

Operator Scaling Stable Random Sheets
with application to binary mixtures

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

M.Sc. Alexander Hoffmann
geb. am 22.09.1983 in Siegen

Eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen
Siegen 2011

GUTACHTER

Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler, Universität Siegen

Prof. Dr. Peter Kern, Heinrich-Heine Universität Düsseldorf

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 05.September 2011

Wenn du Gelegenheiten nicht ergreifst, kannst du im Leben nie etwas erreichen

- Michael Spinks -

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1. Operator Scaling Stable Random Sheets	5
1.1. Selbstähnlichkeit und Operator-Skalierung	5
2. Grundlagen	9
2.1. Stabile Zufallsprozesse und stochastische Integrale	9
2.2. Komplexe α -stabile Integrale	20
2.3. E -homogene Funktionen	26
3. Moving-Average Darstellung	31
3.1. Konstruktion	31
3.2. Eigenschaften	34
4. Harmonische Darstellung	39
4.1. Konstruktion	39
4.2. Eigenschaften	43
5. Hölderregularität für OSSRSs	47
5.1. Polarkoordinaten und Abschätzungen	47
5.2. Darstellung mittels LePage-Reihe	53
5.3. Hölderregularität	56
5.4. Hölderregularität des gesamten OSSRSs	71
6. Modellierung eines 3D-OSSRS	73
6.1. Parameterhandhabung und Skalierungseigenschaften	74
6.2. Beispiele für ξ	76
6.3. Diskretisierung, Simulation und Fehlerapproximation	78
6.4. Approximationsalgorithmus	92
7. Anwendung: Simulation von Entmischungsvorgängen mit OSSRSs	93
7.1. Motivation	97
7.2. Modellierung der Phasenentmischung und Vergrößerung	98
7.3. Numerische Approximation und Diskretisierung des Problems	99
7.4. Simulation der Entmischung und Vergrößerung in einem Weichlot	101

Inhaltsverzeichnis

7.5. Zusammenfassung der Studie	106
8. Ausblick, Weiterentwicklungen	107
A. Programmierung von OSSRSs	109
A.1. Erzeugung von OSSRSs über die <i>Harmonizable Darstellung</i>	109
Symbolverzeichnis	111
Abbildungsverzeichnis	111
Literaturverzeichnis	115
Bildquellen	119

Einleitung

Zufallsfelder eignen sich gut zur Modellierung von Ereignissen aus den verschiedensten Fachgebieten. Sie werden z.B. zur Simulation von Naturphänomenen in der Physik, der Hydrologie oder der Geologie eingesetzt. Hierbei sind natürlich gewisse Eigenschaften erwünscht, welche die Zufallsfelder erfüllen sollten. Zur geeigneten Modellierung ist sehr häufig eine gewisse Abhängigkeitsstruktur bezüglich der Skalierung der Felder notwendig. Hierzu verwendet man üblicherweise das Konzept der Selbstähnlichkeit. Ein skalarwertiges Zufallsfeld $\{B_H(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ ist selbstähnlich mit Hurst Index $H > 0$, falls

$$\{B_H(cx)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{c^H B_H(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \quad \forall c > 0,$$

wobei $\stackrel{f.d.}{=}$ Gleichheit aller endlichdimensionalen Randverteilungen bedeutet. Das bekannteste Beispiel dieser Klasse von selbstähnlichen Zufallsfeldern ist das *Fractional Brownian Field (FBF)*, welches von A.N. Kolmogorov [32] eingeführt wurde.

Eine weitere nützliche Eigenschaft von Zufallsfeldern ist die Modellierung von anisotropen Strukturen. Anisotropie bedeutet hier, dass Zufallsfelder entlang verschiedener Richtungen unterschiedliche Eigenschaften aufweisen können. Die eben beschriebenen selbstähnlichen Prozesse sind per Konstruktion isotrop und können eine solche anisotrope Eigenschaft nicht darstellen. Kamont [30] führte das erste Beispiel von anisotropen, selbstähnlichen Gauss'schen Zufallsfeldern ein, das *Fractional Brownian Sheet (FBS)* $\{B_{H_1, \dots, H_d}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$. Bei diesen Feldern können die einzelnen Achsen unabhängig voneinander skaliert werden, d.h. für $H_1, \dots, H_d > 0$ und $c_1, \dots, c_m > 0$ beliebig gilt

$$\left\{ B_{H_1, \dots, H_d}(c_1 x_1, \dots, c_m x_m) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \left\{ c_1^{H_1} \dots c_m^{H_m} B_{H_1, \dots, H_d}(x) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d}, \quad (1)$$

wobei das gesamte Feld immer noch selbstähnlich ist mit entsprechendem HurstIndex $H = \sum_{j=1}^d H_j$.

Ein anderes Konzept von anisotropen, selbstähnlichen Zufallsfeldern sind die *Operator Scaling Stable Random Fields (OSSRF)*, welche von H. Biermé, M. Meerschaert und H.P. Scheffler ?? eingeführt wurden. Ein solches Zufallsfeld erfüllt die Bedingung

$$\left\{ X(c^E x) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \left\{ c^H X(x) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d} \quad \forall c > 0, \quad (2)$$

mit einer geeigneten Matrix E , welche die Anisotropie des Zufallsfeldes beschreibt, und entsprechendem Parameter $H > 0$. Darüber hinaus besitzen diese Felder stationäre Zuwächse, d.h.

$$\{X(x+h) - X(h)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \quad \forall h \in \mathbb{R}^d. \quad (3)$$

In diesem Fall weisen die Zufallsfelder globale Abhängigkeitsstrukturen auf, wobei die Unterräume jedoch nicht mehr wie im Fall von FBS voneinander entkoppelt werden können.

Die grundlegende Idee dieser Arbeit besteht nun darin, die Konzepte von FBS und OSSRF miteinander zu verbinden, um eine Klasse von Zufallsfeldern zu erhalten, welche eine sehr flexible Gestaltungsmöglichkeit bietet, indem man die Eigenschaften (1) und (2) beider Konzepte verbindet. Hierbei kann die Eigenschaft der Stationarität (3) leider nicht allgemein beibehalten werden. Ist also X ein Operator Scaling Stable Random Sheet (OSSRS), dann gilt für $c_1, \dots, c_m > 0$

$$\{X(c_1^{\tilde{E}_1} x_1, \dots, c_m^{\tilde{E}_m} x_m)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{c_1^{H_1} \dots c_m^{H_m} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}, \quad (4)$$

mit geeigneten Matrizen $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m$ und entsprechenden $H_1, \dots, H_m > 0$. Dadurch erfüllen OSSRSs auch immer die Eigenschaft (1), falls $\bigotimes_{j=1}^m \tilde{E}_j = I$ und die Eigenschaft (2), falls $E = \sum_{j=1}^m E_j, H = \sum_{j=1}^m H_j$.

In **Kapitel 1** wird der Begriff *Operator Scaling Stable Random Sheet* definiert und gezeigt, dass diese Felder eine Verallgemeinerung der bereits in [10] konstruierten Felder darstellen. Dass diese Klasse von Zufallsfeldern wirklich existiert und mit einer Vielzahl von interessanten Konstruktionen gefüllt werden kann sowie die gewünschten Eigenschaften besitzt, wird in den anschließenden Kapiteln zum einen über eine *Moving Average Darstellung* und zum anderen über eine *Harmonizable Darstellung* gezeigt.

In **Kapitel 2** sind einige Grundlagen über die Konstruktion von α -stabilen Integralen und E -homogenen Funktionen zusammengefasst, welche als Grundlegende Konzepte dieser Arbeit dienen. Eine umfangreiche Einleitung über α -stabile Zufallsfelder findet sich beispielsweise in [39].

In **Kapitel 3** wird eine Erweiterung der in [10] vorgestellten *Moving-Average Darstellung* für OSSRSs erarbeitet. Die Konstruktion des Zufallsfeldes erfolgt mit dem Produkt von \tilde{E}_j -homogenen, (β_j, \tilde{E}_j) -zulässigen Funktionen φ_j als Integrand und einem *independently scattered* SaS Zufallsmaß $Z_\alpha(dy)$ mit Kontrollmaß λ^d als Integrator. Dabei wird zunächst gezeigt, dass das Zufallsfeld

$$X_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m \left(\varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha} \right) Z_\alpha(dy)$$

unter gewissen Voraussetzungen existiert und auch stochastisch stetig ist. Darüber hinaus wird gezeigt, dass $\{X_\varphi(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ ein Operator Scaling Stable Random Sheet

ist. Die Eigenschaft der Operatorskalierung bleibt also auch für den Fall $m \geq 2$ erhalten und verallgemeinert die OSSRFs in dieser Hinsicht. OSSRFs besitzen außerdem stationäre Zuwächse. Diese Eigenschaft bleibt jedoch aufgrund der Produktstruktur nicht erhalten. Abschließend zeigen zwei Beispiele, dass das konstruierte Feld eine wirkliche Verallgemeinerung des *Fractional Brownian Sheet* und des *Operator Scaling Stable Random Field* ist. Wodurch gleichzeitig der Zusammenhang zwischen diesen beiden Feldern deutlich wird.

In **Kapitel 4** wird die *Harmonische Darstellung* für OSSRSs vorgestellt. Die hier aufgeführten Resultate stellen eine Erweiterung der Ergebnisse aus [10] dar. Die Konstruktion des Zufallsfeldes erfolgt mit \tilde{E}_j^t -homogenen Funktionen ψ_j für $j = 1, \dots, m$ als Integrand und einem komplexen α -stabilen Zufallsmaß W_α mit $0 < \alpha \leq 2$ als Integrator. Dabei wird zunächst analog zur *Moving-Average Darstellung* gezeigt, dass das Zufallsfeld

$$X_\psi(x) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m (e^{i\langle x_j, \xi_j \rangle} - 1) \psi_j(\xi_j)^{-H_j - q_j/\alpha} W_\alpha(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

unter gewissen Voraussetzungen existiert und stochastisch stetig ist. Zudem wird hier gezeigt, dass $\{X_\psi(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ ein Operator Scaling Stable Random Sheet ist. Diese Felder besitzen analog zur *Moving-Average Darstellung* keine stationären Zuwächse mehr. Auch hier werden Beispiele angegeben, die verdeutlichen, dass OSSRSs eine sehr allgemeine Klasse von Zufallsfeldern darstellen, welche die Verbindung zwischen der wichtigen Klasse der Fractional Sheets und der Operator Skalierenden Felder herstellen.

In **Kapitel 5** werden die Pfadeigenschaften von OSSRSs untersucht, insbesondere die ‘Glattheit’ der Pfade. Hierbei lehnen sich die Inhalte an die Ergebnisse aus [10] und [11] an. In diesen wurde die Hölderregularität für OSSRFs, wie in [10] definiert, für den Fall $\alpha = 2$ (siehe [10]) sowie den Fall $\alpha \in (0, 2)$ (siehe [11]) behandelt. Diese Ergebnisse werden im Folgenden auf die Klasse der OSSRSs ausgedehnt, indem geeignet konstruierte Subprozesse verwendet werden, um das Problem, dass diese Zufallsfelder für den Fall $m \geq 2$ keine stationären Zuwächse mehr besitzen, geeignet zu umgehen und allgemeine Aussagen über das Zufallsfeld mit Hilfe der Aussagen über die Subprozesse zu gewinnen. Die Strategie besteht darin, das Wachstumsverhalten der Subprozesse zu bestimmen, das nur durch die Eigenwerte des zugehörigen Unterraums determiniert ist. Damit wird eine globale Abschätzung möglich, mit der die Hölderstetigkeit des gesamten Prozesses bewiesen werden kann und zum anderen die kritischen Hölderexponenten angegeben werden können.

In **Kapitel 6** wird exemplarisch ein Zufallsfeld simuliert, wodurch deutlich wird, welchen entscheidenden Vorteil die Verknüpfung dieser beiden Konzepte bietet. Fractional Sheets ermöglichen es, Unterräume unabhängig voneinander zu skalieren, wie etwa die Zeitdimension von der Raumdimension abzukoppeln. OSSRSs ermöglichen

eine anisotrope Struktur und somit ein wesentlich komplexeres Abhängigkeitsverhalten von Unterräumen zu modellieren, wie etwa die Struktur innerhalb der Raumdimension. Kombiniert man also diese Konzepte, kann man ein räumliches Feld mit anisotroper Struktur erschaffen, welches mit fortlaufender Zeit z.B. in einer sehr ähnlichen Form erhalten bleibt. Abschließend wird ein Algorithmus zur Simulation des oben angegebenen Zufallsfeldes angegeben sowie eine entsprechende Fehlerabschätzung, um die Gültigkeit des angegebenen Algorithmus zu beweisen.

Kapitel 7 entspricht inhaltlich einem gemeinsamen Artikel [4] mit Denis Anders, Hans-Peter Scheffler und Kerstin Weinberg, der im Januar 2011 im *Philosophical Magazine* eingereicht wurde. In diesem Kapitel wird dargestellt, welche flexiblen Modellierungen mit unseren OSSRSs möglich sind. Da nun Ort- und Zeitabhängigkeiten, sowie die räumliche Anisotropie unabhängig voneinander modelliert werden können, lassen sich die dort beschriebenen physikalischen Phänomene sehr gut beschreiben. Wir zeigen, dass die Einbindung der OSSRS eine sinnvolle Erweiterung des Cahn-Hilliard Phasen-Feld Modells darstellt. Unser Modell deckt sich mit den experimentellen Beobachtungen. Weiterführend ergibt sich eine Vielzahl neuer Fragen. Ein interessanter Punkt ist z.B. die Entwicklung einer geeigneten Parameterschätzung der Zufallsfelder, da zur Zeit für diese Experimente noch Parameter vorgegeben werden müssen.

In **Kapitel 8** wird aufbauend auf den bisherigen Ergebnissen ein Ausblick auf weitere sich ergebende Fragen und Aufgaben gegeben. Insgesamt läßt sich feststellen, dass auf dem Gebiet der OSSRF und OSSRS die entscheidenden mathematischen Grundlagen geschaffen wurden und sich nun ein reichhaltiges und vielseitiges Forschungsgebiet erschließt, auf Basis dessen weitere erfolgreiche Arbeiten möglich sind.

An dieser Stelle möchte Ich Tobias Kegel, Denis Anders und vor allem Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler für die zahlreichen Diskussionen, die Entwicklung gemeinsamer Ideen und die überaus gute Zusammenarbeit danken.

1. Operator Scaling Stable Random Sheets

1.1. Selbstähnlichkeit und Operator-Skalierung

Im Folgenden wird der Begriff *Operator Scaling Stable Random Sheet* definiert und aufgezeigt, dass diese Felder eine Verallgemeinerung der bereits in [10] konstruierten Felder darstellt. Die Existenz solcher Felder mit den gewünschten Eigenschaften wird in den anschließenden Kapiteln zum einen über eine *Moving Average Darstellung* und zum anderen über eine *Harmonizable Darstellung* gezeigt.

Definition 1.1.1

Für $j = 1, \dots, m$, $\sum_{j=1}^m d_j = d$ seien $\tilde{E}_j \in \mathbb{R}^{d_j \times d_j}$ Matrizen mit positivem Realteil der Eigenwerte. Konstruiere Matrizen $E_1, \dots, E_m, E \in \mathbb{R}^{d \times d}$ wie folgt:

$$E_j = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{E}_j & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{E}_m \end{pmatrix},$$

d.h. also $E = \sum_{j=1}^m E_j$. Dann heißt ein skalarwertiges Zufallsfeld $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ **Operator Scaling Stable Random Sheet (OSSRS)**, falls für $H_j > 0, j = 1, \dots, m$ gilt:

$$\{X(c^{E_j} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{c^{H_j} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \quad \text{für alle } c > 0. \quad (1.1)$$

Hierbei definiert man c^E für beliebige Matrizen E wie folgt:

$$c^E := \exp(E \log c), \quad \text{wobei } \exp(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E^k}{k!}.$$

Für den Spezialfall $\tilde{E}_j = I_{d_j}$ entspricht (1.1) gerade der *Selbstähnlichkeitsbedingung*

$$\{X(cx)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{c^H X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \quad \text{für alle } c > 0$$

mit Hurstindex $H = \sum_{j=1}^m H_j$.

Die folgende Proposition beschreibt die entscheidende Eigenschaft von OSSRSs.

1. Operator Scaling Stable Random Sheets

Proposition 1.1.2

Wenn X ein Operator Scaling Stable Random Sheet ist mit Matrizen E_1, \dots, E_m und entsprechenden $H_1, \dots, H_m > 0$, dann gilt für $c_1, \dots, c_m > 0$,

$$\{X(c_1^{\tilde{E}_1} x_1, \dots, c_m^{\tilde{E}_m} x_m)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{c_1^{H_1} \dots c_m^{H_m} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

Beweis. Es folgt direkt durch sukzessives Einsetzen:

$$\begin{aligned} \left\{ X \left(c_1^{\tilde{E}_1} x_1, \dots, c_m^{\tilde{E}_m} x_m \right) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d} &\stackrel{f.d.}{=} \left\{ X \left(c_1^{E_1} \left(x_1, c_2^{\tilde{E}_2} x_2, \dots, c_m^{\tilde{E}_m} x_m \right) \right) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d} \\ &\stackrel{f.d.}{=} \left\{ c_1^{H_1} X \left(c_2^{E_2} \left(x_1, x_2, c_3^{\tilde{E}_3}, \dots, c_m^{\tilde{E}_m} x_m \right) \right) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d} \\ &\stackrel{f.d.}{=} \left\{ c_1^{H_1} \cdot c_2^{H_2} X \left(x_1, x_2, c_3^{\tilde{E}_3} x_3, \dots, c_m^{\tilde{E}_m} x_m \right) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d} \\ &\vdots \\ &\stackrel{f.d.}{=} \{c_1^{H_1} \dots c_m^{H_m} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

□

Die folgende Proposition stellt den Zusammenhang zwischen den hier definierten OSSRSs und den in [10] definierten Zufallsfeldern her.

Proposition 1.1.3

Operator Scaling Stable Random Sheets sind immer auch operator-skalierend im Sinne von [10]. D.h. wenn X ein Operator Scaling Stable Random Sheet ist mit Matrizen E_1, \dots, E_m und entsprechenden $H_1, \dots, H_m > 0$, dann gilt

$$\{X(c^E x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{c^H X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \quad \text{für alle } c > 0,$$

wobei $E = \sum_{j=1}^m E_j$, $H = \sum_{j=1}^m H_j$.

Beweis. Folgt direkt durch Anwendung von Proposition 1.1.2 mit $c_1 = \dots = c_m = c$.

□

Das folgende Resultat zeigt, dass für die globale Matrix $E = \sum_{j=1}^m E_j$ die in [10] geforderte Bedingung an die Realteile der Eigenwerte bestehen bleibt.

Lemma 1.1.4

Seien $\tilde{E}_j \in \mathbb{R}^{d_j \times d_j}$ für $j = 1, \dots, m$ mit den Eigenwerten $\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{p_j}^{(j)}$ mit positivem Realteil der Eigenwerte $0 < a_1^{(j)} \leq \dots \leq a_{p_j}^{(j)}$. Dann besitzt die Blockmatrix

$$E = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{E}_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad d = \sum_{j=1}^m d_j$$

die Eigenwerte $\left\{ \alpha_{k_j}^{(j)} : j = 1, \dots, m, k_j = 1, \dots, p_j \right\}$ mit $\min_j(a_1^{(j)}) > 0$.

Beweis. Mit Hilfe des Entwicklungssatzes für Determinanten sieht man leicht:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist Eigenwert von } E &\Leftrightarrow \det(E - \lambda I_d) = 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{j=1}^m \det(\tilde{E}_j - \lambda I_{d_j}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \left\{ \alpha_{k_j}^{(j)} : j = 1, \dots, m, k_j = 1, \dots, p_j \right\} \end{aligned}$$

□

Somit ist abstrakt die Klasse der *Operator Scaling Stable Random Sheets* eingeführt. Dass diese Klasse auch mit einer Vielzahl von interessanten Konstruktionen gefüllt werden kann, wird in den Kapiteln 3 und 4 gezeigt. Zuvor werden jedoch im folgenden Kapitel einige Grundlagen erarbeitet, welche für den weiteren Verlauf dieser Arbeit notwendig sind.

2. Grundlagen

2.1. Stabile Zufallsprozesse und stochastische Integrale

In diesem Abschnitt werden in Anlehnung an [39] zunächst α -stabile Zufallsprozesse eingeführt. Zufallsprozesse sind α -stabil, falls alle zugehörigen endlich-dimensionalen Verteilungen α -stabil sind. Darauf aufbauend werden stochastische Integrale über diese α -stabilen Zufallsprozesse definiert.

Im Anschluss wird gezeigt, dass man stochastische Prozesse auch als 'echte' Integrale bezüglich eines α -stabilen Zufallsmaßes definieren kann und diese Definition mit der vorherigen übereinstimmt. Danach werden einige elementare Eigenschaften und Existenzkriterien aufgezeigt, die im darauf Folgenden von elementarer Bedeutung sind.

2.1.1. Stabile stochastische Prozesse

Die folgende Definition ist durch den Konsistenzsatz von Kolmogoroff (siehe [24]) motiviert.

Definition 2.1.1

Ein stochastischer Prozess $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ heißt **stabil**, wenn alle endlich-dimensionalen Randverteilungen

$$\left(X(t_1), \dots, X(t_d) \right), \quad t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}, d \geq 1$$

eine stabile Verteilung besitzen.

Beispiel 2.1.2 (α -stabile Lévy-Bewegung)

Ein stochastischer Prozess $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ heißt (Standard-) α -stabile Lévy-Bewegung, falls

1. $X(0) = 0$ f.s.
2. X besitzt unabhängige Zuwächse
3. $X(t) - X(s) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$ für alle $0 \leq s < t < \infty$.

2. Grundlagen

Der Prozess X besitzt stationäre Zuwächse, da

$$X(t+h) - X(h) \sim S_\alpha((t+h-h)^{1/\alpha}, \beta, 0) = S_\alpha((t-0)^{1/\alpha}, \beta, 0) \sim X(t) - X(0).$$

Im Fall $\alpha = 2$ entspricht der Prozess gerade der Brownschen Bewegung (Definition siehe z.B. [8], S.347). Für den Fall $\alpha \neq 1, \beta = 0$ ist der Prozess selbstähnlich mit Hurstindex $H = \frac{1}{\alpha}$. Die folgenden Abbildungen zeigen Pfade von Levy-Bewegungen mit verschiedenen Parametern.

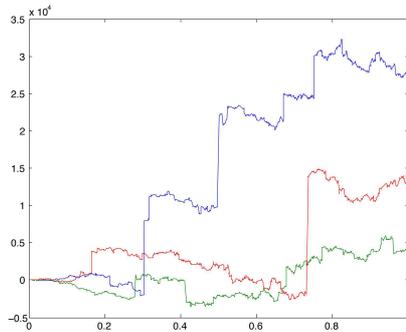


Abb. 2.1.: Simulation von α -stabilen Lévy-Bewegungen mit Parametern $\alpha = 1.5, \beta = 0$

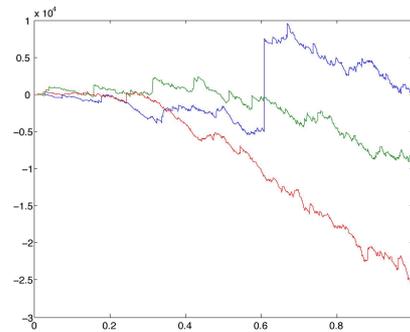


Abb. 2.2.: Simulation von α -stabilen Lévy-Bewegungen mit Parametern $\alpha = 1.5, \beta = 1$

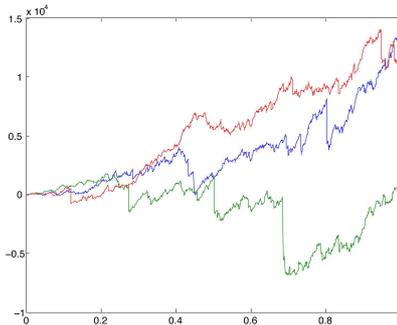


Abb. 2.3.: Simulation von α -stabilen Lévy-Bewegungen mit Parametern $\alpha = 1.5, \beta = -1$

2.1.2. Definition von stabilen Integralen als stochastischer Prozess

Das "stabile Integral" einer deterministischen Funktion f wird im Folgenden mit $I(f)$ bezeichnet. In diesem Abschnitt soll eine Familie von stabilen Integralen $\{I(f), f \in F\}$ definiert werden als ein stochastischer Prozess in Abhängigkeit einer

Funktionenmenge F . Diese Definition wird sicherstellen, dass das Integral $I(f)$ eine stabile Zufallsvariable ist für jeden Integranden f und dass das Integral $I(\cdot)$ linear ist.

Zur Definition des stochastischen Prozesses $\{I(f), f \in F\}$ werden zunächst die endlich-dimensionalen Randverteilungen definiert. Sei (E, \mathcal{E}, m) ein Maßraum mit σ -endlichem Maß m und sei

$$\beta : E \rightarrow [-1, 1]$$

eine messbare Funktion. Sei

$$F = \begin{cases} L^\alpha(E, \mathcal{E}, m) & , \text{ falls } \alpha \neq 1, \\ \mathcal{F}(m, \beta) & , \text{ falls } \alpha = 1, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} L^\alpha(E, \mathcal{E}, m) &= \left\{ f : f \text{ ist messbar, } \int_E |f(x)|^\alpha m(dx) < \infty \right\}, \\ \mathcal{F}(m, \beta) &= \left\{ f : f \in L^1(E, \mathcal{E}, m), \int_E |f(x)\beta(x) \ln |f(x)|| m(dx) < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Bestimmung der endlich-dimensionalen Randverteilungen

Seien $f_1, \dots, f_d \in F$. Man definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_{f_1, \dots, f_d} auf \mathbb{R}^d über die zugehörige charakteristische Funktion $\widehat{P}_{f_1, \dots, f_d} = \phi_{f_1, \dots, f_d}$ wie folgt:

(i) Falls $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned} &\phi_{f_1, \dots, f_d}(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ &= \exp \left\{ - \int_E \left| \sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x) \right|^\alpha \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(1 - i\beta(x) \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x) \right) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) m(dx) \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

(ii) falls $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} &\phi_{f_1, \dots, f_d}(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ &= \exp \left\{ - \int_E \left| \sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x) \right|^\alpha \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x) \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x) \right) \ln \left| \sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x) \right| \right) m(dx) \right\}. \end{aligned}$$

2. Grundlagen

Nun muss gezeigt werden, dass ϕ_{f_1, \dots, f_d} tatsächlich die charakteristische Funktion einer α -stabilen Verteilung ist. Dies wird im Folgenden mit Hilfe der Integration bezüglich der Einheitskugel S_d bewiesen. Betrachtet werden soll hier nur der Fall $\alpha \neq 1$ (Beweis für den Fall $\alpha = 1$ siehe [39], S.115). Setze zunächst zur Vereinfachung

- $\boldsymbol{\theta} := (\theta_1, \dots, \theta_d)$,
- $\mathbf{f} := (f_1, \dots, f_d)$,
- $u_\alpha(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}(x), \beta(x)) := \left| \sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x) \right|^\alpha \left(1 - i\beta(x) \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^d \theta_j f_j(x) \right) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right)$.

Des Weiteren setze $E_+ = \left\{ x \in E : \sum_{j=1}^d f_j(x)^2 > 0 \right\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi_{f_1, \dots, f_d}(\theta_1, \dots, \theta_d) &= \exp \left\{ - \int_{E_+} u_\alpha(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{f}(x), \beta(x)) m(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{E_+} u_\alpha \left(\boldsymbol{\theta}, \frac{\mathbf{f}(x)}{\left(\sum_{k=1}^d f_k(x)^2 \right)^{1/2}}, \beta(x) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\sum_{k=1}^d f_k(x)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} m(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{E_+} u_\alpha(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{g}(x), \beta(x)) m_1(dx) \right\} \end{aligned}$$

wobei

$$g_j(x) = \frac{f_j(x)}{\left(\sum_{k=1}^d f_k(x)^2 \right)^{1/2}}, \quad j = 1, \dots, d$$

und

$$m_1(dx) = \left(\sum_{k=1}^d f_k(x)^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} m(dx).$$

m_1 ist ein endliches Maß auf (E_+, \mathcal{E}) , da $f_k \in L^\alpha(E, \mathcal{E}, m)$ für $k = 1, \dots, d$. Des Weiteren gilt $\sum_{j=1}^d g_j(x)^2 = 1$ für alle $x \in E_+$.

$$\begin{aligned} \phi_{f_1, \dots, f_d}(\theta_1, \dots, \theta_d) &= \exp \left\{ - \int_{E_+} u_\alpha(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{g}(x), 1) \frac{1 + \beta(x)}{2} m_1(dx) \right. \\ &\quad \left. - \int_{E_+} u_\alpha(\boldsymbol{\theta}, -\mathbf{g}(x), 1) \frac{1 - \beta(x)}{2} m_1(dx) \right\} \end{aligned}$$

Setzt man nun $s_j = g_j(x)$ im ersten Integral und $s_j = -g_j(x)$ im zweiten Integral, so erhält man durch diese Variablentransformation

$$\begin{aligned} & \phi_{f_1, \dots, f_d}(\theta_1, \dots, \theta_d) \\ &= \exp \left\{ - \int_{S_d} \left| \sum_{j=1}^d \theta_j s_j \right|^\alpha \left(1 - i \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^d \theta_j s_j \right) \tan \left(\frac{\pi \alpha}{2} \right) \right) \Gamma(ds) \right\}, \end{aligned}$$

wobei Γ ein endliches Maß auf S_d ist, gegeben durch

$$\Gamma(A) = \int_{g^{-1}(A)} \frac{1 + \beta(x)}{2} m_1(dx) + \int_{g^{-1}(-A)} \frac{1 - \beta(x)}{2} m_1(dx),$$

wobei A eine Borelmenge auf S_d ist und

$$g^{-1}(A) = \{x \in E_+ : (g_1(x), \dots, g_d(x)) \in A\}.$$

Somit ist ϕ_{f_1, \dots, f_d} die charakteristische Funktion einer α -stabilen Verteilung auf \mathbb{R}^d . Nun gilt es noch, die Konsistenz des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_{f_1, \dots, f_d} zu zeigen. Wie man sich leicht überlegen kann, gilt für jede beliebige Permutation $(\pi(1), \dots, \pi(d))$ und $n \leq d$

$$\begin{aligned} \phi_{f_{\pi(1)}, \dots, f_{\pi(d)}}(\theta_{\pi(1)}, \dots, \theta_{\pi(d)}) &= \phi_{f_1, \dots, f_d}(\theta_1, \dots, \theta_d), \text{ sowie} \\ \phi_{f_1, \dots, f_n}(\theta_1, \dots, \theta_d) &= \phi_{f_1, \dots, f_n, \dots, f_d}(\theta_1, \dots, \theta_n, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Somit gilt Konsistenz. Nach dem Konsistenzsatz von Kolmogorov folgt die Existenz des stochastischen Prozesses mit den endlich dimensionalen Randverteilungen wie in (2.1) angegeben, der mit $\{I(f), f \in F\}$ bezeichnet wird.

Elementare Eigenschaften

Eigenschaft 2.1.3

Für alle $f_1, \dots, f_d \in F$ sind die Integrale $I(f_1), \dots, I(f_d)$ zusammenhängend- α -stabil mit gemeinsamer charakteristischer Funktion wie in (2.1) angegeben.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition des stochastischen Prozesses $\{I(f), f \in F\}$. \square

Eigenschaft 2.1.4

Sei $f \in F$. Dann gilt $I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f)$, wobei

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \left(\int_E |f(x)|^\alpha m(dx) \right)^{1/\alpha}, \\ \beta_f &= \frac{\int_E f(x)^{<\alpha>} \beta(x) m(dx)}{\int_E |f(x)|^\alpha m(dx)}, \\ \mu_f &= \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \int_E f(x) \beta(x) \ln |f(x)| m(dx), & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Grundlagen

Beweis. Folgt sofort durch setzen von $\theta_2 = \dots = \theta_d = 0$ in (2.1). □

Eigenschaft 2.1.5 (Linearität des Integrals)

Falls $f_1, f_2 \in F$, dann gilt für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$:

$$I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2) \text{ f.s.}$$

Beweis. Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ erhält man:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ i\theta [I(a_1 f_1 + a_2 f_2) - a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2)] \right\} \\ &= \mathbb{E} \exp \left\{ i[\theta I(a_1 f_1 + a_2 f_2) - a_1 \theta I(f_1) + a_2 \theta I(f_2)] \right\} \\ &= 1, \end{aligned}$$

Denn es gilt

$$\theta(a_1 f_1 + a_2 f_2) - (a_1 \theta) f_1 - (a_2 \theta) f_2 = 0$$

und daher folgt durch einsetzen in (2.1) die Behauptung. □

2.1.3. α -stabile Zufallsmaße

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $L^0(\Omega)$ die Menge aller auf diesem Raum definierten reellen Zufallsvariablen. Sei (E, \mathcal{E}, m) ein Maßraum und

$$\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} : m(A) < \infty\}.$$

Definition 2.1.6

Eine σ -additive Funktion

$$M : \mathcal{E}_0 \rightarrow L^0(\Omega),$$

so dass gilt:

$$(i) \quad M(A) \sim S_\alpha \left((m(A))^{\frac{1}{\alpha}}, \frac{\int_A \beta(x) m(dx)}{m(A)}, 0 \right) \quad \forall A \in \mathcal{E}_0,$$

(ii) für disjunkte Mengen $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{E}_0$ sind die Zufallsvariablen $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_k)$ unabhängig ("independently scattered"),

heißt **α -stables Zufallsmaß auf (E, \mathcal{E}) mit Bestimmtheitsmaß m .**

Um zu zeigen, dass solch ein α -stabiles Zufallsmaß M existiert, definiert man einen stochastischen Prozess

$$\{M(A) : A \in \mathcal{E}_0\}.$$

In 2.1.2 wurde die Existenz des stochastischen Prozesses $\{I(f) : f \in F\}$ gezeigt. Indem man $M(A) = I(1_A)$ setzt, erhält man die Existenz des stochastischen Prozesses

$\{M(A) : A \in \mathcal{E}_0\}$ mit den folgenden endlich-dimensionalen Verteilungen:
Für $A_1, A_2, \dots, A_d \in \mathcal{E}_0$ und $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^d \theta_j M(A_j) \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

wobei

$$\begin{aligned} \sigma^\alpha &= \int_E \left| \sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x) \right|^\alpha m(dx), \\ \beta &= \frac{\int_E \beta(x) \left(\sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x) \right)^{<\alpha>} m(dx)}{\int_E \left| \sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x) \right|^\alpha m(dx)}, \\ \mu &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \int_E \sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x) \beta(x) \ln \left| \sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x) \right| m(dx) & , \text{ falls } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Wie im Folgendem gezeigt wird, ist solch ein konstruiertes M "independently scattered" und σ -additiv und entspricht damit der Definition 2.1.6.

Sei zunächst $\alpha \neq 1$. Falls $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}_0$ disjunkt, dann folgt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^d \theta_j M(A_j) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_E \left| \sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x) \right|^\alpha \left(1 - i \beta(x) \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^d \theta_j 1_{A_j}(x) \right) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) m(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{j=1}^d |\theta_j|^\alpha m(A_j) \left(1 - i \frac{\int_{A_j} \beta(x) m(dx)}{m(A_j)} \operatorname{sign}(\theta_j) \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right\} \\ &= \prod_{j=1}^d \mathbb{E} \exp \left\{ i \theta_j M(A_j) \right\} \end{aligned}$$

Die Argumentation für $\alpha = 1$ erfolgt in gleicher Weise. Somit ist M "independently scattered". Endliche Additivität folgt aus der Linearität des Integrals und der Gleichheit

$$\sum_{j=1}^d 1_{A_j} = 1_{\bigcup_{j=1}^d A_j}, \quad \text{falls alle } A_j \text{ disjunkt.}$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass M auch σ -additiv ist. Sei $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E}_0$, $B = \bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{E}_0$. Zu zeigen ist also:

$$M(B) = \sum_{j=1}^\infty M(A_j) \quad f.s.$$

2. Grundlagen

dies ist nach Theorem 22.7 aus [13] äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n M(A_j) = M(B) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit,}$$

da die Summanden unabhängig sind. Aufgrund der Unabhängigkeit und endlichen Additivität von M gilt offensichtlich:

$$M(B) - \sum_{j=1}^n M(A_j) = M\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right)$$

mit

$$M\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right) \sim S_{\alpha}(\sigma_n, \beta_n, 0)$$

wobei

$$\begin{aligned} \sigma_n^{\alpha} &= m\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right) \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} m(A_j) \\ &< \infty \quad , \text{ denn } \bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j \subset B \in \mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ folgt

$$M(B) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n M(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} M\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right) \xrightarrow{w} 0.$$

Also ist M σ -additiv.

Beispiel 2.1.7 (α -stabile Lévy-Bewegung, siehe [39], S.121)

Sei M ein α -stabiles Zufallsmaß auf $([0, \infty), \mathbb{B})$ mit Lebesguemaß m (Bestimmtheitsmaß) und konstantem Schiefeparameter $\beta(x) = \beta, 0 \leq x \leq \infty$. Definiere

$$X(t) = M([0, t]), \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

$M([0, t])$ ist wohldefiniert, da $m([0, t]) < \infty$ für alle $t > 0$. Der stochastische Prozess

$$\left\{ X(t), 0 \leq t < \infty \right\}$$

ist eine α -stabile Lévy-Bewegung, denn es gilt:

1. $X(0) = M([0, 0]) \sim S_{\alpha}(0, 0, 0) = \mathcal{E}_0 \Rightarrow X(0) = 0 \text{ f.s.}$
2. $X(t) - X(s) = M([0, t]) - M([0, s]) \sim S_{\alpha}((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$

2.1. Stabile Zufallsprozesse und stochastische Integrale

3. Für alle $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_d$, $d \in \mathbb{N}$ sind die Zuwächse

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_d) - X(t_{d-1})$$

unabhängig, da nach 2. $X(t_i) - X(t_{i-1}) \stackrel{d}{=} M([t_{i-1}, t_i])$ entspricht und da M "independently scattered" ist, sind die Zufallsvariablen

$$M([t_0, t_1]), M([t_1, t_2]), \dots, M([t_{d-1}, t_d])$$

unabhängig.

