Björn Hille

Fortsetzung von Familien Fuchs'scher Differenzialgleichungen bei Kompaktifizierungen ihrer Parameterräume

– 2004 –

Reine Mathematik

Fortsetzung von Familien Fuchs'scher Differenzialgleichungen bei Kompaktifizierungen ihrer Parameterräume

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Björn Hille
aus Steinfurt
– 2004 –

Dekan:	Prof. Dr. Klaus Hinrichs
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Helmut A. Hamm
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Siegfried Bosch
Tag der mündlichen Prüfung:	27. April 2005
Tag der Promotion:	13. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts befasste sich der Königsberger Astronom Friedrich Wilhelm Bessel mit den Bahnstörungen der Planeten. Vorausgegangen war die Beobachtung, dass sich der 1781 durch Friedrich Wilhelm Herschel entdeckte Planet Uranus nicht entlang seiner vorausberechneten, ellipsenförmigen Bahn bewegte. Bessel erfasste gravitative Störungen der Planetenbahnen (welche ihn 1840 zur Vermutung führten, die Bahnstörungen des Uranus könnten durch eine unbekannte Masse außerhalb der Uranusbahn bedingt sein[1]) in Differenzialgleichungen und konnte diese im Jahre 1824 lösen. Diese Lösungen $J_\nu(z)$ sind fortan als „Bessel-Funktionen“ bekannt und die zugehörigen Differenzialgleichungen

$$z^2 J'' + zJ' + (z^2 - \nu^2)J = 0 \tag{0.1}$$

heißen Bessel'sche Differenzialgleichungen (J' bezeichne die Ableitung von J nach z). Derartige Differenzialgleichungen treten in der mathematischen Physik in mannigfaltiger Weise auf, neben der Astronomie zum Beispiel in der Potenzialtheorie, der Wärmelehre und der Strömungsmechanik. Das Problem des Schwingens einer Membran führt ebenso zur Bessel'schen Gleichung, wobei in diesem Fall die Zahl ν wegen der Periodizität der Schwingung eine natürliche Zahl ist (vgl. [Heu91], §28, S.292ff.).

Die Bessel'sche Differenzialgleichung enthält die beiden (unabhängigen) Variablen z und ν, welche im Folgenden als komplex angenommen werden, sowie die Variable J, welche in Abhängigkeit von z und ν angegeben wird. Nach dem Satz über die holomorphe Abhängigkeit von „Parametern“ (vgl. [Wal96], §13, S.123ff.) ist eine Lösung J zwar komplex differenzierbar nach ν, in Gleichung (0.1) wird J jedoch nur nach z differenziert. In diesem Fall bezeichnet man ν als Parameter, und die Menge aller ν, für welche Gleichung (0.1) gelten soll, als Parameterraum der Differenzialgleichung.

[1] Es war Bessel nicht mehr vergönnt (er starb am 17. März 1846), seine Vermutung durch Urbain Jean Joseph Le Verrier und Johann Gottfried Galle bestätigt zu sehen. Der erste lieferte am 1. Juni 1846 ein passendes mathematisches Modell, der zweite bestätigte dieses Modell am 23. September 1846 durch die Entdeckung eines neuen Planeten, der nach einem Entdeckerstreit heute unter dem Namen „Neptun“ bekannt ist.

Im Allgemeinen kann man eine zusammenhängende, eindimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit (also eine Riemann'sche Fläche) M sowie eine zusammenhängende, komplexe Mannigfaltigkeit X beliebiger Dimension betrachten. Werden mit $\Theta_{M\times X}$ und Θ_X die Garben holomorpher Vektorfelder auf den jeweiligen Mannigfaltigkeiten bezeichnet, so induziert die Projektion $\pi : M \times X \longrightarrow X$ die Tangentialabbildung

$$T\pi : \Theta_{M\times X} \longrightarrow \pi^*\Theta_X,$$

deren Kern die Garbe der Vektorfelder entlang der Fasern von π definiert: $\Theta_{M\times X/X} := ker(T\pi)$. Die duale Garbe $\Omega^1_{M\times X/X} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{M\times X}}(\Theta_{M\times X/X}, \mathcal{O}_{M\times X})$ heißt Garbe der relativen 1-Formen. Ist z eine lokale Koordinate von M und $a_1, \ldots, a_R$ ein lokales Koordinatensystem von X, so ist eine relative 1-Form bezüglich dieser lokalen Koordinaten von der Gestalt $f(z, a_1, \ldots, a_R)dz$. Man hat einen (relativen) Differenzialoperator $d_{M\times X/X} : \mathcal{O}_{M\times X} \longrightarrow \Omega^1_{M\times X/X}$, welcher lokal durch $d_{M\times X/X}f = \frac{\partial f}{\partial z}dz$ gegeben ist.

Ein System komplexer, linearer, homogener Differenzialgleichungen erster Ordnung mit der unabhängigen Variable $z \in M := \mathbb{C}$ lässt sich als Vektorraumbündel E vom Rang n mit integrablem Zusammenhang auffassen. Treten in diesem System Parameter $(a_1, \ldots, a_R) \in X := \mathbb{C}^R$ auf (liegt also eine Familie von Differenzialgleichungssystemen vor), so induziert das System von Differenzialgleichungen ein Vektorraumbündel mit relativem Zusammenhang

$$\nabla_{M\times X/X} : \mathcal{E} \longrightarrow \Omega^1_{M\times X/X} \otimes_{\mathcal{O}_{M\times X}} \mathcal{E}$$

(vgl. [Sab02], §16, S.56ff.). Mit anderen Worten treten (bezüglich jeder beliebigen Basiswahl von E) in der zugehörigen Zusammenhangsmatrix relative Differenzialformen auf.

Ist nun eine komplexe, lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit Parametern $a_1, \ldots, a_R$ gegeben, d.h. liegt eine Differenzialgleichung der Form

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z, a_1, \ldots, a_R)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n(z, a_1, \ldots, a_R)w = 0 \qquad (0.2)$$

vor, so kann diese in ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung transformiert werden (vgl. Kapitel 1.1.2). Die Einträge der zugehörigen Zusammenhangsmatrix sind also relative 1-Formen.

Sind in (0.2) die Funktionen $p_1, \ldots, p_n$ bezüglich z ganz, so hat man einen freien $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$-Modul mit holomorphem (relativen) Zusammenhang. Hat eine der Funktionen $p_1, \ldots, p_n$ in $z = z_0$ eine Polstelle, so hat man ein meromorphes Vektorraumbündel mit Pol in z_0 (das ist ein $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}[(z - z_0)^{-1}]$-Modul) und einen meromorphen (relativen) Zusammenhang (vgl. [Hae87]). Der Kern eines integrablen Zusammenhangs ist ein lokales System, d.h. eine lokal-konstante Garbe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen vom Rang n

(vgl. Satz von Cauchy-Kowalevskaja, [Sab02], Théorèm 12.8, S. 34f. und Exercice 16.3, S. 58).

Für festes $a_1, \dots, a_R$ sagt man, dass die Differenzialgleichung (0.2) in $z = z_0$ eine reguläre Singularität hat, wenn der Koeffizient p_j in $z = z_0$ höchstens einen Pol j-ter Ordnung aufweist ($j = 1, \dots, n$). Sie hat in $z = \infty$ eine reguläre Singularität, wenn die mit $\xi = \frac{1}{z}$ transformierte Differenzialgleichung in $\xi = 0$ eine reguläre Singularität besitzt. Differenzialgleichungen, die nur endlich viele Singularitäten aufweisen, die zudem allesamt reguläre Singularitäten sind, bilden die Fuchs'sche Klasse.[2] Die Theorie dieser Fuchs'schen Differenzialgleichungen ist sehr gut verstanden und Standardstoff zahlreicher Lehrbücher. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse findet sich in Kapitel 1.1 dieser Arbeit.

Betrachtet man die Familie der Bessel'schen Differenzialgleichungen (0.1), so fällt auf, dass auf Grund ihrer irregulären (:= nicht regulären) Singularität in $z = \infty$ keine dieser Gleichungen zur Fuchs'schen Klasse gehört. C.F. Klein und M. Bôcher konnten 1894 zeigen, dass eine Vielzahl von Differenzialgleichungen der mathematischen Physik (insbesondere solche mit irregulären Singularitäten wie die Bessel'sche) durch ein Zusammenfließen („Konfluenz") der Singularitäten einer Familie der Fuchs'schen Klasse entsteht. Die durch Konfluenz entstehenden Differenzialgleichungen kann man als Fortsetzung der Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen verstehen. Ihr Parameterraum wird dabei vergrößert. Beispielsweise geht die Bessel'sche Differenzialgleichung (0.1) durch Konfluenz aus einer Fuchs'schen Familie zweiter Ordnung mit fünf Singularitäten hervor (vgl. [WhWa63], S. 203ff).

Ein weiteres prominentes Beispiel ist die für $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ zur Fuchs'schen Klasse gehörende Familie der hypergeometrischen Differenzialgleichungen. Wendet man hierauf die lineare Transformation $z \mapsto b \cdot z$ an, hat diese Familie das Aussehen

$$w'' + \left(\frac{(1 + a + b)z - cb}{z(z - b)}\right) w' + \left(\frac{ab}{z(z - b)}\right) w = 0$$

(vgl. [CoLe55], §4.7, S. 132). Durch ein Zusammenfließen der Singularitäten in b und ∞ erhält man die konfluente hypergeometrische Differenzialgleichung (vgl. Kapitel 1.2.1)

$$w'' + \frac{c - z}{z} w' - \frac{a}{z} w = 0,$$

deren Singularität in ∞ irregulär ist. Der Parameterraum $\mathbb{C}^3$ der hypergeometrischen Differenzialgleichung ist also durch $\mathbb{C} \times \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ erweitert und den zusätzlichen

[2]Lazarus Fuchs begründete die nach ihm benannte „Fuchs'sche Theorie" dieser Klasse von Differenzialgleichungen. Er veröffentlichte in den Jahren 1865, 1866 und 1868 drei Artikel unter der gleichen Überschrift "Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten". Eine sehr gelungene Zusammenfassung der Ergebnisse, die auf Fuchs zurückgehen, findet man zusammen mit geschichtlichen Hintergründen in [Gra00], S. 41ff.

Punkten (a, ∞, c) ist die obige Differenzialgleichung zugeordnet worden. Wenn man den Parameterraum zu $\overline{\mathbb{C}}^3$ kompaktifiziert, können nicht allen zusätzlichen Punkten ohne weiteres Differenzialgleichungen zugeordnet werden. Es ist möglich, dass Zähler und/oder Nenner der Koeffizientenfunktionen konstant Null werden. Wie man diesen Parameterwerten dennoch Differenzialgleichungen zuordnen kann, wird weiter unten (und in Kapitel 1.2.2 und 2.2.1) beschrieben.

Die in der klassischen Literatur beschriebenen Fortsetzungen von Differenzialgleichungen (vgl. [WhWa63], Chapter XVI, [Inc56], Chapter XX) gehen einher mit Ein-Punkt-Kompaktifizierungen von $\mathbb{C}$. Der Parameterraum $\mathbb{C}^r$ wird in der Folge ersetzt durch $\overline{\mathbb{C}}^r$. In dieser Arbeit wird eine andere Kompaktifizierung des Parameterraums gewählt, die wie folgt motiviert ist: Die Koeffizientenfunktionen p_j Fuchs'scher Differenzialgleichungen lassen sich auffassen[3] als Elemente aus $\mathbb{C}[z](a_1, \ldots, a_R)$, also als rationale Funktionen in den Parametern mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}[z]$. Rationale Funktionen können Unbestimmtheitsstellen aufweisen, in denen – wie bereits oben angedeutet – Zähler und Nenner Null werden. Wären die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome komplexe Zahlen (anstelle von Polynomen aus $\mathbb{C}[z]$), könnte man einfach den Parameterraum erweitern, indem man zum Graphen der rationalen Funktionen übergeht. Bei einer Differenzialgleichung erster Ordnung wäre dies eine affine algebraische Varietät Γ im $\mathbb{C}^{r+1}$. Von dieser könnte man den Abschluss in $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ bilden. Durch Projektion des Graphen auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ erhielte man so die Differenzialgleichungen der erweiterten Familie.

Nun sind aber die Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome Elemente aus dem Ring $\mathbb{C}[z]$. In diesem Fall kann man sich behelfen, indem man das Vorgehen verallgemeinert: Es ist $\mathbb{C}[z](a_1, \ldots, a_R) \simeq \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_R](z)$, die Koeffizientenfunktionen sind also als rationale Funktionen in z auffassbar. Es wird der maximale Grad der Zähler- und Nennerpolynome (in z) durch die Ordnung und die Anzahl der Singularitäten der Fuchs'schen Familie festgelegt und dadurch eine allgemeine Form Fuchs'scher Differenzialgleichungen erklärt, die sich durch N Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome parametrisieren lässt (für gewisses $N \in \mathbb{N}$). Die vorgegebene Familie wird mit einer solchen allgemeinen Form identifiziert. Die Parameter der vorgegebenen Familie zusammen mit den durch sie eindeutig bestimmten Koeffizienten der allgemeinen Fuchs'schen Differenzialgleichung bilden den erweiterten Parameterraum, welcher eine affine Varietät Γ in $\mathbb{C}^R \times \mathbb{C}^N$ ist. Es wird sich herausstellen, dass es günstig ist, diese Varietät in einem kartesischen Produkt zweier gewichtet-projektiver Räume abzuschließen (ausführlich wird dies alles in Kapitel 2.2.1 beschrieben).

[3] Man hat die Identifikation

$$\mathbb{C}(z, a_1, \ldots, a_R) := Q(\mathbb{C}[z, a_1, \ldots, a_R]) \simeq Q(\mathbb{C}[z][a_1, \ldots, a_R]) \simeq \mathbb{C}[z](a_1, \ldots, a_R).$$

Will man die affine Varietät Γ, welche durch ein Ideal I gegeben ist, in einem solchen „bi-gewichtet-projektiven Raum“ abschließen, so ist die Bi-Quasi-Homogenisierung I^* von I zu ermitteln (vgl. Kapitel 2.1.3). Dies bereitet in der Praxis erhebliche Schwierigkeiten, denn es genügt nicht, ein beliebiges Erzeugendensystem von I zu bi-quasi-homogenisieren. In Kapitel 2.3 werden zwei Möglichkeiten vorgeschlagen, die Bi-Quasi-Homogenisierung eines Ideals I in einem Polynomring mit möglicherweise sehr vielen Variablen zu berechnen (etwa unter Zuhilfenahme eines Computeralgebra-Programmes wie SINGULAR, [GrPf02b]). Als überaus nützliches Instrument werden dazu Gröbner-Basen eingesetzt (das sind Erzeugendensysteme von Idealen mit sehr schönen Eigenschaften, vgl. Kapitel 2.3.2). Außerdem spielen sie eine hilfreiche Rolle in Zusammenhang mit der Eliminationstheorie, mit deren Hilfe man das Bild einer bi-gewichtet-projektiven Varietät unter der Projektion bestimmen kann (vgl. Kapitel 2.4). Dieses Bild ist – wie sich herausstellen wird – eine gewichtet-projektive Varietät (was aus einer Umformulierung des Hauptsatzes der Eliminationstheorie folgt). Die Punkte dieser Varietät entsprechen den Differenzialgleichungen über dem Abschluss des Parameterraums.

Nachdem also im zweiten Kapitel die Hilfsmittel zur Berechnung entwickelt werden, beschäftigt sich das dritte Kapitel mit Fortsetzungen konkreter Familien. Dabei wird der Frage nachgegangen, welche Parameter des unendlich fernen Teils des Parameterraums zu Differenzialgleichungen der Fuchs'schen Klasse führen. Zum einen wird die Familie der hypergeometrischen Differenzialgleichungen auf die beschriebene Art und Weise fortgesetzt. Es wird sich herausstellen, dass diejenigen Differenzialgleichungen, welche zu unendlich fernen Punkten des Parameterraums gehören, im Wesentlichen konfluente hypergeometrische Differenzialgleichungen sind. Zum anderen wird die Familie der Riemann'schen Differenzialgleichungen (Fuchs'sche Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung mit zwei endlichen Singularitäten) fortgesetzt. Hypergeometrische Differenzialgleichungen sind spezielle Riemann'sche Differenzialgleichungen. Aus diesem Grund verwundert es nicht, dass es Parameter aus dem unendlich fernen Teil des Parameterraums einer Riemann'schen Differenzialgleichung gibt, welche zu konfluenten hypergeometrischen Differenzialgleichungen führen. Außerdem findet man die Familie der Bessel'schen Differenzialgleichungen wieder, die sich also nicht nur durch Konfluenz der Singularitäten einer Fuchs'schen Familie zweiter Ordnung mit 4 Singularitäten, sondern auch durch Konfluenz der Singularitäten einer Riemann'schen Differenzialgleichung erzeugen lässt.

Auf einige Details sei an dieser Stelle noch hingewiesen:

Mit $\mathbb{P}^n$ ist immer der komplex-projektive Raum und mit $\mathbb{P}^n_{\mathbf{p}}$ immer der gewichtet komplex-projektive Raum bezüglich des Gewichtungsvektors $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_n) \in$

$\mathbb{N}^{n+1}$ gemeint (falls nicht anders angegeben): Es sind $p_0, \dots, p_n$ natürliche, positive Zahlen (in dieser Arbeit wird stets $p_0 = 1$ angenommen). Man hat eine $\mathbb{C}^*$-Aktion auf dem affinen Raum $\mathbb{C}^{n+1}$, die gegeben ist durch

$$t \cdot (a_0, \dots, a_n) = (t^{p_0} a_0, \dots, t^{p_n} a_n).$$

Der gewichtet komplex-projektive Raum ist geometrisch definiert als Quotient

$$\mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} := \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \mathbb{C}^*$$

oder auf algebraische Weise durch

$$\mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} := \operatorname{Proj}(S),$$

wobei S den Polynomring $\mathbb{C}[a_0, \dots, a_n]$ bezeichne, welcher die durch die Beziehungen $deg(a_i) = p_i$ gegebene Graduierung trägt. Für weitere Einzelheiten bezüglich gewichtet-projektiver Räume sei auf [Dim92], Appendix B, S. 230ff. verwiesen.

Der affine Raum $\mathbb{C}^n$ ist immer bezüglich der Standardeinbettung

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (1 : a_1 : \dots : a_n)$$

als Teilmenge des $\mathbb{P}^n$ bzw. $\mathbb{P}^n_{\mathbf{p}}$ zu verstehen. Die zusätzliche Koordinate wird mit a_0 bezeichnet.

Die Bi-Quasi-Homogenisierung eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l]$ im Ring $\mathbb{C}[a_0, a_1, \dots, a_k, b_0, b_1, \dots, b_l]$ erfolgt stets bezüglich der Homogenisierungsvariablen a_0 und b_0, welchen das Gewicht 1 zugeordnet ist, und wird mit f^* bezeichnet. Die (einfache) Quasi-Homogenisierung eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[a_1, \dots, a_k]$ im Ring $\mathbb{C}[a_0, a_1, \dots, a_k]$ bezüglich der Homogenisierungsvariablen a_0 wird mit $f^\star$ bezeichnet (zur Unterscheidung wird ein anderes Sternchen benutzt).

Mit $\mathcal{V}(I)$ wird die Nullstellenmenge eines Ideals I bezeichnet. Dabei ist dem Zusammenhang zu entnehmen, in welchem Raum die Nullstellenmenge zu betrachten ist: Falls $I \subset \mathbb{C}[a_0, \dots, a_r, b_0, \dots, b_s]$ ein bi-quasi-homogenes Ideal ist, so ist mit $\mathcal{V}(I)$ die Nullstellenmenge im bi-gewichtet-projektiven Raum $\mathbb{P}^r_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^s_{\mathbf{q}}$ gemeint (andernfalls, wenn zum Beispiel der „Kegel“ in $\mathbb{C}^{r+s+2}$ als Nullstellenmenge eines bi-quasi-homogenen Ideals gemeint ist, wird dies vorher angemerkt). Ist I ein beliebiges Ideal in $\mathbb{C}[a_1, \dots, a_r]$, so ist $\mathcal{V}(I)$ als Nullstellenmenge von I in $\mathbb{C}^r$ zu verstehen.

Danksagung

Mein Dank gilt den vielen Menschen, die mich bei meinem Promotionsvorhaben unterstützt haben. Für fachliche und finanzielle Unterstützung danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Für zahlreiche, wegweisende Diskussionen danke ich der Arbeitsgruppe „Geometrie singulärer Räume“. Für viele fruchtbare Hinweise und für das Korrekturlesen dieser Arbeit möchte ich mich bei all meinen Kollegen aus dem „blauen Pavillon“ bedanken. Für wertvolle sprachwissenschaftliche Hinweise danke ich meiner Schwester, der ich auf diesem Wege ein erfolgreiches Gelingen ihres eigenen Promotionsvorhabens wünsche. Für stets ermutigende, wohlwollende Worte und Taten, für ihre ganze Unterstützung und Liebe danke ich meiner Familie.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hamm, der mein Promotionsvorhaben betreut hat: Ich danke Ihnen für die zahlreichen Hinweise und Ratschläge. Danke, dass Sie mich an Ihrem Wissen haben teilhaben lassen. Danke für die unzähligen Male, die ich mit meinen Problemen zu Ihnen kommen durfte. Danke, dass Sie trotz vollen Terminkalenders stets Zeit für mich gefunden haben. Danke für Ihre Geduld.

Kapitel 1

Theorie der Fuchs'schen Differenzialgleichungen

1.1 Fuchs'sche Theorie

1.1.1 Die allgemeine Gestalt Fuchs'scher Differenzialgleichungen

Es sei

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_n(z)w = 0 \tag{1.1}$$

eine gewöhnliche, komplexe, lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung mit der unabhängigen Variable $z \in \mathbb{C}$ und der abhängigen Variable $w = w(z)$. Sind die Funktionen $p_1, \ldots, p_n$ in einem Punkt $s_1 \in \mathbb{C}$ analytisch, so heißt die Gleichung *regulär* in s_1. Hat ein p_k eine Singularität in s_1, heißt s_1 *singulärer Punkt* der Differenzialgleichung. Gegenstand der Fuchs'schen Theorie sind Differenzialgleichungen, deren *Singularitäten regulär* gemäß der folgenden Definition sind:

Definition 1.1. Es sei s_1 ein singulärer Punkt der Differenzialgleichung (1.1).

(i) Falls es in s_1 analytische Funktionen $q_1, \ldots, q_n$ gibt mit $p_k = (z - s_1)^{-k} q_k$, so heißt s_1 eine *schwache Singularität* von (1.1).

(ii) Gibt es in einer Umgebung von s_1 ein Lösungsfundamentalsystem von (1.1), welches aus Linearkombinationen von Funktionen der Form $(z - s_1)^{\alpha} (log(z - s_1))^s h(z)$ besteht (mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{N}_{\leq n-1}$, h in einer Umgebung von s_1 analytisch mit $h(s_1) \neq 0$), so heißt s_1 *reguläre Singularität* von (1.1).

Im Gegensatz zur Theorie der Systeme von Differenzialgleichungen gilt der folgende Satz (bei Systemen gilt lediglich die Richtung „⇒“):

Satz 1.2. *Die Differenzialgleichung* (1.1) *hat in* s_1 *genau dann eine schwache Singularität, wenn sie in* s_1 *eine reguläre Singularität hat.*

Den Beweis findet man in der Standardliteratur, z.B. in [CoLe55], Theorem 5.1 und Theorem 5.2, S.124ff. □

Man sagt, dass (1.1) in $z = \infty$ eine reguläre Singularität hat (bzw. regulär ist), falls die mit $\xi = \frac{1}{z}$ transformierte Differenzialgleichung in $\xi = 0$ eine reguläre Singularität hat (bzw. regulär ist). Singularitäten, welche keine regulären Singularitäten sind, heißen *irregulär*. Schließlich nennt man eine Differenzialgleichung vom *Fuchs'schen Typ*, falls sie endlich viele reguläre Singularitäten in $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hat und an allen anderen Stellen regulär ist.
Um Differenzialgleichungen vom Fuchs'schen Typ zu charakterisieren, ist es notwendig, ihre Transformation mit $\xi = \frac{1}{z}$ zu verstehen. Es gilt

Proposition 1.3. *Sei* $n \in \mathbb{N}_0$. *Bezüglich der Transformation* $\xi = \frac{1}{z}$ *verhält sich der Differenzialoperator gemäß der folgenden Vorschrift:*

$$\frac{d^n}{dz^n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\, \xi^{k+n}\, \frac{d^k}{d\xi^k} \tag{1.2}$$

Dabei sind $c_{n,k}$ *natürliche Zahlen, die sich rekursiv berechnen lassen:*
$c_{n,0} = 0$ *für alle* $n \geq 1$,
$c_{n,n} = 1$ $\forall n$ *und*
$c_{n,k} = c_{n-1,k-1} + (k+n-1)c_{n-1,k}$ *für alle* $n \geq 2$ *und* $k = 1, \ldots, n-1$.

Beweis. Durch vollständige Induktion nach n. □

Substituiert man (1.2) in (1.1) und setzt man $p_0(z) \equiv 1$, so erhält man nach einigen simplen Umformungen

$$\frac{d^n w}{d\xi^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j\, c_{n-j,k}\, p_j(\frac{1}{\xi}) \xi^{k-j-n} \right) \frac{d^k w}{d\xi^k} = 0. \tag{1.3}$$

Beispiel 1.4. Für eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p_1(z)\frac{dw}{dz} + p_2(z)w = 0$$

lautet (1.3)[1]:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} p_1(\frac{1}{\xi}) \right) \frac{dw}{d\xi} + \frac{1}{\xi^4} p_2(\frac{1}{\xi}) w = 0.$$

[1]dabei sind $c_{0,0} = c_{1,1} = c_{2,2} = 1$, $c_{1,0} = c_{2,0} = 0$, $c_{2,1} = 2$)

Die Differenzialgleichung ist also genau dann regulär singulär in $z = \infty$, wenn $p_1(\frac{1}{\xi})$ in $\xi = 0$ eine Nullstelle wenigstens erster Ordnung und $p_2(\frac{1}{\xi})$ in $\xi = 0$ eine Nullstelle wenigstens zweiter Ordnung hat und falls gilt:

$$\big(Res_{z=0}\left(p_1(z)\right), \quad Res_{z=0}\left(p_2(z)\cdot z\right), \quad Res_{z=0}\left(p_2(z)\cdot z^2\right)\big) \neq (2,0,0).$$

Die letzte Bedingung schließt aus, dass $z = \infty$ eine reguläre Stelle ist.

Man kann nun zeigen, dass Fuchs'sche Differenzialgleichungen immer von einer bestimmten Form sind, die durch die Ordnung der Gleichung und die Anzahl ihrer Singularitäten festgelegt ist (dieses Ergebnis findet sich beispielsweise auch bei [CoLe55], Theorem 6.4, S. 129f.):

Satz 1.5. *Gegeben sei eine Fuchs'sche Differenzialgleichung* (1.1) *der Ordnung n mit $m > 0$ endlichen Singularitäten $\{s_1, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{C}$. Dann gibt es polynomiale Funktionen $h_1, \ldots, h_n$, so dass für die Koeffizientenfunktionen von* (1.1) *gilt:*

$$p_j(z) = \frac{h_j(z)}{\prod_{i=1}^m (z - s_i)^j} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Der Grad der h_j ist beschränkt: $deg(h_j) \leq j(m-1)$.
Umgekehrt ist jede Differenzialgleichung n-ter Ordnung, deren Koeffizientenfunktionen diese Bedingung erfüllen, vom Fuchs'schen Typ.

Beweis. Mit den bisherigen Ergebnissen ist dies eine einfache Übungsaufgabe. □

Eine unmittelbare Folge aus Satz 1.5 ist das folgende

Korollar 1.6. *Die allgemeine Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen der Ordnung n mit m vorgeschriebenen, endlichen Singularitäten ist durch wenigstens*

$$\sum_{j=1}^{n} (j(m-1)+1) = (m-1)\frac{n(n+1)}{2} + n$$

komplexe Parameter gegeben (diese entsprechen den Koeffizienten der Zählerpolynome $h_1, \ldots, h_n$ aus (1.4)). □

Fasst man auch die Singularitäten $s_1, \ldots, s_m$ als komplexe Parameter auf und schränkt man den Parameterraum auf das Komplement der Ausnahmemenge $\bigcup_{i \neq j}\{s_i = s_j\}$ ein, so wird die allgemeine Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen durch wenigstens $(m-1)\frac{n(n+1)}{2} + n + m$ Variablen parametrisiert. Die Differenzialgleichungen, die durch die Ausnahmemenge (welche eine endliche Vereinigung von Hyperflächen im Parameterraum ist) gegeben werden, haben im Allgemeinen irreguläre Singularitäten.

Es stellt sich nun noch die Frage, wie die Koeffizienten der Polynome h_j einer Fuchs'schen Differenzialgleichung (1.1) beschaffen sein müssen, damit diese in $z = \infty$ eine reguläre Stelle besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn in (1.3) die Koeffizientenfunktionen

$$c_{n,k}\xi^{k-n} + \sum_{j=1}^{n-k}(-1)^j \, c_{n-j,k} \, p_j(\frac{1}{\xi})\xi^{k-j-n}$$

für $k = 0, \ldots, n-1$ sämtlich holomorph in $\xi = 0$ sind.

Durch eine genaue Betrachtung dieser Funktionen erhält man als Kriterium für ihre Holomorphie in $\xi = 0$ ein System von algebraischen Gleichungen, aus welchen folgt, dass einige der Koeffizienten der Polynome h_j in Abhängigkeit von den Konstanten $c_{j,k}$ und den Singularitäten $s_1, \ldots, s_m$ stehen.

Abschließend seien als Anwendung der bisherigen Ergebnisse „die ersten" allgemeinen Fuchs'schen Differenzialgleichungen n-ter Ordnung mit m endlichen, unterschiedlichen Singularitäten $s_1, \ldots, s_m$ (d.h. es gelte $s_i \neq s_j$ für $i \neq j$) in Form eines Überblicks aufgeführt. Die einzige Fuchs'sche Differenzialgleichung mit keiner einzigen endlichen Singularität ist $w^{(n)} = 0$, bei welcher in $z = \infty$ wegen Proposition 1.3 eine reguläre Singularität vorliegt.

n	m	Form der Fuchs'schen DGL	Bedg. für $z = \infty$ regulär
1	1	$w' + \frac{a_1}{z-s_1}w = 0$	$a_1 = 0$
1	2	$w' + \frac{a_1z+a_2}{(z-s_1)(z-s_2)}w = 0$	$a_1 = 0$
1	3	$w' + \frac{a_1z^2+a_2z+a_3}{(z-s_1)(z-s_2)(z-s_3)}w = 0$	$a_1 = 0$
2	1	$w'' + \frac{a_1}{z-s_1}w' + \frac{a_2}{(z-s_1)^2}w = 0$	$a_1 = 2$, $a_2 = 0$
2	2	$w'' + \frac{a_1z+a_2}{(z-s_1)(z-s_2)}w' + \frac{a_3z^2+a_4z+a_5}{(z-s_1)^2(z-s_2)^2}w = 0$	$a_1 = 2$, $a_3 = a_4 = 0$
2	3	$w'' + \frac{a_1z^2+a_2z+a_3}{(z-s_1)(z-s_2)(z-s_3)}w' +$ $+ \frac{a_4z^4+a_5z^3+a_6z^2+a_7z+a_8}{(z-s_1)^2(z-s_2)^2(z-s_3)^2}w = 0$	$a_1 = 2$, $a_4 = a_5 = 0$
3	1	$w''' + \frac{a_1}{z-s_1}w'' + \frac{a_2}{(z-s_1)^2}w' + \frac{a_3}{(z-s_1)^3}w = 0$	$a_1 = a_2 = 6$, $s_1 = a_3 = 0$
3	2	$w''' + \frac{a_1z+a_2}{(z-s_1)(z-s_2)}w'' + \frac{a_3z^2+a_4z+a_5}{(z-s_1)^2(z-s_2)^2}w' +$ $+ \frac{a_6z^3+a_7z^2+a_8z+a_9}{(z-s_1)^3(z-s_2)^3}w = 0$	$a_1 = a_3 = 6$, $a_7 = a_8 = 0$, $2s_1a_2 + 2s_2a_2 + a_4 = 0$
3	3	$w''' + \frac{a_1z^2+a_2z+a_3}{(z-s_1)(z-s_2)(z-s_3)}w'' + \frac{a_4z^4+a_5z^3+a_6z^2+a_7z+a_8}{(z-s_1)^2(z-s_2)^2(z-s_3)^2}w'$ $+ \frac{a_9z^6+a_{10}z^5+a_{11}z^4+a_{12}z^3+a_{13}z^2+a_{14}z+a_{15}}{(z-s_1)^3(z-s_2)^3(z-s_3)^3}w = 0$	$a_1 = a_4 = 6$, $a_9 = a_{10} = a_{11} = 0$, $-2a_2 + a_5 = 0$

1.1.2 Der Lösungsraum Fuchs'scher Differenzialgleichungen

Für die Differenzialgleichung (1.1) sei $z = s$ eine reguläre (also schwach singuläre) Singularität, d.h. die Funktionen p_j haben die Form $p_j(z) = (z-s)^{-j} q_j$, wobei q_j eine in $z = s$ analytische Funktion ist. Man transformiere die Differenzialgleichung mittels

$$w_k := (z-s)^{k-1} w^{(k-1)} \qquad k = 1, \dots, n$$

in ein System von Differenzialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n' \end{pmatrix} = \frac{1}{z-s} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (n-2) & 1 \\ -q_n(z) & -q_{n-1}(z) & \dots & \dots & \dots & \dots & -q_2(z) & (n-1)-q_1(z) \end{pmatrix}}_{=:A(z)} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Das Residuum der Koeffizientenmatrix dieses Systems im Punkt $z = s$ ist gegeben durch die konstante Matrix $A(s)$. Aus der Theorie der Fuchs'schen Differenzialgleichungen ist bekannt (vgl. [Her75], Satz 5.2, S. 105f.), dass die Eigenwerte von $A(s)$, also die Nullstellen der sogenannten *Indexgleichung*

$$det(A(s) - \lambda E) = 0, \tag{1.6}$$

zu n linear unabhängigen, in einer Umgebung von $z = s$ definierten Lösungen von (1.1) der Form

$$w(z) = (z-s)^\lambda \big(h_0(z) + h_1(z) log(z-s) + \dots + h_l(z) log^l(z-s)\big) \tag{1.7}$$

führen (dabei ist $l \leq n-1$ und die h_j sind in einer Umgebung von $z = s$ analytisch). Ist λ ein r-facher Eigenwert von $A(s)$, gibt es auch r Lösungen der Form (1.7). Die Eigenwerte von $A(s)$ heißen *charakteristische Exponenten* der Differenzialgleichung (1.1) bezüglich der Singularität s. Sie charakterisieren das Verzweigungsverhalten des Lösungsraums in der Nähe der Singularität. Ist $z = \infty$ eine reguläre Singularität, so erhält man nach Substitution mit $\xi = 1/z$ in genau der gleichen Weise eine Indexgleichung. Deren Nullstellen mit umgekehrten Vorzeichen heißen die charakteristischen Exponenten der Singularität in ∞.

1.1.3 Die Fuchs'sche Relation

Wie gesehen wird durch jede Fuchs'sche Differenzialgleichung ein System von charakteristischen Exponenten bestimmt. In diesem Abschnitt soll der umgekehrten Frage nachgegangen werden, ob es bei Vorgabe eines solchen Systems eine Fuchs'sche Differenzialgleichung gibt, deren charakteristische Exponenten die vorgegebenen sind. Die folgenden Ausführungen orientieren sich an [Inc56], §15.4, S. 370f.

Es sei eine Differenzialgleichung (1.1) mit Singularitäten in $s_1, \ldots, s_m$ und ∞ gegeben. Mittels einer Partialbruchzerlegung ist die allgemeine Fuchs'sche Differenzialgleichung aus Satz 1.5 äquivalent zu

$$w^{(n)} + p_1(z)w^{(n-1)} + \ldots + p_n(z)w = 0$$

mit

$$p_j(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_{j,i}}{(z-s_i)^j} + \frac{Q_j(z)}{(z-s_1)^{j-1}(z-s_2)^{j-1}\ldots(z-s_m)^{j-1}}, \tag{1.8}$$

wobei Q_j ein Polynom in z höchstens vom Grad $j(m-1)-m$ und $P_{j,i}$ Konstanten sind, welche offensichtlich die Indexgleichungen (1.6) der Singularitäten s_i bestimmen: Entwickelt man zur Berechnung der Determinante die Matrix $A(s) - \lambda E$ mit $A(z)$ aus (1.5) nach der letzten Zeile, schreibt sich die Indexgleichung der Singularität s_i in der Form[2]

$$(\lambda)_n + \sum_{j=1}^{n} P_{j,i}(\lambda)_{n-j} = 0. \tag{1.9}$$

Man erkennt hieraus, dass durch Vorgabe der charakteristischen Exponenten der Singularitäten $s_1, \ldots, s_m$ alle Konstanten $P_{j,i}$ eindeutig bestimmt sind: Bezeichnen $\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}$ die charakteristischen Exponenten der Singularität s_i, so zerfällt die linke Seite von (1.9) in Linearfaktoren der Form

$$(\lambda)_n + \sum_{j=1}^{n} P_{j,i}(\lambda)_{n-j} = (\lambda - \alpha_{i,1}) \cdot (\lambda - \alpha_{i,2}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_{i,n}).$$

Durch einen Koeffizientenvergleich bei λ^{n-1} erhält man die Beziehung

$$-\frac{1}{2}n(n-1) + P_{1,i} = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}. \tag{1.10}$$

Durch weitere Koeffizientenvergleiche von $\lambda^{n-2}, \lambda^{n-3}, \ldots$ können alle $P_{j,i}$ $(j = 1, \ldots, n)$ rekursiv ausgerechnet werden.

Transformiert man die Differenzialgleichung mit $\xi = 1/z$ und bezeichnet man den Leitkoeffizienten von Q_j mit C_j (man beachte, dass wegen der Gradbedingung für Q_j

[2] $(\lambda)_n := \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - n + 1)$ für $n > 0$ und $(\lambda)_0 := 1$.

der Koeffizient $C_1 = 0$ ist), folgt nach einer längeren Rechnung die Indexgleichung der Singularität ∞ zu

$$(\lambda)_n + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} P_{j,i} + C_j \right) (\lambda)_{n-j} = 0. \tag{1.11}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung mit negativen Vorzeichen sind die charakteristischen Exponenten der Singularität in ∞. Bezeichnen $\beta_1, \dots, \beta_n$ die Exponenten der Singularität in ∞, erhält man in ähnlicher Weise wie eben die Beziehung

$$-\frac{1}{2}n(n-1) + \sum_{i=1}^{m} P_{1,i} + 0 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j. \tag{1.12}$$

Zusammen mit (1.10) folgt:

Lemma 1.7 (Fuchs'sche Relation).

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\beta_j + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j} \right) = \frac{1}{2}n(n-1)(m-1) \tag{1.13}$$

□

Diese Gleichung ist als Fuchs'sche Relation bekannt[3]. Gibt man also für eine Fuchs'sche Differenzialgleichung n-ter Ordnung $m+1$ Singularitäten (inklusive ∞) vor, sind $(m+1)n-1$ Exponenten frei wählbar. Der letzte Exponent ist durch (1.13) bestimmt und die Koeffizienten $P_{j,i}$ sowie C_j der umparametrisierten allgemeinen Form sind durch die obigen Gleichungen eindeutig bestimmt.

Da die allgemeine Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen (bzw. deren Umparametrisierung (1.8)) nach Korollar 1.6 durch wenigstens $(m-1)\frac{n(n+1)}{2}+n$ Parameter bestimmt ist, erhält man durch die Vorgabe von Exponenten genau dann *nicht* eine eindeutige Fuchs'sche Differenzialgleichung, wenn

$$(m+1) \cdot n - 1 < (m-1)\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

bzw.

$$m > \frac{n(n+1)-2}{n(n-1)} \tag{1.14}$$

ist ($n \geq 2$). Für Differenzialgleichungen der Ordnung $n = 2$ ist dies zum Beispiel gegeben, wenn $m \geq 3$ ist. Außerdem fällt auf, dass für $m = 2$ auf beiden Seiten von (1.14) Gleichheit herrscht. In diesem Fall ist die Differenzialgleichung durch Vorgabe ihrer charakteristischen Exponenten eindeutig bestimmt (s. nächster Abschnitt).

[3] Für den Fall, dass ∞ ein regulärer Punkt ist und $m+1$ endliche Singularitäten vorliegen, gilt eine zu (1.13) analoge Gleichung. Die Summe der charakteristischen Exponenten ist also in jedem Fall konstant.

