

Carsten Ebert

Systemidentifikation zur Modellierung mechanischer Strukturen – Markovparameter zur experimentellen Schadens erfassung

Schriftenreihe der Arbeitsgruppe
für Technische Mechanik
im Institut für Mechanik und Regelungs-
technik - Mechatronik

Herausgeber: Claus-Peter Fritzen

Band 6

Impressum

Prof. Dr.-Ing. Claus Peter Fritzen

Arbeitsgruppe für Technische Mechanik

Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik

Universität Siegen

57068 Siegen

ISSN 2191-5601

URN urn:nbn:de:hbz:467-7352

Zugl.: Siegen, Univ., Diss., 2013

Systemidentifikation zur Modellierung mechanischer Strukturen

—

Markovparameter zur experimentellen Schadenserfassung

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTOR-INGENIEUR

vorgelegt von

Carsten Ebert, M.Sc.

aus Leipzig

eingereicht dem

Department Maschinenbau

der Universität Siegen

Referent: Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Michael Link

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Armin Lenzen

Tag der mündlichen Prüfung

2012/07/13

Vorwort

Inhaltlich entstand die vorliegende Arbeit während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Forschungsbereich Mechanik / Dynamik der Fakultät Bauwesen an der Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig. Dokumentiert werden die Forschungsergebnisse, die ich bei der Bearbeitung des Forschungsprojektes „Identifikation und Erstellung von Modellen der Strukturdynamik auf Basis der Systemtheorie zur Schadenserkennung und -lokalisierung“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft erzielen konnte. Der dafür gewährten finanziellen Förderung gilt mein Dank.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing Armin Lenzen, auf dessen Engagement die Grundlage dieser Arbeit beruht, für die ständige Bereitschaft zur fachlichen Diskussion. Seine Anregungen prägen den Inhalt maßgeblich.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen, der sich maßgeblich eingesetzt hat, mir das Promotionsverfahren an der Universität Siegen zu ermöglichen und dessen Hinweise zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben, ebenso wie die Anregungen von Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Link, der dankenswerterweise das Koreferat übernommen hat.

Maßgebliche Unterstützung bei der Fertigstellung der Arbeit bekam ich von meinem jetzigen Arbeitgeber, der Firma Wölfel Beratende Ingenieure GmbH + Co. KG. Hierfür möchte ich mich besonders bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Horst Peter Wölfel und Herrn Dr.-Ing. Fritz-Otto Henkel bedanken.

Meiner ehemaligen Kollegin M.Sc. Gerlinde Schubert sowie meinen ehemaligen Kollegen Dipl.-Ing. (FH) Lukas Richter und M.Sc. Thomas Schubert gilt ebenfalls Dank für die gewährte Unterstützung.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Partnerin sowie meinen Eltern für ihr Verständnis und ihre Unterstützung.

Für Susan, Lucia und Elise

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine neue Methodik beschrieben, wie auf Basis von Schwingungsmessungen Strukturveränderungen lokalisiert werden können. Bisherige schwingungsbasierte Verfahren nutzen häufig modale Daten. Zur Lokalisation und Quantifizierung von festgestellten Strukturveränderungen ist dann oftmals ein Abgleich mit einem Finite-Element-Modell notwendig. Die dafür erforderliche Bestimmung einer beschränkten Anzahl sensitiver Modellparameter ist anspruchsvoll und beeinflusst die Modellgüte maßgeblich. Abweichend hierzu werden in dieser Arbeit strukturmechanisch interpretierbare Parameter direkt aus experimentell erfassten Schwingungssignalen generiert. Ein Finite-Element-Modell ist hierfür nicht notwendig.

Auf Basis eines systemtheoretischen Modellansatzes wird das Übertragungsverhalten linearer Strukturen als Black-Box-Modell in Zustandsraumdarstellung modelliert. Die Systemidentifikation erfolgt unter Verwendung von Methoden der linearen Algebra. Die dabei gewonnenen Modellparameter sind zunächst rein mathematisch deutbar. In dieser Arbeit wird erörtert, wie diese Black-Box-Zustandsraummodelle in physikalisch deutbare White-Box-Modelle überführt werden können. Anhand von theoretischen Betrachtungen unter Verwendung der Bewegungsgleichung der Mechanik wird zunächst gezeigt, wie Markovparameter und strukturmechanische Parameter (Masse, Dämpfung, Steifigkeit) in Zusammenhang stehen. Im Weiteren ist dargestellt, welche theoretisch notwendigen Randbedingungen bei der experimentellen Anwendung einzuhalten sind. Vollständig gelingt dies bei der realen Anwendung kaum, deswegen werden korrespondierende strukturmechanische Größen auf Basis von Markovparametern eingeführt, mit Hilfe derer eine Lokalisation von Schäden dennoch möglich ist.

Nachdem auf Basis von simulierten Messdaten die Funktionalität der vorgestellten Methodik nachgewiesen wurde, erfolgt die Anwendung unter Nutzung experimenteller Daten. Anhand von Laborversuchen ist ausführlich das Verhalten einer Kragarmstruktur dargestellt. Als Strukturveränderung dienen verschieden positionierte Gewichte und Sägeschnitte zur Veränderung von Strukturmasse und Steifigkeit. Abschließend werden die Ergebnisse eines experimentellen Großversuches an einer Spannbeton-Bogenbrücke präsentiert, bei der der Ausfall eines Spannbeton-Hängers lokalisiert werden konnte.

Abstract

The present work serves to describe a new methodology how structural changes can be located on the basis of vibration measurements. So far, vibration-based methods often use modal data. For the localisation and quantification of detected structural changes a comparison with a finite element model then is often necessary. The determination of a limited number of sensitive model parameters as necessary, which is necessary for this purpose, is challenging and influences the model quality significantly. In deviation thereto, parameters are generated in this work which are interpretable from the structure-mechanical aspect, but which are generated direct on the basis of experimentally acquired vibration signals, so that a finite element model is not required.

Using a model approach based on system theory the transfer behaviour of linear structures is modelled as black-box-model in state-space formulation. The system identification is effected using linear algebra methods. Initially the model parameters gained are interpretable from the purely mathematical aspect. In this work it is explained how these black-box state-space models can be transferred to physically interpretable white-box models. First, on the basis of theoretical considerations and using the mechanical equation of motion it is shown how Markov parameters and structure-mechanical parameters (mass, damping, stiffness) are associated with each other. Furthermore, it is described which theoretically necessary boundary conditions are to be guaranteed during the experimental application. This can hardly be achieved with real application. Therefore, corresponding structure-mechanical quantities based on Markov parameters are introduced on the basis of which a localisation of damage is still possible.

After the functionality of the presented methodology was proved by means of analytical and simulated vibration data it is applied using experimental data. On the basis of laboratory tests the behaviour of a beam structure is represented in detail. The structural change was applied using differently positioned weights and saw cuts for a modification of structural mass and stiffness. Finally, the results of an experimental large-scale test are presented using the example of an arch bridge made of prestressed concrete, where the failure of a prestressed concrete hanger could be localised.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Ziele und Gliederung der Arbeit	3
2	Verfahren zur Zustandserfassung	7
2.1	Dauerüberwachung	7
2.2	Bauteil- und Materialprüfungen	10
2.3	Statische Belastungsversuche	11
2.4	Dynamische Verfahren	14
2.4.1	Finite-Element-Modelle / Model-Updating	17
2.4.2	Systemidentifikation	19
2.5	Thematische Einordnung dieser Arbeit	23
3	Black-Box Zustandsraum-Modellierung	27
3.1	Realisierung mit Impulsantwort	30
3.2	Realisierung bei beliebigem Eingang	35
3.2.1	Bestimmung von A und C mit PO-MOESP	37
3.2.2	Bestimmung von B und D mit PO-MOESP	40
3.2.3	Bestimmung von B und D mit Simulationsmodell	43
4	White-Box Zustandsraum-Modellierung	47
4.1	Zustandsraummodell auf Grundlage der Bewegungsgleichung	48
4.2	Übergang von Black-Box zu White-Box Zustandsraummodellen	53
4.3	Vergleich mit klassischer Modalanalyse	61
4.4	Wandlung von zeitdiskreten zu zeitkontinuierlichen Modellen	64
4.4.1	Halteglied 0. Ordnung (zero-order-hold)	65
4.4.2	Bilineare Methode (Tustin-Approximation)	69

5	Detektion und Lokalisation von Schäden	71
5.1	Verfahren auf Basis von Modaldaten	72
5.1.1	Bestimmung von modalen Parametern	72
5.1.2	Eigenfrequenzen	75
5.1.3	Eigenformen (MAC / COMAC)	76
5.1.4	Dynamische Einflusszahlen	77
5.1.5	Krümmung von Eigenformen	78
5.1.6	Flexibilitätsmatrix aus Modaldaten	79
5.1.7	Weitere Methoden	80
5.2	Markovparameter zur Schadenslokalisierung	81
5.2.1	„Korrespondierende“ strukturmechanische Parameter	82
5.2.2	Einige Anmerkungen zur praktischen Ausführung	83
6	Numerische Simulationsrechnungen	85
6.1	Einfreiheitsgradschwinger / Analytische Signale	85
6.1.1	Einfluss der Wandlung zeitdiskret-zeitkontinuierlich	86
6.1.2	Einfluss einer Digitalfilterung von Messdaten	92
6.2	FE-Modell der Laborstruktur	99
6.2.1	Simulationsmodell	99
6.2.2	Identifizierung mechanischer Strukturparameter	103
6.2.3	Detektion von Strukturveränderungen	107
6.3	FE-Modell der Stabbogenbrücke	112
6.3.1	Simulationsmodell	112
6.3.2	Ausfall eines Hängers	114
6.3.3	Steifigkeitsreduktionen am Hauptträger	118
7	Experimentelle Schwingungsmessungen	123
7.1	Laborversuche an einem Kragbalken	123
7.1.1	Beschreibung der durchgeführten Versuche	124
7.1.2	Analyse der gemessenen Zeitsignale	128
7.1.3	Black-Box Realisierung mit PO-MOESP	131
	Bestimmung von B und D mit PO-MOESP	134
	Bestimmung von B und D mit Simulationsmodell	135
7.1.4	Black-Box Realisierung mit Impulsantwort	137
	Gewährleistung der Bedingung $CB=0$ – „Rückrechnen“	140

7.1.5	Markov-Parameter zur Schadenslokalisierung	144
	Lokalisation von Zusatzmassen	144
	Lokalisation von Sägeschnitten	150
7.2	Großversuch an einer Stabbogenbrücke	154
7.2.1	Beschreibung der Brückenstruktur	154
7.2.2	Beschreibung der experimentellen Messungen	156
7.2.3	Deterministische Systemidentifikation	158
7.2.4	Lokalisation Hängerausfall	164
8	Zusammenfassung und Ausblick	171
8.1	Zusammenfassung	171
8.2	Ausblick	174
	Literaturverzeichnis	175
A	Modale Daten der Brücke in Hünxe	187

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Bei der Verfassung dieser Arbeit wurde darauf geachtet, dass in der Fachliteratur gängige, häufig genutzte Formelzeichen genutzt werden, um die Lesbarkeit zu vereinfachen. Dies bedingt, dass einige Formelzeichen doppeldeutig sind. Im Rahmen des jeweiligen Kontextes ist die Bedeutung jedoch eindeutig.

A	Zustandsraummodell - Systemmatrix - zeitkontinuierlich
$\bar{\mathbf{A}}$	Zustandsraummodell - Systemmatrix - zeitdiskret
B	Zustandsraummodell - Eingangsmatrix - zeitkontinuierlich
$\bar{\mathbf{B}}$	Zustandsraummodell - Eingangsmatrix - zeitdiskret
$\mathbf{C}_d, \mathbf{C}_v, \mathbf{C}_a$	Zustandsraummodell - Ausgangsmatrix - zeitkontinuierlich - weg-, geschwindigkeits- oder beschleunigungsbasiert
$\bar{\mathbf{C}}_d, \bar{\mathbf{C}}_v, \bar{\mathbf{C}}_a$	Zustandsraummodell - Ausgangsmatrix - zeitdiskret weg-, geschwindigkeits- oder beschleunigungsbasiert
D	Dämpfungsmatrix oder Zustandsraummodell - Durchgriffsmatrix - zeitkontinuierlich
$\bar{\mathbf{D}}$	Zustandsraummodell - Durchgriffsmatrix - zeitdiskret
E	Erwartungswert
F	Flexibilitätsmatrix
\mathbf{F}_{dyn}	Matrix der dynamischen Einflusszahlen
\mathbf{f}_t	Kraft (zeitabhängig)
G	Gewichtsfunktion (Zeitbereich)
$\mathbf{H}(s)$	Übertragungsfunktion (Bildbereich)
$\bar{\mathbf{H}}$	Hankelmatrix - zeitdiskret

h	Markovparameter - zeitkontinuierlich
$\bar{\mathbf{h}}$	Markovparameter - zeitdiskret
I	Einheitsmatrix
<i>i</i>	Anzahl Blockzeilen bzw. Zählvariable bei dyadischer Darstellung
K	Steifigkeitsmatrix
<i>k</i>	Zeitindex bei zeitdiskreten Systemen
L	Untere Dreiecksmatrix bei LQ-Zerlegung
<i>l</i>	Abstand / Länge
M	Massenmatrix
<i>m</i>	Potenz für Bildung der Markovparameter
<i>N</i>	Anzahl Zeitschritte bzw. Anzahl Freiheitsgrade FE-Modell
<i>n</i>	Zustandsraumdimension bzw. Filterordnung
<i>p</i>	Anzahl der Systemeingänge
Q	Orthogonale Matrix bei LQ-Zerlegung
$\bar{\mathbf{Q}}$	Beobachtbarkeitsmatrix (zeitdiskret)
<i>q</i>	Anzahl der Systemausgänge
<i>s</i>	Variable im (Frequenz-) Bildbereich, systemabhängiger Parameter
T	Transformationsmatrix
<i>t</i>	Zeit (kontinuierlich)
Δt	diskreter Zeitschritt (Samplezeit)
U	Block-Hankelmatrix der Eingänge bei PO-MOESP bzw. orthonormale / unitäre Matrix bei Singulärwertzerlegung
\mathbf{u}_k	Eingangsgrößen bzw. Strukturerrregung zum diskreten Zeitpunkt <i>k</i>
\mathbf{u}_t	Eingangsgrößen bzw. Strukturerrregung (zeitabhängig)
$\mathbf{u}(s)$	Eingangsgrößen bzw. Strukturerrregung im Bildbereich
V	orthonormale / unitäre Matrix bei Singulärwertzerlegung
$\mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{y}}_t$	Strukturantwort - Geschwindigkeit (zeitabhängig)
\mathbf{v}_k	Messrauschen zum diskreten Zeitpunkt <i>k</i>
\mathbf{w}_t	Störsignale (zeitabhängig)
\mathbf{w}_k	Prozessrauschen zum diskreten Zeitpunkt <i>k</i>
Y	Block-Hankelmatrix der Ausgänge bei PO-MOESP
\mathbf{Y}_k	Matrix mit Messwerten zum Zeitpunkt <i>k</i>
\mathbf{y}_k	Ausgangsgrößen bzw. Strukturantwort zum diskreten Zeitpunkt <i>k</i>
\mathbf{y}_t	Ausgangsgrößen bzw. Strukturantwort / i.a. Weggröße (zeitabhängig)

$\mathbf{y}(s)$	Ausgangsgrößen bzw. Strukturantwort / i.a. Weggröße im Bildbereich
ZSR	Abkürzung für Zustandsraum
\mathbf{z}_k	Zustandsraumvektor zum diskreten Zeitpunkt k
\mathbf{z}_t	Zustandsraumvektor (zeitabhängig)
$\dot{\mathbf{z}}_t$	Zustandsraumvektor, 1. Ableitung der Zeit (zeitabhängig)
$\bar{\Gamma}$	Beobachtbarkeitsmatrix (zeitdiskret)
Λ	Matrix mit den Eigenwerten
Ξ	Hilfsmatrix zur \mathbf{B} und \mathbf{D} Bestimmung mit PO-MOESP
Σ	Matrix mit den Singulärwerten
Φ	Matrix mit den Eigenformen der Struktur (physikalische Koordinaten)
Ψ	Matrix der Eigenvektoren im Zustandsraum
ζ	modale Dämpfung
κ	Krümmung
λ	Eigenwert vom zeitkontinuierlichen System
μ	Eigenwert vom zeitdiskreten System
ω_0	Eigenkreisfrequenz ungedämpftes System
ω_d	Eigenkreisfrequenz gedämpftes System
\otimes	Kronecker-Produkt
$rg(\mathbf{Q})$	Rang der Matrix \mathbf{Q}

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einleitung

Durch zahlreiche wissenschaftliche Untersuchungen und den verbreiteten Einsatz leistungsfähiger Rechentechnik konnte das Wissen über Materialeigenschaften, Tragverhalten sowie Beanspruchungen mechanischer Strukturen in den letzten Jahrzehnten wesentlich gesteigert werden. Während am Anfang des letzten Jahrhunderts sehr einfache Modelle für die überschlägige Berechnung von den Ingenieuren genutzt wurden, ist es heute möglich, auch komplizierte, feingliedrige Strukturen detailgetreu zu modellieren. Das führt unter anderem dazu, dass einstig verwendete globale und damit pauschale Sicherheitskonzepte zunehmend durch individuelle Sicherheitsfaktoren ersetzt werden. Ein wesentlichen Beitrag dazu leistete im europäischen Raum die Erarbeitung und Einführung der Eurocodes. Heutige Strukturen und Bauwerke können damit sehr genau für die während der Planungsphase geforderten Beanspruchungen dimensioniert und entsprechend ressourcenschonend errichtet werden. Das ständige Bestreben technische Anlagen wirtschaftlich zu errichten und zu betreiben forciert diesen Trend. In der Forschung beschäftigt man sich gegenwärtig unter anderem mit lebensdauerorientierten Entwurfskonzepten, um die zu errichtenden Konstruktionen optimal an die während der Nutzungsdauer zu erwartenden Beanspruchungen anzupassen. Bei einem solchen Ansatz sind zum Beispiel verringerte Sicherheitsbeiwerte für Anlagen mit kurzen Nutzungsdauern vorstellbar. Im Rahmen der aufgezeigten Entwicklung stellt sich zunehmend die Frage, ob die rechnerischen Annahmen des Entwurfes mit den

realen Gegebenheiten übereinstimmen.

Ein weiterer Aspekt ist, dass trotz großer Fortschritte bei der Dimensionierung von Strukturen und Komponenten immer wieder Konstruktionen versagen und teils katastrophale Unfälle geschehen. Stellvertretend für eine Vielzahl weiterer Unfälle sei hier auf den Einsturz der Interstate-35W-Mississippi-River-Brücke (USA) mit 13 Toten im August 2007 sowie den Einsturz der Eissporthalle in Bad Reichenhall (Abb. 1.1) mit 15 Toten im Januar 2006 verwiesen.



Abb. 1.1: Eissporthalle in Bad Reichenhall

Eine wesentliche Ursache für solch dramatische Unfälle – die in allen Bereichen der Technik geschehen – liegt darin, dass häufig auf vorbeugende Instandhaltungsarbeiten verzichtet wird [45], bzw. bestehende strukturelle Schäden bei vorwiegend visuell durchgeführten Überprüfungen nicht rechtzeitig erkannt werden.

Durch die in den letzten drei Jahrzehnten sprunghaft gestiegene Leistungsfähigkeit und Verbreitung moderner Rechentechnik, sowie die daran gekoppelte Weiterentwicklung von Sensoren und Messtechnik existieren mittlerweile unzählige Möglichkeiten physikalische Parameter wie Beschleunigungen, Dehnungen, Temperaturen, Drücke u.v.a.m. kosteneffizient während des Betriebes von Maschinen und Anlagen zu erfassen. Damit einhergehend wächst zunehmend der Anspruch, notwendige Wartungs- und Instandsetzungsarbeiten bedarfsgerecht durchzuführen. Vorreiter ist in diesem Umfeld die Maschinenüberwachung, wo sogenannte Condition-Monitoring-Systeme den Zustand und die Funktion von Wellen, Lagern, Getrieben, Turbinen etc. überwachen und Schäden möglichst frühzeitig anzeigen. Nicht zuletzt durch die boomende Windenergiebranche sind solche Systeme mittlerweile Stand der Technik. Weniger verbreitet sind gegenwärtig sogenannte Structural-Health-Monitoring Systeme (SHM-Systeme), die den Zustand nicht rotierender mechanischer Strukturen permanent auf strukturelle Veränderungen bzw. Schäden überwachen sollen. Viele Entwicklungen befinden sich hier noch im Forschungsstadium. Aufgrund eines immensen Bedarfes – insbesondere im Bereich der Luft- und

Raumfahrt sowie im Bereich der Windenergie (z.B. für Offshore-Anlagen) – werden jedoch große Anstrengungen unternommen, diese Systeme zeitnah zu etablieren. An der Entwicklung partizipieren werden andere Zweige, wie z.B. der Rohrleitungs- oder Brückenbau, die solche SHM-Systeme ebenfalls gewinnbringend einsetzen können.



Abb. 1.2: Windenergieanlage

In diesen Kontext kann die vorliegende Arbeit eingeordnet werden. Gegenstand ist die modellgestützte Erfassung des aktuellen Zustandes von mechanischen Strukturen. Die Basis bilden messtechnisch erfasste Strukturschwingungen, die genutzt werden, um das dynamische Verhalten durch Zustandsraummodelle mathematisch zu modellieren. Ausführlich ist dargestellt, wie aus die-

sen – mit Methoden der Systemtheorie gebildeten Modellen – strukturmechanisch deutbare Parameter extrahiert werden können. Anschließend wird gezeigt, inwieweit Strukturveränderungen (z.B. Schäden durch veränderte Steifigkeiten oder Zusatzmassen) anhand dieser Modelle detektiert und lokalisiert werden können. Ein Schwerpunkt liegt auf der Validierung der zunächst theoretisch vorgestellten Methoden anhand experimenteller Messdaten – einer Laborstruktur und einer Spannbeton-Stabbogenbrücke.

1.2 Ziele und Gliederung der Arbeit

Gegenwärtig wird verbreitet erforscht, inwieweit eine Zustandsdiagnose von Maschinen und Anlagen während ihrer Nutzungsdauer effektiv erfolgen kann, um stets aktuelle Aussagen zur Tragsicherheit, zur Gebrauchstauglichkeit und zur Wirtschaftlichkeit treffen zu können. Damit sind ebenfalls Aussagen zur prognostizierten Lebens- bzw. Nutzungsdauer eingeschlossen. Zahlreiche Verfahren, die auf verschiedenen physikalischen Wirkprinzipien beruhen, sind bereits entwickelt und bei ausgewählten Objekten im praktischen (Test-)Einsatz. Häufig werden dabei auch die dynamischen Eigenschaften (meist die modalen

Parameter Eigenfrequenz, modale Dämpfung und Eigenform) überwacht, um Strukturveränderungen festzustellen.

Hauptziel dieser Arbeit ist es, anhand von Strukturschwingungen mathematische Zustandsraummodelle zu erstellen, die das dynamische Verhalten der Konstruktionen zutreffend modellieren und anhand derer eine modellgestützte Schadenserkennung und Schadenslokalisierung ermöglicht wird (basierend direkt auf experimentell ermittelten Schwingungssignalen). Im Gegensatz zu den verbreitet eingesetzten Finite-Element-Modellen erfolgt die Modellierung zunächst rein mathematisch mit Methoden der Systemtheorie auf Basis von Ursache (Schwingungserregung) und Wirkung (Strukturantwort). Besonderes Augenmerk liegt auf der praktischen Einsetzbarkeit der entwickelten Methoden, weshalb eine Verifikation anhand von experimentell ermittelten Schwingungsmessdaten einer Laborstruktur und einer weit gespannten Stabbogenbrücke erfolgt.

Zunächst wird in Kapitel 2 ein Überblick über einige gebräuchliche bzw. in Entwicklung befindliche Verfahren zur Zustandserfassung und Zustandsüberwachung von großen und mächtigen Strukturen (z.B. Bauwerken) gegeben. Im Hinblick auf die in dieser Arbeit genutzte modellgestützte Modellierung auf Basis dynamischer Messdaten werden grundlegende Begriffe der Systemtheorie erläutert. Dieses Kapitel soll im Wesentlichen dazu dienen, diese Arbeit in den thematischen Kontext einzuordnen.

In Kapitel 3 werden ausgewählte Algorithmen zur Systemidentifikation vorgestellt, mit denen eine Modellierung des Übertragungsverhaltens der mechanischen Strukturen zwischen der ursächlichen Schwingungserregung an den Eingängen und ihrer Wirkung an den Ausgängen (Strukturantwort) erfolgt. Man bezeichnet solche mit Methoden der Systemtheorie erstellte Modelle als Black-Box-Modelle, da sie einer strukturmechanischen Interpretation zunächst nicht zugänglich sind. Die vorgestellten Methoden zur Systemidentifikation nutzen Algorithmen der linearen Algebra (Subspace-Identifikation) und sind sowohl bei deterministischen als auch bei stochastischen Anregungen anwendbar, wobei in dieser Arbeit ausschließlich deterministische Anregungen behandelt werden. Beschränkt wurde sich in dieser Arbeit auf lineare zeit-invariante Modelle und eine Identifikation im Zeitbereich, bei der die Parameterbestimmung direkt anhand der (experimentell) gemessenen Schwingungssignale erfolgt.

Einen Schwerpunkt dieser Arbeit bildet die Untersuchung, inwieweit aus identifizierten Black-Box-Modellen mechanisch deutbare Parameter extrahiert werden können. Zunächst wird in Kapitel 4 theoretisch gezeigt, dass Black-Box-Modelle in so genannte White-Box-Modelle transformiert werden können, die einer strukturmechanischen Interpretation zugänglich sind. Aus diesen, ausschließlich auf Basis von Schwingungssignalen identifizierten Modellen, können – unter idealen Randbedingungen (z.B. bei Simulationsrechnungen) – mechanische Parametermatrizen, wie z.B. Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen, extrahiert werden, die direkt mit denen einer mechanischen Finite-Element-Modellierung vergleichbar sind. Diese Transformation zum Zwecke einer direkten mechanischen Interpretation ist in der internationalen Fachliteratur kaum erwähnt. Nach Kenntnis des Autors beschäftigen sich lediglich zwei Referenzen (Ko und Hung [46], Yang und Yeh [104]) mit diesem Thema. Die Anwendung auf experimentell ermittelte Messdaten ist neu und wissenschaftlich bisher wenig untersucht. Zur mechanischen Deutung der auf Grundlage der allgemeingültigen Systemtheorie bestimmten Modelle sind dabei zusätzlich zum Übertragungsverhalten weitere spezielle Randbedingungen einzuhalten, die in dieser Arbeit dargestellt werden. Ein wesentlicher Aspekt ist unter anderem die Wandlung zwischen zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Modellen, auf die ebenfalls in dieser Arbeit eingegangen wird.

In Abschnitt 5 werden einige gebräuchliche Kenngrößen vorgestellt, mit denen eine Schadensdetektion und Schadenslokalisierung auf Basis dynamischer Parameter erfolgen kann. Es wird präsentiert, wie aus White-Box-Zustandsraummodellen extrahierte strukturmechanische Parametermatrizen (z.B. Masse, Dämpfung, Steifigkeit) zur experimentellen Schadenslokalisierung genutzt werden können. In Anbetracht der bei experimentellen Schwingungsmessungen herrschenden Abweichungen im Vergleich zu rein theoretischen Annahmen wird für die extrahierten strukturmechanischen Parameter außerdem der Begriff „korrespondierende“ Größen eingeführt. Im Weiteren werden Sensitivitätsbetrachtungen durchgeführt und betrachtet, wie sich bestimmte Besonderheiten experimenteller Messungen (z.B. Einfluss der in den Messsignalen enthaltenen Schwingungsmoden) auf die Möglichkeiten einer Schadenslokalisierung auswirken.

Experimentelle Schwingungsmessungen bilden einen weiteren, wesentlichen

Schwerpunkt dieser Arbeit. In Kapitel 7 werden die in den vorangegangenen Kapiteln theoretisch vorgestellten Methoden zur Systemidentifikation, zur Transformation in mechanisch deutbare White-Box-Modelle sowie die Möglichkeiten zur Schadenslokalisierung anhand extrahierter strukturmechanischer Parameter ausführlich auf Basis von Messdaten der durchgeführten experimentellen Schwingungsmessungen verifiziert. Experimentelle Messungen sind an einer Laborstruktur und einer – vom Tragverhalten sehr komplexen – Stabbogenbrücke aus Spannbeton durchgeführt worden. Die mechanischen Eigenschaften der Laborstruktur wurden durch lokal angebrachte Zusatzmassen sowie Sägeschnitte modifiziert. Bei der untersuchten Stabbogenbrücke konnte unmittelbar vor dem Rückbau der Brücke ein Spannbetonhänger durchtrennt und Schwingungsmessungen durchgeführt werden. Die Schwingungserregung der untersuchten Strukturen erfolgte deterministisch (durch Impulslasten) und stochastisch (vorwiegend durch Wind und Verkehr vorhandenes ambientes Umweltrauschen), wobei in dieser Arbeit der Fokus auf den deterministischen Messungen liegt.

Abgeschlossen wird die Arbeit in Kapitel 8 durch eine Zusammenfassung der Ergebnisse. Verbliebene offene Fragestellungen werden aufgeführt und Hinweise für die aus Sicht des Verfassers notwendige weiterführende Forschungsarbeit gegeben.

Kapitel 2

Ausgewählte Verfahren zur Zustandserfassung

2.1 Dauerüberwachung

Als Dauerüberwachung bzw. Monitoring kann man alle Arten der unmittelbaren systematischen Erfassung und Beobachtung eines Vorgangs oder Prozesses mittels technischer Hilfsmittel bezeichnen. In Wissenschaft und Technik gibt es hierfür eine Vielzahl von Verfahren, die sich in Abhängigkeit von Fachgebiet, Überwachungsobjekt, Überwachungszeitraum und Zielsetzungen stark voneinander unterscheiden. Dementsprechend sind die Messgrößen sowie die Analyse- bzw. Auswertelgorithmen themenorientiert auszuwählen.

Die in dieser Arbeit präsentierten Methoden lassen sich dem Structural Health Monitoring zuordnen, was im Deutschen als fortlaufende Überwachung (permanent oder zyklisch) des Zustandes mechanischer Strukturen verstanden wird. Im Gegensatz zum Condition-Monitoring, bei dem vorwiegend rotierende Bauteile von Maschinen auf ihre Integrität überwacht werden, dienen Structural-Health-Monitoring-Systeme (SHM-Systeme) hauptsächlich der Überwachung ruhender und oftmals mächtiger mechanischer Strukturen, deren Ausfall Personenschäden oder nennenswerte wirtschaftliche Schäden nach sich ziehen würden. Von SHM-Systemen können zahlreiche Parameter messtechnisch erfasst und automatisch überwacht werden, beispielsweise: Betriebs- und Verkehrslasten, Umwelteinflüsse, Strukturverformungen und -schwingungen, Lageveränderungen, Umwelteinflüsse etc. Damit ist es möglich, die auf die

überwachte Struktur einwirkenden Beanspruchungen und die direkt damit in Zusammenhang stehenden Auswirkungen permanent zu erfassen. Hauptsächlich zur Zustandserfassung und Schadenserkennung eingesetzte Structural Health Monitoring Systeme können jedoch weitere zusätzliche Informationen liefern. Sie können u.a. zur Qualitätskontrolle bei der Errichtung, zum Nachprüfen rechnerisch angesetzter Annahmen oder als Warnsystem genutzt werden. Einen umfassenden Überblick über anwendbare Verfahren zum Structural Health Monitoring findet man zum Beispiel bei Balageas et al. [5], Sohn et al. [85] sowie bei Wang und Zong [101].

Wesentlicher Bestandteil einer solchen dauerhaften Diagnostik ist die objektive und sichere Erfassung des aktuellen Anlagen- bzw. Tragwerkszustandes. Während gegenwärtig vorwiegend noch klassische Verfahren eingesetzt werden (z.B. in der Brückenüberwachung, siehe auch Abschnitt 2.2), versucht man diesen Prozess zu automatisieren und zusätzlich eine Möglichkeit zur permanenten Überwachung zu schaffen. Hierfür bieten sich SHM-Systeme an. Vereinzelt werden Sie bereits eingesetzt (z.B. Link et al. [59], Reiterer et al. [75], Geier und Deix [30]).

Hauptziel solcher Systeme ist es dabei, die notwendige Sicherheit und Gebrauchstauglichkeit jederzeit zu gewährleisten und Störfälle zu vermeiden. Zusätzlich leisten zuverlässige SHM-Systeme einen wichtigen Beitrag zur Wirtschaftlichkeit, da – neben anderen Aspekten – die gegenwärtig oftmals praktizierte, vorsorglich-zeitbasierende Zustandsüberwachung und Instandsetzung durch eine vorausschauende und zustandsorientierte ersetzt werden kann.

Structural Health Monitoring kann dabei nach verschiedenen Kriterien klassifiziert werden: Natke und Cempel [67] unterscheiden zwischen

- symptombasierender und
- modellgestützter Diagnose.

Bei der symptombasierenden Diagnose werden lediglich die Begleiterscheinungen einer Schädigung überwacht, zum Beispiel übermäßige (plastische) Verformungen und/oder Schwingungen, Ermüdungsrisse, Korrosion. Im Gegensatz dazu sind bei der modellgestützten Diagnose Strukturveränderungen direkt an den Modellparametern (z.B. Massen, Steifigkeiten, Dämpfungen) erkennbar.

Im Weiteren kann unterschieden werden zwischen

- lokalen und
- globalen Methoden.

Mit den lokalen Verfahren können lediglich signifikante Teilbereiche des zu überwachenden Tragwerkes untersucht bzw. beobachtet werden. Zum Einsatz kommen vorwiegend klassische Bauteil- und Materialprüfungen (Abschnitt 2.2), beispielsweise Festigkeitsuntersuchungen, lokale Dehnungsmessungen, Schallemissionsanalyse, Radiografie, Magnetfeld- und Wirbelstromanalyse.

Demgegenüber bieten die globalen Verfahren den wesentlichen Vorteil, dass Messungen an einzelnen Orten ausreichend sind, um das generelle Tragwerksverhalten zu beurteilen. Ausgenutzt wird, dass lokale Steifigkeitsänderungen zu veränderten dynamischen Eigenschaften (Eigenfrequenzen, Eigenformen, etc.) und veränderten globalen statischen Verformungen (Durchbiegung, Neigung, etc.) führen, die unabhängig vom Schadensort an der gesamten Struktur beobachtbar sind [71].

Ein weiteres Klassifizierungsmerkmal betrifft die Häufigkeit der Datenerfassung. Es wird unterschieden zwischen einer

- intermittierenden und einer
- kontinuierlichen Überwachung.

Die intermittierende Überwachung erfolgt in regelmäßigen Zeitabständen an ausgewählten Punkten der Konstruktion. Bei der kontinuierlichen Überwachung werden Sensoren fest installiert und permanent abgefragt. Die Entscheidung für eine der beiden Methoden erfolgt unter dem Aspekt des prognostizierten Gefährdungspotenzials sowie unter ökonomischen Gesichtspunkten.

Wie bereits erwähnt wurde, dienen SHM-Systeme hauptsächlich der Erfassung von Schäden bzw. Veränderungen im Rahmen einer Strukturüberwachung. Die Identifikation und Bewertung möglicher Schäden erfolgt dabei nach Rytter [79] in vier Stufen :

Stufe 1: Erkennen einer Strukturveränderung

Stufe 2: Lokalisation der Strukturveränderung

Stufe 3: Quantifizierung des Grades der Strukturveränderung

Stufe 4: Prognose der verbleibenden Nutzungs- / Lebensdauer

Die Stufen 1 bis 3 sind dabei der Zustandserfassung zuordenbar. Die Stufe 4 betrifft die Erstellung einer Zustands- bzw. Lebensdauerprognose. Anhand dieser Klassifizierung wird deutlich, dass die Anforderungen an die Leistungsfähigkeit der Monitoringsysteme und der nachfolgenden Auswertemethoden mit jeder Stufe ansteigen. Mit gegenwärtig genutzten Verfahren ist die Realisierung von Stufe 1 heute schon oftmals möglich (siehe z.B. Zabel und Rücker [105] oder Mengelkamp [64]). An der Realisierung von Stufe 2, insbesondere aber von Stufe 3 und 4 wird gegenwärtig vertieft geforscht. Dennoch werden Monitoringsysteme bereits heute in der Praxis vermehrt eingesetzt, da auch schon das Erkennen und ggf. das Lokalisieren einer Strukturveränderung ausreichend sind, um eine zustandsorientierte Instandhaltung zur Revitalisierung der Konstruktionen zu veranlassen, existenzielle Sicherheitsprobleme festzustellen bzw. die Nutzungsdauer der überwachten Strukturen bzw. Anlagen zu verlängern. Gegenüber einer vorbeugenden Wartung bzw. Überprüfung ist man bei Verwendung von Monitoringsystemen in der Lage, auf den messtechnisch erfassten Strukturzustand zu reagieren und kritische Belastungszustände bzw. Materialfehler schneller und präziser zu erfassen.

2.2 Bauteil- und Materialprüfungen

Verfahren zur Bauteil- und Materialprüfung sind nicht Gegenstand dieser Arbeit. Dennoch sollen an dieser Stelle einige Verfahren kurz genannt werden, da die gegenwärtig durchgeführten Zustandserfassungen im Wesentlichen auf diesen Verfahren beruhen. Die in der Anwendung befindlichen Methoden lassen sich nach zahlreichen Gesichtspunkten klassifizieren. Die bedeutendste Unterteilung erfolgt in

- zerstörende und
- zerstörungsfreie Prüfverfahren.

Die zerstörenden Verfahren basieren auf Materialentnahmen (z.B. durch Bohrkerne). Anschließend kann das entnommene Material vielfältig untersucht werden. Bedeutsam sind u.a. die Bestimmung von Druck- und Zugfestigkeiten, Elastizitätsmodul, Karbonatisierungstiefe und Haftzugfestigkeit.

Zur zerstörungsfreien Bestimmung von Bauteil- und Materialparametern wurden in den letzten Jahrzehnten eine Vielzahl von Verfahren mit unter-

schiedlichen Wirkprinzipien entwickelt. Einen umfassenden Überblick findet man unter anderem bei Housner et al. [36], bei Quade und Tschötschel [74] und bei Schickert et al. [81]. Häufig angewendet werden – neben weiteren Verfahren – Betondeckungsmessgeräte, Rückprallhammer, Infrarot-Thermografie, Schallemissionsanalyse, Ultraschall -Echo-Verfahren, Impact-Echo-Verfahren, Radarmessung sowie die Durchstrahlungsprüfung.

Eine Sonderstellung nehmen die visuellen Verfahren ein. Aufgrund der Tatsache, dass sich die visuelle Inaugenscheinnahme bzw. Zustandserfassung meist sehr schnell und einfach (mit nur wenigen Hilfsmitteln) und damit sehr kostengünstig durchführen lässt, wird dieses Verfahren praktisch bei jeder Strukturüberwachung eingesetzt. Ein Nachteil dieser Methode ist die vorwiegend subjektive Erfassung des Zustandes, anhand derer eine zuverlässige Abschätzung von Tragfähigkeit bzw. prognostizierter Restlebensdauer nicht erfolgen kann. Die visuelle Untersuchung umfasst im Allgemeinen die gesamte Struktur sowie die Umgebung und wird in der Regel zyklisch durchgeführt. Durch das regelmäßige Besichtigen einer Struktur kann man beispielsweise den Einfluss klimatischer oder betrieblicher Nutzungsbedingungen besser abschätzen. Visuelle Untersuchungen werden mit den Sinnesorganen und unter Zuhilfenahme einfachster Hilfsmittel durchgeführt (Steiger [88]):

- optische Prüfung und Messung durch Augenschein
- akustische Prüfung durch Anklopfen und Anschlagen
- Prüfung der Oberfläche mit dem Tastsinn
- Prüfung mit dem Geruchssinn (z. B. organische oder chemische Einwirkungen)
- Prüfung mit dem Geschmackssinn (z. B. Versalzung).

2.3 Statische Belastungsversuche

Der Nachweis der Standsicherheit einer Struktur bzw. eines Bauwerkes oder Bauteiles erfolgt in der Regel rechnerisch. Oft treten jedoch Fälle auf, in denen ein solcher Nachweis nicht oder nur unzureichend erbracht werden kann. Die Ursachen dafür können unterschiedlicher Art sein, beispielsweise fehlende Planungsunterlagen (oftmals bei älteren Konstruktionen), unzureichende

Materialfestigkeiten und andere Ausführungsfehler, auftretende Schädigungen, Umnutzung des Bauwerkes verbunden mit veränderten Belastungen. Bei derartigen Problemstellungen bietet sich ein experimenteller Tragsicherheitsnachweis in situ am vorhandenen Bauwerk an (Grieger [31]). Oftmals können dadurch teure Verstärkungen oder gar ein Abriss mit nachfolgendem Neubau der Bauwerke vermieden werden. Gegenüber einem rechnerischen Nachweis ergeben sich Vorteile, da die real vorhandenen Materialeigenschaften und das reale Tragverhalten die Tragfähigkeit bestimmen. Der Einfluss rechnerisch nicht ansetzbarer, statisch mittragender Aufbauschichten (z.B. bei Brücken und Decken) oder Einspannwirkungen kann auf diese Weise berücksichtigt werden. Die experimentelle Tragsicherheitsbewertung wird vorwiegend bei Stahlbeton- und Mauerwerkskonstruktionen angewandt, da bei diesen die real vorhandenen Materialeigenschaften (z.B. Druckfestigkeit, E-Modul) breit streuen. Experimentelle, in situ geführte Nachweise zur Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit von Betonbauwerken sind dementsprechend seit dem Jahr 2000 in einer DAfStb-Richtlinie geregelt. Einen Überblick über die grundsätzliche Herangehensweise und die verwendeten Methoden findet man zum Beispiel bei Steffens [86].

Entscheidet man sich im Zuge der Substanzerhaltung bestehender Bauwerke für die Durchführung einer experimentellen Tragsicherheitsbewertung, benötigt man für die Versuche eine geeignete Apparatur zur Einleitung der erforderlichen Kräfte und eine vom Bauwerk unabhängige Messbasis, an der die entsprechende Sensorik zur Aufnahme der globalen Bauwerksverformungen angebracht werden kann. Zur Lasteinleitung werden gewöhnlich Hydraulikzylinder genutzt, die an einem Belastungsrahmen (Abb. 2.1) verankert sind. Gegebenenfalls werden zusätzliche Totlasten (schwere Fahrzeuge, Wassertanks, etc.) genutzt. Speziell bei Brückenbauwerken ist es aufgrund der Spannweite und der großen Versuchslasten sehr aufwendig, die erforderlichen Belastungsrahmen aufzubauen. Im Rahmen der Forschungsprojekte Extra und Belfa wurde deshalb ein spezielles Belastungsfahrzeug (BELFA) entwickelt, mit dem die Lasteinleitung bei Brücken von bis zu 18m Spannweite in situ möglich ist (Abb. 2.2). Einen Überblick über die im Rahmen der Forschungsprojekte durchgeführten Untersuchungen findet man bei Steffens et al. [87].

Durch die Entwicklung des BELFA ist es gelungen, den Aufwand zur La-



Abb. 2.1: Belastungsrahmen zur Prüfung einer Geschossdecke [31]

steintragung an Brückenbauwerken auf ein akzeptables Maß zu reduzieren. Nach wie vor aufwendig gestaltet sich die Einrichtung einer vom Bauwerk unabhängigen Messbasis (z.B. bei Querung von Wasserläufen), die meist unterhalb der Tragwerke aufgebaut wird. Alternative Verfahren zur Erfassung der globalen Bauwerksverformungen (z.B. Laser, Photogrammetrie) erreichten bei wirtschaftlichem Einsatz bisher noch nicht die geforderten Genauigkeiten bzw. die notwendige Anzahl an Überwachungspunkten (siehe auch Evers [19]). Diese optischen Verfahren werden jedoch in jüngster Zeit weiterentwickelt, so dass in naher Zukunft mit einem verbreitetem Einsatz gerechnet werden kann.



Abb. 2.2: Luftansicht des Belastungsfahrzeuges für Straßenbrücken [8]

Petryna [73] stellt die prizipiellen Vor- und Nachteile von statischen und dynamischen Verfahren gegenüber. Hier zunächst die Zusammenfassung für die statischen Verfahren:

Vorteile von statischen Belastungsversuchen

- Direkte Ermittlung der Systemsteifigkeit
- Direkte Ermittlung der Tragfähigkeit möglich (allerdings durch Zerstörung des Bauwerkes)
- Geeignet zur Anpassung der statischen Eigenschaften von FE-Modellen

Nachteile von statischen Belastungsversuchen

- Sehr aufwendig (Lasteintragung, vom Bauwerk unabhängige Messbasis) und teuer (Sperrzeiten)
- Oftmals nicht möglich
- Nicht unbedingt zerstörungsfrei bzw. -arm
- bei Belastung im Gebrauchslastniveau nicht aussagekräftig hinsichtlich Tragfähigkeit

Aufgrund des (ansatzweise beschriebenen) Aufwandes einer experimentellen Tragsicherheitsbewertung ist dieses Verfahren wenig geeignet im Rahmen eines Structural Health Monitoring den Zustand von Bauwerken zyklisch zu erfassen. Die experimentelle Tragsicherheitsanalyse wird im Wesentlichen einmalig eingesetzt, um für erhaltenswerte Bauwerke den Tragsicherheitsnachweis im Rahmen von Umnutzungen bzw. Sanierungen sicherzustellen bzw. um höhere Verkehrslasten für Brücken zuzulassen. Dennoch können statische Verfahren zur zyklischen Bauzustandsüberwachung eingesetzt werden. Stöhr [91] präsentiert ein vom Aufwand reduziertes Verfahren, mit dem es möglich ist, lokale Steifigkeitsveränderungen an Biegesystemen zu erkennen. Experimentell in Folge einer langsamen Lastüberfahrt ermittelte Neigungen der Konstruktion werden genutzt, um statische Einflusslinien zu bestimmen. Anhand des Vergleiches der ermittelten Einflusslinien vom ungeschädigten Referenzsystem mit denen des zyklisch überprüften, möglicherweise geschädigten Systemes erfolgt die Detektion und Lokalisation örtlich veränderter Steifigkeiten.

2.4 Dynamische Verfahren

Dynamische Identifikationsverfahren basieren auf der grundlegenden Tatsache, dass das Schwingverhalten einer Struktur abhängig von den strukturmecha-

nischen Parametern Masse, Steifigkeit und Dämpfung ist. Änderungen dieser strukturmechanischen Parameter einer Konstruktion führen dementsprechend zu verändertem dynamischen Verhalten, welches messtechnisch erfassbar ist. Damit können Strukturveränderungen zum Beispiel anhand modaler Parameter identifiziert werden, die Eingangsgrößen für Methoden zur Zustandsbewertung bzw. Lebensdauerprognose sein können (Krätzig et al. [48]). Verfahren zur Bestimmung modaler Parameter anhand gemessener Eingangs- / Ausgangsgrößen (experimentelle Modalanalyse) sind Stand der Technik (z.B. Natke [66], Krätzig et al. [47]). Dementsprechend existieren bereits zahlreiche Untersuchungen, inwieweit eingetretene Schäden an realen Strukturen anhand modaler Parameter zutreffend lokalisiert und bewertet werden können (z.B. Maeck und de Roeck [62], Kamarys [42]). Verglichen mit statischen Methoden besitzen die dynamischen Verfahren folgende Vor- und Nachteile (Petryna [73]):

Vorteile von dynamischen Verfahren

- Einfach während des laufenden Betriebs realisierbar
- Zerstörungsfreie Überwachung / -prüfung
- Vergleichsweise preiswert
- Geeignet für permanente Überwachung
- Geeignet für Anpassung der dynamischen Eigenschaften von FE-Modellen

Nachteile von dynamischen Verfahren

- Indirekte Ermittlung der Systemsteifigkeit
- Direkte Ermittlung der Tragfähigkeit nicht möglich

Zur messtechnischen Erfassung des Schwingverhaltens sind u.a. Wegsensoren, Geschwindigkeitssensoren oder Beschleunigungssensoren geeignet. Häufig werden Geschwindigkeits- oder Beschleunigungssensoren im praktischen Einsatz genutzt. Ein wesentlicher Vorteil beider Sensorarten ist, dass diese direkt auf den Strukturen applizierbar sind. Auf die aufwendige Errichtung einer unabhängigen Messbasis zur Befestigung von Wegsensoren kann damit verzichtet werden. Damit sind experimentelle Schwingungsmessungen relativ einfach und zerstörungsfrei auch bei laufendem Betrieb möglich. Werden die Sensoren dauerhaft installiert und betrieben, eignen sich die Verfahren auch für ein permanentes Structural Health Monitoring.

Da die strukturmechanischen Parameter (Masse, Steifigkeit, Dämpfung) nicht direkt, sondern ausschließlich über das Schwingverhalten der Konstruktionen bestimmt werden können, bezeichnet man die dynamischen Verfahren als indirekte Methoden. Die direkte Ermittlung der Tragfähigkeit ist damit nicht möglich. Schäden (z.B. reduzierte Steifigkeiten) führen jedoch zu veränderten dynamischen Eigenschaften (z.B. der modalen Parameter) und sind dementsprechend mit dynamischen Verfahren identifizierbar.

Zur Beschreibung dynamischer Systeme werden gewöhnlicherweise mathematische Modelle genutzt. Die Modellierung kann mittels

- theoretischer Systemanalyse oder
- experimenteller Systemanalyse

erfolgen (Isermann [39]).

Theoretische Systemanalyse (Physikalische Modellierung): Im Rahmen der Projektierung technischer Strukturen erfolgt die dynamische Untersuchung zunächst mittels theoretischer Systemanalyse. Auf der Grundlage von qualitativen Vorstellungen über die Beziehung zwischen Systemeingang (Ursache) und Systemausgang (Wirkung) wird ein theoretisches Modell erstellt. Diese Vorstellungen basieren auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten (physikalisches Modell) und sind mathematisch zu beschreiben (Natke [66]). Im Ergebnis erhält man im Allgemeinen ein Differenzialgleichungssystem, welches das dynamische Systemverhalten im Idealfall genau beschreibt. Da das Modell eine spezifische Struktur aufweist und durch charakteristische physikalische Parameter beschrieben wird, bezeichnet man es als Strukturmodell bzw. als parametrisches Modell. Bei der Betrachtung von mechanischen Systemen beschreiben die physikalisch deutbaren Systemparameter die stofflichen Eigenschaften der zugrundeliegenden Struktur (z.B. Masse, Steifigkeit).

Bei der Modellierung sind oftmals vereinfachende Annahmen zu treffen. Einige physikalische Effekte, die vorrangig bei komplexen Strukturen auftreten, sind unter Umständen nur schwierig, teilweise gar nicht theoretisch modellierbar (z.B. Dämpfungseigenschaften). Dementsprechend sind die Ergebnisse der theoretischen Systemanalyse mit Unsicherheiten behaftet. In solchen Fällen kann einzeln und unabhängig oder ergänzend eine experimentelle Systemanalyse durchgeführt werden.

Experimentelle Systemanalyse (Systemidentifikation): Im Gegensatz zur theoretischen Systemanalyse basieren mittels experimenteller Systemanalyse erstellte Modelle unmittelbar auf dem realen Strukturverhalten. Sie modellieren direkt das (experimentell) ermittelte dynamische Übertragungsverhalten zwischen Systemeingang und Systemausgang. Dieser oftmals als Systemidentifikation bezeichnete Vorgang dient nach Natke [66] im Wesentlichen folgenden drei Zielen:

- Verifizieren der Annahmen und Ergebnisse der theoretischen Systemanalyse
- Aufdecken von theoretisch fehlerhaft angenommenen Verhalten
- Nachweis des Erfülltseins bestimmter Anforderungen

Ergänzend soll erwähnt werden, dass eine Identifikation auch einzeln (ohne vorherige theoretische Systemanalyse) durchgeführt werden kann, um Modelle des Strukturverhaltens zu identifizieren, die dann für weitere Untersuchungen (Simulation Systemverhalten, Schadensanalyse, etc.) genutzt werden können.

2.4.1 Finite-Element-Modelle / Model-Updating

Bei der physikalischen Modellierung des dynamischen Systemverhaltens basiert das Modell auf analytisch beschreibbaren physikalischen Gesetzmäßigkeiten – in der Mechanik z.B. auf Basis von Gleichgewichtsbedingungen, Verträglichkeitsbedingungen und Materialgesetzen. Die numerische Lösung der zugrundeliegenden partiellen Differenzialgleichungen erfolgt meist mit der Finite-Element-Methode. Eine FE-Modellierung von mechanischen Strukturen basiert auf Materialeigenschaften, Geometrien, Rand- und Übergangsbedingungen sowie den gewählten Ansatzbedingungen der modellierten diskreten Elemente. Oftmals jedoch sind einige dieser Parameter lediglich näherungsweise bekannt bzw. vereinfacht modelliert. Dadurch werden Modellierungsfehler hervorgerufen, die zu unterschiedlichem Verhalten zwischen Modell und Realität führen. Zur Beurteilung hinsichtlich vorhandener Tragfähigkeiten, speziell bei sicherheitskritischen Strukturen, sowie zur Schadensfeststellung und Schadenslokalisierung ist man jedoch auf die Erstellung von realitätsnahen Finite-Element-Modellen angewiesen. Durch die Anpassung der FE-Modelle an expe-

rimentell ermittelte Struktureigenschaften kann die geforderte hohe Modellgüte erreicht werden. Den Abgleich eines Rechenmodells an experimentell ermittelte Charakteristiken durch Anpassung ausgewählter Modellparameter bezeichnet man im aktuellen Sprachgebrauch als Model-Updating.

Grundsätzlich basiert eine Modellanpassung auf der Minimierung von definierten Fehlermaßen (Residuen) zwischen Rechenmodell und experimentellen Ergebnissen. Unterschiede zwischen beiden resultieren aus den oben bereits beschriebenen Modellierungsfehlern, aber auch aus Messfehlern, die unvermeidbar sind. Als Residuen können beispielsweise Abweichungen von Frequenzgängen, Eigenfrequenzen oder Eigenformen genutzt werden. Dem Optimierungsalgorithmus müssen dabei im Vorfeld definierte freie Modellparameter übergeben werden, durch deren Veränderung das Modell angepasst wird. Hierfür existieren Algorithmen, die besonders sensitive Parameter bestimmen können (Mottershead et al. [65]). Zur Wertung der Residuen wird eine während der Optimierung unveränderliche Wichtungsmatrix definiert. Die Optimierung des Modells basiert dann auf der Minimierung einer Zielfunktion, die durch die gewichteten Residuen definiert und damit abhängig von den Modellparametern ist. Zur Optimierung können verschiedene mathematische Verfahren genutzt werden. Für einen umfassenden Überblick sei auf die Literatur verwiesen (z.B. Friswell und Mottershead [24], Link [54] und Datta [12]).

Wesentlicher Vorteil einer physikalischen Modellierung ist, dass die Modellparameter (z.B. Masse, Steifigkeit, etc.) einer direkten mechanischen Interpretation zugänglich sind. Kritisch hinterfragt werden sollte auch nach erfolgreicher Modellanpassung, ob das Rechenmodell die Wirklichkeit realitätsgetreu modelliert. Sind die experimentell ermittelten Strukturantworten und mittels eines optimierten Rechenmodells ermittelte Strukturantworten identisch, ist eine notwendige Bedingung erfüllt, die jedoch nicht hinreichend sein muss. Zweckmäßig ist es, das Modell auch mit experimentellen Daten zu vergleichen, die nicht für die Optimierung genutzt wurden, um die Modellgüte besser einschätzen zu können (siehe Link und Friswell [57]). Sollen Schäden bzw. Strukturveränderungen im Rahmen eines Structural Health Monitoring anhand von FE-Modellen aufgezeigt werden, sind mittels Model-Updating an die Realität angepasste Modelle meist notwendig, da Modellierungsfehler oftmals einen stärkeren Einfluss auf die Systemmatrizen haben, als Strukturveränderungen in

Folge von Degradation. Damit wird eine modellgestützte Schadenslokalisierung sowie eine näherungsweise Quantifizierung eingetretener Strukturveränderungen prinzipiell möglich (siehe Fritzen et al. [26]).

2.4.2 Systemidentifikation

Die experimentelle Systemanalyse basiert auf dem experimentell gemessenen Übertragungsverhalten zwischen Systemeingängen (Wirkung auf die Struktur) und Systemausgängen (Strukturantwort). Es kann zwischen einer nichtparametrischen und einer parametrischen Identifikation unterschieden werden. Das Ergebnis einer nichtparametrischen Identifikation ist ein Modell, bei dem das zugrundeliegende physikalische Systemverhalten unberücksichtigt bleibt. Dementsprechend sind die identifizierten Modellparameter physikalisch (in dieser Arbeit mechanisch) nicht unmittelbar deutbar. Man spricht von sogenannten Verhaltensmodellen, da lediglich das Übertragungsverhalten zwischen Ein- und Ausgängen funktional beschrieben wird. Im Gegensatz dazu liegt der parametrischen Identifikation ein physikalisches Strukturmodell zugrunde, bei dem die Modellparameter die Zusammenhänge zwischen Ein- und Ausgängen analytisch beschreiben (Natke [66]). In Abbildung 2.3 sind die verschiedenen Modellierungsarten übersichtlich dargestellt.

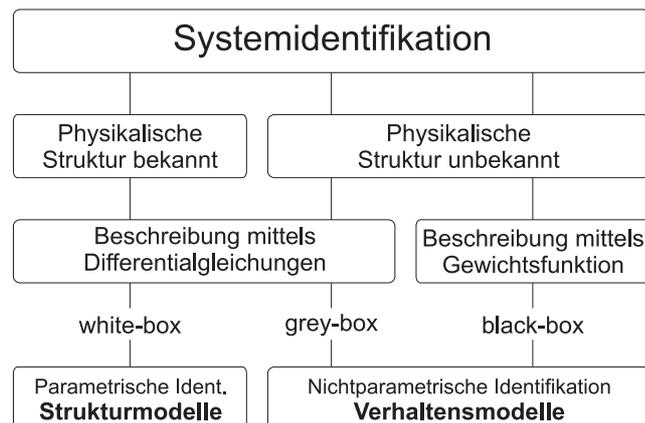


Abb. 2.3: Parametrische und nichtparametrische Systemidentifikation (nach Heun-ecke [34])

Im Folgenden sollen die in Abbildung 2.3 eingeführten Begriffe White-Box-, Grey-Box- und Black-Box-Modell näher erläutert werden:

Black-Box-Modelle sind Verhaltensmodelle, die die innere Struktur des dynamischen Prozesses unberücksichtigt lassen. Die Modellparameter sind keiner physikalischen Interpretation zugänglich. Gewichtsfunktionen und Zustandsraummodelle können beispielsweise zur Modellierung im Zeitbereich genutzt werden. Eine entsprechende Modellierung im Bildbereich (Frequenzbereich) kann z.B. durch die Übertragungsfunktion (Fouriertransformierte der Gewichtsfunktion) realisiert werden. In dieser Arbeit wird sich auf eine Zustandsraummodellierung im Zeitbereich beschränkt.

Grey-Box-Modelle zählen ebenfalls zu den Verhaltensmodellen, berücksichtigen aber bereits teilweise die Struktur des untersuchten Prozesses. Die Modellierung erfolgt mit linearen Differenzialgleichungen, die aber nicht das physikalische Verhalten der Struktur berücksichtigen. Die Festlegung notwendiger Modellparameter erfolgt in Abhängigkeit des gemessenen Ein- / Ausgangsverhaltens. Eine physikalische Interpretation dieser ist ebenso wie bei Black-Box-Modellen meist nicht direkt möglich. In dieser Arbeit werden Grey-Box-Modelle nicht weiter brücksichtigt.

White-Box-Modelle sind äquivalent mit Strukturmodellen. Sie basieren auf der Grundlage der strukturbeschreibenden Differenzialgleichungen. Die Modellparameter sind physikalisch interpretierbar. In der praktischen Anwendung dominieren statische bzw. dynamische Finite-Element-Modelle. Aber auch andere Methoden - z.B. Mehrkörpersysteme (MKS), Rand-Element-Methode (BEM), hybride Methoden (z.B. MKS mit FEM) - können genutzt werden. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie systemtheoretische Black-Box-Zustandsraummodelle in mechanisch interpretierbare White-Box-Modelle überführt werden können. Aus diesen können dann Strukturparameter extrahiert werden (z.B. Massen, Flexibilitäten).

Ergänzend werden in Tabelle 2.1 Beispiele einiger ausgewählter Verhaltens- und Strukturmodelle gegeben.

In Abbildung 2.4 ist die Ursache/Wirkungs-Beziehung eines Systems aus systemtheoretischer Sicht dargestellt. Gewöhnlich werden die Eingangsgrößen (Ursachen) des Systems in interessierende Eingangssignale \mathbf{u}_t und Störsignale \mathbf{w}_t unterteilt. Die Ausgangsgrößen (Wirkungen) \mathbf{y}_t setzen sich aus den interessierenden Nutzsignalen $\mathbf{y}_{t,u}$ infolge \mathbf{u}_t und den unerwünschten, von \mathbf{w}_t

Verhaltensmodelle	$\mathbf{y}_t = \int_0^{\infty} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{u}(t - \tau) d\tau$	Faltungsintegral (Zeitbereich)	Black-Box
	$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{u}(s)$	Übertragungsfunktion (Bildbereich)	
	$\dot{\mathbf{z}}_t = \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t$	Zustandsraummodell	
	$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{z}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t$	(Zeitbereich)	
Verhaltensmodelle	$\mathbf{E}_q \mathbf{y}_t^q + \dots + \mathbf{E}_1 \dot{\mathbf{y}}_t + \mathbf{E}_0 \mathbf{y}_t$	Gewöhnliche	Grey-Box
	$= \mathbf{F}_p \mathbf{u}_t^p + \dots + \mathbf{F}_1 \dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{F}_0 \mathbf{u}_t$	Differenzialgleichung	
	↓	↓	
	$\mathbf{y}_k = \mathbf{E}_1^* \mathbf{y}_{k-1} + \dots + \mathbf{E}_q^* \mathbf{y}_{k-q}$	Übergang zur Differenzgleichung	
	$+ \mathbf{F}_0^* \mathbf{u}_k + \dots + \mathbf{F}_p^* \mathbf{u}_{k-p}$	ARMA-Modell	
Strukturmodelle	$\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{f}$	Elastische Kraft-Verschiebungsrelation statische FE-Methode	White-Box
	$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_t + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}_t + \mathbf{K}\mathbf{y}_t = \mathbf{f}_t$	Schwingungs- differentialgleichung dynamische FE-Methode	

Tab. 2.1: Beispiele für Verhaltens- und Strukturmodelle (Eichhorn [18])

verursachten Störsignalen $\mathbf{y}_{t,w}$ zusammen (siehe Isermann [38]). Die Trennung von Nutz- und Störsignalen ist eine zentrale Problemstellung bei der experimentellen Ermittlung von Modellen für das Systemverhalten.

