

Dirk Homeier

**Renormierungsgruppenflussgleichungen  
und hydrodynamische Turbulenz**

2006



THEORETISCHE PHYSIK

# Renormierungsgruppenflussgleichungen und hydrodynamische Turbulenz

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Dirk Homeier  
aus Unna

2006

Dekan:	Prof. Dr. J. P. Wessels
Erster Gutachter:	Prof. Dr. G. Münster
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. R. Friedrich
Tag der Disputation:	24.01.2007
Tag der Promotion:	24.01.2007

*„Wenn uns die wirklichen Übel fehlen,  
so leiht uns die Wissenschaft die ihren.“*

Michel de Montaigne

*(„Lorsque les vrais maux nous faillent,  
la science nous prête les siens.“)*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Renormierungsgruppe, Skalenverhalten und Turbulenz</b>	<b>5</b>
2.1	Renormierungsgruppe (RG)	5
2.1.1	Exakte Renormierungsgruppe	6
2.1.2	Feldtheoretische Renormierungsgruppe	15
2.1.3	Approximationsmethoden	16
2.1.4	RG, Phasenübergänge und Fixpunkte	19
2.1.5	Fixpunkte und Methodik der RG	20
2.1.6	Mathematische Sicht auf die RG	22
2.2	Skaleninvarianz, Multiskalenverhalten und Skalenvarianz	23
2.2.1	Skaleninvarianz	23
2.2.2	Multiskalenverhalten	24
2.2.3	Skalenvarianz	27
2.3	Hydrodynamische Turbulenz	29
2.3.1	Grundlegendes	29
2.3.2	Statistische Beschreibung und K41-Theorie	30
2.3.3	Landaus Fußnote	31
2.3.4	Erweiterte Modelle ohne RG	32
2.3.5	RG und hydrodynamische Turbulenz - frühere Arbeiten	33
2.4	Schlussfolgerung und Zielsetzung dieser Arbeit	35
<b>3</b>	<b>Herleitung der RG-Gleichung</b>	<b>39</b>
3.1	Herleitung einer RG-Gleichung, mit Wegner-Houghton-Cutoff	40
3.2	Herleitung einer RG-Gleichung, mit Polchinski-Cutoff	43
3.2.1	Alternativer Propagator	52
3.2.2	Äquivalenz zur Wilson-Gleichung im Fall der skalaren Theorie	53
3.3	Fazit	55
<b>4</b>	<b>Erzeugendes Funktional und Wirkung</b>	<b>57</b>
4.1	Herleitung eines erzeugenden Funktionals	58
4.1.1	Ansatz 1: Faddeev-Popov-Methode	59
4.1.2	Ansatz 2: Direkte Einbindung der Inkompressibilität mittels $\delta$ -Distribution	62
4.1.3	Vergleich der beiden Ansätze zur Einbindung der Inkompressibilität	63
4.2	Umformen der nichtlokalen Terme	64
4.3	Sortieren der Terme nach Ordnung der Ableitung	66
4.3.1	Ansatz 1a	66
4.3.2	Ansatz 1b	67
4.3.3	Ansatz 2	69
4.4	Fourier-Transformation der Wirkungen	70

4.4.1	Ansatz 1a, nichtlokal . . . . .	70
4.4.2	Ansatz 1b, nichtlokal . . . . .	70
4.4.3	Ansatz 2, nichtlokal . . . . .	71
4.4.4	Ansatz 1a, lokal . . . . .	71
4.4.5	Ansatz 1b, lokal . . . . .	72
4.4.6	Ansatz 2, lokal . . . . .	74
4.5	Fazit . . . . .	75
<b>5</b>	<b>RG-Gleichungen für die Turbulenz</b>	<b>77</b>
5.1	Letzte Vorüberlegungen . . . . .	77
5.1.1	Die kanonischen Dimensionen . . . . .	77
5.1.2	Die Exponenten $k$ . . . . .	78
5.2	Die exakten RG-Gleichungen . . . . .	80
5.2.1	Ansatz 1a . . . . .	80
5.2.2	Ansatz 1b . . . . .	81
5.2.3	Ansatz 2 . . . . .	82
5.3	Fazit . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Die Ableitungsentwicklung</b>	<b>85</b>
6.1	Einige Erläuterungen zur Aufstellung der Ableitungsentwicklung . . . . .	85
6.2	Die Wirkungen . . . . .	87
6.2.1	Die Lokale Potentialapproximation (LPA) . . . . .	87
6.2.2	Erste Ordnung der Ableitungsentwicklung . . . . .	88
6.2.3	Die Zeitableitungen . . . . .	89
6.3	Die Ratengleichungen . . . . .	90
6.3.1	Gleichungen nullter Ordnung der Ableitungsentwicklung . . . . .	90
6.3.2	Lokale Potentialapproximation (LPA) . . . . .	92
6.3.3	Gleichungen erster Ordnung der Ableitungsentwicklung, Modell 1a . . . . .	93
6.4	Kanonisches Skalieren in der LPA und der Faktor $\tilde{K}(0)$ . . . . .	95
6.4.1	Skalieren des Terms $\langle vv \rangle$ im Modell 1a . . . . .	95
6.4.2	Skalieren des Terms $\langle vvvv \rangle$ im Modell 1a . . . . .	95
6.4.3	Interpretation des Skalierens . . . . .	95
6.5	Fazit . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Numerische Verfolgung des RG-Flusses</b>	<b>99</b>
7.1	Besonderheiten der Programme . . . . .	99
7.1.1	Integrationsverfahren . . . . .	99
7.1.2	Die „linked list“ . . . . .	100
7.1.3	„Scheduler“-Funktion . . . . .	100
7.1.4	Programmaufrufe . . . . .	100
7.2	Erste Versuche . . . . .	105
7.2.1	Suche nach Strukturen im RG-Flussfeld . . . . .	105
7.2.2	Genaue Lokalisierung eines Fixpunkts - „shooting method“ . . . . .	105
7.2.3	Bestimmung der Exponenten . . . . .	110
7.2.4	Ideale Trajektorien und Flusstopologie . . . . .	111
7.2.5	Der Wert $\eta = 1,5$ und die Änderung der Topologie . . . . .	112
7.3	Analyse der Lokalen Potentialapproximation, Modell 1a . . . . .	114
7.3.1	Das Skalieren des trivialen Fixpunkts . . . . .	114
7.3.2	Reelle oder komplexe Koeffizienten? . . . . .	115
7.4	Fazit . . . . .	117

<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
<b>A Terme der Ableitungsentwicklung</b>	<b>121</b>
A.1 Die Ableitungsentwicklung, Modell 1 . . . . .	121
A.1.1 Nullte Ordnung in den Ableitungen . . . . .	121
A.1.2 Erste Ordnung in den Ableitungen . . . . .	132
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>143</b>
<b>Schlusswort</b>	<b>147</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>149</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Systeme wie die Hydrodynamik, oder auch die Magnetohydrodynamik, sind von großer Bedeutung für eine Vielzahl technischer Anwendungen. Es verwundert also nicht, dass vor allem die Hydrodynamik seit langem intensiv studiert wurde. Betrachtet man dabei Flüssigkeiten, die verhältnismäßig langsam strömen (laminarer Fluss, kleine Reynolds-Zahlen), so ist das Verhalten für gewöhnlich gut verstanden, und wird durch die Navier-Stokes-Gleichung gut beschrieben. Anders verhält es sich, wenn man ein schnell fließendes Medium in ansonsten unveränderten Bedingungen betrachtet: der Fluss geht über in eine ungeordnete Form, die chaotisch und somit im Detail nicht vorhersagbar ist (Turbulenz, große Reynolds-Zahlen). In turbulenten Strömungen spielt die Dissipation von Energie durch innere Reibung eine große Rolle, und man ist sehr daran interessiert, die vorgehenden Prozesse zu verstehen.

Da die bereits genannte Navier-Stokes-Gleichung nur aus einfachen Symmetrieüberlegungen (Impulserhaltung) folgt, geht man davon aus, dass auch der turbulente Zustand einer Flüssigkeit durch sie beschrieben wird. Der detaillierte Nachweis fehlt jedoch bislang.

Aufgrund der sehr hohen Anzahl beteiligter Freiheitsgrade ist man auf die statistische Analyse der Turbulenz angewiesen. Geeignete Größen, für die man sich interessiert, sind dabei die sogenannten Strukturfunktionen, die im Wesentlichen die Momente der Geschwindigkeitsverteilung darstellen. Die zweite Strukturfunktion ist von besonderem Interesse, weil sie mit der Energiedissipation verknüpft ist.

Eine erste, statistische Theorie der Turbulenz stammt von Kolmogorov aus dem Jahr 1941 (K41)<sup>1</sup>. Unter der Annahme, dass turbulente Strömungen selbstähnlich sind, d.h. die darin ablaufenden Prozesse mit der Längenskala, auf der man sie betrachtet, skalieren, berechnete er das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen. Die vorhergesagten Skalierungsexponenten folgen dabei einem linearen Zusammenhang mit der Ordnung der Strukturfunktion. Leider stimmen die experimentell zugänglichen Exponenten damit nicht überein. Dieses Phänomen, oder besser gesagt: die gängige Erklärung dieses Phänomens über singuläre Strukturen in der Flüssigkeit, wird auch als Intermittenz bezeichnet. Erklären lässt sich die Abweichung, wenn man annimmt, dass Fluktuationen in der Flüssigkeit eine eigene, intrinsische Längenskala „mitbringen“, eine Ansicht, die auf Landau zurückgeht. Letztendlich sind also die intermittenten Exponenten unverträglich mit der postulierten, trivialen Selbstähnlichkeit der Turbulenz. Später aufgestellte Theorien versuchten, dem Rechnung zu tragen. Von der trivialen Selbstähnlichkeit ging man einerseits zu nichttrivialem Scaling, andererseits zu dem Konzept der „erweiterten Selbstähnlichkeit“ (ESS, „extended self-similarity“) über, das besagt, dass die Prozesse in der turbulenten Flüssigkeit zwar in Form einer Skalierung von der Längenskala abhängen, aber die Skalierung selbst nicht für alle Längenskalen gleich ist.

Hieraus hat sich ein intensives Forschungsgebiet entwickelt. Zum Beispiel war die Frage nach

---

<sup>1</sup>[Kol 41]

der Natur der Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen, die Multiskalenverhalten zeigen, Auslöser für das mathematische Konzept der Multifraktalität. Alle späteren Theorien standen allerdings vor dem Problem, dass sie entweder zwar heuristisch auf die richtigen Skalierungsexponenten führten, aber diese nicht mit der Navier-Stokes-Gleichung verbanden, oder aber nur die experimentell widerlegten K41-Exponenten reproduzierten. Eine Verbindung zwischen Intermittenz und Navier-Stokes-Gleichung ist auf theoretischem Wege noch nicht geglückt.

Schon sehr bald begann man, auch mit den damals noch recht jungen Methoden der Renormierungsgruppe (RG), die Turbulenz anzugehen. Die RG, in ihrer statistischen Version von Wilson 1971<sup>2</sup> veröffentlicht, ist dabei ein naheliegendes Hilfsmittel, weil sie konstruiert wurde, um (annähernd) selbstähnliche Phänomene wie insbesondere Phasenübergänge von Ferromagneten zu beschreiben. Es gibt sie in verschiedenen Varianten, dabei hat man die aus der Quantenfeldtheorie stammende, auf Arbeiten von Gell-Mann und Low zurückgehende Version<sup>3</sup> (auch als feldtheoretische RG bezeichnet), die in wesentlichen Punkten auf Störungstheorie und Feynman-Graphen zurückgreift, von der exakten RG nach Wilson zu unterscheiden. Man hat bereits versucht, beide Versionen auf die Turbulenz anzuwenden, jedoch ohne große Erfolge. Besondere Schwierigkeiten sind bei der feldtheoretischen RG, dass man nur einen sehr begrenzten Teilraum des Raumes aller Wirkungen betrachten kann, im Einzelfall also davon ausgeht, dass nur einzelne Größen (wie die Viskosität) ein Skalierungsverhalten zeigen. Letztlich handelt es sich dabei sozusagen um eine Entwicklung der Turbulenz um den laminaren Fall. Die exakte RG zeigt diese Einschränkung nicht. Sie erlaubt im Prinzip die gleichzeitige Betrachtung einer großen Zahl von Kopplungen, und das Skalierungsverhalten, das man findet, muss nicht in der Nähe der freien bzw. laminaren Theorie liegen. Allerdings hat man hier als Einschränkung, dass die Anwendung von Gleichungen des Wilson-Typs das vorherige Aufstellen eines Wirkungsfunktionals erfordert. Dieses Aufstellen ist aber in der Literatur nur mit Mängeln erfolgt; so hat man zum Beispiel bislang immer die zusätzliche Randbedingung, dass die zu betrachtenden Flüssigkeiten inkompressibel sein sollen, unter den Tisch fallen lassen. Gerade die Inkompressibilität sorgt aber für nichtlokale Wechselwirkungen, die nach Meinung vieler in der Turbulenz tätiger Wissenschaftler gerade das Charakteristische der Verteilungen ausmachen.

Es tritt somit eine Verschiebung der Problematik auf, wenn man die Turbulenz nicht mehr von der Seite der nichtlinearen dynamischen Systeme, sondern aus dem Blickwinkel der Feldtheorie betrachtet: die nichtlinearen Terme, die für die chaotische Bewegung verantwortlich sind, stellen nicht mehr die größte Schwierigkeit dar, denn im Prinzip beschäftigt sich die Feldtheorie fast ausschließlich mit nichtlinearen Theorien. Die größeren Probleme stellen nun die nichtlokalen Wechselwirkungen, die sonst nicht in der Form in den Vordergrund treten.

Dieser Fragenkomplex wird in der vorliegenden Arbeit untersucht. Wesentliche Ziele sind dabei, das bisherige Scheitern der RG-Theorie in der Anwendung auf die hydrodynamische Turbulenz zu analysieren, eine Methodik zur Arbeit mit nichtlokalen Theorien zu entwickeln und Wege aufzuzeigen, wie die RG-Theorie, über die Analyse einfacher Fixpunkte hinaus, beitragen kann zum Verständnis komplexer Systeme.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- Kapitel 1: Zu Beginn wird die gängige Theorie zur Renormierungsgruppe und ihrer Anwendung auf kritische Phänomene zusammengefasst. Die Möglichkeit eines nichttrivialen Skalierens wird diskutiert. Insbesondere die Konzepte des Skaleninvarianz, des Multiskalenverhaltens und der Skalenkovarianz werden besprochen. Im zweiten Abschnitt erkläre ich in ähnlicher, wenn auch sehr viel knapperer Art die Theorie der hydrodynamischen Turbulenz, insofern sie wie für meine Arbeit eine Rolle gespielt hat. Es wird außerdem auf bisherige Arbeiten, welche die Renormierungsgruppe auf die Turbulenz anzuwenden

---

<sup>2</sup>[Wil 71], [Wil 71a]

<sup>3</sup>[GL 54]

versucht haben, und auf ihren Erfolg eingegangen.

- Kapitel 2: Im zweiten Kapitel wird die RG-Gleichung hergeleitet, die später auf die Theorie der Turbulenz anzuwenden ist. Sie ist vom Typ der Wilson-Polchinski-Gleichung, und hinreichend allgemein, um mit ihr eine sehr große Klasse physikalischer Theorien zu analysieren. Die Herleitung ist in zwei Versuchen formuliert, von denen der erste scheitert; die Gründe dieses Scheiterns werden analysiert. Es wird gezeigt, dass die hergeleitete Gleichung äquivalent zur Wilson-Gleichung ist, wenn man sie auf die skalare Theorie anwendet.
- Kapitel 3: Hier wird ein erzeugendes Funktional hergeleitet, das sowohl der Navier-Stokes-Gleichung, als auch der Inkompressibilität Rechnung trägt. Verschiedene Möglichkeiten werden diskutiert. Die nichtlokalen Terme der Wirkung werden zu lokalen umgeformt, das Resultat auf eine Ableitungsentwicklung vorbereitet.
- Kapitel 4: Die in Kapitel 2 eingeführte RG-Gleichung wird auf die Turbulenz-Modelle aus Kapitel 3 angewandt. Dafür werden die kanonischen Dimensionen berechnet. Es wird gezeigt, dass diese so wählbar sind, dass der triviale Fixpunkt gemäß der K41-Vorhersage skaliert.
- Kapitel 5: In diesem Kapitel wird gezeigt, dass eine gleichzeitige Entwicklung der RG-Gleichung nach Ordnungen der Ableitungen und der Felder möglich ist. Die auftretenden, zumeist formalen Schwierigkeiten werden diskutiert. Die Ableitungsentwicklung wird bis zur ersten Ordnung in den Ableitungen hergeleitet.
- Kapitel 6: Im sechsten Kapitel wird gezeigt, wie die nach Potenzen der Ableitungen und der Felder approximierten RG-Gleichungen numerisch integriert werden können. Auf einige Besonderheiten der Programmierung und die für die Bedienung der für die vorliegende Arbeit geschriebenen Programme wichtigen Informationen wird hingewiesen. Es werden verschiedene Systeme (teils unphysikalisch) und mögliche Methoden zu deren Analyse demonstriert. Die entwickelte Methodik wird auf Modelle der Turbulenz angewendet, die Resultate interpretiert.
- Kapitel 7: Hier werden die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst, und erläutert, in welche Richtung zukünftige Arbeiten meiner Meinung nach erfolgversprechend verlaufen können.



## Kapitel 2

# Renormierungsgruppe, Skalenverhalten und Turbulenz

In diesem Kapitel wird ein kurzer Überblick über die Theorie der Renormierungsgruppe und der Turbulenz präsentiert. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich hier auf einen Abriss, der ausreichend ist, den Hintergrund für die späteren Kapitel zu bilden; für detailliertere Beschreibungen wird auf die Standardliteratur verwiesen.<sup>1</sup>

### 2.1 Renormierungsgruppe (RG)

Mit dem Begriff „Renormierungsgruppe“ (RG) bezeichnet man heute zwei unterschiedliche Methoden, eine physikalische Theorie auf verschiedenen Skalen zu betrachten: Die sog. „feldtheoretische RG“, die auch mit den Namen Callan und Symanzik in Verbindung gebracht wird, und die „exakte RG“, die ursprünglich von Wilson entwickelt wurde. Beide Methoden sind eng miteinander verwandt - man liest in der Literatur, je nach Autor, dass jeweils eine Methode der anderen überlegen sei. In dieser Arbeit wird, nachdem beide Methoden kurz vorgestellt wurden, die Frage nach der Äquivalenz kurz diskutiert.

Zuvor sei erwähnt, dass beide Namen irreführend sind. Es wird später kurz erklärt, dass die RG in brauchbaren Anwendungen keine Gruppe ist; die Evolutionsoperatoren bilden vielmehr eine Halbgruppe. Nur in der unapproximierten (und daher unlösbaren) Version beider Methoden macht die Bezeichnung „Gruppe“ Sinn. Außerdem klingt die Bezeichnung „feldtheoretisch“ unzutreffenderweise so, als sei die Wilsonsche Formulierung nicht feldtheoretisch, und „exakt“ sind ebenfalls entweder beide Methoden oder gar keine, je nach Perspektive. Die Bezeichnungen sind historischer Natur - die feldtheoretische RG hat sich aus der a priori unexakten Störungstheorie der Quantenfeldtheorie entwickelt, während Wilson seine RG-Gleichung zunächst exakt formuliert und vor allem auf Probleme der statistischen Physik angewandt hat. Letzten Endes kann man beide Methoden exakt und auf diese Weise unbrauchbar hinschreiben, zur Lösbarkeit gehört in beiden Fällen eine Approximation.

---

<sup>1</sup>Zum Thema Renormierungsgruppe sind dabei vor allem die Einführungen von Benfatto und Gallavotti [BG 95], von Creswick, Farach und Poole [CFP 92] und von Salmhofer [Sal 99] zu empfehlen. Eine gute Übersicht über die Philosophie der RG bietet der Artikel von Fisher [Fis 98]. Außerdem enthalten die meisten Bücher zur Feldtheorie (wie zum Beispiel [Col 84], [Kug 97], [PS 95], [Zin 02]) zumindest Darstellungen der feldtheoretischen RG. Ferner wären die Artikel von Wilson und Kogut [WK 74] und Brézin [Bré 75] zu erwähnen.

Bezüglich der Turbulenz gibt es die sehr ausführlichen Bücher von Monin und Yaglom [MY 65] und Pope [Pop 00]. Einen guten Einstieg in die Materie gibt Frisch [Fri 95], neuere Entwicklungen werden in der Sammlung von Oberlack und Busse [OB 02] beschrieben. McComb schließlich legt besonderes Augenmerk auf Renormierungs- und RG-Methoden in der Turbulenz [McC 90].

Gut für die Motivation ist auch immer ein Blick auf die Aufnahmen im Album von Van Dyke [vDy 82].

### 2.1.1 Exakte Renormierungsgruppe

Eine RG-Transformation ist eine Transformation des erzeugenden Funktionals und der zugehörigen Wirkung einer physikalischen Theorie. Es wird daher hier kurz auf erzeugende Funktionale eingegangen, dann die RG-Transformation am Kadanoff-Bild ausführlich demonstriert (weil die einzelnen Schritte für den Rest der Arbeit von grundlegender Bedeutung sind), und schließlich erklärt, wie man die Wilson-Gleichung herleiten kann. Diese Rechnung wird an dieser Stelle jedoch nicht im Detail ausgeführt; sie ist als Spezialfall in der in Kapitel 2 gezeigten Herleitung enthalten.

#### Erzeugendes Funktional und Wirkung

Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist bekannt, dass alle Informationen über eine Wahrscheinlichkeitsfunktion in ihrer erzeugenden Funktion enthalten sind. Dabei ist die erzeugende Funktion die Fourier-Laplace-Transformierte der Wahrscheinlichkeitsverteilung selbst; durch Bilden von Ableitungen erhält man die Momente und Kumulanten der Verteilung.

