

Approximative bedingte Unabhängigkeit in Finanzzeitreihen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Dipl.–Wirt.–Math. Petra Schupp
geb. am 02.06.1980 in Siegen

eingereicht beim Fachbereich Mathematik
der Universität Siegen

Siegen 2010

BETREUER UND GUTACHTER:

Prof. Dr. Reiss, Universität Siegen
Prof. Dr. Kaufmann, Universität Siegen

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG:

16.09.2010

Abstract

Stochastic volatility series are common models for financial time series, because there is no constant volatility on financial markets. Important special cases are ARCH or GARCH series with the volatility being modeled as a weighted sum of the squared foregoing observations. In financial literature such time series are regarded as adequate models for short-term returns such as daily returns. However, the banking supervision law often requires a risk measurement based on a long-term holding period as, e.g., 10-day returns.

This doctoral thesis presents the term of prediction with respect to stochastic volatility series. Subsequently, the main result yields that n consecutive members of certain stochastic volatility series, including GARCH(1,1) series, are approximately independent and identically distributed (iid) given the history of the process. As a measure of the error of this approximation the variational distance is utilized. In addition, a relationship between general stochastic volatility and GARCH(1,1) series is investigated, a parameter of conditional iid approximation is introduced and the latter parameter is studied in detail for GARCH(1,1) series. In finance, risk is mostly quantified by the Value at Risk (VaR). As an application of the main result a prediction of an upper bound for the n -day VaR of stochastic volatility series is established. In a final step the predicted VaR is validated by means of statistical tests also referred to as backtesting. A case study based on real data and simulations are also included.

Kurzzusammenfassung

Stochastische Volatilitätszeitreihen sind häufig verwendete Modelle für Finanzzeitreihen, da auf Finanzmärkten keine konstante Volatilität beobachtet wird. Bedeutende Spezialfälle stellen hierbei GARCH–Zeitreihen dar, in denen die Volatilität als gewichtete Summe der quadrierten vorhergehenden Beobachtungen modelliert wird. Solche Zeitreihen werden in der Finanzliteratur als geeignete Modelle für kurzfristige, z.B. tägliche Renditen angesehen. Oftmals wird jedoch von Seiten des Bankenaufsichtsrechts eine Risikomessung auf Basis einer längerfristigen Haltedauer wie z.B. von 10–Tages–Renditen gefordert.

Die Promotionsarbeit stellt zunächst den Prognosebegriff für stochastische Volatilitätszeitreihen heraus. Im Anschluss daran liefert das Hauptresultat, dass n aufeinander folgende Folgenglieder von bestimmten stochastischen Volatilitätszeitreihen, insbesondere GARCH(1,1)–Zeitreihen, approximativ bedingt unabhängig und identisch verteilt (iid) gegeben der Vergangenheit sind. Als Maß für den Fehler dieser Approximation wird der Variationsabstand verwendet. Des Weiteren wird der Zusammenhang von GARCH(1,1)- und allgemeinen stochastischen Volatilitätszeitreihen untersucht, der Parameter der bedingten iid Approximation eingeführt und ausführlich untersucht. In der Finanzwirtschaft wird eine Quantifizierung des Risikos größtenteils über den Value at Risk (VaR) vorgenommen. Als Anwendung des Hauptresultats erfolgt die Prognose einer oberen Schranke des n –Tages VaR einer stochastischen Volatilitätszeitreihe. Anschließend wird dieser prognostizierte VaR durch Backtesting also mittels statistischer Tests validiert. Zuletzt werden die theoretischen Resultate durch Simulationen und reale Datensätze beispielhaft erläutert.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Zeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Statistik, Risikoanalyse und Computing von Herrn Prof. Dr. R.-D. Reiß entstanden. Ihm gilt mein besonderer Dank für die Unterstützung und Betreuung während der Entstehung dieser Dissertation.

Weiterhin möchte ich meinen Dank dem Zweitgutachter Herrn Prof. Dr. E. Kaufmann für vielfältige Anregungen und Kritik aussprechen sowie Monika, Melanie, Herrn Prof. Dr. A. Müller, Herrn Prof. Dr. H.-P. Scheffler und insbesondere Ulf für zahlreiche wertvolle Hinweise. Ebenfalls gilt mein Dank dem Team der Fachgruppe Statistik, Risikoanalyse und Computing, deren Diskussionsbereitschaft wesentlich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Insgesamt bot die offene und freundliche Atmosphäre des Fachbereichs Mathematik an der Universität Siegen ein sehr angenehmes Arbeitsumfeld, in dem fachlicher Austausch jederzeit möglich war.

Schließlich gilt mein herzlicher Dank meiner Familie, die mir diesen Weg erst ermöglicht haben und insbesondere Florian, der mich immer unterstützt hat.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	v
Kurzzusammenfassung	vii
Danksagung	ix
Inhaltsverzeichnis	xi
Abbildungsverzeichnis	xiii
Tabellenverzeichnis	xvii
Symbolverzeichnis	xxi
Einleitung	1
1. Stochastische Volatilitätszeitreihen und Prognose	7
1.1. Definition und Eigenschaften von stochastischen Volatilitätszeitreihen	8
1.2. GARCH(1,1)-Zeitreihen	14
1.3. Prognose	24
1.3.1. Prognose in stochastischen Volatilitätszeitreihen	28
1.3.2. Prognose in GARCH(1,1)-Zeitreihen	30
2. Approximative bedingte Unabhängigkeit in GARCH(1,1)- und stochastischen Volatilitätszeitreihen	33
2.1. Der Parameter der bedingten iid Approximation	34
2.2. Approximativ bedingt iid in stochastischen Volatilitätszeitreihen . . .	35
2.3. Approximativ bedingt iid in GARCH(1,1)-Zeitreihen	44
2.4. Approximative bedingte Unabhängigkeit in GARCH(1,1)-Zeitreihen .	58

3. Anwendungen auf Aggregation und Prognose	73
3.1. Aggregation	74
3.2. Value at Risk	77
3.3. Prognose des seriell bedingten n -Tages Value at Risk in GARCH(1, 1)-Zeitreihen	79
4. Backtesting	81
4.1. Validierung der Prognoseverteilung	82
4.2. Validierung von Funktionalparametern der Prognoseverteilung	85
4.3. Aufsichtsrechtlicher Zonenansatz	88
5. Simulations- und Fallstudien	93
5.1. Simulationsstudien	95
5.2. Fallbeispiel Adidas-Aktie	100
5.3. Fallbeispiel Wal-Mart-Aktie	114
Zusammenfassung und Ausblick	121
A. Hilfsresultate	125
B. Implementierungen	127
Stichwortverzeichnis	135
Literaturverzeichnis	137

Abbildungsverzeichnis

3.1. Aggregierte Zeitreihe und Anfangszeitreihe.	75
4.1. Einordnung der Überschreitungsanzahl in die entsprechenden Bereiche.	90
5.1. Negative tägliche log-Renditen (links) und negative 5-Tages log-Renditen (rechts) der Adidas-Aktienkurse.	100
5.2. QQ-Plot der negativen täglichen log-Renditen (blau) und QQ-Plot der negativen 5-Tages log-Renditen (rot) der Adidas-Aktienkurse. . .	102
5.3. Negative tägliche log-Renditen und der bedingte VaR (rot) zu $q = 0.99$ der Adidas-Aktienkurse.	103
5.4. Negative tägliche log-Renditen und der bedingte VaR (rot) zu $q = 0.95$ der Adidas-Aktienkurse.	104
5.5. Negative 5-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.99$ der Adidas-Aktienkurse.	106
5.6. Negative 5-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.95$ der Adidas-Aktienkurse.	106
5.7. Negative 5-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.99$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der approximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Adidas-Aktienkurse.	107

5.8. Negative 5-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.95$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der aproximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Adidas-Aktienkurse.	108
5.9. Negative tägliche log-Renditen (links) und negative 10-Tages log-Renditen (rechts) der Adidas-Aktienkurse.	109
5.10. QQ-Plot der negativen täglichen log-Renditen (blau) und QQ-Plot der negativen 10-Tages log-Renditen (rot) der Adidas-Aktienkurse.	110
5.11. Negative 10-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 10-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.95$ der Adidas-Aktienkurse.	112
5.12. Negative 10-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 10-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.99$ der Adidas-Aktienkurse.	112
5.13. Negative 10-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.99$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der aproximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Adidas-Aktienkurse.	113
5.14. Negative 10-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.95$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der aproximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Adidas-Aktienkurse.	113
5.15. Negative tägliche log-Renditen (links) und negative 5-Tages log-Renditen (rechts) der Wal-Mart-Aktienkurse.	114
5.16. QQ-Plot der negativen täglichen log-Renditen (blau) und QQ-Plot der negativen 10-Tages log-Renditen (rot) der Wal-Mart-Aktienkurse.	115

5.17. Negative tägliche log-Renditen und der bedingte VaR (rot) zu $q = 0.99$ der Wal-Mart-Aktienkurse. 116

5.18. Negative tägliche log-Renditen und der bedingte VaR (rot) zu $q = 0.95$ der Wal-Mart-Aktienkurse. 117

5.19. Negative 5-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.95$ der Wal-Mart-Aktienkurse. 119

5.20. Negative 5-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.95$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der aproximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Wal-Mart-Aktienkurse. 119

Tabellenverzeichnis

2.1. Obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen mit normalverteilten Innovationen.	51
2.2. Obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen mit Student–verteilten Innovationen mit Gestaltsparameter $\kappa = 3$	52
2.3. Obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen mit Student–verteilten Innovationen mit Gestaltsparameter $\kappa = 10$	52
2.4. Mittelwert der simulierten oberen Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich normalverteilter Innovationen und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.	56
2.5. Mittelwert der simulierten oberen Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich Student–verteilter Innovationen mit Gestaltsparameter $\kappa = 3$ und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.	57
2.6. Mittelwert der simulierten oberen Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich Student–verteilter Innovationen mit Gestaltsparameter $\kappa = 10$ und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.	58

2.7. Obere Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen mit normalverteilten Innovationen.	66
2.8. Obere Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen mit Student–verteilten Innovationen mit Gestaltspareter $\kappa = 3$	66
2.9. Obere Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen mit Student–verteilten Innovationen mit Gestaltspareter $\kappa = 10$	66
2.10. Obere Schranke für α , die Ungleichung (2.29) erfüllt.	67
2.11. Mittelwert der simulierten oberen Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich normalverteilter Innovationen und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.	69
2.12. Mittelwert der simulierten oberen Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich Studentverteilter Innovationen mit Gestaltspareter $\kappa = 3$ und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.	70
2.13. Mittelwert der simulierten oberen Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich Studentverteilter Innovationen mit Gestaltspareter $\kappa = 10$ und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.	71
4.1. Zusammenhang der Überschreitungsanzahl und des Plusfaktors im aufsichtsrechtlichen Zonenansatz basierend auf 250 Handelstagen. . .	92
5.1. Absolute und relative Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten 5–Tages log–Rendite mit 4000 Simulationen. . .	96
5.2. Absolute und relative Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten 10–Tages log–Rendite mit 4000 Simulationen. . .	97

5.3. Absolute und relative Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite mit fester Vergangenheit der Adidas-Aktie im Zeitraum vom 26.11.2003 bis zum 13.10.2008 und 4000 Simulationen.	98
5.4. Simulierte Quantile der n -fachen Faltung der Standard-Student-Verteilung mit Gestaltsparameter $\kappa = 3$	99
5.5. Simulierte Quantile der n -fachen Faltung der Standard-Student-Verteilung mit Gestaltsparameter $\kappa = 10$	99
5.6. Backtesting der verschiedenen VaR-Modelle auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen der Adidas-Aktienkurse.	105
5.7. Backtesting der verschiedenen VaR-Modelle auf Basis der negativen 10-Tages log-Renditen der Adidas-Aktienkurse.	111
5.8. Backtesting der verschiedenen VaR-Modelle auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen der Wal-Mart-Aktienkurse.	118

Symbolverzeichnis

iid	unabhängig und identisch verteilt
F	Verteilungsfunktion; es werden ebenfalls die Symbole G , usw. für weitere Verteilungsfunktionen benutzt
F^{-1}	Quantilfunktion der Verteilungsfunktion F
$\mathcal{L}(X)$	Verteilung einer Zufallsvariablen X
f	Dichte der Verteilungsfunktion F , oder auch g , usw.
$\ \cdot\ $	Variationsabstand; Seite 34
ψ	Parameter der bedingten iid Approximation; Seite 35
X_0	Anfangszustand einer stochastischen Volatilitätszeitreihe; Seite 9
\mathbf{X}_t	Anfangszustand einer GARCH(1,1)–Zeitreihe; 16
ζ, α, β	Parameter einer GARCH(1,1)–Zeitreihe; Seite 15
κ	Gestaltungsparameter einer Student–Verteilung, Flankenindex; Seite 23 und 45
σ_i	zufälliger Skalenparameter zum Zeitpunkt i , $i = 1, \dots, n$; Seite 9
$\kappa(\cdot)$	Kurtosis einer Zufallsvariablen; Seite 21
R_1, \dots, R_n	stochastische Volatilitätszeitreihe; Seite 9
$G(\cdot \cdot)$	Markov–Kern
Q	symmetrische und unimodale Verteilung
$N_\sigma, N_{0,\sigma}$	Normalverteilung mit Skalenparameter σ und Lokationsparameter 0
N_Σ	Normalverteilung mit Kovarianzmatrix Σ und Lokationsvektor $\mathbf{0}$
C_{\max}	Maximum für $z \geq 0$ von $zf(z)$; Seite 44
$\ \cdot\ _2$	euklidische Matrixnorm; Seite 46
VaR	Value at Risk
$\text{VaR}_{t+1}^{(n)}$	n –Tages VaR zum Zeitpunkt $t + 1$
Γ	Gamma–Funktion; Seite 45

Symbolverzeichnis

$\{R_t^{(n)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$	n -fache Aggregation der Zeitreihe $\{R_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$; Seite 74
L	Verlustvariable; Seite 77
$Q_{\sigma_{t+1}(x_t)}^{*n}$	n -fache Faltung von $Q_{\sigma_{t+1}(x_t)}$; Seite 76
C	Verlustfunktion
MSE	mittlere quadratische Abweichung; Seite 26

Einleitung

Hintergrund und Untersuchungsgegenstand

Banken treten neben anderen Finanzdienstleistern als Mittler zwischen Kreditnehmern und Geldgebern auf. Eine der zentralen Aufgaben einer Bank ist hierbei die Übernahme von Risiken, wie z.B. durch Kredite, und das damit verbundene Risiko eines Kreditausfalls. Wie nicht zuletzt die Subprime-Krise 2007 auf dem amerikanischen Immobilienmarkt gezeigt hat, ist ein stabiler Bankensektor von zentraler Bedeutung für die gesamte Volkswirtschaft.

Es ist daher nicht nur das Eigenbestreben der Banken, ihre Risiken zu steuern bzw. zu limitieren und simultan den entstandenen Risiken eine adäquate Eigenmitteldeckung gegenüber zu stellen. Vielmehr wurden auch international anerkannte Aufsichtsregeln erstellt, die Mindestanforderungen an das Risikomanagement beinhalten. Mit diesen Eigenkapitalvorschriften soll die Stabilität des Bankensektors und die des gesamten Finanzsystem gewährleistet werden.

Die Gesamtheit dieser Vorschriften wird häufig unter dem Begriff Basel II zusammengefasst und umfasst Mindestkapitalanforderungen, bankenaufsichtsrechtlicher Überprüfungsprozesse und die erweiterte Offenlegung respektive Marktdisziplin (siehe Basel Committee on Banking Supervision (1999)). Eine Umsetzung in deutsches Recht erfolgt durch die Solvabilitätsverordnung (siehe Bundesministerium der Finanzen (2006)).

Eine vollständige Vermeidung von Risiken ist insofern irrelevant, als Gewinn und Risiko nicht voneinander trennbar sind, d.h. ohne das Eingehen von Risiken kann kein Gewinn erzielt werden. Ziel ist es, Ertrag und Risiko basierend auf einem einheitlichen Konzept zu messen und zu steuern. Zudem führten diverse Finanzkrisen (siehe Jorion (1997), Kapitel 1 und 2, Dowd (1998), Kapitel 1, und Crouhy u. a. (2001), Kapitel 1) zu einer tiefer gehenden Analyse der Risiken. Die vorliegende

Arbeit greift in diesem Zusammenhang zwei Themenkreise auf,

- die mathematische Modellierung und Prognose der Risiken und
- die Validierung der zugehörigen Modelle durch statistische Tests.

Die Grundlage jeder Risikomessung bildet zunächst die Bestimmung respektive Quantifizierung der eingegangenen Risiken. Eine Möglichkeit für die Messung von Risiken einer Finanzposition bilden Risikokennzahlen oder Risikomesswerte wie der Value at Risk (VaR), siehe Jorion (1997), Kapitel 8, d.h. das Risiko wird auf eine einzige Kennzahl reduziert. Banken streben nach einer adäquaten Modellierung des VaR, d.h. sie möchten exakt quantifizieren, welchen maximalen Wertverlust, also monetären Verlustbetrag, sie bei gegebener Wahrscheinlichkeit und Haltedauer erleiden. Neben dem Risikomesswert VaR wird zudem häufig noch der Expected Shortfall betrachtet. Dieser Wert gibt Aufschluss über die erwartete Verlusthöhe, falls der VaR überschritten wird. Allgemeine Risikomaße werden in Artzner u. a. (1999) diskutiert.

Der VaR einer Finanzposition, z.B. eines Aktienportfolios, kann des Weiteren über die Zeit veränderlich sein. So ist es beispielsweise bekannt, dass Aktienrenditen Phasen hoher und niedriger Volatilität aufweisen (siehe Mandelbrot (1963), Fama (1965) und Black u. Scholes (1972)), was unmittelbar zu einer Veränderung des damit verbundenen Risikos führt. Zu diesem Zweck werden mathematische Modelle entwickelt, die eine dynamische VaR-Ermittlung ermöglichen.

Die statistische Modellbildung erfolgt über die Modellierung von log-Renditen der Risikofaktoren (z.B. Aktienkurse). Für die Modellierung der log-Renditen werden in dieser Arbeit GARCH(1,1)-Zeitreihen betrachtet, die die Abhängigkeit der einzelnen Änderungen der Risikofaktoren in der Zeit abbilden und folgende Eigenschaften erfüllen:

- Clusterbildung, also in der Zeit variierende Volatilität,
- schwere Flanken der Verteilung der Renditen,
- Mean Reversion der Volatilität.

Für eine intensive Behandlung dieser „Stylized Facts“ sei hier auf Bollerslev u. a. (1994) verwiesen.

Diese Modellierung durch GARCH(1,1)–Zeitreihen wird aufgrund dieser Eigenschaften häufig auf Finanzzeitreihen angewendet, z.B. für die Modellierung von Aktienrenditen (French u. a. (1987)), für Zinsänderungsrisiken (Engle u. a. (1987)) und für Wechselkursänderungen (Hsieh (1988) und Giovannini u. Philippe (1989)).

Es ist eine in der einschlägigen Finanzliteratur verbreitete Auffassung, dass mit GARCH(1,1)–Zeitreihen am besten kurzfristige Renditen (i.d.R. tägliche Renditen) modelliert werden können, siehe Embrechts u. a. (2009), Zivot (2008), Martens (2001), Martens (2002), Andersen u. Bollerslev (1998) und Andersen u. a. (1999). Basierend auf dieser Modellbildung kann der VaR entsprechend auf längere Haltedauern mittels Monte–Carlo–Simulation aufwendig hochgerechnet werden. Diebold u. a. (1997) und Jorion (1997), Kapitel 8, haben aufgezeigt, dass die täglichen Renditen, die einer GARCH(1,1)–Zeitreihe folgen, nicht einfach als unabhängig und identisch verteilt (iid) behandelt werden können und daher nicht ohne Weiteres der 10–tägige VaR durch geeignete Skalierung berechnet werden kann.

Das Baseler Komitee für Bankenaufsicht schlägt allerdings für einige Handelsbuchpositionen eine Haltedauer länger als von einem Tag vor. Banken, die zur aufsichtsrechtlichen Kalkulation der Risikokennzahl ein internes Modell verwenden, sind angewiesen, den 10–tägigen VaR zur Wahrscheinlichkeit 0.99 für gewisse Handelsbuchpositionen zugrunde zu legen, siehe Basel Committee on Banking Supervision (2009).

Alternativ kann die Berechnung des VaR auch direkt auf 10–tägigen log–Renditen basieren. Allerdings hat dies den Nachteil, dass historische Datensätze zu weit in die Vergangenheit zurückreichen müssen und somit evtl. nicht mehr geeignet die Gegenwart abbilden. Diese Problemstellung kann nur unzulänglich umgangen werden, indem man kleinere Datensätze verwendet. Außerdem eignen sich die gängigen Zeitreihenmodelle wie bereits erwähnt eher für kurzfristige Haltedauern.

Die vorliegende Arbeit beinhaltet zuerst einmal:

- die Einführung des Parameters der bedingten iid Approximation ψ für stochastische Volatilitätszeitreihen, der den Unterschied zwischen einer stochastischen Volatilitätszeitreihe und iid Zufallsvariablen quantifiziert,
- eine Berechnung der oberen Schranke für den Parameter der bedingten iid

Approximation in Verbindung mit GARCH(1,1)–Zeitreihen, d.h.

$$\psi \leq C_{\max} \cdot B(\alpha, \beta, n),$$

wobei α , β die Parameter der GARCH(1,1)–Zeitreihe, C_{\max} eine Konstante und n die Anzahl der iid Zufallsvariablen darstellt (siehe Ungleichung (2.16)),

- eine Prognose für die obere Schranke des n –Tages VaR.

Zu beachten ist, dass die obere Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation lediglich für α nahe 0 und β nahe 1 klein ist. Empirische Studien zeigen allerdings, dass Anpassungen von GARCH(1,1)–Zeitreihen an kurzfristigen Renditen diese Parameterwerte aufweisen (siehe RiskMetrics Group (1996), Franses u. van Dijk (2000)).

Analoges kann für ein schwächeres Konzept, nämlich bedingte approximative Unabhängigkeit, hergeleitet werden. Bei diesem Konzept wird nur die Unabhängigkeit zugrunde gelegt.

Neben der Modellierung der Renditen von Risikofaktoren ist es ein weiteres Ziel, eine Aussage über die Güte dieser VaR–Modelle zu treffen. Eine Überprüfung dieser mathematischen Modelle erfolgt durch statistische Tests (siehe Rosenblatt (1952) und Diebold u. a. (1998)).

Backtesting ist ein statistischer Test, der zur Überwachung der Güte insbesondere von VaR–Modellen dient. Allgemein gesprochen vergleicht dieser Test rückwirkend über einen bestimmten Zeitraum den prognostizierten VaR mit den realisierten Verlusten, die alle möglichen bzw. denkbaren Verluste beinhalten. Stellt man keine wesentlich häufigeren Überschreitungen der realisierten Verluste über dem VaR fest, als gemäß der gegebenen Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist, kann das Modell als adäquat angesehen werden.

Backtesting ist insofern von Bedeutung, als einerseits die systematische Unterschätzung des Risikos zu einer Erhöhung des Insolvenzrisikos der Bank und zur Instabilität des gesamten Finanzsektors führen kann. Andererseits ist eine Überschätzung des Risikos ebenfalls nicht vorteilhaft, da der Bank durch die zu hohe Eigenmittelunterlegung eventuelle Gewinne entgehen können.

In Basel Committee on Banking Supervision (2009) wird vorgeschlagen, dass nicht nur ein Backtesting–Verfahren durchgeführt werden soll, sondern zusätzlich

weitere Validierungen erfolgen sollen. Für das Problem von längeren Haltedauern, z.B. 10 Tage, wird der Square-Root-Ansatz, also eine simple multiplikative Skalierung des täglichen VaR, vorgeschlagen. Hierbei sei auf Basel Committee on Banking Supervision (2009), S. 23 verwiesen.

In der vorliegenden Arbeit wird das Backtesting-Verfahren verwendet zur Überprüfung

- der mathematischen Modellierung und Prognose in Datensätzen und
- auf Adäquanz des Square-Root-Ansatzes für tägliche Renditen, die einer GARCH(1,1)-Zeitreihe folgen.

Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Zum einen erfolgt eine mathematische Modellierung und Prognose der Risikofaktoränderungen über GARCH(1,1)-Zeitreihen. Zum anderen gilt es, dies mittels statistischer Tests zu validieren.

In Kapitel 1 werden Definition und Eigenschaften von stochastischen Volatilitätszeitreihen, insbesondere GARCH(1,1)-Zeitreihen als Spezialfall, vorgestellt. Darüber hinaus wird der Begriff der Prognose und der Prognoseverteilung betrachtet und auf stochastische Volatilitätszeitreihen, insbesondere GARCH(1,1)-Zeitreihen, übertragen.

In Kapitel 2 wird der Parameter der bedingten iid Approximation eingeführt und im Rahmen von stochastischen Volatilitätszeitreihen untersucht. Dieser Parameter bzw. diese Approximation quantifiziert den Unterschied zwischen der Verteilung von n aufeinander folgenden Folgengliedern einer stochastischen Volatilitätszeitreihe und der Verteilung von iid Zufallsvariablen gegeben der Vergangenheit. Zudem wird dieser Parameter näher für den Spezialfall von GARCH(1,1)-Zeitreihen untersucht. In diesem Zusammenhang ergibt sich weiter die Fragestellung, welche Gestalt die Approximation im bedingt unabhängigen Fall besitzt. Dabei betrachtet man im Gegensatz zur bedingten iid Approximation den Unterschied zwischen n aufeinander folgenden Folgengliedern einer GARCH(1,1)-Zeitreihe und der Verteilung von unabhängigen aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Zufallsvariablen gegeben der Vergangenheit. Anschließend wird der Zusammenhang der beiden Approximationen vorgestellt.

Kapitel 3 behandelt die Aggregation von stochastischen Volatilitätszeitreihen und es wird gezeigt, wie der Parameter der bedingten iid Approximation benutzt werden kann, um eine obere Schranke des zugehörigen bedingten n -Tages VaR zu ermitteln. Analoges gilt für die bedingt unabhängige Approximation. Insbesondere wird der in Kapitel 1 vorgestellte Begriff der Prognose auf die obere Schranke des n -Tages VaR in GARCH(1,1)-Zeitreihen übertragen.

Kapitel 4 greift die Themenstellung des statistischen Tests der mathematischen Modellierung mittels statistischer Tests auf — das sogenannte Backtesting. Dabei ist die Rosenblatt-Transformation von Bedeutung. Mit Hilfe dieses Backtesting kann der prognostizierte n -Tages VaR in GARCH(1,1)-Zeitreihen validiert werden. Weiter wird der aufsichtsrechtliche Hintergrund vorgestellt.

Mittels Simulationen wird in Kapitel 5 überprüft, ob der vom Baseler Komitee für Bankenaufsicht vorgeschlagene Square-Root-Ansatz auf GARCH(1,1)-Zeitreihen anwendbar ist. Die hergeleitete obere Schranke für den bedingten n -Tages VaR wird auf Datensätze angewendet. Anschließend wird mit Hilfe des Backtesting der prognostizierte bedingte n -Tages VaR basierend auf der hergeleiteten oberen Schranke bzw. des Square-Root-Ansatzes validiert.

Kapitel 1.

Stochastische Volatilitätszeitreihen und Prognose

Auf Finanzmärkten wird häufig keine konstante Volatilität für log-Renditen von Assetpreisen angenommen. Erste Hinweise für die in der Zeit variierende Volatilität geben Mandelbrot (1963), Fama (1965) und Black u. Scholes (1972).

Als Grundlage für die Modellierung von Finanzzeitreihen dienen häufig stochastische Volatilitätszeitreihen, wobei ARCH/GARCH-Zeitreihen bekannte Beispiele darstellen. Hierdurch wird eine Modellierung der Abhängigkeitsstruktur innerhalb der Zeitreihe vorgenommen, insbesondere liegt also eine serielle Abhängigkeit vor. Durch diese Abhängigkeit und die in der Zeit variierende Volatilität können stochastische Volatilitätszeitreihen als Modelle für log-Renditen von Assetpreisen dienen. Für eine allgemeine Übersicht der verschiedenen Modellierungen der stochastischen Volatilitätszeitreihe siehe etwa Shephard u. Andersen (2008).

Betrachtet man gesondert GARCH-Zeitreihen, so ist die zentrale Idee, die Volatilität als eine gewichtete Summe der quadrierten vorhergehenden Beobachtungen zu modellieren. Diese Summe wird nur durch Addieren eines Terms von einer Beobachtung zur nächsten geändert. Dies hat nur wenig Einfluss auf die gesamte Summe, jedoch beschreibt diese Änderung genau die Abhängigkeit von zwei aufeinander folgenden Beobachtungen, siehe Engle (1982).

Die Modellierung der in der Zeit variierenden Volatilität ist nicht nur für die Prognose von zukünftigen Werten für log-Renditen der Assetpreise von Relevanz, sondern auch für die Prognose der zukünftigen Volatilität. Diese fließt ins Risikomanagement, z.B. in die Ermittlung des zukünftigen Value at Risks (VaR) oder in

das Bepreisen von Optionen mit ein, siehe Zivot (2008).

Im ersten Teil dieses Kapitels wird auf stochastische Volatilitätszeitreihen im Allgemeinen Bezug genommen. Hierbei werden Definitionen und Eigenschaften vorgestellt, siehe Abschnitt 1.1. In Abschnitt 1.2 werden zunächst Definitionen und Eigenschaften von GARCH(1,1)–Zeitreihen als Spezialfall von stochastischen Volatilitätszeitreihen genannt. Abschnitt 1.3 beschäftigt sich allgemein mit dem Begriff der Prognose und speziell der Prognose in stochastischen Volatilitätszeitreihen, insbesondere in GARCH(1,1)–Zeitreihen.

1.1. Definition und Eigenschaften von stochastischen Volatilitätszeitreihen

Bevor auf die Definition von stochastischen Volatilitätszeitreihen und deren wohl-bekanntesten Eigenschaften eingegangen wird, soll zunächst eine kurze Einführung in einige Grundbegriffe der Zeitreihenanalyse vorgenommen werden. Im Folgenden bezeichnet I eine Indexmenge, wobei $I = \mathbb{Z}$, $I = \mathbb{N}$ oder $I = \{1, \dots, n\}$.

Definition 1.1.1.

- (i) Eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen $\{R_t\}_{t \in I}$ heißt *Zeitreihe*.
- (ii) $\{R_t\}_{t \in I}$ heißt *striktes weißes Rauschen*, falls
 - (a) R_t iid, $t \in I$,
 - (b) $ER_1 = 0$,
 - (c) $ER_1^2 = \sigma^2 < \infty$.
- (iii) $\{R_t\}_{t \in I}$ ist *strikt stationär*, falls

$$(R_{t_1}, \dots, R_{t_n}) \stackrel{d}{=} (R_{t_1+k}, \dots, R_{t_n+k})$$

für alle $t_1, \dots, t_n \in I$, $t_1 + k, \dots, t_n + k \in I$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\stackrel{d}{=}$ als Gleichheit in Verteilung.

- (iv) $\{R_t\}_{t \in I}$ ist *schwach stationär oder Kovarianz-stationär*, falls
 - (a) $ER_t = \mu$, $t \in I$,

$$(b) ER_t^2 < \infty, t \in I,$$

$$(c) \text{Kov}(R_r, R_s) = \text{Kov}(R_{r+t}, R_{s+t}), r, s \in I \text{ und } r+t, s+t \text{ in } I.$$

Bemerkung 1.1.2. Beachte, dass jede strikt stationäre Zeitreihe mit $\text{Var}(R_t) < \infty$ schwach stationär ist.

Als Referenz für weitere Eigenschaften bzw. eine Übersicht zu Zeitreihen kann McNeil u. a. (2005), Abschnitt 4.3, angegeben werden.

Im Folgenden werden spezielle Zeitreihen betrachtet, sogenannte stochastische Volatilitätszeitreihen (siehe auch Breidt u. Davis (1998) und Davis u. Mikosch (2000)). Zunächst wird die Definition dieser Zeitreihen vorangestellt und anschließend werden wichtige wohlbekanntete Eigenschaften thematisiert.

Im Folgenden werden die Zufallsvariablen $\varepsilon_i, i \in I$, als Innovationen bezeichnet.

Definition 1.1.3 (Stochastische Volatilitätszeitreihen). Seien $X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ identisch verteilt sind. Seien

$$\sigma_i : \mathbb{R}^i \rightarrow [0, \infty), \quad i = 1, \dots, n$$

Funktionen, $R_1 = \sigma_1(X_0)\varepsilon_1$ und

$$R_i = \sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})\varepsilon_i, \quad i = 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

wobei $\mathbf{R}_{1,i-1} = (R_1, \dots, R_{i-1})$. Dann ist R_1, \dots, R_n eine stochastische Volatilitätszeitreihe mit Anfangszustand X_0 .

Bemerkung 1.1.4. Man beachte, dass σ_i für $i = 2, \dots, n$ nichtnegative Funktionen vom Anfangszustand und den vorhergehenden Zufallsvariablen sind und die Abhängigkeitsstruktur in der Zeitreihe beschreiben. Offensichtlich sind $\sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}), i = 2, \dots, n$, bzw. $\sigma_1(X_0)$ zufällige Parameter.

Im folgenden Satz werden bekannte Aussagen wie die bedingte Verteilung und die bedingten Momente in stochastischen Volatilitätszeitreihen hergeleitet. Der Vollständigkeit halber werden diese Aussagen mit Beweis aufgeführt.

Bemerkung 1.1.5. Man beachte im Folgenden, dass die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$ nur $\mathcal{L}(X)$ -fast sicher eindeutig ist.

Bevor näher auf diese bedingte Verteilung eingegangen wird, wird zunächst ein Lemma eingeführt, das für die Darstellung dieser bedingten Verteilung und Momente von Bedeutung ist. Dieses Resultat wird in Standardvorlesungen wie beispielsweise Stochastik II thematisiert, kann allerdings auch in Karlin u. Taylor (1975), Kapitel 1, nachgeschlagen werden. Hieraus lässt sich nicht nur die Darstellung der bedingten Dichte und Verteilungsfunktion ableiten, sondern ebenfalls die verbundene Dichte bedingt auf die Vergangenheit. Letzteres ist von zentraler Bedeutung für die Überlegungen in Abschnitt 2.3, in dem der Grad der Abhängigkeit in einer stochastischen Volatilitätszeitreihe mittels eines Parameters der bedingten iid Approximation quantifiziert wird.

Lemma 1.1.6. *Seien U und V unabhängige Zufallsvariablen und w eine messbare Abbildung. Hierfür gilt*

$$P(w(U, V) \in \cdot | U = u) = P\{w(u, V) \in \cdot\}.$$

Für die Darstellung der bedingten Verteilung, der bedingten Erwartung und der bedingten Varianz von R_i gegeben $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) = (x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})$ für $i = 2, \dots, n$ bzw. R_1 gegeben $X_0 = x_0$ einer stochastischen Volatilitätszeitreihe erhält man folgendes Resultat.

Satz 1.1.7. *Sei R_1, \dots, R_n eine stochastische Volatilitätszeitreihe mit Anfangszustand X_0 . Man erhält für*

(i) *die bedingte Verteilung von R_i gegeben $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) = (x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})$:*

$$P(R_i \in \cdot | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) = \mathcal{L}(\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) \varepsilon_i), \quad i = 2, \dots, n,$$

bzw. die bedingte Verteilung von R_1 gegeben $X_0 = x_0$:

$$P(R_1 \in \cdot | X_0 = x_0) = \mathcal{L}(\sigma_1(x_0) \varepsilon_1),$$

(ii) *die bedingte Erwartung von R_i gegeben $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) = (x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})$:*

$$E(R_i | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) = E(\varepsilon_i) \sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}), \quad i = 2, \dots, n,$$

bzw. die bedingte Erwartung von R_1 gegeben $X_0 = x_0$:

$$E(R_1|X_0 = x_0) = E(\varepsilon_1) \sigma_1(x_0),$$

(iii) und die bedingte Varianz von R_i gegeben $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) = (x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})$:

$$\text{Var}(R_i|X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) = \sigma_i^2(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) \cdot \text{Var}(\varepsilon_i), \quad i = 2, \dots, n$$

bzw. die bedingte Varianz von R_1 gegeben $X_0 = x_0$:

$$\text{Var}(R_1|X_0 = x_0) = \sigma_1^2(x_0) \cdot \text{Var}(\varepsilon_1).$$

Beweis Im Folgenden wird nur auf die Beweise für $i = 2, \dots, n$ eingegangen. Die Beweise für R_1 gegeben $X_0 = x_0$ erfolgen analog.

- (i) Für die bedingte Verteilung aus Lemma 1.1.6 mit $U = (X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ und $V = \varepsilon_i$ gilt, dass sich $Z_i := \sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ aufgrund rekursiven Einsetzens in einer stochastischen Volatilitätszeitreihe schreiben lässt als

$$\begin{aligned} Z_i &:= \sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \\ &= \sigma_i(X_0, \sigma_{i-1}(X_0, \mathbf{R}_{1,i-2}) \varepsilon_{i-1}) \\ &= \dots \\ &= l(X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}) \end{aligned}$$

für eine messbare Abbildung $l : \mathbb{R}^i \rightarrow [0, \infty)$. Insbesondere ist Z_i unabhängig von ε_i , da nach Voraussetzung ε_i unabhängig von den Zufallsvariablen $X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}$ ist. Weiter folgt unmittelbar die Unabhängigkeit von $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ und ε_i . Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 1.1.6 erfüllt und mit

$$w((X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}), \varepsilon_i) = \sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \varepsilon_i = R_i$$

ist

$$P(w((X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}), \varepsilon_i) \in \cdot | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) = P\{\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) \varepsilon_i \in \cdot\}.$$

(ii) Aufgrund der Unabhängigkeit von $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ und ε_i aus (i) gilt

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}(R_i | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) \\
 &= \mathbb{E}(\sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \varepsilon_i | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) \\
 &= \mathbb{E}(\varepsilon_i) \mathbb{E}(\sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) \\
 &= \mathbb{E}(\varepsilon_i) \sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}).
 \end{aligned}$$

(iii) Mit (ii) und der Unabhängigkeit von $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ und ε_i aus (i) folgt

$$\begin{aligned}
 & \text{Var}(R_i | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) \\
 &= \mathbb{E}(\sigma_i^2(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \varepsilon_i^2 | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) \\
 &\quad - (\mathbb{E}(\sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \varepsilon_i | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}))^2 \\
 &= \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) \mathbb{E}(\sigma_i^2(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) \\
 &\quad - (\mathbb{E}(\varepsilon_i))^2 (\mathbb{E}(\sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}))^2 \\
 &= \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) \sigma_i^2(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) - (\mathbb{E}(\varepsilon_i))^2 \sigma_i^2(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) \\
 &= \sigma_i^2(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) (\mathbb{E}(\varepsilon_i^2) - (\mathbb{E}(\varepsilon_i))^2).
 \end{aligned}$$

□

Aus dem vorhergehenden Satz lässt sich nun die Darstellung der bedingten Verteilungsfunktion und Dichte von stochastischen Volatilitätszeitreihen herleiten.

