Die de Rham-Kohomologie auf zweidimensionalen schwach normalen komplexen Räumen

Anja Wenning

November 2007

Mathematisches Institut
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Mathematik

Die de Rham-Kohomologie auf zweidimensionalen schwach normalen komplexen Räumen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Anja Wenning
aus Nordhorn
-2007-

Dekan:	Prof. Dr. Dr. h.c. Joachim Cuntz
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Helmut A. Hamm
Zweiter Gutachter:	Dr. Jörg Schürmann

Tag der mündlichen Prüfung:	24. Januar 2008
Tag der Promotion:	24. Januar 2008

Für André

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei all denen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit in ganz unterschiedlicher Weise unterstützt haben.

Mein erster Dank richtet sich an Herrn Prof. Dr. Helmut A. Hamm für die Betreuung und Unterstützung meines Promotionsvorhabens, die sich durch stetige Bereitschaft zu klärenden Gesprächen, viele wertvolle Ratschläge und Hinweise sowie etliche aufmunternde Worte auszeichnete. Weiter danke ich der Arbeitsgruppe *Geometrie singulärer Räume* und den Kollegen aus dem Blauen Pavillon: Dennis Bohle, Dr. Steve Brüske, Dr. Gunnar Dietz, Dr. Daniel Epping, Dr. Björn Hille, Christian Kappen, Hendrik Schlieter und Christian Wahle. Die anregenden Diskussionen und gemütlichen Kaffeetrinken haben zur angenehmen und motivierenden Arbeitsatmosphäre und zum Spaß an der Mathematik beigetragen. Ein ganz besonderer Dank gilt auch Dr. Jörg Schürmann für viele hilfreiche Anmerkungen bei der Fertigstellung dieser Arbeit. Für fachliche und finanzielle Unterstützung danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Zum Schluss möchte ich mich bei meiner Familie bedanken: bei meinen Eltern und Schwiegereltern für die zahlreichen Aufmunterungen und für spontane Babysitterdienste und bei Julian für sein Lachen und seine Fröhlichkeit, die mir immer wieder Mut gemacht haben. Vor allem danke ich Dir, André, für die vielen, vielen Ermutigungen und die tatkräftige Unterstützung in den letzten Jahren.

Einleitung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist eine holomorphe Abbildung $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ auf einem schwach normalen zweidimensionalen komplexen Raum $\tilde{X}$ mit einem isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei $x \in \tilde{X}$ und $f(x) = 0$. Die Monodromie dieser Singularität soll zunächst topologisch und anschließend mittels Differentialformen und relativer de Rham-Kohomologie analytisch beschrieben werden.

Milnor begann die topologische Untersuchung isolierter Hyperflächensingularitäten und definierte eine lokale Picard-Lefschetz-Monodromie, vgl. [Mil68]. Geht man von einem Keim $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ einer isolierten Hyperflächensingularität aus, so erhält man nach Milnor für $\varepsilon \ll \delta$ ein differenzierbares lokal triviales Faserbündel $f' : X' \to S'$, $S' = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \varepsilon\} \backslash \{0\}$, $X' = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : |x| < \delta\} \cap f^{-1}(S')$.
Die Kohomologiegruppen $H^p(X_t, \mathbb{C})$, $X_t = f^{-1}(t)$, $t \in S'$, $p > 0$, sind Fasern eines komplexen Vektorbündels über S'. Die Garbe der lokal konstanten Schnitte ist durch $\underline{H} = R^p f'_* \mathbb{C}_{X'}$ gegeben, die der holomorphen Schnitte ergibt sich durch Tensorieren:

$$\mathscr{H} := R^p f'_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}.$$

Auf dieser Garbe ist nun ein kanonischer Zusammenhang definiert, der auch als topologischer Gauss-Manin-Zusammenhang bezeichnet wird. Andererseits definiert $\underline{H}$ eine Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser $H^p(X_t, \mathbb{C})$, $t \in S'$. Damit wird durch die Schleife um Null in der Basis S' eine lineare Transformation

$$H^p(X_t, \mathbb{C}) \to H^p(X_t, \mathbb{C})$$

definiert, die sogenannte lokale Picard-Lefschetz-Monodromietransformation.
Diese kann nun algebraisch mit Hilfe des sogenannten Gauss-Manin-Zusammenhangs beschrieben werden. Ursprünglich wurde er für Familien von Mannigfaltigkeiten eingeführt. Die Familie X_t, $t \in S'$, entartet jedoch in der singulären Faser $X_0 = f^{-1}(0)$. Brieskorn definiert in [Bri70] einen verallgemeinerten Zusammenhang, den singulären Gauss-Manin-Zusammenhang mit einer regulären Singularität bei Null. Dazu beweist er zunächst das relative Poincaré-Lemma, welches besagt, dass der Komplex

$$0 \to f'^{-1} \mathscr{O}_{S'} \to \Omega^{\cdot}_{X'/S'}$$

exakt ist. Damit kann $\mathscr{H}$ mittels relativer Differentialformen beschrieben werden. Da zusätzlich f' steinsch ist, gilt

$$\mathbb{R}^p f'_*(\Omega^{\cdot}_{X'/S'}) = \mathscr{H}^p(f'_*\Omega^{\cdot}_{X'/S'}).$$

Diese Garbe stimmt auf S' mit $\mathscr{H}$ überein und lässt sich nun durch $\mathscr{H}^p(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$ leicht nach ganz $S = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \varepsilon\}$ fortsetzen, wobei f jetzt als Funktion auf $X = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} : |x| < \delta\} \cap f^{-1}(S)$ verstanden wird. Brieskorn beweist, dass diese Fortsetzung kohärent ist. Er zeigt, dass f als Einschränkung einer eigentlichen Abbildung $\bar{f} : Y \to S$ aufgefasst werden kann, wendet den Grauertschen Kohärenzsatz an und kann dann auf die Kohärenz der $\mathscr{H}^p(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$, $p > 0$, schließen.
Anschließend wird auf der fortgesetzten Garbe auf analytischem Weg ein regulär singulärer Zusammenhang definiert, der auf $\mathscr{H}$ mit dem oben definierten topologischen Gauss-Manin-Zusammenhang übereinstimmt.

Als Verallgemeinerung dieser Überlegungen wird in der vorliegenden Arbeit eine holomorphe Funktion $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ mit einem isolierten kritischen Punkt $x \in \tilde{X}$ im stratifizierten Sinn mit $f(x) = 0$ auf einem zweidimensionalen schwach normalen komplexen Raum $\tilde{X}$ betrachtet. Dieser Raum kann nun zusätzlich nichtisolierte Singularitäten aufweisen.

Ausgangspunkt für die topologische Beschreibung der Monodromie ist das lokal triviale Faserbündel $f' : X' \to S'$, welches sich nach Einschränkung von f auf eine geeignete Teilmenge X' des Urbildes $f^{-1}(S')$ einer punktierten Nullumgebung ergibt. Dieses topologische Faserbündel existiert schon für einen isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn auf einem beliebigen zweidimensionalen komplexen Raum. Damit erhält man die lokal freie Garbe $\mathscr{H} = R^p f'_*\mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}$ und den topologischen Gauss-Manin-Zusammenhang.

Für die analytische Beschreibung der Monodromie werden charakteristische Eigenschaften zweidimensionaler schwach normaler komplexer Räume hergeleitet und verwendet. Geht man von einem beliebigen zweidimensionalen komplexen Raum aus, so erhält man seine schwache Normalisierung durch Erweiterung der Strukturgarbe um die schwach holomorphen stetigen Funktionen. Insbesondere bleibt hierbei die topologische Struktur erhalten. Will man die Topologie eines isolierten kritischen Punktes einer holomorphen Funktion auf einem beliebigen komplexen Raum beschreiben, kann somit der induzierte kritische Punkt auf der schwachen Normalisierung betrachtet werden.

Die Riemannschen Hebbarkeitssätze gelten auf komplexen Räumen im Allgemeinen nicht. Schwach normale Räume zeichnen sich jedoch gerade dadurch aus, dass auf ihnen der Riemannsche Hebbarkeitssatz in der schwachen Version gilt: Jede stetige Funktion, die außerhalb einer dünnen analytischen Teilmenge holomorph ist, besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf den ganzen Raum.

„Prototypen“ für reduzierte eindimensionale schwach normale Räume sind Koordinatenkreuze, also die Mengen $Y_r = \{(z_1, \ldots, z_r) \in \mathbb{C}^r \,|\, \exists i \in \{1, \ldots, r\} : \ z_j = 0 \ \forall j \neq i\}, r \in \mathbb{N}$. Ein reduzierter zweidimensionaler schwach normaler komplexer Raum $\tilde{X}$ lässt sich nun mittels dieser Koordinatenkreuze lokal beschreiben: Bis auf isolierte Punkte ist $(\tilde{X}, y)$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$ isomorph zu $(\mathbb{C} \times Y_r, 0)$, vgl. Satz 2.2.1. Bemerkenswert ist, dass das r allein durch die Topologie des Raumkeimes $\tilde{X}_y$ bestimmt ist und damit schon die analytische Struktur festlegt.

Wir erhalten zudem eine kanonische Whitney-Stratifizierung, eine geeignete Zerlegung in glatte Mannigfaltigkeiten, von $\tilde{X}$. Eine holomorphe Funktion auf $\tilde{X}$ entspricht dann in den nichtkritischen Punkten in geeigneten lokalen Koordinaten gerade der Projektion $\mathbb{C} \times Y_r \to \mathbb{C}$ auf die erste Komponente für ein $r \in \mathbb{N}_0$, siehe Satz 2.3.1. Die lokale analytische Gestalt dieser Abbildung in den nichtkritischen Punkten wird also ebenfalls allein durch die topologische Größe r festgelegt.

Diese explizite Kenntnis über die lokale Gestalt von $\tilde{X}$ und f ermöglicht es, die holomorphen Differentialformen $\Omega^p_{\tilde{X},y}$, $p \in \mathbb{N}$, $y \in \tilde{X}$, bis auf die durch die nulldimensionalen Strata gegebenen Punkte zu beschreiben (Sätze 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3). Schließlich kann das relative Poincaré-Lemma in den nichtkritischen Punkten nachgerechnet werden (Satz 3.3.2). Damit kann die Garbe $\mathscr{H}$ mittels de Rham-Kohomologie beschrieben und fortgesetzt werden.

Als Hilfsmittel für den weiteren Kohärenzbeweis der fortgesetzten Garbe $\mathscr{H}(X/S)$, der ähnlich wie bei [Bri70] geführt wird, werden die Fasern von f durch eine Linearform abgeschnitten und anschließend durch Einkleben von Kreisscheiben kompaktifiziert. Eine geeignete Einschränkung $f|_X : X \to S$ kann somit als Einschränkung einer eigentlichen Funktion $\bar{f} : Y \to S$ aufgefasst werden, die zudem so konstruiert wird, dass $\bar{f}|_{Y \setminus \bar{X}}$ ein lokal triviales differenzierbares Faserbündel ist, vgl. Satz 4.1.1. Auch dieser Satz bleibt unter der allgemeineren Voraussetzung einer Funktion auf einem beliebigen zweidimensionalen Whitney-stratifizierten Raum gültig.

Abschließend wird unter Verwendung der expliziten Darstellungen der Differentialformen der topologisch definierte Gauss-Manin-Zusammenhang auf analytischem Weg als verbindender Homomorphismus beschrieben und zu einem singulären Zusammenhang fortgesetzt.

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen für die folgenden Überlegungen eingeführt. Dazu zählen die Definition (schwach) normaler und stratifizierter komplexer Räume mit wichtigen Eigenschaften sowie einige Tatsachen aus der Garbenkohomologie und als Verallgemeinerung der Hyperkohomologie. Den Abschluss bildet ein Teilkapitel über Differentialformen auf komplexen Räumen, das (relative) Poincaré-Lemma und die daraus folgende (relative) de Rham-Kohomologie.

Die Untersuchung zweidimensionaler schwach normaler komplexer Räume ist Gegenstand des zweiten Kapitels. Die schwache Normalität von Koordinatenkreuzen wird bewiesen und darauf aufbauend werden schwach normale zweidimensionale komplexe Räume sowie Abbildungen darauf lokal beschrieben.

Das dritte Kapitel widmet sich der expliziten Beschreibung der Differentialformen auf zweidimensionalen schwach normalen komplexen Räumen. Hieraus wird das relative Poincaré-Lemma für die nichtkritischen Punkte einer Abbildung auf einem solchen Raum abgeleitet.

Im vierten Kapitel wird die Monodromie für eine holomorphe Funktion $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ auf einem schwach normalen zweidimensionalen Raum $\tilde{X}$ mit topologischen und analytischen Methoden untersucht. Die Garbe $\mathscr{H}$ wird durch das topologische Faserbündel f' definiert, analytisch beschrieben und fortgesetzt. Die Kohärenz der Fortsetzung wird nachgewiesen. Der zuvor topologisch definierte Gauss-Manin-Zusammenhang wird ebenfalls analytisch beschrieben und fortgesetzt. Die Meromorphie der Fortsetzung wird gezeigt und bildet den Abschluss der vorliegenden Arbeit.

1 Grundlagen

1.1 Normale und schwach normale komplexe Räume

Ein komplexer Raum $(X, \mathscr{O}_X)$ ist ein geringter Hausdorffraum, der lokal der Nullstellenmenge -als $\mathbb{C}$-geringter Raum- endlich vieler holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ entspricht. Lokal ist $(X, \mathscr{O}_X)$damit isomorph zu $(Y, (\mathscr{O}_G|Y/\mathscr{I}))$, wobei $\mathscr{I}$ eine Idealgarbe von endlichem Typ in $\mathscr{O}_G$ und $Y := \operatorname{supp}(\mathscr{O}_G/\mathscr{I}) = \{z \in G : \mathscr{I}_z \neq \mathscr{O}_z\}$ das Nullstellengebilde von $\mathscr{I}$ ist, welches auch mit $N(\mathscr{I})$ bezeichnet wird. Wir wollen im Folgenden nur reduzierte komplexe Räume betrachten, d.h. Räume, in denen jeder Halm $\mathscr{O}_{X,x}$, $x \in X$, der Strukturgarbe $\mathscr{O}_X$ reduziert ist, also keine von Null verschiedenen nilpotenten Elemente enthält. Ein Punkt $x \in X$ eines komplexen Raumes heißt singulär, wenn keine Umgebung von x komplexe Mannigfaltigkeit ist. Die Menge der singulären Punkte wird mit $S(X)$ bezeichnet. Für die Garbe der holomorphen Funktionskeime auf $X = \mathbb{C}^n$ schreiben wir $\mathscr{O}_n$ statt $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$.

Auf komplexen Räumen gilt der Riemannsche Hebbarkeitssatz im Allgemeinen nicht. Dieser besagt, dass jede Funktion, die außerhalb einer dünnen analytischen Teilmenge holomorph und in einer Umgebung dieser beschränkt ist, schon Einschränkung einer holomorphen Funktion auf dem ganzen Raum X ist. In der abgeschwächten Version wird zusätzlich die Stetigkeit der Funktion auf ganz X vorausgesetzt. Die Frage, wann diese Sätze gelten, führt zu normalen bzw. schwach normalen Räumen, die in diesem Kapitel definiert und mit grundlegenden Eigenschaften vorgestellt werden sollen (vgl. dazu [KK83, §71 und §72]).

Definition 1.1.1. (Schwach holomorphe Funktionen)
Sei X ein reduzierter komplexer Raum. Eine schwach holomorphe Funktion auf einer offenen Menge $U \subset X$ ist eine holomorphe Funktion $f : U \setminus A \to \mathbb{C}$, wobei $A \subset U$ eine dünne analytische Menge ist und die Funktion f längs A lokal beschränkt ist.

Damit kann der $\mathscr{O}_X(U)$-Modul $\hat{\mathscr{O}}_X(U)$ der schwach holomorphen Funktionen auf U definiert werden und schließlich auch die Garbe $\hat{\mathscr{O}}_X$ der schwach holomorphen Funktionen.

Definition 1.1.2. (Normale Räume)
Ein reduzierter komplexer Raum X heißt normal in $a \in X$, wenn $\hat{\mathscr{O}}_{X,a} \cong \mathscr{O}_{X,a}$ gilt. Ein Raum X heißt normal, wenn er in jedem Punkt $a \in X$ normal ist.

Bemerkung 1.1.3. ([KK83, 71.1])

(a) $\hat{\mathscr{O}}_{X,a} \cong \mathscr{O}_{X,a}$ *gilt genau dann, wenn* $\mathscr{O}_{X,a}$ *ein normaler Ring ist.*

(b) Ein Raum ist genau dann normal, wenn der Riemannsche Hebbarkeitssatz (in der starken Version) gilt.

Definition 1.1.4. (Normalisierung)
Eine endliche holomorphe Abbildung $\pi : \hat{X} \to X$ *heißt Normalisierung von* X*, falls*

(i) $\hat{X}$ *normal ist und*

(ii) es eine dünne analytische Teilmenge $A \subset X$ *mit folgenden Eigenschaften gibt:*

- $\pi^{-1}(A)$ *ist dünn in* $\hat{X}$ *und*
- $\pi : \hat{X} \setminus \pi^{-1}(A) \to X \setminus A$ *ist biholomorph.*

Äquivalent zu (ii) ist die Bedingung $\hat{\mathscr{O}}_X \cong \pi(\mathscr{O}_{\hat{X}})$.

Satz 1.1.5. (Normalisierungstheorem, [KK83, 71.4])
Jeder reduzierte komplexe Raum besitzt eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Normalisierung. $\hat{\mathscr{O}}_X$ *ist ein kohärenter* $\mathscr{O}_X$*-Modul und das analytische Spektrum* specan $\hat{\mathscr{O}}_X \to \mathscr{O}_X$ *ist die Normalisierung.*

Die Singularitätenmenge eines normalen Raumes hat mindestens Kodimension 2. Es gilt folgender

Satz 1.1.6. ([KK83, 74.3])
Sei X_a *ein normaler komplexer Raumkeim. Dann gilt für die Kodimension der Singularitätenmenge*

$$\operatorname{codim}_{X_a} S(X_a) \geq 2.$$

Während die topologische Struktur des komplexen Raumes X durch eine Normalisierung evtl. verändert wird, bleibt sie bei der sogenannten schwachen Normalisierung erhalten. Ein Raum ist schwach normal, wenn der schwache Riemannsche Hebbarkeitssatz gilt, d.h. es ergibt sich folgende

Definition 1.1.7. (Schwach normaler Raum)
Ein reduzierter komplexer Raum X *heißt schwach normal in* $a \in X$*, wenn* $\mathscr{C}_{X,a} \cap \hat{\mathscr{O}}_{X,a} = \mathscr{O}_{X,a}$ *gilt und schwach normal, wenn er in jedem Punkt* $a \in X$ *schwach normal ist.*

Zu einem reduzierten komplexen Raum $(X, \mathscr{O}_X)$ kann der geringte Raum $\tilde{X} := (X, \hat{\mathscr{O}}_X \cap \mathscr{C}_X)$ gebildet werden. Dass dies einen komplexen Raum definiert, der dann natürlich

schwach normal ist, ist die Aussage des folgenden Satzes. Wir erhalten also einen Morphismus $\tilde{X} \to X$, die schwache Normalisierung von X, welcher als Morphismus von topologischen Räumen die Identität beschreibt.
Für die explizite Beschreibung schwach normaler zweidimensionaler komplexer Räume im 2. Kapitel werden einige Aussagen aus dem Beweis benötigt, weshalb er an dieser Stelle ebenfalls aufgeführt wird.

Satz 1.1.8. (Schwache Normalisierung, [KK83, 72.3])
Sei $X = (X, \mathscr{O}_X)$ ein reduzierter komplexer Raum. Dann ist $\tilde{X} = (X, \hat{\mathscr{O}}_X \cap \mathscr{C}_X)$ ein schwach normaler komplexer Raum.

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, wird gezeigt, dass $\tilde{X}$ dem Quotientenraum $\hat{X}/R_\pi$ entspricht, wobei $\pi : \hat{X} \to X$ die Normalisierung von X ist und R_π die durch $x \sim y :\Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$ definierte Äquivalenzrelation.
Für den Beweis werden zunächst einige Definitionen benötigt.

Definition 1.1.9. (Quotientenraum)
Sei $(T, \mathscr{A})$ ein geringter Raum, $R \subset T \times T$ eine Äquivalenzrelation auf T.

$$\pi_j : (R, \mathscr{C}_R) \longrightarrow (T \times T, \mathscr{C}_{T\times T}) \xrightarrow{pr_j} (T, \mathscr{C}_T) \xrightarrow{Red} (T, \mathscr{A}) \ , \ j = 1, 2$$

seien die kanonischen Projektionen. Dann wird

$$(T, \mathscr{A})/R := (\bar{T}, \bar{\mathscr{A}}) := \text{ coker} \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}}$$

definiert.

Mit *Red* wird hierbei die allgemeine Reduktionsabbildung der Garbe lokaler Algebren $\mathscr{A}$ in die Garbe der stetigen Funktionen $\mathscr{C}$ bezeichnet, welche im Fall der reduzierten Räume der Inklusion entspricht.

Es sei kurz an die Definition des Kokerns eines Morphismenpaares erinnert.

Definition 1.1.10. (Kokern eines Morphismenpaares)
Sei $\mathscr{K}$ eine Kategorie, $f, g : S \to T$ ein Paar von Morphismen. Ein Morphismus $p : T \to \bar{T}$ heißt Kokern von f und g in $\mathscr{K}$, falls

(a) $p \circ f = p \circ g$ gilt und

(b) zu jedem Morphismus h in $\mathscr{K}$ mit $h \circ f = h \circ g$ genau ein Morphismus h' existiert, derart dass

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & T \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h"'] & \bar{T} \arrow[dl, dashed, "h'"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Wenn der Kokern eines Morphismenpaares existiert, so ist er bis auf (kanonische) Isomorphie eindeutig. Zu einem Morphismenpaar von Mengen oder topologischen Räumen existiert immer ein Kokern, $\bar{T}$ ist gegeben durch $T/_{(f(s)\sim g(s))}$.

