

**Neue Lösungsstrategien für ℓ_1 -Minimierungsprobleme
mit Kalman-Filtern**

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von
Dipl. - Math. Dunja Alexandra Hage

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen
Siegen 2020

Betreuer und erster Gutachter
Prof. Dr.-Ing. Otmar Loffeld



Zentrum für Sensorsysteme
Universität Siegen

Zweiter Gutachter
Prof. Dr. Thorsten Raasch
Department Mathematik
Universität Siegen

Tag der mündlichen Prüfung
10.12.2020

Teile dieser Dissertation wurden veröffentlicht:

„New Results on Sparse Signal Recovery via Kalman-Filter-based ℓ_1 Minimization“,

Hage, D. A.; Heredia Conde, M.; Loffeld, O.,

IEEE Elsevier Signal Processing, Januar 2020, doi: 10.1016/j.sigpro.2020.107487.

„Convergence Accelerator for ℓ_1 -Minimizing Kalman Filter“,

Hage, D. A.; Heredia Conde, M.; Loffeld, O.,

5th International Workshop on Compressed Sensing applied to Radar, Multimodal Sensing, and Imaging (CoSeRa 2018), Siegen, Germany, September 2018.

„Some new Results on ℓ_1 Minimizing Nullspace Kalman Filtering“,

Loffeld, O.; Hage, D. A.; Heredia Conde, M.; Wang, L.,

EUSAR 2018; 12th European Conference on Synthetic Aperture Radar, Aachen, Germany, pp. 1–6, 2018.

„Some New Results on ℓ_1 -Minimizing Nullspace Kalman Filtering for Remote Sensing Applications“,

Loffeld, O.; Hage, D. A.; Heredia Conde, M.; Wang, L.,

arXiv preprint arXiv : 1808.06538, 2018.

„A null-space-based genetic algorithm for constrained ℓ_1 minimization“,

Heredia Conde, M.; Hage, D.; Loffeld, O.,

IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), Bilbao, Spain, pp. 294–299, 2017.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin im ZESS - Zentrum für Sensorsysteme - an der Universität Siegen.

Mein besonderer Dank gilt an erster Stelle meinem Doktorvater Prof. Dr. O. Loffeld. Er weckte in mir viel Leidenschaft für das Forschungsgebiet Compressed Sensing. Nicht nur, sondern auch seine unschätzbaren Ideen im Hinblick auf das Kalman-Filter haben mein starkes Interesse geweckt, die beiden Themengebiete in meiner Arbeit zu vereinen. So entstanden neue auf dem Kalman-Filter basierende ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen für Compressed Sensing. Sehr dankbar bin ich für seine Offenheit und Großzügigkeit in Bezug auf meine Kreativität im wissenschaftlichen Kontext. In jeglicher Hinsicht gab er mir reichlich schöpferische Freiheiten.

Herrn Prof. Dr. T. Raasch danke ich herzlichst für seine sehr konstruktiven Ideen und informativen Unterhaltungen, die stets dazu geführt haben, dass sich meine Begeisterung für die Bearbeitung der Problematik zunehmend steigerte.

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. M. Möller und Herrn Prof. Dr. J. Ender für ihre Beiträge im Rahmen des Promotionsverfahrens. Speziell meinem Kollegen Dr. M. Heredia Conde möchte ich gerne für die angenehmen Diskussionen sowie für die wertvolle Unterstützung während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin danken. Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter im ZESS, insbesondere Frau Niet-Wunram, gebührt ein Dank für die angenehme Atmosphäre und die unkomplizierte Zusammenarbeit.

Vielen Freunden und Bekannten danke ich für ihr Verständnis und ihre Hilfsbereitschaft.

Einen wesentlichen Anteil für das Gelingen meiner Arbeit trägt meine Familie, insbesondere mein Mann, der mir die notwendige Unterstützung durch viel Rücksichtnahme und Verständnis gegeben hat. Meinen drei Kindern danke ich für die Mitwirkung der Balance zwischen Familie und Arbeit, indem sie ausgesprochen gut die teils sehr einfalls- und abwechslungsreichen Tagesabläufe geschaffen haben.

Neue Lösungsstrategien für ℓ_1 -Minimierungsprobleme mit Kalman-Filtern

In vielen Problemen müssen hochdimensionale diskrete Signale aus verrauschten und oft unterabgetasteten Daten rekonstruiert werden, was die Problematik der Lösung von nominal unterdeterminierten, rauschbelasteten Gleichungssystemen aufwirft. Die Theorie der komprimierten Abtastung besagt (und beweist), dass solche Signale tatsächlich unter der Annahme der Dünnbesetztheit rekonstruiert werden können. Auf dem breiten Forschungsgebiet, genannt Compressed Sensing – dessen Anwendungen beispielsweise in der Medizin (MRT), Hochfrequenz-Kommunikationstechnologie und Radar liegen – existieren bereits viele Algorithmen zur Rekonstruktion von sparsen Signalen. Eine der wichtigsten Eigenschaften ist die so genannte Nullraum-Eigenschaft der Sensormatrix. Sie stellt sicher, dass die sparse oder kompressible Darstellung durch die ℓ_1 -Minimierung wiederhergestellt werden kann, die tatsächlich entweder durch konvexe Optimierungsansätze, wie es der klassische Weg ist, oder alternativ durch schätztheoretische Ansätze, z. B. durch das erweiterte linearisierte Kalman-Filter, realisiert werden kann.

In dieser Arbeit etablieren wir neue Ansätze zur Rekonstruktion sparsener Signale durch ℓ_1 -Minimierung mit einem Kalman-Filter. Das Kernstück unseres Kalman-Filters beruht auf einer einfachen Idee. Auf Grundlage einer partikulären Lösung $\hat{\mathbf{x}}_p$ (es existieren unendlich viele Lösungen) schätzt das Kalman-Filter in jeder Iteration eine weitere Lösung aus dem Nullraum der Messmatrix, sodass die Summe beider Vektoren eine Lösung $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}}$ mit reduzierter ℓ_1 -Norm erreicht. Im ersten Teil der Arbeit wird im Kalman-Filter-Algorithmus, mit Hilfe von Konvergenzbeschleunigungsverfahren, eine konvergierende Folge konstruiert, deren Grenzwert einen Lösungsvektor liefert, der mit der Lösung des primal-dualen Algorithmus für ℓ_1 -Minimierung von Chambolle & Pock übereinstimmt. Die Konvergenzbeschleunigungsverfahren resultieren aus dem Δ^2 -Grundverfahren von Aitken. Für das Lösen von ℓ_1 -Minimierungsproblemen werden zum Auffinden der Lösung vermehrt sogenannte Thresholdingverfahren eingesetzt. Im zweiten Teil der Arbeit stellen wir das Kalman-Filter mit einem, den Anforderung genügenden, externen Thresholdingverfahren vor. Mit diesem externen Thresholding, welches nicht direkt das Kalman-Filter beeinflusst, können wir sparse Signale sehr schnell rekonstruieren. Weitere Untersuchungen von rauschbehafteten Signalen mit dem modifizierten Kalman-Filter bestätigen die Resultate in Bezug auf Rekonstruktionsfehler, Rekonstruktionszeit, ℓ_0 -Norm und Supportfehler gegenüber den gängigen bekannten ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen, wie z. B. der primal-dual Algorithmus für ℓ_1 -Minimierung von Chambolle & Pock und der Orthogonal Matching Pursuit.

New Solution Strategies for ℓ_1 -Minimization Problems with Kalman-Filters

In many problems, high-dimensional discrete signals need to be reconstructed from noisy and often undersampled data, raising the issue of solving nominally underdetermined noise-contaminated systems of equations. The theory of compressed sensing states (and proves) that such signals can in fact uniquely be reconstructed under the sparsity assumption. In the broad research field of compressed sensing – whose applications are found, for example, in medicine (MRT), radar and high-frequency communication technology, many algorithms already exist for the reconstruction of sparse signals. One of the most important properties is the so-called null space property of the sensor matrix. It ensures that the sparse or compressible representation can be recovered by the ℓ_1 -minimization, which can in fact be realized either by convex optimization approaches, which is the classical way, or alternatively by estimation-theoretic approaches, e.g. by extended linearized Kalman-filters, which is the approach analyzed in this paper.

In this work new results for the reconstruction of sparse signals by ℓ_1 -minimization are established with such a Kalman-filter. The core of our Kalman-filter is based on a simple idea. On the basis of a particular solution \mathbf{x}_p (there are infinitely many solutions), the Kalman-filter estimates another solution from the null space room of the measurement matrix in each iteration step, so that the sum of both vectors achieves a solution $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_{\mathcal{N}}$ with a reduced ℓ_1 -norm. In the first part, the Kalman-filter uses convergence acceleration techniques to construct a convergent sequence whose limit value provides a solution, which corresponds to Chambolle & Pock's primal-dual algorithm solution. The convergence acceleration methods result from the Δ^2 -basic process of Aitken.

For solving ℓ_1 -minimization problems so-called thresholding methods are increasingly used to find the solution. In the second part of the thesis the Kalman-filter is presented with an external thresholding method. With this external thresholding, which does not directly affect the Kalman-filter, we can now reconstruct sparse signals very quickly. Further investigations of noise-affected signals with the modified Kalman-filter confirm the results in terms of sparse recovery error, ℓ_0 -norm of the estimates, support mismatch, and recovery time compared to the usual known ℓ_1 -minimization algorithms, e.g., primal-dual algorithm of Chambolle & Pock and Orthogonal Matching Pursuit.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungen	xv
Tabellen	xvii
Verzeichnis der Algorithmen	xix
Abkürzungsverzeichnis	xxi
Symbolverzeichnis	xxiii
1 Einleitung	1
1.1 Einleitung und Motivation	1
1.2 Gliederung dieser Arbeit	5
2 Mathematische Grundlagen	7
2.1 Allgemeines	7
2.1.1 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	8
2.1.2 Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	10
2.1.3 Regularisierung	12
2.2 Einordnung von Compressed Sensing im mathematischen Kontext	13
3 Compressed Sensing	15
3.1 Forschungsstand	15
3.2 Inkohärenz, RIP und NSP	16
3.2.1 Inkohärenz	16
3.2.2 Restricted Isometry Property (RIP)	18
3.2.3 Null Space Property - Nullraumeigenschaft (NSP)	19
3.3 Beziehungen zwischen spark, gegenseitiger Kohärenz, RIP und NSP	22
3.4 Sparse Rekonstruktion	25
3.5 Rekonstruktionsalgorithmen für ℓ_1 -Minimierungsprobleme	28
3.5.1 Übersicht aktueller Algorithmen	28
3.5.2 Primal-dual-Algorithmus von Chambolle & Pock (C&P)	31
3.5.3 Orthogonal Matching Pursuit (OMP)	33
4 Kalman-Filter	35
4.1 Mathematische Beschreibung	36
4.1.1 Systemmodell	36
4.1.2 Messmodell	37

4.2	Herleitungsvarianten des Kalman-Filter-Algorithmus	38
4.2.1	Ableitung der Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz orthogonaler Projektionen	39
5	Erweitertes Kalman-Filter für ℓ_1-Minimierungsproblem	41
5.1	Die synthetische Formulierung	41
5.1.1	Beispiele	44
5.1.2	Modifiziertes Kalman-Filter	47
5.1.2.1	Beispiele	47
5.2	Die analytische Formulierung	50
6	Kalman-Filter für ℓ_1-Minimierungsproblem (Nullraum-Variante)	53
6.1	Allgemeine Funktionsweise	53
6.2	LQ -Zerlegung der Sensingmatrix für die Berechnung einer Startlösung	57
6.3	Konvergenzbeweis des Kalman-Filters	60
7	Konvergenzbeschleunigungsverfahren	61
7.1	Motivation	61
7.2	Δ^2 -Grundverfahren von Aitken	62
7.3	Extrapolationsverfahren nach der Δ^2 -Aitken-Methode	70
8	Kalman-Filter mit integriertem Konvergenzbeschleunigungsverfahren	73
8.1	Allgemeine Funktionsweise	73
8.2	Untersuchungen des Kalman-Filters und des Kalman-Filters mit integri- ertem Konvergenzbeschleunigungsverfahren (KF-Aitken)	75
8.3	Vergleich zwischen KF-Aitken und dem primal-dual-Algorithmus von Chambolle & Pock (C&P)	77
8.3.1	Auswertungen mit den Donoho-Tanner-Graphen	77
8.3.1.1	Rekonstruktionsfehler	78
8.3.1.2	Rekonstruktionszeit	78
8.3.1.3	Stabilität	79
9	Erweitertes Kalman-Filter mit einem externen Thresholding (KF-ET)	81
9.1	Allgemeine Beschreibung	81
9.2	Untersuchungen des Kalman-Filters mit externem Thresholding	87
9.3	Untersuchungen des Kalman-Filters mit externem Thresholding mit verrauschten Daten	90
9.3.1	Maximum-Likelihood-Schätzer und Cramér-Rao-Schranke	91
9.3.2	Numerische Experimente	96
9.3.2.1	Beispiele mit Streuung σ überlagertes Rauschen, Ver- gleich mit der Cramér-Rao-Schranke	96
9.3.2.2	Beispiele mit überlagertem Rauschen in Abhängigkeit des Signal- und Rauschverhältnisses	101
9.3.2.3	Abhängigkeit vom Support	106

10	Vergleiche der vorgestellten Algorithmen mit verrauschten Daten	111
10.1	Rekonstruktionsfehler	114
10.2	Fehler in der ℓ_0 -Norm	116
10.3	Supportfehler	117
10.4	Rekonstruktionszeit	119
11	Anwendungen mit entfernungsmessendem System	121
11.1	Aufbau und Erläuterung des Experiments	121
11.2	Anwendungsbeispiele	124
12	Zusammenfassung und Ausblick	131
12.1	Zusammenfassung	131
12.2	Ausblick	134
Anhang A	Definition von Normen und Skalarprodukt	137
Anhang B	Normierung der Spaltenvektoren einer Matrix	139
Anhang C	Ableitung der Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz orthogonaler Projektionen	141
Anhang D	Beweis der Konvergenz des Kalman-Filters	147
Anhang E	Herleitung Matrixinversionslemmata	151
Anhang F	Stochastische Analyse - Schätzfehlerkovarianzmatrix	155
	Literaturverzeichnis	157

Abbildungen

3.1:	Hard-Thresholding	30
3.2:	Soft-Thresholding	32
5.1:	Beispiel 1: ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors mit Algorithmus 3. Die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung ist rot dargestellt. Die Messmatrix hat die Dimension 60×80 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$. Für die Initialisierung der Parameter wurde $r^{(0)} = 0,73$ sowie $\hat{r} = 0,04$ gewählt.	44
5.2:	Beispiel 1: Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors aus Abbildung 5.1	45
5.3:	Beispiel 2: ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors mit Algorithmus 3. Die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung ist rot dargestellt. Die Messmatrix hat die Dimension 60×80 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$. Für die Initialisierung der Parameter wurden $r^{(0)} = 0,45$ sowie $\hat{r} = 0,05$ gewählt.	46
5.4:	Beispiel 2: Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors aus Abbildung 5.3	46
5.5:	Beispiel 1: ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors mit dem modifizierten Algorithmus. Die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung ist rot dargestellt. Die Messmatrix hat die Dimension 80×128 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$	48
5.6:	Beispiel 1: Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors aus Abbildung 5.5	48
5.7:	Beispiel 2: ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors mit dem modifizierten Algorithmus. Die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung ist rot dargestellt. Die Messmatrix hat die Dimension 20×128 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$	49
5.8:	Beispiel 2: Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors aus Abbildung 5.7	49
8.1:	Beispiel für eine schlechte Linearisierung: die Ableitungen variieren innerhalb des PCR [77].	75
8.2:	ℓ_1 -Norm vom EKF-Algorithmus 4 und KF-Aitken-Algorithmus 5, sowie die exakte ℓ_1 -Norm der Lösung. Die Messmatrix hat die Dimension 80×128 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$	76

8.3:	ℓ_1 -Norm vom EKF-Algorithmus 4 und KF-Aitken-Algorithmus 5, sowie die exakte ℓ_1 -Norm der Lösung. Die Messmatrix hat die Dimension 160×256 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 15$	76
8.4:	Relativer ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler des beschleunigten Algorithmus KF-Aitken und C&P mit 250 und 1000 Iterationen.	78
8.5:	Rekonstruktionszeit vom KF-Aitken und C&P nach 100 bzw. 1000 Iterationen.	79
8.6:	Numerische Differenzierung des relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehlers von KF-Aitken und C&P.	80
9.1:	Relativer ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP mit 200 Iterationen und einheitlicher Skala.	88
9.2:	Relativer ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP mit 200 Iterationen mit unterschiedlicher Skalaeinteilung.	88
9.3:	Rekonstruktionszeit in [sec] von KF-ET, C&P und OMP.	88
9.4:	KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]	97
9.5:	KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 250$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]	98
9.6:	KF nach Algorithmus 6, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]	98
9.7:	KF nach Algorithmus 6, Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 250$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]	99
9.8:	KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]	102
9.9:	KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 250$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]	103
9.10:	KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56], vertikale Achse in nicht-logarithmierte Darstellung	104
9.11:	KF nach Algorithmus 6, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]	105
9.12:	KF nach Algorithmus 6, Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 250$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]	105

9.13:	KF nach Algorithmus 6, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56], vertikale Achse in nicht-logarithmierte Darstellung	106
9.14:	Beispiel (I) 192×256 -Matrix, SNR = -10 dB, KF nach Algorithmus 6, KF-ET nach Algorithmus 7, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56] .	107
9.15:	Beispiel (I) 192×256 -Matrix, SNR = 0 dB, KF nach Algorithmus 6, KF-ET nach Algorithmus 7, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56] .	107
9.16:	Beispiel (I) 192×256 -Matrix, SNR = 10 dB, KF nach Algorithmus 6, KF-ET nach Algorithmus 7, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56] .	108
9.17:	Beispiel (I) 192×256 -Matrix, SNR = 100 dB, KF nach Algorithmus 6, KF-ET nach Algorithmus 7, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56] .	108
10.1:	Vergleich von CRB und dem quadratischen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP unter Betrachtung verschiedener Rauschvarianzen. Die Messmatrix hat die Dimension 192×256 . Die Sparsity des Signals ist $s = 64$. Die Anzahl der Iteration ist auf 200 festgelegt.	112
10.2:	Vergleich von CRB und dem quadratischen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP unter Betrachtung verschiedener Rauschvarianzen. Die Messmatrix hat die Dimension 60×80 . Die Sparsity des Signals ist $s = 20$. Die Anzahl der Iteration ist auf 300 festgelegt.	113
10.3:	Relativer ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken mit 200 Iterationen.	115
10.4:	Fehler in der ℓ_0 -Norm der Schätzer von KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken mit 200 Iterationen.	117
10.5:	Support-Abweichungen von KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken mit 200 Iterationen.	119
10.6:	Rekonstruktionszeit [sec] von KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken mit 200 Iterationen.	120
11.1:	Skizze des Experimentaufbaus	122
11.2:	Aufbau des Experiments im Zentrum für Sensorsysteme	122
11.3:	Aufnahme der ToF-Kamera mit einer Frequenz von 20 MHz	124
11.4:	Identisch mit Abbildung 11.3, jedoch mit Kennzeichnung (in Rot) der Pixelmenge, für die die Rekonstruktion des Zustandsvektors einen von Null verschiedenen Eintrag besitzt.	125
11.5:	Berechnung des Abstands zwischen Kamera und Folie	128

Tabellen

9.1:	Beispiele für die Rekonstruktion mit dem ℓ_1 -minimierenden Kalman-Filter mit externem Thresholding (KF-ET), das Abbruchkriterium ist $\varepsilon = 10^{-10}$	87
9.2:	Vergleich der berechneten Sparsity für das Beispiel (I) 192×256 -Matrix mit Sparsity $s = 64$	100
9.3:	Vergleich der berechneten Sparsity für das Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix mit Sparsity $s = 250$	100
9.4:	Vergleich zwischen CRB und dem Fehler $\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\ _2^2$ von KF-ET und KF in Abhängigkeit des SNR-Wertes	109
11.1:	Berechnung der Sparsity vom rekonstruierenden Zustandsvektor für verschiedene Pixel mit einer Reflexion ($s = 1$) mit Algorithmus 1 (C&P), Algorithmus 2 (OMP) und Algorithmus 7 (KF-ET) sowie der Entfernung nach Gleichung (11.2). Die Matrix ist eine diskrete partielle Fouriermatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{7 \times 250}$	126
11.2:	Ausführungen wie in Tabelle 11.1, jedoch mit der Sensingmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{7 \times 50}$	126
11.3:	Berechnung der Sparsity vom rekonstruierenden Zustandsvektor für zwei Pixel mit Reflexion durch die rechtsseitig befestigte Folie (Sparsity $s = 2$) und berechneter Entfernung nach Gleichung (11.2) mit Algorithmus 1 (C&P), Algorithmus 2 (OMP) und Algorithmus 7 (KF-ET). Die Matrix ist eine diskrete partielle Fouriermatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{7 \times 250}$	128
11.4:	Berechnung der Sparsity vom rekonstruierenden Zustandsvektor für zwei Pixel mit Reflexion durch die linksseitig befestigte Folie (Sparsity $s = 2$) und berechneter Entfernung nach Gleichung (11.2) mit Algorithmus 1 (C&P), Algorithmus 2 (OMP) und Algorithmus 7 (KF-ET). Die Matrix ist eine diskrete partielle Fouriermatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{7 \times 250}$	129

Verzeichnis der Algorithmen

1	Primal-dual-Algorithmus von Chambolle & Pock (C&P)	33
2	Orthogonal Matching Pursuit (OMP)	34
3	ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter	43
4	ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter im Nullraum (EKF)	55
5	Beschleunigtes ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter im Nullraum (KF-Aitken)	74
6	angepasstes ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter im Nullraum (KF)	86
7	ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter mit externem Thresholding (KF-ET) .	86

Abkürzungsverzeichnis

CS	Compressed Sensing	7
BP	Basis Pursuit Problem	14
RIP	Restricted Isometry Property.....	18
NSP	Null Space Property	19
BP-noisy	Basis Pursuit Problem - noisy	29
BPDN	BP-denoising	29
MP	Matching Pursuit.....	30
OMP	Orthogonal Matching Pursuit	30
SP	Subspace Pursuit	30
CoSaMP	Compressive Sampling Matching Pursuit.....	30
IHT	Iterative Hard-Thresholding	30
SBL	sparse Bayesian learning	31
MAP	Maximum-a-posteriori	31
C&P	Chambolle & Pock's primal-dual Algorithmus	31
EKF	iterativ erweiterten linearisierten Kalman-Filter	53
WLS	Gewichtete-Kleinste-Quadrate-Schätzer (weighted-least-squares-estimator).....	59
CRB	Cramér-Rao-Schranke.....	59
MLS	Maximum-Likelihood-Schätzer	59
PCR	Wahrscheinlichkeitskonzentrationsgebiet (probability concentration region)	74
KF-Aitken	Kalman-Filter mit Aitken-basierter Konvergenzbeschleunigung.....	75
RMSE	Wurzel aus der mittleren Fehlerquadratsumme (root-mean-squared error)	76
DTG	Donoho-Tanner-Graphen.....	77
BCASC	best complex antipodal spherical codewords.....	77
KF-ET	Kalman-Filter mit externem Thresholding	81
MSE	mittlere quadratische Abweichung (mean-squares-error).....	90
KF	Kalman-Filter ohne externem Thresholding	99
SNR	signal-to-noise ratio	101
AWGN	additive gaussian white noise	101

Symbolverzeichnis

$(\cdot)^\dagger$	Moore-Penrose-Pseudoinversen einer Matrix.....	54
$[n]$	$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$	19
$\#$	Kardinalität	7
μ	Lagrange-Parameter bzw. Lagrange-Multiplikator	11
\mathbf{A}^H	adjungierte Matrix von \mathbf{A} , $\mathbf{A}^H = (\bar{\mathbf{A}})^T$	18
\mathbf{A}^T	Transponierte der Matrix \mathbf{A}	9
$\mathbf{E}_{\mathcal{N}(\cdot)}$	eine Basis vom Nullraum der Matrix.....	54
\mathbf{J}	Funktional	9
\mathbf{Q}	Kovarianzmatrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$	36
\mathbf{R}	Rauschkovarianzmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$	37
\mathbf{W}	diagonale Matrix mit positiven Einträgen	10
Δ	aufsteigende Differenz.....	64
$\delta^{(k,j)}$	Kronecker-Delta	36
δ_s	Parameter mit $\delta_s \in (0, 1)$	19
δ_{2s}	Parameter mit $\delta_{2s} < 1$	19
$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}$	partielle Ableitung der Funktion f nach der Variable x	8
λ	Parameter mit $\lambda > 0$	12
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt	13
\mathcal{L}	Lagrange-Funktional	11
\mathcal{M}	n -dimensionaler linearer Unterraum	141
$\mathcal{N}(0, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2	36
$\mathcal{N}(\cdot)$	Nullraum einer Matrix.....	19
\mathcal{O}	linearer Operator	141
$\mu(\cdot)$	Gegenseitige Kohärenz (engl. Mutual Coherence).....	17
$\mu(\cdot, \cdot)$	Kohärenz	17

∇	Gradient einer Funktion	8
Ω	Analyse-Operator	50
σ	Gewichtung der Rauschanteile	97
Σ_s	Menge aller s -sparsen Vektoren	8
$\sigma_s(\mathbf{x})_1$	ℓ_1 -Fehler der besten s -term Approximation von \mathbf{x}	20
$\text{tr}(\cdot)$	Spur einer Matrix	81
C, C_0, C_1	positive Konstanten	26
H	Hard-Thresholding-Operator	30
S	Soft-Thresholding-Operator	32
s	Anzahl der von Null verschiedenen Elemente eines Vektors	8
T	Supportmenge	7
T^C	komplementäre Menge einer Menge T	19

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einleitung und Motivation

Compressed Sensing (CS) ist ein Forschungsgebiet in der rechnergestützten Signalverarbeitung. In den letzten dreizehn Jahren ist ein starker Zuwachs in den intensiven Forschungsaktivitäten auf und um das Gebiet CS zu verzeichnen. Erwähnt wurde CS erstmals von Donoho [1] sowie Candès, Romberg und Tao [2] in zwei – von einander unabhängigen – Veröffentlichungen im Jahr 2006. Diese Autoren legten den Grundstein für das schnell wachsende Forschungsgebiet Compressed Sensing.

Dieses Forschungsfeld erlangte nicht nur im Signalbereich große Aufmerksamkeit. Informatiker und Ingenieure haben eine Vielzahl von Anwendungen der komprimierten Sensorik in der Astronomie, Biologie, Medizin, Radar und Seismologie gefunden, um nur einige zu nennen. CS ist zu einem Schlüsselbegriff in verschiedenen Bereichen der angewandten Mathematik, Informatik und Elektrotechnik geworden. In vielen Fällen können Signale, Bilder und andere Daten nicht immer vollständig erfasst werden. Gleichzeitig werden die Datenakquisition bzw. die Rekonstruktion von Daten in vielen Bereichen wie beispielsweise in der Signal- und Informations- sowie Bildverarbeitung in diversen, insbesondere in digitalen, Lebensbereichen zunehmend wichtiger.

Compressed Sensing (auch als Compressive Sensing oder Compressive Sampling bezeichnet) ist eine neue mathematische Theorie für die Rekonstruktion von Daten. CS-Methoden sind bereits erfolgreich in klassischen Anwendungen wie optische Bildgebung (z. B. Ein-Pixel-Kamera), Magnetresonanztomographie (MRT), Computertomographie (CT) und Synthetic Aperture Radar (SAR) integriert [3–5]. Eine aktuelle Anwendung ist, wie im Kapitel Forschungsstand CS genannt, die Integration von CS-Methoden in MRT-Geräten, welche z. B. im Jahr 2019 praktisch in dem Krankenhaus Martha-Marie Halle-Dölau und am Universitätsklinikum Halle etabliert wurde.

Die Grundidee der komprimierten Sensorik besteht darin, ein dünn besetztes Signal aus sehr wenigen nicht adaptiven linearen Messungen zu gewinnen. Die CS-Theorie stellt sicher, dass ein dünn besetztes Signal aus sehr wenigen Messungen genau rekonstruiert werden kann [6–9]. Die Rekonstruktion eines dünn besetzten

Vektors aus einem unterdeterminierten Gleichungssystem kann als Lösung eines ℓ_1 -Minimierungsproblems durch lineare Programmierung erklärt werden. Um eine erfolgreiche Rekonstruktion zu gewährleisten, muss zum einen entweder die Bedingung der Dünnbesetztheit oder der Komprimierbarkeit für das zu rekonstruierende Signal erfüllt sein und zum anderen die Nullraumeigenschaft der Sensormatrix. Diese Bedingungen garantieren die Rekonstruktion der dünn besetzten bzw. komprimierbaren Darstellung durch die ℓ_1 -Minimierung, die entweder durch konvexe Optimierungsansätze oder alternativ durch schätztheoretische Ansätze, z. B. mit einem linearisierten Kalman-Filter, realisiert werden kann. Eine genaue detaillierte Beschreibung für die Dünnbesetztheit, auch als Sparsity bezeichnet, sowie die Bedingungen für eine Rekonstruktion mit der ℓ_1 -Minimierung können in [10–13] gefunden werden. Insgesamt suchen wir einen dünn besetzten Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, der das ℓ_0 -Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

mit einem Beobachtungsvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ und der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $m \ll n$ löst. Dieses Problem ist im Allgemeinen NP-hard und lässt sich nicht effizient lösen. In [1, 2] wird gezeigt, dass der Ausdruck $\|\cdot\|_0$ durch die ℓ_1 -Norm ersetzt werden kann. Wir erhalten das folgende ℓ_1 -Minimierungsproblem:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

In dieser Arbeit verfolgen wir das Ziel, neue Lösungsstrategien für ℓ_1 -Minimierungsprobleme mit Kalman-Filtern zu entwickeln. Viele Messungen liegen in verrauschter Form vor, sodass eine exakte Rekonstruktion nicht möglich ist. Messrauschen oder andere äußere Einflüsse können zu Abweichungen und Unsicherheiten zwischen den tatsächlichen und den ermittelten Größen führen. Der Einsatz von Kalman-Filtern garantiert jedoch die optimale Rekonstruktion aus verrauschten Messungen [14–18]. Anhand von Messdaten schätzt das Kalman-Filter in einem zweistufigen Prozess den Zustand des Systems. Im ersten Schritt sagt das System den Zustand voraus, welches dann nach erfolgter Messung den Zustand der Schätzung korrigiert. Vorzugsweise wird das Kalman-Filter z. B. in der Bildverarbeitung, Signalverarbeitung und in Navigationssystemen verwendet. Bei der Sensorfusion, in der die Verschmelzung von Daten mit unterschiedlichen Sensoren stattfindet, werden z. B. Positions- und Geschwindigkeitssignale abgebildet.

Vergleichbare Ansätze mit Kalman-Filter zur CS-Rekonstruktion sind in [19–21] zu finden. Die Autoren in [19–21] verwenden für die Rekonstruktion die Residualmethode der kleinsten Quadrate. Einige Autoren führen bereits Optimalitätskriterien der Schätztheorie, wie z. B. das CRB (Cramér-Rao-Schranke) für die sparse Rekonstruktion [12] ein. Im Allgemeinen berühren sich die Bereiche der konvexen Optimierung und der Stochastik nicht.

Dennoch sind Verknüpfungen von konvexer Optimierung mit den stochastischen Ansätzen der optimalen Schätztheorie möglich.

Das Ziel dieser Arbeit ist, das Forschungsgebiet Compressed Sensing mit leistungsfähigen Instrumenten der optimalen Schätztheorie für verrauschte bzw. gestörte Daten mit der Kalman-Filter-Theorie zu verbinden. Es werden daher neue Ansätze für die Rekonstruktion dünn besetzter Signale mit modifizierten Kalman-Filtern in der vorliegenden Arbeit konstruiert. Wegen der Anwendungsvielfalt des Kalman-Filters existieren auch mehrere Varianten des Filters.

Ein neuer Ansatz ist die Verwendung der ℓ_1 -Norm als nichtlineare Beobachtung. Aufgrund der nichtlinearen Beobachtung können wir das Kalman-Filter für lineare Beobachtungen nicht heranziehen, sondern müssen uns dem nichtlinearen Problem durch ein lineares Problem annähern. Die Anwendung des Kalman-Filters auf nichtlineare Probleme wird in der Literatur als erweitertes linearisiertes Kalman-Filter bezeichnet. Eine Vielzahl von nichtlinearen Filterproblemen wird durch Simulationen oder andere Näherungsverfahren, wie z. B. Projektionsfilter, Quadraturfilter analysiert.

Neben dem neuen Ansatz, d. h. der Verwendung der ℓ_1 -Norm als nichtlineare Beobachtung, betrachten wir auch die Arbeit bzw. das Lösen des nichtlinearen Problems auf dem Nullraum der Sensingmatrix. Das Kalman-Filter berechnet nicht wie üblich direkt den gesamten Zustandsvektor, sondern zerlegt diesen Zustandsvektor in eine partikuläre Lösung und in einen Zustandsvektor aus dem Nullraum der Matrix. Insbesondere berechnet das Kalman-Filter in jeder Iteration einen Zustandsvektor aus dem Nullraum, dessen Summe mit der partikulären Lösung einen Zustandsvektor ermittelt, der eine geringere ℓ_1 -Norm besitzt. Die Ideen in der vorliegenden Arbeit, zum einen die nichtlineare Beobachtung der ℓ_1 -Norm und zum anderen die Zustandsberechnung im Nullraum der Sensingmatrix, sind grundlegende neue Forschungsansätze.

Des Weiteren werden für ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen, wie z. B. den primal-dual-Algorithmus von Chambolle & Pock, sogenannte Thresholding-Verfahren verwendet. Solche Verfahren beeinflussen die Berechnungen des Zustandsvektors im Algorithmus. Aufgrund der eingesetzten Thresholding-Verfahren (Soft- bzw. Hard-Thresholding) verändern sich bestimmte Einträge des Zustandsvektors in jeder Iteration, sodass deren Werte nach einer vorgegebenen Berechnungsvorschrift „manipuliert“ werden. Wir zeigen in der Arbeit, dass für das ℓ_1 -Minimierungsproblem gute Ergebnisse auch ohne den Einsatz von Thresholding-Verfahren für das Kalman-Filter möglich sind. Dafür untersuchen wir die Anwendung bekannter Konvergenzbeschleunigungsverfahren auf die nichtlineare Beobachtung im Kalman-Filter. Die zwei behandelten Konvergenzbeschleunigungsverfahren basieren auf dem Δ^2 -Grundverfahren von Aitken. Diese Verfahren verfolgen das Ziel, aus einer konvergenten Folge von Skalaren eine neue Folge zu konstruieren, sodass diese neue Folge schneller konvergiert. Mit dem Einsatz von Konvergenzbeschleunigungsverfahren versuchen wir das Kalman-Filter ohne den Einsatz von Thresholding-Verfahren so zu beschleunigen, dass wir eine gleichwertig geeignete Lösung wie die ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen mit integriertem Thresholding-Verfahren erhalten.

Im weiteren Verlauf der Arbeit präsentieren wir außerdem für das Kalman-Filter einen komplett neuen Ansatz mit einem Thresholding-Prozess. Dieser neue Prozess beeinflusst den Zustandsvektor während der Berechnung nicht – das spricht gegen alle in der Anwendung eingesetzten Thresholding-Verfahren, die einen permanenten Einfluss in jeder Iteration auf den berechneten Zustandsvektor nach sich ziehen. Unter Verwendung des entwickelten Thresholding-Prozesses für das Kalman-Filter, welcher nicht in jeder Iteration den Zustandsvektor verändert, minimieren wir nicht nur die ℓ_1 -Norm, sondern ermitteln auch den optimalen Support des Zustandsvektors. Das Kalman-Filter mit dem neu entwickelten externen Thresholding-Prozess kann damit als ein Support-Schätzer interpretiert werden. Mit den Informationen über den optimalen Support und die ℓ_1 -Norm können wir das sparse Signal mit wenigen Iterationen sehr gut rekonstruieren. In der Praxis liegen allerdings verrauschte bzw. gestörte Daten vor, sodass die Betrachtung eines optimal erreichbaren Supports von großer Bedeutung ist. Die Auswirkung des Thresholding-Prozesses im Kalman-Filter-Algorithmus werden wir mit anderen ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen untersuchen und unter verschiedenen Gesichtspunkten vergleichen. Für eine Betrachtung des Rekonstruktionsfehlers unter Verwendung verrauschter bzw. gestörter Daten ziehen wir die unterste Schranke, die Cramér-Rao-Schranke, heran. Mit Hilfe der Cramér-Rao-Schranke, die eine Abschätzung der Varianz liefert, können wir die behandelten Algorithmen vergleichen.

Im letzten Teil dieser Arbeit werden wir eine spezifische Anwendung auf die neu entwickelten Kalman-Filter-Algorithmen im Bereich der 3D-Bildgebung durchführen. Die Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet sind vielseitig und sehr innovativ. Mit einem 3D-entfernungsmessenden System werden wir zwischen einem Objekt und einer Kamera punktweise Informationen der Entfernung messen. Das Ziel ist es, mit den neu entwickelten Ansätzen für das Kalman-Filter die Entfernung zwischen dem Objekt und der Kamera auch unter verrauschten Daten zu berechnen, die wegen der Mehrfachreflexionen heute kaum realisiert werden kann. Unter Verwendung der erhaltenen Messdaten wird der neu entwickelte Kalman-Filter-Algorithmus einen sparsen Vektor rekonstruieren, der es ermöglicht, die Entfernung zwischen Objekt und Kamera zu berechnen. Das Experiment erweitern wir, indem wir Hindernisse in Form von Folien zwischen dem Objekt und der Kamera setzen. Die Berechnung der Entfernung wird dadurch wesentlich erschwert, da eine Selektierung der relevanten Daten für eine erfolgreiche Rekonstruktion nahezu unmöglich scheint. Trotz der Mehrfachreflexionen zeigen wir in dieser Anwendung, dass eine erfolgreiche Rekonstruktion unter Verwendung der neuen Ansätze im Kalman-Filter erreicht werden kann. Die vorgestellte Anwendung in der 3D-Bildgebung gibt damit einen kleinen Einblick in die Vielzahl der Einsatzmöglichkeiten von ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen mit Kalman-Filtern.

1.2 Gliederung dieser Arbeit

Diese Arbeit ist in mehrere Kapitel untergliedert und soll aufbauend betrachtet werden.

Wir beginnen mit einigen mathematischen Grundlagen im Kapitel 2, die für das Verständnis auf dem Forschungsgebiet Compressed Sensing (CS) und für die Ausführungen in dieser Arbeit unerlässlich sind. Mit der klassischen Einordnung von CS im mathematischen Kontext beschließen wir das Kapitel.

Im Kapitel 3 Compressed Sensing geben wir den aktuellen Forschungsstand anhand eines konkreten Beispiels an. Wir zeigen die praktische Relevanz und deren Bedeutung von CS in der heutigen Zeit. Zusätzlich erläutern wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine erfolgreiche Rekonstruktion von dünn besetzten Signalen. Anschließend werden relevante Algorithmen für CS vorgestellt, die auch in den nachfolgenden Kapiteln zum Vergleich herangezogen werden.

Eine Einführung des Kalman-Filters sowie deren Herleitung der verwendeten Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz orthogonaler Projektion stellen wir im Kapitel 4 vor. Im Kapitel 5 geben wir das erweiterte Kalman-Filter in seiner synthetischen und analytischen Formulierung für das ℓ_1 -Minimierungsproblem an. Den grundlegenden Algorithmus für alle weiteren Ausführungen in dieser Arbeit erläutern wir im Kapitel 6, dessen Arbeitsweise vorwiegend auf den Nullraum einer Matrix basiert. Für diesen Algorithmus geben wir die Berechnung einer optimalen Startlösung an und verfassen den Konvergenzbeweis des verwendeten Kalman-Filter-Algorithmus in seiner Nullraum-Variante. Dieser vorgestellte Algorithmus garantiert nicht immer eine erfolgreiche Rekonstruktion von dünn besetzten Vektoren.

Eine wissenschaftliche Innovation beinhaltet daher die Untersuchung von Konvergenzbeschleunigungsverfahren. Eine allgemeine Übersicht über zwei Konvergenzbeschleunigungsverfahren stellt das Kapitel 7 dar. Diese Verfahren sind für das Verständnis des anschließenden Kapitels 8 von wesentlicher Bedeutung. Mit diesen Beschleunigungsverfahren modifizieren wir das Kalman-Filter aus Kapitel 6, sodass ein ℓ_1 -Minimierungsproblem für sparse Signale in eine beschleunigte Folge von Skalaren transformiert werden kann. Das Resultat der Modifikation demonstrieren wir im Kapitel 8 in umfangreicher Form, indem wir für die Auswertungen den primal-dual Algorithmus von Chambolle & Pock für die ℓ_1 -Minimierung heranziehen.

Einige vorgestellte Algorithmen aus Kapitel 3.5 verwenden zusätzlich für die Berechnung der Lösung Thresholding-Verfahren. Folglich bildet Kapitel 9 einen weiteren wissenschaftlichen Schwerpunkt der Arbeit, indem wir das erweiterte Kalman-Filter mit einem externen Thresholding versehen und deren umfangreiche Untersuchungen analysieren. In der Praxis liegen die Daten aber in verrauschter Form vor, sodass eine Rekonstruktion nicht immer möglich ist. Demzufolge werden wir im Kapitel 10 alle vorgestellten Algorithmen unter verschiedenen Aspekten mit unterschiedlichen Rauschanteilen untersuchen und beobachten, dass unser vorgeschlagener Algorithmus zu sehr guten Ergebnissen führt.

Im Kapitel 11 stellen wir eine Anwendung mit der neusten Technik im Bereich der 3D-Bildgebung vor und werden diese eingehend mit dem vorgestellten Kalman-Filter-Algorithmus analysieren.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick auf zukünftige Forschungsfragen bilden das letzte Kapitel 12 dieser Arbeit.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

2.1 Allgemeines

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf die wesentlichen mathematischen Grundlagen, die zum Verständnis für *Compressed Sensing (CS)* unerlässlich sind.

Wir bezeichnen einen Vektor mit fett gedruckten Kleinbuchstaben und Matrizen mit fett gedruckten Großbuchstaben. Die Transponierte eines reellen Vektors oder einer reellen Matrix wird mit einem hochgestellten T dargestellt bzw. entsprechend im komplexen Fall mit H als komplex Konjugierte definiert. $\|\mathbf{x}\|_2$ ist die euklidische Länge des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, d. h.

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = \left(\sum_{l=1}^n |x_l|^2 \right)^{1/2}.$$

Die Energie eines Vektors \mathbf{x} entspricht der quadratischen ℓ_2 -Norm, d. h. $\|\mathbf{x}\|_2^2$. Die ℓ_1 -Norm eines Vektors ist definiert mit

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{l=1}^n |x_l|.$$

Zu beachten ist, dass die ℓ_0 -Norm, gemäß der Definition von Normen im Anhang A, keine Norm im klassischen Sinn darstellt. Die ℓ_0 -Norm gibt die Anzahl der von Null verschiedenen Einträge eines Vektors an. Hierzu definieren wir die ℓ_0 -Norm wie folgt

$$\|\mathbf{x}\|_0 := |T| = |\text{supp}(\mathbf{x})| = \#\{l : x_l \neq 0\}, \quad l = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

als Kardinalität des Supports von \mathbf{x} . Die *Supportmenge eines Vektors* \mathbf{x} bezeichnen wir mit T .

Definition 2.1.1 Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ oder ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) heißt *sparse (dünn besetzt)*, wenn möglichst viele seiner Komponenten Null sind. Besitzt der Vektor höchstens s Koeffizienten, die von Null verschieden sind, wird der Vektor als *s-sparse* bezeichnet,

d. h.

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq s.$$

Im weiteren Kontext verwenden wir statt *dünn besetzt* nur noch die Begriffe *sparse* bzw. *Sparsity*. Die Menge aller s -sparsen Vektoren bezeichnen wir mit

$$\Sigma_s := \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_0 \leq s\}.$$

Ist f eine differenzierbare Funktion in x_1, \dots, x_n , so wird

$$\nabla f(\mathbf{x}_*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}_*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

der Gradient von f in \mathbf{x}_* genannt. Die Ausdrücke $\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{x}_*), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{x}_*)$ sind die partiellen Ableitungen der Funktion f in \mathbf{x}_* .

Im Zusammenhang mit Lösungen von linearen Gleichungen wird die *Methode der kleinsten Quadrate* genannt. Diese Methode minimiert die Energie des Fehlers. Besitzt die Matrix vollen Rang liegt ein einfacher Fall vor. Sollte jedoch die Matrix einen Rangdefekt aufweisen, sind andere Methoden wie QR-Zerlegung, Singulärwertzerlegung oder die Pseudoinvertierung [22, 23] erforderlich.

In den nächsten beiden Abschnitten erläutern wir kurz die Berechnung einer Lösung im Falle eines überbestimmten bzw. unterbestimmten linearen Gleichungssystems. Diese Ausführungen sind für das im Kapitel 9 behandelte Thema von wesentlicher Bedeutung, weil das ursprüngliche unterbestimmte lineare Gleichungssystem im Kalman-Filter-Algorithmus unter Verwendung eines externen Thresholding in ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem überführt wird.

2.1.1 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme

Für die nächsten Abschnitte im Kapitel 2.1 werden wir uns vereinfachend auf den reellen Raum beziehen. Eine Darstellung im komplexen Raum kann entsprechend angepasst werden. Betrachten wir ein System von linearen Gleichungen mit mehr

Zeilen als Spalten für die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann wird das Gleichungssystem

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

als überbestimmtes lineares Gleichungssystem mit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Im Regelfall existiert kein Lösungsvektor \mathbf{x} , mit dem alle Gleichungen erfüllt werden können. Es ist üblich, in diesem Fall eine Lösung zu suchen, welche die Energie des Fehlers

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.3)$$

minimiert

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2. \quad (2.4)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})^\top (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{b}^\top \mathbf{b} - \mathbf{b}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{b} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \mathbf{b}^\top \mathbf{b} - 2\mathbf{b}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

In der Gleichung (2.5) ist der skalare Ausdruck $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$ die Transponierte von $\mathbf{b}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$. Berechnen wir den Gradienten des Funktionals J nach Gleichung (2.2)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = -2\mathbf{A}^\top \mathbf{b} + 2\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$$

und setzen für die Ermittlung eines Minimums die Ableitung gleich Null

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

dann folgt unter der Annahme der Invertierbarkeit von $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}. \quad (2.7)$$

Für \mathbb{R}^n sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ konvexe Abbildungen, wobei $\|\cdot\|_2$ strikt konvex ist. Wir haben daher in Gleichung (2.3) ein strikt konvexes Funktional vorliegen. Bei allen konvexen Funktionalen sind stationäre Punkte Minimalstellen, sodass bei der Suche nach möglichen Extremstellen die Bedingung der zweiten Ordnung nicht überprüft wird. Stationäre Punkte sind mögliche Kandidaten für ein Extremum, d. h. an deren Stelle verschwindet der Gradient. Liegt ein strikt konvexes Funktional vor, so existiert höchstens ein globales Minimum. Um das zu zeigen, nehmen wir an das $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{y}}$ zwei

verschiedene globale Minima sind. Es gilt dann $J(\tilde{\mathbf{x}}) = J(\tilde{\mathbf{y}})$. Aufgrund der Konvexität gilt für ein $\theta = \frac{1}{2}$ Folgendes: $J(\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{y}})) < \frac{1}{2}(J(\tilde{\mathbf{x}}) + J(\tilde{\mathbf{y}})) = J(\tilde{\mathbf{x}})$, welches zu einem Widerspruch zur Annahme führt. Für unser Minimierungsproblem (2.4) nehmen wir an, dass die Matrix \mathbf{A} vollen Spaltenrang besitzt. Damit ist $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ regulär und invertierbar. Die Normalgleichung (2.6) besitzt daher eine eindeutige Lösung. Jede Nullstelle des Gradienten vom Funktional J aus Gleichung (2.3) ist ein Minimum. Für die Berechnung der Normalgleichung, in der der volle Rang der Matrix \mathbf{A} nicht vorliegt, können numerische Verfahren wie beispielsweise das Verfahren der Konjugierten Gradienten oder die Cholesky-Zerlegung eingesetzt werden. Jedoch werden diese beiden numerischen Verfahren von der *Kondition* der Matrix stark beeinflusst. Unter dem Begriff *Kondition* verstehen wir die Abhängigkeit der Lösung von gestörten Eingangsdaten. Wenn die Matrix \mathbf{A} bereits schlecht konditioniert ist, so ist auch $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ quadratisch schlecht konditioniert. Das hat zur Folge, dass Rundungsfehler verstärkt werden und somit ein unbrauchbares Ergebnis entsteht. Eine Verbesserung der Kondition kann durch Regularisierungsmethoden erreicht werden. Auch in Fällen, in denen zwar eine eindeutige Lösung existiert, können kleine Störungen von \mathbf{b} große Fehler in der Lösung \mathbf{x} hervorrufen. Die Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ wird, unter Verwendung von Regularisierungsmethoden, durch eine Approximation ersetzt, sodass sie eine beschränkte Inverse von $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ liefert.

Daher ist es in einigen Fällen sinnvoll, den quadratischen Fehler zu gewichten, d. h. wir minimieren den Ausdruck

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \mathbf{W}^{1/2} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \right\|_2^2$$

mit $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ als diagonale Matrix mit positiven Einträgen. Es gilt dann entsprechend der Gleichung (2.7)

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{b}. \quad (2.8)$$

2.1.2 Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme

Ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

liegt dann vor, wenn die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ weniger linear unabhängige Zeilen als Spalten besitzt. Solche Gleichungssysteme besitzen unendlich viele Lösungen.

Das Optimierungsproblem wird gelöst, indem eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit minimaler Norm gesucht wird, d. h.

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_2^2,$$

unter Beachtung der Bedingung $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Auf der Suche nach optimalen Lösungen gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine gängige Methode ist die *Methode der Lagrange-Multiplikatoren*, die notwendige Bedingungen liefern, wenn zusätzliche Restriktionen gegeben sind. Eine andere in der Physik typische Methode ist die Variationsrechnung, innerhalb derer die zulässigen Punkte Funktionen darstellen.

Sehen wir uns die *Methode der Lagrange-Multiplikatoren* an. Bei dieser Methode ist die Zielfunktion zu minimieren, wobei die Menge des zulässigen Bereichs zusätzlich durch Gleichungs- und/oder Ungleichungsbedingungen eingeschränkt wird. Die Methode wird verwendet, wenn die Gleichungsnebenbedingungen nicht explizit nach den einzelnen Variablen auflösbar sind. Die stationären Punkte der zugehörigen Lagrange-Funktion sind Kandidaten für Extrema. Die Gradienten der Zielfunktion und der Gleichungsnebenbedingung zeigen in die gleiche oder in die entgegengesetzte Richtung, d. h. die Gradienten in der Extremstelle sind linear abhängig. Es existiert daher ein $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, sodass die modifizierte Zielfunktion

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \|\mathbf{x}\|_2^2 + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}),$$

eine kritische Stelle in \mathbf{x} besitzt. Der Gradient des Funktionals \mathcal{L} bezüglich \mathbf{x} verschwindet wegen der linearen Abhängigkeit der einzelnen Gradienten. Die Ableitungen bezüglich $\boldsymbol{\mu}$ verschwinden im Extrempunkt, weil die Nebenbedingung an der Stelle erfüllt ist. Der Parameter $\boldsymbol{\mu}$ wird als *Lagrange-Parameter* bzw. *Lagrange-Multiplikator* bezeichnet. Ein *Lagrange-Parameter* beschreibt die quantitative Gewichtung des Strafterms. Bilden wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &= 2\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \end{aligned}$$

und setzen diese gleich Null, erhalten wir

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} \tag{2.9}$$

unter der Bedingung $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Nach dem Einsetzen der Gleichung (2.9) in $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ und unter der Annahme der Invertierbarkeit von $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ folgt:

$$\boldsymbol{\mu} = 2 (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}$$

und damit die *Kleinste-Quadrate-Lösung* (*least-square-solution*)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}. \tag{2.10}$$

Besitzt die Matrix \mathbf{A} vollen Zeilenrang, dann ist $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ regulär und invertierbar. Ist die Annahme der Invertierbarkeit von $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ nicht gegeben, müssen zusätzliche numerische

Verfahren herangezogen werden.

Mit \mathbf{A}^\dagger wird die Moore-Penrose-Inverse bezeichnet. Es gilt $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)^{-1}$.

Auch für unterbestimmte lineare Gleichungssysteme können wir den quadratischen Fehler mit positiven Gewichten darstellen. Dazu sei die Matrix \mathbf{W} wie im vorherigen Kapitel 2.1.1 eine Diagonalmatrix. Wir minimieren den Ausdruck

$$\min_{\mathbf{x}} \left\| \mathbf{W}^{1/2} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \right\|_2^2 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

und erhalten entsprechend der Gleichung (2.10)

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{b}.$$

2.1.3 Regularisierung

Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kann es passieren, dass die Moore-Penrose-Inverse \mathbf{A}^\dagger nicht überall definiert und auch nicht stetig ist. Die Anwendung der Moore-Penrose-Inverse scheitert auch insbesondere bei sehr kleinen Messfehlern. Das Ziel einer Regularisierung besteht darin, die Moore-Penrose-Inverse durch eine stetige Approximation \mathbf{R}_λ zu ersetzen. Ein allgemeiner Ansatz für das Lösen solcher linearen Gleichungssysteme besteht darin, das Minimum des Funktionals J

$$J(\mathbf{x}) := \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (2.11)$$

zu suchen, wobei für den Parameter $\lambda > 0$ gilt. Statt wie bisher bei den Ausführungen in Kapitel 2.1.1 sowie 2.1.2 treten hier keine Nebenbedingungen auf.

Bilden wir das Minimum des Funktionals J , d. h. die Ableitungen werden gleich Null gesetzt:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^\top (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + 2\lambda \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} + \lambda \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}. \quad (2.13)$$

Das Minimum des Funktionals J in Gleichung (2.11) ist äquivalent zur Lösung der Gleichung (2.12). Um das zu zeigen, setzen wir

$$\varphi(\alpha) := J_\lambda(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{y}), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ beliebig,}$$

mit

$$J_\lambda(\mathbf{x}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2,$$

dann erfüllt ein Minimum \mathbf{x} die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(0) &= 2\langle \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle + 2\lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle + 2\lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Das verwendete Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zweier Vektoren ist im Anhang A definiert. Die Gleichung (2.12) ist eindeutig lösbar. Der Ausdruck $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}$ ist positiv definit,

$$\langle (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}) \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{A}\mathbf{z}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{z}\|_2^2 \geq \lambda \|\mathbf{z}\|_2^2 > 0,$$

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ und ist damit invertierbar. Wir können daher die *Tikhonov-Regularisierung* $\mathbf{R}_\lambda := (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^T$ definieren. Der Parameter λ steuert dabei, wie stetig \mathbf{R}_λ ist bzw. wie gut \mathbf{R}_λ die Moore-Penrose-Inverse approximiert. Auch für immer kleinere Messfehler konvergieren die Lösungen nicht immer, sondern können auch beliebig groß werden. Mit der Definition des Funktional in Gleichung (2.11) verhindern wir, dass die Norm der Lösung zu groß wird. Mit dem Regularisierungsparameter λ wird festgelegt, ob die Lösung bezüglich ihrer Regularität der ℓ_2 -Norm besser zu den Daten passen soll ($\lambda \rightarrow 0$) oder umgekehrt ($\lambda \rightarrow \infty$).

