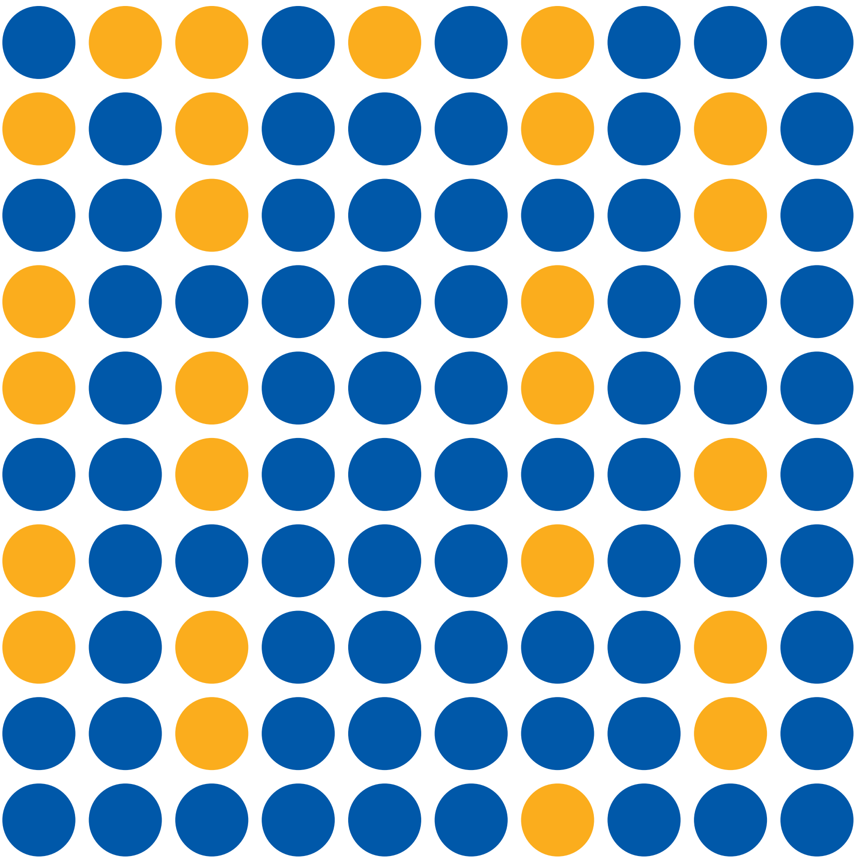
SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.) | **Band 1 • 2013**

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik



Mit Beiträgen von

G. Nickel | I. Witzke | A.-S. Heinemann |

M. Wille | P. Karschuck | R. Krömer & D. Corfield

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 1 (2013)

Mit Beiträgen von:

G. Nickel | I. Witzke | A.-S. Heinemann | M. Wille | P. Karschuck | R. Krömer und D. Corfield

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 1 (2013)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2013

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden geplant.

Unser herzlicher Dank gilt Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik sowie Kordula Lindner-Jarchow und Martin Schubert für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

Vorwort

> „Das Einzelne bleibt ein Objekt müssiger Kuriosität, wenn es kein Baustein in einem allgemeineren Gefüge zu werden vermag. (...) Das gilt vor allem für die Geschichte. Es geschieht gar Vieles, was keine historische Tatsache ist. Dass Goethe im Jahre 1780 sich eine Hausglocke und einen Stubenschlüssel, sowie am 22. Februar ein Billetkästchen hat anfertigen lassen, ist durch eine völlig echt überlieferte Schlosserrechnung urkundlich erwiesen: es ist demnach enorm wahr und gewiss also geschehen, und doch ist es keine historische Tatsache, weder eine litteraturgeschichtliche noch eine biographische. Indessen ist andrerseits zu bedenken, dass es innerhalb gewisser Grenzen unmöglich ist, von vornherein zu entscheiden, ob dem Einzelnen, was sich der Beobachtung oder der Ueberlieferung darbietet, dieser Werth einer Tatsache zukommt oder nicht; daher es die Wissenschaft machen muss, wie Goethe im späten Alter: einhamstern, aufspeichern, wessen sie habhaft werden kann, froh des Gedankens, nichts zu verabsäumen von dem, was sie einmal verwenden könnte, und des Vertrauens, dass die Arbeit der kommenden Geschlechter (...) wie ein grosses Sieb das Brauchbare bewahren und das Nutzlose versinken lassen wird.“

Ein solcherart von Wilhelm Windelband (1848–1915) in seiner Straßburger Rektoratsrede[1] charakterisiertes Sieb wollen die Siegener Beiträge für das historische Phänomen Mathematik bieten. Es geht ihnen darum, die Mathematik in ihrer Essenz als historisch sich entwickelnde Wissenschaft, aber auch in ihrer Funktion und Wirkung als zentrales Moment der Kulturgeschichte besser zu verstehen. Windelband hatte Natur- von Geschichtswissenschaften mit Bezug auf den „formalen Charakter ihrer Erkenntnisziele“ unterschieden: „Die einen suchen allgemeine Gesetze, die anderen besondere geschichtliche Tatsachen: in der Sprache der formalen Logik ausgedrückt, ist das Ziel der einen das generelle, apodiktische Urteil, das der anderen der singuläre, assertorische Satz.“ Folgt man dieser Charakterisierung, so fragt die Mathematikgeschichte nach dem Singulären der Wissenschaft

[1] W. Windelband: Geschichte und Naturwissenschaft. Rektoratsrede vom 1. Mai 1894. Heitz, Straßburg 1904.

vom Allgemeinen par excellence – sie lebt also geradezu von einem größtmöglichen Kontrast zu ihrem Gegenstand. Dabei kann die mathematikhistorische Darstellung nicht ohne systematische Überlegungen auskommen, sie benötigt Kriterien zur Unterscheidung des „Brauchbaren“ vom „Nutzlosen“ und zugleich die Reflexion über diese Kriterien und ggf. deren Revision. Unerlässlich ist also ein expliziter oder impliziter Bezug auf die Mathematikphilosophie.

Umgekehrt wird sich eine Philosophie der Mathematik immer wieder auf die ‚real existierende‘ Mathematik beziehen müssen, und ein solcher Bezug ist nicht ohne ein Verständnis für deren historische Genese zu haben. Auch hier gilt im Speziellen, was Windelband für die gesamte Philosophie formuliert: „Nicht wissensfremd in eigner erdachter Welt, sondern in reichem Wechselverkehr mit aller lebendigen Wirklichkeitserkenntniss und mit allem Wertgehalte des wirklichen Geisteslebens hat die Philosophie bestanden und besteht sie (...)“ Eine Philosophie der Mathematik wird also nicht nur die im engeren Sinne mathematischen Grundlagen, Entitäten, Methoden und Handlungen und deren historische Genese bedenken, sondern beispielsweise auch die (historisch wirkenden) Außenbezüge der Mathematik, wie etwa auch ihre zentrale, jedoch häufig unsichtbare Rolle für moderne Gesellschaften.

Ein Unternehmen wie die Siegener Beiträge wird notwendig transdisziplinär angelegt sein, nicht in jedem Einzelbeitrag, aber in seiner Gesamtanlage. Und nochmals können wir uns hierin auf Windelband berufen, wenn er wider einen Methodenzwang plädiert, gegen die „universalistische Tendenz (...) welche, mit Verkennung der Autonomie der einzelnen Wissensgebiete, alle Gegenstände dem Zwange einer und derselben Methode unterwerfen wollte (...)“. Gerade wegen der Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden sind die Siegener Beiträge auf einen produktiven Diskurs angewiesen, der zugleich die Vielfalt der Aspekte wie die Einheit der Bemühung um ein besseres Verstehen ‚der‘ Mathematik zur Geltung bringt.

Wir freuen uns, hiermit den ersten Band der Siegener Beiträge vorlegen zu können. Ganz im Geiste der voranstehenden Gedanken dokumentiert er sehr eindringlich die Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden und kann hoffentlich ein Anstoß für den erwünschten produktiven Diskurs sein. Den Autoren danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft daran mitzuwirken.

Ralf Krömer Gregor Nickel

Inhaltsverzeichnis

Widersprüche und Unendlichkeit — Beobachtungen bei Nikolaus von Kues und Georg Cantor

Gregor Nickel

Zusammenfassung Nikolaus von Kues (1401-1464) und Georg Cantor (1845-1918) werden als zwei auf den ersten Blick verwandte Denker vorgestellt, die Mathematik und Theologie produktiv aufeinander beziehen; für beide ist dabei das Konzept der „Unendlichkeit“ von zentraler Bedeutung. Auf den ersten Blick zeigen sich zunächst auffallende Ähnlichkeiten — bei allem zeitlichen Abstand. Bei näherer Betrachtung fallen dann allerdings auch wesentliche Differenzen auf, erweist sich Cusanus als der für eine philosophische Reflexion weitaus produktivere Denker[1].

Im folgenden werde ich zwei Denker vorstellen, die in bemerkenswerter Weise Mathematisches und Theologisches aufeinander beziehen: Georg Cantor, eine der zentralen Figuren der Mathematik an der Schwelle zur Mathematischen Moderne, und Nikolaus von Kues, einen Theologen, Philosophen und Kirchenführer, aber auch Mathematiker an der Schwelle zur Neuzeit. Dabei wird sich zeigen, dass die Schriften der beiden zunächst auffallende Parallelen aufweisen — bei allem zeitlichen Abstand. So steht einerseits für beide der Unendlichkeitsbegriff im Zentrum ihres Interesses. Das ist insofern nicht überraschend, als dieser von zentraler Bedeutung für die abendländische Metaphysik, und damit zwangsläufig auch für jede Theologie ist, die sich mit dieser in ein Benehmen setzen will. Und auch die Mathematik arbeitet seit der griechischen Antike daran, diverse Unendlichkeitsphänomene zu beherrschen. Andererseits spielt das Bedenken von Widersprüchen bei beiden Denkern eine wesentliche Rolle als Gelenkstelle zwischen mathematischem und theologischem Diskurs. Dabei ist natürlich sorgfältig darauf zu achten, dass bei einem Vergleich nicht eine schlichte Äquivokation ganz verschiedenartiger

[1] Der vorliegende Aufsatz ist eine teilweise gekürzte und überarbeitete Fassung von [Ni2].

Konzepte in Theologie und Mathematik unterläuft; was also 'unendlich' im jeweiligen Kontext bedeuten soll und in welcher Weise mit auftauchenden Widersprüchen umgegangen wird, ist genau zu untersuchen.

Im vorliegenden Aufsatz geht es mir allerdings nur am Rande darum, einen möglichen Einfluss des Älteren auf den Jüngeren zu diskutieren[2], sondern vielmehr in systematischer Absicht Argumentationsstrukturen der beiden Denker zu vergleichen und zu unterscheiden.

Für eine begrifflich sorgfältige Diskussion müsste im Folgenden eine genauere Abgrenzung und Verbindung von Metaphysik, (rationaler) Theologie und christlicher Theologie vorgenommen werden. Allerdings würde die Beobachtung und Verhältnisbestimmung dieser Bereiche zumindest bei CUSANUS, der die heutigen Unterscheidungen selbstverständlich unterläuft, eine eigene längere Untersuchung erfordern und sich in eine intensive und kontroverse (theologisch-philosophische) Debatte einfügen müssen[3]. Bei CANTOR lässt sich hingegen ein recht klarer Übergang vom metaphysischen Diskurs in eine theologische Sprache konstatieren; eine genauere Verhältnisbestimmung findet man dagegen eher nicht. Insofern soll auch im Folgenden auf eine solche Unterscheidung verzichtet werden; die Termini lassen sich hoffentlich aus dem jeweiligen Gebrauch verstehen.

1 Georg Cantor — Vom Glanz und Elend unendlicher Mengen

GEORG CANTOR kann mit Recht als Begründer der 'modernen Mathematik' be-

[2] Einen solchen Einfluss behautet R. Thiele: „Cantor (...) was strongly influenced by the philosophical works of such scholastic Catholics as Augustine and Nicholas of Cusa" [Th, p. 533], ohne dass er eine intensivere Rezeption CUSANISCHER Philosophie bei CANTOR belegte. Genauer diskutiert J. Sfez in [Pu-Sc, pp. 127] die Thematik. An mindestens einer Stelle in seinem Briefwechsel bezieht sich CANTOR in der Tat explizit auf CUSANUS; es zeigt sich jedoch, dass weder er selbst noch sein theologischer Briefpartner die Brisanz des CUSANISCHEN Denkens auch nur annähernd wahrgenommen haben, vgl. Brief an Aloys Schmid 26.3. 1887, [Ta, p. 502]. Cantor schreibt, er sei „'(...) ganz auf ihrer Seite, wenn Sie mit Nic. v. Cusa sagen, daß 'in Gott Alles Gott ist', wie auch, dass 'die Erkenntniss Gottes objectiver Seits das Incommensurable nicht als commensurabel, das Irrationale nicht als rational erkennen vermag, weil die göttliche Allerkenntnis, wie die göttliche Allmacht nicht auf Unmögliches gehen kann.'"
In der Regel findet sich jedoch bei Autoren, die GEORG CANTOR aus mathematikhistorischer oder -philosophischer Perspektive betrachten, kein Verweis auf CUSANUS, so etwa in [Pu], [Da], [De]. Oder er wird im Rahmen einer Diskussion der Geschichte des Unendlichkeitsbegriffs genannt, ohne dass eine direkte Verbindung zu CANTOR hergestellt wird, wie etwa in [Ba].

[3] Man vergleiche nur die äußerst unterschiedliche CUSANUS-Rezeption in [Fl] und [Ho].

zeichnet werden[4]; mit seiner transfiniten Mengenlehre beginnt ein dramatischer Themen- und Stilwechsel in der Mathematik, ebenso prägend wie die Erfindung der Infinitesimalrechnung durch NEWTON und LEIBNIZ. Der Mengenbegriff — mehr oder weniger formal bzw. axiomatisch eingeführt – bildet nach wie vor ein wesentliches Referenzkonzept für nahezu alle derzeit verwendeten mathematischen Begriffe. CANTORs intensive Bezugnahme auf theologische Themen und seine umfangreiche Korrespondenz mit zeitgenössischen Theologen vor allem aus dem Bereich der Neuscholastik, von dem zumindest Teile erhalten und mittlerweile auch ediert sind[5], ist mittlerweile von verschiedenen Autoren eingehend diskutiert worden[6]. Hier sollen nur die wesentlichen Argumentionslinien CANTORs skizziert werden. Eine historisch detaillierte Darstellung findet man in den genannten Referenzen.

Die entscheidende Erfindung CANTORs war, daß sich jenseits der endlichen Mengen eine (unendliche) Hierarchie 'verschieden großer' unendlicher Mengen *de-finieren* lässt und daß diese in einer stimmigen mathematischen Theorie behandelt werden können. Motiviert war die Entwicklung der Mengentheorie allerdings zunächst durch relativ handfeste Probleme der Analysis[7]. Und sicherlich waren die erzielten, mathematisch sinnvollen Resultate über die Konvergenz trigonometrischer Reihen für CANTOR ein wichtiges Argument, den dazu benötigten (zunächst eher esoterisch anmutenden) mengentheoretischen Begriffsbildungen einen Vertrauensvorschuss entgegen zu bringen.

1.1 Ein bisschen Mengenlehre

Ich möchte die Grundbegriffe der CANTORschen Theorie nun ganz knapp skizzieren, auch um CANTORs Faszination vielleicht ein wenig plausibler werden zu lassen[8]. Der zentrale Begriff CANTORs und für die gesamte moderne Mathematik ist der Mengenbegriff; CANTOR definiert diesen etwa in seinen *Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* von 1895 folgendermaßen[9]:

> Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

[4] Zum Begriff einer „modernen" Mathematik vgl. [Meh].
[5] Vgl. [Ca2], [Ta].
[6] Vgl. etwa [Ba], [Pu], [Th], [De, pp. 45-96].
[7] Vergleich hierzu etwa [Pu, pp. 29] bzw. [Da, pp. 6].
[8] Dabei konzentrieren wir uns auf seine Theorie der Kardinalzahlen und übergehen weitgehend seine transfinite Ordinalzahltheorie.
[9] [Ca1, p. 282]. Eine solche explizite Definition erfolgt übrigens erst relativ spät, nachdem bereits wichtige Resultate der Mengenlehre publiziert worden waren.

Die Größe endlicher Mengen kann (ordinal) mittels Durchzählen bestimmt (und verglichen) werden; bei unendlichen Mengen ist dies naturgemäß nicht ohne weiteres möglich. Es gibt allerdings noch eine zweite Möglichkeit, (endliche) Mengen zu vergleichen, die der (kardinalen) 1:1-Zuordnung. CANTOR weitet nun dieses Konzept auch auf unendliche Mengen aus; Mengen werden in Bezug auf Ihre *Mächtigkeit*, ihre 'Größe' unter Absehen von der Anordnung ihrer Elemente, verglichen, indem zwei Mengen, deren Elemente paarweise ein-eindeutig (1:1) einander zugeordnet werden können, als gleichmächtig („äquivalent" in CANTORs Terminologie) bezeichnet werden[10]:

> Zwei Mengen M und N nennen wir 'äquivalent' (...), wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig in eine derartige Beziehung zueinander zu setzen, daß jedem Element der einen von ihnen ein und nur ein Element der anderen entspricht.

Dabei kann eine unendliche Menge zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig sein[11]. Wir haben es also mit zwei verschiedenen Größen-Begriffen — Teil-Ganzes-Beziehung und Mächtigkeit — zu tun. Schon 1873 gelingt es CANTOR zu zeigen, dass sogar die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, d.h. gleichmächtig zur Menge der natürlichen Zahlen. Damit stellt sich die Frage, ob es überhaupt unendliche Mengen gibt, die nicht abzählbar sind. Ein möglicher Kandidat ist das 'Kontinuum', also (bei laxer Identifikation) die Menge der reellen Zahlen. An seinen Freund RICHARD DEDEKIND richtet GEORG CANTOR genau diese Frage[12]:

> Gestatten Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses Interesse hat, die ich aber nicht beantworten kann; vielleicht können Sie es und sind so gut mir darüber zu schreiben, es handelt sich um folgendes (...), Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlengrößen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lassen, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des anderen gehört?

Nachdem DEDEKIND antwortet, er wisse die Antwort nicht, schreibt CANTOR — leicht untertreibend — zurück, so wichtig wäre ihm diese Frage gar nicht[13],

---

[10] [Ca1, p. 283].

[11] Über dieses Paradox hatte sich bereits GALILEO GALILEI in seinen *Discorsi* (1638) gewundert, vgl. [Pu, p. 44].

[12] Cantor an Dedekind vom 29.11. 1873, [Ca2, p. 31].

[13] Cantor an Dedekind vom 2.12. 1873, [Ca2, p. 32].

> (...) [e]s wäre nur schön, wenn sie beantwortet werden könnte; z.B. vorausgesetzt, daß sie mit *nein* beantwortet würde, wäre damit ein neuer Beweis des LIOUVILLEschen Satzes geliefert, daß es transcendente Zahlen giebt.

Kurz darauf gelingt ihm der Beweis, dass die reellen Zahlen nicht abzählbar sind. Erstmals werden zwei (kardinal) *'verschieden große'*, unendliche Mengen betrachtet. Und in ähnlicher Weise lässt sich zeigen, dass es zu jeder (auch unendlichen) Menge eine echt größere 'gibt', und damit eine unendliche Hierarchie immer größerer unendlicher Mengen. Diese unendlichen Mächtigkeiten werden von CANTOR — bereits in der Notation nicht ohne religiöse Anspielung — mit dem ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets bezeichnet, angefangen bei $\aleph_0$, der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen. CANTOR zeigt schließlich, wie sich eine sinnvolle Arithmetik für diese unendlichen Mächtigkeiten (und Ordnungstypen) entwickeln lässt.

1.2 Das Aktual-Unendliche

Nicht zuletzt gegen die Skepsis vieler Fachkollegen versuchte CANTOR zeit seines Lebens, die neuen Konzepte zu rechtfertigen. Dabei war es für ihn selbstverständlich, dass eine solche Rechtfertigung letztlich auf metaphysischem Terrain geführt werden muss. Entscheidend sei dazu eine *Differenzierung* im mathematischen wie auch im metaphysischen Unendlichkeitsbegriff. Hier teilt sich dann allerdings auch der Diskurs in die beiden Fachrichtungen und wird — soweit ich sehe — im wesentlichen nur durch CANTOR selbst zusammengehalten. Dabei unterscheiden sich die wahrgenommenen Probleme und vorausgesetzten Grundüberzeugungen sowie die Verständlichkeit und Wirksamkeit von Argumenten sehr stark.

Zunächst ist das **potentielle Unendliche** zu nennen: Dieses bezieht sich auf unbestimmte, aber stets endliche Größen, die jedoch beliebig groß (oder beliebig klein) sein dürfen. Dieses ist das seit ARISTOTELES kanonisierte Konzept des Unendlichen, dem auch die mathematische Tradition bis zu CARL FRIEDRICH GAUSS[14] weitgehend folgt. Cantor wendet sich explizit gegen diese Tradition. Er führt also ein **aktuales Unendliches** als mathematisches Konzept ein; es bezieht sich auf 'fertige', bestimmte Größen, enthält also nichts Veränderliches, unvollendetes. Die fertig vorliegende 'Menge' aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ etwa sei wohlbestimmt und nicht veränderlich. Als wesentlichen Grund für die 'Existenz' eines aktual Unendlichen benennt er[15]:

---

[14] Vgl. sein bekanntest Schreiben an SCHUMACHER vom 12.7. 1831, [Ga, p. 269].

[15] *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.* Zeitschrift für Philosophie und philosoph. Kritik **91** (1887), [Ca1, p. 410f]. Strukturell wird hier analoges Vorgehen zur vollständigen Definition einer 'Funktion' durch Definitions- und Wertebereich sowie der Abbildungsvorschrift

> Unterliegt es nämlich keinem Zweifel, daß wir die *veränderlichen* Größen im Sinne des potentiellen Unendlichen nicht missen können, so läßt sich daraus auch die Notwendigkeit des Aktual-Unendlichen folgendermaßen beweisen: Damit eine solche veränderliche Größe in einer mathematischen Betrachtung verwertbar sei, muß strenggenommen das 'Gebiet' ihrer Veränderlichkeit durch eine Definition vorher bekannt sein; dieses 'Gebiet' kann aber nicht selbst wieder etwas Veränderliches sein, da sonst jede feste Unterlage der Betrachtung fehlen würde; also ist dieses 'Gebiet' eine bestimmte aktual-unendliche Wertemenge. So setzt jedes potentiale Unendliche, soll es streng mathematisch verwendbar sein, ein Aktual-Unendliches voraus.
> Diese „Gebiete der Veränderlichkeit“ sind die eigentlichen Grundlagen der Analysis sowohl wie der Arithmetik und sie verdienen es daher in hohem Grade, selbst zum Gegenstand von Untersuchungen genommen zu werden.

Ungewohnt sei natürlich, dass aus dem Endlichen vertraute Gesetze, etwa das Euklidische Axiom, dass das Ganze mehr als der Teil sei, für unendliche Mengen nicht mehr gelten. Das wirke aber nur dann paradox, wenn man alle von endlichen Zahlen (Mengen) gewohnten Eigenschaften auch bei unendlichen Zahlen (Mengen) erwarte. Schließlich weitet Cantor das Konzept des aktual Unendlichen im metaphysischen Kontext noch weiter aus, in dem er[16]

> (...) das Aktual-Unendliche (A-U.) nach drei Beziehungen [unterscheidet]: erstens, sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen außerweltlichen Sein, in Deo realisiert ist, wo ich es Absolut Unendliches oder kurzweg Absolutes nenne; zweitens, sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; drittens, sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken in abstracto aufgefaßt werden kann. In den beiden letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und insofern dem Endlichen verwandtes A.-U. sich darstellt, nenne ich es Transfinitum und setze es dem Absoluten strengstens entgegen.

Offenbar war es für die Zeitgenossen schwierig zu unterscheiden zwischen einem 'unbestimmten', potentiellen Unendlichen und einem fest bestimmten, aktual Unendlichen, das aber dennoch kleiner oder größer als ein anderes aktual Unendliches (und in diesem Sinne 'vermehrbar') sein kann. Ist 'unendlich' im Rahmen der philosophischen Tradition seit Anselm von Aosta *per definitionem* etwas, worüber

beschrieben.

[16] A.a.O. [Ca1, p. 378].

hinaus größeres nicht gedacht werden kann, so sind CANTORs Begriffsbildungen kaum verständlich. Damit fehlt dann aber auch die von Cantor er- bzw. gefundene Differenzierung *innerhalb* des aktual Unendlichen[17]:

> Bei allen Philosophen fehlt jedoch das *Prinzip des Unterschiedes* im Transfinitum, welches zu verschiedenen transfiniten Zahlen und Mächtigkeiten führt. Die meisten verwechseln sogar das Transfinitum mit dem seiner Natur nach *unterschiedslosen höchsten Einen*, mit dem Absoluten, dem absoluten Maximum, welches natürlich keiner Determination zugänglich und daher der Mathematik nicht unterworfen ist.

Wichtig ist CANTOR also, ein vielgestaltiges **Aktual-Unendliches** mathematisch behandeln zu können und klar vom **Absoluten** der klassischen Metaphysik (rationalen Theologie), andererseits aber auch vom nur **potentiellen Unendlichen** abzugrenzen.

1.3 Inkonsistenzen — Cantors absolut Unendliches

Versucht man nun aber, sich eine 'Übersicht' über die Hierarchie der finiten und transfiniten Mengen zu verschaffen, versucht man etwa die 'Menge aller Mächtigkeiten' zu bilden, so stößt man auf Widersprüche. Dies war CANTOR schon sehr früh bewusst — lange bevor ähnliche Antinomien im Rahmen der sog. mathematischen Grundlagenkrise diskutiert wurden. Bereits 1897 schreibt er an DAVID HILBERT[18]:

> Die Totalität aller Alephs ist nämlich eine solche, welche nicht als eine bestimmte, wohldefinierte fertige Menge aufgefaßt werden kann. Wäre dies der Fall, so würde auf diese Totalität ein bestimmtes Aleph der Größe nach folgen, welches daher sowohl zu dieser Totalität (als Element) gehören, wie auch nicht gehören würde, was ein Widerspruch wäre. (...) Totalitäten, die nicht als 'Mengen' von uns gefaßt werden können (...) habe ich schon vor vielen Jahren „absolut unendliche" Totalitäten genannt und sie von den transfiniten Mengen scharf unterschieden.

Ich möchte hier auf die technischen Details der Argumentation nicht genauer eingehen. Wichtig scheint mir jedoch einerseits, dass CANTOR diese Inkonsistenz auf der mathematischen Seite produktiv nutzt. Im Rahmen eines indirekten Beweises zeigt er nämlich, dass sich jede beliebige Mächtigkeit in seine (ordinal aufgereihte)

[17]A.a.O. [Ca1, p. 391].
[18]Cantor an Hilbert vom 26.9. 1897, [Ca2, p. 388].

Hierarchie der $\aleph$s einordnen lässt. Wäre dies für eine spezielle Mächtigkeit nicht der Fall, so müsste sie die ‘Menge aller $\aleph$s’ enthalten, wäre also selbst bereits inkonsistent. Insofern gibt es aus CANTORs Sicht zunächst einen innermathematischen Grund, die Antinomie zu begrüßen.

Auf der begrifflichen Seite reagiert CANTOR andererseits auf diese ‘am Rande des Unendlichen’ auftretende Inkonsistenz wiederum durch eine Differenzierung[19]:

> Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, daß die Annahme eines ‘Zusammenseins’ *aller* Elemente auf einen Widerspruch führt, so daß es unmöglich ist, die **Vielheit als Einheit** (Herv. GN), als ein ‘fertiges Ding’ aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich *absolut unendliche* oder *inkonsistente Vielheiten.*

Das Paradebeispiel für solche inkonsistente Vielheiten wäre die Kollektion aller Mengen. Die Mengen(lehre) als Ganze ist also *kein* fertiges, ‘feststehendes Gebiet’, innerhalb dessen dann kleinere oder größere Mengen unterschieden werden könnten. Einzelne unendliche Mengen können also ‘von außen’ als fertige Dinge betrachtet werden, nicht jedoch das Universum aller Mengen, dieses wird durch den Mathematiker allenfalls ‘von innen’ erkundet.

Die Anfrage seines Freundes RICHARD DEDEKIND, ob nicht auch bereits CANTORS unendliche *Mengen* eine inkonsistente Begriffsbildung sein könnten, beantwortet CANTOR verblüffend offen[20]:

> Wäre es nicht denkbar, daß schon diese Vielheiten ‘inkonsistent’ seien, und daß der Widerspruch (...) sich *nur noch nicht bemerkbar* gemacht hätte? Meine Antwort hierauf ist, daß dies Frage auf *endliche Vielheiten ebenfalls auszudehnen* ist und daß eine genaue Erwägung zu dem Resultat führt: sogar für endliche Vielheiten ist ein ‘Beweis’ für ihre ‘Konsistenz’ nicht zu führen. (...) Die Tatsache der ‘Konsistenz’ endlicher Vielheiten ist eine einfache, unbeweisbare Wahrheit, es ist ‘Das *Axiom* der Arithmetik’ (im alten Sinne des Wortes). Und ebenso ist die ‘Konsistenz’ der Vielheiten, denen ich die Alefs als Kardinalzahlen zuspreche ‘das Axiom der erweiterten transfiniten Arithmetik’.

Im Gegensatz zu vielen Zeitgenossen — allen voran der Logiker FRIEDRICH LUDWIG GOTTLOB FREGE (1848-1925) — war für CANTOR also das Auftreten dieser Widersprüche ein durchaus erwartetes, geradezu ein willkommen geheißenes Phänomen.

[19]Cantor an Dedekind vom 28.7. 1899, [Ca2, p. 443].
[20]Cantor an Dedekind vom 28.8. 1899, [Ca2, p. 447f].

Seine Gründe nochmals kurz gefasst: Die Mengentheoretischen Antinomien sind

1. innermathematisch nützlich und
2. metaphysisch stimmig.

Anstatt an den Grundfesten der Mathematik zu zweifeln, hält er es für *notwendig*, daß die Mathematik 'am Rande' auf einen widersprüchlichen Bereich verweist[21] und gilt ihm dieses Phänomen geradezu als Bestätigung seiner platonistischen Grundüberzeugung in Bezug auf die Mengentheorie:

> Das *Transfinite* mit seiner Fülle von Gestaltungen und Gestalten weist mit Notwendigkeit auf ein *Absolutes* hin, auf das „wahrhaft Unendliche", (...) welches als absolutes Maximum anzusehen ist. Letzteres übersteigt gewissermaßen die menschliche Fassungskraft und entzieht sich namentlich mathematischer Determination.

1.4 Cantors theologische Versuche

An dieser Stelle vollzieht CANTOR nun — ohne weitere kritische Rückfrage — einen Übergang zur Theologie. Hier sucht er einerseits metaphysische Schützenhilfe, beansprucht aber andererseits auch, einer 'christlichen Philosophie' Argumente gegen die philosophische Moderne, d.h. gegen den Materialismus der zeitgenössischen Monisten, aber auch gegen die Transzendentalphilosophie seit IMMANUEL KANT liefern zu können. Er führte einen ausgedehnten Briefwechsel mit verschiedensten zeitgenössischen Theologen, von dem zumindest Teile erhalten und mittlerweile auch ediert sind[22]; am intensivsten scheint sein Kontakt zur (katholischen) Neuscholastik gewesen zu sein.

Leitend für CANTORs theologische Überlegungen ist eine Art von natürlich-theologischem Prinzip, das er folgendermaßen formuliert[23]:

> Jede Erweiterung unserer Einsicht in das Gebiet des Creatürlich-möglichen muß (...) zu einer erweiterten Gotteserkenntnis führen.

Ich übergehe nun einige materiale, theologische Themen (etwa zur räumlich und zeitlichen Endlichkeit bzw. Unendlichkeit der Welt) und möchte hier nur CANTORs Gottesbegriff vorstellen, publiziert übrigens 1879 als Anmerkung einer Arbeit zur Mengenlehre in den Mathematischen Annalen[24]:

---

[21] [Ca1, p. 405].
[22] Vgl. [Ca2], [Ta].
[23] Cantor an Esser vom 15.2. 1896, [Ta, p. 307f].
[24] [Ca1, p. 205].

> Daß wir auf diesem Wege immer weiter, niemals an eine unübersteigbare Grenze, aber auch zu keinem auch nur angenäherten Erfassen des Absoluten gelangen werden, unterliegt für mich keinem Zweifel. Das Absolute kann nur anerkannt, aber nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden (...) Die absolut unendliche Zahlenfolge erscheint mir daher in gewissem Sinne als ein geeignetes Symbol des Absoluten; wogegen die Unendlichkeit der ersten Zahlenklasse, welche bisher dazu allein gedient hat, mir eben weil ich sie für eine faßbare Idee (nicht Vorstellung halte), wie ein ganz verschwindendes Nichts im Vergleich mit Jener vorkommt.

Die Identifikation des sich im Rahmen der Mengenlehre durch Widersprüche zeigenden ‘Absoluten’ mit dem Gott des Christentums erfolgt im wesentlichen ohne weitere Begründung. Und so behauptet CANTOR schließlich[25]:

> Von mir wird der christlichen Philosophie zum ersten Mal die wahre Lehre vom Unendlichen in ihren Anfängen dargeboten. Ich weiß ganz sicher, daß sie diese Lehre annehmen wird, es fragt sich nur, ob schon jetzt oder erst nach meinem Tode.

Betrachten wir nochmals CANTORs theologischen Argumentationsgang: Sein Ausgangspunkt ist die Faszination, dass sich im Rahmen der Sicherheit mathematischer De-finitionen und Beweise auch trans-finite Mengen untersuchen lassen und sich eine im wörtlichen Sinne unübersehbare, aber dennoch mathematisch fruchtbare Fülle von Strukturen eröffnet. Zwangsläufig ergeben sich allerdings Widersprüche; das Konzept der (unendlichen) Menge funktioniert offenbar widerspruchsfrei nur ‘innerhalb’ eines abgegrenzten Bereichs, ‘jenseits’ dessen Antinomien auftauchen. Dieser ‘umgebende’, „absolut unendliche“ Bereich wird schließlich religiös gedeutet.

Auch wenn zeitgenössische Theologen zuweilen ähnlich argumentieren, kann CANTORs — hier knapp skizzierter — Versuch eines Übergangs von Mathematik zu Theologie m.E. nicht uneingeschränkt als gelungen gelten. Die mathematische *ratio* wird zunächst in ihrer metaphysischen Kompetenz überschätzt und anschließend in der theologischen Sphäre ganz beiseite gelassen bzw. nicht durch eine theologische Vernunft ergänzt. Es wird dadurch zugleich ein Zuviel an mathematischer Stringenz behauptet und zu wenig an theologischer Konkretion geleistet. Die Faszination beim Betrachten, gar Konstruieren unendlicher Größen und das Einbekenntnis der Vernichtung des Verstandes, der beim Versuch des ‘Weiterdenkens’ in Antinomien läuft, sind *per se* noch nicht religiös, geschweige denn christlich. Eine genuin theologische Reflexion müsste also an dieser Stelle allenfalls erst beginnen.

[25] Cantor an Thomas Esser vom 1.2. 1896, [Ta, p. 312].

Zudem fehlen erkenntnistheoretische (und ontologische) Überlegungen, also kritische Rückfragen zum Status der Mathematik selbst. Beispielsweise hätte CANTOR, der die mengentheoretischen Antinomien so souverän (mathematisch wie auch metaphysisch) bearbeitet, seine überaus prägnante Charakterisierung (konsistenter) 'Mengen' im Schreiben an DEDEKIND genauer bedenken können. Wenn dort der Mathematiker in der Lage ist, eine „Vielheit als Einheit" aufzufassen, so bedeutet dies vermutlich den virtuosen Umgang mit einem widersprüchlichen Pänomen bzw. das Schaffen einer in sich widersprüchlichen Entität[26].

Für die Mathematik selbst ist der Gewinn allerdings kaum zu überschätzen. Es sind vermutlich zwei Quellen, die es CANTOR erlaubten, von allzu starken Konsistenzzwängen abzusehen und seine Theorie unbekümmert zu entwickeln: Auf der einen Seite die erzielten Resultate innerhalb der wohletablierten Analysis, die die zugrunde gelegten Begriffe als sinnvoll erscheinen lassen, auf der anderen Seite deren (wenn auch zu wenig reflektierte) metaphysische Einbettung. Von der hier frei gewordenen Kreativität lebt die Mathematik in großen Teilen bis heute und es ist durchaus treffend (und vielsagend), wenn DAVID HILBERT fordert[27]:

> Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.

2 Nikolaus vom Kues — Veritas in speculo mathematico

Wir verlassen nun das Paradies der Mathematiker und kehren zur irdischen Theologie zurück; NIKOLAUS VON KUES ist sicherlich für die Geschichte dieser Disziplin singulär in der Art und Intensität, mit der er mathematische Handführungen, *manuductiones*, und Rätselbilder, *aenigmata*, in seine theologischen Traktate integriert, aber auch insofern, dass er zwischenzeitlich mit höchster Intensität rein mathematische Studien betrieben hat[28].

[26] Vgl. etwa auch die Formulierung in seinen Brief vom 31. 8. 1899 an Dedekind, [Ca2, p. 448]: Es gibt also bestimmte Vielheiten, die *nicht zugleich Einheiten* sind, d.h. solche Vielheiten, bei denen ein reales 'Zusammensein aller ihrer Elemente' *unmöglich* ist. Diese sind es, welche ich 'inkonsistente Systeme', die anderen aber 'Mengen' nenne.

[27] D. Hilbert: *Über das Unendliche.* Mathematische Annalen **95** (1926), p. 170.

[28] Die mathematischen Schriften des NIKOLAUS VON KUES sind inzwischen als 20. Band der kritischen Edition der *Opera Omnia* erschienen; einen knappen Überblick zu Quellen und Inhalt dieser fachmathematischen Werke gibt MENSO VOLKERTS: *Die Quellen und die Bedeutung der mathematischen Werke des Nikolaus von Kues*, MFCG **28** (2003), 291-332.

Ich möchte hier die mathematikhistorische Frage nach dem Beitrag des CUSANUS für die Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung ausblenden[29]. Das Augenmerk soll vielmehr auf die Verwendung der mathematischen Bilder in den theologischen Schriften des CUSANUS gerichtet sein[30] und auf seine mathematikphilosophische Reflexion. Zunächst wirkt manches frappierend ähnlich zu dem bei CANTOR knapp Skizzierten, und auch der Anspruch ist nicht geringer, wenn CUSANUS schreibt, er wolle zeigen[31],

> (...) daß und wie im Spiegel der Mathematik jenes Wahre, das in allem Wißbaren gefragt wird, nicht nur in entfernter Ähnlichkeit widerstrahlt, sondern gleichsam in strahlender Nähe.

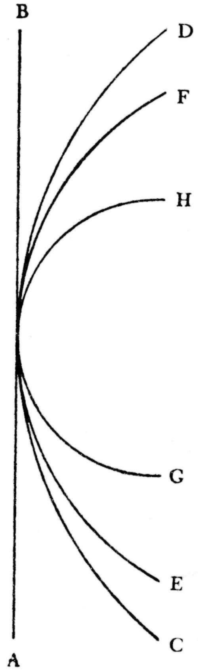
NIKOLAUS betont — etwa schon im ersten Buch seines frühen Hauptwerkes *De docta ignorantia* — die Angewiesenheit der Theologie, vom Gegebenen, Geschöpflichen, Begrifflichen auszugehen, das allerdings für die Suche nach Gotteserkenntnis allenfalls Ähnlichkeit, *similitudo*, nie Genauigkeit, *rectitudo, veritas*, vermitteln kann. Selbstverständlich in Bezug auf die Gotteslehre ist also zunächst nur das schiere Nichtwissen und bereits viel schwieriger ein genaueres Wissen um dieses Nichtwissen, die *docta ignorantia*. Im ersten Punkt treffen sich also CANTOR und CUSANUS, während sich bereits im zweiten Punkt die Wege trennen, der Kueser Kardinal in differenzierter Weise über die Ausführungen des Hallenser Husserlfreundes hinausgeht.

NIKOLAUS präsentiert uns nämlich bereits hier und verstärkt noch in den späteren Werken keine schlichte, negative Theologie. Dies gelingt ihm unter anderem, weil sich im Rahmen der einzig möglichen, "symbolischen" Gotteserkenntnis die mathematischen Gegenstände als Symbole anbieten durch ihre besondere Sicherheit und Unwandelbarkeit. Und so behauptet NIKOLAUS,[32]

> niemand könne zu einem Wissen um die göttlichen Dinge kommen, der in der Mathematik jeglicher Übung völlig ermangele.

[29] Für eine umfassende Würdigung der Rolle des CUSANUS für die neuzeitlichen Wissenschaften vgl. [Na].
[30] Vgl. hierzu auch [Pu-Sc]. Teile dieser Sektion sind bereits publiziert in [Ni1].
[31] *De theologicis complementis* (n. 1), [Cu2, p. 651].

In der *docta ignorantia* werden mathematische, in der Regel geometrische Beispiele verwendet, um zu erkunden, was bei einem 'Übergang ins Unendliche' geschieht.
CUSANUS beschreibt dabei einen doppelten Überstieg. Zunächst betrachtet er endliche mathematische Figuren (etwa eine Gerade und verschiedene Kreise) variierbarer Größe, um dann zu erkunden, was bei einem 'Übergang' zu deren 'unendlichen Analoga' geschieht. Diese fallen dann bereits nicht mehr in den Bereich der Mathematik. Dabei werde deutlich, wie die im Endlichen unvereinbaren Gegensätze (etwa gerade und gekrümmt) im Unendlichen koinzidieren (vgl. die nebenstehende Abbildung). In einem zweiten Schritt solle schließlich das Figürliche ganz abgelegt werden, und somit gleichsam ein geistiger Blick auf das Unendliche selbst geworfen werden; in seinem Frühwerk wird hierbei vor allem der Ineinsfall der Gegensätze, die *coincidentia oppositorum*, erkennbar.
Auch hier verweist also die Mathematik auf einen Randbereich, in dem Widersprüche zu erwarten sind. Und das gesuchte Absolute zeigt sich allenfalls jenseits dieser Koinzidenz des Gegensätzlichen.



De docta ign., (n. 36).

2.1 Differenzen I — Mathematik und Theologie im Gefüge des Geistes

Nun ist es aber entscheidend, daß sich diesem 'Aufstieg' aus der Mathematik zum einen eine intellektuale *Weiter*führung auf theologischem Gebiete, vor allem eine trinitarische Spekulation, anschließt — die ich hier zunächst ausblenden möchte. Zum anderen setzt eine *Rück*wendung ein, eine Reflexion auf das verwendete Erkenntnismittel, die Mathematik. Dabei verortet NIKOLAUS die Mathematik im Gefüge der Vermögen des (menschlichen) Geistes, der *mens*, die er in vier Stufen zu unterscheiden vorschlägt[33]:

1. Der Sinn, *sensus*, nimmt rein positiv wahr, er unterscheidet nicht die Position eines Sachverhalts von der Negation eines anderen[34]: „[D]er Sinn nimmt wahr

[32] *De docta ignorantia* (n. 31), [Cu1, p. 43].
[33] Wir betrachten hier nur eine grob vereinfachte Skizze seiner Konzeption der *mens*. Worauf es im Kontrast zu CANTOR vor allem ankommt, ist die Integration einer sorgfältigen Kritik der menschlichen Vernunft bei CUSANUS.
[34] *De coniecturis I* (n. 32, 3).

und unterscheidet nicht. Jede Unterscheidung stammt aus dem Verstand. (...) Der Sinn stellt nur fest, daß etwas sinnlich Wahrnehmbares da ist, aber nicht, ob dieses oder jenes."

2. Der Verstand, *ratio*, fasst die Eindrücke der Sinne durch Begriffe zusammen, unterscheidet (bzw. entfaltet) Negation und Position (als einander ausschließend)[35]: „So benutzt der Verstand den Sinn als Werkzeug, um die Sinnendinge zu unterscheiden; doch er selbst ist es, der im Sinn das Sinnending unterscheidet." In diesem Bereich ist die **Mathematik** angesiedelt.

3. Die Vernunft, *intellectus*, fasst die Unterscheidungen des Verstandes zur Einheit zusammen, faltet also die Gegensätze Position und Negation ein. Anders formuliert: die Vernunft reflektiert die (Möglichkeit/Legitimität der) unterscheidenden Urteile des Verstandes[36]: „Sie eint die Andersheiten des sinnlich Wahrgenommenen (...) im Verstand, und sie eint schließlich die mannigfaltige Andersheit der Begriffe in ihrer einfachen Vernunfteinheit." Hier befindet sich die **Theologie**.

4. Die Schau, *visio*, geht als (rein negatives) 'Grenzvermögen' noch über die Vernunft hinaus; sie[37] „führt den Betrachtenden über allen Sinn, Verstand und alle Vernunft hinaus zur mystischen Schau, in welcher der Aufstieg jeder erkennenden Kraft sein Ende und die Enthüllung des unbekannten Gottes ihren Anfang hat."

Es erscheint also als eine durchaus merkwürdige Konkordanz des Gegensätzlichen, wenn im Werk des NIKOLAUS VON KUES Theologie und Mathematik immer wieder neu aufeinander bezogen werden. Unterscheiden sich beide doch in einem entscheidenden, von CUSANUS genau benannten Charakteristikum voneinander. Während also in der Mathematik — im Bereich der *ratio* — ein Zusammenfall des Widersprechenden unbedingt zu vermeiden ist — er behauptet sogar, dass alle Sätze der Mathematik auf den Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch zurückgeführt werden könnten —, ist es in der Theologie genau umgekehrt. Hier — im Bereich des *intellectus* — ist allenfalls *nach* (bzw. *vor*) dem Zusammenfall der Gegensätze eine Gotteserkenntnis von ferne, *per infinitum* („durch das Infinite hindurch"), zu sichten. Während die Mathematik ein Spielfeld ist, auf dem die *ratio* und nur sie ihr kreatives Können zeigt – allerdings innerhalb der Grenzen der und ermöglicht durch die Einheit des *intellectus* –, ist es in der Theologie allenfalls der *intellectus*, der, die *ratio* und deren Widerspruchsprinzip einigend, aber auch sprengend,

[35] A.a.O.
[36] A.a.O.
[37] *De possest* (n. 15,1).

überspringend und zurücklassend, im Erkennen seines Nichtmehrkönnens (s)ein höchstes Können erfährt.

Wie schon der spannungsreiche Titel der *docta ignorantia* in einer konzentrierten Formel darstellt, geht es CUSANUS immer um ein dynamisches Wechselspiel von Wissen und (bzw. um das) Nicht-wissen, beide Aspekte dürfen nicht vergessen werden. In der Werkfolge wird allerdings spätestens mit den Idiota-Dialogen (ab etwa 1450) die Leichtigkeit der Gotteserkenntnis betont, *kann* das ein-fache können, das *posse*, zum Gottesnamen werden. Die zunächst metaphysisch behauptete Koinzidenz des Gegensätzlichen wird hier auf den Erkenntnisgang selbst angewendet, die Koinzidenz von Wissen und Nichtwissen auf ein — freilich ganz neuartiges — Wissen hin überschritten, „die Weisheit ruft in den Gassen!“ heißt es im Dialog *Idiota de sapientiae.*

Die intellektuale Spekulation zeigt dann, wie sich die Begründungsverhältnisse umkehren, und damit auch die relative Klarheit und Sicherheit. Nach einer geometrischen Handführung in *de venatione sapientiae* heißt es[38]:

> Wenn ich diese [geometrischen GN] Verhältnisse irgendwie als notwendig erschaue, so bin ich mir absolut sicher, daß sie in noch unvergleichlich wahrerer Weise im Können-Sein wirklich sind. Der Verstand kann nämlich nichts finden, was dem Können-Sein fehlte, da es alles Begreifbare und das Begreifen Übersteigende in Vollkommenheit wirklich ist, gemäß der richtigen Bemerkung des seligen Anselm, Gott sei das über alles Begreifen Größere.

Dem entspricht das ontologische Begründungsverhältnis (bzw. Schöpfungsverhältnis). Das Unendliche begründet das Endliche[39]:

> Das unendliche ist nicht meßbar, da es unbegrenzt ist. Es kann also nicht mit den Grenzen irgendeines Maßes eingeschlossen werden, sondern ist selbst das Maß von allem.

Der nach Erkenntnis suchende Theologe erfährt sich selbst schließlich als längst schon erkannt; aber gerade dies kann er gerade noch ‘erkennen’. Dieser Wechsel der Perspektiven bleibt allerdings unverfügbar, wird als Entrückung, *raptus*, erfahren und beschrieben. Aber gerade dieses kann nochmals am mathematischen Bild illustriert — und damit rationalisiert! — werden, daß nämlich die *mens* vom[40]

> winkelartigen Umfassen zu kreisartigem emporgerissen [wird]; so wie die Schüler durch das Lesen bestimmter Bücher zuerst zur allgemeinen

[38] *De venatione sapientiae* (n. 77,1).
[39] *De theologicis complementis* (n. 2,46).
[40] *De theologicis complementis* (n. 9,68).