In der Physik, insbesondere in der Quantenfeldtheorie, geht man ähnlich vor. Auch hier ist es möglich, eine solche Größe zu definieren, aus der man durch Ableiten die Mehrpunktfunktionen der Verteilung (in der Quantenfeldtheorie: Propagatoren und Vertizes) gewinnen kann. Da im Allgemeinen eine funktionale Anhängigkeit von Orts- oder Impulskoordinaten übrigbleibt, benötigt man hier ein erzeugendes Funktional, statt einer erzeugenden Funktion.<sup>2</sup>

Als Beispiel diene die skalare Feldtheorie. Das freie Feld genüge der Klein-Gordon-Gleichung,

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0. \quad (2.1)$$

Dann kann man zeigen, dass das erzeugende Funktional  $Z[J]$  wie folgt aussieht:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \left[ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) + J\phi \right]}. \quad (2.2)$$

$V(\phi)$  ist ein (beliebiger) Wechselwirkungsterm. Entwickelt man diesen, beispielsweise nach Ordnungen der Felder, dann nenne ich die Koeffizienten Kopplungen, und bezeichne sie mit  $\lambda$ , also zum Beispiel:

$$V(\phi) = \sum_i \lambda_i (\phi(x))^i. \quad (2.3)$$

$J$  wird auch als Quellenterm bezeichnet, er kann sowohl eine physikalische Quelle bezeichnen, als auch rein formal für die nun folgende Berechnung der Mehrpunktfunktionen dienen. Es sollte klar sein, dass es sich bei  $J$  und  $\phi$  um Funktionen der Variable  $x$  handeln; somit die Ableitungen, die man bildet, um Mehrpunktfunktionen zu berechnen, Funktionalableitungen sind. Es gilt nämlich zum Beispiel für die Zweipunktfunktion:

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (2.4)$$

Im Prinzip reicht die Kenntnis des Funktionals aus, um daraus alles Wissenswerte zu extrahieren. Das Problem liegt in der Ausführung des Funktionalintegrals: Diese kann nur in seltenen Fällen geschehen; so lassen sich direkt nur die Momente und Kumulanten berechnen, wenn das Argument der Exponentialfunktion im erzeugenden Funktional quadratisch in den Feldern ist. Die verbleibende Integration wird dann aufgrund der Analogie zur Gaußglocke als Gauß-Integration

<sup>2</sup>Mit dem zweibändigen Werk von Chaichian und Demichev [CD 01] gibt es eine sehr gelungene Übersicht über Pfadintegral- und Funktionalintegralmethoden in der Physik, von stochastischen Prozessen bis zur Quantenfeldtheorie.

bezeichnet.<sup>3</sup>

Die Störungsreihe der Quantenfeldtheorie, zusammen mit der perturbativen Renormierung, kann als ein Versuch betrachtet werden, das Funktional näherungsweise zu integrieren. Hier wird die Exponentialfunktion des Wechselwirkungsterms unter der Annahme, dass die Wechselwirkung klein ist, als Potenzreihe entwickelt. Zusammen mit dem Satz von Wick zur Berechnung der Momente von Gauß-Integralen ergibt das die berühmten Feynman-Regeln.

Statt das Integral als Ganzes zu berechnen, kann man auch auf die Idee kommen, es sozusagen „scheibchenweise“ über nur einzelne Impulsbereiche auszuführen. Dies ist die Herangehensweise der exakten RG.

Es sei noch kurz erwähnt, dass nicht nur  $Z[J]$ , sondern auch  $W[J] = \log Z[J]$  und die Legendre-Transformierte von  $W$ ,  $\Gamma[\phi]$ , erzeugende Funktionale darstellen, für jeweils leicht abgewandelte Größen.  $W$  kennt man aus der Wahrscheinlichkeitstheorie als Kumulantenerzeugende, in der Quantenfeldtheorie erzeugt sie die zusammenhängenden Feynman-Diagramme.  $\Gamma$  erzeugt die 1-Teilchen-irreduziblen Graphen, und hat meines Wissens kein wahrscheinlichkeitstheoretisches Analogon. RG-Gleichungen gibt es für jedes dieser Funktionale, ich werde in meiner Arbeit jedoch ausschließlich mit dem Funktional  $Z[J]$  arbeiten.

## Blockspin-RG

Die prinzipielle Vorgehensweise bei RG-Analysen ist besonders in der Arbeit von Kadanoff<sup>4</sup> zu erkennen, auch wenn hier noch nicht vom erzeugenden Funktional oder gar einer Flussgleichung die Rede ist. Ich halte Kadanoffs Bild dennoch für besonders instruktiv, und werde nachher darauf eingehen, wie sich das Gesagte auf erzeugende Funktionale übertragen lässt.

Ausgangspunkt ist in der Arbeit von Kadanoff eine physikalische Theorie, die auf einem Gitter definiert ist. Die Theorie sei zunächst lokal in dem Sinne, dass sie nur Wechselwirkungen nächster Nachbarn enthalte. Die spezielle Form des Gitters und die genaue Theorie spielt für das Folgende keine Rolle, der Einfachheit halber stelle man sich zum Beispiel ein Ising-Modell auf einem 2-dimensionalen, kartesischen Gitter vor. Diese Theorie soll nun statistisch analysiert werden, man interessiert sich für das Verhalten auf großen Längenskalen. Um analog zur klassischen Thermodynamik vorzugehen, müsste man die Zustandssumme  $Z$  (die dem erzeugenden Funktional entspricht) berechnen; also eine Summe über alle Zustände, die sich auf diesem unendlichen Gitter realisieren lassen, jeweils gewichtet mit dem Boltzmann-Faktor:

$$Z[h] = \sum_{\{s_i\}} e^{-\sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j J_{ij} + \sum_i s_i h_i}. \quad (2.5)$$

Hier möge  $s_k$  den Spin auf dem Gitterplatz  $k$  bezeichnen,  $\sum_{\{s_i\}}$  sei die Summe über alle möglichen Spinkonfigurationen,  $\sum_{\langle i,j \rangle}$  soll heissen, dass über nächste Nachbarn  $i$  und  $j$  summiert wird. Weiter stellt  $J_{ij}$  die Wechselwirkungsenergie zwischen den Spins auf den Gitterplätzen  $i$  und  $j$  dar. Die einfachste Wahl ist,  $J_{ij} = J_0$  konstant zu wählen.  $J_0 > 0$  bedeutet dann, dass es energetisch günstig ist, wenn sich die Spins parallel ausrichten, auf diese Weise lässt sich ein Ferromagnet gut modellieren. Letztlich enthält die obige Zustandssumme auch noch eine Kopplung an ein äußeres Feld  $h_i$ . Wie bereits gesehen, ist dies schon nötig, um aus der Zustandssumme ein erzeugendes Funktional zu machen; es lässt sich aber auch als physikalisches, äußeres Feld deuten. Auch hier ist die einfachste Wahl die eines homogenen Feldes,  $h_i = h_0$ .

Nur für die wenigsten Modelle wird die Zustandssumme exakt zu berechnen sein. Die Idee, die sich zunächst hinter dem Kadanoff-Bild verbirgt, von dem man aber nachträglich abstrahieren wird, ist die Summe über alle Zustände „in Etappen“ durchzuführen.

<sup>3</sup>Die Ergebnisse der Gauß-Integration verschiedener Felder, reell, komplex oder grassmannwertig, entnimmt man dem einführenden Kapitel von Zinn-Justin, [Zin 02].

<sup>4</sup>[Kad 66]

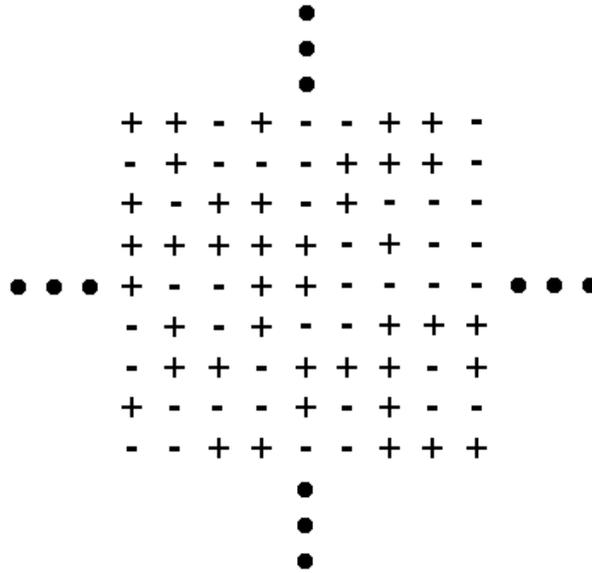


Abbildung 2.1: Exemplarischer Zustand eines zweidimensionalen Ising-Gitters; die Spin-Zustände seien mit „+“ und „-“ gekennzeichnet. Die Punkte mögen andeuten, dass hier nur ein kleiner Ausschnitt aus einem sehr viel größeren System zu sehen ist.

Dafür nehme man sich exemplarisch einen realisierbaren Zustand vor, wie zum Beispiel in Abb.(2.1) zu sehen.

Statt nun alle Gitterplätze gleichzeitig zu betrachten, zerlege man es in 3x3-Blöcke (Abb. 2.2). Die Zustandssumme für einen einzelnen Block zu berechnen, ist eine einfache Angelegenheit, die man allerdings für jeden Block wiederholen muss. Der Block wird dann ersetzt durch einen einzelnen, neuen Spin  $s'$ , beispielsweise den Spin, der auf den neun Gitterplätzen des Blocks dominiert (Abb. 2.3):<sup>5</sup>

$$s'_k = \frac{\sum_{i \in \text{Block } k} s_i}{|\sum_{i \in \text{Block } k} s_i|}. \tag{2.6}$$

Das ursprüngliche Gitter wird so ersetzt, das neue Gitter hat nur noch ein Neuntel der Gitterplätze<sup>6</sup>, aber den dreifachen Gitterabstand. Aus je neun alten Gitterplätzen wird ein neuer; über die Wechselwirkungen innerhalb eines Neunerblocks wurde dabei schon summiert. Was noch fehlt, ist also die Summe über die neuen Gitterplätze und deren Wechselwirkungen. Wie diese Wechselwirkungen aussehen, ist allerdings erstmal unklar - sie werden jedenfalls im Allgemeinen nicht mit den Termen der ursprünglichen Theorie identisch sein:

$$J_{ij} \rightarrow J'_{ij}. \tag{2.7}$$

Dies versteht sich leicht: Zu den Werten, durch die zwei benachbarte Blöcke ersetzt wurden, trugen auch Gitterplätze bei, die nicht benachbart waren, aber nun Anteile zur Wechselwirkung liefern. Diese neuen Wechselwirkungen gilt es, zu berechnen; man kann schon an einfachen Beispielen leicht sehen, dass Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen und Zwei-Spin-Wechselwirkungen dafür nicht ausreichen müssen. Die neuen Wechselwirkungen ergeben sich aus der Bedingung, dass die Statistik als Ganzes (die Zustandssumme) sich nicht ändert,

$$Z'[h] = \sum_{\{s'_i\}} e^{-\sum_{i,j} s'_i s'_j J'_{ij} + \sum_{i,j,k} s'_i s'_j s'_k G'_{ijk} + \dots + \sum_i s'_i h_i} = Z[h], \tag{2.8}$$

<sup>5</sup>Zwingend ist diese Wahl nicht; jede Wahl ist prinzipiell möglich, wenn man nur konsistent weiterarbeitet.

<sup>6</sup>Wenn das Gitter endlich groß war, versteht sich.

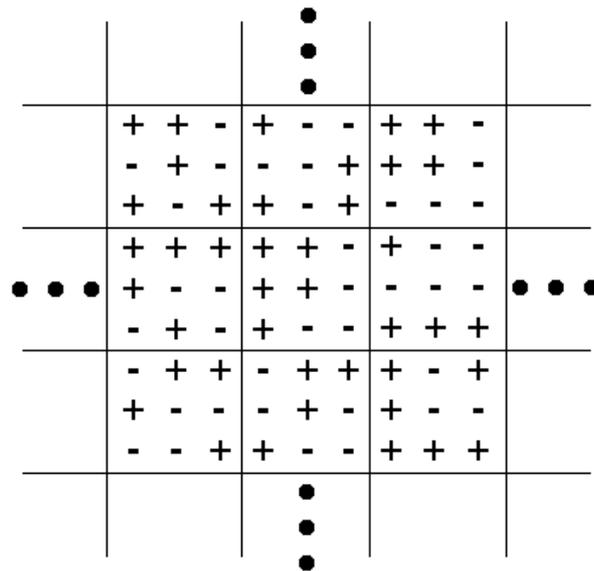


Abbildung 2.2: Obiger Zustand, in 3x3-Blöcke unterteilt.

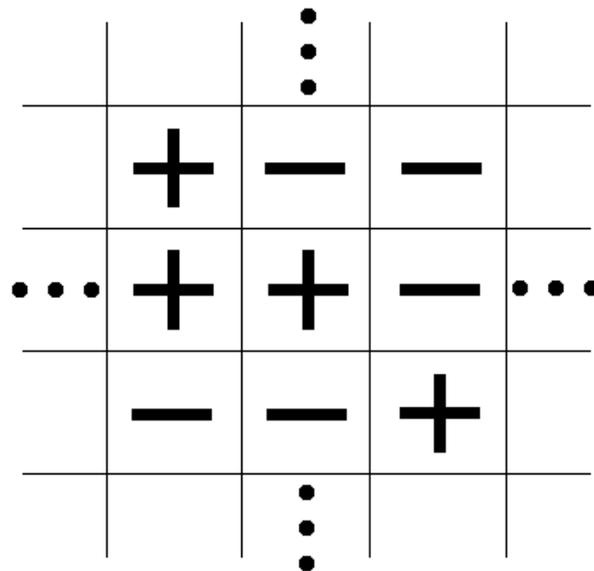


Abbildung 2.3: Jeder einzelne Block ist „aussummiert“ (nicht dargestellt) und durch einen neuen, einzelnen Spin ersetzt.

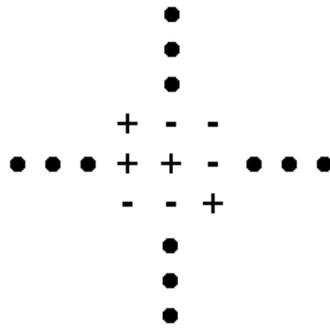


Abbildung 2.4: Das neue Gitter nach Reskalieren der Gitterkonstanten. Durch die Transformation ist klar, dass es in jeder Richtung nur noch ein Drittel der Länge des ursprünglichen Gitters 2.1 besitzt.

und dass die Kopplung der Konfiguration an eine äußere Quelle für jede Realisierung erhalten bleibt:

$$\sum_i s'_i h_i = \sum_i s_i h_i. \quad (2.9)$$

In beiden Formeln beziehen sich die Summen immer auf alle Spins des Gitters. Der erste Punkt ist klar, denn die Zustandssumme soll ja berechnet werden. Der zweite Punkt, die Kopplung jeder einzelnen Realisierung an eine äußere Quelle, leuchtet genauso ein, denn jene Kopplung ist eine makroskopische Größe, insbesondere eine messbare. Ich weise so deutlich auf die Wichtigkeit dieser Erhaltungsgröße hin, da sie zwar im Artikel von Kadanoff durchaus vorkommt, dann aber in späteren Jahren, insbesondere nach der Veröffentlichung von Wegner und Houghton,<sup>7</sup> nicht mehr berücksichtigt wurde. Bervillier<sup>8</sup> hat schließlich in einem Artikel 2004 auf die Wichtigkeit der äußeren Quelle hingewiesen; viele Arbeiten über die RG sind diesbezüglich auf ihre Korrektheit zu überprüfen.

Als letzter Punkt bleibt die Reskalierung des Gitters, der Gitterabstand wird in unserem Beispiel auf ein Drittel reduziert. Es ist zu beachten, dass sich die Stärken der Wechselwirkungen und auch die Feldstärken daran skalierend anpassen müssen (Abb. 2.4).

Ausgehend von der ursprünglichen Theorie hat man nun eine neue, effektive Theorie erhalten, die auf einer größeren Skala definiert ist, aber makroskopisch dieselben Eigenschaften aufweist. Ich möchte die wichtigen Schritte des Vorgehens nochmal zusammenfassen, weil hier bereits alle Zutaten der RG-Theorie enthalten sind:

- Summieren/Integrieren eines (kleinen) Anteils der im System vorhandenen, im Grenzfall unendlich vielen Freiheitsgrade
- Berechnung der neuen Wechselwirkungsterme unter der Voraussetzung, dass die Zustandssumme und die Kopplung jedes einzelnen Zustands an eine äußere Quelle, also kurz gesagt die makroskopischen Eigenschaften des Systems, unverändert bleiben
- Reskalieren des kleinsten Abstands (hier Gitterabstands) und damit auch der Kopplungen und Feldstärken

Zum wiederholten Durchführen des RG-Schritts ist noch anzumerken, dass die Wechselwirkungen zur Beschreibung der Theorie immer komplizierter und in höherem Maße nichtlokal werden,

<sup>7</sup>[WH 73]

<sup>8</sup>[Ber 04]

und immer mehr Kopplungen einbeziehen. In der Praxis hat man sich irgendwann auf eine (meist endliche) Untermenge an Kopplungen zu beschränken<sup>9</sup>; schon auf dieser Ebene wird der Bedarf einer Approximation klar.

Um das Ganze etwas formaler zu fassen: Eine Theorie sei gegeben durch ihr Wirkungsfunktional  $S$  oder eine dazu äquivalente Größe (z.B. eine Lagrange- oder Hamilton-Dichte). Genauer sollte man sagen, dass das Wirkungsfunktional für eine Theorie mit einem kleinsten Abstand  $a$  definiert sei. Der RG-Schritt werde repräsentiert durch einen Operator  $\mathcal{R}$ , der, angewandt auf  $S_a$ , ein neues Wirkungsfunktional auf der größeren Skala  $b$  gibt. Es ist gar nicht klar, dass der Operator selbst nicht von der Skala, sondern nur der Differenz der Skalen abhängen soll; da es einem in der klassischen RG-Theorie jedoch zumeist um Fragen der Selbstähnlichkeit geht, in denen alle Skalen gleich behandelt werden, wird dies stillschweigend vorausgesetzt:

$$\mathcal{R}_{b-a}(S_a) = S_b; \quad (2.10)$$

unter dieser Voraussetzung weiß man, dass RG-Operatoren eine Halbgruppe bilden:

$$\mathcal{R}_{c-b} * \mathcal{R}_{b-a} = \mathcal{R}_{c-a}. \quad (2.11)$$

Einen inversen Operator  $\mathcal{R}^{-1}$  kann man aber auf dieser Ebene für den RG-Operator nicht konstruieren, weil durch jede Summierung im Kadanoff-Bild die detaillierten Informationen über die Konfiguration eines Neunerblocks verloren gehen; dies ist solange allgemein richtig, wie man es mit diskreten RG-Operationen zu tun hat. Renormierungsgruppe ist somit an dieser Stelle nicht korrekt.

Der RG-Fluss entspricht einer Bewegung im Raum aller physikalischen Theorien; da wir hier angenommen haben, dass eine Theorie durch ihr Wirkungsfunktional definiert wird, handelt es sich um eine Bewegung im Raum der Wirkungsfunktionale, oder auch im Raum der Kopplungskonstanten  $\{\lambda\}$ , da wir annehmen, dass diese wiederum die Wirkung eindeutig festlegen. Dieser letzten Sprechweise möchte ich mich anschließen, weil hier am deutlichsten wird, dass der zugrunde liegende Raum unendlich dimensional ist, aber dann (durch Beschränkung auf eine endliche Zahl von Kopplungen) approximiert wird:

$$\mathcal{R}_{b-a}(\{\lambda_a\}) = \{\lambda_b\}. \quad (2.12)$$

„Bewegung“ setzt eine Zeit voraus; bisher könnte man als RG-Zeit die Anzahl der durchgeführten RG-Schritte annehmen. Das Konzept der RG-Zeit wird in der Wilsonschen Formulierung deutlicher werden.

Wenn das ursprüngliche System unendlich groß ist, dann ist scheinbar nichts gewonnen. Das neue System ist immer noch unendlich groß, nur die Wechselwirkungen haben sich geändert (und sind im Regelfall komplizierter geworden). Tatsächlich ist dies der Moment, von der ursprünglichen Absicht, die Zustandssumme zu berechnen, abzurücken. Das Resultat kann aus einer anderen Perspektive betrachtet werden: Zunächst arbeitet man mit einer Theorie, die beschreibt, wie die Physik auf einer kleinsten Längenskala, der Gitterkonstante, aussieht. Nach dem Durchlaufen der beschriebenen Prozedur (eines „RG-Schrittes“) ist nun eine andere Theorie gegeben, die dasselbe physikalische System beschreibt, aber auf einer neuen, größeren Längenskala. Iteriert man den RG-Schritt nun, so erhält man mit jedem Schritt Informationen über die Physik des Systems auf einer noch größeren Skala. Auf diese Weise ist es so, als würde man mit einem Mikroskop die Physik auf einer kleinsten Längenskala betrachten, und dann schrittweise „herauszoomen“,

<sup>9</sup>Die Ableitungsentwicklung hingegen erlaubt im Prinzip das gleichzeitige Betrachten unendlich vieler Kopplungen.

immer kleinere Vergrößerungen wählen.

Dann kann man sich für die selbstähnlichen Theorien, in denen

$$\mathcal{R}_{b-a}(S_a) = S_b = S_a \quad (2.13)$$

gilt, interessieren; diese sehen auf allen Längenskalen gleich aus. Um sie zu finden, genügt die Kenntnis eines einzigen RG-Schrittes. Auf die physikalische Interpretation der selbstähnlichen Theorien wird noch eingegangen werden.

Der diskrete Charakter der RG im Kadanoff-Bild stellt einen vor große Schwierigkeiten. Es scheint nicht möglich, eine immer gültige Vorgehensweise zu finden, mit der man die skalenabhängigen Kopplungen berechnen kann; im Kadanoff-Bild kann dieser Aufwand sogar bei zwei aufeinanderfolgenden RG-Schritten sehr unterschiedlich sein. Ein Übergang zu einer infinitesimalen Transformation ist wünschenswert, weil man so zu einer Differentialgleichung gelangen kann, für deren Behandlung einem ganz andere Methoden zur Verfügung stehen. Dieser Übergang zu einer kontinuierlichen RG ist der entscheidende Schritt, der vom Kadanoff-Bild zur exakten RG führt.

