Andreas Vohns

Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht

– Ein Fallbeispiel zur empirischen Lösungsweganalyse –

Siegen 2007

Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht

– Ein Fallbeispiel zur empirischen Lösungsweganalyse[1] –

Andreas Vohns

1. Motivation und Vorgehensweise

In der Mathematikdidaktik wird seit langem über ‚fundamentale Ideen', ‚zentrale Ideen', ‚universelle Ideen' oder ‚Leitideen' nachgedacht. Gegenüber den hier zusammenfassend als ‚grundlegende Ideen' bezeichneten fachdidaktischen Konzeptionen sind die „Leitideen" in den deutschen Bildungsstandards[2] ein deutlich reduziertes Konzept, bei dem eine Unterordnung möglichst aller erwarteten inhaltsbezogenen Kompetenzen unter möglichst jeweils genau eine Leitidee im Vordergrund steht. Dabei geht meiner Ansicht nach einiges an Potenzial verloren, das eine Orientierung an grundlegenden Ideen bieten könnte. Im diesem Aufsatz wird daher ‚bottum up' von einer konkreten Aufgabenstellung ausgehend das Reflexionspotenzial grundlegender Ideen rekonstruiert.

Mit dem hier vorgestellten Beispiel soll gleichzeitig eine stärkere Verzahnung von qualitativ empirischem und sachanalytischem Vorgehen umgesetzt werden. Ich betrachte dies als Weiterentwicklung der in VOHNS 2005a und VOHNS 2005b vorgestellten Analyseverfahren, bei denen die Frage nach relevanten lokalen Subkonzepten (bzw. Grundvorstellungen) rein präskriptiv zu klären gesucht wurde. Im hier vorgestellten Beispiel wird hingegen auf dokumentierte tatsächliche Lösungsansätze zu einer vorgegebenen Aufgabe zurückgegriffen, die auf die in ihnen angesprochenen Subkonzepte hin untersucht werden.

Die Analyse basiert auf der Untersuchung einer Gruppe von 28 Lehramtsstudierenden für die Primar- und Sekundarstufe. Die Studierenden besuchten im Wintersemester 2005/2006 mein Seminar ‚Problemlösen & Heuristik'. Analysiert wird eine der auf elektronischem Weg (per Email) abgegebenen Hausaufgabe zu dieser Veranstaltung. Grundlegende Ideen waren dabei nicht Thema des Seminars. Der ursprüngliche Zweck der Hausaufgabe war es, einige Beispiele aus PISA, den deutschen und den österreichischen Bildungsstandards für die 8./9. Klasse anhand POLYA's Plan zum Lösen mathematischer Aufgaben zu bearbeiten, um diesen Plan praktisch zu erproben und eine eigene Einschätzung der Nützlichkeit dieses Planes zu bekommen. Die analysierte Beispielaufgabe entstammt den Österreichischen Bildungsstandards für die achte Schulstufe und lautet:

> „Chris und Angela liegen am Strand. Chris hat 30 m bis zur Eisbar. Angela 40 m.
> Wie weit sind die beiden voneinander entfernt? Überlegt in einer Gruppe (3-4 Schüler/innen) unter-

[1] Erweitertes Vortragsmanuskript des auf der 40. GDM-Tagung vom 06.-10. März 2006 in Osnabrück unter dem Titel „Fallbezogene Rekonstruktion grundlegender Ideen in der Geometrie" gehaltenen Vortrags. Enthält die ausgewerteten Arbeiten der Studierenden.

[2] Vgl. KMK 2004

schiedliche Lagepositionen und stellt sie auf einem Plakat dar!
Welche Positionen ermöglichen eine einfache rechnerische Lösung?“[3]

Die Studierenden wurden ausdrücklich darauf hingewiesen, die Aufgabe auf der Basis zu erwartender typischer Kenntnisse von 8./9.-Klässlern zu lösen.

Das Material wird im Folgenden in einem dreistufigen Prozess ausgewertet:

– Zunächst werden einige idealtypische Lösungsansätze vorgestellt. Die 28 Lösungen werden dazu im Wesentlichen in vier Kategorien eingeteilt.
– Daran anschließend werden Verbindungen und Einflüsse grundlegender Ideen in den idealtypischen Lösungsansätzen (wiederum vor allem auf der Basis lokal bedeutsamer Subkonzepte) untersucht.
– Schließlich erfolgt in einem dritten Schritt eine sachanalytische Ausweitung: Unabhängig von den konkreten Lösungsansätzen wird die zu Grunde liegende stoffliche Struktur und die Verflechtung der Aufgabenstellung mit grundlegenden Ideen weitergehend exploriert. Dieser Schritt dient dem Zweck, konstruktive Vorschläge für einen produktiven Unterrichtseinsatz der Aufgabenstellung zu formulieren.

2. Idealtypische Lösungsansätze

Für die Unterteilung der Lösungswege in idealtypische Ansätze spielt die Frage der gewählten *Repräsentation* eine entscheidende Rolle[4]. Die begangenen Lösungswege lassen sich mit Blick auf die gewählte Repräsentation dabei in drei Hauptwege (Pythagoras, erweitertes Dreiecksmodell, Kreismodell) unterteilen, wobei Mischformen vorkommen. Auch dort wo eine Zeichnung fehlt, wird das Anfertigen einer Zeichnung zumindest hypothetisch erwähnt und teilweise ist eine Zuordnung zu Kreis-/ oder Dreiecksmodell möglich[5].

A) Rechnerische Lösung mittels Satz von Pythagoras

Bei diesem Ansatz erkennen die Studierenden in der Regel bereits im Schritt ‚Verstehen der Aufgabe’ die vermeintliche Unterbestimmtheit der Aufgabe. Sie stellen fest, dass man „für die Berechnung eines Dreiecks [...] drei Angaben (SWS,WWS, etc.)“[6] benötigt. „In der Aufgabenstellung werden nur zwei Angaben gemacht.“. Im Schritt ‚Ausdenken eines Plans’ schlagen die Studierenden daher vor, die Aufgabe so zu ändern, „dass das Dreieck in der Ecke, wo sich die Eisbar befindet einen rechten

[3] BMBWK 2004, S. 105
[4] Vgl. Tabelle im Anhang, S. A1
[5] Die Lösungen L3, L12, L21 erwähnen ausdrücklich eine der beiden Darstellungsoptionen (Kreise/ Dreieck), L24 spricht nur generell von einer „Planfigur“, ohne dass klar würde, wie diese denn auszusehen hätte. In L17und L27 ist gar nicht von einer Zeichnung die Rede.
[6] L3, Anhang S. A5

Winkel hat“[7]. Die ‚Durchführung des Plans' kann dann schlicht und ergreifend auf die „richtige Anwendung des Satzes des Pythagoras“[8] reduziert werden.

In den vier Lösungen, die diesen Weg angeben, fehlen erstaunlicherweise sogar Überlegungen zum an sich naheliegenden Fall, dass sich Chris und Angela auf einer Geraden befinden. Wie selbstverständlich nehmen die Studierenden an, dass die einzige einfache Lösung, die eine Berechnung erlaubt, auf den Satz von Pythagoras führen muss[9].

B) Erweitertes Dreiecksmodell: Zwei gerade Linien und zwei Dreiecke

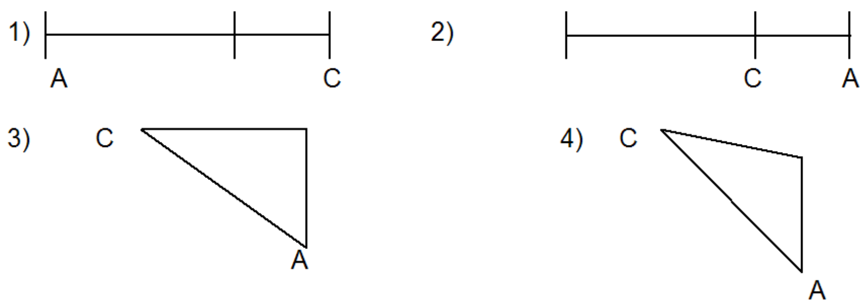


Abbildung 1

Bei diesem Ansatz[10] folgen die Studierenden im Schritt ‚Verstehen der Aufgabe' POLYAs Empfehlung, eine Skizze der Situation anzufertigen[11]. Bereits früh erkennen sie, dass „die Bedingung [...] verschiedene Optionen offen“ lässt, „um die Entfernung zwischen C. und A. zu ermitteln“[12]. Eine Studentin fügt hinzu, dass es sinnvoll sei „die verschiedenen Lagebeziehungen durch eine Skizze zu veranschaulichen“, weil sich „dadurch [...] verschiedene Rechenmethoden ableiten“ lassen „die sich in ihrer Komplexität eventuell unterscheiden werden“[13].

Die Studentin (und im Prinzip alle Studierenden, die diesen Ansatz gewählt haben) kommt schließlich zu dem Ergebnis: „die Lösungen 1) und 2) erweisen sich als rechnerisch einfach; die Lösung 3) erfordert Vorkenntnisse (Satz des Pythagoras); Lösung 4) muss unter Voraussetzung der gegebenen Bedingungen als nicht lösbar erkannt werden“[14]. Bei einigen Lösungen fehlt der vierte (allgemeine) Fall, andererseits gibt es auch zwei Studierende, denen auffällt, dass der rechte Winkel auch an einer anderen Ecke des Dreiecks (bei Chris) liegen könnte, was eine ebenso einfache Berechnung über den Satz von Pythagoras erlauben würde.

[7] L3, Anhang, S. A5
[8] L3, Anhang, S. A5
[9] Besonders deutlich bei L20, vgl. den Abschnitt ‚Ausdenken eines Plans', Anhang, S. A36
[10] Mit 19 Fällen als alleinigem oder unterstützendem Ansatz der mit Abstand am häufigsten gewählte
[11] Eine Kopie des Problemlöseplans von Polya lag der Aufgabenstellung bei, sowie ein Raster, in das die Lösung eingetragen werden sollte, daher rührt auch die sehr ähnliche Formatierung aller Lösungen im Anhang.
[12] L5, Anhang, S. A9
[13] A.a.O.
[14] L5, Anhang, S. A9

C) Kreismodell: Zwei Kreise und Extremwert-Abschätzung

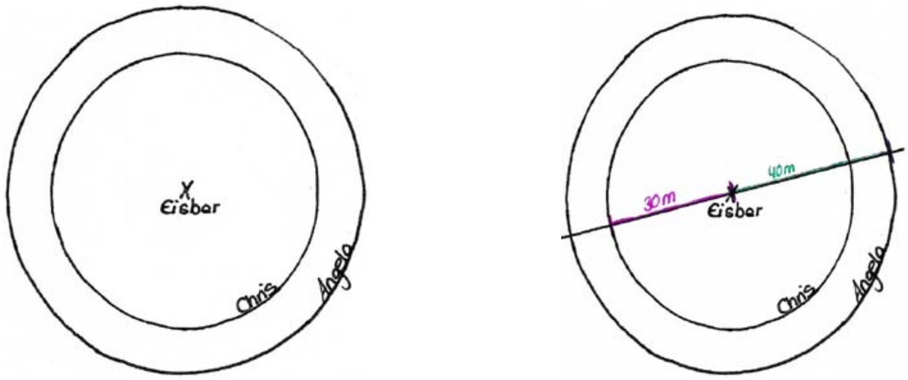


Abbildung 2

Diese Lösung tritt nur in zwei Fällen als alleiniger Ansatz auf, in vier weiteren Fällen ergänzt sie einen der beiden vorher genannten Ansätze. Dieser Lösungsweg eröffnet eine eigene Perspektive auf das Ausgangsproblem. Im Schritt *Verstehen der Aufgabe* formulieren die Studierenden das Kernproblem der Aufgabe als Frage: „Liegen die beiden möglichst dicht beieinander oder möglichst weit voneinander entfernt?“[15]. Die Zeichnungen in Abbildung 2 nutzen die charakteristische Eigenschaft des Kreises (Ortslinie der von einem festen Punkt gleich weit entfernten Punkte), um sowohl die beiden einfachen Fälle des vorigen Ansatzes aufzufinden als auch ihre Kernfrage zu beantworten: „Die beiden einfachen Lösungen sind die kleinstmögliche Entfernung von Chris und Angela bzw. die größtmögliche Entfernung von Chris und Angela. Es existieren noch beliebig viele andere Lösungen, die sind aber auf jeden Fall größer als 10m und kleiner als 70m, sie liegen also auf jeden Fall dazwischen“[16].

D) Interessante Fälle des Hinwegsetzens über das implizite „Do What I Mean“ der Aufgabenstellung

Das Phänomen des impliziten „Do What I Mean“(DWIM) ist als Terminus von JAHNKE in die Diskussion um die Neue Aufgabenkultur eingeführt worden. JAHNKE behauptet, dass jede erdenkliche Aufgabenstellung nicht nur konkrete Angaben enthalte, die zur Bearbeitung der Aufgabe nötig sind, sondern auch mehr oder weniger deutliche Hinweise, was zu tun und was zu lassen ist; welche Lösungsansätze gewählt werden können; sowie indirekt gegebene Bedingungen, die zwar nicht explizit erwähnt werden, aber im Kontext von Mathematikunterricht mehr oder weniger als selbstverständlich angenommen werden können. Für die Schülerinnen und Schüler ergebe sich somit bei der Bearbeitung von Aufgaben im Mathematikunterricht immer die Aufforderung: „Wähle alle Rahmenbedingungen passend und bearbeite die Aufgabe so, wie es die Aufgabenstellerin gemeint hat“[17].

---

[15] L13, Anhang, S. A25
[16] L2, Anhang, S. A3
[17] Jahnke 2005, S. 9. Jahnke betont, dass dies bei geschlossenen Aufgabenformaten zwar graduell ausgeprägter ist, als bei offenen, ihm scheint das DWIM-Element aber für alle Textaufgaben geradezu konstitutiv zu sein, vgl. a.a.O. S. 9 ff.

Einige wenige Lösungen der Studierenden sind klare Fälle des Hinwegsetzens über das DWIM der Aufgabenstellung bzw. der vorab von mir festgelegten Bearbeitungsanweisungen. Diese Lösungsansätze sind von besonderem Interesse, da sie von dem Ziel angespornt werden, die Gesamtheit aller Fälle rechnerisch zu beherrschen, und da dies den entscheidenden Punkt zur produktiven Erweiterung der Aufgaben darstellt.

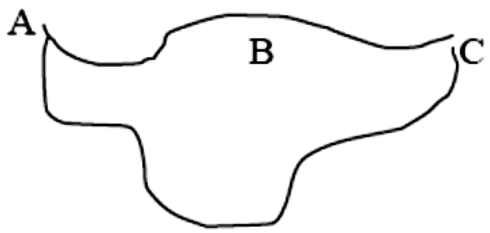
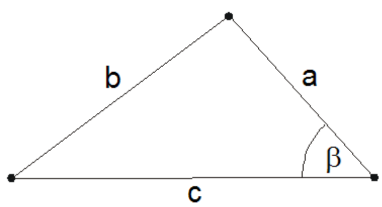


Abbildung 3

Der erste hier vorzustellende Ansatz (s. Abbildung 3)[18] bringt uns diesem Ziel noch nicht wirklich näher, verdeutlicht aber die Rigidität auszuschließender Annahmen: Wenn man die Aufgabe mathematisch (insbesondere rechnerisch) lösen möchte, so muss man annehmen, dass alle Entfernungen Angaben über geradlinig gemessene Entfernungen darstellen. Wenn wir das Problem als echte Anwendungsaufgabe ernst nähmen, wäre Abbildung 3 vielleicht deutlich näher an der Realität. Die Aufgabenstellung schließt derartige Fälle aber implizit aus und legt solche vereinfachenden Modelle nahe, bei denen sich die Entfernung „einfach berechnen" lässt[19].

Ein anderer Student imitiert mit seiner Lösung den bequemen, aber cleveren Schüler: In der *Rückschau* versucht er einen besseren Lösungsweg zu finden und findet einen solchen, in dem er einen Satz in der Formelsammlung nachschlägt (s. Abbildung 4).

„ich schaue in Formelsammlung, um mich zu vergewissern, finde dort allgemeines Dreieck → neue Skizze



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$$

Übertragen auf meine Fall bereitet keine Probleme"

Abbildung 4

[18] L25, Anhang, S. A43

[19] Für die Studierenden scheint bei dieser Aufgabe eine Verwechselung von eingekleideter Aufgabe und realitätsbezogener Aufgabe allerdings kein Problem darzustellen, so wird etwa die in der Realität nicht unproblematische Idealisierung der räumlichen Ausdehnung der Eisbar als „Punkt" in keiner Lösung angesprochen (die Ausdehnung der Theke der Eisbar hätte ja u.U. durchaus Einfluss auf die Lösung). Auch L25 diskutiert im Übrigen die Geraden-Fälle und einen Pythagoras-Fall.

Es ist klar, dass auch diese Lösung kaum von den Autoren der österreichischen Bildungsstandards intendiert worden sein dürfte: Weder ist der Einsatz der Formelsammlung vorgesehen noch gehört der Kosinussatz zum Stoff dieser Schulstufe.

Der letzte hier vorzustellende Lösungsansatz berücksichtigt nicht nur beide Geraden- und beide Pythagoras-Fälle, sondern zusätzlich die in Abbildung 5 präsentierten Fälle[20]. Gleichschenklige Dreiecke vorauszusetzen ist ein sehr eleganter Weg die Aufgabe zu lösen, denn die Entfernung ergibt sich automatisch: Sie beträgt entweder 30 m oder 40 m. Dabei ist die Annahme von gleichschenkligen Dreiecken genauso gut oder schlecht wie die Annahme von rechtwinkligen Dreiecken. Über die Aufgabenstellung wird sich allerdings insofern hinweggesetzt, als für die gleichschenkligen Dreiecke nichts zu berechnen ist[21].

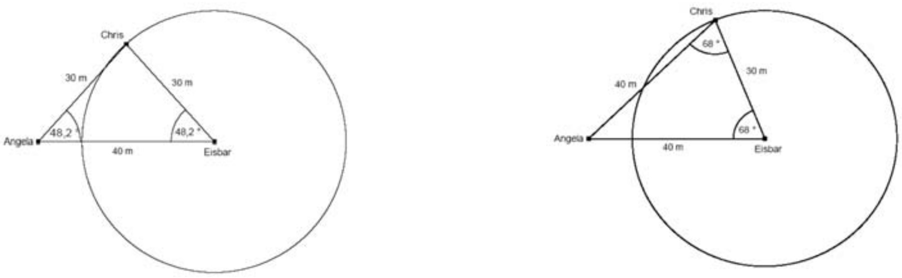


Abbildung 5

Die Studentin, die diesen Ansatz gewählt hatte, hat mit ihrer Lösung zusätzlich eine Datei für ein Dynamisches Geometrie System mitgeschickt, bei der man die Lage von Chris und Angela auf den beiden Kreisen variieren kann (s. Abbildung 6). Das DGS erlaubt eine direkte Messung aller möglichen Entfernungen von Chris und Angela. Und wieder wird nichts berechnet: Die Messung wird durch das DGS übernommen, das intern mit einer numerischen Approximation arbeitet.