Auch in der Kategorie der geringten Räume existieren immer Kokerne. Hier muss zusätzlich die Strukturgarbe $\bar{\mathscr{A}}$ von $\bar{T}$ definiert werden. Sei also $f, g : (S, \mathscr{A}_S) \to (T, \mathscr{A}_T)$ ein Paar von Morphismen geringter Räume und $p : T \to \bar{T}$ der topologische Kokern von f und g, aufgefasst als Morphismen topologischer Räume. Die Strukturgarbe $\bar{\mathscr{A}}$ ist für einen reduzierten geringten Raum $(T, \mathscr{A}_T)$ durch

$$\bar{\mathscr{A}}(\bar{V}) \quad = \quad \{\varphi : \bar{V} \to \mathbb{C} : \varphi \circ p \in \mathscr{A}_T(p^{-1}(\bar{V}))\} \tag{1.1}$$

gegeben. Mit dieser Definition ist $(\bar{T}, \bar{\mathscr{A}})$ dann wiederum ein geringter Raum.

Fasst man einen komplexen Raum als geringten Raum auf und bildet wie oben den Kokern, so ist dieser nicht notwendigerweise ein komplexer Raum, da Quotientenräume im Allgemeinen keine komplexen Räume sind.

Bemerkung 1.1.11. ([KK83, 49A.15])
Sei R eine endliche Äquivalenzrelation auf dem komplexen Raum X. Dann gilt

$$\bar{X} = X/R \text{ ist komplexer Raum } \Leftrightarrow \bar{X} \text{ ist lokal } \mathscr{O}_{\bar{X}} - \text{separabel.}$$

Da diese Bedingungen aber in unserem Fall erfüllt sind -R_π ist endlich und X ist holomorph separabel- wird durch $\hat{X}/R_\pi$ ein komplexer Raum definiert, der als topologischer Raum mit X bzw. $\tilde{X}$ übereinstimmt.

Die Strukturgarbe $\mathscr{O}_{\hat{X}/R_\pi}$ ist nun wie folgt durch die Äquivalenzrelation R_π gegeben: Für eine offene Menge $U \subset X$ erhält man mit Gleichung (1.1)

$$\mathscr{O}_{\hat{X}/R_\pi}(U) \cong \{f \in \mathscr{O}_{\hat{X}}(\pi^{-1}(U)),\ f \text{ ist } R_\pi - \text{invariant}\}. \tag{1.2}$$

Andererseits sind die holomorphen Funktionen auf $\tilde{X}$ für eine offene Menge $U \subset \tilde{X}$ durch

$$\mathscr{O}_{\tilde{X}}(U) \cong \underbrace{\hat{\mathscr{O}}_X(U)}_{\cong \mathscr{O}_{\hat{X}}(\pi^{-1}(U))} \cap \mathscr{C}_X(U) \tag{1.3}$$

definiert. Eine Funktion $f \in \mathscr{O}_{\hat{X}}(\pi^{-1}(U))$ repräsentiert also genau dann einen Keim in der Strukturgarbe $\mathscr{O}_{\tilde{X}}(U)$, wenn sie R_π-invariant ist. Damit stimmen die komplexen Räume $\tilde{X}$ und $\hat{X}/R_\pi$ überein. □

Im Fall eines lokal irreduziblen Raumes stimmen Normalisierung und schwache Normalisierung überein, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1.1.12. ([KK83, 71.9])
Für einen Punkt $a \in X$ sind äquivalent:

(a) Jede schwach holomorphe Funktion, repräsentiert durch einen Keim $f \in \hat{\mathscr{O}}_a$, ist stetig in a, d.h. $\hat{\mathscr{O}}_a \subset \mathscr{C}_a$.

(b) X_a ist irreduzibel.

Insbesondere ist die Normalisierungsabbildung π in diesem Fall ein Homöomorphismus.

1.2 Stratifizierte Räume

Untersucht man komplexe Räume, so kann es sinnvoll sein, diese auf geeignete Weise in Mannigfaltigkeiten zu zerlegen. Eine übersichtliche und anschauliche Einführung in die Theorie der stratifizierten Räume findet sich in [GM88, I,1]. Wir benötigen nur die Definitionen sowie das Thomsche Isotopielemma, welche hier eingeführt werden sollen.

Definition 1.2.1. ($\mathscr{S}$-Zerlegung)
Sei $\mathscr{S}$ eine partiell geordnete Menge. Eine $\mathscr{S}$-Zerlegung eines topologischen Raumes Z ist eine lokal endliche Familie disjunkter lokal abgeschlossener Teilmengen $S_i \subset Z$, $i \in \mathscr{S}$, derart dass

(i) $\bigcup_{i \in \mathscr{S}} S_i = Z$ und

(ii) $S_i \cap \bar{S}_j \neq \emptyset \Leftrightarrow S_i \subset \bar{S}_j \Leftrightarrow i = j$ oder $i < j$.

Definition 1.2.2. (Whitney-Stratifizierung)
Sei Z eine abgeschlossene Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit M und

$$Z = \bigcup_{i \in \mathscr{S}} S_i$$

eine $\mathscr{S}$-Zerlegung von Z. Diese Zerlegung heißt Whitney-Stratifizierung, falls jedes S_i eine lokal abgeschlossene glatte Untermannigfaltigkeit von M ist und die beiden Whitney-Bedingungen für jedes Paar $S_\alpha < S_\beta$ erfüllt sind.
Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus S_β, die gegen einen Grenzwert $y \in S_\alpha$ konvergiert, (y_i) eine Folge aus S_α, die ebenfalls gegen y konvergiert. Des Weiteren sollen die Sekanten $l_i = \overline{x_i y_i}$ gegen eine Grenzgerade l konvergieren und die Tangentenebenen $T_{x_i} S_\beta$ gegen eine Grenzebene τ. Dann verlangen die Whitney-Bedingungen:

(a) $T_y S_\alpha \subset \tau$

(b) $l \subset \tau$.

Bemerkung 1.2.3. *Aus (b) folgt (a).*

Anschaulich gewährleisten die Whitney-Bedingungen, dass die Topologie der Singularitäten des Raumes entlang eines Stratums lokal konstant ist.

Bemerkung 1.2.4. *Die Definitionen 1.2.1 und 1.2.2 werden zunächst im reellen Zusammenhang für die Situation eines eingebetteten Raumes aufgestellt.*
Im komplex analytischen Kontext fordern wir, dass jedes Stratum S_i *eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Man kann mit dem Fortsetzungssatz von Remmert und Stein, vgl. [GR84, Chapter 9, §4.2] zeigen, dass dann der Abschluss jedes Stratums wiederum komplex analytisch ist.*
Da wir an der lokalen Beschreibung eines reduzierten komplexen Raumes interessiert sind, ist es ausreichend, die eingebettete Situation zu betrachten.

Definition 1.2.5. (Kritischer Punkt)
Sei Z *Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit* M *mit einer gegebenen Whitney-Stratifizierung. Durch* $f : Z \to \mathbb{R}$, *(bzw.* $f : Z \to \mathbb{C}$*) sei eine Funktion gegeben, die sich als Einschränkung einer differenzierbaren Funktion* $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ *(bzw.* $\tilde{f} : M \to \mathbb{C}$*) ergibt. Nun heißt* $z \in Z$ *kritischer Punkt von f, falls* $d\tilde{f}|_{T_p S}(z) = 0$, *wobei* $S \subset Z$ *das Stratum ist, welches p enthält. Das Element* $v = f(z)$ *heißt dann kritischer Wert.*
Ein $z \in Z$ *heißt isolierter kritischer Punkt, wenn es eine Umgebung* U *von* z *in* Z *gibt, derart dass* $f|_U$ *keine weiteren kritischen Punkte besitzt. Der zugehörige Wert* $v = f(z)$ *heißt dann isoliert, wenn es eine Umgebung* W *von* v *gibt, derart dass* f *auf* $f^{-1}(W)$ *keine weiteren kritischen Punkte enthält.*

Bemerkung 1.2.6. *Insbesondere sind die* 0*-dimensionalen Strata nach dieser Definition kritische Punkte jeder Funktion* f, *die auf dem stratifizierten Raum definiert ist.*

Definition 1.2.7. (Stratifizierte Submersion)
Sei Z *eine Whitney-stratifizierte Teilmenge einer glatten Mannigfaltigkeit* M *und* $f : M \to N$ *eine* $\mathscr{C}^\infty$*-Abbildung, d.h. beliebig oft reell differenzierbar. Die Einschränkung* $f|_Z$ *heißt (eigentliche) stratifizierte Submersion, falls*

(a) $f|_Z$ *eigentlich ist und*

(b) für jedes Stratum S *von* Z *die eingeschränkte Abbildung* $f|_S$ *submersiv ist.*

Satz 1.2.8. (1. Thomsches Isotopielemma)
Sei $f : Z \to \mathbb{R}^n$ *eine eigentliche stratifizierte Submersion. Dann gibt es einen stratumerhaltenden Homöomorphismus*

$$h : Z \to \mathbb{R}^n \times (f^{-1}(0) \cap Z),$$

der auf jedem Stratum glatt ist und mit der Projektion nach $\mathbb{R}^n$ *kommutiert. Insbesondere sind die Fasern von* $f|_Z$ *homöomorph durch einen stratumerhaltenden Homöomorphismus.*

1.3 Bildgarben

An dieser Stelle werden nun kurz die wichtigsten Definitionen und Sätze aus dem Bereich der Garbenkohomologie, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden, zusammengestellt.
Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen.

Definition 1.3.1.
(i) Sei $\mathscr{S}$ *eine Garbe auf* X*. Durch*

$$U \mapsto f_*\mathscr{S}(U) := \mathscr{S}(f^{-1}(U)),\ U \subset Y \text{ offen},$$

wird eine Garbe $f_*\mathscr{S}$ *auf* Y *definiert.*
(ii) Seien X *und* Y *zusätzlich lokal kompakt. Dann wird durch*

$$U \mapsto f_!\mathscr{S}(U) := \{s \in \mathscr{S}(f^{-1}(U)) :\ f : |s| \to U \text{ eigentlich } \},\ U \subset Y \text{ offen},$$

wobei $|s|$ *den Träger von* s *bezeichne, eine Untergarbe von* $f_*\mathscr{S}$ *definiert, das direkte Bild mit kompaktem Träger.*
(iii) Sei $\mathscr{G}$ *eine Garbe auf* Y*. Dann wird die zu der Prägarbe*

$$V \mapsto \varinjlim_{f^{-1}(U)\supset V} \mathscr{G}(U),\ V \subset X \text{ offen},$$

assoziierte Garbe $f^{-1}\mathscr{G}$ *als topologische Urbildgarbe bezeichnet.*

Bemerkung 1.3.2. *Die Funktoren* f_* *und* $f_!$ *sind Verallgemeinerungen der Schnittfunktoren* Γ *und* Γ_c *und als solche linksexakt. Für den Spezialfall* $a : X \to \{pt\}$ *gilt* $\Gamma\mathscr{S} = a_*\mathscr{S}$ *und* $\Gamma_c\mathscr{S} = a_!\mathscr{S}$*.*

Bemerkung 1.3.3. *Es gilt* $(f^{-1}\mathscr{G})_x = \mathscr{G}_{f(x)}$ *und damit definiert* f^{-1} *einen exakten Funktor. Für* $a : X \to \{pt\}$ *und einen* R*-Modul* M *bezeichnet* $M_X = a^{-1}M$ *die konstante Garbe.*

Da die Kategorie der Garben auf X genügend viele Injektive besitzt, existieren die Rechtsableitungen der linksexakten Funktoren f_*, $f_!$, Γ und Γ_c.
Durch $H^p(X, \mathscr{S}) := R^p\Gamma\mathscr{S}$ für $p \in \mathbb{N}$ wird die Kohomologie mit Werten in $\mathscr{S}$ definiert, durch $H^p_c(X, \mathscr{S}) := R^p\Gamma_c\mathscr{S}$ die Kohomologie mit kompaktem Träger; $R^pf_*\mathscr{S}$ und $R^pf_!\mathscr{S}$ werden als höhere Bildgarben bezeichnet.

Seien nun eine stetige Abbildung $f : X \to Y$, eine Garbe von Ringen $\mathscr{R}$ auf Y und Garben $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ von $\mathscr{R}$- bzw. $f^{-1}\mathscr{R}$-Moduln gegeben. Dann gibt es für $p \in \mathbb{N}$ kanonische Homomorphismen (vgl. [KS90, 2.6.6])

$$(R^p f_! \mathscr{G}) \otimes_{\mathscr{R}} \mathscr{F} \longrightarrow R^p f_! \big(\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{R}} f^{-1}\mathscr{F} \big). \tag{1.4}$$

Dass diese Homomorphismen in bestimmten Fällen Isomorphismen sind, ergibt sich aus den folgenden beiden Sätzen.

Satz 1.3.4. (Basiswechseltheorem, vgl. [KS90, 2.6.7])
Sei das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_S S' = X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

gegeben. Für eine Garbe $\mathscr{G}$ (abelscher Gruppen) auf X gibt es dann für jedes $p \geq 0$ einen Isomorphismus

$$g^{-1}(R^p f_! \mathscr{G}) \cong R^p f'_! (g'^{-1} \mathscr{G}).$$

Korollar 1.3.5. *Für jedes $t \in S$ gilt $(R^p f_! \mathscr{G})_t \cong H^p_c(X_t, \mathscr{G})$, wobei $X_t = f^{-1}(t)$ ist.*

Beweis. Dies ist lediglich der Spezialfall $S' = \{t\}$, $g : \{t\} \hookrightarrow S$. □

Satz 1.3.6. (Universelles Koeffiziententheorem, vgl. [Bre97, S. 109, 15.3])
Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum, $\mathscr{G}$ ein R_X-Modul und F ein Modul über dem Hauptidealring R mit $\mathscr{G} *_R F = 0$. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \to H^p_c(X, \mathscr{G}) \otimes_R F \to H^p_c(X, \mathscr{G} \otimes_{R_X} F_X) \to H^{p+1}_c(X, \mathscr{G}) *_R F \to 0, \tag{1.5}$$

wobei mit $*$ das Torsionsprodukt bezeichnet wird.

Korollar 1.3.7. *Sei R ein Ring und F ein flacher R-Modul. $\mathscr{G}$ sei eine Garbe von R_X-Moduln. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$H^p_c(X, \mathscr{G}) \otimes_R F \cong H^p_c(X, \mathscr{G} \otimes_{R_X} F_X).$$

Korollar 1.3.8. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, $\mathscr{R}$ eine Garbe von Ringen auf Y, $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ seien Garben von $\mathscr{R}$- bzw. $f^{-1}\mathscr{R}$-Moduln. Ist $\mathscr{F}$ flach über $\mathscr{R}$, so ist (1.4) für jedes $p \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus. Insbesondere gilt für jede Garbe $\mathscr{F}$ von $\mathbb{C}$-Moduln*

$$R^p f_! \mathbb{C}_X \otimes_{\mathbb{C}_Y} \mathscr{F} \;\cong\; R^p f_! (f^{-1} \mathscr{F}).$$

Beweis. Der Homomorphismus

$$R^p f_! \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{R}} \mathscr{F} \longrightarrow R^p f_! \big(\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{R}} f^{-1} \mathscr{F} \big)$$

induziert Homomorphismen auf den Halmen, die sich nach Korollar 1.3.5 mit den Kohomologiegruppen mit kompaktem Träger identifizieren lassen. Wir erhalten also Homomorphismen

$$H^p_c(X_y, \mathscr{G}) \otimes_{\mathscr{R}_y} \mathscr{F}_y \to H^p_c(X_y, (\mathscr{G} \otimes_{f^{-1}\mathscr{R}} f^{-1}\mathscr{F})|_{X_y}) = H^p_c(X_y, \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{R}_y} \mathscr{F}_y)$$

für $y \in Y$ und $X_y = f^{-1}(y)$. Korollar 1.3.7 liefert nun die gesuchte Isomorphie.
Insbesondere gilt

$$H^p_c(X_y, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{F}_y \cong H^p_c(X_y, \mathscr{F}_y),$$

da $\mathscr{F}_y$ als $\mathbb{C}$-Modul flach ist. □

Für den Kohärenzbeweis in Kapitel 4.3 wird die Mayer-Vietoris-Sequenz für höhere Bildgarben benötigt, eine Verallgemeinerung von [AG62, S. 236].

Satz 1.3.9.
Seien X_1 und X_2 offene Teilmengen von X mit $X_1 \cup X_2 = X$, $X_{12} := X_1 \cap X_2$, $\mathscr{S}$ eine Garbe auf X und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz der Bildgarben

$$\begin{aligned} \cdots \to R^p f_*(X, \mathscr{S}) \to R^p f_*(X_1, \mathscr{S}|_{X_1}) \oplus R^p f_*(X_2, \mathscr{S}|_{X_2}) & \\ \to R^p f_*(X_{12}, \mathscr{S}|_{X_{12}}) \to \dots. & \qquad (1.6) \end{aligned}$$

Beweis. Sei

$$0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 \to \dots$$

eine welke Auflösung von $\mathscr{S}$.
Da die Garben $\mathscr{C}^p$ welk sind und durch $\mathscr{C}^p|_{X_i}$ welke Auflösungen von $\mathscr{S}|_{X_i}$ für $i = 1, 2$ gegeben sind, erhält man für jedes $p \in \mathbb{N}$ und jede offene Teilmenge $U \subset X$ kurze exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \to \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{C}^p) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(f^{-1}(U) \cap X_1, \mathscr{C}^p) \oplus \Gamma(f^{-1}(U) \cap X_2, \mathscr{C}^p) & \\ \xrightarrow{\beta} \Gamma(f^{-1}(U) \cap X_{12}, \mathscr{C}^p) \to 0, & \end{aligned}$$

wobei die Abbildungen α und β durch

$$\begin{aligned} \alpha(s) &:= s|_{X_1} \oplus s|_{X_2} \\ \beta(s_1 \oplus s_2) &:= s_1|_{X_{12}} - s_2|_{X_{12}} \end{aligned}$$

gegeben sind.
Die Injektivität von α folgt aus der Eindeutigkeit der Schnitte von Garben (vgl. [Kul70,

Satz 4.7]), die Gleichheit von $\operatorname{im}\alpha$ und $\ker\beta$ aus der Existenz von Schnitten bei Garben (vgl. [Kul70, Satz 4.8]). Die Surjektivität der Beschränkungsabbildungen, also insbesondere die Surjektivität von β, ist gerade die charakteristische Eigenschaft welker Garben.

Damit gibt es jetzt eine kurze exakte Sequenz der Komplexe von Prägarben

$$\begin{aligned}0 \to \Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{C}^{\cdot}) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(f^{-1}(U) \cap X_1, \mathscr{C}^{\cdot}) \oplus \Gamma(f^{-1}(U) \cap X_2, \mathscr{C}^{\cdot})\\ \xrightarrow{\beta} \Gamma(f^{-1}(U) \cap X_{12}, \mathscr{C}^{\cdot}) \to 0\end{aligned}$$

und damit eine lange exakte Sequenz der Kohomologiegruppen dieser Komplexe von Prägarben sowie der Komplexe der assoziierten Garben, die per Definition mit den höheren direkten Bildern übereinstimmen. Wir erhalten also die lange exakte Sequenz (1.6). □

1.4 Hyperdirekte Bilder

Ein wichtiges Hilfsmittel wird im Folgenden die Hyperkohomologie der Funktoren f_* und $f_!$, eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Garbenkohomologie, sein (vgl. hierzu z.B. [EGA III, 0, §11.4/12.4]). Betrachtet wird in diesem Fall ein Garbenkomplex $\mathscr{S}^1 \to \mathscr{S}^2 \to \dots$.

Eine injektive Auflösung, genauer eine Cartan-Eilenberg-Auflösung, entspricht dann einem Doppelkomplex $\mathscr{I}^{\cdot\cdot}$ zusammen mit einem Augmentationshomomorphismus $\varepsilon : \mathscr{S}^{\cdot} \to \mathscr{I}^{0,\cdot}$, so dass die entstehenden Komplexe

$$0 \to \mathscr{S}^q \to \mathscr{I}^{\cdot,q}$$

sowie die induzierten Komplexe

$$\begin{array}{lll} 0 \to Z^q(\mathscr{S}^{\cdot}) \to {}''Z^{\cdot,q}(\mathscr{I}^{\cdot\cdot}), & Z^q(\mathscr{S}^{\cdot}) = \ker d^n \subset \mathscr{S}^n, & {}''Z^{\cdot,q}(\mathscr{I}^{\cdot\cdot}) = Z^q(\mathscr{I}^{p,\cdot}) \\ 0 \to B^q(\mathscr{S}^{\cdot}) \to {}''B^{\cdot,q}(\mathscr{I}^{\cdot\cdot}), & B^q(\mathscr{S}^{\cdot}) = \operatorname{im} d^{n-1} \subset \mathscr{S}^n, & {}''B^{\cdot,q}(\mathscr{I}^{\cdot\cdot}) = B^q(\mathscr{I}^{p,\cdot}) \\ 0 \to H^q(\mathscr{S}^{\cdot}) \to {}''H^{\cdot,q}(\mathscr{I}^{\cdot\cdot}), & H^q(\mathscr{S}^{\cdot}) = Z^q(\mathscr{S}^{\cdot})/B^q(\mathscr{S}^{\cdot}), & {}''H^{\cdot,q}(\mathscr{I}^{\cdot\cdot}) = H^q(\mathscr{I}^{p,\cdot}) \end{array}$$

für alle $q \in \mathbb{N}$ injektive Auflösungen sind. Damit kann nun die Hyperkohomologie von Γ, Γ_c, f_* und $f_!$ definiert werden.

Definition 1.4.1. (Hyperkohomologie)
Sei $\mathscr{S}^{\cdot}$ ein Komplex von Garben auf einem topologischen Raum X, $\mathscr{I}^{\cdot\cdot}$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung. Die Hyperkohomologie eines linksexakten Funktors F ist definiert als Kohomologie des Totalkomplexes von $F\mathscr{I}^{\cdot\cdot}$, d.h.

$$\mathbb{R}^p F(\mathscr{S}^{\cdot}) = H^p(Tot(F\mathscr{I}^{\cdot\cdot})).$$

Definition 1.4.2. (Hyperdirekte Bilder)
Für die Funktoren f_* und $f_!$ erhält man das hyperdirekte Bild $\mathbb{R}^p f_*(\mathscr{S}^\cdot)$ des Garbenkomplexes $\mathscr{S}^\cdot$ bzw. das hyperdirekte Bild $\mathbb{R}^p f_!(\mathscr{S}^\cdot)$ mit kompaktem Träger.
Die Spezialfälle, also die Hyperkohomologie der Funktoren Γ und Γ_c, werden mit $\mathbb{H}^p(X, \mathscr{S}^\cdot)$ bzw. $\mathbb{H}^p_c(X, \mathscr{S}^\cdot)$ bezeichnet und Hyperkohomologie von $\mathscr{S}^\cdot$ bzw. Hyperkohomologie mit kompaktem Träger von $\mathscr{S}^\cdot$ genannt.