1.1.4 Die Riemann'sche P-Gleichung

Der eben erwähnte Fall einer Fuchs'schen Differenzialgleichung der Ordnung $n = 2$ mit 3 Singularitäten in s_1, s_2 und ∞ soll im Folgenden weiter vertieft werden. Die zu betrachtende allgemeine Fuchs'sche Differenzialgleichung lautet

$$w'' + \frac{a_1 z + a_2}{(z-s_1)(z-s_2)} w' + \frac{a_3 z^2 + a_4 z + a_5}{(z-s_1)^2(z-s_2)^2} w = 0 \tag{1.15}$$

bzw. nach einer Umparametrisierung entsprechend (1.8)

$$w'' + \left(\frac{A_1}{(z-s_1)} + \frac{A_2}{(z-s_2)} \right) w' + \left(\frac{B_1}{(z-s_1)^2} + \frac{B_2}{(z-s_2)^2} + \frac{C}{(z-s_1)(z-s_2)} \right) w = 0, \tag{1.16}$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 + A_2, & a_2 &= -A_1 s_2 - A_2 s_1, \\ a_3 &= B_1 + B_2 + C, & a_4 &= -2B_1 s_2 - 2B_2 s_1 - C s_1 - C s_2, \\ a_5 &= B_1 s_2^2 + B_2 s_1^2 + C s_1 s_2. \end{aligned}$$

Die Indexgleichungen der Singularitäten ergeben sich gemäß (1.9) und (1.11)

$$\begin{aligned} &\text{für } z = s_1 \text{ zu:} && \lambda^2 + (A_1 - 1)\lambda + B_1 = 0, \\ &\text{für } z = s_2 \text{ zu:} && \lambda^2 + (A_2 - 1)\lambda + B_2 = 0, \\ &\text{für } z = \infty \text{ zu:} && \lambda^2 + (A_1 + A_2 - 1)\lambda + B_1 + B_2 + C = 0. \end{aligned}$$

Sind $\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$ (resp. $\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$) die charakteristischen Exponenten von s_1 (resp. s_2) und β_1, β_2 diejenigen von ∞, so ergeben sich, da sie (bei β_1, β_2 bis auf Vorzeichen) per Definition die Wurzeln aus den jeweiligen Indexgleichungen sind, die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} &= 1 - A_1 & \alpha_{1,1}\alpha_{1,2} &= B_1 \\ \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} &= 1 - A_2 & \alpha_{2,1}\alpha_{2,2} &= B_2 \\ \beta_1 + \beta_2 &= A_1 + A_2 - 1 & \beta_1\beta_2 &= B_1 + B_2 + C, \end{aligned} \tag{1.17}$$

und man erhält

$$A_i = 1 - \alpha_{i,1} - \alpha_{i,2}, \qquad B_i = \alpha_{i,1}\alpha_{i,2}, \qquad C = \beta_1\beta_2 - \alpha_{1,1}\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{2,2}$$

(für $i = 1, 2$), so dass die zugehörige Fuchs'sche Differenzialgleichung (1.16)

$$\begin{aligned} w'' + \left(\frac{1 - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2}}{(z-s_1)} + \frac{1 - \alpha_{2,1} - \alpha_{2,2}}{(z-s_2)} \right) w' + \\ + \left(\frac{\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}}{(z-s_1)^2} + \frac{\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}}{(z-s_2)^2} + \frac{\beta_1\beta_2 - \alpha_{1,1}\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1}\alpha_{2,2}}{(z-s_1)(z-s_2)} \right) w = 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

lautet. Im Übrigen erhält man durch Addition der drei linken Gleichungen von (1.17) die Fuchs'sche Relation $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{2,1} + \alpha_{2,2} + \beta_1 + \beta_2 = 1$.

Die Tatsache, dass eine Funktion $w(z)$ eine Differenzialgleichung der Form (1.18) erfüllt, wird mit dem Riemann'schen P-Symbol

$$w(z) = P \left(\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \infty & \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \beta_1 & z \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \beta_2 & \end{array} \right)$$

ausgedrückt (vorbehaltlich der Voraussetzung, dass die Exponentensumme gleich 1 ist). Damit ist – wie gesehen – in eindeutiger Weise eine Riemann'sche Differenzialgleichung definiert. Ist ∞ eine reguläre Stelle und gibt es stattdessen eine weitere Singularität $s_3 \in \mathbb{C}$, schreibt man ebenso das P-Symbol, wenn gemeint ist, dass eine Funktion $w(z)$ die zugehörige Differenzialgleichung erfüllt.[4] Durch Anwendung linearer Transformationen der unabhängigen Variable oder auch durch bestimmte Transformationen der abhängigen Variable gehen Riemann'sche Differenzialgleichungen wieder in Riemann'sche Differenzialgleichungen über. Dabei werden die Singularitäten bzw. die charakteristischen Exponenten verändert. Zusammengefasst gilt:

Lemma 1.8. *Für $k, l \in \mathbb{C}$ und für eine gebrochen-lineare Transformation $v = v(z)$, die (s_1, s_2, s_3) auf (t_1, t_2, t_3) abbildet, gilt*

$$\left(\frac{z-s_1}{z-s_2}\right)^k \left(\frac{z-s_3}{z-s_2}\right)^l P \left(\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1} & z \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} & \end{array} \right) = P \left(\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & \\ \alpha_{1,1}+k & \alpha_{2,1}-k-l & \alpha_{3,1}+l & z \\ \alpha_{1,2}+k & \alpha_{2,2}-k-l & \alpha_{3,2}+l & \end{array} \right)$$

bzw.

$$P \left(\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1} & z \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} & \end{array} \right) = P \left(\begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1} & v \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} & \end{array} \right).$$

Beweis. Vgl. zum Beispiel [Rai64], §45, Theorem 27,28,29, S.156ff. □

[4] Sind $\alpha_{3,1}$ und $\alpha_{3,2}$ die charakteristischen Exponenten der Singularität s_3, lautet die zugehörige eindeutig bestimmte Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} w'' + \left(\frac{1-\alpha_{1,1}-\alpha_{1,2}}{z-s_1} + \frac{1-\alpha_{2,1}-\alpha_{2,2}}{z-s_2} + \frac{1-\alpha_{3,1}-\alpha_{3,2}}{z-s_3}\right) w' + \\ + \left(\frac{\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}(s_1-s_2)(s_1-s_3)}{z-s_1} + \frac{\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}(s_2-s_1)(s_2-s_3)}{z-s_2} + \frac{\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}(s_3-s_1)(s_3-s_2)}{z-s_3}\right) \cdot \\ \cdot \frac{w}{(z-s_1)(z-s_2)(z-s_3)} = 0. \end{aligned}$$

Dies ist die *Riemann-Papperitz'sche Differenzialgleichung* (vgl. zum Beispiel [Rai64], §44, S.154ff.).

1.1.5 Die Hypergeometrische Differenzialgleichung

Die Differenzialgleichung, welche durch das P-Symbol

$$w = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{pmatrix}$$

gegeben ist, heißt Hypergeometrische Differenzialgleichung. Nach (1.18) entspricht diese der Gleichung

$$w'' + \left(\frac{(1+\alpha+\beta)z - \gamma}{z(z-1)} \right) w' + \left(\frac{\alpha\beta}{z(z-1)} \right) w = 0. \tag{1.19}$$

Diese Gleichung mit ihren Fundamentalsystemen ist in der Literatur sehr intensiv studiert worden: Sie wird in der Nähe von $z = 0$ formal durch die hypergeometrische Reihe

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!(\gamma)_k} z^k$$

gelöst (unter der Voraussetzung, dass γ weder Null noch eine negative ganze Zahl ist). In der Tat stellt die Reihe eine in $|z| < 1$ konvergente holomorphe Funktion dar, die mit $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ bezeichnet wird. Aufgrund von Symmetrieeigenschaften des Riemann'schen P-Symbols und den oben erwähnten Transformationsvorschriften findet man ausgehend von $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ noch 23 weitere Lösungen in Umgebungen von 0, 1 und ∞ (welche bereits im Jahre 1836 von Kummer gefunden wurden). Dabei müssen einige Bedingungen an die charakteristischen Exponenten gestellt werden, damit diese Lösungen definiert sind und damit man ein Paar finden kann, welches auf ihrem gemeinsamen Definitionsgebiet ein Lösungsfundamentalsystem darstellt. In den Ausnahmefällen treten logarithmische Terme auf (vgl. (1.7)). Diese Situation wird bei [Rai64], §55 und §56, S. 188ff. behandelt.

Ist eine beliebige Riemann'sche Differenzialgleichung gegeben, deren Integrale man bestimmen möchte, kann man sie durch eine gebrochen-lineare Transformation der unabhängigen Variable sowie durch bestimmte Transformationen der abhängigen Variable in eine hypergeometrische Differenzialgleichung umformen, deren Fundamentalsysteme - wie gerade beschrieben - bekannt sind. Durch ein Rückgängigmachen der Transformation erhält man schließlich Fundamentalsysteme der zu lösenden Riemann'schen Differenzialgleichung.

Ein ausführliches Studium der Lösungen der hypergeometrischen Differenzialgleichung findet man zum Beispiel bei [WhWa63], Chapter XIV, S. 281ff.

1.2 Konfluenz

Unter dem Begriff *Konfluenz* versteht man das Zusammenlaufen zweier oder mehrerer Singularitäten einer Differenzialgleichung. Im Allgemeinen entsteht dabei aus zwei regulären Singularitäten eine irreguläre Singularität. Ganz wesentlich ist hierbei das Verhalten der übrigen Parameter der Differenzialgleichung, wie das folgende einfache Beispiel zeigt:

Beispiel 1.9. Die allgemeine Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen erster Ordnung mit zwei endlichen Singularitäten ist gegeben durch

$$w' + \frac{a_1 z + a_2}{(z-s_1)(z-s_2)} w = 0.$$

Der Parameterraum ist $\mathbb{C}^4 \backslash T$ mit $T := \{s_1 - s_2 = 0\}$. Konfluenz der beiden endlichen Singularitäten bedeutet nun, den Parameterraum nach T fortzusetzen. Es entstehen in T Differenzialgleichungen der Form

$$w' + \frac{a_1 z + a_2}{(z-s_1)^2} w = 0.$$

Für Parameter aus

$$T \cap (\{a_1 = 1, a_2 = -s_1\} \cup \{a_1 = a_2 = 0\})$$

bleiben die zugehörigen Differenzialgleichungen offenbar vom Fuchs'schen Typ. Für Parameter aus dem Komplement dieser Untervarietät des $\mathbb{C}^4$ wird die Singularität irregulär.

Das Standardbeispiel für das Zusammenlaufen zweier Singularitäten, von denen eine in $z = \infty$ liegt, wird durch die hypergeometrische Differenzialgleichung gegeben:

1.2.1 Die Konfluente Hypergeometrische Differenzialgleichung

Es sei $\beta \neq 0$. Die hypergeometrische Differenzialgleichung (1.19) werde transformiert durch $x = \beta z$. Setzt man $u(x) = w(\frac{x}{\beta})$, erhält man die Gleichung

$$u'' + \left(\frac{(1+\alpha+\beta)x - \gamma\beta}{x(x-\beta)} \right) u' + \left(\frac{\alpha\beta}{x(x-\beta)} \right) u = 0. \tag{1.20}$$

Für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}^3 \setminus T$ mit $T := \{\beta = 0\}$ wird so eine Fuchs'sche Differenzialgleichung mit zwei endlichen und einer in ∞ liegenden Singularität gegeben[5]. Diese

[5]Für $\beta = 0$ ist diese Differenzialgleichung – wie gleich angeführt wird – zwar auch vom Fuchs'schen Typ. Sie geht dann aber nicht durch eine lineare Transformation aus einer hypergeometrischen Differenzialgleichung hervor.

Differenzialgleichung werde nun durch den Abschluss des Parameterraums $\mathbb{C}^3 \setminus T$ in $\mathbb{C} \times \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ fortgesetzt. Dabei ist $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ als Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$ zu verstehen. Die Fortsetzung nach T (also $\beta = 0$) liefert die Fuchs'sche Differenzialgleichung

$$u'' + \frac{1+\alpha}{x} u' = 0.$$

Aus (1.20) folgt für $\beta \neq 0$

$$u'' + \left(\frac{\frac{(1+\alpha)}{\beta} x + x - \gamma}{x(\frac{x}{\beta} - 1)} \right) u' + \left(\frac{\alpha}{x(\frac{x}{\beta} - 1)} \right) u = 0, \tag{1.21}$$

und für $\beta \to \infty$ erhält man die so genannte *konfluente hypergeometrische Differenzialgleichung*

$$u'' + \frac{\gamma - x}{x} u' - \frac{\alpha}{x} u = 0 \tag{1.22}$$

mit einer irregulären Singularität in ∞ (für alle γ, α).

Nach Lemma 1.8 ist Gleichung (1.20) die zu

$$u = P \begin{pmatrix} 0 & \beta & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & x \\ 1-\gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta & \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

gehörende Fuchs'sche Differenzialgleichung. Mit der nach ∞ laufenden Singularität gehen also auch zwei der Exponenten nach ∞.

Man kann allgemein die Frage stellen, ob die zu

$$P \begin{pmatrix} 0 & \beta & \infty & \\ \alpha_{1,1}(\beta) & \alpha_{2,1}(\beta) & \alpha_{3,1}(\beta) & z \\ \alpha_{1,2}(\beta) & \alpha_{2,2}(\beta) & \alpha_{3,2}(\beta) & \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

gehörenden Fuchs'schen Differenzialgleichungen für $\beta \to \infty$ in $z = \infty$ irregulär werden können, wenn $\lim_{\beta \to \infty} \alpha_{i,j}(\beta) \in \mathbb{C}$ existiert (für alle i, j). Nach (1.17) lautet die zugehörige Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} w'' &+ \left(\frac{1 - \alpha_{1,1}(\beta) - \alpha_{1,2}(\beta)}{z} + \frac{1 - \alpha_{2,1}(\beta) - \alpha_{2,2}(\beta)}{(z-\beta)} \right) w' + \\ &+ \left(\frac{\alpha_{1,1}(\beta)\alpha_{1,2}(\beta)}{z^2} + \frac{\alpha_{2,1}(\beta)\alpha_{2,2}(\beta)}{(z-\beta)^2} + \frac{\alpha_{3,1}(\beta)\alpha_{3,2}(\beta) - \alpha_{1,1}(\beta)\alpha_{1,2}(\beta) - \alpha_{2,1}(\beta)\alpha_{2,2}(\beta)}{z(z-\beta)} \right) w = 0. \end{aligned}$$

Gilt etwa $\alpha_{i,j}(\beta) \overset{\beta \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{\alpha}_{i,j} \in \mathbb{C}$, erhält man für $\beta \to \infty$ die Differenzialgleichung

$$w'' + \frac{1 - \tilde{\alpha}_{1,1} - \tilde{\alpha}_{1,2}}{z} w' + \frac{\tilde{\alpha}_{1,1}\tilde{\alpha}_{1,2}}{z^2} w = 0,$$

die ganz offensichtlich in $z = 0$ und $z = \infty$ reguläre Singularitäten hat. Damit durch Konfluenz irreguläre Singularitäten entstehen, ist es also notwendig, dass einige (wegen der Fuchs'schen Relation mindestens zwei) Exponenten unbeschränkt sind. Die betrachteten Familien sind also im Allgemeinen nicht isomonodrom (vgl. [Sab02], §16, S.56ff.).

1.2.2 Entartung und Unbestimmtheit

Am Beispiel der hypergeometrischen Differenzialgleichung können zwei weitere Phänomene beobachtet werden, wenn man den Parameterraum $\mathbb{C}^3 \setminus T$ in $\overline{\mathbb{C}}^3$ abschließt. Im Folgenden wird $\overline{\mathbb{C}}$ mit dem komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ identifiziert. Die Koordinaten vom kartesischen Produkt $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^3 = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ werden mit $(\alpha_0 : \alpha_1, \beta_0 : \beta_1, \gamma_0 : \gamma_1)$ bezeichnet. Als komplexe Mannigfaltigkeit wird $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^3$ durch 8 Karten überdeckt. $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^3$ ist vermöge der Einbettung $\mathbb{C}^3 \hookrightarrow (\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})^3$,

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (1 : \alpha, 1 : \beta, 1 : \gamma)$$

als Kompaktifizierung des Parameterraums zu verstehen. Homogenisiert man die Differenzialgleichung (1.20), indem man (α, β, γ) durch $(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \frac{\beta_1}{\beta_0}, \frac{\gamma_1}{\gamma_0})$ ersetzt, so schreibt sie sich in der Form

$$u'' + \left(\frac{(\alpha_0\beta_0\gamma_0 + \alpha_1\beta_0\gamma_0 + \beta_1\alpha_0\gamma_0)x - \gamma_1\beta_1\alpha_0}{\alpha_0\gamma_0 x(\beta_0 x - \beta_1)} \right) u' + \left(\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_0 x(\beta_0 x - \beta_1)} \right) u = 0. \quad (1.25)$$

In der Karte $\alpha_0 = \beta_1 = \gamma_0 = 1$ erhält man für $\beta_0 = 0$ (natürlich) die konfluente hypergeometrische Differenzialgleichung (1.22).
In der Karte $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_0 = 1$ schreibt sich die Differenzialgleichung in der Form

$$u'' + \left(\frac{(\alpha_0\beta_0 + \beta_0 + \alpha_0)x - \gamma_1\alpha_0}{\alpha_0 x(\beta_0 x - 1)} \right) u' + \left(\frac{1}{\alpha_0 x(\beta_0 x - 1)} \right) u = 0,$$

und man sieht, dass im Punkt $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_1) = (0, 1, 0)$ die beiden Koeffizienten nicht definiert sind (denn die Nenner werden Null). Um diesem Punkt im Parameterraum trotzdem eine Differenzialgleichung zuzuordnen, kann man die Differenzialgleichung mit dem Nenner multiplizieren, so dass man

$$(\alpha_0 x(\beta_0 x - 1))u'' + ((\alpha_0\beta_0 + \beta_0 + \alpha_0)x - \gamma_1\alpha_0)\, u' + u = 0$$

erhält. Für den Punkt $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_1) = (0, 1, 0)$ erhält man auf diese Weise eine (in diesem Fall Fuchs'sche) Differenzialgleichung niederer Ordnung

$$xu' + u = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad u' + \frac{1}{x}u = 0.$$

Wenn man Gleichung (1.25) in der Karte $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_1 = 1$ betrachtet, also

$$u'' + \left(\frac{(\gamma_0 + \alpha_1\gamma_0 + \beta_1\gamma_0)x - \beta_1}{\gamma_0 x(x - \beta_1)}\right) u' + \left(\frac{\alpha_1\beta_1}{x(x - \beta_1)}\right) u = 0,$$

stellt man fest, dass etwa für $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_0) = (1, 0, 0)$ sowohl Zähler als auch Nenner des ersten Koeffizienten Null werden. Um diesem Punkt eine Differenzialgleichung zuzuordnen, könnte man wie eben verfahren und die Gleichung mit dem Nenner $\gamma_0 x(x - \beta_1)$ multiplizieren. Dann erhält man die Gleichung „$0 = 0$" und es ist die Frage zu beantworten, ob dies noch als Differenzialgleichung im klassischen Sinne bezeichnet werden kann.[6] Eine andere Möglichkeit, dem Punkt $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_0) = (1, 0, 0)$ eine Differenzialgleichung zuzuordnen, besteht darin, die Koeffizienten der Differenzialgleichung als rationale Funktionen in α_1, β_1 und γ_0 aufzufassen, also als Elemente aus $(\mathbb{C}[x])(\alpha_1, \beta_1, \gamma_0)$. Verschwinden das Zähler- und Nennerpolynom einer rationalen Funktion in einem Punkt, spricht man von einer *Unbestimmtheitsstelle*. Im einfachen Fall der Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten (d.h. man hat keine Abhängigkeit von x, die Koeffizienten lassen sich etwa als rationale Funktionen in den Parametern über $\mathbb{C}$ auffassen), kann man den Parameterraum in der Unbestimmtheitsstelle aufblasen. Als Beispiel betrachte man $w' + \frac{\alpha}{\beta} w = 0$. Für $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ liegt eine Unbestimmtheitsstelle des Koeffizienten vor. Die Aufblasung $Bl_0(\mathbb{C}^2) \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ des Nullpunkts von $\mathbb{C}^2$ ist definiert als Nullstellenmenge der Gleichung $\alpha\epsilon_0 - \beta\epsilon_1$ in $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ (wobei ϵ_0,ϵ_1 die homogenen Koordinaten des $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ bezeichnen). Anschaulich wird dabei der Nullpunkt durch $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ersetzt, wobei jeder Punkt des $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ einer Richtung entspricht, die in den Nullpunkt des $\mathbb{C}^2$ führt (vgl. „Wendeltreppe" in [Har77], §I.4, S.28ff.). In der Karte $\epsilon_0 = 1$ hat man somit eine Menge von Differenzialgleichungen der Form $w' + \epsilon_1 w = 0$ mit $\epsilon_1 \in \mathbb{C}$ gewonnen (in der Karte $\epsilon_1 = 1$ erhält man die in $\epsilon_0 = 0$ entartende Differenzialgleichung $w' + \frac{1}{\epsilon_0} w = 0$).

Da Fuchs'sche Differenzialgleichungen keine konstanten Koeffizienten besitzen können (mit Ausnahme von $w^{(n)} = 0$), muss eine andere Möglichkeit der Beschreibung von Unbestimmtheitsstellen gefunden werden. Das bloße Ersetzen des Körpers $\mathbb{C}$ durch den nicht algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}(x)$ erweist sich als nicht zweckmäßig. An dieser Stelle sei auf Kapitel 2.2.1 verwiesen, wo einer Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen ein „Graph" zugeordnet wird.

Eine Familie von Differenzialgleichungen definiert durch ihre lokalen Lösungsräume eine Familie lokaler Systeme. Zum Schluss dieses Abschnitts soll der Frage nach-

[6] E. L. Ince schreibt in [Inc56], S. 3: „It is to be understood, however, that the differential equation is not an identity." Dies würde allerdings auch den Fall „w=0" als Differenzialgleichung ausschließen. Die Keime von Lösungsfundamentalsystemen der betrachteten Differenzialgleichungen n-ter Ordnung definieren $\mathbb{C}$-Vektorräume der Dimension n (man hat zu vorgegebener Differenzialgleichung ein lokales System vom endlichen Rang n). Die Gleichung „0=0" definiert keinen Lösungsraum in diesem Sinne.

gegangen werden, inwieweit die bei einer Fortsetzung der Differenzialgleichung auftretende Entartung (durch Multiplikation mit dem null-werdenden Nenner) mit der Fortsetzung der Familie lokaler Systeme konform geht.

Bei Differenzialgleichungen mit konstanten (von z unabhängigen) Koeffizienten aus $\mathbb{C}(a_1, \ldots, a_R)$, welche nach Multiplikation mit dem Hauptnenner der Koeffizienten die Form $\sum_{i=0}^{n} p_i(a_1, \ldots, a_R) w^{(n-i)} = 0$ annehmen, ist dies unmittelbar klar: Ist E die Menge der Parameter, bei denen die Differenzialgleichung entartet, also

$$\begin{aligned} E := \{(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_R) \in \mathbb{C}^R | \quad & p_0(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_R) = \ldots = p_j(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_R) = 0 \\ & \text{und } p_{j+1}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_R) \neq 0 \text{ für ein } j < n\}, \end{aligned}$$

so kann man die Lösung der Differenzialgleichung für Parameter aus dem Komplement von E durch Auflösen der charakteristischen Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(a_1, \ldots, a_r) \lambda^{n-i} = 0 \tag{1.26}$$

nach λ bestimmen. Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung führen zu einem Lösungsfundamentalsystem der Differenzialgleichung, welches aus ganzen Funktionen der Form $w(z) = z^k e^{\lambda_i z}$, $k \in \mathbb{N}_0$ besteht (vgl. [Her75], Satz 3.3, S.92). Man hat so eine Familie von Lösungsfundamentalsystemen, die durch das Komplement von E parametrisiert ist. Die Gleichung (1.26) definiert eine Varietät in $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}$, welche die Faser eines Punktes $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r) \in E \subset \mathbb{C}^r$ (bezüglich der Projektion nach $\mathbb{C}^r$) in höchstens $n - j - 1$ Punkten (mindestens aber in einem Punkt) der Form $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r, \tilde{\lambda})$ schneidet. Da die $\tilde{\lambda}$ Lösungen von

$$\sum_{i=j+1}^{n} p_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r) \lambda^{n-i} = 0$$

sind, führt die Fortsetzung des Lösungsfundamentalsystems in einen Punkt $(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r)$ von E zu einem Lösungsfundamentalsystem der „entarteten“ Differenzialgleichung $\sum_{i=j+1}^{n} p_i(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r) w^{(n-i)} = 0$.

Betrachtet man nun eine Familie von Differenzialgleichungen, deren Koeffizienten von z abhängen, entstehen durch die Entartung im Allgemeinen neue Singularitäten. Als Beispiel betrachte man die Differenzialgleichung

$$w''' + \frac{z^2}{a} w'' + \frac{z}{6a} w' + \frac{1}{6a} w = 0$$

mit der unabhängigen Variablen z und dem Parameter $a \in \mathbb{C}^*$. Da die Koeffizienten in z überall holomorph sind, sind auch die Lösungen ganze Funktionen. Insbesondere hat man also in $z = 0$ eine durch $a \in \mathbb{C}^*$ parametrisierte Familie von Lösungsräumen, die aus ganzen, unverzweigten Funktionskeimen besteht. Durch Multiplikation der Gleichung mit a erhält man die Differenzialgleichung

$$aw''' + z^2 w'' + \frac{1}{6} z w' + \frac{1}{6} w = 0,$$

die durch $a \to 0$ fortgesetzt wird zur Euler'schen Differenzialgleichung

$$z^2 w'' + \frac{1}{6} z w' + \frac{1}{6} w = 0,$$

deren Lösungsraum in einer Umgebung des Nullpunktes durch das Fundamentalsystem $w_1(z) = z^{\frac{1}{2}}$, $w_2(z) = z^{\frac{1}{3}}$ gegeben ist. Jeder Lösungskeim im Nullpunkt ist also verzweigt. Schon aus Stetigkeitsgründen kann eine Familie holomorpher Funktionskeime nicht zu einem verzweigten Funktionskeim fortgesetzt werden.

Durch Multiplikation mit dem Nenner, welcher für einen bestimmten Parameter verschwindet, kann die Familie von Differenzialgleichungen also fortgesetzt werden zu einer Differenzialgleichung niederer Ordnung. Wie das obige Beispiel aber zeigt, ist das so entstehende lokale System *nicht* als Fortsetzung der gegebenen Familie lokaler Systeme zu verstehen.

1.2.3 Weitere konfluente Differenzialgleichungen

Neben der konfluenten hypergeometrischen Differenzialgleichung sind zahlreiche in der mathematischen Physik auftretende lineare Differenzialgleichungen von zweiter Ordnung und nicht vom Fuchs'schen Typ, beispielsweise die

- Bessel'sche Gleichung: $z^2 w'' + z w' + (z^2 - n^2) w = 0$
- Mathieu'sche Gleichung: $w'' + (a + k^2\, cos^2 z) w = 0$
- Hermite-Weber'sche Gleichung: $w'' + (n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2) w = 0$
- Stokes'sche Gleichung (ein Spezialfall der Bessel'schen Gleichung): $z^2 w'' + z w' + (z^2 - \frac{1}{9}) w = 0$.

Im Jahr 1894 ist es Klein und Bôcher (in [Kle94], [Boc94]) gelungen zu zeigen, dass diese (und weitere nicht fuchssche) Differenzialgleichungen durch Konfluenz von einer oder mehreren Singularitäten der allgemeinen Familie zweiter Ordnung mit vier endlichen und einer unendlichen Singularität entstehen, deren charakteristische Exponenten einer jeweiligen Singularität sich um $\frac{1}{2}$ unterscheiden (die entsprechende Differenzialgleichung, die inklusive Singularitäten durch 11 Konstanten parametrisiert wird, heißt *verallgemeinerte Lamé'sche Gleichung*)[7]. Eine Charakterisierung der durch Konfluenz entstehenden Differenzialgleichung erfolgt durch (a) die Anzahl der regulären Singularitäten mit Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$, (b) die Anzahl der anderen regulären Singularitäten sowie (c) die Anzahl der irregulären Singularitäten. Die Bessel'sche Gleichung ist etwa durch das Tripel $(0, 1, 1)$ klassifiziert. Auch die Lamé'sche Gleichung

$$w'' + (\sum_{r=1}^{3} \frac{\frac{1}{2}}{z - a_r})w' - \left(\frac{n(n+1)z + h}{4 \prod_{r=1}^{3} (z - a_r)} \right) w = 0$$

und die Legendre'sche Gleichung

$$(1 - z^2)w'' - 2zw' + (n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2})w = 0,$$

welche beide vom Fuchs'schen Typ sind, lassen sich durch Konfluenz aus der verallgemeinerten Lamé'schen Gleichung erzielen. Eine sehr ausführliche Erörterung findet man bei [Inc56], Chapter 20, S.494ff.

Der Begriff „Konfluenz“ bedeutet das Zusammenfließen von Singularitäten. In der klassischen Literatur wird hierzu der Parameterraum einer Familie von Differenzialgleichungen in einem Raum abgeschlossen, der durch eine Ein-Punkt-Kompaktifizierung einer oder mehrerer Koordinaten hervorgeht (s.o.). Im Unterschied zu diesem klassischen Vorgehen wird im nächsten Kapitel ein Verfahren zur Fortsetzung von (Fuchs'schen) Differenzialgleichungen vorgeschlagen, bei welchem der Parameterraum formal erweitert und anschließend in einem „bi-gewichtet-projektiven“ Raum (damit ist das kartesische Produkt zweier gewichtet-projektiver Räume gemeint) abgeschlossen wird. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Fortsetzung der hypergeometrischen und der allgemeinen Riemann'schen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit zwei endlichen Singularitäten nach dieser Methode.

[7] Um die oben aufgeführten Gleichungen zu erhalten, müssen gegebenenfalls noch Transformationen der Parameter und der unabhängigen Variablen durchgeführt werden.

Kapitel 2

Kompaktifizierung des Parameterraums

2.1 Bi-gewichtet-projektive Varietäten

2.1.1 Der bi-gewichtet-projektive Raum und bi-quasi-homogene Polynome

Es seien $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$, $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_l) \in \mathbb{N}^{l+1}$ Gewichtungsvektoren mit $p_0 = q_0 = 1$. Es sei $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$ das kartesische Produkt zweier gewichteter, komplex-projektiver Räume (im Folgenden als „bi-gewichtet-projektiver Raum" bezeichnet), deren quasi-homogene Koordinaten mit $(a_0 : \ldots : a_k)$ bzw. $(b_0 : \ldots : b_l)$ bezeichnet werden.
Auf den Polynomringen $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k]$ bzw. $\mathbb{C}[b_0, \ldots, b_l]$ werde durch die folgenden, endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräume

$$\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k]_d := \left\{ \sum_{p_0\alpha_0 + \ldots + p_k\alpha_k = d} c_{\alpha_0, \ldots, \alpha_k} a_0^{\alpha_0} \ldots a_k^{\alpha_k} \mid \quad c_{\alpha_0, \ldots, \alpha_k} \in \mathbb{C},\ \alpha_0, \ldots, \alpha_k \geq 0 \right\}$$

bzw.

$$\mathbb{C}[b_0, \ldots, b_l]_e := \left\{ \sum_{q_0\beta_0 + \ldots + q_l\beta_l = e} c_{\beta_0, \ldots, \beta_l} b_0^{\beta_0} \ldots b_l^{\beta_l} \mid \quad c_{\beta_0, \ldots, \beta_k} \in \mathbb{C},\ \beta_0, \ldots, \beta_l \geq 0 \right\}$$

jeweils eine positive Graduierung erklärt (mit $d, e \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k]_d = 0$ für $d < 0$ und $\mathbb{C}[b_0, \ldots, b_l]_e = 0$ für $e < 0$), d.h. es gilt

$$\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k] = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k]_d \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_l] = \bigoplus_{e \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_l]_e$$

und

$$\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k]_{d_1}\cdot\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k]_{d_2}\subset\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k]_{d_1+d_2}$$

bzw.

$$\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l]_{e_1}\cdot\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l]_{e_2}\subset\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l]_{e_1+e_2}.$$

Die Elemente von $\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k]_d$ (bzw. $\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l]_e$) heißen *quasi-homogene Polynome* vom Grad d (bzw. e) bezüglich der Gewichtung $\mathbf{p}$ (bzw. $\mathbf{q}$).

Auf dem Polynomring $\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k,b_0,\ldots,b_l]$ wird vermöge

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k,b_0,\ldots,b_l] &\simeq \mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l]\\ &\simeq \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k]_d\otimes_{\mathbb{C}}\bigoplus_{e\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l]_e\\ &\simeq \bigoplus_{d,e\in\mathbb{Z}}(\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k]_d\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l]_e)\end{aligned}$$

eine Bi-Graduierung erklärt. Ein Element aus $\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k]_d\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l]_e$ heißt *bi-quasi-homogenes Polynom* vom Grad (d,e) bezüglich der Gewichtungen $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$. Ein solches bi-quasi-homogenes Polynom ist aufgefasst als Polynom in $(\mathbb{C}[b_0,\ldots,b_l])[a_0,\ldots,a_k]$ bezüglich $\mathbf{p}$ quasi-homogen vom Grad d. Ebenso ist es aufgefasst als Polynom in $(\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k])[b_0,\ldots,b_l]$ bezüglich $\mathbf{q}$ quasi-homogen vom Grad e. Ein bi-quasi-homogenes Polynom F vom Grad (d,e) bezüglich $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ erfüllt für $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$:

$$F(\lambda^{p_0}a_0,\ldots,\lambda^{p_k}a_k,\mu^{q_0}b_0,\ldots,\mu^{q_l}b_l)=\lambda^d\mu^e F(a_0,\ldots,a_k,b_0,\ldots,b_l). \tag{2.1}$$

Aus diesem Grunde sind Nullstellen von bi-quasi-homogenen Polynomen in $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}}\times\mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$ wohldefiniert. Eine Teilmenge $X\subseteq\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}}\times\mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$ wird im Folgenden als *bi-gewichtet-projektive (algebraische) Varietät* bezeichnet, falls es bezüglich der Gewichtungsvektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ bi-quasi-homogene Polynome $F_1,\ldots,F_r\in\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_k,b_0,\ldots,b_l]$ gibt, so dass sich X als Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$F_i=0 \qquad (i=1,\ldots,r)$$

in $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}}\times\mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$ schreiben lässt. Beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte bi-gewichtet-projektiver Varietäten sind wieder solche. Die bi-gewichtet-projektiven Varietäten sind die abgeschlossenen Mengen einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}}\times\mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$. An späterer Stelle werden affine Varietäten bezüglich dieser Topologie abgeschlossen (vgl. Kapitel 2.1.3).

2.1.2 Bi-quasi-homogene Ideale

Lemma 2.1. *In der Situation des letzten Abschnitts sei $I \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ ein Ideal. Es ist äquivalent:*
(1) I wird von bi-quasi-homogenen Polynomen erzeugt.
(2) Ist $f = \sum_{d,e} f_{d,e}$ die Zerlegung eines Polynoms $f \in I$ in bi-quasi-homogene Komponenten $f_{d,e}$ vom Grad (d, e), so ist $f_{d,e} \in I$ für alle $d, e \in \mathbb{Z}$.

Ein Ideal, welches diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, wird als *bi-quasi-homogenes Ideal* bezeichnet.

Beweis.
(1) $\Rightarrow$ (2) Da $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ auf Grund des Hilbert'schen Basissatzes noethersch ist, wird I von endlich vielen bi-quasi-homogenen Polynomen $g_1, \ldots, g_r$ erzeugt. Für jedes $i = 1, \ldots, r$ sei (d_i, e_i) der Grad des Erzeugers g_i. Ist $f \in I$, so gibt es Polynome φ_i, so dass $f = \sum_{i=1}^r \varphi_i g_i$ ist. Ist $\varphi_i = \sum_{d,e} \varphi_{i,d,e}$ die Zerlegung von φ_i in bi-quasi-homogene Komponenten vom Grad (d, e), so hat man

$$f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{d,e} \varphi_{i,d,e} \cdot g_i.$$

Nun ist jeder Summand $\varphi_{i,d,e} \cdot g_i$ bi-quasi-homogen vom Grad $(d+d_i, e+e_i)$ und in I enthalten. Fasst man diejenigen Summanden mit gleichem Grad zusammen, so erhält man die bi-quasi-homogenen Komponenten von f, welche Linearkombinationen der g_i und somit in I enthalten sind.
(2) $\Rightarrow$ (1) I wird von endlich vielen Polynomen erzeugt (da $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ noethersch ist). Jede bi-quasi-homogene Komponente eines jeden Erzeugers liegt nach Voraussetzung in I. Somit bilden sämtliche bi-quasi-homogenen Komponenten der Erzeugenden von I ebenso ein Erzeugendensystem von I. $\square$

Für ein Polynom $f \in \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l]$ wird die *Bi-Quasi-Homogenisierung* $f^* \in \mathbb{C}[a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_l]$ bezüglich der Homogenisierungsvariablen a_0 und b_0 und bezüglich der Gewichtungsvektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ wie folgt definiert:

$$f^*(a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l) := a_0^{deg_a(f)} \cdot b_0^{deg_b(f)} \cdot f\left(\frac{a_1}{a_0^{p_1}}, \ldots, \frac{a_k}{a_0^{p_k}}, \frac{b_1}{b_0^{q_1}}, \ldots, \frac{b_l}{b_0^{q_l}}\right), \quad (2.2)$$

wobei mit $deg_a(f)$ der bezüglich $\mathbf{p}$ gewichtete (Total-)Grad von f, aufgefasst als Polynom in den a-Variablen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}[b_1, \ldots, b_l]$, gemeint ist ($deg_b(f_i)$ analog). Offensichtlich ist f^* bi-quasi-homogen vom Grad $(deg_a(f), deg_b(f))$.

Ist $I \subseteq \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l]$ ein Ideal, so wird seine Bi-Quasi-Homogenisierung I^* definiert als

$$I^* := \langle f^* | \quad f \in I \rangle \quad \subseteq \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]. \quad (2.3)$$

Für ein Polynom $f \in \mathbb{C}[a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l]$ sei

$$f_*(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l) := f(1, a_1, \dots, a_k, 1, b_1, \dots, b_l) \in \mathbb{C}[a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l]. \tag{2.4}$$

Ist f bi-quasi-homogen, so heißt f_* die Dehomogenisierung von f.

Sei $I \subseteq \mathbb{C}[a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l]$ ein bi-quasi-homogenes Ideal. Die Dehomogenisierung von I ist definiert als das Ideal

$$I_* := \langle f_* | \quad f \in I \rangle = \{ f_* | \quad f \in I \} \quad \subseteq \mathbb{C}[a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l]. \tag{2.5}$$

Lemma 2.2.

a) Für $f \in \mathbb{C}[a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l]$ gilt: $(f^*)_* = f$.

b) Für ein bi-quasi-homogenes $f \in \mathbb{C}[a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l]$ gilt: Es gibt natürliche Zahlen $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, so dass $a_0^\mu b_0^\nu (f_*)^* = f$ ist.

c) Für $f, g \in \mathbb{C}[a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l]$ gilt: $(fg)_* = f_* g_*$.

d) Für $f, g \in \mathbb{C}[a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l]$ gilt: $(fg)^* = f^* g^*$.

Beweis. a) und c) sind klar. d) gilt aufgrund der (gewichteten) Gradformel $deg_a(fg) = deg_a(f) + deg_a(g)$ bzw. $deg_b(fg) = deg_b(f) + deg_b(g)$. Zu b): Es seien μ, ν diejenigen ganzen Zahlen, mit denen f die Form $f = a_0^\mu b_0^\nu \cdot \tilde{f}$ hat, wobei $\tilde{f}$ weder durch a_0 noch durch b_0 teilbar ist. Dann ist zu zeigen, dass $\tilde{f} = (f_*)^*$ ist. Zunächst stellt man fest, dass gilt:

$$deg_a(f) = \mu + deg_a(\tilde{f}), \qquad deg_b(f) = \nu + deg_b(\tilde{f}) \quad \text{und} \quad deg_a(\tilde{f}) = deg_a(f_*).$$

Aufgrund der Gleichungen (2.2) und (2.4) sowie (2.1) gilt:

$$\begin{aligned}
(f_*)^*(a_0, \dots, a_k, b_0, \dots, b_l) &= a_0^{deg_a(f_*)} b_0^{deg_b(f_*)} \cdot f_* \left(\frac{a_1}{a_0^{p_1}}, \dots, \frac{a_k}{a_0^{p_k}}, \frac{b_1}{b_0^{q_1}}, \dots, \frac{b_l}{b_0^{q_l}} \right) \\
&= a_0^{deg_a(\tilde{f})} b_0^{deg_b(\tilde{f})} \cdot f \left(1, \frac{a_1}{a_0^{p_1}}, \dots, \frac{a_k}{a_0^{p_k}}, 1, \frac{b_1}{b_0^{q_1}}, \dots, \frac{b_l}{b_0^{q_l}} \right) \\
&= a_0^{deg_a(\tilde{f})} b_0^{deg_b(\tilde{f})} a_0^{-deg_a(f)} b_0^{-deg_b(f)} \cdot f(a_0, \dots, a_k, a_0, \dots, b_l) \\
&= a_0^{-\mu} b_0^{-\nu} \cdot f(a_0, \dots, a_k, a_0, \dots, b_l) \\
&= \tilde{f}(a_0, \dots, a_k, a_0, \dots, b_l).
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 2.3. Ist $I = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle \subseteq \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l]$ ein Ideal, so ist seine Bi-Quasi-Homogenisierung I^* im Allgemeinen nicht identisch mit dem Ideal

$$I^h := \langle g_1^*, \ldots, g_r^* \rangle,$$

welches von der Wahl der Erzeugenden $g_1, \ldots, g_r$ abhängt. Es gilt nur die Inklusion $I^* \supseteq I^h$. Zum Beispiel betrachte man in $\mathbb{C}[a_1, b_1]$ das Ideal $I = \langle a_1 b_1,\ a_1^2 - b_1 \rangle$. Bezüglich der Gewichtungsvektoren $\mathbf{p} = \mathbf{q} = (1,1)$ ist $I^h = \langle a_1 b_1,\ a_1^2 b_0 - a_0^2 b_1 \rangle$. Das Polynom b_1^2 liegt in I, denn $b_1^2 = a_1 \cdot a_1 b_1 - b_1 \cdot (a_1^2 - b_1)$. Die Bi-Homogenisierung von b_1^2 ist b_1^2 und liegt (definitionsgemäß) in I^*, nicht aber in I^h.

2.1.3 Abschluss einer affinen Varietät in $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$

Man betrachte die Einbettung

$$\mathbb{C}^{k+l} \hookrightarrow \mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}, \quad (a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l) \mapsto (1 : a_1 : \ldots : a_k, 1 : b_1 : \ldots : b_l).$$

Bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ (vgl. Kapitel 2.1.1) liegt $\mathbb{C}^{k+l}$ offen in $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$, denn $\mathbb{C}^{k+l}$ ist das Komplement von $\{a_0 b_0 = 0\}$.

Es sei $V \subseteq \mathbb{C}^{k+l}$ eine affine Varietät, die bezüglich der oben beschriebenen Topologie in $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$ abgeschlossen werde. Dieser bi-gewichtet-projektive Abschluss von V wird mit $\overline{V}$ bezeichnet.

