\frac{\text{Summe aller Werte}}{\text{Anzahl der Werte}}$ Der Median liegt in der Mitte der Liste. Unterhalb und oberhalb des Medians liegen gleich viele Zahlen der Liste.	178
dS/ WR	6	VI	LE2	EIN	„ Zufallsschwankungen : Die Ergebnisse statistischer Untersuchungen schwanken meist zufällig. So liefern Umfragen an verschiedenen Tagen und Orten selten die gleichen Ergebnisse. Auf einer Personenwaage ist man an aufeinander folgenden Tagen	179

					meist unterschiedlich schwer. Mittelwerte dienen dazu, diese Zufallsschwankungen zu verringern.“	
dS	6	VI	LE2	BSP1	Brötchengewicht (Mittelwert, Zufallsschwankungen)	179
dS	6	VI	LE2	BSP2	Vergleich Klassenspiegel (arithmetisches Mittel & Median)	179
dS	6	VI	LE2	1	Klassenstärke (arithmetisches Mittel)	179
dS	6	VI	LE2	2	Mittelwerte versch. Größen (Bestimmung arithmetisches Mittel & Median)	179
dS	6	VI	LE2	3	Testergebnis (arithmetisches Mittel, abs. Häufigkeit, Median)	179
dS	6	VI	LE2	4	Klassenarbeitsergebnis (arithmetisches Mittel vergleichen)	180
dS	6	VI	LE2	5	Durchschnittstemperatur (vom arithmetischen Mittel Datenreihe konstruieren)	180
dS	6	VI	LE2	6	Niederschlag (Tabelle erstellen, arithmetisches Mittel, Median)	180
dS	6	VI	LE2	7	Körpergrößenzunahme im Mittel pro Jahr in der Klasse (arithmetisches Mittel)	180
dS	6	VI	LE2	BDS	Weitsprung (arithmetisches Mittel, relative Häufigkeit der Werte größer als Median)	180
dS	6	VI	LE2	8	Leserbefragung (Mittelwerte bestimmen durch Zusammenfassung von Stichproben)	180
dS	6	VI	LE2	9	Einkaufen Überschlagen vor der Kasse (Mittelwert von Nachkommastellen von Preisen bestimmen)	180
dS	6	VI	LE2	10	Radrennen (Median bei geg. rel. Häufigkeiten bei Klasseneinteilung bestimmen)	181
dS/ WR	6	VI	LE2	11	Muster bei mehrfachem Münzwurf entdecken (Zufallsexperiment durchführen, Schätzen von Spieldauer)	181
dS/ WR	6	VI	LE2	12	Startposition Spiel (wie lange im Mittel)	181
dS/ WR	6	VI	LE2	13	Auslaufen des Fahrrads (arithmetisches Mittel von Umdrehungszeiten bestimmen)	181
dS	6	VI	LE3	EIN	Autobahnspurfrequenz (Boxplots und Balkendiagramm)	182

dS	6	VI	LE3	EIN	Erklärung der Begriffe Streuung und Boxplots (Mittelwert, Minimum, unteres Quartil, Median, oberes Quartil, Maximum)	182
dS	6	VI	LE3	MK	<ul style="list-style-type: none"> - Der Median der unteren Datenhälfte heißt unteres Quartil - Der Median der oberen Datenhälfte heißt oberes Quartil - Zwischen den beiden Quartilen liegt ungefähr die Hälfte der Daten - darunter und darüber liegt jeweils etwa ein Viertel der Daten. 	182
dS	6	VI	LE3	EIN	Erklärung Boxplot zeichnen	182
dS	6	VI	LE3	MK	<p>[Bild Boxplot]</p> <ul style="list-style-type: none"> - In der Box liegt ca. die Hälfte aller Daten, im Bereich der Antennen je ca. ein Viertel. - Je kürzer die Box, desto weniger streuen die Daten um den Median - Die Länge der Box heißt Quartilsabstand. Der Quartilsabstand ist ein Streuungsmaß. 	183
dS	6	VI	LE3	BSP1	Reaktionszeiten (Boxplot erstellen)	183
dS	6	VI	LE3	BSP2	Boxplots und Balkendiagramme (erstellen & vergleichen)	184
dS	6	VI	LE3	1	Weitsprung (Boxplots interpretieren, schätzen, verändern)	184
dS	6	VI	LE3	2	Radrennen (Boxplot lesen, verändern)	184
dS	6	VI	LE3	3	Pulsschlag (Boxplot erstellen, interpretieren, Selbstversuch)	185
dS	6	VI	LE3	BDS	Boxplot (erstellen, Lage Median, Eigenschaft Antennen)	185
dS	6	VI	LE3	4	Pralinen verpacken (Boxplots interpretieren & erstellen)	185
dS	6	VI	LE3	5	Testergebnisse (Diagramme interpretieren, Boxplots und Säulendiagramme zuordnen)	185
dS	6	VI	WVV	1	Anzahl Fernsehgeräte (Auswertung, Umfrage in der eigenen Klasse)	186

dS	6	VI	WVV	2	Klassenarbeitsspiegel Vergleich (Begründung welche besser)	186
dS	6	VI	WVV	3	Fernsehquoten (Diagramme auswählen, erstellen & recherchieren)	186
dS	6	VI	WVV	4	Taschengeld – fauler Statistiker (Diagramm auswählen, Boxplot erstellen)	186
dS	6	VI	WVV	5	Zitrone kaufen (Mittelwerte bestimmen & vergleichen, Boxplot erstellen)	186
dS	6	VI	WVV	6	Schultasche (Diagramme bewerten, damit argumentieren)	187
dS	6	VI	WVV	7	Telefonrechnung (Boxplots diskutieren)	187
dS/ WR	6	VI	WVV	8	Mehrfacher Münzwurf mit Strafwurf (Experiment, frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff) [im Randtext steht: Halte erst deine Vermutung im Logbuch fest; Notiere markante Versuchsergebnisse; Halte fest, was du aus dem Versuch dazu gelernt hast]	187
dS	6	VI	WVV	9	Gedicht Entenjagd (eigenes Gedicht erstellen)	187
dS	6	VI	EXK	1	Statistik mit dem Computer (Tabellen Kalkulation bedienen; A: Kreisdiagramm erstellen; B: Relative Häufigkeiten berechnen, Säulendiagramme erstellen; C: Zahlenliste auswerten; D: Zahlenliste nachträglich verändern „Excel denkt mit“; E: Daten sortieren, Quartile berechnen; 1 Diagramme zeichnen, relative Häufigkeiten berechnen; 2 Mittelwerte berechnen, Listen sortieren, Quartile bestimmen; 3 Boxplots zeichnen)	188 – 192
dS/ WR	6	VI	EXK	2	Lebensdauer von Seifenblasen (Versuchsdurchführung, Auswertung, ingenieurmäßiges Arbeiten)	193
dS	6	VI	RBS		In Statistik Beantwortung von Fragen durch Sammeln und Auswerten von Daten; Absolute und relative Häufigkeiten, Stichprobenumfang; Summe aller rel. Häufigkeiten 1=100%; Kreis- und Streifendia-	194

					gramme, sowie Säulendiagramme; Arithmetisches Mittel & Median; Boxplots, unteres Quartil, oberes Quartil, Minimum und Maximum, Antennen; Quartilsabstand, Maß für Streuung	
dS	6	VI	TRA	1	Schulweg (relative Häufigkeiten, Säulen-, Kreis- und Streifendiagramm)	195
dS	6	VI	TRA	2	Bußgelder (Säulendiagramm interpretieren, erstellen)	195
dS	6	VI	TRA	3	Diagramm zu Mittelwert bilden	195
dS	6	VI	TRA	4	Körpergrößen in Bezug auf das Geschlecht (statistische Kennwerte bestimmen, Boxplot erstellen & vergleichen)	194
dS	6	VI	TRA	5	Boxplot, Säulendiagramm (passende Zahlenliste konstruieren, mit Säulendiagramm vergleichen)	194
	6	VII	ERK	1	Experimentieren und Messen (Gefäße vergleichen, durch Befüllen, Auswerten und eigene Maßeinheiten entwickeln und vergleichen. [Analog zu physikalischem Messen; Randtext: „Tipp: Denkt daran, dass Messwerte nicht immer exakt sind!“; funktionaler Zusammenhang])	198
dS	6	VII	LE4	12	Mineralölverbrauch (Säulendiagramm zeichnen)	216
dS	6	ST			Zahlen, Diagramme veranschaulichen	225
dS	6	ST			Marathon (veranschaulichen Laufzeiten, Durchschnittsgeschwindigkeiten bestimmen)	228 – 229
dS	6	ST			100m Lauf (Diagramm erstellen, Durchschnittsgeschwindigkeiten bestimmen)	230 – 231
dS	6	ST			Weitsprung (Diagramm erstellen, eigener Versuch ausprobieren und vergleichen)	232 – 233
dS	6	ST			Kugelstoßen (Mittelwert bestimmen)	233

dS	6	ST			Schwimmen 100m (Diagramm erstellen, Durchschnittsgeschwindigkeit)	236 – 237
dS	6	REG			Absolute Häufigkeit, Anteil, arithmetisches Mittel, Ausreißer, Boxplot, Daten sortieren, Diagramm, Häufigkeit (absolut, relativ), Kreisdiagramm	268
dS	6	REG			Maximum, Median, Minimum, Mittel (arithmetisch), Mittelwert, oberes Quartil, Quartil (oberes, unteres), Quartilsabstand, relative Häufigkeit, Säulendiagramm, Sortieren von Daten, Statistik, Streifendiagramm, Strichliste, Tabellenkalkulationsprogramm	269
dS/ WR	6	REG			Unteres Quartil, Urliste, Zahlenliste auswerten, Zufallsschwankungen	270
7. Jahrgangsstufe						
WR	7	ML			Straffung des Lehrplans [...] In der Stochastik stehen der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Beziehung zu den relativen Häufigkeiten im Zentrum. Simulationen vertiefen die Zusammenhänge.	3
dS/ WR	7	I	LE1	EIN	Trefferquote (relative Häufigkeiten, vergleichen dieser Häufigkeiten)	12
dS	7	I	LE1	9	Klassensprecherwahl (relative Häufigkeiten)	13
dS	7	I	LE1	7	Relative Häufigkeiten verschiedener Ereignisse	13
dS	7	I	LE1	10	Freiwurf-Trefferquote (vergleichen relativer Häufigkeiten)	14
dS	7	I	LE1	14	Prozentsätze in Diagrammen darstellen (rel. Häufigkeiten darstellen)	14
dS	7	I	LE1	15	Einwohner, Ausländer, Bundesliga (relative Häufigkeiten aus Text entnehmen und darstellen)	14
dS	7	I	LE2	EIN	Gewinnchance Tombola vergleichen (relative Häufigkeiten)	15

dS	7	I	LE2	EIN	Schüleranteil (relative Häufigkeiten, Grundwert)	15
dS	7	I	LE2	MK	Klassensprecherergebnis zur Illustration des Prozentsatzes, Prozentwertes & Grundwertes	15
dS	7	I	LE2	BSP2	Mädchenanteil Schule (relative Häufigkeiten vergleichen)	15
WR /dS	7	I	LE2	BdS2	Schulweg, Tombola & Lieblingsfach Befragung (Prozent & Grundwert unterscheiden)	16
dS	7	I	LE2	7	Schüler-Gewalt (relative Häufigkeiten aus Text rekonstruieren)	17
dS	7	I	LE2	9	Buchstabenhäufigkeit (relative Häufigkeit bestimmen)	17
dS	7	I	LE2	10	Linkshänder (relative Häufigkeiten, Prozentwert und Satz sowie Grundwert nutzen)	17
dS	7	I	LE2	11	Verkehrssünder (relative Häufigkeiten als Prozentsätze)	17
dS	7	I	LE3	BSP1	Jugendliche Einwohner NRW (relative Häufigkeiten, bzw. Prozentsätze)	19
dS	7	I	LE3	19	Umfrage zu verschiedenen Themen (Ergebnisse in Tabelle und Kreisdiagramm mit Prozentangaben)	22
dS	7	I	LE3	20	Ausländer pro Einwohner Deutschland (relative Häufigkeit -> absolute Häufigkeit)	23
dS	7	I	LE3	21	Brillenträger Umfrage (Ergebnisse auswerten, eigene Umfrage)	23
dS/ WR	7	I	LE6	5	Farbblindheit (relative Häufigkeit bestimmen, vergleichen & handeln)	31
dS	7	I	LE6	6	Umweltbewusstsein (relative Häufigkeit auf verschiedene Grundmengen hochrechnen)	32
dS	7	I	LE6	7	Zahl der Tore pro Spiel (relative Häufigkeiten bestimmen, mit aktuellen vergleichen)	32
dS	7	I	WV	3	Inhaltsstoffe Kartoffel (rel. Häufigkeiten, grafisch darstellen)	34
dS	7	I	WV	5	Pazifik (relative Häufigkeiten versch. Größen)	35

dS	7	I	WVV	Info	Wasserverbrauch (Kreisdiagramme & Prozentangaben zusammenbringen)	35
dS	7	I	WVV	6	Tierfutter (Kreisdiagramm darstellen, absolute Häufigkeiten bestimmen)	35
dS	7	I	WVV	7	SV-Wahl (Kreisdiagramm erstellen)	35
dS/ bS	7	I	WVV	8	Müsli (Kreisdiagramm interpretieren, verändern)	35
dS	7	I	WVV	9	Landtagswahl Sitzverteilung (relative Häufigkeiten, absolute Häufigkeiten)	35
dS	7	I	WVV	11	Scheidungsrate, Schnellfahrer & Abiturienten (relative Häufigkeiten prüfen & verändern)	36
dS	7	I	GES		Basketball (relative Häufigkeiten interpretieren, darstellen & vergleichen)	377
dS	7	I	EXK	2	Tiervorfahrengroßen vergleichen (relative Häufigkeit)	38
dS	7	I	EXK	4	Tierarten (Kreisdiagramm interpretieren, absolute Häufigkeiten bestimmen)	38
dS/ WR	7	I	EXK	5	Tierordnungen (relative Häufigkeiten bestimmen, aus bedingten relativen Häufigkeiten)	39
dS	7	I	EXK	6	Säugetier-Lebensräume (Kreisdiagramm interpretieren)	39
dS	7	I	RBS		Kreisdiagramme und Prozentangaben	40
dS	7	I	TRA		Schülerzahlen 7. Klasse (Kreisdiagramm erstellen)	41
dS	7	II	AUF		Bild: Dodekaeder Würfel; Bild: Altersaufbau von Menschen aufgeteilt in Männer & Frauen; Text: „Zufälle gehören zum Leben, denn vieles lässt sich nicht oder nur schwer vorhersagen. Den meisten Menschen ist es jedoch wichtig, Vorgänge, bei denen Zufall eine Rolle spielt, einzuschätzen – es sind gute Prognosen gefragt. Die Mathematik kann dabei helfen.“	42
WR	7	II	AUF	DKS	Mit dem Zufall umgehen; Versuchsergebnisse relative Häufigkeiten (in %) und Mit-	42

					telwerte beschreiben und grafisch darstellen; Daten mit Tabellenkalkulation auswerten.	
WR	7	II	AUF		Stochastik als inhaltsbezogene Kompetenz in diesem Kapitel ausgewiesen.	42
WR	7	II	AUF		Bild: Angeln; Bild: Brettspiel; Bild: Satellitenbild von Erde; Bild: Pferderennen;	43
WR	7	II	AUF	DKB	Wahrscheinlichkeiten von relativen Häufigkeiten unterscheiden; Wahrscheinlichkeiten schätzen und berechnen; Mit Wahrscheinlichkeiten vorhersagen machen; Wahrscheinlichkeiten bewerten; Zufallsversuch simulieren, auch mit Tabellenkalkulation.	43
WR	7	II	ERK	1	Euro im Gitternetz, Euro im 3 cm Quadrat. (geom. Wahrscheinlichkeit, analog zum Buffonschen Nadelparadoxon, Wahrscheinlichkeiten schätzen, Versuchsaufbau variieren, Versuchsdurchführung, Berechnung)	44
WR	7	II	ERK	2	Würfelentscheidung Spiel & Tischdecken (Gewinnchance schätzen, Versuchsdurchführung)	44
WR	7	II	ERK	3	Noten Würfeln mit 5 Münzen oder einem Würfel (Spekulieren->Experimentieren ->Bewerten [->Berechnung LE 2 ->Simulation LE4] [Herv. G.S.])	44
WR	7	II	LE1	EIN	Niederschlagswahrscheinlichkeit, u.a. Erwachsene befragen und Lexikon (frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff, Anwendung auf eigene Umwelt)	46
WR	7	II	LE1	EIN	[Besprechen] „Das Würfeln mit einem Spielwürfel ist ein ‚Zufallsexperiment‘, denn man kann das einzelne Ergebnis (die Augenzahl, die fallen wird) nicht vorhersagen. ‚Es hängt vom Zufall ab‘.“ Bsp. Würfeln mit Riemer-Würfel; Ob eine gute oder schlechte Schätzung vorliegt „muss“ experimentell geprüft werden.	46

					<p>Randtext: „Erst spekulieren, dann experimentieren, am Ende bewerten.“ (Herv. i. Original)</p> <p>[...]</p> <p>„Um die Wahrscheinlichkeiten nach einem Experiment anzugeben, bildet man mitunter die Mittelwerte der relativen Häufigkeiten entsprechender Seiten. [Beispielberechnung]. Da die relativen Häufigkeiten sich aber von Versuch zu Versuch ändern, lassen sich die Wahrscheinlichkeiten aus den Häufigkeiten prinzipiell nicht „genau“ bestimmen.“</p> <p>Randtext: „Der Quader muss mit einem Würfelbecher gewürfelt werden, der auf den Tisch gestülpt wird.“</p> <p>Randtext: Wahrscheinlichkeiten machen Vorhersagen auf lange Sicht. Beim Quader sind die Wahrscheinlichkeiten von Gegenseiten gleich groß. Relative Häufigkeiten werden nach einem Experiment ermittelt, beim Quader sind die relativen Häufigkeiten von Gegenseiten nur ungefähr gleich groß.]</p>	47
WR	7	II	LE1	MK	<p>Bei einem Zufallsexperiment kann man die einzelnen Ergebnisse nicht vorhersagen, man kann aber Wahrscheinlichkeiten (Herv. i. Original) zuordnen, die zusammen 1 (100%) ergeben müssen. [Normiertheit, G.S.]</p> <p>Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn bei vielen Versuchsdurchführungen die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen</p>	47

					und Symmetrien beachtet werden. (Herv. G.S.)	
WR	7	II	LE1	BSP	Dreieckswürfel (Wahrscheinlichkeiten schätzen mit und ohne Experiment)	47
WR	7	II	LE1	1	Wahrscheinlichkeit schätzen bei verschiedenen Legosteinen (Schätzen -> relative Häufigkeiten Liste ->Experiment-> verbessern	48
WR	7	II	LE1	2	Reißzwecken werfen (Bewertung von Datenreihen, Schätzung, Aussagen bewerten)	48
WR	7	II	LE1	3	Quader, Dreieckswürfel (geometrische Wahrscheinlichkeit berechnen, Vergleich zu Datenreihe)	48
WR	7	II	LE1	4	Umfrage Schuld an schlechten Noten (relative Häufigkeiten vs. Wahrscheinlichkeiten)	48
WR	7	II	LE1	BDS	Flügelmutter werfen (drei Ergebnisse betrachten, relative Häufigkeiten -> kommentieren ->Ergebnisraum anpassen)	49
WR	7	II	LE1	5	Telefonbuch und Hausnummern (relative Häufigkeit Hausnummern, „zufälliges Auswählen“ der Hausnummern aus dem Telefonbuch, Aussagen untersuchen)	49
WR	7	II	LE1	6	Schüttelbox (Schätzen, größere Stichprobe & eigenes Experiment)	49
WR	7	II	LE1	7	Sterbewahrscheinlichkeit (Recherche & gemeinsame Poster Erstellung)	49
WR	7	II	LE2	EIN	Zweifacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeiten von Zahl- & Wappen-Pasch und keins von beidem)	50
WR	7	II	LE2	EIN	Begriffsklärung Laplace-Wahrscheinlichkeit (Bild von Laplace (Lebensdaten), Glücksrad & Urne)	50
WR	7	II	LE2	MK	Zufallsexperimente bei denen man annehmen kann, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, nennt man Laplace-Experimente . Für diese Zufallsexperimente muss man keine Versuchsreihen durchführen, um Wahrscheinlichkeiten angeben zu	50

					<p>können. Diese Wahrscheinlichkeiten nennt man Laplace-Wahrscheinlichkeiten.</p> <p>Summenregel: Bei Situationen mit mehreren Ergebnissen erhält man die W., indem man die W. der zugehörigen Ergebnisse addiert.</p>	
WR	7	II	LE2	EIN	Summenregel gilt auch für „nicht Laplace“-Wahrscheinlichkeiten (bspw. Zufallsgerät Legoachter)	50
WR	7	II	LE2	BSP1	Urnenziehung (Laplace-Wahrscheinlichkeit bestimmen)	51
WR	7	II	LE2	BSP2	Urnenziehung (lohnendes Glücksspiel, Veränderung der Ergebnismenge, Beurteilung)	51
WR	7	II	LE2	1	Glücksrad (Laplace Wahrscheinlichkeit für Ereignisse bestimmen, Hochrechnen für mehrere Durchführungen)	51
WR	7	II	LE2	2	Glücksrad (Wahrscheinlichkeit bestimmen, Summenregel anwenden)	51
WR	7	II	LE2	3	Dodekaeder Würfel (verschiedene Ereignisse betrachten)	51
WR	7	II	LE2	4	Ziehungen aus Skatenspiel (verschiedene Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen) Infotext: Gegenwahrscheinlichkeit	52
WR	7	II	LE2	5	Würfelwerfen (verschiedene Ereignisse, Wahrscheinlichkeit bestimmen mit relativen Häufigkeiten)	52
WR	7	II	LE2	6	Eis Bezahlen (unsymmetrische Ereignisse, Hochrechnen, „gerechtes“ Spiel, Zufallsversuch anpassen)	52
WR	7	II	LE2	7	Kino gehen (Ergebnismenge in drei verschiedene Ereignisse aufteilen, mit Dodekaeder und klassischem Spielwürfel)	52
WR	7	II	LE2	BDS1	Urnenexperimente (Wahrscheinlichkeit für bestimmte Ziehungen aus verschiedenen Urnen bestimmen)	52

WR	7	II	LE2	BDS2	Urnenexperiment (Hochrechnen, also Prognose für mehrere Versuchsdurchführungen)	52
WR	7	II	LE2	8	„Mensch ärgere dich nicht“ Spiel (Wahrscheinlichkeit für verschiedene Ereignisse, Wechsel Zufallsgerät vom klassischen Würfel zu Lego 8er)	52
WR	7	II	LE2	9	Vor dem Ausrechnen experimentieren (Wahrscheinlichkeiten von verschiedenen Ereignissen beim „Mensch ärgere dich nicht“ Spiel)	53
WR	7	II	LE2	10	Worte ziehen aus Socke (Urnenexperiment verschiedene Ereignisse mit mehreren Ziehungen)	53
WR /KB	7	II	LE2	11	Urnen für Wort Ziehung aussuchen (Urne auswählen, mit und ohne zurücklegen)	53
WR	7	II	LE2	12	Zweifacher Würfelwurf, wie oft Pasch? (Problem Ergebnismenge mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen aufstellen)	53
WR	7	II	LE2	13	Annahme und Begründung für Gleichverteilung in verschiedenen Kontexten; Randtext: „Ob Laplace-Annahmen gerechtfertigt sind?“	53
WR	7	II	LE2	14	Stiftrollen (Gleichverteilung gerechtfertigt? Versuch durchführen (120-mal), Prädikat „Laplace“-Bleistift); Randtext: Man kann auch mit Bleistiften experimentieren, die statt 6 nur 3 Seiten haben.	54
WR	7	II	LE2	15	Glücksrad basteln (Schätzung relativer Häufigkeit bei gegebenem n, Experiment, vgl. mit Mitschüler*innen, Prädikat „Laplace“)	54
WR	7	II	LE2	16	Glücksspiel mit Gewinn entwickeln (Zufallsversuch vorstellen, Gewinnaussicht begründen)	54
dS	7	II	LE3	EIN	Vergleich der Aufgabenlösungen in zentralen Test zweier Klassen (Begründung und Interpretation der Boxplots)	55
dS	7	II	LE3	EIN	Analog zu 6_VI_LE_3 (S.182–183)	55

dS	7	II	LE3	BSP	Analog zu 6_VI_LE_3_BSP2 (S.184)	55
dS	7	II	LE3	1	Analog zu 6_VI_LE_3_1(S.184)	56
dS	7	II	LE3	2	Warten auf 1. Sechs (Boxplot erstellen, statt Median dreimal arithmetisches Mittel)	56
dS	7	II	LE3	3	Boxplot zu Datenliste mit 20 Zahlen (verschiedene Verteilung, Datenliste zu Boxplot konstruieren)	56
dS	7	II	LE3	4	Analog zu 6_VI_LE_3_3 (S.185)	56
dS	7	II	LE3	BDS	Analog zu 6_VI_LE_3_BDS (S.185)	57
dS	7	II	LE3	5	Analog zu 6_VI_LE_3_4 (S.185)	57
dS	7	II	LE3	6	Analog zu 6_VI_LE_3_5 (S.185)	57
WR	7	II	LE4	EIN	Simulationsexperiment „Wundertüte“ (Wahrscheinlichkeit schätzen, danach simulieren mit Würfel)	58
WR	7	II	LE4	EIN	„Manchmal kann man Wahrscheinlichkeit nicht theoretisch berechnen, dann braucht man Simulationen . ‚Simulation‘ meint experimentelle Durchführung des Experiments oder ‚Nachahmung‘ eines gleichwertigen Experiments mit geeigneten Hilfsmitteln wie Münzen, Würfeln, Spielkarten oder Zufallszahlen. Man schätzt die Wahrscheinlichkeit aus den beobachteten relativen Häufigkeiten.“	58
WR	7	II	LE4	MK	Die Durchführung eines Zufallsexperiments oder die Nachahmung durch ein anderes Zufallsexperiment mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten bezeichnet man als Simulation . Die relativen Häufigkeiten, die sich dabei ergeben, kann man als Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten des ursprünglichen Zufallsexperiments verwenden.	58
WR	7	II	LE4	BSP	Prinzessinnen vorsprechen (Schätzen, wie viele Prinzessinnen sprechen im Mittel vor), Randtext: Prinz=Personalchef	58
WR	7	II	LE4	1	Würfel statt Glücksrad (quasi Zufallsvariable bilden, Wahrscheinlichkeit schätzen,	59

					Simulation durchführen, vgl. mit Glücksrad) [Hier verschiedene Zufallsobjekte miteinander vergleichen]	
WR	7	II	LE4	2	Tetraeder durch anderes Zufallsobjekt ersetzen (quasi Zufallsvariable bilden, weiteres Zufallsobjekt finden, Simulationen durchführen)	59
WR	7	II	LE4	3	Sammelsticker Cornflakes (Erwartungswert Packungskauf für alle drei Sticker durch Simulation)	59
WR	7	II	LE4	4	Schere-Stein-Papier mit Würfeln (Konstruktion Simulation, durchführen, Wartezeit als Boxplot)	59
WR	7	II	LE4	5	Boxplot für Simulationsergebnis (schätzen, Simulation, Schwankung durch Boxplot, Wahrscheinlichkeit schätzen, prüfen, zusammentragen)	59
WR	7	II	LE4	6	Computer würfelt (Tabellenkalkulation, Simulation Zufallsgeräte, verändern)	60
WR	7	II	LE4	7	Güte Computerwürfel (relative Häufigkeiten von Zufallszahlen gleichwahrscheinlich, Vergrößerung der Simulationszahl, Augensummen von zwei oder mehr Würfeln)	60
dS/ WR	7	II	LE4	8	Gesetz der großen Zahl (Simulation Excel, Laplace-Münze simulieren, berechnen der relativen Häufigkeit Wappen bei zunehmender Versuchszahl, graphisch darstellen, Formulierung [empirisches] Gesetz der großen Zahl, Erhöhung der Versuchszahl und Prüfung)	61
dS/ WR	7	II	LE4	9	Boxplot zu Wurfzahlen zum [empirischen] Gesetz der großen Zahl (Streuung nimmt mit zunehmender Versuchszahl ab)	61
WR	7	II	WV	1	Würfeln mit Rundholz (relative Häufigkeit zu Zufallsgerät zuordnen, Wahrscheinlichkeit schätzen)	62

