

**Zwei-Photon-Beiträge zur
elastischen
Elektron-Nukleon-Streuung im
Skyrme-Modell**

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Markus Kuhn
geb. am 24.07.1979 in Siegen

eingereicht beim Fachbereich Physik
der Universität Siegen
Siegen 2008

Erstgutachter: Prof. Dr. H. Weigel, Universität Siegen
Zweitgutachter: Prof. Dr. G. Holzwarth, Universität Siegen
Tag der mündlichen Prüfung: 23.09.2008

Abstract

The electromagnetic form factors are crucial for our understanding of the inner structure of the proton. Recently it has become feasible to measure them by the use of polarisation transfer techniques in addition to the traditional Rosenbluth separation method. Thereby emerged an incompatibility of the results obtained by these two different experimental methods. It is commonly assumed that the discrepancy is induced by higher order corrections to the cross section, especially through two-photon exchange processes. Unfortunately these processes cannot be calculated in a model independent manner because off-shell photon nucleon vertices arise. Effective chiral lagrangians contain already local two-photon couplings and therefore seem exceptionally well suited to study the anomaly contribution to the two-photon exchange. These couplings give two-photon exchange contributions that can be understood as the coupling of the nucleon to pions, decaying into two virtual photons. A particular contribution emerges from the chiral anomaly of QCD, that describes the two-photon decay of the neutral pion.

The most important goal of this work is the calculation of the contribution arising from the anomaly to the elastic electron-proton scattering. The results are expected to be widely model independent since the anomaly directly reflects a QCD property. Based on the Skyrme model the protons are realized as soliton solutions in effective chiral theories. The next to leading order contribution to the cross section is given by the interference between the one- and two-photon exchange. The latter contains an ultraviolet divergence, which is renormalized by a local effective counterterm. This counterterm contributes to the width of the neutral pion decay which determines the finite part of the counterterm coefficient. The affect of the anomaly to the Rosenbluth separation of the electromagnetic form factors as well as the discrepancy regarding the polarization measurements is extensively discussed within the Skyrme model. In addition, the correction as expected from the effective two-photon coupling of the non-linear- σ model is estimated.

Zusammenfassung

Um die innere Struktur des Protons zu verstehen, sind die elektromagnetischen Formfaktoren von entscheidender Bedeutung. Seit kurzem ist deren Messung neben der Methode der Rosenbluth-Separation auch mittels Polarisationsobservablen möglich. Dabei stellt sich heraus, dass die Ergebnisse beider Methoden nicht miteinander kompatibel sind. Es wird vermutet, dass diese Diskrepanz durch Korrekturen höherer Ordnung zum Wirkungsquerschnitt begründet ist, insbesondere durch Prozesse, die für den Austausch zweier Photonen zwischen Elektron und Proton stehen. Leider lassen sich diese Prozesse bisher nicht modellunabhängig berechnen, da dazu die Photon-Nukleon-Vertices außerhalb der Massenschale benötigt werden. Effektive chirale Lagrangians beinhalten bereits lokale Zwei-Photon-Kopplungen und eignen sich in besonderer Weise zum Studium des anomalen Beitrags zum Zwei-Photon-Austausch. Diese Kopplungen entsprechen Zwei-Photon-Austausch-Prozessen, die als die Kopplung des Nukleons an Pionen, die in zwei virtuelle Photonen zerfallen, verstanden werden können. Ein besonderer Beitrag entsteht durch die chirale Anomalie der QCD, die den Zwei-Photon-Zerfall des neutralen Pions beschreibt.

Das maßgebliche Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung des Anteils der Anomalie an der elastischen Elektron-Proton-Streuung. Es wird erwartet, dass die Ergebnisse weitgehend modellunabhängig sind, da die Anomalie unmittelbar eine Eigenschaft der QCD widerspiegelt. Auf der Grundlage des Skyrme-Modells werden die Protonen als Solitonlösungen verstanden und quantisiert. Der Beitrag zum Wirkungsquerschnitt entspricht in niedrigster Ordnung der Interferenz des Ein-Photon-Austausches mit dem Zwei-Photon-Austausch. Letzterer weist eine ultraviolette Divergenz auf, die durch die Hinzunahme eines effektiven *Counterterms* renormiert wird. Der *Counterterm* trägt zur Breite des Zerfalls des neutralen Pions in ein Elektron-Positron-Paar bei und wird dadurch bestimmt. Die Auswirkung der Anomalie auf die Rosenbluth-Extraktion der elektromagnetischen Formfaktoren und die Diskrepanz zur Messung der Polarisationsobservablen wird ausgiebig diskutiert. Zusätzlich zum Beitrag der Anomalie wird die zu erwartende Korrektur aufgrund der effektiven Zwei-Photon-Kopplung des nicht-linearen- σ -Modells abgeschätzt.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons	5
2.1. Proton-Formfaktoren aus der Rosenbluth-Separation	7
2.2. Proton-Formfaktoren aus Polarisationsobservablen	8
2.2.1. Messung der Formfaktoren mit Polarisationsexperimenten	10
2.3. Strahlungskorrekturen	12
3. Das Skyrme-Modell	17
3.1. Soliton-Modelle	17
3.2. Der effektive Lagrangian	19
3.2.1. Numerische Berechnung des chiralen Profils	22
3.3. Quantisierung des Solitons	23
3.4. Der Wess-Zumino-Term	27
3.5. Elektromagnetismus im Skyrme-Modell	29
3.6. Der $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Zerfall	33
4. Ein-Photon-Austausch im Skyrme-Modell	35
4.1. Lorentz-Boost der Formfaktoren	39
4.2. Rosenbluth-Formel im Breitframe	41
5. Zwei-Photon-Austausch im nicht-linearen-σ-Modell	45
5.1. Die Amplitude $\mathcal{M}_{2\gamma}^{nl\sigma}$ im Limes $m_e \rightarrow 0$	46
6. Der $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall	49
6.1. Renormierung	55
6.2. Anpassung der Renormierungskonstanten	56
6.3. Effektive Formfaktoren im Limes $m_e \rightarrow 0$	59
7. Formfaktoren zum effektiven Zwei-Photon-Austausch	63
7.1. Zwei-Photon-Formfaktor des Wess-Zumino-Terms	63
7.2. Zwei-Photon-Formfaktor des $nl\sigma$ -Terms	66
7.3. Zwei-Photon-Formfaktor des Skyrme-Terms	67

8. Beitrag des WZ-Terms zum Zwei-Photon-Matrixelement	71
8.1. Der Limes $m_e \rightarrow 0$	73
8.2. Renormierung	75
8.3. Interferenz mit dem Ein-Photon-Matrixelement	76
9. Anomale Strahlungskorrekturen zur Elektron-Nukleon-Streuung	79
9.1. Unpolarisierte Interferenzen für einen axialen Strom	80
9.1.1. Äquivalente zweikomponentige Spin-Darstellung	81
9.2. Interferenz des Zwei- und Ein-Photon-Matrixelements	82
9.2.1. Zwei-Photon-Korrekturen beim Proton	84
9.2.2. Positron-Proton-Streuung	90
9.2.3. Zwei-Photon-Korrekturen beim Neutron	91
10. Schlussbetrachtung	93
A. Formfaktoren im Skyrme-Modell	i
B. Polarisation in der Ein-Photon-Näherung	iii
C. Mathematischer Anhang	v
C.1. Relativität	v
C.2. Spin und Isospin	v
C.3. Kinematik im Breitframe	vii
C.4. Feynman-Regeln	vii
C.5. Wellenfunktion der Fermionen	viii
C.6. Zähler-Algebra	ix
C.7. Schleifenintegrale und dimensionale Regularisierung	ix
C.8. Wirkungsquerschnitt und Zerfallsbreite	xi
C.9. Integrale	xi
C.10. Alternierende Differentialformen	xii

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Feynman-Diagramm des Ein-Photon-Austausches	6
2.2.	Demonstration der Rosenbluth-Separations-Methode	8
2.3.	Elektromagnetische Formfaktoren durch Rosenbluth-Extraktion	9
2.4.	Gemessener Quotient des elektrischen zum magnetischen Formfaktor	12
2.5.	Strahlungskorrekturen zur elastischen Elektron-Nukleon-Streuung	13
2.6.	Zwei-Photon-Beitrag aus <i>Box</i> - und <i>x-Box</i> -Diagramm	14
2.7.	Beitrag der Anomalie in erster Ordnung.	14
3.1.	<i>Hedgehog</i> -Konfiguration des Solitons.	21
3.2.	Das chirale Profil	23
3.3.	Der $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Zerfall	33
4.1.	Elektromagnetische Formfaktoren im Skryme-Modell	41
4.2.	Kinematik der Elektron-Nukleon Streuung	42
5.1.	Feynman-Diagramme für den effektiven Zwei-Photon-Austausch	45
6.1.	Beiträge zum $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall	49
6.2.	Ein-Schleifen-Beitrag zum $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall	50
6.3.	Zerfallsbreiten der Mesonzerfälle	58
7.1.	Axiale Formfaktoren des Nukleons.	66
8.1.	Feynman-Diagramme für den effektiven Zwei-Photon-Austausch	71
9.1.	Die Abhängigkeit der Zwei-Photon-Korrektur von χ_{fin}	84
9.2.	Die Abhängigkeit der Zwei-Photon-Korrektur von e_s und M_b	85
9.3.	Die Abhängigkeit der Zwei-Photon-Korrektur von ε	86
9.4.	Der 2γ -Wirkungsquerschnitt im Vergleich zum Experiment	87
9.5.	Lineare Näherung des reduzierten Wirkungsquerschnitts	89
9.6.	Effektiver Quotient des elektrischen und magnetischen Formfaktors	90
9.7.	Zwei-Photon-Beitrag δ_n zur Elektron-Neutron-Streuung	91
9.8.	δ_n in Abhängigkeit zum Parameter ε	92

1. Einleitung

Unser Verständnis über die Struktur der uns umgebenden Materie resultiert weitgehend aus der beobachteten Streuung mehrerer Teilchen. Dies beginnt mit der Entdeckung der Atomkerne durch Geiger, Marsden und Rutherford [1], die 1909 α -Teilchen an einer Goldfolie streuten, und setzt sich mit dem experimentellen Nachweis des Protons, das den Kern des Wasserstoffatoms bildet, 1919 fort. Dass das Proton keine Punktladung darstellt, sondern eine Ausdehnung besitzt, wurde von Hofstadter [2] bestätigt, der mit seiner Arbeitsgruppe 1955 die elastische Elektron-Proton-Streuung durchführte. Bis heute gilt das Elektron, das selbst ein Punktteilchen darstellt, als perfekte Probe zur Untersuchung innerer Strukturen. Die formale Beschreibung der Elektron-Proton-Streuung erfolgt durch die Einführung von Formfaktoren [3], die die gesamte Information über die Protonstruktur enthalten. Die Streuung lässt sich als elektromagnetische Wechselwirkung durch den Austausch virtueller Photonen darstellen. Die Zerlegung nach der Anzahl der ausgetauschten Photonen entspricht der Entwicklung nach der Feinstrukturkonstanten $\alpha \simeq 1/137$. Bei der Konstruktion der Formfaktoren wird i. Allg. nur die führende Ordnung in der Feinstrukturkonstanten α betrachtet und Terme höherer Ordnungen fast vollständig vernachlässigt. Die Ergebnisse früherer Messungen der Formfaktoren unter Verwendung der so genannten Rosenbluth-Separation [4] lassen sich erstaunlich gut mit diesen Näherungen reproduzieren. Erst seit es möglich wurde die Formfaktoren mit Hilfe von Polarisationsobservablen über eine zweite, unabhängige Methode zuverlässig zu messen, wurden Diskrepanzen entdeckt, die unser Verständnis über die Struktur des Protons in Frage stellen [5]. Die Diskrepanz zwischen den Ergebnissen beider Messmethoden für fundamentale Größen, die Formfaktoren, ist bis heute ungeklärt. Es wird allerdings vermutet, dass sie durch Terme höherer Ordnung in α verursacht wird, die bisher vernachlässigt wurden und in unterschiedlicher Weise in die Auswertung der Experimente einfließen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der theoretischen Beschreibung der elastischen Elektron-Proton-Streuung, insbesondere den Beiträgen höherer Ordnung und ihren Einfluss auf die Diskrepanz in der Messung der Formfaktoren. Kapitel 2 führt die beiden experimentellen Methoden zur Messung der elektromagnetischen Formfaktoren ein, die Rosenbluth-Separation und den Polarisations-transfer. Die fundamentale Diskrepanz zwischen den Ergebnissen beider Methoden wird erörtert. Als Ursache dieser werden weitgehend Korrekturen höherer Ordnung verantwortlich gemacht, so genannte Zwei-Photon-Beiträge. Es wird ein kurzer Überblick über die verschiedenen Strahlungskorrekturen gegeben. Dabei

wird verdeutlicht, dass insbesondere die Zwei-Photon-Beiträge aus der Anomalie bisher unberücksichtigt blieben. Diese können als die Kopplung des Protons an die es umgebende Pionwolke und den anschließenden anomalen Zerfall der Pionen in zwei Photonen betrachtet werden. Leider ist es nach dem heutigen Stand der Wissenschaft nicht möglich diese anomalen Beiträge gänzlich modellunabhängig zu berechnen.

In Kapitel 3 wird eines der einfachsten Modelle, die sowohl das Bild der Pionwolke unterstützen als auch die Anomalie beinhalten, vorgestellt. Dieses Modell wurde von Skyrme vorgeschlagen und ist nach ihm benannt. In diesem Modell werden die Baryonen, bzw. das Proton, als kanonisch quantisierte Solitonlösungen einer effektiven Feldtheorie betrachtet.

Als Einführung und als Grundlage, um später die Interferenzen zu diskutieren, wird in Kapitel 4 die elastische Elektron-Proton-Streuung in niedrigster Ordnung, der so genannten Ein-Photon-Näherung, behandelt. Dabei werden die vorkommenden Formfaktoren G_E und G_M auf die Parameter des Skyrme-Modells zurückgeführt. Zum Abschluss des Kapitels wird die Rosenbluth-Formel hergeleitet, auf der die Methode der Rosenbluth-Separation zur Messung der Formfaktoren beruht.

Neben dem Beitrag der Anomalie zur elastischen Elektron-Proton-Streuung enthält das Modell weitere effektive Kopplungen. Die aus dem nicht-linearen- σ -Modell Resultierende ist dabei von führender chiraler Ordnung. In Kapitel 5 wird der Anteil der effektiven Zwei-Photon-Kopplung des nicht-linearen- σ -Modells berechnet und gezeigt, dass dieser jedoch vernachlässigt werden kann, sofern der Impulsübertrag der Streuung verhältnismäßig groß gegenüber der Elektronmasse ist.

In Kapitel 6 wird der Zerfall des neutralen Pions in ein Elektron-Positron-Paar betrachtet. Dies ist nötig, um den Einfluss der Anomalie auf die Elektron-Proton-Streuung behandeln zu können. Es stellt sich heraus, dass die anomale Zwei-Photon-Kopplung, wie sie sowohl im Zerfall als auch in der Elektron-Proton-Streuung vorkommt, ultraviolett divergent ist. Zur Renormierung wird, wie von Savage, Luke und Wise [6] vorgeschlagen, ein effektiver *Counterterm* verwendet, dessen Konstante an den experimentell gemessenen Wirkungsquerschnitt des Pion-Zerfalls angepasst wird. Da die anomale Kopplung der Elektron-Proton-Streuung durch denselben Lagrangian beschrieben wird wie der Zerfall, ist es möglich bei dieser denselben *Counterterm* zu verwenden.

Die Korrekturen, die aus Termen höherer Ordnung zum Wirkungsquerschnitt resultieren, beinhalten neue Formfaktoren. Diese werden in Kapitel 7 im Rahmen des Skyrme-Modells berechnet. Dabei wird der Schwerpunkt auf die Formfaktoren der anomalen Kopplung gelegt.

Kapitel 8 beschäftigt sich mit dem Beitrag der Anomalie zur elastischen Elektron-Proton-Streuung. Hier wird das Übergangsmatrixelement resultierend aus der Anomalie in niedrigster Ordnung, dem Zwei-Photon-Austausch, hergeleitet. Es wird gezeigt, dass in dieser Ordnung zur unpolarisierten, elastischen Elektron-

Proton-Streuung nur eine bestimmte Linearkombination der Formfaktoren beitragen kann.

Der Anteil der Anomalie an der unpolarisierten, elastischen Elektron-Proton-Streuung wird in Kapitel 9 untersucht. Dazu wird die Interferenz des Ein-Photon mit dem Zwei-Photon-Matrixelement berechnet. Die Abhängigkeit der Ergebnisse von den Parametern des Modells wird abgeschätzt. Die Korrekturen zur Ein-Photon-Näherung werden herausgestellt und die Auswirkungen auf die Rosenbluth-Separation sowie die Diskrepanz der Messmethoden wird erörtert. Die Elektron-Neutron-Streuung wird ebenfalls betrachtet.

Im Anschluss an eine kurze Zusammenfassung, die mit einem Ausblick kombiniert ist, folgen die Anhänge. In Teil A wird auf die Technik zur Berechnung der Formfaktoren eingegangen. Insbesondere werden benötigte Formeln zur Auswertung des impulsabhängigen Anteils hergeleitet. Anhang B gibt eine kurze Einführung in die Polarisation der Elektron-Proton-Streuung. Im mathematischen Anhang C ist eine Übersicht über die am häufigsten benötigten Gleichungen und Konventionen zu finden, die teilweise auch in den einzelnen Kapiteln hergeleitet wurden.

2. Elektromagnetische Formfaktoren des Nukleons

Nach dem heutigen Stand der Wissenschaft setzt sich die uns bekannte Materie aus einzelnen, miteinander wechselwirkenden Teilchen zusammen. Die fundamentalen Kräfte sind die elektromagnetische, die schwache, die starke und die Gravitationskraft. Die Bausteine unserer Materie lassen sich in echte Elementarteilchen, das bedeutet Punktteilchen ohne innere Struktur, und ausgedehnte Teilchen mit einer inneren Struktur unterteilen. Zu Ersteren werden die Leptonen, also Elektronen, Myonen usw. gezählt und zu Letzteren die Hadronen. Als Hadronen werden alle Teilchen bezeichnet, die über die starke Wechselwirkung interagieren. Darunter fallen die Mesonen, z. B. das Pion, als auch die Baryonen, wie das Proton und Neutron.

Die Struktur der stabilen Baryonen, des Protons und Neutrons, kurz Nukleons, zu charakterisieren ist eine fundamentale Aufgabe im Bereich der hadronischen Physik. Dabei bietet die elektromagnetische Wechselwirkung eine hervorragende Möglichkeit diese Struktur zu erforschen, da sie die Interaktion eines strukturlosen Leptons mit einem Hadron beinhaltet. Insbesondere Elektronen gelten als perfekte Proben, um die innere Struktur zu erforschen. Entsprechende Experimente wurden bereits in den fünfziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts durchgeführt. Einer der frühesten Pioniere auf diesem Gebiet war Hofstadter, der mit seiner Arbeitsgruppe Messungen der elastischen Elektron-Proton-Streuung durchführte [7].

Aufgrund des kleinen Wertes der Feinstrukturkonstanten $\alpha = e^2/4\pi \sim 1/137$ scheint es gerechtfertigt die Elektron-Nukleon-Streuung in der Born'schen Näherung zu betrachten und die Terme höherer Ordnung in α zu vernachlässigen. Dabei wird implizit angenommen, dass das Ein-Photon-Diagramm (Abb. 2.1) den Zusammenhang zwischen Wirkungsquerschnitt und Struktur des Nukleons bestimmt.

Die Übergangsamplitude lässt sich als Produkt der Matrixelemente der vierkomponentigen leptonischen und hadronischen Ströme schreiben:

$$i\mathcal{M}_\gamma = i\frac{e^2}{q^2}\langle L^\mu\rangle\langle J_\mu\rangle. \quad (2.1)$$

Der Vierer-Vektor $q = p_2 - p_1$ beschreibt den Impuls, der von dem Elektron auf das Nukleon übertragen wird. In der Born'schen Näherung ergeben sich die

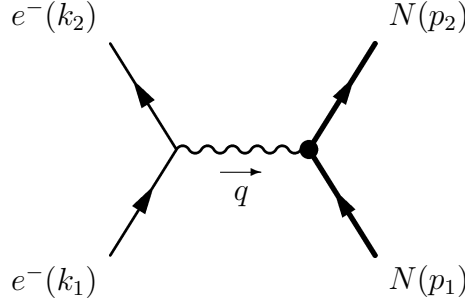


Abb. 2.1: Feynman-Diagramm für den Ein-Photon-Austausch bzw. Born'sche Näherung der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung.

Ströme zu

$$\langle L^\mu \rangle = \bar{u}^s(k_2) \gamma^\mu u^{s'}(k_1), \quad \langle J_\mu \rangle = \bar{U}^r(p_2) \left[F_1(Q^2) \gamma_\mu + F_2(Q^2) \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M} \right] U^{r'}(p_1). \quad (2.2)$$

Dabei ist $Q^2 = -q^2$ das Negative des Quadrates der invarianten Masse des virtuellen Photons in der Ein-Photon-Näherung und M die Nukleonmasse. Die Dirac- F_1 und Pauli-Formfaktoren F_2 sind die einzigen erlaubten Formfaktoren, wenn von der allgemeinen Zerlegung des Matrixelements Lorentzkovarianz, Stromerhaltung und Erhaltung der Parität gefordert werden [8, 9]. Es ist üblich die elektrischen und magnetischen Formfaktoren

$$G_E = F_1 - \frac{Q^2}{4M^2} F_2 \quad \text{und} \quad G_M = F_1 + F_2, \quad (2.3)$$

welche sich als Linearkombination von F_1 und F_2 ergeben, anstelle der Dirac- und Pauli-Formfaktoren zu verwenden. Für $Q^2 = 0$ entsprechen die Formfaktoren den statischen Werten der Ladungs- bzw. Magnetisierungsverteilung des Protons und Neutrons

$$\begin{aligned} G_E^p(0) &= 1, & G_M^p(0) &= \mu_p = 2,79, \\ G_E^n(0) &= 0, & G_M^n(0) &= \mu_n = -1,91. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die μ 's werden als magnetische Momente bezeichnet und sind hier in Einheiten des Kernmagnetons $\mu_N = e/(2M)$ angegeben. Der Wirkungsquerschnitt der unpolarisierten, elastischen Elektron-Proton-Streuung ist eine Funktion zweier kinematischer Variablen, üblicherweise vom Impulsübertrag

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2} \quad (2.5)$$

und der Polarisation des virtuellen Photons

$$\varepsilon = \frac{\nu^2 - M^4 \tau (1 + \tau)}{\nu^2 + M^4 \tau (1 + \tau)}, \quad \nu = \frac{1}{4} (k_1 + k_2) \cdot (p_1 + p_2), \quad (2.6)$$

die über

$$\varepsilon = [1 + 2(1 + \tau) \tan^2(\theta_e/2)]^{-1} \quad (2.7)$$

mit dem Streuwinkel des Elektrons θ_e im Laborsystem zusammenhängt. Die Größen τ und ε , wie sie in Gl. (2.5) und (2.6) definiert sind, sind Lorentz-Skalare. Der Wirkungsquerschnitt lässt sich auf die Form

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} (G_E^2 + \frac{\tau}{\varepsilon} G_M^2) / (1 + \tau). \quad (2.8)$$

bringen. Der Mott-Wirkungsquerschnitt ist im Laborsystem [10]

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2}{2E_{\text{beam}}^2 \sin^4(\theta_e/2)} \frac{E_e}{E_{\text{beam}}} \cos^2(\theta_e/2) \quad (2.9)$$

mit der Energie des ein- E_{beam} und auslaufenden E_e Elektrons.

2.1. Proton-Formfaktoren aus der Rosenbluth-Separation

Die Rosenbluth-Methode war bis zu den 1990ern die einzige Möglichkeit um Werte für die Formfaktoren G_E^2 und G_M^2 zu erhalten. Dazu wird der Wirkungsquerschnitt der unpolarisierten, elastischen Elektron-Proton-Streuung bei verschiedenen Elektron-Streuwinkeln θ_e und gleichem Q^2 gemessen. Üblicherweise wird dazu sowohl die Energie des Elektronenstrahls als auch der Streuwinkel über einen weiten Bereich variiert und teilweise interpoliert. Wird der reduzierte Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_R = \frac{\varepsilon(1 + \tau)}{\tau} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{exp}} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = G_M^2 + \frac{\varepsilon}{\tau} G_E^2 \quad (2.10)$$

für festes Q^2 als Funktion von ε aufgetragen, so ergibt sich als Achsenabschnitt das Quadrat des magnetischen Formfaktors und als Steigung das des elektrischen Formfaktors skaliert mit $1/\tau$. In Abbildung 2.2 ist als Beispiel die Rosenbluth-Separation von Andivahis et. al. [11] gezeigt, die die Formfaktoren in einem weiten Bereich $Q^2 = 1,75 \text{ GeV}^2$ bis $Q^2 = 8,83 \text{ GeV}^2$ gemessen haben. Zu erkennen ist u. A. die Abflachung der Geraden zu größeren Impulsüberträgen hin, die auf der Skalierung des elektrischen Formfaktors mit Q^2 beruht. Dies hat zur Folge, dass der magnetische Formfaktor mit steigendem Q^2 den Wirkungsquerschnitt stärker dominiert und die Extraktion des elektrischen Formfaktors schwieriger wird. Bereits kleine Änderungen des Wirkungsquerschnitts können größere Änderungen im extrahierten elektrischen Formfaktor bewirken, vorausgesetzt sie weisen eine starke ε Abhängigkeit auf. Abbildung 2.3 zeigt den elektrischen und magnetischen

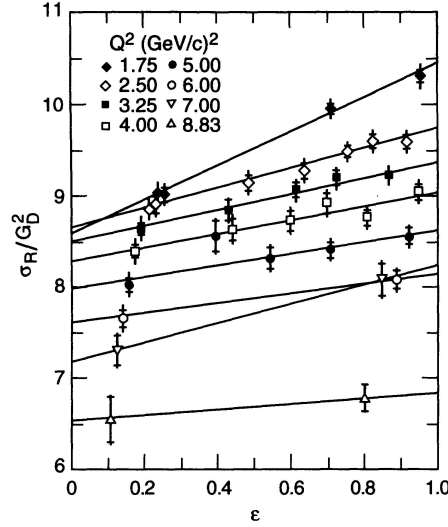


Abb. 2.2: Demonstration der Rosenbluth-Separations-Methode (Abb. 22 in Ref. [11]). Aufgetragen ist der reduzierte Wirkungsquerschnitt σ_R geteilt durch den Dipol-Formfaktor $G_D = (1 + Q^2/0,71 \text{ GeV}^2)^{-2}$ gegen ε .

Formfaktor in Abhängigkeit von Q^2 , wie sie in Experimenten der Rosenbluth-Separation gemessen wurden. Es ist ersichtlich, dass die Bestimmung des elektrischen Formfaktors aus den gemessenen Wirkungsquerschnitten für großes Q^2 nur annähernd gelingt, während G_M^2 konsistent bis zu $Q^2 = 30 \text{ GeV}^2$ ermittelt wurde. Beide Datensätze legen nahe, dass die Formfaktoren vergleichbar mit Q^2 skalieren. Eine komplette Übersicht über die Experimente zur Rosenbluth-Separation lässt sich im Artikel von Arrington [5] finden. Dieser bestätigt, dass die Rosenbluth-Messungen der elektromagnetischen Formfaktoren des Protons mit dem Verhältnis

$$R^{\text{ros}} = \frac{\mu_p G_E}{G_M} \approx 1 \quad (2.11)$$

vereinbar sind.

2.2. Proton-Formfaktoren aus Polarisationsobservablen

Die Rosenbluth-Methode zur Messung der Formfaktoren besitzt den Nachteil, dass für große Impulsüberträge die Extraktion des elektrischen Formfaktors G_E schwierig ist. Bereits 1968 schlugen Akhiezer und Rekalov [20] vor, die Formfaktoren des Nukleons in Polarisationsexperimenten zu bestimmen. Im Speziellen betrachteten sie die Streuung eines longitudinal polarisierten Elektronenstrahls an einem unpolarisierten Nukleon, wobei die Polarisationskomponenten des gestreuten Nukleons gemessen werden. Wird das Koordinatensystem so gewählt [21],

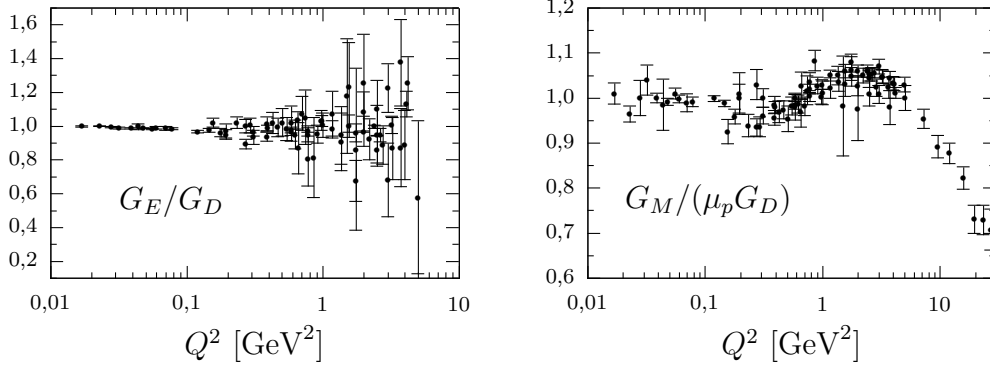


Abb. 2.3: Der elektrische G_E/G_D (links) und magnetische $G_M/\mu_p G_D$ (rechts) Formfaktor des Protons gemessen durch die Rosenbluth-Separations-Methode [11–19] im Verhältnis zum Dipol-Formfaktor.

dass im Laborsystem der übertragene Impuls in z -Richtung zeigt und die Streuebene der xz -Ebene entspricht, so findet man für die transversale $N_\perp = N_x$ und longitudinale $N_\parallel = N_z$ Polarisationskomponente¹ [20, 22]

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\tau} \sigma_R N_x &= -2\sqrt{\tau(1+\tau)} G_E G_M \tan \frac{\theta_e}{2} \\ \frac{\varepsilon}{\tau} \sigma_R N_z &= \frac{1}{M} (E_{\text{beam}} + E_e) \sqrt{\tau(1+\tau)} G_M^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei E_{beam} und E_e die Energien des einlaufenden und gestreuten Elektrons bezeichnen und θ_e den Streuwinkel des Elektrons im Laborsystem. Die Polarisationskomponenten beinhalten einen Interferenzterm der Form $G_E G_M$, der es ermöglicht, G_E bei dominierendem G_M zu messen. Das Verhältnis von elektrischem zu magnetischem Formfaktor

$$\frac{G_E}{G_M} = -\frac{N_x}{N_z} \frac{E_{\text{beam}} + E_e}{2M} \tan \frac{\theta_e}{2} \quad (2.13)$$

lässt sich aus dem Verhältnis der transversalen N_x und longitudinalen N_z Polarisationskomponente berechnen. In die Messung des Verhältnisses G_E/G_M geht weder die genaue Polarisation des Strahls noch die Leistung des Polarimeters ein.

Wie Gleichung (2.13) veranschaulicht, birgt die Messung der Formfaktoren gemäß der Polarisationsmethode gegenüber der Rosenbluth-Methode gewisse Vorteile. Zum einen ist für ein gegebenes Q^2 nur noch eine einzige Messung notwendig, vorausgesetzt dass beide Polarisationskomponenten gleichzeitig gemessen werden, was den systematischen Fehler verbunden mit der Änderung des Winkels sowie

¹Bei der elastischen Elektron-Proton-Streuung wird in der Regel ein Elektron an einem im Laborsystem ruhenden Nukleon gestreut. Damit entspricht die Bewegungsrichtung des Nukleons nach der Streuung der des Impulsübertrags.

der Energie des Strahls erheblich reduziert. Zum anderen wird das Verhältnis G_E/G_M unmittelbar gemessen.

Alternativ zur Messung der Polarisationskomponenten des gestreuten Protons diskutierte Dombey 1969 in einem Übersichtsartikel [23] die Streuung polarisierter Elektronen an polarisierten Protonen. In der Ein-Photon-Näherung ist der Wirkungsquerschnitt der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung mit unpolarisierten Endzuständen eine Summe aus unpolarisierten und polarisierten Anteilen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{pol}} = \Sigma + h\Delta. \quad (2.14)$$

Dabei ist h die Helizität des Elektronenstrahls, Σ der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt gemäß Gl. (2.8) und Δ der polarisierte Anteil. Dieser kann als

$$\Delta = -2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \tan\frac{\theta_e}{2} \sqrt{\frac{\tau}{1+\tau}} \left(\sqrt{\tau[1+(1+\tau)\tan^2\frac{\theta_e}{2}]N_z G_M^2 + N_x G_E G_M} \right) \quad (2.15)$$

geschrieben werden [24, 25]. Die Polarisationskomponenten N_x und N_z des Nukleons entsprechen der obigen Definition, beziehen sich aber in Gl. (2.15) auf den Anfangszustand des Nukleons vor der Streuung. Die Polarisationskomponente N_y des Nukleons senkrecht zur Streuebene geht nicht in den Wirkungsquerschnitt ein. Die physikalische Asymmetrie A ist definiert als das Verhältnis aus Differenz und Summe der Wirkungsquerschnitte der zwei Helizitäten ($h = \pm 1$) des eingehenden Elektrons

$$A = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{\sigma_+ + \sigma_-} = \frac{\Delta}{\Sigma}. \quad (2.16)$$

Für den Fall, dass das Nukleon senkrecht zum Impulsübertrag \vec{q} und innerhalb der Streuebene polarisiert ist ($\vec{N} = \vec{e}_x$), vereinfacht sich die Asymmetrie zu

$$A = \frac{-2\sqrt{\tau(1+\tau)}\tan(\theta_e/2)\frac{G_E}{G_M}}{\left(\frac{G_E}{G_M}\right)^2 + \frac{\tau}{\varepsilon}}. \quad (2.17)$$

In der Regel ist $(G_E/G_M)^2$ verhältnismäßig klein, so dass die Asymmetrie proportional zu G_E/G_M ist.

2.2.1. Messung der Formfaktoren mit Polarisationsexperimenten

Beide Methoden der Polarisationsmessung werden verwendet, um die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons zu bestimmen. Das erste Experiment zur Messung der Formfaktoren des Protons durch Polarisationsobservablen wurde

am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) von Alguard et al. [26] durchgeführt. Diese maßen die Asymmetrie bei der Streuung eines longitudinal polarisierten Elektronenstrahls an polarisierten Protonen. Aus den Ergebnissen folgerten sie, dass die Formfaktoren G_E und G_M dasselbe Vorzeichen besitzen. Es musste aber festgestellt werden, dass der praktische Nutzen der Polarisationsexperimente durch zu niedrige Zählraten eingeschränkt war.

Die nächste Messung der Polarisationsobservablen in der elastischen Elektron-Proton-Streuung wurde 1995 am MIT-Bates Linear Accelerator Center durchgeführt [27, 28]. Hier wurde ein polarisierter Elektronenstrahl an unpolarisierten, freien Proton ebenso wie in Deuterium gebundenen Protonen gestreut. Anschließend wurden die Polarisationskomponenten des Protons mit Hilfe eines Graphit-Analysators gemessen. Die Kollaboration kam zum Ergebnis, dass Polarisationsexperimente sehr vielversprechend zur Ermittlung der Formfaktoren sind.

In den folgenden Jahren wurden zahlreiche Experimente zur Messung der Formfaktoren mittels Polarisationsobservablen durchgeführt. Das Verhältnis der Formfaktoren $\mu_p G_E/G_M \approx 1$ wurde am Mainzer Microtron MAMI [29] für Impulsüberträge um $0,4 \text{ GeV}^2$ gemessen, in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Rosenbluth-Experimente. Die Resultate wurden von der BLAST Gruppe am MIT-Bates [30] bestätigt, welche für einen Impulsübertrag von $0,15 \text{ GeV}^2$ bis $0,65 \text{ GeV}^2$ Polarisationsmessungen durchführten.

Am Jefferson Lab wurde das Verhältnis der Formfaktoren in aufeinander folgenden Polarisationsmessungen [31–36] bis hin zu Impulsüberträgen von $5,6 \text{ GeV}^2$ bestimmt. Dabei wurde festgestellt, dass $R = \mu_p G_E/G_M$ systematisch zu höheren Impulsüberträgen hin abfällt und durch

$$R^{\text{pol}} = 1,0 - 0,14(Q^2/\text{GeV}^2 - 0,3) \quad (2.18)$$

beschrieben werden kann. Dieses Verhalten steht im deutlichen Widerspruch zu den Beobachtungen der Rosenbluth-Experimente. In Abbildung 2.4 ist die Inkonsistenz der Ergebnisse der Polarisationsmessungen mit denen der Rosenbluth-Extraktion bei großen Werten für Q^2 erkennbar. Arrington [5, 37] führte 2003 eine globale Analyse der verfügbaren Rosenbluth-Resultate durch und kam zu dem Schluss, dass die Messungen mit der Rosenbluth-Methode zwar in sich konsistent sind aber eine ungeklärte Diskrepanz zu den Polarisationsmessungen aufweisen. Er deutete darauf hin, dass dies in einem fundamentalen Problem in einer der beiden Messmethoden begründet sein könnte. Eine als wahrscheinlich angesehene Erklärung für die Diskrepanz sind fehlende Korrekturen jenseits der Born'schen Näherung zum Wirkungsquerschnitt [38]. Dies würde bedeuten, dass sich die tatsächlichen Formfaktoren, welche durch die Struktur des Nukleons bestimmt sind, von den Formfaktoren, welche die Abweichung von einer Punktstreuung parametrisieren, unterscheiden. Beide Messmethoden würden unterschiedlicher Korrekturen bedürfen. Diese sind erwartungsgemäß bei der Rosenbluth-Extraktion stärker, da die Bestimmung des elektrischen Formfaktors dabei sehr anfällig für Änderungen im Wirkungsquerschnitt ist.

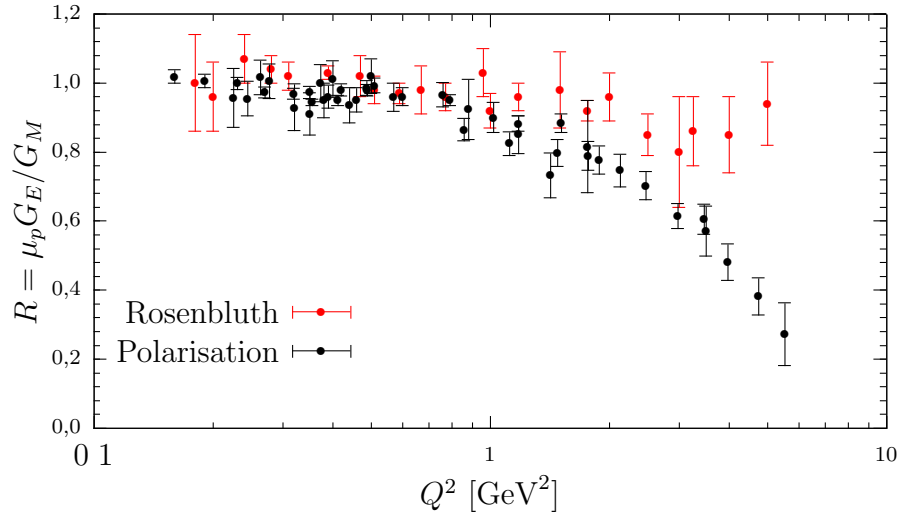


Abb. 2.4: Der Quotient des elektrischen und magnetischen Proton-Formfaktors wie er unmittelbar in Polarisationsexperimenten gemessen wurde [27, 29, 30, 32–36] im Vergleich zu den gesammelten Ergebnissen der Rosenbluth-Extraktion (Abb. 6 in [5]).