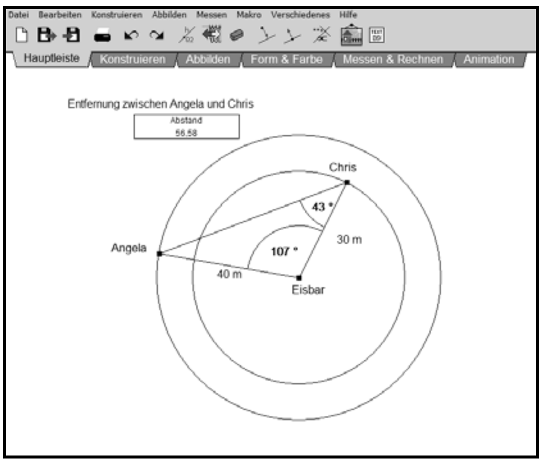


Abbildung 6

[20] L6, Anhang, S. A10-15

[21] Zu berechnen wären in diesen Fällen allenfalls die in Abbildung 5 angegebenen Winkel bei Angela und Eisbar. Konstruieren lassen sich die gleichschenkligen Dreiecke allerdings auch ohne die Kenntnis dieser Winkel (Genau das ist die konstruktive Wendung des Kongruenzsatzes SSS).

3. Relevante grundlegende Ideen

Das Schaubild in Abbildung 7 setzt die vorgestellten Ansätze in Beziehung zu den relevanten grundlegenden Ideen. Wenn wir unsere Beispielaufgabe vom Standpunkt der synthetischen Geometrie aus betrachten, so ist die Aufgabe vergleichsweise simpel: Alle Entfernungen zwischen 10 und 70 Metern sind gleich gut möglich, da wir das resultierende Dreieck für alle Entfernungen auf der Basis des Kongruenzsatzes SSS gleich gut konstruieren können. Von diesem Blickwinkel aus ist keine genauere Antwort möglich: Die Aufgabenstellung enthält keinerlei Hinweise über irgendwelche Winkel in der Figur, also sind alle Winkel gleich gut möglich. Wenn man ein bestimmtes mögliches Dreieck konstruieren möchte, so gibt es keine einfachen Spezialfälle, jedes Dreieck lässt sich gleich einfach konstruieren. Diese Erkenntnis wird bei den Studierenden-Lösungen am ehesten durch das ‚Zwei Kreise und Extremwert-Abschätzung'-Modell repräsentiert.

Die zu Grunde liegende Idee ist die des ‚Strukturierens in Ebene und Raum': Wir benutzen Dreiecke und Kreise, um die Situation zu strukturieren. Deren charakteristische Eigenschaften geben uns weiteren Aufschluss über die Situation: Jede Entfernung von 10 bis 70 Metern ist möglich, keine spezielle Entfernung ist wahrscheinlicher als die anderen.

(synthetisch) geometrischer Standpunkt

Alle Entfernungen zwischen 10 und 70 m lassen sich gleich einfach konstruieren.

Erfahrungen aus der Kongruenzgeometrie der unteren Mittelstufe (Kongruenzsatz SSS)

Idee des Strukturierens in Ebene und Raum

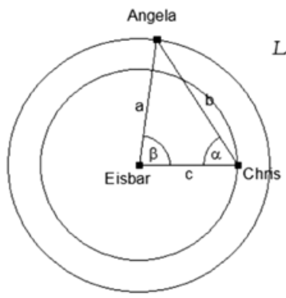
rechnerisch-algebraischer Standpunkt

Die Spezialfälle β= 0;90;180 und α=90 können mit bekannten Formeln einfach bestimmt werden

Lokales Satzwissen zur berechnenden Geometrie (Satz von Pythagoras)

Idee des Messens

(mittelbare Verfahren)



empirisch-numerischer Standpunkt

In einem DGS können alle Lagepositionen „nachgemessen werden".

trigonometrischer Standpunkt

Der Kosinussatz macht alle Situationen rechnerisch beherrschbar.

(quasi-)funktionale Standpunkte

Idee des funktionalen Denkens

Abbildung 7

Unsere Sichtweise auf das Problem ändert sich entscheidend, wenn wir vom Standpunkt der synthetischen Geometrie zu einem arithmetisch-algebraischen Standpunkt übergehen: Auf der Grundlage der typischen Kenntnisse von 8./9.-Klässlern gibt es nur einige ausgewählte Spezialfälle, die eine einfache Berechnung erlauben. Wenn wir die Entfernung auf einfache Weise berechnen wollen, müssen wir den Winkel an der Eisbar als 0°, 90° oder 180° annehmen bzw. den Winkel bei Chris als

90°. Nur in diesen Fällen stehen uns geometrische Sätze zur Verfügung, die sich als Berechnungsformeln nutzen lassen, um aus den zwei gegebenen Entfernungen die dritte zu berechnen.

Bei diesem Ansatz liegt prinzipiell die Idee (exakter) Messung zu Grunde: Geometrische Sätze lassen sich als Berechnungsformeln auffassen, um aus bestimmten bekannten Figurstücken andere zu berechnen. Die Formeln sind dabei gewissermaßen geronnene Messerfahrung[22]. Wir haben es also wieder mit jenem mittelbaren Messverfahren zu tun, das wir normalerweise einsetzen, wenn wir uns keine weiteren Gedanken über das Messen machen wollen. Der Bezug zur Idee des Messens ist bei diesen Lösungen also nur implizit gegeben.

Sowohl der Standpunkt der synthetischen Geometrie als auch der Standpunkt der berechnenden Geometrie lassen einen kleinen Teil der Studierenden unbefriedigt zurück. Zwar können alle möglichen Entfernungen zwischen 10m und 70m laut Kongruenzsatz SSS auftreten, wie die genauen Lagepositionen aussehen, erkennt man aber erst nach der Konstruktion des zugehörigen Dreiecks. Im Doppelkreis-Modell lassen sich die Längen nur approximativ (durch konkretes Nachmessen) bestimmen. Berufen wir uns hingegen auf unser Formelwissen aus der berechnenden Geometrie, so können wir nur ein paar einfache Spezialfälle diskutieren, solange wir den Kosinussatz noch nicht kennen.

Will man die Nachteile dieser Ansätze überwinden, so heißt das, eine Formel zu suchen, die einem alle Fälle in Abhängigkeit des bei der Eisbar vorliegenden Winkels berechnen lässt. Benutzt man dazu ein dynamisches Geometrie-System, so gelangt man zunächst nur zu einer numerisch-empirischen Lösung. Das System bestimmt intern die Länge aufgrund einer numerischen Annäherung (entspricht also im Prinzip dem konkreten Nachmessen), erlaubt einem allerdings simultan zur Veränderung der Lage von Chris und Angela auf den Kreisringen die jeweils resultierenden Entfernungen direkt abzulesen. Eine exakte rechnerische Lösung erfordert hingegen den Kosinussatz. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks als gegeben angesehen werden, kann man die Seitenlänge der dritten Seite als Funktion des Mittelpunktswinkels β auffassen und den Kosinussatz damit funktional interpretieren. Die beiden letzteren Ansätze repräsentieren damit einen (zumindest quasi-)funktionalen Ansatz: Dynamische Geometrie erlaubt das diachrone Durchlaufen aller möglichen Ergebnisse durch Manipulation der Lage von Chris und Angela, der Kosinussatz bietet uns zudem einen (formelhaften) simultanen Überblick über den gesamten Definitionsbereich.

[22] Zur Idee des Messens vgl. Vohns 2005b.

4. Sachanalytische Ausweitung: Ein genetischer Zugang zum Kosinussatz

Wenn wir das bislang Festgestellte zusammenfassen wollen, so müssen wir den Kosinussatz als im Prinzip einzige voll zufriedenstellende Lösung für unser Problem einschätzen. Es stellt sich nun die Frage, ob wir aus den anderen Ansätzen heraus die Beispielaufgabe zu einer produktiven Lernumgebung[23] zur Einführung des Kosinussatzes ausweiten können. Der auf DGS basierende Ansatz scheint für eine derartige Lernumgebungen einen guten Ausgangspunkt darzustellen, da er bereits den Übergang zu einer quasi-funktionalen Betrachtung darstellt.

Wenn wir uns an die in Abbildung 6 präsentierte Lösung erinnern, so erlaubt uns diese Skizze allein noch keine einfache funktionale Modellierung, denn es sind zu viel Punkte variabel.

Wenn wir das Problem funktional modellieren wollen, setzt dies voraus, dass wir die Anzahl der variablen Punkte reduzieren, ohne die Allgemeinheit zu beschränken. Dies ist eine typische Strategie im Umgang mit funktionalen Zusammenhängen, und in diesem Fall ist eine Lösung relativ leicht zu finden: Wir können etwa die Lage von Chris und der Eisbar fixieren, ohne dass wir irgendeine mögliche auftretende Entfernung zwischen Chris und Angela dadurch verlieren würden (siehe Abbildung 8). Die Fixierung von Chris und Eisbar erlaubt es uns zudem, die Position von Angela und damit auch die Entfernung zwischen Chris und Angela als Funktion des Mittelpunktswinkels β aufzufassen.

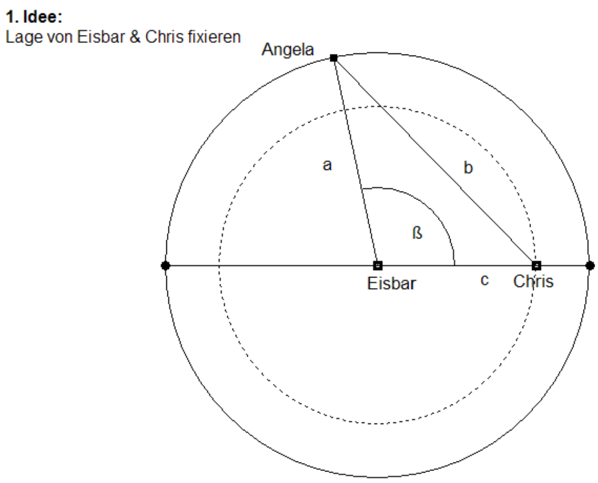


Abbildung 8

Für eine rechnerische bzw. funktionale Modellierung ist es zudem sinnvoll, zusätzlich eine geeignete Koordinatisierung vorzunehmen. Es liegt nahe, dabei den Mittelpunkt der Kreise als Ursprung des Koordinatensystems zu wählen. Mit einem DGS ist es nun möglich, die resultierenden Entfernun-

[23] Vgl. Wittmann 2001

gen in Abhängigkeit vom Mittelpunktswinkel als dynamische Kurve erzeugen zu lassen[24]. Das Ergebnis ist in Abbildung 9 dargestellt und macht klar: Allein aufgrund des so erzeugten Funktionsgraphen ist es kaum möglich, die zugehörige Funktionsgleichung zu erkennen.

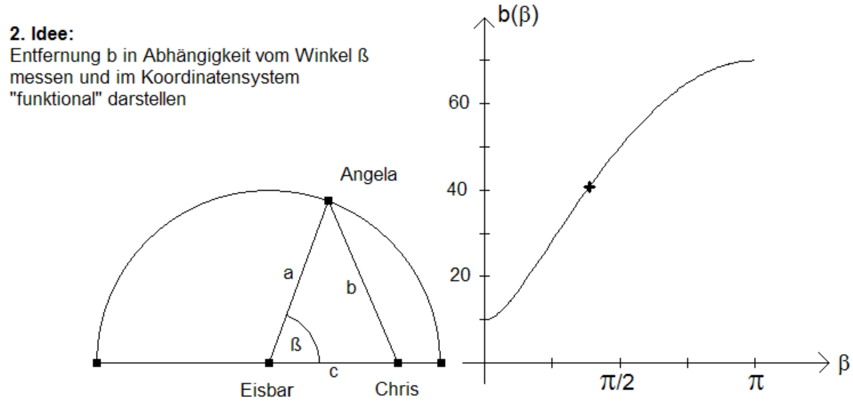


Abbildung 9

Wollen wir von dieser empirisch-numerischen zu einer arithmetisch-algebraischen Lösung kommen, so ist ein erneuter Standpunktwechsel unvermeidlich. Beim Anfertigen eines Lösungsplans empfiehlt POLYA sich zu fragen: „Kennst Du eine verwandte Aufgabe? Kennst Du einen Satz, der hilfreich sein könnte?“[25]. Die bedeutende heuristische Kraft der Hilfsaufgabe kommt auch in unserem Fall zum Tragen: Das Dreieck ECA ist einem Halbkreis einbeschrieben. Wenn der Winkel bei C ein rechter Winkel wäre, so wäre unsere Figur nahezu identisch mit der Figur, die man normalerweise benutzt, um Sinus und Kosinus am Einheitskreis zu definieren. Diese Beobachtung kann uns helfen, die geometrische Situation zu restrukturieren: Wir tun gut daran, eine Hilfslinie einzuzeichnen, und zwar das Lot von A auf den Durchmesser. Das Ergebnis ist in Abbildung 10 dargestellt.

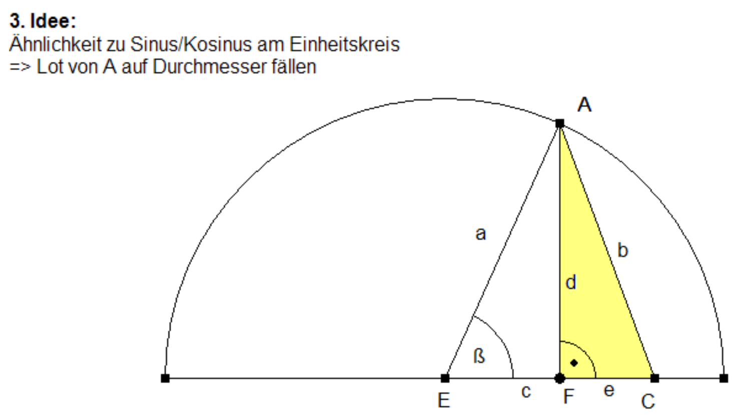


Abbildung 10

[24] Im eingesetzten System Euklid DynaGeo muss man dazu wissen, wie man die Länge von b und den Winkel β ausliest und dann einen Punkt konstruieren, dessen x-Koordinate den Winkel und y-Koordinate die Länge von b darstellt.
[25] Polya 1995, Einbandseite

Das Dreieck *AFC* ist rechtwinklig und kann aufgrund unseres Vorwissens ‚einfach gemessen' bzw. berechnet werden. Für die Seiten des Dreiecks gilt laut Definition von Sinus und Kosinus (auch für $90° < \beta < 180°$):

$$d = a \cdot \sin \beta$$
$$e = c - a \cdot \cos \beta$$

Damit gilt für die gesuchte gemeinsame Seite *b* der Dreiecke *AFC* und *ACE* laut Satz von Pythagoras:

$$\begin{aligned} b^2 &= (a \cdot \sin \beta)^2 + (c - a \cdot \cos \beta)^2 \\ &= a^2 \cdot \sin^2 \beta + a^2 \cdot cos^2 \beta + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta,$$

also gerade der Kosinussatz. Damit haben wir eine Berechungsformel für *b* in Abhängigkeit der jeweiligen Entfernungen von Chris und Angela zur Eisbar und des Mittelpunktswinkels gefunden, gleichzeitig aber auch einen allgemeinen Beweis für den Kosinussatz.

Analysiert man diese Erweiterung der ursprünglichen Fragestellung bzw. der vorgefundenen Lösungswege, so kann man auch hier die implizite und dennoch bedeutende Rolle lokal interpretierter grundlegender Ideen für den Lösungsweg festhalten. Die Restrukturierung des Problems wird sowohl von der ‚Idee des Strukturierens in Ebene und Raum' als auch der ‚Idee des Messens' geleitet. Ohne solides Wissen über geometrische Strukturen bzw. Figuren und die mit ihnen verbunden Sätze würde es einem kaum gelingen, ein sinnvolles Hilfsproblem zu finden oder eine geeignete Hilfslinie einzuzeichnen. Messen kommt andererseits nur implizit zum Zuge, denn ein geeignetes Hilfsproblem finden bedeutet ein einfacheres Problem zu finden. Ein einfacheres Problem kann im vorliegenden Fall aber nur heißen, ein Problem zu finden, bei dem das bereits vorhandene Wissen über geometrisches Messen ausreicht, um das Problem zu lösen.

Im Speziellen heißt das aber im betrachteten Beispiel, dass man Teilfiguren auffinden muss, die sich aufgrund des bereits vorhandenen Satz- und Formelwissens einfach berechnen lassen. Messen ist hier also zunächst nur sehr implizit in der stark elaborierten Form des Anwendens von Berechungsverfahren angesprochen[26]. Zwar verwenden wir hier die Strategie des Aufsuchens ‚einfacher Teilfiguren'[27], allerdings ist die Einfachheit hier nicht auf das basale Prinzip des Vergleichs mit einer Standardform desselben Größenbereichs (Längen) bezogen, sondern ihrerseits wieder nur indirekt, mittelbar über die einfache Berechenbarkeit mit dem Messen verknüpft

[26] Vgl. Vohns 2007b Abschnitt 3.2, sowie Baireuther 1990, S. 84
[27] Vgl. Vohns 2005b.

5. Fazit und Zusammenfassung

Die in diesem Aufsatz vorgestellte Analyse konnte aufzeigen, dass die beiden Lösungsansätze, bei denen die Studierenden auf typisches Wissen von 8./9.-Klässlern zurückgegriffen haben, als in gewisser Weise unzufriedenstellend gelten müssen (solange man den Kosinussatz als noch nicht bekannt voraussetzt).

Aus Sicht der synthetischen Geometrie sind alle Fälle gleich einfach, rechnerisch bestimmen können wir die Lösung aber nur in einigen einfachen Spezialfällen. Unser geometrisches Wissen geeignet zu erweitern heißt in diesem Beispiel, unser Wissen über elaborierte, mittelbare geometrische Messmethoden zu erweitern, mit dem Ziel, rechnerische Kontrolle über das allgemeine Dreieck zu erlangen.

Der ‚Idee des Messens' nähert man sich in diesem Beispiel, indem man Verfahren verwendet, die hochgradig von der Vernetzung des geometrischen Messens (als Zuordnung einer Maßzahl zu einer geometrischen Eigenschaft einer Figur) mit der Idee des ‚Strukturierens in Ebene und Raum' abhängig sind.