WR	7	II	WVV	2	Roulette (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse, Simulationsmöglichkeit, diskutieren in Gruppen)	62
WR	7	II	WVV	3	Pferderennen (Ergebnismenge notieren, Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bestimmen, Wahrscheinlichkeit weiteres Ereignis)	62
WR	7	II	WVV	4	Einschaltquoten (recherchieren, Kreisdiagramm erstellen)	62
WR	7	II	WVV	5	Fernsehquoten (absolute Häufigkeit aus relativen Häufigkeiten, nachrechnen erklären, relative->absolute Häufigkeiten bestimmen, Fehleinschätzung kommentieren)	63
WR	7	II	WVV	6	Lotto (auf welche Weise Spiel simulieren, Simulation durchführen, berechnen relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit berechnen (Laplace-Annahme), Schätzung prüfen, Veränderung Lospreis Einfluss auf Gewinn)	63
WR	7	II	WVV	7	Keine „6“ würfeln (wie viele Würfel nimmt man, dass keine 6 fällt?)	63
bS	7	II	EXK		Schokoladentest (zufällige Wahl simulieren, Ergebnisse zusammentragen, in Tabelle, Säulendiagramm oder Boxplot darstellen, Entscheidungskriterium formulieren, Experiment durchführen, Wahrscheinlichkeit der zufälligen korrekten Auswahl angeben)	64–65
WR /dS	7	II	RBS		Zufallsexperiment; absolute & relative Häufigkeit; Wahrscheinlichkeit, Laplace-Wahrscheinlichkeit; Summenregel; Boxplot; Simulation;	66
WR	7	II	TRA	1	Kugel aus Urne ziehen (verschiedene Ereignisse Wahrscheinlichkeit berechnen; Manipulieren)	67
WR	7	II	TRA	2	Glücksrad (relative Häufigkeiten, Schätzen von Wahrscheinlichkeiten, Annahmen für Schätzung geben)	67

WR	7	II	TRA	3	Quader-Wurf (absolute durch relative Häufigkeiten abschätzen)	67
dS/ KB	7	II	TRA	4	Geburtstag raten (relative Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit schätzen, Annahme für Schätzung wiedergeben)	67
WR /KB	7	II	TRA	5	Zweifacher Würfelwurf (bestimmen von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Augensummen)	67
WR	7	II	TRA	6	Urnenexperiment (Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge)	67
WR /KB	7	II	TRA	7	Kinder in Reihe aufstellen (Simulation, Aufstellungswahrscheinlichkeit bestimmen)	67
WR /KB	7	II	TRA	8	Theaterbesuch (Wahrscheinlichkeit Sitzplätze ohne Unterscheidung einzelner Kinder)	67
	7	IV	ERK	2	Randtext: „ Algebra : Die Lehre von den Beziehungen zwischen mathematischen Größen und Regeln, denen Sie unterliegen“	106
dS	7	V	LE1	9	Dreiecke würfeln (relative Häufigkeiten konstruierbarer Dreiecke)	153
KB/ WR	7	V	LE2	EIN	Größen am Dreieck aus Urne ziehen	155
KB/ WR	7	VI	WVV	17	Gleichungen würfeln (Schätzung lösbarer (eine, unendlich viele Lösungen), unlösbare Gleichungssysteme, relative Häufigkeiten, lösbarer unlösbare Gleichungssysteme nach Durchführung)	210
dS	7	ST			Durchschnittskilometerzahl, CO ₂ -Emission (arithmetisches Mittel, relative Häufigkeit)	219
KB/ WR	7	ST			Urne ziehen – Bahnspiel (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse beim mehrfachen ziehen feststellen)	220
dS	7	ST			Hochrechnen, Personen in Stau	220
dS	7	ST			Personen im Auto (Experiment durchführen, Stichprobe und Rahmenbedingungen diskutieren)	223

dS	7	ST			Verkehrsunfälle (Daten auswerten, Anteil bewerten)	229
dS	7	SEL BST	II	1	Klassenspiegel (Boxplot, Unterschiede beschreiben, wer besser war)	229
dS	7	SEL BST	II	2	Datenreihen (statistische Kennwerte bestimmen, Boxplots)	230
dS	7	SEL BST	II	3	Koffergewicht (Boxplot aus Säulendiagramm, relative Häufigkeiten, proportionale Zuordnung)	230
dS/ WR	7	REG			Absolute Häufigkeiten, Boxplot, Ergebnis eines Zufallsversuchs, Gesetz der großen Zahlen, Häufigkeit (absolut, relativ), Kreisdiagramm, Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit, Lotto, Median,	259
dS/ WR	7	REG			Oberes Quartil, Pasch, Quartil, relative Häufigkeiten, Simulation eines Zufallsexperiments, Tabellenkalkulationsprogramm, unteres Quartil, Wahrscheinlichkeit (eines Ereignisses, Laplace), Zufallsexperiment, Zufallszahl,	260
8. Jahrgangstufe						
WR	8	I	LE1	EIN	Randtext: „Experiment: 1. Schreibe auf ein Blatt „0,“. 2. Würfle eine Ziffer aus. 3. Schreibe die Ziffer an die erste Stelle hinter dem Komma. 4. Würfle wieder und schreibe die Ziffer an die zweite Stelle hinter dem Komma. 5. Führe dies immer weiter fort.“ [Würfel als nicht periodisches Zufallsgerät]	13
WR	8	I	LE1	1	Irrationalzahl mit weiteren Zufallsgeräten erzeugen (Zufallsgerät auswählen, Experimente durchführen, Zahlen addieren ist Summe wieder Irrationalzahl)	13
WR /KB	8	II	LE2	KANN 25	Dreifacher Münzwurf (Ergebnismenge angeben, Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis bestimmen)	52
WR /KB	8	II	LE2	KANN 26	Zettel mit Buchstaben ziehen (Mächtigkeit der Ergebnismenge bestimmen, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses)	52

WR /KB	8	II	LE4	KANN 7	Karte aus Skatspiel ziehen (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen)	58
dS	8	II	LE4	KANN 8	Weitsprung (arithmetisches Mittel und Median bestimmen, Datenliste angeben für vorgegebenes arithmetisches Mittel und Median)	58
KB	8	II	EXK		Pascalsches Dreieck (Pascal als Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eher algebraische und geometrische Beispiele)	73
WR	8	III	AUF	DKS	Wahrscheinlichkeiten bestimmen; mit Wahrscheinlichkeiten Vorhersagen machen; Zufallsvorgänge simulieren	76
WR	8	III	AUF		Stochastik als inhaltsbezogene Kompetenz in diesem Kapitel ausgewiesen.	76
WR	8	III	AUF		Bild: Bowling; Bild: Netz mit Loch; Musik hören	76
WR	8	III	AUF		Titel: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Mit dem Zufall muss man immer rechnen	77
WR	8	III	AUF		Zitat (Dürrenmatt): „Je planmäßiger die Menschen vorgehen, desto wirksamer trifft sie der Zufall.“; Bild: Vererbung Färbungsmerkmal bei Hühnern; Bild: Spielkarten (vier Asse); Bild: Blitzeinschlag;	77
WR	8	III	AUF	DKB	Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagrammen berechnen; Rechnungen mit Gegenwahrscheinlichkeiten vereinfachen; Binomialverteilung als Werkzeug nutzen; Probleme lösen und Entscheidungen fällen durch Modellieren und Simulieren	77
WR	8	III	ERK	1	Hol OTTO aus der Socke (Experiment durchführen, Fragen formulieren, Fragen beantworten, Spieleinsatz, Baumdiagramm entwickeln)	78
WR	8	III	ERK	2	Glücksritter – vierfacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse beim mehrfachen Münzwurf bestimmen)	78

WR	8	III	ERK	3	Galtonbrett (Simulation am virtuellen Galtonbrett, Wahrscheinlichkeiten schätzen für bestimmtes Fach, verfeinere Schätzung durch größere Versuchszahl), Mehrfacher Münzwurf (analoges Vorgehen wie bei Galtonbrett), Simulation der Münzwürfe mit Tabellenkalkulation (Vergleich zu Experiment, graphische Auswertung)	79
WR	8	III	LE1	EIN	Zweimal Ampel überfahren $50\%+50\%=100\%$ (Stellung nehmen zur Aussage)	80
WR	8	III	LE1	EIN	Begriffsklärung Baumdiagramm, mehrstufiger Zufallsversuch, Ergebnisse als Pfade des Baumdiagramms, Wahrscheinlichkeitsverteilung Randtext: „Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten liegen zwischen 0% und 100%.“ Randtext: „Wahrscheinlichkeiten sind Modelle, die relative Häufigkeiten (bis auf Zufallsschwankungen) vorhersagen“.	80
WR	8	III	LE1	MK	Pfadregel Mehrstufige Zufallsexperimente kann man durch Baumdiagramme beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad (ein Ergebnis des mehrstufigen Experiments) erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades multipliziert.	80
WR	8	III	LE1	EIN	„Wenn man mehrere Pfade (Ergebnisse) zusammenfasst, spricht man von einem Ereignis “; Einführung Gegenereignis	81
WR	8	III	LE1	MK	Summenregel: Ein Ereignis besteht aus mehreren Ergebnissen. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addiert. Gegenereignis: Die Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses und des zugehörigen Gegenereignisses ergänzen sich zu 1 (100%).	81

WR	8	III	LE1	BSP	Patient, geheilt, nicht geheilt (Wahrscheinlichkeit versch. Ereignisse bestimmen).	81
WR /KB	8	III	LE1	1	Schlüsselanhängerfiguren (Anzahl Variationen bestimmen, Wahrscheinlichkeit eines Pfades bestimmen, Wahrscheinlichkeit möglicher Ereignisse bestimmen, zugehörige Annahme angeben, Simulation und relative Häufigkeiten mit Wahrscheinlichkeiten vergleichen) Randtext: „In b) kann man die Farbe der Bluse auswürfeln. Zum Beispiel könnte 1;2 für „blau“ stehen. Die Farbe der Hose könnte man mit einer Münze bestimmen. In c) können zweimal 10 Karten bei der Simulation helfen.“	82
WR	8	III	LE1	2	Zufallsversuch zu vorgegebenen Baumdiagramm finden.	82
WR	8	III	LE1	3	Dartspiel (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen, hochrechnen von absoluten Häufigkeiten aus Wahrscheinlichkeiten, Simulation des Dartspiels)	82
WR	8	III	LE1	4	Wirkungswahrscheinlichkeit Heilmittel (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	82
WR	8	III	LE1	5	Ziehen von Karten (Experiment durchführen, Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse berechnen und mit Versuch vergleichen)	82
WR	8	III	LE1	BDS1	Dreifacher Pfeilwurf (Ergebnismenge angeben, Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse angeben, wie kann man Zufallsversuch simulieren)	82
WR	8	III	LE1	6	Dreifaches Ziehen aus Urne (Experiment mit Spielkarten simulieren, Baum erstellen, „Experiment und Theorie“ vergleichen)	83
WR	8	III	LE1	7	Augenzahlen subtrahieren (Experiment durchführen und relative Häufigkeiten bestimmen, Baumdiagramm erstellen und	83

					Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, mit markierten Würfeln Experiment durchführen, wie hängen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zusammen)	
WR	8	III	LE1	8	Schere-Stein-Papier (Wahrscheinlichkeit von Ereignis bestimmen, Schere-Stein-Papier-Simulation, Wahrscheinlichkeiten prüfen)	83
WR	8	III	LE1	9	Würfeln mit zwei Würfeln (Aussage bewerten und durch Simulation begründen, „Denkfehler“ erläutern)	83
WR	8	III	LE1	10	Mehrfache Kontrolle von Bauteilen (Bericht schreiben, wann sich wie häufige Kontrolle lohnt)	83
WR	8	III	LE2	EIN	Sechsfacher Wurf mit dem klassischen Würfel (relevanten Teil des Baumdiagramms identifizieren)	84
WR	8	III	LE2	MK	Um bei einem mehrstufigen Zufallsversuch Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, verwendet man nur den Teil des Baumdiagramms, der die benötigten Pfade enthält.	84
WR	8	III	LE2	BSP1	Auswahl eines Pfades (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ohne und mit zurücklegen)	84
WR	8	III	LE2	BSP2	Lange Pfade Basketballwurf – 6x werfen (Wahrscheinlichkeit von verschiedenen Ereignissen bestimmen, durch Simulation in Tabellenkalkulation prüfen)	85
WR	8	III	LE2	Info	Simulation mit einer Tabellenkalkulation (Zufallszahl und Häufigkeiten bestimmen)	85
WR	8	III	LE2	1	Urnenziehung (Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mit und ohne Zurücklegen)	86
WR	8	III	LE2	2	Begnadigung (Urnenziehung ohne Wiederholung, Veränderung der Wahrscheinlichkeit beim Zusammenfügen beider Urnen)	86
WR	8	III	LE2	3	Treffen im Café (Bestimmen der Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse, Kontrolle der Ereignisse mit Simulation der Tabellenkalkulation)	86

WR	8	III	LE2	4	Fruchtkorb (Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ziehungsergebnissen)	86
WR	8	III	LE2	5	Nachrichten Übertragung (Wahrscheinlichkeit für korrekte und fehlerhafte Übertragung)	86
WR	8	III	LE2	6	Aufgabe selbst erstellen zu einem Teilbaumdiagramm (erstellen und danach Besprechung mit Sitznachbarn)	86
WR	8	III	LE2	7	Verbrecher Festnahme (Wahrscheinlichkeit von bestimmtem Ereignis)	87
WR	8	III	LE2	8	Abwasch erledigen – Karten ziehen (Frage ob Reihenfolge des Ziehens relevant ist, bestimmen einer Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses)	87
WR	8	III	LE2	9	Mehrfaches Glücksrad Drehen (Bestimmung Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses)	87
WR	8	III	LE2	BDS1	Würfeln mit Dodekaeder (Bestimmung Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse)	87
WR	8	III	LE2	10	Biathlon (Bestimmung Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse, prüfen durch Simulation)	87
WR	8	III	LE2	11	Schwarzfahren (Bestimmung Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses, gegebenen Term in konkrete Problemstellung umformulieren, Stellungnahme zu einer falschen Aussage)	87
WR	8	III	LE3	EIN	Vgl. Zufallsexperimente mit verschiedenen Ergebnissen (Welche Ereignisse sind wahrscheinlicher?)	88
KB	8	III	LE3	EIN	Abzählen der Pfade im Baumdiagramm in Zusammenhang zum pascalschen Dreieck setzen.	88
KB	8	III	LE3	MK	Im pascalschen Dreieck ist jede Zahl durch ihre Zeile n und die Spalte k eindeutig bestimmt, wobei die Zählung mit 0 beginnt. Die Zahl, die in Zeile n und Spalte k steht, gibt an, wie viele Pfade es zum Ergebnis „ k	88

					Treffer in n Versuchen“ gibt. Man bezeichnet sie mit $\binom{n}{k}$. Am Rande stehen Einsen. Im Inneren des Dreiecks ist eine Zahl die Summe der beiden links und rechts darüberstehenden.	
WR	8	III	LE3	EIN	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mithilfe Pascalscher Dreiecken aus Baumdiagramm bestimmen.	89
WR /KB	8	III	LE3	MK	Ein Zufallsversuch mit den Ergebnissen Treffer und Niete wird n-mal durchgeführt. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist p, die Wahrscheinlichkeit für eine Niete q=1-p. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für k Treffer in n Versuchen $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung .	89
WR	8	III	LE3	BSP	Vierfacher Quaderwurf (Wahrscheinlichkeit von verschiedenen Ereignissen bestimmen, Wahrscheinlichkeit von Gegenereignis bestimmen.	89
KB/ WR	8	III	LE3	1	Pascalsches Dreieck & mehrfacher Münzwurf (Pascalsches Dreieck notieren, Wahrscheinlichkeit von verschiedenen Ereignissen bestimmen, Symmetrie in Wahrscheinlichkeit mithilfe des Pascalschen Dreiecks erklären.	90
WR	8	III	LE3	2	Mehrfaches Glücksrad drehen (Anzahl der Pfade pro Ereignis, Wahrscheinlichkeit zum Ereignis, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen und vergleichen, Ergebnismenge verändern und deren Auswirkungen auf Wahrscheinlichkeiten.	90
WR	8	III	LE3	3	Tetraeder Würfe im Zusammenhang mit dem pascalschen Dreieck (Treffer-Nieten-Folge zu bestimmten Ereignissen auf Basis des pascalschen Dreiecks notieren, Bezug	90

					auf Tetraeder Wurf, Wahrscheinlichkeitsveränderung in Bezug auf die Anzahl der Pfade im Pascalschen Dreieck)	
WR	8	III	LE3	4	Mehrfacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Ereignisse bestimmen)	90
WR	8	III	LE3	5	Multiple-Choice-Test (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ankreuzmöglichkeiten bestimmen)	90
WR	8	III	LE3	BDS1	Mehrfaches Drehen des Glücksrads (Wahrscheinlichkeit für verschiedene Ereignisse bestimmen)	90
WR	8	III	LE3	BDS2	Mehrfaches Elfmeterschießen (Wahrscheinlichkeit von verschiedenen Ereignissen bestimmen & vergleichen)	90
WR	8	III	LE3	INFO	Rechnerbefehle für Kombinationen und (kumulierte) Binomialverteilungen für Tabellenkalkulation und GTR	91
WR	8	III	LE3	6	Mehrfacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen betrachten auch Nutzung Tabellenkalkulation und GTR)	91
WR	8	III	LE3	7	„ Theorie und Praxis (Wahrscheinlichkeiten als Prognosen relativer Häufigkeiten) “ Fünffacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bestimmen, Experiment durchführen, Vergleich mit den Wahrscheinlichkeiten auch nach Zusammenfassung aller Gruppenergebnisse)	91
WR	8	III	LE3	8	Zufallsversuch mit gegebener Trefferwahrscheinlichkeit und Anzahl von Versuchsdurchführungen (Stellung nehmen zu Aussage über (implizit) Erwartungswert, Prüfen mit Excel oder GTR, Wahrscheinlichkeit in verschiedenen Intervallen, Erhöhung der Versuchszahl und entsprechende Veränderung des Ereignisses)	91
WR	8	III	WVV	1	Tür öffnen durch Schlüssel ausprobieren (Vorgeschlagene Simulationen begründet einordnen, prüfen welches Ereignis am	92

					wahrscheinlichsten ist durch Experiment, Begründung durch Rechnung)	
WR	8	III	WVV	2	Lego-Achter „warten auf Erfolg“ (Wahrscheinlichkeitsverteilung mit endlicher Zerlegung bestimmen, Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten vergleichen nach mehrfacher Durchführung des Versuchs)	92
WR	8	III	WVV	3	Durchkommen – Mehrfacher Wurf mit Lego-Achter (Wahrscheinlichkeit für Spiegelsieg, Versuchsdurchführung zum Vergleich)	92
WR /KB	8	III	WVV	4	Mehrfaches Ziehen aus Urne (mit oder ohne Zurücklegen in Bezug auf mehr oder weniger Kugeln im festen Verhältnis zweier Farben)	92
WR	8	III	WVV	5	Galileo-Problem: Würfeln mit drei Würfeln (Begründung zur Wahrscheinlichkeit von Augensummen)	93
WR	8	III	WVV	6	Schießen auf Tontauben (Aussage bewerten zu Ergebnismenge)	93
WR	8	III	WVV	7	Problem des Chevalier de Méré	93
WR	8	III	WVV	8	Merkwürdig beschriftete Würfel, Augensumme (Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, vergleichen mit Excel Simulation, herausfinden über unbekannt Beschriftung der Würfel durch Ergebnisse der Excel Simulation)	93
WR	8	III	WVV	9	Rohe und gekochte Eier ziehen (Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Experiment simulieren, Wissensfrage zu Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten)	93
bS/WR	8	III	EXK		Hörtest Unterschied MP3 oder CD (Versuch nach Anleitung vorbereiten, Simulation für zufällige Zuordnung durch Simulation, darstellen der Simulationsergebnisse im Balkendiagramm und Boxplot, Entschei-	94 – 95

					dungskriterium aufstellen, Versuch durchführen, Binomialverteilung anwenden in Bezug auf die Versuchsanzahl und die Trefferwahrscheinlichkeit für die CD-Qualität).	
WR	8	III	RBS		Pfadregel & Summenregel am Baumdiagramm „mehrerer Ergebnisse („Pfade“) zu einem Ereignis zusammenfassen“; Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, Wahrscheinlichkeitsverteilung als „Darstellung aller Ergebnisse und ihrer Wahrscheinlichkeiten“; Binomialkoeffizient in Verbindung mit dem pascalschen Dreieck; Binomialverteilung;	96
WR	8	III	TRA	1	Zweifacher Würfelwurf (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse und Gegenwahrscheinlichkeit bestimmen)	97
WR	8	III	TRA	2	Mehrfaches Ziehen aus Urne (Baumdiagramm, Wahrscheinlichkeit eines Pfades bestimmen, Veränderung des Wahrscheinlichkeitsraums)	97
WR	8	III	TRA	3	Freunde treffen (mit Baumdiagramm Stellung nehmen, Übertragung auf Münzwürfe)	97
WR	8	III	TRA	4	Ziehen ohne Zurücklegen aus Urne (Baumdiagramm angeben, Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, prüfen auf Binomialverteilung, Parameter in Binomialverteilung vertauschen)	97
WR	8	III	TRA	5	Wahrscheinlichkeit mehrerer Münzwürfe (Wahrscheinlichkeiten aus binomialverteilten Zufallsversuch bestimmen, kommentieren und simulieren mit Tabellenkalkulation)	97
WR	8	III	TRA	6	Aufklärungsrate von Straftaten (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bestimmen, Annahmen der vorangehenden Rechnungen erläutert und ihre Gültigkeit prüfen)	97

WR	8	III	TRA	7	Spielautomat mit 3 Rädern (Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse bestimmen, Simulieren mit Tabellenkalkulation)	97
WR	8	IV	WVV	4	y-Verschiebung der Normalparabel aus vorgegebener Urne ziehen (Wahrscheinlichkeit der dazu passenden irrationalen Nullstellen)	133
WR	8	V	LE1	10	<p>„Definiere die Begriffe „Kongruenz“, Äquivalenz“ und „Wahrscheinlichkeit“. Suche dann nach Definitionen im Internet oder im Lexikon und vergleiche.“</p> <p>Lösung: aus dem Serviceband (zur Wahrscheinlichkeit): Bei Zufallsversuchen ordnet man den einzelnen Ergebnissen Wahrscheinlichkeiten zu, die zusammen 1 bzw. 100% ergeben. Wahrscheinlichkeiten liegen daher stets zwischen 0 und 1 bzw. zwischen 0% und 100%. Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn bei vielen Versuchsdurchführungen die relativen Häufigkeiten in der Nähe der Wahrscheinlichkeiten liegen und Symmetrien beachtet werden. Bei einigen Zufallsversuchen, z.B. Würfelwurf, Münzwurf oder Roulette Spiel lassen sich Wahrscheinlichkeiten auch berechnen, weil man davon ausgeht, dass die Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten (Laplace-Wahrscheinlichkeiten).</p>	146
WR	8	V	LE2	8	Mathematischer Aufsatz über Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit (Hinweise für mathematischen Aufsatz, mathematischer Aufsatz zu einem der Themen Zahlenmenge, Vierecke sowie Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit)	150

WR	8	V	LE2	KANN	Wörter durch Urnenziehung ohne Zurücklegen ziehen (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bestimmen, Ereignisse identifizieren und Wahrscheinlichkeit bestimmen)	150
	8	V	EXK	II	„[...] Euklid versuchte in dem Werk [Elemente] die Geometrie „axiomatisch“ aufzubauen. „Axiome“ sind Aussagen, die so elementar sind, dass sie nicht bewiesen werden müssen. Aus wenigen Axiomen wurde die gesamte „euklidische Geometrie“ aufgebaut.	168
WR /kB/ dS	8	VI	AUF		Stochastik als inhaltsbezogene Kompetenz in diesem Kapitel ausgewiesen.	172
WR	8	VI	AUF	DKS	„Wahrscheinlichkeiten berechnen“	172
WR	8	VI	TDS		„Daten und Zufall“	176
WR	8	VI	TDS	13	Verschiedene Zufallsversuche (Würfelwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignis bestimmen), Quaderwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignis bestimmen), Zweifacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen vergleichen), Gegenereignis bestimmen, „Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sind das Gleiche, beide werden in Prozent angegeben“ [Herv. G.S.] [Lösung von S. 256: falsch – Man muss zwischen der Realität und dem mathematischen Modell [Herv. im Original] unterscheiden: Relative Häufigkeiten sind „reale“ in Zufallsexperimenten ermittelte Werte, die beschreiben, wie häufig ein bestimmtes Ergebnis in einem Experiment bezogen auf die Gesamtzahl der Versuche aufgetreten ist, z.B.: Es trat bei 50 Münzwürfen 28-mal „Wappen“ auf, die relative Häufigkeit für „Wappen“ beträgt $\frac{28}{50} = 0,56 = 56\%$. Wahrscheinlichkeiten hingegen sind „theoretische Größen“ eines ma-	176

					thematischen Modells , mit denen man versucht, relative Zufallsexperimenten vorherzusagen, z.B.: Die Wahrscheinlichkeit für „Wappen“ beträgt 50% bedeutet, man erwartet bei 1000 Münzwürfen etwa $1000 \cdot 50\% = 500$ „Wappen“., dreifacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse berechnen))	
WR	8	VI	TDS	14	Statistische Kennwerte (Median einer Datenreihe bestimmen, arithmetisches Mittel einer Datenreihe bestimmen, relative Häufigkeit prüfen, Datenreihe gleicher Werte und statistische Kennzahl, Wahlergebnis der Bundestagswahl in Bezug auf verschiedene Datenniveaus, Stellungnahme zu arithmetischem Mittel)	176
WR	8	VI	TDS	15	Sprintergebnisse Jungen und Mädchen – Boxplots (Kennwerte aus Boxplot auslesen)	177
WR	8	VI	TDS		Auswertung und Selbsteinschätzung: „[...] 13. Ich kann Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten sicher berechnen, 14. Ich kenne den Unterschied zwischen Median und Mittelwert und kann beides bestimmen, Ich kann Kreisdiagramme, Säulendiagramme und Boxplots zeichnen und interpretieren.“	
WR	8	VI	LE4	EIN	„ Stochastik umfasst drei Teilgebiete. In der beschreibenden Statistik sammelt man Daten bestimmt relative Häufigkeitsverteilungen, stellt sie grafisch dar und beschreibt sie durch Kenngrößen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es um „theoretische“ Wahrscheinlichkeiten, mit denen man „reale“ relative Häufigkeiten bei Zufallsexperimenten und statistischen Erhebungen vorhersagen möchte. In der beurteilenden Statistik , prüft man, ob „angenommene“ Wahrscheinlichkeiten zu relativen Häufigkeiten passen.“	190