Schwerpunktmäßig sollen in dieser Arbeit elastomechanische Systeme betrachtet werden. Elastomechanische Systeme zeichnen sich unter anderem durch kausales Verhalten aus (Abbildung 2.5). Ein System wird genau dann als kausal bezeichnet, wenn der Verlauf des Ausgangssignals \mathbf{y}_t bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t_1 stets nur vom Verlauf des zugehörigen Eingangssignals \mathbf{u}_t bis zu diesem Zeitpunkt t_1 abhängt (Unbehauen [92]). Ergänzend wird von Föllinger [28] das Kausalitätsgesetz in der Form spezifiziert, dass bei einem physikalischem System die Ausgangsgröße zeitlich nicht vor der (zugehörigen)

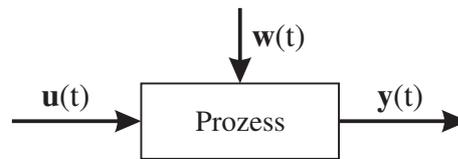


Abb. 2.4: Ein- / Ausgangsbeziehung eines Systems

Eingangsgröße auftreten kann.

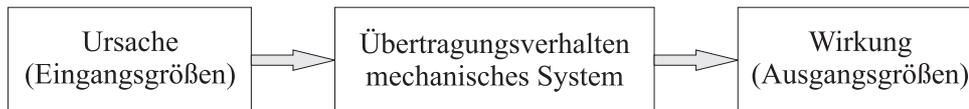


Abb. 2.5: Kausalkette mechanisches System

Oftmals ist es hinreichend, elastomechanische Strukturen durch lineare, zeitinvariante Systeme zu modellieren. In der Literatur werden solche Systeme abgekürzt als LTI-Systeme bezeichnet (linear-time-invariant). Linear ist ein System genau dann, wenn eine beliebige Linearkombination von Eingangssignalen \mathbf{u}_t eine entsprechende Linearkombination von zugehörigen Ausgangssignalen \mathbf{y}_t erzeugt (Unbehauen [92]). Es gilt für alle lineare Systeme das Superpositionsprinzip. Als zeitinvariant bezeichnet man ein System, wenn die Form des Ausgangssignals \mathbf{y}_t unabhängig vom Zeitpunkt t_0 ist, bei dem das Eingangssignal \mathbf{u}_t einsetzt (Föllner [28]). Die das System beschreibenden Parameter (z.B. Masse, Steifigkeit, Dämpfung oder Zustandsraumparameter) sind entsprechend konstant und unabhängig von der Zeit t . Systeme mit komplexeren Strukturverhalten (z.B. Nichtlinearitäten, plastische Verformungsanteile) können für eine näherungsweise Berechnung oftmals linearisiert und dementsprechend mit den hier beschriebenen Methoden untersucht werden.

Für den Fall zeitkontinuierlicher Signale kann die Quantifizierung der Modelle im Zeitbereich mittels Differenzialgleichungen erfolgen. Erfolgt die Modellierung auf Basis von zeitdiskreten Messsignalen, ist der Übergang zu Differenzengleichungen erforderlich. Zeitdiskrete Systeme ergeben sich dabei als Folge der messtechnischen Erfassung von Ein- und Ausgangsgrößen, da der Einsatz von Digitalrechnern die Abtastung der ursprünglich zeitkontinuierlichen Signale erfordert.

Zwei weitere elementare Systemeigenschaften, die Steuerbarkeit und die Be-

obachtbarkeit, sollen an dieser Stelle eingeführt werden. Bei der Systemidentifikation erfolgt die Modellierung der dynamischen Eigenschaften der untersuchten Struktur allein anhand gemessener Eingangs- und Ausgangssignale. Damit eine zutreffende Identifikation möglich wird, müssen alle zum dynamischen Verhalten beitragenden Eigenschaften vollständig steuer- und beobachtbar sein. Vollständig steuerbar ist ein System, wenn die Erregung so gewählt werden kann, dass die Antwort alle für die Aufgabenstellung notwendigen Freiheitsgrade in nichtvernachlässigbarem Maße enthält. Vollständig beobachtbar ist ein System, wenn die wesentlichen physikalischen Vorgänge in den Antwortsignalen enthalten sind (Natke [66]). Auf die mathematische Bedeutung dieser Forderungen wird in Kapitel 3 näher eingegangen.

2.5 Thematische Einordnung dieser Arbeit

Auf die Notwendigkeit einer laufenden Zustandsdiagnose im Lebensdauerzyklus von Maschinen, Anlagen und Bauwerken wurde bereits in Abschnitt 1.1 eingegangen. Die dafür erforderliche und gegenwärtig vorwiegend visuell vorgenommene Zustandserfassung soll zukünftig zunehmend durch objektive, automatische Verfahren ergänzt werden. Die teilweise in der Anwendung befindlichen statischen Verfahren zur globalen Zustandserfassung sind experimentell relativ aufwendig und damit kostenintensiv. Im Gegensatz dazu können dynamische Messungen mit geringerem Aufwand durchgeführt werden. Durch den Einsatz von Geschwindigkeits- und Beschleunigungssensoren kann auf die Errichtung einer von der Struktur unabhängigen Messbasis verzichtet werden. Wird zur Schwingungsanregung Umweltrauschen (z.B. aus Wind und Verkehr) genutzt, kann außerdem auf einen – bei großen Strukturen (z.B. Bauwerken) – aufwendigen Einsatz von Schwingungserregern verzichtet werden. Damit bietet sich die Überwachung des dynamischen Strukturverhaltens im Rahmen des Structural-Health-Monitoring an.

Zur Zustandserfassung auf Basis dynamischer Messdaten stehen im Wesentlichen zwei Verfahren zur Verfügung. Zum einen können die experimentellen Ergebnisse genutzt werden, um bestehende physikalische (Finite-Element-) Modelle an die realen Gegebenheiten anzupassen. Zur Verifikation eignen sich beispielsweise modale Größen. Zur Modellanpassung werden gewöhnlich so ge-

nannte Model-Updating-Verfahren genutzt. Aufgrund der verbreiteten Anwendung von Finite-Element-Modellen ist diese Methode in den letzten Jahren ausgiebig erforscht worden und kommt bereits bei einzelnen Projekten zur praktischen Anwendung. Vorteil dieser Methode ist, dass die Modellparameter einer direkten physikalischen (mechanischen) Interpretation zugänglich sind, wenn es gelingt, das Rechenmodell zutreffend an die Realität anzupassen.

Im Gegensatz dazu sollen in dieser Arbeit, auf Basis des experimentell gemessenen dynamischen Übertragungsverhaltens zwischen Systemeingängen (Erregung) und Systemausgängen (Strukturantwort) realer mechanischer Strukturen, zunächst Black-Box-Zustandsraummodelle identifiziert werden, die das reale Strukturverhalten mathematisch modellieren. Ein Nachteil dieser so genannten Black-Box-Modellierung ist es, dass die modellbeschreibenden Zustandsparameter zunächst keiner mechanischen Interpretation zugänglich sind.

In dieser Arbeit soll aufgezeigt werden, inwieweit die strukturmechanischen Parameter Masse, Steifigkeit, Flexibilität direkt aus den Zustandsraummodellen, die das Übertragungsverhalten beschreiben, extrahiert werden können. Nach den zunächst erörterten theoretischen Zusammenhängen liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Anwendung an experimentellen Daten von Laborversuchen und einer Spannbeton-Stabbogenbrücke. Die Bestimmung von Massen-, Steifigkeits-, Flexibilitäts- und Dämpfungsmatrizen aus Zustandsraummodellen mit experimentellen Schwingungsdaten ist nach Kenntnis des Autors neu und bisher nicht erforscht.

Einen weiteren Schwerpunkt dieser Arbeit bildet die Untersuchung, inwieweit mit den experimentell bestimmten Strukturparametern eine Lokalisation von Strukturveränderungen erfolgen kann.

In Abbildung 2.6 sind die grundsätzlichen Prinzipien der beiden Modellierungsverfahren – Systemidentifikation vs. Finite-Element-Modell – übersichtlich dargestellt.

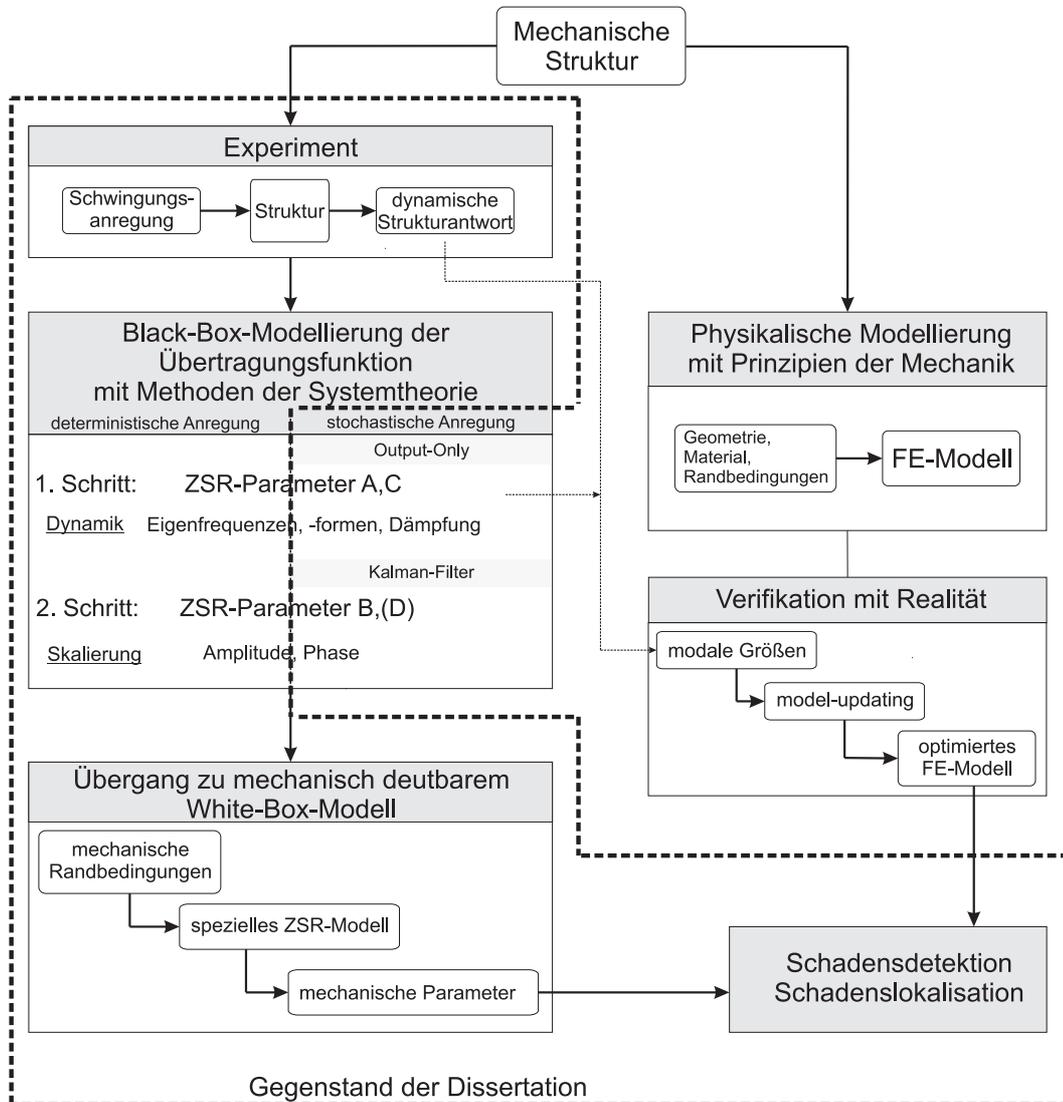


Abb. 2.6: Schadensbestimmung mit Systemidentifikation im Gegensatz zu einer mit physikalischer Modellierung

Kapitel 3

Black-Box

Zustandsraum-Modellierung

Im Rahmen einer Systemidentifikation werden mathematische Modelle bestimmt, die das (experimentell gemessene) Übertragungsverhalten zwischen Systemeingängen (Strukturerregung) und Systemausgängen (Strukturantwort) nach dem Prinzip Ursache-Wirkung zutreffend modellieren. Ein Nebeneffekt dieser Modellierung ist, dass die umfangreichen speicherintensiven Datensätze der im Zeitbereich gemessenen Schwingungen zu den identifizierten Modelldaten reduziert werden können, die gleiches Systemverhalten gewährleisten. Für die Modellierung existieren zahlreiche unterschiedliche Methoden. Prinzipiell erfolgt in dieser Arbeit eine Beschränkung auf lineare, zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme).

Die Modellierung kann hinsichtlich verschiedener Gesichtspunkte klassifiziert werden. Es kann unterschieden werden zwischen:

- zeitdiskreten / zeitkontinuierlichen Modellen
- Beschreibung im Zeitbereich / im (Bild-) Frequenzbereich
- parametrische / nichtparametrische Modelle

Zeitkontinuierliche Modelle werden zur analytischen Beschreibung physikalischer Systeme genutzt (siehe Kapitel 4). Bei der Identifikation von Modellen auf Basis von Messdaten sind zeitdiskrete Modelle erforderlich, da die zunächst zeitkontinuierlichen Messsignale bei der Erfassung durch Digitalrechner in Folge Abtastung diskretisiert werden. Nichtparametrische Modelle beschreiben

das Systemverhalten durch Kurvenverläufe oder Wertetabellen, besitzen keine bestimmte Struktur und sind im Allgemeinen unendlich großer Dimension. Die bekanntesten Modelle sind Gewichtsfunktion, Übertragungsfunktion und Frequenzgang [39]. Im Gegensatz dazu besitzen parametrische Modelle eine charakteristische speziell definierte Struktur, die geeignet ist, die im Zeitbereich oder im Frequenzbereich gemessenen Daten anhand der identifizierten Modellparameter (Koeffizienten der mathematischen Funktionen) darzustellen. Die einfachsten parametrischen Modelle, die das Eingangs- / Ausgangsverhalten von dynamischen Systemen modellieren, sind lineare polynomische Differenzialgleichungen (zeitkontinuierlich) bzw. Differenzengleichungen (zeitdiskret). Sollen zusätzlich interne Signale modelliert werden, eignet sich die Zustandsraumdarstellung, auf die sich in dieser Arbeit ausschließlicly bezogen wird.

Im Vergleich zu anderen Methoden der Systemidentifikation bietet die Modellierung mit Zustandsraummodellen einige Vorteile (siehe z.B. Favoreel et al. [21]). Sie ist besonders geeignet, Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen zu repräsentieren (MIMO-Systeme; Multi-Input, Multi-Output). Die Identifikation ist nicht iterativ (keine Konvergenzprobleme), schnell und numerisch robust, da sie auf numerisch stabilen Methoden der linearen Algebra basiert.

Zustandsraummodelle nutzen Zustandsvariablen, um das dynamische Systemverhalten durch Differenzial- bzw. Differenzengleichungen erster Ordnung zu beschreiben. In der in diesem Abschnitt ausschließlicly verwendeten zeitdiskreten Darstellung haben allgemeingültige Zustandsraummodelle folgende Form:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{3.1}$$

Hierbei werden die p gemessenen externen Eingänge (Zeitpunkt k) $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, die q gemessenen externen Ausgänge $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ und die n internen Zustände $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ durch die vier (zeitdiskreten) Modellparameter – Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Eingangsmatrix $\bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, Ausgangsmatrix $\bar{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ sowie Durchgriffsmatrix $\bar{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ – beschrieben. Die Messsignale \mathbf{y}_k werden dabei von einem Prozessrauschen $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und einem Messfehlerrauschen $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ beeinflusst, die idealerweise als mittelwertfreie, weiße, stationäre stochastische Rauschprozesse angenommen werden. Es ergeben sich die Er-

wartungswerte \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

und

$$\mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j^T & \mathbf{v}_j^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad \text{für } k = j \quad (3.3)$$

$$= \mathbf{0} \quad \text{für } k \neq j \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

mit den Autokovarianzmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{R} und der Kreuzkovarianzmatrix \mathbf{S} .

In Abbildung 3.1 ist die Funktionsweise eines diskreten Zustandsraummodells symbolisch durch ein Blockschaltbild veranschaulicht.

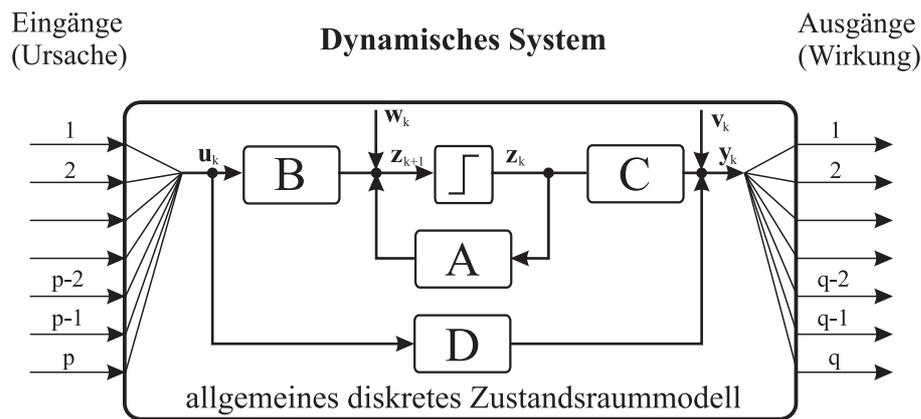


Abb. 3.1: Symbolische Darstellung zeitdiskretes Zustandsraummodell

Ausgangspunkt für die Entwicklung von numerisch stabilen Methoden zur experimentellen Zustandsraummodell-Identifikation bildeten die Veröffentlichungen von Ho und Kalman Mitte der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts (z.B. [41], [35]). Sie präsentierten erstmals ein Verfahren zur Realisierung von Zustandsraummodellen bei deterministischer Impulsanregung. Durch die zunehmende Rechenleistung und Verbreitung von Personal-Computern seit etwa 1980 wurde umfangreich an weiterentwickelten Verfahren zur Realisierung von Zustandsraummodellen basierend auf Methoden der linearen Algebra (QR-Zerlegung, Singulärwertzerlegung (SVD)) geforscht. Es wurden verschiedene auf der Systemtheorie basierende, als Subspace-Methoden bezeichnete Verfahren zur Realisierung entwickelt. Einen umfangreichen Überblick über die

entwickelten Verfahren, die auch in dieser Arbeit zur Black-Box-Modellierung genutzt werden, findet man bei Van Overschee und De Moor [94] und weiteren Autoren (z.B. Katayama [44]).

Entscheidend für die Auswahl der Realisierungsmethoden sind die Signaleigenschaften an den Systemeingängen. Es wird unterschieden zwischen einer:

- deterministischen, einer
- stochastischen sowie einer
- kombinierten deterministischen und stochastischen

Strukturerrregung. Deterministische Anregungen sind explizit analytisch beschreibbar und damit vorhersagbar sowie reproduzierbar. Stochastische Signale bzw. Erregungen sind regellos und damit nicht explizit mathematisch beschreibbar. Zur weiteren Begriffserklärung sei auf die Literatur verwiesen (Isermann [39], Natke [66]). Strenggenommen muß man für die Realisierung von praktischen Messungen generell kombinierte Modelle nutzen, da auch bei vorwiegend deterministisch angeregten Prozessen immer stochastische Signalanteile (z.B. durch Messfehlerrauschen) enthalten sein werden. Im Folgenden werden jedoch lediglich deterministische Strukturerrregungen behandelt.

3.1 Realisierung mit Impulsantwort

Diese Realisierungsmethode wurde erstmals in den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts von Ho und Kalman vorgestellt [35]. Geht man idealerweise davon aus, dass die Strukturerrregung durch einen (nur theoretisch formulierbaren) diskreten Einheitsimpuls

$$\mathbf{u}_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}^{p \times 1} & \dots \text{ für } k = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}^{p \times 1} & \dots \text{ für } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

erfolgt und die Rauschprozesse vernachlässigt werden ($\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$), so ergibt sich folgende Strukturantwort aus Gleichung 3.1:

$$\mathbf{Y}_k = \begin{cases} \bar{\mathbf{D}} & \text{für } k = 0 \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k-1}\bar{\mathbf{B}} & \text{für } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

mit

$$\mathbf{Y}_k = \left(\mathbf{y}^{u_1} \quad \mathbf{y}^{u_2} \quad \mathbf{y}^{u_3} \quad \dots \quad \mathbf{y}^{u_p} \right)^{q \times p} \quad (3.8)$$

Aufgabe einer Realisierung ist es, aus den gemessenen Systemantworten \mathbf{Y}_k die systembeschreibenden Zustandsraumparameter $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$ und $\bar{\mathbf{C}}$ zu bestimmen. Die Durchgriffsmatrix muss nicht explizit bestimmt werden, da:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{Y}_0 \quad (3.9)$$

Nach Ho und Kalman [35] können die zeitdiskreten Messwerte \mathbf{Y}_k in einer Blockhankelmatrix $\bar{\mathbf{H}}$ angeordnet und den gesuchten Systemparametern gegenübergestellt werden.

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \dots \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \\ \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & & \\ \mathbf{Y}_{k+3} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k-1}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+1}\bar{\mathbf{B}} & \dots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+1}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+2}\bar{\mathbf{B}} & \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+1}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+2}\bar{\mathbf{B}} & & \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+2}\bar{\mathbf{B}} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Eine Blockhankelmatrix zeichnet sich durch ihre besondere Struktur aus – jede Antidiagonale ist mit identischen Matrixblöcken gleicher Systemantworten besetzt. Theoretisch besitzt die Blockhankelmatrix eine unendliche Dimension ($\bar{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty}$). Bei der praktischen Anwendung erfolgt der Aufbau der Blockhankelmatrix jedoch mit einer endlichen Anzahl von Impulsantwortmatrizen. Der erste Matrixblock enthält die Systemantwort \mathbf{Y}_1 zum Zeitpunkt $k = 1$:

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_N \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \dots & \mathbf{Y}_{N+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \mathbf{Y}_5 & \dots & \mathbf{Y}_{N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_i & \mathbf{Y}_{i+1} & \mathbf{Y}_{i+2} & \dots & \mathbf{Y}_{i+N-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{iq \times Np} \quad (3.11)$$

Für lineare zeitinvariante Systeme lässt sich zeigen, dass die Hankelmatrix $\bar{\mathbf{H}}$ einen endlichen Rang n aufweist (Gantmacher [29]), der numerisch stabil mittels Singulärwertzerlegung (SVD - singular value decomposition) bestimmt werden kann. Die Anzahl der Matrixblöcke, mit der die Hankelmatrix aufgebaut wird, richtet sich nach dem (erwarteten) Rang, gewöhnlich mit den Dimensionen $n < s \leq N$.

Die Hankelmatrix $\bar{\mathbf{H}}$, aufgebaut mit den Messdaten, lässt sich in eine Beobachtbarkeitsmatrix $\bar{\mathbf{\Gamma}} \in \mathbb{R}^{kq \times n}$ und in eine Steuerbarkeitsmatrix $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{n \times lp}$ aufteilen, anhand derer die gesuchten Zustandsraumparameter bestimmt werden können [106]:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} &= \bar{\mathbf{\Gamma}}_i \bar{\mathbf{Q}}_N \\ &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^0 \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^1 \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^0\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}^1\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} & \dots & \bar{\mathbf{A}}^{N-1}\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Begriffe Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit von dynamischen Systemen wurden bereits in Abschnitt 2.4.2 erwähnt. Mathematisch lässt sich formulieren, dass ein System vollständig beobachtbar ist, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\bar{\mathbf{\Gamma}}_i$ einen vollen Rang n hat:

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^0 \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^1 \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$rg(\bar{\mathbf{\Gamma}}) = n \quad (3.14)$$

Vollständig steuerbar ist ein dynamisches System, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\bar{\mathbf{Q}}_N$ einen vollen Rang n besitzt:

$$\bar{\mathbf{Q}}_N = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^0\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}^1\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}^2\bar{\mathbf{B}} & \dots & \bar{\mathbf{A}}^{N-1}\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$rg(\bar{\mathbf{Q}}) = n \quad (3.16)$$

Eine Identifikation der systembeschreibenden Modellparameter erfolgt aus den gemessenen Eingangs- und Ausgangssignalen. Um ein zutreffendes Modell bestimmen zu können, müssen in den Messsignalen alle charakteristischen dynamischen Eigenschaften enthalten sein, das System muss vollständig steuer- und beobachtbar sein. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, kann eine Minimalrealisierung, zur Bestimmung der Zustandsraumparameter $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ durchgeführt werden. Bei minimal-realisierten Systemen reicht der kleinstmögliche Rang n zur Systembeschreibung aus.

Die Faktorisierung der Hankelmatrix $\bar{\mathbf{H}}$ in eine Beobachtbarkeitsmatrix $\bar{\mathbf{\Gamma}}_i$ und eine Steuerbarkeitsmatrix $\bar{\mathbf{Q}}_N$ –einhergehend mit einer Rangbestimmung– konnte erst mit der numerischen Aufbereitung der Singulärwertzerlegung (SVD) zuverlässig durchgeführt werden. Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung kann die Hankelmatrix $\bar{\mathbf{H}}$ in zwei orthogonale Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} sowie eine Diagonalmatrix $\mathbf{\Sigma}$, die die singuläre Werte σ enthält, zerlegt werden:

$$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (3.17)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n & \mathbf{U}_{n_\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Sigma}_{n_\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n^T \\ \mathbf{V}_{n_\perp}^T \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$= \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{V}_n^T + \mathbf{U}_{n_\perp} \mathbf{\Sigma}_{n_\perp} \mathbf{V}_{n_\perp}^T \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Mit

$$\mathbf{\Sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_{n_\perp} \cong \mathbf{0} \quad (3.21)$$

ergibt sich

$$\bar{\mathbf{H}} \cong \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{V}_n^T = \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T. \quad (3.22)$$

Die Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} sind orthogonale Matrizen, d.h. deren Zeilen- und Spaltenvektoren stehen paarweise orthonormal zueinander. Diese wichtige Eigenschaft, resultierend aus der linearen Algebra, wird für die Realisierung ausgiebig genutzt. Anhand der von Null verschiedenen Singulärwerte in $\mathbf{\Sigma}$ erfolgt

die Rangbestimmung des Systems, die bei einer Realisierung mit experimentellen Messdaten nicht immer eindeutig sein muss.

Ist der Rang n der Hankelmatrix $\bar{\mathbf{H}}$ anhand der Singulärwerte bestimmt, können die Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_i$ und die Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_N$ berechnet werden:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_i = \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \quad (3.23)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_N = \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{V}_N^T \quad (3.24)$$

Der Zustandsraumparameter $\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^0$ entspricht dem ersten Matrixblock der Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_i$ (Gleichung 3.13),

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_i(1 : q, 1 : n) \quad (3.25)$$

der Zustandsraumparameter $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}^0\tilde{\mathbf{B}}$ entspricht dem ersten Matrixblock der Steuerbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_N$ (Gleichung 3.15):

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{Q}}_N(1 : n, 1 : p) \quad (3.26)$$

Zur Bestimmung von $\tilde{\mathbf{A}}$ nutzt man die so genannte Shiftinvarianz. Es ist leicht erkennbar, dass:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{0|i-2} \tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{1|i-1} \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^0 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-2} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^1 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^3 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Damit kann aus zwei Untermatrizen der Beobachtbarkeitsmatrix ($\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{1|i-1}$ und $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_{0|i-2}$) mittels Pseudoinversion der gesuchte Zustandsraumparameter $\tilde{\mathbf{A}}$ bestimmt werden:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{k-2}^\dagger \tilde{\mathbf{\Gamma}}_{k-1} \quad (3.29)$$

Die Bestimmung von $\tilde{\mathbf{A}}$ aus der Steuerbarkeitsmatrix ist in Analogie möglich.

Damit ist eine Realisierung mit den ZSR-Parametern $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ bestimmt. Die Lösung ist jedoch nicht eindeutig, da unendlich viele Zustandsraumtransformationen mit $\mathbf{T} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existieren:

$$\mathbf{Y}_k = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k-1}\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{A}}^{k-1}\mathbf{T} \mathbf{T}^{k-1}\bar{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}} \quad (3.30)$$

3.2 Realisierung bei beliebigem Eingang

Bei der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Realisierung müssen die mechanischen Strukturen durch Dirac-Impulse zur Schwingung angeregt werden. Bei praktischen Versuchen können die theoretischen Annahmen hierfür (Impuls unendlich kurz) nicht umgesetzt werden. Seit der Entwicklung der Subspace-Identifikationsverfahren in den achtziger und neunziger Jahren des letzten Jahrhunderts stehen jedoch weitere Methoden zur Verfügung. Damit wird es möglich, Zustandsraummodelle des Übertragungsverhaltens von beliebig angeregten Systemen zu erstellen.

Zustandsraummodelle des dynamischen Übertragungsverhaltens realisiert werden können, auf Basis von gemessenen, beliebigen Strukturanregungen sowie den dadurch hervorgerufenen messtechnisch erfassten Strukturantworten.

Ziel aller Realisierungsverfahren ist die Bestimmung der Zustandsraummodellparameter $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ und $\bar{\mathbf{D}}$, die das Übertragungsverhalten zwischen den gemessenen Systemeingängen \mathbf{u}_k und Systemausgängen \mathbf{y}_k modellieren. Werden die Fehlerprozesse infolge von Prozessrauschen $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und von Messfehlerauschen $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{q \times 1}$ an den Systemausgängen berücksichtigt, erfolgt die Modellierung mit dem allgemeinen Zustandsraummodell:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{3.31}$$

Die prinzipielle Funktionsweise mit der in der Regelungstechnik üblichen Blockschaltbilddarstellung wurde bereits in Abbildung 3.1 verdeutlicht.

Eine Modell-Realisierung mit Subspace Methoden beruht dabei im allgemeinen auf den folgenden wesentlichen Teilschritten [21]:

1. Aufstellen einer Block-Hankelmatrix, die die gemessenen Ein- und Ausgangsdaten enthält
2. LQ-Zerlegung der Block-Hankelmatrix (numerisch durch QR-Zerlegung)
3. Singulärwertzerlegung von Untermatrizen der L-Matrix zur Bestimmung von Beobachtbarkeitsmatrix bzw. Zustandsvektoren durch Projektionen
4. Bestimmung der Zustandsraummodellparameter

Eine davon geringfügig abweichende Unterteilung soll in dieser Arbeit für die weitere Gliederung verwandt werden:

- 1. Identifikationsstufe:** Bestimmung der dynamischen Eigenschaften des Systems (Eigenfrequenzen, Eigenformen, modale Dämpfung) durch Schätzung von $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$
- 2. Identifikationsstufe:** Bestimmung der Verstärkung und der Phasenlage des Systems durch Schätzung von $\tilde{\mathbf{B}}$ sowie $\tilde{\mathbf{D}}$

Obwohl diese Teilschritte Basis der meisten Subspace-Methoden sind, unterscheiden sich die einzelnen Verfahren teilweise deutlich im Detail. Gewöhnlich wird für die Realisierung einer der folgenden drei Algorithmen genutzt:

- N4SID** Numerical algorithm for **S**ubspace **S**tate-**S**pace **S**ystem **I**Dentification (van Overschee und de Moor [94])
- CVA** Canonical **V**ariate **A**nalysis (Larimore [49], Peternell et al. [72])
- MOESP** **M**ultivariable **O**utput **E**rror **S**tate-**S**Pace Model Identification (Verhaegen und Dewilde [96])

Die genannten Algorithmen unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Art und Weise, wie die Zustandsraummodellparameter bestimmt werden. Bei N4SID erfolgt die Bestimmung auf Basis von Zustandsvektoren, die durch spezielle Projektionen der Messdaten bestimmt werden. CVA nutzt ebenfalls Zustandsvektoren zur Parameterschätzung, allerdings werden diese mit statistischen Verfahren bestimmt. Im Gegensatz dazu basiert die Berechnung der Modellparameter bei MOESP auf der Beobachtbarkeitsmatrix, die zunächst bestimmt werden muss. Verschiedene Varianten dieser Algorithmen wurden entwickelt. Für weitere Details wird auf die Literatur verwiesen (z.B. van Overschee und de Moor [94], de Moor et al. [13], Verhaegen und Dewilde [96], [97], [98] und Sima et al. [84]). Ebenfalls in der Literatur findet man Angaben, inwieweit sich die verschiedenen Algorithmen unterscheiden, z.B. in Bezug auf Modellgüte (Simulationsfehler zwischen identifizierten und vorgegebenen Simulationsmodell, Vorhersagefehler zwischen aktuellem und folgendem

Zeitschritt), numerischem Aufwand (Anzahl der Rechenoperationen) etc. (z.B. Favoreel et al. [21], [22] und Sima [84]).

In dieser Arbeit erfolgt die Identifikation von linearen zeitinvarianten Zustandsraummodellen bei gemessenen, beliebigen Strukturanregungen mit dem *past-output*-MOESP Algorithmus von Verhaegen [95], der nachfolgend näher erläutert werden soll:

3.2.1 Bestimmung von \mathbf{A} und \mathbf{C} mit PO-MOESP

Wie bereits erwähnt, ist es für die Realisierung zunächst notwendig, die gemessenen Eingangssignale in einer Blockhankelmatrix \mathbf{U} anzuordnen:

$$\mathbf{U}_{0|2i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{i-1} & \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_{i+1} & \cdots & \mathbf{u}_{i+N-2} \\ \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_{i+1} & \mathbf{u}_{i+2} & \cdots & \mathbf{u}_{i+N-1} \\ \mathbf{u}_{i+1} & \mathbf{u}_{i+2} & \mathbf{u}_{i+3} & \cdots & \mathbf{u}_{i+N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{2i-1} & \mathbf{u}_{2i} & \mathbf{u}_{2i+1} & \cdots & \mathbf{u}_{2i+N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|i-1} \\ \mathbf{U}_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{U}_f \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Dabei sollen die folgenden Konventionen entsprechend van Overschee und de Moor [93] gelten:

- Die Anzahl der Blockzeilen i kann frei gewählt werden. Es muss jedoch gewährleistet werden, dass i größer ist, als die Systemordnung n die beim Identifikationsprozess bestimmt wird. Die Matrix $\mathbf{U}_{0|2i-1}$ hat damit $2 \cdot p \cdot i$ Zeilen
- Die Matrix $\mathbf{U}_{0|2i-1}$ hat N Spalten. Bei der theoretischen Herleitung geht man aus statistischen Gründen davon aus, dass die Zeitreihe unendlich lang ist ($N \rightarrow \infty$). Bei praktischen Messungen muss die Zeitreihe hinreichend lang sein. Damit gilt: $n < i \ll N$
- Die Indizes von $\mathbf{U}_{0|2i-1}$ kennzeichnen das erste Element \mathbf{u}_0 und das letzte Element \mathbf{u}_{2i-1} der ersten Spalte. Es ist üblich, die Matrix zu unterteilen: in einen sogenannten *past*-Teil \mathbf{U}_p und einen *future*-Teil \mathbf{U}_f .

Diese Unterteilung ist nützlich im Rahmen der weiteren Erläuterung. Man sollte beachten, dass die Bezeichnung *past* und *future* irreführend sein kann, da beide Anteile bereits gemessen sein müssen und damit in der Vergangenheit liegen. Außerdem bestehen aufgrund der Hankelstruktur beide Teilmatrizen zu großen Teilen aus identischen Vektoren \mathbf{u}_k mit $k = i \dots i + N - 2$.

In Analogie kann aus den gemessenen Antwortsignalen eine Block-Hankelmatrix \mathbf{Y} aufgebaut werden, die ebenfalls in *past* und *future* unterteilt werden kann:

$$\mathbf{Y}_{0|2i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|i-1} \\ \mathbf{Y}_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Die Zustandsvektoren \mathbf{z}_k können wie folgt in \mathbf{Z} angeordnet werden:

$$\mathbf{Z}_{0|2i-1} = \left[\mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_1 \quad \dots \quad \mathbf{z}_{i-1} \mid \mathbf{z}_i \quad \dots \quad \mathbf{z}_{i+N-1} \right] = \left[\mathbf{Z}_p \mid \mathbf{Z}_f \right] \quad (3.34)$$

Unter Verwendung einer unteren Dreiecks-Töplitzmatrix $\hat{\mathbf{H}}$

$$\hat{\mathbf{H}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{D}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-2}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-3}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-4}\bar{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

sowie der Beobachtbarkeitsmatrix $\bar{\mathbf{\Gamma}}$

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^0 \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^1 \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

kann das Zustandsraum-Differenzialgleichungssystem 3.31 wie folgt formuliert werden:

$$\mathbf{Y}_f = \bar{\mathbf{\Gamma}}_i \mathbf{Z}_f + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{U}_f + \mathbf{Y}_f^S \quad (3.37)$$

Die *future*-Blockmatrix \mathbf{Y}_f^S enthält die stochastischen Signalanteile infolge von Prozessrauschen \mathbf{w}_k und Messfehlerrauschen \mathbf{v}_k .

Nach Verhaegen [95] werden die gemessenen Systemeingänge und Systemausgänge bei der PO-MOESP-Realisierung in einer speziellen Block-Hankelmatrix angeordnet und mittels LQ-Zerlegung faktorisiert:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{41} & \mathbf{L}_{42} & \mathbf{L}_{43} & \mathbf{L}_{44} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \\ \mathbf{Q}_4 \\ \mathbf{Q}_5 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Mit dieser Faktorisierung läßt sich Gleichung (3.37) nach Rechtsmultiplikation mit \mathbf{Q}_2^T wie folgt umformulieren:

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{Q}_2^T = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_f \mathbf{Q}_2^T + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{L}_{11} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2^T}_{=0} + \mathbf{Y}_f^S \mathbf{Q}_2^T \quad (3.39)$$

Geht man von mittelwertfreien, weißen, stationär stochastischen Rauschprozessen für \mathbf{w}_k und \mathbf{v}_k aus, die unabhängig vom Eingang \mathbf{u}_k und vom Anfangszustand \mathbf{z}_0 sind, läßt sich zeigen:

$$\mathbf{Y}_f^S \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

Somit reduziert sich Gleichung (3.39) zu (die Rechtsmultiplikation mit \mathbf{Q}_3^T ist vergleichbar):

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{Q}_2^T = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_f \mathbf{Q}_2^T \quad (3.41)$$

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{Q}_3^T = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_f \mathbf{Q}_3^T \quad (3.42)$$

Nach Rechtsmultiplikation mit \mathbf{Q}_2^T bzw. \mathbf{Q}_3^T gilt für \mathbf{Y}_f entsprechend Gleichung (3.38)

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{L}_{41} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2^T}_{=0} + \mathbf{L}_{42} \underbrace{\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^T}_{=I} + \mathbf{L}_{43} \underbrace{\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2^T}_{=0} + \mathbf{L}_{44} \underbrace{\mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_2^T}_{=0} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{Q}_3^T = \mathbf{L}_{41} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3^T}_{=0} + \mathbf{L}_{42} \underbrace{\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3^T}_{=0} + \mathbf{L}_{43} \underbrace{\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_3^T}_{=I} + \mathbf{L}_{44} \underbrace{\mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_3^T}_{=0} \quad (3.44)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (3.43) und (3.44) in die Gleichung (3.41) und (3.42) ergibt sich:

$$\tilde{\Gamma}_i \mathbf{Z}_f \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{L}_{42} \quad (3.45)$$

$$\tilde{\Gamma}_i \mathbf{Z}_f \mathbf{Q}_3^T = \mathbf{L}_{43} \quad (3.46)$$

Damit kann durch eine Singulärwertzerlegung die im ersten Identifikationsschritt gesuchte Beobachtbarkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_i$ bestimmt werden. Wird $[\mathbf{L}_{42} \ \mathbf{L}_{43}]$ durch eine Singulärwertzerlegung aufgeteilt,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{42} & \mathbf{L}_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n & \mathbf{U}_{n_\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n^T \\ \mathbf{V}_{n_\perp}^T \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

so entspricht der Spaltenraum von \mathbf{U}_n einer Näherung des Spaltenraumes von $\bar{\mathbf{\Gamma}}$. Entsprechend gilt:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_i = \mathbf{U}_n \mathbf{T} \quad (3.48)$$

Die Matrix \mathbf{T} ist eine beliebige nichtsinguläre $n \times n$ Transformationsmatrix.

Nach Bestimmung von $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_i$ können die Zustandsraumparameter $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ entsprechend den Gleichungen (3.25) und (3.29) bestimmt werden.

3.2.2 Bestimmung von \mathbf{B} und \mathbf{D} mit PO-MOESP

In [95] ist beschrieben, wie die Zustandsraumparameter $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ auf Basis der im vorangegangenen Abschnitt dargestellten LQ-Zerlegung bestimmt werden können. Folgende Bedingungen müssen bei der Parameterbestimmung vorausgesetzt werden:

- Das Prozessrauschen \mathbf{w}_k und das Messfehlerrauschen \mathbf{v}_k sind mittelwertfreie weiße Musterrauschprozesse, unabhängig vom Systemeingang \mathbf{u}_k und dem Anfangszustand \mathbf{z}_k
- Die Strukturerrregung erfolgt durch persistente (fortwährende) Anregungsprozesse. Eine persistente Anregung ist gegeben, wenn

$$\mathbf{E}\{\mathbf{U}_{0|i} \mathbf{U}_{0|i}^T\} > 0 \quad (3.49)$$

Eine detailliertere Darstellung kann aus [33] entnommen werden.

- LQ-Zerlegung mit theoretisch unendlich vielen Messwerten N . Bei praktischen Anwendungen muss eine hinreichend große Anzahl an Messwerten verwandt werden.

In Analogie zu Gleichung (3.37) kann man nach Rechtsmultiplikation mit \mathbf{Q}_1^T bzw. \mathbf{Q}_2^T folgende Bedingungen aufschreiben:

$$\mathbf{Y}_p \mathbf{Q}_1^T = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_p \mathbf{Q}_1^T + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{U}_p \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{Y}_p^S \mathbf{Q}_1^T \quad (3.50)$$

$$\mathbf{Y}_p \mathbf{Q}_2^T = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_p \mathbf{Q}_2^T + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{U}_p \mathbf{Q}_2^T + \mathbf{Y}_p^S \mathbf{Q}_2^T \quad (3.51)$$

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{Q}_1^T = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_f \mathbf{Q}_1^T + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{U}_f \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{Y}_f^S \mathbf{Q}_1^T \quad (3.52)$$

Da die Rauschprozesse \mathbf{w}_k und \mathbf{v}_k den o.g. Musterprozessen genügen gilt:

$$\mathbf{Y}_p^S \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Y}_p^S \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{Y}_f^S \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

Entsprechend der LQ-Zerlegung in Gleichung (3.38) gilt

$$\mathbf{U}_p \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{L}_{21} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{I}} + \mathbf{L}_{22} \underbrace{\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{0}} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{U}_p \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{L}_{21} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2^T}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{L}_{22} \underbrace{\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^T}_{=\mathbf{I}} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{U}_f \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{L}_{11} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{I}} \quad (3.56)$$

sowie

$$\mathbf{Y}_p \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{L}_{31} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{I}} + \mathbf{L}_{32} \underbrace{\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{L}_{33} \underbrace{\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{0}} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{Y}_p \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{L}_{31} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2^T}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{L}_{32} \underbrace{\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^T}_{=\mathbf{I}} + \mathbf{L}_{33} \underbrace{\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_2^T}_{=\mathbf{0}} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{L}_{41} \underbrace{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{I}} + \mathbf{L}_{42} \underbrace{\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{L}_{43} \underbrace{\mathbf{Q}_3 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{L}_{44} \underbrace{\mathbf{Q}_4 \mathbf{Q}_1^T}_{=\mathbf{0}} \quad (3.59)$$

Werden die Gleichungen (3.53) bis (3.59) in die Gleichungen (3.50) bis (3.52) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\mathbf{L}_{31} = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_p \mathbf{Q}_1^T + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{L}_{21} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{L}_{32} = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_p \mathbf{Q}_2^T + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{L}_{22} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{L}_{41} = \bar{\Gamma}_i \mathbf{Z}_f \mathbf{Q}_1^T + \hat{\mathbf{H}}_i \mathbf{L}_{11} \quad (3.62)$$

Oder anders geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{41} \end{bmatrix} = \bar{\Gamma}_i \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_p \mathbf{Q}_1^T & \mathbf{Z}_p \mathbf{Q}_2^T & \mathbf{Z}_f \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{H}}_i \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{11} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Zur Erinnerung sei auf die Gleichungen (3.47) und (3.48) verwiesen, aus denen man erkennt, dass die Beobachtermatrix $\bar{\Gamma}_i$ aus \mathbf{U}_n bestimmt wird. Da $[\mathbf{U}_n \ \mathbf{U}_{n_\perp}]$ entsprechend der Definition der Singulärwertzerlegung eine orthogonale Matrix ist, gilt:

$$\mathbf{U}_{n_\perp}^T \bar{\Gamma}_i = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

Mit diesem Wissen lässt sich Gleichung (3.63) vereinfachen zu:

$$\mathbf{U}_{n_\perp}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{41} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{n_\perp}^T \hat{\mathbf{H}}_i \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{11} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Für die weitere Lösung ist es notwendig, die Matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{11} \end{bmatrix}$ zu invertieren. Im Falle einer ausreichend breitbandigen Strukturanregung existiert eine Pseudoinverse und Gleichung (3.65) kann umgeformt werden zu:

$$\mathbf{U}_{n_\perp}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{11} \end{bmatrix}^\dagger = \mathbf{U}_{n_\perp}^T \hat{\mathbf{H}}_i \quad (3.66)$$

Zur weiteren Erläuterung wird die linke Gleichungsseite in einer Hilfsmatrix Ξ zusammengefasst und wie folgt unterteilt:

$$\Xi = \mathbf{U}_{n_\perp}^T \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{11} \end{bmatrix}^\dagger \quad (3.67)$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \dots & \Xi_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(qi-n) \times pi} \quad (3.68)$$

Die Matrix $\mathbf{U}_{n_\perp}^T$ wird ebenfalls in Teilmatrizen unterteilt:

$$\mathbf{U}_{n_\perp}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \dots & \mathbf{U}_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(qi-n) \times qi} \quad (3.69)$$

Durch die vorgenommenen Definitionen kann Gleichung (3.66) wie folgt formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 & \dots & \mathbf{U}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^0\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{D}} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-2}\tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{i-3}\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & \dots & \Xi_i \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Ausmultipliziert ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_1 \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{U}_2 \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{U}_3 \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^1 \tilde{\mathbf{B}} + \dots + \mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{i-2} \tilde{\mathbf{B}} &= \boldsymbol{\Xi}_1 \\
\mathbf{U}_2 \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{U}_3 \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathbf{B}} + \dots + \mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{i-3} \tilde{\mathbf{B}} &= \boldsymbol{\Xi}_2 \\
&\vdots = \vdots \\
\mathbf{U}_{i-1} \tilde{\mathbf{D}} + \mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^0 \tilde{\mathbf{B}} &= \boldsymbol{\Xi}_{i-1} \\
\mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{D}} &= \boldsymbol{\Xi}_i
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Dieses Gleichungssystem kann zweckgemäß in folgender Matrixschreibweise zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^0 + \mathbf{U}_3 \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^1 + \dots + \mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{i-2} \\
\mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_3 \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^0 + \dots + \mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{i-3} \\
\vdots & \vdots \\
\mathbf{U}_{i-1} & \mathbf{U}_i \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^0 \\
\mathbf{U}_i & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\tilde{\mathbf{D}} \\
\tilde{\mathbf{B}}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{\Xi}_1 \\
\boldsymbol{\Xi}_2 \\
\vdots \\
\boldsymbol{\Xi}_{i-1} \\
\boldsymbol{\Xi}_i
\end{bmatrix} \tag{3.72}$$

Nach Lösen des überbestimmten Gleichungssystems (3.72) sind die gesuchten Zustandsraumparameter $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ bestimmt. Ebenso wie in Abschnitt 3.1 gilt auch hier, dass eine mögliche von unendlich vielen Realisierungen gefunden wurde, die alle durch beliebige nichtsinguläre Transformationsmatrizen $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ineinander überführbar sind.

$$\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{A}}^{k-1} \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{A}}^{k-1} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{k-1} \tilde{\mathbf{B}} \tag{3.73}$$

3.2.3 Bestimmung von \mathbf{B} und \mathbf{D} mit Simulationsmodell

Bei der praktischen Anwendung der im vorangegangenen Abschnitt präsentierten Methode kann es passieren, dass die Matrix $\boldsymbol{\Xi}$ schlecht konditioniert ist. In diesen Fällen beinhaltet die Schätzung von $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ große Fehler. Dementsprechend ist die Modellgüte des bestimmten Zustandsraummodells nicht ausreichend, um das gemessene Eingangs-/Ausgangsverhalten hinreichend genau zu modellieren. Einige Beispiele sind in Abschnitt 7.1.3 aufgeführt. Eine numerisch stabilere Variante zur Bestimmung von $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ und gegebenenfalls der Anfangszustände \mathbf{z}_0 soll nachfolgend vorgestellt werden. In der Literatur wird diese Methode teilweise verschieden bezeichnet. Bei Sima et al. [84] wird sie

zum Beispiel als *Kronecker-Produkt-basierender Algorithmus* bezeichnet, bei Viberg [99] als *Simulationsmodell-basierend*.

Ausgangspunkt ist die Zustandsraumformulierung

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\quad (3.74)$$

Gleichung (3.74) kann umgeschrieben werden zu:

$$\mathbf{y}_k = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{z}_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} (\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k-1-\tau}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_\tau) + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (3.75)$$

Unter Anwendung des Kronecker-Produktes kann Gleichung (3.75) ausgedrückt werden als:

$$\mathbf{y}_k = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{z}_0 + \left[\sum_{\tau=0}^{k-1} \mathbf{u}_\tau^T \otimes \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k-1-\tau} \right] \text{vec}(\bar{\mathbf{B}}) + [\mathbf{u}_k^T \otimes \mathbf{I}_q] \text{vec}(\bar{\mathbf{D}}) + \mathbf{v}_k \quad (3.76)$$

\mathbf{I}_q ist eine Einheitsmatrix der Dimension $q \times q$. Die Bezeichnung $\text{vec}(\bar{\mathbf{B}})$ bedeutet, dass die einzelnen Spaltenvektoren von $\bar{\mathbf{B}}$ untereinander angeordnet werden:

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{B}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{B}}_p \end{bmatrix}^{n \times p} \rightarrow \text{vec}(\bar{\mathbf{B}}) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{B}}_p \end{bmatrix}^{np \times 1} \quad (3.77)$$

In Analogie dazu wird $\text{vec}(\bar{\mathbf{D}})$ aus $\bar{\mathbf{D}}$ gebildet.

Aus Gleichung (3.76) wird das Grundprinzip dieser simulations-basierten Bestimmung von $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{D}}$ und \mathbf{z}_0 deutlich. Zentraler Bestandteil ist der Term $\left[\sum_{\tau=0}^{k-1} \mathbf{u}_\tau^T \otimes \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k-1-\tau} \right]$. Es handelt sich dabei um simulierte Systemantworten, die aus dem Zustandsraummodell

$$\mathbf{z}_{k+1_{sim}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_{k_{sim}} + \bar{\mathbf{B}}_{sim}\mathbf{u}_k \quad (3.78)$$

$$\mathbf{y}_{k_{sim}} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_{k_{sim}} \quad (3.79)$$

entstehen. Darin werden die bekannte (oder bereits geschätzte) Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$, die Ausgangsmatrix $\bar{\mathbf{C}}$ sowie das gemessene Eingangssignal \mathbf{u}_k genutzt, um die simulierten Systemantworten $\mathbf{y}_{k_{sim}}$ zu berechnen. Man spricht von simulierten Systemantworten, da bei diesem Zustandsraummodell die zunächst

unbekannte Ausgangsmatrix $\bar{\mathbf{B}}$ elementweise mit Einheitswerten (Einsen) besetzt wird. Die experimentell gemessenen Systemantworten \mathbf{y}_k setzen sich dann entsprechend Gleichung (3.76) zusammen, aus einem Anteil infolge Anfangszustand \mathbf{z}_0 , den simulierten Messsignalen $\mathbf{y}_{k_{sim}}$ – skaliert durch die zu bestimmende Eingangsmatrix $\bar{\mathbf{B}}$, einem Anteil vom Eingang \mathbf{u}_k – skaliert durch die zu bestimmende Durchgriffsmatrix $\bar{\mathbf{D}}$, sowie dem Messfehlerrauschen \mathbf{v}_k .

Zur Bestimmung von $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{D}}$ sowie \mathbf{z}_0 werden die folgenden Matrizen definiert:

$$\mathbf{Y}_{0|N} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{N-1} \end{bmatrix}^{qN \times 1} \quad \bar{\mathbf{\Gamma}}_N = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^0 \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^1 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{N-1} \end{bmatrix}^{qN \times n} \quad (3.80)$$

$$\mathbf{Y}_{sim} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_0^T \otimes \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \sum_{\tau=0}^{N-2} \mathbf{u}_\tau^T \otimes \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-2-\tau} \end{bmatrix}^{qN \times np} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^T \otimes \mathbf{I}_q \\ \mathbf{u}_1^T \otimes \mathbf{I}_q \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N-1}^T \otimes \mathbf{I}_q \end{bmatrix}^{qN \times pq} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{N-1} \end{bmatrix}^{qN \times 1} \quad (3.82)$$

Damit kann Gleichung (3.76) in Matrixschreibweise dargestellt werden:

$$\mathbf{Y}_{0|N} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Gamma}}_N & \mathbf{Y}_{sim} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \\ \text{vec}(\tilde{\mathbf{B}}) \\ \text{vec}(\tilde{\mathbf{D}}) \end{bmatrix} + \mathbf{V} \quad (3.83)$$

Durch Lösung des überbestimmten Gleichungssystems (3.83) lassen sich nun die Lösungen für $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ und \mathbf{z}_0 bestimmen. Es sollte jedoch beachtet werden, dass infolge von \mathbf{z}_0 das Gleichungssystem für $N \gg 1$ schlecht konditioniert ist und zu schlechten Ergebnissen führt (Viberg [99]). Bei den in dieser Arbeit durchgeführten Realisierungen wurde diese Erfahrung bestätigt (für Beispiele siehe Kapitel 7). Numerisch stabiler erfolgt die Parameterschätzung unter Vernachlässigung von \mathbf{z}_0 mit:

$$\begin{bmatrix} \text{vec}(\tilde{\mathbf{B}}) \\ \text{vec}(\tilde{\mathbf{D}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{sim} & \mathbf{U} \end{bmatrix}^\dagger \mathbf{Y}_{0|N} \quad (3.84)$$

Ein weiterer Vorteil des Verfahrens im Vergleich zur Bestimmung von $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ mit PO-MOESP ist, dass bei Bedarf ausschließlich $\tilde{\mathbf{B}}$ geschätzt zu werden braucht ($\tilde{\mathbf{D}}$ wird in diesem Fall als Nullmatrix angenommen):

$$\left[\text{vec}(\tilde{\mathbf{B}}) \right] = \left[\mathbf{Y}_{sim} \right]^\dagger \mathbf{Y}_{0|N} \quad (3.85)$$

Eine Erläuterung über den Einfluss der Durchgriffsmatrix $\tilde{\mathbf{D}}$ erfolgt in Abschnitt 4, praktische Beispiele sind in Abschnitt 7.1.3 dargestellt.

Wiederholend sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die gefundene Realisierung nur eine von unendlich vielen ist, da:

$$\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k-1}\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{A}}^{k-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\bar{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}} \quad (3.86)$$

Kapitel 4

White-Box

Zustandsraum-Modellierung

Mathematische Modelle, deren beschreibende Modellparameter physikalisch interpretierbar sind, werden als White-Box Modelle bezeichnet. Die Beschreibung des modellierten Strukturverhaltens erfolgt mit Differenzialgleichungen. Deshalb werden die Modelle auch als Strukturmodelle bezeichnet. In der praktischen (mechanischen) Anwendung dominieren statische bzw. dynamische Finite-Element-Modelle.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Transformation von systemtheoretisch identifizierten, mechanisch zunächst nicht deutbaren Black-Box-Modellen in mechanisch deutbare, parametrische White-Box-Strukturmodelle. Diese Transformation ist in der Literatur nur vereinzelt anhand von numerischen Simulationen beschrieben (Ko, Hang [46] sowie Yang, Yeh [104]). Eine detaillierte theoretische Betrachtung – wie in diesem Abschnitt dargestellt – sowie eine Validierung an experimentellen Daten (Abschnitt 7) ist nach Kenntnis des Autors bisher nicht veröffentlicht.

Zunächst wird gezeigt, wie das Verhalten von mechanischen Strukturen in der Zustandsraumdarstellung modelliert werden kann. Basis ist die Bewegungsgleichung der Mechanik. Anschließend wird ausführlich auf die Unterschiede zwischen diesen rein mechanisch motivierten Zustandsraummodellen und den wesentlich allgemeingültigeren – mit Methoden der Systemtheorie identifizierten – Black-Box-Zustandsraummodellen eingegangen. Aus diesen Betrachtungen entstehen dann zwingend notwendige Bedingungen für eine eindeutige

Transformation. Ergänzend wird auf die Wandlung von zeitdiskreten zu zeitkontinuierlichen Modellen eingegangen.

4.1 Zustandsraummodell auf Grundlage der Bewegungsgleichung

Mechanische Strukturen sind durch die physikalischen Parameter Masse, Steifigkeit und Dämpfung gekennzeichnet. Für die numerische Berechnung mit Digitalcomputern ist eine Diskretisierung erforderlich, beispielsweise mit der Finite-Element-Methode. Um damit das dynamische Verhalten zu beschreiben, wird üblicherweise die folgende – als Bewegungsgleichung der Mechanik bekannte – zeitkontinuierliche partielle Differenzialgleichung genutzt:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_t + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}_t + \mathbf{K}\mathbf{y}_t = \mathbf{u}_t \quad (4.1)$$

Die Matrizen $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ bezeichnen die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen einer mechanischen Struktur mit N Freiheitsgraden. Der Vektor $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ beschreibt die Verschiebung der Freiheitsgrade, $\dot{\mathbf{y}}_t$ und $\ddot{\mathbf{y}}_t$ kennzeichnen entsprechend die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Der Vektor $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ enthält die anregenden Kräfte an den einzelnen Freiheitsgraden.

Die Differenzialgleichung zweiter Ordnung (4.1) kann durch Einführung einer weiteren Gleichung – die die Geschwindigkeiten als erste Ableitung der Wege nach der Zeit definiert – in ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung überführt werden:

$$\dot{\mathbf{y}}_t = \mathbf{v}_t \quad (4.2)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}_t = \dot{\mathbf{v}}_t = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{v}_t - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{y}_t + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}_t \quad (4.3)$$

bzw. in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_t \\ \dot{\mathbf{v}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{v}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}_t \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Durch Einführung eines Zustandsraumvektors

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{v}_t \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

ergibt sich die allgemeine Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_t &= \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{C}_d \mathbf{z}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t\end{aligned}\tag{4.6}$$

Es resultieren die folgenden, für dieses lineare mechanische Strukturmodell geltenden zeitinvarianten Zustandsraumparameter:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}^{2N \times 2N} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}^{2N \times N} \\ \mathbf{C}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{N \times 2N} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{0}^{N \times N}\end{aligned}\tag{4.7}$$

Dieses aus der Bewegungsgleichung 4.1 hergeleitete Zustandsraummodell hat die Verschiebungen \mathbf{y}_t als Ausgang. Um dies zu kennzeichnen wird die Ausgangsmatrix \mathbf{C} mit dem Index d (für Displacement) versehen. Auf die Umrechnung zwischen Modellen mit Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgrößen wird am Ende dieses Abschnittes noch näher eingegangen.

In Abschnitt 3 wurde bereits erläutert, dass Zustandsraummodelle genutzt werden können, um das Übertragungsverhalten von den Eingängen (Strukturerrregung) zu den Ausgängen (Strukturantwort) nach dem Prinzip Ursache-Wirkung zu modellieren. Mit der oben eingeführten Notation kann die Übertragungsfunktion $\mathbf{H}(s)$ im Bildbereich nach einer Laplace-Transformation durch die Zustandsraumparameter dargestellt werden:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{H}(s) \mathbf{u}(s)\tag{4.8}$$

$$= \mathbf{C}_d(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \mathbf{u}(s)\tag{4.9}$$

$$= \left(\frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^0\mathbf{B}}{s} + \frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^1\mathbf{B}}{s^2} + \dots + \frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B}}{s^i} \right) \mathbf{u}(s)\tag{4.10}$$

Wie aus der klassischen Modalanalyse bekannt ist, kann die Übertragungs-

funktion $\mathbf{H}(s)$ auch modal zusammengesetzt werden:

$$\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K})^{-1} \quad (4.11)$$

$$= \mathbf{\Phi}(s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^T \quad (4.12)$$

$$= \sum_{i=1}^{2N} \frac{\phi_i \otimes \phi_i^T}{s - \lambda_i} \quad (4.13)$$

Für das Differenzialgleichungssystem erster Ordnung (4.6) existiert die folgende Lösung:

$$\mathbf{z}_t = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (4.14)$$

Damit kann für eine mechanische Struktur, die in Ruhelage durch eine mathematisch formulierte (ideale) zeitkontinuierliche Impulsfunktion an allen Freiheitsgraden angeregt wird, die Strukturantwort berechnet werden:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{C}_d e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} \quad (4.15)$$

Wird die Matrixfunktion $e^{\mathbf{A}t}$ ausgedrückt durch die folgende Taylorreihe

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^1t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4t^4}{4!} + \dots, \quad (4.16)$$

folgt für die Strukturantwort:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{C}_d\mathbf{A}^0\mathbf{B} + \mathbf{C}_d\mathbf{A}^1\mathbf{B}t + \frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^2\mathbf{B}t^2}{2!} + \frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^3\mathbf{B}t^3}{3!} + \frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^4\mathbf{B}t^4}{4!} + \dots \quad (4.17)$$

Die Laplacetransformation dieser Gleichung ergibt:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}_d\mathbf{A}^0\mathbf{B} + \frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^1\mathbf{B}}{s} + \frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^2\mathbf{B}}{s^2} + \frac{\mathbf{C}_d\mathbf{A}^3\mathbf{B}}{s^3} + \dots \quad (4.18)$$

In den Gleichungen (4.10), (4.17) und (4.18) werden die Produkte der Zustandsraumparameter \mathbf{C}_d , \mathbf{A}^m und \mathbf{B} für die Berechnung genutzt. Diese Produkte $\mathbf{C}\mathbf{A}^m\mathbf{B}$ werden gewöhnlich als Markovparameter bezeichnet. Sie können in einer Hankelmatrix angeordnet werden:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d\mathbf{A}^0\mathbf{B} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}^1\mathbf{B} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots \\ \mathbf{C}_d\mathbf{A}^1\mathbf{B} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}^3\mathbf{B} & \dots \\ \mathbf{C}_d\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}^3\mathbf{B} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}^4\mathbf{B} & \dots \\ \mathbf{C}_d\mathbf{A}^3\mathbf{B} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}^4\mathbf{B} & \mathbf{C}_d\mathbf{A}^5\mathbf{B} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

An dieser Stelle soll eine neue Betrachtungsweise eingeführt werden, die grundlegend für die in dieser Arbeit dargestellten Algorithmen zur Schadensdetektion und -lokalisierung ist: Wenn eine mechanische Struktur durch ein White-Box-Zustandsraummodell modelliert wird, ist das physikalische Verhalten und damit der Aufbau der Zustandsraummatrizen entsprechend (4.7) bekannt. Damit wird es möglich, die strukturmechanischen Parameter Masse, Steifigkeit bzw. Flexibilität und Dämpfung aus den Markovparametern analytisch zu bestimmen:

$$\mathbf{C}_d \mathbf{A}^0 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{C}_d \mathbf{A}^1 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{C}_d \mathbf{A}^2 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{M}^{-1} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{C}_d \mathbf{A}^3 \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} = -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{K} - \mathbf{D} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}] \mathbf{M}^{-1} \quad (4.23)$$

Für die Extraktion von mechanischen Strukturparametern können auch negative Potenzen m von \mathbf{A} genutzt werden. Man erhält damit die Flexibilitätsmatrix direkt:

$$\mathbf{C}_d \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{D} & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} = -\mathbf{K}^{-1} = -\mathbf{F} \quad (4.24)$$

Diese zunächst bedeutungslos erscheinenden Zusammenhänge werden bedeutsam, wenn man bedenkt, dass durch eine einfache Zustandsraumtransformation

$$\tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\mathbf{A}}^m \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{C}_d \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^m \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C}_d \mathbf{A}^m \mathbf{B} \quad (4.25)$$

die in den Gleichungen (4.7) mechanisch deutbaren Untermatrix-Strukturen verloren gehen. Bedeutungsvoll ist dies deshalb, weil bei Modellidentifikationen auf Basis von Messdaten die Zustandsraumparameter –einzeln betrachtet–

niemals physikalisch deutbar sein werden. Durch die Nutzung der stets physikalisch interpretierbaren Markovparameter kann jedoch direkt auf die mechanischen Strukturmatrizen geschlossen werden.