Im vorgestellten Beispiel wird gerade nicht die von Baireuther 1990 und Bender/Schreiber 1985 als allgemeines und basales Messprinzip aufgefasste Strategie des unmittelbare Passvergleich als ‚Zur Deckung bringen' angesprochen; vielmehr haben wir es bei der Erweiterung der Beispielaufgabe aus diesem Abschnitt zu einem Zugang zum Kosinussatz mit einer Erweiterung bereits ihrerseits elaborierter, mittelbarer Verfahren zu tun. Schon der Satz des Pythagoras und die Definition von Sinus und Kosinus bei rechtwinkligen Dreiecken sind Aussagen, die mehrere Eigenschaften einer Figur miteinander verknüpfen (Seitenlängen, Flächen über den Seiten, Winkelgrößen), also um elaborierte Messverfahren[28]. Das Aufsuchen einfacher Teilfiguren findet zudem auf einer höheren Stufe statt: ‚Einfach' heißt hier nur noch, dass wir bereits rechnerische Kontrolle über die Teilfiguren haben. Es führt uns bei diesem Beispiel auch nicht weiter, wieder nach der Begründung der bereits bekannten Formeln bzw. nach der Bedeutung der Idee des Messens für diese Begründung zu fragen. Von der ‚Idee des Messens' bleibt also nur die Zielvorstellung der Zuordnung einer Maßzahl zu einem Objekt übrig und das – allerdings erheblich erweiterte – Verständnis des Aufsuchens einfacher Teilfiguren. Das ist aber typisch für den Beitrag, den Trigonometrie zum geometrischen Messen liefert: Die Trigonometrie ist gewissermaßen die konsequente Ausnutzung des (aus der synthetischen Geometrie herrührenden) Wissens über geometrische Figuren zur zuverlässigen Zuordnung von Maßzahlen zu Objekten. In der Trigonometrie sind damit ‚Messen' und ‚Strukturieren' so eng miteinander verzahnt, dass die Resultate, die wir in trigonometrischen Sätzen festhalten, sich nur noch mittelbar auf basale Messprinzipien zurückführen lassen. Hinzu kommt, dass für die Figur, die den Ausgangspunkt der Überlegungen bildete (Abbildung 8), bereits eine Reduktion der

[28] Werden diese Sätze zudem ausschließlich als Berechnungsformel interpretiert, so wäre sogar nur noch sehr implizit von ‚Messen' zu sprechen, vgl. die Anmerkung zur entlastenden Funktion von Formeln in Vohns 2007, Kapitel 3.2.

Anzahl der variablen Punkte nötig war, also mittelbar auch noch die ‚Idee des funktionalen Denkens' den Lösungsweg beeinflusst hat.

Betrachten wir das Beispiel als möglichen Anknüpfungspunkt zum Nachdenken über grundlegende Ideen, scheint es hier also weniger angeraten, über die grundlegende Idee des Messens an sich zu reflektieren (jedenfalls nicht in dem Sinne, auf ‚Messen' als ‚Auslegen mit Elementarfiguren' zu rekurrieren). Das Beispiel kann hier vermutlich besser dazu genutzt werden, die erhebliche Veränderung der Vorstellungen zum Messen bzw. den veränderten Strategien des Messens (wenn wir es zunächst im weitesten Sinne als Zuordnung von Maßzahlen zu Objekten verstehen) zu thematisieren, die für den Bereich der Trigonometrie kennzeichnend sind, nämlich der wachsende, ja prägende Einfluss von Vorstellungen und Strategien, die mindestens genauso eng an das ‚Strukturieren in der Ebene und im Raum' gebunden sind. Methodisch betrachtet zeigt die in diesem Analysebeispiel vorgestellte Art der Anwendung grundlegender Ideen die mögliche Bedeutung der Verknüpfung eher traditioneller Arten der Sachanalyse mit qualitativ empirischen Methoden: Empirisches Ausgangsmaterial war der Ursprung der Untersuchungen und die zu Grunde liegende Sachanalyse theoretisch auszuweiten der Schlüssel, um das Potenzial der Problemstellung als Kernaufgabe eines genetischen Zugangs, einer möglicherweise produktiven Lernumgebung zum Einstieg in die Trigonometrie zu erkennen.

Literatur

Baireuther, P. 1990: Konkreter Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth.

Bender, P./ Schreiber, A. 1985: Operative Genese der Geometrie. Wien - Stuttgart.

BMBWK (Hrsg.) 2004: Bildungsstandards für Mathematik am Ende der achten Schulstufe (Version 3.0). Internet (http://www.gemeinsamlernen.at/siteVerwaltung/mOBibliothek/Bibliothek/Standards_Endversion_korr_25-10_eBook.pdf).

Jahnke, Th. 2005: Aufgaben im Mathematikunterricht. Manuskript. Internet (http://www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/a_mita/aa/Publ/mu).

KMK 2004: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. Neuwied/ Internet (http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Argumentationspapier308KMK.pdf).

Polya, G. 1995: Schule des Denkens . Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern.

Vohns, Andreas 2005a: Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. In: Journal für Mathematikdidaktik (JMD) 26 (2005), Nr. 1, S. 52-79.

Vohns, Andreas 2005b: Messen oder (Be-)Rechnen? Mit fundamentalen Ideen über Mathematik reflektieren. In: Lengnink, Katja; Siebel, Franziska (Hrsg.) : Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Darmstadt, S. 69-84.

Vohns, Andreas 2007: Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht – Entwicklung und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips. Norderstedt (Im Erscheinen).

Wittmann, E. Ch. 2001: Drawing on the Richness of Elementary Mathematics in Designing Substantial Learning Environments. Report of the PME 25 Research Forum "Designing, Researching and Implementing Mathematical Learning Environments" Internet (http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000/pdf/rf4-2wittmann.pdf).

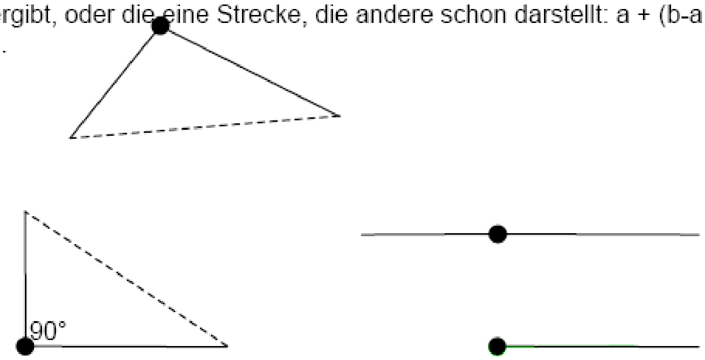
Anhang

Lösungen zur Aufgabe „Am Strand“

Übersicht

Nr.	Zeichnung?	Modell			Erkannte einfache Fälle					Allgemeine Lösung
		Kreismodell	Dreiecksmodell	Ungeometrisches Modell	Nur Pythagoras	Nur Gerade	Gerade und ein Pythagorasfall	Gerade und beide Pythagorasfälle	Alle Sonderfälle	
1	x		x							
2	x	x					x			
3			x		x					
4	x		x				x			
5	x		x				x			
6	x	x	x						x	
7	x		x				x			
8	x		x		x					
9	x		x				x			
10	x		x					x		
11	x		x				x			
12			x				x			
13	x	x				x				
14	x		x				x			
15	x		x				x			
16	x		x				x			
17			x				x			
18	x	x	x				x			
19			x				x			
20	x		x		x					
21		x	x				x			
22	x		x		x					
23	x		x					x		
24			x			x				
25	x		x	x			x			
26	x	x	x				x			
27						x				
28	x		x				x			x
Summe	**21**	**6**	**25**	**1**	**4**	**3**	**17**	**2**	**1**	**1**

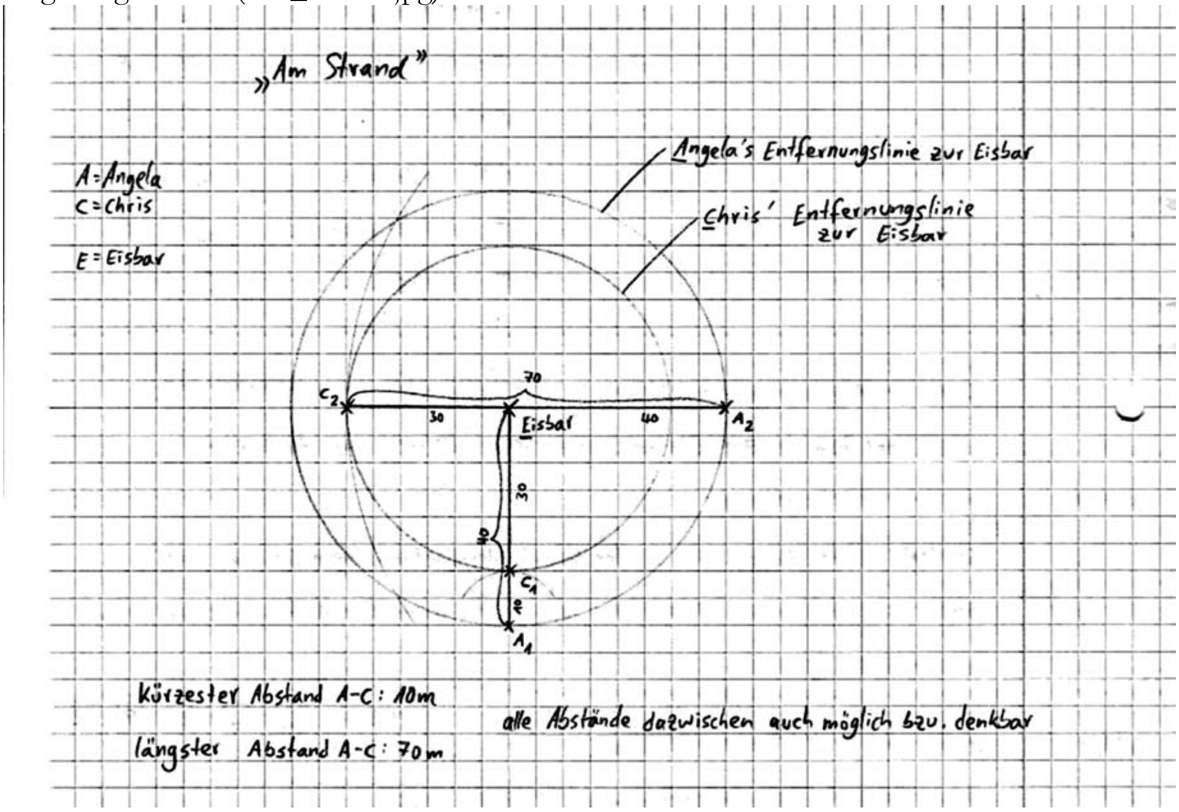
L1)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Gegeben: Gesucht: Bedingungen:	 Chris liegt 30 m von der Eisbar entfernt, Angela 40 m Entfernung von Chris und Angela Sind unzureichend, da keine genaue Lage der beiden angegeben ist. Daher gibt es auch nicht eine einzige, sondern mehrere Lösungen.
Ausdenken eines Planes: Ähnliche, frühere, bekannte Aufgabe? Eventuell anders ausgedrückt…	Ja, Berechnung einer Entfernung von 2 verschiedenen Punkten unter Beachtung eines weiteren Anhaltspunkts. Daraus folgt entweder die Berechnung eines Dreiecks, bei dem sich zwei vorgegebene Streckenlängen in einem bestimmten Punkt schneiden. Die dritte Seite ist die gesuchte Entfernung. Dabei bleibt zu Beachten, dass sowohl ein rechtwinkliges, als auch ein völlig beliebiges, aber niemals ein gleichseitiges Dreieck, dabei entstehen kann, da die zwei vorgegebenen Seiten schon mit unterschiedlicher Länge vorgegeben sind. Außer einem Dreieck könnte allerdings auch eine Strecke entstehen, in der die eine Strecke die andere ein Stück weiter führt, das heißt, dass $a + b = c$, c eine lineare Strecke ergibt, oder die eine Strecke, die andere schon darstellt: $a + (b-a) = c$. 
Ausführen des Planes: Ich berechne die zuvor erstellten Skizzen:	1. Fall: ergibt ein beliebiges Dreieck (außer gleichseitig oder rechtwinklig) Ich kann die Seite nicht genau berechnen, da ich zur genauen Berechnung mal wenigstens noch irgend einen Winkel zwischen den Seiten kennen müsste 2. Fall: ergibt ein rechtwinkliges Dreieck: Ich berechne die dritte Seite mit Hilfe des Satzes von Pythagoras 3. Fall: ergibt eine lineare Strecke: Ich addiere die zwei Strecken zu einer gesamten Entfernung Oder: subtrahiere die Kleinere von der Längeren, weil Chris zwischen Angela und der Eisbar liegt
Rückschau: Probe:	 Ich könnte zum Einen die Entfernung real nachmessen oder zum Anderen die Entfernungen in andere Einheiten umwandeln, um sie auf dem Geobrett nachzuskizzieren. Mit Hilfe des Geobretts könnte man genauso die Entfernung und die verschiedenen Lagemöglichkeiten ausprobieren.

L2)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: 1) Was ist unbekannt? 2) Was ist gegeben? 3) Wie lautet die Bedingung? 4) Zeichne eine Figur! 5) Führe geeignete Bezeichnungen ein!	1) Unbekannt ist die Entfernung zwischen Chris und Angela. 2) Gegeben sind die Entfernungen von Chris zur Eisbar und von Angela zur Eisbar. 3) Es liegt hier keine Bedingung vor. 4) Die Figur befindet sich im ANHANG (Datei „Am_Strand.jpg"). 5) Erläuterungen der Bezeichnungen in der Figur und der Figur allgemein: Die Eisbar ist im Zentrum (Kreismittelpunkt). Chris ist 30m davon entfernt, also im UMKREIS von 30m, Angela ist 40m von der Eisbar entfernt, also im UMKREIS von 40m. Mit A1 und C1 sowie A2 und C2 sind 2 Möglichkeiten der Lage durchgespielt. Der kürzeste Abstand bezieht sich auf das Beispiel mit A1 und C1, der längste auf das mit A2 und C2.
Ausdenken eines Planes: 1) Kennst du eine ähnliche Aufgabe? 2) Kennst du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? 3) Gibt es vermutlich eine, keine, mehrere oder unendlich viele Lösungen? 4) Gibt es eine oder mehrere einfache Lösungen?	1) Eine ähnliche Aufgabe habe ich schon einmal gelöst. 2) Für bestimmte Lagepositionen ist es von Vorteil den Satz des Pythagoras zu kennen. 3) Es gibt unendlich viele Lösungen. 4) Ja, es gibt 2 einfache Lösungen: Wenn beide auf der gleichen Seite von der Eisbar liegen, in einer Linie zur Eisbar, dann ist die Lösung leicht, nämlich 10m, da Angela auf dem Weg zur Eisbar nach 10m auf Chris treffen würde. Wenn beide auf verschiedenen Seiten von der Eisbar liegen, in einer Linie zur Eisbar, dann ist die Lösung ebenfalls leicht, dann wären es nämlich die vollen 70m.
Ausführen des Planes: 1) Was kann man über die beiden Lösungen sagen und was über die anderen Lösungen? 2) Gibt es ein oder mehr weitere Lösungen, die sich gut zeigen ließen?	1) Die beiden einfachen Lösungen sind die kleinst-mögliche Entfernung von Chris und Angela bzw. die größt-mögliche Entfernung von Chris und Angela. Es existieren noch beliebig viele andere Lösungen, die sind aber auf jeden Fall größer als 10m und kleiner als 70m, sie liegen also auf jeden Fall dazwischen. 2) Ja. Wir haben 2 Fälle betrachtet, in denen Chris und Angela in einem Winkel von 0 bzw. 180 Grad zur Eisbar lagen. Besonders schön ist noch der Fall, in dem die beiden in einem Winkel von 90 Grad zur Eisbar liegen. Hier benötigt man den Satz von Pythagoras. Man kann dann zeigen, dass dann die beiden 50m entfernt voneinander liegen.
Rückschau: 1) Kannst du das Resultat kontrollieren? 2) Kannst du das Resultat auf den ersten Blick sehen?	1) Ja. Zieht man in der Figur einen Kreis mit dem Radius von 10 um den Mittelpunkt A1, so sieht man, dass nur der Punkt C1 die Länge 10 von A1 entfernt ist. Alle anderen Abstände sind länger, also ist 10m der kürzeste Abstand. Zieht man in der Figur einen Kreis mit dem Radius 70 um den Mittelpunkt A2, so sieht man, dass nur der Punkt C2 die Länge 70 von A2 entfernt ist. Alle anderen Abstände sind kleiner, also ist 70m der längste Abstand. 2) Wenn man in die Zeichnung guckt, dann eigentlich schon. Man erkennt, dass es, weil es sich um eine Kreislinie handelt, auf der Chris und Angela liegen können, unendlich viele Lösungen gibt.

Angehängte Datei (Am_Strand.jpg):

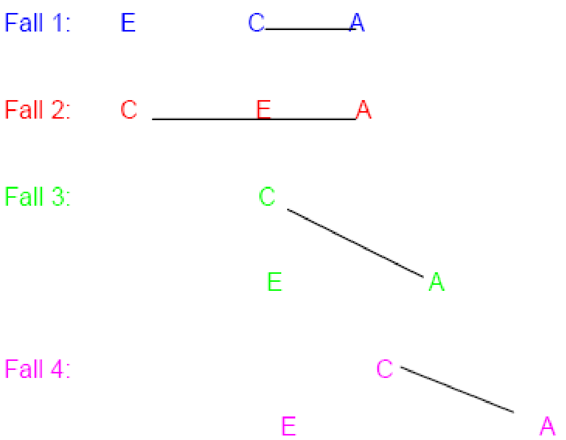


L3)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe:	
Was ist bekannt?	■ **Abstand von Angela zur Eisbar und Abstand von Chris zur Eisbar.**
Zeichnung:	■ **für die Zeichnung der Gegebenen Positionen von Eisbar und den beiden Kindern bietet sich entweder ein Dreieck oder ein Kreis an. (im Folgenden gehe ich davon aus, dass ein Dreieck gezeichnet wurde.)**
Was ist gesucht?	■ **die Entfernung zwischen Chris und Angela; anders der Abstand zwischen zwei Dreiecksecken oder die unbekannte Dreieckseite.**
Sind die Bedingungen ausreichend?	■ **für die Berechnung eines Dreiecks benötigt man drei Angaben (z.B. SWS, WWS, etc.) In der Aufgabenstellung werden nur zwei Angaben gemacht. Diese Angaben entsprechen zwei Dreieckseiten. (30m und 40m)**
Ausdenken eines Planes:	
Kennst du ähnliche Aufgaben?	■ **ähnliche Textaufgaben sind allen Schülern aus dem Mathematikunterricht bekannt. Unter 1. Wurde schon festgestellt, dass eine Angabe fehlt. Man muss also versuchen die bekannten Angaben so zu ergänzen, dass man eine weitere Angabe bekommt. Diese Strategie wird bei vielen Aufgaben benötigt.**
Plan:	■ **die Zeichnung so verändern, dass das Dreieck in der Ecke, wo sich die Eisbar befindet einen rechten Winkel hat. Damit kennt man zwei Seiten des Dreiecks und den eingeschlossenen Winkel.**
	■ **bei einem rechtwinkligen Dreieck fällt vielen Schülern (hoffentlich) sofort der Satz des Pythagoras ein (evtl. aus verwandten Aufgaben). Damit kann man die Länge der fehlenden Seite - die Entfernung zwischen den beiden Kindern berechnen.**
Ausführen des Planes:	■ **richtige Anwendung des Satz des Pythagoras:** $40^2 + 30^2 = a^2$ $1600 + 900 = a^2$ $2500 = a^2$ $a = 50$

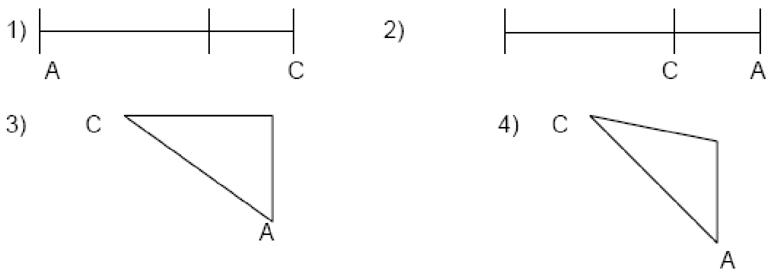
Rückschau: Kannst du das Resultat kontrollieren? Kannst du das Verfahren auch für andere Aufgaben verwenden?	■ eine Möglichkeit die Probe zu machen ist, sich eine andere Dreiecksseite als gesucht vorzustellen. Hierfür muss man das errechnete Ergebnis für a und die zweite bekannte Seite in die Pythagorasformel einsetzen und entsprechend auflösen. ■ da in der Geometrie sehr viele Probleme mit Hilfe des Satzes von Pythagoras gelöst werden, kann man sich viele ähnliche Aufgaben ausdenken. Zum Beispiel: Die Straßen in der Tom und Max wohnen treffen auf einer großen Kreuzung zusammen. Max wohnt 20m von der Kreuzung entfernt, Tom 15m. Wenn die beiden sich besuchen wollen nehmen sie eine Abkürzung durch die Gärten, welche direkt von einem Haus zum anderen führt. Wie weit müssen sie gehen?