Bemerkung 1.1.8. (Bedingte Verteilungsfunktion und bedingte Dichten von stochastischen Volatilitätszeitreihen).

(i) Die bedingte Verteilungsfunktion von R_i gegeben $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) = (x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})$ besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned}
 F(r_i | x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) &= P(R_i \leq r_i | X_0 = x_0, \mathbf{R}_{1,i-1} = \mathbf{r}_{1,i-1}) \\
 &= \mathcal{L}(\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) \cdot \varepsilon_i)(-\infty, r_i] \\
 &= P\{\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) \varepsilon_i \leq r_i\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left\{\varepsilon_i \leq \frac{r_i}{\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})}\right\} \\
 &= F\left(\frac{r_i}{\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})}\right), \quad i = 2, \dots, n,
 \end{aligned}$$

und analog gilt für die bedingte Verteilungsfunktion von R_1 gegeben $X_0 = x_0$

$$F(r_1|x_0) = F\left(\frac{r_1}{\sigma_1(x_0)}\right),$$

wobei F die Verteilungsfunktion der Innovationen ε_i , $i = 1, \dots, n$, darstellt.

(ii) Sei f die Dichte der Innovationen ε_i für $i = 1, \dots, n$, dann gilt

$$f(r_i|x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) = \frac{1}{\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})} f\left(\frac{r_i}{\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1})}\right), \quad i = 2, \dots, n$$

und

$$f(r_1|x_0) = \frac{1}{\sigma_1(x_0)} f\left(\frac{r_1}{\sigma_1(x_0)}\right).$$

Hieraus lässt sich nun die wohlbekannte Aussage über die Gestalt der verbundenen Dichte einer stochastischen Volatilitätszeitreihe bedingt auf den Anfangszustand ableiten. Diese Dichte lässt sich darstellen als das Produkt der einzelnen bedingten Dichten aus Bemerkung 1.1.8 (ii).

Satz 1.1.9. Gegeben sei eine stochastische Volatilitätszeitreihe R_1, \dots, R_n mit Anfangszustand X_0 . f sei die Dichte der Innovation ε_i für $i = 1, \dots, n$. Dann lässt sich die verbundene Dichte von R_1, \dots, R_n bedingt nach $X_0 = x_0$ darstellen als

$$\begin{aligned}
 f(r_1, \dots, r_n|x_0) &= \frac{1}{\sigma_1(x_0)} f\left(\frac{r_1}{\sigma_1(x_0)}\right) \\
 &\quad \cdot \prod_{j=2}^n \frac{1}{\sigma_j(x_0, \mathbf{r}_{1,j-1})} f\left(\frac{r_j}{\sigma_j(x_0, \mathbf{r}_{1,j-1})}\right).
 \end{aligned}$$

Beweis Für den Zusammenhang der verbundenen und bedingten Dichte gilt Folgendes: Falls $f_1 \in \frac{d\mathcal{L}(X)}{d\mu_1}$, $f(\cdot|\cdot)$ bedingte Dichte von Y gegeben X und $f(\cdot|x)$ μ_2 -Dichte

von $P(Y \in \cdot | X = x)$, dann ist

$$f(x, y) = f(y|x) f_1(x)$$

eine $\mu_1 \times \mu_2$ -Dichte von $\mathcal{L}(X, Y)$. Durch rekursives Einsetzen und mittels Bemerkung 1.1.8 (ii) ist

$$\begin{aligned} & f(r_1, \dots, r_n | x_0) \\ &= f(r_n | x_0, \mathbf{r}_{1,n-1}) \cdot f(r_{n-1}, \dots, r_1 | x_0) \\ &= f(r_n | x_0, \mathbf{r}_{1,n-1}) \cdot f(r_{n-1} | x_0, \mathbf{r}_{1,n-2}) \cdot f(r_{n-2}, \dots, r_1 | x_0) \\ &= \dots \\ &= f(r_1 | x_0) \cdot \prod_{j=2}^n f(r_j | x_0, \mathbf{r}_{1,j-1}) \\ &= \frac{1}{\sigma_1(x_0)} f\left(\frac{r_1}{\sigma_1(x_0)}\right) \\ &\quad \cdot \prod_{j=2}^n \frac{1}{\sigma_j(x_0, \mathbf{r}_{1,j-1})} f\left(\frac{r_j}{\sigma_j(x_0, \mathbf{r}_{1,j-1})}\right). \end{aligned}$$

□

Nachdem nun wichtige wohlbekannte Eigenschaften von stochastischen Volatilitätszeitreihen genannt wurden, werden im folgenden Abschnitt Spezialfälle von stochastischen Volatilitätszeitreihen betrachtet, sogenannte GARCH(1,1)-Zeitreihen.

1.2. GARCH(1,1)-Zeitreihen

GARCH(1,1)-Zeitreihen dienen als Grundlage der Modellierung von Finanzzeitreihen, da sie einige Stylized Facts erfüllen wie z.B. die in der Zeit variierende Volatilität bzw. Volatilitätscluster. Daher gibt es Zeiten von hoher oder niedriger Volatilität. In Zeiten hoher Volatilität ist z.B. die Wahrscheinlichkeit hoch, dass auf eine hohe Rendite wieder eine hohe Rendite folgt. Diese Clusterbildung wird auf die serielle Abhängigkeit zurückgeführt, die durch einen zufälligen Skalenparameter als gewichtete Summe der quadrierten vorhergehenden Zufallsvariablen dargestellt wird, d.h. die bedingte Varianz (siehe Satz 1.1.7 (iii)) gegeben der Vergangenheit verändert

sich.

Darüber hinaus spiegelt die Modellierung mittels einer GARCH–Zeitreihe wider, dass die Verteilung der Renditen schwerere Flanken als eine Normalverteilung besitzt. Dies bedeutet, dass extreme Werte mit einer höheren Wahrscheinlichkeit auftreten.

Da im weiteren Verlauf lediglich schwach stationäre GARCH(1,1)–Zeitreihen mit $\text{Var}(R_t) = \text{E}(R_t^2) = \sigma^2 < \infty$, für alle $t \in I$, in Betracht gezogen werden, ist ein weiterer erfüllter Stylized Fact die Mean Reversion der Volatilität. Zwar variiert die Volatilität in der Zeit, weicht jedoch R_t^2 von der stationären Varianz σ^2 ab, so ist die Wahrscheinlichkeit größer, dass R_t^2 zur stationären Varianz zurückkehrt als sich davon zu entfernen. Für eine tiefer gehende heuristische Begründung siehe Zivot (2008).

Der Stylized Fact bezüglich der Asymmetrie von Renditen wird allerdings in der Standardmodellierung von GARCH–Zeitreihen außer Acht gelassen. Eine Erweiterung der GARCH–Zeitreihen kann jedoch vorgenommen werden, indem die gewichtete Summe der quadrierten vorhergehenden Zufallsvariablen umformuliert wird. Dies bildet jedoch im weiteren Verlauf nicht den Gegenstand der Untersuchung. Eine ausführliche Beschreibung der Stylized Facts findet sich in Bollerslev u. a. (1994).

Im Folgenden wird das bekannte Konzept von GARCH(1,1)–Zeitreihen (siehe Engle (1982)) aufgegriffen und die Beziehung zu allgemeinen stochastischen Volatilitätszeitreihen aufgezeigt.

Definition 1.2.1 (GARCH(1,1)–Zeitreihe). *Der Prozess*

$$R_t = Z_t \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.2)$$

mit $Z_t^2 = \zeta + \alpha R_{t-1}^2 + \beta Z_{t-1}^2$, $\zeta > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$ ist eine GARCH(1,1)–Zeitreihe („generalized autoregressive, conditionally heteroskedastic“), falls der Prozess strikt stationär ist, wobei die Folge von Innovationen $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ein striktes weißes Rauschen ist mit $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = 1$ und ε_t unabhängig von $\{R_{t-k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ für alle t .

Um den Zusammenhang von GARCH(1,1)–Zeitreihen und stochastischen Volatilitätszeitreihen aufzuzeigen, hält man einen Zeitpunkt t fest und betrachtet die Zeitreihe nach t bedingt auf die Vergangenheit bis t . Im Rahmen von GARCH(1,1)–

Zeitreihen ist

$$\mathbf{X}_t = (R_t, R_{t-1}, \dots)$$

der Vektor der Beobachtungen bis t und

$$\sigma_{t+1}(\mathbf{X}_t) = Z_{t+1}, \sigma_{t+i}(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1, t+i-1}) = Z_{t+i} \quad i = 2, \dots, n.$$

Nach Definition 1.2.1 ist R_{t+1}, \dots, R_{t+n} eine stochastische Volatilitätszeitreihe mit Anfangszustand \mathbf{X}_t .

Nun muss noch die Fragestellung bezüglich des Nachweises der Stationarität von GARCH(1,1)–Zeitreihen beantwortet werden. In Nelson (1990) wird gezeigt, dass

$$E(\log(\alpha\varepsilon_t^2 + \beta)) < 0 \tag{1.3}$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass der Prozess in (1.2) strikt stationär und damit eine GARCH(1,1)–Zeitreihe ist.

Im Folgenden wird aus Vereinfachungsgründen eine Bedingung verwendet, die notwendig und hinreichend für die schwache Stationarität einer GARCH(1,1)–Zeitreihe ist. Dabei wird gefordert, dass das zweite Moment der Folgenglieder existiert, siehe Bollerslev (1986). Diese Bedingung lässt sich aus der Bedingung (1.3) mittels der Jensenschen Ungleichung herleiten.

Lemma 1.2.2 (Stationarität und Momente). *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine GARCH(1,1)–Zeitreihe mit $ER_t^2 < \infty$ schwach stationär ist, lautet*

$$\alpha + \beta < 1,$$

vgl. McNeil u. a. (2005), Abschnitt 4.3. Dann gilt $ER_t = 0$, $Kov(R_{t+1}, R_{t+k}) = 0$ für jedes $t \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ und $Var(R_t) = \frac{\zeta}{1-\alpha-\beta}$.

Beweis Man beachte, dass sich Z_t^2 für $t \in \mathbb{Z}$ wie folgt darstellen lässt

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= \zeta + \alpha R_{t-1}^2 + \beta Z_{t-1}^2 = \zeta + \alpha Z_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta Z_{t-1}^2 \\ &= \zeta + \alpha (\zeta + \alpha R_{t-2}^2 + \beta Z_{t-2}^2) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta (\zeta + \alpha R_{t-2}^2 + \beta Z_{t-2}^2) \\ &= \zeta + \alpha (\zeta + \alpha Z_{t-2}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta Z_{t-2}^2) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta (\zeta + \alpha Z_{t-2}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta Z_{t-2}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \zeta + \zeta \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^2 Z_{t-2}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha \beta Z_{t-2}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \zeta \beta + \alpha \beta Z_{t-2}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \beta^2 Z_{t-2}^2 \\
&= \zeta + \zeta \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^2 (\zeta + \alpha Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta Z_{t-3}^2) \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 \\
&\quad + \alpha \beta (\zeta + \alpha Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta Z_{t-3}^2) \varepsilon_{t-1}^2 + \zeta \beta \\
&\quad + \alpha \beta (\zeta + \alpha Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta Z_{t-3}^2) \varepsilon_{t-2}^2 + \beta^2 (\zeta + \alpha Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta Z_{t-3}^2) \\
&= \zeta + \zeta \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \zeta \alpha^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha^3 Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \alpha^2 \beta Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 \\
&\quad + \zeta \alpha \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha^2 \beta Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \alpha \beta^2 Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \zeta \beta + \zeta \alpha \beta \varepsilon_{t-2}^2 \\
&\quad + \alpha^2 \beta Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-2}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \alpha \beta^2 \varepsilon_{t-2}^2 Z_{t-3}^2 + \zeta \beta^2 + \alpha \beta^2 Z_{t-3}^2 \varepsilon_{t-3}^2 + \beta^3 Z_{t-3}^2 \\
&= \dots = \zeta \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k),
\end{aligned}$$

wobei $M(t, 0) = 1$, $M(t, 1) = \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta$, $M(t, 2) = \alpha^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha \beta \varepsilon_{t-2}^2 + \beta^2$ und $M(t, k+1) = \alpha \varepsilon_{t-1}^2 M(t-1, k) + \beta M(t-1, k)$. Da ε_t unabhängig und identisch verteilt sind mit $E\varepsilon_t^2 = 1$, hängen die Momente von $M(t, k)$ nicht von t ab. Somit ist

$$E(M(t_1, k)) = E(M(t_2, k)),$$

für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
E(M(t, k+1)) &= E(\alpha \varepsilon_{t-1}^2 M(t-1, k) + \beta M(t-1, k)) \\
&= \alpha E(\varepsilon_{t-1}^2 M(t-1, k)) + \beta E(M(t-1, k)).
\end{aligned}$$

Da $M(t-1, k)$ nur von ε_{t-2} und $M(t-2, k-1)$ abhängig ist und die Innovationen unabhängig und identisch verteilt sind, gilt

$$\begin{aligned}
E(M(t, k+1)) &= \alpha E(M(t-1, k)) + \beta E(M(t-1, k)) \\
&= \alpha E(M(t, k)) + \beta E(M(t, k)) \\
&= E(M(t, k)) (\alpha + \beta) \\
&= E(\alpha \varepsilon_{t-1}^2 M(t-1, k-1) + \beta M(t-1, k-1)) (\alpha + \beta) \\
&= \dots \\
&= (\alpha + \beta)^{k+1} E(M(t, 0)) \\
&= (\alpha + \beta)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\text{Var}(R_t) = E(R_t^2) - (E(R_t))^2 = E(R_t^2) = E(Z_t^2 \varepsilon_t^2) = E(Z_t^2) \quad (1.4)$$

und weiter

$$\begin{aligned} E(Z_t^2) &= E\left(\zeta \sum_{k=0}^{\infty} M(t, k)\right) = \zeta \sum_{k=0}^{\infty} E(M(t, k)) = \zeta \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + \beta)^k \\ &= \zeta (1 - (\alpha + \beta))^{-1}, \end{aligned}$$

genau dann, wenn $\alpha + \beta < 1$. Wegen (1.4) ist $E(R_t^2) < \infty$ äquivalent zu $\alpha + \beta < 1$ und $\text{Var}(R_t) = \frac{\zeta}{1 - \alpha - \beta}$. Analog zur Gleichung (1.4) ist $E(R_t) = 0$ für $t \in \mathbb{Z}$. Weiter ist ε_{t+k} unabhängig von ε_{t+1} , Z_{t+1} und Z_{t+k} mit $Z_{t+k} = \sigma_{t+k}(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1, t+k-1})$. Aus $E(\varepsilon_t^2), E(R_t^2) < \infty$ für $t \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\begin{aligned} \text{Kov}(R_{t+1}, R_{t+k}) &= E(R_{t+1} R_{t+k}) - E(R_{t+1})E(R_{t+k}) \\ &= E(Z_{t+1} \varepsilon_{t+1} Z_{t+k} \varepsilon_{t+k}) \\ &= E(\varepsilon_{t+k})E(Z_{t+1} \varepsilon_{t+1} Z_{t+k}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

für $k = 2, \dots, n$. □

Bemerkung 1.2.3. *Ohne die Zusatzbedingung $ER_t^2 < \infty$ ist der Prozess aus Definition 1.2.1 nicht notwendigerweise schwach stationär, siehe Bemerkung 1.1.2.*

Um die Darstellung der bedingten Verteilung zu spezifizieren und somit auch die bedingte Dichte und Verteilungsfunktion anzugeben, wird die Beziehung von ARCH(∞)-Zeitreihen und GARCH(1,1)-Zeitreihen verwendet, siehe Fan u. Yao (2003), Abschnitt 4.2. Zunächst wird dafür die Definition von ARCH(p)-Zeitreihen eingeführt.

Definition 1.2.4 (ARCH(p)–Zeitreihe). *Der Prozess*

$$R_t = Z_t \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.5)$$

mit $Z_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t-i}^2$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, p$ ist eine ARCH(p)–Zeitreihe („autoregressive, conditionally heteroskedastic“) falls der Prozess strikt stationär ist, wobei die Folge von Innovationen $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ein striktes weißes Rauschen ist mit $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = 1$ und ε_t unabhängig von $\{R_{t-k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ für alle t .

Lemma 1.2.5. *Eine GARCH(1,1)–Zeitreihe, die der Definition 1.2.1 genügt mit $\alpha + \beta < 1$, kann als ARCH(∞)–Zeitreihe dargestellt werden, wobei*

$$Z_t^2 = \frac{\zeta}{1 - \beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j R_{t-j-1}^2 \quad (1.6)$$

für $t \in \mathbb{Z}$.

Beweis

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= \zeta + \alpha R_{t-1}^2 + \beta Z_{t-1}^2 = \zeta + \alpha R_{t-1}^2 + \beta (\zeta + \alpha R_{t-2}^2 + \beta Z_{t-2}^2) \\ &= \zeta + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \zeta + \beta \alpha R_{t-2}^2 + \beta^2 Z_{t-2}^2 \\ &= \zeta + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \zeta + \beta \alpha R_{t-2}^2 + \beta^2 (\zeta + \alpha R_{t-3}^2 + \beta Z_{t-3}^2) \\ &= \zeta + \alpha R_{t-1}^2 + \beta \zeta + \beta \alpha R_{t-2}^2 + \beta^2 \zeta + \beta^2 \alpha R_{t-3}^2 + \beta^3 Z_{t-3}^2 \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \zeta \beta^j + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha \beta^j R_{t-j-1}^2. \end{aligned}$$

Da $\beta < 1$, gilt

$$Z_t^2 = \frac{\zeta}{1 - \beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j R_{t-j-1}^2.$$

□

Hieraus erhält man wohlbekannte Eigenschaften von GARCH(1,1)–Zeitreihen.

Bemerkung 1.2.6 (Eigenschaften von GARCH(1,1)–Zeitreihen). *Für eine GARCH(1,1)–Zeitreihe, die der Definition 1.2.1 genügt, mit*

$$\sigma_{t+i}(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}) := z_{t+i} = \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}, \quad i = 2, \dots, n,$$

bzw.

$$\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t) := z_{t+1} = \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2},$$

gilt Folgendes:

- (i) *Gemeinsame Dichte: Die gemeinsame Dichte von R_{t+1}, \dots, R_{t+n} bedingt nach $\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t$ hat die Gestalt*

$$\begin{aligned} & f(r_{t+n}, \dots, r_{t+1} | \mathbf{x}_t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}} f\left(\frac{r_{t+1}}{\sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}}\right) \\ & \cdot \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}} f\left(\frac{r_{t+i}}{\sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}}\right), \end{aligned}$$

(siehe Reiss u. Thomas (2007), Abschnitt 16.8.).

- (ii) *Bedingte Erwartung: Für die bedingte Erwartung von R_{t+i} bedingt nach $(\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1})$ mit $i = 2, \dots, n$ bzw. $\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t$ für $i = 1$ gilt*

$$E(R_{t+i} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}) = 0,$$

bzw.

$$E(R_{t+1} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) = 0,$$

(siehe Fan u. Yao (2003), Abschnitt 4.2)

(iii) *Bedingte Varianz:* Für die bedingte Varianz von R_{t+i} mit $i = 2, \dots, n$ bedingt nach $(\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1})$ erhält man

$$\text{Var}(R_{t+i} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}) = \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}$$

bzw. für die bedingte Varianz von R_{t+1} gegeben $\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t$

$$\text{Var}(R_{t+1} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) = \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2},$$

(siehe Fan u. Yao (2003), Abschnitt 4.2)

(iii) *Momente:* Für die Existenz und die Gestalt der Momente von R_t gilt, dass für $m > 0$ das m -te Moment $E(\sigma_t^{2m})$ von σ_t^2 genau dann existiert, wenn

$$E(\beta + \alpha \varepsilon_1^2)^m < 1. \quad (1.7)$$

Sei $\mu_j := E(\sigma_t^{2j})$ j -tes Moment von σ_t^2 . Falls $m \in \mathbb{N}$ und die Bedingung (1.7) erfüllt ist, dann ist das $2m$ -te Moment von R_t gegeben durch

$$E(R_t^{2m}) = E(\varepsilon_1^{2m}) \left((1 - E(\beta + \alpha \varepsilon_1^2)^m)^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} \zeta^{m-j} E(\beta + \alpha \varepsilon_1^2)^j \mu_j \right),$$

siehe Bollerslev (1986), Lindner (2009) und He u. Teräsvirta (1997).

(iv) *Kurtosis:* Als Maß für die Schwere der Flanken kann man die Kurtosis verwenden. Für die Kurtosis der Innovationen ε_t gilt

$$\kappa(\varepsilon_t) = \frac{E((\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))^4)}{(E((\varepsilon_t - E(\varepsilon_t))^2))^2} = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{(E(\varepsilon_t^2))^2}, \quad (1.8)$$

da $E(\varepsilon_t) = 0$. Wegen der Gleichung (1.8) ist die bedingte Kurtosis von R_{t+i} gegeben $(\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1})$ für $i = 2, \dots, n$ darstellbar als

$$\begin{aligned}
& \kappa(R_{t+i} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}) \\
&= \frac{E(R_{t+i}^4 | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1})}{(E(R_{t+i}^2 | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}))^2} \\
&= \frac{E(\sigma_{t+i}^4(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1}) \varepsilon_{t+i}^4 | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1})}{(E(\sigma_{t+i}^2(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1}) \varepsilon_{t+i}^2 | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}))^2} \\
&= \frac{\sigma_{t+i}^4(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}) E(\varepsilon_{t+i}^4 | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1})}{\sigma_{t+i}^4(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}) (E(\varepsilon_{t+i}^2 | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}))^2} \\
&= \kappa(\varepsilon_{t+i}).
\end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass die bedingte Kurtosis von R_{t+i} gegeben $(\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1})$ gleich der Kurtosis der Innovationen ε_{t+i} ist. Für die unbedingte Kurtosis gilt mit der Erwartungswertgleichung folgende Beziehung

$$\begin{aligned}
\kappa(R_{t+i}) &= \frac{E((R_{t+i} - E(R_{t+i}))^4)}{(E((R_{t+i} - E(R_{t+i}))^2))^2} \\
&\stackrel{L.1.2.2}{=} \frac{E(R_{t+i}^4)}{(E(R_{t+i}^2))^2} \\
&= \frac{E(E(R_{t+i}^4 | \mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1}))}{(E(E(R_{t+i}^2 | \mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})))^2} \\
&= \frac{E(\sigma_{t+i}^4(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})) E(\varepsilon_{t+i}^4)}{(E(\sigma_{t+i}^2(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})))^2 (E(\varepsilon_{t+i}^2))^2} \\
&\stackrel{(1.8)}{=} \frac{E(\sigma_{t+i}^4(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})) \kappa(\varepsilon_{t+i}) (E(\varepsilon_{t+i}^2))^2}{(E(\sigma_{t+i}^2(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})))^2 (E(\varepsilon_{t+i}^2))^2}.
\end{aligned}$$

Unter Anwendung der Jensenschen Ungleichung (siehe Anhang A) ist

$$E(\sigma_{t+i}^4(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})) \geq (E(\sigma_{t+i}^2(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})))^2$$

und somit

$$\frac{E(\sigma_{t+i}^4(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1}))}{(E(\sigma_{t+i}^2(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})))^2} \geq 1.$$

Hieraus kann abgeleitet werden, dass die unbedingte Kurtosis von R_{t+i} größer gleich der bedingten Kurtosis und der Kurtosis der Innovationen ε_{t+i} ist, d.h. $\kappa(R_{t+i}) \geq \kappa(R_{t+i}|\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}) = \kappa(\varepsilon_{t+i})$ für $i = 2, \dots, n$, vgl. Fan u. Yao (2003), Abschnitt 4.2. Analoges gilt für R_{t+1} gegeben $\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t$.

- (v) *Flankenindex*: Ein besseres Maß um die Schwere der Flanken zu messen ist der Flankenindex, der von Kesten (1973) eingeführt wurde, siehe Goldie (1991) und Embrechts u. a. (1997). Sei $R_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R_t$. Besitzt ε_1 eine positive Dichte auf \mathbb{R} , so dass $E(|\varepsilon_1|^h) < \infty$ für $h < h_0$ und $E(|\varepsilon_1|^{h_0}) = \infty$ für ein geeignetes $h_0 \in (0, \infty]$, dann existiert ein $\kappa > 0$, so dass

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{P(|R_\infty| > sx)}{P(|R_\infty| > s)} = x^{-2\kappa},$$

Davis u. Mikosch (2009), Korollar 1. Dies bedeutet, dass die Verteilungsfunktion von $|R_\infty|$ ab einem vorgegebenen Wert x fällt wie $x^{-2\kappa}$ und man nennt R_∞ regulär variierend mit Index 2κ . Kleineres bzw. größeres κ bedeutet eine stärkere bzw. schwächere Flanke, Davis u. Mikosch (2009). Um nun eine Verbindung der Koeffizienten und des Flankenindex herzustellen, stellt man die GARCH(1,1)–Zeitreihe als sogenannte stochastische Rekurrenz–Gleichung dar. Hierdurch kann abgeleitet werden, dass

$$E((\alpha\varepsilon_1^2 + \beta)^\kappa) = 1.$$

Diese Gleichung kann nicht explizit nach κ gelöst werden. Somit muss der Flankenindex numerisch oder durch Monte–Carlo–Simulationen ermittelt werden. Weiteres kann in Basrak u. a. (2002), Resnick u. Starica (1996) nachgelesen werden.

- (vi) *Bedingter Maximum–Likelihood–Schätzer*: Im Fall von normalverteilten Innovationen ε_t erhält man unter Maximierung der zugehörigen gemeinsamen Dichte von R_{t+1}, \dots, R_{t+n} bedingt nach $\mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t$ in (i) einen konsistenten und asymptotisch normalverteilten Schätzer $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N$ für $\boldsymbol{\vartheta} = (\zeta, \alpha, \beta)^t$. Diese Eigenschaften von $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N$ bleiben auch erhalten, falls die Innovationen ε_t nicht normalverteilt sind, sondern lediglich iid mit $E(\varepsilon_t) = 0$ und $E(\varepsilon_t^4) < \infty$, siehe McNeil u. a. (2005), Abschnitt 4.3, Hall u. Yao (2003), Lee u. Hansen (1994),

Lumsdaine (1996).

In Kapitel 5 erfolgt mittels der Maximum-Likelihood-Schätzmethode eine Anpassung von GARCH(1,1)-Zeitreihen an einige Datensätze. Aufgrund der genannten Resultate können zunächst die unbekannt Parameter ζ , α und β ohne Berücksichtigung der Verteilung der Innovationen geschätzt werden. Anschließend kann die Verteilung der Innovationen mittels der Standardisierung

$$\hat{\varepsilon}_{t+i} = \frac{r_{t+i}}{\sqrt{\frac{\hat{\zeta}}{1-\hat{\beta}} + \hat{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\beta}^j r_{t+i-j-1}^2}}$$

für $i = 1, \dots, n$ überprüft und angepasst werden, siehe Fan u. Yao (2003), Abschnitt 4.2.

1.3. Prognose

Ziel der Prognose ist es, einen funktionalen Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen herzustellen. Im Zusammenhang mit Zeitreihen ist insbesondere eine Prognose für ein Folgenglied X_t basierend auf einem oder mehreren vorhergehenden Folgengliedern X_s , $s < t$, von Interesse. In diesem Abschnitt werden diesbezüglich die Prognose in stochastischen Volatilitätszeitreihen und speziell GARCH(1,1)-Zeitreihen untersucht.

Dieser Abschnitt stellt zunächst den Begriff der Prognose im Allgemeinen dar, siehe Hamilton (1994), Kapitel 4 und Reiss u. Thomas (2007), Abschnitt 8.1. Zuerst wird die Definition der Prognose im Allgemeinen eingeführt.

Definition 1.3.1 (Prognose). Gegeben seien die Zufallsvariablen $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (S, \mathcal{B})$ und $Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (T, \mathcal{C})$. Sei $Z := g(X)$ mit $g : (S, \mathcal{B}) \rightarrow (T, \mathcal{C})$, dann heißt

- (i) $Z = g(X)$ Prognose für Y basierend auf X ,
- (ii) $g(x)$ Prognose für $y \in T$ basierend auf $x \in S$.

Hierbei wird unterstellt, dass $x \in S$ beobachtet wurde, bzw. dass X beobachtbar und g bekannt ist.

Man beachte, dass jede T -wertige Zufallsvariable $Z = g(X)$ eine Prognose für Y basierend auf X ist. Daraus ergibt sich die Fragestellung nach der Güte einer solchen Prognose, die die Abweichung von Z und Y quantifiziert. Um die Güte der Prognose zu spezifizieren, wird eine Verlustfunktion (oder Kostenfunktion) eingeführt, die folgendermaßen definiert ist.

Definition 1.3.2 (Verlustfunktion). *Die Abbildung $C : T \times T \rightarrow [0, \infty]$ heißt Verlustfunktion oder Kostenfunktion, falls $\forall y \in T : C(y, y) = 0$.*

Dies bedeutet im Rahmen des Prognosebegriffs, falls $g(x)$ gleich y ist, dann ist der Verlust gleich null. Mit einer gegebenen Verlustfunktion kann die Güte einer Prognose Z für Y z.B. durch den erwarteten Verlust (oder Risiko) $E(C(Z, Y))$ quantifiziert werden. Nicht nur die Güte der Prognose ist von Interesse, sondern die optimale Prognose, da die positiven Kosten unter der gegebenen Verlustfunktion möglichst minimal sein sollen. Im Folgenden wird diejenige Prognose $g(X)$ als optimal bezeichnet, bei der der erwartete Verlust über alle messbaren Abbildungen $g : (S, \mathcal{B}) \rightarrow (T, \mathcal{C})$ minimal wird. Sei $\mathcal{M} := \{g : (S, \mathcal{B}) \rightarrow (T, \mathcal{C})\}$ die Menge aller dieser messbaren Abbildungen.

Definition 1.3.3 (Optimale Prognose). *$Z^* = g^*(X)$ sei eine Prognose für Y unter X und g^* eine messbare Abbildung. Dann heißt Z^* optimale Prognose von Y unter X bezüglich der Verlustfunktion C , falls*

$$E(C(Y, Z^*)) = \min_{g \in \mathcal{M}} \{E(C(Y, g(X)))\}. \quad (1.9)$$

In der Regel wird in der vorherigen Definition die quadratische Abweichung als Verlustfunktion verwendet.

Annahme 1.3.4 (Spezifizierung der Verlustfunktion). *Zunächst wird die quadratische Verlustfunktion*

$$C(y, z) = (y - z)^2$$

angenommen. Dann ist der erwartete Verlust oder das Risiko durch

$$E(C(Y, Z)) = E((Y - Z)^2) = \text{MSE}(Y, Z)$$

gegeben.

Der Ausdruck ist bekannt als mittlere quadratische Abweichung (MSE). Ziel ist es nun, die mittlere quadratische Abweichung zu minimieren und somit die optimale Prognose unter der quadratischen Verlustfunktion zu bestimmen.

Satz 1.3.5. Sei $Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann ist

$$E((Y - E(Y|X))^2) = \min_{g \in \mathcal{M}} E((Y - g(X))^2).$$

Somit ist $g^*(X) = E(Y|X) = E(Y|X = \cdot) \circ X$, falls g^* bekannt ist, die optimale Prognose bezüglich des MSE.

Für die Definition der bedingten Erwartung vergleiche Anhang A.

Der Satz sagt aus, dass die optimale Prognose unter der quadratischen Verlustfunktion die bedingte Erwartung von Y gegeben X bzw. $X = x$ ist. Für Anwendungen ist dies jedoch lediglich relevant, falls $g = E(Y|X = \cdot)$ bekannt ist. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird diese Problematik noch intensiv untersucht.

Im Folgenden werden nur reellwertige Zufallsvariablen betrachtet und es existiere die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x$. In diesem Fall ist

$$z = g(x) = E(Y|X = x) = \int y P(Y \in dy|X = x)$$

bzw.

$$Z = g(X) = E(Y|X)$$

die optimale Prognose basierend auf x bzw. X .

Zunächst erfolgt die Definition von Funktionalen bzw. Funktionalparametern, die für den nun vorgestellten Prognosebegriff von Bedeutung ist.

Definition 1.3.6 (Funktional und Funktionalparameter). Sei \mathcal{Q} eine Familie von bedingten Verteilungen von Y gegeben $X = x$. Dann heißt

$$\begin{aligned} \tau : \quad \mathcal{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ P(Y \in \cdot | X = x) &\mapsto \tau(P(Y \in \cdot | X = x)) \end{aligned}$$

Funktional und $\tau(P(Y \in \cdot | X = x))$ Funktionalparameter.

Zwischen der bedingten Erwartung von Y gegeben $X = x$ und der bedingten Verteilung gilt der Zusammenhang

$$\tau(P(Y \in \cdot | X = x)) = E(Y | X = x) = \int y P(Y \in dy | X = x),$$

d.h. die optimale Prognose von Y gegeben $X = x$ ist der Mittelwert, also ein Funktionalparameter, der bedingten Verteilung.

Folglich ist die bedingte Verteilung $P(Y \in \cdot | X = x)$ von zentraler Bedeutung, siehe Reiss u. Thomas (2007), Abschnitt 8.1.

Nachstehend wird nun eine andere Blickweise der Prognose eingeführt. Ziel ist die Prognose von Funktionalparametern der bedingten Verteilung. Offensichtlich ist ein Funktionalparameter der bedingten Verteilung $P(Y \in \cdot | X)$ eine Zufallsvariable

$$\tilde{Y} = h(X) = \tau(P(Y \in \cdot | X)) := \tau(P(Y \in \cdot | X = \cdot) \circ X)$$

mit h messbar. Im Sinne der obigen Definition ist infolgedessen die optimale Prognose von \tilde{Y} basierend auf X gegeben durch \tilde{Y} , da der MSE in diesem Fall sogar 0 wäre. In Anwendungen ist die bedingte Verteilung jedoch im Allgemeinen nicht bekannt und muss aus einer Lernstichprobe (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) mit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ geschätzt werden.

Eine Prognose für \tilde{Y} basierend auf X und der Lernstichprobe (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) ist gegeben durch

$$Z = \hat{h}_{(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}(X).$$

Als einfaches Beispiel kann die lineare Regression von Y basierend auf X im zufälligen Design angegeben werden, siehe Reiss u. Thomas (2007), Abschnitt 8. Seien (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, iid Kopien des Zufallvektors (X, Y) mit der Darstellung

$$Y = a + bX + \varepsilon,$$

wobei $E(\varepsilon) = 0$ und X und ε unabhängig sind. Man beachte, dass x die Realisation der Zufallsvariable X ist. Wegen Lemma 1.1.6 gilt

$$P(Y \in \cdot | X = x) = \mathcal{L}(a + bx + \varepsilon)$$

und daher

$$\begin{aligned}\tilde{y} = h(x) = \tau(P(Y \in \cdot | X = x)) = E(Y | X = x) &= \int y P(Y \in dy | X = x) \\ &= \int y d\mathcal{L}(a + bx + \varepsilon)(y) \\ &= a + bx.\end{aligned}$$

Ziel ist die Prognose von $E(Y|X)$ als Funktionalparameter der bedingten Verteilung $P((a + bX + \varepsilon) \in \cdot | X)$. Da die Parameter a und b nicht bekannt sind, müssen diese aus der Lernstichprobe (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) geschätzt werden und folglich ist

$$Z = \hat{h}_{(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}(X) = \hat{a} + \hat{b}X.$$

die Prognose für \tilde{Y} basierend auf X und der Lernstichprobe (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) . Darüber hinaus ist

$$P\left(\left(\hat{a} + \hat{b}X + \varepsilon\right) \in \cdot | X\right)$$

die Prognoseverteilung.

Der nachfolgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Prognosebildung in stochastischen Volatilitätszeitreihen.

1.3.1. Prognose in stochastischen Volatilitätszeitreihen

Mit den Bezeichnung im vorherigen Abschnitt 1.1 setze $Y = R_i$ und $\mathbf{X} = (X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ für $i = 2, \dots, n$ und $\mathbf{X} = X_0$ im Fall von $i = 1$. Man beachte, dass im Rahmen von stochastischen Volatilitätszeitreihen die Vergangenheit gleichzeitig auch die Lernstichprobe darstellt.

Zunächst wird auf die Prognose für die bedingte Erwartung von R_i , $i = 1, \dots, n$, basierend auf $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ bzw. X_0 eingegangen. Später wird das seriell bedingte q -Quantil von R_i gegeben $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ untersucht. Es werden also Funktionalparameter der bedingten Verteilung betrachtet. Das bedingte q -Quantil $F^{-1}(q | X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ bzw. $F^{-1}(q | X_0)$ basierend auf $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ bzw. X_0 wird in Anwendungen für die Prognose des seriell bedingten VaR in Finanzzeitreihen verwendet, sofern diese durch stochastische Volatilitätszeitreihen modelliert werden.

Gegeben sei nun eine stochastische Volatilitätszeitreihe R_1, \dots, R_n mit Anfangszustand X_0 .

Prognoseverteilung

Zunächst wird der Begriff der bedingten Verteilung im Zusammenhang mit stochastischen Volatilitätszeitreihen spezifiziert.