WR	8	VI	LE4	EIN	Definition/Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten und Laplace-Experimenten	190
WR	8	VI	LE4	BSP	Vergleich Wahrscheinlichkeiten von „Laplace-Würfel“ und Quader	190
WR	8	VI	LE4	EIN	Verhältnis von Ergebnis und Ereignis	190
WR	8	VI	LE4	BSP	Bestimmung Wahrscheinlichkeit beim einfachen Würfelwurf	190
WR	8	VI	LE4	EIN	Mehrstufige Zufallsexperimente (Baumdiagramme, Pfadwahrscheinlichkeit und Summenregel)	190
WR	8	VI	LE4	BSP	Zweifacher Würfelwurf (Pfadwahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch die Summenregel bestimmen)	190
dS	8	VI	LE4	EIN	Definition absolute und relative Häufigkeiten	191
dS	8	VI	LE4	BSP	Auszählen von Punktzahlen im Test (absolute und relative Häufigkeiten von Datenreihe bestimmen)	191
dS	8	VI	LE4	EIN	Definition statistischer Kenngrößen (arithmetisches Mittel, Median, Minimum, unteres Quartil, Median, oberes Quartil, Maximum, Spannweite und Quartilsabstand)	191
dS	8	VI	LE4	BSP	Beschreiben der Punktzahlen im Test durch statistische Kenngrößen.	191
WR	8	VI	LE4	1	Glücksrad einfach und mehrfach drehen (Bestimmen Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bei einfacher und mehrfacher Drehung)	191
WR	8	VI	LE4	2	Farbige Kugeln aus Urne ziehen (Änderungen von Wahrscheinlichkeiten durch Verändern des Urneninhalts, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	192
WR	8	VI	LE4	3	Vergleich Quader und Würfel (Vergleich Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse, Wahrscheinlichkeit aus vorgegebener Ergebniswahrscheinlichkeit schätzen, gemeinsamer Wurf und Baumdiagramm)	192

WR	8	VI	LE4	4	Würfeln mit Lego-Vierer (Vorgehen der Schätzung der Wahrscheinlichkeiten, mehrfacher Wurf und Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse, Zusammensetzen von zwei Vierern, Überlegungen prüfen durch Durchführung eines Versuchs)	192
WR /dS	8	VI	LE4	5	Gewinnaussichten bei Lotto-Spielen (Gewinnwahrscheinlichkeiten schätzen, Simulation der Lottovarianten, Gewinnwahrscheinlichkeit bestimmen und an Simulation prüfen, relative Häufigkeiten sowie Einnahmen und Verluste bestimmen bei vorgegebenen Auszahlungsregeln)	192
dS	8	VI	LE4	6	Statistik zur Internetnutzung (statistische Kennwerte einer vorgegebenen Datenreihe bestimmen, absolute und relative Häufigkeiten bestimmen und in einem Säulendiagramm und Boxplot darstellen, Datenreihe zu Kennwert konstruieren)	192
dS	8	VI	LE4	7	Umfrage Lieblingssportart (Kreisdiagramm darstellen, sollte Mittelwert bestimmt werden)	193
dS	8	VI	LE4	8	Umfrage Handykosten (Aussagen zu Boxplot korrigieren und begründen)	193
dS	8	VI	LE4	9	Umfrage E-Mail Nutzung (Behauptungen anhand Daten belegen, Boxplot erstellen)	193
dS	8	VI	LE4	10	Geschwindigkeitskontrolle (Datenliste erweitern, Nutzung statistischer Kennwerte, Vergleich Median und arithmetisches Mittel)	193
dS	8	VI	LE5	2	Umfrage Haustier (Kreisdiagramm prüfen, Problem mit Darstellung im Kreisdiagramm, passendes Diagramm erstellen)	195
WR	8	VI	LE5	7	Ist Ereignis beim Würfeln wahr oder falsch? (Entscheiden und begründen ob Aussage wahr oder falsch ist)	196
WR	8	VI	LE7	BSP3	„Stochastische Modelle“ – Reißzwecken Wurf (Gewinnwahrscheinlichkeit bestimm-	203

					men, durch experimentelle Bestimmung relativer Häufigkeit, daraus Schätzung Wahrscheinlichkeit, Bestimmung gesuchter Wahrscheinlichkeit durch Baumdiagramm, prüfen des Modells und der Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Schätzung der Wahrscheinlichkeit beim einfachen Wurf)	
WR	8	VI	LE7	3	Wurf mit Tackernadel Block (analog zu BSP3, S. 203)	204
WR	8	VI	LE7	6	Aufgabenstellung zu vorgegebenen Baumdiagramm finden	204
WR /dS	8	VI	LE7	11	Zufallsgerät zu Säulendiagramm zuordnen (Zuordnung, Achsenbeschriftung, für übriges Zufallsgerät weiteres Säulendiagramm bestimmen)	205
dS	8	VI	LE8	2	Skispringen (Haltungsnote berechnen, Haltungsnoten aus Gesamthaltungsnote bestimmen, Bestimmung Haltungsnote als arithmetisches Mittel, Sprungweitenpunkte bestimmen)	206
dS	8	VI	LE8	7	Würfeln mit Schraubenmutter (Schätzung der Wurfwahrscheinlichkeiten bei vorgegebener Ergebnismenge, Berechnung für Ereignis bei mehrfachem Wurf)	207
dS	8	VI	LE8	11	Diagramm zur Raucherstatistik auswerten (Stellung nehmen zu vorgegebenen Aussagen)	208
WR	8	VI	LE8	16	Lostrommel (Änderung von Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Veränderung des Inhalts der Lostrommel)	209
WR	8	ST	Freiburg		Studenten aus Einwohnern in Freiburg „ziehen“ (Bestimmung der Wahrscheinlichkeit in Stichprobe Studenten zu erhalten.	210
WR	8	ST	Zeitung		Niederschlagswahrscheinlichkeit, Placebo-Effekt, Sitzplatzverteilung Landtagswahl (Mathematische Fragen zu Zeitungsartikeln entwickeln und beantworten)	219 , 221

WR	8	ST	Zeitung		Ehescheidung, Zufriedenheit, Hotelkosten, Ärzteausbildung, Übertragungsrechte, LKWs in Deutschland (Stellungnahmen zu Zeitungsartikeln und geeignete Darstellungen verwenden)	222 – 223
WR /dS/ KB	8	REG			Anzahl Pfade, Baumdiagramm, Beurteilende Statistik, Binomialkoeffizient, Binomialverteilung, Boxplot, Ereignis, Galilei, Galileo, Galton, Sir Francis, Galtonbrett, Gegenereignis	264
WR /dS	8	REG			n über k, Niete, Pascal, Blaise, Pascalsches Dreieck, Pfadregel, relative Häufigkeit, Simulation (mit Tabellenkalkulation), Summenregel, Testen einer Hypothese, Treffer, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Zufallsversuch (mehrstufig)	265
9. Jahrgangsstufe						
WR /dS/ KB	9	ML			„ Zu den Inhalten: [...] Inhalte der Stochastik werden in Form von Aufgaben aufgegriffen und im Rahmen einer Exkursion vertieft.“	3
WR	9	I	WVV	9	Computerspiel (Binomialverteilter Wahrscheinlichkeitsraum, Bestimmung von p)	38
WR	9	I	WVV	10	Zweifache Teilnahme am Glücksspiel (Ereigniswahrscheinlichkeit bestimmen)	38
WR	9	I	EXK		Mit Graphen und Diagrammen mögliche „Verkaufszahlen angeben“ (Diagramme bewerten & erstellen)	40– 41
WR	9	II	KANN	11	Wort aus Urne ziehen (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen)	57
WR	9	III	KANN	18	Zweifacher Würfelwurf (Wahrscheinlichkeit von bestimmtem Ereignis berechnen, Gegenwahrscheinlichkeit nutzen, Zusammengesetztes Ereignis berechnen)	86
WR	9	III	KANN	19	DFB-Pokal (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen, Wahrscheinlichkeit von zusammengesetzten Ereignissen bestimmen)	86

WR	9	III	WVV	9	Mit verschiedenen geometrischen Körpern würfeln (Wahrscheinlichkeit schätzen, Körpernetze zeichnen, Flächen berechnen, Wahrscheinlichkeiten auf Basis von Flächeninhalten schätzen, durch einen Versuch prüfen)	100
WR /dS	9	IV	LE1	18	Gefärbtes Wasser im Meer (relativen Anteil von Wassermolekülen, in Bezug auf Gesamtmenge)	113
WR	9	IV	LE1	20	Lostrommelziehung (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen)	113
WR	9	IV	LE1	21	Briefe in Umschläge stecken (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen)	113
WR	9	IV	LE3	EIN	Ereigniswahrscheinlichkeit vorgegeben (Zufallsgeräte zu Ereigniswahrscheinlichkeiten zuordnen)	118
WR	9	IV	LE3	6	Fehler bei Softwareentwicklung entdecken (Bernoulli-Kette, Wahrscheinlichkeit bestimmen)	119
dS	9	V	WVV	6	Mogeln mit Diagrammen: Kundenverlust (Kundenentwicklung beschreiben, Vor- und Nachteile der Diagramme betrachten, verfolgte Zwecke identifizieren)	145
WR	9	V	EXK	EIN	Die geometrische Verteilung: Warten bis zum ersten Erfolg (Abschnitt Baumdiagramm betrachten, Formel entwickeln, Säulendiagramm erstellen)	146
WR	9	V	EXK	1	Würfelwurf bis zum Erfolg (Wahrscheinlichkeit von verschiedenen Ereignissen und verschiedene Versuchszahlen)	146
WR	9	V	EXK	2	Zufallsversuch zur Aufgabe WR_9_V_EXK_1_ (S. 146) durchführen.	146
WR	9	V	EXK	3	Zufallszahlen mit Tabellenkalkulationsprogramm (Wahrscheinlichkeit bestimmen für bestimmte Ereignisse, Diagramm für Wartezeiten angeben, mittlere Wartezeit bestimmen)	146

WR	9	V	EXK	4	Wann fällt 6 (Wahrscheinlichkeit von verschiedenen Ereignissen bestimmen)	146
WR	9	V	EXK	5	Realistische oder gefälschte Münzwurfreihe untersuchen (Wartezeiten betrachten)	147
WR	9	V	EXK	Info	Mit geometrischer Verteilung Lebensdauer von Produkten schätzen	147
WR	9	V	EXK	6	Geräte kaputt (Anteil defekter Geräte, mittlere Lebensdauer, verschiedene Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen)	147
dS	9	VI	EIN	BSP	Diagramm von Monatsmitteltemperaturen (Säulendiagramm periodisch fortführen)	176
WR	9	VI	WVV	8	Funktionen aus Urne ziehen (Wahrscheinlichkeiten zu verschiedenen Ereignissen bestimmen) [Einkleidung]	180
WR	9	VII	AUF		Stochastik als inhaltsbezogene Kompetenz in diesem Kapitel ausgewiesen.	186
WR	9	VII	AUF	DKS	„Wahrscheinlichkeiten berechnen“	186
WR /dS	9	VII	Sich selbst einschätzen	1,2	Mindmap in Gruppe oder individuell erstellen, u.a. zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	188
WR /dS	9	VII	Sich selbst einschätzen	3	Stochastik (Mittelwerte berechnen, Diagramme erstellen und deuten, Wahrscheinlichkeit mithilfe von Baumdiagrammen bestimmen)	189
dS	9	VII	Testaufgaben	19	Personen pro Auto (arithmetisches Mittel und Median aus gegebenem Kreisdiagramm bestimmen)	191
WR	9	VII	Testaufgaben	20	Zweifacher Würfelwurf (Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse)	191
dS	9	VII	Testaufgaben	L19	Lösung zu dS_9_VII_19 (S. 191)	198

WR	9	VII	Test- aufga- ben	L20	Lösung zu dS_9_VII_20 (S. 191)	199
dS	9	VII	Aufga- ben zu Funktio- nen	9	Relativer Anteil Deutscher Spieler in Champions-League (Fehler in Zeitungsartikel finden, absolute Häufigkeit aus gegebener relativer Häufigkeit und Grundgesamtheit bestimmen, neuen Artikel formulieren)	203
dS	9	VII	Aufga- ben zu Funktio- nen	15	Temperaturen pro Monat (Temperaturwerte in Diagramm darstellen)	204
dS	9	VII	Aufga- ben zur Stochas- tik	1	Nettogehälter (Median und arithmetisches Mittel bestimmen, Argumentieren mit beiden Werten aus verschiedenen Perspektiven)	207
WR	9	VII	Aufga- ben zur Stochas- tik	2	Zweifache Urnenziehung mit zurücklegen (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen, Gewinnchancen für ein Spiel vergleichen)	207
WR	9	VII	Aufga- ben zur Stochas- tik	3	Wortziehung aus Urne mit zurücklegen (Wahrscheinlichkeit in richtiger Reihenfolge gezogen, nach umsordieren, anderes Ereignis ziehen)	207
WR	9	VII	Aufga- ben zur Stochas- tik	4	CD-Herstellung (Mehrstufiger Zufallsversuch, Ereigniswahrscheinlichkeiten berechnen)	207
WR	9	VII	Aufga- ben zur Stochas- tik	5	Passende Schuhe ziehen (Mehrstufiger Zufallsversuch, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	207
WR /dS	9	ST			Kontozahlen (Unterschiedliche Verteilung der Ziffernhäufigkeit, prüfen an verschiedenen Datenreihen)	212
WR /dS	9	ST			Brotbefragung (Befragungsergebnisse und deren Zusammenfassung, Simpson Paradoxon)	213

WR	9	ST			Flugzeugauswahl bei Motorausfall((mehrstufiger) Zufallsversuch, Vergleich von Wahrscheinlichkeiten)	213
WR	9	Anhang	WVV	3	y-Verschiebung der Normalparabel aus vorgegebener Urne ziehen (Wahrscheinlichkeit der dazu passenden irrationalen Nullstellen). [identisch zu WR_8_IV_WVV_4 (S. 133)]	239
WR /dS	9	REG			geometrische Verteilung, Mogeln mit Diagrammen,	284
WR /dS	9	REG			Moore, Gordon, Mooresches Gesetz,	285
Einführungsphase						
WR	EF	I	WVV	24	Funktionen lösen (Wahrscheinlichkeit von verschiedenen Ziehungsereignissen bestimmen)	40
WR	EF	IV	LE2	ZZW13	Zweimal ziehen mit Zurücklegen aus Lostrommel (Wahrscheinlichkeit bestimmen, relative Häufigkeit aus absoluter Häufigkeit berechnen und mit Wahrscheinlichkeiten vergleichen)	119
WR	EF	IV	LE 3	ZZW17	Wahrscheinlichkeiten beim Quaderwürfel schätzen (Wahrscheinlichkeit von Elementarereignissen bestimmen, Schätzen anhand relativer Häufigkeiten)	123
WR	EF	IV	LE 4	ZZW13	Pfadregeln bei verschiedenen Zufallsversuchen, mehrfacher Würfel- und Münzwurf nutzen und zu den Ereignissen Stellung nehmen	127
dS	EF	IV	LE5	ZZW13	Mathe-Test nach Geschlecht (arithmetisches Mittel & Median bestimmen, Unterschiede begründen, Ergebnisse im Boxplot darstellen)	131
WR	EF	V	AUF		Schlüsselkonzept: Wahrscheinlichkeit „Wahrscheinlichkeiten helfen uns dabei, Prognosen nicht nur „aus dem Bauch heraus“ zu treffen.“; Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten werden die Pfadregel und die Summenregel angewandt.	142

					Baumdiagramme veranschaulichen die Regel (Bild von eine Baumdiagramm); Bild von zwei Blitzen; „Bedingte Wahrscheinlichkeiten erklären, warum Produkte meist mit prominenten und attraktiven Modells beworben werden. [...] (Werbepbild)	
WR /dS	EF	V	AUF	DKS	Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsversuchen; Würfel und Urne als Zufallsgeräte; Prozentangaben für Wahrscheinlichkeiten; Anteile von Anteilen; Mittelwerte	142
WR /dS	EF	V	AUF		Verweis auf Check-in (Seite 205)	142
WR /dS	EF	V	AUF		„Wissen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Reißzwecke auf die eine oder die andere Seite fällt? Im Gegensatz zum Blitz bei einem Gewitter kann man mit der Reißzwecke experimentieren. Durch häufiges Werfen erhält man Hinweise auf die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.“ (Bild von zwei Blitzen und Reißzwecken); „Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Auftreten von Sechsen beim zweimaligen Wurf eines Würfels (Bild: Hand mit zwei Würfeln; Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Sechsen als Säulendiagramm beim zweimaligen Wurf)	143
WR /dS	EF	V	AUF		Stochastik als inhaltsbezogene Kompetenz in diesem Kapitel ausgewiesen.	143
WR /dS	EF	V	AUF		[Alle Prozessbezogenen Kompetenzen (Argumentieren/Kommunizieren, Modellieren, Werkzeuge) sind ausgewiesen, außer Problemlösen]	143
WR	EF	V	AUF	DKB	Zufallsversuche durch Mengen und Erwartungswerte beschreiben; Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen bestimmen; Ereignisse auf Unabhängigkeit untersuchen; Simulationen zur Abschätzung unbekannter Wahrscheinlichkeiten	143

					durchführen; z.B. Lernprozesse durch bedingte Wahrscheinlichkeiten beschreiben.	
WR	EF	V	ERK	1	Laplace-Bleistifte „fair“? (Experimentieren -> Simulieren (Mit Würfeln im Becher, GTR oder Tabellenkalkulation) -> Nachdenken. (Entscheidungsregel, Erwartungswert, Qualität der Würfe))	144
WR	EF	V	ERK	2	Wörter aus Urne ziehen Urnenversuch ohne Zurücklegen (Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses bestimmen, Veränderung des Urneninhalts und Auswirkungen auf Wahrscheinlichkeiten, „fares“ Glücksspiel mit diesem Versuch Diskussion Einsatz und Auszahlung)	145
WR	EF	V	ERK	3	Karten ziehen (Gewinnspiel mit verschiedenen Gewinnereignissen, vgl. der Gewinnchancen, Gewinne und Verluste beim Spiel, Einsatz bestimmen)	145
WR	EF	V	ERK	4	Bertrandsches Schubfächerproblem (bedingte Wahrscheinlichkeit durch Experiment und Baumdiagramme bestimmen)	145
WR	EF	V	LE1	EIN	Glücksspiel mehrfaches Kartenziehen (Bestimmen Gewinnwahrscheinlichkeit, Veränderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und Auswirkungen auf die Wahrscheinlichkeit)	146
WR /dS	EF	V	LE1	EIN	Wahrscheinlichkeiten als Modelle für die Wirklichkeit (relative Häufigkeiten hängen vom Zufall ab, Wahrscheinlichkeiten so festzulegen, dass sie relative Häufigkeiten auf lange Sicht gut vorhersagen, zugleich nutzt man mögliche Symmetrien)	146
WR /dS	EF	V	LE1	MK	Den einzelnen Ergebnissen eines Zufallsversuchs kann man Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Die Wahrscheinlichkeiten sind gut gewählt, wenn sie die relativen Häufigkeiten bei großer Versuchszahl gut Vorher-	146

					sagen. Die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse summieren sich zu 100%. Sie bilden eine Wahrscheinlichkeitsverteilung .	
WR /dS	EF	V	LE1	EIN	Mittelwerte charakterisieren Häufigkeitsverteilungen; nutzt man statt relativer Häufigkeiten in der Formel des arithmetischen Mittels \bar{x} so erhält man den Erwartungswert μ (Herv. i. Original). [...] „Da die relativen Häufigkeiten um die Wahrscheinlichkeiten schwanken, schwanken auch die Mittelwerte zufallsbedingt um den Erwartungswert. Damit ist der Erwartungswert eine Prognose für den zu erwartenden Mittelwert. Man bezeichnet ihn kurz als „theoretischen Mittelwert““.	146 – 147
WR /dS	EF	V	LE1	MK	Wenn bei einer Datenerhebung die Ergebnisse x_1, x_2, \dots, x_n mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n auftreten, dann heißt $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n$ der Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Er gibt an, welchen Mittelwert man bei ausreichend großer Versuchszahl auf lange Sicht erwartet.	147
WR /dS	EF	V	LE1	BSP1	Werfen von vier Münzen (Mittelwerte aus relativen Häufigkeiten bestimmen, Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, Erwartungswert bestimmen)	147
WR	EF	V	LE1	BSP2	Glücksspiel Würfel (Bestimmung Erwartungswert des Gewinns, Bestimmung des Einsatzes für ein „fares“ Spiel)	147
WR	EF	V	LE1	1	Glücksspiel: Zweifacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gewinne, Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung)	147
WR	EF	V	LE1	2	Wurf mir Sechser und Zwölfer Würfel (Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert der einzelnen Würfel bestimmen, mittlere Augenzahl aus absoluten	148

					Häufigkeiten bestimmen und mit Erwartungswert vergleichen)	
WR	EF	V	LE1	3	Glücksspiel mit Nuggets (Begründen ob es sich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt [Summe 100%], Erwartungswert bestimmen und damit Spiel bewerten, Spielregeln für gleiches Spiel mit Zufallsgerät bestimmen)	148
WR	EF	V	LE1	4	Glücksräder (Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert bestimmen, plausible Häufigkeitsverteilung notieren und Mittelwert berechnen sowie mit Erwartungswert vergleichen und Zusammenhang erläutern)	148
WR	EF	V	LE1	5	Glücksspiel mit Glücksrädern (Erwartungswert und Einsatz bestimmen)	148
WR	EF	V	1	ZZÜ6	Würfeln mit Lego Achter, Sechser und Vierer (Schätzung zu Zufallsgerät zuordnen, Erwartungswert berechnen, Häufigkeitsverteilung zuordnen, Mittelwert berechnen und mit Erwartungswert vergleichen)	148
WR	EF	V	1	ZZÜ7	Wurf mit Dreiecksprisma (Wahrscheinlichkeitsverteilung aus gegebenen relativen Häufigkeiten schätzen, prüfen warum sinnvolle Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmten Erwartungswert haben [Symmetrieargument])	148
WR	EF	V	LE1	8	Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (Erwartungswert aus gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Mittelwert aus Häufigkeitsverteilung bestimmen, Abweichung zu Erwartungswert quantifizieren)	149
WR	EF	V	LE1	9	Zweifaches drehen von Glücksrad (Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Erwartungswert des Gewinns bestimmen, Einsatz für faires Glücksspiel bestimmen)	149
WR	EF	V	LE1	10	Zufallsgeräte mit Tabellenkalkulation simulieren (Zufallsgenerator zu Zufallsgerät	149

					zuordnen, Mittelwert von häufiger Durchführung der einzelnen Simulationen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgeräte und Erwartungsgeräte bestimmen und mit Mittelwerten bestimmen)	
WR	EF	V	LE1	11	Vierfacher Münzwurf mit gezinkter Münze simuliert (Tabellenkalkulationsprogrammierung erklären, Erwartungswert auf der Basis der in Tabellenkalkulation berechneten Mittelwerte begründen)	149
WR	EF	V	LE2	EIN	sechs bei mehrfachem Würfelwurf (Stellung nehmen zu falscher Pfadregel)	150
WR	EF	V	LE2	EIN	Mehrstufige Zufallsversuche beschrieben durch Baumdiagramme und Bestimmung durch Pfad und Summenregel am Beispiel des mehrfachen Drehens eines Glücksrads. Zugleich Einführung der Begriffe Ergebnismenge, Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, Teilmengen Eigenschaft der Ereignisse als Teilmenge der Ergebnismenge, Einführung Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Rückführung auf Wahrscheinlichkeiten zugehöriger Ergebnisse und Definition des Gegenereignisses.	150
WR	EF	V	LE2	MK	Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsexperiments erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades multipliziert. Summenregel: Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses E erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addiert. Die Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen ergänzen sich zu 1: $P(D) + P(\bar{D}) = 1$.	150
WR	EF	V	LE2	EIN	Mengenschreibweise („Sowohl-als-auch-Ereignisse“ durch Mengenschnitt)	151

WR	EF	V	LE2	BSP1	Paarungen ziehen aus Klasse (Pfadregel anwenden mit Mengenschreibweise)	151
WR	EF	V	LE2	BSP2	Diagnose eines Heilpraktikers (mehrstufiges Baumdiagramm, Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse bestimmen, Gegenereignis nutzen, Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Erwartungswert bestimmen)	151
WR	EF	V	LE2	1	Zweifache Urnenziehung mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Erwartungswert bestimmen, Veränderung zu ohne zurücklegen)	152
WR	EF	V	LE2	2	Heilungschancen Medikament (Ohne Beachtung der Reihenfolge, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Erwartungswert schätzen und dann rechnerisch bestimmen)	152
WR	EF	V	LE2	3	Steine in Kiste werfen (Entkräftung falsche Summenregel, Baumdiagramm erstellen, Wahrscheinlichkeitsverteilung aufstellen, Gegenwahrscheinlichkeit nutzen)	152
WR	EF	V	LE2	4	Dreifaches Drehen eines Glücksrads (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert bestimmen)	152
WR	EF	V	LE2	ZZÜ5	Basketballfreiwürfe (Ergebnismenge, Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, Ereignis in Mengenschreibweise angeben und Wahrscheinlichkeit auch vom Gegenereignis bestimmen, Wahrscheinlichkeit bestimmen unter Verwendung des Gegenereignis, erwartungswert der Trefferhäufigkeit erst schätzen, dann berechnen)	152
WR	EF	V	LE2	ZZÜ6	Fünffacher Würfelwurf (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse mit und ohne Beachtung der Reihenfolge bestimmen)	152

WR	EF	V	LE2	7	Rohe und gekochte Eier (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Erwartungswert bestimmen oder das Experiment simulieren und Mittelwert bestimmen)	153
WR /dS	EF	V	LE2	8	Lego-Achter oder Laplace-Würfel (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Experiment durchführen und mit berechneten Wahrscheinlichkeiten vergleichen, Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Erwartungswert bestimmen und deren Wert vergleichen)	153
WR	EF	V	LE2	9	Tür mit Schlüsseln öffnen (mittlere Wartezeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ereignisse, Experiment simulieren, Mittelwert bestimmen und mit Erwartungswert vergleichen)	153
WR	EF	V	LE2	10	Basketballwürfe von zwei Spielern (Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Treffer, Aussage zu Erwartungswert bewerten und einordnen, Idee verallgemeinern, Prüfen der Verallgemeinerung, durch gedachte simulierte oder experimentell bestimmte Datenreihe)	153
WR	EF	V	LE3	EIN	Rauchen und Gewicht (Vierfeldertafel, bedingte Wahrscheinlichkeiten)	154
WR	EF	V	LE3	EIN	Begriffsklärung bedingte Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel und Baumdiagramm, Übertragung auf verschiedene Baumdiagramme und darin befindlicher bedingte Wahrscheinlichkeiten.	154
WR	EF	V	LE3	MK	$P_A(B)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, wenn man weiß, dass A eingetreten ist. Es gilt $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ bzw. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	155
WR	EF	V	LE3	BSP	Vierfeldertafel verwenden (Wahrscheinlichkeiten aus Vierfeldertafel herauslesen)	155

					und daraus ableiten, Informationen in Baumdiagramme übertragen)	
WR	EF	V	LE3	1	Dreifacher Münzwurf (bedingte Wahrscheinlichkeiten zu verschiedenen Ereignissen bestimmen)	155
WR	EF	V	LE3	2	Montagsauto (Vierfeldertafel vervollständigen, (bedingte) Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	155
WR	EF	V	LE3	3	Blasmusik und Geschlecht (Bedingte Wahrscheinlichkeit aus Textaufgabe herauslesen)	156
WR	EF	V	LE3	4	Fußballspielen und Geschlecht (absolute Häufigkeiten passend zu bedingten Wahrscheinlichkeiten konstruieren, für Beispiel konkrete (bedingte) Wahrscheinlichkeiten berechnen)	156
WR	EF	V	LE3	5	Hausaufgaben und Geschlecht (Vierfeldertafel vervollständigen, bedingte Wahrscheinlichkeiten bestimmen, passende Baumdiagramme erstellen und berechnete Wahrscheinlichkeiten markieren, Informationen in Worte übersetzen)	156
WR	EF	V	LE3	6	Baumdiagramm in Vierfeldertafel (Vierfeldertafel zu Baumdiagramm konstruieren, ein anderes Baumdiagramm zur Vierfeldertafel, einen Kontext konstruieren)	156
WR	EF	V	LE3	7	Medizinische Tests ((bedingte) Wahrscheinlichkeiten von Vierfeldertafel ablesen, Ungleichungen prüfen und bewerten)	156
WR	EF	V	LE3	ZZÜ8	Zahlenzusammenhänge (bedingte Wahrscheinlichkeiten von Ziehungsereignissen aus Zahlenmenge bestimmen)	156
WR	EF	V	LE3	ZZÜ9	Vierfeldertafel (Vierfeldertafel vervollständigen, Baumdiagramme erstellen, bedingte Wahrscheinlichkeiten ablesen)	156
WR	EF	V	LE3	10	Körperzufriedenheit und Geschlecht (Mehrfeldertafel, Interpretation von relativen Häufigkeiten im Sachzusammenhang,	157