V werde durch ein Gleichungssystem

$$f_i = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \quad f_i \in \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l]$$

gegeben. Es sei V^h (abgeschlossene) Lösungsmenge von $f_i^* = 0\,(i = 1, \ldots, r)$ in $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$. Offensichtlich gilt $V^h \cap \mathbb{C}^{k+l} = V$. Da $\overline{V}$ der Abschluss von V ist, gilt $\overline{V} \subseteq V^h$ und somit $\overline{V} \cap \mathbb{C}^{k+l} = V$. Also enthält $\overline{V}$ außer V nur noch „unendlich ferne“ Punkte in der Hyperebene $\{a_0 b_0 = 0\}$.

Es bezeichne $\mathcal{I}(\overline{V})$ jenes Ideal, welches von allen bi-quasi-homogenen Polynomen aus $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$, die auf $\overline{V}$ verschwinden, erzeugt wird. Da $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ noethersch ist, wird $\mathcal{I}(\overline{V})$ von endlich vielen Polynomen $f_1, \ldots, f_\nu$ erzeugt, die als bi-quasi-homogen angenommen werden können. Der nächste Satz besagt nun, dass dieses Ideal nichts anderes ist als die Bi-Quasi-Homogenisierung des Ideals $\mathcal{I}(V)$.

Satz 2.4. *Sei $V \subseteq \mathbb{C}^{k+l}$ eine nicht-leere affine Varietät und $\overline{V}$ ihr bi-gewichtet-projektiver Abschluss. Dann gilt: $\mathcal{I}(\overline{V}) = \mathcal{I}(V)^*$.*

Beweis. Dieser Satz ist im Wesentlichen eine Anwendung von Lemma 2.2.
„$\subseteq$“ Das Ideal $\mathcal{I}(\overline{V})$ werde von den bi-quasi-homogenen Polynomen $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ erzeugt. Da $V \subset \overline{V}$, gilt $(f_i)_*|V = 0$, d.h. $(f_i)_* \in \mathcal{I}(V)$. Daraus folgt $((f_i)_*)^* \in \mathcal{I}(V)^*$. Lemma 2.2 b) liefert ganze Zahlen μ, ν mit $f_i = a_0^\mu b_0^\nu \cdot ((f_i)_*)^*$. Deshalb ist auch $f_i \in \mathcal{I}(V)^*$.
„$\supseteq$“ Es ist

$$\mathcal{I}(V)^* := \langle f^* | \; f \in \mathcal{I}(V) \rangle$$

ein endlich erzeugtes Ideal. Sind $f_1^*, \ldots, f_s^*$ Erzeugende, so verschwindet jedes $f_i \in \mathcal{I}(V)$ auf V. Die Bi-Quasi-Homogenisierungen f_i^* verschwinden per Definition auf der abgeschlossenen Menge $V^h := \mathcal{V}(\langle f_1^*, \ldots, f_s^* \rangle) \subseteq \mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$. Da $\overline{V} \subseteq V^h$, verschwinden alle f_i^* insbesondere auf $\overline{V}$, d.h. $f_i^* \in \mathcal{I}(\overline{V})$, $i = 1, \ldots, s$. □

2.2 Fortsetzung von Familien Fuchs'scher Differenzialgleichungen

Die allgemeine Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen der Ordnung n mit $m > 0$ endlichen Singularitäten $\{s_1, \ldots, s_m\}$ hat nach Satz 1.5 das Aussehen

$$w^{(n)} + \frac{h_1(z)}{g(z)} w^{(n-1)} + \ldots\ldots + \frac{h_{n-1}(z)}{g(z)^{n-1}} w' + \frac{h_n(z)}{g(z)^n} w = 0, \tag{2.6}$$

wobei $g(z) = (z - s_1) \ldots (z - s_m)$ und h_j ein Polynom in z höchstens vom Grad $j(m-1)$ ist. Die allgemeine Familie wird also realisiert durch $m + N$ Parameter (nämlich den m Singularitäten und den $N := (m-1)\frac{n(n+1)}{2} + n$ Koeffizienten der h_j, vgl. Korollar 1.6). Da die Singularitäten $s_1, \ldots, s_m$ paarweise voneinander verschieden sein müssen (sonst hätte die Differenzialgleichung irreguläre Singularitäten), ist der zugehörige Parameterraum X gegeben durch

$$X := (\mathbb{C}^m \setminus \{s_i - s_j = 0 | \quad i \neq j\}) \times \mathbb{C}^N.$$

Gegeben sei nun eine spezielle Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen: Die Singularitäten $s_1, \ldots, s_m$ sowie die Koeffizienten $h_{j,\nu}$ der Polynome $h_j = \sum_{\nu=0}^{j(m-1)} h_{j,\nu} \cdot z^\nu$ seien polynomial parametrisiert durch die Variablen $a_1, \ldots, a_R$. Der Parameterraum der vorgegebenen Familie sei

$$S := \mathbb{C}^R \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} \{s_i(a_1, \ldots, a_R) - s_j(a_1, \ldots, a_R) = 0\} \right)$$

Ist beispielsweise die transformierte hypergeometrische Differenzialgleichung (1.20) vorgegeben, so hat man als Parametrisierung: $s_1 = 0$, $s_2 = a_2$, $h_{1,0} = -a_3 a_2$,

$h_{1,1} = 1 + a_1 + a_2$, $h_{2,0} = a_1 a_2$, $h_{2,1} = h_{2,2} = 0$. Ihr Parameterraum ist also $S = \mathbb{C}^3 \setminus \{a_2 = 0\}$.

Der Parameterraum S einer Fuchs'schen Familie ist Zariski-offen in $\mathbb{C}^R$, denn er ist das Komplement von endlich vielen Hyperflächen. Da nicht-leere Zariski-offene Teilmengen einer Varietät stets (Zariski-)dicht in dieser liegen, ist der Abschluss von S in $\mathbb{C}^R$ gleich $\mathbb{C}^R$. Setzt man die Familie in die Punkte $\{s_i = s_j\}$ fort, so entstehen im Allgemeinen (im Endlichen liegende) irreguläre Singularitäten (vgl. Beispiel 1.9).

Ziel der weiteren Überlegungen ist es, den Parameterraum S zu kompaktifizieren, also in einem kompakten Raum abzuschließen und den neu hinzukommenden, unendlich fernen Punkten Differenzialgleichungen zuzuordnen, welche als Fortsetzung der Familie von Differenzialgleichungen zu verstehen sind.

In diesem Kapitel wird eine Vorgehensweise zur Fortsetzung von Differenzialgleichungen vorgeschlagen, die sich an der Fortsetzung rationaler Funktionen orientiert. Im Anschluss werden Hilfsmittel zur Berechnung der neu entstehenden Differenzialgleichungen (wie Primärdekomposition, Gröbner-Basen und Eliminationstheorie) bereitgestellt. Im dritten Kapitel wird dies auf konkrete Situationen angewendet und der Frage nachgegangen, welche Punkte im Abschluss des Parameterraums zu Fuchs'schen Differenzialgleichungen bzw. Differenzialgleichungen mit irregulären Singularitäten führen.

2.2.1 Der „Graph“ Γ einer Familie von Differenzialgleichungen und sein Abschluss $\overline{\Gamma}$

Fortsetzung von Familien von Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die Koeffizienten einer Familie von Differenzialgleichungen (2.6) sind rationale Funktionen in $\mathbb{C}(z, a_1, \dots, a_R)$. Zur Motivation der Vorgehensweise bei einer Fortsetzung dieser Familie betrachte man zunächst den Fall einer Differenzialgleichung erster Ordnung mit (in z) konstantem Koeffizient[1] aus $\mathbb{C}(a_1, \dots, a_R)$:

$$w' + pw = 0, \qquad p = p(a_1, \dots, a_R) = \frac{h(a_1, \dots, a_R)}{g(a_1, \dots, a_R)}. \tag{2.7}$$

Die Fortsetzung dieser Familie bezüglich der Einbettung

$$\mathbb{C}^R \hookrightarrow \mathbb{P}^R, \qquad (a_1, \dots, a_R) \mapsto (1 : a_1 : \dots : a_R)$$

[1]Dies sind im Allgemeinen keine Fuchs'schen Differenzialgleichungen, denn in $z = \infty$ liegt eine irreguläre Singularität vor.

beschränkt sich auf die Fortsetzung der rationalen Funktion p. Dies geschieht, indem man Zähler- und Nennerpolynom von p homogenisiert und dies dann in den Karten des $\mathbb{P}^R$ betrachtet.
Es treten (in diesem Fall bereits über dem endlichen (affinen) Teil des Parameterraums) zwei Phänomene auf:

1) p kann Polstellen haben, in welchen der Nenner Null und der Zähler ungleich Null ist. Für die Differenzialgleichung aus (2.7) bedeutet dies eine Entartung in dem Sinne, dass durch Multiplikation mit dem Nenner von p eine Differenzialgleichung geringerer Ordnung entsteht, in diesem Fall die Differenzialgleichung 0-ter Ordnung $w = 0$.

2) p kann Unbestimmtheitsstellen haben, in denen sowohl Nenner als auch Zähler Null sind. Der rationalen Funktion p lässt sich in diesen Stellen kein eindeutiger Wert zuordnen. Somit kann einer solchen Unbestimmtheitsstelle auch nicht eindeutig eine Differenzialgleichung zugeordnet werden.

Um Eindeutigkeit zu erhalten, erweitert man den Parameterraum, indem man den Graphen von $p = \frac{h}{g}$

$$\Gamma = \{(a_1, \ldots, a_R, b_1) \in \mathbb{C}^{R+1} | \quad g(a_1, \ldots, a_R) \cdot b_1 - h(a_1, \ldots, a_R) = 0\} \tag{2.8}$$

betrachtet. Dieser erweiterte Parameterraum ist eine affine Varietät in $\mathbb{C}^{R+1}$ und kann zu $\overline{\Gamma}$ abgeschlossen werden in $\mathbb{P}^R \times \mathbb{P}^1$ (bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$, vgl. Kapitel 2.1.1). Es seien $(a_0 : \ldots : a_R \, , \, b_0 : b_1)$ die bi-homogenen Koordinaten von $\mathbb{P}^R \times \mathbb{P}^1$ und $\overline{\pi}_a$ bzw. $\overline{\pi}_b$ die jeweiligen Projektionen.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^R \arrow[rrr] & & & \mathbb{P}^R \\
& \Gamma \arrow[ul, "\pi_a"'] \arrow[dl, "\pi_b"] \arrow[r, hook] & \overline{\Gamma} \arrow[ur, "\overline{\pi}_a"] \arrow[dr, "\overline{\pi}_b"'] & \\
\mathbb{C}^1 \arrow[rrr] & & & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

Bei diesem Diagramm sind die horizontalen Pfeile die Inklusionen und die diagonalen Pfeile die entsprechenden Projektionen (wobei $\overline{\pi}_a|_\Gamma = \pi_a$ und $\overline{\pi}_b|_\Gamma = \pi_b$ gilt).

Jeder Punkt der bi-homogenen Varietät $\overline{\Gamma}$ führt durch Projektion auf $\mathbb{P}^1$ in eindeutiger Weise zu einer Differenzialgleichung $w' + \frac{b_1}{b_0} w = 0$ bzw. $b_0 w' + b_1 w = 0$. Polstellen von p, die zu entarteten Differenzialgleichungen führen, sind durch das Bild des Schnittes von $\overline{\Gamma}$ mit der Hyperfläche $\{b_0 = 0\}$ unter der Projektion $\overline{\pi}_a$

gegeben. Unbestimmtheitsstellen von p sind die Stellen $\mathbf{a} \in \mathbb{P}^R$, deren Faser $\overline{\pi}_a^{-1}(\mathbf{a})$ aus mehr als einem Punkt in $\overline{\Gamma}$ besteht.

Betrachtet man Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, etwa

$$w^{(n)} + p_1 w^{(n-1)} + \ldots + p_n w = 0, \quad p_j = p_j(a_1, \ldots, a_R) = \frac{h_j(a_1, \ldots, a_R)}{g_j(a_1, \ldots, a_R)}, \; j = 1, \ldots, n,$$

kann man das Vorgehen entsprechend verallgemeinern und die affine Varietät

$$\Gamma = \{(a_1, \ldots, a_R, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{R+n} | \quad g_j(a_1, \ldots, a_R) \cdot b_j - h_j(a_1, \ldots, a_R) = 0, \\ j = 1, \ldots, n\}$$

etwa in $\mathbb{P}^R \times \mathbb{P}^n$ abschließen. Jeder Punkt von $\overline{\Gamma}$ führt durch Projektion auf $\mathbb{P}^n$ zu einer Differenzialgleichung der Form $b_0 w^{(n)} + b_1 w^{(n-1)} + \ldots + b_n w = 0$.

Beispiel 2.5. Man betrachte die Differenzialgleichung

$$w'' + \frac{1}{a_1} w' + \frac{1}{a_2} w = 0.$$

Es ist

$$\Gamma = \{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^4 | \quad b_1 a_1 - 1 = 0, \; b_2 a_2 - 1 = 0\}.$$

Nach Satz 2.4 genügt es, das Ideal $\mathcal{I}(\Gamma)$ zu bihomogenisieren, um den Abschluss von Γ in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ zu erhalten. Mit der Technik aus Kapitel 2.3.1 oder 2.3.2 erhält man

$$\overline{\Gamma} = \{(a_0 : a_1 : a_2 \, , \; b_0 : b_1 : b_2) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 | \; b_1 a_1 - a_0 b_0 = 0, \; b_2 a_2 - a_0 b_0 = 0\}.$$

Die Punkte im ursprünglichen Parameterraum, welche zu entarteten Differenzialgleichungen führen, berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_a(\overline{\Gamma}|_{b_0=0}) &= \overline{\pi}_a(\{b_1 a_1 = 0, \; b_2 a_2 = 0, \; b_0 = 0\}) \\ &= \overline{\pi}_a(\{(1:0:0 \, , \; 0:b_1:b_2)\} \, \cup \, \{(a_0:0:1 \, , \; 0:1:0)\} \, \cup \, \{(a_0:1:0 \, , \; 0:0:1)\}) \\ &= \{(1:0:0)\} \cup \{(a_0:1:0)\} \cup \{(a_0:0:1)\}, \end{aligned}$$

wie man an der gegebenen Differenzialgleichung auch sofort hätte sehen können. Die entsprechenden Differenzialgleichungen lauten $b_1 w' + b_2 w = 0$ (mit $(b_1, b_2) \neq (0,0)$), $w' = 0$ und $w = 0$.

Unbestimmtheitsstellen findet man in $\mathbb{P}^2$ in den Punkten $(a_0 : a_1 : a_2) = (0 : 0 : 1)$ und $(a_0 : a_1 : a_2) = (0 : 1 : 0)$, denn es ist

$$\overline{\Gamma}|_{a_0=a_1=0, a_2=1} = \{b_2 = 0\} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\Gamma}|_{a_0=a_2=0, a_1=1} = \{b_1 = 0\}.$$

Über diesen Unbestimmtheitsstellen liegen Differenzialgleichungen der Form

$$b_0 w'' + b_1 w' = 0 \quad \text{bzw.} \quad b_0 w'' + b_2 w = 0,$$

wobei jeweils mindestens einer der Koeffizienten ungleich Null ist.

Zur Wahl der Kompaktifizierung

Bisher wurde der erweiterte Parameterraum Γ im bi-projektiven Raum $\mathbb{P}^R \times \mathbb{P}^n$ abgeschlossen. In vielen Situationen scheint es sinnvoller zu sein, in einem anderen kompakten Raum abzuschließen. Zum Beispiel betrachte man die rationale Funktion $p(a_1, a_2) = \frac{a_2}{a_1^2}$. Die Homogenisierung liefert

$$\frac{\frac{a_2}{a_0}}{(\frac{a_1}{a_0})^2} = \frac{a_2 a_0}{a_1^2} \in \mathbb{C}(a_0, a_1, a_2),$$

und es fällt auf, dass im unendlich fernen Teil des $\mathbb{P}^2$ im Punkt $\{(0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2\}$ eine Unbestimmtheitsstelle entstanden ist. Wählt man anstelle des $\mathbb{P}^2$ den gewichtet-projektiven Raum $\mathbb{P}^2_{\mathbf{p}}$ mit $\mathbf{p} = (1, 1, 2) \in \mathbb{N}^3$, erhält man als Quasi-Homogenisierung von p

$$\frac{\frac{a_2}{a_0^2}}{(\frac{a_1}{a_0})^2} = \frac{a_2}{a_1^2} \in \mathbb{C}(a_0, a_1, a_2),$$

so dass im unendlich fernen Teil des $\mathbb{P}^2$ keine zusätzlichen Unbestimmtheitsstellen entstehen (denn mindestens eine der homogenen Koordinaten muss ungleich Null sein). Es hat also den Anschein, dass einige Gewichtungen geeigneter sind als andere (hierauf wird an späterer Stelle noch genauer eingegangen, vgl. Lemma 2.7).

Fortsetzung von Familien Fuchs'scher Differenzialgleichungen

Eine vorgegebene Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen

$$w^{(n)} + \frac{h_1(z, \mathbf{a})}{g(z, \mathbf{a})} w^{(n-1)} + \ldots\ldots + \frac{h_{n-1}(z, \mathbf{a})}{g(z, \mathbf{a})^{n-1}} w' + \frac{h_n(z, \mathbf{a})}{g(z, \mathbf{a})^n} w = 0 \tag{2.9}$$

mit

$$g(z, \mathbf{a}) = (z - s_1(\mathbf{a})) \ldots (z - s_m(\mathbf{a}))$$

und

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_R) \in S := \mathbb{C}^R \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} \{s_i(a_1, \ldots, a_R) - s_j(a_1, \ldots, a_R) = 0\} \right)$$

unterscheidet sich von den bisher betrachteten Differenzialgleichungen dadurch, dass die Koeffizienten rationale Funktionen aus

$$\mathbb{C}(z, a_1, \ldots, a_R) \simeq \mathbb{C}[z](a_1, \ldots, a_R) \subseteq \mathbb{C}(z)(a_1, \ldots, a_R).$$

sind. Der Koeffizientenkörper der Zähler- und Nennerpolynome, der im Fall konstanter Koeffizienten der algebraisch abgeschlossene Körper $\mathbb{C}$ gewesen ist, ist also zu ersetzen durch den Körper $\mathbb{C}(z)$.

Der Abschluss des Parameterraums S in einem projektiven (bzw. gewichtet-projektiven) Raum und die Fortsetzung der Familie führen zur Homogenisierung (bzw. Quasi-Homogenisierung) von Zähler und Nenner der Koeffizienten, aufgefasst als Polynome in den a-Variablen. Auch in diesem Fall tritt das Phänomen von Pol- und Unbestimmtheitsstellen auf, welche allerdings nur über dem unendlich fernen Teil des Parameterraums entstehen können (denn $g(z, \mathbf{a})$ ist ein normiertes Polynom in z und somit stets für alle $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_R) \in S$ ungleich Null). Es scheint daher zweckmäßig, die Familie von Differenzialgleichungen als Graphen zu betrachten, dessen Punkte in eindeutiger Weise Differenzialgleichungen entsprechen.

Als Beispiel betrachte man die Differenzialgleichung $w'' + \frac{a_2}{z-a_1} w' + \frac{a_3}{(z-a_1)^2} w = 0$, $(a_1, a_2, a_3) \in S = \mathbb{C}^3$. Schließt man den Parameterraum S im $\mathbb{P}^3$ bezüglich der Standardeinbettung ab und setzt man die Differenzialgleichung durch Homogenisieren der Koeffizientenfunktionen fort, erhält man die Gleichung

$$w'' + \frac{a_2}{a_0 z - a_1} w' + \frac{a_3 a_0}{(a_0 z - a_1)^2} w = 0.$$

Dem Parameterwert $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3) = (0 : 0 : 0 : 1)$ kann keine eindeutige Differenzialgleichung zugeordnet werden, denn beide Koeffizientenfunktionen haben Unbestimmtheitsstellen. Benutzt man anstelle der Homogenisierung eine Quasi-Homogenisierung mit dem Gewichtungsvektor $\mathbf{p} = (1, 1, 1, 2) \in \mathbb{N}^4$ (d.h. man bildet den Abschluss des Parameterraums in $\mathbb{P}^3_{\mathbf{p}}$ anstatt $\mathbb{P}^3$), erhält man als quasihomogenisierte Form der Differenzialgleichung $w'' + \frac{a_2}{a_0 z - a_1} w' + \frac{a_3}{(a_0 z - a_1)^2} w = 0$. Jetzt ist $(0 : 0 : 0 : 1)$ nur für den ersten Koeffizienten eine Unbestimmtheitsstelle.

Entsprechend der bisherigen Vorgehensweise fasst man die Familie (2.9) als Zuordnung

$$S \longrightarrow \mathbb{C}(z)^n, \quad \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_R) \mapsto \left(v_1(z) = \frac{h_1(z, \mathbf{a})}{g(z, \mathbf{a})}, \ldots, v_n(z) = \frac{h_n(z, \mathbf{a})}{g(z, \mathbf{a})^n} \right) \tag{2.10}$$

auf. Jedem Parameterwert $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_R)$ entspricht ein n-Tupel rationaler Funktionen $(v_1, \ldots, v_n)$ in z, welches mit einer Fuchs'schen Differenzialgleichung der Form

$$w^{(n)} + v_1(z) w^{(n-1)} + \ldots + v_n(z) w = 0$$

korrespondiert. Um nach einer Kompaktifizierung des Parameterraums jedem Parameterwert eine eindeutige Differenzialgleichung zuordnen zu können (auch in möglichen Unbestimmtheitsstellen), setze man (2.10) auf kanonische Weise fort zu einer Abbildung $\mathbb{C}^R \longrightarrow \mathbb{C}(z)^n$ und betrachte ihren Graphen

$$\Gamma := \{(a_1, \ldots, a_R, v_1, \ldots, v_n)| \quad v_j \cdot g(z, a_1, \ldots, a_R)^j - h_j(z, a_1, \ldots, a_R)) = 0, \\ j = 1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{C}^R \times \mathbb{C}(z)^n.$$

Jeder Punkt des Graphen entspricht in eindeutiger Weise einer Differenzialgleichung. Dieser Graph könnte nun abgeschlossen werden zu $\overline{\Gamma}$ (etwa in $\mathbb{P}^R_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}(z)}$), so dass man sämtliche Differenzialgleichungen der fortgesetzten Familie als Projektion von $\overline{\Gamma}$ auf die zweite Komponente $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}(z)}$ erhält.

Dieser Ansatz ist jedoch problematisch: Als Grundkörper tritt hier der nicht algebraisch abgeschlossene Körper $\mathbb{C}(z)$ auf, so dass abgeschlossene Punkte von Varietäten in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}(z)}$ nicht den maximalen Idealen der zugehörigen Koordinatenringe entsprechen. Ferner können über Unbestimmtheitsstellen im unendlich fernen Teil des Parameterraums Differenzialgleichungen liegen, deren Koeffizienten aus beliebigen rationalen Funktionen (mit beliebig großem Zähler- und Nennergrad) bestehen. Schließlich stellt sich auch die Frage nach der Berechenbarkeit (etwa mit Computer-Algebra-Programmen), wenn man in konkreten Situationen an den fortgesetzten Differenzialgleichungen interessiert ist.

Um diese Schwächen zu umgehen, wird die Vorgehensweise modifiziert: Man beschränkt Zähler- und Nennergrad der Koeffizienten für alle Differenzialgleichungen der fortgesetzten Familie. Dies wird erreicht, indem die in (2.10) auftretenden rationalen Funktionen v_j durch zusätzliche Parameter $b_{j,i} \in \mathbb{C}$ ersetzt werden, welche als Koeffizienten rationaler Funktionen zu verstehen sind. Im Detail:

In der vorgegebenen Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen (2.9) haben die auftretenden Polynome $h_1, \ldots, h_n$ und g die Form

$$h_j(z, \mathbf{a}) = \sum_{\nu=0}^{j(m-1)} h_{j,\nu}(\mathbf{a}) z^\nu, \; j = 1, \ldots, n,$$
$$g(z, \mathbf{a}) = (z - s_1(\mathbf{a})) \cdot \ldots \cdot (z - s_m(\mathbf{a})),$$

wobei die Parameter $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_R)$ aus dem Parameterraum $S \subseteq \mathbb{C}^R$ stammen und $s_1, \ldots, s_m$ sowie $h_{j,\nu}$ aus $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_R]$ sind. Nach einer Erweiterung der Brüche schreibt sich (2.9) in der Form

$$w^{(n)} + \frac{h_1(z, \mathbf{a}) g(z, \mathbf{a})^{n-1}}{g(z, \mathbf{a})^n} w^{(n-1)} + \ldots\ldots + \\ + \frac{h_{n-1}(z, \mathbf{a}) g(z, \mathbf{a})}{g(z, \mathbf{a})^n} w' + \frac{h_n(z, \mathbf{a})}{g(z, \mathbf{a})^n} w = 0, \quad (2.11)$$

wobei der Zähler des j-ten Koeffizienten, also $h_j \cdot g^{n-j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, aufgefasst als Polynom in z, höchstens vom Grad $j(m-1) + m(n-j) = nm - j$ ist.

Diese Differenzialgleichung werde identifiziert mit der allgemeinen Form

$$w^{(n)} + \frac{\sum\limits_{i=0}^{nm-1} b_{1,i} z^i}{(z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m)^n} w^{(n-1)} + \ldots + \frac{\sum\limits_{i=0}^{nm-n} b_{n,i} z^i}{(z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m)^n} w = 0, \tag{2.12}$$

wobei die Anzahl der Parameter $b_{j,i}$, welche in den Zählern auftreten, gegeben ist durch

$$\sum_{j=1}^{n} (nm - j + 1) = n^2 m + n - \frac{1}{2} n(n+1) =: \tilde{N}. \tag{2.13}$$

Diese Identifizierung führt ähnlich wie (2.10) zu einem Morphismus affiner Varietäten $b : \mathbb{C}^R \longrightarrow \mathbb{C}^{m+\tilde{N}}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_R) \ &\mapsto \ b(\mathbf{a}) := \\ &(b_1(\mathbf{a}), \ldots, b_m(\mathbf{a}), b_{1,1}(\mathbf{a}), \ldots, b_{1,nm-1}(\mathbf{a}), \ldots\ldots, b_{n,1}(\mathbf{a}), \ldots, b_{n,nm-n}(\mathbf{a})), \end{aligned} \tag{2.14}$$

der gegeben ist durch einen Koeffizientenvergleich der Polynome aus den Zählern und Nennern von (2.11) und (2.12) (der Koeffizientenvergleich ist auf Grund der Normiertheit der Nenner eindeutig). Der Graph Γ des Morphismus b ist eine Varietät in $\mathbb{C}^R \times \mathbb{C}^{m+\tilde{N}}$ und ist als Nullstellenmenge des Ideals

$$\begin{aligned} I = \langle b_1 - b_1(\mathbf{a}), \ldots, b_m - b_m(\mathbf{a}), b_{1,1} - b_{1,1}(\mathbf{a}), \ldots \\ \ldots, b_{1,nm-1} - b_{1,nm-1}(\mathbf{a}), \ldots, b_{n,1} - b_{n,1}(\mathbf{a}), \ldots, b_{n,nm-n} - b_{n,nm-n}(\mathbf{a}) \rangle \\ \subset \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_R, b_1, \ldots, b_m, b_{1,1}, \ldots\ldots, b_{n,nm-n}] \end{aligned} \tag{2.15}$$

definiert.

Jeder Punkt des Graphen entspricht genau einer Differenzialgleichung der Form (2.11) bzw. (2.12). Dieser Graph kann nun in einem kompakten Raum abgeschlossen, d.h. kompaktifiziert, werden. Es scheint sinnvoll, dafür das kartesische Produkt zweier gewichtet-projektiver Räume $\mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$ zu wählen, so dass man durch eine Projektion des Abschlusses $\overline{\Gamma}$ auf die b-Koordinaten alle auftretenden Differenzialgleichungen erhält.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^R \arrow[rrr] \arrow[dd, "b"'] & & & \mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \\
& \Gamma \arrow[ul, "\pi_a", "\simeq"'] \arrow[dl, "\pi_b"'] \arrow[r, hook] & \overline{\Gamma} \arrow[ur, "\overline{\pi}_a"'] \arrow[dr, "\overline{\pi}_b"] & \\
\mathbb{C}^{m+\tilde{N}} \arrow[rrr] & & & \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}
\end{tikzcd}$$

Bei diesem Diagramm sind die horizontalen Pfeile die Inklusionen und die diagonalen Pfeile die entsprechenden Projektionen (wobei $\overline{\pi}_a|_\Gamma = \pi_a$ und $\overline{\pi}_b|_\Gamma = \pi_b$ gilt).

Die homogenen Koordinaten von $\mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$ werden geschrieben als

$$(a_0 : a_1 : \ldots : a_R \,,\, b_0 : b_1 : \ldots : b_m : b_{1,1} : \ldots : b_{1,nm-1} : \ldots\ldots : b_{n,1} : \ldots : b_{n,nm-n}),$$

wobei a_0 und b_0 die zusätzlichen Homogenisierungskoordinaten sind. Den Koordinaten $b_0, \ldots, b_m$ wird im Folgenden das Gewicht 1 zugeordnet. Die $b_{j,i}$-Koordinaten erhalten das Gewicht n (für alle i, j). Mit dieser Gewichtung lautet die quasihomogenisierte Form von (2.12):

$$w^{(n)} + \frac{\sum\limits_{i=0}^{nm-1} b_{1,i} z^i}{(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m)^n} w^{(n-1)} + \ldots + \frac{\sum\limits_{i=0}^{nm-n} b_{n,i} z^i}{(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m)^n} w = 0. \tag{2.16}$$

bzw.

$$(b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m)^n w^{(n)} + \left(\sum_{i=0}^{nm-1} b_{1,i} z^i \right) w^{(n-1)} + \ldots + \left(\sum_{i=0}^{nm-n} b_{n,i} z^i \right) w = 0. \tag{2.17}$$

Die Homogenisierungsvariable b_0 tritt bei dieser Gewichtung in (2.16) jeweils nur in den Nennern als Leitkoeffizient auf und ist somit für die Anzahl der Singularitäten (inklusive Vielfachheit) maßgeblich. Man kann von „Konfluenz“ im Sinne einer Verringerung der Singularitätenzahl genau dann reden, wenn $b_0 = 0$ ist. Da mindestens eine der b-Koordinaten ungleich 0 sein muss, ist es unmöglich, dass sämtliche Koeffizienten von (2.17) identisch verschwinden, was einer „Differenzialgleichung“ der Form $0 = 0$ entspräche.

Bezüglich der Gewichtung der a-Koordinaten wird auf das folgende Kapitel verwiesen.

In (2.11) wurden die Koeffizienten der vorgegebenen Familie nennergleich gemacht. Das hat den Vorteil, dass die Nenner sämtlicher Koeffizienten in (2.16) ebenso übereinstimmen. Hätte man auf die Nennergleichheit verzichtet, so würde im Allgemeinen der Nenner des j-ten Koeffizienten von (2.16) nicht die n-te, sondern die j-te Potenz des Polynomes $b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m$ sein. Eine Entartungsstelle (d.h. $b_0 = \ldots = b_m = 0$) würde auf diese Weise stets zu einer der Gleichungen $w = 0$ oder $0 = 0$ führen (insbesondere letzteres sollte ausgeschlossen sein). Es sei noch angemerkt, dass in (2.11) die Nenner nicht unbedingt zur n-ten Potenz erweitert werden müssen, es genügt ein Hauptnenner der Koeffizienten (vgl. Kapitel 3.1, in welchem die Familie der hypergeometrischen Differenzialgleichungen (1.19) fortgesetzt wird).

Das übernächste Kapitel wird der Frage nachgehen, wie man den Abschluss von Γ in $\mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$ berechnen kann. Bereits gezeigt ist (vgl. Satz 2.4), dass das zugehörige Verschwindungsideal von $\overline{\Gamma}$ gleich der Bi-Quasi-Homogenisierung des Ideals $\mathcal{I}(\Gamma)$ ist.

Zur Verdeutlichung des bisher Gesagten soll das obige Beispiel erneut aufgegriffen werden. Bei der Ermittlung der Bi-Quasi-Homogenisierung und der Projektion des Graphen werden Ergebnisse der nächsten Abschnitte benutzt. An gegebenen Stellen der nächsten Abschnitte wird dieses Beispiel wieder aufgegriffen und die entsprechenden Schritte erläutert werden.

Beispiel 2.6. Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$w'' + \frac{a_2}{z-a_1}w' + \frac{a_3}{(z-a_1)^2}w = 0, \quad (a_1, a_2, a_3) \in S := \mathbb{C}^3.$$

Nach einer Erweiterung des ersten Koeffizienten mit $(z - a_1)$ erhält man

$$w'' + \frac{a_2 z - a_2 a_1}{(z-a_1)^2}w' + \frac{a_3}{(z-a_1)^2}w = 0. \tag{2.18}$$

Diese Differenzialgleichung identifiziere man mit der Gleichung (der Übersicht halber werden die Doppelindizes der Parameter durch Einfachindizes ersetzt)

$$w'' + \frac{b_2 z + b_3}{(z+b_1)^2}w' + \frac{b_4}{(z+b_1)^2}w = 0. \tag{2.19}$$

Man erhält so einen Morphismus affiner Varietäten $\mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^4$,

$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto (b_1, b_2, b_3, b_4) := (-a_1, a_2, -a_2 a_1, a_3),$$

dessen Graph sich schreiben lässt als

$$\begin{aligned}\Gamma := \{(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4 | \quad & b_1 + a_1 = 0, \qquad & b_2 - a_2 = 0, \\ & b_3 + a_2 a_1 = 0, \qquad & b_4 - a_3 = 0\}.\end{aligned}$$

Das zugehörige Verschwindungsideal ist gegeben durch

$$\mathcal{I}(\Gamma) = \langle b_1 + a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 + a_2 a_1,\ b_4 - a_3 \rangle \ \subset \mathbb{C}[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4]. \tag{2.20}$$

Es wird Γ abgeschlossen in $\mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$ mit $\mathbf{p} = (1, 1, 1, 2) \in \mathbb{N}^4$ und $\mathbf{q} = (1, 1, 2, 2, 2) \in \mathbb{N}^5$. In den folgenden Kapiteln wird sich zeigen, dass die Bi-Quasi-Homogenisierung $\mathcal{I}(\Gamma)^*$ von $\mathcal{I}(\Gamma)$ als Ideal in $\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$ von 11 Gleichungen erzeugt wird:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\Gamma)^* = \langle \quad & a_0 b_1 + a_1 b_0, & a_0 a_1 b_4 + a_3 b_0 b_1, \qquad & a_0^2 b_4 - a_3 b_0^2, \\ & a_0 b_3 - a_2 b_0 b_1, & a_1 a_2 b_4 + a_3 b_3, \qquad & a_1 b_2 + a_2 b_0 b_1, \\ & a_0 b_2 - a_2 b_0^2, & -a_0 a_2 b_4 + a_3 b_2, \qquad & a_1 b_3 + a_2 b_1^2, \\ & -a_1^2 b_4 + a_3 b_1^2, & -b_0 b_3 + b_1 b_2 \qquad & \qquad \rangle\end{aligned} \tag{2.21}$$

Aus Satz 2.4 folgt, dass dieses Ideal gleich dem Verschwindungsideal $\mathcal{I}(\overline{\Gamma})$ des Abschlusses von $\overline{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$ ist.
Die quasi-homogenisierte Form von (2.18) lautet

$$w'' + \frac{a_0 a_2 z - a_2 a_1}{(a_0 z - a_1)^2} w' + \frac{a_3}{(a_0 z - a_1)^2} w = 0 \tag{2.22}$$

und die von (2.19) lautet

$$w'' + \frac{b_2 z + b_3}{(b_0 z + b_1)^2} w' + \frac{b_4}{(b_0 z + b_1)^2} w = 0, \tag{2.23}$$

bzw.

$$(b_0 z + b_1)^2 w'' + (b_2 z + b_3) w' + b_4 w = 0. \tag{2.24}$$

Um an die über dem unendlich fernen Teil des Parameterraums $\{a_0 = 0\}$ liegenden („neuen") Differenzialgleichungen zu gelangen, berechnet man den Schnitt $\overline{\Gamma} \cap \{a_0 = 0\}$, der sich als Nullstellenmenge des Ideals

$$\mathcal{I}(\overline{\Gamma})|_{a_0=0} := \mathcal{I}(\overline{\Gamma}) + \langle a_0 \rangle$$

ergibt. Das Bild von $\overline{\Gamma} \cap \{a_0 = 0\}$ unter der Projektionsabbildung

$$\overline{\pi}_b : \mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$$

entspricht denjenigen Punkten $(b_0, \dots, b_4)$, welche mit den „neuen" Differenzialgleichungen der Form (2.24) korrespondieren.

An späterer Stelle (Kapitel 2.4) wird man sehen, dass das Bild von $\overline{\Gamma} \cap \{a_0 = 0\}$ unter $\overline{\pi}_b$ durch die Varietät

$$\begin{aligned} \{(b_0 : b_1 : b_2 : b_3 : b_4) \in \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}} | \quad & b_0^2 = 0, \quad b_0 b_1 = 0, \quad b_0 b_3 - b_1 b_2 = 0\} \\ & = \{(0 : 0 : b_2 : b_3 : b_4)\} \cup \{(0 : b_1 : 0 : b_3 : b_4)\} \end{aligned}$$

gegeben ist. Mit der ersten Komponente korrespondieren Differenzialgleichungen, welche entarten, da ihre Nenner Null werden (vgl. (2.24)):

$$(b_2 z + b_3) w' + b_4 w = 0, \quad (b_2, b_3, b_4) \neq (0, 0, 0).$$

In den jeweiligen Karten erhält man so die Differenzialgleichungen:

$$\begin{array}{ll} b_2 = 1 : & w' + \frac{b_4}{z + b_3} w = 0 \\ b_2 = 0,\ b_3 = 1 : & w' + b_4 w = 0 \\ b_2 = b_3 = 0,\ b_4 = 1 : & w = 0. \end{array}$$

Ebenso entarten die korrespondierenden Differenzialgleichungen der zweiten Komponente, falls $b_1 = 0$ ist, zu

$$b_3 w' + b_4 w = 0, \quad (b_3, b_4) \neq (0, 0).$$

In den jeweiligen Karten hat man damit die Differenzialgleichungen

$$\begin{array}{ll} b_3 = 1: & w' + b_4 w = 0 \\ b_3 = 0,\ b_4 = 1: & w = 0. \end{array}$$

Betrachtet man die zweite Komponente in der Karte $\{b_1 = 1\}$, erhält man Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Form

$$w'' + b_3 w' + b_4 w = 0,$$

welche in $z = \infty$ irregulär singulär sind (für $(b_3, b_4) \neq (0,0)$, sonst gehört die Differenzialgleichung zur Fuchs'schen Klasse).

Schließlich soll an diesem Beispiel dargelegt werden, warum die hier erörterte Vorgehensweise zur Fortsetzung von Differenzialgleichungen vorteilhaft ist:

Der Punkt $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0:0:1:0)$ führt zu einer Differenzialgleichung, bei welcher beide Koeffizienten der Differenzialgleichung (2.22) unbestimmt sind. Ohne Erweiterung des Parameterraums lässt sich diesem Punkt keine eindeutige Differenzialgleichung zuordnen. Erweitert man den Parameterraum auf die beschriebene Art, indem man ihn als Graphen Γ auffasst, welchen man in $\mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$ abschließt, so gilt bezüglich der Projektionen $\overline{\pi}_a : \overline{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbf{p}}$ und $\overline{\pi}_b : \overline{\Gamma} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$:

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_a^{-1}(\{(0:0:1:0)\}) \;=\; \{&(0:0:1:0\,,\ b_0:b_1:b_2:b_3:b_4)| \\ &b_0 b_1 = 0, \quad b_0^2 = 0, \quad b_1^2 = 0, \quad -b_0 b_3 + b_1 b_2 = 0\} \end{aligned}$$

(vgl. (2.21)) und somit

$$\overline{\pi}_b(\overline{\pi}_a^{-1}(\{(0:0:1:0)\}) = \{(0:0:b_2:b_3:b_4)| \quad b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{C}\}.$$

Den im Abschluss des erweiterten Parameterraums liegenden Punkten der Form $(0:0:1:0\,,\ 0:0:b_2:b_3:b_4)$ können also auf eindeutige Weise entartete Differenzialgleichungen

$$(b_2 z + b_3) w' + b_4 w = 0, \quad (b_2, b_3, b_4) \neq (0,0,0)$$

zugeordnet werden.

2.2.2 Eigenschaften von $\overline{\Gamma}$

Unabhängigkeit vom Gewichtungsvektor p

Auf Grund der oben gegebenen Bemerkung über die Wahl der Kompaktifizierung erscheint es zunächst sinnvoll, die Gewichtung der Koordinaten $a_0, \ldots, a_R$ derart vorzunehmen, dass nach einer Quasi-Homogenisierung der Polynome der Differenzialgleichung (2.11) möglichst wenige Unbestimmtheits- und Entartungsstellen über dem unendlich fernen Teil $\{a_0 = 0\}$ entstehen. In der Tat ist die Vorgabe eines Gewichtungsvektors $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_R)$ notwendig zur Konstruktion von $\overline{\Gamma}$. Es zeigt sich aber, dass die Projektion $\overline{\pi}_b(\overline{\Gamma}) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{m+\tilde{N}}$ nicht von der Wahl von $\mathbf{p}$ abhängt:

Lemma 2.7. $\overline{\pi}_b(\overline{\Gamma})$ *ist unabhängig von* $\mathbf{p}$.