2.1.4. Konstruktion und Definition von stabilen Integralen

Zunächst wurde das α -stabile Integral $I(f)$ als stochastischer Prozess definiert, der über die Funktion f bestimmt wird.

Nun soll gezeigt werden, dass $I(f)$ auch als "echtes" Integral konstruiert werden kann, welches mit $\int_E f(x)M(dx)$ bezeichnet wird, wobei M ein α -stabiles Zufallsmaß ist.

Vorgehen:

1. Approximiere f durch *einfache Funktionen* $f^{(n)}$.
2. Definiere $I(f^{(n)}) := \int_E f^{(n)}M(dx)$.
3. Zeige, dass $I(f^{(n)})$ in Wahrscheinlichkeit gegen einen Grenzwert konvergiert und bezeichne diesen mit $\int_E f(x)M(dx)$.
4. Zeige, dass diese Definition mit der vorherigen konsistent ist.

Sei M ein α -stabiles Zufallsmaß auf (E, \mathcal{E}) mit Bestimmtheitsmaß m , wobei $\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} : m(A) < \infty\}$. Wir wollen

$$I(f) = \int_E f(x)M(dx)$$

für alle messbaren Funktionen $f \in F$ definieren, d.h. also für alle meßbaren Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{R}^1$, die die Bedingungen

$$\int_E |f(x)^\alpha| m(dx) < \infty, \text{ für } \alpha \neq 1 \quad (2.2)$$

und

$$\int_E |f(x)| |\beta(x)| \ln |f(x)| m(dx) < \infty, \text{ für } \alpha = 1 \quad (2.3)$$

erfüllen.

Wie gewöhnlich definiert man für einfache Funktionen der Form

$$f^{(n)}(x) = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}(x), \quad A_j \in \mathcal{E}_0 \text{ disjunkt, } c_j \in \mathbb{R}$$

das Integral wie folgt:

$$I(f^{(n)}) := \int_E f^{(n)}(x)M(dx) = \sum_{j=1}^n c_j M(A_j).$$

Da $A_j \in \mathcal{E}_0$ disjunkt, folgt die Unabhängigkeit der Variablen $M(A_1), \dots, M(A_n)$. Somit erhält man $I(f^{(n)}) \sim S_\alpha(\sigma_{f^{(n)}}, \beta_{f^{(n)}}, \mu_{f^{(n)}})$, mit

$$\sigma_{f^{(n)}} = \left(\int_E |f^{(n)}(x)|^\alpha m(dx) \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (2.4)$$

$$\beta_{f^{(n)}} = \frac{\int_E f^{(n)}(x)^{<\alpha>} \beta(x) m(dx)}{\int_E |f^{(n)}(x)|^\alpha m(dx)}, \quad (2.5)$$

$$\mu_{f^{(n)}} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \int_E f^{(n)}(x) \beta(x) \ln |f^{(n)}(x)| m(dx) & , \text{ falls } \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Die Linearität des Integrals ist offensichtlich.

Sei nun $f \in F$ beliebig. Man wähle eine Folge von einfachen Funktionen $\{f^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $f^{(n)}(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in E$,
- $|f^{(n)}(x)| \leq \theta(x)$ für alle $n \geq 1, x \in E$ und ein $\theta \in F$.

Wie man im Folgenden sieht, existiert solch eine Folge immer.

Beispiel 2.1.8 (siehe [39] S.122)

Setze $\theta = |f|$, dann erfüllt

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{i}{n} & , \text{ falls } \frac{i}{n} \leq f(x) < \frac{i+1}{n}, & i = 0, 1, \dots, n^2 - 1, \\ -\frac{i}{n} & , \text{ falls } -\frac{i+1}{n} \leq f(x) < -\frac{i}{n}, & i = 0, 1, \dots, n^2 - 1, \\ 0 & , \text{ falls } |f(x)| \geq n, \end{cases}$$

die obigen Bedingungen.

Nun soll die Konvergenz von $I(f^{(n)})$ in Wahrscheinlichkeit gezeigt werden. Dazu genügt es zu zeigen, dass $I(f^{(n)}) - I(f^{(m)})$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, falls $n, m \rightarrow \infty$. Nun gilt:

$$I(f^{(n)}) - I(f^{(m)}) = I(f^{(n)} - f^{(m)}) \sim S_\alpha(\sigma_{n,m}, \beta_{n,m}, 0), \quad \text{wobei}$$

$$\sigma_{n,m} = \left(\int_E |f^{(n)}(x) - f^{(m)}(x)|^\alpha m(dx) \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \\ -1 \leq \beta_{n,m} \leq 1.$$

Somit genügt es, $\sigma_{n,m}^\alpha \rightarrow 0$ zu zeigen. Es gilt $|f^{(n)}(x) - f^{(m)}(x)| \leq 2\theta(x) \forall n, m \in \mathbb{N}$ und $\theta(x) \in F$, d.h. also, dass $\int_E \theta(x) m(dx) < \infty$. Somit ergibt sich mit majorisierter

2. Grundlagen

Konvergenz und der Tatsache, dass $(a + b)^\alpha \leq 2^\alpha(a^\alpha + b^\alpha)$:

$$\begin{aligned} \int_E |f^{(n)}(x) - f^{(m)}(x)|^\alpha m(dx) &= \int_E |f^{(n)}(x) - f(x) + f(x) - f^{(m)}(x)|^\alpha m(dx) \\ &\leq 2^\alpha \int_E |f^{(n)}(x) - f(x)|^\alpha m(dx) \\ &\quad + 2^\alpha \int_E |f^{(m)}(x) - f(x)|^\alpha m(dx) \\ &\xrightarrow{m,n \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert $\{I(f^{(n)}), n = 1, 2, \dots\}$ in Wahrscheinlichkeit gegen einen Grenzwert

$$I(f) := \operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} I(f^{(n)}).$$

Proposition 2.1.9

Seien σ_f, β_f und μ_f definiert wie in (2.4), (2.5), (2.6), dann gilt:

$$I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f), \quad \text{wobei gilt:}$$

(i) Falls $\alpha \neq 1$:

$$\mathbb{E} \exp\{i\theta I(f)\} = \exp \left\{ - \int_E |\theta f(x)|^\alpha \left(1 - i\beta(x) \operatorname{sign}(\theta f(x)) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) m(dx) \right\}, \quad (2.7)$$

(ii) falls $\alpha = 1$:

$$\mathbb{E} \exp\{i\theta I(f)\} = \exp \left\{ - \int_E |\theta f(x)| \left(1 + i\frac{2}{\pi} \beta(x) \operatorname{sign}(\theta f(x)) \ln |\theta f(x)| \right) m(dx) \right\}. \quad (2.8)$$

Proposition 2.1.10

Für $f_1, \dots, f_d \in F$ ist die charakteristische Funktion des Zufallsvektors (f_1, \dots, f_d) gegeben durch (2.1). Dies zeigt, dass der Zufallsvektor α -stabil ist und die jetzige Definition des stabilen Integrals mit der vorherigen übereinstimmt.

2.2. Komplexe α -stabile Integrale

In diesem Abschnitt werden komplexe Zufallsmaße und diesbezüglich auch komplexwertige Integrale

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) M(dx)$$

definiert. Diese Integrale sind etwa notwendig zur Konstruktion von *Harmonizable* Prozessen, wie sie im Kapitel 4 vorgestellt werden. Eine umfangreiche Einführung in komplexe Integrale für den symmetrischen Fall findet sich z.B. in [39].

2.2.1. Komplexwertige α -stabile Zufallsmaße

Man definiert komplexwertige α -stabile Zufallsmaße analog zum reellen Fall in Abschnitt 2.1.3. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $L^0(\Omega)$ und $L_c^0(\Omega)$ die Menge aller reellen bzw. komplexen Zufallsvariablen, die auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Jedes Element aus $L_c^0(\Omega)$ ist von der Form $X + iY$, wobei $X, Y \in L^0(\Omega)$. Sei (E, \mathcal{E}) ein Maßraum und (S_2, \mathbb{B}_2) der Einheitskreis ausgestattet mit der Borel- σ -Algebra \mathbb{B}_2 . Sei κ ein Maß auf dem Produktraum $(E \times S_2, \mathcal{E} \times \mathbb{B}_2)$, dass die folgenden Bedingungen erfüllt:

Bedingung 2.2.1

Für jedes $A \in \mathcal{E}$ mit $\kappa(A \times S_2) < \infty$ ist $\kappa(A \times \cdot)$ ein (endliches) symmetrisches Maß auf (S_2, \mathbb{B}_2) .

Definiere somit

$$\mathcal{E}_0 = \{A \in \mathcal{E} : \kappa(A \times S_2) < \infty\} \quad (2.9)$$

Definition 2.2.2

Ein **komplexwertiges α -stabiles Zufallsmaß auf (E, \mathcal{E}) mit sphärischem Kontrollmaß κ** ist eine *independently scattered σ -additive Menge von Funktionen*

$$M : \mathcal{E}_0 \rightarrow L_c^0(\Omega),$$

so dass für alle $A \in \mathcal{E}_0$, $M^{(1)}(A) := \operatorname{Re}M(A)$ und $M^{(2)}(A) := \operatorname{Im}M(A)$ *zusammenhängend α -stabil sind mit Spektralmaß $\kappa(A \times \cdot)$.*

Die Bedeutung von "independently scattered" und " σ -additiv" entspricht der Bedeutung im reellen Fall aus Abschnitt 2.1.3, allerdings muss hier eine komplexe Zufallsvariable als 2-dimensionaler Vektor aufgefasst werden. D.h., dass die Unabhängigkeit der komplexen Zufallsvariablen $M(A_1), \dots, M(A_k)$ der Unabhängigkeit der Zufallsvektoren

$$\begin{pmatrix} M^{(1)}(A_1) \\ M^{(2)}(A_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} M^{(1)}(A_k) \\ M^{(2)}(A_k) \end{pmatrix}$$

entspricht. In Abschnitt 2.1.3 wurde bereits die Existenz des reellen Zufallsmaßes gezeigt. Analog kann man für den komplexen Fall mit Hilfe des Konsistenzsatzes von Kolmogorov argumentieren, dass das komplexwertige Zufallsmaß existiert mit den endlichdimensionalen Randverteilungen

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^d (\theta_j^{(1)} M^{(1)}(A_j) + \theta_j^{(2)} M^{(2)}(A_j)) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_E \int_{S_2} \left| \sum_{j=1}^d (s_1 \theta_j^{(1)} + s_2 \theta_j^{(2)}) 1_{A_j}(x) \right|^\alpha \right. \end{aligned}$$

2. Grundlagen

$$\cdot \left(1 - i \operatorname{sign} \left(\sum_{j=1}^d (s_1 \theta_j^{(1)} + s_2 \theta_j^{(2)}) 1_{A_j}(x) \right) \tan \left(\frac{\pi \alpha}{2} \right) \right) \kappa(dx, ds) \Big\}, \quad (2.10)$$

wobei $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{E}_0$ und $(\theta_1^{(1)}, \theta_1^{(2)}), \dots, (\theta_d^{(1)}, \theta_d^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$. D.h. also insbesondere, dass

$$\sum_{j=1}^d (\theta_j^{(1)} M^{(1)}(A_j) + \theta_j^{(2)} M^{(2)}(A_j)) \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0),$$

wobei

$$\sigma^\alpha = \int_E \int_{S_2} \left| \sum_{j=1}^d (s_1 \theta_j^{(1)} + s_2 \theta_j^{(2)}) 1_{A_j}(x) \right|^\alpha \kappa(dx, ds)$$

$$\beta \in [-1, 1].$$

Definition 2.2.3

Das Maß m auf (E, \mathcal{E}) definiert durch $m(A) = \kappa(A \times S_2)$ heißt **Kontrollmaß eines komplexwertigen $S_\alpha S$ Zufallsmaßes M** .

2.2.2. Integrale bezüglich komplexwertiger α -stabiler Zufallsmaße

Nachdem ein komplexwertiges α -stabiles Zufallsmaß M definiert wurde, kann man nun das Integral

$$I(f) = \int_E f(x) M(dx) \quad (2.11)$$

einer meßbaren, komplexwertigen Funktion f bezüglich M definieren.

Sei $f = f^{(1)} + i f^{(2)} : E \rightarrow \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Da in Kapitel 2.1 bereits die Integration von reellwertigen Funktionen bezüglich reellwertiger Zufallsmaße behandelt wurde und

$$\int f dM = \int (f^{(1)} + i f^{(2)}) d(M^{(1)} + i M^{(2)})$$

gilt, definiert man das Integral in (2.11) wie folgt:

$$\int_E f(x) M(dx) = \left(\int_E f^{(1)}(x) M^{(1)}(dx) - \int_E f^{(2)}(x) M^{(2)}(dx) \right)$$

$$+ i \left(\int_E f^{(1)}(x) M^{(2)}(dx) + \int_E f^{(2)}(x) M^{(1)}(dx) \right) \quad (2.12)$$

Analog zu der Konstruktion in Kapitel 2.1 soll zunächst das Integral für "einfache" Funktionen $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}(x)$ definiert werden, wobei $c_j \in \mathbb{C}$ und $A_j \in \mathcal{E}_0$ disjunkt.

Definiere

$$I(f) := \int_E f(x)M(dx) = \sum_{j=1}^n c_j M(A_j). \quad (2.13)$$

Wie man leicht sieht, ist $I(f)$ für einfache Funktionen linear in f und erfüllt (2.12). Sei $I^{(1)}(f) = \operatorname{Re}I(f)$ und $I^{(2)}(f) = \operatorname{Im}I(f)$. Dann sind $I^{(1)}(f), I^{(2)}(f)$ zusammenhängend α -stabil mit folgender charakteristischer Funktion:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \exp \left\{ i(\theta_1 I^{(1)}(f) + \theta_2 I^{(2)}(f)) \right\} \\ &= \mathbb{E} \exp \left\{ i \left(\theta_1 \left[\int_E f^{(1)}(x)M^{(1)}(dx) - \int_E f^{(2)}(x)M^{(2)}(dx) \right] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \theta_2 \left[\int_E f^{(2)}(x)M^{(1)}(dx) + \int_E f^{(1)}(x)M^{(2)}(dx) \right] \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \exp \left\{ i \left[\int_E \theta_1 f^{(1)}(x) + \theta_2 f^{(2)}(x)M^{(1)}(dx) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_E \theta_2 f^{(1)}(x) + \theta_1 f^{(2)}(x)M^{(2)}(dx) \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_E \int_{S_2} \left| \theta_1 (s_1 f^{(1)}(x) - s_2 f^{(2)}(x)) + \theta_2 (s_1 f^{(2)}(x) + s_2 f^{(1)}(x)) \right|^\alpha \right. \\ & \quad \cdot \left(1 - i \operatorname{sign} \left(\theta_1 (s_1 f^{(1)}(x) - s_2 f^{(2)}(x)) + \theta_2 (s_1 f^{(2)}(x) + s_2 f^{(1)}(x)) \right) \right) \\ & \quad \left. \cdot \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \kappa(dx, ds) \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da nun das Integral für einfache Funktionen definiert ist, kann man analog zum reellen Fall in Kapitel 2.1 dieses Integral über Approximation und Konvergenz auf die Funktionenklasse $L^\alpha(m)$ mit

$$L^\alpha(m) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{C} : \int_E |f(x)|^\alpha m(dx) < \infty \right\}$$

erweitern, wobei m das Bestimmtheitsmaß von M ist.

Für jede Funktion $f = f^{(1)} + i f^{(2)} \in L^\alpha(m)$ wähle man eine Folge von einfachen Funktionen $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, so dass

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für fast alle } x \in E, \quad (2.15)$$

$$|f_n(x)| \leq \theta(x) \quad \text{für alle } n, x \text{ und ein } \theta \in L^\alpha(m). \quad (2.16)$$

2. Grundlagen

Solch eine Folge existiert immer. Man nehme zum Beispiel $f_n(x) = f_n^{(1)}(x) + i f_n^{(2)}(x)$ mit

$$f_n^{(j)}(x) = \begin{cases} \frac{i}{n} & \text{falls } \frac{i}{n} \leq f^{(j)}(x) < \frac{i+1}{n}, & i = 0, 1, \dots, n^2 - 1, \\ -\frac{i}{n} & \text{falls } -\frac{i+1}{n} \leq f^{(j)}(x) < -\frac{i}{n}, & i = 0, 1, \dots, n^2 - 1, \\ 0 & \text{falls } |f^{(j)}(x)| \geq n, \end{cases}$$

für $j = 1, 2$ mit $\theta = |f|$.

Die Folge von Integralen $I(f_n)$ ist durch (2.13) wohldefiniert. Mit (2.14) gilt für alle $n, m \geq 1$, dass

$$I^{(1)}(f_n) - I^{(1)}(f_m) \sim S_\alpha(\sigma_{n,m}^{(1)}, \beta_{n,m}^{(1)}, 0),$$

wobei $\beta_{n,m}^{(1)} \in [-1, 1]$ und

$$(\sigma_{n,m}^{(1)})^\alpha = \int_E \int_{S_2} |s_1(f_n^{(1)}(x) - f_m^{(1)}(x)) - s_2(f_n^{(2)}(x) - f_m^{(2)}(x))|^\alpha \kappa(dx, ds).$$

Zu zeigen ist also, dass $(\sigma_{n,m}^{(1)})^\alpha \rightarrow 0$ falls $n, m \rightarrow \infty$.

Mit (2.15) und (2.16) und der Ungleichung $|a + b|^\alpha \leq 2^\alpha(|a|^\alpha + |b|^\alpha)$ folgt:

$$\begin{aligned} (\sigma_{n,m}^{(1)})^\alpha &= \int_E \int_{S_2} |s_1(f_n^{(1)}(x) - f_m^{(1)}(x)) - s_2(f_n^{(2)}(x) - f_m^{(2)}(x))|^\alpha \kappa(dx, ds) \\ &\leq 2^\alpha \int_E \int_{S_2} \underbrace{|s_1|^\alpha}_{\leq 1} |f_n^{(1)}(x) - f_m^{(1)}(x)|^\alpha + \underbrace{|s_2|^\alpha}_{\leq 1} |f_n^{(2)}(x) - f_m^{(2)}(x)|^\alpha \kappa(dx, ds) \\ &\leq 2^\alpha \int_E |f_n^{(1)}(x) - f_m^{(1)}(x)|^\alpha + |f_n^{(2)}(x) - f_m^{(2)}(x)|^\alpha \kappa(dx, S_2) \\ &= 2^\alpha \int_E |f_n^{(1)}(x) - f_m^{(1)}(x)|^\alpha m(dx) + 2^\alpha \int_E |f_n^{(2)}(x) - f_m^{(2)}(x)|^\alpha m(dx) \quad (2.17) \\ &\rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

was man mit Hilfe der majorisierten Konvergenz in gleicher Weise wie in Abschnitt 2.1.4 zeigen kann. Da der Beweis für diesen Fall identisch ist, wird er hier nicht weiter ausgeführt.

Somit konvergiert die Folge $\{I(f_n^{(1)})\}_{n=1}^\infty$ in Wahrscheinlichkeit. Analog zeigt man die Konvergenz der Folge $\{I(f_n^{(2)})\}_{n=1}^\infty$ in Wahrscheinlichkeit. Daher kann man nun das Integral $I(f)$ für alle $f \in L^\alpha(m)$ wie folgt definieren:

$$I(f) := \text{plim}_{n \rightarrow \infty} I(f_n)$$

Die Ergebnisse werden in folgender Proposition zusammengefasst.

Proposition 2.2.4

(i) Für alle $f \in L^\alpha(m)$ ist das Integral $I(f)$ eine komplexwertige α -stabile Zufallsvariable, welche die Gleichung (2.12) erfüllt mit charakteristischer Funktion wie in (2.14) angegeben.

(ii) Für alle $f, g \in L^\alpha(m)$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$I(af + bg) = aI(f) + bI(g) \text{ f.s.}$$

Beweis. (i) $I(f)$ ist als Grenzwert in Wahrscheinlichkeit von einer Folge von α -stabilen Zufallsvariablen $I(f_n)$ wieder α -stabil. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert Konvergenz in Verteilung und damit punktweise Konvergenz der charakteristischen Funktion. Somit besitzt $I(f)$ die charakteristische Funktion wie in (2.14) angegeben. (2.12) gilt für $I(f_n)$ und jedes der fünf Integrale konvergiert in Wahrscheinlichkeit. Somit gilt (2.12) auch für den Grenzwert $I(f)$.

(ii) Folgt sofort durch die bereits erwähnte Linearität von $I(f_n)$ und anschließende Approximation wie zuvor bereits gezeigt. \square

Proposition 2.2.5

Sei $X_j = \int_E f_j(x)M(dx)$, $j = 1, 2, \dots$ und $X = \int_E f(x)M(dx)$, wobei M ein komplexes α -stabiles Zufallsmaß mit sphärischem Bestimmtheitsmaß κ und Bestimmtheitsmaß m und $f, f_j, j = 1, 2, \dots \in L^\alpha(m)$. Dann gilt

$$\text{plim}_{j \rightarrow \infty} X_j = X$$

genau dann, wenn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_E |f_j(x) - f(x)|^\alpha m(dx) = 0. \quad (2.18)$$

Beweis. Zunächst ist

$$\text{plim}_{j \rightarrow \infty} X_j = X \Leftrightarrow \text{plim}_{j \rightarrow \infty} X_j - X = 0$$

und dies wiederum äquivalent zu

$$\text{plim}_{j \rightarrow \infty} \text{Re}(X_j - X) = 0 \text{ und } \text{plim}_{j \rightarrow \infty} \text{Im}(X_j - X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}(X_j - X) \stackrel{d}{\Rightarrow} 0 \text{ und } \text{Im}(X_j - X) \stackrel{d}{\Rightarrow} 0.$$

Mit 2.14 gilt $\text{Re}(X_j - X) \sim S_\alpha(\sigma_j^{(1)}, \beta_j^{(1)}, 0)$ und $\text{Im}(X_j - X) \sim S_\alpha(\sigma_j^{(2)}, \beta_j^{(2)}, 0)$, wobei

$$(\sigma_j^{(1)})^\alpha = \int_E \int_{S_2} |s_1(f_j^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)) - s_2(f_j^{(2)}(x) - f^{(2)}(x))|^\alpha \kappa(dx, ds),$$

2. Grundlagen

$$(\sigma_j^{(2)})^\alpha = \int_E \int_{S_2} |s_1(f_j^{(2)}(x) - f^{(2)}(x)) + s_2(f_j^{(1)}(x) - f^{(1)}(x))|^\alpha \kappa(dx, d\mathbf{s}).$$

Daher ist $\text{plim}_{j \rightarrow \infty} X_j = X$ äquivalent zu

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\sigma_j^{(1)})^\alpha = \lim_{j \rightarrow \infty} (\sigma_j^{(2)})^\alpha = 0. \quad (2.19)$$

Analog zu (2.17) gilt

$$(\sigma_j^{(k)})^\alpha \leq 2^\alpha \int_E |f_j^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)|^\alpha m(dx) + 2^\alpha \int_E |f_j^{(2)}(x) - f^{(2)}(x)|^\alpha m(dx),$$

für $k = 1, 2$, $j \geq 1$. Somit impliziert (2.18) gerade (2.19). Andererseits gilt für $A, B \in \mathbb{R}$ und $(s_1, s_2) \in S_2$:

$$(s_1 A - s_2 B)^2 + (s_1 B + s_2 A)^2 = A^2 + B^2$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} & \int_E |f_j(x) - f(x)|^\alpha m(dx) \\ &= \int_E \int_{S_2} [(f_j^{(1)}(x) - f^{(1)}(x))^2 + (f_j^{(2)}(x) - f^{(2)}(x))^2]^{\alpha/2} \kappa(dx, d\mathbf{s}) \\ &= \int_E \int_{S_2} [(s_1(f_j^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)) - s_2(f_j^{(2)}(x) - f^{(2)}(x)))^2 \\ & \quad + (s_1(f_j^{(2)}(x) - f^{(2)}(x)) + s_2(f_j^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)))^2]^{\alpha/2} \kappa(dx, d\mathbf{s}) \\ &\leq (\sigma_j^{(1)})^\alpha + (\sigma_j^{(2)})^\alpha. \end{aligned}$$

Somit impliziert (2.19) auch (2.18). □

2.3. E -homogene Funktionen

2.3.1. Integration bezüglich verallgemeinerter Polarkoordinaten

In diesem Abschnitt werden in die Ergebnisse aus [10] für E -homogene Funktionen zusammengefasst, da diese Funktionen für die Konstruktion der *Moving-Average* bzw. der *Harmonizable* Darstellung notwendig sind. Die Beweise sind in [10] Section 2 ausgearbeitet.

Sei E eine $d \times d$ -Matrix mit positiven Realteilen der Eigenwerte $0 < a_1 < \dots < a_p$ für $p \leq d$ und sei $\Gamma := \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$. Es folgt aus Lemma 6.1.5 aus [38], dass eine Norm $\|\cdot\|_0$ auf \mathbb{R}^d existiert, so dass für die Einheitsphäre $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : \|\cdot\|_0 = 1\}$ die

Abbildung $\Psi : (0, \infty) \times S_0 \rightarrow \Gamma$, $\Psi(r, \theta) = r^E \theta$ ein Homöomorphismus ist. Weiter gilt, dass für alle $x \in \Gamma$ die Funktion $t \mapsto \|t^E x\|_0$ streng monoton wachsend ist. Also lässt sich jedes $x \in \Gamma$ eindeutig als

$$x = \tau(x)^E l(x)$$

mit einem *Radius* $\tau(x) > 0$ und einer *Richtung* $l(x) \in S_0$ schreiben. Man nennt $(\tau(x), l(x))$ die *verallgemeinerten Polarkoordinaten* von x .

Man beachte, dass $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^d : \tau(x) = 1\}$ kompakt ist, und

$$\tau(x) \rightarrow \begin{cases} \infty & , \text{ für } x \rightarrow \infty \\ 0 & , \text{ für } x \rightarrow 0 \end{cases}$$

Darüber hinaus gilt $\tau(-x) = \tau(x)$ und $l(-x) = -l(x)$.

Das folgende Lemma gibt in Abhängigkeit der Eigenwerte von E sowohl eine obere als auch eine untere Grenze der Wachstumsrate von $\tau(x)$ an.

Lemma 2.3.1

Für jedes $\delta > 0$ existieren Konstanten $C_1, \dots, C_4 > 0$, so dass

(i) für alle $\|x\|_0 \leq 1$ oder $\tau(x) \leq 1$ gilt:

$$C_1 \|x\|_0^{1/a_1 + \delta} \leq \tau(x) \leq C_2 \|x\|_0^{1/a_p - \delta},$$

(ii) für alle $\|x\|_0 \geq 1$ oder $\tau(x) \geq 1$ gilt:

$$C_3 \|x\|_0^{1/a_p - \delta} \leq \tau(x) \leq C_4 \|x\|_0^{1/a_1 + \delta}.$$

Beweis. Es werden hier nur die ersten beiden Ungleichungen bewiesen. Es folgt aus Theorem 2.2.4 in [38], dass für alle $\delta' > 0$ gilt:

$$t^{a_1 - \delta'} \|t^{-E} \theta\|_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig für $\|\theta\|_0 = 1$. Daher gilt:

$$\|t^{-E}\|_0 := \sup_{\theta \in S_0} \|t^{-E} \theta\|_0 \leq C t^{-a_1 + \delta'}$$

für alle $t \geq 1$ und eine Konstante $C > 0$. Äquivalent dazu erhält man $\|s^E\|_0 \leq C s^{a_1 - \delta'}$ für alle $s \leq 1$. Da

$$\|x\|_0 = \|\tau(x)^E l(x)\|_0 \leq \|\tau(x)^E\|_0 \leq C \tau(x)^{a_1 - \delta'}$$

2. Grundlagen

gilt, erhält man für $\|x\|_0 \leq 1$ ($\Leftrightarrow \tau(x) \leq 1$):

$$\tau(x) \geq C_1 \|x\|_0^{1/a_1 + \delta} \quad \text{mit } \delta = \frac{1}{a_1 - \delta'} - \frac{1}{a_1}.$$

Analog zu diesem Resultat gilt für alle $\delta' > 0$:

$$t^{-a_p - \delta'} \|t^E \theta\|_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig für $\|\theta\|_0 = 1$. Daraus erhält man nun $\|t^E\|_0 \leq C t^{a_p + \delta'}$ für alle $t \geq 1$ oder äquivalent dazu $\|s^{-E}\|_0 \leq C s^{-a_p - \delta'}$ für alle $s \leq 1$. Weiter gilt

$$x = \tau(x)^E l(x) \Leftrightarrow l(x) = \tau(x)^{-E} x.$$

Somit folgt $1 \leq \|\tau(x)^{-E}\|_0 \cdot \|x\|_0$ und $\|x\|_0 \geq C^{-1} \tau(x)^{a_p + \delta'}$ für $\|x\|_0 \leq 1$. Daher gilt für $\|x\|_0 \leq 1$:

$$\tau(x) \leq C_2 \|x\|_0^{1/a_p - \delta} \quad \text{mit } \delta = \frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_p + \delta'}.$$

□

Lemma 2.3.2

Es existiert eine Konstante $K \geq 1$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\tau(x + y) \leq K(\tau(x) + \tau(y)).$$

Nun sei $q = \text{Spur}(E)$. Es gilt

$$\lambda^d(c^E B) = c^q \lambda^d(B) \quad \text{für alle Borel-Mengen } B \subset \mathbb{R}^d, c > 0, \quad (2.20)$$

denn mit $d(c^E y) = |\det c^E| dy$ und $\det c^E = c^q$ gilt $dx = c^q dy$ und somit folgt mit Variablentransformation:

$$\begin{aligned} \lambda^d(c^E B) &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_{c^E B}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(c^{-E} x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(y) c^q dy \\ &= c^q \lambda^d(B) \end{aligned}$$

so dass man $d(c^E x) = c^q dx$ schreiben kann. Sei $B(r, x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \tau(y - x) < r\}$ ein Ball mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^d$. Es gilt $B(r, x) = x + B(r, 0) = x + r^E B(1, 0)$ und somit folgt $\lambda^d(B(r, x)) = r^q \lambda^d(B(1, 0))$.

Die nun folgende Proposition liefert eine Formel für die Integration bezüglich der verallgemeinerten Polarkoordinaten.

Proposition 2.3.3

Es existiert ein eindeutiges, endliches Radon-Maß (siehe z.B. [7], S.176) σ auf S_0 , so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S_0} f(r^E \theta) \sigma(d\theta) r^{q-1} dr.$$

Korollar 2.3.4

Sei $\beta \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, so dass $|f(x)| = O(\tau(x)^\beta)$. Dann gilt:

- (i) Für $\beta > -q$ ist f integrierbar in der Nähe von 0,
- (ii) für $\beta < -q$ ist f integrierbar in der Nähe von ∞ .

2.3.2. Definition von E -homogenen Funktionen**Definition 2.3.5**

Sei $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Man sagt, dass φ E -homogen ist, falls

$$\varphi(c^E x) = c \varphi(x) \quad \text{für alle } c > 0 \text{ und } x \in \Gamma.$$

Es folgt, dass eine E -homogene Funktion φ eindeutig bestimmt ist durch ihre Werte auf S_0 , da $\varphi(x) = \varphi((\tau(x)^E l(x))) = \tau(x) \varphi(l(x))$. Man beachte, falls φ E -homogen und stetig ist mit positiven Werten auf Γ , dann gilt:

$$M_\varphi = \max_{\theta \in S_0} \varphi(\theta) > 0 \quad \text{und} \quad m_\varphi = \min_{\theta \in S_0} \varphi(\theta) > 0 \quad (2.21)$$

und wegen der Stetigkeit gilt $\varphi(0) = 0$.

Definition 2.3.6

Sei $\beta > 0$. Eine stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ heißt (β, E) -zulässig, falls $\varphi(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ und für $0 < A < B$ eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für $A \leq \|y\| \leq B$ folgendes gilt:

$$\tau(x) \leq 1 \Rightarrow |\varphi(x+y) - \varphi(y)| \leq C \tau(x)^\beta.$$

3. Moving-Average Darstellung

3.1. Konstruktion

In diesem Kapitel wird eine Erweiterung der in [10] vorgestellten *Moving-Average* Darstellung für OSSRSs erarbeitet. Die Konstruktion des Zufallsfeldes erfolgt mit dem Produkt von \tilde{E}_j -homogenen, (β_j, \tilde{E}_j) -zulässigen Funktionen φ_j (siehe Kapitel 2.3) als Integrand und einem *independently scattered* S α S Zufallsmaß $Z_\alpha(dy)$ mit Kontrollmaß λ^d als Integrator. Damit ist die Verteilung von Z_α also insgesamt gegeben durch

$$Z_\alpha(A) \sim S_\alpha((\lambda^d(A))^{1/\alpha}, 0, 0).$$

Im Folgenden seien \tilde{E}_j $d_j \times d_j$ -Matrizen mit positiven Realteilen der Eigenwerte $0 < a_1^{(j)} < \dots < a_{p_j}^{(j)}$ und $q_j = \text{Spur}(\tilde{E}_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Theorem 3.1.1

Für $j = 1, \dots, m$ seien $\beta_j > 0$, $\varphi_j : \mathbb{R}^{d_j} \rightarrow [0, \infty)$ \tilde{E}_j -homogene, (β_j, \tilde{E}_j) -zulässige Funktionen (siehe Kapitel 2.3). Dann existiert für jedes $0 < \alpha \leq 2$ und jedes $0 < H_j < \beta_j$ das Zufallsfeld

$$X_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m \left(\varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha} \right) Z_\alpha(dy), \quad (3.1)$$

und ist stochastisch stetig, wobei $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m} = \mathbb{R}^d$.