### Exakte RG nach Wilson

Wie zuvor beim Kadanoff-Bild schließe ich mich in der Darstellung dem ursprünglichen Artikel<sup>10</sup> zu diesem Thema an.<sup>11</sup> Ausgangspunkt sei eine skalare Theorie, die man als kontinuierliche Version des Ising-Modells ansehen kann. Die genaue Form der Wechselwirkung spielt dabei hier keine Rolle.

Typischerweise formuliert man die Theorie nach einer Fourier-Transformation in den Ortskoordinaten, erzwungen ist dies in keiner Weise.

Erstreckt sich die Ortsabhängigkeit über den ganzen Raum, so hängt die Theorie a priori auch von allen Wellenvektoren ab. Aus dem Kadanoff-Bild ist klar, dass man eine kleinste Skala  $a$  im Ortsraum benötigt, dies entspricht einem ultravioletten (UV) Cutoff  $\Lambda$  der Theorie im Wellenvektorraum. Größenordnungsmäßig gilt dann:

$$\Lambda \propto \frac{1}{a}. \quad (2.14)$$

Wir sind nun in der Lage, die drei Phasen, die zu einer RG-Transformation gehören, auf das zugehörige erzeugende Funktional anzuwenden.

Der erste Schritt ist die Ausintegration eines Teils der Freiheitsgrade. Dafür führt man unterhalb des ursprünglichen Cutoffs einen zweiten, intermediären Cutoff  $\Lambda'$  ein, dessen funktionale Form man im Prinzip frei wählen kann.<sup>12</sup> Die Freiheitsgrade zwischen den beiden Cutoffs werden nun ausintegriert, so dass die neue Theorie wieder nur einen Cutoff,  $\Lambda'$ , besitzt. Dann hat man die Kopplungen unter Beachtung derselben Regeln wie beim Kadanoff-Bild an das Ausintegrieren „anzupassen“, die Veränderungen in den Kopplungen lassen sich dabei unterschiedlich herleiten. Als dritter Schritt werden alle Größen reskaliert, bis der intermediäre Cutoff dort liegt, wo zuvor der UV-Cutoff lag:

$$\Lambda' \rightarrow \Lambda. \quad (2.15)$$

<sup>10</sup>[Wil 71], [Wil 71a]

<sup>11</sup>Gute Einführungen in die exakte Renormierungsgruppe bieten zum Beispiel der Artikel von Bagnuls und Bervillier [BB 01], oder auch der von Berges, Tetradis und Wetterich [BTW 02]. Auch die Artikel von Morris, zum Beispiel [Mor 97] und [Mor 98], vermitteln insbesondere die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen RG-Gleichungen. Die umfassendste Darstellung allerdings gibt nach wie vor der Standardartikel von Wilson und Kogut, [WK 74].

<sup>12</sup>Hierin unterscheiden sich die Ansätze von Wegner/Houghton [WH 73], Wilson [Wil 71] und Polchinski [Pol 83]; Wegner und Houghton verwenden einen scharfen Cutoff, während Wilson einen exponentiellen Cutoff verwendet. In der vorliegenden Arbeit wird, ähnlich wie bei Polchinski, der Cutoff nur insofern explizit angegeben, als das absolut notwendig ist. So erhält man eine sehr allgemeine RG-Gleichung, aus der man die Wegner-Houghton-Gleichung sowie die Wilson-Gleichung als Grenzfälle erhält.

Für die Details verweise ich auf ein späteres Kapitel, in dem ich selbst eine RG-Gleichung herleite.

Zu einer Differentialgleichung gelangt man, wenn man den intermediären Cutoff  $\Lambda'$  in infinitesimalem Abstand zum ursprünglichen UV-Cutoff  $\Lambda$  wählt:

$$\Lambda' = \Lambda - d\Lambda. \quad (2.16)$$

Durch Vergleich der erzeugenden Funktionale vor und nach dem RG-Schritt ergibt sich so eine Differentialgleichung für den Exponenten des Boltzmann-Faktors.<sup>13</sup> Wilson erhält für die Wirkung der Theorie eines skalaren Feldes  $\phi$  die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \int_p \left(1 - \frac{\eta}{2} + 2p^2\right) \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta S}{\delta\phi} - \frac{\delta S}{\delta\phi} \frac{\delta S}{\delta\phi} + \frac{\delta S}{\delta\phi} \phi \right\} \\ & + \frac{D}{2} \int_p \phi \frac{\delta S}{\delta\phi} + \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} \phi \right) \frac{\delta S}{\delta\phi}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Hier sei  $\eta$  die anomale Dimension des Feldes, zu der später noch einiges gesagt wird.  $D$  ist die Dimension des Raumes.

Die RG-Zeit  $t$  ist dabei definiert über

$$\dot{S} = -\Lambda \frac{\partial S}{\partial \Lambda} =: \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (2.18)$$

Sie hängt über ihre Definition eng mit der beobachteten Skala, sowohl im Orts- wie auch im Wellenvektorraum, zusammen:

$$t = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = -\ln\left(\frac{\Lambda}{\Lambda_0}\right). \quad (2.19)$$

Die Wirkung  $S$ , die die physikalische Theorie eindeutig beschreibt, wird so also skalenabhängig. Sind bereits Freiheitsgrade ausintegriert, die Theorie auf diese Weise nicht mehr fundamental, spricht man von einer effektiven Feldtheorie, und in diesem Zug auch von einer effektiven Wirkung  $S_{\text{eff}}$ . Auch wenn in einer Theorie, die verschiedene Felder enthält, ein oder mehrere Felder ausintegriert werden, spricht man von einer effektiven Feldtheorie; so kann zum Beispiel die Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung als effektive Theorie verstanden werden, die man erhält, wenn man in der elektroschwachen Theorie die W- und Z-Bosonen ausintegriert.

Die Wegner-Houghton-Gleichung für die skalare Theorie lautet, ohne die Reskalierungs- und Renormierungsterme:

$$\dot{H} \propto \int_p \ln \left( \frac{\partial^2 H}{\partial\phi\partial\phi} \right) - \frac{\partial H}{\partial\phi} \frac{\partial H}{\partial\phi} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial\phi\partial\phi} \right)^{-1}. \quad (2.20)$$

Die Wegner-Houghton-Gleichung ist für den Hamiltonian  $H$  definiert. Wie gesagt, der wesentliche Unterschied liegt in der speziellen Wahl der Form des Cutoffs; der scharfe Cutoff führt zu dem charakteristischen Logarithmus, auf den besonders hinzuweisen ist, weil er sich in praktischen Rechnungen oft als sehr störend erweist.

<sup>13</sup>Ob dieser im einzelnen durch die Wirkung  $S$  (Wilson, [Wil 71]), den Hamiltonian  $H$  (Wegner/Houghton, [WH 73]) oder die Lagrange-Dichte  $L$  (Polchinski [Pol 83]) verkörpert werden soll, spielt eine untergeordnete Rolle. Auch RG-Gleichungen für das Funktional  $\Gamma$  (z.B. Morris, [Mor 98]) oder das effektive Potential (z.B. Wetterich, [Wet 93], [TW 94]) sind möglich.

Das Funktional  $\Gamma$  wird in der Literatur als „effektive Wirkung“ bezeichnet; dieser Name ist unglücklich, da auch die skalenabhängige Wirkung  $S_{\text{eff}}$  als effektiv bezeichnet werden muss, da bereits Freiheitsgrade ausintegriert sind. Um keine Verwirrung zu verbreiten, werde ich mit „effektiver Wirkung“ stets  $S_{\text{eff}}$  meinen, und ansonsten vom  $\Gamma$ -Funktional sprechen.

Bei der exakten RG-Gleichung handelt es sich also um eine Funktionaldifferentialgleichung zweiter Ordnung in den Feldern, noch dazu eine nichtlineare. Die aus der Mathematik zur Verfügung stehenden Methoden zur Bearbeitung solcher Gleichungen sind äußerst dürftig, an eine exakte Lösung ist gar nicht zu denken. Man kann dies auch in der Art verstehen: Das Wirkungsfunktional  $S$  kann im Prinzip dargestellt werden durch die unendlich große Familie der Kopplungskonstanten  $\{\lambda\}$ ; die RG-Gleichung also als eine Differentialgleichung für alle Kopplungskonstanten, also unendlich viele Freiheitsgrade, gleichzeitig. Um überhaupt eine Chance zu haben, mit numerischen Methoden nach einer Lösung, z.B. Fixpunkten, zu suchen, muss die Wirkung auf jeden Fall geeignet approximiert werden. Dies gelingt zum Beispiel dadurch, nur eine endliche Anzahl von Kopplungen zuzulassen, und alle anderen zu verwerfen; die RG-Gleichung löst sich dann auf in einen Satz (gewöhnlicher oder partieller, je nach zu Grunde liegender Theorie und Approximation), gekoppelter Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Feldern.

Darüber hinaus ist die RG-Gleichung, egal ob für das gesamte Wirkungsfunktional oder für einzelne Kopplungen, eine Differentialgleichung erster Ordnung in der RG-Zeit, und als solche im Prinzip invertierbar.<sup>14</sup> Daraus entsteht der Eindruck, der RG-Operator der ERG habe hier, anders als im Kadanoff-Bild, ein Inverses, und es handle sich somit tatsächlich um eine Gruppe. Dies ist auch so lange korrekt, wie man die Wirkung nicht approximiert. Schränkt man sie auf nur einige Kopplungen ein, dann erzeugt die RG (bei normaler Zeitrichtung) auch Beiträge für verworfene Terme, die man einfach ignoriert. Kehrt man die Zeitrichtung um, dann müssten diese Beiträge, quasi „aus dem Nichts“, wieder in die akzeptierten Kopplungen zurückfließen. Die Invertierbarkeit scheitert also an der praktischen Handhabung der Funktionaldifferentialgleichung. Da die RG-Gleichung eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit ist, reicht die Angabe der Kopplungskonstanten auf einer kleinsten Längenskala aus, um den RG-Fluss eindeutig zu bestimmen. Jedem Punkt des Kopplungskonstantenraums ist eindeutig der Tangentialvektor an den Fluss durch diesen Punkt zuzuordnen. Das Feld der Tangentialvektoren will ich als „RG-Flussfeld“ bezeichnen.

Zu erwähnen bleibt, dass man den Reskalierungsschritt umgehen kann, indem man alle Größen dimensionslos wählt, also durch eine geeignete Potenz einer Energieskala (des Cutoffs) eicht. Dies wird in aller Ausführlichkeit zum Beispiel in den Artikeln von Morris<sup>15</sup> erklärt. Man sollte dabei nicht vergessen, dass gerade in dem richtigen Skalieren der Felder und Kopplungen wichtige Informationen über den RG-Fluss versteckt sind. Es macht jedoch Sinn, dies exemplarisch für die Wilson-Gleichung einmal zu tun, um die Gleichung besser zu verstehen; ohne Skalierungsterme lautet die Wilson-Gleichung:

$$\dot{S} \propto \int_p (c + 2p^2) \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta S}{\delta\phi} - \frac{\delta S}{\delta\phi} \frac{\delta S}{\delta\phi} \right\}. \quad (2.21)$$

Dies ist jedoch mit Hilfe von Feynman-Graphen gut zu verstehen, die Änderung der Wirkung beruht auf zwei unterschiedlichen Prozessen: Der erste Term ist zu verstehen als die Integration über zwei äußere Enden eines Vertex, die mit einem Propagator verbunden sind; der zweite fusioniert zwei einzelne Vertices durch die Integration über den dazwischen liegenden Propagator.

Unter Zuhilfenahme der RG-Operatoren kann man die differentielle RG-Gleichung auch so

<sup>14</sup>Dies kann man sich so vor Augen führen: Die RG-Transformation kann als Abbildung verstanden werden, die jedem Punkt des Kopplungskonstantenraums einen Tangentialvektor zuordnet. Diese Zuordnung ist eineindeutig, da es sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung in der RG-Zeit handelt. So lange einem Punkt ein Tangentialvektor  $V$  zugeordnet wird, kann man ihm durch eine inverse Abbildung auch den gespiegelten Vektor  $-V$  zuordnen. Besonders wichtig ist hier die Tatsache, dass es sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung in der RG-Zeit handelt; wäre dies nicht der Fall, könnten sich Trajektorien im Kopplungskonstantenraum schneiden, und an den Schnittpunkten wäre ein Inverses nicht eindeutig bestimmt. Dies ist jedoch nicht möglich, auch nicht bei Senken, in die die Trajektorien aus verschiedenen Richtungen hineinlaufen, weil aus dem genannten Grund die Senke selbst von den Trajektorien in endlicher RG-Zeit nicht erreicht werden kann.

<sup>15</sup>[Mor 97], [Mor 98]

schreiben:

$$\dot{S} = \mathcal{R}(S). \quad (2.22)$$

Der Operator  $\mathcal{R}$  hängt natürlich, wie im Kadanoff-Bild, nicht selbst von der Skala  $\Lambda$  (der RG-Zeit  $t$ ) ab; dadurch, dass der Limes gebildet wurde, auch nicht von der Skalendifferenz  $d\Lambda$ .

### Reparametrisierungsinvarianz

Die RG-Gleichungen der ERG sind invariant unter einer Reparametrisierung der Felder<sup>16</sup>, kombiniert mit einer Umdefinition ihrer anomalen Dimension. Im Kapitel 2, in dem eine RG-Gleichung herleitet wird, wird dies ganz deutlich zu sehen sein, und es wird sich ganz bewusst dieser Invarianz bedient, um eine möglichst universelle Gleichung herzuleiten.

Praktisch hat die Invarianz die Bedeutung, dass die anomale Dimension zwar als Parameter in die Gleichung eingeht, aber die Ergebnisse der Analysen nicht betrifft. Sie ist frei wählbar, da man die Felder immer passend umdefinieren kann. Ein Fixpunkt ist dann für jeden Wert der anomalen Dimension zu finden, statt eines Fixpunkts hat man eine durch die anomale Dimension des Feldes parametrisierte Linie von Fixpunkten.

Als Beispiel diene hier wieder die Theorie eines skalaren Feldes  $\phi$ . Definiert man den kinetischen Term in kanonischer Weise als

$$S_{\text{kin}} = \int_p \phi(p) p^2 \phi(-p), \quad (2.23)$$

so skalieren die Felder wie  $\frac{-D-2+\eta}{2}$ , wobei  $D$  die Dimension des Raumes und  $\eta$  die anomale Dimension ist. Nun parametrisiert man die Felder um, und betrachtet stattdessen das Feld

$$\phi' = p\phi. \quad (2.24)$$

Der kinetische Term lautet dann:

$$S'_{\text{kin}} = \int_p \phi'(p) \phi'(-p), \quad (2.25)$$

und das neue Feld skaliert wie  $\frac{-D+\eta}{2}$ . Möchte man, trotz der Reparametrisierung, dieselben physikalischen Felder beschreiben, so hat man

$$\eta' = 2 + \eta \quad (2.26)$$

zu definieren.

Um dennoch sagen zu können, welcher dieser Fixpunkte der physikalische ist, muss man zusätzliche Informationen haben, zum Beispiel die kanonische Dimension der Felder kennen, und diese für den trivialen Fixpunkt zu fordern.

Es bleibt zu erwähnen, dass die Reparametrisierungsinvarianz im Allgemeinen gebrochen wird, wenn man die Wirkung approximiert.

### 2.1.2 Feldtheoretische Renormierungsgruppe

Die Ursprünge der feldtheoretischen RG liegen in der perturbativen Renormierung der Quantenfeldtheorie. Es ist bekannt, dass die Schleifenentwicklung der Feynman-Graphen einer Feldtheorie auf divergente Terme führt, die mit Hilfe der Renormierung beseitigt werden müssen. Dies geschieht durch eine Regularisierung der divergenten Integrale, gefolgt vom Einfügen geeigneter Gegenterme in die Lagrange-Dichte, die zwar divergent sind, aber die Divergenz der Feynman-Graphen gerade aufheben. Ob dies für eine gegebene Theorie möglich ist, die Theorie

<sup>16</sup>Zu detaillierten Informationen zur Reparametrisierungsinvarianz vergleiche zum Beispiel [Com 98].

also „renormierbar“ ist, ist eine nichttriviale Frage; darauf und auf die Details möchte ich an dieser Stelle jedoch nicht eingehen. Wichtig ist mir an dieser Stelle, darauf hinzuweisen, dass die nackte Kopplung, die man ursprünglich in die Theorie geschrieben hatte, zusammen mit dem Gegenterm, zu einer neuen, einer „renormierten“ Kopplung zusammenzufassen ist.<sup>17</sup>

In dieser Prozedur liegt einiges an Beliebigkeit. Statt nur den divergierenden Teil der regulierten Graphen als Gegenterm zu verwenden, kann man auch jeden zusätzlichen endlichen Gegenterm anfügen, und die Divergenzen verschwinden dennoch. Um dieser Beliebigkeit Herr zu werden, benötigt man eine Renormierungsvorschrift: Die renormierte Kopplung muss auf einer (beliebigen) Skala bekannt sein. Beispielsweise könnte man den Infrarotwert einer Kopplung, also bei unendlichem Abstand, angeben. Die Renormierungsvorschrift legt fest, wie der Gegenterm im Detail auszusehen hat. Die renormierte Kopplung, deren Wert man auf einer Skala vorgegeben hat, wird dann im Allgemeinen auf anderen Skalen auch andere Werte annehmen, sie ist skalenabhängig geworden. Die Abhängigkeit der Kopplung  $\lambda$  von der Renormierungsskala  $M$  kann man durch folgende Differentialgleichung ausdrücken:

$$\beta(\lambda) = M \left. \frac{\partial}{\partial M} \lambda \right|_{\lambda_0, \Lambda}. \quad (2.27)$$

Hier taucht die berühmt gewordene  $\beta$ -Funktion auf; sie legt fest, wie sich eine Kopplung ändert, wenn ihre (nicht variierte) nackte Kopplung  $\lambda_0$  auf einer anderen Skala  $M$  definiert sei; der Cutoff  $\Lambda$  werde dabei auch konstant gehalten. Praktisch ist sie, wie bereits erklärt, aus der perturbativen Renormierung der betreffenden Kopplung zu berechnen.

Nicht nur Kopplungen werden renormiert, sondern auch Feldstärken. Dies und der Umstand, dass es beliebig ist, auf welcher Skala ich die Renormierungsvorschrift angebe, ermöglicht es, eine Differentialgleichung aufzustellen, die das Verhalten verschiedener skalenabhängiger Größen einer Theorie miteinander in Beziehung setzt. Die Idee: Für eine renormierte Theorie sei die Renormierungsvorschrift auf einer Skala  $M$  gegeben. Nun verschiebt man diese Skala um ein infinitesimales Stück. Um die gleiche Theorie zu erhalten, muss man dann auch die vorgeschriebenen Werte, die die renormierten Kopplungen, Feldstärken etc. annehmen sollen, mitverändern. Um wieviel sich eine renormierte Kopplung aber von einer Skala zu einer anderen ändert, wird gerade durch ihre  $\beta$ -Funktion angegeben. Man setzt also das Skalenverhalten aller skalenabhängigen (d.i. dimensionsbehafteten) Größen zusammen und erhält die sog. Callan-Symanzik-Gleichung für einen renormierten  $n$ -Punkt-Vertex der skalaren Theorie:

$$\left[ M \frac{\partial}{\partial M} + \beta_1(\lambda_1) \frac{\partial}{\partial \lambda_1} + \beta_2(\lambda_2) \frac{\partial}{\partial \lambda_2} + \dots + n\gamma(\{\lambda_i\}) \right] G^{(n)}(\{x_i\}, \{\lambda_i\}, M) = 0. \quad (2.28)$$

Hier bezeichnen die  $\lambda_i$  die Kopplungen der Theorie,  $\gamma$  das Skalieren der Felder und  $M$  die Renormierungsskala. Man kann die Callan-Symanzik-Gleichung auch so lesen, dass sie für einen bekannten Vertex die  $\beta$ -Funktionen zueinander in Beziehung setzt. Je nachdem, mit was für einer Theorie man arbeitet, und bis zu welcher Genauigkeit die  $\beta$ -Funktionen bekannt sind, ist es mitunter möglich, die Callan-Symanzik-Gleichung direkt zu integrieren, und so die vollständige Skalenabhängigkeit auch komplizierter Prozesse zu bestimmen.<sup>18</sup>

### 2.1.3 Approximationsmethoden

Sowohl die exakte wie auch die feldtheoretische RG können nicht exakt gelöst werden, für beide Ansätze sind geeignete Approximationen der Wirkung gefragt. Einige der hier beschriebenen

<sup>17</sup>Das Gebiet der perturbativen Renormierung ist viel zu umfangreich, um es hier angemessen darzustellen. Für eine detaillierte Ausführung sei vor allem auf Collins [Col 84] und den Artikel von Delamotte [Del 04] verwiesen.

<sup>18</sup>Vergleiche dazu zum Beispiel [PS 95].

Näherungen sind für beide Arten der RG möglich, andere nur für die exakte RG. Hier wird versucht, eine kurze Übersicht über gängige Ansätze zu geben.

### Entwicklung der Wirkungsterme nach Potenzen der Felder

Bei der vermutlich gängigsten Methode, eine genäherte Wirkung einzuführen, werden die Wechselwirkungsterme aufsteigend nach der Zahl der in ihnen vorkommenden Felder sortiert, und bei festzulegender Potenz abgebrochen. Im Beispiel einer skalaren und  $Z_2$ -symmetrischen Theorie könnte dies so aussehen:

$$S = S_{\text{kin}} + \lambda_4 \int_p (\phi)^4 + \lambda_6 \int_p (\phi)^6 + \lambda_8 \int_p (\phi)^8. \quad (2.29)$$

In der feldtheoretischen RG wird dieser Weg per Definition immer angewandt, denn für jede Kopplung  $\lambda_i$  der Wirkung ist eine  $\beta$ -Funktion aufzustellen und zu integrieren; unendlich viele sind nicht praktisch anwendbar. Aber auch in der exakten RG, wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit zu sehen sein wird, ist eine Entwicklung nach Potenzen der Felder manchmal unumgänglich, dies insbesondere in Fällen, in denen Grassmann-Felder in der Theorie vorkommen.