Beweis. Zunächst gilt das folgende Ergebnis, welches in [Mum95] zu finden ist: *Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine Varietät und sei X_0 eine Zariski-offene Menge in X (wobei $X_0 \neq \emptyset$). Dann ist X der Abschluss von X_0 in der gewöhnlichen (metrischen) Topologie* (vgl. [Mum95], Theorem 2.33, S. 38f.).
Es ist der gewichtet-projektive Raum $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{m+\tilde{N}}$ mit dem Gewichtungsvektor $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_{m+\tilde{N}})$ projektiv. Dies folgt zum Beispiel aus der Theorie der torischen Varietäten: Der gewichtet-projektive Raum $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{m+\tilde{N}}$ ist eine torische Fano-Varietät (vgl. [Bat94], Theorem 5.4.5, S.529f.). Per Definition (vgl. ebd., Definition 2.1.6, S.500) existiert eine strikte oberhalb-konvexe Trägerfunktion h. Dies ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{m+\tilde{N}}$ als kompakte torische Varietät projektiv ist (vgl. [Oda85], Corollary 2.16, S. 84).
Der gewichtet-projektive Raum lässt sich also in einen genügend großen projektiven Raum einbetten. Der oben zitierte Satz von Mumford gilt somit insbesondere für gewichtet-projektive Varietäten.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass der gewichtet-projektive Abschluss $\overline{\pi_b(\Gamma)}$ von $\pi_b(\Gamma) \subset \mathbb{C}^{m+\tilde{N}} \subset \mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{m+\tilde{N}}$ dem Abschluss von $\pi_b(\Gamma)$ in der gewöhnlichen (metrischen) Topologie entspricht. Ferner folgt mit Hilfe der Segre-Einbettung (vgl. [Mum95], Proposition 2.12, S.27f.), dass das Produkt projektiver (bzw. gewichtet-projektiver) Varietäten projektiv ist. Es stimmt also auch der bi-gewichtet-projektive Abschluss $\overline{\Gamma}$ von $\Gamma \subset \mathbb{C}^R \times \mathbb{C}^{m+\tilde{N}} \subset \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^R \times \mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{m+\tilde{N}}$ mit dem Abschluss von Γ in der gewöhnlichen Topologie überein.
Für den Beweis der Aussage des Lemmas kann daher die Eigenschaft der Folgenkompaktheit (vgl. [Oss92], Satz 2.4.5, S. 58) benutzt werden. Im Folgenden wird gezeigt: $\overline{\pi}_b(\overline{\Gamma}) = \overline{\pi_b(\Gamma)}$ (letzteres ist unabhängig vom Gewichtungsvektor $\mathbf{p}$).

"$\supseteq$": Es ist $\overline{\pi}_b$ eine (Zariski-)abgeschlossene Abbildung (was aus dem Hauptsatz der Eliminationstheorie folgt, vgl. Kapitel 2.4.1). Es ist also $\overline{\pi}_b(\overline{\Gamma})$ abgeschlossen.

Falls $\pi_b(\Gamma)$ in $\overline{\pi}_b(\overline{\Gamma})$ liegt, so gilt dies auch für $\overline{\pi_b(\Gamma)}$ (denn dies ist die kleinste abgeschlossene Menge, die $\pi_b(\Gamma)$ enthält). Tatsächlich folgt aus $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$, dass $\overline{\pi}_b(\Gamma) \subseteq \overline{\pi}_b(\overline{\Gamma})$ gilt, also wegen $\overline{\pi}_b|\Gamma = \pi_b$ auch $\pi_b(\Gamma) \subseteq \overline{\pi}_b(\overline{\Gamma})$.
„$\subseteq$“: Sei $\overline{b} \in \overline{\pi}_b(\overline{\Gamma})$. Dann gibt es ein $\overline{a} \in \mathbb{P}^R_{\mathbf{p}}$ mit $(\overline{a}, \overline{b}) \in \overline{\Gamma}$. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$ mit $c_n \to (\overline{a}, \overline{b})$ für $n \to \infty$. Dann ist $(\overline{\pi}_b(c_n))_{n\in\mathbb{N}} = (\pi_b(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\pi_b(\Gamma)$, also auch in $\overline{\pi}_b(\overline{\Gamma})$. Da $\overline{\pi}_b$ stetig ist, gilt: $\pi_b(c_n) = \overline{\pi}_b(c_n) \longrightarrow \overline{\pi}_b(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{b}$ für $n \to \infty$. Also ist $\overline{b} \in \overline{\pi_b(\Gamma)}$. □

Kurven im Parameterraum

Eine Kurve $\gamma : U \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^R \simeq \Gamma \subset \overline{\Gamma} \subset \mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$ im Parameterraum einer Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen ist zu verstehen als eine ein-parametrige Unterfamilie. Bei den folgenden Überlegungen sollen analytische Kurven zugelassen werden, die lokal in einer Umgebung von ∞ (bezüglich der Standardeinbettung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$) gegeben sind. Durch einen Kartenwechsel genügt es daher, Kurven der Form

$$\gamma : B_\delta(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \Gamma \subset \overline{\Gamma}$$

zu betrachten ($B_\delta(0)$ sei dabei eine δ-Umgebung des Nullpunktes in $\mathbb{C}$, $\delta > 0$).
Es stellen sich zwei Fragen:

1) Existiert zu einer vorgegebenen Kurve $\gamma : B_\delta(0)\setminus\{0\} \longrightarrow \Gamma$ stets eine Fortsetzung $\tilde{\gamma} : B_\delta(0) \longrightarrow \overline{\Gamma}$, wenn angenommen wird, dass die Kurve auf $B_\delta(0)$ meromorph mit (einziger) möglicher Polstelle in 0 ist?

2) Existiert zu einem vorgegebenen Punkt p aus $\overline{\Gamma}$ stets eine Kurve $\gamma : B_\delta(0) \longrightarrow \overline{\Gamma}$ mit den Eigenschaften $\gamma(B_\delta(0) \setminus \{0\}) \subset \Gamma$ und $\gamma(0) = p$?

Die erste Frage lässt sich schnell beantworten. Eine meromorphe Kurve $\gamma : B_\delta(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \Gamma$ mit einziger möglicher Polstelle in 0 hat die Form

$$\gamma(t) = \left(\frac{a_1(t)}{c_1(t)}, \dots, \frac{a_R(t)}{c_R(t)} \quad , \quad \frac{b_1(t)}{d_1(t)}, \dots, \frac{b_{m+\tilde{N}}(t)}{d_{m+\tilde{N}}(t)} \right),$$

wobei $a_1, \dots, a_R$, $c_1, \dots, c_R$, $b_1, \dots, b_{m+\tilde{N}}$, $d_1, \dots, d_{m+\tilde{N}}$ auf $B_\delta(0)$ holomorphe Funktionen sind und $c_1, \dots, c_R, d_1, \dots, d_{m+\tilde{N}}$ auf $B_\delta(0) \setminus \{0\}$ nicht verschwinden. Mit bi-quasi-homogenen Koordinaten des $\mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$ schreibt sich dies in der Form

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \left(1 : \tfrac{a_1(t)}{c_1(t)} : \dots : \tfrac{a_R(t)}{c_R(t)} \quad , \quad 1 : \tfrac{b_1(t)}{d_1(t)} : \dots : \tfrac{b_{m+\tilde{N}}(t)}{d_{m+\tilde{N}}(t)} \right) \\ &= \Big(\prod_{i=1}^{R} c_i(t) \ : \ \hat{c}_1(t) a_1(t) \ : \ \dots \ : \ \hat{c}_R(t) a_R(t), \\ &\qquad \prod_{i=1}^{m+\tilde{N}} d_i(t) \ : \ \hat{d}_1(t) b_1(t) \ : \ \dots \ : \ \hat{d}_{m+\tilde{N}}(t) b_{m+\tilde{N}}(t) \Big), \end{aligned} \tag{2.25}$$

wobei

$$\hat{c}_j := \frac{1}{c_j} \prod_{i=1}^{R} c_i^{p_j} \text{ und } \hat{d}_j := \frac{1}{d_j} \prod_{i=1}^{m+\tilde{N}} d_i^{q_j}$$

nach $t = 0$ holomorph fortsetzbare Funktionen und $\mathbf{p} = (1, p_1, \ldots, p_R)$ und $\mathbf{q} = (1, q_1, \ldots, q_{m+\tilde{N}})$ die Gewichtungsvektoren des $\mathbb{P}^R_\mathbf{p} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_\mathbf{q}$ sind.
Die rechte Seite von (2.25) kann also offensichtlich holomorph nach $t = 0$ fortgesetzt werden, wodurch eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{\gamma} : B_\delta(0) \longrightarrow \mathbb{P}^R_\mathbf{p} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_\mathbf{q}$ von γ gegeben ist. Da $\overline{\Gamma}$ kompakt (bzw. folgenkompakt, vgl. Beweis von Lemma 2.7) und $\tilde{\gamma}$ stetig ist, gilt sogar $\tilde{\gamma}(B_\delta(0)) \subseteq \overline{\Gamma}$: Ist eine Punktfolge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B_\delta(0)$ mit $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n) = 0$ gegeben, so hat die Bildfolge $(\tilde{\gamma}(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\overline{\Gamma}$ eine konvergente Teilfolge $(\tilde{\gamma}(\alpha_{i_n}))_{n\in\mathbb{N}}$. Also gilt $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(\lim_{n\to\infty}(\alpha_{i_n})) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\gamma}(\alpha_{i_n}) \in \overline{\Gamma}$.

Die zweite Frage lässt sich mit Hilfe des aus der Singularitätentheorie bekannten Kurvenauswahllemmas beantworten:

Lemma 2.8 (Kurvenauswahllemma, reelle Version). *Sei $p \in \mathbb{R}^\mu$. Ferner seien $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l : \mathbb{R}^\mu \longrightarrow \mathbb{R}$ polynomiale Funktionen,*

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^\mu | f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0,\ g_1(x) > 0, \ldots, g_l(x) > 0\}.$$

Ist $p \in \overline{Z}$, so existiert eine reell-analytische Kurve $\gamma : [0, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^\mu$, $0 < \delta$, mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(t) \in Z$ für alle $t \in (0, \delta)$.

Beweis: vgl. [Mil68], §3. □

Das Kurvenauswahllemma kann wie folgt auf die komplexe Situation übertragen werden:

Korollar 2.9 (Kurvenauswahllemma, komplexe Version). *Sei $p \in \mathbb{C}^\nu$. Ferner seien $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l : \mathbb{C}^\nu \longrightarrow \mathbb{C}$ polynomiale Funktionen,*

$$Z := \{z \in \mathbb{C}^\nu | f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0,\ g_1(z) \neq 0, \ldots, g_l(z) \neq 0\}. \tag{2.26}$$

Ist $p \in \overline{Z}$, so existiert eine komplex-analytische Kurve $\gamma : B_\delta(0) \longrightarrow \mathbb{C}^\nu$, $0 < \delta$, mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(t) \in Z$ für alle $t \in B_\delta(0) \setminus \{0\}$.

Beweis. $\mathbb{C}$ werde als zwei-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst und $\mathbb{C}^\nu$ mit $\mathbb{R}^{2\nu}$ identifiziert. Es seien $f_j^r, f_j^i, g_m^r, g_m^i : \mathbb{R}^{2\nu} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, k,\ m = 1, \ldots, l)$ Real- und Imaginärteil der Funktionen f_j und g_m, also

$$f_j = f_j^r + i \cdot f_j^i, \qquad g_m = g_m^r + i \cdot g_m^i.$$

Mit diesen Notationen schreibt sich Z in der Form

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^{2\nu} | f_1^r(x) = f_1^i(x) = \ldots = f_k^r(x) = f_k^i(x) = 0,$$
$$(g_1^r(x))^2 + (g_1^i(x))^2 > 0, \ldots, (g_l^r(x))^2 + (g_l^i(x))^2 > 0\}.$$

Ist also $p \in \overline{Z}$, so liefert die reelle Version des Kurvenauswahllemmas ein $\delta' > 0$ und einen reell-analytischen Weg $\tilde{\gamma} : [0, \delta') \longrightarrow \mathbb{R}^{2\nu}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = p$ und $\tilde{\gamma}(t) \in Z$ für $t \in (0, \delta')$.
Da $\tilde{\gamma}$ reell-analytisch in 0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass man für $\tilde{\gamma}$ eine in $(-\delta, +\delta)$ konvergente Potenzreihendarstellung $\sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha t^\alpha$ hat ($c_\alpha \in \mathbb{R}^{2\nu}$). Diese Reihe kann komplexifiziert werden. Dazu fasst man die Koeffizienten als Vektoren in $\mathbb{C}^\nu$ und die unabhängige Variable t als komplex auf. Auf diese Weise erhält man eine in $B_\delta(0)$ konvergente Potenzreihe, also eine komplex-analytische Funktion

$$\gamma : B_\delta(0) \longrightarrow \mathbb{C}^\nu,$$

welche auf dem reellen Intervall $[0, \delta) \subset B_\delta(0)$ mit $\tilde{\gamma}$ übereinstimmt.
Offensichtlich gilt $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$. Ferner gilt für alle $j = 1, \ldots, k$

$$f_j \circ \gamma|_{(0,\delta)} = f_j \circ \tilde{\gamma}|_{(0,\delta)} = 0.$$

Da das Intervall $(0, \delta)$ einen Häufungspunkt hat und da $f_j \circ \gamma$ komplex-analytisch ist, folgt mit dem Identitätssatz der Funktionentheorie, dass $f_j \circ \gamma \equiv 0$ ist. Ferner kann man durch Verkleinerung von δ erreichen, dass $g_m \circ \gamma(t) \neq 0$ auf $B_\delta(0) \setminus \{0\}$ ist ($m = 1, \ldots, l$): Wäre dies nicht so, so hätte $g_m \circ \gamma$ in jeder punktierten Umgebung von 0 eine Nullstelle. Die Nullstellenmenge hätte somit einen Häufungspunkt und es wäre wegen des Identitätssatzes $g_m \circ \gamma \equiv 0$. Dies kann nicht sein, da $(g_m^r(\gamma(t)))^2 + (g_m^i(\gamma(t)))^2 > 0$ für $t \in (0, \delta)$ gilt. Damit ist das Korollar gezeigt. □

Ist nun $\overline{\Gamma}$ eine bi-gewichtet-projektive Varietät, so kann man zur lokalen Situation übergehen, indem eine Karte des $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^R \times \mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{m+\tilde{N}}$ gewählt wird, welche p enthält. Γ ist dann gegeben durch eine Menge der Form (2.26). Die Polynome f_j erhält man durch entsprechende Dehomogenisierungen der bi-quasi-homogenen Polynome aus $\mathcal{I}(\overline{\Gamma})$. Falls a_0 die zusätzliche Koordinate bezüglich der Einbettung $\mathbb{C}^R \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbf{p}}^R$ ist, kommt man mit einem Polynom der Form $g = a_0$ aus. Die komplexe Version des Kurvenauswahllemmas liefert somit eine komplex-analytische Kurve, die den Anforderungen der Frage 2) genügt.

2.3 Berechnung der Bi-Quasi-Homogenisierung von $\mathcal{I}(\Gamma)$

Ist eine affine Varietät $\Gamma \subseteq \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^l$ vorgegeben und ist man an den Gleichungen des Abschlusses $\overline{\Gamma}$ im bi-gewichtet-projektiven Raum $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$ interessiert, genügt es auf Grund von Satz 2.4, die Bi-Quasi-Homogenisierung $\mathcal{I}(\Gamma)^*$ zu berechnen. Zwei Möglichkeiten hierzu werden in den nächsten beiden Kapiteln vorgestellt. Als Erstes wird gezeigt, dass man $\mathcal{I}(\Gamma)^*$ mittels Primärzerlegung von Idealen berechnen kann, so dass mit Algorithmen, wie sie in Singular [GrPf02b] implementiert sind (in der Programmbibliothek „primdec.lib"), erzeugende Polynome von $\mathcal{I}(\Gamma)^*$ ermittelt werden können. Leider erweist sich dies wegen des enormen Rechenaufwands bereits für Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei endlichen Singularitäten (man verwendet nach (2.13) und Korollar 1.6 einen Polynomring in 18 Variablen) als nicht zweckmäßig. Eine andere (praktikablere) Möglichkeit, die im übernächsten Kapitel beschrieben wird, ist die Berechnung von $\mathcal{I}(\Gamma)^*$ durch Benutzung von Gröbner-Basen.

2.3.1 Berechnung von $\mathcal{I}(\Gamma)^*$ mittels Primärzerlegung

Ist R ein kommutativer Ring, so heißt ein Ideal Q *primär*, falls $Q \neq R$ ist und falls gilt:

$$xy \in Q \;\Rightarrow x \in Q \text{ oder } y^n \in Q \text{ für ein } n > 0.$$

In diesem Fall ist $P = rad(Q)$ das kleinste Q umfassende Primideal (vgl. [AtMa69], S. 50ff.). Man sagt, Q ist P-primär.

Lemma 2.10. *Sei Q ein P-primäres Ideal in R und $x \in R$.*

(1) $x \in Q \;\Rightarrow\; (Q : x) := \{y \in R |\, yx \in Q\} = R$

(2) $x \notin Q \;\Rightarrow\; (Q : x)$ *ist P-primär*

(3) $x \notin P \;\Rightarrow\; (Q : x) = Q$

(4) Sind Q_1, Q_2 P-primäre Ideale, so ist auch $Q_1 \cap Q_2$ P-primär.

Beweis. vgl. [AtMa69], Lemma 4.3 und Lemma 4.4, S.51.

Eine *Primärzerlegung* eines Ideals $I \subseteq R$ ist eine endliche Zerlegung in primäre Ideale $I = \bigcap_{i=1}^{\nu} Q_i$. Eine *minimale Primärzerlegung* von I ist eine Primärzerlegung $I = \bigcap_{i=1}^{\nu} Q_i$, so dass alle $rad(Q_i)$ unterschiedlich sind und $\bigcap_{j \neq i} Q_j \nsubseteq Q_i$. Existiert eine Primärzerlegung von I, so folgt aus Lemma 2.10, dass auch eine minimale Primärzerlegung existiert.

Satz 2.11 (Erstes Eindeutigkeitstheorem). *Sei $I = \bigcap_{i=1}^{\nu} Q_i \subset R$ eine minimale Primärzerlegung und $P_i := rad(Q_i)$.*

(a) Die Menge der assoziierten Primideale $\{P_i |\, i = 1, \ldots, \nu\}$ von I ist gleich der Menge der Primideale, die in $\{rad((I : x)|\, x \in R\}$ enthaltenen sind. Die Ideale P_i sind also unabhängig von der Zerlegung.

(b) Ist R ein noetherscher Ring, so ist die Menge der assoziierten Primideale von I gleich der Menge der Primideale, die in $\{(I : x)|\, x \in R\}$ enthalten sind.

Beweis. vgl. [AtMa69], Theorem 4.5, S. 52 und Proposition 7.17, S. 83.

Satz 2.12 (Existenzsatz). *Sei R ein noetherscher Ring. Dann besitzt jedes Ideal Q in R eine (minimale) Primärzerlegung.*

Beweis. vgl. [AtMa69], Theorem 7.13, S.83.

Die Ideale P_i heißen die *assoziierten Primideale* von I. Die bezüglich der Inklusion minimalen Elemente in der Menge der assoziierten Primideale heißen *minimal assoziierte Primideale*, die anderen heißen *eingebettete assoziierte Primideale*. Ist $R = k[x_1, \ldots, x_\mu]$ der Polynomring in μ Variablen über einem Körper k und $\mathcal{V}(I)$ die gemeinsame Nullstellenmenge der Polynome aus I in k^μ, so gilt

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\bigcap_{i=1}^{\nu} Q_i) = \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{V}(Q_i) = \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{V}(rad(Q_i)) = \bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{V}(P_i).$$

Ist k algebraisch abgeschlossen, so gilt für jedes i: $\mathcal{I}(\mathcal{V}(P_i)) \in Spec(k[x_1, \ldots, x_\mu])$ (denn nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gilt $\mathcal{I}(\mathcal{V}(P_i)) = rad(P_i)$ und $rad(P_i) = rad(rad(Q_i)) = rad(Q_i) = P_i$ ist ein Primideal). Also ist $\mathcal{V}(P_i)$ irreduzibel (vgl. [Kun97], Satz 4.9, S.33). Die minimal assoziierten Primideale von I entsprechen also den irreduziblen Komponenten von $\mathcal{V}(I)$, die eingebetteten assoziierten Primideale sind Untervarietäten.

Beispiel 2.13. $R = \mathbb{C}[x, y]$, $I = \langle x^2, xy\rangle$. Eine minimale Primärzerlegung von I ist $I = \langle x\rangle \cap \langle x, y\rangle^2$. Dabei ist $rad(\langle x, y\rangle^2) = \langle x, y\rangle$, $rad(\langle x\rangle) = \langle x\rangle$, und es gilt $\langle x\rangle \subset \langle x, y\rangle$. Also ist $\langle x\rangle$ minimal assoziiertes Primideal und $\langle x, y\rangle$ eingebettetes assoziiertes Primideal. $\mathcal{V}(I)$ hat also als einzige irreduzible Komponente die y-Achse. Die Untervarietät von $\mathcal{V}(I)$, welche $\langle x, y\rangle$ entspricht, ist der Achsenursprung. Eine andere Primärzerlegung von I ist $I = \langle x\rangle \cap \langle x^2, y\rangle$.

Lemma 2.14. *Sei $I \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ ein bi-quasi-homogenes Ideal. Dann sind die assoziierten Primideale bi-quasi-homogen.*

Beweis. Es sei P ein assoziiertes Primideal von I. Nach Satz 2.11(b) existiert ein $x \in \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ mit $P = (I : x)$. Es ist $x \neq 0$, andernfalls wäre $P = \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$. Durch Übergang zu $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]/I$ kann $I = 0$ und $P = (0 : x) = Ann(x)$ angenommen werden.
Es sei $D := deg_a(x)$ der gewichtete Grad von x, aufgefasst als Polynom in den a-Variablen. Analog sei $E := deg_b(x)$ der gewichtete Grad von x als Polynom in den b-Variablen. Ferner bezeichnet $x_{d,e}$ die bi-quasi-homogene Komponente von x in $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k]_d \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_l]_e$ (zur bi-gewichteten Graduierung vgl. Kapitel 2.1.1). x schreibt sich dann in der Form:

$$x = \sum_{d=0}^{D} \sum_{e=0}^{E} x_{d,e}.$$

Es sei $f \in P$, $R := deg_a(f)$, $S := deg_b(f)$ und

$$f = \sum_{r=0}^{R} \sum_{s=0}^{S} f_{r,s}$$

die Zerlegung von f in bi-quasi-homogene Komponenten. Falls $f_{R,S} \in P$, folgt $f - f_{R,S} \in P$. Durch ein induktives Argument genügt es also zu zeigen, dass $f_{R,S} \in P$ ist.
Es sei $x_{d,e} := 0$ falls $d \notin \{0, \ldots, D\}$ oder $e \notin \{0, \ldots, E\}$ sowie $f_{r,s} := 0$ falls $r \notin \{0, \ldots, R\}$ oder $s \notin \{0, \ldots, S\}$.

Aus $f \in P = Ann(x)$ folgt $f \cdot x = 0$, es ist also jede bi-quasi-homogene Komponente von $f \cdot x$ gleich 0. Für $j = 0, \ldots, D + R$ und $i = 0, \ldots, E + S$ gilt daher

$$\sum_{\alpha,\beta} f_{R-\alpha,S-\beta} \cdot x_{D-j+\alpha,E-i+\beta} = 0.$$

(Dies ist die bi-quasi-homogene Komponente von $f \cdot x$ vom Grad $(R+D-j, S+E-i)$). Daraus folgt

$$f_{R,S} \cdot x_{D-j,E-i} = - \sum_{(\alpha,\beta)\neq(0,0)} f_{R-\alpha,S-\beta} \cdot x_{D-j+\alpha,E-i+\beta}. \tag{2.27}$$

Die Behauptung ist nun:

$$f_{R,S}^{j+i+1} \cdot x_{D-j,E-i} = 0 \qquad \text{für alle } j, i. \tag{2.28}$$

Dies wird durch eine vollständige Induktion nach j gezeigt. Für den Induktionsanfang ($j = 0$) muss die Aussage $f_{R,S}^{i+1} \cdot x_{D,E-i} = 0$ für alle i nachgewiesen werden. Dies wird durch eine zweite Induktion nach i bewiesen.[2]

[2]Der Übersicht halber werden im Folgenden die Rechenschritte dieser zweiten Induktion kursiv geschrieben.

Der Induktionsanfang ($i = 0$) ist gegeben durch die Richtigkeit der Aussage (2.28) für $(j, i) = (0, 0)$: Hierfür ist die rechte Seite von (2.27) gleich 0, denn $x_{D+\alpha,E+\beta}$ ist für α oder $\beta \geq 1$ gleich 0 (denn es ist $x_{D,E}$ die Gradform von x).
Für $i \neq 0$ kann Gleichung (2.27) in der folgenden Form geschrieben werden (man beachte $j = 0$):

$$f_{R,S} \cdot x_{D,E-i} = -\sum_{\beta\geq 1} f_{R,S-\beta} \cdot x_{D,E+\beta-i}. \tag{2.29}$$

Die Induktionsvoraussetzung ist nun, dass

$$f_{R,S}^{i'+1} \cdot x_{D,E-i'} = 0 \quad \text{für alle } i' \leq i \tag{2.30}$$

wahr ist. Gezeigt werden muss für den Induktionsschritt $i \to i+1$ die Richtigkeit der Behauptung $f_{R,S}^{(i+1)+1} \cdot x_{D,E-(i+1)} = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{R,S}^{(i+1)+1} \cdot x_{D,E-(i+1)} = f_{R,S}^{i+1} \cdot f_{R,S} \cdot x_{D,E-(i+1)} &\overset{(2.29)}{=} -f_{R,S}^{i+1} \sum_{\beta\geq 1} f_{R,S-\beta} \cdot x_{D,E-(i+1-\beta)} \\ &= -\sum_{\beta\geq 1} f_{R,S-\beta} \cdot f_{R,S}^{i+1} \cdot x_{D,E-(i+1-\beta)} \ = \ 0, \end{aligned}$$

was aus der Induktionsvoraussetzung (2.30) folgt. Somit gilt (2.28) für alle Paare ($j = 0, i$). Mit einer ähnlichen Argumentation kann man die Richtigkeit von (2.28) für alle Paare ($j, i = 0$) zeigen.

Der Induktionsanfang für die Induktion nach j ist somit gezeigt. Für den Induktionsschritt $j \to j+1$ setze man die Richtigkeit von

$$f_{R,S}^{j'+i+1} \cdot x_{D-j',E-i} = 0 \quad \text{für } j' \leq j \text{ und für alle } i \tag{2.31}$$

voraus. Es muss gezeigt werden, dass die Aussage

$$f_{R,S}^{(j+1)+i+1} \cdot x_{D-(j+1),E-i} = 0 \tag{2.32}$$

für alle i wahr ist. Dieses wird durch eine weitere Induktion nach i gezeigt.[3]

Für den Induktionsanfang muss die Aussage (2.32) für $i = 0$ richtig sein, was bereits oben angemerkt wurde. Die Induktionsvoraussetzung ist nun, dass

$$f_{R,S}^{(j+1)+i'+1} \cdot x_{D-(j+1),E-i'} = 0 \text{ für } i' \leq i \tag{2.33}$$

wahr ist. Gezeigt werden muss für den Induktionsschritt $i \to i+1$ die Richtigkeit der Aussage

$$f_{R,S}^{(j+1)+(i+1)+1} \cdot x_{D-(j+1),E-(i+1)} = 0.$$

[3]Der Übersichtlichkeit halber wird auch diese Induktion wieder kursiv geschrieben.

Es gilt: $f_{R,S}^{(j+1)+(i+1)+1} \cdot x_{D-(j+1),E-(i+1)} =$

$$\begin{aligned}
&= f_{R,S}^{(j+1)+(i+1)} \cdot f_{R,S} \cdot x_{D-(j+1),E-(i+1)} \\
&\overset{(2.27)}{=} -f_{R,S}^{(j+1)+(i+1)} \cdot \sum_{(\alpha,\beta)\neq(0,0)} \left(f_{R-\alpha,S-\beta} \cdot x_{D-(j+1-\alpha),E-(i+1-\beta)}\right) \\
&= -\sum_{(\alpha,\beta)\neq(0,0)} \left(f_{R-\alpha,S-\beta} \cdot f_{R,S}^{(j+1)+(i+1)} \cdot x_{D-(j+1-\alpha),E-(i+1-\beta)}\right) \\
&= \left(-\sum_{\beta\geq 1} \left(f_{R,S-\beta} \cdot f_{R,S}^{(j+1)+(i+1)} \cdot x_{D-(j+1),E-(i+1-\beta)}\right)\right) + \\
&\quad + \left(-\sum_{\alpha\geq 1}\sum_{\beta\geq 0} \left(f_{R-\alpha,S-\beta} \cdot f_{R,S}^{(j+1)+(i+1)} \cdot x_{D-(j+1-\alpha),E-(i+1-\beta)}\right)\right).
\end{aligned}$$

In den letzten beiden Zeilen ist die erste Klammer gleich 0 auf Grund von (2.33), die zweite Klammer ist gleich 0 wegen (2.31).

Damit ist insgesamt (2.28) gezeigt.

Aus (2.28) folgt nun $f_{R,S}^{D-j+E-i} \cdot f_{R,S}^{j+i+1} \cdot x_{D-j,E-i} = 0$, also $f_{R,S}^{D+E+1} \cdot x_{D-j,E-i} = 0$. Durch Addition dieser Gleichungen für $j = 0, \ldots, D$ und $i = 0, \ldots, E$ erhält man

$$f_{R,S}^{D+E+1} \cdot x = 0,$$

daher ist $f_{R,S}^{D+E+1} \in Ann(x) = P$. Da P prim ist, gilt $f_{R,S} \in P$ und das Lemma ist gezeigt. □

Lemma 2.15. *Es sei $P \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ ein Primideal. Ist P bi-quasi-homogen, so ist $\mathcal{V}(P) \subset \mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$ irreduzibel in der Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$.*

Beweis. Man betrachte den „bi-gewichteten Kegel“ von $\mathcal{V}(P)$ in $\mathbb{C}^{k+l+2}$. Es ist bekannt (s. [Kun97], Satz 4.9, S.33), dass dieser Kegel eine in der gewöhnlichen Zariski-Topologie des $\mathbb{C}^{k+l+2}$ irreduzible Varietät definiert (denn P ist ein Primideal). Es sei $V := \mathcal{V}(P) = V_1 \cup V_2 \subset \mathbb{P}^k_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^l_{\mathbf{q}}$ eine Zerlegung in (in $\mathcal{T}$) abgeschlossene Teilmengen (V_1 und V_2 sind also Nullstellenmengen bi-quasi-homogener Polynome). Betrachtet man die zugehörigen Kegel und beachtet man, dass der zu V gehörige Kegel irreduzibel ist, so folgt $V_1 = V$ oder $V_2 = V$. □

Proposition 2.16. *Sei $I \in \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l]$ ein Ideal und $I^* \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ seine Bi-Quasi-Homogenisierung bezüglich der Homogenisierungsvariablen a_0 bzw. b_0. Dann gilt*

$$(rad(I^*))_* = rad(I).$$

Beweis. „$\subseteq$“: Ist $f \in (rad(I^*))_*$, so existiert ein $G \in rad(I^*)$ mit $f = G_*$. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $G^n \in I^*$. Daher ist $f^n = (G_*)^n = (G^n)_* \in (I^*)_* = I$ (vgl. Lemma 2.2 c)).
„$\supseteq$“: Ist $f \in rad(I)$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in I$. Also ist $(f^n)^* \in I^*$ bzw. $(f^*)^n \in I^*$. Demnach ist $f^* \in rad(I^*)$ und $f = (f^*)_* \in (rad(I^*))_*$ (vgl. Lemma 2.2 a) und d)). □

Lemma 2.17. *Sei $I \subset \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l]$ ein Ideal und $I^* \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ seine Bi-Quasi-Homogenisierung bezüglich der Homogenisierungsvariablen a_0 bzw. b_0. Dann gilt:*

$$I^* \textit{ ist primär (bzw. prim)} \Rightarrow I \textit{ ist primär (bzw. prim)}$$

Beweis. Sei I^* primär. Es seien $a, b \in \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l]$, $a \notin I$, und $ab \in I$. Dann ist $(ab)^* \in I^*$ bzw. $a^*b^* \in I^*$. Aus $a \notin I$ folgt $a^* \notin I^*$ und, da I^* primär ist, $b^* \in rad(I^*)$. Daher und wegen Proposition 2.16 gilt $b = (b^*)_* \in (rad(I^*))_* = rad(I)$. Es ist also I primär. Die Behauptung für Primideale kann in ähnlicher Weise gezeigt werden. □

Die Umkehrung der Aussage des Lemmas gilt zumindest noch für Primideale. Es ist nämlich ein Ideal J genau dann ein Primideal, wenn die Eigenschaft „$ab \in J \Rightarrow a \in J$ oder $b \in J$“ für bi-quasi-homogene Elemente a, b erfüllt ist. Will man nun zeigen, dass mit I auch I^* prim ist, so genügt es, zwei bi-quasi-homogene Polynome $a, b \in \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l]$ mit $ab \in I^*$ zu betrachten. Daraus folgt $(ab)_* = a_*b_* \in (I^*)_* = I$, und da I prim ist, $a_* \in I$ oder $b_* \in I$. Daraus folgt $(a_*)^* \in I^*$ oder $(b_*)^* \in I^*$. Da a und b als bi-quasi-homogen vorausgesetzt wurden, gibt es nach Lemma 2.2 natürliche Zahlen $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ mit $a = a_0^{\mu_1} b_0^{\nu_1} (a_*)^* \in I^*$ oder $b = a_0^{\mu_2} b_0^{\nu_2} (b_*)^* \in I^*$, so dass I^* prim ist.[4]

Die Proposition 2.16 und das Lemma 2.17 werden für das weitere Vorgehen nicht benötigt und sind nur als Zusatz hier aufgeführt.

In der Situation des letzten Kapitels ist eine affine Varietät $\Gamma = \mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{C}^R \times \mathbb{C}^{m+\tilde{N}}$ gegeben, welche man in $\mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$ abschließen möchte. Man kann annehmen, dass

[4] In [GrPf02a] ist eine Übungsaufgabe angegeben (vgl. Ex. 4.1.9, S. 243), deren Aussage es ist, dass ein homogenes Ideal genau dann primär ist, wenn die „primär“ definierende Eigenschaft eines Ideals bereits für homogene Elemente erfüllt ist. Falls dieses tatsächlich gilt und sich das Ergebnis auf den bi-quasi-homogenen Fall verallgemeinern lässt, so gilt im obigen Lemma 2.17 die Äquivalenz der Eigenschaften. Des Weiteren lässt sich unter dieser Annahme auch noch zeigen, dass eine minimale Primärzerlegung $Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$ von I eine minimale Primärzerlegung $Q_1^* \cap \ldots \cap Q_r^*$ von I^* impliziert.

das Ideal I radikal ist[5] (damit gilt $\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = rad(I) = I$). Vermöge Satz 2.4 genügt es, die Bi-Quasi-Homogenisierung I^* von I zu berechnen, denn aus diesem Satz folgt

$$\mathcal{I}(\overline{\Gamma}) = (\mathcal{I}(\Gamma))^* = I^*.$$

Damit hat man $\overline{\Gamma} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\overline{\Gamma})) = \mathcal{V}(I^*)$.

Um die Bi-Quasi-Homogenisierung von I bzw. den Abschluss von Γ zu berechnen, wähle man zunächst ein Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_s$ von I und definiere das Ideal $I^h := \langle f_1^h, \ldots, f_s^h \rangle$, welches in der Bi-Quasi-Homogenisierung I^* enthalten ist: $I^h \subseteq I^*$. Also folgt $\mathcal{V}(I^*) \subseteq \mathcal{V}(I^h)$. Wie in Kapitel 2.1.3 gesehen, gilt $\mathcal{V}(I^*) \cap \mathbb{C}^{R+m+\tilde{N}} = \mathcal{V}(I^h) \cap \mathbb{C}^{R+m+\tilde{N}} = \Gamma$ unter der kanonischen Einbettung $\mathbb{C}^{R+m+\tilde{N}} \hookrightarrow \mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$. Demzufolge unterscheidet sich $\mathcal{V}(I^h)$ von $\mathcal{V}(I^*)$ nur um Komponenten, die in der unendlich fernen Hyperebene $\{a_0 b_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$ liegen.

Nun kann man die Komponenten von $\mathcal{V}(I^h)$ wie folgt bestimmen: Es sei

$$I^h = Q_1 \cap \ldots \cap Q_r$$

eine Primärzerlegung von I^h. Es sind die Ideale $P_i = rad(Q_i)$ prim und radikal und es ist

$$\mathcal{V}(I^h) = \mathcal{V}(Q_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(Q_r) = \mathcal{V}(P_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(P_r)$$

die Zerlegung von $\mathcal{V}(I^h)$ in irreduzible Komponenten, wobei ohne Einschränkung $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_t)$ nicht ganz und $\mathcal{V}(P_{t+1}), \ldots, \mathcal{V}(P_r)$ ganz in $\{a_0 b_0 = 0\}$ liegen $(1 \le t < r)$. Somit gilt

$$\overline{\Gamma} = \mathcal{V}(I^*) = \mathcal{V}(P_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(P_t)$$

bzw. für das zugehörige Ideal von $\overline{\Gamma}$, also der Bi-Quasi-Homogenisierung von I

$$\mathcal{I}(\overline{\Gamma}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(P_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(P_t)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(P_1)) \cap \ldots \cap \mathcal{I}(\mathcal{V}(P_t)) = P_1 \cap \ldots \cap P_t.$$

Insbesondere genügt es natürlich, lediglich die minimal assoziierten Primideale von I^h zu bestimmen.

Anwendungsbeispiel

Beim Beispiel 2.6 des letzten Kapitels wurden die Differenzialgleichungen (2.18) und (2.19) miteinander identifiziert, und man erhielt auf diese Weise das radikale Ideal (2.20):

$$I = \langle b_1 + a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 + a_2 a_1,\ b_4 - a_3 \rangle \ \subset \mathbb{C}[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4],$$

[5] Da es im Wesentlichen nur auf die Punktmenge $\Gamma = \mathcal{V}(I)$ ankommt und $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(rad(I))$ ist, kann man gegebenenfalls I durch sein Radikal ersetzen.

von welchem die Bi-Quasi-Homogenisierung I^* gesucht ist. Es sei

$$I^h := \langle b_1a_0 + a_1b_0,\ b_2a_0 - a_2b_0^2,\ b_3a_0^2 + a_1a_2b_0^2,\ b_4a_0^2 - a_3b_0^2\rangle$$

das von den bi-quasi-homogenisierten Erzeugenden von I erzeugte Ideal in $\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$. Eine Berechnung mit SINGULAR zeigt, dass I^h drei minimal assoziierte Primideale besitzt: Neben dem Ideal

$$\begin{array}{lllll} \langle & a_0b_1 + a_1b_0, & a_0a_1b_4 + a_3b_0b_1, & a_0^2b_4 - a_3b_0^2, & \\ & a_0b_3 - a_2b_0b_1, & a_1a_2b_4 + a_3b_3, & a_1b_2 + a_2b_0b_1, & \\ & a_0b_2 - a_2b_0^2, & -a_0a_2b_4 + a_3b_2, & a_1b_3 + a_2b_1^2, & \\ & -a_1^2b_4 + a_3b_1^2, & -b_0b_3 + b_1b_2 & & \rangle \end{array}$$

(dies ist das Ideal aus (2.21)) sind dies die Ideale

$$\langle a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle a_0,\ b_0\rangle,$$

deren Nullstellenmengen offensichtlich ganz in $\{a_0b_0 = 0\}$ enthalten sind. Das Ideal $I^* = \mathcal{I}(\Gamma)^*$ ist somit durch (2.21) gegeben.

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels gesagt, stellt sich leider heraus, dass die Berechnung einer Primärzerlegung mit einem sehr hohen Rechenaufwand verbunden ist, so dass konkrete Berechnungen aus Zeitgründen oder Speicherbeschränkungen scheitern können. Es soll daher eine besser geeignete Methode beschrieben werden, mit deren Hilfe man Bi-Quasi-Homogenisierungen von Idealen berechnen kann.

2.3.2 Berechnung von $\mathcal{I}(\Gamma)^*$ mittels Gröbnerbasen

Zunächst sollen Gröbner-Basen definiert und einige allgemeine Resultate vorgestellt werden. Im Folgenden sei k ein Körper und $k[x_1, \ldots, x_n]$ der Polynomring über k in n Variablen.

Totale Monomial-Ordnungen

Eine totale Ordnung der Monome im Polynomring mit einer Variablen ist durch den Grad gegeben. Um im Polynomring mit mehreren Variablen eine totale Ordnung zu erhalten, müssen sämtliche Monome – auch die mit gleichem Totalgrad – geordnet werden. Es werden im Weiteren drei solcher totalen Ordnungen betrachtet:
Die *grad-verfeinernde, lexikographische Ordnung* („deg-lex“):

$$\begin{aligned} x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n} < x_1^{b_1}\ldots x_n^{b_n} \ :\Leftrightarrow\ & \sum_i a_i < \sum_i b_i \ \text{ oder} \\ & \sum_i a_i = \sum_i b_i \text{ und es ex. } k \text{ mit } 1 \leq k < n, \\ & \text{so dass } a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1} \text{ und } a_k < b_k. \end{aligned}$$

Diese Definition der deg-lex-Ordnung wird kurz mit $x_1 > \ldots > x_n$ bezeichnet, denn bei gleichem Grad sind die Variablen mit kleineren Indizes dominierend (z.B. $x_1x_2^2 < x_1^2x_2$).

Die Ordnung, die man erhält, wenn anstelle des gewöhnlichen Grades der bezüglich eines Gewichtsvektors $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n_{\geq 0}$ gewichtete Grad zu Grunde gelegt wird, d.h.

$$\begin{aligned} x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} < x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n} \;:\Leftrightarrow\; & \sum_i p_i a_i < \sum_i p_i b_i \;\text{ oder} \\ & \sum_i p_i a_i = \sum_i p_i b_i \text{ und es ex. } k \text{ mit } 1 \leq k < n, \\ & \text{so dass } p_1 a_1 = p_1 b_1, \ldots, p_{k-1} a_{k-1} = p_{k-1} b_{k-1} \\ & \text{und } p_k a_k < p_k b_k, \end{aligned}$$

heißt *gewichtete lexikographische Ordnung* („w-deg-lex").