					(bedingte) Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmen, Baumdiagramme konstruieren)	
WR	EF	V	LE3	11	Haarfarbe und Geschlecht (Beispiel Vierfeldertafel zu Aussagen angeben, Aussagen formal notieren, Wahrscheinlichkeit bestimmen)	157
WR	EF	V	LE3	Info	Psychologischer Bias, der sich aus der Abschätzung ergibt, dass wenn ein Ereignis A B begünstigt, auch das Ereignis B das Ereignis A begünstigt, was in der Werbung verwendet wird.	157
WR	EF	V	LE3	12	Vierfeldertafel zu gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeitsaussagen konstruieren, Beweis von $P_A(B) > P(B) \Rightarrow P_B(A) > P(A)$	157
WR	EF	V	LE4	EIN	Bleistiftrollen (Wahrscheinlichkeitsverteilung in Abhängigkeit der Rollrichtung vergleichen)	158
WR	EF	V	LE4	EIN	[...] Mit „bedingten Wahrscheinlichkeiten“ gelingt es, den Begriff der Unabhängigkeit mathematisch zu präzisieren und das Ziehen von Rückschlüssen aus Beobachtungen zu verstehen.“ Erklärung von stochastischer (Un-)Abhängigkeit im Urnenmodell mit und ohne Zurücklegen.	158
WR	EF	V	LE4	MK	Zwei Ereignisse E und F heißen stochastisch unabhängig , wenn gilt: $P_E(F) = P(F)$. Da nach der Pfadregel stets gilt $P(E \cap F) = P(E) \cdot P_E(F)$, folgt: Zwei Ereignisse E und F sind genau dann unabhängig, wenn gilt: $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$.	158
WR	EF	V	LE4	EIN	Unabhängigkeit ist häufige Modellannahme, Prüfung ob Unabhängigkeit vorliegt durch Formel, „Da sich bei Abhängigkeit wegen $P_E(F) \neq P(F)$ durch die Beobachtung von E die Wahrscheinlichkeit von F ändert, schätzt man nach der Beobachtung von E die Realität anders ein.“	159

					Man hat aus der Beobachtung von E etwas über F „gelernt“.	
WR	EF	V	LE4	BSP1	Unabhängigkeit bei Streichholzzündung (Wahrscheinlichkeit bei vorausgesetzter Unabhängigkeit bestimmen, Argumente gegen Unabhängigkeit finden, ggf. Experiment durchführen)	159
WR	EF	V	LE4	BSP2	Zweifacher Würfelwurf (Abhängigkeit zweier Ereignisse zeigen, „Änderung“ der Wahrscheinlichkeit von Eintreten eines Ereignisses durch Kenntnis eines weiteren Ereignisses)	159
WR	EF	V	LE4	1	Schwarzfahren (Annahme Unabhängigkeit und Wahrscheinlichkeit bestimmen das zwei Fahrgäste Schwarzfahren, Argumente gegen Unabhängigkeitsannahme nennen)	159
WR	EF	V	LE4	2	Zweifacher Würfelwurf (Zwei Ereignisse auf Unabhängigkeit prüfen)	159
WR	EF	V	LE4	3	Urnenziehung (mit zurücklegen zeigen, dass Definition Unabhängigkeit gilt, ohne Zurücklegen zeigen, dass Definition Unabhängigkeit nicht erfüllt ist)	160
WR	EF	V	LE4	4	Zweifache Urnenziehung ohne zurücklegen (Baumdiagramm erstellen, in Vierfeldertafel übersetzen, bedingte Wahrscheinlichkeiten bestimmen, Abhängigkeit vielfältig begründen)	160
WR	EF	V	LE4	5	Zweifacher Münzwurf (Unabhängigkeit mit Vierfeldertafel prüfen, bedingte Wahrscheinlichkeiten mithilfe Vierfeldertafel bestimmen, Baumdiagramm erstellen)	160
WR	EF	V	LE4	6	Ziehung aus verschiedenen Urnen (Ziehungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von Wahl der Urne)	160
WR	EF	V	LE4	7	Einheimischenrate an verschiedenen Schulen (Unabhängigkeit von Ereignissen, Einfluss eines Schulwechsels auf Wahrscheinlichkeiten)	160

WR	EF	V	LE4	ZZÜ8	Geschlecht und ein Ereignis A (Unabhängigkeit zeigen, (bedingte) Wahrscheinlichkeiten aus Vierfeldertafel bestimmen, Vierfeldertafel in Baumdiagramm übersetzen, ein Anwendungsbeispiel konstruieren)	160
WR	EF	V	LE4	9	Medizinischer Test (Informationen aus Vierfeldertafel erhalten, Ereignisse auf Unabhängigkeit prüfen, bedingte Wahrscheinlichkeiten bestimmen)	160
WR	EF	V	LE4	10	Reihenuntersuchung (bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen, wiederholter Test, Änderungen der Wahrscheinlichkeit durch „ungutes Gefühl“?)	161
WR	EF	V	LE4	11	Nach dem Weg Fragen (Anhand Zahlenbeispiel oder begrifflich begründen, warum man eine bestimmte Person fragt)	161
WR	EF	V	LE4	12	Tee und Test (Vierfeldertafel mit passenden Wahrscheinlichkeiten konstruieren, bedingte Wahrscheinlichkeiten bestimmen und im Kontext erläutern, Unabhängigkeit zweier Ereignisse im Zusammenhang mit Unabhängigkeit der Gegenereignisse zusammenbringen)	161
WR	EF	V	WV	1	Dreifacher Würfelzahl (Einsatz mit bestimmtem Gewinn festlegen)	162
WR	EF	V	WV	2	Zweifacher Wurf Lego-Vierer oder sechser Würfel (Ereignisse in Mengenschreibweise notieren und deren Wahrscheinlichkeit auf Basis gegebener Elementarereignis Wahrscheinlichkeiten bestimmen)	162
WR	EF	V	WV	3	Zweifache Urnenziehung mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge (Ereignis in Mengenschreibweise formulieren, verschiedene Ereignisse in Worten beschreiben, Wahrscheinlichkeiten bestimmen, Ereignisse auf Unabhängigkeit untersuchen)	162
WR /dS	EF	V	WV	4	Handschrift und Geschlecht (8-Feldertafel auswerten, bedingte Wahrscheinlichkeiten	162

					aus absoluten Häufigkeiten schätzen [Lösung anschauen])									
WR	EF	V	WVV	5	Haarfarbe der Mutter und Tochter (Baumdiagramm in Vierfeldertafel übertragen, weiteres Baumdiagramm aufstellen, bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen und im Kontext interpretieren, Zwei Ereignisse auf Unabhängigkeit prüfen)	162								
WR	EF	V	WVV	6	Zweifacher Würfelwurf mit unterscheidbaren Würfeln (Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Erwartungswerte bestimmen für verschiedene Subtraktionen der Augenzahlen, Betrachtung der Addition und Multiplikation der Augenzahlen)	162								
WR	EF	V	WVV	7	Warten bis zum zweiten Erfolg beim Münzwurf (Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert bestimmen)	162								
WR	EF	V	WVV	8	Mit der Bahn zur Arbeit (bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen zu klassischem Bayes Problem, aber ohne Bayes)	163								
WR	EF	V	WVV	9	Früherkennung (Bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen)	163								
WR	EF	V	WVV	10	Mehrfacher Sechsfacher Münzwurf im Vergleich zu Mehrfachen Sechserwürfel Wurf (Mit welcher bedingten Wahrscheinlichkeit stammt ein Ereignis vom ersten oder zweiten Versuch [analog zu Bayes-Problem, ohne Bayes])	163								
WR	EF	V	WVV	11	Unabhängigkeitsaussage beweisen oder durch Beispiel begründen	163								
WR	EF	V	WVV	12	Spickzettel zum Verhältnis von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten	163								
					Zufallsexperiment/Datenerhebung mit möglichen Ergebnissen x_1, x_2, \dots, x_n									
					<table border="1"> <tr> <td>Realität</td> <td>Modell</td> </tr> <tr> <td>Relative Häufigkeiten h_1, h_2, \dots, h_n</td> <td>Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n</td> </tr> <tr> <td>$0 \leq h_i \leq 1$</td> <td>$0 \leq p_i \leq 1$</td> </tr> <tr> <td>Summe 1</td> <td>Summe 1</td> </tr> </table>	Realität	Modell	Relative Häufigkeiten h_1, h_2, \dots, h_n	Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n	$0 \leq h_i \leq 1$	$0 \leq p_i \leq 1$	Summe 1	Summe 1	
Realität	Modell													
Relative Häufigkeiten h_1, h_2, \dots, h_n	Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n													
$0 \leq h_i \leq 1$	$0 \leq p_i \leq 1$													
Summe 1	Summe 1													

					<table border="1"> <tr> <td>nach Experiment</td> <td>vor Experiment</td> </tr> <tr> <td>schwanken</td> <td>Festgelegt</td> </tr> <tr> <td colspan="2">Bei Symmetrien</td> </tr> <tr> <td>ungefähr gleich</td> <td>genau gleich</td> </tr> <tr> <td>Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \dots + x_n \cdot h_n$</td> <td>Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$</td> </tr> </table> <p>(Tabelle erläutern, mit Beispiel illustrieren, Bei Wahrscheinlichkeit auch auf Ergebnis von Experiment zurückführen [Lösung: „Mit Wahrscheinlichkeiten sagt man relative Häufigkeiten voraus. Wahrscheinlichkeiten liegen also zeitlich gesehen vor den nächsten Versuchen. Das ist der in der Tabelle notierte Zusammenhang. Andererseits gehen in Fällen, in denen man Wahrscheinlichkeiten schätzen muss, die Erfahrungen vergangener Versuchsserien mit ein. Unter diesem Aspekt ist auch Tinas Position gerechtfertigt.“])</p>	nach Experiment	vor Experiment	schwanken	Festgelegt	Bei Symmetrien		ungefähr gleich	genau gleich	Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \dots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$	
nach Experiment	vor Experiment															
schwanken	Festgelegt															
Bei Symmetrien																
ungefähr gleich	genau gleich															
Mittelwert $\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + \dots + x_n \cdot h_n$	Erwartungswert $\mu = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$															
WR	EF	V	WVV	13	Aussagen über Erwartungswerte an einem Beispiel illustrieren.	163										
WR	EF	V	WVV	14	Facebook erkennt Geschlecht anhand Meldungen (Verfahren angeben, wie man so etwas realisieren könnte)	163										
WR	EF	V	WVV	15	Wahrscheinlichkeit in binomialverteilten Versuch erraten (bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen, erläutern „mit bedingten Wahrscheinlichkeiten das Lernen aus Erfahrung modellieren können“)	163										
WR	EF	V	EXK	EIN	<p>„Lernen aus Erfahrung: Menschen lernen dadurch, dass sie verschiedene Annahmen („Hypothesen“) über einen Sachverhalt mit Beobachtungen und Erfahrungen („Indizien“) abgleichen. [...] Bedingte Wahrscheinlichkeiten helfen, diesen Erkenntnisprozess zu verstehen.“</p> <p>Vorstellung eines Experiments mehrfach eine Kugel ziehen nach Wahl einer Urne,</p>	164										

					bis man „intuitiv davon ausgeht“, welche Urne gezogen wurde.	
WR	EF	V	EXK	1	Experiment bewerten (Schätzung bewerten, Berechnung mit Schätzung vergleichen, prüfen ob vorgegebene Berechnung korrekt durchgeführt wurde, Ziehungszahl für bestimmte Wahrscheinlichkeit bestimmen)	164
WR	EF	V	EXK	2	Eigener Versuch ähnlich zum vorgegebenen Experiment (intuitive Schätzung mit Berechnung vergleichen)	165
WR	EF	V	EXK	MK	<p>Die Regel von Bayes</p> <p>(1) Im Alltag schenkt man verschiedenen Hypothesen A, B, C gleiches manchmal auch unterschiedlich großes Vertrauen. Man ordnet ihnen subjektive a-priori Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ zu.</p> <p>(2) Wenn ein Indiz I unter diesen Hypothesen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten $P_A(I)$, $P_B(I)$, $P_C(I)$ auftreten würde, erwartet man das Indiz (a-priori) insgesamt mit der totalen Wahrscheinlichkeit $P(I) = P(A) \cdot P_A(I) + P(B) \cdot P_B(I) + P(C) \cdot P_C(I)$.</p> <p>(3) Wenn man dann I tatsächlich beobachtet, vergleicht man die Wahrscheinlichkeiten, mit denen das Indiz von den fraglichen Alternativen stammen könnte. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten ändern sich dadurch zu den a-posteriori Wahrscheinlichkeiten. $P_I(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(I)}{P(I)}$, $P_I(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(I)}{P(I)}$, $P_I(C) = \frac{P(C) \cdot P_C(I)}{P(I)}$ (Regel von Bayes)</p>	165
WR	EF	V	EXK	3	Baumdiagramm mit Schätzung zusammenbringen (Wahrscheinlichkeit bestimmen,	165

					bedingte Wahrscheinlichkeit aus dem Baumdiagramm bestimmen, Vergleichen mit Berechnung, weitere Zeile berechnen)	
WR	EF	V	EXK	4	Allgemeine Begründung an der Vierfeldertafel (Satz von Bayes mit allgemeinen Einträgen in der Vierfeldertafel begründen)	165
WR	EF	V	EXK	5	Verstecktes Würfeln (Zufallsgerät herausfinden analog zum Experiment, Erläuterung wie Tabellenkalkulation funktioniert)	165
WR	EF	V	RBS		Begriffe Erklären Ergebnis, Gegenereignis, Schnittmenge, sowie Berechnung ihrer Wahrscheinlichkeiten, Pfadregel, Summenregel und Mehrfeldertafeln mit Baumdiagrammen in Verbindung bringen, bedingte Wahrscheinlichkeiten und stochastische Unabhängigkeit sowie den Erwartungswert und deren Zusammenhang zu längeren Versuchsreihen,	166
WR	EF	V	TRA	1	Zweifacher Würfelwurf (verschiedene Ereignisse auf Unabhängigkeit untersuchen)	167
WR	EF	V	TRA	2	Pünktlichkeit von Zügen (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses begründen, Unabhängigkeit der Pünktlichkeit von Zügen)	167
WR /dS	EF	V	TRA	3	Aussagen einordnen (Erwartungswert und Mittelwert, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit, Simulationen von Zufallsgeräten und Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten [Lösung: a) Falsch, der Mittelwert ist zufallsabhängig, nicht der Erwartungswert. Der Mittelwert schwankt um den Erwartungswert, f) Richtig, durch geeignete Simulationen erhält man relative Häufigkeiten, mit denen man bei hohem Versuchsumfang die Wahrscheinlichkeiten gut abschätzen kann.]	167
WR	EF	V	TRA	4	Vierfeldertafeln (übersetzen in Baumdiagramm, Zusammenhang von unabhängigen Ereignissen und deren Zusammenhang	167

					zum Gegenereignis, Anwendung medizinische Tests)	
WR /dS	EF	V	TRA	5	Unterschied zwischen Mittelwert und Erwartungswert [Lösung: „Wenn es sich in der Tabelle um relative Häufigkeiten handelt, stellt 4,15 den Mittelwert, ansonsten den Erwartungswert dar.“]	167
WR	EF	V	TRA	6	Glücksspiel mit einem Glücksrad (Gewinn auf lange Sicht, Einsatz für faires Spiel bestimmen)	167
WR	EF	V	TRA	7	Suchtmittelspürhund (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, bedingte Wahrscheinlichkeiten bestimmen)	167
WR /dS	EF	CI	Kap V		Selbsteinschätzung in Checkliste. Themen finden sich in den folgenden Aufgaben	205
WR /dS	EF	CI	Kap V	1	Urnenziehung (relative Häufigkeiten angeben, absolute Häufigkeiten bestimmen)	205
WR /dS	EF	CI	Kap V	2	Bundestagswahl (relative Häufigkeiten angeben, absolute Häufigkeiten aus relativen Häufigkeiten bestimmen)	205
WR /dS	EF	CI	Kap V	3	Laplace-Experimente identifizieren (Begründen für welchen Zufallsversuch die Laplace-Wahrscheinlichkeitsannahme gerechtfertigt ist)	205
WR /dS	EF	CI	Kap V	4	Arithmetisches Mittel einer Datenreihe bestimmen.	205
WR /dS	EF	GTR			Anleitung um Zufallszahlen zu generieren, Listen auszuwerten (z.B. hinsichtlich des Mittelwerts und der empirischen Standardabweichung oder Varianz) und Säulendiagramme zu erstellen	266 – 267 + 274 – 276
dS/ bS	EF	GTR			Regressionsgerade zu vorliegenden Daten erstellen	267
WR	EF	GTR			Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Tabellen und Diagrammen darstellen und Erwartungswerte berechnen.	268 – 276

WR /dS	EF	REG			Bedingte Wahrscheinlichkeit, Ereignis, Ergebnis, Ergebnismenge, Erwartungswert, Gegenereignis, mehrstufige Zufallsexperimente, Mengenschreibweise, Mittelwert	277
WR /dS/ kB	EF	REG			Pfadregel, relative Häufigkeiten, Schnittmenge, Unabhängigkeit, Vierfeldertafel, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Ziehen mit Zurücklegen, Ziehen ohne Zurücklegen	278
Qualifikationsphase						
dS	Q	II	WT	EIN	Höchste Temperatur (Auswertung von einem Säulendiagramm und einer Kurve)	84
dS	Q	II	WT	EIN	Gleichmäßiger Regenfall (Bestimmung des Mittelwerts über das Integral einer Funktion in einem bestimmten Intervall)	84
dS	Q	II	WT	MK	Die Zahl $\bar{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ heißt Mittelwert der Funktion f auf [a; b] .	84
dS	Q	II	WT	BSP	Mittelwert einer Tierpopulation (Veränderung einer Tierpopulation periodisch, Bestimmung der mittleren Population)	84
dS	Q	II	WT	1	Mittelwert gegebener Funktionen bestimmen (Funktionsgraf skizzieren, Mittelwert bestimmen, Mittelwert in Grafik veranschaulichen)	85
dS	Q	II	WT	2	Grafische Bestimmung des Mittelwerts	85
dS	Q	II	WT	3	Integral und Größenverhältnis in Darstellung einer Funktion und deren Mittelwert bestimmen.	85
dS	Q	II	WT	4	Mittlere Population in Mexico (vergleich verschiedener Intervalle und prüfen des Modells)	85
dS	Q	II	WT	5	Geschwindigkeit eines Autos (Funktionsgraf zeichnen und mittlere Geschwindigkeit zeichnerisch bestimmen, mittlere Geschwindigkeit rechnerisch bestimmen, Strecke rekonstruieren)	85
dS	Q	II	WT	6	Funktionen zu gegebenem Mittelwert finden	85

dS	Q	II	WT	7	Produktionskosten (Gesamtproduktionskosten für bestimmte Stückzahl und Preis pro Stückzahl)	85
dS	Q	II	WT	8	Begründung zum Mittelwert der Sinusfunktion auf einem Intervall.	85
dS	Q	II	WT	9	Durchschnittliche Tagesdauer in Madrid bestimmen.	85
WR	Q	III	LE2	ZZW12	Dreifacher Würfelwurf (Wahrscheinlichkeit von Ereignissen (durch Gegenereignis) bestimmen)	106
WR	Q	III	LE3	ZZW11	Spiel mit zweifachem Würfelwurf (Baumdiagramm erstellen und Gewinnwahrscheinlichkeit bestimmen, darstellen in Vierfeldertafel, bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen)	110
WR	Q	III	LE4	ZZW10	Medizinischer Fischtest (Bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen)	114
WR	Q	III	LE5	ZZW8	Fairer und gezinkter Würfel (bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen, welcher Würfel vorliegt)	117
WR	Q	III	LE6	ZZW9	Spiel mit Urnenauswahl (bedingte Wahrscheinlichkeit für Urnenauswahl, Auswirkung der Veränderung des Urneninhalts)	120
	Q	III	TRA	10	Radioaktiver Zerfall Radon [Randtext: Radioaktiver Zerfall ist ein stochastischer Vorgang, wie man an dem Graphen (Fig. 1) sieht. Jedes Radon-Atom zerfällt in der nächsten Sekunde mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p . Wie groß ist p ? Wieso nimmt die Aktivität exponentiell ab?	127
WR	Q	VI	LE1	ZZW13	Zweifacher Würfelwurf (Baumdiagramm erstellen, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses)	209
WR	Q	VI	LE1	ZZW14	Vierfeldertafeln auswerten (Vierfeldertafel ergänzen, Baumdiagramme erstellen, bedingte Wahrscheinlichkeit daraus ablesen)	209

WR	Q	VI	LE2	ZZW8	Dreifacher Münzwurf (Baumdiagramm erstellen, Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse bestimmen, Gegenereignis und deren Wahrscheinlichkeit bestimmen)	212
dS	Q	VI	LE3	ZZW14	Zahlenliste (Boxplot zur Zahlenliste erstellen [Randtext: Tipp: Zum Erstellen eines Boxplots benötigt man die Begriffe Median, Mittelwert, Minimum, Maximum und Quartile)	216
dS	Q	VI	LE4	ZZW10	Notenspiegel (Boxplot zum Notenspiegel erstellen)	220
WR /dS	Q	VI	LE5	ZZW8	Umfrage zum Schulbesuch (Vierfeldertafel erstellen, bedingte Wahrscheinlichkeit bestimmen)	224
WR /dS/ bS	Q	VIII	AUF		Schlüsselkonzept: Wahrscheinlichkeit – Statistik „In der beschreibenden Statistik sammelt man Daten. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnet man Modelle. In der beurteilenden Statistik prüft man Modelle.“ (dazu passendes Bild, in dem beurteilende Statistik dargestellt wird als das Vermuten eines Modells mit den Kennwerten μ, σ aus der Realität mit den empirischen Kennwerten \bar{x} und s und der Testung des Modells an der Realität), gibt es gedächtnislose Münzen und warum (passendes Bild))	268
WR /dS	Q	VIII	AUF	DKS	bedingte Wahrscheinlichkeiten, mit Pfadregel und Summenregel Wahrscheinlichkeit berechnen, mit Simulationen Wahrscheinlichkeiten schätzen, Mittelwert einer Häufigkeitsverteilung, Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, stochastische Unabhängigkeit,	268
WR /dS/ bS	Q	VIII	AUF		Stochastik als inhaltsbezogene Kompetenz in diesem Kapitel ausgewiesen [alle prozessbezogenen Kompetenzen (Problemlösen, Modellieren, Werkzeuge) sind ausge-	269

					wiesen außer Argumentieren/Kommunizieren], Bilder zur Standardabweichung beim Backen, Trefferwahrscheinlichkeit in Bezug auf Geschlecht und Schriftbild, Zufallsgröße Streuung am Strand, sowie die Darstellung im Balkendiagramm der Binomialverteilung mit entsprechenden Kenngrößen,	
WR /dS	Q	VIII	AUF	DKB	mit Bernoulli-Ketten zu arbeiten, mit Binomialverteilungen Probleme zu lösen, Standardabweichung und Erwartungswert (auch von Binomialverteilung) wird eingeführt, Hypothesen über unbekannt Wahrscheinlichkeiten zu testen, von Stichproben auf die Gesamtheit, von relativen Häufigkeiten auf die Wahrscheinlichkeit schließen (Herv. G.S.)	269
WR /bS	Q	VIII	ERK	1	Multiple-Choice-Test („ Nachdenken “ Test beantworten mit Begründung, „ Simulieren “ Simulation einer zufälligen Auswahl der Antworten, Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Trefferanzahlen schätzen und angeben, mit GTR die Wahrscheinlichkeiten für Trefferwahrscheinlichkeiten ausrechnen und mit Schätzung vergleichen)	270
WR /bS	Q	VIII	ERK	2	Vierfacher Zufallsversuch mit verschiedenen Zufallsgeräten (7 Zufallsgeräte besorgen, Experiment mit großem n durchführen, Wahrscheinlichkeiten je Zufallsgerät schätzen, Trefferzahl für ein Zufallsgerät schätzen, mehrfache Wurf Wahrscheinlichkeit schätzen, Galtonbrett Simulation)	270
WR /bS	Q	VIII	ERK		25 Testaufgaben zur Stochastik (aus den vorhergehenden Klassenstufen): beschreibenden Statistik (Mittelwerte, Boxplots, relative Häufigkeit, absolute Häufigkeit, Säulendiagramm), zur Begriffsbildung („mit relativen Häufigkeiten kann man Wahr-	271

					scheinlichkeiten schätzen“, „Wahrscheinlichkeiten sagen den Ausgang einzelner Zufallsexperimente vorher“, „Wahrscheinlichkeiten sehen relative Häufigkeiten auf lange Sicht vorher“ „Wenn man es genau nimmt, gibt es in Wirklichkeit keine echten Laplace-Würfel“), Pfadregel (mehrstufige Zufallsversuche, verschiedene mehrstufige Ereignisse, Pfadregel, Summenregel, Wahrscheinlichkeitsverteilungen)	
dS	Q	VIII	LE1	EIN	Verkehrsdichte auf Autobahn Spuren (Liniendiagramme erläutern)	272
dS	Q	VIII	LE1	EIN	„Bevor man die Realität durch Wahrscheinlichkeitsmodelle beschreibt, muss man sie durch Messen und Zählen erfassen.“, Kennwerte und Darstellung, Bsp. Statistische Messung von gehäuften und gestrichenen Esslöffeln (Bestimmung Mittelwert und empirische Standardabweichung),	273
dS	Q	VIII	LE1	MK	Gegeben ist eine Urliste $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. die zugehörigen Kenngrößen sind: der Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$ und die empirische Standardabweichung $s = \sqrt{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)}$. Bei Messungen charakterisiert die Standardabweichung die Messungenauigkeit.	273
dS	Q	VIII	LE1	EIN	Erklärung der Gauß'schen Faustregel in Bezug auf Messwerte innerhalb des Standardabweichungs-Intervalls, „Hinter dieser Faustregel, die den Sinn der Standardabweichung verdeutlicht, steckt ein tieflyingender Satz, der zentrale Grenzwertsatz. Den kann man in der Schule nicht beweisen. Ein Spezialfall, der Satz von De Moivre-Laplace, wird auf S. 335 thematisiert.“	273
dS	Q	VIII	LE1	BSP1	Kennwerte aus einer gegebenen Urliste bestimmen	273

dS	Q	VIII	LE1	BSP2	Kennwerte mithilfe relativer Häufigkeiten bestimmen.	273
dS	Q	VIII	LE1	1	Zahlenreihen auswerten (Kennwerte schätzen und bestimmen, danach Zahlenreihen verändern)	274
dS	Q	VIII	LE1	2	Kennwerte einer Häufigkeitsverteilung aus einem Diagramm bestimmen.	274
dS	Q	VIII	LE1	3	Kennwerte von verschiedenen Urlisten bestimmen.	274
dS	Q	VIII	LE1	4	Minute schätzen (Kennwerte aus Urlisten bestimmen, verglichen mit geschätzten Kennwerten aus Säulendiagramm, Beurteilung ob sich Schätzfähigkeit verbessert hat, mit Gauß'scher Faustregel vergleichen, Experiment selbst durchführen mit gegebener Versuchsanleitung)	274
dS	Q	VIII	LE1	5	Strecke an der Tafel schätzen (Standardabweichung der Urliste zur Schätzung bestimmen, Schätzen [auf ein Intervall] wie groß die Länge wohl tatsächlich war, Anteil der Schätzwerte im Standardabweichungsintervall bestimmen, Experiment selbst durchführen.	274
dS	Q	VIII	LE1	ZZÜ6	Würfelergebnisse (Kennwerte bestimmen)	275
dS	Q	VIII	LE1	ZZÜ7	Kennwerte von Häufigkeitsverteilungen berechnen und Unterschiede erläutern	275
dS	Q	VIII	LE1	8	Kreiszahl π durch Messen bestimmen (Klassenbreite im Säulendiagramm angeben, absolute Häufigkeit vermessener Objekte rekonstruieren, Kennwerte der Messwerte bestimmen, Bewertung auf wie viele Nachkommastellen die Messung angegeben werden sollte)	275
dS	Q	VIII	LE1	9	Tabellenkalkulation zur Bestimmung von Kennwerten (Kalkulationsblatt kontrollieren und erklären, Auswirkung einer Veränderung der Urliste auf die Kennwerte, eigenen Tabellenkalkulationsblatt erstellen und	275