2.3. Strahlungskorrekturen

Bereits in den 1960ern beschäftigten sich Mo und Tsai [39, 40] mit Strahlungskorrekturen, welche den Wirkungsquerschnitt der elastischen Elektron-Proton-Streuung beeinflussen. Sie berechneten praktisch alle führenden Terme und fanden einen Effekt von der Größenordnung 10-30% zur Born'schen Näherung. Ihre Ergebnisse wurden in fast allen Experimenten angewandt, um die Formfaktoren der Ein-Photon-Näherung, Gl. (2.2), aus den experimentellen Daten zu extrahieren. In einer neueren Arbeit ergänzten Maximon und Tjon [41] den Einfluss der Struktur des Protons auf die Vertex-Korrekturen. Zudem beseitigten sie einige der *Soft-Photon*-Näherungen und berechneten den Beitrag aus der Emission niederenergetischer Photonen exakt. Sie stellten Abweichungen zu den Berechnungen von Mo und Tsai von weniger als 2% fest. Die verschiedenen Diagramme, die zusätzlich zur Born'schen Näherung zum Wirkungsquerschnitt beitragen, sind für die niedrigsten Ordnungen in α in Abbildung 2.5 dargestellt. Die oberste Zeile zeigt die Strahlenkorrekturen, welche das Elektron betreffen. Die Terme Abb. 2.5 (a,c,d) können mit den Standardmethoden der QED berechnet werden. Sie hängen vom experimentellen Aufbau ab, z. B. der Auflösung für das emittierte Photon, und werden unmittelbar bei der Auswertung der Experimente berücksichtigt. Die Vakuum-Polarisation, Abb. 2.5 (b), lässt sich, wegen hadronischer Beiträge zur Schleife, nicht exakt sondern nur in Modellen berechnen. Sie ist allerdings unabhängig vom Streuwinkel und beeinflusst daher die Rosenbluth-Extraktion nur gering. Prozesse, bei denen ein zusätzliches Photon ans Nukleon koppelt, Abb. 2.5 (e,f,g), zeigen ebenfalls nur geringen Einfluss auf die Diskrepanz der Messmethoden. Der infrarot divergente Anteil der Zwei-Photon-Austausch-

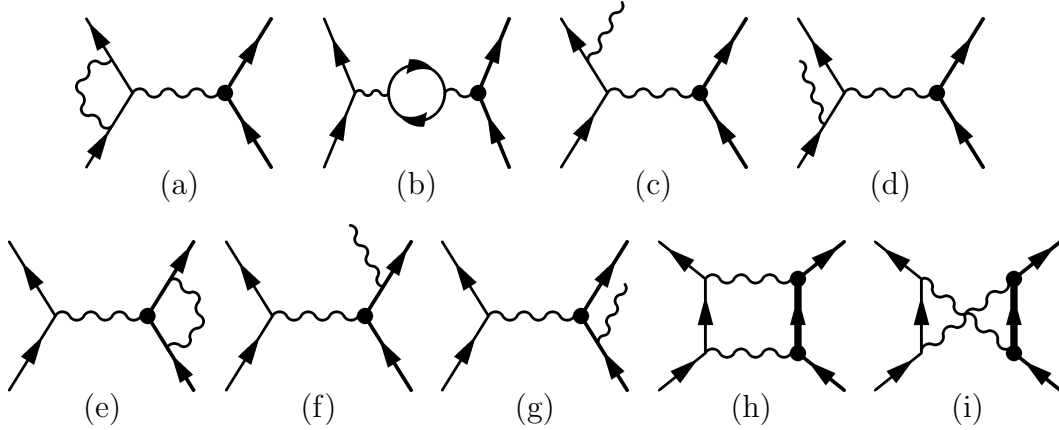


Abb. 2.5: QED Strahlungskorrekturen niedrigster Ordnung zur elastische Elektron-Nukleon-Streuung: (a) Elektron-Vertex-Korrekturen; (b) Vakuumpolarisation; (c,d) Elektron-Bremsstrahlung; (e) Nukleon-Vertex-Korrekturen; (f,g) Nukleon-Bremsstrahlung; (h,i) Zwei-Photon-Austausch (*Box* und *x-Box*)

Prozesse 2.5 (h,i) ist bereits in der Arbeit von Mo und Tsai [39,40] enthalten, wobei eines der beiden involvierten Photonen als niederenergetisch genähert wurde. Da beide Diagramme (h,i) den Formfaktor der virtuellen Comptonstreuung beinhalten, ebenso wie hadronische Zwischenzustände, ist eine modellunabhängige Rechnung praktisch nicht möglich. Blunden, Melnitchouk und Tjon [42] berechneten den Zwei-Photon-Beitrag indem sie die Nukleon-Formfaktoren als Summe von Monopolen parametrisierten und bezogen in einer Arbeit mit Kondratyuk [44] auch die Δ -Resonanz als Zwischenzustand ein. Sie stellten eine starke Winkelabhängigkeit fest, die zur teilweisen Klärung der Diskrepanz zwischen Polarisations- und Rosenbluth-Experimenten führt. Zu einem vergleichbaren Ergebnis kommen auch Afanasev et. al. [43], die den Zwei-Photon-Beitrag mit Hilfe einer Quark-Parton-Darstellung der virtuellen Comptonstreuung ermittelten (*generalized parton distribution*). Die Auswirkung ihrer Ergebnisse auf die Diskrepanz der Messmethoden ist in Abbildung 2.6 gezeigt. Der Einfluss der Beiträge auf die Polarisationsobservablen konnte erwartungsgemäß auf Effekte der Größenordnung (1%) abgeschätzt werden. Eine detailliertere Zusammenstellung der Theorie als auch der Experimente zum Zwei-Photon-Austausch findet sich in den Übersichtsartikeln [10, 45].

Zusätzlich zu den Korrekturen höherer Ordnung aus Abb. 2.5 ist auch ein Beitrag der Anomalie zur elastischen Elektron-Proton-Streuung denkbar. Die zugehörige Kopplung geschieht über einen axialen Strom

$$\mathcal{L}_{\pi 2\gamma} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho \partial_\sigma \pi^0 + \text{höhere Ordnung} \quad (2.19)$$

und enthält in erster Ordnung der pionischen Felder (Abb. 2.7) eine totale Ableitung, die einen zusätzlichen Faktor der Elektronmasse m_e reproduziert. Obwohl die erste Ordnung für große Impulsüberträge unterdrückt ist, lassen sich die

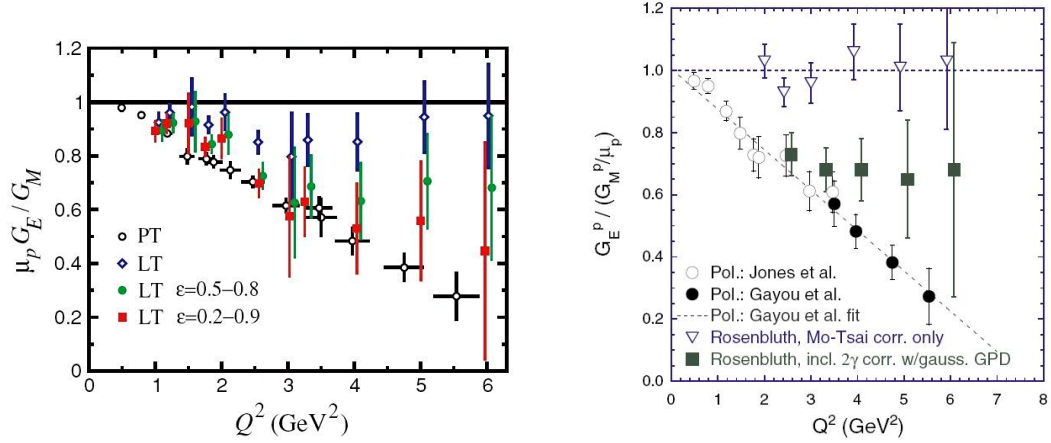


Abb. 2.6: Die Zwei-Photon-Beiträge des *Box*- und *x-Box*-Diagramms zum Quotienten der Proton-Formfaktoren (links: Abb. 5 aus [42]; rechts: Abb. 9 aus [43]). Das linke Diagramm zeigt die Beiträge wie sie bei einer Rosenbluth-Separation zwischen $\varepsilon = 0,5 - 0,8$ bzw. $\varepsilon = 0,2 - 0,9$ erscheinen würden. Zum Vergleich die Rosenbluth-Messungen, die auch als *longitudinal-transverse* (LT) Separationsmethode bezeichnet werden, (blaue Rauten bzw. Dreiecke) und Polarisationsergebnisse (schwarze Kreise).

höheren Ordnungen nicht so einfach abschätzen. Da dieser Beitrag zur elastischen Elektron-Nukleon-Streuung bisher nicht beachtet wurde, ist dessen Berechnung ein maßgebliches Ziel dieser Arbeit.

Die Anomalie, die den Zerfall des neutralen Pions in zwei Photonen ermöglicht und historisch durch diesen Prozess entdeckt wurde, ist eine grundlegende Eigenschaft der QCD. Sie entsteht durch die Verletzung klassischer Symmetrien durch Quanteneffekte [46–48]. Der ursprünglich erhaltene Nötherstrom bekommt einen zusätzlichen Beitrag durch Quantenkorrekturen und die ursprüngliche Symmetrie des klassischen Lagrangians ist keine Symmetrie der vollständigen Quantentheorie. Daher auch die Bezeichnung der Anomalie.

Der Einfluss der Anomalie auf die elastische Elektron-Nukleon-Streuung lässt sich leider nur modellabhängig berechnen, da die störungstheoretische Behandlung der QCD im Bereich der Nukleonmassen nicht anwendbar ist. Um die Nu-

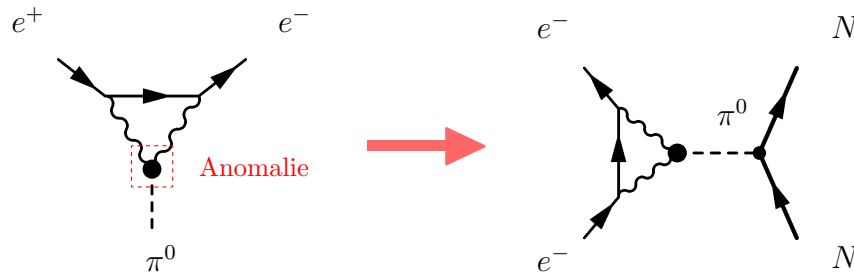


Abb. 2.7: Beitrag der Anomalie zur elastischen Elektron-Nukleon-Streuung in erster Ordnung der pionischen Felder.

kleonzustände im nichtperturbativen Sektor zu charakterisieren, muss eine effektive Theorie verwendet werden, eventuell mit der Ausnahme von Gitterrechnungen (*lattice QCD*)². Hier wird das Skyrme-Modell gewählt, da es u. A. auf einfache Weise die Anomalie (im geeichten Wess-Zumino-Term, s. Abschnitt 3.4) beinhaltet.

²Für eine kurze Zusammenfassung der verschiedenen Zugänge zur theoretischen Behandlung der Formfaktoren siehe [49].

3. Das Skyrme-Modell

3.1. Soliton-Modelle

Die Quantenchromodynamik (QCD) wird heute als grundlegende Theorie zur starken Wechselwirkung angesehen. Die Wechselwirkung wird als Austausch von masselosen Quanten (Gluonen) verstanden und im Rahmen einer nicht abelschen Eichgruppe, der Farb (*color*) $SU_c(3)$, beschrieben. Den Gluonen als Eichbosonen wird die adjungierte Darstellung zugeordnet und den so genannten Quarks, von denen bisher sechs so genannte *flavor* u,d,s,c,b,t bekannt sind, als Elementarteilchen die fundamentale. Die QCD kann von der Struktur her als eine Verallgemeinerung der QED betrachtet werden. Die Abhängigkeit der QCD-Kopplungskonstante von der Energieskala führt zu den Eigenschaften der asymptotischen Freiheit (*asymptotic freedom*) für hohe Energien ebenso wie zum Zusammenschluss der Quarks und Gluonen zu farbneutralen Hadronen (*confinement*).

Die aus der QCD gewonnenen Ergebnisse sind in hervorragender Übereinstimmung zu den experimentellen Daten, z. B. bei der stark inelastischen Streuung. Allerdings werden Berechnungen der QCD im Bereich niedriger Energien aufgrund der stärker werdenden Kopplung praktisch unmöglich. Die QCD lässt sich hier nicht mehr störungstheoretisch behandeln. Daher ist es nötig effektive Theorien zu verwenden, die aus der QCD abgeleitet oder zumindest motiviert sind. Zur Bildung solcher Theorien hat es sich als nützlich herausgestellt, von den Symmetrien der QCD auszugehen, im Speziellen von der (näherungsweise) chiralen Symmetrie, die im Folgenden betrachtet wird.

Werden die Quarkmassen in der QCD vernachlässigt, so entkoppeln die rechts- und linkshändigen Fermionen (Quarks)

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\psi. \quad (3.1)$$

Der QCD Lagrangian wird dann invariant unter globalen, unitären, *flavor* Transformationen der rechts- und linkshändigen Felder. Neben den offensichtlichen Symmetrien, wie Lorentzinvarianz, Eichsymmetrie und den diskreten Symmetrien der Raum-, Ladungs- und Zeitspiegelung besitzt der Lagrangian eine

$$U_L(N_f) \times U_R(N_f) = SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_V(1) \times U_A(1) \quad (3.2)$$

Symmetrie, wobei N_f die Anzahl der Quark*flavor* zählt, deren Masse vernachlässigt wird. Es stellt sich heraus, dass die unterschiedlichen Teile dieser Symmetrie sehr verschieden in der Natur realisiert sind:

- Der zur $U_V(1)$ Symmetrie gehörende Strom $V_\mu^0 = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ ist im Standardmodell der QCD exakt erhalten und führt zur Erhaltung der Quark- bzw. Baryonzahl.
- Der $U_A(1)$ Strom $A_\mu^0 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ ist auch bei vernachlässigbaren Quarkmassen nicht erhalten und wird durch Quanteneffekte gebrochen. Dies spiegelt die $U_A(1)$ Anomalie wieder.

Die verbleibende chirale Symmetrie könnte als Wigner-Weyl oder Nambu-Goldstone-Mode realisiert sein. Ersteres würde bedeuten, dass der Grundzustand (Vakuum) invariant unter Transformationen der Symmetrie ist und diese im Energiespektrum der Teilchen durch Multipletts manifestiert ist. Da Zustände unterschiedlicher Chiralität unterschiedliche Parität besitzen, würde eine Entartung dieser Zustände folgen, falls die Vakuumkonfiguration die chirale Symmetrie nicht brechen würde. In der Natur finden sich zwar (näherungsweise) $SU_V(N_f)$ Multipletts mit $N_f = 2,3$, allerdings keine Entartung der Parität. Daraus wird gefolgert, dass die chirale Symmetrie als Nambu-Goldstone-Mode realisiert und spontan gebrochen ist, mit den pseudoskalaren Mesonen als Goldstone-Bosonen. Für den Fall, dass die Massen der beiden leichtesten Quarks (*up* und *down*) vernachlässigt werden, treten für $N_f = 2$ die Pionen π^\pm, π^0 als Goldstone-Bosonen auf. Ihre geringe Masse von etwa $m_\pi = 138$ MeV resultiert einzig aus dem Quarkmassenterm der QCD, der die chirale Symmetrie explizit bricht.

Für die Konstruktion einer effektiven Theorie bei niedrigen Energien ist es naheliegend, von den masselosen Moden, den Goldstone-Bosonen auszugehen. Die Frage ist, ob diese Vermutung begründet ist. Bereits 1973 veranlasste das Fehlen eines kleinen Parameters, nach dessen Ordnung sich die Wechselwirkungsterme der QCD bei niedrigen Energien entwickeln lassen, 't Hooft [50, 51] die QCD auf N_c Farben zu verallgemeinern, in der Hoffnung, dass sich die Theorie im Grenzwert vieler Farben vereinfachte. Es stellte sich heraus, dass ein solcher Grenzwert existiert und die QCD für $N_c \rightarrow \infty$ als eine Theorie effektiver, lokaler Mesonfelder mit effektiven, lokalen Kopplungen der Ordnung $1/N_c$ betrachtet werden kann. Witten [52] argumentierte 1979, dass in diesem Grenzwert die Massen der Baryonen mit N_c skalieren, während alle anderen Gleichungen, die die Baryongröße, -form oder (Baryon-Baryon, Baryon-Meson) Streuung bestimmen unabhängig von der Zahl der Farben N_c sind. Dieses Verhalten ist charakteristisch für Solitonlösungen¹ nicht-linearer Feldtheorien [53]. Was zur Vermutung führte, dass Baryonen als Solitonlösungen effektiver Mesonen-Theorien, die im *large- N_c* Grenzwert äquivalent zur QCD sind, betrachtet werden können. Die Größe $1/N_c$ kann auch im Skyrme-Modell als Entwicklungsparameter betrachtet werden. Diese Arbeit beschränkt sich jedoch weitgehend auf den physikalischen Fall $N_c = 3$.

¹Als Solitonen werden die (klassischen) Lösungen einer nicht-linearen Feldtheorie bezeichnet, die eine lokalisierte, endliche Energiedichte besitzen.

3.2. Der effektive Lagrangian

Eines der einfachsten Baryon-Modelle mit Solitonlösungen ist das *Zwei-Flavor-Skyrme-Modell*. Dieses stellt eine effektive Mesonen-Theorie dar. Die grundlegenden Freiheitsgrade sind die Pionen und der Lagrangian erfüllt alle Eigenschaften der chiralen Symmetrie. Da es um eine effektive Theorie für niedrige Energien geht, ist es zudem sinnvoll Terme mit möglichst wenigen Ableitungen (Impulsen) zu betrachten. Alle diese Kriterien zeichnen den Lagrangian des nicht-linearen- σ -Modells eindeutig aus

$$\mathcal{L}^{nl\sigma} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \quad (3.3)$$

Dabei werden ausgehend von einer $SU(2)$ Symmetrie die Pionfelder $\vec{\pi}$ in der kompakten Form

$$U = \exp\left(i \frac{\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}}{f_\pi}\right) \quad (3.4)$$

zusammengefasst. Der Vektor $\vec{\tau}$ besteht aus den Generatoren der $SU(2)$, im Falle der fundamentalen Darstellung aus den Pauli-Matrizen τ_i . Das Modell besitzt allerdings keine Solitonlösungen, da diese nicht stabil gegenüber Skalentransformationen wären und kollabieren würden. Dieses Verhalten rührt daher, dass die Lagrangedichte zweiten Grades in den Ableitungen ist. Skyrme [54] schlug daher zur Stabilisierung der Lösungen die Hinzunahme eines weiteren Terms vor:

$$\mathcal{L}^{Skyrme} = \frac{1}{32e_s^2} \text{tr}([U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U] [U^\dagger \partial^\mu U, U^\dagger \partial^\nu U]). \quad (3.5)$$

Der Skyrme-Term ist die einzig mögliche Ergänzung, sofern man sich auf Terme vierter Ordnung beschränken will, die gleichzeitig nur quadratisch in den Zeitableitungen sind. Beide Lagrangians besitzen die chirale Symmetrie $SU_L(2) \times SU_R(2)$:

$$\mathcal{L}^{nl\sigma, Skyrme}(LUR^\dagger) = \mathcal{L}^{nl\sigma, Skyrme}(U), \quad L, R \in SU(2) \quad (3.6)$$

für konstante, unitäre Matrizen L, R , da unter der Spur auf eine Matrix U immer U^\dagger folgt. Für den Fall, dass

$$L = R = A : \quad AUA^\dagger = \exp\left(i \frac{\vec{\pi} \cdot A\vec{\tau}A^\dagger}{f_\pi}\right) \quad (3.7)$$

entspricht diese Operation einer Isospindrehung der Pionfelder, während $L = R^\dagger$ einer chiralen Drehung entspricht. Mit Hilfe des Nambu-Jona-Lasinio-Modells, einer effektiven Theorie der Quantenflavordynamik, die im Gegensatz zum Skyrme-Modell über Quarkfreiheitsgrade verfügt, kann gezeigt werden, dass die obigen Symmetrietransformationen L, R des chiralen Feldes U den chiralen Rotationen

der Quarkfelder $\psi_L \rightarrow L\psi_L$, $\psi_R \rightarrow R\psi_R$ entsprechen [55]. Dies ermöglicht die Identifizierung der Symmetrien des Modells mit denen der QCD und, da die meisten QCD-Matrixelemente aus Strömen der Symmetrien berechnet werden, können die im Modell berechneten Matrixelemente mit denen der QCD in Bezug gebracht werden.

Die chirale Symmetrie $L = R^\dagger$ wird durch den Massenterm der Pionen explizit gebrochen. Zusammen mit diesem Term ergibt sich der Lagrangian des Skyrme-Modells zu

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{nl\sigma} + \mathcal{L}^{Skyrme} + \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{4} \text{tr}(U + U^\dagger - 2). \quad (3.8)$$

Die Parameter des Modells, welche durch die Eigenschaften der Mesonen festgelegt sind, sind die Pion-Zerfallskonstante $f_\pi = 93$ MeV als auch die Pion-Masse $m_\pi = 138$ MeV. Die Skyrme-Konstante ist zunächst frei wählbar. Im Rahmen des Solitonbildes beschreibt das Skyrme-Modell die statischen Nukleoneigenschaften gut, wenn $e_s \approx 40$ gesetzt wird.

Die Solitonen ergeben sich als statische Lösungen der aus der Lagrangefunktion folgenden Euler-Lagrange-Gleichung für die Felder $\vec{\pi}$. Die bereits von Skyrme [56] angegebenen maximal symmetrischen Solitonen sind von der so genannten *Hedgehog-Form*²

$$U_0(\vec{r}) = \exp\left(i \sum_{a=1}^3 \tau_a \hat{r}_a F(r)\right) = \cos F(r) + i\vec{\tau} \cdot \hat{r} \sin F(r), \quad (3.9)$$

wobei $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ für den radialen Einheitsvektor und $r = |\vec{r}|$ für den Betrag des radial Vektors steht. Die Radialfunktion $F = F(r)$ wird als chiraler Winkel bzw. chirales Profil bezeichnet. Sie ist durch die Bewegungsgleichung festgelegt. Der zugehörige Lagrangian ergibt sich, indem der *Hedgehog-Ansatz* in (3.8) eingesetzt wird. Der Beitrag des nicht-linearen- σ -Modells berechnet sich zu:

$$\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}\left(\partial_\mu U_0 \partial^\mu U_0^\dagger\right) = -\frac{f_\pi^2}{2} \left(F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F\right). \quad (3.10)$$

Aus der Ableitung

$$U_0^\dagger \partial_i U_0 = i\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_i \\ \text{mit } \vec{\alpha}_i = F' \hat{r}_i \hat{r} + \sin F \cos F \partial_i \hat{r} + \sin^2 F (\hat{r} \times \partial_i \hat{r}); \quad \hat{r}_i = \frac{r_i}{r} \quad (3.11)$$

folgt der Skyrme Term:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{32e_s^2} \text{tr}\left[U_0^\dagger \partial_i U_0, U_0^\dagger \partial_j U_0\right] \left[U_0^\dagger \partial^i U_0, U_0^\dagger \partial^j U_0\right] = \frac{1}{32e_s^2} \text{tr}[\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_i, \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_j] [\vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_i, \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_j] \\ & = \frac{-1}{8e_s^2} \text{tr}(\vec{\tau} \cdot (\vec{\alpha}_i \times \vec{\alpha}_j) \vec{\tau} \cdot (\vec{\alpha}_i \times \vec{\alpha}_j)) = \frac{-1}{4e_s^2} ((\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_i)(\vec{\alpha}_j \cdot \vec{\alpha}_j) - (\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j)(\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j)) \\ & = -\frac{1}{2e_s^2 r^2} (2F'^2 \sin^2 F + \frac{\sin^4 F}{r^2}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

²Engl.: *hedgehog* = Igel

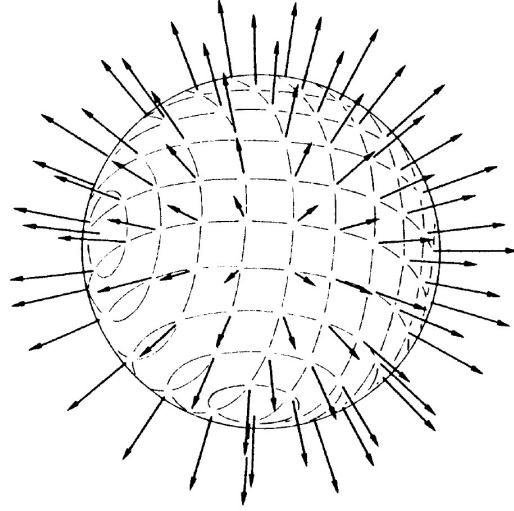


Abb. 3.1: Hedgehog-Konfiguration des Skyrme-Solitons U_0 . Die Pfeile verdeutlichen die Richtung des Isektorfeldes, das radial vom Zentrum fort zeigt.

wobei die Beziehung

$$\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j = F'^2 \hat{r}_i \hat{r}_j + \frac{\sin^2 F}{r^2} (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j) \quad (3.13)$$

verwendet wurde. Die Lagrangefunktion des *Hedgehogs* resultiert als Funktional des chiralen Profils

$$L = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left(-f_\pi^2 \left(\frac{F'^2}{2} + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) - \frac{\sin^2 F}{e_s^2 r^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{2r^2} \right) + f_\pi^2 m_\pi^2 (\cos F - 1) \right) \quad (3.14)$$

und legt die (klassische) Masse $M = -L = -\int d^3r \mathcal{L}$ der *Hedgehog*-Konfiguration fest. Wie aus dem zweiten Term der Lagrangefunktion (3.14) ersichtlich ist, setzt eine endliche statische Energie $F(0) = n\pi$, mit einer ganzen Zahl n , voraus. Anders ausgedrückt, sind Konfigurationen mit einem unterschiedlichen Wert des chiralen Profils bei $r = 0$ durch eine unendliche Energiebarriere im Skyrme-Modell getrennt (vorausgesetzt alle Konfigurationen verschwinden im Unendlichen). Damit fallen alle Konfigurationen in getrennte Klassen, die sich durch die ganze Zahl $n = F(0)/\pi$ charakterisieren lassen. Durch die Definition des topologischen Stromes

$$B^\mu = -\frac{1}{24\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} (U^\dagger \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger \partial_\sigma U) \quad (3.15)$$

lässt sich dies in eine mathematische Form bringen.³ Aus der Erhaltung des Stro-

³Der topologische Strom ist unabhängig von der Euler-Lagrange-Gleichung aus der Topologie des Modells erhalten [57].

mes $\partial_\mu B^\mu = 0$ folgt die „Ladung“

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} B^0 d^3r = \frac{1}{\pi} [F(r) - \sin F(r) \cos F(r)]_0^\infty = n. \quad (3.16)$$

Durch den Vergleich mit dem führenden Term in der Gradientenentwicklung des zugehörigen Ein-Quark-Schleifen-Erwartungswertes im NJL-Modell [58, 59] lässt sich begründen, dass der Strom B^μ den Baryonstrom darstellt und die „Ladung“ B der Baryonzahl entspricht.

3.2.1. Numerische Berechnung des chiralen Profils

Das chirale Profil genügt der klassischen Bewegungsgleichung eines Feldes

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F} = 0. \quad (3.17)$$

Aus der Bewegungsgleichung folgt die gewöhnliche Differentialgleichung [60]:

$$\tilde{F}'' = \frac{\tilde{r}^2 \sin 2\tilde{F} - \tilde{r}^2 \tilde{F}' + 2 \sin 2\tilde{F} \sin^2 \tilde{F} - 2\tilde{F}'^2 \sin 2\tilde{F} + 4\tilde{F}' \sin^2 \tilde{F} + \frac{m_\pi^2}{2f_\pi^2 e_s^2} \tilde{r}^4 \sin \tilde{F}}{\tilde{r}^2 + 4 \sin^2 \tilde{F}} \quad (3.18)$$

für $F(r) = \tilde{F}(\ln \tilde{r})$ mit der dimensionslosen Variablen $\tilde{r} = \sqrt{2}e_s f_\pi r$. Auf den Logarithmus wurde zur Verbesserung der numerischen Berechnung substituiert. Zusammen mit den Randbedingungen $F(0) = \pi$ und $F(\infty) = 0$, die die Baryonzahl des Solitons auf 1 festlegen, lässt sich das chirale Profil eindeutig bestimmen.

Anhand von Abb. 3.2 ist ersichtlich, dass das chirale Profil nicht linear verläuft und die (numerische) Lösung der Bewegungsgleichung aufwendig ist. Das verwendete numerische Programm berechnet das chirale Profil auf der Basis der Differentialgleichung (3.18) für die Variable $\ln \tilde{r}$. Dabei wird zunächst von der asymptotischen Form

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} F(r) &= \pi - a_l r \\ \lim_{r \rightarrow \infty} F(r) &= a_r \frac{e^{-m_\pi r}}{r^2} (1 + m_\pi r), \end{aligned} \quad (3.19)$$

die aus der Linearisierung der Bewegungsgleichung folgt, ausgegangen. Die Anfangswerte der Parameter a_l und a_r werden näherungsweise vorgegeben und $\tilde{F}(\ln \tilde{r})$ wird von beiden Anfangswerten ausgehend, also von links $\ln \tilde{r} = -\infty$ und rechts $\ln \tilde{r} = \infty$, bis hin zu einem gemeinsamen Punkt (*Matching-Point*) ($\ln \tilde{r} = 0$) berechnet. Dies geschieht mittels eines Runge-Kutta-Verfahrens auf der Grundlage der Differentialgleichung (3.18). Als Resultat ergeben sich die Funktionswerte von $\tilde{F}(\ln \tilde{r})$, die jeweils für beide Bereiche separat berechnet wurden. Da die Anfangswerte nur geraten sind, werden beide Berechnungen einen anderen Wert für sowohl die Funktion, wie auch ihre Ableitung, am *Matching-Point*

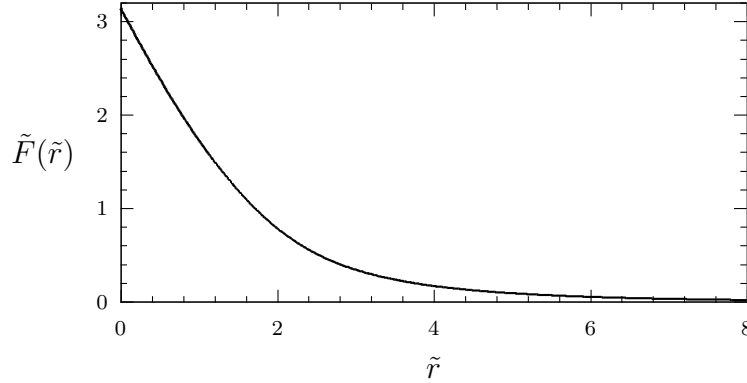


Abb. 3.2: Das chirale Profil $F(r) = \tilde{F}(\tilde{r})$ der Solitonlösung als Funktion der dimensionslosen Variablen $\tilde{r} = \sqrt{2}e_s f_\pi r$.

liefern. Das gesamte Verfahren wird mit geänderten Werten für die Parameter so oft wiederholt, bis beide Berechnungen beliebig genau übereinstimmen. Um die genauen Werte der Parameter a_l und a_r zu finden, wird dazu ein zweidimensionaler Newton-Algorithmus verwendet, der die Abweichungen am *Matching-Point* minimiert. Zuletzt wird von der Variable $\ln \tilde{r}$ auf \tilde{r} zurück substituiert, mit äquidistanten Stützpunkten in \tilde{r} . Falls benötigt, lassen sich die Funktionswerte an zusätzlichen Stützpunkten mittels Interpolation ermitteln.

3.3. Quantisierung des Solitons

Im vorherigen Abschnitt wurde die *Hedgehog*-Konfiguration als Solitonlösung der effektiven Theorie vorgestellt. Um die Solitonen als Baryonen identifizieren zu können, ist es unumgänglich diesen gültige Quantenzahlen für Spin und Isospin zuzuweisen. Um dies zu erreichen, müssen die Freiheitsgrade der Rotationen sowohl im Orts- als auch im *Flavor*-Raum quantisiert werden. Ausgehend vom *Hedgehog* (3.9) ist zu bemerken, dass dieser invariant unter kombinierten Orts- und *Flavor*-Drehungen ist, aber nicht bzgl. separaten Drehungen eines Types. Das bedeutet, dass das Soliton spontan die Rotations- und *Flavor*-Symmetrie bricht. Auf der anderen Seite ist jede Konfiguration, die sich vom *Hedgehog* um eine konstante Drehung unterscheidet, ebenso eine Lösung der statischen Bewegungsgleichung.

Normalerweise werden Feldtheorien quantisiert, indem Fluktuationen (kleiner Amplituden) eingeführt und die zugehörigen Freiheitsgrade kanonisch quantisiert werden. Dies ist allerdings für Systeme mit spontaner Symmetriebrechung problematisch, da aufgrund der (Rotations-) Symmetrie keine Rückstellkräfte bzgl. Anregungen der (Rotations-) Freiheitsgrade des Solitons bestehen. Hier sind Fluktuationen großer Amplituden möglich, die auf eine andere Weise behandelt werden müssen. Der gewöhnliche Ansatz besteht darin die kollektiven Koordi-

naten, die diese Fluktuationen parametrisieren, über die harmonische Näherung hinaus zu betrachten und kanonisch zu quantisieren. Da aufgrund der Struktur des *Hedgehogs* Drehungen im *Flavor*- und Ortsraum miteinander verknüpft sind, genügt es kollektive Koordinaten bzgl. einer dieser beiden Symmetrien einzuführen. Anders ausgedrückt, es gibt eine kombinierte *Flavor*-Orts-Drehung, die den *Hedgehog* unverändert lässt und deren kollektive Koordinaten nicht in der Lagrangefunktion auftauchen. Werden die zeitabhängigen $SU(2)$ Rotationsmatrizen

$$A(t) = \exp\left(i\alpha_1(t)\frac{\tau_3}{2}\right) \exp\left(i\alpha_2(t)\frac{\tau_2}{2}\right) \exp\left(i\alpha_3(t)\frac{\tau_3}{2}\right) \quad (3.20)$$

eingeführt, welche über drei Eulerwinkel $\alpha_i(t)$ von der Zeit t abhängen, so lässt sich die Orientierung des *Hedgehogs* parametrisieren und eine zeitabhängige Konfiguration durch

$$U(\vec{r}, t) = A(t)U_0(\vec{r})A^\dagger(t) \quad (3.21)$$

approximieren. Alle weiteren Freiheitsgrade des Feldes $U(\vec{r}, t)$, die nicht entlang der Symmetrien verlaufen und als Fluktuationen des Pionfeldes verstanden werden können, werden im weiteren vernachlässigt. Die Translation wird später noch eingeführt und relativistisch behandelt (Abschnitt 4.1). Wird der Ansatz (3.20) in die Lagrangefunktion (3.8) eingesetzt, so führt dies von der Lagrangefunktion für die Felder $\vec{\pi}$ mit unendlich vielen Freiheitsgraden zur Lagrangefunktion für die kollektiven Koordinaten

$$L = -M + \frac{\Theta}{2}(\vec{\Omega}^R)^2, \quad (3.22)$$

mit den über die Maurer-Cartan-Form definierten Winkelgeschwindigkeiten Ω_a^R

$$A^\dagger(t)\dot{A}(t) = \frac{i}{2}\tau_a C_{ab}\dot{\alpha}_b(t) = \frac{i}{2}\tau_a \Omega_a^R \quad \text{bzw.} \quad \Omega_a^R = -i \operatorname{tr}\left(A^\dagger(t)\dot{A}(t)\tau_a\right). \quad (3.23)$$

Die Masse des *Hedgehog*-Solitons M , die aus der statischen Lagrangefunktion (3.14) folgt, ist dabei ebenso ein Funktional des chiralen Profils wie das Trägheitsmoment⁴

$$\Theta = \frac{2f_\pi^2}{3} \int d^3r \left(1 + \frac{1}{f_\pi^2 e_s^2 r^2} (\vec{r}^2 F'^2(r) + \sin^2 F(r))\right) \sin^2 F(r). \quad (3.24)$$

Die Matrix C , deren explizite Form hier nicht benötigt wird, vermittelt den Zusammenhang zwischen den kartesischen und eulerschen Winkelgeschwindigkeiten. Sie kann aus

$$\frac{i}{2}\tau_a C_{ab} = A^\dagger \frac{\partial}{\partial \alpha_b} A \quad (3.25)$$

⁴Die Pionzerfallskonstante ist von der Ordnung $f_\pi = \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$, so dass das Trägheitsmoment Θ wie auch die Masse M (Gl. 3.14) von der Ordnung N_c sind.

berechnet werden. Die definierende Gleichung für die Matrix C kann zu

$$\underbrace{\frac{1}{i}C_{ba}^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_b}}_{:=J_a}A = \frac{1}{2}A\tau_a \quad (3.26)$$

umgeformt werden. Auf A angewandt, wirkt der Differentialoperator J_a wie die Multiplikation mit der Pauli-Matrix $\tau_a/2$ von rechts. Durch mehrmaliges Anwenden des Operators \vec{J}

$$\begin{aligned} [J_a, J_b]A &= \left(C_{ub}^{-1}\frac{\partial C_{va}^{-1}}{\partial\alpha_u} - C_{ua}^{-1}\frac{\partial C_{vb}^{-1}}{\partial\alpha_u} \right) \frac{\partial}{\partial\alpha_v}A \\ &= \frac{1}{4}A[\tau_a, \tau_b] = \frac{i}{2}A\epsilon_{abc}\tau_c = i\epsilon_{abc}J_cA \end{aligned} \quad (3.27)$$

kann bewiesen werden, dass dieser die Vertauschungsbeziehungen der quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren erfüllt. Diese Vertauschungsbeziehung gilt unabhängig von der differenzierten Matrix A . Die zweifache Ableitung von A hebt sich aufgrund der Antisymmetrie in den Indizes a, b heraus.

Mit Hilfe der zu den Eulerwinkeln kanonisch konjugierten Impulse

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}_a} = \frac{\partial L}{\partial\Omega_b^R} \frac{\partial\Omega_b^R}{\partial\dot{\alpha}_a} = \frac{\partial L}{\partial\Omega_b^R} C_{ba} \quad (3.28)$$

lassen sich rechte Drehimpulse

$$R_a = -\pi_b(C)_{ba}^{-1} = -\frac{\partial L}{\partial\Omega_a^R} = -\Theta\Omega_a^R \quad (3.29)$$

eingeführen. Anhand von Gl. (3.28) ist auch zu erkennen, dass die Eulerwinkel von der Ordnung $1/N_c$ sein müssen, damit die Drehimpulse von der Ordnung 1 sind. Die Hamiltonfunktion des starren Rotators ergibt sich klassisch aus der Lagrangefunktion durch eine Legendre-Transformation

$$H = \frac{\partial L}{\partial\Omega_a^R}\Omega_a^R - L = M + \frac{\vec{R}^2}{2\Theta}. \quad (3.30)$$

Der Übergang zur quantenmechanischen Beschreibung der Drehbewegung erfolgt durch die Ersetzung

$$\pi_a \xrightarrow{\text{QM}} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\alpha_a}, \quad (3.31)$$

so dass die kanonischen Vertauschungsbeziehungen erfüllt sind. In der quantisierten Form der Rechtsdrehimpulse

$$R_a = -C_{ba}^{-1}\pi_b \xrightarrow{\text{QM}} -\frac{1}{i}C_{ba}^{-1}\frac{\partial}{\partial\alpha_b} = -J_a \quad (3.32)$$

e_s	Θ	$M_\Delta - M_N$	μ_p	μ_n
3,6	7,95 GeV ⁻¹	189 MeV	2,65	-2,33
3,8	6,89 GeV ⁻¹	218 MeV	2,32	-1,99
4,0	6,01 GeV ⁻¹	250 MeV	2,05	-1,71
4,2	5,28 GeV ⁻¹	284 MeV	1,83	-1,47

Tabelle 3.1: Die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes Θ und der magnetischen Momente, deren Berechnung in Kapitel 4 hergeleitet wird, von der Skyrme-Konstante e_s . Die Massendifferenz der Δ -Resonanz zu den Nukleonzuständen $M_\Delta - M_N = 3/(2\Theta)$ kann verwendet werden, um die Skyrme-Konstante festzulegen. Der gemessene Wert $(M_\Delta - M_N)_{\text{exp}} = 293$ MeV legt $e_s \simeq 4,0$ nahe.

sind die bereits definierten Operatoren J_a wiederzuerkennen, die die Vertauschungsbeziehungen für Drehimpuls erfüllen. Für die Hamiltonfunktion ist der Übergang zum quantenmechanischen Hamiltonoperator einfach, denn es müssen nur die entsprechenden Operatoren für die Rechtsdrehimpulse eingesetzt werden. Die Wellenfunktionen der Baryonen ergeben sich als Lösungen des Hamiltonoperators des starren Rotators. Dies sind die Wigner-D Funktionen der kollektiven Koordinaten

$$\langle A | J = T, T_3, J_3 \rangle = \left[\frac{2J+1}{8\pi^2} \right]^{1/2} D_{T_3, -J_3}^{J=T}(A), \quad (3.33)$$

für das Nukleon in der Spin $J = \frac{1}{2}$ und Isospin $T = \frac{1}{2}$ Darstellung. Wobei $|T_3, J_3\rangle$ für einen Nukleonzustand mit der Isospin- $T_3 = \pm\frac{1}{2}$ und Spinprojektion $J_3 = \pm\frac{1}{2}$ steht. Die Gleichsetzung des Gesamtspins und -isospins resultiert aus der Struktur des *Hedgehogs*, der die Besonderheit aufweist, dass Isospindrehungen äquivalent zu Raumdrehungen sind:

$$AU_0A^\dagger = \exp \left(i \sum_{a=1}^3 A \tau_a A^\dagger \hat{r}_a F(r) \right). \quad (3.34)$$

Aus der Rotationsinvarianz des Skalarproduktes ergibt sich unmittelbar, dass eine Drehung des Isospinvektors $\vec{\tau}$ einer entgegengesetzten Drehung des Ortsvektors \hat{r} entspricht. Die Isospinkomponenten folgen daher aus denen des Spins durch eine Drehung

$$T_a = -D_{ab}(A)J_b \quad \text{mit} \quad D_{ab}(A) = \frac{1}{2} \text{tr} (\tau_a A \tau_b A^\dagger), \quad (3.35)$$

so dass ihr Betrag immer gleich ist. Dabei bezieht sich D_{ab} auf die adjungierte Darstellung der kollektiven Rotationen.

