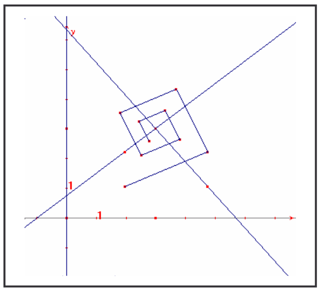
Heinz Rainer Geyer

Das Jacobi - Verfahren



Pädagogische Gesichtspunkte

Aufgabenstellung	Darstellung	Dokumentation
teils geführt, teils offen	graphisch algebraisch	Zeichnungen Hardcopy Protokolle

Technologie

Tabellen-kalkulation	Graphischer Taschenrechner	Computeralgebra-system	Dynamische Geometriesoft-ware
	X	X	X

Ziele und Beschreibung der Einheit

Lineare Gleichungssysteme werden in der Mittelstufe standardmäßig mit Hilfe von Äquivalenzumformungen (Einsetzverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additions- u. Subtraktionsverfahren) einschließlich des Gauss-Jordan-verfahrens gelöst. Wenn dabei der Bezug zur Graphischen Darstellung der Gleichungen – wenigstens im $\mathbb{R}^2$– hergestellt wird, dann ist schon viel gewonnen.
Diese Einheit soll zeigen, dass sich dieses Thema sehr gut eignet, um im Zusammenspiel mit Dynamischer Geometriesoftware und Computeralgebra bereits in der Mittelstufe ein Beispiel für ein iteratives Lösungsverfahren vorzustellen.
Dabei lässt sich der Zusammenhang zwischen Geometrischer Darstellung und Algebraischem Verfahren besonders gut aufzeigen, die späteren Iterationsverfahren, wie Heronverfahren oder Newtonverfahren werden vorbereitet und nicht zuletzt wird der Mathematische Horizont im Bezug auf Lösungsverfahren erweitert.
Selbstverständlich lässt sich die Einheit auch in einem Kurs Lineare Algebra der Sek.II durchführen und auf höherdimensionale Räume verallgemeinern.

Rolle der Technologie

Das Jacobi-Verfahren konvergiert, wenn überhaupt, nur sehr langsam.
Hier sind modularisierte Verfahren, sowohl in der Algebra als auch in der Geometrie unerlässlich, um überhaupt eine Annäherung an den Lösungspunkt aufzuzeigen. Andererseits ist das Verfahren im Rechnereinsatz sicherer als z.b. der Gauß-Algorithmus.
Der Rechner ist hier als Rechenknecht, aber auch als Medium zur Visualisierung einzusetzen.

Copyright by T³ Deutschland, für Unterrichtszwecke freigegeben

Notwendige Vorkenntnisse

- Lineare Gleichungen und Geraden
- Selbständiges Arbeiten
- mit CAS und DGS umgehen können,
  dies kann aber auch an dieser Einheit erlernt bzw. vertieft werden

Dauer der Einheit

ca. 3-4 Stunden, je nach Intensität der Bearbeitung

Unterrichtsorganisation

Je nach den inneren und äußeren Bedingungen in Einzelarbeit oder Gruppenarbeit möglich.

Copyright by T³ Deutschland, für Unterrichtszwecke freigegeben

Aufgabenstellung

Aufgabe 1: Führe die folgenden Schritte mit Papier und Bleistift oder direkt am Computer nacheinander konzentriert durch:
Zeichne zwei beliebige Geraden g1 und g2, die sich im Punkt S(2/3) schneiden. Wähle einen Startpunkt P1, der nicht auf den Geraden liegt.
Zeichne eine Parallele zur y-Achse durch P1, um den Schnittpunkt mit g1 zu erhalten, ebenso eine Parallele zur x-Achse durch P1, um den Schnittpunkt mit g2 zu erhalten.
Konstruiere den neuen Punkt P2, der die y-Koordinate des Schnittpunktes mit g1 und die x-Koordinate des Schnittpunktes mit g2 haben soll.