Mit dem Wissen aus den Gleichungen (4.20) bis (4.23) kann die Hankelmatrix (4.19) in einer äquivalenten Darstellung mit mechanischen Parametern aufgebaut werden:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1} & \dots \\ \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1} & \dots & \dots \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{K}-\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{M}^{-1} & \dots & \dots \\ -\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{K}-\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}]\mathbf{M}^{-1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungssignale

In den vorangegangenen Ausführungen erfolgte die Darstellung der Zustandsraummodelle generell in einer wegbasierten Darstellung. Jedoch sind experimentell Wegmessungen – aufgrund der üblicherweise notwendigen, von der Struktur entkoppelten verformungsfreien Messbasis – aufwendig, oftmals auch unmöglich. Experimentelle Schwingungsmessungen basieren daher im Regelfall auf Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungssignalen. Damit sind jedoch auch die identifizierten Zustandsraummodelle geschwindigkeits- bzw. beschleunigungsbasiert. Infolgedessen müssen die identifizierten Modelle einfach bzw. doppelt integriert werden, damit die im vorigen Abschnitt genannten Beziehungen gelten (siehe auch [1]).

Für lineare mechanische Strukturen ergibt sich nach den Gleichungen (4.6) und (4.7) die folgende wegbasierte Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\mathbf{z}}_t = \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \quad (4.26)$$

$$\mathbf{y}_{d,t} = \mathbf{C}_d \mathbf{z}_t$$

Durch einfache Differentiation der Wegsignale $\mathbf{y}_{d,t}$ nach der Zeit ergeben sich Geschwindigkeitssignale $\mathbf{y}_{v,t}$:

$$\mathbf{y}_{v,t} = \dot{\mathbf{y}}_{d,t} = \mathbf{C}_d \dot{\mathbf{z}}_t \quad (4.27)$$

$$= \mathbf{C}_d \mathbf{A} \mathbf{z}_t + \mathbf{C}_d \mathbf{B} \mathbf{u}_t \quad (4.28)$$

$$= \mathbf{C}_v \mathbf{z}_t + \mathbf{D}_v \mathbf{u}_t \quad (4.29)$$

Aufgrund der physikalischen Gegebenheiten mechanischer Strukturen ist nach Gleichung (4.20) bekannt, dass

$$\mathbf{D}_v = \mathbf{C}_d \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (4.30)$$

Entsprechend ergibt sich folgende geschwindigkeitsbasierte Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_t &= \mathbf{A} \mathbf{z}_t + \mathbf{B} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_{v,t} &= \mathbf{C}_v \mathbf{z}_t \quad \text{mit } \mathbf{C}_v = \mathbf{C}_d \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Durch eine weitere Differentiation nach der Zeit gelangt man zu den Beschleunigungssignalen $\mathbf{y}_{a,t}$:

$$\mathbf{y}_{a,t} = \ddot{\mathbf{y}}_{d,t} = \mathbf{C}_d \mathbf{A} \dot{\mathbf{z}}_t + \mathbf{D}_v \dot{\mathbf{u}}_t \quad (4.32)$$

$$= \mathbf{C}_d \mathbf{A}^2 \mathbf{z}_t + \mathbf{C}_d \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}_t + \mathbf{0} \quad (4.33)$$

$$= \mathbf{C}_a \mathbf{z}_t + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_t \quad (4.34)$$

Damit ergibt sich das beschleunigungsbasierte Zustandsraummodell:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_t &= \mathbf{A} \mathbf{z}_t + \mathbf{B} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_{a,t} &= \mathbf{C}_a \mathbf{z}_t + \mathbf{D}_a \mathbf{u}_t \quad \text{mit } \mathbf{C}_a = \mathbf{C}_d \mathbf{A}^2 \text{ und } \mathbf{D}_a = \mathbf{C}_d \mathbf{A} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}_v \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}_a \mathbf{A}^{-2} \quad (4.36)$$

Das bedeutet, dass eine wegbasierte Ausgangsmatrix \mathbf{C}_d durch einfache oder zweifache Integration, gleichbedeutend einer Multiplikation mit \mathbf{A}^{-1} bzw. \mathbf{A}^{-2} , aus einer geschwindigkeitsbasierten oder beschleunigungsbasierten Ausgangsmatrix (\mathbf{C}_v bzw. \mathbf{C}_a) gewonnen werden kann, die üblicherweise im Rahmen einer Black-Box-Realisierung identifiziert wird.

4.2 Übergang von Black-Box zu White-Box Zustandsraummodellen

An dieser Stelle sollen die bisher beschriebenen theoretischen Zusammenhänge kurz zusammengefasst werden, um die Bedeutung der weiteren Ausführungen

in diesem Abschnitt herauszuarbeiten. Nach einer Einführung in die Thematik und einer Begriffsdefinition wurden im Abschnitt 3 ausgewählte Methoden der experimentellen Systemidentifikation zur Black-Box-Modellierung ausführlich vorgestellt. Ergebnis einer solchen numerischen Realisierung sind Zustandsraummodelle, die das (experimentell) gemessene Übertragungsverhalten zwischen Strukturanregung und Strukturantwort abbilden. In Abschnitt 4 erfolgte die Motivierung von White-Box-Zustandsraummodellen mechanischer Strukturen auf Basis von physikalischen Gesetzmäßigkeiten (Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen, Stoffgesetze). Außerdem wurden Markovparameter herausgearbeitet, anhand derer die strukturmechanischen Parametermatrizen Masse, Steifigkeit, Flexibilität und Dämpfung aus Zustandsraummodellen extrahiert werden können.

Flüchtig betrachtet erscheint damit ein einheitlicher Zusammenhang zwischen Black-Box-Zustandsraummodellen –identifiziert aus experimentellen Daten– und mechanisch deutbaren Strukturparametern (Masse, Steifigkeit, etc.) hergestellt zu sein. Die bisher dargestellten theoretischen Zusammenhänge sind jedoch noch nicht vollständig, um eine solche eindeutige Transformation von Black-Box-Modellen zu White-Box-Modellen zu ermöglichen. Zur besseren Übersicht soll auf die spezifischen Unterschiede der verschiedenen Modellierungsansätze nochmals näher eingegangen werden:

Black-Box-Modelle sind Verhaltensmodelle, die die innere Struktur des dynamischen Prozesses unberücksichtigt lassen. Bei der Realisierung werden die beschreibenden Modellparameter mit numerischen Algorithmen so geschätzt, dass ausschließlich das (gemessene) Übertragungsverhalten vollständig vom Modell wiedergegeben wird. Dementsprechend sind die einzelnen Modellparameter rein mathematisch bestimmt und keiner physikalischen Interpretation zugänglich. Physikalische Gesetzmäßigkeiten –die über das reine Übertragungsverhalten hinausgehen– sind bei der Modellerstellung unbekannt und finden dementsprechend keine Berücksichtigung.

White-Box-Modelle basieren auf der Grundlage von strukturbeschreibenden Differenzialgleichungen. Dementsprechend sind die Modellparameter direkt physikalisch (hier mechanisch) interpretierbar. Daraus ergeben

sich dann zahlreiche spezielle Forderungen und Randbedingungen, die zu gewährleisten sind. Darauf wird nachfolgend noch näher eingegangen.

Separat betrachtet existieren für die beiden vorgenannten, grundsätzlich verschiedenen Modellierungsansätze zahlreiche Veröffentlichungen, die sich ausführlich mit der Thematik befassen. Als exemplarischer Auszug sei auf Haverkamp [33], van Overschee und de Moor [94], Peeters [71] und Katayama [44] für die Black-Box-Modellierung verwiesen. Die Erstellung von White-Box-Zustandsraummodellen mechanischer Strukturen wird u.a. bei Alvin [1], Angelis et al. [4] und Lus et al. [61] beschrieben.

Im Folgenden soll näher erörtert werden, welche Voraussetzungen mindestens erfüllt sein müssen, damit aus experimentell identifizierten Zustandsraummodellen mechanisch deutbare Strukturparameter extrahiert werden können. Eine solche Darstellung einer Transformation von Black-Box-Modellen zu White-Box-Modellen – die es auf Basis von Markovparametern ermöglicht, mechanisch deutbare Strukturparameter zu extrahieren – ist nach Kenntnis des Autors einmalig und bildet einen Schwerpunkt dieser Arbeit:

Betrachtet man die bisher dargestellten Gesetzmäßigkeiten von Black-Box-Modellen und White-Box-Modellen wird klar, dass Black-Box-Zustandsraummodelle – identifiziert mit Methoden der Systemtheorie – allgemeingültiger formuliert sind als mechanisch deutbare White-Box-Zustandsraummodelle auf Grundlage der Bewegungsgleichung. Damit sind letztgenannte ein Spezialfall bzw. eine Untermenge der allgemeingültigeren Black-Box-Zustandsraummodellierung, bei der ausschließlich das Übertragungsverhalten zutreffend abgebildet sein muss. Dieser wichtige Zusammenhang ist in Abbildung 4.1 ergänzend schematisch dargestellt. Aufgeführt sind in dieser Darstellung zusätzlich die im Rahmen dieser Arbeit herausgearbeiteten Bedingungen, die mindestens gelten müssen, damit der Übergang von identifizierten Black-Box-Modellen zu mechanisch deutbaren White-Box-Modellen eindeutig erfolgen kann. Nachfolgend sollen die herausgearbeiteten Erfordernisse näher erläutert werden:

1. Es muss gewährleistet sein, dass die folgende wichtige Bedingung – resultierend aus dem mechanisch motivierten White-Box-Modell (siehe auch Gleichung (4.20)) erfüllt wird (für die Umrechnung zwischen beschleunigungs-, geschwindigkeits- und wegbasierten Modellen siehe Abschnitt

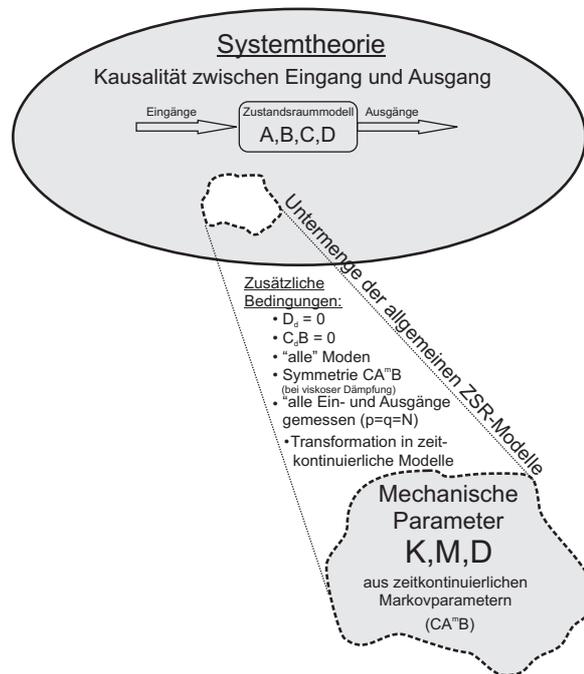


Abb. 4.1: Notwendige Anforderungen für den Übergang vom Black-Box zum White-Box-Modell

4.1):

$$\mathbf{C}_d \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.37)$$

Betrachtet man die Antwort einer ruhenden mechanischen Struktur auf eine Impulsanregung (Gleichung (4.15)), diesmal zum Zeitpunkt $t = 0$,

$$\mathbf{Y}_{t=0} = \mathbf{C}_d e^{\mathbf{A} \cdot 0} \mathbf{B} = \mathbf{C}_d \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

kann die Bedeutung von Gleichung (4.37) illustriert werden: Zum Zeitpunkt des Dirac-Impulses ($t = 0$) ist die Strukturantwort eine Nullmatrix, die mechanische Struktur befindet sich in der Ruhelage. Wäre das Produkt $\mathbf{C}_d \mathbf{B}$ ungleich Null, so wäre die Antwort einer in der Nulllage ruhenden Struktur auf einen Dirac-Impuls zum Zeitpunkt $t = 0$ ungleich Null, was physikalisch nicht möglich ist.

Damit wird deutlich, dass im Rahmen einer experimentellen Realisierung die Bedingung $\mathbf{C}_d \mathbf{B} = \mathbf{0}$ aus Gleichung (4.37) zwingend zu gewährleisten

ist, wenn mechanische Parameter extrahiert werden sollen. Durch eine simple Zustandsraumtransformation

$$\mathbf{C}_d \mathbf{B} = \mathbf{C}_d \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{C}}_d \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad (4.39)$$

kann das Produkt $\mathbf{C}_d \mathbf{B}$ nicht verändert werden, da die (beliebige) Transformationsmatrix \mathbf{T} keinen Einfluss auf das physikalisch interpretierbare Produkt $\mathbf{C}_d \mathbf{B}$ hat. Es muss betont werden, dass dieser Punkt ausschließlich experimentelle Realisierungen betrifft. Definitionsgemäß ergibt sich diese Bedingung bei mechanischen Strukturen von selbst. Durch „unsaubere“ experimentelle Gegebenheiten (z.B. reale Impulsanregung) kann es jedoch zu störenden Einflüssen kommen.

2. Ebenfalls beachtet werden muss der Einfluss der Durchgriffsmatrix \mathbf{D} . In der allgemeinen Zustandsraumdarstellung existiert solch ein direkter Durchgriff von den Eingangssignalen auf die Ausgangssignale (siehe auch Gleichung (3.31)). Dementsprechend wird bei der Realisierung auf Basis von experimentellen Daten gewöhnlich ein vollständiges Modell – charakterisiert durch die Zustandsraumparameter \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} und \mathbf{D} – bestimmt. Im Gegensatz dazu ist bei mechanisch motivierten White-Box-Zustandsraummodellen die Durchgriffsmatrix eine Nullmatrix (ein direkter Durchgang vom Eingang auf den Ausgang existiert nicht), wenn die Messdaten weg- bzw. geschwindigkeitsbasiert sind (Gleichungen (4.26) und (4.30)). Für beschleunigungs-basierte Messdaten ist entsprechend (4.35)

$$\mathbf{D}_a = \mathbf{C}_d \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (4.40)$$

Auch für diesen Punkt gilt, dass die vorgenannten Bedingungen im Rahmen der Realisierung zu gewährleisten sind, wenn mechanisch deutbare Parameter aus identifizierten Black-Box-Modellen extrahiert werden sollen. Es muss angemerkt werden, dass eine Verletzungen dieser Bedingung – bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten experimentellen Untersuchungen – weit weniger bedeutend war, als eine Verletzung von $\mathbf{C}_d \mathbf{B} = \mathbf{0}$ aus Punkt 1.

3. Eine weitere Einschränkung betrifft die Symmetrie der Markovparameter (Parametermatrizen). Aus der Mechanik ist bekannt, dass die mechanischen Parametermatrizen Steifigkeit \mathbf{K} und Masse \mathbf{M} symmetrisch und

positiv-definit sind (siehe z.B. Natke [66]). Diese Symmetrie wird u.a. durch den Reziprozitätssatz von Maxwell und Betti hervorgerufen, der die Vertauschbarkeit von Ursache und Wirkung beschreibt. Um diesen Anforderungen zu genügen, müssen auch die (experimentell) ermittelten Markovparameter elastischer, viskos gedämpfter Strukturen $\mathbf{CA}^m\mathbf{B}$ symmetrisch und positiv-definit sein. Nichtviskose Dämpfung führt zu einer Aufhebung der Symmetrieanforderung von Messsignalen und Markovparametern. Dennoch können solche Systeme mit Zustandsraummodellen identifiziert werden.

4. In Abschnitt 4.1 ist ausführlich beschrieben, das die mechanischen Parametermatrizen –z.B. die Massenmatrix \mathbf{M} oder die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} – beim mechanisch motivierten Zustandsraummodell bestimmten Markovparametern entsprechen (Gleichungen (4.20) bis (4.24)).

Nach einer Jordan-Transformation, beispielsweise von

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{-1} &= \mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{C}_d\mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ &= \hat{\mathbf{C}}_d\mathbf{\Lambda}\hat{\mathbf{B}}\end{aligned}\quad (4.41)$$

mit $\hat{\mathbf{C}}_d = (\hat{\mathbf{c}}_1, \hat{\mathbf{c}}_2, \dots, \hat{\mathbf{c}}_n)$ (spaltenweise) und $\hat{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{b}}_1, \hat{\mathbf{b}}_2, \dots, \hat{\mathbf{b}}_n)$ (zeilenweise) sowie $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_i)$, können die sogenannten dynamischen Einflusszahlen $F_{dyn,i}$ (siehe Lenzen [50]) für jeden einzelnen Mode i durch eine dyadische Multiplikation von $\hat{\mathbf{c}}_i$ mit $\hat{\mathbf{b}}_i$ bestimmt werden. Die Markovparameter –gleichbedeutend die mechanischen Parametermatrizen– können dann als Summe aller dyadischen Produkte dargestellt werden, wobei die dynamischen Einflusszahlmatrizen (Dyaden) mit den zugehörigen komplex-konjugierten Eigenwerten zu multiplizieren sind. Beispielsweise:

$$\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = -\mathbf{K}^{-1} = -\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n=2N} \left[(\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i) \lambda_i^{-1} \right] \quad (4.42)$$

$$\mathbf{C}_d\mathbf{B} = \mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n=2N} \left[(\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i) \right] \quad (4.43)$$

$$\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1} = \sum_{i=1}^{n=2N} \left[(\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i) \lambda_i \right] \quad (4.44)$$

An dieser Stelle soll kurz angemerkt werden, dass sich die modellierte Übertragungsfunktion ebenfalls durch die dynamischen Einflusszahlen sowie die zugehörigen Eigenwerte darstellen lässt (siehe auch Abschnitt 5.1.4):

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_{dyn,i}}{s - \lambda_i} = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i)}{s - \lambda_i} \quad (4.45)$$

Es werden anhand der Gleichungen (4.42) bis (4.44) folgende Dinge deutlich:

- Für alle Markovparameter –respektive alle Potenzen von \mathbf{A} – und damit auch für die mechanischen Parametermatrizen sind die dynamischen Einflusszahlen $(\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i)$ identisch. Die Unterschiede in den Markovparametern $\mathbf{C}\mathbf{A}^m\mathbf{B}$ resultieren allein aus der verschiedenen Skalierung der einzelnen Dyaden mit den zugehörigen Eigenwerten λ_i^m
- Aufgrund der paarweise komplex konjugierten Eigenwerte der Zustandsraummodelle sind auch die Dyaden $(\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i)$ sowie die daraus gebildeten Produkte paarweise komplex konjugiert. Durch paarweise Addition zusammengehörender Produkte aus Dyade und Eigenwert ergeben sich die reellen Anteile der Markovparameter, die imaginären Anteile heben sich gegenseitig auf.
- In Punkt 1 der übergeordneten Aufzählung wurde gezeigt, dass bei mechanischen Strukturen $\mathbf{C}_d\mathbf{B} = \mathbf{0}$ sein muss. In Verbindung mit Gleichung (4.43) wird deutlich, dass die Realteile der paarweise komplex konjugierten dynamischen Einflusszahlen $(\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i)$ generell Null sein müssen, damit diese Bedingung erfüllt werden kann (Im Gegensatz zu den vom Vorzeichen unterschiedlichen Imaginäranteilen verdoppeln sich die vom Vorzeichen gleichen reellen Anteile bei der paarweisen Addition). Dieses Wissen kann letztendlich auch dazu genutzt werden, um die Markovparameter identifizierter Modelle mechanisch deutbar zu machen, obwohl die Bedingung $\mathbf{C}_d\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (z.B. aufgrund experimenteller Randbedingungen) nicht erfüllt werden konnte: Durch „Drehen“ der komplexen Vektoren der Dyaden

auf einen Winkel von $\pm 90^\circ$ kann $\mathbf{C}_d \mathbf{B} = \mathbf{0}$ erfüllt werden. Eine Anwendung hierfür ist in Abschnitt 7.1.4 näher erläutert.

- Damit die „korrekten“ mechanischen Parametermatrizen aus dem Zustandsraummodell extrahiert werden, ist es notwendig, dass die Messsignale „alle“ Moden enthalten (N -Freiheitsgrade $\hat{=}$ N -Moden – entsprechend ergibt sich eine Zustandsraumdimension von $n = 2N$). Gerade diese Forderung ist experimentell oftmals nicht umsetzbar, da im realen Versuch meist nur einige niederfrequente Moden angeregt werden können. Abhängig von der Struktur, der Erregung und der Anzahl der Sensoren ist die experimentell ermittelbare Modellordnung n meist verschieden von $2N$. In solchen Fällen, bei denen nicht „alle“ Moden identifiziert werden, können die mechanischen Parametermatrizen lediglich näherungsweise aus den zugehörigen Markovparametern extrahiert werden. Weitere Einzelheiten hierzu werden in Abschnitt 5.2 erläutert.

5. Die messtechnische Erfassung des Schwingungsverhaltens von mechanischen Strukturen erfolgt heutzutage mit Digitalrechnern. Damit diese die von den einzelnen Sensoren bereitgestellten analogen Signale erfassen und weiterverarbeiten können, werden die Messsignale mit Analog-Digital-Wandlern zeitlich diskretisiert und anschließend digital gespeichert. Die Modellierung des Übertragungsverhaltens basiert daher auf zeitdiskreten Zustandsraummodellen (siehe Abschnitt 3). Für die Extraktion von mechanischen Parametermatrizen sind jedoch zeitkontinuierliche Modelle erforderlich. Dementsprechend müssen die zunächst identifizierten zeitdiskreten Modelle in zeitkontinuierliche Zustandsraummodelle überführt werden. Hierfür existieren Standardmethoden die ausführlich in der Literatur beschrieben sind (jedoch allgemein mathematisch, ohne speziellen mechanischen Bezug), z.B. bei Franklin et al. [23] und Wang [100]. Im Rahmen dieser Arbeit wurden jedoch einige Besonderheiten bei der diskret-kontinuierlich Wandlung festgestellt, auf die im Abschnitt 4.4 näher eingegangen wird.

Werden die aufgeführten Bedingungen durch das Modell erfüllt, können aus den Markovparametern direkt die Massen-, Flexibilitäts- bzw. Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen extrahiert werden.

4.3 Vergleich mit klassischer Modalanalyse

An dieser Stelle sollen die in dieser Arbeit aufgezeigten Möglichkeiten zur Extraktion mechanischer Strukturparameter – direkt aus den Markovparametern (experimentell) identifizierter Zustandsraummodelle – bekannten Verfahren der klassischen Modalanalyse gegenübergestellt werden. Einen guten Überblick über die traditionellen Verfahren der experimentellen Modalanalyse findet man bei Natke [66], von dem auch einzelne Teile in die Übersichtstabelle 4.1 übernommen wurden. Oftmals wird die Dämpfung vernachlässigt und mit den vergleichsweise einfachen Zusammenhängen zwischen reellen Moden / reellen Eigenwerten sowie den Strukturparametern gearbeitet. Wesentlich komplexer sind die Zusammenhänge bereits bei viskos gedämpften Strukturen. Insbesondere die notwendige Normierung der Moden und die Berechnung der Steifigkeitsmatrix aus den Moden ist aufwändig. Außerdem enthält die Modalmatrix Φ bei gedämpften Strukturen $2N$ – jeweils paarweise komplex-konjugierte – Eigenvektoren. Die $2N$ Eigenwerte λ_i sind ebenfalls paarweise komplex-konjugiert.

Vergleicht man die Extraktion der strukturmechanischen Parametermatrizen aus (experimentell) identifizierten Markovparametern mit den Zusammenhängen der klassischen Modalanalyse von viskos gedämpften Systemen sind große Ähnlichkeiten feststellbar. Bei genauer Betrachtung ergeben sich jedoch nennenswerte Unterschiede:

Der wichtigste Unterschied betrifft die Normierung. Damit bei der klassischen Modalanalyse aus der Modalmatrix Φ und den zugehörigen Eigenwerten Λ Massen-, Steifigkeits- oder Dämpfungsmatrizen bestimmt werden können, müssen die Eigenvektoren in der Modalmatrix zunächst geeignet normiert sein. Für diese Normierung ist jedoch die Kenntnis der Massen- und Dämpfungsmatrizen notwendig (siehe Tabelle 4.1), die aber bei einer experimentellen Identifikation zunächst nicht bekannt sind. An dieser Stelle werden die Vorteile einer Zustandsraummodellierung und die in dieser Arbeit beschriebene Extraktion der mechanischen Strukturparameter aus den Markovparametern deutlich: Die bei der klassischen Modalanalyse notwendige Normierung der Eigenvektoren kann entfallen, da diese Skalierung direkt im identifizierten Zustandsraummodell enthalten ist.

	ungedämpftes System	klassische Modalanalyse viskos gedämpftes System	Zustandsraummodellierung experimentelle Identifikation
Anzahl Moden	$i = N$ $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}; \mathbf{\Phi}_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}$	$i = 2N$ $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}; \mathbf{\Phi} \in \mathbb{C}^{N \times 2N}$	$i = n \rightarrow$ ZSR-Dim. ($n = 2N$ bei FE-Simul.) $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}; \hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}^{q \times n}; \hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}^{n \times p}$
Normierung – muss erfüllt sein!	$\mathbf{M}_g = \mathbf{I}$	$\mathbf{A}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{A} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{D}\mathbf{\Phi} = \mathbf{I}$	keine Normierung notwendig
Massenmatrix	$\mathbf{M} = (\mathbf{\Phi}_0\mathbf{\Phi}_0^T)^{-1}$	$\mathbf{M} = (\mathbf{\Phi}\mathbf{A}\mathbf{\Phi}^T)^{-1}$	$\tilde{\mathbf{M}} = (\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = (\hat{\mathbf{C}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{B}})^{-1}$
inverse Massenmatrix	$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{\Phi}_0\mathbf{\Phi}_0^T$ $= \sum_{i=1}^N \phi_{0,i} \otimes \phi_{0,i}^T$	$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{A}\mathbf{\Phi}^T$ $= \sum_{i=1}^{2N} \lambda_i \phi_i \otimes \phi_i^T$	$\tilde{\mathbf{M}}^{-1} = \mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{B}}$ $= \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i$
Flexibilitätsmatrix	$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{\Phi}_0\mathbf{\Lambda}_0^{-1}\mathbf{\Phi}_0^T$ $= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_{0,i}} \phi_{0,i} \otimes \phi_{0,i}^T$	$\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1} = -\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Phi}^T$ $= -\sum_{i=1}^{2N} \frac{1}{\lambda_i} \phi_i \otimes \phi_i^T$	$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{K}}^{-1} = -\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{C}}\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{B}}$ $= -\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i$
Steifigkeitsmatrix	$\mathbf{K} = (\mathbf{\Phi}_0^T)^{-1} \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{\Phi}_0^{-1}$	$\mathbf{K} = -\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^3\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}$ $-\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}$	$\hat{\mathbf{K}} = -(\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$
Dämpfungsmatrix	-	$\mathbf{D} = -\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}$ $= -\sum_{i=1}^{2N} \lambda_i^2 \mathbf{M}\phi_i \otimes \phi_i^T\mathbf{M}$	$\hat{\mathbf{D}} = -\mathbf{M}\mathbf{C}_d\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{M} = -\mathbf{M}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{B}}\mathbf{M}$ $= -\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \mathbf{M}\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i\mathbf{M}$
			$\mathbf{0} = \mathbf{C}_d\mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i$
Übertragungsmatrix	$\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K})^{-1}$ $= \mathbf{\Phi}_0(\mathbf{s}\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_0)^{-1}\mathbf{\Phi}_0^T$ $= \sum_{i=1}^N \frac{\phi_{0,i} \otimes \phi_{0,i}^T}{s^2 + \lambda_{0,i}}$	$\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K})^{-1}$ $= \mathbf{\Phi}(s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}^T$ $= \sum_{i=1}^{2N} \frac{\phi_i \otimes \phi_i^T}{s - \lambda_i}$	$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}_d(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ $= \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{s}\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\hat{\mathbf{B}}$ $= \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i}{s - \lambda_i}$

Tab. 4.1: Systemmatrizen – Vergleich zwischen klassischer Modalanalyse und Zustandsraummodellierung

Allerdings benötigt man Messdaten von allen q -Ausgängen infolge Anregung an allen p -Eingängen, um vollständig besetzte strukturmechanische Parametermatrizen extrahieren zu können, da die Dimension der Markovparameter direkt von der Anzahl der gemessenen Ein- und Ausgänge abhängig ist ($\mathbf{C}_d \mathbf{A}^m \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q \times p}$). Alternativ dazu können jedoch auch weniger Messdaten ausreichend sein, wenn die dyadischen Produkte durch Multiplikation mit den transponierten Moden vollständig aufgebaut werden – dann allerdings unter Annahme viskoser Dämpfung und idealer Symmetrie.

Außerdem ist das Zustandsraummodell wesentlich allgemeingültiger, als die klassische Modalanalyse unter Annahme eines viskos gedämpften Systems, wie bereits in Abschnitt 4.2 dargestellt wurde. Dies betrifft beispielsweise die Dämpfung, die nicht zwingend viskos sein muss. Nichtsymmetrische Strukturantworten infolge nichtsymmetrischer Dämpfungsmatrizen können vom Zustandsraummodell ebenfalls abgebildet werden. Daraus lassen sich dann anschließend die korrekten strukturmechanischen Parameter extrahieren. In solch einem Fall – der bei experimentellen Messungen die Regel sein wird – lassen sich dann die Eigenvektoren, die spaltenweise in $\hat{\mathbf{c}}_i$ bzw. zeilenweise in $\hat{\mathbf{b}}_i$ stehen, nicht durch eine Zustandsraumtransformation ineinander überführen, so dass $\hat{\mathbf{c}}_i = \boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\phi}_i^T = \hat{\mathbf{b}}_i^T$, wie dies im Fall viskoser Dämpfung möglich ist.

Weiterhin sollte beachtet werden, dass bei einer experimentellen Identifikation auf Basis von Schwingungsmessdaten die Anzahl der messtechnisch erfassten Moden und damit auch der Zustandsraumdimension nicht in einem direkten Zusammenhang zu der Anzahl der Freiheitsgrade bzw. Sensoren steht, wie dies im theoretischen Fall bei Simulationsrechnungen auf Basis der Bewegungsgleichung der Fall ist. Experimentell kann die Anzahl der erfassten Moden – abhängig von der Struktur, der Erregung und der Sensordichte – größer, aber auch kleiner als die Anzahl der Sensoren bzw. der Freiheitsgrade sein. Auf die Auswirkungen wird unter anderem auch in Kapitel 6 näher eingegangen. Andere Autoren haben sich ebenfalls mit Approximationsfehlern infolge der Mitnahme einer beschränkten Anzahl von Moden befasst. Beispielfhaft soll hier auf Rodden [78] verwiesen werden.

Deswegen, aber auch aus weiteren Gründen (z.B. Messungenauigkeiten), wird man bei Identifikationen auf Basis von experimentellen Messdaten die strukturmechanischen Parameter lediglich näherungsweise bestimmen können.

In dieser Arbeit werden die identifizierten strukturmechanischen Parameter deshalb als „korrespondierende“ Größen bezeichnet und durch eine Tilde über dem Formelzeichen gekennzeichnet (siehe auch Abschnitt 5.2.1).

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Extraktion von mechanischen Parametern direkt aus den Markovparametern deutliche Vorteile bietet:

- Modennormierung bzw. Skalierung nicht notwendig, da identifiziertes Zustandsraummodell definitionsgemäß physikalisch richtig normiert ist
- „Berechnungsumweg“ über Moden nicht notwendig, strukturmechanische Parameter können direkt aus den identifizierten Markovparametern extrahiert werden.
- Modelldarstellung ist allgemeingültiger (z.B. nichtsymmetrische Dämpfung möglich).

4.4 Wandlung von zeitdiskreten zu zeitkontinuierlichen Modellen

In Abschnitt 3 sind ausgewählte Algorithmen gezeigt, mit denen zeitdiskrete Zustandsraummodelle zur Modellierung des messtechnisch erfassten Übertragungsverhaltens erstellt werden können. Um aus diesen zeitdiskreten Modellen strukturmechanische Parameter extrahieren zu können, muss eine Transformation in eine zeitkontinuierliche Darstellung erfolgen. Es wurde bereits erwähnt, dass Standardmethoden für diese mathematische Transformation existieren. Zwei oftmals genutzte Transformationen sollen hier näher vorgestellt werden. Zunächst wird ausführlich auf die „zero-order-hold“-Methode eingegangen. Im Anschluss erfolgt ein Vergleich mit der „tustin“-Approximation.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist das allgemeingültige zeitkontinuierliche Zustandsraummodell:

$$\dot{\mathbf{z}}_t = \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \quad (4.46)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{z}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t \quad (4.47)$$

Die analytische Lösung von Gleichung 4.46 ist bekannt. Sie lautet:

$$\mathbf{z}_t = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{z}_{t_0} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}_\tau \cdot d\tau \quad (4.48)$$

Eingesetzt in die Beobachtergleichung 4.47 ergibt sich:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C} \left\{ e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}_{t_0} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_\tau \, d\tau \right\} + \mathbf{D} \mathbf{u}_t \quad (4.49)$$

Um zur diskreten Lösung zu gelangen, ist das Eingangssignal \mathbf{u}_t bereichsweise zu idealisieren.

4.4.1 Halteglied 0. Ordnung (zero-order-hold)

Allen Methoden gleich ist der Übergang vom differentiell kleinen Zeitschritt $d\tau$ zum diskreten Zeitschritt Δt (Sample-Zeit der Digitalisierung). Geht man von einem abschnittsweise (pro Zeitschritt) konstantem Eingangssignal \mathbf{u}_t aus (zero-order-hold), so kann das Integral berechnet und der Übergang zum zeitdiskreten Modell hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-\tau)} \, d\tau \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z}_k + e^{\mathbf{A}t_{k+1}} \cdot \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\mathbf{A}\tau} \, d\tau \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z}_k + e^{\mathbf{A}t_{k+1}} \cdot (-\mathbf{A}^{-1}) \left[e^{-\mathbf{A}\tau} \right]_{t_k}^{t_{k+1}} \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z}_k + e^{\mathbf{A}t_{k+1}} \cdot (-\mathbf{A}^{-1}) (e^{-\mathbf{A}t_{k+1}} - e^{-\mathbf{A}t_k}) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z}_k - \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}t_{k+1}} \cdot e^{-\mathbf{A}t_{k+1}} - e^{\mathbf{A}t_{k+1}} \cdot e^{-\mathbf{A}t_k}) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z}_k - \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{I} - e^{\mathbf{A}(t_{k+1}-t_k)}) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z}_k + \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A} \Delta t} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{z}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \quad (4.51)$$

Durch die Annahme eines abschnittsweise konstanten Eingangssignals ergibt sich für reale (nicht abschnittsweise konstante) Signale ein Fehler, der mit kleiner werdender Abtastfrequenz größer wird.

Führt man die diskrete Systemmatrix, die Steuer- und Messmatrix mit

$$\bar{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad (4.52)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{B} \quad (4.53)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \quad (4.54)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \quad (4.55)$$

ein und vereinfacht damit die Gleichungen 4.50 und 4.51, so ergibt sich die diskrete Zustandsraumdarstellung aus Abschnitt 3 - aus Gründen der Übersichtlichkeit hier ohne Messfehler- und Prozessrauschen:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \quad (4.56)$$

$$\mathbf{y}_k = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}_k \quad (4.57)$$

Durch Umstellen der Gleichungen (4.52) bis (4.55) ergeben sich die gesuchten zeitkontinuierlichen Modellparameter aus den zugehörigen zeitdiskreten Größen:

$$\mathbf{A} = \frac{\ln \bar{\mathbf{A}}}{\Delta t} \quad (4.58)$$

$$\mathbf{B} = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{B}} \quad (4.59)$$

$$\mathbf{C} = \bar{\mathbf{C}} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}} \quad (4.61)$$

Zur numerischen Berechnung des Matrix-Logarithmus in (4.58) existieren verschiedene Algorithmen. Analytisch folgt nach einer Diagonalisierung der diskreten Systemmatrix:

$$\ln \bar{\mathbf{A}} = \ln (\Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \boldsymbol{\mu} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1}) = \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \ln \boldsymbol{\mu} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \quad (4.62)$$

Bei gedämpften (mechanischen) Systemen enthält die Diagonalmatrix $\boldsymbol{\mu}$ (Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ ist reell) n paarweise komplex konjugierte zeitdiskrete Eigenwerte $\mu_{1,2} = r_1 \cdot e^{\pm j\theta_1} \dots \mu_{n-1,n} = r_N \cdot e^{\pm j\theta_N}$. Die zugehörigen zeitkontinuierlichen Eigenwerte der zeitkontinuierlichen Systemmatrix \mathbf{A} ergeben sich entsprechend Gleichung (4.58) zu:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\ln r_1 \pm (\theta_1 + 2\pi k)j}{\Delta t} \\ &\vdots \\ \lambda_{n-1,n} &= \frac{\ln r_N \pm (\theta_N + 2\pi k)j}{\Delta t} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.63)$$

Problematisch ist –wie man erkennt– die Uneindeutigkeit des Logarithmus der komplexen Eigenwerte. Damit die zeitkontinuierlichen Eigenwerte dem Hauptwert des Logarithmus entsprechen und Gleichung (4.63) mit $k = 0$ vereinfacht werden darf, muss die Abtastzeit Δt ausreichend kurz sein. In der Arbeit von Wang [100] findet man die Forderung:

$$\|\mathbf{A}\Delta t\| < 0.5 \tag{4.64}$$

Beachtet werden sollte, dass die diskreten Eigenwerte von der Abtastzeit Δt abhängig sind. Am besten kann dies durch die Darstellung der Polstellen in der s-Ebene (zeitkontinuierliche Eigenwerte) und der z-Ebene (zeitdiskrete Eigenwerte) verdeutlicht werden (siehe z.B. Wang [100]).

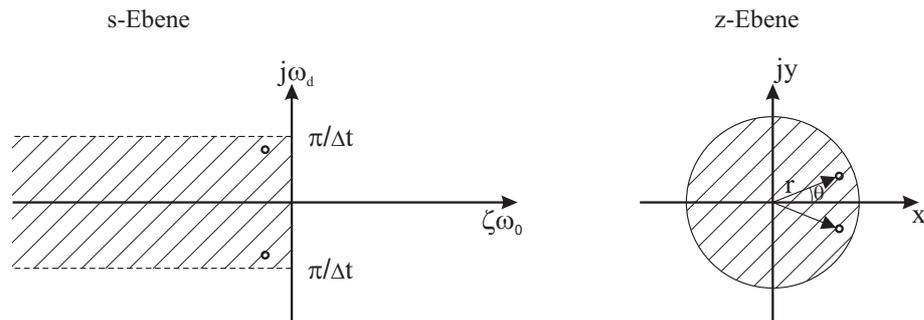


Abb. 4.2: Abbildung der s-Ebene in die z-Ebene

Es gilt folgender Zusammenhang:

$$r = e^{\zeta\omega_0\Delta t} \tag{4.65}$$

$$\theta = \omega_d\Delta t \tag{4.66}$$

Für gedämpfte mechanische Strukturen ergeben sich somit diskrete Eigenwerte mit einem Betrag $r \rightarrow 1$ und einem Winkel $\theta \rightarrow 0$, wenn die Abtastzeit gegen Null geht. Dies sollte beachtet werden, da sich große numerische Fehler bei der Berechnung der zeitkontinuierlichen Modellparameter ergeben können. Dementsprechend kann auch die numerische Berechnung der zeitkontinuierli-

chen Systemmatrix \mathbf{A} problematisch sein, da:

$$\mathbf{A} = \ln \bar{\mathbf{A}} = \frac{\Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \ln \boldsymbol{\mu} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1}}{\Delta t} \quad (4.67)$$

$$= \frac{\Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \text{diag}(\ln r_n \pm \theta_{n,j}) \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1}}{\Delta t} \quad (4.68)$$

mit $\ln r \rightarrow 0$ und $\theta \rightarrow 0$ für $\Delta t \rightarrow 0$,

und ebenso die numerische Berechnung der zeitkontinuierlichen Eingangsmatrix \mathbf{B} , da:

$$(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I})^{-1} = \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \quad (4.69)$$

mit $\Re(\mu) \rightarrow 1$ und $\Im(\mu) \rightarrow 0$ für $\Delta t \rightarrow 0$

In der Literatur findet man zum Beispiel bei Shieh et al. [83] und Barraud [6] Alternativen zur direkten Wandlung mit der Logarithmusfunktion. Eigene Simulationsrechnungen mit realistischen Annahmen für die mechanischen Strukturparameter zeigten jedoch, dass keine signifikanten Fehler auftreten, wenn mit Fließkommazahlen doppelter Genauigkeit gerechnet wird (Datentypbreite 64bit). Dementsprechend führten die Berechnungen mit den angegebenen alternativen Methoden zu identischen Ergebnissen wie die direkte Berechnung mit der Logarithmusfunktion.

Dennoch kann bei Simulationsrechnungen von mechanischen Systemen gezeigt werden, dass nach einer Transformation der identifizierten zeitdiskreten Markovparameter in die zeitkontinuierliche Darstellung lediglich die Markovparameter $\mathbf{C}\mathbf{A}^m\mathbf{B}$ mit ungeradzahlgiger Potenz m korrekte Ergebnisse zeigen. Die Markovparameter mit geradzahlgiger Potenz m unterscheiden sich von den Ausgangsparametern (die zur Simulation von Messsignalen genutzt werden), wenn die Samplezeit Δt übliche Werte annimmt. Verringert man die Samplezeit deutlich (beispielsweise auf 10^{-6} s), so stimmen auch diese Markovparameter mit den Ausgangsparametern überein. Details hierzu werden in Abschnitt 6.1.1 am Beispiel erläutert.

In Abschnitt 4.1 ist gezeigt, dass aus den zeitkontinuierlichen Markovparametern mechanische Strukturparameter (z.B. Steifigkeit, Masse etc.) extrahiert werden können. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie diese zeitkontinuierlichen Markovblöcke unter Nutzung der Gleichungen (4.58) bis (4.60) direkt mit den aus den Messsignalen identifizierten zeitdiskreten Größen dargestellt werden können:

Es gilt:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^m \cdot \mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}} \cdot \left(\frac{\ln \bar{\mathbf{A}}}{\Delta t} \right)^m \cdot (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I})^{-1} \frac{\ln \bar{\mathbf{A}}}{\Delta t} \bar{\mathbf{B}} \quad (4.70)$$

Mit

$$\ln \bar{\mathbf{A}} = \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \ln \boldsymbol{\mu} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \quad (4.71)$$

und

$$(\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I})^{-1} = (\Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \boldsymbol{\mu} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} - \mathbf{I})^{-1} \quad (4.72)$$

$$= (\Psi_{\bar{\mathbf{A}}} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I}) \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1})^{-1} \quad (4.73)$$

$$= \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \quad (4.74)$$

sowie der Anwendung von geltenden Matrix-Rechenregeln ergibt sich entsprechend:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-3} \mathbf{B} &= \Delta t^2 \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\ln \boldsymbol{\mu})^{-2} \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{-2} \mathbf{B} &= \Delta t \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\ln \boldsymbol{\mu})^{-1} \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} &= 1 \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\ln \boldsymbol{\mu})^0 \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \mathbf{B} &= 1/\Delta t \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\ln \boldsymbol{\mu})^{+1} \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{+1} \mathbf{B} &= 1/\Delta t^2 \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\ln \boldsymbol{\mu})^{+2} \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{+2} \mathbf{B} &= 1/\Delta t^3 \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\ln \boldsymbol{\mu})^{+3} \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{+3} \mathbf{B} &= 1/\Delta t^4 \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \cdot (\ln \boldsymbol{\mu})^{+4} \cdot (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1} \cdot \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (4.75)$$

4.4.2 Bilineare Methode (Tustin-Approximation)

In der Signalverarbeitung und Regelungstechnik ist die sogenannte Tustin-Approximation eine häufig angewandte Alternative zur Wandlung mit zero-order-hold. Zur Berechnung des Eingangssignals wird der Mittelwert der Ableitungen am linken und rechten Intervallrand des Zeitschrittes genutzt - entsprechend einer Integration mit Trapezregel. Es gilt folgender Zusammenhang zwischen den Laplace-Operatoren s und z (s -Ebene – zeitkontinuierliche Darstellung; z -Ebene – zeitdiskrete Darstellung):

$$z = e^{s\Delta t} = \frac{1 + s\frac{\Delta t}{2}}{1 - s\frac{\Delta t}{2}} \quad s = \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} \quad (4.76)$$

Zur Herleitung der Transformationsgleichungen zwischen zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Zustandsraumparametern wird das allgemeine Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{z}}_t = \mathbf{A}\mathbf{z}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \quad (4.77)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{z}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t$$

mittels Laplace-Transformation in den Bildbereich überführt:

$$s\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}U \quad (4.78)$$

$$Y = \mathbf{C}\mathbf{Z} + \mathbf{D}U \quad (4.79)$$

Durch Substitution von s entsprechend Gleichung (4.76) folgt:

$$\frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{z-1}{z+1} \mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}U \quad (4.80)$$

$$(z-1)\mathbf{Z} = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}(z+1)\mathbf{Z} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}(z+1)U \quad (4.81)$$

$$Y = \mathbf{C}\mathbf{Z} + \mathbf{D}U \quad (4.82)$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich und mathematische Umformung (siehe Franklin et al. [23]) ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Zustandsraumparametern des zeitkontinuierlichen Modells (4.77) und den adäquaten Matrizen des zeitdiskreten Modells (3.31):

$$\mathbf{A} = \frac{\Delta t}{2} (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{I})^{-1} (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{I}) \quad (4.83)$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\Delta t} (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{B}} \quad (4.84)$$

$$\mathbf{C} = \sqrt{\Delta t} \bar{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{I})^{-1} \quad (4.85)$$

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{C}} (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{B}} \quad (4.86)$$

Zu beachten ist, dass bei der zeitdiskret-zeitkontinuierlich Wandlung mit der Tustin-Approximation der Frequenzgehalt verzerrt werden kann, wenn die Samplefrequenz f_s keinen ausreichenden Abstand zur Bandbreite f_b aufweist (zur Vermeidung: $f_s \geq 20 \dots 30 f_b$). Außerdem wird die mechanische Interpretation der zeitkontinuierlichen Zustandsraumparameter erschwert, da sich nach (4.86) eine zeitkontinuierliche Durchgriffsmatrix \mathbf{D} ergibt, selbst wenn $\bar{\mathbf{D}}$ im zeitdiskreten Modell eine Nullmatrix ist. Aufgrund der vorgenannten Punkte und der Tatsache, dass auch bei der Tustin-Approximation bei Betrachtung der kontinuierlichen Markovparameter ähnliche Effekte wie in Abschnitt 4.4.1 erwähnt auftreten, wurde in dieser Arbeit die zero-order-hold Wandlung gewählt.

Kapitel 5

Detektion und Lokalisation von Schäden

Die laufende Zustandsüberwachung von mechanischen Strukturen im Rahmen eines Condition Monitoring oder Structural Health Monitoring dient dazu, Systemveränderungen und Schäden rechtzeitig zu erkennen, damit Wartungs- und Instandsetzungsarbeiten bedarfsgerecht durchgeführt und gravierende Schäden vermieden werden können. Zahlreiche Methoden zur Erkennungen von Strukturveränderungen sind in den letzten Jahrzehnten entwickelt worden. Nachfolgend sollen überblicksweise einige, in der Literatur häufig beschriebene, auf Modaldaten basierende Verfahren erwähnt werden. Den Schwerpunkt bildet jedoch das in dieser Arbeit neu entwickelte Konzept, Strukturveränderungen auf Basis von Markovparametern zu detektieren und zu lokalisieren.

Alle beschriebenen Methoden sind durch den einheitlichen Grundgedanken charakterisiert, dass strukturelle Schäden die Steifigkeit, Flexibilität, Masse bzw. Dämpfung, und damit die dynamische Systemantwort verändern. Basis für die Bildung von Schadensindikatoren ist generell der Vergleich aktueller Messergebnisse mit einem ungeschädigten Referenzzustand.

5.1 Verfahren auf Basis von Modaldaten

5.1.1 Bestimmung von modalen Parametern

Die modalen Parameter Eigenfrequenz, modale Dämpfung und Eigenformen können direkt aus den identifizierten Zustandsraummodellen bestimmt werden. Ausführliche Herleitungen dazu können der Literatur entnommen werden (z.B. Alvin et al. [2], Andersen [3]). An dieser Stelle sollen nur die wichtigsten Beziehungen genannt werden:

Zeitkontinuierliche Zustandsraummodelle: Die Systemmatrix \mathbf{A} kann durch eine Eigenwertzerlegung diagonalisiert werden:

$$\mathbf{A} = \Psi_{\mathbf{A}} \Lambda \Psi_{\mathbf{A}}^{-1} \quad (5.1)$$

Dabei erhält man die Eigenvektoren $\Psi_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (Zustandsraumkoordinaten) und die n zeitkontinuierlichen Eigenwerte $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Bei schwacher Dämpfung erhält man aus

$$\lambda = -\zeta \omega_0 \pm j \omega_d \quad \text{mit} \quad \omega_0 = |\lambda| \quad (5.2)$$

die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen $\omega_{0,i}$, die gedämpften Eigenkreisfrequenzen $\omega_{d,i}$ und die modalen Dämpfungen ζ_i . Die frei skalierbaren Eigenformen $\phi_i \in \mathbb{C}^{q \times 1}$ der mechanischen Struktur ergeben sich aus der Beobachtergleichung:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{bmatrix} = \mathbf{C} \Psi_{\mathbf{A}} \quad (5.3)$$

Zeitdiskrete Zustandsraummodelle: Im Rahmen einer Systemidentifikation ergeben sich zunächst zeitdiskrete Zustandsraummodelle. Die modalen Parameter können direkt daraus bestimmt werden. In Analogie zum zeitkontinuierlichen Modell wird zunächst die Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ durch eine Eigenwertzerlegung diagonalisiert:

$$\bar{\mathbf{A}} = \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \mu \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} \quad (5.4)$$

Dabei erhält man die Eigenvektoren $\Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und die zugehörigen n zeitdiskreten Eigenwerte $\mu = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Unter Anwendung der

Gleichungen (4.65) und (4.66) können direkt aus den zeitdiskreten Eigenwerten μ_i die modalen Dämpfungen sowie die zugehörigen Eigenkreisfrequenzen bestimmt werden:

$$-\zeta_i \omega_{0,i} = \frac{1}{\Delta t} \ln \sqrt{\Re(\mu_i)^2 + \Im(\mu_i)^2} \quad (5.5)$$

$$\omega_{d,i} = \frac{1}{\Delta t} \arctan \frac{\Im(\mu_i)}{\Re(\mu_i)} \quad (5.6)$$

Entsprechend Abschnitt 4.4 kann ein zeitdiskretes Zustandsraummodell in ein zeitkontinuierliches Modell überführt werden. Aus $\bar{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}\Delta t}$ ergibt sich entsprechend (5.4):

$$\begin{aligned} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \boldsymbol{\mu} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}}^{-1} &= e^{\Psi_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Lambda} \Psi_{\mathbf{A}}^{-1} \Delta t} \\ &= \Psi_{\mathbf{A}} e^{\boldsymbol{\Lambda} \Delta t} \Psi_{\mathbf{A}}^{-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Man erkennt aus Gleichung (5.7), dass $\Psi_{\bar{\mathbf{A}}}$ und $\Psi_{\mathbf{A}}$ mit Ausnahme der Skalierung identisch sind. Um eine einheitliche Notation zu gewährleisten, werden im Folgenden die frei skalierbaren Eigenformen der mechanischen Struktur – bestimmt aus dem diskreten Zustandsraummodell – mit $\bar{\boldsymbol{\phi}} \in \mathbb{C}^{q \times 1}$ bezeichnet:

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\phi}}_1 & \bar{\boldsymbol{\phi}}_2 & \dots & \bar{\boldsymbol{\phi}}_n \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{C}} \Psi_{\bar{\mathbf{A}}} \quad (5.8)$$

Man beachte, dass ebenfalls $\boldsymbol{\Phi}$ und $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ identisch sind – mit Ausnahme der Skalierung. Da jedoch die Eigenformen in den Modalmatrizen $\boldsymbol{\Phi}$ und $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ beliebig skalierbar sind, ist es prinzipiell gleichgültig, welche Modalmatrix genutzt wird.

Methoden auf Basis der Übertragungsfunktionen: In der klassischen experimentellen Modalanalyse erfolgt die Bestimmung der modalen Größen häufig auf Basis gemessener Übertragungsfunktionen. Durch ein sogenanntes „Curve-Fitting“ wird dabei angestrebt, das experimentell ermittelte Verhalten möglichst optimal durch eine analytische Funktion auf Basis der Bewegungsgleichung der Mechanik zu approximieren. Dabei kann prinzipiell zwischen den sogenannten

- SDOF-Verfahren (Single Degree of Freedom) und
- MDOF-Verfahren (Multiple Degree of Freedom)

unterschieden werden. Bei den SDOF-Verfahren geht man stark vereinfachend davon aus, dass die Übertragungsfunktion im unmittelbaren Bereich einer Eigenfrequenz durch den zugehörigen Eigenvektoranteil dominiert wird. Beiträge niedriger und höherer Eigenvektoren werden im betroffenen Frequenzbereich vernachlässigt. Dies kann vorzugsweise dann angenommen werden, wenn die zugrundeliegende Struktur schwach gedämpft ist und / oder die Resonanzstellen weit voneinander entfernt liegen. Bei den SDOF-Verfahren unterscheidet man im Wesentlichen die folgenden Identifikationsmethoden:

- Peak Picking oder Peak-Amplitude Method
- Circle Fit Method
- Inverse oder Line-fit Methode

Die genaueren, aber auch aufwendigeren MDOF-Verfahren ermitteln die modalen Parameter unter Berücksichtigung der Beiträge mehrerer Eigenvektoren. Die Parameteridentifikation erfolgt dabei durch eine Anpassungsrechnung, z.B. mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Dabei können zwei Algorithmen-Gruppen unterschieden werden:

- Anpassung im Frequenzbereich
(z.B. Frequency Domain Polynomial Fit – FDPI)
- Anpassung im Zeitbereich
(z.B. Least Square Complex Exponential Fit – LSCE)

Da in der weiteren Arbeit die vorgenannten Methoden keine weitere Berücksichtigung finden, wird auf eine Darstellung von Details an dieser Stelle verzichtet. Hierzu wird auf die umfangreich verfügbare Literatur zum Thema verwiesen, insbesondere auf Ewins [20] sowie Maia, Silva et al. [63].

Ergänzend soll darauf hingewiesen werden, dass die Modalmatrizen Φ bzw. $\bar{\Phi}$ die gedämpften Eigenformen enthalten und entsprechend aus einem Real- und Imaginäranteil bestehen. Sind die Real- und Imaginärteile der komplexen Eigenformen linear abhängig, handelt es sich um eine Struktur mit proportionaler bzw. klassischer Dämpfung. In diesem Fall können die ungedämpften Eigenformen direkt aus den bestimmten komplexen Eigenformen berechnet werden. Normalerweise weisen reale Strukturen jedoch eine nicht-proportionale

Dämpfung auf. In diesen Fällen lassen sich die mechanischen Parametermatrizen nicht gleichzeitig diagonalisieren und damit können die gedämpften Eigenformen nicht direkt in ungedämpfte überführt werden. Somit ist es auch nicht direkt möglich, die oftmals ungedämpften Eigenformen von FE-Modellen mit den experimentell bestimmten Eigenformen – der zugehörigen realen Strukturen – zu vergleichen. Eine Lösung besteht darin, die identifizierten Zustandsraummodelle in eine äquivalente Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zu überführen, wie dies prinzipiell durch die in dieser Arbeit vorgestellte Transformation in mechanisch deutbare White-Box-Modelle geschieht. Weitere Details zum Übergang von gedämpften zu ungedämpften Eigenformen findet man z.B. bei Alvin et al. [2] und Fuellekrug [27].

5.1.2 Eigenfrequenzen

Schon sehr früh erkannte man, dass Strukturschäden Veränderungen der Eigenfrequenzen hervorrufen. Dementsprechend existieren zahlreiche Veröffentlichungen, die anhand von numerischen und experimentellen Beispielen die Möglichkeiten und Grenzen aufzeigen. Eine vollständige Aufzählung der Literaturverweise ist an dieser Stelle unmöglich. Einen Überblick findet man beispielsweise bei Salawu [80] und bei Sohn et al. [85].

Allgemein bekannt ist, dass Eigenfrequenzen wenig sensitiv reagieren, so dass lediglich ausgeprägte Strukturschäden eindeutig detektiert werden. Vorteilhaft ist demgegenüber, dass die identifizierte Eigenfrequenzen vergleichsweise genau sind und geringeren statistischen Abweichungen unterliegen, als die übrigen modalen Parameter (z.B. Doebling et al. [15]). Andererseits dominieren oftmals Einflüsse aus Änderungen der Umgebungsbedingungen (z.B. Temperatur), so dass Strukturschäden nicht ohne weiteres erkannt werden können (z.B. Deraemaeker et al. [14]). Positiv anzumerken ist die im Allgemeinen zuverlässige Identifikation mit einfachen und kostengünstigen Messsystemen, bei denen im Extremfall ein nicht kalibrierter Sensor ausreichend sein kann.

Auch zur manuellen bzw. automatisierten Anpassung von Finite-Element-Modellen (model-updating) an experimentelle Ergebnisse werden Eigenfrequenzen häufig als Basisparameter herangezogen (z.B. Friswell und Mottershead [24])

5.1.3 Eigenformen (MAC / COMAC)

Neben den Eigenfrequenzen sind auch Eigenformen gut geeignet, Finite-Element-Modelle an die Realität anzupassen. Zur Bewertung der Modellgüte kann das „modal assurance criterium“ – besser bekannt als MAC – als quantitativer Güteparameter herangezogen werden. Hierbei wird ein normiertes Skalarprodukt aus den i Eigenformen des Modells $\phi_{FE,i}$ und den j experimentell erfassten Eigenformen $\phi_{exp,j}$ gebildet:

$$MAC(i, j) = \frac{|(\phi_{FE,i})^T(\phi_{exp,j})|^2}{(\phi_{FE,i})^T(\phi_{FE,i}) \cdot (\phi_{exp,j})^T(\phi_{exp,j})} \quad (5.9)$$

Bei guter Übereinstimmung ergibt sich ein MAC-Werte nahe eins. Null bedeutet keinerlei Übereinstimmung.

Möglich ist auch ein Vergleich von experimentell ermittelten Eigenformen, z.B. eines (ungeschädigten) Referenzzustandes mit denen eines potentiell geschädigten Zustandes. Eine Lokalisation möglicher Strukturveränderungen ist damit jedoch nicht möglich. Hierfür verwendet u.a. Kamarys [42] eine Erweiterung des MAC, das „coordinated modal assurance criterium“ – COMAC. Bei diesem werden nicht die vorhandenen Eigenformen miteinander verglichen, sondern die skalaren Komponenten daraus. Damit wird es nach Kamarys möglich, die Sensororte bzw. die Knoten, an denen Abweichungen vorliegen, nachzuweisen. In der Literatur findet man verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung. Verbreitet ist folgende Gleichung, die auch von Huth [37] verwendet wurde:

$$COMAC(i) = \frac{\left(\sum_{l=1}^n |\phi_{ref,l}(i) \cdot \phi_{vergl,l}(i)| \right)^2}{\sum_{l=1}^n (\phi_{ref,l}(i))^2 \cdot \sum_{l=1}^n (\phi_{vergl,l}(i))^2} \quad (5.10)$$

l repräsentiert alle identifizierten Moden

i steht für die diskreten Messpunkte

ϕ_{ref} Eigenform oder Einflußlinie des Referenzsystems

ϕ_{vergl} Eigenform oder Einflußlinie des Vergleichsystems

Kamarys wendete die COMAC-Werte nicht - wie üblich - auf die Moden eines Systems an, sondern auf die dynamischen Einflusszahlen, die im nachfolgenden

Abschnitt vorgestellt werden. Im Ergebnis erhält er für jede Erregung u_i die COMAC-Werte für alle Freiheitsgrade \hat{x}_i , d.h. bei einem System mit beispielsweise acht Eingängen und acht Ausgängen werden 64 COMAC-Werte gebildet. Mit dieser Methode gelang es ihm, Systemveränderungen in Simulationsrechnungen und bei realen Messungen zu identifizieren.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass sowohl dynamische Einflusszahlen als auch COMAC-Werte Strukturveränderungen nicht generell eindeutig lokalisieren können. Bei eigenen experimentellen Tests an einfachen Laborstrukturen war eine zutreffende Schadenslokalisierung oftmals nicht möglich [16].