In [24] wird bewiesen, dass für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{R}_\lambda \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0$$

gilt.

Ein großer Vorteil dieses Regularisierungsverfahrens ist, dass dieser Ansatz auch bei einem Rangdefekt der Matrix \mathbf{A} verwendet wird, da die hergeleitete Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I}$ invertierbar ist, auch wenn $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ das nicht ist. Die Lösung in Gleichung (2.13) kann sowohl für überbestimmte als auch für unterbestimmte Gleichungssysteme eingesetzt werden. Für $\lambda \rightarrow 0$ entsprechen die Minima aus Gleichung (2.13) des Tikhonov-Funktionalen denen aus Gleichung (2.7) bzw. Gleichung (2.10).

2.2 Einordnung von Compressed Sensing im mathematischen Kontext

Das Ziel von CS ist die Rekonstruktion eines n -dimensionalen, s -sparsen Signals als Lösung eines unterbestimmten linearen Gleichungssystems. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein sparser Vektor und $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Matrix mit der Eigenschaft $m \ll n$. Die Aufgabe besteht

darin, den Vektor \mathbf{x} aus $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ Messungen mit der Bedingung

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

zu rekonstruieren. Als Erstes stellt sich die Frage, ob die sparse Lösung eindeutig ist, d. h. ob sich das ℓ_0 -Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.14)$$

eindeutig lösen lässt.

Bevor wir die Frage mit dem Theorem beantworten, definieren wir den Begriff *spark* einer Matrix. Mit $\text{spark}(\mathbf{A})$ bezeichnen wir die minimale Anzahl linear abhängiger Spalten von \mathbf{A} .

Theorem 2.2.1 *Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix und $s \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent [25].*

- i) Falls eine Lösung \mathbf{x} des Minimierungsproblems (2.14) s -sparse ist, so ist sie die eindeutige Lösung.*
- ii) $s < \text{spark}(\mathbf{A})/2$.*

Es gilt $\text{spark}(\mathbf{A}) \in [2, m + 1]$, sodass Theorem 2.2.1 die Anforderung $m \geq 2s$ besitzt [26]. Das Theorem 2.2.1 garantiert die Eindeutigkeit der Darstellung für s -sparse Signale, jedoch führt die Berechnung von *spark* auf eine kombinatorische Komplexität und ist daher sehr schwer zu ermitteln. Es ist daher ratsam, Eigenschaften zu verwenden, die leicht berechenbar sind. Die Kohärenz einer Matrix ist eine solche Eigenschaft, auf die wir erst im nächsten Kapitel eingehen werden.

Das ℓ_0 -Minimierungsproblem in Gleichung (2.14) ist im Allgemeinen NP-hart und lässt sich nicht effizient lösen. In [6] zeigen Chen, Donoho und Saunders, dass der Ausdruck $\|\cdot\|_0$ durch die ℓ_1 -Norm substituiert werden kann. Diese Grundlage führt auf folgendes ℓ_1 -Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (2.15)$$

Das Problem (2.15) wird als sogenanntes *Basis Pursuit Problem (BP)* bezeichnet und ist ein konvexes Optimierungsproblem. Im Kapitel 3.5.1 - Übersicht aktueller Algorithmen - werden wir auf diese Problemstellung näher eingehen. Wir können im Kapitel 3.2.3 nachweisen, dass die Lösung des ℓ_1 -Minimierungsproblems (2.15) auch das ℓ_0 -Minimierungsproblem (2.14) unter starken Annahmen an die Matrix \mathbf{A} löst, die wir zusätzlich erläutern werden. In [27] wird gezeigt, dass für das ℓ_0 -Minimierungsproblems (2.14) und für das ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) die gleiche Lösung generiert wird. Insgesamt müssen wir ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem mit einer Nebenbedingung lösen.

Kapitel 3

Compressed Sensing

3.1 Forschungsstand

In vielen praktischen Fällen werden bereits CS-Methoden gezielt eingesetzt. Es gibt mittlerweile eine große Anzahl von Anwendungsbeispielen, die wir in Anbetracht der Vielzahl jedoch nicht umfangreich kommentieren können. In der Einleitung wurden bereits einige Anwendungsbeispiele mit den zugehörigen Referenzen genannt. Gerne möchte ich auf eine spezielle und von den meisten Personen bekannte Anwendung näher eingehen. Viele Patienten müssen sich aufgrund von gesundheitlichen Beschwerden einer Untersuchung mit einem der besten Diagnosegeräte der Medizin, der Magnet-Resonanz-Tomographie (MRT), unterziehen. Das MRT-Gerät liefert Daten für eine bildgebende Diagnose. Jeder einzelne Winkel in unserem Körper kann dargestellt und in 3D-Bildern visualisiert werden. Jede kleinste Veränderung im Körper kann somit aufgespürt und lokalisiert werden. Viele Personen empfinden die Untersuchungen mit einem MRT als sehr unangenehm. Der Platzmangel in der Röhre sowie die Lautstärke des Gerätes mit dem ständigen rhythmischen Rattern und Knallen, welche durch die Relaischaltung verursacht werden, sind neben der langen Untersuchungszeit sehr negative Kriterien für die Patienten. Aufgrund dieser negativen Aspekte muss ca. jeder vierte Patient diese Untersuchung abbrechen oder vorzeitig beenden.

Für einen guten Scan sind tausende Informationen notwendig. Viele Wellen werden in den Körper bzw. in das Gewebe geschickt, diese geraten ins Schwingen und geben Impulse zurück. Diese Informationen der Zellen werden in 3D-Bilder umgewandelt. So können z. B. die Lage eines Hirntumors, Bänderrisse oder Veränderungen am Herzen exakt gemessen werden.

Im Sommer 2018 wurde im Krankenhaus Martha-Maria in Halle-Dölau ein ca. 10 t schweres MRT-Gerät der neusten Generation angeschafft [28]. Die moderne Technik bietet eine viel bessere Methode der Diagnostik, sie heißt Compressed Sensing, was auch umgangssprachlich komprimierte Erfassung bedeutet. Der Radiologe Dr. André Jassoy des Krankenhauses Martha-Maria in Halle-Dölau erklärt, dass mit dieser neuen Technologie nicht nur Funktionsbeobachtungen durchgeführt, sondern neben bewegten Bildern auch Standbilder eingefärbt werden können [28].

Mit Hilfe von CS-Methoden in MRT-Geräten können die Untersuchungen wesentlich schneller, effektiver und angenehmer für die Patienten durchgeführt werden. Der große Vorteil besteht darin, dass die Datenmengen bereits reduziert bzw. verdichtet aufgenommen werden und daher einen wesentlich geringen Speicherbedarf haben.

Im Halleschen Universitätsklinikum existiert bereits seit einiger Zeit ein MRT-Gerät der neusten Generation mit CS-Methoden. Der Radiologe Herr Prof. Walter A. Wohlgemuth des Halleschen Universitätsklinikums erklärte in einem Interview am 24. Februar 2019 im Radiosender MDR die Effizienz von CS so: „Stellen Sie sich vor, man würde die praktisch gleiche Information haben, würde aber nur jedes zehnte Bildpunktchen überhaupt aufnehmen. Wir können sagen, dass die Untersuchungszeiten sich halbiert haben und zum Teil nur noch ein Zehntel der Zeit brauchen, die sie vorher gebraucht haben.“ [28]

In jedem Datenpunkt, der gemessen wird, existieren nicht nur Informationen des betreffenden Datenpunkts, sondern auch wesentliche Informationen über seine Umgebung betreffend. Ein Algorithmus, basierend auf CS-Methoden, stellt trotz lückenhafter Datenaufnahme ein vollständiges Gesamtbild zur Verfügung. Die benötigte Zeit einer MRT-Untersuchung verkürzt sich damit extrem. Eine sehr ausführliche Untersuchung am Kreuzband benötigt bis zu 22 Minuten, mit CS allerdings nur noch 10 Minuten. Die Ergebnisse der Untersuchungen zeigen außerdem, in welchem Umfang die Fasern noch stehen, z. B. 15%. Das seien sehr wichtige Informationen für die bevorstehende Operation, erklärte Herr Prof. Walter A. Wohlgemuth im Interview [28]. Die neusten MRT-Geräte mit CS ermöglichen den Ärzten eine genauere Diagnostik sowie eine angenehmere Untersuchung für den einzelnen Patienten. In seinen Ausführungen erklärt Herr Prof. Walter A. Wohlgemuth von der Halleschen Universitätsklinik zudem, dass in den nächsten drei bis fünf Jahren in Scannern, MRT-Geräten, Computertomographen und in allen modernen Geräten CS-Methoden enthalten sein werden.

3.2 Inkohärenz, RIP und NSP

3.2.1 Inkohärenz

Der Erfolg einer Rekonstruktion beruht auf zwei Voraussetzungen. Das ist zum einen die Bedingung der *Inkohärenz* an die Abtastmatrix und zum anderen die Sparsity an das gesuchte Signal. *Inkohärenz* bedeutet allgemein *nicht zusammenhängend* bzw. das Fehlen eines Zusammenhangs.

Viele Signale besitzen nach geeigneter Basiswahl eine nahezu sparse Darstellung. Das heißt, sie können gut durch sparse Daten approximiert werden. Solche Daten werden als komprimierbar bezeichnet. Eine gute Basiswahl ist zum Beispiel bei Bildern die Wavelet-Basis. Spezielle Untersuchungen auf die Anwendung mit dem Kalman-Filter

werden im Kapitel 5 dargestellt. Für ein Modell mit sparser Darstellung des Zustandsvektors gilt die Beobachtungsgleichung

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v},$$

für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$ ist der Fehlerterm für die Berücksichtigung von Rauschen und von Modellungenauigkeiten. Ersetzen wir \mathbf{x} durch $\mathbf{W}\hat{\mathbf{x}}$, wobei \mathbf{W} aus den Spalten einer Basis besteht, in der das Signal sparse ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{A}\mathbf{W}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \\ &= \mathbf{M}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{W}$ und $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ ein sparser Vektor ist.

In CS wird das Signal \mathbf{x} mit $m < n$ Messungen erfasst. Es stellt sich die Frage, wie eine Abtastmatrix aufgebaut werden soll, damit der Informationsverlust beim Messvorgang gering ist. Ein grobes Maß für den Grad der Ähnlichkeit zwischen dem Abtastsystem und dem sparsen System kann über die *Kohärenz* ermittelt werden.

Definition 3.2.1 Seien Φ_i die Spalten einer Orthonormalbasis von \mathbb{C}^n mit $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$. Ebenso sei Ψ_j die Spalten einer Orthonormalbasis von \mathbb{C}^n mit $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$ definiert. Zwischen dem Abtastsystem und dem sparsen System ist die *Kohärenz* definiert durch

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{n} \max_{i \neq j} |\langle \Phi_i, \Psi_j \rangle|.$$

Es gilt $\mu(\Phi, \Psi) \in [1, \sqrt{n}]$.

Eine kleine *Kohärenz* stellt sicher, dass mit wenigen Messungen genügend Informationen zur Rekonstruktion zur Verfügung stehen. In [12] wird als hinreichende Bedingung für das Lösen des ℓ_1 -Minimierungsproblems (2.15) die sogenannte *gegenseitige Kohärenz* (engl. *Mutual Coherence*) $\mu(\mathbf{A})$ als Maß für die *Inkohärenz* herangezogen. Diese Bedingung ist mit der Definition der *Kohärenz* vergleichbar, jedoch betrachten wir hier nicht den Zusammenhang zwischen zwei Orthonormalmatrizen, sondern den Zusammenhang zwischen den einzelnen Spalten \mathbf{a}_i der Sensingmatrix \mathbf{A} .

Definition 3.2.2 Sei $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_i)_{i=1}^n$ eine $m \times n$ -Matrix mit ℓ_2 -normierten Spaltenvektoren. Die *gegenseitige Kohärenz* ist definiert durch

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{i \neq j} \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle|}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \|\mathbf{a}_j\|_2}.$$

Es gilt

$$\mu(\mathbf{A}) \in \left[\sqrt{\frac{n-m}{m(n-1)}}, 1 \right]. \quad (3.1)$$

Die *gegenseitige Kohärenz* ist das größte absolute normierte innere Produkt zwischen verschiedenen Spalten von \mathbf{A} . Sie charakterisiert die Abhängigkeit zwischen den Spalten von \mathbf{A} . Je größer der Zusammenhang zwischen den Spalten von \mathbf{A} ist, desto weniger nicht-verschwindende Einträge sind in \mathbf{x} erlaubt. Die maximale gegenseitige Kohärenz einer Matrix beträgt eins, wenn zwei Spalten linear abhängig sind. Eine unterste Grenze der gegenseitigen Kohärenz $\mu(\mathbf{A})$ in Gleichung (3.1) ist die *Welch-Schranke* [29], welche durch die Zeilen- und Spaltenanzahl von \mathbf{A} vorgegeben ist. Mit dem folgenden Theorem aus [25, 30] geben wir eine Bedingung für die Vergleichbarkeit zwischen dem ℓ_0 -Minimierungsproblem (2.14) und dem ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) an.

Theorem 3.2.1 *Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix mit $\mu(\mathbf{A}) \neq 0$. Existiert eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ vom ℓ_0 -Minimierungsproblem (2.14) mit*

$$\|\mathbf{x}\|_0 < \frac{1}{2} (1 + \mu(\mathbf{A})^{-1})$$

dann ist \mathbf{x} die eindeutige Lösung zum ℓ_0 -Minimierungsproblem (2.14) und ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15).

Für alle unitären Matrizen \mathbf{A} , d. h. $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{-1}$, gilt $\mu(\mathbf{A}) = 0$ und damit ist eine exakte Rekonstruktion von \mathbf{x} möglich. Besitzt eine Matrix mehr Spalten als Zeilen, gilt $\mu(\mathbf{A}) > 0$. Erhalten wir ein kleines $\mu(\mathbf{A})$, so ist die Matrix einer unitären Matrix ähnlich. Für eine Matrix \mathbf{A} mit $m \ll n$ gilt als unterste Schranke $\mu(\mathbf{A}) \geq 1/\sqrt{m}$ [12]. Dagegen kann $\text{spark}(\mathbf{A})$ gleich $1+m$ sein, sodass die Eigenschaft wesentlich nützlicher ist. Nehmen wir an, dass $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ eine Lösung \mathbf{x} mit $\|\mathbf{x}\|_0 = s < \text{spark}(\mathbf{A})/2$ hat. Das wird der eindeutige ℓ_0 -Minimierer sein. Aber ist dieser auch der ℓ_1 -Minimierer? Das ist nicht notwendigerweise so. Jedoch ist $\|\mathbf{x}\|_0 < (1 + \mu(\mathbf{A})^{-1})/2$ eine ausreichende Bedingung.

3.2.2 Restricted Isometry Property (RIP)

Eine andere hinreichende Bedingung basiert auf der sogenannten restringierten Isometrie-Eigenschaft, d. h. *Restricted Isometry Property (RIP)*.

Definition 3.2.3 [12] *Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix. Die Matrix \mathbf{A} besitzt die Eigenschaft der Restricted Isometry Property (RIP) der Ordnung s , falls ein $\delta_s \in (0,1)$ existiert,*

so dass für alle s -sparsen Vektoren \mathbf{x}

$$(1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (3.2)$$

gilt.

Besitzt eine Matrix \mathbf{A} die RIP, so bedeutet das, dass die Spalten von \mathbf{A} näherungsweise eine Orthonormalbasis bilden. In [12] wird die RIP auch anders interpretiert. Eine Matrix \mathbf{A} erfüllt die RIP der Ordnung $2s$ mit $\delta_{2s} < 1$, wenn

$$0 < (1 - \delta_{2s}) \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\|_2^2$$

für alle s -sparsen Vektoren \mathbf{x} und $\hat{\mathbf{x}}$ mit $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \neq 0$ gilt. Erfüllt die Matrix \mathbf{A} die RIP mit kleinem δ_{2s} , so bleiben die paarweisen Abstände zwischen den s -sparsen Vektoren \mathbf{x} und $\hat{\mathbf{x}}$ im Messraum erhalten. Die RIP-Bedingung der Matrix \mathbf{A} sichert somit approximativ die euklidische Länge der $2s$ -sparsen Vektoren. Damit wird sichergestellt, dass alle sparsen Signale aus den Messungen wiederhergestellt werden können. Es gilt

$$(1 - \delta_{2s}) \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2s}) \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2.$$

Erfüllt die Matrix \mathbf{A} die RIP-Bedingung, können wir sparse Signale aus den Messungen \mathbf{b} wiederherstellen [31].

3.2.3 Null Space Property - Nullraumeigenschaft (NSP)

Die *Null Space Property (NSP)* ist die grundlegendste Eigenschaft zur Überprüfung der Ergebnisse für eine exakte sparse Rekonstruktion [32, 33]. NSP wurde für die Überprüfung der Äquivalenz zwischen dem ℓ_0 -Minimierungsproblem (2.14) und dem ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) eingeführt. Die Eigenschaft NSP stellt sicher, dass alle Vektoren $\boldsymbol{\eta}$ im Nullraum von \mathbf{A} nicht zu sparse sind. Sie ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die exakte Rekonstruktion von s -sparsen Vektoren [32, 33].

Gegeben sei eine Teilmenge T von $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ und ein Vektor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^n$. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{\eta}_T$ den Vektor, der mit $\boldsymbol{\eta}$ auf der Menge T übereinstimmt und auf der komplementären Menge $T^C =: [n] \setminus T$ verschwindet. Den Nullraum einer Matrix \mathbf{A} bezeichnen wir mit

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) := \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}\}. \quad (3.3)$$

Definition 3.2.4 Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix. Die Matrix \mathbf{A} besitzt die Nullraumeigenschaft (Null Space Property (NSP)) der Ordnung s , wenn für alle $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und

für alle Teilmengen $|T| \leq s$ gilt

$$\|\boldsymbol{\eta}_T\|_1 < \|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1.$$

Der Begriff NSP trat erstmals bei den Erforschungen für die beste Annäherung an die ℓ_1 -Norm auf und wurde von Cohen et al. [33] geprägt. Jedoch führten die Überlegungen von Donoho und Huo [34] sowie Gribonval und Nielsen [35] später zu dem Theorem:

Theorem 3.2.2 *Gegeben sei eine Matrix \mathbf{A} . Jeder s -sparse Vektor \mathbf{x} ist eindeutige Lösung des ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) genau dann, wenn \mathbf{A} die Null Space Property der Ordnung s erfüllt.*

Die Mindestanzahl der für die Wiederherstellung erforderlichen Messungen beträgt für sparse Vektoren [13, 36]

$$m \geq 2s. \tag{3.4}$$

Die Bedingung in Gleichung (3.4) wurde für sparse Vektoren \mathbf{x} abgeleitet [13, 36]. Der Umgang mit hochdimensionalen Daten erfordert jedoch eine komprimierte Darstellung eines Vektors. Eine bedeutende Technik zur Signalkompression ist die so genannte Transformationskodierung, bei der in der Regel eine Basis gefunden wird, welche eine sparse oder komprimierte Darstellung von Signalen liefert [12]. Viele Signale sind komprimierbar, d. h. sie können gut durch sparse Signale approximiert werden. Die Erweiterung der Nullraumanalyse auf eine komprimierte Darstellung von Vektoren bedeutet allerdings Bedingungen für \mathbf{A} abzuleiten, unter denen die komprimierte Darstellung von Vektoren nicht zu $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ gehört. Es wird ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ konstruiert, dessen Fehler durch seine Entfernung zu den s -sparsen Vektoren kontrolliert wird. Dazu sei nach [12] die Komprimierbarkeit $\sigma_s(\mathbf{x})_1$ durch

$$\sigma_s(\mathbf{x})_1 := \min_{\hat{\mathbf{x}} \in \Sigma_s} \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1, \tag{3.5}$$

definiert, d. h. den kleinsten Abstand im Sinne der ℓ_1 -Norm eines Signals \mathbf{x} von einem s -sparsen Vektor $\hat{\mathbf{x}}$, und stellt somit den Fehler der besten s -term Approximation des Vektors \mathbf{x} dar. Wir müssen allerdings überprüfen, ob der Vektor \mathbf{b} genügend Informationen für die Approximation von \mathbf{x} mit der Genauigkeit von $\sigma_s(\mathbf{x})_1$ liefert.

Theorem 3.2.3 *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Matrix, die die NSP der Ordnung s erfüllt. Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Dann existiert eine Konstante $0 < C_0 < 1$, so dass für jeden Vektor \mathbf{x} eine Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ für das ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) gefunden werden kann, die den Vektor \mathbf{x} mit dem ℓ_1 -Fehler*

$$\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1 \leq \frac{2(1 + C_0)}{(1 - C_0)} \sigma_s(\mathbf{x})_1$$

approximiert. Ist $\mathbf{x} \in \Sigma_s$, dann gilt $\sigma_s(\mathbf{x}) = 0$ und damit $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$.

Beweis Sei $\boldsymbol{\eta} = \widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$. Dann gilt $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ und

$$\|\widehat{\boldsymbol{x}}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1,$$

da $\widehat{\boldsymbol{x}}$ eine Lösung des ℓ_1 -Minimierungsproblems (2.15) ist. Sei T die Menge der absoluten s -größten Einträge von \boldsymbol{x} . Es gilt

$$\|\widehat{\boldsymbol{x}}_T\|_1 + \|\widehat{\boldsymbol{x}}_{T^c}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}_T\|_1 + \|\boldsymbol{x}_{T^c}\|_1.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt unmittelbar

$$\|\boldsymbol{x}_T\|_1 - \|\boldsymbol{\eta}_T\|_1 + \|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1 - \|\boldsymbol{x}_{T^c}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}_T\|_1 + \|\boldsymbol{x}_{T^c}\|_1$$

und daher

$$\|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1 \leq \|\boldsymbol{\eta}_T\|_1 + 2\|\boldsymbol{x}_{T^c}\|_1 \leq C_0 \|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1 + 2\sigma_s(\boldsymbol{x})_1$$

bzw.

$$\|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1 \leq \frac{2}{1 - C_0} \sigma_s(\boldsymbol{x})_1.$$

Schließlich folgt

$$\|\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_1 = \|\boldsymbol{\eta}_T\|_1 + \|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1 \leq (C_0 + 1) \|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1 \leq \frac{2(1 + C_0)}{1 - C_0} \sigma_s(\boldsymbol{x})_1.$$

□

Die NSP ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine exakte Rekonstruktion eines Signals unter Verwendung der ℓ_1 -Minimierung. Die NSP ist für die Eindeutigkeit der Lösung des ℓ_1 -Minimierungsproblems zuständig.

Mit Hilfe des Nullraums von \mathbf{A} können wir eine hinreichende Bedingung für die Rekonstruktion von sparsen Vektoren angeben. Das ℓ_0 -Minimierungsproblem (2.14) und das ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) besitzen die gleiche Lösung, wenn für die Sparsity der Lösung $\widehat{\boldsymbol{x}}$ gilt:

$$\sqrt{\|\widehat{\boldsymbol{x}}\|_0} \leq \min \left\{ \frac{1}{2} \frac{\|\boldsymbol{\eta}\|_1}{\|\boldsymbol{\eta}\|_2} : \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\} \right\}. \quad (3.6)$$

Es gilt

$$\operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}} \|\boldsymbol{x}\|_0 = \{\widehat{\boldsymbol{x}}\} = \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}} \|\boldsymbol{x}\|_1$$

für $\widehat{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} : \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}\}$, wenn die Sparsity von $\widehat{\boldsymbol{x}}$ die hinreichende Bedingung (3.6) der NSP erfüllt [37].

3.3 Beziehungen zwischen spark, gegenseitiger Kohärenz, RIP und NSP

In diesem Kapitel werden wir kurz auf die Zusammenhänge und deren Beziehungen zwischen den im letzten Kapitel 3.2 vorgestellten Begriffen spark, gegenseitiger Kohärenz, RIP und NSP eingehen. Dies erlaubt uns, auf einfache Weise andere Maße zu berechnen oder zumindest abzuschätzen.

Theorem 3.3.1 *Sei \mathbf{A} eine $m \times n$ -Matrix mit normierten Spaltenvektoren, dann gilt:*

(i) *Wir haben*

$$\text{spark}(\mathbf{A}) \geq 1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})}.$$

(ii) *\mathbf{A} erfüllt die RIP der Ordnung s mit $\delta_s = s\mu(\mathbf{A})$ für alle $s < \mu(\mathbf{A})^{-1}$.*

(iii) *Angenommen, \mathbf{A} erfüllt die RIP der Ordnung $2s$ mit $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$. Wenn*

$$\frac{\sqrt{2}\delta_{2s}}{1 - (1 + \sqrt{2})\delta_{2s}} < \sqrt{\frac{s}{n}}$$

gilt, dann erfüllt \mathbf{A} die NSP der Ordnung $2s$.

Für den Beweis des Theorems 3.3.1 verweisen wir auf [12]. Die Bedingung der gegenseitigen Kohärenz sichert die RIP, die Bedingung der RIP sichert die NSP. Die Bedingungen aus Theorem 3.3.1 sind aber nicht notwendige Bedingungen für die Rekonstruktion von sparsen Vektoren.

Im Folgenden werden wir die Aussagen über die Beziehung zwischen der RIP und der NSP sowie über die Eindeutigkeit der Lösung des ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15), also

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

in einem Lemma angeben und anschließend beweisen. Der Beweis lehnt sich an die Ausführungen in [13] an.

Lemma 3.3.2 *Gegeben sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $s \in \mathbb{N}$.*

(i) *Aus der RIP der Ordnung s folgt die NSP der Ordnung s .*

(ii) *Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ mit Supportmenge T ist eindeutige Lösung des ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) mit $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ genau dann, wenn \mathbf{A} die NSP erfüllt.*

Beweis

(i) Gemäß den Ausführungen im Kapitel 3.2.2 erfüllt eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ die RIP der Ordnung δ_{2s} mit $0 < \delta_{2s} < 1/3$ wenn

$$(1 - \delta_{2s}) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_{2s}) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (3.7)$$

für alle $2s$ -sparsen Vektoren \mathbf{x} gilt, d. h.

$$\mathbf{x} \in \Sigma_{2s} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{z}\|_0 \leq 2s\}.$$

Zuerst zeigen wir, dass für s -sparse Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ mit disjunktem Support, also $\text{supp}(\mathbf{x}) \cap \text{supp}(\mathbf{y}) = \emptyset$,

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle \leq \delta_{2s} \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \quad (3.8)$$

gilt.

Sei $T := \text{supp}(\mathbf{x}) \cup \text{supp}(\mathbf{y})$ sowie $\mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T$ die Beschränkung von $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ auf die Menge T . Aufgrund des disjunkten Supports haben wir $\langle \mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T \rangle = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle| &= |\langle \mathbf{A}_T \mathbf{x}_T, \mathbf{A}_T \mathbf{y}_T \rangle - \langle \mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T \rangle| \\ &= |\langle (\mathbf{A}_T^H \mathbf{A}_T - \mathbf{I}) \mathbf{x}_T, \mathbf{y}_T \rangle| \\ &\leq \|(\mathbf{A}_T^H \mathbf{A}_T - \mathbf{I}) \mathbf{x}_T\|_2 \|\mathbf{y}_T\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{A}_T^H \mathbf{A}_T - \mathbf{I}\|_2 \|\mathbf{x}_T\|_2 \|\mathbf{y}_T\|_2. \end{aligned}$$

Eine äquivalente Formulierung zur Gleichung (3.7) wird in [13] gegeben mit

$$\delta_{2s} = \max_{T \subset [n], \#(T) \leq 2s} \|\mathbf{A}_T^H \mathbf{A}_T - \mathbf{I}\|_2,$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die Operatornorm bzw. Spektralnorm der Matrix ist. Mit $\|\mathbf{x}_T\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ und $\|\mathbf{y}_T\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2$ folgt

$$|\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle| \leq \delta_{2s} \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2.$$

Sei $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $T_0 \subset [n]$ die Menge der Indizes entsprechend der s -betragsgrößten Einträge von $\boldsymbol{\eta}$. Weiterhin definieren wir $T^C = [n] \setminus T$ und T_1 für die s -betragsgrößten Indizes von $\boldsymbol{\eta}_{T^C}$, T_2 für die s -betragsgrößten Indizes von $\boldsymbol{\eta}_{T^C \setminus T_1}$, ... usw. Insgesamt splitten wir den Support T von $\boldsymbol{\eta}$ in eine disjunkte Menge T_0, T_1, \dots , sodass T_0 die Indizes der s -betragsgrößten Einträge von $\boldsymbol{\eta}$ enthält. Es gilt $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \dots$. Da der Vektor $\boldsymbol{\eta}$ im Nullraum der Matrix \mathbf{A} liegt, erhalten wir

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_{T_0} + \boldsymbol{\eta}_{T_1} + \boldsymbol{\eta}_{T_2} + \dots) = \mathbf{0}.$$

Nach Umformungen gilt

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_0} = -\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_{T_1} + \boldsymbol{\eta}_{T_2} + \dots).$$

Mit Anwendung der RIP folgt wegen $\#T_0 \leq s$

$$\begin{aligned} (1 - \delta_{2s}) \|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2^2 &\leq \|\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2^2 \\ &= \langle \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_0}, \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_0} \rangle \\ &= \langle \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_0}, -\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_{T_1} + \boldsymbol{\eta}_{T_2} + \dots) \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i} \langle \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_0}, -\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_i} \rangle, \end{aligned}$$

und mit der bewiesenen Ungleichung (3.8)

$$(1 - \delta_{2s}) \|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2^2 \leq \sum_{1 \leq i} \langle \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_0}, -\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_{T_i} \rangle \leq \sum_{1 \leq i} \delta_{2s} \|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2 \|\boldsymbol{\eta}_{T_i}\|_2.$$

Für $i \geq 1$ schätzen wir weiter ab

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\eta}_{T_i}\|_2 &= \left(\sum_{j \in T_i} \eta_j^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j \in T_i} \left(\max_{k \in T_i} |\eta_k| \right)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{s} \max_{k \in T_i} |\eta_k| \\ &\leq \sqrt{s} \min_{k \in T_{i-1}} |\eta_k| \\ &\leq \sqrt{s} \frac{\sum_{j \in T_{i-1}} |\eta_j|}{s} = \frac{\|\boldsymbol{\eta}_{T_{i-1}}\|_1}{\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\begin{aligned} (1 - \delta_{2s}) \|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2^2 &\leq \delta_{2s} \sum_{1 \leq i} \|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2 \|\boldsymbol{\eta}_{T_i}\|_2 \\ &\leq \delta_{2s} \|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2 \sum_{1 \leq i} \frac{\|\boldsymbol{\eta}_{T_{i-1}}\|_1}{\sqrt{s}} = \delta_{2s} \frac{\|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2}{\sqrt{s}} \|\boldsymbol{\eta}\|_1. \end{aligned}$$

Anschließende Division mit $\|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2$ und $(1 - \delta_{2s})$ ergibt

$$\|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{\delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} \|\boldsymbol{\eta}\|_1.$$

Unter der Annahme $\delta_{2s} < \frac{1}{3}$ folgt

$$\frac{\delta_{2s}}{1 - \delta_{2s}} < \frac{1}{2}$$

und damit

$$\|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{s}} \|\boldsymbol{\eta}\|_1.$$

Mit $\|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_1 \leq \sqrt{s} \|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_2$ aus [12] gilt

$$\|\boldsymbol{\eta}_{T_0}\|_1 \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\eta}\|_1$$

und somit folgt direkt die Behauptung.

Wir haben somit gezeigt, dass \mathbf{A} die NSP der Ordnung s erfüllt, d. h. für jedes $T \subset [n]$ mit $\#T \leq s$ und für jedes $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt

$$2 \|\boldsymbol{\eta}_T\|_1 < \|\boldsymbol{\eta}\|_1,$$

wobei $(\boldsymbol{\eta}_T)_i = \eta_i$ für alle $i \in T$ und $(\boldsymbol{\eta}_T)_i = 0$ für alle anderen gilt.

(ii) Gegeben sei eine feste Indexmenge T . Wir nehmen zunächst an, dass jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ mit der Supportmenge T eindeutiger Minimierer von $\|\mathbf{z}\|_1$ unter der Bedingung $\mathbf{Az} = \mathbf{Ax}$ ist. Somit ist für jedes $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ der Vektor $\boldsymbol{\eta}_T$ eindeutiger Minimierer von $\|\mathbf{z}\|_1$ unter der Bedingung $\mathbf{Az} = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_T$. Allerdings ist $\mathbf{A}(-\boldsymbol{\eta}_{T^c}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}_T$ und $-\boldsymbol{\eta}_{T^c} \neq \boldsymbol{\eta}_T$ wegen $\mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_T + \boldsymbol{\eta}_{T^c}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$. Wir erhalten $\|\boldsymbol{\eta}_T\|_1 < \|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1$.

Umgekehrt nehmen wir an, dass die NSP bezüglich T gilt. Geben sei ein Vektor \mathbf{x} mit Support T und ein Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $\mathbf{Az} = \mathbf{Ax}$ und $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$. Wir betrachten den Vektor $\boldsymbol{\eta} := \mathbf{x} - \mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und erhalten mit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_T\|_1 + \|\mathbf{z}_T\|_1 = \|\boldsymbol{\eta}_T\|_1 + \|\mathbf{z}_T\|_1 \\ &< \|\boldsymbol{\eta}_{T^c}\|_1 + \|\mathbf{z}_T\|_1 \\ &= \|\mathbf{z}_{T^c}\|_1 + \|\mathbf{z}_T\|_1 \\ &= \|\mathbf{z}\|_1 \end{aligned}$$

die Behauptung. □

Zusätzliche Informationen und Ausführungen zur NSP, der gegenseitigen Kohärenz und der RIP können dem umfangreichen Artikel [38] entnommen werden.

3.4 Sparse Rekonstruktion

In den bisherigen Ausführungen haben wir gezeigt, welche Bedingungen für eine erfolgreiche Rekonstruktion vorliegen müssen. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen

dem ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) und der Matrix \mathbf{A} noch nicht ganz deutlich. Wie viele Messungen m werden für eine erfolgreiche Rekonstruktion benötigt, d. h. ab welcher Dimension erfüllt die Matrix \mathbf{A} die RIP der Ordnung $2s$?

Sei ein Signal \mathbf{x} fest und \mathbf{z} ein s -sparses Signal, welches aus den Koeffizienten von \mathbf{x} in der Basis Ψ besteht. In dem Sensingmodellraum Φ werden m zufällige Messungen durchgeführt. Erfüllt die Anzahl der Messungen m die Ungleichung

$$m \geq C \mu^2(\Phi, \Psi) s \log(n) \quad (3.9)$$

mit einer Konstante $C \geq 0$, so ist die Rekonstruktion mit hoher Wahrscheinlichkeit exakt [39]. Die in der Gleichung enthaltene Kohärenz kann mit Hilfe der Definition 3.2.1 berechnet werden. Ist die Kohärenz klein, so werden weniger Messungen für eine erfolgreiche Rekonstruktion benötigt.

In [39] wird gezeigt, dass der wahrscheinlichkeitstheoretische Erfolg einer Rekonstruktion größer als $1 - \delta$ ist, wenn für die Anzahl der Messungen m gilt:

$$m \geq C \mu^2(\Phi, \Psi) s \log\left(\frac{n}{\delta}\right). \quad (3.10)$$

Das Ergebnis ist für alle Messungen der Größe m nicht allgemeingültig. Das wird an einem Beispiel in [2] gezeigt. Die zwei Ungleichungen (3.9) und (3.10) werden für die Ermittlung der benötigten Messungen für eine exakte Rekonstruktion in [12, 39] aufgeführt und bewiesen.

Theorem 3.4.1 *Erfüllt die Matrix \mathbf{A} die RIP der Ordnung $2s$ mit $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$, dann gilt für die Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ (gemäß [40], Theorem 2, Gleichung Nr. 10)*

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 &\leq \frac{C_0}{\sqrt{s}} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1 \quad \text{und} \\ \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_1 &\leq C_0 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_1 \end{aligned}$$

mit positiver Konstante C_0 .

Der Vektor \mathbf{x}_s ist der Vektor \mathbf{x} , der die s -betragsgrößten Komponenten enthält und die anderen Komponenten gleich Null setzt. Wenn \mathbf{x} s -sparse ist, dann gilt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$ und die Rekonstruktion ist exakt. Das Theorem 3.4.1 gilt für alle Signale. Wenn \mathbf{x} nicht s -sparse ist, so wird in [40] erklärt, dass die Qualität des wiederhergestellten Signals dennoch gut ist, um die betragsgrößten Einträge zu finden und diese dann entsprechend direkt zu messen.

Mit dem vollständigen Wissen über das Signal \mathbf{x} können die wichtigsten Informationen extrahiert werden. Wenn eine Matrix die Hypothese des Theorems 3.4.1 stützt, so wird garantiert, dass alle sparsen Signale mit den s -betragsgrößten Einträgen rekonstruiert werden können [40].

Im Allgemeinen liegen die Signale nicht im rauschfreien Zustand vor. In Anwendungen haben wir fast immer verrauschte Daten vorliegen. Das ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) muss dementsprechend geändert werden. Die Schranke $\varepsilon > 0$ stellt eine obere Schranke für das Rauschen dar. So ergibt sich folgendes Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 < \varepsilon.$$

Das ist wieder ein konvexes Problem und kann effizient gelöst werden.

Theorem 3.4.2 [39] Sei $\delta_{2s} < \sqrt{2}-1$. Die Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ erfüllt, unter Beachtung von (3.5),

$$\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{C_0}{\sqrt{s}} \sigma_s(\mathbf{x})_1 + C_1 \varepsilon$$

mit positiven Konstanten C_0 und C_1 .

Der Beweis kann dem Theorem 1.9 in [12] entnommen werden. Der Rekonstruktionsfehler wird durch die Summe der beiden Konstanten C_0 und C_1 beschränkt. Die Konstante C_0 veranschaulicht den Fehler im rauschfreien Fall, und die zweite Konstante C_1 verhält sich proportional zum Rauschen. Damit ist der Rekonstruktionsfehler begrenzt.

Weitere Ausführungen in der Literatur zeigen, dass auch rauschbehaftete Signale noch relativ gut rekonstruiert werden können, wenn vorausgesetzt wird, dass die zugrundeliegende Sensingmatrix die Bedingung der RIP erfüllt.

Zusätzlich sei erwähnt, dass die genannten Kriterien, wie Kohärenz, RIP und NSP, für eine erfolgreiche Rekonstruktion nur hinreichend, aber nicht notwendig sind. Bei vorgegebener Sparsity können diese Kriterien unterschiedliche Aussagen bezüglich der notwendigen Anzahl von Messungen hervorrufen. So ist z. B. die Abschätzung der erforderlichen Anzahl von Messungen von der Kohärenz abhängig. Die Berechnung der RIP-Konstante stellt ein kombinatorisches Problem dar und kann nicht mit polynominalen Aufwand gelöst werden. Aus ingenieurwissenschaftlicher Sicht werden diese Kriterien daher im weiteren Verlauf der Arbeit nicht weiter betrachtet.

Des Weiteren konzentrierte sich die Theorie CS in der Anfangszeit auf die Untersuchung von Zufallssensingmatrizen. Später wurden partielle Fouriermatrizen erforscht, bei denen zufällige Zeilen ausgewählt werden. Die RIP-Konstanten von partiellen Fouriermatrizen lassen sich wahrscheinlichkeitstheoretisch analysieren. Solche Zufallsmatrizen besitzen mit hoher Wahrscheinlichkeit die Eigenschaft RIP und sichern somit eine stabile Rekonstruktion, wenn genügend Messungen nach (3.9) vorliegen.

Für die rein simulativ durchgeführten Analysen in dieser Arbeit verwenden wir ausschließlich Zufallsmatrizen. Die ab Kapitel 8 zugrundeliegende optimale Abtastmatrix („BCASC“, [36]) erfüllt die Bedingung der gegenseitigen Kohärenz in Gleichung (3.1),

und erreicht insbesondere die Welch-Schranke [29]. Für die experimentelle Überprüfung in Kapitel 11 verwenden wir die durch die real verwendete Sensorik vorgegebene Sensingmatrix.

3.5 Rekonstruktionsalgorithmen für ℓ_1 -Minimierungsprobleme

3.5.1 Übersicht aktueller Algorithmen

Auf dem Gebiet der Algorithmenentwicklung zur Rekonstruktion sparser Vektoren hat insbesondere in den letzten beiden Jahrzehnten eine rasante Entwicklung stattgefunden.

Das eigentliche Problem der Formulierung der strukturellen Nebenbedingung der Sparsity wurde aus unterschiedlichen Blickwinkeln angegangen. In jedem Fall wird ein Vektor gesucht, der zum einen die residuellen Abweichungen zwischen dem gegebenen (manchmal als verrauscht angenommenen) Messwertvektor und seiner Abbildung in den Mess- oder Bildbereich minimiert. In der Regel wird ein quadratisches Abweichungsmaß zur Messung der sogenannten „Datentreue“ verwendet. Zusätzlich werden die Nebenbedingungen in Form der Sparsity des zu rekonstruierenden Vektors berücksichtigt.

Ein solcher Minimierungsansatz macht ein solches Problem zu einem „Optimierungsproblem“ mit Nebenbedingungen und führt unter der Bedingung der Konvexität für die zu minimierende Zielfunktion und Nebenbedingung direkt zu den Methoden der konvexen Optimierung. Hierzu wäre aber eine konvexe Relaxierung der ℓ_0 -Norm, beispielsweise durch die ℓ_1 -Norm notwendig, die aber unter Annahme der hinreichenden Bedingung der NSP (3.6) lösungsäquivalent ist.

Andererseits könnte die Problemstellung als modellbasiertes Schätzproblem der Rekonstruktion eines Zustandsvektors aus gestörten (verrauschten) Beobachtungsdaten formuliert werden, wobei die Nebenbedingung der Sparsity als a-priori Modellwissen formuliert würde. Ein solcher Ansatz führt unter Verwendung stochastischer Modellbildungstechniken auf Bayes'sche Lösungsansätze.

Wenn auch der sparseste zu rekonstruierende Vektor durch eine minimale ℓ_0 -Norm gekennzeichnet wäre – die exakte ℓ_0 -Minimierung ist aber ein NP-hartes kombinatorisches Problem – würde ein möglicher iterativer Lösungsansatz auf die sogenannten „greedy Algorithmen“ führen, die als „Matching Pursuit (MP)“ oder „Orthogonal Matching Pursuit (OMP)“ in vielen Variationen bekannt sind.

Auch genetische Algorithmen, beispielsweise „Support-set-based GA“ [41] und „Nullspace-based GA“ [42] wären durchaus denkbar, wie auch einfache Kleinste-Quadrate-Schätzverfahren in Verbindung mit Schwellenansätzen, die jeweils die kleinsten Komponenten des Schätzvektors zu Null setzen, oder verringern, um möglichst sparse Vektoren zu generieren.

Eine Kategorisierung der sich aus diesen Denkansätzen ergebenden Varianten wird in [43] vorgenommen und teilt die Gruppen ein in:

- 1) „konvexe Relaxationsverfahren“
- 2) „greedy Algorithmen“
- 3) „Thresholding-Methoden“
- 4) „Bayes’sches Lernen“,

die in der Folge etwas weiter detailliert werden. Beginnen wir mit der ersten Kategorie

- 1) Zahlreiche Minimierungsprobleme werden mit Relaxationsverfahren gelöst. Sind Zielfunktion und deren Menge der zulässigen Punkte konvex, werden die Verfahren als konvexe Relaxationsverfahren bezeichnet.

Für das im Kapitel 2.2 genannte ℓ_0 -Minimierungsproblem (2.14) wird der Ausdruck $\|\cdot\|_0$ durch die konvexe Einhüllende, also die ℓ_1 -Norm ersetzt. Liegen keine verrauschten Daten vor, wird ein ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) der folgenden Form gelöst

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

welches als *Basis Pursuit Problem (BP)* [6] bekannt ist. Bei Vorlage von verrauschten Daten wird üblicherweise die Nebenbedingung durch Zuhilfenahme einer Schranke ε behelfsmäßig relaxiert, die sich an der ℓ_2 -Norm des Rauschens orientiert. „Behelfsmäßig“ bezieht sich dabei auf die Tatsache, dass die Gültigkeit der dann entstehenden Ungleichung nur unter Zuhilfenahme stochastischer Parameter verstanden werden kann und auch nur dann sinnvoll erscheint, wenn angenommen wird, dass alle Komponenten des Messvektors in gleicher Stärke verrauscht sind. Das Problem für den verrauschten Fall:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \quad (3.11)$$

wird als *Basis Pursuit Problem - noisy (BP-noisy)* bezeichnet.

Ist es nicht möglich eine Schranke ε zu ermitteln, so kann das konvexe Optimierungsproblem, genannt *BP-denoising (BPDN)*,

$$\min_{\mathbf{x}} \beta \|\mathbf{x}\|_1 + \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2, \quad \beta \geq 0 \quad (3.12)$$

gelöst werden [43]. Allerdings ist es schwierig, insbesondere für den Fall nicht identisch verteilter oder korrelierter Rauschbeiträge für ein gegebenes ε eine Abbildung $\beta(\varepsilon)$ zu konstruieren. Existiert eine solche Abbildung, so stimmt die Lösung des Problems (3.12) mit der Lösung des Problems (3.11) überein.

„BPDN löst das konvexe Optimierungsproblem aufgrund fehlender Nebenbedingung schneller als BP-noisy, welches Nebenbedingung enthält.“ [43]

- 2) Das Grundprinzip von greedy Algorithmen besteht darin, den Support des zu rekonstruierenden Signals schrittweise, d. h. in jeder Iteration, aufzubauen. Die Supportmenge wird anhand der ermittelten Indizes der Spalten von der Matrix \mathbf{A} generiert. Die erforderlichen Indizes erhalten wir durch die Berechnung der größten Korrelation mit dem Messfehler aus der vorherigen Iteration. Der ursprüngliche Algorithmus *Matching Pursuit (MP)* [44] wurde später auf die orthogonale Version *Orthogonal Matching Pursuit (OMP)* [45, 46] erweitert, welcher uns in dieser Arbeit noch beschäftigen wird. In der Literatur sind weitere Verfahren *Subspace Pursuit (SP)* [9] und *Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP)* [47] bekannt. Der Unterschied zu den Verfahren MP und OMP besteht darin, dass in einem Iterationsschritt nicht nur ein Index sondern mehrere Indizes zur Supportmenge hinzugefügt oder eliminiert werden können. Als Voraussetzung für diese Verfahren müssen die Spalten der Matrix ℓ_2 -normiert sein. Die notwendigen Umformungen werden im Anhang B dargestellt.
- 3) Der *Iterative Hard-Thresholding (IHT)* [48, 49] ist eine Methode, die die s -betragsgrößten Elemente des geschätzten Zustandsvektor beibehält und alle anderen Elemente auf Null setzt. Die Abbildung 3.1 demonstriert den Hard-Thresholding-Operator H_τ für einen beliebigen Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $i = 1, \dots, n$.

$$H_\tau(\mathbf{z}) = \begin{cases} z_i & , |z_i| > \tau \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

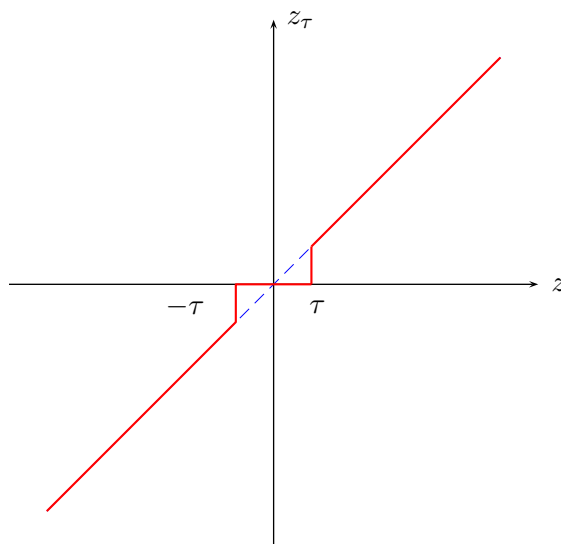


Abb. 3.1: Hard-Thresholding

Weil die Sparsity s in der Praxis nicht bekannt ist, wird ein Schwellenwert τ benutzt. Der Schwellenwert τ ist ein zu bestimmender Parameter, der entweder festgelegt oder in jeder Iteration k ermittelt werden muss.

Der IHT ist wie folgt definiert

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = H_\tau \left(\mathbf{z}^{(k)} + \mathbf{A}^T \left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z}^{(k)} \right) \right), \quad \mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{0}.$$

Auf diesem Gebiet existieren viele Modifikationen des klassischen Thresholdings [12]. Im Kapitel 9 werden wir auf Thresholding-Methoden näher eingehen.

- 4) Für das Lösen von Rekonstruktionsproblemen wird zunehmend das *Bayes'sche Lernen (sparse Bayesian learning (SBL))* [50, 51] eingesetzt. Ein sparser Vektor wird aus Komponenten, deren überlagertes gauß'sches Rauschen unabhängig ist, aufgebaut. Im einfachsten Fall wird zudem vereinfachend angenommen, dass alle Rauschbeiträge identische stochastische Parameter besitzen, wobei diese Annahme jedoch nicht notwendig ist. Mit Hilfe des Beobachtungsvektors werden im ersten Teil die sogenannten Hyperparameter anhand der Maximierung der Evidenz geschätzt. Aufgrund des Bayes'schen Wahrscheinlichkeitsmodells kann SBL anschließend den *Maximum-a-posteriori (MAP)-Schätzer* bestimmen. Das Bayes'sche Lernen besteht aus einem Algorithmus mit dem Ziel der Erwartungswertmaximierung.

In der Praxis werden alle in diesem Kapitel genannten Algorithmen angewandt. Allerdings stellt sich die Frage, welcher Algorithmus in bestimmten Situationen bevorzugt eingesetzt werden soll.

Als mögliche Kriterien für eine geeignete Wahl eines Algorithmus sind die minimale Anzahl von Messungen m , die Sparsity s und auch die Dimension des Signals n zu nennen. Ein weiteres Kriterium ist die Laufzeit des Algorithmus. Sollte die Sparsity klein sein, dann wird vorwiegend der OMP bevorzugt, weil seine Laufzeit im Wesentlichen von der Anzahl der Iteration abhängt, die typischerweise, falls der Algorithmus erfolgreich ist, der Sparsity s entspricht. Ist dagegen die Sparsity s im Verhältnis zur Dimension n nicht so klein, so kann der OMP eine beträchtliche Zeit benötigen.

Die Laufzeit von IHT wird durch die Sparsity s überhaupt nicht beeinflusst. Beim BP hängt die Laufzeit von dem Algorithmus ab, der für die Minimierung verwendet wird. Der *Chambolle & Pock's primal-dual Algorithmus (C&P)* konstruiert eine Folge, die gegen den ℓ_1 -Minimierer konvergiert. Die Sparsity vom C&P hat keinen gravierenden Einfluss auf die Laufzeit des Algorithmus. Allerdings kann für eine größere Sparsity die Laufzeit durchaus deutlich geringer sein als bei OMP.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass greedy Algorithmen nicht immer schneller als ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen sind, sondern nur im Fall einer kleinen Sparsity. [13]

3.5.2 Primal-dual-Algorithmus von Chambolle & Pock (C&P)

In diesem Kapitel stellen wir einen iterativen primal-dual-Algorithmus für numerische Berechnungen von Optimierungsproblemen vor.

Chambolle & Pock's primal-dual Algorithmus (C&P) [52] ist ein bekanntes schnelles Verfahren für die Rekonstruktion von sparsen Signalen für das ℓ_1 -Minimierungsproblem. Der Algorithmus ist eine Methode für die Berechnung von konvexen Optimierungsproblemen mit Sattelpunkt-Struktur, indem die Lösung des Algorithmus gegen ein Fixpunkt konvergiert. In jeder Iteration löst der Algorithmus abwechselnd ein primales bzw. duales Problem. Der enthaltene komplexe *Soft-Thresholding-Operator* S_τ im C&P ist für ein allgemeines $z \in \mathbb{C}$ wie folgt definiert:

$$S_\tau(z) := \begin{cases} \operatorname{sgn}(z) (|z| - \tau) & , |z| \geq \tau \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (3.13)$$

mit der *sgn-Funktion*, $\operatorname{sgn}(z) = \frac{z}{|z|}$ für $z \neq 0$.

Eine andere Darstellung des *Soft-Thresholding-Operators* S_τ ist gegeben durch

$$S_\tau(z) = \begin{cases} z - \tau & , z > \tau \\ 0 & , -\tau \leq z \leq \tau \\ z + \tau & , z < -\tau. \end{cases}$$

Abbildung 3.2 zeigt die Arbeitsweise des *Soft-Thresholding-Operators* S_τ .

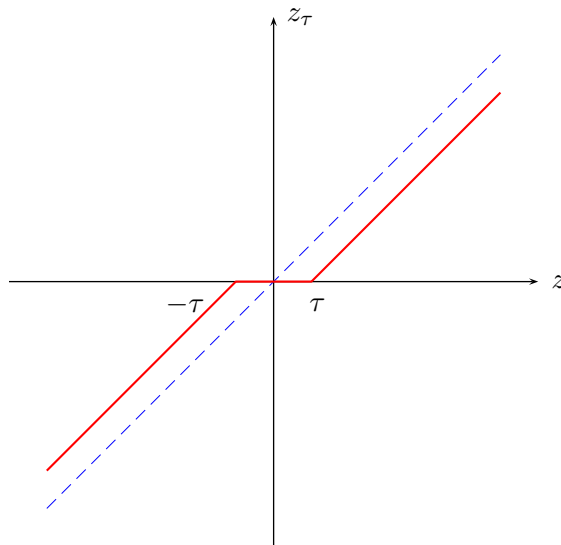


Abb. 3.2: Soft-Thresholding

Für die Anwendung im primal-dual-Algorithmus wird der Soft-Thresholding-Operator (auch bezeichnet als shrinkage Operator) für alle $z \in \mathbb{C}^n$ elementweise verwendet. Der Soft-Thresholding-Operator setzt die Elemente, deren Absolutbeträge niedriger als der Schwellenwert τ sind, auf Null und subtrahiert den Schwellenwert τ von den anderen Elementen. Der primal-dual-Algorithmus für ℓ_1 -Minimierungsprobleme [13, 52] wird in Algorithmus 1 aufgeführt.

Algorithmus 1 Primal-dual-Algorithmus von Chambolle & Pock (C&P)

-
- 1: **Initialisiere:** $\theta \in [0,1], \tau, \sigma > 0$ mit $\tau\sigma \|\mathbf{A}\|_2^2 < 1, \bar{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{0}, k = 0$
 - 2: **while** $(E(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\xi}^{(k)}) > \varepsilon)$ **do**
 - 3: $k := k + 1$
 - 4: $\boldsymbol{\xi}^{(k)} = \boldsymbol{\xi}^{(k-1)} + \sigma (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^{(k-1)} - \mathbf{b})$
 - 5: $\mathbf{x}^{(k)} = S_\tau (\mathbf{x}^{(k-1)} - \tau \mathbf{A}^H \boldsymbol{\xi}^{(k)})$
 - 6: $\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} + \theta (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)})$
 - 7: **end while**
-

Das Abbruchkriterium $E(\mathbf{x}^{(k)}, \boldsymbol{\xi}^{(k)})$ im Algorithmus 1 entspricht einem Schwellenwert für den Abstand zwischen der primal und dual berechneten Lösung in der k -ten Iteration. Für weitere ausführliche Erklärungen zum primal-dual-Algorithmus sei auf die weiterführende Literatur [12, 13, 52] verwiesen.