Im Rahmen dieser Arbeit genügt es das *Zwei-Flavor*-Skyrme-Modell zu betrachten, wie es bisher eingeführt wurde. Es gibt allerdings zahlreiche Erweiterungen des Modells, so z. B. auf die $SU(3)$, die Hinzunahme von Vektormesonen, Symmetriebrechung oder weiterer Freiheitsgrade [61, 62].

3.4. Der Wess-Zumino-Term

Witten [63] bemerkte, dass der Lagrangian (3.8) eine Symmetrie aufweist, die in der zugrundeliegenden Theorie der QCD nicht enthalten ist. Der bisher betrachtete Lagrangian ist sowohl invariant unter den Symmetrien der intrinsischen Paritätstransformation

$$U(\vec{r}, t) \rightarrow U^\dagger(\vec{r}, t) \quad (3.36)$$

als auch der naiven Paritätstransformation

$$U(\vec{r}, t) \rightarrow U(-\vec{r}, t). \quad (3.37)$$

Erstere hat unmittelbar zur Folge, dass ein Übergang von einer geraden zu einer ungeraden Anzahl an Mesonen und umgekehrt verboten ist. Das bedeutet, dass z. B. die in der Natur vorkommenden Prozesse $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ oder $K\bar{K} \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ nicht von der Theorie beschrieben werden. Zudem müssen eine Reihe von Beziehungen, die Wess-Zumino-Konsistenz-Bedingungen [64], erfüllt sein. All dies veranlasste Witten einen zusätzlichen Term, den Wess-Zumino-Term

$$\Gamma^{\text{wz}}[U] = \frac{\lambda}{5} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau} \int_{M^5} d^5r \operatorname{tr}(U^\dagger \partial_\mu U U^\dagger \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger \partial_\sigma U U^\dagger \partial_\tau U) \quad (3.38)$$

mit dem total antisymmetrischen ϵ -Tensor in 5 Dimensionen zur mesonischen Wirkung Γ vorzuschlagen⁵. Dieser Term ist eindeutig bestimmt, sofern man sich auf die kleinst mögliche Anzahl an Ableitungen beschränkt. Die Konstante λ kann durch den $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Zerfall festgelegt werden. Der fünf dimensionale Raum M_5 wird so gewählt, dass sein Rand gerade dem vier dimensionalen Minkowski-Raum M_4 entspricht. Da es keinen lokalen Lagrangian gibt, der der Wirkung (3.38) entspricht, wird üblicherweise die Bewegungsgleichung zur Diskussion der Symmetrien verwendet. Diese folgt aus der Variation der Wirkung. Zur Berechnung ist es nützlich auf alternierende Differentialformen zurückzugreifen (siehe Anhang C.10). Mit Hilfe der alternierenden Differentialform

$$r = U^\dagger \partial_\mu U dx^\mu = U^\dagger dU \quad (3.39)$$

lässt sich die Wirkung des Wess-Zumino-Terms als

$$\Gamma^{\text{wz}}[U] = \frac{\lambda}{5} \int_{M^5} \operatorname{tr}(r^5) \quad (3.40)$$

schreiben. Unter einer beliebigen, kleinen Variation der Matrix $U \rightarrow U + \delta U$ findet man für den Rechtsstrom

$$\delta r = (U^\dagger d\delta U - U^\dagger \delta U U^\dagger dU) = U^\dagger d\delta U - U^\dagger \delta U r \quad (3.41)$$

⁵Die Ableitungen in Gleichung (3.38) sind so zu verstehen, dass sie jeweils nur auf das nächste Element wirken.

und damit für

$$\begin{aligned}
\delta \text{tr}(r^5) &= 5 \text{tr}(r^4 \delta r) = 5 \text{tr}[(d\delta U)r^4 U^\dagger - \delta U r^5 U^\dagger] \\
&= 5 \text{tr}[d(\delta U r^4 U^\dagger) - \delta U (dr^4) U^\dagger - \delta U r^4 dU^\dagger - \delta U r^5 U^\dagger] \\
&= 5 \text{dtr}(\delta U r^4 U^\dagger).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Es folgt die Variation der Wirkung des Wess-Zumino-Terms

$$\delta \Gamma^{\text{wz}}[U] = \lambda \int_{M^5} \text{dtr}(\delta U r^4 U^\dagger) = \lambda \int_{M^4} \text{tr}(\delta U r^4 U^\dagger) \tag{3.43}$$

unter Verwendung des Stokes'schen Satzes. Die Variation der Wirkung des nicht-linearen- σ -Modells lässt sich analog mit $r_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ und der Relation

$$\begin{aligned}
\text{tr}(r_\mu r^\mu) &= -2 \text{tr}[U^\dagger (\partial_\mu \delta U) r^\mu - U^\dagger \delta U U^\dagger (\partial_\mu U) r^\mu] \\
&= 2 \text{tr}[\delta U \partial_\mu (r^\mu U^\dagger) + \delta U r_\mu r^\mu U^\dagger] \\
&= 2 \text{tr}[\delta U ((\partial_\mu r^\mu) U^\dagger + r^\mu \partial_\mu U^\dagger + r_\mu r^\mu U^\dagger)] \\
&= 2 \text{tr}[\delta U (\partial_\mu r^\mu) U^\dagger]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

berechnen

$$\delta \Gamma^{nl\sigma}[U] = \frac{f_\pi^2}{2} \int d^4 x \text{tr}[\delta U (\partial_\mu r^\mu) U^\dagger]. \tag{3.45}$$

Da sowohl das nicht-lineare- σ -Modell als auch der Skyrme-Term die gleichen Symmetrieeigenschaften besitzen, genügt es, zu deren Diskussion Ersteres zu betrachten. Die Bewegungsgleichung, die sich aus der Variation der Wirkung des nicht-linearen- σ -Modells als auch des Wess-Zumino-Terms ergibt,

$$\frac{f_\pi^2}{2} \partial_\mu r^\mu + \lambda \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} r^\mu r^\nu r^\rho r^\sigma = 0 \tag{3.46}$$

ist nicht mehr invariant unter der naiven Paritätstransformation (3.37), da der Beitrag des nicht-linearen- σ -Modells gerade in den Ortsableitungen ist, während derjenige des Wess-Zumino-Terms immer eine ungerade Zahl an Ortsableitungen beinhaltet. Ein ähnliches Verhalten findet sich unter der intrinsischen Paritätstransformation (3.36), wobei der erste Term der Bewegungsgleichung (3.46) im Gegensatz zum zweiten sein Vorzeichen wechselt:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (U^\dagger \partial^\mu U) &= U^\dagger \{ \partial_\mu (U U^\dagger \partial^\mu U) - (\partial_\mu U) U^\dagger \partial^\mu U \} \\
&= U^\dagger \{ (\partial_\mu \partial^\mu U) U^\dagger + (\partial_\mu U) (\partial^\mu U^\dagger) \} U \\
&= -U^\dagger \{ \partial_\mu (U \partial^\mu U^\dagger) \} U
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Es ist offensichtlich, dass durch die Hinzunahme des Wess-Zumino-Terms die einzelnen Symmetrien (3.36) und (3.37) die Bewegungsgleichung nicht mehr invariant lassen. Die vollständige Paritätstransformation

$$\vec{\pi}(\vec{r}, t) \rightarrow -\vec{\pi}(-\vec{r}, t) \quad \Leftrightarrow \quad U(\vec{r}, t) \rightarrow U^\dagger(-\vec{r}, t), \tag{3.48}$$

ist allerdings immer noch eine Symmetrie der effektiven Theorie, wie auch der QCD. Dies zeigt, dass der Wess-Zumino-Term ein notwendiger Bestandteil der effektiven Mesonen-Theorie ist, um den Symmetrien der zugrundeliegenden Theorie der QCD zu entsprechen.

Wird der Wess-Zumino-Term in das Lagrangefunktional hinzugenommen, so handelt es sich um einen nicht lokalen Ausdruck mit interessanten Eigenschaften. In der $SU(N_f)$ mit $N_f \geq 3$ bewirkt dieser z. B. gerade die Auswahl der Baryon-multipletts mit halbzahligem Spin [62], sofern die Methode der Quantisierung in Abschnitt 3.3 entsprechend verallgemeinert wird. In der $SU(2)$ ist der Beitrag zur Bewegungsgleichung (3.46) und die Lagrangefunktion des Wess-Zumino-Terms gleich Null. Dies ist unmittelbar ersichtlich, da es keine vier antisymmetrischen Ableitungen dreier Felder $\vec{\pi}$ gibt. Allerdings trägt er in geeichter Form entscheidend zur Meson-Photon- und dadurch zur Baryon-Photon-Kopplung bei. Er enthält in niedrigster Ordnung vollständig die Anomalie der QCD, die sich im radioaktiven Zerfall des neutralen Pions äußert ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$).

3.5. Elektromagnetismus im Skyrme-Modell

Die meisten Eigenschaften der Baryonen lassen sich durch die Verwendung elektroschwacher Proben empirisch bestimmen. In der Theorie der QED koppeln diese Proben an die Baryonen als elektroschwache Eichströme. Die entsprechenden Kopplungen an das elektroschwache Feld ergeben sich, indem die globale $U_V(1)$ Symmetrie als lokale Symmetrie gefordert wird. Da der chirale Lagrangian die Symmetrien der QCD umfasst, müssen sich die Kopplungen analog ergeben. Unter Verwendung der Vektor-Symmetrie $L = R = \exp(i\alpha Q)$ ergibt sich die Variation des chiralen Feldes

$$U' = e^{i\alpha Q} U e^{-i\alpha Q}, \quad (3.49)$$

wobei α die Transformation parametrisiert und die Quarkladungsmatrix⁶

$$Q = \frac{1}{2}(\tau_3 + \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

als Generator der Eichsymmetrie auftritt. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Definition zur korrekten Eichtransformation der Mesonfelder führt. Wird für die drei Ladungszustände des Pionfeldes die Standarddefinition (sphäri-

⁶Die Ladung e kann mittels der Ladungsmatrix oder alternativ über das Photonfeld eingeführt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde Letzteres gewählt, s. Gl. (3.57).

sche Basis)

$$\begin{aligned}\pi^+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2) \\ \pi^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2) \\ \pi^0 &= \pi_3\end{aligned}\tag{3.51}$$

verwendet, so nimmt die Mesonmatrix die Form

$$\vec{\pi} \cdot \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \pi^0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & \pi^0 \end{pmatrix}\tag{3.52}$$

an. Mit dem Kommutator der Ladungsmatrix

$$[Q, \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}] = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}\pi^+ \\ -\sqrt{2}\pi^- & 0 \end{pmatrix}\tag{3.53}$$

lässt sich die Eichtransformation (3.49) für kleine Felder und α

$$U' = e^{i\alpha Q} U e^{-i\alpha Q} \quad \rightarrow \quad \vec{\pi}' \cdot \vec{\tau} = \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} + i\alpha[Q, \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}]\tag{3.54}$$

berechnen. Diese stimmt mit der erwarteten Transformation der Pionfelder

$$\pi'^{(\pm,0)} = \exp(i\alpha q^{(\pm,0)})\pi^{(\pm,0)} \quad \rightarrow \quad \pi'^{(\pm,0)} = (1 + i\alpha q^{(\pm,0)})\pi^{(\pm,0)}\tag{3.55}$$

mit den Eigenwerten

$$q^+ = 1, \quad q^0 = 0, \quad q^- = -1\tag{3.56}$$

überein.

Durch die Eichtransformation des elektromagnetischen Vektorpotentials

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha\tag{3.57}$$

wird die Ladung des Elektrons $e = -|e|$ eingeführt. Aus der Forderung, dass der Lagrangian (3.8) invariant unter den lokalen Eichtransformationen (3.49) und (3.57) mit $\alpha = \alpha(x)$ sein soll, folgen die Kopplungen der Materiefelder an das elektromagnetische Feld. Im Allgemeinen kann die Invarianz mit der Ersetzung der Feldgradienten durch kovariante Ableitungen D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu[Q, \cdot]\tag{3.58}$$

erreicht werden. Ein Verfahren, das auch unter dem Namen „minimale Kopplung“ bekannt ist. Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}D'_\mu U' &= \partial_\mu U' + ieA'_\mu[Q, U'] \\ &= e^{i\alpha Q}(\partial_\mu U + ieA_\mu[Q, U])e^{-i\alpha Q} = e^{i\alpha Q}(D_\mu U)e^{-i\alpha Q},\end{aligned}\tag{3.59}$$

lässt sich leicht sehen, dass durch die Einführung der kovarianten Ableitung $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ die lokale Eichinvarianz des nicht-linearen- σ - als auch Skyrme-Terms gewährleistet ist. Wird die „minimale Kopplung“ in den Lagrangian (3.8) substituiert, so folgen zusätzlich zu den Ein-Photon-Vertices auch Kopplungen höherer Ordnung. Der geeichte Lagrangian des nicht-linearen- σ -Modells ist z. B.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\text{geeicht})}^{nl\sigma} &= \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + i \frac{e f_\pi^2}{2} A_\mu \text{tr}(Q[U^\dagger \partial^\mu U + U \partial^\mu U^\dagger]) \\ &\quad - \frac{e^2 f_\pi^2}{4} A_\mu A^\mu \text{tr}([Q, U][Q, U^\dagger]). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Eichung des nicht lokalen Wess-Zumino-Terms ist etwas komplizierter und erfordert eine gesonderte Behandlung. Offensichtlich ist der Wess-Zumino-Term in seiner bisherigen Form (3.8) nicht eichinvariant unter den lokalen Isospindrehungen, die vom Ladungsoperator erzeugt werden (3.49). Auch das Verfahren der „minimalen Kopplung“ hilft an dieser Stelle nicht weiter, da dieser Term keinen lokalen Ausdruck im vier dimensional Minkowski-Raum darstellt. Eine Möglichkeit, um die kovariante Form des Wess-Zumino-Terms zu ermitteln, ist, die Änderungen, die sich durch die Eichtransformationen der Felder ergeben, per Hand durch weitere Terme zu korrigieren [63, 65]. Analog zur Behandlung des Wess-Zumino-Terms in Abschnitt 3.4 werden auch bei dieser Rechnung alternierende Differentialformen verwendet. Die Änderung der Rechtsströme aus Gl. (3.39)

$$r' = e^{i\alpha Q} (r + i d\alpha U^\dagger [Q, U]) e^{-i\alpha Q} \quad (3.61)$$

führt auf den transformierten Wess-Zumino-Term

$$\Gamma^{\text{wz}}[U] = \frac{\lambda}{5} \int_{M^5} \text{tr}((r + i d\alpha U^\dagger [Q, U])^5) \quad (3.62)$$

in dem wegen der antisymmetrischen Struktur der 5-Form nur Terme höchstens linear in den Ableitungen $d\alpha$ erhalten bleiben. Der Übersicht wegen wird auch hier auf Klammern um die Ableitungen verzichtet. Diese wirken nur auf den unmittelbar nachfolgenden Faktor, wie bisher beim Wess-Zumino-Term. Die Änderung des Wess-Zumino-Terms unter den Eichtransformationen wird zu

$$\delta \Gamma^{\text{wz}}[U] = i\lambda \int_{M^5} d\alpha \text{tr}(U^\dagger [Q, U] r^4). \quad (3.63)$$

Werden die Linksströme $I = dUU^\dagger$ eingeführt, so lässt sich mit Hilfe von Gl. (C.74) die Variation des Wess-Zumino-Terms als vollständiges Differential schreiben:

$$\begin{aligned} \delta \Gamma^{\text{wz}}[U] &= i\lambda \int_{M^5} d\alpha \text{tr}(Q[I^4 - r^4]) \\ &= -i\lambda \int_{M^5} d \{ d\alpha \text{tr}(Q[I^3 + r^3]) \} \\ &= -i\lambda \int_{\partial M^5} d\alpha \text{tr}(Q[I^3 + r^3]). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Im letzten Schritt wurde der Satz von Stokes verwendet. Analog zur Herleitung der Bewegungsgleichung (Abs. 3.4) spannt das Oberflächenintegral über den Rand der fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit die vierdimensionale Raum-Zeit auf. Um die Variation zu kompensieren, wird ein weiterer Term hinzugefügt:

$$\Gamma_{\gamma}^{\text{wz}}[U] = -ie\lambda \int_{\partial M^5} A \operatorname{tr} (Q[l^3 + r^3]). \quad (3.65)$$

Wobei die 1-Form $A = A_{\mu} dx^{\mu}$ mit der (Eich-) Variation $\delta A = -d\alpha/e$ eingeführt wird. Der neue Term kompensiert zwar die Änderung des ursprünglichen Wess-Zumino-Terms unter den Eichtransformationen der Felder, besitzt aber auch selbst einen (unkompensierten) Variationsterm, so dass

$$\delta\Gamma_{\gamma}^{\text{wz}}[U] = 2e\lambda \int_{\partial M^5} A d\alpha \operatorname{tr} (Q^2[l^2 - r^2] - QdUQU^{\dagger}). \quad (3.66)$$

Mittels der Identität

$$QdUQU^{\dagger} = d(aQUdU^{\dagger} - bQdUQU^{\dagger}), \quad a + b = 1 \quad (3.67)$$

und partieller Integration kann Gl. (3.66) zu

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\gamma}^{\text{wz}}[U] &= -e\lambda \int_{\partial M^5} d\alpha A d \operatorname{tr} (2Q^2[l + r] + QdUQU^{\dagger} - QUQU^{\dagger}) \\ &= -e\lambda \int_{\partial M^5} d\alpha dA \operatorname{tr} (2Q^2[l + r] + QdUQU^{\dagger} - QUQU^{\dagger}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

umgeformt werden. Dabei wurde $a = b = \frac{1}{2}$ gewählt, so dass die Parität als Symmetrie erhalten bleibt. Zur Kompensation der Änderung $\delta\Gamma_{\gamma}^{\text{wz}}[U]$ wird ein weiterer Term

$$\Gamma_{2\gamma}^{\text{wz}}[U] = -e^2\lambda \int_{\partial M^5} AdA \operatorname{tr} (2Q^2(l + r) + QdUQU^{\dagger} - QUQU^{\dagger}) \quad (3.69)$$

analog zum obigen Vorgehen hinzugefügt. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass die Eichtransformation von $\Gamma_{2\gamma}^{\text{wz}}[U]$ ausschließlich Gl. (3.66) erzeugt und keine weiteren Terme mehr benötigt werden. Die Wirkung des geeichten Wess-Zumino-Terms ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{wz}}[U] &= \frac{i}{80\pi^2} \int_{M^5} \operatorname{tr} (r^5) \\ &\quad + \frac{e}{16\pi^2} \int_{\partial M^5} A \operatorname{tr} (Q[l^3 + r^3]) \\ &\quad - \frac{ie^2}{16\pi^2} \int_{\partial M^5} AdA \operatorname{tr} (2Q^2[l + r] + QdUQU^{\dagger} - QUQU^{\dagger}). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Wo bereits für die Konstante $\lambda = i/(16\pi^2)$ gesetzt wurde, so dass der Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ durch den in Gl. (3.70) enthaltenen Zwei-Photon-Vertex wiedergegeben wird (vgl. Abs. 3.6). Die Wirkung

$$\Gamma^{\text{wz}}[U] = \frac{i}{80\pi^2} \int_{M^5} \text{tr}(r^5) + \int d^4x \mathcal{L}^{\text{wz}} \quad (3.71)$$

lässt sich in eine Summe aus Termen ohne und mit Photon-Kopplungen unterteilen. Der erste Summand verschwindet in der $SU(2)$, der zweite, in Form des geeichten Lagrangians, enthält sowohl Ein- als auch Zwei-Photon-Kopplungen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{wz}} = \frac{e}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ A_\mu \text{tr} \left(Q [U^\dagger \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger \partial_\sigma U + \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger \partial_\sigma U U^\dagger] \right) \right. \\ \left. - ie A_\mu \partial_\nu A_\rho \text{tr} \left(2Q^2 [U^\dagger \partial_\sigma U + \partial_\sigma U U^\dagger] + Q \partial_\sigma U Q U^\dagger - Q U Q \partial_\sigma U^\dagger \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.6. Der $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Zerfall

Der im geeichten Wess-Zumino-Term enthaltene Zwei-Photon-Vertex beschreibt unter anderem den Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Der Vertex spielt eine entscheidende Rolle bei der Berechnung der Zwei-Photon-Beiträge zur Elektron-Nukleon-Streuung. Er wird daher im Folgenden ausführlich untersucht.

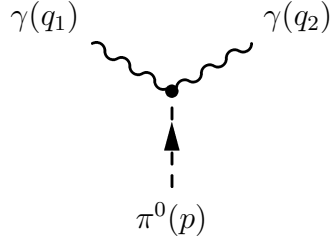


Abb. 3.3: Der $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Zerfall

Der Wechselwirkungslagrangian

$$\mathcal{L}_{2\gamma}^{\text{wz}} = e^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho W_\delta \quad (3.73)$$

wird durch den Wess-Zumino-Term bestimmt, wobei

$$W_\delta = -\frac{i}{(4\pi)^2} \text{tr} \left(2Q^2 (U^\dagger \partial_\delta U + \partial_\delta U U^\dagger) + (Q \partial_\delta U Q U^\dagger - Q U Q \partial_\delta U^\dagger) \right) \quad (3.74)$$

aus Gleichung (3.72) extrahiert wird. Unter der Näherung von Ein-Pionfeldern $U = 1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}/f_\pi + \dots$ und mit dem Ladungsoperator aus Gl. (3.50) lässt sich

$$W_\delta \simeq -\frac{i}{(4\pi)^2} \text{tr} (6iQ^2 \vec{\tau} \cdot \partial_\delta \vec{\pi}/f_\pi) = \frac{\partial_\delta \pi^0}{8\pi^2 f_\pi} \quad (3.75)$$

vereinfachen. Für das Übergangsmatrixelement \mathcal{M} folgt unmittelbar [66]

$$i\mathcal{M} = ie^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \epsilon_\nu^*(q_1) \epsilon_\rho^*(q_2) (q_2 - q_1)_\mu \langle 0 | W_\delta | \pi^0(p) \rangle \quad (3.76)$$

mit dem Formfaktor

$$\langle 0 | W_\delta | \pi^0(p) \rangle = \frac{-ip_\delta}{8\pi^2 f_\pi}. \quad (3.77)$$

Im Schwerpunktsystem $p = (m_\pi, 0, 0, 0)$ wird das Übergangsmatrixelement zu

$$i\mathcal{M} = i \frac{e^2 m_\pi}{8\pi^2 f_\pi} \vec{\epsilon}^*(q_1) \times \vec{\epsilon}^*(q_2) \cdot (\vec{q}_2 - \vec{q}_1). \quad (3.78)$$

Summiert über alle möglichen Polarisierungen der Photonen ergibt sich

$$\sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\alpha^2 m_\pi^4}{2\pi^2 f_\pi^2}. \quad (3.79)$$

Damit lässt sich die Zerfallsbreite des Pions angeben

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{1}{2m_\pi} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \sum_{pol.} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\alpha^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2}, \quad (3.80)$$

wobei ein zusätzlicher Faktor $\frac{1}{2}$ für den reduzierten Phasenraum identischer Teilchen berücksichtigt wurde.

4. Ein-Photon-Austausch im Skyrme-Modell

Im vorherigen Kapitel wurde der Lagrangian des Skyrme-Modells aufgestellt und die Wellenfunktionen der Baryonen mit gültigen Spin- und Isospin-Quantenzahlen generiert. Beides wird benötigt, um die Übergangsamplitude der Elektron-Nukleon-Streuung zu berechnen. Beschränkt man sich auf den Ein-Photon-Austausch, so entspricht der resultierende, unpolarisierte Wirkungsquerschnitt der Rosenbluth-Formel.

Innerhalb dieses Kapitels wird die Rosenbluth-Formel im Rahmen des Skyrme-Modells hergeleitet. Von besonderem Interesse sind dabei die elektromagnetischen Formfaktoren G_E und G_M , die sich als Funktional des chiralen Profils ergeben. Als einziger unbestimmter Modellparameter tritt die Skyrme-Konstante e_s auf. Die Formfaktoren wurden 1986 erstmals nichtrelativistisch von Braaten, Tse und Willcox [67] innerhalb des Skyrme-Modells berechnet¹.

Wie bereits am Beispiel des $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Zerfalls gesehen, beinhaltet der geeichte Lagrangian Wechselwirkungsterme, welche die Ein- und Zwei-Photon-Vertices widerspiegeln. Der Lagrangian für den Ein-Photon-Austausch lässt sich als

$$\mathcal{L}_\gamma = -eA_\mu J^\mu \quad (4.1)$$

schreiben mit dem Strom

$$J^\mu = \frac{if_\pi^2}{2} \text{tr}(Q(\partial^\mu U U^\dagger - U^\dagger \partial^\mu U)) - \frac{i}{8e_s^2} \text{tr}([U^\dagger[Q, U], U^\dagger \partial_\nu U][U^\dagger \partial^\mu U, U^\dagger \partial^\nu U]) + \frac{B^\mu}{2} \quad (4.2)$$

und dem Baryonstrom

$$B^\mu = -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(Q(U^\dagger \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger \partial_\sigma U + \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger \partial_\sigma U)). \quad (4.3)$$

Der erste Beitrag in (4.2) entstammt dem nicht-linearen- σ -Modell, vgl. Gl. (3.60), der zweite dem Skyrme-Term und der letzte dem Wess-Zumino-Term (3.72). Es lässt sich leicht nachprüfen, dass B^μ dem in Gl. (3.15) definierten Baryonstrom entspricht.

¹Im Vergleich treten zusätzliche Faktoren von $2M$ auf, da eine andere Normierung für die Ein-Teilchenzustände verwendet wird.

Mit Hilfe des Ansatzes (3.21) für das zeitabhängige chirale Feld, lässt sich der Strom als Funktional des chiralen Profils $F(r)$ anstelle des Feldes U schreiben. Für den Ansatz eines rotierenden *Hedgehogs* führen die Zeitableitungen

$$\dot{U} = A[A^\dagger \dot{A}, U_0]A^\dagger = A \frac{i}{2} \Omega_a^R [\tau_a, U_0] A^\dagger \quad (4.4)$$

unter Verwendung des Maurer-Cartan-Theorems (3.23) auf die Winkelgeschwindigkeiten Ω_a^R . Zu bemerken ist, dass in Gl. (4.4) die zeitliche Änderung der Translation vernachlässigt wurde. Dies ist darin begründet, dass im Matrixelement der Impulszustände Terme linear in den Zeitableitungen auf die Schwerpunktskoordinate nach der Wahl einer hermiteschen Ordnung und kanonischer Quantisierung proportional zu der Summe aus Impulsen des ein- und auslaufenden Teilchens sind. Im Folgenden wird nur das Breitframe betrachtet, in welchem diese Summe verschwindet. Werden die Wigner-D Funktionen gemäß Gl. (3.9) eingeführt, so folgt für die zeitliche Komponente des Stromes des nicht-linearen- σ -Modells

$$\begin{aligned} J_{nl\sigma}^0 &= \frac{f_\pi^2}{4} \Omega_a^R \text{tr} \left(Q(AU_0^\dagger [\tau_a, U_0] A^\dagger - A[\tau_a, U_0] U_0^\dagger A^\dagger) \right) \\ &= -f_\pi^2 \sin^2 F D_{3a}(\Omega_a^R - \hat{r}_a \vec{\Omega}^R \cdot \hat{r}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Mit Hilfe der Identität

$$\begin{aligned} U^\dagger \partial_0 U &= Ai \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_0 A^\dagger \\ \vec{\alpha}_0 &= -\sin F \cos F \vec{\Omega}^R \times \hat{r} - \sin^2 F \hat{r} \times (\vec{\Omega}^R \times \hat{r}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

ergibt sich der Beitrag des Wess-Zumino-Terms zu J^0

$$\begin{aligned} B^0 &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{tr} \left(Q(U^\dagger \partial_i U U^\dagger \partial_j U U^\dagger \partial_k U + \partial_i U U^\dagger \partial_j U U^\dagger \partial_k U U^\dagger) \right) \\ &= i \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{tr} \left(A^\dagger Q A (\vec{\tau} \cdot \vec{a}_i \vec{\tau} \cdot \vec{a}_j \vec{\tau} \cdot \vec{a}_k + \vec{\tau} \cdot \vec{b}_i \vec{\tau} \cdot \vec{b}_j \vec{\tau} \cdot \vec{b}_k) \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{ijk} \text{tr} \left(A^\dagger Q A (\vec{a}_i \cdot (\vec{a}_j \times \vec{a}_k) + (\vec{b}_i \cdot (\vec{b}_j \times \vec{b}_k))) \right) \\ &= -\frac{F' \sin^2 F}{2\pi^2 r^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Eine analoge Rechnung für den Skyrme-Term [67] zeigt, dass dieser einen zum nicht-linearen- σ -Modell vergleichbaren Beitrag liefert, der durch den Faktor

$$g(r) = 1 + \frac{1}{f_\pi^2 e_s^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right). \quad (4.8)$$

berücksichtigt werden kann. Für die zeitliche Komponente des elektromagnetischen Stromes folgt

$$J^0 = -f_\pi^2 g(r) \sin^2 F D_{3a}(\Omega_a^R - \hat{r}_a \vec{\Omega}^R \cdot \hat{r}) + \frac{1}{2} B^0. \quad (4.9)$$

Das Matrixelement des Stromes lässt sich in einen isospin- und impulsabhängigen Teil faktorisieren. Für Ersteren werden offensichtlich die Matrixelemente der Wigner-D Funktionen in der adjungierten Darstellung² zwischen den Nukleon-zuständen, die wiederum Wigner-D Funktionen darstellen, benötigt. Diese Matrixelemente entsprechen Clebsch-Gordan-Koeffizienten [68] :

$$\langle N_{T_3, J_3} | D_{ab} | N_{T_3, J'_3} \rangle = \begin{pmatrix} T & 3 & T \\ T_3 & a & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & 3 & J \\ -J_3 & b & -J'_3 \end{pmatrix} = \langle N_{T_3, J_3} | -\frac{1}{3} \tau_a \sigma_b | N_{T_3, J'_3} \rangle. \quad (4.10)$$

Im letzten Schritt wurde das Wigner-Eckart-Theorem verwendet. Wobei die Operatoren

$$\tau_a = 2T_a, \quad \sigma_b = -2R_b \quad (4.11)$$

eingeführt wurden. Für $T = J = 1/2$ entsprechen diese den Pauli-Matrizen für Isospin bzw. Spin. Wird der Drehimpuls gemäß Gl. (3.29) eingeführt, so folgt für den isospinabhängigen Teil aus Gl. (4.9)

$$D_{3a}(\Omega_a^R - \hat{r}_a \vec{\Omega}^R \cdot \hat{r}) = -\frac{\tau_a}{3\Theta}. \quad (4.12)$$

Zur Auswertung des impulsabhängigen Anteils des Formfaktors wird die Translation als kollektive Koordinate analog zur Rotation eingeführt. Es liegt nahe den (nichtrelativistischen) Ansatz

$$U(\vec{r}, t) = A(t) U_0(\vec{r} - \vec{x}(t)) A^\dagger(t) \quad (4.13)$$

für das dynamische, zeitabhängige chirale Feld zu verwenden. Der zeitabhängige Vektor $\vec{x}(t)$ parametrisiert die Translation des Solitons. Die Hinzunahme der Translation als weiteren Freiheitsgrad beeinflusst die bisher gewonnenen Ergebnisse nicht, da der Impulsoperator mit dem Isospinoperator vertauscht. Die Zeitabhängigkeit der Schwerpunktkoordinate führt auf einen zusätzlichen Term im Hamiltonoperator, der mit der kinetischen Energie identifiziert werden kann. Das Matrixelement zwischen ein- und auslaufendem Impulszustand $|\vec{p}\rangle$ faktorisiert in eine Ebenewelle und einen ortsunabhängigen Faktor (vgl. Gl. (A.4)). Erstere führt zur Impulserhaltung, während der zweite Faktor die Abweichung von einem Punktteilchen charakterisiert und ausführlich in Anhang A diskutiert wird. Im Folgenden wird auch nur Letzterer betrachtet und mit $J(0)$ bezeichnet. Mit Hilfe der Gln. (4.12) und (A.9) wird das Nukleonmatrixelement der zeitlichen Komponente des Stromes zu

$$\langle N_{T_3, J_3}(\vec{p}_2) | J^0(0) | N_{T_3, J'_3}(\vec{p}_1) \rangle = 2MG_E(Q^2) \delta_{J_3, J'_3} \quad (4.14)$$

²Die adjungierte Darstellung entspricht in der SU(2) der Spin 1 Darstellung. Die Generatoren der Gruppe, z. B. in Form der drei Pauli-Matrizen, besitzen dasselbe Transformationsverhalten wie diese Darstellung.

mit dem elektrischen Formfaktor

$$G_E = \frac{f_\pi^2}{3\Theta} \tau_3 \int d^3r g(r) \sin^2 F j_0(|\vec{q}|r) + \frac{1}{2} \int d^3r B^0 j_0(|\vec{q}|r) \quad (4.15)$$

im Breitframe ($Q^2 = \vec{q}^2$) und der Besselfunktion

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad (4.16)$$

Dabei ist τ_3 als Eigenwert für das Proton (+1) und Neutron (-1) zu verstehen. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass der hier definierte Formfaktor G_E tatsächlich dem elektrischen Sachs Formfaktor, wie er in der Rosenbluth-Separation vorkommt, entspricht. Mit Hilfe des Trägheitsmomentes aus Gl. (3.24) lässt sich leicht nachprüfen, dass $G_E^p(Q^2 = 0) = 1$ und $G_E^n(Q^2 = 0) = 0$ erfüllt ist.

Analog berechnet sich der magnetische Formfaktor aus den räumlichen Komponenten des Stromes. Dazu werden die Beziehungen

$$\begin{aligned} U^\dagger \partial_i U &= A i \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_i A^\dagger \\ (\partial_i U) U^\dagger &= A i \vec{\tau} \cdot \vec{\beta}_i A^\dagger \end{aligned} \quad (4.17)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}_i &= F' \hat{r}_i \hat{r} + \sin F \cos F \partial_i \hat{r} + \sin^2 F (\hat{r} \times \partial_i \hat{r}) \\ \vec{\beta}_i &= F' \hat{r}_i \hat{r} + \sin F \cos F \partial_i \hat{r} - \sin^2 F (\hat{r} \times \partial_i \hat{r}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

für die räumlichen Ableitungen benötigt. Der Beitrag des nicht-linearen- σ -Modells zum Strom wird zu

$$(J_{nl\sigma})_i = -i f_\pi^2 \text{tr}(Q A i \vec{\tau} \cdot (\hat{r} \times \partial_i \hat{r}) A^\dagger) \sin^2 F = f_\pi^2 \frac{\sin^2 F}{r^2} D_{3a} \epsilon_{abi} r_b. \quad (4.19)$$

Die räumliche Komponente des Baryonstromes

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{i\nu\rho\sigma} \text{tr} (Q (U^\dagger \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger \partial_\sigma U + \partial_\nu U U^\dagger \partial_\rho U U^\dagger \partial_\sigma U U^\dagger)) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{ibc} \sin F \text{tr} (\vec{\tau} \cdot (\vec{\alpha}_b \times \vec{\alpha}_c) U_0^\dagger \vec{\tau} \cdot (\vec{\Omega}^R \times \hat{r})) \\ &= -\frac{F'(r) \sin^2 F(r)}{2\pi^2 r^2} (\vec{r} \times \vec{\Omega}^R)_i = B^0 (\vec{r} \times \vec{\Omega}^R)_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

lässt sich auf die zeitliche zurückführen. Der Skyrme-Term führt wieder zu einem Faktor $g(r)$ in der räumlichen Komponente des elektromagnetischen Stromes

$$J_i = f_\pi^2 g(r) \frac{\sin^2 F}{r^2} D_{3a} \epsilon_{abi} r_b + \frac{1}{2} B^0 (\vec{r} \times \vec{\Omega}^R)_i. \quad (4.21)$$

Für das Matrixelement des Stromes folgt

$$\langle N_{T_3,r}(\vec{p}_2) | \vec{J}(0) | N_{T_3,r'}(\vec{p}_1) \rangle = -i G_M \chi^{r\dagger} (\vec{q} \times \vec{\sigma}) \chi^{r'}, \quad (4.22)$$

wobei χ^r den Spinor zum Spin r bezeichnet, und der magnetische Formfaktor

$$G_M = G_M^v \tau_3 + G_M^s \quad (4.23)$$

über die isovektorielle und skalare Komponente

$$\begin{aligned} G_M^v &= \frac{2M f_\pi^2}{3} \int d^3r g(r) \sin^2 F \frac{j_1(|\vec{q}|r)}{|\vec{q}|r} \\ G_M^s &= \frac{M}{2\Theta} \int d^3r B^0 r^2 \frac{j_1(|\vec{q}|r)}{|\vec{q}|r} \end{aligned} \quad (4.24)$$

definiert ist. Die dabei auftretende Besselfunktion ist

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}. \quad (4.25)$$

Der elektromagnetische Strom des Nukleons

$$\langle N_{T_3,r}(\vec{p}_2) | J^\mu(0) | N_{T_3,r'}(\vec{p}_1) \rangle = \chi^{r\dagger} (2M G_E, -i G_M \vec{q} \times \vec{\sigma})^\mu \chi^{r'} \quad (4.26)$$

ergibt sich aus den elektrischen und magnetischen Formfaktoren G_E bzw. G_M . Diese wiederum sind Funktionen des Impulsübertrages $Q^2 = -q^2$ und können im Rahmen des Skyrme-Modells als Funktional des bereits bestimmten chiralen Profils berechnet werden.

4.1. Lorentz-Boost der Formfaktoren

Da das Skyrme-Modell eine effektive Theorie für den Bereich niedriger Energie darstellt, sind die Ergebnisse für höhere Impulsüberträge vergleichsweise ungenau. Dies ist unter Anderem durch die Parametrisierung der kollektiven Koordinaten als starre Rotation und nichtrelativistische Translation begründet. Es liegt nahe, die bisher berechneten Formfaktoren als gute Näherungen für ein langsam bewegtes Baryon zu betrachten und mittels einer Lorentz-Transformation zu höheren Impulsen überzugehen. Leider existiert keine eindeutige relativistische Beziehung zwischen den Nukleonformfaktoren, welche durch Streuung bei Impulsüberträgen Q^2 gemessen werden, und den berechneten nichtrelativistischen Formfaktoren. Dies liegt teils daran, dass der Boostoperator für ein zusammengesetztes System von der (unbekannten) Wechselwirkung zwischen den einzelnen Komponenten abhängt.

Über die Jahre wurden verschiedene Modelle entwickelt, welche die Nukleonformfaktoren einer elastischen Streuung in Bezug zu den nichtrelativistischen

Formfaktoren bringen. Im Jahr 1970 entwickelten Licht und Pagnamenta [69] eine Theorie zur relativistischen Beschreibung zusammengesetzter Teilchen. Sie nahmen dabei ein Clustermodell an, ebenso wie einen Boost, welcher die Wechselwirkung zwischen den Teilchen vernachlässigt. Dieses Modell wurde 1977 von Mitra und Kumari [70] aufgegriffen, die eine symmetrischere Formulierung der kinematischen Transformation bezüglich der Anfangs- und Endzustände vorschlugen, was eine Verallgemeinerung auf inelastische Streuungen ermöglicht und zudem die „superkonvergenz“ Eigenschaft $Q^2 G(Q^2) \rightarrow 0$ für $Q^2 \rightarrow \infty$ der Formfaktoren $G(Q^2)$ erfüllt, in Übereinstimmung mit den QCD Betrachtungen zum dimensionalen Skalenverhalten. Im Gegensatz zu den Betrachtungen der Baryonen als Cluster, führte Ji [71] 1991 eine Quantisierungsmethode ein, die die Translationsmode des Solitons relativistisch beschrieb. Da der Translationsparameter der Lorentz-Transformation

$$\gamma^2 = (1 - v^2)^{-1} = 1 + \frac{Q^2}{(2M_b)^2} \quad (4.27)$$

vom Impuls abhängt und nach der Quantisierung nicht mehr mit dem Ortsparameter \vec{x} vertauscht, schlug Ji die Berechnung im Breitframe vor, da dort der eingehende und ausgehende Impuls vom Betrag her gleich sind. Dies verhindert das Auftreten von Ambiguitäten in der Ordnung der Operatoren.