5.1.4 Dynamische Einflusszahlen

Die erstmals von Lenzen [50] eingeführten dynamischen Einflusszahlen (Dyaden) stellen auf die Erregungsintensität gewichtete Eigenformen dar. In Abschnitt 4.2 wurden sie bereits genutzt, um den Zusammenhang zwischen Markovparametern und mechanischen Parametermatrizen in einer modalen Darstellung aufzuzeigen. Aufgrund der physikalisch korrekten Normierung eignen sich die dynamischen Einflusszahlen jedoch auch direkt als Indikator zur Schadenserkennung und -lokalisierung (Lenzen [50], Kamarys [42])

Zur Erinnerung sei an dieser Stelle auf die Parameterdarstellung der Übertragungsfunktion (Gleichung (4.10)) in Abschnitt 4 verwiesen:

$$\mathbf{H}(s) = \left(\frac{\mathbf{C}_d \mathbf{A}^0 \mathbf{B}}{s} + \frac{\mathbf{C}_d \mathbf{A}^1 \mathbf{B}}{s^2} + \dots + \frac{\mathbf{C}_d \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B}}{s^i} \right) \quad (5.11)$$

Nach einer Transformation des Zustandsraummodells \mathbf{C} , \mathbf{A} , \mathbf{B} in die Jordanform ($\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}$, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$) läßt sich die Übertragungsfunktion als Summe der dyadischen Produkte aller Eigenformen darstellen:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\hat{\mathbf{c}}_1 \otimes \hat{\mathbf{b}}_1}{s - \lambda_1} + \frac{\hat{\mathbf{c}}_2 \otimes \hat{\mathbf{b}}_2}{s - \lambda_2} + \frac{\hat{\mathbf{c}}_3 \otimes \hat{\mathbf{b}}_3}{s - \lambda_3} + \dots + \frac{\hat{\mathbf{c}}_n \otimes \hat{\mathbf{b}}_n}{s - \lambda_n} \quad (5.12)$$

Werden die dynamischen Einflusszahlen des Modes i definiert als

$$\mathbf{F}_{dyn,i} = \hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i \quad (5.13)$$

so ergibt sich die Übertragungsfunktion als Summenfunktion aus den einzelnen dyadischen Produkten:

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_{dyn,i}}{s - \lambda_i} \quad (5.14)$$

Ganz wesentlich ist, dass die Amplitude der dynamischen Einflusszahlen die physikalischen Anteile des gemessenen und modellierten Übertragungsverhaltens korrekt widerspiegeln, wie aus den Gleichungen (5.12) und (5.13) ersichtlich ist. Dies wird auch anhand der in Abschnitt 4.2 gezeigten Gleichungen (4.42) bis (4.44) deutlich, z.B.:

$$-\mathbf{K}^{-1} = -\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n=2N} [(\hat{\mathbf{c}}_i \otimes \hat{\mathbf{b}}_i) \lambda_i^{-1}] = \sum_{i=1}^{n=2N} [\mathbf{F}_{dyn,i} \lambda_i^{-1}] \quad (5.15)$$

Zur Schadenserkenkung und Lokalisation kann die Differenz der dynamischen Einflusszahlen eines Referenzsystems und eines potentiell geschädigten Systems herangezogen werden:

$$\Delta \mathbf{F}_{dyn,i} = \mathbf{F}_{dyn,i,ref} - \mathbf{F}_{dyn,i,sch} \quad (5.16)$$

Einschränkend wirkt sich aus, dass für alle i Eigenformen dynamische Einflusszahlen gebildet werden können und diese von der Geometrie der untersuchten Struktur abhängig sind. Dadurch sind viele Matrizen auf Veränderungen zu untersuchen und die Schadensindikatoren können bei verschiedenen Strukturgeometrien unterschiedlich sein, so dass viel Erfahrung und Zeit für die Auswertung benötigt wird.

5.1.5 Krümmung von Eigenformen

Alternativ zur direkten Betrachtung der Eigenformen ist es möglich, deren Ableitungen zur Schadensdetektion heranzuziehen. Praktikabel ist es, die Krümmung (2. Ableitung) zu berechnen, da diese indirekt proportional zur Biegesteifigkeit und damit häufig sensitiver als eine Betrachtung der Durchbiegungen ist (siehe z.B. Stöhr [91]). Um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten, benötigt man eine ausreichende Anzahl an Stützstellen. Außerdem sollten die Eigenformen frei von Messfehlern sein („gleichmäßig“ gekrümmt). Deshalb werden die experimentell ermittelten Eigenformen vor Berechnung der Krümmungen oftmals aufbereitet, z.B. durch eine Interpolation mit kubischen Splines oder durch eine Anpassung mittels FEM. Hierbei ist jedoch insbesondere bei der Detektion von Schäden Vorsicht geboten, da messtechnisch nicht erfasste Informationen lediglich durch Modelle die die unbekanntesten Schäden abbilden müssten zutreffend ergänzt werden könnten.

Berechnet werden kann die Krümmung κ bei diskreten Systemen beispielsweise durch eine zentrale Differenzen-Approximation aus den Durchbiegungen y_d der einzelnen Eigenformen (l : Abstand zwischen $y_{\text{ort}+1}$ und $y_{\text{ort}-1}$)

$$\kappa_{\text{ort}} = y_{d,\text{ort}}'' = \frac{y_{\text{ort}+1} - 2y_{\text{ort}} + y_{\text{ort}-1}}{l^2} \quad (5.17)$$

In der Literatur findet man zahlreiche Beiträge die sich dem Thema widmen. Für einen umfassenderen Überblick wird auf Sohn et al. [85] verwiesen. Auszugsweise sei hier Pandey, Biswas und Samman [70] genannt, die anhand von numerischen Simulationsrechnungen an Balkenstrukturen mittels Differenzen-Approximation Krümmungen berechnen und das Potential im Vergleich zu den anderen modalen Größen aufzeigen. Stubbs et al. [90] präsentieren am Beispiel einer realen Brückenmessung ein Verfahren, bei dem auf Basis der Krümmungen aus den niederfrequenten Eigenformen Schadensindikatoren bestimmt werden, die Steifigkeitsreduktionen lokalisieren können.

5.1.6 Flexibilitätsmatrix aus Modaldaten

Eine weitere Möglichkeit zur Schadenserkennung, die auch in dieser Arbeit genutzt wird, besteht in der Verwendung von Flexibilitätsmatrizen. Gewöhnlich werden diese aus den massennormierten Moden sowie den zugehörigen Eigenfrequenzen bestimmt (siehe Tabelle 4.1). In Abschnitt 5.2 wird abweichend davon gezeigt, wie die Flexibilitäten direkt aus den identifizierten Markovparametern abgeleitet werden können.

Experimentell bestimmte Flexibilitätsmatrizen sind dabei oftmals eine Approximation, da für die vollständige Abbildung der statischen Flexibilität „alle“ Eigenformen und -frequenzen notwendig sind. Aufgrund der indirekten Proportionalität von Flexibilität und Eigenfrequenzen sind die experimentell gut erfassbaren niederfrequenten Eigenformen jedoch dominant, so dass in der Realität eine hinreichend genaue Bestimmung oftmals möglich ist. Umgekehrt verhält es sich bei den Steifigkeitsmatrizen. Diese sind prinzipiell wesentlich geeigneter lokale Steifigkeitsveränderungen festzustellen. Jedoch wird diese Matrix von den meist nicht ausreichend in den Messsignalen enthaltenen hochfrequenten modalen Anteilen dominiert, so dass eine direkte Bestimmung nicht möglich ist. Deshalb sind jedoch auch die Flexibilitätsmatrizen oft Rangdefekt, so

dass die Inversion zur Steifigkeitsmatrix fehlerbehaftet ist. In den Abschnitten 6 und 7 wird näher darauf eingegangen.

In der Literatur finden sich zahlreiche Varianten, Schadensindikatoren auf Grundlage der Flexibilitätsmatrizen zu bestimmen. An dieser Stelle soll nur kurz auf einzelne Veröffentlichungen verwiesen werden: Pandey und Biswas [69] definieren aus den Flexibilitätsmatrizen von Referenz und geschädigter Struktur die spaltenweise größte Differenz als Schadensindikator und zeigen Ergebnisse von numerischen und experimentellen Beispielen. Bernal und Gunnes [10] bestimmen sich Flexibilitätsmatrizen direkt aus dem Zustandsraummodell und präsentieren anhand von numerischen Beispielen einen Schadensindikator aufbauend auf dem „Damage Location Vector“ (Bernal [9]). Yan, De Boe und Golinval [102] zeigen, wie man durch gleichzeitige Anwendung von Flexibilitäts- und Steifigkeitsmatrizen Veränderungen detektieren kann. Dabei gehen Sie auch auf Besonderheiten bei der Steifigkeitsbestimmung ein. Reynders und de Roeck [76] stellen ein Verfahren vor, mit dem neben der Schadensdetektion und Lokalisation auch eine Quantifizierung der Schädigung möglich ist. Dabei werden lokal bestimmte Flexibilitäten genutzt, um ein Steifigkeitsverhältnis von Referenz und geschädigter Struktur zu bestimmen. Darüberhinaus wird auch gezeigt, dass das Verfahren auch für Modelle auf Basis der „Stochastic Subspace Identification“ gilt, wenn man davon ausgeht, dass die Massenbelegung unverändert bleibt.

5.1.7 Weitere Methoden

In den vorangegangenen Abschnitten sind einige Methoden zur Schadensbestimmung auf Basis von Modaldaten genannt, die thematisch dieser Arbeit sehr nah stehen. Eine Vielzahl weiterer Methoden liese sich hier aufzuführen, was aber nicht das Ziel dieser Arbeit ist. Insbesondere auf die Anpassung von Finite-Element-Modellen durch automatisierte „model-updating-Routinen“ wurde hier nicht eingegangen. Diesbezüglich wird auf die Fachliteratur verwiesen (z.B. Friswell und Mottershead [24], Fritzen und Bohle [25], Link et al. [58]).

Umfassende Zusammenstellungen über schwingungsbasierte Zustandsüberwachungsmethoden finden sich zum Beispiel bei Balageas et al. [5], Carden und Fanning [11], Sohn et al. [85] sowie Strauss et al. [89].

5.2 Markovparameter zur Schadenslokalisierung

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Einführung von strukturmechanisch deutbaren Markovparametern, die zur Schadenslokalisierung genutzt werden können. In Abschnitt 4.1 ist dargestellt, dass aus Zustandsraummodellen –motiviert aus der Bewegungsgleichung der Mechanik (4.1)– direkt die Masse \mathbf{M} , Steifigkeit \mathbf{K} und Dämpfung \mathbf{D} einer Struktur extrahiert werden können. In Abschnitt 4.2 sind Bedingungen genannt, damit dies auch bei experimentell identifizierten Zustandsraummodellen möglich ist.

Geht man davon aus, dass eine mechanische Struktur zu einem (ungeschädigten) Referenzzustand durch eine Massenmatrix \mathbf{M}_r , eine Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_r und eine Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_r beschrieben wird, ist der zugehörige geschädigte Zustand (Index d) durch entsprechende Veränderungen dieser Parameter darstellbar:

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{M}_r + \Delta\mathbf{M} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D}_r + \Delta\mathbf{D} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_r + \Delta\mathbf{K} \quad (5.20)$$

Führt man an einer zu überwachenden Struktur zyklisch Schwingungsmessungen durch und modelliert das messtechnisch erfasste Übertragungsverhalten mit Zustandsraummodellen, so können anschließend –durch Differenzenbildung der Markovparameter– mögliche Veränderungen erkannt werden. Beispielsweise kann der Unterschied zwischen der Flexibilitätsmatrix der Referenzstruktur und der potentiell geschädigten Struktur ermittelt werden:

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_r = -(\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_d + (\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_r \quad (5.21)$$

Diese Anwendung von Markovparametern zur Schadenserkennung und Schadenslokalisierung ist nach Kenntnis des Autors neu. Vergleichbare Ansätze findet man lediglich bei Ko und Hung [46] sowie Yan und Golinval [103]. In den genannten Arbeiten beschränkt man sich allerdings auf numerische Simulationen.

5.2.1 „Korrespondierende“ strukturmechanische Parameter

Im Gegensatz zu numerischen Simulationen ist es bei experimentellen Schwingungsmessungen oftmals unmöglich, die in Abschnitt 4.2 genannten und in Abbildung 4.1 symbolisch dargestellten theoretischen Anforderungen zur exakten Bestimmung der mechanischen Parametermatrizen zu erfüllen. Eine Abweichung ergibt sich bereits durch die Tatsache, dass die Bedingung $\mathbf{C}_d\mathbf{B} = \mathbf{0}$ praktisch nicht erreicht werden kann (z.B. aufgrund von Rauschen und weiteren Messfehlern). Außerdem ist die Forderung „alle“ Moden zu erfassen theoretischer Natur. Dies kann lediglich bei Simulationsrechnungen mit FE-Modellen gewährleistet werden, bei denen sich die Anzahl des Begriffs „alle“ Moden auf die Anzahl der modellierten Freiheitsgrade bezieht. In Realität liegen meistens Strukturen mit kontinuierlicher Massen- und Steifigkeitsverteilung vor. Dementsprechend gibt es eine unendliche Anzahl von Moden, von denen messtechnisch vorwiegend die niederfrequenten erfasst werden.

Aufgrund der beispielhaft beschriebenen Unterschiede zwischen theoretischen Forderungen und experimentellen Gegebenheiten ist es gegenwärtig nicht möglich, auf der Basis von Schwingungsmessungen exakte Massen-, Steifigkeits- oder Dämpfungsmatrizen (im Sinne von Gleichung 4.1) aus den identifizierten Zustandsraummodellen zu extrahieren. Ungeachtet dessen sind die Markovparameter physikalisch deutbar und damit für eine Schadensdetektion und Schadenslokalisierung durch Differenzenbildung verwendbar.

Um eine Abgrenzung zu den theoretisch hergeleiteten Größen zu schaffen, wird der Begriff „korrespondierend“ in Bezug auf experimentell bestimmte strukturmechanische Parameter eingeführt – symbolisch durch eine Tilde bei den Formelzeichen dargestellt. Entsprechend ergeben sich die korrespondierende Massenmatrix und die korrespondierende Steifigkeitsmatrix (Flexibilitätsmatrix) aus den experimentell identifizierten (Index id) Markovparametern:

$$(\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B})_{id} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \quad (5.22)$$

$$(\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{id} = -\tilde{\mathbf{F}} = -\tilde{\mathbf{K}}^{-1} \quad (5.23)$$

Um Veränderungen der Strukturmassen- bzw. Struktursteifigkeiten zwischen einem Referenzzustand und einem potentiell geschädigten Zustand festzustellen und zu lokalisieren, können die korrespondierenden Massen- bzw. Steifig-

keitsmatrizen –extrahiert aus den Markovparametern– genutzt werden:

$$\Delta\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}_d - \tilde{\mathbf{M}}_r = (\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B})_{id,d}^{-1} - (\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B})_{id,r}^{-1} \quad (5.24)$$

$$\Delta\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_d - \tilde{\mathbf{K}}_r = -(\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{id,d}^{-1} + (\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{id,r}^{-1} \quad (5.25)$$

5.2.2 Einige Anmerkungen zur praktischen Ausführung

An dieser Stelle soll kurz auf einige Aspekte eingegangen werden, die bei der praktischen Ausführung die Ergebnisse beeinflussen. Ausgangspunkt zur Bestimmung der Markovparameter ist die Zustandsraummodellierung im Rahmen der Realisierung. Dabei muss die Zustandsraumdimension n festgelegt werden (zum Beispiel durch eine Abgrenzung der maßgebenden singulären Werte in einer Singulärwertdarstellung - siehe auch Abschnitt 3). Bei einfachen (Labor-)Strukturen ist diese Abgrenzung meist gut anhand eines „Gap“ möglich (siehe Abbildung 7.9d). Damit sind im Modell ausschließlich die maßgebenden Eigenformen und die zugehörigen Eigenfrequenzen enthalten. Im Gegensatz dazu ist diese Abgrenzung bei komplexeren Strukturen oftmals nicht eindeutig möglich. In solchen Fällen kann es notwendig sein, eine größere Zustandsraumdimension n zu wählen, um die maßgebenden Frequenzen im Modell identifiziert zu haben. Damit sind dann weitere Eigenformen und Frequenzen enthalten, die die Ergebnisse verfälschen (tlw. rein mathematisch aus dem Modellierungsprozess hervorgegangen und physikalisch nicht deutbar – in der Literatur oft als „spurious modes“ bezeichnet). Abhilfe schafft in solchen Fällen ein Zwischenschritt: Durch Transformation der Systemmatrix \mathbf{A} in die Jordansche Normalform können gezielt Moden und die zugehörigen Eigenwerte selektiert werden. Anschließend kann eine „reduzierte“ Systemmatrix durch Rücktransformation gebildet werden. Äquivalent dazu können die Markovparameter auch über die Bildung von dyadischen Produkten durch Weglassen einzelner Moden gezielt beeinflusst werden (siehe Abschnitt 4.2).

Im Rahmen einer Realisierung können lediglich Eigenformen (und die zugehörigen Eigenwerte) identifiziert werden, die in den experimentell ermittelten Schwingungssignalen enthalten sind – gleichbedeutend mit: Lediglich Eigenformen, die zur Schwingung angeregt wurden, können identifiziert werden. Oftmals werden jedoch vorwiegend die „unteren“ niederfrequenten Eigenschwingungen experimentell angeregt, insbesondere bei ambienter Anregung durch

Wind oder Verkehr. Dies beeinflusst natürlich die Güte der identifizierten korrespondierenden strukturmechanischen Parametermatrizen. Beispielsweise sind für die Bestimmung der korrespondierenden Flexibilitätsmatrix vorwiegend die „unteren“ niederfrequenten Eigenschwingungen bedeutsam – für die korrespondierende Steifigkeitsmatrix sind höhere Eigenschwingungen relevant (siehe auch Yan und Golinval [103]). In Abschnitt 6 sind Beispiele aufgeführt, wie sich dies bei den in dieser Arbeit experimentell untersuchten Strukturen auswirkt.

Nutzt man zur Identifikation von Steifigkeitsveränderungen die Differenz der Flexibilitätsmatrizen, muss weiterhin beachtet werden, dass die Auswirkung der Veränderung auf die Differenzmatrix abhängig von der Geometrie der mechanischen Struktur ist (siehe auch Pandey und Biswas [69]). Ein einfaches Beispiel soll dies verdeutlichen: In Abbildung 5.1 ist ein gelenkig gelagerter Einfeldträger sowie ein einseitig eingespannter Kragarm dargestellt. Bei beiden wird als Schaden die Biegesteifigkeit in Trägermitte lokal reduziert. Man erkennt die prinzipiellen Unterschiede der Differenz der Flexibilitätsmatrizen deutlich. Während beim gelenkigen Einfeldträger die Strukturschwächung durch ein Maximum aus der Differenz der Flexibilitätsmatrizen lokalisierbar ist, ist der Schadensort beim einseitig eingespannten Kragträger durch einen „Knick“ in der Differenz gekennzeichnet. Bei komplexeren Tragstrukturen ist die Lokalisation von Steifigkeitsveränderungen anhand der Flexibilitätsmatrizen entsprechend schwieriger zu deuten (siehe auch Abschnitt 6.3).

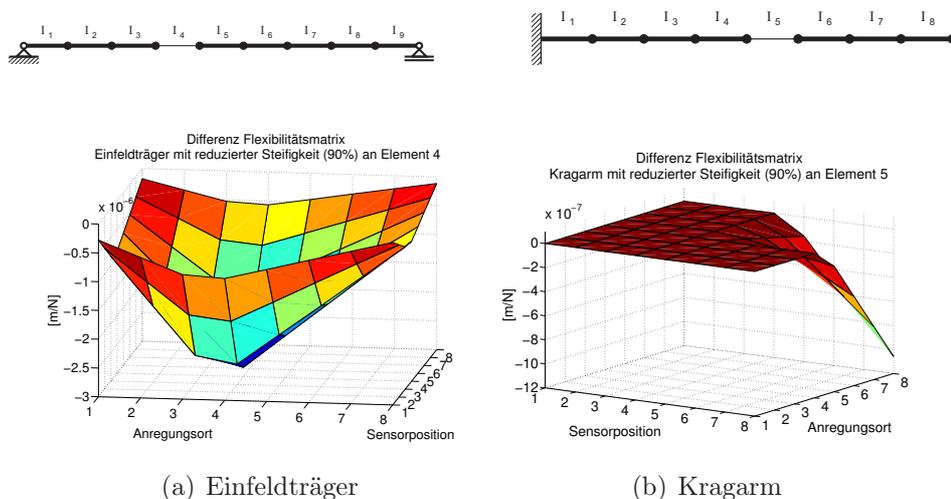


Abb. 5.1: Geometrieabhängigkeit der Differenz von Flexibilitätsmatrizen

Kapitel 6

Numerische Simulationsrechnungen

Als Bindeglied zwischen den vorausgegangenen theoretischen Erörterungen und den nachfolgenden experimentellen Schwingungsmessungen soll in diesem Abschnitt die grundsätzliche Eignung der vorgestellten Verfahren zur Systemidentifikation und Schadenserfassung demonstriert werden. Zunächst werden im ersten Unterabschnitt einige ganz spezielle Besonderheiten an einem einfachen Schwinger mit einem Freiheitsgrad sowie an analytischen Signalen näher erörtert. Die beiden nachfolgenden Unterabschnitte stellen einen direkten Bezug zu den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten experimentellen Schwingungsmessungen her.

6.1 Einfreiheitsgradschwinger / Analytische Signale

Nachfolgend wird auf die zeitdiskret-zeitkontinuierlich-Wandlung sowie auf die Digitalfilterung von Messdaten näher eingegangen. Der Einfachheit halber erfolgt die Darstellung an Beispielen mit Einfreiheitsgradschwingern. Sinngemäß gilt das Gesagte allerdings ebenfalls für Mehrfreiheitsgradsysteme.

6.1.1 Einfluss der Wandlung zeitdiskret-zeitkontinuierlich

Sollen auf experimentellen Messdaten basierende zeitdiskrete Zustandsraummodelle genutzt werden um strukturmechanische Parameter zu extrahieren, so muss eine Wandlung in eine zeitkontinuierliche Darstellung erfolgen. Die hierfür häufig genutzten Standardmethoden mit einem Halteglied 0. Ordnung (zero-order-hold) bzw. die Tustin-Approximation (Bilineare Methode) wurden bereits in Abschnitt 4.4 theoretisch vorgestellt. Aufgrund der verzerrungsfreien Identifikation des Frequenzgehalts und der Tatsache, dass die Durchgriffsmatrix \mathbf{D} keinen Einfluss auf die anderen Zustandsraumparameter bei der Wandlung ausübt, wird sich nachfolgend auf die Anwendung der zero-order-hold-Methode beschränkt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde festgestellt, dass nach einer Transformation der identifizierten zeitdiskreten Markovparameter in die zeitkontinuierliche Darstellung ausschließlich die Markovparameter $\mathbf{CA}^m\mathbf{B}$ mit ungeradzahlgiger Potenz m korrekte Ergebnisse zeigen. Die Markovparameter mit geradzahlgiger Potenz m unterscheiden sich von den Ausgangsparametern (die zur Simulation von Messsignalen genutzt werden), wenn die Samplezeit Δt messtechnisch übliche Werte annimmt. Verringert man die Samplezeit deutlich (beispielsweise auf 10^{-6} s), so stimmen auch diese Markovparameter mit den Ausgangsparametern überein. Weiterhin konnte festgestellt werden, dass bei Systemen mit relativ großer Dämpfung die Übereinstimmung auch bei üblichen Samplezeiten vergleichsweise gut ist. Die beschriebenen Effekte treten sowohl bei Wandlung mit der zero-order-hold-Methode als auch bei Wandlung mit der tustin-Approximation auf. Anhand eines einfachen Einfreiheitsgradschwingers soll das unerwünschte Verhalten an dieser Stelle ausführlich am Beispiel der zero-order-hold-Wandlung betrachtet werden:

Simuliert wird zur Demonstration das Schwingungsverhalten eines gedämpften Schwingers mit einem Freiheitsgrad (Masse 190kg; Steifigkeit 30.000Nm^{-1} ; Dämpfung 3Nsm^{-1} bzw. 3.000Nsm^{-1}). Aus den mechanischen Parametern wird ein Zustandsraummodell entsprechend den Gleichungen (4.7) aufgebaut, anhand dessen simulierte Messsignale erzeugt werden. Zur Berechnung der simulierten Messsignale sollten die numerischen Berechnungsmethoden sorgfältig gewählt werden, um keine Fehler zu generieren, die die weitere Untersuchung beeinträchtigen. Als Erregung für das folgende Beispiel wird eine ideale

Impulsfunktion gewählt, da sich hierfür die simulierten Messsignale analytisch berechnen lassen:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \quad (6.1)$$

Zur numerischen Berechnung der Exponentialfunktion stehen verschiedene Algorithmen zur Verfügung. Eine Approximation (bei beschränkter Anzahl an Summanden) von $e^{\mathbf{A}t}$ kann zum Beispiel durch folgende Taylorreihe erfolgen:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^1 t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^4}{4!} + \dots \quad (6.2)$$

Zur alternativen Berechnung von Strukturantworten infolge Impulsanregung stellt das Softwarepaket MATLAB die Funktion *impulse* zur Verfügung. Intern wird dabei ein zeitkontinuierlich übergebenes Zustandsraummodell zunächst durch die sogenannte impuls-invariante kontinuierlich-diskret-Wandlung diskretisiert (siehe z.B. Jackson [40]). Anschließend können die Systemantworten des diskreten Systems entsprechend Gleichung (3.7) berechnet werden. Beide Verfahren führen zu den „richtigen“ Messwerten. Wird das zeitkontinuierliche Zustandsraummodell im Gegensatz dazu mit der zero-order-hold-Methode diskretisiert, um anschließend die Systemantwort nach Gleichung (3.7) zu berechnen, so ergibt sich eine Phasenverschiebung im Signal und damit ein Fehler, der kleiner wird bei kleinerem Δt (siehe Abbildung 6.1). Es soll an dieser Stelle kurz erwähnt werden, dass für diesen Fall („Vorwärtswandlung“ und „Rückwärtswandlung“ mit zero-order-hold) alle identifizierten Markovparameter mit den Ausgangsparametern der Simulation übereinstimmen. Offensichtlich heben sich Fehler, die bei der „Vorwärtswandlung“ entstehen, bei der „Rückwärtswandlung“ auf.

Soll als Anregung ein beliebiges Signal genutzt werden, ist die Systemantwort durch die diskrete Zustandsraumformulierung entsprechend Gleichung (3.1) bestimmbar. Im Rahmen einer numerischen Simulation können dabei die „richtigen“ Systemantworten näherungsweise bestimmt werden, wenn zur Diskretisierung der Zustandsraumparameter ein sehr kleines Δt (z.B. 10^{-6} s) verwendet wird.

Es muss an dieser Stelle angemerkt werden, dass der Fehler, der in den Messsignalen entsteht, relativ klein ist. Allerdings führt er zu dem oben beschriebenen Effekt, dass bei den identifizierten Markovparametern jeder zweite (mit geradzahlgiger Potenz von \mathbf{A}) falsch wird.

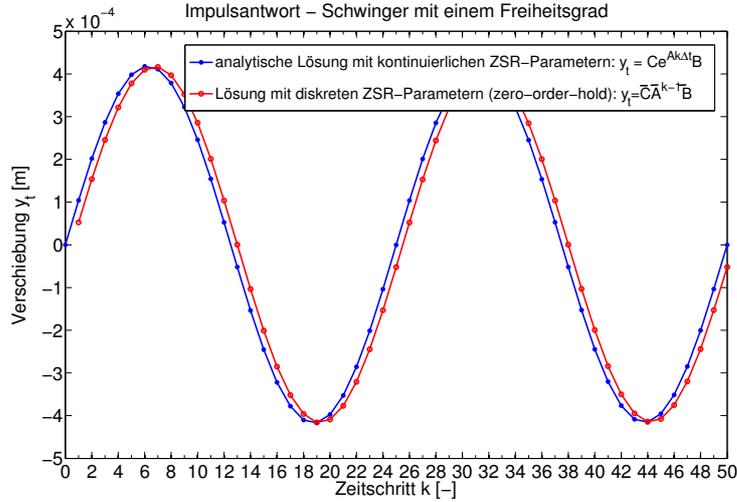


Abb. 6.1: Vergleich analytische Lösung mit Lösung nach Diskretisierung durch zero-order-hold-Methode ($k = 30.000 N m^{-1}$; $m = 190 kg$; $d = 3 N s m^{-1}$; $\Delta t = 0.02 s$)

Hat man aus vorgegebenen mechanischen Strukturparametern ein zeitkontinuierliches Zustandsraummodell aufgebaut und Messwerte simuliert, können diese genutzt werden, um zunächst ein zeitdiskretes Zustandsraummodell zu identifizieren (siehe Abschnitt 3). Nach einer anschließenden Wandlung in die zeitkontinuierliche Darstellung können die identifizierten Markovparameter – respektive die identifizierten strukturmechanischen Parameter – direkt mit den Eingangsgrößen der Simulationsrechnung verglichen werden. In den beiden folgenden Tabellen sind die wichtigsten Zwischenergebnisse einer solchen Simulationsrechnung aufgeführt. Die Bestimmung der identifizierten zeitkontinuierlichen Markovparameter erfolgt dabei direkt aus den diskreten Größen entsprechend den Gleichungen (4.75), beispielsweise:

$$C A^1 B = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \bar{C} \cdot \Psi_{\bar{A}} \cdot \ln^2 \mu \cdot (\mu - I)^{-1} \cdot \Psi_{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{B} \quad (6.3)$$

In Tabelle 6.1 sind die Markovparameter zweier identischer Strukturen verglichen, die sich lediglich durch die Samplezeit unterscheiden. Man erkennt die Abweichung der Markovparameter mit geradzahlgiger Potenz von \mathbf{A} bei relativ langsamer Taktung (Eigenfrequenz Einfreiheitsgradschwinger: 2 Hz; Messwertdiskretisierung: 100 Hz). Der Fehler wird kleiner, je kleiner die Samplezeit ist. Bei der im zweiten Beispiel gewählten Taktrate von 100 kHz ergibt sich auch bei den Markovparametern mit geradzahlgiger Potenz von \mathbf{A} eine gute Über-

einstimmung zu den Ausgangsparametern.

In Tabelle 6.2 ist eine konstante Samplezeit von 0,01s gewählt. Hier werden zwei Einfreiheitsgradschwinger mit schwacher bzw. sehr starker Dämpfung miteinander verglichen. Man erkennt, dass bei einer starken Strukturdämpfung die Übereinstimmung prinzipiell besser ist.

In Abschnitt 4.4 wurde beschrieben, dass die numerische Berechnung des natürlichen Logarithmus der diskreten Eigenwertmatrix bei schwacher Dämpfung instabil werden kann. Ebenfalls kann die Berechnung des Terms $(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1}$ numerisch problematisch sein (siehe Barraud [6]). Anhand der in den beiden Tabellen dargestellten Beispiele erkennt man jedoch exemplarisch, dass bei der Simulation üblicher mechanischer Strukturen und Rechnen mit Gleitkommazahlen doppelter Genauigkeit die beiden Terme praktisch nicht fehlerbehaftet sind.

Weiterhin ist zur Berechnung der zeitkontinuierlichen Markovparameter aus den diskreten Größen das Produkt von $(\ln \boldsymbol{\mu})^n$ mit $(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1}$ notwendig (siehe Gleichungen (4.75)). Schaut man sich in der Mechanik häufig vorkommende relativ schwach gedämpfte Strukturen an, fällt eine Besonderheit auf, die aus der schwachen Dämpfung und dem entsprechenden Verhältnis zwischen Realteil und Imaginärteil der diskreten Eigenwerte $\boldsymbol{\mu}$ resultiert: Bei den kontinuierlichen Eigenwerten $(\ln \boldsymbol{\mu}/\Delta t)^n$ ist (abhängig von der Potenz n) abwechselnd der Realteil und der Imaginärteil nahe Null. Bei dem zweiten Term $(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{I})^{-1}$ ist generell der Realteil nahe Null. Das führt beim Produkt ebenfalls zu wechselnden Anteilen nahe Null beim Realteil und beim Imaginärteil. Inwieweit dies in Verbindung mit den identifizierten diskreten Eigenformen $\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{A}}$ dazu führt, dass jeder zweite Markovparameter falsch wird, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht abschließend geklärt werden.

In diesem Zusammenhang soll zusätzlich ein weiterer Sachverhalt dargestellt werden: Die Berechnung einer Strukturantwort infolge Impulsanregung kann analytisch durch eine Taylorreihe dargestellt werden. Unter Verwendung der Gleichungen (6.1) und (6.2) gilt:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{CA}^0\mathbf{B} + \mathbf{CA}^1\mathbf{B}t + \frac{\mathbf{CA}^2\mathbf{B}}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{CA}^3\mathbf{B}}{3!}t^3 + \frac{\mathbf{CA}^4\mathbf{B}}{4!}t^4 + \dots \quad (6.4)$$

Die Strukturantwort kann damit direkt aus den zeitkontinuierlichen Zustandsraumparametern ermittelt werden. In Abbildung 6.2 ist exemplarisch darge-

Tab. 6.1: Vergleich identifizierte Markovparameter – Einfluss der Samplezeit

Steifigkeit: $30.000Nm^{-1}$; Masse: $190kg$; Dämpfung: $3Nsm^{-1}$	
zeitkontinuierliche Markovparameter des Ausgangssystems	
CA^0B	0
CA^1B	$5,263 \cdot 10^{-3} kg^{-1}$
CA^2B	$-8,310 \cdot 10^{-5} s^{-1}kg^{-1}$
CA^3B	$-8,310 \cdot 10^{-1} s^{-2}kg^{-1}$
CA^4B	$2,624 \cdot 10^{-2} s^{-3}kg^{-1}$
Eigenformen zeitkontinuierliches Ausgangssystem	
Ψ_{A_1}	$-0,00005 \pm 0,07933i$
Ψ_{A_2}	0,9968
zeitkontinuierliche Eigenwerte λ^n Ausgangssystem	
λ^1	$-0,008 \pm 12,57i$
λ^2	$-157,9 \pm 0,2i$
λ^3	$3,7 \pm 1.984i$
↓ Messwerte simulieren - Zustandsraummodell identifizieren ↓	
Samplezeit: $10^{-2}s$	Samplezeit: $10^{-5}s$
Eigenformen identifiziertes zeitdiskretes ZSR-Modell	
$\Psi_{\bar{A}_1}$	0,7071
$\Psi_{\bar{A}_2}$	$0,000015 \pm 0.7071i$
	0,8291
	$0,0572 \pm 0.5562i$
zeitdiskrete Eigenwerte μ identifiziertes System	
μ	$0,9920 \pm 0,1253i$
	$0.99999991 \pm 0,0001257i$
Betrag r und Winkel θ der diskreten Eigenwerte	
	$0,9999 / \pm 7,199^\circ$
	$0,99999992 / \pm 0,007^\circ$
zeitkontinuierliche Eigenwerte aus diskretem ZSR-Modell $\lambda^n = \left(\frac{\ln \mu}{\Delta t}\right)^n$	
$\ln \mu / \Delta t$	$-0,008 \pm 12,57i$
$\ln^2 \mu / \Delta t^2$	$-157,9 \pm 0,2i$
$\ln^3 \mu / \Delta t^3$	$3,7 \pm 1.984i$
$(\mu - I)^{-1}$	$-0,5050 \pm 7,948i$
	$-5,500 \pm 7.958i$
Betrag und Winkel	
	$7,964 / \pm 93,64^\circ$
	$7.958 / \pm 90,04^\circ$
zeitkontinuierliche Markovparameter des identifizierten Systems	
CA^0B	$-2,632 \cdot 10^{-5} f$
CA^1B	$-2,632 \cdot 10^{-8} \sim \checkmark$
CA^2B	$5,257 \cdot 10^{-3} \checkmark$
CA^3B	$5,263 \cdot 10^{-3} \checkmark$
CA^4B	s^0kg^{-1}
	$-7,895 \cdot 10^{-5} \sim \checkmark$
	$s^{-1}kg^{-1}$
	$-8,301 \cdot 10^{-1} \checkmark$
	$-8,310 \cdot 10^{-1} \checkmark$
	$s^{-2}kg^{-1}$
	$-6,299 \cdot 10^{-1} f$
	$2,559 \cdot 10^{-2} \sim \checkmark$
	$s^{-3}kg^{-1}$

Tab. 6.2: Vergleich identifizierter Markovparameter – Einfluss der Dämpfung

Steifigkeit: $30.000Nm^{-1}$; Masse: $190kg$; Samplezeit: $10^{-2}s$		
	Dämpfung: $3Nsm^{-1}$	Dämpfung: $3.000Nsm^{-1}$
zeitkontinuierliche Markovparameter des Ausgangssystems		
CA^0B	0	0
CA^1B	$5,263 \cdot 10^{-3}$	$5,263 \cdot 10^{-3} kg^{-1}$
CA^2B	$-8,310 \cdot 10^{-5}$	$-8,310 \cdot 10^{-2} s^{-1}kg^{-1}$
CA^3B	$-8,310 \cdot 10^{-1}$	$4,811 \cdot 10^{-1} s^{-2}kg^{-1}$
CA^4B	$2,624 \cdot 10^{-2}$	$5,525 \cdot 10^0 s^{-3}kg^{-1}$
Eigenformen zeitkontinuierliches Ausgangssystem		
Ψ_{A_1}	$-0,00005 \pm 0,07933i$	$-0,04984 \pm 0,06172i$
Ψ_{A_2}	0,9968	-0,9968
zeitkontinuierliche Eigenwerte λ^n Ausgangssystem		
λ^1	$-0,008 \pm 12,57i$	$-7,895 \pm 9,776i$
λ^2	$-157,9 \pm 0,2i$	$-33,24 \pm 154,4i$
λ^3	$3,7 \pm 1.984i$	$1.771 \pm 893,6i$
⇓ Messwerte simulieren - Zustandsraummodell identifizieren ⇓		
Eigenformen identifiziertes zeitdiskretes ZSR-Modell		
$\Psi_{\bar{A}_1}$	0,7071	0,7071
$\Psi_{\bar{A}_2}$	$0,000015 \pm 0,7071i$	$0,3112 \pm 0,6349i$
zeitdiskrete Eigenwerte μ identifiziertes System		
μ	$0,9920 \pm 0,1253i$	$0,9197 \pm 0,09019i$
Betrag r und Winkel θ der diskreten Eigenwerte		
	$0,9999 / \pm 7,199^\circ$	$0,9241 / \pm 5,601^\circ$
zeitkontinuierliche Eigenwerte aus diskrettem ZSR-Modell $\lambda^n = \left(\frac{\ln \mu}{\Delta t}\right)^n$		
$\ln \mu / \Delta t$	$-0,008 \pm 12,57i$	$-7,895 \pm 9,776i$
$\ln^2 \mu / \Delta t^2$	$-157,9 \pm 0,2i$	$-33,24 \pm 154,4i$
$\ln^3 \mu / \Delta t^3$	$3,7 \pm 1.984i$	$1.771 \pm 893,6i$
$(\mu - \mathbf{I})^{-1}$	$-0,5050 \pm 7,948i$	$-5,507 \pm 6,183i$
	Betrag und Winkel	
	$7,964 / \pm 93,64^\circ$	$8,280 / \pm 131,7^\circ$
zeitkontinuierliche Markovparameter des identifizierten Systems		
CA^0B	$-2,632 \cdot 10^{-5} f$	$-2,701 \cdot 10^{-5} \sim \checkmark$
CA^1B	$5,257 \cdot 10^{-3} \checkmark$	$5,683 \cdot 10^{-3} \sim \checkmark s^0kg^{-1}$
CA^2B	$4,072 \cdot 10^{-3} f$	$-8,546 \cdot 10^{-2} \sim \checkmark s^{-1}kg^{-1}$
CA^3B	$-8,301 \cdot 10^{-1} \checkmark$	$4,521 \cdot 10^{-1} \sim \checkmark s^{-2}kg^{-1}$
CA^4B	$-6,299 \cdot 10^{-1} f$	$6,355 \cdot 10^0 \sim \checkmark s^{-3}kg^{-1}$

stellt, welchen Anteil die einzelnen Terme an der berechneten Strukturantwort haben. Man erkennt, dass die Markovparameter mit geradzahligem Potenz m von \mathbf{A} –die im Identifikationsprozess nicht zutreffend bestimmt werden– ca. drei Zehnerpotenzen kleiner sind und nur einen untergeordneten Einfluss auf die Summe der Reihenglieder ausüben.

6.1.2 Einfluss einer Digitalfilterung von Messdaten

Bei der experimentellen Schwingungsmessung sind oftmals unerwünschte Signalanteile in den Messdaten enthalten, beispielsweise durch in die Messkette eingestreute StörungsSignale oder durch harmonische und andere Erregermechanismen, die einzelne Frequenzbereiche stark anregen, so dass die zu identifizierenden (globalen) Eigenfrequenzen unterrepräsentiert sind. Die Identifikation und (sinnvolle) Modellbildung ist in solchen Fällen meist erschwert. Abhilfe kann eine nachträgliche Digitalfilterung der Messdaten mit Tiefpass-, Hochpass-, Bandpass- oder Bandsperrefilter bringen, die auch häufig angewendet werden.

Dieser Abschnitt kann nicht annähernd die Grundlagen zur Filtertheorie vermitteln oder auf die vielfältig verfügbaren Filtertypen sowie deren Anwendungen näher eingehen. Hierfür muss auf die themenbezogene Fachliteratur verwiesen werden. Einen ersten Überblick und eine Einführung in die Thematik findet man beispielsweise bei Hamming [32] bzw. bei Kammeyer und Kroschel [43]. An dieser Stelle soll jedoch auf einige typische Filtercharakteristiken oftmals verwendeter Filter eingegangen werden. Insbesondere wenn auf Basis gefilterter Messsignale Zustandsraummodelle identifiziert und anschließend strukturmechanisch interpretiert werden sollen, sind diese zu beachten, um geeignete Filter auswählen zu können.

Digitalfilter lassen sich anhand ihres Aufbaus in nicht-rekursive Filter (ohne Rückkopplung) und rekursive Filter (mit Rückkopplung) einteilen. Eine weitere Unterscheidung kann anhand ihrer Impulsantwort vorgenommen werden in FIR-Filter (finite-impulse-response) mit endlich langer Impulsantwort und IIR-Filter (infinite-impulse-response) mit unendlich langer Impulsantwort. FIR-Filter beinhalten meistens nicht-rekursive Elemente und sind generell stabil. Ein wesentlicher Vorteil von FIR-Filtern ist die Möglichkeit Filter mit einem linearen Phasengang zu entwerfen, um konstante Gruppenlaufzeiten für

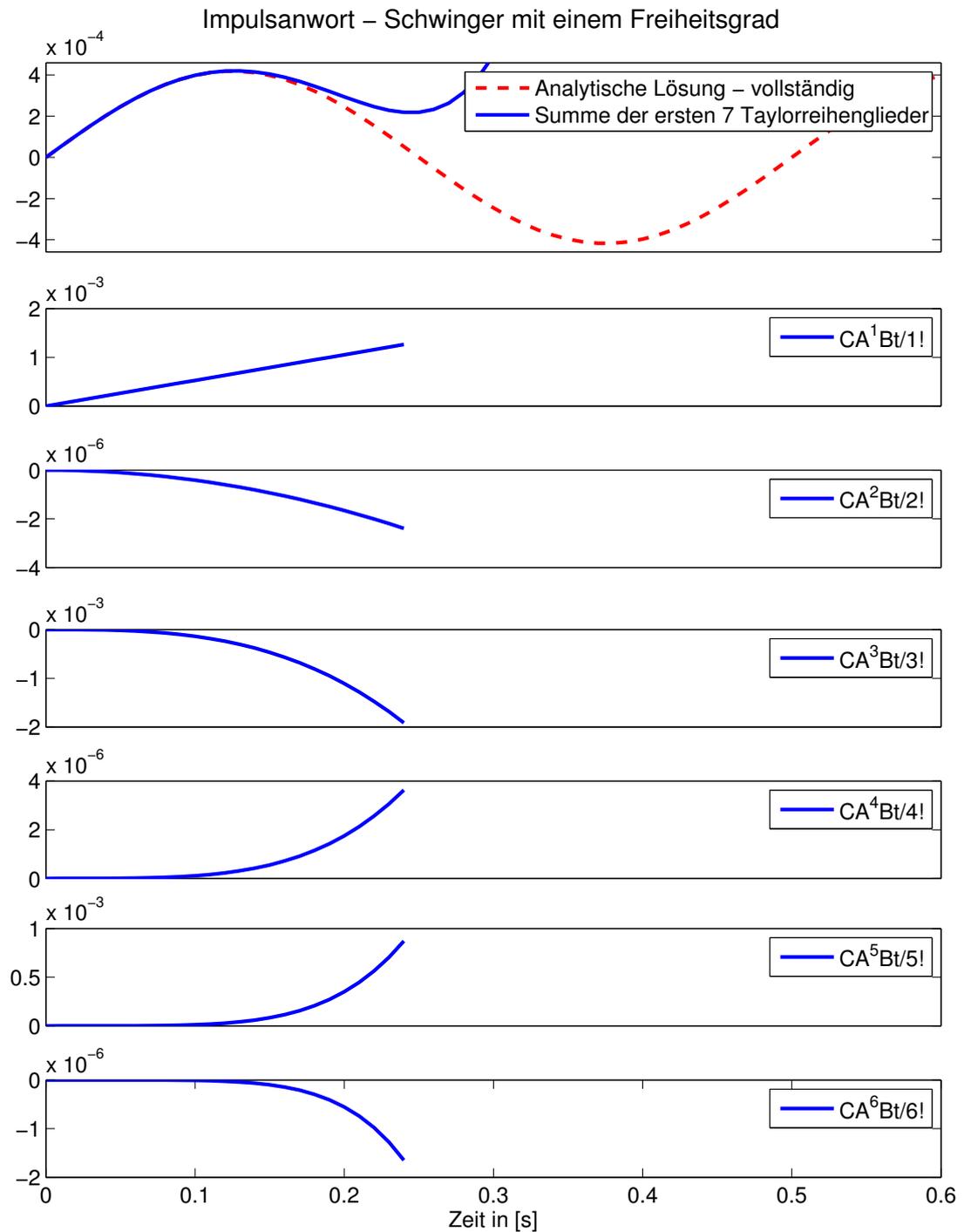


Abb. 6.2: Anteil der einzelnen Taylorreihenglieder an der analytischen Lösung ($k = 30.000 Nm^{-1}$; $m = 190 kg$; $d = 3 Nsm^{-1}$)

FIR-Filter	IIR-Filter	
Parks-McClellan-Filter	Bessel-Filter	Butterworth-Filter
Amplitudengang mit gleicher Welligkeit im Durchlass- und Sperrbereich; wesentlich höhere Ordnung als bei IIR-Filtern für vergleichbare Steilheit des Amplitudengangs notwendig	fallender Amplitudengang im Durchlassbereich; geringe Steilheit des Amplitudengangs (geringer noch als beim Butterworth-Filter); sehr geringes Überschwingen	konstanter Amplitudengang im Durchlassbereich; schärferer Knick des Amplitudengangs im Vergleich zum Bessel-Filter; beträchtliches Überschwingen
linearer Phasengang	linearer Phasengang	nichtlinearer Phasengang
konstante Gruppenlaufzeit	konstante Gruppenlaufzeit	Signalverzerrung

Tab. 6.3: Typische Eigenschaften ausgewählter Filter

alle Frequenzen zu erreichen. IIR-Filter sind im Gegensatz dazu nur dann stabil, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen. Liegen einfache Polstellen auf dem Einheitskreis, so ist das System bedingt stabil, d. h. in Abhängigkeit vom Eingangssignal. Sobald zwei oder mehr Polstellen auf demselben Punkt des Einheitskreises oder auch nur eine Polstelle außerhalb des Einheitskreises liegt, ist der Filter instabil. Der Vorteil von IIR Filtern besteht darin, dass sie in der Übertragungsfunktion neben den Nullstellen auch Polstellen aufweisen und damit höhere Filtergüten ermöglichen. In Tabelle 6.3 sind die wichtigsten Eigenschaften von drei häufig angewendeten, exemplarisch ausgewählten Filtern zusammengefasst, deren Auswirkung auf Messsignale im Folgenden näher demonstriert werden soll.

Die möglichen Auswirkungen einer digitalen Tiefpassfilterung sollen exemplarisch an einem FIR-Filter mit linearem Phasengang (Filterentwurf mit Parks-McClellan Algorithmus) und zwei IIR-Filtern (Bessel- und Butterworth-Filter) dargestellt werden. Bedeutsam ist zunächst der Amplitudengang eines Filters. Wünschenswert ist ein steiler Abfall oberhalb der Grenzfrequenz. Man erkennt

in Abbildung 6.3 den sehr steilen Abfall des FIR-Filters. Gleichzeitig haben

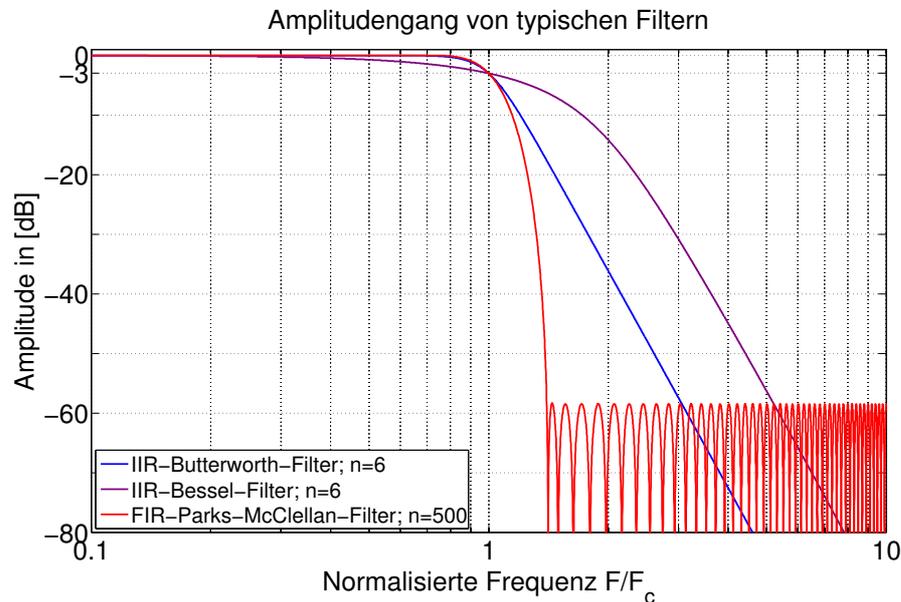


Abb. 6.3: Amplitudengang häufig verwendeter Filter

FIR-Filter einen linearen Phasengang, so dass es infolge einer konstanten Gruppenlaufzeit zu keinerlei Verzerrungen der Signale kommt. Im Gegensatz zu IIR-Filtern ist eine sehr hohe Filterordnung (im gewählten Beispiel $n = 500$) notwendig, um eine ausreichende Dämpfung im Filtersperrbereich zu realisieren. Die beiden IIR-Filter wurden mit einer Filterordnung von $n = 6$ gebildet. Der Butterworth-Filter zeigt im Durchlassbereich ein vergleichbares Amplitudenverhalten wie der FIR-Filter. Der Abfall im Sperrbereich ist etwas flacher, so dass sich erst ab $F/F_C \approx 3$ höhere Dämpfungen als beim FIR-Filter ergeben. Wesentlicher Nachteil von Butterworth-Filtern ist eine Phasenverschiebung, die zu Verzerrungen der Signale führt. Die in dieser Arbeit vorgestellte strukturmechanische Interpretation von Markovparametern verliert ebenfalls ihre Gültigkeit, wenn einzelne Strukturmoden infolge der Anwendung eines Filters zueinander phasenverschoben werden. Einen noch flacheren Abfall des Amplitudengangs – der bereits im Durchlassbereich des Filters einsetzt – zeigen IIR-Bessel-Filter (im Beispiel mit Filterordnung $n = 6$). Bei $F/F_C = 0,5$ ist die Amplitude bereits auf ca. 90% reduziert. Ist ein steiler Amplitudengangabfall bei der Filterung nicht notwendig, können Bessel-Filter gut geeignet sein: Die im Gegensatz zu FIR-Filtern sehr kleine Filterordnung (im Beispiel $n = 6$)

führt zu kurzen Rechenzeiten und durch den linearen Phasengang kommt es zu keinerlei Signalverzerrungen. Eine weitere sehr nützliche Eigenschaft erkennt man aus der Sprungantwort des Bessel-Filters, die – neben den beiden weiteren Sprungantworten – in Abbildung 6.4 dargestellt ist: Ein rechteckfö-

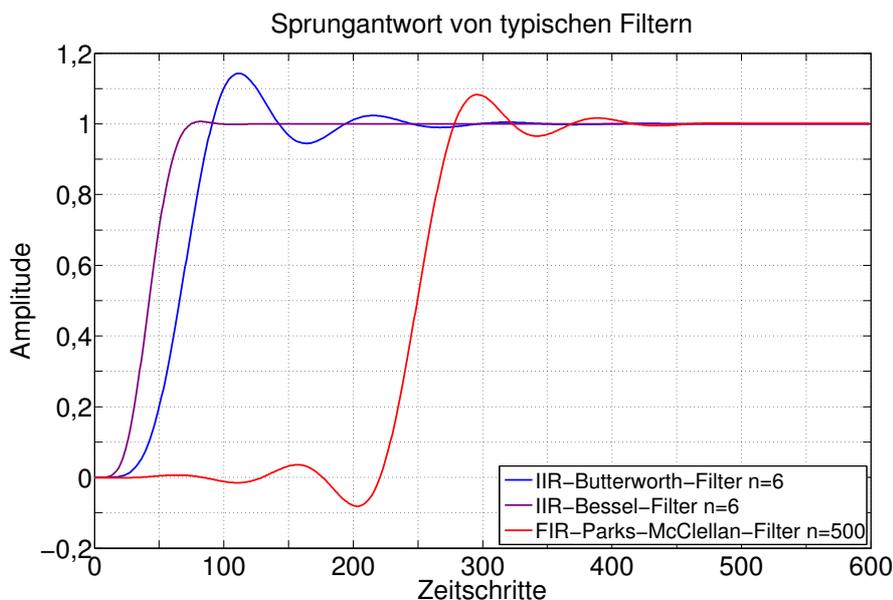


Abb. 6.4: Sprungantwort häufig verwendeter Filter

miger Signalsprung beim Zeitschritt „0“ wird durch eine Filterung mit einem Bessel-Filter vergleichsweise am wenigsten verfälscht. Es kommt zwar zu einer Signalverzögerung (Laufzeit) und einem lediglich allmählichen Signalanstieg, ein „Übersprechen“, wie es die beiden anderen Filterarten zeigen, ist allerdings minimiert und fällt erst bei höheren Filterordnungen nennenswert ins Gewicht.

Die Auswirkungen der beschriebenen Filtereigenschaften sollen an einem einfachem analytisch erzeugtem Signal mit vier verschiedenen Frequenzen demonstriert werden:

$$y = e^{-d_1\omega_1 t} \cdot a_1 \sin \omega_1 t + \dots + e^{-d_4\omega_4 t} \cdot a_4 \sin \omega_4 t \quad (6.5)$$

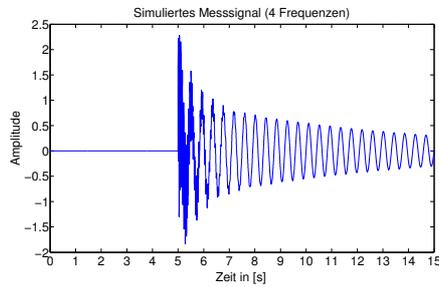
In Anlehnung an die beschleunigungsbasierten Messungen an der Brücke in Hünxe (siehe Abschnitt 7.2) wurde ein analytisches Signal mit einem dominanten hochfrequenten Anteil erzeugt, der durch einen Tiefpass unterdrückt werden sollte. Vergleichend dazu wurde ein Signal mit Amplituden in gleicher Größenordnung erzeugt (Parameter siehe Tabelle 6.4). Die ungefilterten Originalsignale und die tiefpassgefilterten Signale mit den drei Musterfiltern aus

		Variante 1 - Amplituden gleichmäßig verteilt		Variante 2 - Hochfrequente Anteile dominant	
i	Frequenz f_i	Dämpfung d_i	Amplitude a_i		
1	2,4 Hz	0,008	1	0,03	
2	20 Hz	0,01	0,8	0,04	
3	42 Hz	0,01	1,3	3	
4	62 Hz	0,08	0,5	6	

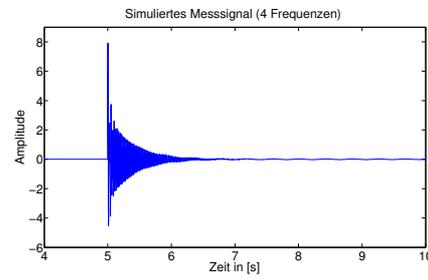
Tab. 6.4: Parameter für analytisches Simulationssignal

Abbildung 6.3 sind in Abbildung 6.5 dargestellt. Die Filterung erfolgte mit den MATLAB-Funktionen *filter* und *filtfilt*. Bei der Anwendung der Funktion *filter* ergibt sich ein gefiltertes Antwortsignal entsprechend dem zugrundeliegenden Filtertyp. Die Funktion *filtfilt* filtert die Originalsignale zunächst vorwärts, analog zu *filter*. Die anschließende erneute Filterung in rückwärtiger Richtung führt zu gefilterten Messsignalen ohne Phasenverschiebung in Bezug auf das Originalsignal. Die Magnitude entspricht dann dem Quadrat der Filteramplitude und die Filterordnung verdoppelt sich (siehe Oppenheim und Schaffer [68]). Man erkennt aus Abbildung 6.5(c),(e) und (g), dass – für den Fall ähnlich großer Amplituden – die drei Tiefpass-Filter das blau dargestellte Originalsignal sehr gut abbilden können. Bei einfacher Filterung mit Phasenversatz (grün dargestellt); bei Filterung mit *filtfilt* entsprechend ohne Phasenversatz (rot dargestellt, meist das blaue Signal verdeckend). Die doppelte Filterordnung infolge zweifacher Filterung erkennt man insbesondere in Teilbild (g), bei dem das einfach gefilterte Signal noch nennenswerte Anteile von f_2 aufgrund des flachen Amplitudenganges des Besselfilters enthält.

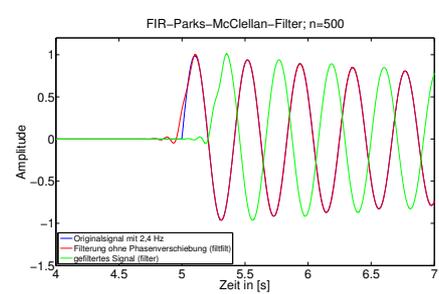
Bei der Simulation mit dominanten, hochfrequenten Anteilen sieht man deutlich die Einschwingvorgänge der Filter (Abbildung 6.5 (d), (f), (h)), die prinzipiell bereits aus der Sprungantwort der Filter (Abbildung 6.4) erkennbar sind. Am schnellsten entspricht das mit einem Bessel-Filter gefilterte Signal dem Originalsignal. Sowohl Butterworth-Filter als auch FIR-Filter zeigen zusätzlich zum „fehlerhaften“ Hauptpeak weitere Einschwingeffekte diesem



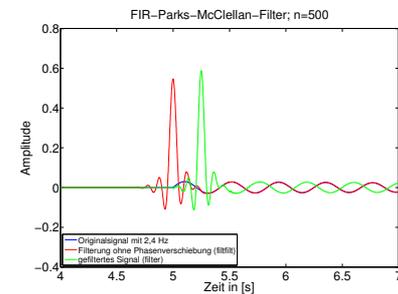
(a) Amplituden gleichverteilt



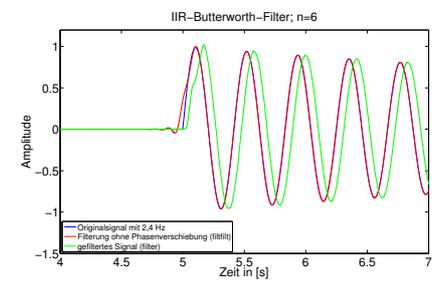
(b) Hochfrequente Anteile dominant



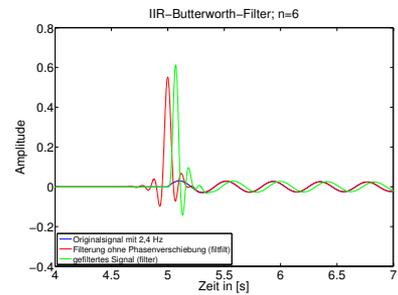
(c) Amplituden gleichverteilt



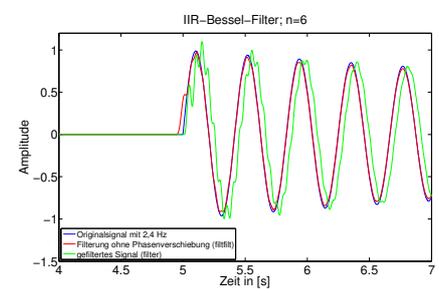
(d) Hochfrequente Anteile dominant



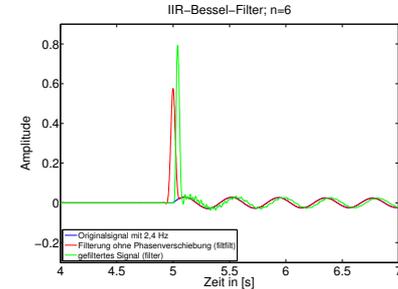
(e) Amplituden gleichverteilt



(f) Hochfrequente Anteile dominant



(g) Amplituden gleichverteilt



(h) Hochfrequente Anteile dominant

Abb. 6.5: Auswirkung einer Digitalfilterung auf analytische Messsignale

vorausgehend und nachfolgend. Bei der folgenden harmonischen Schwingung (nach dem Einschwingvorgang) bilden die gefilterten Signale das Originalsignal sehr gut ab (tlw. mit Phasenverschiebung).

Die in diesem Abschnitt exemplarisch dargestellten Zusammenhänge sind im Bereich der Signalverarbeitung hinlänglich bekannt. Nichtsdestotrotz erfolgte die Darstellung hier ganz bewusst: Bei den experimentell durchgeführten Schwingungsmessungen wurden die Strukturen deterministisch mit impulsartigen Kraftverläufen angeregt. Dabei wurde in dieser Arbeit festgestellt, dass insbesondere die Signalgüte zu Beginn der Schwingung einen wesentlichen Einfluss auf die identifizierten Zustandsraummodelle und vor allem auf die strukturmechanische Interpretierbarkeit der Markovparameter hat. Genau dieser Anfangsbereich wird aber unter Umständen beim Einsatz von (Digital-)Filtern verfälscht. Insofern sollte der Einsatz von Filtern weitgehend vermieden werden. Ist dies nicht möglich, muss sorgfältig berücksichtigt werden, inwieweit die Filterung die nachfolgend identifizierten Modelle beeinflusst.

6.2 FE-Modell der Laborstruktur

Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren zur strukturmechanischen Interpretation von Markovparametern und zur Schadensdetektion sollten an realen Strukturen experimentell verifiziert werden. Im Abschnitt 7.1 werden die im Labor durchgeführten Schwingungsversuche an einer einfachen Kragarmstruktur und deren Ergebnisse beschrieben. Im Vorfeld soll jedoch anhand von numerischen Simulationen die Eignung der theoretisch beschriebenen Methoden zur Systemidentifikation und Schadenslokalisierung nachgewiesen werden.