Sind auf den Polynomringen $k[x_1, \ldots, x_n]$ und $k[y_1, \ldots, y_m]$ jeweils totale Monomialordnungen $<_x$ und $<_y$ gegeben, so ist auf $k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ die *Eliminationsordnung* („eli") definiert durch

$$\begin{aligned} x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} y_1^{b_1} \ldots y_m^{b_m} < \;& x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n} y_1^{d_1} \ldots y_m^{d_m} \;:\Leftrightarrow \\ & x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} <_x x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n} \text{ oder:} \\ & x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n} = x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n} \text{ und } y_1^{b_1} \ldots y_m^{b_m} <_y y_1^{d_1} \ldots y_m^{d_m}. \end{aligned}$$

Man sagt, dass die totale Ordnung der Monome in den x-Variablen der totalen Ordnung der Monome in den y-Variablen übergeordnet ist (oder kürzer: die x-Variablen sind den y-Variablen übergeordnet).

Beispiel 2.18. Sei $f := x_1y^4 + x_1x_2y^2 + x_1x_2y \in k[x_1, x_2, y]$. Bezüglich „deg-lex" (mit $x_1 > x_2 > y$) gilt: $x_1x_2y < x_1x_2y^2 < x_1y^4$. Bezüglich „eli" (wobei die x-Variablen der y-Variable übergeordnet sind, und die jeweiligen Ordnungen deg-lex-Ordnungen seien) gilt: $x_1y^4 < x_1x_2y < x_1x_2y^2$.

Ein Monom $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ in $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ wird im Weiteren kurz mit X^A bezeichnet. Man fixiere eine totale Ordnung auf der Menge der Monome von R. Für ein Polynom

$$f = c_1 X^{A_1} + c_2 X^{A_2} + \cdots + c_k X^{A_k} \tag{2.34}$$

mit geordneten Summanden (also $X^{A_{i+1}} < X^{A_i}$) gelten die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} lp(f) &:= X^{A_1} && \text{„leading power product" von f} \\ lc(f) &:= c_1 && \text{„leading coefficient" von f} \\ lt(f) &:= c_1 X^{A_1} && \text{„leading term" von f} \end{aligned}$$

Reduktion und Division in $\mathbf{k}[\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}]$

So wie es im Polynomring mit einer Variablen für zwei Polynome f, g zwei weitere Polynome q, r gibt mit $f = qg + r$, wobei $r = 0$ oder $deg(r) < deg(g)$ ist (Polynomdivision), so gibt es im Polynomring mit mehreren Variablen ein Äquivalent hierzu. Man fixiere eine totale Ordnung auf der Menge der Monome des Polynomringes.

Definition 2.19. a) Seien $f, g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $g \neq 0$ (f geschrieben wie in (2.34)). Dann *reduziert f zu h modulo g in einem Schritt* (in Zeichen $f \xrightarrow{g} h$), falls $lp(g)$ ein in f auftretendes Monom X^{A_i} teilt und $h = f - \frac{c_i X^{A_i}}{lt(g)} g$ ist.
b) Seien $f, h \in k[x_1, \cdots, x_n]$ und $G := \{g_1, \ldots, g_t\} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, $g_i \neq 0$. Dann *reduziert f zu h modulo G* (in Zeichen $f \xrightarrow{G}_+ h$), falls es $i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, t\}$ und Polynome $h_1, \ldots, h_{s-1}$ gibt mit

$$f \xrightarrow{g_{i_1}} h_1 \xrightarrow{g_{i_2}} h_2 \xrightarrow{g_{i_3}} \ldots \xrightarrow{g_{i_{s-1}}} h_{s-1} \xrightarrow{g_{i_s}} h. \tag{2.35}$$

Ein Polynom r heißt *reduziert* bezüglich G, falls $r = 0$ ist oder falls kein Monom von r von einem der $lp(g_i)$ geteilt wird. Gilt in diesem Fall $f \xrightarrow{G}_+ r$, dann heißt r ein *Rest* von f bezüglich G.

Es ist anzumerken, dass ein Rest von f bezüglich G im Allgemeinen nicht eindeutig ist, denn es kommt in Definition 2.19 b) auf die Reihenfolge der g_{i_k} an (für die Eindeutigkeit müssen Bedingungen an G gestellt werden, s. Satz 2.24). Der Beweis der Existenz eines Restes bei Vorgabe von f und G geht einher mit dem Beweis, dass der sogenannte *multivariable Divisions-Algorithmus* abbricht (vgl. Beweis von Satz A.1 im Anhang A.1) Insbesondere liefert der Algorithmus, dass es zu gegebenen f und G stets Polynome $u_1, \ldots, u_t$ und r gibt mit

$$f = u_1 g_1 + \cdots + u_t g_t + r \quad \text{ und } lp(f) = \max\left(\max_{1 \leq i \leq t}\left(lp(u_i) lp(g_i)\right), lp(r)\right), \tag{2.36}$$

wobei r reduziert ist bezüglich G. Reduziert f zu 0 modulo G, so liegt f offensichtlich im Ideal $\langle G \rangle := \langle g_1, \ldots, g_t \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]$.

Gröbner-Basen

Es sei $H \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ eine Menge. Bezüglich einer totalen Monomialordnung bezeichne

$$Lt(H) := \langle lt(f) | \quad f \in H \rangle$$

das „leading term ideal“ von H.

Satz 2.20. *Sei $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal, $I \neq 0$, und $G := \{g_1, \dots, g_t\} \in k[x_1, \dots, x_n]$ eine Menge. Man fixiere eine totale Monomialordnung. Dann sind äquivalent:*

(i) $Lt(G) = Lt(I)$

(ii) $\forall f \in I, f \neq 0 \quad \exists i \in \{1, \dots, t\}$ *d.d.* $lp(g_i)$ *teilt* $lp(f)$

(iii) $f \in I \Leftrightarrow f \xrightarrow{G}_+ 0$

(iv) $f \in I \Leftrightarrow \exists h_1, \dots, h_t \in k[x_1, \dots, x_n]$ *d.d.*
$f = \sum_{i=1}^t h_i g_i$ *und* $lp(f) = \max\limits_{1 \leq i \leq t} (lp(h_i) \cdot lp(g_i))$

Beweis. s. [AdLo96], Theorem 1.6.2, S. 32/33. □

Definition 2.21. Ist eine dieser Eigenschaften erfüllt, so heißt G eine *Gröbner-Basis für I*. Man sagt, dass G eine *Gröbner-Basis* ist, falls G eine Gröbner-Basis für das Ideal $\langle G \rangle$ ist. Gröbner-Basen heißen in der Literatur auch *Standardbasen* (insbesondere dann, wenn so genannte *lokale* Ordnungen zu Grunde gelegt werden, vgl. [GrPf02a], Definition 1.24, S. 11; diese Art von Ordnungen wird hier nicht betrachtet).

Aus Satz 2.20 (iii) folgt sofort:

Korollar 2.22. $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ □

Es bleibt anzumerken, dass Gröbner-Basen von Idealen immer bezüglich einer totalen Monomialordnung gegeben sind. Gröbner-Basen bezüglich einer fixierten Ordnung sind im Allgemeinen keine Gröbner-Basen für andere Ordnungen. Außerdem ist bezüglich einer fixierten Monomialordnung der Begriff der Gröbner-Basis eines Ideals nicht eindeutig. Um Eindeutigkeitsaussagen zu erhalten, spezialisiert man den Begriff der Gröbner-Basis; man spricht von einer *minimalen* Gröbner-Basis $G = \{g_1, \dots, g_t\}$, wenn deren Polynome normiert sind und die $lp(g_i)$ paarweise teilerfremd sind[6] und von einer *reduzierten* Gröbner-Basis, wenn sie minimal ist und jedes Element g_i reduziert ist bezüglich $G \setminus \{g_i\}$. Reduzierte Gröbner-Basen sind eindeutig (vgl. Satz von Buchberger, [AdLo96], Theorem 1.8.7, S.48f.). Zur Berechnung von Gröbner-Basen gibt es Algorithmen (z.B. BUCHBERGER-Algorithmus, s. Anhang A.2). Die Existenz von Gröbner-Basen ist schnell gezeigt:

Lemma 2.23. *Jedes Ideal $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ hat eine Gröbner-Basis.*

[6]Ist eine beliebige Gröbner-Basis $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ gegeben, kann man alle $g_i \in G$ entfernen, für welche ein $j \neq i$ existiert mit $lp(g_j)$ teilt $lp(g_i)$. Die verbleibenden Elemente teile man durch $lc(g_i)$. Nach Satz 2.20 (ii) erhält man auf diese Weise wieder eine Gröbner-Basis. Diese ist minimal.

Beweis. Aus dem Hilbert'schen Basis-Satz folgt, dass $Lt(I)$ endlich erzeugt ist. Man kann annehmen, dass $Lt(I)$ die Form $Lt(I) = \langle lt(g_1), \ldots, lt(g_t)\rangle$ mit $g_t \in I$ hat. Sei $G := \{g_1, \ldots, g_t\}$. Dann ist $Lt(G) = Lt(I)$. Also ist G eine Gröbner-Basis für I. □

Satz 2.24. *Sei $G := \{g_1, \ldots, g_t\} \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist G genau dann eine Gröbner-Basis für das Ideal $I = \langle g_1, \ldots, g_t\rangle$, wenn für jedes $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ der Rest von f bezüglich G eindeutig ist.*

Beweis. Die Richtung „⇒" ist schnell zu sehen: Es gelte $f \xrightarrow{G}_+ r_1$ und $f \xrightarrow{G}_+ r_2$, wobei r_1 und r_2 reduziert sind bezüglich G. Aus Gleichung (2.36) folgt $f - r_1 \in I$ und $f - r_2 \in I$. Also ist $r_1 - r_2 \in I$ und nach Satz 2.20 (iii) gilt $r_1 - r_2 \xrightarrow{G}_+ 0$. Ferner ist $r_1 - r_2$ reduziert, d.h. kein Monom aus $r_1 - r_2$ ist durch ein $lp(g_i)$ teilbar. Deshalb gibt es eine Sequenz der Form $r_1 - r_2 \xrightarrow{G}_+ 0$ nur, wenn $r_1 - r_2 = 0$ ist.
Die Richtung „⇐" ist komplizierter und ist in [AdLo96], Theorem 1.6.7, S.34/35, zu finden. □

Quasi-Homogenisierung von Idealen

Es sei $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Gewichtungsvektor. Für den Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ betrachte man die gewichtete (grad-verfeinernde) lexikographische Monomialordnung w-deg-lex, für $k[x_0]$ betrachte man als Monomialordnung den Grad von Monomen, und für $k[x_1, \ldots, x_n, x_0]$ betrachte man die induzierte eli-Ordnung, so dass $x_1, \ldots, x_n$ der Variablen x_0 übergeordnet sind.
Für $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ sei d der mit $\mathbf{p}$ gewichtete Totalgrad von f und es sei

$$f^\star := x_0^d \cdot f(\frac{x_1}{x_0^{p_1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_0^{p_n}}) \in k[x_1, \ldots, x_n, x_0] \tag{2.37}$$

die Quasi-Homogenisierung von f bezüglich der Variablen x_0 (es ist $f^\star$ somit quasihomogen bezüglich des Gewichtungsvektors $(\mathbf{p}, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Für (quasi-homogenes) $F \in k[x_1, \ldots, x_n, x_0]$ sei

$$F_\star := F(x_1, \ldots, x_n, 1) \in k[x_1, \ldots, x_n]$$

die Dehomogenisierung von F.
Für ein Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ sei $I^\star := \langle f^\star | \, f \in I\rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n, x_0]$ die Quasi-Homogenisierung von I bezüglich x_0. Ist $I = \langle g_1, \ldots, g_t\rangle$ endlich erzeugt, so gilt

$$I^\star \supseteq \quad \langle g_1^\star, \ldots, g_t^\star\rangle.$$

Ist $\{g_1, \ldots, g_t\}$ eine Gröbner-Basis von I, so folgt aus dem nächsten Satz (zusammen mit Korollar 2.22) sogar die Gleichheit $I^\star = \langle g_1^\star, \ldots, g_t^\star\rangle$.

Satz 2.25. *Sei $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal und $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ eine Gröbner-Basis von I bezüglich der (gewichteten) grad-verfeinernden lexikographischen Ordnung „$<$“ (bezüglich eines Gewichtungsvektors $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^n$). Es sei $G^h := \{g_1^\star, \dots, g_t^\star\} \subset k[x_1, \dots, x_n, x_0]$ und $I^\star \subset k[x_1, \dots, x_n, x_0]$ die Quasi-Homogenisierung von I bezüglich x_0. Dann ist G^h eine Gröbner-Basis von $I^\star$ bezüglich der induzierten eli-Ordnung „$<_e$“, welche die x_i-Variablen ($i \neq 0$) der x_0-Variable überordnet. Insbesondere gilt: $\langle g_1^\star, \dots, g_t^\star\rangle = I^\star$.*

Beweis. Bezüglich der Monomialordnungen $<$ (bzw. $<_e$) bezeichne $lt_<$ (bzw. $lt_{<_e}$) den jeweiligen „leading term“ eines Polynoms. Zunächst stellt man folgende Dinge fest:

(i) Für ein Polynom $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ sind die Terme $lt_<(f)$ und $lt_{<_e}(f^\star)$ identisch (wenn man $k[x_1, \dots, x_n]$ als Unterring von $k[x_1, \dots, x_n, x_0]$ auffasst). Dies folgt aus der Wahl der Monomialordnungen und der Homogenisierungsvorschrift $f \mapsto f^\star$.

(ii) Ist $F \in I^\star$, so gilt: $F_\star \in I$, denn per Definition von $I^\star$ gibt es Funktionen $\phi_j \in k[x_1, \dots, x_n, x_0]$ und $f_j \in I$, so dass $F = \sum_{j=1}^{\nu} \phi_j \cdot f_j^\star$. Es ist also

$$F_\star = \sum_{j=1}^{\nu} \left(\phi_j \cdot f_j^\star\right)_\star = \sum_{j=1}^{\nu} (\phi_j)_\star \cdot (f_j^\star)_\star = \sum_{j=1}^{\nu} (\phi_j)_\star \cdot f_j$$

ein Element aus I (das erste Gleichheitszeichen ist trivial und die beiden anderen folgen aus einem Analogon zu Lemma 2.2 für den (einfachen) quasi-homogenen Fall).

Mit diesen Vorbereitungen kann der Satz nun schnell bewiesen werden. Gezeigt wird:

$$Lt_{<_e}(I^\star) = \langle lt_{<_e}(g_1^\star), \dots, lt_{<_e}(g_t^\star)\rangle.$$

Die Inklusion „$\supseteq$“ ist offensichtlich, denn aus $g_i \in I$ folgt $g_i^\star \in I^\star$ und weiter $lt_{<_e}(g_i^\star) \in Lt_{<_e}(I^\star)$. Für die Inklusion „$\subseteq$“ genügt es zu zeigen, dass

$$lt_{<_e}(F) \in \langle lt_{<_e}(g_1^\star), \dots, lt_{<_e}(g_t^\star)\rangle$$

gilt, wobei ohne Einschränkung $F \in I^\star$ als quasi-homogen angenommen werden kann. Aus einem Analogon zu Lemma 2.2 schließt man, dass es eine natürliche Zahl α gibt mit $F = x_0^\alpha (F_\star)^\star$. Nach Voraussetzung und Vorbemerkung (ii) findet man Polynome $\varphi_1, \dots, \varphi_t \in k[x_1, \dots, x_n]$, so dass gilt: $lt_<(F_\star) = \sum_{i=1}^t \varphi_i lt_<(g_i)$. Nun gilt

$$\begin{aligned} lt_{<_e}(F) &= lt_{<_e}(x_0^\alpha (F_\star)^\star) = x_0^\alpha\, lt_{<_e}((F_\star)^\star) \\ &\overset{(i)}{=} x_0^\alpha\ (lt_<(F_\star)) \\ &= x_0^\alpha \left(\sum_{i=1}^t \varphi_i lt_<(g_i)\right) \\ &\overset{(i)}{=} x_0^\alpha \left(\sum_{i=1}^t \varphi_i lt_{<_e}(g_i^\star)\right) \\ &= \sum_{i=1}^t x_0^\alpha \varphi_i lt_{<_e}(g_i^\star), \end{aligned}$$

und somit ist $lt_{<_e}(F)$ in dem von $lt_{<_e}(g_1^\star), \ldots, lt_{<_e}(g_t^\star)$ erzeugten Ideal enthalten. $\square$

Gröbner-Basen in Polynomringen über Ringen

Ersetzt man den bisherigen Körper k durch einen noetherschen Ring R, so ist zunächst festzustellen, dass der Begriff des Reduzierens zu modifizieren ist. Ein einfaches Beispiel zeigt die Problematik:

Sei $R = \mathbb{Z}$, $A = R[x, y]$ mit $y < x$ und $f = 10xy - y$, $f_1 = 4x + y$ und $f_2 = 3x + 1$ aus A. Es sei $F := \{f_1, f_2\}$ (Anmerkung: F ist *keine* Gröbner-Basis im nachfolgend definierten Sinne).
Ist R ein Körper (etwa $R = \mathbb{Q}$) und reduziert man f bezüglich F gemäß der bisherigen Definition, so gilt:

$$f \xrightarrow{F}_+ r_{1,2} \quad \text{mit } r_1 = -\frac{5}{2}y^2 - y \text{ und } r_2 = -\frac{13}{3}y,$$

d.h. man erhält $f = \frac{5}{2}yf_1 + r_1$ bzw. $f = \frac{10}{3}yf_2 + r_2$. Ist $R = \mathbb{Z}$ ein Ring, so funktioniert die Reduktion auf Grund der fehlenden Division auf diese Weise nicht.
Im „Ringfall" reduziert man f modulo $F = \{f_1, \ldots, f_t\}$ „in einem Schritt", indem von f Linearkombinationen abgezogen werden, um den „leading term" $lt(f)$ verschwinden zu lassen, etwa

$$r = f - (c_1X^{A_1}f_1 + \cdots + c_tX^{A_t}f_t)$$

mit $c_i \in R$, $A_i \in \mathbb{N}^n$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ und

$$\begin{aligned} lp(f) &= X^{A_i}lp(f_i) \quad \text{für alle } i \text{ mit } c_i \neq 0 \text{ und} \\ lt(f) &= c_1X^{A_1}lt(f_1) + \cdots + c_tX^{A_t}lt(f_t). \end{aligned}$$

Das mehrschrittige Reduzieren ist wie in Definition 2.19 b) definiert. Im obigen Beispiel gilt etwa $r = f - (4y \cdot f_1 - 2y \cdot f_2) = -4 \cdot y^2 + y$, so dass man erhält: $f = 4yf_1 - 2yf_2 + r$.

Es sei angemerkt, dass es im Ringfall ein Analogon zum multivariablen Divisions-Algorithmus des Körperfalls gibt (s. [AdLo96], Algorithm 4.1.1, S.207). Mit der Änderung des Reduktionsbegriffes gilt die Äquivalenz der Eigenschaften (i), (iii) und (iv) aus Satz 2.20 auch im Ringfall, so dass durch diese Bedingungen Gröbner-Basen in Polynomringen über Ringen definiert werden. Mit Ausnahme von Satz 2.24 und der Bemerkungen über minimale/reduzierte Gröbner-Basen gelten die bisherigen Ergebnisse. Insbesondere bleibt Satz 2.25 gültig, wenn man den Körper k durch einen Ring R ersetzt.[7]

[7] Das vierte Kapitel von [AdLo96], S. 201 ff., setzt sich detailliert mit Gröbner-Basen über Ringen auseinander.

Wie in den vorherigen Kapiteln gesehen beschränkt sich das Problem, eine affine Varietät $\Gamma \subseteq \mathbb{C}^{R+m+\tilde{N}}$ in $\mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{m+\tilde{N}}_{\mathbf{q}}$ abzuschließen, auf das Bi-Quasi-Homogenisieren des Ideals $\mathcal{I}(\Gamma) \subset \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_R, b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}]$ in $\mathbb{C}[a_0, a_1, \ldots, a_R, b_0, b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}]$ bezüglich der jeweiligen Homogenisierungsvariablen a_0 bzw. b_0.

Es sei also I ein Ideal in $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_R, b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}]$. Man hat den kanonischen Isomorphismus von Ringen

$$R := \quad \mathbb{C}[a_1, \ldots, a_R, b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}] \simeq (\mathbb{C}[b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}])[a_1, \ldots, a_R] \quad =: R_b$$

Das Ideal I ist als Ideal in R_b auffassbar und im Ring $(\mathbb{C}[b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}])[a_0, a_1, \ldots, a_R]$ bezüglich a_0 quasi-homogenisierbar. Hierzu wird eine Gröbner-Basis von I in R_b (bezüglich der entsprechend gewichteten, grad-verfeinernden lexikographischen Ordnung w-deg-lex der a-Monome) berechnet. Vermöge Satz 2.25, welcher, wie erwähnt, auch im Falle von Polynomringen über Ringen gültig bleibt, erhält man die Quasi-Homogenisierung von I bezüglich der a-Variablen. Das so entstehende Ideal kann mittels des kanonischen Isomorphismus

$$(\mathbb{C}[b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}])[a_0, a_1, \ldots, a_R] \simeq (\mathbb{C}[a_0, a_1, \ldots, a_R])[b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}] \quad =: R_a$$

als Ideal in R_a aufgefasst werden. Sodann werde in diesem Ring (bezüglich der entsprechenden gewichteten grad-verfeinernden lexikographischen Ordnung w-deg-lex der b-Monome) eine Gröbner-Basis von diesem Ideal berechnet. Anschließend erhält man durch Satz 2.25 die Quasi-Homogenisierung nach den b-Variablen im Ring $(\mathbb{C}[a_0, a_1, \ldots, a_R])[b_0, b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}]$ und somit insgesamt die Bi-Quasi-Homogenisierung von I in $\mathbb{C}[a_0, a_1, \ldots, a_R, b_0, b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}]$.

Bei der praktischen Umsetzung dieses Verfahrens mittels des Computeralgebra-Programms Singular ergibt sich das folgende Problem: Singular stellt nur Algorithmen zur Bestimmung von Gröbner-Basen in Polynomringen über Körpern bereit. Benötigt werden jedoch Gröbner-Basen in Polynomringen über Ringen.[8] Aus diesem Grund müssen Gröbner-Basen von Idealen in Polynomringen über Ringen auf andere (indirekte) Art und Weise bestimmt werden. Der folgende Satz – eine Verallgemeinerung von [AdLo96], Theorem 4.1.18, S. 209f. – besagt, dass in der obigen

[8] Natürlich ist es nicht möglich, im Rahmen der obigen Betrachtungen den Ring R_b durch den Ring $\widetilde{R}_b := (\mathbb{C}(b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}))[a_1, \ldots, a_R]$ zu ersetzen. Bezüglich der Inklusion $i : R_b \hookrightarrow \widetilde{R}_b$ trägt $i(I)$ nicht die Struktur eines Ideals in $\widetilde{R}_b$. Sind $f_1, \ldots, f_r$ Erzeugende von I in R_b, so enthält das von $i(f_1), \ldots, i(f_r)$ in $\widetilde{R}_b$ erzeugte Ideal das Bild $i(I)$ des Ideals I als echte Teilmenge. Ist beispielsweise $I = \langle b - a, b - a^2 \rangle$ ein Ideal in $(\mathbb{C}[b])[a]$, so ist das von $b - a$ und $b - a^2$ in $(\mathbb{C}(b))[a]$ erzeugte Ideal gleich $(\mathbb{C}(b))[a]$, denn es ist

$$1 = \left(\frac{1}{b^2 - b} a + \frac{1}{b - 1} \right) (b - a) - \left(\frac{1}{b^2 - b} \right) (b - a^2).$$

Situation eine Gröbner-Basis im Polynomring $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_R, b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}]$ über dem Körper $\mathbb{C}$ (bezüglich einer Eliminationsordnung) eine Gröbner-Basis im Polynomring $(\mathbb{C}[b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}])[a_1, \ldots, a_R]$ über dem Ring $\mathbb{C}[b_1, \ldots, b_{m+\tilde{N}}]$ induziert:

Satz 2.26. *Es sei k ein Körper, $I \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ ein Ideal. Mit $<_x$ sei die gewichtete lexikographische Ordnung von Monomen in den x-Variablen (bezüglich eines Gewichtungsvektors $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^n$), mit $<_y$ die gewichtete lexikographische Ordnung von Monomen in den y-Variablen bezeichnet (bezüglich eines Gewichtungsvektors $\mathbf{q} \in \mathbb{N}^m$). Es sei $<$ die induzierte eli-Ordnung, welche die x-Variablen den y-Variablen überordnet. Ist $G = \{g_1, \ldots, g_t\} \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$ eine Gröbner-Basis (Körperfall) für I bezüglich $<$, so ist G, aufgefasst als Menge in $(k[y_1, \ldots, y_m])[x_1, \ldots, x_n]$, eine Gröbner-Basis (Ringfall) bezüglich $<_x$ für I, aufgefasst als Ideal in $(k[y_1, \ldots, y_m])[x_1, \ldots, x_n]$.*

Beweis. Mit lt_x, lp_x, lc_x, Lt_x (bzw. lt_y, lp_y, lc_y, Lt_y bzw. lt, lp, lc, Lt) sind „leading term“, „leading power product“, „leading coefficient“ und „leading term ideal“ bezüglich der Monomialordnung $<_x$ (bzw. $<_y$ bzw. $<$) in den entsprechenden Ringen gemeint (Bsp.: $f := x_1 y_1^2 + x_1 y_2 \in \mathbb{C}[x_1, y_1, y_2]$, $\mathbf{p} := (1), \mathbf{q} := (1,1) \Rightarrow lp_x(f) = x_1$, $lc_x(f) = y_1^2 + y_2 \in k[y_1, y_2]$).

Es wird gezeigt: $\langle lt_x(g_1), \ldots, lt_x(g_t) \rangle = Lt_x(I)$.

Da $g_i \in I$, ist $lt_x(g_i) \in Lt_x(I)$, also gilt „$\subseteq$“.
Zur Inklusion „$\supseteq$“: Sei $F \in Lt_x(I)$. Dann gibt es Polynome $\phi_j \in (\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m])[x_1, \ldots, x_n]$ und $f_j \in I$, so dass $F = \sum_{j=1}^{\nu} \phi_j \cdot lt_x(f_j)$ ist. Es genügt also für $f \in I$ zu zeigen, dass $lt_x(f)$ eine Linearkombination der $lt_x(g_i)$ ist.

Es sei also $f \in I$. Da G eine Gröbner-Basis für das Ideal I bezüglich der Ordnung $<$ ist, liefert der multivariable Divisions-Algorithmus eine Darstellung von f der Form

$$f = c_1 X^{A_1} Y^{B_1} g_{i_1} \; + \; c_2 X^{A_2} Y^{B_2} g_{i_2} \; + \; \ldots \; + \; c_N X^{A_N} Y^{B_N} g_{i_N} \tag{2.38}$$

mit

$$lp(X^{A_1} Y^{B_1} g_{i_1}) \; > \; lp(X^{A_2} Y^{B_2} g_{i_2}) \; > \; \ldots \; > lp(X^{A_N} Y^{B_N} g_{i_N}) \tag{2.39}$$

(vgl. Korollar A.2 im Anhang A.1).
Dabei ist $N \in \mathbb{N}$, $i_k \in \{1, \ldots, t\}$, $A_k \in \mathbb{N}^n$, $B_k \in \mathbb{N}^m$, $c_k \neq 0$ für $k = 1, \ldots, N$. Da $>$ die Eliminationsordnung bezeichnet, welche die Monomialordnung der x-Variablen der Monomialordnung der y-Variablen überordnet, folgt:

$$lp_x(X^{A_1} Y^{B_1} g_{i_1}) \; \geq \; lp_x(X^{A_2} Y^{B_2} g_{i_2}) \; \geq \; \ldots \; \geq lp_x(X^{A_N} Y^{B_N} g_{i_N})$$

bzw.

$$X^{A_1} lp_x(g_{i_1}) \geq X^{A_2} lp_x(g_{i_2}) \geq \ldots \geq X^{A_N} lp_x(g_{i_N}).$$

Es sei $k_0 \geq 1$ die größte ganze Zahl mit

$$X^{A_1} lp_x(g_{i_1}) = \ldots = X^{A_{k_0}} lp_x(g_{i_{k_0}}) > X^{A_{k_0+1}} lp_x(g_{i_{k_0+1}}) \geq \ldots \geq X^{A_N} lp_x(g_{i_N}). \tag{2.40}$$

Als Nächstes schreibe man g_i in der Form

$$g_i = lt_x(g_i) + \textit{ kleinere } x\textit{-Terme.}$$

Dabei ist $lt_x(g_i) =: a_i \cdot X^{C_i}$ mit $a_i \in k[y_1, \ldots, y_m]$ und $X^{C_i} = lp_x(g_i)$. Die Zeile (2.40) schreibt sich mit dieser Notation in der Form

$$X^{A_1} X^{C_{i_1}} = \ldots = X^{A_{k_0}} X^{C_{i_{k_0}}} > X^{A_{k_0+1}} X^{C_{i_{k_0+1}}} \geq \ldots \geq X^{A_N} X^{C_{i_N}}.$$

Falls $\sum_{k=1}^{k_0} c_k Y^{B_k} a_{i_k} \neq 0$, gilt:

$$\begin{aligned} lt_x(f) &= lt_x\left(\sum_{k=1}^{N} c_k X^{A_k} Y^{B_k} g_{i_k}\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{k_0} c_k Y^{B_k} a_{i_k}\right) X^{A_1} X^{C_{i_1}}. \end{aligned}$$

In der Tat gilt $\sum_{k=1}^{k_0} c_k Y^{B_k} a_{i_k} \neq 0$, denn aus (2.40) und (2.39) folgt

$$Y^{B_1} lp_y(a_{i_1}) > Y^{B_2} lp_y(a_{i_2}) > \ldots > Y^{B_{k_0}} lp_y(a_{i_{k_0}}),$$

so dass sich in der obigen Summe die Summanden nicht gegenseitig annullieren können.

Schließlich folgt

$$lt_x(f) = \sum_{k=1}^{k_0} c_k Y^{B_k} X^{A_k} a_{i_k} X^{C_{i_k}} = \sum_{k=1}^{k_0} c_k X^{A_k} Y^{B_k} lt_x(g_{i_k})$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Abschließend soll das beschriebene Verfahren zur Ermittlung der Bi-Quasi-Homogenisierung eines Ideals I an einem Beispiel dargestellt werden:

Anwendungsbeispiel

Das Beispiel 2.6 aus Kapitel 2.2.1 und 2.3.1 aufgreifend soll die Bi-Quasi-Homogenisierung des Ideals (2.20)

$$I = \mathcal{I}(\Gamma) = \langle b_1 + a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 + a_2 a_1,\ b_4 - a_3\rangle\ \subset \mathbb{C}[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4]$$

mit Hilfe von Gröbner-Basen errechnet werden. Die Gewichtungsvektoren für Monome aus $\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3]$ bzw. $\mathbb{C}[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$ sind $\mathbf{p} = (1, 1, 1, 2)$ bzw. $\mathbf{q} = (1, 1, 2, 2, 2)$. Die gewichteten lexikographischen Ordnungen werden mit $<_a$ bzw. $<_b$ bezeichnet. Die Eliminationsordnung, welche die Monomialordnung $<_a$ der Monomialordnung $<_b$ überordnet, wird mit $<_{ab}$ bezeichnet. Die Eliminationsordnung, welche die Monomialordnung $<_b$ der Monomialordnung $<_a$ überordnet, wird mit $<_{ba}$ bezeichnet.

Die jeweiligen Berechnungen sind mit Singular [GrPf02b] vorgenommen worden. Ein kommentiertes Protokoll der Berechnungen findet sich im Anhang B.

Zunächst ermittelt man eine Gröbner-Basis bezüglich der Eliminationsordnung $<_{ab}$, etwa

$$G = \{b_1 b_2 - b_3,\ a_2 - b_2,\ a_1 + b_1,\ a_3 - b_4\}.$$

Satz 2.26 besagt nun, dass G, aufgefasst als Menge in $(\mathbb{C}[b_1, b_2, b_3, b_4])[a_1, a_2, a_3]$, ebenso eine Gröbner-Basis bezüglich der Ordnung $<_a$ für I, aufgefasst als Ideal in $(\mathbb{C}[b_1, b_2, b_3, b_4])[a_1, a_2, a_3]$, ist. Die Quasi-Homogenisierung der Elemente von G bezüglich der Homogenisierungsvariable a_0 und dem Gewichtungsvektor $\mathbf{p}$

$$G^h = \{b_1 b_2 - b_3,\ a_2 - b_2 a_0,\ a_1 + b_1 a_0,\ a_3 - b_4 a_0^2\}$$

ergibt nach Satz 2.25 ein Erzeugendensystem für die Quasi-Homogenisierung des Ideals I in $(\mathbb{C}[b_1, b_2, b_3, b_4])[a_0, a_1, a_2, a_3]$ bezüglich a_0 (Satz 2.25 behält –wie erwähnt– im Fall von Polynomringen über Ringen seine Richtigkeit).
Von dieser Quasi-Homogenisierung $\langle G^h\rangle$, aufgefasst als Ideal in $\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4]$, wird eine Gröbner-Basis H bezüglich der Eliminationsordnung $<_{ba}$ berechnet, etwa

$$\begin{array}{llll} H = \{ & b_1 a_0 + a_1, & b_4 a_0^2 - a_3, & b_4 a_1 a_0 + b_1 a_3, \\ & b_3 a_0 - b_1 a_2, & b_3 a_3 + b_4 a_1 a_2, & b_2 a_0 - a_2 \\ & b_2 a_1 + b_1 a_2, & b_2 a_3 - b_4 a_2 a_0, & b_1^2 a_2 + b_3 a_1 \\ & b_1^2 a_3 - b_4 a_1^2, & b_1 b_2 - b_3 & \qquad \}. \end{array}$$

Wird H als Menge in $(\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3])[b_1, b_2, b_3]$ aufgefasst, so besagt Satz 2.26, dass H eine Gröbner-Basis für $\langle G^h\rangle$, aufgefasst als Ideal in $(\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3])[b_1, b_2, b_3, b_4]$, bezüglich der Ordnung $<_b$ ist. Die Quasi-Homogenisierung der Elemente von H

bezüglich der Homogenisierungsvariable b_0 und dem Gewichtungsvektor $\mathbf{q}$ ergibt nach Satz 2.25 die Quasi-Homogenisierung des Ideals $\langle G^h \rangle$ bezüglich b_0, also die Bi-Quasi-Homogenisierung von I:

$$
\begin{array}{rllll}
I^* = \langle & a_1b_0 + a_0b_1, & -a_3b_0^2 + a_0^2b_4, & a_1a_0b_4 + a_3b_1b_0 & \\
& -a_2b_1b_0 + a_0b_3, & a_1a_2b_4 + a_3b_3, & -a_2b_0^2 + a_0b_2 & \\
& a_1b_2 + a_2b_1b_0, & -a_2a_0b_4 + a_3b_2, & a_1b_3 + a_2b_1^2, & \\
& -a_1^2b_4 + a_3b_1^2, & b_1b_2 - b_3b_0 & & \rangle.
\end{array}
$$

In der Tat stimmt dieses Ideal mit dem Ideal (2.21) überein.

2.4 Berechnung der Projektion von $\overline{\Gamma}$ nach $\mathbb{P}^m_{\mathbf{q}}$

2.4.1 Projektion und Elimination

Es bezeichne $\mathbb{P}^n_{\mathbf{p}}$ den n-dimensionalen, gewichtet-komplex-projektiven Raum[9], dessen Koordinaten wie bisher mit $(a_0 : \ldots : a_n)$ bezeichnet werden. Ferner bezeichnen $b_1, \ldots, b_m$ die Koordinaten des $\mathbb{C}^m$. Es sei $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{C}^m$ eine bezüglich der Produkttopologie abgeschlossene Untervarietät, d.h. es ist $Z = \mathcal{V}(I)$ mit einem Ideal $I \subseteq \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m]$, welches quasi-homogen in den a-Variablen und beliebig in den b-Variablen ist. Ziel der Betrachtung ist es, das Bild von Z unter der Projektion $\pi_b : \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ zu beschreiben. Satz 2.28 besagt, dass $\pi_b(Z)$ als gemeinsame Nullstellenmenge von Gleichungen gewonnen werden kann.

Proposition 2.27 (Der gewichtet-projektive Nullstellensatz). *Es sei $I \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_n]$ ein quasi-homogenes Ideal und $\mathcal{V}(I) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}}$ sein Verschwindungsort. Dann gilt:*

1. $\mathcal{V}(I) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \langle a_0, \ldots, a_n \rangle \subset rad(I)$
2. $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = rad(I).$

Beweis. Die Aussagen lassen sich ähnlich beweisen wie der gewöhnliche projektive Nullstellensatz. Dazu wird der (verallgemeinerte) „Kegel“ $\mathcal{V}_{af}(I) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ über $\mathcal{V}(I)$ betrachtet und der gewöhnliche Nullstellensatz angewendet (vgl. [GrPf02a], Theorem A.4.6, S. 434f.). □

[9]Die Aussagen dieses Kapitels behalten ihre Gültigkeit, wenn der Körper $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen, algebraisch abgeschlossenen Körper k ersetzt wird.

Satz 2.28 (Hauptsatz der Eliminationstheorie[10] für den gewichtet-projektiven Raum). *Ist Y eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät und bezeichnet $\pi : \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times Y \longrightarrow Y$ die Projektion, so ist π abgeschlossen. Insbesondere ist $\pi_b(Z)$ Zariski-abgeschlossen in $\mathbb{C}^m$.*

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $Y = \mathbb{C}^m$ zu zeigen. Sei $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{C}^m$ abgeschlossen, etwa $Z = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_k)$. Es bezeichne $\mathbb{C}[\mathbf{a}]_d \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_n]$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der quasi-homogenen Polynome vom (gewichteten) Grad d. Es ist $\mathbb{C}[\mathbf{a}]_d \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m]$ ein freier $\mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m]$-Modul vom endlichen Rang. Mit d_j werde der gewichtete Grad von f_j bezüglich der a-Variablen bezeichnet. Für jedes $d > 0$ hat man einen Morphismus A_d von freien Moduln (dabei ist $\mathbb{C}[a]_i := 0$ für $i < 0$):

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{j=1}^k \mathbb{C}[\mathbf{a}]_{d-d_j}\right) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m] & \xrightarrow{A_d} & \mathbb{C}[\mathbf{a}]_d \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{C}[\mathbf{a}]_{d-d_j} & \xrightarrow{A_d(\mathbf{b})} & \mathbb{C}[\mathbf{a}]_d. \end{array}$$

Dabei ist A_d definiert durch

$$(g_1(a_0, \ldots, a_n), \ldots, g_k(a_0, \ldots, a_n)) \otimes 1 \mapsto \sum_{j=1}^k g_j(a_0, \ldots, a_n) f_j(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m).$$

Durch den Einsetzungshomomorphismus wird für jedes $\mathbf{b} := (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{C}^m$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraumhomomorphismus $A_d(\mathbf{b})$ induziert. Bezüglich fester Basen der jeweiligen $\mathbb{C}$-Vektorräume ist $A_d(\mathbf{b})$ darstellbar durch eine Matrix mit komplexen Einträgen. Für die weiteren Überlegungen werde für jedes d die folgende Basis von $\mathbb{C}[\mathbf{a}]_d$ fixiert:

$$\mathcal{B}_d := \{a_0^{d_0} \ldots a_n^{d_n} | \quad d_0 p_0 + \ldots + d_n p_n = d\}.$$

Dabei ist $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_n)$ der Gewichtungsvektor des $\mathbb{P}^n_{\mathbf{p}}$. Es sei

$$S_d := \{(b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{C}^m | \quad rang\,(A_d(b_1, \ldots, b_m)) \leq dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathbf{a}]_d \; - 1\}.$$

S_d ist Zariski-abgeschlossen in $\mathbb{C}^m$, denn S_d ist gleichzeitige Nullstellenmenge von gewissen Unterdeterminanten von A_d. Die Behauptung ist nun, dass $\pi(Z) = \bigcap_{d=0}^{\infty} S_d$ ist:
Es ist $\mathbf{b} := (b_1, \ldots, b_m) \notin \pi(Z)$ genau dann, wenn

$$\mathcal{V}(f_1(a_0, \ldots, a_n, \mathbf{b}), \ldots, f_k(a_0, \ldots, a_n, \mathbf{b})) = \emptyset$$

[10] In der analytischen Kategorie ist durch den Remmert'schen Abbildungssatz (vgl. [KaKa83], Theorem 45.17, S.170.) eine ähnliche Aussage gegeben.

in $\mathbb{P}^n_{\mathbf{p}}$. Nach dem gewichtet-projektiven Nullstellensatz (Proposition 2.27) ist dies äquivalent zu

$$rad(\langle f_1(a_0,\ldots,a_n,\mathbf{b}),\ldots,f_k(a_0,\ldots,a_n,\mathbf{b})\rangle) \quad \supset \quad \langle a_0,\ldots,a_n\rangle. \tag{2.41}$$

Gezeigt wird nun, dass diese äquivalenten Bedingungen genau dann erfüllt sind, wenn es eine natürliche Zahl r gibt, so dass die Abbildung $A_D(\mathbf{b})$ mit $D := r\cdot p_0\cdot\ldots\cdot p_n$ surjektiv ist (also vollen Rang hat). Dann ist $\mathbf{b} \notin S_D$, also $\mathbf{b} \notin \bigcap_{d=0}^{\infty} S_d$, und der Satz ist gezeigt.