Alle diese Vorgehensweisen liefern vergleichbare Ergebnisse und können in der Form

$$G_M^R(Q^2) = \gamma^{-2n_M} G_M^{\text{NR}}(k^2) \quad (4.28)$$

$$G_E^R(Q^2) = \gamma^{-2n_E} G_E^{\text{NR}}(k^2) \quad (4.29)$$

dargestellt werden, mit $k^2 = \gamma^{-2} Q^2$. Die Gleichungen (4.28) und (4.29) zeigen wie die relativistischen (R) Formfaktoren aus den im vorherigen Abschnitt nichtrelativistisch (NR) hergeleiteten Formfaktoren berechnet werden können. Die Konstanten n_E und n_M hängen von den jeweiligen Modellen ab, die von Licht und Pagnamenta als $n_E = n_M = 1$ und von Mitra und Kumari als $n_E = n_M = 2$ angegeben werden. Ji erhielt bei der relativistischen Verallgemeinerung des Solitonmodells die Werte $n_E = 0$ und $n_M = 1$. Trotz dieser unterschiedlich bestimmten Konstanten, haben alle Modelle gemeinsam, dass es zu einer Kontraktion der räumlichen Verteilung und dem daraus resultierenden Boost des Impulses Q^2 kommt. Eine Messung mit dem Impulsübertrag Q^2 entspricht einem reduzierten Impuls k^2 bei den nichtrelativistischen Formfaktoren. Dies hat zur Folge, dass der Bereich kleiner räumlicher Frequenzen k^2 , in dem das Soliton Modell zutreffende Ergebnisse liefert, einem erweiterten Q^2 Bereich bei der Streuung entspricht. Da $G^R(Q^2 \rightarrow \infty)$ auf $G^{\text{NR}}(k^2 \rightarrow 4M_b^2)$ abgebildet wird, ist sofort ersichtlich, dass die Formfaktoren nur für $n_M, n_E > 1$ das Konvergenzkriterium $Q^2 G(Q^2) \rightarrow 0$ für $Q^2 \rightarrow \infty$ erfüllen. Zwar besteht kein Grund, dass ein effektives Modell für niedrige Energien eine zutreffende Aussage über den Hochenergie-Grenzwert liefern

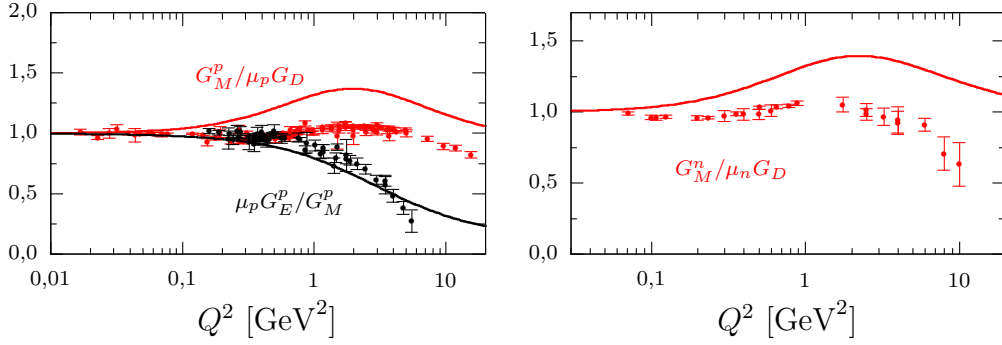


Abb. 4.1: Die im Skyrme-Modell berechneten Proton- und Neutron-Formfaktoren geteilt durch den Dipol-Formfaktor als Funktion des Impulsübertrages Q^2 nach Anwendung des Lorentz-Boosts. Die verwendeten Modellparameter sind $e_s = 3,8$ und $M_b = 939$ MeV, $n_E = n_M = 2$. Im Vergleich die gemessenen Formfaktoren für Proton [11–19, 27, 29, 30, 32–36] und Neutron [72–78].

sollte, allerdings werden die empirischen Formfaktoren zur Darstellung gewöhnlich durch den Dipol-Formfaktor $G_D(Q^2) = 1/(1 + Q^2/0,71 \text{ GeV}^2)^2$, der sich im Grenzwert wie ein Cluster aus drei Quarks verhält, geteilt. Für den Vergleich mit den experimentellen Daten ist es hilfreich, wenn die Formfaktoren für $Q^2 > M^2$ dasselbe Verhalten wie G_D aufweisen.

4.2. Rosenbluth-Formel im Breitframe

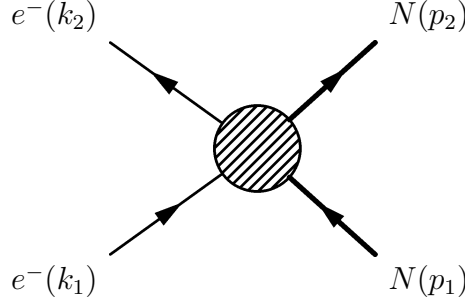
Im Breitframe überträgt das gestreute Elektron einen Impuls \vec{q} aber keine Energie auf das Proton. Es wird daher auch als *brick wall frame* bezeichnet, da das Proton sich wie beim Stoß gegen eine feste Wand verhält. Das Breitframe kann mittels der Kinematik

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \left(E, -\frac{\vec{q}}{2}\right) & p_2 &= \left(E, \frac{\vec{q}}{2}\right) \\
 k_1 &= (k_0, \vec{k}_1) & k_2 &= (k_0, \vec{k}_2) \\
 E &= \sqrt{M^2 + \frac{\vec{q}^2}{4}} & q &= (0, \vec{q}) = p_2 - p_1
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

festgelegt werden.

Mit Hilfe des Matrixelements des hadronischen Stromes $\langle J \rangle$ aus Gl. (4.26) lässt sich das Übergangsmatrixelement der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung als Funktional der elektrischen Formfaktoren im Breitframe unter der Näherung des Ein-Photon-Austausches berechnen. Das Ergebnis entspricht der Rosenbluth-Formel (2.8).

Das Übergangsmatrixelement der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung in


Abb. 4.2: Kinematik der Elektron-Nukleon Streuung

der Ein-Photon-Näherung

$$\mathcal{M}_\gamma = \bar{u}^s(k_2)(-ie\gamma^\mu)u^{s'}(k_1) \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) (-ie\langle J^\nu \rangle) \quad (4.31)$$

folgt unmittelbar aus den Feynman-Regeln der Quantenelektrodynamik. Über die Spins des Elektrons, sowie die Spins des eingehenden und auslaufenden Nukleons r', r summiert, wird die Übergangsamplitude zu

$$\sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_\gamma|^2 = \frac{e^4}{q^4} \sum_{rr'} \text{tr} \left((k_2 + m_e)\gamma_\mu \langle J^\mu \rangle (k_1 + m_e)\gamma_\nu \langle J^\nu \rangle^\dagger \right). \quad (4.32)$$

Werden die Variablen

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Q^2}{4M^2} \stackrel{BF}{=} \frac{\vec{q}^2}{4M^2} \\ \varepsilon &= \frac{((p_1 + p_2)_\mu (k_1 + k_2)^\mu / 4)^2 - M^4 \tau(\tau + 1)}{((p_1 + p_2)_\mu (k_1 + k_2)^\mu / 4)^2 + M^4 \tau(\tau + 1)} \stackrel{BF}{=} \frac{k_0^2 - M^2 \tau}{k_0^2 + M^2 \tau} \end{aligned} \quad (4.33)$$

im Breitframe eingeführt, so lassen sich folgende Identitäten finden

$$\sum_{rr'} \chi^{r\dagger} J^\mu \chi^{r'} \chi^{r'\dagger} J_\mu^* \chi^r = 8M^2(G_E^2 - 2\tau G_M^2) \quad (4.34)$$

$$k_1^\mu k_{2\mu} = 2M^2\tau + m_e^2 \quad (4.35)$$

$$k_1^\mu J_\mu = k_2^\mu J_\mu = 2Mk_0 G_E - iG_M \vec{\sigma} \cdot (\vec{k}_1 \times \vec{k}_2) \quad (4.36)$$

$$(\vec{k}_1 \times \vec{k}_2)^2 = -4M^4\tau^2 + 4M^2\tau k_0^2 + \mathcal{O}(m_e^2). \quad (4.37)$$

Diese Relationen werden bei der Behandlung der Zwei-Photon-Vertices hilfreich sein. Weiter lässt sich damit die Rosenbluth-Formel leicht reproduzieren. Die Elektronmasse m_e wird auch hier vernachlässigt, da sie weit unterhalb der Skala der Nukleonmasse M bzw. des Impulsübertrages liegt. Mit dieser Näherung ergibt sich für das Übergangsmatrixelement:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_\gamma|^2 = \frac{2e^4}{\tau(1-\varepsilon)} (\varepsilon G_E^2 + \tau G_M^2). \quad (4.38)$$

Aus dem Verhältnis zur Mott-Streuung

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{\text{Mott}}|^2 = \frac{2e^4(1+\tau)}{\tau(1-\varepsilon)} \varepsilon \quad (4.39)$$

folgt der Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} (G_E^2 + \frac{\tau}{\varepsilon} G_M^2) / (1 + \tau). \quad (4.40)$$

5. Zwei-Photon-Austausch im nicht-linearen- σ -Modell

Neben dem Ein-Photon-Austausch tragen auch Terme höherer Ordnung in der Feinstrukturkonstanten α zur Elektron-Nukleon-Streuung bei. Diese Beiträge unterschiedlichster Art werden gewöhnlich unter dem Begriff der Strahlungskorrekturen zusammengefasst. Darunter fällt sowohl die Abstrahlung niederenergetischer Photonen, als auch der Austausch mehrerer Photonen zwischen Elektron und Nukleon. Unter Letzterem wird i. Allg. das Box (Abb. 2.5g) bzw. x-Box (Abb. 2.5h) Diagramm verstanden, das den Austausch zweier Photonen beschreibt. Neben diesem iterierten Photon-Austausch enthält das Skyrme-Modell bereits Zwei-Photon-Kopplungsterme in der Lagrangedichte. Einer dieser Terme resultiert aus dem Beitrag des nicht-linearen- σ -Modells, Gl. (3.60)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{2\gamma}^{nl\sigma} &= -\frac{f_\pi^2}{4} e^2 A^\mu A_\mu \text{tr}([Q, U][Q, U^\dagger]) \\ &= e^2 A^\mu A_\mu F_{2\gamma}^{nl\sigma}[U].\end{aligned}\quad (5.1)$$

Die resultierenden Beiträge zur Elektron-Nukleon-Streuung ergeben sich aus den Feynman-Diagrammen in Abb. 5.1. Wegen der Symmetrie in $A_\mu A^\mu$ sind die

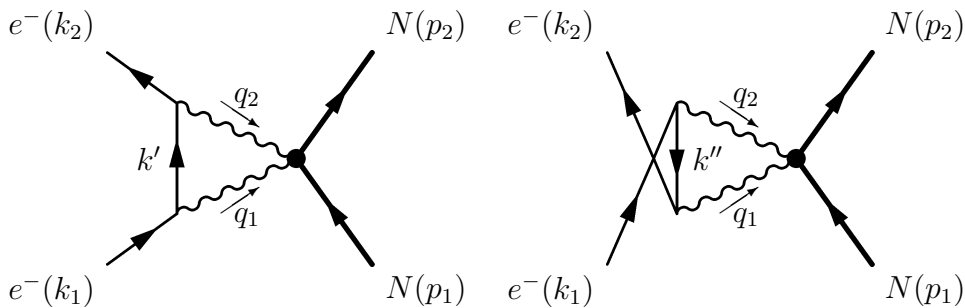


Abb. 5.1: Die Feynman-Diagramme für den effektiven Zwei-Photon-Austausch im $nl\sigma$ -Modell. Der Vertex am Nukleon „•“ entspricht dem Nukleonmatrixelement von $F_{2\gamma}^{nl\sigma}$, vgl. Gl. (5.1).

beiden Streuamplituden identisch:

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{2\gamma}^{nl\sigma} &= -2e^4 \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \bar{u}^s(k_2) \gamma_\alpha \frac{\not{k}' + m_e}{k'^2 - m_e^2 + i\epsilon} \gamma^\alpha u^{s'}(k_1) \frac{1}{q_1^2 + i\epsilon} \frac{1}{q_2^2 + i\epsilon} F_{2\gamma}^{nl\sigma}(Q^2) \\
 &= 4e^4 F_{2\gamma}^{nl\sigma}(Q^2) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\
 &\quad \cdot \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{2}{(\ell^2 - \Delta)^3} \bar{u}^s(k_2) [\not{\ell} - (x-1)\not{k}_2 + y\not{q} - 2m_e] u^{s'}(k_1), \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

mit

$$q = p_2 - p_1 = k_1 - k_2; \quad \ell = q_2 + xk_2 - yq; \quad \Delta = x^2 k_2^2 - zyq^2 - i\epsilon. \quad (5.3)$$

Der Formfaktor $F_{2\gamma}^{nl\sigma}(Q^2)$ lässt sich analog zu den Ein-Photon-Formfaktoren bestimmen. An dieser Stelle genügt es zu bemerken, dass er ein Lorentz-Skalar darstellt und nur vom Impulsübertrag Q^2 abhängt. Nach Ausführung der Wick-Rotation und Integration über ℓ vereinfacht sich das Matrixelement zu

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{nl\sigma} = i \frac{e^4}{4\pi^2} F_{2\gamma}^{nl\sigma}(|\vec{q}|) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \bar{u}^s(k_2) \frac{(x+1)m_e}{x^2 m_e^2 - y(1-x-y)q^2 - i\epsilon} u^{s'}(k_1). \quad (5.4)$$

Für den raumartigen Bereich $\xi^2 = q^2/(4m_e^2) = -Q^2/(4m_e^2) < 0$, wie er für die elastische Elektron-Nukleon-Streuung relevant ist, ergibt sich nach Integration über den Feynman-Parameter x

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_{2\gamma}^{nl\sigma} &= \frac{ie^4}{4\pi^2} F_{2\gamma}^{nl\sigma}(|\vec{q}|) \frac{\bar{u}^s(k_2) u^{s'}(k_1)}{m_e} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 dy \ln \frac{1-y}{4y|\xi^2|} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \int_0^{\frac{1}{1+|\xi^2|}} dy \frac{1+2y|\xi^2|}{\sqrt{\delta}} \arctan \frac{\sqrt{\delta}}{4y|\xi^2|} + 2 \int_{\frac{1}{1+|\xi^2|}}^1 dy \frac{1+2y|\xi^2|}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{-\delta}}{4y|\xi^2|} \right\}, \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

mit $\delta = 16y|\xi^2|(1-y-y|\xi^2|)$. Der Integrand ist zwar an den Stellen $y=0$ und $y=1$ divergent, aber integrierbar.

5.1. Die Amplitude $\mathcal{M}_{2\gamma}^{nl\sigma}$ im Limes $m_e \rightarrow 0$

Da die Elektronenmasse gegenüber der Nukleonmasse vernachlässigbar klein ist, wird die Rosenbluth-Separation im Allgemeinen für den Grenzwert $m_e \rightarrow 0$

durchgeföhrt. Aus Gründen der Konsistenz ist es daher sinnvoll bei der Berechnung des Zwei-Photon-Matrixelementes ebenfalls diesen Grenzwert zu betrachten.

Der erste Summand in Gl. 5.5 lässt sich unmittelbar integrieren

$$A = \frac{1}{2} \int_0^1 dy \ln \frac{1-y}{4y|\xi^2|} = -\frac{1}{2} \int_0^1 dy (\ln(4|\xi^2|) + \ln y - \ln(1-y)) = -\frac{1}{2} \ln(4|\xi^2|). \quad (5.6)$$

Der zweite Summand wird zunächst mittels $x = \sqrt{\delta}/(4y|\xi^2|)$ substituiert

$$\begin{aligned} B &= 2 \int_0^{\frac{1}{1+|\xi^2|}} dy \frac{1+2y|\xi^2|}{\sqrt{\delta}} \arctan \frac{\sqrt{\delta}}{4y|\xi^2|} \\ &= \int_0^\infty dx \frac{1}{1+|\xi^2|(1+x^2)} \left(1 + \frac{2|\xi^2|}{1+|\xi^2|(1+x^2)} \right) \arctan x. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Da das Integral endlich ist, geht der Ausdruck B gegen 0 für $|\xi^2| \rightarrow \infty$.

Der dritte und letzte Summand wird mit $x = \sqrt{-\delta}/(4y|\xi^2|)$ substituiert

$$\begin{aligned} C &= 2 \int_{\frac{1}{1+|\xi^2|}}^1 dy \frac{1+2y|\xi^2|}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{-\delta}}{4y|\xi^2|} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{1+|\xi^2|(1-x^2)} \left(1 + \frac{2|\xi^2|}{1+|\xi^2|(1-x^2)} \right) \operatorname{artanh} x. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Der Integrand ist bei $x \rightarrow 1$ divergent und muss erneut mit $y = \operatorname{artanh} x$ substituiert werden, bevor der Grenzwert bestimmt werden kann.

$$\begin{aligned} C &= \int_0^\infty dy \frac{y}{\cosh^2 y + |\xi^2|} \left(1 + \frac{2|\xi^2| \cosh^2 y}{\cosh^2 y + |\xi^2|} \right) \\ &\stackrel{x=2y}{=} \frac{1}{2} \int_0^\infty dx x \frac{(1+2|\xi^2|) \cosh x + 1 + 4|\xi^2|}{(\cosh x + 1 + 2|\xi^2|)^2} \\ &= \int_0^\infty dx x \frac{(1+2|\xi^2|)(e^x + e^{-x}) + 2 + 8|\xi^2|}{(e^x + e^{-x} + 4|\xi^2| + 2)^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Auch hier lässt sich der Grenzwert noch nicht unmittelbar ablesen, da das Verhalten des Integranden für $x \rightarrow \infty$ problematisch erscheint. Der divergente Anteil lässt sich mit Hilfe des Integrals (C.65) separieren und analytisch integrieren. Mit $\beta + \frac{1}{\beta} = 4|\xi^2| + 2$ folgt

$$C = (1+2|\xi^2|) \frac{\ln \beta}{\beta - \frac{1}{\beta}} + 2 \int_0^\infty dx x \frac{(1+2|\xi^2|)e^{-x} + 4|\xi^2| + 1}{(e^x + e^{-x} + 4|\xi^2| + 2)^2}. \quad (5.10)$$

Das verbleibende Integral existiert und kann im Grenzwert $|\xi^2| \rightarrow \infty$ vernachlässigt werden. Es gilt:

$$\lim_{|\xi^2| \rightarrow \infty} C = \frac{1}{2} \ln(4|\xi^2|). \quad (5.11)$$

Die Summe aller Beiträge verschwindet für $|\xi^2| \rightarrow \infty$

$$\lim_{|\xi^2| \rightarrow \infty} (A + B + C) = 0. \quad (5.12)$$

Die Rosenbluth-Formel folgt aus dem unpolarisierten Wirkungsquerschnitt der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung. Da die Spinsumme über $\bar{u}^s(k_2)u^{s'}(k_1)$ einen Faktor m_e reproduziert, lässt sich unmittelbar aus Gl. (5.5) ablesen, dass die Interferenz des Zwei-Photon-Matrixelements des nicht-linearen- σ -Modells mit dem Ein-Photon-Matrixelement im Grenzwert $m_e \rightarrow 0$ keinen Beitrag zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt liefert:

$$\lim_{m_e \rightarrow 0} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_\gamma^* \mathcal{M}_{2\gamma}^{nl\sigma} = 0. \quad (5.13)$$

6. Der $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall

Bevor $\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}}$, das Wess-Zumino-Analogon zu $\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{nl}\sigma}$, berechnet wird, soll das mesonische Gegenstück, der $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall betrachtet werden. Die anomalen Kopplungen der beiden Prozesse $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ und $eN \rightarrow eN$ werden im Skyrme-Modell durch den Wess-Zumino-Term beschrieben, der die Anomalie vollständig beinhaltet. Der Zerfall des neutralen Pions ist von entscheidender Bedeutung für den Beitrag der Anomalie zur elastischen Elektron-Nukleon-Streuung, da das Ein-Schleifen-Diagramm beider Prozesse eine ultraviolette Divergenz aufweist. Dies liegt darin begründet, dass der zugehörige $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Formfaktor im Skyrme-Modell unabhängig vom Schleifenimpuls ist und nicht zu hohen Impulsen hin abfällt, wie es bei der Verwendung eines effektiven Pionformfaktors für den Übergang in zwei virtuelle Photonen der Fall wäre. Um eine endliche Übergangsamplitude zu erreichen, ist es nötig das Übergangsmatrixelement durch die Hinzunahme eines effektiven Vertex zu renormieren. Dieses Verfahren wurde erstmals 1992 von Luke, Savage und Wise [6] eingeführt, die den π^0 Zerfall im Rahmen der chiralen Störungstheorie behandelten. Es ist vergleichbar mit der Verwendung eines Pionformfaktors [79].

Eine Folge der Ultraviolett-Divergenz ist die Induzierung eines unbestimmten Parameters χ durch den zur Renormierung verwendeten *Counterterm*. Dieser Parameter lässt sich durch den gemessenen Pionzerfall bestimmen. Da bei der Elektron-Nukleon-Streuung eine vergleichbare Kopplung auftritt, ist es möglich zur Renormierung exakt denselben *Counterterm* zu verwenden, wodurch kein freier Parameter in $\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}}$ auftritt.

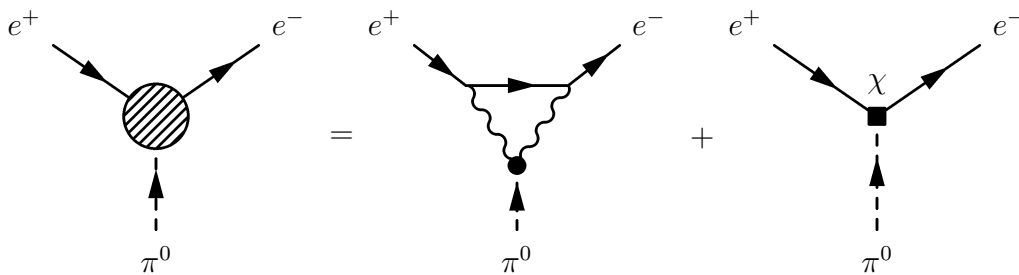


Abb. 6.1: Beiträge zum Zerfall des neutralen Pions in ein Elektron-Positron-Paar in niedrigster Ordnung. Zusätzlich zum Schleifen-Diagramm (Mitte), das aus der Zwei-Photon-Kopplung des Wess-Zumino-Terms resultiert, trägt auch der effektive *Counterterm* (rechts) aus Gl. (6.32) bei. Nicht dargestellt ist das zum mittleren analoge Diagramm mit gekreuzten, äußeren Leptonbeinen (vgl. Abb. 6.2).

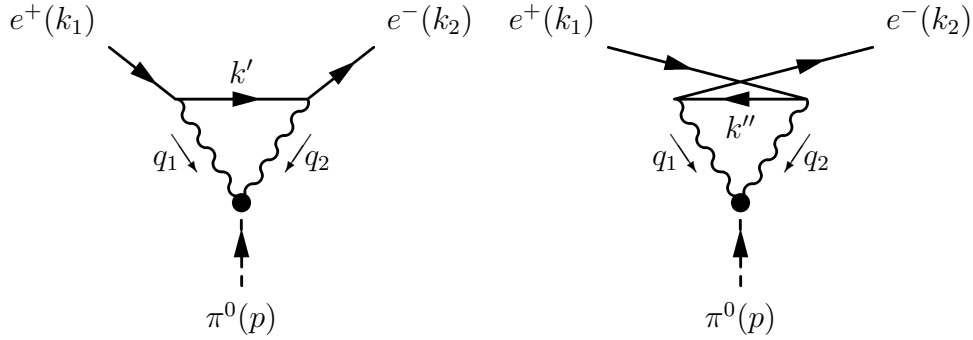


Abb. 6.2: Ein-Schleifen-Beiträge zum Zerfall des neutralen Pions in ein Elektron-Positron-Paar.

Mit Ausnahme des *Counterterms*, der später behandelt wird, kann das Übergangsmatrixelement des Zerfalls durch die Feynman-Diagramme in Abb. 6.2 beschrieben werden. Dabei wird die Kinematik

$$\begin{aligned} q &= -p = -k_1 - k_2 \\ q_1 &= q - q_2 \\ k' &= k_2 + q_2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

gewählt. Die Kopplung des Pions an zwei Photonen wird durch den geeichten Lagrangian des Wess-Zumino-Terms aus Gl. (3.72)

$$\mathcal{L}_{2\gamma}^{\text{wz}} = e^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho W_\delta \quad \text{mit} \quad W_\delta = \frac{\partial_\delta \pi^0}{8\pi^2 f_\pi} \quad (6.2)$$

beschrieben. Der Wechselwirkungsterm ist mit demjenigen identisch, der bereits zur Berechnung des neutralen Pion-Zerfalls in zwei Photonen in Kapitel 3.6 verwendet wurde. Der Formfaktor W_δ lässt sich analog mit der Ein-Pion-Näherung berechnen und entspricht Gl. (3.75). Um die Ableitung auf das Photonfeld A auszuwerten, ist es nützlich zuerst die Kontraktion eines Fermion Feldoperators mit einem externen Zustand

$$\langle \vec{k}_2, s | \bar{\psi}(x) \rangle = \langle 0 | \bar{u}^s(k_2) e^{ik_2 x} \rangle, \quad (6.3)$$

zu betrachten, ebenso wie die Fourier-Transformation des Elektron-Propagators

$$S_F(x-y) \equiv \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{k}' + m_e)}{k'^2 - m_e^2 + i\epsilon} e^{-ik'(x-y)}, \quad (6.4)$$

und des Photon-Propagators in der Feynman-Eichung

$$D_F^{\mu\nu}(x-z) = \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{q_2^2 + i\epsilon} e^{iq_2(x-z)}. \quad (6.5)$$

Aus allen drei Gleichungen (6.3) bis (6.5) folgt die Impulserhaltung an dem entsprechenden Vertex, welche die Kinematik (6.1) festlegt. Für die Ableitung auf das Photonfeld folgt

$$\frac{\partial}{\partial \alpha z} D_F^{\mu\nu}(x-z) = \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu} e^{-iq_2(x-z)}}{q_2^2 + i\epsilon} [-i(q_2)_\alpha]. \quad (6.6)$$

Die Übergangsamplitude lässt sich gemäß der gängigen Feynman-Regeln berechnen:

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = -ie^4 \langle W_\delta \rangle \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \bar{u}^s(k_2) \gamma_\nu \frac{\not{k}' + m_e}{k'^2 - m_e^2 + i\epsilon} \gamma_\rho v^{s'}(k_1) \frac{(q_1 - q_2)_\mu}{(q_1^2 + i\epsilon)(q_2^2 + i\epsilon)}. \quad (6.7)$$

Das unterschiedliche Vorzeichen für beide Diagramme, bzw. für die Ableitungen auf das Photonfeld, ergibt sich aus dem Faktor $\epsilon^{\mu\nu\rho\delta}$ des Vertex, oder alternativ aus der Vertauschung der Fermionfelder.

Das Matrixelement (6.7) lässt sich mit Hilfe von Gl. (C.48) in ein Feynman-Parameter-Integral umformen

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = -i2e^4 \langle W_\delta \rangle \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}^s(k_2) \gamma_\nu (\not{k}' + m_e) \gamma_\rho v^{s'}(k_1) (q_1 - q_2)_\mu}{(\ell^2 - \Delta)^3}, \quad (6.8)$$

mit

$$\ell = q_2 + xk_2 - yq \quad (6.9)$$

$$\Delta = x^2 k_2^2 - zyq^2 - i\epsilon. \quad (6.10)$$

Der Teil des Zählers, der die drei Gamma-Matrizen enthält, lässt sich mittels der Gln. (C.43) und (C.45) sowie den Spinoren $\bar{u}^s = \bar{u}^s(k_2)$ und $v^{s'} = v^{s'}(k_1)$ umschreiben:

$$\begin{aligned} & \bar{u}^s \gamma_\nu \not{k}' \gamma_\rho (q_1 - q_2)_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} v^{s'} \stackrel{C 43}{=} i \bar{u}^s k'^\alpha \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} \gamma^\beta \gamma_5 (q_1 - q_2)_\mu v^{s'} \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \\ & \stackrel{6.9}{=} -i \bar{u}^s (k_2 + \ell - xk_2 + yq)^\alpha \gamma^\beta \gamma_5 (2\ell - 2xk_2 + (2y-1)q)_\mu v^{s'} \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \\ & \stackrel{C 45}{=} i2 \bar{u}^s (k_2 + \ell - xk_2 + yq)^\alpha \gamma^\beta \gamma_5 (2\ell - 2xk_2 + (2y-1)q)_\mu v^{s'} (g_\alpha^\mu g_\beta^\delta - g_\beta^\mu g_\alpha^\delta) \\ & \stackrel{C 49}{\simeq} -i2 \bar{u}^s \left(\frac{2}{d} \ell^2 g_\mu^\alpha + ((1-x)k_2 + yq)^\alpha (-2xk_2 + (2y-1)q)_\mu \right) \gamma^\beta \gamma_5 v^{s'} (g_\alpha^\mu g_\beta^\delta - g_\beta^\mu g_\alpha^\delta) \\ & = -i2 \bar{u}^s \left(\frac{6}{d} \ell^2 + 2x(x-1)k_2^2 + (x+2y-4xy-1)k_2 \cdot q + y(2y-1)q^2 \right) \gamma^\delta \gamma_5 v^{s'} \\ & \quad + i2 \bar{u}^s \left(([x-1]k_2 - yq)^\delta (2xk_2 - (2y-1)q) \right) \gamma_5 v^{s'} \\ & = -i \bar{u}^s \left(\frac{12}{d} \ell^2 + 4x(x-1)m_e^2 - (x+4y-4xy-4y^2-1)q^2 \right) \gamma^\delta \gamma_5 v^{s'} \\ & \quad + i4m_e \bar{u}^s \left(([x-1]k_2 - yq)^\delta (x+2y-1) \right) \gamma_5 v^{s'} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Im letzten Schritt wurde $q_\alpha k_2^\alpha = -q^2/2$ verwendet. In der fünften Zeile wurden Terme, die linear im Schleifenimpuls ℓ sind vernachlässigt, da sie aus Gründen der Symmetrie nicht zum Integral (6.8) beitragen. Gleichung (6.11) ist daher nur unter dem Integral (6.8) gültig. Der restliche Teil des Zählers lässt sich ebenfalls umformen:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}^s(k_2) \gamma_\nu m_e \gamma_\rho (q_1 - q_2)_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} v^{s'}(k_1) \\
& \stackrel{C}{=} im_e \bar{u}^s(k_2) [\gamma^\mu, \gamma^\delta] \gamma_5 (2\ell - 2xk_2 + (2y - 1)q)_\mu v^{s'}(k_1) \\
& \simeq -2im_e \bar{u}^s(k_2) (\gamma^\mu \gamma^\delta - g^{\mu\delta}) (2xk_2 + (2y - 1)(k_1 + k_2))_\mu \gamma_5 v^{s'}(k_1) \\
& = -i4m_e^2 \bar{u}^s(k_2) x \gamma^\delta \gamma_5 v^{s'}(k_1) + i2m_e \bar{u}^s(k_2) (2xk_2 + (2y - 1)(k_2 - k_1))^\delta \gamma_5 v^{s'}(k_1).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Beide Terme lassen sich zum Matrixelement

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = & 2e^4 \langle W_\delta \rangle \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^3} \\
& \cdot \bar{u}^s(k_2) \left(-\frac{12}{d} \ell^2 \gamma^\delta - (4x^2 \frac{m_e^2}{q^2} + 1 - x - 4(1 - x - y)y) q^2 \gamma^\delta \right. \\
& \left. + 4(x^2 + 2xy - x)m_e k_2^\delta - (4xy + 8y^2 - 8y + 2)m_e q^\delta \right) \gamma_5 v^{s'}(k_1)
\end{aligned} \tag{6.13}$$

zusammenfassen. Dieses weist wie bereits erwähnt eine Ultraviolett-Divergenz auf. Zur Integration über den Impuls ℓ und Behandlung der Divergenz wird die Methode der dimensional Regularisierung verwendet (siehe Anhang C.7):

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = -i\alpha^2 \langle W_\delta \rangle \bar{u}^s(k_2) [w_1 k_2^\delta + w_2 q^\delta + (w'_3 + w''_3) \gamma^\delta] \gamma_5 v^{s'}(k_1), \tag{6.14}$$

mit

$$\begin{aligned}
w_1 &= 4 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{x^2 + 2xy - x}{x^2 m_e^2 - (1 - x - y)yq^2 - i\epsilon} m_e \\
w_2 &= -2 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{2xy + 4y^2 - 4y + 1}{x^2 m_e^2 - (1 - x - y)yq^2 - i\epsilon} m_e \\
w'_3 &= -2 - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{(1 - x)q^2}{x^2 m_e^2 - (1 - x - y)yq^2 - i\epsilon} \\
w''_3 &= 6 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left(\frac{2}{\epsilon_d} - \ln \frac{\Delta}{\Lambda^2} - \gamma + \ln(4\pi) \right)
\end{aligned} \tag{6.15}$$

und $\Delta = x^2 m_e^2 - (1 - x - y)yq^2 - i\epsilon$. Obwohl das Elektron ein Elementarteilchen ist und somit keine Formfaktoren, wie z. B. das Nukleon, besitzt, können die vier Funktionen in Gl. (6.15) als effektive Formfaktoren des Elektrons verstanden werden. Der Parameter $\epsilon_d = 4 - d$, der mit der dimensional Regularisierung eingeführt wurde, führt für den physikalischen Raum mit vier Raum-Zeit-Dimensionen $d = 4$ zur Divergenz. Die Übergangswahrscheinlichkeit wird im weiteren Verlauf (Absch. 6.1) durch die Verwendung eines effektiven *Counterterms* renormiert. Dabei wird auch die noch unbestimmte Massenskala Λ festgelegt.

Zunächst können die verbleibenden Feynman-Parameter-Integrale für den Pionzerfall unabhängig von der Renormierung ausgewertet werden. Wird der Formfaktor $\langle W_\delta \rangle$ des Pionzerfalls aus Gl. (3.77) eingesetzt, so vereinfacht sich das Matrixelement zu

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = \frac{\alpha^2 m_e}{4\pi^2 f_\pi} \bar{u}^s(k_2) \gamma_5 v^{s'}(k_1) (w + w''), \quad (6.16)$$

mit

$$w = 4(\xi^2 - 1) \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{x^2}{x^2 - 4(1-x-y)y\xi^2 - i\epsilon}. \quad (6.17)$$

Dabei wurde die reelle Größe $\xi^2 = \frac{q^2}{4m_e^2}$ eingeführt, die im Rahmen des Pionzerfalls $q^2 = m_\pi^2$ positiv ist. Im Folgenden wird das Integral über die beiden verbleibenden Feynman Parameter vereinfacht, indem eine Partialbruchzerlegung durchgeführt wird:

$$I = \frac{w}{4(\xi^2 - 1)} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left(1 + \frac{A}{x - x_+ - i\epsilon} + \frac{B}{x - x_- + i\epsilon} \right) \quad (6.18)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 4\xi^2 y \frac{1-y-x_+}{x_+ - x_-} = \frac{x_+^2}{x_+ - x_-}, \\ B &= -4\xi^2 y \frac{1-y-x_-}{x_+ - x_-} = -\frac{x_-^2}{x_+ - x_-}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die Nullstellen des Nenners

$$x_\pm = -2\xi^2 y \pm 2\xi^2 y \sqrt{1 + \xi^{-2}(1-y)/y} \quad (6.20)$$

sind für $\xi^2 \geq 0$ reell. Da $x_- \leq 0$ ist, liegt diese Nullstelle außerhalb des Integrationsbereichs. Für x_+ hingegen gilt:

$$\begin{aligned} 4\xi^4 y^2 + 4\xi^2 y(1-y) &\leq ((1-y) + 2\xi^2 y)^2 \\ \Rightarrow \underbrace{-2\xi^2 y + \sqrt{4\xi^4 y^2 + 4\xi^2 y(1-y)}}_{x_+} &\leq (1-y), \end{aligned} \quad (6.21)$$

und damit $0 \leq x_+ \leq (1-y)$ für $0 < y < 1$. Da x_+ immer innerhalb des Integrationsbereiches liegt, wird zur Auswertung des reellen Anteils der Hauptwert benutzt:

$$\begin{aligned} \text{Re}(I) &= \frac{1}{2} + \int_0^1 dy \frac{1}{x_+ - x_-} \left(x_+^2 \ln \left| \frac{x_+}{4\xi^2 y} \right| - x_-^2 \ln \left| \frac{x_-}{4\xi^2 y} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 dy \xi^2 y \left(\frac{2 + \xi^{-2}(1-y)/y}{\sqrt{1 + \xi^{-2}(1-y)/y}} \ln \left| \frac{x_+}{x_-} \right| - 2 \ln \frac{1-y}{4\xi^2 y} \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Die Polstelle des Integrals liefert den Imaginärteil

$$\text{Im}(I) = i\pi \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx A\delta(x - x_+) = i\pi \int_0^1 dy \frac{x_+^2}{4\xi^2 y \sqrt{1 + \xi^{-2}(1-y)/y}}. \quad (6.23)$$

Zur numerischen Auswertung des verbleibenden Feynman-Parameter-Integrals und zum Vergleich mit Luke, Savage and Wise [6] ist es nützlich die Variablen λ_{\pm} mit

$$x_{\pm} = -2\xi\sqrt{y}\lambda_{\mp} \quad (6.24)$$

einzuführen und einen Teil der Integranden analytisch zu integrieren, so dass sich für den Realteil

$$\begin{aligned} \text{Re}(I) &= \frac{1}{2} + \int_0^1 dy \frac{\lambda_-^2 \ln|\lambda_-| - \lambda_+^2 \ln|\lambda_+| - (\lambda_-^2 - \lambda_+^2) \ln|2\xi\sqrt{y}|}{\sqrt{1 + \xi^{-2}(1-y)/y}} \\ &= \frac{1}{2} + \xi^2 \ln(4\xi^2) - \frac{1}{2}\xi^2 + \int_0^1 dy \frac{\lambda_-^2 \ln|\lambda_-| - \lambda_+^2 \ln|\lambda_+|}{\sqrt{1 + \xi^{-2}(1-y)/y}} \end{aligned} \quad (6.25)$$

ergibt.