Beweis. Da in [39] 3.2 das stabile Integral für alle Funktionen $f \in L^\alpha(\mathbb{R}^d, \mathbb{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$ definiert wurde, existiert $X_\varphi(x)$ genau dann, wenn

$$\Gamma_\varphi^\alpha(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m \left| \varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha} \right|^\alpha dy < \infty$$

Für alle $j = 1, \dots, m$ sei nun $H_j \in (0, \beta_j)$. Man beachte, dass für alle \tilde{E}_j -homogenen Funktionen φ_j wegen (2.21) Folgendes gilt:

$$m_{\varphi_j} \tau_j(z_j) \leq \varphi_j(z_j) \leq M_{\varphi_j} \tau_j(z_j) \quad \text{für alle } z_j \neq 0. \quad (3.2)$$

3. Moving-Average Darstellung

Wähle $x \in \Gamma = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ beliebig. Da φ_j \tilde{E}_j -homogen ist, folgt durch Anwendung der Ungleichungen $|a - b|^\alpha \leq 2^\alpha(|a|^\alpha + |b|^\alpha)$ in Verbindung mit (3.2):

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^m |\varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha}|^\alpha \\ & \leq C \prod_{j=1}^m (\tau_j(x_j - y_j)^{\alpha H_j - q_j} + \tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j}) \end{aligned}$$

Es folgt aus Korollar 2.3.4, dass für $H_1, \dots, H_m > 0, R > 0$ gilt

$$\int_{\tau_j(y_j) \leq R} \tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j} dy_j < \infty \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Des Weiteren gilt aufgrund von Lemma 2.3.2

$$\{y_j : \tau_j(x_j - y_j) \leq R\} \subset \{y_j : \tau_j(y_j) \leq K_j(R + \tau_j(x_j))\} \quad \forall j = 1, \dots, m$$

und damit erhält man durch Variablentransformation und erneuter Anwendung von Korollar 2.3.4, dass für $H_1, \dots, H_m > 0$ Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_j(y_j) \leq R} \tau_j(x_j - y_j)^{\alpha H_j - q_j} dy_j &= \int_{\tau_j(x_j - y_j) \leq R} \tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j} dy_j \\ &\leq \int_{\tau_j(y_j) \leq K_j(R + \tau_j(x_j))} \tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j} dy_j < \infty. \end{aligned}$$

Somit folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} & \int_{\max_j(\tau_j(y_j)) \leq R} \prod_{j=1}^m |\varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha}|^\alpha dy \\ & \leq C \int_{\max_j(\tau_j(y_j)) \leq R} \prod_{j=1}^m (\tau_j(x_j - y_j)^{\alpha H_j - q_j} + \tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j}) dy \\ & = C \int_{\tau_1(y_1) \leq R} \dots \int_{\tau_m(y_m) \leq R} \prod_{j=1}^m (\tau_j(x_j - y_j)^{\alpha H_j - q_j} + \tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j}) dy_1 \dots dy_m \\ & = C \prod_{j=1}^m \int_{\tau_j(y_j) \leq R} \tau_j(x_j - y_j)^{\alpha H_j - q_j} + \tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j} dy_j \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Weiterhin ist zu zeigen, dass für ein bestimmtes $R = R(x) > 0$

$$\int_{\max_j(\tau_j(y_j)) > R} \prod_{j=1}^m |\varphi_j(x_j + y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(y_j)^{H_j - q_j/\alpha}|^\alpha dy < \infty$$

gilt. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $\tau_j(y_j) > R$, $\varphi_j(y_j) > 0$. Da φ_j \tilde{E}_j -homogen ist, gilt

$$\begin{aligned}\varphi_j(x_j + y_j) &= \varphi_j(\varphi_j(y_j)^{\tilde{E}_j}(\varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}x_j + \varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}y_j)) \\ &= \varphi_j(y_j)\varphi_j(\varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}x_j + \varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}y_j).\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt $\varphi_j(\varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}y_j) = 1$ und da φ_j (β_j, \tilde{E}_j) -zulässig ist, existiert ein $C_j > 0$, so dass

$$|\varphi_j(\varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}x_j + \varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}y_j) - 1| \leq C_j\tau_j(\varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}x_j)^{\beta_j} = C_j\varphi_j(y_j)^{-\beta_j}\tau_j(x_j)^{\beta_j}.$$

Daher folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes, angewendet auf die Funktion $t^{H_j - q_j/\alpha}$ in der Nähe von $t = 1$, dass man eine Zahl $C_{j,1} > 0$ finden kann, so dass für alle $\tau_j(y_j) > R(x)$ mit $C_j\varphi_j(y_j)^{-\beta_j}\tau_j(x_j)^{\beta_j} < 1/2$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}&|\varphi_j(x_j + y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(y_j)^{H_j - q_j/\alpha}| \\ &= \varphi_j(y_j)^{H_j - q_j/\alpha}|\varphi_j(\varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}x_j + \varphi_j(y_j)^{-\tilde{E}_j}y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - 1| \\ &\leq C_{j,1}\varphi_j(y_j)^{H_j - \beta_j - q_j/\alpha}\tau_j(x_j)^{\beta_j}.\end{aligned}$$

Nun gilt aber weiter, dass $\varphi_j(y_j)^{H_j - \beta_j - q_j/\alpha} \leq C_{j,2}\tau_j(y_j)^{H_j - \beta_j - q_j/\alpha}$ und mit Korollar 2.3.4 gilt

$$\int_{\tau_j(y_j) > R} \tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j - \alpha\beta_j} dy_j < \infty \text{ falls } H_j < \beta_j.$$

Mit Hilfe von Fubini folgt wie im ersten Fall:

$$\begin{aligned}&\int_{\max_j(\tau_j(y_j)) > R} \prod_{j=1}^m |\varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha}|^\alpha dy \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, m\} \\ \#K=l}} \prod_{k \in K} \int_{\tau_k(y_k) > R} |\varphi_k(x_k - y_k)^{H_k - q_k/\alpha} - \varphi_k(-y_k)^{H_k - q_k/\alpha}|^\alpha dy_k \\ &\quad \cdot \prod_{k \in K^c} \int_{\tau_k(y_k) \leq R} |\varphi_k(x_k - y_k)^{H_k - q_k/\alpha} - \varphi_k(-y_k)^{H_k - q_k/\alpha}|^\alpha dy_k \\ &\leq C \sum_{l=1}^m \sum_{\substack{K \subset \{1, \dots, m\} \\ \#K=l}} \prod_{k \in K} \int_{\tau_k(y_k) > R} \tau_k(y_k)^{\alpha H_k - \alpha\beta_k - q_k} \tau_k(x_k)^{\alpha\beta_k} dy_k \\ &\quad \cdot \prod_{k \in K^c} \int_{\tau_k(y_k) \leq R} \tau_k(x_k - y_k)^{\alpha H_k - q_k} + \tau_k(y_k)^{\alpha H_k - q_k} dy_k \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit, dass $\Gamma_\varphi^\alpha(x)$ endlich ist für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

Als nächstes ist zu zeigen, dass X_φ stochastisch stetig ist. Es folgt mit Proposition

3. Moving-Average Darstellung

3.5.1 aus [39], dass X_φ genau dann stochastisch stetig ist, wenn

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m |\varphi_j(x_{0,j} + x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(x_{0,j} - y_j)^{H_j - q_j/\alpha}|^\alpha dy \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ für alle } x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Dies ist mittels Variablentransformation äquivalent zu

$$\Gamma_\varphi^\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Da die φ_j stetig sind auf $\mathbb{R}^{d_j} \forall j = 1, \dots, m$, gilt

$$\prod_{j=1}^m |\varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha}|^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \text{ f.ü.}$$

Weiter folgt mit $\tau_j(x_j) \leq 1 \forall j = 1, \dots, m$, $R > 0$, dass ein $C > 0$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^m |\varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha}|^\alpha \\ & \leq C \prod_{j=1}^m (\tau_j(y_j)^{\alpha H_j - q_j} \mathbf{1}_{\tau_j(y_j) \leq K(R+1)}(y_j) + \tau(y_j)^{\alpha(H_j - \beta_j) - q_j} \mathbf{1}_{\tau_j(y_j) \geq R}(y_j)). \end{aligned}$$

Mit dominierter Konvergenz folgt also

$$\Gamma_\varphi^\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

□

3.2. Eigenschaften

Korollar 3.2.1

Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Theorem 3.1.1 hat das Zufallsfeld folgende Eigenschaft:

$\{X_\varphi(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ ist ein Operator Scaling Stable Random Sheet, d.h. für alle $j = 1, \dots, m$ und jedes $c > 0$ gilt:

$$\{X_\varphi(c^{E_j} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{c^{H_j} X_\varphi(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

Beweis. Wähle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Zu zeigen ist, dass

$$\sum_{k=1}^n t_k X_\varphi(c^{E_j} x_k) \stackrel{d}{=} c^{H_j} \sum_{k=1}^n t_k X_\varphi(x_k)$$

gilt für alle $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ und alle $j = 1, \dots, m$. Nun gilt $\varphi_j(c^{E_j} y_j) = c \varphi_j(y_j)$ für alle $y_j \in \mathbb{R}^{d_j}$ und $Z_\alpha(c^{E_j} dz) \stackrel{d}{=} c^{q_j/\alpha} Z_\alpha(dz)$. Denn es gilt für alle $c > 0$:

$$\begin{aligned}
 c^{q_j/\alpha} Z_\alpha(A) &\sim S_\alpha(c^{q_j/\alpha} (\lambda^d(A))^{1/\alpha}, 0, 0) \\
 &= S_\alpha((c^{q_j} \lambda^d(A))^{1/\alpha}, \text{sign}(c^{q_j}) 0, 0) \\
 &= S_\alpha((c^{q_j} \lambda^{d_1}(A_1) \times \dots \times \lambda^{d_j}(A_j) \times \dots \times \lambda^{d_m}(A_m))^{1/\alpha}, 0, 0) \\
 &\stackrel{(2.20)}{=} S_\alpha((\lambda^{d_1}(A_1) \times \dots \times \lambda^{d_j}(c^{\tilde{E}_j} A_j) \times \dots \times \lambda^{d_m}(A_m))^{1/\alpha}, 0, 0) \\
 &= S_\alpha((\lambda^d(c^{E_j} A))^{1/\alpha}, 0, 0) \\
 &\sim Z_\alpha(c^{E_j} A).
 \end{aligned}$$

Dadurch erhält man mittels Variablentransformation und der Schreibweise

$$x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,m}), x_{k,j} \in \mathbb{R}^{d_j}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^n t_k X_\varphi(c^{E_j} x_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n t_k \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m \left(\varphi_l(x_{k,l} - y_l)^{H_l - q_l/\alpha} - \varphi_l(-y_l)^{H_l - q_l/\alpha} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\varphi_j(c^{\tilde{E}_j}(x_{k,j} - z_j))^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-c^{\tilde{E}_j} z_j)^{H_j - q_j/\alpha} \right) Z_\alpha(dy) \\
 &= \sum_{k=1}^n t_k \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m \left(\varphi_l(x_{k,l} - y_l)^{H_l - q_l/\alpha} - \varphi_l(-y_l)^{H_l - q_l/\alpha} \right) \\
 &\quad \cdot c^{H_j - q_j/\alpha} \left(\varphi_j(x_{k,j} - z_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-z_j)^{H_j - q_j/\alpha} \right) c^{q_j/\alpha} Z_\alpha(dy) \\
 &= \sum_{k=1}^n t_k c^{H_j/\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m \left(\varphi_l(x_{k,l} - y_l)^{H_l - q_l/\alpha} - \varphi_l(-y_l)^{H_l - q_l/\alpha} \right) \\
 &\quad \cdot \left(\varphi_j(x_{k,j} - z_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-z_j)^{H_j - q_j/\alpha} \right) Z_\alpha(dy) \\
 &= c^{H_j} \sum_{j=1}^m t_k X_\varphi(x_k)
 \end{aligned}$$

□

Die Eigenschaft der Operatorskalierung bleibt also auch für den Fall $m \geq 2$ erhalten und verallgemeinert die OSSRFs in dieser Hinsicht. OSSRFs besitzen darüber hinaus stationäre Zuwächse, was aufgrund der Produktstruktur nicht auf den Fall $m \geq 2$ übertragen werden kann. Es gilt jedoch die schwächere Eigenschaft, dass OSSRSs

3. Moving-Average Darstellung

bezüglich jedes einzelnen Unterraums $\mathbb{R}^{d_j}, j = 1, \dots, m$, stationäre Zuwächse besitzen. Für Subprozesse auf diesen Unterräumen kann demnach wieder die Stationarität gewonnen und im Folgenden ausgenutzt werden. Dies wird für die Harmonische Darstellung in Kapitel 5 eine Rolle spielen. Es ist eine wesentliche Eigenschaft, um Aussagen über die Hölderregularität zu gewinnen. Hat man Ergebnisse für jeden einzelnen Subprozess gewonnen, lassen sich mit Hilfe der Hölderungleichung ebenso Aussagen über den Gesamtprozess gewinnen. Diese Strategie hat sich im Laufe dieser Arbeit bei der Untersuchung von $X_\varphi(x)$ als sehr effizient erwiesen. Damit werden nun geeignete Subprozesse konstruiert und deren Stationarität gezeigt.

Sei $P_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_j}$ die Projektion von $x \in \mathbb{R}^d$ auf $x_j \in \mathbb{R}^{d_j}$ bezüglich des Zufallsfeldes

$$X_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) Z_\alpha(dy), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

mit

$$f(x, y) = \prod_{j=1}^m \left(\varphi_j(x_j - y_j)^{H_j - q_j/\alpha} - \varphi_j(-y_j)^{H_j - q_j/\alpha} \right). \quad (3.3)$$

Definiere für beliebige $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,m}) \in \mathbb{R}^d, k = 1, \dots, m$ Zufallsfelder wie folgt:

$$\begin{aligned} X_{x_0}^{(k)}(x) &:= X_\varphi(x_{0,1}, \dots, x_{0,k-1}, P_k(x), x_{0,k+1}, \dots, x_{0,m}) \\ &= X_\varphi(x_{0,1}, \dots, x_{0,k-1}, x_k, x_{0,k+1}, \dots, x_{0,m}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

d.h. also

$$X_{x_0}^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_{x_0}^{(k)}(x, y) Z_\alpha(dy), \quad x_k \in \mathbb{R}^{d_k}$$

mit $f_{x_0}^{(k)} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f_{x_0}^{(k)}(x, y) &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \left(\varphi_l(x_{0,l} - y_l)^{H_l - q_l/\alpha} - \varphi_l(-y_l)^{H_l - q_l/\alpha} \right) \\ &\quad \cdot \left(\varphi_k(P_k(x) - y_k)^{H_k - q_k/\alpha} - \varphi_k(-y_k)^{H_k - q_k/\alpha} \right) \\ &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \left(\varphi_l(x_{0,l} - y_l)^{H_l - q_l/\alpha} - \varphi_l(-y_l)^{H_l - q_l/\alpha} \right) \\ &\quad \cdot \left(\varphi_k(x_k - y_k)^{H_k - q_k/\alpha} - \varphi_k(-y_k)^{H_k - q_k/\alpha} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mit Hilfe dieser Vorarbeiten lässt sich nun folgende Eigenschaft angeben:

Korollar 3.2.2

Für alle $k = 1, \dots, m$ besitzen die Zufallsfelder $X_{x_0}^{(k)}$ aus (3.4) stationäre Zuwächse, d.h. für alle $h \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\{X_{x_0}^{(k)}(x + h) - X_{x_0}^{(k)}(h)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{X_{x_0}^{(k)}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}. \quad (3.6)$$

Beweis. Für alle $x, h \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
 X_{x_0}^{(k)}(x+h) - X_{x_0}^{(k)}(h) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f_{x_0}^{(k)}(x+h, y) - f_{x_0}^{(k)}(h, y)) Z_\alpha(dy) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (\varphi_l(x_{0,l} - y_l)^{H_l - q_l/\alpha} - \varphi_l(-y_l)^{H_l - q_l/\alpha}) \\
 &\quad \cdot (\varphi_j(x_k + h_k - y_k)^{H_k - q_k/\alpha} - \varphi_k(h_k - y_k)^{H_k - q_k/\alpha}) Z_\alpha(dy) \\
 &\stackrel{d}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (\varphi_l(x_{0,l} - y_l)^{H_l - q_l/\alpha} - \varphi_l(-y_l)^{H_l - q_l/\alpha}) \\
 &\quad \cdot (\varphi_j(x_k - y_k)^{H_k - q_k/\alpha} - \varphi_k(-y_k)^{H_k - q_k/\alpha}) Z_\alpha(dy) \\
 &= X_{x_0}^{(k)}(x).
 \end{aligned}$$

Somit folgt mit analoger Rechnung für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ für die endlichdimensionalen Randverteilungen

$$\mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n t_j (X_{x_0}^k(x_j + h) - X_{x_0}^k(h)) \right\} = \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n t_j X_{x_0}^{(k)}(x_j) \right\}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Die folgenden beiden Beispiele zeigen, dass das in (3.1) definierte Feld eine wirkliche Verallgemeinerung des *Fractional Brownian Sheet* und des *Operator Scaling Stable Random Field* ist. Somit wird gleichzeitig auch der Zusammenhang zwischen diesen beiden Feldern deutlich.

Beispiel 3.2.3

Setze $\alpha = 2, \varphi_j(y_j) = (y_j)_+, d_j = 1, \tilde{E}_j = (1) \forall j = 1, \dots, m$, dann erhält man den Spezialfall des *Fractional Brownian Sheet*, wie etwa in [6] angegeben:

$$X(x) = \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^d \left[((x_j - y_j)_+)^{H_j - 1/2} - ((-y_j)_+)^{H_j - 1/2} \right] Z_2(dy).$$

Beispiel 3.2.4

Setze $m = 1, d = d_1, E = E_1, H = H_1, q = q_1, \varphi = \varphi_1$, dann erhält man den Spezialfall des *Operator Scaling Stable Random Field* in der Moving Average Darstellung, wie in [10] eingeführt:

$$X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - y)^{H - q/\alpha} - \varphi(-y)^{H - q/\alpha} Z_\alpha(dy).$$

4. Harmonische Darstellung

4.1. Konstruktion

In diesem Kapitel wird die *Harmonische Darstellung* für OSSRSs vorgestellt. Die hier aufgeführten Resultate stellen eine Erweiterung der Ergebnisse aus [10] dar.

Die Konstruktion des Zufallsfeldes erfolgt mit stetigen, \tilde{E}_j^t -homogenen Funktion ψ_j für $j = 1, \dots, m$ als Integrand und einem komplexen α -stabilen Zufallsmaß W_α mit $0 < \alpha \leq 2$ als Integrator. Im Folgenden sei wie zuvor \tilde{E}_j eine $d_j \times d_j$ -Matrix mit positiven Realteilen der Eigenwerte $0 < a_1^{(j)} < \dots < a_{p_j}^{(j)}$ und $q_j = \text{Spur}(\tilde{E}_j)$. Des Weiteren sei W_α ein komplexes α -stabiles Zufallsmaß mit sphärischem Kontrollmaß $\kappa(dx, ds)$, wobei

$$\kappa(dx, ds) = dx\gamma(ds), \quad \text{mit } \gamma \text{ gleichverteilt auf } S_2.$$

D.h. also

$$m(dx) = dx\gamma(S_2), \quad \text{wobei } \gamma(S_2) < \infty.$$

Theorem 4.1.1

Für $j = 1, \dots, m$ seien $\psi_j : \mathbb{R}^{d_j} \rightarrow [0, \infty)$ stetige, \tilde{E}_j^t -homogene Funktionen mit $\psi_j(x_j) \neq 0$ für $x_j \neq 0$. Genau dann existiert das Zufallsfeld

$$X_\psi(x) = \text{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m (e^{i\langle x_j, \xi_j \rangle} - 1) \psi_j(\xi_j)^{-H_j - q_j/\alpha} W_\alpha(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (4.1)$$

und ist stochastisch stetig, wenn $H_j \in (0, a_1^{(j)}) \forall j = 1, \dots, m$.

Beweis. Da in [39] das komplexwertige stabile Integral für alle Funktionen $f \in L^\alpha(m)$ definiert wurde, existiert $X_\psi(x)$ genau dann, wenn

$$\Gamma_\psi^\alpha(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\prod_{j=1}^m |e^{i\langle x_j, \xi_j \rangle} - 1|^\alpha \psi_j(\xi_j)^{-\alpha H_j - q_j}}_{:=f(\xi)} d\xi < +\infty.$$

4. Harmonische Darstellung

Sei nun $H_j \in (0, a_1^{(j)})$. Durch Integration bezüglich der verallgemeinerten Polarkoordinaten für $E^t = (\sum_{j=1}^m E_j)^t$, wie in Proposition 2.3.3 angegeben, erhält man

$$\begin{aligned}
\Gamma_\psi^\alpha(x) &= \int_0^\infty \int_{S_0} f(r^{E^t} \theta) \sigma(d\theta) r^{\text{Spur}(E^t)-1} dr \\
&= \int_0^\infty \int_{S_0} f(r^{\widetilde{E}_1^t} \theta_1, \dots, r^{\widetilde{E}_m^t} \theta_m) \sigma(d\theta) r^{(\sum_{j=1}^m q_j)-1} dr \\
&= \int_0^\infty \int_{S_0} \prod_{j=1}^m |e^{i\langle x_j, r^{\widetilde{E}_j^t} \theta_j \rangle} - 1|^\alpha \psi_j(r^{\widetilde{E}_j^t} \theta_j)^{-\alpha H_j - q_j} \sigma(d\theta) r^{(\sum_{j=1}^m q_j)-1} dr \\
&= \int_{S_0} \int_0^\infty \underbrace{r^{-1} \prod_{j=1}^m |e^{i\langle x_j, r^{\widetilde{E}_j^t} \theta_j \rangle} - 1|^\alpha r^{-\alpha H_j}}_{=:g(x)} dr \prod_{j=1}^m \psi_j(\theta_j)^{-\alpha H_j - q_j} \sigma(d\theta)
\end{aligned}$$

Für $\delta_j \in (0, a_1^{(j)} - H_j)$ erhält man bei separater Betrachtung der Fälle $r > 1$ und $0 \leq r \leq 1$ und durch die Verwendung der Wachstumseinschränkung von $\|r^{\widetilde{E}_j^t}\|$ analog zum Beweis von Lemma 2.3.1, dass man ein $C > 0$ finden kann, so dass

$$\prod_{j=1}^m |e^{i\langle x_j, r^{\widetilde{E}_j^t} \theta_j \rangle} - 1|^\alpha \leq C \prod_{j=1}^m (1 + \|x_j\|^\alpha) \min(r^{\alpha(a_1^{(j)} - \delta_j)}, 1).$$

Bei separater Betrachtung der Fälle $r > 1$ und $r \leq 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}
r > 1: \quad g(x) &\leq Cr^{-1} \prod_{j=1}^m (1 + \|x_j\|^\alpha) r^{-H_j \alpha} \\
&= C_x r^{-(\sum_{j=1}^m H_j) \alpha - 1} \\
&= C_x r^{-\beta}, \quad \beta < -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r \leq 1: \quad g(x) &\leq Cr^{-1} \prod_{j=1}^m (1 + \|x_j\|^\alpha) r^{\alpha(a_1^{(j)} - H_j - \delta_j)} \\
&= C_x r^{(\sum_{j=1}^m a_1^{(j)} - H_j - \delta_j) \alpha - 1} \\
&= C_x r^{-\beta}, \quad \beta > -1
\end{aligned}$$

Darüber hinaus ist $\prod_{j=1}^m \psi_j^{-H_j \alpha - q_j}$ stetig mit positiven Werten auf der Sphäre S_0 und beschränkt. D.h. also

$$\int_{S_0} \prod_{j=1}^m \psi_j(\theta_j)^{-H_j \alpha - q_j} \sigma(d\theta) < \infty.$$

Somit ist $\Gamma_\psi^\alpha(x)$ endlich für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Nun bleibt noch zu zeigen, dass X_ψ stochastisch stetig ist. Dies gilt genau dann, wenn für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ gilt: [Siehe [39]]

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^m |e^{i\langle x_{0,j} + x_j, \xi_j \rangle} - e^{i\langle x_{0,j}, \xi_j \rangle}|^\alpha \psi_j(\xi_j)^{-\alpha H_j - q_j} d\xi \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\Gamma_\psi^\alpha(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Wie man mit Hilfe von dominierter Konvergenz und der Majorante wie oben angegeben leicht sieht, gilt (4.2) für $H_j \in (0, a_1^{(j)})$ für $j = 1, \dots, m$.

Sei nun andersherum angenommen, dass X_ψ existiert und stochastisch stetig ist. In diesem Fall existiert $\Gamma_\psi^\alpha(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\Gamma_\psi^\alpha(\lambda^{E_j} x) = \lambda^{\alpha H_j} \Gamma_\psi^\alpha(x) \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^d, x \neq \mathbf{0}$ fest. Dann ist $\Gamma_\psi^\alpha(x) \neq 0$ und da X_ψ stochastisch stetig ist, gilt

$$\lambda^{\alpha H_j} \Gamma_\psi^\alpha(x) \rightarrow 0 \text{ für } \lambda \rightarrow 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Dies impliziert $H_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$. Somit bleibt noch zu zeigen, dass $H_j < a_1^{(j)}$ gilt.

1.Fall: Für alle $j = 1, \dots, m$ ist $a_1^{(j)}$ ein Eigenwert von \tilde{E}_j . Dann existiert für alle $j = 1, \dots, m$ ein $\theta_1^{(j)} \in \mathbb{R}^{d_j}$, so dass $\|\theta_1^{(j)}\| = 1$ und $\tilde{E}_j \theta_1^{(j)} = a_1^{(j)} \theta_1^{(j)}$. Somit erhält man für $\theta_1 = (\theta_1^{(1)}, \dots, \theta_1^{(m)})$:

$$\Gamma_\psi^\alpha(\theta_1) = \int_0^\infty \int_{S_0} r^{-1} \prod_{j=1}^m |e^{i\langle \theta_1^{(j)}, r \tilde{E}_j^t \theta_j \rangle} - 1|^\alpha r^{-\alpha H_j} \psi_j(\theta_j)^{-\alpha H_j - q_j} \sigma(d\theta) dr$$

mit

$$|\langle \theta_1^{(j)}, r \tilde{E}_j^t \theta_j \rangle| = r^{a_1^{(j)}} |\langle \theta_1^{(j)}, \theta_j \rangle| \leq C r^{a_1^{(j)}} \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Damit erhält man für $r \leq \min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{\pi}{C}\right)^{1/a_1^{(j)}} =: b$

$$\prod_{j=1}^m |e^{i\langle \theta_1^{(j)}, r \tilde{E}_j^t \theta_j \rangle} - 1| = \prod_{j=1}^m 2 \left| \sin \left(\frac{\langle \theta_1^{(j)}, r \tilde{E}_j^t \theta_j \rangle}{2} \right) \right| \geq \prod_{j=1}^m 2 r^{a_1^{(j)}} \frac{|\langle \theta_1^{(j)}, \theta_j \rangle|}{\pi},$$

und somit

$$\Gamma_\psi^\alpha(\theta_1) \geq \frac{1}{\pi^\alpha} \int_0^b r^{-1} \int_{S_0} \prod_{j=1}^m |\langle \theta_1^{(j)}, \theta_j \rangle|^{\alpha} r^{-\alpha(H_j - a_1^{(j)})} \psi_j(\theta_j)^{-\alpha H_j - q_j} \sigma(d\theta) dr.$$

Da ψ positiv ist auf S_0 , folgt

$$\int_{S_0} \prod_{j=1}^m |\langle \theta_1^{(j)}, \theta_j \rangle|^{\alpha} r^{-\alpha(H_j - a_1^{(j)})} \psi_j(\theta_j)^{-\alpha H_j - q_j} \sigma(d\theta) > 0,$$

4. Harmonische Darstellung

und damit impliziert $\Gamma_\psi^\alpha(\theta_1) < \infty$, dass $H_j < a_1^{(j)}$ für alle $j = 1, \dots, m$ gelten muss.

2.Fall: Für $j \in J \subset \{1, \dots, m\}$ ist $a_1^{(j)}$ kein Eigenwert von \tilde{E}_j . Dann existiert für alle $j \in J$ ein $b^{(j)} \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda_1^{(j)} = a_1^{(j)} + ib^{(j)}$ und $\overline{\lambda_1^{(j)}}$ komplexe Eigenwerte von \tilde{E}_j sind. Für alle $j \in J$ existieren dann $\theta_1^{(j)}, \gamma_1^{(j)} \in \mathbb{R}^{d_j}$ mit $\|\theta_1^{(j)}\| = \|\gamma_1^{(j)}\| = 1$, so dass

$$\begin{aligned} r^{\tilde{E}_j} \theta_1^{(j)} &= r^{a_1^{(j)}} (\cos(b^{(j)} \log r) \theta_1^{(j)} + \sin(b^{(j)} \log r) \gamma_1^{(j)}), \\ r^{\tilde{E}_j} \theta_1^{(j)} &= r^{a_1^{(j)}} (-\sin(b^{(j)} \log r) \theta_1^{(j)} + \cos(b^{(j)} \log r) \gamma_1^{(j)}), \end{aligned}$$

Durch Verwenden der Ungleichung $|e^{i\omega} - 1| \geq |\omega|/\pi$ für $|\omega| < \pi$ erhält man eine untere Grenze für $\Gamma_\psi^\alpha(\theta_1) + \Gamma_\psi^\alpha(\gamma_1)$ durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^\alpha} \int_0^b r^{-1} \int_{S_0} \prod_{j=1}^m \left(|\langle r^{\tilde{E}_j} \theta_1^{(j)}, \theta^{(j)} \rangle|^\alpha + |\langle r^{\tilde{E}_j} \gamma_1^{(j)}, \theta^{(j)} \rangle|^\alpha \right) \\ \cdot r^{-\alpha(H_j - a_1^{(j)})} \psi_j(\theta^{(j)})^{-\alpha H - q_j} \sigma(d\theta) dr. \end{aligned}$$

Man beachte, dass für $a, b > 0$: $a^\alpha + b^\alpha \geq (a^2 + b^2)^{\alpha/2}$ gilt. Damit erhält man

$$\begin{aligned} |\langle r^{\tilde{E}_j} \theta_1^{(j)}, \theta^{(j)} \rangle|^\alpha + |\langle r^{\tilde{E}_j} \gamma_1^{(j)}, \theta^{(j)} \rangle|^\alpha \\ \geq \left(|\langle r^{\tilde{E}_j} \theta_1^{(j)}, \theta^{(j)} \rangle|^2 + |\langle r^{\tilde{E}_j} \gamma_1^{(j)}, \theta^{(j)} \rangle|^2 \right)^{\alpha/2} \\ \geq r^{\alpha a_1^{(j)}} \left(|\langle \theta_1^{(j)}, \theta^{(j)} \rangle|^2 + |\langle \gamma_1^{(j)}, \theta^{(j)} \rangle|^2 \right)^{\alpha/2}. \end{aligned}$$

Daraus folgert man wie im ersten Fall, dass $H_j < a_1^{(j)}$ für alle $j = 1, \dots, m$ gelten muss. \square

4.2. Eigenschaften

Korollar 4.2.1

Unter den Voraussetzungen von Theorem 4.1.1 hat das Zufallsfeld folgende Eigenschaft: $\{X_\varphi(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ ist ein Operator Scaling Stable Random Sheet, d.h. für alle $j = 1, \dots, m$ und jedes $c > 0$ gilt:

$$\{X_\psi(c^{E_j} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{c^{H_j} X_\psi(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^d$ setze $f(x, \xi) := \prod_{j=1}^m (e^{i\langle x_j, \xi_j \rangle} - 1) \psi_j(\xi_j)^{-H_j - q_j/\alpha}$.

Bezüglich

$$X_\psi(x) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) W_\alpha(d\xi)$$

gilt dann für die charakteristische Funktion nach Korollar 6.3.2 in [39] für X_ψ :

$$\mathbb{E} \exp \{itX_\psi(x)\} = \exp \left(-c_0 |t|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |f(x, \xi)|^\alpha d\xi \right),$$

wobei $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\cos \theta)^2 d\theta$. Somit erhält man für alle $j = 1, \dots, m$ und $c > 0$ mit Hilfe der Substitution $y_j = c^{\tilde{E}_j} \xi_j$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp \{itX_\psi(c^{E_j} x)\} &= \exp \left(-c_0 |t|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} |f(c^{E_j} x, \xi)|^\alpha d\xi \right) \\ &= \exp \left(-c_0 |t|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m (e^{i\langle x_l, \xi_l \rangle} - 1) \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l/\alpha} \right|^\alpha \right. \\ &\quad \left. \cdot \left| (e^{i\langle c^{\tilde{E}_j} x_j, \xi_j \rangle} - 1) \psi_j(\xi_j)^{-H_j - q_j/\alpha} \right|^\alpha d\xi \right) \\ &= \exp \left(-c_0 |t|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m (e^{i\langle x_l, \xi_l \rangle} - 1) \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l/\alpha} \right|^\alpha \right. \\ &\quad \left. \cdot \left| (e^{i\langle x_j, c^{\tilde{E}_j} \xi_j \rangle} - 1) \psi_j(\xi_j)^{-H_j - q_j/\alpha} \right|^\alpha c^{\alpha H_j + q_j} c^{-\alpha H_j - q_j} d\xi \right) \end{aligned}$$

4. Harmonische Darstellung

$$\begin{aligned}
&= \exp \left(-c_0 |c^{H_j} t|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^m \left(e^{i \langle x_l, \xi_l \rangle} - 1 \right) \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l / \alpha} \right|^\alpha \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(e^{i \langle x_j, c^{\tilde{E}_j^t} \xi_j \rangle} - 1 \right) \psi_j(c^{\tilde{E}_j^t} \xi_j)^{-H_j - q_j / \alpha} \right|^\alpha \\
&\quad d(\xi_1 \times \dots \times c^{\tilde{E}_j^t} \xi_j \times \dots \times \xi_m) \\
&\stackrel{\text{subst}}{=} \exp \left(-c_0 |c^{H_j} t|^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \left| \prod_{l=1}^m \left(e^{i \langle x_l, \xi_l \rangle} - 1 \right) \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l / \alpha} \right|^\alpha d\xi \right) \\
&= \mathbb{E} \exp \{ i t c^{H_j} X_\psi(x) \}
\end{aligned}$$

Somit gilt analog für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ für die endlichdimensionalen Randverteilungen

$$\mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n t_k X_\psi(c^{E_j} x_k) \right\} = \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n c^{H_j} t_k X_\psi(x_k) \right\}.$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Die Eigenschaft der Operator Skalierung bleibt also auch für den Fall $m \geq 2$ erhalten und verallgemeinert die OSSRFs analog zur Moving Average Darstellung in dieser Hinsicht. OSSRFs besitzen darüber hinaus auch für die Harmonische Darstellung stationäre Zuwächse. Dieses Resultat kann wie bei der Moving Average Darstellung aufgrund der Produktstruktur nicht auf den Fall $m \geq 2$ übertragen werden. Jedoch gilt auch hier die schwächere Eigenschaft, dass OSSRFs bezüglich jedes einzelnen Unterraums $\mathbb{R}^{d_j}, j = 1, \dots, m$ stationäre Zuwächse besitzen. D.h. also für Subprozesse auf diesen Unterräumen kann man wieder die Stationarität gewinnen und im Folgenden ausnutzen. Somit werden nun geeignete Subprozesse konstruiert und deren Stationarität gezeigt.

Sei $P_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_j}$ die Projektion von $x \in \mathbb{R}^d$ auf $x_j \in \mathbb{R}^{d_j}$ bezüglich des Zufallsfeldes

$$X_\psi(x) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \xi) W_\alpha(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

mit

$$f(x, \xi) = \prod_{k=1}^m \left(e^{i \langle x_k, \xi_k \rangle} - 1 \right) \psi_k(\xi_k)^{-H_k - q_k / \alpha}. \quad (4.3)$$

Definiere für beliebige $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,m}) \in \mathbb{R}^d, k = 1, \dots, m$ Zufallsfelder wie folgt:

$$\begin{aligned}
X_{x_0}^{(k)}(x) &= X_\varphi(x_{0,1}, \dots, x_{0,k-1}, P_k(x), x_{0,k+1}, \dots, x_{0,m}) \\
&= X_\varphi(x_{0,1}, \dots, x_{0,k-1}, x_k, x_{0,k+1}, \dots, x_{0,m}),
\end{aligned} \quad (4.4)$$

d.h. also

$$X_{x_0}^{(k)}(x) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} f_{x_0}^{(k)}(x, \xi) W_\alpha(d\xi), \quad x_k \in \mathbb{R}^{d_k}$$

mit $f_{x_0}^{(k)} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f_{x_0}^{(k)}(x, \xi) &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (e^{i\langle x_0, \xi_l \rangle} - 1) \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l} (e^{i\langle P_k(x), \xi_k \rangle} - 1) \psi_k(\xi_k)^{-H_k - q_k/\alpha} \quad (4.5) \\ &= \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m (e^{i\langle x_0, \xi_l \rangle} - 1) \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l} (e^{i\langle x_k, \xi_k \rangle} - 1) \psi_k(\xi_k)^{-H_k - q_k/\alpha}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Vorarbeiten lässt sich nun folgende Eigenschaft angeben:

Korollar 4.2.2

Für alle $k = 1, \dots, m$ besitzen die Zufallsfelder $X_{x_0}^{(k)}$ aus (4.4) stationäre Zuwächse, d.h. für alle $h \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\{X_{x_0}^{(k)}(x+h) - X_{x_0}^{(k)}(h)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{f.d.}{=} \{X_{x_0}^{(k)}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}. \quad (4.6)$$

Beweis. Für alle $x, h \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} X_{x_0}^{(k)}(x+h) - X_{x_0}^{(k)}(h) &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} (f_{x_0}^{(k)}(x+h, \xi) - f_{x_0}^{(k)}(h, \xi)) W_\alpha(d\xi) \\ &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle h_k, \xi_k \rangle} \cdot f_{x_0}^{(k)}(x, \xi) W_\alpha(d\xi). \end{aligned}$$

Somit gilt für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ mit Korollar 6.3.2 aus [39] für die endlichdimensionalen Randverteilungen

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n t_j (X_{x_0}^k(x_j+h) - X_{x_0}^k(h)) \right\} \\ &= \exp \left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^n t_j e^{i\langle h_k, \xi_k \rangle} \cdot f_{x_0}^{(k)}(x_j, \xi) \right|^\alpha d\xi \right) \\ &= \exp \left(-c_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^n t_j f_{x_0}^{(k)}(x_j, \xi) \right|^\alpha d\xi \right) \\ &= \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^n c^{H_j} t_j X_{x_0}^{(k)}(x_j) \right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

4. Harmonische Darstellung

Analog zur Moving Average Darstellung lassen sich auch hier Beispiele angeben, die verdeutlichen, dass OSSRSs eine sehr allgemeine Klasse von Zufallsfeldern darstellen, welche die Verbindung zwischen der wichtigen Klasse der Fractional Sheets und der Operator Skalierenden Felder herstellen.

Beispiel 4.2.3

Setze $\alpha = 2$, $\varphi_j(y_j) = |\xi_j|$, $d_j = 1$, $\tilde{E}_j = (1) \forall j = 1, \dots, m$, dann erhält man den Spezialfall des *Fractional Brownian Sheet*, wie etwa in [5] für den 2-dimensionalen Fall angegeben in allgemeiner Form als:

$$X_\psi(x) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^d \frac{e^{ix_j \cdot \xi_j} - 1}{|\xi_j|^{H_j+1/2}} W_\alpha(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Beispiel 4.2.4

Setze $m = 1$, $d = d_1$, $E = E_1$, $H = H_1$, $q = q_1$, $\varphi = \varphi_1$, dann erhält man den Spezialfall des *Operator Scaling Stable Random Field* in der Harmonischen Darstellung, wie in [10] eingeführt:

$$X(x) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1) \psi(\xi)^{-H-q/\alpha} W_\alpha(d\xi), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

5. Hölderregularität für OSSRSs

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit den Pfadeigenschaften von OSSRSs, insbesondere mit der 'Glattheit' der Pfade. Hierbei lehnt sich dieses Kapitel an die Ergebnisse aus [10] und [11] an. In diesen Artikeln wurde die Hölderregularität für OSSRFs für den Fall $\alpha = 2$ ([10]) sowie den Fall $\alpha \in (0, 2)$ ([11]) behandelt und darüber hinaus sowohl die Box- als auch die Hausdorff-Dimension angegeben. Diese Ergebnisse werden im Folgenden auf die Klasse der OSSRSs ausgedehnt, indem die in (4.4) konstruierten Subprozesse verwendet werden, um das Problem, dass diese Zufallsfelder für den Fall $m \geq 2$ keine stationären Zuwächse mehr besitzen, geeignet zu umgehen und allgemeine Aussagen über das Zufallsfeld mit Hilfe der Aussagen über die Subprozesse zu gewinnen. Die Strategie besteht folglich darin, das Wachstumsverhalten der Subprozesse zu bestimmen, welches nur durch die Eigenwerte des zugehörigen Unterraums determiniert ist. Damit wird zudem auch eine globale Abschätzung möglich, die zum einen die Hölderstetigkeit des gesamten Prozesses beweist und des Weiteren auch den kritischen Hölderexponenten angibt.

Die nächsten zwei Abschnitte werden als Vorarbeit benötigt, um darauf aufbauend die gewünschten Ergebnisse zu präsentieren.

5.1. Polarkoordinaten und Abschätzungen

Ziel dieses Abschnittes ist es, Abschätzungen für das Wachstumsverhalten des Radius $\tau_E(x)$ der verallgemeinerten Polarkoordinaten anzugeben. Hierzu verwenden wir die Jordanzerlegung von $E = \sum_{k=1}^m E_k$ wie etwa in [27] angegeben. Dieser Abschnitt ist in Analogie zu [11] Section 3 aufgebaut und grenzt sich nur durch die unterschiedlichen Unterräume und ihre zugehörigen Subprozesse ab. Nach der Jordan-Zerlegung der Matrix E existiert eine reell invertierbare $d \times d$ -Matrix D , so dass $D = P^{-1}EP$ eine kanonische Form hat, d.h. D besteht aus Diagonalblöcken, die entweder Jordanblöcke der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

5. Hölderregularität für OSSRSs

besitzen, wobei λ ein reeller Eigenwert von E ist, oder Blöcke der Form

$$\begin{pmatrix} \Lambda & & & 0 \\ I_2 & \Lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I_2 & \Lambda \end{pmatrix} \text{ mit } \Lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

wobei $a \pm ib$ ($b \neq 0$) komplexe Eigenwerte von E sind.