3.5.3 Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

Nachstehend erläutern wir den *Orthogonal Matching Pursuit (OMP)* Algorithmus [45]. Der OMP wird uns in den nächsten Kapiteln noch weiter beschäftigen. Daher werden wir, wie der C&P, für das ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) auf Grund der Vollständigkeit auch den OMP in diesem Kapitel kurz darstellen.

Der OMP startet mit einem Nullvektor $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, dessen Supportmenge mit einer leeren Menge $T^{(0)} = \emptyset$ initialisiert wird. In jeder Iteration k wird ein Index j zur Supportmenge hinzugefügt. Der hinzugefügte Index zur Supportmenge wird über die Indizes der Spalten von \mathbf{A} , die die größte Korrelation mit dem Messfehler aus der vorherigen Iteration besitzen, ermittelt. Die Schwierigkeit besteht darin, ein geeignetes Abbruchkriterium für den Algorithmus zu finden, da mit jeder Iteration die Supportmenge wächst. Für einen s -sparsen Vektor benötigt OMP mindestens s Iterationen für die exakte Rekonstruktion.

Der OMP ist eine Entwicklung aus dem Matching Pursuit (MP), dessen Aktualisierung von \mathbf{x} aus einer orthogonalen Projektion von \mathbf{b} auf die Spalten der Matrix \mathbf{A} besteht. Eine hinreichende Bedingung für die Rekonstruktion wurde in [36, 53] mit

$$s < \frac{\mu(\mathbf{A})^{-1} + 1}{2}$$

angegeben. Der Index j_k wird so ausgewählt, dass die ℓ_2 -Norm des Fehlers $\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k-1)}$ so weit wie möglich bei jeder Iteration reduziert wird. Dass die Wahl des Index j_k in Zeile 4 im Algorithmus 2 den Ausdruck $\left| (\mathbf{A}^H (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k-1)}))_{j-1} \right|$ maximiert und optimal gewählt wird, beweisen wir durch das folgende Lemma 3.5.1 aus [13].

Lemma 3.5.1 [13] Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine Matrix mit ℓ_2 -normierten Spalten. Gegeben sei $T \subset \{1, \dots, n\}$, \mathbf{v} ein Vektor mit Support T und $j \in \{1, \dots, n\}$. Wenn

$$\mathbf{w} := \operatorname{argmin}_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \{ \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset T \cup \{j\} \}$$

gilt, dann folgt

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - |(\mathbf{A}^H(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j|^2.$$

Beweis Sei $\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j$ ein beliebiger Vektor mit Support $T \cup \{j\}$ und $t \in \mathbb{C}$. Wir haben

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \leq \min_{t \in \mathbb{C}} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2.$$

Mit $t = \rho e^{i\theta}$ für $\rho \geq 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2 &= \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v} - t\mathbf{A}\mathbf{e}_j\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + |t|^2 \|\mathbf{A}\mathbf{e}_j\|_2^2 - 2 \operatorname{Re}(\bar{t} \langle \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{e}_j \rangle) \\ &= \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 - 2 \operatorname{Re}(\rho e^{-i\theta} (\mathbf{A}^H(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j) \\ &\geq \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 + \rho^2 - 2\rho |(\mathbf{A}^H(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j|, \end{aligned}$$

mit Gleichheit für ein richtig gewähltes θ . Als quadratisches Polynom in ρ wird der letztgenannte Ausdruck minimiert, wenn gilt

$$\rho = |(\mathbf{A}^H(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j|.$$

Das zeigt

$$\min_{t \in \mathbb{C}} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_j)\|_2^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_2^2 - |(\mathbf{A}^H(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{v}))_j|^2.$$

□

Nachstehend geben wir den Algorithmus Orthogonal Matching Pursuit (OMP) an.

Algorithmus 2 Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

- 1: **Initialisiere:** $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, $T^{(0)} = \emptyset$, $k = 0$
 - 2: **while** $\left(\left\| \mathbf{b} - \mathbf{A}_{T^{(k)}} \mathbf{x}_{T^{(k)}}^{(k)} \right\|_2 > \varepsilon \right)$ und $(|T^{(k)}| < s_{\max})$ **do**
 - 3: $k := k + 1$
 - 4: $j_k = \operatorname{argmax}_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left| (\mathbf{A}^H(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k-1)}))_{j-1} \right| \right\}$
 - 5: $T^{(k)} = T^{(k-1)} \cup \{j_k\}$
 - 6: $\mathbf{x}^{(k)} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n} \{ \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z}\|_2, \operatorname{supp}(\mathbf{z}) \subset T^{(k)} \}$
 - 7: **end while**
-

Kapitel 4

Kalman-Filter

Das Kalman-Filter, benannt nach seinem Erfinder Rudolf E. Kálmán [54], wurde 1960 für zeitdiskrete lineare Systeme entwickelt. In seiner Grundform handelt es sich um eine rekursive Berechnungsvorschrift, die es ermöglicht, aus verrauschten und teils redundanten Messungen die Parameter sowie die Zustände eines Systems zu schätzen. Das Kalman-Filter hat den Vorteil, dass es gegenüber anderen stochastischen Schätzverfahren iterativ aufgebaut und somit für Echtzeitanwendungen geeignet ist. Die erste Anwendung fand das Kalman-Filter im Rahmen der Mondlandung der Apollo-11-Mission [55], deren erste computerbasierende Implementierung des Algorithmus ebenfalls in [55] zu finden ist.

Der Grundgedanke des Kalman-Filters besteht darin, ein Systemmodell und auch ein Sensormodell so aufzustellen, dass auf Basis beider Modelle und unter Verwendung von Sensordaten der Zustand des Systems bestimmt werden kann. Eine Vielzahl von Problemstellungen können daher als Schätzprobleme unbekannter Zustände eines dynamischen Systems interpretiert werden.

Nachstehend geben wir eine kleine Auswahl der Anwendungsbereiche des Kalman-Filters wieder [56–58]:

- Mess-Signalverarbeitung
 - Unterdrückung von System- und Messrauschen
 - Systemzustandsschätzungen, die nicht direkt messbar sind
 - Objektverfolgung
 - Stützung eines Dopplernavigationssystems
 - Bestimmung der Flugbahn eines Trägerflugzeugs
 - Radarzielverfolgung
 - integriertes Schiffsnavigationssystem
 - Lagebestimmung von Satelliten
 - Kanalverzerrung bei Mobilfunk
 - Echokompensation

- Bildverarbeitung
 - Objektverfolgung anhand von Kanten im Bild
 - Positionsbestimmungen
 - Fahrer-Assistenz-Systeme (z. B. Fahrbahnverfolgung)
- Bilddatencodierung
 - höhere Datenkompression (z. B. bei MPEG4)

Für die Ableitung des Kalman-Filters existieren mehrere Ansätze. In diesem Kapitel werden wir, nach der mathematischen Beschreibung des Systemmodells und des Messmodells, kurz einen Überblick über die Herleitungsvarianten des Kalman-Filter-Algorithmus geben, deren Ansätze in [56] zu finden sind. Anschließend bereiten wir die Herleitung der Kalman-Filter-Gleichungen vor und leiten zusätzlich die Kalman-Filter-Gleichungen mit dem Ansatz über orthogonale Projektionen im Anhang C her.

4.1 Mathematische Beschreibung

4.1.1 Systemmodell

Für die folgenden Ausführungen beschränken wir uns auf die zeitdiskrete Version des Kalman-Filters.

Das System- bzw. Zustandsmodell sei durch folgendes lineares rekursives Gleichungssystem [56] definiert

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{w}^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (4.1)$$

mit $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ als Zustandsvektor, $\mathbf{A}^{(k)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ als Zustandsübergangsmatrix. Der Vektor $\mathbf{w}^{(k)}$ ist ein gaußverteilter weißer Rauschvektor $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}^{(k)})$ mit Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}^{(k)} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Mit $\mathcal{N}(\cdot, \cdot)$ bezeichnen wir die Normalverteilung mit Erwartungswert und Varianz. Weißes Rauschen dient in der Signalverarbeitung zur Beschreibung von zufälligen Störungen in einem Übertragungskanal und wird als Geräusch wahrgenommen.

Wir verwenden für unsere Betrachtungen, soweit nichts anderes angegeben, gaußverteiltes weißes Rauschen.

Für die stochastischen Parameter gelte

$$\begin{aligned} E \left\{ \mathbf{w}^{(k)} \right\} &= \mathbf{0} \\ E \left\{ \mathbf{w}^{(k)} \left(\mathbf{w}^{(j)} \right)^{\text{H}} \right\} &= \mathbf{Q}^{(k)} \cdot \delta^{(k,j)}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Das *Kronecker-Delta-Symbol* $\delta^{(k,j)}$ ist für alle $k, j \in \mathbb{N}_0$ definiert mit

$$\delta^{(k,j)} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}.$$

Die Matrizen $\mathbf{A}^{(k)}$ und $\mathbf{Q}^{(k)}$ können zwar mathematisch zeitvariant modelliert werden, jedoch sind genaue Kenntnisse der System- und Rauschdynamik nicht vorhanden, sodass die beiden Matrizen als zeitinvariant definiert werden, d. h.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{w}^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

4.1.2 Messmodell

Das Beobachtungsmodell

$$\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \tag{4.2}$$

mit $\mathbf{b}^{(k)} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{C}^{(k)} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{v}^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}^{(k)})$, $\mathbf{R}^{(k)} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ist linear. Das Messmodell ist durch weißes gaußverteiltes Rauschen $\mathbf{v}^{(k)}$ gestört, das zusätzlich von allen anderen Prozessen unabhängig ist. Die Störungen seien stochastisch beschrieben durch

$$\begin{aligned} E \left\{ \mathbf{v}^{(k)} \right\} &= \mathbf{0} \\ E \left\{ \mathbf{v}^{(k)} \left(\mathbf{v}^{(j)} \right)^{\text{H}} \right\} &= \mathbf{R}^{(k)} \cdot \delta^{(k,j)}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit des Rauschvektors \mathbf{v} von den stochastischen Eingangsgrößen drückt sich in der folgenden Forderung aus

$$E \left\{ \mathbf{v}^{(k)} \left(\mathbf{w}^{(j)} \right)^{\text{H}} \right\} = \mathbf{0}, \quad \forall k, j \in \mathbb{N}_0.$$

Die Sensormatrix $\mathbf{C}^{(k)} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und die Rauschkovarianzmatrix $\mathbf{R}^{(k)}$ werden als zeitinvariant angenommen, da in der Praxis die zeitliche Dynamik des Sensors und dessen Rauschen meistens nicht bekannt sind. Es gilt dann das vereinfachte Beobachtungsmodell

$$\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

mit $\mathbf{b}^{(k)} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{v}^{(k)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$, $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

Auftretende Zusammenhänge zwischen dem Rauschvektor und den Eingangsgrößen werden hier nicht aufgeführt, sondern sind gegebenenfalls [56] zu entnehmen.

4.2 Herleitungsvarianten des Kalman-Filter-Algorithmus

Mit den in den Kapiteln 4.1.1 und 4.1.2 hergeleiteten Formeln, die das Kalman-Filter als Optimalfilteralgorithmus veranschaulichen, können wir für eine Modellierung mit vektoriellen Gauß-Markov-Prozessen die gesamte bedingte Verteilungsdichtefunktion des gesuchten Zustands berechnen. Das Hauptinteresse der Schätzung liegt in der Berechnung der bedingten Verteilungsdichtefunktion der Zufallsvariablen. Eine solche Verteilungsdichtefunktion enthält alle Informationen über den Zufallsvektor. Allerdings sind Berechnungen der Verteilungsdichte nur in wenigen Fällen realisierbar.

In [56] wird gezeigt, dass die Modellierung mit weißem gaußverteiletem Rauschen die gaußförmige Verteilung der bedingten Dichten garantiert. Eine optimale Schätzung besteht deshalb nur aus der Berechnung des bedingten Erwartungswerts und der bedingten Kovarianz der gesuchten Größe. Bei vektoriellen Gauß-Markov-Prozessen führt die bedingte Erwartungswertberechnung auf einen linearen Schätzalgorithmus. Ein optimales Filter ist für solche Prozesse ein lineares Filter. Der bedingte Erwartungswert ist im Fall gaußförmiger bedingter Dichten überdies Maximum der bedingten Verteilungsdichte oder auch Maximum-a-posteriori-Schätzwert sowie Maximum-Likelihood-Schätzwert. Der berechnete bedingte Erwartungswert minimiert darüber hinaus jede quadratische Schätzfehlerkostenfunktion.

Der optimale Schätzwert des Zustands kann aus der bedingten Verteilungsdichtefunktion unter Verwendung der zurückliegenden Messwerte formuliert werden. Eine Variante für die Herleitung der Kalman-Filter-Gleichung erfolgt daher über die fortlaufende Berechnung der bedingten Verteilungsdichtefunktion. Bei dieser Ausführung werden wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen der Estimationstheorie in Form von bedingten und unbedingten Verteilungsdichtefunktionen vorausgesetzt. Die Beschreibung der vollständigen Berechnungen für die bedingte Verteilungsdichtefunktion erfolgt über den Bayes-orientierten Ansatz.

Eine weitere Herleitung kann über die orthogonale Projektion realisiert werden. Rudolf E. Kålmån entwickelte 1960 die Methode als ursprüngliche Ableitung des Kalman-Filters. Durch die geometrische Betrachtungsweise ist diese Herleitung kürzer als die genannte Herleitung über den Bayes-orientierten Ansatz. Diese Darstellung repräsentiert jedoch nicht den Zusammenhang zwischen den wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen von bedingten und unbedingten Verteilungsdichtefunktionen. Die Einschränkungen beider Herleitungen nur auf quadratische Fehlerkriterien müssen nicht immer sinnvoll sein.

Bei einem Vergleich der beiden Herleitungsvarianten sei zu erwähnen, dass in der ersten Herleitung nur lineare Systemmodelle mit gauß'schen Rauschprozessen vorausgesetzt werden. Bei der Herleitung über die orthogonale Projektion stellen wir die Bedingung der Linearität des Algorithmus und fordern die Minimierung des quadratischen Fehlerkriteriums.

Ein erweiterter Ansatz für die Herleitung der Kalman-Filter-Gleichungen ist der Innovationsansatz [56]. In diesem Ansatz werden zusätzliche eventuell vorhandene Korrelationen zwischen dem Messrauschen und dem Prozessrauschen berücksichtigt. Der Ansatz ist gleichzeitig auch für nichtlineare Schätzprobleme anwendbar. In der Praxis wird dieser Ansatz aufgrund der Komplexität selten angewendet. Der Innovationsansatz und die Herleitung über den Ansatz der orthogonalen Projektionen sind identisch, sobald die Voraussetzungen gaußverteilter Dichten mit linearen Modellen gegeben sind. Fehlen die gaußverteilten Dichten, führt der Innovationsansatz im Allgemeinen auf nichtlineare Zusammenhänge.

Für unkorrelierte Rauschgrößen ist der mit dem Innovationsansatz hergeleitete Kalman-Filter-Algorithmus weitgehend mit den anderen genannten Herleitungsvarianten identisch, lediglich die Prädiktionsgleichungen sind leicht modifiziert.

Im nächsten Kapitel erläutern wir kurz die Voraussetzungen für die Herleitung der Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz der orthogonalen Projektionen, dessen vollständige Beweisführung aufgrund der Übersichtlichkeit im Anhang C zu finden ist. Abschließend geben wir die Kalman-Filter-Gleichungen an.

4.2.1 Ableitung der Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz orthogonaler Projektionen

Die Ausführungen für die Ableitung der Kalman-Filter-Gleichungen in diesem Kapitel orientieren sich in dem [56, S. 436] ausgeführten Ansatz der orthogonalen Projektionen.

Das Orthogonalitätstheorem besagt, dass der optimale Schätzwert einer Zufallsvariable die orthogonale Projektion dieser Variablen auf den durch die Beobachtung generierten linearen n -dimensionalen Unterraum \mathcal{M} ist.

Für die Systemmodellierung werden wir zwei leichte Modifikationen einführen, da es sich beim Kalman-Filter um einen erwartungstreuen Schätzalgorithmus handelt [56]. Die Vereinfachung der Systemmodellierung stellt jedoch keine Einschränkungen der Allgemeingültigkeit dar. Die erste Modifikation besteht darin, dass für alle Zeiten der Zustandsprozess $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ erwartungswertfrei ist, d. h. $E\{\mathbf{x}(\cdot)\} = \mathbf{0}$. Sollte ein nicht erwartungswertfreier Zustand $\mathbf{x}^* \in \mathbb{C}^n$ vorliegen, kann dieser durch einfache Umformungen in einen erwartungswertfreien Zustand \mathbf{x} , d. h.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* - E\{\mathbf{x}^*\}$$

überführt werden. Abschließend erhalten wir ausgehend vom berechneten Schätzwert $\mathbf{x}^+ \in \mathbb{C}^n$ für die Rücktransformation

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^+ + E\{\mathbf{x}\}$$

den optimalen Schätzwert für \mathbf{x}^* . Die zweite Modifikation ergibt sich direkt aus der ersten Modifikation. Um einen erwartungswertfreien Zustand zu garantieren, müssen die deterministischen Eingangsgrößen des Systemmodells gleich Null gesetzt werden. Bei der Herleitung des Systemmodells im Kapitel 4.1.1 wurden die deterministischen Größen nicht berücksichtigt.

Die ausführliche Ableitung der Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz orthogonaler Projektionen kann dem Anhang C entnommen werden.

Zusammenfassend geben wir nachstehend die Kalman-Filter-Gleichungen [56] für den Schätzalgorithmus an.

Prädiktion (Prognose):

$$\hat{\mathbf{x}}^{-(k)} = \mathbf{A}^{(k-1)} \hat{\mathbf{x}}^{+(k-1)} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{P}^{-(k)} = \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{P}^{+(k-1)} \mathbf{A}^{(k-1)\text{H}} + \mathbf{Q}^{(k-1)} \tag{4.4}$$

Korrektur:

$$\hat{\mathbf{x}}^{+(k)} = \hat{\mathbf{x}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \hat{\mathbf{x}}^{-(k)} \right) \tag{4.5}$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} \left(\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)} \right)^{-1} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{P}^{+(k)} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{P}^{-(k)} \tag{4.7}$$

Kapitel 5

Erweitertes Kalman-Filter für ℓ_1 -Minimierungsproblem

Im Folgenden betrachten wir das ℓ_1 -Minimierungsproblem mit erweitertem Kalman-Filter. Einige Ansätze zur CS-Rekonstruktion mit Kalman-Filter sind in [19–21] zu finden. In diesem Kapitel werden wir die synthetische Formulierung sowie die analytische Formulierung erläutern.

5.1 Die synthetische Formulierung

In diesem Kapitel werden wir uns zunächst mit der synthetischen Darstellung beschäftigen. Dazu untersuchen wir den Kalman-Filter- ℓ_1 -Minimierungsalgorithmus, der in jeder Iteration den gesamten Zustandsvektor abschätzt, d. h. wir suchen einen s -sparsen Vektor mit minimaler ℓ_1 -Norm (siehe auch Gleichung (2.15))

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

mit einem Beobachtungsvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ und der Sensingmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit der Bedingung $m \ll n$.

Das Kalman-Filter basiert auf linearen System- und Messmodellen. Für die Anwendung auf nichtlineare Modelle muss das erweiterte linearisierte Kalman-Filter (extended linearized Kalman-Filter) verwendet werden. Aufgrund der Nichtlinearität der ℓ_1 -Norm ist das ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) ein nichtlineares Problem.

Zu beachten ist, dass die nachstehenden Ausführungen zwecks Vereinfachung nur im rauschfreien Fall betrachtet werden. In diesem Abschnitt nehmen wir keine Modell- bzw. Prozessunsicherheit an, d. h. dass das gauß'sche erwartungswertfreie Rauschen mit Kovarianzmatrix \mathbf{Q} zu Null angenommen wird. Das zugrundeliegende Ausbreitungsmodell kann als ein konstantes Modell interpretiert werden. Das Zustandsmodell ist ein *autoregressives Modell erster Ordnung* mit mittelwertfreiem Prozessrauschen. Unter einem *autoregressives Modell erster Ordnung* verstehen wir, dass die Beobachtung in der k -ten Iteration nur von der Beobachtung der $(k-1)$ -ten Iteration abhängt.

Der nachstehende Kalman-Filter- ℓ_1 -Minimierungsalgorithmus 3 schätzt den gesamten Zustand aus linearen Beobachtungen unter der Zusatzbedingung der ℓ_1 -Minimierung. Es ergibt sich dann als Ansatz für den Beobachtungsvektor

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \|\mathbf{x}\|_1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ wird zu einem Gleichungssystem $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}}$ erweitert. Die Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ wird durch eine zusätzliche Zeile, also zu $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}^{(m+1) \times n}$, ergänzt (siehe Algorithmus 3, Zeile 10).

Die Betragsfunktion

$$f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{C}$$

ist nicht komplex differenzierbar, da die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht erfüllt sind. Der Algorithmus 3 berechnet einen Startvektor, der den kleinsten quadratischen Fehler minimiert. Dieser Startvektor $\mathbf{x}^{(0)}$ besitzt im Allgemeinen die Eigenschaft $x_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Im Laufe der Iterationen wird erwartet, dass immer mehr Koeffizienten des Vektors \mathbf{x} zu Null werden. Infolge der Einführung des modifizierten Gradienten sind an diesen Stellen auch dessen Koeffizienten gleich Null und die Stabilität des Algorithmus ist damit gewährleistet.

Dieses Problem kann man auf verschiedene Arten bewältigen. Wir definieren eine Approximation f_ε als

$$f_\varepsilon(x) = (\operatorname{Re}(x)^2 + \operatorname{Im}(x)^2 + \varepsilon^2)^{1/2},$$

wobei mit $\operatorname{Re}(x)$ der Realteil und $\operatorname{Im}(x)$ der Imaginärteil der komplexen Zahl x bezeichnet wird. Die Approximation f_ε ist auch an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und hat eine Ableitung von 0, siehe [59].

Auch wenn die Glättung des Absolutbetrags mittels f_ε eine mögliche Strategie darstellt, um differenzierbare Kosten zu erhalten, wählen wir numerisch für alle $x \neq 0$ die tatsächliche Ableitung $\exp(-j \arg(x))$ mit imaginärer Einheit j und ergänzen für $x = 0$ die Ableitung mittels des Wertes 1. Trotz der daraus resultierenden Unstetigkeit, sind mit dieser Wahl in allen numerischen Experimenten gute Ergebnisse ohne Instabilitäten im Algorithmus erzielt worden.

Die Näherung der ℓ_1 -Norm des aktuellen Zustandsvektors entspricht deren Phaseninformationen, d. h. die Einträge des Zustandsvektors werden normiert. Insbesondere vergrößern wir damit die Matrix \mathbf{C} in der Zeilendimension, indem wir in jeder Iteration die $(m+1)$ -te Zeile mit den Phaseninformationen des aktuellen Zustandsvektors versehen. In der gleichen Vorgehensweise fügen wir zum Beobachtungsvektor \mathbf{b} für das $(m+1)$ -te Element die ℓ_1 -Norm des aktuellen Zustandsvektors an. In jeder Iteration

wird mit Hilfe des Parameters r die ℓ_1 -Norm des Zustandsvektors reduziert. Dafür initialisieren wir ein festes \hat{r} und einen Startwert $r^{(0)}$. Ziel ist es, die Parameter \hat{r} und $r^{(0)}$ so zu wählen, dass mit jeder Iteration die ℓ_1 -Norm des Zustandsvektors reduziert wird und der exakte Zustandsvektor rekonstruiert werden kann.

Die Absenkungsrate $r^{(k)}$ gibt an, wie stark die Abnahme der ℓ_1 -Norm in der k -ten Iteration erfolgen soll. Mit $\mathbf{x}_{\text{exakt}}$ bezeichnen wir den exakt zu rekonstruierenden Vektor. Aufgrund der im Kapitel 6.2 hergeleiteten Startlösung $\mathbf{x}^{(0)}$ gilt für den fest initialisierten Parameter $r^{(0)} < 1$ die Ungleichung

$$\|\mathbf{x}_{\text{exakt}}\|_1 \leq r^{(0)} \|\mathbf{x}^{(0)}\|_1.$$

Der Parameter $r^{(k)}$ wird gemäß Zeile 14 im Algorithmus 3

$$r^{+(k)} = r^{-(k)} + \hat{r} (1 - r^{-(k)})$$

in jeder k -ten Iteration neu berechnet. Es wird dabei, unter Vorlage eines initialisierten Parameter \hat{r} , eine Folge von Skalaren mit der Eigenschaft $r^{(k)} \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$ gebildet. Nimmt der Parameter $r^{(k)}$ z. B. den Wert 1 in der k -Iteration an, so ist eine weitere Reduzierung der ℓ_1 -Norm in der $(k+1)$ -ten Iteration nicht mehr möglich.

Algorithmus 3 ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter

- 1: **Initialisiere:** $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{b}$, $\mathbf{P}^{+(0)} = \mathbf{P}_0$, $r^{+(0)} = r^{(0)}$, $\hat{r} \in]0,1[$
 - 2: **while** $\Delta \|\mathbf{x}^{(k)}\|_1 > \varepsilon$ **do**
 - 3: $k := k + 1$
 - 4: $r^{-(k)} := r^{+(k-1)}$
 - 5: **Prognose:**
 - 6: $\mathbf{x}^{-(k)} := \mathbf{x}^{+(k-1)}$
 - 7: $\mathbf{P}^{-(k)} := \mathbf{P}^{+(k-1)}$
 - 8: **Korrektur:**
 - 9: $\tilde{\mathbf{b}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ r^{-(k)} \|\mathbf{x}^{-(k)}\|_1 \end{pmatrix}$
 - 10: $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_i^{-(k)} \\ \left| \mathbf{x}_i^{-(k)} \right| \end{array} \right]_{1 \leq i \leq n}^{\text{H}} \end{pmatrix}$
 - 11: Kalman gain: $\mathbf{K}^{(k)} := \mathbf{P}^{-(k)} \tilde{\mathbf{C}}^{(k)\text{H}} \left(\tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)} \tilde{\mathbf{C}}^{(k)\text{H}} + \mathbf{R} \right)^{-1}$
 - 12: $\mathbf{x}^{+(k)} = \mathbf{x}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(\tilde{\mathbf{b}}^{(k)} - \tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \mathbf{x}^{-(k)} \right)$
 - 13: $\mathbf{P}^{+(k)} := \mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \tilde{\mathbf{C}}^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)}$
 - 14: $r^{+(k)} = r^{-(k)} + \hat{r} (1 - r^{-(k)})$
 - 15: **end while**
-

5.1.1 Beispiele

Im diesem Abschnitt zeigen wir zwei Beispiele, in denen die Reduzierung der ℓ_1 -Norm sichtlich erkennbar ist. Für die Beispiele konstruieren wir jeweils eine gaußverteilte mittelwertfreie unterbestimmte komplexe Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft $m \ll n$. Zu einem vorgegebenen zu rekonstruierenden s -sparsen komplexen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ können wir den Beobachtungsvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ ermitteln.

In einem ersten Beispiel hat die Matrix \mathbf{C} die Dimension 60×80 . Die Sparsity von \mathbf{x} sei $s = 5$. Für das erste Beispiel wählen wir ein Abbruchkriterium von 100 Iterationen. Die frei wählbaren Parameter, welche die Reduzierung der ℓ_1 -Norm beeinflussen, sind auf $r^{(0)} = 0,73$ und $\hat{r} = 0,04$ festgelegt.

Der rote Graph in der Abbildung 5.1 entspricht der exakten ℓ_1 -Norm des vorgegebenen bzw. des zu rekonstruierenden sparsen Vektors \mathbf{x} . Wir beobachten in der Abbildung 5.1 eine Reduzierung der ℓ_1 -Norm des Zustandsvektors anhand des Parameters $r^{(k)}$. Allerdings erreicht die berechnete ℓ_1 -Norm den roten Graphen der exakten ℓ_1 -Norm nicht. Den Grund für dieses Verhalten erklären wir unter Verwendung der Abbildung 5.2. Die Abbildung 5.2 zeigt die zugehörige Absenkungsrate $r^{(k)}$ der ℓ_1 -Norm für $\hat{r} \leq r^{(k)} \leq 1$. Die Absenkungsrate $r^{(k)}$ entspricht der Abnahme der ℓ_1 -Norm in der k -ten Iteration.

Unser Ziel ist es, die Reduzierung der ℓ_1 -Norm so zu realisieren, dass eine Rekonstruktion des sparsen Zustandsvektors möglich ist. Für den berechneten Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ ändern sich seine Einträge nicht mehr, sobald die Bedingung $\|\mathbf{b} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\|_1 < \varepsilon$ oder das Abbruchkriterium erfüllt ist.

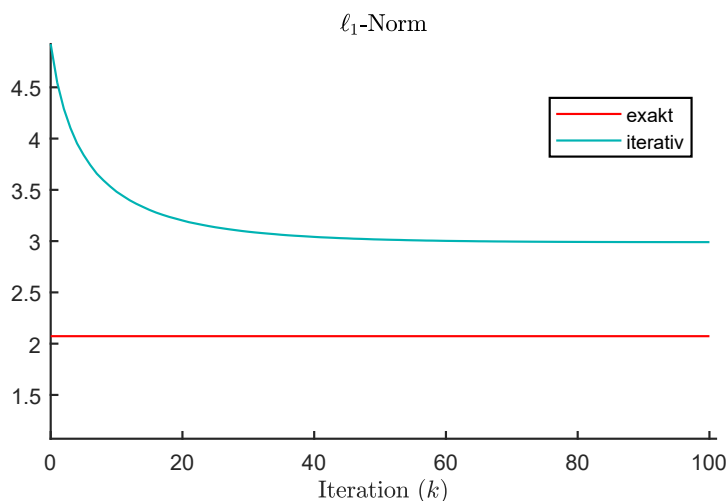


Abb. 5.1: Beispiel 1: ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors mit Algorithmus 3. Die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung ist rot dargestellt. Die Messmatrix hat die Dimension 60×80 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$. Für die Initialisierung der Parameter wurde $r^{(0)} = 0,73$ sowie $\hat{r} = 0,04$ gewählt.

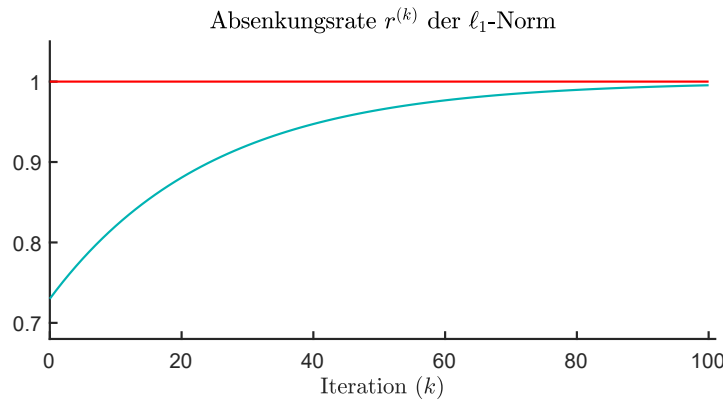


Abb. 5.2: Beispiel 1: Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors aus Abbildung 5.1

In diesem ersten Beispiel ist zu erkennen, dass die Wahl der Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} für eine Reduzierung der ℓ_1 -Norm des zu rekonstruierenden Zustandsvektors nicht optimal ist. Die Abbildung 5.1 zeigt zwar eine Abnahme der ℓ_1 -Norm, jedoch stagniert diese genau dann, wenn sich der Parameter r mit Zunahme der Iteration sich den Wert 1 nähert. In der Abbildung 5.2 wird das durch die Annäherung an den roten Graphen, der die exakte ℓ_1 -Norm demonstriert, dargestellt. Die ℓ_1 -Norm des Zustandsvektors kann dann nicht weiter reduziert werden. Die Berechnungen der Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die Abnahme der ℓ_1 -Norm werden durch die Initialisierung der Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} beeinflusst. Sind die Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} ungünstig gewählt, wird die exakte ℓ_1 -Norm des zu rekonstruierenden Zustandsvektors nicht erreicht.

Für das zweite Beispiel wählen wir eine 60×80 -Matrix mit den gleichen Eigenschaften wie im ersten Beispiel. Hier sei ebenfalls die Sparsity $s = 5$. Im ersten Beispiel konnten wir beobachten, dass die Wahl der Parameter nicht optimal gewesen ist. Wählen wir die Parameter $r^{(0)} = 0,45$ und $\hat{r} = 0,05$. Die Abbildungen 5.3 und 5.4 zeigen die Ergebnisse der Beobachtungen für das zweite Beispiel.

Für das zweite Beispiel beobachten wir in Abbildung 5.3, dass die berechnete ℓ_1 -Norm des Zustandsvektors kleiner ist als die exakte ℓ_1 -Norm des zu rekonstruierenden Zustandsvektors. Die gewählten Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} sind auch in diesem zweiten Rekonstruktionsbeispiel nicht optimal gewählt. Obwohl in Abbildung 5.4 der Parameter r den Wert 1 nach ungefähr 100 Iterationen annimmt, beobachten wir, dass in Abbildung 5.3 die exakte ℓ_1 -Norm des zu rekonstruierenden Zustandsvektors bereits nach 30 Iterationen erreicht wird. Die berechnete ℓ_1 -Norm hat die exakte ℓ_1 -Norm in diesem zweiten Beispiel unterschritten. Die Wahl der Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} war auch hier nicht optimal.

Es sei erwähnt, dass eine Optimierung der Parameter zwar möglich ist, aber es verschiedene Matrizentypen gibt, sodass der Aufwand für die Bestimmung solcher Parameter stark steigt und damit abzuwägen ist. Zum Beispiel kann die Anzahl der von Null verschiedenen Einträge des Zustandsvektors, d. h. die Sparsity, die Anzahl der Messungen oder auch die Struktur der Matrix, die Wahl der Parameter stark beeinflussen.

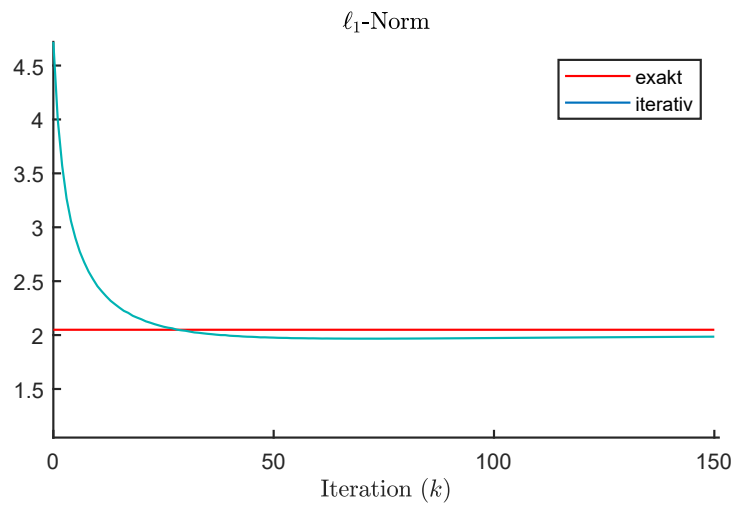


Abb. 5.3: Beispiel 2: ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors mit Algorithmus 3. Die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung ist rot dargestellt. Die Messmatrix hat die Dimension 60×80 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$. Für die Initialisierung der Parameter wurden $r^{(0)} = 0,45$ sowie $\hat{r} = 0,05$ gewählt.

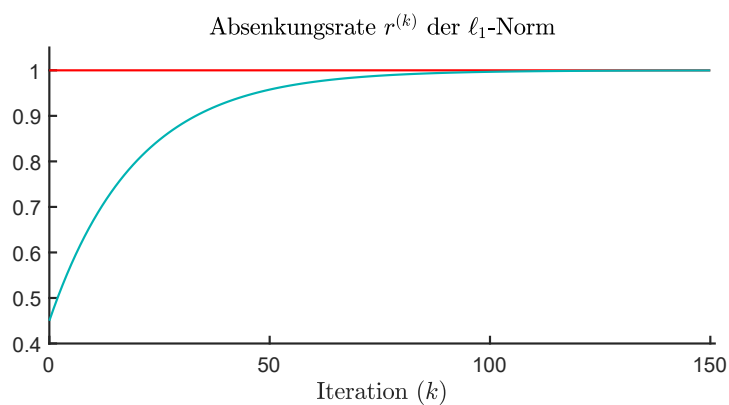


Abb. 5.4: Beispiel 2: Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors aus Abbildung 5.3

Im nächsten Kapitel werden wir für einen bestimmten Matrizen­typ eine Parameter­optimierung für $r^{(0)}$ und \hat{r} durchführen und an Beispielen zeigen, dass damit eine exakte Rekonstruktion möglich ist.

5.1.2 Modifiziertes Kalman-Filter

Im letzten Kapitel haben wir beobachtet, dass die Ergebnisse des vorgestellten Kalman-Filter- ℓ_1 -Minimierungsalgorithmus 3 von der Parameterwahl abhängen.

Den ℓ_1 -Minimierungsalgorithmus 3 werden wir modifizieren und für die Parameter $r^{(0)}$ sowie \hat{r} eine Optimierung für diesen bestimmten Matrizen­typ durchführen. Die anschließenden Beobachtungen zeigen, dass die exakte Rekonstruktion des Zustands­vektors erreicht wird.

Für eine erste Modifikation versehen wir in dem Prognoseschritt des Algorithmus 3 die Kovarianzmatrix \mathbf{P} mit der Varianz des Modellfehlers $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, d. h.

$$\mathbf{P}^{-(k)} := \mathbf{P}^{+(k-1)} + \mathbf{Q}.$$

Die Matrix \mathbf{Q} wird als Prozessrauschkovarianz bezeichnet und hängt von dem Prozess bzw. Modell ab. Große Werte in \mathbf{Q} stehen für eine große Unsicherheit des zugrundeliegenden Modells. Als zweite Modifikation optimieren wir, wie bereits angedeutet, die relevanten Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} . Die Optimierung der Parameter wurde auf Grundlage von $m \times 128$ -Matrizen durchgeführt.

5.1.2.1 Beispiele

Mit den erläuterten Modifikationen aus dem vorherigen Abschnitt für den ℓ_1 -Minimierungsalgorithmus 3 geben wir zwei Beispiele. Die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} des Modellfehlers ist als Diagonalmatrix definiert, d. h.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_n \end{pmatrix}.$$

Für die Optimierung der Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} wählen wir $m \times 128$ -Matrizen. Die Parameter $r^{(0)} = 0,45$ und $\hat{r} = 0,01$ wurden unter Verwendung der im Kapitel 8.3.1 eingeführten Donoho-Tanner-Graphen durch Simulation näherungsweise bestimmt. Bei der Optimierung der genannten Parameter wurde die Prozesskovarianzmatrix \mathbf{Q} als konstante Matrix, hier als Einheitsmatrix, festgelegt. Mit der Modifikation und den optimalen Parametern betrachten wir für ein erstes Beispiel eine Matrix mit der Dimension 80×128 und im zweiten Beispiel eine Matrix mit der Dimension 20×128 . Die Sparsity entspricht für beide Beispiele $s = 5$.

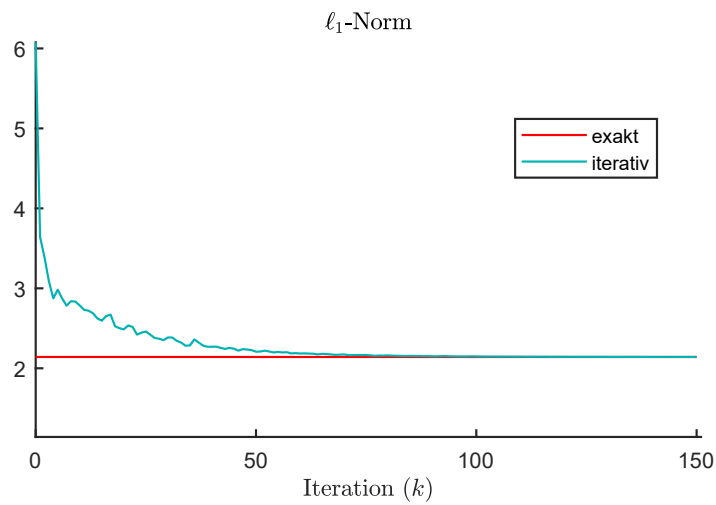


Abb. 5.5: Beispiel 1: ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors mit dem modifizierten Algorithmus. Die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung ist rot dargestellt. Die Messmatrix hat die Dimension 80×128 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$.

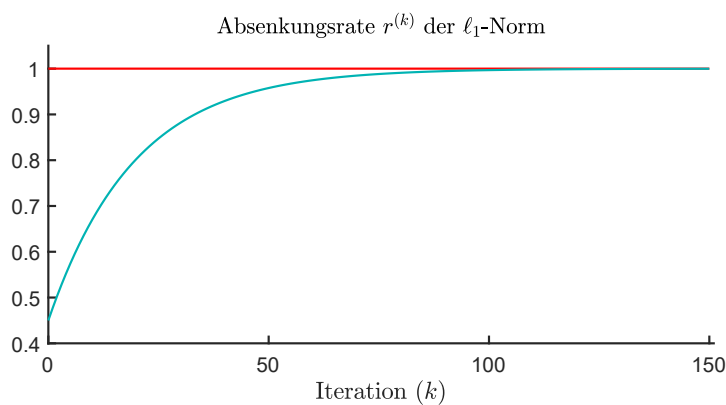


Abb. 5.6: Beispiel 1: Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors aus Abbildung 5.5

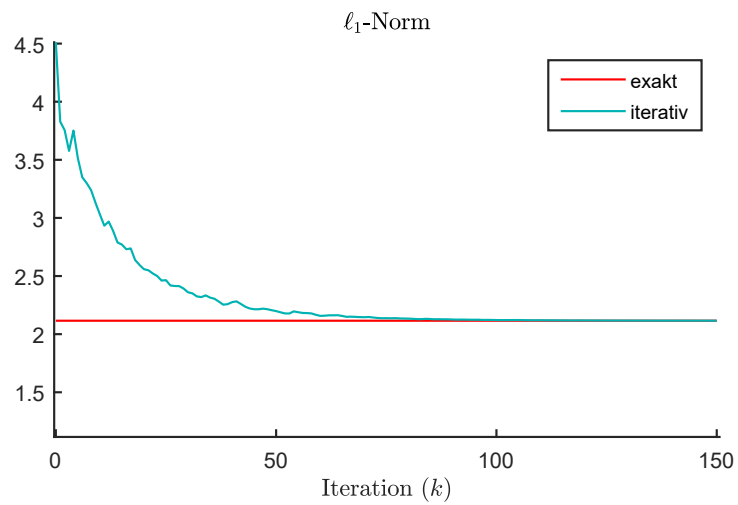


Abb. 5.7: Beispiel 2: ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors mit dem modifizierten Algorithmus. Die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung ist rot dargestellt. Die Messmatrix hat die Dimension 20×128 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$.

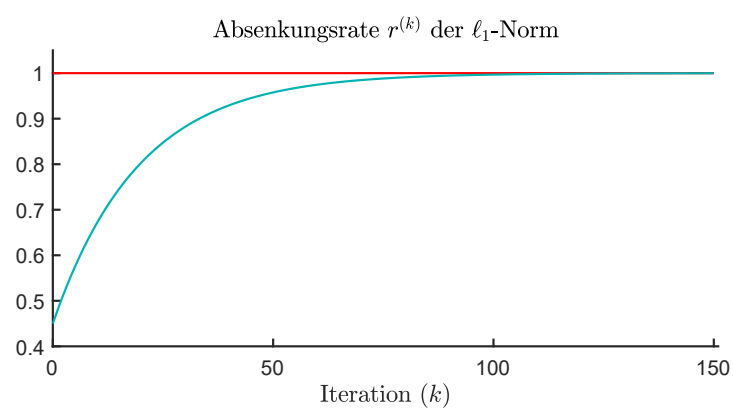


Abb. 5.8: Beispiel 2: Absenkungsrate $r^{(k)}$ für die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors aus Abbildung 5.7

Für die Beispiele beobachten wir, dass der Zustandsvektor \mathbf{x} gut rekonstruiert werden kann. In beiden Beispielen wird die exakte ℓ_1 -Norm des zu rekonstruierenden Vektors erreicht. Die Wahl der Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} für den $m \times 128$ -Matrizentyp sind optimal. In Abbildung 5.5 ist ein sogenanntes „Gezappel“ zu erkennen. Das liegt daran, dass die gewählten Einträge in der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} zu hoch sind. Das Systemrauschen \mathbf{Q} gibt an, wie stark dem System vertraut werden kann. Besitzt die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} kleine Einträge, bedeutet das, dass dem System mehr vertraut wird.

Weil für die Bestimmung der optimalen Parameter $r^{(0)}$ und \hat{r} die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} als Einheitsmatrix definiert wurde, musste die Wahl für die Kovarianzmatrix auch für die Beispiele gelten. Eine Änderung der Kovarianzmatrix \mathbf{Q} unter Berücksichtigung der gleichen optimalen Parametern würde in unseren beiden Beispielen zu keiner erfolgreichen Rekonstruktion mehr führen.

Zusammenfassend beobachten wir, dass mit einer Optimierung von Parametern für bestimmte Matrizentypen eine gute Rekonstruktion erreicht werden kann.

5.2 Die analytische Formulierung

Im Kapitel 3.2.1 wurde bereits gezeigt, dass mit einem geeigneten Basiswechsel Signale in eine sparse Darstellung transformiert werden können.

Die analytische Formulierung von CS erweist sich in jüngster Zeit als ein weiteres, aber bisher noch nicht ausreichend erforschtes Gebiet. Trotz einiger Fortschritte in der Theorie der analytischen ℓ_1 -Minimierung gibt es viele Fragen, die noch untersucht werden müssen.

Die sogenannte analytische ℓ_1 -Minimierung [60–64], die auch als Cosparsity-Modell bezeichnet wird, besagt, dass das Signal nach einer Transformation in sparser Form vorliegt. Das synthetische und analytische Modell stimmen überein, falls eine Basis transformation existiert. Sind jedoch die Transformationen redundant, so sind die Modelle unterschiedlich und führen auch zu anderen Ergebnissen. In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Einblick in die Theorie der analytischen Formulierung von CS.

Nehmen wir an, dass das zu rekonstruierende Signal $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ eine bestimmte Struktur besitzt, die durch eine Matrix $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{C}^{p \times n}$ erzeugt wird. Die Anwendung von $\mathbf{\Omega}$ auf den Vektor \mathbf{x} ergibt einen Vektor, der eine geringere Anzahl von Null verschiedenen Einträge enthält. Die Matrix $\mathbf{\Omega}$ wird als Analyse-Operator bezeichnet [60, 63].

Besitzt das Produkt $\mathbf{\Omega}\mathbf{x} \in \mathbb{C}^p$ genau s von Null verschiedene Einträge, so wird \mathbf{x} als ℓ -cosparsity sowie die Anzahl $\ell := p - s$ als *cosparsity* von \mathbf{x} bezüglich $\mathbf{\Omega}$ bezeichnet. Die zugehörige Indexmenge von den von Null verschiedenen Einträgen aus $\mathbf{\Omega}\mathbf{x}$ wird *cosupport* von \mathbf{x} genannt [63]. Eine analytische ℓ_1 -Minimierung versucht das Signal

durch die Berechnung des Minimums von

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \|\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \|\mathbf{C} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 < \varepsilon$$

zu gewinnen.

Testen bzw. analysieren wir zunächst ein festes Signal $\mathbf{x}^* \in \mathbb{C}^n$ mit einer Sammlung von Analysevektoren $\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_p \in \mathbb{C}^n$, also mit einem Analyse-Operator $\boldsymbol{\Omega} := (\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_p)^T \in \mathbb{C}^{p \times n}$,

$$\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}^* = (\langle \boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{x}^* \rangle, \dots, \langle \boldsymbol{\omega}_p, \mathbf{x}^* \rangle)^T \in \mathbb{C}^p.$$

Wird der Analyse-Operator die Struktur des Vektors \mathbf{x}^* widerspiegeln, so kann angenommen werden, dass die Analysekoeffizienten von wenigen großen Beiträgen dominiert wird. In [60] untersuchen die Autoren unterschiedliche Analyse-Operatoren, so z. B. die Haar-Wavelet-Transformation und deren inverse Transformation sowie die orthonormale Wavelet-Transformation. Eine detailliertere Darstellung sowie die Auswirkungen auf eine erfolgreiche Rekonstruktion durch die Anwendung von Analyse-Operatoren sind in [60–62, 64, 65] zu finden.

Gegeben sei für eine erste Beobachtung ein vollbesetzter Vektor \mathbf{x}_v , dessen Produkt mit einem geeigneten Analyse-Operator $\boldsymbol{\Omega}$ einen sparsen Vektor \mathbf{x}_s konstruiert,

$$\mathbf{x}_s = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}_v.$$

Das zugehörige ℓ_1 -Minimierungsproblem lautet

$$\min_{\mathbf{x}_v \in \mathbb{C}^n} \|\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}_v\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \|\mathbf{C} \mathbf{x}_v - \mathbf{b}\|_2 < \varepsilon. \quad (5.2)$$

Die enthaltenen Rauschanteile beschreiben wir in dem Modell mit ε .

Passen wir den Ansatz des Beobachtungsvektors \mathbf{b} gemäß Gleichung (5.1) an das in Gleichung (5.2) genannte Problem an, erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{x}_v \\ \|\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}_v\|_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \|\mathbf{x}_s\|_1 \end{pmatrix}.$$

Allerdings kann die Erweiterung der Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ zu $\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}^{(m+1) \times n}$ nach Zeile 10 im Algorithmus 3 des ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filters nicht immer vorgenommen werden, weil die Dimension von $\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}_v \in \mathbb{C}^p$ mit der Spaltenanzahl n der Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ übereinstimmen muss. Die analytische Formulierung kann auf den Algorithmus 3 nicht in allen Fällen angewandt werden, sondern ist von den zugrundeliegenden Dimensionen abhängig. Eine Betrachtung der analytischen Formulierung von CS auf das Kalman-Filter ist in dieser Arbeit nicht vorgesehen.

Kapitel 6

Kalman-Filter für ℓ_1 -Minimierungsproblem (Nullraum-Variante)

In den letzten beiden Kapiteln haben wir das Kalman-Filter vorgestellt sowie die Gleichungen für den Kalman-Filter-Algorithmus im Anhang C hergeleitet. In diesem Zusammenhang wurde die Struktur eines klassischen Kalman-Filters beschrieben, welche auf der Zustandsbeschreibung eines realen Systems inklusive Mess- und Systemrauschen aufbaut.

In diesem Kapitel kommen wir zur Beschreibung eines *iterativ erweiterten linearisierten Kalman-Filter (EKF)* für ℓ_1 -Minimierungsprobleme in der sogenannten *Nullraum-Variante*. Wir werden diesen Algorithmus in seiner Arbeitsweise näher beschreiben und geben den zugehörigen Algorithmus an. Eine Startlösung für den Algorithmus leiten wir über die *LQ-Zerlegung* der Sensingmatrix im Kapitel 6.2 her. Abschließend verdeutlicht der Konvergenzbeweis im Kapitel 6.3 die Reduzierung der ℓ_1 -Norm in jeder Iteration des vorgeschlagenen Algorithmus.

6.1 Allgemeine Funktionsweise

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein s -sparses Signal. Wir wollen das ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) mit dem Kalman-Filter in seiner Nullraum-Variante lösen. Ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen und beschreibt damit ein schlecht gestelltes Problem. Allerdings kann durch eine Regularisierung, wie im Kapitel 2.1.3 bereits vorgestellt, ein schlecht gestelltes Problem in ein gut gestelltes Problem überführt werden. Es müssen daher zusätzliche Bedingungen für die Lösung gelten. Die bekannteste Regularisierung ist die Tikhonov-Regularisierung [66, 67], die eine glatte Form der Lösung liefert, indem sie die bestmögliche Gewichtung zwischen $\|\mathbf{b} - \mathbf{C}\mathbf{x}\|_2^2$ und der minimalen ℓ_2 -Norm der Lösung liefert. Allerdings benötigen wir nicht die minimale ℓ_2 -Norm, sondern die minimale ℓ_1 -Norm. Das ℓ_1 -Minimierungsproblem (2.15) ist daher einer Tikhonov-Regularisierung aus dem Kapitel 2.1.3 sehr ähnlich.

Das gesuchte Signal \mathbf{x} ist Lösung des konvexen Optimierungsproblems

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \{(\mathbf{b} - \mathbf{C}\mathbf{x})^H \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{C}\mathbf{x}) + \lambda \|\mathbf{x}\|_1\}, \quad (6.1)$$

wobei $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ als Sensing- oder Beobachtungsmatrix bezeichnet wird. Der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ ist der verrauschte Beobachtungsvektor und $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ die Kovarianzmatrix des Messrauschens. Mit λ wird der Regularisierungsparameter bezeichnet, der die Gewichtung zwischen der Minimierung der Nebenbedingung und der Minimierung der Residuumsnorm vornimmt. Im Kapitel 2.1.3 haben wir bereits gezeigt, dass solche konvexen Optimierungsprobleme (6.1) ein eindeutiges Minimum besitzen.

Für die Rekonstruktion von \mathbf{x} nehmen wir weiter an, dass die Matrix des unterbestimmten linearen Gleichungssystems die Null Space Property (NSP) gemäß Definition 3.2.4 erfüllt.

Für lineare Modelle ist das Kalman-Filter ein optimaler Schätzer für zeitabhängige Zustände. Die ℓ_1 -Norm verstehen wir als eine Messung des sparsen Zustandsvektors \mathbf{x} und verwenden ein EKF, um den Zustand mit rekursiven Verfahren, wie in [37, 68, 69], abzuschätzen.

Das Kalman-Filter in der Nullraum-Variante schätzt aber nicht direkt den gesamten Zustandsvektor \mathbf{x} , wie bei den Regularisierungsverfahren, sondern zerlegt den Zustandsvektor in eine partikuläre Lösung \mathbf{x}_p und in einen Zustandsvektor aus dem Nullraum $\mathbf{x}_N \in \mathcal{N}(\mathbf{C})$ der Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, sodass $\|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_N\|_1$ minimiert wird.

Die optimale Lösung kann mit $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_N$ gefunden werden, wobei gilt

$$\hat{\mathbf{x}}_p = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_p \in \mathbb{C}^n} (\mathbf{b} - \mathbf{C}\mathbf{x}_p)^H \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{C}\mathbf{x}_p) \quad (6.2)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_N = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}_N \in \mathcal{N}(\mathbf{C})} \|\hat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{x}_N\|_1. \quad (6.3)$$

Erfüllt ein Vektor $\hat{\mathbf{x}}_p$ die Gleichung (6.2), so erfüllt auch $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_N$ die Gleichung (6.2), da $\hat{\mathbf{x}}_N \in \mathcal{N}(\mathbf{C})$ also $\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ gilt.