### Ableitungsentwicklung

Diese Form der Approximation einer Wirkung ist schon seit langem bekannt, aber immer wieder neu „entdeckt“ worden; eine gute Behandlung des Themas findet sich bei Hasenfratz und Hasenfratz.<sup>19</sup> Bei der Ableitungsentwicklung handelt es sich um eine Entwicklung um das konstante Feld, und nicht, wie im Fall der Entwicklung nach Potenzen der Felder, um eine Theorie von schwachen Feldern. Man sortiert die Terme in der Wirkung nach der Ordnung der Ortsableitungen (nach Fourier-Transformation: nach der Ordnung der Wellenvektoren). Für die skalare Theorie wiederum sieht das wie folgt aus:

$$S \propto \int_x V(\phi) + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 K(\phi) + \mathcal{O}(\partial^4). \quad (2.30)$$

Im Vergleich zur Entwicklung nach Feldpotenzen kann man hier im Prinzip unendlich viele Terme berechnen - alle Terme, die in der Entwicklung nach Feldpotenzen keine explizite Impulsabhängigkeit besitzen, lassen sich zum Beispiel zu einem einzigen zusammenfassen - dem sogenannten lokalen Potential. Im Fall der skalaren Theorie wäre der nächste Term von der Ordnung zwei in den Ableitungen. Aus den Feldableitungen der RG-Gleichungen werden partielle Ableitungen nach den konstanten Feldern, um die man entwickelt; beschränkt man sich auf die Lokale-Potentialapproximation, in der nur der Term ohne Ableitungen (hier  $V$ ) variiert wird,<sup>20</sup> erhält man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wie folgt aussieht:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}(D-2)\phi_0 \frac{\partial V}{\partial \phi_0} - DV = \ln \left( 1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_0 \partial \phi_0} \right). \quad (2.31)$$

$V$  ist hier als Funktion des konstanten Feldes  $\phi_0$  und der RG-Zeit  $t$  zu sehen.

Bei einigen Systemen hat die Ableitungsentwicklung bereits sehr gute Dienste geleistet. Es bleibt allerdings zweifelhaft, wie sie sich bei Systemen bewährt, in denen Singularitäten auftreten, wie zum Beispiel der Turbulenz nach Burger, einer Schockwellenturbulenz. Das Burger-Feld ist sicher nicht eines, das man als „nah am konstanten Feld“ bezeichnen würde.

<sup>19</sup>[HH 86]

<sup>20</sup>Zuerst in [NCS 74].

## Die $\epsilon$ -Entwicklung

Berühmt geworden ist die, ebenfalls von Wilson entwickelte,  $\epsilon$ -Entwicklung.<sup>21</sup> Diese mutet bei erstem Kennenlernen recht abstrakt an, hat aber sehr praktische Auswirkungen auf die Arbeit mit der RG.

Der physikalischen Theorie, mit der man arbeitet, liegt immer eine bestimmte Raum- (oder Raumzeit-) dimension zugrunde. Bei statistischen Theorien ist man meistens an Theorien in drei Raumdimensionen interessiert, während Quantenfeldtheorie gewöhnlich auf einer vierdimensionalen Raumzeit stattfindet. In diesen Dimensionen ist man zumeist auf der Suche nach (nicht-trivialen) Fixpunkten. A priori weiß man jedoch nicht, wo sich diese befinden könnten und ob es überhaupt welche gibt, und sucht nach Möglichkeiten, das Aufspüren von Fixpunkten zu vereinfachen. Dabei kommt einem zugute, dass man oft Aussagen über die Fixpunkte in anderen Dimensionen treffen kann; jedenfalls kann es einfacher sein, mit derselben Theorie in einem ganz anderen Raum zu arbeiten.

Wilsons Idee bezog sich zunächst auf die skalare Theorie. Er war interessiert an der Theorie in drei Dimensionen; in vier Dimensionen war der einzige Fixpunkt (der triviale) bekannt. Wilson betrachtete dann die Theorie in  $4 - \epsilon$  Dimensionen, mit einem kleinen Parameter  $\epsilon$ . Für kleine  $\epsilon$  verhält sich die Theorie noch sehr ähnlich der Theorie in vier Dimensionen. Bei einer Entwicklung um den bekannten Fixpunkt findet man den neuen, nichttrivialen Fixpunkt. Seine Skalierungsexponenten sind Funktionen von  $\epsilon$ , und den Punkt in drei Dimensionen erhält man durch Einsetzen von  $\epsilon = 1$ . Der so gefundene Fixpunkt der skalaren  $\phi^4$ -Theorie in drei Dimensionen trägt auch den Namen „Wilson-Fisher-Fixpunkt“.

In der feldtheoretischen RG kommt die  $\epsilon$ -Entwicklung in sehr natürlicher Weise vor. Wie bereits erklärt, liegt den  $\beta$ -Funktionen der feldtheoretischen RG eine Schleifenrenormierung zugrunde. Wählt man für diese Renormierungsprozedur eine dimensionelle Regularisierung, dann hängen die  $\beta$ -Funktionen bereits vom Parameter  $\epsilon$  ab.

Die Verlässlichkeit der  $\epsilon$ -Entwicklung ist allerdings nicht immer gegeben, aus zwei Gründen. Zum einen ist das Vorgehen in sich mitunter zweifelhaft - eine Entwicklung in einem kleinen Parameter muss keine sinnvollen Ergebnisse geben, wenn man an dem Fall, dass der Parameter von der Größenordnung 1 ist, interessiert ist.<sup>22</sup> Auf der anderen Seite müssen neue Fixpunkte mit wachsendem  $\epsilon$  nicht zwingend aus einem alten Fixpunkt entstehen; es ist genauso denkbar, dass fern jedes alten Fixpunkts zwei neue am selben Ort entstehen und dann auseinander laufen.<sup>23</sup> In einem solchen Fall wird man neue Fixpunkte mit Hilfe der  $\epsilon$ -Entwicklung nicht finden können.

## Eigenzeit-Renormierungsgruppe

Weniger als ein selbständiger Ansatz zur Renormierungsgruppe, handelt es sich bei der Eigenzeit-RG<sup>24</sup> um eine Approximation des in der Wegner-Houghton-Gleichung auftretenden Logarithmus. In der Wilson-Gleichung taucht dieser nicht auf, weil der Cutoff nicht scharf, sondern exponentiell aufgeweicht ist; im Prinzip passiert in der Eigenzeit-RG etwas Ähnliches. Der Logarithmus wird ersetzt durch seine Schwinger-Eigenzeit-Darstellung:

$$\mathbf{Tr}(\ln M - \ln M_0) = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \mathbf{Tr} (e^{-tM} - e^{-tM_0}). \quad (2.32)$$

Der divergente Teil wird abgeschnitten, auf diese Weise also der Cutoff rückwirkend aufgeweicht.

<sup>21</sup>Bereits enthalten in den ersten Artikeln, [Wil 71] und [Wil 71a].

<sup>22</sup>Wie im Buch von Adzhemyan, Antonov und Vasiliev [AAV 99] erklärt wird, setzt man im Fall der 3D-Turbulenz sogar  $\epsilon = 2$ .

<sup>23</sup>Einzelne Fixpunkte können nicht einfach irgendwo auftauchen, da sie die Topologie des Flusses fundamental verändern; der Fluss ist aber analytisch in  $\epsilon$ .

<sup>24</sup>Vergleiche dazu die Artikel von Bonanno und Zappalà, [BZ 01] und [Zap 02].

### 2.1.4 RG, Phasenübergänge und Fixpunkte

Bisher ist noch nicht klar, wie man mit Hilfe der RG makroskopische Observablen konkret ausrechnen kann, nicht einmal, was für Observable dafür überhaupt in Frage kommen. Darüber hinaus scheint es so, als sei der Arbeitsaufwand, um zu einer makroskopischen Theorie zu gelangen, weiterhin unendlich groß. In besonderen Fällen lassen sich allerdings sehr wohl experimentell überprüfbare Aussagen treffen, und dies betrifft vor allem das große Gebiet der Phasenübergänge, der kritischen Phänomene, auf die die RG auch zuerst und mit großem Erfolg angewandt wurde. Darauf soll an dieser Stelle kurz eingegangen werden.

Gegeben sei ein System in der Nähe eines kritischen Punktes, eines kontinuierlichen Phasenüberganges. Auf mikroskopischer Ebene sei die Physik bekannt, sie sei gegeben durch die Wirkung. Geht man nun durch statistische Methoden zur makroskopischen Physik über, so nimmt man zunächst an, dass sich Details der mikroskopischen Welt „herausmitteln“. Ein typisches Beispiel: Man definiert die mikroskopische Theorie nicht im Kontinuum, sondern auf einem Gitter - beispielsweise einem Kristallgitter, wenn man sich für Phänomene wie den Ferromagnetismus interessiert. Dann soll die makroskopische Theorie keine Informationen mehr über die spezielle Wahl des Gitters enthalten; sie soll das zugrunde liegende Gitter sozusagen vergessen. Wie allgemein bekannt ist, divergiert an einem kritischen Punkt die Korrelationslänge der Theorie, also der Abstand, über den die physikalischen Felder miteinander korreliert bleiben. Verschwände die Information über die mikroskopische Skala, auf der die Theorie definiert wurde, dann wären dem System keine Längenskalen mehr inhärent; die Theorie muss dann selbstähnlich sein! Übersetzt in die Sprache der RG heisst das: Die Physik sieht auf allen Skalen exakt gleich aus, durch einen RG-Schritt wird eine Wirkung auf sich selbst abgebildet. Dies ist eine wichtige Erkenntnis: Ein kritischer Punkt der statistischen Physik entspricht einem Fixpunkt im Raum der Kopplungen unter RG-Transformationen.

Wie ich in einem späteren Abschnitt erkläre, hängen makroskopische Größen am kritischen Punkt in Form von Potenzgesetzen von der Skala  $l$ , auf der das System betrachtet wird, ab. Sei  $\mathcal{O}$  solch ein Operator, dann gilt:

$$\mathcal{O}(l) \propto l^\lambda. \quad (2.33)$$

Die Observablen, die man mit Hilfe der RG bestimmen kann, sind dann die Exponenten  $\eta$ . Die sehr erfolgreiche Anwendung der RG-Theorie auf den Bereich der kritischen Phänomene beruht darauf, dass für eine gegebene, mikroskopische Theorie nach Fixpunkten des RG-Flusses gesucht wird.

#### Universalität

Schon an dieser Darstellung ist klar, dass Details der Modellierung (genaue Form des Gitters, ursprünglicher Gitterabstand) für die Fixpunkte keine Rolle spielen. Einzig und allein ausschlaggebend sind die Symmetrien und die Dimensionalität der Größen, die die Physik repräsentieren sollen - des Ordnungsparameters, in der Sprache der Landau-Theorie. Für die oben beschriebenen Skalierungsexponenten gilt dasselbe, auch diese hängen nur von den Eigenschaften des Ordnungsparameters ab. Dieses Verhalten trägt den Namen „Universalität“, und die kritischen Phänomene teilen sich ein in verschiedene Universalitätsklassen. Eine solche Klasse ist festgelegt durch den Ordnungsparameter und die Symmetrien des Systems und legt ihrerseits die Skalierungsexponenten eindeutig fest; praktisch bedeutet das, dass die Zahl der zu untersuchenden Systeme sehr beschränkt ist, und sich phänomenologisch sehr unterschiedliche Systeme am kritischen Punkt hinsichtlich der universellen Eigenschaften identisch verhalten.<sup>25</sup>

<sup>25</sup>Hierzu sei erwähnt, dass es durchaus möglich ist, auch nichtuniverselle Größen über den RG-Fluss zu verfolgen, den detaillierten Verlauf der skalenabhängigen Kopplungen zum Beispiel. In dieser Arbeit geschieht das durch die Darstellung des Flusses ganz natürlich.

Was die Eigenschaften der möglichen Fixpunkte und die Methoden, diese Fixpunkte aufzuspüren, angeht, so ist hier alles anwendbar, was einem aus der Theorie der dynamischen Systeme bekannt ist.

### 2.1.5 Fixpunkte und Methodik der RG

Fixpunkte zu finden, ihre kritischen Exponenten zu bestimmen und auch die Flüsse in unmittelbarer Nähe eines Fixpunkts zu untersuchen, sind Hauptaufgaben der klassischen RG-Theorie. In diesem Abschnitt soll erklärt werden, was für Fixpunkte (und andere Strukturen) man im Raum der Kopplungen finden kann, wie man aus den Flüssen Informationen über die Skalierungsexponenten gewinnt und letztlich, ganz praktisch, auf welche Weise man einen Fixpunkt überhaupt erst entdecken kann.

#### Strukturen im Raum der Kopplungskonstanten

Man studiert Bewegungen im Raum der physikalischen Theorien, dargestellt durch den Raum der Kopplungskonstanten. Die Zeit, in der sich die Bewegung abspielt, ist die symbolische RG-Zeit, die, wie bereits gesehen, angibt, auf welcher Größenordnung wir das physikalische System betrachten.

Das denkbar einfachste Verhalten, das ein Fluss zeigen kann, ist natürlich der Fixpunkt, also gar keine Bewegung. Mindestens ein solcher Fixpunkt existiert immer, nämlich der triviale: Im Raum der Kopplungskonstanten ist dies der Koordinatenursprung. Wenn alle Kopplungen verschwinden, sieht man direkt, dass die rechte Seite der exakten RG-Gleichung verschwindet. Der triviale Fixpunkt entspricht einer freien, masselosen Theorie aller beteiligten Felder; das erzeugende Funktional hat das Aussehen einer Gauß-Verteilung:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + J\phi]}. \quad (2.34)$$

Es sind darüber hinaus auch alle anderen Sorten von Fixpunkten denkbar. Zu Fixpunkten können sowohl positive wie negative Skalierungsexponenten gehören, korrespondierend zu attraktiven und repulsiven Richtungen im Kopplungsraum. Auch komplexe Skalierungsexponenten sind möglich, wie sie vor allem von Sornette untersucht und auf Systeme der Finanzmathematik angewendet wurden;<sup>26</sup> im Kopplungsraum sieht man dann eine um einen Fixpunkt zirkulierende Trajektorie. Hat der Exponent sowohl einen nicht verschwindenden Real- wie Imaginärteil, so sieht man eine spiralförmige Trajektorie, die in den Fixpunkt hinein- oder aus dem Fixpunkt herausläuft; in diesem Fall spricht man von einem Fokusfixpunkt. Im Prinzip sind noch kompliziertere Gebilde, wie Lorenz-Attraktoren, denkbar.

Da der Kopplungsraum hochdimensional ist, sind darüber hinaus auch Fixkurven und kritische Hyperflächen denkbar und auch bereits gefunden worden.

Exemplarisch sei der einfache Fall eines Fixpunktes in zwei Kopplungen besprochen, der eine attraktive und eine repulsive Richtung habe. Im Diagramm sind einige Trajektorien dargestellt, die sich in der Nähe eines solchen Fixpunktes bewegen. Entlang der Eigenrichtungen des Fixpunktes erwartet man ein eindeutiges Skalieren, die Skalierungsexponenten sind einfach aus den Daten der Trajektorien zu extrahieren.

An diesem Beispiel ist die Interpretation eines Phasenübergangs der statistischen Physik gut zu erklären. Wie man deutlich erkennt, kann eine kleine Änderung der Startwerte (= mikroskopische

<sup>26</sup>Zu den komplexen Skalierungsexponenten empfehle ich den Artikel [Sor 98]. Die Anwendung auf Börsendaten findet sich in dem Artikel von Sornette und Johansen, [SJ 98].

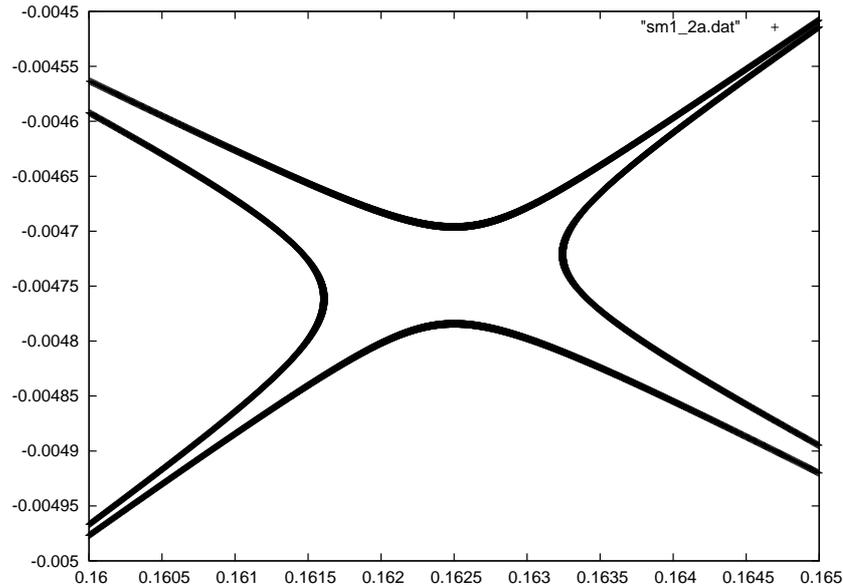


Abbildung 2.5: Beispiel eines typischen Fixpunkts

Kopplungen) eine völlig andere makroskopische Theorie ergeben - wenn man mit den Startwerten die Seite der Separatrix, d.i. die Eigenrichtung des Fixpunkts, wechselt.

### Allgemeine Eigenschaften

Die Frage nach der Existenz unbekannter Fixpunkte ist im Allgemeinen nicht-trivial. Die Existenz hängt dabei nicht nur von der Art der Theorie, sondern, wie im Bezug auf die  $\epsilon$ -Entwicklung bereits beschrieben, auch von der Dimensionalität des physikalischen Raumes ab; ein Fixpunkt, den man zum Beispiel bei Dimension  $D = 3$  finden kann, muss bei  $D = 4$  nicht existieren. Das berühmteste Beispiel dazu ist sicherlich der Wilson-Fisher-Fixpunkt der  $\phi^4$ -Theorie in  $D < 4$ -Dimensionen, der für  $D = 4$  mit dem trivialen zusammenfällt.

Eine besondere Rolle spielen die „upper critical dimension“ und „lower critical dimension“ eines Fixpunktes.

- Upper Critical Dimension: Die Upper Critical Dimension ist die Dimension, oberhalb der ein Fixpunkt nicht mehr existieren kann. Um dies zu verstehen, ist es günstig, sich zu überlegen, wie sich das RG-Flussfeld verändern kann, wenn man die Dimension des physikalischen Raumes (aufgefasst als justierbaren Parameter) verändert. Da die RG-Gleichung in einfacher Weise von der Dimension abhängt, erwartet man, dass auch das RG-Flussfeld analytisch in  $D$  sein sollte. Dies bedeutet aber, dass durch ein sich kontinuierlich veränderndes  $D$  kein einzelner Fixpunkt irgendwo „auftauchen“ kann - man sieht leicht ein, dass sich dadurch die Topologie des Flussfeldes in nichtanalytischer Weise ändern würde. Es ist jedoch denkbar, dass ein Fixpunkt bei sinkendem  $D$  aus einem bereits vorher existierenden Fixpunkt herausläuft. Der Wilson-Fisher-Fixpunkt beispielsweise entsteht so aus dem trivialen Fixpunkt. Da klassisch hauptsächlich schwach gekoppelte Systeme (also Theorien in der Nähe der freien Theorie) betrachtet werden, scheint dies die einzige Möglichkeit zu sein, durch die ein Fixpunkt zustande kommen kann. Voraussetzung dafür ist, dass (mindestens) ein Skalierungsexponent des trivialen Fixpunkts das Vorzeichen wechselt; an der Upper Critical Dimension verschwindet der Exponent gerade, der zugehörige Operator (zum Beispiel  $\phi^4$  bei  $D = 4$ ) ist also marginal.

Es spricht allerdings auch nichts dagegen, dass nicht einer, sondern zwei Fixpunkte ir-

gendwo gemeinsam entstehen. Auch dafür ändert sich die Topologie nicht sprunghaft; es entsteht ebenfalls ein marginaler Operator. Die Aussage, die Upper Critical Dimension lasse sich an der Existenz eines marginalen Operators ablesen, ist meiner Ansicht nach aber dennoch nicht richtig, weil es denkbar ist, dass mit weiter sinkendem  $D$  zwei Fixpunkte wieder ineinander laufen. Das bekannte „power counting“ scheint dem zwar zu widersprechen, ist aber mit Vorsicht zu genießen, da es wiederum Theorien in der Nähe der freien Theorie voraussetzt. A priori ist nicht klar, dass die gesuchte Theorie dieses Kriterium erfüllt.

- **Lower Critical Dimension:** Die Lower Critical Dimension spielt nur eine Rolle bei Systemen mit kontinuierlichen Symmetrien, die beim Phasenübergang spontan gebrochen werden, z.B. eine  $O(3)$ -Symmetrie im Fall des physikalischen Ferromagneten. Durch die spontane Symmetriebrechung entstehen in der Theorie bekannterweise Goldstone-Bosonen, die bei Dimensionen unterhalb der Lower Critical Dimension die Dynamik im makroskopischen Bereich dominieren; ein Phasenübergang ist dann nicht mehr zu beobachten.

### Shooting method

Um Fixpunkte zu finden, ist es am einfachsten, RG-Flüsse mit verschiedenen Startwerten zu simulieren, und an der Form der Bewegung die Anwesenheit und die Arten der Fixpunkte abzulesen. Diese Methode ist als „shooting method“ bekannt, und wird im Kapitel über die numerische Auswertung meiner Arbeit genauer erklärt und mit selbst erstellten und auf eigenen Rechnungen basierenden Graphen veranschaulicht. Hier sei nur erwähnt, dass das Aufspüren eines Fixpunktes, insbesondere in hochdimensionalen Räumen, eine nichttriviale Angelegenheit ist. Man sucht daher nach Trajektorien, die zum Beispiel durch scharfe Kurven, oder hohe Aufenthaltsdauern, die Präsenz eines Fixpunktes andeuten; durch Feinjustieren der Anfangswerte versucht man dann, sich dem Fixpunkt immer weiter anzunähern.