Lemma 5.1.1 (Vgl. [11] Lemma 3.2)

Sei J ein Block der Form (5.1) der Größe l oder ein Block der Form (5.2) der Größe $2l$ mit Eigenwert λ . Dann gilt für alle $t \in (0, e^{-1}] \cup [e, +\infty)$:

$$t^a \leq \|t^J\| \leq \sqrt{2l} e^a |\log t|^{l-1}$$

mit $a = \operatorname{Re}(\lambda)$.

Beweis. Man betrachte zunächst die untere Grenze. Da t^λ Eigenwert zu t^J ist, folgt mit zugehörigem Eigenvektor ν :

$$|t^\lambda| \cdot \|\nu\| = \|t^\lambda \nu\| = \|t^J \nu\| \leq \|t^J\| \cdot \|\nu\|$$

und somit

$$t^a = |t^\lambda| \leq \|t^J\|.$$

Es verbleibt noch der Beweis der oberen Grenze. Es ist bekannt, dass für eine Matrix $A = (a_{kj})_{1 \leq k, j \leq d}$ die Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} \sum_{j=1}^d |a_{kj}|$ die induzierte Norm der Maximumsnorm $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq d} |x_k|$ ist.

Erster Fall:

J ist Blockmatrix der Form (5.1), J hat die Größe l mit $\lambda = a \in \mathbb{R}$ und nach Theorem 2.2.3 aus [38] gilt

$$t^J = t^a \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \log t & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \\ \frac{\log t^{l-1}}{(l-1)!} & \dots & \log t & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \|t^J\|_\infty = t^a \sum_{j=0}^{l-1} \frac{|\log t|^j}{j!}$. Damit gilt für alle $t \in (0, e^{-1}] \cup [e, \infty)$ zunächst

$|\log(t)| \geq 1$ und somit

$$\|t^J\| \leq \sqrt{l} \|t^J\|_\infty \leq \sqrt{l} t^a |\log(t)|^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j!}.$$

Zweiter Fall:

J ist Matrix der Form (5.2), d.h. J hat die Länge $2l$ mit $\lambda = a \pm ib, b \neq 0$. Dann ist nach nach Theorem 2.2.3 aus [38] $t^J = t^a R(t)N(t)$ wobei

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_b(t) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & & \\ 0 & & & R_b(t) \end{pmatrix}, \text{ mit } R_b(t) = \begin{pmatrix} \cos(b \log t) & -\sin(b \log t) \\ \sin(b \log t) & \cos(b \log t) \end{pmatrix}$$

$$N(t) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ N_1(t) & I_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ N_{l-1}(t) & \cdots & N_1(t) & I_2 \end{pmatrix}, \text{ mit } N_j(t) = \begin{pmatrix} \frac{|\log t|^j}{j!} & 0 \\ 0 & \frac{|\log t|^j}{j!} \end{pmatrix}$$

Somit gilt $\|t^J\| \leq t^a \|R(t)\| \cdot \|N(t)\|$. $R(t)$ ist orthogonal, also $\|R(t)\| = 1$. Weiter gilt

$$\|N(t)\| \leq \sqrt{2l} \|N(t)\|_\infty = \sqrt{2l} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{|\log(t)|^{j-1}}{j!} \leq \sqrt{2l} |\log(t)|^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j!}.$$

Daher folgt mit $e > \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j!}$, $\forall l \in \mathbb{N}$ die Behauptung. \square

Bezeichnung 5.1.2

Sei E definiert wie in Korollar 1.1.4, d.h. E besitzt Eigenwerte $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{p_1}^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(m)}, \dots, \lambda_{p_m}^{(m)}$ mit positivem Realteil $a_1^{(1)}, \dots, a_{p_m}^{(m)}$. Es existieren Matrizen $J_1^{(1)}, \dots, J_{p_m}^{(m)}$ der Form (5.1) oder (5.2), so dass

$$E = P \begin{pmatrix} J_1^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_m}^{(m)} \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (5.3)$$

wobei man annehmen kann, dass jedes $J_j^{(k)}$ dem Eigenwert $\lambda_j^{(k)}$ zugeordnet ist.

$$\text{Setze } H_j^{(k)} = (a_j^{(k)})^{-1} \quad \text{für } k = 1, \dots, m, j(k) = 1, \dots, p_k,$$

$$\underline{H}_k = \min_{1 \leq j \leq p_k} H_j^{(k)}, \quad \overline{H}_k = \max_{1 \leq j \leq p_k} H_j^{(k)},$$

$$\underline{H} = \min_{1 \leq k \leq m} \underline{H}_k, \quad \overline{H} = \max_{1 \leq k \leq m} \overline{H}_k.$$

Im folgenden muss zur weiteren Untersuchung gefordert werden, dass $a_j^{(k)} > 1$ für $k = 1, \dots, m, j(k) = 1, \dots, p_k$, somit gilt $0 < \underline{H} \leq \overline{H} < 1$. Falls $\lambda_j^{(k)} \in \mathbb{R}$,

5. Hölderregularität für OSSRSs

ist $J_j^{(k)}$ eine Blockmatrix der Form (5.1) mit Länge $l_j^{(k)} = l_j^{(k)} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Andernfalls ist $J_j^{(k)}$ von der Form (5.2) mit Länge $l_j^{(k)} = 2l_j^{(k)} \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei (e_1, \dots, e_d) die kanonische Basis des \mathbb{R}^d und setze $f_k = Pe_k \forall k = 1, \dots, d$. Daraus folgt, dass (f_1, \dots, f_d) eine Basis des \mathbb{R}^d ist. Definiere für $k = 1, \dots, m, j(k) = 1, \dots, p_k$ Unterräume

$$W_j^{(k)} = \text{span} \left(f_{x_0}^{(r)} : \sum_{r=1}^{k-1} d_r + \sum_{s=1}^{j-1} l_s^{(k)} + 1 \leq r \leq \sum_{r=1}^{k-1} d_r + \sum_{s=1}^j l_s^{(k)} \right).$$

Damit ist jedes $W_j^{(k)}$ E -invarianter Unterraum und $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{k=1}^m \bigoplus_{j=1}^{p_k} W_j^{(k)}$.
Des Weiteren ist

$$\{0\} \times \dots \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d_k} \times \{0\} \times \dots \times \{0\} = \bigoplus_{j=1}^{p_k} W_j^{(k)} =: V_k \quad (5.4)$$

für alle $k = 1, \dots, m$, da E bezüglich $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m$ schon eine Blockstruktur besitzt.

Das folgende Resultat gibt Grenzen für die Wachstumsraten von τ_E bezüglich dem Realteil der Eigenwerte von E an. Hierzu werden zur Vereinfachung die Unterräume $W_1^{(1)}, \dots, W_{p_m}^{(m)}$ fortlaufend mit $\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_p$ bezeichnet, wobei $p = \sum_{j=1}^m p_j$.

Proposition 5.1.3

[in Analogie zu [11] Proposition 3.3] Für alle $1 \leq k \leq p$ sei \tilde{W}_k der E -invariante Unterraum mit Dimension l_k bzw. $2l_k$ mit dazugehörigem H_k^{-1} . Dann existieren für jedes $r \in (0, 1)$ positive Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass für alle $1 \leq j_0 \leq j \leq p$,

$$c_1 \|x\|^{H_{j_0, j}^{\max}} |\log \|x\||^{-(l_{j_0, j}^{\max} - 1)H_{j_0, j}^{\max}} \leq \tau_E(x) \leq c_2 \|x\|^{H_{j_0, j}^{\min}} |\log \|x\||^{(l_{j_0, j}^{\max} - 1)H_{j_0, j}^{\min}}$$

gilt für alle $x \in \bigoplus_{k=j_0}^j \tilde{W}_k \setminus \{0\}$ mit $\|x\| \leq r$ und

$$l_{j_0, j}^{\max} = \max_{j_0 \leq k \leq j} l_k, \quad H_{j_0, j}^{\max} = \max_{j_0 \leq k \leq j} H_k, \quad H_{j_0, j}^{\min} = \min_{j_0 \leq k \leq j} H_k.$$

Beweis. Sei $r \in (0, 1)$ und $x \in \bigoplus_{k=j_0}^j \tilde{W}_k \setminus \{0\}$, so dass $\|x\| \leq r$.

Man betrachte zunächst die untere Grenze:

Für alle $r_0 \in (0, r)$ ist die Funktion

$$y \mapsto \|y\|^{H_{j_0, j}^{\max}} |\log \|y\||^{-(l_{j_0, j}^{\max} - 1)H_{j_0, j}^{\max}} \tau_E(y)^{-1}$$

auf der kompakten Menge $\{y \in \mathbb{R}^d | r_0 \leq \|y\| \leq r\}$ stetig. Weiter kann man ein $r_0 \in (0, r)$ finden, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|y\| \leq r_0$ gilt: $\tau_E(y) \leq e^{-1}$. Somit ist es hinreichend, den Fall $\|x\| \leq r_0$ mit $\tau_E(y) \leq e^{-1}$ zu betrachten.

Es gilt $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{k=1}^p \tilde{W}_k$, $l_E(x) = \sum_{k=1}^p l_k(x)$ mit $l_k \in \tilde{W}_k$.

Seien L_k die Koordinaten von l_k bzgl. der Basis $(f_{\sum_{r=1}^{k-1} \tilde{l}_{r+1}}, \dots, f_{\sum_{r=1}^k \tilde{l}_r})$ von W_k . Somit folgt mit der Definition von P ,

$$P^{-1}l_E(x) = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \tau_E(x)^E l_E(x) = P \begin{pmatrix} \tau_E(x)^{J_1} L_1 \\ \vdots \\ \tau_E(x)^{J_p} L_p \end{pmatrix}$$

Da $x \in \bigoplus_{k=1}^p \tilde{W}_k$, $l_E(x) \in \bigoplus_{k=1}^p \tilde{W}_k$ und somit $L_k = 0$ für $k \notin \{j_0, \dots, j\}$ folgt

$$\|x\| \leq \|P\| \left(\sum_{k=j_0}^j \|\tau_E(x)^{J_k} L_k\|^2 \right)^{1/2} \leq \|P\| \left(\sum_{k=j_0}^j \|\tau_E(x)^{J_k}\|^2 \|L_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

Da $\tau_E(x) \leq e^{-1}$, folgt mit Lemma 5.1.1

$$\|x\| \leq \sqrt{2}e \|P\| \left(\sum_{k=j_0}^j |\tau_E(x)^{2a_k}| |\log \tau_E(x)|^{2(l_k-1)} \|L_k\|^2 \right)^{1/2}.$$

weiter ist $a_{j_0, j}^{\min} = \min_{j_0 \leq k \leq j} a_k \leq a_k$ und $l_k \leq l_{j_0, j}^{\max} \leq d$ für $k = j_0, \dots, j$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \sqrt{2de} \|P\| |\tau_E(x)^{a_{j_0, j}^{\min}}| |\log \tau_E(x)|^{l_{j_0, j}^{\max}-1} \left(\sum_{k=j_0}^j \|L_k\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2de} \|P\| |\tau_E(x)^{a_{j_0, j}^{\min}}| |\log \tau_E(x)|^{l_{j_0, j}^{\max}-1} \|P^{-1}l_E(x)\|. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\|x\| \leq \sqrt{2de} M_E \|P\| \|P^{-1}l_E(x)\| |\tau_E(x)^{a_{j_0, j}^{\min}}| |\log \tau_E(x)|^{l_{j_0, j}^{\max}-1}, \quad (5.5)$$

wobei $M_E = \max_{x \in S_0} l(x)$. Gleichung (5.5) impliziert, dass man Konstanten c_1, c_2 finden kann, so dass für $\tau_E(x)$ klein genug gilt:

$$\log \|x\| \leq c_1 \log \tau_E(x) + c_2.$$

Somit kann man r_0 klein genug wählen (damit beide Seiten negative Werte annehmen), so dass eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$|\log \tau_E(x)| \leq C |\log \|x\||. \quad (5.6)$$

Durch Einsetzen von (5.6) in (5.5) erhält man insgesamt, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für $\|x\| \leq r_0$ gilt

$$\|x\|^{H_{j_0, j}^{\max}} |\log \|x\||^{-(l_{j_0, j}^{\max}-1)H_{j_0, j}^{\max}} \leq C \tau_E(x),$$

womit die Gültigkeit der unteren Grenze bewiesen ist.

Der Beweis der oberen Grenze verläuft analog.

□

5. Hölderregularität für OSSRSs

Mit Hilfe der obigen Proposition ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 5.1.4

Für alle $1 \leq k \leq p$ sei \tilde{W}_k der E -invariante Unterraum mit Dimension l_k bzw. $2l_k$ und zugehörigem H_k^{-1} . Dann existieren für alle $r \in (0, 1)$ positive Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass

- für alle $x \in \tilde{W}_j \setminus \{0\}$, $1 \leq j \leq p$ mit $\|x\| \leq r$

$$c_1 \|x\|^{H_j} |\log \|x\||^{-(l_j-1)H_j} \leq \tau_E(x) \leq c_2 \|x\|^{H_j} |\log \|x\||^{(l_j-1)H_j},$$

- für alle $x \in \{\mathbf{0} \times \mathbb{R}^{d_k} \times \mathbf{0}\} \setminus \{0\}$, $1 \leq k \leq m$ mit $\|x\| \leq r$

$$c_1 \|x\|^{\bar{H}_k} |\log \|x\||^{-(\bar{l}_k-1)\bar{H}_k} \leq \tau_E(x) \leq c_2 \|x\|^{\bar{H}_k} |\log \|x\||^{(\bar{l}_k-1)\bar{H}_k},$$

- für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $\|x\| \leq r$

$$c_1 \|x\|^{\bar{H}} |\log \|x\||^{-(\bar{l}-1)\bar{H}} \leq \tau_E(x) \leq c_2 \|x\|^{\bar{H}} |\log \|x\||^{(\bar{l}-1)\bar{H}}.$$

5.2. Darstellung mittels LePage-Reihe

Im Folgenden wird eine Serierdarstellung für α -stabile Zufallsfelder angegeben. Diese wurde in [11] Section 4 ausgearbeitet und wird hier der Vollständigkeit halber noch einmal aufgeführt. Sei μ ein Maß, welches absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes auf \mathbb{R}^d ist und sei m die zugehörige Radon-Nykodym Dichte, d.h. $\mu(d\xi) = m(\xi)d\xi$. Weiter werden noch benötigte Notationen wie folgt eingeführt:

Seien $(T_n)_{n \geq 1}$, $(g_n)_{n \geq 1}$ und $(\xi_n)_{n \geq 1}$ unabhängig, wobei

- T_n die n -te Ankunftszeit eines Poisson Prozesses mit Intensität 1 ist,
- $(g_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von i.i.d. isotropischen, komplexen Zufallsvariablen, so dass $g_n \stackrel{d}{=} e^{i\theta} g_n \forall \theta \in [0, 2\pi)$ ist,
- $(\xi_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit gleichmäßigem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu(d\xi) = m(\xi)d\xi$ ist.

Proposition 5.2.1 (Vgl. [11] Proposition 4.1)

Sei $\alpha \in (0, 2)$. Dann konvergiert für alle komplexwertigen Funktionen $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^d)$ die Reihe

$$Y^h = \sum_{n=1}^{\infty} (T_n m(\xi_n))^{-\frac{1}{\alpha}} h(\xi_n) g_n \text{ f.s.}$$

Weiter gilt

$$C_\alpha Y^h \stackrel{d}{=} \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi) W_\alpha(d\xi),$$

wobei W_α ein komplex-isotropisches α -stabiles Zufallsmaß auf \mathbb{R}^d ist mit zugehörigem Lebesgue Kontrollmaß und

$$C_\alpha = \mathbb{E}(|\operatorname{Re}(g_1)|^\alpha)^{-1/\alpha} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |\cos(x)|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx \right)^{-1/\alpha}. \quad (5.7)$$

Beweis. Sei $V_n = m(\xi_n)^{-1/\alpha} h(\xi_n) g_n$. Dann sind $V_n, n \geq 1$, i.i.d komplex-isotropische Zufallsvariablen. Mit Lemma 4.1 aus [37] folgt, dass Y^h f.s. konvergiert und

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(i \operatorname{Re} \left(\bar{z} Y^h \right) \right) \right) = \exp(-\sigma^\alpha |z|^\alpha) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

mit

$$\sigma^\alpha = \mathbb{E}(|\operatorname{Re}(V_1)|^\alpha) \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx.$$

Da g_1 rotationsinvariant und unabhängig von ξ_1 ist, folgt

$$\mathbb{E}(|\operatorname{Re}(V_1)|^\alpha) = \mathbb{E} \left(m(\xi_1)^{-1} |h(\xi_1)|^\alpha \right) \mathbb{E}(|\operatorname{Re}(g_1)|^\alpha) = \mathbb{E}(|\operatorname{Re}(g_1)|^\alpha) \int_{\mathbb{R}^d} |h(\xi)|^\alpha d\xi.$$

5. Hölderregularität für OSSRSs

Auf der anderen Seite gilt für komplexe, isotrope, α -stabile Zufallsmaße (siehe [39], S.86)

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(i \operatorname{Re} \left(\bar{z} \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi) W_\alpha(d\xi) \right) \right) \right) = \exp(-c_\alpha^\alpha(h) |z|^\alpha), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

mit

$$c_\alpha^\alpha(h) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(x)|^\alpha dx \right) \int_{\mathbb{R}^d} |h(\xi)|^\alpha d\xi.$$

Somit folgt

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(i \operatorname{Re} \left(C_\alpha \bar{z} Y^h \right) \right) \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left(i \operatorname{Re} \left(\bar{z} \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi) W_\alpha(d\xi) \right) \right) \right) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

mit C_α definiert durch (5.7). Also gilt insgesamt

$$C_\alpha Y^h \stackrel{d}{=} \int_{\mathbb{R}^d} h(\xi) W_\alpha(d\xi).$$

□

Nun kann man in der folgenden Proposition die Reihendarstellung angeben, welche im Folgenden verwendet wird.

Proposition 5.2.2 (Vgl. [11] Proposition 4.2)

Sei $\alpha \in (0, 2)$. Seien $f, f_{x_0}^{(k)}$ definiert durch (4.3), (4.5) und C_α durch (5.7). Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ konvergieren die Reihen

$$Y(x) = C_\alpha \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} f(x, \xi_n) g_n \right), \quad (5.8)$$

$$Y_{x_0}^{(k)}(x) = C_\alpha \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} f_{x_0}^{(k)}(x, \xi_n) g_n \right), \quad (5.9)$$

f.s. Darüber hinaus seien $X(x)$ und $X_{x_0}^{(k)}(x)$ definiert wie in Theorem 4.1.1 bzw. (4.5). Dann gilt

$$\begin{aligned} \{Y(x), x \in \mathbb{R}^d\} &\stackrel{f.d.}{=} \{X(x), x \in \mathbb{R}^d\} \\ \{Y_{x_0}^{(k)}(x), x \in \mathbb{R}^d\} &\stackrel{f.d.}{=} \{X_{x_0}^{(k)}(x), x \in \mathbb{R}^d\} \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt mit $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{R}^d, t_1, \dots, t_l \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}$ für alle endlichdimensionalen Randverteilungen von Y

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^l t_j Y(x_j) \right\} \\
 &= \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^l t_j C_\alpha \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} f(x_j, \xi_n) g_n \right) \right\} \\
 &= \mathbb{E} \exp \left\{ i C_\alpha \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^l t_j f(x_j, \xi_n) \right)}_{\in L^\alpha(\mathbb{R}^d)} g_n \right) \right\} \\
 &\stackrel{5.2.1}{=} \mathbb{E} \exp \left\{ i \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j=1}^l t_j f(x_j, \xi) \right) W(d\xi) \right\} \\
 &= \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^l t_j \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^d} f(x_j, \xi) W(d\xi) \right\} \\
 &= \mathbb{E} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^l t_j X(x_j) \right\}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für Y , der Beweis für $Y_{x_0}^{(k)}$ erfolgt analog. \square

5.3. Hölderregularität

Nun können nach einigen Vorarbeiten die Pfaderegularitäten von OSSRSs untersucht werden. Hierzu untersucht man den kritischen Hölder-Exponenten, der im Folgenden definiert wird. Sei dazu $M := \bigoplus_{k=1}^m M_k$ eine nicht-leere, kompakte Menge von $V := \bigoplus_{k=1}^m V_k$ nach (5.4).

Definition 5.3.1

Sei $\gamma \in (0, 1)$. Ein Zufallsfeld $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ besitzt den kritischen Hölder-Exponenten, falls die folgenden beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

- (a) Für alle $s \in (0, \gamma)$ erfüllen die Pfade von X f.s. eine gleichmäßige Hölderbedingung mit Exponenten s , d.h. für jede kompakte Menge $V \subset \mathbb{R}^d$ existiert eine positive Zufallsvariable A , so dass

$$|X(x) - X(y)| \leq A \|x - y\|^s \quad \text{für alle } x, y \in V. \quad (5.10)$$

- (b) Für alle $s \in (\gamma, 1)$ erfüllen die Pfade von X f.s. keine gleichmäßige Hölder-Bedingung mit Exponenten s .

Nun wird im Folgenden zunächst der Fall $\alpha = 2$ untersucht. Die Beweistechnik für diesen wesentlich einfacheren Fall unterscheidet sich signifikant gegenüber dem Fall $\alpha \in (0, 2)$. Bei Gauß'schen Zufallsfeldern X besteht ein Zusammenhang zwischen der Hölderregularität der Pfade $x \mapsto X(x)(\omega)$ und dem 2. Moment von X , wie beispielsweise in [1] Theorem 8.3.2 nachzulesen. Dieser Zusammenhang wird in folgender Proposition zusammengefasst, die für den eindimensionalen Fall in [14] behandelt und in [10] darauf aufbauend erweitert wurde.

Proposition 5.3.2 (Analog zu [10] Proposition 5.2)

Sei $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ ein Gauß'sches Zufallsfeld mit stationären Zuwächsen. Sei $\gamma \in (0, 1)$, so dass

$$\gamma = \inf \{s > 0 : \mathbb{E}((X(x) - X(0))^2) = o_{\|x\| \rightarrow 0}(\|x\|^{2s})\}.$$

Dann erfüllt jede stetige Modifikation von X für alle $s \in (0, \gamma)$ f.s. eine gleichmäßige Hölder-Bedingung mit Exponent s . Falls zusätzlich

$$\gamma = \inf \{s > 0 : \|x\|^{2s} = o_{\|x\| \rightarrow 0}(\mathbb{E}((X(x) - X(0))^2))\},$$

dann ist γ für jede stetige Modifikation von X der kritische Hölder-Exponent.

Das obige Resultat wurde in [14] für den Fall $d = 1$ verwendet, um Regularitätseigenschaften entlang vorgegebener Richtungen zu untersuchen. D.h. also für ein $x_0 \in \mathbb{R}^d, u \in S_0$ untersucht man die Hölderregularität des Prozesses $\{X(x_0 + tu)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Diese Untersuchung entlang aller Richtungen u reicht zur Untersuchung von stationären Gauß'schen Zufallsfeldern aus. Dazu führen wir zunächst den Begriff der richtungsgebundenen Hölderregularität ein.

Definition 5.3.3 (Analog zu [10] 5.3)

Sei $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ ein Zufallsfeld mit stationären Zuwächsen und $u \in S_0$. Falls der Prozess $\{X(tu)\}_{t \in \mathbb{R}}$ den kritischen Hölder-Exponenten $\gamma(u)$ besitzt, so besitzt X $\gamma(u)$ als richtungsgebundene Hölderregularität von X in Richtung u .

5.3.1. Hölderregularität für den Gauß'schen Fall

Mit Hilfe dieser Vorarbeiten kann nun für den Fall $\alpha = 2$ das erste Haupttheorem angegeben werden.

Theorem 5.3.4

Für $k \in \{1, \dots, m\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ sei $X_{x_0}^{(k)}$ ein gauß'scher OSSRS Subprozess gegeben in harmonischer Darstellung definiert wie in (3.4) oder (4.4). Dann besitzt jede stetige Modifikation von $X_{x_0}^{(k)}$ den Wert $H_k/a_{p_k}^{(k)}$ als kritischen Hölder-Exponenten. Des Weiteren besitzt für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ und alle $i = 1, \dots, p_k$ und jede Richtung $u \in W_j^{(k)}$ das Feld $X_{x_0}^{(k)}$ den Wert $H_k/a_j^{(k)}$ als richtungsgebundene Hölderregularität in Richtung u .

Beweis. Für $k \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, p_k\}$ sei $u \in W_j^{(k)}$ fest. Sei $P_{W_j^{(k)}} : \mathbb{R}^d \rightarrow W_j^{(k)}$ die Projektion auf $W_j^{(k)}$. Nach Lemma 2.3.1 angewendet auf $(W_j^{(k)}, E|_{W_j^{(k)}})$ anstelle von (\mathbb{R}^d, E) existiert damit eine Konstante C_2 , so dass für $\delta > 0$ gilt:

$$\tau_E(tu) \leq C_2 |t|^{1/a_j^{(k)} - \delta} \quad \text{für alle } |t| \leq 1.$$

Wobei nach (5.3)

$$E|_{W_j^{(k)}} = P \begin{pmatrix} 0 & & \\ & J_j^{(k)} & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

mit Eigenwert $\lambda_j^{(k)}$ und zugehörigem Realteil $1/a_j^{(k)}$. Damit gilt weiter, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass:

$$\begin{aligned} \|tu_i\| &\leq \|\tau_E(tu)^{E|_{W_j^{(k)}}} P_{W_j^{(k)}}(l(tu))\| \\ &\leq \|\tau_E(tu)^{E|_{W_j^{(k)}}}\| \cdot \|P_{W_j^{(k)}}(l(tu))\| \\ &\leq C \cdot \|\tau_E(tu)^{E|_{W_j^{(k)}}}\| \\ &\leq C \cdot \tau_E(tu)^{a_i^{(k)} - \delta} \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir also insgesamt für Konstanten $C_1, C_2 > 0$:

$$C_1 |t|^{1/a_j^{(k)} + \delta} \leq \tau_E(tu) \leq C_2 |t|^{1/a_j^{(k)} - \delta} \quad \text{für alle } |t| \leq 1. \quad (5.11)$$

5. Hölderregularität für OSSRSs

Nun wollen wir diese Ergebnisse im Hinblick auf Proposition 5.3.2 verwenden. Sei dazu $\Gamma_{E_k}^2(x) := \mathbb{E} \left(X_{x_0}^{(k)}(x)^2 \right)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma_{E_k}^2(x) &\stackrel{(4.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \left| \left(e^{i \langle x_0, l, \xi_l \rangle} - 1 \right) \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l/2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(e^{i \langle x_k, \xi_k \rangle} - 1 \right) \psi_k(\xi_k)^{-H_k - q_k/2} \right|^2 d\xi \\
&\stackrel{(4.4)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \left| \left(e^{i \frac{\langle x_0, l, \xi_l \rangle}{2}} - e^{-i \frac{\langle x_0, l, \xi_l \rangle}{2}} \right) \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l/2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(e^{i \frac{\langle x_k, \xi_k \rangle}{2}} - e^{-i \frac{\langle x_k, \xi_k \rangle}{2}} \right) \psi_k(\xi_k)^{-H_k - q_k/2} \right|^2 d\xi \\
&= 2^{2m} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \sin \left(\frac{\langle x_0, l, \xi_l \rangle}{2} \right) \psi_l(\xi_l)^{-2H_l - q_l} \\
&\quad \cdot \sin \left(\frac{\langle x_k, \xi_k \rangle}{2} \right) \psi_k(\xi_k)^{-2H_k - q_k} d\xi \\
\text{[Polarkoordinaten]} &= 2^{2m} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \sin \left(\frac{\langle x_0, l, \xi_l \rangle}{2} \right) \psi_l(\xi_l)^{-2H_l - q_l} \\
&\quad \cdot \sin \left(\frac{\langle l_k(x), \tau_E^{E_k^t}(x) \xi_k \rangle}{2} \right) \psi_k \\
&\quad \cdot (\tau_E(x) \xi_k)^{-2H_k - q_k} \tau_E(x)^{2H_k} \tau_E(x)^{q_k} d\xi \\
\text{[Substitution]} &= \tau_E(x)^{2H_k} 2^{2m} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m \sin \left(\frac{\langle x_0, l, \xi_l \rangle}{2} \right) \psi_l(\xi_l)^{-2H_l - q_l} \\
&\quad \cdot \sin \left(\frac{\langle l_k(x), \xi_k \rangle}{2} \right) \psi_k(\xi_k)^{-2H_k - q_k} d\xi \\
&= \tau_E(x)^{2H_k} \Gamma_{E_k}^2(l_k(x)).
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für alle $\theta \in S_0$, da $\Gamma_{E_k}^2$ stetig ist auf S_0 :

$$0 < c \leq \Gamma_{E_k}^2(\theta) \leq C \quad (5.12)$$

für geeignete $C \geq c > 0$. D.h. also in Verbindung mit (5.11) erhalten wir für geeignete C_1, C_2 :

$$C_1 |t|^{2H_k/a_j^{(k)} + \delta} \leq \Gamma_{E_k}^2(tu) \leq C_2 |t|^{2H_k/a_j^{(k)} - \delta} \quad \text{für alle } |t| \leq 1. \quad (5.13)$$

Nach Proposition 5.3.2 besitzt damit $X_{x_0}^{(k)}$ die richtungsgebundene Hölderregularität mit kritischem Hölder-Exponenten $H_k/a_i^{(k)}$ in Richtung u . Des Weiteren kann man

nun auch eine Aussage über alle $x \in V$ bezüglich der Hölderregularität von $X_{x_0}^{(k)}$ getroffen werden, da nach Lemma 2.3.1 für alle $x \in V$ gilt:

$$\Gamma_{E_k}^2(x) \leq C_2 \|x\|^{2H_k/a_{p_k}^{(k)} - \delta} \quad \text{für alle } \|x\| \leq 1. \quad (5.14)$$

Dadurch erfüllt $X_{x_0}^{(k)}$ nach Proposition 5.3.2 eine gleichmäßige Hölderbedingung mit Exponenten $H_k/a_{p_k}^{(k)}$. \square

Somit ist der Fall $\alpha = 2$ zunächst behandelt. Nun wird der Fall $\alpha \in (0, 2)$ behandelt.

5.3.2. Hölderregularität für den Fall $\alpha \in (0, 2)$

Das folgende Theorem stellt eine Verallgemeinerung der in [11] ausgearbeiteten Ergebnisse für OSSRFs im Fall $\alpha \in (0, 2)$ dar. Im folgenden wird mit Hilfe der erarbeiteten Abschätzungen und der Le Page Reihendarstellung die Hölderregularität der OSSRSs für den Fall $\alpha \in (0, 2)$ untersucht.

Theorem 5.3.5

Sei $\alpha \in (0, 2)$, $k \in \{1, \dots, m\}$ und $X_{x_0}^{(k)}$ definiert durch (4.4). Dann existiert eine Modifikation $X_{x_0}^{(k)*}$ von $X_{x_0}^{(k)}$ auf M_k , so dass für alle $\epsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{x, y \in M \\ 0 < \|x - y\| \leq \delta}} \frac{|X_{x_0}^{(k)*}(x) - X_{x_0}^{(k)*}(y)|}{\tau_E(x - y) |\log \tau_E(x - y)|^{1/\alpha + 1/2 + \epsilon}} = 0 \quad f.s. \quad (5.15)$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $M = V \cap [0, 1]^d$, wobei $V = \bigoplus_{k=1}^m V_k$. Im Hinblick auf (5.9) konvergiert für $x \in \mathbb{R}^d$

$$Y_{x_0}^{(k)}(x) = C_\alpha \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} f_{x_0}^{(k)}(x, \xi_n) g_n \right) \quad f.s.$$

und $Y_{x_0}^{(k)} \stackrel{f.d.}{=} X_{x_0}^{(k)}$. Es wird angenommen, dass $g_n, n \geq 1$, komplex-isotropische Zufallsvariablen sind. Als Dichte von ξ_n wählen wir als Korrektur zu [34] und [11]

$$m(\xi) = \frac{c_\nu}{\tau_{E^t}(\xi)^q (|\log \tau_{E^t}(\xi)| + 1)^{1+\nu}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad (5.16)$$

wobei $\nu, c_\nu > 0$, so dass $\int_{\mathbb{R}^d} m(\xi) d\xi = 1$.

In [34] wählten die Autoren für den eindimensionalen Fall

$$m(\xi) = \frac{c_\nu}{|\xi| \cdot |\log(|\xi|)|^{1+\nu}}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (5.17)$$

5. Hölderregularität für OSSRSs

und darauf aufbauend verallgemeinerten die Autoren in [11] die Dichte zu

$$m(\xi) = \frac{c_\nu}{\tau_{E^t}(\xi)^q |\log \tau_{E^t}(\xi)|^{1+\nu}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \quad (5.18)$$

Diese Verallgemeinerung ist prinzipiell sinnvoll, da man für $E = I/H = E^t$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{E^t}$ wieder auf (5.17) für den d -dimensionalen Fall gelangt. Jedoch ist die Dichte m an der Stelle $\|\xi\| = 1$ für diese gewählten Funktionen nicht integrierbar. Im Gegensatz dazu gilt für m definiert wie in (5.16):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi) d\xi &= \int_{S_0} \int_0^\infty m(r^{E^t} \theta) r^{q-1} dr \sigma(d\theta) \\ &= \int_{S_0} \int_0^\infty \frac{c_\nu}{\tau_{E^t}(r^{E^t} \theta)^q (|\log \tau_{E^t}(r^{E^t} \theta)| + 1)^{1+\nu}} r^{q-1} dr \sigma(d\theta) \\ &= C \int_0^\infty \frac{c_\nu}{r \cdot (|\log(r)| + 1)^{1+\nu}} dr \\ [r = e^s] \Rightarrow &= C \int_{-\infty}^\infty \frac{c_\nu}{e^s \cdot (|s| + 1)^{1+\nu}} e^s ds \\ &= 2C c_\nu \int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^{1+\nu}} ds \\ &= \hat{C} \int_1^\infty \frac{1}{s^{1+\nu}} ds \\ &< \infty \text{ für } \nu > 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine geeignete Dichte, welche im Folgenden verwendet wird.

Schritt 1[Analog zu [11]]

Sei $r \in (0, 1)$. Nach Korollar 5.1.4 existiert eine Konstante $\hat{c}_2 > 0$ und ein $\bar{l} \in \mathbb{N}$, so dass

$$\tau_E(x) \leq \hat{c}_2 \|x\|^{\underline{H}} |\log \|x\||^{(\bar{l}-1)\underline{H}} \quad (5.19)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $\|x\| \leq r$. Weiter kann angenommen werden, dass eine Konstante $c_2 > 0$ existiert, mit

$$c_2 d^{\underline{H}/2} 2^{-\underline{H}} (\log 2)^{(\bar{l}-1)\underline{H}} > 1. \quad (5.20)$$

Für alle $u \in \mathbb{N}$ wähle ν_u als kleinste natürliche Zahl, so dass

$$c_2 d^{\underline{H}/2} 2^{-\nu_u \underline{H}} (\nu_u \log 2)^{(\bar{l}-1)\underline{H}} \leq 2^{-u}. \quad (5.21)$$

Dies impliziert zunächst $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\nu_u^{\bar{l}-1}}{2^{\nu_u}} = 0$ und somit $\nu_u \rightarrow \infty$ für $u \rightarrow \infty$. Weiterhin impliziert die Definition von ν_u und (5.20), dass $\nu_u > 1$ für alle $u \in \mathbb{N}$ und durch die Definition von ν_u und 5.20 erhält man weiter

$$c_2 d^{\frac{H}{2}} 2^{-(\nu_u-1)H} ((\nu_u-1) \log 2)^{(\bar{l}-1)H} > 2^{-u}$$

und somit

$$2^{-u} (2\sqrt{d})^{-\frac{H}{2}} c_2^{-1} < \left(2^{-\nu_u} (\nu_u \log 2)^{\bar{l}-1}\right)^{\frac{H}{2}} \leq 2^{-u} (\sqrt{d})^{-\frac{H}{2}} c_2^{-1}. \quad (5.22)$$

Durch Anwendung des Logarithmus in (5.22) erhält man

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{\nu_u} = \frac{H}{2}.$$

Somit existieren Konstanten $c_3, c_4 > 0$, so dass

$$c_3 2^{u/H} u^{\bar{l}-1} \leq 2^{\nu_u} \leq c_4 2^{u/H} u^{\bar{l}-1}. \quad (5.23)$$

Für alle $u \in \mathbb{N}$ und $j = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d$ setze

$$x_{u,j} = \frac{j}{2^{\nu_u}}, \quad \mathcal{D}_u = \{x_{u,j} : j \in \mathbb{Z}^d \cap [0, 2^{\nu_u}]^d\}, \quad \mathcal{D} = \bigcup_{u=1}^{\infty} \mathcal{D}_u.$$

Nun soll gezeigt werden, dass für große u \mathcal{D}_u ein 2^{-u} -Netz von $\bigcup_{j=1}^m M_j$ für τ_E ist, d.h. dass man für alle $x \in \bigcup_{j=1}^m M_j$ ein $x_{u,j} \in \mathcal{D}_u$ finden kann, so dass $\tau_E(x - x_{u,j}) \leq 2^{-u}$. Sei $x \in \bigcup_{j=1}^m M_j$ fest und o.B.d.A $x \notin \mathcal{D}_u$. Wähle j_i so, dass

$$j_i \leq 2^{\nu_u} x_j \leq j_i + 1 \text{ für } 1 \leq i \leq d.$$

Dann gilt

$$0 < \|x - x_{j,u}\| \leq 2^{-\nu_u} \sqrt{d}$$

und da $\lim_{u \rightarrow \infty} \nu_u = +\infty$ für u groß genug,

$$0 < \|x - x_{j,u}\| \leq 2^{-\nu_u} \sqrt{d} \leq r.$$

Somit, da $t \mapsto t^{\frac{H}{2}} |\log(t)|^{(\bar{l}-1)H}$ eine monoton fallende Funktion ist auf $(0, 1]$, implizieren (5.19) und (5.21), dass

$$\tau_E(x - x_{j,u}) \leq 2^{-u}$$

für u groß genug. Somit ist für große u \mathcal{D}_u ein 2^{-u} -Netz von $\bigcup_{j=1}^m M_j$ für τ_E .