a) Führe das Verfahren mit dem Punkt P2 fort, bis du eine Aussage über die Lage der entstehenden Punkte formulieren kannst.
b) Das beschriebene Verfahren ist sehr langwierig zu konstruieren. Da immer die gleichen Konstruktionsschritte verwendet werden, empfiehlt sich hierfür der Einsatz eines Makros in einer Dynamischen Geometriesoftware.
Startobjekte sind der Startpunkt, die beiden Geraden g1 und g2 sowie die Achsen, Zielobjekt ist der neu zu erstellende Punkt.
c) Das Verfahren ist natürlich von den Geraden und dem Startpunkt abhängig. Untersuche experimentell, wie sich die folgenden Änderungen auf die Punktfolge auswirken und notiere deine Bobachtungen:

- Verändere die Lage des Startpunktes P1
- Was geschieht, wenn P1 auf einer der Geraden liegt?
- Drehe nacheinander je eine der Geraden um den Schnittpunkt S
- Ändere das Verfahren, indem du die Schnittpunkte mit den Geraden vertauschst.

Aufgabe 2: Erläutere die algebraische Grundlage des Verfahrens.
Die beiden Geraden werden durch Gleichungen mit den Variablen x und y beschrieben. Betrachte deine erste Zeichnung und formuliere den Zusammenhang zwischen den Gleichungen und den Koordinaten der entstehenden Punkte:

- Ich setze die x-Koordinate des letzten Punktes in ....
  und erhalte die .... des nächsten Punktes.
- Ich setze die y-Koordinate des letzten Punktes in ....
  und erhalte die .... des nächsten Punktes.

Information: Die schrittweise Annäherung an die Lösung eines Gleichungssystems, bei der jedes Mal das gleiche Rechenverfahren auf den zuvor gefundenen Punkt angewendet wird, nennt man eine ITERATION.
Die hier beschriebene Iteration ist nach dem deutschen Mathematiker Carl G.J.Jacobi (1804-1851) als **JACOBI-Verfahren** benannt.
Das Verfahren führt nicht bei jedem Gleichungssystem zu einer Lösung, das System muss eindeutig lösbar sein und muss ggfls. so umzustellen sein, dass die Gleichungen des Systems fortlaufend nach den Variablen aufzulösen sind.

Copyright by T³ Deutschland, für Unterrichtszwecke freigegeben

Aufgabe 3: Das Lineare Gleichungssystem (*) $\left| \begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 13 \end{array} \right|$ lässt sich in das äquivalente System (**) $\left| \begin{array}{l} x = \frac{2}{3} y \\ y = \frac{13}{3} - \frac{2}{3} x \end{array} \right|$ umformen.

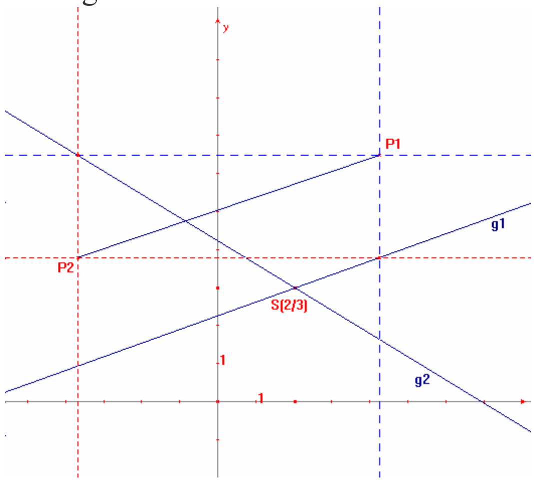
Wähle dir nun einen beliebigen Startpunkt P1 und führe das in Aufgabe 2 beschriebene Verfahren durch.
Vergleiche die Punktfolge mit den Konstruktionen der Aufgabe 1.
Zeige, dass die Punktfolge gegen S(2/3) konvergiert.
Wähle andere Gleichungen mit dem gleichen Schnittpunkt, bei denen die Folge divergiert.

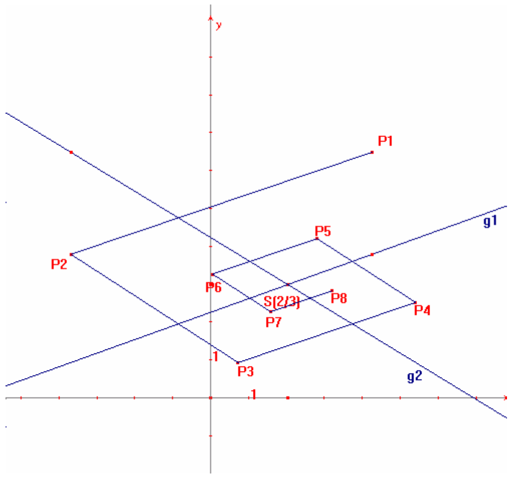
Aufgabe 4: Der TI-92 bietet im SEQUENCE-MODE die Möglichkeit, Folgen direkt zu bearbeiten und darzustellen.
Stelle das Gleichungssystem (**) als gekoppelte Folgen u1(n) und u2(n) dar und teste den Verlauf der Folgen. Dabei steht u1 für die Variable x und u2 für die Variable y.