Im Rahmen dieser Zeitreihen besitzt die bedingte Verteilung nach Satz 1.1.7 die Gestalt

$$P(Y \in \cdot | X) := P(R_i \in \cdot | X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) = P(\sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \varepsilon_i \in \cdot | X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}). \quad (1.10)$$

In Anwendungen sind zumeist die Parameter $\sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ unbekannt. Die bedingte Verteilung mit geschätzten $\hat{\sigma}_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ wird im Folgenden als Prognoseverteilung bezeichnet. Die in dieser Promotionsarbeit und in Reiss u. Thomas (2007), Abschnitt 8.1, als bedingte Verteilung bezeichnete Verteilung $P(Y \in \cdot | X)$ wird in Fan u. Yao (2003), Seite 454, bereits als Prognoseverteilung angesprochen.

Prognose der seriell bedingten Erwartung

In diesem Fall wird der zu prognostizierende Funktionalparameter als die bedingte Erwartung von R_i gegeben $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ gewählt d.h.

$$\tilde{Y} = E(R_i | X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}).$$

Im weiteren Verlauf wird lediglich auf den Fall $i = 2, \dots, n$ eingegangen. Für $i = 1$ können analoge Rechnungen durchgeführt werden.

Laut Satz 1.1.7, der Aussagen über die bedingte Erwartung in stochastischen Volatilitätszeitreihen liefert, gilt

$$\begin{aligned} E(R_i | X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) &= E(\sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \varepsilon_i | X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \\ &= \sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \cdot E(\varepsilon_i) \\ &=: h(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}). \end{aligned}$$

In Anwendungen sind jedoch die bedingte Verteilung und daher σ_i in stochastischen

Volatilitätszeitreihen unbekannt. Dann liefert

$$\hat{h}(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) := \hat{\sigma}_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \cdot \mathbf{E}(\varepsilon_i)$$

nach geschätztem $\hat{\sigma}_i$ basierend auf $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ eine sinnvolle Prognose der bedingten Erwartung von R_i gegeben $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$.

Prognose des seriell bedingten q -Quantils

Strebt man in einem weiteren Schritt Risikobetrachtungen im Sinne des VaR an, so wird der zu prognostizierende Funktionalparameter als das bedingte q -Quantil

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &:= F^{-1}(q|X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) = \sigma_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \cdot F^{-1}(q) \\ &= h_q(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \end{aligned}$$

für $i = 2, \dots, n$ bzw. für $i = 1$

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &:= F^{-1}(q|X_0) = \sigma_1(X_0) \cdot F^{-1}(q) \\ &= h_q(X_0) \end{aligned}$$

gewählt. F stellt hierbei die Verteilungsfunktion der Innovationen ε_i für $i = 1, \dots, n$ dar.

Analog zum vorhergehenden Abschnitt ist $h_q(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$ die Prognose basierend auf $(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1})$, wobei jedoch wieder in Anwendungen die σ_i unbekannt sind. Dann erhält man durch

$$\hat{h}_q(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) := \hat{\sigma}_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}) \cdot F^{-1}(q)$$

eine sinnvolle Prognose für das bedingte q -Quantil.

1.3.2. Prognose in GARCH(1,1)-Zeitreihen

Beim Übertragen der Prognosefragestellung in stochastischen Volatilitätszeitreihen auf den Spezialfall von GARCH(1,1)-Zeitreihen ersetze X_0 durch \mathbf{X}_t , R_i durch R_{t+i} und σ_i durch σ_{t+i} .

Im Fall von GARCH(1,1)–Zeitreihen ist

$$\sigma_{t+i}(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1}) := Z_{t+i} = \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j R_{t+i-j-1}^2}$$

für $i = 2, \dots, n$, d.h. σ_{t+i} enthält die unbekannt Parameter α, β und ζ . Man betrachtet nun die Versionen mit geschätzten Parametern, also für $i = 2, \dots, n$

$$\hat{h}(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1}) = 0,$$

da $E(\varepsilon_{t+i})=0$ (siehe Definition 1.2.1 einer GARCH(1,1)–Zeitreihe), und für das bedingte q –Quantil

$$\begin{aligned} \hat{h}_q(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1}) & \quad (1.11) \\ &= \sqrt{\frac{\hat{\zeta}_{(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+i-1})}}{1 - \hat{\beta}_{(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+i-1})}} + \hat{\alpha}_{(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+i-1})} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\beta}_{(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+i-1})}^j R_{t+i-j-1}^2} \cdot F^{-1}(q) \end{aligned}$$

als sinnvolle Prognose für die bedingte Erwartung und das bedingte q –Quantil basierend auf $(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+1,t+i-1})$.

Für $\hat{\alpha}_{(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+i-1})}$, $\hat{\beta}_{(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+i-1})}$ und $\hat{\zeta}_{(\mathbf{X}_t, \mathbf{R}_{t+i-1})}$ kann z.B. der Maximum–Likelihood–Schätzer verwendet werden. Der Fall $i = 1$ folgt analog mit

$$\sigma_{t+1}(\mathbf{X}_t) := Z_{t+1} = \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j R_{t-j}^2}.$$

Hierdurch können später in Abschnitt 3.3 Bemerkungen bezüglich Prognosen des seriell bedingten n –Tages VaR vorgenommen werden.

Kapitel 2.

Approximative bedingte Unabhängigkeit in GARCH(1,1)- und stochastischen Volatilitätszeitreihen

Im vorhergehenden Kapitel wurden stochastische Volatilitätszeitreihen und der Spezialfall der GARCH(1,1)-Zeitreihe vorgestellt. In diesem Abschnitt soll nun gezeigt werden, dass n aufeinander folgende Zufallsvariablen, die einer GARCH(1,1)-Zeitreihe folgen, approximativ iid bedingt auf der Vergangenheit der Zeitreihe sind.

In diesem Zusammenhang wird der Parameter der bedingten iid Approximation eingeführt, der den Unterschied der Verteilung von n aufeinander folgenden Elementen einer stochastischen Volatilitätszeitreihe und der Verteilung von iid Zufallsvariablen quantifiziert. Dieser Parameter wird genauer für GARCH(1,1)-Zeitreihen untersucht und im Zusammenhang mit diesen Zeitreihen wird ebenfalls approximative bedingte Unabhängigkeit betrachtet.

In Abschnitt 2.1 wird der Variationsabstand und der Parameter der bedingten iid Approximation eingeführt. Im darauf folgenden Abschnitt 2.2 wird dieser Parameter in Bezug auf stochastische Volatilitätszeitreihen näher untersucht und in Abschnitt 2.3 auf den Spezialfall der GARCH(1,1)-Zeitreihen eingegangen. In diesem Zusammenhang werden weitere Eigenschaften des Parameters der bedingten iid Approximation vorgestellt. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit der bedingt unabhängigen Approximation in Bezug auf GARCH(1,1)-Zeitreihen. Dabei wird die

Forderung nach iid Zufallsvariablen fallengelassen und lediglich unabhängige Zufallsvariablen betrachtet. Zudem werden die Unterschiede der beiden Approximationen dargestellt.

2.1. Der Parameter der bedingten iid Approximation

Zunächst werden einige Begrifflichkeiten wiederholt, die ausschlaggebend sind für die weitere Betrachtung, z.B. bedingte Unabhängigkeit, die in Chow u. Teicher (1978), Abschnitt 7.3, und Reiss u. Thomas (2007), Abschnitt 8.1, zu finden ist. Der Begriff approximativ bedingt iid wird in diesem Zusammenhang neu eingeführt.

Definition 2.1.1 (Variationsabstand). *Seien X und Y Zufallsvariablen mit Werten in einem messbaren Raum (S, \mathcal{B}) . Der Variationsabstand zwischen den Verteilungen $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(Y)$ ist gegeben durch*

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| := \sup_{B \in \mathcal{B}} |P\{X \in B\} - P\{Y \in B\}|.$$

Falls die μ -Dichten f und g von $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(Y)$ existieren, dann gilt

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| = \frac{1}{2} \int |f - g| d\mu. \quad (2.1)$$

Als Referenz siehe Reiss (1989), Abschnitt 3.3.

Definition 2.1.2 (Bedingte Unabhängigkeit). *Sei \mathbf{X} ein Zufallsvektor mit Werten in einem messbaren Raum (S, \mathcal{B}) und die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n besitzen Werte in einem messbaren Raum (T, \mathcal{C}) . Die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n werden bedingt unabhängig bedingt nach $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ genannt, falls*

$$P\left((Y_1, \dots, Y_n) \in \prod_{i=1}^n C_i \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}\right) = \prod_{i=1}^n P^{Y_i \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}}\left(\prod_{i=1}^n C_i\right)$$

für $C_i \in \mathcal{C}$, wobei

$$\prod_{i=1}^n P^{Y_i \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}}\left(\prod_{i=1}^n C_i\right) := \prod_{i=1}^n P(Y_i \in C_i \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}).$$

Als Abschwächung dieser Bedingung wird nun der Parameter der bedingten iid Approximation eingeführt. Doch zuvor wird der Begriff ε -approximativ iid bedingt nach $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ vorgestellt.

Definition 2.1.3 (Bedingt ε -approximativ iid). *Die Zufallsvariablen Y_1, \dots, Y_n sind ε -approximativ iid bedingt nach $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, falls*

$$\left\| P((Y_1, \dots, Y_n) \in \cdot | \mathbf{X} = \mathbf{x}) - \prod_{i=1}^n P^{\tilde{Y}_i | \mathbf{X} = \mathbf{x}} \right\| \leq \varepsilon(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

mit

$$P(\tilde{Y}_i \in \cdot | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = P(Y_1 \in \cdot | \mathbf{X} = \mathbf{x}).$$

Definition 2.1.4 (Parameter der bedingten iid Approximation). *Der Parameter der bedingten iid Approximation von Y_1, \dots, Y_n gegeben \mathbf{x} ist definiert durch*

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{x}} &:= \psi(Y_1, \dots, Y_n | \mathbf{x}) \\ &:= \left\| P((Y_1, \dots, Y_n) \in \cdot | \mathbf{X} = \mathbf{x}) - \prod_{i=1}^n P^{\tilde{Y}_i | \mathbf{X} = \mathbf{x}} \right\| \end{aligned} \quad (2.3)$$

bzw. heißt

$$\begin{aligned} \psi &:= \psi(Y_1, \dots, Y_n) \\ &:= \int \left\| P((Y_1, \dots, Y_n) \in \cdot | \mathbf{X} = \mathbf{x}) - \prod_{i=1}^n P^{\tilde{Y}_i | \mathbf{X} = \mathbf{x}} \right\| d\mathcal{L}(\mathbf{X})(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

der Parameter der bedingten iid Approximation von Y_1, \dots, Y_n mit

$$P(\tilde{Y}_i \in \cdot | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = P(Y_1 \in \cdot | \mathbf{X} = \mathbf{x}).$$

2.2. Approximativ bedingt iid in stochastischen Volatilitätszeitreihen

Der nachfolgende Satz liefert eine obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation im Rahmen von stochastischen Volatilitätszeitreihen. Hierbei werden Y_1, \dots, Y_n ersetzt durch R_{t+1}, \dots, R_{t+n} und \mathbf{X} ersetzt durch den Anfangszustand X_t . Das Resultat zeigt, dass die obere Schranke lediglich von den bedingten

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

Randverteilungen der einzelnen Zufallsvariablen R_{t+i} und R_{t+1} für $i = 2, \dots, n$ abhängt.

Satz 2.2.1. *Sei R_{t+1}, \dots, R_{t+n} eine stochastische Volatilitätszeitreihe mit Anfangszustand X_t wie in Definition 1.1.3. Es gilt*

$$\begin{aligned} & \psi(R_{t+1}, \dots, R_{t+n} | x_t) \\ & \leq \sum_{i=2}^n \int \|P(R_{t+i} \in \cdot | \mathbf{R}_{t+1, t+i-1} = \mathbf{r}, X_t = x_t) \\ & \quad - P(R_{t+1} \in \cdot | X_t = x_t)\| d(\mathcal{L}(R_{t+1}))^{i-1}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

wobei $(\mathcal{L}(R_{t+1}))^{i-1} = \mathbf{X}_{k=1}^{i-1} \mathcal{L}(R_{t+1})$.

Für den Beweis dieses Resultats werden Hilfsresultate in Form von Lemma 2.2.2 sowie der Korollare 2.2.5 und 2.2.6 herangezogen. Im Folgenden gelte die nachstehende Voraussetzung:

Allgemeine Voraussetzung *Seien $X, \tilde{X}, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}$ Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum (S, \mathcal{B}) mit X unabhängig von ε und $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$ unabhängig von \tilde{X} . Des Weiteren seien $g, \tilde{g} : (S \times S, \mathcal{B} \times \mathcal{B}) \rightarrow (T, \mathcal{C})$ messbare Funktionen und $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(\tilde{X})$ die Verteilungen von X und \tilde{X} .*

Lemma 2.2.2 zeigt, dass sich der Variationsabstand von gewissen verbundenen Verteilungen wie sie z.B. in stochastischen Volatilitätszeitreihen auftreten, abschätzen lässt, indem der Variationsabstand der jeweils ersten Randverteilungen und der ausintegrierte Variationsabstand von bestimmten Verteilungen der zweiten Komponente betrachtet wird.

Lemma 2.2.2. *Es gilt*

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})) \| \\ & \leq \| \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \| + \int \| \mathcal{L}(g(x, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon})) \| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x). \end{aligned}$$

Beweis Mit Hilfe der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned}
 & \|\mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon}))\| \\
 & \leq \left\| \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) \right\| \\
 & \quad + \left\| \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})) \right\| \\
 & \leq \|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(\tilde{X})\| + \int \|\mathcal{L}(g(x, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon}))\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x), \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung noch zu zeigen ist. Der Beweis dazu wird separat auf zwei verschiedenen Wegen geführt (mit und ohne Annahme von Dichten). \square

Hierzu werden einige Hilfsresultate benötigt. Der Beweis der Ungleichung (2.5) wird in zwei Teile aufgliedert. Zum einen erfolgt der Beweis im allgemeinen Fall unter der Benutzung des Konvexitäts- und Monotoniesatzes (Lemmata A.0.3 und A.0.2 im Anhang A) und zum anderen mit Hilfe der gemeinsamen Dichten. Der Spezialfall, dass eine gemeinsame Dichte von X und $g(X, \varepsilon)$ bzw. von \tilde{X} und $\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})$ existiert, wird ebenfalls gezeigt, da im Fall der Berechnung des Parameters der bedingten iid Approximation von GARCH(1,1)-Zeitreihen die gemeinsamen Dichten existieren (vgl. Abschnitt 2.3).

Beweis mittels Konvexitäts- und Monotoniesatz

Zunächst werden die Lemmata A.0.3 und A.0.2 im Anhang A für den Beweis von Ungleichung (2.5) verwendet. Für eine Referenz siehe Reiss (1993), Abschnitte 1.4 und 3.1.

Beweis von Ungleichung (2.5) Um die Ungleichung zu beweisen, wird gezeigt, dass

$$\left\| \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) \right\| \leq \|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(\tilde{X})\| \quad (2.6)$$

und

$$\left\| \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})) \right\| \leq \int \|\mathcal{L}(g(x, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon}))\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x). \quad (2.7)$$

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

Für die linken Seiten der Ungleichungen (2.6) und (2.7) mit $G(\cdot|x) = \delta_x \times \mathcal{L}(g(x, \varepsilon))$ und $(G\mathcal{L}(X))(B \times C) = \int G(B \times C|x) d\mathcal{L}(X)(x)$ für $B \times C \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ gilt

$$\left\| \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) \right\| = \|G\mathcal{L}(X) - G\mathcal{L}(\tilde{X})\|$$

und

$$\left\| \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})) \right\| = \|G\mathcal{L}(\tilde{X}) - \tilde{G}\mathcal{L}(\tilde{X})\|.$$

Dies ergibt sich, da sich $\mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon))$ darstellen lässt als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon))(B \times C) &= P\{X \in B, g(X, \varepsilon) \in C\} \\ &= \int_B P(g(X, \varepsilon) \in C|X = x) d\mathcal{L}(X)(x) \end{aligned}$$

und mit der Unabhängigkeit von ε und X folgt mittels Lemma 1.1.6, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon))(B \times C) &= \int_B \mathcal{L}(g(x, \varepsilon))(C) d\mathcal{L}(X)(x) \\ &= \int \delta_x(B) \mathcal{L}(g(x, \varepsilon))(C) d\mathcal{L}(X)(x), \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei $\delta_x(B) := 1_B(x)$, $B \in \mathcal{B}$, das Dirac-Maß mit Masse 1 in x ist. Somit gilt

$$\mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon))(B \times C) = \int (\delta_x \times \mathcal{L}(g(x, \varepsilon)))(B \times C) d\mathcal{L}(X)(x) \quad (2.9)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon))(B \times C) &= \int G(B \times C|x) d\mathcal{L}(X)(x) \\ &= (G\mathcal{L}(X))(B \times C). \end{aligned}$$

Mit $\mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon))$ und $\mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon}))$ wird analog verfahren, wobei $\tilde{G}(\cdot|x) = \delta_x \times \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon}))$.

Unter Anwendung der Lemmata A.0.2 und A.0.3 ist die Ungleichung (2.6) be-

wiesen, d.h.

$$\left\| \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) \right\| = \|G\mathcal{L}(X) - G\mathcal{L}(\tilde{X})\| \stackrel{L.A.0.2}{\leq} \|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(\tilde{X})\|.$$

Die linke Seite von (2.7) lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})) \right\| &= \|G\mathcal{L}(\tilde{X}) - \tilde{G}\mathcal{L}(\tilde{X})\| \\ &\stackrel{L.A.0.3}{\leq} \int \|G(\cdot|x) - \tilde{G}(\cdot|x)\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x). \end{aligned}$$

Somit ist noch zu zeigen, dass

$$\int \|G(\cdot|x) - \tilde{G}(\cdot|x)\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) = \int \|\mathcal{L}(g(x, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon}))\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x).$$

Dies folgt daraus, dass die ersten Komponenten in den einbezogenen Produktmaßen identisch sind. Da die erste Komponente dem Dirac-Maß entspricht und mit $D_x = \{y \in T : (x, y) \in D\}$, wobei $D \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, $x \in S$, ist

$$\begin{aligned} &\int \|G(\cdot|x) - \tilde{G}(\cdot|x)\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) \\ &= \int \|(\delta_x \times \mathcal{L}(g(x, \varepsilon))) - (\delta_x \times \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon})))\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) \\ &= \int \sup_{D \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}} |(\delta_x \times \mathcal{L}(g(x, \varepsilon)))(D) - (\delta_x \times \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon}))(D))| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) \\ &= \int \sup_{D \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}} \left| \int \mathcal{L}(g(x_0, \varepsilon))(D_{x_0}) d\delta_x(x_0) - \int \mathcal{L}(\tilde{g}(x_0, \tilde{\varepsilon}))(D_{x_0}) d\delta_x(x_0) \right| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) \\ &= \int \sup_{D \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}} |\mathcal{L}(g(x, \varepsilon))(D_x) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon}))(D_x)| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) \\ &= \int \sup_{C \in \mathcal{C}} |\mathcal{L}(g(x, \varepsilon))(C) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon}))(C)| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt, da zu jedem C und x D so gewählt werden kann, dass $C = D_x$. Setze hierzu $D = S \times C = \{(x, y) : x \in S, y \in C\}$, dann ist $D_x = \{y \in T : (x, y) \in D\} = \{y \in T : (x, y) \in S \times C\} = C$. Somit ist

$$\int \|G(\cdot|x) - \tilde{G}(\cdot|x)\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) = \int \|\mathcal{L}(g(x, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon}))\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x)$$

und damit ist die Ungleichung (2.7) und insgesamt (2.5) bewiesen. \square

Beweis unter Verwendung gemeinsamer Dichten

Im Folgenden wird nun unter Verwendung der gemeinsamen Dichten die Ungleichung (2.5) bewiesen. Zunächst werden zwei Lemmata vorgestellt, bei denen im Fall der Existenz der verbundenen Dichte die Ungleichungen (2.6) und (2.7) als Gleichungen formuliert werden können.

Lemma 2.2.3. *Es gelte $(X, g(X, \varepsilon))$ und $(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon))$ besitzen Dichten bezüglich des Produktmaßes $\mu \times \nu$. Dann gilt*

$$\left\| \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) \right\| = \left\| \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \right\|. \quad (2.10)$$

Beweis Setze $Y := g(X, \varepsilon)$ und $\tilde{Y} := g(\tilde{X}, \varepsilon)$. Des Weiteren besitze (X, Y) die Dichte $f(x, y) = f(y|x)f(x)$ und $\tilde{f}(x, y) = f(y|x)\tilde{f}(x)$ die gemeinsame Dichte von \tilde{X} und \tilde{Y} mit $f(x) > 0$ und $\tilde{f}(x) > 0$. Wegen der Unabhängigkeitsannahmen und Lemma 1.1.6 ist $f(y|x)$ sowohl die bedingte Dichte von Y bedingt nach $X = x$ als auch die bedingte Dichte von \tilde{Y} bedingt nach $\tilde{X} = x$. f und \tilde{f} bezeichnen die μ -Dichten der Verteilung von X und \tilde{X} , dann gilt

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{L}(X, g(X, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) \right\| \\ &= \left\| \mathcal{L}(X, Y) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \right\| = \frac{1}{2} \int \int |f(x, y) - \tilde{f}(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} \int \int |f(x) - \tilde{f}(x)| f(y|x) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2} \int |f(x) - \tilde{f}(x)| \int f(y|x) d\nu(y) d\mu(x) = \left\| \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \right\|, \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei $\int f(y|x) d\nu(y) = 1$. \square

Lemma 2.2.4. *Es gelte $(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon))$ und $(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon}))$ besitzen Dichten bezüglich des Produktmaßes $\mu \times \nu$ besitzen. Dann gilt*

$$\left\| \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})) \right\| = \int \left\| \mathcal{L}(g(x, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon})) \right\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x). \quad (2.12)$$

Beweis Setze $\tilde{Y} := g(\tilde{X}, \varepsilon)$ und $\bar{Y} := \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})$. Des Weiteren bezeichne $\tilde{f}(x, y)$ die gemeinsame Dichte von \tilde{X} und \tilde{Y} und $\bar{f}(x, y)$ ist die gemeinsame Dichte von \tilde{X} und \bar{Y} . Zudem sei $\tilde{f}(y|x) = \tilde{f}(x, y) / \tilde{f}(x)$ und $\bar{f}(y|x) = \bar{f}(x, y) / \bar{f}(x)$, $\tilde{f}(x) > 0$, wobei \tilde{f} die μ -Dichte der Verteilung von \tilde{X} bezeichnet.

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{L}(\tilde{X}, g(\tilde{X}, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon})) \right\| = \left\| \mathcal{L}(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \mathcal{L}(\tilde{X}, \bar{Y}) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \int \int \left| \tilde{f}(x, y) - \bar{f}(x, y) \right| d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int \tilde{f}(x) \frac{1}{2} \int \left| \tilde{f}(y|x) - \bar{f}(y|x) \right| d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int \left\| P(\tilde{Y} \in \cdot | \tilde{X} = x) - P(\bar{Y} \in \cdot | \tilde{X} = x) \right\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) \\ &= \int \left\| P(g(\tilde{X}, \varepsilon) \in \cdot | \tilde{X} = x) - P(\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\varepsilon}) \in \cdot | \tilde{X} = x) \right\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x) \\ &= \int \left\| \mathcal{L}(g(x, \varepsilon)) - \mathcal{L}(\tilde{g}(x, \tilde{\varepsilon})) \right\| d\mathcal{L}(\tilde{X})(x). \end{aligned}$$

□

Somit kann der Beweis der Ungleichung (2.5) unter Verwendung der gemeinsamen Dichten formuliert werden.

Beweis von Ungleichung (2.5) Unter Verwendung der Lemmata 2.2.3 und 2.2.4 folgt die Behauptung und es gilt Gleichheit in (2.5). □

Nachdem nun das Lemma 2.2.2 mit Hilfe des Konvexitäts- und Monotoniesatzes bzw. durch Existenz der verbundenen Dichten bewiesen wurde, erfolgt nun eine Übertragung von Lemma 2.2.2 auf den Variationsabstand der gemeinsamen Verteilungen von stochastischen Volatilitätszeitreihen.

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

Korollar 2.2.5. *Seien $X_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Für $i = 2, \dots, n$ definiere rekursiv*

$$X_i = g_i(\mathbf{X}_{1,i-1}, \varepsilon_i),$$

wobei $\mathbf{X}_{1,i-1} = (X_1, \dots, X_{i-1})$. Definiere gleichermaßen \tilde{X}_i basierend auf $\tilde{\varepsilon}_i$ und \tilde{g}_i . Des Weiteren seien $\tilde{X}_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ unabhängig. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{L}(\mathbf{X}_{1,n}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,n})\| \\ & \leq \|\mathcal{L}(X_1) - \mathcal{L}(\tilde{X}_1)\| \\ & \quad + \sum_{i=2}^n \int \|\mathcal{L}(g_i(\mathbf{x}_{1,i-1}, \varepsilon_i)) - \mathcal{L}(\tilde{g}_i(\mathbf{x}_{1,i-1}, \tilde{\varepsilon}_i))\| d\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,i-1})(\mathbf{x}_{1,i-1}). \end{aligned}$$

Beweis Unter Verwendung der Darstellung

$$\mathbf{X}_{1,i} = (\mathbf{X}_{1,i-1}, X_i) = (\mathbf{X}_{1,i-1}, g_i(\mathbf{X}_{1,i-1}, \varepsilon_i))$$

folgt die Behauptung mit Lemma 2.2.2 und Induktion über n , wobei $X = \mathbf{X}_{1,i-1}$, $\varepsilon = \varepsilon_i$ und $g = g_i$. Für den Induktionsanfang $n = 2$ gilt mit X_1 unabhängig von ε_2 , dass

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{L}(\mathbf{X}_{1,2}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,2})\| \\ & = \|\mathcal{L}(X_1, g_2(\mathbf{X}_{1,1}, \varepsilon_2)) - \mathcal{L}(\tilde{X}_1, \tilde{g}_2(\tilde{\mathbf{X}}_{1,1}, \tilde{\varepsilon}_2))\| \\ & \stackrel{L.2.2.2}{\leq} \|\mathcal{L}(X_1) - \mathcal{L}(\tilde{X}_1)\| \\ & \quad + \int \|\mathcal{L}(g_2(\mathbf{x}_{1,1}, \varepsilon_2)) - \mathcal{L}(\tilde{g}_2(\mathbf{x}_{1,1}, \tilde{\varepsilon}_2))\| d\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,1})(\mathbf{x}_{1,1}). \end{aligned}$$

Es gilt, dass $\mathbf{X}_{1,n-1}$ und ε_n unabhängig sind, da $\mathbf{X}_{1,n-1}$ mit rekursivem Einsetzen nur noch von $X_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}$ abhängt und unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit von $X_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ folgt für den Induktionsschritt von $n-1$ nach n mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{L}(\mathbf{X}_{1,n}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,n})\| \\ & = \|\mathcal{L}(\mathbf{X}_{1,n-1}, g_n(\mathbf{X}_{1,n-1}, \varepsilon_n)) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,n-1}, \tilde{g}_n(\tilde{\mathbf{X}}_{1,n-1}, \tilde{\varepsilon}_n))\| \\ & \stackrel{L.2.2.2}{\leq} \|\mathcal{L}(\mathbf{X}_{1,n-1}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,n-1})\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int \|\mathcal{L}(g_n(\mathbf{x}_{1,n-1}, \varepsilon_n)) - \mathcal{L}(\tilde{g}_n(\mathbf{x}_{1,n-1}, \tilde{\varepsilon}_n))\| d\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,n-1})(\mathbf{x}_{1,n-1}) \\
 \stackrel{\text{Ind.vor.}}{\leq} & \|\mathcal{L}(X_1) - \mathcal{L}(\tilde{X}_1)\| \\
 & + \sum_{i=2}^{n-1} \int \|\mathcal{L}(g_i(\mathbf{x}_{1,i-1}, \varepsilon_i)) - \mathcal{L}(\tilde{g}_i(\mathbf{x}_{1,i-1}, \tilde{\varepsilon}_i))\| d\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,i-1})(\mathbf{x}_{1,i-1}) \\
 & + \int \|\mathcal{L}(g_n(\mathbf{x}_{1,n-1}, \varepsilon_n)) - \mathcal{L}(\tilde{g}_n(\mathbf{x}_{1,n-1}, \tilde{\varepsilon}_n))\| d\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,n-1})(\mathbf{x}_{1,n-1}).
 \end{aligned}$$

□

Weiter wird Korollar 2.2.5 neu formuliert im bedingten Zusammenhang.

Korollar 2.2.6. Seien $X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Definiere $R_1 = g_1(X_0, \varepsilon_1)$ und

$$R_i = g_i(X_0, \mathbf{R}_{1,i-1}, \varepsilon_i), \quad i = 2, \dots, n, \quad (2.13)$$

wobei $\mathbf{R}_{1,i-1} = (R_1, \dots, R_{i-1})$. Definiere analog \tilde{R}_i basierend auf $X_0, \tilde{\varepsilon}_i$ und \tilde{g}_i . Dann,

$$\begin{aligned}
 & \|P(\mathbf{R}_{1,n} \in \cdot | X_0 = x_0) - P(\tilde{\mathbf{R}}_{1,n} \in \cdot | X_0 = x_0)\| \\
 & \leq \|\mathcal{L}(X_1) - \mathcal{L}(\tilde{X}_1)\| \\
 & \quad + \sum_{i=2}^n \int \|\mathcal{L}(g_i(x_0, \mathbf{x}_{1,i-1}, \varepsilon_i)) - \mathcal{L}(\tilde{g}_i(x_0, \mathbf{x}_{1,i-1}, \tilde{\varepsilon}_i))\| d\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{X}}_{1,i-1})(\mathbf{x}_{1,i-1}),
 \end{aligned}$$

wobei X_i und \tilde{X}_i rekursiv definiert sind wie in (2.13) mit X_0 ersetzt durch x_0 .

Beweis Man überprüfe, dass die bedingte Verteilung von $\mathbf{R}_{1,n}$ und $\tilde{\mathbf{R}}_{1,n}$ bedingt nach $X_0 = x_0$ dargestellt werden kann als die gemeinsamen Verteilungen von $\mathbf{X}_{1,i}$ und $\tilde{\mathbf{X}}_{1,i}$. Aufgrund dessen impliziert Korollar 2.2.5 die Behauptung. □

Nun kann der Beweis des Satzes 2.2.1 zusammengefasst werden, wobei dieser Satz das Hauptresultat der Arbeit darstellt.

Beweis von Satz 2.2.1 Der Satz folgt direkt aus Korollar 2.2.6 mit $g_1(x, y) = \sigma_{t+1}(x)y$, $g_i(x, \mathbf{r}, y) = \sigma_{t+i}(x, \mathbf{r})y$ und $\tilde{g}_1(x, y) = \tilde{g}_i(x, \mathbf{r}, y) = \sigma_{t+1}(x)y$. □

Dieses allgemeine Resultat vereinfacht nun die weiteren Berechnungen in den

Abschnitten 2.3 und 3, in denen speziell der Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen und dessen Übertragung auf die Prognose der oberen Schranke des bedingten n –Tages VaR thematisiert wird.

2.3. Approximativ bedingt iid in GARCH(1,1)–Zeitreihen

In diesem Abschnitt wird Satz 2.2.1 angewendet auf GARCH(1,1)–Zeitreihen. Bevor jedoch näher auf diese Anwendung eingegangen wird, wird zunächst der Variationsabstand für bestimmte Verteilungen untersucht.

Bedingung 2.3.1. *Sei Q eine symmetrische Verteilung mit Lebesgue–Dichte f und sei Q_σ die zugehörige Verteilung mit Skalenparameter σ . Es gelte $f(x) = f_\sigma(x)$ für genau zwei Werte x und für genau ein $\xi \in \mathbb{R}$ ist f auf $(-\infty, \xi)$ monoton wachsend und auf (ξ, ∞) monoton fallend.*

Satz 2.3.2. *Falls die Bedingung 2.3.1 erfüllt ist, gilt*

$$\begin{aligned} \|Q - Q_\sigma\| &= \frac{1}{2} \int |f(x) - f_\sigma(x)| dx = \frac{1}{2} \int \left| f(x) - \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| dx \\ &\leq |\sigma^2 - 1| C_{\max}, \end{aligned}$$

wobei C_{\max} das Maximum von $xf(x)$ für $x > 0$ ist.

Beweis Für Q und Q_σ mit Lebesgue–Dichten f und f_σ erhält man

$$\begin{aligned} \int |f(x) - f_\sigma(x)| dx &= \int \left| f(x) - \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| dx \\ &= 4 \left| F\left(-\frac{x^*}{\sigma}\right) - F(-x^*) \right| \\ &= 4 \left| F(x^*) - F\left(\frac{x^*}{\sigma}\right) \right|, \end{aligned}$$

wobei F die zu f gehörige Verteilungsfunktion ist und $-x^*$ und x^* sind die zwei Werte für die $f(x) = f_\sigma(x)$. Im Folgenden sei $\sigma > 1$. Die Aussage für $\sigma < 1$ kann

analog gezeigt werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \|Q - Q_\sigma\| &= \frac{1}{2} \int \left| f(x) - \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| dx = \frac{1}{2} \cdot 4 \left| F(x^*) - F\left(\frac{x^*}{\sigma}\right) \right| \\ &\leq 2f\left(\frac{x^*}{\sigma}\right) \left| x^* - \frac{x^*}{\sigma} \right| = 2 \cdot \frac{x^*}{\sigma} f\left(\frac{x^*}{\sigma}\right) |1 - \sigma| \\ &\leq 2|1 - \sigma| \max_{z \geq 0} z f(z) =: 2|1 - \sigma| C_{\max} \leq |\sigma^2 - 1| C_{\max}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus $\sigma > 1$ folgt. □

Sieht man sich die Spezialfälle der Normalverteilung und Student-Verteilung an, so ist die Bedingung $f(x) = f_\sigma(x)$ für genau zwei Werte x gültig und C_{\max} lässt sich einfach berechnen.

Bemerkung 2.3.3.

(i) Falls f die Standardnormalverteilungsdichte ist mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

dann gilt

$$C_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0.24.$$

(ii) Falls f die Standard-Student-Dichte ist mit Gestaltsparemeter $\kappa > 0$ und

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right) \sqrt{\pi} \sqrt{\kappa}} \left(1 + \frac{x^2}{\kappa}\right)^{-(1+\kappa)/2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

wobei $\Gamma(x)$ die Gamma-Funktion bezeichnet mit $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t) dt$, dann gilt

$$C_{\max} = \frac{\Gamma\left(\frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^{-(\kappa+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right) \sqrt{\pi} \sqrt{\kappa}}.$$

Im Fall der Normalverteilung kann man alternativ auch Lemma 12 in Pfanzagl (1973) anwenden. Dieses Resultat beschreibt den Variationsabstand von zwei d -

dimensionalen Normalverteilungen.

Lemma 2.3.4 (Variationsabstand von zwei Normalverteilungen). *Es gilt, dass*

$$\|N_{\mathbf{C}} - N_{\mathbf{I}}\| \leq d2^{d+1} \|\mathbf{C} - \mathbf{I}\|_2,$$

wobei $N_{\mathbf{C}}$ die d -dimensionale Normalverteilung mit Kovarianzmatrix \mathbf{C} darstellt. \mathbf{I} bezeichnet die Einheitsmatrix sowie $\|\cdot\|_2$ die euklidische Matrixnorm.

In Lemma 2.3.4 erhält man somit eine ähnliche obere Schranke mit der Konstanten $C_{\max} = 4$ anstelle der Konstanten $C_{\max} \approx 0.24$ aus Satz 2.3.2.

Die Sätze 2.2.1 und 2.3.2 liefern nun die Grundvoraussetzungen für das Hauptresultat, eine obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation für n aufeinander folgende Zufallsvariablen von GARCH(1,1)-Zeitreihen. Die Approximation hängt lediglich von den Parametern α und β der GARCH(1,1)-Zeitreihe und der Anzahl n der aufeinander folgenden Zufallsvariablen ab.

Satz 2.3.5. *Sei $\{R_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ eine GARCH(1,1)-Zeitreihe mit $ER_t^2 < \infty$, $\alpha + \beta < 1$ und $\mathcal{L}(\varepsilon_t) = Q$ genüge der Bedingung 2.3.1. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \psi(R_{t+1}, \dots, R_{t+n}) &\leq C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1-\beta} + 1 \right) \left(n - \frac{1-\beta^n}{1-\beta} \right) \\ &=: C_{\max} \cdot B(\alpha, \beta, n) \end{aligned} \tag{2.16}$$

mit C_{\max} definiert wie in Satz 2.3.2.

Bemerkung 2.3.6.

- (i) Für alle GARCH(1,1)-Zeitreihen, welche die Bedingungen $ER_t^2 < \infty$ und $\alpha + \beta < 1$ erfüllen, hängt die obere Schranke von ψ in Ungleichung (2.16) nicht von der Vergangenheit ab. Eine von der Vergangenheit abhängige Schranke $\psi_{\mathbf{x}_t}$ befindet sich im nachstehenden Beweis, siehe (2.20). D.h.

$$\psi(R_{t+1}, \dots, R_{t+n} | \mathbf{x}_t) \leq C_{\max} \cdot B(\alpha, \beta, n, \mathbf{x}_t).$$

- (ii) Eine Taylorentwicklung von

$$h(\beta) = 1 - \beta^n$$

um 1 mit der Zwischenstelle $\xi \in (\beta, 1)$ liefert

$$\begin{aligned} & C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1-\beta} + 1 \right) \left(n - \frac{1-\beta^n}{1-\beta} \right) \\ &= C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1-\beta} + 1 \right) \left(n - \frac{n(1-\beta) + 1/2(1-\beta)^2((n-n^2)\xi^{n-2})}{1-\beta} \right) \\ &\leq C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1-\beta} + 1 \right) (n - (n + 1/2(1-\beta)(n-n^2))), \end{aligned}$$

da sich ξ mit 1 abschätzen lässt und mit $\alpha < 1 - \beta$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned} C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1-\beta} + 1 \right) \left(n - \frac{1-\beta^n}{1-\beta} \right) &\leq (\alpha + 1 - \beta) \frac{n^2 - n}{2} \\ &= O(\alpha + 1 - \beta) \end{aligned}$$

für festes $n \in \mathbb{N}$. Die rechte Seite von Gleichung (2.16) ist somit von der Ordnung $O(\alpha + 1 - \beta)$ für $\beta \rightarrow 1$ und $\alpha \rightarrow 0$ einschließlich eines Terms n^2 .