> Kunst und dann zur Meisterschaft, alle Bücher zu lesen, emporgerissen werden.

2.2 Differenzen II — Inwiefern könnte Mathematik der Gotteserkenntnis dienen?

In der Werkfolge werden in zunehmendem Maße die mathematischen Bilder nicht einfach nur zur 'Illustration' verwendet, vielmehr dient die Mathematik einer Art Selbstbeobachtung der *mens* und dadurch erst einer *indirekten* Beobachtung Gottes[41]:

> Die mens erblickt jedoch nicht die Wahrheit selbst, durch die sie sich und alles erblickt. Sie weiß darum, daß diese ist (quia-est), nicht was sie ist (quid-est), so wie das Sehen nicht die Klarheit jenes Sonnenlichtes sieht, durch das es alles Sichtbare sieht und dennoch erfährt, daß es ohne es nicht sieht.

Es darf nun allerdings die Frage gestellt werden, was die sorgfältigen Selbst-Erfahrungen der *mens* mit einer christlichen Gotteslehre zu tun haben können. Hier scheinen mir drei Aspekte wichtig.

Imago Dei Zum einen wird die *mens* als Bild Gottes, als *imago dei*, vorausgesetzt. Schöpfungstheologisch ist also verbürgt, daß die intellektuale Spekulation schließlich nicht *nur* bei der mens selbst bleibt, sondern wenigstens Ähnlichkeit mit Gott erreichen könnte. Wenn wir Abbild Gottes sind, so ist Selbsterkenntnis zumindest *auch* Gotteserkenntnis; und so gilt für den menschlichen Geist:[42]:

> Er mißt seine Vernunft durch die Mächtigkeit seiner Werke und gewinnt daraus das Maß für die göttliche Vernunft, wie die Wahrheit durch ihr Bild gemessen wird.

Insofern alle Cusanischen Werke als Denk-Experimente verstanden werden können, bei denen sich die *mens* allerdings als Experimentator und Untersuchungsgegenstand gleichzeitig erweist, wird 'aus den Augenwinkeln' immer auch ein Blick auf Gott geworfen.

[41] *De theologicis complementis* (n. 2,46).
[42] *De beryllo* (n. 10).

Schöpfung Eine Weiterführung dieses Arguments zeigt zweitens, daß gerade die immitierte — nicht usurpierte! — Kreativität des menschlichen Geistes, nämlich die freie Schöpfung der mathematischen Gegenstände, den ursprünglich schöpferischen Akt Gottes reflektieren hilft. Die *mens* zeigt sich dann beim Hervorbringen der — neuplatonisch gesprochen – besonders edlen Gegenstände der Mathematik auf exemplarische Weise. Und hierin kann ein gegenüber der griechischen Metaphysik entscheidend neuer christlich-jüdische Gedanke, die *creatio ex nihilo*, paradigmatisch illustriert werden.

Wenden wir uns an dieser Stelle der Mathematik selbst zu! Es ist die bleibende Hinterlassenschaft des Kardinals für die Mathematikphilosophie, dass er — erstmals in der Geschichte — die mathematischen Gegenstände als *freie* Schöpfungen des menschlichen Geistes beschreibt; gerade deswegen sei die Mathematik so sicher, wie keine andere Erkenntnis. So wie das Geschöpf CUSANUS an seinen Gott gerichtet sagen kann[43]:

> Da Dein Sehen Dein Sein ist, bin ich also, weil Du mich anschaust.

so existieren die Gegenstände der Mathematik nur in und durch das Betrachten des Mathematikers[44]:

> Der menschliche Geist, der ein Bild des absoluten Geistes ist, setzt in seiner menschlichen Freiheit allen Dingen in seinem Denken Grenzen, weil der Geist mit seinen Begriffen alles ausmißt. Er setzt eine Grenze für die Linien, macht sie lang oder kurz, und setzt so viele Begrenzungspunkte in ihnen, wie er will.

An dieser Stelle lässt sich eine weitere Parallele zu CANTOR feststellen, der — in den Rahmen seines platonistischen Mathematikverständnisses — die Schöpfungsfreiheit des Mathematikers als *wesentliches* Charakteristikum integriert[45]:

> Die Mathematik ist in ihrer Entwickelung völlig frei und nur an die selbst-redende Rücksicht gebunden, daß ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchslos sind, als auch in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen.

CUSANUS gibt uns allerdings noch genauere Hinweise, wie sich die Entfaltung der mathematischen Gegenstände aus der Einheit des mathematischen Geistes vollzieht. So beschreibt er in seinem zweiten (erkenntnistheoretischen) Hauptwerk, *de*

[43] *De visione dei* (n. 10).
[44] *De venatione sapientiae* c. 27 (n. 82 10-20).
[45] Vgl. *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, 1883 [Ca1, p. 182].

coniecturis, die Zahl als Muster mathematischer Begriffsbildung durch den menschlichen Verstand und Werkzeug für dessen conjecturale Welterfassung [46]:

> Überhaupt ist die Zahl nichts anderes als ausgefalteter Verstand. (...) Und wenn der Verstand die Zahl ausfaltet und sich ihrer beim Aufbau der Mutmaßungen bedient, so ist das nichts anderes, als wenn der Verstand sich seiner selbst bedient und alles nach dem nächsten natürlichen Abbild seiner selbst bildet.

Die Zahl (und mit ihr mathematische Begriffe überhaupt) kommt jedoch überhaupt erst durch ein virtuoses Wechselspiel von Einheit und Vielheit durch die menschliche *ratio* und im Rahmen des menschlichen *intellectus* zustande: [47]:

> Beim Zählen kommt der Verstand zum Zusammenfallen von Einfaltung und Ausfaltung; denn durch das Zählen faltest Du die Einheit aus und die Mehrheit in der Einheit irgendeiner Zahl ein. Wenn Du nämlich zehn zählst, faltest du die allbekannte einfaltende Einheit zehnartig aus und die unbekannte Mehrheit in der Zehnereinheit ein. In dem Verstand gibt es also ein gewisses Zusammenfallen der Gegensätze, das bei den Sinnendingen nicht erreicht werden kann.

An dieser Stelle bietet es sich an, nochmals die Charakterisierung CANTORS zu vergleichen, in der Mengen zustande kommen, indem eine „Vielheit als Einheit" aufgefasst wird.

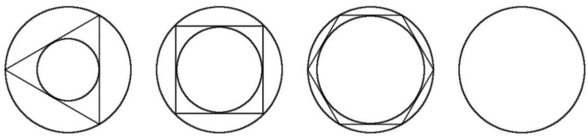
Trinität Schließlich ist drittens der Zielpunkt für den Theologen CUSANUS stets eine trinitarische Gotteslehre, also das Bedenken einer differenzierten Einheit jenseits der — noch nicht hinreichend differenzierten und bestimmten — Koinzidenz des Gegensätzlichen. Insofern sich die Trinität durch Ihr Handeln in der Schöpfung äußert und erkennen läßt, und das heißt für NIKOLAUS im Sinne einer Entfaltung der Einheit in der Vielheit, *complicatio-explicatio*, findet diese Figur nun gerade in der Mathematik als "mittlerer", also rationaler Tätigkeit des Geistes *par excellence* ihre Entsprechung, insofern sie die Verschiedenheit der Sinne (vereinigend) einfaltet und ihrerseits aus der die contradictorischen Widersprüche vereinigenden Einfachheit des *intellectus* entfaltet ist. Damit ist sie ein besonders geeignetes Beobachtungsfeld für diese Denkfigur.

Wiederum an einem mathematischen Bild kann dies illustriert werden. Betrachtet wird die Annäherung des Kreises durch Polygone mit wachsender Eckenzahl (vgl.

[46] *De coniecturis I* c. 2 (n. 7).
[47] *De coniecturis II* c. 1 (n. 79).

die folgende Abbildung)[48]. Dabei werden zu dem jeweiligen Polygon der Inkreis und der Umkreis konstruiert. Je größer die Zahl der Ecken ist, desto mehr nähern sich der eingeschriebene Kreis, der umschriebene Kreis und das Polygon selbst. Im Grenzfall kommen der Umkreis, der Inkreis und das 'Unendlich-eck' zur Deckung. Diese Drei-einheit kann aber an dem dann nur noch sichtbaren *einen* Kreis selbst nicht wahrgenommen werden[49]:

> Und sie sind so drei Kreise, daß sie einer sind, und zwar ein dreieiniger Kreis. Dies kann auf keine Weise erscheinen, wenn es nicht an den Polygonen betrachtet wird.



Circulus Unitrinus, *De theol. com.* (n. 3,10-15)

Erst vermittels der rationalen Unterscheidung, durch das Polygon symbolisiert, kommen also die Momente der (trinitarischen) Einheit, symbolisch der dreieinheitliche Kreis, zur Darstellung. Und wiederum in umgekehrter Richtung ist überhaupt *nur* ein trinitarischer Gott überhaupt erkennbar[50]:

> Weil Du nämlich einsehende Einsicht, einsehbare Einsicht und die Verbindung beider bist, kann darum die geschaffene Einsicht in Dir, ihrem einsehbaren Gott, die Einung mit Dir und ihre Glückseligkeit erreichen.

Unendlichkeit Der Unendlichkeitsbegriff löst bzw. benennt im Werk des Nikolaus von Kues eine komplexe Problemkonstellation. Zugleich sollen eine grundsätzliche (ontologische und gnoseologische Unerreichbarkeit Gottes und eine irgendwie geartete (bei den späteren Schriften sogar offensichtlichste und leichteste) Zugangsmöglichkeit behauptet werden; schöpfungstheologisch soll eine größtmögliche Unterscheidung von Gott und Welt, Gott und einzelner Kreatur (bei absoluter Souveränität Gottes) dargestellt werden wie auch eine größtmögliche Nähe. Die *mathesis*, gerade als Wissenschaft, die mit variablen (obzwar stets endlichen) Größen umgeht, ist hierbei prädestiniert für ein vorsichtiges, experimentales Be-denken eines — wie immer gearteten — Überganges zur Unendlichkeit.

[48] Das Bild ist natürlich motiviert durch Verfahren zur Kreisquadratur.
[49] *De theologicis complementis* (n. 3,10-15).
[50] *De visione dei* (c. 19, n. 81,5).

Es ist allerdings — und dies wiederum in scharfem Kontrast zu Georg Cantor — zu bemerken, dass die Unendlichkeit und die *coincidentia oppositorum* keineswegs die einzigen Ausdrucksformen sind, die Nikolaus für seine Gotteslehre zur Verfügung stehen. In *de venatione sapientiae* etwa ist die Koinzidenz der Gegensätze nur eines von zehn Feldern, auf denen sich der Intellekt bei der Jagd nach Weisheit ergötzt. Seine Handreichungen gehen keineswegs nur von der Mathematik aus, so dienen etwa das Handwerk (beispielsweise in den *idiota*-Dialogen), die Sprache (etwa in *de non aliud*) und auch das sinnliche Sehen (besonders schön in *de visione dei*) als Ausgangspunkte für die theologische Spekulation.

3 Zusammenfassung und Ausblick

Betrachtet man den unterschiedlichen Umgang mit dem Unendlichkeitsbegriff, wie er exemplarisch bei Cantor und Cusanus beschrieben wurde, so scheint mir für den Dialog zwischen Mathematik und Theologie folgendes deutlich zu werden:

1. Eine gelingende *Bezugnahme* von Theologie und Mathematik setzt zunächst eine klar reflektierte *Abgrenzung* beider Disziplinen voraus.
2. Ein fruchtbarer Ausgangspunkt sind dabei nicht so sehr die (meist defizient) interpretierten *'Fakten'*, als vielmehr ein Bedenken der jeweiligen *Methodik*.
3. So sind die relativ *einfachen* mathematischen Beispiele des Cusanus, die zu einer Reflexion anregen, was Mathematik eigentlich sei und was unseren Geist dazu befähigt, deutlich fruchtbarer als die *schwierige*, aktuelle Mengentheorie, die Georg Cantor ohne weitere Rückfrage in Anspruch nimmt.
4. Umgekehrt genügte die relativ simple platonistische Grundüberzeugung Cantors als Motivation für seinen Mut zu einer überaus fruchtbaren mathematischen Begriffsbildung. Deren Rechtfertigung kann dann wiederum auf mathematischem Gebiet rein pragmatisch erfolgen.
5. Eine philosophisch orientierte Gotteslehre — gerade wenn sie auf mathematisches Denken Bezug nehmen will — muss sich vermutlich um einen produktiven Umgang mit Widersprüchen bemühen.
6. Die wechselseitige Irritation der beiden Disziplinen kann für beide — auf jeweils eigentümliche Weise – äußerst fruchtbar sein; allerdings darf dabei nicht versucht werden, in naiver Weise die Methodik des einen auf das andere Feld zu übertragen.

Literaturverzeichnis

[Ba] Hans Bandmann: Die Unendlichkeit des Seins. Cantors transfinite Mengenlehre und ihre metaphysischen Wurzeln. Frankfurt am Main 1992.

[Be-Ko] Luc Bergmans, Teun Koetsier (eds.): Mathematics and the divine: a historical study. Amsterdam 2005.

[Ca1] Georg Cantor: Gesammelte Abhandlungen. Hg. von E. Zermelo. Hildesheim 1962.

[Ca2] Georg Cantor: Briefe. Hg. von H. Meschkowski und W. Nilson. Berlin 1991.

[Cu1] Nikolaus von Kues: De Docta Ignorantia. Hamburg 1979.

[Cu2] Nikolaus von Kues: Die philosophisch-theologischen Schriften, lateinisch-deutsch, Band II (Übersetzt von Dietlind & Wilhelm Dupre). Wien 1989.

[Cu3] Nikolaus von Kues: Philosophisch-Theologische Werke. Hamburg 2002.

[Da] Joseph Warren Dauben: Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite. Cambridge Mass. 1979.

[De] Anne-Marie Décaillot: Cantor und die Franzosen. Mathematik, Philosophie und das Unendliche. Berlin 2011.

[Fl] Kurt Flasch: Nikolaus von Kues. Geschichte einer Entwicklung. Vorlesungen zur Einführung in seine Philosophie. Frankfurt am Main 1998.

[Ga] Carl Friedrich Gauss, Christian Heinrich Schumacher: Briefwechsel. Hrsg. v. Christian A. F. Peters. Hildesheim 1957.

[Ho] William J. Hoye: Die mystische Theologie des Nicolaus Cusanus. Freiburg 2004.

[Meh] Herbert Mehrtens: Moderne Sprache Mathematik. Frankfurt 1990.

[Na] Fritz Nagel: Nikolaus von Kues und die Entstehung der exakten Naturwissenschaften. Münster 1984.

[Ni1] Gregor Nickel: *Nikolaus von Kues: Zur Möglichkeit von theologischer Mathematik und mathematischer Theologie.* In: I. Bocken, H. Schwaetzer: Spiegel und Porträt. Zur Bedeutung zweier zentraler Bilder im Denken des Nicolaus Cusanus. Maastricht 2005, 9-28.

[Ni2] Gregor Nickel: *Widersprüche und Unendlichkeit - Beobachtungen bei Nikolaus von Kues und Georg Cantor.* In: Walter Hutter (Hrsg.): Mathematik, Physik und Geisteswissenschaft. Perspektiven und pädagogische Relevanz. Stuttgart 2013, 55-70.

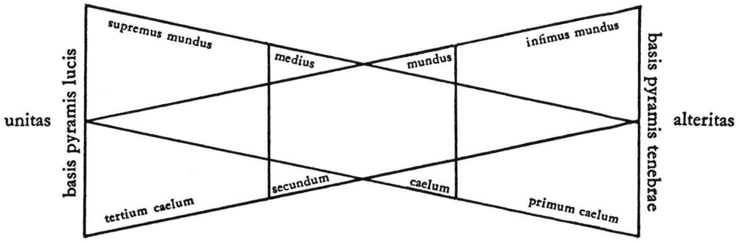
[Pu] Walter Purkert, Hans Joachim Ilgauds: Georg Cantor. Basel 1987.

[Pu-Sc] Friedrich Pukelsheim, Harald Schaetzer (Hgg.): Das Mathematikverständnis des Nikolaus von Kues. MFCG **29**, Trier 2005.

[Sf] Jocelyne Sfez: *L'hypothétique influence de Nicolas des Cues sur Georg Cantor dans la question de l'infinité mathématique.* In: Friedrich Pukelsheim, Harald Schaetzer (Hgg.): Das Mathematikverständnis des Nikolaus von Kues. MFCG **29**, Trier 2005, 127-160.

[Ta] Christian Tapp: Kardinalität und Kardinäle. Stuttgart 2005.

[Th] Rüdiger Thiele: *Georg Cantor (1845–1918).* In: Koetsier, Teun (ed.) et al.: Mathematics and the divine. A historical study. Amsterdam 2005, 523-547.



Die Reihendarstellung der Exponentialfunktion – zu Eulers Umgang mit *unendlichen* Größen

Ingo Witzke

Zusammenfassung Leonhard Euler ist dafür bekannt, die Analysis wesentlich in eine algebraische Richtung weiterentwickelt zu haben. Im Gegensatz zu seinen Vorgängern auf diesem Gebiet basiert seine Differential- und Integralrechnung auf einem analytischen Funktionsbegriff. Wesentlich für ihn ist in diesem Zusammenhang die Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen, deren Nutzen er im ersten Band der *Introductio in Analysin Infinitorum* von 1748, sowie in den darauffolgenden *Institutiones Calculi Differentialis* von 1755, ausführlich vorführt. Dabei zeigt sich, wie intuitiv, virtuos und manchmal an der Grenze des logisch Rechtfertigbaren – entgegen seiner anderslautenden programmatischen Aussagen – Euler arbeitet und argumentiert. Im folgenden Beitrag findet sich eine Rekonstruktion und Diskussion eines prominenten Beispiels für Eulers Vorgehensweise im Kontext der Differential- und Integralrechnung: Die Darstellung einer Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion. Es ist bemerkenswert, wie experimentell-tentativ Euler mit den ihm zur Verfügung stehenden Mitteln arbeitet und sich nicht scheut die so entwickelten Ergebnisse, im Gegensatz zur heutigen Veröffentlichungspraxis, sogar in einem Lehrbuch zu veröffentlichen. Charakteristisch ist dabei sein Umgang mit *unendlichen Größen* (d.h. unendlich kleinen und unendlich großen Größen), der auf den von Leibniz und Newton geschaffenen Infinitesimalkalkül zurückgeht.

1 Vorbemerkung

Euler hat in der Mathematik eine besondere Berühmtheit dafür erlangt, Reihendarstellungen (von Funktionen) systematisch in die Analysis einzubinden. Im ersten Band der *Introductio in Analysin Infinitorum*, einem Lehrbuchklassiker des 18.

und 19. Jahrhunderts, widmet sich Euler dieser Thematik ausführlich.[1] In diesem Zusammenhang arbeitet er zum ersten Mal in seiner Analysis mit *unendlichen Größen* – von uns im Folgenden als Sammelbegriff für unendlich kleine und unendlich große Größen verwendet, deren Rechtfertigung und Anwendung bis heute durch kritische Diskussionen begleitet wird.[2] Zum einen waren Newton, die Bernoullis oder Leibniz mit Hilfe von unendlich kleinen Größen, die u. a. auch als Indivisibilien, infinitesimale Größen oder Differentiale (dx, dy, dz) bezeichnet wurden, auf kunstvolle Art und Weise in der Lage klassische Probleme der Analysis zu lösen. Zum anderen blieben sie als unverzichtbare, in ihrer Definition aber unklare Grundbegriffe, Zielscheibe von Fundamentalkritik. So bezeichnete Voltaire ironisch den auf Newton und Leibniz zurückgehenden Infinitesimalkalkül als „Kunst, dasjenige exakt zu zählen und zu messen, von dem man sich noch nicht einmal die Existenz vorstellen kann" (Voltaire zit. nach [Heu08, S. 161]) und Bischof G. Berkeley verspottete in seiner bekannten polemischen Kritik des Calculus unendlich kleine Größen als „Ghosts of Departed Quantities" ([Ber34]). Bos beschreibt folgerichtig die unendlich kleinen Größen als Ursache für „all the inconsistencies which during the 18$^{\text{th}}$ century were increasingly felt as embarrassment and which were removed in the 19$^{\text{th}}$ century by eliminating altogether the infinitesimal quantities from the calculus" [Bos75, S. 12]. Moderne Rekonstruktionen mit Mitteln der Non-Standard-Analysis oder der Differentialgeometrie beschreiben heute den Infinitesimalkalkül nach Leibniz in weiten Teilen als konsistente mathematische Praxis, wobei die unendlich kleinen Größen den Status theoretischer Begriffe haben, die nur theorieimmanent eine Bedeutung haben.[3]

Auf welche Art und Weise Euler in der *Introductio* mit unendlichen Größen vorgeht, möchten wir am Beispiel der ihm zugeschriebenen Entwicklung einer Reihendarstellung der Exponentialfunktion darstellen und diskutieren. Um seine Vorgehensweisen besser einordnen zu können, formulieren wir zunächst zwei interessante Vorbemerkungen bzgl. Eulers Umgang mit Potenzreihen.

(I) Induktive Schlüsse Im vierten Kapitel des ersten Bandes seiner Lehrbuchtrilogie zur Analysis, bestehend aus der *Introductio* von 1748 (2 Bände), den *Institutiones Calculi Differentialis* von 1755, sowie den *Instiutiones Calculi Integralis* von 1768 – 1770 (3 Bände), beschreibt Euler ausführlich die „Darstellung der Functionen durch unendliche Reihen". [4] Er beginnt dabei seine Ausführungen mit der

[1] Hier findet die Übersetzung von H. Maser (1885) der Originalausgabe von 1748 Verwendung.
[2] Vgl. [Bos75], [Ear75], [Jah99], [Son11], [Wit09].
[3] Vgl. für die Rekonstruktion durch Non-Standard- Analysis: [Dau88]. Für eine Rekonstruktion mit Mitteln der Differentialgeometrie vgl. [BS10] sowie [Wit09].
[4] Die beiden Bände der *Introductio* können als „precalculus" aufgefasst werden, in denen Euler nach eigenen Worten erläutert, „was die Analysis des Unendlichen durchaus voraussetzen

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ
Socio.

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII

Titelblatt der Originalausgabe der *Introductio* von 1748.

bemerkenswerten These, *alle* Funktionen ließen sich durch (unendliche) Reihen darstellen (seien also modern gesprochen analytisch). Er begründet dies „intuitiv-induktiv“ wie folgt:

> „Wenn jedoch einer Zweifel hegen sollte, ob eine solche Function durch eine unendliche Reihe von derartigen Gliedern darstellbar sei, so wird dieser Zweifel durch die wirkliche Entwickelung einer jeden Function beseitigt werden“. [Eul48b, S. 50]

Diese Art der Begründung setzt sich klar von Argumenten einer Darstellung *moderner formaler Mathematik* ab. Einen logisch widerspruchsfreien Beweis bleibt Euler (wenig überraschend wie wir heute wissen) an dieser Stelle schuldig, er verweist vielmehr auf eine aus seiner Erfahrung gewonnene Erkenntnis. Fragen nach (lokaler) Konvergenz und Existenz von Potenzreihen, die in keinem modernen Analysisbuch fehlen dürfen, sind Euler fremd.

> „Potenzreihen erscheinen als das natürlichste von der Welt, über Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen wird nicht geredet“. [Wal83, S. 15]

Für ihn erscheinen Reihendarstellungen vielmehr als eine weitere nützliche Darstellungsform von Funktionen, wie etwa auch die zugehörigen Kurven. Sein besonderes Interesse gilt dabei den *transzendenten Funktionen*, also solchen, die nicht algebraisch sind, wie z.B. die Sinusfunktion oder eben die Exponentialfunktion.

> „Ja es dürfte sogar die Natur transcendenter Funktionen besser zu erkennen sein, sobald dieselben in einer solchen, wenn auch ins Unendliche fortlaufende Form ausgedrückt sind“. [Eul48b, S. 49]

Der große Vorteil der Reihendarstellung liegt für ihn darin, dass er mit ihnen nun (vermeintlich) wie mit Polynomen umgehen kann. Euler gilt in diesem Zusammenhang als Erster, der im Gegensatz zu seinen Vorgängern auf dem Gebiet der Analysis, *systematisch* Differentiale von „transcendenten Funktionen“ auf Grundlage der Reihendarstellungen erfolgreich bestimmte [Jah99, S. 144ff.].

muss“. [Eul48b, S. V.] Während er im 1. Band ([Eul48b]) vollständig auf Bezüge zur Geometrie verzichtet, finden sich im 2. Band ([Eul48a]) die geometrische Anwendungen. In den *Institutiones* beschreibt er dann die Infinitesimalrechnung, die er als „Analysis des Unendlichen“ bezeichnet.

(II) „Unbequemlichkeiten" Im sechsten Kapitel der *Introductio, „Von den Exponentialgrößen und den Logarithmen"* finden wir eine von Euler bewusst gesetzte Einschränkung eines *Definitionsbereiches*, und zwar um „Unbequemlichkeiten" entgegen zu wirken.[5] Dieser Schritt bildet im Sinne eines willkürlichen Aktes einen wichtigen Impuls für die folgende Weiterentwicklung und Präzisierung der Mathematik. Euler schränkt an dieser Stelle die Basis des Logarithmus auf positive Werte ein.[6] Er geht dabei in §99 wie folgt vor,

> „Ist $a = 0$, so findet sich zwischen den Werten von a^z ein grosser Sprung. So lange nämlich z eine positive Zahl und grösser wie 0 ist, ist beständig $a^z = 0$; ist $z = 0$, so wird $a^0 = 1$; ist aber z eine negative Zahl so erhält a^z einen unendlich grossen Wert. Denn ist z.B. $z = -3$, so wird $a^z = 0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$, also unendlich gross. Noch viel grössere Sprünge aber kommen vor, wenn die constante Zahlgrösse a einen negativen Wert, z.B. den Wert -2 hat. Denn setzt man dann für z ganze Zahlen, so werden die Werte von a^z abwechselnd positiv und negativ, wie aus der Reihe ersichtlich ist;
>
> $$\begin{array}{cccccccc} a^{-4}, & a^{-3}, & a^{-2}, & a^{-1}, & a^0, & a^1, & a^2, & \textit{usw.} \\ +\frac{1}{16}, & -\frac{1}{8}, & +\frac{1}{4}, & -\frac{1}{2}, & 1, & -2, & +4, & \textit{usw.}\text{“} \end{array}$$
>
> [Eul48b, S. 74-75]

Diese Beobachtung führt Euler nun dazu, den Definitionsbereich für die weiteren Ausführungen zu Logarithmen hinsichtlich der Basis einzuschränken,

> „Der angeführten Unbequemlichkeiten (*incommodis*) bei negativen Werten von a halber wollen wir voraussetzen, dass a eine positive Zahl und grösser als eins sei [...]. Setzt man dann $a^z = y$, und nimmt für z alle reellen Werte, welche zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ liegen, so wird y alle positiven zwischen den Grenzen $+\infty$ und 0 enthaltenen Werte annehmen." [Eul48b, S. 75]

Euler geht in diesem Zusammenhang sehr unbefangen mit den ihm zur Verfügung stehenden Symbolen um, auch mit der Null. So ordnet er z.B. dem Wert $\frac{1}{0}$ einen unendlichen großen zu. Seine Umformungen bilden dabei natürlich keine Herleitung

[5] Die Formulierung *incommodis* im Original ist dabei sehr schwach, aber er nutzt hier zum ersten Mal das Mittel der Einschränkung, um „präzise" argumentieren zu können.

[6] In der mathematischen Community des 18. Jhs. wurde ausführlich über Logarithmen negativer Zahlen gestritten, dazu Jahnke: „In den Jahren 1712/13 diskutierten Leibniz und Johann Bernoulli brieflich über die Logarithmen negativer Zahlen. Bernoulli vertrat die Auffassung, daß $\log a = \log(-a)$ sei, während Leibniz der Meinung war, daß $\log(-a)$ imaginär sein müsse. Diese Frage wurde zwischen 1727 und 1731 erneut zwischen Bernoulli und Euler erörtert". [Jah99, S. 147]

im Sinne eines Grenzwertes, sondern sollen wohl an ein intuitives Zahlverständnis appellieren: Ist der Nenner eines Bruchs sehr klein, so ist sein Wert sehr groß.

2 Die Exponentialfunktion

Ein paradigmatisches Beispiel für die Entwicklung von unendlichen Reihendarstellungen für Funktionen in der *Introductio* ist sicherlich die Entwicklung der Exponentialreihe, der Euler das siebte Kapitel „*Von der Darstellung der Exponentialgrössen und der Logarithmen durch Reihen*“ widmet. Dabei ist zu beachten, dass Euler u.a. auf Arbeiten Newtons zurückgreifen konnte, der aus einer Umkehrung der zuvor ermittelten Logarithmusreihe (diese geht auf N. Mercator 1668 zurück) die Exponentialreihe entwickelt hatte. Eulers Ausführungen in diesem Zusammenhang geben einen Eindruck davon, wie Mathematiker im Bereich der Analysis vor den Präzisierungsanstrengungen eines Cauchy oder Weierstraß mit Symbolen ganz allgemein und *infinitesimalen Größen* im Speziellen umgingen.[7] Im Zusammenhang der Entwicklung der Reihendarstellung der Exponentialfunktion argumentiert Euler tatsächlich auch zum ersten Mal in der *Introductio* mit unendlichen Größen, die er an diesem Punkt noch mit i und ω kennzeichnet. Eine irgendwie geartete Erklärung oder Definition dafür formuliert er nicht.[8] Dies passt aber gut zu Eulers programmatischen Anmerkungen ganz zu Anfang der *Introductio*, er suchte den

> „[...] Leser mit dem Begriff des Unendlichen allmählich und ohne es selbst zu merken, vertraut zu machen“. [Eul48b, S. V.]

Um verdeutlichen zu können auf welche Art und Weise Euler vorgeht, rekonstruieren wir zunächst im Folgenden drei aus Eulers Vorbemerkungen hervorgehende Postulate, die er im Laufe der späteren Herleitung anwendet, in modernem Sprachgebrauch. Dies hat den Nachteil, dass wir im Sinne einer möglichst authentischen Nachzeichnung trotz größter Vorsicht nicht ganz genau am Originaltext bleiben und sich damit die Gefahr moderner Fehlinterpretationen ergibt. Dagegen steht, dass wir im Sinne einer *historisch mathematischen Rekonstruktion*[9] Eulers Vorgehensweisen sehr klar auch für Leserinnen und Leser, die nicht tiefergehend mit

[7] Vgl. zur Exponentialfunktion auch die Darstellungen von [Jah99, S. 144-146], [Son11, S. 462-465], [Wal83, S. 16-17].

[8] Erst im fünften Kapitel der *Institutiones* – also etwa 7 Jahre später und 700 Seiten weiter problematisiert er den Begriff der unendlichen Größen, „On the Infinite and the Infinitely Small“, vgl. [Wit09, S. 270ff.].

[9] Vgl. [Wit09, S. 51ff.].

dem spezifischen historischen Kontext vertraut sind, zusammenfassend darstellen und diskutieren können.

1. Postulat Sei ω eine (unendlich) kleine Zahl (*numerus infinite parvus*) und $a \in \mathbb{R}^+$ gegeben, dann gilt: Es existiert ein $k \in \mathbb{R}^+$ in Abhängigkeit von a, so dass $a^\omega = 1 + k\omega$ bzw. $\omega = \log(1 + k\omega)$ zur Basis a. (vgl. Euler §114).

Eulers Argument für diese Erkenntnis sieht wie folgt aus:

> „Beispiel.
>
> Damit es desto deutlicher hervortrete, wie die Zahl k von der Basis a abhängt, setzen wir $a = 10$ und suchen aus den gewöhnlichen Tafeln den Logarithmus einer Zahl, die nur sehr wenig größer (*numeri quam minimi unitatem superantis*) ist als 1, z.B. von $1+\frac{1}{1000000}$, so dass also $k\omega = \frac{1}{1000000}$ ist. Alsdann soll sein:
>
> $$\log(1 + \frac{1}{1000000}) = \log \frac{1000001}{1000000} = 0,00000043429 = \omega.$$
>
> Da nun $k\omega = 0,00000100000$ ist, so ergibt sich hieraus: $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$, und somit $k = \frac{100000}{43429} = 2,30258$,
>
> und daraus geht hervor, dass k eine endliche Zahl (*numerum finitum*) ist, welche von dem Werte der Basis a abhängt“. [Eul48b, S. 86]

Es ist interessant, wie Euler seine Regeln für den Umgang mit unendlich kleinen Größen induktiv in Beispielen erarbeitet und absichert. Im genannten Beispiel setzt er im Sinne von sehr kleinen Zahlen[10] tatsächlich für $k\omega$ den Wert $\frac{1}{1000000}$ ein und kommt auch für k und ω auf endliche Werte. So verfährt er im Weiteren auch für i – welches Euler als *unendlich große Größe* bezeichnet. Er definiert dabei i durch $\omega = \frac{z}{i}$, wobei „z eine endliche Zahl bedeuten soll“, und beschreibt i als eine Zahl, „die grösser ist als jede nur denkbare Zahl“ (*numerus omni assignabili major*) [Eul48b, S. 87]. Was dies präzise bedeuten soll, definiert bzw. erklärt Euler nicht.[11] Es liegt nahe zu vermuten, dass er wieder an Zahlen denkt und von diesen

[10]Dem Prinzip des Arbeitens mit sehr kleinen Werten zur „Klärung“ der Eigenschaften infinitesimaler Größen bedient Euler sich auch z.B. im Zusammenhang der Berechnung von Logarithmen trigonometrischer Funktionen (Sinus und Cosinus). Hier ermittelt er in einem Zwischenschritt für die Reihe $\frac{1}{2^{48}} + \frac{1}{4^{48}} + \frac{1}{6^{48}} + \frac{1}{8^{48}} + \frac{1}{10^{48}} + \ldots$ den Wert $\omega = 0,0000000000000355271367$ und rechnet mit diesem Ausdruck tatsächlich noch weiter (vgl. [Eul48b, S. 154ff.])

[11]Im Original steht das Adjektiv *assignabili*, dessen präzise Übersetzung aus dem Lateinischen in der historischen Forschung umstritten ist. Sonar übersetzt es im Gegensatz zu Maser mit *angegeben* und sieht darin einen Unterschied zu Leibniz, der in diesem Zusammenhang mit (dem für uns moderner klingenden) *vorgegeben* argumentiert hätte. [Son11, S. 462]

abstrahiert in dem Sinne, dass eine Zahl dividiert durch eine sehr viel größere eine sehr kleine ergibt. Auch diese Überlegungen Eulers formulieren wir in der Form eines Postulates:

2. Postulat Ist i eine (unendlich) große Zahl und ω eine (unendlich) kleine Zahl, so existiert ein $z \in \mathbb{R}$, mit $\omega = \frac{z}{i}$. (vgl. Euler §115)

ω, i und z bleiben gänzlich unbestimmt und erhalten in diesem Ausdruck keine Bedeutung für spätere Anwendungen, die über den hier betrachten Fall der Exponentialreihe hinausgehen. Wenn es in den *Institutiones* 1755 schließlich um Differentiale geht – und damit den systematischen Einsatz des Prinzips unendlich kleiner Größen – ist die Existenz unendlich großer Größen bis auf wenige Einzelbeispiele[12] für die Anwendungen des Infinitesimalkalküls irrelevant. In der *Introductio* dagegen arbeitet und argumentiert Euler mit unendlich kleinen *und* unendlich großen Zahlen auf intuitiver Ebene und „algebraisiert" seine Intuitionen – er entwickelt dabei keinen Grenzwertbegriff im modernen Sinne. Dies macht es auch schwer zu glauben, Euler hätte z.B. mit $a^\omega = 1 + k\omega$ (vgl. 1. Postulat) eigentlich gemeint was wir heute als $k = \lim_{\omega \to 0} \frac{a^\omega - 1}{\omega}$ schreiben würden, wie Walter in seiner Einleitung zur Reprintausgabe der *Introductio* in diesem Zusammenhang annimmt [Wal83, S. 16].

Neben $a^\omega = 1+k\omega$ und $\omega = \frac{z}{i}$ beschreibt Euler außerdem noch den Zusammenhang $\frac{i-1}{i} = 1$. Diesen wollen wir aus den oben genannten Gründen auch als Postulat formulieren.

3. Postulat Ist i eine (unendlich) große Zahl (*numerus infinite magnus*), so wird $\frac{i-n}{i} = 1$ für $n \in \mathbb{N}$. (vgl. Euler §116)

Eulers Argument ist hierbei das folgende

> „Da aber i eine unendlich große Zahl ist, so wird $\frac{i-1}{i} = 1$; denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches $\frac{i-1}{i}$ immer mehr der Einheit, je grösser die Zahl ist, die man für i setzt; es wird daher, wenn i eine Zahl bedeutet, die grösser ist, als jede nur denkbare Zahl, der Bruch $\frac{i-1}{i}$ gerade gleich der Einheit werden. Aus demselben Grunde aber wird $\frac{i-2}{i} = 1$, $\frac{i-3}{i} = 1$,*usw.*" [Eul48b, S. 87]

[12] So bestimmt Euler in den *Institutiones* (1755) das Differential von $V = \frac{x}{dx}$ und bezeichnet V als eine unendliche Größe (*infinite quantity*). Er bringt dies aber nicht mit $\omega = \frac{z}{i}$ in Verbindung oder erklärt was unter *unendlich groß* zu verstehen ist. Es geht an dieser Stelle wohl um die rein formale Anwendung des symbolischen Kalküls auf einen analytischen Ausdruck. [Eul55, S. 245]

Während wir beim ersten Postulat durch ein Beispiel von dessen Einsichtigkeit überzeugt werden sollten, sehen wir nun wie beim zweiten Postulat eine Argumentation auf Grundlage der Verallgemeinerung des Prinzips des Einsetzens großer Zahlen: Der vage Verweis auf eine Zahl, die größer ist als jede nur denkbare, hat im Weiteren für die Anwendungen keine Bedeutung und wird auch nicht weiter präzisiert. Auch wenn die Formulierung „denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches $\frac{i-1}{i}$ immer mehr der Einheit, je grösser die Zahl ist, die man für i setzt“ in die Richtung einer intuitiven Grenzwertvorstellung zu zeigen scheint, bleiben die Hintergründe nebulös. Euler selbst erscheint der Umgang mit unendlichen Größen als höchst problematisch – dies thematisiert er ausführlich aber erst in den *Institutiones* (sieben Jahre später!) in zwei eigens dazu konzipierten Kapiteln. Viel wichtiger ist Euler aber wohl, wie schon seinen Vorgängern Leibniz und Johann Bernoulli, der Anwendungserfolg seines auf intuitiven Annahmen basierenden Vorgehens:

So löst er zunächst (ausgehend vom ersten Postulat – die unendlich große Zahl i setzt er dabei wie eine reelle ein) $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$ mit Hilfe der auf Newton zurückgehenden Binomialreihe auf:[13]

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + ... \quad (\S 115)$$

und da nach dem zweiten Postulat $\omega = \frac{z}{i}$ gilt, folgt:

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2 \cdot i^2}k^2z^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i^3}k^3z^3 ... \quad (\S 115).(*)$$

nach dem dritten Postulat ist nun für $z = 1$ und $k = 1$

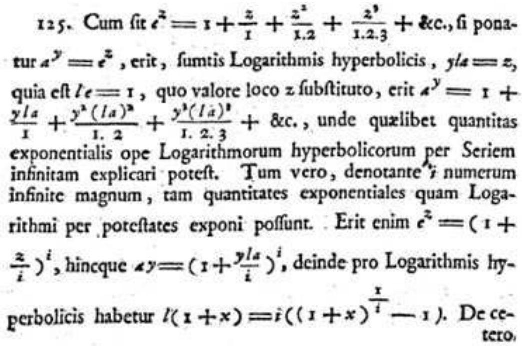
$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ... = 2,718281828549... \quad (\S 122),$$

was Euler im Sinne einer Definition für e wie folgt kommentiert. „Wir werden nun in der Folge der Kürze wegen für diese Zahl $2,718281828549...$ stets den Buchstaben e gebrauchen [...]“.

Nun kommt er für $k = 1$ (Siehe (*), mit Postulat 3) zu

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ... \quad (\S 123).$$

[13] Es ist anzunehmen, dass diese aus einer formalen Analogiebildung über den binomischen Lehrsatz entstanden ist (Vgl. Euler §71) — ihr Konvergenzverhalten wurde erst im 19. Jh. durch N.H. Abel präzise beschrieben.


125. Cum ſit $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} +$ &c., ſi ponatur $a^y = e^z$, erit, ſumtis Logarithmis hyperbolicis, $yla = z$, quia eſt $le = 1$, quo valore loco z ſubſtituto, erit $a^y = 1 + \frac{yla}{1} + \frac{y^2(la)^2}{1.\,2} + \frac{y^3(la)^3}{1.\,2.\,3} +$ &c., unde quælibet quantitas exponentialis ope Logarithmorum hyperbolicorum per Seriem infinitam explicari poteſt. Tum vero, denotante i numerum infinite magnum, tam quantitates exponentiales quam Logarithmi per poteſtates exponi poſſunt. Erit enim $e^z = (1 + \frac{z}{i})^i$, hincque $ay = (1 + \frac{yla}{i})^i$, deinde pro Logarithmis hyperbolicis habetur $l(1+x) = i((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1)$. De cetero.

§125 in der Originalausgabe, mit dem berühmten Zusammenhang $e^z = (1 + \frac{z}{i})^i$, den Euler erstmalig 1743 (Miscellanea Berolinensa, Bd. VII) veröffentlicht hatte ([Eul43]).

Und in einem letzten Schritt postuliert Euler nun zudem, das

$$e^z = (1 + \frac{z}{i})^i \quad (\S 125)$$

was er nur mit dem Hinweis begründet:

> „Bedeutet i ferner eine unendlich große Zahl, so lassen sich sowohl die Exponentialgrössen wie die Logarithmen durch gewöhnlich Potenzen ausdrücken“ [Eul48b, S. 94].

Es liegt nahe zu vermuten, dass Euler dieses Ergebnis auch über eine formale Analogiebildung aus dem binomischen Lehrsatz ableitet. Er nimmt wohl an, dass

$(1 + \frac{z}{i})^i$ aufgelöst den Ausdruck $1^i + i \cdot 1^{i-1}\frac{z}{i} + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}1^{i-2}\left(\frac{z}{i}\right)^2 + ...$ ergibt, und dass dieser wiederum (unter der Annahme $1^{i-n} = 1$, für $n \in \mathbb{N}$) mit dem dritten Postulat zu $1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + ...$ führt, was nach dem oben dargestellten gleich e^z ist.

Grundidee für den vorliegenden Beweis ist die *Binomialreihe* bzw. die Erweiterung des binomischen Lehrsatzes (durch Analogiebildung) auf unendliche Summen. Diese hält den Beweis zusammen und macht, so wie Euler sie anwendet, aus einem unendlichen Problem (einer unendlichen Reihe) ein in der Darstellung endliches Problem.

Dabei wiegt für Euler die Möglichkeit, die Exponentialfunktion einfach darstellen zu können, größer als die Problematik, dass ein unbestimmtes i in seinem Ausdruck vorkommt. Charakteristisch für seinen Ansatz erscheint dabei, dass er mit unendlichen Größen – also in diesem Fall einem unendlich großen i, das er über den Kehrwert einer *infinitesimalen Größe* „definiert“ – rechnet wie mit reellen Zahlen und dann im Beweis „Streichungen“ (vgl. Anwendung von Postulat 2) vornimmt. Mit dieser Zahlauffassung von unendlichen Größen unterscheidet er sich grundsätzlich von Leibniz und den Bernoullis. Bei ihnen war die Streichung infinitesimaler Größen stets impliziter (d.h. zur formalen Definiton der Regeln benötigter) Bestandteil immer wieder verwendeter und in der Praxis weithin erprobter Regeln. Sie scheuen sich im Weiteren Streichungen explizit in Rechenschritten auf Grund intuitiver Überzeugungen vorzunehmen. Ganz anders Euler: Er geht mit infinitesimalen Größen deutlich unbefangener um und streicht ad hoc wenn es dem Ergebnis dient. Dies ist wohl zumindest teilweise dafür verantwortlich, dass Experten sein Vorgehen im Bereich der Analysis als „[...] bold – some may say reckless – approach so characteristic of his work“ [Dun05, S. 54] einschätzen.

Der logische Preis, den Euler für die Entwicklung der Exponentialfunktion zahlen muss, ist ein hoher: Für praktisch jeden Umformungsschritt muss er neue Annahmen bezüglich unendlicher Größen treffen, die er unabhängig von diesem Spezialfall (und davon abgeleiteten) nicht mehr braucht und die sich sogar widersprechen: So führt er z.B. wie oben in den vorbereiteten Ausführungen in §99 aus, dass $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Größe sein soll (d.h i), aber gleichzeitig nach dem 2. Postulat (so wie er es im Zusammenhang der Herleitung benötigt) $\frac{1}{i} = \omega$ zwar unendlich klein aber größer Null ist. Insgesamt ist das Ergebnis so mächtig, dass es einige *Kunstgriffe* und *ad hoc Postulate* zu rechtfertigen scheint. Es ist erstaunlich, welche singulären *theoretischen Geschütze* Euler schon im siebten Kapitel seiner Lehrbuchtrilogie (die sich ausdrücklich nicht nur an ein kleines Fachpublikum richtet) auffährt. Hier scheint es wohl mit der Darstellung eines prominenten Beispiels eher darum zu gehen, die Wirkungsmächtigkeit des neuen Ansatzes zu vermitteln, denn wirklich um einen Lehrbuchinhalt. Dafür sind die im Beispiel vermittelten Grundlagen wohl zu wenig systematisch und logisch rechtfertigbar. Für uns geht es an dieser Stelle aber nicht um ein wertendes Urteil, sondern es ist interessant zu erfahren, wie Euler seine Vorstellungen über unendliche Größen algebraisiert und über seine Postulate und die allgemeine binomische Formel mit relativ geringem technischem Aufwand zu einem eindrucksvollen Ergebnis kommt. Vergleicht man dies mit einer modernen Herleitung der Reihendarstellung (wie z.B. bei Knopp oder Königsberger), so ist jedoch offensichtlich, dass nur das Ergebnis als korrekt bezeichnet werden kann.[14] Das Vorgehen lässt sich dagegen nicht systematisch

[14] Die moderne Formel lautet bekanntlich $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ vgl. [Kno64, S. 195ff.] oder [Kön95, S. 106ff.] und ist Eulers Ausdruck verblüffend ähnlich, aber kein Beweis dafür, dass er einen präzisen Grenzwertbegriff hatte, wie Edwards behauptet „*Of course* Euler understood limits. Euler was Euler.“ [Edw07, S. 576]. Es ist vielmehr zu vermuten, dass Eulers virtuoser Umgang mit symbolischen Ausdrücken seine Herleitung bestimmt hat. Hätte er ei-

nachvollziehbar rekonstruieren, selbst wenn wir annähmen, Euler hätte einen intuitiven vorläufigen Grenzwertbegriff.[15] Dabei ist zu berücksichtigen, dass es Euler nie in den Sinn gekommen wäre, $|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-(1+\frac{x}{n})^n|$ abzuschätzen und formal zu beweisen, dass der obige Betrag gegen Null strebt. Er war dagegen auf der Suche nach algebraischen Umformungen, um den einen Ausdruck für e^z in den anderen zu überführen, also „algebraisch" Gleichheit nachzuweisen. Einen Grenzwertbegriff formuliert er nicht.

3 Die (Weiter-)Entwicklung der Analysis in der *Introductio*

Euler erweitert die Analysis in der *Introductio* (Bd. I) auf algebraischer Ebene und zeigt dabei, zu welch eindrucksvollen Ergebnissen man kommen kann. Mit „unendlichen Reihen" eine transzendente Funktion darstellen zu können, ist für eine Vielzahl von Anwendungen nützlich. Dabei ist es wichtig festzuhalten, dass

> „[...] die Entwicklung einer Funktion in eine Reihe für Euler ein *Instrument* der Untersuchung und nicht die Sache selbst [war]." [Jah99, S. 144]

Für die analytische Diskussion trigonometrischer Funktionen ist die unendliche Reihendarstellungen der Exponentialfunktion (insbesondere das gliedweise Bilden von Differentialen) bekanntlich wesentlich. Insofern bedeuten Eulers Ergebnisse bzgl. Potenzreihzen eine wesentliche Weiterentwicklung für die Analysis. Waren z.B. Leibniz und Johann Bernoulli auf Spezialfälle die entsprechenden (Sinus-)Kurven betreffend beschränkt, war es Euler nun möglich durch gliedweise Bestimmung von Differentialen z.B. die Sinusfunktion systematisch zu diskutieren.