Copyright by T³ Deutschland, für Unterrichtszwecke freigegeben

Lösungsvorschläge

Zu Aufgabe 1:





mögliche Lösung für 1.Schritt mögliche Lösung für Aufgabe1a)
allerdings kann die Punktfolge in Aufgabe 1a) auch divergieren.

zu Teil c) Der Startpunkt ändert nichts an der Konvergenz, allerdings ist die relative Lage der Geraden zueinander wesentlich für Konvergenz oder Divergenz verantwortlich. Diese Erkenntnis kann in der Sek.I genügen, in Sek.II kann man darauf weiter eingehen.
Eine hinreichende Konvergenzbedingung ist die Diagonaldominanz der Ursprungsmatrix, auch Zeilensummenkriterium genannt.

Zu Aufgabe 2:

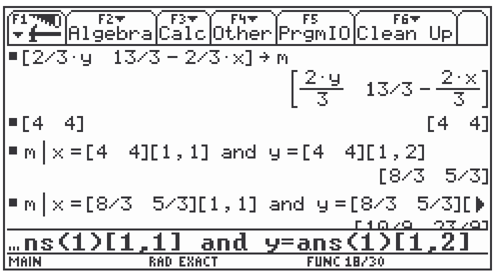
> Ich setze die x-Koordinate des letzten Punktes *in die Gleichung für g1 ein* und erhalte die *y-Koordinate* des nächsten Punktes.
> Ich setze die y-Koordinate des letzten Punktes *in die Gleichung für g1 ein* und erhalte die *x-Koordinate* des nächsten Punktes.

Allgemein: Das Gleichungssystem wird so umgeformt, dass die Variablen in der Hauptdiagonale auf der linken Seite isoliert werden. Setzt man die Koordinaten eines Punktes in das System der rechten Seite ein, so erhält man die Koordinaten des iterierten Punktes.

Zu Aufgabe 3:

Das Verfahren lässt sich am TI-92 mit wenig Vorbereitung automatisieren:

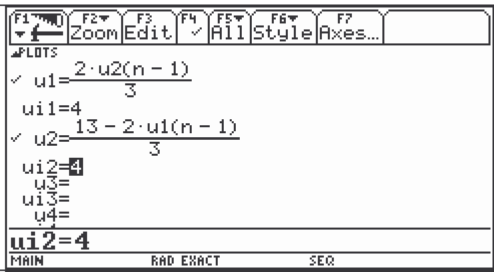
- die rechte Seite von (**) unter m abspeichern
- den Startpunkt P1 definieren
- m auswerten mit Hilfe des [|]-Operators und des Bezugs auf die vorherige Antwort
- Nun muss nur noch fortlaufend die ENTER-Taste gedrückt werden



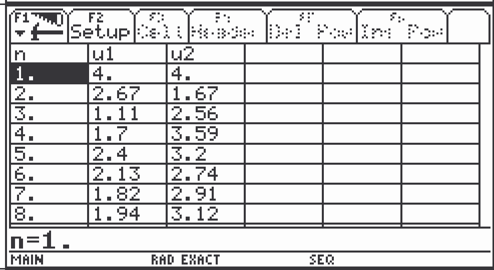
Copyright by T³ Deutschland, für Unterrichtszwecke freigegeben

Zu Aufgabe 4:

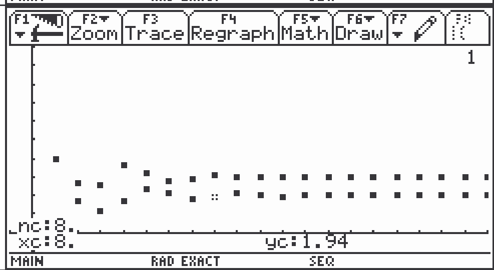
Die beiden Gleichungen von (**) werden in Abhängigkeit der Zählvariablen n definiert.
Die Startwerte für x = u1(n) und y = u2(n) sind anzugeben