Der Algorithmus 4 startet mit einer Kleinste-Quadrate-Lösung \mathbf{x} , also mit einer partikulären Lösung $\hat{\mathbf{x}}_p$, und schätzt in jeder Iteration ein Vektor \mathbf{x}_N aus dem Nullraum der Matrix \mathbf{C} gemäß Gleichung (3.3)

$$\mathcal{N}(\mathbf{C}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Durch Hinzufügen des Vektors \mathbf{x}_N aus dem Nullraum zu der partikulären Lösung $\hat{\mathbf{x}}_p$ erhalten wir einen optimalen Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_p + \hat{\mathbf{x}}_N$ mit geringer ℓ_1 -Norm unter der Bedingung $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ [36].

Mit Hilfe der LQ -Zerlegung der Sensingmatrix A erzeugen wir eine Basis vom Nullraum, die wir mit $\mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})}$ bezeichnen. Besitzt die Matrix \mathbf{C} vollen Zeilenrang, existieren $(n - m)$ -Basisvektoren der Dimension n im Nullraum der Matrix \mathbf{C} .

Algorithmus 4 ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter im Nullraum (EKF)

-
- 1: **Initialisiere:** $\widehat{\mathbf{x}}_p = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{b}$, $\mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})} \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}$ Basis von $\mathcal{N}(\mathbf{C})$, $\mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{(0)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^{(0)} = \widehat{\mathbf{x}}_p$, $\mathbf{P}^{+(0)} = \mathbf{P}_0$
 - 2: **while** $\Delta \|\mathbf{x}^{(k)}\|_1 > \varepsilon$ **do**
 - 3: $k := k + 1$
 - 4: **Prognose:**
 - 5: $\mathbf{x}^{-(k)} := \mathbf{x}^{+(k-1)}$
 - 6: $\mathbf{P}^{-(k)} := \mathbf{P}^{+(k-1)}$
 - 7: **Korrektur:**
 - 8: $y^{(k)} = \gamma^{(k)} \|\mathbf{x}^{-(k)}\|_1$
 - 9: Jacobi-Matrix: $\mathbf{C}_\nu^{(k)} = \begin{bmatrix} x_i^{-(k)} \\ |x_i^{-(k)}| \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq n}^H \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})}$
 - 10: Kalman gain: $\mathbf{K}^{(k)} := \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}_\nu^{(k)H} \left(\mathbf{C}_\nu^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}_\nu^{(k)H} + R_\nu \right)^{-1}$
 - 11: $\mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{+(k)} = \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} (y^{(k)} - \|\mathbf{x}^{-(k)}\|_1)$
 - 12: $\mathbf{x}^{+(k)} = \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{+(k)}$
 - 13: $\mathbf{P}^{+(k)} := \mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}_\nu^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)}$
 - 14: **end while**
-

Wir starten den Algorithmus mit einer partikulären Lösung, die mit der Moore-Penrose-Pseudoinversen oder mit der LQ -Zerlegung berechnet wird. Die Berechnung einer Startlösung unter Verwendung der LQ -Zerlegung der Sensingmatrix \mathbf{C} erfolgt im nächsten Abschnitt. In jeder Iteration k wird der ermittelte Vektor aus dem Nullraum über seine Koeffizienten der Nullraumbasis berechnet. Das Zustandsraummodell entspricht einem konstanten Zustand, wenn der zu schätzende sparse Vektor während der Ausführung des Algorithmus nicht variiert. Die Beschränkung der ℓ_1 -Norm führt auf ein skalares nichtlineares verrauschtes Beobachtungsmodell [36]

$$\begin{aligned}
 y^{(k)} &= h(\mathbf{x}^{(k)}) + \nu^{(k)} = h(\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{(k)}) + \nu^{(k)} \\
 &= \|\mathbf{x}^{(k)}\|_1 + \nu^{(k)} = \|\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{(k)}\|_1 + \nu^{(k)}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

mit $h(\cdot) = \|\cdot\|_1$ als nichtlineare Messfunktion, die aus der Beobachtung $y^{(k)}$ der aktuellen Schätzung des Zustandsvektors $\mathbf{x}^{(k)}$ erzeugt wird. Zu beachten ist, dass die Sensingmatrix \mathbf{C} und damit auch der Nullraum $\mathcal{N}(\mathbf{C})$ sowie dessen Basis $\mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})}$ während der Rekursion konstant bleiben.

Die k -te Realisierung der Messrauschbeobachtung mit der Varianz $R_\nu^{(k)} = R_\nu$ für alle k wird in Gleichung (6.4) mit $\nu^{(k)}$ bezeichnet. Die (virtuelle) skalare Messrauschvarianz von $\nu^{(k)}$ gewichtet das Vertrauen, ob das Kalman-Filter den neuen Wert der ℓ_1 -Norm verwenden sollte. Eine Erhöhung von R_ν verringert dieses Vertrauen und damit das

Gewicht, während die Verringerung von R_ν das Gewicht der ℓ_1 -Norm erhöht, welches indirekt dem Parameter λ entspricht. Für die nachstehenden Ausführungen nehmen wir an, dass R_ν konstant und das Modell exakt ist, sodass für die Kovarianzmatrix $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ gilt.

Wie in [36] erwähnt, ist eine Linearisierung von $h(\cdot)$ erforderlich. Das allgemeine Kalman-Filter ist für lineare Modelle vorgesehen.

Jedoch ist das ℓ_1 -Minimierungsproblem ein nichtlineares Problem. Die Erweiterung des Kalman-Filters auf nichtlineare Modelle wird in der Literatur als *iterativ erweiterten linearisierten Kalman-Filter (EKF)* bezeichnet. Der Unterschied besteht darin, dass die Nichtlinearität des Zustandes durch mathematische Methoden in einen linearen Zustand approximiert wird.

Im Kapitel 5.1 wurde eine Approximation erläutert. Für die Linearisierung der nicht-linearen Beobachtungen verwenden wir die Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\nu &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} h(\hat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_{\mathcal{N}}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_{\mathcal{N}}} = \left[\frac{x_i}{|x_i|} \right]_{1 \leq i \leq n}^{\text{H}} \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})} \\ &= \exp(j \arg(\mathbf{x}))^{\text{H}} \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

In jeder Iteration des Algorithmus 4 beobachten wir die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors, welche nach Gleichung (6.4) definiert wurde. Die im Algorithmus 4 genannte Jacobi-Matrix $\mathbf{C}_\nu \in \mathbb{C}^{1 \times (n-m)}$ (auch als Sensingmatrix bezeichnet) wird in Abhängigkeit des Zustandsvektors \mathbf{x} in jeder Iteration neu berechnet.

Der Wert $\gamma^{(k)} = 1 - r^{(k)}$ in Gleichung (8) des Algorithmus 4 mit der Initialisierung $r^{(0)} \in]0,1[$ erzeugt in jeder Iteration eine Abnahme der ℓ_1 -Norm in der Form $r^{(k)} = (1 - \hat{r}) r^{(k-1)}$ mit einem fest initialisierten Parameter $\hat{r} \in]0,1[$. Dabei konvergiert $r^{(k)}$ mit Zunahme der Iterationen gegen Null, sodass $\gamma^{(k)} \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$ gilt [36].

Allerdings konvergiert der Algorithmus 4 nicht immer gegen die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung. Obwohl zwar für kleine Dimensionen, z. B. $n = 64$, die Konvergenz gegen die ℓ_1 -Norm der exakten Lösung zu beobachten ist, kann das für größere Dimensionen, z. B. $n = 120$, nicht mehr der Fall sein.

Sobald der berechnete Parameter $\gamma^{(k)}$ für große k zu früh gegen den Wert 1 strebt, reduziert sich die ℓ_1 -Norm nicht mehr. Es kann dann nicht sichergestellt werden, dass in solchen Fällen die Lösung mit minimaler ℓ_1 -Norm erreicht wird. In diesen Fällen ist keine exakte Rekonstruktion von \mathbf{x} zu beobachten. Diesen Sachverhalt konnten wir bereits für den Algorithmus 3 im Kapitel 5.1 empirisch beobachten.

In dem Kapitel 6.3 beweisen wir die Konvergenz für die Reduzierung der ℓ_1 -Norm. Es wird festgestellt, dass die ℓ_1 -Norm gegen einen bestimmten Wert, den Grenzwert, konvergiert. Allerdings ist nicht bekannt, ob dieser Grenzwert auch der ℓ_1 -Norm des exakten Signals entspricht.

Im Kapitel 8 stellen wir daher eine Methode vor, die die Konvergenz gegen die exakte ℓ_1 -Norm eines berechneten Zustandsvektors liefert. Die Ergebnisse präsentieren wir im Kapitel 8.2.

6.2 LQ -Zerlegung der Sensingmatrix für die Berechnung einer Startlösung

Gemäß den Ausführungen im Kapitel 4.1.2 greifen wir auf die Beobachtungsgleichung zurück und nehmen die dort genannten Vereinbarungen an.

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}.$$

Die enthaltenen Rauschanteile \mathbf{v} sind als mittelwertfreies gaußverteiltes Rauschen mit der Kovarianzmatrix \mathbf{R} definiert:

$$\mathbf{R} = E \left\{ \left(\mathbf{v} - E\{\mathbf{v}\} \right) \left(\mathbf{v} - E\{\mathbf{v}\} \right)^H \right\}.$$

Wie im Kapitel 2.1.2 erläutert, besitzen unterbestimmte lineare Gleichungssysteme unendlich viele Lösungen. Den Nullraum der Matrix \mathbf{C} bezeichnen wir wie in Gleichung (3.3) aus dem vorherigen Kapitel 6.1 mit

$$\mathcal{N}(\mathbf{C}) := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0} \}.$$

Die Darstellungen zur LQ -Zerlegung für die Berechnung einer Startlösung des Algorithmus orientieren sich an [68, 69]. Es gilt

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{Q}$$

mit einer unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L} = \left(\mathbf{L}_1 \mid \mathbf{0} \right) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, wobei $\mathbf{0}$ eine Nullmatrix in der Dimension $m \times (n - m)$ ist. Die untere Dreiecksmatrix \mathbf{L}_1 ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{L}_1 := \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{m1} & \cdots & l_{m(m-1)} & l_{mm} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix \mathbf{Q} ist eine unitäre Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, d. h. $\mathbf{Q}^H \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Für die Matrix \mathbf{Q} gilt

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times n} \quad (6.6)$$

wobei die Zeilen von \mathbf{Q}_2 die n -dimensionalen Basisvektoren des $(n-m)$ -dimensionalen Nullraums von \mathbf{C} darstellen.

Setzen wir den Ansatz der LQ -Zerlegung in die Beobachtungsgleichung (4.2) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{LQx} + \mathbf{v} = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \\ &= \left(\mathbf{L}_1 \mid \mathbf{0} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_\nu \end{pmatrix} + \mathbf{v} \\ &= \mathbf{L}_1 \mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Qx} \text{ und } \mathbf{x} = \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{x}}. \quad (6.7)$$

Der Vektor \mathbf{x}_0 kann aus den Messungen beobachtet werden. Der zweite Teil des Vektors, also \mathbf{x}_ν , wird nicht beobachtet und muss folglich im Nullraum der Matrix \mathbf{C} liegen. Setzen wir die Gleichung (6.6) in Gleichung (6.7) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{x}} \\ &= \underbrace{\mathbf{Q}_1^H \mathbf{x}_0}_{\mathbf{x}_p} + \underbrace{\mathbf{Q}_2^H \mathbf{x}_\nu}_{\boldsymbol{\nu}_x} \\ &= \mathbf{x}_p + \boldsymbol{\nu}_x \end{aligned}$$

für $\boldsymbol{\nu}_x \in \mathcal{N}(\mathbf{C})$. Die unitäre Transformation $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Qx}$ verstehen wir als eine Änderung des Basisvektorsystems. Der Vektor $\mathbf{x}_p \in \mathbb{C}^n$ ist, wie bereits genannt, der Teil des Vektors \mathbf{x} , der beobachtet werden kann. Dagegen liegt der Vektor $\boldsymbol{\nu}_x \in \mathbb{C}^n$ im Nullraum der Matrix \mathbf{C} .

Sehen wir uns den beobachtbaren Teil mit einem *Maximum-a-posteriori (MAP)-Schätzer* an. Eine *MAP-Schätzmethode* ist ein Schätzverfahren, welches einen unbekannt Parameter durch den am häufigsten auftretenden Wert der a-posteriori-Verteilung schätzt. Es folgt – deren Herleitungen im Kapitel 9.3.1 zu finden sind –

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{P}_0^+ \left(\mathbf{P}_0^- \right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_0^- + \mathbf{P}_0^+ \mathbf{L}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \quad (6.8)$$

mit

$$\mathbf{P}_0^+ = \left[\left(\mathbf{P}_0^- \right)^{-1} + \mathbf{L}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L}_1 \right]^{-1}. \quad (6.9)$$

Mit $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ und $\hat{\mathbf{x}}_0^-$ bezeichnen wir den a-posteriori- und den a-priori-Schätzwert bezüglich ihrer Fehlerkovarianzmatrizen \mathbf{P}_0^+ und \mathbf{P}_0^- .

In der Regel liegen keine a priori Informationen vor, d. h. $(\mathbf{P}_0^-)^{-1} = \mathbf{0}$. Daraus folgt direkt aus den Gleichungen (6.8) und (6.9)

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \left(\mathbf{L}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L}_1 \right)^{-1} \mathbf{L}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \quad (6.10)$$

bzw.

$$\mathbf{P}_0 = \left(\mathbf{L}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{L}_1 \right)^{-1}.$$

Die hergeleitete Gleichung (6.10) ist der *Gewichtete-Kleinste-Quadrate-Schätzer* (*weighted-least-squares-estimator*) (WLS), der das Funktional

$$e_{WLS} = E \left\{ \left(\mathbf{b} - \mathbf{L}_1 \mathbf{x}_0 \right)^H \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{b} - \mathbf{L}_1 \mathbf{x}_0 \right) \right\}$$

minimiert. Die Gleichung (6.10) wird auch als *Cramér-Rao-Schranke* interpretiert. Die Cramér-Rao-Schranke (CRB) liefert einen Schätzer, dessen Kovarianzmatrix klein ist. Auf Grund der fehlenden a priori Information im MAP-Schätzer ist das CRB identisch mit dem *Maximum-Likelihood-Schätzer*. Der Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS) entspricht auch durch das zugrundeliegende lineare Modell mit gaußverteilterm Rauschen dem WLS.

Unter Annahme gauß'scher Prozesse stellt die Matrix \mathbf{P}_0^{-1} die sogenannte *Fisher-Informationmatrix* dar, deren Inverse als Cramér-Rao-Schranke bekannt ist. Die Fisher-Information liefert Aussagen über die bestmögliche Qualität von Parameterschätzungen und wird speziell in der Cramér-Rao-Ungleichung, wo ihr Kehrwert bei Gültigkeit der Regularitätsbedingung eine untere Schranke für die Varianz eines Schätzers liefert, benutzt. Auf die Begriffe CRB, MAP-Schätzer, MLS und WLS werden wir noch im Kapitel 9.3.1 eingehen.

Mit der Annahme der Invertierbarkeit der Matrizen erhalten wir durch Umformung der Gleichung (6.10):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0^+ &= \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{R} \left(\mathbf{L}_1^H \right)^{-1} \mathbf{L}_1^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \\ &= \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der linearen Abbildung aus Gleichung (6.7) berechnen wir abschließend den besten Schätzer

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}_1^H \hat{\mathbf{x}}_0 \\ &= \mathbf{Q}_1^H \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p. \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben wir einen bestmöglichen Schätzer konstruiert, der als parti-
kulare Lösung $\hat{\mathbf{x}}_p$ bzw. als Startlösung im Algorithmus 4 fungiert. Wir erhalten also

$$\hat{\mathbf{x}}_p = \mathbf{Q}_1^H \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{Q}_1^H \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{b}.$$

Für eine Fehleranalyse des optimalen WLS sei auf [68, 69] verwiesen.

6.3 Konvergenzbeweis des Kalman-Filters

Für den Konvergenzbeweis seien die Skalare c_{k+1} und c_k für $k \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

$$c_{k+1} = \left\| \hat{\mathbf{x}}_p + \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \hat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k+1)} \right\|_1$$
$$c_k = \left\| \hat{\mathbf{x}}_p + \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \hat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)} \right\|_1.$$

Eine Reduzierung der ℓ_1 -Norm liegt dann vor, wenn die Bedingung

$$c_{k+1} \leq c_k$$

für alle k -Iterationen gilt. Den ausführlichen Beweis für die Konvergenz des vorge-
stellten Algorithmus 4 geben wir aufgrund des Umfangs im Anhang D wieder. Die
Ausführungen im Anhang orientieren sich im Wesentlichen an dem Beweis in [68].

Mit dem Beweis im Anhang D können wir zeigen, dass die Folge von Skalaren c_k
für $k \in \mathbb{N}$ monoton fallend ist. Im vorgestellten Kalman-Filter- ℓ_1 -Minimierungs-
algorithmus 4 in seiner Nullraum-Variante reduziert sich daher die ℓ_1 -Norm in jeder
Iteration. Jede monoton fallende nach unten beschränkte Folge konvergiert nach dem
Monotoniekriterium [70]. Nach der Definition A.0.1 von Normen im Anhang A ist jede
Norm durch $\|\cdot\| \geq 0$ nach unten beschränkt. Mit dem Monotoniekriterium folgt damit
direkt die Konvergenz der Folge für die Reduzierung der ℓ_1 -Norm im Algorithmus 4.

Kapitel 7

Konvergenzbeschleunigungsverfahren

7.1 Motivation

Ein bekanntes Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung ist das schon im Jahr 1937 entwickelte Grundverfahren von Aitken. Die Grundidee des Verfahrens, welches als Δ^2 -Methode bekannt ist, besteht darin, aus der Vorlage von drei Folgengliedern ein Folgenglied so zu bestimmen, dass die neue Folge schneller als die ursprüngliche Folge konvergiert.

Solche Beschleunigungsmethoden werden beispielhaft bei Anwendung der Methode der Finiten Elemente [72, 73] erfolgreich eingesetzt. Aufgrund der vielen weiteren Anwendungsmöglichkeiten wurde der *Konvergenzbeschleuniger von Aitken* auf nicht-lineare sowie vektorielle Gleichungen erweitert [71]. Eine besonders effektive, in diesem Zusammenhang auch zu nennende Methode für vektorielle Gleichungen ist die Methode von Irons & Tuck [74, 75]. Im Hinblick auf die skalare Problemstellung beschränken wir uns in dieser Arbeit auf den skalaren Konvergenzbeschleuniger von Aitken.

In den vorherigen Kapiteln haben wir zeigen können, dass für das Kalman-Filter gemäß Kapitel 6.3 und dessen Anhang D die Konvergenz der Folge der berechneten ℓ_1 -Normen vorliegt. Allerdings, und das zeigten bereits mehrere Beispiele in den letzten Kapiteln, konnte auch beobachtet werden, dass der Algorithmus nicht immer gegen die exakte ℓ_1 -Norm des zu rekonstruierenden Signals konvergiert. In einigen Fällen stagnierte die ℓ_1 -Norm und erreichte somit nicht die exakte ℓ_1 -Norm. Ein solches Problem ist in einem linearen Kalman-Filter, welches auf einer stochastisch vollständig beobachtbaren und steuerbaren Zustandsraummodellierung und richtig gewählten stochastischen Parametern beruht unbekannt. Im Gegenteil lässt sich aus der Optimalität des Kalman-Filters zu jedem Zeitpunkt direkt folgern, dass es keinen anderen Algorithmus gibt, der genauer arbeitet und dessen Schätzfehlermomente schneller gegen ein Minimum konvergieren. Im konkreten Problemfall stellt die als Beobachtung formulierte ℓ_1 -Norm weder eine lineare Beobachtung des unbekanntem Zustands dar, noch sind die stochastischen Parameter des überlagerten Rauschens und des Prozessrauschens bekannt, welche implizit die Gewichtung dieser ℓ_1 -Norm im Kalman-Filter

bestimmen. Alternativ zu der sonst üblichen, simulativ erfolgenden Optimierung der stochastischen Filterparameter von Prozessrauschkovarianz und Messfehlerkovarianz wird hier der Ansatz des konvergenzbeschleunigenden Eingriffs in die Folge der als Beobachtungen vorgegebenen ℓ_1 -Normen vorgeschlagen und untersucht. Hierzu integrieren wir konvergenzbeschleunigende Ansätze im Kalman-Filter- ℓ_1 -Minimierungsalgorithmus. Der folgende Absatz erläutert und diskutiert zwei Konvergenzbeschleunigungsverfahren, die dann im nachfolgenden Kapitel 8 im Kalman-Filter-Algorithmus zum Einsatz kommen.

7.2 Δ^2 -Grundverfahren von Aitken

In diesem Kapitel stellen wir das Konvergenzbeschleunigungsverfahren nach der Δ^2 -Methode von Aitken vor [71, 73, 75]. Für diesen Konvergenzbeschleuniger gibt es in der Literatur mehrere Versionen.

In unseren Ausführungen beginnen wir mit dem ursprünglichen Grundverfahren [73]. Anschließend modifizieren wir den Konvergenzbeschleuniger, der in der Literatur als *Steffensen-Methode* bezeichnet wird.

Als Erstes werden wir eine gegebene skalare Folge u_k in eine andere Folge \tilde{u}_k transformieren, sodass diese schneller konvergiert. Dazu beginnen wir mit einer Definition, die uns eine schnellere konvergierende skalare Folge liefert.

Definition 7.2.1 Sei u_k eine Folge, die gegen u konvergiert. Die Folge \tilde{u}_k konvergiert schneller, falls für $u_k \neq u$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{u}_k - u|}{|u_k - u|} = 0.$$

Leiten wir eine neu konvergierende Folge \tilde{u}_k nach dem Δ^2 -Grundverfahren nach Aitken her. Dazu seien zwei Iterationsschritte mit $\beta \in \mathbb{R}$ gegeben:

$$I) \quad u_{k+1} - u = \beta(u_k - u) \tag{7.1}$$

$$II) \quad u_k - u = \beta(u_{k-1} - u). \tag{7.2}$$

Als Erstes subtrahieren wir beide Gleichungen und lösen anschließend nach u auf.

$$\begin{aligned} (u_{k+1} - u) - (u_k - u) &= \beta(u_k - u) - \beta(u_{k-1} - u) \\ u_{k+1} - u_k &= \beta(u_k - u_{k-1}) \\ u_{k+1} - \beta u_k &= u_k - \beta u_{k-1}, \\ &= u - \beta u \quad (\text{gemäß (7.2)}) \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} u_{k+1} - \beta u_k &= (1 - \beta)u \\ u &= \frac{u_{k+1} - \beta u_k}{1 - \beta} \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{u_{k+1}}{1 - \beta} - \frac{\beta u_k}{1 - \beta} \\ &= u_{k+1} + \left(\frac{1}{1 - \beta} - 1 \right) u_{k+1} - \frac{\beta u_k}{1 - \beta} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Mit

$$\frac{1}{1 - \beta} - 1 = \frac{\beta}{1 - \beta}$$

folgt direkt in Gleichung (7.5)

$$u = u_{k+1} + \frac{\beta}{1 - \beta} (u_{k+1} - u_k). \quad (7.6)$$

Nach Gleichung (7.3)

$$\beta = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k - u_{k-1}}$$

gilt

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= 1 - \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k - u_{k-1}} \\ &= \frac{(u_k - u_{k-1}) - (u_{k+1} - u_k)}{u_k - u_{k-1}}. \end{aligned}$$

Dann folgt für u aus Gleichung (7.6) mit Gleichung (7.3)

$$\begin{aligned} u &= u_{k+1} + \frac{\beta}{1 - \beta} (u_{k+1} - u_k) \\ &= u_{k+1} + \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k - u_{k-1}} \cdot \frac{1}{\frac{(u_k - u_{k-1}) - (u_{k+1} - u_k)}{u_k - u_{k-1}}} (u_{k+1} - u_k) \\ &= u_{k+1} + \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{(u_k - u_{k-1}) - (u_{k+1} - u_k)} \\ &= u_{k+1} - \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{(u_{k+1} - u_k) - (u_k - u_{k-1})}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Für eine übersichtlichere Darstellung verwenden wir die Differenz-Schreibweise.

Definition 7.2.2 Sei u_0, u_1, u_2, \dots gegebene Zahlen, dann werden die aufsteigenden Differenzen für $k = 0, 1, \dots; l = 2, 3, \dots$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\Delta^0 u_k &:= u_k, \\ \Delta u_k = \Delta^1 u_k &:= u_{k+1} - u_k, \\ \Delta(\Delta u_{k-1}) = \Delta^2 u_{k-1} &:= \Delta(u_k - u_{k-1}) = (u_{k+1} - u_k) - (u_k - u_{k-1}), \\ \Delta^l u_k &:= \Delta(\Delta^{l-1} u_k) = \Delta^{l-1} u_{k+1} - \Delta^{l-1} u_k.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird l -te aufsteigende Differenz genannt.

Setzen wir in die hergeleitete Folge nach Gleichung (7.7) die Ausdrücke $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ und $\Delta^2 u_{k-1} = (u_{k+1} - u_k) - (u_k - u_{k-1})$ ein, so erhalten wir eine beschleunigte Iterierte

$$u = u_{k+1} - \frac{(\Delta u_k)^2}{\Delta^2 u_{k-1}}.$$

Die beschleunigte Iterierte u wird nur durch die Skalare u_{k-1}, u_k und u_{k+1} bestimmt und gibt einen guten Näherungswert für den gesuchten Grenzwert u einer Folge u_k an.

Im nächsten Schritt beweisen wir, dass die hergeleitete skalare Folge \tilde{u}_k tatsächlich schneller als die ursprüngliche skalare Folge u_k konvergiert. Dazu sei folgender Satz genannt:

Satz 7.2.3 Sei $u_k \neq u$ eine Folge mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1} - u}{u_k - u} = \beta \in [-1, 1).$$

Dann gilt für die Folge

$$\tilde{u}_k = u_{k+1} - \frac{(\Delta u_k)^2}{\Delta^2 u_{k-1}}, \tag{7.8}$$

sodass Folgendes:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{u}_k - u}{u_k - u} = 0$$

gilt. (D. h. die Folge \tilde{u}_k konvergiert schneller gegen u als u_k .)

Beweis Sei

$$\beta_k = \frac{u_{k+1} - u}{u_k - u}$$

mit $\beta_k \rightarrow \beta$ angenommen. Unter Verwendung der Definition 7.2.2 ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\Delta^2 u_{k-1} &= (u_{k+1} - u_k) - (u_k - u_{k-1}) \\ &= (u_{k+1} - u) + (u - u_k) - (u_k - u) - (u - u_{k-1}) \\ &= (u_{k-1} - u) - 2(u_k - u) + (u_{k+1} - u) \\ &= (u_{k-1} - u) \left(\frac{u_{k+1} - u}{u_{k-1} - u} - 2 \frac{u_k - u}{u_{k-1} - u} + 1 \right).\end{aligned}$$

Mit dem Ausdruck

$$\frac{u_{k+1} - u}{u_k - u} \cdot \frac{u_k - u}{u_{k-1} - u} = \frac{u_{k+1} - u}{u_{k-1} - u} = \beta_k \beta_{k-1}$$

folgt

$$\Delta^2 u_{k-1} = (u_{k-1} - u)(\beta_k \beta_{k-1} - 2\beta_{k-1} + 1).$$

Mit der Definition 7.2.2 der Differenzen und unter Beachtung $(u_{k+1} - u) = \beta_k (u_k - u)$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta u_k &= u_{k+1} - u_k \\ &= (u_{k+1} - u) + (u - u_k) \\ &= \beta_k (u_k - u) - (u_k - u) \\ &= (\beta_k - 1)(u_k - u).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir gemäß Gleichung (7.8)

$$\begin{aligned}\tilde{u}_k - u &= (u_{k+1} - u) - \frac{(\beta_k - 1)^2 (u_k - u)^2}{(u_{k-1} - u)(\beta_k \beta_{k-1} - 2\beta_{k-1} + 1)} \\ &= \beta_k (u_k - u) - \frac{(u_k - u)(u_k - u)(\beta_k - 1)^2}{(u_{k-1} - u)(\beta_k \beta_{k-1} - 2\beta_{k-1} + 1)} \\ &= (u_k - u) \left(\beta_k - \frac{(u_k - u)(\beta_k - 1)^2}{(u_{k-1} - u)(\beta_k \beta_{k-1} - 2\beta_{k-1} + 1)} \right) \\ \frac{\tilde{u}_k - u}{u_k - u} &= \beta_k - \frac{(u_k - u)(\beta_k - 1)^2}{(u_{k-1} - u)(\beta_k \beta_{k-1} - 2\beta_{k-1} + 1)}.\end{aligned}$$

Mit Gleichung (7.2)

$$\frac{u_k - u}{u_{k-1} - u} = \beta_{k-1}$$

folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_k - u}{u_k - u} &= \beta_k - \frac{\beta_{k-1}(\beta_k - 1)^2}{\beta_k\beta_{k-1} - 2\beta_{k-1} + 1} \longrightarrow \beta - \frac{\beta(\beta - 1)^2}{\beta^2 - 2\beta + 1} \\ &= \beta - \frac{\beta(\beta - 1)^2}{(\beta - 1)^2} = \beta - \beta = 0. \end{aligned}$$

□

Das Δ^2 -Verfahren von Aitken besitzt in der Literatur viele Modifikationen. Ersetzen wir bei der Herleitung der beschleunigten Folge die genannten Gleichungen (7.1) und (7.2) mit

$$\begin{aligned} u_{k+2} - u &= \beta(u_{k+1} - u) \\ u_{k+1} - u &= \beta(u_k - u) \end{aligned}$$

und wählen als Korrektur in Gleichung (7.5) nicht u_{k+1} , sondern u_k , dann folgt die äquivalente Formulierung der Δ^2 -Methode nach Aitken (7.8):

$$\tilde{u}_k = u_k - \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k} = u_k - \frac{(\Delta u_k)^2}{\Delta^2 u_k} \quad (7.9)$$

Diese Formulierung wird in der Literatur unter anderem auch *Steffensen-Methode* genannt.

Der bewiesene Satz 7.2.3 kann auch im Zusammenhang mit geometrischen Folgen interpretiert werden. Eine geometrische Folge hat die allgemeine Form

$$u_k = u + \nu q^k + \eta_k, \quad \nu \neq 0 \quad (7.10)$$

mit der Eigenschaft $0 < |q| < 1$. Für die Nullfolge η_k gilt $q^{-k}\eta_k \rightarrow 0$. Die schnell konvergente Folge η_k interpretieren wir als Störung und nehmen zunächst $\eta_k = 0$ an. Ist die Folge u_k einer geometrischen Folge hinreichend ähnlich, so kann aus dieser eine beschleunigte Folge konstruiert werden, die schneller konvergiert als die ursprüngliche. Hinreichend ähnlich bedeutet, dass die Folge der Quotienten der Differenzen zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder gegen einen Wert konvergiert, der zwischen -1 und 1 liegt. Bestätigen wir den Satz 7.2.3 unter der Voraussetzung, dass die Folge einer geometrischen Folge hinreichend ähnlich ist [72].

Dazu wählen wir eine Folge von Zahlen u_k , die gegen einen gesuchten Wert u konvergiert.

Mit der Annahme $\eta_k = 0$ in Gleichung (7.10) gilt für zwei aufeinanderfolgender Glieder

$$u_k = u + \nu q^k, \quad (7.11)$$

$$u_{k+1} = u + \nu q^{k+1}, \quad (7.12)$$

die Differenz

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= (u + \nu q^{k+1}) - (u + \nu q^k) \\ &= \nu q^{k+1} - \nu q^k \\ &= \nu q^k (q - 1). \end{aligned}$$

Analog definieren wir die Differenz von u_{k+1} und u_{k+2}

$$\begin{aligned} u_{k+2} - u_{k+1} &= (u + \nu q^{k+2}) - (u + \nu q^{k+1}) \\ &= \nu q^{k+2} - \nu q^{k+1} \\ &= \nu q^{k+1} (q - 1). \end{aligned}$$

Mit der Quotientenbildung der Differenzen folgt

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{u_{k+1} - u_k} &= \frac{\nu q^{k+1} (q - 1)}{\nu q^k (q - 1)} \\ &= q. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Formen wir die Gleichung (7.12) nach u und ersetzen den Ausdruck νq^k mit Gleichung (7.11), so erhalten wir

$$u = \frac{u_{k+1} - q u_k}{1 - q}.$$

Die hergeleitete Gleichung entspricht dem Ausdruck der Gleichung (7.4).

Mit den Umformungen unter Berücksichtigung von q aus Gleichung (7.13) gilt

$$u = u_k - \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{(u_{k+2} - u_{k+1}) - (u_{k+1} - u_k)}$$

sowie unter Beachtung der Definition 7.2.2 für die Differenz-Schreibweise für die beschleunigte Iterierte

$$\tilde{u} = u_k - \frac{(\Delta u_k)^2}{\Delta^2 u_k}.$$

Diese Formel haben wir bereits im Satz 7.2.3 aufgeführt und bewiesen.

In den meisten Fällen besitzen Folgen auch kleine Störungen. Untersuchen wir die Auswirkung von Störungen η_k auf die abgeleitete beschleunigte Folge \tilde{u} .

Es gilt

$$\tilde{u} = u_k + \eta_k - \frac{(\Delta(u_k + \eta_k))^2}{\Delta^2(u_k + \eta_k)}.$$

Zuerst zeigen wir, wie sich Summen auf die Differenzenbildungen auswirken. Dazu sei $\eta_k = \tau_k + \kappa_k$. Es folgt

$$\Delta\eta_k = (\tau_{k+1} - \tau_k) + (\kappa_{k+1} - \kappa_k)$$

und damit

$$\Delta\eta_k = \Delta\tau_k + \Delta\kappa_k.$$

Die Differenz einer Summe entspricht daher der Summe der Differenzen. Weiterhin gilt

$$\Delta u_k = \nu(q-1)q^k$$

sowie unter Beachtung der Definition 7.2.2 für die Differenz-Schreibweise

$$\Delta^2 u_k = \nu(q-1)^2 q^k.$$

Nehmen die Beträge der Folge \tilde{u} mit $|\eta_{k+1}| \leq |\eta_k|$ monoton ab, folgt

$$|\Delta\eta_k| \leq |\eta_{k+1}| + |\eta_k|$$

und damit gilt $|\Delta\eta_k| \leq 2|\eta_k|$ bzw.

$$|\Delta^2\eta_k| \leq |\Delta\eta_{k+1}| + |\Delta\eta_k| \leq 2|\eta_{k+1}| + 2|\eta_k| \leq 4|\eta_k|.$$

Mit der Wahl eines großen k gilt $q^{-k}\eta_k \rightarrow 0$ und damit

$$\left| q^{-k} \Delta^2 \eta_k \right| \leq |q|^{-k} 4 |\eta_k| \leq \frac{1}{2} |\nu| (1 - q)^2.$$

Für die Gleichung

$$\tilde{u} = u_k + \eta_k - \frac{(\Delta u_k + \Delta \eta_k)^2}{\Delta^2 u_k + \Delta^2 \eta_k}$$

untersuchen wir die Störungen in der Gleichung

$$\tilde{u} = u_k - \frac{(\Delta u_k)^2}{\Delta^2 u_k} + \left[\eta_k + \frac{(\Delta u_k)^2}{\Delta^2 u_k} - \frac{(\Delta u_k + \Delta \eta_k)^2}{\Delta^2 u_k + \Delta^2 \eta_k} \right],$$

indem wir den Term in der Klammer weiter abschätzen

$$\tilde{u} = u + \left[\eta_k + \frac{(\Delta u_k)^2 \Delta^2 \eta_k - 2 \Delta^2 u_k \Delta u_k \Delta \eta_k - \Delta^2 u_k (\Delta \eta_k)^2}{\Delta^2 u_k (\Delta^2 u_k + \Delta^2 \eta_k)} \right].$$

Den Term definieren wir mit S_k :

$$S_k = \left| \eta_k + \frac{(\Delta u_k)^2 \Delta^2 \eta_k - 2 \Delta^2 u_k \Delta u_k \Delta \eta_k - \Delta^2 u_k (\Delta \eta_k)^2}{\Delta^2 u_k (\Delta^2 u_k + \Delta^2 \eta_k)} \right|. \quad (7.14)$$

Zur Vereinfachung setzen wir den zweiten Term in der Klammer mit

$$B_k = \frac{(\Delta u_k)^2 \Delta^2 \eta_k - 2 \Delta^2 u_k \Delta u_k \Delta \eta_k - \Delta^2 u_k (\Delta \eta_k)^2}{\Delta^2 u_k (\Delta^2 u_k + \Delta^2 \eta_k)}$$

und formen weiter um

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{\nu^2 (q-1)^2 q^{2k} \Delta^2 \eta_k - 2\nu (q-1)^2 q^k \nu (q-1) q^k \Delta \eta_k - \nu (q-1)^2 q^k (\Delta \eta_k)^2}{\nu (q-1)^2 q^k (\nu (q-1)^2 q^k + \Delta^2 \eta_k)} \\ &= \frac{\nu q^k \Delta^2 \eta_k - 2\nu (q-1) q^k \Delta \eta_k - (\Delta \eta_k)^2}{\nu (q-1)^2 q^k + \Delta^2 \eta_k}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Durch Einsetzen von (7.15) in (7.14) erhalten wir schließlich

$$S_k = \left| \eta_k + \frac{\nu \Delta^2 \eta_k - 2\nu (q-1) \Delta \eta_k - q^{-k} (\Delta \eta_k)^2}{\nu (q-1)^2 + q^{-k} \Delta^2 \eta_k} \right|.$$

Mit den Voraussetzungen $0 < |q| < 1$ und $q^{-k}\eta_k \rightarrow 0$ der Gleichung (7.10) schätzen wir mit $|q^{-k}\eta_k| \leq 1$ weiter ab und verwenden die Dreiecksungleichung. Es gilt

$$S_k \leq |\eta_k| + \frac{4|\nu||\eta_k| + 4|\nu(q-1)||\eta_k| + |\eta_k|}{|\nu|(q-1)^2 - \frac{1}{2}|\nu|(q-1)^2}$$

und damit

$$S_k \leq \left[1 + \frac{4|\nu| + 4|\nu(q-1)| + 1}{\frac{1}{2}|\nu|(q-1)^2} \right] |\eta_k|.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Folge η_k eine konvergente Nullfolge mit $q^{-k}\eta_k \rightarrow 0$ ist, zeigt die Abschätzung für den Störungsterm, dass auch die Folge u_k mit kleinen Störungen einer geometrischen Folge hinreichend ähnlich ist.

Für das Δ^2 -Verfahren müssen also mindestens drei Folgenglieder aus einer geometrisch hinreichend ähnlichen Folge vorliegen, damit eine beschleunigte Folge konstruiert werden kann. Um die Voraussetzungen gezielt zu erreichen, stellen wir im nächsten Kapitel das Extrapolationsverfahren vor, welches auch als Fixpunktiterationsverfahren interpretiert werden kann.

7.3 Extrapolationsverfahren nach der Δ^2 -Aitken-Methode

Die Extrapolation ist eine auf vorhandenen Daten basierende, weiterführende Entwicklung über den letzten effektiv beobachteten Wert hinaus. Das Prinzip wird in der Praxis angewandt. Extrapolationsverfahren werden auch vorwiegend zur Beschleunigung der Konvergenz einer gegebenen Folge gegen den gesuchten Grenzwert eingesetzt. Wir stellen das in der Literatur bezeichnete *Extrapolationsverfahren nach Aitken* [71, 73] vor.

Wie auch in dem vorherigen Kapitel bei der Herleitung des Konvergenzbeschleunigungsverfahrens von Aitken konstruieren wir auch hier eine neue Folge \hat{u}_k , die ebenfalls schneller als die ursprüngliche Folge konvergiert. Ausgehend von drei Folgenglieder u_{k-1}, u_k, u_{k+1} können wir zwei Lösungsvorschläge für ein festes ω_k angeben.

$$\begin{aligned} (I) \quad \hat{u}_k &= \omega_k u_k + (1 - \omega_k) u_{k-1} \\ &= u_{k-1} + \omega_k (u_k - u_{k-1}) \\ &= u_{k-1} + \omega_k \Delta u_{k-1} \\ (II) \quad \hat{u}_{k+1} &= \omega_k u_{k+1} + (1 - \omega_k) u_k \\ &= u_k + \omega_k (u_{k+1} - u_k) \\ &= u_k + \omega_k \Delta u_k \end{aligned}$$

Der Parameter ω_k ist noch ein zu bestimmender Relaxationsparameter, der von den drei Folgengliedern u_{k-1}, u_k, u_{k+1} abhängig ist. Zusätzlich nehmen wir an, dass ein linearer Zusammenhang zwischen den Folgengliedern besteht.

Für genügend große k gilt für beide Extrapolationen die Bedingung $|\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k| \rightarrow 0$. Als Erstes subtrahieren wir beide Lösungsvorschläge und lösen die Gleichung für den Relaxationsparameter ω :

$$\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k = (u_k + \omega_k \Delta u_k) - (u_{k-1} + \omega_k \Delta u_{k-1}),$$

mit der Bedingung $|\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k| \rightarrow 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= u_k - u_{k-1} + \omega_k (\Delta u_k - \Delta u_{k-1}) \\ u_{k-1} - u_k &= \omega_k (\Delta u_k - \Delta u_{k-1}). \end{aligned}$$

Anschließendes Auflösen nach dem Relaxationsparameter ω ergibt

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{u_{k-1} - u_k}{\Delta u_k - \Delta u_{k-1}} \\ &= \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta u_{k-1} - \Delta u_k} \\ &= \frac{\Delta u_{k-1}}{\Delta u_{k-1} - \Delta u_k}. \end{aligned}$$

Ersetzen wir in dem zweiten Lösungsvorschlag (II)

$$\hat{u}_{k+1} = u_k + \omega_k \Delta u_k$$

den Ausdruck Δu_k durch Δu_{k-1} , so erhalten wir folgendes modifiziertes Extrapolationsverfahren:

Methode 7.3.1 (*modifiziertes Extrapolationsverfahren*)

- 1.) Wähle Startwert $\omega_0 = 0$.
- 2.) Berechne für $k = 1, 2, \dots$ den Relaxationsparameter

$$\omega_k = \frac{\Delta u_{k-1}}{(\Delta u_{k-1} - \Delta u_k)}.$$

- 3.) Berechne die beschleunigte Iterierte nach der Iterationsvorschrift

$$\hat{u}_{k+1} = u_k + \omega_k \Delta u_{k-1}$$

4.) Setze $u_{k+1} = \hat{u}_{k+1}$.

5.) Berechne anschließend mit dem neuen Startwert u_{k+1} eine weitere Iterierte.

6.) Gehe zu Schritt 2.).

Das hergeleitete Extrapolationsverfahren nach der Δ^2 -Aitken-Methode berechnet aus drei vorliegenden Folgengliedern eine beschleunigte Iterierte, die dazu führen soll, dass die daraus entstandene neue Folge mindestens eine geometrisch hinreichend ähnliche Folge ist. Unter der Voraussetzung, dass eine geometrisch hinreichende ähnliche Folge vorliegt, können wir dann anschließend die äquivalente Formulierung der Δ^2 -Methode nach Aitken gemäß Gleichung (7.9), die auch *Steffensen-Methode* genannt wird, auf den Kalman-Filter-Algorithmus in seiner Nullraum-Variante (Algorithmus 4) anwenden, um die Konvergenz gegen die exakte ℓ_1 -Norm des zu berechneten Zustandsvektors zu zeigen.

Kapitel 8

Kalman-Filter mit integriertem Konvergenzbeschleunigungsverfahren

8.1 Allgemeine Funktionsweise

In den beiden vorherigen Kapiteln 7.2 und 7.3 haben wir das Δ^2 -Grundverfahren von Aitken und ein modifiziertes Extrapolationsverfahren kennengelernt.

Diese Verfahren werden in dem vorgestellten Kalman-Filter-Algorithmus 4 aus Kapitel 6.1 implementiert. Hierbei sei zu beachten, dass für die Anwendung des Δ^2 -Grundverfahren von Aitken die vorliegende Folge einer geometrischen Folge hinreichend ähnlich sein muss. Diese Voraussetzung wird erfüllt, indem wir das modifizierte Extrapolation dem Δ^2 -Verfahren von Aitken voranstellen.

Die typische Formulierung des EKF beinhaltet die Annahme eines additiven Messrauschprozesses. Diese Annahme ist für die EKF-Implementierung nicht unbedingt erforderlich [76]. Wenn das Messrauschen \mathbf{v} nicht additiv ist, dann hat die Messfunktion $h(\cdot)$ folgende Form: $h(\mathbf{x}, \mathbf{v}), h(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\|_1$.

Die Messung entwickelt sich in Abhängigkeit vom Zustand und dem Messrauschen. Setzen wir voraus, dass die Differenzierbarkeit der Funktion $h(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ gegeben ist, können wir die Jacobi-Matrix $\frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}|_{\mathbf{x}^{(k)}}$ angeben. Da das Messrauschen \mathbf{v} unbekannt ist, ist eine exakte Berechnung der Jacobi-Matrix nicht realisierbar.

Sehen wir uns als Erstes den beschleunigten Algorithmus näher an.

Der bereits erläuterte Algorithmus 4 im Kapitel 6.1 bleibt in seiner Struktur so weit erhalten, lediglich die Parameter \hat{r}, r und damit y werden in jedem Iterationsschritt gemäß den Ausführungen im Kapitel 7 anders berechnet. Wir starten den Algorithmus 5 mit der Initialisierung vom Algorithmus 4. In der zweiten Iteration wird die reduzierte ℓ_1 -Norm \tilde{y} unter Verwendung des Relaxationsparameters ω nach der Methode 7.3.1 – dem modifizierten Extrapolationsverfahren – bestimmt. Damit wird erreicht, dass bei der nächsten Iteration eine Folge vorliegt, die einer geometrischen Folge hinreichend ähnlich ist. Im dritten Iterationsschritt berechnen wir die reduzierte ℓ_1 -Norm \tilde{y} mit der vorgestellten Steffensen-Methode nach der Gleichung (7.9).

Die Folge \tilde{y}_k wird durch die Steffensen-Methode in eine konvergierende Sequenz überführt. Zusätzlich konvergiert die Folge der Parameter $r^{(k)}$, ebenfalls durch die Anwendung der Steffensen-Methode, für $k \rightarrow \infty$ gegen Null. Die Folge \tilde{y} konvergiert gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert. Somit konvergiert das zu rekonstruierende Signal \mathbf{x} gegen einen festen Wert.

Algorithmus 5 Beschleunigtes ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter im Nullraum (KF-Aitken)

for jede Alg. 4 Iteration **do**

Kalman gain:

$$\mathbf{K}^{(k)} := \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}_\nu^{(k)\text{H}} \left(\mathbf{C}_\nu^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}_\nu^{(k)\text{H}} + \mathbf{C}_\nu^{(k)} \mathbf{R}_\nu \mathbf{C}_\nu^{(k)\text{H}} \right)^{-1}$$

if $k = 2$ **then**

$$\hat{r}^{(k)} = \hat{r}^{(k-1)}$$

$$r^{(k)} = (1 - \hat{r}) r^{(k-1)}$$

$$\tilde{y}^{(k)} = -r^{(k)} \left(\|\mathbf{x}^{(k)}\|_1 + \omega \left(\|\mathbf{x}^{(k)}\|_1 - \|\mathbf{x}^{(k-1)}\|_1 \right) \right)$$

else if $k \geq 3$ **then**

$$\hat{r}^{(k)} = \frac{r^{(k)} r^{(k-2)} - (r^{(k-1)})^2}{r^{(k)} - 2r^{(k-1)} + r^{(k-2)}}$$

$$r^{(k)} = (1 - \hat{r}^{(k)}) r^{(k)}$$

$$\tilde{y}^{(k)} = \frac{\tilde{y}^{(k)} \tilde{y}^{(k-2)} - (\tilde{y}^{(k-1)})^2}{\tilde{y}^{(k)} - 2\tilde{y}^{(k-1)} + \tilde{y}^{(k-2)}}$$

end if

end for

Die Unsicherheit sollte ein lineares Verhalten entlang des gesamten Wahrscheinlichkeitsgebiets besitzen. Nichtlinearität wird als Änderung in der Funktionsableitung innerhalb des *Wahrscheinlichkeitskonzentrationsgebiet* (*probability concentration region*) (PCR) der Eingangsvariable definiert. Deshalb hängt die Nichtlinearität sowohl von der Funktion als auch vom PCR [77, 78] ab.

Das erweiterte Kalman-Filter erwartet eine den Voraussetzungen entsprechender angemessene Linearisierung. Insbesondere bedeutet das, dass die Jacobi-Funktion eine gute Annäherung der Funktionsableitungen innerhalb der ganzen Wahrscheinlichkeit seines Konzentrationsgebietes der Zustandsgröße (Variable) darstellt. Eine nicht den Anforderungen gerechte Linearisierung liegt vor, wenn die Ableitungen innerhalb des Wahrscheinlichkeitskonzentrationsgebietes variieren [78]. Die Abbildung 8.1 demonstriert das Problem.

Nach [76] muss lediglich die Gleichung (4.6) im Kapitel 4.2.1 modifiziert werden.

In den Kalman-Filter-Gleichungen (4.5), (4.6) und (4.7) aus Kapitel 4.2.1 wird die Kalman-Verstärkung \mathbf{K} angepasst.

Nehmen wir an, dass das Messrauschen \mathbf{v} sehr gering ist, so können wir die Näherung

$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{x}^{(k)}} \approx \mathbf{C}_\nu$$

wählen. Untersuchungen in den nächsten zwei Kapiteln lassen erkennen, dass diese Näherung für die Jacobi-Matrix akzeptabel ist.

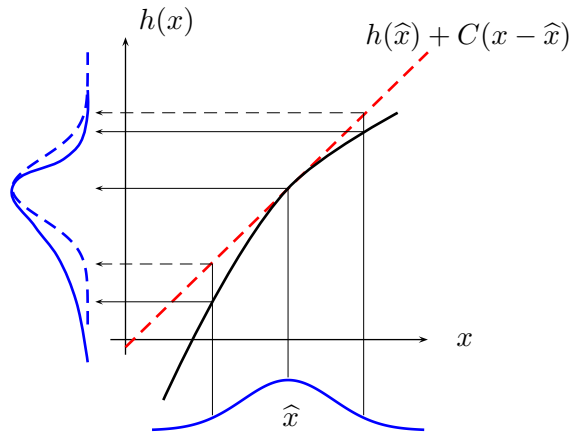


Abb. 8.1: Beispiel für eine schlechte Linearisierung: die Ableitungen variieren innerhalb des PCR [77].

8.2 Untersuchungen des Kalman-Filters und des Kalman-Filters mit integriertem Konvergenzbeschleunigungsverfahren (KF-Aitken)

Für eine Untersuchung des modifizierten Algorithmus 5 – *Kalman-Filter mit Aitken-basierter Konvergenzbeschleunigung (KF-Aitken)* – wählen wir zwei zufällig gewählte Beispiele und vergleichen diese mit dem ursprünglichen Kalman-Filter-Algorithmus 4 (EKF). Wir nehmen für alle weiteren aufgeführten Beispiele an, dass die hinreichende Bedingung mit Theorem 3.2.1 aus Kapitel 3.2.1 erfüllt ist. Damit ist \mathbf{x} die eindeutige Lösung des ℓ_0 -Minimierungsproblems (2.14) und des ℓ_1 -Minimierungsproblems (2.15).

Im ersten Fall hat die Messmatrix die Dimension 80×128 . Die Sparsity des Lösungsvektors, also die von Null verschiedenen Einträge, beträgt $s = 5$. Die Anzahl der Iterationen ist auf 1000 beschränkt. Abbildung 8.2 stellt die Reduzierung der ℓ_1 -Norm in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationen dar. Wir vergleichen die Ergebnisse des Algorithmus 4 (EKF) mit den Ergebnissen des beschleunigten Algorithmus 5 (KF-Aitken). Zusätzlich geben wir ebenfalls die exakte ℓ_1 -Norm an, die auch hier als roter Graph dargestellt wird. Die berechnete ℓ_1 -Norm mit Algorithmus 4 (EKF) konvergiert nicht gegen die exakte ℓ_1 -Norm der Lösung. Der dunkle Graph zeigt die vom

Algorithmus 5 (KF-Aitken) berechnete ℓ_1 -Norm. Nach 1000 Iterationen erreicht der beschleunigte Algorithmus 5 (KF-Aitken) nicht nur die exakte ℓ_1 -Norm, sondern die *Wurzel aus der mittleren Fehlerquadratsumme (root-mean-squared error) (RMSE)* von $2,1 \cdot 10^{-6}$. Der beschleunigte Algorithmus 5 (KF-Aitken) rekonstruiert das Signal \mathbf{x} exakter als der Algorithmus 4 (EKF).

Es konnte auch hier beobachtet werden, dass der Algorithmus 4 (EKF) nicht immer gegen die exakte ℓ_1 -Norm der Lösung konvergiert. In vielen Fällen stagniert der Algorithmus 4 (EKF). Die exakte ℓ_1 -Norm der Lösung \mathbf{x} kann somit nicht erreicht werden.

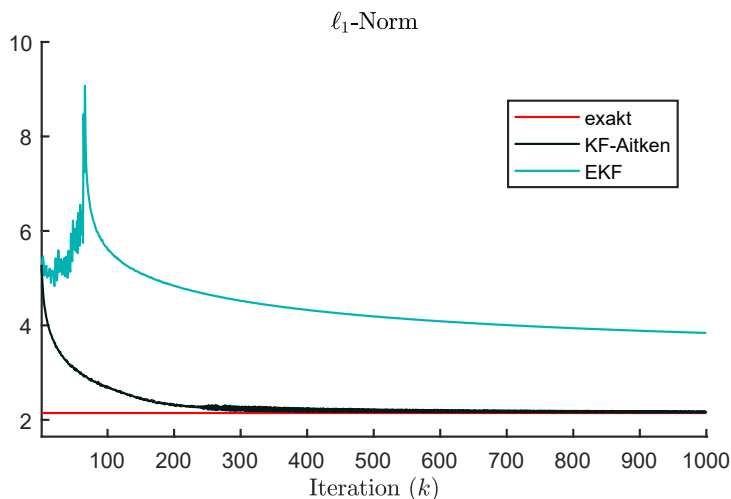


Abb. 8.2: ℓ_1 -Norm vom EKF-Algorithmus 4 und KF-Aitken-Algorithmus 5, sowie die exakte ℓ_1 -Norm der Lösung. Die Messmatrix hat die Dimension 80×128 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 5$.

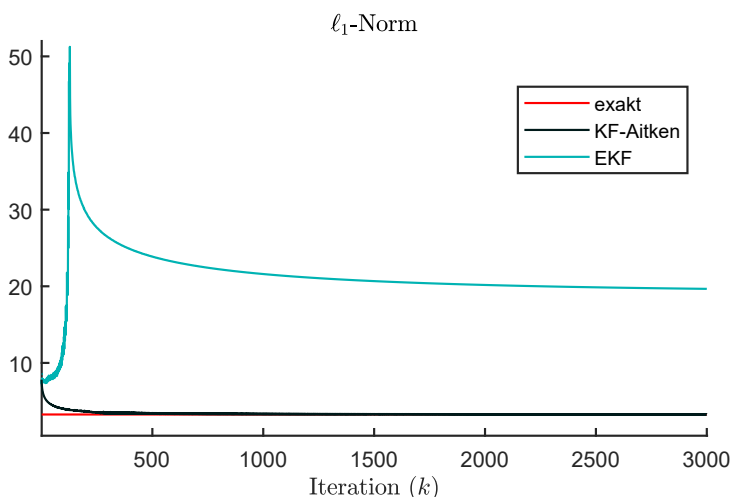


Abb. 8.3: ℓ_1 -Norm vom EKF-Algorithmus 4 und KF-Aitken-Algorithmus 5, sowie die exakte ℓ_1 -Norm der Lösung. Die Messmatrix hat die Dimension 160×256 . Die Sparsity des Lösungsvektors ist $s = 15$.