Es gelte (2.41). Dann gibt es für $i = 1,\ldots,n$ natürliche Zahlen ν_i mit $a_i^{\nu_i} \in J$, wobei mit J das Ideal $\langle f_1(a_0,\ldots,a_n,\mathbf{b}),\ldots,f_k(a_0,\ldots,a_n,\mathbf{b})\rangle$ in $\mathbb{C}[a_0,\ldots,a_n]$ gemeint ist. Es existiert nun ein $r \in \mathbb{N}$, so dass alle fixierten Basen $\mathcal{B}_{r'}$ mit $r' \geq r$ aus Monomen $a_0^{\mu_0}\ldots a_n^{\mu_n}$ bestehen, derart dass zu jedem Basiselement ein $i = 1,\ldots,n$ existiert mit $\mu_i \geq \nu_i$. Diese Eigenschaft gilt somit insbesondere für die Basis $\mathcal{B}_D$ mit $D := r\cdot p_0\cdot\ldots\cdot p_n$. Für $h \in \mathbb{C}[\mathbf{a}]_D$ folgt dann, dass jeder Summand von h in J liegt. Also gilt $h \in J$, d.h. es gibt $g_1,\ldots,g_k \in \mathbb{C}[a_0,\ldots,a_n]$ mit $h = \sum_{j=1}^k g_j(a_0,\ldots,a_n)f_j(a_0,\ldots,a_n,\mathbf{b})$. Notwendigerweise kommt g_j aus $\mathbb{C}[\mathbf{a}]_{D-d_j}$. Es werden also $g_1,\ldots,g_k$ durch $A_D(\mathbf{b})$ auf h abgebildet. Also ist $A_D(\mathbf{b})$ surjektiv.

Umgekehrt setze man voraus, dass $A_D(\mathbf{b})$ surjektiv ist für $D := r\cdot p_0\cdot\ldots\cdot p_n$. Daraus folgt, dass D von jedem p_i geteilt wird. Für jedes i gibt es also natürliche Zahlen σ_i mit $D = \sigma_i p_i$. Deshalb treten in der Basis $\mathcal{B}_D$ von $\mathbb{C}[\mathbf{a}]_D$ Elemente der Form $a_i^{\sigma_i}$ auf. Nach Voraussetzung ist $a_i^{\sigma_i}$ Linearkombination von $f_1(a_0,\ldots,a_n,\mathbf{b}),\ldots,f_k(a_0,\ldots,a_n,\mathbf{b})$, und somit insbesondere in J enthalten. Also ist $a_i \in rad(J)$. $\square$

Lemma 2.29. *Es gilt:* $\pi_b(Z) = \mathcal{V}\left(\bigcap_{i=0}^{n} I|_{a_i=1} \cap \mathbb{C}[b_1,\ldots,b_m]\right)$.

Beweis. Dies ist eine Folge aus dem obigen Satz 2.28 und [GrPf02a], S. 420, Lemma A.2.18. Dieses Lemma besagt das Folgende: Es sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus affiner algebraischer Mengen $X \subset \mathbb{A}^n$ und $Y \subset \mathbb{A}^m$. Dieser wird induziert von einem Morphismus $\tilde{f} = (\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_m) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$. Es sei $I \subset K[x_1,\ldots,x_n]$ ein beliebiges Ideal mit $\mathcal{V}(I) = X$ und es sei $H := \langle I, y_1 - \tilde{f}_1,\ldots,y_m - \tilde{f}_m\rangle \subset K[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$. Dann gilt: $\overline{f(X)} = \mathcal{V}(H \cap K[y_1,\ldots,y_m])$.
In der Situation des Lemmas 2.29 seien nun Karten definiert: $U_i = \{a_i \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{C}^m$. Dann gilt:

$$\pi_b(Z) = \pi_b(\bigcup_{i=0}^{n}(Z\cap U_i)) \overset{\text{Satz 2.28}}{=} \overline{\pi_b(\bigcup_{i=0}^{n}(Z\cap U_i))} = \bigcup_{i=0}^{n}\overline{\pi_b(Z\cap U_i)} \quad \subseteq \mathbb{C}^m.$$

Nun wende man das oben zitierte Lemma A.2.18 auf diese Situation an, um $\overline{\pi_b(Z\cap U_i)}$ zu berechnen: Der Morphismus f ist durch die Projektion $f = \pi_b$:

$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$ gegeben. Die affine algebraische Menge X ist gegeben durch $Z \cap U_i$. Für jedes i betrachte man das dehomogenisierte Ideal $I|_{a_i=1}$. Setzt man dementsprechend $H := \langle I|_{a_i=1}, 0, \ldots, 0\rangle = I|_{a_i=1}$, erhält man die Aussage:

$$\overline{\pi_b(Z \cap U_i)} = \mathcal{V}(I|_{a_i=1} \cap \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m]).$$

Also ist

$$\pi_b(Z) = \bigcup_{i=0}^{n} \overline{\pi_b(Z \cap U_i)} = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{V}(I|_{a_i=1} \cap \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m]) = \mathcal{V}\left(\bigcap_{i=0}^{n} I|_{a_i=1} \cap \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m]\right).$$

□

Sind I, J Ideale in einem Ring R, so wird mit $I : J = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}$ das *Quotientenideal* von I bezüglich J bezeichnet. Es ist

$$I : J^\infty := \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : rJ^n \subseteq I\}$$

die *Saturierung* von I bezüglich J.

Lemma 2.30. *In der obigen Situation gilt weiterhin:*

$$\bigcap_{i=0}^{n} I|_{a_i=1} \cap \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m] = (I : \langle a_0, \ldots, a_n\rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m].$$

Beweis. Es sei angemerkt, dass $I : \langle a_0, \ldots, a_n\rangle^\infty = \bigcup_{d \geq 0} I : \langle a_0^d, \ldots, a_n^d\rangle$ ist.
„$\supseteq$“: Sei $f \in (I : \langle a_0, \ldots, a_n\rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m]$. Dann gibt es ein $d \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $i = 0, \ldots, n$ gilt: $f \cdot a_i^d \in I$. Also ist $f = (f \cdot a_i^d)|_{a_i=1} \in I|_{a_i=1}$ für jedes i.
„$\subseteq$“: Sei zunächst f nur aus $\bigcap_{i=0}^n I|_{a_i=1}$. Dann gibt es zu jedem i ein $F_i \in I$ mit $f = F_i|_{a_i=1}$. Da I ein in den a-Variablen quasi-homogenes Ideal ist, liegt jeder a-quasi-homogene Bestandteil von F_i in I. Ohne Einschränkung ist F_i bereits a-quasi-homogen. Es gibt also $d_i \in \mathbb{N}$, so dass $F_i = a_i^{d_i} \cdot f^{*_i}$ ist, wobei f^{*_i} die Quasi-Homogenisierung von f bezüglich der Homogenisierungsvariablen a_i ist. Ist nun zusätzlich $f \in \mathbb{C}[b_1, \ldots, b_m]$, so ist f trivialerweise a-quasi-homogen. Deshalb ist $a_i^{d_i} \cdot f^{*_i} = a_i^{d_i} \cdot f \in I$ für alle i. Für $d = max\{d_0, \ldots, d_n\}$ gilt somit: $\langle a_0^d, \ldots, a_n^d\rangle \cdot f \in I$. □

Man betrachte nun die folgende modifizierte Situation: Es sei $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbf{q}}$ eine bi-gewichtet-projektive Untervarietät $Z = \mathcal{V}(I)$ mit einem bi-quasi-homogenen Ideal $I \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m]$. Es sei $\pi_b : \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbf{q}}$ die Projektion. Der Hauptsatz der Eliminationstheorie besagt, dass $\pi_b(Z) \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{q}}$ abgeschlossen ist. Man hat nun die beiden Funktoren $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}_{\text{af}}$, und man kann Z jeweils auffassen als:

$$Z = \begin{cases} \mathcal{V}(I) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbf{q}} & \text{bzw.} \\ \mathcal{V}_{\text{af}}(I) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbf{p}} \times \mathbb{C}^{m+1} & \text{affiner Kegel bzgl. der } b\text{-Variablen.} \end{cases}$$

Ebenso kann man $\pi_b(\mathcal{V}_{\mathrm{af}}(I)) \subseteq \mathbb{C}^{m+1}$ als affinen Kegel auffassen, dessen zugehörige gewichtet-projektive Varietät mit $\pi_b(\mathcal{V}(I)) = \pi_b(Z)$ übereinstimmt. Die Lemmata 2.29 und 2.30 liefern:

$$\pi_b(\mathcal{V}_{\mathrm{af}}(I)) = \mathcal{V}_{\mathrm{af}}\left((I : \langle a_0, \ldots, a_n\rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]\right) \subset \mathbb{C}^{m+1},$$

also

$$\boxed{\pi_b(Z) = \mathcal{V}\left((I : \langle a_0, \ldots, a_n\rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]\right) \subseteq \mathbb{P}^m_{\mathbf{q}}}. \tag{2.42}$$

2.4.2 Elimination mit Hilfe von Gröbner-Basen

Die bequeme Berechnung von Erzeugenden des Ideals

$$(I : \langle a_0, \ldots, a_n\rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$$

wird durch den folgenden Satz gewährleistet (s. [AdLo96], S.69, Theorem 2.3.4):

Satz 2.31. *Es sei $<$ die eli-Ordnung, bei welcher die Monomialordnung der a-Variablen derjenigen der b-Variablen übergeordnet ist. Es sei $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ eine Gröbner-Basis für ein Ideal $I \subset \mathbb{C}[a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m]$ bezüglich $<$. Dann ist $G \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$ eine Gröbner-Basis für $I \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$ bezüglich der entsprechenden Monomialordnung der b-Variablen und erzeugt insbesondere das Ideal $I \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$.*

Beweis. Zunächst ist klar: $G \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m] \subset I \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$ (wegen $G \subset I$).
Es wird gezeigt: Zu jedem $f \neq 0 \in I \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$ gibt es ein $g_i \in G \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$, so dass gilt: $lp_b(g_i)$ teilt $lp_b(f)$ (lp_b sei das „leading power product" bezüglich der totalen Ordnung der Monome in $\mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$).
Es sei also $f \in I \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$, $f \neq 0$. Da G eine Gröbner-Basis von I bezüglich der Eliminationsordnung ist, gibt es ein i mit $lp(g_i)$ teilt $lp(f)$ (hierbei ist lp bezüglich der eli-Ordnung zu verstehen). Da in f nur b-Variablen auftreten, treten auch in $lp(g_i)$ nur b-Variablen auf. Auf Grund der Eliminationsordnung gilt nun, dass auch in den kleineren Termen von g_i (also nicht nur in $lt(g_i)$) ausschließlich b-Variablen auftreten. Es ist also $g_i \in \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m] \cap G$ und bezüglich der entsprechenden totalen Ordnung der Monome in $\mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$ gilt: $lp_b(g_i)$ teilt $lp_b(f)$. □

Satz 2.31 besagt somit insbesondere, dass zur Berechnung eines Erzeugendensystems des Ideals $(I : \langle a_0, \ldots, a_n\rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]$ lediglich eine Gröbnerbasis G des Ideals $(I : \langle a_0, \ldots, a_n\rangle^\infty)$ (bezüglich der entsprechenden Eliminationsordnung) ermittelt werden muss. Sodann erhält man wegen der zu Grunde gelegten Eliminationsordnung:

$$G \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m] = \{g \in G| \quad lp(g) \in \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_m]\}. \tag{2.43}$$

Anwendungsbeispiel

Betrachtet werde das Ideal $I^*|_{a_0=0} := I^* + \langle a_0 \rangle \subset \mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$ (mit $I^* = \mathcal{I}(\Gamma)^*$ aus (2.21)):

$$I^*|_{a_0=0} = \langle \begin{array}{lll} a_1 b_0, & a_3 b_0 b_1, & a_3 b_0^2, \\ a_2 b_0 b_1, & a_1 a_2 b_4 + a_3 b_3, & a_1 b_2 + a_2 b_0 b_1, \\ a_2 b_0^2, & a_3 b_2, & a_1 b_3 + a_2 b_1^2, \\ -a_1^2 b_4 + a_3 b_1^2, & -b_0 b_3 + b_1 b_2, & a_0 \end{array} \rangle.$$

Bezüglich der Projektion $\pi_b : \mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$ mit $\mathbf{p} = (1,1,1,2)$ und $\mathbf{q} = (1,1,2,2,2)$ soll das Bild von $\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0})$ in $\mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$ berechnet werden. Dazu berechnet man zunächst die Saturierung

$$(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle^\infty).$$

Hierzu kann man in Singular das Kommando `sat` aus der Programmbibliothek „elim.lib“ benutzen. Man erhält:

$$(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle^\infty) = \langle \begin{array}{lll} b_0^2, & b_1 b_0, & b_1 b_2 - b_3 b_0, \\ a_0, & a_1 b_0, & a_1 b_3 + a_2 b_1^2, \\ a_1 b_2, & a_3 b_2, & a_3 b_3 b_0, \\ a_2^2 b_1^2 b_4 - a_3 b_3^2, & a_1 a_2 b_4 + a_3 b_3, & a_1^2 b_4 - a_3 b_1^2 \end{array} \rangle. \tag{2.44}$$

Nach (2.42) ist

$$\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0})) = \mathcal{V}\left((I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]\right).$$

Um Erzeuger des Ideals $(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$ zu erhalten, betrachtet man eine Gröbner-Basis des Ideals $I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle^\infty$ bezüglich der Eliminationsordnung, welche die gewichtete lexikographische Monomialordnung der a-Variablen derjenigen der b-Variablen überordnet. Die in (2.44) angegebenen Erzeuger des Ideals sind bereits so berechnet, dass sie eine derartige Gröbner-Basis bilden. Satz 2.31 (bzw. Gleichung (2.43)) besagt daher, dass

$$\{b_0^2, \quad b_0 b_1, \quad b_1 b_2 - b_3 b_0\} \tag{2.45}$$

eine Gröbner-Basis – und damit insbesondere ein Erzeugendensystem – für das Ideal $(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$ ist. Bezüglich dieses Beispiels sei nochmals auf Anhang B verwiesen, wo die Berechnung mittels Singular erläutert wird.

Kapitel 3

Fortsetzung von Familien Fuchs'scher Differenzialgleichungen

3.1 Die Fortsetzung hypergeometrischer Differenzialgleichungen

Auf die zu dem Diagramm

$$u = P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a_1 & x \\ 1-a_3 & a_3-a_1-a_2 & a_2 & \end{array} \right\}$$

gehörige hypergeometrische Differenzialgleichung (vgl. Kapitel 1.1.5)

$$u'' + \frac{(a_1+a_2+1)x - a_3}{x(x-1)}u' + \frac{a_1a_2}{x(x-1)}u = 0$$

werde für $a_2 \neq 0$ die lineare Transformation $z = a_2x$ angewendet. Man erhält in Analogie zu Lemma 1.8 die zu dem Diagramm

$$w = P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & a_2 & \infty & \\ 0 & 0 & a_1 & z \\ 1-a_3 & a_3-a_1-a_2 & a_2 & \end{array} \right\}$$

gehörige Differenzialgleichung

$$w'' + \frac{(a_1+a_2+1)z - a_2a_3}{z(z-a_2)}w' + \frac{a_1a_2}{z(z-a_2)}w = 0. \tag{3.1}$$

Ihr Parameterraum ist gegeben durch $\mathbb{C}^3 \backslash \{a_2 = 0\}$. Die Fortsetzung der Differenzialgleichung über die Hyperebene $\{a_2 = 0\}$ ergibt die Fuchs'sche Differenzialgleichung

$$w'' + \frac{1 + a_1}{z} w' = 0.$$

In $z = \infty$ ist diese Differenzialgleichung genau dann regulär, wenn $a_1 = 1$ ist.

In Kapitel 1.2.1 wurde der Abschluss des Parameterraums in $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ betrachtet, dessen unendlich ferner Teil zur konfluenten hypergeometrischen Differenzialgleichung

$$w'' + \frac{a_3 - z}{z} w' - \frac{a_1}{z} w = 0$$

führt, deren Singularitäten in 0 regulär und in ∞ irregulär sind.

Im Folgenden wird der Parameterraum nach der in Kapitel 2.2.1 beschriebenen Methode erweitert und die einzelnen Differenzialgleichungen der Familie als Punkte eines Graphen aufgefasst: Hierzu wird die Gleichung (3.1) mit der Gleichung

$$w'' + \frac{b_2 z + b_3}{z^2 + b_1 z} w' + \frac{b_4}{z^2 + b_1 z} w = 0$$

identifiziert (die Koeffizienten von (3.1) sind bereits nennergleich, daher ist es nicht notwendig, die Koeffizienten zu erweitern). Diese Identifizierung liefert den Morphismus affiner Varietäten $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$,

$$(a_1, a_2, a_3) \mapsto (-a_2,\ 1 + a_1 + a_2,\ -a_2 a_3,\ a_1 a_2).$$

Dessen Graph ist gegeben als Nullstellenmenge des (radikalen) Ideals

$$I := \langle b_1 + a_2,\ b_2 - 1 - a_1 - a_2,\ b_3 + a_2 a_3,\ b_4 - a_1 a_2 \rangle \ \in\ \mathbb{C}[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4],$$

so dass jeder Punkt von $\Gamma = \mathcal{V}(I) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^4$ einer Differenzialgleichung der obigen Form entspricht, indem man auf die b-Koordinaten (oder auch auf die a-Koordinaten) projiziert. Die affine Varietät Γ wird nun bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ aus Kapitel 2.1.1 in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ abgeschlossen. Die homogenisierte Form von (3.1) lautet

$$w'' + \frac{a_0(a_1 + a_2 + a_0)z - a_2 a_3}{a_0 z(a_0 z - a_2)} w' + \frac{a_1 a_2}{a_0 z(a_0 z - a_2)} w = 0. \tag{3.2}$$

Ein Punkt $(a_0 : \ldots : a_3, b_0 : \ldots : b_4) \in \overline{\Gamma}$ entspricht der Differenzialgleichung

$$w'' + \frac{b_2 z + b_3}{b_0 z^2 + b_1 z} w' + \frac{b_4}{b_0 z^2 + b_1 z} w = 0. \tag{3.3}$$

Nach Satz 2.4 ist $\overline{\Gamma}$ die Nullstellenmenge der Bi-Homogenisierung I^* von I in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$. Die Bi-Homogenisierung von I lässt sich entweder durch Pimärzerlegung eines geeigneten Ideals (Kapitel 2.3.1) oder durch Berechnung geeigneter Gröbner-Basen (Kapitel 2.3.2) und Homogenisierung von deren Elementen realisieren.

Eine Rechnung mit SINGULAR [GrPf02b] ergibt:

$$
\begin{aligned}
I^* = \langle\ & b_1^2 + b_1b_2 - b_1b_0 + b_4b_0, && a_3b_1 - a_0b_3,\\
& a_3b_4b_0 + a_0b_1b_3 + a_0b_2b_3 - a_0b_3b_0, && a_2b_0 + a_0b_1,\\
& a_2b_1 + a_2b_2 + a_0b_1 - a_0b_4, && a_1b_0 + a_2b_0 - a_0b_2 + a_0b_0,\\
& a_1b_3 + a_3b_4, && a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_0b_1,\\
& a_2a_3b_2 + a_2a_0b_3 + a_3a_0b_1 - a_3a_0b_4,\\
& a_1a_2b_2 + a_1a_0b_1 - a_1a_0b_4 - a_2^2b_1 - a_2^2b_2 - a_2a_0b_1 && \rangle.
\end{aligned}
$$

Die hier aufgeführten Erzeuger von I^* sind bereits so berechnet worden, dass sie eine Gröbner-Basis von I^* bezüglich der Eliminationsordnung der Monome von $\mathbb{C}[a_1, a_2, a_3, a_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_0]$ bilden, welche die deg-lex-Ordnung der Monome in den a-Variablen der deg-lex-Ordnung der Monome in den b-Variablen überordnet. Eine weitere Rechnung mit SINGULAR ergibt, dass die Saturierung $(I^* : \langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle^\infty)$ mit I^* identisch ist. Bezeichnet $\pi_b : \mathbb{P}^3_\mathbb{C} \times \mathbb{P}^4_\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^4_\mathbb{C}$ die Projektion auf die b-Koordinaten, so gilt nach (2.42)

$$\pi_b(\overline{\Gamma}) = \mathcal{V}(I^* \cap \mathbb{C}[b_0, \dots, b_4]) \subset \mathbb{P}^4_\mathbb{C},$$

und aus Satz 2.31 (bzw. Gleichung (2.43)) folgt

$$\pi_b(\overline{\Gamma}) = \{(b_0 : b_1 : b_2 : b_3 : b_4) \in \mathbb{P}^4_\mathbb{C} \mid \quad b_1^2 + b_1b_2 - b_1b_0 + b_4b_0 = 0\}.$$

Als nächstes soll die Frage beantwortet werden, welche Differenzialgleichungen dem unendlich fernen Teil des Parameterraums zugeordnet werden können. Diese „neuen“ Differenzialgleichungen entsprechen der Nullstellenmenge des Ideals $I^*|_{a_0=0} = I^* + \langle a_0\rangle$ in $\mathbb{P}^3_\mathbb{C} \times \mathbb{P}^4_\mathbb{C}$. Dabei ist

$$
\begin{aligned}
I^*|_{a_0=0} &= \langle\ b_1^2 + b_1b_2 - b_1b_0 + b_4b_0, && a_3b_1\\
&\qquad a_3b_4b_0, && a_2b_0,\\
&\qquad a_2b_1 + a_2b_2, && a_1b_0 + a_2b_0,\\
&\qquad a_1b_3 + a_3b_4, && a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2,\\
&\qquad a_2a_3b_2, && a_1a_2b_2 - a_2^2b_1 - a_2^2b_2,\\
&\qquad a_0 && \rangle\\
&= \langle\ b_1^2 + b_1b_2 - b_1b_0 + b_4b_0, && a_3b_1,\\
&\qquad a_2b_0, && a_2b_1 + a_2b_2,\\
&\qquad a_1b_0 + a_2b_0, && a_1b_3 + a_3b_4,\\
&\qquad a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_2, && a_0 \qquad \rangle.
\end{aligned}
$$

Wie eben berechnet man die Saturierung $(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle^\infty)$. Diesmal erhält man das Ideal

$$(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle^\infty) = \quad \langle \begin{array}{lll} b_4b_0, & b_1b_0 & b_1^2 + b_1b_2, \\ a_0, & a_3b_1, & a_2b_0, \\ a_2b_1 + a_2b_2, & a_1b_0 + a_2b_0, & a_1b_3 + a_3b_4, \\ a_1b_1, & a_2a_3b_2, & a_1a_2b_2 \end{array} \rangle.$$

Auch hier sind die aufgeführten Erzeuger bereits so gewählt, dass sie eine Gröbner-Basis des Ideals bezüglich der Eliminationsordnung der Monome von $\mathbb{C}[a_1, a_2, a_3, a_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_0]$ bilden, welche die deg-lex-Ordnung der Monome in den a-Variablen der deg-lex-Ordnung der Monome in den b-Variablen überordnet. Also folgt aus (2.42) zusammen mit Satz 2.31 bzw. Gleichung (2.43):

$$\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0})) = \{(b_0 : b_1 : b_2 : b_3 : b_4) \in \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}} | \quad b_4b_0 = 0, \quad b_1b_0 = 0, \quad b_1^2 + b_1b_2 = 0\}. \tag{3.4}$$

Somit sind die über dem unendlich fernen Teil des Parameterraums hinzukommenden Differenzialgleichungen durch die Gleichung (3.3) gegeben, wenn die Parameter aus der Menge $\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0}))$ stammen. Es folgt eine Untersuchung dieser Differenzialgleichungen in den Karten des $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$:

Der Fall $\mathbf{b_0 \neq 0}$:

Schneidet man $\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0}))$ mit der Karte $\{b_0 = 1\}$ erhält man die Untervarietät

$$\{(1 : 0 : b_2 : b_3 : 0) \in \mathbb{C}^4 | \quad b_2, b_3 \in \mathbb{C}\}.$$

Dem entsprechen Differenzialgleichungen der Form

$$w'' + \frac{b_2z + b_3}{z^2}w' = 0,$$

bei denen offenbar nur eine endliche Singularität in $z = 0$ vorliegt. Man sieht, dass für $b_3 \neq 0$ diese Singularität irregulär ist. Ist $b_3 = 0$, erhält man Fuchs'sche Differenzialgleichungen der Form $w'' + \frac{b_2}{z}w' = 0$.

Der Fall $\mathbf{b_0 = 0}$:

Die Punkte aus (3.4), welche im Schnitt mit der Hyperebene $\{b_0 = 0\}$ des $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ liegen, bilden die Untervarietät

$$\{(0 : b_1 : b_2 : b_3 : b_4) \in \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}} | \quad b_1^2 + b_1b_2 = 0\}.$$

Im Schnitt mit der Karte $\{b_1 = 1\}$ sind dies die Punkte, welche $b_2 = -1$ erfüllen. Diesen Punkten entsprechen die Differenzialgleichungen

$$w'' + \frac{b_3 - z}{z}w' + \frac{b_4}{z}w = 0.$$

Dies sind ausnahmslos konfluente, hypergeometrische Differenzialgleichungen mit einer irregulären Singularität in $z = \infty$.
Ist auch $b_1 = 0$, erhält man Differenzialgleichungen mit Parametern aus

$$\{(0 : 0 : b_2 : b_3 : b_4) \in \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}\}.$$

Man sieht, dass der Nenner $b_0 z^2 + b_1 z$ der Koeffizienten der Differenzialgleichung (3.3), die zu diesen Punkten gehören, Null wird. Die entarteten Differenzialgleichungen, die hieraus entstehen, haben die Form $w' + \frac{b_4}{b_2 z + b_3} w = 0$, wobei einer der Parameter b_2, b_3 oder b_4 nicht 0 ist. Ist $b_2 = 1$, so sind die Differenzialgleichungen Fuchs'sch mit einer regulären Singularität in $z = -b_3$ und in $z = \infty$ (falls $b_4 \neq 0$, sonst gibt es keine endliche Singularität). Ist $b_2 = 0$ und $b_3 = 1$, so liegt eine Differenzialgleichung mit konstantem Koeffizienten vor. Diese hat in $z = \infty$ eine irreguläre Singularität (falls $b_4 \neq 0$) bzw. eine reguläre Stelle (falls $b_4 = 0$). Ist $b_2 = b_3 = 0$ und $b_4 = 1$, entartet die Differenzialgleichung erneut, man erhält die ,,Differenzialgleichung 0-ten Grades" $w = 0$.

3.2 Die Fortsetzung der Riemann'schen Differenzialgleichungen

Gegeben sei eine Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei endlichen Singularitäten a_1, $a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq a_2$. Diese hat nach einer Erweiterung des ersten Koeffizienten die Gestalt

$$w'' + \frac{(a_3 z + a_4)(z - a_1)(z - a_2)}{((z - a_1)(z - a_2))^2} w' + \frac{a_5 z^2 + a_6 z + a_7}{((z - a_1)(z - a_2))^2} w = 0$$

bzw.

$$\begin{aligned} w'' + \frac{a_3 z^3 + (a_4 - (a_1 + a_2)a_3)z^2 + (a_1 a_2 a_3 - (a_1 + a_2)a_4)z + a_1 a_2 a_4}{(z^2 - (a_1 + a_2)z + a_1 a_2)^2} w' + \\ + \frac{a_5 z^2 + a_6 z + a_7}{(z^2 - (a_1 + a_2)z + a_1 a_2)^2} w \;=\; 0. \end{aligned}$$

Der Parameterraum $\mathbb{C}^7 \setminus \{a_1 = a_2\}$ wird nun als erweiterter Parameterraum (bzw. „Graph") im $\mathbb{C}^7 \times \mathbb{C}^9$ aufgefasst, indem die Differenzialgleichung mit der allgemeinen Form

$$w'' + \frac{b_3 z^3 + b_4 z^2 + b_5 z + b_6}{(z^2 + b_1 z + b_2)^2} w' + \frac{b_7 z^2 + b_8 z + b_9}{(z^2 + b_1 z + b_2)^2} w \;=\; 0 \tag{3.5}$$

identifiziert wird. Man erhält auf diese Weise einen Morphismus affiner Varietäten $\mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^9$,

$$(a_1, \ldots, a_7) \mapsto$$
$$(-a_1 - a_2,\ a_1a_2,\ a_3,\ a_4 - (a_1 + a_2)a_3,\ a_1a_2a_3 - (a_1 + a_2)a_4,\ a_1a_2a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7).$$

Dessen Graph Γ ist gemeinsame Nullstellenmenge des folgenden (radikalen) Ideals in $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_7, b_1, \ldots, b_9]$:

$$I = \langle \begin{array}{lll} b_1 + a_1 + a_2, & b_2 - a_1a_2, & b_3 - a_3, \\ b_4 - a_4 + (a_1 + a_2)a_3, & b_5 - a_1a_2a_3 + (a_1 + a_2)a_4, & b_6 - a_1a_2a_4, \\ b_7 - a_5, & b_8 - a_6, & b_9 - a_7 \end{array} \rangle.$$

Jeder Punkt aus $\Gamma = \mathcal{V}(I) \subset \mathbb{C}^7 \times \mathbb{C}^9$ mit $a_1 \neq a_2$ kann eindeutig einer Fuchs'schen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit zwei endlichen Singularitäten zugeordnet werden und alle solche Differenzialgleichungen sind bezüglich dieser Identifikation in $\mathcal{V}(I)$ enthalten.
Es seien nun $\mathbf{p} := (1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4)$ und $\mathbf{q} := (1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ Gewichtungsvektoren in $\mathbb{N}^8$ bzw. $\mathbb{N}^{10}$. Die affine Varietät Γ wird abgeschlossen in $\mathbb{P}^7_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^9_{\mathbf{q}}$. Zu ermitteln ist nach Satz 2.4 somit die Bi-Quasi-Homogenisierung I^* des Ideals I bezüglich der Homogenisierungsvariablen a_0 bzw. b_0. Eine Gröbner-Basis des so entstehenden Ideals bezüglich einer Eliminationsordnung, bei welcher die gewichtete deg-lex-Ordnung der a-Variablen der gewichteten deg-lex-Ordnung der b-Variablen übergeordnet ist, ist in Anhang C angegeben (sie besteht aus 195 Polynomen).

Es bezeichne $\pi_b : \mathbb{P}^7_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^9_{\mathbf{q}} \longrightarrow \mathbb{P}^9_{\mathbf{q}}$ die Projektion auf die b-Koordinaten. Eine Rechnung mit SINGULAR ergibt, dass die Saturierung $(I^* : \langle a_0, \ldots, a_7\rangle^\infty)$ mit I^* identisch ist. Nach (2.42) gilt also

$$\pi_b(\overline{\Gamma}) = \mathcal{V}(I^* \cap \mathbb{C}[b_0, \ldots, b_9]),$$

und aus Satz 2.31 bzw. Gleichung (2.43) folgt

$$\begin{aligned} \pi_b(\overline{\Gamma}) = \{(b_0 : \ldots, b_9) \mid\ & b_1b_6b_0 + b_2^2b_3 - b_2b_5b_0 = 0, \\ & b_1b_2b_3 - b_2b_4b_0 + b_6b_0^2 = 0, \\ & b_1^2b_6 - b_1b_2b_5 + b_2^2b_4 - b_2b_6b_0 = 0, \\ & b_1^2b_3 - b_1b_4b_0 - b_2b_3b_0 + b_5b_0^2 = 0, \\ & b_2^3b_3^2 - b_2^2b_3b_5b_0 + b_2b_4b_6b_0^2 - b_6^2b_0^3 = 0\}. \end{aligned}$$

Dabei stellt sich heraus, dass die letzte Gleichung überflüssig ist, denn das zugehörige Polynom reduziert modulo der anderen vier Polynome zu 0.

Um die über dem unendlich fernen Teil des Parameterraums neu hinzukommenden Differenzialgleichungen zu erhalten, muss zunächst das Ideal $I^*|_{a_0=0} := I^* + \langle a_0\rangle$, und anschließend die Saturierung

$$(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, \dots, a_7 \rangle^\infty)$$

berechnet werden. Eine Gröbner-Basis dieses Ideals ist in Anhang C angegeben.

Es folgt aus (2.42) zusammen mit Satz 2.31 bzw. Gleichung (2.43):

$$\begin{aligned}
\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0})) &= \{(b_0 : \dots : b_9) \in \mathbb{P}^9_{\mathbf{q}} | \quad b_0^2 = 0, \quad b_2 b_0 = 0, \\
&\qquad b_1 b_0 = 0, \quad b_2^2 b_3 - b_2 b_5 b_0 = 0, \\
&\qquad b_1 b_2 b_3 - b_2 b_4 b_0 = 0, \quad b_1^2 b_3 = 0, \\
&\qquad b_1^2 b_6 - b_1 b_2 b_5 + b_2^2 b_4 = 0 \quad \} \\
&= \{(0 : b_1 : \dots : b_9) \in \mathbb{P}^9_{\mathbf{q}} | \quad b_2^2 b_3 = 0, \quad b_1 b_2 b_3 = 0, \\
&\qquad b_1^2 b_3 = 0, \quad b_1^2 b_6 - b_1 b_2 b_5 + b_2^2 b_4 = 0 \quad \}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Die zum unendlich fernen Teil des Parameterraums gehörenden Differenzialgleichungen haben also die Form

$$w'' + \frac{b_3 z^3 + b_4 z^2 + b_5 z + b_6}{(b_0 z^2 + b_1 z + b_2)^2} w' + \frac{b_7 z^2 + b_8 z + b_9}{(b_0 z^2 + b_1 z + b_2)^2} w \ = \ 0, \tag{3.7}$$

wobei die Parameter aus $\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0}))$ zu wählen sind. Es folgt eine Untersuchung dieser Familie in den Karten des $\mathbb{P}^9_{\mathbf{q}}$.

Der Fall $\mathbf{b_1 \neq 0}$:

Schneidet man $\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0}))$ mit der Karte $\{b_1 = 1\}$, erhält man die Untervarietät

$$\{(b_0, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9) \in \mathbb{C}^9 | \quad b_0 = 0,\ b_3 = 0,\ b_6 = b_2 b_5 - b_2^2 b_4\}.$$

Damit korrespondieren Differenzialgleichungen der Form

$$w'' + \frac{b_4 z^2 + b_5 z + b_2 b_5 - b_2^2 b_4}{(z + b_2)^2} w' + \frac{b_7 z^2 + b_8 z + b_9}{(z + b_2)^2} w \ = \ 0.$$

Der Zähler des ersten Koeffizienten faktorisiert zu

$$b_4 z^2 + b_5 z + b_2 b_5 - b_2^2 b_4 = (b_4 z + b_5 - b_2 b_4)(z + b_2),$$

so dass der erste Koeffizient gekürzt werden kann. Man erhält die Differenzialgleichung

$$w'' + \frac{b_4 z + b_5 - b_2 b_4}{z + b_2} w' + \frac{b_7 z^2 + b_8 z + b_9}{(z + b_2)^2} w = 0.$$

Diese ist genau dann fuchssch, wenn $b_4 = b_7 = b_8 = 0$ ist (dabei ist $z = \infty$ eine reguläre Stelle, falls $b_9 = 0$ und $b_5 = 2$ ist).
Anderenfalls hat die Differenzialgleichung in $z = \infty$ eine irreguläre Singularität. In dieser Familie sind einige bekannte Differenzialgleichungen enthalten. Zum Beispiel findet man für $b_2 = b_9 = b_7 = 0$ sämtliche konfluenten, hypergeometrischen Differenzialgleichungen $w'' + \frac{b_4 z + b_5}{z} w' + \frac{b_8}{z} w = 0$ wieder. Für $b_2 = b_5 = b_7 = 0$, $b_4 = 1$, $b_8 = k$ und $b_9 = \frac{1}{4} - m^2$ (mit $k, m \in \mathbb{C}$) hat man konfluente, hypergeometrische Differenzialgleichungen in der Form, wie sie bei Whittaker & Watson beschrieben werden[1] (vgl. [WhWa63], §16.1, S. 337ff.):

$$w'' + w' + \left(\frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2}\right) w = 0.$$

Die abhängige Variable dieser Gleichung wird bei Whittaker & Watson durch $w = e^{-\frac{1}{2}z} W_{k,m}(z)$ transformiert, so dass man die Differenzialgleichung

$$W''_{k,m} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2}\right) W_{k,m} = 0$$

erhält. Die Untervarietät, die diesen Gleichungen entspricht, ist gegeben durch $b_2 = b_4 = b_5 = 0$, $b_7 = -\frac{1}{4}$, $b_8 = k$ und $b_9 = \frac{1}{4} - m^2$ (mit $k, m \in \mathbb{C}$).

Es lässt sich noch eine andere bekannte Familie von Differenzialgleichungen mit einer irregulären Singularität in $z = \infty$ finden: Für $b_2 = b_4 = b_8 = 0$, $b_5 = b_7 = 1$ und $b_9 = -n^2$ (mit $n \in \mathbb{C}$) erhält man Differenzialgleichungen der Form

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \frac{z^2 - n^2}{z^2} w = 0,$$

[1] Bei Whittaker & Watson geht diese Form der konfluenten hypergeometrischen Differenzialgleichung aus dem P-Symbol

$$w = P\begin{pmatrix} 0 & c & \infty & \\ \frac{1}{2} + m & c - k & -c & z \\ \frac{1}{2} - m & k & 0 & \end{pmatrix}$$

durch den Grenzübergang $c \to \infty$ hervor. Nach Lemma 1.8 bzw. [Rai64], Theorem 28, S.157, gilt die Transformationsformel

$$P\begin{pmatrix} 0 & c & \infty & \\ \frac{1}{2} + m & c - k & -c & z \\ \frac{1}{2} - m & k & 0 & \end{pmatrix} = z^{\frac{1}{2}+m}(z-c)^{c-k} P\begin{pmatrix} 0 & c & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta & \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\alpha = \frac{1}{2} + m - k$, $\beta = \frac{1}{2} + m + c - k$ und $\gamma = 1 + 2m$. Führt man noch die gebrochenlineare Transformation $x = \frac{1}{c}(\frac{1}{2} + m + c - k)z$ durch, geht nach Lemma 1.8 das P-Symbol der rechten Seite über in das P-Symbol aus (1.23). Der Grenzübergang $c \to \infty$ ist gleichwertig zum Grenzübergang $\beta \to \infty$. Die bei [WhWa63] angegebene Form der konfluenten hypergeometrischen Differenzialgleichung ist nach den angegebenen Transformationen also gleich der aus Kapitel 1.2.1 bekannten konfluenten hypergeometrischen Differenzialgleichung.

bzw.

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - n^2)w = 0.$$

Dies ist die Familie der Bessel'schen Differenzialgleichungen.

Der Fall $\mathbf{b_1 = 0}$, $\mathbf{b_2 \neq 0}$:

Betrachtet man man $\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0})) \cap \{b_1 = 0\}$ in der Karte $\{b_2 = 1\}$, erhält man die Untervarietät

$$\{(b_0, b_1, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9) \in \mathbb{C}^9 | \quad b_0 = b_1 = b_3 = b_4 = 0\}.$$

Mit diesen Punkten korrespondieren Differenzialgleichungen der Form

$$w'' + (b_5 z + b_6)w' + (b_7 z^2 + b_8 z + b_9)w \ = \ 0.$$

Diese Differenzialgleichungen besitzen keine endlichen Singularitäten. Die einzige Fuchs'sche Differenzialgleichung, welche keine endliche Singularität besitzt, ist $w'' = 0$. Sind also $b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = b_9 = 0$, so ist die Differenzialgleichung vom Fuchs'schen Typ. Mit allen anderen Punkten korrespondieren Differenzialgleichungen, die in $z = \infty$ eine irreguläre Singularität besitzen.

Der Fall $\mathbf{b_1 = b_2 = 0}$:

Es ist offensichtlich, dass hierfür in allen Karten $\{b_i = 1\}$, $i = 3, \ldots, 9$ die Differenzialgleichung (3.7) entartet, da die Nenner der Koeffizienten Null werden. Aus (3.6) liest man ab:

$$\pi_b(\mathcal{V}(I^*|_{a_0=0})) \cap \{b_1 = b_2 = 0\} = \{(0 : 0 : 0 : b_3 : \ldots : b_9) \in \mathbb{P}^9_{\mathbf{q}}\}.$$

Die entartete Differenzialgleichung in ihrer homogenen Form lautet

$$(b_3 z^3 + b_4 z^2 + b_5 z + b_6)w' + (b_7 z^2 + b_8 z + b_9)w = 0.$$

Für $(b_3, b_4, b_5, b_6) \neq (0, 0, 0, 0)$ kann man durch den Koeffizienten von w' dividieren und man erhält:

$$w' + \frac{b_7 z^2 + b_8 z + b_9}{b_3 z^3 + b_4 z^2 + b_5 z + b_6} w = 0.$$

Es entstehen also maximal drei neue Singularitäten. Es gilt (vgl. Tabelle aus Kapitel 1.1.1):

- In der Karte $\{b_3 = 1\}$ sind die Differenzialgleichungen stets vom Fuchs'schen Typ mit drei endlichen Singularitäten, wenn das Nennerpolynom in unterschiedliche Linearfaktoren zerfällt.

- Im Schnitt vom Komplement dieser Karte (also für $b_3 = 0$) mit der Karte $\{b_4 = 1\}$ haben die Differenzialgleichungen zwei endliche Singularitäten (vorausgesetzt, das Nennerpolynom zerfällt in unterschiedliche Linearfaktoren) und sind demnach genau dann Fuchs'sch, wenn $b_7 = 0$ ist. Ist $b_7 \neq 0$, liegt in $z = \infty$ eine irreguläre Singularität.

- Für $b_3 = b_4 = 0$ und $b_5 = 1$ haben die Differenzialgleichungen genau eine endliche Singularität. Sie sind genau dann Fuchs'sch, falls $b_7 = b_8 = 0$ ist (ansonsten ist $z = \infty$ irregulär).

- Ist schließlich $b_3 = b_4 = b_5 = 0$ und $b_6 = 1$, so liegen keine endlichen Singularitäten vor. Also erhält man nur für $b_7 = b_8 = b_9 = 0$ eine Fuchs'sche Differenzialgleichung.