Nachfolgend wird der Beweis des Hauptresultats Satz 2.3.5 vorgestellt.

Beweis von Satz 2.3.5 Aus vereinfachenden Gründen wird in Teil (a) zunächst der Fall für $n = 2$ verifiziert. In einem nächsten Schritt werden die notwendigen Modifikationen für den allgemeinen Fall in Teil (b) angegeben.

(a) Wendet man die Gleichung (2.1) und Bemerkung 1.2.6 (i) an, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left| f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) f_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}(r_{t+2}) \right. \\ & \quad \left. - \prod_{i=1}^2 f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+i}) \right| dr_{t+1} r_{t+2} \\ &= \int f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) \\ & \quad \cdot \frac{1}{2} \int |(f_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}(r_{t+2}) - f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+2}))| dr_{t+2} dr_{t+1}, \end{aligned}$$

wobei f die Lebesgue-Dichte von Q ist. Das innere Integral ist der Variationsabstand von zwei Verteilungen mit den verschiedenen Skalenparametern $\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})$ und $\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)$, der durch $\|Q_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)} - Q_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}\|$ bezeichnet

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

wird. Mit Satz 2.3.2 und Substitution von $y/\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)$ durch z gilt

$$\begin{aligned}
& \left\| Q_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})} - Q_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)} \right\| \\
&= \frac{1}{2} \int |f_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}(y) - f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(y)| dy \\
&= \frac{1}{2} \int \left| f_{\frac{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}}(z) - f(z) \right| dz \\
&= \left\| Q_{\frac{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}} - Q \right\| \stackrel{S.2.3.2}{\leq} C_{\max} \left| \frac{\sigma_{t+2}^2(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}{\sigma_{t+1}^2(\mathbf{x}_t)} - 1 \right|. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Und somit gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Darstellungen

$$\sigma_{t+1}^2(\mathbf{x}_t) = \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2$$

sowie

$$\sigma_{t+i}^2(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1, t+i-1}) = \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2$$

für $i = 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int \left| f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) f_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}(r_{t+2}) - \prod_{i=1}^2 f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+i}) \right| dr_{t+1} r_{t+2} \\
& \leq \int f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) \cdot C_{\max} \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} - 1 \right| dr_{t+1} \\
& \leq C_{\max} \int f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) \cdot \frac{\alpha r_{t+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} dr_{t+1} \\
& \quad + C_{\max} \int f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} - 1 \right| dr_{t+1} \\
& = C_{\max} \left(\alpha \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} + \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} - 1 \right| \right) \\
& \leq C_{\max} \left(\alpha + \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} - 1 \right| \right).
\end{aligned}$$

Da $\beta < 1$ erhält man, dass $\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2 < \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2$ und

somit

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha\beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} - 1 \right| &= 1 - \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha\beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} \\
 &= 1 - \beta \cdot \frac{\frac{\zeta}{(1-\beta)\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} \\
 &< 1 - \beta.
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int \left| \prod_{i=1}^2 f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+i}) - f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) f_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}(r_{t+2}) \right| dr_{t+1} r_{t+2} \\
 \leq C_{\max} (\alpha + 1 - \beta). \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

- (b) Des Weiteren werden nun die benötigten Modifikationen angegeben um die Aussage für $n \geq 3$ zu beweisen. In Analogie zu Teil (a) kann man eine obere Schranke von

$$\begin{aligned}
 \int & \| P(R_{t+i} \in \cdot | \mathbf{R}_{t+1, t+i-1} = \mathbf{r}, \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \\
 & - P(R_{t+1} \in \cdot | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \| d(\mathcal{L}(R_{t+1}))^{i-1}(\mathbf{r})
 \end{aligned}$$

ermitteln. Nach Satz 2.3.2 und der Gestalt von $\sigma_{t+i}^2(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1, t+i-1})$ ist

$$\int \| P(R_{t+i} \in \cdot | \mathbf{R}_{t+1, t+i-1} = \mathbf{r}, \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 & - P(R_{t+1} \in \cdot | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \| d(\mathcal{L}(R_{t+1}))^{i-1}(\mathbf{r}) \\
 & \leq \int C_{\max} \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} - 1 \right| d(\mathcal{L}(R_{t+1}))^{i-1}(\mathbf{r}) \\
 & = C_{\max} \int \left| \frac{\alpha \sum_{j=0}^{i-2} \beta^j r_{t-j+i-1}^2 + \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} - 1 \right| \\
 & \quad \cdot f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+i-1}) \cdots \cdot f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) dr_{t+i-1} \cdots dr_{t+1} \\
 & \leq C_{\max} \left(\alpha \left(\sum_{j=0}^{i-2} \beta^j \right) + \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \beta^{i-1} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} - 1 \right| \right) \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

$$\leq C_{\max} \left(\alpha \left(\sum_{j=0}^{i-2} \beta^j \right) + 1 - \beta^{i-1} \right), \quad (2.21)$$

wobei der letzte Schritt analog zu Teil (a) aus $\beta < 1$ folgt. Wendet man nun Satz 2.2.1 im Fall von GARCH(1,1)–Zeitreihen an, so erhält man

$$\begin{aligned} & \psi(R_{t+1}, \dots, R_{t+n} | \mathbf{x}_t) \\ & \leq \sum_{i=2}^n C_{\max} \left(\alpha \sum_{j=0}^{i-2} \beta^j + 1 - \beta^{i-1} \right) = C_{\max} \sum_{i=2}^n \left(\alpha \cdot \frac{1 - \beta^{i-1}}{1 - \beta} + 1 - \beta^{i-1} \right) \\ & = C_{\max} \sum_{i=2}^n (1 - \beta^{i-1}) \left(\frac{\alpha}{1 - \beta} + 1 \right) = C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1 - \beta} + 1 \right) \sum_{i=0}^{n-2} (1 - \beta^{i+1}) \\ & = C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1 - \beta} + 1 \right) \left(n - 1 - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta^i - 1 \right) \right) \\ & = C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1 - \beta} + 1 \right) \left(n - \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta} \right) \end{aligned}$$

und sogar

$$\psi(R_{t+1}, \dots, R_{t+n}) \leq C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1 - \beta} + 1 \right) \left(n - \frac{1 - \beta^n}{1 - \beta} \right)$$

□

Die nachfolgende Tabelle 2.1 zeigt die obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation für n aufeinander folgende Zufallsvariablen von den verwendeten GARCH(1,1)–Zeitreihen auf Basis von normalverteilten Innovationen ($\varepsilon_t \sim N_{(0,1)}$) in Abhängigkeit der Parameter α, β und der Anzahl n der aufeinander folgenden Zufallsvariablen. Hierbei ist nach Bemerkung 2.3.3 $C_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0.24$.

In den folgenden Tabellen wird n so gewählt, dass ein Zeitfenster von wöchentlich (ca. 5 Handelstage), 10-tägig (für gewisse Handelsbuchpositionen wird im internen Modell die Berechnung des 10-tägigen VaR gefordert, siehe Basel Committee on Banking Supervision (2009)) und 3-monatig (ca. 63 Handelstage) betrachtet wird.

Des Weiteren wird β nahe bei 1 und α nahe bei 0 gewählt. In realen Datensätzen beobachtet man ebenfalls solche Werte der Parameter bei der Anpassung von

GARCH(1,1)-Zeitreihen an z.B. tägliche log-Renditen (siehe RiskMetrics Group (1996), Franses u. van Dijk (2000)). Um die Stationarität der GARCH(1,1)-Zeitreihe zu gewährleisten wird die Bedingung $\alpha < 1 - \beta$ aus Lemma 1.2.2 zugrunde gelegt. Wählt man α und β nicht geeignet, wird die obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation zu groß und man erhält keine angemessene Schranke, da der Variationsabstand nicht Werte größer als 1 annehmen kann. Aus diesem Grund sind die Werte größer als 1 nicht als aussagekräftige obere Schranken anzusehen.

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.4160	1.603	24.3725
0.009	0.9	0.2387	0.9196	13.9821
0.0009	0.9	0.2209	0.8513	12.9431
0.009	0.99	$4.55 \cdot 10^{-2}$	0.2015	7.3975
0.0009	0.99	$2.61 \cdot 10^{-2}$	0.1156	4.2439
0.0009	0.999	$4.59 \cdot 10^{-3}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	0.88

Tabelle 2.1.: Obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)-Zeitreihen mit normalverteilten Innovationen.

Analog zum Fall der normalverteilten Innovationen kann ebenfalls eine obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation auf Basis von Student-verteilten Innovationen (siehe Gleichung (2.15)) in Betracht gezogen werden.

$$C_{\max} = \frac{\Gamma\left(\frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^{-(\kappa+1)/2}}{\Gamma\left(\frac{\kappa}{2}\right) \sqrt{\pi} \sqrt{\kappa}}$$

muss allerdings in Abhängigkeit vom Gestaltungsparameter der Student-Verteilung κ berechnet werden, siehe Bemerkung 2.3.3. Für $\kappa = 3$ erhält man

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.3555	1.37	20.8247
0.009	0.9	0.2039	0.7858	11.9468
0.0009	0.9	0.1888	0.7274	11.059
0.009	0.99	$3.89 \cdot 10^{-2}$	0.1721	6.3207
0.0009	0.99	$2.23 \cdot 10^{-2}$	$9.88 \cdot 10^{-2}$	3.6261
0.0009	0.999	$3.92 \cdot 10^{-3}$	$1.76 \cdot 10^{-2}$	0.7518

Tabelle 2.2.: Obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen mit Student–verteilten Innovationen mit Gestaltsparemeter $\kappa = 3$.

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.3961	1.5261	23.2032
0.009	0.9	0.2272	0.8755	13.3113
0.0009	0.9	0.2103	0.8105	12.3221
0.009	0.99	$4.33 \cdot 10^{-2}$	0.1918	7.0426
0.0009	0.99	$2.49 \cdot 10^{-2}$	0.11	4.0403
0.0009	0.999	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.96 \cdot 10^{-2}$	0.8377

Tabelle 2.3.: Obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen mit Student–verteilten Innovationen mit Gestaltsparemeter $\kappa = 10$.

Wegen Bemerkung 2.3.6 (ii) ist der Limes von Ungleichung (2.16) des Hauptresultats (Satz 2.3.5) für festes n , $\beta \rightarrow 1$ und $\alpha \rightarrow 0$ mit $\alpha + \beta < 1$ gleich 0. Dies bedeutet, dass die obere Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation $\psi(R_{t+1}, \dots, R_{t+n})$ für festes n gegen 0 konvergiert.

Weiter ist auffällig ist, dass die obere Schranke des Parameters für die Student–verteilten Innovationen kleiner gleich der oberen Schranke des Parameters für die normalverteilten Innovationen bei gleichen Parametern und der gleichen Anzahl n von aufeinander folgenden Zufallsvariablen ist, siehe Tabellen 2.1, 2.2 und 2.3.

Für den Vergleich des Parameters bezüglich normalverteilter und Student–verteilter Innovationen besteht der einzige Unterschied in der Berechnung des Variationsabstandes der zugehörigen Verteilungen, vgl. Beweis des Hauptresultats (Satz 2.3.5). Lemma 2.3.7 beschreibt das Resultat, dass bei Variation des Skalenparameters der Variationsabstand von Student–Verteilungen kleiner oder gleich dem Variationsabstand von Normalverteilungen ist, d.h. C_{\max} wird kleiner je mehr Masse in

den Flanken vorhanden ist.

Lemma 2.3.7. *Es gilt*

$$\|Q_\kappa - Q_{\kappa,\sigma}\| \leq \|N - N_\sigma\|,$$

wobei Q_κ die Standard-Student-Verteilung mit Gestaltsparameter κ und $Q_{\kappa,\sigma}$ die zugehörige Student-Verteilung mit Gestaltsparameter κ und Skalenparameter σ darstellt. N ist die Standardnormalverteilung und N_σ die zugehörige Normalverteilung mit Skalenparameter σ .

Beweis Man betrachtet zunächst den Variationsabstand von zwei Student-Verteilungen (Lebesgue-Dichte siehe Bemerkung 2.3.3, Gleichung (2.15)). Student-Verteilungen können auch als Mischungen angesehen werden, d.h.

$$\|Q_\kappa - Q_{\kappa,\sigma}\| = \left\| \mathcal{L}\left(V/(Z/r)^{1/2}\right) - \mathcal{L}\left(\sigma V/(Z/r)^{1/2}\right) \right\|$$

mit V als standardnormalverteilte Zufallsvariable, Z eine standardgammaverteilte Zufallsvariable mit Gestaltsparameter $r > 0$, wobei V und Z unabhängig sind. $\mathcal{L}(V/(Z/r)^{1/2})$ ist somit eine Standard-Student-Verteilung mit Gestaltsparameter $\kappa = 2r$, Reiss u. Thomas (2007) Abschnitt 6.3. Es gilt

$$\begin{aligned} \|Q_\kappa - Q_{\kappa,\sigma}\| &= \left\| \int_0^\infty P\left(V/(Z/r)^{1/2} \in \cdot | Z = z\right) d\mathcal{L}(Z)(z) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty P\left(\sigma V/(Z/r)^{1/2} \in \cdot | Z = z\right) d\mathcal{L}(Z)(z) \right\|. \end{aligned}$$

Unter Anwendung von Lemma 1.1.6 erhält man aufgrund der Unabhängigkeit von V und Z

$$G(\cdot|z) := P\left(V/(Z/r)^{1/2} \in \cdot | Z = z\right) = P\left(V/(z/r)^{1/2} \in \cdot\right),$$

$$\tilde{G}(\cdot|z) := P\left(\sigma V/(Z/r)^{1/2} \in \cdot | Z = z\right) = P\left(\sigma V/(z/r)^{1/2} \in \cdot\right).$$

Unter Verwendung dieser Darstellung gilt mit Hilfe des Konvexitätssatzes (Lemma

A.0.3)

$$\begin{aligned} \|Q_\kappa - Q_{\kappa,\sigma}\| &= \|G\mathcal{L}(Z) - \tilde{G}\mathcal{L}(Z)\| \leq \int_0^\infty \|G(\cdot|z) - \tilde{G}(\cdot|z)\| d\mathcal{L}(Z)(z) \\ &= \int_0^\infty \left\| P\left(V/(z/r)^{1/2} \in \cdot\right) - P\left(\sigma V/(z/r)^{1/2} \in \cdot\right) \right\| d\mathcal{L}(Z)(z). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung bedeutet, dass lediglich der ausintegrierte Variationsabstand von Normalverteilungen mit unterschiedlichen Skalenparametern betrachtet werden muss

$$\begin{aligned} &\left\| P\left(V/(Z/r)^{1/2} \in \cdot\right) - P\left(\sigma V/(Z/r)^{1/2} \in \cdot\right) \right\| \\ &= \left\| N_{0, \frac{1}{z/r}} - N_{0, \frac{\sigma}{z/r}} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \int \left| \varphi_{0, \frac{1}{\sqrt{z/r}}}(x) - \varphi_{0, \frac{\sigma}{\sqrt{z/r}}}(x) \right| dx, \end{aligned}$$

wobei φ die Lebesgue-Dichte der Standardnormalverteilung ist. Eine Substitution von $x\sqrt{z/r}$ durch y liefert

$$\left\| P\left(V/(z/r)^{1/2} \in \cdot\right) - P\left(\sigma V/(z/r)^{1/2} \in \cdot\right) \right\| = \|P(V \in \cdot) - P(\sigma V \in \cdot)\|$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} \|Q_\kappa - Q_{\kappa,\sigma}\| &\leq \int_0^\infty \|P(V \in \cdot) - P(\sigma V \in \cdot)\| d\mathcal{L}(Z)(z) \\ &= \|P(V \in \cdot) - P(\sigma V \in \cdot)\| \\ &= \|N - N_\sigma\|. \end{aligned}$$

□

Man beachte, dass man als Zwischenresultat in (2.20) eine schärfere Abschätzung in Abhängigkeit von der exakten Gestalt der Vergangenheit der Zeitreihe bekommt. Hieraus ergibt sich nun die Fragestellung, wie gut die Abschätzung aus (2.16) gegenüber dem Zwischenresultat in (2.20) ist.

Diese schärfere Abschätzung kann allerdings lediglich simuliert werden, d.h. die Vergangenheit in Form der gewichteten Summe $\sum_{i=0}^\infty \beta^i r_{t-i}^2$ in Ungleichung

(2.20) wird bezüglich der GARCH(1,1)–Zeitreihe mit den entsprechenden Parametern α, β, ζ simuliert. Es ergibt sich jedoch die Problemstellung, dass man keine unendliche Vergangenheit betrachten kann. In diesem Fall wird bei 10000 abgebrochen und die Simulation der gewichteten Summe erfolgt mit $\sum_{i=0}^{10000} \beta^i r_{t-i}^2$. Die Anzahl der Simulationen der oberen Schranke der iid Approximation wird auf 4000 gesetzt und ζ beträgt 0.00001. ζ wird sehr klein gewählt aufgrund der Fallstudien aus Kapitel 5 und RiskMetrics Group (1996) und Franses u. van Dijk (2000). Bei den Ergebnissen in den nachstehenden Tabellen handelt es sich um die Mittelwerte der Simulationen der oberen Schranke. Darunter wird die zugehörige Standardabweichung in Klammern und in eckigen Klammern das Maximum angegeben.

Die Tabelle 2.4 zeigt nun die obere Schranke der bedingten iid Approximation basierend auf dem Zwischenresultat (2.20) und normalverteilten Innovationen. Die nachfolgenden Ergebnisse in den Tabellen 2.5 und 2.6 wurden analog simuliert allerdings auf Basis von Student–verteilten Innovationen mit Gestaltungsparametern $\kappa = 3$ und $\kappa = 10$.

Vergleicht man die Tabellen 2.1, 2.2 und 2.3 mit den Tabellen 2.4, 2.5 und 2.6, so stellt man fest, dass das Maximum der simulierten oberen Schranken des Parameters der bedingten iid Approximation kleiner gleich den oberen Schranken ohne Miteinbeziehung der Vergangenheit aus den Tabellen 2.1, 2.2 und 2.3 ist. Dies resultiert aus der Ungleichung (2.21). Aus dieser Ungleichung kann man ebenfalls ableiten, dass die obere Schranke des Parameters klein ist, falls β nahe bei eins ist und die Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen n klein ist.

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.3792	1.461	22.1951
		($2.15 \cdot 10^{-2}$)	($8.44 \cdot 10^{-2}$)	(1.2857)
		[0.415]	[1.6009]	[24.3447]
0.009	0.9	$3.92 \cdot 10^{-2}$	0.1513	2.3013
		($5.85 \cdot 10^{-3}$)	($2.31 \cdot 10^{-2}$)	(0.353)
		[$6.89 \cdot 10^{-2}$]	[0.2502]	[4.2291]
0.0009	0.9	$3.93 \cdot 10^{-3}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	0.2316
		($6.27 \cdot 10^{-4}$)	($2.47 \cdot 10^{-3}$)	($3.84 \cdot 10^{-2}$)
		[$7.36 \cdot 10^{-3}$]	[$2.96 \cdot 10^{-2}$]	[0.4465]
0.009	0.99	$4.29 \cdot 10^{-2}$	0.19	6.9823
		($6.96 \cdot 10^{-4}$)	($3.07 \cdot 10^{-3}$)	(0.1123)
		[$4.48 \cdot 10^{-2}$]	[0.198]	[7.2737]
0.0009	0.99	$4.31 \cdot 10^{-3}$	$1.91 \cdot 10^{-2}$	0.7005
		($2.02 \cdot 10^{-4}$)	($9.04 \cdot 10^{-4}$)	($3.29 \cdot 10^{-2}$)
		[$5.07 \cdot 10^{-3}$]	[$2.34 \cdot 10^{-2}$]	[0.8804]
0.0009	0.999	$4.35 \cdot 10^{-3}$	$1.95 \cdot 10^{-2}$	0.8333
		($2.03 \cdot 10^{-5}$)	($9.05 \cdot 10^{-5}$)	($3.96 \cdot 10^{-3}$)
		[$4.42 \cdot 10^{-3}$]	[$1.95 \cdot 10^{-2}$]	[0.8461]

Tabelle 2.4.: Mittelwert der simulierten oberen Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)-Zeitreihen bezüglich normalverteilter Innovationen und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.2883 ($3.38 \cdot 10^{-2}$) [0.3555]	1.1123 (0.1303) [1.3689]	16.9493 (1.9944) [20.8145]
0.009	0.9	$3.21 \cdot 10^{-2}$ ($1.27 \cdot 10^{-2}$) [0.1599]	0.1221 ($4.6 \cdot 10^{-2}$) [0.7567]	1.8627 (0.6917) [11.0196]
0.0009	0.9	$3.3 \cdot 10^{-3}$ ($2.52 \cdot 10^{-3}$) [$9.08 \cdot 10^{-2}$]	$1.28 \cdot 10^{-2}$ ($1.25 \cdot 10^{-2}$) [0.5006]	0.192 (0.1452) [6.4859]
0.009	0.99	$3.48 \cdot 10^{-2}$ ($1.9 \cdot 10^{-3}$) [$3.89 \cdot 10^{-2}$]	0.1541 ($8.54 \cdot 10^{-3}$) [0.1721]	5.664 (0.3089) [6.3157]
0.0009	0.99	$3.61 \cdot 10^{-3}$ ($8.29 \cdot 10^{-4}$) [$1.97 \cdot 10^{-2}$]	$1.6 \cdot 10^{-2}$ ($3.45 \cdot 10^{-3}$) [$7.58 \cdot 10^{-2}$]	0.5878 (0.1354) [2.8772]
0.0009	0.999	$3.66 \cdot 10^{-3}$ ($8.79 \cdot 10^{-5}$) [$3.92 \cdot 10^{-3}$]	$1.64 \cdot 10^{-2}$ ($4.0 \cdot 10^{-4}$) [$1.76 \cdot 10^{-2}$]	0.7013 ($1.71 \cdot 10^{-2}$) [0.7515]

Tabelle 2.5.: Mittelwert der simulierten oberen Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)-Zeitreihen bezüglich Student-verteilter Innovationen mit Gestaltsparameter $\kappa = 3$ und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.3569	1.3761	20.9167
		($2.35 \cdot 10^{-2}$)	($8.98 \cdot 10^{-2}$)	(1.3554)
0.009	0.9	[0.3956]	[1.5248]	[23.1932]
		$3.71 \cdot 10^{-2}$	0.1434	2.1832
0.0009	0.9	($6.7 \cdot 10^{-3}$)	($2.63 \cdot 10^{-2}$)	(0.397)
		[$9.32 \cdot 10^{-2}$]	[0.3074]	[4.752]
0.009	0.99	$3.74 \cdot 10^{-3}$	$1.44 \cdot 10^{-2}$	0.2203
		($7.21 \cdot 10^{-4}$)	($2.92 \cdot 10^{-3}$)	(0.0433)
0.0009	0.99	[$9.49 \cdot 10^{-3}$]	[$4.78 \cdot 10^{-2}$]	[0.7912]
		$4.08 \cdot 10^{-2}$	0.1806	6.6279
0.0009	0.99	($7.98 \cdot 10^{-4}$)	($3.54 \cdot 10^{-3}$)	(0.1323)
		[$4.29 \cdot 10^{-2}$]	[0.1895]	[6.9579]
0.0009	0.999	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$1.82 \cdot 10^{-2}$	0.6667
		($2.34 \cdot 10^{-4}$)	($1.06 \cdot 10^{-3}$)	($3.87 \cdot 10^{-2}$)
0.0009	0.999	[$5.3 \cdot 10^{-3}$]	[$2.33 \cdot 10^{-2}$]	[0.8602]
		$4.14 \cdot 10^{-3}$	$1.86 \cdot 10^{-2}$	0.7932
0.0009	0.999	($2.36 \cdot 10^{-5}$)	($1.06 \cdot 10^{-4}$)	($4.54 \cdot 10^{-3}$)
		[$4.22 \cdot 10^{-3}$]	[$1.89 \cdot 10^{-2}$]	[0.8091]

Tabelle 2.6.: Mittelwert der simulierten oberen Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich Student–verteilter Innovationen mit Gestaltsparameter $\kappa = 10$ und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.

2.4. Approximative bedingte Unabhängigkeit in GARCH(1,1)–Zeitreihen

Im vorhergehenden Abschnitt 2.3 haben wir uns der Themenstellung approximativ bedingt iid in GARCH(1,1)–Zeitreihen zugewandt. Anstatt lediglich den Unterschied der Verteilung von n aufeinander folgenden Elementen einer GARCH(1,1)–Zeitreihe und der Verteilung von iid Zufallsvariablen zu quantifizieren, kann ebenfalls der Unterschied zur Verteilung von n unabhängigen Zufallsvariablen in Betracht gezogen werden. Dabei wird die Forderung nach iid Zufallsvariablen fallengelassen und lediglich unabhängige aber nicht notwendigerweise identisch verteilte Zufallsvariablen betrachtet. Diese Fragestellung kann durch die folgenden heuristischen Überlegun-

gen motiviert werden.

Zunächst erfolgt eine Betrachtung von lediglich zwei aufeinander folgenden Zufallsvariablen einer GARCH(1,1)–Zeitreihe. Hierbei ist die $t + 1$ -te Zufallsvariable R_{t+1} gegeben durch

$$R_{t+1} = \varepsilon_{t+1} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j R_{t-j}^2}.$$

Für R_{t+2} gilt

$$\begin{aligned} R_{t+2} &= \varepsilon_{t+2} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2} \\ &= \varepsilon_{t+2} \sqrt{\alpha R_{t+1}^2 + \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2} \\ &= \varepsilon_{t+2} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2} \sqrt{1 + \frac{\alpha R_{t+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2}}, \end{aligned}$$

wobei der Term unter der zweiten Wurzel auf der rechten Seite nahe eins ist, wenn αR_{t+1}^2 klein ist im Vergleich zur gewichteten Summe der quadrierten vergangenen Beobachtungen.

Eine Taylorentwicklung von

$$h(\alpha R_{t+1}^2) = \sqrt{1 + \frac{\alpha R_{t+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2}},$$

um 0 mit der Zwischenstelle $\xi \in (0, \alpha R_{t+1}^2)$ liefert

$$\begin{aligned} R_{t+2} &= \varepsilon_{t+2} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2} \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha R_{t+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\xi}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2}}} \right). \end{aligned}$$

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

Der zweite Summand lässt sich wegen $\zeta, \xi > 0$ und $\alpha, \beta \geq 0$ abschätzen und man erhält

$$R_{t+2} = \varepsilon_{t+2} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2} \left(1 + O \left(\frac{\alpha R_{t+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2} \right) \right).$$

Ist nun αR_{t+1}^2 im Vergleich zur gewichteten Summe klein, so sind R_{t+1} und R_{t+2} bedingt auf $R_s = r_s$ für $s \leq t$ approximativ unabhängig, da ε_{t+1} und ε_{t+2} unabhängig sind.

Daher wird im Spezialfall von zwei aufeinander folgenden Zufallsvariablen der Unterschied zwischen der Verteilung von R_{t+1} und R_{t+2} und der Verteilung von

$$\tilde{R}_{t+1} := R_{t+1}$$

und

$$\tilde{R}_{t+2} := \varepsilon_{t+2} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j R_{t+1-j}^2}$$

untersucht. Anders als im Fall der bedingten iid Approximation hat der zufällige Skalenparameter von \tilde{R}_{t+2} eine andere Gestalt als \tilde{R}_{t+1} . Dieser Skalenparameter hängt zwar von derselben Vergangenheit ab, allerdings wird die Vergangenheit unterschiedlich gewichtet. Die Vergangenheit in Form von $R_s = r_s$ für $s \leq t$ hat aufgrund des Faktors β weniger Einfluss.

Im weiteren Verlauf soll diese Approximation der bedingten Unabhängigkeit im Fall von GARCH(1,1)-Zeitreihen auf den Fall von n aufeinander folgenden Zufallsvariablen verallgemeinert werden. In Analogie zum Hauptresultat (Satz 2.3.5) bezüglich der bedingten iid Approximation für n aufeinander folgende Zufallsvariablen von GARCH(1,1)-Zeitreihen hängt die Approximation von bedingt unabhängigen Zufallsvariablen ebenfalls von den Parametern α und β der GARCH(1,1)-Zeitreihe und der Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen n ab.

Satz 2.4.1. Sei $\{R_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ eine GARCH(1,1)-Zeitreihe mit $ER_t^2 < \infty$ und $\alpha + \beta < 1$. $\mathcal{L}(\varepsilon_t) = Q$ genüge der Bedingung 2.3.1 und seien $\varepsilon_{t+1}, \dots, \varepsilon_{t+n}$ iid Zufallsvariablen unabhängig von \mathbf{X}_t . Des Weiteren sei $\tilde{\mathbf{R}}_{t+1, t+i-1} = \left(\tilde{R}_{t+1}, \dots, \tilde{R}_{t+i-1} \right)$ und

$$\tilde{R}_{t+i} = \tilde{\sigma}_{t+i}(\mathbf{X}_t) \varepsilon_{t+i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $\tilde{\sigma}_{t+i}^2(\mathbf{X}_t) = \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j R_{t+i-j-1}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left\| P((R_1, \dots, R_n) \in \cdot | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) - \prod_{i=1}^n P^{\tilde{R}_{t+i} | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t} \right\| \\ & \leq \sum_{i=2}^n \int \| P(R_{t+i} \in \cdot | \mathbf{R}_{t+1, t+i-1} = \mathbf{r}, \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \\ & \quad - P(\tilde{R}_{t+i} \in \cdot | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \| d \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathcal{L}(\tilde{R}_{t+k}) \right) (\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\leq C_{\max} \frac{\alpha (n-1)n}{\beta \cdot 2} \quad (2.23)$$

mit C_{\max} definiert wie in Satz 2.3.2.

Analog lässt sich zur oberen Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation für n aufeinander folgende Zufallsvariablen für GARCH(1,1)–Zeitreihen (siehe Abschnitt 2.3) die nachstehende Bemerkung für approximative bedingte Unabhängigkeit formulieren.

Bemerkung 2.4.2.

(i) Für alle GARCH(1,1)–Zeitreihen, welche die Bedingungen $ER_t^2 < \infty$ und $\alpha + \beta < 1$ erfüllen, hängt die obere Schranke in Ungleichung (2.23) nicht von der Vergangenheit ab. Eine von der Vergangenheit abhängige Schranke befindet sich im Beweis von Satz 2.4.1, siehe Ungleichung (2.27).

(ii) Wegen $\alpha + \beta < 1$ gilt

$$\begin{aligned} C_{\max} \frac{\alpha (n-1)n}{\beta \cdot 2} &= O\left(\frac{\alpha}{\beta} (n^2 - n)\right) \\ &= O\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \end{aligned}$$

für festes $n \in \mathbb{N}$. Die rechte Seite von Gleichung (2.23) ist somit von der Ordnung $O\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ für $\beta \rightarrow 1$ und $\alpha \rightarrow 0$ einschließlich eines Terms n^2 .

Beweis von Satz 2.4.1 Zunächst muss die Ungleichung (2.22) bewiesen werden. Dieser Beweis erfolgt analog zu Satz 2.2.1, also direkt aus Korollar 2.2.6 mit $g_1(x, y) = \sigma_{t+1}(x)y$, $g_i(x, \mathbf{r}, y) = \sigma_{t+i}(x, \mathbf{r})y$ und $\tilde{g}_1(x, y) = \tilde{g}_i(x, \mathbf{r}, y) = \tilde{\sigma}_{t+i}(x)y$ für $i = 2, \dots, n$.

Der Beweis der Ungleichung (2.23) verläuft wie im Beweis zu Satz 2.3.5, der eine obere Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation von n aufeinander folgenden Zufallsvariablen von GARCH(1,1)–Zeitreihen liefert. Aus vereinfachenden Gründen wird zunächst der Fall für $n = 2$ in Teil (a) verifiziert. In einem nächsten Schritt werden die notwendigen Modifikationen für den allgemeinen Fall in Teil (b) angegeben.

(a) Wendet man Gleichung (2.1) und Bemerkung 1.2.6 (i) an, so erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left| f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) f_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}(r_{t+2}) \right. \\ & \quad \left. - f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) f_{\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+2}) \right| dr_{t+1} r_{t+2} \\ &= \int f_{\sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+1}) \\ & \quad \cdot \frac{1}{2} \int \left| (f_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}(r_{t+2}) - f_{\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)}(r_{t+2})) \right| dr_{t+2} dr_{t+1}, \end{aligned}$$

wobei f die Lebesgue–Dichte von Q ist. Das innere Integral ist der Variationsabstand von zwei Verteilungen mit den verschiedenen Skalenparametern $\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})$ und $\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)$ der durch $\|Q_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})} - Q_{\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)}\|$ bezeichnet wird. Wegen Satz 2.3.2 und mit Substitution von $y/\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)$ durch z gilt

$$\begin{aligned} & \|Q_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})} - Q_{\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)}\| \\ &= \frac{1}{2} \int |f_{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}(y) - f_{\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)}(y)| dy \\ &= \frac{1}{2} \int \left| f_{\frac{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}{\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)}}(z) - f(z) \right| dz \\ &= \left\| Q_{\frac{\sigma_{t+2}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}{\tilde{\sigma}_{t+2}(\mathbf{x}_t)}} - Q \right\| \stackrel{S.2.3.2}{\leq} C_{\max} \left| \frac{\sigma_{t+2}^2(\mathbf{x}_t, r_{t+1})}{\tilde{\sigma}_{t+2}^2(\mathbf{x}_t)} - 1 \right|. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Und somit gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung sowie der Darstellungen

$$\sigma_{t+i}^2(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1, t+i-1}) = \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2$$

und

$$\tilde{\sigma}_{t+i}^2(\mathbf{x}_t) = \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2$$

für $i = 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left| f_{\sigma_{t+1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+1}) f_{\sigma_{t+2}}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})(r_{t+2}) \right. \\ & \quad \left. - f_{\sigma_{t+1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+1}) f_{\tilde{\sigma}_{t+2}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+2}) \right| dr_{t+1} r_{t+2} \\ & \leq \int f_{\sigma_{t+1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+1}) \cdot C_{\max} \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2} - 1 \right| dr_{t+1} \\ & \leq C_{\max} \int f_{\sigma_{t+1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+1}) \cdot \frac{\alpha r_{t+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2} dr_{t+1} \\ & \quad + C_{\max} \int f_{\sigma_{t+1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+1}) \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2} - 1 \right| dr_{t+1} \\ & = C_{\max} \left(\alpha \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j r_{t-j+1}^2} \right) \\ & = C_{\max} \left(\alpha \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} \right). \end{aligned}$$

Mit $\beta < 1$ erhält man $\beta \frac{\zeta}{1-\beta} < \frac{\zeta}{1-\beta}$ und

$$C_{\max} \left(\alpha \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \beta \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} \right) \leq C_{\max} \left(\alpha \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\beta \left(\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2 \right)} \right).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left| f_{\sigma_{t+1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+1}) f_{\sigma_{t+2}}(\mathbf{x}_t, r_{t+1})(r_{t+2}) \right. \\ & \quad \left. - f_{\sigma_{t+1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+1}) f_{\tilde{\sigma}_{t+2}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+2}) \right| dr_{t+1} r_{t+2} \leq C_{\max} \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

(b) Im Weiteren werden nun die benötigten Modifikationen angegeben. In Analogie zu Teil (a) kann man eine obere Schranke von

$$\begin{aligned} & \int \|P(R_{t+i} \in \cdot | \mathbf{R}_{t+1, t+i-1} = \mathbf{r}, \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \\ & \quad - P(\tilde{R}_{t+i} \in \cdot | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)\| d \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathcal{L}((\tilde{R}_{t+k})) \right) (\mathbf{r}) \end{aligned}$$

ermitteln. Nach Satz 2.3.2 und der Gestalt von $\sigma_{t+i}^2(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1, t+i-1})$ und $\tilde{\sigma}_{t+i}^2(\mathbf{x}_t)$ ist

$$\begin{aligned} & \int \|P(R_{t+i} \in \cdot | \mathbf{R}_{t+1, t+i-1} = \mathbf{r}, \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \\ & \quad - P(\tilde{R}_{t+i} \in \cdot | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)\| d \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathcal{L}((\tilde{R}_{t+k})) \right) (\mathbf{r}) \\ & \leq \int C_{\max} \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} - 1 \right| d \left(\prod_{k=1}^{i-1} \mathcal{L}((\tilde{R}_{t+k})) \right) (\mathbf{r}) \\ & = C_{\max} \int \left| \frac{\alpha \sum_{l=0}^{i-2} \beta^j r_{t-l+i-1}^2 + \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} - 1 \right| \\ & \quad \cdot f_{\tilde{\sigma}_{t+i-1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+i-1}) \cdots \cdot f_{\tilde{\sigma}_{t+1}}(\mathbf{x}_t)(r_{t+1}) dr_{t+i-1} \cdots dr_{t+1} \\ & \leq C_{\max} \left(\alpha \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{t+i-1}^2(\mathbf{x}_t)}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} + \alpha \beta \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{t+i-2}^2(\mathbf{x}_t)}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} \right. \\ & \quad + \dots + \alpha \beta^{i-2} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_{t+1}^2(\mathbf{x}_t)}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} \\ & \quad \left. + \left| \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} - 1 \right| \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C_{\max} \left(\alpha \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-2}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-2}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} + \alpha\beta \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-3}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-3}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \alpha\beta^{i-2} \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2} \right) \\
 &\leq C_{\max} \left(\alpha \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-2}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-2}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha\beta \sum_{j=i-2}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-2}^2} + \alpha\beta \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-3}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-3}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha\beta^2 \sum_{j=i-3}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-3}^2} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \alpha\beta^{i-2} \cdot \frac{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha\beta^{i-1} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2} \right) \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

$$\leq C_{\max} \left(\alpha \sum_{j=0}^{i-2} \frac{1}{\beta} \right), \tag{2.28}$$

wobei der letzte Schritt analog zu Teil (a) mit $\beta < 1$ folgt. Weiter ist

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=2}^n \int \|P(R_{t+i} \in \cdot | \mathbf{R}_{t+1,t+i-1} = \mathbf{r}, \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t) \\
 &\quad - P(\tilde{R}_{t+i} \in \cdot | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t)\| d \left(\bigotimes_{k=1}^{i-1} \mathcal{L}((\tilde{R}_{t+k})) \right) (\mathbf{r}) \\
 &\leq \sum_{i=2}^n C_{\max} \left(\alpha \sum_{j=0}^{i-2} \frac{1}{\beta} \right) = C_{\max} \sum_{i=2}^n (i-1) \frac{\alpha}{\beta} \\
 &= C_{\max} \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^{n-1} i = C_{\max} \frac{\alpha (n-1)n}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Die nachstehenden Tabellen zeigen die oberen Schranken der bedingt unabhängigen Approximation in Abhängigkeit der Verteilung der Innovationen, der Parameter α , β und der Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen n . Hierbei wird n analog zum Abschnitt 2.3 zu 5,10 bzw. 63 gewählt.