Für das zweite Beispiel erhöhen wir die Dimension der Messmatrix auf 160×256 . Die Ergebnisse werden in Abbildung 8.3 mit einer Sparsity $s = 15$ und 3000 Iterationen dargestellt. Der Algorithmus 4 (EKF) im zweiten Beispiel, in Abbildung 8.3,

konvergiert ebenfalls nicht gegen die exakte ℓ_1 -Norm von 3,2714. Der Startvektor $\hat{\boldsymbol{x}}_p$ besitzt hier in diesem Beispiel eine ℓ_1 -Norm von 8,5469. Nach 3000 Iterationen erreicht der Algorithmus 4 (EKF) eine Lösung mit der ℓ_1 -Norm von 19,6602. Der Algorithmus 5 (KF-Aitken) erreicht dagegen eine ℓ_1 -Norm von 3,2801 mit einem RMSE von $1,6 \cdot 10^{-5}$ mit der gleichen Anzahl von Iterationen.

Die Beispiele zeigen, dass der Vektor \boldsymbol{x} mit dem beschleunigten Algorithmus rekonstruiert werden kann. Nicht nur die Konvergenz ist schneller, sogar die Konvergenz gegen die exakte Lösung konnte in diesen zwei Beispielen gezeigt werden. Mit Hilfe der Konvergenzbeschleunigungsverfahren konnte das Kalman-Filter so modifiziert werden, dass auf Grundlage der in Kapitel 7.2 und 7.3 genannten Ausführungen ein beschleunigter Algorithmus entwickelt wurde, der gegen die exakte ℓ_1 -Norm der Lösung konvergiert.

8.3 Vergleich zwischen KF-Aitken und dem primal-dual Algorithmus von Chambolle & Pock (C&P)

8.3.1 Auswertungen mit den Donoho-Tanner-Graphen

Umfangreiche Untersuchungen können wir mit Hilfe von sogenannten *Donoho-Tanner-Graphen (DTG)* [79, 80] durchführen. Die DTG werden in diesem Kapitel eingeführt. Das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem gibt Auskunft darüber, wie viele Daten erfasst werden müssen, um ein Signal ohne Informationsverluste zu rekonstruieren. Die Theorie von CS besagt, dass weniger Daten erforderlich sind, um das Signal zu rekonstruieren. Die DTG zeigen die Ergebnisse von computergestützten Experimenten. In diesen Experimenten legen wir die Dimension n des Zustandsvektors fest und variieren die Anzahl der Messungen m und die Sparsity s . Auf der horizontalen Achse $\delta = m/n$ mit $0 \leq \delta \leq 1$ wird das Unterstichprobenverhältnis abgetragen, d. h. wie viele Messungen m wir gegenüber der Dimension n des Zustandsvektors durchführen. Die vertikale Achse $\rho = s/m$ mit $0 \leq \rho \leq 1$ gibt das Verhältnis zwischen der Sparsity und der Anzahl der Messungen an. Die Konturen in den DTG zeigen die Erfolgsrate. Für jedes Experiment untergliedern wir die Achsen in 32 gleich große diskrete Abschnitte. Jedes Pixel in der Abbildung zeigt den Durchschnittswert von acht Experimenten an. Für die Auswertungen generieren wir ein s -sparses Signal $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ per Zufall. Der Real- und Imaginärteil der von Null verschiedenen komplexen Koeffizienten sind gauß'sche Zufallsvariablen. Der resultierende Vektor \boldsymbol{x} ist zusätzlich normiert, d. h. es gilt $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$.

Um die Unabhängigkeit von bestimmten Anwendungen zu erreichen, verwenden wir Messmatrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ die aus *best complex antipodal spherical codewords (BCASC)* [36] bestehen. BCASC minimiert die Kohärenz zwischen den einzelnen Spalten der Messmatrix \boldsymbol{A} [36] und ist daher für die Rekonstruktion von Zustandsvektoren optimal. Für eine detaillierte Beschreibung von BCASC sei auf [36] verwiesen.

Für die ersten Experimente in diesem Kapitel wird die Signallänge auf $n = 128$ festgelegt. Sehen wir uns den relativen Rekonstruktionsfehler, die Rekonstruktionszeit sowie die Stabilität vom Algorithmus C&P und vom KF-Aitken an.

8.3.1.1 Rekonstruktionsfehler

Für die Beobachtungen verwenden wir den im Kapitel 3.5.2 vorgeschlagenen Primal-dual-Algorithmus von Chambolle & Pock gemäß Algorithmus 1. Ein erster Vergleich basiert auf der Berechnung des relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehlers, d. h.

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2},$$

zwischen dem Rekonstruktionsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ und der exakten Lösung \mathbf{x} . Die DTG geben den relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler in Abbildung 8.4 an. Die Ergebnisse zeigen, dass der beschleunigte Algorithmus 5, also das KF-Aitken, die gleiche ℓ_1 -Norm wie der C&P [52] liefert.

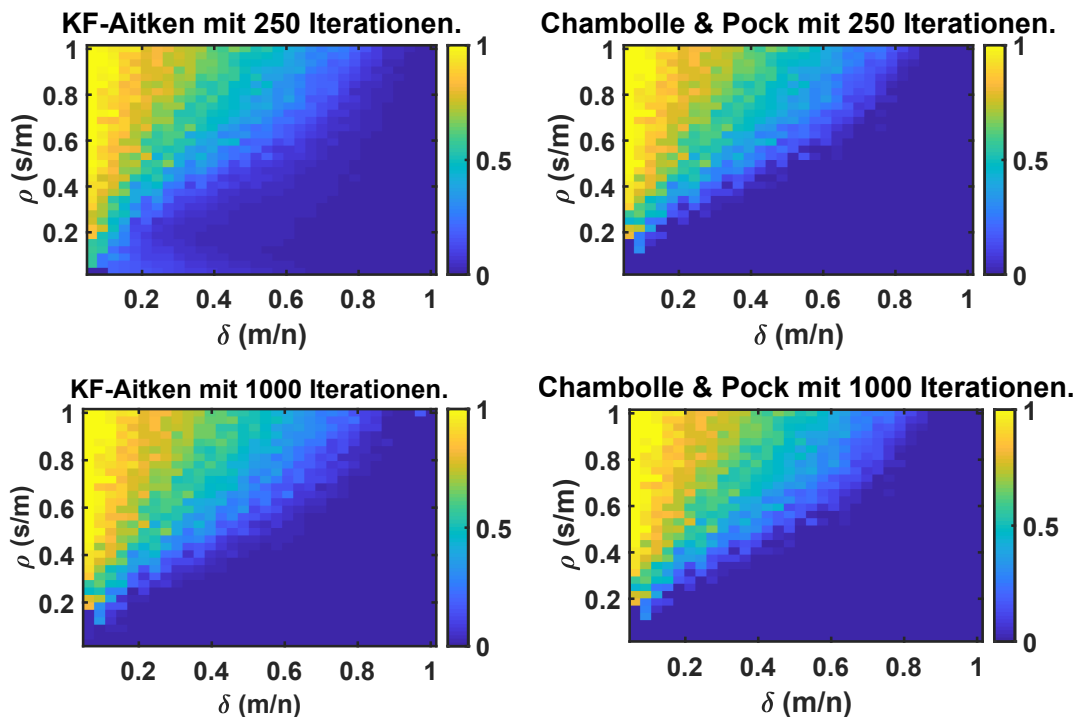


Abb. 8.4: Relativer ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler des beschleunigten Algorithmus KF-Aitken und C&P mit 250 und 1000 Iterationen.

8.3.1.2 Rekonstruktionszeit

Vergleichen wir die Rekonstruktionszeit von beiden Algorithmen. Für die Ausführungen benutzen wir die DTG, die im Kapitel 8.3.1 eingeführt sind. Die Ergebnisse werden in der Abbildung 8.5 dargestellt. In der Abbildung 8.5 zeigt die dunkle vertikale Linie

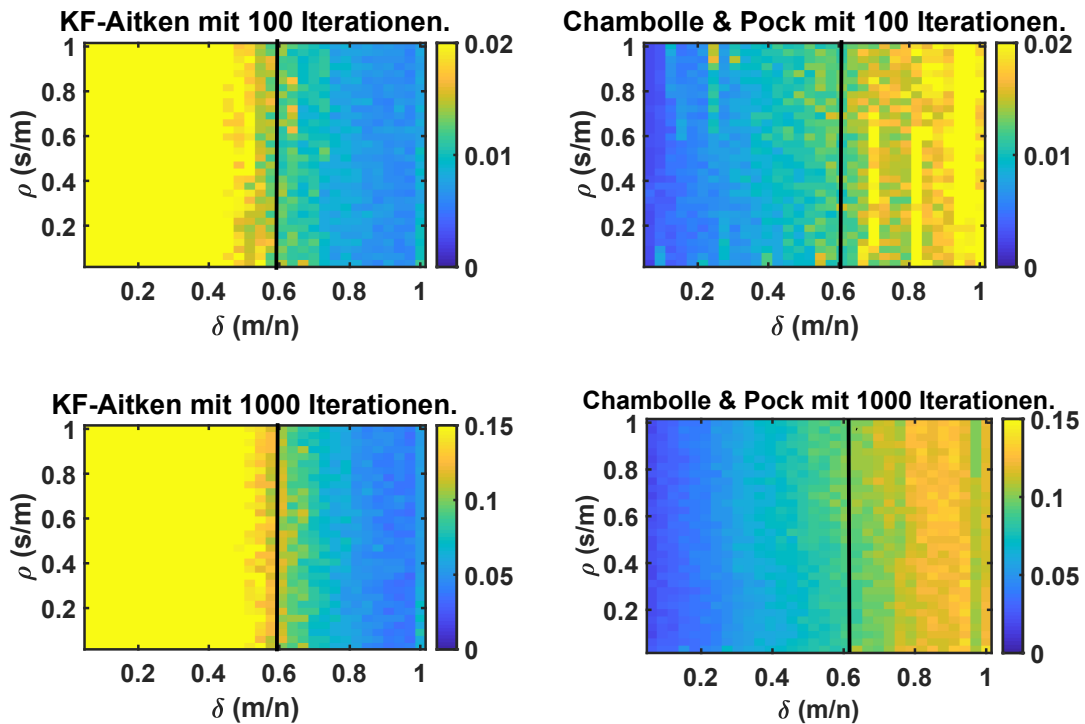


Abb. 8.5: Rekonstruktionszeit vom KF-Aitken und C&P nach 100 bzw. 1000 Iterationen.

eine Grenze bei $\delta \approx 0,61$. Auf den linken Seiten der dunklen Linie, die in den DTG dargestellt sind, liefert C&P eine bessere Rekonstruktionszeit als auf der rechten Seite der dunklen Linie. Die Experimente mit dem beschleunigten Algorithmus KF-Aitken benötigen weniger Zeit auf der rechten Seite der dunklen Linie als der C&P.

Die Grenze von δ ist nur von der Anzahl der Zeilen der Matrix abhängig, nicht von der Anzahl der Iterationen. Je mehr Messungen durchgeführt werden, desto schneller kann das sparse Signal mit dem KF-Aitken rekonstruiert werden, während der Algorithmus von C&P wesentlich langsamer ist. Die Ursache liegt darin, dass der beschleunigte Algorithmus im Nullraum arbeitet, d. h. in der Dimension $n - m$.

8.3.1.3 Stabilität

In Abbildung 8.4 wird ersichtlich, dass der relative ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-Aitken und C&P das gleiche Verhalten mit 1000 Iterationen aufweist. Aussagen, beispielsweise über die Stabilität, können auf dieser Grundlage nicht getroffen werden. Stabilität wird hier als Robustheit der Rekonstruktionsalgorithmen gegenüber kleineren Änderungen interpretiert, d. h. die numerischen Lösungen sind gegenüber kleinen Störungen der Daten unempfindlich. Geringe Änderungen, z. B. in der Sparsity s oder in der Anzahl von Messungen m , führen zu kleinen Änderungen des Rekonstruktionsfehlers. Die entstandenen Rundungsfehler wirken sich dann dementsprechend nicht zu stark auf die numerischen Berechnungen aus. Sie werden daher nicht aufsummiert und führen zu keiner Störung in der Lösung.

Wir zeigen, dass der beschleunigte Algorithmus 5 (KF-Aitken) ein stabiler Algorithmus ist, indem wir das Verhalten des relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehlers bei geringen Änderungen zum einen in der Zeilenanzahl der Matrix und zum anderen in der Sparsity untersuchen. Dazu sind die Parameter δ und ρ wie im Kapitel 8.3.1 definiert. Jeder Pixel im DTG stellt den Mittelwert aus acht verschiedenen Experimenten dar. Entgegen den Ausführungen im Kapitel 8.3.1.1 setzen wir für die Untersuchung der Stabilität der numerischen Algorithmen KF-Aitken und C&P die Zahl der Iterationen auf 100. Damit können wir angeben, wie sich kleine Änderungen der Ausgangsdaten auf den relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler nach 100 Iterationen verhalten.

Wir berechnen ausgehend vom berechneten relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler die absoluten Differenzen in Richtung δ und ρ , d. h. $\tilde{\delta}_{j+1} = |\delta_{j+1} - \delta_j|$ für $j = 1, \dots, 31$ sowie $\tilde{\rho}_{i+1} = |\rho_{i+1} - \rho_i|$ für $i = 1, \dots, 31$. Jedes dargestellte Pixel (i, j) in Abbildung 8.6 entspricht der Summe von $\tilde{\delta}_i$ und $\tilde{\rho}_j$. Die DTG in Abbildung 8.6 zeigen damit die ab-

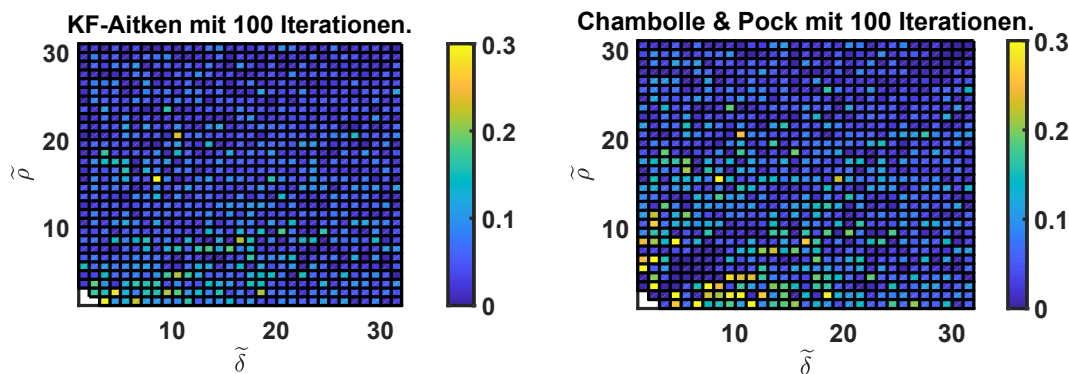


Abb. 8.6: Numerische Differenzierung des relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehlers von KF-Aitken und C&P.

solut lokalen Variationen des relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehlers von KF-Aitken und C&P im $\rho - \delta$ - Bereich. Weisen nebenstehende Pixel in der Abbildung 8.6 ungefähr den gleichen Farbton aus, so sind hier keine großen Änderungen im relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler zu erkennen, wenn sich die Anzahl der Messungen oder die Anzahl der Sparsity geringfügig verändert. Das bedeutet, dass in diesem $\rho - \delta$ - Bereich der Algorithmus stabil läuft. Große Farbunterschiede in einem Bereich zeigen, dass kleine Veränderungen einen großen Fehler verursachen. So erkennen wir z. B. das für den C&P im unteren linksseitigen Bereich des DTG in Abbildung 8.6 wesentlich größere Fehlerdifferenzen auftreten als beispielsweise beim KF-Aitken. Diese Aussage ist gut durch die gelb dargestellten Pixel zu erkennen. Der C&P weist im Allgemeinen Bereiche mit sehr geringen Variationen auf und kann daher lokal als stabil angesehen werden. Allerdings zeigt der Algorithmus 5 (KF-Aitken) weniger Einzelfälle mit großen lokalen Differenzen und kann somit als ein stabiler Algorithmus bezeichnet werden.

Kapitel 9

Erweitertes Kalman-Filter mit einem externen Thresholding (KF-ET)

9.1 Allgemeine Beschreibung

Bisher beruhte der vorgestellte Kalman-Filter- ℓ_1 -Minimierungsalgorithmus 4 auf der Beobachtung, dass keine Änderungen in der Prognose bzw. Prädiktion stattgefunden haben.

Das bedeutete, dass wir bisher ein exaktes Modell beobachtet hatten.

In diesem Kapitel wird der Kalman-Filter-Algorithmus 4, definiert in Kapitel 6, in Zeile 6 zu der klassischen Form geändert, was ein Anwachsen der Kovarianz bewirkt, d. h.

$$\mathbf{P}^{-(k)} := \mathbf{P}^{+(k-1)} + \mathbf{Q}$$

wobei $\mathbf{Q}(\cdot)$ als Varianz des Systemrauschens definiert ist. Wie auch im Kapitel 4.1.1 wird die Matrix \mathbf{Q} als zeitinvariant angenommen, weil genaue Kenntnisse der System- und Rauschdynamik nicht vorhanden sind. Das zugrundeliegende Modell enthält Modellungenauigkeiten bzw. Modellunsicherheiten und ist damit nicht exakt. Mit \mathbf{P}^- bezeichnen wir die Prädiktionsfehlerkovarianz und mit \mathbf{P}^+ die Schätzfehlerkovarianz. Bevor wir mit der Beschreibung des Algorithmus *Kalman-Filter mit externem Thresholding (KF-ET)* beginnen, leiten wir unter Beachtung der Systemrauschvarianz \mathbf{Q} die zugehörigen Kalman-Filter-Gleichungen über die Minimierung der Kostenfunktion her. Für diese Optimierungsaufgabe muss die Gewichtungsmatrix \mathbf{K} so gewählt werden, dass die Spur der a-posteriori Kovarianzmatrix \mathbf{P}^+ des Schätzfehlers minimal wird. Das ist sinnvoll, weil die Spur von \mathbf{P}^+ die Summe der Varianzen der Schätzfehler ist. Für die *Spur einer Matrix* verwenden wir die Schreibweise „tr“ für „trace“. Die abgeleiteten Kalman-Filter-Gleichungen bilden die Grundlage für die Herleitung eines MLS in einem der nächsten Kapitel. Für die weiteren Ausführungen sei $\hat{\mathbf{x}}^-$ der prädierte Zustandsvektor und $\hat{\mathbf{x}}^+$ der korrigierte Zustandsvektor. Weiterhin sei angenommen, dass $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definite Matrizen sind. Die Invertierbarkeit dieser Matrizen ist daher gegeben.

Der Schätzfehler

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+(k)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \widehat{\boldsymbol{x}}^{+(k)} \quad (9.1)$$

und der korrigierte Zustandsvektor nach der Beobachtungsgleichung (4.2)

$$\widehat{\boldsymbol{x}}^{+(k)} = \widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{C}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{v}^{(k)} - \mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} \right) \quad (9.2)$$

sind gegeben. Der a-posteriori-Schätzwert, also der korrigierte Zustandsvektor $\widehat{\boldsymbol{x}}^+$, wird aus dem a-priori-Schätzwert $\widehat{\boldsymbol{x}}^-$, also dem prädizierten Zustandsvektor und der Differenz zwischen dem vorliegendem und erwarteten Messwertvektor gebildet. Die Differenz wird mit einer noch zu bestimmenden Matrix \mathbf{K} gewichtet. Setzen wir den korrigierten Zustandsvektor $\widehat{\boldsymbol{x}}^+$ aus Gleichung (9.2) in die Gleichung (9.1), folgt

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+(k)} &= \boldsymbol{x}^{(k)} - \left[\widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{C}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{v}^{(k)} - \mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} \right) \right] \\ &= \boldsymbol{x}^{(k)} - \widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}\boldsymbol{x}^{(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{v}^{(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} \\ &= \boldsymbol{x}^{(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}\boldsymbol{x}^{(k)} - \widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}\widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{v}^{(k)} \\ &= \boldsymbol{x}^{(k)} \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) - \widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) - \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{v}^{(k)} \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \underbrace{\left(\boldsymbol{x}^{(k)} - \widehat{\boldsymbol{x}}^{-(k)} \right)}_{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-(k)}} - \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{v}^{(k)} \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{v}^{(k)}. \end{aligned}$$

Für die Kovarianz $\mathbf{P}^{+(k)}$ des Schätzfehlers $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+(k)}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{+(k)} &= \text{Cov} \left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+(k)}, \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+(k)} \right) \\ &= \text{Var} \left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{+(k)} \right) \\ &= \text{Var} \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{v}^{(k)} \right) \\ &= \text{Var} \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-(k)} \right) + \text{Var} \left(-\mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{v}^{(k)} \right) \\ &\quad + 2 \underbrace{\text{Var} \left(\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-(k)}, \left(-\mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{v}^{(k)} \right)^{\text{H}} \right)}_{= \mathbf{0}, \text{ da } \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-(k)} \text{ und } \boldsymbol{v}^{(k)} \text{ unkorreliert sind}} \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \underbrace{\text{Var} \left(\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-(k)} \right)}_{\mathbf{P}^{-(k)}} \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right)^{\text{H}} \\ &\quad + \mathbf{K}^{(k)} \underbrace{\text{Var} \left(\boldsymbol{v}^{(k)} \right)}_{\mathbf{R}^{(k)}} \mathbf{K}^{(k)\text{H}} \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \mathbf{P}^{-(k)} \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right)^{\text{H}} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)\text{H}}. \quad (9.3) \end{aligned}$$

Die Gleichung (9.3) wird als „Joseph Formel“ bezeichnet und ist auch als Basisgleichung bekannt. Sie wurde von P. D. Joseph [81] hergeleitet.

Die Matrix $\mathbf{K}^{(k)}$ sowie die Korrektur der Kovarianz des Schätzfehlers lassen sich aus der Basisgleichung bestimmen. Für die Ermittlung der Kalman-Verstärkung $\mathbf{K}^{(k)}$ wird die Basisgleichung (9.3) umgeformt. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{+(k)} &= \left(\mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \right) \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right)^{\text{H}} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)\text{H}} \\ &= \mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{K}^{(k)\text{H}} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{K}^{(k)\text{H}} \\ &\quad + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)\text{H}}. \end{aligned}$$

Das Ziel ist es, ein geeignetes $\mathbf{K}^{(k)}$ zu finden, bei dem die Kovarianz des Schätzfehlers $\mathbf{P}^{+(k)}$ minimal wird. Das Optimum erreichen wir mit

$$\frac{\partial \text{tr} \left(\mathbf{P}^{+(k)} \right)}{\partial \mathbf{K}^{(k)}} = \mathbf{0}.$$

Unter der Bedingung $\mathbf{P}^- = \mathbf{P}^{-\text{H}}$ folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr} \left(\mathbf{P}^{+(k)} \right)}{\partial \mathbf{K}^{(k)}} &= -\mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + 2\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + 2\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \\ \mathbf{0} &= -\mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} - \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + 2\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + 2\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \\ &= -2\mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + 2\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + 2\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \\ \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} &= \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)} \right) \end{aligned} \tag{9.4}$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} \left(\mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)} \right)^{-1}. \tag{9.5}$$

Ein Minimum existiert, wenn die hinreichende Bedingung erfüllt ist. Wir zeigen, dass die zweite Ableitung von

$$\frac{\partial^2 \text{tr} \left(\mathbf{P}^{+(k)} \right)}{\partial^2 \mathbf{K}^{(k)}}$$

positiv definit ist. Es gilt

$$\frac{\partial^2 \text{tr} \left(\mathbf{P}^{+(k)} \right)}{\partial^2 \mathbf{K}^{(k)}} = 2 \left(\mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)} \right). \tag{9.6}$$

Die Kovarianzmatrizen \mathbf{P}^- und \mathbf{R} sind symmetrisch, diagonaldominant und positiv definit. Folglich ist der Ausdruck $\mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)}$ in Gleichung (9.6) positiv definit, und damit wird die Kovarianz des Schätzfehlers $\mathbf{P}^{+(k)}$ unter Beachtung der Gleichung (9.5) minimal.

Aus Gleichung (9.3), (9.4) und (9.5) folgt direkt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{+(k)} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^H \mathbf{K}^{(k)H} \\
&\quad + \underbrace{\mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^H \mathbf{K}^{(k)H} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)H}}_{\mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^H + \mathbf{R}^{(k)} \right) \mathbf{K}^{(k)H}} \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^H \mathbf{K}^{(k)H} \\
&\quad + \underbrace{\mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{C} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^H + \mathbf{R}^{(k)} \right)}_{\mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^H} \mathbf{K}^{(k)H} \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \mathbf{P}^{-(k)} \underbrace{- \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^H \mathbf{K}^{(k)H} + \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^H \mathbf{K}^{(k)H}}_{=0} \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C} \right) \mathbf{P}^{-(k)}. \tag{9.7}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir die Kalman-Filter-Gleichungen

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{P}^+ + \mathbf{Q} \tag{9.8}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^+ = \hat{\mathbf{x}}^- + \mathbf{K} \left(\mathbf{b} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}^- \right) \tag{9.9}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H \left(\mathbf{C} \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R} \right)^{-1} \tag{9.10}$$

$$\mathbf{P}^+ = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C} \right) \mathbf{P}^-, \tag{9.11}$$

die wir im Kapitel 9.3.1 benötigen.

Alle weiteren Ausführungen, d. h. in diesem Kapitel und allen folgenden Kapiteln, unterliegen zusätzlich der Bedingung

$$s \leq m/2, \tag{9.12}$$

aus Kapitel 3.2.3, Gleichung (3.4) gemäß [13]. Unter der Bedingung (9.12) können wir für den Algorithmus 6 (KF) ein neu entwickeltes Thresholding-Verfahren vorstellen. Die gängigen ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen verwenden für eine erfolgreiche Rekonstruktion sogenannte Thresholdings. So kommt z. B. Soft-Thresholding in fast jedem proximalen Splitting-Verfahren für ℓ_1 -Minimierungsprobleme vor. Wichtige Anwendungen von Thresholding ergeben sich in der Bildverarbeitung, in denen z. B. die Thresholding-basierte Segmentierungsmethode mit einem oder mehreren, mit statistischen oder dynamischen Schwellwerten erfolgen können.

Der neu entwickelte Algorithmus – Kalman-Filter mit externem Thresholding (KF-ET) – arbeitet auf eine einfache Weise. Nach jeder erfolgten k -ten Iteration werden aus

dem berechneten Vektor \mathbf{x} die $m/2$ -betragsgrößten Einträge ermittelt, deren Indizes die zugehörige Submatrix \mathbf{C}_{Ω_k} aufbaut. Dabei entspricht jeder ermittelte Index der $m/2$ -betragsgrößten Einträge des Zustandsvektors genau einer Spalte der Matrix \mathbf{C} . Diese Spalten ergeben die Matrix \mathbf{C}_{Ω_k} . Der Thresholding-Prozess arbeitet extern und beeinflusst unseren Algorithmus nicht. Das bedeutet, dass der berechnete Zustandsvektor aus dem Algorithmus nach einer festgelegten Anzahl von Iterationen dem Thresholding-Prozess übergeben und in einem Unterprogramm weiterverarbeitet wird. In diesem Unterprogramm berechnen wir aufgrund der Bedingung (9.12) ein überbestimmtes Gleichungssystem. Wird das Abbruchkriterium im Thresholding-Prozess jedoch nicht erreicht, arbeitet der Algorithmus mit seinem ursprünglichen zuletzt berechneten Zustandsvektor weiter. Es werden somit keine Informationen aus dem Thresholding-Prozess an den Algorithmus übergeben. Im Algorithmus 7 (KF-ET) bezeichnen wir mit Ω_k den geschätzten Support, den die Indizes der $m/2$ -betragsgrößten Einträge aus $\mathbf{x}^{(k)}$ in der k -ten Iteration enthält. Die Matrix \mathbf{C}_{Ω_k} repräsentiert die Spalten von \mathbf{C} , die durch Ω_k indiziert werden. Mit der definierten Matrix \mathbf{C}_{Ω_k} wird das aufgebaute überbestimmte Gleichungssystem für den Thresholding-Prozess mit einem MLS [14] gelöst, welcher in Kapitel 9.3.1 genauer vorgestellt wird. Falls das überbestimmte Gleichungssystem lösbar ist, existiert auch eine Lösung.

Die Herleitung eines solchen Schätzers, also MLS, werden wir in einem der nächsten Abschnitte auf zwei verschiedene Arten geben.

Eine Schwierigkeit in dem Algorithmus besteht darin, die Indexmenge der $m/2$ -betragsgrößten Einträge des Vektors zu bestimmen, die den exakten Support der Lösung enthält. Beinhaltet der berechnete Support nicht den exakten Support, so kann keine exakte Lösung berechnet werden. Mit einer schnellen Reduzierung der ℓ_1 -Norm des Zustandsvektors \mathbf{x} kann erreicht werden, dass sich der exakte Support nach wenigen Iterationen innerhalb der ermittelten Indexmenge befindet. Das liegt daran, dass das Abbruchkriterium im Thresholding-Prozess aufgrund der schnellen Reduzierung der ℓ_1 -Norm nicht so schnell erfüllt wird.

Eine schnelle Reduzierung der ℓ_1 -Norm des Vektors erreichen wir mit einem optimal gewählten Parameter γ .

Zunächst zeigen wir einige Beispiele und vergleichen den Rekonstruktionsfehler mit dem in Kapitel 3.5.2 vorgestellten C&P (Algorithmus 1) sowie in dem Kapitel 3.5.3 aufgeführten OMP (Algorithmus 2) und KF-ET (Algorithmus 7).

Algorithmus 6 angepasstes ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter im Nullraum (KF)

- 1: **Initialisiere:** $\hat{\mathbf{x}}_p = \mathbf{C}^\dagger \mathbf{b}$, $\mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})} \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}$ Basis von $\mathcal{N}(\mathbf{C})$, $\mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{(0)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^{(0)} = \hat{\mathbf{x}}_p$, $\mathbf{P}^{+(0)} = \mathbf{P}_0$
 - 2: **while** $\Delta \|\mathbf{x}^{(k)}\|_1 > \varepsilon$ **do**
 - 3: $k := k + 1$
 - 4: **Prognose:**
 - 5: $\mathbf{x}^{-(k)} := \mathbf{x}^{+(k-1)}$
 - 6: $\mathbf{P}^{-(k)} := \mathbf{P}^{+(k-1)} + \mathbf{Q}$
 - 7: **Korrektur:**
 - 8: $y^{(k)} = \gamma^{(k)} \|\mathbf{x}^{-(k)}\|_1$
 - 9: Jacobi-Matrix: $\mathbf{C}_\nu^{(k)} = \begin{bmatrix} x_i^{-(k)} \\ |x_i^{-(k)}| \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq n}^H \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})}$
 - 10: Kalman gain:
 - 11: $\mathbf{K}^{(k)} := \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}_\nu^{(k)H} \left(\mathbf{C}_\nu^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}_\nu^{(k)H} + R_\nu \right)^{-1}$
 - 12: $\mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{+(k)} = \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(y^{(k)} - \|\mathbf{x}^{-(k)}\|_1 \right)$
 - 13: $\mathbf{x}^{+(k)} = \hat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{C})} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^{+(k)}$
 - 14: $\mathbf{P}^{+(k)} := \mathbf{P}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}_\nu^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)}$
 - 15: **end while**
-

Algorithmus 7 ℓ_1 -Minimierungs-Kalman-Filter mit externem Thresholding (KF-ET)

for all Iterationen des Algorithmus 6 **do**

$$\Omega_k = \left\{ i, \left| \mathbf{x}_i^{(k)} \right| \geq \left| \mathbf{x}_j^{(k)} \right|, |\Omega_k| = \lfloor m/2 \rfloor, \forall i \in \Omega_k, j \in \bar{\Omega}_k \right\}$$

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{C}_{\Omega_k} \in \mathbb{C}^{(m \times \lfloor m/2 \rfloor)}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{\Omega_k}^{(k)} = (\mathbf{B}^{(k)})^\dagger \mathbf{b}, \quad \hat{\mathbf{x}}_{\bar{\Omega}_k}^{(k)} = \mathbf{0}$$

if $\left| \|\hat{\mathbf{x}}^{(k)}\|_1 - \|\hat{\mathbf{x}}^{(k-1)}\|_1 \right| < \varepsilon$ **then**

 return $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$

 stop

else

 gehe zu Algorithmus 6

end if

end for

9.2 Untersuchungen des Kalman-Filters mit externem Thresholding

In der folgenden Tabelle 9.1 geben wir einige Beispiele für das KF-ET an. Wir konstruieren uns gemäß Kapitel 5.1.1 jeweils eine gaußverteilte mittelwertfreie komplexe Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m \ll n$. Den zu rekonstruierenden s -sparsen komplexen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ geben wir uns vor und ermitteln den zugehörigen Beobachtungsvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$. Für das Abbruchkriterium im Algorithmus 7 (KF-ET) wurde $\varepsilon = 10^{-10}$ gewählt. Die Spalte Iterationen in Tabelle 9.1 gibt die Anzahl der Iterationen an, die bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums benötigt wurden. Es ist zu beobachten, dass für alle

m	n	s	Iterationen	$\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\ _1$	$\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\ _2$	$\ \hat{\mathbf{x}}\ _0$
64	128	10	2	$3,9 \times 10^{-15}$	$9,9 \times 10^{-16}$	10
120	256	20	11	$5,7 \times 10^{-15}$	$1,2 \times 10^{-15}$	20
400	1024	100	22	$1,1 \times 10^{-14}$	$1,7 \times 10^{-15}$	100
1200	4096	250	20	$2,3 \times 10^{-14}$	$2,1 \times 10^{-15}$	250
1000	8000	500	13	$7,4 \times 10^{-14}$	$3,0 \times 10^{-15}$	500
10000	15000	1000	20	$1,1 \times 10^{-13}$	$3,9 \times 10^{-15}$	1000

Tab. 9.1: Beispiele für die Rekonstruktion mit dem ℓ_1 -minimierenden Kalman-Filter mit externem Thresholding (KF-ET), das Abbruchkriterium ist $\varepsilon = 10^{-10}$

genannten Beispiele in Tabelle 9.1 die Anzahl der Iterationen für die Rekonstruktion von $\hat{\mathbf{x}}$ kleiner als die Sparsity s der exakten Lösung \mathbf{x} ist. Die Experimente zeigen deutlich, dass eine exakte Rekonstruktion möglich ist. Die ℓ_1 -Fehler und ℓ_2 -Fehler werden für die Beispiele in der Tabelle 9.1 in einem Bereich von 10^{-13} bis 10^{-16} ausgewiesen. Die ℓ_0 -Norm des berechneten Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}$ in Tabelle 9.1 zeigt deutlich, dass die berechnete Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ nach den angegebenen benötigten Iterationen genau so viele Einträge s enthält wie die exakte Lösung \mathbf{x} .

Das erste Beispiel in Tabelle 9.1 zeigt z. B. das der Algorithmus 7 (KF-ET) nach zwei Iterationen mit einem ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von 10^{-16} abbricht, obwohl das zu rekonstruierende Signal die Sparsity $s = 10$ hat. Im letzten Beispiel beobachten wir, dass die Anzahl der benötigten Iterationen für eine erfolgreiche Rekonstruktion nur einem sehr geringen Prozentsatz der Sparsity entspricht.

Für die nächsten Experimente verwenden wir die DTG-Darstellung. Allerdings setzen wir die Dimension des zu rekonstruierenden Signals auf $n = 256$. Jeder Pixel aus dem Graphen zeigt den Mittelwert von 16 individuellen Experimenten. Der Parameter ρ mit $0 \leq \rho \leq 0,5$ wurde aufgrund der Bedingung $s \leq m/2$ aus Gleichung (3.4) festgelegt.

In den Abbildungen 9.1 und 9.2 vergleichen wir den relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP [12]. Im Wesentlichen zeigen die Graphen keine großen Unterschiede zwischen den in Abbildung 9.1 dargestellten Algorithmen.

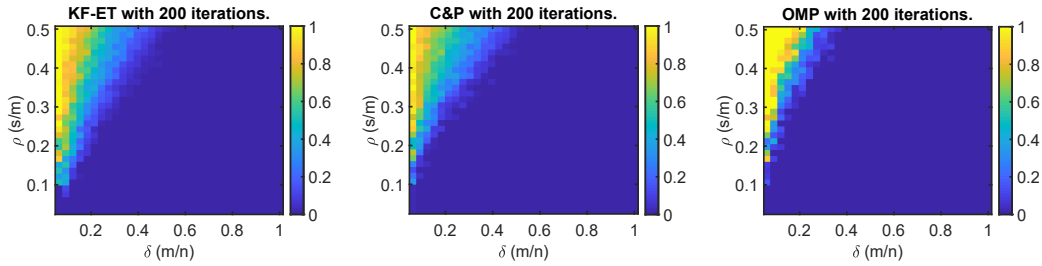


Abb. 9.1: Relativer ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP mit 200 Iterationen und einheitlicher Skala.

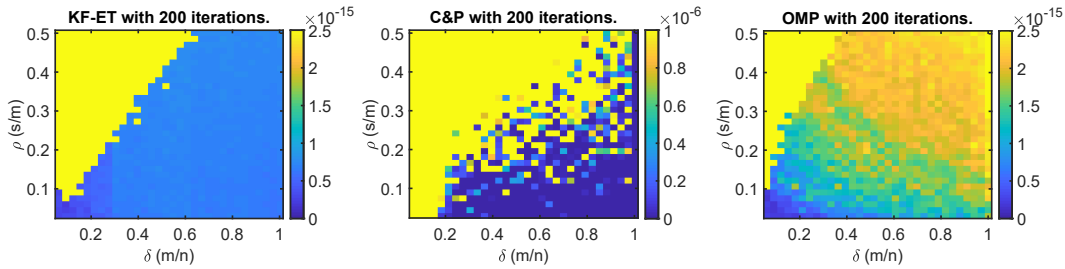


Abb. 9.2: Relativer ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP mit 200 Iterationen mit unterschiedlicher Skaleneinteilung.

Jedoch zeigt die Abbildung 9.2 mit differenzierter Skala, dass das KF-ET die besten Ergebnisse in Bezug auf den relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler liefert. In Abbildung 9.2 können wir beobachten, dass das KF-ET mehr Experimente mit einem relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler in dem Bereich 10^{-15} ausweist als der C&P und der OMP. Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass der rekonstruierte Support von OMP größer oder kleiner sein kann als der Support der exakten Lösung. Das liegt daran, dass die Sparsity s sowie der Support nicht bekannt sind und somit das Abbruchkriterium im OMP näherungsweise bestimmt werden muss. Die relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler in der Abbildung 9.2 zeigen somit für das KF-ET und den OMP ein unterschiedliches Verhalten.

Als Nächstes betrachten wir die Rekonstruktionszeit der genannten Algorithmen.

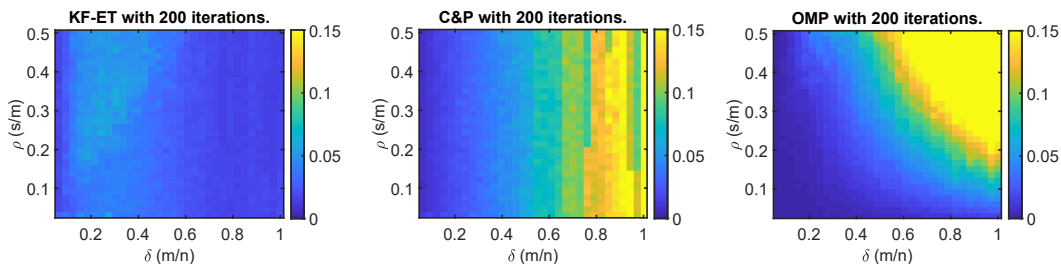


Abb. 9.3: Rekonstruktionszeit in [sec] von KF-ET, C&P und OMP.

In fast allen Experimenten der DTG in Abbildung 9.3 kann beobachtet werden, dass die Rekonstruktionszeit des KF-ET besser als C&P und OMP ist.

Die gelb dargestellten Pixel verdeutlichen eine längere Rekonstruktionszeit für die Berechnung eines s -sparsen Zustandsvektors unter Beachtung der festgelegten Anzahl an

Iterationen. Das KF-ET benötigt eine kurze Bearbeitungszeit für die Rekonstruktion. Das liegt daran, dass das KF-ET nach der Berechnung einer Startlösung im Nullraum mit der Dimension $n - m$ arbeitet und aufgrund des Thresholding-Prozesses die erforderlichen Iterationen von 200 nicht benötigt.

Die Untersuchungen zeigen, dass das vorgeschlagene KF-ET einen kleineren relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler und eine schnellere Rekonstruktionszeit besitzen als die anderen vorgestellten Algorithmen C&P und OMP.

9.3 Untersuchungen des Kalman-Filters mit externem Thresholding mit verrauschten Daten

Betrachten wir Messungen $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$, die durch

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

gegeben sind, wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein unbekanntes deterministisches Signal ist und $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$ weißes, mittelwertfreies gaußverteiltes Rauschen mit $\mathcal{N} \sim (0, \mathbf{R})$ darstellt. Mit $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ wird die Störvarianzmatrix bezeichnet. Die Matrix \mathbf{C} sei eine bekannte gaußverteilte mittelwertfreie komplexe $m \times n$ -Matrix mit der Eigenschaft $m \ll n$ gegeben. Zusätzlich gilt die Sparsity des Zustandsvektors \mathbf{x} nach Definition 2.1.1. Weiterhin sei angenommen, dass der Rang der Matrix \mathbf{C} die folgende Eigenschaft erfüllt

$$\text{rang}(\mathbf{C}) > 2s.$$

Das Ziel besteht darin, die *mittlere quadratische Abweichung (mean-squares-error) (MSE)* [82, 83] des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}$ zu minimieren, d. h. wir suchen den mittleren quadratischen Fehler

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MSE}} = \underset{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n}{\text{argmin}} E \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \right\}.$$

Der wahre Wert von \mathbf{x} ist während der Rekonstruktion nicht bekannt. Jedoch kann eine untere Schranke von MSE, das sogenannte CRB nach [82, 83] angegeben werden. Das CRB wird am Ende des nächsten Kapitel hergeleitet. Es liefert eine Abschätzung für die minimale erreichbare Schätzfehlervarianz und gibt somit eine Möglichkeit unterschiedliche Schätzer, miteinander zu vergleichen. In den meisten Anwendungen zur Einschätzung der rekonstruierenden Näherungslösung wird die Kleinste-Quadrate-Projektion verwendet, die zu einer Kleinste-Quadrate-Lösung führt [19–21]. Eine Kleinste-Quadrate-Lösung ist ein Spezialfall der Gewichtete-Kleinste-Quadrate-Schätzer (weighted-least-squares-estimator) (WLS) mit $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$ nach Kapitel 6.2, Gleichung (6.10), wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix darstellt.

Wir werden die Herleitung mit dem MLS, der das CRB erreicht, durchführen. Allerdings erkennen wir im weiteren Verlauf der Ausführung, dass der WLS, welcher im Kapitel 2.1.1 unter Gleichung (2.8) bereits genannt wurde, und der MLS zum gleichen Resultat führen.

Sei T der Support von \mathbf{x} , der bereits im Kapitel 2 – Mathematische Grundlagen – eingeführt wurde,

$$T = \{l : |\mathbf{x}_l| \neq 0\}, \quad l = 1, \dots, n. \quad (9.13)$$

Offensichtlich gilt:

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{C}_T\mathbf{x}_T + \mathbf{v}.$$

Die Matrix \mathbf{C}_T resultiert aus der Matrix \mathbf{C} , indem aus der Matrix \mathbf{C} die Spalten mit Indizes l gewählt werden, die mit der Supportmenge T von \mathbf{x} übereinstimmen. Für gaußverteilte Zufallsgrößen ist der Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS) mit dem Linear-Minimum-Varianz-Schätzer [14] identisch. Der MLS mit bekanntem Support T ist gegeben durch:

$$\hat{\mathbf{x}}_T = \left(\mathbf{C}_T^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_T \right)^{-1} \mathbf{C}_T^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} \quad (9.14)$$

mit

$$E\{\mathbf{x}_T - \hat{\mathbf{x}}_T\} = \mathbf{0}.$$

Unter der Annahme, dass die Matrix \mathbf{C}_T vollen Spaltenrang besitzt, ergibt sich zum einen die Invertierbarkeit von $\mathbf{C}_T^H \mathbf{C}_T$ und zum anderen mit Annahme der positiven Definitheit der Matrix \mathbf{R} die Invertierbarkeit von $\mathbf{C}_T^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_T$ in Gleichung (9.14).

Die Herleitung von dem in (9.14) genannten optimalen Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}$ zeigen wir im nächsten Kapitel.

9.3.1 Maximum-Likelihood-Schätzer und Cramér-Rao-Schranke

Den Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS), welcher in Gleichung (9.14) aufgeführt ist, leiten wir auf zwei verschiedenen Wegen her. Für die erste Herleitung des optimalen Schätzwerts in Gleichung (9.14) verwenden wir als Grundlage die Kalman-Filter-Gleichungen (9.8) - (9.11) aus Kapitel 9.1. Wir werden eine mathematisch äquivalente Formulierung zu den Gleichungen des Kalman-Filter-Algorithmus angeben, um den Schätzer abzuleiten. Die zweite Herleitung der Gleichung (9.14) erfolgt über die Bayes'sche Schätztheorie.

Kommen wir zur Herleitung des genannten Schätzwerts $\hat{\mathbf{x}}$ über die Kalman-Filter-Gleichungen aus dem Kapitel 9.1. In den vorherigen Kapiteln haben wir angenommen, dass der Ausdruck $\mathbf{C}\mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R}$ invertierbar ist.

In Gleichung (9.11) ersetzen wir den Ausdruck \mathbf{K} gemäß Gleichung (9.10) und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^+ &= \left[\mathbf{I} - \left[\mathbf{P}^- \mathbf{C}^H \left(\mathbf{C}\mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R} \right)^{-1} \right] \mathbf{C} \right] \mathbf{P}^- \\ &= \mathbf{P}^- - \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H \left(\mathbf{C}\mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{C}\mathbf{P}^-. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Unter Verwendung des Matrixinversionslemmas [56], dessen Beweis im Anhang E zu finden ist, können wir die Gleichung (9.15) wie folgt angeben

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^+ &= \mathbf{P}^- - \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H (\mathbf{C} \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}^- \\
&= \left[(\mathbf{P}^-)^{-1} + \mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{9.16}$$

Eine Rechtsmultiplikation mit $(\mathbf{P}^-)^{-1}$ in Gleichung (9.11) ergibt

$$\mathbf{P}^+ (\mathbf{P}^-)^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{C} \tag{9.17}$$

und somit

$$\mathbf{K} \mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{P}^+ (\mathbf{P}^-)^{-1}. \tag{9.18}$$

Durch eine Rechtsmultiplikation mit $\mathbf{C} \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R}$ in Gleichung (9.10) folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} (\mathbf{C} \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R}) &= \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H (\mathbf{C} \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{C} \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{R}) \\
&= \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H.
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Ersetzen wir den Ausdruck $\mathbf{K} \mathbf{C}$ aus Gleichung (9.18) in die Gleichung (9.19), folgt nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^- \mathbf{C}^H &= \mathbf{K} \mathbf{C} \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{K} \mathbf{R} \\
&= \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}^+ (\mathbf{P}^-)^{-1} \right] \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{K} \mathbf{R} \\
&= \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H - \mathbf{P}^+ (\mathbf{P}^-)^{-1} \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{K} \mathbf{R} \\
&= \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H - \mathbf{P}^+ \mathbf{C}^H + \mathbf{K} \mathbf{R}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} \mathbf{R} &= \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H - \mathbf{P}^- \mathbf{C}^H + \mathbf{P}^+ \mathbf{C}^H \\
&= \mathbf{P}^+ \mathbf{C}^H.
\end{aligned}$$

Die Auflösung nach \mathbf{K} erfolgt durch eine Rechtsmultiplikation mit \mathbf{R}^{-1}

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^+ \mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1}. \tag{9.20}$$

Unter Verwendung von \mathbf{K} aus Gleichung (9.20) gilt für die Gleichung (9.9)

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}^+ &= \hat{\mathbf{x}}^- + \mathbf{K}(\mathbf{b} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}^-) \\
&= \hat{\mathbf{x}}^- + \mathbf{K}\mathbf{b} - \mathbf{K}\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}^- \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}^- + \mathbf{K}\mathbf{b} \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}^- + \mathbf{P}^+\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ aus Gleichung (9.17) folgt

$$\hat{\mathbf{x}}^+ = \mathbf{P}^+(\mathbf{P}^-)^{-1}\hat{\mathbf{x}}^- + (\mathbf{P}^+\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1})\mathbf{b}. \quad (9.21)$$

Der Schätzer berechnet den bedingten Erwartungswert des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}$ auf Grundlage des Beobachtungsvektors \mathbf{b} , sodass auch hier von einem Minimum-Varianz-Schätzer gesprochen werden kann. Jedes andere quadratische Fehlerkriterium wird von dem hergeleiteten Schätzer minimiert, siehe [56].

Zur Berechnung des bedingten Erwartungswerts wird die bedingte Verteilungsdichtefunktion benötigt. Falls die unbedingte Dichte der Zufallsvariable vorliegt, kann diese mit der Bayes'schen Regel berechnet werden.

Wenn der Rang der Matrix $\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}$ gleich n ist, existiert die Inverse. Der Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ besitzt keine Verteilung, d. h. die Kovarianzmatrix $(\mathbf{P}^-)^{-1}$ wird als Null angenommen. Es gilt

$$\mathbf{P}^+ = (\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1} \quad (9.22)$$

und aus Gleichung (9.21) unter Verwendung der Gleichung (9.22)

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{b}. \quad (9.23)$$

Ist der Rang der Matrix nicht n , so muss gemäß Kapitel 6.2 eine \mathbf{LQ} -Zerlegung der Sensingmatrix für die Herleitung des MLS erfolgen. Die stochastische Analyse der Schätzfehlerkovarianzmatrix kann dem Anhang F entnommen werden.

Damit haben wir den Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS) aus den Kalman-Filtergleichungen abgeleitet.

Widmen wir uns dem zweiten Ansatz zur Herleitung des MLS.

Zur Gewinnung von brauchbaren Schätzfunktionen von Parametern einer Verteilung wird vorwiegend die Maximum-Likelihood-Methode herangezogen. Die Methode bezeichnet man auch als Methode der maximalen Mutmaßlichkeit.

Die Maximum-Likelihood-Methode besteht darin, einen möglichst großen Wert der Likelihood-Funktion für die Näherung eines unbekanntem Parameters zu bestimmen.

Das notwendige Kriterium ist, dass die differenzierbare Likelihood-Funktion ein Maximum besitzt. Weil die Likelihood-Funktion nicht negativ und der natürliche Logarithmus eine wachsende Funktion ist, verwenden wir statt der Likelihood-Funktion die logarithmierte Likelihood-Funktion. Der Vorteil besteht darin, dass wir anstatt der Differenziation von Produkten nur Summen zu differenzieren haben.

Es gilt nach [84]

$$p(\mathbf{b}; \hat{\mathbf{x}}) \sim \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \right].$$

Das Maximum der Likelihood-Funktion erhalten wir über das Funktional

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{b} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}). \quad (9.24)$$

Die genannte Gleichung (9.24) stellt auch ein Gewichtete-Kleinste-Quadrate-Funktional dar. Liegt keine Gaußverteilung vor, gelten einige Extremaleigenschaften der nach der Gewichtete-Kleinste-Quadrate-Methode gewonnenen Schätzungen nicht mehr, siehe [85, 86].

Das Funktional in Gleichung (9.24) ist quadratisch. Durch die Eigenschaft der positiven Definitheit der Matrix \mathbf{R}^{-1} können wir daher von einem globalen Minimum sprechen. Mit $\mu(0) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ und der Unabhängigkeit der Kovarianzmatrix von $\hat{\mathbf{x}}$ folgt

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{b}; \hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}).$$

Setzen wir den Gradienten gleich Null, d. h.

$$\mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} &= 0 \\ \mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Eine anschließende Linksmultiplikation mit $(\mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1}$ kann erfolgen, wenn der Rang der Matrix $\mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$ gleich n ist. Es folgt

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^{\text{H}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{b}. \quad (9.25)$$

Wenn der Rang der Matrix nicht n ist, erfolgt die Berechnung des MLS über die \mathbf{LQ} -Zerlegung der Sensingmatrix gemäß Kapitel 6.2. Die zugehörige stochastische Analyse der Schätzfehlerkovarianz kann dem Anhang F entnommen werden.

Die Gleichung (9.25) wird als MLS bezeichnet und erreicht das CRB, siehe [84].

Zusammenfassend können wir feststellen, dass die beiden Ansätze zur Herleitung des MLS gemäß Gleichung (9.23) und Gleichung (9.25) zum selben Ergebnis führen.

Geben wir noch die untere Schranke des MLS an, das sogenannte CRB nach [84].

Es gilt

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \right\} &= E \left\{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^H (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right\} \\
 &\geq E \left\{ (\mathbf{x}_T - \hat{\mathbf{x}}_T)^H (\mathbf{x}_T - \hat{\mathbf{x}}_T) \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ E \left\{ (\mathbf{x}_T - \hat{\mathbf{x}}_T) (\mathbf{x}_T - \hat{\mathbf{x}}_T)^H \right\} \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ \left(\mathbf{C}_T^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_T \right)^{-1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Die Störvarianz $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ des Rauschens ist für unkorrelierte Messfehler definiert als $\mathbf{R} = \text{diag } \sigma_i^2$ für $i = 1, \dots, m$. Mit

$$\left(\mathbf{C}_T^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_T \right)^{-1} = \left(\mathbf{C}_T^H \text{diag}_{i=1, \dots, m} \sigma_i^{-2} \mathbf{C}_T \right)^{-1}$$

und der Annahme für die Streuung $\sigma_i = \sigma$ folgt daher

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \right\} &\geq \text{tr} \left\{ \left(\mathbf{C}_T^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}_T \right)^{-1} \right\} \\
 &= \text{tr} \left\{ \left(\mathbf{C}_T^H \text{diag}_{i=1, \dots, n} \sigma_i^{-2} \mathbf{C}_T \right)^{-1} \right\} \\
 &= \sigma^2 \text{tr} \left\{ \left(\mathbf{C}_T^H \mathbf{C}_T \right)^{-1} \right\}. \tag{9.26}
 \end{aligned}$$

In Kapitel 6.2 wurde das CRB als Inverse der Fisher-Informationsmatrix definiert. Die Kovarianzmatrix des MLS entspricht im Allgemeinen nicht dem CRB. Das CRB in Gleichung (9.26) kann als unterste Schranke der Kovarianzmatrix des MLS interpretiert werden, siehe [12, 84], d. h. für beliebige erwartungstreue Schätzer $\hat{\mathbf{x}}$ gilt:

$$E \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \right\} \geq \sigma^2 \text{tr} \left\{ \left(\mathbf{C}_T^H \mathbf{C}_T \right)^{-1} \right\}. \tag{9.27}$$

Im nachfolgenden Kapitel 9.3.2 können wir z. B. beobachten, dass bei geringem Rauschverhalten bis ca. $\sigma < 10^{-6}$ in fast allen Rekonstruktionsberechnungen das Kalman-Filter unter Verwendung eines externen Thresholdings den exakten Support des zu rekonstruierenden Signals ermitteln kann.