Bemerkung 1.4.3. *In der Situation von oben haben wir zwei Spektralsequenzen*

$$
\begin{aligned}
{}'E_2^{p,q} = (R^p F)(\mathscr{H}^q(\mathscr{S}^\cdot)) &\implies {}'E^{p+q} = \mathbb{R}^{p+q} F(\mathscr{S}^\cdot),\\
{}''E_2^{p,q} = H^p((R^q F)(\mathscr{S}^\cdot)) &\implies {}''E^{p+q} = \mathbb{R}^{p+q} F(\mathscr{S}^\cdot).
\end{aligned}
$$

1.5 Das Lemma von Poincaré und die de Rham-Kohomologie

Zum Abschluss dieses Kapitels wird noch eine Anwendung der obigen Theorie betrachtet, die die Grundlage der folgenden Kapitel bildet.

Für komplexe Mannigfaltigkeiten gilt das Lemma von Poincaré, d.h. der folgende

Satz 1.5.1. (Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen, vgl. [KK83, 58.1])
Der Komplex der holomorphen Differentialformen $\Omega^\cdot_M$ auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M bildet eine Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{C}_M$ auf M. Die Sequenz

$$0 \to \mathbb{C}_M \to \mathscr{O}_M \to \Omega^1_M \to \cdots \to \Omega^n_M \to 0 \tag{1.7}$$

ist also exakt.

Um den obigen Satz auf spezielle komplexe Räume verallgemeinern zu können, muss zunächst definiert werden, was unter einer Differentialform auf einem (reduzierten) komplexen Raum zu verstehen ist.

Definition 1.5.2. (Holomorphe Differentialformen auf analytischen Mengen)
Sei A analytische Teilmenge eines Gebietes G in $\mathbb{C}^n$, $\mathscr{I}$ das zugehörige Nullstellenideal. Dann heißt der kohärente $\mathscr{O}_A$-Modul

$$\Omega^p_A := \Omega^p_G / (\Omega^{p-1}_G \wedge d\mathscr{I} + \mathscr{I}\Omega^p_G)$$

Garbe der Keime holomorpher Differentialformen vom Grad p auf A.

Diese Definition ist unabhängig von der Einbettung ([GK64, Satz 1.2]) und somit können auf diesem Wege holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen definiert werden. In den nichtkritischen Punkten entspricht diese Definition der von Keimen von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten.

Wir erhalten zudem eine wohldefinierte Ableitung $d^p : \Omega^p_A \to \Omega^{p+1}_A$, die ebenfalls unabhängig von der Einbettung ist und somit gibt es für jeden komplexen Raum X und $x \in X$ eine Sequenz

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathscr{O}_{X,x} \to \Omega^1_{X,x} \to \cdots \to \Omega^n_{X,x} \to 0,$$

wobei n die Einbettungsdimension von X in x ist.
Für einen beliebigen komplexen Raum ist diese Sequenz im Allgemeinen nicht mehr exakt, Gegenbeispiele sind in [Rei67, §3] zu finden. Hinreichend für die Exaktheit ist die Bedingung der holomorphen Kontrahierbarkeit. Sie besagt, dass zu jedem Punkt x eines komplexen Raumes X und jeder genügend kleinen Umgebung $U \subset X$ von x Umgebungen V von x in U und S von $[0,1]$ in $\mathbb{C}$ sowie eine holomorphe Abbildung $\varphi : S \times V \to U, (\lambda, v) \mapsto \varphi_\lambda(v)$ mit $\varphi_0(V) = \{x\}$ und $\varphi_1 = id_V$ existieren ([Rei67]).

In diesem Fall kann die Kohomologie von X mit Werten in $\mathbb{C}$ mittels de Rham-Kohomologie berechnet werden, wie man leicht mit Hilfe der entsprechenden Spektralsequenzen erkennt.
Gilt das Poincaré-Lemma, so ist die Inklusion des trivialen Komplexes $\mathbb{C}^{\cdot}$, der nur an der ersten Stelle von Null verschieden ist, in den Differentialformenkomplex $\Omega^{\cdot}_X$ ein Quasiisomorphismus. Deshalb stimmen dann die Hyperkohomologien

$$\mathbb{H}(X, \mathbb{C}^{\cdot}) = \mathbb{H}(X, \Omega^{\cdot}_X)$$

überein.
Wir haben für $\Omega^{\cdot}_X$ die Spektralsequenzen

$$\begin{aligned} {}'E_2^{pq} &= H^p(X, \mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_X)) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega^{\cdot}_X), \\ {}''E_2^{pq} &= H^p\left(H^q\left(X, \Omega^{\cdot}_X\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{H}^{p+q}(X, \Omega^{\cdot}_X) \end{aligned}$$

und analog für den trivialen Komplex $\mathbb{C}^{\cdot}$. Für die erste Spektralsequenz gilt hier

$$'E_2^{pq} = \begin{cases} H^p(X, \mathbb{C}) & \text{für } q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit $H^p(X, \mathbb{C}) = \mathbb{H}^p(X, \mathbb{C}^{\cdot})$. Die Kohomologie mit komplexen Koeffizienten lässt sich also durch die de Rham-Kohomologie $\mathbb{H}(X, \Omega^{\cdot})$ ausdrücken.

Zusätzlich gilt für steinsche Räume $H^q(X, \Omega^{\cdot}_X) = 0 \ \forall q \geq 1$, da die $\mathscr{O}_X$-Moduln Ω^p_X kohärent sind. Damit folgt für die zweite Spektralsequenz

$$''E_2^{pq} = \begin{cases} H^p(\Gamma(X, \Omega^{\cdot}_X)) & \text{für } q = 0 \\ 0 & sonst \end{cases},$$

also $H^p(\Gamma(X, \Omega^\cdot_X)) = \mathbb{H}^p(X, \Omega^\cdot_X)$. Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 1.5.3. (Satz von de Rham)
Sei X ein komplexer Raum, der das Poincaré-Lemma erfüllt. Dann kann die Kohomologie mit Koeffizienten in X mittels de Rham-Kohomologie berechnet werden. Es gilt

$$H^p(X, \mathbb{C}) = \mathbb{H}^p(X, \Omega^\cdot_X).$$

Ist X steinsch, so gilt zudem

$$H^p(X, \mathbb{C}) = H^p(\Gamma(X, \Omega^\cdot_X)).$$

Als Verallgemeinerung dieses Ansatzes können nun relative Differentialformen betrachtet werden. Sei $f : X \to S$ eine holomorphe Abbildung von komplexen Räumen. Die relativen Differentialformen werden wie folgt definiert (vgl. [EGA IV, §16.6]):

Definition 1.5.4. (Komplex der relativen Differentialformen)
Für eine holomorphe Abbildung $f : X \to S$ wird durch $\Omega^\cdot_{X/S} = \{\Omega^p_{X/S}, d^p\}$ mit

$$\Omega^p_{X/S} := \Omega^p_X / (df \wedge \Omega^{p-1}_X)$$

der Komplex der relativen Differentialformen definiert.

$\Omega^\cdot_{X/S}$ ist ein Komplex von $f^{-1}\mathscr{O}_S$-Moduln. Analog zum Poincaré-Lemma kann nun die Frage nach der Exaktheit der Sequenz

$$0 \to f^{-1}\mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_X \to \Omega^1_{X/S} \to \dots \tag{1.8}$$

gestellt werden.
In [Bri70, 1.1] wird der folgende Hilfssatz für Abbildungen auf glatten Mannigfaltigkeiten gezeigt.

Lemma 1.5.5. (Relatives Poincaré-Lemma)
Sei $f : X \to S$ eine glatte holomorphe Abbildung von komplexen Mannigfaltigkeiten, d.h. eine holomorphe Abbildung, die keine kritischen Punkte besitzt. Dann ist der Komplex

$$0 \longrightarrow f^{-1}\mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow \dots$$

exakt. Der Komplex der relativen Differentialformen $\Omega^\cdot_{X/S}$ ist also eine Auflösung der Garbe $f^{-1}\mathscr{O}_S$.

Deligne zeigt in [Del70, I, 2.23] die Gültigkeit des relativen Poincaré-Lemmas für den allgemeineren Fall einer lokal-trivialen Abbildung von singulären komplexen Räumen, deren Fasern glatt sind.

Wir können die Hyperkohomologie des Funktors f_* betrachten und erhalten für $\Omega^{\cdot}_{X/S}$ die Spektralsequenzen

$$\begin{aligned} {}'E_2^{pq} = R^p f_*(\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_X)) \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{R}f_*^{p+q}(X, \Omega^{\cdot}_X), \\ {}''E_2^{pq} = H^p(R^q f_* \Omega^{\cdot}_X)) \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{R}f_*^{p+q}(X, \Omega^{\cdot}_X). \end{aligned}$$

Aus Lemma 1.5.5 folgt, dass $f^{-1}(\mathscr{O}_S)^{\cdot} \to \Omega^{\cdot}_{X/S}$ ein Quasiisomorphismus ist und somit die Hyperkohomologien übereinstimmen. Es gilt also $R^p f_*(f^{-1}(\mathscr{O}_S)) \cong \mathbb{R}^p f_* \Omega^{\cdot}_{X/S}$. Die hyperdirekten Bilder $\mathbb{R}^q f_* \Omega^p_{X/S}$ sind dabei $\mathscr{O}_S$-Moduln und werden als relative de Rham-Kohomologie von X modulo S bezeichnet.

Es folgt also analog zu Satz 1.5.3 folgender

Satz 1.5.6. *Für eine glatte holomorphe Abbildung $f : X \to S$ von komplexen Mannigfaltigkeiten gilt*

$$R^p f_*(f^{-1}\mathscr{O}_S) = \mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S}).$$

Ist f steinsch, so gilt zudem

$$R^p f_*(f^{-1}\mathscr{O}_S) = H^p(f_* \Omega^{\cdot}_{X/S}).$$

Bemerkung 1.5.7. *Für $f : X \to \{pt\}$ erhalten wir wiederum den absoluten Fall.*

In den folgenden Kapiteln wird nun unter anderem das relative Poincaré-Lemma für eine holomorphe Abbildung $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ auf einem schwach normalen zweidimensionalen komplexen Raum $\tilde{X}$, die keine kritischen Punkte im stratifizierten Sinn besitzt, nachgewiesen. Insbesondere können die Fasern von f singulär sein. Dazu wird zunächst die lokale Gestalt von $\tilde{X}$ beschrieben und nachgewiesen, dass sich f lokal als Projektion auffassen lässt. Anschließend können die Differentialformen und damit das Poincaré-Lemma für diesen speziellen Fall explizit nachgerechnet werden.

2 Schwache Normalisierung zweidimensionaler komplexer Räume

2.1 Schwache Normalität von Koordinatenkreuzen

Zweidimensionale schwach normale Räume können bis auf isolierte Punkte lokal als Produkt von $\mathbb{C}$ mit einem Koordinatenkreuz beschrieben werden. Bevor diese Beschreibung hergeleitet wird, sollen die Koordinatenkreuze zunächst genau definiert und auf ihre schwache Normalität untersucht werden.

Definition 2.1.1. (r-dimensionales Koordinatenkreuz)
Unter einem r-dimensionalen Koordinatenkreuz, $r \in \mathbb{N}$, wird im Folgenden ein Raum der Gestalt

$$Y_r := \{(z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r \,|\, \exists i \in \{1, \dots, r\} : \; z_j = 0 \;\forall j \neq i\} \subset \mathbb{C}^r$$

verstanden.
Für $r = 0$ definieren wir $Y_0 = \{0\}$.

Bemerkung 2.1.2. *Es gilt $Y_1 = \mathbb{C}$. Für $r \geq 2$ wird das zugehörige Nullstellenideal $\mathscr{I}$ von den $\binom{r}{2}$ Funktionen $f_{ij} : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z_1, \dots, z_r) = z_i\, z_j$, $i < j$ erzeugt, d.h.*

$$Y_r = N(\langle z_i\, z_j \,, i < j\rangle). \tag{2.1}$$

Beweis. Offensichtlich gilt einerseits $f_{ij}(z_1, \dots, z_r) = 0$ für alle $(z_1, \dots, z_r) \in Y_r$, $r \geq 2$. Andererseits folgt aus $f_{ij}(z_1, \dots, z_r) = z_i\, z_j = 0$ für alle i, j mit $i < j$, dass ein $k \in \{1, \dots, r\}$ existiert, so dass $z_i = 0$ für alle $i \neq k$. Es liegt somit $(z_1, \dots, z_r)$ in Y_r. □

Für Koordinatenkreuze gilt der folgende

Satz 2.1.3. *Die Räume Y_r, $r \in \mathbb{N}_0$ sind schwach normal und für $r \geq 1$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_{Y_r,0} &= \mathscr{C}_{Y_r,0} \cap \hat{\mathscr{O}}_{Y_r,0} \\ &\cong \big\{(f_1, \dots, f_r) \in \mathscr{O}_{1,0}^r : f_1(0) = \dots = f_r(0)\big\}. \end{aligned}$$

Beweis. Für $r = 0, 1$ ist die schwache Normalität klar. Die Garbe $\mathscr{O}_{Y_1,0}$ ist die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}$.
Sei nun $r \geq 2$. Mit Bemerkung 2.1.2 ist $\mathscr{O}_{Y_r,0} = \mathscr{O}_{r,0}/\mathscr{I}_0$ und mit

$$\mathscr{O}_{r,0} = \big\{ f : f(z_1, \dots, z_r) = \sum_{i_1,\dots,i_r=0}^{\infty} a_{i_1,\dots,i_r}\, z_1^{i_1} \cdot \dots \cdot z_r^{i_r} \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r\} \big\}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{O}_{Y_r,0} \;&\cong\; \big\{ [f] : f(z_1, \dots, z_r) = a_{0,\dots,0} + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1,0,\dots,0}\, z_1^{i_1} + \dots \\
&\qquad + \sum_{i_r=1}^{\infty} a_{0,\dots,0,i_r}\, z_r^{i_r} \in \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_r\} \big\}\,, \text{ da } z_i\, z_j \sim 0 \\
&\cong\; \big\{ [f] : f(z_1, \dots, z_r) = a_0 + f_1(z_1) + \dots + f_r(z_r)\,, \\
&\qquad a_0 \in \mathbb{C},\; f_i \in \mathbb{C}\{z_i\}, f_i(0) = 0,\; i = 1 \dots, r \big\}.
\end{aligned}$$

Jeder Keim $[f] \in \mathscr{O}_{Y_r,0}$ hat damit einen Repräsentanten $f(z_1, \dots, z_r) = a_0 + f_1(z_1) + \dots + f_r(z_r)$, welcher durch die Zusatzforderung $f_i(0) = 0\ \forall i$ eindeutig ist. Damit kann eine Abbildung

$$\begin{aligned}
\Phi :\quad \mathscr{O}_{Y_r,0} \;&\to\; (\mathscr{O}_{1,0})^r \\
f \;&\mapsto\; (a_0 + f_1, \dots, a_0 + f_r)
\end{aligned}$$

definiert werden. $\mathscr{O}_{1,0}^r := (\mathscr{O}_{1,0})^r$ ist kein lokaler Ring und entspricht in der geometrischen Anschauung dem Ring der holomorphen Funktionen auf einer disjunkten Vereinigung von r komplexen Ebenen $\mathbb{C}$. Wir haben somit eine Multiplikation $(f_1, \dots, f_r) \cdot (g_1, \dots, g_r) = (f_1\, g_1, \dots, f_r\, g_r)$. Dann definiert Φ einen injektiven Ringhomomorphismus, denn für $f = a_0 + f_1 + \dots + f_r$ und $g = b_0 + g_1 + \dots + g_r$ gilt in $\mathscr{O}_{Y_r,0}$

$$f \cdot g \;\sim\; a_0\, b_0 + a_0\, g_1 + b_0\, f_1 + f_1\, g_1 + \dots + a_0\, g_r + b_0\, f_r + f_r\, g_r$$

und somit $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f)\, \Phi(g)$.
Das Bild imΦ besteht gerade aus den Tupeln $(f_1, \dots, f_r)$ mit $f_1(0) = \dots = f_r(0)$. Damit ist $\mathscr{O}_{Y_r,0}$ isomorph zu

$$\big\{ (f_1, \dots, f_r) \in \mathscr{O}_{1,0}^r : f_1(0) = \dots = f_r(0) \big\}. \tag{2.2}$$

Um zu zeigen, dass Y_r schwach normal ist, muss nun $\mathscr{O}_{Y_r,0} = \mathscr{C}_{Y_r,0} \cap \hat{\mathscr{O}}_{Y_r,0}$ nachgerechnet werden:
$\hat{\mathscr{O}}_{Y_r,0}$ beschreibt per Definition die Funktionskeime, deren Repräsentanten in einer punktierten Umgebung von 0 holomorph und beschränkt sind. Sei nun f Repräsentant eines Keimes aus $\hat{\mathscr{O}}_{Y_r,0}$.

Insbesondere ist f also außerhalb der 0 holomorph. Damit ist auch $f|_{X_i}, X_i = \{0\}^{i-1} \cup \mathbb{C} \cup \{0\}^{r-i}$, für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$ außerhalb der Null holomorph und in einer Umgebung beschränkt und lässt sich nach dem klassischen Riemannschen Hebbarkeitssatz um Null in eine Potenzreihe entwickeln.

f kann also eindeutig ein Tupel $(f_1, \ldots, f_r) \in \mathscr{O}^r_{1,0}$ zugeordnet werden, d.h. wir haben einen injektiven Ringhomomorphismus $\Phi : \hat{\mathscr{O}}_{Y_r,0} \to \mathscr{O}^r_{1,0}$. Da durch

$$f(z_1, \ldots, z_r) = \begin{cases} f_1(z_1) & z_1 \neq 0 \\ \vdots & \\ f_r(z_r) & z_r \neq 0 \end{cases}$$

für jedes Tupel $(f_1, \ldots, f_r) \in \mathscr{O}^r_{1,0}$ ein Funktionskeim in $\hat{\mathscr{O}}_{Y_r,0}$ definiert wird, welcher durch Φ wiederum auf $(f_1, \ldots, f_r)$ abgebildet wird, ist Φ surjektiv und somit ein Isomorphismus.

Für eine stetige schwach holomorphe Funktion existiert $f(0) := \lim_{z \to 0} f(z)$ und somit

$$\lim_{z_1 \to 0} f_1(z_1) = \ldots = \lim_{z_r \to 0} f_r(z_r).$$

Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{O}}_{Y_r,0} \cap \mathscr{C}_{Y_r,0} &\cong \left\{(f_1, \ldots, f_r) \in \mathscr{O}^r_{1,0} : f_1(0) = \ldots = f_r(0)\right\} \\ &\cong \mathscr{O}_{Y_r,0}. \end{aligned}$$

Da Y_r für $r \geq 2$ außerhalb der Null glatt ist, gilt hier schon $\mathscr{O}_{Y_r,0} = \hat{\mathscr{O}}_{Y_r,0}$ und damit ist der Satz bewiesen. $\square$

2.2 Lokale Gestalt schwach normaler zweidimensionaler Räume

In diesem Kapitel wird die lokale Gestalt schwach normaler zweidimensionaler komplexer Räume untersucht.

Satz 2.2.1. *Sei X ein (reduzierter) komplexer Raum, $x \in X$ ein Punkt, so dass der Raumkeim von X in x zweidimensional ist. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset X$ von x und zu jedem $y \in U \backslash \{x\}$ ein $r \in \mathbb{N}_0$, derart dass die schwache Normalisierung $\tilde{X}$ von X in $y \in \tilde{X}$ lokal die Gestalt*

$$(\tilde{X}, y) \cong (\mathbb{C} \times Y_r, 0)$$

hat.

Bemerkung 2.2.2. *Für x gilt dieses im Allgemeinen nicht. Lokal haben schwach normale zweidimensionale Räume also nur bis auf isolierte Punkte obige Gestalt.*

Bevor dieser Satz bewiesen wird, werden hier zunächst die Räume $\mathbb{C}\times Y_r,\ r\geq 2$, genauer untersucht.

Bemerkung 2.2.3. *Für $r \geq 2$ gilt $\mathbb{C}\times Y_r = N(\mathscr{I}) \subset \mathbb{C}^{r+1}$, wobei $\mathscr{I}$ das von $f_{ij}(z_0, z_1, \dots, z_r) = z_i\, z_j$, $i, j \in \{1, \dots, r\}$, $i < j$ erzeugte Ideal ist.*

Der Beweis ist natürlich äquivalent zu dem von Bemerkung 2.1.2.