					Vermutung prüfen, direkte Funktionen der Tabellenkalkulation prüfen)	
dS	Q	VIII	LE1	10	Fallexperimente am Schulgebäude (Fallzeiten experimentell bestimmen, Kennwerte der aufgenommenen Daten bestimmen und vergleichen, Höhe des Gebäudes bestimmen)	275
dS	Q	VIII	LE1	11	Gewicht von Erbsen (Tabellenkalkulationsblatt mit technischen Werkzeugen prüfen, Urliste prüfen in Bezug auf Klassenbreite, Äpfel Kennwerte bestimmen und Vergleichen)	276
dS	Q	VIII	LE1	12	Salz Menge bestimmen (Experiment zur Prise und weiteren Größen, Standardabweichung nutzen um eigene Stichprobe zu charakterisieren, Kennwerte von anderen Lebensmittelmengen bestimmen)	276
dS	Q	VIII	LE1	13	Minimalitätseigenschaft des Mittelwerts (an exemplarischem Beispiel bestimmen, verallgemeinern)	276
WR	Q	VIII	LE2	EIN	Vergleich von zwei Lotteriedeckungsangeboten (wie hoch ist die Gewinnmöglichkeit)	277
WR /dS	Q	VIII	LE2	EIN	„Häufigkeitsverteilungen charakterisiert man durch die Kenngrößen Mittelwert \bar{x} und empirische Standardabweichung s . Wenn man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung als Modell angeben kann, so werden entsprechende theoretische (Herv. i. Original) Kenngrößen festgelegt, die man Erwartungswert μ (lies Mü) und Standardabweichung σ (lies Sigma) nennt. Sie ermöglichen eine Prognose der empirischen Kenngrößen \bar{x} und s . Das wird an einem Beispiel erläutert.“ Lotteriebeispiel, Begriffsklärung von Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße, Begriffsklärung des Erwartungswert im Kontext als mittlerer Gewinn, die Standardabweichung gibt Streuung um Erwartungswert an.	277 – 278

					[Randtext: Analogie: Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ermöglicht eine Prognose seiner relativen Häufigkeit]	
	Q	VIII	LE2	MK	Für eine Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ definiert man folgende Kenngrößen: Erwartungswert von X : $\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$ Standardabweichung von X : [Abgekürzt dargestellt, G.S.] $\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + \dots}$	278
WR /dS	Q	VIII	LE2	EIN	Sprechweise eingeführt: „Erwartungswert und Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung“	278
WR /dS	Q	VIII	LE2	BSP1	„Modell und Realität“ (Augensumme beim Würfeln mit zwei Würfeln, Bestimmung der theoretischen Kennwerte, Vergleich mit Experiment oder Simulation) [insbes. wird auf das unterschiedliche Aussehen zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Häufigkeitsverteilung der Simulation hingewiesen]	278
WR	Q	VIII	LE2	BSP2	Faires Spiel bei Urnenziehung (Erwartungswert des Gewinns berechnen, Auszahlungsbetrag für faires Spiel bestimmen)	279
WR	Q	VIII	LE2	1	Zu gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße theoretische Kennwerte bestimmen.	279
WR	Q	VIII	LE2	2	Münzen ziehen (Zufallsgröße angeben, theoretische Kennwerte bestimmen)	279
WR /dS	Q	VIII	LE2	3	Katzen drillings geburt (Wahrscheinlichkeitsverteilung und theoretische Kenngrößen bestimmen, Simulation mit Münzwürfeln oder „elektronischem Rechenhilfsmittel“, erläutern des Zusammenhangs zwischen theoretischen und empirischen Kenngrößen)	279

WR	Q	VIII	LE2	4	Lotto (theoretische Kennwerte bestimmen von gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung, prüfen der Wahrscheinlichkeitsverteilung mithilfe der Pfadregeln)	279
WR	Q	VIII	LE2	5	Durchschnittlich gezogener Geldbetrag (theoretische Kennwerte bestimmen, weitere Zufallsgrößen benennen)	279
WR	Q	VIII	LE2	6	Glücksspiel (theoretische Kenngrößen aus gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, fairen Einsatz bestimmen, Auszahlung für bestimmten fairen Einsatz anpassen)	279
WR	Q	VIII	LE2	7	2&12 Würfelspiel (Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellen, fairen Einsatz bestimmen)	280
WR	Q	VIII	LE2	ZZÜ8	Theoretische Kenngrößen zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen	280
WR	Q	VIII	LE2	ZZÜ9	Glücksrad-Lotterie (Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, theoretische Kenngrößen bestimmen, fairen Einsatz bestimmen)	280
WR	Q	VIII	LE2	10	Eishockey-Ausscheidungsspiel (Erwartungswert der Anzahl der Spiele bestimmen)	280
WR /dS	Q	VIII	LE2	11	Kreuzworträtsel Verlosung (theoretische Kenngrößen bestimmen, Bestimmung der Grundgesamtheit für bestimmten Erwartungswert)	280
WR /bS	Q	VIII	LE2	Info	Standardabweichung als „geniales“ Streumaß aufgrund der leichten Konstruktion der mehrstufigen Kenngrößen aus den Einzelversuchen	280
WR	Q	VIII	LE2	12	Heilchancen von Medikament (Wahrscheinlichkeitsverteilung und theoretische Kenngrößen bestimmen, prüfen ob die Aussagen aus WR/bS_Q_VIII_LE“_Info (S. 280) stimmen	280
WR	Q	VIII	LE2	13	Glücksrad drehen (gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung prüfen, Eigenschaft des Mittelwerts und der Standardabweichung	281

					exemplarisch am Beispiel zeigen, Wahrscheinlichkeit bestimmen für Werte außerhalb einer Standardabweichung und vgl. Gauß'sche Faustformel	
WR /bS	Q	VIII	LE2	Info	$\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz für die Verringerung der Standardabweichung bei der Mittelwertbildung bei Vergrößerung der Stichprobe	281
WR /bS	Q	VIII	LE2	14	„Das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz experimentell prüfen“ Simulation durch Zufallsexperiment (theoretische Kennwerte berechnen, bestätigen durch Simulation mit steigender Versuchszahl, Mittelwert und Standardabweichung betrachten, Prüfen der Gauß'schen Faustregel mit der Simulation.	281
WR	Q	VIII	LE3	EIN	Zwei Freiwürfe verwandeln (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen)	282
WR /bS	Q	VIII	LE3	EIN	Einführung Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette anhand eines Multiple-Choice Beispiels, Entwicklung der Pfadanzahl mithilfe des Binomialkoeffizienten,	282
WR	Q	VIII	LE3	MK	Eine Bernoulli-Kette der Länge n besteht aus n unabhängigen Bernoulli-Experimenten mit den Ergebnissen 1 („Treffer“) und 0 („Niete“). Beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer und ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so erhält man die Wahrscheinlichkeit für r Treffer mithilfe der Bernoulli-Formel : $B_{n,p}(r) = \binom{n}{r} p^r \cdot (1-p)^{n-r}; r = 0, \dots, n$ Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $B_{n,p}$ heißt Binomialverteilung . Die Zufallsgröße X heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p.	283
KB	Q	VIII	LE3	EIN	Berechnungsmöglichkeit des Binomialkoeffizienten („mit dem GTR oder Excel, mit dem Pascal-Dreieck, per Hand mit der Formel)	283

WR	Q	VIII	LE3	BSP	Fünffacher Würfelwurf (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse mit der Bernoulli-Formel bestimmen)	283
WR /bS	Q	VIII	LE3	1	Verschiedene Zufallsversuche (Zufallsversuch als Bernoulli-Experiment konstruieren, Wahrscheinlichkeiten bestimmen)	283
KB	Q	VIII	LE3	2	Binomialkoeffizienten berechnen und Beobachtungen daraus prüfen	284
WR	Q	VIII	LE3	3	Baumdiagramm und Bernoulli-Kette (Baumdiagramm erstellen, Binomialkoeffizienten bestimmen, Ergebnisse kontrollieren, Binomialverteilung angeben zu bestimmten Parametern)	284
WR	Q	VIII	LE3	4	Sechsfacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Veränderung der Verteilung in Abhängigkeit der Veränderung von p , Kontrolle mit Rechenhilfsmittel)	284
WR	Q	VIII	LE3	5	Multiple-Choice-Test (Bestimmung Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse)	284
WR	Q	VIII	LE3	6	Maschinelle Getränkeabfüllung (Bestimmung Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse)	284
WR	Q	VIII	LE3	7	Linkshänder (Bestimmung Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse)	284
WR	Q	VIII	LE3	ZZÜ8	Sechsfaches Drehen des Glücksrads (Bestimmung Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse)	284
WR	Q	VIII	LE3	ZZÜ9	Elfmeterschießen (Bestimmung Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse)	284
WR /dS	Q	VIII	LE3	10	Dreifacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeitsverteilung prüfen und kommentieren, Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, theoretische Kenngrößen ermitteln, Experiment mit „Rechenhilfsmittel“ simulieren und Vergleich von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sowie Mittelwert und empirische Standardabweichung)	285

					mit entsprechenden theoretischen Größen vergleichen)	
KB	Q	VIII	LE3	11	„Gilt immer-gilt nie – es kommt drauf an“ verschiedene Aussagen zum Binomialkoeffizienten	285
KB	Q	VIII	LE3	12	Allgemeine binomische Formel (verschiedene Binome ausmultiplizieren, Binomialkoeffizienten als Vorfaktoren)	285
WR /KB	Q	VIII	LE3	13	Werte der Binomialverteilung Summieren (Rechnerisch prüfen, inhaltliche Bedeutung erläutern am exemplarischen Glücksrad, Regel verallgemeinern)	285
KB	Q	VIII	LE3	Info	Kombinatorisches Argument für den Zusammenhang zwischen dem Binomialkoeffizienten und dem Abzählen von Pfaden zu bestimmten Ereignissen	286
KB	Q	VIII	LE3	14	Binomialkoeffizient (mit Formeln berechnen, am Baumdiagramm begründen und erläutern)	286
KB	Q	VIII	LE3	15	Rekursionsformel des Binomialkoeffizienten (exemplarisch zeigen und verallgemeinern)	286
WR	Q	VIII	LE4	EIN	Mehrfacher Münzwurf (Aussagen zu Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung mit wachsendem n treffen)	287
WR /KB	Q	VIII	LE4	EIN	Binomialverteilung besonders relevant in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, „Die händische Berechnung der Wahrscheinlichkeiten über die Binomialkoeffizienten ist aber mühsam. Schneller geht es, wenn man zwei auf Rechenhilfsmitteln verfügbare Funktionen nutzt“	287
WR /bS	Q	VIII	LE4	MK	Bei einer binomialverteilten Zufallsgröße X kann man alle Berechnungen mit zwei Grundfunktionen durchführen. a) Die erste Funktion berechnet zur Trefferzahl r die Wahrscheinlichkeit $P(X = r) = B_{n,p}(r)$ -	287

					b) Die zweite Funktion berechnet die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq r)$, also die Summe $P(X = 0) + \dots + P(X = r) = F_{n,p}(r)$.	
WR /bS	Q	VIII	LE4	EIN	Allgemeine Formel der theoretischen Kenngrößen für Binomialverteilungen, Beschreibung der näherungsweise Glockenform der Binomialverteilung bei hoher Versuchszahl, Nutzung der kumulierten Wahrscheinlichkeit,	287 – 288
bS/ WR	Q	VIII	LE4	MK	Sigmaregeln [Auf die Aufzählung der ein bis drei Sigma-Regeln wird an dieser Stelle verzichtet. Alle Sigma-Regeln werden im Merkkasten allerdings anhand einer Binomialverteilung mit $n=125$ und $p=0,4$ illustriert]	288
bS/ WR	Q	VIII	LE4	EIN	Konventionen hinsichtlich nicht ganzzahliger Intervallgrenzen. „Die Näherung [durch die Sigma-Regeln] ist im Allgemeinen umso besser, je größer n ist und je näher p bei $0,5$ liegt“	288
bS/ WR	Q	VIII	LE4	BSP	60-facher Würfelwurf (Bestimmung verschiedener Wahrscheinlichkeiten mithilfe des GTR, Prüfung der Ein-Sigma-Regel für verschiedene Versuchszahlen)	288
WR	Q	VIII	LE4	1	Berechnung der Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse in Bezug auf verschiedene Binomialverteilungen	289
bS/ WR	Q	VIII	LE4	2	Blonde Schüler (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Erwartung in Bezug auf den eigenen Kurs, prüfen mit der 2σ -Regel)	289
bS/ WR	Q	VIII	LE4	3	Wahrscheinlichkeiten schätzen in Bezug auf verschiedene Parameter danach prüfen mit GTR	289
bS/ WR	Q	VIII	LE4	4	100-facher Würfelwurf (Bestimmung der theoretischen Kenngrößen, 2σ -Intervall bestimmen, vgl. mit Näherungswert, Wahrscheinlichkeitsverteilung erstellen)	289

bS/ WR	Q	VIII	LE4	5	Theoretische Kenngrößen und 2σ -Intervall einer Binomialverteilung bestimmen und Graph skizzieren	289
bS/ WR	Q	VIII	LE4	6	Geburtstage im Kurs (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, Wahrscheinlichkeit des 1σ -Intervalls bestimmen, Betrachtung anderer Stichprobengröße	289
bS/ WR	Q	VIII	LE4	ZZÜ7	Binomialverteilte Zufallsgröße (verschiedene Wahrscheinlichkeiten bestimmen, Gegenwahrscheinlichkeit nutzen, Wahrscheinlichkeit eines weiteren Ereignisses bestimmen)	289
bS/ WR	Q	VIII	LE4	ZZÜ8	Reklame-Müll (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, 2σ -Regel zur Intervallabschätzung nutzen.	289
bS/ WR	Q	VIII	LE4	9	Binomialverteilungen graphisch darstellen (händisch skizzieren mit Markierung der verschiedenen Intervalle aus der Sigma-Regel, mit GTR kontrollieren und einordnen in Bezug zur Berechnung)	290
bS/ WR	Q	VIII	LE4	10	Aussagen zu Graphen von Binomialverteilungen treffen.	290
bS/ WR	Q	VIII	LE4	11	Parameter aus Graphen von Binomialverteilungen bestimmen.	290
bS/ WR	Q	VIII	LE4	12	Allgemeine Rechenregeln für verschiedene Wahrscheinlichkeiten prüfen.	290
bS	Q	VIII	LE4	13	Prüfpläne bei der Lieferung (Auswahl eines Prüfplans aus Perspektive des Händlers und des Lieferanten und Begründung)	290
WR /bS	Q	VIII	LE5	EIN	Trefferwahrscheinlichkeiten bei der Binomialverteilung (verschiedene Diagramme zuordnen)	291
WR /bS	Q	VIII	LE5	EIN	Praktische Probleme durch Rückbestimmung eines der Parameter der Binomialverteilung aus den übrigen drei Parametern	291
WR /bS	Q	VIII	LE5	BSP1	Flug-Überbuchung (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen)	291

WR /bS	Q	VIII	LE5	BSP2	Rot-Grün-Sehschwäche (Bestimmung Stichprobengröße für bestimmte Trefferwahrscheinlichkeit.)	291
WR /bS	Q	VIII	LE5	BSP3	Bestimmung fehlerhafte Produktionsquote (Trefferwahrscheinlichkeit p in Bezug zur Stichprobengröße und gewünschten Wahrscheinlichkeit von Treffern in Stichprobe)	292
WR /bS	Q	VIII	LE5	1	Wahrscheinlichkeit defekter Kugelschreiber in Stichprobe (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	292
WR /bS	Q	VIII	LE5	2	Überbuchung Ferienwohnungen (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	292
WR /bS	Q	VIII	LE5	3	Keimgarantie von Blumenzwiebeln (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen in Abhängigkeit der Parameter n , p und r , Auswirkungen des Stichprobenumfangs, Gründe gegen Annahme der Unabhängigkeit benennen)	292
WR /bS	Q	VIII	LE5	4	männliche Babys (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen in Abhängigkeit der Parameter n , p und r , Auswirkungen des Stichprobenumfangs)	292
WR /bS	Q	VIII	LE5	5	Möglichst kleine Stichprobengröße suchen (Bestimmung für verschiedene Wahrscheinlichkeiten)	292
WR /bS	Q	VIII	LE5	6	Drei Sechsen würfeln (Wie oft werfen für bestimmte Wahrscheinlichkeit, Auswirkungen des Wechsels des Zufallsgeräts)	292
WR /bS	Q	VIII	LE5	7	Anzahl Würfelwürfe bis zu bestimmtem Ereignis mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit	293
WR /bS	Q	VIII	LE5	8	Bestimmung der Trefferwahrscheinlichkeit für vorgegebene Wahrscheinlichkeit von Treffern in der Stichprobe bei verschiedenen Parametern n und r	293
WR /bS	Q	VIII	LE5	9	Fahrgastzufriedenheit im Verkehrsunternehmen (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, Frage in diesem Kontext	293

					zu symbolischem Ereignis geben, Stichprobengröße für Befragung festlegen, Veränderung der Trefferwahrscheinlichkeit und Auswirkung auf Anteil)	
WR /bS	Q	VIII	LE5	ZZÜ10	männliche Babys (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen in Abhängigkeit der Parameter n , p und r , Bestimmung des Stichprobenumfangs bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit)	293
WR /bS	Q	VIII	LE5	ZZÜ11	Übertragungsfehler (Bestimmung der Übertragungsfehlerwahrscheinlichkeit bei gegebenen Parametern n , P , r)	293
WR /bS	Q	VIII	LE5	12	Schätzung und Rechnen, in Abhängigkeit von welchem p die Binomialverteilung oder die kumulierte Binomialverteilung größer ist.	293
WR /bS	Q	VIII	LE5	13	Multiple Choice-Test (Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse, Änderung dieser Wahrscheinlichkeiten, wenn man die Anzahl der Treffer verändert)	293
WR /bS	Q	VIII	LE5	14	Qualitätskontrollen Kriterium, am Beispiel einer Werbekampagne (Berechnen verschiedener Wahrscheinlichkeiten, Auswirkungen der Veränderung des Stichprobenumfangs)	294
WR /bS	Q	VIII	LE5	15	Fußballsticker (Verteilung in Stichprobe auf Grundgesamtheit übertragen, von P , n und r auf p , Veränderung der Stichprobengröße)	294
bS	Q	VIII	WT	EIN	Trefferwahrscheinlichkeit p schätzen (Liste von Zufallszahlen gegeben daraus Trefferwahrscheinlichkeit p abschätzen)	295
bS	Q	VIII	WT	EIN	Messgenauigkeit lässt sich steigern durch Mittelwertbildung und mehrfache Messung, „ Von Wahrscheinlichkeiten auf relative Häufigkeiten schließen – Schwankungsintervall Bei einer n -stufigen	295

					<p>Bernoullikette mit der Trefferwahrscheinlichkeit p gilt nach der 2σ-Regel [Dies ist eine Regel über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die „unserer Erfahrung nach“ auch für Häufigkeitsverteilungen gilt, G.S.] für $n \cdot p - 2\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq X \leq n \cdot p + 2\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Hieraus erhält man nach Division durch n für die relative Häufigkeit h [hier muss dann gelten, dass die absoluten Häufigkeiten bereits binomialverteilt sind!, G.S.] $p - 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X}{n} = h \leq p + 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$.</p>	
bS	Q	VIII	WT	MK	<p>$\frac{1}{\sqrt{n}}$-Gesetz für Schwankungsintervalle Bei einer Bernoullikette mit Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p liegen fast alle (ca. 95,4%) der relativen Häufigkeiten im Schwankungsintervall $\left[p - 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 2\frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$. Die Länge des Intervalls halbiert (drittelt ...) sich, wenn man den Versuchsumfang vervierfacht (verneunfacht ...). Diese Intervalle lassen sich für Überschlagsrechnungen griffig nach oben abschätzen durch $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.</p>	295
bS	Q	VIII	WT	EIN	<p>Die Rückrichtung wird betrachtet, von relativen Häufigkeiten zu Wahrscheinlichkeiten, also die Nutzung der Anwendung von $\frac{1}{\sqrt{n}}$ zur Konstruktion eines Vertrauensintervalls zur Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten aus gemessenen relativen Häufigkeiten.</p>	295 – 296
bS	Q	VIII	WT	MK	<p>Wenn bei einer Bernoullikette der Länge n die relative Trefferhäufigkeit h beobachtet wird, bestimmt man die Grenzen des Vertrauensintervalls $I=[a;b]$, indem man die</p>	296

					<p>Gleichungen $p \pm \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = h$ nach p auflöst. Man erhält näherungsweise $I \approx \left[h - 2\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + 2\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right].$</p>	
bS	Q	VIII	WT	BSP1	Schwankungsintervalle bei Stichproben aus Wahlen (Intervall bestimmen in Bezug auf Parameter der Binomialverteilung, Bestimmung der Stichprobengröße)	297
bS	Q	VIII	WT	BSP2	Vertrauensintervall auf der Basis einer Wählerbefragung (passt Wähleranteil zu Stichprobenergebnis, Vertrauensintervall bestimmen, Stichprobengröße abschätzen)	297
bS	Q	VIII	WT	1	Aussagen zu verschiedenen Bernoulli-Ketten und Stichprobengrößen in Bezug auf die Schwankungsintervalle.	297
bS	Q	VIII	WT	2	Bestimmung der Stichprobengröße zu gegebener Trefferwahrscheinlichkeit und Schwankungsintervall.	298
bS	Q	VIII	WT	3	Würfeln mit dem Schweinewürfel (Vertrauensintervall berechnen und mit Näherungsformel vergleichen)	298
bS	Q	VIII	WT	4	Wurmstichige Pflaumen (Vertrauensintervall bestimmen und Annahme über Unabhängigkeit explizieren)	298
bS	Q	VIII	WT	5	Zusammenhang zwischen 2σ -Regel und Vertrauensintervall (Bestimmung beider Größen an konkreten Beispielen und Vergleich)	298
bS	Q	VIII	WT	6	Trefferwahrscheinlichkeit in Bezug auf das Vertrauensintervall prüfen.	298
bS	Q	VIII	WT	7	Autobauer (Wahrscheinlichkeiten durch Hochrechnen aus relativen Häufigkeiten bestimmen und die Problematik für daraus folgende Aussagen angeben)	298
bS	Q	VIII	WT	ZZÜ8	Vertrauensintervall für verschiedene Stichproben und deren Veränderung in Bezug auf die Stichprobengrößen sowie Klärung von Hintergedanken, wenn Stichprobengröße nicht angegeben wird.	298

bS	Q	VIII	WT	ZZÜ9	Schätzung des Vertrauensintervalls und der nötigen Stichprobengröße. („Schätzen Sie bevor Sie rechnen“)	298
bS	Q	VIII	WT	10	Haarshampoos („repräsentative Umfrage“ mit verschiedenen Stichprobengröße und inhaltliche Deutung)	298
bS	Q	VIII	WT	11	Vertrauensintervallberechnung durch Schritte auf dem GTR erkennen und auflösen nach der Trefferwahrscheinlichkeit	298
bS	Q	VIII	WT	12	„Die Schwankungsintervalle relativer Häufigkeiten sind symmetrisch zur Wahrscheinlichkeit, aber die Konfidenzintervalle der Wahrscheinlichkeiten sind nicht symmetrisch zur relativen Häufigkeit. Erläutern Sie diese Aussage anhand von Beispielen“, Diagrammform und Berechnung	299
bS	Q	VIII	WT	13	„ Unter die Lupe genommen: Das Schwankungsintervall [klassische Abbildung zum empirischen Gesetz der großen Zahl] Das Gesetz der großen Zahl besagt: Je größer der Versuchsumfang, desto näher liegt die relative Häufigkeit an der Wahrscheinlichkeit. [...]“, Zusammenhang zwischen Schwankungsintervall und dem Gesetz der großen Zahlen angeben.	299
bS	Q	VIII	WT	14	Intervallgrenzen des Vertrauensintervall bestimmen (durch Auflösen der quadratischen Gleichung, näher zeigen zur bereits angegebenen Formel)	299
bS	Q	VIII	WT	15	Wie groß muss die Stichprobe sein, damit man p mit bestimmter Wahrscheinlichkeit aus den relativen Häufigkeiten mit vorgegebener Genauigkeit bestimmen kann.	299
bS	Q	VIII	LE6	EIN	50 Münzwürfe, welche Datenreihe ist ausgedacht?	300
bS	Q	VIII	LE6	EIN	Einführung der Hypothese, Hypothese testen durch Ziehen einer Stichprobe, Beispiel des Rollens eines Bleistifts zur Prüfung der	300