Unter Ausnutzung der Bedingung $s \leq m/2$ überführt das Kalman-Filter das zugrundeliegende unterbestimmte lineare Gleichungssystem $\mathbf{b} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ im Thresholding-Prozess in ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem, indem die $m/2$ -betragsgrößten Einträge des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}$ in jeder Iteration bestimmt werden. Die Matrix \mathbf{C}_T wird durch die vom Zustandsvektor ermittelten Indizes aufgebaut.

Im Allgemeinen besitzen überbestimmte lineare Gleichungssysteme keine Lösung. Befindet sich aber der Beobachtungsvektor \mathbf{b} im Bildraum der $m \times m/2$ -Matrix und besitzt die Matrix des überbestimmten linearen Gleichungssystems vollen Rang, also $m/2$, so wird im rauschlosen Fall die eindeutige sparse Lösung gefunden.

Im Thresholding-Prozess wird also eine, in der Literatur so genannte, Basislösung berechnet. Eine Basislösung ist eine Lösung mit der minimalen Anzahl von Null verschiedenen Einträgen, d. h. die Lösung besitzt maximal $m/2$ von Null verschiedene Einträge. Die restlichen Einträge entsprechen dem Wert Null. Die Lösung besitzt die Eigenschaft der Sparsity. Statt die Koeffizienten in der Nähe von Null zu schrumpfen – wie es die Kleinste-Quadrate-Lösung praktiziert – setzt die Eigenschaft Sparsity diese Werte genau auf Null. Dieses Verhalten wird in der Literatur auch *feature-selection* genannt, d. h. die Berechnung einer sparsen Lösung erkennt bestimmte Einträge als unbedeutend und setzt diese Einträge auf Null. Bei der Berechnung der Kleinste-Quadrate-Lösung werden die Einträge gleichmäßig reguliert und verkleinert.

Der hergeleitete Maximum-Likelihood-Schätzer (MLS) in Gleichung (9.25) ist eine Basislösung und damit auch die optimale Lösung für das Kalman-Filter mit externem Thresholding (KF-ET).

9.3.2 Numerische Experimente

9.3.2.1 Beispiele mit Streuung σ überlagertes Rauschen, Vergleich mit der Cramér-Rao-Schranke

Nachstehend werden einige zufällig gewählten Beispiele auf die genannte Ungleichung (9.27) untersucht. Wir wählen eine gaußverteilte mittelwertfreie unterbestimmte komplexe Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft $m \ll n$. Für das erste Beispiel (I), dargestellt in Abbildung 9.4, haben wir eine 192×256 -Matrix und in Abbildung 9.5 eine 2200×3000 -Matrix für das Beispiel (II) gewählt. Auf der horizontalen Achse ist σ für $\sigma \in [10^{-10}, 10^4]$ dargestellt. Die Achsen, wenn nicht anders angegeben, sind in logarithmierter Form dargestellt.

Die Anzahl der Iterationen für die Beispiele sei auf 200 festgelegt.

Für die Beispiele ist der verrauschte Beobachtungsvektor \mathbf{b} wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \tilde{\mathbf{b}} + \sigma \bar{\mathbf{b}} \\ &= \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{v},\end{aligned}\tag{9.28}$$

wobei der Vektor $\tilde{\mathbf{b}}$ der nicht verrauschte Beobachtungsvektor ist. Die Streuung σ kann als Gewichtung des Rauschanteils betrachtet werden. Der Vektor $\bar{\mathbf{b}}$ ist ein zufallsgenerierter gaußverteilter Zufallsvektor. Mit dem Vektor $\mathbf{v} = \sigma \bar{\mathbf{b}}$ wird additiv gauß'sches weißes Rauschen darstellt.

Der quadratische ℓ_2 -Fehler zwischen der berechneten Näherungslösung $\hat{\mathbf{x}}$ und der exakten Lösung \mathbf{x} sowie das CRB werden als Graphen in Abhängigkeit von σ in den Abbildungen 9.4 und 9.5 dargestellt.

Zu beachten ist, dass für jeden berechneten Fall von σ ein neues unterbestimmtes Gleichungssystem generiert wird. Für die Berechnung des CRB nach (9.26) wird der exakte Support T der vorgegebenen Lösung \mathbf{x} verwendet. Für alle Beispiele in den

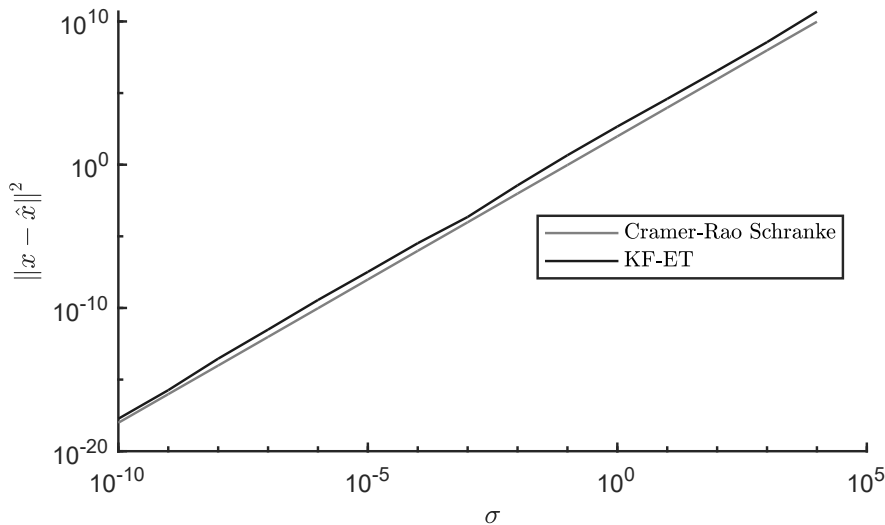


Abb. 9.4: KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

Abbildungen 9.4 und 9.5 erkennen wir, dass der Graph des quadratischen ℓ_2 -Fehlers in der Nähe der CRB liegt. In den beiden Abbildungen ist ersichtlich, dass sich mit Zunahme der Dimension der zugrundeliegende Sensingmatrix der Abstand zwischen den beiden Graphen vergrößert.

Vergleichen wir das vorliegende KF-ET (Algorithmus 7) mit dem Kalman-Filter (KF, Algorithmus 6).

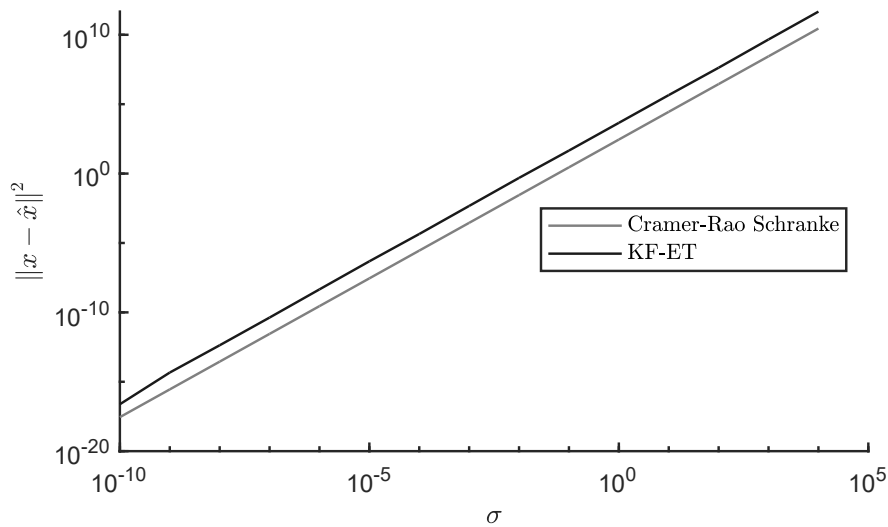


Abb. 9.5: KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 250$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

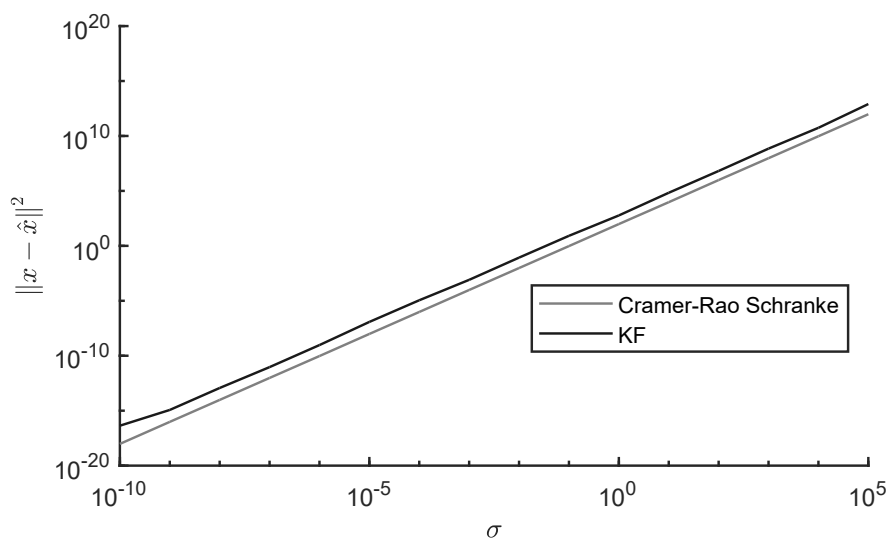


Abb. 9.6: KF nach Algorithmus 6, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

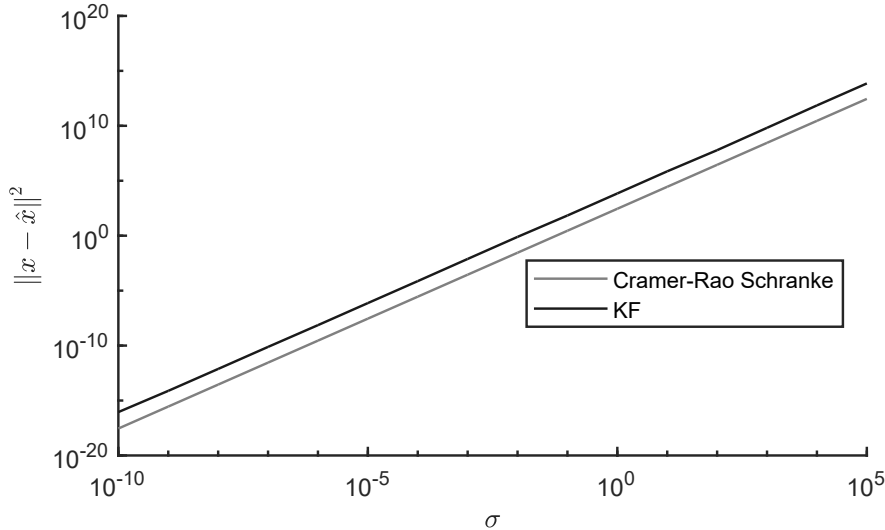


Abb. 9.7: KF nach Algorithmus 6, Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 250$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

Die zugehörigen Abbildungen 9.6 und 9.7 des Kalman-Filter ohne externem Thresholding (KF) zeigen, dass der Verlauf der Graphen identisch ist. Dennoch können wir große Unterschiede feststellen, wenn wir zusätzlich die ermittelte Sparsity untersuchen. Hierzu betrachten wir die Tabellen 9.2 und 9.3. Für die beiden Beispiele ermitteln wir die Sparsity, indem wir aus dem berechneten Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ die betragsmäßig größten Elemente gemäß Gleichung (2.1) aus dem Kapitel 2 – Mathematische Grundlagen – angeben. Allerdings geben wir zwei Toleranzbereiche auf Grund der rechnergestützten Berechnungen an. Die Berechnung der Sparsity ist mit der maximal absoluten Abweichung von Null mit dem Toleranzbereich $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ und $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ versehen. Für die Sparsity gilt nach Gleichung (2.1) $\|\hat{\mathbf{x}}\|_0 = \#\{l : |x_l| > \varepsilon_i\}$ für alle $l = 1, \dots, n$ mit $i = 1, 2$. Mit einer vorgegebenen Sparsity von $s = 64$ in dem ersten Beispiel (I) erkennen wir in der Tabelle 9.2, dass das KF-ET (Algorithmus 7) eine geringere Sparsity als das KF (Algorithmus 6) liefert. Gut zu beachten ist hierbei, dass die ermittelte Sparsity für das KF-ET bei hohem Rauschanteil der oberen Grenze der betrachteten Bedingung gemäß Gleichung (9.12) entspricht, also $s = m/2$. Die Tabelle 9.3 zeigt die Auswertung der ermittelten Sparsity für das Beispiel (II). Auch hier ist zu beobachten, dass das KF-ET bessere Ergebnisse als das KF liefert. Das KF berechnet in beiden Beispielen mit hohem Rauschanteil einen Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}$, dessen Einträge alle von Null verschieden sind. Für das KF-ET werden im ungünstigsten Fall $m/2$ von Null verschiedenen Einträge im Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ ausgewiesen. Auch wenn die Abbildungen 9.4, 9.5, 9.6 und 9.7 ein gleiches Verhalten zeigen, sind diese dennoch, wie die Tabellen 9.2 und 9.3 verdeutlichen, unterschiedlich.

In nächsten Abschnitt untersuchen wir das Rauschverhalten unter Vorgabe von SNR (signal-to-noise ratio).

σ	KF		KF-ET	
	$\#\ \hat{x}_l > 10^{-5}$	$\#\ \hat{x}_l > 10^{-10}$	$\#\ \hat{x}_l > 10^{-5}$	$\#\ \hat{x}_l > 10^{-10}$
10^{-10}	64	246	64	85
10^{-9}	64	255	64	96
10^{-8}	64	256	64	96
10^{-7}	64	256	64	96
10^{-6}	64	256	64	96
10^{-5}	173	256	90	96
10^{-4}	220	256	96	96
10^{-3}	233	256	96	96
10^{-2}	233	256	96	96
10^{-1}	232	256	96	96
1	241	256	96	96
10	238	256	96	96
10^2	256	256	96	96
10^3	256	256	96	96
10^4	256	256	96	96
10^5	256	256	96	96

Tab. 9.2: Vergleich der berechneten Sparsity für das Beispiel (I) 192×256 -Matrix mit Sparsity $s = 64$

σ	KF		KF-ET	
	$\#\ \hat{x}_l > 10^{-5}$	$\#\ \hat{x}_l > 10^{-10}$	$\#\ \hat{x}_l > 10^{-5}$	$\#\ \hat{x}_l > 10^{-10}$
10^{-10}	250	1916	250	758
10^{-9}	250	2935	250	1096
10^{-8}	250	2983	250	1100
10^{-7}	250	2993	250	1100
10^{-6}	250	2997	250	1100
10^{-5}	1687	2998	1028	1100
10^{-4}	2617	2999	1100	1100
10^{-3}	2734	2999	1100	1100
10^{-2}	2787	3000	1100	1100
10^{-1}	2819	3000	1100	1100
1	2849	3000	1100	1100
10	2847	3000	1100	1100
10^2	2977	3000	1100	1100
10^3	2999	3000	1100	1100
10^4	3000	3000	1100	1100
10^5	3000	3000	1100	1100

Tab. 9.3: Vergleich der berechneten Sparsity für das Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix mit Sparsity $s = 250$

9.3.2.2 Beispiele mit überlagertem Rauschen in Abhängigkeit des Signal- und Rauschverhältnisses

Um eine bessere Transparenz für die Einschätzungen des Schätzers $\hat{\mathbf{x}}$ zu erhalten, untersuchen wir zusätzlich das Verhältnis zwischen dem Maß für die Stärke des Signals und dem Rauschen. Das Verhältnis wird als *signal-to-noise ratio (SNR)* bezeichnet und in Dezibel (dB) angegeben.

Das SNR ist definiert als

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{E \left\{ \left\| \tilde{\mathbf{b}} \right\|_2^2 \right\}}{E \left\{ \left\| \mathbf{v} \right\|_2^2 \right\}} \right). \quad (9.29)$$

Gilt beispielsweise

$$\left\| \tilde{\mathbf{b}} \right\|_2 = \left\| \mathbf{v} \right\|_2,$$

so ist das $\text{SNR} = 0$ dB. In dieser Situation ist das Signal nicht lesbar, weil der Rauschpegel stark mit dem Signal konkurriert. Der SNR-Wert ist positiv, wenn

$$\left\| \tilde{\mathbf{b}} \right\|_2 > \left\| \mathbf{v} \right\|_2$$

gilt. Mit einem großen SNR-Wert kann sich das Signal deutlich von den Rauschanteilen abheben. Auch negative SNR-Werte können auftreten, wenn die Rauschanteile im Verhältnis zum Signal sehr groß werden.

Verwenden wir für einige Beispiele das SNR, so können wir für die Berechnung von σ in der CRB nach Gleichung (9.26) folgende grobe Abschätzung verwenden:

$$\sigma \approx \frac{\left\| \mathbf{v} \right\|_2}{m}.$$

Diese Abschätzung für σ ist nicht optimal, da die Energien der Signale stark variieren können. Folgende Überlegungen führen zu einem anderen Ansatz für die Berechnung von σ .

Der nicht verrauschte Beobachtungsvektor $\tilde{\mathbf{b}}$ wird mit einem mit additiv gauß'schen weißen Rausch versehenen (*additive gaussian white noise (AWGN)*) Vektor \mathbf{v} unter Angabe eines SNR-Wertes gemäß der Gleichung (9.28) überlagert.

Um einen Wert σ für die Berechnung der CRB zu erhalten, orientieren wir uns an [87] und messen die Leistung des exakten Beobachtungsvektors $\tilde{\mathbf{b}}$, also die mittlere Leistung des nicht verrauschten Signals

$$S_{\tilde{\mathbf{b}}} = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \left| \tilde{\mathbf{b}}_l \right|^2,$$

wobei m die Länge des nicht verrauschten Beobachtungssignals $\tilde{\mathbf{b}}$ darstellt.

Als Nächstes überführen wir das vorgegebene SNR in eine lineare Skala nach Gleichung (9.29) und bezeichnen den ermittelten Wert mit SNR_{lin} , d. h.

$$\text{SNR}_{\text{lin}} = 10^{(\text{SNR}/10)}.$$

Für die Berechnung der CRB verwenden wir die spezifische Rauschvarianz für den komplexen Beobachtungsvektor $\tilde{\mathbf{b}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{S_{\tilde{\mathbf{b}}}}{2 \text{SNR}_{\text{lin}}}}. \quad (9.30)$$

Der Rauschvektor \mathbf{v} nach Gleichung (9.28) ist mit der spezifischer Rauschvarianz gemäß Gleichung (9.30) gegeben durch

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{S_{\tilde{\mathbf{b}}}}{2 \text{SNR}_{\text{lin}}}} \tilde{\mathbf{b}}. \quad (9.31)$$

Die getroffenen Vereinbarungen bleiben für alle Beispiele in diesem Kapitel erhalten, d. h. für jeden vorgegebenen SNR-Wert wird eine neue Matrix generiert. Die Anzahl der Iterationen wird auf 200 festgelegt. Mit Anwendung der Gleichung (9.28) wird der verrauschte Beobachtungsvektor \mathbf{b} aufgebaut. Allerdings veranschaulichen die Beispiele nicht die Vorgabe der Rauschvarianz σ nach (9.28), sondern die Vorgabe eines SNR-Wertes. Für das CRB wird die spezifische Rauschvarianz σ gemäß der Gleichung (9.30) nach [87] berechnet.

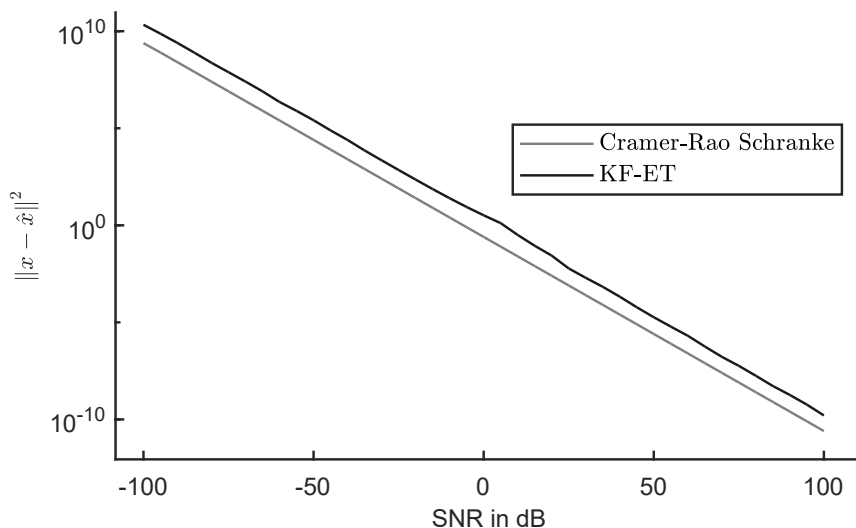


Abb. 9.8: KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

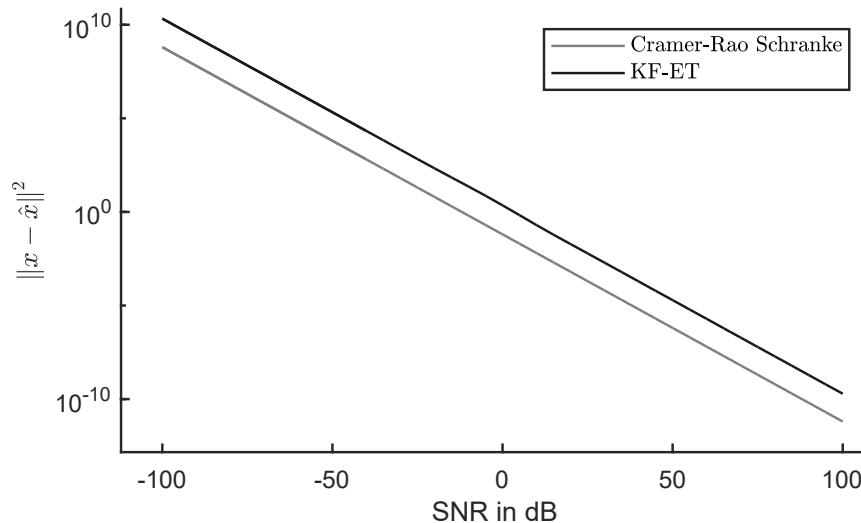


Abb. 9.9: KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 250$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

Die Untersuchungen anhand der Abbildungen zeigen, dass die rekonstruierende Lösung bzw. der MLS unter Verwendung des Kalman-Filter- ℓ_1 -Minimierungsalgorithmus (KF-ET) zu einer akzeptablen Lösung führt.

Trotz der zufällig generierten Matrizen können wir einen annähernd parallelen Graphenverlauf in Abbildung 9.8 sowie 9.9 mit einem kontinuierlichen Abstand zwischen dem quadratischen ℓ_2 -Fehler und der CRB, vermuten. Allerdings werden für größere Rauschleistung die Abstände größer sein, da der Support ungenauer geschätzt wird. Um diese Aussage zu bestätigen, verändern wir die vertikale Skala in eine nicht-logarithmierte Skala und untersuchen die Werte von $\text{SNR} = -100$ dB bis $\text{SNR} = -50$ dB für das erste Beispiel (I). Die Ergebnisse sind der Abbildung 9.10 zu entnehmen. Wir beobachten in der Abbildung 9.10, dass bei hohen Rauschanteilen der berechnete ℓ_2 -Fehler wesentlich größer als das CRB ist. Das liegt daran, dass keine exakte Schätzung des Supports aufgrund der hohen Rauschanteile möglich ist. Vergleichen wir die beiden Abbildungen 9.8 und 9.9 unter dem Gesichtspunkt der unterschiedlichen Dimensionen der zugrunde gelegten Matrix, beobachten wir, dass mit Zunahme der Dimension für die Matrix auch die Differenz zwischen dem ℓ_2 -Fehler und der CRB steigt.

Des Weiteren sei hier anzumerken, dass alle Berechnungen mit der Software MATLAB durchgeführt werden. Für die einzelnen Beispiele haben wir zwar das SNR vorgegeben, mussten aber allerdings für die Berechnung der CRB die benötigte Varianz σ in Gleichung (9.26) rechnerisch ermitteln.

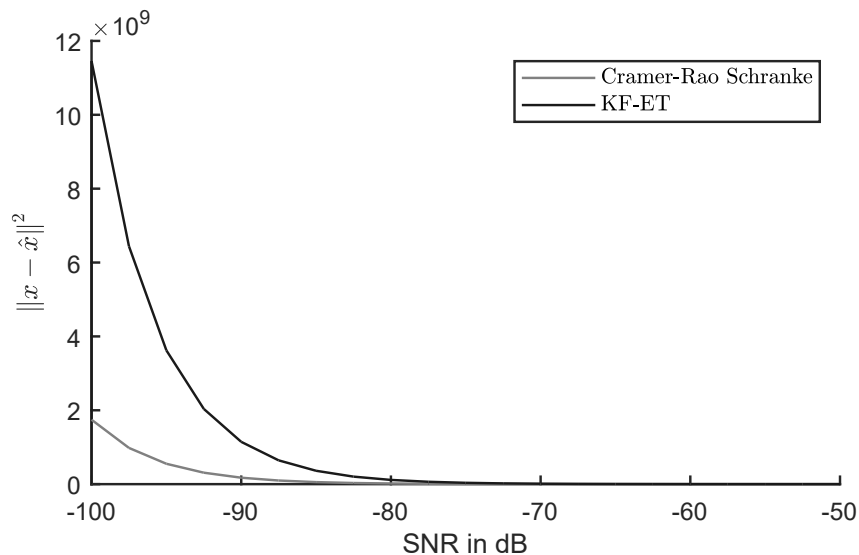


Abb. 9.10: KF-ET nach Algorithmus 7, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56], vertikale Achse in nicht-logarithmierte Darstellung

Vergleichen wir die Ergebnisse der Rekonstruktion, wie im letzten Abschnitt, mit dem Algorithmus 6 (KF) für die zwei vorgegebenen Beispiele (I) und (II). Aus den Abbildungen 9.11 und 9.12 beobachten wir das gleiche Verhalten der Algorithmen wie unter Vorgabe der Streuung σ .

Wie bei der Beobachtung von σ stellen wir fest, dass das KF-ET bessere Ergebnisse als das KF erzielt. Anhand der unterschiedlichen vertikalen Skalen in den Abbildungen 9.10 und 9.13 ist zu erkennen, dass der ℓ_2 -Fehler vom KF-ET kleiner ist als der vom KF.

Auf Grund der Übersichtlichkeit wurden die beiden Algorithmen in separaten Abbildungen betrachtet. Insgesamt können wir beobachten, dass die Rekonstruktionen mit KF-ET unter verrauschten Daten zu guten Ergebnissen führen.

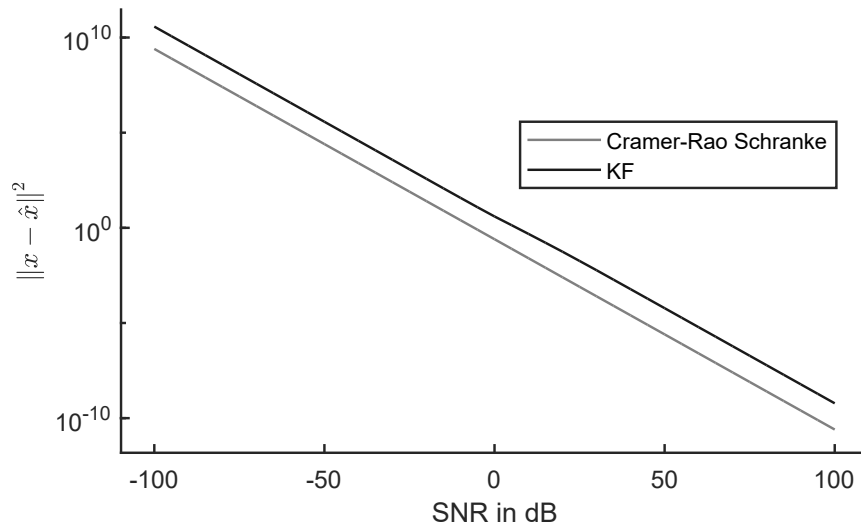


Abb. 9.11: KF nach Algorithmus 6, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

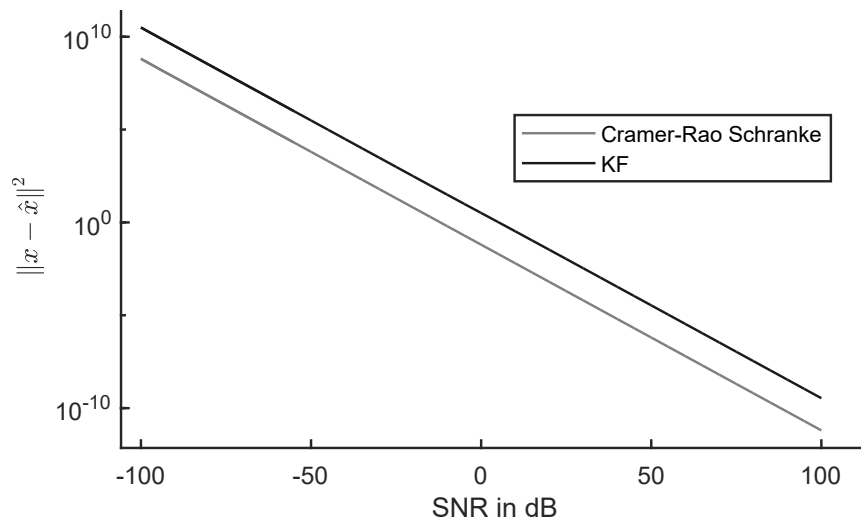


Abb. 9.12: KF nach Algorithmus 6, Beispiel (II) 2200×3000 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 250$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

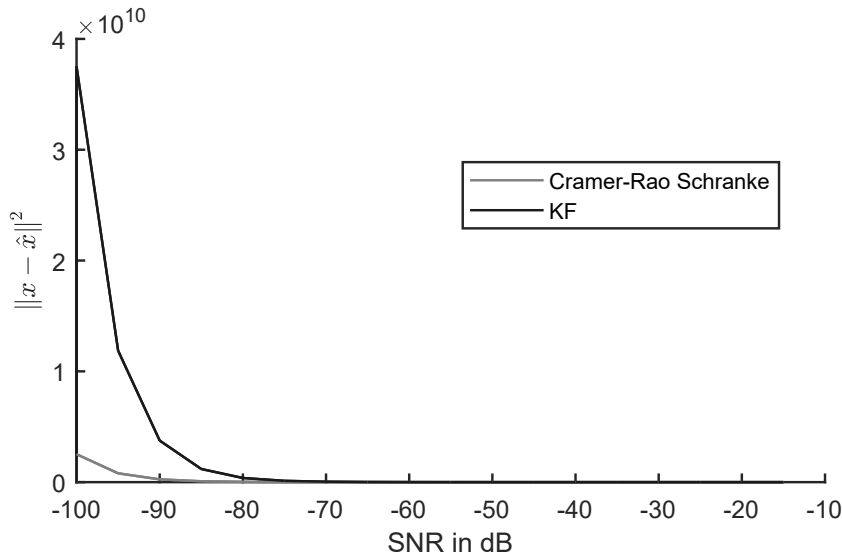


Abb. 9.13: KF nach Algorithmus 6, Beispiel (I) 192×256 -Matrix, Sparsity des Signals: $s = 64$, Iterationen: 200, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56], vertikale Achse in nicht-logarithmierte Darstellung

9.3.2.3 Abhängigkeit vom Support

Das angegebene CRB nach (9.26) ist nicht nur von der Rauschvarianz σ , sondern auch von der Kardinalität des Supports T (9.13) abhängig.

Als letzte Betrachtung in diesem Kapitel untersuchen wir das Verhalten zwischen der Sparsity s und dem quadratischen ℓ_2 -Fehler $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2$. Für die Untersuchungen nehmen wir, entgegen den bisherigen Ausführungen in diesem Kapitel, nur eine zufallsgenerierte Matrix, die für alle dargestellten Berechnungen konstant bleibt.

Das exakte Signal \mathbf{x} wird für jede Berechnung der Rekonstruktion mit einer neuen Sparsity $s_i = s_{i-1} + 1$ für $i = 1, \dots, m/2$ mit $s_0 = 0$ generiert. Die Anzahl der Iterationen ist wegen der Vergleichbarkeit ebenfalls auf 200 festgelegt. Für die Konstruktion des verrauschten Beobachtungsvektors \mathbf{b} geben wir uns einen SNR-Wert in Dezibel vor, und berechnen das CRB nach Gleichung (9.26) unter Berücksichtigung der Rauschvarianz in Gleichung (9.30). Für die Beobachtungen wählen wir die SNR-Werte -10 dB, 0 dB, 10 dB und 100 dB.

Zur Erinnerung erwähnen wir noch einmal, dass die Sparsity s der Bedingung $s \leq m/2$ unterliegt und somit $0 < \rho \leq 0,5$ für $\rho = s/m$ gilt.

In den Abbildungen 9.14 - 9.17 können wir das Verhalten zwischen der Sparsity und dem quadratischen ℓ_2 -Fehler der Rekonstruktion für das KF-ET und das KF beobachten. Wir stellen fest, dass mit einer Erhöhung der Sparsity s auch das CRB steigt.

Die quadratischen ℓ_2 -Fehler der Algorithmen KF-ET und KF zeigen keine großen Unterschiede bei der Zunahme der Sparsity. Allerdings beobachten wir, dass in allen Abbildungen der Algorithmus KF-ET einen geringeren ℓ_2 -Fehler als das KF aufweist.

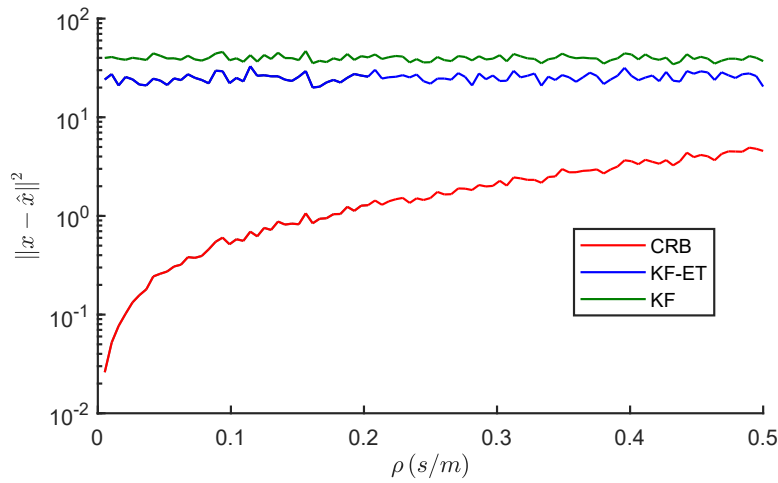


Abb. 9.14: Beispiel (I) 192×256 -Matrix, SNR = -10 dB, KF nach Algorithmus 6, KF-ET nach Algorithmus 7, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

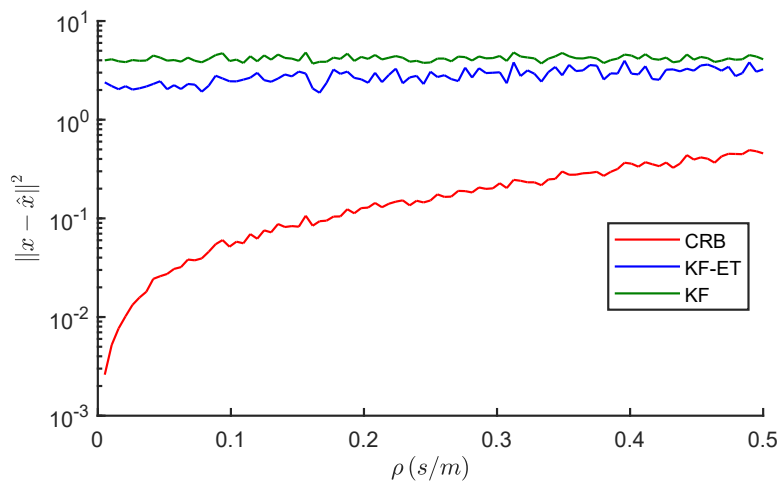


Abb. 9.15: Beispiel (I) 192×256 -Matrix, SNR = 0 dB, KF nach Algorithmus 6, KF-ET nach Algorithmus 7, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

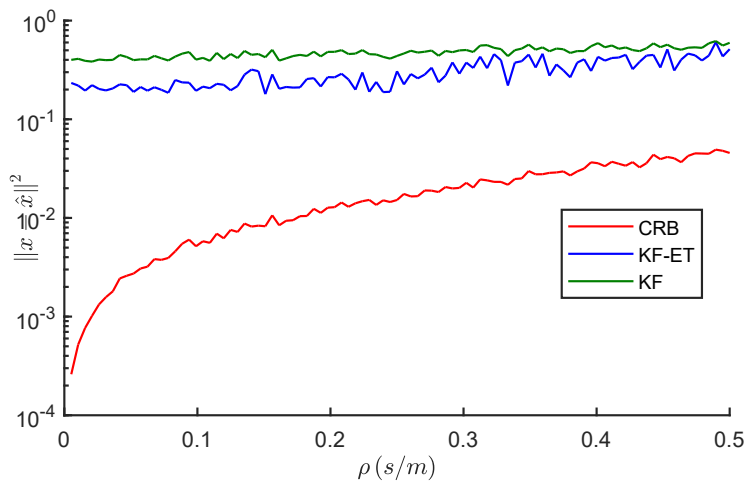


Abb. 9.16: Beispiel (I) 192×256 -Matrix, SNR = 10 dB, KF nach Algorithmus 6, KF-ET nach Algorithmus 7, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

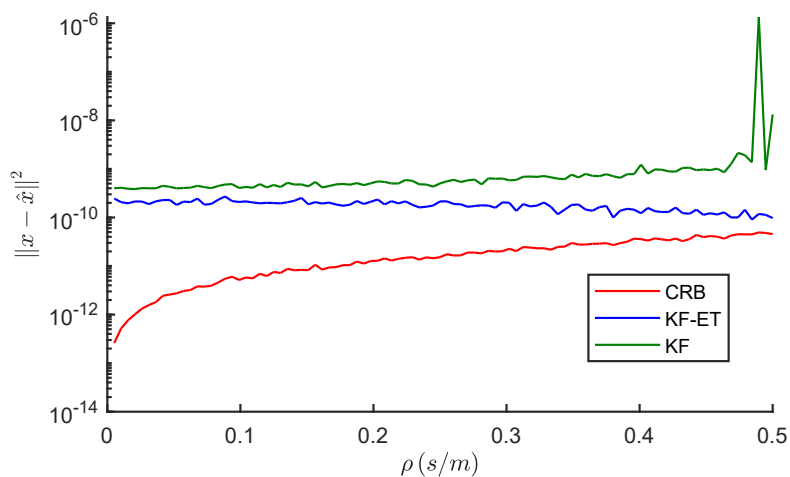


Abb. 9.17: Beispiel (I) 192×256 -Matrix, SNR = 100 dB, KF nach Algorithmus 6, KF-ET nach Algorithmus 7, CRB nach Gleichung (9.27) gemäß [56]

Das liegt daran, dass für die Berechnungen im Thresholding-Prozess die Bedingung $s \leq m/2$ festgelegt ist. Für die Ermittlungen eines sparsen Zustandsschätzers mit hohem Rauschanteil werden die $m/2$ -betragsgrößten Einträge berechnet, also $s = m/2$. Die restlichen Einträge des Zustandsvektor, d. h. die $n - (m/2)$ Einträge, sind Null. Der Algorithmus KF berechnet allerdings einen Zustandsvektor, dessen Einträge aufgrund der Rauschanteile von Null verschieden sind. In den Abbildungen erkennen wir ein oszilliertes Verhalten bei der Darstellung der Graphen. Das liegt daran, dass der berechnete Support in den einzelnen Fällen variieren kann. Eine Übersicht über das

SNR	CRB	$\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\ _2^2$	$\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\ _2^2$
		KF-ET	KF
-10	< 10	< 30	< 40
0	< 1	< 3	< 3
10	$< 10^{-1}$	< 1	< 1
100	$< 10^{-10}$	$< 10^{-9}$	$< 10^{-9}$

Tab. 9.4: Vergleich zwischen CRB und dem Fehler $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2$ von KF-ET und KF in Abhängigkeit des SNR-Wertes

Verhältnis zwischen dem ℓ_2 -Fehler des KF-ET, KF und der CRB in Abhängigkeit des SNR-Wertes gibt die Tabelle 9.4. In der Tabelle 9.4 ist zu erkennen, dass mit höheren Rauschanteilen der ℓ_2 -Fehler und das CRB steigen. Aber bei einem geringen Anteil von Rauschen, wie z. B. SNR = 100 dB, beobachten wir in Abbildung 9.17, dass sich der berechnete ℓ_2 -Fehler von KF-ET sich der CRB mit zunehmender Sparsity stark annähert, während sich KF sich von der CRB entfernt. Der Abstand des quadratischen ℓ_2 -Fehlers zwischen den beiden Graphen von KF-ET und KF in Abbildung 9.17 vergrößert sich mit zunehmender Sparsity.

Mit Hilfe der Untersuchung konnten wir beobachten, dass bei geringem Rauschen das Kalman-Filter mit externem Thresholding (KF-ET) nach Algorithmus 7 eine gute Lösung liefert. Mit einem hohen Rauschanteil im Beobachtungsvektor ist eine Rekonstruktion mit einer akzeptablen Lösung auch möglich.

Kapitel 10

Vergleiche der vorgestellten Algorithmen mit verrauschten Daten

Die bereits im Kapitel 9.3 genannten Ausführungen werden hier noch einmal kurz angesprochen. Wir beobachten einen Messvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$,

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v},$$

wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ein unbekanntes Signal ist. Der Rauschvektor \mathbf{v} ist wie im Kapitel 9.3 definiert.

Das Ziel besteht darin, ein $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MSE}}$ [7] unter der Nebenbedingung

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MSE}} = \underset{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \right\}$$

zu finden. Für unsere Untersuchungen verwenden wir das CRB [84, 88–90] wie in [82] beschrieben:

$$\mathbb{E} \left\{ \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2^2 \right\} \geq \sigma^2 \operatorname{tr} \left(\left(\mathbf{C}_T^H \mathbf{C}_T \right)^{-1} \right). \quad (10.1)$$

Die Ausführungen zur CRB sind dem Kapitel 9.3 zu entnehmen. Um eine Transparenz zwischen den Algorithmen herzustellen, analysieren wir im ersten Teil des Kapitels die Algorithmen, welche durch Thresholding-Verfahren beeinflusst werden, d. h. das KF-ET, C&P und OMP. Anschließend beobachten wir mit Hilfe der DTG zusätzlich auch das Verhalten des KF-Aitken.

In Abbildung 10.1 vergleichen wir den Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP mit der CRB unter Verwendung verschiedener Rauschvarianzen. Als Messmatrix wählen wir eine Matrix \mathbf{C} mit der Dimension 192×256 . Die Sparsity von \mathbf{x} beträgt $s = 64$. Die maximale Anzahl der Iterationen ist auf 200 festgelegt.

Als Grundlage für die Berechnung der CRB wird die Gleichung (10.1) verwendet. In Abbildung 10.1 können wir beobachten, dass alle Algorithmen für den Rekonstruktionsfehler den gleichen Verlauf besitzen.

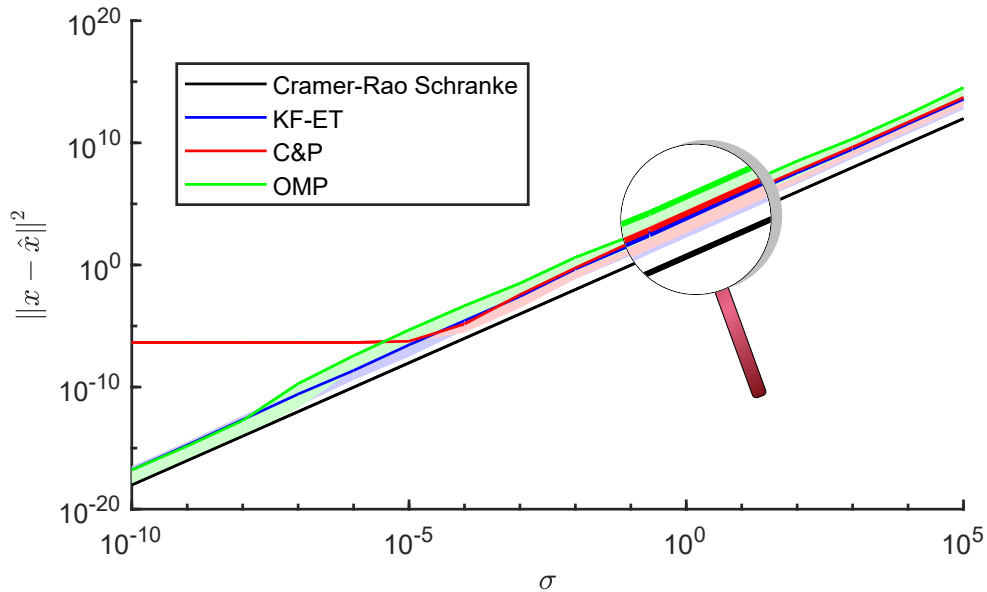


Abb. 10.1: Vergleich von CRB und dem quadratischen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP unter Betrachtung verschiedener Rauschvarianzen. Die Messmatrix hat die Dimension 192×256 . Die Sparsity des Signals ist $s = 64$. Die Anzahl der Iteration ist auf 200 festgelegt.

Der dargestellte ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler wird als Mittelwert aus 16 individuellen Experimenten berechnet. Die zugehörigen schattierten Gebiete stellen die Bereiche zwischen Minimum und Maximum des Rekonstruktionsfehlers der einzelnen Algorithmen dar.

In der Abbildung 10.1 ist zu beobachten, dass sich der quadratische ℓ_2 -Fehler für das KF-ET am nächsten in der Umgebung des CRB befindet. Die beiden anderen Algorithmen C&P und OMP zeigen einen größeren ℓ_2 -Fehler als das KF-ET.

C&P zeigt in der Abbildung 10.1 einen waagerechten Verlauf von $\sigma = 10^{-10}$ bis ca. $\sigma = 10^{-4}$. Das liegt daran, dass wir für unsere Beobachtungen nur 200 Iterationen auswerten. Nach 200 Iterationen hat der C&P noch keine optimale Lösung erreicht.

Aufgrund dieser Beobachtung werden wir ein zweites Beispiel untersuchen.

Hierzu sei eine Messmatrix \mathbf{C} mit der Dimension 60×80 gegeben. Die Sparsity des Zustandsvektors ist auf $s = 20$ festgesetzt. Für die Anzahl der Iterationen wählen wir 300. Auch für das zweite Beispiel beobachten wir in der Abbildung 10.2 das gleiche Verhalten wie im ersten Beispiel. Durch die Erhöhung der Iterationen gibt auch der Algorithmus C&P im Bereich von $\sigma = 10^{-10}$ bis ca. $\sigma = 10^{-4}$ eine akzeptable Lösung an.

In den Abbildungen 10.1 und 10.2 ist zu erkennen, dass das KF-ET mit zunehmendem Rauschanteil das beste Ergebnis unter den anderen untersuchten Algorithmen liefert. Anhand der dargestellten Lupe in den Abbildungen wird deutlich, dass das KF-ET den geringsten Abstand zum CRB hat. Unter Betrachtung geringer Rauschanteile ist dies nicht immer in den Abbildungen zu beobachten. Das liegt daran, dass auch

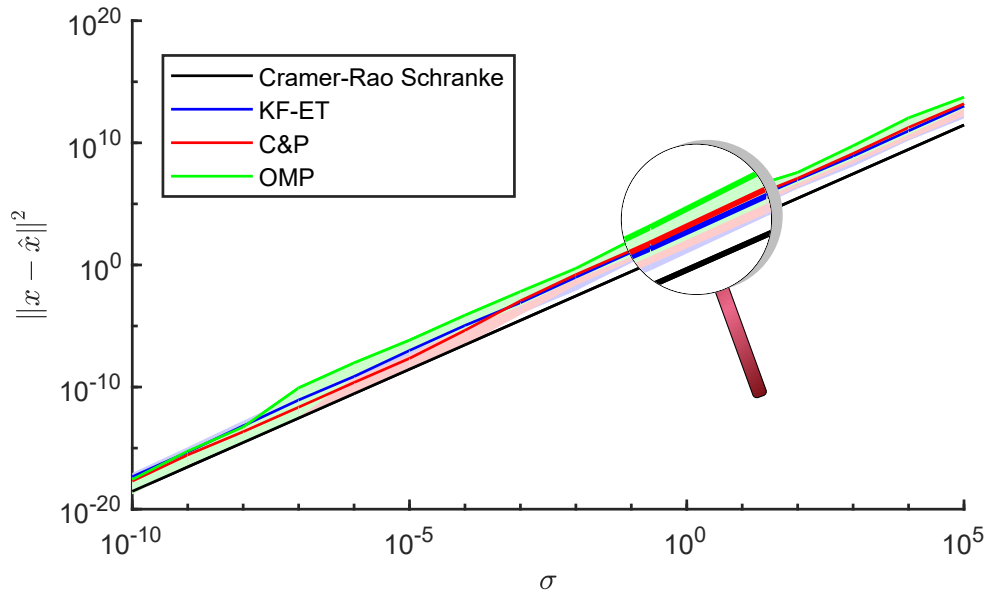


Abb. 10.2: Vergleich von CRB und dem quadratischen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P und OMP unter Betrachtung verschiedener Rauschvarianzen. Die Messmatrix hat die Dimension 60×80 . Die Sparsity des Signals ist $s = 20$. Die Anzahl der Iteration ist auf 300 festgelegt.

Einträge, die den Wert Null ausweisen, mit Rauschen versehen werden und gegebenenfalls zur Supportmenge hinzugezählt werden, wobei kleine Einträge in dem geschätzten Zustandsvektor durch den Thresholding-Prozess auf Null gesetzt werden können. Der C&P-Algorithmus weist in diesem Bereich von $\sigma = 10^{-10}$ bis ca. $\sigma = 10^{-4}$ ein besseres Ergebnis auf, weil die Anzahl der Iteration, als Relation zur Dimension der Matrix, mit 300 sehr großzügig gewählt wurde. Im C&P-Algorithmus wird abwechselnd ein primales und duales Problem gelöst, sodass sich der Algorithmus von beiden Seiten an die Lösung annähert. Wenn genügend Iterationen durchgeführt werden, kann eine akzeptable Lösung gefunden werden. Allerdings wird das KF-ET mit dem Erreichen des Abbruchkriteriums im Thresholding-Prozess abgebrochen und eine Lösung angegeben. Dabei benötigt das KF-ET nicht die vorab definierte bzw. ausgewiesene Anzahl von Iterationen, sondern wesentlich weniger. Um die Aussage zu bekräftigen, verweisen wir auf die Tabelle 9.1 im Kapitel 9.2, in der die erforderlichen Iterationen des KF-ET anhand von Beispielen gezeigt werden. Für Beispiele mit geringen Rauschanteilen greift ebenfalls das Abbruchkriterium im Thresholding-Prozess, sodass weniger Iterationen benötigt werden. Ist der Rauschanteil hoch, benötigt das KF-ET die vorgegebene Anzahl an Iterationen für die Rekonstruktion.

Insgesamt zeigen die zwei Abbildungen 10.1 und 10.2, dass das vorgeschlagene KF-ET auch für rauschverzerzte Signale sehr gute Ergebnisse erreicht.

Es muss einschränkend für die Allgemeingültigkeit jedoch angemerkt werden, dass die Ergebnisse von den Beobachtungen nur auf wenigen Beispielen beruhen und damit noch keine allgemeinen Aussagen getroffen werden können. Daher werden wir weitere

umfangreiche Untersuchungen durchführen, indem wir mit Hilfe der DTG aus Kapitel 8.3.1 den relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler, den Fehler in der ℓ_0 -Norm, den Supportfehler sowie die Rekonstruktionszeit für die vorgestellten Algorithmen KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken unter Rauschen betrachten. Das SNR wurde im Kapitel 9.3.2.2 unter Gleichung (9.29) bereits definiert. Für alle in den DTG zugrunde gelegten Matrizen nehmen wir eine Dimension von $m \times 256$ an. Jeder Pixel zeigt den Mittelwert von 16 individuellen Experimenten. Für den Parameter ρ gilt $0 \leq \rho \leq 0,5$ gemäß der Bedingung $s \leq m/2$ in [13] sowie der genannten Gleichung (3.4) aus Kapitel 3.2.3. Alle Experimente werden unter der Verwendung von SNR = 30 dB, 0 dB und -10 dB mit 200 Iterationen berechnet.

10.1 Rekonstruktionsfehler

Wie bereits im letzten Kapitel angedeutet, untersuchen wir die Rekonstruktion eines Zustandsvektors \mathbf{x} mit einer Dimension von $n = 256$. Dafür verwenden wir die in Kapitel 8.3.1 eingeführten DTG. In Abbildung 10.3 beobachten wir den relativen ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler

$$e_{\ell_2} = \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}, \quad (10.2)$$

wobei \mathbf{x} das exakte zu rekonstruierende Signal darstellt.

Die untersuchten Algorithmen KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken zeigen in der Abbildung 10.3 ähnliche Eigenschaften. Der Algorithmus OMP zeigt bei Zunahme der Rauschvarianz eine deutlichere Verschlechterung bei der Rekonstruktion als die anderen Algorithmen unter den DTG. Bei Zunahme der Rauschvarianz ermittelt der OMP nicht mehr den exakten Support, sodass in diesen Fällen auch keine exakte Berechnung der Koeffizienten für das zu rekonstruierende Signal erfolgen kann. Bereits bei der Ermittlung von nur einem Element der Menge, welches nicht in der exakten Supportmenge liegt, können wir davon ausgehen, dass alle nachfolgend berechneten Elemente der Supportmenge mit hoher Wahrscheinlichkeit ebenfalls zu einem falschen Ergebnis führen. Mit einem SNR = 0 dB zeigt die Abbildung 10.3 für den OMP bereits ein wesentlich schlechteres Ergebnis als alle anderen dargestellten Algorithmen. Für das KF-ET beobachten wir, dass sich mit mehr Messreihen, also mehr Zeilen in der Messmatrix, das Ergebnis für eine erfolgreiche Rekonstruktion verbessert. Der KF-Aitken zeigt dagegen das umgekehrte Verhalten wie KF-ET in den Abbildungen. Bei Zunahme der Zeilen in der Matrix beobachten wir eine Erhöhung des Rekonstruktionsfehlers.

Als Ergänzung sei noch einmal erwähnt, dass die Algorithmen KF-ET, OMP und C&P verschiedene Thresholding-Verfahren anwenden.