Für $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$ entartet die Differenzialgleichung (in jeder der Karten $\{b_7 = 1\}$, $\{b_8 = 1\}$ und $\{b_9 = 1\}$) erneut zur Gleichung:

$$w = 0.$$

3.3 Ausblick

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit möchte ich auf einige weiterführende Fragestellungen hinweisen, die sich im Zusammenhang mit den hier ermittelten Ergebnissen stellen, und deren genaue Beantwortung noch aussteht. Es sollen jedoch einige Vermutungen angestellt werden, die als Denkanstoß für weitere Untersuchungen dienen können und deren Überprüfung sicherlich zu interessanten Erkenntnissen führt.

Andere Kompaktifizierungen

Die in dieser Arbeit beschriebene Methode der Fortsetzung von Differenzialgleichungen resultiert aus dem Abschluss des erweiterten Parameterraums im kartesischen Produkt zweier gewichtet-projektiver Räume. Man kann sich die Frage stellen, ob die fortgesetzten Differenzialgleichungen in gewisser Weise unabhängig von der Kompaktifizierung sind (ein Teil der Antwort ist bereits durch Lemma 2.7 gegeben).

Exemplarisch betrachte man noch einmal Beispiel 2.6. Die Differenzialgleichung, welche dort fortgesetzt wurde, lautet

$$w'' + \frac{a_2 z - a_2 a_1}{(z-a_1)^2} w' + \frac{a_3}{(z-a_1)^2} w = 0.$$

Anstatt sie mit der Gleichung $w'' + \frac{b_2 z + b_3}{(z+b_1)^2} w' + \frac{b_4}{(z+b_1)^2} w = 0$ zu identifizieren und den zugehörigen Graphen in $\mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$ abzuschließen, identifiziere man sie mit

$$w'' + \frac{b_2 z + b_3}{(z+b_1)^2} w' + \frac{c_2}{(z+c_1)^2} w = 0$$

und schließe den zugehörigen Graphen Γ in $\mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbf{q}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbf{r}}$ mit $\mathbf{p} = (1,1,1,2)$, $\mathbf{q} = (1,1,2,2)$ und $\mathbf{r} = (1,1,2)$ ab. Zunächst ist Γ Nullstellenmenge des Ideals

$$\begin{aligned} I = \langle\ & b_1 + a_1, \quad b_2 - a_2, \quad b_3 + a_1 a_2, \\ & c_1 + a_1, \quad c_2 - a_3 \qquad\qquad \rangle \quad \subset \mathbb{C}[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2]. \end{aligned}$$

Annahme: *Für die folgenden Überlegungen wird angenommen, dass die bisher gezeigten Ergebnisse (Kompaktifizierung durch Bi-Quasi-Homogenisierung, das Gröbner-Basen-Verfahren zur Berechnung der Bi-Quasi-Homogenisierung, die Elimination mit Hilfe von Gröbner-Basen) sich für den „tri-gewichtet-projektiven“ Fall verallgemeinern lassen.*

Unter dieser Voraussetzung würde sich die Tri-Quasi-Homogenisierung (bezüglich der Gewichtungsvektoren $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ und den Homogenisierungsvariablen a_0, b_0 und c_0) des Ideals I berechnen zu

$$\begin{array}{llll} I^* = \langle & b_0 b_3 - b_1 b_2, & a_1 b_3 + a_2 b_1^2, & a_1 b_2 + a_2 b_0 b_1, \\ & a_0 b_1 + a_1 b_0, & a_0 b_3 + a_1 b_2, & a_0 b_2 - a_2 b_0^2, \\ & b_0 c_1 - b_1 c_0, & b_2 c_1 - b_3 c_0, & a_0 c_1 + a_1 c_0, \\ & a_2^2 b_0 b_1^3 c_2 - a_3 b_3^2 c_0 c_1, & a_2^2 b_0^2 b_1^2 c_2 - a_3 b_2 b_3 c_0 c_1, & a_2^2 b_0^3 b_1 c_2 - a_3 b_2^2 c_0 c_1, \\ & a_2^2 b_0^4 c_2 - a_3 b_2^2 c_0^2, & a_2^2 b_1^4 b_2 c_2 - a_3 b_3^3 c_0 c_1, & a_1 a_2 b_0 b_1 c_2 + a_3 b_3 c_0 c_1, \\ & a_1 a_2 b_0^2 c_2 + a_3 b_2 c_0 c_1, & a_1^2 b_0 c_2 - a_3 b_1 c_0 c_1, & a_0 a_2 b_0^2 c_2 - a_3 b_2 c_0^2, \\ & a_0 a_1 c_2 + a_3 c_0 c_1, & a_0^2 c_2 - a_3 c_0^2, & -a_1^2 c_2 + a_3 c_1^2 \qquad \rangle. \end{array}$$

Bemerkenswerterweise erhält man dieses Ideal sowohl durch das Primärzerlegungs- als auch durch das Gröbner-Basen-Verfahren, was auf die Richtigkeit der oben gemachten Annahme deutet.
Die Nullstellenmenge dieses Ideals entspricht den homogenisierten Differenzialgleichungen

$$w'' + \frac{a_0 a_2 z - a_2 a_1}{(a_0 z - a_1)^2} w' + \frac{a_3}{(a_0 z - a_1)^2} w = 0$$

und

$$w'' + \frac{b_2 z + b_3}{(b_0 z + b_1)^2} w' + \frac{c_2}{(c_0 z + c_1)^2} w = 0.$$

Der unendlich ferne Teil, also $\overline{\Gamma} \cap \{a_0 = 0\}$, ist durch das Ideal $I^*|_{a_0=0} := I^* + \langle a_0 \rangle$ gegeben. Um das Bild von $\overline{\Gamma} \cap \{a_0 = 0\}$ unter der Projektion

$$\pi_{bc} : \mathbb{P}^3_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbf{q}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbf{r}} \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbf{q}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbf{r}}$$

zu erhalten, wird – wie oben erwähnt – angenommen, dass man analog zu Kapitel 2.4.1 und 2.4.2 die Saturierung $(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle^\infty)$ mit $\mathbb{C}[b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2]$ zu schneiden hat, um an das zugehörige Ideal des Bildes zu gelangen. Durch nochmalige Berechnung einer geeigneten Gröbner-Basis erhält man so das Ideal

$$(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2] =$$

$$\begin{array}{lllll} \langle & b_0c_1 - b_1c_0, & b_2c_1 - b_3c_0, & b_1^2c_0c_1, & \\ & b_1^2c_0^2, & b_0b_1c_0^2, & b_0^2c_0^2, & \\ & b_0b_3 - b_1b_2 & & & \rangle. \end{array}$$

In den jeweiligen Karten ist $\pi_{bc}(\overline{\Gamma} \cap \{a_0 = 0\}) = \mathcal{V}((I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, a_1, a_2, a_3\rangle^\infty) \cap \mathbb{C}[b_0, b_1, b_2, b_3, c_0, c_1, c_2])$ gleich den Punkten (bzw. den korrespondierenden Differenzialgleichungen):

$$\begin{array}{llcll} & \{(1:b_1:b_2:b_1b_2\ ,\ 0:0:1)\} & \longrightarrow & w = 0 & \textit{Entartung} \\ \cup & \{(0:1:0:b_3\ ,\ 0:1:c_2)\} & \longrightarrow & w'' + b_3w' + c_2w = 0 & \textit{konst. Koeffizienten} \\ \cup & \{(0:1:0:b_3\ ,\ 0:0:1)\} & \longrightarrow & w = 0 & \textit{Entartung} \\ \cup & \{(0:0:1:b_3\ ,\ 1:b_3:c_2)\} & \longrightarrow & w' = 0 & \textit{Entartung} \\ \cup & \{(0:0:1:b_3\ ,\ 0:0:1)\} & \longrightarrow & 0 = 0 & \textit{Entartung} \\ \cup & \{(0:0:0:1\ ,\ 0:1:c_2)\} & \longrightarrow & w' = 0 & \textit{Entartung} \\ \cup & \{(0:0:0:1\ ,\ 0:0:1)\} & \longrightarrow & 0 = 0 & \textit{Entartung.} \end{array}$$

Die einzigen nicht-entartenden Differenzialgleichungen sind Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten der Form $w'' + b_3w' + c_2w = 0$. Dies sind genau die nicht-entartenden Differenzialgleichungen, die bei der ursprünglichen Kompaktifizierung in Beispiel 2.6 (Seite 33ff.) auftreten. Der Verdacht liegt nahe, dass die nicht-entartenden Differenzialgleichungen unabhängig vom kompakten Raum sind, in welchem der Graph der Differenzialgleichung abgeschlossen wird.

Anhang A

Divisions- und Buchberger-Algorithmus

Im Jahre 1965 führte Bruno Buchberger, ein Student Wolfgang Gröbners, den Begriff der Gröbner-Basis ein. Ist k ein Körper, so ist jedes Ideal $I \subseteq k[x]$ ein Hauptideal der Form $\langle d \rangle$ mit $d \in k[x]$. Ein beliebiges Polynom $f \in k[x]$ gehört genau dann zu I, wenn der Rest der Division von f durch d gleich Null ist. Wenn man Polynomringe in mehreren Variablen $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ zu Grunde legt, so ist ein Ideal I auf Grund des Hilbert'schen Basissatzes stets von endlich vielen Polynomen $f_1, \ldots, f_s$ erzeugt. In diesem Fall gibt es ein Äquivalent zur Polynomdivision im Ein-Variablen-Fall: Zu jedem Polynom $f \in R$ gibt es Polynome $u_1, \ldots, u_s \in R$ mit $f = u_1 f_1 + \ldots + u_s f_s + r$ und $lp(f) = \max(\max_{1 \leq i \leq s}(lp(u_i)lp(f_i)), lp(r))$, wobei eine solche Darstellung von f im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Ist in einer dieser Darstellungen $r = 0$, so gehört f offensichtlich zu I. Ist umgekehrt f ein Element von I und hat man eine Dartstellung von f der obigen Art ermittelt (etwa mittels des unten beschriebenen multivariablen Divisionsalgorithmus), ist hingegen nicht notwendigerweise $r = 0$. Die Äquivalenz

$$f \in I \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \text{ in allen Darstellungen der obigen Form}$$

gilt aber unter einer gewissen Zusatzvoraussetzung, die an die Polynome $f_1, \ldots, f_s$ gestellt werden muss: Die Menge der Polynome $f_1, \ldots, f_s$ muss eine Gröbner-Basis für das Ideal I bilden. Unter dieser Voraussetzung ist der Rest r einer der obigen Darstellungen von f stets eindeutig (vgl. Satz 2.24). Die Frage, ob ein Polynom in einem Ideal liegt, ist in der Literatur als „ideal membership problem“ bekannt und wird somit unter Zuhilfenahme von Gröbner-Basen auf sehr pragmatische Weise gelöst.

Im Folgenden werden der multivariable Divisionsalgorithmus und der Buchberger-Algorithmus zur Berechnung von Gröbner-Basen angegeben. Dabei orientieren sich die Ausführungen zu den angegebenen Algorithmen an [AdLo96], § 1.5, S.25ff, und § 1.7, S. 39ff. (Algorithm 1.5.1 und 1.7.1). Die verwendeten Bezeichnungen sind allesamt in Kapitel 2.3.2 erläutert. Der Beweis von Satz A.1 und Korollar A.2 wird ausführlich behandelt, da die Aussagen essenzielle Bestandteile des Beweises von Satz 2.26 aus Kapitel 2.3.2 sind.

A.1 Der multivariable Divisions-Algorithmus

Es sei k ein Körper und $R := k[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring über k in n Variablen. Ferner seien $f_1, \dots, f_s$ und f Elemente von R mit $f_i \neq 0$. Der multivariable Divisions-Algorithmus schreibt sich wie folgt:

Eingabe: $f, f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$, d.d. $f_i \neq 0$ $(i = 1, \dots, s)$
Ausgabe: $u_1, \dots, u_s, r \in k[x_1, \dots, x_n]$, so dass $f = u_1 f_1 + \dots u_s f_s + r$
und r ist reduziert bezüglich $\{f_1, \dots, f_s\}$
und $lp(f) = \max(\max_{1 \leq i \leq s}(lp(u_i)lp(f_i)), lp(r))$
Initialisierung: $u_1 := 0$, …, $u_s := 0$, $r := 0$, $h := f$

While $h \neq 0$ **do**
Falls es ein i gibt mit $lp(f_i)$ teilt $lp(h)$,
so wähle das kleinste i, das diese Eigenschaft erfüllt.
$u_i := u_i + \frac{lt(h)}{lt(f_i)}$
$h := h - \frac{lt(h)}{lt(f_i)} f_i$
Falls es kein derartiges i gibt, so setze man
$r := r + lt(h)$
$h := h - lt(h)$

Satz A.1. *In der obigen Situation liefert der multivariable Divisionsalgorithmus Polynome $u_1, \dots, u_s, r \in R$, so dass*

$$f = u_1 f_1 + \dots u_s f_s + r \quad \textit{mit} \quad lp(f) = \max\left(\max_{1 \leq i \leq s}(lp(u_i)lp(f_i)), lp(r)\right).$$

Beweis. Bei jedem Durchgang der While-Schleife wird vom Polynom h sein „leading term“ $lt(h)$ subtrahiert. Bezeichnet h_j das Polynom h zu Beginn des j-ten Schleifendurchlaufs, erhält man eine Folge $(h_1 = f), h_2, h_3, \dots$ von Polynomen mit

$$lp(h_1) > lp(h_2) > lp(h_3) > \dots . \tag{A.1}$$

Es existiert somit ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $h_N = 0$ ist. Der Algorithmus bricht also nach N Schleifendurchläufen ab.
Dass nach Abbruch des Algorithmus $f = u_1 f_1 + \ldots u_s f_s + r$ gilt, ist leicht einzusehen: Bezeichnen $u_{1,j}, \ldots, u_{s,j}, r_j$ die Polynome $u_1, \ldots, u_s, r$ zu Beginn des j-ten Schleifendurchlaufs, so hat man zu Beginn des ersten Schleifendurchlaufs auf Grund der Initialisierung die Gleichheit

$$f = h_1 + (u_{1,1} f_1 + \ldots u_{s,1} f_s + r_1). \tag{A.2}$$

Teilt etwa $lp(f_1)$ das Monom $lp(h_1)$, so ist die obere Zeile (A.2) äquivalent zu

$$f = h_1 - \frac{lt(h_1)}{lt(f_1)} f_1 + \frac{lt(h_1)}{lt(f_1)} f_1 + (u_{1,1} f_1 + \ldots u_{s,1} f_s + r_1)$$

bzw.

$$f = \left(h_1 - \frac{lt(h_1)}{lt(f_1)} f_1\right) + \left(\left(u_{1,1} + \frac{lt(h_1)}{lt(f_1)}\right) f_1 + u_{2,1} f_2 + \ldots u_{s,1} f_s + r_1\right)$$

bzw.

$$f = h_2 + (u_{1,2} f_1 + \ldots u_{s,2} f_s + r_2).$$

Teilt kein $lp(f_i)$ das Monom $lp(h_1)$ $(i = 1, \ldots, s)$, so ist (A.2) äquivalent zu

$$f = h_1 - lt(h_1) + lt(h_1) + (u_{1,1} f_1 + \ldots u_{s,1} f_s + r_1)$$

bzw.

$$f = (h_1 - lt(h_1)) + (u_{1,1} f_1 + \ldots u_{s,1} f_s + (r_1 + lt(h_1))) = h_2 - (u_{1,2} f_1 + \ldots u_{s,2} f_s + r_2).$$

Die Eigenschaft $lp(f) = \max(\max_{1 \le i \le s}(lp(u_i) lp(f_i)), lp(r))$ ist ebenfalls leicht einzusehen: Jedes u_i ist eine Summe von Termen der Form $u_i = \sum_{k=1}^{N_i} \frac{lt(h_{\mu_{i,k}})}{lt(f_i)}$, wobei $N_1, \ldots, N_s$ und $1 \le \mu_{i,1} < \ldots < \mu_{i,k} < N$ durch den Algorithmus bestimmt sind. Wegen (A.1) gilt somit $lp(u_i) = \frac{lp(h_{\mu_{i,1}})}{lp(f_i)}$ und daher $lp(u_i) lp(f_i) = lp(h_{\mu_{i,1}}) \le lp(h_1) = lp(f)$. Außerdem gilt: r ist eine Summe von Termen der Form $lt(h_\nu)$, so dass auch hier aus (A.1) die Beziehung $lp(f) \le lp(r)$ folgt. □

Aus dem letzten Satz bzw. dessen Beweis folgt das folgende Korollar, welches in den Beweis von Satz 2.26 eingeht:

Korollar A.2. *Ist $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ eine Gröbner-Basis von I und $f \in I$, so liefert der multivariable Divisions-Algorithmus eine Darstellung von f der Form*

$$f = c_1 X^{A_1} g_{i_1} + c_2 X^{A_2} g_{i_2} + \ldots + c_N X^{A_N} g_{i_N},$$

wobei

$$lp(X^{A_1} g_{i_1}) > lp(X^{A_2} g_{i_2}) > \ldots > lp(X^{A_N} g_{i_N}).$$

Dabei ist $N \in \mathbb{N}$ und $i_j \in \{1, \ldots, s\}$, $c_j \in k$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $A_j \in \mathbb{N}^n$ für $j = 1, \ldots, N$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis des letzten Satzes gilt, dass jedes h_j für $j = 1, \ldots, N$ ein Element des Ideals I ist: $h_1 = f$ ist per Voraussetzung aus I und da G eine Gröbner-Basis von I ist, existiert per Definition ein $i \in \{1, \ldots, s\}$, so dass $lp(h_1)$ von $lp(g_i)$ geteilt wird. Beim ersten Durchlauf der Schleife wird also $h_2 := h_1 - \frac{lt(h_1)}{lt(g_i)} g_i$ gesetzt und man sieht, dass auch h_2 in I liegt. Induktiv folgt, dass jedes h_j in I liegt. Des Weiteren sieht man auf diese Weise, dass $r = 0$ ist.
Es bezeichne u_{i_j} jenes Polynom aus der Menge $\{u_1, \ldots, u_s\}$, zu welchem im j-ten Durchlauf der Schleife ein Term der Form $\frac{lt(h_j)}{lt(g_{i_j})} =: c_j X^{A_j}$ addiert wird. Dann gilt für $j = 1, \ldots, N$

$$lp(X^{A_j} g_{i_j}) = X^{A_j}\, lp(g_{i_j}) = lp\left(\frac{lt(h_j)}{lt(g_{i_j})}\right) lp(g_{i_j}) = lp(h_j),$$

so dass mit (A.1) die Behauptung folgt. □

A.2 Der Buchberger-Algorithmus

In Lemma 2.23 wird die Existenz von Gröbner-Basen konstatiert. In diesem Abschnitt soll Buchbergers Algorithmus beschrieben werden, mit welchem konstruktiv Gröbner-Basen von vorgegebenen Idealen berechnet werden können (der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen ist allerdings wegen des sehr hohen Rechenaufwandes zu empfehlen).

Es sei k ein Körper und $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Man fixiere eine totale Ordnung „$<$" auf der Menge der Monome von $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definition A.3. Es seien $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f, g \neq 0$. Weiter sei L das kleinste gemeinsame Vielfache von $lp(f)$ und $lp(g)$, $L := kgV(lp(f), lpg(g))$. Das Polynom

$$S(f, g) := \frac{L}{lt(f)} f - \frac{L}{lt(g)} g$$

wird als *S-Polynom* von f und g bezeichnet.

Proposition A.4. *Es seien $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ derart, dass es ein $A := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ gibt und für alle $i = 1, \ldots, s$ gilt: $lp(f_i) = X^A \neq 0$. Sei $f = \sum_{i=1}^s c_i f_i$ mit $c_i \in k$. Falls $lp(f) < X^A$, so ist f eine Linearkombination von $S(f_i, f_j)$ $(1 \leq i < j \leq s)$ mit Koeffizienten in k.*

Beweis. Es seien a_i die Leitkoeffizienten $a_i = lc(f_i)$ der f_i. Ist nun $f = \sum_{i=1}^s c_i f_i$ und $lp(f) < X^A$, so folgt $\sum_{i=1}^s c_i a_i = 0$. Da $lp(f_i) = lp(f_j)$ (für $i \neq j$) ist, gilt

$S(f_i, f_j) = \frac{1}{a_i} f_i - \frac{1}{a_j} f_j$. Damit ist

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{i=1}^{s} c_i f_i = \sum_{i=1}^{s} c_i a_i \left(\frac{1}{a_i} f_i \right) \\
&= c_1 a_1 \left(\frac{1}{a_1} f_1 - \frac{1}{a_2} f_2 \right) \ + \ (c_1 a_1 + c_2 a_2) \left(\frac{1}{a_2} f_2 - \frac{1}{a_3} f_3 \right) + \ldots \\
&\quad \ldots + (c_1 a_1 + \ldots + c_{s-1} a_{s-1}) \left(\frac{1}{a_{s-1}} f_{s-1} - \frac{1}{a_s} f_s \right) \ + \ (c_1 a_1 + \ldots + c_s a_s) \frac{1}{a_s} f_s \\
&= \sum_{i=1}^{s-1} \left(\sum_{j=1}^{i} c_j a_j \right) S(f_i, f_{i+1}).
\end{aligned}$$

□

Satz A.5. *Es sei $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ eine Menge von Polynomen in $k[x_1, \ldots, x_n]$, $g_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, t$. Dann ist G genau dann eine Gröbner-Basis für das Ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$, wenn für alle $i \neq j$*

$$S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$$

gilt (s. Definition 2.19).

Beweis. Es sei G eine Gröbner-Basis für I. Da $S(g_i, g_j) \in I$, gilt wegen Satz 2.20 $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$.
Umgekehrt gelte für alle $i \neq j$: $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$. Sei $f \in I$. Dann kann man Polynome $h_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ wählen mit $f = \sum_{i=1}^{t} h_i g_i$, so dass das Monom $X^A := \max_{1 \leq i \leq t}(lp(h_i) lp(g_i))$ kleinstmöglich ist (bezüglich anderen denkbaren Linearkombinationen von f). Angenommen, $lp(f) < X^A$. Es sei

$$S := \{i | \quad lp(h_i) lp(g_i) = X^A\}$$

und es sei $c_i := lc(h_i)$ und $X^{A_i} := lp(h_i)$. Man betrachte das Polynom $g := \sum_{i \in S} c_i X^{A_i} g_i$. Es ist $lp(X^{A_i} g_i) = X^A$ für alle i, aber $lp(g) < X^A$. Nach Proposition A.4 gibt es also $d_{ij} \in k$, so dass

$$g = \sum_{i,j \in S,\ i \neq j} d_{ij} \cdot S(X^{A_i} g_i, X^{A_j} g_j).$$

Da $kgV(X^{A_i} g_i, X^{A_j} g_j) = X^A$, gilt:

$$\begin{aligned}
S(X^{A_i} g_i, X^{A_j} g_j) &= \frac{X^A}{lt(X^{A_i} g_i)} X^{A_i} g_i \ - \ \frac{X^A}{lt(X^{A_j} g_j)} X^{A_j} g_j \\
&= \frac{X^A}{lt(g_i)} g_i \ - \ \frac{X^A}{lt(g_j)} g_j \ = \ \frac{X^A}{kgV(lp(g_i), lp(g_j))} S(g_i, g_j).
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Voraussetzung folgt $S(X^{A_i}g_i, X^{A_j}g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$. Das bedeutet (s. (2.36)), dass es Polynome h_{ijk} gibt, so dass gilt

$$S(X^{A_i}g_i, X^{A_j}g_j) = \sum_{k=1}^{t} h_{ijk}g_k$$

mit

$$\max_{1\leq k\leq t}(lp(h_{ijk})lp(g_k)) = lp(S(X^{A_i}g_i, X^{A_j}g_j)) \;<\; \max(lp(X^{A_i}g_i), lp(X^{A_j}g_j)) = X^A.$$

Substituiert man dies in g und g in f, erhält man f als Linearkombination $f = \sum_{i=1}^{t} h'_i g_i$ mit $\max_{1\leq i\leq t}(lp(h'_i)lp(g_i)) < X^A$, was ein Widerspruch zur Wahl der Darstellung von f ist. Es ist also $lp(f) = X^A$. Damit ist die Eigenschaft (iv) aus Satz 2.20 gezeigt und G ist eine Gröbner-Basis. □

Mit den bisherigen Notationen schreibt sich der Buchberger-Algorithmus wie folgt:

Eingabe: $F = \{f_1, \ldots, f_s\} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, d.d. $f_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, s)$
Ausgabe: Gröbner-Basis $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ des Ideals $\langle f_1, \ldots, f_r\rangle$
Initialisierung: $G := F$, $\mathcal{G} := \{\{f_i, f_j\} \mid \; f_i \neq f_j \in G\}$

While $\mathcal{G} \neq \emptyset$ **do**
  Wähle beliebiges $\{f, g\} \in \mathcal{G}$
  $\mathcal{G} := \mathcal{G} - \{\{f, g\}\}$
  $S(f, g) \xrightarrow{G}_+ h$, wobei h reduziert ist bezüglich G
  If $h \neq 0$ **then**
    $\mathcal{G} := \mathcal{G} \cup \{\{u, h\} \mid \; \forall u \in G\}$
    $G := G \cup \{h\}$

Satz A.6. *Sei $F = \{f_1, \ldots, f_s\} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, d.d. $f_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, s)$. Dann liefert der Buchberger-Algorithmus eine Gröbner-Basis des Ideals $I := \langle f_1, \ldots, f_r\rangle$.*

Beweis. Angenommen, der Algorithmus würde nicht abbrechen. Dann erhielte man eine echt aufsteigende Folge von Mengen

$$F := G_1 \subsetneq G_2 \subsetneq G_3 \subsetneq \ldots.$$

Dabei besteht G_{i+1} aus G_i und einem Polynom $h \in I$, $h \neq 0$, welches ein Rest bezüglich G_i eines S-Polynomes (von zwei Elementen aus G_i) ist. Insbesondere ist h reduziert bezüglich G_i, d.h. kein Monom von h ist durch ein $lp(g)$ mit $g \in G_i$ teilbar. Also ist $lt(h) \notin Lt(G_i)$. Somit hat man eine echt aufsteigende Folge von Idealen

$$Lt(G_1) \subsetneq Lt(G_2) \subsetneq Lt(G_3) \subsetneq \ldots.$$

Da $k[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch ist, kann es eine derartige Folge nicht geben und man erhält einen Widerspruch, d.h. der Algorithmus bricht nach endlich vielen Schleifendurchgängen ab.
Wie gesehen geht G aus F durch Hinzunahme endlich vieler Polynome aus I hervor, d.h. man hat $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subseteq \langle g_1, \ldots, g_t \rangle \subseteq I$ und somit ist $I = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$. Für zwei Polynome g_i und g_j aus G gilt per Konstruktion: $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G}_+ 0$. Aus Satz A.5 folgt dann, dass G eine Gröbner-Basis für I ist. $\square$

Anhang B

Berechnungsbeispiel mit Singular

In Kapitel 2.3.2 wurde gezeigt, wie man die Bi-Quasi-Homogenisierung eines Ideals I mit Hilfe von Gröbner-Basen berechnen kann. Als Anwendung ist die Bi-Quasi-Homogenisierung des Ideals aus (2.20) ermittelt worden. Die zugehörigen Rechnungen wurden mit dem Computer-Algebra-Programm SINGULAR durchgeführt. Untenstehend findet sich ein Durchführungsprotokoll dieser Rechnungen.

```
                     SINGULAR                             /
 A Computer Algebra System for Polynomial Computations   /   version 2-0-3
                                                        0<
     by: G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann        \   January 2002
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern    \
// ** executing /USR/LOCAL/SINGULAR/2-0-3/LIB/.singularrc
> ring R1=0,(a1,a2,a3,a0,b1,b2,b3,b4,b0),(Wp(1,1,2,1),Wp(1,2,2,2,1));
> ring R2=0,(b1,b2,b3,b4,b0,a1,a2,a3,a0),(Wp(1,2,2,2,1),Wp(1,1,2,1));
> ring Ra=(0,a1,a2,a3,a0),(b1,b2,b3,b4,b0),Wp(1,2,2,2,1);
> ring Rb=(0,b1,b2,b3,b4,b0),(a1,a2,a3,a0),Wp(1,1,2,1);
```

Hier sind die Polynomringe mit den Monomialordnungen deklariert worden. Die Ringe $R1$ und $R2$ entsprechen $\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$ mit den Eliminationsordnungen $<_{ab}$ bzw. $<_{ba}$. Der Ring Ra ist der Polynomring in den b-Variablen über dem Körper $\mathbb{C}(a_0, a_1, a_2, a_3)$ mit der gewichteten lexikographischen Ordnung $<_b$ und dem Gewichtungsvektor $(1, 1, 2, 2, 2)$. Der Ring Rb ist als Polynomring in den a-Variablen analog definiert. Die Ringe Ra und Rb werden im Weiteren nur zum Quasi-Homogenisieren von Polynomen aus $R1$ bzw. $R2$ eingesetzt.

```
> setring R1;
> ideal I=b1+a1,b2-a2,b3+a2*a1,b4-a3;
> ideal G=std(I); G;
G[1]=b1*b2-b3 G[2]=a2-b2 G[3]=a1+b1 G[4]=a3-b4
```

Mit „std“ werden Gröbner-Basen von Idealen berechnet. In diesem Fall ist G eine Gröbner-Basis von I im Ring $R1$ (also bezüglich der Eliminationsordnung $<_{ab}$).

```
> setring Rb;
> ideal Gh=homog(imap(R1,G),a0);Gh;
Gh[1]=(b1*b2-b3) Gh[2]=a2+(-b2)*a0 Gh[3]=a1+(b1)*a0
Gh[4]=a3+(-b4)*a0^2
```

Der Befehl „imap(R1,G)“ kopiert die Elemente der Menge $G \subset R1$ in den Ring Rb (bezüglich der Inklusion $R1 = \mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4] \hookrightarrow Rb = (\mathbb{C}(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4))[a_0, a_1, a_2, a_3]$). Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass nicht mit der Idealstruktur von $\langle G \rangle$ im Ring Rb gearbeitet wird (auch wenn durch die Befehlszeile „ideal Gh=homog(imap(R1,G),a0);“ der Anschein erweckt wird). Es werden lediglich die Erzeugenden von G in $R1$ als Polynome in Rb, also als Polynome in den a-Variablen, aufgefasst. Das (Quasi-)Homogenisierungskommando „homog“ arbeitet nicht auf Idealen, sondern nur auf den angegebenen Erzeugenden dieser Ideale. Aus diesem Grund werden die Elemente der Gröbner-Basis G, welche das Ideal I in $R1$ erzeugen, in Richtung der a-Variablen quasihomogenisiert (bezüglich der Gewichtung $(1, 1, 1, 2)$ und der Homogenisierungsvariablen a_0). Als Ergebnis erhält man die in den a-Variablen quasi-homogenen Polynome $Gh[1], \ldots, Gh[4]$.

Das bisherige Vorgehen – Gröbner-Basis-Bildung bzw. Quasi-Homogenisierung – wird nun im Ring $R2$ (mit der Eliminationsordnung $<_{ba}$) bzw. im Ring Ra (Quasi-Homogenisierung mit der Gewichtung $(1, 1, 2, 2, 2)$ bezüglich b_0) wiederholt.

```
> setring R2;
> ideal H=std(imap(Rb,Gh)); H;
H[1]=b1*a0+a1 H[2]=b4*a0^2-a3 H[3]=b4*a1*a0+b1*a3 H[4]=b3*a0-b1*a2
H[5]=b3*a3+b4*a1*a2 H[6]=b2*a0-a2 H[7]=b2*a1+b1*a2
H[8]=b2*a3-b4*a2*a0 H[9]=b1^2*a2+b3*a1 H[10]=b1^2*a3-b4*a1^2
H[11]=b1*b2-b3
> setring Ra;
> ideal Hh=homog(imap(R2,H),b0); Hh;
Hh[1]=(a0)*b1+(a1)*b0 Hh[2]=(a0^2)*b4+(-a3)*b0^2
Hh[3]=(a3)*b1*b0+(a1*a0)*b4 Hh[4]=(-a2)*b1*b0+(a0)*b3
Hh[5]=(a3)*b3+(a1*a2)*b4 Hh[6]=(a0)*b2+(-a2)*b0^2
Hh[7]=(a2)*b1*b0+(a1)*b2 Hh[8]=(a3)*b2+(-a2*a0)*b4
Hh[9]=(a2)*b1^2+(a1)*b3 Hh[10]=(a3)*b1^2+(-a1^2)*b4
Hh[11]=b1*b2-b3*b0
```

Schließlich schreibt sich das von den Polynomen $Hh[1], \ldots, Hh[11]$ im Ring R1 erzeugte Ideal, welches die Bi-Quasi-Homogenisierung von I ist, in der folgenden Form (es fehlen im Gegensatz zu eben die Klammern um $a_0, \ldots, a_4$, was bedeutet, dass die a-Variablen nicht mehr als Parmeter, sondern als tatsächliche Variablen angesehen werden):

```
> setring R1; ideal Hh=imap(Ra,Hh); Hh;
Hh[1]=a1*b0+a0*b1 Hh[2]=-a3*b0^2+a0^2*b4 Hh[3]=a1*a0*b4+a3*b1*b0
Hh[4]=-a2*b1*b0+a0*b3 Hh[5]=a1*a2*b4+a3*b3 Hh[6]=-a2*b0^2+a0*b2
Hh[7]=a1*b2+a2*b1*b0 Hh[8]=-a2*a0*b4+a3*b2 Hh[9]=a1*b3+a2*b1^2
Hh[10]=-a1^2*b4+a3*b1^2 Hh[11]=b1*b2-b3*b0
```

Als nächstes soll die zugehörige Varietät dieses Ideals mit der Hyperebene $\{a_0 = 0\}$ geschnitten werden. Diese Varietät wird beschrieben durch das bi-quasi-homogene Ideal Hhu:

```
> ideal Hhu=Hh; Hhu[12]=a0;
```

Die Saturierung dieses Ideals bezüglich des Ideals $q = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$ berechnet sich wie folgt:

```
> LIB"elim.lib";
// ** loaded /USR/LOCAL/SINGULAR/2-0-3/LIB/elim.lib (1.14.2.2,2002/02/20)
// ** loaded /USR/LOCAL/SINGULAR/2-0-3/LIB/poly.lib (1.33.2.5,2002/04/09)
// ** loaded /USR/LOCAL/SINGULAR/2-0-3/LIB/ring.lib (1.17.2.1,2002/02/20)
// ** loaded /USR/LOCAL/SINGULAR/2-0-3/LIB/general.lib (1.38.2.7,2002/04/12)
// ** loaded /USR/LOCAL/SINGULAR/2-0-3/LIB/matrix.lib (1.26.2.1,2002/02/20)
// ** loaded /USR/LOCAL/SINGULAR/2-0-3/LIB/random.lib (1.16.2.1,2002/02/20)
// ** loaded /USR/LOCAL/SINGULAR/2-0-3/LIB/inout.lib (1.21.2.3,2002/02/20)
> ideal q=a0,a1,a2,a3; sat(Hhu,q);
[1]:
   _[1]=b0^2
   _[2]=b1*b0
   _[3]=b1*b2-b3*b0
   _[4]=a0
   _[5]=a1*b0
   _[6]=a1*b3+a2*b1^2
   _[7]=a1*b2
   _[8]=a3*b2
   _[9]=a3*b3*b0
   _[10]=a2^2*b1^2*b4-a3*b3^2
```

```
   _[11]=a1*a2*b4+a3*b3
   _[12]=a1^2*b4-a3*b1^2
[2]:
   1
```

Die Polynome, die unter [1] aufgeführt sind, erzeugen dabei die Saturierung und die unter [2] stehende natürliche Zahl ist der Saturierungsexponent (da $\mathbb{C}[a_0, \ldots, a_3, b_0, \ldots, b_4]$ noethersch ist, existiert für zwei Ideale I und J stets eine natürliche Zahl r mit $(I : J^\infty) = I : J^r$, diese Zahl heißt *Saturierungsexponent*).
Will man schließlich die Nullstellenmenge des Ideals Hhu auf die b-Koordinaten projizieren, so ergibt sich gemäß Kapitel 2.4 eine gewichtet-projektive Varietät in $\mathbb{P}^4_{\mathbf{q}}$, die durch die ersten drei Polynome des folgenden Erzeugendensystems für die gerade berechnete Saturierung beschrieben wird (die Bildung der Standardbasis findet dabei im Ring $R1$ statt, so dass Satz 2.31 (bzw. Gleichung (2.43)) angewendet werden kann).

```
> std(sat(Hhu,q)[1]);
_[1]=b0^2 _[2]=b1*b0 _[3]=b1*b2-b3*b0 _[4]=a0 _[5]=a1*b0
_[6]=a1*b3+a2*b1^2 _[7]=a1*b2 _[8]=a3*b2 _[9]=a3*b3*b0
_[10]=a2^2*b1^2*b4-a3*b3^2 _[11]=a1*a2*b4+a3*b3
_[12]=a1^2*b4-a3*b1^2
```

Das Ideal, welches die Projektion der Nullstellenmenge des bi-quasi-homogenen Ideals Hhu auf die b-Koordinaten beschreibt, wird im Ring $\mathbb{C}[b_0, \ldots, b_4]$ somit erzeugt von den Polynomen b_0^2, $b_1 b_0$ und $b_1 b_2 - b_3 b_0$.

Abschließend sei noch einmal angemerkt, dass unterschiedliche, den gewichteten Grad verfeinernde Monomialordnungen zu unterschiedlichen Erzeugendensystemen der berechneten Ideale führen können. Bei der hier durchgeführten Berechnung gilt im Ring R1 (in welchem Gröbner-Basen gebildet werden) bezüglich der Teilordnung der a-Variablen $a_1 > a_2 > a_3 > a_0$. Wählt man durch $a_0 > a_1 > a_2 > a_3$ eine andere totale Ordnung der a-Variablen (die den gewichteten Grad verfeinert) und führt die beschriebenen Rechnungen durch, erhält man ein Ideal in $\mathbb{C}[b_0, \ldots, b_4]$, welches von den Polynomen $b_0 b_1$, b_0^2, $b_0 b_3 - b_1 b_2$ und $b_1^2 b_2$ erzeugt wird. Natürlich sind dieses und das oben berechnete Ideal identisch (denn $b_1^2 b_2$ reduziert modulo $\{b_0^2,\ b_1 b_0,\ b_1 b_2 - b_3 b_0\}$ zu 0, ist also im Ideal $\langle b_0^2,\ b_1 b_0,\ b_1 b_2 - b_3 b_0 \rangle$ enthalten[1]).