					Hypothese ob die Laplace-Annahme gerechtfertigt ist, Überlegungen zum zweiseitigen Signifikanztest, Beschreibung des Hypothesentests und passender Begrifflichkeiten (Irrtumswahrscheinlichkeit, Signifikanzniveau, Nullhypothese und Alternative)	
bS	Q	VIII	LE6	MK	<p>Zweiseitiger Signifikanztest einer Nullhypothese $H_0: p = p_0$</p> <p>Alternative $H_1: p \neq p_0$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Man legt den Strichprobenumfang n und das Signifikanzniveau (z.B. $\alpha = 5\%$) fest. 2. Als Testgröße X verwendet man die Trefferzahl für die Parameter n und p_0. 3. Man bestimmt den Annahmebereich $[a;b]$ der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinsten Zahlen a und b heraus, sodass $P(X \leq a) > 2,5\%$ und $P(X \leq b) > 97,5\%$. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt dann höchstens $\alpha = 5\%$. 4. Man führt eine Stichprobe vom Umfang n durch. H_0 wird angenommen, wenn das Stichprobenergebnis im Annahmebereich liegt, sonst wird H_0 verworfen. 	301
bS	Q	VIII	LE6	EIN	Erklärung zur Nutzung verschiedener Signifikanzniveaus	301
bS	Q	VIII	LE6	BSP	Würfeln mit dem Legoachter (Test ob sich Legoachter entsprechend der Flächenanteile bestimmen lässt, Verwerfen und nicht verwerfen bei verschiedenen Niveaus, Stichprobengröße angeben)	301

bS	Q	VIII	LE6	1	Reißnagelwurf (Test bei verschiedenen Stichproben ob Gleichverteilungshypothese verworfen werden kann, Testgröße und Annahmehereich angeben durch schätzen und Berechnung, Test durchführen)	301
bS	Q	VIII	LE6	2	Annahmehereiche und Irrtumswahrscheinlichkeiten für verschiedene Hypothesentests und entsprechende Bernoulli Parameter	301
bS	Q	VIII	LE6	3	Gleichgute Tennisspieler (Hypothese ablehnen, bei verschiedenen Häufigkeiten unter Verwendung der Sigma-Regeln)	302
bS	Q	VIII	LE6	4	Beim Spielen mit gezinktem Würfel betrügen (Entscheidung ob Hypothese zu verwerfen ist unter verschiedenen Parametern)	302
bS	Q	VIII	LE6	5	Lotto-Ziehung (Hypothese ob „zufällig gezogen wird“ und Bestimmung der Irrtumswahrscheinlichkeit)	302
bS	Q	VIII	LE6	6	Parteiumfangfrage (Prüfen der Hypothese ob sich der Stimmenanteil geändert hat)	302
bS	Q	VIII	LE6	7	Nussmischungsverhältnis prüfen (Hypothese mit entsprechenden Parametern prüfen)	302
bS	Q	VIII	LE6	ZZÜ8	Annahmehereich und Irrtumswahrscheinlichkeit eines zweiseitigen Signifikanztests, Situation, die zu dem Hypothesentest passt angeben	302
bS	Q	VIII	LE6	ZZÜ9	Zufallszahlgenerator (Hypothesentest in Bezug auf verschiedene Parameter)	302
bS	Q	VIII	LE6	10	Losverkauf (Hypothesentest zur relativen Häufigkeit von Gewinnlosen, prüfen für verschiedene Stichproben)	302
bS	Q	VIII	LE6	11	Mit Schraubverschlüssen werfen (eigenes Experiment durchführen, Test aus gemeinsamer Stichprobe, vergleich der Testergebnisse für kleine und größere Stichproben)	303

bS	Q	VIII	LE6	12	Zu verschiedenen Aussagen zum Signifikanztest Stellung nehmen	303						
bS	Q	VIII	LE6	13	Signifikanztest für gegebene Stichprobe auswerten, Vorgehen zunächst die Stichprobe auszuwählen und danach das Signifikanzniveau.	303						
bS	Q	VIII	LE6	14	Signifikanztest entsprechend vorgegebener Parameter durchführen, Wahl des Stichprobenumfangs in Bezug auf gleiche absolute Abweichung.	303						
bS	Q	VIII	LE6	15	Signifikanztest entsprechend vorgegebener Parameter durchführen und bewerten, Auswirkungen Stichprobenumfang auf prozentuale Abweichung	303						
bS	Q	VIII	LE7	EIN	Neue Medikamenteinführung (Begründung weshalb einseitiger Test hier besser als zweiseitiger Test geeignet ist)	304						
bS	Q	VIII	LE7	EIN	Erläuterung Anwendungsfelder zweiseitige und einseitige Tests, Unterscheidung links- und rechtsseitige Tests sowie deren Eigenschaften	304 – 305						
bS	Q	VIII	LE7	MK	<p>Einseitiger Signifikanztest einer Nullhypothese $H_0: p = p_0$</p> <ol style="list-style-type: none"> Man legt den Stichprobenumfang n und das Signifikanzniveau α (die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit, z.B. $\alpha = 5\%$) fest. Als Testgröße X verwendet man die Trefferzahl. <table border="1" data-bbox="758 1597 1305 1993"> <thead> <tr> <th>Linksseitiger Test</th> <th>Rechtsseitiger Test</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \geq p_0$ Alternative: $H_1: p < p_0$</td> <td>Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \leq p_0$ Alternative: $H_1: p > p_0$</td> </tr> <tr> <td>Man bestimmt den Annahmereich</td> <td>Man bestimmt den Annahmereich</td> </tr> </tbody> </table>	Linksseitiger Test	Rechtsseitiger Test	Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \geq p_0$ Alternative: $H_1: p < p_0$	Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \leq p_0$ Alternative: $H_1: p > p_0$	Man bestimmt den Annahmereich	Man bestimmt den Annahmereich	305
Linksseitiger Test	Rechtsseitiger Test											
Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \geq p_0$ Alternative: $H_1: p < p_0$	Nullhypothese: $H_0: p = p_0$ oder $p \leq p_0$ Alternative: $H_1: p > p_0$											
Man bestimmt den Annahmereich	Man bestimmt den Annahmereich											

					<p>[a; n] der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl a heraus, sodass $P(X \leq a) > 5\%$</p> <p>[0; b] der Nullhypothese. Dazu sucht man aus der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X die kleinste Zahl a heraus, sodass $P(X \leq a) > 95\%$</p>	
					<p>4. Man erhebt oder zieht eine Stichprobe vom Umfang n. H_0 wird beibehalten, wenn die Trefferzahl X im Annahmereich liegt, sonst wird H_0 verworfen.</p>	
bS	Q	VIII	LE7	EIN	Veränderung der Regeln für andere Signifikanzniveaus.	305
bS	Q	VIII	LE7	BSP1	Sommerzeit oder Winterzeit (Vergleich unterschiedlicher Hypothesenwahl und entsprechender Ablehnungsbereiche je nach Interessen, Begründung der Wahl)	305
bS	Q	VIII	LE7	BSP2	Pflanzenlieferung (Parameter vorgegeben, Ablehnungsbereich bestimmen, Wahl des Ablehnungsbereichs begründen)	306
bS	Q	VIII	LE7	1	Rechts- und Linksseitigen Test zu vorgegebenen Parametern bestimmen	306
bS	Q	VIII	LE7	2	Zu vorgegebenen Parametern Entscheiden ob Hypothese verworfen wird oder nicht.	306
bS	Q	VIII	LE7	3	Prüfen ob Münze gleichverteilt ist (Angabe des Annahmereich, eines zweiseitigen, rechts- und linksseitigen Tests)	306
bS	Q	VIII	LE7	4	Anschnallhäufigkeit (Konstruktion Alternative und Annahmereich verschiedener Interessengruppen, Durchführung des Tests)	306
bS	Q	VIII	LE7	5	Funktionsfähige Kugelschreiber (Interessen angeben, Annahmereich bestimmen,	306

					Irrtumswahrscheinlichkeit der Tests bestimmen, Test durchführen)	
bS	Q	VIII	LE7	6	Zuschuss für Fußballstadion (Wie sehen die Tests verschiedener Interessengruppen aus, bei welchen Stichprobenergebnissen kann keine Interessengruppe Nullhypothese verwerfen)	307
bS	Q	VIII	LE7	ZZÜ7	Beschreibung der Durchführung eines rechtsseitigen Signifikanztest bei einem Bernoulli-Versuch, Testurteil bei vorgegebenen Stichprobenergebnis, Bestimmung der Irrtumswahrscheinlichkeit	307
bS	Q	VIII	LE7	ZZÜ8	Prüfen der Funktionstüchtigkeit eines Glücksrads (Bestimmung des nötigen Stichprobenergebnis für bestimmtes Ergebnis der Testung, Bewertung verschiedener Stichprobenergebnisse)	307
bS	Q	VIII	LE7	9	Ein-Euro-Münzen bevorzugen Kopf (Rechtsseitigen Test und Experiment im Kurs durchführen)	307
bS	Q	VIII	LE7	10	Medikament besser als anderes Medikament (Bestimmung des Annahmebereichs für verschiedene Signifikanzniveaus)	307
bS	Q	VIII	LE7	11	Wählerbefragung (Vorgehen mit Signifikanztest beschreiben, bei vermuteter Zunahme der Zustimmung, Bewertung eines Stichprobenergebnisses)	307
bS	Q	VIII	LE8	EIN	Schirm fälschlicherweise (nicht) mitgenommen (Problematisierung der Fehler 1. Und 2. Art in einem Anwendungsbeispiel)	308
bS	Q	VIII	LE8	EIN	Erläuterung der Fehler 1. und 2. Art durch Tabelle (im Folgenden) und Erläuterung an einem Test zum Fühlen wobei die Abhängigkeit der Fehlergrößen untereinander und von der Stichprobengröße illustriert und an entsprechenden Diagrammen dargestellt wird.	308 – 309

						Zustand der Wirklichkeit		
						Nullhypothese wahr	Nullhypothese falsch	
						Nullhypothese wird... verworfen	Fehler 1. Art	
akzeptiert	Richtige Entscheidung	Fehler 2. Art						
bS	Q	VIII	LE8	MK	Wenn man den Annahmehereich von H_0 vergrößert, um die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art zu verkleinern, dann wird die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art vergrößert. Wenn man den Stichprobenumfang erhöht, kann man gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art und die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art verkleinern.			309
bS	Q	VIII	LE8	BSP	Hörtest MP3 Qualität (Wahrscheinlichkeit Fehler 1. und 2. Art bestimmen, Wahrscheinlichkeit für Fehler mit größerer Stichprobe)			309
bS	Q	VIII	LE8	1	Rechtsseitiger Hypothesentest (Bestimmung der Wahrscheinlichkeit Fehler 1. und 2. Art, Variierung der Aufgabe durch unterschiedliches Signifikanzniveau und eine unterschiedliche Stichprobengröße)			309
bS	Q	VIII	LE8	2	Linksseitiger Hypothesentest (Bestimmung der Wahrscheinlichkeit Fehler 1. und 2. Art, Variierung der Aufgabe durch unterschiedliches Signifikanzniveau und eine unterschiedliche Stichprobengröße)			310
bS	Q	VIII	LE8	3	Prüfung idealer Würfel (Zweiseitigen Signifikanztest durchführen, Wahrscheinlichkeit Fehler 1. Art bestimmen, Veränderung			310

					der Parameter Stichprobengröße und Annahmebereiche, Fehler 2. Art berechnen)	
bS	Q	VIII	LE8	ZZÜ4	Tests (Rechtsseitiger und Zweiseitiger Test Annahmebereich bestimmen, Fehler 1. und 2. Art und Irrtumswahrscheinlichkeiten bestimmen, Veränderung der Stichprobengröße)	310
bS	Q	VIII	LE8	INFO	Operationscharakteristik in Bezug auf die Abhängigkeit der tatsächlichen Trefferwahrscheinlichkeit und den Fehler 2. Art.	310
bS	Q	VIII	LE8	5	Operationscharakteristik zu vorangehenden Aufgaben erstellen, Stellung zu Form der Operationscharakteristik zu zweiseitigem Test nehmen	310
bS	Q	VIII	LE9	EIN	Hypothese Frauen Intelligenter als Männer, es wird nur das signifikante Ergebnis des einen Forschers veröffentlicht, da „signifikant“, Randtext: „signifikant bedeutet: ‚vermutlich nicht zufällig‘ relevant bedeutet: „bedeutsam, wichtig“	311
bS	Q	VIII	LE9	EIN	Hierbei wird auf das Problem verwiesen, dass in der Regel nur signifikante Ergebnisse veröffentlicht werden, diese müssen nicht zwingend relevant sein, außerdem Ausblick auf mögliche Strategien, die Relevanz ermöglichen.	311
bS	Q	VIII	LE9	MK	<ul style="list-style-type: none"> - Es ist unzulässig, aus mehreren Datenerhebungen im Nachhinein eine mit signifikantem Ergebnis auszuwählen. - Es kann im Hinblick auf signifikante Ergebnisse sinnlos sein, den Stichprobenumfang n so groß zu wählen, dass selbst kleinste Unterschiede nachweisbar werden, die völlig irrelevant sind. 	311
bS	Q	VIII	LE9	BSP	Marktanteil signifikant gesunken (Prüfung, dass die Hypothese in Bezug auf die vorlie-	311

					genden Stichprobenergebnisse bei unterschiedlicher Stichprobengröße verworfen werden kann, Handlungsbedarf des Chefs bestimmen)	
bS	Q	VIII	LE9	1	Hypothese zu Marktanteil „knapp“ verwerfen (Stichprobenergebnisse für dieses Ergebnis in Bezug auf verschiedene Stichprobengrößen angeben, jeweilige Vertrauensintervalle bestimmen, welche Handlungsempfehlungen entsprechend der Ergebnisse)	312
bS	Q	VIII	LE9	2	Selbst „schummeln beim Münzwurf“ (Münzwurf Experiment durchführen bis man Ergebnis Hypothese zu verwerfen, ggf. mit Zufallsgenerator, wie würde man Mitschüler „verkaufen“ im Besitz einer nicht fairen Münze zu sein, kritische Antwort des Mitschülers erstellen)	312
bS	Q	VIII	LE9	ZZÜ3	Stichprobengröße zu Testergebnis ermitteln, Anwendungskontext für relevante kleine Unterschiede in Hypothese und Alternative, Begründung, dass jede kleine Abweichung als signifikant nachgewiesen werden kann	312
bS	Q	VIII	LE9	4	Sind Kronkorken und Reißnagel gleichverteilt (Prüfe ob signifikant verworfen werden kann, Wahrscheinlichkeit eines Treffers im Vertrauensintervall schätzen, Relevanz für verschiedene Anwendungsszenarien einschätzen)	312
WR	Q	VIII	WVV	1	Mehrstufige Lotteriezählung (Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns angeben, theoretische Kenngrößen (Erwartungswert und Standardabweichung) berechnen, fairen Einsatz bestimmen)	313
WR /dS	Q	VIII	WVV	2	Neunmaliges Drehen eines Glücksrads (theoretische Kenngrößen bestimmen, Simulieren und empirische Kenngrößen be-	313

					stimmen (Mittelwert und empirische Standardabweichung) und mit theoretischen Kenngrößen vergleichen, Gaußsche Faustformel prüfen)	
WR	Q	VIII	WV	3	Anzahl Untersuchungen bei Gruppenscreening (Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert bestimmen, Ersparnis bestimmen im Vergleich zu Einzeluntersuchungen, Erhöhung der Stichprobengröße)	313
WR	Q	VIII	WV	4	Mehrfacher Münzwurf (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse berechnen, Wahrscheinlichkeit schätzen und mit Berechnungen vergleichen, Kontext zu gegebener Ereigniswahrscheinlichkeit angeben)	313
bS	Q	VIII	WV	5	Heilungschancen (Bestimmung der Wahrscheinlichkeit wie viele Patienten geheilt wurden)	313
bS	Q	VIII	WV	6	Produktion von Sicherungen (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Wahrscheinlichkeit, dass Sicherungslieferungen angenommen werden)	313
bS	Q	VIII	WV	7	Eigenschaften der (kumulierten) Binomialverteilung prüfen, verallgemeinern und „mit gesundem Menschenverstand“ an einem Beispiel begründen.	314
bS	Q	VIII	WV	8	Wahrscheinlichkeit für Stichprobengröße außerhalb 2σ -Intervall, welchen Einfluss hat die Stichprobengröße	314
bS	Q	VIII	WV	9	Überbuchung im Hotel (Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen, theoretische Kenngrößen der zu entschädigenden Gäste betrachten, erwarteter Gewinn bei vorliegenden Buchungen)	314
bS	Q	VIII	WV	10	Münzwurf („intuitive“ Schätzung von Wahrscheinlichkeit, Graph der Funktion skizzieren, dass man für Gerade n Wahrscheinlichkeit angibt für einen Treffer in der Hälfte der Fälle, mit GTR zeichnen und Ergebnisse vergleichen)	314

bS	Q	VIII	WV	11	Einschätzung wie gewöhnlich ist ein Phänomen (Wahrscheinlichkeit der Abweichung bestimmen, auch in Abhängigkeit der Stichprobengröße)	314
bS	Q	VIII	WV	12	Würfeln (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, Schwankungsintervall bestimmen, begründen wann Würfel als gezinkt angenommen wird)	314
bS	Q	VIII	WV	13	Anteil Muslime gestiegen (Beschreibung der Testdurchführung und Angabe verschiedener Parameter, Bewertung der Leistungsfähigkeit des Tests, Diskussion der Rolle des Signifikanzniveaus, Wann würde man zweiseitigen Test durchführen im Kontext, Begründung für Publikation von Signifikanzniveau und Stichprobengröße)	315
bS	Q	VIII	WV	14	Anwendungskontexte zu rechts-, links- und zweiseitigen Hypothesentests mit vorgegebenen Parametern angeben, Annahmehereiche und Irrtumswahrscheinlichkeiten auf der Basis vorgegebener Parameter bestimmen, Annahmehereiche auf der Basis von σ -Regeln bestimmen	315
bS	Q	VIII	WV	15	Erfolg Werbeagentur bewerten (Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse auf Basis der Entscheidungsregeln bestimmen, Signifikanztest konstruieren hinsichtlich verschiedener Interessengruppen, Begründung weshalb in diesem Fall Signifikanztest wenig sinnvoll) Randtext: „ Erinnerung: Statistiker sind konservativ Beim Hypothesentest wählt man in der Regel die Hypothese als Nullhypothese H_0 , an die man möglichst lange glauben möchte. Wenn mehrere Hypothesen „im Raum stehen, ist diese Wahl von eigenen Interessen geleitet. Man verwirft die Nullhypothese erst dann, wenn es gar nicht mehr anders geht“. Das nennt man den	315

					,konservativen (bewahrenden) Standpunkt' der beurteilenden Statistiker“	
WR /dS	Q	VIII	WVV	16	Experiment zum Messen des Flächeninhalts von Dreiecken (Experiment durchführen, Messwerte grafisch darstellen und mit Kenngrößen aus, Genauigkeit des Arbeitens vergleichen)	315
WR	Q	VIII	WVV	17	Untersuchung der Diagramme der kumulierten und der einfachen Binomialverteilung (Zusammenhang erläutern, Idee der Ableitung der Verteilung aus der kumulierten Verteilung, Verfahren theoretischer Kenngrößen bestimmen erläutern, Veränderung der Graphen durch andere Parameter)	316
WR /bS	Q	VIII	WVV	18	E-Mail Größe (Vermutete Exponentialverteilung, empirische Kenngrößen aus Abbildungen bestimmen, Begründung Standardabweichungs-Faustregel nicht brauchbar in diesem Fall, Eigenes Postfach untersuchen)	316
bS	Q	VIII	WVV	19	Professor vergleicht Testen von Hypothesen mit Goldwaschen, Metapher in Bezug auf die Größen von Hypothesentests interpretieren	316
WR /bS	Q	VIII	EXK	EIN	Geschlecht an der Handschrift erkennen (Beispiel angeben, Versuchsbeschreibung und -durchführungsanleitung)	317
dS	Q	VIII	EXK	1	Häufigkeitsverteilung eines Ereignisses angeben, empirische Kennwerte bestimmen, Notenverteilung in Geschlechtsabhängigkeit, Daten zusammenfassen, verschiedene Fragen an die Daten stellen, Trefferquote des Geschlechts bestimmen.	318
bS	Q	VIII	EXK	2	Rechts-, links-, zweiseitigen Test durchführen und Vertrauensintervall sowie Trefferwahrscheinlichkeit bestimmen	318
WR	Q	VIII	EXK	3	Geschätzte Wahrscheinlichkeiten der Note je Geschlecht, bedingte Wahrscheinlichkeit	318

					eines Ereignisses bestimmen, ein Diagramm erstellen für eigene Untersuchung	
bS	Q	VIII	RBS		empirische (Mittelwert, empirische Standardabweichung) und theoretische Kenngrößen (Erwartungswert Standardabweichung), Sigmaregeln (und Näherung), Signifikanztest (zweiseitig, Signifikanzniveau, Annahmebereich, einseitiger (linksseitig und rechtsseitig) Test), Signifikanz Test und dabei auftretender Fehler	319
WR /dS	Q	VIII	TRA	1	Kartoffeltüten wiegen (Zusammenhang empirischer und theoretischer Kenngrößen, Schätzen der Wahrscheinlichkeit Tüte mit weniger als 500g [Lösung (S. 457): Wenn man hinreichend viele Tüten gewogen hat, liegt der Mittelwert \bar{x} in der Nähe des Erwartungswertes μ , die empirische Standardabweichung s in der Nähe der Standardabweichung σ . Man kann die theoretischen durch die empirischen Kenngrößen schätzen.]	320
WR	Q	VIII	TRA	2	Erwartungswert und Standardabweichung von gegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen, Auswirkungen der Veränderung der Zufallsvariablen	320
WR	Q	VIII	TRA	3	Würfelspiel (Bestimmung des erwarteten Gewinns, fairen Einsatz bestimmen)	320
WR	Q	VIII	TRA	4	Warten bis zum zweiten Erfolg (Wahrscheinlichkeitsverteilung Verteilung der Anzahl der Würfe bestimmen, theoretische Kenngrößen bestimmen)	320
KB	Q	VIII	TRA	5	Binomialkoeffizient auf zwei verschiedene Weisen bestimmen, Bedeutung anhand eines Beispiels bestimmen	320
WR	Q	VIII	TRA	6	Bahnstatistik: Pünktlichkeit (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Gegenwahrscheinlichkeit bestimmen, Wahrscheinlichkeitsverteilung und zugehörige theoretische Kenngrößen bestimmen)	320

WR	Q	VIII	TRA	7	Hellseher prüfen (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, Trefferzahl zu vorgegebener Wahrscheinlichkeit bestimmen, Bestimmung der Versuchswiederholungszahl in Bezug auf verschiedene Parameter)	320
WR	Q	VIII	TRA	8	Reißzwecken Wurf (Binomialverteilung begründen, theoretische Kenngrößen bestimmen, Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse berechnen, Umgebung mit bestimmter Wahrscheinlichkeit um Erwartungswert bestimmen)	320
bS	Q	VIII	TRA	9	Überbuchung Wohnanlage (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	321
bS	Q	VIII	TRA	10	Zauberwürfel (σ -Regel anwenden bei unterschiedlicher Stichprobengröße, Aussage über den Zusammenhang formulieren)	321
bS	Q	VIII	TRA	11	Pixelfehlerwahrscheinlichkeit (Bestimmen durch Gegenwahrscheinlichkeit aus gegebener Häufigkeit in Stichprobe)	321
bS	Q	VIII	TRA	12	Torwandschießen (Simulation durchführen, Darstellung als Histogramm, empirische Kenngrößen bestimmen, Wahrscheinlichkeitsverteilung und theoretische Kenngrößen bestimmen)	321
bS	Q	VIII	TRA	13	Angenommene Wahrscheinlichkeit bezweifeln nach Versuch (Anzweifeln je nach Stichprobenergebnis, Bestimmung der möglichen Stichprobenergebnisse für gegebene Wahrscheinlichkeit)	321
bS	Q	VIII	TRA	14	Geschlecht an Handschrift erkennen (Signifikanztest zu vorgegebenen Parametern angeben, Testergebnis zu vorgegebenen Stichprobenergebnis formulieren, Hypothese verwerfen, Irrtumswahrscheinlichkeiten bestimmen, in Bezug auf Vergleich zweier Hypothesen)	321
bS	Q	VIII	TRA	15	Mehltüten Befüllung (Hypothesentest durchführen)	321

bS	Q	VIII	TRA	16	Versuchsumfang auswählen um eng beieinanderliegende Hypothese und Alternative sehr sicher ablehnen zu können, Aussage zum Verhalten von Signifikanztest mit hoher Stichprobengröße	321
WR	Q	IX	AUF		Einführungstext zur Verbindung „zwischen Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung“ durch stetige Zufallsgrößen, „Der zentrale Grenzwertsatz erklärt, warum die Normalverteilung in der Wirklichkeit so oft vorkommt, [Bild: „Apfel fällt nicht weit vom Stand“, Bild: Sandaufschüttung „Wer hier der Normalverteilung traut hat sein Haus auf Sand gebaut.“	322
WR	Q	IX	AUF	DKS	Ganzzahlige Zufallsgrößen, Erwartungswert und Standardabweichung, Bernoulliketten, Binomialverteilung, Testen von Hypothesen über Wahrscheinlichkeiten	322
WR	Q	IX	AUF		Bild: Gauß'sche Glockenkurve, Bild: Fußballer*innen „Körpergrößen sind normalverteilt, Bild: Exponentialverteilung „Lebensdauern sind exponentialverteilt“	322
WR	Q	IX	AUF		Inhaltsbezogene Kompetenzen Funktionen und Analysis sowie Stochastik sind ausgewiesen, ausgewiesene prozessbezogene Kompetenzen (Modellieren und Werkzeuge)	322
WR	Q	IX	AUF	DKB	Stetige Zufallsgrößen kennen, theoretische Kenngrößen stetiger Verteilungen berechnen, Gauß'sche Glockenkurve und Exponentialfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichten nutzen, Hintergrund der Sigmaregeln für die Binomialverteilung	322
WR	Q	IX	ERK	EIN	„Messfehler, Größen und Gewichte von Lebewesen und Naturprodukte sind glockenförmig verteilt. Aber auch wenn man viele „unabhängige“ Zufallsgrößen addiert, erhält man stets eine glockenförmige Verteilung und es gilt die Sigmaregel. Das soll in	324

					den folgenden Erkundungen mit simulierten und realen Experimenten untersucht und belegt werden.“	
WR	Q	IX	ERK	1	Zufalls-Dezimalzahlen im GTR (Liste mit GTR erzeugen, Säulendiagramm anzeigen lassen, empirische Kennwerte bestimmen, vgl. mit vorgegebenem Ergebnis der theoretischen Kenngrößen, Prüfen ob Sigma-Regeln gelten, vergleich mit größerer Summandenzahl, vgl. mit Normalverteilung im GTR)	324
WR	Q	IX	ERK	2	„Taktgefühl“ (versuch einen Takt durchgängig zu klopfen, Auswertung mit Excel-Tabelle, empirische Kenngrößen bestimmen, verschiedene taktspezifische und kursspezifische Fragen (wer hält am besten den Takt, etc.)	324
WR	Q	IX	ERK	3	Experiment Dart-Wurf (Auswertung mit Tabellenkalkulation, theoretische Kenngrößen aus Häufigkeitsverteilung bestimmen, mit Gaußscher Glockenkurve vergleichen)	325
WR	Q	IX	LE1	EIN	Zahlensuchen in gewisser Zeit, verschiedene Zahlen über Zufallsgenerator erhalten, verschiedene Nachkommastellen betrachten.	326
WR	Q	IX	LE1	EIN	Zuvor ganzzahlige Zufallsgrößen nun reellwertige/stetige Zufallsgrößen, exemplarisches Beispiel Regen auf einem runden Tisch, Beschreibung einer Wahrscheinlichkeitsdichte deren Werte keine Wahrscheinlichkeiten sind, auch offene oder geschlossene Grenzen sind gleich.	326 – 327
WR	Q	IX	LE1	MK	Eine Funktion f heißt Wahrscheinlichkeitsdichte über einem Intervall I , z.B. $I=[a; b]$ oder $I=(a; b)$, wenn gilt: (1) $f(x) \geq 0$ für alle x aus I und (2) $\int_a^b f(x) dx = 1$. Eine reellwertige Zufallsgröße X mit Werten im Intervall I heißt stetig verteilt mit	327

					der Wahrscheinlichkeitsdichte f , wenn für alle r, s aus I gilt $P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x) dx$.	
WR	Q	IX	LE1	EIN	Prognosefähigkeit der theoretischen Kennwerte der stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung des Erwartungswerts und der Standardabweichung für empirische Kennwerte der aufgenommenen Häufigkeitsverteilung von Datensätzen dem Mittelwert und die empirische Standardabweichung. „Erwartungswert und Standardabweichung sind ‚theoretische Modellgrößen‘, die sich aus der Wahrscheinlichkeitsdichte berechnen lassen. Mittelwert und empirische Standardabweichung ergeben sich dagegen im Anschluss an eine Datenerhebung.	327
WR	Q	IX	LE1	MK	Eine Zufallsgröße X mit Werten a und b und der Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt den Erwartungswert $\mu = \int_a^b x \cdot f(x) dx$ Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 f(x) dx}$	327
WR	Q	IX	LE1	BSP1	Länge von Natursteinen (Parameter bestimmen, sodass sich aus Funktion mit Parameter eine Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, theoretische Kenngrößen berechnen)	328
WR	Q	IX	LE1	BSP2	„Theorie und Experiment: Ein Vergleich mit dem GTR“ (GTR-Zufallszahlen gleichmäßig stetig verteilt, theoretische Kenngrößen berechnen, Simulation vergleich der empirischen Kenngrößen der Simulation mit theoretischen Kenngrößen)	328
WR	Q	IX	LE1	1	Wahrscheinlichkeitsdichte untersuchen (Zeigen, dass Wahrscheinlichkeitsdichte	328

					vorliegt, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse berechnen, theoretische Kenngrößen begründen, Wahrscheinlichkeitsdichten für Gleichverteilung auf Intervall angeben und verallgemeinern)	
WR	Q	IX	LE1	2	Wahrscheinlichkeit von Zufallszahlen (Wahrscheinlichkeit einer Zahl angeben und als Integral darstellen)	328
WR	Q	IX	LE1	3	Dreiecksverteilung untersuchen (Zeigen, dass Wahrscheinlichkeitsdichte vorliegt, Wahrscheinlichkeiten aus Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte ablesen, theoretische Kenngrößen berechnen)	329
WR	Q	IX	LE1	4	Regen auf Bierdeckel (Wahrscheinlichkeitsdichte angeben, theoretische Kenngrößen bestimmen)	329
WR	Q	IX	LE1	5	Regen auf quadratischen Tisch (Punktmengen markieren, gegebene Wahrscheinlichkeitsdichte begründen, theoretische Kenngrößen bestimmen)	329
WR	Q	IX	LE1	6	Münze gegen Wand werfen (gegebene Wahrscheinlichkeitsdichte begründen, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse und theoretische Kenngrößen bestimmen)	329
WR	Q	IX	LE1	ZZÜ7	Wahrscheinlichkeitsdichte untersuchen (Parameter bestimmen, sodass sich aus Funktion mit Parameter eine Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, theoretische Kenngrößen berechnen)	329
WR	Q	IX	LE1	8	Telefonatdauer (Zeigen, dass Wahrscheinlichkeitsdichte vorliegt, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen und deuten, theoretische Kenngrößen berechnen, Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse mit Rundung bestimmen)	330