Satz 2.2.4. (Beschreibung der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}\times Y_r$)
Für $r \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_{\mathbb{C}\times Y_r,0} &= \mathscr{O}_{r+1,0}/\mathscr{I}_0 \\ &\cong \big\{(f_1,\dots,f_r)\in\mathscr{O}^r_{2,0} : f_1|_{\mathbb{C}\times\{0\}} = \cdots = f_r|_{\mathbb{C}\times\{0\}}\big\}.\end{aligned}$$

Beweis. Sei $r \geq 2$. Die Potenzreihe

$$f(z_0,\dots,z_r) = \sum_{i_0,\dots,i_r=0}^{\infty} a_{i_0,\dots,i_r} z_0^{i_0}\cdot\dots\cdot z_r^{i_r} \ \in \mathbb{C}\{z_0,\dots,z_r\}$$

repräsentiert einen Keim aus $\mathscr{O}_{r+1,0}$. Wegen $z_i\, z_j \sim 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, r\}$ mit $i \neq j$ ist sie in $\mathscr{O}_{\mathbb{C}\times Y_r,0}$ äquivalent zu der Potenzreihe

$$\begin{aligned}&\sum_{i_0=0}^{\infty} a_{i_0,0\dots,0}\, z_0^{i_0} + \sum_{i_0=0}^{\infty}\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_0,i_1,0,\dots,0}\, z_0^{i_0}\, z_1^{i_1} + \cdots + \sum_{i_r=1}^{\infty} a_{i_0,0,\dots,0,i_r}\, z_0^{i_0}\, z_r^{i_r}\right)\\ &\qquad = f_0(z_0) + \sum_{j=1}^{r} f_{0,j}(z_0,z_j)\end{aligned}$$

für $f_0 = \sum_{i_0=0}^{\infty} a_{i_0,0,\dots,0}\, z_0^{i_0} \in \mathbb{C}\{z_0\}$ und $f_{0,j} = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_j=1}^{\infty} a_{i_0,0,\dots,i_j,\dots,0}\, z_0^{i_0}\, z_j^{i_j} \in \mathbb{C}\{z_0,z_j\}$.
Jeder holomorphe Funktionskeim auf $\mathbb{C}\times Y_r$ in Null besitzt also genau einen Repräsentanten der obigen Gestalt. Wir erhalten, wie im Beweis von Satz 2.1.3, einen injektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned}\Phi: \qquad \mathscr{O}_{\mathbb{C}\times Y_r,0} &\to (\mathscr{O}_{2,0})^r\\ f &\mapsto (f_0+f_{0,1},\dots,f_0+f_{0,r})\end{aligned}$$

nach $(\mathscr{O}_{2,0})^r =: \mathscr{O}^r_{2,0}$, wobei die Addition und Multiplikation zweier Elemente aus $\mathscr{O}^r_{2,0}$ analog zu Kapitel 2.1 komponentenweise definiert sind.
Das Bild im Φ besteht hier aus den Tupeln $(f_1, \dots, f_r)$ für die $f_1(z_0, 0) = \cdots = f_r(z_0, 0)$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt und deshalb

$$\mathscr{O}_{\mathbb{C}\times Y_r,0} \cong \big\{(f_1,\dots,f_r)\in\mathscr{O}^r_{2,0} : f_1|_{\mathbb{C}\times\{0\}} = \cdots = f_r|_{\mathbb{C}\times\{0\}}\big\}.$$

□

Mit dieser Beschreibung holomorpher Funktionskeime auf $\mathbb{C} \times Y_r$ kann nun Satz 2.2.1 bewiesen werden.

Beweis. Sei $X = \cup_{i \in \mathscr{I}} S_i$ eine Stratifizierung von X, die die Whitney-Bedingungen erfüllt. Diese existiert immer nach [Whi65]. Die nulldimensionalen Strata entsprechen damit isolierten Punkten und es kann eine Umgebung $U \subset X$ von x so gewählt werden, dass alle $y \in U \backslash \{x\}$ in einem mindestens eindimensionalen Stratum enthalten sind.

Sei nun zunächst $y \in U \backslash \{x\}$ ein nichtsingulärer Punkt von X. Dann gilt entweder $(X, y) \cong (\tilde{X}, y) \cong (\mathbb{C}, 0) \cong (\mathbb{C} \times Y_0, 0)$ oder $(X, y) \cong (\tilde{X}, y) \cong (\mathbb{C}^2, 0) = (\mathbb{C} \times Y_1, 0)$.

Nun sei y ein singulärer Punkt. Damit ist nach den obigen Voraussetzungen y schon in einem eindimensionalen Stratum enthalten, welches im Abschluss eines zweidimensionalen Stratums liegt. Der Raumkeim X_y wird in irreduzible zweidimensionale Komponenten $X_y = X_{y,1} \cup \ldots \cup X_{y,r}$, $r \geq 1$, zerlegt. Für $r \geq 2$ gibt es Repräsentanten $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$, derart dass der Schnitt $S = X_1 \cap \ldots \cap X_r$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist.
Sei z_1 nun eine lokale Koordinate auf S. Wir betrachten die Normalisierungen $\pi_i : \hat{X}_i \to X_i$, $i = 1, \ldots, r$, der einzelnen Komponenten und bezeichnen das Urbild $\pi_i^{-1}(S) \subset \hat{X}_i$ mit S_i. Die $\hat{X}_i$ sind zweidimensionale normale Räume und somit glatt bis auf isolierte Singularitäten (vgl. Satz 1.1.6), die S_i sind eindimensionale Unterräume und ebenfalls bis auf eventuelle isolierte Punkte glatt. Damit sind die eingeschränkten Abbildungen $\pi_i|_{S_i} : S_i \to S$ -wiederum bis auf isolierte Punkte- lokal biholomorph.
Die Umgebung U von $x \in X$ und anschließend der Repräsentant $X = X_1 \cap \cdots \cap X_r$ des Raumkeimes X_y können also so klein gewählt werden, dass alle $\hat{X}_i$ und alle S_i glatt sind und jedes $\pi_i|_{S_i}$ biholomorph ist.
Dann ist durch $z_{i1} = \pi_i^{-1}(z_1)$ eine komplexe Koordinate auf S_i gegeben. Die Abbildung z_{i1} kann zu einer Submersion auf ganz $\hat{X}_i$ ausgedehnt werden und somit kann zu einer Koordinate (z_{i1}, z_{i2}) auf $\hat{X}_i$ erweitert werden, so dass $S_i = \{(z_{i1}, 0)\}$ gilt. Die Raumkeime der $\hat{X}_i$ über y sind damit isomorph zu $(\mathbb{C}^2, 0)$ und die Normalisierung $\hat{X}$ entspricht ihrer disjunkten Vereinigung.
Für $r = 1$ stimmen Normalisierung und schwache Normalisierung überein und der Satz ist an dieser Stelle bewiesen.
Für $r \geq 2$ erhält man die schwache Normalisierung $\tilde{X}$ nun aus $\hat{X}$ durch Äquivalenzbildung mittels der π_i. Es gilt $\tilde{X} \cong \hat{X}/R_\pi$, wobei R_π die folgende Äquivalenzrelation bezeichnet:

$$s_i \in S_i \sim s_j \in S_j :\Leftrightarrow \pi_i(s_i) = \pi_j(s_j).$$

Unter Verwendung der oben eingeführten Koordinaten sind $s_i = (z_{i1}, 0)$ und $s_j = (z_{j1}, 0)$ also genau dann äquivalent, wenn $z_{i1} = z_{j1}$. Als topologischer Raum ist der Raumkeim

$(\tilde{X}, y)$ damit äquivalent zu

$$\left(\dot{\bigcup_{r}} (\mathbb{C}^2, 0) \Big/ \sim \right) \quad \cong (\mathbb{C} \times Y_r, 0).$$

Zur Definition des Quotientenraumes $\tilde{X}$ als komplexen Raum wird nun noch die Strukturgarbe $\mathscr{O}_{\tilde{X}}$ bestimmt. Die Gleichungen (1.2) und (1.3) aus dem ersten Kapitel besagen, dass die holomorphen Funktionen $f \in \mathscr{O}_{\tilde{X}}(W)$ für eine Umgebung $W \subset \tilde{X}$ von y den Funktionen aus $\mathscr{O}_{\hat{X}}(\pi^{-1}(W)) \cong \hat{\mathscr{O}}_X(W)$, die invariant unter der Äquivalenzrelation R_π sind, entsprechen.

Die Menge $\pi^{-1}(W) \subset \hat{X}$ ist disjunkte Vereinigung der Urbilder der $\pi_i^{-1}(W) \subset \hat{X}_i$, d.h. in obigen Koordinaten disjunkte Vereinigung offener Nullumgebungen des $\mathbb{C}^2$. Ein Funktionskeim $f \in \hat{\mathscr{O}}_{X,y}$ entspricht dann einem Tupel $(f_1, \ldots, f_r) \in \mathscr{O}_{2,0}^r$ und die R_π-Invarianz ist gleichbedeutend mit der Bedingung $f_1|_{\mathbb{C}\times\{0\}} = \cdots = f_r|_{\mathbb{C}\times\{0\}}$.
Es ergibt sich also

$$\mathscr{O}_{\tilde{X},y} \cong \left\{ (f_1, \ldots, f_r) \in \mathscr{O}_{2,0}^r : f_1|_{\mathbb{C}\times\{0\}} = \cdots = f_r|_{\mathbb{C}\times\{0\}} \right\}$$

und damit sind $(\tilde{X}, y)$ und $(\mathbb{C} \times Y_r, 0)$ als komplexe Raumkeime isomorph. □

Korollar 2.2.5. (Kanonische Whitney-Stratifizierung)
Jeder schwach normale zweidimensionale komplexe Raum $\tilde{X}$ besitzt eine kanonische Whitney-Stratifizierung. Das zweidimensionale Stratum ist durch

$$S_2 = \left\{ y \in \tilde{X} : (\tilde{X}, y) \cong (\mathbb{C}^2, 0) \right\}$$

gegeben, das eindimensionale durch

$$S_1 = \left\{ y \in \tilde{X} : \textit{es gibt ein } r \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\} : (\tilde{X}, y) \cong (\mathbb{C} \times Y_r, 0) \right\}.$$

Die Punkte $y \in \tilde{X}$, die weder in S_1 noch in S_2 liegen, bilden das nulldimensionale Stratum S_0.

Beweis. Die Punkte aus S_0 sind nach dem vorigen Satz 2.2.1 isoliert. Die Whitney-Bedingungen sind damit nach [Whi65] in den nulldimensionalen Strata und damit insgesamt für die obige Stratifizierung erfüllt. □

Bemerkung 2.2.6. *Satz 2.2.1 sagt aus, dass die analytische Struktur eines zweidimensionalen schwach normalen Raumkeimes bis auf isolierte Punkte allein durch die Anzahl r der irreduziblen Komponenten des Raumkeimes, also eine topologische Größe, festgelegt ist.*

2.3 Abbildungen auf zweidimensionalen schwach normalen Räumen

Ausgangspunkt ist nun eine holomorphe Abbildung von einem zweidimensionalen schwach normalen Raum $\tilde{X}$ nach $\mathbb{C}$. Durch die lokale Beschreibung von $\tilde{X}$ in den ein- und zweidimensionalen Strata kann f nun außerhalb der kritischen Punkte lokal als Projektion $\mathbb{C} \times Y_r \to \mathbb{C}$ aufgefasst werden. Damit ist f in den nichtkritischen Punkten schon analytisch lokal trivial und die Fasern sind durch die Anzahl r der irreduziblen Komponenten des Raumkeimes festgelegt.

Satz 2.3.1. *Sei $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem schwach normalen zweidimensionalen komplexen Raum $\tilde{X}$. Der Punkt $x \in \tilde{X}$ sei nicht kritisch im stratifizierten Sinn. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und eine Umgebung $V \subset \tilde{X}$ von x sowie eine biholomorphe Abbildung $\varphi : U \to V$ auf einer offenen Umgebung U von $0 \in \mathbb{C} \times Y_r$, so dass*

$$f \circ \varphi : \; U \to \mathbb{C}, \; (z_0, z_1, \ldots, z_r) \mapsto z_0$$

die Projektion auf die erste Komponente ist.

Beweis. Da x kein kritischer Punkt von f ist, ist er in einem mindestens eindimensionalen Stratum enthalten. Für den Fall, dass $(\tilde{X}, x) \cong (\mathbb{C}^2, 0)$ oder $(\tilde{X}, x) \cong (\mathbb{C}, 0)$ gilt, kann der Rangsatz (vgl. z.B. [Ebe01, Satz 2.34]) angewendet werden.

Damit bleibt der Fall $(\tilde{X}, x) \cong (\mathbb{C} \times Y_r, 0)$ zu untersuchen. Wir können also in einer Umgebung V von x eine Koordinate $\psi : C \times Y_r \supset W \to V$ wählen, so dass x der Null entspricht. Weiter sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit in diesen Koordinaten $f(0) = 0$ angenommen. Zudem gibt es, nach evtl. Verkleinerung von W, eine offene Umgebung $W' \subset \mathbb{C}^{r+1}$ von W und eine holomorphe Funktion $F : W' \to \mathbb{C}$ mit $F|_W = f \circ \psi$.
Die kanonische Stratifizierung von W ist durch

$$S_1 = \big(\mathbb{C} \times \{0\}^r \;\big) \cap W \;\text{ und }\; S_2 = \big(\mathbb{C} \times (Y_r \backslash \{0\})\big) \cap W$$

gegeben und damit gilt, da f keine kritischen Werte im stratifizierten Sinn hat,

$$DF|_{S_1} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial F}{\partial z_0} \neq 0.$$

Nun kann eine Funktion

$$\begin{array}{llcl} g: & W' & \to & \mathbb{C}^{r+1} \\ & \big(z_0, \ldots, z_r\big) & \mapsto & \big(F(z_0, \ldots, z_r), z_1, \ldots, z_r\big) \end{array}$$

definiert werden, deren Funktionalmatrix

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_0}(x) & \frac{\partial F}{\partial z_1}(x) & \dots & \dots & \frac{\partial F}{\partial z_r}(x) \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

in einer Umgebung von Null invertierbar ist. Wir können W' also so verkleinern, dass eine Umkehrfunktion $g^{-1} : U' \longrightarrow W'$, $U' = g^{-1}(W')$ von g existiert.
Da $U := g(W) \subset \mathbb{C} \times Y_r$ gilt, können g und g^{-1} als lokale Koordinatentransformationen $W \to U$ bzw. $U \to W$ verstanden werden. Damit gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (z_0,\dots,z_r) \in W \arrow[rr, "f\circ\psi"] \arrow[dr, "g"'] & & (f\circ\psi)(z_0,\dots,z_r) = w_0 \in \mathbb{C} \\ & \begin{array}{l}(f(z_0,\dots,z_r), z_1,\dots,z_r) \\ = (w_0, w_1 \dots, w_r) \in U\end{array} \arrow[ur, "(f\circ\psi)\circ g^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Es gilt also für $\varphi = \psi \circ g^{-1}$

$$\begin{array}{rccc} f \circ \varphi : & U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (z_0, \dots, z_r) & \longmapsto & z_0 \end{array}$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

3 Das relative Poincaré-Lemma für zweidimensionale schwach normale Räume

Sei $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ wieder eine holomorphe Funktion auf einem schwach normalen zweidimensionalen komplexen Raum mit isoliertem kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei $x \in \tilde{X}$. In diesem Kapitel wird die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to (f^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}})_y \to \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}/\mathbb{C},y}$$

in den nichtkritischen Punkten y von f gezeigt.
Aus Kapitel 2.2 kennen wir die lokale Gestalt zweidimensionaler schwach normaler Räume in den nichtsingulären Punkten. Es genügt nun, vgl. Kapitel 2.3, das relative Poincaré-Lemma für die Projektion $\mathbb{C} \times Y_r \to \mathbb{C}$ nachzuweisen. Da die Fasern hier den Koordinatenkreuzen entsprechen, ist es sinnvoll, zunächst das Poincaré-Lemma für diesen Fall nachzuweisen und dann entsprechend zu verallgemeinern.

3.1 Differentialformen und Poincaré-Lemma für Koordinatenkreuze

Zunächst werden die Differentialformen auf den Räumen Y_r berechnet.

Satz 3.1.1. (Differentialformen auf Y_r)
Die Keime von Differentialformen erster Ordnung auf Y_r, $r \geq 2$, im Punkt 0 lassen sich wie folgt charakterisieren:

$$\Omega^1_{Y_r,0} \quad = \quad \Big\{[\omega] : \omega = \sum_{i=1}^{r} \Big(f_i(z_i) + \sum_{j>i} a_{ij} z_j\Big) dz_i\,,\ f_i \in \mathscr{O}_1, a_{ij} \in \mathbb{C}\Big\}.$$

Für die Keime von Differentialformen p-ter Ordnung, $p \geq 2$, in 0 gilt

$$\Omega^p_{Y_r,0} \quad = \quad \Big\{[\omega] : \omega = \sum_{|I|=p} \Big(c_I + \sum_{j>i_p} a_{I,j}\, z_j\Big) dZ_I\,, \qquad (3.1)$$

$$I = (i_1, \ldots, i_p)\,,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r\,,\ dZ_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p},\ c_I,\ a_{I,j} \in \mathbb{C}\Big\},$$

Insbesondere ergibt sich für $p = r$

$$\Omega^r_{Y_r,0} = \big\{[\omega] : \omega = c\,dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_r\,,\ c \in \mathbb{C}\big\} \cong \mathbb{C}.$$

Beweis. Zunächst werden die Differentialformen erster Ordnung betrachtet. Das Ideal $\big(d\mathscr{I} + \mathscr{I}\Omega^1_r\big)_0$ wird als $\mathscr{O}_{r,0}$-Modul erzeugt durch

$$\langle z_i\, z_j\, dz_k\,,\ z_i\, dz_j + z_j\, dz_i\,,\ i,j,k \in \{1,\ldots,r\}\,,\ i<j\rangle.$$

Ein beliebiger Keim einer Differentialform $\omega = \sum_{i=1}^r f_i(z_1,\ldots,z_r)\,dz_i$ in $\Omega^1_{r,0}$, wobei die f_i holomorphe Funktionskeime seien, repräsentiert wiederum einen Keim in $\Omega^1_{Y_r,0}$. Hier gilt

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i=1}^r f_i(z_1,\ldots,z_r)\,dz_i \\
&\sim \sum_{i=1}^r \Big(c_i + \sum_{j=1}^r f_{ij}(z_j)z_j\Big)dz_i \\
&\qquad \text{für } c_i = f_i(0,\ldots,0) \text{ und } f_{ij}(z_j)\,z_j \ = f_i(0,\ldots,0,z_j,0,\ldots,0) - c_i\,, \\
&\qquad \text{da } z_i\, z_j\, dz_k \sim 0 \\
&= \sum_{i=1}^r \Big(f_i(z_i) + \sum_{j\neq i} f_{ij}(z_j)z_j\Big)dz_i \\
&\qquad \text{für } f_i(z_i) = c_i + f_{ii}(z_i)\,z_i \\
&\sim \sum_{i=1}^r \Big(f_i(z_i) + \sum_{j\neq i} a'_{ij}z_j\Big)dz_i \\
&\qquad \text{für } a'_{ij} = f_{ij}(0)\,,\ \text{da } z_j^2\,dz_i \sim (-z_j\,z_i)\,dz_j \sim 0 \\
&\sim \sum_{i=1}^r \Big(f_i(z_i) + \sum_{j>i} a_{ij}z_j\Big)dz_i \\
&\qquad \text{für } a_{ij} = a'_{ij} - a'_{ji}\,, \text{da } z_j\,dz_i \sim -z_i\,dz_j
\end{aligned}$$

und damit besitzt jede Differentialform aus $\Omega^1_{Y_r,0}$ einen Repräsentanten der obigen Form.

Analog zum Fall der Differentialformen 1. Ordnung wird $\big(\Omega^{p-1}_r \wedge d\mathscr{I} + \mathscr{I}\Omega^p_n\big)_0$ als $\mathscr{O}_{r,0}$-Modul durch

$$\begin{aligned}
\langle\, & z_i\, z_j\, dZ_L\,,\ (z_i\, dz_j + z_j\, dz_i) \wedge dZ_{L'}\,, \\
& \quad i,j \in \{1,\ldots,r\},\ i<j\,, \\
& \quad L = (l_1,\ldots,l_p),\ 1 \le l_1 < \cdots < l_p \le r,\ dZ_L = dz_{l_1} \wedge \cdots \wedge dz_{l_p}, \\
& \quad L' = (l'_1,\ldots,l'_{p-1}),\ 1 \le l'_1 < \cdots < l'_{p-1} \le r,\ l'_k \neq i,j,\ dZ_{L'} = dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_{p-1}}\rangle
\end{aligned}$$

erzeugt.

Sei nun $\omega = \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} f_I(z_1,\ldots,z_r)\,dZ_I$ Repräsentant eines beliebigen Keimes einer Differentialform aus $\Omega^p_{r,0}$. Dann gilt in $\Omega^p_{Y_r,0}$

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} f_I(z_1,\ldots,z_r)\,dZ_I \\
&\sim \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} \Big(c_I + \sum_{j=1}^{r} f_{I,j}(z_j) z_j\Big) dZ_I \\
&\qquad \text{für } c_I = f_I(0,\ldots,0),\ f_{I,j}(z_j)\,z_j = f_I(0,\ldots,z_j,\ldots,0) - c_I, \\
&\qquad \text{da } z_i\,z_j\,dZ_I \sim 0 \\
&\sim \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} \Big(c_I + \sum_{j\ne i_1,\ldots,i_p} f_{I,j}(z_j) z_j\Big) dZ_I\ , \\
&\qquad \text{da } z_j\,dZ_I \sim 0\ \forall\, j \in \{i_1,\ldots,i_p\} \\
&\sim \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} \Big(c_I + \sum_{j\ne i_1,\ldots,i_p} a'_{I,j}\, z_j\Big) dZ_I \\
&\qquad \text{für } a'_{I,j} = f_{I,j}(0),\ \text{da } z_j^2\,dZ_I \sim 0 \\
&\sim \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} \Big(c_I + \sum_{j>i_p} a_{I,j}\, z_j\Big) dZ_I\ , \\
&\qquad \text{für } a_{i_1,\ldots,i_p,j} = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) a'_{\sigma_1(j,I),\ldots,\sigma_{p+1}(j,I)},\ \text{wobei die} \\
&\qquad \text{Summe über alle Permutationen } \sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_{p+1}) \\
&\qquad \text{von } (j,i_1,\ldots,i_p) \text{ mit } \sigma_2 < \sigma_3 < \cdots < \sigma_{p+1} \text{ läuft,} \\
&\qquad \text{da } (z_j\,dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}) \sim (-z_{i_1}\,dz_j \wedge dz_{i_2} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}) \sim \ldots.
\end{aligned}$$

□

Mit dieser expliziten Beschreibung der Differentialformen lässt sich nun das Poincaré-Lemma direkt nachrechnen.

Satz 3.1.2. (Poincaré-Lemma für Koordinatenkreuze)
Sei $Y_r \subset \mathbb{C}^r$, $r \ge 2$, das r-dimensionale Koordinatenkreuz. Dann bildet der Komplex der holomorphen Differentialformen (Ω_{Y_r}, d) eine Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_{Y_r} \longrightarrow \mathscr{O}_{Y_r,x} \xrightarrow{d} \Omega_{Y_r,x} \xrightarrow{d} \cdots \tag{3.2}$$

der konstanten Garbe $\mathbb{C}_{Y_r}$.