Das Integral über $\ln \Delta$, das im Formfaktor w_3'' enthalten ist, lässt sich ebenfalls durch λ_{\pm} ausdrücken:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \ln \frac{\Delta}{\Lambda^2} = \ln \frac{m_e}{\Lambda} + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \ln((x - x_-)(x - x_+) - i\epsilon) \\ &= \ln \frac{m_e}{\Lambda} + \int_0^1 dy \left(\int_0^{1-y} dx (\ln|x - x_-| + \ln|x - x_+|) - \int_0^{x_+} dx i\pi \right) \\ &= \ln \frac{m_e}{\Lambda} - 1 + \int_0^1 dy (\lambda_-^2 \ln|\lambda_-^2| + \lambda_+^2 \ln|\lambda_+^2| + x_+ \ln|x_+| + x_- \ln|x_-| - i\pi x_+). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Dabei wurde im zweiten Schritt $\ln(X - i\epsilon) = \ln(\sqrt{X^2 + \epsilon^2}e^{i\phi}) = \ln|X| - i\pi$ für ein reelles, negatives X benutzt, wie es für $0 < x < x_+$ auftritt. Mit $\lambda_- \lambda_+ = 1 - y$ und $\lambda_-^2 + \lambda_+^2 = 4\xi^2 y + 2(1 - y)$ folgt

$$\begin{aligned} x_+ \ln|x_+| + x_- \ln|x_-| &= ((1 - y) - \lambda_-^2) \ln|2\xi\sqrt{y}\lambda_-| + ((1 - y) - \lambda_+^2) \ln|2\xi\sqrt{y}\lambda_+| \\ &= (1 - y) \ln|1 - y| - 2\xi^2 y \ln|4\xi^2 y| - \lambda_-^2 \ln|\lambda_-| - \lambda_+^2 \ln|\lambda_+| \end{aligned} \quad (6.27)$$

und man erhält für den Formfaktor

$$\begin{aligned} w_3'' &= 3 \left(\frac{2}{\epsilon_d} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln \frac{m_e^2}{\Lambda^2} + \frac{5}{2} + 2\xi^2 \ln(4\xi^2) - \xi^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^1 dy (\lambda_-^2 \ln|\lambda_-| + \lambda_+^2 \ln|\lambda_+|) - 2\pi i \int_0^1 dy 2\xi\sqrt{y}\lambda_- \right). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Werden die Formfaktoren in (6.16) eingesetzt, so folgt der (nicht renormierte) Realteil des Matrixelements

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}}) &= -i \frac{\alpha^2 m_e}{8\pi^2 f_\pi} \bar{u}^s(k_2) \gamma_5 v^{s'}(k_1) \left(\frac{12}{\epsilon_d} - 6\gamma + 6 \ln(4\pi) - 6 \ln \frac{m_e^2}{\Lambda^2} + 11 + 2\xi^2 \right. \\ &\quad - 4\xi^4 + 4\xi^2 \ln(4\xi^2) - 4 \int_0^1 dy \left[3 + \frac{2(\xi^2 - 1)\sqrt{y}}{\sqrt{y + \xi^{-2}(1-y)}} \right] \lambda_+^2 \ln |\lambda_+| \\ &\quad \left. + 8\xi^4 \ln(4\xi^2) - 4 \int_0^1 dy \left[3 - \frac{2(\xi^2 - 1)\sqrt{y}}{\sqrt{y + \xi^{-2}(1-y)}} \right] \lambda_-^2 \ln |\lambda_-| \right). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Dabei ist anzumerken, dass wegen $(\bar{u}\gamma_5 v)^* = -\bar{v}\gamma_5 u$ die Größe $\bar{u}^s(k_2)\gamma_5 v^{s'}(k_1)$ rein imaginär ist. Im Gegensatz zum Realteil kann der Imaginärteil aus (6.23) und (6.28) analytisch integriert werden

$$\begin{aligned} \text{Im}(\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}}) &= i \frac{e^4 m_e}{16\pi^3 f_\pi} \bar{u}^s(k_2) \gamma_5 v^{s'}(k_1) \int_0^1 dy \left(\frac{(1 - \xi^2)\lambda_-^2}{\sqrt{1 - \xi^{-2}(y-1)/y}} + 3\xi\sqrt{y}\lambda_- \right) \\ &= i \frac{e^4 m_e}{16\pi^3 f_\pi} \bar{u}^s(k_2) \gamma_5 v^{s'}(k_1) \int_0^1 dy \left(\frac{2(1 - \xi^4)y^2 - (\xi^2 + 2)y}{\sqrt{y^2 - \xi^{-2}y(y-1)}} + (\xi^2 + 2\xi^4)y \right) \\ &= -i \frac{e^4 m_e}{32\pi^3 f_\pi} \bar{u}^s(k_2) \gamma_5 v^{s'}(k_1) \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^{-2}}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \xi^{-2}}}{\xi^{-1}} \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Die Breite des Zerfalls $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$ ergibt sich nach der Renormierung aus den Übergangsmatrixelementen

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow e^+ e^-) = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{m_\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{m_\pi^2}} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}}|^2. \quad (6.31)$$

Zum Ausführen der Spinsummation ist die Beziehung $\sum_{s,s'} |\bar{u}^s(k_2)\gamma_5 v^{s'}(k_1)|^2 = 2m_\pi^2$ hilfreich.

6.1. Renormierung

Der Realteil des Ein-Schleifen-Feynman-Diagramms ist ultraviolett divergent, da $\epsilon_d \rightarrow 0$. Er wird mittels eines lokalen *Counterterms*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{ct}} &= -\frac{\alpha^2}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \chi(\Lambda) W_\mu \\ &= \frac{i\alpha^2}{32\pi^2} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \chi(\Lambda) \text{tr}(2Q^2(U^\dagger \partial_\mu U - U \partial_\mu U^\dagger) + (Q \partial_\mu U Q U^\dagger - Q U Q \partial_\mu U^\dagger)) \end{aligned} \quad (6.32)$$

renormiert, in dem der axiale Elektronstrom $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ an den Wess-Zumino-Beitrag W_μ aus Gl. (3.74) angekoppelt wird. Mit Hilfe dieses *Counterterms* wurden bereits die Zerfälle $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$, $\eta \rightarrow e^+e^-$, $\eta \rightarrow \mu^+\mu^-$, $K_L \rightarrow e^+e^-$ und $K_L \rightarrow \mu^+\mu^-$ im Rahmen der chiralen Störungstheorie erfolgreich behandelt [6, 80–82]. Der Lagrangian des *Counterterms* ist durch die Forderung der Eichinvarianz festgelegt mit einem einzigen unbestimmten Renormierungsparameter χ .

Das entsprechende Matrixelement des *Counterterms* in der Ein-Pion-Näherung für den $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall lässt sich mit Gl. (3.77) als

$$i\mathcal{M}^{ct} = \frac{\alpha^2 m_e}{8\pi^2 f_\pi} \chi(\Lambda) \bar{u}^s(k_2) \gamma_5 v^{s'}(k_1) \quad (6.33)$$

schreiben. Die sich aus der Subtraktion des Wess-Zumino-Terms mit dem *Counterterm* ergebende Kombination

$$\chi_{fin}(\Lambda) = 6 \left(\frac{2}{\epsilon_d} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - \chi(\Lambda) \quad (6.34)$$

ist endlich, hängt aber vom Renormierungsschema als auch von der Massenskala Λ ab. Das renormierte Übergangsmatrixelement hingegen ist unabhängig von der Massenskala, da eine Änderung der Skala durch Änderung des Renormierungsparameters $\chi_{fin}(\Lambda)$ kompensiert wird. Eine Abhängigkeit des Koeffizienten $\chi_{fin} = \chi_{fin}(\Lambda, m_e, m_\pi)$ von der Leptonmasse m_e und der Mesonmasse m_π lässt sich nicht ausschließen. Wie im folgenden Abschnitt zu sehen ist, lässt sich aber sowohl der $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ als auch der $\eta \rightarrow \mu^+\mu^-$ Zerfall zutreffend mit konstantem Koeffizienten χ_{fin} beschreiben. Das ermöglicht eine grobe Abschätzung der Massenabhängigkeit.

6.2. Anpassung der Renormierungskonstanten

Die Renormierungskonstante $\chi_{fin}(\Lambda)$ kann an die Zerfälle $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ und $\eta \rightarrow \mu^+\mu^-$ angepasst werden. Für letzteren ergibt sich der Wirkungsquerschnitt analog zum $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall, wobei m_e durch m_μ zu ersetzen ist und die Erweiterung auf $U \in U(3)$ betrachtet werden muss. Es ist dabei wichtig, dass die Renormierungskonstante für beide Fälle näherungsweise identisch ist, was daran liegt, dass die Elektron- und Muonmassen klein verglichen mit der Skala der chiralen Symmetriebrechung sind. Zudem ist zu beachten, dass sich der Nukleon-Formfaktor des effektiven Lagrangians ändert. Ausgehend von (3.74) nimmt der axiale Strom W_δ in \mathcal{L}^{wz} bei der Verallgemeinerung der Theorie auf die U(3) folgende Form

$$\begin{aligned} W_\delta &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \text{tr}(2Q^2(U^\dagger \partial_\delta U - U \partial_\delta U^\dagger) + Q \partial_\delta U Q U^\dagger - Q U Q \partial_\delta U^\dagger) \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \text{tr}(6iQ^2 \lambda_a \partial_\delta \Phi_a) \end{aligned} \quad (6.35)$$

in der Ein-Meson-Näherung $U = 1 + i\lambda_a \Phi_a$ an. Dabei stellt λ_a die neun Generatoren der $U(3)$ (\sim Gell-Mann-Matrizen) dar und Φ_a die zugehörigen pseudoskalaren Felder. Der Ladungsoperator Q nimmt die Gestalt

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right), \\ \Rightarrow Q^2 &= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \lambda_0 + \frac{1}{6} \lambda_3 + \frac{\sqrt{3}}{18} \lambda_8 \end{aligned} \quad (6.36)$$

an. Damit ergibt sich der Anteil des Lagrangians, der die Zerfälle beschreibt, zu:

$$\mathcal{L}_{2\gamma}^{\text{wz}} = \frac{e^2}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho \partial_\delta \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Phi_0 + \Phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Phi_8 \right). \quad (6.37)$$

Mittels $\Phi_3 = \pi^0/f_\pi$ ist leicht ersichtlich, dass der Lagrangian, sofern die anderen Felder verschwinden, mit dem des π^0 Zerfalls identisch ist. Für den η Zerfall ist zu beachten, dass Φ_0 und Φ_8 Zustände im $U(3)$ Multiplett sind und die physikalischen Teilchen η und η' sich als Linearkombination dieser Zustände ergeben. Die spezielle Linearkombination kann durch Diagonalisierung des drei *flavor* chiralen Lagrangian bestimmt werden [83]. Im Rahmen dieser Arbeit genügt es zu bemerken, dass sich nur ein Faktor zum effektiven Lagrangian ergibt, der für die Zerfälle $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ und $\eta \rightarrow \mu^+\mu^-$ identisch ist. Die Renormierungskonstante wird daher an das Verhältnis der Zerfälle

$$\frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)} = \frac{\alpha^2 m_e^2}{8\pi^2 m_\pi^2} \sqrt{1 - \xi^{-2}} |A|^2, \quad (6.38)$$

mit

$$\text{Im}(A) = \frac{4\pi}{\sqrt{1 - \xi^{-2}}} \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad (6.39)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Re}(A) &= \chi_{fin}(\Lambda) - 6 \ln \frac{m_e^2}{\Lambda^2} + 11 + 2\xi^2 - 4\xi^4 + 4\xi^2 \ln(4\xi^2) + 8\xi^4 \ln(4\xi^2) \\ &\quad - 4 \int_0^1 dy \left[3 + \frac{2(\xi^2 - 1)\sqrt{y}}{\sqrt{y + \xi^{-2}(1 - y)}} \right] \lambda_+^2 \ln |\lambda_+| \\ &\quad - 4 \int_0^1 dy \left[3 - \frac{2(\xi^2 - 1)\sqrt{y}}{\sqrt{y + \xi^{-2}(1 - y)}} \right] \lambda_-^2 \ln |\lambda_-| \end{aligned} \quad (6.40)$$

angepasst, vgl. (6.29–6.31). Dabei wurde $\xi^2 = \frac{m_\pi^2}{4m_e^2}$ und $\lambda_\pm = \xi \sqrt{y} \pm \sqrt{\xi^2 y + (1 - y)}$ verwendet, so dass (6.38–6.40) identisch mit dem Resultat von Savage, Luke und Wise [6] ist. Diese Formel kann auch für das Verhältnis $\Gamma(\eta \rightarrow \mu^+\mu^-)/\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ verwendet werden, indem die Pion- und Elektronmassen durch die Eta- und

$\Gamma(\eta \rightarrow \mu^+\mu^-)/\Gamma(\text{total})$	$\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)/\Gamma(\text{total})$	$\Gamma(\eta \rightarrow \mu^+\mu^-)/\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$
$(5,8 \pm 0,8)10^{-6}$	$0,3938 \pm 0,0026$	$\Rightarrow (14,7 \pm 2,1)10^{-6}$
$\Gamma(\pi^0 \rightarrow e^+e^-)/\Gamma(\text{total})$	$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)/\Gamma(\text{total})$	$\Gamma(\pi^0 \rightarrow e^+e^-)/\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$
$(6,2 \pm 0,5)10^{-8}$	$0,98798 \pm 0,00032$	$\Rightarrow (6,3 \pm 0,5)10^{-8}$

Die Angaben der ersten und zweiten Spalte entstammen der Particle Data Group 2006

Tabelle 6.1: Das experimentell bestimmte Verhältnis der Zerfallsbreiten $\Gamma(\pi^0 \rightarrow e^+e^-)/\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ und $\Gamma(\eta \rightarrow \mu^+\mu^-)/\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$. $\Gamma(\text{total})$ bezeichnet die gesamte Zerfallsbreite des entsprechenden Zerfalls.

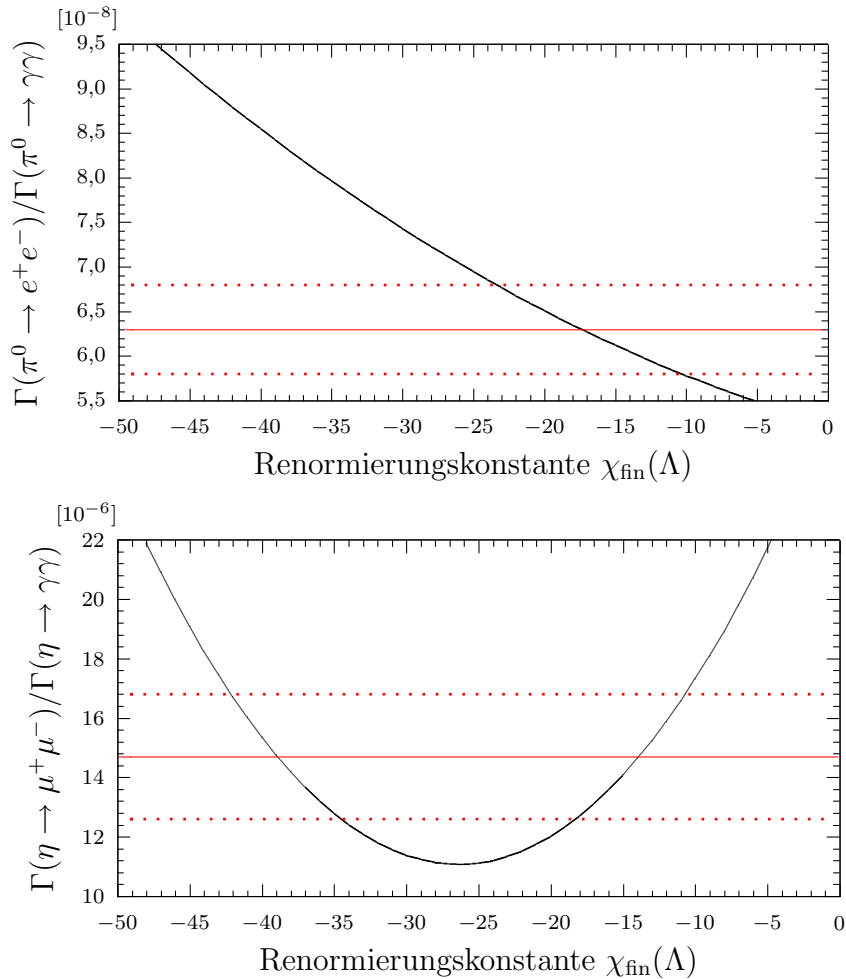


Abb. 6.3: Das berechnete Verhältnis der Zerfallsbreiten $\Gamma(\pi^0 \rightarrow e^+e^-)/\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ (oben) und $\Gamma(\eta \rightarrow \mu^+\mu^-)/\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ (unten) in Abhängigkeit von der Renormierungskonstanten $\chi_{\text{fin}}(\Lambda)$ bei $\Lambda = 1$ GeV. Die roten Linien geben den experimentellen Wert aus Tab. 6.1 wieder.

Muonmassen ersetzt werden. Tabelle 6.1 listet die gemessenen Zerfallsbreiten für beide Zerfälle auf.

In den Abbildungen 6.2 und 6.3 sind die berechneten Verhältnisse der Zerfallsbreiten in Abhängigkeit von der Renormierungskonstanten $\chi_{\text{fin}}(\Lambda)$ aufgetragen. Als Massenskala für die Berechnungen wurde $\Lambda = 1$ GeV gewählt. Der Vergleich mit den experimentell gemessenen Werten in Tabelle 6.1 legt den endlichen Anteil der Renormierungskonstanten auf den Bereich $-24 < \chi_{\text{fin}}(\Lambda) < -10$ für $\Lambda = 1$ GeV fest.

6.3. Effektive Formfaktoren im Limes $m_e \rightarrow 0$

Wie bereits erwähnt, ist es üblich für die Auswertung der elastischen Elektron-Proton-Streuung den Grenzwert verschwindender Elektronmasse zu betrachten. Dies ist physikalisch nahe liegend, da die Skala der Energie bei der Streuung sehr groß im Vergleich zur Elektronmasse ist. Zudem vereinfacht der Grenzwert erheblich die Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Streuung.

Die Übergangsmatrixelemente des π^0 als auch η Zerfalls verschwinden beide im Limes $m_e \rightarrow 0$. Dies ist leicht zu verstehen. Zuerst sei angemerkt, dass W_δ einer totalen Ableitung in der Ein-Pion-Näherung entspricht. Wird diese Ableitung durch partielle Integration auf den axialen Strom der Elektronen übertragen, so resultiert ein zusätzlicher Faktor m_e . Die Zerfälle gehen wegen der axialen Kopplung mit einem Helizitätsflip der Leptonen einher. Es ist daher offensichtlich, dass die Renormierungsbedingung mit der Bildung des Grenzwertes $m_e \rightarrow 0$ nicht verträglich ist. Im Folgenden werden die im Grenzwert $m_e \rightarrow 0$ divergenten Anteile des Schleifenintegrals separiert.

Das Integral (6.25) lässt sich durch die Substitution $z = \xi^{-2}(1 - y)/y$ vereinfachen:

$$\text{Re}(I) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\xi^2} \int_0^\infty dz \frac{\xi^6}{(\xi^2 z + 1)^3} \left(\frac{2+z}{\sqrt{1+z}} \ln \frac{\sqrt{1+z}-1}{\sqrt{1+z}+1} - 2 \ln \frac{z}{4} \right). \quad (6.41)$$

Der Integrand wird im Grenzfall $\xi^2 \rightarrow \infty$ an der Stelle $z = 0$ irregulär. Um den Grenzwert zu bestimmen ist es nützlich zunächst partiell zu integrieren:

$$\text{Re}(I) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty dz \frac{\xi^2}{(\xi^2 z + 1)^2} \left(\frac{z}{2(1+z)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{1+z}-1}{\sqrt{1+z}+1} - \frac{1}{1+z} \right). \quad (6.42)$$

Dabei ist die Beziehung

$$\ln \frac{\sqrt{1+z}-1}{\sqrt{1+z}+1} = \ln \frac{z}{(\sqrt{1+z}+1)^2} \quad (6.43)$$

zur Berechnung des Oberflächenterms hilfreich. Eine erneute partielle Integration liefert

$$\text{Re}(I) = \frac{1}{4} \int_0^\infty dz \frac{1}{(\xi^2 z + 1)} \left(\frac{2-z}{2(1+z)^{5/2}} \ln \frac{\sqrt{1+z}-1}{\sqrt{1+z}+1} + \frac{3}{(1+z)^2} \right). \quad (6.44)$$

Mit Ausnahme der Umgebung $z < a$, $0 < a \ll 1$ ist der Integrand im Grenzwert $\xi^2 \rightarrow \infty$ endlich, integrierbar und von der Ordnung $\mathcal{O}(1/\xi^2)$. Im verbleibenden Teil des Integrals lassen sich die divergenten Anteile separieren, indem ein Teil des Integranden in eine Taylorreihe um $z = 0$ entwickelt wird

$$\operatorname{Re}(I) = \int_0^a dz \frac{1}{(\xi^2 z + 1)} \left(\frac{\ln(z)}{4} + \frac{3 - 2 \ln(2)}{4} + \dots \right). \quad (6.45)$$

Die nicht aufgeführten Terme (...) sind von der Ordnung z und $z \ln z$. Mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} \int_0^a dz \frac{\ln z}{\xi^2 z + 1} &= \frac{1}{\xi^2} \int_1^{a\xi^2+1} dt \left(\frac{\ln(t-1)}{t} - \frac{\ln(\xi^2)}{t} \right) \\ &= \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{\ln^2(a\xi^2+1)}{2} - \ln(\xi^2) \ln(a\xi^2+1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (a\xi^2+1)^n} - \frac{\pi^2}{6} \right), \end{aligned} \quad (6.46)$$

die mit der Substitution $t = \xi^2 z + 1$ aus

$$\begin{aligned} \int_1^x dt \frac{\ln(t-1)}{t} &= \int_1^x dt \frac{\ln(1-1/t) + \ln(t)}{t} = \frac{\ln^2(x)}{2} + \int_1^x dt \frac{\ln(1-1/t)}{t} \\ &= \frac{\ln^2(x)}{2} - \int_1^x dt \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{-n}}{n} = \frac{\ln^2(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^n} - \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned} \quad (6.47)$$

folgt, lassen sich schließlich die für $\xi^2 \rightarrow \infty$ divergenten Terme berechnen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(I) &= \int_0^a dz \frac{1}{(\xi^2 z + 1)} \left(\frac{\ln(z)}{4} + \frac{3 - 2 \ln(2)}{4} \right) + \mathcal{O}(1/\xi^2) \\ &= \frac{1}{8\xi^2} \left(-\ln^2(\xi^2) + [6 - 4 \ln(2)] \ln(\xi^2) + \mathcal{O}(1) \right). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Dies führt zu

$$\operatorname{Re}(w) = -\frac{1}{2} \ln^2(\xi^2) + [3 - 2 \ln(2)] \ln(\xi^2) + \tilde{w}(\xi), \quad (6.49)$$

mit endlichem $\tilde{w}(\xi)$ für $m_e \rightarrow 0$. Zusammen mit dem Realteil

$$\operatorname{Re}(w_3'') = \frac{1}{2} \chi_{\text{fin}}(\Lambda) - 3 \ln \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} + \mathcal{O}(1) \quad (6.50)$$

resultiert für die führende m_e - als auch Λ -Abhängigkeit des Realteils der Amplitude (6.40)

$$\operatorname{Re}(A(\xi)) = \chi_{\text{fin}}(\Lambda) - 6 \ln \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} - \ln^2(\xi^2) + [6 - 4 \ln(2)] \ln(\xi^2) + \tilde{A}(\xi). \quad (6.51)$$

Dabei ist $\tilde{A}(\xi)$ unabhängig von Λ und endlich für $m_e \rightarrow 0$. Der Imaginärteil von A divergiert ebenfalls im Limes $m_e \rightarrow 0$, wie aus Gl. (6.39) unmittelbar ersichtlich ist. Die quadratisch logarithmische Divergenz des Realteils ist modellunabhängig [79]. Für die Meson-Zerfälle haben diese Divergenzen keine unmittelbare Auswirkung, da ein zusätzlicher Faktor der Elektronmasse durch den Helizitätsflip auftritt, so dass die Übergangsamplitude im masselosen Limes der Leptonen endlich ist. Da das Schleifen-Diagramm der anomalen Zwei-Photon-Kopplung der Elektron-Nukleon-Streuung praktisch identisch mit dem der Meson-Zerfälle ist, ist zu erwarten dass bei der Streuung ebenfalls logarithmische Divergenzen auftreten. Wie in Kapitel 8 gezeigt wird ist dies tatsächlich der Fall, s. Gl. (8.26). Aufgrund der unterschiedlichen Matrixelemente des Formfaktors W_δ in beiden Prozessen sind diese Divergenzen allerdings nicht identisch.

7. Formfaktoren zum effektiven Zwei-Photon-Austausch

Die Berechnung des anomalen Zwei-Photon-Beitrags zur Elektron-Nukleon-Streuung ist ein zentraler Punkt dieser Arbeit. Die zugehörige Übergangsamplitude lässt sich gemäß der Quantenfeldtheorie durch die Auswertung der S-Matrix als Erwartungswert zwischen ein- und auslaufenden Teilchen berechnen. Die Matrix entspricht dem Zeitentwicklungsoperator, $\exp(-iHt)$, im Grenzfall sehr langer Zeiten t . Die Berechnung dieser komplizierten Matrixelemente lässt sich in den Feynman-Regeln auf einfache Weise zusammenfassen. Üblicherweise werden die Regeln für eine effektive Theorie unmittelbar aus dem Lagrangian bzw. dem Hamiltonian, wie er im Zeitentwicklungsoperator enthalten ist, abgelesen. Dieses Verfahren wurde auch bereits bei der Berechnung der bisherigen Prozesse (Rosenbluth-Formel, Pionzerfall) angewandt. Die Vertices der effektiven Theorie entsprechen dem Matrixelement des Wechselwirkungslagrangian zwischen den Anfangs- und Endzuständen. Diese Matrixelemente führen für den Ein-Photon-Austausch zu den elektromagnetischen Formfaktoren G_E und G_M . Bei der Wechselwirkung über die effektiven Zwei-Photon-Vertices treten neue Formfaktoren, die zur Berechnung der Übergangsmatrixelemente benötigt werden, auf. In Folge des Kapitels werden diese Formfaktoren, insbesondere die des Wess-Zumino-Terms, auf die Parameter des Skyrme-Modells zurückgeführt und als Funktion des Impulsübertrags Q^2 bereit gestellt. Im nächsten Kapitel wird dann mittels dieser Formfaktoren und des im vorherigen Kapitel eingeführten *Counterterms* das Matrixelement $M_{2\gamma}^{\text{wz}}$ hergeleitet.

7.1. Zwei-Photon-Formfaktor des Wess-Zumino-Terms

Die geeichte Lagrangefunktion des Wess-Zumino-Terms zur Zwei-Photon-Kopplung

$$\mathcal{L}_{2\gamma}^{\text{wz}} = e^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho W_\sigma \quad (7.1)$$

ist in Gl. (3.72) gegeben mit

$$W_\sigma = -\frac{i}{8\pi^2} \text{tr}(Q^2 (U^\dagger \partial_\sigma U + \partial_\sigma U U^\dagger)) + \frac{1}{2} (Q \partial_\sigma U Q U^\dagger - Q U Q \partial_\sigma U^\dagger). \quad (7.2)$$

Zu bestimmen ist das Nukleonmatrixelement $\langle N_{T_3 J_3}(\vec{p}_2) | W_\delta | N_{T_3 J_3}(\vec{p}_1) \rangle$, das im wesentlichen den effektiven Nukleon-Vertex der anomalen Zwei-Photon-Kopplung bildet. Wie bereits bei der Berechnung der elektromagnetischen Formfaktoren wird auch im Folgenden das Breitframe gewählt, um die neuen Formfaktoren mit Hilfe der Modellparameter als Funktion des Impulsübertrags zu berechnen.

Zunächst lässt sich der Lagrangian vereinfachen. Der zweite Summand in Gl. (7.2) kann in der SU(2) auf den ersten zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} & \text{tr}(Q\partial_\sigma U Q U^\dagger - Q U Q \partial_\sigma U^\dagger) \\ &= \text{tr}(Q\partial_\sigma U U^\dagger Q + Q\partial_\sigma U [Q, U^\dagger] + Q U^\dagger \partial_\sigma U Q - Q\partial_\sigma U^\dagger [Q, U]) \\ &\stackrel{SU(2)}{=} \text{tr}(Q^2(U^\dagger \partial_\sigma U + \partial_\sigma U U^\dagger)) - \text{tr}(Q\partial_\sigma U [Q, U] + Q\partial_\sigma U^\dagger [Q, U]) \\ &= \text{tr}(Q^2(U^\dagger \partial_\sigma U + \partial_\sigma U U^\dagger)). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Dies ist eine Besonderheit der SU(2), wo $\partial_\sigma(U + U^\dagger)$ proportional zur Einheitsmatrix ist. Da der *Hedgehog* bei einer Verallgemeinerung der Theorie auf andere Gruppen immer noch in der SU(2) angesiedelt ist, tritt bei diesen der Projektor P auf die Untergruppe der SU(2) auf. Für obige Gleichung wurde $APA^\dagger = 1$ verwendet.

Wird zunächst die zeitliche Komponente $\sigma = 0$ von W_σ betrachtet, so lässt sich diese mit Hilfe der Relation

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q^2(U^\dagger \partial_0 U + \partial_0 U U^\dagger)) &= \frac{i}{2} \Omega_a^R \text{tr}(Q^2 A(\{U_0^\dagger, [\tau_a, U_0]\}) A^\dagger) \\ &= -2i \sin F \cos F \epsilon_{abc} \Omega_a^R \hat{r}_b \text{tr}(Q^2 A \tau_c A^\dagger) = -\frac{i}{3} \sin(2F) \epsilon_{abc} \Omega_a^R \hat{r}_b D_{3c} \end{aligned} \quad (7.4)$$

als Funktional des chiralen Profils $F(r)$, sowie des Ortes und der Winkelgeschwindigkeiten schreiben. Das Nukleonmatrixelement ist nach der kanonischen Quantisierung der Rotation

$$\langle N_{T_3 J_3} | \epsilon_{abc} \Omega_a^R D_{3c} | N_{T_3 J'_3} \rangle = \sum_{J''_3} \langle N_{T_3 J_3} | \epsilon_{abc} \frac{J_a}{\Theta} | N_{T_3 J''_3} \rangle \langle N_{T_3 J''_3} | D_{3c} | N_{T_3 J'_3} \rangle \quad (7.5)$$

proportional zu

$$\langle N_{T_3 J_3}(\vec{p}_2) | W_0 | N_{T_3 J'_3}(\vec{p}_1) \rangle \propto \epsilon_{abc} \langle N_{T_3 J_3} | J_a I_3 J_c | N_{T_3 J'_3} \rangle. \quad (7.6)$$

Da J_a i. Allg. nicht mit J_c kommutiert, treten *ordering ambiguities* auf. Üblicherweise wird die Reihenfolge der Operatoren hermitesch gewählt. Für das resultierende Nukleonmatrixelement bedeutet das, dass es einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil enthält und damit verschwindet:

$$\langle N_{T_3 J_3} | \epsilon_{abc} I_3 (J_a J_c + J_c J_a) | N_{T_3 J'_3} \rangle = 0. \quad (7.7)$$

Es lässt sich weiterhin zeigen, dass Strukturen der Form

$$\langle N_{T_3 J_3}(\vec{p}_2) | \epsilon_{abc} \hat{r}_b I_3 J_a J_c | N_{T_3 J'_3}(\vec{p}_1) \rangle \sim \hat{q} \cdot \vec{J} \quad (7.8)$$

keinen Beitrag zur unpolarisierten Interferenz mit dem Ein-Photon-Matrixelement liefern (siehe auch Abschnitt 8.3).

Für die verbleibenden Terme läuft $\sigma = i$ über die räumlichen Komponenten des Vierer-Vektors W_σ . Aus Gl. (7.3) und (4.17) folgt

$$W_i = \frac{3i}{16\pi^2} \text{tr}(Q^2 A i \vec{\tau} \cdot (\vec{\alpha}_i + \vec{\beta}_i) A^\dagger). \quad (7.9)$$

Die Spur führt mittels

$$A \tau_a A^\dagger = \tau_b D_{ba} \quad (7.10)$$

auf die bekannten Wigner-D Funktionen. Mit der Ladungsmatrix der SU(2) aus Gl. (3.50) folgt

$$W_i = -\frac{1}{8\pi^2} D_{3a} [F' \hat{r}_i \hat{r}_a + \frac{\sin F \cos F}{r} (\delta_{ia} - \hat{r}_i \hat{r}_a)]. \quad (7.11)$$

In der Spinordarstellung ist $D_{3a} = -\tau_3 \sigma_a / 3$ und mit den Methoden aus Kapitel 4 wird das nicht-relativistische Matrixelement zu

$$\langle N_{T_3 r}(\vec{p}_2) | \vec{W}(0) | N_{T_3 r'}(\vec{p}_1) \rangle = \frac{\tau_3}{9\pi M} \chi^{r\dagger} [H_0(|\vec{q}|) \vec{\sigma} + H_2(|\vec{q}|) (\vec{\sigma} - 3\hat{q}(\hat{q} \cdot \vec{\sigma}))] \chi^r, \quad (7.12)$$

wobei die dimensionslosen axialen Nukleonformfaktoren

$$\begin{aligned} H_0(|\vec{q}|) &= M^2 \int_0^\infty dr \left(F' + \frac{2 \sin F \cos F}{r} \right) j_0(|\vec{q}|r) \\ H_2(|\vec{q}|) &= M^2 \int_0^\infty dr \left(F' - \frac{\sin F \cos F}{r} \right) j_2(|\vec{q}|r) \end{aligned} \quad (7.13)$$

eingeführt wurden (vgl. Gl (A.9) und (A.11)). Der Koeffizient $\tau_3 = \pm 1$ ist wie gehabt als Eigenwert für die Nukleonzustände zu verstehen. Die auftretenden Bessel Funktionen sind

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}. \quad (7.14)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.1 ausgeführt, muss ein Lorentz-Boost angewandt werden, um die relativistischen Formfaktoren aus den nicht-relativistisch berechneten herzuleiten. Da es sich beim Nukleon um ein zusammengesetztes Teilchen handelt, ist dieser Boost nicht unproblematisch. Für die Formfaktoren des Wess-Zumino-Matrixelementes wird ein zu den elektromagnetischen Formfaktoren identischer Boost gewählt:

$$H_i^R(Q^2) = \gamma^{-2n_{wz}} H_i^{\text{NR}}(\gamma^{-2} Q^2), \quad \gamma^2 = 1 + \frac{Q^2}{(2M_b)^2}. \quad (7.15)$$

Abbildung 7.1 zeigt die geboosteten axialen Formfaktoren H_0 und H_2 als Funktion des Impulsquadrates Q^2 .

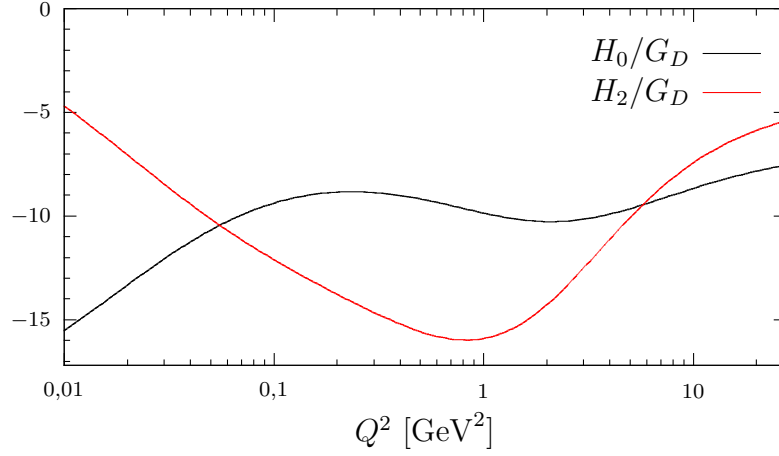


Abb. 7.1: Die axialen Formfaktoren des Nukleons, wie sie im Zwei-Photon-Matrixelement des Wess-Zumino-Terms enthalten sind, geteilt durch den Dipol-Formfaktor. Berechnet wurden sie gemäß Gl. (7.13) mit dem Parameter $e_s = 3,8$ unter Anwendung des Boosts aus Gl. (7.15) mit der Boostmasse $M_b = 939$ MeV und $n_{wz} = 2$.

Skalierung der Formfaktoren H_0 und H_2 bzgl. der Skyrme-Konstante e_s

Obwohl die Formfaktoren H_0 und H_2 nicht explizit von der Skyrme-Konstante e_s abhängen, so doch implizit über das chirale Profil $F(r)$. Betrachtet man Gl. (3.18) so fällt auf, dass für vernachlässigbare Pionmassen die Funktion $\tilde{F}(\tilde{r})$ unabhängig von der Skyrme-Konstante ist. Durch Substitution auf die dimensionslose Länge $\tilde{r} = \sqrt{2}e_s f_\pi r$ lässt sich die Abhängigkeit der Nukleonformfaktoren von e_s unter Vernachlässigung der Pion-Massenskala explizit darstellen.

$$\begin{aligned} H_0(|\vec{q}|) &= \frac{M^2}{2e_s^2 f_\pi^2} \int_0^\infty d\tilde{r} \left(\tilde{F}'(\tilde{r}) + \frac{\sin 2\tilde{F}(\tilde{r})}{\tilde{r}} \right) j_0\left(\frac{|\vec{q}|}{\sqrt{2}e_s f_\pi} \tilde{r}\right) \\ H_2(|\vec{q}|) &= \frac{M^2}{2e_s^2 f_\pi^2} \int_0^\infty d\tilde{r} \left(\tilde{F}'(\tilde{r}) - \frac{\sin 2\tilde{F}(\tilde{r})}{2\tilde{r}} \right) j_2\left(\frac{|\vec{q}|}{\sqrt{2}e_s f_\pi} \tilde{r}\right) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Aus Gl. (7.16) lässt sich ablesen, dass die Nukleonformfaktoren H_0 und H_2 mit kleinerer Skyrme-Konstante e_s ansteigen aber auch zu größeren effektiven Werten von \vec{q}^2 verschoben werden.

7.2. Zwei-Photon-Formfaktor des $nl\sigma$ -Terms

Der geeichte Zwei-Photon Lagrangian des nicht-linearen- σ Modells aus Gl. (3.60) ist

$$\mathcal{L}_{2\gamma}^{nl\sigma} = -\frac{f_\pi^2}{4} e^2 A^\mu A_\mu \text{tr}([Q, U][Q, U^\dagger]). \quad (7.17)$$

Mit der Relation

$$[Q, U] = A[A^\dagger Q A, U_0]A^\dagger = A\left[\frac{1}{2}D_{3a}\tau_a, U_0\right]A^\dagger = A\left(-\sin F \epsilon_{abc} D_{3a} \frac{r_b}{r} \tau_c\right)A^\dagger \quad (7.18)$$

lässt sich der Lagrangian für das Nukleon als

$$\mathcal{L}_{2\gamma}^{nl\sigma} = e^2 A^\mu A_\mu J_{2\gamma}^{nl\sigma}, \quad J_{2\gamma}^{nl\sigma} = \frac{f_\pi^2}{2} \sin^2 F D_{3a} D_{3b} (\delta_{ab} - \hat{r}_a \hat{r}_b) \quad (7.19)$$

schreiben. Das Nukleonmatrixelement wird dann mit Gl. (C.15) zu

$$\langle N_{T_{3r}}(\vec{p}_2) | J_{2\gamma}^{nl\sigma}(0) | N_{T_{3r'}}(\vec{p}_1) \rangle = F^{nl\sigma}(|\vec{q}|) \delta_{rr'} \quad (7.20)$$

mit

$$F^{nl\sigma}(|\vec{q}|) = \frac{2M f_\pi^2}{3} \int d^3r \sin^2 F j_0(|\vec{q}|r). \quad (7.21)$$

7.3. Zwei-Photon-Formfaktor des Skyrme-Terms

Der geeichte Zwei-Photon-Lagrangian des Skyrme-Terms ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma}^{Skyrme} = & -\frac{e^2}{16e_s^2} A^\mu A_\mu \text{tr}([U^\dagger Q U - Q, U^\dagger \partial^\nu U][U^\dagger Q U - Q, U^\dagger \partial_\nu U]) \\ & + \frac{e^2}{16e_s^2} A^\mu A_\nu \text{tr}([U^\dagger Q U - Q, U^\dagger \partial_\mu U][U^\dagger Q U - Q, U^\dagger \partial_\nu U]). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Zur weiteren Auswertung wird folgende Definition verwendet:

$$\begin{aligned} U^\dagger Q U - Q &= A \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} A^\dagger \\ \gamma^a &= D_{3b} (\sin F \cos F \epsilon_{alb} \hat{r}_l - \sin^2 F (\delta_{ab} - \hat{r}_a \hat{r}_b)). \end{aligned} \quad (7.23)$$

In der führenden Ordnung in $1/N_c$ können die Winkelgeschwindigkeiten vernachlässigt werden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma}^{Skyrme} = & -\frac{e^2}{16e_s^2} A^\mu A_\mu \text{tr}([\vec{\tau} \cdot \vec{\gamma}, \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_i][\vec{\tau} \cdot \vec{\gamma}, \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_i]) \\ & - \frac{e^2}{16e_s^2} A_i A_j \text{tr}([\vec{\tau} \cdot \vec{\gamma}, \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_i][\vec{\tau} \cdot \vec{\gamma}, \vec{\tau} \cdot \vec{\alpha}_j]). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma} &= \sin^2 F D_{3a} D_{3b} (\delta_{ab} - \hat{r}_a \hat{r}_b) \\ \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}_i &= \frac{\sin^2 F}{r} D_{3a} \epsilon_{ila} \hat{r}_l \\ \vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j &= F'^2 \hat{r}_i \hat{r}_j + \frac{\sin^2 F}{r^2} (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j) \end{aligned} \quad (7.25)$$

lässt sich der Lagrangian in die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2\gamma}^{Skyrme} = & e^2 A^\mu A_\mu \frac{\sin^2 F}{2e_s^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) D_{3a} D_{3b} (\delta_{ab} - \hat{r}_a \hat{r}_b) \\ & + e^2 A_i A_j \frac{\sin^2 F}{2e_s^2} D_{3a} D_{3b} \left[(F'^2 \hat{r}_i \hat{r}_j + \frac{\sin^2 F}{r^2} (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j)) (\delta_{ab} - \hat{r}_a \hat{r}_b) \right. \\ & \left. - \frac{\sin^2 F}{r^2} \epsilon_{ail} \epsilon_{bjn} \hat{r}_l \hat{r}_n \right] \end{aligned} \quad (7.26)$$

bringen. Der erste Summand ist offensichtlich von identischer Struktur wie der Zwei-Photon-Lagrangian des nicht-linearen- σ -Modells und kann durch Hinzunahme eines Faktors $g(r)$ (4.8) berücksichtigt werden. Mit Gl. (C.15) lassen sich die Summationen über die Wigner-D Funktionen im Matrixelement der Nukleonzustände ausführen.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_{2\gamma}^{Skyrme} \rangle = & e^2 A^\mu A_\mu \frac{\sin^2 F}{3e_s^2} \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \\ & + e^2 A_i A_j \frac{\sin^2 F}{3e_s^2} \left(F'^2 \hat{r}_i \hat{r}_j + \frac{\sin^2 F}{2r^2} (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j) \right) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Die impulsabhängigen Matrixelemente ergeben sich mit Hilfe von Gl. (A.9) und (A.11) aus Anhang A

$$\begin{aligned} \langle N_{T_{3r}}(\vec{p}_2) | \mathcal{L}_{2\gamma}^{Skyrme}(0) | N_{T_{3r}}(\vec{p}_1) \rangle = & e^2 A^\mu A_\mu 3F_0(|\vec{q}|) \\ & + e^2 A_i A_j (F_0(|\vec{q}|) \delta_{ij} + F_2(|\vec{q}|) (\delta_{ij} - 3\hat{q}_i \hat{q}_j)) \end{aligned} \quad (7.28)$$

und führen auf die Formfaktoren

$$\begin{aligned} F_0(|\vec{q}|) &= \frac{2M}{9e_s^2} \int d^3r \sin^2 F \left(F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) j_0(|\vec{q}|r) \\ F_2(|\vec{q}|) &= \frac{2M}{9e_s^2} \int d^3r \sin^2 F \left(F'^2 - \frac{\sin^2 F}{2r^2} \right) j_2(|\vec{q}|r). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Ein Beitrag des Skyrme-Terms zu den effektiven Zwei-Photon-Austausch-Prozessen ist nicht auszuschließen. Dennoch wird er im Folgenden nicht weiter betrachtet. Dies hat mehrere Gründe. Zum einen weist der Skyrme-Term eine besonders starke Modellabhängigkeit auf. Er ist im Gegensatz zur Anomalie nicht durch die Symmetrien der QCD festgelegt. Zudem ist zu bemerken, dass der erste Summand in Gl. (7.28) eine dem nicht-linearen- σ -Modell entsprechende Struktur aufweist. In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass Wechselwirkungsterme dieser Form $A^\mu A_\mu F(Q^2)$ mit der Elektronmasse unterdrückt sind. Generell ist der Skyrme-Wechselwirkungslagrangian (7.28) unabhängig vom Spin des Nukleons. Bei der unpolarisierten Interferenz mit dem Ein-Photon-Matrixelement können daher nur

Terme proportional zu G_E auftreten. Der elektrische Formfaktor des Protons ist allerdings gegenüber dem magnetischen um einen Faktor $\mu_p \sim 3$ unterdrückt. Bei größeren Impulsüberträgen wird die Dominanz des magnetischen Formfaktors noch deutlicher, siehe Abb. 4.1. Aus diesen Gründen werden alle Beiträge des Skyrme-Terms zum Zwei-Photon-Matrixelement vernachlässigt.