WR	Q	IX	LE1	Info	Einführung exponentialverteilter Zufallsgrößen, deren Dichte und theoretische Kennwerte	330
WR	Q	IX	LE1	9	Exponentialverteilungen untersuchen (Dichten mit GTR plotten für verschiedene Parameter, Begründen, dass Wahrscheinlichkeitsdichte vorliegt, theoretische Kennwerte mithilfe des GTRs aus der Info überprüfen)	330
WR	Q	IX	LE1	10	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mit exponentieller Verteilung bestimmen, Intervallgrenzen für Ereigniswahrscheinlichkeit bestimmen,	330
WR	Q	IX	LE1	11	Wartezeit Callcenter (Dichte Funktion und Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, mit relativen Häufigkeiten aus Säulendiagramm vergleichen)	330
WR	Q	IX	LE1	12	Brenndauer von Glühbirnen und anderen Lampen vergleichen (Wahrscheinlichkeiten von verschiedenen Ereignissen bestimmen)	330
WR	Q	IX	LE2	EIN	Funktionsterme von Exponentialfunktionen den Graphen zuordnen, u.a. Glockenfunktion dabei.	331
WR	Q	IX	LE2	EIN	Vorstellung des Funktionsterms der Gauß'schen Glockenfunktion und deren Parameter μ („wahrer Wert“) und σ („Messungenauigkeit“), Hinweis, dass die Funktion zunächst nur aus dem Blickwinkel der Analysis betrachtet wird, Definition der Standard-Glockenfunktion $\varphi = \varphi_{0,1}$, es wird gezeigt, dass das unbestimmte Integral der Glockenfunktion mit unbegrenzten Intervallgrenzen 1 ergibt, wodurch es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte bei der Gauß'schen Glockenfunktion handelt, übrigen Aufgaben behandeln nur Aspekte im Sinne einer Betrachtung aus der Perspektive der Analysis, wie Maximum und Wendestellen,	331 - 332

WR	Q	IX	LE3	EIN	Tropfender Wasserhahn (Aus Diagrammen glockenförmige Häufigkeit interpretieren hinsichtlich Geschwindigkeit und Regelmäßigkeit des Tropfens)	334
WR	Q	IX	LE3	EIN	Gauß'sche Glockenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte (Körpergröße: Säulendiagramme „Realität“ vs. „Modell“, Randtext: „Von der relativen Häufigkeit zur Normalverteilung“) und nach de-Moivre-Laplace auch als Approximation der Binomialverteilung sowie zur Begründung der Sigmaregeln,	334
WR	Q	IX	LE3	MK	Eine stetige Zufallsgröße X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ , wenn sie eine Gauß'sche Glockenfunktion $\varphi_{\mu,\sigma}$ als Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt.	334
WR	Q	IX	LE3	EIN	Hinweis, dass die Parameter der Normalverteilung dem Erwartungswert und der Standardabweichung entsprechen, außerdem gelten die „Sigmaregeln für die Normalfunktion exakt.“, Stetigkeitskorrektur für die Beschreibung ganzzahliger Zufallsgrößen mit der Normalverteilung	334 – 335
WR	Q	IX	LE3	MK	Satz von de Moivre-Laplace: Für binomialverteilte Zufallsgrößen X mit $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$ gilt: (a) $P(X = k) = B_{n,p}(k) \approx \varphi_{\mu,\sigma}(k)$ und (b) $P(a \leq X \leq b) \approx \int_{a-0,5}^{b+0,5} \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx$. [Es erfolgt kein Beweis, siehe nachfolgend]	335
WR	Q	IX	LE3	EIN	„Dabei wird die Näherung mit wachsendem Versuchsumfang n tendenziell immer besser. Der Satz von de Moivre-Laplace macht im Nachhinein verständlich, warum man die Standardabweichung bei Binomialverteilungen über den Wendepunktabstand „definieren“ kann – und begründet	335

					auch die auf S. 288 experimentell gewonnene Sigmaregel für binomialverteilte Zufallsgrößen. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} \varphi_{\mu; \sigma}(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi_{0; 1}(x) dx \approx 0,683''$	
WR	Q	IX	LE3	BSP1	Gewicht Rosinenbrötchen (Annahme Normalverteilung, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	335
WR	Q	IX	LE3	BSP2	Anzahl Rosinen („näherungsweise durch eine Normalverteilung“ beschreiben, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse berechnen mit Stetigkeitskorrektur)	335
WR	Q	IX	LE3	1	Gewicht von Haselnüssen (Annahme Normalverteilung, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Sigmaregel im Kontext anwenden)	336
WR	Q	IX	LE3	2	Gewicht von Kastanien (Annahme Normalverteilung, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Vergleich mit relativen Häufigkeiten im Säulendiagramm)	336
WR	Q	IX	LE3	3	Wahrscheinlichkeiten mit Sigmaregeln und Eigenschaften der Normalverteilung berechnen, erläutern anhand Skizze	336
WR	Q	IX	LE3	4	Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse berechnen mit Stetigkeitskorrektur	336
WR	Q	IX	LE3	5	Anzahl Schokoladenstückchen in Keksen (Informationen aus Aussage entnehmen)	336
WR	Q	IX	LE3	6	Prüfen wie hoch Wahrscheinlichkeit für einen negativen Stichprobenwert ist bei Vorgabe der Parameter der Normalverteilung	336
WR	Q	IX	LE3	7	Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses einer normalverteilten Zufallsgröße auf Intervall bestimmen, welchen Einfluss haben Veränderungen der Parameter Standardabweichung und Erwartungswert.	336
WR	Q	IX	LE3	8	IQ-Test (Prüfen ob Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen im Zeitungsartikel den	336

					Werten aus einer Normalverteilung mit vorgegebenen Parametern entsprechen)	
WR	Q	IX	LE3	ZZÜ9	Normalverteilte Zufallsgröße und deren Parameter gegeben (Glockenfunktion skizzieren, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen und grafisch darstellen)	337
WR	Q	IX	LE3	10	Spritverbrauch (in welchem Intervall um Erwartungswert liegt der mittlere Spritverbrauch unter Auswertung verschiedener Wahrscheinlichkeiten)	337
WR	Q	IX	LE3	11	Stetige Normalverteilung gegeben (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Wahrscheinlichkeit eines Wertes bestimmen und mit verschiedenen Werten multiplizieren und vergleichen)	337
WR	Q	IX	LE3	12	Augensumme vierer fairer Würfel (Annahme Gleichverteilung einzelner Würfel, Annahme S_4 normalverteilt, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen und Rechnung durch Simulation mit GTR prüfen)	337
WR /dS	Q	IX	LE3	13	Kölschgläser eichen (Stellung nehmen zu Streuung der Markierungen, empirische Kenngrößen für Datenliste bestimmen, Annahme Normalverteilung Wahrscheinlichkeit für zu wenig oder zu viel im Glas bei angegebenem Intervall)	337
WR	Q	IX	LE3	14	Überprüfung durch numerische Integration mit GTR, dass sich bei klassischen Formeln der theoretischen Kenngrößen bei Integration über \mathbb{R} die Kenngrößen ergeben.	337
WR	Q	IX	WT	EIN	Klippenspringen (Test, ob bei angenommener Normalverteilung der Fallzeiten die angenommene Fallhöhe stimmen kann)	338
bS	Q	IX	WT	EIN	Testen von Hypothesen in Bezug auf den Erwartungswert mithilfe der Normalverteilung und den Mittelwerten aufgenommener Daten.	338

bS	Q	IX	WT	MK	Wenn eine Zufallsgröße X normalverteilt ist mit Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ_X , dann sind auch die Mittelwerte \bar{x} aus jeweils n beobachteten Werten normalverteilt mit dem gleichen Erwartungswert μ , aber der kleineren Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$.	338
bS	Q	IX	WT	EIN	Die Schwankung der Mittelwerte nimmt mit größerem Stichprobenumfang ab, Beispiel eines Tests mithilfe der Normalverteilung.	338
bS	Q	IX	WT	MK	Die Hypothese, dass eine normalverteilte Zufallsgröße mit bekannter Standardabweichung σ den Erwartungswert μ besitzt, testet man auf dem 5%-Signifikanzniveau so: a) Man wählt einen Stichprobenumfang n und berechnet den Mittelwert \bar{x} aus n Daten. b) Man berechnet den Annahmebereich $A = [\mu - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$. c) Man verwirft die Hypothese, wenn \bar{x} außerhalb des Annahmebereichs liegt.	338
bS	Q	IX	WT	BSP1	Akku Speicherkapazität (Durchführung eines Tests in Bezug auf den neuen (unbekannten) Erwartungswert)	339
bS	Q	IX	WT	BSP2	Unbekannte Anzahl von Erbsen in der Tüte (Hypothesentest hinsichtlich der Anzahl von Erbsen)	339
bS	Q	IX	WT	1	Frage, ob die Hypothese über die Größe des Erwartungswertes verworfen werden kann, je nach Stichprobengröße und gemessenem Mittelwert	339
WR bS	Q	IX	WT	2	Pralinenbeutel (Testen ob Hypothese über den Erwartungswert verworfen werden muss)	339

bS	Q	IX	WT	3	Traktor Spritverbrauch (Testen ob Hypothese über den Spritverbrauch verworfen werden muss)	339
bS	Q	IX	WT	4	Früchte im Beutel (Testen ob Hypothese über die erwartete Fruchtanzahl verworfen werden muss)	339
bS	Q	IX	WT	5	Anzahl Schritte auf dem Schulweg (Testen ob Hypothese über die vermuteten Schritte verworfen werden muss)	339
WR	Q	IX	WVV	1	Computerspiel-Wachhunde (verschiedene Dichten im Diagramm gegeben zur Interpretation im Kontext, Stellungnahmen inwiefern der Erwartungswert dazu passt, dass der Erwartungswert nicht angenommen wird, „nach Augenmaß“ Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen aus den Diagrammen ablesen)	340
WR	Q	IX	WVV	2	Tisch und Regentropfen (Funktion anpassen um Wahrscheinlichkeitsdichte zu erhalten, Begründung, dass konstruierte Funktion zum Kontext passt, Simulation mit GTR begründen, Verallgemeinern für beliebige Rechteckige Tischmaße)	340
WR	Q	IX	WVV	3	Normalverteilung untersuchen (Mit gegebenen theoretischen Kennwerten den Graphen skizzieren, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse schätzen, Mit GTR Schätzungen prüfen)	340
WR /dS	Q	IX	WVV	4	Kaffeebohnen (Häufigkeiten gegeben, Parameter der Normalverteilung schätzen und Begründen, Stellung nehmen zur Modellwahl, Beschriftung der vertikalen Achsen durch Häufigkeiten)	340
WR /bS	Q	IX	WVV	5	Bei Meinungsumfrage Personen treffen (Wahrscheinlichkeit verschiedener Anzahlen aus Stichprobe treffen, Abweichung in Bezug zur Standardabweichung abschätzen und einordnen)	340

WR	Q	IX	WVV	6	Zucker in der Vanillesoße (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen)	341
WR /bS	Q	IX	WVV	7	Verschiedene Aussagen einordnen und begründen	341
WR	Q	IX	WVV	INFO	„Neue‘ Zufallszahlen erzeugen“ durch Wurzelziehen, Betrachtung der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichte	341
WR	Q	IX	WVV	8	Verschiedene weitere Wahrscheinlichkeitsdichten bestimmen durch Potenzierung von Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmen und durch Simulationen prüfen	341
bS	Q	IX	WVV	9	Honorar einer Werbeagentur (Testen ob Werbekampagne ein Erfolg ist, kommentieren des Annahmereichs, festlegen durch Satz von de Moivre-Laplace, Verwerfungsbereich identifizieren, Verwerfungsbereich ohne Stetigkeitskorrektur bestimmen, vgl. mit Ergebnissen aus Binomialverteilung, Alternativvorschlag prüfen und hinsichtlich Interessenlage einordnen, Fehler 1. und 2. Art näherungsweise und exakt bestimmen)	341
WR	Q	IX	WVV	10	Mehrfacher fairer Münzwurf (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kommentieren und bestimmen, Kontrollrechnung zur Stetigkeitskorrektur mit Erläuterung zum Zusammenhang zwischen Normal- und Binomialverteilung)	342
WR	Q	IX	WVV	11	Verteilungsfunktionen betrachten (Diagramme verschiedener Verteilung durch berechnen einzelner Werte prüfen, begründen weshalb alle Verteilungsfunktionen monoton steigen, anschauliche Erklärung, warum Verteilungsfunktionen stetiger Zufallsgrößen keine und Verteilungsfunktionen diskreter Zufallsgrößen Sprünge aufweisen können.	342

WR	Q	IX	WVV	INFO	Zusammenhang zwischen Exponentialverteilung und geometrischer Verteilung	342
WR	Q	IX	WVV	12	Internetnutzung minutengenaue Abrechnung (Vergleich Erwartungswerte von exponentiell und geometrisch verteilter Zufallsgrößen)	342
bS	Q	IX	EXK		Experiment zur Erhöhung der Reaktionsgeschwindigkeit durch Energydrinks, Versuchsdurchführung erklärt und Frage gestellt ob die Verkürzung tatsächlich signifikant ist, explizierte Prüfung im Beispiel durch Vorzeichentest der Binomialverteilung und Test auf Gleichheit der Mittelwerte mit der Normalverteilung	343 – 344
bS	Q	IX	EXK	1	Versuch selber durchführen, Beurteilung ob „Doping“ gewirkt hat, Vorzeichentest und Testung nach Normalverteilung durchführen	344
bS	Q	IX	EXK	2	Übertragung der Auswertung auf den gesamten Kurs	344
bS	Q	IX	EXK	3	Übungseffekte ausschließen durch Halbierung der zu untersuchenden Stichproben	344
WR	Q	IX	RBS		Stetig verteilte Zufallsgrößen (Wahrscheinlichkeitsdichte), Normalverteilung (Wendestellen bei $\pm\sigma$, Satz von Moivre-Laplace, „ Modellieren Wenn man zu einer Häufigkeitsverteilung mit Mittelwert \bar{x} und empirische Standardabweichung s eine Normalverteilung $\varphi_{\mu,\sigma}$ als Modell angeben möchte, schätzt man die Parameter durch $\mu \approx \bar{x}$ und $\sigma \approx s$. Im Modell kann man Wahrscheinlichkeiten berechnen.“	345
WR	Q	IX	TRA	1	Erläutern mit Skizze was eine stetig verteilte Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsdichte ist, und was unter verschiedenen stetigen Verteilungen zu verstehen ist	346
WR	Q	IX	TRA	2	Prüfen ob Graphen zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte gehören können	346
WR	Q	IX	TRA	3	Verschiedene Aussagen korrigieren	346

WR	Q	IX	TRA	4	Graphen und Wahrscheinlichkeitsdichten (vertikale Achsen der Graphen beschriften um Graphen von Dichtefunktionen zu erzeugen, Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse schätzen)	346
WR	Q	IX	TRA	5	Verschiedene Ereigniswahrscheinlichkeiten aus einem Integral abschätzen, Kontexte angeben, in denen Fragen auftreten, die durch die Wahrscheinlichkeiten beantwortet werden,	346
bS	Q	IX	TRA	6	Das Gewicht von Äpfeln (erläutern wie man zu der Schätzung der Parameter der Normalverteilung kommen kann, angeben was aus den Angaben zur Verteilung gefolgert werden kann, Sigmaregeln nutzen um Aussage über Gewicht einer Stichprobe angeben)	346
bS	Q	IX	TRA	7	Glücksspiel (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse schätzen und bestimmen mithilfe des Satz von de Moivre-Laplace, mit Satz von de Moivre-Laplace Intervallgrenzen eines Ereignisses bestimmen)	347
bS/ WR	Q	IX	TRA	8	Verschiedene Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung exakt und mit dem Satz von de Moivre-Laplace bestimmen	347
WR	Q	IX	TRA	9	Das Gewicht von Kartoffeln (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse berechnen, Einfluss der Wahrscheinlichkeiten durch Veränderung der Standardabweichung der zugrundeliegenden Normalverteilung)	347
WR	Q	IX	TRA	10	Köln-Marathon (Annahme normalverteilt, theoretische Kennwerte aus Säulendiagramm schätzen, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen und mit relativen Häufigkeiten aus Diagramm	347

					vergleichen, Intervallgrenzen um Mittelwert bestimmen aus gegebener Wahrscheinlichkeit und mit relativen Häufigkeiten im Intervall vergleichen)	
WR	Q	IX	TRA	11	Stammfunktion der Gauß'schen Glockenfunktion bestimmen (charakteristische Eigenschaften der Stammfunktion betrachten, begründet theoretische Kenngrößen aus Graph rekonstruieren, den Graphen mit dem GTR zeichnen und vergleichen)	347
WR	Q	X	AUF		„Man kann viele zufallsgesteuerte Vorgänge wie das Warten auf bestimmte Ereignisse oder die Entwicklung von (z.B. biologischen oder physikalischen Systemen als Irrfahren auf Graphen mit endlich vielen Knoten deuten. Man spricht dann von stochastischen Prozessen. Einfachstes Beispiel sind Bernoulliketten, Bild: Irrfahrt durch Münzwurf auf dem Zahlenstrahl, Bild: Vögel auf Kabeln,	348
WR	Q	X	AUF	DKS	Grenzwerte, Gleichungssysteme, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Baumdiagramme und Pfadregeln,	348
WR	Q	X	AUF		Bild: Schere-Stein-Papier auch als Graph gegeben, Bild: Verteilung von Teilchen in einer Flüssigkeit,	348
WR	Q	X	AUF		Inhaltsbezogene Kompetenz Stochastik ist ausgewiesen, alle prozessbezogenen Kompetenzen (Problemlösen, Modellieren und Werkzeuge) sind ausgewiesen außer Argumentieren/Kommunizieren	349
WR	Q	X	AUF	DKB	Stochastische Prozesse durch Prozessdiagramme und Zustandsverteilungen beschreiben, Entwicklung von Prozessen mit Matrizen berechnen, Entwicklung stochastischer Prozesse auf lange Sicht beurteilen, Methoden der Analysis, Lineare Algebra	349

					und Stochastik zur Problemlösung einsetzen [interessanterweise bei den inhaltsbezogenen Kompetenzen nicht ausgewiesen]	
WR	Q	X	ERK	1	Würfelspiele (Gewinnchancen abschätzen, bestimmen bei welchem Spiel weniger gewürfelt werden muss, Wahrscheinlichkeit, dass es keinen Sieger gibt, Vergleich der Gewinnchancen und Begründung)	350
WR	Q	X	ERK	3	Disco-Wechsel (Wechseldiagramm und Tabelle entsprechend Besucherzahlen und Übergangswahrscheinlichkeiten vervollständigen, Stellungnahme, stabile Besucherzahl, Berechnungsmethode direkt Folgeverteilungen berechnen)	351
WR	Q	X	LE1	EIN	Glücksspiel 0€ oder 3€ (Versuch selbst durchführen, erläutern, dass das Spiel „prinzipiell unendlich lange dauern kann“)	352
WR	Q	X	LE1	EIN	Vom Baumdiagramm zu „unendlichen“ Prozessen mit endlich vielen Zuständen. Einführung der grafischen Darstellung in Prozessdiagrammen anhand des Beispiels eines Computerspiels mit drei Levels, Etablierung von Konstruktionsregeln (Summe der Wahrscheinlichkeiten abgehender Pfeile gleich 1, Endzustände/absorbierende Zustände mit Ringpfeil 1, andere Zustände innere Zustände, Beschreibung der Zustandsverteilung), Beschreibung der Berechnungsmöglichkeit von Folgeverteilungen	352 – 353
WR	Q	X	LE1	MK	Die Folge der Zustandsverteilungen, die zu einem Prozessdiagramm gehören, wird als stochastischer Prozess bezeichnet. Aus einer Zustandsverteilung kann man die folgende Verteilung mithilfe einer Berechnungsvorschrift aus linearen Gleichungen berechnen, deren Koeffizienten man dem Prozessdiagramm entnimmt.	353

WR	Q	X	LE1	BSP	Zustandsverteilungen im Gas (lineare Gleichungen zur Bestimmung der Folgeverteilungen bestimmen, Folgeverteilungen bestimmen)	353
WR	Q	X	LE1	1	Mehrfacher Chip Wurf (Prozessdiagramm vervollständigen, Startverteilung angeben und Folgeverteilungen angeben, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen)	353
WR	Q	X	LE1	2	Spiel mit vier Spielstufen (Folgeverteilung bestimmen, lineare Gleichungen zur Berechnung der Folgeverteilungen bestimmen, Prozessdiagramm und lineare Gleichungen für andere Übergangswahrscheinlichkeit anpassen)	354
WR	Q	X	LE1	3	Kino-Wechsel (Prozessdiagramm erstellen, Folgeverteilungen bestimmen, Modell Güte hinsichtlich Realismus einschätzen)	354
WR	Q	X	LE1	ZZÜ4	Stochastischer Prozess mit drei Zuständen (Folgeverteilung bestimmen, Prozessdiagramm für andere Übergangswahrscheinlichkeiten anpassen und lineare Gleichungen der Berechnungsvorschrift angeben)	354
WR	Q	X	LE1	5	Zahnpasta-Wechsel (Prozessdiagramm erstellen und lineare Gleichungen der Berechnungsvorschrift angeben, Folgeverteilungen bestimmen, wie ändert sich diese bei veränderter Anfangsbedingung)	354
WR	Q	X	LE1	6	Irrweg einer Spielfigur (Prozessdiagramm erstellen, Wahrscheinlichkeit für nach bestimmter Anzahl von Übergängen noch nicht in absorbierenden Zustand, Folgeverteilung bestimmen)	354
WR	Q	X	LE2	EIN	Berechnung von Zustandsverteilungen mit Vektoren, Erklärung anhand eines Beispiels mit vier Zuständen, Übergangsmatrix konstruieren Berechnung der Folgeverteilung durch Matrix-Vektor-Multiplikation,	355

WR	Q	X	LE2	MK	Bei einem stochastischen Prozess werden Zustandsverteilungen als Zustandsvektoren zusammengefasst. Die Berechnungsvorschrift für die Folgeverteilung \vec{v}_{k+1} einer gegebenen Zustandsverteilung \vec{v}_k wird mithilfe der Übergangsmatrix U kurz dargestellt als $\vec{v}_{k+1} = U \cdot \vec{v}_k$.	356
WR	Q	X	LE2	EIN	Direktes Ablesen der Übergangsmatrix aus dem Prozessdiagramm	356
WR	Q	X	LE2	MK	Die Übergangsmatrix U eines stochastischen Prozesses hat folgende Eigenschaften: <ol style="list-style-type: none"> 1. U ist quadratisch, d.h. sie hat gleich viele Zeilen und Spalten. 2. In der k-ten Spalte stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man vom k-ten Zustand aus die übrigen Zustände erreicht. 3. Die Spaltensummen von U haben den Wert 1. Eine Matrix mit diesen Eigenschaften nennt man auch stochastische Matrix .	356
WR	Q	X	LE2	BSP1	Übergangsmatrix aus Prozessdiagramm ablesen und Folgeverteilung bestimmen	356
WR	Q	X	LE2	BSP2	Regen oder Sonne (Startverteilung aus Kontext rekonstruieren, Übergangsmatrix U angeben und zeigen, dass es sich um eine stochastische Matrix handelt, Folgeverteilungen berechnen und kommentieren, Diskussion der Adäquatheit der Modellierung in Bezug auf die Realsituation)	356 – 357
WR	Q	X	LE2	1	Stochastischer Prozess mit drei Zuständen (Übergangsmatrix U angeben und zeigen, dass es sich um eine stochastische Matrix handelt, Folgeverteilungen berechnen auch in Abhängigkeit verschiedener Startwerte, welche Auswirkungen haben absorbierende Zustände auf die Übergangsmatrix)	357

WR	Q	X	LE2	2	Telefonanbieter-Wechsel (Übergangsmatrix U angeben, Folgeverteilungen berechnen, Wartezeit berechnen in Bezug auf bestimmte Wahrscheinlichkeit, Veränderung des Prozessdiagramms und Auswirkungen auf die Folgeverteilungen)	357
WR	Q	X	LE2	3	Parteien-Wechsel (Übergangsmatrix U angeben, Folgeverteilungen berechnen, Begründung warum nicht adäquat für deutsche „Wählerwanderung“)	357
WR	Q	X	LE2	4	Prozessdiagramm vervollständigen, Übergangsmatrix angeben, absorbierenden Zustand als solchen benennen, Startverteilung als Vektor angeben, Interpretation einer Komponente einer Folgeverteilung)	358
WR	Q	X	LE2	5	Übergangsmatrix vervollständigen und Prozessdiagramm erstellen, Folgeverteilungen bestimmen in Abhängigkeit der Startverteilung)	358
WR	Q	X	LE2	ZZÜ6	Übergangsmatrix U angeben, Folgeverteilungen berechnen, Kontext zum Prozessdiagramm finden, Prozessdiagramm verändern,	358
WR	Q	X	LE2	7	Prozessdiagramm zur Übergangsmatrix konstruieren, Folgeverteilungen berechnen, Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis bestimmen im Zusammenhang mit einer Wartezeit, Kontext zur Übergangsmatrix angeben	358
WR	Q	X	LE2	8	Verschiedene Aussagen einordnen	358
WR	Q	X	LE2	9	Basketball-Aufgabe (Annahmen explizieren, Aufgabenstellung rekonstruieren aus Lösung, Änderung der Aufgabenstellung dadurch lösbar mit stochastischem Prozess dazu Zustandsdiagramm und Übergangsmatrix angeben, Beziehung zu einer vorgegebenen Tabelle angeben)	359