Dabei ist zu beachten, dass wir bei der Diskussion seiner Herleitung nicht die Maßstäbe moderner Mathematik und ihrer Veröffentlichungspraxis anlegen können und sollten. So ist es wahrscheinlich, dass Euler die oben aufgeführten Ergebnisse nicht über die gegebene Herleitung gewonnen hat, sondern umgekehrt durch die Herleitung sein Ergebnis zu begründen sucht. Dies ist, vorsichtig formuliert, wohl auch

ne Lösung für das Problem der unendlichen Größen präsentieren können, hätte er diese an der betreffenden Stelle sicherlich ausgeführt.

[15] Vgl. dazu „Dabei [der Herleitung der Exponentialfunktion] wird deutlich wie Euler mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen rechnet. Seine Rechnungen können nicht alle durch Schlussweisen der heutigen Standard-Analysis gerechtfertigt werden" [Jah99, S. 144ff.] – u.E. nach eine vorsichtige Formulierung.

kennzeichnend für die tatsächliche Arbeitsweise vieler moderner Mathematiker, steht aber der modernen Veröffentlichungspraxis entgegen.

Eulers Herleitung hat sicherlich einen Wert im heuristischen Sinne, ist darüber hinaus jedoch nicht ein Beweis im modernen Verständnis – zu viel stützt sich rein auf Intuition und Experiment, denn auf logisch nachvollziehbare Schlüsse. Während Eulers Vorgänger die Differential- und Integralrechnung mit aus der geometrischen Anschauung gewonnenen Intuitionen zu erweiterten suchten (Diskussionsobjekte waren durch Konstruktion in der Ebene gegebene Kurven), geht Euler nun einen neuen algebraischen Weg. Seine Konzentration auf Symbole, analytische Ausdrücke sowie einen algebraischen Funktionsbegriff bedeutet dabei einen wesentlichen Schritt in Richtung einer Algebraisierung der Analysis.

> „Euler fasste den Funktionsbegriff algebraisch auf, und eine der wichtigsten Techniken der *Introductio* bestand im Rechnen mit unendlichen Ausdrücken: Reihen, unendliche Produkte, Kettenbrüche. Insofern war damit auch eine entsprechende Sichtweise von Differential- und Integralrechnung impliziert.“ ([Jah90, S. 104])

Dabei bleibt festzuhalten, dass die reellen Zahlen – Kennzeichen der modernen axiomatisch-deduktiv aufgebauten Analysis – nicht Eulers explizite Grundlage bilden. Seine Fokussierung auf Symbole, analytische Ausdrücke und nicht zuletzt sein intuitiver Umgang mit Eigenschaften von (reellen) Zahlen weist in die Richtung der späteren Arithmetisierung der Analysis.

Eulers erklärtes Ziel war es durch eine Hinwendung zu einem algebraischen Objektbereich – weg von „dubiosen“ aus der geometrischen Anschauung gewonnen Vorgehensweisen – die Analysis auf ein sichereres Fundament zu stellen. In Eulers Lehrbuchtrilogie zur Ananlysis findet sich konsequenterweise nicht die suggestive Darstellung von unendlich kleinen Größen als Seitenlängen eines infinitesimalen Dreicks. Er verortet dagegen unendlich kleine Größen im Kontext von (reellen) Zahlen und spricht in diesem Sinne von „Zahlgrößen“. So beschreibt er in der Einführung zu den *Institutiones Calculi Differentialis*:

> „Even with the greatest care, the first principles of differential calculus are hardly sufficiently developed that I should bring them, as it were drawn from geometry to this science. Here, everything is kept within the bounds of pure analysis, so that in the explanation of the rules of this calculus there is no need for any geometric figures.“ [Eul55, S. xii]

Umso mehr muss es geschmerzt haben, dass Euler den Kritikern des Calculus (wie z.B. Berkeley) in dieser Hinsicht weiterhin sehr viel Munition liefert und dubiose geometrische zumindest teilweise durch dubiose analytisch/algebraische Schlussweise ersetzt. So beschreibt und klassifiziert er zunächst in der *Introductio* „seine“ Begriffe (allen voran den Funktionsbegriff) sehr detailreich. Er sieht seine Einführung zur Analysis als aus der Masse „gewöhnlicher Lehrbücher“ herausragend, weil er darin „[. . .] zwar weitläufiger aber strenger, als dies gewöhnlich geschieht, zu begründen [ge]sucht“ [Eul48b, S. V]. Er muss dann aber an prominenten Stellen, wie der Entwicklung der Reihendarstellung der Exponentialfunktion, seine Forderung nach Strenge ad acta legen und sich ungeklärter intuitiver Postulate bedienen.

> „Die *Introductio* und mit ihr die ganze Analysis des 18. Jahrhunderts wird überschattet von einem sich fortwährend verschlimmernden Dilemma. Großartige Ergebnisse werden mit unklaren, in höchstem Maße dubiosen Methoden gewonnen.“ [Wal83, S. 19-20].

Schaut man in diesem Zusammenhang auf Eulers Gesamtwerk zur Analysis so ist es aber wichtig zu bemerken, dass er sie eben noch nicht als die kanonische fertige Wissenschaft kannte, mit der wir heute vertraut sind. An vielen Stellen finden sich daher folgerichtig, trotz der Konzeption als Lehrbuch, Hinweise auf die Vorläufigkeit der Ergebnisse. Noch 1755, mit der Fertigstellung seines Lehrbuches zur Differentialrechnung, bringt Euler deutlich zum Ausdruck, dass er den Prozess der Entwicklung der Analysis noch lange nicht als abgeschlossen ansieht:

> „Since the greater part [of the differential Calculus] has yet to be developed, it is not possible to say at this time that this calculus has absolutely been discovered.“ [Eul55, S. x.]

Dass bestimmte Schritte (vielleicht vorläufig) noch nicht präzise rechtfertigbar sind, hält Euler jedenfalls nicht davon ab, die Aussagen, welche in den obigen Postulaten angegeben sind, einzuführen und zu nutzen. *Das Ergebnis rechtfertigt wohl zunächst rückwirkend die Vorgehensweise.*

Es erscheint bei Euler angemessen von einer *experimentell-induktiven Vorgehensweise* zu sprechen. Euler probiert im Umgang mit unendlichen Reihen, Funktionen und dem binomischen Lehrsatz vieles aus – ohne z. B. den Begriff der *unendlichen Größen* präzise zu definieren – ja definieren zu können. Ihre Bedeutung erschließt sich nur intuitiv in der Anwendung. Das von Euler formulierte Programm der Darstellung einer *reinen Analysis* sollte uns nicht dazu verleiten seine Ausführungen modernistisch mit den Kategorien axiomatisch-widerspruchsfreier Mathematik zu werten: Es erscheint vielmehr angemessen den Differentialkalkül als eine (algebraische) Weiterentwicklung des ebenso experimentellen, an der Anwendung auf geometrische Kurven entwickelten, leibnizschen Calculus aufzufassen. Im Vorwort der *Institutionis* macht Euler klar, dass er die Ergebnisse und Vorgehensweisen von Newton, Leibniz und den Bernoullis aufgreift und weiterentwickelt.

> „Soon, through the studies of both Leibniz and the Bernoullis, the bounds of differential calculus were extended even to transcendental functions [...]." [Eul48b, S. vi.].

Die Vermutung liegt nahe, dass es angemessen sein könnte, das *Eulersche Vorgehen* im Sinne einer experimentell-induktiven Mathematik — die gemeinsame Charakteristika mit empirischen Theorien, um einen Ausdruck aus der Wissenschaftstheorie zu benutzen, besitzt — aufzufassen.

Literaturverzeichnis

[Ber34] George Berkeley. The Analyst: a Discourse addressed to an infidel Mathematician. In A. A. Luce et al., editor, *The works of George Berkeley Bishop of Cloyne*, IV, pages 63–102. Nelson, London (1948-1957), 1734.

[Bos75] Henk Bos. Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for the History of Exact Sciences*, (14):1–90, 1974/75.

[BS10] Hans Joachim Burscheid and Horst Struve. *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen*. Franzbecker, Hildesheim, 2010.

[Dau88] Joseph W. Dauben. Abraham Robinson and Nonstandard Analysis: History, Philosophy and Foundations of Mathematics. In Philip Kitcher and William Asprey, editors, *History and philosophy of modern mathematics*, pages 177–200. Univ. of Minnesota Press, 1988.

[Dun05] William Dunham. *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press, Princeton, 2005.

[Ear75] John Earman. Infinites, Infinitesimals, and Indivisibles: The Leibnizian Labyrinth. *Studia Leibnitiana*, VII(2):236–251, 1975.

[Edw07] Harold Edwards. Euler's definition of the derivative. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 44(4):575–580, 2007.

[Eul43] Leonhard Euler. *Miscellanea Berolinensia*, volume VII. 1743.

[Eul48a] Leonhard Euler. *Introductio in Analysin Infinitorum (Übersetzt von Blanton, J. D., 1990)*, volume II. 1748.

[Eul48b] Leonhard Euler. *Introductio in Analysin Infinitorum (Übersetzt von Maser, H., 1885)*, volume I. 1748.

[Eul55] Leonhard Euler. *Institutiones Calculi Differentialis (Übersetzt von Blanton, J. D., 2000)*. 1755.

[Heu08] Harro Heuser. Eulers Analysis. In G. Biegel et al., editor, *Braunschweiger Beiträge zur Wissenschaftsgeschichte*, volume 3, pages 147–163. 2008.

[Jah90] Hans Niels Jahnke. Algebraische Analysis in Deutschland, 1780-1860. In Detlef Spalt, editor, *Rechnen mit dem Unendlichen. Beiträge zur Entwicklung eines kontroversen Gegenstandes*, pages 103–122. Birkhäuser, Basel, 1990.

[Jah99] Hans Niels Jahnke. Die algebraische Analysis des 18. Jahrhunderts. In Hans Niels Jahnke, editor, *Geschichte der Analysis*, pages 131–170. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1999.

[Kno64] Konrad Knopp. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[Kön95] Konrad Königsberger. *Analysis 1.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[Son11] Thomas Sonar. *3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.

[Wal83] Wolfgang Walter. Einführung zur Reprintausgabe von Eulers Introductio. In *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*, pages 5–21. Springer-Verlag, 1983.

[Wit09] Ingo Witzke. *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik.* Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2009.

Kalkül der Logik und Logische Maschine: George Boole und William Stanley Jevons

Anna-Sophie Heinemann

Zusammenfassung Im 19. Jahrhundert vollziehen sich grundlegende Veränderungen sowohl der Form der Logik als auch des Verständnisses logischer Form. Um die Jahrhundertmitte inauguriert George Boole eine algebraische Variante der Logik. Ihre Form wird durch den Einsatz von Funktionen und Variablen bestimmt. Dies erlaubt die Überführung von Techniken der Lösung logischer Probleme in einen interpretationsunabhängigen Kalkül. Zu Beginn der zweiten Jahrhunderthälfte bringt William Stanley Jevons eine Konzeption von Logik vor, die er aus einer Analyse der Methode Booles zu gewinnen beansprucht. Jevons' Lösungsverfahren beruhen dabei nicht auf symbolischen Transformationen, sondern auf der Sortierung von Schemata in der Fläche oder im Raum.

Im vorliegenden Beitrag wird gezeigt, dass beiden Ansätzen eine vergleichbare Auffassung des Charakters logischer Probleme zugrunde liegt. Ihr Vergleich stützt sich hierbei auf eine Klassifikation logischer Formen aus der frühen Historiographie der Logik. Der wesentliche Vorteil von Booles Ansatz besteht in seinen Kapazitäten zur symbolischen Generalisierung von logischen Problemen und zur Formulierung von Algorithmen ihrer Lösung. Jevons' Verfahren hingegen sind es, die mit den technischen Mitteln der Zeit mechanisiert werden konnten. Sie stehen jedoch vor derselben Schwierigkeit wie etwa diagrammatische Methoden zur Darstellung von Klassenverhältnissen: Ihre Anwendbarkeit beschränkt sich auf begrenzt komplexe logische Probleme.

Abstract In the course of the 19th Century, logic is subject to seminal changes of the form of logic as well as the notion of logical form. Around the mid-century, George Boole launches an algebraic model of logic. Its form is determined by the use of functions and variables. Thus, problem-solving techniques are converted into applications of a calculus independent of interpretation. Some ten years later, William Stanley Jevons proposes a variant of logic which he claims to have derived from an analysis of Boole's methods. Yet Jevons's techniques do not rest upon symbolic transformations, but of a sorting and separation of schemata in (two-dimensional) space.

The present article aims to show that the two approaches rely on a similar conception of logical problems. Their comparison is guided by a classification of logical forms proposed in the early historiography of logic. As a distinguishing benefit, Boole's method is apt to frame a symbolic generalisation of logical problems and devise algorithms for their solution. However, by means of then available instruments, only Jevons's principles allowed for a mechanical implementation. But similar to diagrammatic representations of class relations, Jevons's techniques face a significant difficulty: they allow for application to problems of limited complexity only.

Im Laufe des 19. Jahrhunderts erfährt die Logik grundlegende Veränderungen – sowohl hinsichtlich ihrer Begrifflichkeiten als auch mit Blick auf ihre Gestalt, ihre Einsatzmöglichkeiten und die Methoden ihrer Anwendung. So werden im Zuge einer Annäherung von Logik und Mathematik insbesondere die Fragen neu gestellt, inwiefern die Logik als formal zu gelten hat und welche logischen Formen den Techniken ihrer Anwendung zugrunde liegen. Um die Jahrhundertmitte inauguriert George Boole eine algebraische Variante der Logik, deren formaler Charakter sich anhand ihrer Möglichkeiten zur symbolischen Generalisierung von logischen Problemen und entsprechenden Lösungsverfahren bemisst. Ihre Form wird durch den Einsatz von Funktionen und Variablen bestimmt. Dies erlaubt die Überführung von Techniken der Lösung logischer Probleme in einen interpretationsunabhängigen Kalkül auf Basis von operationalen Prinzipien der Algebra und des Differenzialkalküls. Jedoch kann die Booles Kalkül zugrunde liegende Auffassung des Charakters logischer Probleme auch mit anderen als quasi-algebraischen Mitteln zur Anwendung gebracht werden. Zu Beginn der zweiten Jahrhunderthälfte bringt William Stanley Jevons eine Konzeption von Gestalt und Techniken formaler Logik vor, die er aus der kritischen Auseinandersetzung mit den Besonderheiten von Booles Verfahren zu gewinnen beansprucht. Kennzeichnende Verfahrensgrundsätze und wesentliche Vorteile von Booles Ansatz sollen beibehalten, die Orientierung an der Mathematik jedoch aufgegeben werden. Die Techniken zur Anwendung der Verfahrensgrundsätze auf logische Probleme beruhen hier nicht auf symbolgestützten Rechnungsverfahren, sondern auf der Sortierung von Schemata im Raum. Im Gegensatz zu Booles Kalkül wurden die operationalen Prinzipien von Jevons' Techniken noch zu dessen Lebzeiten in eine von ihm selbst entworfene „Logische Maschine" implementiert.

Im Folgenden wird zunächst eine gegen Ende des 19. Jahrhunderts vorgebrachte Klassifikation von Auffassungen der logischen Form von Sätzen sowie von entsprechenden Techniken und Methoden der formalen Logik präsentiert. Vor deren Hintergrund wird Booles Kalkül der Logik in Grundzügen dargestellt. Im Anschluss werden Jevons' Logikbegriff und Methodenverständnis diskutiert. Ihre Umsetzung in Techniken zur Lösung logischer Probleme lässt sich dann anhand einer detaillierten Darlegung der Funktionsweise von Jevons' Logischer Maschine explizieren. Die abschließende Skizze eines Vergleichs von Booles und Jevons' Ansätzen liefert Anhaltspunkte für die Beurteilung ihrer Vor- und Nachteile in weiterführenden Untersuchungen.

1 John Venns Klassifikation propositionaler Formen

In einem der ersten frühen Beiträge zur Historiographie der formalen Logik unterscheidet John Venn dreierlei Auffassung der logischen Form von Sätzen. Unter philosophischen Gesichtspunkten hält er diese für unvereinbar. Werden sie jedoch nicht als philosophische Grundsätze diskutiert, sondern als methodische Leitgedanken wahrgenommen, so können sie laut Venn als einander ergänzende Ansätze betrachtet werden.[1] Venn klassifiziert hier allerdings nicht symmetrisch: In den Fällen der ersten beiden Ansätze stellt er in erster Linie Festlegungen auf bestimmte propositionale Formen dar, die die Entwicklung und Anwendung entsprechender Methoden mit sich ziehen. Im dritten Fall jedoch erörtert er vorrangig ein bestimmtes methodisches Grundprinzip, das – wie im Folgenden gezeigt wird – auf Basis unterschiedlicher propositionaler Formen in Anschlag gebracht werden kann. Die von Venn für den dritten Ansatz als paradigmatisch angeführte algebraische Satz- und Problemform samt den Techniken ihrer Behandlung ist nur eine davon.

Der erste der drei Formbegriffe ergibt sich in Venns Darstellung aus einer prädikativen Interpretation der Copula.[2] Die Form eines Satzes ist hier stets „A ist B". Zu behaupten A sei B, bedeutet in diesem Kontext, A das Prädikat B zuzuschreiben. Der Subjektbegriff A wird hier durch die Beilegung des Prädikatbegriffs B näher bestimmt. Dieses Verständnis liegt der traditionellen Syllogistik zugrunde, in der Urteile hinsichtlich der Quantität des Subjektbegriffs in universale und partikulare, hinsichtlich der Qualität in affirmative und negative differenziert werden. So wird auf Basis der prädikativen Interpretation der Copula mittels der Form „Alle A sind B" das Prädikat B allen Instanzen des Subjektbegriffs A zugeschrieben; in

[1] John Venn: On the Forms of Logical Proposition. In: *Mind* 5, 19 (1880), S. 336-349, hier: S. 336.
[2] Ebd., S. 337.

„Einige A sind B“ erfolgt die Prädikation für mindestens ein A. „Kein A ist B“ – oder „Alle A sind nicht B“ – ist die Form, in denen das Prädikat B allen Instanzen von A abgesprochen wird; und in „Einige A sind nicht B“ kommt das Prädikat B mindestens einem A nicht zu.[3]

Die zweite Auffassung logischer Form versteht die Copula als Ausdruck von Ein- bzw. Ausschlussbeziehungen zwischen Klassen.[4] Die traditionellen Urteilsformen lassen sich unter einer extensionalen Interpretation des Verhältnisses von Subjekt- und Prädikatbegriff entsprechend reformulieren. Unter einer zusätzlichen Bedingung ergeben sich fünf eindeutige Bestimmungen von Klassenverhältnissen. Voraussetzung für deren eindeutige Identifikation ist die Festlegung der Bedeutung des Ausdrucks „einige“ auf „mindestens eines, aber nicht alle“.[5] Die Handhabung der durch „einige“ gekennzeichneten partikularen Quantität unterscheidet sich darin von derjenigen der traditionellen Syllogistik, in der „einige“ als „mindestens eines, möglicherweise alle“ aufgefasst wird. Unter Berücksichtigung dieser Festlegung kommt „Alle A sind B“ dem Einschluss einer Klasse A in einer Klasse B gleich, während „Einige A sind B“ einen nur partiellen Einschluss von A in B bezeichnet. „Kein A ist B“ bestimmt ein Ausschlussverhältnis zwischen A und B, „Einige A sind nicht B“ hingegen einen nur partiellen Ausschluss von A aus B.

Venn behauptet, die Unterscheidung von Subjekt und Prädikat in der traditionellen Bedeutung habe hier keinen Bestand.[6] Denn der Prädikatbegriff der traditionellen Urteilsformen bleibt in einigen Fällen der Quantität nach unbestimmt, so dass keine einfache Konversion möglich ist. In prädikativer Interpretation lässt etwa „Alle A sind B“ offen, ob B durch A erschöpft wird oder nicht. Relationen des Ein- bzw. Ausschlusses zwischen Klassen hingegen sind beidseitig bestimmt. Um die Verhältnisse zwischen zwei Klassen zu determinieren, muss demnach nicht nur nach der Extension von A, sondern ebenso nach der Extension von B differenziert werden. Aus der beidseitigen Betrachtung der Klassenverhältnisse ergeben

[3] Ebd., S. 337-338.
[4] Ebd., S. 338.
[5] Ebd., S. 340.
[6] Venn verweist hier auf den vom schottischen Logiker Sir William Hamilton – nicht zu verwechseln mit dem irischen Mathematiker Sir William Rowan Hamilton, dem Erfinder der Quaternionen – vertretenen Ansatz zur Quantifikation des Prädikats. Dieser Ansatz resultiert in der Erweiterung der traditionellen Urteilsformen um eine Differenzierung nach Universalität bzw. Partikularität auf Seiten des Prädikatbegriffs. Es ergeben sich die acht Formen „All A is all B“, „All A is some B“, „Some A is all B“, „Some A is some B“; „No A is any B“, „No A is some B“, „Some A is not any B“, „Some A is not some B“ (hier nach Venn, On the Forms, S. 340). Ein wesentlicher Unterschied zur traditionellen Syllogistik besteht in Möglichkeit der einfachen Konversion dieser Formen. Auf die Bedeutsamkeit sowie auf Probleme der Hamilton'schen Quantifikation kann im Rahmen des vorliegenden Beitrags nicht weiter eingegangen werden. Nicht diskutiert wird daher auch Venns Verbindung des zweiten der von ihm genannten Ansätze mit Hamiltons Grundidee (On the Forms, S. 340ff.).

sich letztlich die Möglichkeiten, dass (1.) A zur Gänze in B enthalten ist, (2.) B zur Gänze in A enthalten ist, (3.) A und B gleichermaßen ineinander enthalten, also koextensiv sind, (4.) A nur zum Teil in B und dementsprechend B nur zum Teil in A enthalten ist, sich beide also schneiden, oder (5.) weder A in B noch B in A enthalten ist und die beiden demnach disjunkt sind.[7]

Das dritte und jüngste Verständnis logischer Form legt Venn einer „method of occupation or non-occupation of compartments" zugrunde.[8] Doch handelt es sich hierbei vielmehr um einen Verfahrensgrundsatz zur Lösung logischer Probleme als um eine Bestimmung der logischen Form von Sätzen. Seine Anwendung impliziert selbstverständlich eine Formulierung des Problems in Sätzen. Wie sich noch zeigen wird, determiniert dieser methodische Ansatz jedoch keine bestimmte, oder zumindest nicht nur eine einzig mögliche propositionale Form für die zu behandelnden Probleme.

Die Methode der „occupation or non-occupation of compartments" setzt zunächst bei einer Enumeration und systematischen Differenzierung der an der Formulierung eines logischen Problems beteiligten Terme an. Unter Verwendung der bisher herangezogenen schematischen Buchstaben ließe sich das Verfahren vereinfacht folgendermaßen darstellen: A, B, C etc. bezeichnen Klassen, oder diejenigen Attribute, deren Besitz für die Zugehörigkeit eines Dings zur entsprechenden Klasse verantwortlich ist. Nun wird etwa A nach B in die zwei „Abteile" B und Nicht-B differenziert, sowie ggf. nach C in C und Nicht-C (usw.). B sowie Nicht-B lassen sich jeweils wiederum nach C und Nicht-C aufteilen (usw.). Für „Alle A sind B" wird nun das Nicht-B-Abteil von A leer bleiben müssen; für „einige A sind B" aber werden unter Voraussetzung der restriktiven Bedeutung von „einige" als „mindestens eines, aber nicht alle" sowohl das B-Abteil als auch das Nicht-B-Abteil besetzt (usw.).

Für jeden Klassenterm wird hier demnach eine Fallunterscheidung hinsichtlich Ein- bzw. Ausschluss jedes zweiten (sowie ggf. dritten, vierten usw.) Klassenterms in einem logischen Problem vorgenommen. Die Aufspaltung erzielt letztlich sämtliche Elemente für denkbare Kombinationen der gegebenen Problembestandteile (inklusive ihrer kontradiktorischen Gegenteile). Werden nun „Alle A sind B" und

[7] Venn, On the Forms, S. 338f. Venn verdeutlicht dies an fünf Diagrammen. Diese lassen sich im Sinne der Hamilton'schen Quantifikation des Prädikats durch die Formen „All A is all B", „All A is some B", „Some A is all B", „Some A is Some B" und „No A is any B" beschreiben (ebd., S. 340). Die übrigen der acht Hamilton'schen Formen sind laut Venn überflüssig (ebd., S. 341), denn sie stellen keinen eindeutigen Bezug auf eines der Diagramme her. (Drei der fünf genannten Formen leisten diese Identifikation allerdings auch nur unter Voraussetzung der eingeschränkten Bedeutung von „some" als „einige, aber nicht alle".)

[8] Venn, On the Forms, S. 345.

„Einige B sind C" als Prämissen eines Schlusses aufgefasst, so besteht das allgemeine Problem darin zu determinieren, in welchen Verbindungen A, B und C unter den gegebenen Einschränkungen noch vorkommen können, welche Konklusionen also zulässig sind. Dies bedeutet herauszufinden, welche durch Verbindungen von Attributen bestimmten ‚Abteile' nicht leer sind. Das Verfahren besteht nun darin, sukzessive diejenigen ‚Abteile' auszustreichen, deren Besetzung von den gegebenen Prämissen ausgeschlossen wird. Die Relationen zwischen Klassen des zweiten Ansatzes lassen sich in Ausschlussverhältnisse dieser Art übersetzen: Dass die durch A und B bestimmten Klassen koinzidieren z.B. bedeutet, dass weder die Klasse besetzt ist, die durch die Verbindung der Attribute A und Nicht-B bestimmt würde, noch diejenige, die durch die Verbindung von Nicht-A und B bestimmt würde.[9]

In seiner Darstellung der drei propositionalen Formen und den ihnen angemessenen Methoden verfolgt Venn das Ziel, mögliche Vor- und Nachteile der drei Ansätze gegeneinander abzuwägen. Als Beurteilungskriterium setzt er einen systematischen Gesichtspunkt an: die Eignung zur weitestmöglichen Generalisierung der Anwendungsmöglichkeiten der Logik mittels symbolisch gestützter Verfahren.[10] In dieser Hinsicht liegt Venns Präferenz klar beim dritten Ansatz. Denn während die Determination von Klassenverhältnissen im zweiten Ansatz umso problematischer wird, je mehr Klassen beteiligt sind, ermögliche die dritte Methode die Erweiterung der Untersuchung auf beliebig viele Klassen; begünstigt werde dies durch die Orientierung an aus der Mathematik geläufigen Notationen.[11] Venns Annahme erweist sich nun allerdings als zu schwach – und zugleich als zu stark. Denn die systematische Anwendung der ‚Abteil'-Methode kann zwar einerseits mittels Adaption nicht nur mathematischer Notationen, sondern algebraischer Methoden möglich gemacht werden. Die Lösung logischer Probleme wird hier von einem Kalkül symbolgestützter Verfahren übernommen. Zumindest für eine begrenzte Anzahl von Problembestandteilen setzt die ‚Abteil'-Methode eine solche Fusion von Logik und Mathematik aber nicht im starken Sinn voraus. Denn andererseits kann der Ansatz auch auf eine Variante reduziert werden, die weder die Notation noch die Methoden aus der Mathematik benötigt (auch wenn sie stellenweise Analogien zur Mathematik für sich beansprucht). Diese letztgenannte Variante erlaubte noch

[9] Die obige Zusammenfassung ist eine grobe Paraphrase von Venns Darstellungen (On the Forms, S. 345-348). Venn selbst verwendet dort eine stark an Boole orientierte Notation, die im Rahmen der vorliegenden Darstellung erst im folgenden Abschnitt erklärt wird und an dieser Stelle noch nicht vorweggenommen werden kann.

[10] Venn, On the Forms, S. 336f. Venn bezeichnet dieses Ziel wörtlich als „design of securing the widest extension possible of our logical processes by the aid of symbols". Die oben formulierte Paraphrase geht davon aus, dass es bei der hier genannten Erweiterung nicht um Vermehrung der Anwendungsbereiche, sondern eine erhöhte symbolische Verallgemeinerung der Logik geht. Erweiterte Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich daraus als Konsequenz.

[11] Venn, On the Forms, S. 345.

zu Lebzeiten ihres Hauptvertreters die faktische Implementation in eine von ihm selbst entworfene Maschine. Beide Varianten sollen im Folgenden beschrieben werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der zweiten; diese wird vorrangig anhand der Arbeitsweise der genannten Maschine erschlossen.

2 George Boole und sein Kalkül der Logik

Venn behauptet, die eben charakterisierte ‚Abteil-Methode' fände sich paradigmatisch in den Schriften George Booles.[12] Speziell im Fall von Boole wird kraft der Integration von an der Mathematik – der Algebra und dem Differenzialkalkül – geschulten Verfahren eine Möglichkeit gegeben, Lösungsverfahren für logische Probleme in eine symbolisch generalisierte Form zu überführen. Die zugrunde gelegte propositionale Form ist die einer Funktionsgleichung; der Ausdruck logischer Probleme erfolgt durch ein System solcher Gleichungen, seine Bearbeitung im Sinne der Anwendung eines Kalküls mit explizit formulierten Transformations- und Ersetzungsregeln. Booles Ansatz wird im Folgenden skizziert.[13]

2.1 Booles Methodenverständnis

Sein Verständnis von Logik und seine Überlegungen zur Gestaltung eines logischen Kalküls präsentiert Boole erstmals in seiner 1847 erschienenen *Mathematical Ana-*

[12]Ebd.

[13]Booles Bedeutung für die Logik wird besprochen in den klassischen Beiträgen von William Kneale: Boole and the revival of logic. In: *Mind* 57, 2 (1948), S. 149-175; William Kneale: Boole and the algebra of logic. In: *Notes & Records of the Royal Society of London* 12 (1956), S. 53-63. Das Verhältnis zwischen Booles Leistungen in der Algebra sowie der Analysis und seiner Logik ist Thema bei Theodore Hailperin: Boole's algebra isn't Boolean Algebra. In: *Mathematics Magazine* 54, 3 (1981), S. 172-184; ders.: Boole's abandoned propositional logic. In: *History and Philosophy of Logic* 5 (1984), S. 39-48; Luis María Laita: *A study of the genesis of Boolean logic*. Univ. Diss. (Notre Dame 1976); ders.: The influence of Boole's search for a universal method in analysis on the creation of his logic. In: *Annals of Science* 34 (1977), S. 163-176; Hugues Leblanc: Boolean Algebra and the propositional Calculus. In: *Mind* 71, 283 (1971), S. 383-386. Jüngere Beiträge zur Diskussion der Rolle Booles für die Annäherung von Logik und Mathematik im 19. Jahrhundert sind Marie-José Durand-Richard: Logic versus Algebra: English debates and Boole's mediation. In: *A Boole anthology. Recent and classical studies in the logic of George Boole*, hg. von James Gasser (Dordrecht [u.a.] 2000), S. 139-166; Maria Panteki: The mathematical background of George Boole's Mathematical Analysis of Logic. In: *A Boole anthology.*, S. 167-212; Volker Peckhaus: Was Boole really the ‚father' of modern logic? In: *A Boole anthology.*, S. 271-285. Eine ausführliche Darstellung der Logik Booles findet sich bei Dale Jacquette: Boole's Logic. In: *Handbook of the History of Logic. vol. 4:British Logic in the Nineteenth Century*, hg. von Dov Gabbay und John Woods (Amsterdam [u.a.] 2008), S. 331-380. Eine aktuelle Stellungnahme bietet Martin Rathgeb: Zur Kritik an George Booles mathematischer Analyse der Logik. In: *Mathematik im Prozess*, hg. von Martin Rathgeb u. a. (Dordrecht [u. a.] 2013), S. 57-71.

lysis of Logic.[14] Der 1848 erschienene Aufsatz „The Calculus of Logic“ bietet eine kurze und pointierte Darstellung von Hauptmerkmalen der dort entwickelten Verfahren.[15] Als wesentliches Verdienst seiner vorherigen Publikation beschreibt Boole dort die Anwendung einer „neuen und besonderen“ Form von Mathematik auf den Ausdruck von Denkoperationen.[16] Tatsächlich geht es ihm dort um die „mathematics of the human intellect“.[17] Die Annahme der Entsprechung von Regeln des logischen Kalküls und grundlegenden Denkgesetzen liegt Booles ausführlicher Darlegung seines Systems in *An Investigation of the Laws of Thought* von 1854 sogar dem Titel nach zugrunde.[18] Hinter der Übertragung von Verfahren der Algebra auf seinen logischen Kalkül steht demnach Booles Annahme, dass nicht nur die Regeln für Operationen im Kalkül, sondern die Gesetze der mentalen Operationen selbst in eine mathematische Form zu bringen sind.[19]

Boole behauptet, dass sich die Regeln seines logischen Kalküls aus den notwendigen Bedingungen der Konzeption von Klassen ergeben.[20] Damit stützt er seine Behandlung logischer Probleme dezidiert auf einen extensionalen Interpretationsrahmen. Sein Ansatz beruht auf der Idee, dass sich die Klassen, deren Verhältnisse untersucht werden, durch mentale Operationen der Selektion ergeben.[21] Zum Ausdruck der mathematischen Form des Denkens verwendet Boole die kursivierten Kleinbuchstaben x, y, z daher zunächst als Zeichen für mentale Operationen der Auswahl von Elementen nach einem Kriterium x aus einem Bereich von Individuen oder Klassen.[22] In Konsequenz darf das Symbol x auch als Repräsentant des im Ergebnis ausgewählten Bereichs stehen, also für eine nach dem Kriterium x bestimmte Klasse. Die Symbole x, y, z vertreten in diesem Sinne „Dinge“, insofern sie Gegenstände des Denkens sind,[23] und Denken als Untersuchung von Klassenverhältnissen aufgefasst wird.

Zum Ausdruck der Verhältnisse zwischen Klassen macht Boole weiterhin Gebrauch von den Operationszeichen $+, -, \times$ sowie des Gleichheitszeichens $=$.[24] Das Ope-

[14] George Boole: *The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning* (London; Cambridge 1847).
[15] George Boole: The calculus of logic. In: *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 3 (1848), S. 183-198.
[16] Ebd., S. 183.
[17] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 7.
[18] George Boole: *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (London; Cambridge 1854).
[19] Boole, Calculus of Logic, S. 184; Boole, *Laws of Thought*, S. 45f.
[20] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 4f.; Boole, Calculus of Logic, S. 184.
[21] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 5, S. 15; Boole, Calculus of Logic, S. 184; Boole, *Laws of Thought*, S. 44.
[22] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 15.
[23] Boole, *Laws of Thought*, S. 27.
[24] Ebd.

rationszeichen + bezeichnet die Addition zweier Klassen, d.h. ihre Aggregation zu einer gemeinsamen Klasse, die beide umfasst. Boole übersetzt dieses gleichermaßen als „and“ und „or“.[25] Dementsprechend bedeutet das Operationszeichen – die Subtraktion einer Klasse von einer anderen, d.h. den Ausschluss einer bestimmten Teilklasse aus einer größeren.[26] Die Anwendung des Zeichens $\times$ lässt sich durch Juxtaposition mehrerer Symbole abkürzen. Sie bedeutet die Selektion derjenigen Gegenstände, die sowohl von der ersten als auch der zweiten (usw.) Auswahloperation betroffen sind, d.h. die Überschneidung zwischen den beiden resultierenden Klassen.[27] Das Gleichheitszeichen schließlich beschreibt Boole zunächst als Ausdruck der Copula „is“ oder „are“.[28] Insofern sein Einsatz jedoch eine Gleichsetzung beider Seiten bedeutet, ermöglicht es darüber hinaus die Darstellung von Sätzen in Form von Gleichungen. Und liegen die Sätze einmal in Gleichungsform vor, so lassen sich aufgrund der Gleichsetzung beider Seiten mehrere Umformungsregeln auf sie anwenden – ohne Rücksicht auf die Interpretation des Gleichheitsszeichens im Sinne der prädikativen Copula. So werden in Analogie zur Algebra Umformungen der Ausdrücke nach den Regeln der Transposition möglich, wie z.B. in der Überführung von $x = y + z$ in $x - z = y$.[29] Weiterhin können beide Seiten einer Gleichung mit derselben Größe multipliziert werden. So lässt sich z.B. aus $y = z$ die Gleichung $xy = xz$ gewinnen.[30] Dieser Einsatz des Gleichheitszeichens in der Logik ist es, der Boole schließlich die Behandlung logischer Probleme in Analogie zu Gleichungssystemen ermöglicht.

Die quasi-algebraische Behandlung logischer Probleme setzt in Booles Kalkül einige weitere Regeln voraus, denen die Symbole x, y, z unterliegen. So sind sie erstens kommutativ: $xy = yx$.[31] Denn die Reihenfolge mehrerer Auswahloperationen ist Boole zufolge unerheblich für das Ergebnis; sie resultieren in derselben Überschneidung der ausgewählten Klassen.[32] Weiterhin sind sie auch distributiv: $x(u + v) = xu + xv$ oder auch $z(x - y) = zx - zy$.[33] Es erweist sich nämlich laut Boole als unerheblich für das Ergebnis, ob eine Auswahloperation auf eine

[25] Boole, Calculus of Logic, S. 186; Boole, *Laws of Thought*, S. 33.

[26] Boole, *Laws of Thought*, S. 33f.

[27] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 16; Boole, Calculus of Logic, S. 184; Boole, *Laws of Thought*, S. 29, S. 33.

[28] Boole, *Laws of Thought*, S. 35.

[29] Ebd., S. 35f.

[30] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 19. Boole erklärt die Zulässigkeit dieser Umformung hier durch die Bestimmung der Gleichheit zwischen y und z im Sinne einer eineindeutigen Zuordnung der Elemente. Unter diesem Umstand bleibt die Äquivalenz bestehen, auch wenn aus beiden Klassen nochmals je der Anteil ausgewählt wird, der einer weiteren Bedingung x genüge tut.

[31] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 17; Boole, *Laws of Thought*, S. 31.

[32] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 5f., S.16, S. 17; Boole, Calculus of Logic, S. 185.

[33] Die erste Form gibt Boole in *Mathematical Analysis*, S. 16 und 17; die zweite ergibt sich aus dem Kontext der Darstellung in *Laws of Thought*, S. 33f.

als Gesamtheit betrachtete Verknüpfung angewendet wird oder ob die Gesamtheit zuerst in ihre Bestandteile zerlegt und die Auswahl aus jedem separat getroffen wird.[34]

Boole nimmt weiterhin an, dass unterschiedliche Auswahloperationen dieselbe Klasse bestimmen können. Ist dies der Fall, so bedeutet die Verbindung der beiden nur das, was durch jede für sich genommen bezeichnet wird: $xy = x$. Deshalb ergibt auch die wiederholte Anwendung ein- und derselben Auswahloperation dasselbe Ergebnis wie die einfache: $xx = x$.[35] Wird die Darstellung der Verbindung von Auswahloperationen in Analogie zu Multiplikation ernst genommen, so ergibt sich aus $xx = x$ die Formel $x^2 = x$, nach Boole eines der grundlegenden Denkgesetze.[36] Wie Boole in der *Mathematical Analysis* betont, hat dieses Denkgesetz letztlich die Form $x^n = x$.[37]. Dem Gesetz $x^2 = x$ (bzw. $x^n = x$) also sollen die Symbole der Logik unterliegen.[38] Um eine entsprechende Standardinterpretation für diese festzulegen, bemüht Boole weitere mathematische Analogien. Er weist darauf hin, dass die Bedingungen des Gesetzes $x^2 = x$ (bzw. $x^n = x$) in der Arithmetik nur für zwei Fälle erfüllt werden: diejenigen der Zahlen 0 und 1. Diese nun stehen allerdings je unter weiteren Gesetzen: $0 \times y = 0$ oder $0y = 0$ und $1 \times y = y$ oder $1y = y$.[39] Boole zieht diese Gesetze heran, um Interpretation und Verwendung von 0 und 1 in der Logik zu bestimmen.[40] Gesucht werden also Klassen, die deren Bedingungen erfüllen. Die Verbindung einer durch 0 vertretenen Klasse mit einer beliebigen anderen Klasse muss allein in der ersten resultieren. Die Verbindung einer durch 1 vertretenen Klasse mit einer beliebigen anderen Klasse muss allein in der zweiten resultieren. Boole kommt zu dem Schluss, dass diese beiden Eigenschaften nur von je einem der beiden Grenzfälle von Extension überhaupt erfüllt werden: Nichts (Nothing) und Allem, also dem logischen Universum (Universe).[41]

---

[34] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 16.

[35] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 17; Boole, Calculus of Logic, S. 185; Boole, *Laws of Thought*, S. 31.

[36] Boole, Calculus of Logic, S. 185; Boole, *Laws of Thought*, S. 31.

[37] Boole, Calculus of Logic, S. 184-186, Boole, *Mathematical Analysis*, S. 17.

[38] Boole, *Laws of Thought*, S. 46f.

[39] Ebd., S. 47.

[40] Ebd., S. 37, S. 47f. Die explizite Bestimmung des Sinns von 0 und 1 im Rahmen der Logik findet sich nur in Booles *Laws of Thought*. Seine *Mathematical Analysis* bestimmt eingangs 1 als „unity, to represent the Universe“ (S. 15), erläutert aber nicht die Hintergründe dieser Interpretation und setzt die Bestimmung der 0 stillschweigend voraus.

[41] Boole, *Laws of Thought*, S. 47; Booles Begriff des „Universums“ entspricht hier der von Augustus De Morgan eingeführten Bestimmung eines „universe of a proposition“ oder „universe of discourse“ (Augustus De Morgan: On the Structure of the Syllogism, and on the Application of the Theory of Probabilities to Questions of Argument and Authority [= On the Syllogism I]. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1847), S. 379-408, hier: S. 379f.) Boole selbst gibt die folgende Definition: „whatever may be the extent of the field within which all the objects of our discourse are found, that field may properly be termed the universe of discourse. Furthermore, this universe of discourse is in the strictest sense the

Die Fortentwicklung von Booles Notationssystem macht Gebrauch von dieser Übertragung. Bezeichnet x eine beliebige Klasse, so kann alles von ihr Ausgeschlossene durch Subtraktion vom Universum dargestellt werden: $1-x$.[42] Schließt eine Klasse jedoch Alles ein, so kommt sie dem logischen Universum gleich und die Subtraktion ergibt Nichts: $1-x=0$.[43] Auf der Basis dieser Überlegung lassen sich die Formen der Syllogistik in der Sprache des Kalküls wiedergeben. So können die universalen Urteile „Alle A sind B " (hier: „Alle X sind Y") als $xy=x$ oder $x(1-y)=0$ und „Kein A ist B" (hier: „Kein X ist Y") als $xy=0$ geschrieben werden.[44] Zur differenzierteren Darstellung jedoch ist die Einführung eines weiteren Symbols nötig, das der Unbestimmtheit des partikularen Quantitätsausdrucks „einige" Rechnung trägt. Einige Elemente einer durch eine bestimmte Auswahloperation x gebildeten Klasse zu benennen, bedeutet zunächst, eine unbestimmte Menge von Elementen zu betrachten, die auch dem Kriterium für die Auswahl x genüge tun. Boole betrachtet unbestimmte Mengen von Elementen nun als separate, wenn auch unbestimmte Klassen, deren Auswahl durch ein eigenes Zeichen indiziert wird: v.[45] So bedeutet vx einige Elemente der Klasse, die durch die Auswahloperation x bestimmt wird. $v(1-x)$ ist zu interpretieren als einige Elemente der Klasse, die durch Ausschluss der durch x bestimmten Klasse vom Universum gebildet wird. Die partikulären Urteile der traditionellen Syllogistik lassen sich entsprechend umformulieren. „Einige A sind B" (hier: „Einige X sind Y" oder „einige Gegenstände von x sind einige Gegenstände von y") bedeutet, dass es eine unbestimmte Menge von Elementen gibt, die zu beiden Klassen gehören: $v=xy$.[46] Dasselbe gilt für „Einige A sind nicht B", wenn die Negation nicht als Modifikation der Copula verstanden, sondern auf das Prädikat bezogen wird: „Einige A sind Nicht-B" („Einige X sind Nicht-Y"): $v=x(1-y)$. Jede Urteilsform soll sich auf dieser Grundlage letztlich als Verneinung der Existenz bestimmter Klassen paraphrasieren lassen. Alle X sind Y: $x(1-y)=0$; Kein X ist Y: $xy=0$; Einige X sind Y: $vx(1-y)=0$; Einige X sind nicht Y: $vxy=0$.[47]

ultimate *subject* of the discourse" (*Laws of Thought*, S. 42).

[42]Boole, *Mathematical Analysis*, S. 20f.; Boole, *Laws of Thought*, S. 48.

[43]Vgl. Booles Darstellung des „principle of contradiction": Boole, *Laws of Thought*, S. 49f.

[44]Boole, *Mathematical Analysis*, S. 21.

[45]Ebd.; Boole, Calculus of Logic, S. 186; Boole, *Laws of Thought*, S. 61.

[46]Boole, *Mathematical Analysis*, S. 21. In Calculus of Logic formuliert Boole sämtliche Urteilsformen unter Verwendung des Auswahlsymbols v. So wählt er die Darstellungsformen $y=vx$ für „Alle Y sind X" und $y=v(1-x)$ für „Kein Y ist X". „Einige Y sind X" wird ausgedrückt als $vy=v'x$; „Einige Y sind nicht X" als $vy=v'(1-x)$. Die Unterscheidung zwischen v und v' wird vorgenommen, da es sich bei der beliebigen Auswahl aus y und der beliebigen Auswahl aus x nicht um dieselbe handeln muss (Calculus of Logic, S. 192).

[47]Zur Ableitung dieser Formen siehe Booles tabellarische Übersicht in *Mathematical Analysis*, S. 25 sowie die einzelnen Schritte im Kapitel „Of the conversion of propositions" (S. 26-29); Boole folgert hieraus die Gesetze der Konversion für die Urteilsformen der Syllogistik (S. 30). Zur Übersetzung von syllogistischen Verfahren in seinen Kalkül vgl. in Booles *Mathematical*

Der Ansatz bei der Darstellung von Klassen durch Verneinung der Existenz von anderen nun beruht auf zwei Gesetzen: dem in der Metaphysik (und Logik) für grundlegend erachteten „principle of contradiction“ und dem „law of duality“. Ersteres lässt sich ausdrücken als $x(1-x)=0$. Denn die Verbindung einer Klasse mit dem Ergebnis ihrer Subtraktion vom Universum muss stets in Nichts resultieren.[48] Das „law of duality“ wiederum liegt dieser Einteilung zugrunde.[49] Boole formuliert es im Zusammenhang mit der Behauptung, dass sich die grundlegenden Denkgesetze in ihrer Darstellung als Gleichungen stets als vom zweiten Grad erweisen.[50] Dies bedeute nichts anderes als dass sich Prozesse der Analyse und Klassifikation „by division into pairs of opposites, or, as it is technically said, by dichotomy“[51] vollziehen – also nach dem Grundsatz der von Venn beschriebenen ‚Abteil‘-Methode.

2.2 Booles allgemeine Form der Lösung logischer Probleme

Booles Verfahren zur Behandlung logischer Probleme mittels einer algebraisch inspirierten Version der ‚Abteil‘-Methode nun setzt damit an, dass Verhältnisse zwischen den ‚Abteilen‘ als algebraische Ausdrücke geschrieben werden. Auf dieser Grundlage soll jede beliebige Klasse unter der Hinsicht einzuteilen sein, ob ihre Elemente auch zu einer weiteren Klasse gehören oder nicht. Die so eingeteilten Elemente lassen sich dann anhand weiterer Bedingungen ordnen. Boole bestimmt die Ausgangslage (mit Blick auf die klassenbestimmenden Eigenschaften) dahingehend, dass diejenigen Elemente der untersuchten Klasse, denen eine Eigenschaft x zukommt, ebenso eine weitere Eigenschaft u besitzen. Diejenigen Elemente, denen die Eigenschaft x nicht zukommt, besitzen aber eine Eigenschaft v. Hieraus ergibt sich die Formel $ux+v(1-x)$,[52] in allgemeiner Form $ax+b(1-x)$.[53]

Booles wesentlicher Schritt für die weitere Betrachtung der so notierten Verhältnisse ist die Einführung eines Funktionsbegriffs. Jeden algebraischen Ausdruck, der etwa x enthält, nennt er eine Funktion von x, $f(x)$. Sind mehrere Symbole beteiligt, ergeben sich die entsprechenden Formen $f(x,y)$, $f(x,y,z)$ (usw.).[54] Daraus

Analysis neben den Kapiteln „Of expression and interpretation“ (S. 20-25) und „Of the conversion of propositions“ (S. 26-30) auch „Of syllogisms“ (S. 31-47) sowie Calculus of Logic, S. 192-196.

[48] Vgl. Boole, *Laws of Thought*, S. 49.

[49] Ebd.

[50] Ebd., S. 48.

[51] Ebd., S. 50f.

[52] Ebd., S. 70f.

[53] Ebd., S. 72.