Beweis. Es soll nun die Exaktheit der Sequenz (3.2) nachgewiesen werden. Außerhalb der Null ist dies klar, da Y_r hier glatt ist und somit die Keime von Differentialformen in $\Omega_{Y_r,x}$ für $x \neq 0$ denen auf einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit entsprechen. In diesen Punkten kann also Satz 1.5.1 angewendet werden.

Im Folgenden werden die Halme in 0 betrachtet.
(i) Exaktheit bei $\mathscr{O}_{Y_r,0}$:
Sei f ein Funktionskeim aus $\ker d \subset \mathscr{O}_{Y_r,0}$, d.h. es gibt $f_i \in \mathscr{O}_{1,0}$ mit $f_i(0) = 0$, $i \in \{1,\dots,r\}$, so dass

$$f = c + \sum_{i=1}^{r} f_i(z_i) \quad \text{und} \quad df = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial z_i}(z_i) dz_i = 0.$$

Es folgt $\frac{\partial f_i}{\partial z_i} = 0$ für alle i. Die f_i sind also konstant und somit auch f.

(ii) Exaktheit bei $\Omega^1_{Y_r,0}$:
Sei $\omega \in \ker d \subset \Omega^1_{Y_r,0}$, d.h.

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \Big(f_i(z_i) + \sum_{j>i} a_{ij} z_j \Big) dz_i \quad \text{mit} \quad d\omega = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j>i} -a_{ij} dz_i \wedge dz_j = 0.$$

Es folgt $a_{ij} = 0 \; \forall i, j$ und somit $\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i(z_i) dz_i$.
Seien nun Stammfunktionen F_i mit $F_i(0) = 0$ und $\frac{\partial F_i}{\partial z_i} = f_i$ gegeben. Diese existieren, da $f_i \in \mathscr{O}_{1,0}$ für alle i. Dann repräsentiert $F(z_1,\dots,z_n) = \sum_{i=1}^{r} F_i(z_i)$ einen Keim in $\mathscr{O}_{Y_r,0}$ mit

$$dF = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F_i}{\partial z_i}\, dz_i = \sum_{i=1}^{r} f_i(z_i)\, dz_i = \omega.$$

(iii) Exaktheit bei $\Omega^p_{Y_r,0}$, $p \geq 2$:
Sei $\omega \in \ker d \subset \Omega^p_{Y_r,0}$, d.h.

$$\omega = \sum_{\substack{|I|=p \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}} \Big(c_I + \sum_{j>i_p} a_{I,j} z_j \Big) dZ_I \quad \text{mit} \quad d\omega = \sum_{\substack{|I|=p \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}} \sum_{j>i_p} (-1)^p a_{I,j}\, dZ_I \wedge dz_j = 0.$$

Es folgt also $a_{I,j} = 0 \; \forall I, j$ und somit $\omega = \sum\limits_{\substack{|I|=p \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}} c_I\, dZ_I$.

$$\eta := \sum_{\substack{|I|=p \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r}} (-1)^{p-1} c_I z_{i_p} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_{p-1}}$$

repräsentiert nun einen Keim in $\Omega^{p-1}_{Y_r,0}$. Dann folgt für die Ableitung

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} (-1)^{p-1} c_I \, dz_{i_p} \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_{p-1}} \\ &= \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} c_I \, dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_{p-1}} \wedge dz_{i_p} \\ &= \omega. \end{aligned}$$

Damit ist die Sequenz (3.2) exakt. □

Für die spätere Verallgemeinerung ist es zweckmäßig, den hier zu Grunde liegenden Homotopieoperator $I : \Omega^p_{Y_r,0} \to \Omega^{p-1}_{Y_r,0}$ zu definieren:

Definition 3.1.3.
Für $\omega = \sum_{i=1}^r \Big(f_i(z_i) + \sum_{j>i} a_{ij} z_j\Big) dz_i \ \in \Omega^1_{Y_r,0}$ *setze:*

$$I\omega := \sum_{i=1}^r F_i(z_i) \ \textit{mit}\ F_i(0) = 0 \ \textit{und}\ \frac{\partial F_i}{\partial z_i} = f_i \tag{3.3}$$

und für $\omega = \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} \Big(c_I + \sum_{j>i_p} a_{I,j} z_j\Big) dZ_I \ \in \Omega^p_{Y_r,0}\, , p \ge 2$:

$$I\omega := \sum_{\substack{|I|=p \\ 1\le i_1<\ldots<i_p\le r}} (-1)^{p-1} c_I z_{i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_{p-1}}. \tag{3.4}$$

Bemerkung 3.1.4. *Mit den obigen Definitionen gilt* $dI + Id = id$.

Beweis. Zunächst ist für $\omega = \sum_{i=1}^r \Big(f_i(z_i) + \sum_{j>i} a_{ij} z_j\Big) dz_i \in \Omega^1_{Y_r}$

$$\begin{aligned} dI\omega \, + \, Id\omega &= \sum_{i=1}^r \frac{\partial F_i}{\partial z_i} dz_i + I\Big(\sum_{i=1}^r \sum_{j>i} -a_{ij} dz_i \wedge dz_j\Big) \\ &= \sum_{i=1}^r f_i dz_i + \sum_{i=1}^r \sum_{j>i} (-1)^{(2-1)} (-a_{ij}) z_j \, dz_i \\ &= \sum_{i=1}^r \big(f_i + \sum_{j>i} a_{ij} z_j\big) dz_i \\ &= \omega. \end{aligned}$$

Des Weiteren kann für $\omega = \sum\limits_{\substack{|I|=p\\ 1\leq i_1<\ldots<i_p\leq r}} \Big(c_I + \sum\limits_{j>i_p} a_{I,j}\, z_j\Big) dZ_I \;\in \Omega^p_{Y_r}\,, p\geq 2$

$$\begin{aligned}
dI\omega\,+\,Id\omega &= \sum_{\substack{|I|=p\\ 1\leq i_1<\ldots<i_p\leq r}} (-1)^p c_I dz_{i_p}\wedge dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_{p-1}}\\
&\qquad +I\Big(\sum_{\substack{|I|=p\\ 1\leq i_1<\ldots<i_p\leq r}}\sum_{j>i_p}(-1)^p a_{I,j}\,dZ_I\wedge dz_j\Big)\\
&= \sum_{\substack{|I|=p\\ 1\leq i_1<\ldots<i_p\leq r}} c_I\,dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_{p-1}}\wedge dz_{i_p}\\
&\qquad +\sum_{\substack{|I|=p\\ 1\leq i_1<\ldots<i_p\leq r}}\sum_{j>i_p}(-1)^p(-1)^p a_{I,j}\,z_j\,dZ_I\\
&= \sum_{\substack{|I|=p\\ 1\leq i_1<\ldots<i_p\leq r}} \Big(c_I+\sum_{j>i_p} a_{I,j}\;z_j\Big)dZ_I\\
&= \omega
\end{aligned}$$

nachgerechnet werden und damit ist die Bemerkung bewiesen. □

3.2 Differentialformen auf zweidimensionalen schwach normalen Räumen

Sei nun $\tilde{X}$ ein schwach normaler zweidimensionaler komplexer Raum. Wir haben gezeigt, dass $\tilde{X}$ bis auf isolierte Punkte glatt oder lokal isomorph zu $(\mathbb{C}\times Y_r, 0)$ für ein $r\in\mathbb{N}_0$ ist. Damit können die Differentialformen bis auf isolierte Punkte durch $\Omega^p_{\mathbb{C}\times Y_r,0}$ beschrieben werden. Für den zweiten Fall sollen in diesem Kapitel zunächst die Differentialformen berechnet werden.

Satz 3.2.1. (Differentialformen erster Ordnung auf $\mathbb{C}\times Y_r$)
Für die Differentialformen erster Ordnung auf $\mathbb{C}\times Y_r$, $r\geq 2$, in 0 gilt

$$\begin{aligned}
\Omega^1_{\mathbb{C}\times Y_r,0} &= \Big\{[\omega] : \omega = \Big(f_{00}(z_0)+\sum_{j=1}^r f_{0j}(z_0,z_j)z_j\Big)\,dz_0\\
&\qquad +\sum_{i=1}^r\Big(f_{ii}(z_0,z_i)+\sum_{j>i} f_{ij}(z_0)z_j\Big)\,dz_i\Big\}.
\end{aligned}$$

Beweis. Das Ideal $\big(d\mathscr{I}+\mathscr{I}\Omega^1_r\big)_0$ wird als $\mathscr{O}_{r+1,0}$-Modul von

$$\langle z_i\, z_j\, dz_k\,,\; z_i\, dz_j + z_j\, dz_i\,,\; i,j\in\{1,\ldots,r\}\,,\; i<j\,,\; k\in\{0,\ldots,r\}\rangle$$

erzeugt. Sei nun $\omega = \sum_{i=0}^{r} f_i(z_0,\dots,z_n)\,dz_i$ ein beliebiger Repräsentant eines Keimes aus $\Omega^1_{r+1,0}$. In $\Omega^1_{\mathbb{C}\times Y_r,0}$ gelten damit folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\omega \;\sim\; & \sum_{i=0}^{r}\Big(f_{i0}(z_0)+\sum_{j=1}^{r} f'_{ij}(z_0,z_j)\,z_j\Big)\,dz_i\\
& \text{für } f_{i0}(z_0)=f_i(z_0,0,\dots,0) \text{ und } f'_{ij}(z_0,z_j)\,z_j = f_i(z_0,0,\dots,z_j,\dots,0)-f_{i0},\\
& \text{da } z_i\,z_j\,dz_k\sim 0\\
\sim\; & \Big(f_{00}(z_0)+\sum_{j=1}^{r} f_{0j}(z_0,z_j)z_j\Big)dz_0+\sum_{i=1}^{r}\Big(f_{ii}(z_0,z_i)+\sum_{j>i} f_{ij}(z_0)z_j\Big)\,dz_i\\
& \text{für } f_{0j}(z_0,z_j)=f'_{0j}(z_0,z_j)\,,\; f_{ii}(z_0,z_i)=f_{i0}(z_0)+f'_{ii}(z_0,z_i)z_i\\
& \text{und } f_{ij}(z_0)=f'_{ij}(z_0,0)-f'_{ji}(z_0,0),\; i,j>0,\; j>i,\\
& \text{da } z_j^2\,dz_i\sim -z_jz_idz_j\sim 0 \text{ und } z_j\,dz_i\sim -z_idz_j \text{ gilt.}
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.2. (Differentialformen zweiter Ordnung auf $\mathbb{C}\times Y_r$)
Auf $\mathbb{C}\times Y_r$, $r\geq 2$, gilt für die Keime holomorpher Differentialformen in 0

$$\begin{aligned}
\Omega^2_{\mathbb{C}\times Y_r,0} \;&=\; \Omega^2_{r+1,0}\Big/\big(d\mathscr{I}\wedge\Omega^1_{r+1,0}+\mathscr{I}\Omega^2_{r+1,0}\big)\\
&=\; \Big\{[\omega]:\omega=\sum_{j=1}^{r}\Big(f_{0jj}(z_0,z_j)+\sum_{k>j} f_{0jk}(z_0)z_k\Big)\,dz_0\wedge dz_j\\
&\qquad +\sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}\Big(f_{ij0}(z_0)+\sum_{k>j} f_{ijk}(z_0)z_k\Big)\,dz_i\wedge dz_j\Big\}.
\end{aligned}$$

Beweis. Für den $\mathscr{O}_{r+1,0}$-Modul $\big(d\mathscr{I}\wedge\Omega^1_{r+1}+\mathscr{I}\Omega^2_{r+1}\big)_0$ können wir wiederum die Erzeugenden angeben. Wir haben

$$\begin{aligned}
\big(d\mathscr{I}\wedge\Omega^1_{r+1}+\mathscr{I}\Omega^2_{r+1}\big)_0 \;=\; & \big\langle z_i\,z_jdz_k\wedge dz_l\,,\; z_i\,dz_j\wedge dz_k+z_j\,dz_i\wedge dz_k\,,\\
& \quad i,j\in\{1,\dots r\}\,,\; i<j\,,\; k,l\in\{0,1,\dots,r\}\big\rangle
\end{aligned}$$

und somit gilt

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i=0}^{r}\sum_{j>i} f_{ij}(z_0,\dots,z_r)\,dz_i\wedge dz_j \\
&\sim \sum_{j=1}^{r}\Big(f_{0j0}(z_0)+\sum_{k=1}^{r} f'_{0jk}(z_0,z_k)z_k\Big)\,dz_0\wedge dz_j \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}\Big(f_{ij0}(z_0)+\sum_{k=1}^{r} f'_{ijk}(z_0,z_k)z_k\Big)\,dz_i\wedge dz_j \\
&\qquad \text{mit } f_{ij0}(z_0)=f_{ij}(z_0,0,\dots,0) \\
&\qquad \text{und } f'_{ijk}(z_0,z_k)z_k = f_{ij}(z_0,0,\dots,z_k,\dots,0)-f_{ij0}(z_0),\ k>0, \\
&\qquad \text{da } z_i\,z_j dz_k\wedge dz_l\sim 0 \text{ für } i,j\in\{1,\dots r\}\,,\ i<j,\ k,l\in\{0,1,\dots,r\} \\
&\sim \sum_{j=1}^{r}\Big(f_{0jj}(z_0,z_j)+\sum_{k>j} f_{0jk}(z_0)z_k\Big)\,dz_0\wedge dz_j \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j>i}\Big(f_{ij0}(z_0)+\sum_{k>j}^{r} f_{ijk}(z_0)z_k\Big)\,dz_i\wedge dz_j \\
&\qquad \text{mit } f_{0jj}(z_0,z_j)=f_{0j0}(z_0)+f'_{0jj}(z_0,z_j)z_j\ f_{0jk}(z_0)=f'_{0jk}(z_0,0)-f'_{0kj}(z_0,0) \\
&\qquad \text{und } f_{ijk}(z_0)=f'_{ijk}(z_0,0)-f'_{ikj}(z_0,0)+f'_{jki}(z_0,0), \\
&\qquad \text{da } z_k^2 dz_i\wedge dz_j\sim 0,\ \text{für } k\in\{1,\dots,r\}, i,j\in\{0,1,\dots r\}, \\
&\qquad z_j\,dz_0\wedge dz_k\sim -z_k\,dz_0\wedge dz_j \text{ für } j,k\in\{1,\dots,r\} \\
&\qquad \text{und } z_i\,dz_j\wedge dz_k\sim -z_j\,dz_i\wedge dz_k\sim z_k\,dz_i\wedge dz_j \text{ für } i<j<k\in\{1,\dots,r\}.
\end{aligned}
$$

□

Satz 3.2.3. (Differentialformen höherer Ordnung auf $\mathbb{C}\times Y_r$)
Für $r\geq 2$ und $2<p\leq r+1$ gilt

$$
\begin{aligned}
\Omega^p_{\mathbb{C}\times Y_r,0} &= \Omega^p_{r+1,0}/d\mathscr{I}\wedge\Omega^{p-1}_{r+1,0}+\mathscr{I}\Omega^p_{r+1,0} \\
&= \Big\{[\omega]:\omega=\sum_{\substack{I=(i_1,\dots,i_p)\\ 0\leq i_1<\dots<i_p\leq r}}\Big(f_{I0}(z_0)+\sum_{j>i_p} f_{Ij}(z_0)z_j\Big)\,dZ_I\Big\}.
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist für $p=r+1$

$$
\Omega^{r+1}_{\mathbb{C}\times Y_r,0} = \Big\{[\omega]:\omega=f_0(z_0)dz_0\wedge\cdots\wedge dz_r\Big\}.
$$

Beweis. Wir haben für die Erzeugenden von $\big(d\mathscr{I}\wedge\Omega^{p-1}_{r+1}+\mathscr{I}\Omega^p_{r+1}\big)_0$

$$
\begin{aligned}
&\big\langle z_i\,dz_j\wedge dZ_{L'}+z_j\,dz_i\wedge dZ_{L'}\,,\ \ z_i\,z_j\,dZ_L\,, \\
&\qquad i,j\in\{1,\dots r\}\,,\ i<j,\ L=(l_1,\dots;l_p),\ 0\leq l_1<\dots l_p\leq r, \\
&\qquad L'=(l'_1,\dots;l'_{p-1})\,,0\leq l'_1<\dots l'_{p-1}\leq r\ \big\rangle
\end{aligned}
$$

und somit

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{\substack{|I|=p\\ 0\le i_1<\dots<i_p\le r}} f_I(z_0,\dots,z_n)\,dZ_I \quad \in \Omega^p_{r+1,0}\\
&\sim \sum_{\substack{|I|=p\\ 0\le i_1<\dots<i_p\le r}} \Big(f_{I0}(z_0)+\sum_{j=1}^{r} f'_{Ij}(z_0,z_j)\,z_j\Big)\,dZ_I\,,\\
&\qquad \text{für } f_{I0}(z_0)=f_I(z_0,0,\dots,0)\\
&\qquad \text{und } f'_{Ij}(z_0,z_j)\,z_j = f_I(z_0,0,\dots,z_j,\dots,0)-f_{I0}(z_0),\\
&\qquad \text{da } z_i\,z_j\,dZ_I\sim 0\\
&\sim \sum_{\substack{|I|=p\\ 0\le i_1<\dots<i_p\le r}} \Big(f_{I0}(z_0)+\sum_{j>l_p} f_{Ij}(z_0)\,z_j\Big)\,dZ_I\,,\\
&\qquad \text{für } f_{Ij}(z_0)=f'_{i_1,\dots,i_p,j}(z_0,0)-f'_{i_1,\dots,i_{p-1},j,i_p}(z_0,0)+\dots,\\
&\qquad \text{da } z_j\,dZ_I\sim 0 \text{ gilt, falls } j=l_m \text{ für ein } m\in\{1,\dots,k\}\\
&\qquad z_j^2\,dZ_I\sim 0\;\forall\, j,I\\
&\qquad \text{und } z_j\,dz_i\wedge dZ_{L'}\sim -z_l\,dz_j\wedge dZ_{L'}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Relative Differentialformen und Poincaré-Lemma

Nach Satz 2.3.1 entspricht eine holomorphe Funktion $f:\tilde{X}\to\mathbb{C}$ auf einem zweidimensionalen schwach normalen Raum in einem nichtkritischen Punkt lokal einer Projektion $\mathbb{C}\times Y_r\to\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{N}_0$.
Für $r=0,1$, also für den Fall, dass die Fasern von f glatt sind, gilt das relative Poincaré-Lemma nach Satz 1.5.5. Der Fall $r\ge 2$ soll hier betrachtet werden.

Satz 3.3.1. *Sei $\tilde{X}$ ein zweidimensionaler schwach normaler komplexer Raum mit kanonischer Whitney-Stratifizierung, $f:\tilde{X}\to\mathbb{C}$ habe in $y\in\tilde{X}$ einen nichtkritischen Punkt im stratifizierten Sinn, derart dass $(\tilde{X},y)=(\mathbb{C}\times Y_r,0)$ für ein $r\ge 2$ gilt. Dann haben die Garben der relativen Differentialformen in y folgende Gestalt:*

$$\begin{aligned}
\Omega^1_{\tilde{X}/\mathbb{C},y} &\cong \Big\{[\omega]:\omega=\sum_{i=1}^{r}\Big(f_{i0}(z_0)+f_{ii}(z_0,z_i)z_i+\sum_{j>i} f_{ij}(z_0)z_j\Big)\,dz_i\Big\}\,,\\
\Omega^p_{\tilde{X}/\mathbb{C},y} &\cong \Big\{[\omega]:\omega=\sum_{\substack{|I|=p\\ 1\le i_1<\dots<i_p\le r}}\Big(f_{I0}(z_0)+\sum_{j>i_p} f_{Ij}(z_0)z_j\Big)\,dZ_I\Big\} \text{ für } 2\le p\le r,\\
\Omega^p_{\tilde{X}/\mathbb{C},y} &= 0 \text{ für } p\ge r+1.
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Satz 2.3.1 gibt es eine Koordinatentransformation $\psi : \mathbb{C}\times Y_r \supset U \to V \subset \tilde{X}$, so dass $f \circ \psi(z_0, \dots, z_r) = z_0$. Damit sind die relativen Differentialformen $\Omega^p_{\mathbb{C}\times Y_r/\mathbb{C},0}$ von $f \circ \psi$ für jedes $p \in \mathbb{N}$ isomorph zu $\Omega^p_{\tilde{X}/\mathbb{C},y}$. Aus den Sätzen 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 folgt dann die Behauptung. □

Die relativen Differentialformen $\Omega^p_{\tilde{X}/\mathbb{C},y}$ in einem nichtkritischen Punkt entsprechen, wie wir explizit nachgerechnet haben, gerade den Differentialformen auf dem zugehörigen Koordinatenkreuz $\Omega^p_{Y_r,0}$ mit einem zusätzlichen Parameter z_0.
Die Tatsache, dass sich die relativen Differentialformen bezüglich einer Projektion als Differentialformen auf den Fasern mit zusätzlichen Parametern auffassen lassen, gilt auch im allgemeineren Kontext, da die Bildung relativer Differentialformen verträglich mit Basiswechseln ist, vgl. [EGA IV, 0,16.4].
Mit diesen Überlegungen kann nun leicht das relative Poincaré-Lemma für diesen Fall gezeigt werden.