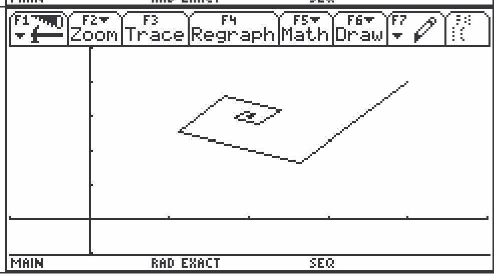
Die Daten sind dann auszulesen über die Anzeige einer Tabelle
[◆][TABLE]



oder über die graphische Anzeige in der TIME-Darstellung
[F7] Axes auswählen

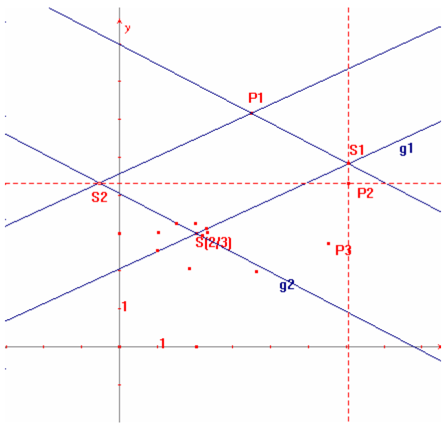


oder noch aussagekräftiger in bezug auf die Konvergenz der Punkte in der CUSTOM-Darstellung



Zusätzliche Aufgaben

zu Aufgabe 1:
Auch andere Projektionen des Startpunktes auf die Geraden können erprobt werden. Zum Beispiel führt eine Parallele Projektion zu folgender Punktspirale.
Hier schließt sich eine interessante Unterrichtsreihe zu solchen Lösungsverfahren an, die zumindest in einer Projektarbeit oder in SekII auch algebraisch bearbeitet werden sollte.



Literaturhinweise

Kroll/Reiffert/Vaupel Analytische Geometrie/Lineare Algebra Dümmler 1997

Copyright by T³ Deutschland, für Unterrichtszwecke freigegeben

Technische Hinweise: Cabri Géomètre für PC oder TI-92

Was willst du erreichen?	*Wie du das machst!*
Einen Punkt mit festen Koordinaten konstruieren.	In Cabri gibt es mehrere Möglichkeiten 1.Stelle Koordinatensystem mit Gitterpunkten dar und setze den Punkt auf die gewünschten (ganzzahligen) Werte. 2.Binde Punkte an die Koordinatenachsen und stelle den Punkt als Schnittpunkt von Parallelen zu den Achsen dar. 3.Lasse die Koordinaten anzeigen und verschiebe den Punkt geeignet.
Ein Makro erstellen. In Cabri - PC eigener Button In Cabri – TI unter F4,6: Macro Construction	Die Basiskonstruktion einmal vollständig durchführen. Das Icon MACRO öffnen, den Punkt STARTOBJEKTE einmal anklicken, alle Ausgangsobjekte nacheinander anklicken. Im Menü MACRO, Unterpunkt ZIELOBKJEKTE anklicken und alle Zielobjekte nacheinander anklicken. Danach einen Namen für das Makro vergeben und eine Beschreibung editieren. (Wichtig zum Nachvollziehen)

Technische Hinweise: CAS TI-92

Was willst du erreichen?	*Wie du das machst!*
Einen Punkt eingeben	Die Eingabe von [2,3] führt zur einer einzeiligen Matrix [[2,3]], auf deren Komponenten mit [[2,3]][1,1] = 2 bzw. [[2,3]][1,2] = 3 zugegriffen wird
Die Zahldarstellung ändern	Mit der Taste MODE erreicht man ein Menü, in dem die Darstellungsformen 1:AUTO 2:EXACT 3:APPROXIMATE gewählt werden. Mit ◆ ENTER wird eine Rechnung ebenfalls in APPROX- Darstellung ausgewertet.
Den SEQUENCE-Modus einschalten	Die Taste MODE bietet als 1.Punkt die Wahl des Graphik-Modus. Von dieser Einstellung ist der Y= Editor abhängig
Die Darstellungsart für Folgen einstellen	 Im Y= Editor die Taste F7 wählen

Copyright by T³ Deutschland, für Unterrichtszwecke freigegeben