Schritt 2

Für alle $x, y \in \mathcal{D}$ gilt nach Proposition 5.2.2 f.s. für alle $k = 1, \dots, m$

$$Y_{x_0}^{(k)}(x) - Y_{x_0}^{(k)}(y) = C_\alpha \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} (f_{x_0}^{(k)}(x, \xi_n) - f_{x_0}^{(k)}(y, \xi_n)) g_n \right),$$

wobei C_α definiert ist durch (5.7) und $f_{x_0}^{(k)}$ durch (4.5). Man betrachte die Zufallsvariable

$$R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-1/\alpha} m(\xi_n)^{-1/\alpha} (f_{x_0}^{(k)}(x, \xi_n) - f_{x_0}^{(k)}(y, \xi_n)) g_n.$$

Also ist

$$Y_{x_0}^{(k)}(x) - Y_{x_0}^{(k)}(y) = C_\alpha \operatorname{Re}(R(x, y)) \quad \text{f.s..}$$

Da $(T_n)_n, (\xi_n)_n$ und $(g_n)_n$ unabhängig sind und da $(g_n)_n$ i.i.d. komplexe, Gauß'sche Zufallsvariable sind, ist $R(x, y)$ eine komplexe, Gauß'sche, isotrope Zufallsvariable bedingt nach $(T_n, \xi_n)_n$. Somit ist $Y_{x_0}^{(k)}(x) - Y_{x_0}^{(k)}(y)$ bedingt nach $(T_n, \xi_n)_n$ ebenfalls eine komplexe, Gauß'sche, isotrope Zufallsvariable mit Varianz

$$\begin{aligned} \nu^2((x, y) | (T_n, \xi_n)_n) &= \frac{C_\alpha}{2} \mathbb{E} (|R(x, y)|^2 | (T_n, \xi_n)_n) \\ &= \frac{C_\alpha}{2} \mathbb{E} (|g_1|^2) \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-2/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha} |f_{x_0}^{(k)}(x - y, \xi_n)|^2, \end{aligned} \quad (5.24)$$

da $|f_{x_0}^{(k)}(x, \xi_n) - f_{x_0}^{(k)}(y, \xi_n)| = |f_{x_0}^{(k)}(x - y, \xi_n)|$. Genau hier geht die Stationarität des Subprozesses entscheidend ein. Die folgenden Schritte sind an die Beweise von [11] und [33] angelehnt. Sei

$$\varphi(t) = \sqrt{2Ad \log \frac{1}{t}}, \quad 0 < t < 1, \quad (5.25)$$

wobei A eine positive Konstante ist mit $A > 2/\underline{H} - 1/\overline{H}$. Für $u \in \mathbb{N}$ wähle

$$E_{i,j}^u = \left\{ \omega : |Y_{x_0}^{(k)}(x_{u,i}) - Y_{x_0}^{(k)}(x_{u,j})| > \nu((x_{u,i}, x_{u,j}) | (T_n, \xi_n)_n) \varphi(\tau_E(x_{u,i} - x_{u,j})) \right\}$$

für alle $(i, j) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d, i \neq j$, so dass $\tau_E(x_{u,i} - x_{u,j}) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(E_{i,j}^u) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(1_{E_{i,j}^u} | (T_n, \xi_n)_n \right) \right). \quad (5.26)$$

Nun wird für feste (i, j, u) eine obere Grenze dieser Wahrscheinlichkeit angegeben. Sei Z eine reelle, zentrierte Gauß'sche Zufallsvariable mit Varianz 1. Dann impliziert (5.26), dass

$$\mathbb{P}(E_{i,j}^u) = \mathbb{P}(|Z| > \varphi(\tau_E(x_{u,i} - x_{u,j}))).$$

Wähle $\delta \in (0, 1)$ und setze für $u \in \mathbb{N}$,

$$\delta_u = 2^{-(1-\delta)u} \quad \text{und} \quad I_u = \left\{ (i, j) \in (\mathbb{Z}^d \cap [0, 2^{\nu_u}]^d)^2 : 0 < \tau_E(x_{u,i} - x_{u,j}) \leq \delta_u \right\}. \quad (5.27)$$

Da φ eine monoton fallende Funktion ist, gilt für alle $(i, j) \in I_u$

$$\mathbb{P}(|Z| > \varphi(\tau_E(x_{u,i} - x_{u,j}))) \leq \mathbb{P}(|Z| > \varphi(\delta_u)).$$

Nun gilt jedoch für die normalverteilte Zufallsvariable Z

$$\mathbb{P}(Z > w) \leq \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}w} \quad \forall w > 0,$$

somit folgt für alle $u \in \mathbb{N}$ und $(i, j) \in I_u$,

$$\mathbb{P}(E_{i,j}^u) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-\varphi^2(\delta_u)/2}}{\varphi(\delta_u)} = \frac{2^{-(1-\delta)uAd}}{\sqrt{\pi Ad(1-\delta) \log 2}}$$

da $\delta_u = 2^{-(1-\delta)u}$. Somit folgt

$$\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{(i,j) \in I_u} \mathbb{P}(E_{i,j}^u) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi Ad(1-\delta) \log 2}} \sum_{u=1}^{\infty} 2^{-(1-\delta)uAd} |I_u|.$$

Nun bleibt noch eine obere Grenze für $|I_u|$ zu finden. Zunächst sei angemerkt, dass man eine Konstante $c_5 > 0$ finden kann, so dass für alle $u \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $\tau_E(x) \leq \delta_u$ gilt

$$\|x\| \leq c_5 \tau_E(x)^{1/\bar{H}} |\log \tau_E(x)|^{\bar{l}-1}.$$

Diese Ungleichung entspricht (5.5). $t \mapsto t^{1/\bar{H}} |\log t|^{\bar{l}-1}$ ist eine monoton wachsende Funktion auf $(0, r_0)$. Daher existiert für ein geeignetes r_0 eine Konstante c_6 , so dass für alle $u \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $\tau_E(x) \leq \delta_u$ folgendes gilt:

$$\|x\| \leq c_6 \delta_u^{1/\bar{H}} |\log \delta_u|^{\bar{l}-1} = ((1-\delta) \log 2)^{\bar{l}-1} c_6 \delta_u^{1/\bar{H}} u^{\bar{l}-1}.$$

Somit kann man eine positive Konstante $C > 0$ finden, so dass für alle $u \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \mathbb{Z}^d \cap [0, 2^{\nu_u}]^d$ gilt:

$$|\{j \in \mathbb{Z}^d \cap [0, 2^{\nu_u}]^d : (i, j) \in I_u\}| \leq C \left(\delta_u^{1/\bar{H}} 2^{\nu_u} u^{\bar{l}-1} \right)^d.$$

Nach Definition von I_u folgt

$$|I_u| \leq C(2^{\nu_u} + 1)^d \delta_u^{d/\bar{H}} 2^{d\nu_u} u^{d(\bar{l}-1)}.$$

Somit existiert nach (5.23) eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in \mathbb{N}$

$$|I_u| \leq C \delta_u^{d/\bar{H}} 2^{2ud/H} u^{3d(\bar{l}-1)}.$$

5. Hölderregularität für OSSRSs

Somit folgt insgesamt mit $\delta_u = 2^{-(1-\delta)u}$

$$\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{(i,j) \in I_u} \mathbb{P}(E_{i,j}^u) \leq \frac{C}{\sqrt{A(1-\delta)}} \sum_{u=1}^{\infty} u^{3d(l-1)} 2^{-ud(-2/\underline{H}+(1-\delta)/\overline{H}+(1+\delta)A)} < \infty,$$

da $A > 2/\underline{H} - (1-\delta)/\overline{H}$ und $\delta \in (0, 1)$ beliebig. Nach dem Lemma von Borel-Cantelli existiert f.s. eine Zahl $u^*(\omega)$, so dass für alle $u \geq u^*(\omega)$,

$$|Y_{x_0}^{(u)}(x) - Y_{x_0}^{(u)}(y)| \leq \nu((x, y)|(T_n, \xi_n)_n) \varphi(\tau_E(x - y)) \quad (5.28)$$

für alle $x, y \in \mathcal{D}_u$, $x \neq y$ mit $\tau_E(x - y) \leq \delta_u$, $u = 1, \dots, m$.

Schritt 3 Als nächstes soll nun eine obere Grenze für die Varianz ν^2 bedingt nach $(T_n, \xi_n)_n$ angegeben werden. Dazu sei zunächst angemerkt, dass für alle $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^d$, $x_k \in \mathbb{R}^{d_k}$ gilt:

$$x = \tau_E(x)^E l(x) = \begin{pmatrix} \tau_E(x)^{E_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tau_E(x)^{E_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(x) \\ \vdots \\ l_m(x) \end{pmatrix}.$$

Also insbesondere $x_k = \tau_E(x)^{E_k} l_k(x)$ für alle $k = 1, \dots, m$. Mit der vereinfachten Schreibweise $\psi(\xi) := \prod_{l=1}^m \psi_l(\xi_l)^{-H_l - q_l/\alpha}$ gilt:

$$\begin{aligned} \nu^2((x, y)|(T_n, \xi_n)_n) &= \frac{C_\alpha}{2} \mathbb{E}(|g_1|^2) \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-2/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha} |f_{x_0}^{(k)}(x - y, \xi_n)|^2 \\ \text{[Polarkoordinaten]} &= \frac{C_\alpha}{2} \mathbb{E}(|g_1|^2) \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-2/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha} \\ &\quad \cdot |f_{x_0}^{(k)}(\tau_{E^t}(x - y)^{E^t} l_k(x - y), \xi_n)|^2 \\ \text{[} f_{x_0}^{(k)} \text{ einsetzen]} &= \frac{C_\alpha}{2} \mathbb{E}(|g_1|^2) \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-2/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha} \left| e^{i \langle \tau_{E^t}(x - y)^{E^t} l_k(x - y), \xi_{n,k} \rangle} - 1 \right|^2 \\ &\quad \cdot \left(\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^m |e^{i \langle x_{0,l}, \xi_{n,l} \rangle}|^2 \right) \psi(\xi_n)^{-2-2q/\alpha} \\ &\leq \frac{C_\alpha}{2} \mathbb{E}(|g_1|^2) \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-2/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha} \left| e^{i \langle \tau_{E^t}(x - y)^{E^t} l_k(x - y), \xi_{n,k} \rangle} - 1 \right|^2 \\ &\quad \cdot 2^{2m-2} \psi(\xi_n)^{-2-2q/\alpha} \\ &\leq \frac{C_\alpha}{2} \mathbb{E}(|g_1|^2) \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{-2/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha} \\ &\quad \cdot \min(M_{E_k^t} \|\tau_{E^t}(x - y)^{E^t} \xi_{n,k}\|, 2)^2 \cdot 2^{2m-2} \psi(\xi_n)^{-2-2q/\alpha} \\ \text{[Lemma 5.3.9]} &= \frac{C_\alpha}{2} \mathbb{E}(|g_1|^2) \sigma^2(\tau_{E^t}(x - y)). \end{aligned}$$

Sei $b(h) = h|\log h|^{(1+\nu)/\alpha}$. Dann gilt nach Lemma 5.3.9:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sigma^2(2^{-k})}{b^2(2^{-k})} \middle| (T_n)_n \right) &\leq \left(C \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-2/\alpha} \right) \sum_{k=1}^{+\infty} |\log(2^{-k})|^{-1-\nu} \\ &\leq \hat{C} \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-1-\nu} \\ &< \infty \quad \forall \nu > 0. \end{aligned}$$

Da $(\xi_n)_n$ und $(T_n)_n$ unabhängig sind, folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(h)}{b(h)} = 0 \quad \text{f.s.},$$

d.h. also für kleine $h > 0$ existiert ein $C > 0$, so dass

$$\sigma(h) \leq Ch|\log h|^{(1+\nu)/\alpha} \quad \text{f.s.}$$

Daraus folgt insgesamt, dass für alle $u \geq u^*(\omega)$ und alle $x, y \in \mathcal{D}_u$ mit $\tau_E(x-y) \leq \delta_u$ zusammen mit (5.28) und einer geeigneten Konstanten $C > 0$ folgendes gilt:

$$|Y_{x_0}^{(k)}(x) - Y_{x_0}^{(k)}(y)| \leq C\sqrt{2d}\tau_E(x-y)|\log \tau_E(x-y)|^{(1+\nu)/\alpha+1/2}. \quad (5.29)$$

Sei

$$\begin{aligned} \Omega^* &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{u \geq n} \bigcap_{\substack{x, y \in \mathcal{D}_u \\ \tau_E(x-y) \leq \delta_u}} \{ |X_{x_0}^{(k)}(x) - X_{x_0}^{(k)}(y)| \\ &\leq C\sqrt{2d}\tau_E(x-y)|\log \tau_E(x-y)|^{(1+\nu)/\alpha+1/2} \} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Da $X_{x_0}^{(k)}$ und $Y_{x_0}^{(k)}$ die gleichen endlichdimensionalen Randverteilungen besitzen, gilt $P(\Omega^*) = 1$.

Schritt 4 Sei $\omega \in \Omega^*$. Nach Schritt 3 existiert ein $u^* \geq 1$, so dass $X_{x_0}^{(k)}$ (5.30) erfüllt für alle $u \geq u^*(\omega)$ und alle $x, y \in \mathcal{D}_u$ mit $\tau_E(x-y) \leq \delta_u$.

Weiter gilt nach Lemma 2.2 in [10], dass eine Konstante $K_E \geq 1$ existiert, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\tau_E(x+y) \leq K_E(\tau_E(x) + \tau_E(y)).$$

Sei $F(h) = C\sqrt{2d}h|\log h|^{(1+\nu)/\alpha+1/2}$. Man wähle $u_0 \in \mathbb{N}$, so dass $2^{u_0}\delta_{u_0+1} > 3K_E^2$. Man kann weiter annehmen, bzw. $u^*(\omega)$ so wählen, dass $u^*(\omega) \geq u_0$.

Sei $x, y \in \mathcal{D}$ mit $x \neq y$, so dass $3K_E^2\tau_E(x-y) \leq \delta_{u^*(\omega)}$. Dann existiert ein eindeutiges $u \geq u^*(\omega)$, so dass $\delta_{u+1} < 3K_E^2\tau_E(x-y) \leq \delta_u$. Da $x, y \in \mathcal{D}$, existiert ein $n \geq u+1$,

5. Hölderregularität für OSSRSs

so dass $x, y \in \mathcal{D}_n$. Weiter kann man nach Schritt 1 $x^{(j)}, y^{(j)} \in \mathcal{D}_j$ für $j = u, \dots, n-1$ wählen, so dass

$$\tau_E(x - x^{(j)}) \leq 2^{-j}, \quad \tau_E(y - y^{(j)}) \leq 2^{-j}.$$

Per Konstruktion gilt somit

$$\tau_E(x^{(u)} - y^{(u)}) \leq K_E^2(\tau_E(x - y) + 2^{-u+1}).$$

Da $u \geq u_0$, gilt $2^u \delta_{u+1} \geq 2^{u_0} \delta_{u_0+1} > 3K_E^2$. Somit ergibt sich:

$$\tau_E(x^{(u)} - y^{(u)}) \leq 3K_E^2 \tau_E(x - y).$$

Da $3K_E^2 \tau_E(x - y) \leq \delta_k$ erhält man mit Hilfe von Schritt 3:

$$|X_{x_0}^{(k)}(x^{(u)}) - X_{x_0}^{(k)}(y^{(u)})| \leq F(\tau_E(x^{(u)} - y^{(u)})).$$

Weiter kann man folgende Darstellung wählen:

$$X_{x_0}^{(k)}(x) - X_{x_0}^{(k)}(x^{(u)}) = \sum_{j=u}^{n-1} (X_{x_0}^{(k)}(x^{(j+1)}) - X_{x_0}^{(k)}(x^{(j)}))$$

mit $\tau_E(x^{(j+1)} - x^{(j)}) \leq 3K_E^2 2^{-(j+1)} \leq \delta_{j+1}$, da $j \geq u_0$. Weiter ist $x^{(j)} \in \mathcal{D}_j \subset \mathcal{D}_{j+1}$ und somit gilt mit Schritt 3:

$$|X_{x_0}^{(k)}(x) - X_{x_0}^{(k)}(x^{(u)})| \leq \sum_{j=u}^{n-1} F(\tau_E(x^{(j+1)} - x^{(j)})) \leq CF(\delta_{u+1}).$$

Damit erhält man nun mittels der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |X_{x_0}^{(k)}(x) - X_{x_0}^{(k)}(y)| &\leq F(\tau_E(x^{(u)} - y^{(u)})) + 2CF(\delta_{u+1}) \\ &\leq (1 + 2C)F(3K_E^2 \tau_E(x - y)). \end{aligned}$$

Also kann man eine Konstante C finden, so dass für $3K_E^2 \tau_E(x - y) \leq \delta_{u^*(\omega)}$

$$|X_{x_0}^{(k)}(x) - X_{x_0}^{(k)}(y)| \leq C \tau_E(x - y) |\log \tau_E(x - y)|^{(1+\nu)/\alpha+1/2}. \quad (5.31)$$

Zum Abschluß kann nun eine Modifikation von $X_{x_0}^{(k)}$ für $x \in M \subset \mathbb{R}^d$ angegeben werden. Für $x \in \mathcal{D}$ setze

$$X_{x_0}^{(k)*}(x)(\omega) = X_{x_0}^{(k)}(x)(\omega).$$

Für $x \in M$ sei $x^{(n)} \in \mathcal{D}$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x$. D.h. nach (5.31) ist $\left(X_{x_0}^{(k)*}(x^{(n)})(\omega) \right)_n$ eine Cauchy-Folge. Daher setzt man für alle $x \in M$

$$X_{x_0}^{(k)*}(x)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{x_0}^{(k)*}(x^{(n)})(\omega).$$

Die Konvergenz hängt nicht von der Wahl der Folge $x^{(n)}$ ab und da $X_{x_0}^k$ stochastisch stetig ist, ist $X_{x_0}^{(k)*}$ eine Modifikation von $X_{x_0}^k$. Insgesamt gilt also für $3K_E^2\tau_E(x-y) < \delta_{u^*(\omega)}$

$$|X_{x_0}^{(k)*}(x) - X_{x_0}^{(k)*}(y)| \leq C\tau_E(x-y) |\log \tau_E(x-y)|^{(1+\nu)/\alpha+1/2}. \quad (5.32)$$

□

Mit Hilfe der Beweistechnik von Theorem 5.3.5 bekommt man das gleiche Ergebnis auch für den Fall $\alpha = 2$. Dazu ersetzt man $\nu^2((x, y)|(T_n, \xi_n)_n)$ aus (5.24) durch die Varianz von $X(x) - X(y)$ wie in Theorem 5.3.4:

$$v^2((x, y)) = \mathbb{E}((X(x) - X(y))^2).$$

Analog zu Schritt 3 in Theorem 5.3.5 muss man nun fordern, dass $\beta \in \mathbb{R}$ und $\delta_0 > 0$ existieren, so dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für $x, y \in V$ mit $0 < \tau_E(x-y) \leq \delta_0$ folgendes gilt:

$$\mathbb{E}((X(x) - X(y))^2) \leq C\tau_E(x-y)^2 |\log \tau_E(x-y)|^\beta. \quad (5.33)$$

Nach Theorem 5.3.4 erhält man (5.33) gerade für $\beta = 0$. Somit kann man auch über diesen Weg mit Hilfe von Schritt 1, 2 und 4 aus Theorem 5.3.5 das Resultat von Theorem 5.3.4 zeigen. Dies wird in folgendem Korollar zusammengefasst.

Korollar 5.3.6 (Analog zu [10] 5.4)

Sei $\alpha \in (0, 2], k \in \{1, \dots, m\}$. Es existiert eine Modifikation von $X_{x_0}^{(k)}$ auf V , so dass für alle $j = 1, \dots, p_k$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{x, y \in M \\ 0 < |x-y| \leq \delta}} \frac{|X_{x_0}^{(k)*}(x) - X_{x_0}^{(k)*}(y)|}{||x-y||^{H_j} |\log ||x-y|||^{H_j(p_j-1)+\beta+1/2+\epsilon}} = 0 \text{ f.s.} \quad (5.34)$$

für alle $\epsilon > 0$, wobei $p_j = \max_{1 \leq k \leq j} l_k, \beta = 1_{\alpha \neq 2} \cdot 1/\alpha$.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Theorem 5.3.5 und Korollar 5.1.4. □

Korollar 5.3.7

Sei $\alpha \in (0, 2], k \in \{1, \dots, m\}$. Das Zufallsfeld $X_{x_0}^{*(k)}$ besitzt eine Hölderregularität auf \mathbb{R}^d für alle Exponenten $H \in (0, H_{p_k}^{(k)})$.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Korollar 5.3.6. □

Proposition 5.3.8

Sei $\alpha \in (0, 2], k \in \{1, \dots, m\}$. Das Zufallsfeld $X_{x_0}^{*(k)}$ besitzt $H_{p_k}^{(k)}$ als kritischen Hölderexponenten. Für alle $j = 1, \dots, p_k$ und $z \in W_j^{(k)} \cap S_0$ besitzt $X_{x_0}^{*(k)}$ des Weiteren $H_j^{(k)}$ als richtungsgebundenen kritischen Hölderexponenten in Richtung z .

5. Hölderregularität für OSSRSs

Beweis. Für eine $S\alpha S$ Zufallsvariable Z sei $\|Z\|_\alpha := (-\log(\mathbb{E}(\exp(iZ))))^{1/\alpha}$, dann gilt nach Korollar 6.3.2 in [39] für $X_{x_0}^{*(k)}$:

$$\|X_{x_0}^{*(k)}(x) - X_{x_0}^{*(k)}(y)\|_\alpha = D_\alpha(l_k(x-y))\tau_E(x-y)$$

wobei für alle $\theta \in S_0$:

$$D_\alpha(\theta) = c_0 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_{x_0}^{(k)}(\theta, \xi)|^\alpha d\xi \right)^{1/\alpha}.$$

D_α ist eine stetige Funktion auf der kompakten Menge S_0 , d.h. also es existiert ein Minimum $m_\alpha = \min_{\theta \in S_0} D_\alpha(\theta) > 0$. Daraus folgt zunächst:

$$\|X_{x_0}^{*(k)}(x) - X_{x_0}^{*(k)}(y)\|_\alpha \geq m_\alpha \tau_E(x-y)$$

und somit bezüglich der Richtung $z \in W_j^{(k)} \cap S_0$ in Verbindung mit Korollar 5.1.4 für $t, t' \in \mathbb{R}$:

$$\|X_{x_0}^{*(k)}(tz) - X_{x_0}^{*(k)}(t'z)\|_\alpha \geq m_\alpha c_1 |t - t'|^{H_j^{(k)}} |\log|t - t'||^{-(l_j-1)H_j}.$$

Somit divergiert für jedes $s > H_j^{(k)}$ der Term $\lim_{|t-t'| \rightarrow 0} \frac{X_{x_0}^{*(k)}(tz) - X_{x_0}^{*(k)}(t'z)}{|t-t'|^s}$ f.s. D.h. also für alle $s \in (H_j^{(k)}, 1)$ erfüllen die Pfade von $X_{x_0}^{*(k)}$ f.s. keine gleichmäßige Hölderbedingung mit Exponenten s in Richtung z . Jedoch erfüllen sie dies nach Korollar 5.3.7 für $s \in (0, H_j^{(k)})$. Somit ist $H_j^{(k)}$ der kritische Hölderexponent in Richtung z . D.h. insgesamt, es existiert eine Richtung $z \in W_{p_k}^{(k)} \cap S_0$, für die $H_{p_k}^{(k)}$ der kritische Hölderexponent ist. Somit besitzt $X_{x_0}^{*(k)}$ als kritischen Hölderexponenten $H_{p_k}^{(k)}$. \square

Das folgende Hilfslemma lehnt sich an Lemma 5.1 aus [11] an, berücksichtigt jedoch die in 5.16 definierte Dichte und stellt auch in diesem Fall eine Korrektur sowie eine Verallgemeinerung der OSSRSs dar.

Lemma 5.3.9 (Hilfslemma zu Theorem 5.3.5)

Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für

$$\sigma^2(h|(T_n)_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-2/\alpha} m(\xi_n)^{-2/\alpha} \min(M_{E_k^t} \|h^{E_k^t} \xi_k\|, 2)^2 \cdot 2^{2m-2} \psi(\xi_n)^{-2-\frac{2q}{\alpha}}$$

Folgendes gilt:

$$\mathbb{E}(\sigma^2(h|(T_n)_n)) \leq c \sum_{n=1}^{+\infty} T_n^{-2/\alpha} h^2 |\log h|^{(1+\nu)(2/\alpha-1)},$$

falls $h \leq e^{-1}$.

Beweis. Betrachte

$$I(h) = \mathbb{E} \left(m(\xi_1)^{-2/\alpha} \cdot \min(M_{E_k^t} \|h^{E_k^t} \xi_{1,k}\|, 2)^2 \cdot 2^{2m-2} \psi(\xi_1)^{-2-\frac{2q}{\alpha}} \right).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} I(h) &= \int_{\mathbb{R}^d} m(\xi)^{1-2/\alpha} \cdot \min(M_{E_k^t} \|h^{E_k^t} \xi_k\|, 2)^2 \cdot 2^{2m-2} \psi(\xi)^{-2-\frac{2q}{\alpha}} d\xi \\ \text{[Polarkoordinaten]} &= \int_{S_{E^t}} \int_0^\infty m(r^{E^t} \theta)^{1-2/\alpha} \cdot \min(M_{E_k^t} \|(hr)^{E_k^t} \theta_k\|, 2)^2 \\ &\quad \cdot 2^{2m-2} \psi(r^{E^t} \theta)^{-2-\frac{2q}{\alpha}} r^{q-1} dr \sigma(d\theta) \\ \text{[m einsetzen]} &= \int_{S_{E^t}} \int_0^\infty \left(\frac{c_\nu}{r^q \cdot (|\log(r)| + 1)^{1+\nu}} \right)^{1-2/\alpha} \\ &\quad \cdot \min(M_{E_k^t} \|(hr)^{E_k^t} \theta_k\|, 2)^2 \\ &\quad \cdot 2^{2m-2} \psi(\theta)^{-2-\frac{2q}{\alpha}} r^{-2-\frac{2q}{\alpha}} r^{q-1} dr \sigma(d\theta) \\ \text{[vereinfachen]} &= 2^{2m-2} c_\nu^{1-2/\alpha} \int_{S_{E^t}} \int_0^\infty (|\log(r)| + 1)^{(1+\nu)(2/\alpha-1)} \\ &\quad \cdot \min(M_{E_k^t} \|(hr)^{E_k^t} \theta_k\|, 2)^2 \cdot \psi(\theta)^{-2-\frac{2q}{\alpha}} r^{-3} dr \sigma(d\theta) \\ \text{[}\rho = hr\text{]} &= 2^{2m-2} c_\nu^{1-2/\alpha} h^2 \int_{S_{E^t}} \int_0^\infty (|\log\left(\frac{\rho}{h}\right)| + 1)^{(1+\nu)(2/\alpha-1)} \\ &\quad \cdot \min(M_{E_k^t} \|(\rho)^{E_k^t} \theta_k\|, 2)^2 \cdot \psi(\theta)^{-2-\frac{2q}{\alpha}} \rho \sigma(d\theta). \end{aligned}$$

Für alle $\rho > 0$ und alle $h \leq e^{-1}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| \log\left(\frac{\rho}{h}\right) \right| + 1 &= |\log(\rho) - \log(h)| + 1 \\ &\leq (|\log(\rho)| + 1) |\log(h)| + 1 \\ &\leq 2(|\log(\rho)| + 1) |\log(h)|. \end{aligned}$$

5. Hölderregularität für OSSRSs

Da $2/\alpha > 1$, erhält man:

$$I(h) = 2^{2m-1} c_\nu^{1-2/\alpha} h^2 |\log(h)|^{(1+\nu)(2/\alpha-1)} \int_{S_{Et}} \psi(\theta)^{-2-\frac{2q}{\alpha}} \sigma(d\theta) (I_1 + I_2)$$

wobei

$$I_1 = 4 \int_1^\infty (|\log(r)| + 1)^{(1+\nu)(2/\alpha-1)} r^{-3} dr$$

$$I_2 = M_{E_k}^2 M_{E_k^t}^2 \int_0^1 ||r^{E_k^t}||^2 (|\log(r)| + 1)^{(1+\nu)(2/\alpha-1)} r^{-3} dr.$$

Zunächst gilt, da $\psi > 0$ stetig ist auf S_{Et} :

$$\int_{S_{Et}} \psi(\theta)^{-2-\frac{2q}{\alpha}} \sigma(d\theta) < \infty.$$

Weiter gilt aufgrund des Wachstumsverhaltens des Logarithmus $I_1 < \infty$. Bleibt noch das Verhalten von I_2 zu untersuchen. Es gilt zunächst mit Lemma 5.1.1, dass für alle $\delta \in (0, 1)$ eine Konstante $c_\delta > 0$ existiert, so dass für alle $r \leq \delta$:

$$||r^{E_k^t}|| \leq C r^{a_1^{(k)}} |\log|r||^{\bar{l}-1}.$$

Da $a_1^{(k)} > 1$, folgt

$$\int_0^1 ||r^{E_k^t}||^2 (|\log(r)| + 1)^{(1+\nu)(2/\alpha-1)} r^{-3} dr < \infty,$$

denn für $\delta \in (0, 1)$, $a > -1$ und $b > 0$ gilt:

$$\int_0^\delta r^{-a} \log(r)^b dr = \int_{-\infty}^{\log \delta} e^{s(1-a)} s^b ds < \infty.$$

Daraus folgt insgesamt die Behauptung. □

5.4. Hölderregularität des gesamten OSSRSs

Nun können wir mit Hilfe der erarbeiteten Ergebnisse für die Subprozesse $X_{x_0}^{(k)}$ Aussagen bezüglich der Hölderregularität des gesamten Zufallsprozesses $X(x)$ definiert wie in 4.1.1 treffen.

Korollar 5.4.1

Für $x, y \in V$ besitzt das Zufallsfeld X definiert wie in Theorem 4.1.1 den kritischen Hölderexponenten $H^* = \min_{1 \leq k \leq m} (H_{p_k}^{(k)})$.

Beweis. Nach Proposition 5.3.8 besitzen die Subprozesse $X_{x_0}^{(k)}$ den kritischen Hölderexponenten $H_{p_k}^{(k)}$ für alle $k = 1, \dots, m$. D.h. also für $s \in (0, H^*)$ besitzen die Pfade aller Subprozesse eine Hölderregularität zum Exponenten s . Damit und mit Hilfe der mehrmalig angewandten Dreiecksungleichung folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
& |X(x_1, \dots, x_m) - X(y_1, \dots, y_m)| \\
&= |X(x_1, \dots, x_m) - X(x_1, y_2, \dots, y_m) + X(x_1, y_2, \dots, y_m) - X(y_1, \dots, y_m)| \\
&\leq |X(x_1, \dots, x_m) - X(x_1, y_2, \dots, y_m)| + |X(x_1, y_2, \dots, y_m) - X(y_1, \dots, y_m)| \\
&\leq |X(x_1, \dots, x_m) - X(x_1, y_2, \dots, y_m)| + |X_y^{(1)}(x) - X_y^{(1)}(y)| \\
&\leq |X(x_1, \dots, x_m) - X(x_1, y_2, \dots, y_m)| + A_1 \|x - y\|^s \\
&\leq |X(x_1, \dots, x_m) - X(x_1, x_2, y_3, \dots, y_m)| + |X(x_1, x_2, y_3, \dots, y_m) - X(y_1, x_2, y_3, \dots, y_m)| \\
&\quad + A_1 \|x - y\|^s \\
&\leq |X(x_1, \dots, x_m) - X(x_1, x_2, y_3, \dots, y_m)| + (A_1 + A_2) \|x - y\|^s \\
&\quad \vdots \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^m A_k \right) \|x - y\|^s
\end{aligned}$$

Umgekehrt gibt es zu $s \in (H^*, 1)$ mindestens einen Subprozess $X_y^{(l^*)}$, dessen Pfade f.s. keine Hölderbedingung zum Exponenten s erfüllen. D.h., mit

$$|X(x_1, \dots, x_m) - X(y_1, \dots, y_m)| \geq |X_y^{(l^*)}(x) - X_y^{(l^*)}(y)|$$

folgt insgesamt die Behauptung. □

6. Modellierung eines 3D-OSSRS

In diesem Kapitel wird exemplarisch ein Zufallsfeld erzeugt, bei dem deutlich wird, welchen entscheidenden Vorteil die Verknüpfung der Konzepte der Fractional Sheets und der Operator Scaling Random Fields bietet. Fractional Sheets ermöglichen es, Unterräume unabhängig voneinander zu skalieren, wie etwa die Zeitdimension von der Raumdimension abzukoppeln. Operator Scaling Random Fields ermöglichen eine anisotrope Struktur und somit ein wesentlich komplexeres

Abhängigkeitsverhalten von Unterräumen zu modellieren, wie etwa die Struktur innerhalb der Raumdimension. Kombiniert man also diese Konzepte, kann man ein räumliches Feld mit anisotroper Struktur erschaffen, welches mit fortlaufender Zeit z.B. in einer sehr ähnlichen Form erhalten bleibt.

Sei $W_2(d\mathbf{y} \times ds)$ ein komplexwertiges, independently scattered, isotropes, Gauß'sches Zufallsmaß auf $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Für $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, t_{\max}]$, $t_{\max} \leq \mathcal{T}$, $\Omega = [0, 1]^2$ und Parameter $0 < H_1, H_2, H_3 < 1$ sei ein Zufallsfeld wie folgt definiert:

$$\bar{\xi}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}} (e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} - 1) (e^{i(t_{\max} - t)s} - 1) \cdot \psi_1(\mathbf{y}) \cdot \psi_2(s) W_2(d\mathbf{y} \times ds), \quad (6.1)$$

wobei

$$\psi_1(\mathbf{y}) = \left(|\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_1 \rangle|^{2H_1} + |\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_2 \rangle|^{2H_2} \right)^{-\frac{H_1^{-1} + H_2^{-1}}{4} - \frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

$$\psi_2(s) = \frac{1}{|s|^{\frac{1}{2} + H_3}}. \quad (6.3)$$

Hierbei sind $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ normalisierte Eigenvektoren einer Matrix \mathbf{E} mit entsprechenden Eigenwerten H_1^{-1}, H_2^{-1} . Also ist die raumskalierende Matrix \mathbf{E} vollständig determiniert durch 4 Parameter.

Um die Masseerhaltung zu gewährleisten muss für das Zufallsfeld zusätzlich gefordert werden:

$$\int_{\Omega} \xi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall t \in [0, t_{\max}], \quad (6.4)$$

was man aber einfach durch die Transformation

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \bar{\xi}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{\xi}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad \forall t \in [0, t_{\max}] \quad (6.5)$$

erhält. Diese ist wohldefiniert, da das Zufallsfeld $\bar{\xi}$ nach Theorem 4.1.1 existiert und f.s. stetige Pfade hat.

6.1. Parameterhandhabung und Skalierungseigenschaften

Die Anisotropie des Zufallsfeldes wird über die Vektoren θ_1 und θ_2 bzw. durch ihre Lage zueinander mit entsprechenden Richtungen $v_1, v_2 \in [0, \pi), v_1 \neq v_2$ sowie den entsprechenden Eigenwerten $\lambda_1 := H_1^{-1}, \lambda_2 := H_2^{-1}$ gesteuert. D.h.

$$\begin{aligned}\theta_1 &= e^{iv_1} = (\cos(v_1), \sin(v_1)) \\ \theta_2 &= e^{iv_2} = (\cos(v_2), \sin(v_2))\end{aligned}$$

θ_1, θ_2 sollen Eigenvektoren der Matrix \mathbf{E} mit zugehörigen Eigenwerten λ_1 und λ_2 sein, somit ergibt sich mit $\mathbf{E}\theta_i = \lambda_i\theta_i$ für $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}\cos(v_1)a_{11} + \sin(v_1)a_{12} &= \lambda_1 \cos(v_1) \\ \cos(v_1)a_{21} + \sin(v_1)a_{22} &= \lambda_1 \sin(v_1) \\ \cos(v_2)a_{11} + \sin(v_2)a_{12} &= \lambda_2 \cos(v_2) \\ \cos(v_2)a_{21} + \sin(v_2)a_{22} &= \lambda_2 \sin(v_2)\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{-\cos(v_1)\sin(v_2)\lambda_1 + \sin(v_1)\cos(v_2)\lambda_2}{\sin(v_1)\cos(v_2) - \cos(v_1)\sin(v_2)} & \frac{\cos(v_1)\cos(v_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sin(v_1)\cos(v_2) - \cos(v_1)\sin(v_2)} \\ \frac{-\sin(v_1)\sin(v_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sin(v_1)\cos(v_2) - \cos(v_1)\sin(v_2)} & \frac{-\cos(v_1)\sin(v_2)\lambda_2 + \sin(v_1)\cos(v_2)\lambda_1}{\sin(v_1)\cos(v_2) - \cos(v_1)\sin(v_2)} \end{pmatrix}$$

Somit lässt sich nun durch Angabe von $\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2$ die Matrix \mathbf{E} eindeutig angeben. Wie man leicht sieht, gilt $\text{spur}(\mathbf{E}) = \lambda_1 + \lambda_2$, was allgemein für alle Matrizen mit zugehörigen Eigenwerten gilt.