#### 2.1.6 Mathematische Sicht auf die RG

Fern davon, die RG hier in aller mathematischen Stringenz zu begründen, soll hier dennoch die RG mit dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie in Verbindung gebracht werden.

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass, unter sehr schwachen Voraussetzungen, die Verteilung einer Summe unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen im Limes unendlich vieler Summanden gegen eine unendlich teilbare Verteilung konvergiert. Oft liest man diesen Satz in der viel schwächeren Formulierung, dass unter einer zusätzlichen Annahme über die Verteilung der Summanden die Verteilung der Summe gegen eine Normalverteilung konvergiert. Dies ist deutlich nur ein Spezialfall der ersten, allgemeineren Formulierung, da die Normalverteilung eine spezielle unendlich teilbare Verteilung ist. Die unendlich teilbaren Verteilungen werden in der Physik auch manchmal als „Lévy-Verteilungen“ bezeichnet.

So gesehen beobachtet man mit der RG, wie die Verteilung der Summe identisch verteilter Zufallsvariablen (mikroskopischer Systeme) gegen eine unendlich teilbare Verteilung konvergiert. Dabei ist die Theorie auf mikroskopischen Skalen gleichzusetzen mit der Verteilung eines einzelnen Summanden; die Summe (nämlich die Zustandsumme) wird schrittweise berechnet. Im makroskopischen Limes findet man eine Grenzverteilung, die entweder auf eine von zwei Weisen trivial (die Bulkphase, also die Phase konstanten Feldes, entspricht einer diskreten Verteilung, der triviale Fixpunkt entspricht der Gaußverteilung; beides führt zu normalem Scaling), oder an einem Fixpunkt endet. Der nichttriviale Fixpunkt entspricht also der Konvergenz gegen eine nichtgaußsche, unendlich oft teilbare Verteilung, und impliziert anomales Scaling.

Man sieht deutlich, mit was für einem überzeugenden Werkzeug man es mit der RG zu tun hat.

Die Mathematik lässt nur Aussagen über die makroskopischen Verteilungen zu; die RG erlaubt es einem, diese Konvergenz im Detail zu beobachten, und auch Aussagen über intermediäre Verteilungen zu machen.

## 2.2 Skaleninvarianz, Multiskalenverhalten und Skalenkovarianz

An dieser Stelle soll es darum gehen, drei Begriffe zu erklären, und deutlich voneinander abzugrenzen: Skaleninvarianz, Multiskalenverhalten, und Skalenkovarianz. RG wurde bisher nur mit der Skaleninvarianz erfolgreich in Verbindung gebracht; das Potential zu einer Übertragung auf Multiskalenverhalten und Skalenkovarianz ist, wie diese Arbeit auch zeigen möchte, aber vorhanden.<sup>27</sup>

### 2.2.1 Skaleninvarianz

Aus der Selbstähnlichkeit eines Systems folgt schon die funktionale Abhängigkeit der makroskopischen Größen. Betrachten wir zum Beispiel den Betrag der Magnetisierung  $m$  eines Ferromagneten in der Nähe der Curie-Temperatur  $T_c$ . Dann kann man, nach Art der Landau-Theorie, die Wirkung in Potenzen der (kleinen) Größe  $T_c - T$  entwickeln. Je näher  $T$  an  $T_c$  liegt, desto näher kommt der RG-Fluss dem Fixpunkt, der den kritischen Punkt beschreibt. Wenn  $T_c - T$  klein genug ist, kann man die RG-Gleichung linearisieren und die Eigenräume bestimmen, man erhält dann letztlich:

$$m \propto (T_c - T)^\lambda. \quad (2.35)$$

Dieses Verhalten wird auch als Skalieren bezeichnet. Die universellen Größen, die man mit Hilfe der RG berechnen kann, sind die Skalierungsexponenten  $\lambda$ .

Dabei findet man zunächst, dass alle beteiligten Größen mit der Skala, auf der die Theorie definiert ist, skalieren; das ist auch leicht einzusehen. Wenn an einem kritischen Punkt das System selbstähnlich ist, dann auch alle messbaren Größen. Diese können dann nur über Potenzgesetze mit der RG-Skala zusammenhängen, weil Potenzgesetze die einzigen exakt selbstähnlichen Funktionen sind.

Nun kann man auf folgenden Gedanken kommen: Wenn das System alle Informationen über die kleinste Längenskala vergisst, aber auch keine andere kennt (weil die Korrelationslänge divergiert), dann kann man das Skalieren einer Funktion, die von Feldwerten an verschiedenen Orten abhängt, durch dimensionelle Analyse ermitteln; die einzige Größe, die dann noch von der Dimension einer Länge ist, ist dann nämlich der Abstand zwischen den Punkten, an denen z.B. die Mehrpunktfunktion betrachtet wird. In der Regel stimmt dies aber nicht. Die Details der kleinsten Längenskala (des Gitters) haben durchaus einen Einfluss auf die Fluktuationen auf eben jener kleinsten Skala. Da aber die Korrelationslänge divergiert, und die Fluktuationen auf allen Längen von der gleichen Form sind, ist es dann doch möglich, dass trotz Mittelung die Details der mikroskopischen Theorie das Skalieren auf den makroskopischen Skalen bestimmen. Dies wird auch als „anomales Skalieren“ bezeichnet.

Befindet sich ein System nicht exakt am kritischen Punkt, dann findet man im Allgemeinen Korrekturen zum reinen Skalieren. Die reine Potenzfunktion wird dann, in erster Näherung durch einen in der Skala linearen Faktor, korrigiert; dies entspricht einer additiven Korrektur des Exponenten durch einen logarithmischen Summanden.

Flüsse in der Nähe von Fixpunkten sind natürlich nicht das typische Verhalten, das die Renormierungsgruppe zu Tage fördert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fluss einen Fixpunkt nahe

<sup>27</sup>Eine gute Gesamtdarstellung über unterschiedliches Skalenverhalten findet man zum Beispiel in [DGS 97].

passiert, ist sehr gering, und als kritisches Phänomen im Allgemeinen auf makroskopischer Ebene direkt erkennbar. In jedem Fall steht die Überlegung an, was für ein Verhalten ein RG-Fluss über einen einzelnen Fixpunkt hinaus zeigen kann, und wie dies im Sinne der Turbulenz zu interpretieren wäre. In der Literatur stößt man auf zwei Begriffe, die ich dazu erläutern möchte: Multiskalenverhalten und Skalenkovarianz.

Die logarithmischen Korrekturen kann man als Übergang von Skaleninvarianz zu Multiskalenverhalten betrachten.

### 2.2.2 Multiskalenverhalten

Es ist an der Zeit, zwei Konzepte, auf welche Weisen die Physik explizit von verschiedenen intermediären Skalen abhängt, begrifflich sauber voneinander zu trennen. Zum einen können alle Skalen zwar a priori gleichberechtigt sein, aber durch den RG-Fluss, so dieser nicht ausschließlich an einem Fixpunkt verharret, voneinander getrennt werden. Zum Beispiel könnte der RG-Fluss bei einer mikroskopischen Theorie starten, dann zunächst an einem Fixpunkt vorbeilaufen (erste intermediäre Skala mit scheinbar selbstähnlicher Physik), dann sich von dem Fixpunkt entfernen und zu einem zweiten laufen (zweite intermediäre Skala). Diese Skalen sind sozusagen der Physik inhärent, sie werden vom Fluss selbst generiert. Etwas völlig anderes erhält man, wenn man schon in der RG-Gleichung Skalen unterschiedlich behandelt. Ein Beispiel wäre ein System mit einer größten Längenskala, bei dem man postuliert, dass der RG-Fluss in der Nähe dieser Grenzskaala unendlich langsam werden muss. Den ersten Fall, den der Physik eigenen Skalen, möchte ich mit „Multiskalenverhalten“ bezeichnen, den der künstlich erzwungenen Skalenabhängigkeit als „Skalenkovarianz“. Damit halte ich mich nicht genau an in der Literatur übliche Definitionen; dort bezeichnet „Multiskalenverhalten“ jede Form eines skalenabhängigen Skalierens, während „Skalenkovarianz“ nur den recht speziellen Fall einer nicht mittransformierten Skala (Grenzskaala) meint. Ich nehme mir diese Freiheit, die Begriffe in meinem Sinne zu gebrauchen, weil aus der Sicht der RG beide Szenarien gut unterschieden werden müssen. Zudem spielt es hier keine besondere Rolle, in welcher Form die Skalenabhängigkeit bei der Skalenkovarianz vorliegt.

In diesem Abschnitt gehe ich kurz auf Multiskalenverhalten, im folgenden auf Skalenkovarianz ein.

Multiskalenverhalten sei eine Art Skalieren, wobei die Skalierungsexponenten selbst von der Skala abhängen, auf der man das System gerade betrachtet. Das bedeutet aber nun gleichzeitig alles wie gar nichts. Stelle man sich eine beliebige Trajektorie im Raum der physikalischen Theorien vor<sup>28</sup>, für den eine beliebige Basis von Operatoren ebenfalls gegeben sei. Dann ist es immer möglich, lokal Skalierungsexponenten, die selbst wieder skalenabhängig sind, zu definieren, die den Fluss genügend kennzeichnen.<sup>29</sup> Insofern ist das praktisch, als es numerisch einfach wird, diesen laufenden Exponenten zu messen, aber was besagt das Konzept des Multiskalenverhaltens dann? Im allgemeinsten Fall kann man nur aussagen, dass die verschiedenen Operatoren mit skalenabhängigen Exponenten skalieren, die zunächst mal nicht miteinander im Zusammenhang stehen:

$$\begin{aligned}\Psi_1(l) &= \Psi_0 l^{\lambda_1(l)}, \\ \Psi_2(l) &= \Psi_0 l^{\lambda_2(l)}, \\ \vdots &= \quad \quad \quad \cdot\end{aligned}\tag{2.36}$$

„Nicht zusammenhängen“ meint dabei, dass die Funktionen  $\lambda$  nicht auf offensichtliche Weise auseinander zu berechnen sind, sie hängen allerdings auf komplizierte Weise sehr wohl, nämlich über die RG-Gleichung, zusammen.

<sup>28</sup>Berechnet innerhalb der klassischen RG-Theorie, versteht sich!

<sup>29</sup>Vorausgesetzt, man lässt komplexe Exponenten zu.

Im Zusammenhang mit der klassischen RG-Theorie wurde auf die RG-Operatoren eingegangen. Deren Konzept ist für den Bereich des Multiskalenverhaltens identisch zu übernehmen, weil ich darunter ein Verhalten verstehe, das die Skalen, auf denen sich die Physik unterscheidet, vom klassischen RG-Fluss selbst erzeugt, die RG-Methodik wird davon nicht berührt. Das macht den fundamentalen Unterschied zur später zu diskutierenden Skalenkovarianz aus.

Es sind durchaus einige Szenarien denkbar, die untersuchenswert sind, und die man unter den Oberbegriff des Multiskalenverhaltens fassen könnte. Hier wird auf zwei ausgesuchte Beispiele eingegangen, um zu zeigen, wie vielfältig die Möglichkeiten sind, und wie schnell ein System kompliziert aussehen kann, auch wenn keine besondere, physikalische, Zusatzannahme einfließt.

### Fall 1: „Schlechte“ Koordinatenwahl

Schon eine ungünstige Wahl der Perspektive, soll heißen: eine ungeschickte Definition der zu betrachtenden Operatoren, kann ein Skalieren so sehr verschleiern, dass man es in der Analyse nicht erkennt. Dafür betrachte man den einfachsten Fall, den eines einzelnen Fixpunktes und eines in dessen Nähe skalierenden Operators  $\Psi$ . Im Folgenden wird angenommen, dass der Fluss sich bereits so nahe am Fixpunkt befindet, dass er linearisiert werden kann; der Fixpunkt sei anziehend, der Wert von  $\Psi$  am Fixpunkt heiße  $\Psi_\infty$ .

Welche Grösse skaliert dann eigentlich? Es ist der Abstand des Operators von seinem Fixpunkt-wert, also

$$\Psi - \Psi_\infty = \tilde{l}^{-\lambda_\infty}. \quad (2.37)$$

Man könnte sagen,  $\Psi$  wird aus der Perspektive von  $\Psi_\infty$  gemessen. Man könnte genauso gut von einer anderen Perspektive aus messen, soll heißen, den zu betrachtenden Operator „ungeschickt“ definieren. Wähle also irgendeinen anderen Wert  $\Psi_0$ , und betrachte

$$\Psi_0 - \Psi,^{30} \quad (2.38)$$

und messe dies in Einheiten von  $\Psi_0 - \Psi_\infty = \Delta\Psi$ . Die Skala, auf der  $\Psi_0$  angenommen wird, heiße  $l_0$ ; die Größe  $\frac{l}{l_0}$  bezeichne ich mit  $\tilde{l}$ . Wir setzen für das Verhalten dieses Operators Multiskalenverhalten an, und sind in der Lage, den Skalierungsexponenten zu berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_0 - \Psi}{\Delta\Psi} &= \frac{\Psi_0 - \Psi_\infty - (\Psi - \Psi_\infty)}{\Delta\Psi} \\ &= -\tilde{l}^{-\lambda_\infty} + 1 \\ &\stackrel{!}{=} \tilde{l}^{h(\tilde{l})}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Beidseitiges Logarithmieren der letzten Gleichung liefert dann direkt:

$$h(\tilde{l}) = \frac{\ln(-\tilde{l}^{-\lambda_\infty} + 1)}{\ln \tilde{l}}. \quad (2.40)$$

Diese Formel ist allerdings mit Vorsicht zu genießen. Insbesondere macht die Formel für  $l = l_0$  keinen Sinn, was auch verständlich ist, denn aus der „ungeschickten“ Perspektive heraus verschwindet der Operator, der aber trotzdem skalieren soll. Dieser Widerspruch kann nur zu einem divergenten Skalierungsexponenten führen, der immerhin im Limes das richtige Skalieren liefert.

---

<sup>30</sup>Der Einfachheit halber setze ich  $\Psi_0 > \Psi > \Psi_\infty$ , denn dies ist der Fall, der mich auch nachher beim Crossover interessieren wird.

**Fall 2: Crossover**

Das sicherlich bekannteste, über einen einzelnen Fixpunkt hinausgehende Szenario, ist das Crossover-Phänomen zwischen zwei Fixpunkten: Ein Fluss startet in der Nähe eines Fixpunkts, und läuft aus dessen Bereich zu einem anderen Fixpunkt.

Der Fluss verbindet also zwei Skalierungsbereiche. Da die Fixpunkte aber an unterschiedlichen Stellen liegen, wird spätestens hier klar, weshalb ich mich im vorhergehenden Punkt mit der „ungeschickten“ Wahl des Koordinatensystems beschäftigt habe - man kann eben nur einen Koordinatenursprung, bzw. eine Definition des skalierenden Operators, vorlegen. Legt man die Perspektive in den ersten, den repulsiven Fixpunkt, so ist diese ungeschickt im Hinblick auf den zweiten, den attraktiven, und anders herum!

Beispielhaft soll gezeigt werden, wie in diesem Fall ein Multiskalenverhalten möglicherweise aussehen könnte. Dazu betrachte man ein sehr spezielles System, in dem die repulsive Eigenrichtung des einen Fixpunkts einer attraktiven Richtung des zweiten Fixpunkts entspricht. Ich definiere den Operator aus der Perspektive des ersten, abstoßenden Fixpunktes. In der Nähe dieses ersten Fixpunktes gilt:

$$\Psi_0 - \Psi(\tilde{l}) = \tilde{l}^{\lambda_0}. \quad (2.41)$$

In der Nähe des anziehenden Fixpunktes gilt nach obiger Rechnung:

$$\Psi_0 - \Psi(\tilde{l}) = \tilde{l}^{h(\tilde{l})}, \quad (2.42)$$

wobei  $h$  durch Gleichung (2.40) gegeben ist.

Wie der Fluss zwischen diesen beiden besonderen Regionen aussieht, ist a priori nicht bekannt, und für einen ganz allgemeinen RG-Fluss in einer beliebig komplizierten Theorie wohl auch nicht aus einfachen Argumenten anzugeben. Als Ansatz schlage ich eine Interpolation zwischen beiden Skalierungsverhalten vor, dazu führe ich eine Funktion  $f(\tilde{l})$  ein mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow 0, \\ f(x) &\rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ich mache also den Ansatz:

$$\Psi_0 - \Psi(\tilde{l}) = \tilde{l}^{f(\tilde{l})\lambda_0 + (1-f(\tilde{l}))h(\tilde{l})}. \quad (2.44)$$

Viel mehr lässt sich darüber nicht aussagen. Den genauen Verlauf von  $f$  muss man durch numerische Integration der RG-Gleichung bestimmen. außerdem sei darauf hingewiesen, dass es sich hier um den denkbar einfachsten Fall handelt, der überhaupt vorliegen kann - die Eigenräume der zwei Fixpunkt müssen ja nicht paarweise identisch sein.

Eine mögliche Realisierung von  $f$  gebe ich dennoch an. Sie ist deswegen zu beachten, weil sie symmetrisch ist unter Umkehr der RG-Zeit. Dies führt direkt auf die Bedingung:

$$f\left(\frac{1}{\tilde{l}}\right) = 1 - f(\tilde{l}). \quad (2.45)$$

Definiere ich weiterhin  $g(t) = -f(e^t) + \frac{1}{2}$ , so gelten als Bestimmungsregeln:

$$g(t) = -g(-t) \quad (2.46)$$

$$g(-\infty) = -\frac{1}{2}. \quad (2.47)$$

Die einfachste Lösung dafür ist

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \arctan(t), \quad (2.48)$$

und daraus ergibt sich dann

$$f(\tilde{l}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan(\ln(\tilde{l})). \quad (2.49)$$

Meine Beschäftigung mit dem Crossover erklärt sich dadurch, dass viele Messungen in der hydrodynamischen Turbulenz auf genau dieses Szenario hindeuten, insbesondere der Übergang von nichttrivialen Lévy-Verteilungen zu Gauß-Glocken in den Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Geschwindigkeitsinkremente.<sup>31</sup>

### 2.2.3 Skalenkovarianz

Ein Artikel von Dubrulle, sowie persönliche Gespräche, die ich auf einem Workshop zur Turbulenz geführt habe, haben mich auf das Prinzip der „Skalenkovarianz“ aufmerksam gemacht.<sup>32</sup> Es soll sich namentlich abheben von der üblichen Skaleninvarianz, die den Ausgangspunkt bildet für alle Fixpunktuntersuchungen der RG. Statt einer wirklichen Invarianz (also einem Skalieren aller messbaren Systemgrößen mit festen Skalierungsexponenten) wird hier zugelassen, dass unterschiedliche Skalen im System auch unterschiedlich behandelt werden. Es ist besonders wichtig, dass hier die Skalen a priori unterschiedlich behandelt werden. Der Name Kovarianz ist insofern gerechtfertigt, als dieser Form des Skalierens eine besondere Skala zugrunde liegen kann, die überhaupt nicht transformiert wird; also eine Transformation ganz ähnlich der Addition von Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie, bei der die Lichtgeschwindigkeit die Skala darstellt, die nicht mittransformiert wird.

Das Problem, auf das hingewiesen werden soll, wird deutlicher, wenn man sich überlegt, was ein Fixpunkt der RG eigentlich bedeutet. Genau genommen setzt man dabei nämlich zweierlei voraus:

- Die Transformation verläuft im Ortsraum auf allen Skalen genau gleich, es gibt also insbesondere keine kleinste, nichttriviale Skala, auf der die Transformation endet.
- Aus dem gleichen Grund gibt es auch keine größte Skala.

Beide Punkte sind Annahmen, die nicht berechtigt sein müssen. Sie bedeuten letztlich, dass man mit einer Kontinuumstheorie arbeitet, die ihren Charakter auch auf kleinsten Längenskalen nicht ändert; und dass es sich um ein unendlich ausgedehntes System handelt. Nun ist es aber seit der K41-Theorie gängige Meinung, dass es tatsächlich eine kleinste Skala (die Kolmogorov-Skala) gibt, unter der sich die Physik grundlegend ändert (insbesondere Reibungseffekte dominierend werden). Und unendlich ausgedehnte Systeme hat man in der Realität nie vorliegen.

Als Beispiel: Befinde sich eine turbulente Flüssigkeit in einer Art Aquarium. Führt man nun einen Schritt der Wilson-RG durch, so skaliert man das ganze System mit denselben Exponenten, es ist gleich auf welcher Skala. Insbesondere also auf der größten Längenskala, sie entspricht der Größe des Aquariums; nach einem RG-Schritt ist das Aquarium kleiner als zuvor. Kann man unter diesem Gesichtspunkt von einem Fixpunkt sprechen? Wiederhole ich den Schritt sehr oft, betrachte ich das System letztlich auf einer Längenskala, die größer ist als das Aquarium - was keinen Sinn macht.

Tatsächlich ist es nicht erzwungen, dass in der RG-Transformation alle Skalen gleich behandelt werden, soll heißen, dass die RG-Zeit und die Skala durch eine einfache Beziehung wie

$$l = l_0 e^t \quad (2.50)$$

zusammenhängen sollen, ist Definitionssache. Diese Wahl ist natürlich dann sinnvoll, wenn man nach exakter Selbstähnlichkeit sucht, wie bei kritischen Phänomenen. Wir sind allerdings frei,

<sup>31</sup>Vergleiche dazu zum Beispiel den Artikel von Friedrich, [Fri 03].

<sup>32</sup>[Dub 94], aber auch [DGS 97]

eine andere Definition zu wählen, in der Art

$$\dot{l} = \tau(l)l, \quad (2.51)$$

unter Wahrung von

$$\Psi_i = \Psi_0 e^{\lambda_i t}.^{33} \quad (2.52)$$

Den Faktor  $\tau(l)$  bezeichne ich der Analogie wegen als Zeitdilatation. Zusammenfassen kann man beide Gleichungen in der Nähe eines Fixpunkts durch Eliminieren von  $t$  zu

$$\Psi_i = \Psi_0 \left( \frac{l}{l_0} \right)^{\lambda_i f(l)}. \quad (2.53)$$

Hier ist auf eines hingewiesen, um den Unterschied zum allgemeinen Multiskalenverhalten zu verdeutlichen: Die Skalenabhängigkeit der Exponenten  $f(l)$  ist für alle Operatoren gleich. Natürlich ändert sich dies auch hier, wenn man von einem einzelnen Fixpunkt abrückt; solche Szenarien fasse ich aber nicht unter den Begriff Skalenvarianz.