L4)

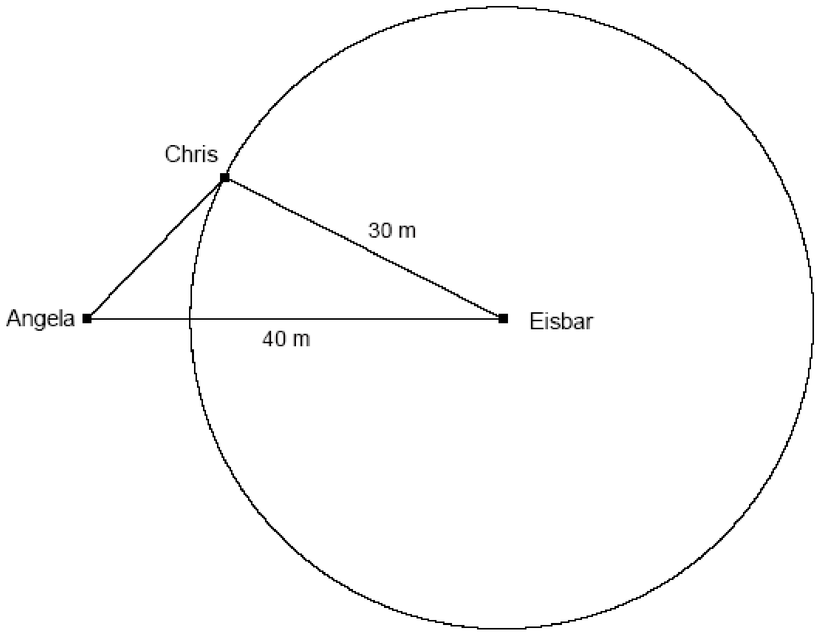
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe:	
Was ist unbekannt?	Entfernung von Chris und Angela
Was ist gegeben?	Chris ist 30 m von der Eisbar entfernt, Angela 50 m
Bedingung:	Die Bedingung ist nicht ausreichend, da nicht bekannt ist, welche genaue Lage die beiden Personen haben. Somit ist nicht nur eine Lösung möglich, sondern mehrere.
Zeichnung:	Es gibt mehrere Möglichkeiten: E = Eisbar, C = Chris, A = Angela  Anmerkung zu Fall 4: es stellt sich die Frage, wie groß die jeweiligen Winkel zwischen A, C und E sind. Mit Veränderung der Winkel ändert sich auch wieder die Lösung.
Ausdenken eines Planes:	
Hast du die Aufgabe schon früher gesehen?	Ja, es handelt sich um die Berechnung einer Entfernung zweier verschiedener Punkte, unter Berücksichtigung eines weiteren dritten Punktes.
Verwandte Aufgabe:	Addition, Subtraktion zur Berechnung von Abständen, oder Berechnung einer Seite im Dreieck (u.a. mit Pythagoras).
Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten:	Da es mehrere Möglichkeiten gibt, wo die zwei Personen liegen könnten, findet man auch mehrere mögliche Lösungen. Im Fall 1 erhält man den gesuchten Abstand, indem man die Abstand von C zu E von dem Abstand von A zu E subtrahiert. Im Fall 2 erhält man den gesuchten Abstand, indem man den Abstand von C zu E zu dem Abstand von A zu E addiert. Im Fall 3 erhält man den gesuchten Abstand, indem man mit dem Satz des Pythagoras die gesuchte Strecke berechnet. Im Fall 4 erhält man den gesuchten Abstand, indem man die dritte Seite des Dreiecks berechnet.
Benutzt man alle Angaben zum Rechnen?	Ja, außer im 4. Fall, da fehlt eine Angabe, um die Lösung zu bestimmen.
Ausführen des Planes:	
Berechnung der verschiedenen Abstände	Fall 1: Man muss 40m-30m rechnen und erhält so den gesuchten Abstand von 10m. Fall 2: Man muss 30m+40m rechnen und erhält so den gesuchten

	Abstand von 70m. Fall 3: Mit dem Satz des Pythagoras kann man die gesuchte dritte Seite des Dreiecks berechnen: $(30m)^2 + (40m)^2 = c^2 \rightarrow 900m^2 + 1600m^2 = 2500m^2 \rightarrow c = 50m \rightarrow$ der Abstand der beiden Personen beträgt 50m. Fall 4: man muss die dritte Seite des Dreiecks berechnen, dazu braucht man aber Informationen über wenigstens einen Winkel.
Rückschau: Beweis der Lösung:	 Beweisen könnte man die Lösungen, wenn man die gegebenen Situationen / Möglichkeiten nachstellt, aber anstatt die Maßzahl Meter einfach Zentimeter nehmen. Auf diese Weise kann man dann bei den verschiedenen Situationen nachmessen, ob die gefundenen Lösungen richtig sind. Eine weitere Möglichkeit bietet das Geobrett, um die verschiedenen Lagen nachzustellen und die Abstände zu bestimmen.

L5)

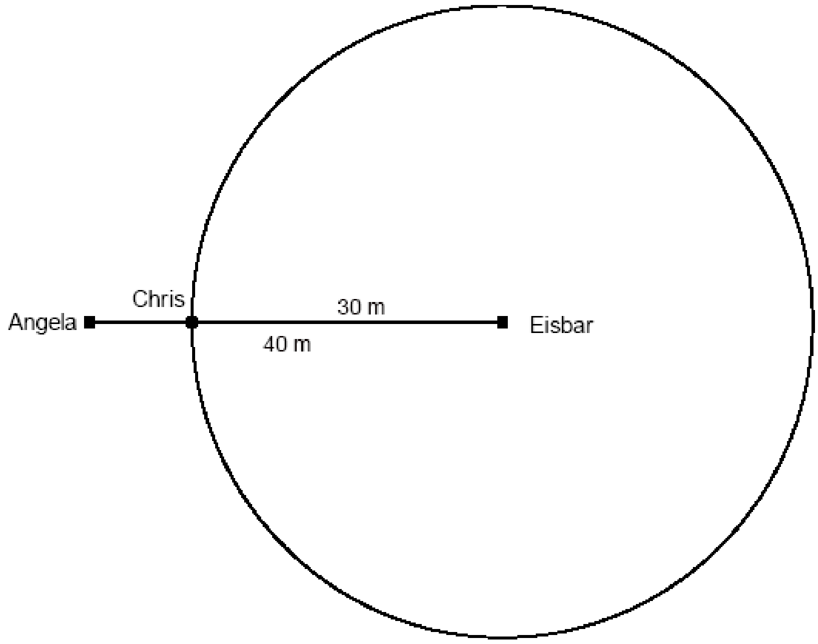
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: *Was ist unbekannt?* *Wie lautet die Bedingung?* *Ist die Bedingung ausreichend?*	die verschiedenen Lagepositionen von C. und A., bzw, die Entfernung zwischen C. und A. C. liegt 30m und A. 40 m von der Eisbar entfernt die Bedingung lässt verschiedene Optionen offen, um die Entfernung zwischen C. und A. zu ermitteln
Ausdenken eines Planes: *Kennst du eine verwandte Aufgabe?*	bei ähnlichen Aufgaben erwies es sich als hilfreich, die verschiedenen Lagebeziehungen durch eine Skizze zu veranschaulichen; dadurch lassen sich verschiedene Rechenmethoden ableiten; da verschiedene Lagebeziehungen von C. und A. möglich sind, wird es auch mehrere Rechenwege geben, die sich in ihrer Komplexität eventuell unterscheiden werden;
Ausführen des Planes: *Anfertigung verschiedener Skizzen*	 1) Eisbar befindet sich auf einer Geraden zwischen A. u. C. Entfernung: 30m + 40m = 70m 2) Eisbar befindet sich links neben A. u. C; alle drei Punkte bilden eine Gerade; Entfernung: 40m – 30m = 10m 3) Eisbar, C. u. A. bilden ein rechtwinkliges Dreieck (Pythagoras); Entfernung: $x^2 = (30m)^2 + (40m)^2 \rightarrow x = 50m$ 4) C. u. A. bilden mit der Eisbar einen Winkel α, wobei $0° < \alpha < 90°$ oder $90° < \alpha < 180°$; die Lösung des Problems ist mit den gegebenen Bedingungen nicht möglich
Rückschau:	die Skizzen sind sehr anschaulich und erleichtern den zu wählenden Rechenweg; die Lösungen 1) und 2) erweisen sich als rechnerisch einfach; die Lösung 3) erfordert Vorkenntnisse (Satz des Pythagoras); Lösung 4) muss unter Voraussetzung der gegebenen Bedingungen als nicht lösbar erkannt werden; Die Aufgabe könnte differenziert werden, wenn z.B. der Winkel zwischen den Lagepositionen von C. u. A. angegeben würde → 4) wäre somit lösbar.

L6)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: **Was ist unbekannt?** **Was ist gegeben?**	- Die unterschiedlichen Lagepositionen von Angela und Chris, die rechnerisch einfach zu lösen sind und ihre jeweiligen Entfernungen zueinander. - Der Abstand von Chris zur Eisbar (30 m) und von Angela zur Eisbar (40 m)
Ausdenken eines Planes:	Zunächst überlege ich mir, in welchem Verhältnis die 3 Punkte (Angela, Chris und Eisbar) stehen können. Es fällt mir auf, dass sie entweder auf einer Linie liegen können oder ein Dreieck bilden. Liegen die 3 Punkte auf einer Linie, so wäre der Abstand durch Addition und Subtraktion zu lösen Bilden die 3 Punkte ein Dreieck, so ist die Aufgabe nur lösbar wenn: - Das Dreieck rechtwinklig ist (Pythagoras) - Oder wenn das Dreieck gleichschenklig ist. Alle diese Fälle möchte ich nun durchspielen.
Ausführen des Planes:	Die folgende Abbildung zeigt die allgemeine Lagesituation gem. Aufgabenstellung. Für die unterschiedlichen Entfernungen kann Chris auf jedem Punkt des Kreises liegen. Selbstverständlich wäre es auch möglich, die Position von Chris als fest und die von Angela als variabel auf einem äußeren Kreis darzustellen. 

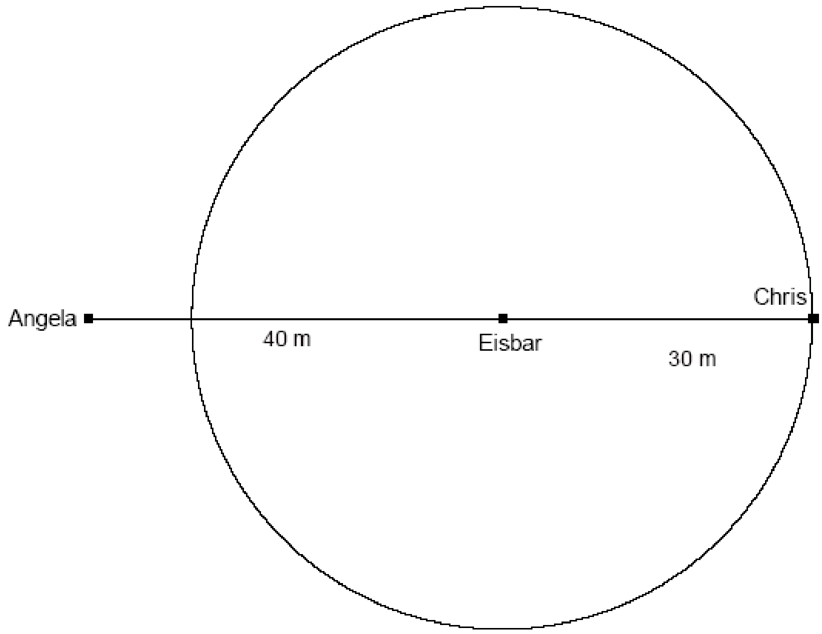
Besonders leicht ist die Aufgabe zu lösen, wenn Angela, Chris und die Eisbar auf einer Geraden liegen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

1.



Die Entfernung zwischen Angela und Chris ergibt sich hier als Differenz zwischen ihren Entfernungen zur Eisbar, also 10 m.

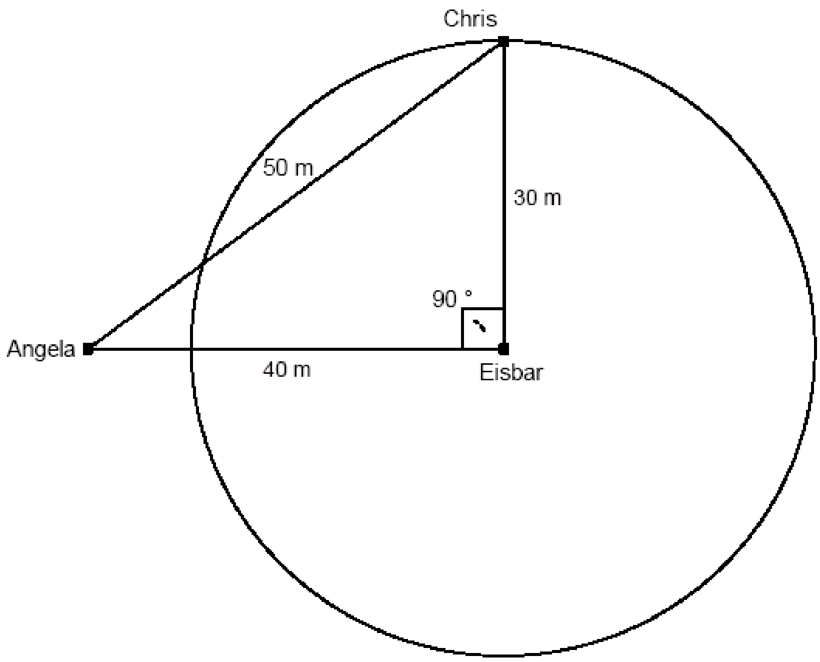
2.



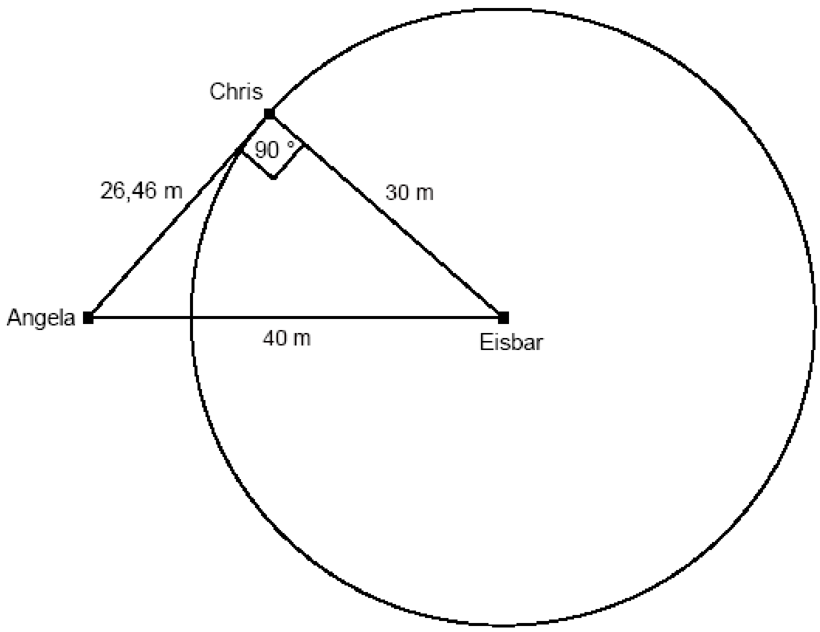
Hier ergibt sich die Entfernung als Summe der beiden einzelnen Entfernungen, also 70 m.

Besondere Lagebeziehungen und damit verbundenen Möglichkeiten der Berechnung ergeben sich dann, wenn das Dreieck, das Chris, Angela und die Eisbar bilden, besondere Eigenschaften hat.

3. Rechter Winkel an der Eisbar:
In diesem Fall stellt die Hypotenuse die Entfernung zwischen Angela und Chris dar und man kann mit Pythagoras berechnen, dass diese Entfernung 50 m beträgt.



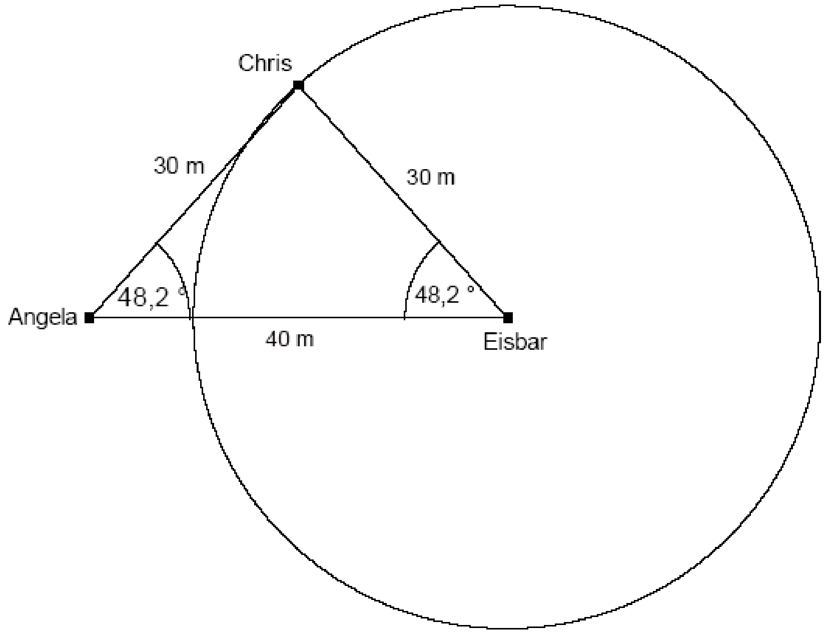
4. Rechter Winkel bei Chris (die Strecke zwischen Angela und Chris liegt auf einer Tangente an den Kreis, auf dem sich Chris befindet):
In diesem Fall stellt die kürzere Kathete die Entfernung zwischen Angela und Chris dar und man kann mit Pythagoras berechnen, dass diese Entfernung 26,46 m beträgt.