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.242	1.0889	47.2569
0.009	0.9	$2.42 \cdot 10^{-2}$	0.1089	4.7257
0.0009	0.9	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-2}$	0.4726
0.009	0.99	$2.2 \cdot 10^{-2}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$	4.2961
0.0009	0.99	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$	0.4296
0.0009	0.999	$2.18 \cdot 10^{-3}$	$9.81 \cdot 10^{-3}$	0.4257

Tabelle 2.7.: Obere Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)-Zeitreihen mit normalverteilten Innovationen.

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.2067	0.9304	40.378
0.009	0.9	$2.07 \cdot 10^{-2}$	$9.3 \cdot 10^{-2}$	4.0378
0.0009	0.9	$2.07 \cdot 10^{-3}$	$9.3 \cdot 10^{-3}$	0.4038
0.009	0.99	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$8.46 \cdot 10^{-2}$	3.6707
0.0009	0.99	$1.88 \cdot 10^{-3}$	$8.46 \cdot 10^{-3}$	0.3626
0.0009	0.999	$1.86 \cdot 10^{-3}$	$8.38 \cdot 10^{-3}$	0.3638

Tabelle 2.8.: Obere Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)-Zeitreihen mit Student-verteilten Innovationen mit Gestaltungsparameter $\kappa = 3$.

α	β	n=5	n=10	n=63
0.09	0.9	0.2304	1.0366	44.9897
0.009	0.9	$2.3 \cdot 10^{-2}$	0.10366	4.499
0.0009	0.9	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$	0.4499
0.009	0.99	$2.09 \cdot 10^{-2}$	$9.42 \cdot 10^{-2}$	4.09
0.0009	0.99	$2.09 \cdot 10^{-3}$	$9.42 \cdot 10^{-3}$	0.409
0.0009	0.999	$2.08 \cdot 10^{-3}$	$9.34 \cdot 10^{-3}$	0.4053

Tabelle 2.9.: Obere Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)-Zeitreihen mit Student-verteilten Innovationen mit Gestaltungsparameter $\kappa = 10$.

Es ergeben sich analog zum Abschnitt 2.3 wiederum die Auffälligkeiten, dass die obere Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)-Zeitreihen für die Student-verteilten Innovationen kleiner oder gleich der oberen Schranke der Approximation für die normalverteilten Innovationen bei gleichen Pa-

parametern und der Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen n ist. Der ausschlaggebende Punkt besteht ebenfalls in der Berechnung des Variationsabstandes der zugehörigen Verteilungen, vgl. Beweis von Satz 2.4.1. Bei Variation des Skalensparameters ist der Variationsabstand von Student–Verteilungen kleiner oder gleich dem Variationsabstand von Normalverteilungen (siehe Lemma 2.3.7).

Wegen Bemerkung 2.4.2 (ii) ist der Limes von Ungleichung (2.23) des Resultats (Satz 2.4.1) für festes n , $\beta \rightarrow 1$ und $\alpha \rightarrow 0$ mit $\alpha + \beta < 1$ gleich 0.

Über diese Eigenschaften hinaus kann der Zusammenhang zwischen der bedingt unabhängigen und der bedingten iid Approximation untersucht werden. Aus dieser Fragestellung heraus vergleicht man die obere Schranke aus Satz 2.3.5 mit der oberen Schranke aus Satz 2.4.1. Zu beachten ist hierbei bezüglich der beiden Abschätzungen, dass diese von unterschiedlicher Güte sein können. Dennoch kann ein Vergleich herangezogen werden, unter welchen Bedingungen die eine Abschätzung größer oder gleich der anderen ist.

Aus Plausibilitätsüberlegungen sollte die obere Schranke bezüglich der bedingten iid Approximation in GARCH–Zeitreihen größer oder gleich der oberen Schranke bezüglich der bedingten unabhängigen Approximation sein, da man bei der iid Approximation noch ein Zusatzkriterium fordert.

Bemerkung 2.4.3. Sei C_{\max} definiert wie in Satz 2.3.2, dann ist

$$C_{\max} \frac{\alpha (n-1)n}{\beta} \leq C_{\max} \left(\frac{\alpha}{1-\beta} + 1 \right) \left(n - \frac{1-\beta^n}{1-\beta} \right) \quad (2.29)$$

für

$$\alpha \leq \frac{n - \frac{1-\beta^n}{1-\beta}}{\frac{(n-1)n}{2\beta} - \frac{1}{1-\beta} \left(n - \frac{1-\beta^n}{1-\beta} \right)}.$$

Die nachstehende Tabelle zeigt wie α für bestimmte β und n gewählt werden muss, damit die Ungleichung (2.29) gilt.

β	n=5	n=10	n=63
0.9	0.4388	0.2304	$3.23 \cdot 10^{-2}$
0.99	0.4938	0.2682	$4.42 \cdot 10^{-2}$
0.999	0.4994	0.2723	$4.66 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 2.10.: Obere Schranke für α , die Ungleichung (2.29) erfüllt.

Hierbei muss allerdings die Bedingung $\alpha + \beta < 1$ gelten, um die Stationarität der Zeitreihe zu gewährleisten.

Man beachte, dass man als Zwischenresultat wie im vorherigen Abschnitt 2.4 in (2.27) eine schärfere Abschätzung in Abhängigkeit von der exakten Gestalt der Vergangenheit der Zeitreihe erhält. Es handelt sich um eine scharfe Abschätzung, falls β nahe bei 1 und die Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen n klein ist.

Diese schärfere Abschätzung kann wie in Abschnitt 2.3 lediglich simuliert werden. Für die gewichtete unendliche Summe nimmt man die Summe $\sum_{i=0}^{10000} \beta^i r_{t-i}^2$ mit 4000 Simulationen und analog zum vorhergehenden Abschnitt $\zeta = 0.00001$. Bei den Ergebnissen in den nachstehenden Tabellen handelt es sich um Mittelwerte, also die Mittelwerte der Simulationen der oberen Schranke. Darunter wird die zugehörige Standardabweichung in runden und in eckigen das Maximum angegeben.

Die Tabelle 2.11 zeigt nun die obere Schranke der bedingten iid Approximation basierend auf dem Zwischenresultat (2.27) und normalverteilten Innovationen. Die nachfolgenden Ergebnisse in den Tabellen 2.12 und 2.13 wurden analog simuliert allerdings auf Basis von Student-verteilten Innovationen mit Gestaltsparametern $\kappa = 3$ und $\kappa = 10$.

Beim Vergleich der Tabellen 2.7, 2.8 und 2.9 mit den Tabellen 2.11, 2.12 und 2.13, erkennt man, dass das Maximum gleich der oberen Schranken ohne Miteinbeziehung der Vergangenheit aus den Tabellen 2.1, 2.2 und 2.3 ist.

α	β	n=5	n=10
0.09	0.9	0.2323 ($5.31 \cdot 10^{-3}$) [0.2419]	0.9957 ($4.59 \cdot 10^{-2}$) [1.0867]
0.009	0.9	$2.0 \cdot 10^{-2}$ ($9.21 \cdot 10^{-5}$) [$2.04 \cdot 10^{-2}$]	$7.75 \cdot 10^{-2}$ ($4.83 \cdot 10^{-4}$) [$7.99 \cdot 10^{-2}$]
0.0009	0.9	$1.97 \cdot 10^{-3}$ ($9.47 \cdot 10^{-7}$) [$1.98 \cdot 10^{-3}$]	$7.61 \cdot 10^{-3}$ ($4.72 \cdot 10^{-6}$) [$7.64 \cdot 10^{-3}$]
0.009	0.99	$2.19 \cdot 10^{-2}$ ($1.31 \cdot 10^{-5}$) [$2.2 \cdot 10^{-2}$]	$9.86 \cdot 10^{-2}$ ($1.08 \cdot 10^{-4}$) [$9.89 \cdot 10^{-2}$]
0.0009	0.99	$2.16 \cdot 10^{-3}$ ($3.67 \cdot 10^{-7}$) [$2.16 \cdot 10^{-3}$]	$9.57 \cdot 10^{-3}$ ($2.93 \cdot 10^{-6}$) [$9.59 \cdot 10^{-3}$]
0.0009	0.999	$2.18 \cdot 10^{-3}$ ($3.58 \cdot 10^{-8}$) [$2.18 \cdot 10^{-3}$]	$9.81 \cdot 10^{-3}$ ($2.96 \cdot 10^{-7}$) [$9.81 \cdot 10^{-3}$]

Tabelle 2.11.: Mittelwert der simulierten oberen Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich normalverteilter Innovationen und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.

2. Approximative bedingte Unabhängigkeit

α	β	n=5	n=10
0.09	0.9	0.1906 ($7.37 \cdot 10^{-3}$) [0.2067]	0.7882 ($5.73 \cdot 10^{-3}$) [0.9301]
0.009	0.9	$1.71 \cdot 10^{-2}$ ($1.99 \cdot 10^{-4}$) [$1.95 \cdot 10^{-2}$]	$6.61 \cdot 10^{-2}$ ($1.28 \cdot 10^{-3}$) [$9.24 \cdot 10^{-2}$]
0.0009	0.9	$1.69 \cdot 10^{-3}$ ($4.85 \cdot 10^{-6}$) [$1.93 \cdot 10^{-3}$]	$6.5 \cdot 10^{-3}$ ($2.12 \cdot 10^{-5}$) [$7.33 \cdot 10^{-3}$]
0.009	0.99	$1.87 \cdot 10^{-2}$ ($3.54 \cdot 10^{-5}$) [$1.88 \cdot 10^{-2}$]	$8.39 \cdot 10^{-2}$ ($2.95 \cdot 10^{-4}$) [$8.46 \cdot 10^{-2}$]
0.0009	0.99	$1.85 \cdot 10^{-3}$ ($1.36 \cdot 10^{-6}$) [$1.87 \cdot 10^{-3}$]	$8.18 \cdot 10^{-3}$ ($1.1 \cdot 10^{-5}$) [$8.38 \cdot 10^{-3}$]
0.0009	0.999	$1.86 \cdot 10^{-3}$ ($1.59 \cdot 10^{-7}$) [$1.86 \cdot 10^{-3}$]	$8.38 \cdot 10^{-3}$ ($1.32 \cdot 10^{-6}$) [$8.38 \cdot 10^{-3}$]

Tabelle 2.12.: Mittelwert der simulierten oberen Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)-Zeitreihen bezüglich Student-verteilter Innovationen mit Gestaltungsparameter $\kappa = 3$ und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.

α	β	n=5	n=10
0.09	0.9	0.22 ($5.67 \cdot 10^{-3}$) [0.2303]	0.9394 ($4.83 \cdot 10^{-2}$) [1.0347]
0.009	0.9	$1.9 \cdot 10^{-2}$ ($1.1 \cdot 10^{-4}$) [$2.01 \cdot 10^{-2}$]	$7.37 \cdot 10^{-2}$ ($5.49 \cdot 10^{-4}$) [$7.83 \cdot 10^{-2}$]
0.0009	0.9	$1.88 \cdot 10^{-3}$ ($1.07 \cdot 10^{-6}$) [$1.89 \cdot 10^{-3}$]	$7.24 \cdot 10^{-3}$ ($5.54 \cdot 10^{-6}$) [$7.29 \cdot 10^{-3}$]
0.009	0.99	$2.09 \cdot 10^{-2}$ ($1.48 \cdot 10^{-5}$) [$2.09 \cdot 10^{-2}$]	$9.38 \cdot 10^{-2}$ ($1.24 \cdot 10^{-4}$) [$9.42 \cdot 10^{-2}$]
0.0009	0.99	$2.06 \cdot 10^{-3}$ ($4.36 \cdot 10^{-7}$) [$2.06 \cdot 10^{-3}$]	$9.11 \cdot 10^{-3}$ ($3.3 \cdot 10^{-6}$) [$9.13 \cdot 10^{-3}$]
0.0009	0.999	$2.07 \cdot 10^{-3}$ ($4.34 \cdot 10^{-8}$) [$2.08 \cdot 10^{-3}$]	$9.34 \cdot 10^{-3}$ ($3.49 \cdot 10^{-7}$) [$9.34 \cdot 10^{-3}$]

Tabelle 2.13.: Mittelwert der simulierten oberen Schranke der bedingt unabhängigen Approximation in GARCH(1,1)–Zeitreihen bezüglich Student–verteilter Innovationen mit Gestaltungsparameter $\kappa = 10$ und der Vergangenheit (siehe (2.20)). In runden Klammern wird die Standardabweichung und in eckigen Klammern das Maximum der simulierten oberen Schranke angegeben.

Kapitel 3.

Anwendungen auf Aggregation und Prognose

Das vorausgegangene Kapitel 2 beschäftigte sich mit der approximativen bedingten Unabhängigkeit in stochastischen Volatilitätszeitreihen, insbesondere deren Spezialfall der GARCH(1,1)-Zeitreihen. Nun soll eine Verbindung dieser Themenstellung zu dem in der Einleitung vorgestellten zu prognostizierenden bedingten n -Tages VaR hergestellt werden.

Um den aufsichtsrechtlichen Anforderungen für einige Handelsbuchpositionen gerecht zu werden, muss laut dem Baseler Komitee für Bankenaufsicht der 10-tägige VaR zur Wahrscheinlichkeit von 0.99 ermittelt werden (siehe Basel Committee on Banking Supervision (2009)).

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, wird größtenteils eine Modellierung von Finanzzeitreihen über GARCH(1,1)-Zeitreihen vorgenommen (siehe French u. a. (1987), Engle u. a. (1987), Hsieh (1988) und Giovannini u. Philippe (1989)). In erster Linie werden dabei aufgrund der besser geeigneten Anpassung GARCH(1,1)-Zeitreihen für kurzfristige log-Renditen verwendet (vgl. Embrechts u. a. (2009), Zivot (2008), Martens (2001), Martens (2002), Andersen u. Bollerslev (1998) und Andersen u. a. (1999)).

Bei der Prognose des bedingten n -Tages VaR ergibt sich somit die folgende Problemstellung.

Die Aggregation einer GARCH(1,1)-Zeitreihe ist keine GARCH(1,1)-Zeitreihe (vgl. Diebold u. a. (1997) und Drost u. Nijman (1993)) mehr.

Die oben genannte Problemstellung motiviert den Lösungsansatz, dass mit Hilfe des Parameters der bedingten iid Approximation eine obere Schranke des bedingten n -Tages VaR ermittelt werden kann. Hierzu wird der Unterschied der Verteilung der aggregierten n aufeinander folgenden Elementen einer GARCH(1,1)-Zeitreihe zwischen der Verteilung von aggregierten iid Zufallsvariablen quantifiziert. Analoges kann für die approximative bedingte Unabhängigkeit hergeleitet werden, also für die Approximation mittels unabhängiger aber nicht notwendigerweise identisch verteilter Zufallsvariablen.

Abschnitt 3.1 stellt den Zusammenhang zwischen dem Parameter der bedingten iid Approximation in stochastischen Volatilitätszeitreihen und dem Parameter dieser aggregierten Zeitreihe her.

Im nachstehenden Abschnitt 3.2 wird dieser Zusammenhang für die Herleitung des bedingten n -Tages VaR verwendet und der darauf folgende Abschnitt greift den Prognosegedanken wieder auf.

3.1. Aggregation

Das Resultat bezüglich der Approximation von n aufeinander folgenden Folgenglieder einer GARCH(1,1)-Zeitreihe durch iid Zufallsvariablen wie in Abschnitt 2.4 kann ebenfalls für die Approximation der zugehörigen aggregierten Zeitreihe verwendet werden. Man nimmt zunächst an, dass die Anfangszeitreihe modelliert durch eine GARCH(1,1)-Zeitreihe, aus täglichen log-Renditen besteht. Die zugehörige Zeitreihe von z.B. wöchentlichen log-Renditen ist dann eine Aggregation der Anfangszeitreihe. Allgemein ist $\{R_t^{(n)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ die n -fache Aggregation von $\{R_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, falls

$$R_t^{(n)} = \sum_{i=1}^n R_{nt-i}. \quad (3.1)$$

Falls $\{R_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ eine GARCH(1,1)-Zeitreihe ist, existiert keine geschlossene Form für die Verteilung von $R_t^{(n)}$ und die bedingte Verteilung von $R_t^{(n)}$ gegeben $(R_{t-1}^{(n)}, R_{t-2}^{(n)}, \dots)$. Insbesondere ist $\{R_t^{(n)}\}_{t \in \mathbb{Z}}$ keine GARCH(1,1)-Zeitreihe mehr, siehe Diebold u. a. (1997) und Drost u. Nijman (1993). In Anwendungen ist dies von großem Nachteil, da man sich für einen Zeithorizont bezüglich der log-Renditen (d.h. stündlich, täglich oder wöchentlich) entscheiden muss und man keine geschlossenes Modell für

abweichende Zeithorizonte hat.

Im Folgenden soll daher nicht die bedingte Verteilung von $R_{t+1}^{(n)}$ gegeben der Vergangenheit $(R_t^{(n)}, R_{t-1}^{(n)}, \dots)$ betrachtet werden, sondern gegeben der Vergangenheit $\mathbf{X}_t^{(n)} = (R_{nt-1}, R_{nt-2}, \dots)$. Dies bedeutet, dass man die bedingte Verteilung der aggregierten Zufallsvariable $R_{t+1}^{(n)}$ gegeben der Vergangenheit der Anfangszeitreihe bis zum Zeitpunkt $nt - 1$ untersucht. Diese Verteilung besitzt zwar ebenfalls keine geschlossene Form, allerdings kann hier wie in Kapitel 2 der Parameter der bedingten iid Approximation angewendet werden. Die nachstehende Abbildung 3.1 zeigt schematisch die aggregierte Zeitreihe und die Anfangszeitreihe.

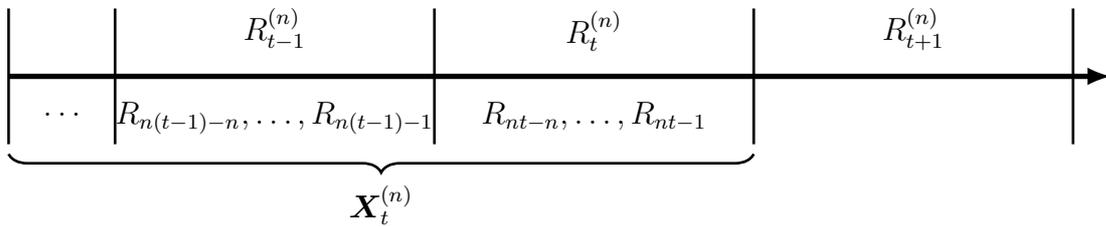


Abbildung 3.1.: Aggregierte Zeitreihe und Anfangszeitreihe.

Das Hauptresultat (Satz 2.2.1) liefert nun die Grundlage für diese Problemstellung. Falls sich die Renditen der Anfangszeitreihe stückweise, d.h. in Fenstern $R_{nt-n}, \dots, R_{nt-1}$, $t > 0$, approximativ wie iid Zufallsvariablen verhalten, sind die Elemente der aggregierten Zeitreihen approximativ Summen von iid Zufallsvariablen. Der Fehler der Approximation bleibt dabei derselbe wie im Abschnitt 2.2.

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die Verteilung der Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen für viele Arten von zugehörigen Innovationen berechnet werden kann wie beispielsweise bei normalverteilten Innovationen. Der Square-Root-Ansatz bietet einen Lösungsansatz wie das q -Quantil der Faltung von iid normalverteilten Zufallsvariablen berechnet werden kann.

Bemerkung 3.1.1 (Square-Root-Ansatz). *Geht man davon aus, dass die R_t für $t = 1, \dots, n$ iid normalverteilt sind mit Skalenparameter σ , d.h. $R_t \sim N_{0,\sigma}$. Dann gilt*

$$\sum_{t=1}^n R_t \sim N_{0,\sqrt{n}\sigma}. \quad (3.2)$$

Folglich ist das zugehörige q -Quantil $\sqrt{n}\sigma \cdot \Phi^{-1}(q)$, wobei $\Phi(y) = \int_{-\infty}^y f(x)dx$ mit $f(x)$ aus Gleichung (2.14).

Im Folgenden wird das Ergebnis für den allgemeinen Fall stochastischer Volatilitätszeitreihen formuliert.

Satz 3.1.2. Sei R_{t+1}, \dots, R_{t+n} eine stochastische Volatilitätszeitreihe mit Anfangszustand X_t wie in Definition 1.1.3 und $\sum_{i=1}^n \sigma_{t+1}(x_t)\varepsilon_{t+i}$ besitze die Verteilung $Q_{\sigma_{t+1}(x_t)}^{*n}$, wobei $Q_{\sigma_{t+1}(x_t)}^{*n}$ die n -fache Faltung der Verteilung $Q_{\sigma_{t+1}(x_t)}$ ist. Dann ist

$$\|P\left(\sum_{i=1}^n R_{t+i} \in \cdot | X_t = x_t\right) - Q_{\sigma_{t+1}(x_t)}^{*n}\| \leq \psi(R_{t+1}, \dots, R_{t+n} | x_t).$$

Beweis Für jeden Wahrscheinlichkeitsraum (T, \mathcal{B}, μ) , (T, \mathcal{B}, ν) und $h : (T, \mathcal{B}) \rightarrow (U, \mathcal{C})$ messbar gilt

$$\begin{aligned} \|h\mu - h\nu\| &= \sup_{C \in \mathcal{C}} |(h\mu)(C) - (h\nu)(C)| \\ &= \sup_{C \in \mathcal{C}} |\mu(h^{-1}(C)) - \nu(h^{-1}(C))| \\ &\leq \sup_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B) - \nu(B)| \\ &= \|\mu - \nu\|. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $\mu := P(\mathbf{R}_{t+1,t+n} \in \cdot | X_t = x_t)$, $h(\mathbf{R}_{t+1,t+n}) := \sum_{i=1}^n R_{t+i}$ und $\nu := P(\tilde{\mathbf{R}}_{t+1,t+n} \in \cdot | X_t = x_t)$, wobei $\tilde{R}_{t+1}, \dots, \tilde{R}_{t+n}$ iid bedingt nach $X_t = x_t$ sind. Satz 2.2.1 liefert dann die Behauptung. \square

Satz 3.1.2 besagt im weiteren Sinn, dass gegeben der Vergangenheit der Anfangszeitreihe bis zum Zeitpunkt $nt - 1$ die Verteilung von $R_{t+1}^{(n)}$ approximativ die Faltung der Verteilung der Innovationen der Anfangszeitreihe mit einem zusätzlichen Skalenparameter ist. Dieser Skalenparameter hängt von der Vergangenheit der Anfangszeitreihe bis zum Zeitpunkt $nt - 1$ ab.

Ein analoges Resultat kann auch im Spezialfall der bedingten approximativen Unabhängigkeit in GARCH(1,1)-Zeitreihen formuliert werden. In diesem Fall betrachtet man den Unterschied zwischen n aufeinander folgenden Folgengliedern einer GARCH(1,1)-Zeitreihe und der Verteilung von unabhängigen aber nicht notwendigerweise identisch verteilten Zufallsvariablen gegeben der Vergangenheit (siehe auch

Abschnitt 2.4).

Lemma 3.1.3. Sei $\{R_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ eine schwach stationäre GARCH(1,1)–Zeitreihe mit $ER_t^2 < \infty$ und $\alpha + \beta < 1$. $\mathcal{L}(\varepsilon_t) = Q$ genüge der Bedingung 2.3.1. Des Weiteren sei $\tilde{\mathbf{R}}_{t+1,t+i-1} = (\tilde{R}_{t+1}, \dots, \tilde{R}_{t+i-1})$ mit

$$\tilde{R}_{t+i} = \tilde{\sigma}_{t+i}(\mathbf{X}_t) \varepsilon_{t+i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $\tilde{\sigma}_{t+i}^2(\mathbf{X}_t) = \frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=i-1}^{\infty} \beta^j R_{t+i-j-1}^2$.

$$\|P \left(\sum_{i=1}^n R_{t+i} \in \cdot \mid \mathbf{X}_t = \mathbf{x}_t \right) - P \left(\left(\sum_{i=1}^n \tilde{\sigma}_{t+i}(\mathbf{x}_t) \varepsilon_{t+i} \right) \in \cdot \right)\| \leq C_{\max} \frac{\alpha (n-1)n}{\beta 2},$$

siehe Satz 2.4.1, Gleichung (2.23).

3.2. Value at Risk

Das Ergebnis des Abschnitts 3.1, Satz 3.1.2, liefert eine einfache Methode, um eine obere Schranke für den bedingten n -Tages VaR von $R_{t+1}^{(n)}$ gegeben $\mathbf{X}_t^{(n)} = \mathbf{x}_t^{(n)}$ zu ermitteln. Im Folgenden wird die Herleitung dieser oberen Schranke lediglich anhand des Parameters der bedingten iid Approximation vorgenommen. Analoge Rechnungen können jedoch im Fall der bedingten approximativen Unabhängigkeit erfolgen.

Man beachte, dass der bedingte VaR definiert ist als das bedingte q -Quantil der n -Tages Verlustvariable

$$L_{t+1}^{(n)} = V_t(1 - \exp(-R_{t+1}^{(n)}))$$

gegeben der Vergangenheit der Zeitreihe $\mathbf{X}_t^{(n)} = \mathbf{x}_t^{(n)}$, wobei V_t der Marktwert eines einzelnen spekulativen Assets oder eines Portfolios zum Zeitpunkt t ist. Weitere Details finden sich in Jorion (1997) und Reiss u. Thomas (2007) Abschnitt 16.4. Man beachte, dass

$$\text{VaR}_{t+1}^{(n)}(q) = V_t(1 - \exp(-F_{t+1}^{(n)-1}(q | \mathbf{x}_t^{(n)}))),$$

wobei $F_{t+1}^{(n)-1}(\cdot|\mathbf{x}_t^{(n)})$ die Quantilfunktion zu

$$P(R_{t+1}^{(n)} \in \cdot | \mathbf{X}_t^{(n)} = \mathbf{x}_t^{(n)})$$

ist.

Mit Hilfe des Satzes 3.1.2 kann nun eine obere Schranke des n -Tages VaR ermittelt werden. Zunächst wird ein technisches Resultat bezüglich der Beziehung des Variationsabstands von zwei Verteilungen und dem zugehörigen VaR vorgestellt.

Lemma 3.2.1. *Seien X, Y Zufallsvariablen und $d \in [0, 1]$. Dann folgt aus*

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| \leq d,$$

dass $\text{VaR}_X(q+d) \geq \text{VaR}_Y(q)$ für $q+d < 1$.

Beweis Seien F_X und G_Y die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen X und Y mit $\text{VaR}_X(q) = F_X^{-1}(q)$ und $\text{VaR}_Y(q) = G_Y^{-1}(q)$. Offensichtlich ist

$$|F_X(x) - G_Y(x)| \leq d$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist

$$F_X(x) - G_Y(x) \leq d.$$

Man erhält, dass $F_X(x) - G_Y(x) \leq d$ äquivalent zu $F_X^{-1}(q+d) \geq G_Y^{-1}(q)$ ist für $q \in (0, 1)$ und $q+d < 1$. □

Nach der Ermittlung des Parameters der bedingten iid Approximation kann man folglich auch eine obere Schranke für den n -Tages VaR von GARCH(1,1)-Zeitreihen bedingt auf die Vergangenheit der Anfangszeitreihe erhalten.

Sei $\{R_t^{(n)}\}_{t \geq 0}$ die aggregierte Zeitreihe der stochastischen Volatilitätszeitreihe $\{R_t\}_{t \geq 0}$ mit Anfangszustand $\mathbf{X}_t^{(n)}$. Man ersetze in den obigen Überlegungen F_X durch die bedingte Verteilungsfunktion

$$\tilde{F}^{*n}(\cdot|\mathbf{x}_t^{(n)})$$

von

$$\sigma_{nt}(\mathbf{x}_t^{(n)}) \sum_{i=1}^n \varepsilon_{n(t+1)-i}$$

gegeben $\mathbf{X}_t^{(n)} = \mathbf{x}_t^{(n)}$, G_Y durch die bedingte Verteilungsfunktion $G^{(n)}(\cdot|\mathbf{x}_t^{(n)})$ von

$$R_{t+1}^{(n)} = \sum_{i=1}^n R_{n(t+1)-i}$$

gegeben $\mathbf{X}_t^{(n)} = \mathbf{x}_t^{(n)}$ und d durch ψ . Sei F die Verteilungsfunktion von ε_t und $G^{(n)}(\cdot|\mathbf{x}_t^{(n)})$ die Verteilungsfunktion von $R_{t+1}^{(n)}$ gegeben des Anfangszustands $\mathbf{X}_t^{(n)} = \mathbf{x}_t^{(n)}$. Dann gilt

$$(G^{(n)})^{-1}(q|\mathbf{x}_t^{(n)}) \leq (\tilde{F}^{*n})^{-1}(q + \psi|\mathbf{x}_t^{(n)})$$

bzw.

$$(G^{(n)})^{-1}(q|\mathbf{x}_t^{(n)}) \leq \sigma_{nt}(\mathbf{x}_t^{(n)}) \cdot (F^{*n})^{-1}(q + \psi) \quad (3.3)$$

für $q + \psi < 1$, wobei F^{*n} die n -fache Faltung der Verteilungsfunktion F bezeichnet. Man beachte, dass $(G^{(n)})^{-1}(\cdot|\mathbf{x}_t^{(n)})$ der bedingte n -Tages VaR gegeben der Vergangenheit $\mathbf{X}_t^{(n)} = \mathbf{x}_t^{(n)}$ ist.

Die Ungleichung (3.3) besagt, dass der bedingte n -Tages VaR gegeben der Vergangenheit der Anfangszeitreihe $\mathbf{X}_t^{(n)} = \mathbf{x}_t^{(n)}$ abgeschätzt werden kann durch die Skalierung analog zum Square-Root-Ansatz (siehe Bemerkung 3.1.1) unter zusätzlicher Berücksichtigung des Parameters der bedingten iid Approximation. Daher wird zur Analyse der aggregierten Zeitreihe die Anfangszeitreihe, also die höher frequentierten Daten benutzt.

3.3. Prognose des seriell bedingten n -Tages Value at Risk in GARCH(1, 1)-Zeitreihen

In diesem Abschnitt soll die Prognose des seriell bedingten n -Tages Value at Risk in GARCH(1, 1)-Zeitreihen untersucht werden. Bezüglich der Prognose des bedingten

q -Quantils

$$\tilde{Y} := (G^{(n)})^{-1}(q | \mathbf{X}_t^{(n)})$$

basierend auf $\mathbf{X}_t^{(n)}$ wird das q -Quantil als Funktionalparameter der bedingten Verteilung

$$\begin{aligned} P\left(R_{t+1}^{(n)} \in \cdot | \mathbf{X}_t^{(n)}\right) &= P\left(\sum_{i=1}^n R_{n(t+1)-i} \in \cdot | \mathbf{X}_t^{(n)}\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{n(t+1)-i}(\mathbf{X}_{t+i}^{(n)}) \varepsilon_{n(t+1)-i} \in \cdot | \mathbf{X}_t^{(n)}\right) \end{aligned}$$

betrachtet. Folglich ist nach Abschnitt 1.3 (vgl. auch Reiss u. Thomas (2007), Abschnitt 8.1) die Prognoseverteilung basierend auf $\mathbf{X}_{t+i}^{(n)}$ gegeben durch

$$P\left(\sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_{n(t+1)-i}(\mathbf{X}_{t+i}^{(n)}) \varepsilon_{n(t+1)-i} \in \cdot | \mathbf{X}_t^{(n)}\right).$$

Es existiert allerdings keine analytische Darstellung der Verteilung der Aggregation von GARCH(1,1)-Zeitreihen (vgl. Abschnitt 3.1), so dass lediglich eine obere Schranke des seriell bedingten n -Tages VaR verwendet werden kann. Daher wird zur Prognose die zugehörige obere Schranke für das bedingte q -Quantil

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_\psi &:= \sigma_{nt}(\mathbf{X}_t^{(n)}) \cdot (F^{*n})^{-1}(q + \psi) \\ &= h\left(\mathbf{X}_t^{(n)}\right) \end{aligned}$$

betrachtet. Dies impliziert, dass

$$\begin{aligned} \hat{h}\left(\mathbf{X}_t^{(n)}\right) &= \sqrt{\frac{\hat{\zeta}_{(\mathbf{X}_t^{(n)})}}{1 - \hat{\beta}_{(\mathbf{X}_t^{(n)})}} + \hat{\alpha}_{(\mathbf{X}_t^{(n)})} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\beta}_{(\mathbf{X}_t^{(n)})}^j R_{nt-j-1}^2 \cdot (F^{*n})^{-1}(q + \psi)} \quad (3.4) \end{aligned}$$

als sinnvolle Prognose für $R_{t+1}^{(n)}$ basierend auf $\left(\mathbf{X}_t^{(n)}\right)$ betrachtet werden kann. Man beachte, dass es sich bei Verwendung der oberen Schranke um einen konservativen Ansatz handelt, d.h. das Risiko wird überschätzt.

Kapitel 4.

Backtesting

Um die in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellte Modellierung bezüglich der zugrunde liegenden Beobachtungen zu überprüfen, wird ein Validierungsansatz also ein statistischer Test herangezogen, der häufig auch als Backtesting bezeichnet wird.

Neben der vom Baseler Komitee für Bankenaufsicht vorgeschlagenen Überprüfung von VaR-Modellen (siehe Basel Committee on Banking Supervision (1996)) kann auch die Prognoseverteilung Gegenstand des Backtesting sein, d.h. man betrachtet entweder die Validierung der Prognoseverteilung selbst oder Funktionalparameter dieser Verteilung wie beispielsweise den seriell auf die Vergangenheit bedingten VaR in Form des bedingten Quantils (siehe Abschnitt 1.3.1 bezüglich der Prognose in stochastischen Volatilitätszeitreihen).

Das Backtesting, insbesondere in stochastischen Volatilitätszeitreihen, setzt sich zum Ziel, die tatsächliche Verteilung der Beobachtungen der Prognoseverteilung (siehe Abschnitt 1.3) basierend auf der Vergangenheit gegenüber zu stellen. Dies dient dazu, die Prognose in stochastischen Volatilitätszeitreihen auf Adäquanz zu überprüfen und Aussagen über die Güte dieser Prognosen zu treffen.

Somit wird im Fall der Modellierung der Risiken respektive Risikomesswerte, wie der VaR, und durch deren Backtesting gewährleistet, dass diese exakt abgebildet bzw. nicht unterschätzt werden. Bei dem vom Baseler Komitee für Bankenaufsicht vorgeschlagenen Backtestingverfahren für VaR-Modelle, siehe Basel Committee on Banking Supervision (1996) und Kerkhof u. Melenberg (2002), werden die tatsächlichen Verluste den prognostizierten VaR gegenübergestellt. Liegt die relative Häufigkeit der beobachteten Überschreitungen über dem prognostizierten VaR innerhalb einer bestimmten Bandbreite um die vom VaR-Modell prognostizierte Überschreitungswahrscheinlichkeit, so wird das VaR-Modell als adäquat angesehen.

Der erste Teil dieses Kapitels, Abschnitt 4.1, beschäftigt sich mit der Validierung der Prognoseverteilung, während der darauf folgende Abschnitt die Validierung von prognostizierten Risikomesswerten beinhaltet. Der letzte Abschnitt 4.3 umreißt den aufsichtsrechtlichen Hintergrund des Backtesting.

4.1. Validierung der Prognoseverteilung

Im Rahmen der Themenstellung der Validierung von Prognoseverteilungen mittels statistischer Tests (Backtesting) setzt sich das Backtesting zur Aufgabe, die Prognoseverteilung (siehe Abschnitt 1.3) mit der empirischen Verteilung der Beobachtungen zu vergleichen. Dies wird mit Hilfe der prognostizierten Verteilungsfunktion \hat{F} der Beobachtungen (z.B. log-Renditen) R_i , $i = 1, \dots, n$, also der Verteilungsfunktion der Prognoseverteilung, vorgenommen.

Geht man im einfachsten Fall von der Modellierung aus, dass die Beobachtungen iid sind und die stetige Prognoseverteilungsfunktion \hat{F} besitzen, so kann das Backtesting-Verfahren auf einer Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation basieren. Zu überprüfen ist der folgende Zusammenhang

$$U_i := \hat{F}(R_i) \sim U_{(0,1)}$$

für $i = 1, \dots, n$. Dies bedeutet, dass die mit \hat{F} transformierten Beobachtungen unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $(0, 1)$ sind. Falls also die beiden Eigenschaften (Unabhängigkeit und Gleichverteilung) erfüllt sind, kann von einer adäquaten Modellierung ausgegangen werden.

Die Validierung unter der einfachen Annahme, dass iid Beobachtungen mit einer bestimmten Verteilung vorliegen, kann auf stochastische Volatilitätszeitreihen erweitert werden. Geht man von einer Modellierung mit stochastischen Volatilitätszeitreihen aus, d.h. es liegt eine serielle Abhängigkeit vor, so kann die Validierung der Prognoseverteilung über die Rosenblatt-Transformation (siehe Seillier-Moiseiwitsch (1993), Rosenblatt (1952) und Reiss u. Thomas (2007), Abschnitt 8.1) erfolgen.

Zunächst wird diese Transformation allgemein vorgestellt und im Weiteren auf stochastische Volatilitätszeitreihen übertragen.

Satz 4.1.1 (Rosenblatt–Transformation). *Seien X_1, \dots, X_n reellwertige Zufallsvariablen und*

$$F_i(\cdot | x_{i-1}, \dots, x_1)$$

die bedingte Verteilungsfunktion von X_i gegeben $X_{i-1} = x_{i-1}, \dots, X_1 = x_1$. Es gelte

$$P\{\omega \in \Omega : F_i(\cdot | X_{i-1}(\omega), \dots, X_1(\omega)) \text{ stetig für alle } i = 1, \dots, n\} = 1.$$

Dann sind

$$U_1 := F_1(X_1), U_2 := F_2(X_2 | X_1), \dots, U_n := F_n(X_n | X_{n-1}, \dots, X_1) \quad (4.1)$$

unabhängig und $U_{(0,1)}$ -verteilte Zufallsvariablen.