Sieht man die Prozedur wie oben beschrieben, ist klar: die RG-Gleichung wird vom Übergang zur Skalenvarianz nicht berührt. Für die Operatoren kann man in gewohnter Weise nach Fixpunkten und anderen Szenarien suchen; nur die Interpretation ist eine andere: Die Skalenabhängigkeit der Exponenten ist zu berechnen, dafür muss man das obige  $\tau(l)$  kennen.

Statt für die Skala im Ortsraum kann man die Zeitdilatation auch für den Cutoff im  $k$ -Raum  $\Lambda$  entwickeln.

Ausgedrückt durch die RG-Operatoren sieht man den Unterschied zur Skalenvarianz ganz deutlich:

$$\frac{1}{\tau(l)} \dot{S} = \mathcal{R}(S). \quad (2.54)$$

Der RG-Operator wird durch den Übergang zur Skalenvarianz nicht verändert, wohl aber die Zeitableitung. Technisch bedeutet dies, dass, wenn man sich nur für Fixpunkte interessiert, man praktisch keinen Unterschied zur klassischen RG-Theorie hat, die Fixpunkte stimmen überein. Die Interpretationen unterscheiden sich allerdings.

---

<sup>33</sup>Man kann genauso gut den Operator nichtkanonisch skalieren lassen, und die Ortsskala wie üblich; im Endeffekt läuft dies auf dasselbe hinaus.

## 2.3 Hydrodynamische Turbulenz

In der theoretischen Physik nimmt der Themenkreis „Turbulente Flüssigkeiten“ eine besondere Stellung ein. Zu kaum einem anderen Thema wurde über die Jahrhunderte hinweg so viel geforscht, ohne dass man bis heute zu einer befriedigenden Theorie, also einer Theorie mit einer gewissen Vorhersagekraft, gelangt wäre. Dabei ist die Phänomenologie jedem bekannt: Turbulente Fluide begegnen uns jederzeit in unserem Alltag, und auch einem Nicht-Physiker ist intuitiv sofort klar, worum es sich dabei handelt: Eine schnell strömende, sich dabei chaotisch verwirbelnde Flüssigkeit; und im Wesentlichen ist dies auch tatsächlich die Definition, mit der wir zu arbeiten haben, wobei die einzelnen Begriffe („schnell strömend“, „Fluid“ etc.) noch genauer festzulegen sein werden.

Das Problem ist also keineswegs ein Neues; aus Zeichnungen ist bekannt, dass sich auch schon da Vinci mit der Turbulenz beschäftigt hat. Es handelt sich zudem um ein Thema, das eindeutig der klassischen Physik zuzurechnen ist - weder mit relativistischen noch mit Quanteneffekten ist a priori zu rechnen, und auch die bestimmende Gleichung ist seit langem bekannt. Was macht aber dann die Schwierigkeit aus?

Eine allgemeine Einführung in die Turbulenz, oder gar eine Übersicht über die in der Forschung untersuchten Ansätze hierzu wiederzugeben, sprengt nicht nur den Rahmen dieser Arbeit, sondern würde auch den Fokus zu weit in Richtung Hydrodynamik verschieben. Die vorliegende Arbeit versteht sich als eine, die sich hauptsächlich mit der RG-Theorie auseinandersetzt; die hydrodynamische Turbulenz wird eher als eine interessante Anwendung gesehen. Daher wird sich dieser Überblick auch auf jene Aspekte beschränken, die direkt mit den untersuchten Fragestellungen zusammenhängen.

### 2.3.1 Grundlegendes

Die Gleichung, die laminare Flüsse sehr gut beschreibt, und von der man annimmt, dass sie auch allen Phänomenen der Turbulenz Rechnung trägt, ist die Navier-Stokes-Gleichung,

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (2.55)$$

Man erhält sie, wenn man für ein infinitesimales Flüssigkeitsvolumen Impulserhaltung ansetzt;  $\vec{v}$  ist dabei das Geschwindigkeitsfeld,  $p$  das Druckfeld und  $\nu$  die (kinematische) Viskosität. Um die Gleichung eindeutig lösen zu können, fehlt noch eine Bestimmung des Drucks aus dem Geschwindigkeitsfeld; dafür setzt man gewöhnlich an, dass die Flüssigkeit inkompressibel sei:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.56)$$

Zwei interessante Terme fallen ins Auge - der nichtlineare Konvektionsterm  $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ , und der Diffusionsterm  $\nu \nabla^2 \vec{v}$ . Je nachdem, wie hoch die typische Strömungsgeschwindigkeit des Fluids ist, konkurrieren diese beiden Terme; sei  $V$  eine solche typische Geschwindigkeit, und  $L$  eine typische Längenskala (zum Beispiel die Abmessung des Experiments), dann gilt größenordnungsmäßig:

$$\frac{(\vec{v} \nabla) \vec{v}}{\nu \nabla^2 \vec{v}} \propto \frac{LV}{\nu} = R, \quad (2.57)$$

$R$  wird als Reynoldszahl bezeichnet. Ein großes  $R$  bedeutet also, dass der nichtlineare Term den Diffusionsterm dominiert; dass nichtlineare Differentialgleichungen aber zu chaotischer Dynamik führen können, ist bekannt. Ist  $R$  jedoch klein, dann dominiert der Diffusionsterm; hohe Geschwindigkeitsdifferenzen nivellieren sich dann durch Dissipation. In diesem Fall ist keine chaotische, sondern laminare Dynamik zu erwarten.

Das Problem, das die theoretische Bearbeitung der Turbulenz so schwierig macht, teilt sich also in drei Aspekte:

- Nichtlinearität: Der Konvektionsterm macht die Gleichung (2.55) zu einer nichtlinearen, partiellen Differentialgleichung. Die mathematische Theorie dazu ist nicht so weit fortgeschritten, dass sie viel Hilfe leisten könnte; sie ist aber im Blickfeld intensiver Forschungen. Zur Zeit ist jedoch noch nicht bewiesen, dass Gleichung (2.55) in drei Dimensionen nicht-triviale Lösungen hat.
- Nichtlokalität: Eliminiert man den Druckterm unter Berücksichtigung der Inkompressibilität, dann sieht man, dass die verbleibende Theorie nichtlokal ist. Dies wird in Kapitel 3 explizit vorgeführt. Nichtlokale Theorien kommen aber in der Physik selten vor, weil man im Allgemeinen Kausalität fordert; und die Methoden der Feldtheorie wie der Hydrodynamik sind nur für lokale Theorien einsetzbar. Es wird später allerdings gezeigt, dass man die Gleichung (2.55) als Bestimmungsgleichung für eine effektive Theorie betrachten kann, wobei die zugrunde liegende Theorie durchaus lokal ist.
- Hohe Zahl an Freiheitsgraden: Direkt einleuchtend ist, dass nur eine statistische Beschreibung der Turbulenz möglich ist. Schon durch Betrachten eines turbulenten Flusses wird einem klar, dass eine Theorie ein solch komplexes „Durcheinander“ nicht im Detail beschreiben können wird; die Zahl der Freiheitsgrade, kann man zeigen, skaliert näherungsweise mit  $R^{\frac{9}{4}}$ . Man möchte also hoffen, dass eine Beschreibung analog der statistischen Theorie der Thermodynamik möglich ist. Darauf soll im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden.

### 2.3.2 Statistische Beschreibung und K41-Theorie

Versucht man sich an einer statistischen Theorie der Turbulenz, stößt man auf ein erstes Problem - die Thermodynamik nach Boltzmann bzw. Gibbs verbindet makroskopisch messbare Größen, wie Druck, Volumen, Temperatur auf statistische Weise mit Ensembles mikroskopischer Systeme. Auch wenn eine exakte Beschreibung der mikroskopischen Physik, wegen zu vieler Freiheitsgrade und der Unkenntnis bezüglich der Anfangs- und Randbedingungen, nicht möglich ist, so lassen sich doch die makroskopischen Größen sehr exakt vorhersagen - der zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitstheorie lässt die Unsicherheiten marginal werden. Die Frage, die zunächst zu klären ist, ist daher: Was sind die makroskopischen, messbaren Größen, die in der Theorie der Turbulenz den zentralen Platz einnehmen können, den beispielsweise Temperatur und Druck in der klassischen Thermodynamik besetzen?

In der ersten ernstzunehmenden Theorie der Turbulenz, die Kolmogorov 1941 präsentierte (K41),<sup>34</sup> wird auf diese Frage eine Antwort vorgeschlagen. Kolmogorov führt die sogenannten Strukturfunktionen ein, die sich aus den räumlichen Korrelationsfunktionen des Geschwindigkeitsfeldes ableiten:

$$S_p(x) := \left\langle [(\vec{v}(\vec{r} + x\vec{l}_0) - \vec{v}(\vec{r})) * \vec{l}_0]^p \right\rangle. \quad (2.58)$$

Gemittelt wird über alle Orte  $\vec{r}$ ,  $\vec{l}_0$  ist ein beliebiger Einheitsvektor. Voraussetzung dafür, dass diese Mittelung Sinn macht, ist die Hypothese, dass Turbulenz statistisch homogen und isotrop ist. Das meint, dass nicht eine einzelne Momentaufnahme, wohl aber ein zeitliches (oder Ensemble-) Mittel der Realisierungen diese Eigenschaften hat. Die Strukturfunktionen bringen die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an einem Ort mit der Geschwindigkeit an einem davon entfernten Punkt in Zusammenhang, es handelt sich also um nichtlokale Größen.

Damit stellt sich die Frage, in welcher Art die Strukturfunktionen vom Abstand abhängen. In K41 wird ein erster Ansatz ohne viel Mathematik, basierend auf ein paar einfachen Grundannahmen, versucht. Man kann den Gedankengang folgendermaßen zusammenfassen:

Neben der Selbstähnlichkeitshypothese postuliert Kolmogorov, dass es auf mikroskopischen Längenskalen eine nicht verschwindende Energiedissipation  $\epsilon$  gibt. Dann gibt es aber für die Turbu-

<sup>34</sup>[Kol 41], eine gute Darstellung findet sich auch in [Fri 95].

lenz drei relevante Größenskalen. Es gibt die makroskopische, sozusagen die „größte“ Längenskala  $L$ , auf der das System mit Energie versorgt wird. Darüber hinaus gibt es die intermediäre Längenskala, auf der die Strukturfunktionen untersucht werden, mit obiger Bezeichnung ist das  $x$ . außerdem lässt sich aus den in der Theorie enthaltenen Konstanten eine mikroskopische Länge zusammensetzen, nämlich

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.59)$$

Mikroskopisch ist diese Längenskala, weil der Fall sehr kleiner, wenn auch endlicher Viskosität interessiert.

Nun argumentiert Komogorov, dass es einen intermediären Bereich, den sog. Inertialbereich, geben sollte, in dem  $x$  weit genug von der größten, wie auch der kleinsten Längenskala entfernt liegt, so dass es von beiden nicht beeinflusst wird. In diesem Bereich sollen die Strukturfunktionen also weder von  $\eta$ , noch von  $L$  abhängen; also ist die einzige Längenskala, von der eine Strukturfunktion noch abhängen kann, der Abstand selbst. Außerdem bleibt noch eine Abhängigkeit von der Energiedissipation  $\epsilon$  möglich. Diese Zutaten reichen für eine dimensionelle Analyse der Strukturfunktionen aus; Kolmogorov leitet daraus das folgende Skalenverhalten ab:

$$S_p(x) = C_p \epsilon^{\frac{p}{3}} x^{\frac{p}{3}}. \quad (2.60)$$

Die Konstanten  $C_p$  sind dimensionslos. Die funktionelle Gestalt in Form von Potenzgesetzen verwundert nicht. Die Aussage, dass eine turbulente Strömung keine intrinsische Längenskala besitzt, ist äquivalent dazu zu sagen, dass das Geschwindigkeitsfeld statistisch selbstähnlich ist. In einem früheren Abschnitt habe wurde aber bereits argumentiert, dass dann nur ein Potenzgesetz übrigbleiben kann, denn Potenzfunktionen sind die einzigen exakt selbstähnlichen Funktionen.

Die Forderung nach Selbstähnlichkeit ist natürlich heuristisch, und von physikalischer Intuition motiviert. Die von K41 vorhergesagten Exponenten können experimentell in den Grenzen der Messgenauigkeit nicht bestätigt werden, insbesondere bei Strukturfunktionen höherer Ordnung ist eine Abweichung vom K41-Verhalten messbar. Allein das Skalieren der Strukturfunktion zweiter Ordnung,

$$S_2(l) \propto l^{\frac{2}{3}}, \quad (2.61)$$

ist allgemein akzeptiert. Aus dem Verhalten von  $S_2$  kann man das Skalieren der Energie im Wellenvektorraum herleiten, es gilt dann:

$$E(k) \propto \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}. \quad (2.62)$$

Die Energie verteilt sich von großen Längenskalen, auf denen das System getrieben wird, hin zu kleineren Skalen (Energiekaskade).

Anschaulich ist dies als „Richardson-Kaskade“ bekannt. Man stellt sich vor, dass das System von außen Energie auf einer großen Längenskala zugeführt bekommt, zum Beispiel durch Rühren. Auf dieser größten Längenskala entstehen Wirbel, die zerfallen; die immer kleineren Wirbel, die sich daraus ergeben, übernehmen dabei die Energie des ursprünglichen Wirbels. So fließt die Energie zu immer kleineren Skalen, bis sie schließlich auf der Dissipationsskala in Wärme übergeht, und so das System sozusagen wieder „verlässt“.

### 2.3.3 Landaus Fußnote

Es ist a priori nicht klar - oder besser, war 1941 nicht klar - wie ein anderes Skalieren als das obige in Abwesenheit einer weiteren Längenskala zustande kommen soll. Aus heutiger Sicht, vor allem vor dem Hintergrund der Theorie kritischer Phänomene, ist uns eine mögliche Erklärung

bekannt; im Abschnitt über die RG bin ich bereits darauf eingegangen, wie anomales Skalieren entstehen kann. Fluktuationen über alle Längenskalen hinweg tragen die Informationen über die Physik auf der mikroskopischen zur makroskopischen Skala. Die RG ist das Mittel der Wahl, um die exakte Form des Skalierens zu bestimmen.

Mit Bezug auf die Turbulenz im Allgemeinen und K41 im Besonderen ist dieser Gedanke zuerst von Landau in seiner mittlerweile berühmt gewordenen Fußnote<sup>35</sup> zur Sprache gebracht worden. Dies entbehrt insofern nicht einer gewissen Komik, als der Einwand, Fluktuationen auf allen Skalen können das normale Scaling verändern, den Standardeinwand gegen die Landau-Theorie der kritischen Phänomene darstellt.

### 2.3.4 Erweiterte Modelle ohne RG

Es handelt sich hier nur um eine kleine Auswahl an Modellen, die für die Turbulenz im Gespräch waren und sind, und ich habe mich hier auch ausschließlich auf feldtheoretische Ansätze beschränkt. Sämtlichen Ansätzen ist gemein, dass keiner zu allgemein akzeptierten Resultaten bezüglich des Skalierens gelangt ist.

Hinge die Viskosität selbst von der betrachteten Längenskala ab, würde dies natürlich zu Korrekturen am K41-Skalieren führen; es ist bis hierhin allerdings unklar, woher die Abhängigkeit stammen soll, und wie man sie berechnet. Ein gängiger Ansatz ist die perturbative Renormierung, die wie die RG aus der Quantenfeldtheorie stammt. Je nachdem, bis zu welcher Ordnung man diese Störungstheorie betreibt, ist es möglich, ein korrigiertes Skalieren zu erhalten, oder eine funktionale Abhängigkeit, die z.B. durch logarithmische Exponenten den Bereich wirklichen Skalieren, also der Selbstähnlichkeit, verlassen. Perturbative Renormierung ist jedoch mit Vorsicht zu behandeln - eine Störungsentwicklung ist immer eine Entwicklung um einen Entwicklungspunkt, in diesem Fall die freie Feldtheorie. Dass sich die tatsächliche Theorie in der Nähe der freien Theorie befindet, ist jedoch eine Annahme, die man zusätzlich benötigt, und die a priori durch nichts gerechtfertigt wird.

Eine weitere Möglichkeit, sich der Turbulenz zu nähern, ist das Aufstellen und Lösen der Dyson-Schwinger-Gleichungen, die ebenfalls zuerst in der Quantenfeldtheorie Verwendung fanden. Im Prinzip ist das Lösen dieser Gleichungen äquivalent zur vollständigen Integration des erzeugenden Funktionals, aber ähnlich undurchführbar. In der Turbulenz führen die Dyson-Schwinger-Gleichungen auf eine Kaskade von Gleichungen für die Mehrpunktfunktionen, die nicht geschlossen ist: Die Gleichung für die Funktion  $n$ -ter Ordnung benötigt bereits die Lösung der Gleichung  $(n+1)$ -ter Ordnung. Diese mit dem Begriff „closure problem“ verbundene Kaskade erhält man sehr leicht und direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung; gängige Ansätze brechen die Kaskade bei einer bestimmten Ordnung ab und approximieren, um so zu einem geschlossen lösbaaren System gekoppelter Differentialgleichungen zu gelangen. Dem Ansatz, sich der Turbulenz über Dyson-Schwinger-Gleichungen zu nähern, ist eine besondere Eleganz eigen, denn der Ansatz als solcher kommt ohne Zusatzannahmen aus. Natürlich liegt eine gewisse Willkür in der Art der Approximation, die man zwangsläufig an irgendeiner Stelle einführen muss, aber ganz ohne dies wird es wohl nicht gehen.

Darüber hinaus gibt es noch sehr viel mehr Ideen, die verfolgt werden, mit unterschiedlichem Erfolg. Diese Methoden reichen von stochastischen Prozessen über Variationen der Fokker-Planck-Gleichung bis zu direkten numerischen Simulationen (DNS) oder der auf konformer Feldtheorie beruhenden Schramm-Loewner-Evolution. Da sich die vorliegende Arbeit als eine feldtheoretische versteht, liegt das Augenmerk hier natürlich hauptsächlich auf verwandten Vorgehensweisen; für die ein oder andere Motivation wird aber auch auf Ergebnisse der anderen Arbeiten noch eingegangen.

---

<sup>35</sup>[LL 91]

### 2.3.5 RG und hydrodynamische Turbulenz - frühere Arbeiten

Seit inzwischen dreißig Jahren ist immer wieder versucht worden, die RG auf die Turbulenz anzuwenden, bisher mit schlechtem Erfolg.<sup>36</sup> Dabei sollte man meinen, dass inzwischen alles versucht wurde, was die RG-Theorie an Methoden zu bieten hat, sowohl von der Seite der exakten, wie auch der feldtheoretischen RG.

Wie auch McComb in seinem Buch<sup>37</sup> erklärt, ist die Situation der RG der der perturbativen Renormierung entgegengesetzt - zwar hat man die Vorgehensweise mathematisch sehr viel besser unter Kontrolle als die divergenten (und bestenfalls asymptotischen) Reihen der Schleifenrenormierung, dafür kann man bisher keine Ergebnisse präsentieren, die den experimentellen entsprechen.

Da sich diese Arbeit an die exakte RG hält, wird sie sich im Bezug auf die feldtheoretische RG auf eine kurze Darstellung der ersten Arbeit, die auf Forster, Nelson und Stephen<sup>38</sup> zurückgeht, beschränken. Diese ist außerdem die erste RG-Behandlung der Turbulenz überhaupt, und die spezifischen Probleme der feldtheoretischen RG werden hier bereits sichtbar.<sup>39</sup>

Die exakte RG nimmt in der Turbulenz ihren Anfang bei der Arbeit von DeDominicis und Martin<sup>40</sup>, die die Forster-Nelson-Stephen-Theorie explizit mit Methoden der Feldtheorie untersucht haben. Weiterentwicklungen gibt es bis in die jüngste Zeit. Neben der feldtheoretischen und der exakten RG haben sich in der Theorie der Turbulenz noch andere Ansätze entwickelt, die sich als RG bezeichnen; namentlich die iterative Mittelung von McComb<sup>41</sup>, sowie die „numerische RG“ von Sire und Chavanis<sup>42</sup>. Der Interessierte sei auch hier auf die entsprechenden Originalarbeiten verwiesen.

#### Forster, Nelson und Stephen

Mit als erste versuchten Forster, Nelson und Stephen 1977 eine RG-Untersuchung der Turbulenz.<sup>43</sup> Die vorliegende Arbeit baut nicht auf ihrer Theorie auf, die sich der feldtheoretischen RG bedient; dennoch geht sie an dieser Stelle kurz auf ihren Gedankengang ein, um auf die typischen Probleme der feldtheoretischen RG, die sich hier zeigen, eingehen zu können.

Zunächst sei festgestellt, dass sich die Navier-Stokes-Gleichung nach Fouriertransformation in der Form

$$(i\omega + \nu_0 k^2)\vec{v} = \vec{f} + \lambda_0 M(\vec{k}) \int d^3j \int d\Omega v(\vec{j}, \Omega) v(\vec{k} - \vec{j}, \omega - \Omega) \quad (2.63)$$

schreiben lässt, mit einem geeigneten Operator  $M^{44}$ , der „nackten“ Viskosität  $\nu_0$  und einer künstlichen, ebenfalls nackten Wechselwirkung  $\lambda_0 = 1$ , in der die Störungsreihe entwickelt wird. Außerdem kommt hier bereits die Zufallskraft  $f$  zum Zuge, die bei der Herleitung des erzeugenden Funktionals ausführlich erklären wird.

<sup>36</sup>Zur Motivation, und insbesondere für einen Vergleich der Turbulenz mit kritischen Phänomenen, vergleiche man den Artikel von Eyink und Goldenfeld, [EG 94].

<sup>37</sup>[McC 90]

<sup>38</sup>[FNS 77]

<sup>39</sup>Für eine ausführliche Darstellung der feldtheoretischen RG in der Turbulenz, insbesondere, was die  $\epsilon$ -Entwicklung angeht, verweise ich auf das Buch von Adzhemyan, Antonov und Vasiliev, [AAV 99].