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ erhält man z.B. wieder den einfachen Fall

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1^{-1} & 0 \\ 0 & H_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Setzt man nun

$$E_1 := \begin{pmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

so ist das Zufallsfeld $\bar{\xi}$ entsprechend des Definitionsbereichs also multi-operator-skalierend mit

$$\{\bar{\xi}(c^{E_j}(x_1, x_2, t)^T)\}_{\mathbb{R}^3} \stackrel{f.d.}{=} \{c\bar{\xi}((x_1, x_2, t)^T)\}_{\mathbb{R}^3}, \quad j = 1, 2.$$

Die zweite Skalierungseigenschaft bleibt bei dem transformierten Zufallsfeld ξ erhalten, d.h. es gilt

$$\{\xi(c^{E_2}(x_1, x_2, t)^T)\}_{\mathbb{R}^3} \stackrel{f.d.}{=} \{c\xi((x_1, x_2, t)^T)\}_{\mathbb{R}^3}.$$

Jedoch wird die erste Skalierungseigenschaft durch die Transformation abgeschwächt zu

$$\{\xi(c^{E_1}(x_1, x_2, t)^T)\}_{\mathbb{R}^3} \stackrel{f.d.}{=} \{c\xi((x_1, x_2, t)^T) + (c-1)g(t)\}_{\mathbb{R}^3}, \quad (6.7)$$

wobei $g(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{\xi}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y}$. Also besitzt das Zufallsfeld $\xi(x)$ zwei Skalierungseigenschaften, z.B. kann man mit (x_1, x_2) den Ort und mit t die Zeit bezeichnen und somit Ort und Zeit unabhängig voneinander skalieren. Diese Eigenschaft ist bei der Simulation von Entmischungsvorgängen von wesentlicher Bedeutung. Bezüglich des Raums sollte das Zufallsfeld eine anisotrope Struktur haben und mit Hilfe der Parameter H_1, H_2 die entsprechende Glätte/Rauheit angepasst bzw. anders ausgedrückt die räumliche Abhängigkeit abgebildet werden. Unabhängig vom Raum soll die zeitliche Entwicklung über den Abhängigkeitsparameter H_3 angepasst werden und die mittlere Intensität im Zeitintervall $[0, t_{\max}]$ stetig abnehmen. Diese Eigenschaften können nun mit Hilfe des vorliegenden Zufallsfeldes gewährleistet werden. Abbildungen 6.1 - 6.4 zeigen die Wirkungsweise der verschiedenen Parameter. Den speziellen Fall von isotropen Zufallsfeldern erhält man nur für $\boldsymbol{\theta}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}_2 = 0, H_1 = H_2$, siehe Abbildungen 6.3 und 6.4.

Die Parameter H_1 und H_2 kann man bezüglich des Zufallsfelds $\bar{\xi}$ wie folgt als Hurst-Indizes in Richtung $\boldsymbol{\theta}_1$ und $\boldsymbol{\theta}_2$ interpretieren: Für einen festen Zeitpunkt $t \in [0, t_{\max}]$ definiert man für beide Richtungen $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ die Subprozesse

$$\bar{\xi}_{\boldsymbol{\theta}_i}(r) := \bar{\xi}(r\boldsymbol{\theta}_i, t), i = 1, 2, r \in \{l \in \mathbb{R} : l\boldsymbol{\theta}_i \in \Omega\}. \quad (6.8)$$

Wegen der Identität $a^{\mathbf{E}}(r\boldsymbol{\theta}_i) = a^{1/H_i}(r\boldsymbol{\theta}_i)$ für alle $a > 0$ erhält man

$$\bar{\xi}_{\boldsymbol{\theta}_i}(ar) \stackrel{d}{=} a^{H_i} \bar{\xi}_{\boldsymbol{\theta}_i}(r), \quad (6.9)$$

d.h. also $\bar{\xi}_{\boldsymbol{\theta}_i}(r)$ ist selbstähnlich mit Hurst-Index H_i . Für das Feld ξ gelten hier die gleichen Einschränkungen wie in (6.7).

6. Modellierung eines 3D-OSSRS

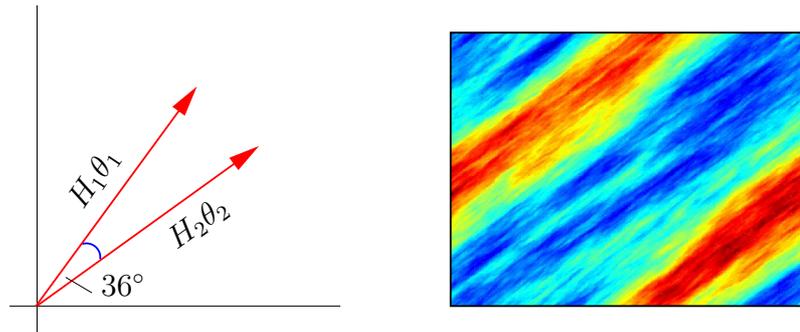


Abb. 6.1.: Anisotropes Verhalten von ξ gegeben durch $\theta_1 = e^{i \cdot 0.3\pi}$, $\theta_2 = e^{i \cdot 0.2\pi}$, $H_1 = H_2 = 0.5$. Die Einfärbungen stehen für die verschiedenen Intensitäten von ξ für einen festen Zeitpunkt $t > 0$.

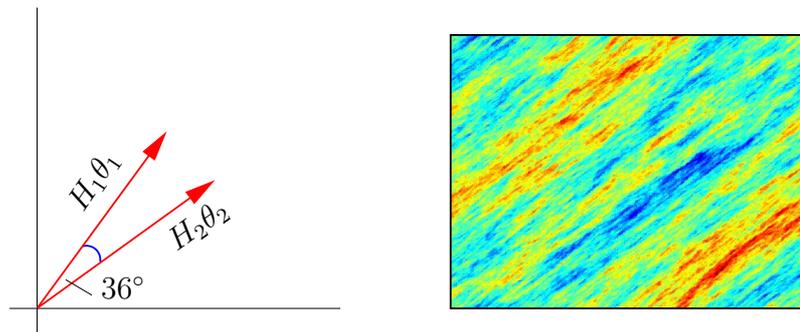


Abb. 6.2.: Anisotropes Verhalten von ξ gegeben durch $\theta_1 = e^{i \cdot 0.3\pi}$, $\theta_2 = e^{i \cdot 0.2\pi}$, $H_1 = H_2 = 0.35$.

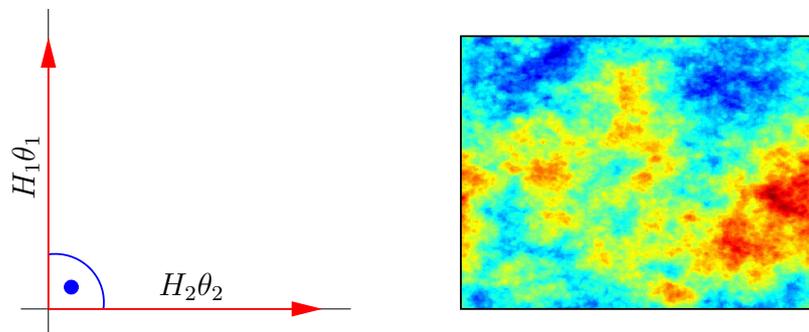


Abb. 6.3.: Isotropes Verhalten von ξ gegeben durch $\theta_1 = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$, $\theta_2 = e^{i \cdot 0}$, $H_1 = H_2 = 0.5$.

6.2. Beispiele für ξ

Im Folgenden werden zwei Simulationen von speziellen Zufallsfeldern ξ präsentiert, die in Abschnitt 7.4 verwendet werden. Das erste Beispiel ist die Realisation eines isotropen Zufallsfelds mit Parametern:

$$H_1 = H_2 = 0.6, H_3 = 0.9, \theta_1 = e^{i \cdot 0}, \theta_2 = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \quad (6.10)$$

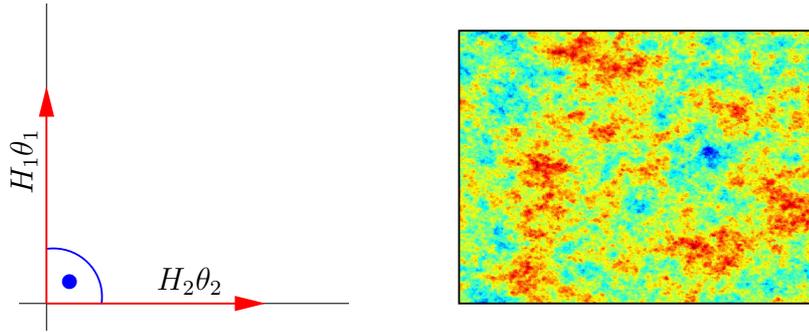


Abb. 6.4.: Isotropes Verhalten von ξ gegeben durch $\theta_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\theta_2 = e^{i\cdot 0}$, $H_1 = H_2 = 0.35$.

Dieses Feld (Abb. 6.5) hat keine Orientierung und aufgrund des Terms $(e^{i(t_{\max}-t)s} - 1)$ in (6.1) nimmt die Intensität des Feldes ab bis sie zum Zeitpunkt t_{\max} gerade 0 ist. Abschließend wird ein anisotropes Feld mit einer Orientierung von 135° und einer hohen Abhängigkeit im Raum mit folgender Parameterkonfiguration simuliert:

$$H_1 = 0.55, H_2 = 0.4, H_3 = 0.75, \theta_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \theta_2 = e^{i(\frac{3\pi}{4} + 0.1\frac{\pi}{4})} \quad (6.11)$$

Daraus ergeben sich Realisationen wie in Abbildung 6.6 zu sehen. In beiden Simulationen ist das aktive Zeitfenster des Zufallsfeldes gesetzt als $t_{\max} = 0.002$.

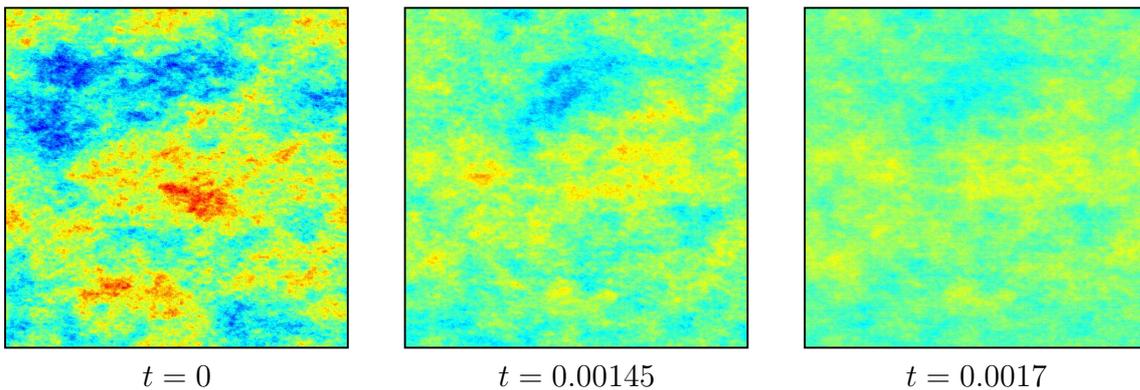


Abb. 6.5.: Simulation eines isotropen Zufallsfeldes mit einer abnehmenden Intensität über einen sehr kurzen Zeitabschnitt ($t_{\max} = 0.002$).

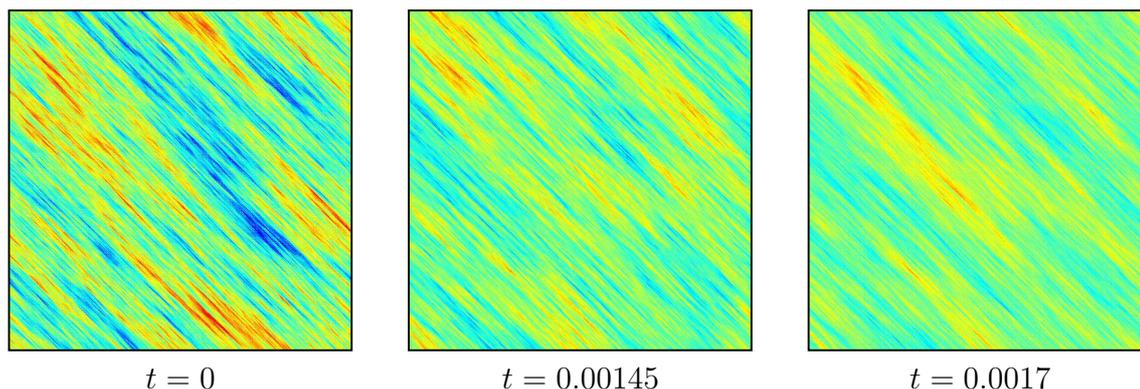


Abb. 6.6.: Simulation eines anisotropen Zufallsfelds mit einer Orientierung von 135° mit einer abnehmenden Intensität über einen sehr kurzen Zeitabschnitt ($t_{\max} = 0.002$).

6.3. Diskretisierung, Simulation und Fehlerapproximation

Zum Abschluß dieses Kapitels wird ein Algorithmus zur Simulation des oben angegebenen Zufallsfeldes angegeben sowie eine entsprechende Fehlerabschätzung, um die Gültigkeit des angegebenen Algorithmus zu beweisen. Die grundlegende Technik des Algorithmus sowie der Fehlerabschätzung wurde in [31] für OSSRFs detailliert ausgearbeitet und diente als Basis für die im Folgenden präsentierten Resultate, welche ein konkretes Beispiel für die Umsetzung eines Operator Scaling Stable Sheet sind. Anhand dieser Beschreibung und der Grundlagen in [31] ist eine Übertragung auf beliebige Operator Scaling Stable Sheets möglich, jedoch technisch für jeden Einzelfall aufwendig.

Es soll also das Zufallsfeld

$$X(x, t) = \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \quad (6.12)$$

auf $(x, t) \in [0, 1]^2 \times [0, t_{\max}]$ simuliert werden, wobei

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= \left(|\langle y, \theta_1 \rangle|^{2H_1} + |\langle y, \theta_2 \rangle|^{2H_2} \right)^{-\frac{H_1^{-1} + H_2^{-1}}{4} - \frac{1}{2}} \\ \psi_2(y) &= \frac{1}{|y|^{H_3 + 1/2}}. \end{aligned}$$

Für $i = 1, 2$ seien A_i, B_i, D_i reelle Zahlen, wobei D_i sehr klein ist, B_i klein und A_i groß genug, so dass $M_i := \frac{A_i}{D_i} \in \mathbb{N}$ und $N_i := \frac{B_i}{D_i} \in \mathbb{N}$, d.h. also

$$0 < D_i \ll B_i \ll A_i < \infty$$

und

$$D_i = \frac{B_i}{N_i} = \frac{A_i}{M_i} \quad \text{mit} \quad N_i, M_i \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe obiger Definition erfolgt die Approximation von $X(x, t)$ nun in 2 Schritten:

1. Der Integrationsbereich über \mathbb{R}^3 wird abgeschnitten auf eine kompakte Menge \mathcal{G} , aus der eine kleine Umgebung um die 0 herausgeschnitten wird. Definiere also die Menge wie folgt:

$$\mathcal{G} := ([-A_1, A_1]^2 \times [-A_2, A_2]) \setminus ([-B_1, B_1]^2 \times [-B_2, B_2])$$

Somit erhält man als erste Approximation

$$X^{\mathcal{G}}(x, t) = \operatorname{Re} \int_{\mathcal{G}} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \quad (6.13)$$

2. Nun folgt die Diskretisierung von $X^{\mathcal{G}}(x, t)$:

\mathcal{G} wird in äquidistante Quader unterteilt. Definiere dazu

$$\begin{aligned} J_1 &:= \{-M_1, \dots, M_1 - 1\}^2 \setminus \{-N_1, \dots, N_1 - 1\}^2 \\ J_2 &:= \{-M_2, \dots, M_2 - 1\} \setminus \{-N_2, \dots, N_2 - 1\} \end{aligned}$$

Nun können folgende Stützstellen und Intervalle gewählt werden:

$$\begin{aligned} \xi_{kl} &:= \left(k \cdot \frac{A_1}{M_1}, l \cdot \frac{A_1}{M_1} \right)^{\text{T}}, & (k, l) \in J_1 \\ \Delta_{kl} &:= \left[k \cdot \frac{A_1}{M_1}, (k+1) \cdot \frac{A_1}{M_1} \right) \times \left[l \cdot \frac{A_1}{M_1}, (l+1) \cdot \frac{A_1}{M_1} \right) & (k, l) \in J_1 \\ \xi_m &:= \left(m \cdot \frac{A_2}{M_2} \right), & m \in J_2 \\ \Delta_m &:= \left[m \cdot \frac{A_2}{M_2}, (m+1) \cdot \frac{A_2}{M_2} \right) & m \in J_2 \end{aligned}$$

Somit lässt sich die Diskretisierung wie folgt angeben:

$$X_M^{\mathcal{G}}(x, t) = \operatorname{Re} \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} (e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle} - 1) (e^{it\xi_m} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) W_2(\Delta_{kl} \times \Delta_m) \quad (6.14)$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie man einen geeigneten Algorithmus zur Berechnung von $X_M^{\mathcal{G}}(x, t)$ angeben kann. Wähle $x_{i,j} = c_1 \cdot (i, j)$ für $c_1 \neq 0$ sowie $t_h = c_2 \cdot h$ für $c_2 \neq 0$, so dass $(c_1 x_{i,j}, c_2 t_h) \in \Omega \times [0, t_{\max}] \forall i, j \in J_1, h \in J_2$. Mit $\xi_{kl} = D_1 \cdot (k, l)$

6. Modellierung eines 3D-OSSRS

für $(k, l) \in J_1$ und $\xi_m = D_2 \cdot m$ für $m \in J_2$ erhält man

$$\begin{aligned}
X_M^{\mathcal{G}}(x_{i,j}, t_h) &= \operatorname{Re} \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} (e^{i \langle x_{i,j}, \xi_{kl} \rangle} - 1) (e^{it_h \xi_m} - 1) \\
&\quad \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) W_2(\Delta_{kl} \times \Delta_m) \\
&= \operatorname{Re} \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} (e^{i \langle c_1 \cdot (i,j), D_1 \cdot (k,l) \rangle} - 1) (e^{ic_2 \cdot h \cdot D_2 \cdot m} - 1) \\
&\quad \cdot \psi_1(D_1 \cdot (k, l)) \cdot \psi_2(D_2 \cdot m) W_2(\Delta_{kl} \times \Delta_m) \\
&= \operatorname{Re} \sum_{(k,l) \in J_1} (e^{ic_1 D_1 (i \cdot k + j \cdot l)} - 1) \cdot \sum_{m \in J_2} (e^{ic_2 \cdot D_2 \cdot h \cdot m} - 1) \\
&\quad \cdot \psi_1(D_1 \cdot k, D_1 \cdot l) \cdot \psi_2(D_2 \cdot m) W_2(\Delta_{kl} \times \Delta_m)
\end{aligned}$$

Für $b_i = c_i D_i$, $i = 1, 2$ erhält man mit

$$\begin{aligned}
G_{M,k,l}^{\mathcal{G}}(t_h) &= \sum_{m \in J_2} e^{ib_2 \cdot h \cdot m} \cdot \underbrace{\psi_1(D_1 \cdot k, D_1 \cdot l) \cdot \psi_2(D_2 \cdot m) W_2(\Delta_{kl} \times \Delta_m)}_{=: Y_{k,l,m}} \\
&= \sum_{m \in J_2} e^{ib_2 \cdot h \cdot m} \cdot Y_{k,l,m} \tag{6.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_M^{\mathcal{G}}(x_{i,j}, t_h) &= \sum_{(k,l) \in J_1} e^{ib_1 (i \cdot k + j \cdot l)} \left(\underbrace{G_{M,k,l}^{\mathcal{G}}(t_h) - G_{M,k,l}^{\mathcal{G}}(0)}_{=: Z_{k,l,h}} \right) \\
&= \sum_{(k,l) \in J_1} e^{ib_1 (i \cdot k + j \cdot l)} Z_{k,l,h} \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Damit kann man $X_M^{\mathcal{G}}$ wie folgt darstellen:

$$X_M^{\mathcal{G}}(x_{i,j}, t_h) = \operatorname{Re} (H_M^{\mathcal{G}}(x_{i,j}, t_h) - H_M^{\mathcal{G}}(0, 0, t_h)) \tag{6.17}$$

D.h. die Berechnung von $G_{M,k,l}^{\mathcal{G}}(t_h)$ bzw. $H_M^{\mathcal{G}}(x_{i,j}, t_h)$ kann man mit Hilfe einer 1D-FFT bzw. 2D-FFT vornehmen. Bevor wir nun einen entsprechenden Algorithmus aufbauend auf der Darstellung (6.14) angeben, wird zunächst gezeigt, dass die angegebene Diskretisierung des Zufallsfeldes, wie in (6.14) angegeben, auch gegen das Zufallsfeld (6.12) konvergiert und somit eine geeignete Approximation darstellt.

6.3.1. Fehlerapproximation 1. Schritt

Im Folgenden soll in zwei Schritten gezeigt werden, dass die in (6.14) konstruierte Approximation von (6.12) auch sinnvoll ist. Zunächst werden die Felder (6.12) und (6.13) in Verbindung gebracht, in einem 2. Schritt wird das Verhältnis von (6.13) und (6.14) untersucht. Somit lässt sich der Approximationsfehler in den Abschneideprozess und den Diskretisierungsprozess unterteilen.

Proposition 6.3.1

Seien $X(x, t), X^{\mathcal{G}}(x, t)$ definiert wie in (6.12), (6.13) mit $\lambda_2 - \lambda_1 < \min(2, 2\lambda_1 - 2)$. Dann existieren Konstanten $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3 > 0$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \|X(x, t) - X^{\mathcal{G}}(x, t)\|_2 &\leq \hat{C}_3 \cdot \left(A_1^{\frac{-2-\lambda_1+\lambda_2}{2\lambda_2}} \cdot (A_2^{-H_3} + \hat{C}_2) \right. \\ &\quad \left. + B_1^{\frac{-2+3\lambda_1-\lambda_2}{4\lambda_1}} \cdot B_2^{1-H_3} + \hat{C}_1 A_2^{-H_3} \right) \end{aligned}$$

Also konvergiert $X^{\mathcal{G}}$ gegen X mit wachsendem Integrationsbereich \mathcal{G} , d.h. mit fallendem B_1, B_2 und wachsendem A_1, A_2 .

Beweis. Zunächst wird das Integral in geeignete Fälle untergliedert, die eine weitere Abschätzung ermöglichen. Es gilt:

$$\|X(x, t) - X^{\mathcal{G}}(x, t)\|_2$$

$$= \left\| \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{G}} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \right\|_2$$

$$\leq \left\| \operatorname{Re} \int_{\|\xi_1\|_{\infty} > A_1, |\xi_2| > A_2} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \right\|_2 \quad (6.18)$$

$$+ \left\| \operatorname{Re} \int_{\|\xi_1\|_{\infty} < B_1, |\xi_2| < B_2} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \right\|_2 \quad (6.19)$$

$$+ \left\| \operatorname{Re} \int_{\|\xi_1\|_{\infty} > A_1, |\xi_2| \leq A_2} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \right\|_2 \quad (6.20)$$

$$+ \left\| \operatorname{Re} \int_{\|\xi_1\|_{\infty} \leq A_1, |\xi_2| > A_2} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \right\|_2 \quad (6.21)$$

6. Modellierung eines 3D-OSSRS

D.h. wir haben für alle vier Fälle eine Abschätzung vorzunehmen. Die erste ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}
((6.18))^2 &\leq \left\| \int_{\|\xi_1\|_\infty > A_1, |\xi_2| > A_2} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \right\|_2^2 \\
&= \int_{\|\xi_1\|_\infty > A_1, |\xi_2| > A_2} \underbrace{\left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) \right|}_{|\cdot| \leq 2 \cdot 2}^2 d\xi \\
&\leq 2^4 \int_{\|\xi_1\|_\infty > A_1, |\xi_2| > A_2} \psi_1(\xi_1)^2 \cdot \psi_2(\xi_2)^2 d\xi \\
&\stackrel{Ton}{=} 2^4 \int_{\|\xi_1\|_\infty > A_1} \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \int_{|\xi_2| > A_2} |\xi_2|^{-1-2H_3} d\xi_2 \\
&= 2^4 \int_{\|\xi_1\|_\infty > A_1} \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \cdot 2 \left[\frac{1}{-2H_3} \xi_2^{-2H_3} \right]_{A_2}^\infty \\
&= 2^4 \cdot \frac{A_2^{-2H_3}}{H_3} \underbrace{\int_{\|\xi_1\|_\infty > A_1} \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1}_{[31] 2.9, 2.10} \\
&\leq 2^7 \cdot \frac{A_2^{-2H_3}}{H_3} \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - |\langle \theta_1, \theta_2 \rangle|^2} \right)^{\frac{-2-\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \frac{\lambda_2}{2 + \lambda_1 - \lambda_2} \cdot A_1^{\frac{-2-\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2}} \\
&= A_1^{\frac{-2-\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2}} \cdot A_2^{-2H_3} \cdot C_{1,\mathbf{E}}
\end{aligned}$$

wobei

$$C_{1,\mathbf{E}} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - |\langle \theta_1, \theta_2 \rangle|^2} \right)^{\frac{-2-\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \frac{2^7 \lambda_2}{(2 + \lambda_1 - \lambda_2) H_3}.$$

Die zweite Abschätzung wird mit Hilfe von [31] 1.2.3 und 1.2.4 analog zu (6.18) vorgenommen, wobei diesmal die Abschätzungen $|e^{it\xi_2} - 1| \leq |t\xi_2| \leq t_{\max} \cdot |\xi_2|$ sowie $|e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1| \leq |\langle x, \xi_1 \rangle| \leq \sqrt{2} \cdot \|\xi_1\|_2$ verwendet werden.

$$\begin{aligned}
((6.19))^2 &\leq \left\| \int_{\|\xi_1\|_\infty < B_1, |\xi_2| < B_2} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \right\|_2^2 \\
&\leq 2t_{\max}^2 \int_{\|\xi_1\|_\infty < B_1} \|\xi_1\|_2^2 \cdot \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \int_{|\xi_2| < B_2} |\xi_2|^2 \cdot |\xi_2|^{-1-2H_3} d\xi_2 \\
&= 2t_{\max}^2 \int_{\|\xi_1\|_\infty < B_1} \|\xi_1\|_2^2 \cdot \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \frac{2}{2(1-H_3)} [\xi_2^{2-2H_3}]_0^{B_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2t_{\max}^2 \int_{\|\xi_1\|_{\infty} < B_1} \|\xi_1\|_2^2 \cdot \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \frac{1}{1-H_3} B_2^{2(1-H_3)} \\
 &= \frac{2t_{\max}^2}{1-H_3} B_2^{2(1-H_3)} \underbrace{\int_{\|\xi_1\|_{\infty} < B_1} \|\xi_1\|_2^2 \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1}_{[31]_{1.2.4}} \\
 &\leq \frac{2t_{\max}^2}{1-H_3} B_2^{2(1-H_3)} \cdot \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - |\langle \theta_1, \theta_2 \rangle|^2} \right)^{\frac{-2-\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \frac{\lambda_2}{2 + \lambda_1 - \lambda_2} \\
 &\quad \cdot \frac{2\pi\lambda_1}{-2 + 3\lambda_1 - \lambda_2} \cdot 2^{\frac{-2+3\lambda_1-\lambda_2}{2\lambda_1}} \cdot B_1^{\frac{-2+3\lambda_1-\lambda_2}{2\lambda_1}} \\
 &= B_2^{2(1-H_3)} \cdot B_1^{\frac{-2+3\lambda_1-\lambda_2}{2\lambda_1}} \cdot C_{2,\mathbf{E}}
 \end{aligned}$$

wobei

$$C_{2,\mathbf{E}} = \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - |\langle \theta_1, \theta_2 \rangle|^2} \right)^{\frac{-2-\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}} \cdot \frac{t_{\max}^2 \pi \lambda_1 \lambda_2 2^{\frac{-2+3\lambda_1-\lambda_2}{2\lambda_1} + 2}}{(2 + \lambda_1 - \lambda_2)(-2 + 3\lambda_1 - \lambda_2)(1 - H_3)}.$$

Die beiden Abschätzungen für (6.20) und (6.21) ergeben sich aus der vorherigen Abschätzungen für 6.18 und aufgrund der Tatsache, dass nach 4.1.1 Konstanten $\hat{C}_1, \hat{C}_2 > 0$ existieren, so dass:

$$\begin{aligned}
 \int_{\|\xi_1\|_{\infty} < A_1} \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \right|^2 d\xi_1 &< \hat{C}_1 \\
 \int_{\|\xi_2\|_{\infty} < A_2} \left| (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_2(\xi_2) \right|^2 d\xi_2 &< \hat{C}_2.
 \end{aligned}$$

Mit Setzung der Konstanten $\hat{C}_3^2 := C_{1,\mathbf{E}} + C_{2,\mathbf{E}}$ folgt insgesamt die Behauptung. \square

6.3.2. Fehlerapproximation 2. Schritt

Proposition 6.3.2

Seien $X^{\mathcal{G}}(x, t), X_M^{\mathcal{G}}(x, t)$ definiert wie in (6.13), (6.14) und $\lambda_2 - \lambda_1 < 4$. Seien wie zuvor $D_i = \frac{A_i}{M_i} = \frac{B_i}{N_i}$ die Schrittweiten zu vorgegebenem Integrationsbereich A_i, B_i und Gitterpunkten $M_i, N_i, i = 1, 2$. Dann existiert eine Konstante \hat{C}_2 , so dass gilt:

$$\|X^{\mathcal{G}}(x, t) - X_M^{\mathcal{G}}(x, t)\|_2 \leq \hat{C}_2 \cdot \left(D_1^{(1/\lambda_2 - \delta) \cdot \beta} + \sqrt{2} D_2 + D_1 \right)$$

Beweis. Entscheidend für die Fehlerabschätzung ist hier zunächst eine geeignete Produktstruktur zu finden, daher wird zunächst die folgende Unterteilung vorgenommen:

$$\begin{aligned} & \|X^{\mathcal{G}}(x, t) - X_M^{\mathcal{G}}(x, t)\|_2^2 \\ &= \left\| \operatorname{Re} \int_{\mathcal{G}} (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) W_2(d\xi) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Re} \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} (e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle} - 1) (e^{it\xi_m} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) W_2(\Delta_{kl} \times \Delta_m) \right\|_2^2 \\ &= \left\| \operatorname{Re} \int_{\mathcal{G}} \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} 1_{\Delta_{kl}}(\xi_1) 1_{\Delta_m}(\xi_2) f(x, t, \xi) W_2(d\xi) \right\|_2^2 \\ &\leq \left\| \int_{\mathcal{G}} \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} 1_{\Delta_{kl}}(\xi_1) 1_{\Delta_m}(\xi_2) f(x, t, \xi) W_2(d\xi) \right\|_2^2 \\ &= \int_{\mathcal{G}} \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} 1_{\Delta_{kl}}(\xi_1) 1_{\Delta_m}(\xi_2) |f(x, t, \xi)|^2 d\xi \\ &\stackrel{Ton}{=} \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} |f(x, t, \xi)|^2 d\xi_2 d\xi_1 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} f(x, t, \xi) &= (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) \\ &\quad - (e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle} - 1) (e^{it\xi_m} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \end{aligned}$$

Der Ausdruck eignet sich in dieser Form noch nicht zur weiteren Abschätzung, daher wird f wie folgt umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 f(x, t, \xi) &= (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_2) \\
 &\quad \pm (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot \psi_2(\xi_m) \\
 &\quad \pm (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \\
 &\quad \pm (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_m} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \\
 &\quad - (e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle} - 1) (e^{it\xi_m} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \\
 &= (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_2(\xi_m) \cdot (\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\xi_{kl})) \\
 &\quad + (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot (\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_m)) \\
 &\quad + (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - e^{it\xi_m}) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \\
 &\quad + (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle}) (e^{it\xi_m} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Tatsache, dass $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$:

$$\begin{aligned}
 |f(x, t, \xi)|^2 &= \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_2(\xi_m) \cdot (\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\xi_{kl})) \right. \\
 &\quad + (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot (\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_m)) \\
 &\quad + (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - e^{it\xi_m}) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \\
 &\quad \left. + (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle}) (e^{it\xi_m} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \right|^2 \\
 &\leq 4 \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_2(\xi_m) \cdot (\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\xi_{kl})) \right|^2 \\
 &\quad + 4 \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot (\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_m)) \right|^2 \\
 &\quad + 4 \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - e^{it\xi_m}) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \right|^2 \\
 &\quad + 4 \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle}) (e^{it\xi_m} - 1) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \right|^2
 \end{aligned}$$

6. Modellierung eines 3D-OSSRS

Nun ist es möglich, eine Aufteilung anzugeben, welche im Folgenden zu einer geeigneten Abschätzung führen wird. Mit den bisher erarbeiteten Resultaten ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} & \left\| X^{\mathcal{G}}(x, t) - X_M^{\mathcal{G}}(x, t) \right\|_2^2 \\ & \leq \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} 4 \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \right. \\ & \quad \left. \cdot \psi_2(\xi_m) \cdot (\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\xi_{kl})) \right|^2 d\xi_2 d\xi_1 \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} 4 \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - 1) \right. \\ & \quad \left. \cdot \psi_1(\xi_1) \cdot (\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_m)) \right|^2 d\xi_2 d\xi_1 \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} 4 \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - 1) (e^{it\xi_2} - e^{it\xi_m}) \right. \\ & \quad \left. \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \right|^2 d\xi_2 d\xi_1 \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} 4 \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle}) (e^{it\xi_m} - 1) \right. \\ & \quad \left. \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \right|^2 d\xi_2 d\xi_1 \end{aligned} \quad (6.25)$$

Somit werden im Folgenden die Terme (6.22), (6.23), (6.24) und (6.25) einzeln abgeschätzt. Betrachten wir zunächst (6.22):

$$\begin{aligned} (6.22) & \leq 2^6 \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} \psi_2(\xi_m)^2 \cdot |\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\xi_{kl})|^2 d\xi_2 d\xi_1 \\ & \stackrel{Ton}{=} 2^6 \sum_{(k,l) \in J_1} \int_{\Delta_{kl}} |\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\xi_{kl})|^2 d\xi_1 \cdot \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} \psi_2(\xi_m)^2 d\xi_2 \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} \psi_2(\xi_m)^2 d\xi_2 &= \sum_{m \in J_2} \psi_2(\xi_m)^2 \int_{\Delta_m} d\xi_2 \\
 &= \sum_{m \in J_2} \psi_2(\xi_m)^2 \frac{A_2}{M_2} \\
 &= \frac{A_2}{M_2} \sum_{m \in J_2} |\xi_m|^{-2H_3-1} \\
 &\leq 2 \cdot \frac{A_2}{M_2} \sum_{m=N_2}^{M_2} |\xi_m|^{-2H_3-1} \\
 &= 2 \cdot \frac{A_2}{M_2} \sum_{m=N_2}^{M_2} \left(m \cdot \frac{A_2}{M_2} \right)^{-2H_3-1} \\
 \left[m^{-\gamma} \leq \int_{m-1}^m x^{-\gamma} dx \right] &\Rightarrow \leq \left(\frac{A_2}{M_2} \right)^{-2H_3} \cdot 2 \left(\int_{N_2-1}^{M_2} y^{-2H_3-1} dy \right) \\
 &= \left(\frac{A_2}{M_2} \right)^{-2H_3} \cdot 2 \left(\frac{1}{2H_3} \left((N_2-1)^{-2H_3} - M_2^{-2H_3} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{H_3} \left(\left(\frac{A_2}{M_2} N_2 - \frac{A_2}{M_2} \right)^{-2H_3} - A_2^{-2H_3} \right) \\
 &= \frac{1}{H_3} \left((B_2 - D_2)^{-2H_3} - A_2^{-2H_3} \right) \\
 [0 < D_i \ll B_i] &\Rightarrow < \frac{1}{H_3} \left(\left(\frac{1}{2} B_2 \right)^{-2H_3} - A_2^{-2H_3} \right) \\
 &=: C_{1,A_2,B_2,H_3}.
 \end{aligned}$$

Weiter gilt nach [31] 1.2.7 mit entsprechenden Konstanten $C_{10}, C_{11}, 0 < \beta < \min(\lambda_1, 2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}), \lambda_2 - \lambda_1 < 4$ und $\delta > 0$ beliebig:

$$\begin{aligned}
 \sum_{(k,l) \in J_1} \int_{\Delta_{kl}} |\psi_1(\xi_1) - \psi_1(\xi_{kl})|^2 d\xi_1 \\
 \leq D_1^{(1/\lambda_2 - \delta) \cdot 2\beta} \cdot \left(C_{10} \cdot B_1^{1/\lambda_1(-4-\lambda_1+\lambda_2)} \right. \\
 \left. + C_{11} \left((1 - D_1)^{1/\lambda_2(-4-\lambda_1+\lambda_2)} - A_1^{1/\lambda_2(-4-\lambda_1+\lambda_2)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

6. Modellierung eines 3D-OSSRS

$$\begin{aligned} &\leq D_1^{(1/\lambda_2 - \delta) \cdot 2\beta} \cdot \underbrace{\left(C_{10} \cdot B_1^{1/\lambda_1(-4 - \lambda_1 + \lambda_2)} + C_{11} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/\lambda_2(-4 - \lambda_1 + \lambda_2)} \right)}_{C_{2,B_1,\mathbf{E}}} \\ &= C_{2,B_1,\mathbf{E}} \cdot D_1^{(1/\lambda_2 - \delta) \cdot 2\beta} \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$(6.22) \leq 2^8 \cdot C_{1,A_2,B_2,H_3} \cdot C_{2,B_1,\mathbf{E}} \cdot D_1^{(1/\lambda_2 - \delta) \cdot 2\beta}$$

Da $\beta > 0$ und $\delta > 0$ beliebig, gilt diese Abschätzung für $(1/\lambda_2 - \delta) \cdot 2\beta > 0$. D.h. mit kleiner werdendem Gitterabstand D_1 konvergiert (6.22) gegen 0. Als nächstes folgt die Abschätzung für (6.23):

$$\begin{aligned} (6.23) &\leq 2^8 \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} \psi_1(\xi_1)^2 \cdot |\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_m)|^2 d\xi_2 d\xi_1 \\ &\stackrel{Ton}{=} 2^8 \sum_{(k,l) \in J_1} \int_{\Delta_{kl}} \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \cdot \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} |\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_m)|^2 d\xi_2 \end{aligned}$$