Beweis Sei $Z := (X_{n-1}, \dots, X_1)$, $Y := F_n(X_n | Z)$. Es reicht z.z.

$$\mathcal{L}(Y, Z) = U_{(0,1)} \times \mathcal{L}(Z). \quad (4.2)$$

Dann sind Z und Y unabhängig und damit gilt auch, dass $F_1(X_1), F_2(X_2 | X_1), \dots, F_n(X_n | X_{n-1}, \dots, X_1)$ unabhängig und $U_{(0,1)}$ -verteilt sind.

Nach der Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation und dem Transformationsatz für Integrale gilt für eine Zufallsvariable W mit einer stetigen Verteilungsfunktion G

$$\int 1_A(G(x)) d\mathcal{L}(W)(x) = \int 1_A(G(W)) dP = P\{G(W) \in A\} = U_{(0,1)}(A). \quad (4.3)$$

Weiter gilt

$$P\{F_n(X_n | Z) \in A, Z \in B\} = \int 1_A(F_n(x_n | z)) 1_B(z) d\mathcal{L}(X_n, Z)(x_n, z). \quad (4.4)$$

Mittels des Satzes von Fubini für Markov–Kerne kann die Gleichung (4.4) fortgesetzt werden durch

$$\begin{aligned}
&= \int \int (1_A(F_n(x_n|z)) 1_B(z) P(X_n \in dx_n|Z = z)) d\mathcal{L}(Z)(z) \\
&= \int 1_B(z) \underbrace{\int (1_A(F_n(x_n|z)) dP(X_n \in dx_n|Z = z))}_{=U_{(0,1)}(A)} d\mathcal{L}(Z)(z) \\
&= U_{(0,1)}(A) \int 1_B(z) d\mathcal{L}(Z)(z) \\
&= U_{(0,1)}(A) P\{Z \in B\}.
\end{aligned}$$

Letzteres gilt wegen (4.3), da $F_n(\cdot|z)$ die Verteilungsfunktion von $P(X_n \in \cdot|Z = z)$ ist. Damit ist (4.4) gezeigt und die Behauptung folgt. \square

Für den Fall, dass eine Validierung der prognostizierten Verteilung der stochastischen Volatilitätszeitreihe für die vorliegenden Beobachtungen R_i erfolgen soll, wird das nachstehende Korollar und für GARCH(1,1)–Zeitreihen die darauf folgende Bemerkung herangezogen.

Korollar 4.1.2 (Rosenblatt–Transformation in stochastischen Volatilitätszeitreihen). *Gegeben sei die stochastische Volatilitätszeitreihe R_1, \dots, R_n mit Anfangszustand X_0 und ε_1 besitze eine stetige Verteilung mit Verteilungsfunktion F . Mit den Bezeichnungen in Bemerkung 1.1.8 setze*

$$\begin{aligned}
F_1(\cdot|x_0) &:= F(\cdot/\sigma_1(x_0)), \\
F_2(\cdot|x_0, \mathbf{r}_{1,1}) &:= F(\cdot/\sigma_2(x_0, \mathbf{r}_{1,1})), \\
&\vdots \\
F_n(\cdot|x_0, \mathbf{r}_{1,n-1}) &:= F(\cdot/\sigma_n(x_0, \mathbf{r}_{1,n-1})).
\end{aligned}$$

Die transformierten Zufallsvariablen

$$F_1(R_1|X_0), F_2(R_2|X_0, \mathbf{R}_{1,1}), \dots, F_n(R_n|X_0, \mathbf{R}_{1,n-1}) \quad (4.5)$$

sind unabhängig und $U_{(0,1)}$ –verteilte Zufallsvariablen.

Bemerkung 4.1.3. Das vorhergehende Korollar 4.1.2 lässt sich auf den Spezialfall von GARCH(1,1)–Zeitreihen übertragen. Im Rahmen von GARCH(1,1)–Zeitreihen wird für die Innovationen ε_{t+i} mit $i = 1, \dots, n$ in der Regel eine stetige Verteilung angenommen, wie z.B. eine Normal- oder Student–Verteilung. Ersetze R_i durch R_{t+i} , σ_i durch σ_{t+i} für $i = 1, \dots, n$ und X_0 durch \mathbf{X}_t , wobei

$$\sigma_i(x_0, \mathbf{r}_{1,i-1}) := \sigma_{t+i}(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1,t+i-1}) = z_{t+i} = \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t+i-j-1}^2}$$

für $i = 2, \dots, n$ bzw. für $i = 1$

$$\sigma_1(x_0) := \sigma_{t+1}(\mathbf{x}_t) := z_{t+1} = \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j r_{t-j}^2}.$$

Nach Anwendung der Rosenblatt–Transformation können die transformierten Daten mit Standardverfahren auf Unabhängigkeit und Gleichverteilung getestet werden. Dies kann entweder über den Kolmogoroff–Smirnow–Test (siehe Bronstein u. Semendjajew (1991) Kapitel 3) oder den χ^2 –Anpassungstest (siehe Falk u. a. (2004), Fahrmeir u. a. (2002) Kapitel 11) erfolgen.

4.2. Validierung von Funktionalparametern der Prognoseverteilung

Im Folgenden wird nicht die tatsächliche Verteilung mit der Prognoseverteilung verglichen, sondern das Augenmerk wird auf den seriell bedingten VaR gelegt, also das bedingte q –Quantil. Eine Überprüfung der Validierung dieser Funktionalparameter der Prognoseverteilung erfolgt auf Basis der Stichproben und demnach über statistische Tests. Hierfür muss jedoch ein geeignetes Testproblem definiert werden.

Auf den konkreten Anwendungsfall bezogen wird nur eine bestimmte Anzahl an Überschreitungen über dem VaR akzeptiert. Liegt eine wesentlich größere Anzahl an Überschreitungen vor, bildet das vorgegebene VaR–Modell das tatsächliche Risiko nicht adäquat ab und das Modell für die Prognoseverteilung sollte verworfen werden.

Wie bereits aus der Einleitung hervorgeht, hat eine Bank das Interesse, mög-

lichst exakt zu wissen, welchen Verlust sie bei gegebener Haltedauer zu einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit erleidet.

Meist erfolgt die Prognose des seriell bedingten VaR basierend auf einer Wahrscheinlichkeit von 0.99, d.h. der prognostizierte Wertverlust wird mit dieser Wahrscheinlichkeit und innerhalb der gegebenen Haltedauer nicht übertroffen.

Im Folgenden sei eine stochastische Volatilitätszeitreihe R_1, \dots, R_n mit Anfangszustand X_0 gegeben und ε_1 besitze eine stetige Verteilung.

Um einen statistischen Test formulieren zu können, ob eine wesentlich größere Überschreitungsanzahl der R_1, \dots, R_n über dem bedingten VaR vorliegt, werden hierfür die auf Unabhängigkeit und $(0, 1)$ -Gleichverteilung transformierten Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} U_1 &:= F_1(R_1|X_0), \\ U_2 &:= F_2(R_2|X_0, \mathbf{R}_{1,1}), \\ &\vdots \\ U_n &:= F_n(R_n|X_0, \mathbf{R}_{1,n-1}) \end{aligned}$$

herangezogen. Für diese transformierten Zufallsvariablen gilt das nachstehende Korollar.

Korollar 4.2.1. *Für die transformierten ZVn U_1, \dots, U_n gilt, dass*

$$1_{(q,1)}(U_1), 1_{(q,1)}(U_2), \dots, 1_{(q,1)}(U_n)$$

unabhängig und $B_{(1,1-q)}$ -verteilt sind. Daraus folgt, dass $\sum_{i=1}^n 1_{(q,1)}(U_i) \sim B_{(n,1-q)}$.

Dies bedeutet, dass die Anzahl der Überschreitungen der Zufallsvariablen U_1, \dots, U_n von q binomialverteilt ist mit Parametern n und $1 - q$. Um zu überprüfen, ob eine wesentlich größere Anzahl an Überschreitungen der transformierten Zufallsvariablen U_1, \dots, U_n bezüglich q vorliegt, lässt sich wegen Korollar 4.2.1 ein Binomialtest mit einseitigem Testen des Parameters q formulieren.

Sei $S = \{0, 1, \dots, n\}$ der Stichprobengrundraum und $\mathcal{Q} = \{B_{(n,1-q)} : q \in (0, 1)\}$ eine Familie von W-Maßen. Für einen einseitigen Test des Parameters q lässt sich

die Nullhypothese und Alternative aufstellen durch

$$H_0 := \{q \in (0, 1) : 1 - q \leq 1 - q_0\}$$

und

$$H_1 := \{q \in (0, 1) : 1 - q > 1 - q_0\},$$

wobei q_0 die Wahrscheinlichkeit darstellt, zu der der VaR berechnet wird, z.B. $q_0 = 0.99$. Für den kritischen Bereich erhält man

$$C_n = \{k, k + 1, \dots, n\}$$

mit dem kritischen Wert

$$k = \min\left\{m : \sum_{i=m}^n B_{n,1-q_0}\{i\} \leq a\right\},$$

wobei a das Testniveau ist. Dabei wird die Nullhypothese verworfen, falls die Überschreitungsanzahl der transformierten Beobachtungen der Stichprobe von q in C_n liegt.

Dieser statistische Test lässt sich durch die Äquivalenz

$$\begin{aligned} X_i &> F_i^{-1}(q|X_{i-1}, \dots, X_1) \\ \Leftrightarrow F_i(X_i|X_{i-1}, \dots, X_1) &=: U_i > q \end{aligned}$$

für $i = 2, \dots, n$ und analog für $X_1 > F_1^{-1}(q)$ wieder auf das Ausgangsproblem zurückführen. Dies bedeutet, dass man durch den Test der Anzahl der Überschreitungen der transformierten Zufallsvariablen von q einen Test der Überschreitungen des bedingten VaR von R_1, \dots, R_n erhält.

Das nachstehende Kapitel greift den vorgestellten statistischen Test wieder auf und stellt diesen im aufsichtsrechtlichen Zusammenhang dar. Der aufsichtsrechtliche Zonenansatz führt dabei diesen Test zu zwei unterschiedlichen Testniveaus durch. Weitere statistische Tests und Ergänzungen findet man in Wehn (2005), Abschnitt 4.

4.3. Aufsichtsrechtlicher Zonenansatz

Bevor näher auf den aufsichtsrechtlichen Zonenansatz oder Ampelansatz und die dazu gehörigen Signifikanzniveaus eingegangen wird, erfolgt eine kurze Einführung in die aufsichtsrechtliche Validierung von VaR-Modellen.

Banken werden dazu angehalten, ihren Risiken eine adäquate Eigenmitteldeckung gegenüber zu stellen, siehe Einleitung. Im Folgenden wird nun insbesondere das Marktrisiko betrachtet.

Marktrisiken beinhalten die Gefahr, dass bestehende Aktiva aufgrund negativer Marktentwicklungen basierend auf Zinssätzen, Aktien- und Wechselkursen, Goldpreis sowie Waren- bzw. Rohstoffpreisen (und mit diesen Risiken in Zusammenhang stehenden sonstigen Risiken) an Wert verlieren und für den Risikoträger Verluste (im Vergleich zum investierten Kaufpreis) entstehen.

Um dieser Gefahr Rechnung zu tragen, müssen Marktrisiken im Bereich des Handelsbuchs mit Eigenkapital unterlegt werden. Beispielsweise können Banken zur aufsichtsrechtlichen Kalkulation ihrer Marktrisiken einen Standardansatz oder ein internes Modell, welches auf bankinternen VaR-Modellen besteht, verwenden. Wird die Verwendung eines internen Modells angestrebt, so muss unter anderem eine Validierung des Modells durch Stresstesting und Backtesting erfolgen, vgl. Basel Committee on Banking Supervision (2009), I, Abs. 10. Hierdurch soll gewährleistet werden, dass Risikomaße historische Preisbewegungen geeignet beschreiben, vgl. Basel Committee on Banking Supervision (2009), Abschnitt 718(xcvi), S. 28.

Beim Stresstesting muss z.B. der Effekt eines milden Rezessionsszenarios auf das VaR-Modell analysiert werden. Backtesting-Verfahren hingegen überprüfen die internen VaR-Modelle auf Adäquanz und stellen den täglichen tatsächlichen Verlusten eines spekulativen Assets oder eines Portfolios die prognostizierten Verluste gegenüber. Im weiteren Verlauf wird ein einzelnes spekulatives Asset auch als Portfolio angesprochen. Üblicherweise enthält ein Portfolio jedoch mehrere Assets.

Für das Backtesting wird als Ausgangswert der tägliche VaR zum Niveau 0.99 verwendet, d.h. es wird der mögliche Portfolioverlust gewählt, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 nicht überschritten wird, vgl. Basel Committee on Banking Supervision (1996) und Basel Committee on Banking Supervision (2009), S. 29. In Basel Committee on Banking Supervision (2009) S. 13 wird als Datenbasis für die Prognose des VaR ein Minimum von einem Jahr zugrunde gelegt und die Banken

müssen monatlich oder bei erheblichen Änderungen der Marktpreise die Datensätze aktualisieren.

Bei Verwendung eines internen Ansatzes werden Banken dazu angehalten für manche Handelsbuchpositionen ebenfalls einen 10-Tages-VaR zu berechnen. Beim Backtesting dieses VaR ergibt sich jedoch die Problematik, dass für eine längere Haltedauer wie z.B. 10 Tagen der 10-Tages-VaR basierend auf einem statischen Portfolio berechnet wird. D.h. es werden in der gegebenen Haltedauer alle Positionen im Portfolio gehalten, wobei allerdings in der Realität eine Umschichtung des Portfolios vorgenommen werden kann. Hierbei kann es somit zu einer Diskrepanz durch Provisionseinnahmen sowie Handelsgewinne und -Verluste im Vergleich von tatsächlichen und prognostizierten Verlusten kommen.

Daher wird die Validierung der mathematischen Modelle auf Basis des täglichen VaR vorgenommen, wobei es allerdings auch beim Intraday-Handel zu den oben genannten Diskrepanzen kommen kann. Aus diesem Grund sollen zur Verbesserung die Einnahmen nach Provisionen, Spreads, Marktveränderungen sowie Intraday-Handelsergebnissen aufgeschlüsselt werden, siehe Basel Committee on Banking Supervision (1996).

Banken sollen dann ihr Backtesting auf Basis von hypothetischen Handel (alle Positionen werden als unverändert angenommen) oder tatsächlichem Handel (inklusive Provisionen, Spreads, Marktveränderungen sowie Intraday-Handelsergebnissen) oder beidem vornehmen.

Des Weiteren erfolgt das Backtesting quartalsweise mit den letzten 250 Tagen als Grundlage, d.h. es werden die letzten 250 Tage herangezogen, in denen der prognostizierte VaR mit den tatsächlichen Verlusten des Portfolios verglichen wird.

Abhängig von den Ergebnissen des Backtesting wird dann ein Aufschlagfaktor (Plusfaktor) zwischen 0 und 1 festgelegt, der sich als Multiplikator bei der Kalkulation des regulatorischen Eigenkapitals niederschlägt.

Hierzu wird nach Durchführung des Backtesting die Anzahl der tatsächlichen Überschreitungen der Portfolioverluste über dem prognostizierten VaR gezählt und mit Hilfe statistischer Tests findet eine Einteilung in Zonen statt.

Dieser Zonenansatz sieht Zwischenstufen analog zum Ampelprinzip (grüne Zone, gelbe Zone oder rote Zone) vor, indem zwei Signifikanzniveaus $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = 0.0001$ zur Unterteilung der Ampel betrachtet werden. Aus diesen Niveaus lassen sich entsprechend zwei kritische Werte k_1 und k_2 ermitteln, wobei der Test zum

Niveau $\alpha_1 = 0.05$ einen kleineren kritischen Wert liefert als der Test zum Niveau $\alpha_2 = 0.0001$.

Die tatsächliche Überschreitungsanzahl befindet sich im grünen Bereich, falls diese kleiner als der Wert k_1 ist. Die gelbe Zone wird durch die kritischen Werte k_1 und k_2 begrenzt, d.h. eine Anzahl der VaR-Überschreitungen, die größer oder gleich dem kritischen Wert k_1 und kleiner als der Wert k_2 sind, wird in die gelbe Zone eingestuft. Die rote Zone wird der Überschreitungsanzahl zugeteilt, die größer oder gleich dem kritischen Wert k_2 ist. Diese Vorgehensweise wird nochmals in der Abbildung 4.1 verdeutlicht.



Abbildung 4.1.: Einordnung der Überschreitungsanzahl in die entsprechenden Bereiche.

Eingestuft in die grüne Zone wird das verwendete mathematische Modell zur VaR-Schätzung als adäquat angesehen und es wird von Seiten der Aufsichtsbehörde kein Aufschlag auf das regulatorische Kapital vorgenommen.

Eine Einordnung des Modells in die gelbe Zone bedeutet allerdings, dass VaR-Überschreitungen der Wertänderungen häufiger als gemäß der festgelegten Wahrscheinlichkeit vorgegeben beobachtet werden. In diesem Fall sieht das Baseler Komitee für Bankenaufsicht einen Aufschlag bezüglich der Eigenkapitalunterlegung vor, sofern die Bank nicht zeigen kann, dass dieser Aufschlag nicht gerechtfertigt ist, siehe Basel Committee on Banking Supervision (1996).

Im Fall einer massiven Überschreitung, was eine Einordnung in die rote Zone bedeutet, ist das Modell als inadäquat anzusehen und zu verwerfen. Die Aufsichtsbehörde erhöht die Eigenkapitalanforderungen oder verbietet sogar das Modell, siehe Basel Committee on Banking Supervision (1996). In Basel Committee on Banking Supervision (1996) des BCBS erfolgt die Berechnung der kritischen Werte zur Einteilung in die unterschiedlichen Zonen nur für eine Backtesting-Zeitdauer von 250 Tagen. Hier ergeben sich die kritischen Werte wie in Tabelle 4.1 gezeigt. Zur Verallgemeinerung wird im Weiteren gezeigt, wie für eine beliebige Backtesting-Periode die kritischen Werte und damit der Plusfaktor kalkuliert werden können.

Man betrachtet insgesamt die nachstehende Testdurchführung:

1. Die Durchführung der Test erfolgt auf Basis der beiden Testniveaus $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = 0.0001$.
2. Prüfgröße sind die beobachteten Überschreitungen des zu prüfenden Markt-
risikomodells über dem prognostizierten täglichen VaR. Es wird angenommen,
dass die VaR–Überschreitungen unabhängig identisch und $B_{1,1-q}$ -verteilt sind.
Für die Gültigkeit dieser Annahme in stochastischen Volatilitätszeitreihen ver-
gleiche Abschnitt 4.2. Daraus folgt, dass die Anzahl der Überschreitungen bi-
nomialverteilt ist.
3. Die kritischen Werte k_1, k_2 zu den zugehörigen Testniveaus α_1, α_2 und des
VaR zur Wahrscheinlichkeit $q = 0.99$ können durch

$$k_1 = \min \left\{ m : \sum_{i=m}^n B_{(n,0.01)} \{i\} \leq \alpha_1 \right\}$$

und

$$k_2 = \min \left\{ m : \sum_{i=m}^n B_{(n,0.01)} \{i\} \leq \alpha_2 \right\}$$

bestimmt werden. Für die Stichprobengröße von $n = 250$ erhält man die kri-
tischen Werte $k_1 = 5$ und $k_2 = 10$.

4. Die Menge aller möglichen Realisationen, die zu einem Bestehen des ersten
Tests führen, bilden die grüne Zone. Die Realisationen, die den zweiten Test
bestehen, den ersten aber nicht, bilden die gelbe Zone. Die rote Zone setzt sich
aus den Realisationen zusammen, für die beide Tests nicht bestanden sind.

Nach der Einordnung gemäß dem Ampelprinzip wird das zugrundeliegende Ei-
genkapital zum Zeitpunkt t dann folgendermaßen berechnet

$$K_t = SF_t \cdot \max \left\{ \text{VaR}_t(0.99), \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} \text{VaR}_{t-i}(0.99) \right\}$$

wobei

$$SF_t = 3 + \text{Plusfaktor}_t$$

4. Backtesting

der Skalierungsfaktor zum Zeitpunkt t basierend auf dem Backtesting bezüglich 250 Handelstagen ist. Der Skalierungsfaktor wird alle drei Monate aktualisiert, siehe Basel Committee on Banking Supervision (1996).

Die nachfolgende Tabelle zeigt, wie sich die aus dem Backtesting resultierende Überschreitungszahl auf den Plusfaktor auswirkt.

Zone	Anzahl der Überschreitungen	Plusfaktor
Grüne Zone	0	0
	1	0
	2	0
	3	0
	4	0
Gelbe Zone	5	0.4
	6	0.5
	7	0.65
	8	0.75
	9	0.85
Rote Zone	10 oder mehr	1

Tabelle 4.1.: Zusammenhang der Überschreitungsanzahl und des Plusfaktors im aufsichtsrechtlichen Zonenansatz basierend auf 250 Handelstagen.

In Basel Committee on Banking Supervision (2009) wird vorgeschlagen, dass nicht nur ein Backtesting-Verfahren durchgeführt werden soll, sondern zusätzlich weitere Validierungen erfolgen sollen, wie z.B. Tests, die zeigen sollen, dass keine Unterschätzung des Risikos durch Verwendung des Normalverteilungsmodells vorliegt.

Mit dem Square-Root-Ansatz (siehe Bemerkung 3.1.1) erfolgt eine Skalierung des täglichen VaR auf eine Haltedauer von 10 Tagen, vgl. Basel Committee on Banking Supervision (2009), S. 23. Dieser Ansatz wird im nachfolgenden Kapitel näher behandelt.

Kapitel 5.

Simulations- und Fallstudien

In den vorangegangenen Kapiteln wurde zum einen die mathematische Modellierung und Prognose der Risiken und zum anderen die Validierung dieser Modelle durch Backtesting vorgestellt. In diesem Kapitel werden diese Resultate auf reale Datensätze und Simulationen angewendet. Für die Betrachtung des n -Tages VaR werden im Folgenden Datensätze basierend auf täglichen Beobachtungen verwendet. Es können allerdings auch Intradaydaten zugrunde gelegt werden, wobei jedoch oft fehlerhafte Datenbestände vorliegen oder die Beschaffung der Datensätze kostenintensiv ist. Für die Übertragung der Resultate auf reale Datensätze wird wie folgt vorgegangen:

Simulationen

1. Zuerst werden GARCH(1,1)-Zeitreihen mit bestimmten Parametern der Länge m simuliert und anschließend die Prognose des seriell bedingten n -Tages VaR des nächsten Zeitpunkts anhand der unten aufgeführten Methoden gebildet (Methoden 2 – 5). Alternativ wird ein Datensatz anstatt der simulierten Daten verwendet. Hierzu wird eine GARCH(1,1)-Zeitreihe an den Datensatz angepasst und die unbekannt Parameter mittels der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt. Folgend wird wieder die Prognose des seriell bedingten n -Tages VaR des nächsten Zeitpunkts anhand der unten aufgeführten Methoden vorgenommen.
2. Anschließend wird die Überschreitungswahrscheinlichkeit mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit des VaR verglichen, indem die relative Anzahl der

Überschreitungen des prognostizierten bedingten n -Tages VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite ermittelt wird.

Zu beachten ist hierbei, dass die Simulationen auf normalverteilten Innovationen der GARCH(1,1)-Zeitreihe basieren.

Datensätze

1. Zunächst erfolgt die Prognose des seriell bedingten n -Tages VaR und die damit einhergehende Schätzung der unbekannt Parameter mittels der Maximum-Likelihood-Methode basierend auf 1250 Beobachtungen (Aktienchlusskurse der Wal-Mart- und Adidas-Aktie vom 26.11.2003 bis zum 13.10.2008) (siehe Abschnitt 3.3 und 1.3.1). Somit wird die Prognose des seriell bedingten n -Tages VaR des Zeitraums vom 14.10.2008 bis zum 14.10.2009 basierend auf dem Zeitraum vom 26.11.2003 bis zum 13.10.2008 vorgenommen (Methoden 1 – 5).
2. Danach werden die VaR-Modelle mit den unten aufgeführten Methoden mittels Backtesting über einen Zeitraum von 250 Handelstagen (vgl. Abschnitt 4.3) validiert. Das heißt es werden die Aktienchlusskurse der Wal-Mart- und Adidas-Aktie vom 14.10.2008 bis zum 14.10.2009 betrachtet.

Methoden zur VaR-Prognose

Es werden VaR-Prognosen basierend auf den nachstehenden Methoden durchgeführt.

- **Methode 1:** Es wird zur Prognose des mehrtägigen bedingten VaR eine direkte Anpassung einer GARCH(1,1)-Zeitreihe an die mehrtägigen log-Renditen durchgeführt.
- **Methode 2:** Mittels der täglichen log-Renditen erfolgt die Prognose des mehrtägigen bedingten VaR mit Hilfe des Square-Root-Ansatzes (vgl. Bemerkung 3.1.1).
- **Methode 3:** Hier wird zur Prognose des mehrtägigen bedingten VaR der Parameter der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit herangezogen (vgl. Ungleichung (2.20)).

- **Methode 4:** Anlog zu Methode 3 wird der Parameter der bedingten iid Approximation verwendet. Allerdings wird die Vergangenheit nicht berücksichtigt (vgl. Ungleichung (2.21)).
- **Methode 5:** Zur Prognose des mehrtägigen bedingten VaR wird die approximative bedingte Unabhängigkeit betrachtet (vgl. Ungleichung (3.3)).

5.1. Simulationsstudien

Führt man die zweistufige Simulationen gemäß den Gliederungspunkten 1. und 2. auf der vorhergehenden Seite durch, so erhält man die relative Überschreitungshäufigkeit über dem prognostizierten VaR basierend auf den Methoden 2–5. Liegt diese zu weit über der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit q des VaR, so gibt es zu viele Überschreitungen der simulierten n -Tages log-Rendite über dem prognostizierten VaR und die jeweilige Methode ist als nicht adäquat anzusehen.

Die Tabellen 5.1, 5.2 und 5.3 zeigen, dass die VaR-Prognose bezüglich des Square-Root-Ansatzes in einigen Fällen über der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit q liegt. Zu erwarten war, dass für ein größeres q eine wesentlich größere relative Überschreitungshäufigkeit vorliegen sollte. Es zeigt sich allerdings, dass dies nicht immer der Fall ist, was eventuell auf eine höhere Varianz des prognostizierten VaR hindeuten könnte.

α	β	q	Modell bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)	Modell bzgl. der approximativen bed. Unabhängigkeit (Methode 5)
0.009	0.9	0.95	199 (4.975%)	–	–	109 (2.725%)
0.0009	0.9	0.95	201 (5.025%)	–	182 (4.55%)	186 (4.65%)
0.0009	0.9	0.99	30 (0.75%)	–	18 (0.45%)	24 (0.6%)
0.009	0.99	0.95	215 (5.375%)	23 (0.575%)	34 (0.85%)	118 (2.95%)
0.0009	0.99	0.95	196 (4.9%)	90 (2.25%)	179 (4.475%)	190 (4.75%)
0.0009	0.99	0.99	42 (1.05%)	–	27 (0.675%)	31 (0.775%)
0.0009	0.999	0.95	208 (5.2%)	185 (4.625%)	185 (4.625%)	193 (4.825%)
0.0009	0.999	0.99	45 (1.125%)	25 (0.625%)	26 (0.65%)	37 (0.925%)

Tabelle 5.1.: Absolute und relative Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten 5-Tages log-Rendite mit 4000 Simulationen.

α	β	q	Modell bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)	Modell bzgl. der approximativen bed. Unabhängigkeit (Methode 5)
0.0009	0.99	0.95	206 (5.15%)	–	112 (2.8%)	154 (3.85%)
0.0009	0.99	0.99	39 (0.975%)	–	–	0 (0%)
0.0009	0.999	0.95	210 (5.25%)	125 (3.125%)	130 (3.25%)	169 (4.225%)
0.0009	0.999	0.99	44 (1.1%)	–	–	0 (0%)

Tabelle 5.2.: Absolute und relative Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten 10-Tages log-Rendite mit 4000 Simulationen.

α	β	n	q	Modell bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)	Modell bzgl. der approximativen bed. Unabhängigkeit (Methode 5)
$2.85 \cdot 10^{-4}$	0.9993	5	0.95	181 (4.525%)	173 (4.325%)	174 (4.35%)	177 (4.425%)
$2.85 \cdot 10^{-4}$	0.9993	5	0.99	31 (0.775%)	24 (0.6%)	26 (0.065%)	28 (0.007%)
$2.85 \cdot 10^{-4}$	0.9993	10	0.95	212 (5.3%)	161 (4.025%)	171 (4.275%)	197 (4.925%)
$2.85 \cdot 10^{-4}$	0.9993	10	0.99	44 (1.1%)	–	10 (0.25%)	32 (0.8%)

Tabelle 5.3.: Absolute und relative Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite mit fester Vergangenheit der Adidas-Aktie im Zeitraum vom 26.11.2003 bis zum 13.10.2008 und 4000 Simulationen.

Betrachtet man empirische Fallstudien so findet man in Angelidis u. a. (2004), Baillie u. DeGennaro (1990), Hansen (1992) und Bollerslev (1987), dass eine Anpassung von GARCH(1,1)–Zeitreihen mit Student–verteilten Innovationen eher geeignet ist als mit normalverteilten Innovationen. Man beachte, dass für Gestaltsparameter $\kappa \rightarrow \infty$ die Student–Verteilungsfunktion gegen die Normalverteilungsfunktion konvergiert. Für $\kappa > 30$ kann approximativ die Normalverteilung angenommen werden. Daher ist das Normalverteilungsmodell für die Innovationen als Grenzfall im Modell in den Student–verteilten Innovationen enthalten.

Fallstudien in Franses u. van Dijk (2000) und RiskMetrics Group (1996) zeigen, dass bei kurzfristigen Renditen die Parameterschätzungen im GARCH(1,1)–Modell zu kleinen Werten für den Parameter der bedingten iid Approximation führen, da α nahe bei 0 und β nahe bei 1 liegt.

Bevor näher auf die Fallbeispiele eingegangen wird, werden zunächst in den Tabellen 5.4 und 5.5 die empirischen Quantile der Faltung von Standard–Student–Verteilung vorgestellt, da diese nur per Simulation ermittelt werden können. Dies ist notwendig, da keine geschlossene Form der Verteilung der Summe von Standard–Student–verteilten Zufallsvariablen existiert. Hierzu wurden 100000 aggregierte Zufallsvariablen bestehend aus der Summe von n Standard–Student–verteilten Zufallsvariablen gezogen und anschließend das empirische q –Quantil bestimmt.

q	n=5	n=10	n=63
0.9	4.2699	6.3252	16.8626
0.95	5.811	8.4284	21.9404
0.99	9.7011	13.4163	32.5762

Tabelle 5.4.: Simulierte Quantile der n –fachen Faltung der Standard–Student–Verteilung mit Gestaltsparameter $\kappa = 3$.

q	n=5	n=10	n=63
0.9	3.1781	4.5222	11.3588
0.95	4.0947	5.8426	14.5328
0.99	5.9	8.3312	20.5765

Tabelle 5.5.: Simulierte Quantile der n –fachen Faltung der Standard–Student–Verteilung mit Gestaltsparameter $\kappa = 10$.

5.2. Fallbeispiel Adidas–Aktie

Im Folgenden werden die Kurse der Adidas–Aktie betrachtet. Die Aktiengesellschaft Adidas ist ein deutscher Sportartikel–Hersteller mit den Marken Adidas, Reebok und TaylorMade. Der untersuchte Datensatz enthält die zugehörigen Kurse vom 26.11.2003 bis zum 14.10.2009, wobei die Kurse vom 26.11.2003 bis zum 13.10.2008 (1250 Handelstage) zur Anpassung einer GARCH(1,1)–Zeitreihe dienen, wohingegen der Zeitraum vom 14.10.2008 bis zum 14.10.2009 zur aufsichtsrechtlichen Überprüfung mittels Backtesting genutzt wird (siehe Abschnitt 4.3).

Modellierung der täglichen und 5–Tages log–Renditen

Die nachfolgende Abbildung 5.1 zeigt die zu den Schlusskursen zugehörigen negativen täglichen und 5–Tages log–Renditen. Ziel ist nun die Herleitung einer oberen Schranke des 5–Tages VaR mit Wahrscheinlichkeit 0.95 bzw. 0.99.

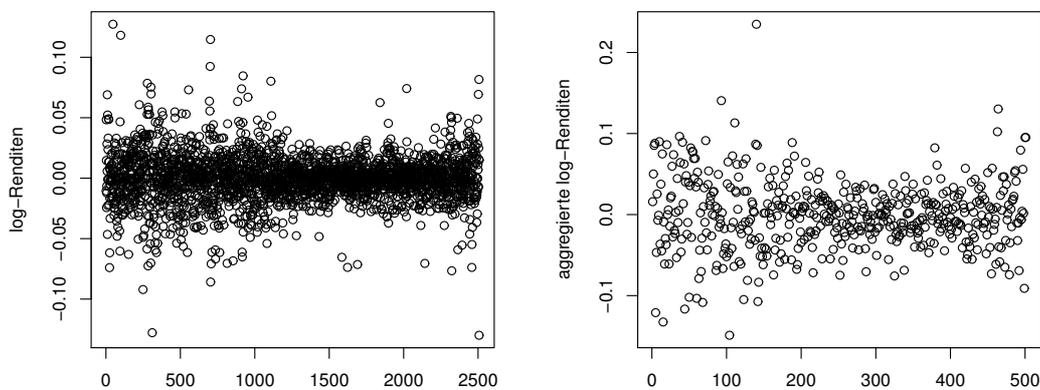


Abbildung 5.1.: Negative tägliche log–Renditen (links) und negative 5–Tages log–Renditen (rechts) der Adidas–Aktienkurse.

Zunächst wird eine GARCH(1,1)–Zeitreihe mit Student–verteilten Innovationen an die negativen täglichen log–Renditen angepasst und man erhält die Maximum–Likelihood–Schätzer $\hat{\zeta} = 5.68 \cdot 10^{-8}$, $\hat{\alpha} = 2.85 \cdot 10^{-4}$, $\hat{\beta} = 0.9993$ und für den Gestaltungsparameter $\hat{\kappa} = 3.4974$. Eine Anpassung einer GARCH(1,1)–Zeitreihe an die

negativen 5-Tages log-Renditen, führt zu den geschätzten Parameter $\hat{\zeta} = 4.18 \cdot 10^{-6}$, $\hat{\alpha} = 0.0177$, $\hat{\beta} = 0.9811$ und $\hat{\kappa} = 5.3896$.

Man beachte, dass eine Überprüfung der Modellierung durch GARCH(1,1)-Zeitreihen über die Standardisierung der entsprechenden log-Renditen erfolgen kann. Dies bedeutet, dass für $i = 1, \dots, n$ die Residuen

$$\hat{\varepsilon}_{t+i} = r_{t+i} / \hat{z}_{t+i}$$

mit

$$\hat{z}_{t+i}^2 = \sqrt{\frac{\hat{\zeta}_{(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1, t+i-1})}}{1 - \hat{\beta}_{(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1, t+i-1})}} + \hat{\alpha}_{(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1, t+i-1})} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\beta}_{(\mathbf{x}_t, \mathbf{r}_{t+1, t+i-1})}^j r_{t+i-j-1}^2}$$

für $i = 2, \dots, n$ bzw.

$$\hat{z}_{t+1}^2 = \sqrt{\frac{\hat{\zeta}_{(\mathbf{x}_t)}}{1 - \hat{\beta}_{(\mathbf{x}_t)}} + \hat{\alpha}_{(\mathbf{x}_t)} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\beta}_{(\mathbf{x}_t)}^j r_{t-j}^2}$$

ungefähr dieselbe Verteilung besitzt wie die Verteilung der Innovationen, falls die Modellierung adäquat ist.

Der zugehörige QQ-Plot der Residuen in Abbildung 5.2 zeigt, dass die Modellanpassung im Fall der täglichen Renditen eindeutig besser ist als für die negativen 5-Tages log-Renditen. Dies ist in Übereinstimmung mit den Aussagen, dass mit GARCH(1,1)-Zeitreihen am besten kurzfristige log-Renditen modelliert werden können, vergleiche hierzu unter anderem Andersen u. Bollerslev (1998), Andersen u. a. (1999), Martens (2001), Martens (2002), Zivot (2008) und Embrechts u. a. (2009).

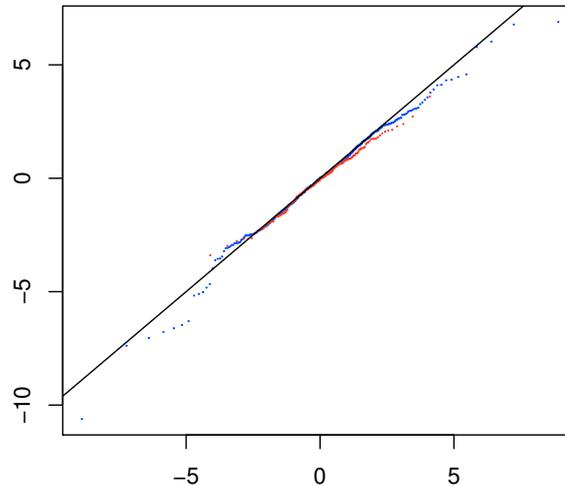


Abbildung 5.2.: QQ-Plot der negativen täglichen log-Renditen (blau) und QQ-Plot der negativen 5-Tages log-Renditen (rot) der Adidas-Aktienkurse.

Für den Parameter der bedingten iid Approximation der angepassten GARCH(1,1)-Zeitreihe (siehe Satz 2.3.5) erhält man

$$\psi \leq 0.00201$$

und $0.99 + \psi < 1$. Daher ist das Ergebnis aus Abschnitt 3.2 zur Ermittlung der oberen Schranke des bedingten 5-Tages VaR zur Wahrscheinlichkeit 0.99 auf den Datensatz anwendbar.