<sup>40</sup>[DM 79]

<sup>41</sup>[McC 90]

<sup>42</sup>[SC 00]

<sup>43</sup>[FNS 77]

<sup>44</sup>Vergleiche dazu spätere Teile dieser Arbeit, oder McComb, [McC 90].

Sowohl das Geschwindigkeits- wie auch das Zufallskraftfeld werden in ihre Komponenten hoher und niedriger Wellenzahlen, getrennt durch einen Cutoff  $\Lambda e^{-l}$ , zerlegt; die niedrigen Moden lauten dann:

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{k}, \omega) &= \vec{v}^<(\vec{k}, \omega) \quad \text{für } 0 < k < \Lambda e^{-l}, \\ \vec{f}(\vec{k}, \omega) &= \vec{f}^<(\vec{k}, \omega) \quad \text{für } 0 < k < \Lambda e^{-l};\end{aligned}\tag{2.64}$$

und die hohen Moden entsprechend. Die Navier-Stokes-Gleichung zerlegt man in eine Gleichung für die hohen, und eine für die niedrigen Moden, die natürlich gekoppelt sind. Es ist nun möglich, die hohen Moden nach Potenzen der „Wechselwirkung“  $\lambda_0$  zu entwickeln:

$$\vec{v}^>(\vec{k}) = \vec{v}_0^>(\vec{k}) + \lambda_0 \vec{v}_1^>(\vec{k}) + \lambda_0^2 \vec{v}_2^>(\vec{k}) + \dots\tag{2.65}$$

Durch Mittelung über die hohen Moden erhält man so zuerst eine Gleichung für die niedrigen Moden allein, und aus Vergleich mit der Navier-Stokes-Gleichung eine, der laufenden Kopplung aus der feldtheoretischen RG der Quantenfeldtheorie äquivalente, laufende Viskosität  $\nu$  und eine laufende „Wechselwirkung“  $\lambda$ . Die Viskosität nimmt dabei den Stellenwert der Masse ein.

Die gute Nachricht - man findet einen Fixpunkt, den man analysieren kann. Durch Fixpunktanalyse gelangt man an Informationen über Skalierungsexponenten, insbesondere des Energiespektrums.

Der schlechten Nachrichten gibt es gleich mehrere. Zum einen hängen die Vorhersagen der Theorie davon ab, wie man die (unbekannte) Zufallskraft  $f$  modelliert. Nimmt man nämlich an, dass die Korrelation der Zufallskraft algebraisch mit  $k^{-y}$  abfällt, dann skaliert das Energiespektrum mit:

$$E(k) \propto k^{-\frac{5}{3} + 2(d-y)/3}.\tag{2.66}$$

Aus Konsistenzgründen weiß man weiterhin, dass nur Modelle mit  $-1 < y < 3$  zulässig sind; in  $d = 3$  Dimensionen ist also das experimentell bestätigte K41-Energiespektrum,

$$E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}},\tag{2.67}$$

gar nicht realisierbar. Der Fall  $y = d = 3$  entspricht nämlich der Situation, dass ein Operator, den die Forster-Nelson-Stephen-Theorie als irrelevant erkennt, marginal wird, und nicht mehr so einfach vernachlässigt werden kann.

Außerdem ist das Energiespektrum, und damit die Zweipunktfunktion der Geschwindigkeitsverteilung, die einzige messbare Größe, über die die Forster-Nelson-Stephen-Theorie Voraussagen macht. Übrigens eine Eigenschaft, die sie mit allen mir bekannten RG-Ansätzen zur Turbulenz teilt, und das ist natürlich sehr ungünstig, weil über das Skalieren des Energiespektrums zwischen Experiment und der K41-Theorie ohnehin Einigkeit besteht.

Darüber hinaus besteht ein prinzipielles Problem, das aus der perturbativen Renormierung, die der Forster-Nelson-Stephen-Theorie ja zugrunde liegt, erwächst: Die Störungsreihe macht im Prinzip nur Sinn, wenn die Größe, in der entwickelt wird, genügend klein ist. Dafür schränkt die Forster-Nelson-Stephen-Theorie ihren Geltungsbereich auf sehr kleine Wellenzahlen ein und schließt damit Kaskadeneffekte aus. Wie McComb<sup>45</sup> feststellt, behandelt sie also gar nicht im Eigentlichen die Turbulenz, zeigt aber eindrucksvoll, wie die Navier-Stokes-Gleichung sich unter RG-Transformationen zu einer Langevin-Gleichung für  $k \rightarrow 0$  reduziert.

Weiterhin bleibt zu erwähnen, dass spätere Arbeiten durch Umkehren der RG-Prozedur Aussagen über die hohen Wellenzahlen für  $k \rightarrow \infty$  machen. Auch in diesen Theorien sind Aussagen über intermediäre Skalen nicht möglich, und ihr Geltungsbereich ist genauso eingeschränkt auf Situationen, die nicht dem Crossover-Fall, also dem K41-Spektrum, entsprechen.

<sup>45</sup>[McC 90]

Es sei darauf hingewiesen, dass bei Forster, Nelson und Stephen die Inkompressibilität der Flüssigkeit zwar im Operator  $M$  verborgen ist, aber in der weiteren Theorie nicht mehr explizit gefordert wird; auch dieses Problem teilt sie mit den späteren Theorien der feldtheoretischen und exakten RG.

### DeDominicis und Martin

DeDominicis und Martin<sup>46</sup> seien hier, da sie als erste die exakte RG auf die Turbulenz angewendet haben, beispielhaft für eine ganze Reihe von späteren Arbeiten, die in dieser Richtung nach Fortschritten suchten, genannt. Die wesentlichen Züge der exakten RG wurden bereits erklärt, Detailfragen werden in der vorliegenden Arbeit behandelt, so dass es keinen großen Gewinn bringt, viele Arbeiten zur exakten RG näher zu erläutern. Es ist ausreichend, auf ein paar grundsätzliche Probleme, die sich hier und in späteren Veröffentlichungen finden, einzugehen.

Zum einen sei festgestellt, dass die exakten RG es nicht geschafft hat, ihre Vorteile gegenüber der feldtheoretischen RG zur Geltung zu bringen. Dies liegt wohl vor allem an der bislang eher beschränkten Rechenleistung der zur Verfügung stehenden Computer - in den 70er oder 80er Jahren war nicht daran zu denken, viele Operatoren entlang eines RG-Flusses numerisch zu verfolgen. Daher untersuchen die meisten Veröffentlichungen auch nur eine Kopplung (die renormierte Viskosität), unter Berücksichtigung einer Wechselwirkung, genau wie die Forster-Nelson-Stephen-Theorie. Dabei ist es der exakten RG, wie gezeigt werden wird, leicht möglich, eine große Zahl von Kopplungen zu berücksichtigen, und so das Skalieren der Mehrpunktfunktionen auch in höherer Ordnung zu bestimmen; vorausgesetzt natürlich, man hat die entsprechenden elektronischen Hilfsmittel zur Verfügung. Aus gleichem Grunde war es bislang nicht möglich, Flüsse explizit zu verfolgen, also auch nichtuniverselle Größen zu berechnen. Man war also, ähnlich wie die feldtheoretische RG, auf Umgebungen von Fixpunkten eingeschränkt.

Sowohl in der feldtheoretischen, als auch der exakten RG, ist auch die  $\epsilon$ -Entwicklung versucht worden. Wie Adzhemyan, Antonov und Vasiliev<sup>47</sup> ausführen, ist diese in der Anwendung auf die Turbulenz aber fragwürdig, denn die Differenz zwischen der physikalischen Dimension und der Upper Critical Dimension, die man am Schluss der Rechnungen für den „kleinen“ Entwicklungsparameter  $\epsilon$  einzusetzen hat, beträgt 2, ist also nicht klein gegen 1. Damit ist die Gültigkeit der Entwicklung insgesamt in Frage gestellt; es wird bemerkt, dass man die Ergebnisse der Rechnungen bestenfalls als Tendenzen, die auf den Wert  $\epsilon = 2$  interpoliert werden, betrachten darf.

## 2.4 Schlussfolgerung und Zielsetzung dieser Arbeit

Es bleibt festzuhalten, dass zwar viele Arbeiten zur RG, auch angewandt auf die hydrodynamische Turbulenz, vorliegen; deren Potential aber bislang in keinster Weise erschöpft ist. Einige Baustellen sollten im vorangegangenen Text aufgezeigt werden. Diese Arbeit soll zeigen, wie sie behoben, oder umgangen werden können.

### Feldtheoretische oder exakte RG?

Durch die Erläuterungen sollte klar sein, warum ich die exakte eindeutig der feldtheoretischen RG vorziehe. Zum einen ist man um einiges flexibler, bereits in der Herleitung der RG-Gleichungen. Besonders bei der Wahl der Polchinski-RG hat man große Freiheit, was die Wahl des Cutoffs angeht - dazu wird im zugehörigen Kapitel noch einiges gesagt und gezeigt werden.

Weitere Flexibilität gewährt einem die exakte RG in der Approximation der Wirkung. Zwar

---

<sup>46</sup>[DM 79]

<sup>47</sup>[AAV 99]

ist es auch in der feldtheoretischen RG im Prinzip möglich, die Wirkung bis zu beliebig hoher Ordnung zu betrachten; allerdings muss man dann mühselig auch alle Schleifenkorrekturen der Kopplungen bis zu dieser Ordnung ausrechnen. Auf der anderen Seite ist es in der exakten RG, wie auch in dieser Arbeit vorgeführt wird, sehr einfach möglich, die RG-Gleichung in Ratengleichungen umzuwandeln, und so die Berechnung der laufenden Kopplungen zu automatisieren. Als Beispiel: Es ist ohne weiteres möglich, mehrere hundert Kopplungen unter der exakten RG zu beobachten; die Schleifenbeiträge dafür per Hand auszurechnen, wäre ungleich mehr Aufwand. Davon abgesehen verschenkt man nichts, wenn man zur exakten RG greift; alle Approximationen, die in der feldtheoretischen RG anwendbar sind, insbesondere die  $\epsilon$ -Entwicklung, stehen einem auch hier zur Verfügung.

Ein prinzipielles Problem hat die feldtheoretische RG, und das wurde im Bezug auf die Forster-Nelson-Stephen-Theorie bereits angesprochen: Die Schleifenentwicklung der perturbativen Renormierung ist eine Potenzreihenentwicklung in den Kopplungen, und nur dann zulässig, wenn die Wechselwirkungen klein sind im Vergleich zum kinetischen Teil der Wirkung. Gerade dadurch ist die Forster-Nelson-Stephen-Theorie auf Wellenzahlbereiche eingeschränkt, die nicht dem physikalisch interessanten Gebiet entsprechen. Die exakte RG unterliegt diesem Problem nicht; im Prinzip dürfen die Wechselwirkungen hier beliebig groß sein.

### **$\epsilon$ -Entwicklung oder Ableitungsentwicklung?**

Die Probleme der  $\epsilon$ -Entwicklung, wenn man sie auf die Turbulenz anwendet, wurden bereits beschrieben. Es sind in dieser Richtung auch schon genügend Versuche gemacht worden, der Weg ist aus meiner Sicht nicht besonders vielversprechend.

Andererseits weisen Arbeiten, die überhaupt nicht auf RG zurückgreifen, wie zum Beispiel die Arbeiten zu modifizierten Fokker-Planck-Gleichungen, darauf hin, dass eine Entwicklung der Navier-Stokes-Gleichung, insbesondere der nichtlokalen Anteile, nach Potenzen der Ableitungen zu sehr vielversprechenden Ergebnissen führen kann.

Darüber hinaus hat die Ableitungsentwicklung an einfacheren Systemen bereits bewiesen, dass sie durchaus in der Lage ist, Ergebnisse zu reproduzieren, die sich an Genauigkeit mit denen der  $\epsilon$ -Entwicklung messen können. Insbesondere die einfachste Ordnung, die Lokale Potentialapproximation, ist erstaunlich erfolgreich. Es sei allerdings auch nicht verschwiegen, dass das Konvergenzverhalten der Ableitungsentwicklung mit steigender Ordnung bislang im Wesentlichen unverstanden ist; in mancher Hinsicht scheint sich die Qualität der Ergebnisse zu verringern, wenn man die Ordnung der Ableitungen in der Wirkung immer weiter erhöht. Dies ist sicher unbefriedigend und legt eine intensivere Beschäftigung mit dieser Frage nahe.

### **Fixpunkt oder nicht Fixpunkt?**

An dieser Stelle ist es zu früh, eine Zielsetzung vorzugeben, oder gar eine vorläufige Antwort zu geben. Viele experimentelle und theoretische Befunde sprechen in der Tat für das Vorhandensein eines Fixpunkts, der die Skalierungsexponenten der Turbulenz bestimmt, nicht zuletzt deren Universalität. Andere Befunde, und dort vor allem das zu beobachtende Crossover der Verteilungsfunktionen von unendlich teilbaren zu Normalverteilungen, sprechen aus meiner Sicht eher dagegen.

Es ist Ziel dieser Arbeit, zu zeigen, dass man RG-Flüsse auch dann untersuchen kann, wenn man keinen Anhalt für Fixpunkte hat, und diese unter Umständen auch gar nicht existieren. Dies ist nur möglich durch die Unterstützung durch numerische Hilfsmittel, mit denen man die Gleichungen schrittweise integrieren, und die Flüsse dabei im Detail beobachten kann. Ist man dazu in der Lage, so braucht man sich nicht vorschnell auf die Analyse von Fixpunkten und deren

Umgebungen zu versteifen.<sup>48</sup>

### Ziele und Aufbau dieser Arbeit

Durch die obigen Erläuterungen ist der Aufbau und Verlauf der vorliegenden Dissertationsarbeit motiviert. Aufbauend auf die Navier-Stokes-Gleichung wird eine RG-Analyse der Turbulenz versucht. Es wird gezeigt, wie man in der Lage ist, ein erzeugendes Funktional für die Turbulenz aufzustellen, das die Inkompressibilität der Flüssigkeit exakt berücksichtigt. Dieses ist nichtlokal, wird aber in ein lokales umgeformt. Zur Analyse wird die Methodik der exakten RG nach Wilson/Polchinski verwendet; eine geeignete RG-Gleichung wird hergeleitet. Diese wird mit Hilfe einer Ableitungsentwicklung der Wirkung in numerisch handhabbare Ratengleichungen umgewandelt. Zur Integration werden selbstentwickelte C++-Programme verwendet, und mit denen zunächst gezeigt, wie typische Szenarien der RG-Theorien aussehen und wie man sie analysiert. Die Anwendung auf die hydrodynamische Turbulenz wird zeigen, dass die K41-Vorhersage als trivialer Grenzfall in der RG-Analyse enthalten ist. Die Frage nach der Universalität bei verschiedenen Szenarien, zum Beispiel Crossover-Situationen, wird besprochen.

Auf diese Weise ist es möglich zu zeigen, dass die RG noch sehr viel mehr Potential hat, als man bisher mit der Suche nach Fixpunkten und deren Analyse ausgeschöpft hat.

---

<sup>48</sup>Liao und Polonyi argumentieren in ihrem Artikel [LP 95], dass Universalität sehr wohl ausschließlich eine Eigenschaft von Fixpunkten darstellt. Auch aus dieser Sicht ist die Suche nach einem Crossover zwischen zwei Fixpunkten vielversprechend.



## Kapitel 3

# Herleitung der RG-Gleichung

Grundlage jeder RG-Untersuchung muss natürlich eine adäquate RG-Gleichung sein. „Adäquat“ meint hier, dass die Gleichung zur zu untersuchenden Theorie passen muss - die Form der Gleichung ist abhängig von den in der Theorie vorhandenen Feldern und deren kanonischen Dimensionen. Eine besondere Schwierigkeit bieten Theorien mit grassmannwertigen Feldern (wie Fermionen); durch die Vorgehensweise, die nachher gewählt wird, um das erzeugende Funktional für die Turbulenz aufzustellen, werden antikommutierende Felder auch in dieser Arbeit vorkommen. Außerdem kann man eine RG-Gleichung nicht nur für das erzeugende Funktional  $Z$ , sondern, wie im vorhergehenden Kapitel bereits erklärt, auch für die verwandten Funktionale  $W$  und  $\Gamma$  sowie für das effektive Potential aufstellen. Eine Wahlfreiheit besteht weiterhin in der Form des Cutoffs, den man in der exakten RG zwangsläufig einbauen muss, hier unterscheiden sich die Ansätze von Wegner/Houghton<sup>1</sup> (scharfer Cutoff), Wilson<sup>2</sup> (exponentieller Cutoff) und Polchinski<sup>3</sup> (allgemeiner Ansatz ohne Spezifizierung der Cutoff-Form).

Die Wahl und Herleitung der richtigen RG-Gleichung ist also von fundamentaler Bedeutung. Die RG-Gleichung, die hergeleitet wird, ist sehr allgemein, und sollte für eine große Klasse von physikalischen Systemen anwendbar sein; insbesondere trägt sie grassmannwertigen Feldern Rechnung. Darüber hinaus wird die Gleichung für das erzeugende Funktional  $Z$ , oder, abgeleitet, für die Wirkung  $S$  zu formulieren sein. Das Funktional  $Z$  erzeugt die Mehrpunktfunktionen ohne zusätzliche Einschränkungen, also zum Beispiel nicht nur die 1-Teilchen-irreduziblen, und an den ganz allgemeinen Mehrpunktfunktionen ist man im Fall der Turbulenz interessiert.

Was die Wahl des Cutoffs angeht, so ist die Version von Polchinski eindeutig jeder anderen vorzuziehen. Wenn man den Cutoff so allgemein wie nur möglich lässt, so erreicht man damit große Flexibilität, sowohl was die Herleitung einer Gleichung, als auch die spätere Arbeit mit ihr angeht, und man verliert dadurch nichts, denn aus der Polchinski-Gleichung erhält man durch Einschränkung die Wilson-Gleichung, und aus dieser wiederum im Grenzfall die Wegner-Houghton-Gleichung.

Die verwendete Gleichung wird in diesem Kapitel auf zwei verschiedene Weisen hergeleitet. Dies sieht zunächst umständlich aus; man könnte meinen, den ersten Versuch (der für grassmannwertige Felder nicht zum Erfolg führt) brauche man nicht zu dokumentieren. Tatsächlich geht es an dieser Stelle darum zu zeigen, wie stark eingeschränkt man durch die Cutoff-Wahl von Wegner und Houghton bereits bei der Herleitung einer Gleichung ist, und damit die Wahl der Polchinski-Version, die auf den ersten Blick abstrakter und umständlicher wirkt, zu motivieren. Die Gegenüberstellung beider Herleitungsversuche erlaubt es darüber hinaus, die beiden gängigen Herleitungswege zu demonstrieren; der erste Versuch wird mittels einer Gauß-Integration

---

<sup>1</sup>[WH 73]

<sup>2</sup>[Wil 71]

<sup>3</sup>[Pol 83]

in den Feldern unternommen (wie man das im Detail auch im Originalartikel von Wegner und Houghton findet), den zweiten durch Mittelung über eine Feldableitung (zu finden zum Beispiel im Artikel von Ball und Thorne<sup>4</sup>).

### 3.1 Herleitung einer RG-Gleichung, mit Wegner-Houghton-Cutoff

Die Probleme einer Gleichung, die mit scharfem Cutoff arbeitet, werden dann sichtbar, wenn man mit einer Theorie arbeitet, die grassmannwertige Felder enthält, und auch dann nur in ausgewiesenen Spezialfällen. Da es in diesem Abschnitt ausschließlich darum geht, jene Schwierigkeiten zu demonstrieren, beschränke ich mich auf den Fall einer Theorie, die nur ein Grassmannfeld und das dazu konjugierte,  $\psi$  und  $\psi^*$ , enthalten soll. Charakterisiert sei die Theorie durch ihre Wirkung  $S = \int H$ , die Zustandssumme lautet dann

$$Z = \int e^{-S}. \quad (3.1)$$

Das System sei mit einem oberen Cutoff  $\Lambda$  versehen. Ein Teil der Freiheitsgrade, gekennzeichnet durch einen Strich (zum Beispiel am Integral:  $\int'$ ) wird nun ausintegriert. Das Ergebnis des Integrals hängt dann natürlich nicht mehr von den gestrichenen Freiheitsgraden ab, wohl aber noch von allen anderen. Es wird daher als Korrektur zur Wirkung aufgefasst, die als neue, effektive Wirkung mit oberem Cutoff  $\Lambda - \Delta\Lambda$  gesehen wird. Betrachtet wird dann der Grenzübergang  $\Delta\Lambda \rightarrow 0$ , was zu einer Funktionaldifferentialgleichung für die Wirkung führt.

Die Korrektur zur Wirkung durch das Ausintegrieren ist dann von der Form:

$$e^{-\delta S} = \int' D\psi^* D\psi \exp\{-\int' H\}. \quad (3.2)$$

Der Exponent auf der rechten Seite wird nun nach Potenzen der Felder entwickelt. Wie Wegner und Houghton im Appendix A ihres Artikels<sup>5</sup> zeigen, tragen nur Terme bis zur Ordnung 2 in den Feldableitungen bei. Man erhält dann folgendes:

$$e^{-\delta H} = \int' D\psi^* D\psi \exp\{-\int' [\psi^* H_{\psi^*} + \psi H_{\psi} + \psi^* H_{\psi^*\psi}]\}.$$

Hierbei ist folgendes zu beachten:

- Der Übersichtlichkeit halber habe ich die Funktionalableitungen verkürzt geschrieben, zum Beispiel:

$$\frac{\delta H}{\delta \psi} =: H_{\psi}, \quad \frac{\delta}{\delta \psi} \frac{\delta H}{\delta \psi^*} =: H_{\psi^*\psi}. \quad (3.3)$$

Alle Ableitungen sind als linksseitige Ableitungen zu verstehen. Es sei darauf hinweisen, dass im zweiten Term die Reihenfolge der Ableitungen nicht beliebig ist, sondern ein Vertauschen gerade ein Vorzeichen ergibt.

- Die Felder  $\psi$  und  $\psi^*$  sind Grassmann-Felder. Daher sind offensichtlich auch alle ersten Ableitungen nach  $\psi$  oder  $\psi^*$  grassmannwertig, die zweiten Ableitungen hingegen nicht.