[54] In *Mathematical Analysis* und „Calculus of Logic“ verwendet Boole zugunsten größerer Allgemeinheit die Symbole ϕ und ψ für Funktionen.

ergibt sich die Möglichkeit, problematische Bestandteile eines Ausdrucks auch in der Logik als Funktion der übrigen Bestandteile darzustellen.[55] Die Darstellung kommt zum Einsatz, wenn Prämissen eines logischen Problems in Gleichungen ausgedrückt werden. Diese lassen sich anschließend anhand bestimmter Verfahren umformen, vereinfachen und auflösen.

Boole gewinnt seine Verfahren zur quasi-algebraischen Behandlung logischer Probleme anhand einer Übertragung der Idee der Entwicklung („expansion", auch „development"[56]) von Funktionen. Für eine beliebige Funktion gilt es dabei zunächst, sie auf die – hier allgemein formulierte – Form $ax + b(1 - x)$ zu bringen.[57] Die Bestimmung von a und b erfolgt dann anhand der Differenzierung nach Anwendung der Funktion auf 0 und 1; d.h. bestimmt werden die Werte der Funktion für die Fälle $x = 1$ und $x = 0$. Die Expansion der Funktion hat dann die Form $f(1)x + f(0)(1 - x)$.[58]

Die Funktion hat zwei Konstituenten, x und $1 - x$. Deren Bestandteile x, y, z (usw.) nennt Boole Faktoren. Multipliziert werden die Konstituenten mit den Koeffizienten $f(1)$ und $f(0)$.[59] Die Konstituenten jeder beliebigen Funktion sollen diejenigen „exclusive divisions of the universe of discourse" repräsentieren, die sich in der Expansion aus „predication and denial in every possible way of the qualities denoted by the symbols x, y, *&c.*" ergeben.[60] Bei der Bestimmung der Koeffizienten erfolgt eine Untersuchung nach den Werten, die diese Kombinationen annehmen können. Soll also eine Funktion expandiert werden, gilt es erstens die Konstituenten, zweitens die Koeffizienten zu bestimmen. Boole gibt hierfür allgemeine Regeln an, die ohne Rücksicht auf die Interpretation der Ausdrücke nur hinsichtlich der beteiligten Symbole formuliert werden. Die Regel zur Findung der Konstituenten lautet:

> „Let the first constituent be the product of the symbols; change in this product any symbol z into $1 - z$, for the second constituent. Then in both these change any other symbol y into $1 - y$, for two more constituents. Then in the four constituents thus obtained change any other symbol x into $1 - x$, for four constituents, and so on until the number of possible changes is exhausted."[61]

[55] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 73.

[56] Die terminologische Bestimmung geht u.a. hervor aus Boole, *Laws of Thought*, S. 66: „Chapter V. Of the fundamental principles of symbolical reasoning, and of the expansion or development of expressions involving logical symbols" und S. 73: „Proposition II. To expand or develop a function involving any number of logical symbols".

[57] Boole, *Laws of Thought*, S. 72.

[58] Ebd.

[59] Ebd., S. 75.

[60] Ebd., S. 81.

[61] Ebd., S. 75.

Der Koeffizient für einen bestimmten Konstituenten lässt sich anhand folgener Regel finden:

> „If that constituent involves x as a factor, change in the original function x into 1; but if it involves $1-x$ as a factor, change in the original function x into 0. Apply the same rule with reference to the symbols y, z, &c.: the final calculated value of the function thus transformed will be the coefficient sought. The sum of the constituents, multiplied each by its respective coefficient, will be the expansion required.“[62]

Für eine Funktion $f(x)$ sind bei der Bestimmung der Koeffizienten nur die Werte zu berücksichtigen, die die Funktion für die Fälle $x=1$ und $x=0$ annimmt. Für eine Funktion $f(x,y)$ hingegen sind vier Fälle zu berücksichtigen: (1.) $x=1$, $y=1$; (2.) $x=1$, $y=0$; (3.) $x=0$, $y=1$; (4.) $x=0$, $y=0$;[63] usw. Die Expansion nimmt dann eine entsprechend komplexere Form an. Für eine Funktion mit drei Faktoren etwa gibt Boole in den *Laws of Thought* folgende allgemeine Form, in der $f(1,1,1)$ den Wert der Funktion $f(x,y,z)$ für $x=1$, $y=1$, $z=1$ repräsentiert; $f(1,1,0)$ den Wert der Funktion $f(x,y,z)$ für $x=1$, $y=1$, $z=0$ (usw.):

$$\begin{aligned} f(x,y,z) =& f(1,1,1)xyz + f(1,1,0)xy(1-z) + f(1,0,1)x(1-y)z + \\ & f(1,0,0)x(1-y)(1-z) + f(0,1,1)(1-x)yz + f(0,1,0)(1-x)y(1-z) + \\ & f(0,0,1)(1-x)(1-y)z + f(0,0,0)(1-x)(1-y)(1-z)^{64} \end{aligned}$$

In der *Mathematical Analysis* sowie im „Calculus of Logic“ gibt Boole darüber hinaus die allgemeine Form für die Auflösung nach einem der beteiligten Faktoren, hier:

$$\begin{aligned} z =& \frac{f(1,1,0)}{f(1,1,0)-f(1,1,1)}xy + \frac{f(1,0,0)}{f(1,0,0)-f(1,0,1)}x(1-y) + \\ & \frac{f(0,1,0)}{f(0,1,0)-f(0,1,1)}(1-x)y + \frac{f(0,0,0)}{(f(0,0,0)-f(0,0,1))}(1-x)(1-y).^{65} \end{aligned}$$

Wird eine Auflösung dieser Form nun mit den Werten versehen, die eine bestimmte Funktion annimmt, so ergibt sich eine Besonderheit: Es können die Koeffizienten $\frac{0}{0}$ und $\frac{1}{0}$ resultieren. Im ersten Fall ist laut Boole an dessen Stelle ein Auswahlsym-

[62] Ebd., S. 75f.
[63] Ebd., S. 76.
[64] Ebd., S. 75.
[65] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 73; Boole, Calculus of Logic, S. 190. Die dort verwendete Schreibweise für Funktionen mittels der Symbole ϕ und ψ wurde hier der in *Laws of Thought* verwendeten angepasst.

bol für eine unbestimmte Klasse einzusetzen.[66] In der Interpretation führt dies zu einer Berücksichtigung eines unbestimmten Restes, der sich allerdings als unerheblich für die Lösung eines gegebenen Problems erweist. Im zweiten Fall ergibt sich durch gesonderte Gleichsetzung des mit $\frac{1}{0}$ multiplizierten Terms eine gesonderte Bestimmung, die in der Lösung als Hilfssatz auftaucht.[67]

Boole gibt u.a. folgendes Beispiel für die Anwendung des so bestimmten Lösungsverfahrens. Das zu lösende Problem lautet: „The Ys which are Xs consist of the Ys which are Zs and the Xs which are not-Zs. Required the class Z.“[68] Boole formuliert die Relationen zwischen den beteiligten Klassen als:

$$yx = yz + x(1 - z).$$

Als Funktion der drei beteiligten Faktoren notiert Boole:

$$f(x, y, z) = yx - yz - x(1 - z).$$

Diese Funktion nimmt folgende Werte an:

$f(1,1,1) = 0, f(1,1,0) = 0, f(1,0,1) = 0, f(1,0,0) = -1, f(0,1,1) = -1,$
$f(0,1,0) = 0, f(0,0,1) = 0, f(0,0,0) = 0.$[69]

Bei Auflösung nach z ergibt sich:

$$z = \frac{0}{0}xy + x(1 - y) + \frac{0}{0}(1 - x)(1 - y)$$

Nach Ersetzung von $\frac{0}{0}$ mit einer beliebigen Konstante lautet die Auflösung:

$$z = x(1 - y) + wxy + w'(1 - x)(1 - y)$$

Boole interpretiert diese Lösung dahingehend, dass die Klasse Z alle X einschließt, die Nicht-Y sind, sowie eine unbestimmte Anzahl von X, die Y sind und eine unbestimmte Anzahl von Elementen, die weder X noch Y sind.[70]

Ein weiterer Schritt, der bei der Lösung komplexerer logischer Probleme erforderlich werden kann, ist die Elimination eines Symbols aus Gleichungen. Dazu soll die Gleichung zunächst gemäß den Transpositionsregeln so umgeformt werden, dass alle Bestandteile auf einer Seite sind und die andere Seite gleich 0 gesetzt

[66] Boole, *Mathematical Analysis*, S. 74.
[67] Ebd.
[68] Boole, Calculus of Logic, S. 190.
[69] Ebd.
[70] Ebd., S. 191.

werden kann.[71] Anschließend ist die Expansion für den fraglichen Term durchzuführen: dieser wird in zwei Schritten einmal als 1 und einmal als 0 gesetzt. Zuletzt werden die beiden resultierenden Gleichungen miteinander multipliziert.[72] So gelangt Boole von der Gleichung $f(x, y) = 0$ zu $f(x, 1)f(x, 0) = 0$, indem er y nacheinander als 1 und als 0 setzt und die resultierenden Gleichungen miteinander multipliziert. Damit ist y eliminiert. Die Elimination lässt sich noch weiter führen, indem dasselbe Verfahren auch für x angewendet wird. Das Ergebnis ist $f(1, 1)f(1, 0)f(0, 1)f(0, 0) = 0$.[73] (Die Faktoren entsprechen dabei den Koeffizienten der vollständigen Expansion der ursprünglich gegebenen Funktion.[74])

Von den Überlegungen zur Handhabung einzelner Gleichungen geht Boole schließlich zur Betrachtung von Gleichungssystemen über, die als Ausdruck von Prämissengefügen verstanden werden. Boole behauptet die Möglichkeit einer Rückführung jedes beliebigen Gleichungssystems – oder jeder der enthaltenen Gleichungen – auf eine einzelne, so dass die Verfahren der Entwicklung und Elimination anwendbar werden.[75] In *Laws of Thought* legt Boole für diese Rückführung u.a. eine Methode dar, die Gebrauch von der Möglichkeit macht, beide Seiten einer Gleichung mit einem beliebigen konstanten Faktor zu multiplizieren.[76]

Das Verfahren nach dieser Methode lässt sich an einem Beispiel nachvollziehen. Boole gibt hier zunächst drei Prämissen an:

> „1st. That wherever the properties A and B are combined, either the property C, or the property D, is present also; but they are not jointly present.
>
> 2nd. That wherever the properties B and C are combined, the properties A and D are either both present with them, or both absent.
>
> 3rd. That wherever the properties A and B are both absent, the properties C and D are both absent also; and *vice versâ*, where the properties C and D are both absent, A and B are both absent also.“

Das Problem schließlich lautet:

> „Let it then be required from the above to determine what may be concluded in any particular instance from the presence of the property

[71] Ebd., S. 103.
[72] Ebd., S. 101, S. 103.
[73] Boole, *Laws of Thought*, S. 101, S. 103.
[74] Ebd.
[75] Ebd., S. 114.
[76] Ebd., S. 115.

> A with respect to the presence or absence of the properties B and C, paying no regard to the property D.“[77]

Boole stellt die vier thematischen Eigenschaften A, B, C, D dar als x, y, z, w. Die Prämissen werden ausgedrückt als:

$$\begin{aligned}
&xy = v\{w(1-z) + z(1-w)\};\\
&yz = v\{xw + (1-x)(1-w)\};\\
&(1-x)(1-y) = (1-z)(1-w).
\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Prämissen wird nun v eliminiert. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
&xy\{1 - w(1-z) - z(1-w)\} = 0;\\
&yz\{1 - xw - (1-x)(1-w)\} = 0.
\end{aligned}$$

Die anschließende Expansion ergibt

$$\begin{aligned}
1 - w(1-z) - z(1-w) &= wz + (1-w)(1-z),\\
1 - xw - (1-x)(1-w) &= x(1-w) + w(1-x).
\end{aligned}$$[78]

Die Ausdrücke $1-x$, $1-y$ (usw.) kürzt Boole hier ab als $\bar{x}$, $\bar{y}$(usw.). Dann werden die zweite Gleichung mit dem Faktor c, die dritte mit dem Faktor c' multipliziert und beide Ergebnisse zur ersten addiert. Dann wird w gleich 1 gesetzt, so dass $\bar{w}$ gleich 0 ist. Anschließend wird w gleich 0 gesetzt, so dass $\bar{w}$ gleich 1 wird. Die Ergebnisse werden addiert und gleich 0 gesetzt. Aus dieser Gleichung soll x bestimmt werden. Dies geschieht, indem die linke Seite der Gleichung expandiert und das Ergebnis nach x aufgelöst wird. Es resultiert der Ausdruck:

$$x = \frac{(cyz + c'\bar{y})(c'\bar{y} - c'\bar{z})}{(cyz + c'\bar{y})(c'\bar{y} - c'\bar{z}) - cyz}$$

Die rechte Seite soll dann nach y und nach z expandiert werden. Boole kommt hier zu der Darstellung:

$$x = 0yz + \frac{0}{0}y\bar{z} + \frac{c'^2}{c'^2}\bar{y}z + \frac{0}{0}\bar{y}z$$

Diesen Ausdruck bringt Boole zunächst auf die Form

$$x = (1-y)z + \frac{0}{0}y(1-z) + \frac{0}{0}(1-y)(1-z)$$

[77] Ebd., S. 118.
[78] Ebd.

und gelangt von dieser zum Ausdruck

$$x = (1-y)z + \frac{0}{0}(1-z)$$

Als Interpretation dieses Ergebnisses gibt Boole an, dass wo immer die Eigenschaft A auftritt, dort entweder C auftritt und B nicht auftritt, oder C nicht auftritt. Umgekehrt: Wo immer die Eigenschaft C auftritt und die Eigenschaft B nicht auftritt, da tritt die Eigenschaft A auf.[79]

Booles Verfahren zur Lösung logischer Probleme nach quasi-algebraischen Methoden, die sich aus den Bedingungen der Konzeption von Verhältnissen zwischen Klassen ergeben, sollte anhand der angeführten Beispiele hinreichend klar illustriert worden sein, um seine Entsprechung zu Venns ‚Abteil'-Methode ersichtlich werden zu lassen. Die Differenzierung jedes Konstituenten einer Funktion nach den Werten für 0 und 1 korrespondiert der Idee einer Aufteilung von jedem an einem Problem beteiligten Term in ‚Abteile' gemäß der Möglichkeiten von Ein- bzw. Ausschluss aller jeweils anderen Terme.

3 William Stanley Jevons und seine „Logische Maschine"

Im Folgenden wird eine zweite Variante der von Venn beschriebenen ‚Abteil-Methode' dargestellt und abschließend auf Booles eben zitiertes Anwendungsbeispiel bezogen. Dieser Ansatz bezieht sich historisch zwar auf Boole, gibt in seiner Umsetzung jedoch ganz andere konzeptuelle Grundlagen zu erkennen. Der Ansatz geht zurück auf William Stanley Jevons.[80] In seiner frühesten Schrift zur Logik aus

[79] Ebd., S. 119.

[80] Jevons' Logikverständnis wird thematisiert in Wolfe Mays und D. P. Henry: Jevons and logic. In: *Mind*, n.s., 62 (1953), S. 484-505. Jevons' Position in der Weiterentwicklung von Ideen Booles während der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts diskutiert Randall Roy Dipert: *Development and crisis in late Boolean logic: The deductive logics of Peirce, Jevons, and Schröder*. Ph. D. Diss. (Indiana 1978). Jüngere Beiträge greifen insb. Jevons' Rolle für die Ökonomik auf; das Thema der Mechanisierung wird jedoch auch hier besprochen. So insb. bei Harro Maas: Mechanical rationality: Jevons and the making of economic man. In: *Studies in History and Philosophy of Science* 30, 4 (1999), S. 587-619; ders.: *An instrument can make a science: Jevons's balancing acts in economics* (London 2001); ders.: *William Stanley Jevons and the Making of Modern Economics* (Cambridge 2005); Bert Mosselmans: William Stanley Jevons and the extent of meaning in logic and economics. In: *History and Philosophy of Logic* 19, 2 (1998), S. 83-99; Margaret Schabas: The worldly philosophy of William Stanley Jevons. In: *Victorian Studies* 28, 1 (1984), S. 129-147; Margaret Schabas: *A world ruled by Number: William Stanley Jevons and the rise of mathematical economics* (Princeton 1990). Ein aktueller Beitrag zu Jevons' Logik ist Bert Mosselmans und Ard Van Moer: William Stanley Jevons and the substitution of similars. In: *Handbook of the History of Logic. vol. 4*:,

dem Jahre 1864, *Pure Logic or The Logic of Quality apart from Quantity*, behauptet dieser, Booles System lasse sich unter Beibehaltung seiner wesentlichen Vorzüge seines – keineswegs notwendigen – „mathematischen Aufzugs entkleiden".[81] Die von Boole fälschlicherweise nahe gelegte Abhängigkeit der Logik von der Mathematik sei so in umgekehrter Richtung zu etablieren.[82] Hinter dieser Forderung steht ein Methodenverständnis, das sich erstens einer extensionalen Standardinterpretation der Logik verweigert.[83] Zweitens beruht es auf der Idee des Vergleichens als grundlegender Denkoperation. So sollen sich die Verfahren der Logik auf systematische Vergleiche von „Qualitäten", d.h. Begriffsmerkmalen stützen, die als Eigenschaften wiederum den unter den Begriff fallenden Dingen zukommen.[84]

Jevons' Methodenverständnis wird im Folgenden skizziert, um die Besonderheiten der resultierenden Verfahren anschließend an einer von Jevons selbst entworfenen „Logischen Maschine" auszuweisen. Die Maschine wurde 1869 gebaut und befindet sich heute im Museum of the History of Science in Oxford.[85] Die nähere Betrachtung ihrer Leistungen verdeutlicht, dass Jevons' Ansatz ohne einen algebraisch inspirierten Funktionsbegriff auskommt und keinen Gebrauch von Variablen im engeren Sinne macht. Die durch die Arbeitsweise der Logischen Maschine exemplifizierte Methode beruht nicht auf algebraischen Techniken, sondern vielmehr auf der Idee einer Verkettung von systematischen Operationen der Klassifikation. Durchgeführt werden diese Operationen mittels Sortierung und Anordnung von schematischen Repräsentanten sämtlicher ‚Abteil'-Besetzungen im Raum.

3.1 Jevons' Methodenverständnis

In seiner zweiten Schrift zur Logik, *The Substitution of Similars, the True Principle of Reasoning, Derived from a Modification of Aristotle's Dictum*, versteht

S. 515-531.

[81] William Stanley Jevons: *Pure Logic or The Logic of Quality Apart from Quantity: With Remarks on Boole's System and on the Relation of Logic and Mathematics* (London 1864), S. 3. Irritierenderweise bezieht sich Jevons hier auf Booles *Mathematical Analysis*, vermerkt in der entsprechenden Fußnote aber die Titelangaben der *Laws of Thought*.

[82] Jevons, *Pure Logic*, S. 3. Jevons' Analogie zwischen Logik und Algebra ist vor diesem Hintergrund zu verstehen: Die Logik, so Jevons, ließe sich etwa als eine Algebra der Art oder Qualität, der bekannten und unbekannten Qualitäten verstehen (*Pure Logic*, S. 7). Zum Begriff der Qualität siehe die folgenden beiden Fußnoten.

[83] So lässt sich Jevons' Beschreibung seines Ziels in *Pure Logic* interpretieren: Er gibt an zeigen zu wollen, „that all and more than all the ordinary processes of logic may be combined in a system founded on comparison of quality only, without reference to logical quantity" (*Pure Logic*, S. 3).

[84] Jevons, *Pure Logic*, S. 4.

[85] Inventar-Nr. 18230.

Jevons als grundsätzliche Aufgabe seiner Logik die vollständige Lösung jedes Problems der – von Boole übernommenen – allgemeinen Form: „Given any number of propositions involving any number of distinct terms, required the description of any of those terms or any combination of those terms as expressed in the other terms, under condition of the premises remaining true.“[86] In der Behandlung von Problemen dieser Form unterscheidet sich Jevons nun allerdings deutlich von Boole. Dies deutet sich bereits in Jevons' Formulierung der Grundlagen seines Methodenverständnisses an. Dieses verknüpft die Idee von Folgerungen aus Sätzen mit Subjekt-Prädikat-Struktur und Methoden der Ersetzung und Elimination von Termen kraft Gleichsetzung.

Jevons' eigenen Angaben zufolge setzen seine Verfahren zur Problemlösung in der Logik nur diejenigen Regeln voraus, die er als Denkgesetze proklamiert. Jevons benennt drei solche Gesetze: Das Gesetz der Identität (Law of Identity), das Gesetz der Dualität (Law of Duality) oder des ausgeschlossenen Dritten und das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs (Law of Non-Contradiction).[87] Die Interpretation dieser Gesetze expliziert Jevons in *The Substitution of Similars* hinsichtlich Dingen und Attributen. Das Gesetz der Identität besagt, dass „ein Ding mit sich selbst identisch ist“ (a thing is identical with itself). Das Gesetz der Dualität sagt aus, dass „alles ein gegebenes Attribut entweder besitzt oder nicht besitzt“ (everything either possesses a given attribute or does not possess it). Das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs bedeutet, dass „nichts einander widersprüchliche Attribute auf sich vereinen kann“ (nothing can combine contradictory attributes).[88]

Schematisch notiert Jevons diese Gesetze unter Verwendung lateinischer Großbuchstaben A, B, C für Attribute oder die durch sie bestimmten Dinge sowie kursivierter Kleinbuchstaben a, b, c für deren Negate. Im Erscheinungsbild der Notation ergeben sich bestimmte Analogien zur Mathematik bei der Darstellung der Verbindung von Attributen. In *Pure Logic* verwendet Jevons hierfür noch das Zeichen $+$. Dessen Sinn bestimmt er gleichermaßen als „and, either, or, &*c*.“. In *The Substitution of Similars* wählt er hierfür eine einfache Juxtaposition, die an ein Produkt erinnert. Hier spricht er von der Notationsweise als einer „junction“; ihr Zweck ist „to indicate anything which unites the qualities of both A and B.“[89] Markant ist zudem die Verwendung des Gleichheitszeichens anstelle der Copula „ist“. In *Pure Logic* führt Jevons das Zeichen $=$ ein als „merely the copula *is*, or

[86] William Stanley Jevons: *The Substitution of Similars, the True Principle of Reasoning, Derived from a Modification of Aristotle's Dictum* (London 1869), S. 50f.; vgl. auch Jevons, *Pure Logic*, S. 8, § 18.
[87] Ebd., S. 45.
[88] Ebd., S. 46; vgl. auch Jevons, *Pure Logic*, S. 41.
[89] Jevons, *Substitution of Similars*, Similars, S. 27f.

is same as, or some equivalent".[90] In *The Substitution of Similars* hingegen nennt Jevons „the copula or sign of identity" in einem Atemzug.[91] Er scheint hier nahe zu legen, dass das Symbol = die Copula *ist*, nicht ausdrückt. Damit wäre die Copula als Identitätsbeziehung zu interpretieren. Wie sich noch zeigen wird, erweist sich eine solche Interpretation jedoch als problematisch, da die Beziehung zwischen den beiden Seiten des Zeichens = bei Jevons im Regelfall offenkundig keine symmetrische ist.[92]

Unter diesen Festlegungen stellt Jevons in The Substitution of Similars das Gesetz der Identität dar als A=A.[93] Das Gesetz der Dualität drückt er mit Hilfe eines Operators für die gegenseitige Abwechslung (alternation) von Zeichen aus: A=AB·|·A. „Alternation" kommt hierbei einer „disjunctive conjunction *or*", also einem exklusiven „Oder" gleich.[94] Etwas, das A ist, ist demnach entweder nicht nur A, sondern zugleich auch B, oder aber A und dabei Nicht-B. Das Gesetz des ausgeschlossenen Widerspruchs sagt aus, dass nichts zugleich A und Nicht-A sein kann. Jevons gebraucht hier eine an Boole orientierte Art der Formulierung: $\mathrm{A}a = 0$.[95] Sie soll ausdrücken, dass die Kombination von A und seinem Negat auf nichts zutreffen kann. (Die symbolische Formulierung stellt insofern eine Ausnahme in Jevons' Notationsschema dar, als das Zeichen = hier nicht die Copula symbolisiert, sondern tatsächlich zum Ausdruck einer Gleichung verwendet wird. Auch der Gebrauch der 0 findet sich bei Jevons sonst kaum. In *Pure Logic* erwähnt er das Zeichen zwar, bemerkt dazu aber nur, seine Bedeutung, „whatever it exactly be", lasse sich genauso gut in Worten ausdrücken.[96])

Unter Voraussetzung des Gesetzes vom ausgeschlossenen Widerspruch entspricht Jevons' Version des Gesetzes der Dualität im Wesentlichen dem methodischen Grundprinzip eines Ansatzes bei der „occupation or non-occupation of compartments" nach Venn: Jeder Bestandteil eines logischen Problems ist für jeden weiteren in zwei Abteile aufzugliedern, nämlich eines, in dem er sich mit dem zweiten verbindet und eines, in dem er sich mit dessen kontradiktorischem Gegenteil

[90] Jevons, *Pure Logic*, S. 7.
[91] Jevons, *Substitution of Similars*, S. 24.
[92] Sie erweist sich allerdings in Sonderfällen als symmetrisch, nämlich genau dann, wenn beide Seiten bestimmte Begriffe von singulärer Quantität enthalten. So z.B. im Fall von „iron = the most useful of the metals" (*Substitution of Similars*, S. 14). Streiten ließe sich aber über die Berechtigung von Jevons' Behauptung, dass die Copula in „All metals are some elements" nicht „are contained among", sondern „are identical with" bedeutet und daher mittels des Gleichheitszeichens „in a meaning closely analogous to that which it bears in mathematics" einzusetzen ist (*Substitution of Similars*, S. 11f.).
[93] Jevons, *Substitution of Similars*, S. 46.
[94] Ebd.
[95] Ebd.
[96] Jevons, *Pure Logic*, S. 7.

verknüpft – und diese Aufteilung ist erschöpfend. Im hier von Jevons veranschlagten Interpretationsrahmen bedeutet dies: Alle Dinge, die durch ein Attribut A bestimmt werden, müssen sich danach einteilen lassen, ob sie zudem durch ein Attribut B bestimmt werden oder aber durch dessen Abwesenheit.

Genau dieser Grundsatz nun liegt Jevons' Leitidee für die systematische Anwendung eines Problemlösungsverfahrens zugrunde, das auf sukzessive Ausschlussoperationen baut. Die Bearbeitung eines logischen Problems nach diesem Verfahren gliedert sich in zwei Phasen. In der ersten Phase werden zunächst alle Kombinationen der Bestandteile eines gegebenen Problems entwickelt.[97] Erst die zweite Phase entscheidet darüber, welche der erzielten Kombinationen als Lösungen des gegebenen Problems in Frage kommen, sich also als konsistent mit den gegebenen Prämissen erweisen.[98] Die Entwicklung in der ersten Phase stützt sich auf das Prinzip der Zweiteilung nach dem Gesetz der Dualität. Die Selektion in der zweiten Phase erfolgt nach dem Kriterium des Gesetzes vom ausgeschlossenen Widerspruch. Als Beispiel führt Jevons das folgende Gefüge unter dem Blickpunkt der Aufgabe an, die ableitbaren Konsequenzen herauszustellen: „From A follows B, and from C follows D; but B and D are inconsistent with each other."[99] Das Bedingungsgefüge lässt sich darstellen als

(1) A=AB,
(2) C=CD,
(3) B=B*d*.[100]

Als Problemstellung enthält dieses Gefüge vier symbolisch repräsentierte Bestandteile: A, B, C und D. Das Ergebnis der Entwicklungsphase für ihre Kombinationen liefert die 16-gliedrige Liste: ABCD, ABC*d*, AB*c*D, AB*cd*, A*b*CD, A*b*C*d*, A*bc*D, A*bcd*, *a*BCD, *a*BC*d*, *a*B*c*D, *a*B*cd*, *ab*CD, *ab*C*d*, *abc*D, *abcd*.[101] In der Selektionsphase muss nun untersucht werden, welche der Kombinationen von der Liste gestrichen werden müssen, weil sie sich beim Abgleich mit den gegebenen Prämissen als unzulässig herausstellen. „This comparison", so Jevons, „will really consist in substituting for each letter its description as given in the premises".[102] Den Verlauf der Vergleiche deutet Jevons hier nur an: „The combination A*b*CD is contradicted by (1) in substituting for A its value; ABC*d* by (2), *a*B*c*D by (3), and so on. There will be found to remain only four possible combinations: AB*cd*, *ab*CD, *abc*D, *abcd*."[103]

[97] Jevons, *Substitution of Similars*, S. 51.
[98] Ebd.
[99] Ebd., S. 52.
[100] Ebd., S. 53.
[101] Ebd., S. 52.
[102] Ebd., S. 53.
[103] Ebd.

Die Menge der Problemlösungen soll demnach erarbeitet werden, indem all diejenigen der eingangs kompilierten Kombinationen ausgestrichen werden, welche sich nach allen gemäß den Prämissen zulässigen „Substitutionen“ als widersprüchlich erweisen. Das Verfahren erschließt sich aus Jevons’ Ergebniszusammenfassung: Betrachtet wird hier zuerst die Kombination A*b*CD. Gemäß Prämisse (1) bedeutet A AB. Wird AB statt A in A*b*CD geschrieben, ergibt sich AB*b*CD. Das Ergebnis enthält also zugleich B und Nicht-B, dargestellt als *b*. Damit erweist es sich als widersprüchlich. (Die Repräsentation anhand schematischer Buchstaben bringt dabei den Vorteil mit sich, dass ohne weiteres Nachdenken jede Verbindung gestrichen werden kann, die nach einer „Substitution“ zugleich den Groß- und den Kleinbuchstaben desselben Charakters enthält.)

Jevons’ Verfahren setzt demnach zunächst an bei der Idee der Substitution von Termen in einem Gleichungssystem. Die Prämissen eines Problems erscheinen als Gleichungen, von denen die einen hinsichtlich des Gesuchten in die anderen eingesetzt werden können. Jedoch etabliert Jevons’ Verwendung des Gleichheitszeichens keine Äquivalenz der linken und der rechten Seite der resultierenden Ausdrücke. So kann zwar im obigen Beispiel aufgrund von Prämisse (1) A durch AB, aufgrund von (2) C durch CD und aufgrund von (3) B durch B*d* er- oder vielmehr: eingesetzt werden. Der Grund dafür liegt aber nicht in einer Äquivalenz-, sondern vielmehr in einer Implikationsbeziehung: Bereits die verbale Problemstellung lautet „Aus A folgt B, und aus C folgt D; aber B und D sind miteinander inkonsistent.“[104] So bedeutet A=AB nichts anderes als: A ist immer nicht nur A, sondern zugleich AB. Wenn A auftritt, dann auch B. Ob dasselbe Verhältnis umgekehrt auch zwischen B und A besteht, bleibt offen. Sollte dies der Fall sein, wäre die Indikation durch eine weitere Prämisse nötig, nämlich B=BA. Die durch die ‚Gleichung‘ A=AB etablierte ‚Substitutierbarkeit‘ besteht nur in eine Richtung. Jevons’ Auffassung von propositionaler Form folgt demnach grundsätzlich einem prädikativen Grundverständnis. Die linke Seite einer ‚Gleichung‘ wird qua Subjektbegriff durch die rechte Seite im Sinne eines Prädikats spezifiziert. Aus diesem Grund taucht der Subjektbegriff im obigen Beispiel auf der rechten Seite der ‚Gleichung‘ nochmals auf: A ist A, aber auch B. Das Gleichheitszeichen ersetzt demnach die Copula „ist“.[105]

[104] Ebd., S. 52.

[105] Eine Veränderung gegenüber der traditionellen Form besteht in Jevons’ Einsatz von Negaten. So lautet Prämisse (3) im obigen Beispiel B=B*d*. Die Wahl der Form „B=Nicht-D“ statt „B ist nicht D“ vereinheitlicht den Gebrauch der Copula in affirmativen wie negativen Urteilen und begünstigt dadurch die Umkehrbarkeit der Verhältnisse zwischen Subjekt und Prädikat. Der Ansatz bei der Betrachtung von (einander kontradiktorisch entgegengesetzten) „contraries“ sollte seit De Morgans Beiträgen geläufig gewesen sein (hier insb.: De Morgan, On the Syllogism I, S. 379ff.) Jevons übernimmt die von De Morgan verwendete Notation der Gegenbegriffe durch kursivierte Kleinbuchstaben.

Jevons' Verwendung des Gleichheitszeichens konstituiert demnach keine Gleichungen im engeren mathematischen Sinne. Auch scheint Jevons keinen Gebrauch eines Funktionsbegriffs zu machen. Die Möglichkeiten der Anwendung symbolgestützter Transformations- und Eliminationsverfahren stehen ihm damit nicht offen. Schon aus diesen Gründen können kaum Analogien zwischen den in diesem Rahmen verfügbaren Techniken der Problemlösung und algebraisch orientierten Verfahren zur Auflösung von Gleichungen im Sinne Booles bestehen. Dennoch lässt sich zeigen, dass auch Jevons' Methode auf der Idee einer sukzessiven Untersuchung von (Begriffs- statt Klassen-) ‚Abteilen' im Sinne der von Venn beschriebenen „method of occupation or non-occupation of compartments" beruht. Dies wird besonders deutlich an der Arbeitsweise von Jevons' „Logischer Maschine", die deshalb im Folgenden detailliert beschrieben wird.

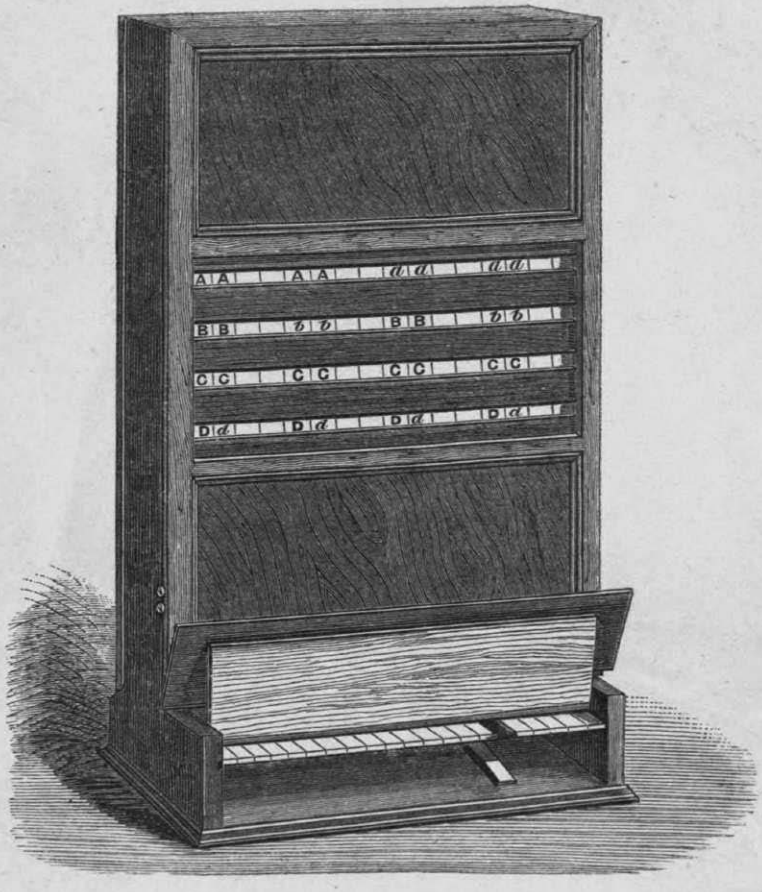
3.2 Jevons' Logische Maschine

Jevons' erste Präsentation der Logischen Maschine gegenüber der breiten wissenschaftlichen Öffentlichkeit findet sich in einem Artikel, der im Jahre 1870 unter dem Titel „On the Mechanical Performance of Logical Inference" als Beitrag in den *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* erschien.[106] Die Publikation gibt mehrere Konstruktionszeichnungen an die Hand, die den Nachvollzug der technischen Beschreibungen[107] erleichtern. Auf deren Basis wird im Folgenden eine detaillierte Beschreibung der Maschine gegeben, um die Funktionsweise des Geräts zu erschließen.

Die Logische Maschine stellt sich als ein aufrecht stehendes Schränkchen dar, das sich auf Vorder- und Rückseite durch Türen verschließen lässt (Abb.1). Im oberen Drittel der Vorderseite befindet sich ein Ausgabefeld, das sich aus vier horizontalen Schlitzen in der Verschalung ergibt. Die Schlitze geben die Sicht auf Buchstabenzeichen hinter der Verschalung frei. An der Basis der Vorderseite schließt sich eine Eingabevorkehrung mit Tasten an, die an eine Klaviatur erinnert. (Die Maschine wird daher hin und wieder auch als „Logisches Piano" bezeichnet.)

Die Eingabevorkehrung setzt sich zusammen aus zwei Sets von Tasten je für die einzelnen Bestandteile eines logischen Problems mit maximal vier Gliedern A, B, C, D, *a*, *b*, *c*, *d* (Jevons' fig. 4). Weiterhin stellt sie einige zusätzliche Tasten bereit: „Conjunction" (verstanden als inklusives „Or"), „Copula", „Full stop" und „Finis". Deren Betätigung setzt unterschiedliche Operationen in Gang, die in der

[106] William Stanley Jevons: On The Mechanical Performance of Logical Inference. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 160 (1870), S. 497-518.
[107] Ebd., S. 509ff.

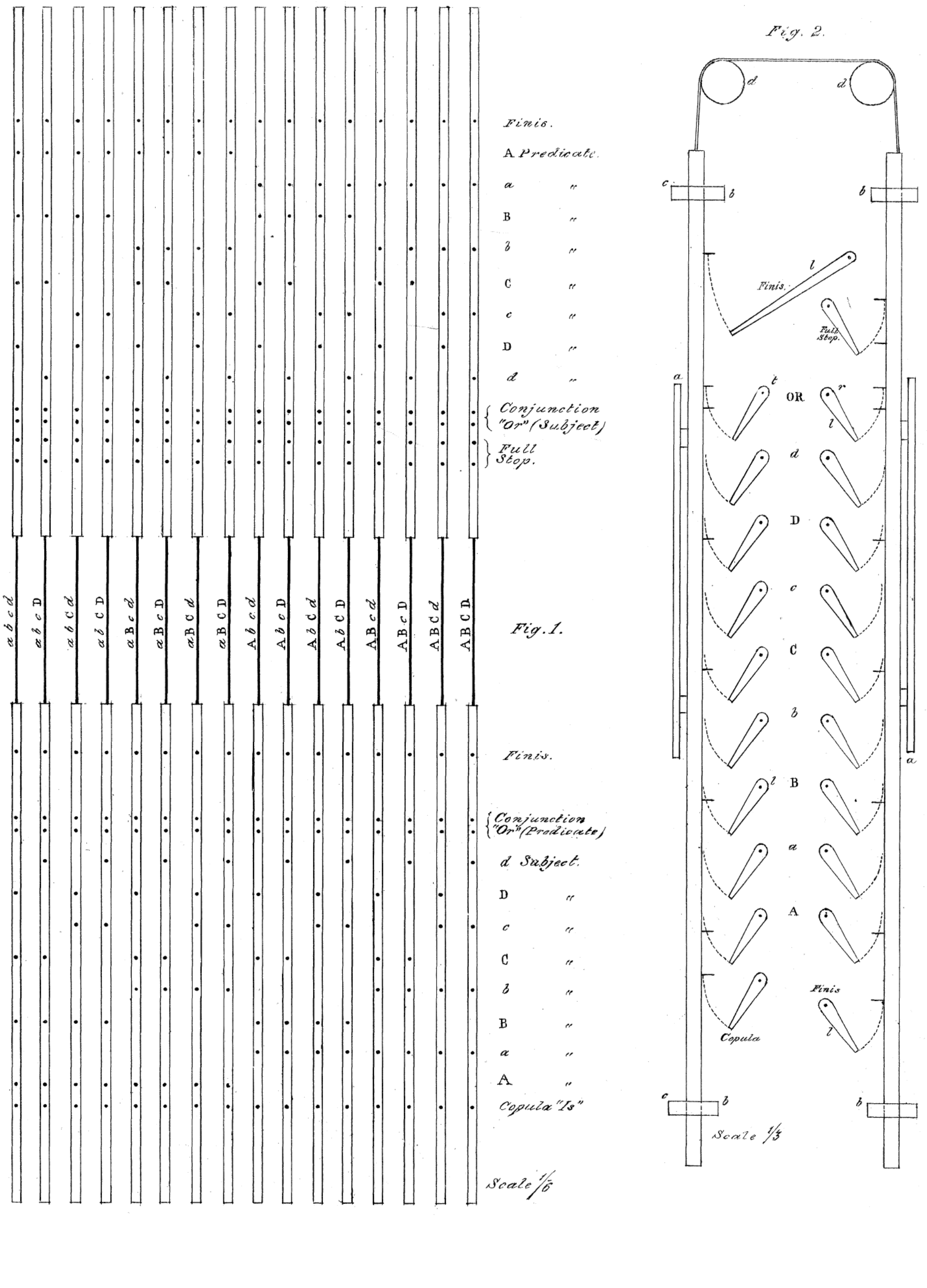


THE LOGICAL MACHINE.

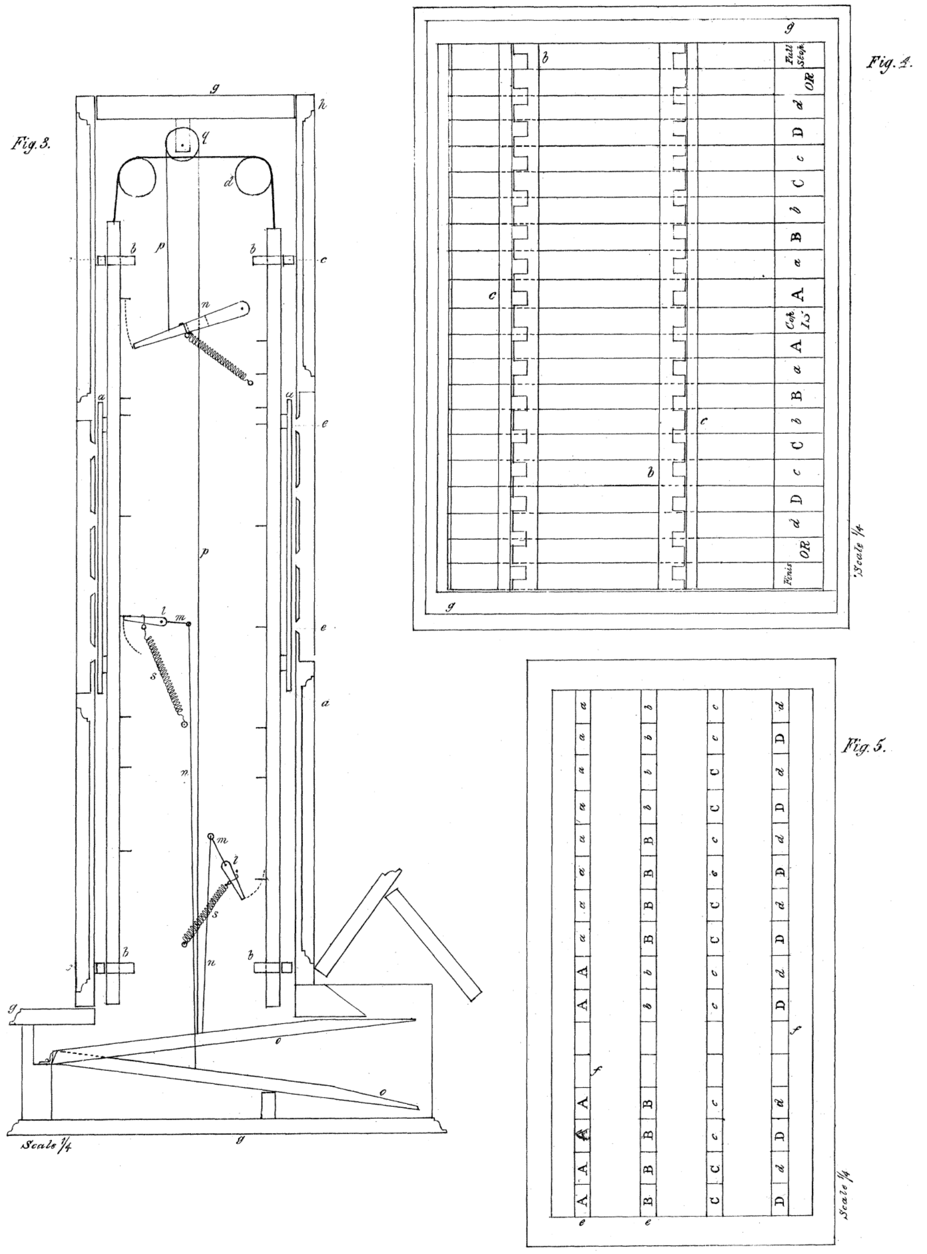
THE PREDICATE-KEY C IS DEPRESSED.

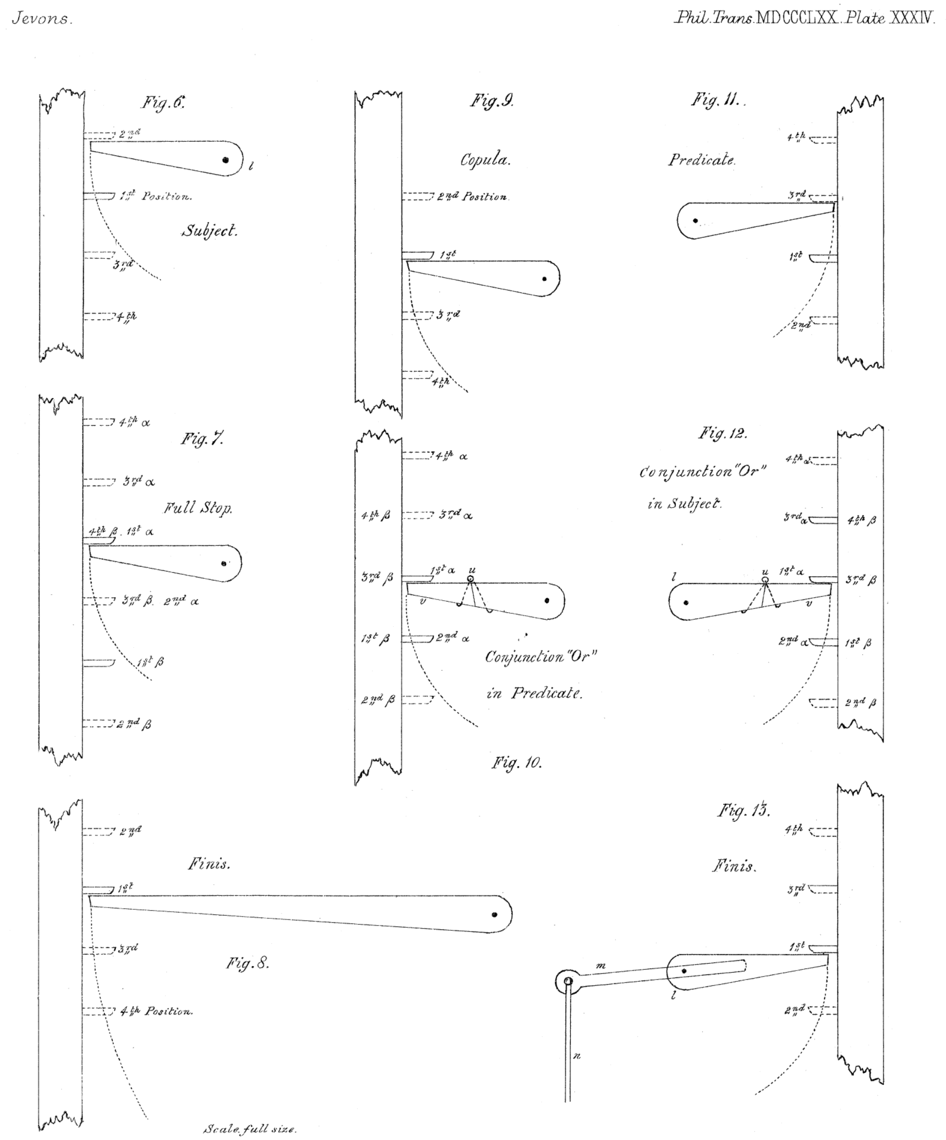
Abbildung 1.

Jevons. Phil. Trans. MDCCCLXX. Plate XXXII.



Jevons. *Phil. Trans.* MDCCCLXX. *Plate* XXXIII.




Jevons.
Phil. Trans. MDCCCLXX. Plate XXXIV.
Fig. 6.
Subject.
1st Position.
Fig. 9.
Copula.
2nd Position.
Fig. 11.
Predicate.
Fig. 7.
Full Stop.
Fig. 12.
Conjunction "Or" in Subject.
Conjunction "Or" in Predicate.
Fig. 10.
Fig. 13.
Finis.
Finis.
Fig. 8.
4th Position.
Scale full size.

Verschiebung der im Ausgabefeld sichtbaren Buchstabenkombinationen resultieren (Jevons' fig. 5).