Nur der KF-Aitken arbeitet ohne Thresholding-Verfahren und basiert nur auf einem reinen Konvergenzverfahren. Im KF-Aitken wird eine Folge der reduzierten ℓ_1 -Norm

mit einem modifizierten Konvergenzbeschleuniger von Aitken konstruiert, welche gegen einen Fixpunkt konvergiert und einen zulässigen Zustandsschätzer berechnet. Der OMP konstruiert aus einem Nullvektor einen Zustandsvektor, in dem pro Iteration ein Supportelement hinzugefügt wird. Sobald die Sparsity bekannt ist, wird der OMP den Zustandsvektor mit s Iterationen rekonstruieren können.

Allerdings ist bei verrauschten Daten sowie durch die fehlende Information über die Sparsity eine Rekonstruktion sehr schwierig. Der C&P arbeitet auf Grundlage eines Soft-Thresholding, welches wir im Kapitel 3.5.2 unter Gleichung (3.13) mit Abbildung 3.2 näher erläutert haben. Auch hier werden bestimmte Einträge des Zustandsvektors in jeder Iteration verändert bzw. angepasst.

Jeder Algorithmus arbeitet auf verschiedene Weise, jedoch verfolgen diese alle das gleiche Ziel einer ℓ_1 -Minimierung.

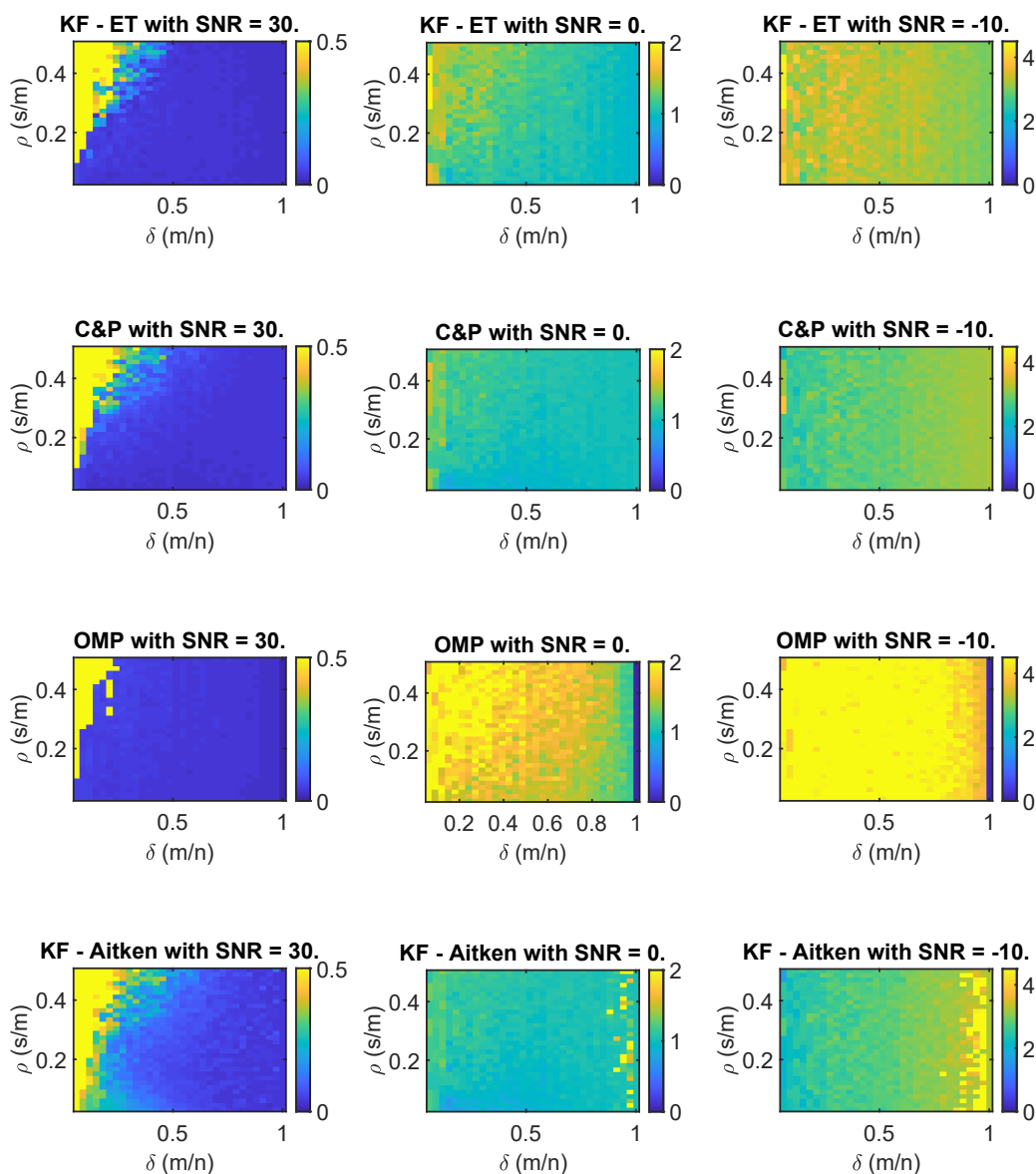


Abb. 10.3: Relativer ℓ_2 -Rekonstruktionsfehler von KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken mit 200 Iterationen.

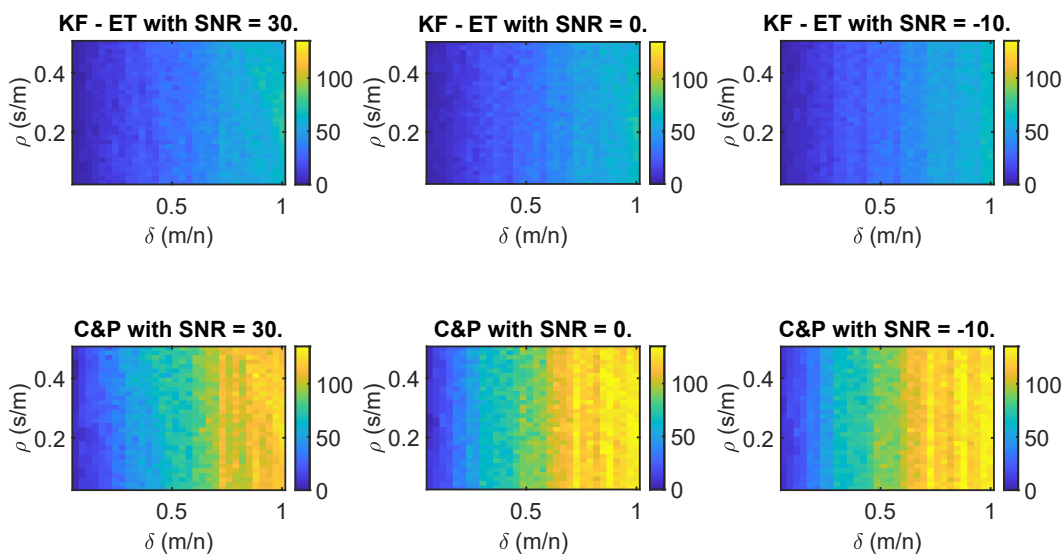
10.2 Fehler in der ℓ_0 -Norm

Sehen wir uns den Fehler in der ℓ_0 -Norm an, d. h.

$$e_{\ell_0} = \frac{|\|\mathbf{x}\|_0 - \|\hat{\mathbf{x}}\|_0|}{\|\mathbf{x}\|_0}, \quad (10.3)$$

mit $\|\hat{\mathbf{x}}\|_0 = \#\{l : |\hat{x}_l| > 10^{-6}\}$, $l = 1, \dots, n$ für den berechneten Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}$. Die besten Ergebnisse bezüglich des Fehlers in der ℓ_0 -Norm des Schätzers demonstriert eindeutig der Algorithmus KF-ET. Alle anderen untersuchten Algorithmen zeigen schlechtere Ergebnisse in der Abbildung 10.4. Der C&P liefert mit steigender Zeilenanzahl m der Messmatrix einen wesentlich größeren Fehler in der ℓ_0 -Norm. Dieses Verhalten ist bei dem OMP erst mit Zunahme der Rauschvarianz zu erkennen. Das KF-Aitken zeigt zwar gegenüber den anderen Algorithmen in der Abbildung 10.4 einen größeren ℓ_0 -Fehler, aber die Rekonstruktion eines sparsen Zustandsvektors basiert auf keinem Thresholding-Verfahren. Für das KF-Aitken wird eine Folge von Skalaren beschleunigt, sodass die Einträge des Zustandsvektors auf Grund der rechnergestützten Verarbeitung nicht exakt Null entsprechen können. Der berechnete Zustandsvektor aus KF-Aitken ist daher ein vollbesetzter Vektor und gibt somit auch einen großen ℓ_0 -Fehler aus. Für das KF-ET beobachten wir einen sehr kleinen ℓ_0 -Fehler in der Abbildung 10.4. Es liegen nur vereinzelte Änderungen innerhalb der Betrachtungen von verschiedenen untersuchten SNR-Werten. Das KF-ET erreicht in fast allen Experimenten die exakte ℓ_0 -Norm.

Auch wenn eine gute Berechnung der Sparsity, also der ℓ_0 -Norm, für den Zustandsvektor erreicht wird, können wir nicht davon ausgehen, dass auch die von Null verschiedenen Einträge in der Supportmenge exakt ermittelt werden. Wir werden daher die Supportmenge bzw. den Supportfehler im nächsten Kapitel untersuchen.



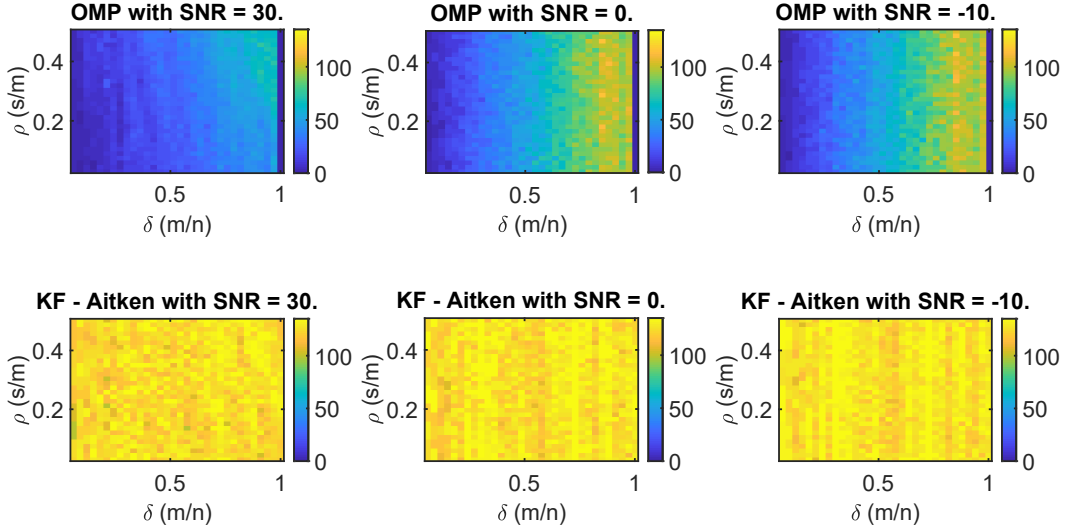


Abb. 10.4: Fehler in der ℓ_0 -Norm der Schätzer von KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken mit 200 Iterationen.

10.3 Supportfehler

Für die Untersuchungen des Supports definieren wir den Fehler im Support als die Differenz zwischen der Vereinigungsmenge und der Schnittmenge vom exakten Signal und dem berechneten Zustandsvektor. Die Supportmenge des exakten zu rekonstruierendem Signal \mathbf{x} ist definiert als:

$$T_{\mathbf{x}} = \text{supp}(\mathbf{x}) = \{l : |x_l| \neq 0\}, l = 1, \dots, n. \quad (10.4)$$

Für den berechneten Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ wird analog die Supportmenge definiert:

$$T_{\hat{\mathbf{x}}} = \text{supp}(\hat{\mathbf{x}}) = \{l : |\hat{x}_l| \neq 0\}, l = 1, \dots, n. \quad (10.5)$$

Für den Fehler im Support gilt dann

$$e_{\text{supp}} = \# \{(T_{\mathbf{x}} \cup T_{\hat{\mathbf{x}}}) / (T_{\mathbf{x}} \cap T_{\hat{\mathbf{x}}})\}. \quad (10.6)$$

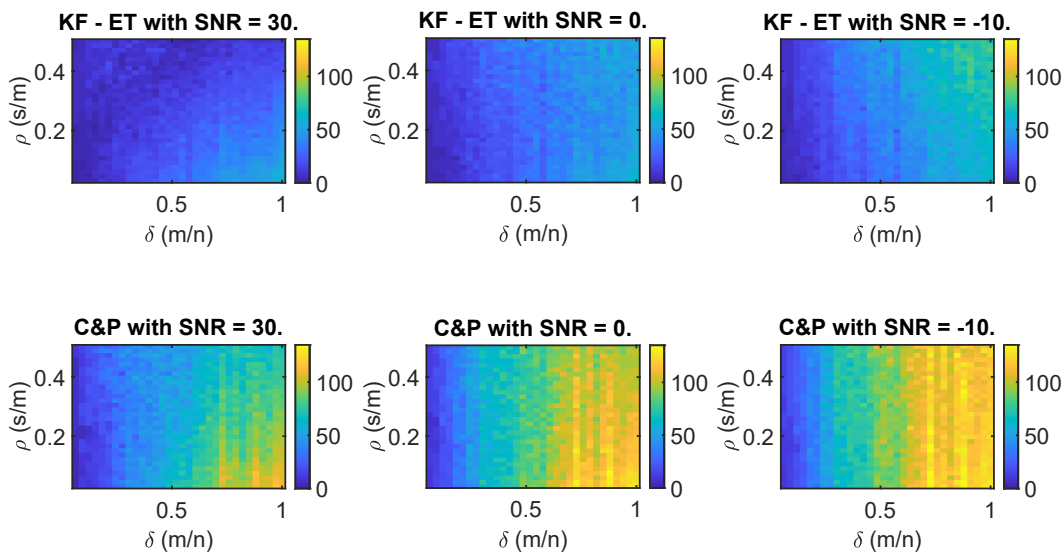
In der Abbildung 10.5 beobachten wir deutlich, dass das KF-ET mit geringen Abweichungen den Support unter allen Rauschvarianzen gegenüber allen anderen Algorithmen am genauesten berechnen kann. Für den C&P sowie für den OMP ist erkennbar, dass mit Zunahme der Messungen m schlechtere Ergebnisse erzielt werden. Zu beobachten ist, dass das KF-Aitken wieder angeblich das schlechteste Ergebnis ermittelt. Auch hier sei anzumerken, dass der Algorithmus ohne ein Thresholding-Verfahren arbeitet und deshalb die Einträge auf Grund der Berechnungen mit einer vollbesetzten Startlösung \mathbf{x}_p nicht exakt Null werden können.

Der Support ist mit Zunahme der Rauschvarianz für alle Algorithmen sehr schlecht zu berechnen. Jeder Nulleintrag im Zustandsvektor kann durch Rauschen zur Supportmenge hinzugefügt werden. Der wesentliche Vorteil, den das KF-ET besitzt, ist,

dass das unterbestimmte Gleichungssystem in ein überbestimmtes Gleichungssystem überführt wird und mit der Bedingung $s \leq m/2$ eine Supportmenge von maximal $m/2$ Elementen besitzt. Für die zugrunde liegende Dimension von $n = 256$ des Zustandsvektors wird der Supportfehler im Bereich $0 \leq e_{\text{supp}} \leq 127$ liegen.

Fassen wir die bisherigen Auswertungen für den Rekonstruktionsfehler, den ℓ_0 -Fehler sowie den Supportfehler zusammen, so erkennen wir, dass wir für das KF-ET den kleinsten ℓ_0 -Fehler sowie die besten Ergebnisse für die Berechnung des Supports erreichen. Allerdings beobachten wir beim Rekonstruktionsfehler, dass das KF-ET nicht immer die optimale Rekonstruktion liefert. Diese Aussage hat einen einfachen Grund. Der C&P-Algorithmus durchläuft die vorgegebenen 200 Iterationen, das KF-ET jedoch nicht. Das KF-ET bricht bereits nach wenigen Iterationen genau dann ab, wenn die Abbruchbedingung im Thresholding-Prozess erreicht wird. Das Abbruchkriterium ist erfüllt, wenn die Differenz von zwei aufeinanderfolgenden berechneten ℓ_1 -Normen der Zustandsvektoren kleiner als ε ist, siehe Algorithmus 7. Für die Beobachtungen wurde ε auf 10^{-10} festgelegt. Betrachten wir den Zustandsvektor unter verrauschten Daten, wird das Abbruchkriterium schnell erreicht, da sich die ℓ_1 -Norm des Zustandsvektors im Laufe der Iterationen nicht mehr verändert. Die maximale Supportmenge der berechneten Lösung kann unter Rauschen gemäß der Bedingung $s \leq m/2$ höchstens $m/2$ Elemente enthalten, die auch zu einer Steigerung des relativen ℓ_2 -Fehlers führt. Einige Beispiele in den letzten Kapiteln zeigten bereits, dass das KF ohne Thresholding-Verfahren mit genügend Iterationen gegen die gleiche Lösung des C&P konvergiert. Vergleichen wir das KF-ET mit C&P mit der gleichen Anzahl der Iterationen, die das KF-ET benötigt, so lässt sich erkennen, dass der C&P einen weit größeren relativen ℓ_2 -Fehler besitzt.

Als eine letzte Auswertung der vorgestellten Algorithmen untersuchen wir die Rekonstruktionszeit im nächsten Kapitel.



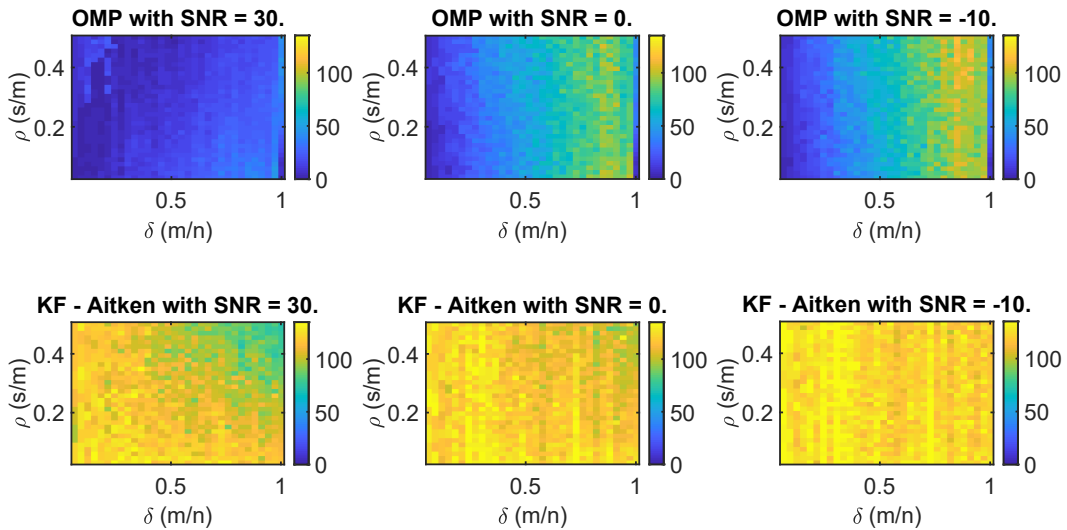


Abb. 10.5: Support-Abweichungen von KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken mit 200 Iterationen.

10.4 Rekonstruktionszeit

Für eine letzte Auswertung vergleichen wir die Rekonstruktionszeit der Algorithmen. Die geringste Rekonstruktionszeit erreichen der C&P und das KF-ET, wie in der Abbildung 10.6 demonstriert. Zu beachten ist, dass das KF-ET nach der Berechnung einer Startlösung nur noch im Nullraum arbeitet, also mit einer Dimension von $n - m$. Es kann beobachtet werden, dass der C&P in der Rekonstruktionszeit geringfügig bessere Ergebnisse erzielt. Vergleichen wir die beiden Algorithmen, also KF-ET und C&P, ohne jegliches Rauschen, so haben wir bereits in Abbildung 9.1 gezeigt, dass die beiden Algorithmen mit genügend Iterationen gegen die gleiche Lösung konvergieren. Allerdings führt die Rekonstruktionszeit ohne Rauschbetrachtung für KF-ET in Abbildung 9.3 zu einem wesentlich besseren Ergebnis. Das KF-ET durchläuft aufgrund der Rauschanteile insgesamt 200 Iterationen, weil das Abbruchkriterium im Thresholding-Verfahren nicht erreicht wird. In der Abbildung 10.6 beobachten wir für KF-ET und C&P die gleiche Rekonstruktionszeit. Insgesamt konnte damit gezeigt werden, dass die Rauschanteile für die Rekonstruktionszeit des KF-ET nur einen geringen, teils negativen Einfluss auf die Rekonstruktion haben.

Der OMP zeigt mit Zunahme des Rauschens eine wesentlich größere Rekonstruktionszeit. Nur im Bereich von einem kleinen δ sind die Ergebnisse annähernd mit den des KF-ET und C&P vergleichbar. Bemerkenswert ist, dass das KF-Aitken unter der Betrachtung von verschiedenen Rauschanteilen die gleiche Rekonstruktionszeit besitzt, also völlig unabhängig von den Rauschanteilen. Das liegt daran, dass der Algorithmus eine Folge von Skalaren beschleunigt, die gegen eine eindeutige Lösung konvergiert. Die unterschiedlichen Rauschanteile in den Elementen eines Zustandsvektors werden dort sehr gut kompensiert, so dass die beschleunigte Folge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

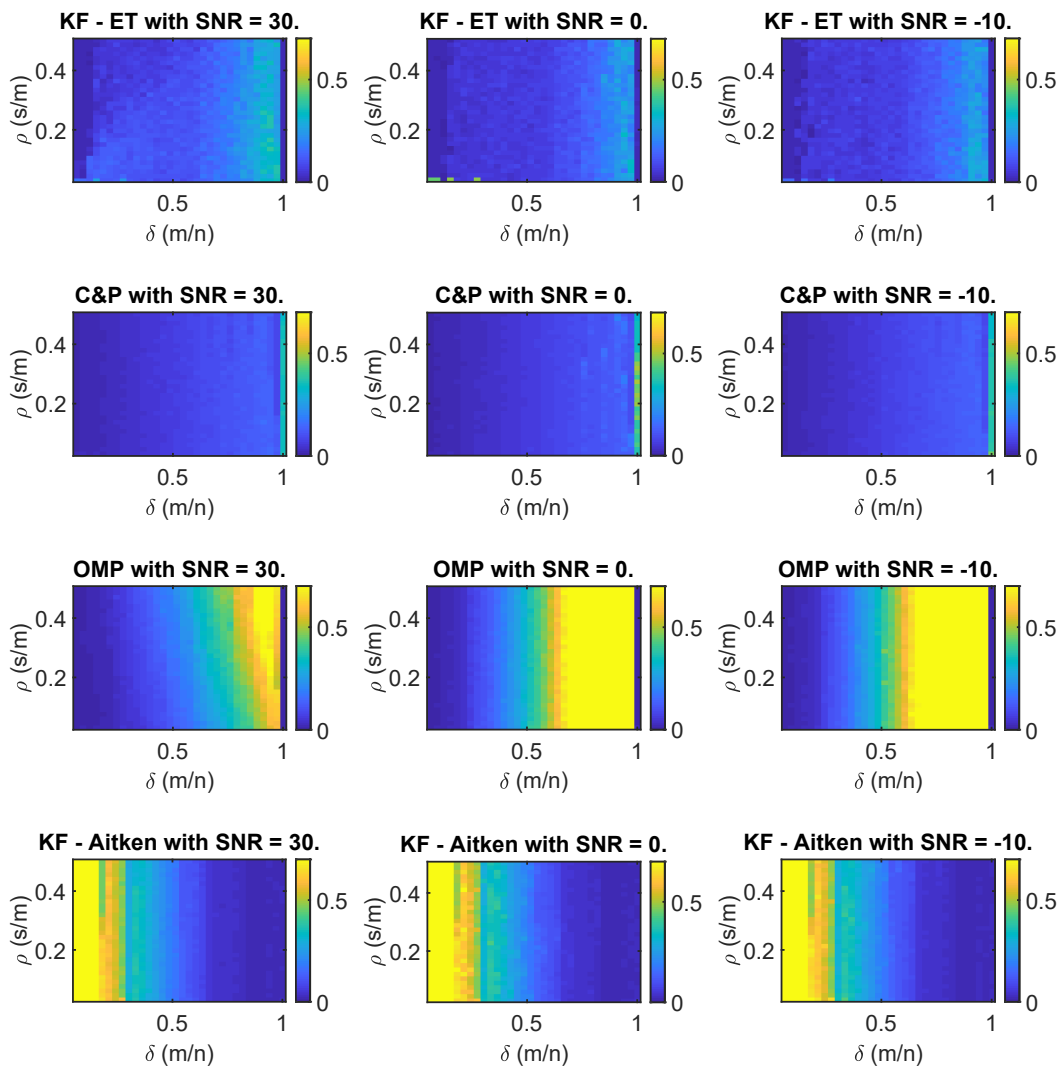


Abb. 10.6: Rekonstruktionszeit [sec] von KF-ET, C&P, OMP und KF-Aitken mit 200 Iterationen.

Wir konnten beobachten, dass das KF-ET mit geringem Rauschanteilen wesentlich bessere Ergebnisse erzielen kann als die anderen Algorithmen. Die ℓ_0 -Norm und der Support des berechneten Zustandsvektors weisen lediglich kleine Fehler auf. Auch der berechnete ℓ_2 -Fehler sowie die Rekonstruktionszeit verdeutlichen gute bis sehr gute Ergebnisse im Vergleich mit den anderen Algorithmen. Auch wenn der Algorithmus KF-ET unter der Betrachtung von Rauschen nicht in allen beobachteten Fällen das allerbeste Ergebnis erzielt, so ist dieser Algorithmus jedoch gegenüber den anderen Algorithmen für die Rekonstruktion eines sparsen rauschbehaftetes Signals optimal einsetzbar.

Alle Untersuchungen zeigen deutlich, dass das KF-ET in vielen Bereichen gegenüber den hier genannten ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen effektiv und effizient arbeitet.

Kapitel 11

Anwendungen mit entfernungsmessendem System

Im diesem Kapitel stellen wir eine Anwendung in der 3D-Bildgebung vor. Das Ziel besteht darin, unsere neu entwickelten Ansätze für das Kalman-Filter unter Verwendung quantitativ relevanter Daten zu testen bzw. zu untersuchen. Insbesondere werden wir das Experiment in unseren eigenen Laboren im Zentrum für Sensorsysteme (ZESS) durchführen, indem wir konkrete Messdaten aufnehmen und auf die Algorithmen C&P, OMP und den neu entwickelten KF-ET anwenden.

11.1 Aufbau und Erläuterung des Experiments

Das Experiment wird vereinfachend in Abbildung 11.1 skizzenhaft veranschaulicht. Auf der einen Seite befindet sich eine 3D-Kamera, die in Abbildung 11.1 als Punkt dargestellt wird. Das von der Kamera ausgesendete Signal wird an diesem Paneel reflektiert und von der Kamera wieder aufgenommen. Die gelb dargestellte Fläche in Abbildung 11.1 demonstriert das Objekt bzw. das fest installierte Paneel.

Unser Ziel besteht darin, das sparse Signal unter Verwendung der gemessenen Rohdaten zu rekonstruieren. Die aufgenommenen Rohdaten enthalten entfernungsmessende punktweise Informationen des reflektierenden Objekts. Nach erfolgreicher Rekonstruktion des Zustandsvektors können wir dann die Entfernung zwischen der Kamera und dem ausgewählten Objektpunkt berechnen. Für den Einsatz der 3D-Kamera bedienen wir uns der neusten Technologie in der Bildgebung, die in enger Kooperation zwischen dem Zentrum für Sensorsysteme (ZESS) und der Firma pmdtechnologies ag entstanden ist. In den meisten praktischen Fällen werden falsche Messergebnisse beobachtet. Dabei spielt die Erkennung von Mehrzielreflexionen eine bedeutende Rolle. In Kooperation hat Dr. M. Heredia Conde aus dem Zentrum für Sensorsysteme unter Leitung von Prof. Dr. O. Löffeld und den Entwicklern der Firma pmdtechnologies ag ein parametrisches Mess- und Auswerteverfahren entwickelt. Mit dieser Entwicklung können Mehrfachziele überwiegend getrennt werden.

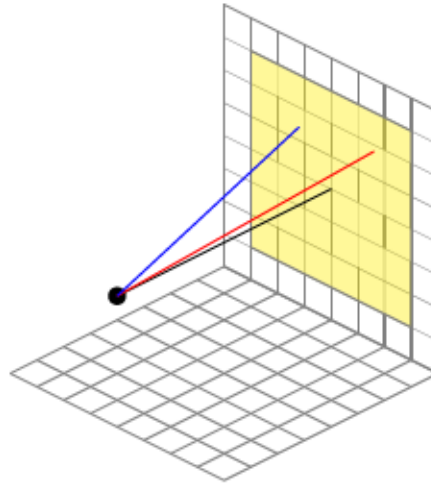


Abb. 11.1: Skizze des Experimentaufbaus



Abb. 11.2: Aufbau des Experiments im Zentrum für Sensorsysteme

Das vorgestellte KF-ET sowie die Algorithmen C&P und OMP werden wir mit dieser neu entwickelten Technologie testen. Die Kamera gibt jeweils ein Signal mit 0 MHz, 20 MHz, 40 MHz, \dots , 120 MHz aus. Insgesamt erhalten wir damit sieben Messungen für unser Experiment. Das ausgesendete Signal der Kamera trifft auf das fest installierte Paneel, das sich in einer Entfernung von 0,75 m von der Kamera befindet. Dieses Signal wird an dem Paneel reflektiert und anschließend von der Kamera eingefangen. Beobachten wir das reflektierte Signal von einem einzigen Pixel, so besitzt das eingehende Signal eine Sparsity von eins.

Um für unser Experiment aussagekräftige Daten zu erhalten, werden wir das Experiment einhundertmal durchführen und den Durchschnitt aller Messungen für die Berechnungen verwenden. Die einzelnen Strahlen für ein Pixel sind in Abbildung 11.1 symbolisch farblich gekennzeichnet. Die verwendete Kamera besitzt in unserem Experiment eine Auflösung von 172 Pixeln vertikal und 224 Pixeln horizontal. Wegen der insgesamt sieben Messungen erhalten wir somit einen Tensor mit der Dimension $172 \times 224 \times 7$. Betrachten wir ein einziges Pixel, so können wir nach den erfolgten Messungen einen Beobachtungsvektor $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^7$ angeben. Für eine erfolgreiche Rekonstruktion des Zustandsvektors \mathbf{x} benötigen wir gemäß Gleichung (4.2) eine geeignete Sensingmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{7 \times N}$. Für die Experimente verwenden wir die diskrete Fouriermatrix. Die diskrete Fouriermatrix ist im Allgemeinen eine quadratische komplexe Matrix. Durch die Bildung von Potenzen der Einheitswurzeln

$$w_N = \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}\right\}$$

erhalten wir die Fouriermatrix für $l, k = 0, \dots, N - 1$

$$W_N^{lk} = \begin{pmatrix} w_N^{0 \cdot 0} & \dots & w_N^{0(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_N^{(N-1)0} & \dots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Spalten der zugrundeliegende Sensingmatrix bzw. die Dimension des zu rekonstruierenden Zustandsvektor \mathbf{x} ist für die Bestimmung der Distanz von entscheidender Bedeutung. Eine zu große diskrete Einteilung der Wegstrecke zwischen Kamera und Objekt führt gegebenenfalls zu einer nicht korrekten Rekonstruktion des Zustandsvektors sowie zu einer falschen Angabe der berechneten Distanz. Eine sehr kleine Diskretisierung kann die Nullraumeigenschaft (NSP) aus Kapitel 3.2.3 verletzen. Eine erfolgreiche Rekonstruktion des Zustandsvektors \mathbf{x} ist dann nicht mehr möglich. Für die Experimente wählen wir die diskrete partielle Fouriermatrix, deren Elemente wie folgt definiert sind:

$$w_N^{jk} = \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}jk\right\}, \tag{11.1}$$

wobei $j = 0, \dots, 6$ die sieben Messungen darstellt und $k = 0, \dots, N - 1$ die diskrete, äquidistante Einteilung der Entfernung zwischen Kamera und Objekt verdeutlicht. Der Parameter N entspricht der Dimension des Zustandsvektors \boldsymbol{x} .



Abb. 11.3: Aufnahme der ToF-Kamera mit einer Frequenz von 20 MHz

11.2 Anwendungsbeispiele

Für die Experimente wählen wir zunächst eine Dimension des Zustandsvektors von 250. Insgesamt erhalten wir damit eine 7×250 -Sensingmatrix. In einem ersten Experiment rekonstruieren wir, wie in Abbildung 11.1 dargestellt, einen Zustandsvektor \boldsymbol{x} mit Sparsity $s = 1$ und berechnen die Entfernung von der Kamera bis zum Paneel. In diesem Experiment existieren keine Mehrfachreflexionen, da wir keine zusätzlichen Objekte zwischen der Kamera und dem Paneel installiert haben. Später werden wir aber auf solche Mehrfachreflexionen treffen.

Untersuchen wir die Distanz von einem zentral liegenden Pixel im Bild, z. B. (140,80), welche allerdings in der aufgebauten Matrix dem Element (80,140) entspricht. Für KF-ET beobachten wir, dass für dieses Pixel der rekonstruierte Zustandsvektor eine Sparsity von eins besitzt. Auf Grund der Position des einzigen von Null verschiedenen Elements im berechneten Zustandsvektor können wir die Entfernung zwischen der Kamera und dem Paneel mit der Gleichung

$$d = \frac{1}{2} \frac{c}{2\pi f} \theta_{\hat{k}} \quad \text{mit } \theta_{\hat{k}} = \frac{2\pi}{N} (\hat{k} - 1), \quad \hat{k} = 1, \dots, N \quad (11.2)$$

ermitteln. Der Parameter c entspricht der Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,458$ m/sec und f der Grundfrequenz von 20 MHz. Der Faktor $1/2$ in der Gleichung (11.2) verdeutlicht die zurückgelegte Strecke zwischen der Kamera und dem Objekt. Für die

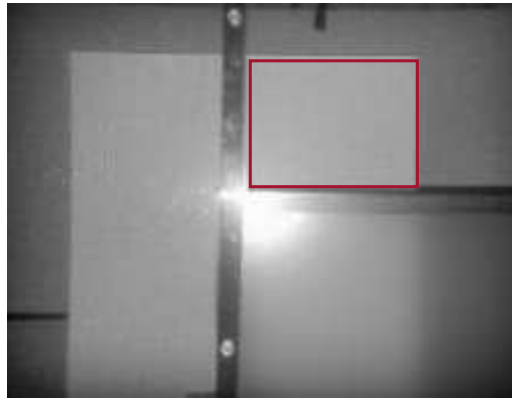


Abb. 11.4: Identisch mit Abbildung 11.3, jedoch mit Kennzeichnung (in Rot) der Pixelmenge, für die die Rekonstruktion des Zustandsvektors einen von Null verschiedenen Eintrag besitzt.

Betrachtung des Pixels (140,80) ermitteln wir für das von Null verschiedene Element des berechneten Zustandsvektors den Index 26. Nach Gleichung (11.2) erhalten wir für die Entfernung zwischen Kamera und Paneel den Wert 0,7795 m. Es sei anzumerken, dass trotz der exakten Entfernung zwischen Kamera und Paneel von 0,75 m die Kamera zu dem betrachteten Pixel nicht exakt horizontal verläuft, sodass eine größere Entfernung als 0,75 m realistisch ist.

Untersuchen wir in einem zweiten Beispiel das Pixel (115,75), welches im aufgenommenen Bild sehr zentral liegt. Wir können beobachten, dass die Entfernung 0,7495 m beträgt und exakt der vorgegebenen Entfernung zwischen der Kamera und dem Paneel im Experiment entspricht.

In der Tabelle 11.1 geben wir weitere Beispiele für die Rekonstruktion mit den Algorithmen C&P, OMP und KF-ET. Eine Auswertung mit dem Algorithmus KF-Aitken ist für diese Anwendung nicht sinnvoll, da die Rekonstruktion des Zustandsvektors ohne Thresholding zu keinem sparsen Zustandsvektor führt. Die Ergebnisse der Rekonstruktion mit den Algorithmen C&P, OMP und KF-ET sind in Tabelle 11.1 aufgeführt. Sollten sich aus den Berechnungen eine Sparsity von größer eins ergeben, so werden wir auf die Angabe der berechneten Entfernungen verzichten und für die Entfernungen d vereinfachend „–“ (nicht eindeutig) ausweisen. Für die Beispiele in Tabelle 11.1 wurde die Dimension des Zustandsvektors auf 250 festgelegt.

Mit den Beispielen beobachten wir, dass das annähernd zentral liegende Pixel (115,75) im Bild eine sehr genaue Abstandsberechnung liefert, während für die anderen entfernten Pixel ein leicht größerer Abstand zu beobachten ist. Weder der Algorithmus von C&P noch OMP können für diese Beispiele die exakte Sparsity ermitteln und somit auch keine Entfernung berechnen.

Pixel	Iterationen	C&P		OMP		KF-ET	
		s	d	s	d	s	d
(115,75)	100	116	–	2	–	1	0,7495
(115,75)	1000	55	–	2	–	1	0,7495
(115,75)	5000	38	–	2	–	1	0,7495
(140,80)	100	106	–	2	–	1	0,7795
(140,80)	1000	52	–	2	–	1	0,7795
(140,80)	5000	37	–	2	–	1	0,7795
(140,40)	100	101	–	2	–	1	0,8094
(140,40)	1000	55	–	2	–	1	0,8094
(140,40)	5000	37	–	2	–	1	0,8094

Tab. 11.1: Berechnung der Sparsity vom rekonstruierenden Zustandsvektor für verschiedene Pixel mit einer Reflexion ($s = 1$) mit Algorithmus 1 (C&P), Algorithmus 2 (OMP) und Algorithmus 7 (KF-ET) sowie der Entfernung nach Gleichung (11.2). Die Matrix ist eine diskrete partielle Fouriermatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{7 \times 250}$.

Verwenden wir für den Abstand zwischen Kamera und Paneel eine Aufteilung von 50, statt wie bisher von 250, so sind die Entfernungsberechnungen aufgrund der groben diskreten Abstandsaufteilung ungenauer. Für die Auswertung mit einer größeren Aufteilung verwenden wir für einen Vergleich die in Tabelle 11.1 genannten Pixel. Die

Pixel	Iterationen	C&P		OMP		KF-ET	
		s	d	s	d	s	d
(115,75)	100	36	–	5	–	1	0,8994
(115,75)	1000	19	–	5	–	1	0,8994
(115,75)	5000	13	–	5	–	1	0,8994
(140,80)	100	35	–	6	–	1	0,8994
(140,80)	1000	19	–	6	–	1	0,8994
(140,80)	5000	12	–	6	–	1	0,8994
(140,40)	100	35	–	5	–	1	0,8994
(140,40)	1000	18	–	5	–	1	0,8994
(140,40)	5000	11	–	5	–	1	0,8994

Tab. 11.2: Ausführungen wie in Tabelle 11.1, jedoch mit der Sensingmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{7 \times 50}$.

Ergebnisse sind in Tabelle 11.2 aufgeführt. Anhand der Tabellen 11.1 und 11.2 kann beobachtet werden, dass für alle untersuchten Pixel die erfolgreiche Rekonstruktion des Zustandsvektors \mathbf{x} mit der Sparsity eins und gleichzeitiger exakter Entfernungsberechnung unter allen Algorithmen nur das KF-ET liefert.

Die Untersuchungen des Algorithmus C&P zeigen, dass die Sparsity erst mit einer Erhöhung der Iterationen abnimmt. Die Berechnungen mit OMP zeigen dagegen deutlich, dass die ermittelte Sparsity trotz unterschiedlicher Anzahl von Iterationen konstant bleibt. Das liegt daran, dass wir ein Abbruchkriterium im OMP mit einer Fehlerschranke versehen haben, die von der Anzahl der Iterationen unabhängig ist.

Das KF-ET ermittelt mit sehr wenigen Iterationen nicht nur die exakte Sparsity, sondern auch den exakten Support und damit auch die exakte Entfernung zwischen der Kamera und dem Objekt.

Die unterschiedlichen Entfernungsberechnungen für das KF-ET in Tabelle 11.1 und 11.2 ergeben sich aus der differenzierten diskreten Aufteilung N . Je genauer bzw. feiner die diskrete Aufteilung ist, desto exakter kann die Entfernung ermittelt werden. Der zugehörige Zustandsvektor besitzt dann eine höhere Dimension. Allerdings besteht die Gefahr, dass die Sensingmatrix die Bedingung der RIP nach Gleichung (3.2) nicht erfüllen kann. In diesem Fall ist eine Rekonstruktion nicht möglich.

Wird der festgelegte Abstand von 0,75 m zwischen Kamera und Objekt z. B. in 50 diskreten Abschnitten wie in Tabelle 11.2 definiert, so ergibt sich eine Toleranz von 0,015 m. Wir erhalten für eine annähernd exakt berechnete Entfernung dann $d = \{d \in \mathbb{R} \mid 0,735 \leq d \leq 0,765\}$.

Als Nächstes untersuchen wir, wie sich die vorgestellten Algorithmen für die Rekonstruktion des sparsen Zustandsvektors verhalten, wenn ein Hindernis in der Form einer dünnen transparenten Folie zwischen der Kamera und dem Paneel gesetzt wird. Die Folie wird unterhalb auf der rechten Seite vor das Paneel montiert, wie in Abbildung 11.3 dargestellt. Die Transparenz der Folie sei hier eingeschränkt und wie in der Praxis meist unbekannt. Für diesen Fall treten vermehrt Mehrfachreflexionen auf, sodass die Rekonstruktion des sparsen Zustandsvektors vermutlich nicht möglich ist. Das Signal wird nicht nur vom Paneel, sondern auch zum Teil von der Folie reflektiert. Die Berechnung der Sparsity und somit auch die Entfernung zwischen Kamera und Paneel sind aufgrund dieses Hindernis nicht mehr realistisch.

Bevor wir uns das Verhalten genauer ansehen, berechnen wir den Abstand der Kamera zur Folie, indem wir das Pixel (140,90) gemäß der Abbildung 11.5 verwenden. Für dieses Experiment sei anzumerken, dass das ausgewählte Pixel in der Abbildung 11.5 auf dem festen Rahmen der eingespannten Folie sitzt und daher nur eine Reflexion möglich ist. Die Beobachtungen zeigen, dass der Algorithmus KF-ET nicht nur die Sparsity von eins, sondern auch den Abstand $d = 0,2998$ m berechnet. Der Zustandsvektor \mathbf{x} besitzt hier eine Dimension von 100. Wählen wir eine höhere Dimension des zu rekonstruierenden Zustandsvektors von z. B. 500, so beobachten wir einen Abstand von Kamera bis zum Objekt von $d = 0,2548$ m. Trotz verschiedener Dimensionen des Zustandsvektors erreichen wir eine gute approximative Abstandsberechnung. Allerdings ist zu beachten, dass wegen der hohen Dimension von 7×500 der Sensingmatrix gegebenenfalls die Bedingungen für eine erfolgreiche Rekonstruktion nicht mehr gegeben sind. Wie im Kapitel 3.4 ausgeführt, benötigen wir für eine erfolgreiche Rekonstruktion des sparsen Zustandsvektors genügend Messungen.

Untersuchen wir für unser Experiment das Verhalten der Algorithmen, wenn die Signale durch eine transparente Folie gesendet werden.



Abb. 11.5: Berechnung des Abstands zwischen Kamera und Folie

Für die Dimension des Zustandsvektors wählen wir, wie für die Beispiele aus Tabelle 11.1, $N = 250$. In Tabelle 11.3 ist zu beobachten, dass sich für den C&P die

Pixel	Iterationen	C&P		OMP		KF-ET	
		s	d	s	d	s	d
(150,120)	100	95	–	3	–	2	0,7495 und 0,8094
(150,120)	1000	59	–	3	–	2	0,7495 und 0,8094
(150,120)	5000	45	–	3	–	2	0,7495 und 0,8094
(110,140)	100	134	–	4	–	2	0,7195 und 0,6595
(110,140)	1000	100	–	4	–	2	0,7195 und 0,6595
(110,140)	5000	60	–	4	–	2	0,7195 und 0,6595

Tab. 11.3: Berechnung der Sparsity vom rekonstruierenden Zustandsvektor für zwei Pixel mit Reflexion durch die rechtsseitig befestigte Folie (Sparsity $s = 2$) und berechneter Entfernung nach Gleichung (11.2) mit Algorithmus 1 (C&P), Algorithmus 2 (OMP) und Algorithmus 7 (KF-ET). Die Matrix ist eine diskrete partielle Fouriermatrix $C \in \mathbb{C}^{7 \times 250}$.

Sparsity des Zustandsvektors erst mit Zunahme der Iterationen reduziert. Der Algorithmus OMP kann gut die Sparsity näherungsweise ermitteln. Lediglich das KF-ET berechnet die Sparsity des Zustandsvektors exakt. Die berechneten Abstände zeigen, dass zwar der Abstand zwischen Kamera und Panel näherungsweise angegeben werden kann, jedoch nicht der Abstand zwischen Kamera und Folie. Das liegt daran, dass das Theorem 3.2.1 für die Sparsity $s = 2$ nicht erfüllt ist.

Im letzten Beispiel sehen wir uns die Rekonstruktion durch die linksseitig befestigte Folie an. Die Ergebnisse sind der Tabelle 11.4 zu entnehmen. Für C&P gilt die gleiche Aussage wie bei den bisherigen Beispielen, dass eine Rekonstruktion des sparsen Zustandsvektors nicht möglich ist. Eine gute Annäherung der Sparsity kann für

Pixel	Iterationen	C&P			OMP	KF-ET	
		s	d	s	d	s	d
(50,80)	100	93	–	2	0,7795 und 1,5589	1	0,7795
(50,80)	1000	49	–	2	0,7795 und 1,5589	1	0,7795
(50,80)	5000	35	–	2	0,7795 und 1,5589	1	0,7795
(90,70)	100	96	–	3	–	1	0,7795
(90,70)	1000	58	–	3	–	1	0,7795
(90,70)	5000	42	–	3	–	1	0,7795

Tab. 11.4: Berechnung der Sparsity vom rekonstruierenden Zustandsvektor für zwei Pixel mit Reflexion durch die linksseitig befestigte Folie (Sparsity $s = 2$) und berechneter Entfernung nach Gleichung (11.2) mit Algorithmus 1 (C&P), Algorithmus 2 (OMP) und Algorithmus 7 (KF-ET). Die Matrix ist eine diskrete partielle Fouriermatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{7 \times 250}$.

OMP beobachtet werden. Das KF-ET zeigt für die Berechnung des Abstands zwischen Kamera und Paneel ein sehr gutes Ergebnis. Wir beobachten, dass das KF-ET den Abstand zum Paneel optimal berechnet, allerdings aber keine Informationen über die Existenz der Folie liefert. Die von der Folie erhaltenen Messdaten interpretiert das KF-ET als unbedeutend bzw. vernachlässigbar gering, sodass die relevanten Messdaten für die Abstandsberechnung zwischen der Kamera und dem Paneel herausgefiltert werden konnten. Das KF-ET erzielt auch unter Betrachtung eines Hindernisses in dieser Anwendung ebenfalls eine exakte Rekonstruktion.

In diesem Experiment beobachten wir, dass das KF-ET in allen betrachteten Fällen gegenüber den anderen Algorithmen ein sehr gutes Ergebnis für die Rekonstruktion von sparsen Signalen liefert. Es konnte gezeigt werden, dass nicht nur die Sparsity sehr genau beobachtet wurde, sondern auch der exakte Support für die Abstandsberechnung. Der entwickelte Algorithmus KF-ET kann unter Verwendung der neusten Technologie die Reflexionen sowie den Abstand zwischen der eingesetzten Kamera zu den Objekten realistisch und präzise angeben.

Kapitel 12

Zusammenfassung und Ausblick

12.1 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden wir die Beiträge in dieser Arbeit erläutern und die untersuchten Methoden zur erfolgreichen Rekonstruktion zusammenfassen und diskutieren. Folgende neue Ansätze wurden betrachtet und behandelt:

1. Verwendung des rekursiven Kalman-Filter-Algorithmus zur iterativen Lösung eines statistischen Optimierungsproblems
2. Verknüpfung von konvexer Optimierung mit stochastischen Ansätzen der optimalen Schätztheorie
3. Einführung von Optimalitätskriterien der Schätztheorie für die sparse Rekonstruktion
4. Verwendung der ℓ_1 -Norm als nichtlineare Beobachtung im Kalman-Filter
5. Kalman-Filter löst das ℓ_1 -Minimierungsproblem im Nullraum der Sensingmatrix
6. Modifizierung des Kalman-Filters mit Konvergenzbeschleunigungsverfahren – Rekonstruktion des Zustandsvektors erfolgt über eine beschleunigte skalare Folge
7. Erweiterung des Kalman-Filters mit einem neu entwickelten externen Thresholding-Prozess
8. Kalman-Filter mit externem Thresholding als zusätzlicher effektiver Support-Schätzer

In dieser Arbeit wurde das vorwiegend mathematisch geprägte Forschungsgebiet Compressed Sensing untersucht – speziell das wichtige Teilproblem der sparsen Rekonstruktion. Im Verlauf der letzten zwanzig Jahre Entwicklung hat CS Einzug in die verschiedenen Disziplinen gehalten.

Einige wenige Arbeiten auf dem Gebiet CS wurden mit Kalman-Filtern untersucht. Allerdings beruhten diese Arbeiten vorwiegend auf der Methode der kleinsten Quadrate. Das Kalman-Filter wird in vielen ingenieurtechnischen Bereichen eingesetzt und entspricht einem iterativen Schätzalgorithmus für die Systemparameter auf Grundlage gestörter Beobachtungen.

Wir verwenden den rekursiven Kalman-Filter-Algorithmus in dieser Arbeit für das Lösen eines statistischen Optimierungsproblems. In den Ausführungen des Kalman-Filters kombinieren wir daher stochastische Ansätze der optimalen Schätztheorie mit konvexer Optimierung. Einige wenige Arbeiten auf dem Gebiet der sparsen Rekonstruktion verwenden bereits Optimalitätskriterien aus der Schätztheorie, wie z. B. das CRB in [12].

Unser Ziel in dieser Arbeit ist die Rekonstruktion eines sparsen Zustandsvektors $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ mit minimaler ℓ_1 -Norm, d. h.

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

für gegebene Messwerte $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$ und einer Sensingmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m \ll n$.

Im Kalman-Filter wird die ℓ_1 -Norm als nichtlineare Beobachtung betrachtet. Das führt dazu, dass wir das erweiterte linearisierte Kalman-Filter benutzen und somit die nichtlineare Beobachtung der ℓ_1 -Norm durch eine lineare Approximation ersetzen.

Allerdings schätzen wir nicht wie üblich im Kalman-Filter den gesamten Zustandsvektor, sondern nur einen Zustandsvektor aus dem Nullraum der zugrundeliegenden konstanten Sensingmatrix. Diese Modifikation bezeichnen wir als *Nullraum-Variante* des Kalman-Filters. Insbesondere berechnet das Kalman-Filter in jeder Iteration einen Zustandsvektor aus dem Nullraum, dessen Summe mit der partikulären Lösung einen Zustandsvektor mit geringer ℓ_1 -Norm liefert.

Das hat zum einen den großen Vorteil, dass wir anstatt mit der Dimension n ausschließlich mit der Dimension $n - m$ arbeiten und zum anderen bleiben wir im Lösungsraum der partikulären Lösung während der Rekursion. Für das Kalman-Filter beobachten wir, dass die ℓ_1 -Norm des berechneten Zustandsvektors nicht immer gegen die exakte ℓ_1 -Norm konvergiert. Der Grund liegt in den fehlenden stochastischen Parameterkenntnissen \mathbf{R}, \mathbf{Q} , die unter anderem dadurch entstehen, dass ein rekursiver Algorithmus wie das Kalman-Filter, welcher auf einem dynamischen Zustandsraummodell beruht, zur iterativen Lösung eines statischen Optimierungsproblems verwendet wird. Hierdurch verlieren die Annahmen zeitlich unkorrelierter (weißer) stochastischer Prozesse ihre Bedeutung. Ersetzt und kompensiert wird dies durch die Konstruktion einer schnell und sicher konvergierende Folge von ℓ_1 -Normen, die die optimale Konvergenz deterministisch sichert. Dazu verwenden wir Konvergenzbeschleunigungsverfahren von Aitken, die das Ziel haben, eine beschleunigte skalare Folge zu konstruieren. Anstatt einen Zustandsvektor im Nullraum des Kalman-Filters zu schätzen, konstruieren wir die skalare Folge der reduzierten ℓ_1 -Normen. Das Extrapolationsverfahren nach Aitken

produziert in den ersten Rekursionen eine hinreichend ähnliche Folge von Skalaren. Diese Folge ist Voraussetzung für den Δ^2 -Aitken-Konvergenzbeschleuniger, der auf Grundlage der ersten Folgeglieder eine schnell konvergierende Folge entwickelt. Diese beschleunigte Folge liefert nach erfolgter Rekursion einen komprimierten Vektor.

Interessant und bemerkenswert an dieser Methode ist, dass ein ℓ_1 -Minimierungsproblem für sparse Signale ohne jeglichen Verlust der Performance des ursprünglichen Kalman-Filters in der Nullraum-Variante in eine beschleunigte Folge von Skalaren transformiert werden kann. Abweichend von den anderen Verfahren, bei denen Thresholding-Verfahren („hard“ oder „soft“) essentieller Bestandteil des Algorithmus ist, kommt dieser Ansatz völlig ohne einen solchen Schritt aus.

Damit ist dieser Ansatz prinzipiell auch zur Rekonstruktion nicht streng sparser, aber komprimierbarer Zustandsvektoren anwendbar, deren Komponenten nicht einem Schwellenoperator „zum Opfer fallen“. Ebenso unterliegt dieser Algorithmus im Fall starker überlagerter Störungen nicht einem fälschlich „zuschlagenden“ Schwellenoperator, bei dem die kleinen zufälligerweise wenig gestörter Zustandskomponenten den noch kleineren, aber stärker gestörten Komponenten geopfert werden. So werden z. B. die Komponenten des Zustandsvektors bei einem Hard-Thresholding, die einen bestimmten Schwellwert unterschreiten, „hart“ auf Null gesetzt, während die restlichen Komponenten in ihrem Wert erhalten bleiben.

Im zweiten Teil der Arbeit stellen wir für das Kalman-Filter in seiner Nullraum-Variante einen externen Thresholding-Prozess vor. Der neu entwickelte Ansatz in Form eines externen Thresholding-Prozess für das Kalman-Filter in seiner Nullraum-Variante liefert neue Kriterien für eine erfolgreiche Rekonstruktion sparser Signale. Extern heißt, dass der Thresholding-Prozess das Kalman-Filter während der Rekursion nicht beeinflusst. Das bedeutet insbesondere, dass dem Kalman-Filter keine Informationen aus dem Thresholding-Prozess übergeben werden. Nach jeder Iteration im Kalman-Filter selektiert der Thresholding-Prozess wichtige Informationen aus dem geschätzten Zustandsvektor des Kalman-Filters. Mit diesen Informationen wird ein neues überbestimmtes lineares Gleichungssystem aufgebaut, dessen Lösung ein sehr guter Kandidat des zu rekonstruierenden sparsen Zustandsvektors ist.