Validierung der täglichen log-Renditen

Bevor die einzelnen Methoden 1–5 validiert werden, erfolgt zunächst ein Backtesting eines GARCH(1,1)-Modells für die täglichen log-Renditen im Zeitraum vom 14.10.2008 bis 14.10.2009 (250 Handelstage, vgl. Abschnitt 4.3), da diese Modellierung die Grundlage für die weiteren Überlegungen darstellt.

Hierzu erfolgt eine Anpassung einer GARCH(1,1)-Zeitreihe an die negativen täglichen log-Renditen. Anschließend wird die Prognose des VaR im Zeitraum vom

14.10.2008 bis 14.10.2009 basierend auf dem Zeitraum vom 26.03.2003 bis 13.10.2008 zu $q = 0.99$ und $q = 0.95$ vorgenommen (vgl. Abschnitt 1.3.2 und Gleichung (1.11)).

Für $q = 0.99$ und die Testniveaus $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = 0.0001$ mit der Stichprobenanzahl $n = 250$ erhält man die kritischen Werte $k_1 = 5$ und $k_2 = 10$. Im Vergleich des prognostizierten VaR zu $q = 0.99$ und der täglichen log-Renditen führt dies zu 13 Überschreitungen mit einer relativen Überschreitungshäufigkeit von 5.18% (Abbildung 5.3) und daher zu einer Einordnung des Modells in die rote Zone und daher zur Verwerfung des Modells.

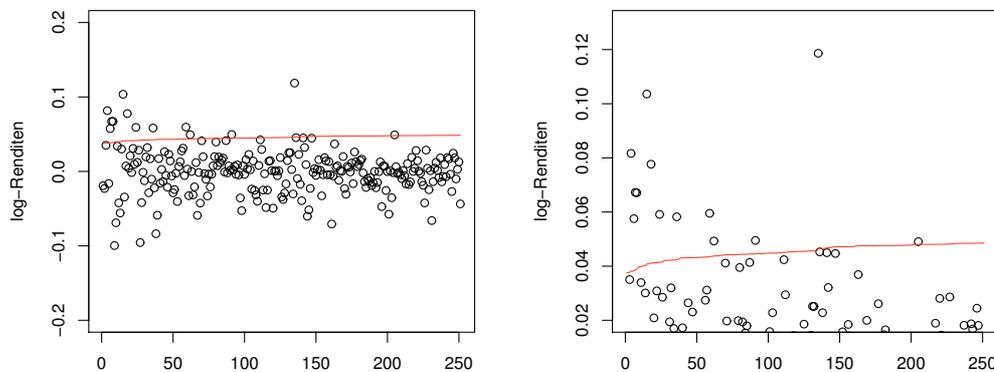


Abbildung 5.3.: Negative tägliche log-Renditen und der bedingte VaR (rot) zu $q = 0.99$ der Adidas-Aktienkurse.

Im Fall des VaR mit $q = 0.95$, $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = 0.0001$ mit der Stichprobenanzahl $n = 250$ ergeben sich die kritischen Werte $k_1 = 18$ und $k_2 = 27$. Bei der Durchführung des Backtesting erhält man 37 Überschreitungen (relative Überschreitungshäufigkeit beträgt 14.74%), was eine Einordnung in die rote Zone zur Folge hat (Abbildung 5.4).

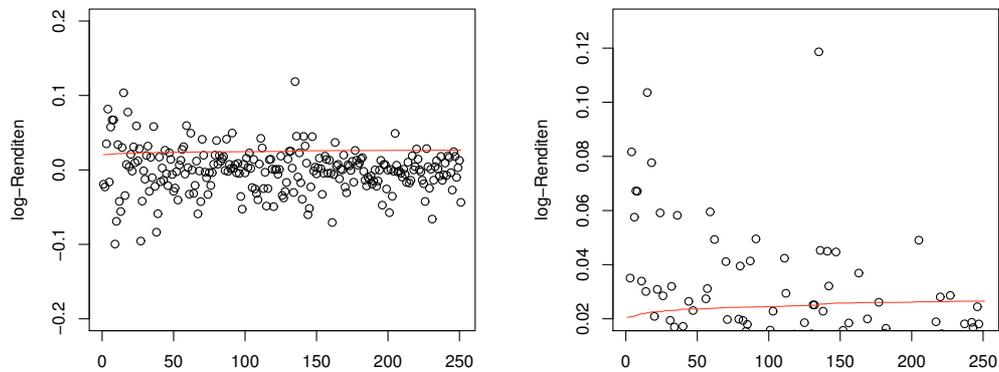


Abbildung 5.4.: Negative tägliche log-Renditen und der bedingte VaR (rot) zu $q = 0.95$ der Adidas-Aktienkurse.

Validierung der 5-Tages log-Renditen basierend auf den Methoden 1–5

Nachdem die Validierung der täglichen log-Renditen vorgenommen wurde, wird in einem zweiten Schritt das Backtesting der verschiedenen Methoden 1–5 ausgeführt. Die nachfolgende Tabelle 5.6 liefert die Ergebnisse des Backtesting für die negativen 5-Tages log-Renditen. Es stellt sich heraus, dass beim Backtesting zum höheren Quantil 0.99 wesentliche Unterschiede vorliegen. Hier verzeichnet das Modell bezüglich des Square-Root-Ansatzes die meisten Überschreitungen und wird in die rote Zone eingeordnet. Das Backtesting zur Wahrscheinlichkeit 0.95 liefert hingegen kaum Unterschiede.

	direkte Modellierung der 5-Tages log-Renditen (Methode 1)	Modell bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)	Modell bzgl. der approximativen bed. Unabhängigkeit (Methode 5)
VaR zu $q = 0.99$					
krit. Werte	$k_1 = 2, k_2 = 5$	$k_1 = 2, k_2 = 5$	$k_1 = 2, k_2 = 5$	$k_1 = 2, k_2 = 5$	$k_1 = 2, k_2 = 5$
Überschreitungen	3 (6.12%)	5 (10.2%)	4 (8.16%)	4 (8.16%)	4 (8.16%)
VaR zu $q = 0.95$					
krit. Werte	$k_1 = 5, k_2 = 10$	$k_1 = 5, k_2 = 10$	$k_1 = 5, k_2 = 10$	$k_1 = 5, k_2 = 10$	$k_1 = 5, k_2 = 10$
Überschreitungen	6 (12.24%)	7 (14.29%)	7 (14.29%)	7 (14.29%)	7 (14.29%)

Tabelle 5.6.: Backtesting der verschiedenen VaR-Modelle auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen der Adidas-Aktienkurse.

5. Simulations- und Fallstudien

Die nachfolgenden Abbildungen 5.5 und 5.6 zeigen die direkte Modellierung der 5-Tages log-Renditen und das zugehörige Backtesting. Dies bedeutet, dass als Zeitreihe die negativen 5-Tages log-Renditen für die Anpassung einer GARCH(1,1)-Zeitreihe verwendet werden und darauf das Backtesting basiert (Methode 1).

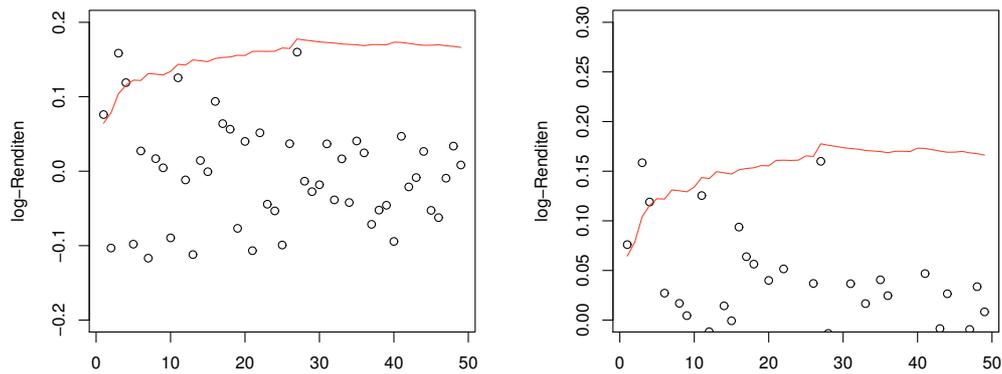


Abbildung 5.5.: Negative 5-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.99$ der Adidas-Aktienkurse.

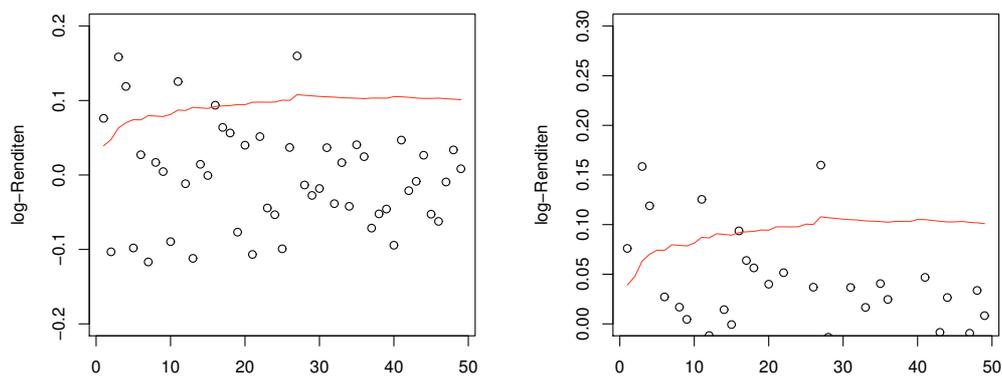


Abbildung 5.6.: Negative 5-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.95$ der Adidas-Aktienkurse.

Die nachfolgenden Abbildungen 5.7 und 5.8 zeigen die Modellierung der 5-Tages log-Renditen mit den verschiedenen Ansätzen (Methoden 2–5) und das zugehörige Backtesting zur Zeitreihe der täglichen negativen log-Renditen.

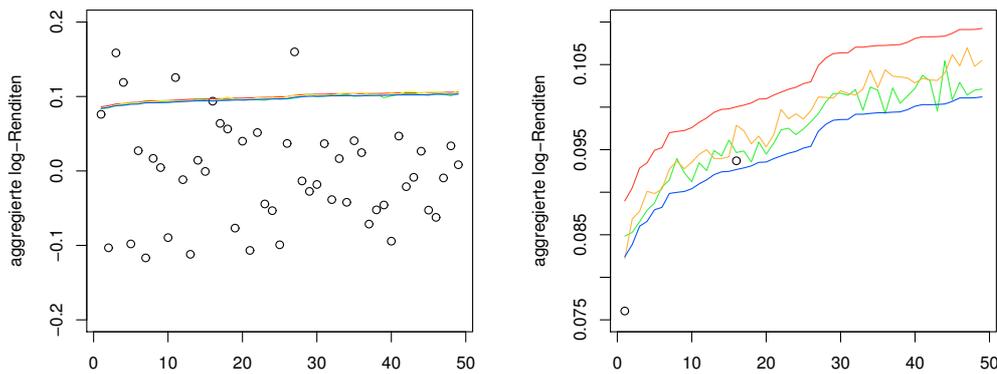


Abbildung 5.7.: Negative 5-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.99$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der approximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Adidas-Aktienkurse.

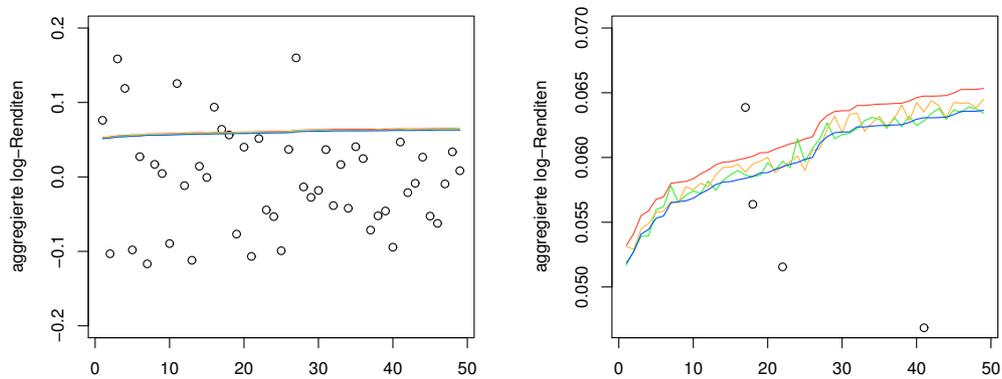


Abbildung 5.8.: Negative 5-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.95$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der approximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Adidas-Aktienkurse.

Modellierung der täglichen und 10-Tages log-Renditen

Im Weiteren kann ebenfalls der bedingte 10-Tages VaR ermittelt werden. Die folgende Abbildung 5.9 zeigt die Gegenüberstellung von den negativen täglichen log-Renditen und den negativen 10-Tages log-Renditen.

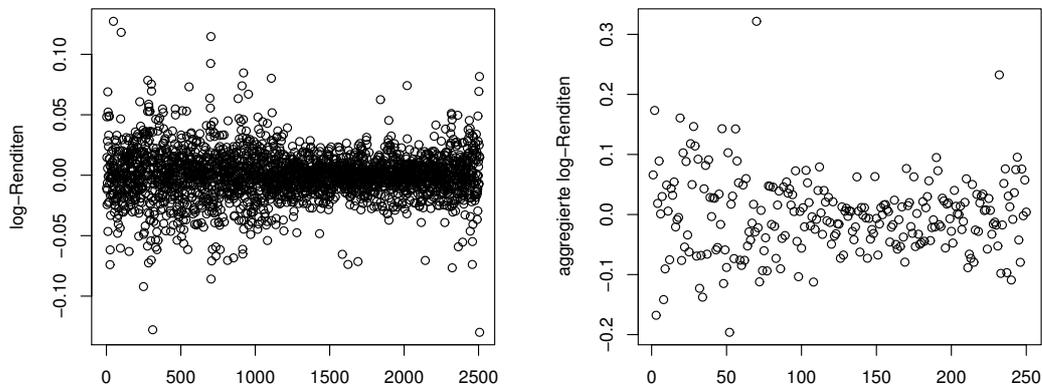


Abbildung 5.9.: Negative tägliche log-Renditen (links) und negative 10-Tages log-Renditen (rechts) der Adidas-Aktienkurse.

Analog zum Vorhergehenden wurde an die Zeitreihe der negativen 10-Tages log-Renditen eine GARCH(1,1)-Zeitreihe angepasst. Hierbei ergeben sich die Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\zeta} = 1.21 \cdot 10^{-4}$, $\hat{\alpha} = 6.08 \cdot 10^{-2}$, $\hat{\beta} = 0.7581$ und für den Gestaltsparameter $\hat{\kappa} = 5.8069$. Die Anpassung einer GARCH(1,1)-Zeitreihe an die negativen täglichen log-Renditen im vorhergehenden Abschnitt lieferte die geschätzten Parameter $\hat{\zeta} = 5.68 \cdot 10^{-8}$, $\hat{\alpha} = 2.85 \cdot 10^{-4}$, $\hat{\beta} = 0.9993$ und für den Gestaltsparameter $\hat{\kappa} = 3.4974$.

Die grafische Überprüfung erfolgt wie vorher mittels QQ-Plot (siehe Abbildung 5.10). Man stellt erneut fest, dass eine Anpassung einer GARCH(1,1)-Zeitreihe an die negativen 10-Tages log-Renditen weniger geeignet ist als auf täglicher Basis.

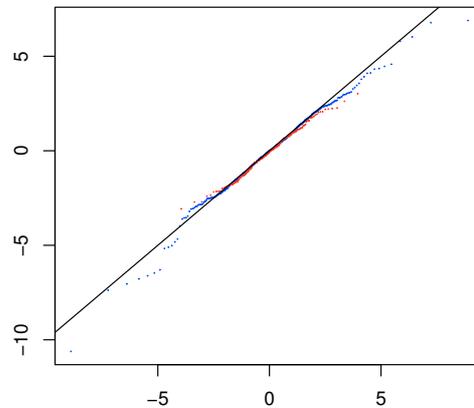


Abbildung 5.10.: QQ-Plot der negativen täglichen log-Renditen (blau) und QQ-Plot der negativen 10-Tages log-Renditen (rot) der Adidas-Aktienkurse.

Für den Parameter der bedingten iid Approximation der angepassten GARCH(1,1)-Zeitreihe gilt in diesem Fall

$$\psi \leq 0.0090152.$$

Validierung der 10-Tages log-Renditen basierend auf den Methoden 1–5

In diesem Abschnitt erfolgt ein Backtesting der Methoden 1–5 auf Basis der 10-Tages log-Renditen. Hier wird wieder derselbe Zeitraum vom 14.10.2008 bis 14.10.2009 analog zum Backtesting der 5-Tages log-Renditen verwendet.

Nachfolgend werden die Ergebnisse des Backtesting für die negativen 10-Tages log-Renditen in der Tabelle 5.7 dargestellt. Das Backtesting zur Wahrscheinlichkeit $q = 0.95$ liefert bei allen Methoden eine Einordnung in die grüne Zone, wohingegen die Validierung zu $q = 0.99$ dazu führt, dass lediglich die Methoden 1 und 4 (direkte Modellierung der 10-Tages log-Renditen und Modell bezüglich des Parameters der bedingten iid Approximation ohne Berücksichtigung der Vergangenheit) zur Einordnung in die grüne Zone führen. Die restlichen Methoden implizieren eine Einordnung in die gelbe Zone.

	direkte Modellierung der 10-Tages log-Renditen (Methode 1)	Modell bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)	Modell bzgl. der approximativen bed. Unabhängigkeit (Methode 5)
VaR zu $q = 0.99$					
krit. Werte	$k_1 = 1, k_2 = 3$	$k_1 = 1, k_2 = 3$	$k_1 = 1, k_2 = 3$	$k_1 = 1, k_2 = 3$	$k_1 = 1, k_2 = 3$
Überschreitungen	0 (0%)	2 (8.33%)	2 (8.33%)	0 (0%)	2 (8.33%)
VaR zu $q = 0.95$					
krit. Werte	$k_1 = 3, k_2 = 7$	$k_1 = 3, k_2 = 7$	$k_1 = 3, k_2 = 7$	$k_1 = 3, k_2 = 7$	$k_1 = 3, k_2 = 7$
Überschreitungen	2 (8.33%)	2 (8.33%)	2 (8.33%)	2 (8.33%)	2 (8.33%)

Tabelle 5.7.: Backtesting der verschiedenen VaR-Modelle auf Basis der negativen 10-Tages log-Renditen der Adidas-Aktienkurse.

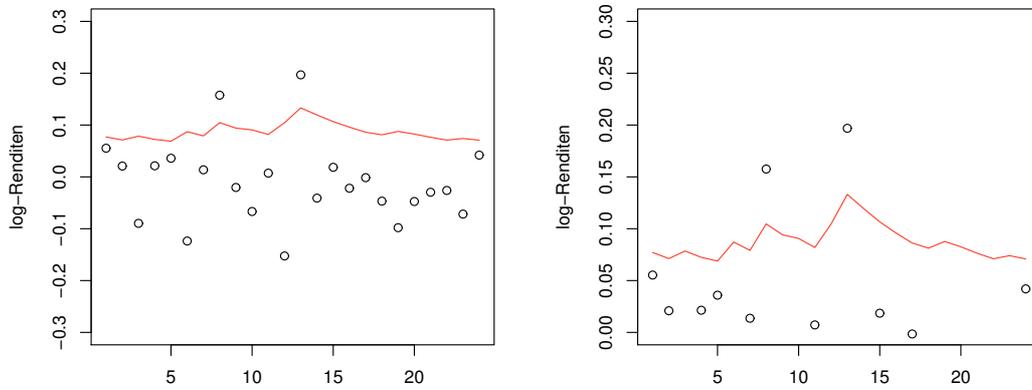


Abbildung 5.11.: Negative 10-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 10-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.95$ der Adidas-Aktienkurse.

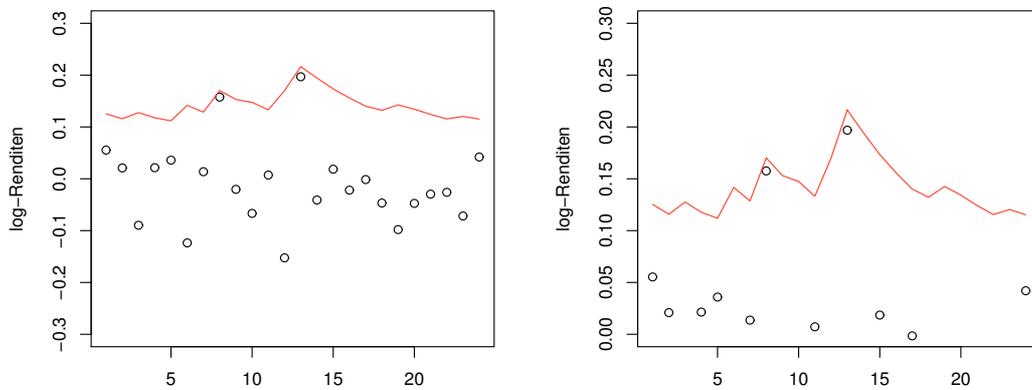


Abbildung 5.12.: Negative 10-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 10-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.99$ der Adidas-Aktienkurse.

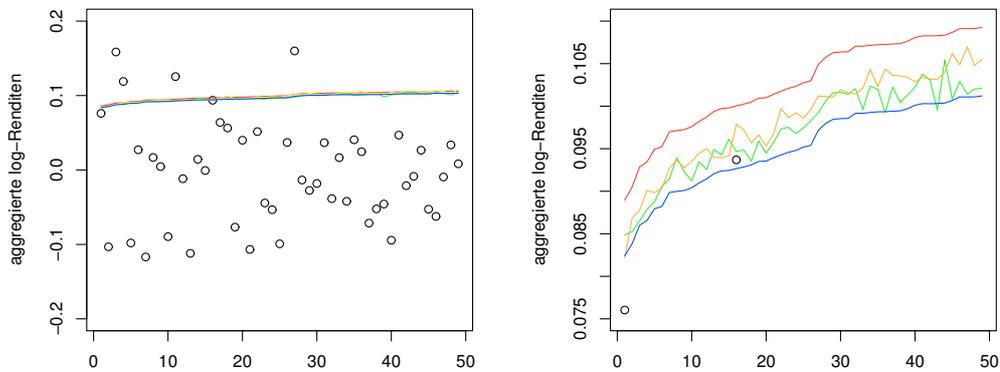


Abbildung 5.13.: Negative 10-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.99$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der approximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Adidas-Aktienkurse.

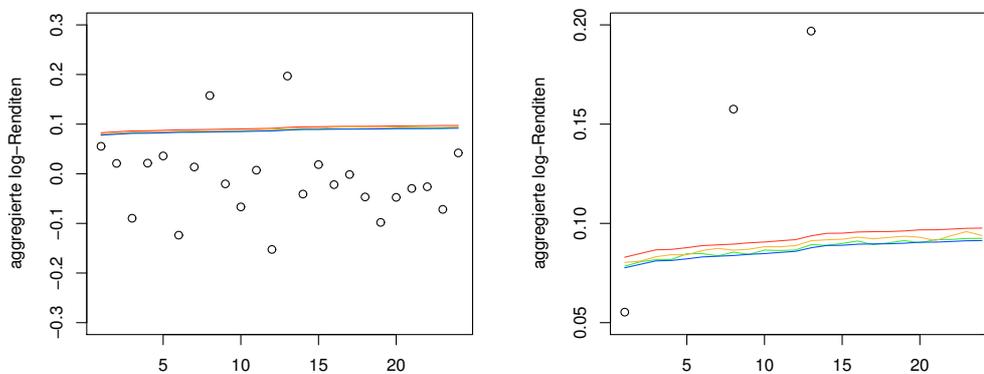


Abbildung 5.14.: Negative 10-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.95$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der approximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Adidas-Aktienkurse.

5.3. Fallbeispiel Wal-Mart-Aktie

Nachdem die Schlusskurse der Aktie Adidas betrachtet wurden, wird nun die Wal-Mart-Aktie untersucht. Wal-Mart Stores Inc. ist ein US-amerikanischer Einzelhandelskonzern.

Analog zur vorhergehenden Betrachtung werden wiederum die Schlusskurse im Zeitraum vom 26.11.2003 bis zum 13.10.2008 zur Anpassung einer GARCH(1,1)-Zeitreihe herangezogen. Für das Backtesting (vgl. Abschnitt 4.3) wird wieder der Zeitraum vom 14.10.2008 bis zum 14.10.2009 benutzt.

Modellierung der täglichen und der 5-Tages log-Renditen

In der nachfolgenden Abbildung 5.15 werden die negativen täglichen und 5-Tages log-Renditen dargestellt.

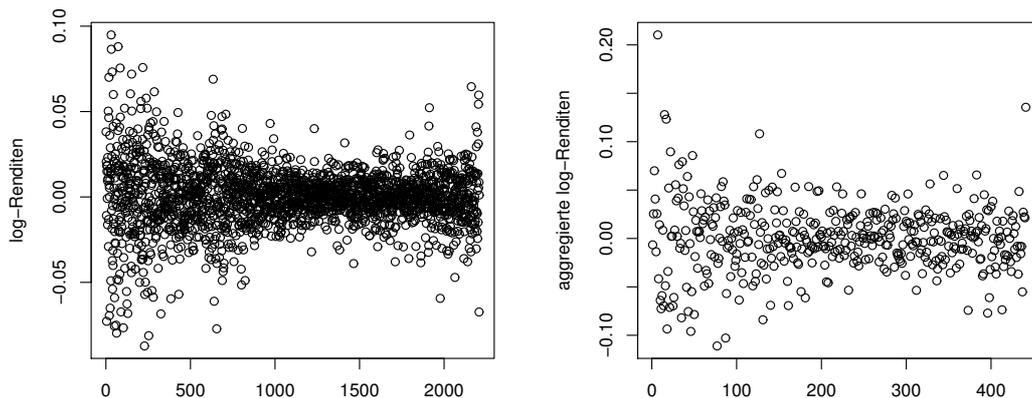


Abbildung 5.15.: Negative tägliche log-Renditen (links) und negative 5-Tages log-Renditen (rechts) der Wal-Mart-Aktienkurse.

Zunächst wird eine GARCH(1,1)-Zeitreihe mit Student-verteiltern Innovationen an die negativen täglichen log-Renditen angepasst und man erhält die Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\zeta} = 1.09 \cdot 10^{-7}$, $\hat{\alpha} = 9.18 \cdot 10^{-3}$, $\hat{\beta} = 0.9876$ und für den Gestaltungsparameter $\hat{\kappa} = 5.6391$. Eine Anpassung einer GARCH(1,1)-Zeitreihe an die negativen 5-Tages log-Renditen führt zu den geschätzten Parametern $\hat{\zeta} = 1.24 \cdot 10^{-4}$, $\hat{\alpha} = 6.25 \cdot 10^{-6}$, $\hat{\beta} = 0.8018$ und $\hat{\kappa} = 3.8741$.

Unter Betrachtung des QQ-Plots (Abbildung 5.16) stellt man fest, dass die Anpassung der täglichen und der 5-Tages log-Renditen in der rechten Flanke gleichwertig sind. Lediglich in der linken Flanke ist die Anpassung der täglichen log-Renditen besser.

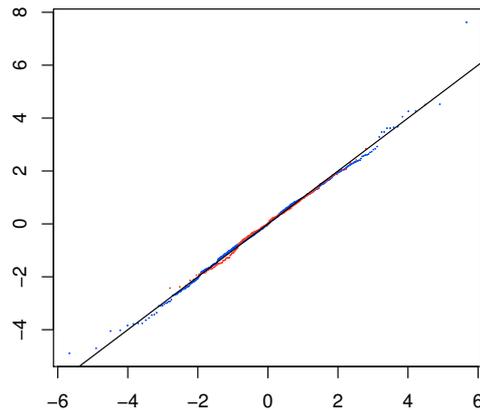


Abbildung 5.16.: QQ-Plot der negativen täglichen log-Renditen (blau) und QQ-Plot der negativen 10-Tages log-Renditen (rot) der Wal-Mart-Aktienkurse.

Nach Satz 2.3.5 erhält man für den Parameter der bedingten iid Approximation mit den oben genannten Schätzern für die täglichen log-Renditen

$$\psi \leq 0.0473.$$

Hieraus resultiert, dass das Ergebnis aus Abschnitt 3.2 zur Ermittlung der oberen Schranke des bedingten 5-Tages VaR zur Wahrscheinlichkeit 0.95 auf den Datensatz anwendbar ist, da $0.95 + \psi < 1$ ist.

Validierung der täglichen log-Renditen

Analog zum Fallbeispiel der Adidas-Aktie wird ein Backtesting auf Basis täglicher log-Renditen im Zeitraum vom 14.10.2008 bis 14.10.2009 (250 Handelstagen), vgl. Abschnitt 4.3 durchgeführt. Hierzu erfolgt die Prognose des VaR zu $q = 0.99$ mit

5. Simulations- und Fallstudien

den kritischen Werten $k_1 = 5$ und $k_2 = 10$ unter den Testniveaus $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = 0.0001$ mit der Stichprobenanzahl $n = 250$. Im Vergleich des prognostizierten VaR zu $q = 0.99$ und der täglichen log-Renditen erhält man 2 Überschreitungen mit einer relativen Überschreitungshäufigkeit von 0.79% (Abbildung 5.17). Dies führt zu einer Einordnung des Modells in die grüne Zone.

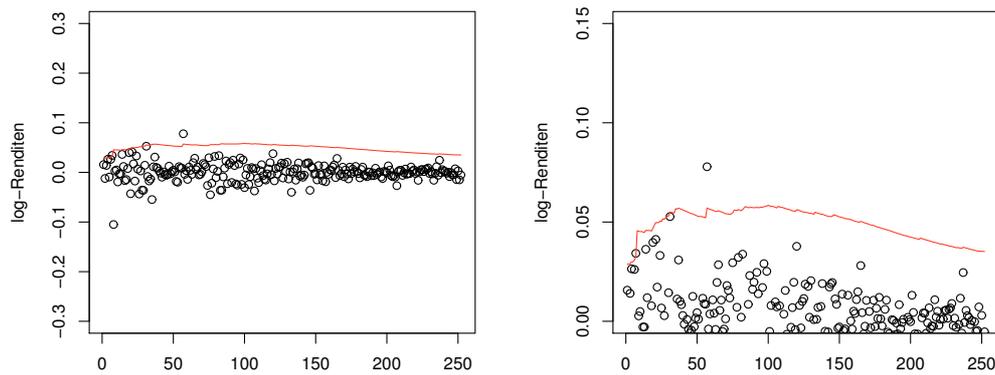


Abbildung 5.17.: Negative tägliche log-Renditen und der bedingte VaR (rot) zu $q = 0.99$ der Wal-Mart-Aktienkurse.

Im Fall des VaR mit $q = 0.95$, $\alpha_1 = 0.05$ und $\alpha_2 = 0.0001$ mit der Stichprobenanzahl $n = 250$ ergeben sich die kritischen Werte $k_1 = 18$ und $k_2 = 27$. Bei der Durchführung des Backtesting erhält man 11 Überschreitungen (relative Überschreitungshäufigkeit beträgt 4.37%), was eine Einordnung in die grüne Zone zur Folge hat (Abbildung 5.18).

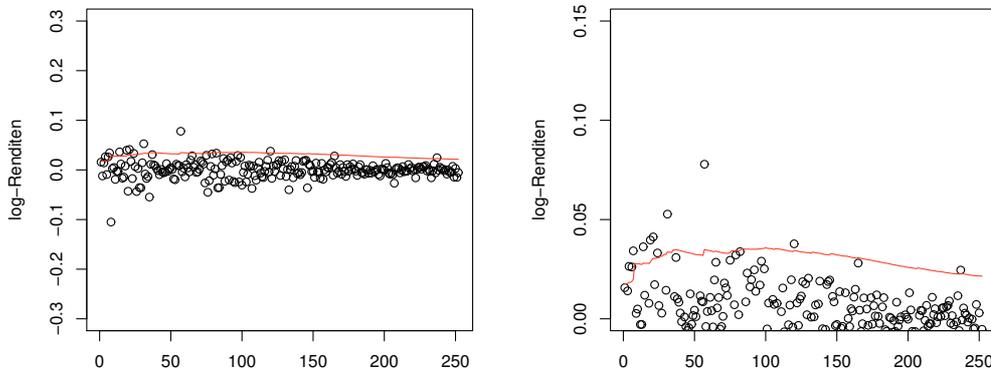


Abbildung 5.18.: Negative tägliche log-Renditen und der bedingte VaR (rot) zu $q = 0.95$ der Wal-Mart-Aktienkurse.

Validierung der 5-Tages log-Renditen basierend auf den Methoden 1–5

Analog zum vorhergehenden Abschnitt 5.2 wird ein Backtesting der Methoden 1–5 im Zeitraum vom 14.10.2008 – 14.10.2009 vorgenommen. Die nachstehende Tabelle 5.8 und die Abbildungen 5.19 und 5.20 zeigen die Ergebnisse dieser Validierung. Hierbei ist festzustellen, dass das Backtesting aller Modelle zu einer Einordnung in die grüne Zone führt.

Abschließend ist bei der Untersuchung der mehrtägigen log-Renditen der Adidas- und Walmart-Aktienkurse aufzuführen, dass bei höheren Quantilen ($q=0.99$) die Überschreitungsanzahl bezüglich des Square-Root-Ansatzes größer (5-Tages log-Renditen der Adidas-Aktienkurse) oder gleich (10-Tages log-Renditen der Adidas-Aktienkurse bzw. 5-Tages log-Renditen der Wal-Mart-Aktienkurse) der Überschreitungsanzahl bezüglich der anderen Modelle ist. Im Fall der 5-Tages log-Renditen der Adidas-Aktienkurse führt der Square-Root-Ansatz sogar in die Einordnung in die rote Zone.

	direkte Modellierung der 5-Tages log-Renditen (Methode 1)	Modell bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)	Modell bzgl. des Parameters der bed. iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)	Modell bzgl. der approximativen bed. Unabhängigkeit (Methode 5)
VaR zu $q = 0.95$					
krit. Werte	$k_1 = 5, k_2 = 10$	$k_1 = 5, k_2 = 10$	$k_1 = 5, k_2 = 10$	$k_1 = 5, k_2 = 10$	$k_1 = 5, k_2 = 10$
Überschreitungen	1 (2.04%)	1 (2.04%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (2.04%)

Tabelle 5.8.: Backtesting der verschiedenen VaR-Modelle auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen der Wal-Mart-Aktienkurse.

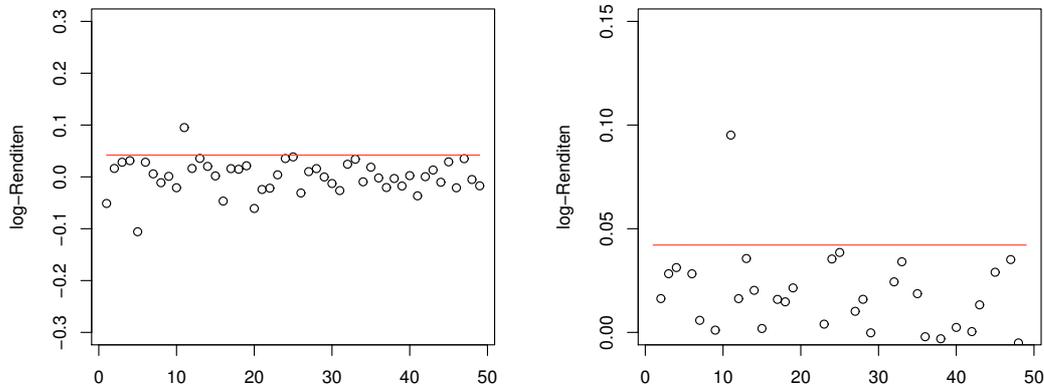


Abbildung 5.19.: Negative 5-Tages log-Renditen und der bedingte VaR auf Basis der negativen 5-Tages log-Renditen (rot) zu $q = 0.95$ der Wal-Mart-Aktienkurse.

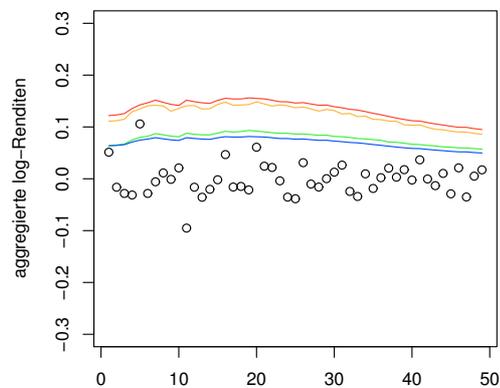


Abbildung 5.20.: Negative 5-Tages log-Renditen und die obere Schranke des bedingten VaR zu $q = 0.95$ bezüglich des Square-Root-Ansatzes (blau), des Parameters der bedingten iid Approximation (rot), des Parameters der bedingten iid Approximation abhängig von der Vergangenheit (orange) und der approximativen bedingten Unabhängigkeit (grün) der Wal-Mart-Aktienkurse.

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigte sich mit der Prognose von Funktionalparametern bedingter Verteilungen und anschließender Validierung dieser Prognose in stochastischen Volatilitätszeitreihen.

Als Anwendungsfall wurde auf den bedingten VaR in aggregierten stochastischen Volatilitätszeitreihen eingegangen. Insbesondere wurde eine obere Schranke für diesen VaR in aggregierten GARCH(1,1)–Zeitreihen ermittelt.

Die Motivation der Themenstellung bestand darin, dass am besten als Modell für kurzfristige log–Renditen (in der Regel tägliche log–Renditen) GARCH(1,1)–Zeitreihen geeignet sind (vgl. z.B. Embrechts u. a. (2009)). Eine geeignete multiplikative Skalierung der täglichen log–Renditen zur Berechnung des mehrtägigen bedingten VaR (Square–Root–Ansatz) ist allerdings nicht möglich. Dies bedeutet, dass die Aggregation von log–Renditen, die einer GARCH(1,1)–Zeitreihe folgen, nicht einfach wie im Fall von unabhängig und identisch verteilt (iid) behandelt werden kann (vgl. Diebold u. a. (1997) und Jorion (1997), Kapitel 8). Darüber hinaus ist die Aggregation einer GARCH(1,1)–Zeitreihe keine GARCH(1,1)–Zeitreihe mehr (vgl. Diebold u. a. (1997) und Drost u. Nijman (1993)).