Es gilt mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $\xi_{2,m} \in [\xi_m, \xi_2]$ existieren, so dass

$$\left| |\xi_2|^{-H_3-1/2} - |\xi_m|^{-H_3-1/2} \right| = \left| |\xi_2| - |\xi_m| \right| \cdot |H_3 + 1/2| \cdot |\xi_{2,m}|^{-H_3-1/2-1}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} &\sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} |\psi_2(\xi_2) - \psi_2(\xi_m)|^2 d\xi_2 \\ &= \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} \left| |\xi_2|^{-H_3-1/2} - |\xi_m|^{-H_3-1/2} \right|^2 d\xi_2 \\ &= \sum_{m=-M_2}^{-N_2-1} \int_{\Delta_m} \left| |\xi_2|^{-H_3-1/2} - |\xi_m|^{-H_3-1/2} \right|^2 d\xi_2 \\ &\quad + \sum_{m=N_2}^{M_2-1} \int_{\Delta_m} \left| |\xi_2|^{-H_3-1/2} - |\xi_m|^{-H_3-1/2} \right|^2 d\xi_2 \\ &\leq \sum_{m=-M_2}^{-N_2-1} \int_{\Delta_m} \left| |\xi_2| - |\xi_m| \right|^2 \cdot |H_3 + 1/2|^2 \cdot |\xi_2|^{-2H_3-1-2} d\xi_2 \\ &\quad + \sum_{m=N_2}^{M_2} \int_{\Delta_m} \left| |\xi_2| - |\xi_m| \right|^2 \cdot |H_3 + 1/2|^2 \cdot |\xi_m|^{-2H_3-1-2} d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq D_2^2 \cdot |H_3 + 1/2|^2 \int_{-A_2}^{-B_2} |\xi_2|^{-2H_3-1-2} d\xi_2 \\
 &\quad + D_2^2 \cdot |H_3 + 1/2|^2 \sum_{m=N_2}^{M_2} |\xi_m|^{-2H_3-3} \int_{\Delta_m} d\xi_2 \\
 &\leq D_2^2 \cdot |H_3 + 1/2|^2 \cdot \frac{1}{2H_3 + 2} (B_2^{-2H_3-2} - A_2^{-2H_3-2}) \\
 &\quad + D_2^2 \cdot |H_3 + 1/2|^2 \cdot D_2^{-2H_3-3} \left(\int_{N_2-1}^{M_2} y^{-2H_3-3} dy \right) \cdot D_2 \\
 &= D_2^2 \cdot |H_3 + 1/2|^2 \cdot \frac{1}{2H_3 + 2} (B_2^{-2H_3-2} - A_2^{-2H_3-2}) \\
 &\quad + D_2^{-2H_3} \cdot |H_3 + 1/2|^2 \frac{1}{2H_3 + 2} ((N_2 - 1)^{-2H_3-2} - M_2^{-2H_3-2}) \\
 &\leq D_2^2 \cdot |H_3 + 1/2|^2 \cdot \frac{1}{2H_3 + 2} (A_2^{-2H_3-2} - B_2^{-2H_3-2}) \\
 &\quad + D_2^{-2H_3} \cdot |H_3 + 1/2|^2 \frac{1}{2H_3 + 2} \left(\frac{A_2}{D_2} \right)^{-2H_3-2} \\
 &= C_{3,A_2,B_2,H_3} \cdot D_2^2
 \end{aligned}$$

weiter gilt nach [31] 1.2.2 mit entsprechender Konstante \tilde{C}_1 :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{(k,l) \in J_1} \int_{\Delta_{kl}} \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \\
 &\leq \tilde{C}_1 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{\lambda_1}{2 - \lambda_1 + \lambda_2} \left(B_1^{\frac{-2+\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1}} - 1 \right) + \frac{\lambda_2}{2 + \lambda_1 - \lambda_2} \left(1 - (A_1 \sqrt{2})^{\frac{-2-\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_2}} \right) \right) \\
 &= C_{4,A_1,B_1}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$(6.23) \leq 2^6 \cdot C_{3,A_2,B_2,H_3} \cdot C_{4,A_1,B_1} \cdot D_2^2.$$

D.h. also, der Term (6.23) konvergiert für kleiner werdenden Abstand D_2 gegen 0. Als nächstes folgt die Abschätzung für (6.24):

$$\begin{aligned}
 (6.24) &\leq 2^4 \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} \left| (e^{it\xi_2} - e^{it\xi_m}) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \right|^2 d\xi_2 d\xi_1 \\
 &\stackrel{Ton}{=} 2^4 \sum_{(k,l) \in J_1} \int_{\Delta_{kl}} \psi_1(\xi_{kl})^2 d\xi_1 \cdot \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} \left| e^{it\xi_2} - e^{it\xi_m} \right|^2 \cdot \psi_2(\xi_m)^2 d\xi_2
 \end{aligned}$$

6. Modellierung eines 3D-OSSRS

Der erste Teil ergibt sich analog zur Abschätzung in (6.23). Somit bleibt zu betrachten:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} \left| e^{it\xi_2} - e^{it\xi_m} \right|^2 \cdot \psi_2(\xi_m)^2 d\xi_2 &\leq \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} |t|^2 |\xi_2 - \xi_m|^2 |\xi_m|^{-2H_3-1} d\xi_2 \\ &\leq |t_{\max}|^2 D_2^2 \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} |\xi_m|^{-2H_3-1} d\xi_2 \\ [\text{Analog zu (6.22)}] &\leq |t_{\max}|^2 D_2^2 \cdot C_{1,A_2,B_2,H_3} \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$(6.24) \leq 2^4 \cdot C_{4,A_1,B_1} \cdot C_{1,A_2,B_2,H_3} \cdot |t_{\max}|^2 \cdot D_2^2$$

D.h. also der Term (6.24) konvergiert für kleiner werdenden Abstand D_2 gegen 0. Zuletzt folgt die Abschätzung für (6.25):

$$\begin{aligned} (6.25) &\leq 2^4 \sum_{(k,l) \in J_1} \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_{kl}} \int_{\Delta_m} \left| (e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle}) \cdot \psi_1(\xi_{kl}) \cdot \psi_2(\xi_m) \right|^2 d\xi_2 d\xi_1 \\ &\stackrel{\text{Ton}}{=} 2^4 \sum_{(k,l) \in J_1} \int_{\Delta_{kl}} \left| e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle} \right|^2 \cdot \psi_1(\xi_{kl})^2 d\xi_1 \cdot \sum_{m \in J_2} \int_{\Delta_m} \psi_2(\xi_m)^2 d\xi_2 \end{aligned}$$

Der zweite Teil ergibt sich analog zur Abschätzung in (6.22). Somit bleibt zu betrachten:

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) \in J_1} \int_{\Delta_{kl}} \left| e^{i\langle x, \xi_1 \rangle} - e^{i\langle x, \xi_{kl} \rangle} \right|^2 \cdot \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \\ \leq \sum_{(k,l) \in J_1} \int_{\Delta_{kl}} \|x\|_2^2 \cdot \|\xi_1 - \xi_{kl}\|_2^2 \cdot \psi_1(\xi_1)^2 d\xi_1 \\ [\text{Analog zu (6.24)}] \leq \|x\|_2^2 \cdot \left(\sqrt{2} D_1 \right)^2 \cdot C_{4,A_1,B_1} \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt:

$$(6.25) \leq 2^5 \cdot C_{1,A_2,B_2,H_3} \cdot C_{4,A_1,B_1} \cdot D_1^2$$

D.h. also der Term (6.25) konvergiert für kleiner werdenden Abstand D_1 gegen 0. Die globale Konstante \hat{C}_2^2 wählt man dann als das Maximum aller vorhandenen Konstanten der Abschätzungen für die Terme (6.22 - 6.25). \square

Bemerkung 6.3.3

Proposition 6.3.1 und 6.3.2 ermöglichen nun, X beliebig genau zu approximieren. D.h. für $\epsilon > 0$ beliebig, wähle A_1, A_2, B_1, B_2 , so dass in Abhängigkeit von $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3$ und E :

$$\hat{C}_3 \cdot \left(A_1^{\frac{-2-\lambda_1+\lambda_2}{2\lambda_2}} \cdot \left(A_2^{-H_3} + \hat{C}_2 \right) \right) + B_1^{\frac{-2+3\lambda_1-\lambda_2}{4\lambda_1}} \cdot B_2^{1-H_3} + \hat{C}_1 \cdot A_2^{-H_3} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Wähle daraufhin die Schrittweiten $D_i = \frac{A_i}{M_i} = \frac{B_i}{N_i}$ bzw. die Anzahl der Gitterpunkte $M_i, N_i, i = 1, 2$ in Abhängigkeit von $A_1, A_2, B_1, B_2, \hat{C}_2$ und E , so dass

$$\hat{C}_2 \cdot \left(D_1^{(1/\lambda_2-\delta)\cdot\beta} + \sqrt{2}D_2 + D_1 \right) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Somit folgt mit der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned} \|X(x, t) - X_M^G(x, t)\|_2 &\leq \|X(x, t) - X^G(x, t)\|_2 \\ &\quad + \|X^G(x, t) - X_M^G(x, t)\|_2 \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Die folgende Bedingung zeigt, welcher Zusammenhang zwischen H_1 und H_2 erforderlich ist, damit die angegebene Approximation Gültigkeit hat.

Bemerkung 6.3.4

Die Bedingung $\lambda_2 - \lambda_1 < \min(2, 2\lambda_1 - 2)$ in 6.3.1 dominiert die Bedingung in 6.3.2 und bietet dennoch eine große Auswahl an Kombinationen aus $\lambda_1 \leq \lambda_2$ bzw. $H_1 = \lambda_1^{-1} \geq H_2 = \lambda_2^{-1}$. Betrachten wir zunächst den Fall $\lambda_1 \geq 2$, dann gilt

$$\lambda_2 - \lambda_1 < 2 \Leftrightarrow H_2 \in \left(\frac{1}{2 + H_1^{-1}}, H_1 \right],$$

im zweiten Fall ergibt sich:

$$\lambda_2 - \lambda_1 < 2\lambda_1 - 2 \Leftrightarrow H_2 \in \left(\frac{1}{3H_1^{-1} - 2}, H_1 \right].$$

So erhält man z.B. für $H_1 = 0.5$, dass $H_2 \in (0.25, 0.5]$, was eine sehr flexible Modellierung ermöglicht.

Insgesamt wurde also gezeigt, dass die Approximation des Zufallfeldes sinnvoll gewählt ist. Dies gibt uns die Rechtfertigung zur Angabe eines Simulationsalgorithmus, den wir zum Abschluß dieses Kapitels angeben möchten.

6.4. Approximationsalgorithmus

Der Quellcode zu folgendem Approximationsalgorithmus kann aus A.1 entnommen werden. Die Berechnung läuft in Adaption zu [31] in folgenden Schritten ab:

1. Simulation von $(2M_1)^2 \times 2M_2$ i.i.d. komplexwertigen $\mathcal{N}_{\mu,\sigma}$ Zufallsvariablen $W_2(\Delta_{k,l,m})$, $(k, l) \in J_1, m \in J_2$ mit Parametern $\mu = 0, \sigma = D_1 D_2^{1/2}$.
2. Berechnung von $f_{k,l,m} = \psi_1(\xi_{k,l}) \cdot \psi_2(\xi_m)$ für $(k, l, m) \in J_1 \times J_2$.
3. Berechnung von $Z_{k,l,m} = f_{k,l,m} \cdot W_2(\Delta_{k,l,m})$.
4. Berechnung von

$$\begin{aligned}
 H_M^{\mathcal{G}}(x_{u,v}, t_h) &= \sum_{(k,l) \in J_1} e^{ib_1(u \cdot k + v \cdot l)} \left(\sum_{m \in J_2} e^{ib_2 \cdot h \cdot m} \cdot Z_{k,l,m} - \sum_{m \in J_2} Z_{k,l,m} \right) \\
 &= \sum_{(k,l) \in J_1} e^{ib_1(u \cdot k + v \cdot l)} \left(FFT_{1D}(Z_{k,l,m}) - \sum_{m \in J_2} Z_{k,l,m} \right) \\
 &= FFT_{2D} \left(FFT_{1D}(Z_{k,l,m}) - \sum_{m \in J_2} Z_{k,l,m} \right)
 \end{aligned}$$

für $(u, v, h) \in J_1 \times J_2$.

5. Berechnung von

$$X_M^{\mathcal{G}}(x_{u,v}, t_h) = \text{Re} \left(H_M^{\mathcal{G}}(x_{u,v}, t_h) \right) - \text{Re} \left(H_M^{\mathcal{G}}(0, 0, t_h) \right) \approx X(x_{u,v}, t_h).$$

Hierbei sind FFT_{2D}, FFT_{1D} geeignete Versionen der zweidimensionalen, bzw. eindimensionalen Fast Fourier Transformation, welche in den meisten Programmbibliotheken für numerische Berechnungen (wie etwa für Matlab, Java oder C++ verfügbar) bereits implementiert sind. Durch diese Transformation wird eine sehr effiziente Methode zur Simulation bereitgestellt.

7. Anwendung: Simulation von Entmischungsvorgängen mit OSSRSs

M.Sc. Denis Anders
anders@imr.mb.uni-siegen.de

Prof. Dr. Kerstin Weinberg
weinberg@imr.mb.uni-siegen.de

Festkörpermechanik
FB11, Universität Siegen

M.Sc. Alexander Hoffmann
hoffmann@mathematik.uni-siegen.de

Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler
scheffler@mathematik.uni-siegen.de

Wahrscheinlichkeitstheorie und Analysis
FB6, Universität Siegen

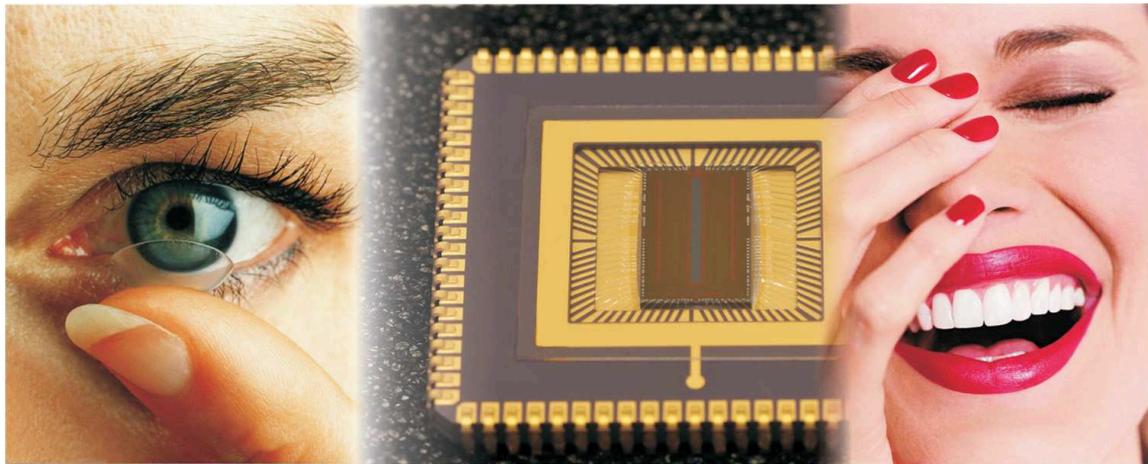


Abb. 7.1.: Breites Anwendungsspektrum wie Pflegemittel für Kontaktlinsen, Lot-Material in mikroelektronischen Anwendungen oder Bindemittel in Kosmetika. Bildquellen: [43, 44, 45].

Das folgende Kapitel ist aus einem gemeinsamen Artikel der oben genannten Autoren entstanden und erscheint im *Philosophical Magazine* ??.

Im Rahmen dieser Dissertation soll anhand dieses Kapitels aufgezeigt werden, welche

flexiblen Modellierungen mit OSSRSs möglich sind. Da nun Ort- und Zeitabhängigkeiten sowie die räumliche Anisotropie unabhängig voneinander modelliert werden können, lassen sich die physikalischen Phänomene, welche im Folgenden beschrieben werden, sehr gut simulieren.

In vielen modernen technischen Anwendungen werden diverse Mehrphasengemische verwendet, um den anspruchsvollen mechanischen, chemischen und elektrischen Anforderungen gerecht zu werden. Um ihre strukturellen Eigenschaften als kontinuierliche makroskopische Materialien zu verstehen ist es wichtig, die Mikrostruktur dieser Mischungen zu erfassen, speziell das Verständnis der Phasentrennung und Vergrößerung der Mehrkomponenten-Systeme auf der Mikrostrukturebene ist von besonderer Bedeutung für eine breite Palette an Anwendungen.

Die mikrostrukturelle Anordnung hängt zum einen von der Konfiguration des Systems und äußeren Antriebskräften ab, aber insbesondere auch zufällige physikalische Unzulänglichkeiten innerhalb des Materials sowie zufällige Störungen im thermodynamischen Feld beeinflussen im Wesentlichen die mikrostrukturelle Entwicklung. Da alle physikalischen Prozesse zu einem gewissen Grad zufälligen Inhomogenitäten unter realistischen Bedingungen ausgesetzt sind, kann der Einfluss von zufälligen Erscheinungen in modernen physikalischen Modellen nicht vernachlässigt werden.

Zur Beschreibung der mikrostrukturellen Konfiguration verwenden wir ein erweitertes Cahn-Hilliard Phasenfeldmodell, welches eine Evolutionsgleichung für die Diffusion in heterogenen Festkörpergemischen darstellt. Dieses Diffusionsmodell haben wir im Rahmen unserer Zusammenarbeit um Einflussgrößen resultierend aus anisotropen Zufallsfeldern erweitert. Diese spielen bei der Darstellung mikrostruktureller Veränderungen eine essentielle Rolle, da diese Zufallsfelder adäquat physikalische Inhomogenitäten im Material abbilden können. Zur Darstellung der Vielseitigkeit und Flexibilität unseres Modells führen wir numerische Simulationen von Entmischungsvorgängen im binären, eutektischen Weichlot Sn-Pb durch und vergleichen unsere Ergebnisse mit Experimenten. Es ist das erste Mal, dass die mikrostrukturelle Entwicklung in einem Mehrkomponenten-System mit OSSRSs modelliert wird, wobei die erzielten Resultate unsere Erweiterung rechtfertigen.

Lange Zeit war die Material-Modellierung und Untersuchungen zur Mikrostruktur vor allem durch empirische Studien geprägt. Systematische experimentelle Beobachtungen lieferten die benötigten Ergebnisse, um strukturelle Eigenschaften der betrachteten Materialien abzuleiten. Allerdings ist in den letzten Jahrzehnten das Interesse an der mathematischen Modellierung von Materialien auf verschiedenen Längen- und Zeitskalen stetig gewachsen. Das Hauptziel dieser Disziplin besteht darin, ein Modell sowie numerische Simulationen zu entwickeln, um ein Verständnis für die physikalischen Prozesse innerhalb der Materialien zu gewinnen. Außerdem sollten solche Modelle Vorhersagen für das Materialverhalten von zukünftigen Anwendungen liefern. Hierbei sind experimentelle Daten noch eine wesentliche Quelle für die

Validierung und Parametrisierung der Materialmodelle. Bei der Modellierung strebt man eine minimale Anzahl von Parametern an, wobei die Ergebnisse gleichzeitig mit den Experimenten übereinstimmen sollten. Hierbei ist es also wichtig, die dominierenden Größen und Einflüsse sekundärer Ordnung herauszufiltern sowie Variablen, die zu vernachlässigen sind. Das Ziel ist immer ein recht einfaches Modell abzuleiten, welches die komplexen Prozesse in der Realität hinreichend genau abbilden kann.

Die schnelle Entwicklung im Bereich des wissenschaftlichen Rechnens ermöglichte die Einbettung der mathematischen Materialmodelle in den Rahmen eines numerischen Approximations-Schemas, wie z. B. spektrale Methoden oder Finite-Elemente-Analyse. Insbesondere im Bereich der diffusionsinduzierten Phasentrennung und Vergrößerung der berechneten Prozesse wird mit diesen Methoden die Trennung der Mischung in verschiedenen Phasen und auch die Rate der Wachstumsphase sehr gut abgebildet. Allerdings entspricht diese deterministisch berechnete Mikrostruktur einer ideal glatten Lamelle, welche nicht realistisch ist. Eine typische Mikrostruktur der Phasenevolution in einem eutektischen Sn-Pb-Lot ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Die Aufnahme zeigt Bereiche unterschiedlicher Mikrostruktur zu einem festen Zeit-

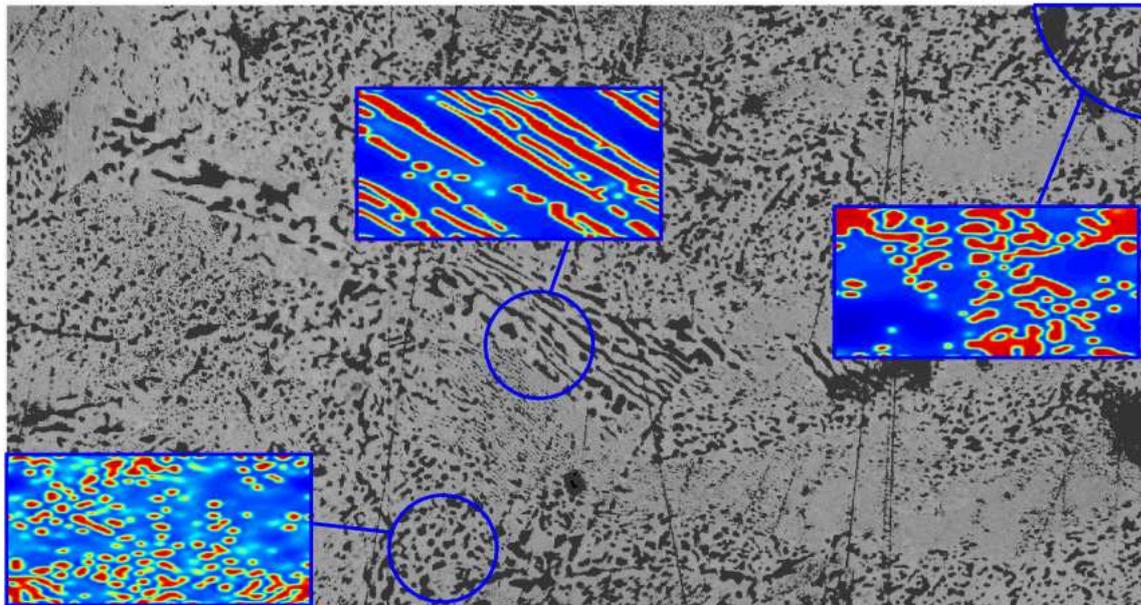


Abb. 7.2.: Aufnahme einer $100\ \mu\text{m} \times 50\ \mu\text{m}$ eutektische Sn-Pb Platte nach 10h Alterung bei einer Temperatur von 146°C . Die blauen Bilder zeigen die entsprechend simulierte Mikrostrukturen.

punkt. Es gibt einige Bereiche, in denen sich orientierte Lamellen-ähnliche Strukturen entwickelt haben und in benachbarten Regionen entstehen verzerrte blasenähnliche Partikel. Aber wodurch entsteht die Divergenz der Beobachtungen von der idealen Theorie? Ein Materialwissenschaftler würde antworten, dass nichts perfekt ist und es immer externe Störungen gibt, Temperaturschwankungen und Inhomogenitäten,

und auf lange Sicht ihr Einfluss schwindet. Allerdings ist die spezielle Mikrostruktur direkt durch körperliche Mängel im Material und durch zufällige Abweichungen in den äußeren thermodynamischen Feldern betroffen. Nach unserer Auffassung kann der Einfluss solcher zufälligen Phänomene nicht in den modernen physikalischen Modellen vernachlässigt werden.

Um solche Störungen mit zu modellieren, präsentieren wir hier einen neuen Ansatz zur Beschreibung von Phasenevolutionen. Wir wollen ein kohärentes Diffusionsmodell für Phasenseparation und Vergrößerung der Phasen präsentieren, welches zufällig treibende Kräfte berücksichtigt. Zu diesem Zweck nutzen wir ein OSSRS im Cahn-Hilliard Phasen-Feld Modell, um die Phasenevolution in einer binären Mischung zu beschreiben.

Natürlich sind wir nicht die ersten, welche stochastische Diffusions-Modelle einführen. Das Interesse an diesen Erscheinungen geht zurück auf die frühen Arbeiten von Cahn, Cook und Hilliard [16, 17, 18]. Alle nachfolgenden Modelle basierten auf dieser Theorie, welche auf Gaussian White Noise und Brownian Motion als Störquelle beruht. Jedoch kann auch mit diesen Modellen nur unzureichend abgebildet werden, wie wir im Folgenden präsentieren.

7.1. Motivation

In mikroelektronischen Bauteilen werden diverse metallische Verbindungselemente verwendet, welche die mechanische als auch die elektrische Bindung der verschiedenen Systemkomponenten sicherstellen. Hierbei entscheidet gerade die Lebenserwartung der verwendeten Lotmaterialien über die Zuverlässigkeit der gesamten Struktur. Denn vor allem Korn- und Phasengrenzen stellen Bereiche dar, die für mechanisches Materialversagen in Form von Rissinitialisierung und -ausbreitung besonders anfällig sind, siehe Abb. 7.3. Diese Problemstellung erhält in Zeiten der Miniaturisierung mikroelektronischer Bauteile (z.B. Multifunktionshandys, Notebooks, etc.) ein wachsendes Interesse. Denn für besonders kleine Bauteile erhöht sich der Einfluss der Mikrostruktur auf das Verhalten des Gesamtsystems. Weitere Anwendungen finden sich beispielsweise in der Herstellung von Kosmetika (7.4), deren Lebenserwartung und Zuverlässigkeit aufgrund ihrer mikroskopischen Beschaffenheit zu untersuchen ist.

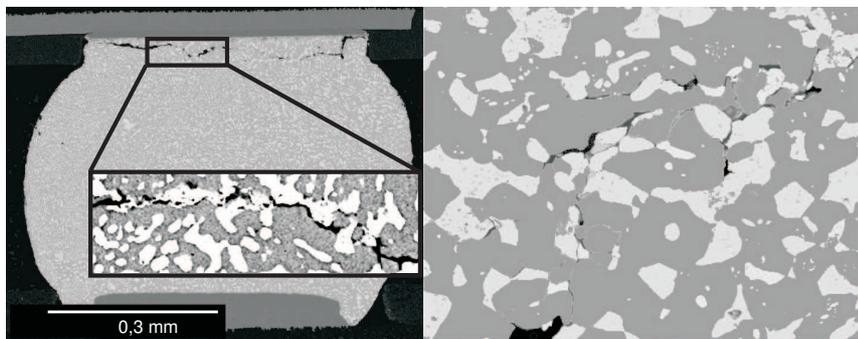


Abb. 7.3.: Mechanisches Versagen durch Risse entlang der Phasengrenzen in einem Lotball. Bildquelle: [15].



Abb. 7.4.: Mikroverhalten von Bindemitteln in Kosmetika. Bildquelle: [46]

In unseren Untersuchungen konzentrieren wir uns auf zweiphasige Lotlegierungen.

7.2. Modellierung der Phasentmischung und Vergrößerung

Die Verteilung der einzelnen Phasen eines Mehrkomponentengemisches lässt sich über ihre Konzentrationen $c_1, c_2, \text{etc.}$ darstellen. Für ein binäres Gemisch gilt $c_2 = 1 - c_1 =: c$. Um die zeitliche Entwicklung des Konzentrationsfeldes $c(x, t)$ innerhalb eines repräsentativen Gebietes Ω im Zeitintervall $(0, \mathcal{T})$ zu untersuchen verwenden wir ein Diffusionsmodell, welches ursprünglich von Cahn und Hilliard in [16] entwickelt wurde und erweitern es um einen Zufallsprozess. Somit erhalten wir die Problemstellung in klassischer Form als: Finde $c : \Omega \times (0, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= -\nabla \mathbf{j} + \xi(x, t) \\ &= \nabla (\mathbf{M} \nabla \mu) + \xi(x, t) \\ &= \nabla (\mathbf{M} \nabla (\partial_c \Psi^{\text{ch}} - \lambda \Delta c)) + \xi(x, t) \end{aligned} \quad (7.1)$$

in $\Omega \times (0, \mathcal{T})$ gilt. \mathbf{j} steht hier für den Konzentrationsfluss, der durch das negative Produkt aus Mobilität $\mathbf{M}(c) = Dc(1-c)\mathbf{I}$ (mit Diffusionskoeffizient D) und dem Gradienten des chemischen Potentials μ gebildet wird. Das chemische Potential ist eine Größe, welche sich aus der variationellen Ableitung $\delta_c(\bullet) = \partial_c(\bullet) - \nabla(\partial_{\nabla c}(\bullet))$ der Systemenergie $E(c)$ ergibt:

$$E(c) = \int_{\Omega} (\Psi^{\text{ch}} + \Psi^{\text{sur}}) \, d\Omega, \quad \text{mit } \Psi^{\text{sur}} = \frac{\lambda}{2} \|\nabla c\|^2, \quad (7.2)$$

wobei Ψ^{sur} den Beitrag der Oberflächenenergie zur Gesamtenergie (Helmholtzenergie) darstellt. Der Materialparameter $\lambda = \kappa l^2$, der sich aus der Oberflächenenergiedichte κ und der Längenskala l der Übergangsbereiche der einzelnen Phasen zusammensetzt, gewichtet den Einfluss der Krümmung der bei der Entmischung entstehenden Partikel. Ψ^{ch} stellt hier die freie chemische Energiedichte des Gemisches dar. Die chemische Energiedichte lässt sich experimentell ermitteln. Gemäß der Flory-Huggins Theorie thermodynamischer Gemische [22, 29] lautet die allgemeine Form von Ψ^{ch} :

$$\Psi(c) = \Psi^{\text{conf}}(c) = g_1 c + g_2 (1-c) + \theta [c \ln(c) + (1-c) \ln(1-c)] + \chi c(1-c) \quad (7.3)$$

Hierbei sind θ und χ temperaturabhängige Materialparameter, welche die chemische Wechselwirkung zwischen den Bestandteilen des Gemisches erfassen. Die Terme $g_1 c$ und $g_2 (1-c)$ quantifizieren die freie Energiedichte der einzelnen Komponenten. Die Anfangskonzentration des Gemisches sei bekannt $c(x, 0) = c_0(x)$. Um die Massenerhaltung zu gewährleisten und die natürlichen Randbedingungen aus der Variation

des Energiefunktional (7.2) mit einzubeziehen, werden homogene Neumannrandbedingungen vorgeschrieben:

$$\langle \mathbf{j}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{M} \nabla \mu, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{M} \nabla \left(\frac{\partial \Psi(c)}{\partial c} - \lambda \Delta c \right), \mathbf{n} \rangle = 0 \quad \text{in } \partial \Omega \times (0, T) \quad (7.4)$$

$$\langle \nabla c, \mathbf{n} \rangle = 0 \quad \text{in } \partial \Omega \times (0, T) \quad (7.5)$$

Hierbei ist \mathbf{n} das Einheitsnormalenvektorfeld zu $\partial \Omega$.

Das Zufallsfeld $\xi(x, t)$ stellt eine entscheidende Erweiterung unseres Modells dar. Zwar gibt es bereits einige Arbeiten in Anlehnung an [17, 18], jedoch werden die Zufallsprozesse in diesen Arbeiten stets als isotrope Gauß-Prozesse (weißes Rauschen, Brownsche Molekularbewegung, etc.) modelliert. Da sich in Experimenten gezeigt hat, dass sich physikalische Inhomogenitäten (Defekte in der Kristallstruktur, etc.) im Allgemeinen anisotrop im Material verteilen, haben wir uns dazu entschieden hier operatorskalierte, anisotrope Zufallsfelder in das bestehende Cahn-Hilliard Modell einzuarbeiten. Die Motivation gerade diese Klasse von Zufallsfeldern zu verwenden entstand durch Prof. H.-P. Schefflers Arbeiten zur anisotropen Diffusion in porösen, heterogenen Medien [9, 41]. Da es sich bei der Phasenentmischung und Vergrößerung im Grunde auch um diffusionsinduzierte Prozesse handelt, war die Einarbeitung der in diesen Arbeiten verwendeten Zufallsfelder eine konsequente Erweiterung des Modells.

7.3. Numerische Approximation und Diskretisierung des Problems

Für die numerische Approximation leiten wir vorerst die primale variationelle Formulierung der betrachteten Diffusionsgleichung her. Dazu multiplizieren wir Gleichung (7.1) mit einer Testfunktion φ , verwenden die Greenschen Integralformeln im Zusammenhang mit den homogenen Randbedingungen (7.4, 7.5) und erhalten die Form: Finde $c \in H^2(\Omega)$ so dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} \varphi \, d\Omega = & - \left(\int_{\Omega} M_c \nabla (\partial_c \Psi) \nabla \varphi \, d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla (M_c) \Delta c \nabla \varphi \, d\Omega + \lambda \int_{\Omega} M_c \Delta c \Delta \varphi \, d\Omega \right) \\ & + \int_{\Omega} \xi \varphi \, d\Omega \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega) \end{aligned} \quad (7.6)$$

erfüllt wird. Für die räumliche Diskretisierung der Gleichung (7.6) verwenden wir ein Galerkinverfahren, das auf dem isogeometrischen Finite-Element Konzept aufbaut. Hierzu verwenden wir einen endlichdimensionalen Testraum $\mathcal{V}^h \subset H^2(\Omega)$, der durch global mindestens C^1 -stetige Basisfunktionen aufgespannt wird. Diese hohe Stetigkeitsanforderung realisieren wir durch den Einsatz von B-Splines als Basisfunktionen

7. Anwendung: Simulation von Entmischungsvorgängen mit OSSRSs

unserer FE-Formulierung, vergleiche mit [25, 2, 3]. Die zeitliche Diskretisierung wurde durch ein implizites Crank-Nicholson-Verfahren umgesetzt.

7.4. Simulation der Entmischung und Vergrößerung in einem Weichlot

Sowohl bei der numerischen Simulation als auch bei allen experimentellen Untersuchungen konzentrieren wir uns auf das eutektische Weichlot Sn-Pb (63% Sn, 37% Pb). Während der Alterungsexperimente der Sn-Pb-Legierung bei 150°C zeigte sich in den mikroskopischen Aufnahmen der geschliffenen und polierten Proben ein sehr heterogenes Materialgefüge (siehe Abb. 7.5). Zwar kann man ganz klar eine Phasentrennung und spätere Vergrößerung der anfänglich homogenen Legierung beobachten, jedoch gibt es auf globaler Ebene keine einheitlichen Gefügestrukturen. Es finden sich Bereiche, in denen sich orientierte Lamellenmuster ausbilden, sowie Gebiete, in denen sphärische Partikelstrukturen zu finden sind.

Ohne den Einfluss äußerer anisotroper Kraftfelder ist man stets darauf beschränkt reine sphärische Partikelstrukturen oder unorientierte Lamellenmuster (für den Fall, dass c_0 nahe bei 0.5 ist) abzubilden. Abb. 7.2 illustriert sehr deutlich, dass unser numerisches Diffusionsmodell durch den Einsatz operatorskalierender Zufallsfelder in der Lage ist, beliebige Mikrostrukturen abzubilden.

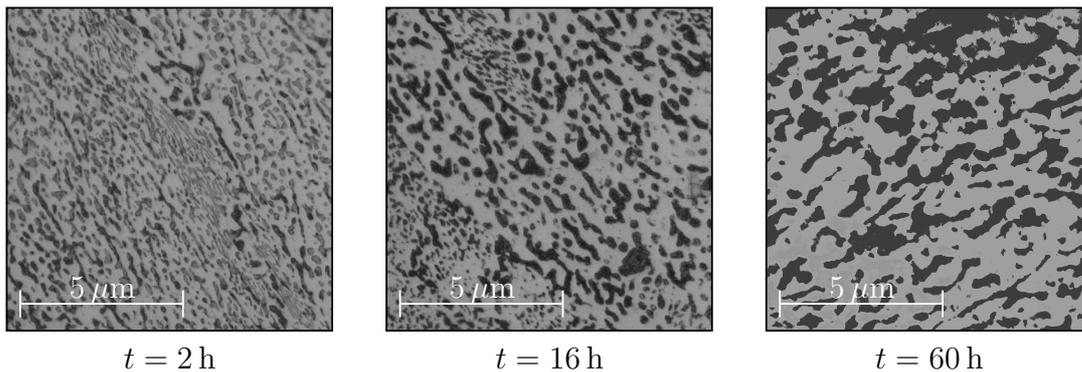


Abb. 7.5.: Mikroaufnahme eines Alterungsexperiments von eutektik Sn-Pb bei einer Temperatur von 150°C. Hierbei beschreibt t die Zeit nach der Erstarrung.

7.4.1. Simulation des deterministischen Diffusionsmodells

Für die Simulation der mikrostrukturellen Entwicklung innerhalb des deterministischen Modells setzen wir $\xi = 0$. In dieser Situation beobachtet man das typische Szenario isotroper Zersetzung. Simulationsergebnisse für die frühen Stadien der Phasenseparation sind in Abb. 7.6 dargestellt. Der Prozess der Phasenvergrößerung und Reifung ist in Abb. 7.7 dargestellt. Die rechteckige Form der Phaseninseln in den sehr späten Stadien bildet eine Minimierung der Oberflächenenergie. Dieser Effekt sieht nicht realistisch aus, ist jedoch in der idealisierten Cahn-Hilliard-Theorie inhärent.

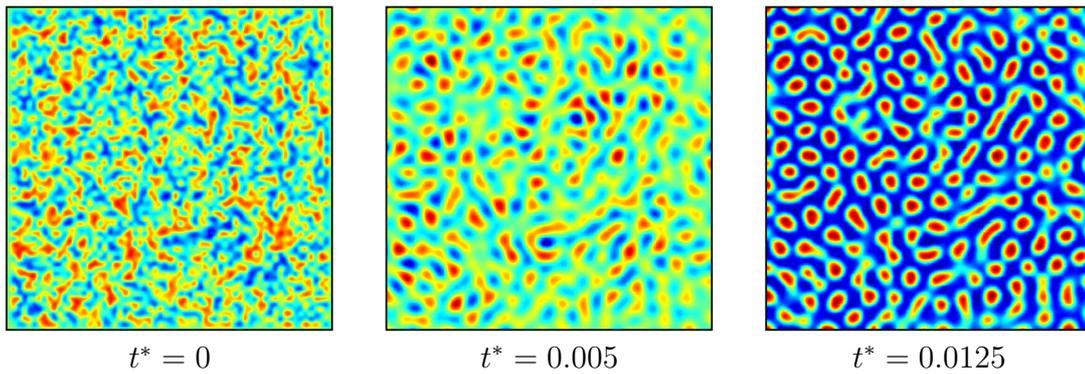


Abb. 7.6.: Simulationsergebnisse der Zersetzung mit dem deterministischen Modell während der frühen Stadien der Phasenseparation.