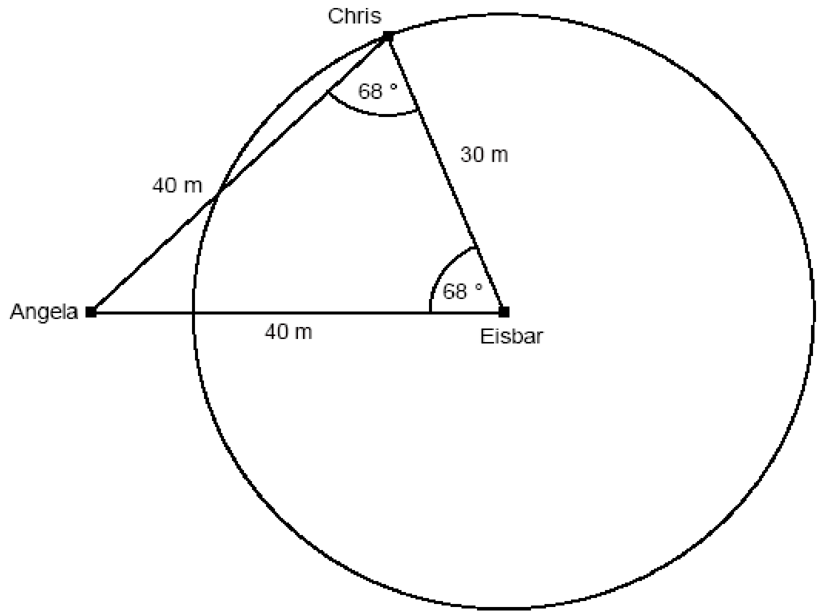
Da die Entfernung zwischen Chris und der Eisbar kleiner ist als die Entfernung von Angela zur Eisbar, kann die Strecke von 30 m nicht Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sein und damit der rechte Winkel nicht bei Angela liegen, so dass nur die beiden genannten Fälle für rechtwinklige Dreiecke möglich sind.

Noch einfacher ist die Entfernungsbestimmung, wenn das Dreieck gleichschenklig ist, d. h. wenn zwei gleiche Winkel im Dreieck auftreten. Hier geht es wiederum zwei Fälle:

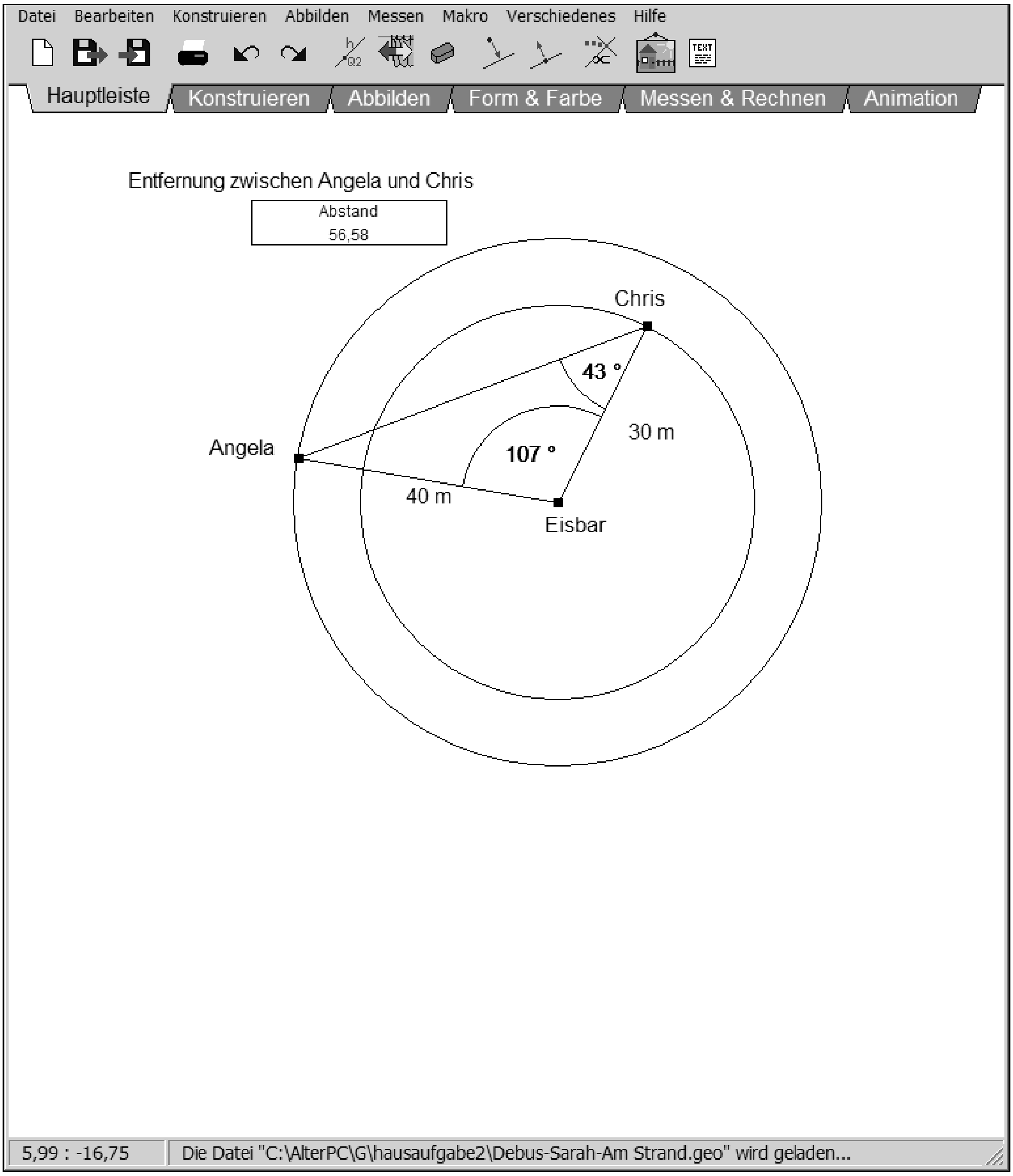
5. Gleich große Winkel bei Angela und der Eisbar:
In diesem Fall stellen die Entfernungen von Chris zu Angela und zur Eisbar die gleich langen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks dar. Also ist die Entfernung zwischen Chris und Angela 30 m.



6. Gleich große Winkel bei Chris und der Eisbar:
In diesem Fall stellen die Entfernungen von Angela zu Chris und zur Eisbar die gleich langen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks dar. Also ist die Entfernung zwischen Chris und Angela 40 m.

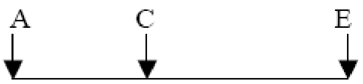
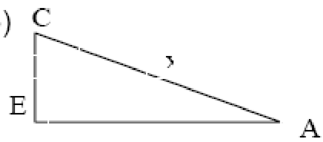
	
Rückschau:	Die Aufgabe besitzt mehrere unterschiedliche Lösungen und eignet sich hervorragend zur Betrachtung geometrischer Beziehungen im Dreieck. Die einfachen Lösungen, bei denen die Punkte auf einer Geraden liegen, lassen sich ohne grafische Veranschaulichung ermitteln. Für die rechtwinkligen Dreiecke ist die Kenntnis des Satzes von Pythagoras erforderlich. Elementare geometrische Überlegungen führen dazu, dass es nur zwei Möglichkeiten für rechtwinklige Dreiecke gibt. Gleichschenklige Dreiecke lassen sich mit Zirkel und Lineal in der Figur leicht konstruieren und die gesuchte Entfernung lässt sich dann ohne Rechnung auf Grund von geometrischen Zusammenhängen im Dreieck ermitteln. Auch hier sind nur zwei Fälle möglich, wie man durch die unterschiedlichen Entfernungen von Chris und Angela zur Eisbar begründen kann. Durch Spiegelung an der Geraden durch Angela und die Eisbar ließen sich noch weitere Fälle konstruieren, die sich aber nicht grundsätzlich von den hier betrachteten unterscheiden. Eine interessante Variation dieser Aufgabe wäre die Frage, wo Chris liegen könnte, wenn seine Entfernung zu Angela kleiner wäre als sein Abstand zur Eisbar. Dabei sollen alle anderen Bedingungen der Aufgabe erhalten bleiben. Durch entsprechende Konstruktion eines Kreises mit dem Radius 30 m um Angela ergibt sich der rote Bogen zwischen den Schnittpunkten der Kreise als mögliche Ortslinie für die Position von Chris. Außerdem könnte man fragen, wo Chris liegen würde, wenn Angelas Weg zu ihm länger wäre als zur Eisbar. Die Schnittpunkte mit einem Kreises vom Radius 40 m um Angelas Position begrenzen den blauen Bogen für die Positionen von Chris.

Angehängte Datei für Euklid DynaGeo (Screenshot):

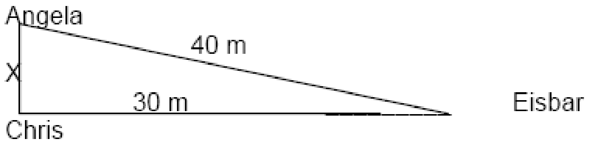


Die Punkte sind dabei alle variabel, Chris und Angela sind als Punkte auf den jeweiligen Kreislinien realisiert. Der Abstand wird interaktiv mitgemessen.

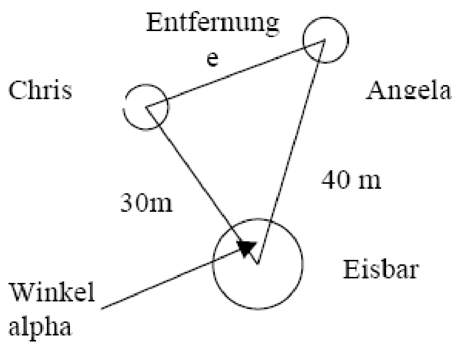
L7)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Was ist gegeben? Was ist unbekannt?	- Chris ist 30 m von der Eisbar entfernt - Angela ist 40 m von der Eisbar entfernt Wie weit sind die beiden voneinander entfernt?
Ausdenken eines Planes: Kenntnis ähnlicher Aufgaben? Lehrsatz?	1. Möglichkeit: Chris und Angela liegen auf den gegenüberliegenden Seiten der Eisbar und zwar auf einer Geraden -> Addition. 2. Möglichkeit: Die beiden liegen auf einer Seite der Eisbar ebenfalls auf einer Geraden -> Subtraktion. 3. Möglichkeit: Chris und Angela liegen unter einem geraden Winkel zur Eisbar -> Anwendung des Satzes von Phytagoras 4. Möglichkeit: Die beiden liegen unter einem spitzen oder stumpfen Winkel zur Eisbar -> Berechnung mit sin, cos, tan.
Ausführen des Planes: Schritt richtig?	Zu 1)  40m + 30m = 70m von einander entfernt Zu 2)  40m – 30m = 10m von einander entfernt Zu 3)  $x^2 = 30m^2 + 40m^2$ $x^2 = 90 + 160$ $x^2 = 250$ $x = 15{,}81m$
Rückschau: Resultat kontrollieren?	Da wir nicht genau wissen, wie Chris und Angela zueinander liegen, gibt es viele Möglichkeiten und somit auch viele Ergebnisse, die sehr unterschiedlich sind => Keine eindeutige Lösung

L8)

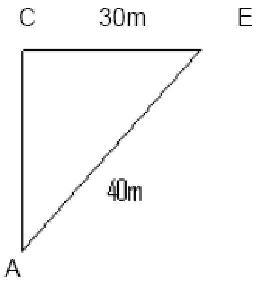
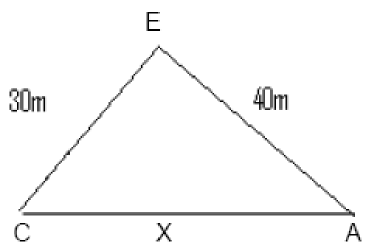
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Was ist unbekannt?	Die Entfernung zwischen Chris und Angela.
Was ist gegeben?	Die Entfernung von Chris zur Eisbar (30 m) sowie die Entfernung von Angela zur Eisbar (40 m).
Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannt zu bestimmen?	Ja, mit Hilfe von Pythagoras.
Zeichne eine Figur!	
Ausdenken eines Planes: Kennst du eine verwandte Aufgabe?	Es gibt zahlreiche Aufgaben, bei denen der Abstand von zwei Personen oder Gegenständen in Beziehung zu einem dritten Gegenstand berechnet werden soll.
Kennst du einen Lehrsatz der förderlich sein könnte?	Ja, der Satz des Pythagoras, unter Annahme, dass die Lage von Chris und Angela in Beziehung zur Eisbar ein rechtwinkliges Dreieck beschreibt. Aufstellen einer Gleichung um den Abstand zwischen Chris und Angela zu berechnen.
Hast du alle Daten benutzt?	Ja!
Ausführen des Planes:	Aufstellen der Gleichung: $30^2 + x^2 = 40^2$ Umstellen der Gleichung, so dass man für x eine Lösung erhält: $X^2 = 1600 – 900$ $X = $ Wurzel aus 700 $X = 26{,}45$ m
Kannst du beweisen, dass der Schritt richtig ist?	Ja, es liegen keine Rechenfehler vor und alle Termumformungen wurden richtig gemacht. Zur Kontrolle setzt man das Ergebnis in die Ausgangsgleichung ein.
Rückschau: Kannst du das Resultat auf den ersten Blick sehen?	Nein, hilfreich ist das Zeichnen einer Planfigur.
Kannst du das Resultat oder die Methode für irgendeine andere Aufgabe gebrauchen?	Der Satz des Pythagoras lässt sich auf zahlreiche ähnliche Aufgaben anwenden.
Aufgabenvariationen	Aufgaben, bei denen man Lagebeziehungen mithilfe von Pythagoras ermittelt

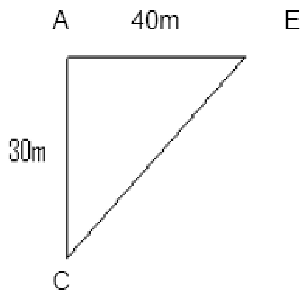
L9)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe:	
• *Was ist unbekannt?*	• **Unbekannt ist die Entfernung zwischen Chris und Angela**
• *Was ist gegeben?*	• **Gegeben ist die Entfernung von Angela zur Eisbar (=40m) und die Entfernung von Chris zur Eisbar (=30m)**
• *Wie lautet die Bedingung?*	• **keine weiteren Bedingungen**
• Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?	• **Vorgaben reichen für eindeutiges Ergebnis nicht aus, es gibt unendlich viele Lösungen, wichtig hierbei ist jedoch die Argumentation**
• Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!	
Trenne die verschiedenen Teile der Bedingungen! Kannst Du sie hinschreiben?	**Macht hier keinen Sinn?!?!**
Ausdenken eines Planes:	
• Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?	**Nein**
• *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?	**Bestimmung einer Seitenlänge beim Dreieck** **Satz des Pythagoras, SWS-Satz**
• *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.	**Wieder Bestimmung einer Seitenlänge beim Dreieck**
• *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen?* Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst?	**Macht hier keinen Sinn**
• Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!	**Gegeben sind zwei Seiten eines Dreiecks, wie lang ist die dritte?**

• Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind? **Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedinung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?**	**Ich kann sie lösen** **Ja, alle Daten wurden benutzt**
Ausführen des Planes: Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?	**Betrachte verschiedene Winkel alpha:** **Bei alpha = 0°, bzw. 360°, liegen Chris und Angela auf einer Geraden mit der Eisbar und zwar so, dass Chris zwischen Angela und Eisbar liegt, so beträgt der Abstand 40m-30m=10 m** **Bei alpha=180°, liegen Chris und Angela wieder auf einer Geraden mit der Eisbar, jedoch liegt diesmal die Eisbar zwischen ihnen, so beträgt ihr Abstand: 30m+40m=70m** **Ihr Abstand beträgt also höchstens 70 und mindestens 10 m.** **Ist der Winkel alpha=90°, so kann man den Satz des Pythagoras anwenden, wobei die Katheten 30m und 40m sind und die Länge der Hypothenuse berechnet werden muss.** **Für jeden anderen Winkel würde ich den aus der Geometrie bekannten SWS-Satz anwenden und somit zeichnerisch zum Ergebnis kommen.** **Meine Schritte sind alle richtig**
Rückschau: • Kannst Du das *Resultat kontrollieren*? Kannst Du den Beweis kontrollieren? • Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen? Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?	**Ja, ich kann eine maßstabsgetreue Skizze anfertigen und dann die Seiten des Dreiecks messen** **Das Resultat ist nur auf den ersten Blick zu sehen, wenn alpha = 360° oder 180°** **Die Aufgabe ist allgemein nützlich für Aufgaben, wo man eine Seite von einem Dreieck bestimmen muss.** **Möglichkeit für eine Aufgabe:** **Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem die Katheten 4cm und 5 cm lang sind. Berechne die Länge der Hypothenuse!**

L10)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Was ist unbekannt?	 Entfernung zwischen Chris und Angela ist zu ermitteln
Was ist gegeben?	Chris liegt 30m von der Eisbar entfernt. Angela liegt 40m von der Eisbar entfernt.
Ist die Bedingung ausreichend oder ist sie unbestimmt?	Die Lageposition von Chris, Angela und der Eisbar ist nicht eindeutig bestimmt. Man weiß nicht, ob sie alle auf einer Geraden liegen oder ob die Eisbar in der Mitte von den beiden Personen liegt usw. Die Lösung der Aufgabe ist also abhängig von der Lage von Chris und Angela. Man muss also alle möglichen Lagepositionen herausfinden und so entsprechende Lösungswege für die einzelnen Fälle angeben.
Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!	Entfernung von Chris und Angela bezeichne ich mit X. 1. Fall: Eisbar (E), Chris(C) und Angela(A) befinden sich auf einer Geraden a) C------30m----------E-------40m----------A b) A-------C-----30m--------E >>>Strecke AE = 40m! 2. Fall: (rechter Winkel in C)  3. Fall: (rechter Winkel in E)  4. Fall: (rechter Winkel in A)

	
Ausdenken eines Planes: Kennst du eine verwandte Aufgabe?	Ich kenne eine ähnliche Aufgabe, bei der der Schulweg von zwei Kindern angegeben wird und gesucht ist die Entfernung der Häuser der beiden Kinder voneinander. Auch hier müssen verschiedene Fälle unterschieden werden. Es ist hilfreich eine Skizze der Bedingungen anzulegen.
Kennst du einen Lehrsatz der förderlich sein könnte?	Wenn die Lagepositionen so gewählt werden, dass bei der Verbindung der drei Punkte ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, kann man den Satz des Pythagoras anwenden.
Ausführen des Planes:	Entfernung von Chris und Angela Lösung für den 1. Fall: a) $X = 30m + 40m = 70m$ b) $X = 40m – 30m = 10m$ Lösung für den 2. Fall: Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ $(40m)^2 = (30m)^2 + X^2$ $X = 26{,}46m$ Liegt kein rechtwinkliges Dreieck vor, so gibt es keine eindeutige Lösung. Lösung für den 3. Fall: Satz des Pythagoras: $(30m)^2 + (40m)^2 = X^2$ $X = 50m$ Liegt kein rechtwinkliges Dreieck vor, so gibt es auch hier keine eindeutige Lösung. Lösung für den 4. Fall: Satz des Pythagoras: $(30m)^2 = (40m)^2 + X^2$ Keine Lösung Liegt kein rechtwinkliges Dreieck vor, so gibt es keine eindeutige Lösung.