Satz 3.3.2. (Relatives Poincaré-Lemma für Abbildungen auf zweidimensionalen schwach normalen Räumen)
Sei $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem schwach normalen zweidimensionalen komplexen Raum $\tilde{X}$ mit kanonischer Whitney-Stratifizierung. Für einen im stratifizierten Sinn nichtkritischen Punkt y von f ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \left(f^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}}\right)_y \longrightarrow \mathscr{O}_{\tilde{X},y} \longrightarrow \Omega^1_{\tilde{X}/\mathbb{C},y} \longrightarrow \dots.$$

exakt.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\mathscr{O}_{\mathbb{C}}\right)_y &\cong \mathscr{O}_{\mathbb{C},0} \\ \mathscr{O}_{\tilde{X},y} &= \left\{[f] : f = f(z_0) + \sum_{i=1}^{r} f_i(z_0, z_i)\right\}. \end{aligned}$$

Jetzt kann der Vorgehensweise bei Brieskorn ([Bri70, 1.1]) gefolgt werden: Man wendet den Homotopieoperator aus Kapitel 3.1, Gleichungen (3.3) und (3.4) auf die Koordinaten $z_1, \dots, z_r$ an und erhält Abbildungen

$$I : \Omega^p_{\mathbb{C}\times Y_r,0} \to \Omega^{p-1}_{\mathbb{C}\times Y_r,0}$$

mit $I\,d' + d'\,I = id$, wobei d' die Ableitung von Differentialformen bezüglich $z_1, \dots, z_r$ ist.
Für $[\omega] \in \Omega_{\mathbb{C}\times Y_r,0}$ mit $d[\omega] = 0$ gibt es nach Satz 3.3.1 einen Repräsentanten $\omega \in \Omega_{\mathbb{C}\times Y_r}$ mit $d'\omega = 0$, d.h. $d'I\omega = \omega$. Damit gilt aber auch $d[I\omega] = [\omega]$ und somit ist das relative Poincaré-Lemma bewiesen. □

4 Topologische und analytische Beschreibung der Monodromie

In diesem Kapitel wird nun eine holomorphe Abbildung $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ auf einem zweidimensionalen schwach normalen Raum $\tilde{X}$ mit einem isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei $x \in \tilde{X}$ mit $f(x) = 0$ betrachtet. Die Nachbarfasern $f^{-1}(t), 0 < |t| < \eta$ haben dabei im Allgemeinen singuläre Punkte.

Für die topologische Beschreibung der Monodromie können die Voraussetzungen zunächst allgemeiner gewählt werden: Für jede Abbildung $f : Z \to \mathbb{C}$ auf einem zweidimensionalen Whitney-stratifizierten komplexen Raum Z mit isoliertem kritischen Punkt in einem $x \in Z$ mit $f(x) = 0$, erhält man ein lokal triviales topologisches Faserbündel $f' : X' \to S'$, wobei $S' \subset \mathbb{C}$ eine punktierte Umgebung der Null und $X' \subset f^{-1}(S')$ eine geeignete Teilmenge von Z ist.
Geht man von den Fasern $X_t = f^{-1}(t) \cap X', t \in S'$, zu ihrer Kohomologie $H^p(X_t, \mathbb{C})$ über, so erhält man eine lokal konstante Garbe bzw. ein flaches Vektorbündel $\underline{H}$ über S'. Auf der Garbe der holomorphen Schnitte $\mathscr{H}$ ist dann ein kanonischer Zusammenhang gegeben, der topologische Gauss-Manin-Zusammenhang.
Um diesen auch analytisch beschreiben zu können, wird $\mathscr{H}$ unter Verwendung des relativen Poincaré-Lemmas mit der relativen de Rham-Kohomologie $\mathscr{H}(X'/S')$ identifiziert. Der Gauss-Manin-Zusammenhang kann hier mit dem verbindenden Homomorphismus einer langen exakten Hyperkohomologiesequenz identifiziert werden.
Für die Fortsetzung des Zusammenhangs in den singulären Punkt ist die Kohärenz der auf ganz $S = S' \cup \{0\}$ fortgesetzten Garbe $\mathscr{H}(X/S)$ zu zeigen. Anschließend kann der Gauss-Manin-Zusammenhang unter Verwendung der expliziten Darstellung der Differentialformen aus Kapitel 3.2 über ganz S mit einer polartigen Singularität in Null fortgesetzt werden.

4.1 Kompaktifizierung der Fasern

Für den Nachweis der Kohärenz der relativen de Rham-Kohomologie ist es wichtig, dass sich $f : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung $X \subset \tilde{X}$ des kritischen Punktes als Einschränkung einer eigentlichen Abbildung $\bar{f} : Y \to S,\ X \subset Y$, auffassen lässt, so dass $f|_{Y \setminus \bar{X}}$ ein lokal triviales Faserbündel ist. Dazu werden die Fasern von $f|_X$ durch Einkleben von Kreisscheiben kompaktifiziert. Da wir im Folgenden nur die eingeschränkte Funktion $f|_X : X \to S$ betrachten wollen, stellen wir die Kompaktifizierung der Fasern den folgenden Überlegungen voran.

Für den Beweis wird die schwache Normalität von $\tilde{X}$ nicht benötigt, weshalb wir den folgenden Satz in einem allgemeineren Kontext aufstellen können.

Satz 4.1.1. (Kompaktifizierung von f)
Sei Z ein reduzierter zweidimensionaler komplexer Raum mit einer gegebenen Whitney-Stratifizierung, $f : Z \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit einem isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei $x \in Z$ und mit $f(x) = 0$.
Dann gibt es eine Umgebung $S \subset \mathbb{C}$ von 0 und dazu eine geeignete Umgebung $X \subset f^{-1}(S)$ von x sowie eine eigentliche holomorphe Abbildung $\bar{f} : Y \to S$, so dass $X \subset Y$ eine offene Teilmenge ist und folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f|_X"'] & & Y \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

(ii) $\bar{f}|_{Y \setminus \bar{X}}$ besitzt keine kritischen Punkte und definiert ein lokal triviales Faserbündel über S, $\bar{X}$ sei dabei der Abschluss von X in Y.

Beweis. Da f einen isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn besitzt, ist $f^{-1}(0)$ höchstens eindimensional. Wir können Z in einer Umgebung von x in einen $\mathbb{C}^n$ einbetten und erhalten damit für eine hinreichend klein gewählte Umgebung U von x Koordinaten $z_1, \dots, z_n$, der Punkt x entspreche in diesen Koordinaten dem Nullpunkt. Die Koordinate $z = (z_1, \dots, z_n)$ auf U sei nun so gewählt, dass für $y \in f^{-1}(0) \setminus \{0\} \cap U$ die z_1-Komponente nicht verschwindet.
Wir betrachten nun die lineare Funktion $l : U \to \mathbb{C}$, $(z_1 \dots, z_n) \mapsto z_1$ und dazu die zusammengesetzte Funktion

$$\Phi = (l, f) : U \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

Zunächst zeigen wir, dass es $\delta > 0$ und $\varepsilon, \eta \ll \delta$ gibt, derart dass die eingeschränkte

Abbildung

$$\Phi|_{X_\varepsilon^\delta} : X_{\varepsilon,\eta}^\delta \to S_\varepsilon \times S_\eta, \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} & X_{\varepsilon,\eta}^\delta = X \cap B_\delta \cap \Phi^{-1}(S_\varepsilon \times S_\eta), \\ & S_\varepsilon = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \varepsilon\},\ S_\eta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \eta\} \text{ und} \\ & B_\delta = \{y \in X : |y| < \delta\} \end{aligned}$$

eigentlich ist.
Da $(0,0)$ ein isolierter Punkt der Faser $\Phi^{-1}(0)$ ist, hat das Bild $\Phi(X \cap \partial B_\delta)$ für genügend kleines $\delta > 0$ einen positiven Abstand d von $(0,0)$.
Damit gilt für $\varepsilon, \eta < d/2$

$$\Phi(X \cap \partial B_\delta) \cap (S_\varepsilon \times S_\eta) = \emptyset$$

und es folgt die Eigentlichkeit von $\Phi|_{X_{\varepsilon,\eta}^\delta}$.

Nach eventueller Verkleinerung von ε kann man nun davon ausgehen, dass sich die Fasern $l^{-1}(t')$, $t' \in S_\varepsilon \setminus \{0\}$ und $f^{-1}(0)$ transversal schneiden und dass die punktierte singuläre Faser $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$ glatt ist.
Denn aus der Annahme, dass kein ε mit dieser Eigenschaft existiert, folgt mit dem Kurvenauswahllemma, vgl. [Ebe01, 3.6], dass es eine analytische Kurve $\gamma : [0, \xi) \to f^{-1}(0)$, $\xi > 0$ gibt mit $\gamma(0) = 0$ und so, dass $\gamma(t)$ für alle $t \in (0, \delta)$ kritischer Punkt von $l|_{f^{-1}(0)}$ ist.
Damit gilt $(l \circ \gamma)' = 0$, die Abbildung $l \circ \gamma$ ist also konstant und wegen $\gamma(0) = 0$ folgt $l \circ \gamma \equiv 0$. Wegen $l^{-1}(0) = 0$ ist dann schon $\gamma(0) \equiv 0$, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass $\gamma(t)$ für alle $t \in (0, \delta)$ kritischer Punkt von $l|_{f^{-1}(0)}$ ist.

Da es sich bei der Transversalität der Fasern um eine offene Eigenschaft handelt, kann η zu jedem festen $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ so verkleinert werden, dass sich die Fasern $f^{-1}(t)$ und $l^{-1}(t')$ für $t \in S_\eta$ und $t' \in R_{\varepsilon',\varepsilon} = \{t \in \mathbb{C} : \varepsilon' < |t| < \varepsilon\}$ transversal schneiden.
Unter diesen Voraussetzungen ist die Abbildung

$$\Phi|_{X_{\varepsilon',\varepsilon,\eta}^\delta} : X_{\varepsilon',\varepsilon,\eta}^\delta \longrightarrow R_{\varepsilon',\varepsilon} \times S_\eta, \qquad X_{\varepsilon',\varepsilon,\eta}^\delta = X \cap B_\delta \cap l^{-1}(R_{\varepsilon',\varepsilon}) \cap f^{-1}(S_\eta)$$

eigentlich und unverzweigt und damit eine lokal biholomorphe unverzweigte unbegrenzte Überlagerung, vgl. [For77, Satz 4.22].

Sei nun $X_{\varepsilon',\varepsilon,\eta}^\delta$ als zusammenhängend angenommen und b die Blätterzahl von Φ. Andernfalls können die folgenden Überlegungen auf jede Zusammenhangskomponente angewendet werden.

Durch

$$\begin{array}{rccc} p: & R^{1/b}_{\varepsilon',\varepsilon} \times S_\eta & \longrightarrow & R_{\varepsilon',\varepsilon} \times S_\eta \\ & (\lambda, t) & \longmapsto & (\lambda^b, t) \end{array}$$

ist ebenfalls eine b-blättrige lokal biholomorphe unverzweigte unbegrenzte Überlagerung gegeben, wobei $R^{1/b}_{\varepsilon',\varepsilon} := \{t \in \mathbb{C} : \varepsilon' < |t|^b < \varepsilon\}$.
Da die Fundamentalgruppe $\pi_1(R_{\varepsilon',\varepsilon} \times S_\eta)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist und $R^{1/b}_{\varepsilon',\varepsilon} \times S_\eta$ eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit ist, sind die beiden Überlagerungsräume isomorph, vgl. [For77, Satz 5.9]. Es existiert also eine biholomorphe Abbildung $\tilde{\Phi}$, derart dass

$$\begin{tikzcd} X^\delta_{\varepsilon',\varepsilon,\eta} \arrow[rr, "\tilde{\Phi}"] \arrow[dr, "\Phi_l"'] & & R^{1/b}_{\varepsilon',\varepsilon} \times S_\eta \arrow[dl, "p"] \\ & R_{\varepsilon',\varepsilon} \times S_\eta & \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Da $R^{1/b}_{\varepsilon',\varepsilon} \subset B^{1/b}_{\varepsilon'}(\infty)$ für $B^{1/b}_{\varepsilon'} := \{t \in \hat{\mathbb{C}} : \varepsilon' < |t|^b\}$, kann $X^\delta_{\varepsilon,\eta}$ längs $X^\delta_{\varepsilon',\varepsilon,\eta}$ mittels $\tilde{\Phi}$ mit $B^{1/b}_{\varepsilon'}(\infty) \times S_\eta$ verklebt werden. Die so entstandene Mannigfaltigkeit werde mit Y bezeichnet. Auf $B^{1/b}_{\varepsilon'}(\infty) \times S_\eta$ kann die Abbildung $f|_{X^l_{\varepsilon,\eta}}$ durch Projektion auf den zweiten Faktor fortgesetzt werden.

Nun können zunächst δ' und anschließend ε' und η so klein gewählt werden, dass

(a) $X^\delta_{\varepsilon',\eta} \subset \bar{X}^{\delta'}_\eta \subset X^\delta_{\varepsilon,\eta}$, wobei $X^{\delta'}_\eta = X \cap B_{\delta'} \cap f^{-1}(S_\eta)$ und
$\bar{X}^{\delta'}_\eta = X \cap \bar{B}_{\delta'} \cap f^{-1}(S_\eta)$ und

(b) die Fasern $f^{-1}(t) \cap B_\delta$ außerhalb von B'_δ glatt sind.

Der erste Teil des Satzes (i) folgt nun sofort für $S = S_\eta$ und $X = X^\delta_\eta$.

Die lokale Trivialität von $\bar{f}|_{Y \setminus \bar{X}^\delta_\eta}$ kann nun mit Hilfe des Ehresmannschen Faserungssatzes für berandete Mannigfaltigkeiten gezeigt werden, der analog zu [Ebe01, Theorem 4.1] bewiesen wird. Offensichtlich ist $\bar{f}_{Y \setminus X^\delta_\eta}$ eine eigentliche Submersion. Dass f auch auf dem Rand submersiv ist, d.h. dass sich $f^{-1}(t), t \in S_\eta$ und ∂B_δ für hinreichend kleines δ und η transversal schneiden, folgt mit dem Kurvenauswahllemma in einer analogen Argumentation wie im obigen Beweis, vgl. auch [Ebe01, Lemma 3.5]. Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir also eine lokal triviale differenzierbare Faserung $\bar{f}|_{Y \setminus \bar{X}^\delta_\eta} : Y \setminus \bar{X}^\delta_\eta \to S_\eta$. Da S_η einfach zusammenhängend ist, ist sie sogar global trivial und damit ist auch der zweite Teil des Satzes gezeigt.

□

4.2 Topologische Beschreibung der Monodromie

Zu einer isolierten Hyperflächensingularität $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to \mathbb{C}$ gibt es nach [Mil68] $0 < \eta \ll \delta$, derart dass $f' : X' \to S'$ mit $S' = \{|t| < \delta\} \setminus \{0\}$ und $X' = \{|x| < \eta\} \cap f^{-1}(S')$ ein differenzierbares lokaltriviales Faserbündel definiert.
Wir betrachten hier den allgemeineren Fall einer holomorphen Abbildung auf einem zweidimensionalen komplexen Raum mit einer isolierten Singularität im stratifizierten Sinn. Mit Hilfe des Thomschen Isotopielemmas 1.2.8 erhält man ein topologisches Faserbündel, welches Ausgangspunkt der topologischen Beschreibung der Monodromie ist. Wir zeigen also zunächst

Satz 4.2.1. *Sei Z ein reduzierter zweidimensionaler komplexer Raum mit einer gegebenen Whitney-Stratifizierung, $f : Z \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung mit einem isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei $x \in Z$ und mit $f(x) = 0$. Dann gibt es eine Umgebung $S \subset \mathbb{C}$ von 0 und dazu eine geeignete Umgebung $X \subset f^{-1}(S)$ von x, so dass*

$$f|_{X'} : X' \longrightarrow S', \quad S' = S \setminus \{0\},\ X' = X \setminus f^{-1}(0)$$

ein lokal triviales topologisches Faserbündel ist.

Beweis. Es seien $X = X_\eta^\delta$ und $S = S_\eta$ wie im Beweis von Satz 4.1.1 gewählt.
Man erhält eine reelle Stratifizierung auf $\bar{X}' = X' \cup \partial X'$ mit $\partial X' = \partial B_\delta \cap \bar{f}^{-1}(S')$, indem man den Rand $\partial X'$ als reell-dreidimensionales Stratum zu der gegebenen Stratifizierung auf X' hinzufügt. Diese erfüllt die Whitney-Bedingungen, da δ und η in 4.1.1 so gewählt wurden, dass sich ∂B_δ und die Fasern $f^{-1}(t),\ t \in S_\eta$ transversal schneiden.
Die Abbildung $\bar{f}|_{\bar{X}'} : \bar{X}' \to S'$ hat keine kritischen Punkte und es gilt $S' \subset \mathbb{C}$. Damit hat $D\bar{f}|_S$ für jedes Stratum S vollen Rang und $\bar{f}|_{\bar{X}'}$ eine eigentliche stratifizierte Submersion. Das Thomsche Isotopielemma (Satz 1.2.8) liefert nun ein topologisches Faserbündel $\bar{f}|_{\bar{X}'} : \bar{X}' \to S'$, dessen Fasern homöomorph durch einen stratumerhaltenden Homöomorphismus sind. Damit ist aber auch $f' : X' \to S'$ ein topologisches Faserbündel. □

Bemerkung 4.2.2. *Der obige Satz gilt allgemeiner auch in höheren Dimensionen, vgl. [GM88, II, Chapter 2.4] oder [Lê92].*

Notation. *Im Folgenden sei mit f immer die Abbildung $f|_X : X \to S$ gemeint, $\bar{f} : Y \to S$ bezeichne die zugehörige eigentliche Abbildung. Des Weiteren definieren wir $X_t := f^{-1}(t) \cap X$, $t \in S$ sowie $\bar{X}$ für den Abschluss von X in Y. Die glatte Abbildung $f|_{X'} : X' \to S'$, wobei wie oben $S' := S \setminus \{0\}$ und $X' := X \setminus X_0$ seien, werde mit f' bezeichnet.*

Durch das Faserbündel f' wird für $p \in \mathbb{N}$ eine lokal konstante Garbe $\underline{H} = R^p f'_* \mathbb{C}_{X'}$ mit Halmen $H^p(X_t, \mathbb{C})$ definiert. Durch Tensorieren erhält man dann über S' die lokal freie

Garbe

$$\mathscr{H} = R^n f'_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}$$

der holomorphen Schnitte in $\underline{H}$.

Auf $\mathscr{H}$ ist nun durch das lokale System $\underline{H}$ auf kanonische Weise ein Zusammenhang gegeben, wie im Folgenden gezeigt wird.
Ein Zusammenhang auf einer endlich erzeugten lokal freien Garbe $\mathscr{E}$ von $\mathscr{O}_S$-Moduln über einer komplexen Mannigfaltigkeit S vergleicht in der ursprünglichen Idee Nachbarfasern von $\mathscr{E}$ miteinander und besteht aus Isomorphismen der Fasern $\mathscr{E}(x) \to \mathscr{E}(y)$ über benachbarten Punkten x und y in S. Dies führt (vgl. [Del70]) zu folgender

Definition 4.2.3. (Zusammenhang)
Sei $\mathscr{E}$ eine lokal freie Garbe von $\mathscr{O}_S$-Moduln vom Rang n auf einer komplexen Mannigfaltigkeit S. Ein $\mathbb{C}$-linearer Homomorphismus

$$\nabla : \mathscr{E} \to \Omega^1_S \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{E}$$

heißt Zusammenhang auf $\mathscr{E}$, wenn er die Leibnizidentität

$$\nabla(gs) = dg \otimes s + g\nabla(s)$$

erfüllt.

Ein Vektorfeld w auf S ist definiert durch einen Schnitt in der Garbe $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\Omega^1_S, \mathscr{O}_S)$. Dann ist für einen lokalen Schnitt s in der Garbe $\mathscr{E}$ die kovariante Ableitung von s längs w durch

$$\nabla_w(s) = \langle \nabla s, w \rangle$$

gegeben, wobei $\langle\, , \rangle$ der durch $\Omega^1_S \times \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\Omega^1_S, \mathscr{O}_S) \to \mathscr{O}_s$ induzierte Homomorphismus ist. Die Abbildung ∇_w ist also ein $\mathbb{C}$-linearer Homomorphismus

$$\nabla_w : \mathscr{E} \to \mathscr{E},$$

der die Leibnizidentität $\nabla_w(gs) = w(g)s + g\nabla_w(s)$ erfüllt, wobei w nun als Derivation aufgefasst wird.

Umgekehrt ist ein Zusammenhang auf einer lokal freien Garbe $\mathscr{E}$ durch einen $\mathscr{O}_S$-linearen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\Omega^1_S, \mathscr{O}_S) &\to \mathscr{E}nd_{\mathbb{C}}(\mathscr{E}), \\ w &\mapsto \nabla_w, \end{aligned}$$

wobei ∇_w für jedes w die Leibnizidentität erfüllt, definiert.

Ist S eindimensional und $\frac{d}{dt}$ ein Basisvektorfeld auf S, dann wird durch einen Operator $\partial_t = \nabla_{\frac{d}{dt}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$, der die Leibnizidentität erfüllt, eindeutig ein Zusammenhang ∇ auf $\mathscr{E}$ definiert.

Eine lokal freie Garbe E auf S heißt lokales System auf S, wenn sie lokal konstant, also lokal isomorph zu einer konstanten Garbe $\mathbb{C}^n$ ist. Sei nun E ein lokales System auf einer komplexen Mannigfaltigkeit S. Durch $\mathscr{E} = \mathscr{O}_S \otimes_{\mathbb{C}} E$ wird dann die lokal freie Garbe der holomorphen Schnitte in E definiert und es gibt auf $\mathscr{E}$ einen kanonischen Zusammenhang ∇, für den die Garbe der horizontalen Schnitte mit E übereinstimmt. Wir haben $\nabla(gs) = dg \otimes s$ für Schnitte s in E und g in $\mathscr{O}_S$.

Diese allgemeinen Überlegungen sollen jetzt auf unsere Ausgangssituation angewendet werden. Sei also $f' : X' \to S'$ wieder das obige topologische Faserbündel. Dann ist durch $\underline{H}$ ein lokales System auf S' gegeben und somit kann ein kanonischer Zusammenhang auf $\mathscr{H}$ definiert werden.

Definition 4.2.4. (Topologischer Gauss-Manin-Zusammenhang)
Sei $f' : X' \to S'$ ein topologisches Faserbündel und t die kanonische Koordinate auf S'. Dann wird durch

$$\begin{array}{rcccc} \nabla_{\frac{d}{dt}} & : & \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'} & \longrightarrow & \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'} \\ & & g \otimes h & \longmapsto & g \otimes \dfrac{dh}{dt} \end{array}$$

für Schnitte g in $\underline{H} = R^n f'_* \mathbb{C}_{X'}$ und h in $\mathscr{O}_{S'}$ der Zusammenhang auf $\mathscr{H} = \underline{H} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}$ definiert, welcher mit dem durch das lokale System $\underline{H}$ gegebenen übereinstimmt.