Hinter den Holztüren ist die Konstruktion auf der Vorder- und Rückseite mit paarweise verbundenen, beweglichen vertikalen Leisten ausgestattet. Das Innere der Maschine gliedert sich durch insgesamt 16 nebeneinander angeordnete Leistenpaare (Jevons' fig. 1, fig. 3). An den nach außen weisenden Seiten der einzelnen Leisten auf der Vorderseite sind schmale Täfelchen angebracht. Aus Jevons' Beschreibungen geht hervor, dass die Täfelchen mit jeweils einer der (vertikal notierten) 16 möglichen Kombinationen von vier Problembestandteilen beschriftet sind. Je eine Leiste mit je einem Täfelchen entspricht also einer der Zeichenkombinationen: ABCD, ABC*d*, AB*c*D, AB*cd*, A*b*CD, A*b*C*d*, A*bc*D, A*bcd*, *a*BCD, *a*BC*d*, *a*B*c*D, *a*B*cd*, *ab*CD, *ab*C*d*, *abc*D, *abcd*. Im Ausgangszustand der Leisten liegen diese Beschriftungen hinter den horizontalen Schlitzen in der Verschalung im Bereich des Ausgabefelds. Die vertikal angeordneten Buchstaben der 16 nebeneinander angeordneten Kombinationen werden dann zwischen den Stegen in Zeilen sichtbar (Jevons' fig. 3, fig. 5).

Ein weiterer Längsschnitt zeigt, dass sich zwischen den Leistenpaaren mehrere Hebel befinden. Auf ihren Innenseiten sind die Leisten mit kleinen Stiften versehen, die die jeweiligen Angriffspositionen für die Hebel markieren (siehe auch das Verteilungsmuster der Stifte in Jevons' fig. 1). Für jede Taste A, B, C, D, *a*, *b*, *c*, *d* aus beiden Sets gibt es einen Hebel. Je einer der denselben Buchstaben zugeordneten Hebel greift auf der Vorderseite an, der andere auf der Rückseite (Jevons' fig. 2). Darüber hinaus sind Hebel erkennbar, die den Operationstasten der Eingabevorkehrung zugeordnet sind: Im oberen Teil greift auf der Rückseite ein Hebel für die Operation „Finis" und auf der Vorderseite ein Hebel für die Operation „Full stop" an. Unterhalb gibt es für Vorder- und Rückseite jeweils einen Hebel für die Operation „Conjunction" oder „Or". Im unteren Teil schließlich greift auf der Rückseite ein Hebel an, der durch die Operationstaste „Copula" in Gang gesetzt wird; auf der Vorderseite gibt es eine zweite Vorkehrung für die „Finis"-Operation.

Die Bearbeitung eines logischen Problems geschieht nun folgendermaßen. Gegeben seien die Prämissen:

(1) A ist B,
(2) B ist C.[108]

Die Tatsache, dass der Ausdruck „ist" hier scheinbar im Sinne des Zeichens = eine einfache Gleichsetzung der linken und der rechten Seite ausdrückt, sollte nicht darüber hinweg täuschen, dass ihm weiterhin eine prädikative Interpretation der

[108] Vgl. ebd., S. 505f. und 511f.

Copula zugrunde liegt. (Nicht ohne Grund trägt die Verbindungstaste der Maschine den Namen „Copula".) Die Prämissen bedeuten demnach:

(1) A ist AB,
(2) B ist BC.

Die verkürzte Darstellung ergibt sich daraus, dass die rechte Seite des Ausdrucks hier nicht das Ergebnis der Prädikation, also die Verbindung von Subjekt- und Prädikatbegriff bezeichnet, sondern die Operation der Maschine indiziert, die dafür notwendig ist, dieses Ergebnis zu produzieren.[109] Wie dies geschieht, wird im Folgenden beschrieben.[110]

Soll die Maschine die Aufgabe lösen, alle Schlüsse aufzulisten, die unter den genannten Prämissen zulässig sind, so müssen zunächst die Prämissen eingegeben werden. Maßgeblich ist, dass hierbei zwischen der Subjekt- und der Prädikatseite der Sätze zu unterscheiden ist. So wird z. B. in Prämisse (1) das Subjekt A auf der linken Seite des Gleichheitszeichens mit dem Prädikat B auf der rechten Seite verbunden. Die Tastatur der Logischen Maschine trägt dieser Unterscheidung Rechnung: Jedes Buchstabenzeichen tritt einmal links und einmal rechts von der „Copula"-Taste auf, da es je nach Problemstellung zur Indikation eines Subjektbegriffs oder eines Prädikatbegriffs zur Verfügung stehen muss (Jevons' fig. 4). Denn während die Tasten auf der Subjektseite der Tastatur die Hebel auf der Rückseite des Innengefüges der Maschine bewegen, wirkt sich die Betätigung der Tasten auf der Prädikatseite auf die Hebel an der Vorderseite aus.[111]

Um die erste Prämisse A=B einzugeben, wird zuerst die mit A markierte Taste auf der linken Hälfte der Tastatur gedrückt. Für jedes vertikale Leistenpaar wird dadurch der rückwärtige Hebel betätigt, der dem Problembestandteil A zugeordnet ist. Dabei bewegen sich alle diejenigen rückwärtigen Leisten nach oben, die im Angriffsbereich der A-Hebel mit einem Stift versehen sind. Da die rückwärtigen Leisten über die bewegliche Walze mit den Leisten auf der Vorderseite paarweise verbunden sind, bewegen sich die letzteren dadurch nach unten. Dementsprechend senken sich auch die Täfelchen auf den Außenseiten der vorderen Leisten ab. Die vertikal auf ihnen notierten Buchstabenkombinationen rutschen aus der Ausgangsposition nach unten. Die in den Schlitzen der Ausgabevorkehrung sichtbaren Buchstabenzeichen verändern sich dadurch in ihrer Gesamtkonstellation: All diejenigen

[109] Im Archiv des Oxford Museum of the History of Science befindet sich in der Akte für Korrespondenz betreffend den Transfer des Logischen Pianos aus dem Londoner Science Museum (file U) ein Schreiben aus dem Jahre 1988, in dem auf Grundlage dieser Beobachtung ebenfalls für die prädikative Interpretation der Jevons'schen Darstellung argumentiert wird (Dodd, Tony: A Note on Jevons's Logical Piano).

[110] Jevons' eigene Beschreibung der Eingabe findet sich in „Mechanical Performance", S. 511ff.

[111] Jevons' Darlegung der Funktionsweisen der einzelnen Operationstasten findet sich in „Mechanical Performance", S. 510ff. (Siehe dazu Jevons' figs. 6-12.)

Kombinationen, die ein a enthalten, bewegen sich in eine vorläufige Warteposition unterhalb der ursprünglichen. Die Subjekt-Taste A zu betätigen hat demnach die Konsequenz, vorläufig all das auszusortieren, was nicht A ist. Technisch wird diese Sortierung dadurch möglich, dass die Stifte in einem negativen Muster auf den Leisten verteilt sind: Das Vorhandensein eines Stifts im Angriffsradius eines A-Hebels indiziert, dass die Tafel der entsprechenden Leiste kein A (sondern ein a) enthält.

Mittels einer schematisierten grafischen Darstellung lässt sich der Arbeitsschritt folgendermaßen nachvollziehen. Das Ausgabefeld der Maschine ist durch drei Stege in vier Zeilen unterteilt. In der Ausgangsposition sind alle Kombinationen sichtbar:

Verschalung oberhalb der Ausgabe															
A	A	A	A	A	A	A	A	a	a	a	a	a	a	a	a
Erster Steg 1															
B	B	B	B	b	b	b	b	B	B	B	B	b	b	b	b
Zweiter Steg															
C	C	c	c	C	C	c	c	C	C	c	c	C	C	c	c
Dritter Steg															
D	d	D	d	D	d	D	d	D	d	D	d	D	d	D	d
Verschalung unterhalb der Ausgabe															

Werden nun die a-Kombinationen nach unten verschoben, so landen sie hinter den Stegen und sind im Ausgabefeld nicht mehr sichtbar:

A	A	A	A	A	A	A	A								
								a	a	a	a	a	a	a	a
B	B	B	B	b	b	b	b								
								B	B	B	B	b	b	b	b
C	C	c	c	C	C	c	c								
								C	C	c	c	C	C	c	c
D	d	D	d	D	d	D	d								
								D	d	D	d	D	d	D	d

Nun ist die Eingabe der Prämisse A=B fortzusetzen. Der Übergang von der Betrachtung des Subjekt- zu dem des Prädikatbegriffs wird bei der Eingabe durch Betätigung der Copula-Taste abgebildet. (Der Hebel, der durch diese Taste bewegt wird, greift auf der Rückseite der Konstruktion an. Die entsprechenden Stifte sind allerdings so verteilt, dass die Betätigung des Hebels nur dann eine Auswirkung hat, wenn sich Leisten auf der Vorderseite aus der Ursprungsposition nach oben und dadurch auf der Rückseite nach unten verschoben haben. Da dies im vorliegenden Fall nicht zutrifft, bleibt die Konstellation der sichtbaren Buchstabenzeichen zunächst unverändert.)

Im nächsten Schritt wird mittels der Tasten in der rechten Hälfte der Klaviatur der Prädikatbegriff eingegeben. In Prämisse (1) wird vom Subjekt A ausgesagt, dass es nicht nur A ist, sondern dass auch das Prädikat B auf es zutrifft. Alles Nicht-A wurde vorläufig aussortiert. Alle A enthaltenden Kombinationen müssen nun darauf hin untersucht werden, ob sie B enthalten. Entsprechend wird die Prädikattaste B gedrückt. Die Betätigung von Prädikattasten schlägt sich in der Bewegung von Hebeln nieder, die an den vorderen Leisten angreifen. Bei Eingabe des Prädikats B schwingen die B-Hebel aufwärts. Stoßen sie dabei auf den Widerstand eines Stiftes, so wird die entsprechende Leiste aufwärts geschoben. All diejenigen vorderen Leisten, die auf der Innenseite durch die Ausstattung mit einem Stift im Angriffsradius der B-Hebel versehen sind, werden negativ dahingehend ausgewiesen, dass ihre Beschriftung ein Nicht-B (also ein b) enthält. Samt den Leisten werden also alle Zeichenkombinationen, die ein b enthalten, auf der Vorderseite aus der Ursprungsposition nach oben bewegt, während sie auf der Rückseite dadurch absinken. (Sie befinden sich demnach nun in einer Position, in der die erneute Betätigung der „Copula"-Taste eine Auswirkung hätte.) Die Ausgabe auf der Vorderseite lässt sich nun so darstellen:

				A	A	A	A								
A	A	A	A												
				b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a
B	B	B	B												
				C	C	c	c	B	B	B	B	b	b	b	b
C	C	c	c												
				D	d	D	d	C	C	c	c	C	C	c	c
D	d	D	d												
								D	d	D	d	D	d	D	d

Sichtbar sind nun nur die Kombinationen, die in Prämisse (1) thematisch sind. Jedoch gibt es in den Wartepositionen auch Kombinationen, von denen Prämisse (1) zwar nicht handelt, die ihr aber auch nicht widersprechen. Bevor mit der Eingabe der zweiten Prämisse fortgefahren werden kann, muss der *status quo* der aktuell sichtbaren Zeichenkombinationen deswegen dahingehend bestätigt werden, dass die mit der ersten Prämisse unvereinbaren Verbindungen von denjenigen getrennt werden, die ihr nicht widersprechen, auch wenn sie unter Gesichtspunkten des affirmierten Subjektbegriffs irrelevant erscheinen. Dies geschieht, indem die Taste gedrückt wird, die mit den „Full stop“-Hebeln kommuniziert. Im Angriffsradius des Hebels befinden sich je zwei Stifte, so dass die Betätigung des Hebels je nach Position der Leiste eine andere Wirkung hat. Solange sich eine Leiste in der Ursprungsposition befindet, schwingt der „Full stop“-Hebel an beiden Stiften vorbei und hat keine Auswirkung. Wenn aber Leisten auf der Vorderseite nach unten verschoben wurden, greift er am oberen der beiden Stifte an: Die Leisten werden dadurch zurück in die Ausgangsposition verschoben. Wenn hingegen Leisten durch Betätigung von Prädikattasten auf der Rückseite abgesenkt wurden und sich daher auf der Vorderseite oberhalb der Ausgangsposition befinden, greift der „Full stop“-Hebel am unteren der beiden Stifte an. Er bewirkt dann, dass die entsprechenden Leisten noch ein kleines Stück weiter nach oben geschoben werden, so dass sie keiner weiteren Bearbeitung mehr zugänglich sind und somit aus der weiteren Betrachtung im Rahmen des gegebenen Problems ausgeschlossen werden.

(Es gibt demnach vier Positionen, in die die Buchstabenkombinationen während der Sortierung gebracht werden können. Die erste ist der Ausgangszustand. Zwei weitere stellen temporäre Ablagen für Kombinationen dar, die durch eine einzelne Prämisse vorläufig aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Die Betätigung der „Full stop“-Taste nach Eingabe der Prämisse bewirkt, dass diese Kombinationen wieder in den Ausgangszustand gebracht werden und damit bei Selektion gemäß der nächsten Prämisse berücksichtigt werden können. Die vierte Position schließlich ist die derjenigen Kombinationen, die endgültig ausgestrichen werden. Nur bei Durchführung der „Finis“-Operation können die ausgeschlossenen Leisten erreicht werden, um die Maschine zur Bearbeitung eines neuen Problems wieder in den Ausgangszustand zu bringen.)

Als Basis für eine weitere Selektion gemäß der zweiten Prämisse des Problems ergibt sich:

				A	A	A	A								
A	A	A	A					a	a	a	a	a	a	a	a
				b	b	b	b								
B	B	B	B					B	B	B	B	b	b	b	b
				C	C	c	c								
C	C	c	c					C	C	c	c	C	C	c	c
				D	d	D	d								
D	d	D	d					D	d	D	d	D	d	D	d

Bei der Eingabe der zweiten Prämisse verschwinden bei Betätigung der Subjekttaste B die *b*-Kombinationen auf der Vorderseite nach unten. Durch Drücken der Prädikattaste C werden die *c*-Kombinationen auf der Vorderseite nach oben geschoben:

		A	A	A	A	A	A			*a*	*a*				
A	A							*a*	*a*						
		B	B	*b*	*b*	*b*	*b*			B	B	*a*	*a*	*a*	*a*
B	B							B	B						
		c	*c*	C	C	*c*	*c*			*c*	*c*	*b*	*b*	*b*	*b*
C	C							C	C						
		D	*d*	D	*d*	D	*d*			D	*d*	C	C	*c*	*c*
D	*d*							D	*d*						
												D	*d*	D	*d*

Mit der abschließenden „Full stop“-Operation werden die nicht inkompatiblen Kombinationen wieder in die Ausgangsposition verschoben. Als Ergebnis angezeigt werden schließlich die Verbindungen ABCD, ABC*d*, *a*BCD, *a*BC*d*, *ab*CD, *ab*C*d*, *abc*D, *abcd*:[112]

		A	A	A	A	A	A			*a*	*a*				
A	A							*a*	*a*			*a*	*a*	*a*	*a*
		B	B	*b*	*b*	*b*	*b*			B	B				
B	B							B	B			*b*	*b*	*b*	*b*
		c	*c*	C	C	*c*	*c*			*c*	*c*				
C	C							C	C			C	C	*c*	*c*
		D	*d*	D	*d*	D	*d*			D	*d*				
D	*d*							D	*d*			D	*d*	D	*d*

Auf dieser Basis kann für jeden der beteiligten Problembestandteile ermittelt werden, in welchen Kombinationen mit den anderen Termen er unter den gegebenen Prämissen auftreten kann, indem die Eingabe auf der Subjektseite mit der entsprechenden Taste fortgesetzt wird. So z.B. für den Term A: Wird die Subjekttaste A gedrückt, so werden alle Kombinationen, die Nicht-A, also *a*, beinhalten, ausgeschlossen, und es bleiben ABCD, ABC*d*. Hieraus lässt sich ablesen, dass A unter den gegebenen Prämissen immer in Verbindung mit B und C auftritt. Da die Prämissen keinerlei Information über D enthalten, kann die so bestimmte Kombination

[112] Jevons, Mechanical Performance, S. 512; vgl. auch die Aufstellung für drei Terme S. 506.

ABC sowohl zusammen mit D als auch mit Nicht-D, also *d*, auftreten. Dasselbe Verfahren zur Bestimmung der Verbindungen lässt sich für jeden weiteren Term durchführen, nachdem durch Betätigung der „Full stop"-Taste die gesamte Menge der unter den gegebenen Prämissen zulässigen Kombinationen wiederhergestellt wurde. Ebenso lassen sich weitere Einschränkungen durch zusätzliche Prämissen bewirken. Wird z.B. die dritte Prämisse

(3) C ist D

nach dem oben beschriebenen Verfahren eingegeben, so resultiert der Ausschluss aller Kombinationen, die die Verbindung C*d* enthält. Übrig bleiben ABCD, *a*BCD, *ab*CD, *abc*D, *abcd*. A, B und C sind demnach D; B, C und D können A oder Nicht-A sein. D kann außerdem C oder Nicht-C, B oder Nicht-B sein; Nicht-D ist Nicht-A, Nicht-B und Nicht-C usw.[113]

4 Booles und Jevons' Verfahren im Vergleich

Jevons' Anspruch nach können auch kompliziertere Problemstellungen auf diese Weise für die Maschine aufbereitet und mit ihrer Hilfe gelöst werden. So unternimmt Jevons selbst den Versuch, eine von George Boole übernommene Problemstellung für die Logische Maschine aufzubereiten. Es handelt sich um den weiter oben bereits von Boole zitierten Komplex der drei Prämissen:

> (1) That wherever the properties A and B are combined, either the property C, or the property D, is present also; but they are not jointly present.
>
> (2) That wherever the properties B and C are combined, the properties A and D are either both present with them, or both absent.
>
> (3) That wherever the properties A and B are both absent, the properties C and D are both absent also; and *vice versâ*, where the properties C and D are both absent, A and B are both absent also.[114]

Die Eingabe in die Maschine erfolgt nach Jevons nun folgendermaßen:

(1) A, B, Copula, C, *d*, Conjunction, *c*, D, Full stop.
(2) B, C, Copula, A, D, Conjunction, *a*, *d*, Full stop.
(3) *a*, *b*, Copula, *c*, *d*, Full stop; *c*, *d*, Copula, *a*, *b*, Full stop.[115]

[113] Ebd., S. 513.
[114] Ebd., S. 515.
[115] Ebd.

Booles Darstellung der Prämissen hingegen nahm folgende Form an:

(1) $xy = v\{w(1-z) + z(1-w)\}$;
(2) $yz = v\{xw + (1-x)(1-w)\}$;
(3) $(1-x)(1-y) = (1-z)(1-w)$.

Nach Eingabe der Prämissen ergibt sich laut Jevons der Bestand: AB*c*D, A*b*CD, A*b*C*d*, A*bc*D, *a*BC*d*, *a*B*c*D, *abcd*. Booles ursprüngliche Problemstellung nun lautete: „Let it then be required from the above to determine what may be concluded in any particular instance from the presence of the property A with respect to the presence or absence of the properties B and C, paying no regard to the property D".[116] Jevons geht dementsprechend davon aus, dass untersucht werden soll, was sich aus den resultierenden Kombinationen für A ergibt. Dazu wird die Subjekt-Taste A gedrückt, so dass die letzten drei Verbindungen ausgeschlossen werden. Es bleiben: AB*c*D, A*b*CD, A*b*C*d*, A*bc*D.

Boole hingegen war zur Bestimmung der ersten der drei in den Prämissen genannten Eigenschaften x (statt Jevons' A) durch Eliminations- und Erweiterungsverfahren zu folgender Gleichung gekommen, in der $\bar{x}, \bar{y}$ (usw.) für $1-x$, $1-y$ (usw.) stehen, also für Jevons' a, b (usw.):

$$x = \frac{(cyz + c'\bar{y})(c'\bar{y} - c'\bar{z})}{(cyz + c'\bar{y})(c'\bar{y} - c'\bar{z}) - cyz}$$

Jevons interpretiert sein Zwischenergebnis AB*c*D, A*b*CD, A*b*C*d*, A*bc*D folgendermaßen: „Wherever the property A is present, there either C is present and B absent, or C is absent."[117] Laut Jevons entspricht dies genau der Bedeutung von Booles eigenem Ergebnis,[118] oder doch zumindest einem Teil von diesem. Booles Interpretation seines eigenen Ergebnis lautete: „Wherever the property A is present, there either C is present and B absent, or C is absent. And inversely, Wherever the property C is present, and the property B absent, there the property A is present."[119] Boole gewinnt dieses Ergebnis mittels Expansion des Funktionsausdrucks in der oben angegebenen Gleichung nach der zweiten und der dritten Eigenschaft, y und z (statt Jevons' B und C), und der Anwendung von Umformungsverfahren auf den resultierenden Ausdruck. Die eben zitierte Interpretation bezieht Boole schließlich auf das Ergebnis:

$$x = (1-y)z + \frac{0}{0}(1-z)$$

[116] Boole, *Laws of Thought*, S. 118.
[117] Jevons, Mechanical Performance, S. 516.
[118] Ebd.
[119] Boole, *Laws of Thought*, S. 119.

Jevons muss den Fall, dass Nicht-B und C auftreten, gesondert betrachten. Dazu werden die zuletzt ausgeschlossenen Kombinationen *a*BC*d*, *a*B*c*D, *abcd* wieder hergestellt und dann die Tasten b und C betätigt. Als Ergebnis führt Jevons an: A*b*CD, A*b*C*d* – der Ausdruck für den zweiten Teil von Booles Konklusion: „Wherever the property C is present, and the property B absent, there the property A is present.“[120]

Der Nachvollzug der Lösung des genannten Problems mit den (simulierten) Mitteln der Logischen Maschine samt schematischer Darstellung der einzelnen Schritte nun wäre ein Thema für einen weiteren Beitrag zur Auseinandersetzung mit der Geschichte der Logik in technischer Perspektive. Zu diskutieren wäre insbesondere die Funktionsweise der „Conjunction“-Taste zur Abbildung eines inklusiv verstandenen „Oder“, die in den obigen Ausführungen keine Berücksichtigung fand.

Darüber hinaus sollten sich auch Überlegungen dazu anstellen lassen, nach welchen weiteren Kriterien sich Booles und Jevons’ Methoden in vergleichender Perspektive hinsichtlich Effizienz, Leistungsfähigkeit und Fehleranfälligkeit beurteilen lassen. Vor diesem Hintergrund wäre die vorrangige Eignung der einen oder der anderen Methode hinsichtlich der Umsetzung der Venn’schen Grundidee der „method of occupation or non-occupation of compartments“ in bestimmten Problemklassen mit bis zu vier Termen zu begründen.

Mit Blick auf Venns Kriterium der weitestmöglichen symbolischen Generalisierung stellt sich weiterhin die Aufgabe einzuschätzen, ob und wie nicht nur in Booles Kalkül, sondern auch auf Basis des Funktionsprinzips der Logischen Maschine Probleme bearbeitet werden könnten, die mehr als vier Terme enthalten. Der Versuch der vergleichenden Behandlung eines Problems mit fünf oder mehr Termen könnte Anhaltspunkte zur Beantwortung der Frage nach der technischen Möglichkeit der Erweiterung des Funktionsprinzips von Jevons’ Logischer Maschine geben – und zu derjenigen, ob Jevons’ Verfahren seinem Anspruch gerecht wird, Booles allgemeine Form logischer Probleme für eine beliebige Anzahl von Termen übernehmen zu können.

5 Zusammenfassung

In einem der ersten frühen Beiträge zur Historiographie der formalen Logik unterscheidet John Venn dreierlei Auffassung der logischen Form von Sätzen sowie entsprechende Methoden des Umgangs mit logischen Problemen. Der erste der drei Formbegriffe ergibt sich in Venns Darstellung aus einer prädikativen Interpretation der Copula. Die zweite Auffassung logischer Form versteht die Copula

[120] Jevons, Mechanical Performance, S. 516.

als Ausdruck von Ein- bzw. Ausschlussbeziehungen zwischen Klassen. Das dritte und jüngste Verständnis logischer Form legt Venn dem Verfahrensgrundsatz einer „method of occupation or non-occupation of compartments“ zugrunde. In der Anwendung setzt diese bei einer Enumeration und systematischen Differenzierung der an der Formulierung eines logischen Problems beteiligten Terme an. Für jeden Term wird hier eine Fallunterscheidung nach Ein- bzw. Ausschluss jedes weiteren Terms vorgenommen. Die Lösung des Problems besteht darin herauszufinden, welche der resultierenden Verbindungen unter den gegebenen Prämissen zulässig sind. Dazu werden sukzessive diejenigen Verbindungen ausgestrichen, die von den gegebenen Prämissen ausgeschlossen werden.

Als paradigmatische Form dieses Ansatzes führt Venn George Booles algebraische Behandlung logischer Probleme an. Hier wird kraft der Integration von an der Mathematik geschulten Verfahren eine Möglichkeit gegeben, Lösungsverfahren für logische Probleme in eine symbolisch generalisierte Form zu überführen. Die zugrunde gelegte propositionale Form ist die einer Funktionsgleichung; der Ausdruck logischer Probleme erfolgt durch ein System solcher Gleichungen, seine Bearbeitung im Sinne der Anwendung eines Kalküls mit explizit formulierten Transformations- und Ersetzungsregeln.

Zumindest für eine begrenzte Anzahl von Problembestandteilen kann der Ansatz der „method of occupation or non-occupation of compartments“ auch auf eine Variante reduziert werden, die weder die Notation noch die Methoden aus der Mathematik benötigt. Eine solche Variante wird von William Stanley Jevons vorgebracht. Dessen Methodenverständnis verknüpft die Idee von Folgerungen aus Sätzen mit Subjekt-Prädikat-Struktur und Methoden der Ersetzung und Elimination von Termen kraft Gleichsetzung. Sein Verfahren kommt ohne einen Funktionsbegriff aus und macht keinen Gebrauch von Variablen im engeren Sinne. Noch zu Jevons' Lebzeiten wurde sein Ansatz in eine von ihm selbst entworfene „Logische Maschine“ implementiert. Die durch die Arbeitsweise der Maschine exemplifizierte Methode beruht auf der Idee einer Verkettung von systematischen Operationen der Klassifikation. Durchgeführt werden diese Operationen mittels Sortierung und Anordnung von schematischen Repräsentanten sämtlicher Kombinationen von Termen im Raum.

Mit Blick auf die Möglichkeit der symbolischen Generalisierung der Form logischer Probleme und der Techniken ihrer Behandlung stellt sich die Frage, ob und wie nicht nur in Booles Kalkül, sondern auch auf Basis des Funktionsprinzips der Logischen Maschine Probleme bearbeitet werden könnten, die mehr als vier Terme enthalten – eine Frage, die zumindest im Rahmen des vorliegenden Beitrags nicht beantwortet werden kann.

Zwischen Algebra und Erlanger Schule. Paul Lorenzens Beiträge zur Beweistheorie

Matthias Wille

Zusammenfassung In dem Aufsatz wird der Philosoph und Mathematiker Paul Lorenzen als Beweistheoretiker vorgestellt. Dies dient nicht nur dem Ziel, die Wissenschaftsbiographie des Mitbegründers des methodischen Konstruktivismus zu vervollständigen, sondern auch dem Anliegen, einen bis dato vernachlässigten Baustein für die Geschichte der Beweistheorie zu benennen. Daher werden seine Beiträge zur Beweistheorie systematisch vorgestellt, historisch eingeordnet und philosophisch reflektiert. Ausgehend von einer wissenschaftsbiographischen Einbettung seiner metamathematischen Tätigkeit wird ausgeführt, dass seine beweistheoretischen Arbeiten vor allem den Themenbereichen der Konsistenzbeweise, Finitheit sowie Prädikativität zugeordnet werden können. Seine diesbezüglichen Forschungsleistungen werden nachfolgend hinsichtlich ihres problemgeschichtlichen Ortes, ihrer systematischen Neuerungen und der Aussagekraft ihrer Resultate aufbereitet. Dies erfolgt eingebettet in eine kursorische Darstellung jener beweistheoretischen Entwicklungen, deren Kenntnisnahme für ein angemessenes Verständnis von Lorenzens Arbeiten geboten ist.

1 Einleitung

Versteht man das „zwischen“ im Titel dieses Beitrags in einem pedantischen Sinne, so widerfährt es einem, dass die in Aussicht gestellten Beiträge Paul Lorenzens zur Beweistheorie in ein nur sehr knapp bemessenes Zeitfenster fallen dürften – falls dieses überhaupt größer Null ist. Wie Christian Thiel[1] bereits angemerkt hat, endet die wissenschaftliche Biographie des Mathematikers Lorenzen weder mit dessen

[1] Ch. Thiel, „Paul Lorenzen“, 1.

Habilitation 1946 an der Universität Bonn noch mit seinem ersten Ruf auf eine ordentliche Professur für Philosophie an die Universität Kiel 1956. Vielmehr erstrecken sich die – im weitesten Sinne – algebraischen Arbeiten Lorenzens über einen Zeitraum von ca. zwei Jahrzehnten – beginnend mit der Veröffentlichung seiner Dissertationsresultate 1939.[2] Die Phase der Algebra erstreckt sich also fast bis auf das Jahr 1960. Nun kann im Fall der Erlanger Schule zwar kein genaues Geburtsdatum benannt werden, allerdings reicht der Kontakt zwischen Lorenzen und Wilhelm Kamlah bis in die Anfänge der 1950er Jahre zurück[3], verdichtet sich über eben dieses Jahrzehnt stetig und spätestens mit dem gemeinsam gefassten Entschluss 1961, mit einem philosophischen Programm der „babylonischen Sprachverwirrung"[4] entgegenzutreten, kann der Keim der späteren Erlanger Schule ausgezeichnet werden.[5] Wir bewegen uns also wiederum um das Jahr 1960.

Sofern im Folgenden dennoch die 1950er Jahre als jene Dekade gekennzeichnet werden, die, „zwischen Algebra und Erlanger Schule" liegend, Lorenzens Beiträge zur Beweistheorie zeitlich zu verorten hilft, so ist dies bereits Resultat einer kritischen Rekonstruktion des wissenschaftlichen Werdegangs Paul Lorenzens: Ausgehend von vornehmlich rein innermathematischen Forschungsschwerpunkten reflektiert Lorenzen – nicht zuletzt bedingt durch seinen engen Kontakt mit Oskar Becker – immer häufiger auf die Geltungs- und Sinnbedingungen der Mathematik, die ihn bereits früh zu der begründeten Einsicht kommen lassen:

> Mit geeigneten Axiomen läßt sich nun zwar alles beweisen, aber nichts begründen.[6]

Wann und gegebenenfalls durch wen Lorenzen mit beweistheoretischen Fragen enger in Kontakt kam, entzieht sich meiner Kenntnis.[7] Aber spätestens zum Ende seines Studiums (um 1938) hatte er eine gute Gelegenheit, um sich von der Leistungsstärke der (damals) noch jungen Disziplin überzeugen zu können. Wie er in einem Brief an Carl Friedrich Gethmann berichtet,[8] ergab sich noch zur Göttinger Zeit die Gelegenheit, um einen Vortrag Gerhard Gentzens über den Nachweis

[2] P. Lorenzen, „Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie".
[3] Biographische Äußerung Kamlahs in: C. F. Gethmann, „Phänomenologie, Lebensphilosophie und Konstruktive Wissenschaftstheorie", 74.
[4] W. Kamlah/P. Lorenzen, *Logische Propädeutik*, 13.
[5] M. Wille, „Die Disziplinierung des Denkens", 160ff.
[6] P. Lorenzen, „Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis", 1.
[7] Mir gefällt allerdings der Gedanke, dass 1936 ein engagierter 21jähriger Mathematikstudent aus Kiel an seiner neuen Alma mater in Göttingen die Bibliothek nach Werken des seinerzeit größten und ebendort lebenden Mathematikers durchstöbert und dabei fasziniert in der fast noch druckfrischen Monographie *Grundlagen der Mathematik I* eines gewissen David Hilbert liest…
[8] C. F. Gethmann, „Phänomenologie, Lebensphilosophie und Konstruktive Wissenschaftstheorie", 76.

der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik erster Stufe beizuwohnen. Die von Gentzen bei diesem Anlass sicherlich gemachten Äußerungen zum finit-konstruktiven geltungstheoretischen Rahmen seiner beweistheoretischen Untersuchungen dürften ebenfalls einen prägenden Eindruck bei Lorenzen für dessen spätere mathematik-philosophische Grundeinstellung hinterlassen haben.[9]

Gerne würde ich an dieser Stelle noch etwas Substantielles über die persönlichen Kontakte Lorenzens zu anderen namhaften Beweistheoretikern berichten. Sicher ist, dass man sich gut kannte und dass Lorenzen kein Außenstehender war, sondern inhaltlich wie auch sozial mit zur „community" gehörte. Bereits 1940 schreibt die bekannte Rekursionstheoretikerin Rózsa Péter eine kurze Besprechung[10] zu einer der ersten Veröffentlichungen[11] des damals 25jährigen Assistenten Wolfgang Krulls, was sicherlich zu einer ersten weiteren Verbreitung des Namens geführt haben dürfte. Unmittelbar nach Veröffentlichung von Lorenzens Widerspruchsfreiheitsbeweis für die verzweigte Typentheorie bespricht Hao Wang[12] noch 1951 den Beweis ausführlich für die Fachwelt und kein Geringerer als Thoralf Skolem verfasst eine der ersten Rezensionen zur *Einführung in die operative Logik und Mathematik.*[13] Es ist ebenfalls Hao Wang, der bereits Anfang und Mitte der 1950er Jahre im Rahmen der Entwicklung seiner eigenen Überlegungen zu prädikativen Systemen der Analysis immer wieder auf Lorenzens konstruktive Begründung der Mathematik Bezug nimmt und vor allem die Gemeinsamkeit beider Vorgehensweisen herausstellt.[14] Während Hermann Weyl Lorenzens operatives Begründungsprogramm mit besonderem Lob versieht,[15] waren auch Kurt Gödel ab den 1950er Jahren einzelne Arbeiten von ihm bestens bekannt.[16] Da die Wissenschaftsgemeinschaft der Beweistheoretiker in den 1950er und 1960er Jahren von überschaubarer Größe war und auf den Teilnehmerlisten der einschlägigen Fachtagungen und Kolloquien immer wieder dieselben Namen zu finden sind, liegt natürlich die Vermutung nahe, dass zumindest durch eben diese Anlässe eine Vielzahl von persönlichen Kontakten zustande gekommen sind.

Im akademischen Jahr 1957/58 war Lorenzen zudem Mitglied der *School of Mathematics* des *Institute for Advanced Study* (IAS) in Princeton, das traditionsge-

[9] Siehe M. Wille, „Dem Unendlichen einen finiten Sinn beilegen" sowie *Beweis und Reflexion*, 127ff.

[10] R. Péter, „P. LORENZEN. Die Definition durch vollständige Induktion".

[11] P. Lorenzen, „Die Definition durch vollständige Induktion".

[12] H. Wang, „PAUL LORENZEN. Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände".

[13] Th. Skolem, „PAUL LORENZEN. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*".

[14] So etwa in: H. Wang, „The Formalization of Mathematics", 248f.

[15] H. Weyl, „Nachtrag Juni 1955", 180.

[16] Vgl. etwa den Brief an John von Neumann vom 20.3.1956 (in: K. Gödel, *Collected Works. V*, 376.) und den Brief an Paul Bernays vom 12.1.1975 (in: K. Gödel, *Collected Works. IV*, 308.).

mäß viele Beweistheoretiker anzog. Ob er während dieser Zeit Gödel persönlich traf, der bereits seit 1946 dauerhaftes Mitglied und ab 1953 Professor am IAS war, vermag ich nicht zu beantworten. Allerdings war Lorenzens Schwerpunktausrichtung während seines Forschungsaufenthalts klar beweistheoretischer Natur. So arbeitete er unter anderem mit John Myhill zusammen an erweiterten Anwendungsmöglichkeiten der Kleene-Post-Definition der rekursiven Aufzählbarkeit für hyperarithmetische Mengen[17] – ein Themenkomplex, der seinerzeit Hochkonjunktur hatte. Bereits Anfang/Mitte der 1940er Jahre hatten Stephen Cole Kleene und Andrzej Mostowski ausgehend von den rekursiven Prädikaten eine abzählbare Folge von Klassen von Prädikaten eingeführt, deren Vereinigung die Klasse aller arithmetischen Prädikate liefert („Kleene-Mostowski-Hierarchie“). Die so definierbaren Mengen wurden ca. ab Ende der 1950er Jahre nicht nur im Zusammenhang der prädikativen Definierbarkeit benötigt (als Darstellungsmittel für prädikative Mengenuniversen), sondern ausgehend von dieser Hierarchie führten fast zeitgleich zu Lorenzens und Myhills Untersuchungen John Addison[18] und wiederum Mostowski[19] ein Beschreibungsmittel ein, dessen Effizienz und Präzision sich nachhaltig als großer Fortschritt in der Beweistheorie erweisen sollte: die eindeutige Charakterisierung von Quantorenpräfixen über die Π/Σ-Notation.

Belegt ist im Besonderen,[20] dass Lorenzen in einem engeren wissenschaftlichen Gedankenaustausch unter anderem mit Paul Bernays, Georg Kreisel und Kurt Schütte stand, die er allesamt sehr schätzte. Wann genau die Kontakte oder doch zumindest die von beiden Seiten ausgehenden Kenntnisnahmen entstanden sind, kann ich für den Augenblick nicht exakt dokumentieren. Es seien aber Anhaltspunkte benannt, die bereits frühe wechselseitige Wahrnehmungen dokumentieren. So nehmen Paul Bernays und Lorenzen 1950 beide am Symposium „Philosophische Grundfragen der Logistik“ (auf dem *Dritten Deutschen Kongreß für Philosophie* in Bremen) teil. Darüber hinaus rezensiert Bernays[21] bereits 1951/52 Lorenzens „Über endliche

[17] P. Lorenzen/J. Myhill, „Constructive Definition of Certain Analytic Sets of Numbers“.

[18] J. Addison, „Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory“.

[19] A. Mostowski, „On various Degrees of Constructivism“.

[20] Ich danke Herrn Prof. Thiel, der mir unter anderem mit Bezug auf die in Erlangen verfügbaren Briefe von und an Bernays, Kreisel und Schütte die vermuteten engeren Kontakte bestätigen konnte. Im Einzelnen konnte Herr Thiel verifizieren: fünf Briefe von Bernays und vier an ihn (Zeitraum: 1960-1977), zehn Briefe von Kreisel und einer an ihn (Zeitraum: 1959-1962), 15 Briefe von Schütte und sechs an ihn (Zeitraum: 1958-1974). Zudem ist ein Gutachten von Lorenzen über Schütte vom 11.5.1962 erhalten, in dem Lorenzen Schütte für die Besetzung einer Professur an der Universität Kiel (seiner Nachfolge?) empfiehlt. Zur Auswahl stand neben Schütte nach Auskunft von Herrn Thiel noch Wolfgang Stegmüller. (Schütte erhielt die Stelle.) Bemerkenswert an diesem Gutachten ist vor allem die darin enthaltene Selbstauskunft, dass sich Lorenzen ebenfalls zu den Schülern Hilberts (sic!) zählt.

[21] P. Bernays, „PAUL LORENZEN. Über endliche Mengen“.

Mengen",[22] während Georg Kreisel 1952 an der Diskussion zu Lorenzens Vortrag „Die Rolle der Logik in der Grundlagenkrisis der Analysis"[23] partizipiert. Anfang der 1950er Jahre untersuchen Lorenzen und Kurt Schütte beide die verzweigte Analysis und während Lorenzen einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für dieses typentheoretische System gibt,[24] bestimmt Schütte unter expliziter Bezugnahme auf Lorenzen[25] deren beweistheoretische Ordinalzahl, womit ihm ebenfalls ein relativer Konsistenzbeweis mit beweistheoretischen Mitteln gelingt. Zudem erscheinen 1953/54 im Ganzen vier Rezensionen von Schütte im *Journal of Symbolic Logic* zu Arbeiten Lorenzens.[26] Manifest wird der engere Kontakt zu Schütte nicht zuletzt durch die *Deutsche Vereinigung für Mathematische Logik und für Grundlagen der Exakten Wissenschaften*, die von beiden 1962 mitbegründet wurde. Schließlich steuern Bernays,[27] Solomon Feferman[28] sowie Kreisel[29] Beiträge für die Festschrift *Konstruktionen versus Positionen* (erschienen 1979) anlässlich von Lorenzens 60. Geburtstag im Jahr 1975 bei, womit wohl davon ausgegangen werden darf, dass über die hier präsentierten (mageren) Eckdaten hinaus gehaltvollere wissenschaftsbiographische Informationen (zumindest bis Ende der 1970er Jahre) auffind- und verifizierbar sein sollten.

2 Klassifikation der Beiträge

Lorenzen stellt von Anfang an einen gehalt- und damit anspruchsvollen Begründungsbegriff in den Mittelpunkt seiner Philosophie – zuerst allein, wo es um die Fragen der methodischen Begründung einer prädikativen Mathematik auf operativer Grundlage wie auch um das Begründungsproblem der Logik geht und später zusammen mit Wilhelm Kamlah, als aus der Wissenschaftstheorie der beweisenden Wissenschaften eine allgemeine Wissenschaftstheorie entsteht, die bis in die Ethik und die politische Philosophie hineinreichen sollte (wenngleich die Auffassungen von Kamlah und Lorenzen in Bezug auf die praktische Philosophie wieder divergieren sollten). Der Mathematiker Lorenzen findet seinen Weg in die

[22] P. Lorenzen, „Über endliche Mengen".
[23] P. Lorenzen, „Die Rolle der Logik in der Grundlagenkrisis der Analysis".
[24] P. Lorenzen, „Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände".
[25] K. Schütte, „Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis", 124.
[26] K. Schütte, „PAUL LORENZEN. Gleichheit und Ungleichheit in der Arithmetik". Ders., „PAUL LORENZEN. Konstruktive Begründung der Mathematik". Ders., „PAUL LORENZEN. Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis". Ders., „PAUL LORENZEN. Über das Prinzip "ex falso quodlibet"".
[27] P. Bernays, „Bemerkungen zu LORENZEN'S Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik".
[28] S. Feferman, „A more Perspicuous Formal System for Predicativity".
[29] G. Kreisel, „Formal Rules and Questions of Justifying Mathematical Practice".

methodisch-konstruktive Philosophie über das biographische Bindeglied der Wissenschaftstheorie der Mathematik und Logik oder besser: Es ist diese spezielle Wissenschaftstheorie, die einen Ausgangspunkt für den methodischen Konstruktivismus bildet. Insofern die 1950er Jahre jenes Jahrzehnt repräsentieren, in dem aus der Programmatik einer ehrgeizigen Mathematikbegründung, die Lorenzen selbst erst um 1950 klar vor Augen hatte,[30] ein elaboriertes, in vielen Details vollständig entfaltetes Begründungsprogramm wurde, überrascht es wenig, dass er in eben diesen Jahren auch immer wieder kleinere Exkurse zu Problemen vollzog, die angestammtermaßen eher der Beweistheorie als der Mathematikphilosophie zuzurechnen sind.

Da die damit gekennzeichneten Arbeiten keine Namensschilder mitführen, ist es zumindest nicht selbsterklärend, welche Veröffentlichungen eher beweistheoretischer und weniger begründungstheoretischer Natur sind. Immerhin gibt es eine hinreichend große Grauzone und vor allem gibt es prominente Fragen, zu denen sowohl die Beweistheorie als auch die Mathematikphilosophie gleichermaßen Auskunft erteilen können. So stellt selbst Lorenzen fest, dass es zwei Wege gibt, der klassischen Analysis eine Begründung zu geben:[31] begründungstheoretisch über den Aufbau eines prädikativen Systems oder der Nachweis der Widerspruchsfreiheit der imprädikativen Fassung als einem genuinen Aufgabenbereich der Beweistheorie. Charakteristisch für letztere ist hierbei ihr Status als Reflexionsdisziplin zweiter Ordnung, in der nicht nur die Mathematik (über adäquate Formalisierungen) zum Gegenstand der geltungstheoretischen Untersuchungen gemacht wird, sondern hierfür ein konstitutiver Bestand an philosophischen Mitteln erforderlich ist, der das beweisbasierte philosophische Argumentieren allererst ermöglicht.[32] Die philosophische Legitimation der Verwendung von Ordinalbezeichnungssystemen gehört ebenso in diesen Bereich wie die geltungstheoretische Rechtfertigung von (zum Teil artifiziellen) formalen Systemen zur Etablierung von beweistheoretischen Reduktionen, Minimalitätsaussagen, Konservativitäts- und relativen Widerspruchsfreiheitsresultaten. Der entscheidende Unterschied zwischen der Mathematikphilosophie und der Beweistheorie besteht also nicht darin, dass letztere ohne wissenschafts- und erkenntnistheoretische Mittel auskäme. Ganz im Gegenteil. Das differenzierende Merkmal besteht vielmehr darin, dass innerhalb der beweistheoretischen Begründungspraxen – und im Unterschied zur Mathematikphilosophie – auf die Etablierung epistemologisch aussagekräftiger formaler Resultate hingearbeitet wird, welche die Beweisbasiertheit allererst sicherstellen. Während die Mathematik als kalkülimmanente Handlungspraxis zur Erzeugung synthetisch-apriorischer Aussagen

[30] So Lorenzen gegenüber C. F. Gethmann in: C. F. Gethmann, „Phänomenologie, Lebensphilosophie und Konstruktive Wissenschaftstheorie“, 76.
[31] P. Lorenzen, *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*, 161.
[32] Ausführlich in: M. Wille, *Beweis und Reflexion*, besonders Kap. 2.

eine *beweisende* Wissenschaft ist[33] und die Mathematikphilosophie als geltungstheoretische Metainstanz hierzu eine Reflexionsdisziplin repräsentiert, erweist sich die Beweistheorie als eine beweisende Reflexionsdisziplin und etabliert damit ein eigenständiges Wissenschaftsideal.

Durchstreift man Lorenzens Veröffentlichungen in dem besagten Jahrzehnt, so stößt man im Besonderen auf drei beweistheoretische Themen, zu denen er beigetragen hat:

i) relative Widerspruchsfreiheitsbeweise für Subsysteme der klassischen Analysis,

ii) die Frage nach philosophisch zulässigen Erweiterungen des „finiten Standpunkts“ und

iii) Untersuchungen, die im Zusammenhang der Bereitstellung prädikativer Systeme stehen.

Die Komposition dieser ineinander verwobenen Topoi überrascht nicht gänzlich, denn jeder einzelne Komplex kann an begründungstheoretische Fragen angebunden werden, die Lorenzen noch bis in seine letzten einschlägigen Veröffentlichungen hinein bewegt haben.[34] So repräsentiert etwa iii) das formale Pendant zu Lorenzens prädikativer Mathematikbegründung. die von Seiten der Beweistheoretiker zwar stets als substantiell und philosophisch attraktiv beurteilt wurde, der aber ebenso gewisse Unterbestimmtheiten in den geltungstheoretischen Grundbegriffen (im Besonderen eben des Prädikativitäts- und Konstruktivitätsbegriffs) nachgesagt wurden.[35] Allerdings formuliert man keine zu gewagte These, wenn man konstatiert, dass Lorenzens prädikatives Begründungsprogramm auch entscheidenden Einfluss auf korrespondierende beweistheoretische Entwicklungen genommen hat. Es ist keineswegs ein Zufall, dass neue Schwerpunktausrichtungen wie jene der prädikativen Definier- und Beweisbarkeit oder der prädikativen Zurückführbarkeit (als Spielweisen des relativierten Hilbertprogramms) in jener Zeit aufkommen (Mitte der 1960er Jahre), in der die prädikativen Systeme von Lorenzen sowie jene von Hao Wang weitläufig diskutiert wurden. Dabei war noch Ende der 1950er und Anfang der 1960er Jahre die Verlegenheit in der Verwendung des Ausdrucks „prädikativ“ wesentlich dieselbe wie jene von „finit“. Ex negativo konnten die Begriffe hinreichend gut abgegrenzt werden, aber in der positiven Bedeutungsbestimmung gab es immer wieder Vagheiten, die auch mit Bezugnahme auf die investierten Systeme häufig genug nicht restlos ausgeräumt werden konnten. Indem prädikative Definitions- und Beweismittel darüber charakterisiert wurden, dass sie nicht

[33] M. Wille, *Die Mathematik und das synthetische Apriori*, 69.
[34] Siehe etwa P. Lorenzen, „Konstruktive Philosophie der Mathematik“.
[35] So etwa S. Feferman, „Systems of predicative analysis“, 12.

imprädikativ verfahren, so war damit erst einmal nur gesagt, dass es verboten ist, auf einen Gegenstand Bezug zu nehmen, wenn die Referenz nur über eine aktual unendliche Gesamtheit zustande kommen kann, der der betroffene Gegenstand notwendigerweise angehört. Mit dieser Form der Charakterisierung, die zwar notwendig, aber eben noch nicht hinreichend für einen präzisen Prädikativitätsbegriff ist, bewegt man sich vorerst unbestimmt in dem dadurch aufgespannten Raum möglicher Prädikativitätsbegriffe und durch die Explikationsbemühungen in den 1960er Jahren verhalf man einer Diversität von Prädikativitätsverständnissen ausgehend von der Bernaysschen Feststellung

> Il sera bon de préciser d'abord ce qu'il semble convenable d'entendre par imprédicativité. (En effet: imprédicativité c'est le caractère positif, pendant que prédicativité est l'absence de procédures imprédicatives)[(*)]. [[(*)] Ici le concept n'est que faiblement précisé [...].][36]

zur beweistheoretischen Wirklichkeit. Auch wenn Hao Wang mit einem liebevollen Unterton feststellt, dass Lorenzen nur selten der Sinn nach vollständigen Formalisierungen seiner prädikativen Systeme stand,[37] so stand außer Frage, dass seine Analysis in einem gehaltvollen Sinne „prädikativ" ist. Schließlich sind formale Systeme nicht selbsterklärend und eine darüber hinausgehende philosophische Rechtfertigung des prädikativen Charakters ist gleichermaßen erforderlich – ob es sich nun um ein artifizielles System handelt oder um eine bloß informelle Beschreibung. Da beweistheoretisch allerdings nur ordentlich formalisierte Systeme untersucht werden können, ist nachvollziehbar, warum Lorenzens Analysis mehr eine Referenzgröße für die philosophische Beurteilung in der Beweistheorie bildete und weniger auch den Gegenstand der Untersuchung. Mit dem sukzessiven Ausbau der prädikativen Definitionsmittel Anfang und Mitte der 1960er Jahre konnten die Ausdrucks- und Beweismöglichkeiten prädikativer Systeme (zum Teil auf semikonstruktiver Grundlage[38]) deutlich erweitert werden und ermöglichten schließlich durch die Rechtfertigung von Systemen basierend etwa auf der hyperarithmetischen Komprehension (Δ_1-Analysis) die Bereitstellung einer äußerst reichhaltigen prädikativen Mathematik.