[1] $b_1^2 b_2 = b_3 \cdot b_1 b_0 + b_1 \cdot (b_1 b_2 - b_3 b_0)$

Anhang C

Berechnungsergebnisse für die Riemann'sche Differenzialgleichung

In Kapitel 3.2 ist die allgemeine Fuchs'sche Differenzialgleichung mit 2 endlichen Singularitäten (die Riemann'sche Differenzialgleichung) fortgesetzt worden. Untenstehend findet sich eine Gröbner-Basis $G = \{g_1, \dots, g_{195}\}$ des bi-quasi-homogenen Ideals I^* bezüglich der Eliminationsordnung, bei welcher die mit $\mathbf{p}$ gewichtete deg-lex Ordnung der Monome in $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_0$ die mit $\mathbf{q}$ gewichtete deg-lex-Ordnung der Monome in $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_0$ dominiert. „Lexikographisch" ist dabei in Bezug auf die angegebene Reihenfolge der Variablen zu verstehen. Alle Berechnungen sind mit Singular durchgeführt worden.

$$
\begin{aligned}
g_1 &= b_1b_6b_0 + b_2^2b_3 - b_2b_5b_0\\
g_2 &= b_1b_2b_3 - b_2b_4b_0 + b_6b_0^2\\
g_3 &= b_1^2b_6 - b_1b_2b_5 + b_2^2b_4 - b_2b_6b_0\\
g_4 &= b_1^2b_3 - b_1b_4b_0 - b_2b_3b_0 + b_5b_0^2\\
g_5 &= b_2^3b_3^2 - b_2^2b_3b_5b_0 + b_2b_4b_6b_0^2 - b_6^2b_0^3\\
g_6 &= a_1b_0 + a_2b_0 + a_0b_1\\
g_7 &= a_1b_2b_3 + a_2b_2b_3 + a_0b_2b_4 - a_0b_6b_0\\
g_8 &= a_1b_1b_3 + a_2b_1b_3 + a_0b_1b_4 + a_0b_2b_3 - a_0b_5b_0\\
g_9 &= a_4b_2b_0 - a_0^2b_6\\
g_{10} &= a_4b_0^3 + a_0^2b_1b_3 - a_0^2b_4b_0\\
g_{11} &= a_4b_1b_0^2 + a_0^2b_2b_3 - a_0^2b_5b_0\\
g_{12} &= a_4b_1^2b_0 - a_0^2b_1b_5 + a_0^2b_2b_4 - a_0^2b_6b_0\\
g_{13} &= a_4b_2^3b_3 + a_0^2b_1b_6^2 - a_0^2b_2b_5b_6
\end{aligned}
$$

$$g_{14} = a_3b_0^2 - a_0^2b_3$$
$$g_{15} = a_3b_2b_0 + a_4b_1b_0 - a_0^2b_5$$
$$g_{16} = a_3b_1b_0 + a_4b_0^2 - a_0^2b_4$$
$$g_{17} = a_3b_6b_0 - a_4b_2b_3$$
$$g_{18} = a_3b_2b_6 + a_4b_1b_6 - a_4b_2b_5$$
$$g_{19} = a_3b_2b_3 - a_3b_5b_0 + a_4b_1b_3$$
$$g_{20} = a_3b_1b_6 - a_4b_2b_4 + a_4b_6b_0$$
$$g_{21} = a_3b_1b_5 - a_3b_2b_4 - a_4b_1b_4 + a_4b_5b_0$$
$$g_{22} = a_3b_1b_3 - a_3b_4b_0 + a_4b_3b_0$$
$$g_{23} = a_2^2b_0 + a_2a_0b_1 + a_0^2b_2$$
$$g_{24} = a_2^2b_2b_3 + a_2a_0b_2b_4 - a_2a_0b_6b_0 - a_0^2b_1b_6 + a_0^2b_2b_5$$
$$g_{25} = a_2^2b_1b_3 + a_2a_0b_1b_4 + a_2a_0b_2b_3 - a_2a_0b_5b_0 + a_0^2b_2b_4 - a_0^2b_6b_0$$
$$g_{26} = a_1a_0b_6 + a_2a_0b_6 + a_4b_1b_2$$
$$g_{27} = a_1a_0b_5 + a_2a_0b_5 + a_3b_1b_2 + a_4b_1^2$$
$$g_{28} = a_1a_0b_4 + a_2a_0b_4 + a_3b_1^2 + a_4b_1b_0$$
$$g_{29} = a_1a_0b_3 + a_2a_0b_3 - a_4b_0^2 + a_0^2b_4$$
$$g_{30} = a_1a_2b_1 + a_1a_0b_2 + a_2a_0b_2$$
$$g_{31} = a_1a_2b_6 - a_4b_2^2$$
$$g_{32} = a_1a_2b_5 - a_3b_2^2 - a_4b_1b_2$$
$$g_{33} = a_1a_2b_4 - a_3b_1b_2 - a_0^2b_6$$
$$g_{34} = a_1a_2b_3 + a_4b_1b_0 - a_0^2b_5$$
$$g_{35} = a_1^2b_3 + a_2^2b_3 - a_3b_1^2 - 2a_4b_1b_0 + 2a_0^2b_5$$
$$g_{36} = a_2^2a_0b_6 + a_2a_4b_1b_2 + a_4a_0b_2^2$$
$$g_{37} = a_2^2a_0b_5 + a_2a_3b_1b_2 + a_2a_4b_1^2 + a_3a_0b_2^2 + a_4a_0b_1b_2$$
$$g_{38} = a_2^2a_0b_4 + a_2a_3b_1^2 + a_2a_4b_1b_0 + a_3a_0b_1b_2 + a_0^3b_6$$
$$g_{39} = a_2^2a_0b_3 - a_2a_4b_0^2 + a_2a_0^2b_4 - a_4a_0b_1b_0 + a_0^3b_5$$
$$g_{40} = a_2^3b_3 - a_2a_3b_1^2 - a_2a_4b_1b_0 + a_2a_0^2b_5 - a_3a_0b_1b_2$$
$$g_{41} = a_1a_3b_3 + a_2a_3b_3 + a_3a_0b_4 - a_4a_0b_3$$
$$g_{42} = a_7b_0^2 - a_0^4b_9$$
$$g_{43} = a_7b_2^2b_3b_0 + a_0^4b_1b_6b_9 - a_0^4b_2b_5b_9$$
$$g_{44} = a_6b_0^2 - a_0^4b_8$$
$$g_{45} = a_6b_9 - a_7b_8$$
$$g_{46} = a_6b_2^2b_3b_0 + a_0^4b_1b_6b_8 - a_0^4b_2b_5b_8$$
$$g_{47} = a_5b_0^2 - a_0^4b_7$$
$$g_{48} = a_5b_9 - a_7b_7$$
$$g_{49} = a_5b_8 - a_6b_7$$
$$g_{50} = a_5b_2^2b_3b_0 + a_0^4b_1b_6b_7 - a_0^4b_2b_5b_7$$
$$g_{51} = a_4a_0^2b_9b_0 + a_7b_1b_3 - a_7b_4b_0$$
$$g_{52} = a_4a_0^2b_8b_0 + a_6b_1b_3 - a_6b_4b_0$$
$$g_{53} = a_4a_0^2b_7b_0 + a_5b_1b_3 - a_5b_4b_0$$

$$g_{54} = a_4a_0^2b_2b_9 - a_7b_6b_0$$
$$g_{55} = a_4a_0^2b_2b_8 - a_6b_6b_0$$
$$g_{56} = a_4a_0^2b_2b_7 - a_5b_6b_0$$
$$g_{57} = a_4a_0^2b_1b_9 + a_7b_2b_3 - a_7b_5b_0$$
$$g_{58} = a_4a_0^2b_1b_8 + a_6b_2b_3 - a_6b_5b_0$$
$$g_{59} = a_4a_0^2b_1b_7 + a_5b_2b_3 - a_5b_5b_0$$
$$g_{60} = a_4^2b_2^2b_9 - a_7b_6^2$$
$$g_{61} = a_4^2b_2^2b_8 - a_6b_6^2$$
$$g_{62} = a_4^2b_2^2b_7 - a_5b_6^2$$
$$g_{63} = a_4^2b_1b_9b_0 - a_4a_0^2b_5b_9 + a_7b_3b_6$$
$$g_{64} = a_4^2b_1b_8b_0 - a_4a_0^2b_5b_8 + a_6b_3b_6$$
$$g_{65} = a_4^2b_1b_7b_0 - a_4a_0^2b_5b_7 + a_5b_3b_6$$
$$g_{66} = a_4^2b_1^2b_2b_9 - a_7b_1b_5b_6 + a_7b_2b_4b_6 - a_7b_6^2b_0$$
$$g_{67} = a_4^2b_1^2b_2b_8 - a_6b_1b_5b_6 + a_6b_2b_4b_6 - a_6b_6^2b_0$$
$$g_{68} = a_4^2b_1^2b_2b_7 - a_5b_1b_5b_6 + a_5b_2b_4b_6 - a_5b_6^2b_0$$
$$g_{69} = a_4^2b_1^3b_9 + a_7b_1b_4b_6 - a_7b_1b_5^2 + a_7b_2b_3b_6 + a_7b_2b_4b_5 - 2a_7b_5b_6b_0$$
$$g_{70} = a_4^2b_1^3b_8 + a_6b_1b_4b_6 - a_6b_1b_5^2 + a_6b_2b_3b_6 + a_6b_2b_4b_5 - 2a_6b_5b_6b_0$$
$$g_{71} = a_4^2b_1^3b_7 + a_5b_1b_4b_6 - a_5b_1b_5^2 + a_5b_2b_3b_6 + a_5b_2b_4b_5 - 2a_5b_5b_6b_0$$
$$g_{72} = a_3a_0^2b_9 - a_7b_3$$
$$g_{73} = a_3a_0^2b_8 - a_6b_3$$
$$g_{74} = a_3a_0^2b_7 - a_5b_3$$
$$g_{75} = a_3a_0^2b_6 + a_4^2b_1b_0 - a_4a_0^2b_5$$
$$g_{76} = a_3a_4b_2^2b_9 + a_4^2b_1b_2b_9 - a_7b_5b_6$$
$$g_{77} = a_3a_4b_2^2b_8 + a_4^2b_1b_2b_8 - a_6b_5b_6$$
$$g_{78} = a_3a_4b_2^2b_7 + a_4^2b_1b_2b_7 - a_5b_5b_6$$
$$g_{79} = a_3a_4b_1b_2b_9 + a_4a_0^2b_6b_9 - a_7b_4b_6$$
$$g_{80} = a_3a_4b_1b_2b_8 + a_4a_0^2b_6b_8 - a_6b_4b_6$$
$$g_{81} = a_3a_4b_1b_2b_7 + a_4a_0^2b_6b_7 - a_5b_4b_6$$
$$g_{82} = a_3a_4b_1^3b_9 - a_7b_1b_3b_6 - a_7b_1b_4b_5 - a_7b_2b_3b_5 + a_7b_2b_4^2 - a_7b_4b_6b_0 + a_7b_5^2b_0$$
$$g_{83} = a_3a_4b_1^3b_8 - a_6b_1b_3b_6 - a_6b_1b_4b_5 - a_6b_2b_3b_5 + a_6b_2b_4^2 - a_6b_4b_6b_0 + a_6b_5^2b_0$$
$$g_{84} = a_3a_4b_1^3b_7 - a_5b_1b_3b_6 - a_5b_1b_4b_5 - a_5b_2b_3b_5 + a_5b_2b_4^2 - a_5b_4b_6b_0 + a_5b_5^2b_0$$
$$g_{85} = a_3^2b_2^2b_9 + a_4^2b_1^2b_9 - 2a_4a_0^2b_6b_9 + 2a_7b_4b_6 - a_7b_5^2$$
$$g_{86} = a_3^2b_2^2b_8 + a_4^2b_1^2b_8 - 2a_4a_0^2b_6b_8 + 2a_6b_4b_6 - a_6b_5^2$$
$$g_{87} = a_3^2b_2^2b_7 + a_4^2b_1^2b_7 - 2a_4a_0^2b_6b_7 + 2a_5b_4b_6 - a_5b_5^2$$
$$g_{88} = a_3^2b_1b_2b_9 + a_3a_4b_1^2b_9 + a_4a_0^2b_5b_9 - a_7b_4b_5$$
$$g_{89} = a_3^2b_1b_2b_8 + a_3a_4b_1^2b_8 + a_4a_0^2b_5b_8 - a_6b_4b_5$$
$$g_{90} = a_3^2b_1b_2b_7 + a_3a_4b_1^2b_7 + a_4a_0^2b_5b_7 - a_5b_4b_5$$
$$g_{91} = a_3^2b_1^2b_9 - a_4^2b_9b_0^2 + 2a_4a_0^2b_4b_9 - a_7b_4^2$$
$$g_{92} = a_3^2b_1^2b_8 - a_4^2b_8b_0^2 + 2a_4a_0^2b_4b_8 - a_6b_4^2$$
$$g_{93} = a_3^2b_1^2b_7 - a_4^2b_7b_0^2 + 2a_4a_0^2b_4b_7 - a_5b_4^2$$

$$g_{94} = a_2^2a_3b_3 + a_2a_3a_0b_4 - a_2a_4a_0b_3 + a_3a_0^2b_5 + a_4^2b_0^2 - a_4a_0^2b_4$$
$$g_{95} = a_1a_0^3b_9 + a_2a_0^3b_9 + a_7b_1b_0$$
$$g_{96} = a_1a_0^3b_8 + a_2a_0^3b_8 + a_6b_1b_0$$
$$g_{97} = a_1a_0^3b_7 + a_2a_0^3b_7 + a_5b_1b_0$$
$$g_{98} = a_1a_4a_0b_2b_9 + a_2a_4a_0b_2b_9 + a_7b_1b_6$$
$$g_{99} = a_1a_4a_0b_2b_8 + a_2a_4a_0b_2b_8 + a_6b_1b_6$$
$$g_{100} = a_1a_4a_0b_2b_7 + a_2a_4a_0b_2b_7 + a_5b_1b_6$$
$$g_{101} = a_1a_4a_0b_1b_9 + a_2a_4a_0b_1b_9 + a_7b_1b_5 - a_7b_2b_4 + a_7b_6b_0$$
$$g_{102} = a_1a_4a_0b_1b_8 + a_2a_4a_0b_1b_8 + a_6b_1b_5 - a_6b_2b_4 + a_6b_6b_0$$
$$g_{103} = a_1a_4a_0b_1b_7 + a_2a_4a_0b_1b_7 + a_5b_1b_5 - a_5b_2b_4 + a_5b_6b_0$$
$$g_{104} = a_1a_3a_0b_9 + a_2a_3a_0b_9 - a_4a_0^2b_9 + a_7b_4$$
$$g_{105} = a_1a_3a_0b_8 + a_2a_3a_0b_8 - a_4a_0^2b_8 + a_6b_4$$
$$g_{106} = a_1a_3a_0b_7 + a_2a_3a_0b_7 - a_4a_0^2b_7 + a_5b_4$$
$$g_{107} = a_1a_2a_0^2b_9 - a_7b_2b_0$$
$$g_{108} = a_1a_2a_0^2b_8 - a_6b_2b_0$$
$$g_{109} = a_1a_2a_0^2b_7 - a_5b_2b_0$$
$$g_{110} = a_1a_2a_4b_9 - a_7b_6$$
$$g_{111} = a_1a_2a_4b_8 - a_6b_6$$
$$g_{112} = a_1a_2a_4b_7 - a_5b_6$$
$$g_{113} = a_1a_2a_3b_9 - a_1a_4a_0b_9 - a_2a_4a_0b_9 - a_7b_5$$
$$g_{114} = a_1a_2a_3b_8 - a_1a_4a_0b_8 - a_2a_4a_0b_8 - a_6b_5$$
$$g_{115} = a_1a_2a_3b_7 - a_1a_4a_0b_7 - a_2a_4a_0b_7 - a_5b_5$$
$$g_{116} = a_1^2a_0^2b_9 + a_2^2a_0^2b_9 - a_7b_1^2 + 2a_7b_2b_0$$
$$g_{117} = a_1^2a_0^2b_8 + a_2^2a_0^2b_8 - a_6b_1^2 + 2a_6b_2b_0$$
$$g_{118} = a_1^2a_0^2b_7 + a_2^2a_0^2b_7 - a_5b_1^2 + 2a_5b_2b_0$$
$$g_{119} = a_1^2a_2a_0b_9 + a_1a_2^2a_0b_9 + a_7b_1b_2$$
$$g_{120} = a_1^2a_2a_0b_8 + a_1a_2^2a_0b_8 + a_6b_1b_2$$
$$g_{121} = a_1^2a_2a_0b_7 + a_1a_2^2a_0b_7 + a_5b_1b_2$$
$$g_{122} = a_1^2a_2^2b_9 - a_7b_2^2$$
$$g_{123} = a_1^2a_2^2b_8 - a_6b_2^2$$
$$g_{124} = a_1^2a_2^2b_7 - a_5b_2^2$$
$$g_{125} = a_2^2a_0^3b_9 + a_2a_7b_1b_0 + a_7a_0b_2b_0$$
$$g_{126} = a_2^2a_0^3b_8 + a_2a_6b_1b_0 + a_6a_0b_2b_0$$
$$g_{127} = a_2^2a_0^3b_7 + a_2a_5b_1b_0 + a_5a_0b_2b_0$$
$$g_{128} = a_2^2a_4a_0b_2b_9 + a_2a_7b_1b_6 + a_7a_0b_2b_6$$
$$g_{129} = a_2^2a_4a_0b_2b_8 + a_2a_6b_1b_6 + a_6a_0b_2b_6$$
$$g_{130} = a_2^2a_4a_0b_2b_7 + a_2a_5b_1b_6 + a_5a_0b_2b_6$$
$$g_{131} = a_2^2a_4a_0b_1b_9 + a_2a_7b_1b_5 - a_2a_7b_2b_4 + a_2a_7b_6b_0 + a_7a_0b_1b_6$$
$$g_{132} = a_2^2a_4a_0b_1b_8 + a_2a_6b_1b_5 - a_2a_6b_2b_4 + a_2a_6b_6b_0 + a_6a_0b_1b_6$$
$$g_{133} = a_2^2a_4a_0b_1b_7 + a_2a_5b_1b_5 - a_2a_5b_2b_4 + a_2a_5b_6b_0 + a_5a_0b_1b_6$$

$$g_{134} = a_2^2a_3a_0b_2b_9 + a_2a_7b_2b_4 - a_2a_7b_6b_0 - a_7a_0b_1b_6 + a_7a_0b_2b_5$$
$$g_{135} = a_2^2a_3a_0b_2b_8 + a_2a_6b_2b_4 - a_2a_6b_6b_0 - a_6a_0b_1b_6 + a_6a_0b_2b_5$$
$$g_{136} = a_2^2a_3a_0b_2b_7 + a_2a_5b_2b_4 - a_2a_5b_6b_0 - a_5a_0b_1b_6 + a_5a_0b_2b_5$$
$$g_{137} = a_2^2a_3a_0b_1b_9 + a_2a_7b_1b_4 + a_2a_7b_2b_3 - a_2a_7b_5b_0 + a_7a_0b_2b_4 - a_7a_0b_6b_0$$
$$g_{138} = a_2^2a_3a_0b_1b_8 + a_2a_6b_1b_4 + a_2a_6b_2b_3 - a_2a_6b_5b_0 + a_6a_0b_2b_4 - a_6a_0b_6b_0$$
$$g_{139} = a_2^2a_3a_0b_1b_7 + a_2a_5b_1b_4 + a_2a_5b_2b_3 - a_2a_5b_5b_0 + a_5a_0b_2b_4 - a_5a_0b_6b_0$$
$$g_{140} = a_2^3a_0^2b_9 - a_2a_7b_1^2 + a_2a_7b_2b_0 - a_7a_0b_1b_2$$
$$g_{141} = a_2^3a_0^2b_8 - a_2a_6b_1^2 + a_2a_6b_2b_0 - a_6a_0b_1b_2$$
$$g_{142} = a_2^3a_0^2b_7 - a_2a_5b_1^2 + a_2a_5b_2b_0 - a_5a_0b_1b_2$$
$$g_{143} = a_1a_7b_3 + a_2a_7b_3 - a_4a_0^3b_9 + a_7a_0b_4$$
$$g_{144} = a_1a_6b_3 + a_2a_6b_3 - a_4a_0^3b_8 + a_6a_0b_4$$
$$g_{145} = a_1a_5b_3 + a_2a_5b_3 - a_4a_0^3b_7 + a_5a_0b_4$$
$$g_{146} = a_1a_4a_0^2b_9 + a_2^2a_3a_0b_9 + a_2a_7b_4 + a_7a_0b_5$$
$$g_{147} = a_1a_4a_0^2b_8 + a_2^2a_3a_0b_8 + a_2a_6b_4 + a_6a_0b_5$$
$$g_{148} = a_1a_4a_0^2b_7 + a_2^2a_3a_0b_7 + a_2a_5b_4 + a_5a_0b_5$$
$$g_{149} = a_1a_4^2b_3 + a_2a_4^2b_3 - a_3^2a_0b_6 + a_3a_4a_0b_5$$
$$g_{150} = a_1a_3^2b_6 - a_1a_3a_4b_5 + a_1a_4^2b_4 + a_2a_3^2b_6 - a_2a_3a_4b_5 + a_2a_4^2b_4 - a_3a_4a_0b_6 + a_4^2a_0b_5$$
$$g_{151} = a_1a_2^3a_0b_9 + a_2a_7b_1b_2 + a_7a_0b_2^2$$
$$g_{152} = a_1a_2^3a_0b_8 + a_2a_6b_1b_2 + a_6a_0b_2^2$$
$$g_{153} = a_1a_2^3a_0b_7 + a_2a_5b_1b_2 + a_5a_0b_2^2$$
$$g_{154} = a_3a_7b_6^2 + a_4^3b_1b_2b_9 - a_4a_7b_5b_6$$
$$g_{155} = a_3a_7b_5b_6 + a_4^3b_1^2b_9 - a_4^2a_0^2b_6b_9 + a_4a_7b_4b_6 - a_4a_7b_5^2$$
$$g_{156} = a_3a_7b_3b_6 - a_4^3b_9b_0^2 + a_4^2a_0^2b_4b_9 - a_4a_7b_3b_5$$
$$g_{157} = a_3a_6b_6^2 + a_4^3b_1b_2b_8 - a_4a_6b_5b_6$$
$$g_{158} = a_3a_6b_5b_6 + a_4^3b_1^2b_8 - a_4^2a_0^2b_6b_8 + a_4a_6b_4b_6 - a_4a_6b_5^2$$
$$g_{159} = a_3a_6b_3b_6 - a_4^3b_8b_0^2 + a_4^2a_0^2b_4b_8 - a_4a_6b_3b_5$$
$$g_{160} = a_3a_5b_6^2 + a_4^3b_1b_2b_7 - a_4a_5b_5b_6$$
$$g_{161} = a_3a_5b_5b_6 + a_4^3b_1^2b_7 - a_4^2a_0^2b_6b_7 + a_4a_5b_4b_6 - a_4a_5b_5^2$$
$$g_{162} = a_3a_5b_3b_6 - a_4^3b_7b_0^2 + a_4^2a_0^2b_4b_7 - a_4a_5b_3b_5$$
$$g_{163} = a_3a_4^2b_1^2b_9 + a_3a_7b_4b_6 + a_4^2a_0^2b_5b_9 - a_4a_7b_3b_6 - a_4a_7b_4b_5$$
$$g_{164} = a_3a_4^2b_1^2b_8 + a_3a_6b_4b_6 + a_4^2a_0^2b_5b_8 - a_4a_6b_3b_6 - a_4a_6b_4b_5$$
$$g_{165} = a_3a_4^2b_1^2b_7 + a_3a_5b_4b_6 + a_4^2a_0^2b_5b_7 - a_4a_5b_3b_6 - a_4a_5b_4b_5$$
$$g_{166} = a_3^3b_6 - a_3^2a_4b_5 + a_3a_4^2b_4 - a_4^3b_3$$
$$g_{167} = a_2^2a_7b_3 - a_2a_4a_0^3b_9 + a_2a_7a_0b_4 - a_4a_7b_1b_0 + a_7a_0^2b_5$$
$$g_{168} = a_2^2a_6b_3 - a_2a_4a_0^3b_8 + a_2a_6a_0b_4 - a_4a_6b_1b_0 + a_6a_0^2b_5$$
$$g_{169} = a_2^2a_5b_3 - a_2a_4a_0^3b_7 + a_2a_5a_0b_4 - a_4a_5b_1b_0 + a_5a_0^2b_5$$
$$g_{170} = a_2^2a_4^2b_3 - a_2a_3^2a_0b_6 + a_2a_3a_4a_0b_5 - a_4^3b_1b_0 + a_4^2a_0^2b_5$$
$$g_{171} = a_2^2a_3^2b_6 - a_2^2a_3a_4b_5 + a_2^2a_4^2b_4 - a_2a_3a_4a_0b_6 + a_2a_4^2a_0b_5 + a_4^2a_0^2b_6$$
$$g_{172} = a_2^3a_3a_0b_9 + a_2^2a_7b_4 + a_2a_7a_0b_5 + a_7a_0^2b_6$$
$$g_{173} = a_2^3a_3a_0b_8 + a_2^2a_6b_4 + a_2a_6a_0b_5 + a_6a_0^2b_6$$

$$
\begin{aligned}
g_{174} &= a_2^3a_3a_0b_7 + a_2^2a_5b_4 + a_2a_5a_0b_5 + a_5a_0^2b_6\\
g_{175} &= a_1a_4^2a_0b_9 + a_2a_4^2a_0b_9 - a_3a_7b_6 + a_4a_7b_5\\
g_{176} &= a_1a_4^2a_0b_8 + a_2a_4^2a_0b_8 - a_3a_6b_6 + a_4a_6b_5\\
g_{177} &= a_1a_4^2a_0b_7 + a_2a_4^2a_0b_7 - a_3a_5b_6 + a_4a_5b_5\\
g_{178} &= a_2^2a_4^2a_0b_9 - a_2a_3a_7b_6 + a_2a_4a_7b_5 + a_4a_7a_0b_6\\
g_{179} &= a_2^2a_4^2a_0b_8 - a_2a_3a_6b_6 + a_2a_4a_6b_5 + a_4a_6a_0b_6\\
g_{180} &= a_2^2a_4^2a_0b_7 - a_2a_3a_5b_6 + a_2a_4a_5b_5 + a_4a_5a_0b_6\\
g_{181} &= a_2^2a_3a_4a_0b_9 - a_2a_4^2a_0^2b_9 + a_2a_4a_7b_4 + a_3a_7a_0b_6\\
g_{182} &= a_2^2a_3a_4a_0b_8 - a_2a_4^2a_0^2b_8 + a_2a_4a_6b_4 + a_3a_6a_0b_6\\
g_{183} &= a_2^2a_3a_4a_0b_7 - a_2a_4^2a_0^2b_7 + a_2a_4a_5b_4 + a_3a_5a_0b_6\\
g_{184} &= a_2^2a_3^2a_0b_9 + a_2a_3a_7b_4 - a_2a_4a_7b_3 + a_3a_7a_0b_5 + a_4^2a_0^3b_9 - a_4a_7a_0b_4\\
g_{185} &= a_2^2a_3^2a_0b_8 + a_2a_3a_6b_4 - a_2a_4a_6b_3 + a_3a_6a_0b_5 + a_4^2a_0^3b_8 - a_4a_6a_0b_4\\
g_{186} &= a_2^2a_3^2a_0b_7 + a_2a_3a_5b_4 - a_2a_4a_5b_3 + a_3a_5a_0b_5 + a_4^2a_0^3b_7 - a_4a_5a_0b_4\\
g_{187} &= a_4a_0^6b_9^2 + a_7^2b_1b_3b_0 - a_7a_0^4b_4b_9\\
g_{188} &= a_4a_0^6b_8b_9 + a_6a_7b_1b_3b_0 - a_7a_0^4b_4b_8\\
g_{189} &= a_4a_0^6b_8^2 + a_6^2b_1b_3b_0 - a_6a_0^4b_4b_8\\
g_{190} &= a_4a_0^6b_7b_9 + a_5a_7b_1b_3b_0 - a_7a_0^4b_4b_7\\
g_{191} &= a_4a_0^6b_7b_8 + a_5a_6b_1b_3b_0 - a_6a_0^4b_4b_7\\
g_{192} &= a_4a_0^6b_7^2 + a_5^2b_1b_3b_0 - a_5a_0^4b_4b_7\\
g_{193} &= a_3^2a_7b_6 - a_3a_4a_7b_5 - a_4^3a_0^2b_9 + a_4^2a_7b_4\\
g_{194} &= a_3^2a_6b_6 - a_3a_4a_6b_5 - a_4^3a_0^2b_8 + a_4^2a_6b_4\\
g_{195} &= a_3^2a_5b_6 - a_3a_4a_5b_5 - a_4^3a_0^2b_7 + a_4^2a_5b_4
\end{aligned}
$$

Bezüglich der gleichen Monomialordnung ist eine Gröbner-Basis $H = \{h_1, \dots, h_{81}\}$ des Ideals $(I^*|_{a_0=0} : \langle a_0, \dots, a_7\rangle^\infty)$ gegeben durch die folgenden Polynome:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= b_0^2\\
h_2 &= b_2b_0\\
h_3 &= b_1b_0\\
h_4 &= b_2^2b_3 - b_2b_5b_0\\
h_5 &= b_1b_2b_3 - b_2b_4b_0\\
h_6 &= b_1^2b_6 - b_1b_2b_5 + b_2^2b_4\\
h_7 &= b_1^2b_3\\
h_8 &= a_0\\
h_9 &= a_1b_0 + a_2b_0\\
h_{10} &= a_1b_3 + a_2b_3\\
h_{11} &= a_4b_1b_2\\
h_{12} &= a_4b_1^3\\
h_{13} &= a_4b_2^3b_4\\
h_{14} &= a_3b_1b_2 + a_4b_1^2
\end{aligned}
$$

$$h_{15} = a_3 b_1^2$$
$$h_{16} = a_3 b_6 b_0 - a_4 b_2 b_3$$
$$h_{17} = a_3 b_2 b_6 + a_4 b_1 b_6 - a_4 b_2 b_5$$
$$h_{18} = a_3 b_2 b_3 - a_3 b_5 b_0 + a_4 b_1 b_3$$
$$h_{19} = a_3 b_1 b_6 - a_4 b_2 b_4 + a_4 b_6 b_0$$
$$h_{20} = a_3 b_1 b_5 - a_3 b_2 b_4 - a_4 b_1 b_4 + a_4 b_5 b_0$$
$$h_{21} = a_3 b_1 b_3 - a_3 b_4 b_0 + a_4 b_3 b_0$$
$$h_{22} = a_3 b_2^2 b_4 + a_4 b_1^2 b_5 + a_4 b_1 b_2 b_4 - a_4 b_2 b_5 b_0$$
$$h_{23} = a_2^2 b_0$$
$$h_{24} = a_2^2 b_3$$
$$h_{25} = a_1 a_2 b_1$$
$$h_{26} = a_1 a_2 b_6 - a_4 b_2^2$$
$$h_{27} = a_1 a_2 b_5 - a_3 b_2^2$$
$$h_{28} = a_1 a_2 b_4 + a_4 b_1^2$$
$$h_{29} = a_7 b_4$$
$$h_{30} = a_7 b_3$$
$$h_{31} = a_7 b_1 b_2$$
$$h_{32} = a_7 b_1^2$$
$$h_{33} = a_7 b_6 b_0$$
$$h_{34} = a_7 b_5 b_0$$
$$h_{35} = a_7 b_1 b_6$$
$$h_{36} = a_7 b_1 b_5$$
$$h_{37} = a_6 b_9 - a_7 b_8$$
$$h_{38} = a_6 b_4$$
$$h_{39} = a_6 b_3$$
$$h_{40} = a_6 b_1 b_2$$
$$h_{41} = a_6 b_1^2$$
$$h_{42} = a_6 b_6 b_0$$
$$h_{43} = a_6 b_5 b_0$$
$$h_{44} = a_6 b_1 b_6$$
$$h_{45} = a_6 b_1 b_5$$
$$h_{46} = a_5 b_9 - a_7 b_7$$
$$h_{47} = a_5 b_8 - a_6 b_7$$
$$h_{48} = a_5 b_4$$
$$h_{49} = a_5 b_3$$
$$h_{50} = a_5 b_1 b_2$$
$$h_{51} = a_5 b_1^2$$
$$h_{52} = a_5 b_6 b_0$$
$$h_{53} = a_5 b_5 b_0$$
$$h_{54} = a_5 b_1 b_6$$

$$
\begin{aligned}
h_{55} =& a_5 b_1 b_5 \\
h_{56} =& a_4^2 b_1^2 \\
h_{57} =& a_4^2 b_2^2 b_9 - a_7 b_6^2 \\
h_{58} =& a_4^2 b_2^2 b_8 - a_6 b_6^2 \\
h_{59} =& a_4^2 b_2^2 b_7 - a_5 b_6^2 \\
h_{60} =& a_4^2 b_2^2 b_4 \\
h_{61} =& a_3 a_4 b_2^2 b_9 - a_7 b_5 b_6 \\
h_{62} =& a_3 a_4 b_2^2 b_8 - a_6 b_5 b_6 \\
h_{63} =& a_3 a_4 b_2^2 b_7 - a_5 b_5 b_6 \\
h_{64} =& a_3^2 b_2^2 b_9 - a_7 b_5^2 \\
h_{65} =& a_3^2 b_2^2 b_8 - a_6 b_5^2 \\
h_{66} =& a_3^2 b_2^2 b_7 - a_5 b_5^2 \\
h_{67} =& a_1 a_2 a_4 b_9 - a_7 b_6 \\
h_{68} =& a_1 a_2 a_4 b_8 - a_6 b_6 \\
h_{69} =& a_1 a_2 a_4 b_7 - a_5 b_6 \\
h_{70} =& a_1 a_2 a_3 b_9 - a_7 b_5 \\
h_{71} =& a_1 a_2 a_3 b_8 - a_6 b_5 \\
h_{72} =& a_1 a_2 a_3 b_7 - a_5 b_5 \\
h_{73} =& a_1^2 a_2^2 b_9 - a_7 b_2^2 \\
h_{74} =& a_1^2 a_2^2 b_8 - a_6 b_2^2 \\
h_{75} =& a_1^2 a_2^2 b_7 - a_5 b_2^2 \\
h_{76} =& a_1 a_3^2 b_6 - a_1 a_3 a_4 b_5 + a_1 a_4^2 b_4 + a_2 a_3^2 b_6 - a_2 a_3 a_4 b_5 + a_2 a_4^2 b_4 \\
h_{77} =& a_3 a_7 b_6 - a_4 a_7 b_5 \\
h_{78} =& a_3 a_6 b_6 - a_4 a_6 b_5 \\
h_{79} =& a_3 a_5 b_6 - a_4 a_5 b_5 \\
h_{80} =& a_3^3 b_6 - a_3^2 a_4 b_5 + a_3 a_4^2 b_4 - a_4^3 b_3 \\
h_{81} =& a_2^2 a_3^2 b_6 - a_2^2 a_3 a_4 b_5 + a_2^2 a_4^2 b_4
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[AdLo96] Adams, William W. & Loustaunau, Philippe. An Introduction to Gröbner Bases. American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics. Volume 3. 1996.

[AtMa69] Atiyah, M. F. & MacDonald, I. G. Introduction to Commutative Algebra. Reading, Massachusetts, Menlo Park, California, London, Don Mills, Ontario. Addison-Wesley Publishing Company. 1969

[Bat94] Batyrev, Victor V. Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces in Toric Varieties. J. Algebraic Geometry 3, 493-535. 1994.

[BeWe93] Becker, T. & Weispfenning V., Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra. Berlin, New York. Springer-Verlag. 1993.

[Boc94] Bôcher, M. Über die Reihenentwicklung der Potentialtheorie. Mit einem Vorwort von F. Klein. Leipzig. B. G. Teubner. 1894.

[Bou72] Bourbaki, Nicolas. Commutative Algebra. Elements of Mathematics. English Translation. Paris. Hermann, Publishers in Arts and Science. Reading, Massachusetts. Addison-Wesley Publishing Company. 1972.

[CoLe55] Coddington, Earl A. & Levinson, Norman. Theory of Ordinary Differential Equations. New York, Toronto, London. Mc Graw-Hill Book Company. 1955.

[Del70] Deligne, Pierre. Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers. Lecture Notes in Mathematics 163. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag. 1970.

[Dim92] Dimca, Alexandru. Singularities and Topology of Hypersurfaces. New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris. Springer-Verlag. 1992.

[Eis99] Eisenbud, D. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics 150. 3rd printing. Berlin. Springer-Verlag. 1999.

[Gra00] Gray, Jeremy J. Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré. 2nd edition. Boston, Basel, Berlin. Birkhäuser. 2000.

[GrHa78] Griffiths, Ph. & Harris, J. Principles of Algebraic Geometry. New York. John Wiley & Sons, Inc. 1978.

[GrPf02a] Greuel, Gert-Martin Pfister & Pfister, Gerhard. A Singular Introduction to Commutative Algebra. Berlin Heidelberg New York. Springer-Verlag. 2002.

[GrPf02b] Greuel, Gert-Martin Pfister & Pfister, Gerhard. Singular. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. http://www.singular.uni-kl.de/. 2002.

[Hae87] Haefliger. Local Theory of Meromorphic Connections in Dimension One (Fuchs Theory). In: Algebraic D-Modules. A. Borel et al. Perspectives in Mathematics. Volume 2. Orlando, Florida. Academic Press Inc. 1987.

[Har64] Hartman, Philip. Ordinary Differential Equations. New York, London, Sydney. John Wiley & Sons, Inc. 1964.

[Har77] Hartshorne, Robin. Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics 52. New York, Heidelberg, Berlin. Springer-Verlag. 1977.

[Her75] Herold, Horst. Differentialgleichungen im Komplexen. Studia Mathematica Skript 2. Göttingen. Vandenhoeck & Ruprecht. 1975.

[Heu91] Heuser, Harro. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Mathematische Leitfäden. Stuttgart. B.G. Teubner. 1991.

[Inc56] Ince, E. L. Ordinary Differential Equations. New Edition. New York. Dover Publications Inc. 1956.

[KaKa83] Kaup, L. & Kaup B. Holomorphic Functions of Several Variables. De Gruyter Studies in Mathematics. Berlin. Walter de Gruyter & Co. 1983.

[Kle94] Klein, C. F. Vorlesungen über lineare Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung. Göttingen. Autogr. Vorlesung. 1894.

[Kun97] Kunz, Ernst. Einführung in die algebraische Geometrie. Vieweg Studium, Aufbaukurs Mathematik. Braunschweig, Wiesbaden. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH. 1997.

[Mil68] Milnor, John. Singular Points of Complex Hypersurfaces. Ann. of Math. Studies 61. Princeton. Princeton University Press. 1968.

[Mum95] Mumford, David. Algebraic Geometry I. Complex Projective Varieties. Corrected Second Printing. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag. 1995.

[Mum99] Mumford. The Red Book of Varieties and Schemes. 2nd edition. Lecture Notes in Mathematics 1358. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag. 1999.

[Oda85] Oda, Tadao. Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Band 15. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo. Springer-Verlag. 1985.

[Oss92] Ossa, Erich. Topologie. Vieweg-Studium 42. Aufbaukurs Mathematik. Braunschweig, Wiesbaden. Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH. 1992.

[Rai64] Rainville, Earl D. Intermediate Differential Equations. 2nd edition. New York. The Maxmillan Company. Toronto, Ontario. Collier-Macmillan Canada Ltd. 1964.

[Sab02] Sabbah, Claude. Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius. Savoirs Actuels. Paris. CNRS Éditions. EDP Sciences. 2002.

[Wal96] Walter, Wolfgang. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 6. Auflage. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag. 1996.

[WhWa63] Whittaker, E. T. & Watson G. N. A Course of Modern Analysis. Fourth edition reprinted. Cambridge at the University Press. 1963.

Zusammenfassung

Gegenstand der Betrachtungen sind Familien gewöhnlicher, linearer, komplexer Differenzialgleichungen der Fuchs'schen Klasse. Diese sind stets von der Form

$$\frac{d^n w}{dz^n} + \frac{h_1(z)}{\prod_{i=1}^m (z-s_i)^1} \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + \frac{h_n(z)}{\prod_{i=1}^m (z-s_i)^n} w = 0, \tag{C.1}$$

wobei h_j ein Polynom in z höchstens vom Grade $j(m-1)$ ist. Die Koeffizienten der Polynome h_j sowie die Singularitäten $s_1, \ldots, s_m$ seien polynomial in $a_1, \ldots, a_R$ parametrisiert.

Ziel der Überlegungen ist es, den Parameterraum

$$S := \mathbb{C}^R \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} \{ s_1(a_1, \ldots, a_R) - s_j(a_1, \ldots, a_R) = 0 \} \right)$$

einer vorgegebenen Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen in einem Kompaktum abzuschließen und die Familie fortzusetzen. Es können die Koeffizienten der Differenzialgleichung als rationale Funktionen in $(\mathbb{C}[z])(a_1, \ldots, a_R)$ angesehen werden. Die Fortsetzung der Differenzialgleichung über dem Abschluss des Parameterraums in einem komplex-projektiven Raum kann möglicherweise nicht eindeutig sein, da die fortgesetzten, rationalen Funktionen Unbestimmtheitsstellen aufweisen können. Um die Zuordnung einer Differenzialgleichung zu einem Parameter eindeutig werden zu lassen, wird der Parameterraum erweitert und der Begriff des „Graphen einer rationalen Funktion“ verallgemeinert: Die Koeffizienten der vorgegebenen Differenzialgleichung werden nennergleich gemacht und diese Differenzialgleichung im Anschluss mit der allgemeinen Form

$$\frac{d^n w}{dz^n} + \frac{\sum_{i=0}^{nm-1} b_{1,i} z^i}{(z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m)^n} \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\sum_{i=0}^{nm-n} b_{n,i} z^i}{(z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m)^n} w = 0, \tag{C.2}$$

identifiziert. Dadurch erhält man einen Morphismus affiner Varietäten

$$\mathbb{C}^R \longrightarrow \mathbb{C}^{\tilde{N}+m}, \qquad \tilde{N} := n^2 m + n - \frac{1}{2} n(n+1),$$

dessen Graph $\Gamma \subset \mathbb{C}^{R+\tilde{N}+m}$ im kartesischen Produkt $\mathbb{P}^R_{\mathbf{p}} \times \mathbb{P}^{\tilde{N}+m}_{\mathbf{q}}$ zweier gewichtet-projektiver Räume abgeschlossen werden kann (bezüglich der durch die jeweiligen Zariski-Topologien induzierten Topologie). Es entspricht jeder Punkt von

$\Gamma \subset \mathbb{C}^{R+\tilde{N}+m}$ eindeutig einer Differenzialgleichung der Form (C.1) bzw. (C.2). Die über dem unendlich fernen Teil des Parameterraums entstehenden Differenzialgleichungen erhält man, indem der Schnitt von $\overline{\Gamma}$ mit $\{a_0 = 0\}$ auf $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^{\tilde{N}+m}$ projiziert wird.

Der Abschluss von Γ in $\mathbb{P}_{\mathbf{p}}^{R} \times \mathbb{P}_{\mathbf{q}}^{\tilde{N}+m}$ wird durch die Bi-Quasi-Homogenisierung des Ideals $\mathcal{I}(\Gamma)$ erreicht. Dazu sind zwei Vorgehensweisen erarbeitet worden: Zum Einen kann durch eine Primärzerlegung eines geeigneten Kandidaten für die Bi-Quasi-Homogenisierung von $\mathcal{I}(\Gamma)$ auf die tatsächliche Bi-Quasi-Homogenisierung geschlossen werden. Zum Anderen ist es möglich, die Bi-Quasi-Homogenisierung unter Zuhilfenahme von Gröbner-Basen zu berechnen. Letzteres ist ebenso ein hilfreiches Instrument bei der Bestimmung der Projektion des unendlich fernen Teils des Graphen (Elimination).

Die beschriebene Vorgehensweise wird unter Einsatz des Computer-Algebra-Programmes SINGULAR angewendet auf (a) die Familie der hypergeometrischen Differenzialgleichungen und (b) die (größere) Familie der Riemann'schen Differenzialgleichungen. In beiden Fällen wird untersucht, welche der Differenzialgleichungen, die über dem unendlich fernen Teil des Parameterraumes liegen, zur Fuchs'schen Klasse gehören bzw. irreguläre Singularitäten aufweisen. Im Fall (a) treten unter anderem sämtliche konfluenten hypergeometrischen Differenzialgleichungen auf, die aus der klassischen Literatur bekannt sind und aus einer anderen Kompaktifizierung hervorgehen (vgl. WHITTAKER & WATSON, A Course Of Modern Analysis, Chapter XVI, S. 337ff). Im Fall (b) erhält man beispielsweise die Bessel'sche Differenzialgleichung.

In beiden Fällen treten entartete Differenzialgleichungen auf (in dem Sinne, dass durch Multiplikation mit dem Nenner eines Koeffizienten eine Differenzialgleichung niederer Ordnung entsteht, wenn dieser als Funktion von z identisch verschwindet). Die Kompaktifizierung des erweiterten Parameterraums ist derart gewählt, dass eine „Differenzialgleichung“ der Art $0 = 0$ nicht entstehen kann. Es sei angemerkt, dass auf diese Weise zwar die Familie Fuchs'scher Differenzialgleichungen über derartige Entartungsstellen fortgesetzt werden kann. Die zugehörige Familie lokaler Systeme lässt sich hingegen nicht geeignet in diese Punkte fortsetzen.