6.2.1 Simulationsmodell

Zunächst sollten bei einer numerischen Modellierung die Aufgaben und Anforderungen an das zu erstellende Modell genau definiert werden, um geeignete Modellierungsansätze zu verwenden. Dies gilt insbesondere, wenn dynamische Strukturantworten berechnet werden sollen. Eine analytische Lösung ist hierbei stets zu favorisieren, meist aber aufgrund der Komplexität der zu modellierenden Struktur ausgeschlossen. In solchen Fällen bedient man sich häufig der Finite-Element-Methode mit der auch Strukturantworten im Zeitbereich mit-

tels verschiedener Algorithmen berechnet werden können. Der letztlich für die Berechnung genutzte Algorithmus sollte dabei sehr sorgsam ausgewählt werden (u.a. abhängig von der Strukturerrregung), um Fehler und Ungenauigkeiten zu vermeiden.

Der bei den Laborversuchen eingesetzte Kragbalken (genaue Beschreibung des experimentellen Aufbaus siehe Abschnitt 7.1) zeichnet sich u.a. durch eine diskrete Massenverteilung (Sensoren) und durch eine diskrete Steifigkeitsverteilung (Sägeschnitt im geschädigtem Zustand) aus, weshalb auch dieser im Folgenden mit finiten Elementen (Bernoulli-Balken) modelliert wird. Zur Modellierung ist das Programmsystem MatFem der Universität Kassel verwendet worden (siehe Link [55] und [56]). Um höhere Eigenformen gut aufgelöst

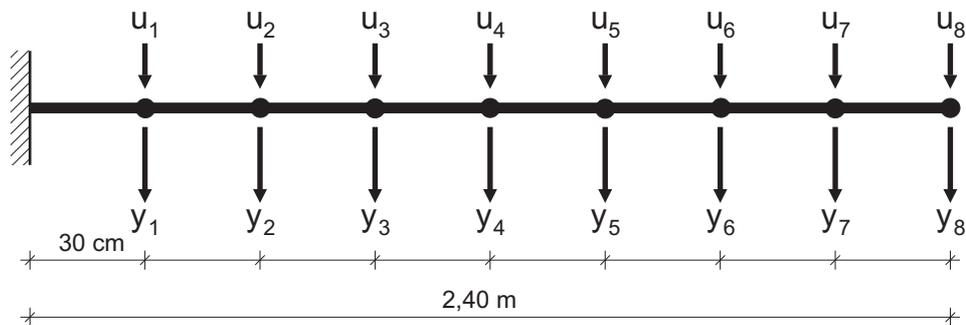


Abb. 6.6: Schematische Darstellung des Kragbalkens

darstellen zu können, sowie die im Experiment vorgenommenen Steifigkeitsreduktionen durch Sägeschnitte lokal modellieren zu können, wurde die Kragbalkenlänge von 2,45m mit 58 Bernoulli-Elementen abgebildet. Die zugehörigen Modellparameter sind in Tabelle 6.5 aufgeführt, die resultierenden Eigenfrequenzen der „vertikalen“ Eigenmoden in Tabelle 6.6.

Aus der allgemeinen Definition der Bernoulli-Balkenelemente ergibt sich die globale Massen- und Steifigkeitsmatrix. Zur Berechnung von dynamischen Antworten muss zusätzlich die Strukturdämpfung modelliert werden. Vereinfacht wurde hier eine viskose Dämpfung angenommen.

Sind die Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrix bestimmt, ist der zu modellierende Kragbalken vollständig numerisch abgebildet und die dynamischen Strukturantworten können berechnet werden. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

Liest man die strukturbeschreibenden Matrizen (Masse, Steifigkeit, Dämpf-

		Stahlbalken	Stahlbalken zzgl. Sensor	Stahlbalken zzgl. Sensor zzgl. 1kg Zusatzmasse	Stahlbalken reduzierte Steifigkeit
Elastizitätsmodul	N/m^2			$2,100 \cdot 10^{11}$	
Schubmodul	N/m^2			$8,100 \cdot 10^{10}$	
Querschnittsfläche	m^2		$6,550 \cdot 10^{-4}$		$4,300 \cdot 10^{-4}$
Rohdichte	kg/m^3	8002	$3,854 \cdot 10^4$	$6,907 \cdot 10^4$	8002
Flächenträgheitsmoment	m^4		$1,770 \cdot 10^{-7}$		$5,629 \cdot 10^{-9}$
Elementlänge	m	versch.	0,05	0,05	0,05

Tab. 6.5: Modellparameter des Kragbalkens

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
	5,9 Hz	37 Hz	104 Hz	204 Hz	336 Hz	499 Hz	686 Hz	875 Hz

Tab. 6.6: Eigenfrequenzen der „vertikalen“ Eigenmoden des FE-Modells

fung) aus MatFem aus, kann ein zeitkontinuierliches Zustandsraummodell aufgebaut und zur Generierung von Strukturantworten genutzt werden. Die Impulsantwort kann direkt aus dem zeitkontinuierlichen Zustandsraummodell bestimmt werden:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{C}_d e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \quad (6.6)$$

Die Strukturantworten infolge beliebiger Eingangssignale werden vorzugsweise mit zeitdiskreten Zustandsraummodellen bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \bar{\mathbf{C}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (6.7)$$

In Matlab sind die entsprechenden Funktionen zur Berechnung verfügbar (z.B. *impulse*, *lsim* etc.). Hierbei sollte jedoch sehr genau darauf geachtet werden, wie die Transformation in die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung erfolgt, um (nachfolgend) fehlerhaft identifizierte Markovparameter zu vermeiden. Näheres hierzu ist bereits in den Abschnitten 4.4 und 6.1.1 beschrieben. Weiterhin ist zu

beachten, dass die Systemmatrizen schnell groß werden. Das hier beschriebene sehr einfache Beispiel (59 Knoten mit jeweils 6 Freiheitsgraden) hat bereits Systemmatrizen in der Dimension 354×354 - die zugehörige Systemmatrix \mathbf{A} eines Zustandsraummodells 708×708 . Sind für die Simulation lediglich einzelne Freiheitsgrade als Anregungsort bzw. als „Messort“ interessant (beispielsweise für Simulationsrechnungen in Anlehnung an reale Versuche), können die nicht interessierenden Freiheitsgrade durch einfaches Löschen der zugehörigen Spalten in der Eingangsmatrix \mathbf{B} bzw. der zugehörigen Zeilen in der Ausgangsmatrix \mathbf{C} des Zustandsraummodells entfernt werden, um den numerischen Berechnungsaufwand in Grenzen zu halten.

Aufgrund der Transparenz dieser Methode wurde sie für die nachfolgend präsentierten Simulationsrechnungen genutzt. Im Einzelnen sind dabei folgende Schritte notwendig:

1. Aufstellen FE-Modell (strukturbeschreibende Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{D})
2. Aufstellen eines zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells (Gleichungen (4.7))
3. Transformation des Zustandsraummodells in die zeitdiskrete Darstellung
4. Vorgabe von Kraft-Zeit-Funktionen zur Strukturanregung (hier: gemessener Impuls aus Laborversuchen)
5. Strukturantworten infolge vorgegebener Anregung berechnen
6. Zeitdiskretes Zustandsraummodell auf Basis der simulierten Messsignale identifizieren (z.B. mit PO-MOESP; Abschnitt 3.2)
7. Wandlung in zeitkontinuierliche Zustandsraumdarstellung
8. Identifizierte zeitkontinuierliche Markovparameter entsprechen Strukturparametern (\mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{D}) des identifizierten Modells - für einen direkten Vergleich mit den FE-Modellparametern ist – falls Messfreiheitsgrade $<$ Modellfreiheitsgrade – eine Kondensation des FE-Modells notwendig (Abschnitt 6.2.2).
9. Identifikation von Modellen (ungeschädigter) Referenzstrukturen und veränderter (geschädigter) Strukturen – Schadensdetektion anhand der Differenz der zeitkontinuierlichen Markovparameter

Die nachfolgend präsentierten Simulationsrechnungen erfolgen in Anlehnung an die experimentellen Kragarmversuche. Zur Erzeugung von simulierten Messsignalen wird das Modell nacheinander an acht „vertikalen“ Freiheitsgraden $u_1 \dots u_8$ (Abbildung 6.6) mit einer bei den realen Impuls-Versuchen gemessenen Kraft-Zeit-Funktion beaufschlagt (Abbildung 6.7).

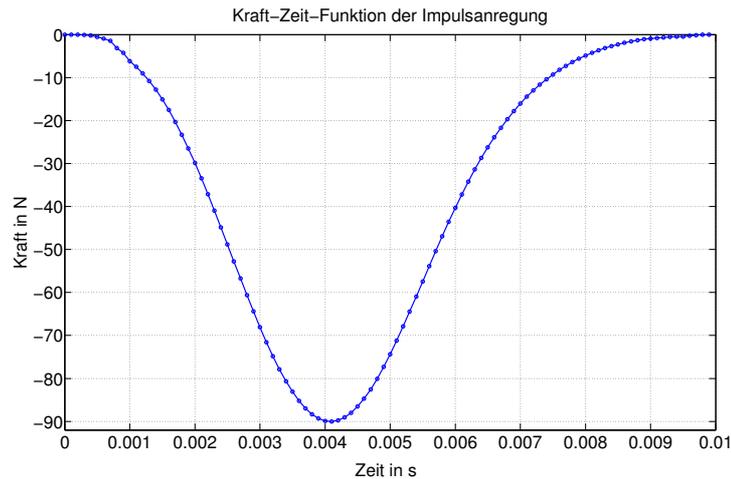


Abb. 6.7: Kraft-Zeit-Funktion des in der Simulation verwendeten „Impulses“

Alternativ zum oben beschriebenen Verfahren können in der FE-Software hinterlegte Algorithmen zur Berechnung dynamischer Strukturantworten genutzt werden. Dabei ist jedoch sehr sorgfältig die Dokumentation zu prüfen, mit welchen Algorithmen die Strukturantworten bestimmt werden und zu entscheiden, ob diese geeignet sind. Insbesondere bei Anregung mit Dirac-Impulsen ist die berechnete Lösung kritisch zu hinterfragen! Es kann durchaus passieren, dass sich die identifizierten Strukturparameter von den Ausgangsparametern des FE-Modells aufgrund von ungenauen Zeitsignalen unterscheiden. Dies wird insbesondere kritisch, wenn die identifizierten Markovparameter invertiert werden sollen – beispielsweise zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix aus der zunächst identifizierten Flexibilitätsmatrix.

6.2.2 Identifizierung mechanischer Strukturparameter

Die maßgebenden Gleichungen zur strukturmechanischen Interpretation von Markovparametern zeitkontinuierlicher Zustandsraummodelle sind in Abschnitt 4.1 eingeführt worden. Beispielsweise lässt sich die Flexibilitätsmatrix und da-

mit auch die Steifigkeitsmatrix wie folgt ermitteln:

$$-\mathbf{F} = -\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{C}_d \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (6.8)$$

Auf den konkreten Anwendungsfall bezogen wird die folgende Diskrepanz deutlich: Die Systemmatrizen des FE-Modells haben eine Dimension von 354x354 im Gegensatz zu den Markovparametern der nachgebildeten experimentellen Tests mit einer Dimension von 8x8 (8 Anregungsorte / 8 Sensoren). Ein direkter Vergleich ist damit ausgeschlossen. Soll ein direkter Vergleich zwischen FE-Modell und identifizierten Markovparametern der Simulation (bzw. auch von experimentellen Tests) erfolgen, müssen entweder die „Messfreiheitsgrade“ deutlich erhöht werden (unrealistisch) oder die Matrizen des FE-Modells entsprechend reduziert (kondensiert) werden. An dieser Stelle soll eine einfache Lösung zur Reduktion der Steifigkeitsmatrix genutzt werden: Durch eine Berechnung der statischen („vertikalen“) Verschiebungen des Kragbalkens an den Sensorpositionen infolge einer Belastung von 1 Newton an den Anregungsorten kann eine Flexibilitätsmatrix bestimmt werden, die dem zugehörigen, meßtechnisch identifiziertem Markovparameter entspricht. Um exakte Übereinstimmung zwischen Strukturmatrix und identifiziertem Markovparameter zu erhalten, ist es notwendig, dass „alle“ Moden bei der Berechnung der Strukturantwort enthalten sind (siehe auch Abschnitt 4.2). „Alle“ Moden bedeutet für das hier präsentierte Beispiel mit acht „vertikalen“ Anregungsorten / „acht“ vertikalen Strukturantworten, dass die ersten acht „vertikalen“ Moden in der Berechnung berücksichtigt werden müssen. Horizontale Moden, Torsions- oder Longitudinalmoden haben keinen Einfluss auf die identifizierte „vertikale“ Steifigkeitsmatrix. Weitere Verfahren zur Kondensation von Freiheitsgraden sind beispielsweise bei Natke [66] näher beschrieben.

Bei der numerischen Berechnung der Strukturantworten erhält man die rein deterministischen Anteile im simulierten Messsignal (mit Ausnahme des Zahlenrauschens aufgrund der begrenzten Genauigkeit der Zahlendarstellung auf einem Digitalrechner). Um reale Versuchsbedingungen in der Simulation besser abzubilden, kann zusätzlich ein simuliertes Messfehlerrauschen auf die simulierten Signale addiert werden. Auf die identifizierten Zustandsraummodelle hat ein solches Rauschen jedoch keinen Einfluss (bei realitätsgerechten Signal-/Rauschverhältnissen), da die entsprechenden Signalanteile bei der Bestimmung der Modellordnung (anhand der Singulärwerte) unterdrückt werden.

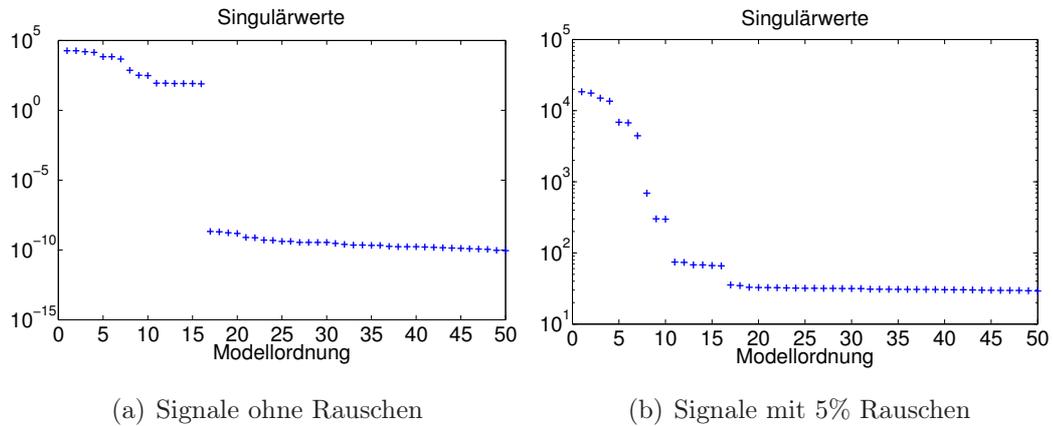


Abb. 6.8: Singulärwertdarstellung zur Bestimmung der Modellordnung

Einzigster Effekt eines solchen Rauschens ist ein geringeres „Gap“ in der Singulärwertdarstellung (Abbildung 6.8). Im Folgenden wird Rauschen deshalb nicht weiter berücksichtigt.

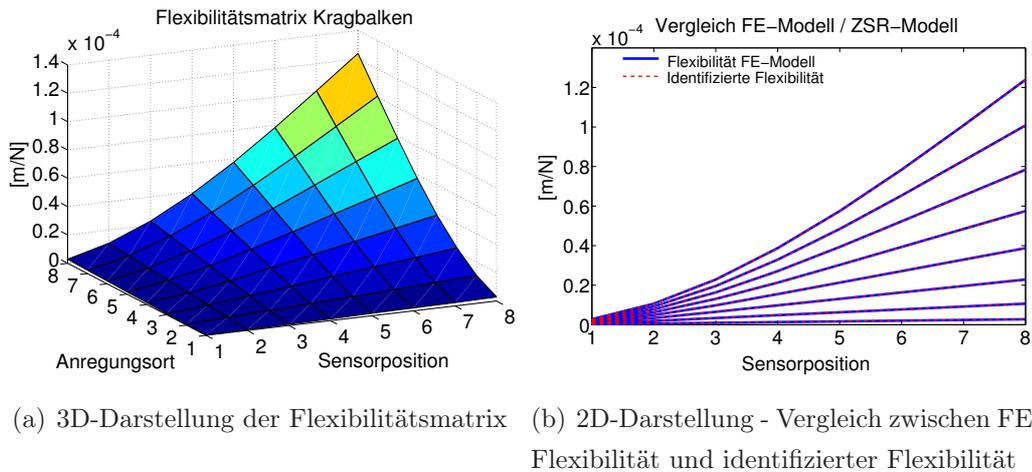


Abb. 6.9: Flexibilitätsmatrix – Identifikation mit acht „vertikalen“ Moden

Am Beispiel der Flexibilitätsmatrix / Steifigkeitsmatrix soll gezeigt werden, dass die aus den identifizierten Markovparametern extrahierten Matrizen den „Original“-Matrizen des FE-Modells entsprechen. Zunächst ist in Abbildung 6.9(a) die Flexibilitätsmatrix des (kondensierten) FE-Modells dreidimensional dargestellt. In Abbildung 6.9(b) ist dieselbe Matrix zweidimensional dargestellt (blau). Rot dargestellt ist die Flexibilitätsmatrix des identifizierten Systems. Man erkennt, dass beide deckungsgleich sind, wenn bei der Identifikation „alle“ acht vertikalen Moden im Signal enthalten sind. Zur Erinnerung: Der Begriff

Moden wird der Einfachheit halber hier als Synonym für die Dyaden verwendet, deren Summe die Markovparameter ergeben - acht Moden sind gleichbedeutend mit sechzehn paarweise komplex konjugierten dyadischen Produkten.

Nach Gleichung 6.8 entspricht die Steifigkeitsmatrix der inversen Flexibilitätsmatrix. Es sollte beachtet werden, dass diese Inversion numerische Probleme bereiten kann. Unkritisch ist die Inversion der Flexibilitätsmatrix des identifizierten Systems, wenn ausreichend (abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade) Moden identifiziert werden können. In Abbildung 6.10 ist die Steifigkeitsmatrix des Kragbalkens dargestellt. Die Inversion von der Flexibilitätsmatrix zur Steifigkeitsmatrix war numerisch stabil (siehe Abbildung 6.11(a)), da ausreichend (acht) Moden im Modell enthalten sind. Somit entspricht die identifizierte Steifigkeitsmatrix der Steifigkeitsmatrix des kondensierten FE-Modells (Abbildung 6.10(b)).

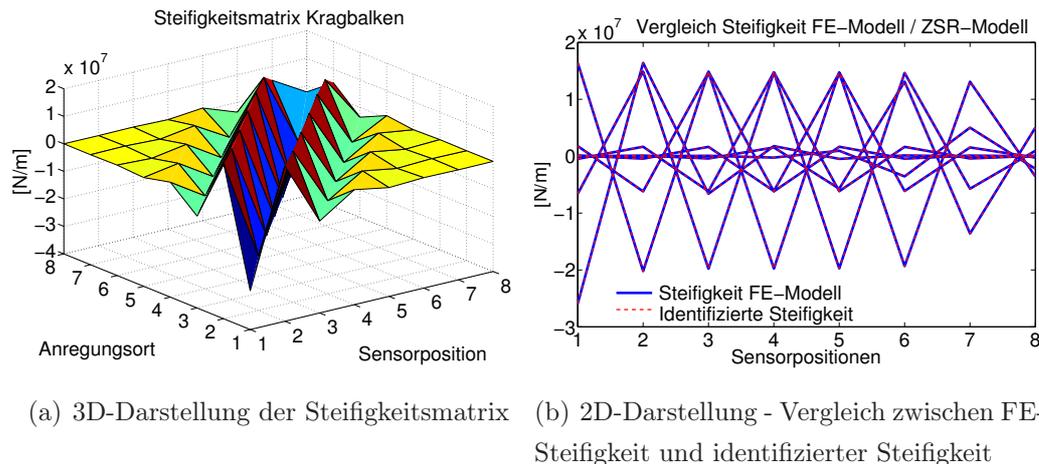


Abb. 6.10: Steifigkeitsmatrix – Identifikation mit acht „vertikalen“ Moden

Problematisch wird die Inversion, wenn lediglich niederfrequente Moden (Anzahl kleiner als die Anzahl der Messfreiheitsgrade) gemessen / identifiziert werden können. Aus den simulierten Messsignalen wurde – in Anlehnung an die Experimente – ein Zustandsraummodell identifiziert, bei dem lediglich Signalanteile aus den „ersten“ vier Moden enthalten sind. Die Flexibilitätsmatrix kann unverändert identifiziert werden und weist lediglich vernachlässigbar kleine Unterschiede zu Abbildung 6.9 auf. Betrachtet man im Zuge der Inversion die Singulärwerte der Flexibilitätsmatrix, so werden Unterschiede deutlich (Abbildung 6.11(b)). Bei der Inversion können lediglich die ersten vier singulä-

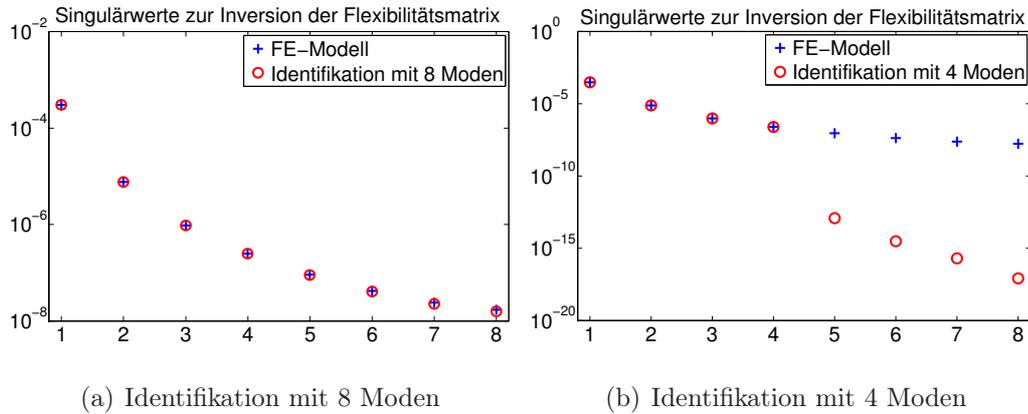
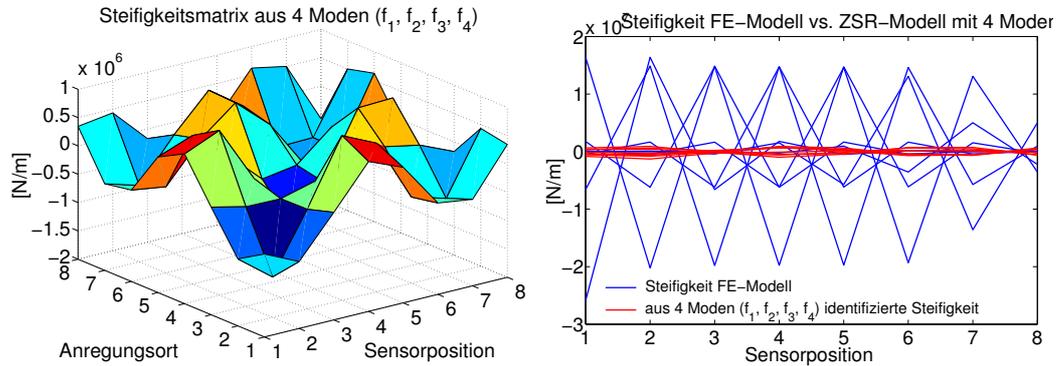


Abb. 6.11: Vergleich der Singulärwerte der Flexibilitätsmatrizen

ren Werte mitgenommen werden. Weitere Informationen (von höheren Moden) sind im Modell nicht enthalten. Führt man die Inversion mit den vier niederfrequenten Moden durch, ergibt sich eine identifizierte Steifigkeitsmatrix, die dreidimensional in Abbildung 6.12(a) dargestellt ist. Die Unterschiede zur „originalen“ Steifigkeitsmatrix aus Abbildung 6.10 werden sichtbar. Enthalten sind lediglich die Anteile aus den Dyaden der vier niederfrequenten Moden mit vergleichsweise kleinen Amplituden (ca. 10^6). Die für die Steifigkeit maßgebenden Anteile aus den Dyaden der höherfrequenten Moden mit Amplituden von ca. $2 \cdot 10^7$ sind im Modell nicht enthalten. Dementsprechend unterscheidet sich die identifizierte Steifigkeitsmatrix deutlich von der „richtigen“ Steifigkeit des FE-Modells. Dies wird ebenfalls in der zweidimensionalen Darstellung deutlich (Abbildung 6.12(b)).

6.2.3 Detektion von Strukturveränderungen

Eine Schadensdetektion / Schadenslokalisierung soll in dieser Arbeit anhand der strukturmechanisch deutbaren Markovparameter durchgeführt werden. Die Grundlagen hierfür sind in Abschnitt 5.2 eingeführt worden. Bevor im Abschnitt 7 die Validierung an experimentellen Messdaten erfolgt, soll an dieser Stelle anhand von numerischen Simulationsrechnungen die prinzipielle Eignung gezeigt werden. Die nachfolgend präsentierten Beispiele beziehen sich auf die experimentell durchgeführten Versuche am Kragbalken, bei denen Massen- und Steifigkeitsveränderungen als Systemvariation dienten. Die Veränderung der Dämpfungseigenschaften wurde nicht näher untersucht. Der einseitig ein-

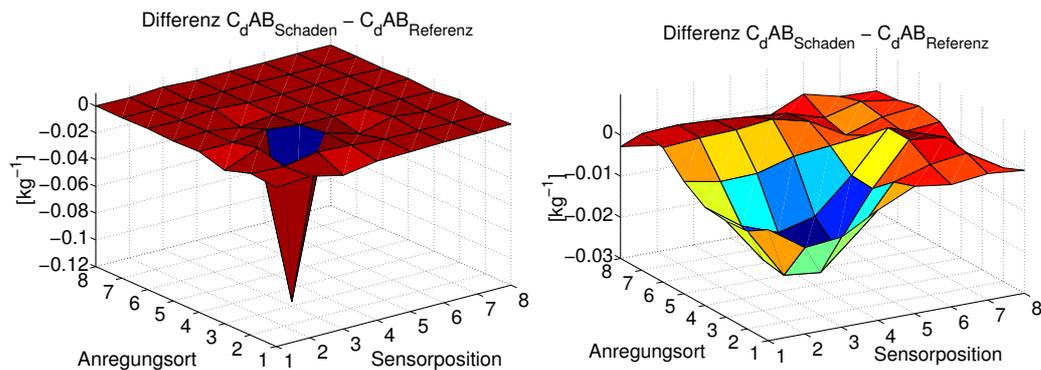


(a) 3D-Darstellung der identifizierten Steifigkeitsmatrix
(b) 2D-Darstellung - Vergleich zwischen FE-Steifigkeit und identifizierter Steifigkeit

Abb. 6.12: Steifigkeitsmatrix – Identifikation mit vier niederfrequenten Moden

gespannte Balken besteht aus einem Stahl-Rechteckrohr (80x40x2,9mm) mit einer Länge von 2,45m.

Detektion von Massenveränderungen Zunächst soll an zwei exemplarischen Beispielen gezeigt werden, wie sich lokale Massenänderungen auswirken. Im ersten Fall ist eine zusätzliche Masse von 1kg am Punkt 3 simuliert worden (entspricht einer Massenerhöhung von ca. 5%). Erfolgt die Identifikation



(a) ZSR-Modell mit 8 Moden

(b) ZSR-Modell mit 4 Moden

Abb. 6.13: Zusatzmasse (1kg) an Pkt 3 - Differenz der Markovparameter C_dAB

mit acht Moden (sechzehn paarweise komplex konjugierte Dyaden), so wird die Zusatzmasse am veränderten System durch einen scharfen lokalen Peak in der Differenz der Markovparameter C_dAB an der entsprechenden Position sichtbar (Abbildung 6.13(a)).

In Abbildung 6.13(b) erkennt man die Auswirkungen, wenn der gleiche „Schaden“ lediglich mit den niedrigsten vier Eigenfrequenzen in den Messsignalen identifiziert wird. Die „Schärfe“ des Peaks reduziert sich – die Position

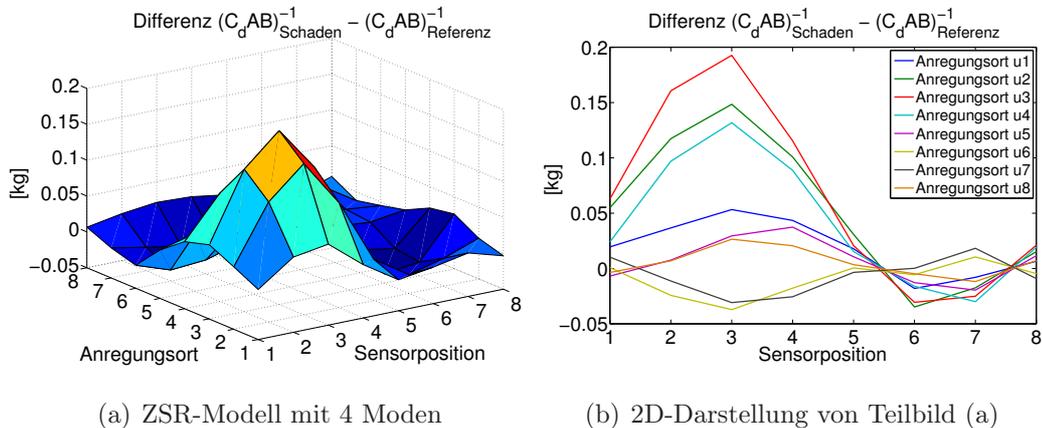


Abb. 6.14: Zusatzmasse (1kg) an Pkt 3 - Differenz der Massenmatrizen $(\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}$

des Schadens wird lediglich verschmiert angezeigt. Das wirkt sich auch auf die Inversion des Markovparameters zur Massenmatrix aus. Während bei einem Zustandsraummodell mit acht Moden die physikalisch vorgenommene Massenerhöhung von 1kg direkt aus der Differenz der Massenmatrizen hervorgeht, wird bei dem identifizierten Zustandsraummodell mit vier Moden eine Massenerhöhung von lediglich 0,19kg detektiert. Die fehlenden Informationen aus den nicht im Signal enthaltenen höheren Moden führen zur Verschmierung der Position sowie zu ungenauen Amplituden. Das ist ein Grund, warum auf Basis von Messdaten identifizierte Markovparameter als korrespondierende strukturelle Parameter bezeichnet werden sollten (siehe auch Abschnitt 5.2.1).

In Abbildung 6.15 ist ein weiteres Beispiel mit einer lokalen Zusatzmasse von 1kg – diesmal am Punkt 6 – dargestellt. Die bereits erwähnten Zusammenhänge gelten analog. Während an der Differenz der Massenmatrizen beim identifizierten Zustandsraummodell mit acht Moden die Zusatzmasse von 1kg korrekt detektiert und lokalisiert werden kann (Teilbild (a)), ist die Lokalisation beim Zustandsraummodell mit vier Eigenfrequenzen in den Signalen verschmiert. Die Zusatzmasse wird in Teilbild (b) um 0,69kg unterschätzt.

Detektion von Steifigkeitsveränderungen Von einer größeren praktischen Bedeutung ist die Detektion von Steifigkeits- bzw. Flexibilitätsverän-

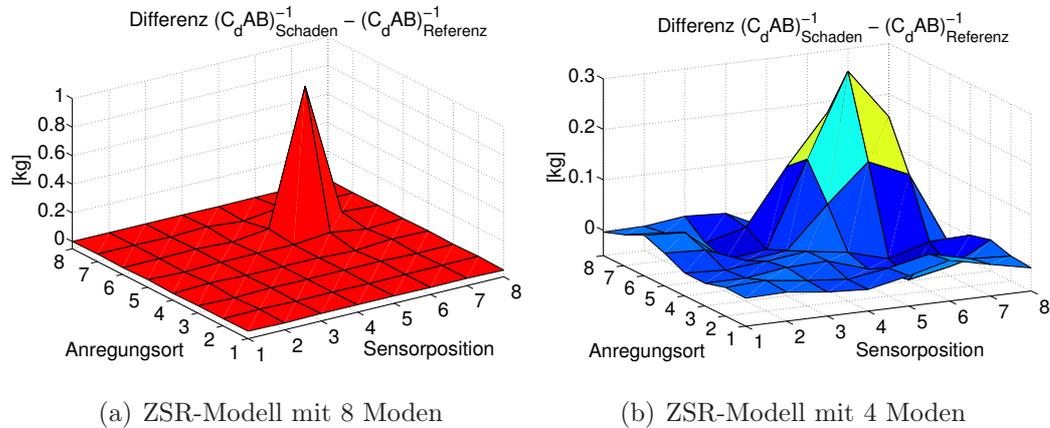


Abb. 6.15: Zusatzmasse (1kg) an Pkt 6 - Differenz der Massenmatrizen $(\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}$

derungen. In Anlehnung an die experimentell durchgeführten Versuche soll hier zunächst simuliert werden, wie sich eine lokale Reduktion der Steifigkeit auswirkt. Als grobe, für diese Untersuchung aber ausreichende Näherung an die Realität wurde hierzu im FE-Modell die Steifigkeit jeweils eines Elementes (Länge 5cm) abgemindert. Zunächst wurde die Steifigkeit 1,40m von der Einspannung entfernt (zwischen Punkt 4 und Punkt 5) auf 32% reduziert (entspricht einem „Durchsägen“ des Untergurtes – Schnitttiefe 4mm). In Abbildung

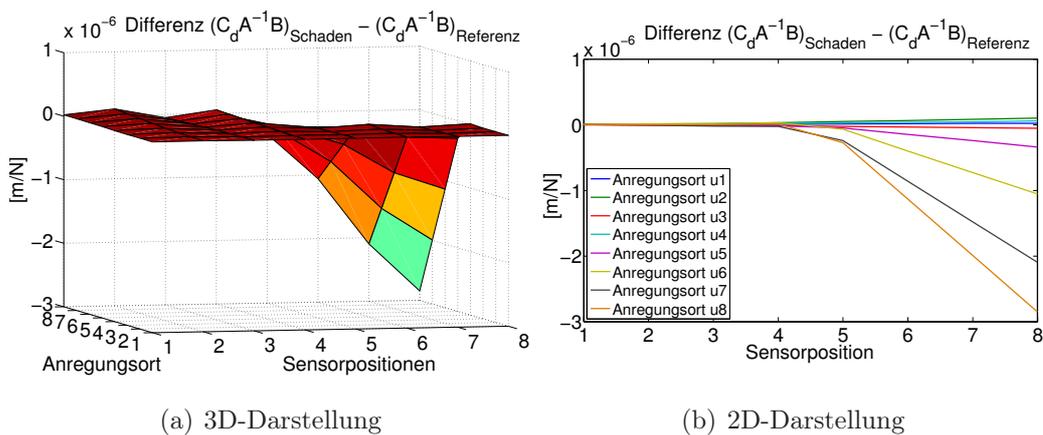


Abb. 6.16: Steifigkeit zwischen Punkt 4 und 5 auf 32% reduziert – Differenz der Flexibilitätsmatrizen $\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ – ZSR-Modell mit 4 Moden

6.16 ist die Differenz der identifizierten Flexibilitätsmatrizen dargestellt. Anhand des Knickes in der Differenzmatrix ist der Ort der Steifigkeitsreduktion eindeutig zu lokalisieren. Hierbei muss beachtet werden, dass die Schadensloka-

lisation auf Basis von Flexibilitäten strukturabhängig ist. Bei einem Kragarm sind lokal reduzierte Steifigkeiten an einem Knick, bei einem Einfeldträger am Maximum zu erkennen. Schwieriger wird die Deutung bei komplexen Strukturen (siehe Abschnitt 6.3). Vorteilhaft ist jedoch, dass die wesentlichen Anteile

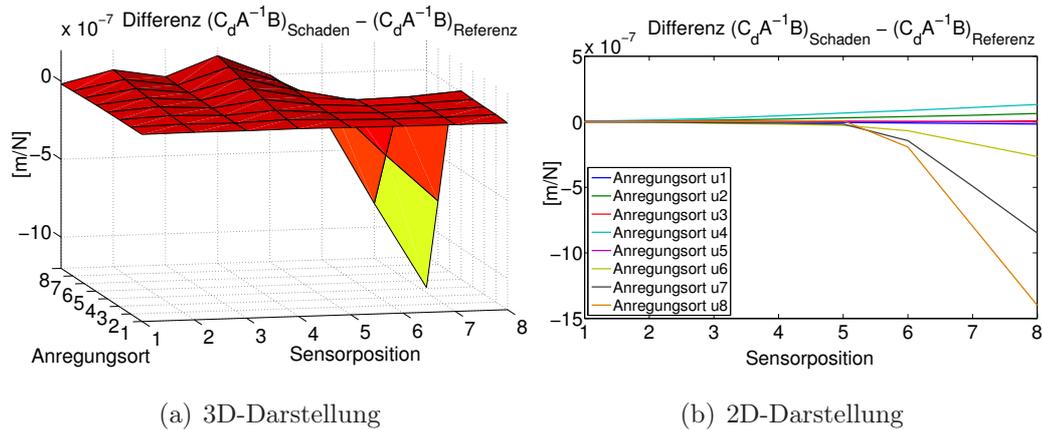


Abb. 6.17: Steifigkeit zwischen Punkt 5 und 6 auf 32% reduziert – Differenz der Flexibilitätsmatrizen $C_d \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ – ZSR-Modell mit 4 Moden

der Flexibilitätsmatrizen aus den niederfrequenten Dyaden hervorgehen. Somit ist der Unterschied zwischen Flexibilitätsmatrizen von identifizierten Zustandsraummodellen mit vier bzw. acht Moden vernachlässigbar klein. Umgekehrt verhält es sich bei der Identifikation der Steifigkeitsmatrizen, weshalb bei diesem Beispiel auf eine Darstellung verzichtet wird. Zur weiteren Demonstration ist in Abbildung 6.17 eine Steifigkeitsreduktion auf 32% zwischen Punkt 5 und Punkt 6 dargestellt (1,70m von Einspannung entfernt). Auch hierbei stellt sich ein eindeutig zu lokalisierender Knick zwischen den entsprechenden „Messfreiheitsgraden“ ein.

Abschließend soll exemplarisch die Sensitivität der Methode etwas näher betrachtet werden. Im Gegensatz zur den relativ deutlichen Steifigkeitsreduktionen der vorangegangenen Beispiele wurde in Abbildung 6.18 die Steifigkeit lediglich um 10% zwischen Punkt 5 und Punkt 6 reduziert (ein Bernoulli-Element, Länge 5cm, bei 1,70m). Im Teilbild (b) ist, vergleichbar zu den Abbildungen 6.16 und 6.17, die Differenz der identifizierten Flexibilitätsmatrizen des Zustandsraummodells mit 4 Moden dargestellt. Aufgrund der vergleichsweise kleinen Steifigkeitsreduktion ist eine eindeutige Lokalisation hierbei nicht mehr möglich. Hat man jedoch ein Modell mit weiteren höherfrequenten Mo-

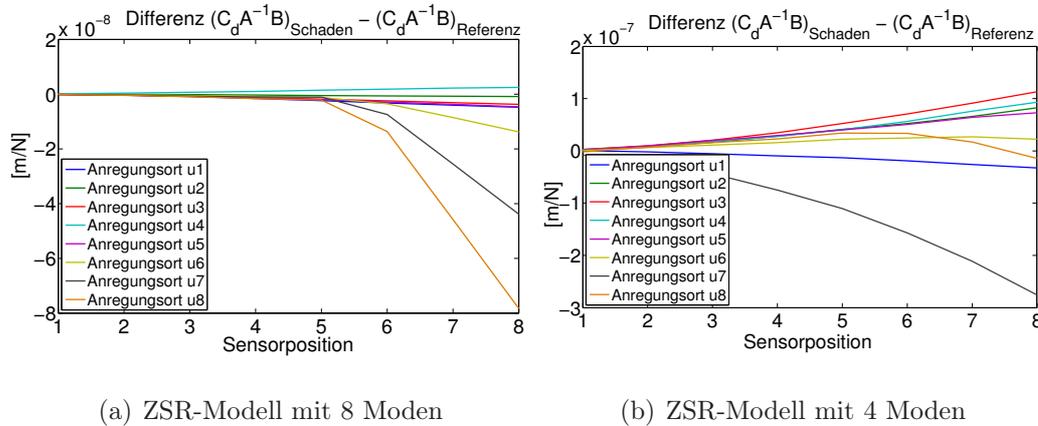


Abb. 6.18: Steifigkeit zwischen Punkt 5 und 6 auf 90% reduziert – Differenz der Flexibilitätsmatrizen $\mathbf{C}_d \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ – 2D-Darstellung

den/Dyaden (siehe Teilbild (a)), so werden auch kleine Strukturveränderungen wieder eindeutig lokalisierbar.

6.3 FE-Modell der Stabbogenbrücke

Im Rahmen dieser Arbeit war es möglich, Schwingungsmessungen an einer weit gespannten Stabbogenbrücke durchzuführen. Um anhand von experimentellen Messdaten die entwickelten Methoden zur Schadenslokalisierung zu verifizieren, wurden Strukturveränderungen an der Brücke vorgenommen (Genauerer im Abschnitt 7.2). Hier soll zunächst anhand von numerischen Simulationsrechnungen – basierend auf einem FE-Modell der Brücke – gezeigt werden, inwieweit die experimentelle Schädigung (Hängerausfall) detektier- und lokalisierbar ist. An einem weiteren Simulationsbeispiel soll gezeigt werden, dass auch mehrere, verteilt angeordnete Steifigkeitsreduktionen anhand von Markovparametern lokalisierbar sind.

6.3.1 Simulationsmodell

Das aufgestellte FE-Modell diente vorrangig dazu, das globale Brückentragverhalten sowie die globalen dynamischen Eigenschaften der Brücke zutreffend zu modellieren, um Zeitsignale in Anlehnung an die durchgeführten Versuche zu generieren. Damit sollten die in den vorangegangenen Abschnitten beschrie-

benen Methoden zur Schadenslokalisierung basierend auf Markovparametern zunächst rein numerisch validiert werden. Darüber hinaus konnte das Modell genutzt werden, um die experimentell erfassten modalen Daten auf Plausibilität zu prüfen. Aus diesen Anforderungen konnte der Detaillierungsgrad des Mo-

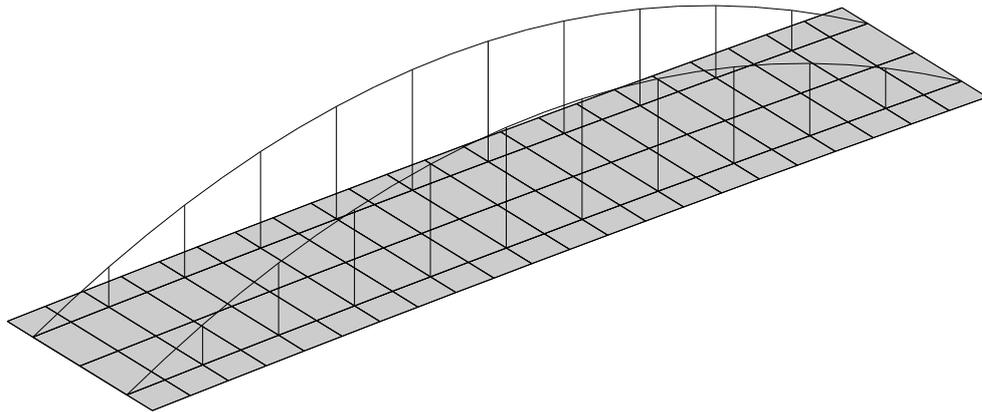


Abb. 6.19: FE-Modell der Brücke in Hünxe

dells abgeleitet werden: Um die Anzahl der Freiheitsgrade zu beschränken und akzeptable Rechenzeiten zu ermöglichen, ist vollständig auf die Verwendung von Volumenelementen verzichtet worden. Die Modellierung der Fahrbahnplatte und der Fußwegplatten erfolgte mit linear-elastischen Schalenelementen. Die verbleibenden Bauteile (Haupt- und Querträger, Bögen, Hänger) wurden mit Bernoulli-Balkenelementen modelliert. In Abbildung 6.19 ist das unverformte Modell dargestellt. Die gewählte relativ grobe Vernetzung war ausreichend, um die an das FE-Modell gestellten Anforderungen zu erfüllen. Die Modellierung erfolgte mit dem an der Universität Kassel erstellten Programmsystem MATFEM. Nachdem die ersten Messdaten der ungeschädigten Brückenstruktur vorlagen, wurden die zur Berechnung genutzten Steifigkeiten geringfügig angepasst, um eine gute Übereinstimmung mit dem realen dynamischen Verhalten der Brücke zu gewährleisten.

Für die Generierung von simulierten Strukturantworten wurde die experimentell bestimmte modale Dämpfung den zugehörigen Moden zugewiesen. Für die verbleibenden Moden des FE-Modells, die experimentell nicht identifiziert werden konnten, wurde eine modale Dämpfung von 2% geschätzt. Als Erregung diente das bei den experimentellen Versuchen aufgezeichnete Impulssignal. Berechnet wurden die Strukturantworten mit einer Auflösung von

10^{-3} s, um numerische Ungenauigkeiten infolge der impulsförmigen Anregung zu minimieren (bei der gewählten Konfiguration hatte das Impulssignal eine „Breite“ von ca. 12 Integrationsschritten).

6.3.2 Ausfall eines Hängers

Experimentell konnte der Ausfall eines Hängers realisiert werden. Im Modell wurde die Schädigung durch eine Reduktion des E-Moduls abgebildet, um die Massen zu erhalten. Abweichend von den experimentellen Versuchen befanden sich die „Sensoren“ bei den Simulationsrechnungen direkt an den Fahrbahn-/Hängerknoten. Die Anregung konnte ebenfalls an diesen Knoten realisiert werden, so dass die identifizierten Markovparameter vollständig symmetrisch waren. Weiterhin war es bei der Simulation möglich, 20 Messfreiheitsgrade zu

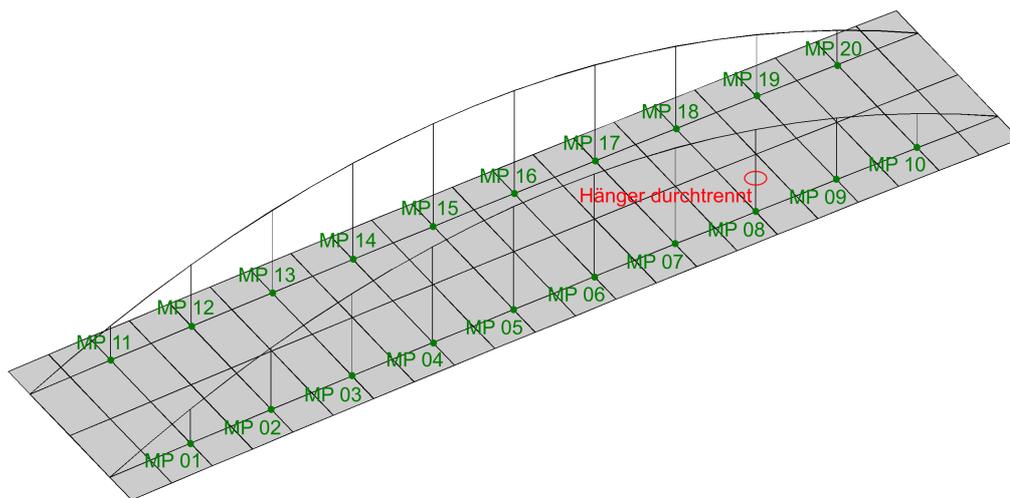


Abb. 6.20: Position des Hängerausfalls und Messpunkte im FE-Modell

nutzen, um die vertikalen Beschleunigungen beider Hauptträger vollständig äquidistant zu erfassen. Die genaue geometrische Anordnung ist in Abbildung 6.20 dargestellt.

Auf einen direkten Vergleich der Flexibilitäts- und Steifigkeitsmatrizen, die aus den auf Basis der simulierten Messsignale identifizierten Zustandsraummodellen extrahiert wurden, mit den originalen Parametern des kondensierten FE-Modells soll hier verzichtet werden. Entsprechend den Ausführungen

in Abschnitt 6.2.2 lassen sich diese korrekt identifizieren. Im Folgenden soll ausschließlich gezeigt werden, inwieweit sich aus der Differenz der Markovparameter der Hängerausfall lokalisieren läßt.

Zum besseren Verständnis sind in Abbildung 6.21 zunächst die beiden Flexibilitätsmatrizen (extrahiert aus den Markovparametern) vom ungeschädigten Referenzsystem und dem System mit Hängerausfall dargestellt. Man erkennt,

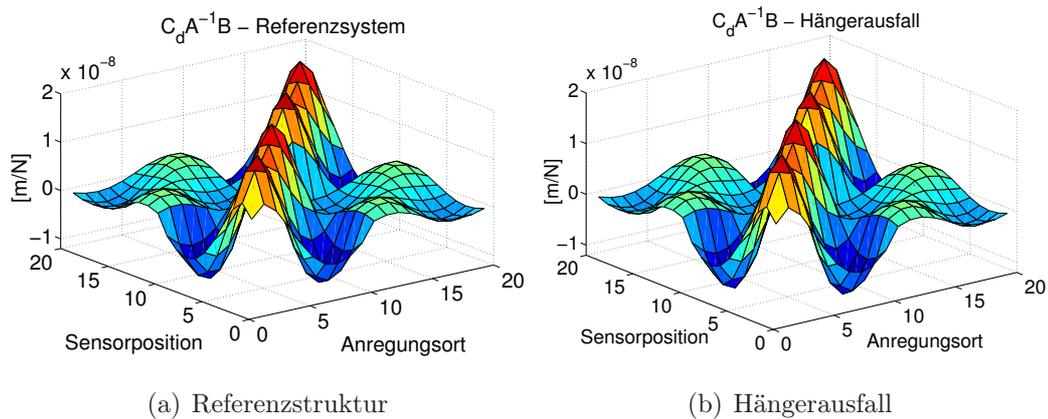


Abb. 6.21: Vergleich der Flexibilitätsmatrizen

dass die Struktur der Flexibilitätsmatrizen wesentlich komplexer ist, als bei einem Kragbalken, wie er im vorangehenden Abschnitt betrachtet wurde. Die Unterschiede zwischen beiden Matrizen sind trotz des vergleichsweise großen Schadens jedoch marginal und optisch kaum wahrnehmbar. Da die Flexibilitätsmatrizen maßgeblich durch die vergleichsweise großen Amplituden der niederfrequentesten Dyaden bestimmt werden, ist es außerdem von untergeordneter Bedeutung, ob 20, 50, 100 oder noch mehr (niederfrequente) Moden bei der Generierung der simulierten Messsignale berücksichtigt werden.

Betrachtet man die Differenz der beiden Flexibilitätsmatrizen (Abbildung 6.22) und vergleicht diese mit den Flexibilitätsmatrizen des Kragbalkens, so wird deutlich, dass dieser „Schadensparameter“ strukturabhängig ist. Weiterhin muss festgestellt werden, dass eine Schadenslokalisierung aufgrund der komplexen Tragwerkstruktur schwierig ist. Da die beiden Hauptträger einen Einfeldträger darstellen, treten lokale Steifigkeitsreduktionen in der Differenz der Flexibilitätsmatrizen als Maximum auf (im Gegensatz zu einem Knick bei einem Kragbalken). Auch die Differenz der Flexibilitätsmatrizen wird von den niederfrequenten Dyaden (die lokale Steifigkeitsreduktionen nur verschmiert

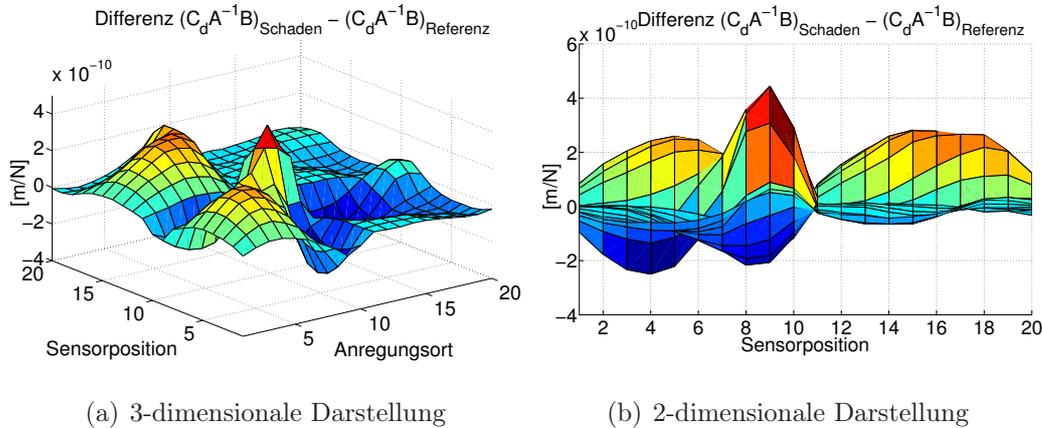


Abb. 6.22: Differenz der Flexibilitätsmatrizen (Hängerausfall an MP 08)

darstellen) bestimmt, so dass lediglich grob auf den Ort des Hängerausfalls geschlossen werden (Maximum bei MP 09; Hängerausfall bei MP 08). Vorteilhaft an dieser Darstellung ist jedoch, dass die Anzahl der im Modell bzw. den Messsignalen enthaltenen höherfrequenten Eigenfrequenzen das Ergebnis nicht beeinflusst.

Besser lokalisierbar werden Schäden prinzipiell, wenn man statt der Differenz der Flexibilitätsmatrizen die Differenz der Steifigkeitsmatrizen betrachtet. Hierzu wird es notwendig, die Flexibilitätsmatrizen (bzw. die zugehörigen Markovparameter) zu invertieren, was zumindest bei Verwendung von realen Messsignalen problematisch sein kann. Aufgrund der Inversion bestimmen nunmehr die Dyaden der höheren Eigenfrequenzen die Steifigkeitsmatrix. Bei Simulationsrechnungen ergeben sich damit unterschiedliche Ergebnisse, in Abhängigkeit davon, wieviel Eigenfrequenzen für die Berechnung der simulierten Signale genutzt werden. Bei realen Messungen werden häufig lediglich vorwiegend niederfrequente Eigenfrequenzen erfasst, so dass die entsprechenden korrespondierenden Steifigkeitsmatrizen direkt von der Anzahl der erfassten höherfrequenten Dyaden abhängen.

Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes ist in Abbildung 6.23 die Differenz der Steifigkeitsmatrizen der Modelle mit einem Frequenzgehalt von 0 Hz ... 50 Hz dargestellt (200 Dyaden), im Gegensatz zu der Differenz der Steifigkeitsmatrizen von den Modellen mit einem Frequenzgehalt von lediglich 0 Hz ... 30 Hz (108 Dyaden in Abbildung 6.24). Man erkennt, dass die Differenz der Steifigkeitsmatrizen hochgradig von der enthaltenen hochfrequenten Dyaden-

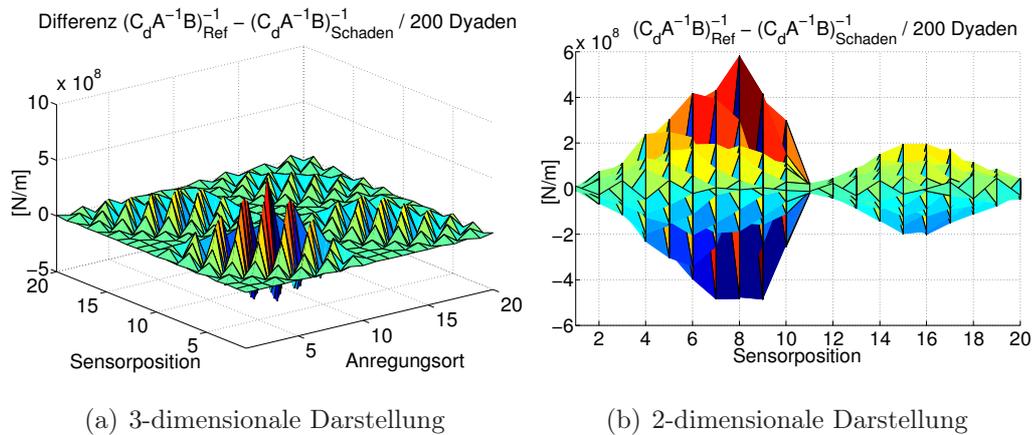


Abb. 6.23: Differenz der Steifigkeitsmatrizen (mit 100 Eigenfrequenzen / 200 Dyaden – entspricht 0 ... 50 Hz)

anzahl abhängig ist, und dass der Hängerausfall erst lokalisiert werden kann, wenn Eigenfrequenzen sowie die zugehörigen Dyaden oberhalb von 30 Hz im Modell enthalten sind.

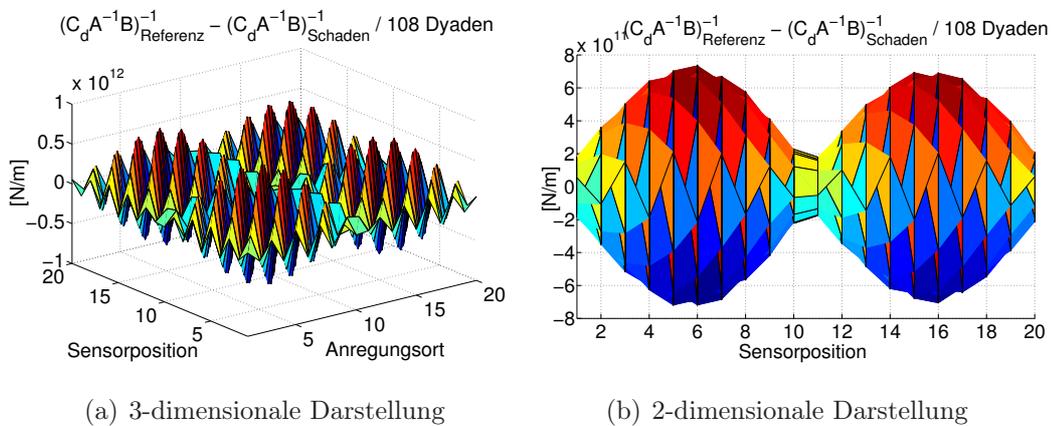


Abb. 6.24: Differenz der Steifigkeitsmatrizen (mit 54 Eigenfrequenzen / 108 Dyaden – entspricht 0 ... 30 Hz)

Die bei den Simulationsrechnungen gemachten Erfahrungen, dass eine Inversion der Flexibilitätsmatrizen zu Steifigkeitsmatrizen oftmals Schwierigkeiten bereitet, bestätigte sich bei den experimentellen Messungen (Abschnitt 7.2). Infolgedessen wurde untersucht, inwieweit man die Inversion vermeiden kann und trotzdem eine Darstellung erhält, die vorwiegend von den höherfrequenten Dyaden (die lokale Schädigungen schärfer abgrenzen) bestimmt wird. Eine

Lösung, die in dieser Arbeit erfolgreich eingesetzt wurde, besteht darin, dass man sich die Differenz der Flexibilitätsmatrizen ansieht, bei deren Bildung die niederfrequenten Dyaden nicht berücksichtigt werden. Die entsprechenden Flexibilitätsmatrizen können durch eine dyadische Zerlegung der Markovparameter sowie der Addition der relevanten Dyaden einfach berechnet werden (Gleichung (4.42)).

Angewendet auf den hier simulierten Strukturschaden „Hängerausfall“ ergibt sich Abbildung 6.25. In der Darstellung wurden die Flexibilitätsmatrizen vom Referenzsystem und vom geschädigten System aus der Addition aller zugehörigen Dyaden in einem Frequenzbereich von 12 Hz bis 22 Hz gebildet. Die Eingrenzung, welche Dyaden berücksichtigt wurden, erfolgte in Anlehnung an die bei den Experimenten erfassten Eigenfrequenzen. Für die Lokalisation des Schadens ist die genaue Abgrenzung des berücksichtigten Frequenzbereiches jedoch sekundär. Auch mit anderen Konfigurationen konnte der Hängerausfall an MP 08 sehr gut lokalisiert werden. Bedeutsam ist lediglich, dass die niederfrequenten Dyaden, die aufgrund ihrer vergleichsweise großen Amplituden die in den höherfrequenten Dyaden enthaltenen Informationen unsichtbar machen, unberücksichtigt bleiben.

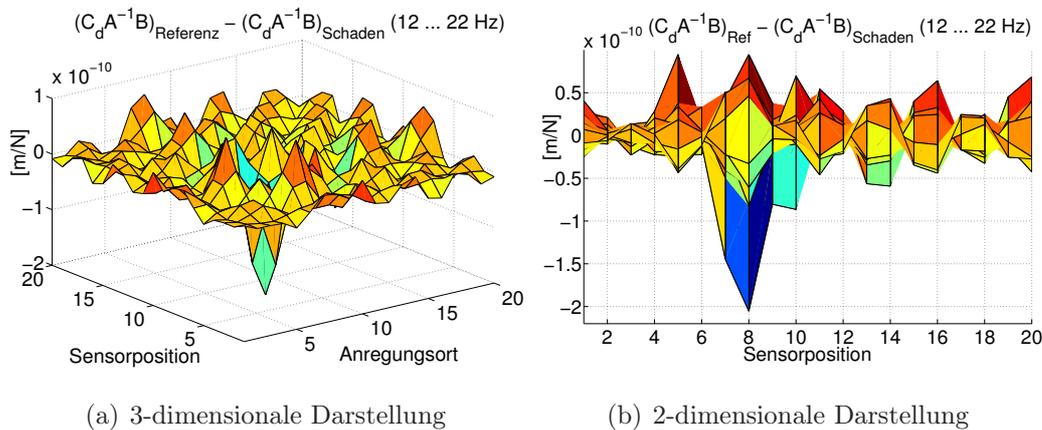


Abb. 6.25: Differenz der Flexibilitätsmatrizen – nur Dyaden 12 Hz ... 22 Hz

6.3.3 Steifigkeitsreduktionen am Hauptträger

Bei den bisher – in Anlehnung an die experimentell durchgeführten Versuche – präsentierten Beispielen konnte gezeigt werden, dass eine lokale Schädigung

anhand der aus den Markovparametern extrahierten Strukturparameter lokalisiert werden kann. Nachfolgend wird demonstriert, dass auch mehrere, örtlich verteilte Schädigungen detektierbar sind.