[36] P. Bernays, „Remarques sur l'imprédicativité", 121.

[37] H. Wang, „The Formalization of Mathematics", 249. Eine Ausnahme in diesem Punkt dürfte Lorenzens Referat „A formal system of predicative analysis" auf dem Mathematikerkongress 1958 in Edinburgh bilden.

[38] Da die Bezugnahme auf aktual-unendliche Gesamtheiten zwar eine notwendige, aber noch keine hinreichende Bedingung für imprädikative Begriffsbildungen bildet, gibt es nicht wenige Prädikativitätsverständnisse, die mit Bezug auf aufgezeichnete Gegenstandsbereiche ein aktual-unendliches Verständnis investieren. Da diese Gebrauchsweisen von Prädikativität aufgrund des aktual Unendlichen nicht mehr konstruktiv gedeutet werden können, allerdings Imprädikativität dennoch nicht droht, bezeichnet man sie häufig als „semi-konstruktiv".

Auf die Punkte i) und ii) kommen wir in den Abschnitten 4 und 5 zu sprechen.

3 Beweistheorie in den 50er Jahren – eine Auswahl

Bevor wir uns einzelnen Beiträgen Lorenzens etwas ausführlicher zuwenden, sollte vorab ein wenig die Situation der Beweistheorie in der Zeit „zwischen Algebra und Erlanger Schule“ beschrieben werden. Das ist schon deshalb geboten, weil die erzählte Wissenschaftsgeschichte der Beweistheorie viel zu häufig schon in den 1930er Jahren abbricht und so tut, als ob die nachfolgenden Entwicklungen ad hoc geprägte Modifikationen von Hilberts Programm wären oder marginale Fußnoten zu Gödels Unvollständigkeitstheoremen.[39] Darüber hinaus ist eine Bezugnahme in Auswahl erforderlich, um würdigen zu können, worin die Leistungen Lorenzens für die Beweistheorie bestehen.

„Translation to Consistency“

Mit Gödels Übersetzung der klassischen Arithmetik in die intuitionistische Zahlentheorie Arend Heytings[40] oder Gentzens Konsistenzbeweis für die Arithmetik erster Stufe (mittels primitiv-rekursiver Arithmetik und transfiniter Induktion bis ε_0)[41] gab es zwar bereits Paradebeispiele für relative Widerspruchsfreiheitsbeweise, die nicht mit modell-, sondern mit beweistheoretischen Mitteln geführt wurden, allerdings waren um 1950 allgemeine theoretische Ergebnisse diesbezüglich immer noch Mangelware. Dies änderte sich als unter anderem Hao Wang und schließlich auch Georg Kreisel Kriterien für Übersetzungsfunktionen bestimmten, um allgemeine Bedingungen für relative Widerspruchsfreiheitsbeweise zu etablieren. Zwar gibt es bis heute keine einheitliche Auffassung darüber, welcher Bedingungskatalog notwendig *und* hinreichend für eine Übersetzung zwischen zwei formalen Systemen S und T ist, aber die Erfordernisse für relative Interpretationen gehörten damals wie heute mit dazu. So muss eine rekursive Übersetzungsfunktion f im Besonderen folgende Bedingungen erfüllen:

[39] Vgl. M. Wille, *Beweis und Reflexion*, Kap. 1.

[40] G. Gödel, „Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie“. Wesentlich zeitgleich erlangte Gentzen dasselbe Resultat. Seinen bereits im Druck befindlichen Aufsatz zog er allerdings zurück, nachdem er von Gödels Veröffentlichung erfuhr.

[41] G. Gentzen, „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“.

j)	$f\colon \mathfrak{L}_S \to \mathfrak{L}_T$	(f ist eine effektive Abbildung, die jede $\mathfrak{L}_S$-Formel mit ihrer Interpretation als einer $\mathfrak{L}_T$-Formel verknüpft)
jj)	$S \models \varphi \;\Rightarrow T \models f(\varphi)$	und
jjj)	$f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$	für jede $\mathfrak{L}_S$-Formel φ

Hao Wang entwickelte bereits 1951 ausgehend von diesen Minimalbedingungen einen differenzierten Kriterienkatalog,[42] mittels dessen für komparative Betrachtungen von formalen Systemen T_1 und T_2 gezeigt werden konnte, dass, wenn T_1 in T_2 entsprechend übersetzbar ist, dann bereits $PA \models \mathrm{Con}(T_2) \to \mathrm{Con}(T_1)$ gilt.

„Henkin's Problem" und die Kanonische Fassung der Ableitbarkeitsbedingungen[43]

1952 formulierte Leon Henkin[44] die Frage, ob eine Formel, die ihre eigene Beweisbarkeit (in einem formalen System T) zum Ausdruck bringt, in T auch beweisbar oder von diesem unabhängig ist. Da Gödel[45] für den Beweis seines ersten Unvollständigkeitstheorems über die Arithmetisierung der Sprache eine Formel konstruierte, die ihre eigene Unbeweisbarkeit (in einem im arithmetischen Teil unvollständigen System T) zum Ausdruck bringt, die unter Voraussetzung der Konsistenz von T in T weder bewiesen noch widerlegt werden kann, war es nur naheliegend, eine analoge Frage für eine entsprechende Beweisbarkeitsbehauptung zu stellen. Während Georg Kreisel[46] 1953 umgehend anmerkte, dass die Antwort vom Verständnis dessen abhängt, was „expresses provability" formal genau bedeuten soll, präzisierte Martin Hugo Löb 1955 die Frage und gab schließlich eine positive Antwort. Bedeutsamer als die Antwort auf Henkin's Problem (die sich schließlich als ein Lemma erweisen sollte) sind in dieser Arbeit allerdings *Löb's Theorem* wie auch die kanonische Fassung der Ableitbarkeitsbedingungen für „bew_T" („$\pi(\phi)$" vertritt die entsprechende Gödelzahl von ϕ):

(D_1) $T \models \phi$ impliziert $S \models bew_T(\pi(\phi))$

(D_2) $S \models bew_T(\pi(\phi)) \to S \models bew_T(bew_T(\pi(\phi)))$

(D_3) $S \models bew_T(\pi(\phi)) \wedge bew_T(\pi(\phi \to \Psi)) \to bew_T(\pi(\Psi))$

[42] H. Wang, „Arithmetic Translations of Axiom Systems", 284.

[43] Vgl. C. Smorynski, „The Development of Self-Reference". M. Wille, *Beweis und Reflexion*, 187f. und 205f.

[44] L. Henkin, „A problem concerning provability".

[45] K. Gödel, „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme".

[46] G. Kreisel, „On a problem of Henkin's".

Zwar hatte Paul Bernays[47] bereits 1939 zur ersten vollständigen Herleitung von Gödels zweitem Unvollständigkeitstheorem Ableitbarkeitsbedingungen für „bew_T" formuliert, allerdings waren diese noch wenig elegant und zudem maßgeschneidert für die dort verfolgten Ziele, d.h. die weitaus allgemeinere Frage nach einer angemessenen formalen Normierung der einschlägigen semantischen Merkmale des Beweisbegriffs standen nicht im Vordergrund. Letztere – repräsentiert durch Bedeutungspostulate wie (D_1)-(D_3) – sind indes zwingend erforderlich, sofern Beweisbarkeitsbehauptungen formale Systeme betreffend ihrerseits formal untersucht werden sollen. Andernfalls würde man einem semantisch vollständig unterbestimmten Prädikatausdruck mit dem Kürzel „bew_T" lediglich den Namen „Beweisprädikat" geben. Löbs Normierung ebnete damit all jenen beweistheoretischen Entwicklungen den Weg, in denen Formeln der Form „$\text{non-bew}_T(\pi(0{=}1))$" eine Rolle spielen sollten.

Grundlagen für „Kreisel's Hauptkonservativitätstheorem"[48]

Eines der wichtigsten, aber in der weiteren beweistheoretisch interessierten Öffentlichkeit weitgehend unbekannten theoretischen Ergebnisse der Beweistheorie ist *Kreisel's Hauptkonservativitätstheorem*:

(K_{CT}) Für alle Π_1-Formeln ϕ gilt: $T \vDash \phi \Rightarrow S{+}\text{Con}(T) \vDash \phi$
(S umfasst mindestens die *PRA* und ist via Einbettung oder Interpretation in T enthalten)

Die Grundlagen hierfür legte Kreisel bereits 1958,[49] während weiterführende intermediäre Schritte 1968[50] und 1976[51] vollzogen wurden. Dieses Ergebnis stützt im Besonderen die Praxis der reduktiven Beweistheorie, in der primitiv-rekursive Beweistransformationen zwischen unterschiedlich voraussetzungsreichen formalen Systemen vollzogen werden, die als gemeinsamen Bestand mindestens die primitiv-rekursive Arithmetik (*PRA*) umfassen.[52] Lässt sich im Besonderen jeder Beweis für eine Gleichung mit geschlossenen Termen (wie etwa 1=1 oder 0=1) im voraussetzungsreicheren System T_1 in einen Beweis derselben Gleichung in T_2 trans-

[47] D. Hilbert/P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik II*, 295.

[48] Vgl. C. Smorynski, „The incompleteness theorems", 858ff. M. Wille, *Beweis und Reflexion*, 207ff.

[49] G. Kreisel, „Relative consistency and translatability" und „Relative consistency proofs".

[50] G. Kreisel, „A Survey of Proof Theory", 365.

[51] G. Kreisel, „Relative consistency proofs. II".

[52] Die besten Darstellungen dieses umfangreichen beweistheoretischen Programms sowie seine problemgeschichtliche Einbettung findet der Leser in den Arbeiten von Solomon Feferman. Vgl. vor allem S. Feferman, „Hilbert's program relativized" und „Does reductive proof theory have a viable rationale?". Siehe zudem M. Wille, *Beweis und Reflexion*, Kap. 6.

formieren und ist dieser Sachverhalt in T_2 selbst beweisbar, so gilt neben dem entsprechenden Konservativitätstheorem vor allem

(#) $\quad T_2 \vDash \mathrm{Con}(T_2) \rightarrow \mathrm{Con}(T_1)$,

d.h. die relative Widerspruchsfreiheitsaussage bezüglich T_1 kann in jedem Fall mit den Mitteln des voraussetzungsärmeren Systems T_2 bewiesen werden. $\mathrm{K_{CT}}$ besagt nun sogar, dass beweistheoretische Zurückführungen eines formalen Systems T_1 auf ein voraussetzungsärmeres T_2 (unter den gegebenen Bedingungen) mit Mitteln der finiten Mathematik glücken, womit im Besonderen

(##) $\quad PRA \vDash \mathrm{Con}(T_2) \rightarrow \mathrm{Con}(T_1)$

gilt. Das Ergebnis (##) gewinnt man ausgehend von $\mathrm{K_{CT}}$ vergleichsweise einfach. Man substituiere in $\mathrm{K_{CT}}$ für T erst einmal T_2, für S entsprechend PRA und für ϕ schließlich die Formel $\mathrm{Con}(T_2) \rightarrow \mathrm{Con}(T_1)$, die nichts anderes ist als eine arithmetische Allaussage (= Π_1-Formel) der Form:

(###) $\quad \bigwedge x\ (\mathrm{Bew}_{T_1}(x, \pi(0 = 1)) \rightarrow \mathrm{Bew}_{T_2}(f(x), \pi(0 = 1)))$
„Wenn es in T_1 einen Beweis für die Formel $0 = 1$ gibt, dann gibt es bereits einen T_2-Beweis derselben Formel.“

Insofern durch *gelungene* beweistheoretische Reduktionen Resultate der Form (#) gewonnen werden, kann mittels $\mathrm{K_{CT}}$ auf $PRA{+}\mathrm{Con}(T_2) \vDash \mathrm{Con}(T_2) \rightarrow \mathrm{Con}(T_1)$ geschlossen werden, woraus mittels elementarer deduktiver Schritte schließlich (##) folgt. Damit können aussagekräftige grundlagentheoretische Reduktionen des Infiniten auf das Finite, des Nicht-Konstruktiven auf das Konstruktive und des Imprädikativen auf das (lokal) Prädikative mit *rein* finiten Mitteln vollzogen werden.

Selbstverständlich stehen diese drei Schwerpunkte nicht isoliert nebeneinander, sondern repräsentieren in Auswahl eine weitaus substantiellere Problemgeschichte, die weder erst in den 1950er Jahren einsetzt noch dort ihren Abschluss findet. Gleichwohl exemplifizieren die benannten Ergebnisse sehr gut eines der Hauptaufgabengebiete der Beweistheorie: Mit *möglichst* voraussetzungsarmen Mitteln sollen *möglichst* gehaltvolle und geltungstheoretisch aussagekräftige formale Resultate etabliert werden, um für die Beweispraxis *möglichst* großer Teile der (anwendungsrelevanten) Mathematik eine epistemologische Gewissheit zu gewinnen. Sofern nun Lorenzen in eben dieser Zeit Widerspruchsfreiheitsbeweise führt oder der Frage nachgeht, welche philosophischen Mittelbestände für die Rechtfertigung beweistheoretischer Untersuchungsmittel überhaupt zulässig sein dürfen, dann dienen diese Beiträge genau dieser Aufgabe.

4 Die Widerspruchsfreiheit der verzweigten Typentheorie (1951)

Bereits im Abschnitt 2 hatten wir festgestellt, dass man sich im Rahmen der Begründung formaler Systeme auf relative Konsistenzbeweise beschränken kann, *sofern* es lediglich um die formale Absicherung im Gebrauch der – zum Teil dann eben auch imprädikativen – Beweismittel geht. Immerhin dieses Zugeständnis macht Lorenzen jenen gegenüber, die rein axiomatisch verfahren:

> At any rate one should not use a formal system without having proved its consistency.[53]

Diese Parallele im Erbringen der Rechtfertigung für den Gebrauch formaler Systeme über eine methodische Begründung auf der einen Seite und dem Nachweis der relativen Widerspruchsfreiheit auf der anderen spiegelt sich in Lorenzens Schriften sogar wesentlich zeitgleich wider. So veröffentlicht er 1951 die beiden Aufsätze „Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis“ (kurz: WKA) und „Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände“ (kurz: LUV), die diese Aufgabe – von der je anderen Seite herkommend – angehen. Während (und entgegen des Titels) sich WKA mit einer konstruktiven Begründung grundlegender Teile der klassischen Analysis auseinandersetzt, sind es die „logistischen Untersuchungen“ in den §§5-8 von LUV, die einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für ein Subsystem der klassischen Analysis liefern. Im Mittelpunkt von WKA steht die Konstruktion der reellen Zahlen und dem damit verbundenen Nachweis, dass mittels des – bei Lorenzen beweisbaren – konstruktiven Vollständigkeitssatzes (für die reellen Zahlen) die Grundlage für alle wesentlichen Fundamentalsätze der klassischen Analysis geschaffen ist. Der methodische Aufbau dieser konstruktiven Analysis erfolgt ausgehend von der an anderer Stelle bereits geleisteten konstruktiven Begründung der Arithmetik[54] und dokumentiert somit, dass entgegen der weitläufigen Auffassung die allgemeine Mengentheorie gar nicht bemüht werden muss, um die Analysis zu begründen. Da Lorenzen durch den Vollzug der methodischen Begründung das intendierte Standardmodell in einem gehaltvollen Sinne konstruiert, ist damit zugleich auch die Widerspruchsfreiheitsfrage für jenen Teil der klassischen Analysis beantwortet, der die angestammten Fundamentalsätze umfasst. (Es handelt sich also nicht um einen vermeintlichen syntaktischen Konsistenzbeweis für die ganze klassische Analysis im Sinne ihrer Hilbert/Bernays-Formalisierung durch Z_2.)[55] Dass Lorenzen gleichwohl von der Konsistenz der *klassischen Analysis* spricht, zeigt

[53] P. Lorenzen, „Logical Reflection and Formalism“, 241.
[54] P. Lorenzen, „Konstruktive Begründung der Mathematik“.
[55] D. Hilbert/P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik II*, Supplement IV.

wortpolitisch (und ganz im Sinne einer normativen Wissenschaftstheorie) an, dass er sich in der methodischen Rekonstruktion *und* in Opposition zu den mengentheoretischen Erweiterungen um genau jenen Teil des formalen Systems bemüht, der den Anforderungen einer Theorie der reellen Funktionen gerecht werden muss. Alles, was darüber hinaus reicht, mag zwar axiomatisch möglich sein, dürfte aber inhaltlich als verzichtbar gelten (was im Besonderen für das Komprehensionsschema von Z_2 gilt):

> Bei der Frage, ob man mit einer konstruktiven Analysis "weit genug" komme, muß man sich natürlich ein für alle mal von der Vorstellung befreien, es sollten alle Sätze der klassischen Analysis durch Uminterpretation wörtlich erhalten bleiben.[56]

Trotz aller Unterschiede in der erkenntnistheoretischen Grundausrichtung räumt schließlich auch Bernays ein, dass für die faktische Wissenschaftspraxis und damit auch für die Anwendung in den Naturwissenschaften aller Voraussicht nach wohl nicht all das erforderlich sein wird, was axiomatisch durch Z_2 erlaubt ist:

> Man kann freilich geltend machen, daß die Voraussetzungen, die in den Formalisierungen der klassischen Analysis implizite enthalten sind, in den tatsächlichen Beweisen der Theorien nur zum kleineren Teil zur Verwendung kommen und daß formal engere Abgrenzungen möglich sind, welche für die Beweisführungen der vorhandenen Theorien ausreichen, so daß unser durch geistige Erfahrung erlangtes Vertrauen sich eigentlich gar nicht auf die volle Formalisierung der Analysis bezieht. Vorschläge für derartige engere Abgrenzungen sind von P. Lorenzen und G. Kreisel gemacht worden.[57]

Obgleich Lorenzens Analysis in WKA formal nicht klar abgegrenzt ist, so dürfte es sich im Rahmen der Topographie formaler Systeme um eine Theorie der Funktionen vergleichbar mit der formalisierten Weylschen Analysis ACA_0 handeln.

Von der anderen Seite herkommend wird wesentlich zeitgleich[58] in LUV ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für die verzweigten Typenlogik mit Unendlichkeits-, aber ohne Reduzibilitätsaxiom geführt, womit der von Lorenzen untersuchte deduktive

[56] P. Lorenzen, „H. WEYL. *Das Kontinuum*", 284.

[57] P. Bernays, „Zum Symposium über die Grundlagen der Mathematik", 210. Die hierdurch zum Ausdruck gebrachte Einsicht hat sich bis heute durch die Untersuchungen der *Reverse Mathematics* und *reduktiven Beweistheorie* nachhaltig bestätigt. Siehe M. Wille, „Unverzichtbarkeitsargumente im Lichte der modernen Beweistheorie" und *Beweis und Reflexion*, Kap. 7, sowie die dort aufgeführte Literatur.

[58] Der Aufsatz „Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände" wurde gut vier Monate vor „Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis" zur Veröffentlichung eingereicht.

Kalkül ebenfalls nicht die gesamte klassische Analysis umfasst. Der Verzicht auf das Axiom der Reduzierbarkeit ist nur konsequent, denn für einen Prädikativisten wie Lorenzen hat eine höher-stufige Logik die Sprachschichten syntaktisch zu berücksichtigen und darf diese nicht ungerechtfertigt aufheben. Die Beweisheuristik sieht nunmehr vor, dass die Widerspruchsfreiheit des in Frage stehenden Systems (eben das System der Principia Mathematica ohne Axiom der Reduzierbarkeit – bei Lorenzen der „deduktive Kalkül"[59], kurz: $\mathrm{K_D}$) darüber erwiesen wird, dass man sich ein System zurechtlegt (bei Lorenzen der „induktive Kalkül"[60], kurz: $\mathrm{K_I}$), das sich vergleichsweise einfach als konsistent erweisen lässt und man nachfolgend zeigt, dass jedes Theorem von $\mathrm{K_D}$ auch ein Theorem von $\mathrm{K_I}$ ist (alle $\mathrm{K_D}$-Axiome sind $\mathrm{K_I}$-Theoreme und alle $\mathrm{K_D}$-Regeln sind entsprechend in $\mathrm{K_I}$ gültig).[61] Das Bezugssystem $\mathrm{K_I}$, dessen Syntax jene von $\mathrm{K_D}$ umfasst und erweitert wird um den Verknüpfungsoperator „+" und den zweistelligen Relator „>", wird dabei charakterisiert über eine Liste von Strukturregeln, die Auskunft darüber geben, welche zulässigen Veränderungen an Formeln die Bildung neuer Sätze erlaubt (etwa: $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C} \prec \mathfrak{B}$). Im Ganzen handelt es sich also um eine induktive Definition von $\prec$-Formeln und damit um einen Bedingungskatalog, wie ausgehend von gültigen Implikationen durch Strukturänderungen wieder gültige Implikationen gebildet werden können. Die Strukturregeln sind so gefasst, dass die rechts des Regelpfeils stehenden Formeln stets komplexer sind als ihre jeweilige(n) Prämisse(n). Um nun erst einmal $\mathrm{K_I}$ als widerspruchsfrei zu erweisen, braucht lediglich gezeigt zu werden, dass ein Satz der Form $\mathfrak{A} \prec 0 = 1$ (mit $\mathfrak{A}$ $\mathrm{K_I}$-Theorem) unableitbar ist. Da $\prec \Rightarrow \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ erst einmal für beliebige $\mathrm{K_I}$-Formelpaare $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gilt, muss im Besonderen sichergestellt werden, dass „ $\prec$ " kein $\mathrm{K_I}$-Satz ist. Wenn Lorenzen nunmehr schlicht feststellt

> Die Strukturregeln können trivialerweise nicht $\prec$ als Konklusion haben, solange die Prämisse von $\prec$ verschieden ist[62],

dann benutzt er hierbei Überlegungen zur Unableitbarkeit von Formeln sowie zur Inversion von Regeln, die erst 1955[63] in der erforderlichen Explizitheit von ihm formuliert werden sollten. Sie kommen aber bereits hier zur Anwendung, denn neben der Begründungsdefinitheit von Zulässigkeitsaussagen (über die Beweismethode der Eliminationsverfahren), bedarf es eben auch eines Verfahrens zum Beweis von Unableitbarkeitsaussagen. Nur wenn eine solche Methode mit weitgehend voraussetzungsarmen Mitteln bereitgestellt (und damit eben auch gerechtfertigt) werden

[59] P. Lorenzen, „Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände", 94ff.
[60] Ebd., 97ff.
[61] Ebd., 100ff.
[62] Ebd., 99.
[63] P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, §§2-5.

kann, verfügen wir über hinreichende Kriterien dafür, wann eine Zulässigkeitsaussage als widerlegt gilt:

> Diese Möglichkeit einer Widerlegung macht ja die Behauptung von Zulässigkeitsaussagen erst sinnvoll, sie zwingt uns, vorsichtig mit diesen Behauptungen zu sein. Gäbe es keine Möglichkeit der Widerlegung, so könnte jedermann bedenkenlos solche Behauptungen aufstellen.[64]

Durch die Realisierung auch dieser Bedingung besitzt die Aussage „die Formel „ $\prec$ “ ist in K_I unableitbar“ schließlich einen *definiten Sinn*. Unter Verwendung des grundlegenden Gedankens für das Inversionsprinzip und der Annahme, „ $\prec$ “ *wäre* ableitbar, kann nun konstruktiv gezeigt werden, dass keine Strukturregel „ $\prec$ “ als Konklusion aufweisen kann. Damit ist K_I als konsistent erwiesen. Schließlich zeigt Lorenzen im §7 mittels unendlicher Induktion, die allerdings konstruktiv zulässig ist, dass jeder K_D-Satz auch ein K_I-Satz ist, d.h. Lorenzen gibt – unter anderem im Rückgriff auf Gentzen – ein effektives Verfahren ρ an, wie jeder Beweis in der verzweigten Typentheorie in einen entsprechenden Beweis desselben Satzes im induktiven Kalkül transformiert werden kann:

ρ: K_D-Beweis $\Rightarrow$ K_I-Beweis

Unter Gesichtspunkten der ordinalen Beweistheorie erweist sich Lorenzens verzweigte Analysis ebenfalls als äquivalent zur formalisierten Weylschen Analysis ACA_0 und damit als äquivalent zur Arithmetik erster Stufe.[65] Diese Systeme besitzen ε_0 als beweistheoretische Ordinalzahl, d.h. die Gültigkeit der transfiniten Induktion bis einschließlich ε_0 reicht aus, um die Widerspruchsfreiheit der besagten Systeme zu beweisen, und insofern die Gültigkeit der transfiniten Induktion für jede Ordinalzahl unterhalb von ε_0 in den Systemen beweisbar ist, gibt diese beweistheoretische Ordinalzahl als Maß Auskunft über die Komplexität der möglichen Herleitungen in den Systemen.

Bereits 1938 hatte Frederic B. Fitch[66] einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die verzweigte Typentheorie (ebenfalls mit Unendlichkeits-, aber ohne Reduzibilitätsaxiom) geführt,[67] dessen allgemeine Heuristik gleichermaßen angelegt war. So wurde schon von Fitch die Überlegung genutzt, ein weiteres, einfach als konsistent zu erweisendes System S' zu definieren, um nachfolgend zu zeigen, dass jede wah-

[64] Ebd., 31.
[65] K. Schütte, „Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis“. S. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, 391.
[66] F. Fitch, „The Consistency of the Ramified *Principia*“.
[67] Zwei Jahre zuvor hatte Gerhard Gentzen bereits die Widerspruchsfreiheit der einfachen Typentheorie mit Auswahl-, aber ohne Unendlichkeitsaxiom gezeigt.

re Aussage der „ramified *Principia*“ ebenfalls eine S'-wahre Aussage ist. Obgleich Hao Wang darin zuzustimmen ist,[68] dass es zwischen dem Fitch-Beweis und jenem von Lorenzen unter dem Gesichtspunkt des formalen Vollzuges weitaus mehr Gemeinsamkeiten als Unterschiede gibt, so liegt die Leistung des letzteren wesentlich darin, dass in der Tat alle *investierten* Beweismittel problemlos als „konstruktiv“ erwiesen werden können:

> Erst dadurch erfüllt unser Beweis die Forderungen, die seit Hilbert an einen Widerspruchsfreiheitsbeweis gestellt werden müssen.[69]

Diese Einschätzung ist bedeutsam, insofern durch sie angezeigt wird, dass beweistheoretisch geführte Konsistenzbeweise geltungstheoretisch wesentlich besser abgesichert sind als etwa modelltheoretisch vollzogene[70] und damit die zugrunde liegenden beweistheoretischen Erkenntnisanliegen wesentlich konsequenter zu realisieren gestatten. Mit dieser *Gelingensbedingung*, die Lorenzen an sein eigenes Vorgehen richtet, reiht er sich nahtlos in die im Abschnitt 3 skizzierte Entwicklung ein. Gleichwohl formuliert Wang das Problem, dass es schwierig ist, Lorenzens Widerspruchsfreiheitsbeweis in einem gehaltvollen Sinne „finit“ zu deuten.[71] Wie wir im Abschnitt 5 – und unter Rückgriff auf weitere Einsichten Lorenzens – noch ausführen werden, besteht hier das Problem jedoch nicht darin, dass sich der Beweis der Möglichkeit einer finiten Deutung entziehen würde. Vielmehr gilt es festzuhalten, dass Wang in Ermangelung eines hinreichend präzisierten finiten und konstruktiv erweiterten geltungstheoretischen Rahmens das Erfordernis sieht, der Beweis müsse im Falle seiner epistemologisch ausgezeichneten Stellung einer finiten Deutung fähig sein. Lorenzen ist diesbezüglich in der Wahl seiner Ausdrücke weitaus konsequenter, denn er spricht an keiner Stelle von einem finiten Konsistenzbeweis, sondern durchweg von konstruktiv zulässigen Mitteln.

Lorenzen selbst merkt allerdings nicht an, welche Mittel des Fitch-Beweises im Einzelnen von ihm als nicht-konstruktiv und mithin als nicht geeignet für einen Konsistenzbeweis beurteilt werden. Erwähnenswert (und wahrscheinlich letztlich auch ausschlaggebend) scheint mir aber vor allem die sich unterscheidenden semantischen Bestimmungen des Prädikats „ist ein T-Theorem“ zu sein. So wird das Referenzsystem S' von Fitch als *vollständiger Kalkül* unter Verwendung des *Tertium non datur* bezogen auf die Menge der Aussagen der zugrunde liegenden Sprache aufgebaut.[72] Zwar vermeidet Fitch mengentheoretische Ausdrucksweisen

[68] H. Wang, „PAUL LORENZEN. Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände“, 271.
[69] P. Lorenzen, „Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände“, 82.
[70] Siehe M. Wille, *Beweis und Reflexion*, 70, 166, 176ff., 189 sowie die dort aufgeführte Literatur.
[71] H. Wang, „The Formalization of Mathematics“, 252.
[72] F. Fitch, „The Consistency of the Ramified *Principia*“, 146f.

wie „Belegung“ oder „Wertverlauf“, aber die von ihm benutzte Definition des Ausdrucks „Theorem“ benutzt durchweg Tarskis Wahrheitsdefinition und damit den unmittelbaren Bezug auf das intuitive Modell. Um so etwa für jede Aussage $\mathfrak{A}$ zu rechtfertigen, dass dann „$\mathfrak{A}$ oder nicht-$\mathfrak{A}$“ zur Menge der wahren Aussagen gehört, muss das *Tertium nun datur* „von Außen“ auf eben diese unendliche Menge angewandt werden: Entweder ist $\mathfrak{A}$ eine wahre Aussage, dann gehört „$\mathfrak{A}$ oder nicht-$\mathfrak{A}$“ zur Menge der wahren Aussagen oder nicht-$\mathfrak{A}$ ist eine wahre Aussage, dann gehört „$\mathfrak{A}$ oder nicht-$\mathfrak{A}$“ dieser Menge ebenfalls an. Also ist „$\mathfrak{A}$ oder nicht-$\mathfrak{A}$“ eine wahre Aussage. Während nun der entsprechende Nachweis für die Widerspruchsfreiheit von S' darauf hin ausgerichtet ist zu zeigen, dass eine Aussage $\neg\mathfrak{A}$ der „ramified *Principia*“ genau dann ein S'-Theorem ist, wenn $\mathfrak{A}$ kein Theorem von S' ist[73], erfolgt der Nachweis der Widerspruchsfreiheit der „ramified *Principia*“ ebenfalls über eine modelltheoretische Argumentation: Für keine Formel $\mathfrak{A}$ der Sprache der „ramified *Principia*“ gilt, dass sowohl $\mathfrak{A}$ als auch $\neg\mathfrak{A}$ S'-Theoreme sind. Und da aufgrund der Wahrheitsbedingungen jedes Theorem der „ramified *Principia*“ auch ein Theorem von S' ist, ist die verzweigte Typentheorie ebenfalls widerspruchsfrei. Ganz im Unterschied zu Lorenzen gibt es bei Fitch aber kein effektives Verfahren, wie ein Beweis für ein Theorem der „ramified *Principia*“ übersetzt bzw. transformiert werden kann in einen entsprechenden Beweis im intuitiven Modell. Damit ist diese Verfahrensweise von Fitch zweifelsohne voraussetzungsreicher als jene von Lorenzen und zumindest in diesem Punkt klar *nicht-konstruktiv.*

5 „Über eine Erweiterung des finiten methodischen Rahmens“ (1955)

Bereits die im Abschnitt 3 festgehaltenen Stichpunkte machen deutlich, dass die Entwicklung und die Aussagekraft der beweistheoretischen Praxen nicht nur durch das technisch Mögliche mitbestimmt wurden, sondern zudem und gleichermaßen konstitutiv durch die philosophischen Rechtfertigungsmöglichkeiten des formalen Mittelbestandes. Da sich eine ausschließliche Beschränkung auf finite Mittel als eine zu strenge und künstliche Restriktion erweist, indes aber nicht jeder Erweiterungsschritt in einem gehaltvollen Sinne „zulässig“ sein sollte, resultiert das Problem, welche epistemologischen Liberalisierungen relativ zu ausgewählten beweistheoretischen Erkenntnisanliegen gerechtfertigt werden können. Während dies heutzutage unter anderem prominent durch die Frage nach angemessenen Verständnissen eines *relativierten Hilbertprogramms* (im Besonderen: beweistheoretische Zurückführungen auf prädikativ rechtfertigbare Systeme) ausgehend vom

[73] F. Fitch, „The Consistency of the Ramified *Principia*“, 147.

präzisierten Hilbertprogramm erfasst wird, war die Situation in den 1950er Jahren noch keineswegs so transparent wie heute. Es sei nicht verschwiegen, dass selbst die Rede vom „finiten Standpunkt" erst vergleichsweise spät[74] eine für die Praxis allgemein geteilte Bedeutung erhalten hat und gleichwohl bis zum heutigen Tage immer wieder kritisch hinterfragt wird.[75] Lorenzens Beitrag „Über eine Erweiterung des finiten methodischen Rahmens" wendet sich, obgleich er konsequent die Handschrift der Protologik trägt, dem Problemkomplex zu und unterbreitet einen Vorschlag, was als zulässige Erweiterung der finiten Kalkültheorie (als einer Spielweise des seinerzeit noch nicht präzise abgegrenzten finiten Standpunktes) anerkannt werden kann.

Lorenzen beginnt mit der Feststellung, dass in der Beweistheorie keine klare Abgrenzung der (zulässigen) Mittel – des methodischen Rahmens – vorliegt.[76] Er beschreibt den Kern der Metamathematik (also den unverzichtbaren Minimalbestand formalen Argumentierens) als *finite Kalkültheorie*.[77] Da sich jeder arithmetische Satz als eine Aussage über den Kalkül zur Erzeugung der Grundzahlen interpretieren lässt, umfasst die finite Kalkültheorie im Besonderen alle Aussagen der Arithmetik, in denen auf die Verwendung unbeschränkter Quantoren verzichtet wird. Dies führt erst einmal zu einer finiten Arithmetik, die den Ausgangspunkt für „rechtmäßige"/„einwandfreie"/„unbedenkliche"[78] Erweiterungen repräsentiert:

> Wir wollen uns fragen welche Erweiterungen des finiten Rahmens noch „rechtmäßig" sein könnten.[79]

Modern gesprochen wird also die Frage gestellt, welche Erweiterungen der primitiv-rekursiven Arithmetik als Bestandteile des (relativ) unbedenklichen Mittelbestands der Beweistheorie gerechtfertigt werden können?

Lorenzen entwickelt im Folgenden eine induktive Definition für zulässige Erweiterungen über das Kriterium von definiten Aussagen – also Aussagen, die sowohl beweis- als auch widerlegungsdefinit sind. Damit trifft er eine Grundintention von Hilberts „finitem Standpunkt", der im Besonderen für Aussagen der Form $\bigwedge x \mathfrak{A}(x)$, $\bigvee x \mathfrak{A}(x)$ und $\bigwedge x \bigvee y \mathfrak{A}(x, y)$ eine finite Deutung gefordert hatte (für erst einmal primitiv-rekursive $\mathfrak{A}$).[80] Nach den klassischen Interpretationen der Quantoren ist

[74]Erst durch die Arbeiten von William Tait (im Besonderen: „Finitism") und die korrespondierenden beweistheoretischen Ergebnisse hat sich die Arbeitsdefinition „die finite Mathematik ist die primitiv-rekursive Arithmetik" als einer Variante von Churchs These für den Bereich des Subrekursiven als rechtfertigbar und angemessen erwiesen.

[75]R. Zach, *Hilbert's Finitism.* M. Ravaglia, *Explicating the Finitist Standpoint.*

[76]P. Lorenzen, „Über eine Erweiterung des finiten methodischen Rahmens", 128.

[77]Ebd., 129.

[78]Ebd., 128.

[79]Ebd., 131.

[80]D. Hilbert/P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik I*, §2.

- $\bigwedge x \mathfrak{A}(x)$ erst einmal nur widerlegungsdefinit (wenn wir für ein n $\neg\mathfrak{A}(n)$ gezeigt haben),
- $\bigvee x \mathfrak{A}(x)$ nur beweisdefinit (wenn wir für ein n eben $\mathfrak{A}(n)$ gezeigt haben) und
- $\bigwedge x \bigvee y \mathfrak{A}(x,\ y)$ weder beweis- noch widerlegungsdefinit (aufgrund der Allquantifikation ist die Aussage nicht beweisdefinit und die beweisindefinite Existenzaussage $\bigvee y \mathfrak{A}(n,\ y)$ ist für beliebige n nicht widerlegungsdefinit).

Alle Aussagen der Kalkültheorie (nach Lorenzen ist dies der zulässige methodische Mittelbestand der Beweistheorie) müssen sich im Besonderen also als definite Aussagen erweisen. Als Induktionsanfang wählt Lorenzen den Begriff der Ableitbarkeit:

1. Alle Aussagen der Form „x ist eine in dem Kalkül ableitbare Figur“ heissen definit, genauer: beweisdefinit.[81]

   und es lautet weiter:

2. Ist für eine Aussage A durch definite Aussagen festgelegt, wann sie als bewiesen bzw. widerlegt gelten soll, dann heisst A definit, genauer: beweisdefinit bzw. widerlegungsdefinit.[82]

Es darf herausgestellt werden, dass der Induktionsschritt nicht einfach nur die Forderung benutzt, dass eine Aussage bereits dann als definit gilt, wenn wir *irgendein* Beweis- oder Widerlegungsverfahren angegeben haben. Vielmehr – und das stellt Lorenzens Vorschlag sicher – bedarf es notwendig der Bereitstellung von Methoden für die Beweis- bzw. Widerlegungsdefinitheit, die ihrerseits *ausschließlich* unter Verwendung definiter Aussagen bestimmt werden. Andernfalls wäre die Charakterisierung „definiter“ Aussagen möglich, deren Beweis- bzw. Widerlegungsverfahren wesentlich imprädikativ bestimmte Schritte benutzen, womit ersichtlich nur der Begriff der Definitheit entwertet, aber nichts gezeigt worden wäre. Damit unterstreicht er ein weiteres Mal seine Verpflichtung gegenüber der im Abschnitt 3 benannten Hauptaufgabe der Beweistheorie, dass mit *möglichst* voraussetzungsarmen Mitteln *möglichst* gehaltvolle und geltungstheoretisch aussagekräftige formale Resultate zu etablieren sind.

Lorenzen wendet sich nachfolgend noch einer definiten Interpretation der logischen Partikel zu, deren semantische Deutung neben der Abgrenzung der Definitionsmittel ebenfalls zum Kern eines jeden methodischen Rahmens gehören sollte. Dem

[81] Ebd., 133.
[82] Ebd.

wenden wir uns nicht im Einzelnen zu, sondern betrachten die Frage, worin der Wert der von Lorenzen angestellten Untersuchungen besteht.

Bei dem besagten Aufsatz kommt es weniger darauf an, dass er die Handschrift der „Protologik“ trägt, sondern dass er sich mit einer methodologischen Frage beschäftigt, die im Mittelpunkt der beweistheoretischen Reflexionsbemühungen steht: Welche Mittel lassen sich *durch welche Gelingensbedingungen* als zulässige beweistheoretische legitimieren, ohne dass die Beweistheorie ihr kritisches Potenzial als Reflexionsdisziplin zweiter Ordnung und mithin als Rechtfertigungsinstanz für die Zulässigkeit formaler Argumentationsverläufe verliert? Bezogen auf diese Frage liefert Lorenzens Beitrag einen Vorschlag und damit eben auch Richtlinien für zulässige Erweiterungen des formalen und epistemologischen Mittelbestandes der Beweistheorie – ein Erfordernis, das immer wieder explizit gemacht und schließlich auch als eingelöst beurteilt wurde.[83]

Um dies exemplarisch zu veranschaulichen, beginnen wir mit der grundlegenden Einsicht, dass eine Vielzahl von formalen Systemen, deren informelle Pendants auch für die Anwendung relevant sind, keine konservativen Erweiterungen der PRA bezüglich der Π_1-Formeln darstellen. Diese Eigenschaft ist nun zwar nicht notwendig für entsprechende relative Widerspruchsfreiheitsresultate *überhaupt*, aber sie ist gleichwohl grundlegend, wenn mit Widerspruchsfreiheitsaussagen etwas geltungstheoretisch Gehaltvolles zum Ausdruck gebracht werden soll. D.h. eine Vielzahl von formalen Systemen können im Sinne eines *präzisierten Hilbertprogramms* der Form

$$PRA \vDash \mathrm{Con}(PRA) \rightarrow \mathrm{Con}(T)$$

in ihrer Widerspruchsfreiheitsfrage *nicht* an die finite Mathematik angebunden werden. Das gilt bereits für vergleichsweise voraussetzungsarme Subsysteme der klassischen Analysis (in ihrer Formalisierung Z_2) wie etwa Weyls System in *Das Kontinuum* in seiner Formalisierung ACA_0 oder aber auch Lorenzens verzweigte Analysis aus LUV. Allerdings entstehen in den vorliegenden Fällen keine grundlagentheoretischen Bedenken, denn etwa Weyls Begründung diente (wie später auch bei Lorenzen) dem expliziten Aufbau einer Theorie der Funktionen, in der ausschließlich prädikative Mengenbildungen vollzogen und entsprechend nur definite Aussagen formuliert werden können. Ausgehend von den natürlichen Zahlen und dem Induktionsprinzip als der unhintergehbaren Grundlage mathematischen Handelns wählte Weyl einen besonders einfachen, aber beeindruckend genialen

[83] Aus der Vielzahl der verfügbaren Quellen sei nur auf einige besonders prominente verwiesen: P. Bernays, „Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung“, 9f. Ders., „Hilbert, David“, 502. Ders., „Bemerkungen zu LORENZEN'S Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik“, 5. K. Schütte, „Probleme und Methoden der Beweistheorie“, 565f. Ders., „Neuere Ergebnisse der Beweistheorie“, 130. Ders., „Die Entwicklung der Beweistheorie“, 8.

Weg zum Aufbau eines prädikativen Systems: Zur Mengenbildung dürfen einzig Aussageformen herangezogen werden, in denen keine gebundenen Mengenvariablen auftreten. Weyl beschränkt die Komprehensionsmöglichkeiten also auf die arithmetische Komprehension (ACA = *arithmetical comprehension axiom(scheme)*):

(ACA) $\bigvee M \bigwedge m \; (m \in M \leftrightarrow \mathfrak{A}(m))$
($\mathfrak{A}$ ist eine arithmetische L_2-Formel, in der M nicht frei auftritt)

Damit ist eine imprädikative Bestimmung von Mengen bereits im Ansatz ausgeschlossen, da in $\mathfrak{A}$ nicht über Bereiche quantifiziert werden kann, denen die zu definierende Menge notwendigerweise angehören muss. Neben den begründungstheoretischen Qualitäten eines solchen Systems kann nun von der beweistheoretischen Seite herkommend unterstrichen werden, dass die Weylsche Analysis ihrerseits zudem eine konservative Erweiterung der Arithmetik erster Stufe (bezüglich der arithmetischen Formeln) ist und mittels beweistheoretischer Reduktion gezeigt werden kann, dass

$$PRA \vDash \mathrm{Con}(PA) \rightarrow \mathrm{Con}(ACA_0)$$

gilt, d.h. die Widerspruchsfreiheitsfrage dieser prädikativen Analysis kann mit rein finiten Mitteln sogar an die Widerspruchsfreiheitsfrage der elementaren Arithmetik, die ihrerseits einer konstruktiven Deutung fähig ist, angebunden werden. Dieses Argument gilt gleichermaßen für Lorenzens verzweigte Analysis aus LUV. Sofern man nun Systeme wie etwa ACA_0 ihrerseits heranzieht, um voraussetzungsreichere Systeme beweistheoretisch mit relativ vorraussetzungsarmen Mitteln auf sie zurückzuführen (und partiell ist dies in der Tat möglich), so verbleiben wir problemlos im geltungstheoretisch Unbedenklichen und damit im rechtfertigbaren beweistheoretischen Handeln. Allerdings sind dies Einsichten, die vergleichsweise jungen Datums sind und die in der Mitte des 20. Jahrhunderts noch keineswegs so präzise expliziert oder antizipiert werden konnten.

Besonders prominent zeigt sich die damit verbundene unsichere Haltung in der Legitimierung des geltungstheoretischen Beurteilungsrahmens im *klassischen Hilbertprogramm* selbst. Neben dem früh erfolgten (ad hoc) Vorschlag, unter Verwendung der ω-Regel die Unvollständigkeit im arithmetischen Teil formaler Systeme zu durchbrechen,[84] sei aber hier vor allem auf den Umgang mit der rekursiven, aber eben nicht primitiv-rekursiven Ackermann-Funktion hingewiesen. Die besagte Unsicherheit in der Frage, wie ein als epistemologisch ausgezeichneter *minimaler* Beweismittelbestand (aus heutiger Sicht die *PRA*-Mittel) zulässig erweitert werden kann, zeigte sich nicht zuletzt am Status dieser Funktion, obgleich sich *weder*

[84] D. Hilbert, „Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre“, 194.

Hilbert *noch* Bernays in den 30er Jahren an irgendeiner Stelle verbindlich dazu geäußert haben. Die Kernpunkte der Problemgeschichte sind aber schnell benannt.

Wilhelm Ackermann definierte 1927 eine Funktion[85] zum Zwecke des Nachweises, dass es rekursive Funktionen *gibt*, die nachweislich schneller wachsen als jede primitiv-rekursive.[86] Nachdem sich zudem Ende der 1920er und Anfang der 1930er Jahre immer deutlicher herauskristallisierte, dass selbst die – ehemals hoch gehandelten – Kernresultate aus Ackermanns Dissertation[87] nur Bescheidenes zeigen und mit Gentzen eine erste substantielle *Re*orientierung einsetzte, musste Hilbert schließlich seinen „finiten Standpunkt" nachbessern.[88] Doch statt zu argumentieren, dass es *über* den finiten Standpunkt hinaus weitere – wenngleich eben nicht mehr finite – unbedenkliche Schlussweisen gibt, wurde der finite Standpunkt selbst erweitert, was freilich eine weiterführende Unschärfe im Begriffsverständnis von Finitheit zur Folge hatte. So wurden nachträglich Funktionen, die durch n-fach verschränkte Rekursion definiert wurden (wie eben die Ackermann-Funktion im Fall von $n=2$), ebenfalls zur finiten Mathematik gezählt.[89] Obwohl man diese Bemerkungen weder systematisch noch wissenschaftshistorisch überbewerten sollte, so bringen sie doch zum Ausdruck, dass ein dringender Klärungsbedarf gegeben war. So arbeiten die Veröffentlichungen in dieser Zeit häufig mit einem lediglich intuitiv bestimmten Verständnis, das genau so lange klar scheint, so lange man nicht eine präzise Bestimmung einfordert. Wenn dementsprechend Hilbert und Bernays Erweiterungen des finiten Standpunktes um Rekursionsschemata empfehlen,

> ohne der rekursiven Zahlentheorie [= *PRA*, M.W.] das Charakteristische ihrer Methode zu nehmen[90],

dann suggeriert dies zu Unrecht den Eindruck, als ob seinerzeit mittels Normen- und Bedingungskatalog explizit bestimmt und gerechtfertigt worden wäre, was eben „das Charakteristische ihrer Methode" ist. Kurzum: Als Erweiterungen des finiten Standpunktes im Sinne der *PRA* hin zu einem im weiteren Sinne konstruktiven Standpunkt lassen sich diese Vorschläge philosophisch rechtfertigen, während sie als nähere normative Bestimmung des finiten Standpunktes selbst unzulässig sind.