Rückschau:	
Kannst du das Resultat kontrollieren?	1. Möglichkeit: Man kann einerseits die Lösungen für X in die entsprechenden Gleichungen einsetzen und so das Resultat kontrollieren. 2. Möglichkeit: Es ist auch eine zeichnerische Lösung möglich, indem man eine maßstabsgetreue Zeichnung anlegt und die Strecke X nachmisst. (Hier kann es allerdings auch zu Ungenauigkeiten kommen.)
Kannst du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten?	Die Lösung ist auch hier nicht eindeutig bestimmt, da man verschiedene Fälle unterscheiden muss. Innerhalb der Fälle gibt es dann allerdings eine eindeutige Lösung. Geht man allerdings von Dreiecken ohne einen rechten Winkel aus, so gibt es auch hier keine eindeutige Lösung.
Kannst du das Resultat oder die Methode für eine andere Aufgabe gebrauchen?	Die Aufgabe zeigt, dass man bei manchen Aufgaben verschiedene Fälle betrachten muss und es dadurch unterschiedliche Lösungen gibt. Die Lösungsmethode mit dem Satz des Pythagoras kann man bei vielen geometrischen Aufgaben verwenden.
Kann man die Aufgabe variieren?	Die Aufgabe lässt sich durch eine andere Rahmengeschichte oder die Verwendung von anderen Zahlen variieren. Eine weitere Differenzierungsmöglichkeit ergibt sich, wenn man in der Aufgabe nur eine Lösung verlangt.

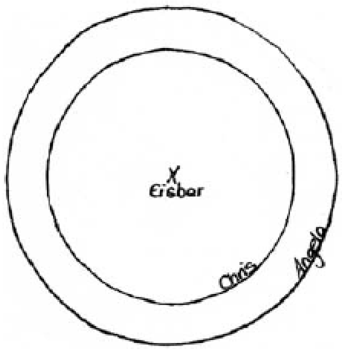
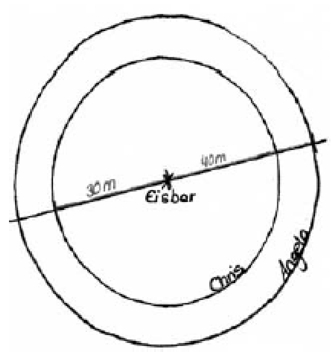
L11)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: **Unbekannt:** **Bekannt:** **Bedingung:**	 **Lage zueinander (Angela, Chris, Eisbar), Entfernung zwischen Angela und Chris** **Jeweilige Entfernung zur Eisbar** **Lösen der Aufgabe unter Berücksichtigung der Lage zueinander und der jeweiligen Entfernung zur Eisbar** **Skizze: A ------ Chr ------ EB** **A-----------EB-----Chr** **A-----------EB** **I** **I** **I** **Chr** …
Ausdenken eines Planes: **Verwandte Aufgabe bekannt?**	 **Nein.** **Da konkrete Bedingungen fehlen, ist der Lösungsweg frei, daher: durch Ausprobieren einiger Möglichkeiten mögliche Entfernungen angeben.** **Extremfälle ausrechnen: maximale und minimale Entfernungsmöglichkeit**
Ausführen des Planes:	**1. Möglichkeit:** **Chr---30---EB ---40---A → Entfernung Chris - Angela: 70m** **2.Möglichkeit:** **A.---10---Chr.---30--- EB → Entfernung Chris - Angela: 10m** **3. Möglichkeit:** **Chr** **I** **30** **I** **EB --- 40--- A. → Satz des Pythagoras → Entfernung Chris - Angela: 50m** **→ Minimale Entfernung Chris – Angela: 10m** **→ Maximale " " " : 70m**
Rückschau: **Kontrolle:** **Aufgabenvariation:**	 **1.) 30+40=70** **2.) 30+__=40 → 10** **3.) Satz des Pythagoras: Wurzel aus $30^2+40^2= 50$** **- Frage erweitern: Wo müssen A. und Chr. liegen um a) sich auf dem Weg möglichst nicht zu begegnen? b) möglichst lange zusammen zu laufen? (→ Extremwerte)**

L12)

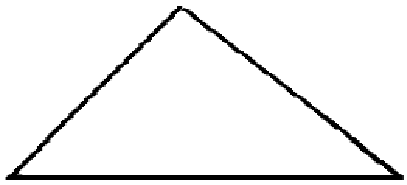
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Was ist gegeben? Was ist unbekannt? Wie lautet die Bedingung?	 Die Entfernung Chris – Eisbar = 30 m Die Entfernung Angela – Eisbar = 40 m Die Entfernung zwischen Chris und Angela. Die Lageposition der beiden zur Eisbar. Es gibt keine, das ist nicht ausreichend, um die Unbekannte eindeutig zu lösen.
Ausdenken eines Planes: Kenne ich die Aufgabe oder eine verwandte Aufgabe? Plan für mögliche Lösungen:	 Nein. Anfertigung einer Zeichnung: Mögliche Lösungen sind, dass Chris, die Eisbar und Angela sich auf einer Geraden befinden, oder dass Chris und Angela sich im rechten Winkel zur Eisbar befinden. Man kann die Eisbar als Mittelpunkt nehmen und eine waagerechte und darauf eine senkrechte Linie einzeichnen. Man benötigt für die Berechnung der Entfernung zwischen den beiden einmal Addition und Subtraktion und im anderen Fall den Satz des Pythagoras.
Ausführen des Planes:	**Zeichnen der Geraden** **1. Möglichkeit: Abstand zwischen Angela und Chris 40m – 30 m = 10m Der Abstand beträgt 10 m, wenn Angela hinter Chris liegt.** **2. Möglichkeit: 40m + 30m = 70m. Der Abstand beträgt 70 m, wenn Angela genau Chris gegenüber auf der anderen Seite der Eisbar liegt.** **Liegt Angela genau im Rechten Winkel zu Chris auf der waagerechten Linie, rechts oder links (der Abstand ist gleich), wendet man den Satz des Pythagoras an.** **$30m^2 + 40m^2 = 2500m^2 = 50$ m.** **Alle anderen möglichen Lösungen liegen zwischen 30 und 70 m.**
Rückschau: Kann man es auf den ersten Blick sehen? **Aufgabenvariante:**	Man kann das Resultat mit einen maßstabsgerechten Zeichnung kontrollieren. Auf den ersten Blick ist es nicht erkennbar. Ein Hund wird an einer Holzlatte mit einer Leine im Garten angebunden. Sein Wassernapf steht von 20m von der Holzlatte entfernt und der Fressnapf 30m. Wie weit stehen die beiden Näpfe voneinander entfernt?

L13)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Was ist gegeben? Was ist unbekannt? Was ist die Bedingung? Ist die Bedingungen unzureichend? Zeichne eine Figur!	Chris liegt 30 m von der Eisbar entfernt, Angela 40 m. Wie weit liegen die beiden voneinander entfernt? Chris ist 30m, Angela 40 m von der Eisbar entfernt. Liegen die beiden möglichst dicht beieinander oder möglichst weit voneinander entfernt? 
Ausdenken eines Planes:	Chris, Angela und die Eisbar befinden sich auf einer Linie. Lösung (größte / kleinste Entfernung der Personen zueinander) ablesen beziehungsweise ausrechnen.
Ausführen des Planes: Kontrolliere jeden Schritt!	 30 m + 40 m = 70 m 40 m – 30 m = 10 m
Rückschau: Kannst du das Ergebnis kontrollieren?	Chris liegt auf jeden Fall 30 m, Angela auf jeden Fall 40 m von der Eisbar entfernt. Damit sind die Bedingungen erfüllt.

L14)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Was ist unbekannt?	- wie weit Chris & Angela von einander entfernt sind und in welcher Lageposition sie sich zu einander &zur Eisbar befinden. Außerdem ist gesucht welche Positionen eine einfache rechnerische Lösung ermöglichen.
Was ist gegeben?	- die Eisbar ist an einer bestimmten Stelle gegeben und man weiß, dass Chris 30 m und Angela 40 m davon entfernt liegen.
Wie lautet die Bedingung?	- Chris liegt 30 m und Angela 40 m von der Eisbar entfernt.
Kann die Bedingung befriedigt werden?	- Bedingung kann befriedigt werden wenn man sich die möglichen Lagepositionen vorstellen & den Abstand berechnen kann.
Trennen der verschiedenen Teile der Bedingung:	- Chris liegt 30 m weg von der Eisbar - Angela ist 40 m von der Eisbar entfernt - Lösung muss rechnerisch einfach sein
Ausdenken eines Planes: Verhältnis zur Aufgabe:	- vorliegende Aufgabe unbekannt, jedoch schon mit ähnlichen Aufgaben auseinander gesetzt
Förderlicher Lehrsatz:	- wenn man davon ausgeht, dass sich Chris, Angela und die Eisbar in der Position eines rechtwinkligen Dreiecks befinden und sich die Strecken, die die Entfernung der Kinder angeben, im rechten Winkel treffen, muss man den Satz des Pythagoras können. Wenn alle drei auf einer Geraden liegen sollen, benötigt man die Addition und Subtraktion.
Zusammenhang zwischen Daten und Unbekannter:	- wenn man die Bedingung mit Hilfe der Addition berechnet, dann stimmt die Summe der Daten des Abstandes der Personen zur Eisbar (30 m + 40 m) mit dem Wert der Unbekannten (dann nämlich 70 m) überein. Wenn man die Aufgabe jedoch mit dem Satz des Pythagoras löst, stellen die beiden bekannten Daten (30 m und 40 m) a^2 und b^2 dar und die Unbekannte steht für c^2.
Andere Formulierung der Aufgabe:	- Angela und Chris liegen am Strand. Die Entfernung von Chris zur Eisbar beträgt 30 m und die von Angela zur Eisbar 40 m. Überlege an einer einfachen Möglichkeit, in welcher Lageposition sich Chris und Angela unter den gegebenen Aspekten befinden könnten und wie groß der Abstand zwischen den Liegepositionen der beiden ist.
Vereinfachung der Aufgabe:	- man könnte zunächst die Aufgabe insofern verändern, dass die Schüler sich verschiedene Lagepositionen für Chris und Angela überlegen. Danach fügt man dann erst die Bedingung hinzu, dass Chris 30 m und Angela 40 m von der Eisbar entfernt sind. Erst wenn sich die Schüler das bisher genannte vorstellen können sollen sie an einer Rechnung zur Lösung der Aufgabe überlegen.
Ausführen des Planes: Mögliche Lagepositionen von Chris und Angela:	- Chris und Angela könnten vor & hinter der Eisbar liegen, rechts & links daneben oder beide davor oder dahinter
Rechnerische Lösung:	- wenn man die Aufgabe mit Hilfe des Satz des Pythagoras lösen möchte, würde ich mir zuerst ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, an dessen Spitze sich die Eisbar befindet. Die anderen beiden Punkte bezeichnet man mit Chris und Angela. *(Skizze):* <u>Eisbar</u>

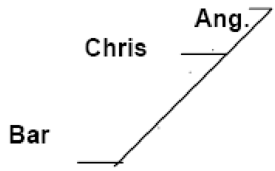
	 Chris Angela Da Chris 30 m von der Eisbar entfernt ist und Angela 40 m, bedeutet dies, angewandt auf den Satz des Pythagoras: 30 m² + 40 m² = 250 m². Somit beträgt der Abstand zwischen Chris & Angela, wenn sich alle drei in einem rechtwinkligen Dreieck befinden, 50 m. - wenn man die Aufgabe mit Hilfe der Addition löst und davon ausgeht, dass sich Chris, Angela und die Eisbar auf einer Geraden befinden, dann sieht das Ganze so aus: Chris------------Eisbar-----------------Angela Man würde also die Abstände der beiden zur Eisbar addieren und hätte somit den Abstand beider voneinander: 30 m + 40 m= 70 m.
Rückschau: Prüfen der Lösung:	- um die Lösung auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen muss man zuerst kontrollieren, ob bei den angefertigten Zeichnungen und Vorstellungen von der Aufgabe die Bedingung erfüllt ist, d.h. ob der Abstand sowohl zwischen Chris und der Eisbar als auch zwischen Angela und der Eisbar mit den vorgegebenen Angaben übereinstimmen. Wenn dies der Fall ist muss man in einem nächsten Schritt die angewandte Formel, also den Satz des Pythagoras, auf seine Richtigkeit hin überprüfen und zuletzt die durchgeführten Rechnungen zur Kontrolle nochmals nachrechnen.
Ist ein Erfassen des Resultats auf den ersten Blick möglich?	- ein Erfassen des Resultats ist meiner Meinung nach auf den ersten Blick nicht möglich. Erstens brauch die Vorstellung der möglichen Lagepositionen seine Zeit und zweitens muss dann an dem zugehörigen Rechenweg überlegt werden, der zur Lösung führt. Dies kann unmöglich auf den ersten Blick geschehen.
Kann das Resultat bei anderen Aufgaben nützlich sein?	- das Resultat kann bei einer ähnlichen Aufgabe nützlich sein, da man dann das Rechenverfahren schon kennt. Wenn es sich z.B. ebenfalls um eine Anordnung in einem rechtwinkligen Dreieck handelt, bei dem zwei Seiten gegeben sind, so weiß man, dass dies mit dem Satz des Pythagoras leicht lösbar ist.
Ausdenken einer ähnlichen Aufgabe:	- Es ist Weihnachten. Tim und Julia sitzen auf zwei Sesseln, wobei sich diese in zwei verschiedenen Ecken des Wohnzimmers befinden. In der Mitte des Zimmers liegen jede Menge Weihnachtsgeschenke. Tim ist von den Geschenken 3 m entfernt, Julia 4 m. Welche Möglichkeiten der Sesselkonstellationen gibt es? Wie weit sitzen Julia und Tim auseinander?

L15)

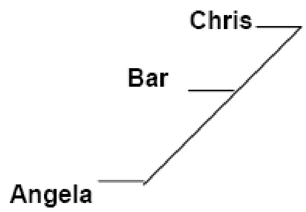
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Wir wissen nicht, wie Angela, Chris und die Eisbar zueinander „liegen“ → welche verschiedenen Positionen können die 3 Punkte zueinander einnehmen?	**Lösung der Aufgabe:** **- der Abstand zwischen Angela und Chris beträgt zwischen 10m und 70m**
Ausdenken eines Planes:	**Ausdenken eines Planes** • Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen? *Nein* • *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? → *Abstand von 3 Punkten bestimmen!; Wie können die 3 Punkte (Person + Bar) zueinander liegen?* → *Gerade (Berechnung durch Addition, Subtaktion), Dreieck* → *Satz des Pythagoras könnte hilfreich sein* • *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat. → *Dreiecksberechnung; Anwendung des Satzes d. Pythagoras* • Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück! → *Anstatt Namen Buchstaben A,B,C verwenden, wie bei Dreiecksberechnung;* Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedinung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind? → *Ja*

Ausführen des Planes:

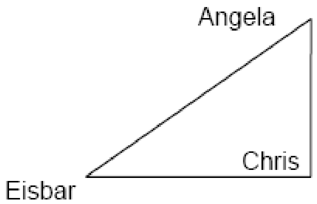
- 1. Möglichkeit: alle 3 Punkte (Chris, Angela und die Eisbar) liegen auf einer Gerade:
  a): Chris und Angela liegen auf der gleichen Seite der Bar
  → der Abstand zwischen beiden beträgt 10m



b) Chris liegt auf der „hinteren“ Seite der Bar, Anja auf der „vorderen“ (oder umgekehrt)
→ der Abstand zwischen beiden beträgt 70m



- <u>2. Möglichkeit</u>: die 3 Punkte liegen nicht auf einer Geraden → es entsteht ein Dreieck (8.Klasse → Annahme: rechtwinkliges Dreieck oder: zeichnerisch lösen)
→ der Abstand zwischen beiden muss mit Hilfe des Satz des Pythagoras berechnet werden



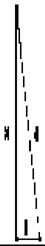
Die Hypotenuse ist bekannt: 40m; die Entfernung Chris Eisbar ebenfalls: 30m

→ Pythagoras: 40*40 = 30*30 + x*x

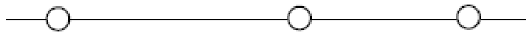
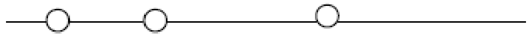
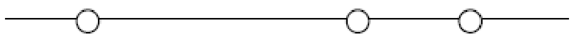
Also: x = 26,458m

Die Positionen von Angela und der Eisbar können (im obrigen Bsp) getauscht werden.

Zudem kann die Hypotenuse die gesuchte Strecke darstellen. (d.h. die Eisbar ist quasi der Eckpunkt am rechten Winkel…)
Berechnung erfolgt dabei ebenfalls mit Pythagoras.