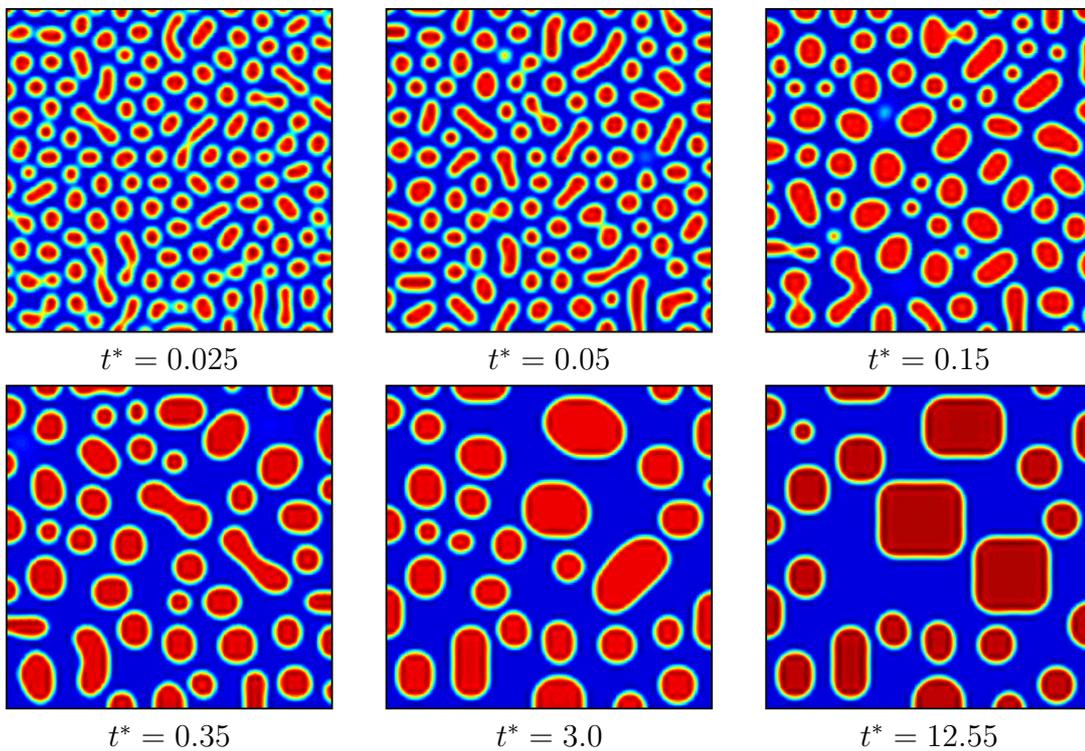


Abb. 7.7.: Simulationsergebnisse der Zersetzung mit dem deterministischen Modell während der frühen Reifephase.

7.4.2. Simulation des stochastischen Diffusionsmodells

Um anisotrope zufällige Störungen in das Diffusionsmodell zu implementieren setzen wir nun ξ wie in Gleichung (6.5) gegeben. In all unseren numerischen Simulationen wirkt unser Zufallsfeld nur in den sehr frühen Phasen der Zersetzung, was auch aus physikalischer Sicht sinnvoll ist, da das Material sehr schnell einen stabilen Zustand

erreicht, in dem der Einfluß von äußeren Störungen sehr schnell abnimmt.

Im ersten Beispiel wollen wir die Entwicklung der zufällig verzerrten Partikel während Phasenseparation darstellen. Dieses kann durch ein isotropes Zufallsfeld mit folgenden Parametern abgebildet werden:

$$H_1 = H_2 = 0.35, H_3 = 0.99, \theta_1 = (1, 0), \theta_2 = e^{i\pi/2}. \quad (7.7)$$

Auch diese Simulation startet in einem homogenen Stadium, das in dem instabilen Regime gekühlt wird. Der Einfluss des Zufallsfeldes während der Phasenseparation ist offensichtlich (Abb. 7.8). Durch den zufälligen Beitrag wird eine Morphologie entwickelt, die in Übereinstimmung mit den experimentell beobachteten, nicht orientierten unregelmäßigen Mikrostrukturen in Abb. 7.5 steht, im Gegensatz zu den regulären sphärischen und elliptischen Phaseninseln in der deterministischen Simulation. Die simulierte Mikrostruktur zeigt nach der Trennung der Phasen eine typische Vergrößerung, siehe Abb. 7.9.

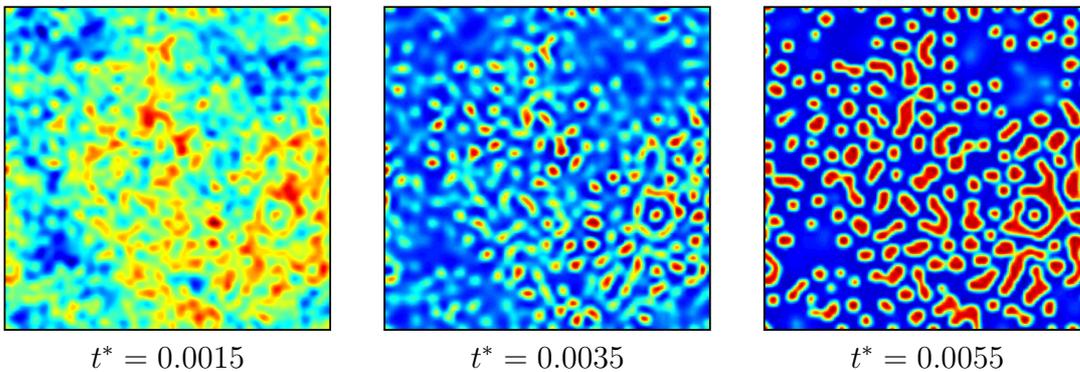


Abb. 7.8.: Entwicklung der verzerrten Partikel während der frühen Stadien der Phasenseparation innerhalb der stochastischen Diffusionsmodells ($t_{\max} = 0.00375$).

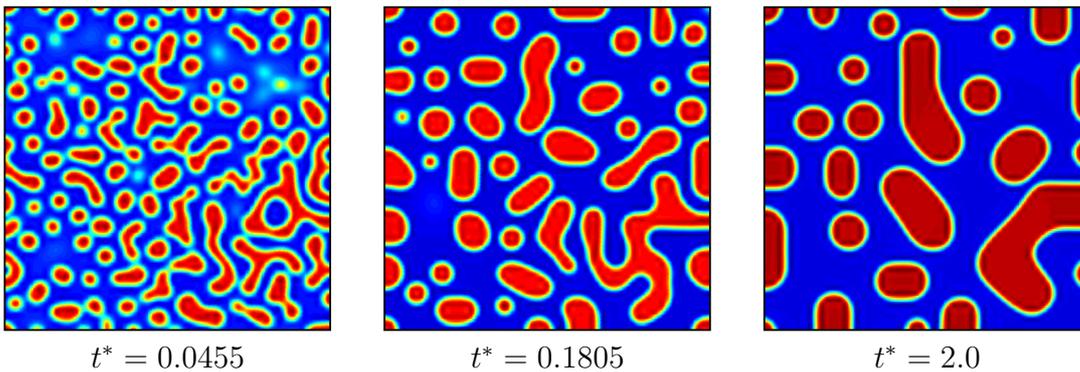


Abb. 7.9.: Entwicklung der verzerrten Partikel während der frühen Stadien der Reifephase innerhalb der stochastischen Diffusionsmodells ($t_{\max} = 0.00375$).

Im zweiten Beispiel präsentieren wir den Einfluß eines anisotropen Zufallsfeldes mit einer durchschnittlichen Orientierung -45° . In dieser Konfiguration ist es möglich, die

Struktur der orientierten Lamellen zu reproduzieren, wie man sie während der Alterungsexperimente von eutektischen Sn-Pb beobachtet, vgl. Abb. 7.10. Die lamellare Mikrostruktur entsteht vorwiegend während der frühen Stadien der Phasenseparation. In den späteren Stadien der Vergrößerung wachsen diese Strukturen zusammen und eine klare Orientierung kann nicht mehr erkannt werden.

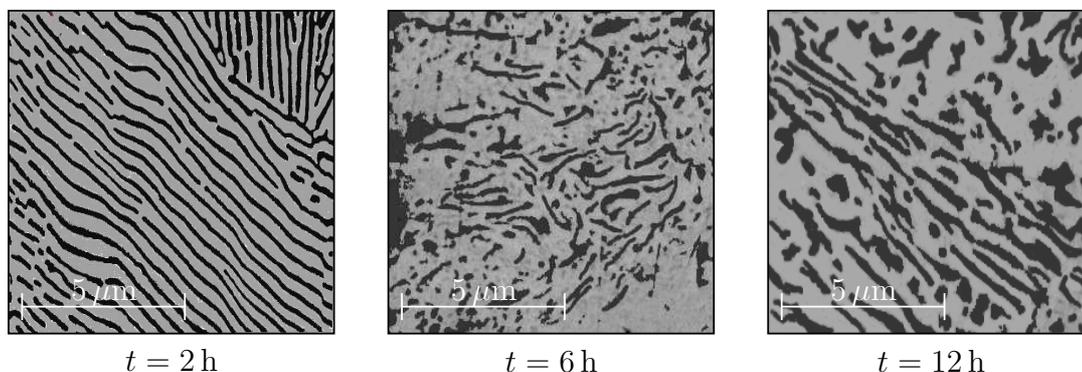


Abb. 7.10.: Mikroaufnahme von beobachteten Lamellenstrukturen während eines Alterungsexperiments von eutektik Sn-Pb Loten.

Die benötigten Parameter für ein solches Feld sind gewählt als:

$$H_1 = 0.35, H_2 = 0.4, H_3 = 0.75, \theta_1 = e^{-i\frac{1}{4}\pi}, \theta_2 = e^{-i\frac{1.02}{4}\pi} \quad (7.8)$$

Die Simulationsergebnisse für die mikrostrukturelle Entwicklung, welche durch dieses Zufallsfeld getrieben sind, decken sich mit den beobachteten Ergebnissen. Bei Beginn der Entmischung entstehen lamellare Strukturen mit einer durchschnittlichen Orientierung von -45° wie erwartet, siehe Abb. 7.11. Nachdem der Einfluss des Feldes bei $t^* = 0.00375$ verschwindet, startet der Reife- und Stabilisierungsprozess analog zum deterministischen Modell, eine gewisse Orientierung bleibt analog zu den experimentellen Ergebnissen jedoch erhalten, siehe Abb. 7.12.

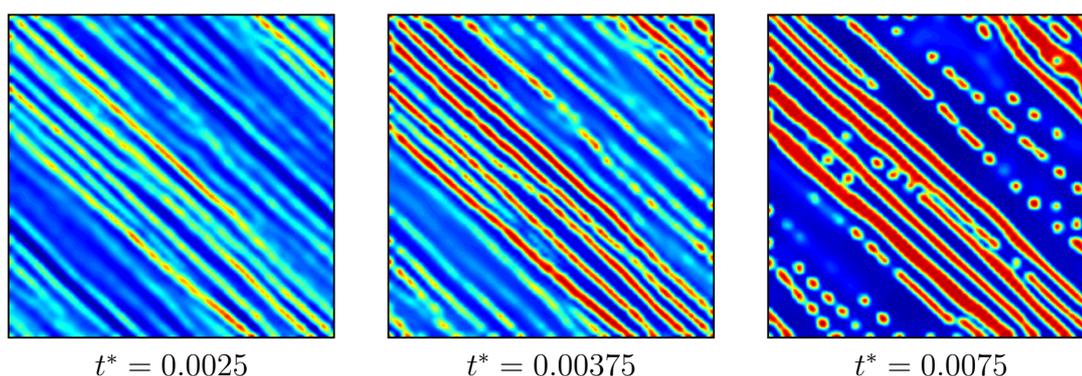


Abb. 7.11.: Entwicklung der lamellaren Mikrostruktur während der frühen Stadien der Phasenseparation innerhalb des stochastischen Diffusionsmodells ($t_{\max} = 0.00375$).

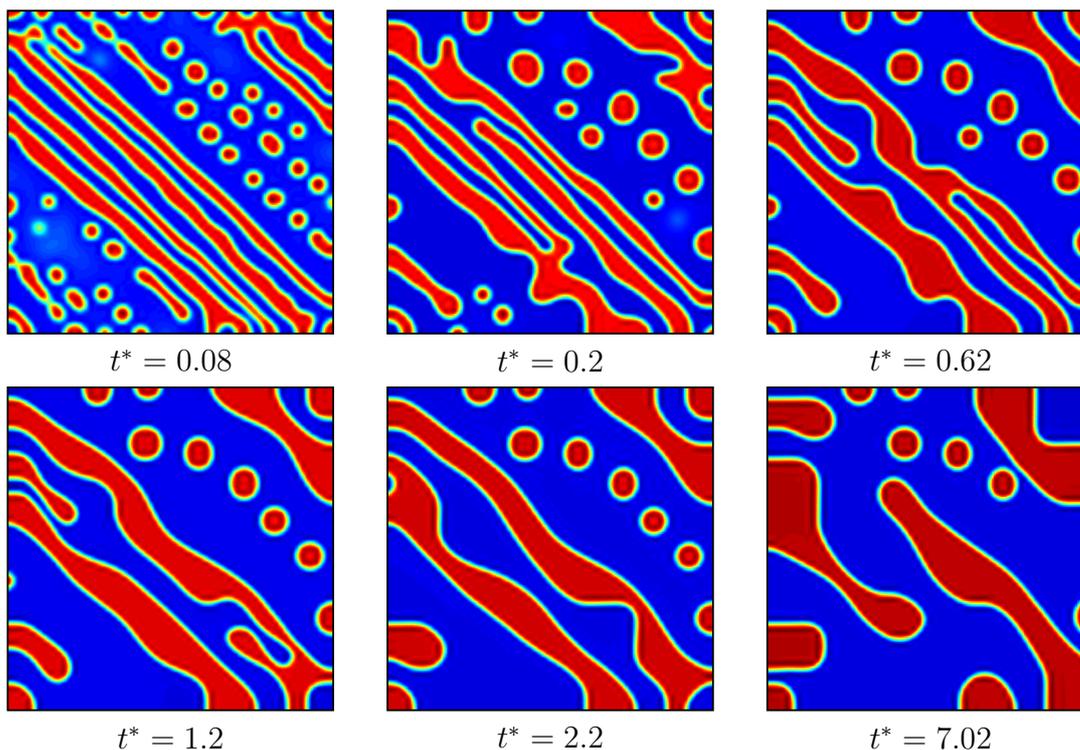


Abb. 7.12.: Entwicklung der lamellaren Mikrostruktur während der frühen Stadien der Reifephase innerhalb des stochastischen Diffusionsmodells ($t_{\max} = 0.00375$).

Als letztes Beispiel und Ausblick wird nun noch die Simulation einer kristallinen Struktur vorgestellt. Wie in Abbildung 7.2 zu sehen, gibt es lokal verschiedene Orientierungen. Daher ist ein Zufallsfeld wünschenswert, welches diese lokal verschiedenen Einflüsse berücksichtigt. Wir haben daher ein Zufallsfeld mit lokal unterschiedlichen Parametern konstruiert, wie in Abbildung 7.13 zu sehen.

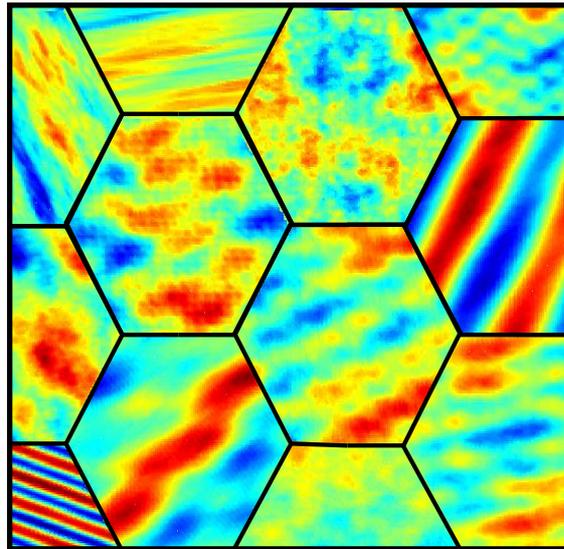


Abb. 7.13.: Illustration eines zellenförmigen kristallinen Zufallsfeldes bei $t^* = 0.0001$. Die schwarzen Linien dienen nur der Veranschaulichung.

Dieses liefert die gewünschten Ergebnisse von lokal unterschiedlichen Einflüssen, wie in Abbildung 7.14 zu sehen.

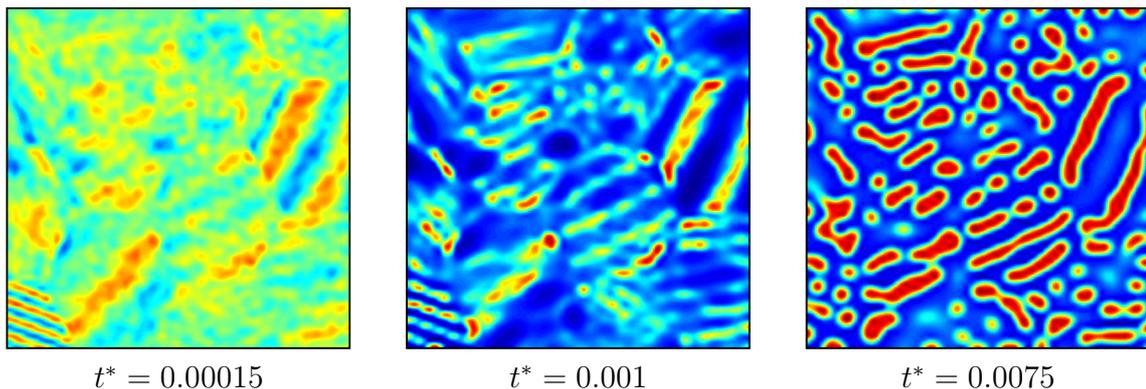


Abb. 7.14.: Simulation von anisotroper Diffusion mit kristalliner Orientierung.

7.5. Zusammenfassung der Studie

Insgesamt ist deutlich geworden, dass die Brown'sche Bewegung eine zu einfache Beschreibung der Diffusion in komplexen Systemen ist. Wir haben gezeigt, dass die Einbindung der OSSRSs eine sinnvolle Erweiterung des Cahn-Hilliard Phasen-Feld Modells darstellt. Unser Modell deckt sich mit den experimentellen Beobachtungen. Weiterführend ergeben sich viele neue Fragen. Ein ganz interessanter Punkt ist die Parameterschätzung der Zufallsfelder, welche zur Zeit für diese Experimente noch nicht gewährleistet werden kann.

8. Ausblick, Weiterentwicklungen

Aufbauend auf den bisherigen Ergebnissen ergeben sich weitere spannende Fragen und Aufgaben. Für *Fractional Brownian Motion* und *Fractional Brownian Sheets* gibt es eine Vielzahl von Forschungsergebnissen, welche mit der hier erarbeiteten Konstruktion auf die Klasse der *OSSRSs* übertragen werden oder zumindest als Anhaltspunkt für weitere Forschungsrichtungen verwendet werden können.

Darüber hinaus gibt es auf dem Gebiet der *OSSRFs* ebenso weitere interessante Ergebnisse. So wurden in [12] OSSRFs $X(x)$ entwickelt für Matrizen $E(x)$, d.h. die Parameter des Zufallsfeldes sind abhängig vom Ort $x \in \mathbb{R}^d$. Diese Ergebnisse lassen sich auf OSSRSs übertragen und bieten ein breites Anwendungsspektrum. Es ist nun also möglich, lokale anisotrope Strukturen zu erschaffen, die des Weiteren verschieden “raue” resp. “glatte” Gebiete zulassen, siehe Abb. 8.1.

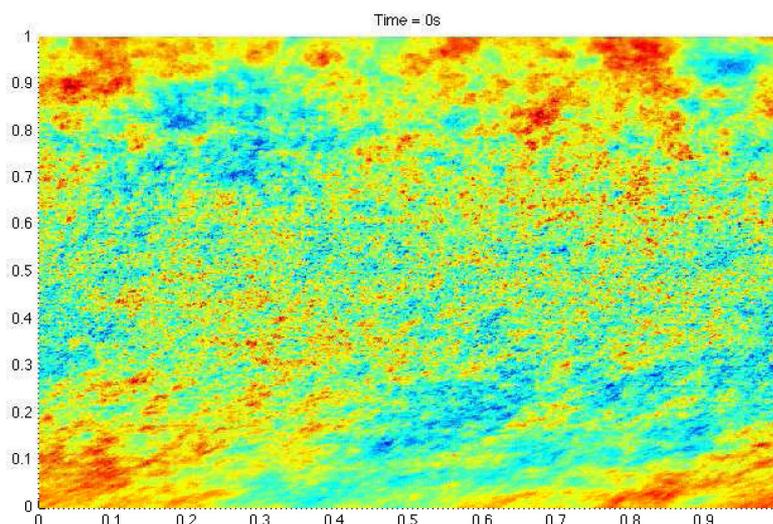


Abb. 8.1.: Realisation eines OSSRSs mit Parametern $H(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x)$

Eine nächste Aufgabe besteht in der Schätzung geeigneter lokaler Hölderexponenten und geeigneter lokaler Richtungen. Da in Kapitel 5 die Hölderregularität detailliert behandelt wurde, können wir in einem nächsten Schritt geeignete Techniken zur Schätzung entwickeln. Somit können wir für Strukturen wie beispielsweise in Abb. 8.2 zu sehen, geeignete Parameter anpassen und ähnliche Strukturen modellieren. Dies wurde beispielsweise in [19] mit Hilfe von Multifractional Brownian Motion

8. Ausblick, Weiterentwicklungen

vorgenommen. Da wir nun auch geeignete lokale Anisotropien zulassen können, sollte hier eine Verbesserung der bisher erkannten Resultate möglich sein.

Eine geeignete Parameterschätzung ist ebenso für Anwendungen, wie in Kapitel 7 präsentiert, interessant. Um Strukturen wie in Abb. 7.10 zu sehen, geeignet zu modellieren, ist es in einem nächsten Schritt wünschenswert, die Orientierung und Korngrößen geeignet schätzen zu können, um realistische Simulationen aufgrund von Messdaten vornehmen zu können.



Abb. 8.2.: Höhenkarte der Sierra Nevada, Bildquelle: [47]

Insgesamt läßt sich feststellen, dass auf dem Gebiet der OSSRF und OSSRS die entscheidenden Grundlagen geschaffen wurden und sich nun ein reichhaltiges und vielseitiges Forschungsgebiet erschließt, auf Basis dessen weitere erfolgreiche Arbeiten möglich sind.

A. Programmierung von OSSRSs

A.1. Erzeugung von OSSRSs über die Harmonizable Darstellung

```
1 %Parameters:
2 % alpha : Index of stability of the stable r.v. ( alpha \in (0, 2] )
3 % H1 : smoothness parameter for space (dimensions x, y)
4 % H2 : smoothness parameter for time
5 % A : half size of edge of domain of integr. in space ( [-A, A]^2)
6 % T : half size of domain of integration in time ( [-T, T] )
7 % M : half number of steps in each space dimension
8 % N : half number of steps in time (time: {-N, ..., N-1} * (T/N) )
9 % a1, a2 : eigenvalues of scaling matrix in 2d space (dimensions x,y)
10 % v1, v2 : angles of eigenvectors of scaling matrix in 2d space
11 % C1, C2 : scaling factors in direction of the eigenvectors
12 % C3 : scaling factor in time
13 % rho : parameter rho of function phi
14 % recommendation: C1=C2=C3 = 1, rho=2
15 function [Y, tmin, tmax]=genMOS2d1d(alpha, H1, H2, A,...
16 T, M, N, a1, a2, v1, v2, C1, C2, C3, rho)
17 % Part 1: Simulation of isotropic stable r.v.s
18 % Part 1.1: Simulation of complex isotropic gaussian r.v.s
19 Z = complex(randn(2*M, 2*M, 2*N), randn(2*M, 2*M, 2*N));
20 Z = Z * (A/M)^(2/alpha)*(T/N)^(1/alpha);
21
22 % Part 1.2: If alpha < 2, then multiply with sqrt of stable r.v. with
23 % parameter beta' = 1 and alpha' = alpha/2
24 if alpha < 2
25 A1shift = tan(pi*alpha/4);
26 A1 = rstab(alpha/2, 1, 8*M*M*N) + A1shift;
27 A1 = (cos(pi*alpha/4))^(2/alpha)*reshape(A1, 2*M, 2*M, 2*N);
28 Z = A1.^(1/2).*Z; % release memory by deleting array
29 %which is not needed any more
30 clear ('A1');
31 end;
32 clear('Z1'); % release memory by deleting array
33 % which is not needed any more
34 % Part 2: calculation of kernel function phi
35 [km, lm, mm] = meshgrid(-A:(A/M):(A-(A/M)), -A:(A/M):(A-(A/M)), ...
36 -T:(T/N):(T-(T/N)));
37
38 phi = (C1*(abs(km*cos(v1) + lm*sin(v1))).^(rho/a1) ...
39 + C2*(abs(km*cos(v2) + lm*sin(v2))).^(rho/a2))...
40 .^((-H1-(a1+a2)/alpha)/rho);
41 phi = phi .* ((C3 * abs(mm)).^(-H2-1/alpha));
42 clear('km', 'lm', 'mm')
43
44 % Part 3: set center elements to zero (to avoid infinity)
45 phi(M:M+1, M:M+1, :) = 0;
46 phi(:, :, N:N+1) = 0;
```

A. Programmierung von OSSRSs

```

48     % Part 4: Multiply simulated random variables and values of phi
49     Y = phi.*Z;
50     clear('phi', 'Z');

52     % Part 5: FFT in 3rd dimension (time)
53     Y = fftshift(Y, 3);

55     for iz = 1:(2*M)
56         FT = fft ( reshape( Y (:, iz, :), 2*M, 2*N) )' );
57         Y(:, iz, :) = FT';
58     end;

60     Y1 = Y(:, :, 1);
61     Y = Y - repmat(Y1, [1, 1, 2*N]);
62     clear('Y1');

64     Y = fftshift(Y, 3);

66     % Part 6: FFT in 1st and 2nd dimensions (space)
67     Y = fftshift(Y, 1);
68     Y = fftshift(Y, 2);
69     Y = fft2(Y);
70     Y = real(Y - repmat(Y(1, 1, :), [2*M, 2*M, 1]) );
71     Y = fftshift(Y, 1);
72     Y = fftshift(Y, 2);

74     % Part 7: Graphic output (generate movie)
75     %center to 0
76     Y = Y - repmat(mean(mean(Y)), [2*M, 2*M, 1]);

78     % find minimal and maximal values of simulated MOSSRF
79     tmax = max(max( max(Y)));
80     tmin = min(min( min(Y)));
81     Y = Y./max(tmax,-tmin);

83     tmax = max(max( max(Y)));
84     tmin = min(min( min(Y)));

87     Y(:, :, (N+1):(2*N)) = [];
88     nframes = N; % number of frames in the movie
89     Frames = moviein(nframes); % initialize the matrix 'Frames'

91     for k=1:nframes
92         mesh(0:1/(2*M):1-1/(2*M), 0:1/(2*M):1-1/(2*M), Y(:, :, k)),
93         view(0,90);
94         caxis([tmin, tmax]);
95         Frames(:, k)=getframe;
96     end
97     % Now save as movie:
98     movie2avi(Frames, 'movie_MOS_2d_1d.avi', 'compression', 'None', 'fps', 4)
99     toc; % display total used time

```

Symbolverzeichnis

$\mathbb{E}X$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X
<i>i.i.d.</i>	unabhängig identisch verteilt
1_A	Indikatorfunktion der Menge A
$\stackrel{d}{=}$	Gleichheit in Verteilung
$\stackrel{f.d.}{=}$	Gleichheit aller endlichdimensionalen Randverteilungen
$\mathcal{N}_{\mu, \sigma^2}$	Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2
$S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$	stabile Verteilung mit Stabilitätsindex α , Streuparameter σ , Schiefeparameter β und Lageparameter μ
$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$	X besitzt die Verteilung $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$
$S_\alpha S$	symmetrisch α stabil (X ist $S_\alpha S \Leftrightarrow X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$)
S_d	Einheitssphäre im \mathbb{R}^d , d.h. $S_d = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{s}\ = 1\}$
$\ x\ _p$	p -Norm, d.h. $(\sum x_i^p)^{1/p}$
$L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$	Raum der p -fach integrierbaren Funktionen bzgl. dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y}
$\#A$	Anzahl der Elemente einer Menge A
$(x)_+$	$\max(0, x)$
∇	Nabla-Operator
Δ	Laplace-Operator
Γ	$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

Abbildungsverzeichnis

2.1.	α -stabile Lévy-Bewegungen mit Parametern $\alpha = 1.5, \beta = 0$	10
2.2.	α -stabile Lévy-Bewegungen mit Parametern $\alpha = 1.5, \beta = 1$	10
2.3.	α -stabile Lévy-Bewegungen mit Parametern $\alpha = 1.5, \beta = -1$	10
6.1.	Parameterhandling Anisotrop #1	76
6.2.	Parameterhandling Anisotrop #2	76
6.3.	Parameterhandling Isotrop #1	76
6.4.	Parameterhandling Isotrop #2	77
6.5.	Simulation eines isotropen Zufallsfelds	77
6.6.	Simulation eines anisotropen Zufallsfelds	78
7.1.	Anwendungsspektrum von Entmischungsvorgängen	93
7.2.	Experimentelle Beobachtung vs. Simulation	95
7.3.	Beispielanwendung #1	97
7.4.	Beispielanwendung #2	97
7.5.	Mikroaufnahme eines Alterungsexperiments von eutektik Sn-Pb . . .	101
7.6.	Ergebnisse der Zersetzung mit dem deterministischen Modell #1 . . .	102
7.7.	Ergebnisse der Zersetzung mit dem deterministischen Modell #2 . . .	102
7.8.	Ergebnisse der Zersetzung mit dem stochastischen Modell #1	103
7.9.	Ergebnisse der Zersetzung mit dem stochastischen Modell #2	103
7.10.	Mikroaufnahme von beobachteten Lamellenstrukturen	104
7.11.	Ergebnisse der Zersetzung mit anisotropem stochastischen Modell #1	104
7.12.	Ergebnisse der Zersetzung mit anisotropem stochastischen Modell #2	105
7.13.	zellenförmig kristallines Zufallsfeld	106
7.14.	Simulation von anisotroper Diffusion mit kristalliner Orientierung. . .	106
8.1.	Realisation eines OSSRSs mit Parametern $H(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x)$	107
8.2.	Höhenkarte der Sierra Nevada, Bildquelle: [47]	108

Literaturverzeichnis

- [1] ADLER, R. J. (1981): *The Geometry of Random Fields*, John Wiley & Sons
- [2] ANDERS, D., WEINBERG, K. (2010): *Comput. Mat. Sci.*
- [3] ANDERS, D., WEINBERG, K. (2010) *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng* **10**:01210
- [4] ANDERS, D., HOFFMANN, A., SCHEFFLER, H.-P., WEINBERG, K. (2011) *Application of operator-scaling anisotropic random fields to binary mixtures*, *Philosophical Magazine*, Volume 91, Issue 29, S. 3766-3792
- [5] AYACHE, A., LEGER, S., PONTIER, M. (2002): *Drap Brownien Fractionnaire* *Potential Analysis*, Volume 17, Number 1, Issue 31-43, S. 3143 - 3162 *Fourier Analysis and Applications* 9, 215236
- [6] AYACHE, A., XIAO, Y. (2005): *Asymptotic Properties and Hausdorff Dimensions of Fractional Brownian Sheets* *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, Volume 11, Issue 4, S.407 - 439
- [7] BAUER, H. (1998): *Maß- und Integrationstheorie*, 2.Auflage, Gruyter, Berlin
- [8] BAUER, H. (2001): *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 5.Auflage, Gruyter, Berlin
- [9] BENSON, D.A., MEERSCHAERT, M.M., BAEUMER, B., SCHEFFLER, H.-P. (2006): *Water Resour. Res.*, **42**:W01415
- [10] BIERMÉ, H., MEERSCHAERT, M.M., SCHEFFLER, H.-P. (2007): *Operator scaling stable random fields*, *Stochastic Processes and their Applications*, Volume 117, Issue 3, S. 312-332
- [11] BIERMÉ, H., LACAUX, C. (2009): *Hölder regularity for operator scaling stable random fields*, *Stochastic Processes and their Applications* Volume 119, Issue 7
- [12] BIERMÉ, H., LACAUX, C., SCHEFFLER, H.P. (2010) *Multi-Operator Scaling Random Fields*, Preprint: <http://www.uni-siegen.de/fb6/src/scheffler/research/multios101216.pdf>
- [13] BILLINGSLEY, P. (1995): *Probability and Measure*, Third Edition, Wiley, New York
- [14] BONAMI, A., ESTRADE, A. (2003): *Anisotropic analysis of some Gaussian models*, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Volume 9, Number 3, S. 215-236

- [15] BÖHME, T. (2008): *Investigations of microstructural changes in lead-free solder alloys by means of phase field theories*, Dissertation an der Technischen Universität Berlin
- [16] CAHN, J.W., HILLIARD, J.E. (1958): *Free energy of a nonuniform system I*, J. Chem. Phys. **28**:258–267
- [17] COOK, H.E., DEFONTAINE, D. (1969): Acta Metall. **17**:915–923
- [18] COOK, H.E. (1970): Acta Metall. **18**:297
- [19] ECHELARD, A., BARRIERE, O., LEVY VEHEL, J. (2011) *Terrain modelling with multifractional Brownian motion and self-regulating processes*, Preprint: http://apis.saclay.inria.fr/html/Papers/files/pdf/EchelardAntoine_BarriereOlivier_Levy%20VehelJacques_10-08-2009_publi_en3.pdf
- [20] FRATZL, A., PENROSE, O., LEBOWITZ, J.L. (1999): *Modelling of Phase Separation in Alloys with Coherent Elastic Mismatch*, Journal of Statistical Physics, Volume 95, Numbers 5-6, S. 1429-1503
- [21] FELLER W. (1971): *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2, Wiley, New York
- [22] FLORY P.J. (1942): *Thermodynamics of high polymer solutions*, J. Chem. Phys. **10**:51–61
- [23] GARCKE H. (2003): *On Cahn-Hilliard systems with elasticity*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, S. 307-331
- [24] GNEDENKO B.V., KOLMOGOROV A.N. (1954): *Limit distributions for sums of independent random variables*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts
- [25] GOMEZ, H., CALO, V.M., BAZILEVS, Y, HUGHES, T.J.R. (2008): Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **197**: 4333-4352
- [26] HARDIN JR.C.D. (1984): *Skewed stable variables and processes*, Technical Report 79, Center for stochastic Processes at the University of North Carolina, Chapel Hill
- [27] HIRSCH, M.W (1974): *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press
- [28] HEUSER, H. (2006): *Funktionalanalysis. Theorie und Anwendung*, 4. Auflage, B. G. Teubner-Verlag, Wiesbaden
- [29] HUGGINS, M.L. (1942): *Theory of solutions of high polymers*, J. Am. Chem. Soc. **64**:1712–1719
- [30] KAMONT, A. (1996): *On the Fractional Anisotropic Wiener Field*, Prob.Math.Stat. 16(1) 8598

- [31] KEGEL, T. (2011): *Simulation and Estimation of Operator Scaling Stable Random Fields* Dissertation am Lehrstuhl Stochastik, Universität Siegen
- [32] KOLMOGOROV, A.N. (1940): *Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum* C.R.A.S. de l'URSS 26 S. 115 - 118
- [33] KÔNO N. (1970): *On the modulus of continuity of sample functions of gaussian processes*, J. Math. Kyoto Univ., 10: 493- 536
- [34] KÔNO, N., MAEJIMA, M. (1990): *Hölder continuity of sample paths of some self-similar stable processes*, Tokyo J. Math., 14(1) :93-100
- [35] KÔNO, N., MAEJIMA, M. (1991): *Self-similar stable processes with stationary increments*, Stable processes and related topics (Ithaca, NY, 1990), volume 25 of Progr. Probab., pages 275-295, Birkhäuser, Boston
- [36] KÖNIGSBERGER, K. (2004): *Analysis 2*, 5. Auflage, Springer, Berlin
- [37] LEPAGE, R. (1981): *Multidimensional infinitely divisible variables and processes*, Probability in Banach spaces, Volume 860 of Lecture Notes in Math., pages 279-284. Springer, Berlin
- [38] MEERSCHAERT, M.M., SCHEFFLER, H.P. (2001): *Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice*, Wiley, New York
- [39] SAMORODNITSKY, G., TAQQU M.S. (1994): *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman and Hall, London
- [40] WU, W. B., MICHAILIDIS G., ZHANG D. (2004): *Simulating Sample Paths of Linear Fractional Stable Motion*, IEEE Transactions on Information Theory, Volume 50, Issue: 6, 1086- 1096
- [41] ZHANG, Y., BENSON, D.A., MEERSCHAERT, M.M., LABOLLE, E.M., SCHEFFLER, H.-P. (2006): *Physical Review E* **74**:026706
- [42] ZOLOTAREV, V.M. (1986): *One-dimensional stable distributions* , American Mathematical Soc., Providence, RI *J. Stat. Phys.* **95**:1429-1503

Bildquellen

- [43] http://www.hartlauer.at/Portal/jsp/hartlauer2/unternehmen/images/presse/kontaktlinsen_02.jpg, zuletzt gesehen 21/05/2011
- [44] <http://www.ims.fraunhofer.de/typo3temp/pics/1255ed6d51.jpg>, zuletzt gesehen 21/05/2011
- [45] http://www.bernadette-kosmetik.com/02%20MUS%20People_2004.jpg, zuletzt gesehen 21/05/2011
- [46] http://a7.idata.over-blog.com/300x128/4/36/27/53/header_lippenstift.jpg, zuletzt gesehen 21/05/2011
- [47] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c4/Maps-for-free_Sierra_Nevada.png, zuletzt gesehen 21/05/2011