[85] W. Ackermann, „Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen".

[86] Die kanonischen Unterscheidungen zwischen Rekursivität und Subrekursivität waren seinerzeit noch nicht etabliert und so formulierte Hilbert Mitte der 20er Jahre die Frage, ob sich beliebige verschränkte Rekursionen in „gewöhnliche" auflösen lassen.

[87] W. Ackermann, „Begründung des „tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit".

[88] D. Hilbert/P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik II*, VII.

[89] Ebd., 354.

[90] D. Hilbert/P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik I*, 330.

Lorenzens Erweiterungsvorschlag im besagten Aufsatz, der eine zulässige Erweiterung finiter Aussagen hin zu definiten vorsieht (bzw. Aussagen mit einem finiten Sinn als Subklasse der definiten Aussagen behandelt), erbringt nicht nur die erforderliche Rechtfertigung, sondern erfasst in aller Kürze sogar eine wesentliche Pointe nachfolgender Entwicklungen in der Beweistheorie. Während die beweistheoretische Verwendung von imprädikativen Beweismitteln (wie etwa von Kollabierungsfunktionen in der Analyse von entsprechend reichhaltigen Ordinalbezeichnungssystemen) nach wie vor kontrovers diskutiert wird, zählen die Verwendung prädikativer Untersuchungsmittel sowie die ausgezeichnete Stellung von prädikativ rechtfertigbaren Systemen zum gesetzten Bestand.

* * *

Die wissenschaftliche Biographie Lorenzens wird weder durch seine Beiträge zur Beweistheorie dominiert noch wird der Name „Lorenzen“ in erster Linie mit der Beweistheorie in Verbindung gebracht. Allerdings hat er seine Spuren in der Beweistheorie hinterlassen und insofern seine Beiträge „zwischen“ jene zur Mathematik und sein philosophisches Programm fallen, kommt ihnen der bestmögliche Platz in der Biographie eines mathematischen Grundlagenforschers zu.

Literatur

Ackermann, Wilhelm: „Begründung des „tertium non datur“ mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit“, *Mathematische Annalen* 93 (1925), 1-36.

— „Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen“, *Mathematische Annalen* 99 (1928), 118-133.

Addison, John: „Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory“, *Fundamenta Mathematicae* XLVI/1 (1958), 123-135.

Bernays, Paul: „PAUL LORENZEN. Über endliche Mengen“ (Review), *The Journal of Symbolic Logic* 17/4 (1952), 275-276.

— „Zur Beurteilung der Situation in der beweistheoretischen Forschung“, *Revue internationale de philosophie* VIII/27-28 (1954), 9-13 (15-21 Diskussion).

— „Remarques sur l'imprédicativité“, *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont* 7/1 (1962), 121-122.

— „Hilbert, David“. In: Paul Edwards (Hrsg.): *The Encyclopedia of Philosophy (Volume Three)*, New York u.a. 1967, 496-504.

— „Zum Symposium über die Grundlagen der Mathematik“ (1971), wiederabgedruckt in: ders.: *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt 1976, 189-213.

— „Bemerkungen zu LORENZEN'S Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik“. In: Kuno Lorenz (Hrsg.): *Konstruktionen versus Positionen. Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie. Band I: Spezielle Wissenschaftstheorie*, Berlin u.a. 1979, 3-16.

Feferman, Solomon: „Systems of predicative analysis“, *The Journal of Symbolic Logic* 29/1 (1964), 1-30.

— „A more Perspicuous Formal System for Predicativity“. In: Kuno Lorenz (Hrsg.): *Konstruktionen versus Positionen. Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie. Band I: Spezielle Wissenschaftstheorie*, Berlin u.a. 1979, 68-93.

— „Hilbert's program relativized: Proof theoretical and foundational reductions“, *The Journal of Symbolic Logic* 53/2 (1988), 364-384.

— „Does reductive proof theory have a viable rationale?“, *Erkenntnis* 53 (2000), 63-96.

Fitch, Frederic B.: „The Consistency of the Ramified *Principia*“, *The Journal of Symbolic Logic* 3/4 (1938), 140-149.

Gentzen, Gerhard: „Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie“, *Mathematische Annalen* 112 (1936), 493-565.

— „Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik“, *Mathematische Zeitschrift* 41/1 (1936), 357-366.

Gethmann, Carl Friedrich: „Phänomenologie, Lebensphilosophie und Konstruktive Wissenschaftstheorie. Eine historische Skizze zur Vorgeschichte der Erlanger Schule“. In: ders. (Hrsg.): *Lebenswelt und Wissenschaft. Studien zum Verhältnis von Phänomenologie und Wissenschaftstheorie*, Bonn 1991, 28-77.

Gödel, Kurt: „Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie“, *Ergebnisse eines mathe-matischen Kolloquiums* 4 (1933), 34-38.

— *Collected Works. Volume IV. Correspondence A–G* (hrsg. v. Solomon Feferman et al.), Oxford 2003.

— *Collected Works. Volume V. Correspondence H–Z* (hrsg. v. Solomon Feferman et al.), Oxford 2003.

Henkin, Leon: „A problem concerning provability“, *The Journal of Symbolic Logic* 17/2 (1952), 160.

— „G. KREISEL. *On a problem of Henkin's*“, *The Journal of Symbolic Logic* 19/3 (1954), 219-220.

Hilbert, David: „Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre“, gekürzt wiederabgedruckt in: ders.: *Gesammelte Abhandlungen. Band III*, Berlin 1970^2, 192-195.

Hilbert, David/Bernays, Paul: *Grundlagen der Mathematik I*, Berlin u.a. 1934.

— *Grundlagen der Mathematik II*, Berlin u.a. 1939.

Kamlah, Wilhelm/Lorenzen, Paul: *Logische Propädeutik oder Vorschule des vernünftigen Redens*, Mannheim 1967.

Kreisel, Georg: „On a problem of Henkin's“, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen/Ser. A, Mathematical Sciences* 56 (1953), 405-406.

— „Models, Translations and Interpretations“. In: Thoralf Skolem et al. (Hrsg.): *Mathematical Interpretations of Formal Systems*, Amsterdam 1955, 26-50.

— „Relative consistency and translatability“ (abstract), *The Journal of Symbolic Logic* 23/1 (1958), 108-109.

— „Relative consistency proofs“ (abstract), *The Journal of Symbolic Logic* 23/1 (1958), 109-110.

— „A Survey of Proof Theory“, *The Journal of Symbolic Logic* 33/3 (1968), 321-388.

— „Relative consistency proofs. II“ (abstract), *The Journal of Symbolic Logic* 41 (1976), 285-286.

— „Formal Rules and Questions of Justifying Mathematical Practice“. In: Kuno Lorenz (Hrsg.): *Konstruktionen versus Positionen. Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie. Band I: Spezielle Wissenschaftstheorie*, Berlin u.a. 1979, 99-130.

Löb, Martin Hugo: „Solution of a Problem of Leon Henkin“, *The Journal of Symbolic Logic* 20/2 (1955), 115-118.

Lorenzen, Paul: „Die Definition durch vollständige Induktion“, *Monatshefte für Mathematik und Physik* 47 (1938/39), 356-358.

— „Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie“, *Mathematische Zeitschrift* 45/1 (1939), 533-553.

— „Konstruktive Begründung der Mathematik“, *Mathematische Zeitschrift* 53/2 (1950), 162-202.

— „Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis“, *Mathematische Zeitschrift* 54/1 (1951), 1-24.

— „Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände“, *The Journal of Symbolic Logic* 16/2 (1951), 81-106.

— „Über endliche Mengen“, *Mathematische Annalen* 123 (1951), 331-338.

— „Die Rolle der Logik in der Grundlagenkrisis der Analysis“. In: *Applications Scientifiques de la Logique Mathématique. Actes du 2e Colloque International de Logique Mathématique, Paris 25-30 Août 1952*, Paris 1954, 65-74 (73f. = Discussion).

— *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin u.a. 1955.

— „Über eine Erweiterung des finiten methodischen Rahmens“, *Actes du Deuxième Congrès International de l'Union Internationale de Philosophie Scientifique, Zurich 1954.* II. *Physique. Mathematiques*, Neuchâtel 1955, 128–134.

— „Logical Reflection and Formalism“, *The Journal of Symbolic Logic* 23/3 (1958), 241-249.

— „A formal system of predicative analysis“ (abstract), *International Congress of Mathematicians*, Edinburgh 1958, Abstracts of Short Communications and Scientific Programme, Endinburgh 1959, 8.

— „H. WEYL. *Das Kontinuum. Das Kontinuum und andere Monographien*“, *The Journal of Symbolic Logic* 25/3 (1960), 282-284.

— *Metamathematik*, Mannheim 1962.

— *Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie*, Zürich 1987.

— „Konstruktive Philosophie der Mathematik“. In: Eva Jelden (Hrsg.): *Prototheorien – Praxis oder Erkenntnis?*, Leipzig 1995, 19-30.

Lorenzen, Paul/Myhill, John: „Constructive Definition of Certain Analytic Sets of Numbers“, *The Journal of Symbolic Logic* 24/1 (1959), 37-49.

Mostowski, Andrzej: „On various Degrees of Constructivism“. In: Arend Heyting (Hrsg.): *Constructivity in Mathematics*, Amsterdam 1959, 178-194.

Péter, Rózsa: „P. LORENZEN. Definition durch vollständige Induktion“, *The Journal of Symbolic Logic* 5/1 (1940), 33-34.

Ravaglia, Mark: *Explicating the Finitist Standpoint*, Canergie Mellon University 2003.

Schütte, Kurt: „Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis“, *Mathematische Annalen* 124 (1952), 123-147.

— „PAUL LORENZEN. Gleichheit und Ungleichheit in der Arithmetik“ (Review), *The Journal of Symbolic Logic* 18/3 (1953), 260.

— „PAUL LORENZEN. Konstruktive Begründung der Mathematik“ (Review), *The Journal of Symbolic Logic* 18/3 (1953), 260-261.

— „PAUL LORENZEN. Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis“ (Review), *The Journal of Symbolic Logic* 18/3 (1953), 261-262.

— „PAUL LORENZEN. Über das Prinzip “ex falso quodlibet”“ (Review), *The Journal of Symbolic Logic* 19/4 (1954), 298.

— „Probleme und Methoden der Beweistheorie“, *Studium Generale* 18 (1965), 562-567.

— „Neuere Ergebnisse der Beweistheorie". In: Ivan Petrovskij (Hrsg.): *Proceedings of International Congress of Mathematicians (Moscow – 1966)*, Nendeln 1979, 130-138.

— „Die Entwicklung der Beweistheorie", *Jahresbericht der DMV* 81 (1978), 3-12.

Simpson, Stephen: *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Berlin u.a. 1999.

Skolem, Thoralf: „PAUL LORENZEN. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*", *The Journal of Symbolic Logic* 22/3 (1957), 289-290.

Smorynski, Craig: „The incompleteness theorems". In: Jon Barwise (Hrsg.): *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam u.a. 1977, 821-864.

— „The Development of Self-Reference". In: Thomas Drucker (Hrsg.): *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, Boston u.a. 1991, 110-133.

Tait, William: „Finitism", *The Journal of Philosophy* 78 (1981), 524-546.

Thiel, Christian: „Paul Lorenzen (1915-1994)", *Journal for General Philosophy of Science* 27 (1996), 1-13 und 187-202 (Bibliographie der Schriften von Paul Lorenzen).

Wang, Hao: „Arithmetic Translation of Axiom Systems", *Transactions of the American Math-ematical Society* 71 (1951), 283-293.

— „PAUL LORENZEN. Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände", *The Journal of Symbolic Logic* 16/4 (1951), 269-272.

— „Predicative foundations of mathematics" (abstract), *The Journal of Symbolic Logic* 18/2 (1953), 191-192.

— „The Formalization of Mathematics", *The Journal of Symbolic Logic* 19/4 (1954), 241-266.

Weyl, Hermann: *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig 1918.

— „Nachtrag Juni 1955". In: ders.: *Gesammelte Abhandlungen. Band II*, Berlin u.a. 1968, 179-180.

Wille, Matthias: „Dem Unendlichen einen finiten Sinn beilegen. Von Becker und Gentzen zu Lorenzen". In: Volker Peckhaus (Hrsg.): *Oskar Becker und die Philosophie der Mathematik*, München 2005, 325-350.

— *Die Mathematik und das synthetische Apriori. Erkenntnistheoretische Untersuchungen über den Geltungsstatus mathematischer Axiome*, Paderborn 2007.

— „Unverzichtbarkeitsargumente im Lichte der modernen Beweistheorie“, *Der Mathematikunterricht (Schwerpunkt: Philosophie und Mathematik)* 53/5 (2007), 41-58.

— *Beweis und Reflexion. Philosophische Untersuchungen über die Grundlagen beweistheoretischer Praxen*, Paderborn 2008.

— „Die Disziplinierung des Denkens. Über Wilhelm Kamlahs und Paul Lorenzens *Logische Propädeutik*“. In: Bernhard Pörksen (Hrsg.): *Schlüsselwerke des Konstruktivismus*, Wiesbaden 2011, 160-174.

— „Eine Analyse von Beckers 'Widerlegung' des extremen Finitismus“. Erscheint in: ders. (Hrsg.): *Phänomenologie, Logik, Mathematik. Von Becker zu Lorenzen.*

Zach, Richard: *Hilbert's Finitism. Historical, Philosophical and Metamathematical Perspectives*, UC Berkeley 2001, http://www.ucalgary.ca/ rzach/static/ hilbert.pdf

Die Implementierung der EDV in der Kernforschungsanlage Jülich und das Projekt „Supercomputing“

Philipp Karschuck

Abstract Computer technology is regarded as the central element of rationalisation and mechanisation in Germany since the 1950s. Representative of this approach - and the subject of this science-historical contribution - is the history of the Central Institute for Applied Mathematics („Zentralinstitut für Angewandte Mathematik“, ZAM) in the nuclear research facility Jülich („Kernforschungsanlage Jülich“, KFA). The evaluation of first accessible archive material aims to focus on how and to what extent since its foundation in 1961 the Institute developed from its capacity as a service provider for (nuclear) science to being an independent business regarded as a flagship of today's research center („Forschungszentrum Jülich, FZJ“). Jülich Supercomputing Centre (JSC, formerly ZAM) currently operates one of the most powerful supercomputers in Europe. The implementation process of the Institute for Applied Mathematics in Jülich and its successive facilities is also a paradigmatic example of the discourse on the position of "Computer Science"within and next to the classical mathematics in Germany after the Second World War.

Einleitung

Die Computertechnik gilt als das zentrale Element der allgemeinen Rationalisierung und Technisierung in Deutschland seit den 1950er Jahren. Repräsentativ für diesen Ansatz – und Gegenstand dieses wissenschaftshistorischen Beitrages – ist die Entwicklungsgeschichte des Zentralinstituts für Angewandte Mathematik (ZAM) in der Kernforschungsanlage Jülich (KFA). Das heutige Forschungszentrum Jülich (FZJ) wurde im Jahr 1956 als Atomforschungsanlage im Staatsforst Stetternich bei Jülich gegründet. 1961 wurde die Einrichtung in Kernforschungsanlage Jülich e.V. (KFA) umbenannt. Das FZJ – erneut umbenannt im Jahr 1990 – betreibt gegenwärtig interdisziplinäre Forschung in den Bereichen Gesundheit, Energie & Umwelt und Informationstechnologie. Das Zentrum ist Mitglied der Helmholtz-Gemeinschaft Deutscher Forschungszentren und eines der größten außeruniversitären Forschungseinrichtungen in Deutschland. Während meines Hochschulstudiums der Neueren und Neuesten Geschichte an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf wurde es mir durch Lehrveranstaltungen und Praktika vor Ort möglich, im Zeitraum von fast zwei Jahren eine naturwissenschaftliche Großforschungsinstitution aus der Binnenperspektive kennenzulernen. Ich konnte die Bestände des dortigen Vorstandsarchivs (Leitung: Prof. Dr. Bernd A. Rusinek) und der Zentralbibliothek sichten und das zur Verfügung gestellte Material als Quellengrundlage für zwei wissenschaftsgeschichtliche Qualifizierungsarbeiten verwenden.[1] Thematisch orientiert sich meine Forschung an den Vorleistungen der „Studien zur Geschichte der deutschen Großforschungseinrichtungen“.[2] In dieser Reihe sind im Auftrag des Max-Planck-Instituts für Wissenschaftsgeschichte/Berlin von 1986 – 2000 insgesamt 14 institutionengeschichtliche Monographien erschienen; seither besteht ein Forschungsdesiderat in Bezug auf diese Thematik. Im folgenden Artikel zur Mathematikgeschichte sollen zum einen die technischen Entwicklungen auf dem Gebiet der Rechenleistung, zum anderen die wissenschaftspolitischen Rahmenbedingungen behandelt und Zusammenhänge zwischen beiden Entwicklungssträngen verdeutlicht werden. Die Auswertung des Archivmaterials veranschaulicht, in welchem Maße sich das ZAM seit seiner Gründung im Jahr 1961 von der Funktion als Dienstleister für die (Nuklear)Wissenschaft, zu einem eigenständigen Unternehmen entwickelt hat, das als „Leuchtturm“ im heutigen Forschungszentrum Jülich gelten kann. Das Jülich Supercomputing Centre (ehemals ZAM) betreibt gegenwärtig einen der leistungsstärksten Supercomputer in Europa. Der Implementierungsprozess des Instituts für Angewandte Mathematik in Jülich und seiner Nachfolgeeinrichtungen, ist gleichzeitig ein paradigmatisches Beispiel für den Diskurs über die Stellung der Computerwissenschaft oder „Computer Science“, innerhalb und neben der klassischen Mathematik, in Deutschland nach dem Zweiten Weltkrieg.

[1] Die Quellengrundlage für diesen Beitrag bildeten die Bestände des Vorstandsarchivs (im Folgenden: VS) des FZJ und Gespräche mit Akteuren für den Zeitraum 1959-2010. Ausgewertet wurden die Protokolle administrativer und wissenschaftlicher Gremien, Tageskopien des KFA-Vorstandes (interne und externe Kommunikation), die KFA-Jahresberichte sowie die Monatsschriften des ZAM („ZAM aktuell“ und „ZAM intern“).

[2] *Burchardt, Hermann*, (Hg.), 1990-2000. In der Reihe wurden wissenschaftlich autonome Zentren der „Big Science“ historisch analysiert, die wesentlich zu den großen staatlichen Förderprogrammen beigetragen haben (z.B. Energieforschung- und -technik, Transport- und Verkehrssysteme, Luft- und Raumfahrtforschung, Datenverarbeitung, Umweltforschung, biologisch-medizinische- und Polarforschung).

Vorbedingung: Die Entstehung der „Computer Science“

Voraussetzung für das Entstehen der Computerwissenschaften, als eines der jüngeren Wissenschaftsgebiete nach dem Zweiten Weltkrieg, war die Hinwendung der Mathematik zur computergestützten Forschung. Mitte der 1950er Jahre wurde in Deutschland deutlich, dass der Stellenwert der mathematischen Forschung gegenüber den USA zurückgefallen war und sich Forschung und Lehre vornehmlich abstrakten Fragestellungen zugewandt hatten.[3] Bald wurde der Ruf nach Etablierung einer eigenen computerwissenschaftlichen Teildisziplin außerhalb der klassischen Mathematik und Elektrotechnik laut, die sich am US-amerikanischen Vorbild der „Computer Science“ orientieren sollte. Für die deutsche Computerwissenschaft, die unter dem Begriff „Informatik“ firmierte, entstand eine heftige und bis heute anhaltende Auseinandersetzung um die inhaltliche Orientierung. Hierbei stand eine bewusste Trennung gegenüber der technischen bzw. angewandten Mathematik und der Nachrichtentechnik im Mittelpunkt.[4] Ende der 1960er Jahre zeichnete sich in den Hochschulwissenschaften eine Aufspaltung der Fachbereiche Mathematik und Datenverarbeitung ab. Die Computerwissenschaft konnte sich als eigenes Gebiet neben der klassischen Mathematik und der Elektrotechnik konstituieren. Aus der Notwendigkeit einer angewandten Forschung für akademische und industrielle Bedürfnisse entwickelte sich u.a. im ZAM in Jülich, die Computer-Simulation als dritte Säule der naturwissenschaftlichen Forschung neben Theorie und Experiment.[5] Mit den zwei Datenverarbeitungsprogrammen der Bundesregierung im Jahr 1967 und von 1970–1975, begann der Stellenwert der Computerforschung – insbesondere der anwendungsorientierten Forschung – zu steigen.[6] Vom Einsatz der Fördermittel von insgesamt 361 Millionen DM, die von den Bundesministerien für wissenschaftliche Forschung und Wirtschaft für das erste Programm zur Verfügung gestellt wurden, versprach man sich zum einen die deutsche Industrie auf dem Gebiet der Datenverarbeitung zu fördern. Zum anderen sollte eine Intensivierung der allgemeinen Forschungsförderung erreicht werden. Das zweite Programm sollte an

[3] *Wiegand* 1994, S. 37. Die Überwindung von Rückständen um naturwissenschaftliche Erkenntnisse kann als Existenzberechtigung der Großforschungseinrichtungen nach dem Zweiten Weltkrieg in Deutschland geltend gemacht werden. Vgl. *Rusinek* 1996, S. 208ff.

[4] *Bauer* 1974, S. 78.

[5] Gespräch mit Prof. Dr. Friedel Hoßfeld (Direktor des ZAM von 1973 bis 2002), Protokollvermerk vom 27.1.2011.

[6] *Hilger* 2004, S. 59. Am 26. April 1967 wurde das erste Programm unter dem Titel „Programm für die Förderung der Forschung und Entwicklung auf dem Gebiet der Datenverarbeitung für öffentliche Aufgaben“ im Bundeskabinett verabschiedet. Das zweite Datenverarbeitungsförderprogramm (1970-1975) firmierte unter dem Titel „Überregionales Forschungsprogramm (ÜRF)“.

den Hochschulen die notwendigen personellen und sachlichen Voraussetzungen für eine Integration der Datenverarbeitung in Forschung und Lehre schaffen. Darüber hinaus versuchte man dem erhöhten Bedarf an befähigtem Personal gerecht zu werden, indem man 50 universitäre Arbeitsgruppen auf dem Gebiet der Informatik bildete. Von 1970–1977 wurden insgesamt 263 Millionen DM an Bundesmitteln zur Verfügung gestellt. Das ZAM wurde an diesen staatlichen Förderprogrammen nicht beteiligt:

> „Das DV-Programm ist aus meiner Sicht nicht als großer Wurf zu bezeichnen. Es steht sinnbildlich für die Tendenz zum Protektionismus. Das ZAM in Jülich hat in keiner Weise von diesem Programm profitiert. Eine spezielle Doktrin verhinderte die finanzielle Beteiligung der Großforschung an Förderprogrammen nach dem Zweiten Weltkrieg.“[7]

Aufbauphase des ZAM: Drei Stufen zum Supercomputer

Die Gründung eines Instituts für Angewandte Mathematik in Jülich geschah im Kontext der Etablierung einer innovativen computerwissenschaftlichen Teildisziplin, innerhalb und neben der Mathematik. Orientierung bot das stark anwendungsorientierte Modell der *Computer Science*, das an den Hochschulen der USA praktiziert wurde:

> „Das ZAM sollte nach dem Vorbild des Courant Institute of Mathematical Sciences der New York University gegründet werden. Es sollte von Anfang an problem- und anwendungsorientiert arbeiten. (. . .) Das ZAM sollte sich in seiner Herangehensweise bewusst von der Mathematik an den Universitäten unterscheiden. Man musste sich als Jülicher Mitarbeiter des ZAM immer gegen die Mathematiker an den umliegenden Universitäten wehren.“[8]

Bereits die ersten Planungen für ein Forschungszentrum in Jülich im Jahr 1959 enthielten das Konzept eines Institutes für Mathematik. Ein Briefwechsel vom 18.

[7] Gespräch mit Friedel Hoßfeld. Hoßfeld bezieht sich auf die nach dem damaligen Staatssekretär im Forschungsministerium, Hans-Hilger Haunschild, benannte Doktrin, in der festgelegt wurde, dass der Umfang der Projektförderung an den gemeinsam Bund-Länder finanzierten Forschungseinrichtungen – wie dem Forschungszentrum Jülich – möglichst gering zu halten ist. Eine historische Analyse der im Laufe der ZAM-Institutsgeschichte verwendeten finanziellen Mittel wird in diesem Beitrag nicht vorgenommen. Details zu Finanzaspekten haben vor dem Hintergrund des in Jülich eingesehenen Quellenmaterials nur kursorischen Charakter.

[8] Gespräch mit Friedel Hoßfeld.

April 1959 zwischen Prof. Dr. Claus Müller (RWTH Aachen) und Prof. Dr. Wilhelm Fucks (Institut für Plasmaphysik, Jülich) – dem damaligen Vorsitzenden des Wissenschaftsrates der Gesellschaft für Kernforschung (GFKF) – verdeutlicht die Ausrichtung eines neu zu gründenden Instituts: Es solle „eine Brücke zwischen den mathematischen Theorien und ihrer technischen Anwendung“ bilden.[9] Zu Beginn kam dem ZAM demnach die Aufgabe zu, „den Instituten der KFA zuzuarbeiten und sie hinsichtlich von EDV-Dienstleistungen zu unterstützen.“[10] Aus der „Arbeitsgruppe für Angewandte Mathematik“ ging im Jahr 1961 das Zentralinstitut für Angewandte Mathematik (ZAM) hervor.[11] Standort des Instituts war zunächst die Bibliothek des Lehrstuhls von Professor Müller an der RWTH Aachen. Müller fungierte zwischen April 1961 und September 1967 als zweiter Institutsleiter neben Prof. Dr. Vojislav Gregorius Avakumovic. Im Jahresbericht 1961–1962 wurde die Aufgabenstellung des Instituts präzisiert: Sie bestehe in der „Bereitstellung von mathematischen Mitteln zur Vorbereitung und Auswertung von Versuchen, die in den experimentellen Instituten durchgeführt werden“.[12] Ferner sei eine „Analyse der bei der theoretischen Behandlung physikalischer, chemischer und technischer Probleme notwendigen mathematischen Methoden“ nötig. Die mathematische Forschung sei „unerlässlich zur Erweiterung und Präzisierung der vorhandenen Theorien zur Beschreibung kernphysikalischer Untersuchungen.“[13] Die Nutzungsstatistik des ersten IBM-1401-Zentralrechners in Jülich dokumentiert das Aufgabenspektrum des ZAM für das Jahr 1964: Insgesamt wurde die Anlage 1.998 Stunden genutzt.[14] Den größten Teil der Rechenzeit (ca. 60 Prozent) verbrauchte das ZAM, gefolgt von der Verwaltung der KFA (ca. 30 Prozent), der Rest verteilte sich auf die Institute für Neutronenphysik, Reaktorexperimente, -werkstoffe, -entwicklung und -bauelemente sowie die Arbeitsgruppe für technische Physik. Die ZAM-Rechenzeit wurde für die Erledigung wissenschaftlicher Aufträge anderer KFA-Institute sowie zur Vorbereitung und Bereitstellung größerer, für die Großrechenanlage IBM 7090 vorgesehener Programme und den Test von Routine-Programmen benutzt. Diese sollten später als Hilfsprogramme allen Benutzern der Rechenanlage zur Verfügung gestellt werden. Bereits im selben Jahr mussten Arbeitsaufträge aus Kapazitätsgründen zum Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt, an die Universität Bonn und das Rechenzentrum der TH Aachen ausgelagert werden.[15] Eine

[9] *Beyer* 2002, S. 3.
[10] Gespräch mit Friedel Hoßfeld.
[11] *Höfler-Thierfeldt* 2009.
[12] *Kernforschungsanlage Jülich des Landes Nordrhein-Westfalen e.V.*: Jahresbericht für die Zeit vom 1. Januar 1961 bis 31. Dezember 1962, Jülich 1963, S. 108 ff.
[13] Ebenda.
[14] *Kernforschungsanlage Jülich des Landes Nordrhein-Westfalen e.V.*: KFA Jahresbericht 1964, S. 130 ff. Die Rechenmaschine IBM 1401 war im Jülicher Institut für Plasmaphysik (IPP) untergebracht und wurde gemeinsam vom IPP und ZAM genutzt.
[15] Ebenda.

Standortverlegung innerhalb Aachens im März 1962 und die räumliche Erweiterung des Instituts, führte zur einem weiteren Aufgabenfeld für die Institutsmitarbeiter: Neben der wissenschaftlichen Tätigkeit wurden mathematisch-technische Assistenten (MTA) ausgebildet. Hierzu wirkte das ZAM an einer Prüfungsordnung bei der Industrie- und Handelskammer (IHK) mit, am 4. April 1966 bestanden die ersten Absolventen erfolgreich die entsprechende Prüfung. Für die Gründungsphase des ZAM lassen sich folglich drei Entwicklungskonzepte ableiten: Die Nutzung von Computern „als Instrument“ zur Optimierung verwaltungstechnischer Abläufe, die Verwendung der Rechenmaschinen „als Gegenstand der Forschung“ und die Ausbildung von mathematisch-technischen Assistenten.[16]

Drei Stufen zum Supercomputer

Im Frühjahr 1967 konnte der Neubau des ZAM in der KFA Jülich bezogen werden, fast zeitgleich wurde eine Großrechneranlage (IBM 360-75) installiert.[17] Die Anlage war ab Mai 1967 in Betrieb. Zunächst besaß der Rechner einen Hauptspeicher von 512 KBytes. Mitte 1969 wurde er auf 768 KBytes angehoben. Der Rechner zählte zu den größten der bis dahin in der Bundesrepublik aufgestellten Anlagen und beanspruchte die Hälfte des Platzes im Maschinenraum des Instituts.[18] Bereits im Jahr 1961 stand der Erwerb einer Großrechenmaschine beim wissenschaftlichen Rat der KFA auf der Tagesordnung: Die Anschaffungskosten für eine IBM 7090 würden sich „nach einem Angebot der Firma IBM auf 13.185.145,- DM“ belaufen.[19] Für den Betrieb sei zudem eine „jährliche Wartung“ erforderlich, die insgesamt „207.684,- DM“ koste. Neben dem Kauf bestehe „die Möglichkeit der Miete, bei der keine Wartungskosten erhoben würden“ und die „jährlich bei 3.494.976,- DM“ liege. Die Firma IBM verfüge über einen „Spendenfond, aus dem sie der KFA einen Preisnachlass von 60 Prozent gewähre“. Unter diesen Voraussetzungen beliefen sich die „Kosten für den Kauf auf 5.278.085,- DM“, die „jährliche Miete betrage 1.397.900,- DM“.[20] Statt der ursprünglich vorgesehenen IBM 7090 wurde aufgrund der „stürmischen Entwicklung auf dem Gebiet der Computertechnik“ jedoch das System IBM/360 bestellt.[21] Dies kann als erste Stufe auf dem Weg zum Höchstleistungsrechnen in Jülich bezeichnet werden.[22]

[16] Gespräch mit Friedel Hoßfeld. Bis zum Jahr 1986 wurden 470 MTA ausgebildet.
[17] Vgl. *Bellof* 2010, S. 68.
[18] Ebenda.
[19] *VS 3152*, 1961.10.06.
[20] Ebenda.
[21] *VS 1449*, 1968.01.18.
[22] Ausschlaggebender Erfolgsfaktor der IBM-Systeme 1401 und 360 war die Ausrichtung auf den individuellen Anwenderbedarf: Die Ausstattung mit Peripheriegeräten wie Magnetbandgerä-

Vom wachsenden Stellenwert der computerwissenschaftlichen Forschung zeugen Änderungen in der Organisationsstruktur, der sich die KFA in den Jahren 1971 und 1972 unterwarf: Eine Neuordnung der Bereiche Datenverarbeitung und Mathematik sah vor, drei Datenverarbeitungs- und vier Mathematikgruppen zu unterteilen. Den Datenverarbeitungsgruppen oblagen künftig die Bereiche Software-Entwicklung, numerische Mathematik, Programmiersysteme und Online-Datenverarbeitung sowie der Betrieb der Rechneranlagen. Den vier Mathematikgruppen wurden die Bereiche Differentialgleichungen, Diskretisierungsverfahren, praktische Analysis und Plasmasimulation zugeordnet.[23] Der anfänglich hohe Anteil an Dienstleistungen für die KFA im Aufgabenspektrum des ZAM schrumpfte zusehends verglichen mit dem wachsenden Anteil eigener Forschungsarbeiten. Ab November 1973 wurde das ZAM von Friedel Hoßfeld geleitet.[24] Hoßfeld entwickelte eine neue Konzeption, die eine Kombination aus dem Betrieb eines Rechenzentrums und der Entwicklung des Rechners zu einem Werkzeug für Wissenschaft und Forschung vorsah. Angedacht war ein möglichst breites Spektrum technologischer Angebote für Forschungsaufgaben aus verschiedensten Disziplinen zu ermöglichen. Hoßfeld wurde im Sommer 1986 – in einem gemeinsamen Berufungsverfahren zwischen RWTH Aachen und der KFA Jülich – zum Professor für Technische Informatik und Computerwissenschaften ernannt.[25] Er leitete das ZAM bis zum Jahr 2002.

ten und Schnelldruckern, die Möglichkeit, Daten auch über Netzwerke zu übertragen, sowie das ausgereifte Vertriebssystem, das auf einer Art Geräteleasing basierte und auch vom ZAM praktiziert wurde, trugen zu einer hohen Verbreitung der Systeme bei. Viele Kunden machten die Kaufentscheidung zudem davon abhängig, dass weitere IBM-Geräte zusammengeschlossen werden konnten. Die Systemkompatibilität wurde somit zu einem wesentlichen Auswahlkriterium. Die Vertriebsmethode des Geräteleasings entwickelte sich zu einem Erfolgskonzept: das Angebot, die Anlagen für den kommerziellen Gebrauch nicht nur zu verkaufen, sondern auch zu vermieten und die technisch überholten Geräte zur Aufarbeitung zurückzunehmen und durch neue zu ersetzen, wurde vermehrt in Anspruch genommen. Vgl. *Hilger* 2004, S. 336f.

[23] *Beyer* 2002, S. 10.

[24] Friedel Hoßfeld absolvierte ein Studium der Physik an der Universität Würzburg und beendete es mit einer Diplomarbeit am Max-Planck-Institut für Silikatforschung. Ab 1964 war er als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörperforschung in Jülich tätig und promovierte 1967 an der RWTH Aachen. Ab 1969 leitete er eine Abteilung am Institut für Festkörperforschung in Jülich. Im Jahr 1986 lehnte er einen Ruf der TU Berlin auf eine C4-Professur für das Fachgebiet Informationstechnik ab. Vgl. *VS 1591*, 1985.12.04, *VS 3153*, 1973.08.15, *VS 1449*, 1974.02.14, *VS 3153*, 1978.06.15, *VS 1591*, 1983.09.15.

[25] Das Berufungsverfahren nach dem Jülicher Modell sah eine Verbindung der KFA mit den umliegenden Hochschulen vor. Die Institutsleiter der KFA sollten gleichzeitig Professor an einer Universität sein. Die Wissenschaftler erhielten innerhalb der Scientific Community die Möglichkeit, Akzente zu setzen. Die Forschungsergebnisse konnten zudem in die Lehre an den Hochschulen einfließen. Nachwuchskräfte konnten herangezogen werden und erhielten bei den Professoren die Möglichkeit, zu promovieren und sich zu habilitieren. Die KFA hatte somit einen nicht zu unterschätzenden Zugriff auf den wissenschaftlichen Nachwuchs. Vgl. *Rusinek* 1996, S. 200.

> „Die Zeit vor meiner Zeit als Institutsleiter war geprägt von Auseinandersetzungen (...). Hinzu kamen ein Gutachten einer externen Firma zur Datenverarbeitung und die Blockadehaltung des Ministers für Forschung und Technologie, Horst Ehmke. Für ihn war die Mathematik im Forschungszentrum fehl am Platz."[26]

In einer zweiten Stufe auf dem Weg zum Höchstleistungsrechner wurde 1971 die Rechenanlage IBM/360-165 errichtet. Im selben Jahr hielt das *Timesharing* mit dem Rechner IBM/360/67 Einzug in die KFA. Das Timesharing-System wurde in Jülich zur Edition und Submission von Rechenaufgaben (Batch-Jobs), zur Kommunikation mit Experimentrechnern und zum Betrieb von Dialogsystemen aus den verschiedenen Anwendungsgebieten Numerik, Computeralgebra, Datenbanken, Grafik und interaktive Programmentwicklung eingesetzt. Immer wieder kam es zu Kapazitätsproblemen beim Betrieb der Großrechneranlage.[27]

> „Eine Überbuchung der zentralen Rechenanlage von 5 bis 10 Prozent war durchaus alltäglich. (...) Oft erregten Forschungsaufenthalte der Jülicher Wissenschaftler in Zentren der USA Begehrlichkeiten. (...) Allerdings muss hierbei hinzugefügt werden, dass in den USA immer eine Nähe der Forschung zum Verteidigungsministerium und einem damit verbundenen großen finanziellen Potenzial gegeben war. Die militärische Forschung war in Jülich ausdrücklich nicht vorgesehen."[28]

Als dritte Etappe vor den Höchstleistungsrechner wurde ab 1980 ein zusätzlicher IBM-Rechner (370-168) eingesetzt. Somit verfügte das ZAM über einen flexiblen 3-Rechner-Verbund.

Rechnerkopplung

Ende der 1960er Jahre wurde die innovative Möglichkeit einer Rechnerkopplung noch wenig beachtet. Dennoch entstanden seit Beginn der 1970er Jahre örtliche Rechnerverbundsysteme an Großforschungseinrichtungen und Universitäten. Diese *heterogenen Netze* bestanden aus einer beschränkten Anzahl von Rechnern verschiedener Größe und zunächst unterschiedlicher Hersteller. Sie hatten als örtliche Netze eher individuellen Charakter und entsprachen geschlossenen Systemen. Dennoch ermöglichten diese Netze die Akkumulation von Know-how bei der Netzwerktechnologie – oft in Zusammenarbeit mit der Industrie. 1978 wurde in Jülich das so

[26] Gespräch mit Friedel Hoßfeld.
[27] *VS 1638*, 1977.03.03, *VS 1638*, 1977.03.14.
[28] Gespräch mit Friedel Hoßfeld.

genannte *7-Schichten-Modell* festgelegt, das eine Protokoll-Übereinstimmung definierte, auf der auch das öffentliche Datenpaket-Vermittlungsnetz der Deutschen Post (DATEX-P) basierte. Im Jahr 1971 gelang den Jülicher Wissenschaftlern erstmals die Kopplung eines Experimentrechners an einen Zentralrechner. Es entstand das *JOKER-Netzwerk*. Seit 1972 diente das vom ZAM und der Firma Periphere Computer Systeme (PCS München) gemeinsam entwickelte Netz der Übermittlung von Daten aus Experiment- und Prozessrechnern mit einer Geschwindigkeit von bis zu 180.000 Zeichen pro Sekunde.[29] Zu Zeiten seiner stärksten Nutzung waren etwa 50 Rechner an das Netz angeschlossen. Diese Entwicklung mündete in die Errichtung des Campus-übergreifenden *DATASWITCH-Netzwerks* im Jahr 1980 und des *Deutschen Forschungsnetzes* (EARN) im Jahr 1983, das schließlich die externe Datenkommunikation ermöglichte. Ab März 1983 wurde in Jülich die Etablierung eines *Deutschen Forschungsnetz* (DFN) diskutiert. Als Kernproblem erwies sich jedoch die Anpassung der Rechner von unterschiedlichen Herstellern an ein gemeinsames „Sprachverständnis".[30] Das DFN galt als Experiment, räumlich dezentralisierte Forschergruppen zusammenzuschalten und eine bestehende Immobilität zu überwinden. Das Projekt sah Kooperationen zwischen Universitäten, außeruniversitären Forschungseinrichtungen und Forschung und Entwicklung leistenden Wissenschaftsbereichen der herstellenden und anwendenden Industrie und Wirtschaft vor.

Höchstleistungsrechner in der KFA – Computing als Disziplin

Im Juni 1978 wurde dem KFA-Vorstand ein „Vorschlag zur mittelfristigen Entwicklung des Großrechnersystems der KFA Jülich in den Jahren 1979 – 1982" unterbreitet. Dieser Beschlussvorlage folgte im Juni 1981 ein Memorandum, das den „Höchstleistungsrechnern in der internationalen Forschung der Zukunft", den „Rang eines strategischen Instruments der Forschungspolitik" zuschrieb.[31] Es ging

[29] *KFA intern 03/1987*, S. 5.

[30] *VS 1768*, 1984.03. Problematisch war es, die rechnerspezifische Sprache in eine herstellerneutrale Kommunikationsmöglichkeit zu übersetzen und diese bei Austritt aus dem Netz in die arteigene Sprache des Partnerrechners zu transferieren. Hierzu versuchte man gemeinsame Kommunikationsprotokolle zu finden, die internationale Standards erfüllen mussten. Das DFN sollte einen Dialog-, Daten-, Programm- und Nachrichtenverbund zwischen den beteiligten Institutionen gewährleisten. Bei der Planung wurden die Möglichkeit von Breitbandübertragungen sowie zukünftige Satellitenverbindungen erwogen. Großen Wert legte man auf die Zukunftsfähigkeit dieser Innovation. Vgl. auch *KFA intern* 03/1987, S. 5.

[31] *VS 1637*, Memorandum zur Entwicklung des Großrechnersystems, Juni 1982. Die im Jahr 1981 installierten Komponenten des Großrechnersystems der KFA umfassten die drei IBM-Rechner (IBM 370-168, IBM 3033 N04, IBM 3033 U08), den Vektorrechner AP-190, das

in der Sache einmal mehr um ausgelastete Rechenmaschinen: Ein Blick auf die Rechnerausnutzung im ZAM der Jahre 1975–1981 dokumentiert die Anstiege der Gesamt-Verrechnungseinheiten (TVE/Monat), der Anzahl der täglichen gerechneten Aufträge (JOBS/Tag) und der täglich durchgeführten Timesharing-Sitzungen (LOGONS/Tag).[32] Anhand der CPU-Zeit lässt sich nachvollziehen, dass die drei Systeme seit Ende 1976 in ihrer Prozessorkapazität aus- bzw. überlastet waren. Die Problemlösung konnte laut Memorandum „nur von alternativen Rechnerarchitekturen, fernab der seriellen Verarbeitung von Instruktionen und Daten“, bzw. „erst mit Höchstleistungsrechnern“, dem „Prinzip der Parallelverarbeitung“ und dem „Pipelining-Konzept“ vorgenommen werden.[33] Somit wurde die nächste Entwicklungsstufe eingeläutet: die Anschaffung des *CRAY*, einem Höchstleistungs-Vektorrechner der Firma Cray Research.[34]

Im September 1981 äußerte sich der Institutsdirektor Hoßfeld „Zur quantitativen und qualitativen Notwendigkeit eines Höchstleistungsrechners für die KFA“: Die Forschungszentren hätten in der „zweiten Hälfte der 1960er und in den 1970er Jahren die Universitäten, die auf dem Gebiet des Supercomputing Pionierleistung betrieben hatten, von der Spitzenposition abgelöst“.[35] Hinsichtlich der „Verfügbarkeit von Höchstleistungsrechnern sei die deutsche Großforschung, gegenüber vergleichbaren Zentren in den USA und in Großbritannien, in einen für ihre Forschungsarbeiten gefährlichen Rückstand geraten“. Dieser Rückstand sei besonders bedrohlich, da „in ausländischen Zentren dem Computing gegenüber den einzelnen Fachdisziplinen ein eigenständiger Anspruch und ein dem Experiment und der Theorie äquivalenter Stellenwert bei der Lösung relevanter Forschungsprobleme eingeräumt und nicht (wie hierzulande) nur als eine dem Experiment oder der Theorie zuarbeitende Technik verstanden werde“.[36] Es könne „ein direkter Gewinn aus den Höchstleistungssystemen vom CRAY-Typ“ gezogen werden. Hoßfeld

Massenspeichersystem IBM 3850, 54 Plattenspeicher, das JOKER-Kopplungssystem mit angeschlossenen Experimentrechnern und eine ausgedehnte Terminalperipherie mit insgesamt 205 angeschlossenen Datenendgeräten.

[32] Ebenda.

[33] Ebenda.

[34] Die Supercomputer CRAY-X-MP und Y-MP waren Mehrprozessor-Vektorrechner mit gemeinsamem Hauptspeicher. Sie erzielten ihre hohen Rechnergeschwindigkeiten durch Ausnutzung von Pipelining (Vektorverarbeitung und Parallel-Hardware in Funktionseinheiten und Prozessoren). Der Trend in der Vektorrechnerarchitektur ging über die zu Beginn der 1980er Jahre verwendeten Vier- und Achtprozessorstrukturen der ersten CRAY-Rechner hinaus. Diese boten trotz der moderaten Zahl an leistungsstarken Prozessoren die Möglichkeit für Implementierung und Studium paralleler Algorithmen, da für die Rechnersysteme Strategien der Parallelverarbeitung durch das so genannte *Multitasking* zur Verfügung standen. Vgl. Hoßfeld 1992, S. 1.

[35] *VS 1637*, 1981.09, *Hoßfeld*, Friedel: Zur quantitativen und qualitativen Notwendigkeit eines Höchstleistungsrechners für die KFA.

[36] *VS 1637*, 1981.09.

bezeichnete den „mit der Beschaffung eines Höchstleistungsprozessors der CRAY-Kategorie verbundene finanzielle Aufwand in der Größenordnung von ca. 20 Mio. DM Investition bei Kauf (plus Wartungskosten), bzw. von etwas mehr als 2 Prozent der Kaufsumme als monatliche Miete“ als „nicht unerheblich“. Der „Anteil des Großrechnersystems (inklusive Personalkosten) von etwa 4 Prozent am Gesamthaushalt der KFA“ erscheine „im Vergleich zu anderen Zentren national und international als eher gering“.[37] Hoßfeld präzisierte in diesem Memorandum zentrale Grundpositionen der Neuausrichtung des ZAM und den damit verbundenen Diversifizierungsprozess. Er forderte mehr Eigenständigkeit für sein Wissenschaftsgebiet, nutzte die Rhetorik des Forschungsrückstandes und verwies auf den Leistungsengpass der Rechenanlagen. Den wissenschaftlichen Rückstand erklärte er damit, dass bereits 1982 der Computer Science im Ausland ein eigenständiger Anspruch und ein dem Experiment und der Theorie gleicher Stellenwert zukomme. Diesem Vorsprung gelte es durch eine Neuausrichtung der anwendungsorientierten Mathematik entgegenzutreten. Die Computer Science dürfte nicht länger als eine der Wissenschaft zuarbeitende Technik verstanden werden. Hoßfeld etikettierte das Höchstleistungsrechnen als strategisches Instrument innerhalb der Forschung und deutete damit verbundene Wachstumschancen an. Eine Ablösung der Universitäten im Bereich des Supercomputing ist in historischer Rückschau und vor dem Hintergrund der zahlenmäßig hohen Mittel der institutionellen Projektförderung mit Bundesmitteln für die Außeruniversitäre Forschung, im Vergleich zu den länderfinanzierten Universitätshaushalten, wenig vergleichbar und somit schwer nachvollziehbar. Die Dimensionen, in denen sich die Forschungsinvestitionen des ZAM bewegten, schwinden im Vergleich zum Gesamtetat des FZJ, der seit seiner Gründung im hohen dreistelligen Millionenbereich damaliger und heutiger Währung lag.

Den internen Bedarf einer Großrechenmaschine verdeutlicht ein Kurzbericht, den das Institut für Reaktorentwicklung an den Vorstand der KFA im Jahr 1981 übersandt hatte: Der Großrechner würde es dem Institut ermöglichen, „vorhandene Rechenprogramme und -programmsysteme zur Auslegung und Störfallanalyse von Kernreaktoren“ zu nutzen.[38] Bei „Problemen auf dem Gebiet der Reaktortheorie und -technik“ sei es denkbar, „neue Anwendungsgebiete für Spallationsneutronenquellen und die Fusionsreaktortechnologie“ zu erforschen. Ein neuer Großrechner müsse jedoch gewährleisten, dass die Arbeit an den „bisher (. . .) entwickelten Programmen und Programmsystemen ohne nennenswerte Umstellungsarbeiten“ fortgesetzt werden könnten“.[39] Dieser Bericht dokumentiert erneut die Wichtigkeit

[37]Ebenda.
[38]*VS 1767*, 1981.11.19.
[39]*Ebenda.*

der Systemkompatibilität, bei der Entscheidung für einen bestimmten Hersteller im Zuge der Erneuerung von Rechenanlagen. Die Wahl eines bestimmten Anbieters konnte jedoch auch auf Jahre hinaus zu großer Abhängigkeit führen. Vom externen Bedarf die Rechenleistung in Jülich zu nutzen, zeugt ein Briefwechsel zwischen dem Forschungsbereich *Motorische Verbrennung* der RWTH Aachen und der KFA: Aufgrund von mangelnder „Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit“ der eigenen Rechenanlage beschränke sich die Arbeit bis dato auf „ebene und rotationssymmetrische Strömungen ohne chemische Reaktionen“.[40] Derartige Untersuchungen würden längst „in den USA in Los Alamos“ (New Mexico) durchgeführt. Dort könne man „auf mehrere Vektorrechner“ zurückgreifen. Aus diesem Grund sei eine „Zusammenarbeit zwischen der KFA und der RWTH sehr wünschenswert“. Von Seiten der KFA wurde Interesse an einer solchen Kooperation bekundet.[41] Der Schriftwechsel illustriert das Anwendungsspektrum der Jülicher Rechenanlagen, wiederholt erneut die Rhetorik eines drohenden Forschungsrückstandes gegenüber dem Ausland und macht auf mögliche Kooperationen im Wissenschaftssektor – etwa zwischen universitärer und außeruniversitärer Forschung – aufmerksam.