WR	Q	X	LE2	ZZW10	Mehrfache Urnenziehung (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	359
WR	Q	X	LE2	ZZW11	Elfmeterschießen (Bernoulli-Kette, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnen, Ereignisse, die in symbolischer Form angegeben sind im Kontext beschreiben.	359
WR	Q	X	LE3	EIN	Zinsen (ausmultiplizieren mit GTR durch potenzieren oder Schrittweise)	360
WR	Q	X	LE3	EIN	Erläuterung der Matrixmultiplikation motiviert durch Zerlegung der Matrix in zwei Vektoren und illustriert durch ein konkretes Beispiel	360
WR	Q	X	LE3	MK	[hier nicht dargestellt, der Merkkasten erläutert Multiplikation allgemeiner 3x3 Matrizen und nennt das Produkt Produktmatrix]	360
WR	Q	X	LE3	EIN	Erweiterung auf mehrfache Multiplikation.	360
WR	Q	X	LE3	BSP	„Folgeverteilungen in einem Schritt berechnen“ durch potenzieren der Übergangsmatrix	361
WR	Q	X	LE3	1	Verschiedene Übergangsmatrizen quadrieren Einträge der Matrix erläutern.	361
WR	Q	X	LE3	2	Für gegebene Matrix bei selbstgewählter Startverteilung Folgeverteilung mithilfe der Schritt-für-Schritt-Methode und des Potenzierens von Matrizen berechnen.	361
WR	Q	X	LE3	3	Übergangsmatrix aus Prozessdiagramm bestimmen und Zustandsverteilung durch Potenzieren für verschiedene Folgeverteilungen bestimmen.	361
WR	Q	X	LE3	ZZÜ4	Spiel mit vier Leveln (Quadrat der Übergangsmatrix bestimmen und Bedeutung im Kontext erklären, Folgeverteilungen bestimmen)	361
WR	Q	X	LE3	5	Vorgegeben Matrixmultiplikation durch erstelltes Prozessdiagramm erläutern	361
WR	Q	X	LE3	6	Nachweis, dass die Produktmatrix zweier stochastischen Matrizen wieder eine	361

					stochastische Matrix ist (an selbst gewählten Beispielen, allgemein für 2x2 Matrizen)	
WR	Q	X	LE4	EIN	Brettspiel erfinden (Im Prozessdiagramm eigene Übergangswahrscheinlichkeiten festlegen, mehrfach Spielen und langfristiges stabilisierendes Verhalten beobachten auch in Anhängigkeit der Startposition)	362
WR	Q	X	LE4	EIN	Feststellung der Stabilisierungsmöglichkeit stochastischer Prozesse, Illustration an einem Beispiel, Einführung des Begriffs der Grenzverteilung, Betrachtung des mehrfachen Potenzierens der Matrix bis zur Grenzmatrix, die Grenzverteilungen können dabei abhängig von der Startverteilung sein.	362 – 363
WR	Q	X	LE4	MK	Wenn sich die Potenzen U^n der Übergangsmatrix bei einem stochastischen Prozess für $n \rightarrow \infty$ einer Grenzmatrix G nähern, dann kann man zu jeder Startverteilung \vec{v}_0 die Grenzverteilung $\vec{g} = G \cdot \vec{v}_0$ berechnen. Außerdem gilt für jede Grenzverteilung $U \cdot \vec{g} = \vec{g}$.	363
WR	Q	X	LE4	EIN	Näherungsweise bestimmen durch genügend große Potenz	363
WR	Q	X	LE4	BSP	Tränken-Wechsel (Grenzverteilung zur Startverteilung bestimmen, Änderungen der Grenzverteilung durch Veränderung der Startverteilung prüfen, Grenzmatrix angeben und kommentieren)	363 – 364
WR	Q	X	LE4	1	Übergangsmatrix gegeben (Prozessdiagramm zur Übergangsmatrix konstruieren, Folgeverteilungen berechnen, Prüfen ob sich Folgeverteilungen stabilisieren, Grenzverteilung bestimmen, Grenzmatrix angeben und Informationen aus dieser rauslesen, mit selbstgewählter Startverteilung bestätigen.	364

WR	Q	X	LE4	2	Bäcker-Wechsel (Übergangsmatrix zum verbal gegebenen Prozess erstellen, Folgeverteilungen, Grenzverteilung und Grenzmatrix bestimmen, Veränderung der Startverteilungen und Auswirkungen auf das Grenzverhalten prüfen)	364
WR	Q	X	LE4	3	Zu Prozessdiagramm Spielregel angeben, Folgeverteilungen berechnen, Prüfen ob sich Folgeverteilungen stabilisieren, Grenzverteilung bestimmen, Interpretation der Multiplikation der Übergangsmatrix mit der Grenzverteilung, Grenzmatrix bestimmen, Grenzverteilung mit anderen Startwerten, Interpretation, Begründung warum Grenzverteilung nicht innerhalb Grenzmatrix	365
WR	Q	X	LE4	4	Disco-Wechsel (Grenzverteilung angeben)	365
WR	Q	X	LE4	ZZÜ5	Tankstellen-Wechsel (Übergangsmatrix aus Prozessdiagramm erstellen, Folgeverteilung bestimmen, Grenzverteilung bestimmen, Näherung für Grenzmatrix bestimmen)	
WR	Q	X	LE4	6	Übergangsmatrix aus Prozessdiagramm bestimmen, Grenzverteilung und Grenzmatrix bestimmen, Grenzverteilung aus gegebener Startverteilung bestimmen	365
WR	Q	X	LE4	7	Für selbstgewählte Startverteilung Grenzverteilung mit gegebener Übergangsmatrix bestimmen, für Grenzmatrix Eigenschaften aus dem Merkkasten nachweisen, Grenzverteilung exakt angeben	365
WR	Q	X	LE4	INFO	Grenzverteilung mit LGS exakt bestimmen, wenn Grenzverteilung unabhängig von Startverteilung	366
WR	Q	X	LE4	8	Gewinnausgänge (Übergangsmatrix und Startverteilung aus Prozessdiagramm und Angaben bestimmen, Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Ereignisse bestimmen,	366

					Potenzen der Übergangsmatrix und Grenzmatrix bestimmen, Grenzverteilung bestimmen und mit vorherigem Ergebnis vergleichen)	
WR	Q	X	LE4	9	Tankstellen-Wechsel (Übergangsmatrix zum verbal gegebenen Prozess erstellen, Folgeverteilungen bestimmen, Grenzverteilung und Grenzmatrix bestimmen, Veränderung der Startverteilungen und Auswirkungen auf das Grenzverhalten prüfen)	366
WR /dS	Q	X	LE4	ZZW10	Defekte Kugelschreiber in Stichprobe (Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, mit 2σ -Regel vergleichen)	366
WR	Q	X	WV	2	Interpretation einer gegebenen Übergangsmatrix und Erstellung eines Prozessdiagramms	367
WR	Q	X	WV	3	Prozessdiagramm zu gegebener Übergangsmatrix bestimmen, Folgeverteilungen bestimmen aus gegebener Startverteilung, Potenz von Übergangsmatrix bestimmen,	367
WR	Q	X	WV	4	Glücksspiel (Prozessdiagramm und Übergangsmatrix erstellen, Folgeverteilungen und Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände bestimmen)	367
WR	Q	X	WV	5	Übergangsmatrix aus gegebenem Prozessdiagramm bestimmen und Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse angeben	367
WR	Q	X	WV	6	Prozessdiagramm zur Übergangsmatrix erstellen, Folgeverteilungen bestimmen, Grenzverteilung und Grenzmatrix bestimmen	368
WR	Q	X	WV	7	Übergangsmatrix aus Prozessdiagramm bestimmen, Besonderheiten des Prozesses benennen, stabile Verteilung bestimmen, Vergleich mit leicht verändertem Prozessdiagramm, wie verändert sich das Grenzverhalten, Grenzverteilung des veränderten Prozesses bestimmen	368

WR	Q	X	WV	8	„böse 3“ Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen	368
WR	Q	X	WV	9	Insekt krabbelt (Übergangsmatrix zu beschriebenen Prozesse erstellen, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	368
WR	Q	X	WV	10	Duft in der Luft (Übergangsmatrix angeben, Folgeverteilungen bestimmen, Grenzverteilung bestimmen)	368
WR	Q	X	WV	11	Für verschiedene Fälle des Grenzverhaltens (stationär (un-)abhängig von der Grenzverteilung, nicht stabil) ein Beispiel angeben	368
WR	Q	X	WV	12	Prozessdiagramm vervollständigen und Übergangsmatrix erstellen, wobei Grenzverteilung bekannt ist.	369
WR	Q	X	WV	13	Verschiedene Aussagen einordnen	369
WR	Q	X	WV	14	Warteschlange modellieren (Übergangswahrscheinlichkeit begründen, Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zustand erhalten bleibt, zeigen, dass Prozess durch gegebene Übergangsmatrix beschreibbar ist, Folgeverteilungen bestimmen, auf Grenzverteilung prüfen, prüfen ob Grenzverteilung unabhängig von Startverteilung, Empfehlung zur Veränderung des Prozesses, zugrundeliegende Wahrscheinlichkeiten variieren)	369
WR	Q	X	WV	15	Begründung, dass Definitionsgleichung der Grenzverteilung gilt.	370
WR	Q	X	WV	16	Kaufhaus-Wechsel (Anpassung der Übergangsmatrix durch Parameter, sodass sich gewünschte stationäre Verteilungen ergeben)	370
WR	Q	X	WV	17	Grenzverteilungen aus Prozessdiagramm bestimmen, prüfen ob verschiedene Grenzverteilungen vorliegen, je nach Wahl der Parameter,	370

WR	Q	X	WV	18	Folgeverteilungen in Liniendiagramm zu gegebener Übergangsmatrix und Startverteilung gegeben, prüfen mit GTR, Diagramme für andere Startverteilungen bestimmen	370
WR	Q	X	WV	19	Übergangsmatrix aus Folgeverteilungen und Liniendiagramm bestimmen	370
WR	Q	X	EXK	EIN	Grenzverteilungen exakt bestimmen, wenn Prozess absorbierende Zustände erhält am Beispiel eines Legespiels	371
WR	Q	X	EXK	1	Gewinn-/Verlustwahrscheinlichkeit des Spiels bestimmen und mittlere Spieldauer, Grenzverteilung schätzen, Grenzverteilungen bestimmen	371
WR	Q	X	EXK	EIN	Erste Mittelwertsregel vorgestellt und am Spiel veranschaulicht	371
WR	Q	X	EXK	2	Übrige Gleichungen analog zum Beispiel erläutern, Lösung in Zusammenhang mit Grenzverteilung bringen, LGS aufstellen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit beim Verlieren.	372
WR	Q	X	EXK	3	Wahrscheinlichkeit im Prozessdiagramm absorbierende Zustände zu erreichen durch näherungsweise Bestimmung der Grenzmatrix oder 1. Mittelwertsregel	372
WR	Q	X	EXK	EIN	Erläuterung zweite Mittelwertsregel und Zusammenhang zur mittleren Wartezeit am Beispiel des Spiels	372
WR	Q	X	EXK	4	Gleichungssystem erläutern, Umformung des LGS verstehen, mittlere Wartezeit bestimmen	372
WR	Q	X	EXK	5	Ameisen-Raumwechsel (Mittlere Zeit bis absorbierender Zustand erreicht ist, Wahrscheinlichkeit für einen absorbierenden Zustand, mittlere Wartezeit für verschiedene Würfelereignisse)	372
WR	Q	X	RBS		Prozessdiagramm Ringpfeile, absorbierende Zustände, innerer Zustand, Stochas-	373

					tischer Prozess (Zustandsverteilung, Startverteilung, Zustandsvektor, stochastischer Prozess), Übergangsmatrizen (stochastische Matrix), Multiplikation von Matrizen und Vektoren, Grenzverhalten	
WR	Q	X	TRA	1	Begründung das stochastische Matrix vorliegt, Prozessdiagramm erstellen, Übergangsmatrix potenzieren und Werte interpretieren, Folgeverteilung bestimmen auch über Pfadregeln, Kontext für gegebene Übergangsmatrix nennen	374
WR	Q	X	TRA	2	Supermarkt-Wechsel (Startverteilung angeben, Übergangsmatrix aus Prozessdiagramm und Folgeverteilungen bestimmen, Potenz der Matrix und Folgeverteilung bestimmen)	374
WR	Q	X	TRA	3	Chip-Wurf (Prozessdiagramm vervollständigen, Übergangsmatrix angeben, Startverteilung angeben Folgeverteilung bestimmen)	374
WR	Q	X	TRA	4	Prozessdiagramm vervollständigen, Übergangsmatrix angeben, Folgeverteilungen bestimmen, Modell Kritik durch Angabe von Aspekten, die im Modell nicht abgebildet werden.	374
WR	Q	X	TRA	5	Einschätzung von verschiedenen Aussagen	374
WR	Q	X	TRA	6	Tetraeder-Wurf (Prozessdiagramm des Spiels erstellen, Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse bestimmen)	375
WR	Q	X	TRA	7	Türschlüssel finden (Wahrscheinlichkeit für Ereignis bestimmen)	375
WR	Q	X	TRA	8	Getränkessorten-Wechsel (Übergangsmatrix bestimmen, Grenzverteilung bestimmen, Übergangsmatrizen potenzieren und Spalte interpretieren, Grenzmatrix bestimmen)	375
WR	Q	X	TRA	9	Folgeverteilungen für verschiedene Startverteilungen bestimmen, Zunahme Wahr-	375

					scheinlichkeit von Zuständen erläutern, näherungsweise die Grenzmatrix bestimmen und Werte interpretieren,	
WR	Q	X	TRA	10	Supermarkt-Wechsel (Übergangsmatrix bestimmen, Folgeverteilungen bei gegebener Startverteilung berechnen und Grenzverteilung bestimmen, Grenzmatrix bestimmen und Zusammenhang mit Grenzverteilung angeben)	375
WR /dS	Q	CI	KVIII	CL	Relative Häufigkeiten berechnen, Unterschied zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten benennen, arithmetisches Mittel aus relativen Häufigkeiten bestimmen, Laplace-Wahrscheinlichkeiten berechnen und sinnvollen Einsatz angeben, Berechnungen am Baumdiagramm, „Real-situationen durch Zufallsexperimente simulieren/modellieren	386
dS	Q	CI	KVIII	1	20-fache Urnenziehung (relative Häufigkeit angeben)	386
WR /dS	Q	CI	KVIII	2	Mit Quadern würfeln (Wahrscheinlichkeiten vs. relative Häufigkeiten [Lösung: „Die Zeilen 1 und 3 enthalten Wahrscheinlichkeiten. Gegenüberliegende Quaderseiten [...], ordnet man aus Symmetriegründen gleiche Wahrscheinlichkeiten zu. Die relativen Häufigkeiten gegenüberliegender Quaderseiten sind wegen Zufallsschwankungen in der Regele nur annähernd gleich.“ (S. 476)], welche Zeile gehört zu welchem Quader, Unterschied zu Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Quader)	386
dS	Q	CI	KVIII	3	Arithmetisches Mittel einer Häufigkeitsverteilung bestimmen	387
WR	Q	CI	KVIII	4	Verschiedene Situation (Einordnung Laplace-Experiment oder nicht [Lösung (S. 476)])	387
WR	Q	CI	KVIII	5	Lostrommel (Bestimmung Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse, vergleich	387

					der Wahrscheinlichkeiten bei unterschiedlicher Belegung)	
WR	Q	CI	KVIII	6	Würfel und dann Münzwurf & geflickte Fahrradreifen (Baumdiagramm zeichnen, Bestimmung Wahrscheinlichkeit verschiedener Ereignisse)	387
WR /KB	Q	CI	KVIII	7	Schlüssel an der Tür (Simulation mit Kugelziehung entwickeln, „Frankas meint, die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Schlüssel beim dritten Versuch zu erwischen, sei am größten. Prüfen Sie rechnerisch und experimentell.“)	387
WR /dS	Q	CI	KIX	CL	Geometrische Wahrscheinlichkeiten mit Bezug zu relativen Häufigkeiten, mit Integralen rechnen, empirische Kenngrößen aus Urlisten und Häufigkeitsverteilungen berechnen.	388
WR	Q	CI	KIX	1	Einheitsquadrat, eingeschriebener Kreis & eingeschriebene Parabel (Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Ergebnisse der Monte-Carlo Simulation einordnen [Lösung: „Die relativen Häufigkeiten entsprechen (bis auf Zufallsschwankungen) den in a) berechneten Wahrscheinlichkeiten.“ (S. 477)])	388
QR	Q	CI	KIX	2	Münze auf Bierdeckel („Wie interpretieren Sie das Wort „zufällig?“ [Lösung: „Zufällig“ bedeutet hier: Der Mittelpunkt der Münze befindet sich überall auf dem Bierdeckel mit gleicher Wahrscheinlichkeit.“ (S. 477)])	388
WR	Q	CI	KIX	3	Integrale in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Integrale berechnen, normieren, Integralgleichung nach Integralgrenze auflösen)	388
dS	Q	CI	KIX	4	Empirische Kennwerte zu Urliste und Häufigkeitsverteilung bestimmen	388
WR /KB	Q	CI	KX	CL	Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsversuchen, Bernoulli-Kette bestimmen,	389

					Näherungswerte von Grenzwerten von Funktionen bestimmen, LGS mit GTR lösen, Wachstumsvorgang, Bestand bestimmen.	
WR	Q	CI	KX	1	Mehrfache Urnenziehung (Baumdiagramm erstellen, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	389
WR /KB	Q	CI	KX	2	Mehrfaches Drehen eines Glücksrads (als Bernoulli-Kette identifizieren, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen)	389
WR /KB	Q	AVS		1	Verschiedene Aktivitäten zur Binomialverteilung (Binomialverteilung händisch berechnen, am Baumdiagramm illustrieren, Kontext angeben zu diesem Pfad, Binomialverteilung tabellarisch darstellen, theoretische Kennwerte berechnen, Binomialkoeffizient bestimmen)	400
bS/ WR	Q	AVS		2	σ -Regeln und die Binomialverteilung (Erwartung von Treffern schätzen, Maß der Sicherheit bestimmter Häufigkeiten)	400
bS/ WR	Q	AVS		3	Gender Repräsentanz (prüfen, ob ein Prozentsatz von Treffern in einer bestimmten σ -Umgebung enthalten ist)	400
WR	Q	AVS		4	Stetig verteilte Zufallsgrößen (Unterschied zu diskreten angeben, Wahrscheinlichkeitsdichte graphisch anpassen, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, theoretische Kenngrößen ermitteln)	400
WR	Q	AVS		5	Normalverteilung (Aussagen zu gegebenen theoretischen Kenngrößen bilden, Dichtefunktion skizzieren, Auswirkung der Änderung theoretischer Kenngrößen auf die Dichtefunktion, Wahrscheinlichkeiten bei gegebener Normalverteilung schätzen und Schätzung begründen, Integralgleichung aufstellen, Nutzung des Satz von De-Moivre-Laplace und Lösen des Testproblems)	400

WR /bS	Q	AVS		6	Fußballer-Fotos in Schokolade (verschiedene Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmen, großes n Nutzung der Approximation der Binomialverteilung an die Normalverteilung, Durchführen von Hypothesentest)	401
WR /bS	Q	AVS		7	Verschiedene Glücksspiele auf dem Schulfest (Tombola mit Binomialverteilung modellieren und kommentieren, Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Ereignisse bestimmen, Lose kaufen bis zu einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ein Hauptgewinn erhalten, Gewinn der Tombola bestimmen bei gegebenen Preisen und Auszahlungen, wie viele Hauptgewinne kaufen bei gegebener Ziehungssicherheit, ein- und zweiseitiger Tests eines Glücksspiels ob Anzahl der Hauptgewinne stimmt und Einschätzung welcher Test angemessener)	401
WR	Q	AVS		10	Übergangsmatrix untersuchen (Prüfen ob stochastische Matrix vorliegt, liegt absorbierender Zustand vor, Prozessdiagramm erstellen, Startverteilung und Folgeverteilungen angeben, Quadrat der Matrix bestimmen und deren Produkt mit einem Vektor bestimmen)	402
WR	Q	AVS		11	Levelaufstieg im Computerspiel (Prozessdiagramm vervollständigen, Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse bestimmen, Startverteilung und weitere Zustandsverteilung bestimmen, auch auf lange Sicht.	402
WR	Q	AVS		12	Wanderungen zwischen Städten (Werte festlegen, sodass stochastische Matrix vorliegt, Prozessdiagramm erstellen, Potenzen von Übergangsmatrizen vergleichen)	402
WR	Q	AVS		13	Glücksspiel (Prozessdiagramm angeben, Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen, Grenzmatrix bestimmen.	402

dS/ bS	Q	GTR			Trendlinien zu Daten erzeugen	495
bS/ WR	Q	GTR			Binomialverteilung (Wahrscheinlichkeiten bestimmen, Binomialkoeffizient bestimmen, Umkehrung der kumulierten Binomialverteilung, Tabellen erstellen, Säulendiagramme erstellen, Zufallszahlen und entsprechende Diagramme in verschiedenen Darstellungen anzeigen)	496 – 498
bS/ WR	Q	GTR			Normalverteilung (Wahrscheinlichkeiten bestimmen, Graph anzeigen lassen, Umkehrung der Normalverteilung auswerten)	498 – 499
dS	Q	GTR			Statistische Kenngrößen bestimmen	499
dS/ bS	Q	GTR			Trendlinien zu Daten erzeugen	509 – 510
bS/ WR	Q	GTR			Binomialverteilung (Wahrscheinlichkeiten bestimmen, Binomialkoeffizient bestimmen, Umkehrung der kumulierten Binomialverteilung, Tabellen erstellen, Säulendiagramme erstellen, Zufallszahlen und entsprechende Diagramme in verschiedenen Darstellungen anzeigen)	510 – 512
bS/ WR	Q	GTR			Normalverteilung (Wahrscheinlichkeiten bestimmen, Graph anzeigen lassen, Umkehrung der Normalverteilung auswerten)	513 – 514
dS	Q	GTR			Statistische Kenngrößen bestimmen	514 – 515
WR /bS/ dS/ KB	Q	REG			$\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}$ -Gesetz für Schwankungsintervalle, Ablehnungsbereich, absorbierender Zustand, Absorptionswahrscheinlichkeiten, Annahmebereich, Austauschprozess, Baumdiagramm, begrenztes Wachstum, Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Formel, Bernoulli-Kette, Binomialkoeffizient, Binomialverteilung, Daten, de Moivre-Laplace	517

					(Satz von), Dichtefunktion, Einseitiger Signifikanztest, empirische Standardabweichung, erste Mittelwertsregel, Erwartungswert, Exponentialfunktion (natürliche), Exponentialgleichung, exponentialverteilte Zufallsgröße, fair, Faustregel nach Gauß, Fehler bei Hypothesentests, Fehler erster Art, Fehler zweiter Art, Gauß'sche Faustregel, Gauß'sche Glockenfunktion, geometrisch verteilte Zufallsgröße, Grenzverteilung, Grenzverteilung exakt bestimmen, Grundgesamtheit	
WR /bS/ dS	Q	REG			Hypothese, innerer Zustand, Irrtumswahrscheinlichkeit, Kenngrößen (theoretische), kumulierte Wahrscheinlichkeit, linksseitiger Test, Matrix (stochastische), Messfehler zufällige, Mittelwert, Mittelwerte von Funktionen, Mittelwertsregeln, mittlere Wartezeiten, normalverteilt, Normalverteilung (testen), Nullhypothese, Operationscharakteristik, Prozessdiagramm, Prozess (stochastischer), rechtsseitiger Test, reellwertige Zufallsgröße, Relevanz statistischer Tests, Ringpfeil	518
WR /bS/ dS	Q	REG			Satz von de Moivre-Laplace, Schwankungsintervall, Sigmaregeln, Signifikanzniveau, Signifikanz statistischer Tests, Signifikanztest (einseitig, zweiseitig), stabile Verteilung, Standardabweichung, Standardabweichungs-Intervall, Standard-Glockenfunktion, Startverteilung, stetige Zufallsgröße, Stetigkeitskorrektur, stetig verteilt, stetig verteilte Zufallsgröße, Stichprobe, Stichprobenumfang, stochastische Matrix, stochastischer Prozess, Testen bei Normalverteilung, theoretische Kenngröße, Übergangswahrscheinlichkeit, Verteilungsfunktion, Verteilung, stabile, Vertrauensintervall, Wahrscheinlichkeit,	519

					Wahrscheinlichkeit, kumulierte, Wahrscheinlichkeitsdichte, Wahrscheinlichkeitsverteilung, zufällige Messfehler, Zufallsgröße (exponentialverteilt, reellwertig, stetige), Zufallszahlen erzeugen, Zustandsverteilung, Zustandsverteilungen bestimmen, zweiseitiger Signifikanztest, zweiseitiger Test, zweite Mittelwertsregel	
--	--	--	--	--	--	--

Bibliographische Daten der untersuchten Schulbücher

- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 5: Baum, M., Bellstedt, M., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Haug, F., Hußmann, S., Jürgensen, T., Leuders, T., Richter, K., Riemer, W., & Schermuly, H. (2007). *Lambacher Schweizer 5, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (2. Auflage, Drucke 2011, 2010, 2009, 2008, 2007). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 6: Baum, M., Bellstedt, M., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Haug, F., Hußmann, S., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Leuders, T., Richter, K., Riemer, W., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., & Surrey, I. (2009). *Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2018, 2017, 2016, 2015). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 7: Blank, M., Brandt, D., Greulich, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Krivsky-Velten, R., Lind, D., Mutz, D., Petermann, A., Reimer, R., Riemer, W., von Saint-George, G., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., & Zimmermann, P. (2010). *Lambacher Schweizer 7, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2017, 2016, 2015). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 8: Brandt, D., Greulich, D., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Reimer, R., Riemer, W., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., Surrey, I., & Zimmermann, P. (2008). *Lambacher Schweizer 8, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2008, 2009, 2010, 2011, 2012). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe 9: Baum, M., Bellstedt, M., Brandt, D., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Giersemehl, I., Haug, F., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W., Sonntag, R., & Spielmans, H. (2009). *Lambacher Schweizer 9, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (2. Auflage, Drucke 2016, 2015, 2014). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe Einführungsphase: Brandt, D., Giersemehl, I., Greulich, D., Herd, E., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., König, A., Reimer, R., Riemer, W., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., Spielmans, H., Stanzel, M., Stühler, A., Zimmermann, P., & Zinser, M. (2014). *Lambacher Schweizer Einführungsphase, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2020, 2019, 2018, 2017, 2016). Stuttgart: Klett.
- Lambacher Schweizer Jahrgangsstufe Qualifikationsphase: Baum, M., Bellstedt, M., Brandt, D., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Greulich, D., Haug, F., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W., Sandmann, R., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., Spielmans, H., Wollmann, A., Zimmermann, P., Zinser, M. (2015). *Lambacher Schweizer Qualifikationsphase, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen* (1. Auflage, Drucke 2020, 2019, 2018, 2017, 2016). Stuttgart: Klett.

Der Übergang im Fach Mathematik von der Schule zur Hochschule wird gemeinhin als sehr herausfordernd wahrgenommen. Die Erklärungsansätze für dieses Phänomen sind vielfältig.

Gero Stoffels zeigt, dass es besonders lohnenswert ist, einen besonderen Aspekt beim Übergang zwischen Schule und Hochschule zu betrachten: Während in der Schule eher eine empirisch-gegenständliche Auffassung vorherrscht, wie sie häufig im auf Objekte der Empirie bezogenen Mathematikunterricht der Schule angeregt wird, überwiegt in universitären Lehrzusammenhängen eine eher formal-abstrakte Auffassung, die in dieser Arbeit charakterisiert wird.

Eine wesentliche Erkenntnis der in diesem Buch vorliegenden exemplarischen Lehr- und Schulbuchanalysen zum Thema Stochastik ist, dass interessanterweise ein solcher Auffassungswechsel nicht nur in aktuellen, sondern auch historischen Werken und damit für die Genese der Mathematik beschrieben werden kann. Darauf aufbauend kann der Autor durch eine instrumentelle Fallstudie verdeutlichen, inwiefern die Analyse und explizite Reflexion von Auffassungswechseln in der Mathematik(geschichte) Studierende in ihrem Entwicklungs- und Professionalisierungsprozess im Fach Mathematik für das Lehramt unterstützen kann.

Dr. Gero Stoffels ist Studienrat im Hochschuldienst an der Universität Siegen mit einem besonderen Forschungsinteresse für mathematische Begriffsentwicklung, Lernbiographien und mathematische Interaktionsprozesse.