Am FE-Modell der Brücke Hünxe wurde die Biegesteifigkeit sowohl am östlichen, als auch am westlichen Hauptträger in zwei lokal begrenzten Bereichen um 10% reduziert. Die genaue Lage der Steifigkeitsreduktionen sowie der Messpunkte ist in Abbildung 6.26 dargestellt. Entsprechend den Ausführungen im

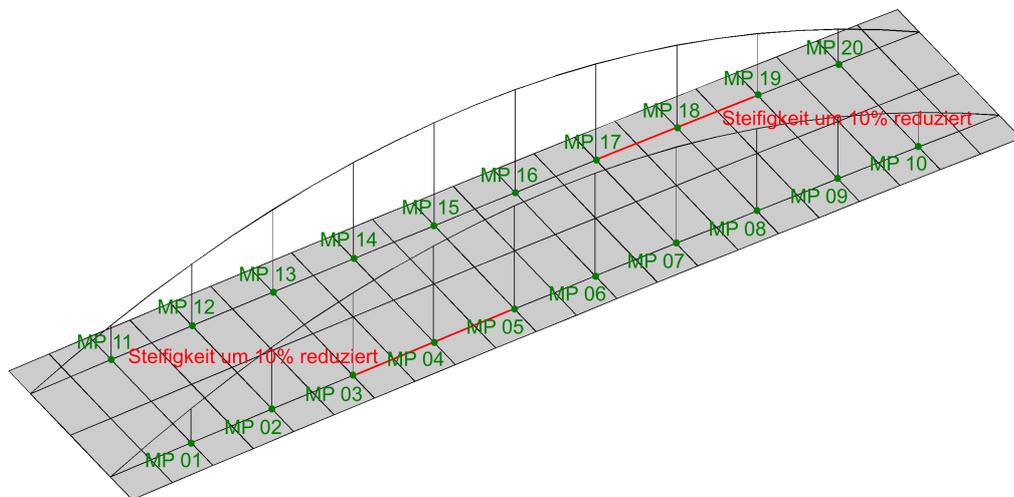


Abb. 6.26: Lage der Steifigkeitsreduktionen und Messpunkte im FE-Modell

vorangegangenen Abschnitt wurden mit dem FE-Modell Antwortsignale infolge von Anregungen mit dem messtechnisch erfassten Impulssignal generiert. Aus den simulierten Messdaten wurde anschließend ein Zustandsraummodell identifiziert. Die Flexibilitäts- bzw. Steifigkeitsmatrix ist aus den Markovparametern extrahiert worden.

Betrachtet man die Flexibilitätsmatrix von Referenzstruktur und geschädigter Struktur, so sind – in Analogie zu Abbildung 6.21 – optisch keine Unterschiede auszumachen. Die Differenz der beiden Flexibilitätsmatrizen ist in Abbildung 6.27 dargestellt. Die in der Biegesteifigkeit um 10% reduzierten Bereiche sind als maximale Peaks in der Abbildung zu erkennen. Dennoch muss erwähnt werden, dass die Lokalisation von Steifigkeitsänderungen in dieser Darstellung nicht immer möglich ist, wie am Beispiel des Hängerausfalls demonstriert werden konnte. Besser geeignet zur Lokalisation von Steifigkeits-

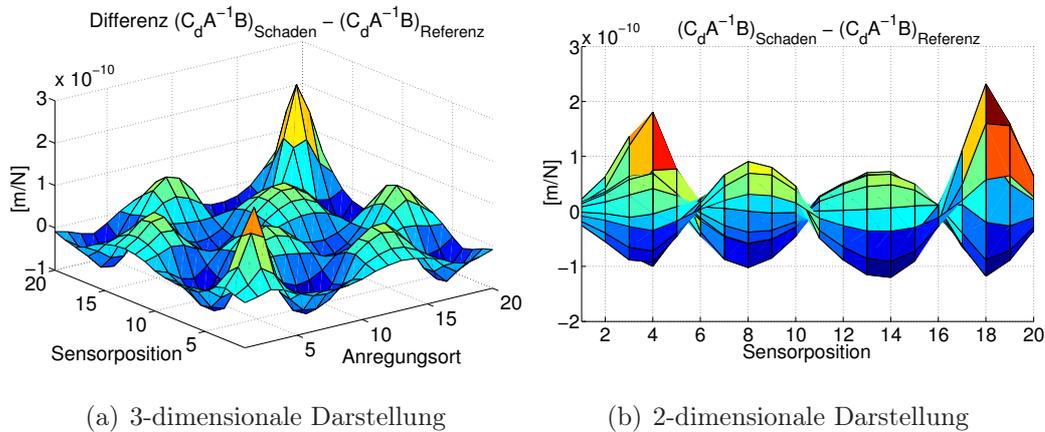


Abb. 6.27: Differenz der Flexibilitätsmatrizen (Steifigkeitsreduktion an MP 04 und MP 18)

änderungen ist die Differenz der Steifigkeitsmatrizen, die allerdings wiederum von der Anzahl der enthaltenen Eigenfrequenzen / Dyaden abhängig ist. In

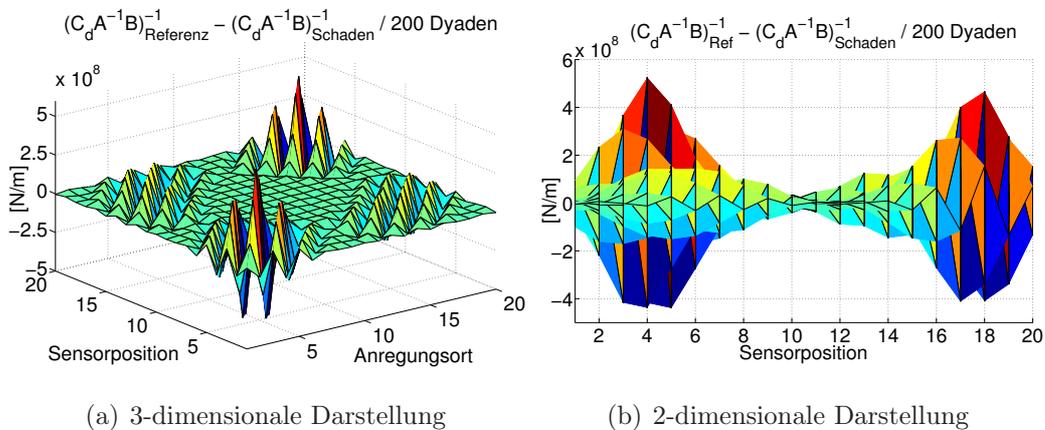


Abb. 6.28: Differenz der Steifigkeitsmatrizen (mit 100 Eigenfrequenzen / 200 Dyaden – entspricht 0 ... 50 Hz)

Abbildung 6.28 erkennt man die in der Steifigkeiten reduzierten Bereiche zweifelsfrei. In Anbetracht der teilweise bestehenden Schwierigkeiten bei der Inversion von Flexibilitäts- zu Steifigkeitsmatrizen wurde untersucht, inwieweit sich Steifigkeitsveränderungen direkt an der Differenz der Flexibilitätsmatrizen (bzw. den entsprechenden Markovparametern) ablesen lassen, wenn bei deren Berechnung die unteren niederfrequenten Dyaden mit großen Amplituden nicht berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 6.3.2 und 7.2). Mit diesem

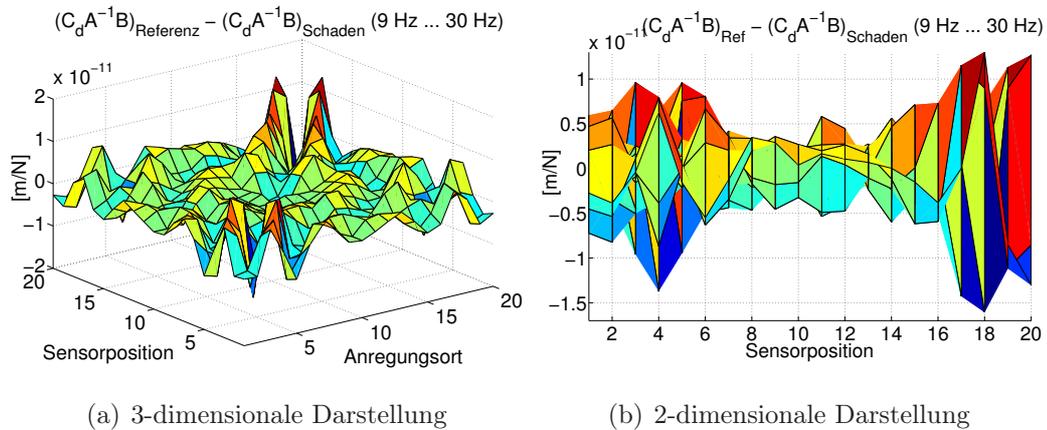


Abb. 6.29: Differenz der Flexibilitätsmatrizen – nur Dyaden 9 Hz ... 30 Hz

Ansatz konnte auch die hier dargestellte lokale Steifigkeitsreduktion an beiden Hauptträgern erfolgreich lokalisiert werden. In Abbildung 6.29 ist die Differenz der Flexibilitätsmatrizen dargestellt, für deren Bildung lediglich Dyaden im Frequenzbereich zwischen 9 Hz und 30 Hz genutzt wurden. Um die Schäden lokalisieren zu können, muss dabei nicht zwingend der dargestellte Frequenzbereich eingehalten werden. Bedeutsam ist lediglich, dass die Dyaden mit den kleinsten Eigenfrequenzen unberücksichtigt bleiben.

Kapitel 7

Experimentelle Schwingungsmessungen

Es wurde bereits dargelegt, dass die im theoretischen Teil der Arbeit entwickelten Methoden zur Systemidentifikation und Schadenslokalisierung im Rahmen dieser Arbeit umfänglich anhand experimenteller Versuche validiert werden sollen. Dementsprechend werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse der durchgeführten experimentellen Schwingungsmessungen ausführlich vorgestellt. Zunächst diente eine Laborstruktur dazu, die prinzipielle Eignung der Verfahren unter Laborbedingungen zu demonstrieren. Im Weiteren werden die Ergebnisse von Schwingungsmessungen an einer Spannbeton-Stabbogenbrücke mit 62,5m Spannweite präsentiert, bei der im Zuge des Rückbaus gezielt Steifigkeitsveränderungen realisiert werden konnten.

7.1 Laborversuche an einem Kragbalken

Da bei realen Strukturen das Strukturverhalten oftmals sehr komplex ist, sollen die vorgestellten Verfahren zur Schadenslokalisierung zunächst an einer vergleichsweise einfachen Struktur unter Laborbedingungen studiert werden. Als Laborstruktur wurde ein Kragarm, bestehend aus einem Stahl-Rechteckrohr (80x40x2,9mm) mit 2,45m Spannweite gewählt (Abbildung 7.1). Das notwendige Auflager ließ sich mit überschaubarem Aufwand realisieren und entsprach trotzdem nahezu dem angenommenen Ideal (unendlich steife Einspannung). Außerdem gewährleistet der Werkstoff Stahl unter den gewählten Versuchs-

bedingungen nahezu lineares Verhalten, so dass die in dieser Arbeit gewählte Modellierung (linear und zeitinvariant) realitätsnah ist.

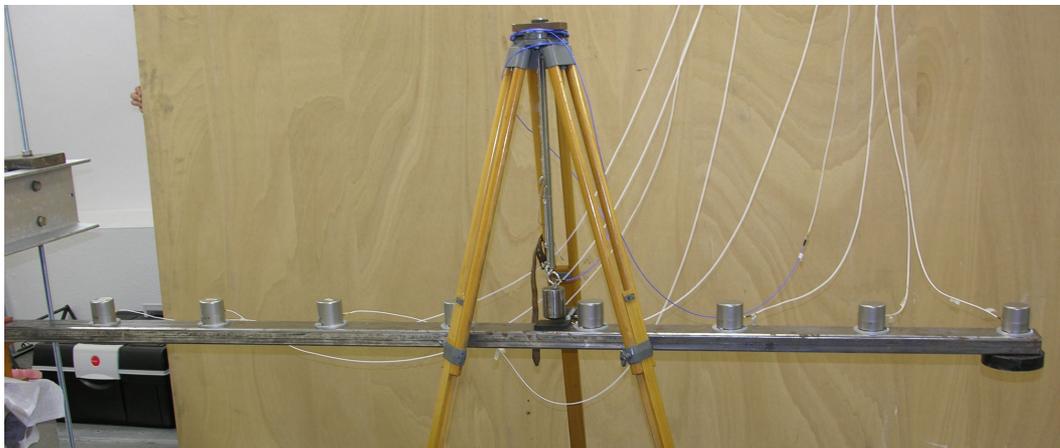


Abb. 7.1: Kragarm für experimentelle Schwingungsmessungen

Die messtechnische Erfassung der vertikalen Strukturschwingungen erfolgte mit einaxialen Beschleunigungssensoren, die äquidistant in einem Abstand von 30cm an der Unterseite des Stahlprofil befestigt wurden. Damit war es möglich, die Schwingungsanregung durch impulsförmige Lasten an der Oberseite des Profils einzuleiten, so dass die Position und Richtung von Struktur-erregungen und Strukturantworten identisch waren. In Abbildung 7.2 ist die Versuchsanordnung schematisch dargestellt.

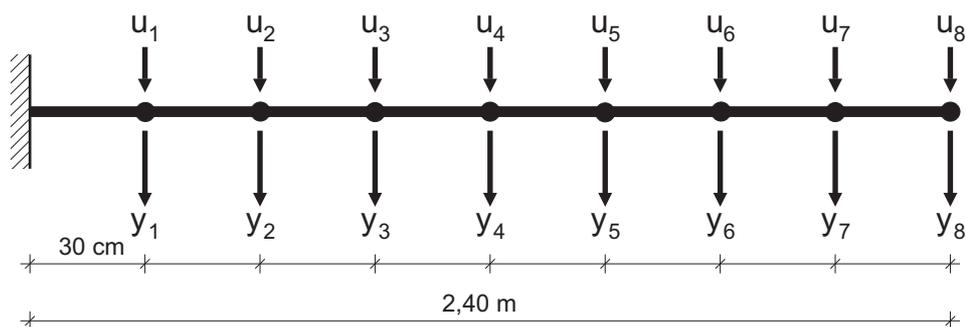


Abb. 7.2: Schematische Darstellung der Versuchsanordnung

7.1.1 Beschreibung der durchgeführten Versuche

Anhand der durchgeführten experimentellen Schwingungsmessungen sollte untersucht werden, inwieweit sich vorgenommene Strukturveränderungen anhand

von Markov-Parametern lokalisieren lassen. Damit die Markov-Parametermatrizen eine quadratische Dimension besitzen und somit in korrespondierende Massen- und Flexibilitätsmatrizen überführt werden können, muss die Strukturanregung an allen Sensororten erfolgen, an denen die Strukturantworten erfasst werden. Bei den hier vorgestellten Versuchen wurden impulsartige Stöße als deterministische Anregung gewählt. Der Einsatz von elektrodynamischen Shakern wäre im Laboreinsatz ebenfalls geeignet gewesen. Im Gegensatz dazu ist es jedoch bei der Anregung von mächtigen, sehr schweren (Bauwerks-) Strukturen problematisch, ausreichend Energie mit wirtschaftlich zur Verfügung stehenden Shakern einzuleiten. Die Anregung von solch schweren Strukturen mit (ausreichend großen) Impulshämmern ist vergleichsweise einfacher durchführbar (siehe Abschnitt 7.2).

Impulsanregung Die Impulsanregung des Kragarmes im Labor erfolgte durch ein an einer Feder befestigtes Gewicht, dass aus definierter Höhe fallengelassen und nach einmaligen Aufprall auf die Struktur wieder aufgefangen wurde (Abbildung 7.3). Auf dem Fallgewicht war ein Beschleunigungssensor



Abb. 7.3: Impulserzeugung im Labor

befestigt, um den erzeugten Impuls messtechnisch zu erfassen. An der Unterseite des Gewichtes konnten verschieden starke Gummiplatten angebracht werden, um die Aufprallhärte und damit die Zeitdauer des wirkenden Impulses zu beeinflussen. Um das gesetzte Ziel –möglichst viele Eigenformen der Struktur anzuregen– zu erreichen, muss über einen weiten Frequenzbereich

ausreichend Energie in die Struktur eingeleitet werden, d.h. der Stoß muss möglichst hart, die Impulsdauer entsprechend kurz sein. Experimentell bestehen jedoch Grenzen, da bei zu hartem Stoß die Antwortbeschleunigungen sehr groß werden, den Messbereich der Beschleunigungssensoren überschreiten und somit nicht erfasst werden können. Gleichzeitig führte ein harter Stoß experimentell teilweise dazu, dass die Eigenform mit der niedrigsten Eigenfrequenz nicht ausreichend zur Schwingung angeregt wurde.

Zunächst sind umfangreiche Voruntersuchungen zur Impulserzeugung und -einleitung durchgeführt sowie verschiedene Gummidicken und -härten getestet worden. Es zeigte sich, dass auch bei sehr harten Stößen (nur 2 Lagen Zellstoff zwischen den Stahlflächen) lediglich 5 Eigenformen angeregt werden konnten. Bei diesen harten Stößen waren die Sensoren bereits an der Grenze ihres Messbereiches und es war sehr schwierig bei wiederholten Anregungen ähnliche Beschleunigungswerte zu erreichen, da sich geringste Unterschiede der Fallhöhe sehr stark auf die gemessene Impulsbeschleunigung auswirkte. Einfacher handhabbar war die Impulsanregung mit einem 1cm starken Gummipuffer (Gumbaplatte), mit der die ersten 4 Eigenformen sehr gut angeregt werden konnten. In Abbildung 7.4 sind beispielhaft zwei experimentell erfasste Impulse mit verschiedener Aufprallhärte dargestellt. In Teilbild (a) ist das gemessene Signal im Zeitbereich dargestellt, im Teilbild (b) erfolgt eine Darstellung im Bildbereich. Sehr gut erkennbar ist die unterschiedliche Impulsdauer sowie das unterschiedliche Anregungsspektrum.

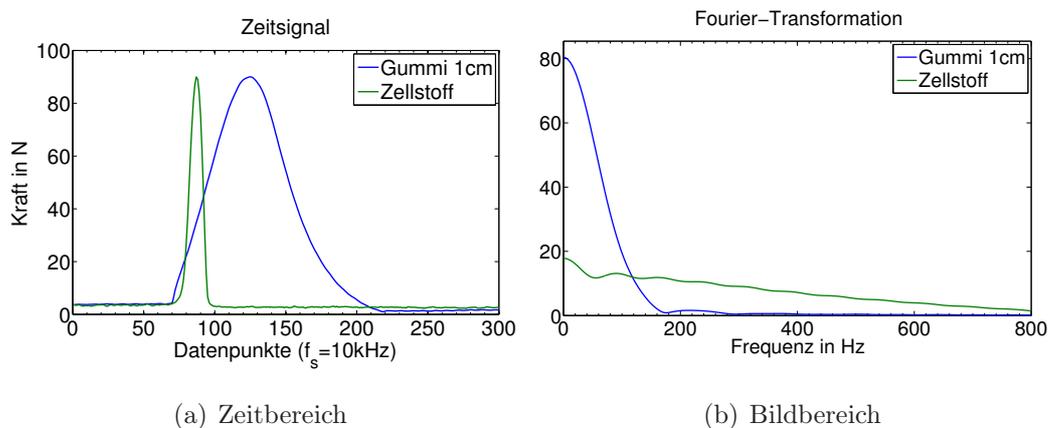


Abb. 7.4: Beispiel für Impulsanregung mit verschiedenen Puffermedien

Nachdem anfänglich das Fallgewicht direkt auf die Profiloberseite des Krag-

armes wirkte, wurden bei späteren Versuchen Stiftschrauben an den Anregungsorten angebracht (in Abbildung 7.3 erkennbar zwischen Fallgewicht und Sensor auf der Oberkante des Profils), um bei wiederholt durchgeführten Versuchen stets an exakt gleicher Position anzuregen.

Es zeigte sich jedoch im Rahmen der Auswertung, dass die Art der Impulsanregung (Härte, mit/ohne Stiftschrauben) eine untergeordnete Rolle spielt, sofern mindestens die ersten 4 Eigenformen ausreichend angeregt werden. Aus diesem Grund wird im weiteren Text diesbezüglich nicht weiter unterschieden.

Strukturveränderungen In Abschnitt 5.2 ist beschrieben, wie Markov-Parameter genutzt werden können, um Strukturveränderungen zu lokalisieren. Für die Anwendung des vorgestellten Verfahrens auf experimentelle Messdaten wurden an der Laborstruktur gezielt lokale Veränderungen vorgenommen. Es ist untersucht worden, inwieweit die Lokalisation von Massen- und Steifigkeitsveränderungen möglich ist. Zunächst sind an dem Kragarm –der im ungeschädigten Referenzzustand eine Masse von ca. 12,7kg zzgl. 8kg Sensormasse aufweist– zusätzliche Massen von 1kg im Bereich der Beschleunigungssensoren befestigt worden. Das entspricht einer Massenerhöhung von ca. 4,8% (siehe Abbildung 7.5).

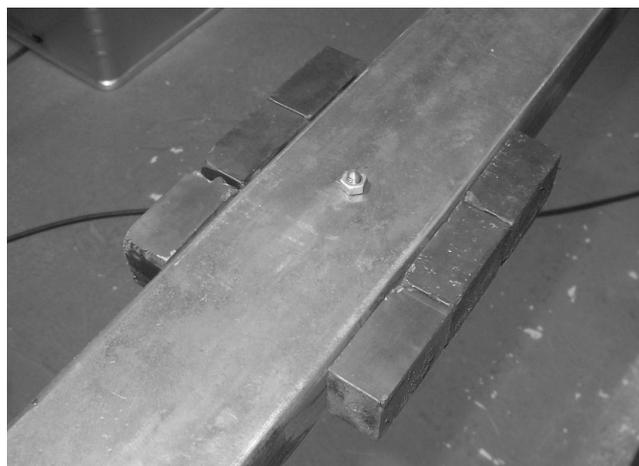


Abb. 7.5: Permanentmagnete als Zusatzmasse

Außerdem ist die Biegesteifigkeit des Profils gezielt durch einen Sägeschnitt reduziert worden. Die Lage des Sägeschnittes befand sich in einem Abstand von 1,40m (zwischen Sensor 4 und Sensor 5) zum Einspannlager, bei einem wei-

teren Versuch in einem Abstand von 1,70m (zwischen Sensor 5 und Sensor 6) zum Einspannlager. Es wurden Schwingungsversuche mit einer Sägeschnitttiefe von zunächst 6mm (Reduktion der Biegesteifigkeit auf ca. 24%) durchgeführt. Danach wurde die Tiefe des Sägeschnittes auf 20mm erhöht (Reduktion der Biegesteifigkeit auf ca. 5% des Ausgangsniveaus).

In der Tabelle 7.1 findet man eine Übersicht über die im Labor durchgeführten Schwingungsversuche mit impulsförmiger Stoßanregung am Kragarm.

Aufprallort Impulshärte Anzahl Messungen	ohne Stiftschrauben		mit Stiftschrauben	
	Gummi 1cm je 5	Zellstoff je 3	Gummi 1cm je 25	Gummi 1mm je 20
Referenzsystem	⊗	⊗	⊗	⊗
Zusatzmasse 1kg				
am Sensor 1	⊗			
am Sensor 2	⊗			
am Sensor 3	⊗		⊗	
am Sensor 4	⊗		⊗	
am Sensor 5	⊗			
am Sensor 6	⊗	⊗	⊗	⊗
am Sensor 7	⊗			
am Sensor 8	⊗			
Sägeschnitt				
140cm – 6mm tief			⊗	
140cm – 20mm tief			⊗	
170cm – 6mm tief	⊗	⊗		
170cm – 20mm tief	⊗	⊗		⊗

Tab. 7.1: Durchgeführte Laborversuche am Kragarm

7.1.2 Analyse der gemessenen Zeitsignale

Zunächst ist im Vorfeld der Zustandsraummodellierung die Qualität der durchgeführten Messungen direkt an den messtechnisch erfassten Zeitsignalen über-

prüft worden. Im folgenden Text sollen die grundsätzlichen Feststellungen näher erläutert werden. Da diese bei allen Messungen vergleichbar waren, wird in diesem Abschnitt eine Messung des ungeschädigten Referenzsystems exemplarisch als Datenbasis genutzt. In Abbildung 7.6(a) sind die gemessenen Beschleunigungssignale aller acht Sensoren beginnend mit der Impulsanregung dargestellt. Im zugehörigen Teilbild (b) erkennt man sehr gut die ersten vier Eigenfrequenzen der Struktur. Dabei sind die Amplitudenverhältnisse abhängig von der Härte des Impulsstoßes und –aufgrund der Strukturdämpfung– von der Länge und der Lage des Zeitfensters.

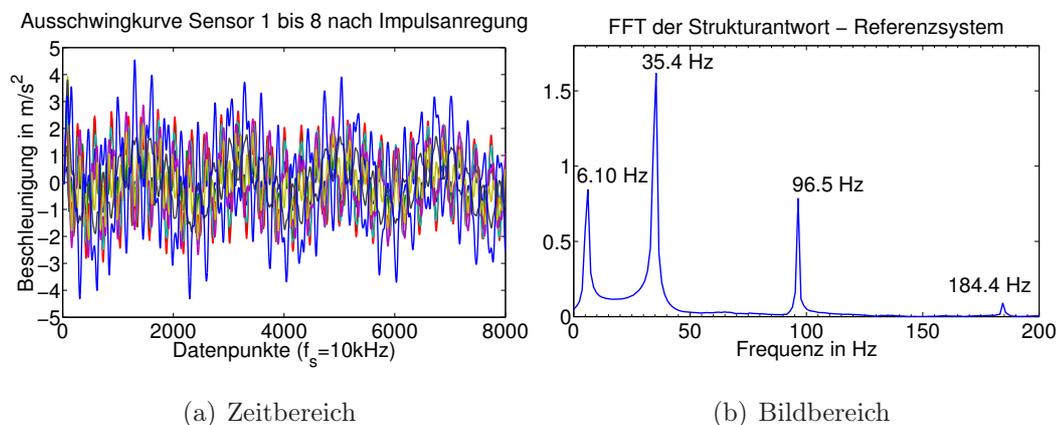


Abb. 7.6: Kragarm – ungeschädigtes Referenzsystem

Mittelungen der Messsignale: In diesem Abschnitt wird die Vergleichbarkeit von unabhängigen, nacheinander durchgeführten Messungen mit identischem experimentellem Ablauf beschrieben. Dieser Punkt hat eine wesentliche Bedeutung für die Lokalisierbarkeit von Strukturveränderungen mittels Markov-Parametern und wird im Abschnitt 7.1.5 näher beschrieben.

Geht man von rein deterministischen Systemen aus, so sind die Strukturantworten von mehreren Messungen mit identischer Anregung (und identischen Anfangsbedingungen) identisch. Experimentell läßt sich solch ein perfektes deterministisches Systemverhalten nicht realisieren. Zusätzlich zum Messfehler-rauschen existiert ebenfalls ein Prozessrauschen, u.a. da der Versuchsstand nicht komplett von seiner Umgebung entkoppelbar ist. Außerdem unterliegt auch die experimentell erreichbare deterministische Anregung selbst geringen Schwankungen zwischen den einzelnen Messungen. Um diese Unterschiede zu-

nächst festzustellen, wurden bei den einzelnen Kragarmversuchen immer mehrere Messungen mit identischem Ablauf durchgeführt (siehe Tabelle 7.1 - Zeile 3). In Abbildung 7.7 ist exemplarisch die messtechnisch erfasste Strukturant-

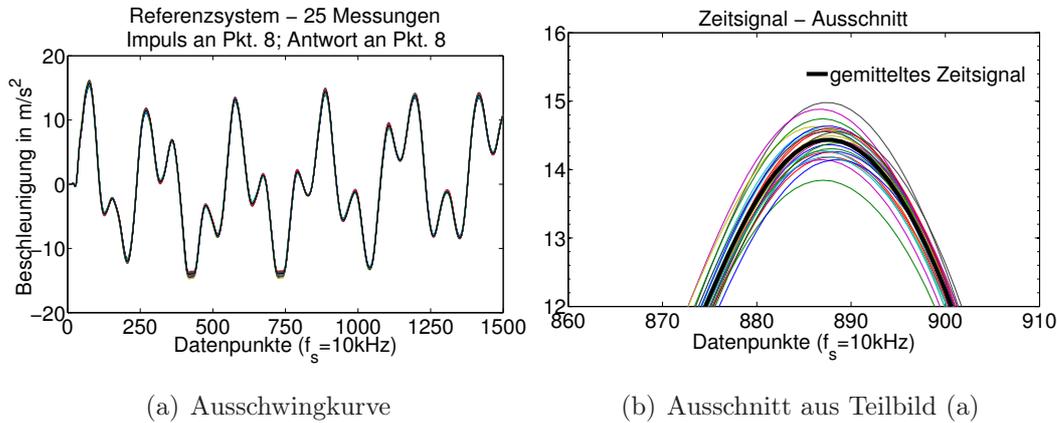


Abb. 7.7: Beispiel für die Mittelung der Zeitsignale von 25 Versuchen

wort am Punkt 8 bei Impulsanregung am Punkt 8 von 25 Einzelmessungen dargestellt. Anhand von Teilbild (a) wird deutlich, dass alle 25 Messungen fast identische Antwortsignale hervorrufen. Im Teilbild (b) ist in ein lokales Signalmaximum von Teilbild (a) vergrößert dargestellt. Man erkennt, dass sich die im Wesentlichen deckungsgleichen Signale in der Amplitude zum Teil deutlich unterscheiden. Wie später noch ausführlich erläutert wird, haben diese Amplitudenunterschiede einen signifikanten Einfluss auf die Lokalisierbarkeit von Strukturveränderungen. Deshalb wurden für die Zustandsraummodellierung die deterministischen Zeitsignale \mathbf{y}_k^l aller Messungen l gemittelt:

$$\mathbf{y}_{k_{mean}} = \sum_{i=1}^l \mathbf{y}_k^i \quad (7.1)$$

Diese Mittelung der Zeitsignale von Messungen mit identischem Versuchsaufbau brachte eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse, wie später noch gezeigt werden wird.

Symmetrie der Messsignale Aus der Statik bekannt ist das Wechselwirkungsprinzip von Maxwell-Betti. Dieses gilt auch bei linearen dynamischen Vorgängen, sofern die Dämpfung viskos und damit die Dämpfungsmatrix symmetrisch ist – wovon man bei der Laborstruktur näherungsweise ausgehen

kann. Entsprechend dem Wechselwirkungsprinzip ist die Strukturantwort an einem beliebigen Punkt a eines linearen elastischen Systems bei Anregung am Punkt b identisch zur Strukturantwort am Punkt b bei identischer Anregung am Punkt a des gleichen Systems. Diese spezielle Eigenschaft von linearen elastischen Systemen bedingt symmetrische strukturmechanische Parametermatrizen (Masse, Steifigkeit, etc.) aber auch symmetrische Hankelmatrizen $\bar{\mathbf{H}}$ und damit auch symmetrische Markov-Parameter $\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}}$.

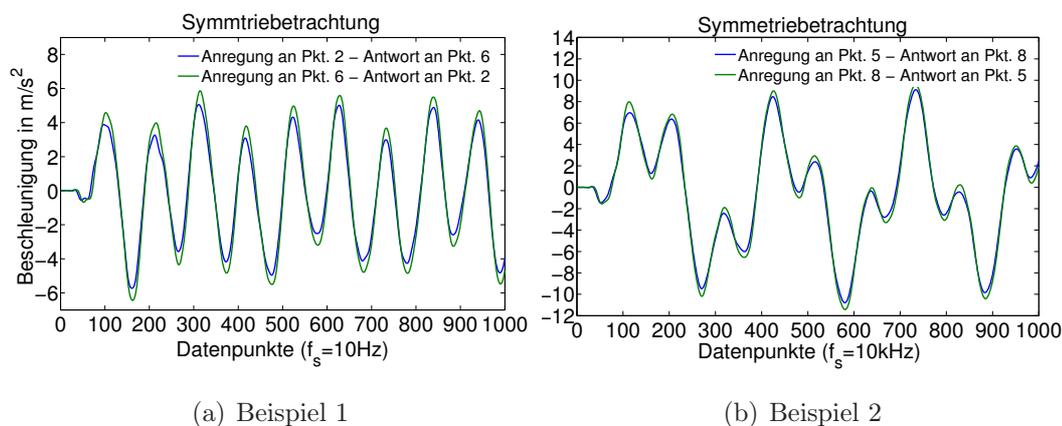


Abb. 7.8: Symmetriebetrachtung – Messung am Referenzsystem (gemittelte Signale)

In Abbildung 7.8 (a) und (b) ist exemplarisch das im Laborversuch erreichte symmetrische Verhalten dargestellt. Von einer Messung am ungeschädigten Referenzsystem sind beispielhaft jeweils 2 Strukturantworten dargestellt. Man erkennt, dass die Symmetrie aufgrund des Wechselwirkungsprinzips von Maxwell-Betti experimentell näherungsweise erreicht werden konnte. Dennoch führt die experimentell nicht exakt erreichte Symmetrie dazu, dass die identifizierten Markov-Parameter ebenfalls unsymmetrisch werden.

7.1.3 Black-Box Realisierung mit PO-MOESP

Aufbauend auf den in Abschnitt 3.2 genannten theoretischen Grundlagen soll hier die Identifikation von Zustandsraummodellen (Realisierung), basierend auf realen Messdaten des Kragarms infolge Impulsanregung, beschrieben werden. Die Identifikation erfolgt wie in Kapitel 3 erläutert in zwei Identifikationsstufen:

1. **Identifikationsstufe:** Bestimmung der dynamischen Eigenschaften des Systems (Eigenfrequenzen, Eigenformen, modale Dämpfung) durch Schätzung von $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$

2. **Identifikationsstufe:** Bestimmung der Verstärkung und der Phasenlage des Systems durch Schätzung von $\tilde{\mathbf{B}}$ sowie $\tilde{\mathbf{D}}$

In einem ersten Schritt werden die Messdaten in einer Blockhankelmatrix entsprechend Gleichung (3.38) angeordnet. Dabei ist zu definieren, wie viele Blockzeilen i für den Aufbau verwandt werden. Generell muss die Anzahl der Blockzeilen größer sein als die erwartete Zustandsraumdimension. In der Literatur findet man häufig den Hinweis (z.B. bei Haverkamp [33]), dass die Anzahl der Blockzeilen doppelt so groß sein sollte, wie die erwartete Zustandsraumdimension. Bei den in dieser Arbeit durchgeführten experimentellen Versuchen mit Impulsanregung zeigte sich jedoch, dass die Anzahl der Blockzeilen wesentlich größer sein musste, als die erwähnte zweifache Zustandsraumdimension, um sichere Identifikationsergebnisse zu erzielen. Speziell die identifizierte modale Dämpfung zeigte eine starke Abhängigkeit von der im Identifikationsprozess gewählten Blockzeilenanzahl. Aber auch einzelne Moden benötigten zur Identifikation eine relativ große Anzahl an Blockzeilen - deutlich größer als die erwartete Zustandsraumdimension. Beispielsweise war es zur Identifikation des ersten Modes am Kragarm notwendig, mehr als 60 Blockzeilen für die Identifikation zu verwenden. Die zugehörige Dämpfung wird erst bei ca. 200 Blockzeilen zutreffend bestimmt. Entsprechend den Angaben der Literatur hätte -bei den experimentell vorwiegend angeregten fünf unteren Moden- eine Blockzeilenanzahl von 10...20 ausreichend sein müssen. Es ist vorstellbar, dass dieses numerische Verhalten aufgrund des speziell gewählten Eingangssignals (kurzzeitiger Impuls) auftritt. Weitere Untersuchungen sind aufgrund der begrenzt zur Verfügung stehenden experimentellen Möglichkeiten zur Strukturanregung nicht durchgeführt worden. Zur Verdeutlichung sind in den Abbildungen 7.9 die Singulärwerte in Abhängigkeit von der Blockzeilenanzahl einer Referenzmessung dargestellt, anhand derer die Bestimmung der Zustandsraumdimension und damit der Modellgröße erfolgt. In Tabelle 7.2 sind die zugehörigen identifizierten Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungen aufgeführt.

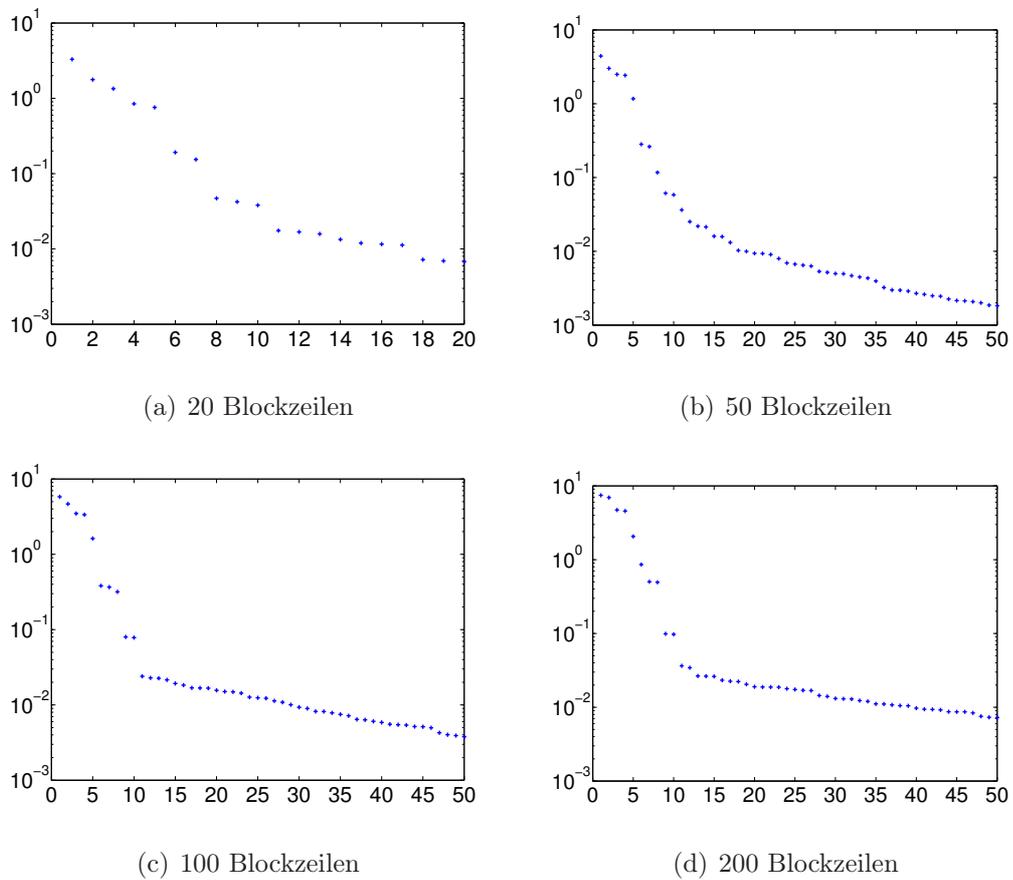


Abb. 7.9: Singulärwerte einer Referenzmessung in Abhängigkeit von der Anzahl der Blockzeilen

	50 Blockzeilen		100 Blockzeilen		200 Blockzeilen	
	f_i	ζ_i	f_i	ζ_i	f_i	ζ_i
Mode 1	–	–	5,571 Hz	0,44 %	5,571 Hz	0,16 %
Mode 2	34,96 Hz	0,20 %	34,89 Hz	0,20 %	34,89 Hz	0,19 %
Mode 3	96,26 Hz	0,15 %	96,29 Hz	0,16 %	96,30 Hz	0,15 %
Mode 4	184,3 Hz	0,13 %	184,3 Hz	0,14 %	184,4 Hz	0,13 %
Mode 5	282,0 Hz	0,32 %	282,1 Hz	0,26 %	282,1 Hz	0,24 %

Tab. 7.2: Abhängigkeit der Eigenwerte von der Blockzeilenanzahl

Bestimmung von \mathbf{B} und \mathbf{D} mit PO-MOESP

Nach erfolgreicher Bestimmung von $\tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ in der 1. Identifikationsstufe sind in einer 2. Identifikationsstufe die weiteren Zustandsraumparameter zu identifizieren. Die theoretischen Grundlagen zur Bestimmung von $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ mit PO-MOESP sind in Abschnitt 3.2 vorgestellt. Dabei wurde auch auf notwendige Bedingungen für die Parameterbestimmung eingegangen. Ein wesentlicher Punkt dabei ist, dass die Strukturerrregung persistent sein muss. Diese Forderung gewährleistet, dass die linke obere Submatrix ($\mathbf{L}_{11}, \mathbf{L}_{21}, \mathbf{L}_{22}$) in Gleichung 3.38 vollen Rang aufweist und die im Rahmen der Bestimmung von $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ auszuführenden Inversionen numerisch stabil sind. Die experimentell durchgeführte Impulsanregung erfüllt diese Bedingung nur teilweise. Aufgrund der begrenzten Länge des experimentell gemessenen Impulses wurde die oben beschriebene Submatrix singulär, wenn mehr als ca. 40 Blockzeilen für die Identifikation genutzt wurden. Insofern besteht bei den durchgeführten Versuchen

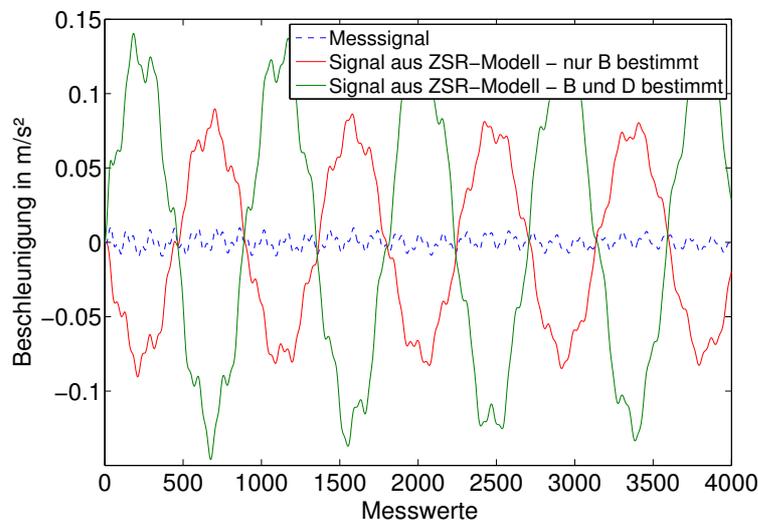


Abb. 7.10: Beispielhafter Vergleich zwischen originalem Messsignal und Modellsignal bei Identifikation mit PO-MOESP ($[\mathbf{L}_{11} \mathbf{0}; \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{22}]$ singulär)

ein Widerspruch bzgl. der anzuwendenden Blockzeilenzahl (möglichst viel, um korrekte Eigenwerte identifizieren zu können – möglichst wenig, um $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ zutreffend bestimmen zu können). Ist die Submatrix ($\mathbf{L}_{11}, \mathbf{L}_{21}, \mathbf{L}_{22}$) aus Gleichung 3.38 singulär, kann $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ nicht zutreffend bestimmt werden (Abbildung 7.10).

Bestimmung von \mathbf{B} und \mathbf{D} mit Simulationsmodell

Im vorangegangenen Abschnitt wurde am experimentellen Beispiel demonstriert, dass die Bestimmung von $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ numerisch problematisch sein kann, wenn der Anregungsprozess gewisse Forderungen nicht erfüllt (siehe Gleichung (3.49)). Numerisch stabiler ist die Identifikation von $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ mit dem Simulationsmodell. Dabei werden mit einem Zustandsraummodell ($\tilde{\mathbf{A}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ bereits im 1. Identifikationsschritt bestimmt, $\tilde{\mathbf{B}}$ und ggf. $\tilde{\mathbf{D}}$ zunächst mit Einheitszahlen besetzt) simulierte Messsignale erzeugt. Die endgültigen Matrizen $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ können dann durch Skalierung der simulierten Messsignale auf die real gemessenen Signale mit einem least-square Algorithmus bestimmt werden (siehe Abschnitt 3.2). Bei den durchgeführten experimentellen Versuchen konnte mit diesem Algorithmus die fehlenden Zustandsraumparameter und damit die Skalierung und Phasenlage korrekt bestimmt werden. In Abbildung 7.11 ist beispielhaft ein originales Messsignal (blau) einer Referenzmessung (Anregung an Kragarmspitze, Strukturantwort an Kragarmspitze) mit den Messsignalen aus einem vollständig identifiziertem Zustandsraummodell verglichen. Eine Realisierung erfolgte lediglich mit $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ (rotes Signal). Bei einer zweiten Realisierung wurde zusätzlich $\tilde{\mathbf{D}}$ bestimmt (grünes Signal). Es ist zu erkennen, dass die Modellsignale sehr gut mit dem originalen Messsignal übereinstimmen. Die Unterschiede der Realisierungen ohne bzw. mit $\tilde{\mathbf{D}}$ sind sehr gering und beschränken sich auf einen kurzen Anfangsbereich der Messung (während der Impulsdauer). Mit der zusätzlich bestimmten Durchgriffsmatrix $\tilde{\mathbf{D}}$ kann das Zustandsraummodell das gemessene Systemverhalten während der Wirkung des Impulses zu Beginn der Messung etwas besser wiedergeben.

In den Abschnitten 4.2 und 5.2 wurden die Markovparameter eingeführt, die zur Schadensidentifikation herangezogen werden sollen. Bei der Modellierung des Übertragungsverhaltens aus systemtheoretischer Sicht ist die Zustandsraummatrix $\tilde{\mathbf{D}}$ als direkter Durchgriff enthalten. Im Gegensatz dazu existiert bei einer rein mechanischen Modellierung dieser direkte Durchgriff nicht, sofern die Modellierung auf Weg- bzw. Geschwindigkeitssignalen basiert. Ergänzend zu Abbildung 7.11 ist in Tabelle 7.3 beispielhaft eine diskrete Eingangsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}^{8 \times 8}$ dargestellt. In der oberen Tabellenhälfte erfolgte die Realisierung ausschließlich mit den Zustandsraumparametern $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ - in der unteren Tabellenhälfte zusätzlich mit der (nicht dargestellten) Durchgriffsmatrix

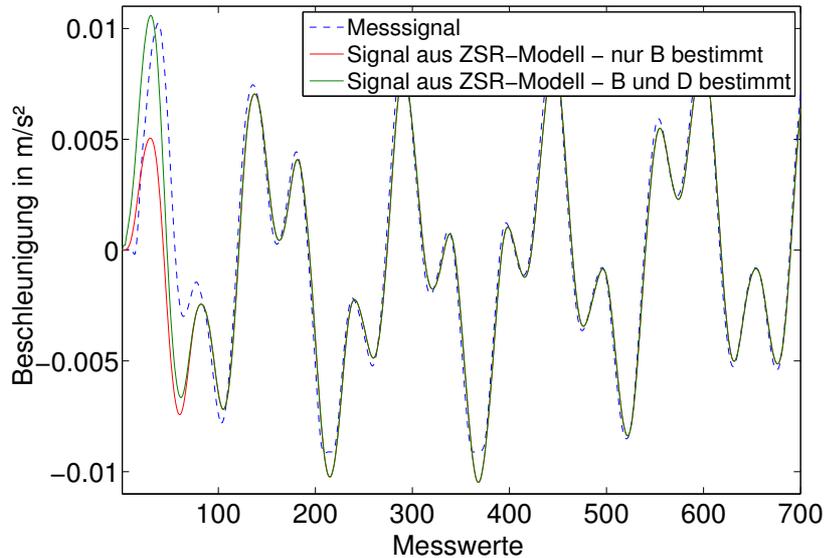


Abb. 7.11: Beispielhafter Vergleich zwischen originalem Messsignal und Modellsignal bei Identifikation von $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ mit PO-MOESP und $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ mit Simulationsmodell

$\tilde{\mathbf{D}}$. Es ist in Analogie zur Abbildung 7.11 zu erkennen, dass die (zusätzliche) Bestimmung von $\tilde{\mathbf{D}}$ einen untergeordneten Einfluss hat und die (u.a. zur Schadenslokalisierung) wichtige Eingangsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ nur unwesentlich beeinflusst wird. Erkennbare Unterschiede resultieren vorwiegend aus höheren Moden, die aufgrund schwacher Anregung und Dämpfung nur unbedeutende Signalanteile haben.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mit dem PO-MOESP Algorithmus Realisierungen gefunden werden konnten, die das experimentell ermittelte Übertragungsverhalten des Kragarms zutreffend modellierten. Im Vergleich zur Realisierung mit Impulsantwort (siehe nächsten Abschnitt) ist der numerische Aufwand deutlich kleiner, so dass lediglich kurze Rechenzeiten benötigt werden. Während bei der Realisierung mit Impulsantwort meist nur die ersten 4 Moden identifiziert wurden, identifizierte PO-MOESP auch den schwach angeregten fünften Eigenmode. Beachtet werden muss, dass für den Aufbau der Hankelmatrizen ausreichend Blockzeilen verwendet werden und dass die Bestimmung von $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ mit PO-MOESP numerisch instabil sein kann. Bei der durchgeführten Impulsanregung lieferte die Bestimmung von $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ mit dem Simulationsmodell bessere Ergebnisse.

$\tilde{\mathbf{B}}_{ohneD}$	0.0206	0.0448	0.0634	0.0693	0.0562	0.0200	-0.0265	-0.0712
	0.0177	0.0464	0.0713	0.0795	0.0609	0.0234	-0.0304	-0.0949
	-0.0159	-0.0988	-0.0957	-0.0006	0.0721	0.0788	0.0157	-0.1425
	-0.1720	-0.2893	-0.2210	-0.0107	0.1884	0.2263	0.0462	-0.2317
	0.0014	0.0026	0.0036	0.0054	0.0084	0.0115	0.0140	0.0147
	0.0011	0.0014	0.0021	0.0036	0.0051	0.0067	0.0084	0.0104
	-0.2439	-0.2175	0.0428	0.1510	0.0528	-0.1391	-0.0992	0.0521
	0.1933	0.0752	-0.0055	0.0160	0.0323	0.0309	0.0612	0.1067
	0.0206	0.0450	0.0641	0.0702	0.0568	0.0198	-0.0271	-0.0718
0.0178	0.0463	0.0709	0.0790	0.0605	0.0235	-0.0300	-0.0946	
-0.0134	-0.0977	-0.0964	-0.0012	0.0718	0.0794	0.0167	-0.1434	
-0.1722	-0.2887	-0.2211	-0.0117	0.1878	0.2275	0.0468	-0.2324	
$\tilde{\mathbf{B}}_{mitD}$	0.0019	0.0032	0.0035	0.0050	0.0084	0.0128	0.0151	0.0150
0.0010	0.0011	0.0022	0.0039	0.0052	0.0062	0.0080	0.0104	
-0.3465	-0.3637	0.0980	0.3198	0.1542	-0.3367	-0.2299	0.1828	
0.1448	0.0057	0.0202	0.0952	0.0794	-0.0625	-0.0003	0.1665	

Tab. 7.3: Eingangsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}$ für ein Referenzsystem

7.1.4 Black-Box Realisierung mit Impulsantwort

Ergänzend zu der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Realisierung mit dem PO-MOESP Algorithmus wurde in dieser Arbeit untersucht, inwieweit eine Realisierung nach Ho und Kalman (siehe Abschnitt 3.1) vergleichbare Ergebnisse liefern kann. Da bei dieser Realisierung die Systemanregung als idealer Dirac-Impuls angenommen wird – und demzufolge die reale Systemanregung keine Beachtung findet – wird zunächst auf die zwangsläufig vorhandenen Unterschiede zwischen theoretischer Annahme und experimentellen Gegebenheiten näher eingegangen.

Ein theoretischer Dirac-Impuls ist definiert durch einen Flächeninhalt von 1 und einer Zeitdauer von einem Zeitschritt Δt (bei diskreten Systemen). Damit ergibt sich eine Amplitude von $1/\Delta t$ (siehe Abbildung 7.12(a)). Im Gegensatz dazu kann man experimentell lediglich Stöße mit einer endlichen Zeitdauer $t \gg \Delta t$ realisieren, deren Beschleunigungs(bzw. Kraft)-Zeit-Verlauf näherungsweise einer Sinushalbwellen ähnelt (siehe Abbildung 7.12(b)) und dessen maximale Amplitude –abhängig von experimentellen Gegebenheiten– beliebig ist. Infolge dieses Unterschiedes ist es bei experimentellen Messung zunächst notwendig, die Fläche des gemessenen Impulssignals zu ermitteln und anschließend einen skalaren Normierungsfaktor f zu bestimmen, so dass sich eine Impulsfläche von 1 ergibt, wenn alle Messsignale \mathbf{y}_k mit diesem Faktor f skaliert werden. Wird diese Skalierung nicht durchgeführt, sind die gemessenen Amplituden beim identifizierten Zustandsraummodell falsch modelliert.

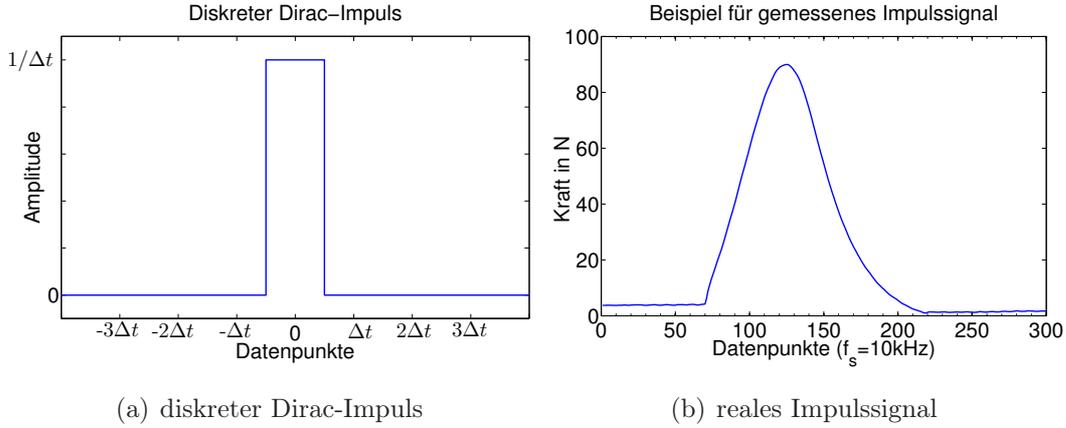


Abb. 7.12: Unterschiede zwischen theoretischem Dirac- und real gemessenem Impuls

Der bereits erwähnte Unterschied der Impulsdauer zwischen diskretem Dirac-Impuls (Dauer Δt entspricht einem Zeitschritt) und experimentellem Impuls (Dauer abhängig von Aufprallhärte; in Abb. 7.12(b) zum Beispiel circa 125 Zeitschritte) führt zu einem weiteren Problem bei der Realisierung: In Abschnitt 3.1 ist gezeigt, dass für die Identifikation eine Hankelmatrix (3.11) mit den Messwerten, aufgebaut wird. Für die korrekte Bestimmung der Zustandsraumparameter $\bar{\mathbf{B}}$ und $\bar{\mathbf{C}}$ ist es dabei zwingend notwendig, dass der erste Matrixblock der Hankelmatrix die Systemantwort \mathbf{Y}_1 zum Zeitpunkt $k = 1$ enthält. Dieser spezielle Zeitpunkt existiert aber nur in der Theorie (Anregung zum Zeitpunkt $k = 0$, freie Schwingung ab Zeitpunkt $k = 1$). Wird bei experimentellen Messungen die Hankelmatrix mit den Messdaten der freien Schwingung (im Beispiel Abbildung 7.12(b) circa ab Datenpunkt 210) aufgebaut, so gilt gemäß Gleichung (3.10)

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \cdots \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \\ \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & & \\ \mathbf{Y}_{k+3} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k-1}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+1}\bar{\mathbf{B}} & \cdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+1}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+2}\bar{\mathbf{B}} & \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+1}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+2}\bar{\mathbf{B}} & & \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k+2}\bar{\mathbf{B}} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\text{mit } k \neq 1 \quad (7.3)$$

Damit führt eine Zerlegung dieser Hankelmatrix $\bar{\mathbf{H}}$ entsprechend Gleichung

(3.12) zu:

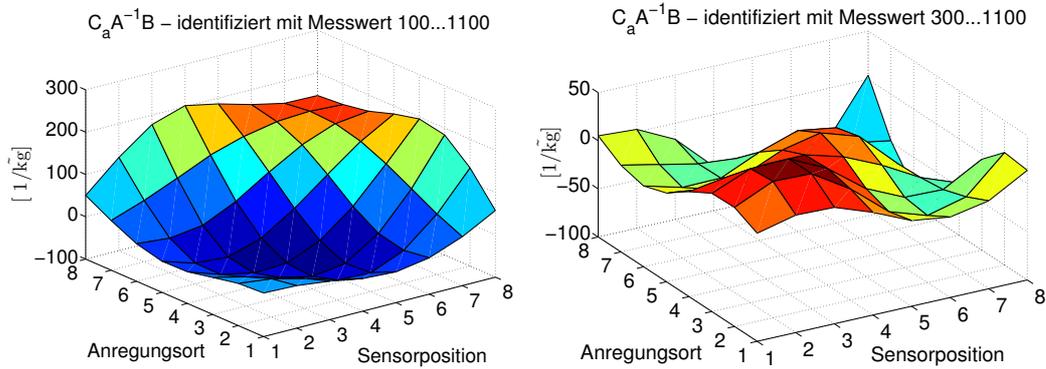
$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{\frac{k-1}{2}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{\frac{k+1}{2}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{\frac{k+3}{2}} \\ \vdots \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc} \bar{\mathbf{A}}^{\frac{k-1}{2}}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}^{\frac{k+1}{2}}\bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{A}}^{\frac{k+3}{2}}\bar{\mathbf{B}} & \dots \end{array} \right] \quad (7.4)$$

In Analogie zur theoretischen Herleitung kann nach Gleichung (3.29) die Dynamik des Systems durch $\bar{\mathbf{A}}$ korrekt bestimmt werden. Im Gegensatz dazu erkennt man aus Gleichung (7.4), dass es nunmehr nicht möglich ist, aus den ersten Matrixblöcken der Beobachtbarkeits- bzw. Steuerbarkeitsmatrix die gesuchten Parameter $\bar{\mathbf{C}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ zu bestimmen, da jeweils $\bar{\mathbf{A}}^{\frac{k-1}{2}}$ enthalten ist. Soll $\bar{\mathbf{C}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ bestimmt werden, muss $\bar{\mathbf{A}}^{\frac{k-1}{2}}$ herausgerechnet werden. Dies ist jedoch unmöglich, da der Zeitschritt k durch den Zeitpunkt des idealen Dirac-Impuls definiert wird, der jedoch bei realen Messungen nicht existiert.

Trotzdem können die ersten Matrixblöcke der Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsmatrix extrahiert und als Zustandsraumparameter $\hat{\mathbf{C}}$ bzw. $\hat{\mathbf{B}}$ angesehen werden:

$$\hat{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{\frac{k-1}{2}} \quad \hat{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}}^{\frac{k-1}{2}}\bar{\mathbf{B}} \quad (7.5)$$

Es wird deutlich, dass das Zustandsraummodell $\bar{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ die experimentell gemessenen Amplituden sowie die Phasenlage –und damit das Übertragungsverhalten zwischen Systemeingängen und -ausgängen– nicht korrekt modelliert und diese zudem vom Startzeitpunkt k abhängig sind, ab dem die Messwerte für die Auswertung genutzt werden. In Abbildung 7.13 wird die Abhängigkeit der Markov-Parameter vom Startzeitpunkt der Auswertung exemplarisch demonstriert. Es ergeben sich völlig verschiedene Markovparameter, in Abhängigkeit von den ersten Messwerten, die zur Realisierung genutzt werden. Da die Realisierung zu einem frei gewählten Zeitpunkt der freien Schwingung (nach dem Impuls) beginnt und sich die Struktur zu diesem Zeitpunkt nicht mehr in der Ruhelage befindet, sind die Messwerte im ersten Hankelmatrixblock \mathbf{Y}_k ungleich Null. Damit wird auch die für mechanische Strukturen notwendige Bedingung $\mathbf{CB} = \mathbf{0}$ (siehe Abschnitt 4.2) verletzt. Für eine Schadenslokalisierung durch den Vergleich von Markov-Parametern ist diese Realisierung damit völlig ungeeignet.



(a) Realisierung beginnt mit 100. Messwert (b) Realisierung beginnt mit 300. Messwert

Abb. 7.13: zeitkontinuierliche Markovparameter $\mathbf{C}_a \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ in Abhängigkeit vom Start der Realisierung

Dient die Auswertung jedoch lediglich dazu, anhand von $\bar{\mathbf{A}}$ und $\hat{\mathbf{C}}$ die Systemdynamik sowie frei normierbare Eigenformen zu bestimmen (z.B. für model updating von FE-Modellen), können mit der beschriebenen Realisierung sehr gute Ergebnisse gewonnen werden.

Gewährleistung der Bedingung $\mathbf{CB}=\mathbf{0}$ – „Rückrechnen“

Im vorangegangenen Abschnitt wurde erläutert, dass die ersten Blöcke der Steuerbarkeits- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix zusätzlich zu den gesuchten Eingangs- und Ausgangsmatrizen einen Anteil der Systemmatrix enthalten (Gleichung (7.5)), da experimentell kein Dirac-Impuls realisiert werden kann (Abbildung 7.14). Für den theoretischen Fall, dass die Struktur durch einen Dirac-Impuls angeregt worden wäre, und die Realisierung mit den Messwerten des k -ten Zeitschrittes begonnen hätte, so wäre k bekannt und die Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ könnte eliminiert werden:

$$\bar{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{A}}^{-\frac{k-1}{2}} \quad \bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}}^{-\frac{k-1}{2}} \hat{\mathbf{B}} \quad (7.6)$$

Schaut man sich die Gleichungen 3.7 und 3.10 an, wird die Bedeutung von 7.6 klar. Das identifizierte lineare Zustandsraummodell wird um k -Zeitschritte „zurückgerechnet“ und erhält dadurch die korrekte Anfangsbedingung in zeitdiskreter Darstellung

$$\mathbf{Y}_1 = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{A}}^0 \bar{\mathbf{B}} \approx \mathbf{0}, \text{ bei } \Delta t \rightarrow 0 \quad (7.7)$$

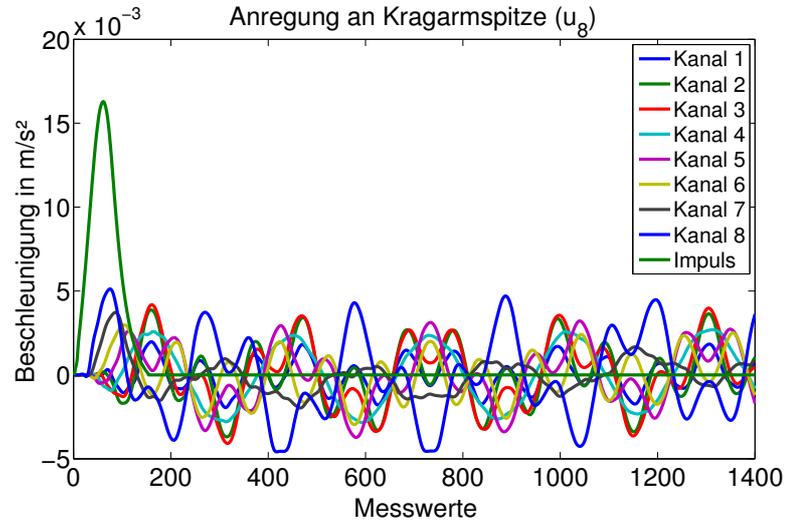


Abb. 7.14: Messsignale bei Anregung an Kragarmspitze

Ebenfalls erfüllt wird die korrekte Anfangsbedingung in zeitkontinuierlicher Darstellung (Struktur in Ruhelage zum Zeitpunkt $t = 0$ des Dirac-Impulses) - siehe auch Abschnitt 4.2:

$$\mathbf{Y}_{t=0} = \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \cdot 0} \mathbf{B} = \mathbf{0} = \mathbf{CB} \quad (7.8)$$

Experimentelle Impulse haben im Gegensatz zu diesen theoretischen Überlegungen immer eine endliche Impulsdauer, deutlich größer als ein Zeitschritt. Infolgedessen enthalten die geschätzten $\hat{\mathbf{C}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ immer einen zusätzlichen Anteil der Systemmatrix $\bar{\mathbf{A}}$, der abhängig vom Startzeitpunkt der Realisierung ist und zu entsprechend veränderlichen Markovblöcken führt (siehe Abbildung 7.13). Dieses störende Verhalten kann mit dem Wissen aus den Gleichungen (7.7) und (7.8) minimiert werden.