8. Beitrag des WZ-Terms zum Zwei-Photon-Matrixelement

Mit Hilfe der im vorherigen Kapitel berechneten Formfaktoren zum Zwei-Photon-Austausch, sowie der Bestimmung des *Counterterms* durch den Zerfall des neutralen Pions in ein Elektron-Positron-Paar kann das Matrixelement der axialen Zwei-Photon-Kopplung für die Elektron-Nukleon-Streuung ausgewertet werden.

Der effektive Lagrangian

$$\mathcal{L}_{2\gamma}^{\text{wz}} = e^2 \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho W_\delta, \quad (8.1)$$

der die Kopplung des Nukleons an Zwei-Photonen beschreibt, wurde in Abschnitt 7.1 hergeleitet und das Nukleonmatrixelement von W_δ mit Hilfe von Formfaktoren parametrisiert. Zur Berechnung der Streuamplitude wird die Kinematik

$$\begin{aligned} q &= p_2 - p_1 = k_1 - k_2 \\ q_1 &= q - q_2 \\ k' &= k_2 + q_2 \end{aligned} \quad (8.2)$$

gewählt. Die Kinematik stimmt damit größtenteils mit derjenigen des $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$ Zerfalls überein. Das Übergangsmatrixelement ergibt sich aus den beiden relevanten Feynman-Diagrammen (Abb. 8.1) zu

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = -ie^4 \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \langle W_\delta \rangle \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \bar{u}^s(k_2) \gamma_\nu \frac{\not{k}' + m_e}{k'^2 - m_e^2 + i\epsilon} \gamma_\rho u^{s'}(k_1) \frac{(q_1 - q_2)_\mu}{(q_1^2 + i\epsilon)(q_2^2 + i\epsilon)}. \quad (8.3)$$

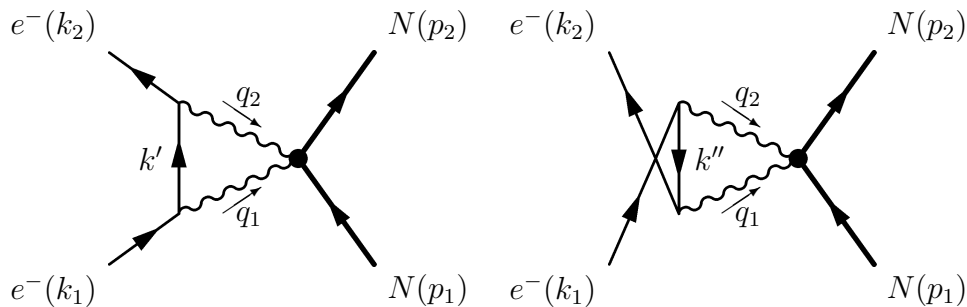


Abb. 8.1: Feynman-Diagramme für den effektiven Zwei-Photon-Austausch

Bis auf das Nukleonmatrixelement $\langle W_\delta \rangle$ ist es praktisch identisch mit demjenigen des $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfalls in Kapitel 6 (*crossing symmetry*).

Die Streuamplitude lässt sich in ein Feynman Parameter Integral umformen

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = -i2e^4 \langle W_\delta \rangle \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \cdot \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}^s(k_2)\gamma_\nu(\not{k}' + m_e)\gamma_\rho u^{s'}(k_1)(q_1 - q_2)_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\delta}}{(\ell^2 - \Delta)^3}, \quad (8.4)$$

mit

$$\ell = q_2 + xk_2 - yq, \quad \Delta = x^2k_2^2 - zyq^2 - i\epsilon. \quad (8.5)$$

Da die Vereinfachung des Zählers völlig analog zu derjenigen beim $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall ist, wird sie hier nur verkürzt präsentiert. Für den Teil des Zählers proportional zu k' gilt (vgl. Gl. (6.11)):

$$\begin{aligned} & \bar{u}^s(k_2)\gamma_\nu \not{k}' \gamma_\rho (q_1 - q_2)_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} u^{s'}(k_1) \\ &= -i\bar{u}^s(k_2)(k_2 + \ell - xk_2 + yq)^\alpha \gamma^\beta \gamma_5 (2\ell - 2xk_2 + (2y-1)q)_\mu u^{s'}(k_1) \epsilon_{\nu\alpha\rho\beta} \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} \\ &\simeq -i\bar{u}^s(k_2) \left(\frac{12}{d} \ell^2 + 4x(x-1)m_e^2 - (x+4y-4xy-4y^2-1)q^2 \right) \gamma^\delta \gamma_5 u^{s'}(k_1) \\ &\quad + i4m_e \bar{u}^s(k_2) (([x-1]k_2 - yq)^\delta (x+2y-1)) \gamma_5 u^{s'}(k_1) \end{aligned} \quad (8.6)$$

mit $k_2 \cdot q = -1/2q^2$. Der restliche Teil des Zählers wird zu

$$\begin{aligned} & \bar{u}^s(k_2)\gamma_\nu m_e \gamma_\rho (q_1 - q_2)_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\delta} u^{s'}(k_1) \\ &= im_e \bar{u}^s(k_2) [\gamma^\mu, \gamma^\delta] \gamma_5 (2\ell - 2xk_2 + (2y-1)q)_\mu u^{s'}(k_1) \\ &\simeq -i2m_e \bar{u}^s(k_2) (\gamma^\mu \gamma^\delta - g^{\mu\delta}) (2xk_2 - (2y-1)(k_1 - k_2))_\mu \gamma_5 u^{s'}(k_1) \\ &= -i4m_e^2 \bar{u}^s(k_2) x \gamma^\delta \gamma_5 u^{s'}(k_1) + i2m_e \bar{u}^s(k_2) (2xk_2 + (2y-1)(k_1 + k_2))^\delta \gamma_5 u^{s'}(k_1). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Mit beiden Termen ergibt sich das Übergangsmatrixelement zu

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} &= 2e^4 \langle W_\delta \rangle \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^3} \\ &\quad \cdot \bar{u}^s(k_2) \left(-\frac{12}{d} \ell^2 \gamma^\delta \gamma_5 - (4x^2 m_e^2 + (1-x-4(1-x-y)y)q^2) \gamma^\delta \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. + [4(x^2 + 2xy - x)k_2^\delta - (4xy + 8y^2 - 8y + 2)q^\delta] m_e \gamma_5 \right) u^{s'}(k_1). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Nach der dimensionalen Regularisierung (Anhang C.7), die bereits in Kapitel 6 angewandt wurde, ist es von der Form

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = -i\alpha^2 \langle W_\delta \rangle \bar{u}^s(k_2) [w_1 k_2^\delta \gamma_5 + w_2 q^\delta \gamma_5 + (w'_3 + w''_3) \gamma^\delta \gamma_5] u^{s'}(k_1). \quad (8.9)$$

Dabei wurden die effektiven Elektron-Formfaktoren

$$\begin{aligned}
w_1 &= 4 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{x^2 + 2xy - x}{x^2 m_e^2 - (1-x-y)yq^2 - i\epsilon} m_e \\
w_2 &= - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{4xy + 8y^2 - 8y + 2}{x^2 m_e^2 - (1-x-y)yq^2 - i\epsilon} m_e \\
w'_3 &= -2 - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{(1-x)q^2}{x^2 m_e^2 - (1-x-y)yq^2 - i\epsilon} \\
w''_3 &= 6 \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left(\frac{2}{\epsilon_d} - \ln \frac{\Delta}{\Lambda^2} - \gamma + \ln(4\pi) \right)
\end{aligned} \tag{8.10}$$

und $\Delta = x^2 m_e^2 - (1-x-y)yq^2$ eingeführt. Das Übergangsmatrixelement (8.9) ist bis auf das Nukleonmatrixelement $\langle W_\delta \rangle$ identisch mit demjenigen des $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$ Zerfalls. Im Gegensatz zum Zerfall ist es aber bereits an dieser Stelle sinnvoll den Limes $m_e \rightarrow 0$ zu betrachten, da die Impulsüberträge bei der Streuung in der Regel deutlich größere als beim Zerfall sind. Der Limes verschwindender Elektronmasse führt zur Vereinfachung der Streuamplitude, da bei kleiner Elektronmasse die Elektron-Formfaktoren w'_3 und w''_3 die unpolarisierte Interferenz mit dem Ein-Photon-Matrixelement dominieren und w_1, w_2 vernachlässigt werden können.

8.1. Der Limes $m_e \rightarrow 0$

Da die Rosenbluth-Separation im Allgemeinen für den Grenzwert $m_e \rightarrow 0$ durchgeführt wird, wird dieser auch bei der Berechnung des Zwei-Photon-Matrixelements betrachtet.

Für w'_3 ergibt sich im raumartigen Bereich $\xi^2 = \frac{q^2}{4m_e^2} = -\frac{Q^2}{4m_e^2} \leq 0$ nach Integration über x

$$\begin{aligned}
w'_3 &= -2 + 2|\xi^2| \int_0^1 dy \ln \frac{4y|\xi^2|}{1-y} + 8|\xi^2| \int_0^{\frac{1}{1+|\xi^2|}} dy \frac{1-2y|\xi^2|}{\sqrt{\delta}} \arctan \frac{\sqrt{\delta}}{4y|\xi^2|} \\
&\quad + 8|\xi^2| \int_{\frac{1}{1+|\xi^2|}}^1 dy \frac{1-2y|\xi^2|}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{-\delta}}{4y|\xi^2|}
\end{aligned} \tag{8.11}$$

mit $\delta = 16y|\xi^2|(1-y-y|\xi^2|)$. Der Integrand ist an den Stellen 0 und 1 divergent, aber integrabel. Der Grenzwert $m_e \rightarrow 0$ entspricht $|\xi^2| \rightarrow \infty$ und ist für ausreichend großes $Q^2 \gg m_e^2$ gerechtfertigt. Um den Grenzwert zu bestimmen, werden im Folgenden alle Summanden einzeln betrachtet:

Das erste Integral ist unproblematisch und kann analytisch ausgewertet werden:

$$A = 2|\xi^2| \int_0^1 dy (\ln(4|\xi^2|) + \ln(y) - \ln(1-y)) = 2|\xi^2| \ln(4|\xi^2|). \quad (8.12)$$

Das zweite Integral wird zunächst durch die Substitution $x = \sqrt{\delta}/(4y|\xi^2|)$ umgeformt:

$$\begin{aligned} B &= 8|\xi^2| \int_0^{\frac{1}{1+|\xi^2|}} dy \frac{1-2y|\xi^2|}{\sqrt{\delta}} \arctan \frac{\sqrt{\delta}}{4y|\xi^2|} \\ &= \int_0^\infty dx \frac{4|\xi^2|}{1+|\xi^2|(1+x^2)} \left(1 - \frac{2|\xi^2|}{1+|\xi^2|(1+x^2)}\right) \arctan x. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Der Grenzwert kann danach direkt bestimmt werden:

$$\lim_{|\xi^2| \rightarrow \infty} B = \int_0^\infty dx \frac{4}{1+x^2} \left(1 - \frac{2}{1+x^2}\right) \arctan x = 4 \int_0^{\pi/2} dy y(1-2\cos^2 y) = 2, \quad (8.14)$$

wobei die Substitution $y = \arctan x$ verwendet wurde.

Bei dem Letzten der drei Integrale wird die Substitution $x = \sqrt{-\delta}/(4y|\xi^2|)$ durchgeführt, so dass die Grenzen unabhängig von $|\xi^2|$ sind:

$$\begin{aligned} C &= 8|\xi^2| \int_{\frac{1}{1+|\xi^2|}}^1 dy \frac{1-2y|\xi^2|}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{-\delta}}{4y|\xi^2|} \\ &= \int_0^1 dx \frac{4|\xi^2|}{1+|\xi^2|(1-x^2)} \left(1 - \frac{2|\xi^2|}{1+|\xi^2|(1-x^2)}\right) \operatorname{artanh} x. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Das resultierende Integral ist bei $x \rightarrow 1$ divergent und wird mit $y = \operatorname{artanh} x$ erneut substituiert:

$$\begin{aligned} C &= \int_0^\infty dy \frac{4y|\xi^2|}{\cosh^2 y + |\xi^2|} \left(1 - \frac{2|\xi^2| \cosh^2 y}{\cosh^2 y + |\xi^2|}\right) \\ &\stackrel{x=2y}{=} 2|\xi^2| \int_0^\infty dx x \frac{(1-2|\xi^2|) \cosh x + 1}{(\cosh x + 1 + 2|\xi^2|)^2} = 4|\xi^2| \int_0^\infty dx x \frac{(1-2|\xi^2|)(e^x + e^{-x}) + 2}{(e^x + e^{-x} + 4|\xi^2| + 2)^2}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Im Limes $|\xi^2| \rightarrow \infty$ ist der Integrand für $x \rightarrow \infty$ divergent. Dieser divergente Anteil lässt sich mit Hilfe des Integrals (C.65) separieren und analytisch integrieren. Mit $\beta + \frac{1}{\beta} = 4|\xi^2| + 2$ folgt:

$$C = 4|\xi^2|(1-2|\xi^2|) \frac{\ln \beta}{\beta - \frac{1}{\beta}} + 8|\xi^2| \int_0^\infty dx x \frac{(1-2|\xi^2|)e^{-x} + 1}{(e^x + e^{-x} + 4|\xi^2| + 2)^2}. \quad (8.17)$$

Der verbleibende Ausdruck lässt sich unmittelbar für den Limes $|\xi^2| \rightarrow \infty$ auswerten:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2|\xi^2|(1-2|\xi^2|)}{1+2|\xi^2|} \ln(4|\xi^2|+2) - \int_0^\infty dx x e^{-x} + \mathcal{O}(|\xi^{-2}|) \\ &= -2|\xi^2| \ln(4|\xi^2|) + 2 \ln(4|\xi^2|) - 2 + \mathcal{O}(|\xi^{-2}|). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Für das Feynman-Parameter-Integral w'_3 folgt

$$w'_3 = -2 + A + B + C = 2 \ln(4|\xi^2|) - 2 + \mathcal{O}(|\xi^{-2}|). \quad (8.19)$$

Das Integral über den Logarithmus, welches in w''_3 enthalten ist, geht für $m_e \rightarrow 0$ gegen den Grenzwert

$$\lim_{m_e \rightarrow 0} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \ln \frac{\Delta}{\Lambda^2} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \ln \frac{(1-x-y)yQ^2}{\Lambda^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2}. \quad (8.20)$$

8.2. Renormierung

Die (ultraviolett divergente) elektromagnetische Schleife der Elektron-Proton-Streuung (Bild: 8.1) ist bis auf den aus dem Wess-Zumino-Funktional resultierenden Formfaktor identisch mit der Schleife des Pion-Zerfalls (Bild: 6.2). Beide werden durch denselben *Counterterm*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{ct} &= -\frac{\alpha^2}{2} \bar{\psi} \gamma^\delta \gamma_5 \psi \chi(\Lambda) W_\delta \\ &= \frac{i\alpha^2}{32\pi^2} \bar{\psi} \gamma^\delta \gamma_5 \psi \chi(\Lambda) \text{tr}(2Q^2(U^\dagger \partial_\delta U - U \partial_\delta U^\dagger) + (Q \partial_\delta U Q U^\dagger - Q U Q \partial_\delta U^\dagger)) \end{aligned} \quad (8.21)$$

renormiert. Für die Elektron-Proton-Streuung ergibt sich das zugehörige Matrixelement zu:

$$\langle k_2 p_2 | i\mathcal{L}^{ct} | k_1 p_1 \rangle = -\frac{i}{2} \alpha^2 \bar{u}^s(k_2) \gamma^\delta \gamma_5 u^{s'}(k_1) \chi(\Lambda) \langle N_{T_{3r}}(\vec{p}_2) | W_\delta | N_{T_{3r'}}(\vec{p}_1) \rangle \quad (8.22)$$

Der Koeffizient $\chi_{\text{fin}}(\Lambda)$, der aus der Subtraktion mit dem *Counterterm* folgt

$$\chi_{\text{fin}}(\Lambda) = 6 \left(\frac{2}{\epsilon_d} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - \chi(\Lambda), \quad (8.23)$$

ist identisch zum entsprechenden Renormierungskoeffizienten des $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$ Zerfalls und wird durch diesen bestimmt (siehe Kapitel 6.2). Das renormierte Matrixelement ist:

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = -i\alpha^2 \langle N_{T_{3r}}(\vec{p}_2) | W_\delta | N_{T_{3r'}}(\vec{p}_1) \rangle \bar{u}^s(k_2) (w_3 \gamma^\delta \gamma_5) u^{s'}(k_1) \quad (8.24)$$

mit $w_3 = w'_3 + w_3^R$ und

$$w_3^R = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \left[\chi_{\text{fin}}(\Lambda) - 6 \ln \frac{\Delta}{\Lambda^2} \right]. \quad (8.25)$$

Wobei w_1 und w_2 vernachlässigt wurden, da diese Terme im Limes $m_e \rightarrow 0$ keinen Beitrag liefern. In diesem Grenzwert ist der führende Beitrag von w_3

$$w_3 \xrightarrow{m_e \rightarrow 0} \tilde{w}_3 = -2 \ln \frac{m_e^2}{\Lambda^2} + 7 + \frac{\chi_{\text{fin}}(\Lambda)}{2} - \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}. \quad (8.26)$$

Wird Gl. (8.26) mit Gl. (6.51) verglichen, so stellt man fest, dass der Koeffizient \tilde{w}_3 unabhängig von der Massenskala Λ ist. Eine Änderung der Massenskala Λ wird durch eine Anpassung des Koeffizienten $\chi_{\text{fin}}(\Lambda)$ kompensiert, bei fester Zerfallsbreite $\Gamma(\pi^0 \rightarrow e^+e^-)$. Im Rahmen dieser Arbeit wurde bei den numerischen Berechnungen in beiden Fällen ($\pi^0 \rightarrow e^+e^-$, $eN \rightarrow eN$) $\Lambda = 1$ GeV gewählt. Im Folgenden wird die Abhängigkeit der Renormierungskonstanten von der Massenskala nicht mehr explizit angegeben.

Die Abhängigkeit des Koeffizienten $\chi_{\text{fin}}(m_e, Q^2)$ von der Masse des Elektrons m_e und Q^2 ist problematischer. Zum einen besagt das Kinoshita-Lee-Nauenberg Theorem [84, 85], dass die (gesamte) Übergangswahrscheinlichkeit bei masselosen Elektronen endlich ist. Das deutet darauf hin, dass für $m_e \rightarrow 0$ divergente Beiträge fehlen, sofern Gleichung (8.26) in diesem Limes divergiert. Gleichung (8.26) besitzt nur dann einen endlichen Grenzwert für $m_e \rightarrow 0$ sofern die Renormierungskonstante χ_{fin} in diesem Limes wie $8 \ln m_e$ divergiert. Das Verhalten der Renormierungskonstante unter Variation der Leptonmasse lässt sich aber nur bedingt abschätzen, da die Renormierungskonstante nur bei zwei verschiedenen Leptonmassen, z. B. in den Zerfällen $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ und $\eta \rightarrow \mu^+\mu^-$ durch Anpassung an den gemessenen Wirkungsquerschnitt (vgl. Kap. 6.2), bestimmt werden kann. Vergleichbar verhält es sich mit der Abhängigkeit von Q^2 . Die Renormierungskonstante wurde im Bereich $Q^2 \simeq m_\pi^2 \dots m_\eta^2$ bestimmt, aber im Rahmen der Elektron-Nukleon-Streuung wird sie bis $Q^2 \simeq 4$ GeV² verwendet.

8.3. Interferenz mit dem Ein-Photon-Matrixelement

Es ist nützlich nachzuprüfen, welche Terme der Nukleon-Formfaktoren überhaupt zur unpolarisierten Interferenz mit dem Ein-Photon-Matrixelement

$$\mathcal{M}_\gamma = \frac{e^2}{q^2} \bar{u}^s(k_2) \gamma^\mu u^{s'}(k_1) \langle J_\mu \rangle, \quad J^\mu = (2MG_E, -iG_M \vec{q} \times \vec{\sigma})^\mu \quad (8.27)$$

beitragen können. Werden die Spinoren des Nukleons mit χ bezeichnet, so führt die Spinsumation auf Terme jeweils proportional zu

$$\sum_{rr'} \chi^{r\dagger} J_\mu \chi^{r'} \chi^{r'\dagger} [H_0 \sigma_i + H_2 (\sigma_i - 3\hat{q}_i \hat{q} \cdot \vec{\sigma})] \chi^r = \text{tr} (J_\mu [H_0 \sigma_i + H_2 (\sigma_i - 3\hat{q}_i \hat{q} \cdot \vec{\sigma})]). \quad (8.28)$$

Da die Spur über eine einzelne Pauli-Matrix σ_i verschwindet, ist direkt ersichtlich, dass keine Interferenz mit dem elektrischen Formfaktor G_E stattfinden kann. Betrachtet man die Terme, welche

$$\begin{aligned} \text{tr}((\vec{q} \times \vec{\sigma})_j (\hat{q} \cdot \vec{\sigma})) &= \text{tr}(\epsilon_{nmj} q_n \sigma_m \hat{q}_s \sigma_s) \\ &= 2\epsilon_{nmj} q_n \hat{q}_s \delta_{ms} = 2(\vec{q} \times \hat{q})_j = 0 \end{aligned} \quad (8.29)$$

enthalten, so wird deutlich, dass zur unpolarisierten Interferenz nur die Kombination $(H_0 + H_2)\sigma_i$ beiträgt. Der Vergleich mit Gl. (7.12) liefert

$$\langle N_{T_3 r}(\vec{p}_2) | \vec{W} | N_{T_3 r'}(\vec{p}_1) \rangle \simeq \frac{\tau_3(H_0 + H_2) \chi^{r\dagger} \vec{\sigma} \chi^{r'}}{9\pi M}. \quad (8.30)$$

In der Ein-Pion-Näherung verschwindet die Summe der Formfaktoren H_0 und H_2 und damit der Beitrag zur unpolarisierten Interferenz mit dem Ein-Photon-Matrixelement der Elektron-Nukleon-Streuung. Im nächsten Kapitel wird der Anteil des Wess-Zumino-Terms an der Interferenz exakt berechnet. Wie sich herausstellen wird, ist dieser nicht vernachlässigbar. Die niedrigste Ordnung in den Pionfeldern stellt einen nicht entscheidenden Beitrag zur unpolarisierten Interferenz dar.

9. Anomale Strahlungskorrekturen zur Elektron-Nukleon-Streuung

Die Elektron-Nukleon-Streuung wird im Rahmen der Quantenelektrodynamik (QED) beschrieben. Um den Wirkungsquerschnitt der Streuung zu berechnen, wird die Kleinheit der Kopplungskonstante $\alpha \simeq 1/137$ ausgenutzt und das Übergangsmatrixelement in eine Taylorreihe $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_{2\gamma} + \dots$ entwickelt. Der führende Beitrag wird als Born'sche oder Ein-Photon-Näherung bezeichnet. Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zum Betragsquadrat des Matrixelements, und führt in erster Ordnung $|\mathcal{M}_\gamma|^2$ auf die Rosenbluth-Formel. Der führende Beitrag nächster Ordnung (*next to leading order*) wird durch die Interferenz $\mathcal{M}_\gamma^* \mathcal{M}_{2\gamma} + \mathcal{M}_\gamma \mathcal{M}_{2\gamma}^*$ mit dem Ein-Photon-Matrixelement gebildet. Terme höherer Ordnung in der Kopplungskonstanten α zur Elektron-Nukleon-Streuung entstehen i. Allg. durch den Austausch mehrerer Photonen zwischen Elektron und Nukleon, wie im *Box*-Diagramm in Abbildung 2.5 dargestellt. Neben dieser unmittelbaren Wechselwirkung zwischen Photon und Nukleon können die Photonen auch über die Anomalie der QCD, die den Zerfall des neutralen Pions ermöglicht, an das Nukleon koppeln. Diese Möglichkeit des Zwei-Photon-Austausches wurde bisher in der Literatur nicht berücksichtigt. Mit Hilfe der Ergebnisse der vorangegangenen Kapiteln kann der Beitrag der anomalen Kopplung zur Elektron-Nukleon-Streuung erstmalig berechnet werden. Die Rechnung basiert zwar auf dem Skyrme-Modell, da die Anomalie aber unmittelbar eine Eigenschaft der QCD widerspiegelt und eindeutig festgelegt ist, ist zu erwarten, dass die qualitativen Ergebnisse weitgehend unabhängig vom Modell sind.

Zu Beginn des Kapitels werden allgemeine Eigenschaften eines axialen Stromes und die Interferenz mit dem Matrixelement der Ein-Photon-Näherung betrachtet. Danach werden die Beiträge der anomalen Kopplung zur unpolarisierten, elastischen Elektron-Nukleon-Streuung mit Hilfe der Ergebnisse der vorangegangenen Kapiteln ausgewertet. Die numerischen Ergebnisse der Berechnungen im Skyrme-Modell werden präsentiert. Es wird explizit auf die Diskrepanz zwischen der Messmethode der Rosenbluth-Separation und den Polarisationsmessungen eingegangen. Der Einfluss der anomalen Zwei-Photon-Kopplung auf die Diskrepanz wird diskutiert.

9.1. Unpolarisierte Interferenzen für einen axialen Strom

Für die unpolarisierte Interferenz eines axialen Stromes mit dem Born'schen Term der Elektron-Nukleon-Streuung ist die Abhängigkeit vom Streuwinkel θ_e bzw. vom Parameter ε generisch. Dies ist zu erwarten, da die auftretenden Formfaktoren nur von der dynamischen Größe Q^2 und nicht von ε abhängen können. Die Abhängigkeit von ε folgt einzig aus der Kinematik. Dies bleibt auch jenseits der Ein-Photon-Näherung gültig, solange das Nukleon lokal an die Photonen koppelt, und damit auch für das in den vorherigen Kapiteln betrachtete Matrixelement der Anomalie.

Das Matrixelement für einen beliebigen axialen Strom kann durch

$$i\mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{axial}} = -i\alpha^2 \bar{u}^s(k_2) [w_1(Q^2)k_2^\delta + w_2(Q^2)q^\delta + w_3(Q^2)\gamma^\delta] \gamma_5 u^{s'}(k_1) \cdot \bar{U}^r(p_2) [F_E(Q^2)p_{2\delta} + F_P(Q^2)q_\delta + F_A(Q^2)\gamma_\delta] \gamma_5 U^{r'}(p_1) \quad (9.1)$$

parametrisiert werden. Bei der unpolarisierten Interferenz mit dem Ein-Photon-Matrixelement

$$i\mathcal{M}_\gamma = ie^2 \frac{\bar{u}^s(k_2)\gamma^\mu u^{s'}(k_1)}{q^2} \bar{U}^r(p_2) \left[F_1(Q^2)\gamma_\mu + F_2(Q^2)\frac{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu}{2M} \right] U^{r'}(p_1) \quad (9.2)$$

treten Spinsummen auf, die sich als Spuren von γ -Matrizen schreiben lassen. Für den Anteil der Elektronströme ergibt die Spinsummation

$$\begin{aligned} & \sum_{ss'} (\bar{u}^s(k_2)\gamma^\mu u^{s'}(k_1))^* \bar{u}^s(k_2) [w_1 k_2^\delta + w_2 q^\delta + w_3 \gamma^\delta] \gamma_5 u^{s'}(k_1) \\ &= \text{tr}((\not{k}_1 + m_e)\gamma^\mu (\not{k}_2 + m_e) [w_1 k_2^\delta + w_2 q^\delta + w_3 \gamma^\delta] \gamma_5) \\ &= w_3 \text{tr}(\not{k}_1 \gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\delta \gamma_5) = -4i w_3 k_{1\alpha} k_{2\beta} \epsilon^{\alpha\mu\beta\delta} \end{aligned} \quad (9.3)$$

und analog für den Nukleonanteil

$$\begin{aligned} & \sum_{rr'} \left(\bar{U}^r(p_2) \left[F_1 \gamma_\mu + F_2 \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M} \right] U^{r'}(p_1) \right)^* \bar{U}^r(p_2) [F_E p_{2\delta} + F_P q_\delta + F_A \gamma_\delta] \gamma_5 U^{r'}(p_1) \\ &= \text{tr}((\not{p}_1 + M) \left[(F_1 + F_2)\gamma_\mu - F_2 \frac{(p_1 + p_2)_\mu}{2M} \right] (\not{p}_2 + M) [F_E p_{2\delta} + F_P q_\delta + F_A \gamma_\delta] \gamma_5) \\ &= (F_1 + F_2) F_A \text{tr}(\not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\delta \gamma_5) = -4i G_M F_A p_1^\rho p_2^\sigma \epsilon_{\rho\mu\sigma\delta}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Zur unpolarisierten Interferenz tragen aufgrund der Spinsummen nur Terme des axialen Stromes proportional zu $\gamma_\delta \gamma_5$ bei. Der Interferenzterm errechnet sich zu:

$$\sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_\gamma^* \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{axial}} = \frac{128\pi\alpha^3}{q^2} G_M w_3 F_A [(k_1 \cdot p_2)(k_2 \cdot p_1) - (k_1 \cdot p_1)(k_2 \cdot p_2)]. \quad (9.5)$$

Aus der Impulserhaltung folgt unmittelbar $k_1 \cdot p_1 = k_2 \cdot p_2$ und $k_1 \cdot p_2 = k_2 \cdot p_1$, woraus sich

$$\sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_\gamma^* \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{axial}} = \frac{128\pi\alpha^3}{q^2} G_M w_3 F_A [(k_1 \cdot p_2)^2 - (k_1 \cdot p_1)^2] \quad (9.6)$$

ergibt. Führt man die Lorentz-Skalare τ (2.5) und ε (2.6) ein, so gilt mit der Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} 4\nu &= 2(k_1 \cdot p_1) + 2(k_1 \cdot p_2) \\ q^2 &= (k_1 - k_2) \cdot (p_2 - p_1) = 2(k_1 \cdot p_2) - 2(k_1 \cdot p_1) \\ \Rightarrow \nu q^2 &= (k_1 \cdot p_2)^2 - (k_1 \cdot p_1)^2. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Für den Interferenzterm folgt die allgemeine Struktur

$$\sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_\gamma^* \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{axial}} = 128\pi\alpha^3 G_M w_3 F_A M^2 \sqrt{\tau(1+\tau)} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (9.8)$$

Der Anteil des axialen Stromes (9.8) verletzt die Linearität des reduzierten Wirkungsquerschnitts bezüglich des Parameters ε , die in der Ein-Photon-Näherung (2.10) gegeben ist. Rekaló und Tomasi-Gustafsson [86] zeigten, dass aufgrund allgemeiner Eigenschaften elektromagnetischer Interaktionen, wie der Ladungskonjugation und der *crossing symmetry*, der Zwei-Photon-Beitrag im reduzierten Wirkungsquerschnitt nicht linear in ε sein kann und sein Vorzeichen bei der Transformation $x \rightarrow -x$ mit $x = \sqrt{(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)}$ ändern muss. Diese Anforderung wird von einem beliebigen axialen Strom erfüllt und damit auch von der Zwei-Photon-Kopplung des Wess-Zumino-Terms, der von derselben Struktur wie Gl. (9.8) ist. Im Folgenden wird die Größe F_A aus den Formfaktoren H_0 und H_2 berechnet.

9.1.1. Äquivalente zweikomponentige Spin-Darstellung

Die Formfaktoren im Skyrme-Modell lassen sich sinnvoll nur im Breitframe und in der zweikomponentigen Spin-Darstellung angeben. Diese Darstellung ist äquivalent zur Darstellung der Dirac-Tensoren. Für jedes Dirac-Tensor-Matrixelement Γ lässt sich ein Matrixelement $M(p_2, p_1)$ finden, mit

$$\bar{U}^r(p_2) \Gamma U^{r'}(p_1) = \chi^{r\dagger} M(p_2, p_1) \chi^{r'}. \quad (9.9)$$

Die genauen Werte für $M(p_2, p_1)$ lassen sich [87] entnehmen. Dabei ist darauf zu achten, dass dort eine andere Normierung für die Dirac-Spinoren verwendet wird (Faktor $2M$). Für das Ein-Photon-Matrixelement des Nukleon-Formfaktors folgt im Breitframe:

$$\bar{U}^r(p_2) \left[F_1 \gamma^\mu + F_2 \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} \right] U^{r'}(p_1) = \chi^{r\dagger} \left(2M(F_1 - \tau F_2), -i(F_1 + F_2)(\vec{q} \times \vec{\sigma}) \right)^\mu \chi^{r'}. \quad (9.10)$$

Für den speziellen Fall von $\Gamma = \gamma_0\gamma_5$ verschwindet $M(p_2, p_1)$ im Breitframe und für $\Gamma = \gamma_i\gamma_5$ gilt:

$$\bar{U}^r(p_2)\gamma_i\gamma_5 U^{r'}(p_1) = \chi^{r\dagger} \left(2E\sigma_i - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{2(E+M)} q_i \right) \chi^{r'}. \quad (9.11)$$

Dabei wurden wie bisher mit σ_i die Pauli-Matrizen für den Spin bezeichnet und mit $E = M\sqrt{1+\tau}$ die Energie des Nukleons im Breitframe.

Mit Hilfe dieser Formeln, sowie

$$\bar{U}^r(p_2)\gamma_5 U^{r'}(p_1) = -\chi^{r\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) \chi^{r'}, \quad (9.12)$$

lässt sich der Zwei-Photon-Nukleon-Formfaktor des Wess-Zumino-Terms $\langle W_i \rangle$ (Gl. 7.12) in der Darstellung der Dirac-Tensoren schreiben und in Beziehung zu F_A bringen.

$$\begin{aligned} \langle N_r(\vec{p}_2) | \vec{W}(0) | N_{r'}(\vec{p}_1) \rangle &\rightarrow \frac{\tau_3}{18\pi M E} (H_0 + H_2) \bar{U}^r(p_2) \gamma_i \gamma_5 U^{r'}(p_1) \\ &\quad - \frac{\tau_3}{18\pi M} \left(\frac{(H_0 + H_2)}{2E(E+M)} - \frac{6H_2}{q^2} \right) \bar{U}^r(p_2) q_i \gamma_5 U^{r'}(p_1) \end{aligned} \quad (9.13)$$

Wird der Beitrag zu $\Gamma = \gamma_0\gamma_5$, der sich im Breitframe nicht bestimmen lässt, passend ergänzt, so folgt die Beziehung

$$F_A = \frac{\tau_3}{18\pi} \frac{H_0 + H_2}{ME}. \quad (9.14)$$

Wie bereits erwähnt ist der Beitrag von F_A zu $\gamma_0\gamma_5$ in der Spinordarstellung im Breitframe gleich Null und die Transformation daher nicht unmittelbar invertierbar. Mit Hilfe der allgemeinen Form für einen axialen Strom, die in Gl. (9.1) gegeben ist, wird allerdings deutlich, dass die räumlichen Komponenten $\gamma_i\gamma_5$ ausreichen um F_A zu identifizieren. Es sei darauf hingewiesen, dass Gleichung 9.14 erst aus dem Vergleich der Matrixelemente (Gl. 9.1) folgt und damit von der Definition von w_3 abhängt.

9.2. Interferenz des Zwei- und Ein-Photon-Matrixelements

Die Interferenz des Zwei-Photon-Matrixelements des Wess-Zumino-Terms mit dem Ein-Photon-Matrixelement ist gegeben durch

$$\sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_\gamma^* \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} = -\frac{4\pi\alpha^3}{q^2} \sum_{\text{Spins}} \bar{u}^{s'}(k_1) \gamma^\mu u^s(k_2) \bar{u}^s(k_2) \tilde{w}_3 \gamma^\delta \gamma_5 u^{s'}(k_1) \langle J_\mu \rangle^* \langle W_\delta \rangle \quad (9.15)$$

mit dem Formfaktor \tilde{w}_3 (8.26). Der Elektronanteil wurde bereits zu Beginn des Kapitels berechnet:

$$\sum_{ss'} \bar{u}^{s'}(k_1) \gamma^\mu u^s(k_2) \bar{u}^s(k_2) \tilde{w}_3 \gamma^\delta \gamma_5 u^{s'}(k_1) = -4i \tilde{w}_3 k_{1\alpha} k_{2\beta} \epsilon^{\alpha\mu\beta\delta}. \quad (9.16)$$

Der Nukleonanteil kann im Skyrme-Modell nur im Breitframe sinnvoll angegeben werden. Der hadronische Strom (4.26) in der Ein-Photon-Näherung wurde bereits in Kapitel 4 berechnet, zusammen mit $\langle \vec{W} \rangle$ (8.30) lässt sich die Interferenz auswerten:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spins}} \langle J_j \rangle^* \langle W_i \rangle &= \frac{iG_M}{9\pi M} \sum_{rr'} \chi^{r\dagger} (\vec{q} \times \vec{\sigma})_j \chi^{r'} \chi^{r'\dagger} \tau_3 (H_0 + H_2) \sigma_i \chi^r \\ &= \frac{2iG_M}{9\pi M} (H_0 + H_2) \tau_3 \epsilon_{ijm} q_m. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Die Summation über die Lorenzindizes μ, δ wurde durch die Summation über die räumlichen Indizes j, i ersetzt. Da J_0 keine Pauli-Matrix enthält, trägt es nicht zur Interferenz mit dem Zwei-Photon-Matrixelement bei. Für die Interferenz ergibt sich mit $\epsilon_{ijm} q_m = -\epsilon_{0ijm} q_m \rightarrow -\epsilon_{0\delta\mu\rho} q^\rho$

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spins}} \mathcal{M}_\gamma^* \mathcal{M}_{2\gamma}^{\text{wz}} &= \frac{32\alpha^3}{9q^2 M} G_M \tilde{w}_3 (H_0 + H_2) \tau_3 k_{1\alpha} k_{2\beta} \epsilon^{\alpha\mu\beta\delta} \epsilon_{0\mu\rho\delta} q^\rho \\ &= \frac{64\alpha^3}{9M} G_M \tilde{w}_3 (H_0 + H_2) \tau_3 k_0 \\ &= \frac{64\alpha^3}{9} G_M \tilde{w}_3 (H_0 + H_2) \tau_3 \sqrt{\tau \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Die Energie des Elektrons im Breitframe wird mit k_0 bezeichnet.