	Außerdem kann die Aufgabe zeichn. Gelöst werden (wenn kein rechtwinkl. Dreieck und der Winkel bekannt ist…)
Rückschau:	*Ähnliche Aufgabe:* z.B. Anwendung des Satzes des Pythagoras: Eine 4m lange Leiter soll mit dem Abstand von einem Meter an eine Wand angelehnt werden. Wie hoch muss diese Wand mindestens sein, damit man die Leiter überhaupt anlehnen kann? (Skizze:) 

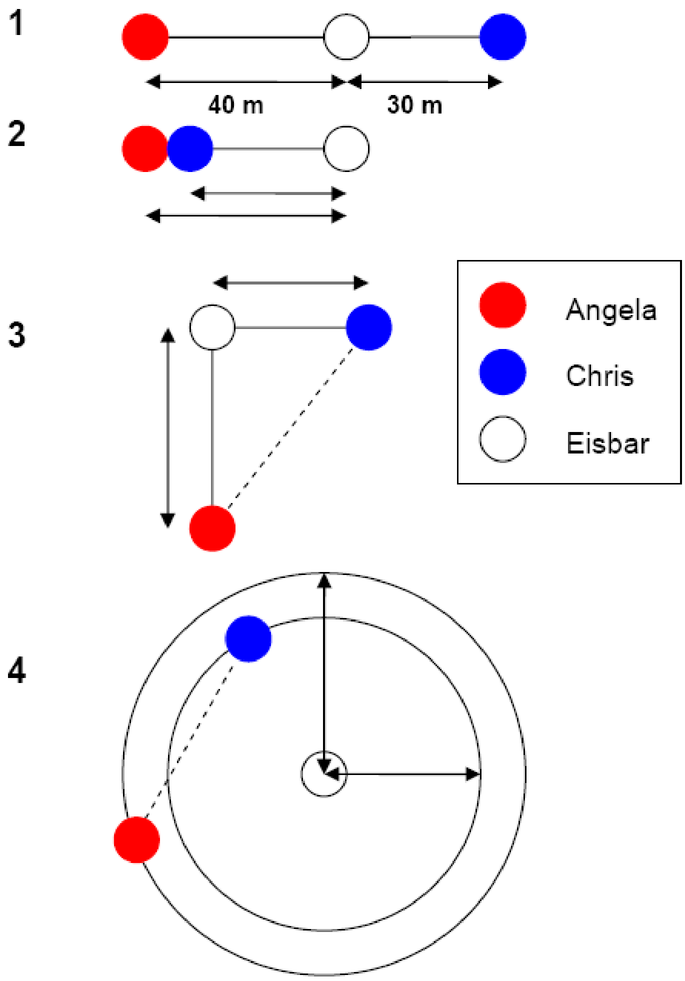
L16)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Was ist bekannt? Was ist unbekannt? Zeichne eine Figur! Andere Figur: Weitere Figur:	**Gegeben:** Abstand zwischen Chris und Eisbar, Abstand zwischen Angela und Eisbar **Unbekannt:** Abstand zwischen Chris und Angela  **Angela** **Eisbar** **Chris** Ohne Matheprogramm schwierig zu zeichnen. Man zeichnet zuerst die Strecken (Chris-Eisbar und Angela-Eisbar) im rechten Winkel zueinander, Eisbar ist der Schnittpunkt der beiden Strecken im rechten Winkel; dann Berechnung des Abstandes (Chris-Angela) mit Hilfe des Satzes von Pythagoras.  **Angela** **Chris** **Eisbar**
Ausdenken eines Planes: Kennst Du eine verwandte Aufgabe? Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten	Ja, verwandte Aufgaben sind Aufgaben zur Geometrie, insbesondere Aufgaben, bei denen man Strecken mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet. Um den Zusammenhang zu erkennen, ist eine Skizze förderlich, entweder zeichnet man den Strand als Gerade, auf der die Punkte Chris und Angela und Eisbar liegen (s.o.) und kann so mit Hilfe der Abstände die gesuchte Strecke berechnen oder man zeichnet ein Dreieck mit einem rechten Winkel, um so die Lösung berechnen zu können (Pythagoras).
Ausführen des Planes:	Zur ersten gezeichneten Figur: 30m+40m=70m Lösung: Chris und Angela sind 70m entfernt. Zur zweiten Figur: $\sqrt{30^2+40^2}=50$ Lösung: Angela und Chris sind 50m entfernt. Zur dritten Figur: 40m-30m=10m Lösung: Chris und Angela sind 10m entfernt.
Rückschau: **Ähnliche Aufgabe:**	Eine Fliege fliegt geradewegs von der Sonnenblume zum Kuchen. Der Abstand zwischen der Sonnenblume und dem Kuchen beträgt 2,80m. Nachdem sie sich satt gefressen hat, fliegt sie geradewegs 45cm zur Gießkanne. Wie weit muss die Fliege von dort aus zurück zur Sonnenblume fliegen?  Sonnenblume Gießkanne Kuchen **Lösung:** eine Möglichkeit: 2,35m muss die Fliege fliegen.

L17)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: **Was ist unbekannt?** **Was ist bekannt?**	**- die Lageposition der beiden und der Eisbar, d.h. liegen Angela, Chris und die Eisbar in einem Dreieck oder auf gerader Linie?** **- Angela liegt 40 m von der Eisbar entfernt, Chris 30m**
Ausdenken eines Planes: **3 Möglichkeiten der Lagebeziehung** **Aufgabe anders/ klarer ausgedrückt**	**- entweder sie liegen auf gerader Linie, dann müsste subtrahiert werden, oder die 3 Punkte bilden ein rechtwinkliges Dreieck, dann müsste mit dem Satz des Pythagoras gerechnet werden** **- oder sie liegen so auf gerader Linie, dass die Eisbar in der Mitte der beiden liegt, dann müsste addiert werden.** **- wenn die 3 Punkte jedoch in einem beliebigen Dreieck liegen, ist die Aufgabe hier nicht zu lösen.** - Chris und Angela liegen am Strand. Chris hat 30 m, Angela 40 m zur Eisbar, wobei sich alle 3 Punkte auf einer Geraden befinden/ ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Wie weit sind sie voneinander entfernt?
Ausführen des Planes: **1. Möglichkeit** **2. Möglichkeit** **3. Möglichkeit**	- 3 Punkte auf einer Geraden, wobei sich die Eisbar am Schluss der Geraden befindet: 40-30=**10** oder 30+**10**=40, also liegen sie 10 m auseinander. - 3 Punkte bilden ein rechtwinkliges Dreieck: $40^2+30^2= 900+1600=2500$ = 50m auseinander - die 3 Punkte liegen auf einer Geraden, wobei die Bar in der Mitte liegt: 40+30=70, also liegen sie 70 m auseinander
Rückschau: **Kannst du das Resultat kontrollieren?** **Andere Aufgabe**	- durch nachrechnen - man kann diese Aufgabe mit anderen Zahlen betrachten oder auch eine eindeutigere Aufgabenstellung verfassen (siehe Ausdenken eines Planes) , so dass es nur eine Antwortmöglichkeit gibt.

L18)

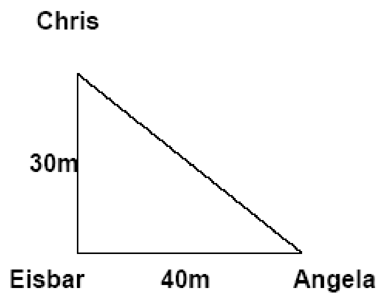
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe:	
Was ist unbekannt?	**Der Abstand zwischen Chris und Angela.**
Was ist gegeben oder was ist die Bedingung?	**Der Abstand von Chris zur Eisbar (30m) und der Abstand von Angela zur Eisbar (40m).**
Zeichne eine Figur und beachte dabei unterschiedliche Lagepositionen.	
Ausdenken eines Planes:	
Welche Lagepositionen sind durch einfach rechnerische Lösungen zu bestimmen?	**Bei den ersten beiden Fällen liegen die Punkte alle au einer Geraden.** **Fall 1: Die Abstände addieren.** **Fall 2: Die Abstände subtrahieren.**
Kennst du einen Lehrsatz der förderlich sein könnte?	**Bei Fall 3 kann man den Satz des Pythagoras anwenden.** **Dazu berechnet man** $\sqrt{30^2+40^2}=50$
Hast du alle Daten genutzt?	**Die Abstände 30m und 40m.**
Kannst du die Aufgabe anders ausdrücken?	**Es gibt 4 verschiedene Fälle, die zu betrachten sind. Der 4. Fall ist der allgemeine Fall.**

Ausführen des Planes: Kontrolliere jeden Schritt! Kannst du beweisen, dass der Schritt richtig ist?	 1. Stimmen die Abstände von Chris bzw. Angela und der Eisbar überein? 2. Wurde die Addition, Division und der Satz des Pythagoras richtig durchgeführt? Überprüfe durch eine Probe. Überprüfe die Zeichnungen und Kontrolliere die Abstände. Führe eine Probe durch.
Rückschau: Kannst du das Resultat kontrollieren? Kannst du die Methode für eine andere Aufgab gebrauchen?	 Führe bei den einzelnen Rechnungen die Probe durch. Beim 4. Fall erhält man keine Lösung durch einfache Rechnung. Dies ist nur eine Veranschaulichung von allen weiteren unendlich vielen Lösungen auf den entsprechenden Kreisradien. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras lassen sich Abstände berechnen, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck erzeugen kann. Aufgabe: Schiffe Ein Schiff ist 200m von einem Leuchtturm entfernt, das andere ist 400m von dem Leuchtturm entfernt. Der Leuchtturm, Schiff 1 und Schiff 2 bilden die Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks. Berechne den Abstand der Schiffe zueinander.

L19)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: - was ist unbekannt? - was ist bekannt? **-** Bedingungen - Zeichnung	 - Entfernung zwischen den beiden Personen - Entfernung Personen – Eisbar Chris: 30m , Angela: 40m - weiter werden keine Bedingungen gestellt, Schüler bekommen jedoch Anregungen und Tipps - eine Zeichnung zum besseren Verständnis der Aufgabenstellung und für das spätere Problemlösen ist empfehlenswert. Auf diese Weise wird der geeignete Lösungsweg besser ersichtlich
Ausdenken eines Planes: - Aufgabe/Aufgabenstellung bekannt? - können Kenntnisse verwendet werden? - Besonderheit der Aufgabe -Lösungsplan (eine Möglichkeit)	 - ähnliche Aufgaben bekannt, jedoch nicht mit freiem Lösungsweg - Kenntnisse aus dem Alltag und aus der Geometrie können verwendet werden - es wird kein konkreter Lösungsweg bzw. Lösung verlangt, Schüler ist in seinem Tun ganz von seinen Fähigkeiten und Wissensstand abhängig. Schüler entwickeln Lösungsziel selbstständig - Lagezeichnung anfertigen, um Dimensionen besser erfassen zu können. -verschiedene Lagepositionen der Personen betrachten und bewerten, logischen Lösungsweg find/ die rechnerisch beste Lösung finden.
Ausführen des Planes: -Durchführung des Plans	 - an Hand der Planfigur werden verschiedene Möglichkeiten betrachtet -liegen Chris und Angela auf einer Linie, zwischen ihnen die Eisbar, beträgt ihr Abstand 70m Liegen Chris und Angela auf einer Linie, jedoch beide auf der gleichen Seite der Eisbar beträgt der Abstand 10m - hier weiter gedacht, könnten sie auch in einem 90° (45°) Winkel zu einander stehen (Pythagoras hilft)
Rückschau: - kontrollieren der Resultate - Übertragung auf andere Aufgaben	 - mit Hilfe der erstellten Zeichnung lassen sich die Ergebnisse belegen, die Lösungen, bei denen die Personen auf einer Geraden liegen sind jedoch sehr einfach und eigentlich sofort ersichtlich - Aufgabe kann als Einstieg zu Pythagoras genutzt werden, diesbezüglich gibt es dann viele Abwandlungsmöglichkeiten

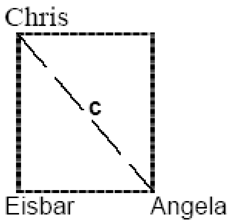
L20)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: **Wie weit sind Angela und Chris voneinander entfernt?**	**Es sind drei Lagepositionen zu finden: Eisbar, Angela und Chris**
Ausdenken eines Planes: **Drei Lagepositionen sind zu finden.**	**Bedingungen der drei Lagepositionen:** **a)Chris liegt 30m von der Eisbar entfernt** **b) Angela liegt 40m von der Eisbar entfernt** **c)die Lagepositionen ermöglichen eine einfache rechnerische Lösung**
Ausführen des Planes: **Zunächst eine kleine Planskizze anfertigen. Wie kann man die Lageposition berechnen?**	**Die drei Lagepunkte werden so angeordnet, dass ein rechtwinkliges Dreieck ensteht:**  **So lässt sich nun mit Hilfe des Satz des Pythagoras die Entfernung von Chris und Angela bestimmen.** **Entfernung:** $\sqrt{\text{entfernung}} = 30^2+40^2$ **Angela und Chris liegen 50 Meter voneinander entfernt.**
Rückschau:	**Für die Lösung ist eine vorher angefertigte Zeichnung sehr wichtig. Nur so kommt man auf die Idee diese Aufgabe geometrisch zu berechnen.**

L21)

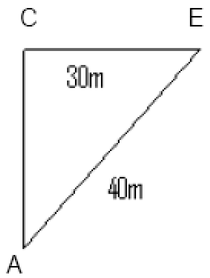
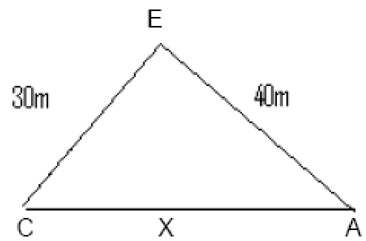
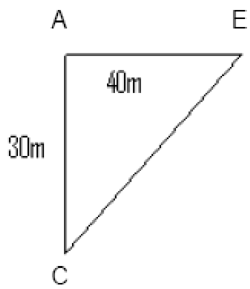
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: (z.B.: Was ist unbekannt? *Nur als Beispiel!*	Unbekannt ist bei dieser Aufgabe die Entfernung der Kinder zueinander und die genaue Lage der Kinder. Gegeben ist nur der Abstand der Kinder zu der Strandbar. Chris hat einen Abstand von 30 m und Angela einen Abstand von 40 m zu der Strandbar. Eine Skizze könnte so aussehen, dass man die Strandbar aufmalt als Mittelpunkt von zwei Kreisen. Der Radius der Kreise stellte den Abstand der Kinder von ein mal 30m und einmal 40m zur Strandbar dar. Irgendwo auf dem kleinen Kreis würde sich Chris befinden und irgendwo auf dem großen Kreis würde sich Angela befinden.
Ausdenken eines Planes:	Diese Aufgabe erinnert mich an keine andere konkrete Aufgabe, lediglich an das Rechnen mit einem gegebenen Radius oder je nach Lage der Kinder an das Rechnen mit dem Satz des Pythagoras. Allerdings muss man zuerst eine Fallunterscheidung machen, da die Positionen der Kinder ja sehr verschieden sein können und nur manche einfach auszurechnen sind. Nach dieser Fallunterscheidung gäbe es ein mal die Möglichkeit, dass sich die Kinder und die Strandbar auf einer Geraden befinden würden, Die Aufenthaltsorte von A.C. und S. einem rechtwinkligen Dreieck entsprechen würden oder sich die Kinder irgendwo anders auf dem Kreis befinden würden. Mit diesem Ansatz hätte ich alle Daten benutzt und kann mit der Ausführung des Plans beginnen.
Ausführen des Planes:	**Fall 1:** Die Kinder liegen auf einer Geraden: Auch dabei gibt es zwei Mögl. Erstens, sie liegen beide auf der selben Seite der Strandbar, dann wäre der Abstand 10 m. Zweitens, sie liegen auf entgegengesetzten Seiten der S. dann betrüge der Abstand 70m (30m+40m). **Fall 2**: rechter Winkel. Satz des Pythagoras hilft bei der Lösung. Es gilt $a^2+b^2=c^2$, a und b sind die Abstände der Kinder von der S.→ $30^2+40^2=c^2$. Damit könnte man den Abstand c der Kinder untereinander ermitteln. **Fall 3**: Die Kinder liegen irgendwo anders auf dem Kreis. Dann wäre die Lösung der Aufgabe nicht mehr so einfach und für ein Kind dieser Schulstufe nicht lösbar. An Hand der Skizze kann man die Schritte überprüfen. Gibt es noch andere einfache Fälle? Nein.
Rückschau:	Man kann die einzelnen Fälle noch einmal durchgehen und die Rechnungen überprüfen. Das Ergebnis dieser Aufgabe kann man bei ähnlichen Aufgaben wiederverwenden. Bei Aufgaben, die der Wirklichkeit nahe sind, ist es aber eher unwahrscheinlich, dass die Kinder sich an genau diese Positionen halten, die einfach zu errechnen sind. Soll man jedoch den Abstand zweier Häuser in New York miteinander errechnen, so würde diese Aufgabe helfen können, denn dabei wäre die Wahrscheinlichkeit, dass die Häuser auf einer Geraden oder im rechten Winkel lägen recht hoch, da das Straßennetz oft aus rechten Winkeln besteht.

L22)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: 1. Was ist unbekannt? **2.** Was ist gegeben?	1.Entfernung der beiden Personen 2. Entfernung von Chris und Angela zur Eisbar
Ausdenken eines Planes: 1. Kennst du eine verwandte Aufgabe? Kennst du einen Lehrsatz der dir Helfen kann?	1. Der Satz des Pythagoras unter der Annahme, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt. a zum Quadrat+ b zum Quadrat= c zum Quadrat
Ausführen des Planes: Wenn du Deinen Plan der Lösung durchführst, so kontrolliere jeden Schritt. Kannst du deutlich sehen, dass der richtig ist? Kannst Du beweisen dass er richtig ist?	 Zeichne zunächst ein rechtwinkliges Dreieck. Die Eckpunkte werden beschriftet. Die Seite von der Eisbar bis Angela beschrifte ich mit der Variable a. Die Entfernung von der Eisbar bis Chris beschrifte ich mit der Variable b. Die gesuchte Site beschrifte ich mit der Variable c. Nun setze ich die Zahlen für die Variablen im Lehrsatz ein: a zum Quadrat+ b zum Quadrat= c zum Quadrat 40 zum Quadrat + 30 zum quadrat= c zum Quadrat 2500 = c zum Quadrat/ ziehe die Wurzel 50 = c
Rückschau: Kannst du das Resultat kontrollieren	Ja, kann ich. In dem ich die Formel umforme und Annehme das z.B. a gesucht ist. Umgeformt lautet dann die Formel: a zum Quadrat= c zum Quadrat – b zum Quadrat. Nun setze ich für b die bekannte Zahl ein und für c die gefundene Zahl ein: a zum Quadrat= 50 zum quadrat – 30 zum quadrat a zum quadrat = 1600 ziehe die Wurzel

	$a = 40$ Und tatsächlich ist a nach Aufgabenstellung 40

L23)

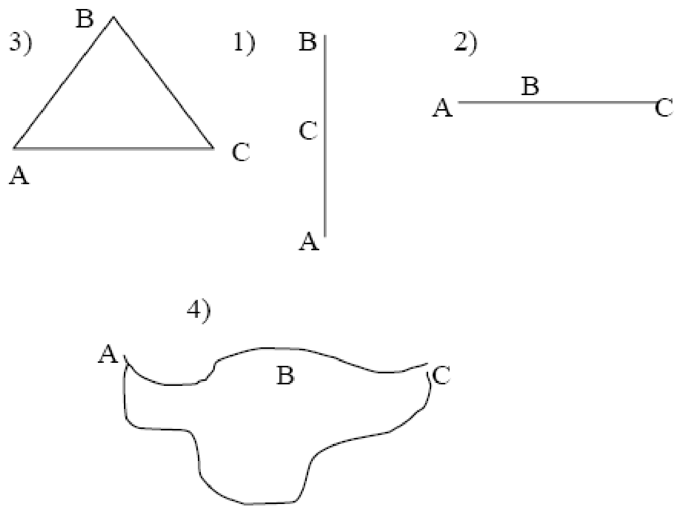
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: Was ist unbekannt?	Entfernung von Chris und Angela voneinander.
Was ist gegeben?	Chris liegt 30m von der Eisbar entfernt. Angela liegt 40m von der Eisbar entfernt.
Ist die Bedingung ausreichend oder ist sie unbestimmt?	Die Lageposition von Chris, Angela und der Eisbar ist nicht eindeutig bestimmt. Man weiß nicht, ob sie alle auf einer Geraden liegen oder ob die Eisbar in der Mitte von den beiden Personen liegt usw. Die Lösung der Aufgabe ist also abhängig von der Lage von Chris und Angela. Man muss also alle möglichen Lagepositionen herausfinden und so entsprechende Lösungswege für die einzelnen Fälle finden.
Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!	Entfernung von Chris und Angela bezeichne ich mit X. 1. Fall: Eisbar (E), Chris(C) und Angela(A) befinden sich auf einer Geraden a) C------30m----------E-------40m----------A b) A-------C-----30m--------E (Strecke AE = 40m) 2. Fall: (rechter Winkel in C)  3. Fall: (rechter Winkel in E)  4. Fall: (rechter Winkel in A) 
Ausdenken eines Planes: Kennst du eine verwandte Auf-	Ich kenne eine ähnliche Aufgabe, bei der der Schulweg von zwei

gabe? Kennst du einen Lehrsatz der förderlich sein könnte?	Kindern angegeben wird und gesucht ist die Entfernung der Häuser der beiden Kinder voneinander. Auch hier müssen verschiedene Fälle unterschieden werden. Wenn die Lagepositionen so gewählt werden, dass bei der Verbindung der drei Punkte ein rechtwinkliges Dreieck entsteht, kann man den Satz des Pythagoras anwenden.
Ausführen des Planes:	Entfernung von Chris und Angela Lösung für den 1. Fall: a) $X = 30m + 40m = 70m$ b) $X = 40m - 30m = 10m$ Lösung für den 2. Fall: Satz des Pythagoras: $(40m)^2 = (30m)^2 + X^2$ $X = 26{,}46m$ Liegt kein rechtwinkliges Dreieck vor, so gibt es keine eindeutige Lösung. Lösung für den 3. Fall: Satz des Pythagoras: $(30m)^2 + (40m)^2 = X^2$ $X = 50m$ Liegt kein rechtwinkliges Dreieck vor, so gibt es keine eindeutige Lösung. Lösung für den 4. Fall: Satz des Pythagoras: $(30m)^2 = (40m)^2 + X^2$ Keine Lösung Liegt kein rechtwinkliges Dreieck vor, so gibt es keine eindeutige Lösung.
Rückschau: Kannst du das Resultat kontrollieren? Kannst du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst du das Resultat oder die Methode für eine andere Aufgabe gebrauchen? Kann man die Aufgabe variieren?	Man kann einerseits die Lösungen für X in die entsprechenden Gleichungen einsetzen und so das Resultat kontrollieren. Andererseits ist aber auch eine zeichnerische Lösung möglich, indem man eine maßstabsgetreue Zeichnung anlegt und die Strecke X nachmisst. (Hier kann es allerdings auch zu Ungenauigkeiten kommen.) Die Lösung ist auch hier nicht eindeutig bestimmt, da man verschiedene Fälle unterscheiden muss. Innerhalb der Fälle gibt es dann allerdings eine eindeutige Lösung. Geht man allerdings von Dreiecken ohne einen rechten Winkel aus, so gibt es auch hier keine eindeutige Lösung. Die Aufgabe zeigt, dass man bei manchen Aufgaben verschiedene Fälle betrachten muss und es dadurch unterschiedliche Lösungen gibt. Die Lösungsmethode mit dem Satz des Pythagoras kann man bei vielen geometrischen Aufgaben verwenden. Die Aufgabe lässt sich durch eine andere Rahmengeschichte oder die Verwendung von anderen Zahlen variieren. Eine weitere Differenzierungsmöglichkeit ergibt sich, wenn man in der Aufgabe nur eine Lösung verlangt.