Der entscheidende Vorteil dieser Methode besteht darin, dass für das Kalman-Filter in der Nullraum-Variante die Konvergenz der ℓ_1 -Norm gesichert ist – und nicht wie bei den üblichen angewandten Thresholding-Verfahren gestört wird.

Einzigartig und substanziell für diesen neuen Ansatz ist, dass die Kombination des Kalman-Filters mit dem externen Thresholding-Prozess zusätzlich als Support-Schätzer interpretiert werden kann. Mit dieser Erweiterung in Form eines externen Thresholding-Prozesses im Kalman-Filter ist nicht nur die Reduzierung der ℓ_1 -Norm gesichert, sondern auch der optimale Support des Zustandsvektors. Dieser Prozess unterstützt entscheidend die Rekonstruktion eines sparsen Signals.

Die Beobachtungen im rauschfreien Fall zeigen uns sehr deutlich, dass das Kalman-Filter mit externem Thresholding-Prozess nicht nur die exakte sparse Lösung ermittelt, sondern auch die exakte Lösung nach wenigen Iterationen liefert.

In der Praxis existieren allerdings keine störfreien Messungen. Messrauschen interpretieren wir als stochastische Abweichungen zwischen der Messgröße und dem Messsignal. Umfangreiche Untersuchungen mit gestörten Daten veranschaulichen in dieser Arbeit, dass das Kalman-Filter mit externem Thresholding-Prozess zu einer akzeptable Rekonstruktion führt. Die Vergleiche mit anderen in der Arbeit vorgestellten ℓ_1 -Minimierungsalgorithmen zeigen, dass die neuen Ansätze für das Kalman-Filter eine eindeutige Verbesserung für die Rekonstruktion von sparsen Signalen mit und ohne gestörten Daten liefern.

Um die neuen Ansätze im Kalman-Filter mit den vorgestellten Algorithmen in der Praxis zu testen, führen wir ein Experiment in unserem hauseigenen Labor (ZESS) aus. Für das Experiment verwenden wir die neuste Technik des entfernungsmessenden 3D-Bildgebungssystems. Das Ziel besteht darin, die Entfernung zwischen einer Kamera und einem Paneel mit Hilfe des zu rekonstruierenden Zustandsvektors zu berechnen. Zusätzliche Hindernisse, z. B. durch Einbau von transparenten Folien zwischen Kamera und Paneel, beeinflussen das Messergebnis negativ, da zusätzlich Mehrfachreflexionen auftreten, die nicht selektiert werden können. Trotz verschiedener Hindernisse können wir eine gute Rekonstruktion für die Entfernungsberechnung zwischen Kamera und Paneel beobachten. Die Auswertungen zeigen, dass mit den neuen Ansätzen für das Kalman-Filter auch in der Praxis, z. B. für die Entfernungsberechnungen mit und ohne Hindernisse sowie unter Beobachtung gestörter Daten, die Rekonstruktion sparser Signale anwendbar ist und erfolgreich umgesetzt werden kann.

12.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit bietet die Basis für weitere Untersuchungen in der Rekonstruktion sparser Signale.

Die Untersuchung der analytischen Formulierung von CS, auf die wir im Kapitel 5.2 kurz eingegangen sind, ist von immenser Bedeutung. In der Theorie der analytischen ℓ_1 -Minimierung gibt es noch viele Fragen, die geklärt und untersucht werden müssen. Können z. B. optimale Analyse-Operatoren gefunden werden, dann ergeben sich für spezielle Anwendungsbereiche mit der analytischen Formulierung viele Möglichkeiten. Das grundlegende Ziel einer analytischen Formulierung von CS besteht darin, eine Transformation so zu finden, dass das „schwierige“ Problem in ein leicht zu berechnendes Problem überführt werden kann.

Es gibt bereits ansatzweise vielversprechende Ausführungen und Untersuchungen in [60–62], [64, 65] für die analytische Formulierung von CS.

Mit den neuen Ansätzen, zum einen die Verknüpfung von konvexer Optimierung mit den stochastischen Ansätzen der optimalen Schätztheorie und zum anderen die Einführung von Optimalitätskriterien der Schätztheorie für die sparse Rekonstruktion, ergeben sich weitere Forschungsfragen. Es wäre z. B. zu überdenken, ob der berechnete Schätzwert wieder zur Initialisierung des Kalman-Filters verwendet werden könnte. Ebenso kann, wie in [71] aufgeführt, die Wirkung von vektoriiellen Konvergenzbeschleunigungsverfahren auf das Kalman-Filter untersucht werden.

Des Weiteren existieren grundlegende Zusammenhänge zwischen der Optimierungstheorie und der Schätztheorie, die z. B. in [12, 13] genannt werden. Die Verknüpfung von Optimalitätskriterien mit der Schätztheorie kann für das Kalman-Filter zusätzlich relevant sein. Ein gezieltes Optimalitätskriterium für das Kalman-Filter mit externem Thresholding-Prozess kann z. B. für die Eliminierung der restlichen Rauschanteile verantwortlich sein. Immerhin wird durch den Thresholding-Prozess zirka die Hälfte der enthaltenen Rauschanteile bereits beseitigt. Der Support des zu rekonstruierenden Zustandsvektors wird auf Grund der vorhandenen Rauschanteile nicht immer exakt berechnet. Der Einsatz von Schätzverfahren für die Berechnung bzw. Abschätzung der Supportmenge für den Zustandsvektor wäre eine weitere Maßnahme zur Selektierung von Rauschanteilen. Gelingt es uns, die exakte Supportmenge zu bestimmen, so bleibt ein vernachlässigbarer geringer Rauschanteil erhalten. Eine Möglichkeit wäre, z. B. ein konstruktives Abbruchkriterium im Thresholding-Prozess zu implementieren, welches die Beziehung zwischen der ℓ_1 -Norm und der ℓ_2 -Norm des berechneten Zustandsvektor berücksichtigt.

Die Modellunsicherheiten, die durch die vereinfachte Abbildung des realen Systems durch ein mathematisches Modell ausgedrückt werden, können durch ein angepasstes mathematisches Modell reduziert werden, um damit auch die Unsicherheiten der stochastischen Parameter im Kalman-Filter weiter einzuschränken.

Anhang A

Definition von Normen und Skalarprodukt

Definition A.0.1 Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Eine Norm auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\|$$

mit den Eigenschaften:

$$(i) \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in V \quad (\text{Definitheit})$$

$$(ii) \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (\text{Positive Homogenität})$$

$$(iii) \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Bemerkung 1 Eine Seminorm ist eine Abbildung, die nur die Homogenitätseigenschaft und die Dreiecksungleichung erfüllt.

Bemerkung 2 Die Abbildung

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$$

ist für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $0 < p < \infty$ definiert durch

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{l=1}^n |x_l|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(1) Für $1 \leq p < \infty$ ist die Abbildung eine Norm, die ℓ_p -Norm.

(2) Für $0 < p < 1$ ist die Abbildung nur eine Quasinorm, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist.

Die Quasinorm erfüllt jedoch noch die Dreiecksungleichung, falls eine Konstante $K \geq 1$ existiert, d. h. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq K (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Definition A.0.2 Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

heißt Skalarprodukt, falls Folgendes gilt:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ und $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in V$ (Positive Definitheit)

(ii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ (Hermitesch)

(iii) $\langle \lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \bar{\mu} \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$, $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}_1 + \mu \mathbf{y}_2 \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_1 \rangle + \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_2 \rangle$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (Sesquilinear)

Anhang B

Normierung der Spaltenvektoren einer Matrix

Wird eine Matrix \mathbf{A} mit normierten Spalten benötigt, so sind folgende Umformungen möglich.

Die i -te Spalte der Matrix $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ bezeichnen wir mit \mathbf{a}_i .

Wir definieren eine Diagonalmatrix \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}_{i=1,\dots,n}(d_{ii})$$

mit $d_{ii} = \|\mathbf{a}_i\|_2^{-1}$ für $i = 1, \dots, n$.

Wegen $\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{I}$ gilt auch $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{x}$.

Mit $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ folgt $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}$ und

$$\hat{\mathbf{A}} = \left[\frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|_2}, \frac{\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2\|_2}, \dots, \frac{\mathbf{a}_n}{\|\mathbf{a}_n\|_2} \right].$$

Anhang C

Ableitung der Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz orthogonaler Projektionen

In diesem Anhang leiten wir die Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz orthogonaler Projektionen her. Dieser Ansatz ist die ursprüngliche Ableitung, die von Rudolf E. Kalman im Jahr 1960 entwickelt wurde. Die Herleitung über den Bayes-orientierten Ansatz wurde hier nicht gewählt, da wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen von bedingten und unbedingten Verteilungsfunktionen ausführlich dargestellt werden müssten. Der Innovationsansatz betrachtet zusätzlich eventuell vorhandene Korrelationen zwischen Messrauschen und dem Prozessrauschen. Die Annahmen solcher Korrelationen werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Der optimale Schätzwert $\mathbf{x}^{(k-1)}$ ist die orthogonale Projektion auf den von den vorherigen Messungen $\mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(k-1)}$ generierten linearen Unterraum \mathcal{M}_{k-1} . Der lineare Operator O soll die orthogonale Projektion eines Vektors $\mathbf{x}^{(k-1)}$ auf den linearen Unterraum verdeutlichen, d. h.

$$\hat{\mathbf{x}}^{(k-1)} = O \left\{ \mathbf{x}^{(k-1)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\}.$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ ist die Spur ihrer Korrelationsmatrix, d. h.

$$\langle \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \rangle = E \left\{ \left(\mathbf{x}^1 \right)^H \mathbf{x}^2 \right\} = \text{tr} \left(E \left\{ \mathbf{x}^1 \left(\mathbf{x}^2 \right)^H \right\} \right).$$

Mit tr wird die *Spur einer Matrix* bezeichnet.

Kommen wir zur Herleitung der Kalman-Filter-Gleichungen über den Ansatz orthogonaler Projektionen.

Zum Zeitpunkt t_k erhalten wir einen neuen Messvektor $\mathbf{b}^{(k)}$, den wir in zwei Teilvektoren zerlegen. Der eine Teilvektor liegt in dem Unterraum \mathcal{M}_{k-1} und der andere Teilvektor in dessen zugehörigen orthogonalen Raum,

$$\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{b}_{\mathcal{M}_{k-1}}^{(k)} + \mathbf{b}_{O_{k-1}}^{(k)}. \tag{C.1}$$

Verschwindet der Vektor $\mathbf{b}_{O_{k-1}}^{(k)}$ nicht, so wird mit der aktuellen Messung ein neuer Unterraum \mathcal{M}_k generiert. Der neu generierte Unterraum \mathcal{M}_k wird zerlegt in den vorhandenen Unterraum \mathcal{M}_{k-1} und in den orthogonalen Unterraum \mathcal{Z}_{k-1} , der vom Vektor $\mathbf{b}_{O_{k-1}}^{(k)}$ generiert wird:

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k-1} + \mathcal{Z}_{k-1} \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}_{k-1} \perp \mathcal{Z}_{k-1}.$$

Der optimale Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}^{+(k)}$ von $\mathbf{x}^{(k)}$ ist die orthogonale Projektion von $\mathbf{x}^{(k)}$ auf den neuen linearen Unterraum \mathcal{M}_k , d. h.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{+(k)} &= O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{M}_k \right\} \\ &= O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / (\mathcal{M}_{k-1} + \mathcal{Z}_{k-1}) \right\} \\ &= O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\} + O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{Z}_{k-1} \right\}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Der Ausdruck $O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\}$ entspricht der orthogonalen Projektion des Zustandsvektors zum Zeitpunkt t_k auf den vorhandenen linearen Unterraum \mathcal{M}_{k-1} und stellt damit eine Prädiktion dar, die zum Zeitpunkt t_{k-1} berechnet werden kann. Ersetzen wir den Ausdruck $O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\}$ mit $\hat{\mathbf{x}}^{-(k)}$, erhalten wir

$$\hat{\mathbf{x}}^{+(k)} = \hat{\mathbf{x}}^{-(k)} + O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{Z}_{k-1} \right\}. \tag{C.3}$$

Der neue Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}^{+(k)}$ resultiert aus dem Prädiktionsschätzwert $\hat{\mathbf{x}}^{-(k)}$ mit einer Korrektur. Die Korrektur ergibt sich durch die orthogonale Projektion des Zustands auf den zu \mathcal{M}_{k-1} orthogonalen, von den neuen Messungen $\mathbf{b}^{(k)}$ generierten Unterraum \mathcal{Z}_{k-1} . Das heißt, dass die Korrektur des Prädiktionsschätzwerts orthogonal zum Unterraum \mathcal{M}_{k-1} ist und damit auch zu $\hat{\mathbf{x}}^{-(k)}$, der die Projektion auf \mathcal{M}_{k-1} verdeutlicht und somit in diesem Unterraum liegt.

Der Prädiktionsschätzwert kann als bedingter Erwartungswert einer zukünftigen Zufallsvariable, bedingt durch die vorhandenen Messwerte, interpretiert werden. Die Systemmodellgleichung (4.1) aus Kapitel 4.1.1

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{w}^{(k-1)} \tag{C.4}$$

wird in den hergeleiteten Ausdruck

$$\hat{\mathbf{x}}^{-(k)} = O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\} \tag{C.5}$$

eingesetzt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{-(k)} &= O \left\{ \left(\mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{w}^{(k-1)} \right) / \mathcal{M}_{k-1} \right\} \\ &= \mathbf{A}^{(k-1)} O \left\{ \mathbf{x}^{(k-1)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\} + O \left\{ \mathbf{w}^{(k-1)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\}. \end{aligned}$$

Die orthogonale Projektion $O \{ \mathbf{w}^{(k-1)} / \mathcal{M}_{k-1} \}$ verschwindet, weil $\mathbf{w}^{(k-1)}$ unabhängig von $\mathbf{x}^{(k-1)}$ und $\mathbf{v}^{(k-1)}$ (definiert in Kapitel 4.1.2, Gleichung (4.2)) in allen Iterationen ist. Es gilt also

$$\widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} = \mathbf{A}^{(k-1)} O \left\{ \mathbf{x}^{(k-1)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\}.$$

In Fällen, in denen $\mathbf{v}^{(k-1)}$ und $\mathbf{w}^{(k)}$ korrelieren, d. h. eine Beziehung besitzen, verschwindet die orthogonale Projektion nicht. Solche Fälle werden mit dem Innovationsansatz [56] gelöst.

Aus der Gleichung (C.2) folgt

$$\widehat{\mathbf{x}}^{+(k-1)} = O \left\{ \mathbf{x}^{(k-1)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\}$$

und damit

$$\widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} = \mathbf{A}^{(k-1)} \widehat{\mathbf{x}}^{+(k-1)}. \quad (\text{C.6})$$

Durch die Linearität der Orthogonalprojektion O kann die orthogonale Korrektur als eine lineare Funktion des Vektors $\mathbf{b}_{O_{k-1}}$ in Gleichung (C.3) wie folgt interpretiert werden:

$$O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{Z}_{k-1} \right\} = \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{b}_{O_{k-1}}^{(k)}. \quad (\text{C.7})$$

$\mathbf{K}^{(k)}$ ist eine Gewichtsmatrix, die den orthogonalen Anteil des Vektors $\mathbf{b}^{(k)}$ auf die orthogonale Korrektur des Prädiktionsschätzwerts abbildet.

Als Nächstes werden wir den orthogonalen Anteil von $\mathbf{b}^{(k)}$ bestimmen, d. h.

$$\mathbf{b}_{\mathcal{M}_{k-1}}^{(k)} = O \left\{ \mathbf{b}^{(k)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\}.$$

Setzen wir die Beobachtungsgleichung (4.2) aus Kapitel 4.1.2

$$\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)}$$

ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\mathcal{M}_{k-1}}^{(k)} &= O \left\{ \left(\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)} \right) / \mathcal{M}_{k-1} \right\} \\ &= \mathbf{C}^{(k)} O \left\{ \mathbf{x}^{(k)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\} + O \left\{ \mathbf{v}^{(k)} / \mathcal{M}_{k-1} \right\}. \end{aligned}$$

Der Rauschanteil $\mathbf{v}^{(k)}$ ist von allen anderen zurückliegenden Messungen unabhängig, daher gilt $O \{ \mathbf{v}^{(k)} / \mathcal{M}_{k-1} \} = \mathbf{0}$. Mit Gleichung (C.5) folgt direkt

$$\mathbf{b}_{\mathcal{M}_{k-1}}^{(k)} = \mathbf{C}^{(k)} \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)}. \quad (\text{C.8})$$

Mit der Auflösung der Gleichung (C.1) nach $\mathbf{b}_{O_{k-1}}^{(k)}$ und dem Einsetzen der Gleichung (C.8) erhalten wir

$$\mathbf{b}_{O_{k-1}}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)}. \quad (\text{C.9})$$

Zusammenfassend folgt aus Gleichung (C.3), (C.7) und (C.9)

$$\widehat{\mathbf{x}}^{+(k)} = \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} \right). \quad (\text{C.10})$$

Darauffolgend berechnen wir die Kalman-Gainmatrix \mathbf{K} als optimale Abbildungsmatrix und anschließend leiten wir eine Vorschrift zur Berechnung der Schätzfehlerkovarianz \mathbf{P}_e her.

Kommen wir zur Bestimmung der Kalman-Gainmatrix \mathbf{K} . Als Erstes betrachten wir den Schätzfehler

$$\mathbf{e}^{+(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \widehat{\mathbf{x}}^{+(k)} \quad (\text{C.11})$$

und den Prädiktionsfehler

$$\mathbf{e}^{-(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)}. \quad (\text{C.12})$$

Den Zusammenhang zwischen dem Prädiktionsfehler und dem Schätzfehler erhalten wir, indem wir die Gleichung (C.4) und die Prädiktionsgleichung (C.6) in Gleichung (C.12) einsetzen.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{-(k)} &= \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{w}^{(k-1)} - \mathbf{A}^{(k-1)} \widehat{\mathbf{x}}^{+(k-1)} \\ &= \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{e}^{+(k-1)} + \mathbf{w}^{(k-1)} \end{aligned}$$

Da das Kalman-Filter ein erwartungstreuer Schätzalgorithmus ist, sind auch Schätzfehler und Prädiktionsfehler erwartungswertfrei. Für die Prädiktionsfehlerkovarianz ergibt sich direkt wegen der Erwartungswertfreiheit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_e^{-(k)} &= E \left\{ \mathbf{e}^{-(k)} \mathbf{e}^{-(k)\text{H}} \right\} \\ &= \mathbf{A}^{(k-1)} E \left\{ \mathbf{e}^{+(k-1)} \mathbf{e}^{+(k-1)\text{H}} \right\} \mathbf{A}^{(k-1)\text{H}} + \mathbf{Q}^{(k-1)} \\ &= \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{P}_e^{+(k-1)} \mathbf{A}^{(k-1)\text{H}} + \mathbf{Q}^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Während der Formulierung wurde berücksichtigt, dass $\mathbf{w}^{(k-1)}$ erst $\mathbf{x}^{(k)}$ beeinflusst und somit auch erst $\mathbf{e}^{+(k)}$.

Setzen wir die Gleichung (C.10) in (C.11) ein und wenden das Beobachtungsmodell

gemäß Gleichung (4.2) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{+(k)} &= \mathbf{x}^{(k)} - \left[\widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} \right) \right] \\
&= \mathbf{x}^{(k)} - \left[\widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} \right) \right] \\
&= \mathbf{e}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{e}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{e}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)}. \tag{C.14}
\end{aligned}$$

Weil der Schätzfehler \mathbf{e}^+ orthogonal auf allen verarbeiteten Daten und deren abgeleiteten Größen ist, können wir für die Bestimmung der Kalman-Gainmatrix \mathbf{K} unter Beachtung (C.8) folgenden Ausdruck fordern:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= E \left\{ \mathbf{e}^{+(k)} \mathbf{b}_{O_{k-1}}^{(k)\text{H}} \right\} \\
&= E \left\{ \mathbf{e}^{+(k)} \left(\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} \right)^{\text{H}} \right\} \\
&= E \left\{ \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{e}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \right] \left[\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} \right]^{\text{H}} \right\} \\
&= E \left\{ \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{e}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \right] \left[\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{v}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \widehat{\mathbf{x}}^{-(k)} \right]^{\text{H}} \right\} \\
&= E \left\{ \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{e}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \right] \left[\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{e}^{-(k)} + \mathbf{v}^{(k)} \right]^{\text{H}} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Erwartungswerte über die Mischterme verschwinden, da $\mathbf{v}^{(k)}$ nicht den Prädiktionsefehler $\mathbf{e}^{-(k)}$ beeinflusst, also nicht von $\mathbf{x}^{(k)}$ abhängig ist. Wir erhalten somit

$$\mathbf{0} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)}$$

und nach Auflösen die Kalman-Gainmatrix:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \\
\mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} &= \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \\
\mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} &= \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)} \right) \\
\mathbf{K}^{(k)} &= \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} \left(\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)} \right)^{-1}. \tag{C.15}
\end{aligned}$$

Als letzte Ausführung leiten wir noch die Vorschrift für die Schätzfehlerkovarianz \mathbf{P}_e^+ her, indem wir die Gleichung (C.14) verwenden.

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_e^{+(k)} &= E \left\{ \mathbf{e}^{+(k)} \mathbf{e}^{+(k)\text{H}} \right\} \\
&= E \left\{ \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{e}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \right] \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[\left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{e}^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \right]^{\text{H}} \right\},
\end{aligned}$$

und mit Wegfall der Mischprodukte durch die Unabhängigkeit zwischen \mathbf{v} und \mathbf{x} sowie allen zurückliegenden Messwerten gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_e^{+(k)} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{P}_e^{-(k)} \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right)^{\text{H}} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)\text{H}} \\
&= \mathbf{P}_e^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} - \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} \mathbf{K}^{(k)\text{H}} \\
&\quad + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} \mathbf{K}^{(k)\text{H}} + \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} \mathbf{K}^{(k)\text{H}} \\
&= \mathbf{P}_e^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} \\
&\quad - \left[\mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} - \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)} \right) \right] \mathbf{K}^{(k)\text{H}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir die Kalman-Gainmatrix aus Gleichung (C.15) ein, folgt somit für die Schätzfehlerkovarianz \mathbf{P}_e^+

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_e^{+(k)} &= \mathbf{P}_e^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)} - \left(\mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} - \mathbf{P}_e^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} \right) \mathbf{K}^{(k)\text{H}} \\
&= \mathbf{P}_e^{-(k)} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}_e^{-(k)}. \tag{C.16}
\end{aligned}$$

Zusammenfassend geben wir die Kalman-Filter-Gleichungen (siehe [56]) für den Schätzalgorithmus gemäß Gleichung (C.6), (C.13) sowie (C.10), (C.15) und (C.16) an.

Prädiktion (Prognose):

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}^{-(k)} &= \mathbf{A}^{(k-1)} \hat{\mathbf{x}}^{+(k-1)} \\
\mathbf{P}^{-(k)} &= \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{P}^{+(k-1)} \mathbf{A}^{(k-1)\text{H}} + \mathbf{Q}^{(k-1)}
\end{aligned}$$

Korrektur:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}^{+(k)} &= \hat{\mathbf{x}}^{-(k)} + \mathbf{K}^{(k)} \left(\mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{C}^{(k)} \hat{\mathbf{x}}^{-(k)} \right) \\
\mathbf{K}^{(k)} &= \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} \left(\mathbf{C}^{(k)} \mathbf{P}^{-(k)} \mathbf{C}^{(k)\text{H}} + \mathbf{R}^{(k)} \right)^{-1} \\
\mathbf{P}^{+(k)} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{C}^{(k)} \right) \mathbf{P}^{-(k)}
\end{aligned}$$

Anhang D

Beweis der Konvergenz des Kalman-Filters

Mit diesen Ausführungen werden wir die Konvergenz des Kalman-Filter-Algorithmus 4 (EKF) beweisen, indem wir den Beweis für die Reduzierung der ℓ_1 -Norm zeigen.

Die ℓ_1 -Norm ist gegeben durch

$$h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{|x_i|} x_i, \quad x_i \neq 0. \quad (\text{D.1})$$

Für die Konvergenz der ℓ_1 -Norm, unter Berücksichtigung der Kalman-Gleichungen, gilt für den Zustandsvektor \mathbf{x}_ν^- in der $(k+1)$ -Iteration:

$$h\left(\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)}\right) = \left\| \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_\mathcal{N} \widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)} \right\|_1. \quad (\text{D.2})$$

Gleichung (D.1) können wir für die Linearisierung auch anders ausdrücken

$$h(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1 = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$$

mit

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{dh(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^*}{|x_1|} & \frac{x_2^*}{|x_2|} & \cdots & \frac{x_n^*}{|x_n|} \end{bmatrix}$$

und für die $(k+1)$ -Iteration setzen wir vereinfachend

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \left[\frac{dh(\mathbf{x})}{dx_1} \quad \frac{dh(\mathbf{x})}{dx_2} \quad \cdots \quad \frac{dh(\mathbf{x})}{dx_n} \right] \Big|_{\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_\mathcal{N} \widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)}}$$

und damit gilt für den Zustandsvektor $\mathbf{x}_\nu^{-(k+1)}$

$$\begin{aligned} h\left(\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)}\right) &= \mathbf{H}^{(k+1)} \cdot \left[\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_\mathcal{N} \widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)} \right] \\ &= \mathbf{H}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{H}^{(k+1)} \mathbf{E}_\mathcal{N} \widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Aus der Kalman-Gleichung

$$y^{(k+1)} = \gamma_{k+1} \left\| \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \right\|_1$$

unter Berücksichtigung von

$$\widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} = \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)} \tag{D.4}$$

folgt

$$y^{(k+1)} = \gamma_{k+1} \left\| \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)} \right\|_1.$$

Weiter geht es mit der Kalman-Gleichung

$$\widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k+1)} = \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} + \mathbf{K}^{(k+1)} \left[y^{(k+1)} - h \left(\widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \right) \right],$$

Linksmultiplikation mit

$$\mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} = \frac{dh(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)}} \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{N}} = \mathbf{H}^{(k+1)} \cdot \mathbf{E}_{\mathcal{N}} \tag{D.5}$$

ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k+1)} &= \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \\ &\quad + \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \mathbf{K}^{(k+1)} \left[y^{(k+1)} - h \left(\widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \right) \right]. \end{aligned} \tag{D.6}$$

Setzen wir die Gleichung (D.5) in Gleichung (D.3) folgt

$$\begin{aligned} h \left(\widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \right) &= \mathbf{H}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_p + \underbrace{\mathbf{H}^{(k+1)} \mathbf{E}_{\mathcal{N}}}_{\mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \\ &= \mathbf{H}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)}. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Die erhaltene Gleichung (D.7) wird in Gleichung (D.6) eingesetzt

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k+1)} &= \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \\ &\quad + \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \mathbf{K}^{(k+1)} \left[y^{(k+1)} - h \left(\widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \right) \right] \\ &= \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} + \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \mathbf{K}^{(k+1)} \\ &\quad \cdot \left[y^{(k+1)} - \left(\mathbf{H}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \right) \right] \\ &= \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} + \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \mathbf{K}^{(k+1)} \\ &\quad \cdot \left(y^{(k+1)} - \mathbf{H}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_p - \mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{-(k+1)} \right) \end{aligned}$$

und mit der Addition von $\mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p - y^{(k+1)}$ auf beiden Seiten folgt

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p - y^{(k+1)} + \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{+(k+1)} \\
&= \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{K}^{(k+1)}\left(y^{(k+1)} - \mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p - \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)}\right) \\
&\quad + \mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p - y^{(k+1)} + \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)} \\
&= \mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p - y^{(k+1)} + \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)} \\
&\quad - \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{K}^{(k+1)}\left(\mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)} - y^{(k+1)}\right) \\
&= \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{K}^{(k+1)}\right)\left(\mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)} - y^{(k+1)}\right). \quad (\text{D.8})
\end{aligned}$$

Nehmen wir den linken Teil der Gleichung und den rechten Faktor der rechten Seite der Gleichung (D.8) und vergleichen diese beiden Ausdrücke, so gilt auf Grund der Abnahme der ℓ_1 -Norm folgender Ausdruck

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{+(k+1)} - y^{(k+1)} \right| \\
& \leq \left| \mathbf{H}^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{-(k+1)} - y^{(k+1)} \right|. \quad (\text{D.9})
\end{aligned}$$

Unter dieser Beobachtung (D.9) muss in Gleichung (D.8) folgender Ausdruck gelten

$$\mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{K}^{(k+1)} \leq 1. \quad (\text{D.10})$$

Betrachten wir die Kalman-Gleichung

$$\mathbf{K}^{(k+1)} = \mathbf{P}_\nu^{-(k+1)}\mathbf{C}_\nu^{(k+1)\text{H}}\left(\mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{P}_\nu^{-(k+1)}\mathbf{C}_\nu^{(k+1)\text{H}} + \mathbf{R}_\nu^{(k+1)}\right)^{-1}$$

und multiplizieren diese links mit $\mathbf{C}_\nu^{(k+1)}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
& \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{K}^{(k+1)} = \\
& \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{P}_\nu^{-(k+1)}\mathbf{C}_\nu^{(k+1)\text{H}}\left(\mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{P}_\nu^{-(k+1)}\mathbf{C}_\nu^{(k+1)\text{H}} + \mathbf{R}_\nu^{(k+1)}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

und damit unter Beachtung von Gleichung (D.10)

$$\widetilde{\beta} = \mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{K}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{P}_\nu^{-(k+1)}\mathbf{C}_\nu^{(k+1)\text{H}}}{\mathbf{C}_\nu^{(k+1)}\mathbf{P}_\nu^{-(k+1)}\mathbf{C}_\nu^{(k+1)\text{H}} + \mathbf{R}_\nu^{(k+1)}} \leq 1. \quad (\text{D.11})$$

Im letzten Teil des Beweises kommen wir zur definierten ℓ_1 -Norm in Gleichung (D.2) und setzen

$$c_{k+1} = \left\| \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_\mathcal{N}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{+(k+1)} \right\|_1$$

sowie

$$c_k = \left\| \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbf{E}_\mathcal{N}\widehat{\mathbf{x}}_\nu^{+(k)} \right\|_1.$$

Für eine Konvergenz muss die Bedingung

$$c_{k+1} \leq c_k. \quad (\text{D.12})$$

gelten. Es gilt

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= h \left[\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \left[\widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)} + \mathbf{K}^{(k+1)} \left(\underbrace{\widetilde{c}_{k+1}}_{\gamma_{k+1} c_k} - h \left(\underbrace{\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)}}_{c_k} \right) \right) \right] \right] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k+1)}} \\ &= h \left[\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)} - \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \mathbf{K}^{(k+1)} (1 - \gamma_{k+1}) c_k \right]. \end{aligned}$$

Entwickeln wir die in Gleichung (D.2) definierte Funktion h unter den Bedingungen im Kapitel 6.1 in ein Taylorpolynom ersten Grades um den Entwicklungspunkt $\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)}$ unter Beachtung der Gleichung (D.4) und der festgelegten Jacobi-Matrix in (6.5), gilt

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \underbrace{\left\| \widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)} \right\|_1}_{c_k} - \underbrace{\frac{dh(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \Big|_{\widehat{\mathbf{x}}_p + \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \widehat{\mathbf{x}}_{\nu}^{+(k)}}}_{\mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)}} \cdot \mathbb{E}_{\mathcal{N}} \mathbf{K}^{(k+1)} (1 - \gamma_{k+1}) c_k \\ &\quad + \text{REST} \\ &= c_k - \underbrace{\mathbf{C}_{\nu}^{(k+1)} \mathbf{K}^{(k+1)}}_{\widetilde{\beta}} (1 - \gamma_{k+1}) c_k + \text{REST}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck „REST“ stellt die Terme höherer Ordnung einer Taylorreihenentwicklung dar und kann als Fehlerterm der Approximation betrachtet werden.

Mit der Definition von $\widetilde{\beta}$ in Gleichung (D.11) unter der Bedingung $0 \leq \widetilde{\beta} \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= c_k - \underbrace{\widetilde{\beta} (1 - \gamma_{k+1})}_{0 < (1 - \gamma_{k+1}) < 1} c_k \\ &= \underbrace{(1 - \delta)}_{< 1} c_k \\ &\leq c_k. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Mit der letzten Gleichung (D.13) wurde die Gleichung (D.12) bewiesen, d. h. die ℓ_1 -Norm wird in jedem Iterationsschritt reduziert. Damit wurde gezeigt, dass wir eine monoton fallende Folge konstruiert haben. Nach dem Monotoniekriterium für Folgen gilt, dass jede monoton fallende Folge konvergiert, wenn sie nach unten beschränkt ist [70]. Mit Definition A.0.1 aus Anhang A gilt $\|\cdot\|_1 \geq 0$. Die ℓ_1 -Norm ist nach unten beschränkt und damit ist die hergeleitete Folge c_k konvergent.

Anhang E

Herleitung Matrixinversionslemmata

Der wesentliche Vorteil für die Anwendung des Matrixinversionslemmas besteht darin, dass nicht die gesamte Blockmatrix invertiert werden muss, sondern nur die einzelnen Blöcke der Matrix. Für die Herleitung sei angenommen, dass $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrische, positiv definite Matrizen sind. Damit ist die Invertierbarkeit der Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{R} gegeben. Die Matrix \mathbf{C} ist, wie bereits definiert, eine $m \times n$ -Matrix. Wir werden die folgende Gleichung beweisen

$$\left(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\right)^{-1} = \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{C}^H \left(\mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^H + \mathbf{R}\right)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}. \quad (\text{E.1})$$

Dazu sei die Matrix \mathbf{B} mit den definierten Eigenschaften der genannten Matrizen gemäß der linken Seite der Gleichung (E.1) in Blockstruktur aufgebaut:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{C}^H \\ \mathbf{C} & -\mathbf{R} \end{pmatrix}.$$

Um die Matrix \mathbf{B} in ihrer Form zu invertieren, benötigen wir zunächst die Inverse der Matrix \mathbf{P} und \mathbf{R} , um dann anschließend die Matrix $\left(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\right)$ zu invertieren. Auf der rechten Seite der Gleichung (E.1) erkennen wir, dass nur eine Inverse berechnet werden muss.

Mit den Voraussetzungen an die Matrix \mathbf{B} existiert eine Inverse

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^H & \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

mit der Eigenschaft

$$\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Das führt zu folgendem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D} + \mathbf{C}^H \mathbf{G}^H &= \mathbf{I} \\ \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}^H \mathbf{E} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

$$CD - RG^H = \mathbf{0} \quad (\text{E.3})$$

$$CG - RE = \mathbf{I}.$$

Auflösen der Gleichung (E.2) nach D und Linksmultiplikation mit P ergibt

$$\begin{aligned} P^{-1}D &= I - C^H G^H \\ D &= P(I - C^H G^H) \\ D &= P - PC^H G^H. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Gleichung (E.3) wird nach G^H umgestellt

$$\begin{aligned} CD &= RG^H \\ G^H &= R^{-1}CD, \end{aligned}$$

in Gleichung (E.4) eingesetzt und nach D aufgelöst

$$\begin{aligned} D &= P - PC^H R^{-1}CD \\ D + PC^H R^{-1}CD &= P \\ (I + PC^H R^{-1}C)D &= P \\ D &= (I + PC^H R^{-1}C)^{-1}P \\ D &= (P^{-1} + P^{-1}PC^H R^{-1}C)^{-1} \\ D &= (P^{-1} + C^H R^{-1}C)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Linksmultiplikation der Gleichung (E.4) mit C und Anwendung der Gleichung (E.3) ergibt

$$\begin{aligned} CD &= CP - CPC^H G^H \\ RG^H &= CP - CPC^H G^H \\ CP &= RG^H + CPC^H G^H \\ CP &= (R + CPC^H)G^H \\ G^H &= (CPC^H + R)^{-1}CP. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Gleichsetzen der Gleichungen (E.4) und (E.5) sowie unter Verwendung von (E.6) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{C}^H\mathbf{G}^H &= \left(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} \\ \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{C}^H\left(\mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^H + \mathbf{R}\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} &= \left(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{C}^H\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\right)^{-1} \end{aligned}$$

die Behauptung der Gleichung (E.1).

Anhang F

Stochastische Analyse - Schätzfehlerkovarianzmatrix

Gemäß Kapitel 6.2 sei die LQ -Zerlegung der Matrix \mathbf{C} mit

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}\mathbf{Q}$$

definiert. Es gilt $\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, wobei \mathbf{v} erwartungswertfreies gaußverteiltes Rauschen mit Kovarianzmatrix $\mathbf{R} = E\{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^H\}$ ist.

Wir erhalten nach Kapitel 6.2 einen Schätzer

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{L}_1^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{x} + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{Q}_1\mathbf{x} + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Für den Fehler erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_0 &= \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{x}_0 \\ &= \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Deshalb gilt $E\{\mathbf{e}_0\} = \mathbf{L}_1^{-1}E\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0}$ sowie für die Fehlerkovarianz $E\{\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0^H\} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{L}_1^{-1})^H$. Für den partikulären Schätzer folgt

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^H\tilde{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{Q}_1^H\hat{\mathbf{x}}_0 + \underbrace{\mathbf{Q}_2^H\mathbf{x}_\nu}_{\nu_x \in \mathcal{N}(C)}.\end{aligned}$$

Mit $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}_p + \boldsymbol{\nu}_x$ und $\hat{\boldsymbol{x}}_p = \boldsymbol{Q}_1^H \hat{\boldsymbol{x}}_0$ folgt

$$\begin{aligned} E\{\hat{\boldsymbol{x}}\} &= E\{\hat{\boldsymbol{x}}_p\} + E\{\boldsymbol{\nu}_x\} \\ &= E\{\boldsymbol{x}_p\} + E\{\boldsymbol{\nu}_x\} \\ &= E\{\boldsymbol{x}_p\} + \boldsymbol{\nu}_x, \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{\nu}_x$ als deterministisch bestimmte Konstante interpretiert wird. Für den Erwartungswert von $\hat{\boldsymbol{x}}_p$ und \boldsymbol{e}_p gilt

$$\begin{aligned} E\{\hat{\boldsymbol{x}}_p\} &= E\{\boldsymbol{Q}_1^H \hat{\boldsymbol{x}}_0\} \\ &= \boldsymbol{Q}_1^H E\{\hat{\boldsymbol{x}}_0\} \\ &= \boldsymbol{Q}_1^H \{\boldsymbol{x}_0\} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} E\{\boldsymbol{e}_p\} &= E\{\hat{\boldsymbol{x}}_p - \boldsymbol{x}_p\} \\ &= \boldsymbol{Q}_1^H (E\{\hat{\boldsymbol{x}}_0\} - E\{\boldsymbol{x}_0\}) \\ &= \boldsymbol{Q}_1^H \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{Q}_1^H \boldsymbol{x}_0 \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist für $\boldsymbol{e} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$

$$\begin{aligned} E\{\boldsymbol{e}\} &= E\{\hat{\boldsymbol{x}}\} - E\{\boldsymbol{x}\} \\ &= E\{\boldsymbol{x}_p\} + \boldsymbol{\nu}_x - E\{\boldsymbol{x}\} \\ &= E\{\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}\} + \boldsymbol{\nu}_x \\ &= \boldsymbol{\nu}_x. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich für die Fehlerkovarianz

$$\begin{aligned} E\left\{(\boldsymbol{e} - E\{\boldsymbol{e}\})(\boldsymbol{e} - E\{\boldsymbol{e}\})^H\right\} &= E\left\{(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} - E\{\boldsymbol{e}\})(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} - E\{\boldsymbol{e}\})^H\right\} \\ &= E\left\{(\hat{\boldsymbol{x}}_p + \boldsymbol{\nu}_x - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\nu}_x)(\hat{\boldsymbol{x}}_p + \boldsymbol{\nu}_x - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\nu}_x)^H\right\} \\ &= E\left\{(\hat{\boldsymbol{x}}_p - \boldsymbol{x})(\hat{\boldsymbol{x}}_p - \boldsymbol{x})^H\right\} \\ &= E\{\boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_p^H\} \\ &= \boldsymbol{Q}_1^H \boldsymbol{L}_1^{-1} \boldsymbol{R} (\boldsymbol{L}_1^{-1})^H \boldsymbol{Q}_1. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] D. L. Donoho: Compressed sensing. *IEEE Trans. Inform. Theory* 52 (2006) 1289–1306.
- [2] E. Candès, R. Romberg, T. Tao: Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete fourier information. *IEEE Trans. Inform. Theory* 52 (2006) 489–509.
- [3] J. Ender: On Compressive Sensing applied to Radar. *Signal Process.* 90 (2010) 1402–1414.
- [4] V. M. Patel, G. R. Easley, J. D. M. Healy, and R. Chellappa: Compressed synthetic aperture radar. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Process.* 4 (2010) 244–254.
- [5] F. Ye, D. Liang, J. Zhu: ISAR Enhancement Technology based on Compressed Sensing. *Electronic Letters* 47 (2010) 620–621.
- [6] S. S. Chen, D. L. Donoho, M. A. Saunders: Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM J. Sci. Comput.* 20 (1) (1998) 33–61.
- [7] E. Candès, T. Tao: The dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n . *Ann. Stat.* 35 (6) (2007) 2313–2351.
- [8] M. A. Davenport, M. B. Wakin: Analysis of orthogonal matching pursuit using the restricted isometry property. *IEEE Trans. Inf. Theory* 56 (2010) 4395–4401.
- [9] W. Dai, O. Milenkovic: Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. *IEEE Trans. Inf. Theory* 55 (5) (2009) 2230–2249.
- [10] R. Baraniuk: Compressive Sensing [lecture notes]. *Signal Process. Mag. IEEE* 24 (4) (2007) 118–121. Issn: 1053-5888. doi: 10.1109/MSP.2007.4286571.
- [11] R. Baraniuk, V. Cevher, M. Duarte, and C. Hegde: Model-Based compressive Sensing. *Inf. Theory IEEE Trans.* 56.4 (2010) 1982–2001. Issn: 0018-9448. doi: 10.1109/TIT.2010.2040894.
- [12] Y. Eldar, G. Kutyniok: Compressed Sensing: Theory and Applications. *Cambridge University Press* (2012), Isbn: 9781107005587.
- [13] S. Foucart, H. Rauhut: A Mathematical Introduction to Compressive Sensing. *Springer Science+Business Media New York* (2013).
- [14] O. Loffeld: Estimationstheorie I: Grundlagen und stochastische Konzepte. *R. Oldenbourg Verlag GmbH, München* (1990), Isbn: 3-486-21616-3.
- [15] J. Yan, D. Yuan, X. Xing, Q. Jia: Kalman filtering parameter optimization techniques based on genetic algorithm. *Proceedings on the IEEE, International Conference on Automation and Logistics*, Qingdao, China (2008).
- [16] S. Gultkin, J. Paisley: Nonlinear Kalman filtering with divergence minimization. *IEEE Trans. Signal Process.* 65 (23) (2017) 6319–6331. doi: 10.1109/TSP.2017.2752729.
- [17] G. F. Basso, T. G. S. Amorim, A.V. Brito: Kalman filter with dynamical setting of optimal process noise covariance. *IEEE Access* (2017). doi: 10.1109/ACCESS.2017.2697072.

- [18] J. Zhao, M. Netto, L. Mili: A robust iterated extended kalman filter for power system dynamic state estimation. *IEEE Trans. Power Syst.* (2016). doi: 10.1109/TPWRS.2016.2628344.
- [19] N. Vaswani: LS-CS-Residual (LS-CS): Compressive sensing on least squares residual. *Signal Process. IEEE Trans.* 58 (2010) 4108–4120.
- [20] A. Carmi, P. Gurfil, D. Kanevsky: Methods for sparse signal recovery using Kalman filtering with embedded pseudo-measurement norms and quasi-norms. *Signal Process., IEEE Trans.* 58 (2010) 2405–2409.
- [21] N. Vaswani: Kalman filtered compressed sensing: *Image Process. ICIP 2008. 15th IEEE International Conference on* (2008) 893–896.
- [22] C. Burrus: General solutions of simultaneous equations. *ConnexionsWeb site*, 2013. <http://cnx.org/content/m19561/1.5/>.
- [23] C. L. Lawson, R. J. Hanson: Solving Least Squares Problems. *SIAM*, 1987.
- [24] H.-J. Reinhardt: Schlecht gestellte Probleme: Einführung und numerische Methoden. *Vorlesungsskriptum im SoSe 2002, Fachbereich Mathematik, Universität Siegen*.
- [25] D. L. Donoho, M. Elad: Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 100.5 (2003) 2197–2202. doi: 10.1073/pnas.0437847100.
- [26] M. F. Duarte, Y. C. Eldar: Structured Compressed Sensing: From Theory to Applications. *arXiv:1106.6224v2[cs.IT]* 28 Jul 2011.
- [27] G. Kutyniok: Compressed Sensing. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 22 (1) (2014) 24–29.
- [28] <https://www.mdr.de/wissen/mrt-der-zukunft-compressed-sensing-100.html>.
- [29] L. Welch: Lower bounds on the maximum cross correlation of signals. *IEEE Trans Inform Theory* 20 (3) (1974) 397–399.
- [30] M. Elad, A. M. Bruckstein: A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases. *IEEE Trans. Inform. Theory* 48 (2002) 2558–2567.
- [31] E. Candès, T. Tao: Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? *IEEE Trans. Inf. Theory* 52 (12) (2006) 5406–5425.
- [32] I. Daubechies, R. DeVore, M. Fornasier, S. Gunturk: Iteratively reweighted least squares minimization: proof of faster than linear rate for sparse recovery. *Proc. 42nd IEEE Annu. Conf. Inf. Sci. Syst. (CISS)* (2008) 26–29.
- [33] A. Cohen, W. Dahmen, R. DeVore: Compressed sensing and best k -term approximation. *J. Amer. Math. Soc.* 22 (1) (2009) 211–231.
- [34] D. L. Donoho, X. Huo: Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Trans. on Inf. Theory* 47 (7) (2001) 2845–2862.
- [35] R. Gribonval, M. Nielsen: Sparse representations in unions of bases. *IEEE Trans. on Inf. Theory* 49 (12) (2003) 3320–3325.
- [36] M. Heredia Conde: Compressive sensing for the photonic mixer device - fundamentals, methods and results. *Springer Vieweg* (2017), ISBN: 978-3-658-18056-0. doi: 10.1007/978-3-658-18057-7.
- [37] O. Loffeld, T. Espeter, M. Heredia Conde: From weighted least squares estimation to sparse CS reconstruction. *Proceedings of the 3rd Int. Workshop on Compressed Sensing Theory and its Applications to Radar, Sonar and Remote Sensing* (2015) 149–153. doi: 10.1109/CoSeRa.2015.7330282.

-
- [38] Y. Gao, J. Peng, S. Yue, Y. Zhao: On the null space property of ℓ_q -minimization for $0 < q < 1$ in compressed sensing. research article. *Hindawi Publ. Corp., Journal of Function Space 2015* article ID 579853, (2015). doi: 10.1155/2015/579853.
- [39] E. Candès, J. Romberg: Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Probl.* 23 (3) (2007) 969–985.
- [40] E. Candès, M. Wakin: An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Process.* 25 (2) (2008) 21–30.
- [41] M. Heredia Conde, O. Loffeld: A genetic algorithm for compressive sensing sparse recovery. *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), Bilbao, Spain* (2017) 106–111.
- [42] M. Heredia Conde, D. Hage, O. Loffeld: A null-space-based genetic algorithm for constrained l_1 minimization. *IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), Bilbao, Spain* (2017) 294–299.
- [43] N. Vaswani, J. Zhan: Recursive recovery of sparse signal sequences from compressive measurements: a review. *IEEE Trans. Signal Process.* 64 (13) (2016).
- [44] S. Mallat, Z. Zhang: Matching pursuit with time-frequency dictionaries. *IEEE Trans. Signal Process.* 41 (12) (1993) 3397–3415.
- [45] Y. C. Pati, R. Rezaifar, P. S. Krishnaprasad: Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. *Proc. Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput.* (1993) 40–44.
- [46] J. Tropp, A. Gilbert: Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Trans. Inf. Theory* 53 (12) (2007) 4655–4666.
- [47] D. Needell, J. Tropp: COSAMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Appl. Comp. Harmon. Anal.* 26 (3) (2009) 301–321.
- [48] T. Blumensath, M. E. Davies: Iterative hard thresholding for compressed sensing. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* (2009) 265–274.
- [49] T. Blumensath, M. E. Davies: Normalised iterative hard thresholding guaranteed stability and performance. *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.* 4 (2) (2010) 298–309.
- [50] D. Wipf, B. Rao: Sparse Bayesian learning for basis selection. *IEEE Trans. Signal Process.* 52 (8) (2004) 2153–2164.
- [51] M. E. Tipping: Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine. *J. Mach. Learn. Res.* 1 (2001) 211–244.
- [52] A. Chambolle, T. Pock: A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *J. Math. Imaging Vis.* 40.1 (2011) 120–145. Issn: 0924-9907. doi: 10.1007/s10851-010-0251-1.
- [53] J. A. Tropp: Greed is good: algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Trans. on Inf. Theory* 50.10 (2004) 2231–2242. Issn: 0018-9448. doi: 10.1109/TIT.2004.834793.
- [54] R. E. Kålmån: A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* 82 (Series D) (1960) 35–45.
- [55] S. F. Schmidt, L. A. McGee: Discovery of the Kalman filter as a practical tool for aerospace and industry. *Tech. Memorandum NASA-TM-86847, National Aeronautics and Space Adm.* (1985) <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19860003843-1986003843.pdf>.
- [56] O. Loffeld: Estimationstheorie II: Grundlagen und stochastische Konzepte. *R. Oldenbourg Verlag GmbH, München* (1990), Isbn: 3-486-21616-3.
-

- [57] K. W. Schrick: Anwendungen der Kalman-Filter-Technik. Anleitung und Beispiele, *München, Wien: Oldenburg* (1977).
- [58] P. Meissner, R. Wehrmann, J. van der List: A comparative analysis of Kalman and gradient methods for adaptive echo cancellation. *AEÜ 34* (1980) 485–492.
- [59] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi: Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 60, Issues 1–4, (1992) 259–268. doi: 10.1016/0167-2789(92)90242-F.
- [60] M. Genzel, G. Kutyniok, M. März: A new perspective on the sample complexity of the analysis basis pursuit. *5th Int. Workshop on Compressed Sensing Theory and its Applications to Radar, Sonar, and Remote Sensing (CoSeRa 2018), Siegen, Germany* (2018).
- [61] E. Candès, Y. C. Eldar, D. Needell, P. Randall: Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 31 (1) (2011) 59–73.
- [62] S. Nam, M. E. Davies, M. Elad, R. Gribonval: The cospase analysis model and algorithms. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 34 (1) (2013) 30–56.
- [63] M. Kabanava, H. Rauhut: Analysis ℓ_1 -recovery with frames and Gaussian measurements. *Acta Appl. Math.* 140 (1) (2015) 173–195.
- [64] R. Giryes, S. Nam, M. Elad, R. Gribonval, M. Davies: Greedy-like algorithms for the cospase analysis model. *Linear Algebra and Appl.* 441 (0) (2014) 22–60.
- [65] G. Kutyniok, M. Genzel, M. März: ℓ_1 -analysis minimization and generalized (co-)sparsity: When does recovery succeed? *arXiv preprint: 1710.04952* (2017).
- [66] A. N. Tikhonov: Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Mathematics Doklady* 4 (1963) 1035–1038.
- [67] A. N. Tikhonov, V. I. A. Arsenin: Solution of Ill-posed problems. *Scripta Series in Mathematics, Winston* (1977).
- [68] O. Loffeld, A. Seel, M. Heredia Conde, L. Wang: Sparse CS reconstruction by nullspace based ℓ_1 minimizing Kalman filtering. *2016 International Conference on Communications (COMM)*, Bucharest, Romania, (2016) 449–454.
- [69] O. Loffeld, A. Seel, M. Heredia Conde, L. Wang: A nullspace based ℓ_1 -minimizing Kalman filter approach to sparse CS reconstruction. *11th European Conference on Synthetic Aperture Radar (EUSAR 2016)*, Hamburg, Germany, (2016) 1–5.
- [70] T. Westermann: Mathematik für Ingenieure. *Springer-Verlag, 8. Auflage* (2020) 224–225. doi: 10.1007/978-3-662-61323-8.
- [71] B. M. Irons, R. C. Tuck: A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *Inter. Journal of Num. Methods in Engineering* 1 (1969) 275–277.
- [72] W. Rosenheinrich: Lehrmaterial, Numerische Mathematik, Fachhochschule Jena, 2002/2017, <http://web.eah-jena.de/~rsh/lehre/buecher/nub.pdf> (2007).
- [73] J. Stoer: Numerische Mathematik 1. *Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 8. Auflage* (2005) 357–361.
- [74] A. J. Macleod: Acceleration of vector sequences by multi-dimensional Δ^2 methods. *Communications in Applied Numerical Methods* (Vol. 2) (1986) 385–392.
- [75] D. P. Mok: Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion. *Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*, Bericht Nr. 36 (2001) 129–132.

-
- [76] D. Simon: Optimal State Estimation. *Hoboken, NJ: John Wiley & Sons* (2006), Isbn: 978-0-471-70858-2.
- [77] J. Solà: Simultaneous localization and mapping with the extended Kalman filter. (2014) Available: <http://www.joansola.eu/JoanSola/eng/JoanSola.html>.
- [78] S. Thrun, W. Burgard, D. Fox: Probabilistic Robotics. *MIT Press, Cambridge* (2006).
- [79] D. L. Donoho, J. Tanner: Observed universality of phase transitions in high-dimensional geometry, with implications for modern data analysis and signal processing. *Philosophical Trans. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (367) (2009) 4273–4293.
- [80] D. L. Donoho, J. Tanner: Precise undersampling theorems. *IEEE Procee.* 98 (6) (2010) 913–924.
- [81] R. S. Bucy, P. D. Joseph: Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance. *Wiley, New York* (1968).
- [82] Z. Ben-Haim, Y. Eldar: The Cramèr-Rao bound for estimating a sparse parameter vector. *IEEE Trans. Signal Process.* 58 (6) (2010) 3384–3389.
- [83] T. Huang, Y. Liu, H. Meng, X. Wang: Adaptive compressed sensing via minimizing Cramèr-Rao bound. *IEEE Signal Process.* 21 (3) (2014) 270–274.
- [84] S. M. Kay: Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall* (1993).
- [85] J. W. Linnik: Methode der kleinsten Quadrate in moderner Darstellung. *Mathematik für Naturwissenschaft und Technik, Band 5*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1961).
- [86] V. Blobel, E. Lohrmann: Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse. *Teubner-Studienbücher: Physik* (1988), Isbn: 3-519-03243-0.
- [87] M. Viswanathan: How to generate AWGN noise in Matlab/Octave (without using in-built awgn function). <http://www.gaussianwaves.com>, (2015).
- [88] J. D. Gorman, A. O. Hero: Lower bounds for parametric estimation with constraints. *IEEE Trans. Inf. Theory* 26 (6) (1990) 1285–1301.
- [89] P. Stoica, B. C. Ng: On the Cramèr-Rao bound under parametric constraints. *IEEE Signal Process. Lett.* 5 (7) (1998) 177–179.
- [90] Z. Ben-Haim, Y. C. Eldar: On the constrained Cramèr-Rao bound with a singular Fisher information matrix. *IEEE Signal Process. Lett.* 16 (6) (2009) 453–456.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer, nicht angegebener Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Siegen, den 01.08.2020

Dunja Alexandra Hage