Um diese Fragestellung zu behandeln, wurde zunächst der Prognosebegriff in stochastischen Volatilitätszeitreihen insbesondere GARCH(1,1)–Zeitreihen vorgestellt.

Anschließend wurde der Parameter der bedingten iid Approximation ψ eingeführt. Dieser Parameter, der den Unterschied zwischen der Verteilung von n aufeinander folgenden Folgengliedern einer stochastischen Volatilitätszeitreihe und der Verteilung von iid Zufallsvariablen quantifiziert, wurde auf GARCH(1,1)–Zeitreihen übertragen. Das Ergebnis liefert unter gewissen Voraussetzung an die GARCH(1,1)–

Zeitreihe, dass in diesem Fall eine obere Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation existiert, die von den Parametern α , β der GARCH(1,1)–Zeitreihe, der Anzahl n der aufeinander folgenden Zufallsvariablen und einer von den Innovationen abhängigen Konstanten C_{\max} abhängt, nämlich

$$\psi \leq C_{\max} \cdot B(\alpha, \beta, n),$$

(siehe Ungleichung (2.16)).

Um nun den Parameter der bedingten iid Approximation in aggregierten stochastischen Volatilitätszeitreihen zu untersuchen, wurde ein Resultat hergeleitet, das zeigt, dass der Parameter der bedingten iid Approximation in nicht aggregierten Zeitreihen gleich dem Parameter in aggregierten stochastischen Volatilitätszeitreihen ist.

Eine Herleitung des Ergebnisses für die bedingt unabhängige Approximation erfolgte analog.

Für die Validierung des prognostizierten bedingten n –Tages VaR basierend auf der hergeleiteten oberen Schranke bzw. auf dem Square–Root–Ansatz in den verwendeten GARCH(1,1)–Zeitreihen wurde als statistischer Test der aufsichtsrechtliche Zonenansatz verwendet. Als Basis dieses statistischen Tests diente die Rosenblatt–Transformation.

Ausblick

Häufig findet der Square–Root–Ansatz in der Praxis Verwendung, d.h. es erfolgt eine Skalierung des täglichen VaR auf eine Haltedauer von 10 Tagen, vgl. Basel Committee on Banking Supervision (2009), S. 23.

Bezüglich GARCH(1,1)–Zeitreihen zeigen jedoch Simulationen und empirische Studien, dass die relative Anzahl an Überschreitungen über dem mittels des Square–Root–Ansatz prognostizierten bedingten n –Tages VaR deutlich über dem nominalen Niveau liegt. Dies bedeutet, dass dieser prognostizierte bedingte VaR die tatsächlichen Verluste unterschätzt. Demnach ist die Themenstellung der Aggregation von GARCH(1,1)–Zeitreihen von praktischer Relevanz. Der Parameter der bedingten iid Approximation bietet einen Lösungsansatz, so dass die tatsächlichen n –Tages Verluste nicht mehr unterschätzt werden. Die Parameter der angepassten GARCH(1,1)–

Zeitreihe müssen zwar Werte für α nahe bei 0 und β nahe 1 aufweisen, damit die obere Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation klein ist. Dies wird jedoch durch Fallstudien aus RiskMetrics Group (1996) und Franses u. van Dijk (2000) bestätigt. Dennoch ergeben sich aus der Themenstellung der Aggregation von insbesondere GARCH(1,1)–Zeitreihen noch weiterreichende Fragestellungen.

Das Resultat bezüglich der Herleitung des Parameters der bedingten iid Approximation setzt voraus, dass die Dichte der Innovationen $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ symmetrisch und unimodal ist. Empirische Studien z.B. aus Giot u. Laurent (2001) zeigen jedoch, dass die Verwendung einer schiefen Student–Verteilung für die Verteilung der Innovationen geeigneter ist als die Annahme einer symmetrischen Verteilung für die Innovationen. Folglich bleibt zu zeigen, wie sich der Variationsabstand zweier schiefer Student–Verteilungen mit unterschiedlichen Skalenparametern abschätzen lässt. Hierbei kann mit Hilfe dieses Variationsabstands der Parameter der bedingten iid Approximation analysiert werden.

Ein weiterer Nachteil in der Verwendung von GARCH(1,1)–Zeitreihen besteht darin, dass Z_t^2 aus Definition 1.2.1 nicht vom Vorzeichen der ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, abhängt, sondern nur vom Betrag. In der Realität beobachtet man allerdings, dass bei Vorliegen von „schlechten Informationen“, also ($\varepsilon_t < 0$) die Volatilität eher ansteigt und umgekehrt eher fällt (siehe Black (1976)). In Angelidis u. a. (2004) wird eine Anpassung von Fallstudien an eine EGARCH–Zeitreihe mit Student–verteilten Innovationen als das beste Modell angesehen.

Es bleibt daher zu untersuchen, ob diese Fragestellungen in die Ermittlung des Parameters der bedingten iid Approximation übernommen werden können, um so wieder eine obere Schranke für den bedingten n –Tages VaR herleiten zu können.

Darüber hinaus sollte anstelle der alleinigen Betrachtung des VaR auch der Expected Shortfall in die Risikomessung mit einfließen. Dieser Wert gibt Aufschluss über die erwartete Verlusthöhe, falls der VaR überschritten wird.

Wie bereits in der Zusammenfassung erwähnt wurde, existiert keine geschlossene Form der Verteilung von aggregierten GARCH(1,1)–Zeitreihen. Anstatt nun den Parameter der bedingten iid Approximation anzuwenden, kann man die aggregierte GARCH(1,1)–Zeitreihe ersetzen durch eine GARCH(1,1)–Zeitreihe, die ähnliche Eigenschaften besitzen. So kann man bestimmte Funktionalparameter wie z.B. die Autokorrelationsfunktion im approximierenden GARCH(1,1)–Modell wählen.

Abschließend bleibt zu erwähnen, dass die Anwendung des Parameters der be-

dingten iid Approximation bzw. die bedingt approximative Unabhängigkeit nur dann sinnvoll ist, wenn die Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen n nicht zu groß ist (z.B. $n \leq 10$), da ansonsten die obere Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation zu groß wird. Des Weiteren sollte die Anpassung einer GARCH(1,1)–Zeitreihe Parameterwerte von α nahe 0 und β nahe 1 aufweisen, was jedoch oft der Fall ist (RM97 und Franses u. van Dijk (2000)). In diesem Fall ist die obere Schranke für den Parameter der bedingten iid Approximation ψ so klein, dass gilt $q + \psi < 1$, wobei q die Wahrscheinlichkeit des VaR ist. Dies bedeutet, dass der VaR mit Wahrscheinlichkeit $q + \psi$ bestimmt werden kann.

Letztlich bietet die Aggregation von GARCH(1,1)–Zeitreihen und deren Anwendungen insgesamt gesehen viele offene Fragestellungen.

Anhang A.

Hilfsresultate

In diesem Abschnitt werden noch zur Vollständigkeit Definitionen, Lemmata und Bemerkungen aufgeführt, die in den vorhergehenden Kapiteln benötigt werden.

Zunächst wird die Definition der bedingten Erwartung gegeben, die für die Prognose in Abschnitt 1.3 benötigt wird.

Definition A.0.1. Sei Y eine \mathbb{R} -wertige, X eine S -wertige Zufallsvariable und $E|Y| < \infty$.

(i) $h : (S, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ heißt Faktorisierung der bedingten Erwartung von Y gegeben X , falls für alle $B \in \mathcal{B} : E(Y1_B(X)) = E(h(X)1_B(X))$.

(ii) $h(x)$ heißt bedingte Erwartung von Y gegeben $X = x$.

(iii) $h(X)$ heißt bedingte Erwartung von Y gegeben X .

Hierfür verwendet man die folgende Schreibweise $E(Y|X = \cdot)$, $E(Y|X = x)$ und $E(Y|X = \cdot) \circ X$.

Man beachte, dass die Faktorisierung der bedingten Erwartung immer eindeutig existiert. Im Fall, dass die bedingte Verteilung existiert, ist die bedingte Erwartung der Mittelwert der bedingten Verteilung, also

$$E(Y|X = x) = \int yP(Y \in dy|X = x).$$

Der Monotoniesatz liefert eine Abschätzung des Variationsabstands der Verteilungen $G\mathcal{L}(X)$ und $G\mathcal{L}(\tilde{X})$ induziert durch den Markov-Kern G und den Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{L}(X)$ bzw. $\mathcal{L}(\tilde{X})$, siehe Reiss (1993), Abschnitt 1.4. Hierbei

lässt sich der Variationsabstand der induzierten Verteilungen durch den Variationsabstand der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(\tilde{X})$ abschätzen.

Lemma A.0.2 (Monotoniesatz). *Seien $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(\tilde{X})$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum (S, \mathcal{B}) und $G : (S, \mathcal{B}) \rightsquigarrow (T, \mathcal{C})$ sei ein Markov-Kern. Dann gilt*

$$\|G\mathcal{L}(X) - G\mathcal{L}(\tilde{X})\| \leq \|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(\tilde{X})\|. \quad (\text{A.1})$$

Die Aussage des Konvexitätssatzes besagt, dass der Variationsabstand der Verteilungen $G\mathcal{L}(X)$ und $\tilde{G}\mathcal{L}(X)$ abgeschätzt werden kann durch den ausintegrierten Variationsabstand der Markov-Kerne G und \tilde{G} integriert nach der Verteilung $\mathcal{L}(X)$, siehe Reiss (1993), Abschnitt 3.1..

Lemma A.0.3 (Konvexitätssatz). *Seien $G, \tilde{G} : (S, \mathcal{B}) \rightsquigarrow (T, \mathcal{C})$ Markov-Kerne und $\mathcal{L}(X)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem messbaren Raum (S, \mathcal{B}) , $f(\cdot|x)$ bzw. $\tilde{f}(\cdot|x)$ ist die ν -Dichte von $G(\cdot|x)$ bzw. $\tilde{G}(\cdot|x)$ für jedes $x \in S$ und $f(\cdot|\cdot)$ ist $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ -messbar. Dann gilt*

$$\|G\mathcal{L}(X) - \tilde{G}\mathcal{L}(X)\| \leq \int \|G(\cdot|x) - \tilde{G}(\cdot|x)\| d\mathcal{L}(X)(x). \quad (\text{A.2})$$

Das nachfolgende Lemma wurde für die Bemerkung 1.2.6 (iv) verwendet und kann in Klenke (2006), Kapitel 7 nachgeschlagen werden.

Lemma A.0.4 (Jensensche Ungleichung). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und X eine Zufallsvariable mit Werten in I und $E|X| < \infty$. Ist $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Abbildung, dann gilt*

$$E(g(X)) \geq g(E(X)).$$

Anhang B.

Implementierungen

`quantil_faltung_student_sigmas`

Beschreibung

Empirisches q -Quantil der Verteilung der Faltung von n unabhängigen Standard-Student-verteiltern Zufallsvariablen mit Skalenparametern σ_i für $i = 1, \dots, n$. Diese Funktion benutzt die in R implementierte Funktion `rt(n,df)`, wobei `n` die Anzahl der gezogenen Zufallsvariablen bezeichnet und `df` den Gestaltsparameter der Student-Verteilung darstellt.

Verwendung

```
quantil_faltung_student_sigmas(sigmas,q,kappa,Simulationanz)
```

Parameter

<code>sigmas</code>	(vector)	Skalenparameter
<code>q</code>	(real)	Wahrscheinlichkeit
<code>kappa</code>	(real)	Gestaltsparameter
<code>Simulationsanz</code>	(integer)	Anzahl der Simulationen

Rückgabewert

<code>quantilfalt</code>	(real)	Quantil der Faltung
--------------------------	--------	---------------------

simulation_parameter_verg_normal

Beschreibung

Simulation der oberen Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation für GARCH(1,1)-Zeitreihen mit normalverteilten Innovationen (vgl. (2.20) in Satz 2.3.5).

Verwendung

`simulation_parameter_verg_normal(AnzSim,n,Fenster,zeta,alpha,beta)`

Parameter

<code>AnzSim</code>	(integer)	Anzahl der Simulationen
<code>n</code>	(integer)	Länge der simulierten GARCH(1,1)-Zeitreihe bzw. Vergangenheit
<code>Fenster</code>	(integer)	Fenstergröße bzw. Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen
<code>zeta</code>	(real)	Parameter ζ der GARCH(1,1)-Zeitreihe
<code>alpha</code>	(real)	Parameter α der GARCH(1,1)-Zeitreihe
<code>beta</code>	(real)	Parameter β der GARCH(1,1)-Zeitreihe

Rückgabewert

Liste mit den Komponenten:

<code>fehler</code>	(vector)	Simulierte obere Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation
<code>mittel</code>	(real)	Empirisches Mittel der simulierten oberen Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation
<code>abw</code>	(real)	Empirische Standardabweichung der simulierten oberen Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation
<code>maximum</code>	(real)	Maximum der simulierten oberen Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation

simulation_approxunabh_verg_normal

Beschreibung, Verwendung und Parameter sind analog zur Funktion

`simulation_parameter_verg_normal`

unter Betrachtung der approximativen bedingten Unabhängigkeit.

simulation_parameter_verg_stud

Beschreibung

Simulation des Parameters der bedingten iid Approximation für GARCH(1,1)–Zeitreihen mit Student–verteilten Innovationen (vgl. (2.21) in Satz 2.3.5).

Verwendung

`simulation_parameter_verg_stud(AnzSim,n,Fenster,zeta,alpha,beta,kappa)`

Parameter

<code>AnzSim</code>	(<code>integer</code>)	Anzahl der Simulationen
<code>n</code>	(<code>integer</code>)	Länge der simulierten GARCH(1,1)–Zeitreihe bzw. Vergangenheit
<code>Fenster</code>	(<code>integer</code>)	Fenstergröße bzw. Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen
<code>zeta</code>	(<code>real</code>)	Parameter ζ der GARCH(1,1)–Zeitreihe
<code>alpha</code>	(<code>real</code>)	Parameter α der GARCH(1,1)–Zeitreihe
<code>beta</code>	(<code>real</code>)	Parameter β der GARCH(1,1)–Zeitreihe
<code>kappa</code>	(<code>real</code>)	Gestaltungsparameter κ der Student–Verteilung

Rückgabewert

Liste mit den Komponenten:

<code>fehler</code>	(<code>vector</code>)	Simulierte obere Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation
<code>mittel</code>	(<code>real</code>)	Empirisches Mittel der simulierten oberen Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation
<code>abw</code>	(<code>real</code>)	Empirische Standardabweichung der simulierten oberen Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation
<code>maximum</code>	(<code>real</code>)	Maximum der simulierten oberen Schranke des Parameters der bedingten iid Approximation

`simulation_approxunabh_verg_stud`

Beschreibung, Verwendung und Parameter sind analog zur Funktion

`simulation_parameter_verg_stud`

unter Betrachtung der approximativen bedingten Unabhängigkeit.

`simulation_prog_agg_var`

Beschreibung

Ermittlung der absoluten Überschreitungsanzahl des prognostizierten n -Tages VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite (vgl. Kapitel 5, Simulationen). Hierbei werden simulierte GARCH(1,1)-Zeitreihen als Vergangenheit verwendet.

Verwendung

`simulation_prog_agg_var(m, Fenster, zeta, alpha, beta, quantil)`

Parameter

<code>m</code>	(integer)	Länge der simulierten GARCH(1,1)-Zeitreihe bzw. Vergangenheit
<code>Fenster</code>	(integer)	Fenstergröße bzw. Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen
<code>zeta</code>	(real)	Parameter ζ der GARCH(1,1)-Zeitreihe
<code>alpha</code>	(real)	Parameter α der GARCH(1,1)-Zeitreihe
<code>beta</code>	(real)	Parameter β der GARCH(1,1)-Zeitreihe
<code>quantil</code>	(real)	Wahrscheinlichkeit, zu dem der VaR berechnet wird

Rückgabewert

Liste mit den Komponenten:

<code>sgra</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite anhand des Modells bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)
<code>psiverg</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite anhand des Modells bzgl. des Parameters der bedingten iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)
<code>psi</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite anhand des Modells bzgl. des Parameters der bedingten iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)
<code>approxunabh</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite anhand des Modells bzgl. der approximativen bedingten Unabhängigkeit ohne Vergangenheit (Methode 5)

`simulation_prog_agg_var_verg`

Beschreibung

Ermittlung der absoluten Überschreitungsanzahl des prognostizierten n -Tages VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite (vgl. Kapitel 5, Simulationen). Hierbei wird ein Datensatz als Vergangenheit anstatt der simulierten GARCH(1,1)-Zeitreihen in der vorherigen Funktion verwendet.

Verwendung

```
simulation_prog_agg_var_verg(Daten,Fenster,zeta,alpha,beta,quantil)
```

Parameter

<code>Daten</code>	(integer)	Datensatz als Vergangenheit
<code>Fenster</code>	(integer)	Fenstergröße bzw. Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen
<code>zeta</code>	(real)	Parameter ζ der GARCH(1,1)-Zeitreihe
<code>alpha</code>	(real)	Parameter α der GARCH(1,1)-Zeitreihe
<code>beta</code>	(real)	Parameter β der GARCH(1,1)-Zeitreihe
<code>quantil</code>	(real)	Wahrscheinlichkeit, zu dem der VaR berechnet wird

Rückgabewert

Liste mit den Komponenten:

<code>sqa</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite anhand des Modells bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)
<code>psiverg</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite anhand des Modells bzgl. des Parameters der bedingten iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)

<code>psi</code>	<code>(integer)</code>	Absolute Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite anhand des Modells bzgl. des Parameters der bedingten iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)
<code>approxunabh</code>	<code>(integer)</code>	Absolute Überschreitungsanzahl des prognostizierten VaR über der simulierten n -Tages log-Rendite anhand des Modells bzgl. der approximativen bedingten Unabhängigkeit ohne Vergangenheit (Methode 5)

backtesting_var

Beschreibung

Backtesting der verschiedenen VaR-Modelle auf Basis der n -Tages log-Renditen (vgl. Kapitel 5, Datensätze).

Verwendung

`backtesting_var(Daten, Fenster, quantil)`

Parameter

<code>Daten</code>	<code>(integer)</code>	Datensatz
<code>Fenster</code>	<code>(integer)</code>	Fenstergröße bzw. Anzahl der aufeinander folgenden Zufallsvariablen
<code>quantil</code>	<code>(real)</code>	Wahrscheinlichkeit, zu dem der VaR berechnet wird

Rückgabewert

Liste mit den Komponenten:

<code>direkt</code>	<code>(integer)</code>	Absolute Überschreitungsanzahl der prognostizierten VaRs über den n -Tages log-Renditen basierend auf 250 Handelstagen und der direkten Modellierung der n -Tages log-Renditen (Methode 2)
---------------------	------------------------	--

<code>sqra</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl der prognostizierten VaRs über den n -Tages log-Renditen basierend auf 250 Handelstagen und dem Modell bzgl. des Square-Root-Ansatzes (Methode 2)
<code>psiverg</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl der prognostizierten VaRs über den n -Tages log-Renditen basierend auf 250 Handelstagen und dem Modell bzgl. des Parameters der bedingten iid Approximation mit Vergangenheit (Methode 3)
<code>psi</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl der prognostizierten VaRs über den n -Tages log-Renditen basierend auf 250 Handelstagen und dem Modell bzgl. des Parameters der bedingten iid Approximation ohne Vergangenheit (Methode 4)
<code>approxunabh</code>	(integer)	Absolute Überschreitungsanzahl der prognostizierten VaRs über den n -Tages log-Renditen basierend auf 250 Handelstagen und dem Modell bzgl. der approximativen bedingten Unabhängigkeit ohne Vergangenheit (Methode 5)

Stichwortverzeichnis

A

Aggregation, 73, 74, 80
Anfangszeitreihe, 74–76, 78, 79
Anfangszustand, 9, 10, 13, 16, 29, 36, 76, 78, 79
approximative bedingte Unabhängigkeit, 58–71
aufsichtsrechtlicher Zonenansatz, 88–92

B

Backtesting, 81–117
Baseler Komitee für Bankenaufsicht, 73, 81, 90
bedingt ε -approximativ iid, 35
bedingte Unabhängigkeit, 34

D

Dirac-Maß, 38

E

Erwartungswertgleichung, 22
euklidische Matrixnorm, 46

F

Faltung, 76, 79, 99
Flankenindex, 23
Funktional, 26
Funktionalparameter, 26–30

G

Gamma-Funktion, 45, 51

I

Innovation, 9

K

Kurtosis, 21–23

M

Markov-Kern, 83, 125, 126
Maximum-Likelihood-Schätzer, 23, 24, 31, 93, 94, 100, 109, 114
mittlere quadratische Abweichung, 26
Moment, 10–12
Monte-Carlo-Simulation, 23

P

Parameter der bedingten iid Approximation, 34–35
Plusfaktor, 89, 90, 92
Prognose, 24–31
Prognoseverteilung, 29

R

Rosenblatt-Transformation, 82–85

S

Satz
Konvexitätssatz, 37, 38, 41, 53, 126
Monotoniesatz, 37, 38, 41, 125, 126

schwach stationär, 8, 9, 16, 18
Skalierungsfaktor, 92
Square-Root-Ansatz, 75, 79, 92, 94, 95, 104,
117
stochastische Rekurrenz-Gleichung, 23
strikt stationär, 8, 9, 15, 16, 19
striktes weißes Rauschen, 8, 15, 19
Stylized Fact, 14, 15

V

Value at Risk, 7, 28, 30, 31, 73–116
Variationsabstand, 33–52, 67, 78, 125, 126
Verlustfunktion, 25, 26
Verlustvariable, 77
Verteilung
 Gleichverteilung, 82–85
 multivariate Normalverteilung, 46
 univariate Normalverteilung, 15, 23, 45,
 50, 52–55, 66, 68, 75, 92, 99
 univariate Student-Verteilung, 45, 51–
 53, 85, 99, 100, 114
Volatilität, 7, 14, 15

W

Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation, 82,
83

Z

Zeitreihe
 ARCH(p)-Zeitreihe, 18, 19
 GARCH(1,1)-Zeitreihe, 14–24
 stochastische Volatilitätszeitreihe, 9–44,
 73–91

Literaturverzeichnis

- [Andersen u. Bollerslev 1998] ANDERSEN, T. G. ; BOLLERSLEV, T.: Answering the skeptics: yes, standard volatility models do provide accurate forecasts. In: *International Economic Review* 39 (1998), Nr. 4, S. 885–905
- [Andersen u. a. 1999] ANDERSEN, T. G. ; BOLLERSLEV, T. ; LANGE, S.: Forecasting financial market volatility: sample frequency vis-à-vis forecast horizon. In: *Journal of Empirical Finance* 6 (1999), S. 457–477
- [Angelidis u. a. 2004] ANGELIDIS, T. ; BENOS, A. ; DEGIANNAKIS, S.: The use of GARCH models in VaR estimation. In: *Statistical Methodology* 1 (2004), Nr. 1–2, 105 – 128. <http://dx.doi.org/DOI:10.1016/j.stamet.2004.08.004>. – DOI DOI: 10.1016/j.stamet.2004.08.004. – ISSN 1572–3127
- [Artzner u. a. 1999] ARTZNER, P. ; DELBAEN, F. ; EBER, J. M. ; HEATH, D.: Coherent Measures of Risk. In: *Mathematical Finance* 9 (1999), Nr. 3. <http://www.sam.sdu.dk/undervis/92227.E03/artzner.pdf>
- [Baillie u. DeGennaro 1990] BAILLIE, R. T. ; DEGENNARO, R. P.: Stock Returns and Volatility. In: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25 (1990), June, Nr. 02, 203–214. http://ideas.repec.org/a/cup/jfinqa/v25y1990i02p203-214_00.html
- [Basel Committee on Banking Supervision 1996] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Supervisory Framework for the Use of “Backtesting” in Conjunction with the Internal Models Approach to Market Risk Capital Requirements. (1996)
- [Basel Committee on Banking Supervision 1999] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A Revised Framework. (1999)

- [Basel Committee on Banking Supervision 2009] BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: Revisions to the Basel II market risk framework – Final Version. (2009c). <http://www.bis.org/publ/bcbs158.pdf?noframes=1>
- [Basrak u. a. 2002] BASRAK, B. ; DAVIS, R. A. ; MIKOSCH, T.: Regular variation of GARCH processes. In: *Stochastic Processes and their Applications* 99 (2002), Mai, Nr. 1, 95–115. <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V1B-44SKC97-1/1/a44946e5fdd8186dcffb372f459815d1>
- [Black 1976] BLACK, F.: Studies in stock price volatility changes. In: *Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economics Statistics Section, American Statistical Association, Alexandria, VA* (1976), S. 177–181
- [Black u. Scholes 1972] BLACK, F. ; SCHOLES, M. S.: The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency. In: *Journal of Finance* 27 (1972), May, Nr. 2, 399–417. <http://ideas.repec.org/a/bla/jfinan/v27y1972i2p399-417.html>
- [Bollerslev 1986] BOLLERSLEV, T.: Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. In: *Journal of Econometrics* 31 (1986), April, Nr. 3, 307–327. [http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](http://dx.doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1). – DOI 10.1016/0304-4076(86)90063-1
- [Bollerslev 1987] BOLLERSLEV, T.: A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. In: *The Review of Economics and Statistics* 69 (1987), August, Nr. 3, 542–47. <http://ideas.repec.org/a/tpr/restat/v69y1987i3p542-47.html>
- [Bollerslev u. a. 1994] BOLLERSLEV, T. ; ENGLE, R. F. ; NELSON, D. B.: Arch models. In: ENGLE, R. F. (Hrsg.) ; MCFADDEN, D. (Hrsg.): *Handbook of Econometrics* Bd. 4. Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1994, Kapitel 49
- [Breidt u. Davis 1998] BREIDT, F. ; DAVIS, R.: Extremes of stochastic volatility models. In: *Ann. Appl. Probab.* 8 (1998), 664–675. citeseer.ist.psu.edu/breidt98extremes.html
- [Bronstein u. Semendjajew 1991] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*, 25. 1991

- [Bundesministerium der Finanzen 2006] BUNDESMINISTERIUM DER FINANZEN: Verordnung über die angemessene Eigenmittelausstattung von Instituten, Institutsgruppen und Finanzholding-Gruppen (Solvabilitätsverordnung - SolvV). (2006). <http://bundesrecht.juris.de/solvv/index.html>
- [Chow u. Teicher 1978] CHOW, Y. S. ; TEICHER, H.: *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales*. New York : Springer, 1978
- [Crouhy u. a. 2001] CROUHY, M. ; GALAI, D. ; MARK, R.: *Risk Management*. McGraw-Hill, New York, 2001
- [Davis u. Mikosch 2000] DAVIS, R. A. ; MIKOSCH, T.: The sample autocorrelations of financial time series models. In: FITZGERALD, W. J. (Hrsg.) ; SMITH, R. L. (Hrsg.) ; WALDEN, A. T. (Hrsg.) ; YOUNG, P. C. (Hrsg.): *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*. Cambridge University Press, 2000, S. 247–274
- [Davis u. Mikosch 2009] DAVIS, R. A. ; MIKOSCH, T.: Extreme Value Theory for GARCH Processes. In: ANDERSEN, T. G. (Hrsg.) ; DAVIS, R. A. (Hrsg.) ; KREISS, J.-P. (Hrsg.) ; MIKOSCH, T. (Hrsg.): *Handbook of Financial Time Series*. Springer, Berlin/Heidelberg, 2009, S. 187–199
- [Diebold u. a. 1998] DIEBOLD, F. X. ; GUNTHER, T. A. ; TAY, A. S.: Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management. In: *International Economic Review* 39 (1998), November, Nr. 4, 863-83. <http://ideas.repec.org/a/ier/iecrev/v39y1998i4p863-83.html>
- [Diebold u. a. 1997] DIEBOLD, F. X. ; HICKMAN, A. ; INOUE, A. ; SCHUERMANN, T.: Converting 1-Day Volatility to h-Day Volatility: Scaling by Root-h is Worse Than You Think / Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania. Version: Jul 1997. <http://ideas.repec.org/p/wop/pennin/97-34.html>. 1997 (97-34). – Center for Financial Institutions Working Papers
- [Dowd 1998] DOWD, K.: *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*. John Wiley & Sons, New York, 1998
- [Drost u. Nijman 1993] DROST, F. C. ; NIJMAN, T. E.: Temporal Aggregation of GARCH Processes. In: *Econometrica* 61 (1993), July, Nr. 4, 909–27. <http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v61y1993i4p909-27.html>

- [Embrechts u. a. 2009] EMBRECHTS, P. ; FURRER, H. ; KAUFMANN, R.: Different Kinds of Risk. In: ANDERSEN, T. G. (Hrsg.) ; DAVIS, R. A. (Hrsg.) ; KREISS, J.-P. (Hrsg.) ; MIKOSCH, T. (Hrsg.): *Handbook of Financial Time Series*. Springer, Berlin/Heidelberg, 2009, S. 729–751
- [Embrechts u. a. 1997] EMBRECHTS, P. ; KLUPPELBERG, C. ; MIKOSCH, T.: *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer-Verlag, 1997
- [Engle 1982] ENGLE, R. F.: Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. In: *Econometrica* 50 (1982), July, Nr. 4, 987–1007. <http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v50y1982i4p987-1007.html>
- [Engle u. a. 1987] ENGLE, R. F. ; LILIEN, D. M. ; ROBINS, R. P.: Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The Arch-M Model. In: *Econometrica* 55 (1987), March, Nr. 2, 391-407. <http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v55y1987i2p391-407.html>
- [Fahrmeir u. a. 2002] FAHRMEIR, L. ; KÜNSTLER, R. ; PIGEOT, I. ; TUTZ, G.: *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse*. Springer, Berlin, 2002 <http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20&path=ASIN/3540440003>. – ISBN 3540440003
- [Falk u. a. 2004] FALK, M. ; BECKER, R. ; F., Marohn: Angewandte Statistik — Eine Einführung mit Programmbeispielen in SAS. In: *Springer Verlag* (2004)
- [Fama 1965] FAMA, E. F.: The Behavior of Stock-Market Prices. In: *The Journal of Business* 38 (1965), Nr. 1, 34–105. <http://dx.doi.org/10.2307/2350752>. – DOI 10.2307/2350752
- [Fan u. Yao 2003] FAN, J. ; YAO, Q.: *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*. (576pp)Springer-Verlag, 2003
- [Franses u. van Dijk 2000] FRANSES, P. H. ; DIJK, D. van: *Non-Linear Time Series Models in Empirical Finance*. Cambridge University Press, 2000 <http://econpapers.repec.org/RePEc:cup:cbooks:9780521779654>

- [French u.a. 1987] FRENCH, K. R. ; SCHWERT, G. W. ; STAMBAUGH, R. F.: Expected stock returns and volatility. In: *Journal of Financial Economics* 19 (1987), September, Nr. 1, 3-29. <http://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v19y1987i1p3-29.html>
- [Giot u. Laurent 2001] GIOT, P. ; LAURENT, S.: Value-At-Risk For Long And Short Trading Positions / Society for Computational Economics. Version: April 2001. <http://ideas.repec.org/p/sce/scecf1/94.html>. 2001 (94). – Computing in Economics and Finance 2001
- [Giovannini u. Philippe 1989] GIOVANNINI, A. ; PHILIPPE, J.: The Time-Variation of Risk and Return in the Foreign Exchange and Stock Markets / National Bureau of Economic Research, Inc. Version: November 1989. <http://ideas.repec.org/p/nbr/nberwo/2573.html>. 1989 (2573). – NBER Working Papers
- [Goldie 1991] GOLDIE, C. M.: Implicit Renewal Theory and Tails of Solutions of Random Equations. In: *Ann. Appl. Probab.* 1 (1991), Nr. 1, S. 126–166
- [Hall u. Yao 2003] HALL, P. ; YAO, Q.: Inference in Arch and Garch Models with Heavy-Tailed Errors. In: *Econometrica* 71 (2003), January, Nr. 1, 285-317. <http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v71y2003i1p285-317.html>
- [Hamilton 1994] HAMILTON, James D.: *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994
- [Hansen 1992] HANSEN, B.E.: Autoregressive Conditional Density Estimation / University of Rochester — Center for Economic Research (RCER). Version: 1992. <http://ideas.repec.org/p/roc/rocher/322.html>. 1992 (322). – RCER Working Papers
- [He u. Teräsvirta 1997] HE, C. ; TERÄSVIRTA, T.: Properties of Moments of a Family of GARCH Processes / Stockholm School of Economics. Version: September 1997. <http://ideas.repec.org/p/hhs/hastef/0198.html>. 1997 (198). – Working Paper Series in Economics and Finance
- [Hsieh 1988] HSIEH, D. A.: The statistical properties of daily foreign exchange rates: 1974-1983. In: *Journal of International Economics* 24 (1988), February, Nr. 1-

- 2, 129-145. <http://ideas.repec.org/a/eee/inecon/v24y1988i1-2p129-145.html>
- [Jorion 1997] JORION, P.: *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. McGraw-Hill, New York, 1997
- [Karlin u. Taylor 1975] KARLIN, S. ; TAYLOR, H. M.: *A First Course in Stochastic Processes, Second Edition*. 2. Academic Press, 1975. – ISBN 0123985528
- [Kerkhof u. Melenberg 2002] KERKHOF, J. ; MELENBERG, B.: Backtesting for risk-based regulatory capital / Tilburg University, Center for Economic Research. Version:2002. <http://ideas.repec.org/p/dgr/kubcen/2002110.html>. 2002 (110). – Discussion Paper
- [Kesten 1973] KESTEN, H.: Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. In: *Acta Math.* 131 (1973), S. 207–248
- [Klenke 2006] KLENKE, A.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2006 <http://www.amazon.com/exec/obidos/redirect?tag=citeulike07-20&path=ASIN/3540255451>. – ISBN 3540255451
- [Lee u. Hansen 1994] LEE, S.-W. ; HANSEN, B. E.: Asymptotic Theory for the Garch(1,1) Quasi-Maximum Likelihood Estimator. In: *Econometric Theory* 10 (1994), March, Nr. 01, 29-52. http://ideas.repec.org/a/cup/etheor/v10y1994i01p29-52_00.html
- [Lindner 2009] LINDNER, A.M.: Stationarity, mixing, distributional properties and moments of GARCH(p,q)-processes. In: ANDERSEN, T. G. (Hrsg.) ; DAVIS, R. A. (Hrsg.) ; KREISS, J.-P. (Hrsg.) ; MIKOSCH, T. (Hrsg.): *Handbook of Financial Time Series*. Springer, Berlin/Heidelberg, 2009, S. 43–69
- [Lumsdaine 1996] LUMSDAINE, R. L.: Consistency and Asymptotic Normality of the Quasi-maximum Likelihood Estimator in IGARCH(1,1) and Covariance Stationary GARCH(1,1) Models. In: *Econometrica* 64 (1996), Nr. 3, 575–96. <http://econpapers.repec.org/RePEc:ecm:emetrp:v:64:y:1996:i:3:p:575-96>
- [Mandelbrot 1963] MANDELBROT, B.: The Variation of Certain Speculative Prices. In: *The Journal of Business* 36 (1963), Nr. 4, 394–419. <http://dx.doi.org/10.2307/2350970>. – DOI 10.2307/2350970

- [Martens 2002] MARTENS, M.: Measuring and forecasting S&P 500 index–futures volatility using high–frequency data. In: *Journal of Futures Markets* 22 (2002), S. 497–518
- [Martens 2001] MARTENS, Martin: Forecasting daily exchange rate volatility using intraday returns. In: *Journal of International Money and Finance* 20 (2001), Nr. 1, 1-23. <http://econpapers.repec.org/RePEc:eee:jimfin:v:20:y:2001:i:1:p:1-23>
- [McNeil u. a. 2005] MCNEIL, A. J. ; FREY, R. ; EMBRECHTS, P.: *Quantitative risk management*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2005 (Princeton Series in Finance)
- [Nelson 1990] NELSON, D. B.: Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) model. In: *Econometric Theory* 6 (1990), S. 318–334
- [Pfanzagl 1973] PFANZAGL, J.: The accuracy of the normal approximation for estimates of vector parameters. In: *Springer Berlin / Heidelberg* 25 (1973), September, Nr. 3, S. 171–198
- [Reiss 1989] REISS, R.-D.: *Approximate Distributions of Order Statistics: With Applications to Nonparametric Statistics*. Springer, New York, 1989
- [Reiss 1993] REISS, R.-D.: *A Course on Point Processes*. Springer, New York, 1993
- [Reiss u. Thomas 2007] REISS, R.-D. ; THOMAS, M.: *Statistical Analysis of Extreme Values*. 3rd. Birkhäuser, Basel, 2007
- [Resnick u. Starica 1996] RESNICK, Sidney ; STARICA, Catalin: Tail Index Estimation for Dependent Data. In: *Ann. Appl. Probab* 8 (1996), S. 1156–1183
- [RiskMetrics Group 1996] RISKMETRICS GROUP: RiskMetrics – Technical Document. Version: 1996. <http://www.riskmetrics.com/cmtdovv.html>. New York: J.P. Morgan/Reuters, 1996. – Forschungsbericht
- [Rosenblatt 1952] ROSENBLATT, M.: Remarks on a Multivariate Transformation. In: *Annals of Mathematical Statistics* 23 (1952), Nr. 3, S. 470–472

- [Seillier-Moiseiwitsch 1993] SEILLIER-MOISEIWITSCH, Françoise: Sequential Probability Forecasts and the Probability Integral Transform. In: *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique* 61 (1993), Nr. 3, 395–408. <http://www.jstor.org/stable/1403751>. – ISSN 03067734
- [Shephard u. Andersen 2008] SHEPHARD, N. ; ANDERSEN, T. G.: Stochastic Volatility: Origins and Overview / University of Oxford, Department of Economics. Version: 2008. <http://ideas.repec.org/p/oxf/wpaper/389.html>. 2008 (389). – Economics Series Working Papers
- [Wehn 2005] WEHN, C. S.: Ansätze zur Validierung von Marktrisikomodellen. In: *Shaker Verlag* (2005)
- [Zivot 2008] ZIVOT, E.: Practical Issues in the Analysis of Univariate GARCH Models / University of Washington, Department of Economics. Version: April 2008. <http://ideas.repec.org/p/udb/wpaper/uwec-2008-03-fc.html>. 2008 (UWEC-2008-03-FC). – Working Papers