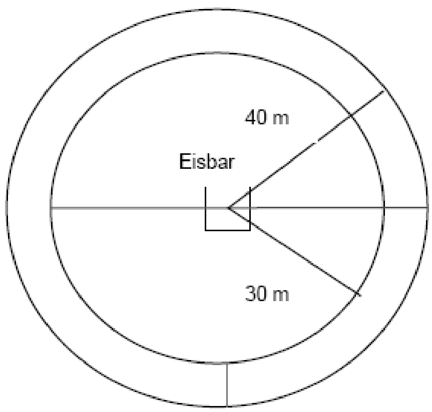
L24)

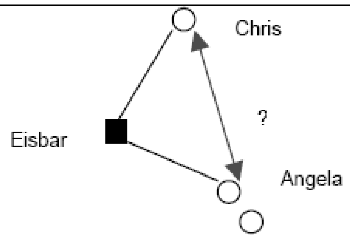
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: - Was ist bekannt? - Was ist gefragt? - Werden weitere Bedingungen gestellt?	 **-** Bekannt ist, wie weit die beiden Personen jeweils von der Eisbar am Strand entfernt liegen → Chris: 30 m → Angela: 40 m - Unbekannt ist die Entfernung zwischen den beiden Personen Chris und Angela. - Bedingungen sind keine gegeben, sondern Anregungen und Tipps. - Eine Planfigur zur reinen Verdeutlichung der Situation kann sehr hilfreich sein und man soll so die verschiedenen Lagepositionen der Personen überlegen und bewerten, welche die rechnerisch einfachs-te ist.
Ausdenken eines Planes: - Ist Dir eine ähnliche Aufgabe bekannt? - Was könnte bei dieser Aufga-be wichtig sein? Beachte die Definition. - Was ist sinnvoll zu tun? - Vergleich der verschiedenen Positionen.	 **-** Ähnliche Aufgaben aus der Geometrie hab ich schon mal gesehen, kann mich aber an ihre Lösung nicht mehr erinnern. - Man hat die Lageplätze der Personen nicht gegeben, das heißt, dass sie überall und nicht unbedingt auf einer „Geraden“ Richtung Eisbar liegen müssen. Sie können auch in einem Winkel Richtung Eisbar zueinander liegen. - Eine Planfigur malen. Verschiedene Lagepositionen malen. - Bewertung der verschiedenen Positionen und die rechnerisch beste Lösung finden.
Ausführen des Planes: **-** Durchführung des Plans.	 **-** Malen einer Planfigur. Am Besten sollte man die Eisbar in die Mitte zeichnen, um so mehrere Möglichkeiten der Lagepositionen von Chris und Angela zeigen zu können. (siehe S. 7) - Liegen Chris und Angela gegenüber (Eisbar in „Mitte“) (= 70 m Entfernung) oder Chris Angela und die Eisbar auf einer Strecke (= 10 m Entfernung), dann sind die Rechnungen zur Entfernung von Angela und Chris am einfachsten. - Liegen Chris und Angela in einem Winkel, z. B. 90° oder 60°, dann sind die Entfernungsrechnungen schwieriger.
Rückschau: - Ist das Ergebnis bzw. die Überlegung sinnvoll und zu durchschauen? - Gibt es Lösungsvarianten? - Ist das Ergebnis übertragbar?	 **-** Das Ergebnis bzw. die Überlegungen sind nachvollziehbar. Es scheint sehr sinnvoll, eine Planfigur zu zeichnen. Je nach Arbeitsmo-tivation zeigt diese Zeichnung ein detailierteres oder gröberes Er-gebnis. Sehr klar wird jedoch, in welcher Lage Chris und Angela liegen müs-sen, damit die Entfernung leicht zu errechnen ist. - Das Ergebnis ist auf eine Aufgabe der gleichen Art gut übertragbar.

L25)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: **Entfernung berechnen**	Chris und Angela liegen in einem Abstand zueinander, aber wie weit? Zur Eisbar sind es für Chris 30m und für Angela 40m. Wie liegen die beiden am Strand? Wie viele Möglichkeiten, Positionen gibt es? Unbekannte: Entfernung x, Lage der beiden Personen Eine rechnerische Lösung ist durch direkte Wege gegeben/ geometrische Formen
Ausdenken eines Planes: **Möglichkeiten in einer Skizze darstellen** **Eisbar B** **Chris C** **Angela A** **Die Entfernung ist nur berechenbar, wenn die Kinder gerade gehen** **Genaue Entfernungsangabe nur selten möglich, Fallunterscheidung bei 3)**	
Ausführen des Planes: **Ausrechnen der Entfernung bei möglichen Skizzen**	Gerade Zu 1) BC = 30, AB = 40 => x = AC = AB-BC = 10m Zu 2) BC = 30, AB = 40 => x = AC = AB + BC = 70m Zu 3) liegen die Kinder so, dass bei B ein rechter Winkel ist, dann: $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow AC = 50m$ (Pythagoras) Bei allen anderen Dreiecken variiert die Entfernung $10<x<70$ zu 4) Gelangen A und C überhaupt auf direktem Weg zur Eisbar? Wie kann A zu C gelangen? Wenn C zu A über B kommt, ist die Entfernung x = 70m
Rückschau:	Nur selten ist die Entfernung berechenbar, Für eine genaue Bestimmung der Entfernung müssten mehr Angaben vorhanden sein. Ähnliche Aufgabe: Lisa ist 1km von der Schule entfernt, Sarah 4,5km, Peter 2km und Leila 3,5km. Wie weit ist Lisa von Peter entfernt. Skizziere zuerst die Möglichkeiten. Kann man die Entfernung berechnen?

L26)

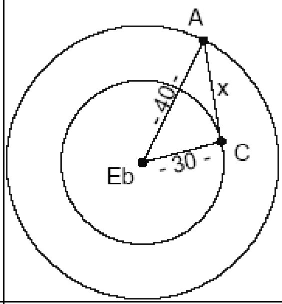
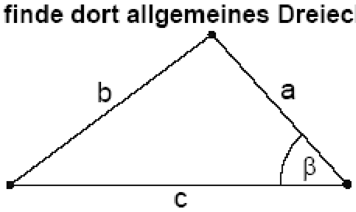
Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe:	
Was ist unbekannt?	Entfernung zwischen Chris' und Angela's Liegeplatz, Positionen, die eine möglichst einfache Rechnung erlauben
Was ist gegeben?	Entfernung von Chris' Liegeplatz zur Eisbar (30 m), Entfernung von Angela's Liegeplatz zur Eisbar (40 m) Eisbar an einer bestimmten Stelle gegeben
Wie lautet die Bedingung?	Finde eine rechnerisch einfache Lösung, wenn Chris 30 m und Angela 40 m von der Eisbar entfernt liegen.
Teile der Bedingung	1. Entfernung Eisbar – Chris beträgt 30 m 2. Entfernung Eisbar – Angela beträgt 40 m 3. Lösung muss rechnerisch einfach sein
Kann die Bedingung befriedigt werden?	Bedingung ist unzureichend, um Unbekannte eindeutig zu bestimmen Mehrere Lösungen sind vorstellbar (siehe Skizze):  Angela's Liegeplatz befindet sich irgendwo am äußeren, Chris' irgendwo am inneren Kreis. Rot gekennzeichnet ist die maximale, grün gekennzeichnet die minimale Entfernung zwischen den beiden.
Ausdenken eines Planes:	
Verhältnis zur Aufgabe	Aufgabe unbekannt, jedoch schon mit Aufgaben eines ähnlichen Typs konfrontiert worden
Lehrsatz, der förderlich sein könnte	Anwendung des „Satz des Pythagoras" erforderlich, wenn die Strecken, die die Entfernung der Kinder zur Eisbar angeben, sich in der Mitte (bei der Eisbar) im rechten Winkel treffen Addition bzw. Subtraktion erforderlich, wenn sich Chris und Angela auf einer Geraden befinden
Zusammenhang zwischen Daten und Unbekannter	Eisbar stellt Mittelpunkt zweier Kreise dar: Chris „liegt" irgendwo am Kreis mit dem Radius r = 30 m, Angela „liegt" irgendwo am Kreis mit dem Radius r = 40 m. Entfernung leicht errechenbar, wenn Strecken, die Entfernung der Kinder zur Eisbar angeben, sich im Winkel von 90° treffen (Pythagoras) oder beide Kinder auf „ein und demselben" Kreisdurchmesser liegen (dann ist die Unbekannte mit Hilfe der gegebenen Daten leicht errechenbar: 30 m + 40 m = 70 m oder 40 m – 30 m = 10 m)
Andere Aufgabenformulierung	Suche nach einer einfachen Möglichkeiten, wie Chris, der sich 30 m von der Strand-Eisbar enfernt befindet, und Angela, die 40 m bis zur Eisbar zurücklegen muss, liegen könnten und berechne die Entfernung zwischen den beiden.
Vereinfachung der Aufgabe	-zunächst nur mögliche Liegepositionen von Chris und Angela im Hinblick auf die Eisbar überlegen, Datenangaben weglassen

	-im nächsten Schritt erst die gegebenen Entfernungen in die Überlegungen miteinbeziehen und einfache rechnerische Lösungen suchen
Ausführen des Planes: Überlegungen zur Aufgabe ohne Beachtung der Daten	
Einfache rechnerische Lösungsmöglichkeiten	Chris und Angela liegen auf „ein und demselben“ Kreisdurchmesser: -Die Entfernung beträgt 30 m + 40 m = 70 m, d.h. Chris und Angela liegen (von der Eisbar aus gesehen) in 30 m bzw. 40 m Entfernung in zwei entgegengesetzten Himmelsrichtungen (in der Skizze rot gekennzeichnet). -Die Entfernung zwischen den beiden beträgt 40 m – 30 m = 10 m, d.h. Chris und Angela liegen von der Eisbar aus gesehen 30 m bzw. 40 m entfernt in derselben Himmelsrichtung (in der Skizze grün gekennzeichnet). Die Strecken, die die Entfernung zur Eisbar angeben, treffen dort im rechten Winkel aufeinander: -Die Entfernung zwischen Angela und Chris (=c) wird mit dem Satz des Pythagoras berechnet: $a^2+b^2 = c^2$, also $30^2+40^2 = c^2$, $c^2 = 2500$, $c = 50$. Die Entfernung beträgt also 50 m.
Rückschau: Überprüfbarkeit des Resultats	Neben einer rechnerischen Überprüfung kann der Schüler sein Ergebnis auch zeichnerisch kontrollieren, indem er eine Zeichnung anfertigt und für die Entfernungen von 30 bzw. 40 m Strecken von 3 bzw. 4 cm aufzeichnet. So kann er den rechen Winkel, in dem sich die Entfernungsstrecken treffen, genau abtragen und seine Ergebnisse relativ exakt nachmessen. Überprüfung eines solchen Ergebnisses mit der gesamten Klasse: Wird eine solche Aufgabe im gesamten Klassenverband besprochen, so ist es durchaus möglich (wenn eine ausreichend große Fläche zur Verfügung steht), die Aufgabe auch einmal gemeinsam im Freien zu überprüfen: Eine Eisbar-Ersatz wird aufgestellt, ein Kind befindet sich dazu im Abstand von 30 m, ein anderes entfernt sich 40 m. Nun können verschiedene Möglichkeiten der Positionierung ausprobiert und die Entfernung zwischen den Kindern direkt nachgemessen werden.
Anwendbarkeit der Methode in einer anderen Aufgabe	Anna ist mit ihren Eltern innerhalb des Ortes in ein neues Haus umgezogen. Während sie vorher nur 200 m von ihrer Freundin Sina entfernt wohnte, muss sie nun einen wesentlich längeren Weg zurücklegen, um zu Sina zu kommen. Die Entfernung vom neuen zum alten Haus beträgt 0,8 km. Wie könnten die Häuser zueinander liegen? Finde eine einfache Möglichkeit, um die Entfernung von Anna’s zu Sina’s Haus zu berechnen. → Vorgehen der oben genannten Aufgabe kann zum Teil übertragen werden: zunächst Skizze anfertigen und evtl. nur Teile der Bedingung beachten, schrittweise alle Bedingungen hinzunehmen

L27)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: > Was ist gesucht? > Was ist gegeben? > Ist die Lösung eindeutig bestimmbar?	 > Die Entfernung zwischen den Kindern (e Meter). > Die jeweiligen Entfernungen zur Bar (x und y Meter). > Nein, da noch Angaben fehlen.
Ausdenken eines Planes: > Was habe ich und wie kann ich das nutzen? > Wie bestimme ich das Maximum? > Wie bestimme ich den Minimalabstand?	 > Ich habe die Entfernungen der Kinder zur Bar. Somit kann ich die Maximale Entfernung zwischen ihnen errechen, sowie bestimmen, wie weit sie mindestens auseinander liegen müssen. > Wenn beide Kinder auf der gegenüberliegenden Seite der Bar liegen, dann sind sie maximal von einander entfernt. Somit muss man nur die beiden Meterangaben miteinander addieren. > Wenn die beiden Kinder hintereinander liegen, dann sind sie im Mindestabstand zueinander. Ich muss die kleinere Zahl von der größeren abziehen.
Ausführen des Planes: > Bestimmung des Maximums > Bestimmung des Minimums > Allgemeine Aussage	 > e_{max} = 40m + 30m = 70m > e_{min} = 40m – 30m = 10m > Entfernung: e = 10m bis 70m
Rückschau: > Welche Aussagen kann ich über die Lösungen der Aufgabe treffen? War die Aufgabe eindeutig lösbar? > eine Variante der Aufgabe > Eine ähnliche Aufgabe	 > Die Aufgabe war nicht eindeutig lösbar. Es gibt unendlich viele Lösungen, die alle zwischen oder auf dem Maximum und Minimum liegen. > Ein Kellner der Bar bringt beiden Kindern je einen Orangensaft. Wie weit muss er gehen? > Zwei Flugzeuge starten vom Dortmunder Flughafen zur gleichen Zeit. Das eine Flugzeug hat nach zwei Stunden 1000km zurückgelegt, das andere nur 900km. Wie weit sind die beiden Flugzeuge voneinander entfernt?

L28)

Leitfrage/ Hinweis:	*Lösung*
Verstehen der Aufgabe: **Alles verstanden?** **Was ist unbekannt?** **Zeichne eine Figur!**	 **- null Problemo** **- Strecke Chris – Angela** **- hier ist sie!**
Ausdenken eines Planes: **Hast du diese Aufgabe schon früher gesehen?** **Kennst du eine verwandte Aufgabe?**	**- nein!** **- auch nicht; ich denke aber spontan an Strahlensätze oder ähnliche Dreiecke. Plan: mehrere Skizzen, um darin erst einmal „herumschmieren" zu können.**
Ausführen des Planes: **zurück zum Ausdenken:** **Hast du diese Aufgabe schon früher gesehen?**	**- erkenne schnell: Lösung ist von Winkel (CEbA) abhängig** **→ wechsle gedanklich in die Trigonometrie** **- ja; unregelmäßiges Dreieck, 2 Seiten plus eingeschlossener Winkel → Kosinussatz** **- ich schaue in Formelsammlung, um mich zu vergewissern, finde dort allgemeines Dreieck → neue Skizze**  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ **- Übertragen auf meinen Fall bereitet keine Probleme**
Rückschau: **Kannst du dein Resultat kontrollieren?** **Reflexion zur Aufgabe:** **ähnliche Aufgabe:**	**- ja, klar, für die Spezialfälle(** $\beta = 0°$ oder $\beta = 90°$ **) völlig problemlos** (für $\beta = 180°$ über **+** $2ac\cos\beta$) **- witzig, dass der Spezialfall** $\beta = 0°$ **mir direkt klar und viel zu einfach war; den allgemeinen Fall wollte ich schon lösen; der Spezialfall** $\beta = 90°$ **fiel mir aber erst bei der Kontrolle ein!!!** **- insgesamt schöne Aufgabe, durch die Trigonometrie auch in Oberstufe möglich (Formelsammlung!)** **das ist jetzt echt gemein; meine Aufgaben sind z. T. nicht variabel:** **- für pythagoreischen Fall: - Berechnung von Dachschrägen bei geg. Höhe des Daches und Breite des Gebäudes** **- für „meinen" Fall: ebenfalls die Dachschräge, aber unter Einhaltung einer bestimmten „Steilheit" des Daches** **- doch komplexer und nicht ganz analog: Wie weit voneinander entfernt darf man Schafe an einer jeweils x m langen Leine anbinden, unter der Bedingung, dass die Wiese aber komplett abgegrast werden soll?**