Durch $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ kann nun die Picard-Lefschetz-Monodromie der Singularität wie folgt beschrieben werden (vgl. z.B. [Kul98]): Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S', t) \cong \mathbb{Z}$ operiert für jedes $t \in S'$ auf der Faser $H^p(X_t, \mathbb{C})$. Wir erhalten also eine Darstellung

$$\pi_1(S', t) \to \mathrm{Aut} H^p(X_t, \mathbb{C}).$$

Damit können wir definieren:

Definition 4.2.5. (Komplexe Picard-Lefschetz-Monodromie)
Sei $[\gamma] \in \pi_1(S', t)$ der kanonische Erzeugende der Fundamentalgruppe, der durch einen Zyklus γ im mathematisch positiven Sinn um 0 repräsentiert wird. Der entsprechende Automorphismus

$$T = h_\gamma^* : H^p(X_t, \mathbb{C}) \to H^p(X_t, \mathbb{C})$$

wird als komplexe Picard-Lefschetz-Monodromie bezeichnet.

Der lokal freien Garbe $\mathscr{H}$ entspricht nun ein holomorphes Vektorbündel über S'. Da S' eine nicht kompakte Riemannsche Fläche ist, ist das Vektorbündel trivial (vgl. [For77, Satz 30.4]) und damit gibt es globale Schnitte $\varphi_1, \dots, \varphi_r$, die für jedes t eine Basis von $H^p(X_t, \mathbb{C})$ ergeben. Dann lässt sich auch $\nabla_{\frac{d}{dt}}(\varphi_j)$ als Linearkombination von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ausdrücken. Es gibt also eine Matrix $\Gamma = (\Gamma_{ij}) \in M(r \times r, \mathscr{O}_{S'}(S'))$ mit

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}(\varphi_j) = -\sum_{i=1}^{r} \Gamma_{ij}\, \varphi_i\,, \quad j = 1, \dots, r.$$

Ein beliebiger lokaler Schnitt $\varphi = \sum_{j=1}^{r} b_j\, \varphi_j$ ist also genau dann horizontal, d.h. $\nabla_{\frac{d}{dt}}(\varphi) = 0$, wenn

$$\frac{db_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \Gamma_{ij}\, bj \quad \forall\, i \in \{1, \dots, r\} \text{ ist.} \tag{4.1}$$

Der Lösungsraum dieses Differentialgleichungssystems wird also durch den Zusammenhang definiert. Sei $Y(t)$ Fundamentalmatrix der Lösungen des Systems (4.1) von Differentialgleichungen in der Umgebung eines Punktes $t_0 \in S'$. Eine Umrundung der Null im mathematisch positiven Sinn entspricht nun einer linearen Transformation von $Y(t)$ im Lösungsraum von (4.1). Diese wird durch den Monodromieoperator T beschrieben, d.h. nach einer Umrundung der Null geht $Y(t)$ in $Y(t)T$ über. Da T invertierbar ist, gibt es eine Matrix R mit $T = e^{2\pi i R}$. Die Matrixfunktion $t^R = e^{R \ln t}$ hat ebenfalls die Monodromiematrix T, da die Matrix t^R für $t \to t\, e^{2\pi i}$ in $t^R T$ übergeht. Insgesamt hat die Fundamentalmatrix also die Form

$$Y(t) = Z(t)\, t^R,$$

wobei $Z(t)$ eine Matrix von holomorphen Funktionen auf S' ist, die unabhängig von der Monodromie ist. Die Monodromiematrix $T = e^{2\pi i R}$ entspricht der Picard-Lefschetz-Monodromie.

Der hier eingeführte Zusammenhang kann unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass das relative Poincaré-Lemma gilt, auch auf analytischem Wege mittels relativer de Rham-Kohomologie definiert und anschließend fortgesetzt werden. Dazu wird in den folgenden beiden Abschnitten die Garbe $\mathscr{H}$ durch die relative de Rham-Kohomologie ausgedrückt und anschließend kohärent fortgesetzt. Auf dieser Fortsetzung kann dann ein Zusammenhang definiert werden, der über S' mit dem hier definierten Gauss-Manin-Zusammenhang übereinstimmt und in 0 eine polartige Singularität besitzt.

4.3 Relative de Rham-Kohomologie

Analog zur Vorgehensweise in [Bri70] werden in diesem Abschnitt mittels de Rham-Kohomologie Garben $\mathscr{H}^p(X/S)$ auf S definiert, die über S' mit $R^pf_*\mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}$ übereinstimmen.
Wir bezeichnen die relative de Rham-Kohomologie von X modulo S mit

$$\mathscr{H}^p(X/S) := \mathbb{R}^pf_*(\Omega^{\cdot}_{X/S}).$$

Dann gilt der folgende

Satz 4.3.1. (Relative de Rham-Kohomologie)
Sei $\tilde{X}$ ein zweidimensionaler schwach normaler komplexer Raum mit der kanonischen Whitney-Stratifizierung, $f : X \to S$ sei Einschränkung einer holomorphen Funktion auf $\tilde{X}$ mit einem isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei $x \in X$, derart dass Satz 4.1.1 gilt. Dann stimmt die Garbe $\mathscr{H}(X/S)$ auf S' mit $\mathscr{H} := R^pf'_*\mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}$ überein.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass

$$R^p\bar{f}_*(\bar{f}^{-1}\mathscr{O}_S|_{\bar{X}}) \cong R^pf_*(f^{-1}\mathscr{O}_S) \tag{4.2}$$

und analog

$$R^p\bar{f}_*\mathbb{C}_{\bar{X}} \cong R^pf_*\mathbb{C}_X \tag{4.3}$$

gilt.
Nach Kapitel 4.1 gilt $X = B_\delta \cap f^{-1}(S_\eta)$, $S_\eta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < \eta\}$. Da $X_0\backslash\{0\}$ sigularitätenfrei ist, gibt es ein $\varepsilon \ll \delta$, derart dass (nach evtl. Verkleinerung von η) $X_t \cap \left(B_\delta \setminus \overline{B_{\delta-\epsilon}}\right)$ für alle $t \in S_\eta$ glatt ist. Wir definieren für diesen Fall:

$$\begin{aligned} X_{(2)} &= \overline{B_{\delta-\varepsilon}} \cap f^{-1}(S_\eta) \\ X_{(1)} &= \bar{X} \setminus X_{(2)}. \end{aligned}$$

X und $X_{(1)}$ sind also offene Teilmengen von $\bar{X}$, deren Vereinigung $\bar{X}$ ergibt. Nun gibt es Homöomorphismen

$$\begin{aligned} X_{(1)} &\to \partial X \times [0,1) \\ X_{(1)} \cap X &\to \partial X \times (0,1), \quad \partial X = \bar{X} \setminus X, \end{aligned}$$

derart dass für jedes $t \in S_\eta$: $f^{-1}(t) \cap X_{(1)} \cong \left(f^{-1}(t) \cap \partial X\right) \times [0,1)$. $X_{(1)}$ und $X_{(1)} \cap X$ lassen sich also beide fasertreu auf einen gemeinsamen Deformationsretrakt, der homöomorph zu ∂X ist, zusammenziehen. Damit sind die Bilder der auf $X_{(1)}$ und $X_{(1)} \cap X$ eingeschränkten Garben $\bar{f}^{-1}\mathscr{O}_S$ und $\mathbb{C}_{\bar{X}}$ isomorph, wir erhalten

$$R^pf_*\left(f^{-1}\mathscr{O}_S|X_{(1)}\right) \xrightarrow{\sim} R^pf_*\left(f^{-1}\mathscr{O}_S|X_{(1)} \cap X\right) \text{ und} \tag{4.4}$$

$$R^pf_*\left(\mathbb{C}_{X_{(1)}}\right) \xrightarrow{\sim} R^pf_*\left(\mathbb{C}_{X_{(1)}\cap X}\right). \tag{4.5}$$

Nun wird die Mayer-Vietoris-Sequenz (vgl. 1.3.9) von $(\bar{X}, X, X_{(1)})$ für die Garben $f^{-1}\mathscr{O}_S$ und $\mathbb{C}_{\bar{X}}$ aufgestellt. Man erhält die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \ldots \quad \to \quad & R^p f_*\big(f^{-1}\mathscr{O}_S|\bar{X}\big) \to R^p f_*\big(f^{-1}\mathscr{O}_S|X\big) \oplus R^p f_*\big(f^{-1}\mathscr{O}_S|X_{(1)}\big) \\ \to \quad & R^p f_*\big(f^{-1}\mathscr{O}_S|X_{(1)} \cap X\big) \to \ldots . \end{aligned}$$

Mit dem Isomorphismus (4.4) folgt $R^p f_*\big(f^{-1}\mathscr{O}_S|\bar{X}\big) \cong R^p f_*\big(f^{-1}\mathscr{O}_S|X\big)$.
Analog folgt $R^p f_* \mathbb{C}_{\bar{X}} \cong R^p f_* \mathbb{C}_X$ aus der Exaktheit von

$$\begin{aligned} \ldots \quad \to \quad & R^p f_*(\mathbb{C}_{\bar{X}}) \to R^p f_*(\mathbb{C}_X) \oplus R^p f_*(\mathbb{C}_{X_{(1)}}) \\ \to \quad & R^p f_*(\mathbb{C}_{X_{(1)} \cap X}) \to \ldots \end{aligned}$$

und dem Isomorphismus (4.5).

Mit diesen Vorüberlegungen kann nun Satz 4.3.1 bewiesen werden:
Das relative Poincaré-Lemma (Satz 3.3.2) liefert eine Auflösung der Garbe $f'^{-1}\mathscr{O}_{S'}$, d.h. die Inklusion von Komplexen $f'^{-1}\mathscr{O}^{\cdot}_{S'} \hookrightarrow \Omega^{\cdot}_{X'/S'}$ ist ein Quasiisomorphismus und die Hyperkohomologien stimmen überein. Wir erhalten also

$$\mathbb{R}^p f'_*(\Omega^{\cdot}_{X'/S'}) \cong R^p f'_*(f'^{-1}\mathscr{O}_{S'}) \cong R^p \bar{f}_*(\bar{f}^{-1}\mathscr{O}_{S'}|\bar{X}').$$

Korollar 1.3.8 liefert nun

$$R^p \bar{f}_*(\bar{f}^{-1}\mathscr{O}_{S'}|\bar{X}') = R^p \bar{f}_!(\bar{f}^{-1}\mathscr{O}_{S'}|\bar{X}') \cong R^p \bar{f}_! \, \mathbb{C}_{\bar{X}'} \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathscr{O}_{S'} = R^p f_* \, \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}$$

und damit die Behauptung. □

Bemerkung 4.3.2. *Falls f steinsch ist, gilt $\mathscr{H}^p(X/S) := \mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S}) \cong \mathscr{H}^p(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S})$.*

Die Garbe $\mathscr{H} := R^p f'_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}$ kann also mittels der de Rham-Kohomologie durch $\mathscr{H}^p(X/S)$ auf ganz S fortgesetzt werden. Im nächsten Kapitel soll die Kohärenz dieser Fortsetzung gezeigt werden.

4.4 Kohärenz der Fortsetzung

Wir zeigen den folgenden

Satz 4.4.1. *Sei $f : X \to S$ geeignete Einschränkung einer holomorphen Funktion auf einem zweidimensionalen schwach normalen komplexen Raum gemäß Satz 4.1.1 mit einem isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei $x \in X$. Dann ist $\mathscr{H}^p(X/S) = \mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S})$ kohärent für alle $p \in \mathbb{N}$.*

Zu diesem Zweck werden wie bei [Bri70] Garben $\mathscr{H}^p(Y/S)$ und $\mathscr{H}_c^p(Z/S)$, $Z = Y \setminus \bar{X}$ definiert. Anschließend kann die Kohärenz von $\mathscr{H}^p(X/S)$ aus der von $\mathscr{H}^p(Y/S)$ und $\mathscr{H}_c^p(Z/S)$ gefolgert werden.
Für eine bessere Übersichtlichkeit schreiben wir hier f statt $\bar{f}$, $\bar{f}|_X$ und $\bar{f}|_Z$. Welcher Definitionsbereich gemeint ist, ergibt sich jeweils aus dem Zusammenhang. Mit $\Omega^{\cdot}_{X/S}$, $\Omega^{\cdot}_{Y/S}$ und $\Omega^{\cdot}_{Z/S}$ sind die Komplexe relativer Differentialformen bezüglich der entsprechenden Einschränkung von f gemeint.

Definition 4.4.2. *Wir definieren*

$$\mathscr{H}^p(Y/S) := \mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{Y/S}).$$

Lemma 4.4.3. *$\mathscr{H}^p(Y/S)$ ist kohärent.*

Beweis. Für jedes q ist $\Omega^q_{Y/S}$ ein kohärenter $\mathscr{O}_Y$-Modul. Mit dem Grauertschen Endlichkeitssatz (vgl. [FK71]) folgt wegen der Eigentlichkeit von f sofort die Kohärenz der $R^p f_*(\Omega^q_{Y/S})$. Da die Abbildungen in dem Komplex $\Omega^{\cdot}_{Y/S}$ aber lediglich Homomorphismen von $f^{-1}\mathscr{O}_S$-Moduln sind, sind die Abbildungen in $R^p f_*(\Omega^{\cdot}_{Y/S})$ zunächst Homomorphismen von $f_* f^{-1}\mathscr{O}_S$-Moduln. Wegen $\mathscr{O}_S \to f_* f^{-1}\mathscr{O}_S$ erhalten wir insgesamt einen Komplex kohärenter $\mathscr{O}_S$-Moduln.
Für die erste Spektralsequenz gilt

$$'E_2^{p,q} = \mathscr{H}^p(R^q f_*(\Omega^{\cdot}_{Y/S})) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q} f_*(\Omega^{\cdot}_{Y/S}).$$

Die Kohomologiegruppen eines Komplexes kohärenter Garben sind wiederum kohärent. Zudem wird die Spektralsequenz nach endlich vielen Schritten stationär, da die $E_r^{p,q}$ nur für bestimmte $0 < p < p_{max}$ und $q > 0$ von Null verschieden sind. Deshalb besteht auch die Filtrierung zur Berechnung von E_∞^{p+q} aus endlich vielen Schritten und somit ist $\mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{Y/S})$ für alle p kohärent. □

Definition 4.4.4. *Wir definieren*

$$\mathscr{H}_c^p(Z/S) := \mathbb{R}^p f_!(\Omega^{\cdot}_{Z/S}).$$

Lemma 4.4.5. *$\mathscr{H}_c^p(Z/S)$ ist kohärent.*

Beweis. Da $f : Z \to S$ keine kritischen Punkte hat, gilt das relative Poincaré-Lemma (3.3.2) und man hat eine Auflösung $0 \to f^{-1}\mathscr{O}_S \to \Omega^{\cdot}_{Z/S}$. Analog zu Satz 1.5.6 folgt

$$\mathbb{R}^p f_!(\Omega^{\cdot}_{Z/S}) \cong \mathbb{R}^p f_!(f^{-1}\mathscr{O}_S)) \cong R^p f_!(f^{-1}\mathscr{O}_S))$$

und mit Lemma 1.3.8 ergibt sich

$$R^p f_!(f^{-1}\mathscr{O}_S)) \cong R^p f_!(\mathbb{C}_Z) \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathscr{O}_S.$$

Da $f : Z \to S$ nach Konstruktion in Satz 4.1.1 ein lokal triviales und damit global triviales Faserbündel ist, sind die Bildgarben $R^p f_!(\mathbb{C}_Z)$ der konstanten Garbe $\mathbb{C}_Z$ ebenfalls konstant. Die Halme dieser Garben entsprechen dann den Kohomologiegruppen $H^p_c(Z_t, \mathbb{C})$ und somit ist $R^p f_!(\mathbb{C}_Z) \otimes_{\mathbb{C}_S} \mathscr{O}_S$ frei von endlichem Typ und damit natürlich insbesondere kohärent. □

Satz 4.4.6. *Mit den obigen Definitionen gibt es eine aufsteigende exakte Sequenz*

$$\cdots \to \mathscr{H}^{p-1}(X/S) \to \mathscr{H}^p_c(Z/S) \to \mathscr{H}^p(Y/S) \to \mathscr{H}^p(X/S) \to \mathscr{H}^{p+1}_c(Z/S) \to \dots .$$

Beweis. $\Omega^\cdot_{Y/S}$ ist, wie oben schon erwähnt, ein Komplex von $f^{-1}\mathscr{O}_S$-Moduln. Da $Z = Y \setminus \bar{X}$ gilt, gibt es eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \to \Omega^\cdot_{Y/S\,,Z} \to \Omega^\cdot_{Y/S} \to \Omega^\cdot_{Y/S\,,\bar{X}} \to 0\,,$$

wobei $\Omega^\cdot_{Y/S\,,Z}$ und $\Omega^\cdot_{Y/S\,,\bar{X}}$ die trivialen Fortsetzungen der Beschränkungen auf Z und $\bar{X}$ sind (vgl. [Kul70, §11]).
Wir erhalten eine lange exakte Hyperkohomologiesequenz

$$\dots \to \mathbb{R}^p f_!(\Omega^\cdot_{Y/S\,,Z}) \to \mathbb{R}^p f_!(\Omega^\cdot_{Y/S}) \to \mathbb{R}^p f_!(\Omega^\cdot_{Y/S\,,\bar{X}}) \to \dots .$$

Da $f : Y \to S$ und $f : \bar{X} \to S$ eigentlich sind, stimmen die Funktoren f_* und $f_!$ überein und wir erhalten eine Sequenz

$$\cdots \to \mathbb{R}^p f_!(\Omega^\cdot_{Y/S\,,Z}) \to \mathbb{R}^p f_*(\Omega^\cdot_{Y/S}) \to \mathbb{R}^p f_*(\Omega^\cdot_{Y/S\,,\bar{X}}) \to \dots .$$

Da $\mathbb{R}^p f_!(\Omega^\cdot_{Y/S\,,Z}) \cong \mathscr{H}^p_c(Z/S)$ und $\mathbb{R}^p f_*(\Omega^\cdot_{Y/S}) \cong \mathscr{H}^p(Y/S)$ gilt, bleibt nur noch

$$\mathbb{R}^p f_*(\Omega^\cdot_{Y/S\,,\bar{X}}) \cong \mathbb{R}^p f_*(\Omega^\cdot_{Y/S\,,X}) \tag{4.6}$$

zu zeigen.
Durch die Beschränkung von $\bar{X}$ auf X wird ein Homomorphismus auf den Elementen der zweiten Spektralsequenz der Hyperkohomologie induziert. Das heißt, wir erhalten für $p, q \in \mathbb{N}$ Homomorphismen

$$R^p f_*\big(H^q(\Omega^\cdot_{\bar{X}/S})\big) \longrightarrow R^p f_*\big(H^q(\Omega^\cdot_{X/S})\big).$$

Wegen des relativen Poincaré-Lemmas (3.3.2) sind $H^q(\Omega^\cdot_{\bar{X}/S})$ und $H^q(\Omega^\cdot_{X/S})$ für $q > 0$ auf x konzentriert und somit ist der Homomorphismus hier ein Isomorphismus. Der Beschränkungshomomorphismus

$$R^p f_*\big(f^{-1}\mathscr{O}_S|\bar{X}\big) \longrightarrow R^p f_*\big(f^{-1}\mathscr{O}_S|X\big)$$

ist ein Isomorphismus, vgl. Lemma 4.2. Insgesamt sind damit die zwei Spektralsequenzen

$$\begin{aligned} R^p f_*\big(H^q(\Omega^\cdot_{\bar{X}/S})\big) &\implies \mathbb{R}^\cdot f_*(\Omega^\cdot_{\bar{X}/S}), \\ R^p f_*\big(H^q(\Omega^\cdot_{X/S})\big) &\implies \mathbb{R}^\cdot f_*(\Omega^\cdot_{X/S}) \end{aligned}$$

isomorph und damit ist (4.6) gezeigt. □

Wir haben also die lange exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathscr{H}^{p-1}(X/S) \to \mathscr{H}_c^p(Z/S) \to \mathscr{H}^p(Y/S) \to \mathscr{H}^p(X/S) \to \mathscr{H}_c^{p+1}(Z/S) \to \ldots$$

konstruiert, in der die Garben $\mathscr{H}_c^p(Z/S)$ und $\mathscr{H}^p(Y/S)$ kohärent sind. Somit ist auch $\mathscr{H}^p(X/S)$ kohärent und Satz 4.4.1 bewiesen.

Bemerkung 4.4.7. *Die Sätze 4.3.1 und 4.4.1 gelten auch für die geeignete Einschränkung einer holomorphen Abbildung gemäß Satz 4.1.1 auf einem beliebigen Whitney-stratifizierten zweidimensionalen komplexen Raum, für die zusätzlich das relative Poincaré-Lemma außerhalb des kritischen Punktes erfüllt ist.*
Für die nun folgende analytische Beschreibung des Gauss-Manin-Zusammenhangs gilt diese Verallgemeinerung nicht.

4.5 Analytische Beschreibung des Gauss-Manin-Zusammenhangs

Der in Definition 4.2.4 durch

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$$

rein topologisch definierte Zusammenhang soll nun analytisch beschrieben und dann meromorph auf ganz $\mathscr{H}(X/S)$ fortgesetzt werden. Zu diesem Zweck soll zunächst der Komplex

$$(\Omega^{\cdot}_X, df\wedge) : \; 0 \to \mathscr{O}_X \to \Omega^1_X \xrightarrow{df\wedge} \Omega^2_X \xrightarrow{df\wedge} \ldots \longrightarrow \Omega^r_X \xrightarrow{df\wedge} 0 \tag{4.7}$$

untersucht werden, r sei dabei die Einbettungsdimension von X.

Für eine komplexe n-dimensionale Mannigfaltigkeit X und einen Punkt $y \in X$ entspricht (4.7) dem kohomologischen Koszulkomplex des Ringes $\mathscr{O}_{X,y}$ und der Sequenz $f_1, \ldots f_r$ der partiellen Ableitungen von f. Dieser ist in den nichtkritischen Punkten von f exakt. Für isolierte kritische Punkte folgt die Exaktheit (bis auf die letzte Stelle) aus dem Divisionslemma von de Rham [dR54], da die gemeinsame Nullstellenmenge der Ableitungen $f_1, \ldots, f_n$ nur aus dem singulären Punkt besteht und die Sequenz somit regulär ist. Wir haben (vgl. [Kul98, I, 4.3]) folgenden

Satz 4.5.1. *Sei $f : X \to S \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung auf einer komplexen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X mit einem isolierten kritischen Punkt in $x \in X$. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \Omega^1_X \xrightarrow{df\wedge} \ldots \longrightarrow \Omega^{n-1}_X \xrightarrow{df\wedge} \Omega^n_X \longrightarrow \Omega^n_{X/S} \longrightarrow 0.$$

Insbesondere ist $(\Omega^{\cdot}_X, df\wedge)$ in den nichtkritischen Punkten exakt.