In Gleichung 7.6 ist beschrieben, wie aus den Matrizen $\hat{\mathbf{C}}$ und $\hat{\mathbf{B}}$ die gesuchten Zustandsraumparameter $\bar{\mathbf{C}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ bestimmt werden können. Bei experimenteller Impulsanregung ist die Anzahl der Zeitschritte k , um die zurückgerechnet werden muss, unbekannt. Es kann aber eine Anzahl an Zeitschritten und damit ein k bestimmt werden, bei dessen Verwendung in Gleichung (7.6) -zumindest näherungsweise- die für mechanische Strukturen geltenden Randbedingungen aus den Gleichungen (7.7) und (7.8) erfüllt werden. Beginnend bei $k = 1$ wird k schrittweise erhöht. Die korrekte Potenz k ist gefunden, wenn

(zeitdiskrete Darstellung)

$$\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \rightarrow \mathbf{0} \quad (7.9)$$

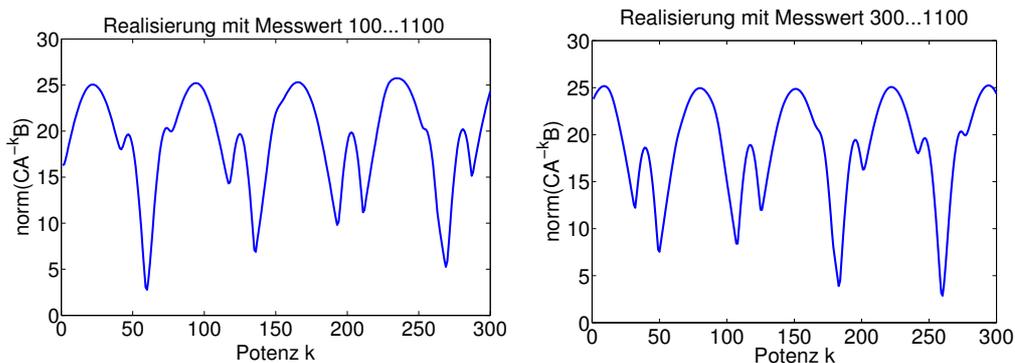
bzw. wenn (zeitkontinuierliche Darstellung)

$$\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (7.10)$$

Bei experimentellen Versuchen wird u.a. aufgrund von Messfehlern keine Nullmatrix zu finden sein. Daher ist es zweckmäßig zur Bestimmung von k die Matrixnorm (z.B. Euklidische Norm) darzustellen und ein Minimum zu bestimmen:

$$\min \|\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{-k+1}\bar{\mathbf{B}}\|_2 \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \quad (7.11)$$

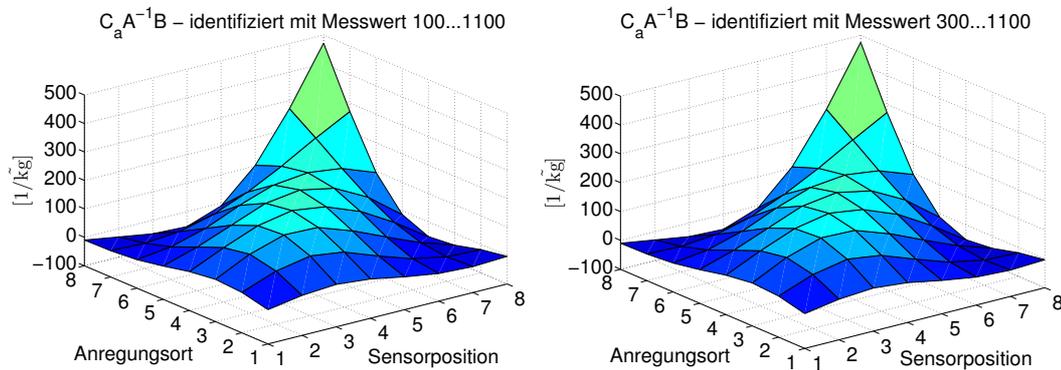
In Abbildung 7.15 ist beispielhaft die Matrixnorm entsprechend Gleichung (7.11) dargestellt. In Teilbild (a) findet man ein Minimum bei $k = 59$ - in Teilbild (b) findet man ein Minimum bei $k = 259$. Entsprechend ist das identifizierte Zustandsraummodell um 59 bzw. um 259 diskrete Zeitschritte „zurückzurechnen“, um die für mechanische Strukturen notwendigen Randbedingungen möglichst genau zu erfüllen.



(a) Realisierung beginnt mit 100. Messwert (b) Realisierung beginnt mit 300. Messwert

Abb. 7.15: Matrixnorm $\|\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{-k+1}\bar{\mathbf{B}}\|_2$ in Abhängigkeit vom Start der Realisierung

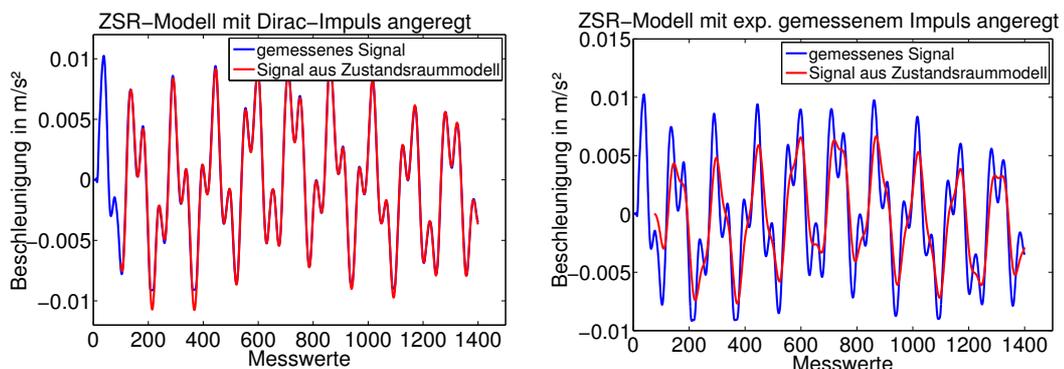
Werden die identifizierten Zustandsraumparameter entsprechend Gleichung (7.6) mit $k = 59$ bzw. $k = 259$ korrigiert, so ergeben sich für das Beispiel aus Abbildung 7.13 einheitliche und korrekte zeitkontinuierliche Markovparameter, die unabhängig vom Startwert der Realisierung sind.



(a) Realisierung beginnt mit 100. Messwert (b) Realisierung beginnt mit 300. Messwert

Abb. 7.16: zeitkontinuierliche Markovparameter $C_a \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ - nach Rückrechnung unabhängig vom Start der Realisierung

Abschliessend soll auch in diesem Abschnitt die Qualität der identifizierten Zustandsraummodelle durch einen Vergleich zwischen den experimentellen Messsignalen und den numerisch generierten Modellsignalen überprüft werden. Mit einer vorgegebenen Anregung \mathbf{u}_k können Modellsignale \mathbf{y}_k unter Vernachlässigung von Rauschprozessen entsprechend Gleichung (3.1) generiert werden. In Abbildung 7.17 sind beispielhaft Messsignale und Modellsignale miteinander



(a) ZSR-Modell mit Dirac-Impuls angeregt (b) ZSR-Modell mit experimentell gemessenen Impuls angeregt

Abb. 7.17: Vergleich zwischen Messsignal und numerisch generiertem ZSR-Modellsignal

verglichen. In Teilbild (a) erkennt man die gute Übereinstimmung, wenn ein Dirac-Impuls zur Systemanregung genutzt wird. Dieses Resultat kann erwartet werden, da der Dirac-Impuls eine grundsätzliche Annahme einer Black-Box

Realisierung mit Impulsantwort ist. Im Gegensatz dazu erkennt man in Teilbild (b) deutliche Unterschiede zwischen Mess- und Modellsignal, wenn zur Systemanregung ein real gemessener Impuls genutzt wird. Diese Unterschiede entstehen, da experimentell erzeugbare Impulsfunktionen nicht den theoretischen Annahmen einer Dirac-Impulsfunktion genügen. Damit konnte an diesem kleinen, repräsentativ ausgewählten Beispiel demonstriert werden, dass das gemessene mechanische Strukturverhalten mit dieser Black-Box-Realisierung nicht zutreffend modelliert werden kann.

Ungeachtet dessen konnten Systemveränderungen -wie im folgenden Abschnitt beschrieben- auch mit dieser Realisierung detektiert werden, wenn zur Modellierung von ungeschädigtem Referenzsystem und verändertem System die gleichen Algorithmen verwendet wurden, so dass die systematischen Fehler bei allen Modellen gleich sind und keinen Einfluss auf die Schadensdetektion haben.

7.1.5 Markov-Parameter zur Schadenslokalisierung

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt wurde, dass das experimentell gemessene Strukturverhalten zutreffend mit Zustandsraummodellen erfasst werden kann, soll nun gezeigt werden, inwieweit Strukturveränderungen anhand der identifizierten Modelle detektiert und lokalisiert werden können. Die bei den Kragbalkenversuchen vorgenommenen Veränderungen wurden bereits in Abschnitt 7.1.1 beschrieben.

Lokalisation von Zusatzmassen

Zunächst soll gezeigt werden, wie eine lokal an Messposition 3 angebrachte Zusatzmasse von 1kg lokalisiert werden kann. Die Impulsanregung erfolgte mit dem in Abschnitt 7.1.1 beschriebenen Fallgewicht (mit 1cm Gummi zwischen Fallgewicht und Stiftschraube auf dem Kragbalken). An jedem Anregungsort wurden 25 identische Messungen durchgeführt. Für die Schadenslokalisierung kann die Differenz der Markovparameter aus „geschädigter“ Struktur und Referenzstruktur

$$\Delta \tilde{\mathbf{M}}^{-1} = (\mathbf{C}_d \mathbf{A} \mathbf{B})_d - (\mathbf{C}_d \mathbf{A} \mathbf{B})_r \quad (7.12)$$

bzw. direkt die Differenz der korrespondierenden Massenmatrizen

$$\Delta\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}_d - \tilde{\mathbf{M}}_r = (\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B})_d^{-1} - (\mathbf{C}_d\mathbf{A}\mathbf{B})_r^{-1} \quad (7.13)$$

genutzt werden. Die Inversionen in Gleichung (7.13) sollten mit Hilfe der Singulärwertzerlegung erfolgen, um Rangdefekte aufgrund fehlender Informationen (Moden/Dyaden) erkennen zu können. In Abbildung 7.18 ist die Diffe-

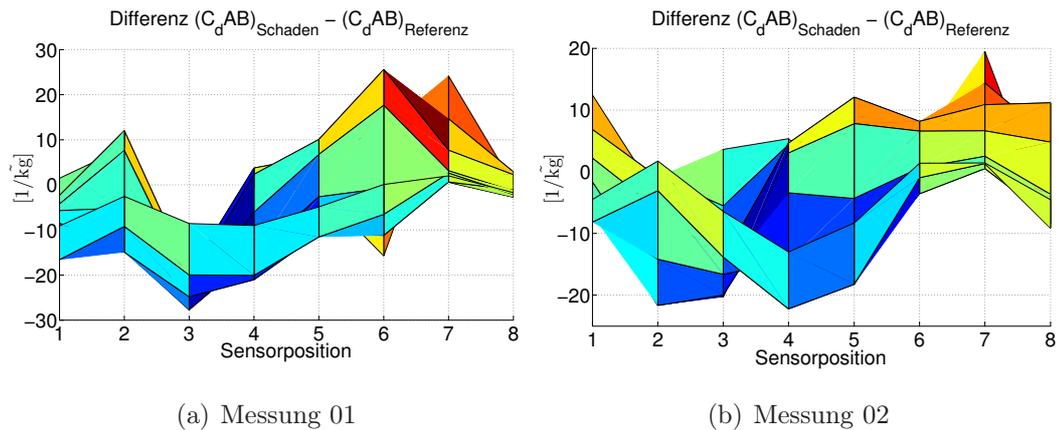


Abb. 7.18: Differenz Markovparameter - Zusatzmasse (1kg) am Punkt 3 - Einzelne Messungen - zweidimensionale Ansicht

renz der Markovparameter für zwei identisch durchgeführte Experimente dargestellt (am Messpunkt 3 befand sich bei der „geschädigten“ Struktur jeweils eine Zusatzmasse von 1kg). Man erkennt, dass sich trotz gleicher „Schädigung“ und gleicher experimenteller Durchführung die Differenz der Markovparameter deutlich voneinander unterscheidet. Betrachtet man die Markovparameter einzeln (von Referenzstruktur und „geschädigter“ Struktur – Abbildung 7.19), wird die Ursache klar: Trotz der zusätzlichen Masse von 1kg zeigen die Markovparameter keine signifikanten Unterschiede. Die „Schädigung“ ruft nur kleine Veränderungen am Markovparameter hervor. Damit wirken sich – aufgrund der gleichen Größenordnung der Markovparameter von „geschädigter“ und ungeschädigter Struktur – Ungenauigkeiten der experimentellen Bestimmung (z.B. Messfehler) überproportional auf die Differenz aus und „kleine“ Schäden sind nicht eindeutig bestimmbar.

Bedenkt man, dass die Markovparameter aus der Summe der dyadischen Produkte aller enthaltenen Moden hervorgehen und die dyadischen Produkte abhängig von den messtechnisch erfassten Amplituden sind, wird deutlich, dass

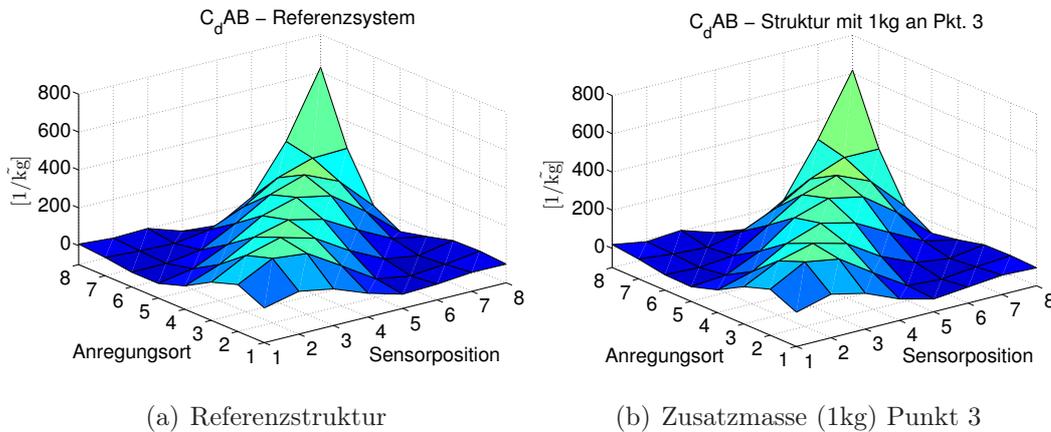


Abb. 7.19: Markovparameter C_dAB - Messung 02

die in Abbildungen 7.7 dargestellten Amplitudenunterschiede zwischen den einzeln (aber identisch) durchgeführten Versuchen einen direkten Einfluss auf die Schadenslokalisierbarkeit haben.

Eine sichere Lokalisierbarkeit konnte bei den Laborversuchen dadurch erreicht werden, dass zufällige Unterschiede zwischen den Versuchen durch eine Mittelung der Zeitsignale minimiert wurden (eine Mittelung der identifizierten Markovparameter ist äquivalent dazu). In den Abbildungen 7.20 bis 7.22 sind die Differenzen der Markovparameter sowie der korrespondierenden Massenmatrizen für unterschiedliche Realisierungen dargestellt. Gute Ergebnisse zeigt die Realisierung mit Impulsantwort (Abbildung 7.20), wenn durch „Rückrechnen“ im zeitdiskreten Modell sichergestellt wird, dass $CB \approx \mathbf{0}$ (siehe Abschnitt 7.1.4). Die Differenz der Markovparameter zeigt die maximale Veränderung am Punkt 4 und damit in unmittelbarer Nähe zur Zusatzmasse am Punkt 3, die Differenz der korrespondierenden Massenmatrizen zeigt die größten Veränderungen an den Punkten 2 und 3.

Bei der Realisierung mit PO-MOESP sind die Eingangssignale (in diesem Beispiel die gemessenen Impulse) Bestandteil der Identifikation. Damit werden direkt physikalisch richtig normierte Zustandsraummodelle identifiziert, ohne dass ein nachträgliches „Rückrechnen“ entsprechend Abschnitt 7.1.4 – was einem Drehen der Phasenlage entspricht – erfolgen muss. In Abschnitt 7.1.3 wurde gezeigt, dass damit sehr gut die messtechnisch erfassten Signale modelliert werden können. Dennoch war diese Realisierung nicht immer geeignet, um kleine Strukturveränderungen sicher erfassen zu können. Beispielsweise kann

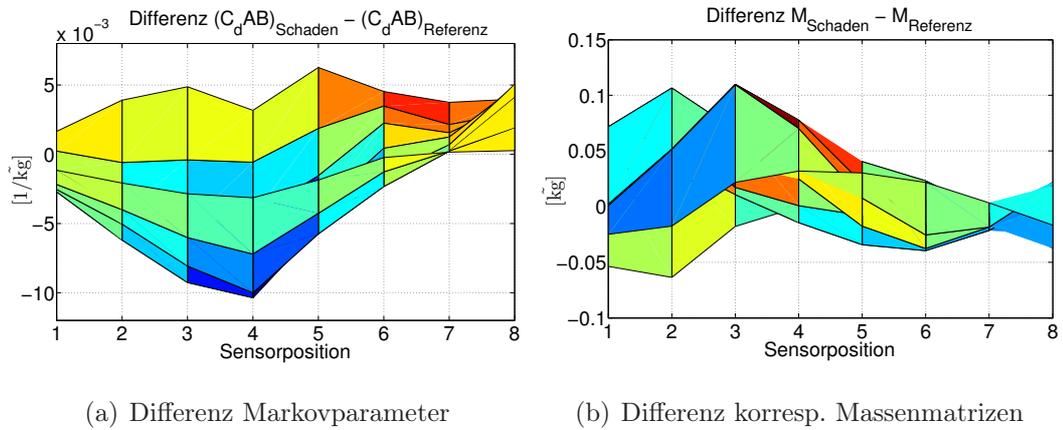


Abb. 7.20: Realisierung mit Impulsantwort und „Rückrechnen“ – 1kg am Pkt. 3

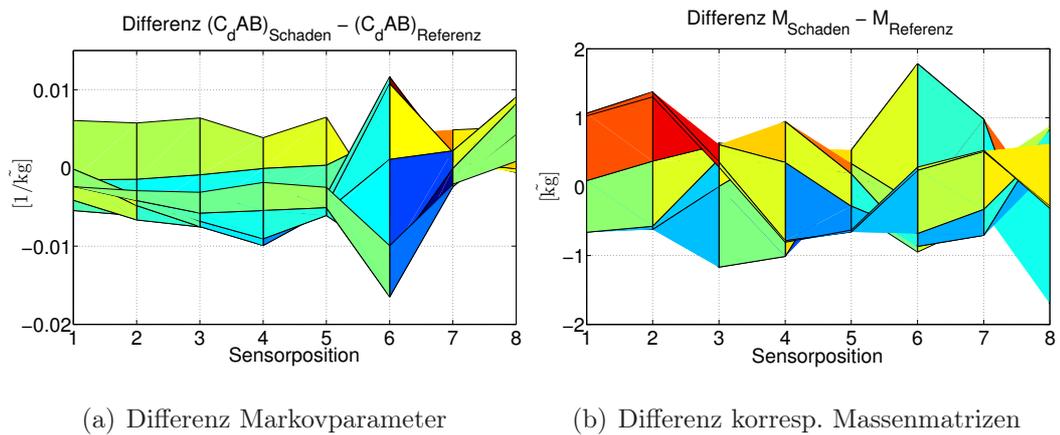


Abb. 7.21: Realisierung mit PO-MOESP (ohne „Rückrechnen“) – 1kg am Pkt. 3

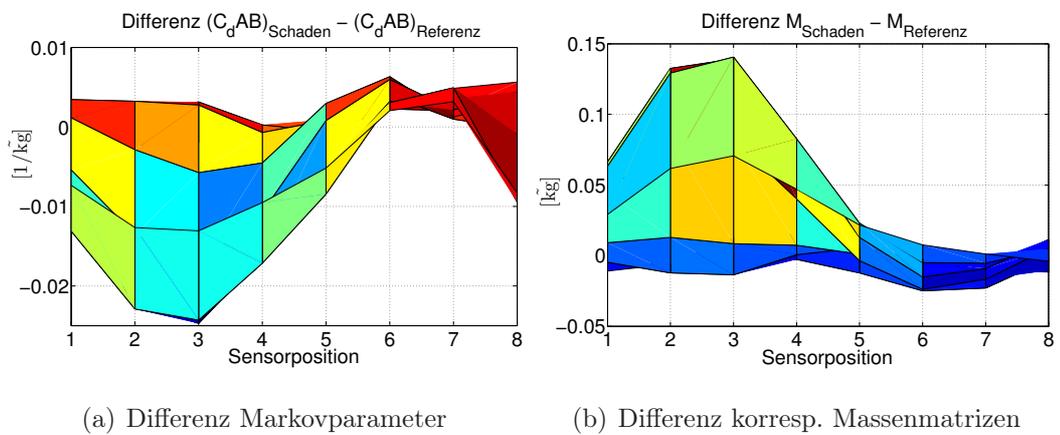


Abb. 7.22: Realisierung mit PO-MOESP (mit „Rückrechnen“) – 1kg am Pkt. 3

die Zusatzmasse von 1kg am Punkt 3 damit nicht gefunden werden (Abbildung 7.21). Als Ursache können zwei Dinge genannt werden: Zum einen wirkt es sich auch hierbei negativ aus, dass die Markovparameter vom geschädigten und ungeschädigten System nur sehr kleine Abweichungen haben, und somit Ungenauigkeiten in der Messung bzw. in der Identifikation die Differenz der Markovparameter stark verfälschen können. Außerdem zeigen sich auch hier die Schwierigkeiten einer experimentellen Impulsanregung: Trotz messtechnischer Erfassung des erzeugten Impulses und dessen Berücksichtigung bei der Identifikation (PO-MOESP) ist es nicht einfach, Phasenlage und Amplituden hundertprozentig zu modellieren. Vermutlich wäre eine dauerhafte Anregung (z.B. durch Shaker) besser geeignet, um kleine Strukturveränderungen in Zustandsraummodellen sicher zu erfassen. Aufgrund des dazu notwendigen experimentellen Aufwandes bei der Anwendung an großen Strukturen wurde dies jedoch nicht näher untersucht.

Dass bei den experimentellen Versuchen und der Realisierung mit PO-MOESP die Phase nicht hundertprozentig modelliert wurde, erkennt man am Markovparameter \mathbf{CB} , der entsprechend der mechanischen Motivation der Zustandsraummodelle eine Nullmatrix sein muss, was nicht exakt erreicht wurde. Mit diesem Wissen und dem Ansatz aus Abschnitt 7.1.4, die Phasenlage (und damit den Markovparameter \mathbf{CB}) nachträglich auf die mechanisch „richtige“ Lage zu drehen, wurde auch bei den mit PO-MOESP identifizierten Modellen untersucht, inwieweit eine Optimierung von \mathbf{CB} die Detektierbarkeit von Schäden verbessern kann. In Abbildung 7.23 ist die Matrixnorm $\|\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{-k+1}\bar{\mathbf{B}}\|_2$ der mit PO-MOESP identifizierten zeitdiskreten Zustandsraummodelle von ungeschädigter Referenzstruktur und „geschädigter“ Struktur dargestellt. Man erkennt, dass eine Verbesserung der identifizierten Modelle (im Sinne einer mechanischen Deutung) erreicht werden kann, wenn der (ideelle) Startpunkt der Identifikation um 10 Zeitschritte verschoben wird.

In Abbildung 7.22 sind die Differenzen der Markovparameter sowie der korrespondierenden Massenmatrizen für ein solches, im mechanischen Sinne optimiertes Modell dargestellt. Darin wird die Zusatzmasse von 1kg an Punkt 3 sehr eindeutig lokalisierbar. Sowohl die Differenz der Markovparameter als auch die Differenz der korrespondierenden Massenmatrizen weist ein Maximum an Punkt 3 auf. Zur Erinnerung soll auf Abbildung 6.14 verwiesen werden. Die

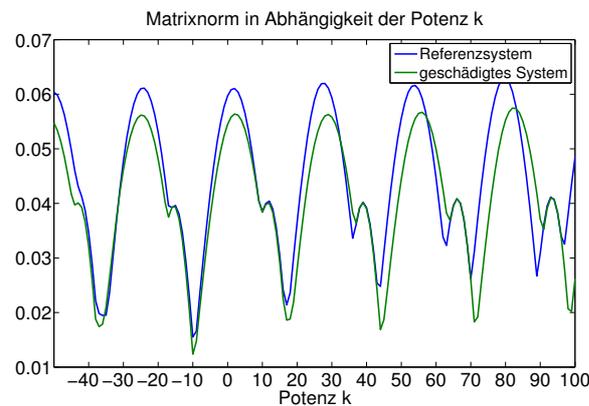
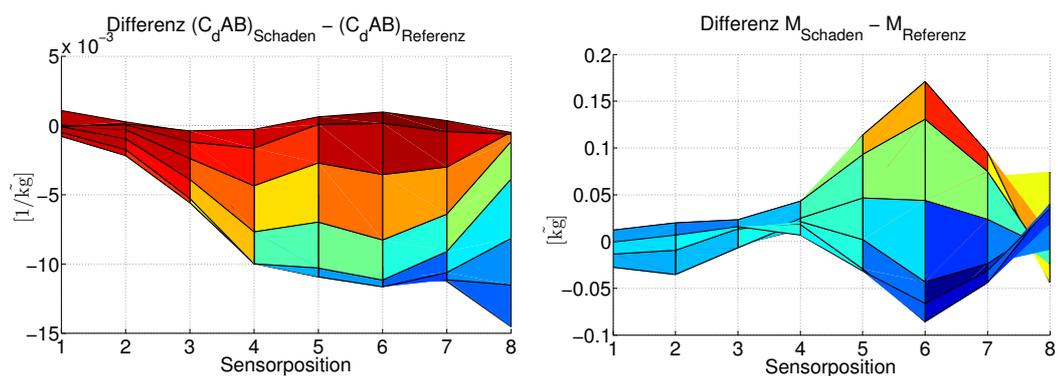


Abb. 7.23: Realisierung mit PO-MOESP (mit „Rückrechnen“) – 1kg am Pkt. 3

dort dargestellten Ergebnisse der Simulation mit dem FE-Modell sind praktisch vergleichbar. Auch die hier experimentell identifizierte Zusatzmasse von ca. 0,14kg deckt sich sehr gut mit der bei der Simulationsrechnung detektierten Zusatzmasse von 0,19kg. Die Differenz zur tatsächlichen Zusatzmasse von 1kg resultiert aus der Tatsache, dass lediglich vier Eigenfrequenzen (acht Dyaden) experimentell identifiziert werden konnten. Acht Eigenfrequenzen wären nötig gewesen, um die Zusatzmasse von 1kg korrekt identifizieren zu können.

Als weiteres Beispiel soll die Differenz der Markovparameter und der korrespondierenden Massenmatrizen für die Versuche mit einer Zusatzmasse von 1kg am Punkt 6 dargestellt werden (Abbildung 7.24). Prinzipiell lässt sich auch



(a) Differenz Markovparameter

(b) Differenz korresp. Massenmatrizen

Abb. 7.24: Realisierung mit Impulsantwort und „Rückrechnen“ – 1kg am Pkt. 6

hier an der Differenz der Markovparameter die Zusatzmasse am Punkt 6 sehr gut als (lokales) Maximum ablesen. Lediglich eine Ungenauigkeit bei Sensor 8

infolge Anregung am Punkt 7 und 8 stört diese Darstellung etwas. Eindeutig ist dagegen die Differenz der korrespondierenden Massenmatrizen. Auch für dieses Beispiel ist die Differenz der korrespondierenden Massenmatrizen sowie deren Amplitude mit den Resultaten der FE-Simulation vergleichbar.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass es bei den experimentellen Schwingungsversuchen am Kragbalken gelungen ist, vorgenommene Massenveränderungen festzustellen und zu lokalisieren. Ob die Realisierung mit Impulsantwort oder PO-MOESP vorgenommen wurde spielte nur eine untergeordnete Rolle, die Ergebnisse waren prinzipiell vergleichbar. Ganz entscheidend war jedoch gewesen:

- Mitteln der Zeitsignale (bzw. Markovblöcke) von mehreren Versuchen, um zufällige Fehler zu minimieren
- Bestmögliche Gewährleistung der Bedingung $\mathbf{CB} = \mathbf{0}$ beim identifizierten Modell durch Drehen der Phasenlage („Rückrechnen“)

Lokalisation von Sägeschnitten

Von einer größeren praktischen Bedeutung ist die Detektion und Lokalisation von Steifigkeitsveränderungen. Im Rahmen der Laborversuche am Kragbalken wurden lokale Steifigkeitsreduktionen durch Sägeschnitte realisiert. Die Schadenslokalisierung erfolgt anhand der Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen:

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}_s - \tilde{\mathbf{F}}_r \quad (7.14)$$

$$= (\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_r - (\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_s \quad (7.15)$$

Da experimentell lediglich die niedrigsten 4 bzw. 5 Eigenfrequenzen / Eigenformen zur Schwingung angeregt werden konnten, wird auf eine Inversion der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen zu den korrespondierenden Steifigkeitsmatrizen verzichtet. Im Kapitel 6.2.2 wurde bereits gezeigt, dass in solchen Fällen (Anzahl Messfreiheitsgrade > Anzahl Eigenfrequenzen) die Steifigkeitsmatrizen nicht zutreffend bestimmt werden können.

Zunächst sollen die Ergebnisse der Schwingungsmessungen mit einem Sägeschnitt (stufenweise 6mm/20mm tief) in einem Abstand von 140cm von der Einspannung präsentiert werden (zwischen Messpunkt 4 und 5):

Für die Identifikation von lokalen Steifigkeitsveränderungen gelten die im vorangegangenen Abschnitt festgestellten Grundsätze analog: Eine Realisierung mit Impulsantwort bzw. mit PO-MOESP bringt vergleichbare Ergebnisse, wenn sichergestellt ist, dass $\mathbf{CB} \approx \mathbf{0}$. Ebenfalls notwendig war die Mittelung einer ausreichenden Anzahl von Versuchen, um zufällige Fehler zu minimieren. In Abbildung 7.25 sind die korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen von ungeschädigter Referenzstruktur und geschädigter Struktur (Sägeschnitt bei 140cm, Tiefe 20mm) dargestellt. Man erkennt – auch an den korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen – die gleiche Größenordnung der zugehörigen Markovparameter zwischen geschädigter und ungeschädigter Struktur. Da die Schäden anhand der Differenz beider Matrizen festgestellt und lokalisiert werden, wirken sich zufällige Fehler der Messung bzw. der Identifikation auch hier überproportional aus. Erst die Mittelung der Ergebnisse mehrerer Messungen brachte bei den experimentellen Versuchen stabile Ergebnisse. Dargestellt ist die Differenz in Abbildung 7.26. Der Sägeschnitt (zwischen Punkt 4 und 5) ist eindeutig an dem Knick in der Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen erkennbar. Allerdings war es notwendig, die Biegesteifigkeit deutlich zu reduzieren (auf ca. 5% vom Ausgangsniveau bei 20mm Schnitttiefe), um die dargestellten eindeutigen Ergebnisse zu erhalten. Bei einer Sägeschnitttiefe von lediglich 6mm (Obergurt durchtrennt; Steifigkeitsreduktion auf ca. 24%) zeigt die Differenz der Flexibilitätsmatrizen (Abbildung 7.27) den richtigen Trend, eine genaue Lokalisation war jedoch nicht mehr möglich. Ursächlich sind zunächst Messfehler, die sich –wie bereits gezeigt– überproportional auf die Differenz der Markovparameter auswirken. Außerdem „fehlen“ bei den durchgeführten Kragarmversuchen die Informationen aus höheren Eigenformen. Wie im Abschnitt 6.2.3 dargestellt, führen diese zu schärferen Knicken in der Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen, insbesondere wenn die Steifigkeitsreduktionen gering sind. Außerdem wäre dann eine Inversion der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen zu korrespondierenden Steifigkeitsmatrizen möglich, die Veränderungen wesentlich sensitiver anzeigen können.

Abschließend sollen noch die Ergebnisse einer lokalen Steifigkeitsreduktion im Abstand von 170cm von der Einspannung präsentiert werden (zwischen Messpunkt 5 und 6). Bei einer Sägeschnitttiefe von 20mm läßt sich der Ort

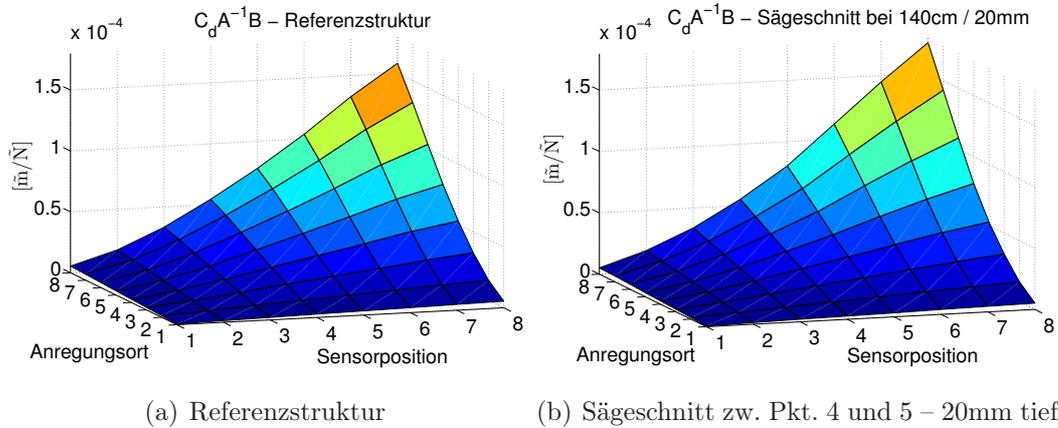


Abb. 7.25: Vergleich der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen

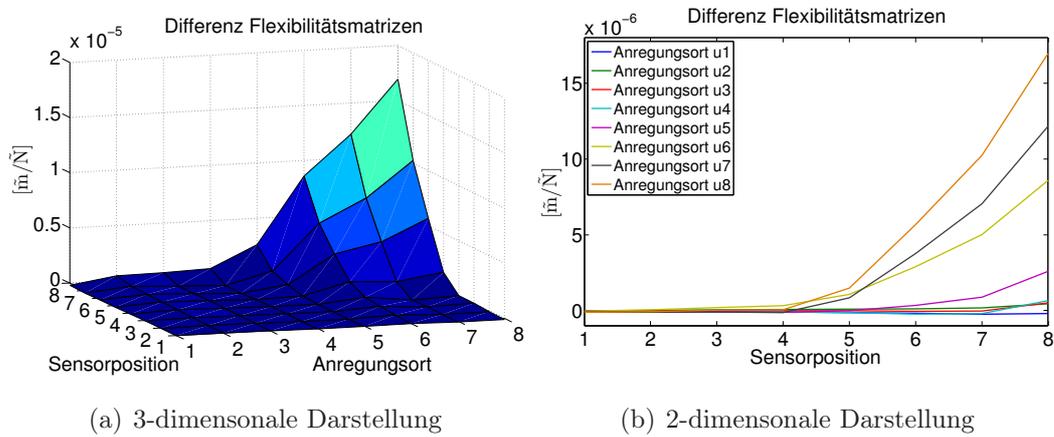


Abb. 7.26: Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen (Sägeschnitt zwischen Punkt 4 und 5 – 20mm tief)

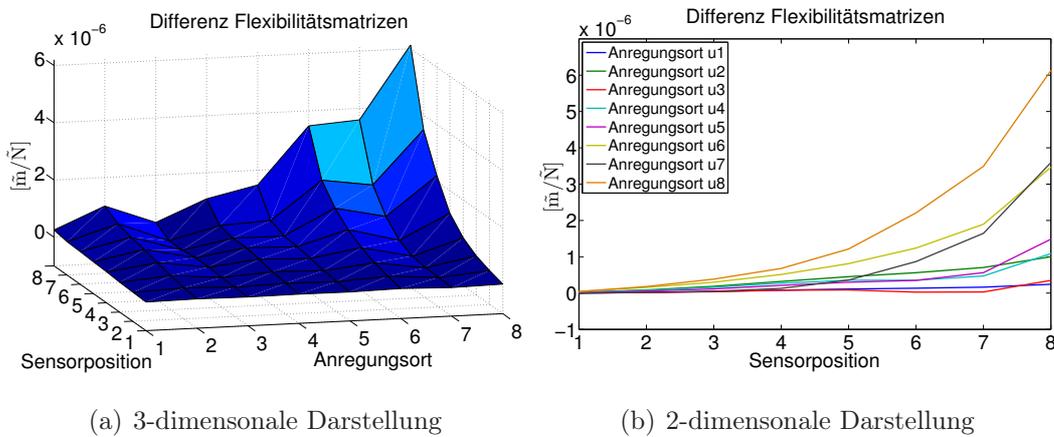


Abb. 7.27: Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen (Sägeschnitt zwischen Punkt 4 und 5 – 6mm tief)

des Sägeschnittes erneut sehr genau an einem Knick in der Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen lokalisieren (Abbildung 7.28). Auf eine

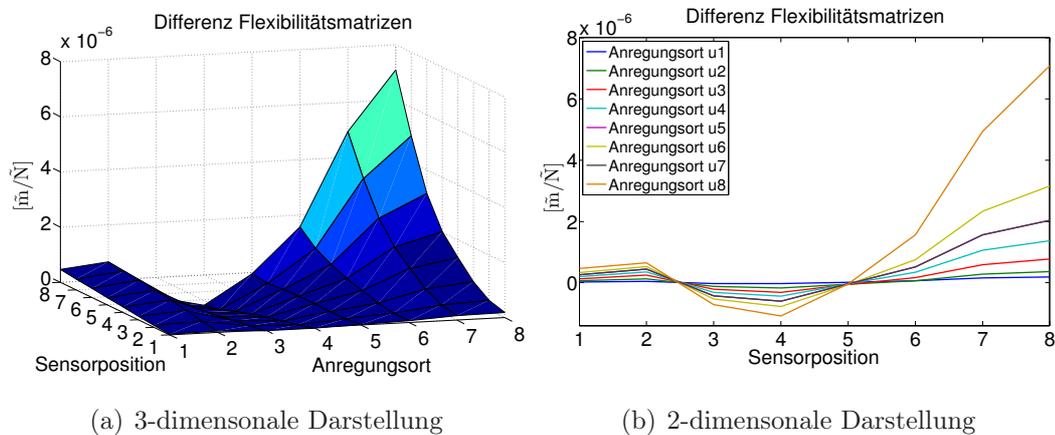


Abb. 7.28: Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen (Sägeschnitt zwischen Punkt 5 und 6 – 20mm tief)

Darstellung der ebenfalls durchgeführten Versuche mit einer Sägeschnitttiefe von 6mm wird hier verzichtet, da mit jeweils lediglich drei bzw. fünf durchgeführten Messungen (Tabelle 7.1) die Datenbasis für eine hinreichende Mittelung zu klein war und dementsprechend keine stabilen Ergebnisse gewonnen werden konnten.

Somit kann abschließend zusammengefasst werden:

- Lokale Veränderungen der Struktursteifigkeit konnten anhand der Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen lokalisiert werden, wenn eine hinreichende Anzahl von Messungen gemittelt wurden und die Phasenlage der Zustandsraummodelle hinsichtlich einer mechanischen Deutbarkeit optimiert wurde ($\mathbf{CB} \approx \mathbf{O}$).
- Für eine eindeutige Lokalisierung mussten die Steifigkeitsänderungen deutlich sein, da bei den experimentellen Kragbalkenversuchen lediglich eine begrenzte Anzahl an Eigenfrequenzen / Eigenformen mit der Impulsanregung anregbar waren und sich außerdem Mess- bzw. Identifikationsfehler überproportional bei der Differenzenbildung auswirken.
- Es wird erwartet, dass sich auch wesentlich kleinere Steifigkeitsänderungen mit der beschriebenen Methode gut lokalisieren lassen, wenn andere

Anregungen genutzt werden können (z.B. elektrodynamische Shaker), die es erlauben, höhere Eigenfrequenzen / Eigenformen anzuregen und / oder mehr Energie einzutragen, um zufällige Fehler zu minimieren.

- Weiterhin ist davon auszugehen, dass bei Strukturen, bei denen ausreichend Moden (abhängig von der Sensoranzahl) im Messsignal enthalten sind, durch eine dann sinnvoll mögliche Inversion korrespondierende Steifigkeitsmatrizen identifiziert werden können, die wesentlich sensitiver Steifigkeitsveränderungen anzeigen, als die in diesem Abschnitt genutzten korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen
- In fortführenden Arbeiten sollte untersucht werden, ob weitere Möglichkeiten bestehen, Abweichungen zwischen Zustandsraummodell der Referenzstruktur und der geschädigten Struktur herauszustellen, um die – bei kleinen Unterschiede numerisch instabile – Differenzenbildung zu vermeiden. Ansätze hierfür findet man bereits in der Literatur, z.B. bei Basseville et al. [7].

7.2 Großversuch an einer Stabbogenbrücke

Zu Beginn des Forschungsprojektes – in dessen Rahmen diese Arbeit entstand – bot sich die Möglichkeit, Schwingungsmessungen an einer weit gespannten Stabbogenbrücke durchzuführen. Im Zuge des Rückbaus der Brücke war es möglich, einen Hänger zu durchtrennen. Dementsprechend liegen experimentelle Messdaten vom Ausgangszustand (Referenz) und einem geschädigten Zustand der Brücke vor, die unter praxisgerechten Bedingungen aufgezeichnet worden sind. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, inwieweit die vorgenommene Strukturveränderung mit den entwickelten Methoden zur Schadensbestimmung lokalisierbar ist.

7.2.1 Beschreibung der Brückenstruktur

Nördlich vom Ruhrgebiet quert die Landstraße 463 bei der Ortschaft Hünxe mit einem Brückenbauwerk den Wesel-Datteln-Kanal. Dieser verbindet den Dortmund-Ems-Kanal mit dem weiter westlich gelegenen Rhein. Verantwortlich für den Betrieb und die Unterhaltung der „Hünxer Brücke Nr. 411“ ist der

Bund, vertreten durch das Wasser- und Schifffahrtsamt Duisburg-Meiderich, welches die durchgeführten Schwingungsmessungen freundlicherweise ermöglichte und unterstützte. Bei der Brücke handelte es sich um eine Stabbogen-



Abb. 7.29: Ansicht der Brücke in Hünxe aus östlicher Richtung

brücke, die in den Jahren 1951/1952 an gleicher Stelle wie eine im 2. Weltkrieg zerstörte Vorgängerbrücke errichtet wurde. Unter anderem aufgrund der damals begrenzt verfügbaren Stahlmengen, breitete sich die Spannbetontechnologie seinerzeit rasant aus. Dies führte dazu, dass bei der Brücke in Hünxe – für heutige Verhältnisse völlig atypisch – alle Tragglieder aus Spannbeton waren. Lediglich die beiden Bögen waren schlaff bewehrte Betonbauteile.

Eine im Jahr 2000 durchgeführte Brückenprüfung deckte zahlreiche Mängel und teilweise weit fortgeschrittene Korrosionsschäden auf, die aus heutiger Sicht vorwiegend auf eine mangelnde Qualität der eingesetzten Baustoffe zurückzuführen sind (der Beton wurde seinerzeit auf der Baustelle handgemischt!). Infolgedessen entschied man sich, einen Ersatzneubau zu errichten, nach dessen Fertigstellung an der „alten“ Brücke zahlreiche Schwingungsmessungen im Zuge des Rückbaus durchgeführt werden konnten.

Die Hünxer Brücke hatte eine Spannweite von 62,50 m, eine Breite von 13,90 m und einen Bogenstich von 8,60m. Auf dem nördlichen Widerlager wurde sie durch unverschiebbare Stahl-Linienkipplager gehalten, auf dem südlichen durch Rollenlager. Das Haupttragwerk der Brücke bestand aus zwei Langerschen Balken. In Querrichtung bildeten jeweils zwei Hänger mit einem

Querträger biegesteife Halbrahmen. Außerhalb der beiden Bogenebenen waren in Verlängerung der Fahrbahnplatte zwei auskragende Fußwegplatten angeordnet.

7.2.2 Beschreibung der experimentellen Messungen

Aufgrund der seltenen Möglichkeit, an einer realen Brückenstruktur künstlich Schäden hervorzurufen und dies messtechnisch zu begleiten, wurden zahlreiche Schwingungsmessungen durchgeführt. Bevor im Zuge des Rückbaus der Brücke ein Hänger durchtrennt wurde, fanden mehrfache Messkampagnen statt, um den ungeschädigten Referenzstand aufzuzeichnen. Außerdem wurden erste Erfahrungen gewonnen, wie sich das Brückenbauwerk verhält. Diese Daten konnten genutzt werden, um das für begleitende Simulationsrechnungen erstellte FE-Modell an die Messergebnisse anzupassen.

Bei den durchgeführten Messung kann man unterscheiden nach der Art der Anregung:

- Deterministisch - mit impulsförmiger Anregung
- Stochastisch - mit Anregung aus Verkehr, Wind etc.

Die durchgeführten Messungen mit stochastischer Anregung können weiter unterteilt werden in Messungen mit fester Sensorplatzierung und Messungen, bei denen neben sechs fix platzierten Referenzsensoren die verbliebenen zehn Sensoren blockweise versetzt wurden, um die Messpunktauflösung signifikant zu erhöhen (Polyreferenz-Setup). Auf die Messungen mit stochastischer Anregung soll jedoch an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Erste Ergebnisse hierzu wurden bereits veröffentlicht (Ebert und Lenzen [17], [53]).

Zunächst wurde versucht, eine deterministische Anregung durch ein in ein Sandbett fallendes Fallgewicht zu realisieren. Nachdem erste Versuche hierzu nicht die gestellten Anforderungen erfüllen konnten (siehe auch Richter [77]) kam ein Impulshammer der TU Darmstadt zum Einsatz (Abbildung 7.30a). Der Impulshammer wurde an den jeweiligen Anregungsorten (neben den Hängern) fest mit der Fahrbahnplatte verbunden. Ein bewegliches Gewicht mit einer Masse von 150kg konnte pneumatisch beschleunigt auf die Grundplatte „geschossen“ und anschließend wieder aufgefangen werden, um ein Prellen zu



(a) Impulshammer

(b) Durchtrennter Hänger

Abb. 7.30: Brücke in Hünxe - Details der experimentellen Durchführung

vermeiden. Beim Aufprall wurden Beschleunigungen von ca. 1000m/s^2 gemessen, so dass Kräfte von ca. 150kN eingetragen werden konnten. Das gemessene Impulssignal war ähnlich einer Halbsinuswelle und sehr gut reproduzierbar.

Da ein 16-kanaliges Messsystem zur Verfügung stand und ein Messkanal für die Aufzeichnung des anregenden Impulses benötigt wurde, konnten weitere 15 Messkanäle für die Aufzeichnung der Strukturantwort genutzt werden. Aufgrund der Größe der Brücke reichte die Anzahl der Messkanäle jedoch nicht aus, um die Antwortreaktion der gesamten Brücke vollumfänglich aufzunehmen. Es wurde sich auf die Erfassung der vertikalen Beschleunigungen der beiden Hauptträger beschränkt. Die genaue Sensorplatzierung ist Abbildung 7.31 zu entnehmen.

Die vertikal ausgerichteten uniaxialen Beschleunigungssensoren waren jeweils in Feldmitte angeordnet. Die impulsförmige Anregung mit dem Impulshammer erfolgte jeweils neben den 15 Sensoren (aus konstruktiven Gründen nicht in Feldmitte, sondern neben den Hängern). An jedem Anregungsort wurden jeweils vier Impulsanregungen durchgeführt, so dass eine komplette Messkampagne aus insgesamt 60 Messungen bestand (15 Anregungsorte x 4 Anregungen).

Zunächst wurde am 16. Oktober 2005 die Referenzmessung mit determinis-

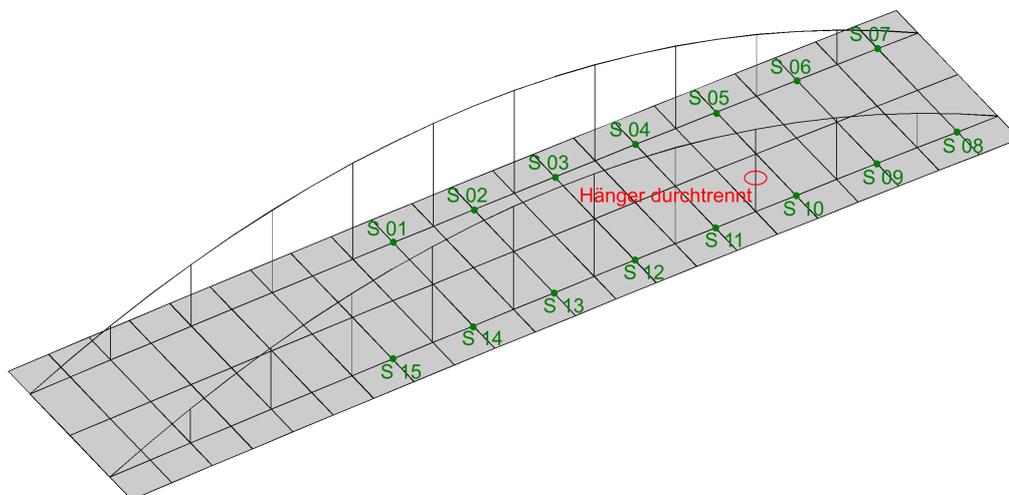


Abb. 7.31: Hängerausfall – Skizze mit Sensoranordnung

tischer Anregung durchgeführt. Nachdem in der Nacht zum 17. Oktober 2005 der Hänger durchtrennt wurde, sind die Messungen des geschädigten Zustands am folgenden Tag aufgezeichnet worden. Parallel dazu fanden ebenfalls die Messungen mit stochastischer Verkehrs- und Windanregung statt.

7.2.3 Deterministische Systemidentifikation

In Abbildung 7.32 sind exemplarisch die bei der experimentellen Impulsanregung wirkende Kraft (berechnet aus gemessener Beschleunigung) sowie die zugehörigen Antwortbeschleunigungen der 15 Messpunkte dargestellt.

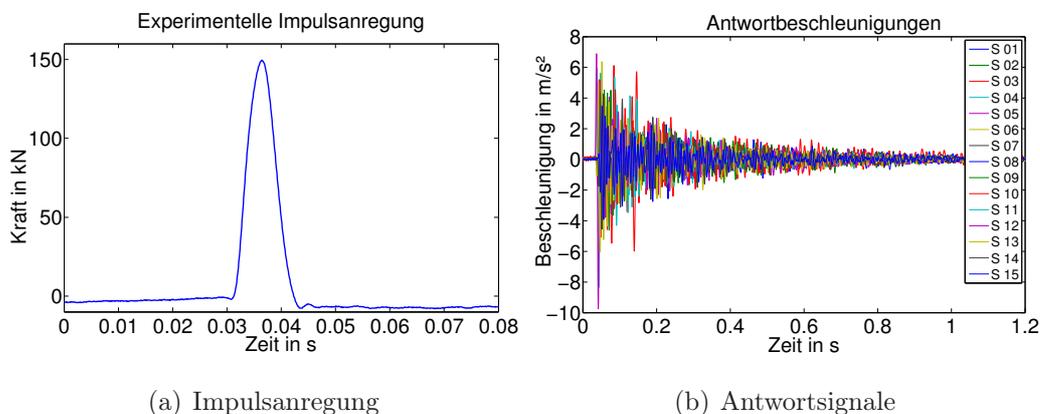


Abb. 7.32: Messsignale der experimentellen Schwingungsmessung

Für eine erste Analyse der Messsignale kann das Fourierspektrum der Antwortsignale betrachtet werden (Abbildung 7.33).

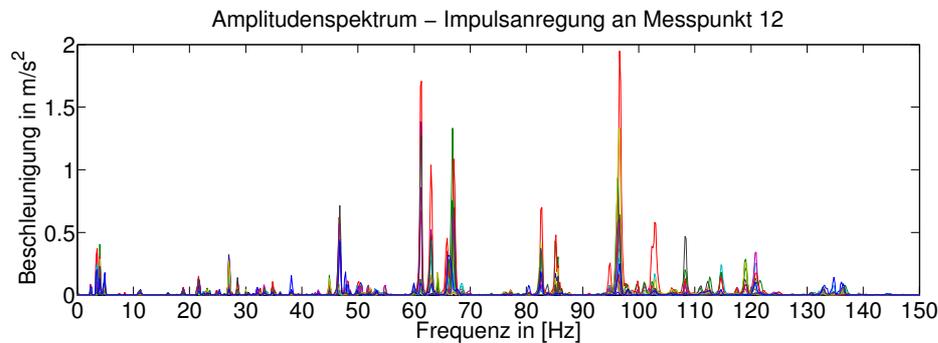


Abb. 7.33: Spektrum Referenzsystem bei Impulsanregung

Man erkennt, dass dominante Signalanteile im Bereich von ca. 40 Hz bis ca. 120 Hz in den Messsignalen enthalten sind. Dies ist bedingt durch die Tatsache, dass die Antwortbeschleunigungen der Struktur gemessen wurden, die im höherfrequenten Bereich größere Amplituden aufweisen. Durch eine einfache bzw. doppelte Integration des Antwortspektrums zu Schwinggeschwindigkeiten bzw. Schwingverschiebungen könnten die maßgebenden globalen Eigenformen mit Signalanteilen im niederfrequenten Bereich in der spektralen Darstellung besser gezeigt werden.

Bei der Black-Box-Identifikation des Übertragungsverhaltens bereiteten die dominanten höherfrequenten Signalanteile insofern Schwierigkeiten, dass es fast unmöglich war, die vorwiegend interessierenden niederfrequenten Eigenformen (im Bereich bis ca. 25 Hz) zu identifizieren. Die identifizierten Zustandsraummodelle enthielten bei kleinen Zustandsraumdimensionen lediglich die in der spektralen Darstellung bereits erkenntlichen höherfrequenten Signalanteile. Um die globalen Eigenmoden bis hinunter zu 2,4 Hz zu identifizieren, waren Zustandsraumdimensionen $n \geq 250$ notwendig. Eine ausreichende Modellgüte war dann jedoch im interessierenden niederfrequenten Bereich nicht mehr gegeben, so dass eine digitale Tiefpassfilterung der Messsignale vor der Modellidentifikation notwendig wurde.

Für die digitale Tiefpassfilterung wurde ein FIR-Parks-McClellan-Filter mit linearer Phasenlage verwendet. Um eine ausreichende Flankensteilheit und eine ausreichend kleine Welligkeit im Durchlaßbereich zu realisieren, musste mit

einer Filterordnung $n \geq 500$ gearbeitet werden. Die Grenzfrequenz des Durchlaßbereiches lag bei ca. 25 Hz. Bei der nachträglichen Digitalfilterung von Mess-

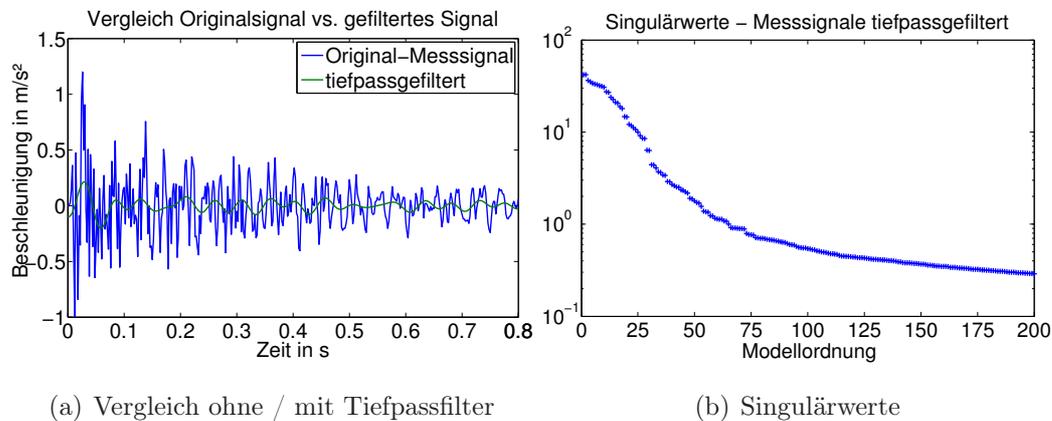


Abb. 7.34: Tiefpassfilterung der Messsignale

daten muss unbedingt der Einfluss der Filterfunktion auf die Signale beachtet werden. Insbesondere wenn die identifizierten Black-Box-Modelle in eine mechanisch deutbare White-Box-Darstellung überführt werden sollen, können sich unerwünschte Effekte der Filterung störend auswirken (z.B. „Überschwingen“ bei plötzlichen Signaländerungen). Näheres hierzu ist bereits in Abschnitt 6.1.2 ausgeführt.

Im Gegensatz zu den an der Laborstruktur durchgeführten Messungen weisen die Singulärwerte trotz der Tiefpassfilterung kein signifikantes Gap auf, an dem klar zwischen Nutz- und Störsignalen unterschieden werden kann (Abbildung 7.34(b)). In der Literatur wird hierzu häufig auf die Anwendung von Stabilisationsdiagrammen zur eindeutigen Polbestimmung verwiesen. Dabei werden die Systempole in Abhängigkeit von der Modellordnung in einem Diagramm dargestellt. Pole, die sich zwischen verschiedenen Modellordnungen nur innerhalb bestimmter Toleranzkriterien unterscheiden (Frequenzänderung, Dämpfungsänderung, MAC-Wert), werden darin zusätzlich als stabiler Pol dargestellt. Im Rahmen dieser Arbeit konnten solche Stabilisationsdiagramme nicht gewinnbringend eingesetzt werden. Wichtig war es hierfür, Zustandsraummodelle mit möglichst kleiner Modellordnung im Rahmen der Realisierung zu bestimmen, die trotz der (vergleichsweise) kleinen Modellordnung alle interessierenden Dyaden (Moden) enthalten. Dies konnte –sofern notwendig– am besten durch eine Digitalfilterung erreicht werden. Zutreffende Zustandsraum-

modelle waren damit auch dann bestimmbar, wenn in den Singulärwerten kein signifikantes „Gap“ erkennbar war, wie nachfolgend noch gezeigt wird.

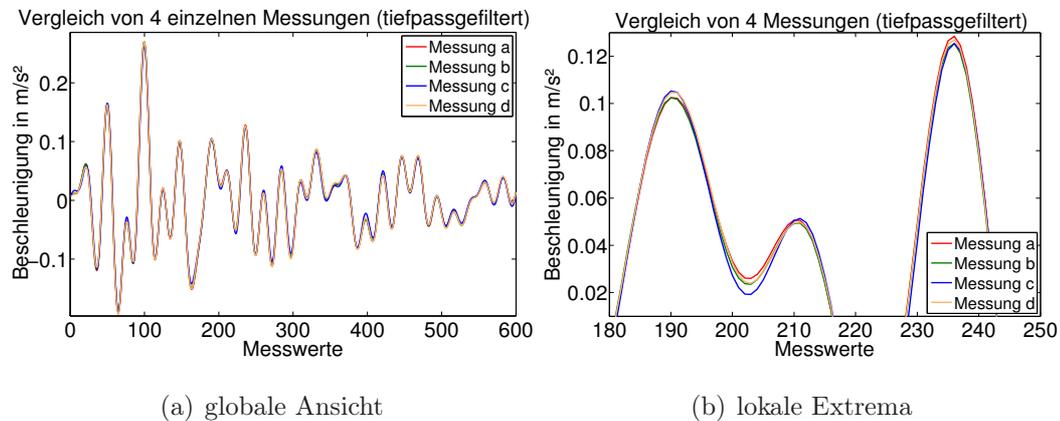


Abb. 7.35: Vergleich der Messsignale von vier identischen Messungen

Zunächst soll jedoch noch etwas näher auf die Güte der Messsignale eingegangen werden. Ähnlich zu den Schwingungsmessungen im Labor sind auch die an der Brücke in Hünxe durchgeführten Messungen sehr gut reproduzierbar. Betrachtet man den globalen Signalverlauf, so ist eine sehr gute Übereinstimmung von einzeln ausgeführten Messungen bei Impulsanregung festzustellen (Abbildung 7.35(a)). Sichtbare Unterschiede werden erst deutlich, wenn der Verlauf von lokalen Extrema vergrößert dargestellt wird (Abbildung 7.35(b)). Diese sind allerdings maßgeblich für die Skalierung der einzelnen Dyaden. Somit ist das prinzipielle dynamische Verhalten der Brückenstruktur anhand einer einzelnen Messung zutreffend modellierbar. Greift man aber auf die numerisch nicht unkritische Differenzenbildung von Markovparametern (und damit auch von Dyaden) zurück, um Strukturschäden zu detektieren, so wird eine Mittelung der Signale von mehreren Messungen notwendig, um zufällige Fehler zu minimieren, wie im nachfolgenden Abschnitt noch näher ausgeführt wird.

In Abbildung 7.36 ist exemplarisch an zwei Beispielen dargestellt, inwieweit experimentell die Symmetrie der Messsignale erreicht werden konnte. Die bei linear-elastischen Simulationsrechnungen sich einstellende einhundertprozentige Symmetrie der Messsignale konnte näherungsweise auch experimentell erreicht werden, wenngleich die Übereinstimmung nicht vollständig gegeben ist. Dies liegt vor allem daran, dass aus konstruktiven Gründen bei den Versuchen die Impulsanregung ca. 2,0m neben den Sensorstandorten erfolgte.