Gründung eines Höchstleistungsrechenzentrums (HLRZ)

Im Frühjahr 1987 wurde das *Höchstleistungsrechenzentrum* (HLRZ) als erstes deutsches Supercomputerzentrum gemeinschaftlich von den drei Großforschungseinrichtungen KFA, Deutsches Elektronen Synchrotron (DESY, Hamburg) und Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung (GMD, St. Augustin) gegründet.[42] Die Planungskommission ging von einer personellen Ausstattung von „maximal 50 Stellen einschließlich der Betriebsmannschaft“ aus.[43] Man rechnete mit einem „Finanzbedarf von 27 bis 32 Millionen DM pro Jahr“. Seit März 1987 betrieb das HLRZ einen Supercomputer vom Typ *CRAY X-MP/416*, der vom ZAM betreut wurde. Parallel zur Entwicklung der informationstechnischen Systeme, wurden die Forschungs- und Entwicklungsvorhaben des ZAM auf die

[40] *VS 1590*, 1986.02.04. Im Sonderforschungsbereich 224 der RWTH Aachen wurden unter Leitung von Prof. Dr. Franz Pischinger im Jahr 1986 u.a. Strömungs-, Wärme- und Stoffübergangsprobleme in Zylindern von Kolbenmotoren experimentell und theoretisch untersucht.
[41] *VS 1590*, 1986.02.28.
[42] *Hoßfeld* 2009.
[43] *VS 1590*, 1986.02.20, Protokoll der Sprecherversammlung der KFA. Der Finanzbedarf umfasste laut „Trottenberg-Kommission“ 5 Mio. DM für Personalkosten, 2 Mio. DM für Gastforscher und 15 Mio. DM für Rechner und Betrieb (Miete etc.). Zusätzlich wurden 5 Mio. DM für einen Vorrechner, einmalige Aufwendungen für ein Büro-Gebäude von 5 bis 7 Mio. DM sowie 2 Mio. DM für ein Rechnergebäude vorausgeplant.

Gebiete der Kommunikation und des Höchstleistungsrechnens ausgeweitet. Dies galt für mathematische Arbeiten in gleichem Maße wie für die Forschungsaktivitäten in der angewandten Informatik. Einen besonderen Schwerpunkt bildeten Algorithmen für neue Rechnerarchitekturen und die Entwicklung von Software-Werkzeugen zur besseren Nutzung dieser Architekturen. Im Jahr 1990 hielt das *Workstation-Konzept* (kooperatives Computing) und die Internetkommunikation mit der Einführung des Internetprotokolls *TCP/IP* im KFAnet Einzug in das Forschungszentrum. Das Arbeitsspektrum zwischen wissenschaftlicher Dienstleistung für die KFA und technisch-technologischer Forschung brachte neue Instrumente hervor, die sich aus Informationstechnik und Mathematik ergaben.[44] Die Arbeiten waren bestimmt durch die in der Rechnerausstattung vollzogenen Innovationsschritte des ZAM, wie z.B. die Vektor- und Parallelverarbeitung auf dem CRAY X-MP und Y-MP, sowie langfristig auf massiv-parallele Systeme ausgerichtet. Das Langzeitforschungsprogramm SUPRENUM, an dem das ZAM bis 1989 mitwirkte, war ein Projekt, das Rechnerarchitekturen und entsprechende Algorithmen für Mehrgitterverfahren zur näherungsweisen Lösung von Gleichungssystemen erforschen sollte. Aus einem Entwurf, an dem die KFA beteiligt war, ergab sich ein Verbundforschungsprojekt, das das Ziel hatte Produkte unter Industriebeteiligung zu entwickeln.[45]

Beginn des massiv-parallelen Computings

Das Angebot des ZAM konzentrierte sich ab den 1990er Jahren in wachsendem Maße auf drei strategische Bereiche: Supercomputing, Datenkommunikation und kooperatives Computing. Neben den Vektorrechnern wurden in Jülich die ersten massiv-parallelen Rechner, wie z.B. der *INTEL Paragon* im Jahr 1992, in Betrieb genommen. Gleichzeitig wurden Kooperationen mit nationalen und internationalen Institutionen, wie dem „European Strategic Programme for Research and Development in Information Technologies“ (ESPRIT), initiiert. 1996 kam es mit der Installierung einer sternförmigen Lichtwellenleiter-Infrastruktur zum Ausbau einer modernen Kommunikationsinfrastruktur und zur Installierung des *CRAY-Supercomputer-Komplexes T90/T3E*, der ein heterogenes Supercomputing/Metacomputing im Forschungszentrum ermöglichte. Der Cray T90/T3E

[44] *Hoßfeld* 1992.

[45] In der ersten Stufe SUPRENUM I bis 1987/88 war vorgesehen, aus auf dem Markt erhältlichen Einzelprozessoren eine parallele Rechnerarchitektur aufzubauen, die sich insbesondere für Mehrgitterverfahren nutzen ließ. Unter SUPRENUM II sollten weitere Forschungsarbeiten vollzogen und die wissenschaftlichen Strukturen bis zum Jahr 1992 optimiert werden.

konnte für einige Jahre einen Referenzmaßstab für das Scientific Computing bilden. Als Reaktion auf den Ausbau des ZAM zum Hochleistungszentrum wurde am 3. Juli 1998 in einem Kooperationsvertrag zwischen dem FZJ und der DESY das John-von-Neumann-Institut für Computing (NIC) gegründet.[46] Es übernahm die Funktionen und Aufgaben des bisherigen Höchstleistungszentrums (HLRZ) und führte dessen Wirken auf dem Gebiet des Supercomputing und seiner Anwendungen fort. Die Supercomputer-Ressourcen mit der erforderlichen Infrastruktur wurden von ZAM und dem Zentrum für Paralleles Rechnen (DESY-Zeuthen), betrieben. Nach der Jahrtausendwende wurden die CRAY-Rechner durch Supercomputer der Firma IBM abgelöst. Am 1. Oktober 2007 wurde das ZAM in *Jülich Supercomputing Centre* (JSC) umbenannt.

Resümee

Der vorliegende Beitrag liefert ein paradigmatisches Beispiel für den Diskurs über die Stellung der Computer Science, innerhalb und neben der klassischen Mathematik. Grundlegend für den Wandel des Zentrums für Angewandte Mathematik (ZAM) von einem der Naturwissenschaft dienenden Institut seit Beginn der 1960er Jahre zur wissenschaftlich eigenständigen Einrichtung innerhalb einer Großforschungseinrichtung war die Initiative „Zur quantitativen und qualitativen Notwendigkeit eines Höchstleistungsrechners für die KFA“ im Jahr 1981. Dieses Vorhaben ist als Beginn des Innovationsschrittes „Supercomputing“ zu bezeichnen, der im Jahr 1984 mit der Installierung des ersten CRAY-Supercomputers begann. Die Tätigkeit des ZAM war – in historischer Rückschau – bestimmt durch die in der Rechnerausstattung vollzogenen Innovationsschritte. Die durch erhebliche institutionelle Forschungsförderung des Bundes im Bereich der außeruniversitären Forschung vollzogenen technologischen Entwicklungsschritte konnten dazu beitragen, dem Computing und der Simulation ein dem Experiment und der Theorie nahezu äquivalenten Stellenwert bei der Lösung relevanter Forschungsprobleme zuzuschreiben. Der Entwicklungsprozess des Jülicher Instituts verlief im Kontext der Etablierung der Informatik bzw. der Computer Science in Deutschland nach 1945. Nicht zuletzt steht die Institutsgeschichte des ZAM damit stellvertretend für die Etablierung einer eigenständigen anwendungsorientierten Wissenschaftssparte.

[46] *VS Vorverzeichnung 76*, 2000.09.14: ZAM Positionspapier – Aufgaben, Arbeiten, Entwicklungslinien.

Primärquellen:

Forschungszentrum Jülich, Vorstandsarchiv (VS). Zeitspanne der gesichteten Quellenbestände: 1959-2010.

Vorstandsakten, Zentralinstitut für Angewandte Mathematik (ZAM): VS 1449, 1590-1593, 1637, 1638, 1768, 1899, 3152-3154, Vorverzeichnungen: 17, 63, 76, 99, 136, 473, 776

Ergebnis-Niederschrift der Sitzungen des Wissenschaftlichen Rates der KFA 1959-1965, Monatsschriften des ZAM: „ZAM intern“ und „ZAM aktuell“

Gespräch mit Prof. Dr. Friedel Hoßfeld (Direktor des ZAM 1973-2002), Protokollvermerk vom 27.1.2011

Beyer, Horst/*Homrighausen*, Heinz W.: Die frühen Jahre des Zentralinstituts für Angewandte Mathematik. Interner Bericht, FZJ-ZAM-IB-2002-10, Jülich 2002

Höfler-Thierfeldt, Sabine: Vorstandsvorlage – Zusammenfassung der Historie ZAM und JSC, Interner Bericht, Jülich 2009

Hoßfeld, Friedel: Supercomputer – Instrument und Gegenstand der Forschung, Interner Bericht, KFA-ZAM-IB-9201, Jülich 1992

Hoßfeld, Friedel: Roll-NIC. Ein hochenergetisches Höchstleistungsphänomen, Interner Bericht, Jülich 2009

Kernforschungsanlage Jülich des Landes Nordrhein-Westfalen e.V.: Jahresbericht 1963, 1964, KFA intern 1987/03

KFA Jülich: Forschungs- und Entwicklungsarbeiten 1984. Wissenschaftlicher Ergebnisbericht, Interner Bericht, Jülich 1985

Sekundärquellen:

Bauer, Friedrich L.: Was heißt und was ist Informatik? in: Einhart, K. (Hg.): Informatik im Unterricht, München 1974

Bellof, Peter: Das IBM System/360 – Vorgeschichte, Entwicklung und Auswirkungen mit besonderer Berücksichtigung seiner Kunden, unveröffentlichte Magisterarbeit, Stuttgart 2010

Hilger, Susanne: Von der Amerikanisierung zur Gegenamerikanisierung. Technologietransfer und Wettbewerbspolitik in der deutschen Computerindustrie nach dem Zweiten Weltkrieg, in: Technikgeschichte: Beiträge über die geschichtliche Entwicklung der Technik und der Industrie sowie deren naturwissenschaftlichen Voraussetzungen, Düsseldorf 2004, S. 327–344

Rusinek, Bernd-A.: Das Forschungszentrum. Eine Geschichte der KFA Jülich von ihrer Gründung bis 1980, in: *Burchardt*, Lothar/*Hermann*, Armin (Hg.): Studien zur Geschichte der deutschen Großforschungseinrichtungen, Frankfurt a.M. 1996

Wiegand, Josef: Informatik und Großforschung. Geschichte der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, in: *Burchardt*, Lothar/*Hermann*, Armin (Hg.): Studien zur Geschichte der deutschen Großforschungseinrichtungen, Frankfurt a.M./New York 1994

The duality of space and function, and category-theoretic dualities

Ralf Krömer & David Corfield

1 Introduction

Phenomena covered by the term *duality* have long fascinated mathematicians, from the duality of polyhedra, the symmetric duality of Pascal's triangle, and the logical duality captured by de Morgan's Laws to projective duality and the duality of Fourier transforms. This fascination has only increased with the passage of time right up to the current intense investigation of Langlands duality. A broader perspective orients us towards general dualities between algebra and geometry, and between syntax and semantics, and teaches us much about the content of mathematics. Yet, it seem that the role of the concept of duality in modern mathematics has been the subject of very few philosophical studies.

Ernest Nagel in [Nag39] claimed that the discovery of duality in projective geometry liberated mathematics from the idea that it was dealing with specific elements bearing a set of defining properties.

> It is a fair if somewhat crude summary of the history of geometry since 1800 to say that it has led from the view that geometry is the apodeictic science of space to the conception that geometry, in so far as it is part of natural science, is a system of "conventions" or "definitions" for ordering and measuring bodies. (p. 143)
>
> The liberation of geometrical terms from their usual but narrow interpretation first required a thoroughgoing denial of the need for absolute simples as the foundation for a demonstrative geometry. Such a liberation was in large measure the consequence of the discovery of the principle of duality and of the manifold extensions and applications which were made of it. (p. 179)

This interesting paper points to what we may call the 'internal ontology' of mathematics, that is, the content of mathematics as seen by the working mathematician at a moment in history. We can also look to an 'internal epistemology' of duality, which tries to understand the gains mathematicians have found in exploiting dual situations. In this direction, a philosophical study, related to projective duality, has been envisaged by Michael Detlefsen in his "Ideals of proof"-project run at Nancy and Paris 2007-2011.

> It has frequently been claimed that the use of ideal elements [...] somehow shortens or simplifies proofs and problem-solutions without compromising their reliability or other epistemic virtues.
>
> Sometimes these efficiencies seem striking, as in the case of the so-called "dualities" that are made possible by the introduction of elements at infinity in projective geometry.[1]

Detlefsen, after describing how by interchanging the terms 'point' and 'line' one basically gets two theorems for one proof, proposes to submit to a critical scrutiny the conviction that the "reliability or other epistemic virtues" aren't compromised by this procedure. However, as Detlefsen told one of us recently, this part of the project has not been pursued since.

We will not do this either at present. Rather, we will derive from Detlefsen's approach a couple of questions to be asked regarding a much wider field of dualities:

- Do we generally find it possible to exchange parts of a given language with others *salva veritate*? And is it equally[2] the purpose to get two theorems by one proof?
- Are there features analogous to, say, points at infinity in projective geometry?

We shall approach these questions by means of a category theoretic understanding. It will become clear in the next section why we have chosen this strategy. The overarching aims of the present paper then are (1) to make progress on the classification of situations involving dualities; (2) to investigate the internal epistemological and ontological significance of such dualities, notably in comparison to classical dualities such as projective geometry, boolean algebra or vector space theory. There is an enormous amount of work to be done here, and in this paper we can only hope to make a start. We will find that the answers to our questions largely depend on the actual historical state of development of category theory

[1] See http://www.univ-nancy2.fr/poincare/idealsofproof/subproj_Ib.html

[2] It is certainly up to further historical study whether this actually was the purpose when projective duality was first introduced.

we're talking about. We will not elaborate on the historical details here, but rather stress the respective epistemological situation—however in the sense of internal epistemology alluded to above, thus perfectly historically: we retrace the history of this epistemology.[3]

2 Two Kinds of Duality

One key problem to address when we confront duality is that there is no definitive agreement about what the term means. The Princeton Companion of Mathematics tells us that "Duality is an important general theme which has manifestations in almost every area of mathematics [...] Despite the importance of duality in mathematics, there is no single definition which covers all instances of the phenomenon." ([GBGL08], III. 19 Duality, p. 187). This claim notwithstanding, over the past few decades attempts have been made (especially in the framework of category theory) to give precise mathematical definitions of the concept of duality in general. The key ingredient of category theoretic dualities very often is the notion of dual category, of course. Historically, this very notion has been motivated by a number of dualities similar to the duality of finite dimensional vector spaces, due to the fact that the constructions involved can be seen as contravariant (arrow-reversing) functors. We will have occasion to label this type of duality as "functional" or "concrete" duality. The notion of dual category then was used by Mac Lane and Buchsbaum in a more "axiomatic" or "formal" way in the pursuit of a "two theorems by one proof"-strategy in, *e.g.*, homological algebra, eventually arriving at dual categories epistemologically more remote (in a sense related to Detlefsen's "ideal") than the original categories; see section below.

While these enterprises don't seem to have led very far, we find that in a further development due to Grothendieck, again dualities of a more "functional" or "concrete" type have been achieved by explicitly defining dual equivalences (i.e., functors); compare section . In these cases, ideal elements have to be added in the sense that the given category has to be enlarged in order to become dually equivalent to some other (thus *completing* the duality or "analogy" between two theories); on the other hand, the objects in the dually equivalent category (or rather: the "dualizing object", see below) are more "accessible", or "manageable" than

[3]Several of the more historical passages of the present paper have already been included in [Krö07], but scattered around in various investigations without stress of the common theme of duality. So we find it convenient to reissue them here under a common heading.

the original objects.[4]

These dualities typically do *not* yield two theorems by one proof; rather, we will be able to relate the epistemic gain of many of them to a basic methodological principle of modern mathematics, namely studying "spaces" by studying functions defined on them, the counterpart of another principle that one can study algebras by devising a space on which they are algebras of functions. One important difference between the two last-mentioned historical situations is that in the Grothendieck situation, equivalence of categories (and not something like having identical object classes) is made the relevant criterion of identification.

In what precedes, we relied on two distinctions drawn in the literature between kinds of duality. The distinction between *axiomatic vs. functional* duality has been drawn by Saunders Mac Lane [ML50] while *formal vs. concrete* duality has been referred to by Lawvere and Rosebrugh [LR03]. During the pursuit of our aim to classify the situations, we will have many occasions to use these two distinctions when discussing particular cases of duality. Mac Lane's distinction actually was of historical significance for the development studied here and thus will be presented in its historical place (see section); let us thus just say some words about formal vs. concrete duality here.[5]

Lawvere and Rosebrugh define *formal* duality in terms of the reversal of arrows in a category. So an epimorphism becomes a monomorphism, a product becomes a coproduct, etc. As with Mac Lane's axiomatic duality, proofs may come in dual pairs. On the other hand, *concrete* duality arises when an arrow $f : A \to B$ is 'exponentiated' by some object V, to $V^f : V^B \to V^A$. V might then be called the "dualizing object". Pontrjagin duality is an example of this, choosing V to be the circle group $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Exponentiation sends a group to its group of characters. For example, the circle group is sent to the group of the integers.[6]

[4] For the sake of avoiding terminological confusion, we refrain from describing them as more "concrete". The distinction we wish to make is an epistemological one and concerns accessibility, in contrast to "ideality" in Detlefsen's usage.

[5] For another philosophical use of this distinction, see [Cor10].

[6] There are more such distinctions in the literature. Becker and Gottlieb, for instance, restrict their attention to duality in algebraic topology to *Eckmann-Hilton vs. strong* duality [BG99]. *Eckmann-Hilton* duality is named after two mathematicians who noticed that for many constructions in some category of topological spaces it is possible to form their duals, for instance, the loop space and the suspension of a space. But this is merely a heuristic principle, suggestive of new constructions and results. In the same way as the category of abelian groups, sometimes Eckmann-Hilton duality fails in the sense that the dual of a true theorem is not itself a true theorem. The axiomatisation of the self-dual properties in the form of model categories, resembles that of abelian categories. On the other hand, the *strong* dual of an object in a symmetric monoidal category is defined via the possession of certain properties. In the category of vector spaces, a finite vector space has a strong dual. This is actually an instance of Lawvere and Roseburgh's concrete duality with $\mathbb{R}$ as the dualizing object.

3 From "classical" to category-theoretic dualities

In what follows, we focus on both historical and epistemological relations between the category-theoretic conception of duality and "classical" dualities like in projective geometry, boolean algebra, and the vector space dual to a finite-dimensional real vector space. Therefore we first briefly recall these classical cases. The first two provide examples of "Two theorems by one proof"-strategies (with the important difference that in the second case, no ideal elements are needed, as far as we can see). The third case, though being closely related to the first, is of a different kind in that it concerns a study of objects by studying their duals, or, more precisely, the study of a space by studying its functions into a "simpler" space.

Duality in Projective Geometry In Euclidean geometry, two points determine a line, and two non-parallel lines determine a point. By adding points at infinity as the intersection of two parallel lines, we can omit the word "non-parallel" in the last sentence, and thus get duality of points and lines in plane projective geometry. More generally, in a projective space of finite dimension n, subspaces of dimension r are dual to (interchange with) subspaces of dimension $n-r-1$. Thus, in projective 3-space, points are dual to planes and lines are dual to lines.

Duality of projective geometry historically has been expressed in two different ways by Poncelet on the one hand and Gergonne on the other.

> The principle of duality [in the sense of syntactically interchanging terms in propositions] may properly be ascribed to Gergonne [. . .]. Poncelet protested that it was nothing but his method of reciprocation with respect to a conic (polarity), and Gergonne replied that the conic is irrelevant—duality is intrinsic in the system. Thus Gergonne came nearer to realizing how the principle rests on the symmetrical nature of the axioms of incidence" [Cox61, p.15].

With his last remark, Coxeter is certainly suggestive of the considerable influence Gergonne's approach had on Hilbert's axiomatic geometry. We should however be more careful about the historical facts. In the preface of [BM10], we can read

Another distinction is contained in the following quote (where the word "concrete" is used in a nontechnical sense, of course):

> The formal inversion of arrows furnished in the definition of dual category in concrete examples often produce [sic!] *duality theorems* (when categories coincide or are close to each other), or some relations of the type *geometry vs algebra* (when categories are not alike, e.g., rings and their spectra). [GM96, 76]

> Gergonne défend une version de la dualité assez proche de celle expliquée dans les exposés axiomatisés des manuels actuels. [...] Néanmoins, sa tentative n'est pas totalement achevée puisqu'il n'osera pas affirmer que deux droites coplanaires se coupent toujours [p.5f]

Thus, Gergonne didn't go as far as we go today.[7]

Duality in Boolean Algebra In Boolean Algebra, we have a duality for logical connectives or, alternatively, basic operations on subsets of a given set. In the case of connectives, negation reverses the direction of implication, and, by de Morgan's law, replaces "and" by "or". Similarly for sets, complementation reverses the direction of inclusion, and replaces intersection by union. Consequently, a theorem of boolean algebra stays valid if the signs are interchanged correspondingly. A related example is the duality of open and closed sets in a topological space.

As with the case of projective duality, we have a "Two theorems by one proof"-situation here: we can systematically interchange some terms of the language *salva veritate*. The important epistemological difference between the two cases is that in the second case, no ideal elements are needed.

The dual vector space Let V be a finite-dimensional real vector space. Its dual space $L(V)$ is the set of all linear mappings $f : V \to \mathbb{R}$, again a finite-dimensional real vector space. There is a simple mathematical connection (which is actually also a historical connection) between this construction and projective duality. Let $\dim V = n$; to subspaces of dimension r of V correspond subspaces of dimension $n - r$ of $L(V)$ (see [BML65] p.185f for details). What is new here with respect to dualities yielding two theorems by one proof is to consider a dual to the entire space V instead of considering just duals of subspaces. We think that this difference points to an important step in the development of the mathematical concept of space: while in the original situation of projective geometry, there is just "the" space, parts of which can be dual to each other, in vector space theory there are various spaces which can be dual to each other. In the case of finite-dimensional vector spaces, $L(V)$ is just isomorphic to V; the situation gets more interesting when passing to infinite-dimensional vector spaces.[8]

[7] In [BM10], the reader finds many informations on the history of projective geometry and pointers to additional literature on the subject.

[8] Even in this case, evidence for the historical continuity with projective geometry can be found. For instance, Hans Hahn in his proof of the Hahn-Banach theorem calls the dual of a real vector space its "polaren Raum" [Hah27] p.219.

Now, this last example leads us to the category-theoretic conception of duality. (The example actually played a role when category theory was first introduced historically: it is discussed in the introduction of [EML45], but in a different context.) For let $g : V_1 \to V_2$ be a linear mapping between two such spaces, and let $f_2 \in L(V_2)$. Then by the composition

$$V_1 \stackrel{g}{\to} V_2 \stackrel{f_2}{\to} \mathbb{R},$$

an element of $L(V_1)$ is defined; thus we can define a linear mapping $L(g) : L(V_2) \to L(V_1)$ by setting

$$[L(g)](f_2) := g \circ f_2.$$

This defines a functor L from the category of finite-dimensional real vector spaces to itself. This functor is *contravariant* (the direction of the arrow is reversed).

Reversion of arrows The reversion of the direction of the arrows, as present in the last example, occurs quite often: along with the passage to the dual of a vector space, it takes place in the passage from an abelian topological group to its group of characters with values in some specific group (Pontrjagin duality), or in the relation between homology and cohomology groups, or between direct and inverse limits. Early category theory was devised exactly for dealing with such constructions. Thus, they have motivated, historically, the working out of the very notion of category-theoretic duality.

This notion basically is the following: Statements of Category theory typically concern the composition of arrows (which might be thought of as functions); in the statement dual to a given statement, the arrows are reversed. Now, there are other occurences of this which were only arrived at through a consequent application of the dualization strategy to the original situation, namely projective and injective objects in abelian categories, a category and its dual category, or some technically even more involved constructions from Grothendieck's mathematics.

Thus, we find that many concepts of modern mathematics fall under this notion of duality. However, our enumeration of examples actually includes very different types of situations. The first three of them are of the "spaces-functions" type (see below), and are concrete dualities in the sense of Lawvere-Rosebrugh, while the next three are formal dualities. In the following sections, we shall follow up the historical development of category-theoretic dualities, and the epistemological properties of the conceptions at the various stages of development.

4 Mac Lane and "functional" vs. "axiomatic" duality

In [ML50], Saunders Mac Lane makes an attempt inspired by category theory to cope with certain incomplete dualities in group theory.[9] He focuses on group-theoretical notions which can be expressed in terms of arrow composition.[10] To make clear what his aim is, he is led to distinguish between two types of duality:

> For a topological space the duality between homology and cohomology groups with locally compact abelian coefficient groups can be formulated in terms of character groups. Another formulation is suggested by the axiomatic homology theory of Eilenberg and Steenrod. In this formulation, the axioms for a homology theory refer [...] only to certain homomorphisms; the dual statements are exactly the axioms for a cohomology theory. [...]
>
> Duality phenomena also appear in the case of vector spaces. [...] In these instances there is a process assigning to each object a dual object and to each transformation a dual transformation, so that a "functional" duality is present. Similarly, the duality of (plane) projective geometry may be formulated in two ways: *functional*, by assigning to each figure its polar reciprocal with respect to a fixed conic; *axiomatic*, by observing that the axioms for plane projective geometry are invariant under the interchange of "point" with "line".
>
> Even for discrete abelian groups or for discrete (infinite-dimensional) vector spaces, a functional duality does not exist. We aim to provide an axiomatic duality covering such cases. [ML50, 494f]

It seems that the two approaches to projective duality available inspired Mac Lane's efforts to get axiomatic duality in certain categories. Thus, projective duality for us is not only a situation to be compared epistemologically with the situation(s) in category theory but moreover turns out to be historically a source of inspiration for some of the latter.

While for locally compact Hausdorff abelian groups, there is also such a functional duality by Pontrjagin's procedure, a functional duality is lacking in other cases. For example, in both the category of groups and the category of abelian groups,

[9] See [Krö07] section 2.4.3. for a detailed historical account.

[10] Mac Lane is aware that the "formulation of duality in terms of homomorphisms does not suffice to subsume all known 'duality' phenomena" [p.494]; he refers to [Hal40] for phenomena not subsumed.

many constructions and results may be dualized. However, these categories are not self-dual. Mac Lane's axiomatization of the duality present in the category of abelian groups later was modified by Buchsbaum and Grothendieck, yielding the self-dual notion of abelian category. Now the dual of any result which may be proved from the axioms for an abelian category also holds in such a category.

Let us stress that Mac Lane interprets the role Category theory can play in the context of group theory as analogous to the axiomatic way of speaking about projective duality, rather than the functional one (also present in the vector space case). He is quite closely sticking to the idea of replacing terms by others in expressions (namely reverse arrows or rather, reverse the order of the factors in products, interchange the terms monomorphism and epimorphism and so on).

Historically speaking, this axiomatic duality was prepared by the fact that functional duality (where available as with finite-dimensional vector spaces or locally compact Hausdorff abelian groups) happens to come with a contravariance, as we have seen towards the end of the preceding section. Mac Lane isolated this feature to make it the basic ingredient of his axiomatic approach.

Later distinctions of types of dualities are related to Mac Lane's. For instance, exponentiation as occuring in the Lawvere-Rosebrugh distinction is a mapping and so falls under Mac Lane's functional duality.

5 Buchsbaum, Grothendieck, and duality in homological algebra

In categories with algebraic objects, one often has a notion of exact sequence. The basic question is whether a given functor preserves such exactness or not. Homological algebra answers this question by considering an exact sequence as a complex and calculating its cohomology. This yields the "derived functors" of the given functor. This has been done by Cartan and Eilenberg in [CE56] (written in 1953) for categories of modules and by Buchsbaum in 1955 for general exact (abelian) categories.[11] Now, Cartan and Eilenberg stress a latent duality in their work:

> In this chapter we present all the algebraic tools of homology theory [...]. The treatment here differs from the standard one in that great care is taken to maintain all symmetries and thus keep the system self-dual at all times. [...] The reader will have ample opportunities

[11] See [Krö07] section 3.1.2.2. for a detailed historical account.

> to convince himself that the preservation of this kind of a duality is indispensable. [CE56, 53]

Nevertheless, Cartan and Eilenberg cannot help treating separately right and left derived functors respectively and to distinguish even the different possible variances of the functors. Mac Lane's 1950 paper faced a similar situation, namely the repetition of dual argumentations in the Eilenberg-Steenrod 1952 axiomatization of homology and cohomology theories [ES52].

Buchsbaum provided a solution of the duality problem in the Cartan-Eilenberg situation; in this solution, the concept of dual category plays a role (which Buchsbaum denotes $\mathcal{A}^*$ when the category $\mathcal{A}$ is given). However, this concept allows only to make explicit the *dualization process*, *i.e.*, to explain how the proposition dual to a given proposition is obtained (reverse the arrows); but to avoid dual argumentations, one needs moreover (and more importantly) a *principle of duality*, *i.e.*, a metatheorem establishing under which circumstances the dual proposition so obtained is *valid*. The principle of duality given by Buchsbaum reads: with $\mathcal{A}$, also $\mathcal{A}^*$ is exact (where Buchsbaum's notion of "exact category" vouches for the possibility of speaking about exact sequences, and is very close to the now standard notion of abelian category).

Here are some of Buchsbaum's main results:

> In treating derived functors, it suffices to consider left derived functors of a covariant functor of several variables; all other types needed may then be obtained by a dualization process. [Buc55, 1]

> The axiomatic homology and cohomology theories of Eilenberg and Steenrod [1952] may be defined using an arbitrary exact category $\mathcal{A}$ as the range of values of the theory. Thus, replacing $\mathcal{A}$ by $\mathcal{A}^*$ replaces a homology theory by a cohomology theory, and vice versa. [CE56, 385]

> The Pontrjagin duality for discrete and compact abelian groups readily shows that the category $\mathcal{C}$ of compact abelian groups is the dual of the category $\mathcal{M}$ of discrete abelian groups. Thus we conclude that $\mathcal{C}$ satisfies Axioms V, VI and VI^*. [CE56, 386]

Let us pause to make a first epistemological comparison of category-theoretic and classical dualities from what we have seen so far. Reversion of arrows can be seen as a purely formal exchange of some parts of the language, like in classical dualities. But which are the respective epistemic properties? In the case of projective duality and Boolean duality, the exchange of parts of the language with others is possible *salva veritate*. In the case of projective duality, this is achieved only by the introduction of ideal elements (points at infinity) which seem to be epistemically less accessible than the other objects of the theory.

On the other hand, reversion of arrows applied to a true theorem does not yield systematically a true theorem. Counterexamples occur as with injective and projective objects.[12] In general, this occurs when the categorical environment is not self-dual.[13] One has to distinguish between the dualization procedure for obtaining the dual statement and duality principles which assert the truth of the dual of a true statement.

Another observation of interest for our epistemological purpose is contained in the following explanation Buchsbaum gives for the fact that his duality theory was outside the scope of Cartan-Eilenberg (where only categories of modules are considered). Let $H(A, B)$ denote the construction of the homology functor in their manner; Buchsbaum says:

> In [the] category [of all left Λ-modules $\mathcal{M}_\Lambda$], $H(A, B) = \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$. However, the dual category $\mathcal{M}^*_\Lambda$ admits no such concrete interpretation. This explains the fact that the duality principle could not be efficiently used, as long as we were restricted to categories concretely defined, in which the objects were sets and the maps were maps of those sets. [CE56, 382]

To put it in more general terms: when starting from a category C composed of (structured) sets and functions (or, more technically, from a "concrete" category, that is, a category C with an underlying functor $U : C \to Set$),[14] its dual category C^{op} obtained by arrow reversion often is more "ideal" than C itself in that the arrows so obtained need not be set functions (C^{op} need not be concrete). Therefore, Buchsbaum considered the step to pass to axiomatically given categories (not necessarily concrete in this sense) as the crucial step for making use of a duality principle.

We should compare this "ideality" and the ideal elements of projective geometry carefully. In the case stressed by Buchsbaum, the dual objects as a whole are more "ideal" than the original objects. In projective geometry, on the other hand,

[12] And with direct and inverse limits as well; we will however not discuss this case here.

[13] In the case of injective and projective modules, the internal minutes of the Bourbaki meetings relate this to the fact that the category of sets is not autodual. See *La Tribu 56* concerning the Bourbaki *rédaction n.373*. These documents are not among those available online; they can be seen in the "Archives Delsarte" at the *Institut Elie Cartan, Université de Lorraine, Nancy*.

[14] Note that this technical usage of the word "concrete" quite closely corresponds to what Buchsbaum in a still non-technical manner called "categories concretely defined". It is also related to the Lawvere-Rosebrugh conception of "concrete dualities" in that the category in which the objects of the form V^A live often is concrete. We will elaborate on this point further on.

it is not just the dual objects in general but only the ideal ones (the objects dual to parallel lines) which are less accessible. When applied as we suggest to do in Buchsbaum's case, the usage of the term "ideal" seems to be not identical to its usage in classical ontological doctrines like realism, etc. Rather, it concerns whether something is representable as set and structure.

We should add, moreover, that there are many situations where there are dual concrete categories. This occurs when their underlying functors, which throw away the extra structure, are representable, that is, are of the form $U(-) = C(c, -)$, for some object c. See [PT91]. Here the object c is a free object on one free generator. The duality between the category of finite dimensional vector spaces and its opposite is of this form, the base field playing the role of c.

To see the limitations of Buchsbaum's project, let us take up the historical thread where we left it. Grothendieck around 1955 became interested in applying the Cartan-Eilenberg derivation procedure to functors defined on categories of sheaves; the result was the 1957 Tohoku Paper [Gro57]. Buchsbaum's "two theorems for one proof"-strategy in this case plays only a minor role. The reason is that in Cartan-Eilenberg homological algebra, it depends on the kind of nonexactness and on the variance of a given functor whether projective or injective resolutions are to be used in its derivation:

- if one wants to make exact a left exact functor, one is interested in the right derived functors etc.;
- the right derived functors are obtained by using injective resolutions for all covariant variables of the functor and projective resolutions for all contravariant variables; *vice versa* for left derived functors (see [CE56, 84]).

Thus, in view of the properties of the functor Γ studied by him, Grothendieck *couldn't help* looking for injective objects.

Buchsbaum's duality theory makes it possible to restrict the development of the derivation procedure *in its general form* to left derived functors and projective resolutions. By a dualization process, the stipulation of enough injective objects in a given category can be transformed to the stipulation of enough projective objects in its dual category. However, at least one of these two propositions has still to be *proved* for the duality principle to have any effect.

Moreover, the duality principle does not mean that one can choose for *one single* functor whether one wants to work with injective or projective resolutions (such a choice being possible only for so-called *balanced* functors); one can choose simply whether one derives the functor itself or rather its dual functor.

From Grothendieck's Tohoku paper onwards, category-theoretic dualities haven't any longer the aim to get two theorems by one proof; rather, they generalize the situation in vector space theory (study an object by studying its dual). As we will see, there is still an introduction of "ideal elements" in these cases, but in a different way. These ideal elements in Grothendieck's mathematics aren't introduced any longer to obtain a *salva veritate*-duality. So what is the epistemic gain one has in mind instead?

6 Grothendieck, spaces and functions, and the epistemic gain

We take the following as a basic methodological principle of modern mathematics: In order to learn something about an object which could be called a space, one studies the functions defined on that space and having values in a similar but "simpler" space (concrete duality in the sense of Lawvere-Rosebrugh). The elements of dual vector spaces and character groups are representations of certain other spaces or groups with values in some particularly simple space or group. This is similar with cohomology groups at the level of chain complexes being dualised to cochain complexes.

Similar strategies occur in functional analysis, both in the case of the Banach-Alaoglu theorem and of Gelfand's representation theorem for Banach algebras. For instance, Gelfand substituted an algebra of functions on a space for an arbitrary Banach algebra A by defining a mapping $A \to C(X)$, where X is Spec(A), the compact Hausdorff space of all multiplicative linear forms of A (which can also be interpreted as the set of maximal ideals of A equipped with a certain topology).[15]

The mathematical details of the definition of this topology actually are important for our purpose: Both in the situation of the Banach-Alaoglu theorem and of the Gelfand representation theorem, you have to choose the weak* topology to get the very important property of compactness—and this topology is related from the outset to the concept of dual vector space. Thus, not only is the space X used in the theorem a subset of the space dual to A as a vector space, but it comes equipped with a topology closely related to this dual space.

[15] The mapping $A \to C(X)$ is actually defined as the composite mapping $A \to \mathrm{Spec}(A) = X \to C(X)$; this is an isomorphism which sends $x \in A$ to a map from $X = \mathrm{Spec}(A)$ to $\mathbb{C}$, which is evaluating $f \in \mathrm{Spec}(A)$ at x. Spec(A) is the space of characters of A, i.e., the set of its continuous characters, that is continuous nonzero linear homomorphisms into the field of complex numbers, and canonically equipped with a so-called spectral topology. Elements of Spec(A) are a kind of function on A, so can be evaluated against a member of A.

Summing up, we find that there are at least three levels on which a given algebra is made more accessible by representing it as a $C(X)$, and that on at least two of these levels, vector space duality plays a central role:

- The first level is that an "arbitrary" algebra is replaced by a space of functions (we know now what the elements of the algebra are).
- The second level is that we study a complicated object (an element of the algebra) by studying its values under linear forms, and these values are simple objects (elements of the base field);
- But the usefulness of the second idea depends largely on the properties of X (its compactness) furnished by the consideration of topologies related to the dual space.

The study of elements of Banach algebras by studying their values under linear forms actually incorporates a very subtle "duality" (in the sense of an exchange of parts of the language), namely the idea to change the roles in the expression $f(x)$, *i.e.*, keep x fixed and vary f instead.[16] This observation allows us to elaborate a bit on the matter of "simplicity". There would be no point in saying that in $C(X)$, the X is simpler than A, given that it is a space of certain linear forms on A. $\mathbb{C}$ (the dualizing object, the object in which the functions of $C(X)$ take values) is simpler. The idea rather is: replace one complicated object (an element x of A) by *many* simple objects (the values of x under all these linear forms); *this* is the motivation to keep x fixed and vary f instead. Thus, dual objects should not be thought of as being more accessible than original objects (this being true only of the dualizing object); rather, they *make* accessible the original objects—and *this* is the epistemic gain, of course.

Functional analysis up to Gelfand's result constitutes a first stage of our history of how duality of space and function allowed for mathematical progress. But there was a second, overtly category-theoretic stage, when Grothendieck (having begun his mathematical career in the field of functional analysis) started to adapt Gelfand's strategy for use in algebraic geometry. This has nicely been exposed by Cartier in [Car01] p.397. Grothendieck's strategy very closely parallels Gelfand's: he substituted functions for algebraic objects (the elements of an arbitrary commutative ring A) by mapping $A \to \Gamma(X, \mathcal{O})$ where $X = \mathrm{Spec}(A)$, the set of maximal ideals of A equipped with the Zariski topology, $\mathcal{O}$ a sheaf defined on that space and Γ the section functor of that sheaf, yielding a set of functions as values.

[16]See [BML65] p.185, for instance. An application of this fundamental idea in the field of Hopf Algebras used as physical models is described in [Cor03] p.24.

We think that this line of development (transporting ideas from functional analysis to algebraic geometry by stressing the category-theoretic aspect) played the major role in the development of duality as a central theme in structural mathematics while the Mac Lane-Buchsbaum-Tohoku line of development (the axiomatic approach to duality) was far less important. While Mac Lane and Buchsbaum pursued a two theorems by one proof-strategy, Grothendieck pursued the strategy to prove a theorem by working in a dually equivalent framework where the corresponding proof is easier to get.

To understand this point, note that in all cases discussed so far of passage from an original space (considered as an object of some category) to a space of functions, arrows are reversed. The new objects are dual in the sense that they are objects of a dually equivalent category. Here, the epistemic gain seems to occur on the first of the three levels discussed above: instead of studying "remote", "abstract" objects (like arbitrary Banach algebras or arbitrary commutative rings), we have the result that these categories are dually equivalent to categories of function spaces of certain types; thus we can study these more "accessible" objects instead. But a more detailed study of what Grothendieck actually did might show that there are other levels in his case as well.

If Grothendieck's approach to mathematics can be characterized by an overall strategy or method, such a characterization certainly would involve the theme of analogy between different fields of mathematics. It is clear, for instance, that Grothendieck's algebraic geometry heavily relies on Dedekind's idea of an analogy between number and function.[17] In fact, we can find repeatedly that Grothendieck aimed at making analogies complete and therefore enlarged the category he was working in. The example alluded to by Cartier above is the analogy between algebraic geometry and commutative algebra, made complete by the passage from varieties to affine schemes. Another case would be the analogy between Galois theory and the theory of coverings, made complete by the introduction of Grothendieck topologies. The completion of the analogy was in each case achieved by (1) determining first the categories corresponding to the mathematical theories involved and (2) modifying one of them as much as necessary to obtain a pair of (dually) equivalent categories—whereby problems in one category become solvable by transfer to the other category.[18] So we can pass from something more "remote" to something more "accessible" by dual equivalence. And the modification of the cat-

[17] See [Cor03] section 4.3. We might add that in the interaction of the concepts "space" and "function", as present in the study of functions defined on surfaces, the epistemological duality of object and tool is particularly visible. Riemann introduced his surfaces in the study of (abelian) functions while later on functions have been used to study Riemann surfaces.

[18] See [GM96] p.76 for more examples.

egory studied originally in order to obtain the dual equivalence with some "tame" category is the introduction of ideal elements in this case.

Rather as the addition of ideal elements in the projective case led to a geometry with pleasanter features, namely, self-duality, many constructions of Grothendieck were motivated by the idea that rather than work in a category of nice objects, which often itself doesn't possess nice qualities, it is better to 'complete' into a nice category. For example, we embed a category into the category of presheaves on it, which is the free cocompletion. This is an extension of Cayley's theorem, embedding a group G in the category of G-sets, as the group acting on its underlying set. We can recover G from this category of G-sets, and this is part of a very large story of Tannaka duality, whereby one recovers an algebraic entity from a category of 'geometric' representations. This extends even to a duality between theories and their categories of models (see [AF]).

Let us relate the rather vague notions of remoteness, accessibility and niceness ascribed to Grothendieck's strategy in what precedes to the category-theoretic notion of concreteness discussed in the preceding section. The following quote illustrates the idea that there's something more manageable on the concrete side of a duality.[19]

> [...] for a given category A, the existence of a duality with some concrete category B might give considerable additional information about A: if e.g. B has limits – often quite obvious constructions in concrete categories – the category A automatically will have colimits which, moreover, can be described explicitly (for A algebraic usually a difficult task) as S-images of limits in B. [PT91] pp. 111-112

Such features are among those making the category A "nice".

7 Conclusions

We have seen in sections and that in the settings of Mac Lane and Buchsbaum, category theoretic duality was actually used for enhancing (doubling) the set of proved theorems by linguistic exchange. In these cases, dual objects tended to be more ideal (epistemologically more remote) than original ones. On the other hand, section suggests that when category theoretic duality is employed in the "space-functions" way, the key issue seems to be that the dualizing object is less ideal than the original objects.

[19] The S is just one of the adjoints involved in the dual equivalence.

As we mentioned, this paper marks only the first steps towards a treatment of the internal epistemological and ontological features of duality in mathematics. First of all, the paper is meant to be largely descriptive; we didn't intend to criticise in Mik Detlefsen's sense the epistemic status of the knowledge gained by the uses of duality described. And the descriptive work is not finished; for instance, a finer analysis in our opinion should focus on the fact that different identification criteria are used in each case.

Moreover, further work should look beyond the issue of having one side more concrete than the other. For example, duality may relate different structures of the same domain to each other, some of which are easier to work with. For example, in the case of Fourier analysis, the convolution of two functions is transformed into a multiplication. A more modern and involved example occurs with mirror symmetry for Calabi-Yau manifolds, where the Kähler and complex structures are exchanged as one passes between mirror manifolds. It turns out that to perform calculations on one of these structures for a particular manifold, it may be easier to work on the other structure on the mirror.

Bibliography

[AF] Steve Awodey and Forssell. First-order logical duality. http://arxiv.org/abs/1008.3145.

[BG99] James C. Becker and Daniel Henry Gottlieb. A history of duality in algebraic topology. In *[Jam99]*, pages 725–745. 1999.

[BM10] Lise Bioesmath-Martagon. *Eléments d'une biographie de l'espace projectif*. Presses universitaires de Nancy, 2010.

[BML65] Garrett Birkhoff and Saunders Mac Lane. *A survey of modern algebra*. MacMillan, 1965.

[Buc55] David A. Buchsbaum. Exact categories and duality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80:1–34, 1955.

[Car01] Pierre Cartier. A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. the evolution of concepts of space and symmetry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 38(4):389–408, 2001.

[CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.

[Cor03] David Corfield. *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge Univ. Press, 2003.

[Cor10] David Corfield. Lautman et la réalité des mathématiques. *Philosophiques*, 37(1):95–109, 2010.

[Cox61] H. S. M. Coxeter. *The real projective plane*. Cambridge Univ. Press, 2nd edition, 1961.

[EML45] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58:231–294, 1945.

[ES52] Samuel Eilenberg and Norman E. Steenrod. *Foundations of algebraic topology*. Princeton University Press, 1952.

[GBGL08] Timothy Gowers, June Barrow-Green, and Imre Leader, editors. *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton University Press, 2008.

[GM96] S.I. Gelfand and Y.I. Manin. *Methods in homological Algebra*. Springer, 1996.

[Gro57] Alexander Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J.*, 9:119–221, 1957.

[Hah27] Hans Hahn. Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. *J. Reine Angew. Math.*, 157:214–229, 1927. JFM **53** 369.

[Hal40] P. Hall. Verbal and marginal subgroups. *J. Reine Angew. Math.*, 182:156–157, 1940.

[Jam99] I. M. James, editor. *History of Topology*. North–Holland, Amsterdam, 1999.

[Krö07] Ralf Krömer. *Tool and object. A history and philosophy of category theory*, volume 32 of *Science Network Historical Studies*. Birkhäuser, Basel, 2007.

[LR03] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics*. Cambridge Univ. Press, 2003.

[ML50] Saunders Mac Lane. Duality for groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56:485–516, 1950.

[Nag39] Ernst Nagel. The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. *Osiris*, 7:143–224, 1939. JFM **65** 1091, Daub 2261, MR1 S.34, Zbl.022.37803.

[PT91] H.-E. Porst and W. Tholen. Concrete dualities. In H. Herrlich and H.-E. Porst, editors, *Category Theory at Work*, pages 111–136. Heldermann Verlag, Berlin, 1991.

Adressen der Autoren

David Corfield
Department of Philosophy
Cornwallis North West
University of Kent
Canterbury
Kent CT2 7NF, United Kingdom
D.Corfield@kent.ac.uk

Anna-Sophie Heinemann
Universität Paderborn
Fakultät für Kulturwissenschaften
Institut für Humanwissenschaften:
Philosophie
Warburger Str. 100
D-33098 Paderborn
annasoph@mail.uni-paderborn.de

Philipp Karschuck
Université de Fribourg
Av. Europe 20
CH-1700 Fribourg, Suisse
philip-emanuel.karschuck@unifr.ch

Ralf Krömer
Arbeitsgruppe Didaktik und
Geschichte der Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Funktionalanalysis und
Philosophie der Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Matthias Wille
Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Geisteswissenschaften
Institut für Philosophie
D-45117 Essen
matthias.wille@uni-due.de

Ingo Witzke
Seminar für Mathematik
und ihre Didaktik
Universität zu Köln
Gronewaldstr. 2
D-50931 Köln
Ingo.Witzke@uni-koeln.de