Wird Gl. (9.18) zur Kontrolle mit (9.8) verglichen, so stellt man fest, dass im Breitframe die Beziehung

$$EF_A = \frac{H_0 + H_2}{18\pi M} \tau_3 \quad (9.19)$$

gilt. Dieses Resultat folgte bereits aus der Äquivalenz der Matrixelemente der Dirac-Tensoren mit der zweikomponentigen Spindarstellung (Abschnitt 9.1.1). Für den reduzierten Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_R = \frac{\varepsilon(1+\tau)}{\tau} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \quad (9.20)$$

ergibt sich mit der Ein-Photon-Näherung (4.38) und dem Beitrag der Interferenz mit dem Wess-Zumino-Term (Gl. (9.18) mit einem zusätzlichen Faktor von $1/4$ wegen der Mittelung über die Spins)

$$\sigma_R = G_M^2 + \frac{\varepsilon}{\tau} G_E^2 + \frac{\alpha}{9\pi^2} G_M \tilde{w}_3 (H_0 + H_2) \tau_3 \sqrt{\tau(1-\varepsilon^2)}, \quad (9.21)$$

wobei der komplex konjugierte Interferenzterm mit einem Faktor von zwei berücksichtigt wurde.

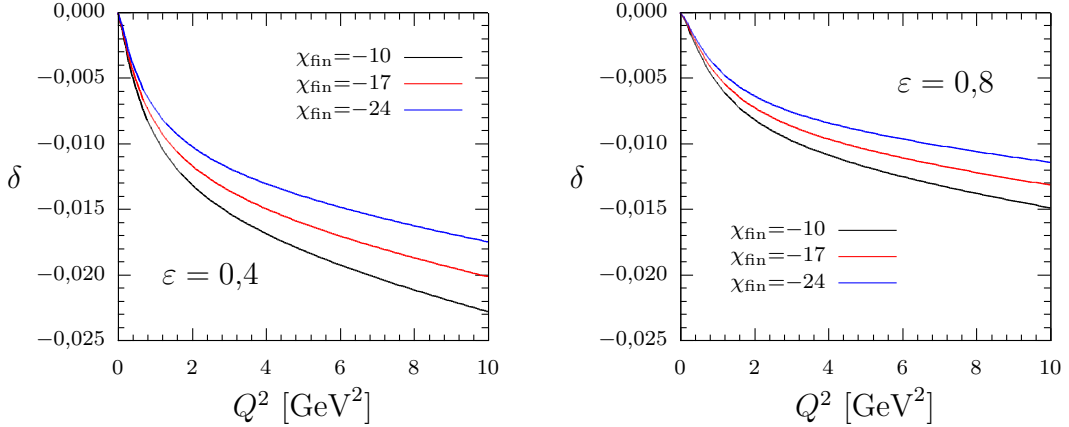


Abb. 9.1: Die Zwei-Photon-Korrektur δ des Protons als Funktion von Q^2 für zwei verschiedene Werte des Parameters ε . Die Ergebnisse sind jeweils für drei unterschiedliche Renormierungskonstanten χ_{fin} dargestellt. Für alle weiteren Parameter wurden die Standardwerte der Auswertung benutzt: $e_s = 3,8$, $M_b = 939$ MeV, $n_M = n_E = n_{\text{wz}} = 2$.

9.2.1. Zwei-Photon-Korrekturen beim Proton

Um den Einfluss der Zwei-Photon-Strahlungskorrekturen auf den Wirkungsquerschnitt der unpolarisierten Elektron-Proton-Streuung zu diskutieren, ist es üblich die Größe δ einzuführen

$$\sigma_R = \left(G_M^2 + \frac{\varepsilon}{\tau} G_E^2 \right) (1 + \delta), \quad (9.22)$$

welche die Abweichung zur Born'schen Näherung parametrisiert. Die im Rahmen dieser Arbeit für das Skyrme-Modell berechnete Korrektur

$$\delta(Q^2, \varepsilon) = \frac{\alpha}{9\pi^2} \frac{G_M \tilde{w}_3 (H_0 + H_2) \tau_3 \sqrt{\tau(1 - \varepsilon^2)}}{G_M^2 + \frac{\varepsilon}{\tau} G_E^2} \quad (9.23)$$

folgt aus dem Wess-Zumino-Term und ist über die Formfaktoren \tilde{w}_3 und H_0 bzw. H_2 von den Modellparametern abhängig. Der Formfaktor \tilde{w}_3 enthält die Schleife und die Renormierungskonstante χ_{fin} , die über den $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall bestimmt wurde. In den Abbildungen 9.1 wird die Größe $\delta = (\sigma_R - \sigma_R^{\text{Born}})/\sigma_R^{\text{Born}}$, für drei verschiedene Werte von $\chi_{\text{fin}} = -24, -17, -10$ betrachtet, wie sie die Daten des Zerfalls nahe legen. Zu erkennen ist die Größenordnung von $|\delta| \approx 2\%$ für Impulsüberträge bis zu $Q^2 = 10$ GeV². Die Unsicherheit in der Renormierungskonstante schlägt sich in einem 10-20% Effekt, der weitgehend unabhängig von Q^2 ist, in der Zwei-Photon-Korrektur δ nieder. Da die Ergebnisse modellabhängig sind und daher nur eine qualitative Aussage ermöglichen, wird im Folgenden nur $\chi_{\text{fin}} = -17$ betrachtet.

Unabhängig vom Formfaktor \tilde{w}_3 gehen in die Formfaktoren des Nukleons die Skyrme-Konstante e_s , sowie die Darstellung des Lorentz-Boosts ein. Werden die

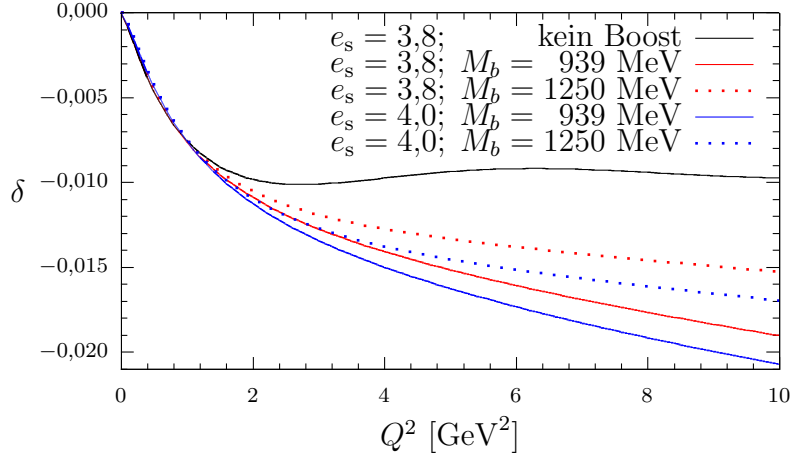


Abb. 9.2: Der im Skyrme-Modell berechnete Zwei-Photon-Beitrag δ als Funktion von Q^2 für jeweils verschiedene Werte der Skyrme-Konstante e_s und der Boostmasse M_b . Die schwarze Linie gibt das Ergebnis wieder, bei dem alle vier Nukleon-Formfaktoren aus der nichtrelativistischen Berechnung in Gl. (9.23) eingesetzt wurden, was einer Transformation mit $\gamma = 1$ entspricht. Alle Resultate wurden mit $\varepsilon = 0,5$, $\chi_{\text{fin}} = -17$ und sofern zutreffend $n_M = n_E = n_{wz} = 2$ berechnet.

Formfaktoren G_M , G_E sowie H_0 , H_2 betrachtet, so fällt auf, dass alle Summanden, die zum unpolarisierten reduzierten Wirkungsquerschnitt (9.21) beitragen, das gleiche Skalenverhalten bzgl. der Nukleonmasse besitzen. Jeder einzelne Summand des reduzierten Wirkungsquerschnitts (9.21) ist proportional zu M^2 . Das bedeutet, dass Verhältnisse der Summanden wie z. B. δ unabhängig von der Nukleonmasse M sind. Dies gilt allerdings nicht für die effektive Masse des Boostes M_b . Wird der Boost der Nukleon Formfaktoren durch (4.28), (4.29) und (7.15) beschrieben, so ist ersichtlich, dass sich zwar die Potenzen von γ für $n_M = n_E = n_{wz} = 2$ in den Verhältnissen der Formfaktoren kürzen, aber die Boostmasse immer noch eine Skalierung des Impulses bewirkt:

$$k^2 = \frac{Q^2}{\gamma^2} = \frac{Q^2}{1 + \frac{Q^2}{4M_b^2}}. \quad (9.24)$$

Abbildung 9.2 zeigt den Einfluss der Boostmasse M_b sowie der Skyrme-Konstante e_s auf den Zwei-Photon-Beitrag δ . Die Variation der Boostmasse ist nur im Bereich der Nukleonmasse bzw. der Masse des Solitons ($939 \text{ MeV} < M_b < 1,5 \text{ GeV}$) sinnvoll, während die Skyrme-Konstante durch die Vorhersagen des Modelles für die statischen Eigenschaften des Nukleons auf $e_s \simeq 4,0$ festgelegt wird (siehe Tabelle 3.1). Im Rahmen dieser Variationsmöglichkeiten zeigt der Zwei-Photon-Beitrag δ für $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$ praktisch keine Abhängigkeit. Erst für höhere Werte von Q^2 , bei denen die Aussagekraft des chiralen Soliton-Modells ohnehin fraglich ist, ergeben die unterschiedlichen Werte der Parameter eine Änderung von bis zu 20%.

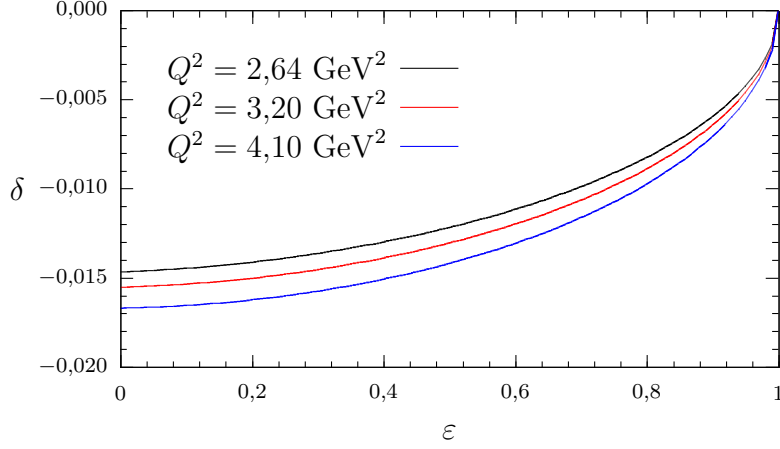


Abb. 9.3: Die Abhängigkeit der Zwei-Photon-Korrektur δ (9.23) vom Parameter ε aufgetragen für drei verschiedene Werte von $Q^2 = 2,64; 3,20; 4,10 \text{ GeV}^2$.

Die Wahl der Parameter $e_s = 3,8$ und $M_b = M = 939 \text{ MeV}$ ist naheliegend für die Auswertung des aus der Anomalie resultierenden Zwei-Photon-Beitrags. Die qualitativen Ergebnisse scheinen weitgehend robust gegen Ungenauigkeiten in der Renormierungskonstanten und Änderungen in den Parametern. Es ist daher zu erwarten, dass die Berechnungen des Modells im Bereich $Q^2 \lesssim 4 \text{ GeV}^2$ qualitativ zutreffende Ergebnisse liefern.

Bereits aus der Störungstheorie ist abzuschätzen, dass die Zwei-Photon-Beiträge die Größenordnung $\alpha \simeq 1\%$ besitzen. Da die Abhängigkeit vom Polarisationsparameter ε zudem generisch für einen axialen Strom ist, entsprechen die Ergebnisse des Modells den Erwartungen ($|\delta| \simeq 0,02$). Der Zwei-Photon-Beitrag δ als Funktion vom Parameter ε , wie er aus dem axialen Strom folgt, besitzt an der Stelle $\varepsilon \simeq 1$ die größte Steigung und flacht zu $\varepsilon = 0$ hin ab, wie in Abb. 9.3 zu sehen. Dieses Verhalten unterscheidet sich signifikant vom Beitrag des *Box*- und *x-Box*-Diagramms, wie er z. B. in [42] unabhängig vom Skyrme-Modell berechnet wurde. Dies ist kein Widerspruch, da beide Ergebnisse gleichermaßen zur Zwei-Photon-Korrektur beitragen und addiert werden müssen.

Gemäß Gleichung (9.22) trägt die Zwei-Photon-Korrektur δ unmittelbar zum Wirkungsquerschnitt bei. Um die modellbedingte Abweichung im magnetischen Formfaktor G_M weniger stark zu gewichten, wird der normierte, reduzierte Wirkungsquerschnitt

$$r_{\text{mod}}(\varepsilon) = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{G_E^2}{G_M^2}\right) (1 + \delta(\varepsilon))}{1 + \delta(\varepsilon = 0)} = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{G_E^2}{G_M^2} + \frac{\alpha}{9\pi^2} \tilde{w}_3 \frac{H_0 + H_2}{G_M} \tau_3 \sqrt{\tau(1 - \varepsilon^2)}}{1 + \frac{\alpha}{9\pi^2} \tilde{w}_3 \frac{H_0 + H_2}{G_M} \tau_3 \sqrt{\tau}} \quad (9.25)$$

mit den experimentellen Ergebnissen verglichen

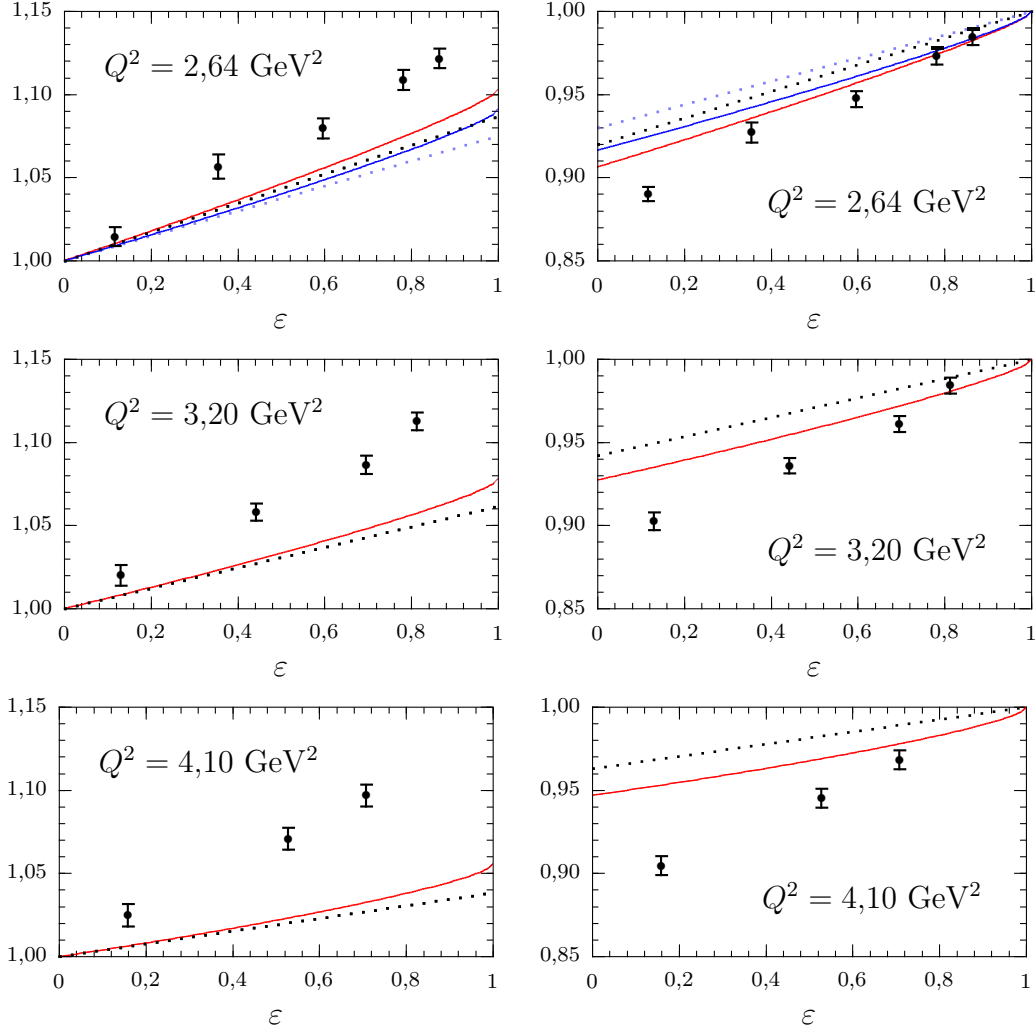


Abb. 9.4: Der normierte, reduzierte Wirkungsquerschnitt im Vergleich zu den experimentellen Daten [19]. Die durchgezogenen, roten Linien sind die Ergebnisse im Skyrme-Modell mit dem Zwei-Photon-Beitrag der Anomalie (9.25). Die gestrichelten Linien entsprechen der Modellrechnung in Ein-Photon-Näherung. Für $Q^2 = 2,64 \text{ GeV}^2$ sind zusätzlich die Resultate als blaue Linie bzw. gestrichelte Linie dargestellt, die sich durch Einsetzen der Polarisationsergebnisse für G_E/G_M in den zweiten Term des Zählers in Gl. (9.25) (rechts) ergeben. Die linken und rechten Diagramme unterscheiden sich jeweils durch die Normierung bei $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$.

$$r_{\text{exp}}(\varepsilon) = \frac{\sigma_R(\varepsilon)}{\sigma_R(\varepsilon = 0)}. \quad (9.26)$$

Dabei stellt $\sigma_R(\varepsilon = 0)$ den quadrierten magnetischen Formfaktor dar, wie er durch die Rosenbluth-Separation des entsprechenden Experiments ermittelt wurde. In Abbildung 9.4 ist der Vergleich des normierten, reduzierten Wirkungsquerschnitts mit den experimentellen Daten des Super-Rosenbluth-Experiments [19] dargestellt. Um die experimentellen Fehler auf Effekte höherer Ordnung zu beschränken, wurde der zur Normierung verwendete magnetische Formfaktor im Nenner von Gl. (9.26), der durch die Rosenbluth-Separation des Experimentes ermittelt wurde, als fehlerlos angenommen. Zu erkennen ist, dass der Beitrag des Wess-Zumino-Terms in die richtige Richtung wirkt und die Ergebnisse der Ein-Photon-Näherung in bessere Übereinstimmung zu den experimentellen Daten verschiebt. Dennoch ist der Effekt je nach Q^2 Wert um einen Faktor fünf bis zehn zu klein. Die rechte Seite der Abbildungen 9.4 zeigt eine Verschiebung der Normierungsbedingung auf $\varepsilon = 1$ und scheint in besserer Übereinstimmung zu den experimentellen Werten, was allerdings im wesentlichen an der Darstellung liegt und zu einer kaum veränderten Steigung führt. Es ist auch ersichtlich, dass durch die generische Form der Zwei-Photon-Beiträge des axialen Stromes bzgl. des Parameters ε , eine reine Skalierung nicht zur Übereinstimmung mit den experimentellen Daten führen kann. Dies ist in soweit auch nicht notwendig, da andere additive Beiträge, welche z. B. aus dem *Box*- und *x-Box*-Diagramm folgen, eine andere Form betreffend ε besitzen.

Die gemeinsame „Messgröße“ der Rosenbluth-Separations- als auch Polarisationsexperimente ist das Verhältnis aus elektrischem und magnetischem Formfaktor

$$R = \frac{\mu_p G_E}{G_M}. \quad (9.27)$$

Dieser ist allerdings keine direkte Messgröße, da die Formfaktoren in der Born'schen Näherung definiert sind, während die gemessenen Wirkungsquerschnitte alle Terme der Reihenentwicklung nach Potenzen von α enthalten, insbesondere auch die Zwei-Photon-Beiträge. Das bedeutet, dass u. A. die Rosenbluth-Separation nicht unmittelbar auf die Formfaktoren G_E , G_M führt sondern viel mehr auf effektive Formfaktoren G_E^{eff} , G_M^{eff} . Um die Ergebnisse der unterschiedlichen Messungen zu vergleichen, müsste der Zusammenhang zwischen den effektiven Formfaktoren und G_E , G_M bekannt sein.

Bei der Rosenbluth-Separation wird die Linearität des reduzierten Wirkungsquerschnitts bezüglich ε ausgenutzt um die effektiven Formfaktoren zu extrahieren. Da die Zwei-Photon-Beiträge zum reduzierten Wirkungsquerschnitt aber nicht linear sind, ist es nicht möglich die resultierende Änderung in den Formfaktoren in geschlossener Form anzugeben. Es ist davon auszugehen, dass die Abweichungen von der Linearität innerhalb der Messungenauigkeit der Experimente liegt. Die einfachste Möglichkeit, um den Einfluss der Zwei-Photon-Korrekturen

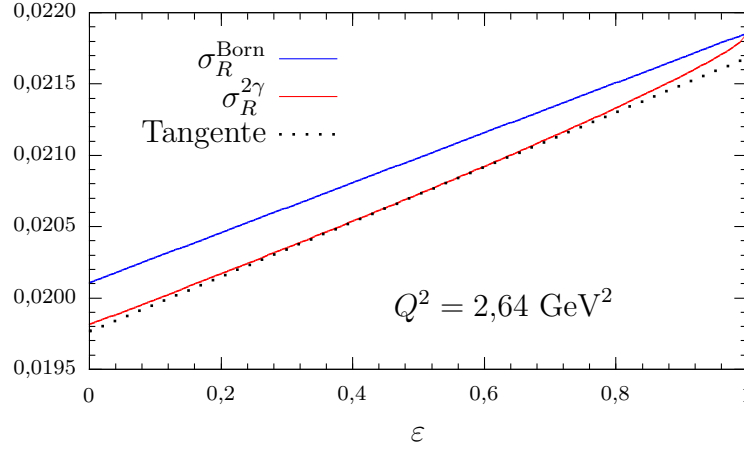


Abb. 9.5: Der berechnete reduzierte Wirkungsquerschnitt in Born'scher Näherung σ_R^{Born} , sowie mit Beitrag der Zwei-Photon-Korrektur aus der Anomalie $\sigma_R^{2\gamma}$. Zur Verdeutlichung des weitgehend linearen Verlaufs ist als gestrichelte Linie die Tangente im Punkt $\varepsilon = 0,5$ eingetragen.

auf die Rosenbluth-Formfaktoren abzuschätzen, ist die Korrekturen als linear anzunähern. Abbildung 9.5 zeigt, dass der reduzierte Wirkungsquerschnitt über einen weiten Bereich in guter Näherung linear verläuft, insbesondere im Bereich $0,2 < \varepsilon < 0,8$ wo sich die Messpunkte der Rosenbluth-Experimente häufen. Die Abweichung vom linearen Verlauf liegt auch aufgrund der geringen Korrekturen $|\delta| \ll 1$ innerhalb der Ungenauigkeit der bisherigen Rosenbluth-Messungen.

Wird der reduzierte Wirkungsquerschnitt (9.21) als linear betrachtet, so lässt sich die Steigung der Tangente in Abbildung 9.5 mit dem elektrischen und der Achsenabschnitt mit dem magnetischen effektiven Formfaktor identifizieren. Näherungsweise lässt sich die Beziehung zwischen effektiven Formfaktoren und G_E , G_M durch

$$G_E^{\text{eff}} \simeq \sqrt{G_E^2 - \frac{\tau}{\sqrt{3}} G_M^2 \delta(\varepsilon = 0)}, \quad G_M^{\text{eff}} \simeq G_M \sqrt{1 + \delta(\varepsilon = 0)} \quad (9.28)$$

abschätzen. Dabei wird davon ausgegangen, dass eine lineare Separation im wesentlichen die Steigung der Tangente (gestrichelte Linie) im Punkt $\varepsilon = 0,5$ wiedergeben würde. Die Ableitung der Zwei-Photon-Korrektur an dieser Stelle erzeugt den Faktor $\sqrt{3}$. Der Einfluss der Korrekturen auf den magnetischen Formfaktor ist vergleichsweise gering. Er wird durch den Achsenabschnitt der roten Linie in Abb. 9.5 angenähert. Mit Hilfe dieser Definitionen lässt sich die Änderung des Quotienten R aufgrund der Zwei-Photon-Korrekturen im Rahmen der Rosenbluth-Messungen abschätzen

$$R^{\text{eff}} = \mu_P \frac{G_E^{\text{eff}}}{G_M^{\text{eff}}}. \quad (9.29)$$

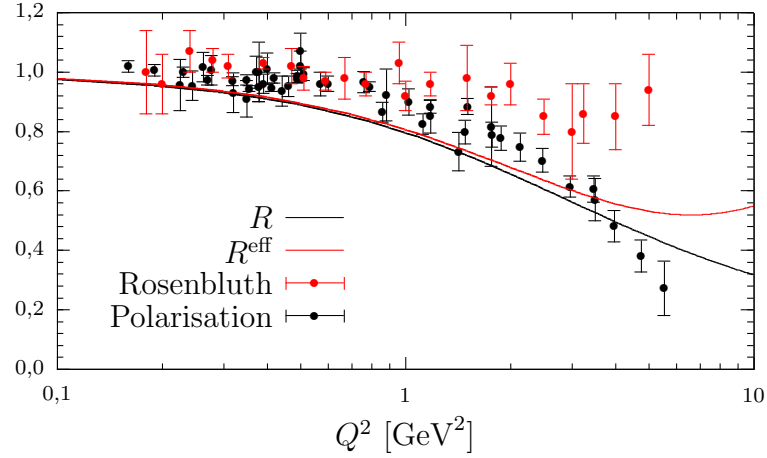


Abb. 9.6: Der Quotient des elektrischen und magnetischen Formfaktors wie er unmittelbar in Polarisationsexperimenten gemessen wird [27, 29, 30, 32–36] im Vergleich zu den gesammelten Ergebnissen der Rosenbluth-Extraktion [5]. Die schwarze Linie entspricht der Berechnung des Quotienten R im Skyrme-Modell, die rote gibt den effektiven Quotienten wieder, wie er im Modell unter Hinzunahme der Zwei-Photon-Korrekturen berechnet wurde und in einer linearen Separation der Formfaktoren erscheinen würde.

In Abbildung 9.6 sind der effektive Quotient R^{eff} ebenso wie $R = \mu_p G_E / G_M$, beide im Modell berechnet, im Vergleich zu den experimentellen Daten eingetragen. Die Ergebnisse der Rosenbluth-Experimente sind dabei mit dem effektiven Quotienten zu vergleichen. Es wird allgemein erwartet, dass die Zwei-Photon-Beiträge bei den Polarisationsmessungen vernachlässigbar sind. Zu erkennen ist, dass die Zwei-Photon-Beiträge den Quotienten wie angenommen in Richtung der Rosenbluth-Messungen $R^{\text{Ros}} \approx 1$ verschieben. Die Korrektur aus dem Wess-Zumino-Term ist allerdings um etwa einen Faktor 8 zu gering.

9.2.2. Positron-Proton-Streuung

Neben den Elektronen können auch Positronen an Nukleonen gestreut werden. Dies ermöglicht u. A. die direkte Messung der Beiträge aus Zwei-Photon-Austausch-Prozessen. Der Wirkungsquerschnitt für die Positron-Nukleon-Streuung errechnet sich völlig analog zu dem der Elektron-Nukleon-Streuung und ergibt sich aus Letzterem durch die Ladungskonjugation des Elektrons. Diese hat einzig ein anderes Vorzeichen der Ladung des Leptons zur Folge. Wird Abbildung 2.1 betrachtet, so ist ersichtlich, dass in der Born'schen Näherung das Lepton nur an einen einzigen Vertex koppelt, so dass das Übergangsmatrixelement proportional zur Ladung des Leptons e_l ist $\mathcal{M}_\gamma \propto e_l$. Aus Abbildung 8.1 wird hingegen deutlich, dass das Matrixelement des Zwei-Photon-Austausches zwei entsprechende Vertices enthält, woraus $\mathcal{M}_{2\gamma} \propto e_l^2$ folgt. Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus dem Betragsquadrat der Summe der Matrixelemente und ist somit in der

ersten Ordnung quadratisch in der Ladung des Leptons $|\mathcal{M}_\gamma|^2 \propto e_l^2$ und für die e^-N - und e^+N -Streuung identisch. Der Interferenzterm hingegen ist proportional zu $\mathcal{M}_\gamma^* \mathcal{M}_{2\gamma} \propto e_l^3$ und ändert sein Vorzeichen. Die Differenz der Wirkungsquerschnitte der e^-N - und e^+N -Streuung geteilt durch deren Summe entspricht damit dem Zwei-Photon-Beitrag (9.22)

$$\delta = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{e^-N} - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{e^+N}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{e^-N} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{e^+N}}, \quad (9.30)$$

sofern Terme höherer Ordnungen vernachlässigt werden.

9.2.3. Zwei-Photon-Korrekturen beim Neutron

Die elektromagnetischen Formfaktoren des Neutrons sind im Vergleich zum Proton deutlich schwieriger zu messen, da es keine freien Neutronen als Ziele gibt. Die meisten Experimente untersuchen die Elektron-Deuteron-Streuung zur Bestimmung der Neutron-Formfaktoren. Obwohl diese Experimente zeitgleich mit der Messung der Proton-Formfaktoren begannen, sind die gesammelten Daten nicht von vergleichbarer Qualität. Insbesondere sind Messungen des elektrischen Formfaktors des Neutrons problematisch, da dieser bedingt durch die Ladungsneutralität des Neutrons sehr klein ist. Dennoch werden gerade in letzter Zeit deutliche Fortschritte bei der Messung der Neutron-Formfaktoren gemacht, bedingt durch die Möglichkeiten der Polarisationsmethode [88].

Die bisherigen Daten sind leider noch nicht ausreichend, um den eventuellen Einfluss von Zwei-Photon-Effekten auf die Formfaktoren des Neutrons zu be-

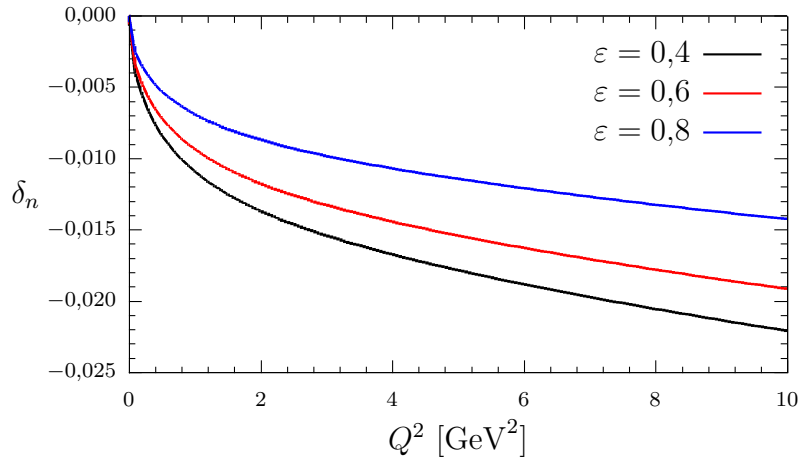


Abb. 9.7: Die im Skyrme-Modell berechnete Zwei-Photon-Korrektur δ_n zur Elektron-Neutron-Streuung, wie sie aus der anomalen Kopplung des Wess-Zumino-Terms folgt, als Funktion des Impulses Q^2 für drei verschiedene Werte des Parameters ε . Zur Berechnung wurden dieselben Parameter wie beim Proton verwendete: $\chi_{\text{fin}} = -17$, $e_s = 3,8$, $M_b = 939$ MeV und $n_M = n_E = n_{\text{wz}} = 2$.

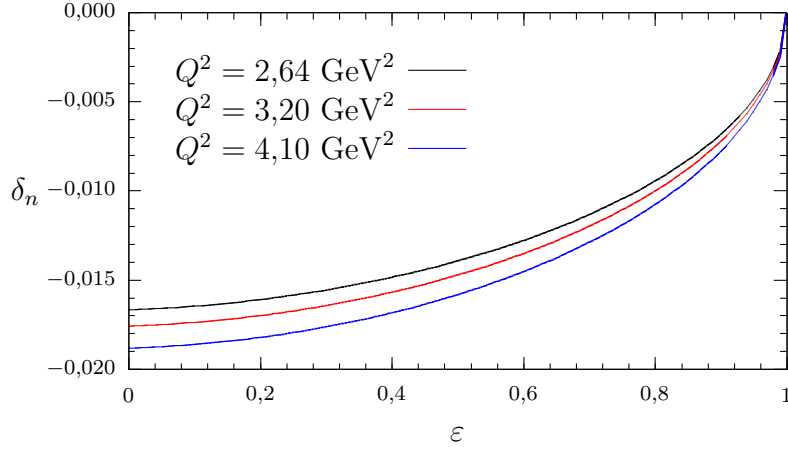


Abb. 9.8: Die Abhängigkeit der Zwei-Photon-Beiträge δ_n zur Elektron-Neutron-Streuung vom Parameter ϵ aufgetragen für drei verschiedene Werte von $Q^2 = 2,64; 3,20; 4,10 \text{ GeV}^2$. Zur Auswertung wurden dieselben Parameter wie in Abbildung 9.7 verwendet: $\chi_{\text{fin}} = -17$, $e_s = 3,8$, $M_b = 939 \text{ MeV}$ und $n_M = n_E = n_{\text{wz}} = 2$.

obachten. Mit Hilfe der bisherigen Berechnungen lässt sich der Anteil δ_n der anomalen Kopplung auf den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt der Elektron-Neutron-Streuung abschätzen. Werden die Formfaktoren des Neutrons eingesetzt, so gibt Gl. (9.23) mit $\tau_3 = -1$ die Korrekturen zur Ein-Photon-Näherung wieder. In Abbildung 9.7 ist zu sehen, dass der Einfluss der anomalen Zwei-Photon-Kopplung auf den Wirkungsquerschnitt des Neutrons mit dem des Protons vergleichbar ist $\delta_n \simeq \delta$. Dies ist auch aus Gl. (9.23) abzusehen, da die Formfaktoren H_0 und H_2 in beiden Fällen identisch sind. Die Änderung des Vorzeichens von τ_3 wird durch den negativen magnetischen Formfaktor des Neutrons kompensiert. Veränderungen im Beitrag der Zwei-Photon-Effekte resultieren einzig durch die unterschiedlichen elektromagnetischen Formfaktoren G_E^n und G_M^n .

10. Schlussbetrachtung

Es wurden modellabhängige Berechnungen durchgeführt, um die Diskrepanz zwischen den verschiedenen Methoden zur Messung der elektromagnetischen Formfaktoren zu verstehen. Allgemein wird angenommen, dass diese Diskrepanz durch Beiträge höherer Ordnung zum Wirkungsquerschnitt verursacht wird, insbesondere durch Zwei-Photon-Austausch-Prozesse. Diese Arbeit konzentriert sich auf den Prozess mit der geringsten Modellabhängigkeit und den wenigsten notwendigen Annahmen über Formfaktoren außerhalb der Massenschale. Dies ist die durch die Anomalie verursachte Zwei-Photon-Kopplung, die unmittelbar eine Eigenschaft der QCD widerspiegelt. Das entsprechende Feynman-Diagramm weist eine ultraviolette Divergenz auf, die bereits im $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$ Zerfall auftritt. Es wird daher eine Renormierungsbedingung verwendet, die die empirische Zerfallsbreite dieses Zerfalls reproduziert.

Beim Nukleon koppelt der anomale Zwei-Photon-Vertex an die Pionwolke und verursacht Korrekturen höherer Ordnung zum Wirkungsquerschnitt der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung. Um diese zu berechnen, eignet sich in besonderer Weise das Skyrme-Modell, da es sowohl das Bild der Pionwolke um das Nukleon als auch die Anomalie in Form des Wess-Zumino-Terms beinhaltet. Der so ermittelte Beitrag der Anomalie zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt ist von der Größenordnung 2%, wie es für einen Term der Ordnung $\alpha \simeq 1/137$ zu erwarten ist. Obwohl die Korrektur in die richtige Richtung weist, behebt sie nur etwa 10% der Diskrepanz zwischen der Methode der Rosenbluth-Extraktion und den Polarisationsmessungen. In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, dass der Beitrag der Anomalie zusätzlich zu anderen Zwei-Photon-Austausch-Prozessen zu sehen ist, insbesondere zu den *Box*-Diagrammen (Abb. 2.5 h,i). Leider ist deren Berechnung besonders modellabhängig, was zu größeren Unsicherheiten gerade bei großen Impulsüberträgen führt. Eventuell lassen sich diese durch die Verwendung phänomenologisch bestimmter *Parton*-Verteilungsdistributionen der virtuellen Compton-Streuung verringern [43, 89]. Die Betrachtungen in Ref. [42] deuten daraufhin, dass der Beitrag der *Box*-Diagramme zum Wirkungsquerschnitt für kleine Werte des Parameters ε am signifikantesten ist. Der hier berechnete Anteil der Anomalie ist bei kleinen und mittleren Werten von ε am größten, so dass eine gesamte negative Korrektur von etwa 5% zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt bei kleinen ε Werten zu erwarten ist und eine verschwindende an der Grenze $\varepsilon \rightarrow 1$.

Zusätzlich zur Anomalie enthält das Skyrme-Modell weitere Dreiecks-Diagramme, bei denen zwei Photonen lokal an die Pionwolke des Nukleons koppeln.

Der erwartungsgemäß dominante Beitrag dieser Prozesse entstammt dem nicht-linearen- σ -Modell. In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass dieser jedoch verschwindet, sobald der Impulsübertrag groß verglichen zur Elektronmasse ist.

Offen bleibt weiter der Beitrag der Anomalie zur polarisierten Elektron-Nukleon-Streuung. Hier spielen insbesondere die Formfaktoren F_E und F_P eine Rolle, die beim unpolarisierten Wirkungsquerschnitt nicht vorkommen. Desweiteren wäre eine Abschätzung der *Box*-Diagramme im Skyrme-Modell interessant, um die Vermutung zu erhärten, dass der Beitrag der Anomalie ergänzend zu diesen auftritt.

Aufgrund der unvermeidlichen Modellabhängigkeit der Berechnungen ist es bisher nicht sicher, ob der Zwei-Photon-Austausch wirklich für die Diskrepanz der unterschiedlichen Messmethoden verantwortlich ist. Um diese in der Elektron-Proton-Streuung zu studieren, sind eine Reihe von Experimenten am Jefferson Lab geplant. Da die Zwei-Photon-Beiträge δ mit einer ungeraden Potenz der Elektronladung auftreten, können sie unmittelbar durch den Vergleich zwischen Elektron- und Positron-Streuung gemessen werden. Diese Methode wird beim JLab Experiment E-07-005 verwendet. Ein weiteres interessantes Experiment, E-05-017, soll die Nichtlinearitäten bzgl. des Parameters ε im unpolarisierten Wirkungsquerschnitt der elastischen Elektron-Proton-Streuung, die durch die Zwei-Photon-Effekte verursacht werden, quantifizieren.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herbert Weigel für die ausgezeichnete Betreuung meiner Dissertation und für Alles, was ich während meiner Promotion lernen durfte, bedanken. Außerdem gilt mein Dank Gottfried Holzwarth für die vorgeschlagene Thematik dieser Dissertation wie auch seine Vorarbeiten diesbezüglich. Hans Walliser danke ich insbesondere für die gemeinsame Arbeit an den Clebsch-Gordan-Koeffizienten der $SU(4)$. Allen Drei danke ich für die vielen klärenden Diskussionen, ebenso wie für ihre ständige Hilfsbereitschaft.

Der DFG danke ich für ihre Unterstützung im Rahmen einer Sachbeihilfe (We 1254/13-1).

Cordula Wolf danke ich für das aufmerksame Lesen dieser Arbeit und die vielen Vorschläge zur Korrektur.