Der Komplex (4.7) ist für eine holomorphe Abbildung auf einem komplexen Raum wohldefiniert. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass für $\omega = \sum_i (g_i\, \alpha_i + dh_i \wedge \beta_i) \in (\mathscr{I}\Omega_r^p + d\mathscr{I} \wedge \Omega_r^{p-1})$ mit $g_i,\, h_i \in \mathscr{I},\ \alpha_i \in \Omega_r^p,\ \beta_i \in \Omega_r^{p-1}$

$$\begin{aligned} df \wedge \omega &= \sum_i g_i\,(df \wedge \alpha_i) + dh_i \wedge (-df \wedge \beta_i) \\ &\in (\mathscr{I}\Omega_r^{p+1} + d\mathscr{I}\Omega_r^p) \end{aligned}$$

gilt.

Es ist aber zunächst nicht klar, ob der Komplex (4.7) in den regulären Punkten einer Abbildung auf einem komplexen Raum X exakt ist. Für isolierte kritische Punkte im stratifizierten Sinn einer Abbildung f auf einem komplexen Raum ist eine analoge Aussage zu Satz 4.5.1 jedenfalls nicht möglich, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 4.5.2. *Wir betrachten das Koordinatenkreuz $Y_2 \subset \mathbb{C}^2$ mit der Stratifizierung $S_0 = \{0\}$, $S_1' = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \neq 0,\, z_2 = 0\}$, $S_1'' = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 = 0,\, z_2 \neq 0\}$. Dann besitzt die Funktion $f : Y_2 \to \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + z_2)^2 \sim z_1^2 + z_2^2$ einen isolierten kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei 0, da die Einschränkungen $f|_{S_1'}$ und $f|_{S_1''}$ keine kritischen Punkte haben.*

Es gilt $df = 2(z_1 + z_2)(dz_1 + dz_2) \sim 2z_1\, dz_1 + 2z_2\, dz_2$ und damit ist der Komplex

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{Y_2,0} \longrightarrow \Omega^1_{Y_2,0} \xrightarrow{df\wedge} \Omega^2_{Y_2,0} \longrightarrow \Omega^2_{Y_2/\mathbb{C},0} \longrightarrow 0$$

nicht exakt. Die Differentialform $\omega_1 = dz_1 + dz_2 \in \Omega^1_{Y_2,0}$ liegt im Kern der Abbildung $df\wedge$, nicht aber im Bild.

Wir erhalten für den hier betrachteten Fall einer Abbildung auf schwach normalen zweidimensionalen komplexen Räumen das folgende

Lemma 4.5.3. *Sei $f : X \to S$ die Einschränkung einer holomorphen Funktion f auf einem schwach normalen zweidimensionalen komplexen Raum mit isoliertem kritischen Punkt im stratifizierten Sinn bei $x \in X$, $f(x) = 0$, bezüglich der kanonischen Stratifizierung gemäß Satz 4.1.1. Dann ist der Komplex*

$$0 \to \mathscr{O}_{X,y} \to \Omega^1_{X,y} \xrightarrow{df\wedge} \Omega^2_{X,y} \xrightarrow{df\wedge} \ldots \longrightarrow$$

außerhalb des kritischen Wertes von f exakt.

Beweis. Die Funktion f entspricht in geeigneten Koordinaten in einer Umgebung eines nichtkritischen Punktes y für ein $r \in \mathbb{N}_0$ der Projektion $\mathbb{C} \times Y_r \to \mathbb{C}$. Für $r = 0, 1$ ist die Exaktheit der Sequenz klar, für $r \geq 2$ kann sie explizit mit Hilfe der Sätze 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3 nachgerechnet werden. □

Nun wird ein Zusammenhang auf $\mathscr{H}^p(X/S) = \mathbb{R}^p f_* \Omega_{X/S}$ definiert, der bei 0 singulär ist und außerhalb der Null mit dem topologisch definierten Zusammenhang $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ übereinstimmt. Wir haben allgemein eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow df \wedge \Omega_X^{\cdot -1} \xrightarrow{i} \Omega_X^{\cdot} \xrightarrow{p} \Omega_{X/S}^{\cdot} \longrightarrow 0. \tag{4.8}$$

Die Abbildungen

$$df \wedge : \; \Omega_X^p / _{\ker df \wedge} \longrightarrow df \wedge \Omega_X^p$$

sind offensichtlich für jedes p Isomorphismen. Wegen $d(df \wedge \omega) = -df \wedge d\omega$ erhalten wir also einen Isomorphismus von Komplexen

$$((\Omega_X^{\cdot} / _{\ker df \wedge}), -d) \cong (df \wedge \Omega_X^{\cdot}, d).$$

Wegen der Exaktheit von $(\Omega_{X'}^{\cdot}, df' \wedge)$ gilt

$$(\Omega_{X'}^p / _{\ker df' \wedge}) = (\Omega_{X'}^p / _{df' \wedge}) = \Omega_{X'/S'}^p.$$

Die Sequenz (4.8) enspricht damit für die Einschränkung f' der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow (\Omega_{X'/S'}^{\cdot -1}, -d) \xrightarrow{df' \wedge} \Omega_{X'}^{\cdot} \xrightarrow{p} \Omega_{X'/S'}^{\cdot} \longrightarrow 0.$$

Auf diese kurze exakte Sequenz kann nun der Funktor $\mathbb{R} f'_*$ angewendet werden, so dass eine lange exakte Sequenz der hyperdirekten Bilder entsteht. Da f steinsch ist, entspricht dies der Anwendung des hier exakten Bildfunktors f_* und anschließender Bildung der langen exakten Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow \mathscr{H}^p f'_* \Omega_{X'}^{\cdot} \xrightarrow{p_*} \mathscr{H}^p f'_* \Omega_{X'/S'}^{\cdot} & \\ \xrightarrow{\delta} \mathscr{H}^{p+1} f'_* \Omega_{X'/S'}^{\cdot -1} \longrightarrow \mathscr{H}^{p+1} f'_* \Omega_{X'}^{\cdot} \longrightarrow \ldots . & \end{aligned} \tag{4.9}$$

Wir erhalten also einen verbindenden Homomorphismus

$$\delta : \mathscr{H}^p f'_* \Omega_{X'/S'}^{\cdot} \to \mathscr{H}^{p+1} f'_* \Omega_{X'/S'}^{\cdot -1} = \mathscr{H}^p f'_* \Omega_{X'/S'}^{\cdot}.$$

Die Abbildung δ stimmt nach folgender Überlegung analog zu [Ham74, II.2] mit dem topologisch definierten Zusammenhang $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ überein.

Lemma 4.5.4. *Der Verbindungshomomorphismus*

$$\delta : \mathscr{H}^p f'_* \Omega_{X'/S'}^{\cdot} \longrightarrow \mathscr{H}^p f'_* \Omega_{X'/S'}^{\cdot}$$

stimmt mit dem topologisch definierten Zusammenhang

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} : R^n f'_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'} \longrightarrow R^n f'_* \mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'}$$

überein.

Beweis. Offensichtlich ist δ $\mathbb{C}$-linear. Um zu zeigen, dass δ einen Zusammenhang definiert, ist noch die Leibnizidentität nachzuweisen. Wir wählen nun einen Repräsentanten ω einer Kohomologieklasse aus $\mathscr{H}^p(X'/S') = \mathscr{H}^p f'_* \Omega^{\cdot}_{X'/S'}$. Damit ist $d\omega = 0$ in $f'_*\Omega^{p+1}_{X'/S'}$ und $d\omega = df' \wedge \eta$ in $f'_*\Omega^{p+1}_{X'}$. Wegen $d(d\omega) = -df' \wedge d\eta = 0$ und Lemma 4.5.3 gibt es ein σ, für das $d\eta = df' \wedge \sigma$ gilt und damit definiert η eine Kohomologieklasse in $\mathscr{H}^p f'_* \Omega^{\cdot}_{X'/S'}$.
Nach der Konstruktion des Verbindungshomomorphismus einer langen exakten Kohomologiesequenz (vgl. z.B. [GM99, 1.1.5]) gilt nun

$$\delta(\omega) = [\eta].$$

Dann folgt für jedes $g \in \mathscr{O}_{S'}$

$$\begin{aligned} d(g\omega) &= dg \wedge \omega + g\, d\omega = df' \wedge (\frac{dg}{df'}\,\omega + \, g\,\eta) \\ \Rightarrow \delta(g\omega) &= \frac{dg}{df'}\,\omega + \, g\,\eta, \end{aligned}$$

wobei f' als lokale Koordinate auf S' aufgefasst wird und damit $dg = \frac{dg}{df'}df'$ gilt. Die Abbildung δ erfüllt also die Leibnizidentität.
Um die Äquivalenz von ∇' und δ zu zeigen, reicht es nachzuweisen, dass die Kerne übereinstimmen.

Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_{X'} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \Omega^{\cdot}_{X'} \arrow[d, "p"] \\ f'^{-1}\mathscr{O}_{S'} \arrow[r] & \Omega^{\cdot}_{X'/S'}. \end{tikzcd}$$

Fasst man $\mathbb{C}_{X'}$ und $\Omega^{\cdot}_{X'}$ nun wiederum als Komplexe auf, die nur an der ersten Stelle von Null verschieden sind, und wendet die hyperdirekten Bilder an, so erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & R^p f'_*\mathbb{C}_{X'} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dl] \arrow[d, "i_*"'] & \mathscr{H}^p f'_*\Omega^{\cdot}_{X'} \arrow[d, "p_*"] \\ R^p f'_*\mathbb{C}_{X'} \otimes_{\mathbb{C}_{S'}} \mathscr{O}_{S'} \arrow[r, "\cong"] & R^p f'_*(f'^{-1}\mathscr{O}_{S'}) \arrow[r, "\cong"] & \mathscr{H}^p f'_*\Omega^{\cdot}_{X'/S'} . \end{tikzcd}$$

Nun gilt $\ker \nabla_{\frac{d}{dt}} = \operatorname{im} i_*$ und $\ker \delta|_{S'} = \operatorname{im} p_*$ wegen der Exaktheit der langen exakten Sequenz (4.9). Damit stimmen die Kerne oder mit anderen Worten die horizontalen Schnitte beider Zusammenhänge überein. $\square$

Der auf diesem Weg definierte Zusammenhang $\delta = \nabla_{\frac{d}{dt}}$ soll nun auf die singuläre Faser fortgesetzt werden. Dazu wenden wir die hyperdirekten Bilder auf (4.8) an und erhalten die lange exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \mathscr{H}^p f_* \Omega^{\cdot}_X \xrightarrow{p_*} \mathscr{H}^p f_* \Omega^{\cdot}_{X/S} \xrightarrow{\delta} \mathscr{H}^{p+1} f_* (df \wedge \Omega^{\cdot -1}_X) \longrightarrow \ldots . \tag{4.10}$$

Der Verbindungshomomorphismus δ setzt nun gerade den topologisch definierten Zusammenhang $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ fort. Wir erhalten einen Zusammenhang in einem allgemeineren Sinn (vgl. [Kul98, 4.4]): Für zwei $\mathscr{O}_S$-Moduln $E \subset F$ wird eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $E \to F$, die die Leibnizidentität erfüllt, Zusammenhang auf dem Paar (E, F) genannt.

Definition und Satz 4.5.5. (Fortsetzung des Gauss-Manin-Zusammenhangs) *Der Verbindungshomomorphismus der langen exakten Sequenz (4.10)*

$$\delta : \mathscr{H}^p f_* \Omega^{\cdot}_{X/S} \to \mathscr{H}^p f_* (df \wedge \Omega^{\cdot}_X)$$

definiert einen singulären Zusammenhang ∇ auf dem Paar $\big(\mathscr{H}^p f_* \Omega^{\cdot}_{X/S},\ \mathscr{H}^p f_* (df \wedge \Omega^{\cdot}_X)\big)$, der über S' mit dem topologisch definierten Zusammenhang $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ auf $\mathscr{H}$ übereinstimmt.

Des Weiteren gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, derart dass

$$f^k \nabla : \mathscr{H}^p(X/S) \to \mathscr{H}^p(X/S).$$

Damit besitzt ∇ in 0 eine polartige Singularität.

Beweis. Dass der Zusammenhang ∇ über S' mit $\nabla_{\frac{d}{dt}}$ übereinstimmt, ergibt sich direkt aus der Definition und Lemma 4.5.4.

Um den Rest zu beweisen, soll ∇ nun im Punkt 0 explizit beschrieben werden.

Für den kritischen Punkt $x \in X$ der Funktion f und $0 = f(x) \in S$ gilt

$$(\mathscr{H}^p(X/S))_0 := (\mathbb{R}^p f_*(\Omega^{\cdot}_{X/S}))_0.$$

Wir haben eine Spektralsequenz

$$''E_2^{p,q} = R^p f_*(\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S}))_0 \Rightarrow (\mathbb{R}^{p+q}(f_*\Omega^{\cdot}_{X/S}))_0$$

mit

$$''E_2^{p,q} = \begin{cases} (f_*\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S}))_0 & \text{für } p = 0, q \geq 0 \\ R^p f_*(\mathscr{H}^0(\Omega^{\cdot}_{X/S}))_0 & \text{für } p > 0, q = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

da $\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S})$ für $q > 0$ auf x konzentriert ist. Außerhalb von x ist $\Omega^{\cdot}_{X/S}$ exakt (vgl. dazu Satz 3.3.2). Damit verschwindet $R^p f_*(\mathscr{H}^q(\Omega^{\cdot}_{X/S}))$ für $p > 0$ und $q > 0$.

Wir zeigen nun, dass $R^p f_*(\mathscr{H}^0(\Omega^\cdot_{X/S}))_0$ für $p > 0$ ebenfalls verschwindet: Wegen des relativen Poincaré-Lemmas (Satz 3.3.2) ist

$$i : f^{-1}(\mathscr{O}_S) \to \mathscr{H}^0(\Omega_{X/S})$$

außerhalb von x bijektiv. Da X ein reduzierter komplexer Raum ist, folgt aus Stetigkeitsgründen die Injektivität auch in x. Damit gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to f^{-1}(\mathscr{O}_S) \to \mathscr{H}^0(\Omega^\cdot_{X/S}) \to \operatorname{coker}(i) \to 0,$$

wobei $\operatorname{coker}(i)$ auf x konzentriert ist. Wir erhalten eine lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\to f_* f^{-1}(\mathscr{O}_S) \to f_*\mathscr{H}^0(\Omega^\cdot_{X/S}) \to f_* \operatorname{coker}(i) \to \dots \\ &\to R^p f_* f^{-1}(\mathscr{O}_S) \to R^p f_*\mathscr{H}^0(\Omega^\cdot_{X/S}) \to R^p f_* \operatorname{coker}(i) \to \dots, \end{aligned}$$

in der die $R^p f_* \operatorname{coker}(i)$ für $p > 0$ verschwinden.
Weiter gilt $R^p f_*(f^{-1}\mathscr{O}_S)_0 = (R^p f_* \mathbb{C}_X)_0 \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{S,0}$. Nach Gleichung (4.3) und Korollar 1.3.5 gilt

$$(R^p f_* \mathbb{C}_X)_0 = (R^p \bar{f}_* \mathbb{C}_{\bar{X}})_0 = (R^p \bar{f}_! \mathbb{C}_{\bar{X}})_0 = H^p_c(\bar{X}_0, \mathbb{C}) = H^p(\bar{X}_0, \mathbb{C}),\ \bar{X}_0 = \bar{f}^{-1}(0) \cap \bar{X},$$

was wegen der Kontrahierbarkeit der singulären Faser, vgl. Satz 4.1.1, für $p > 0$ verschwindet. Damit verschwindet auch $R^p f_* f^{-1}(\mathscr{O}_S)_0$ und somit $R^p f_* \mathscr{H}^0(\Omega^\cdot_{X/S})_0$ für $p > 0$.

Der Halm $(\mathscr{H}^p(X/S))_0$ kann daher mit $(f_*\mathscr{H}^p(\Omega^\cdot_{X/S}))_0 \cong (\mathscr{H}^p(\Omega^\cdot_{X/S}))_x \cong H^p(\Omega^\cdot_{X/S,x})$ identifiziert werden.

Sei $\omega \in \Omega^p_{X,x}$ nun Repräsentant einer Kohomologieklasse aus $H^n(\Omega^\cdot_{X/S,x})$. Dann gibt es in $\Omega^p_{X,x}$ eine Differentialform η mit

$$d\omega = df \wedge \eta.$$

Aus der Definition des verbindenden Homomorphismus ergibt sich wiederum

$$\nabla\omega = \eta.$$

Nun definiert η aber nicht notwendigerweise eine Restklasse in $H^n(\Omega^\cdot_{X/S,x})$, da für $d\eta$ lediglich $df \wedge d\eta = 0$ gilt, $d\eta$ also Kozykel des Komplexes (4.7) in Null ist. Im Allgemeinen folgt also nicht, dass ein ξ mit $d\eta = df \wedge \xi$ existiert.

Wir können aber zeigen, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, derart dass $f^k \cdot \nu$ für jeden Kozykel ν Korand ist. Dazu definieren wir die Garben $\mathscr{K}^p(f) := \ker\{df : \Omega^p_X \to \Omega^{p+1}_X\}/df \wedge \Omega^{p-1}_X$. Diese sind als Quotient von Kern und Bild einer Abbildung von kohärenten Garben wiederum kohärent. Wegen Lemma 4.5.3 verschwinden diese Garben auf X' und somit gilt

$f|_{\operatorname{supp}\mathscr{K}^p(f)} = 0$. Nach dem Rückertschen Nullstellensatz (z.B. [GR84, Chapter 3,§2]), gibt es dann zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U und eine natürliche Zahl k derart, dass $f^k \mathscr{K}^p(f)_U = 0$. Damit gilt $f^k(\ker\{df : \Omega_X^p \to \Omega_X^{p+1}\}) \subset df \wedge \Omega_X^{p-1}$.

Es gibt also ein $\xi \in \Omega_{X,x}^p$ mit $f^k d\eta = df \wedge \xi$. Nun gilt

$$\begin{aligned} d(f^k\eta) &= d(f^k) \wedge \eta + f^k d\eta = kf^k df \wedge \eta + df \wedge \xi \\ &= df \wedge (kf^k\eta + \xi). \end{aligned}$$

Damit definiert $f^k\eta$ eine Kohomologieklasse in $H^n(\Omega^{\cdot}_{X/S,x})$ und wir erhalten eine Abbildung

$$f^k\nabla : (\mathscr{H}^p(X/S))_0 \to (\mathscr{H}^p(X/S))_0,$$

womit die Meromorphie des Zusammenhangs gezeigt ist.

□

Literaturverzeichnis

[AG62] ANDREOTTI, A. und GRAUERT, H.: *Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. France, 90: 193–259, 1962. 9

[Bre97] BREDON, G. E.: *Sheaf theory,* Band 170 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, Second Edition, 1997. 8

[Bri70] BRIESKORN, E.: *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen.* Manuscripta Mathematica, 2: 103–161, 1970. ix, xi, 13, 32, 41, 43

[Del70] DELIGNE, P.: *Équations différentielles à points singuliers réguliers.* Springer-Verlag, Berlin, 1970. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163. 13, 38

[dR54] DE RHAM, G.: *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire.* Comment. Math. Helv., 28: 346–352, 1954. 45

[Ebe01] EBELING, W.: *Funktionentheorie, Differentialtopologie und Singularitäten.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001. 21, 35, 36

[EGA III] GROTHENDIECK, A. und DIEUDONNÉ, J.: *Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 11, 17: 167, 1961-63. 10

[EGA IV] GROTHENDIECK, A. und DIEUDONNÉ, J.: *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 20, 24, 28, 32: 1964-67. 13, 32

[FK71] FORSTER, O. und KNORR, K.: *Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange.* Manuscripta Math., 5: 19–44, 1971. 43

[For77] FORSTER, O.: *Riemannsche Flächen.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Heidelberger Taschenbücher, Band 184. 35, 36, 40

[GK64] GRAUERT, H. und KERNER, H.: *Deformationen von Singularitäten komplexer Räume.* Math. Ann., 153: 236–260, 1964. 11

[GM88] GORESKY, M. und MACPHERSON, R.: *Stratified Morse theory*, Band 14 der Reihe *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. 5, 37

[GM99] GELFAND, S. I. und MANIN, YU. I.: *Homological algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. 48

[GR84] GRAUERT, H. und REMMERT, R.: *Coherent analytic sheaves*, Band 265 der Reihe *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. 6, 51

[Ham74] HAMM, H. A.: *Zur analytischen und algebraischen Beschreibung der Picard-Lefschetz-Monodromie*. Habilitationsschrift. Georg-August-Universität Göttingen, 1974. 47

[Hom90] HOMANN, W.: *Isolierte Singularitäten und gemischte Hodge-Strukturen*. Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster, 2. Serie, 1990.

[KK83] KAUP, L. und KAUP, B.: *Holomorphic functions of several variables*, 3 *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1983. 1, 2, 3, 4, 5, 11

[KS90] KASHIWARA, M. und SCHAPIRA, P.: *Sheaves on manifolds*, Band 292 der Reihe *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. 8

[Kul70] KULTZE, R.: *Garbentheorie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1970. 10, 44

[Kul98] KULIKOV, V. S.: *Mixed Hodge structures and singularities*, Band 132 der Reihe *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. 39, 45, 49

[Lê92] LÊ D.T.: *Complex analytic functions with isolated singularities*. J. Algebraic Geom., 1(1): 83–99, 1992. 37

[Mil68] MILNOR, J.: *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968. ix, 37

[Rei67] REIFFEN, H.-J.: *Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differentialformen auf komplexen Räumen*. Math. Z., 101: 269–284, 1967. 12

[Whi65] WHITNEY, HASSLER: *Tangents to an analytic variety*. Ann. of Math. (2), 81: 496–549, 1965. 19, 20