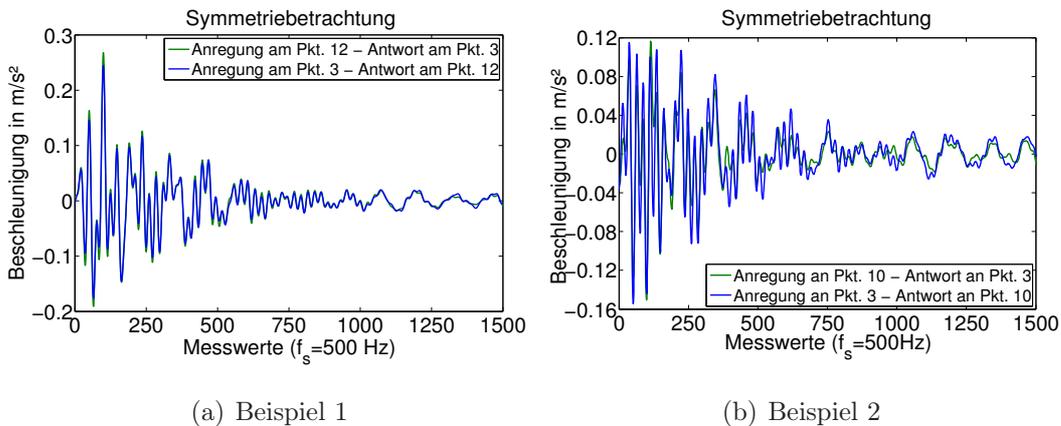


Abb. 7.36: Symmetriebetrachtung - tiefpassgefilterte und gemittelte Signale

Für die Black-Box-Realisierung gelten die bei den Laborversuchen beschriebenen Feststellungen analog: Bei der Realisierung mit der Impulsantwort (nach Ho und Kalman [41]) läßt sich die Dynamik des Systems zutreffend bestimmen. Fehlerhaft erfolgt jedoch die Skalierung der Dyaden, da der im Algorithmus angenommene Dirac-Impuls in Realität nicht gegeben ist. Dennoch können damit zutreffende Black-Box-Modelle identifiziert werden, wenn zur Bestimmung der Eingangsmatrix $\bar{\mathbf{B}}$ (der Durchgriffsmatrix $\bar{\mathbf{D}}$) auf das Simulationsmodell nach Abschnitt 3.2 zurückgegriffen wird. Alternativ hierzu kann ein Black-Box-Modell des Übertragungsverhaltens mit dem PO-MOESP-Algorithmus realisiert werden. Aufgrund des speziellen (impulsförmigen) Eingangs gelang allerdings auch dabei die Bestimmung von $\bar{\mathbf{B}}$ lediglich mit dem Simulationsmodell. Aufgrund der vergleichsweise hohen Dämpfung der Brückenstruktur und der daraus resultierenden kurzen Schwingzeiten sowie der vergleichsweise großen Anzahl an Messkanälen war die Anzahl der Blockzeilen mit denen die Hankelmatrizen aufgebaut werden konnten begrenzt. Dies führte teilweise dazu, dass nicht alle Eigenfrequenzen nebst zugehöriger Dyaden identifiziert werden konnten.

Insgesamt betrachtet konnte das Übertragungsverhalten der Brücke in Hünxe am besten modelliert werden, wenn die Dynamik ($\bar{\mathbf{A}}$ und $\bar{\mathbf{C}}$) mit den Algorithmen nach Ho und Kalman bestimmt wurde (erster Messwert für den Aufbau der Hankelmatrix: ausreichende Anzahl an Messwerten nach Impuls, damit Filter eingeschwungen war) und die Bestimmung der Skalierung sowie der Phasenlage ($\bar{\mathbf{B}}$) mit dem Simulationsmodell realisiert wurde. Auf eine Bestim-

mung der Durchgriffmatrix $\bar{\mathbf{D}}$ konnte auch bei den Messungen an der Brücke in Hünxe verzichtet werden. Der Einfluss auf den für die strukturmechanische Interpretation maßgebenden Zustandsraumparameter $\bar{\mathbf{B}}$ war vernachlässigbar, ebenso weitere Effekte, die bei der theoretischen Herleitung nach der Bewegungsgleichung der Mechanik und der Messung von Beschleunigungssignalen eine direkte Durchgriffmatrix fordern.

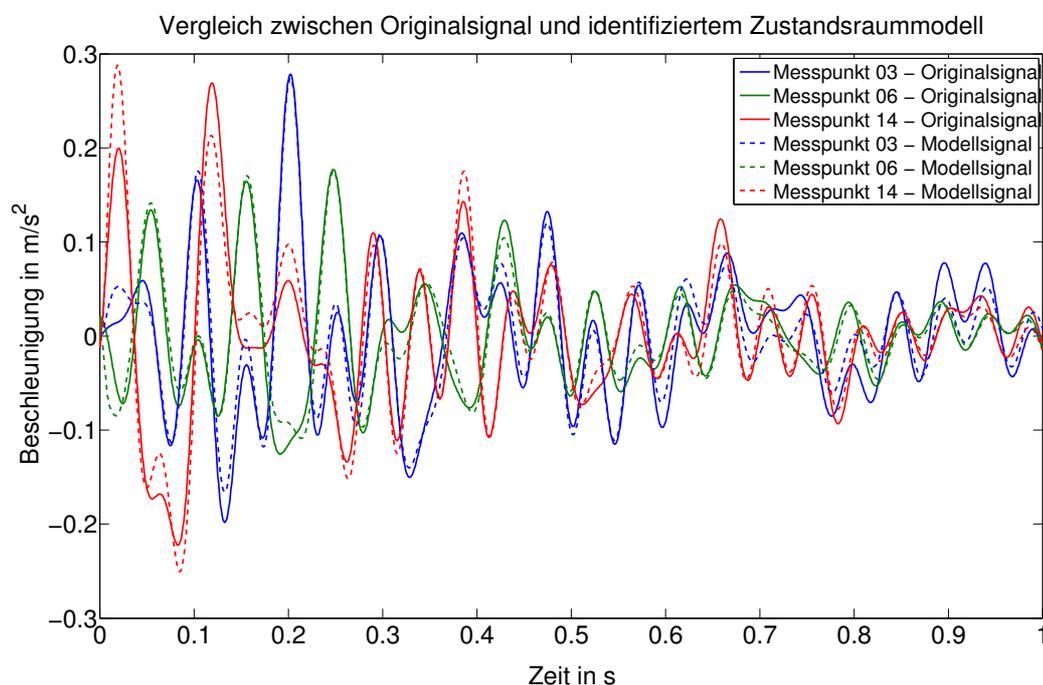


Abb. 7.37: Exemplarischer Vergleich zwischen originalen Messsignalen und aus dem identifizierten Zustandsraummodell generierten Signalen

In Abbildung 7.37 sind exemplarisch für eine Messung die Originalsignale von drei Messkanälen durchgezogen dargestellt. Vergleichend dazu sind gestrichelt die aus dem identifizierten Black-Box-Zustandsraummodell generierten Signale dargestellt, wenn das Modell mit dem gemessenen Impuls am Eingang angeregt wird. Kleinere Abweichungen sind vorwiegend der begrenzten Modellordnung des Modells geschuldet (in der Darstellung ist $n = 26$). Grundsätzlich jedoch wird das Strukturverhalten zutreffend modelliert.

7.2.4 Lokalisation Hängerausfall

Bei den Messungen an der Brücke in Hünxe konnten experimentell die Auswirkungen eines Hängerausfalls messtechnisch erfasst werden. Aufgrund eines sehr engen Zeitfensters, in dem die Versuche durchführbar waren (nach Sperrung für den allgemeinen Verkehr - vor Rückbau der Brücke), war es jedoch nicht möglich, die Schädigung am Hänger stufenweise zu vergrößern. Es konnte lediglich ein Totalausfall nachgebildet werden.

Der geschädigte Hänger befand sich zwischen den Messpunkten S10 und S11, wie Abbildung 7.31 zu entnehmen ist. Vergleicht man die modalen Parameter zwischen ungeschädigtem Referenzsystem und geschädigtem System (Hängerausfall), so werden vorwiegend im etwas höherfrequenten Bereich zwischen ca. 12 Hz und ca. 22 Hz Unterschiede deutlich. Frequenzen oberhalb von 22 Hz konnten aufgrund der begrenzten Sensorauflösung und der Beschränkung auf die Erfassung der vertikalen Bewegungen der beiden Hauptträger nicht mehr eindeutig physikalisch zugeordnet werden. Insbesondere eine Torsionseigenform im Bereich von ca. 16 Hz (mit 5 lokalen Extrema pro Hauptträger) zeigte deutliche Veränderungen. Eine Übersicht über die globalen Eigenformen der Brücke und die Frequenzverschiebungen durch den Hängerausfall befindet sich in Anhang A. Etwas ausführlicher erfolgt die Darstellung der Modenveränderungen infolge Hängerausfall bei Lenzen und Ebert [52]. Insgesamt muss festgestellt werden, dass anhand der modalen Parameter Unterschiede zwischen Referenzsystem und geschädigtem System feststellbar sind, eine genaue Schadenslokalisierung ist damit jedoch nicht möglich. Möglich wird die Lokalisation des Hängerausfalls, wenn die aus den identifizierten Zustandsraummodellen extrahierten korrespondierenden Flexibilitäts- bzw. Steifigkeitsmatrizen genutzt werden. Entsprechend den Ausführungen der vorangegangenen Abschnitte erfolgt die Beurteilung anhand der Differenz der entsprechenden Matrizen aus ungeschädigtem Referenzsystem und geschädigtem System (Hängerausfall):

$$\Delta\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}_s - \tilde{\mathbf{F}}_r \quad (7.16)$$

$$= (\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_r - (\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_s \quad (7.17)$$

bzw.

$$\Delta\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_s - \tilde{\mathbf{K}}_r \quad (7.18)$$

$$= (\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_r^{-1} - (\mathbf{C}_d\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_s^{-1} \quad (7.19)$$

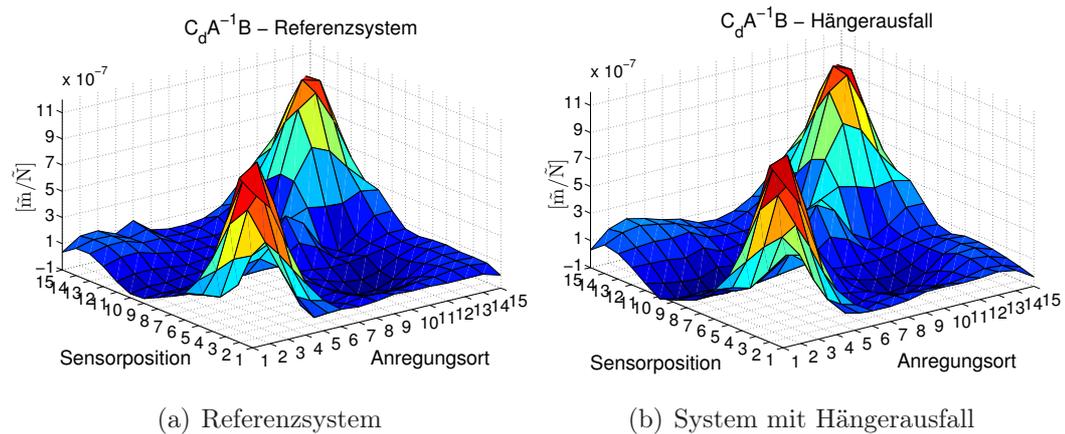


Abb. 7.38: Markovparameter (korrespondierende Flexibilitätsmatrizen) – identifiziert mit gemittelten und tiefpassgefilterten Messsignalen

Für die Identifikation der Zustandsraummodelle wurden die gemessenen Zeitsignale zunächst tiefpassgefiltert, um ausschließlich den Frequenzbereich zwischen 2 Hz und 25 Hz im Modell abzubilden. Anschließend wurden die Zeitsignale der vier durchgeführten Messreihen gemittelt, um zufällige Fehler zu minimieren. Die Zustandsraummodelle wurden mit dem PO-MOESP-Algorithmus und einer Zustandsraumdimension von $n = 26$ identifiziert. Die Bestimmung von $\bar{\mathbf{B}}$ erfolgte mit dem Simulationsmodell.

In Abbildung 7.38 sind die korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen von der ungeschädigten Referenzstruktur und dem geschädigten System dargestellt. Man erkennt, dass trotz der vergleichsweise starken Schädigung der Brücke die korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen lediglich geringe Unterschiede aufweisen. Infolgedessen treten bei der Differenzbildung zufällige Fehler überproportional in Erscheinung. Ohne die Mittelung der Ergebnisse von mehreren Messreihen war es nicht möglich, stabile Ergebnisse zu erhalten – ebenso wie bei den Messungen an der Laborstruktur.

In Abbildung 7.39 ist die Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen dargestellt. In dieser Darstellung sind alle 26 komplex-konjugierten

Dyaden in den Markovparametern enthalten. In Analogie zu den Erkenntnissen aus den FE-Modellrechnungen ist die Schädigung nicht eindeutig lokalisierbar. Zum einen ist die Brückenstruktur derart komplex, dass sich kein einfaches Entscheidungskriterium einstellt (wie beispielsweise ein Knick bei Kragbalckenstrukturen), zum anderen weisen die Dyaden der niederfrequenten Moden derart große Amplituden auf, dass die Dyaden der höherfrequenten Moden mit vergleichsweise kleinen Amplituden (die den Schaden gut lokalisierbar machen) keinen Einfluss auf die Darstellung haben.

Entsprechend theoretischer Betrachtungen ist eine lokale Steifigkeitsänderung wesentlich schärfer an der Differenz der Steifigkeiten beider Systeme erkennbar. Die dazu notwendige Inversion – um aus den identifizierten Flexibilitätsmatrizen Steifigkeitsmatrizen zu erhalten – ist zumindest bei realen Messungen nicht trivial und führt häufig zu numerischen Fehlern. In Abbildung 7.40 sind die Singulärwerte der beiden korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen dargestellt, die im Zuge der Inversion berechnet wurden. Eine eindeutige Bestimmung, wieviel Singulärwerte bei der Inversion berücksichtigt werden sollten, ist damit nicht möglich. In Anbetracht dessen, dass sich der zugrundeliegende Markovparameter aus 13 Dyaden zusammensetzt, erfolgte eine Inversion zur Steifigkeitsmatrix mit 13 Singulärwerten. Die resultierende Differenz der korrespondierenden Steifigkeitsmatrizen ist in Abbildung 7.41 dargestellt. Zunächst ist festzustellen, dass die Schädigung aus dieser Darstellung deutlich besser als aus der Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen zu lokalisieren ist. Betrachtet man die 2-dimensionale Darstellung aus Sicht der Sensorpositionen, ist der Hängerausfall zwischen Sensor 10 und Sensor 11 bereits sehr gut lokalisierbar. Aus Sicht der Anregungsorte kann der Schaden nicht richtig lokalisiert werden. Die fehlende Symmetrie ist dabei vorrangig der Tatsache geschuldet, dass die Orte der Impulsanregungen und die Sensorposition beim Experiment aus konstruktiven Gründen seitlich versetzt waren. Erwähnt werden soll auch, dass die Differenz der korrespondierenden Steifigkeitsmatrizen hochgradig von der Anzahl der Singulärwerte abhängig war, die bei der Inversion berücksichtigt wurden. Ohne Wissen, an welcher Position der Hängerausfall in Realität war, wäre eine sichere und eindeutige Lokalisation damit nicht möglich gewesen.

In Anbetracht der Schwierigkeiten bei der Inversion von der Flexibilität

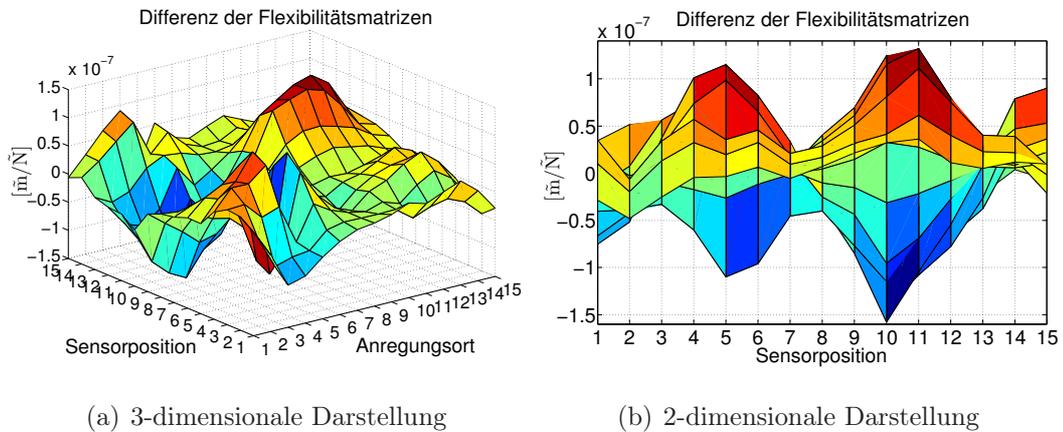


Abb. 7.39: Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen (alle Dyaden)

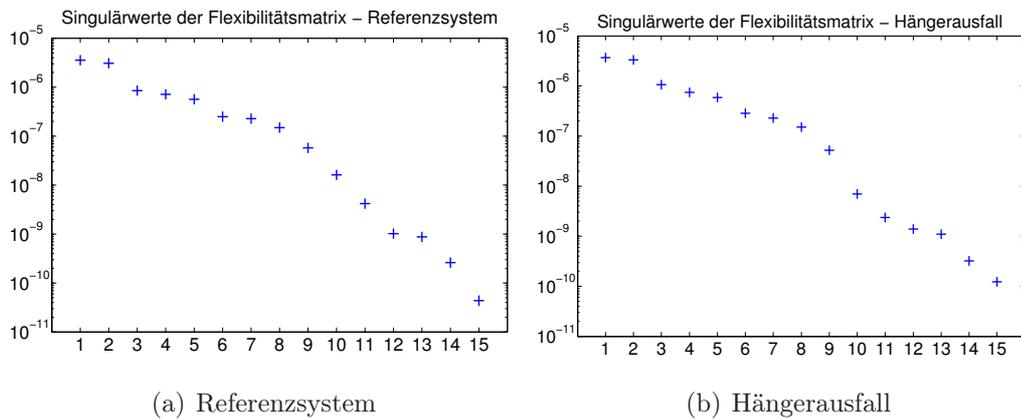


Abb. 7.40: Singulärwerte der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen

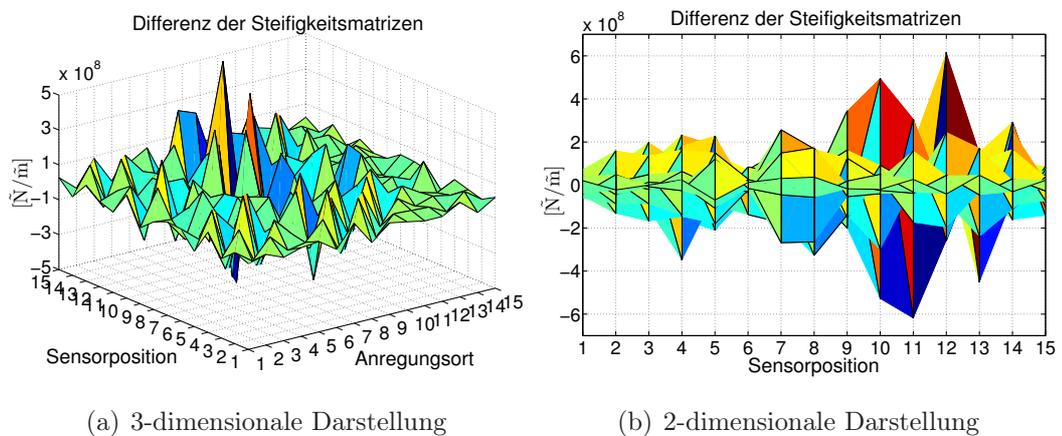


Abb. 7.41: Differenz der korrespondierenden Steifigkeitsmatrizen (Inversion der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen mit 13 Singulärwerten)

zur Steifigkeit und dem Wissen, dass sich lokale Steifigkeitsänderungen vorwiegend in höherfrequenten Dyaden bzw. Moden niederschlagen, wurde ein anderer Ansatz verfolgt: Zur Schadenslokalisierung wurde die Differenz von korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen gebildet, bei denen die Anteile der niederfrequenten Dyaden nicht enthalten waren. Bei den zunächst durchgeführten FE-Modellrechnungen sind damit lokale Schädigungen eindeutig lokalisierbar gewesen (Abschnitt 6.3).

Aus dem Vergleich der Eigenformen von ungeschädigter und geschädigter Struktur war bekannt, dass sich Veränderungen vorwiegend oberhalb von 12 Hz einstellen. Diese Information wurde genutzt, um die identifizierten kor-

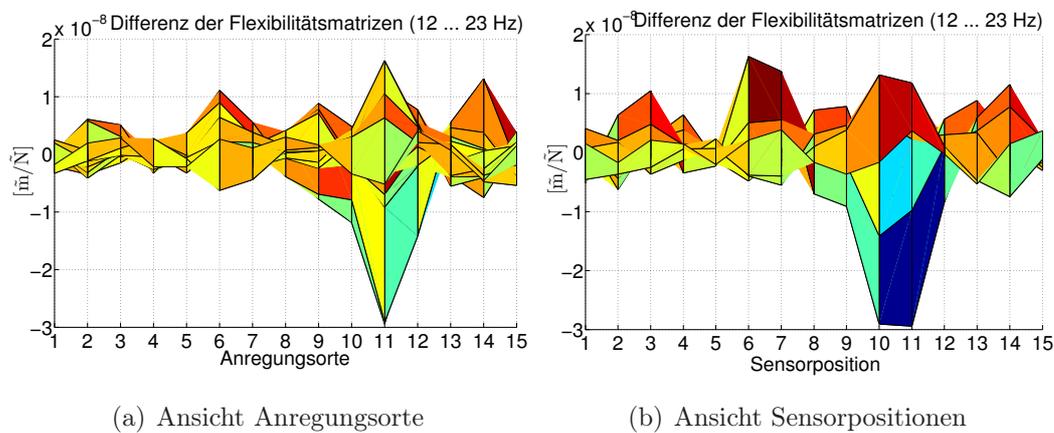


Abb. 7.42: Differenz der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen – lediglich Dyaden zwischen 12 Hz und 23 Hz sind enthalten

respondierenden Flexibilitätsmatrizen durch eine dyadische Zerlegung zweizuteilen – in einen Anteil 2...12 Hz und einen Anteil 12...23 Hz. Auf die Darstellung des niederfrequenten Anteils wird hier verzichtet. Dieser ist praktisch deckungsgleich zur Darstellung in Abbildung 7.39. Eindeutig lokalisierbar wird der Schaden, wenn man sich die Differenz der höherfrequenten Anteile der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen ansieht (Abbildung 7.42). Hier stellt sich ein scharfer Peak am Ort der Schädigung ein (zwischen Messpunkt 10 und 11). Dieser ist in der zweidimensionalen Darstellung sowohl aus Blickrichtung der Sensorpositionen als auch der Anregungsorte eindeutig und ortsgenau. Im Gegensatz zu den Schwierigkeiten bei der Bildung der Steifigkeitsmatrizen ist hierbei keine Inversion notwendig. Außerdem war die Schadenslokalisierung auch dann eindeutig möglich, wenn die Grenze für die Einteilung in höher- und nie-

derfrequente Dyaden verschoben wurde. Notwendig war es lediglich, dass die unteren Dyaden mit vergleichsweise großen Amplituden (bis ca. 7 Hz) bei der Differenzenbildung nicht berücksichtigt wurden.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methodik beschrieben, wie unter Verwendung von Schwingungsmessungen Veränderungen an mechanischen Strukturen lokalisiert werden können. Das Übertragungsverhalten der zugrundeliegenden Strukturen wird hierzu mit Verfahren der Systemtheorie in Black-Box-Zustandsraummodellen mathematisch abgebildet. Zur Systemidentifikation dienen Subspace-Algorithmen, die unter Anwendung der linearen Algebra mittels Singulärwertzerlegung bzw. QR-Zerlegung die systembeschreibenden Parametermatrizen direkt aus den vorliegenden Messdaten bestimmen. Die Realisierung erfolgt mit der Methode nach Ho und Kalman (Realisierung mit Impulsantwort) bzw. einem MOESP-Algorithmus (Multivariable Output Error State Space Model Identification).

Aufbauend auf diesen bekannten Identifikationsverfahren ist es das Ziel dieser Arbeit, die rein mathematisch interpretierbaren Black-Box-Modellparameter einer physikalischen Interpretation zugänglich zu machen, um daran strukturmechanische Veränderungen lokalisieren zu können. Hierfür wird zunächst theoretisch gezeigt, dass die physikalisch deutbaren Markovparameter (Produkte der systembeschreibenden Zustandsraumparameter) direkt in die dem System zugrundeliegenden strukturmechanischen Parameter Masse, Steifigkeit und Dämpfung überführt werden können. Da die theoretische Betrachtung auf der Basis der Bewegungsgleichung der Mechanik beruht, ist dies jedoch nur bei idealem Strukturverhalten möglich, wie anhand von Simulati-

onsrechnungen gezeigt wird. Black-Box-Zustandsraummodelle, basierend auf experimentellen Messdaten und identifiziert mit Methoden der Systemtheorie, sind demgegenüber wesentlich allgemeingültiger, da ausschließlich das experimentell bestimmte Übertragungsverhalten zutreffend abgebildet sein muss. Um dennoch Markovparameter zur strukturmechanischen Interpretation nutzen zu können, werden Randbedingungen – resultierend u.a. aus den theoretischen Annahmen der Bewegungsgleichung der Mechanik – erörtert, die gewährleistet sein müssen:

- Die Markovparameter müssen quadratisch sein. Das ist gleichbedeutend einer Anregung an allen Sensorpositionen ($p=q=N$).
- Die Anzahl der im Modell enthaltenen Moden muss der Anzahl der Freiheitsgrade entsprechen
- Die Markovparameter elastischer, viskos gedämpfter Strukturen müssen in Analogie zu den mechanischen Parametermatrizen positiv-definit und symmetrisch sein
- Die nach der Realisierung zunächst zeitdiskret vorliegenden Zustandsraumparameter sind in eine zeitkontinuierliche Darstellung zu überführen.
- Das Produkt aus \mathbf{C}_d und \mathbf{B} muss einer Nullmatrix entsprechen; \mathbf{D}_d muss ebenfalls einer Nullmatrix entsprechen.

Insbesondere die letztgenannte Bedingung $\mathbf{C}_d\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ist von entscheidender Bedeutung, um Markovparameter strukturmechanisch zu interpretieren. Durch experimentelle Einflüsse (z.B. bei einer realen Impulsanregung) kann es jedoch passieren, dass bei einer Identifikation diese Bedingung lediglich ungenügend erfüllt wird. Hierfür ist in dieser Arbeit eine Möglichkeit aufgezeigt, wie im Nachgang das Modell durch Drehen der Phasenlage diesbezüglich optimierbar ist. Ungeachtet dessen sind bei Identifikationen auf Basis experimenteller Messdaten dennoch nicht alle Anforderungen hinreichend erfüllbar, die notwendig sind, um die strukturmechanischen Parameter unverfälscht zu extrahieren. Gleichwohl sind die Markovparameter physikalisch deutbar und beschreiben das zugrundeliegende, mechanische Strukturverhalten. Die Begriffe korrespondierende Massen-, Steifigkeits- und Flexibilitätsmatrix werden hier eingeführt,

um experimentell identifizierte Strukturparameter von Ergebnissen auf Basis idealisierter Simulationsmodelle abzugrenzen.

Zur Lokalisierung von Strukturveränderungen wird die Differenz der korrespondierenden mechanischen Parametermatrizen herangezogen. Dies ist insofern problematisch, da selbst bei nennenswerten Strukturveränderungen die Zahlenwerte der Matrizen vom ursprünglichen und vom veränderten System in etwa gleich groß sind (schlechte Konditionierung) und sich zufällige Fehler (z.B. experimentell bedingte) überproportional auswirken. Infolge dessen sind bei den experimentellen Versuchen dieser Arbeit stabile Ergebnisse erst möglich, wenn mehrere Einzelmessungen gemittelt werden. Im Vergleich zur Lokalisation von Massenveränderungen ist die Lokalisation von Steifigkeitsveränderungen schwieriger. Eine Ursache ist, dass die korrespondierende Steifigkeitsmatrix erst in Markovparametern höherer Ordnung in Kombination mit Massen- und Dämpfungsmatrizen auftritt. Deswegen erfolgt die Lokalisation von Steifigkeitsveränderungen anhand der korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen. Deren Struktur ist jedoch abhängig vom statischen System. Außerdem erscheinen lokal begrenzte Steifigkeitsänderungen in der Flexibilität verschmiert. Um daraus eine Steifigkeitsmatrix zu generieren ist eine Inversion notwendig, was zumindest bei experimentellen Daten oftmals unmöglich ist.

Anhand von analytischen Signalen und simulierten Messdaten sind Besonderheiten und Funktionalität der erarbeiteten Verfahren demonstriert. Daran ist dargestellt, inwieweit eine Wandlung in die zeitkontinuierliche Darstellung, eine begrenzte Modenanzahl, Rauschteile oder Filterfunktionen die Ergebnisse beeinflussen. Den Schwerpunkt der Arbeit bildet jedoch die Auswertung von experimentellen Daten. Für Labormessungen wurde eine Balkenstruktur genutzt, an der das Strukturverhalten durch zusätzliche Punktmassen und verschieden positionierte Sägeschnitte veränderbar war. Es ist gezeigt, dass die neu vorgestellten Verfahren die vorgenommenen Strukturveränderungen lokalisieren können. Außerdem sind die bei mehreren Großversuchen gewonnenen Messdaten einer Spannbeton-Bogenbrücke ausgewertet. Unmittelbar vor deren Rückbau bestand die Möglichkeit, einen der zwanzig Spannbeton-Hänger zu durchtrennen. Aufgrund der Komplexität der Tragstruktur und der - experimentell bedingt - begrenzten Anzahl von Messdaten ist die Schadenslokalisierung im Vergleich zu den Laborversuchen deutlich aufwendiger. Hierbei

zeigt sich, dass anhand der Flexibilitätsmatrix nur tendenzielle Aussagen zum Schadensort getroffen werden können und die Inversion zur Steifigkeitsmatrix nicht möglich ist. Durch Eliminieren der amplitudenmäßig dominierenden, niederfrequenten Anteile in den korrespondierenden Flexibilitätsmatrizen ist eine Schadenslokalisierung jedoch ohne Inversion möglich.

8.2 Ausblick

Nachdem in dieser Arbeit prinzipiell gezeigt ist, dass aus Black-Box-Verhaltensmodellen mechanisch deutbare Strukturparameter extrahiert werden können, besteht weiterer Forschungsbedarf, um die Entwicklung der beschriebenen Verfahren fortzuführen. Dabei sollten insbesondere die folgenden Fragestellungen berücksichtigt werden:

- Welche Möglichkeiten bestehen, um Strukturparameter auf Basis einer Modellidentifikation bei stochastischer Anregung zu extrahieren? Zuverlässig kann bei diesem Anwendungsfall zurzeit lediglich der Beobachteteil eines Zustandsraummodells identifiziert werden. Ein vollständiges Modell kann durch Einsatz eines Kalman-Filters als optimalen Zustandsbeobachter bestimmt werden (siehe z.B. Lenzen [51]). Bei ersten hierzu durchgeführten Laborversuchen waren die identifizierten mechanischen Parameter jedoch physikalisch unplausibel (siehe Schubert [82]). Alternativ hierzu existieren andere Verfahren, um auf Basis einer Massennormierung die zunächst unvollständigen Modelle zu skalieren (siehe Lopez Aenlle et al. [60]),
- Welche Möglichkeiten bestehen, um eine Schadenslokalisierung auf Basis der strukturmechanischen Parameter unter Vermeidung der Differenzbildung zu gewährleisten? Hiervon ist insbesondere eine stark verbesserte Sensitivität zu erwarten. Erste Ansätze auf Basis der linearen Algebra findet man hierzu bei Basseville et al. [7]. Allerdings ermöglicht das bei Basseville et al. beschriebene Subspace-basierte Verfahren lediglich eine Schadensdetektion anhand eines skalaren Schadensindikators.
- Welche Möglichkeiten bestehen, zu detektierende Degradationen von anderen Einflussparametern (z.B. Temperatureffekte) abzugrenzen?

Literaturverzeichnis

- [1] ALVIN, K. F.: *Second-order structural identification via state space-based system realizations*. PhD thesis, University of Colorado - College of engineering, 1993.
- [2] ALVIN, K. F., A. N. ROBERTSON, G. W. REICH, and K. C. PARK: *Structural system identification: from reality to models*. Computers & Structures, Volume 81, Issue 12:Pages 1149–1176, 2003.
- [3] ANDERSEN, P.: *Identification of Civil Engineering Structures using Vector ARMA Models*. PhD thesis, Aalborg University, 1997.
- [4] ANGELIS, M. DE, H. LUS, R. BETTI, and R.W. LONGMAN: *Extracting physical parameters of mechanical models from identified state-space representations*. Journal of applied mechanics, 69 (5):617–625, 2002.
- [5] BALAGEAS, D. ET AL.: *Structural Health Monitoring*. ISTE Ltd., 2006.
- [6] BARRAUD, A.Y.: *More on the conversion problem of discrete-continuous models*. Applied Mathematics Modelling, 5(12):414–416, 1981.
- [7] BASSEVILLE, M., M. ABDELGHANI, and A. BENVENISTE: *Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring*. Automatica, 36:101–109, 2000.
- [8] BELFA, INTERNET-PRÄSENZ BELASTUNGSFAHRZEUG.
<http://www.belfa.de/index-d.htm>. Abgefragt am 29. März 2008.
- [9] BERNAL, D.: *Load Vectors for Damage Localization*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 128:pp. 7–14, 2002.

- [10] BERNAL, D. and B. GUNES: *A flexibility based approach for the localization and quantification of damage: Application in a benchmark structure*. In PRESS, STANFORD CRC (editor): *3rd International Workshop in Structural Health Monitoring*, 2001.
- [11] CARDEN, E.P. and P. FANNING: *Vibration based condition monitoring: A review*. *Structural Health Monitoring*, Vol. 3 (4):pp. 355–377, 2004.
- [12] DATTA, B. N.: *Finite element model updating, eigenstructure assignment and eigenvalue embedding techniques for vibrating systems*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16(1):pp. 83–96, 2002.
- [13] DE MOOR, B., P. VAN OVERSCHEE, and W. FAVOREEL: *Applied and Computational Control, Signals and Circuits*, chapter Numerical Algorithms for Subspace State-Space System Identification, pages pp. 247–311. Birkhäuser, 1999.
- [14] DERAEMAEKER, A., E. REYNDERS, G. DE ROECK, and J. KULLAA: *Vibration-based structural health monitoring using output-only measurements under changing environment*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 22:pp. 34–56, 2008.
- [15] DOEBLING, D.W., C. R. FARRAR, and R. S. GOODMAN: *Effects of measurement statistics on the detection of damage in the alamosa canyon bridge*. In *Proceedings 15th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida*, 1997.
- [16] EBERT, C.: *Schadenslokalisierung durch Systemidentifikation an einem mechanischen System -Simulation und Experiment-*. Masterarbeit, Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur (FH) Leipzig, Fachbereich Bauwesen, 2005.
- [17] EBERT, C. and A. LENZEN: *Output-only analysis for experimental damage detection of a tied-arch bridge*. In GÜRLEBECK, K. and C. KÖNKE (editors): *17th International Conference on the Application of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering*, number ISSN 1611-4086, 2006.

-
- [18] EICHHORN, A.: *Ein Beitrag zur Identifikation von dynamischen Strukturmodellen mit Methoden der adaptiven Kalman-Filterung*. Doktorarbeit, Universität Stuttgart, 2004.
- [19] EVERS, H.: *Integration geodätischer Meßverfahren in die experimentelle Tragsicherheitsbewertung bestehender Baukonstruktionen*. Diplomarbeit, Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur, Leipzig, 2004.
- [20] EWINS, D. J.: *Modal Testing: Theory, Practise and Application*. Research Studies Press Ltd., 2000.
- [21] FAVOREEL, W., S. VAN HUFFEL, B. DE MOOR, V. SIMA, and M. VERHAEGEN: *Comparative study between three subspace identification algorithms*. 1998.
- [22] FAVOREEL, W., B. DE MOOR, S. VAN HUFFEL, V. SIMA, and M. VERHAEGEN: *Benchmark for subspace system identification algorithms*. Tech. report 98-14, Katholieke Universiteit Leuven, 1998.
- [23] FRANKLIN, G. F., J. D. POWELL, and M. L. WORKMAN: *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1998.
- [24] FRISWELL, M. and J.E. MOTTERSHEAD: *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Springer, 1995.
- [25] FRITZEN, C.-P. and K. BOHLE: *Damage detection based on model updating methods*. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 12:pp. 163–186, 1998.
- [26] FRITZEN, C.-P., P. KRAEMER, and M. KLINKOV: *Structural health monitoring of offshore wind energy plants*. In *Proceedings 4th EWSHM*, pages pp. 19–37, Krakaw, 2008.
- [27] FUELLEKRUG, U.: *Computation of real normal modes from complex eigenvectors*. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 22:57–65, 2007.
- [28] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. AEG-Telefunken AG, 1980.

- [29] GANTMACHER, F.R.: *Matrizenmethoden, Band II*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin, 1958.
- [30] GEIER, R. und S. DEIX: *On-Line Überwachung der Wiener Reichsbrücke*. Beton- und Stahlbetonbau, 100(12):Seiten 997–1002, 2005.
- [31] GRIEGER, C.: *Die Entwicklung neuer Baustoffe und Bauverfahren - Tendenzen und Probleme*. Dresdner Transferbrief, 9, 2001.
- [32] HAMMING, R. W.: *Digital Filters*. Dover Publ Inc., 1997.
- [33] HAVERKAMP, B.: *State space identification - Theory and practice*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2001.
- [34] HEUNECKE, O.: *Zur Identifikation und Verifikation von Deformationsprozessen mittels adaptiver Kalman-Filterung*. In: *Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover*, 1995.
- [35] HO, B. L. and R. E. KALMAN: *Effective construction of linear state-variable models from input/output functions*. Regelungstechnik, 14(12):pp. 545–548, 1966.
- [36] HOUSNER, G.W., L.A. BERGMANN, T.K. CAUGHEY, A.G. CHASSIAKOS, R.O. CLAUS, S.F. MASRI, R.E. SKELTON, T.T. SOONG, B.F. SPENCER, and J.T.P. YAO: *Structural control: past, present and future*. Journal of Engineering Mechanics, Vol 123 (9):pp. 897–971, 1997.
- [37] HUTH, O.: *Ein adaptiertes Polyreferenz-Verfahren und seine Anwendung in der Systemidentifikation*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, Fakultät Bauingenieurwesen, 2002.
- [38] ISERMANN, R.: *Prozeßidentifikation*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1974.
- [39] ISERMANN, R.: *Identifikation dynamischer Systeme*. Springer Verlag, 1988.
- [40] JACKSON, L.: *A correction to impulse invariance*. IEEE Signal Processing Letters, Vol. 10:pp. 273–275, 2000.

- [41] KALMAN, R.E.: *Mathematical description of linear dynamic systems*. Journal Soc. Indust. Appl. Math., 1:152–192, 1963.
- [42] KAMARYS, D.: *Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse*. Dissertation, Universität Bochum, Fakultät für Maschinenbau, 1999.
- [43] KAMMEYER, K.-D. und K. KROSCHEL: *Digitale Signalverarbeitung, Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB-Übungen*. Vieweg + Teubner, 2006.
- [44] KATAYAMA, T.: *Subspace methods for system identification: a realization approach*. Springer-Verlag London, 2005.
- [45] KLINGENBERGER, J.: *Mode zur Bildung von Strategien der Instandhaltung für Gebäude*. Bauingenieur, 83(3):Seiten 99–107, 2008.
- [46] KO, W. J. and C. F. HUNG: *Extraction of structural system matrices from an identified state-space system using the combined measurements of dva*. Journal of Sound and Vibration, 249:955–970, 2002.
- [47] KRÄTZIG, W. B., K. MESKORIUS und M. LINK: *Baudynamik und Systemidentifikation*. in: Der Ingenieurbau - Baustatik, Baudynamik, Hrsg. Mehlhorn, G., Ernst u. Sohn, 1995.
- [48] KRÄTZIG, W. B., U. MONTAG und Y. S. PETRYNA: *Schädigung, Dauerhaftigkeit und (Rest-) Nutzungsdauer von Tragwerken*. Bauingenieur, 78(12):Seiten 553–561, 2003.
- [49] LARIMORE, W.: *Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control*. In *Proc. of the 29th Conference on Decision and Control*, pages pp. 596–604, 1990.
- [50] LENZEN, A.: *Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum Institut für Mechanik, 1994.
- [51] LENZEN, A.: *Systemidentifikation von dynamischer Windbelastung*. In: *VDI-Bericht 1941 zur VDI-Tagung Baudynamik, Kassel*, 2006.

- [52] LENZEN, A. und C. EBERT: *Experiments for damage detection by sub-space identification on real mechanical structures*. In: STANGENBERG, F., O.T. BRUHNS, D. HARTMANN und G. MESCHKE (Herausgeber): *3rd International Conference Lifetime-oriented Design Concepts*, Nummer ISBN: 978-3-931681-90-6. Ruhr University Bochum, 2007.
- [53] LENZEN, A. and C. EBERT: *Experiments for damage detection by sub-space identification on real mechanical structures*. In *Proceedings of the 2nd International Operational Modal Analysis Conference*, ISBN 87-91606-14-4. Aalborg University, Denmark 2007.
- [54] LINK, M.: *Updating analytical models by using local and global parameters and relaxed optimisation requirements*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):pp. 7–22, 1998.
- [55] LINK, M.: *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. B.G.Teubner Stuttgart, 3. Auflage, 2002.
- [56] LINK, M.: *MATFEM 2004*. Universität Kassel, Fachgebiet Leichtbau und Laboratorium für Strukturmechanik, März 2005.
- [57] LINK, M. and M. FRISWELL: *Working group 1: Generation of validated structural dynamic models - results of a benchmark study utilising the garteur sm-ag19 test-bed*. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):9–20, 2003.
- [58] LINK, M., S. STÖHR, and M. WEILAND: *Identification of structural property degradations by computational model updating*. *Key Engineering Materials*, 347:19–34, 2007. Trans Tech Publications, Switzerland.
- [59] LINK, M., M. WEILAND, and T. HAHN: *Structural health monitoring of the gaertnerplatz bridge over the fulda river in kassel*. In *Proceedings of the 2nd International UHPC symposium*. University of Kassel, 2008.
- [60] LOPEZ AENLLE, M., P. FERNANDEZ, R. BRINCKER, and A. CANTELI FERNANDEZ: *Scaling factor estimation using an optimized mass change strategy - part 1: theory*. In *International Operational Modal Analysis Conference*, 2007.

-
- [61] LUS, H., R. BETTI, M. DE ANGELIS, and R. W. LONGMAN: *Constructing second-order models of mechanical systems from identified state space realizations. part i: Theoretical discussions*. Journal of Engineering Mechanics, 129(5):477–488, 2003.
- [62] MAECK, J. and G. DE ROECK: *Damage assessment using vibration analysis on the z24 -bridge*. Mechanical Systems and Signal Processing, 17:133–142, 2003.
- [63] MAIA, N.M.M. and J.M.M. ET AL. SILVA: *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press, 1997.
- [64] MENGELKAMP, G.: *Entwicklung einer intelligenten Struktur - Eine Kombination globaler und lokaler Verfahren zur Schadensdiagnose*. Doktorarbeit, Universität Siegen, 2006.
- [65] MOTTERSHEAD, J.E., M. LINK, and M. FRISWELL: *The sensitivity method in finite element model updating: A tutorial*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2010.
- [66] NATKE, H. G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg, 1992.
- [67] NATKE, H. G. and C. CEMPEL: *Model-Aided Diagnosis of Mechanical Systems*. Springer, 1997.
- [68] OPPENHEIM, A. V. and R. W. SCHAFER: *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1989.
- [69] PANDEY, A. K. and M. BISWAS: *Damage detection in structures using changes in flexibility*. Journal of Sound and Vibration, 169(1):3–17, 1994.
- [70] PANDEY, A. K., M. BISWAS, and M. M. SAMMAN: *Damage detection from changes in curvature mode shapes*. Journal of Sound and Vibration, 145:321–332, 1991.
- [71] PEETERS, B.: *System identifikation and damage detection in civil engineering*. PhD thesis, University Leuven, 2000.

- [72] PETERNELL, K., W. SCHERRER, and M. DEISTLER: *Statistical analysis of novell subspace identification methods*. Signal Processing, 52:pp. 161–177, 1996.
- [73] PETRYNA, Y.: *Bauwerksdiagnostik in der Lebenszyklusbetrachtung - Tragwerksdiagnostik*. Technischer Bericht, Technische Universität Berlin - Institut für Bauingenieurwesen - Fachgebiet Statik und Dynamik, 2006.
- [74] QUADE, J. und M. TSCHÖTSCHEL: *Experimentelle Baumechanik*. Werner Verlag, 1993.
- [75] REITERER, M., L. PRAXMARER und A. KAMMERSBERGER: *Maintenance und Monitoring - Dauermonitoring zur Optimierung der Nutzungsdauer einer Brücke*. Beton- und Stahlbetonbau, 103(2):103–111, 2008.
- [76] REYNDERS, E. und G. DE ROECK: *A local flexibility method for vibration-based damage localization and quantification*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 329:pp. 2367–2383, 2010.
- [77] RICHTER, L.: *Modellbildung und Simulation einer realen Stabbogenbrücke und deren Validierung anhand der Daten*. Diplomarbeit, Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig, 2006.
- [78] RODDEN, W. P.: *A Method for Deriving Structural Influence Coefficients from Ground Vibration Tests*. AIAA Journal, Vol. 5 (5), 1967.
- [79] RYTTER, A.: *Vibration Based Inspection of Civil Engineering Structures*. Doktorarbeit, Aalborg University, Denmark, 1993.
- [80] SALAWU, O. S.: *Detection of Structural Damage Through Changes in Frequency: A Review*. Engineering Structures, Vol. 19:pp. 718–723, 1997.
- [81] SCHICKERT, G., M. KRAUSE und H. WIGGENHAUSER: *Studie zur Anwendung zerstörungsfreier Prüfverfahren bei Ingenieurbauwerken*. ZfPBau-Kompodium. 2004.
- [82] SCHUBERT, G.: *Schwingungsbasierte Schadensidentifikation von stochastisch angeregten mechanischen Strukturen*. Diplomarbeit, Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur (FH), 2007.

- [83] SHIEH, L. S., H. WANG, and R. E. YATES: *Discrete-continuous model conversion*. Appl. Math. Modeling, 4(12):449–455, 1980.
- [84] SIMA, V., D. M. SIMA, and S. VAN HUFFEL: *High-performance numerical algorithms and software for subspace-based linear multivariable system identification*. Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 170, Issue 2:371–397, 2004.
- [85] SOHN, H., C. R. FARRAR, F. M. HEMEZ, D. D. SHUNK, D. W. STINEMATES, and B. R. NADLER: *A review of structural health monitoring literature: 1996-2001*. Technical report, Los Alamos National Laboratory Report, LA-13976-MS, 2003.
- [86] STEFFENS, K.: *Experimentelle Tragsicherheitsbewertung von Bauwerken - Grundlagen und Anwendungsbeispiele*. 2001.
- [87] STEFFENS, K., C. BUCHER, H. OPITZ, J. QUADE und P. SCHWESINGER: *Experimentelle Tragsicherheitsbewertung von Massivbrücken*. Bau-technik, 76(1):Seiten 1–15, 1999.
- [88] STEIGER, R.: *Zustandserfassung und Zustandsbeurteilung*. In: *EMPA/HSR-Tagung 2002*, 2002.
- [89] STRAUSS, A., K. BERGMEISTER, R. WENDNER und S. HOFFMANN: *Betonkalender 2009 - 2*, Kapitel System- und Schadensidentifikation an Betonstrukturen, Seiten 55–134. Ernst u. Sohn, 2009.
- [90] STUBBS, N., J.-T. KIM und C. R. FARRAR: *Field Verification of a Non-destructive Damage Localization and Severity Estimation Algorithm*. In: *Proceedings of International Modal Analysis Conference, IMAC XIII, Nashville, USA*, 1995.
- [91] STÖHR, S.: *Identifikation von lokalen Steifigkeitsmodifikationen an Brückentragwerken unter Verwendung experimenteller Einflusslinien*. Doktorarbeit, Universität Kassel, Fachbereich Bauingenieurwesen, 2007.
- [92] UNBEHAUEN, R.: *Systemtheorie: Eine Einführung für Ingenieure*. R. Oldenburg Verlag, München Wien, 1969.

-
- [93] VAN OVERSCHEE, P. and B. DE MOOR: *About the choice of state space basis in combined deterministicstochastic subspace identification*, 1994.
- [94] VAN OVERSCHEE, P. and B. DE MOOR: *Subspace identification for linear systems*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [95] VERHAEGEN, M.: *Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data*. *Automatica*, 30(1):pp. 61–74, 1994.
- [96] VERHAEGEN, M. and P. DEWILDE: *Subspace model identification, part i: The output-error state space model identification class of algorithms*. *International Journal of Control*, 56(5):pp. 1187–1210, 1992.
- [97] VERHAEGEN, M. and P. DEWILDE: *Subspace model identification, part ii: Analysis of the elementary output-error state space model identification algorithm*. *International Journal of Control*, 56(5):pp.1211–1241, 1992.
- [98] VERHAEGEN, M. and P. DEWILDE: *Subspace model identification, part iii: Analysis of the ordinary output-error state space model identification algorithm*. *International Journal of Control*, 58(3):pp. 555–586, 1993.
- [99] VIBERG, M.: *Subspace-based state-space system identification*. *Circuits Systems Signal Processing*, 21(1):pp. 23–37, 2002.
- [100] WANG, L.: *Berechnung von kontinuierlichen Modellen aus diskreten Identifikationsergebnissen*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, 1992.
- [101] WANG, T.-L. and Z. ZONG: *Improvement of evaluation method for existing highway bridges*. Technical report, Florida International University, Department of Civil & Environmental Engineering, 2002.
- [102] YAN, A., P. DE BOE, and J. C. C. GOLINVAL: *Structural damage location by combined analysis of measured flexibility and stiffness*. In *Progress in Structural Engineering, Mechanics and Computation*, pages 635–640, 2004.

-
- [103] YAN, A.-M. and J.-C. GOLINVAL: *Structural damage localization by combining flexibility and stiffness methods*. Engineering Structures, 27:1752–1761, 2005.
- [104] YANG, C.-D. and F.-B. YEH: *Identification, reduction and refinement of model parameters by the eigensystem realization algorithm*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 13(6):1051–1059, 1990.
- [105] ZABEL, V. und W. RÜCKER: *Detektion eines Ermüdungsrissses durch schwingungsbasierte Strukturüberwachung*. In: 3. VDI-Fachtagung *Bau-dynamik*, 2009.
- [106] ZEIGER, H. P. and A. J. MCEWEN: *Approximate linear realizations of given dimension via ho's algorithm*. IEEE Transactions on Automatic Control, 19(2):153, 1974.

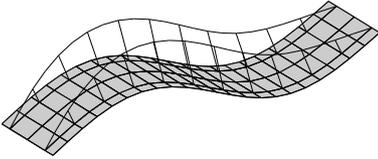
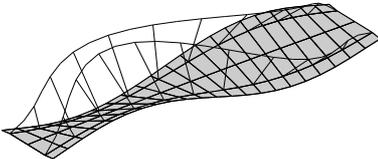
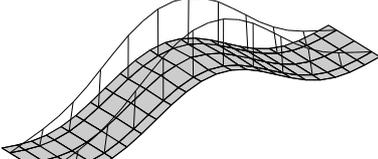
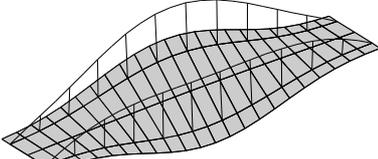
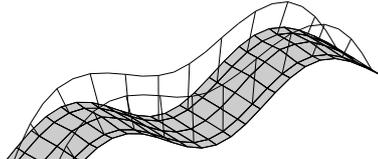
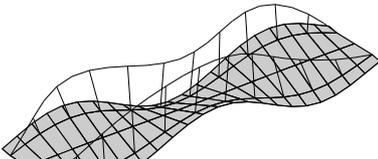
Anhang A

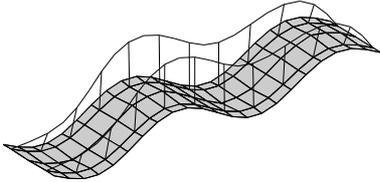
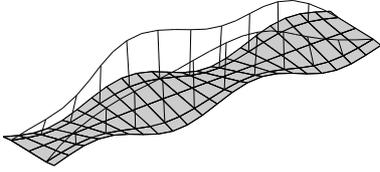
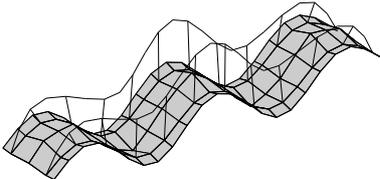
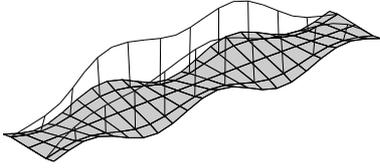
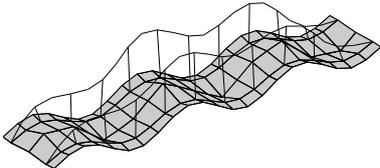
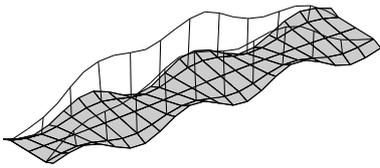
Modale Daten der Brücke in Hünxe

Ergänzend zu den in der Arbeit vorgestellten Markovparametern, sind an dieser Stelle die modalen Parameter aufgeführt. Zunächst sind die Eigenfrequenzen des Finite-Element-Modells den experimentell bestimmten gegenübergestellt. Zusätzlich ist der experimentell ermittelte modale Dämpfungsgrad angegeben. Aufgrund einer beschränkten Sensoranzahl wurde auf die Abbildung der experimentell ermittelten Eigenformen verzichtet. Zur besseren Illustration sind ersatzweise die am Finite-Element-Modell ermittelten Eigenformen dargestellt. Alle genannten Größen sind jeweils für das ungeschädigte Referenzsystem und das System mit geschädigtem Hänger aufgeführt.

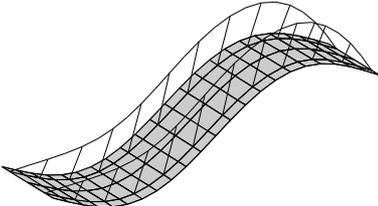
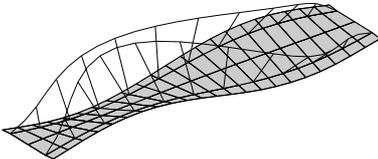
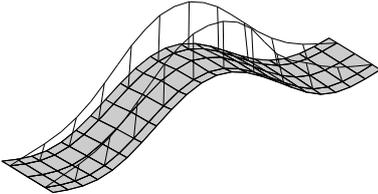
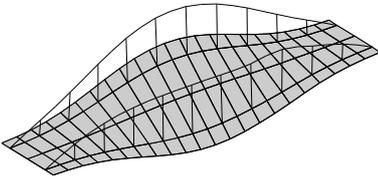
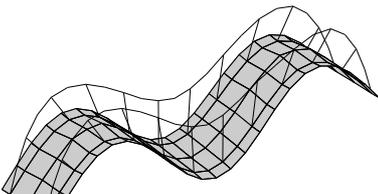
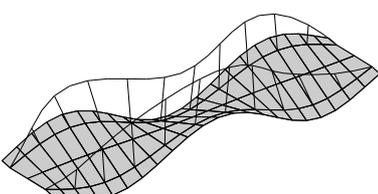
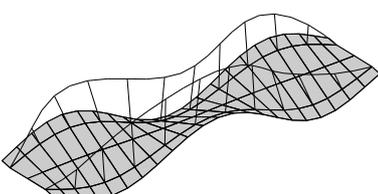
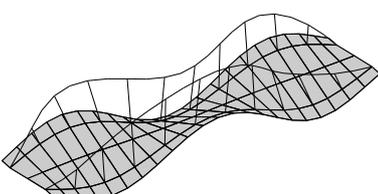
Zusätzlich sind die MAC-Werte der experimentell bestimmten Eigenformen von Referenzsystem und System mit geschädigtem Hänger in Abbildung A.1 abgebildet.

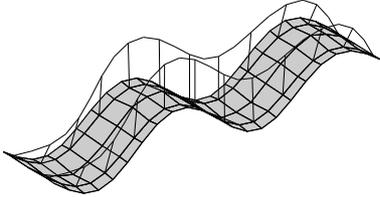
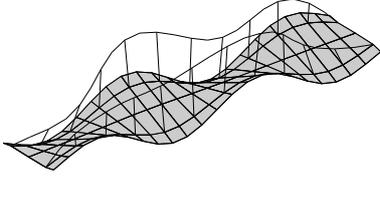
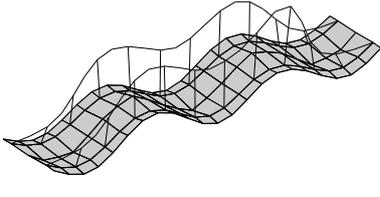
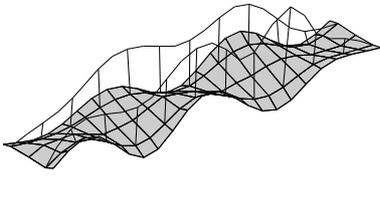
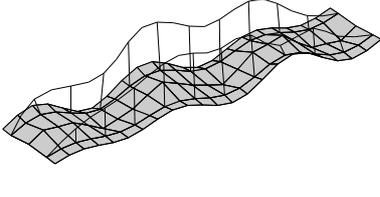
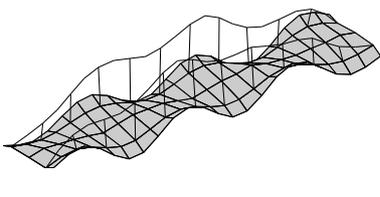
Hinweis: Die experimentellen Daten des ungeschädigten Referenzsystems sind einige Tage vor der Schädigung des Hängers aufgezeichnet worden. Beim Vergleich der Ergebnisse beider Systeme ist zu beachten, dass auch andere die Struktur beeinflussende Randbedingungen in den Ergebnissen enthalten sind (z.B. Temperatureffekte). Außerdem sind bei den Identifikationsverfahren selbst einige Eingabeparameter vorzugeben (z.B. Modellordnung) die Einfluss auf das Ergebnis haben.

Eigenform	Nr.	FE-Modell	Messung (Impuls- anregung)
	1	2,38 Hz	2,43 Hz / 0,34 %
	2	3,45 Hz	3,46 Hz / 0,70 %
	3	4,51 Hz	4,89 Hz / 1,0 %
	4	3,94 Hz	4,04 Hz / 2,5 %
	5	5,04 Hz	4,64 Hz / 2,3 %
	6	5,33 Hz	5,27 Hz / 5,6 %
	7	7,57 Hz	7,48 Hz / 2,2 %
	8	6,26 Hz	8,46 Hz / 0,50 %

Eigenform	Nr.	FE-Modell	Messung (Impuls- anregung)
	9	8,46 Hz	nicht identifiziert
	10	11,15 Hz	11,12 Hz / 3,1 %
	11	12,69 Hz	13,98 Hz / 2,9 %
	12	15,75 Hz	16,20 Hz / 1,7 %
	13		17,94 Hz / 1,0 %
	14	17,13 Hz	18,84 Hz / 1,4 %
	15	20,72 Hz	21,64 Hz / 1,0 %

Tab. A.1: Brücke in Hünxe – Referenzsystem – Vergleich der Eigenfrequenzen

Eigenform	Nr.	FE-Modell	Messung (Impuls- anregung)
	1	2,37 Hz	2,42 Hz / 0,55 %
	2	3,41 Hz	3,45 Hz / 0,91 %
	3	4,45 Hz	4,84 Hz / 0,85 %
	4	3,90 Hz	4,01 Hz / 2,4 %
	5	5,00 Hz	4,65 Hz / 2,2 %
	6	5,30 Hz	5,24 Hz / 5,5 %
	7	7,53 Hz	7,47 Hz / 2,2 %
	8	6,25 Hz	8,42 Hz / 0,53 %

Eigenform	Nr.	FE-Modell	Messung (Impuls- anregung)
	9	8,43 Hz	nicht identifiziert
	10	11,12 Hz	11,12 Hz / 2,9 %
	11	12,55 Hz	13,89 Hz / 2,4 %
	12	14,36 Hz	15,60 Hz / 1,7 %
	13	16,27 Hz	17,30 Hz / 0,69 %
	14	17,39 Hz	19,04 Hz / 1,3 %
	15	20,96 Hz	21,89 Hz / 0,90 %

Tab. A.2: Brücke in Hünxe – Hängerausfall – Vergleich der Eigenfrequenzen

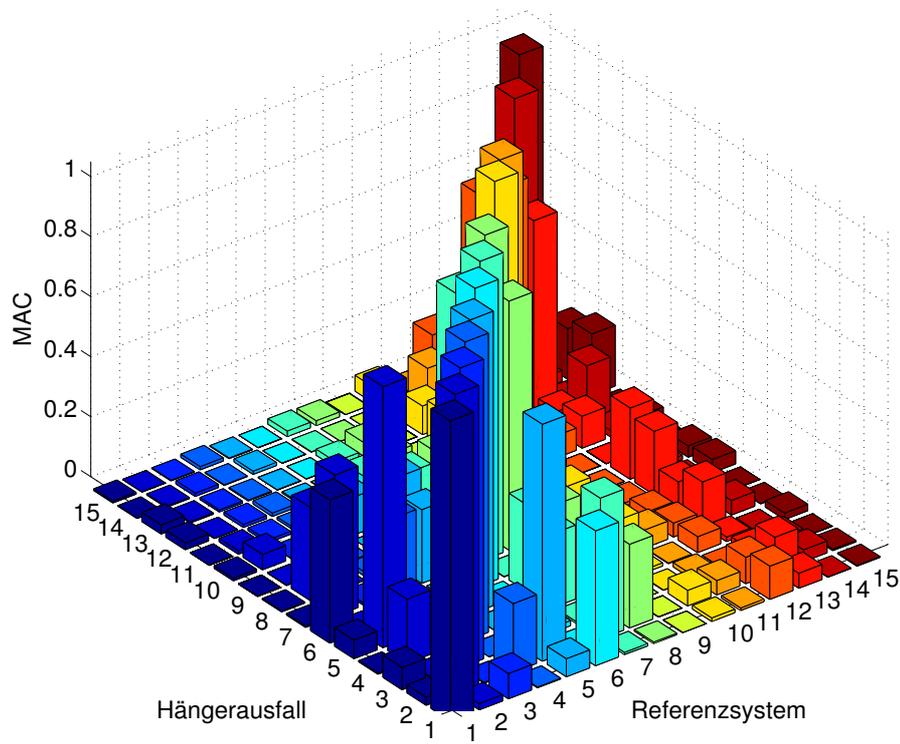


Abb. A.1: MAC-Werte der Eigenformen aus experimenteller Impulsanregung