Schließlich danke ich meinen Eltern für ihre Liebe und den Rückhalt, den sie mir stets gegeben haben. Ihnen verdanke ich Alles, was ich bin.

A. Formfaktoren im Skyrme-Modell

Wird die Streuung mehrerer Teilchen betrachtet, so sind die ein- und auslaufenden Baryonzustände Eigenzustände zum Isospinoperator T , T_3 , zur Spinprojektion¹ J_3 und zum Impulsoperator \vec{p} und können als

$$|N_{T_3, J_3}(\vec{p})\rangle = |\vec{p}; T, T_3, J_3\rangle \quad (\text{A.1})$$

dargestellt werden. Es ist zu erwarten, dass die einzelnen Terme in den Matrixelementen in einen impuls- und isospinabhängigen Teil faktorisieren und sich separat betrachten lassen.

Die allgemeinste Form für den impulsabhängigen Faktor der Formfaktoren stellt ein Matrixelement einer Funktion $f(\vec{x})$ des Schwerpunktsoperators \vec{x} zwischen Anfangs- und Endzustand $|\vec{p}_1\rangle$ und $|\vec{p}_2\rangle$ dar. Die Wellenfunktionen der Impulszustände bezogen auf die Schwerpunktkoordinate ist

$$\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}). \quad (\text{A.2})$$

Die Formfaktoren lassen sich für den nichtrelativistischen Fall mit dem Ansatz

$$U(\vec{r}, t) = A(t)U_0(\vec{r} - \vec{x}(t))A^\dagger(t) \quad (\text{A.3})$$

für das dynamische, zeitabhängige chirale Feld auf die Form

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_2 | f(\vec{r} - \vec{x}(t)) | \vec{p}_1 \rangle &= \int d^3x e^{-i\vec{p}_2 \cdot \vec{x}} f(\vec{r} - \vec{x}) e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{x}} \\ &= e^{-i(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{r}} \int d^3r' f(\vec{r}') e^{i(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \cdot \vec{r}'} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

bringen. Die Exponentialfunktion der Fouriertransformation kann durch sphärische Besselfunktionen j_l ersetzt werden

$$e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(|\vec{q}|r) Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{q}), \quad (\text{A.5})$$

mit $\vec{q} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$. Für den Formfaktor folgt:

$$\langle \vec{p}_2 | f(\vec{r} - \vec{x}(t)) | \vec{p}_1 \rangle = e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} 4\pi \sum_{lm} i^l Y_{lm}^*(\hat{q}) \int d^3r' f(\vec{r}') j_l(|\vec{q}|r') Y_{lm}(\hat{r}'). \quad (\text{A.6})$$

¹Im Skyrme-Modell legt der Isospin durch den Ansatz des *Hedgehogs* den Spin fest $T = J$

Die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} sind orthonormiert

$$\int d\Omega_r Y_{l'm'}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.7})$$

und vollständig. Damit kann der winkelabhängige Teil von $f(\vec{r}')$ nach den Kugelflächenfunktionen entwickelt werden. Gleichung (A.6) vereinfacht sich insbesondere, wenn die Entwicklung von $f(\vec{r}) = \sum_{lm} c_{lm}(r) Y_{lm}^*(\hat{r})$ nur Kugelflächenfunktionen zu einem festem l enthält. Dann faktorisiert die Besselfunktion und aus der Orthonormalität folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{lm} Y_{lm}^*(\hat{q}) \int d^3r \underbrace{\sum_{m'} c_{l'm'}(r) Y_{l'm'}^*(\hat{r})}_{f(\vec{r})} j_l(|\vec{q}|r) Y_{lm}(\hat{r}) \\ &= \int dr' \sum_{m'} c_{l'm'}(r) Y_{l'm'}^*(\hat{q}) j_l(|\vec{q}|r) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Für einen Formfaktor der Form $f(\vec{x}) = f(\vec{x}^2)$ ergibt sich [67]

$$\langle \vec{p}_2 | f(\vec{x}^2) | \vec{p}_1 \rangle = \int d^3r f(r^2) j_0(|\vec{q}|r), \quad (\text{A.9})$$

für

$$\langle \vec{p}_2 | f(\vec{x}^2) x_j | \vec{p}_1 \rangle = -\frac{i}{|\vec{q}|} q_j \int d^3r f(r^2) j_1(|\vec{q}|r) r \quad (\text{A.10})$$

und für einen Formfaktor mit der Struktur $f(\vec{x}^2)(x_i x_j - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta_{ij})$ gilt

$$\langle \vec{p}_2 | f(\vec{x}^2)(x_i x_j - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta_{ij}) | \vec{p}_1 \rangle = -\frac{1}{\vec{q}^2} (q_i q_j - \frac{1}{3} \vec{q}^2 \delta_{ij}) \int d^3r f(r^2) j_2(|\vec{q}|r) r^2. \quad (\text{A.11})$$

Dies ist mit der Multipolentwicklung der Elektrodynamik identisch. So ist z. B. unmittelbar ersichtlich, dass der Faktor $(x_i x_j - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta_{ij})$ durch Kugelflächenfunktionen mit $l = 2$ ausgedrückt werden kann.

B. Polarisation in der Ein-Photon-Näherung

In der Ein-Photon-Näherung lässt sich der Wirkungsquerschnitt der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung als Summe eines unpolarisierten und eines polarisierten Anteils schreiben. Ausgehend von (2.1) folgt das Betragsquadrat des Übergangsmatrixelements aus dem leptonischen $\tilde{L}^{\mu\nu} = L^\mu L^{\nu*}$ und hadronischen $\tilde{J}_{\mu\nu} = J_\mu J_\nu^*$ Tensor. Für ein longitudinal polarisiertes Elektron lässt sich unter Verwendung des Projektionsoperators $(1 - h\gamma_5)/2$ im relativistischen Grenzfall vernachlässigbarer Masse $m_e \rightarrow 0$ der leptonische Tensor für unpolarisierte Endzustände angeben

$$\begin{aligned} \sum_s \tilde{L}^{\mu\nu} &= \sum_s \bar{u}^s(k_2) \gamma^\mu u^{s'}(k_1) \bar{u}^{s'}(k_1) \gamma^\nu u^s(k_2) = \frac{1}{2} \text{tr}(\gamma^\mu \not{k}_2 \gamma^\nu [1 - h\gamma_5] \not{k}_1) \\ &= 2 (k_1^\mu k_2^\nu + k_2^\mu k_1^\nu + g^{\mu\nu} k_1 \cdot k_2 - i h k_{1\alpha} k_{2\beta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Dabei ist h die Polarisation des Elektrons für einen Zustand mit fester Helizität $h = \pm 1$ und ansonsten $|h| \leq 1$.

Für den hadronischen Tensor eines polarisierten Anfangs- und unpolarisierten Endzustandes ist es hilfreich den Dichteoperator $\rho = \chi^{r'} \chi^{r'\dagger} = (1 + \vec{N} \cdot \vec{\sigma})/2$ mit dem Polarisationsvektor $\vec{N} = \langle \vec{\sigma} \rangle$ als Erwartungswert der Spinoperatoren einzuführen

$$\sum_r \tilde{J}_{\mu\nu} = \sum_r \chi^{r\dagger} J_\mu \chi^{r'} \chi^{r'\dagger} J_\nu \chi^r = \frac{1}{2} \text{tr}(J_\nu^\dagger J_\mu [1 + \vec{N} \cdot \vec{\sigma}]). \quad (\text{B.2})$$

Der hadronische Tensor spaltet ebenso wie der leptonische in einen unpolarisierten Anteil $\tilde{J}_{\mu\nu}(0)$ und einen Anteil $\tilde{J}_{\mu\nu}(\vec{N})$ proportional zur Polarisation \vec{N} auf. Mit dem hadronischen Strom im Breitframe

$$J_\mu = (2MG_E, iG_M \vec{\sigma} \times \vec{q})_\mu \quad (\text{B.3})$$

nimmt der Tensor $\tilde{J}_{\mu\nu} = \tilde{J}_{\mu\nu}(0) + \tilde{J}_{\mu\nu}(\vec{N})$ die einfache Gestalt

$$\tilde{J}_{00}(\vec{N}) = 0, \quad \tilde{J}_{0i}(\vec{N}) = 2iMG_E G_M (\vec{N} \times \vec{q})_i, \quad \tilde{J}_{ij}(\vec{N}) = iG_M^2 \vec{N} \cdot \vec{q} \epsilon_{ija} q_a \quad (\text{B.4})$$

an. Die restlichen Komponenten folgen aus der Antisymmetrie

$$\tilde{J}_{\mu\nu}(\vec{N}) = -\tilde{J}_{\nu\mu}(\vec{N}). \quad (\text{B.5})$$

Das Betragsquadrat des Übergangsmatrixelements spaltet ebenso wie die Tensoren in einen unpolarisierten und polarisierten Anteil auf

$$\sum_{rs} |\mathcal{M}(\vec{N})|^2 = \frac{e^4}{q^4} \tilde{L}^{\mu\nu} \tilde{J}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \sum_{s,s',r,r'} |\mathcal{M}_\gamma|^2 + h\tilde{\Delta} \quad (\text{B.6})$$

mit

$$\tilde{\Delta} = -2i \frac{e^4}{q^4} k_{1\alpha} k_{2\beta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \tilde{J}_{\mu\nu}(\vec{N}). \quad (\text{B.7})$$

Die Summation über die Lorentzindizes μ und ν lässt sich mit Hilfe von

$$(\vec{N} \times \vec{q})_i = \epsilon_{imn} N_m q_n = -\epsilon_{oimn} N_m q_n = -\epsilon_{0\nu\gamma\delta} N^\gamma q^\delta \quad (\text{B.8})$$

$$\epsilon_{ija} \vec{q}_a = -\epsilon_{oija} q_a = -\epsilon_{0\mu\nu\delta} q^\delta \quad (\text{B.9})$$

ausführen:

$$\tilde{\Delta} = -2 \frac{e^4}{q^4} k_{1\alpha} k_{2\beta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left[2MG_E G_M \epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} N^\gamma q^\delta - G_M^2 \vec{N} \cdot \vec{q} \epsilon_{0\mu\nu\delta} q^\delta \right]. \quad (\text{B.10})$$

Dabei wurde das Koordinatensystem so gewählt, dass $N = (0, N_x, 0, N_z)$ und $q = (0, q\vec{e}_z)$ gilt. Die zeitliche Komponente von N wurde im Breitframe auf Null gesetzt, so dass der erste Summand in Gl. (B.10) nur für $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ verschieden von Null ist, vgl. Gl. (B.8). Mittels Gleichung (C.45) kann die Summation ausgeführt werden

$$\tilde{\Delta} = 4 \frac{e^4}{q^4} \left[2MG_E G_M ((k_1 \cdot N)(k_2 \cdot q) - (k_1 \cdot q)(k_2 \cdot N)) - G_M^2 k_0 \vec{N} \cdot \vec{q} (k_2 - k_1) \cdot q \right]. \quad (\text{B.11})$$

Im Breitframe (Abschnitt 4.2) lässt sich leicht zeigen, dass $k_2 \cdot q = -k_1 \cdot q = q^2/2$, $\vec{N} \cdot \vec{q} = N_z 2M\sqrt{\tau}$ und

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) \cdot N &= (2k_1 - q) \cdot N = -2N_x \vec{k}_1 \cdot \vec{e}_x = -2N_x k_{1x} \\ k_{1x}^2 &= \vec{k}_1^2 - k_{1z}^2 = \vec{k}_1^2 - \frac{Q^2}{4} = 2M^2 \tau \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} - m_e^2 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

gilt. Bei vernachlässigbaren Elektronmassen folgt

$$\tilde{\Delta} = -2 \frac{e^4}{\tau} \left[G_E G_M N_x \sqrt{\tau} \sqrt{\frac{2\epsilon}{1 - \epsilon}} + G_M^2 N_z \tau \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}} \right]. \quad (\text{B.13})$$

Mit der Mott-Streuung aus Gl. (4.39) lässt sich der Polarisationsanteil

$$\Delta = -2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{2\epsilon}} \frac{\sqrt{\tau}}{1 + \tau} \left[G_E G_M N_x + \sqrt{\tau} \sqrt{\frac{1 + \epsilon}{2\epsilon}} G_M^2 N_z \right] \quad (\text{B.14})$$

zum Wirkungsquerschnitt $(d\sigma/d\Omega)_{\text{pol}} = \Sigma + h\Delta$ ablesen. Wird der Parameter ϵ durch den Streuwinkel θ_e im Laborsystem ersetzt Gl. (2.7), so folgt der Wirkungsquerschnitt im Laborsystem Gl. (2.15).

C. Mathematischer Anhang

Dieser Anhang listet einige der mathematischen Formeln auf, die für die Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit benötigt werden. Für einen ausführlicheren Überblick insbesondere bzgl. der QED wird auf das Buch von Peskin und Schroeder [9] verwiesen, das mit den meisten der hier verwendeten Definitionen übereinstimmt.

C.1. Relativität

Es wird der metrische Tensor

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

verwendet. Die griechischen Indizes laufen über 0, 1, 2, 3, während die römischen Indizes i, j , usw. nur die räumlichen Komponenten 1, 2, 3 beziffern. Über wiederholte Indizes wird jeweils summiert. Zum Beispiel:

$$p \cdot x = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p^\mu x_\mu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}. \quad (\text{C.2})$$

Der total antisymmetrische Tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ wird als

$$\epsilon^{0123} = +1 \quad (\text{C.3})$$

definiert. Daraus folgt

$$\epsilon^{1230} = -1, \quad \epsilon_{0123} = -1, \quad \epsilon^{0ijk} = +\epsilon_{ijk} \quad (\text{C.4})$$

mit $\epsilon_{123} = +1$.

C.2. Spin und Isospin

Das Nukleon formt ein Spin und Isospin $SU(2)$ Doublet und wird durch die Spinquantenzahl $J = 1/2$ ebenso wie durch die Isospinquantenzahl $T = 1/2$ charakterisiert. In der (fundamentalen) Darstellung des Nukleons entsprechen die Komponenten des Isospin-Vektors $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ den Pauli-Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Der Spin-Vektor $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ wird in der Darstellung des Nukleons ebenfalls aus den Pauli-Matrizen gebildet, wobei diese zur Unterscheidung mit dem Isospin mit σ_i bezeichnet werden.

Die Pauli-Matrizen genügen der Identität

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad (\text{C.6})$$

woraus die Rechenregel

$$(\vec{\tau} \cdot \vec{a})(\vec{\tau} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\tau} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (\text{C.7})$$

für beliebige Vektoren \vec{a} und \vec{b} folgt.

Kollektive Koordinaten im Skyrme-Modell

Die kollektiven rechten und linken Winkelgeschwindigkeiten werden über die Zeitableitung der Rotationsmatrix $A = A(t)$ definiert

$$A^\dagger \dot{A} = \frac{i}{2} \tau_a \Omega_a^R, \quad \dot{A} A^\dagger = \frac{i}{2} \tau_a \Omega_a^L. \quad (\text{C.8})$$

Die linken Koordinaten beschreiben den Isospin und die rechten den Spin. Nach der kanonischen Quantisierung können Spin- (J) und Isospinoperatoren (T) eingeführt werden, für die

$$R_a = -\frac{\partial L}{\partial \Omega_a^R} = -\Theta \Omega_a^R = -J_a \quad (\text{C.9})$$

$$T_a = -D_{ab} J_b \quad (\text{C.10})$$

gilt. Für die Wigner-D Funktionen in der adjungierten Darstellung gilt

$$D_{ab} = \frac{1}{2} \text{tr}(\tau_a A \tau_b A^\dagger) \quad (\text{C.11})$$

$$\tau_a D_{ab} = A \tau_b A^\dagger, \quad D_{ab} \tau_b = A^\dagger \tau_a A. \quad (\text{C.12})$$

Nukleonmatrixelemente

Wie bereits erwähnt, liegt das Nukleon in der Spin- und Isospin-1/2-Darstellung. Auf die Nukleonzustände angewandt, können die Spin- und Isospin-Operatoren als Pauli-Matrizen geschrieben werden:

$$\langle \vec{R} \rangle = -\langle \frac{\vec{\sigma}}{2} \rangle \quad \langle \vec{T} \rangle = \langle \frac{\vec{\tau}}{2} \rangle. \quad (\text{C.13})$$

Für die Wigner-D-Funktion der adjungierten Darstellung gelten die Beziehungen

$$\langle D_{ai} \rangle = -\frac{1}{3} \langle \tau_a \sigma_i \rangle \quad (\text{C.14})$$

$$\langle D_{3i} D_{3j} \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}. \quad (\text{C.15})$$

C.3. Kinematik im Breitframe

Das Breitframe wird dadurch definiert, dass das Elektron einen Impuls aber keine Energie auf das Proton überträgt. Das Proton verhält sich in diesem System, als wenn es gegen eine Wand stößt:

$$p_1 = (E, -\frac{\vec{q}}{2}), \quad p_2 = (E, \frac{\vec{q}}{2}). \quad (\text{C.16})$$

Für das Elektron folgt

$$k_1 = (k_0, \vec{k}_1), \quad k_2 = (k_0, \vec{k}_2), \quad (\text{C.17})$$

mit dem Impulsübertrag

$$q = p_2 - p_1 = (0, \vec{q}). \quad (\text{C.18})$$

Die Rosenbluthvariablen lassen sich im Breitframe durch

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{Q^2}{4M^2} = \frac{\vec{q}^2}{4M^2} \\ \nu &= \frac{1}{4}(k_1 + k_2) \cdot (p_1 + p_2) = k_0 E \\ \epsilon &= \frac{\nu^2 - M^4 \tau(1 + \tau)}{\nu^2 + M^4 \tau(1 + \tau)} = \frac{k_0^2 - M^2 \tau}{k_0^2 + M^2 \tau} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

darstellen.

C.4. Feynman-Regeln

Die Feynman-Regeln lassen sich sowohl im Orts- als auch Impulsraum definieren und ineinander umrechnen. In Letzterem gilt die Impulserhaltung an jedem Vertex, während über unbestimmte Schleifenimpulse integriert wird: $\int d^4p/(2\pi)^4$. Der Lagrangian der Quantenelektrodynamik (QED) lautet

$$\mathcal{L}^{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_e)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.$$

Im Impulsraum ist der Dirac-Propagator der Elektronen

$$\frac{i(\cancel{p} + m_e)}{p^2 - m_e^2 + i\epsilon}$$

und derjenige der Photonen in Feynman-Eichung

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

mit dem Impuls p des jeweiligen Teilchens. Der QED-Vertex bei dem ein Photon an zwei Fermionen koppelt entspricht: $-ie\gamma^\mu$.

C.5. Wellenfunktion der Fermionen

Der Feldoperator des quantisierten Diracfeldes lautet

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\vec{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip \cdot x} \right). \quad (\text{C.20})$$

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren genügen den Antivertauschungsregeln

$$\{a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs}. \quad (\text{C.21})$$

Für die Spinoren $u^s(p)$ und $v^s(p)$ gilt die Dirac-Gleichung

$$0 = (\not{p} - m)u^s(p) = \bar{u}^s(p)(\not{p} - m) \quad (\text{C.22})$$

$$= (\not{p} + m)v^s(p) = \bar{v}^s(p)(\not{p} + m), \quad (\text{C.23})$$

mit $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Ihre Normierung ist

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs}, \quad (\text{C.24})$$

$$\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs}. \quad (\text{C.25})$$

$$(\text{C.26})$$

Für die Summe über die Spins gilt

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad (\text{C.27})$$

$$\sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \quad (\text{C.28})$$

$$(\text{C.29})$$

Die Ein-Teilchenzustände

$$|N_s(\vec{p})\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{s\dagger} |0\rangle \quad (\text{C.30})$$

werden so definiert, dass ihr inneres Produkt

$$\langle N_r(\vec{p}) | N_s(\vec{q}) \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta^{rs} \quad (\text{C.31})$$

lorentzinvariant ist.

Mit der Definition des Lorentz-Tensors $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ lässt sich die Gordon-Identität

$$\bar{u}^s(p') \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u^{s'}(p) = \bar{u}^s(p') \left[\gamma^\mu - \frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} \right] u^{s'}(p) \quad (\text{C.32})$$

$$\bar{u}^s(p') i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma_5 u^{s'}(p) = -\bar{u}^s(p') [p'^\mu + p^\mu] \gamma_5 u^{s'}(p) \quad (\text{C.33})$$

mit $q = p' - p$ herleiten.

C.6. Zähler-Algebra

Die Dirac-Matrizen γ genügen den Antivertauschungsbeziehungen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.34})$$

Für die Kontraktionen der γ -Matrizen gilt

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \quad (\text{C.35})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu. \quad (\text{C.36})$$

Spuren von γ -Matrizen können in $d = 4$ Dimensionen mit Hilfe von:

$$\text{tr}(\text{any odd \# of } \gamma\text{'s}) = 0 \quad (\text{C.37})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{C.38})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{C.39})$$

$$\text{tr}(\gamma_5) = 0 \quad (\text{C.40})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5) = 0 \quad (\text{C.41})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{C.42})$$

ausgewertet werden. Das Produkt dreier γ -Matrizen lässt sich in einen symmetrischen und antisymmetrischen Teil aufspalten

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma = g^{\alpha\beta} \gamma^\gamma + g^{\beta\gamma} \gamma^\alpha - g^{\alpha\gamma} \gamma^\beta + i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_\delta \gamma_5. \quad (\text{C.43})$$

Für die Kontraktion mit dem ϵ -Tensor gilt

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_\gamma \gamma_\delta = -i[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \gamma_5 \quad (\text{C.44})$$

sowie

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -2(g_\mu^\gamma g_\nu^\delta - g_\nu^\gamma g_\mu^\delta) \quad (\text{C.45})$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -6g_\mu^\delta. \quad (\text{C.46})$$

C.7. Schleifenintegrale und dimensionale Regularisierung

Zur Behandlung von Feynman-Diagrammen, die Schleifen beinhalten, werden zur Vereinfachung des Nenners, Integrale über Feynman-Parameter eingeführt:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}. \quad (\text{C.47})$$

Im Fall von drei Propagatoren also

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{(xA + yB + zC)^3}. \quad (\text{C.48})$$

Nach der Umwandlung in ein Feynman-Parameter-Integral ist der Ausdruck in der Klammer im Nenner eine quadratische Funktion des Schleifenimpulses. Als nächstes wird die Integrationsvariable der Schleife so verschoben, dass der im Schleifenimpuls lineare Term verschwindet. Bei einem Ein-Schleifenintegral wird nur über einen einzigen Impuls q_2 integriert, welcher zu Variablen ℓ^μ verschoben wird, so dass der Nenner die Form $(\ell^2 - \Delta)^n$ annimmt, mit einem von ℓ unabhängigen Δ . Aus Symmetriegründen verschwinden bei der Integration alle Terme im Zähler, die ungerade in ℓ sind. Die Symmetrie ermöglicht zudem die Ersetzung

$$\ell^\mu \ell^\nu \rightarrow \frac{1}{d} \ell^2 g^{\mu\nu}, \quad (\text{C.49})$$

wobei d für die Raum-Zeit-Dimension steht. Um die Dimension des Integralmaßes beim Übergang in d -Dimensionen konstant zu halten, wird mit einer Potenz der Massenskala Λ multipliziert:

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \rightarrow \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d}. \quad (\text{C.50})$$

Die resultierenden Schleifenintegrale ergeben sich zu [9]:

$$\Lambda^{4-d} \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \Lambda^{4-d} \frac{i(-1)^n \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (\text{C.51})$$

$$\Lambda^{4-d} \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta)^n} = \Lambda^{4-d} \frac{i(-1)^{n-1} d \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{d/2} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{C.52})$$

Falls das Integral keine (ultraviolette) Divergenz aufweist, kann direkt $d = 4$ gesetzt werden. Andernfalls wird die Entwicklung

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = 1 - \left(2 - \frac{d}{2}\right) \ln \Delta + \dots \quad (\text{C.53})$$

benötigt, ebenso wie die der Γ -Funktion um ihren Pol

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x), \quad (\text{C.54})$$

wobei $\gamma \approx 0,5772$ die Euler-Mascheroni-Konstante darstellt. Häufig gebraucht wird auch die Kombination

$$\Lambda^{4-d} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon_d} - \ln \frac{\Delta}{\Lambda^2} - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon_d)\right) \quad (\text{C.55})$$

mit $\epsilon_d = 4 - d$.

Anzumerken ist noch, dass für einen axialen Strom häufig die Spuren über γ -Matrizen benötigt werden, wobei auch γ_5 vorkommt. Die Spuren werden der Übersicht halber in dieser Arbeit aber nur für den Fall $d = 4$ betrachtet, obwohl sie Beiträge der Ordnung ϵ_d enthalten können. Wichtig ist, dass diese Beiträge keine Kinematik enthalten und konstant sind. Was wiederum bedeutet, dass sie nach der Renormierung der Ein-Schleifendiagramme ebenso wie die Terme γ und $\log(4\pi)$ kompensiert werden, sofern sie nicht bereits für $\epsilon_d \rightarrow 0$ gegen Null gehen.

C.8. Wirkungsquerschnitt und Zerfallsbreite

Sobald die quadrierte Matrix $|\mathcal{M}|^2$ eines Streuprozesses bekannt ist, ist der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f) \quad (\text{C.56})$$

mit den Geschwindigkeiten v der einlaufenden Teilchen. Die differentielle Zerfallsbreite eines instabilen Teilchens A in einen vorgegebenen Endzustand ist

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - \sum p_f). \quad (\text{C.57})$$

Für den speziellen Fall eines Zwei-Teilchen-Endzustandes nimmt der lorentzinvariante Faktor die einfache Form

$$\left(\prod_f \int \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \delta^{(4)}(p_A - \sum p_f) = \int \frac{d\Omega_{cm}}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2|\vec{p}|}{E_{cm}} \right) \quad (\text{C.58})$$

an, wobei \vec{p} den Impuls eines der beiden Endzustände im Schwerpunktsystem bezeichnet.

C.9. Integrale

Bezeichnungen: $X = ax^2 + bx + c$, $\delta = 4ac - b^2$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{X} &= \frac{2}{\sqrt{\delta}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{\delta}} && \text{für } \delta > 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \ln \frac{2ax + b - \sqrt{-\delta}}{2ax + b + \sqrt{-\delta}} && \text{für } \delta < 0 \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

$$\int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X} \quad (\text{C.60})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{aX} + 2ax + b) \quad \text{für } a > 0, \quad \delta < 0 \quad (\text{C.61})$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{C.62})$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2} \right) \sqrt{X} + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} \quad (\text{C.63})$$

$$\int x^m \ln(x) dx = x^{m+1} \left(\frac{\ln(x)}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) \quad (m \neq -1) \quad (\text{C.64})$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln \beta}{\beta - \frac{1}{\beta}} = \frac{x(e^x - e^{-x}) dx}{(e^x + e^{-x} + \beta + \frac{1}{\beta})^2} \quad (\text{C.65})$$

C.10. Alternierende Differentialformen

Im Rahmen dieser Arbeit werden alternierende Differentialformen verwendet, um die Variationen der durch den Wess-Zumino-Term gegebenen Wirkung zu berechnen. Der Kalkül mit alternierenden Differentialformen dient einer eleganten Formulierung von Integralsätzen über beliebig-dimensionale Mannigfaltigkeiten, wie sie z. B. im Falle dreier Dimensionen in Form der Integralsätze von Gauß und Stokes bekannt sind. In diesem Kalkül werden Integrand und Differentiale in einer r -Form $\omega^{(r)}$ zusammengefasst:

$$\omega^{(r)} = T_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \quad (\text{C.66})$$

wobei $T_{i_1 \dots i_r}$ einen beliebigen Tensor r -ter Stufe darstellt, und die Differentiale mit einem antikommutierenden Produkt miteinander verknüpft werden:

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} = -dx^{i_2} \wedge dx^{i_1}. \quad (\text{C.67})$$

Wegen der Antisymmetrie dieses Produkts überleben nur die antisymmetrischen Anteile des Tensors T die implizite Summation in Gl. (C.66): $1 \leq i_j \leq m$ für $1 \leq j \leq r \leq m$. Dabei ist m die Dimension des Raumes, in dem alle betrachteten

Mannigfaltigkeiten eingebettet sein sollen. Im \mathbb{R}^3 sind folgende Formen möglich:

$$0\text{-Form} : \omega^{(0)} = f(\vec{r})$$

$$1\text{-Form} : \omega^{(1)} = a_i dx^i = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz$$

$$2\text{-Form} : \omega^{(2)} = a_{ij} dx^{i_i} \wedge dx^{i_j} = (a_{12} - a_{21}) dx dy + (a_{13} - a_{31}) dx dz + (a_{23} - a_{32}) dy dz$$

$$3\text{-Form} : \omega^{(3)} = (a_{123} - a_{132} + a_{231} - a_{213} + a_{312} - a_{321}) dx dy dz.$$

Das Produkt einer p -Form $\sigma^{(p)}$ mit einer q -Form $\tau^{(q)}$ wird durch

$$\sigma^{(p)} \tau^{(q)} = \sigma_{i_1 \dots i_p} \tau_{i_{p+1} \dots i_{p+q}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p+q}} \quad (\text{C.68})$$

definiert. Unter einer äußeren Ableitung $d\omega^{(r)}$ einer r -Form wird

$$d\omega^{(r)} = \frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^{i_{r+1}}} dx^{i_{r+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \quad (\text{C.69})$$

verstanden, wobei diese Operation eine $r + 1$ -Form erzeugt.

Wegen der Antisymmetrie des Differentialproduktes folgt unmittelbar

$$d(d\omega^{(r)}) = 0. \quad (\text{C.70})$$

Diese Antisymmetrie führt auf eine modifizierte Produktregel

$$d(\sigma^{(p)} \tau^{(q)}) = (d\sigma^{(p)}) \tau^{(q)} + (-)^p \sigma^{(p)} (d\tau^{(q)}) \quad (\text{C.71})$$

bei äußeren Ableitungen.

Das Stokes-Theorem lautet

$$\int_{M^{(r+1)}} d\omega^{(r)} = \int_{\partial M^{(r+1)}} \omega^{(r)}, \quad (\text{C.72})$$

wobei $M^{(r+1)}$ eine beliebige $r + 1$ dimensionale Mannigfaltigkeit ist und $\partial M^{(r+1)}$ ihr Rand. Im \mathbb{R}^3 beinhaltet dieses Theorem die Integralsätze von Gauß und Stokes.

Zur Behandlung des Wess-Zumino-Terms ist es hilfreich die 1-Formen

$$\begin{aligned} r &= U^\dagger dU = U^\dagger \partial_\mu U dx^\mu \\ l &= dUU^\dagger = \partial_\mu UU^\dagger dx^\mu \end{aligned} \quad (\text{C.73})$$

mit der unitären Matrix U einzuführen. Diese stellen gleichzeitig eine $SU(2)$ Matrix dar, für die folgende Beziehungen hergeleitet werden können:

$$\begin{aligned} d(UU^\dagger) &= (dU)U^\dagger + U(dU^\dagger) = 0 \\ dr &= dU^\dagger dU + U^\dagger d(dU) = -r^2 \\ dr^2 &= -d(dr) = 0 \\ dr^3 &= (dr)r^2 - r(dr^2) = -r^4. \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

Es ist darauf zu achten, dass aufgrund der Antisymmetrie eine modifizierte Produktregel gilt. Für l lassen sich analoge Relationen finden mit $dl = l^2$.

Literaturverzeichnis

- [1] E. Rutherford *Phil. Mag.* **21** (1911) 669–688.
- [2] R. Hofstadter and R. W. McAllister *Phys. Rev.* **98** (1955) 217–218.
- [3] R. W. Mcallister and R. Hofstadter *Phys. Rev.* **102** (1956) 851–856.
- [4] M. N. Rosenbluth *Phys. Rev.* **79** (1950) 615–619.
- [5] J. Arrington *Phys. Rev.* **C68** (2003) 034325, [nucl-ex/0305009](#).
- [6] M. J. Savage, M. E. Luke, and M. B. Wise *Phys. Lett.* **B291** (1992) 481–483, [hep-ph/9207233](#).
- [7] R. Hofstadter *Rev. Mod. Phys.* **28** (1956) 214–254.
- [8] L. L. Foldy *Phys. Rev.* **87** (1952) 688–693.
- [9] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [10] C. F. Perdrisat, V. Punjabi, and M. Vanderhaeghen *Prog. Part. Nucl. Phys.* **59** (2007) 694–764, [hep-ph/0612014](#).
- [11] L. Andivahis *et al.* *Phys. Rev.* **D50** (1994) 5491–5517.
- [12] T. Janssens, R. Hofstadter, E. B. Hughes, and M. R. Yearian *Phys. Rev.* **142** (1966) 922–931.
- [13] J. Litt *et al.* *Phys. Lett.* **B31** (1970) 40–44.
- [14] C. Berger, V. Burkert, G. Knop, B. Langenbeck, and K. Rith *Phys. Lett.* **B35** (1971) 87.
- [15] G. Hohler *et al.* *Nucl. Phys.* **B114** (1976) 505.
- [16] A. F. Sill *et al.* *Phys. Rev.* **D48** (1993) 29–55.
- [17] R. C. Walker *et al.* *Phys. Rev.* **D49** (1994) 5671–5689.
- [18] **E94110** Collaboration, M. E. Christy *et al.* *Phys. Rev.* **C70** (2004) 015206, [nucl-ex/0401030](#).

- [19] I. A. Qattan *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 142301, [nucl-ex/0410010](#).
- [20] A. I. Akhiezer and M. P. Rekalo *Sov. Phys. Dokl.* **13** (1968) 572.
- [21] M. P. Rekalo and E. Tomasi-Gustafsson [nucl-th/0202025](#).
- [22] R. G. Arnold, C. E. Carlson, and F. Gross *Phys. Rev.* **C23** (1981) 363.
- [23] N. Dombey *Rev. Mod. Phys.* **41** (1969) 236–246.
- [24] T. W. Donnelly and A. S. Raskin *Ann. Phys.* **169** (1986) 247–351.
- [25] A. S. Raskin and T. W. Donnelly *Ann. Phys.* **191** (1989) 78.
- [26] M. J. Alguard *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 1258.
- [27] **Bates FPP** Collaboration, B. D. Milbrath *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 452–455, [nucl-ex/9712006](#).
- [28] D. H. Barkhuff *et al.* *Phys. Lett.* **B470** (1999) 39–44.
- [29] **A1** Collaboration, T. Pospischil *et al.* *Eur. Phys. J.* **A12** (2001) 125–127.
- [30] C. B. Crawford *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 052301, [nucl-ex/0609007](#).
- [31] **Jefferson Lab Hall A** Collaboration, M. K. Jones *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 1398–1402, [nucl-ex/9910005](#).
- [32] O. Gayou *et al.* *Phys. Rev.* **C64** (2001) 038202.
- [33] **Jefferson Lab Hall A** Collaboration, O. Gayou *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 092301, [nucl-ex/0111010](#).
- [34] V. Punjabi *et al.* *Phys. Rev.* **C71** (2005) 055202, [nucl-ex/0501018](#).
- [35] **Resonance Spin Structure** Collaboration, M. K. Jones *et al.* *Phys. Rev.* **C74** (2006) 035201, [nucl-ex/0606015](#).
- [36] G. Ron *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 202002, [0706.0128](#).
- [37] J. Arrington *Phys. Rev.* **C69** (2004) 022201, [nucl-ex/0309011](#).
- [38] P. A. M. Guichon and M. Vanderhaeghen *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 142303, [hep-ph/0306007](#).
- [39] Y.-S. Tsai *Phys. Rev.* **122** (1961) 1898–1907.
- [40] L. W. Mo and Y.-S. Tsai *Rev. Mod. Phys.* **41** (1969) 205–235.

- [41] L. C. Maximon and J. A. Tjon *Phys. Rev.* **C62** (2000) 054320, nucl-th/0002058.
- [42] P. G. Blunden, W. Melnitchouk, and J. A. Tjon *Phys. Rev.* **C72** (2005) 034612, nucl-th/0506039.
- [43] A. V. Afanasev, S. J. Brodsky, C. E. Carlson, Y.-C. Chen, and M. Vanderhaeghen *Phys. Rev.* **D72** (2005) 013008, hep-ph/0502013.
- [44] S. Kondratyuk, P. G. Blunden, W. Melnitchouk, and J. A. Tjon *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 172503, nucl-th/0506026.
- [45] J. Arrington, C. D. Roberts, and J. M. Zanotti *J. Phys.* **G34** (2007) S23–S52, nucl-th/0611050.
- [46] S. L. Adler *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426–2438.
- [47] J. S. Bell and R. Jackiw *Nuovo Cim.* **A60** (1969) 47–61.
- [48] K. Fujikawa *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1195.
- [49] G. Salme 0807.0344.
- [50] G. 't Hooft *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 461.
- [51] G. 't Hooft *Nucl. Phys.* **B75** (1974) 461.
- [52] E. Witten *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 57.
- [53] R. Rajaraman. Amsterdam, Netherlands: North-holland (1982) 409p.
- [54] T. H. R. Skyrme *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A260** (1961) 127–138.
- [55] H. Weigel *Lect. Notes Phys.* **743** (2008) 1–274.
- [56] T. H. R. Skyrme *Nucl. Phys.* **31** (1962) 556–569.
- [57] G. Holzwarth and B. Schwesinger *Rept. Prog. Phys.* **49** (1986) 825.
- [58] J. Goldstone and F. Wilczek *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 986–989.
- [59] I. J. R. Aitchison and C. M. Fraser *Phys. Rev.* **D31** (1985) 2605.
- [60] G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten *Nucl. Phys.* **B228** (1983) 552.
- [61] B. Schwesinger, H. Weigel, G. Holzwarth, and A. Hayashi *Phys. Rept.* **173** (1989) 173.
- [62] H. Walliser *Nucl. Phys.* **A548** (1992) 649–668.

- [63] E. Witten *Nucl. Phys.* **B223** (1983) 422–432.
- [64] J. Wess and B. Zumino *Phys. Lett.* **B37** (1971) 95.
- [65] O. Kaymakcalan, S. Rajeev, and J. Schechter *Phys. Rev.* **D30** (1984) 594.
- [66] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **2** (1992) 1–540.
- [67] E. Braaten, S.-M. Tse, and C. Willcox *Phys. Rev.* **D34** (1986) 1482.
- [68] J. J. de Swart *Rev. Mod. Phys.* **35** (1963) 916–939.
- [69] A. L. Licht and A. Pagnamenta *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1150–1156.
- [70] A. N. Mitra and I. Kumari *Phys. Rev.* **D15** (1977) 261.
- [71] X.-D. Ji *Phys. Lett.* **B254** (1991) 456–461.
- [72] S. Rock *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1139.
- [73] A. Lung *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 718–721.
- [74] H. Anklin *et al.* *Phys. Lett.* **B336** (1994) 313–318.
- [75] H. Anklin *et al.* *Phys. Lett.* **B428** (1998) 248–253.
- [76] G. Kubon *et al.* *Phys. Lett.* **B524** (2002) 26–32, [nucl-ex/0107016](#).
- [77] W. Xu *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 2900–2904, [nucl-ex/0008003](#).
- [78] **Jefferson Lab E95-001** Collaboration, W. Xu *et al.* *Phys. Rev.* **C67** (2003) 012201, [nucl-ex/0208007](#).
- [79] A. E. Dorokhov and M. A. Ivanov *Phys. Rev.* **D75** (2007) 114007, 0704.3498.
- [80] G. Valencia *Nucl. Phys.* **B517** (1998) 339–352, [hep-ph/9711377](#).
- [81] D. Gomez Dumm and A. Pich *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 4633–4636, [hep-ph/9801298](#).
- [82] M. Knecht, S. Peris, M. Perrottet, and E. de Rafael *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 5230–5233, [hep-ph/9908283](#).
- [83] J. Schechter, A. Subbaraman, and H. Weigel *Phys. Rev.* **D48** (1993) 339–355, [hep-ph/9211239](#).
- [84] T. Kinoshita *J. Math. Phys.* **3** (1962) 650–677.

- [85] T. D. Lee and M. Nauenberg *Phys. Rev.* **133** (1964) B1549–B1562.
- [86] M. P. Rekaló and E. Tomasi-Gustafsson *Eur. Phys. J.* **A22** (2004) 331–336, [nucl-th/0307066](#).
- [87] T. E. O. Ericson and W. Weise. OXFORD, UK: CLARENDON (1988) 479 P. (THE INTERNATIONAL SERIES OF MONOGRAPHS ON PHYSICS, 74).
- [88] **Jefferson Lab E95-001** Collaboration, B. Anderson *et al.* *Phys. Rev.* **C75** (2007) 034003, [nucl-ex/0605006](#).
- [89] Y. C. Chen, A. Afanasev, S. J. Brodsky, C. E. Carlson, and M. Vanderhaeghen *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 122301, [hep-ph/0403058](#).