---

<sup>4</sup>[BT 94]

<sup>5</sup>[WH 73]

Um die Gauß-Integration durchzuführen, formt man den Integranden des Exponenten folgendermaßen um:

$$\psi^* H_{\psi^*} + \psi H_{\psi} + \psi^* H_{\psi^* \psi} \psi = \left( \psi^* - \frac{H_{\psi}}{H_{\psi^* \psi}} \right) H_{\psi^* \psi} \left( \psi + \frac{H_{\psi^*}}{H_{\psi^* \psi}} \right) + H_{\psi} (H_{\psi^* \psi})^{-1} H_{\psi^*}.$$

Da  $\psi^*$  und  $\psi$  nur formal komplex konjugiert sind, also unabhängige Integrationsvariablen, macht es nichts, dass sie um unterschiedliche Terme verschoben werden. Die Gauß-Integration ist also auch durchführbar; für Grassmann-Felder gilt:

$$\int' D\psi^* D\psi \exp\{-(\dots) H_{\psi^* \psi}(\dots)\} = \det' H_{\psi^* \psi}. \quad (3.4)$$

Ich schreibe die Determinanten nun um mittels der Beziehung:

$$(\det A)^\alpha = \exp\{\alpha \ln \det A\} = \exp\{\alpha \mathbf{Tr} \ln A\}. \quad (3.5)$$

Man erhält damit sofort:

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\mathbf{Tr}' \ln H_{\psi^* \psi} + \int' H_{\psi} (H_{\psi^* \psi})^{-1} H_{\psi^*}, \quad (3.6)$$

mit  $\Lambda = e^{-\tau} \Lambda_0$ .

Dies ist die gesuchte RG-Gleichung, wobei Renormierung und Reskalierung noch fehlen. Man sieht deutlich die Verwandtschaft mit der Wegner-Houghton-Gleichung. Die Vorzeichen bei den Termen, die die Grassmann-Felder enthalten, sind den Vorzeichen der bekannten Wegner-Houghton-Gleichung für skalare Felder gerade entgegengesetzt. Man könnte diesen Misstand beseitigen, indem man

$$\frac{\delta}{\delta \psi^*} \frac{\delta H}{\delta \psi} =: H_{\psi^* \psi} \quad (3.7)$$

definiert. Ich tue dies nicht, um die hergeleitete Formel mit der aus dem nächsten Abschnitt vergleichen zu können, für einen Term der Form  $\int \psi^* P \psi$  in der Wirkung gilt nach der verwendeten Konvention nämlich:

$$H_{\psi^* \psi} = P. \quad (3.8)$$

Alles scheint funktioniert zu haben. Eine RG-Gleichung für grassmannwertige Felder ist hergeleitet, und die Ähnlichkeit mit der Wegner-Houghton-Gleichung (2.20) ist überzeugend.

Das Problem ist, dass ich hier stillschweigend vorausgesetzt habe, dass obige Entwicklung der Wirkung in Potenzen der Felder nicht auch Terme zum Beispiel der Art  $\psi H_{\psi_i \psi_j} \psi$  enthalten kann. So lange man es mit einkomponentigen Grassmannfeldern zu tun hat, ist dies klar; für antikommutierende Felder gilt trivialerweise

$$\psi \psi = 0.$$

Allerdings werde ich bei der Herleitung des Wirkungsfunktionals für die hydrodynamische Turbulenz auf den einen Ansatz zurückgreifen, durch den ich mehrkomponentige Grassmannfelder in die Theorie bekomme. Von vornherein ist dann nicht klar, ob nicht auch ein Term wie  $\psi_i H_{\psi_i \psi_j} \psi_j$  für  $i \neq j$  vorkommen kann. Anders ausgedrückt, die Komponenten der Grassmannfelder könnten beliebig mischen, und müssen nicht in zwei zueinander konjugierte Familien zerfallen, was aber die Voraussetzung für die Gültigkeit von Gleichung (3.4) ist. Für beliebig mischende Grassmannfelder gilt allgemein die Formel:

$$\int \prod_i D\Psi_i \exp\{-\Psi_i H_{ij} \Psi_j\} = \mathbf{Pf}(H), \quad (3.9)$$

wobei für die Pfaffsche  $\mathbf{Pf}$  die Beziehung

$$(\mathbf{Pf})^2 = \det \quad (3.10)$$

gilt. Leider sagt dies nichts über das Vorzeichen der Pfaffschen aus, welches tatsächlich noch von den bis dahin noch nicht ausintegrierten Feldern abhängen kann. Eine einfache Auflösung dieses Problems ist mir nicht bekannt.

Die Pfaffsche ist dabei eher ein Problem, dass durch den Herleitungsweg - die Gauß-Integration - induziert wird, als durch den besonderen Cutoff. Dadurch, dass die Wirkung nach Potenzen der Felder entwickelt wird, hat man keine Freiheit, Teile des quadratischen Terms zum Wechselwirkungsterm zu erklären. Bei der zweiten Herleitung, die sich gleich anschließt, wird das anders sein. Der Nachteil der Wegner-Houghton-Gleichung wird hier ganz deutlich. Der scharfe Cutoff lässt es nicht zu, flexibel mit den in der Theorie vorkommenden Termen zu arbeiten. Insbesondere enthält die Wegner-Houghton-Gleichung den für sie charakteristischen Logarithmus, der in der Praxis sehr unbequem ist. Gängig ist hier die Approximation durch die Schwinger-Eigenzeit-Darstellung.

Im nächsten Abschnitt wird die RG-Gleichung unter Verwendung des Polchinski-Cutoffs hergeleitet. Auch wenn man dort zunächst auf ein ähnliches Problem stoßen kann, ist es dann, wie zu sehen sein wird, möglich, den Cutoff auf Terme zu beschränken, in denen die Grassmannfelder in konjugierte Familien zerfallen. So ist es möglich, die Pfaffsche zu umgehen. Dies liegt nicht zuletzt daran, dass die Herleitung keine explizite Gauß-Integration enthält.

Am Rande sei erwähnt, dass ein vergleichbares Problem mit der Pfaffschen auch bei anderen Methoden der QFT auftritt, beispielsweise bei Monte-Carlo-Rechnungen. Hier ist es dann, weil detaillierte Informationen über die Feldkonfigurationen vorliegen, oft möglich, das Vorzeichen der Pfaffschen anzugeben; dazu setzt man es für eine Konfiguration, und überlegt sich, wann sich das Vorzeichen ändern würde. Dies ist hier nicht möglich, weil über die Realisierung des Feldes nichts bekannt ist, und auch keine Konfigurationen miteinander verglichen werden können.

## 3.2 Herleitung einer RG-Gleichung, mit Polchinski-Cutoff

Nachdem bei der Herleitung der RG-Gleichung unter Verwendung der Methode, wie man sie auch im Artikel von Wegner und Houghton findet, das angesprochene Vorzeichenproblem mit der Pfaffschen aufgetreten ist, wird nun einer alternativen Herleitung gefolgt. Sie findet sich für das skalare Feld im Artikel von Polchinski<sup>6</sup>, eleganter in einem Artikel von Ball und Thorne<sup>7</sup>, außerdem findet man RG-Gleichungen für rein fermionische Theorien in den Artikeln von Comellas, Kubyschin und Moreno<sup>8</sup> sowie in einem von Comellas allein<sup>9</sup>. Der hier zu behandelnde Fall ist eine Theorie für ein N-komponentiges Vektorfeld und zwei M-komponentige Grassmann-Felder, die zu einander konjugiert sind. Anders als in der QFT ist es hier denkbar, dass ein quadratischer Term in der Wirkung sowohl  $\psi_i$  als auch  $\psi_j$  für  $i \neq j$  enthält (das hat ja zur Vorzeichenunstimmigkeit bei der anderen Herleitung geführt). Der Einfachheit halber führe ich die folgende Bezeichnung ein:

$$\{\Psi\} := \{\psi^*, \psi\}. \quad (3.11)$$

Damit lässt sich das erzeugende Funktional in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} \exp\{-W[\{J\}]\} &= \int Dv D\Psi \exp(-S) \\ &= \int Dv D\Psi \exp \left\{ -\frac{1}{2}(v_i, P_{v_{ij}}^{-1} v_j) - \frac{1}{2}(\Psi_\mu, P_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} \Psi_\nu) \right. \\ &\quad \left. -(J_{v_i}, Q_{v_{ij}}^{-1} v_j) - (J_{\Psi_\mu}, Q_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} \Psi_\nu) \right. \\ &\quad \left. -S_{\text{int}}[v, \Psi, \Lambda] - S_0[J, \Lambda] \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hierbei wurde die Wirkung nach dem kinetischen Teil, den Quellenfeldern (die mittels der Matrizen  $Q$  an die Felder koppeln), dem Wechselwirkungsterm und einem feldunabhängigen Term sortiert. Griechische Indizes laufen von 1 bis  $2M$ , arabische von 1 bis  $N$ . Unter dem Skalarprodukt  $(v, P^{-1}v)$  verstehe ich im Ortsraum  $\int d^D x v(x) P^{-1}(\partial_x)v(x)$ , oder im Wellenvektorraum entsprechend dessen Fouriertransformation. Es wird angenommen, dass nur die  $P$  und  $Q$  explizit von der Skala  $\Lambda$  abhängen, d.h. dass alle Größen zunächst noch nicht als dimensionslos angenommen werden.

### Ausintegration eines Teils der Freiheitsgrade

Bezüglich des ersten Schrittes der Renormierungsgruppe, des Ausintegrierens von Freiheitsgraden, sagt man nun, dass das erzeugende Funktional  $Z$ , und somit auch  $W$  unabhängig von der Skala  $\Lambda$  sein muss, also dass gilt:

---

<sup>6</sup>[Pol 83]

<sup>7</sup>[BT 94]

<sup>8</sup>[CKM 97] Zu diesem Artikel ist zu sagen, dass ich die Rechnungen mehrfach überprüft habe, und zu dem Schluss gekommen bin, dass die Gleichungen der genannten Autoren mehrere Fehler enthalten. Herr Dr. Moreno hat mir dies inzwischen bestätigt.

<sup>9</sup>[Com 96]

$$\begin{aligned}
-\dot{W} &:= \Lambda \frac{\partial W}{\partial \Lambda} = \left\langle \frac{1}{2}(v_i, \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} v_j) + \frac{1}{2}(\Psi_\mu, \dot{P}_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} \Psi_\nu) \right. \\
&\quad + (J_{v_i}, \dot{Q}_{v_{ij}}^{-1} v_j) + (J_{\Psi_\mu}, \dot{Q}_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} \Psi_\nu) \\
&\quad \left. + \dot{S}_{\text{int}} + \dot{S}_0 \right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dabei soll die Mittelung so verstanden werden:

$$\langle X \rangle = e^W \int Dv D\Psi X e^{-S}. \tag{3.15}$$

Sollte  $X$  Differentialoperatoren enthalten, so gehe man davon aus, dass diese auf alles wirken, was folgt, insbesondere also auf die Exponentialfunktion. Abweichungen werden durch geschwungene Klammern unter den Termen verdeutlicht; die Ableitung wirke dann nur auf Terme, die innerhalb dieser Klammer stehen.

Um an eine Evolutionsgleichung für  $S_{\text{int}}$  zu gelangen, sind die kinetischen Terme und die Quellterme aus dieser Gleichung zu eliminieren.

Der Ansatz, den man nun wählt (und aus dem man auch die Schwinger-Dyson-Gleichungen herleiten kann), ist, dass das Funktionalintegral über eine Feldableitung verschwindet, wenn man in üblicher Weise einen „Boltzmann-Faktor“ im Integral hat.<sup>10</sup> Begonnen wird mit dem Feld  $v$ , danach wird dann  $\Psi$  diskutiert. Es ist klar, dass man davon ausgehen kann, dass  $P_v$  symmetrisch in den Indizes ist. Aus dem Gesagten folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \frac{\delta}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta v_i} + P_{v_{ij}}^{-1} v_j + Q_{v_{ij}}^{-1} J_{v_j} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\delta}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \left( -\frac{1}{4} P_{v_{ij}}^{-1} v_j - \frac{1}{4} P_{v_{ji}}^{-1} v_j + P_{v_{ij}}^{-1} v_j - \frac{1}{2} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} - \frac{1}{2} Q_{v_{ji}}^{-1} J_{v_j} + Q_{v_{ij}}^{-1} J_{v_j} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \dot{P}_v P_v^{-1} \right) \delta(0) - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \underbrace{\frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i}} + \left( -\frac{1}{2} P_{v_{ji}}^{-1} v_i - \frac{1}{2} P_{v_{ij}}^{-1} v_i - \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} - Q_{v_{ij}}^{-1} J_{v_i} \right) \right. \\
&\quad \left. * \dot{P}_{v_{ji}} \left( \frac{1}{2} P_{v_{ij}}^{-1} v_j - \frac{1}{2} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} - \frac{1}{2} Q_{v_{ji}}^{-1} J_{v_j} + Q_{v_{ij}}^{-1} J_{v_j} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2} \text{Tr} \left( \dot{P}_v P_v^{-1} \right) \delta(0) - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \underbrace{\frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i}} - \frac{1}{2} v_i P_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} P_{v_{lj}}^{-1} v_j - \frac{1}{2} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{il}} P_{v_{lj}}^{-1} v_j \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} J_{v_i} Q_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} P_{v_{lj}}^{-1} v_j + \frac{1}{2} v_i P_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kj}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} + \frac{1}{2} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \\
&\quad + \frac{1}{2} J_{v_i} Q_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kj}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} + \frac{1}{2} v_i P_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} Q_{v_{jl}}^{-1} J_{v_j} - v_i P_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} Q_{v_{lj}}^{-1} J_{v_j} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ik}} Q_{v_{jk}}^{-1} J_{v_j} - \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ik}} Q_{v_{kj}}^{-1} J_{v_j} + \frac{1}{2} J_{v_i} Q_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} Q_{v_{jl}}^{-1} J_{v_j} \\
&\quad \left. - J_{v_i} Q_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} Q_{v_{lj}}^{-1} J_{v_j} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Bis hierher wurden nur die Funktionalableitungen ausgewertet, und von der Symmetrie von  $P$  Gebrauch gemacht. Man mache nun einen Ansatz für  $Q$ ; ich setze:

<sup>10</sup>Bewiesen wird das in allen Ordnungen der Störungstheorie in Faddeev und Slavnov, [FS 80].

$$Q_{v_{ij}} = P_{v_{ij}} q_v, \quad (3.17)$$

wobei  $q$  eine skalare Funktion sei, die erstmal unbestimmt bleibt. Sie hängt, wie später gezeigt wird, mit der Feldnormierung zusammen, spielt aber keine Rolle, da alle Terme, die von  $q$  abhängen, nur zu einer Multiplikation des erzeugenden Funktional mit einer Konstanten führen. Es ist daher klar, dass auch  $Q_v$  symmetrisch in den Indizes ist. Damit, und unter Ausnutzung der Identität

$$0 = \delta_{ij} = (P_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}}) = \dot{P}_{v_{ik}}^{-1} P_{v_{kl}} + P_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}}, \quad (3.18)$$

die es einem erlaubt, den Punkt vom  $P$  zum  $P^{-1}$  zu schieben, ergeben sich große Vereinfachungen. Man findet dann:

$$\begin{aligned} 0 = & \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{Tr} \left( \dot{P}_v P_v^{-1} \right) \delta(0) - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\delta}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i}} + \frac{1}{2} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} v_i \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} v_j - \frac{1}{2} J_{v_i} Q_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} Q_{v_{lj}}^{-1} J_{v_j} - J_{v_i} Q_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} P_{v_{lj}}^{-1} v_j \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Außerdem liefert einem der Ansatz noch die folgenden zwei Identitäten:

$$\left\langle J_{v_i} Q_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} P_{v_{lj}}^{-1} v_j \right\rangle = - \left\langle J_{v_i} \dot{Q}_{v_{ij}}^{-1} v_j \right\rangle, \quad (3.20)$$

$$\left\langle J_{v_i} Q_{v_{ik}}^{-1} \dot{P}_{v_{kl}} Q_{v_{lj}}^{-1} J_{v_j} \right\rangle = - \left\langle q_v^{-2} J_{v_i} \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} J_{v_j} \right\rangle. \quad (3.21)$$

Wenn man diese Gleichungen ausnutzt, und alles über  $p$  integriert, erhält man das erste Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \left( v_i, \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} v_j \right) \right\rangle + \left\langle \left( J_{v_i}, \dot{Q}_{v_{ij}}^{-1} v_j \right) \right\rangle = & - \frac{1}{2} \int_p \left\langle \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} - \underbrace{\frac{\delta}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i}} \right\rangle \\ & - \frac{1}{2} \int_p \left\langle \mathbf{Tr} \left( \dot{P}_v P_v^{-1} \right) \delta(0) + q_v^{-2} J_{v_i} \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} J_{v_j} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Rechnung für die Grassmann-Felder geht im Prinzip ganz genauso, man hat jedoch ein paar Subtilitäten zu beachten. Zum einen gibt natürlich die Vertauschung von zwei Grassmann-Feldern ein Vorzeichen, und man darf nicht vergessen, dass auch die Quellenfelder  $J_\Psi$  grassmannwertig sind. Im Gegensatz zu  $P_v$  muss man  $P_\Psi$  (und damit auch  $Q_\Psi$ ) als antisymmetrisch in den Indizes annehmen. Die gewünschte Beziehung folgt dann aus der Gleichung

$$0 = \left\langle \frac{\delta}{\delta \Psi_\mu} \dot{P}_{\Psi_{\mu\nu}} \left( \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \Psi_\nu} + P_{\Psi_{\nu\mu}}^{-1} \Psi_\mu + Q_{\Psi_{\nu\mu}}^{-1} J_{\Psi_\mu} \right) \right\rangle, \quad (3.23)$$

wobei alle Ableitungen als linksseitige definiert seien. Auch das Ergebnis ähnelt dem für den skalaren Fall, jedoch mit einigen anderen Vorzeichen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \left( \Psi_\mu, \dot{P}_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} \Psi_\nu \right) \right\rangle + \left\langle \left( J_{\Psi_\mu}, \dot{Q}_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} \Psi_\nu \right) \right\rangle = & \frac{1}{2} \int_p \left\langle \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\mu} - \underbrace{\frac{\delta}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\mu}} \right\rangle \\ & + \frac{1}{2} \int_p \left\langle \mathbf{Tr} \left( \dot{P}_\Psi P_\Psi^{-1} \right) \delta(0) - q_\Psi^{-2} J_{\Psi_\mu} \dot{P}_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} J_{\Psi_\nu} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sammelt man die Zwischenergebnisse zusammen, um alle kinetischen und Quellenterme aus Gleichung (3.14) zu entfernen, erhält man folgende RG-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int_p \left\{ \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_p \left\{ \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\mu} - \frac{\delta}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\mu} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_p \left\{ \mathbf{Tr} \left( \dot{P}_v P_v^{-1} \right) \delta(0) - \mathbf{Tr} \left( \dot{P}_\Psi P_\Psi^{-1} \right) \delta(0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Außerdem findet man für den feldunabhängigen Term:

$$S_0[J; \Lambda] = \frac{1}{2} \int^\Lambda d\Lambda \int_p \left\{ q_v^{-2} J_{v_i} \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} J_{v_j} + q_\Psi^{-2} J_{\Psi_\mu} \dot{P}_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} J_{\Psi_\nu} \right\}. \quad (3.26)$$

Insgesamt gilt  $Q = qP$ , sowie  $i, j = 1, \dots, N$ ;  $\mu, \nu = 1, \dots, 2M$ .

Man kehre nun von der Betrachtung von  $S_{\text{int}}$  zur vollen Wirkung  $S = S_{\text{int}} + S_{\text{kin}}$  zurück. Dies geschieht durch drei einfache Beziehungen, die sich leicht nachrechnen lassen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S}{\delta v_j} &= \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} + 2 \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ik}} P_{v_{kj}}^{-1} v_j - v_i \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} v_j, \\ - \frac{\delta}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S}{\delta v_j} &= - \frac{\delta}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} - \frac{\delta}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} P_{v_{jk}}^{-1} v_k \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$= - \frac{\delta}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} - \mathbf{Tr} \left( \dot{P}_v P_v^{-1} \right) \delta(0), \quad (3.28)$$

$$2 \frac{\delta S}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ik}} P_{v_{kj}}^{-1} v_j = 2 \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ik}} P_{v_{kj}}^{-1} v_j - 2 v_i \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} v_j. \quad (3.29)$$

Man kann diese drei Gleichungen zur folgenden zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S}{\delta v_j} - \frac{\delta}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S}{\delta v_j} - 2 \frac{\delta S}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ik}} P_{v_{kj}}^{-1} v_j \\ = \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} - \frac{\delta}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ij}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta v_j} - \mathbf{Tr} \left( \dot{P}_v P_v^{-1} \right) \delta(0) + v_i \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} v_j. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Für die Grassmann-Felder findet man ganz analog:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S}{\delta \Psi_\mu} - \frac{\delta}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S}{\delta \Psi_\mu} - 2 \frac{\delta S}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\lambda}} P_{\Psi_{\lambda\mu}}^{-1} \Psi_\mu \\ = \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\mu} - \frac{\delta}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta \Psi_\mu} - \mathbf{Tr} \left( \dot{P}_\Psi P_\Psi^{-1} \right) \delta(0) - \Psi_\nu \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}}^{-1} \Psi_\mu. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dies setzt man in die Differentialgleichung für  $S_{\text{int}}$  ein und erhält eine vorläufige Renormierungsgruppengleichung:

$$\dot{S} = \dot{S}_{\text{int}} + \frac{1}{2} v_i \dot{P}_{v_{ij}}^{-1} v_j + \frac{1}{2} \Psi_\mu \dot{P}_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} \Psi_\nu \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_p \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_j} \dot{P}_{v_{ji}} \frac{\delta S}{\delta v_i} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_p \left\{ \frac{\delta S}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S}{\delta \Psi_\mu} - \frac{\delta}{\delta \Psi_\nu} \dot{P}_{\Psi_{\nu\mu}} \frac{\delta S}{\delta \Psi_\mu} \right\} \\ &\quad - \int_p \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \dot{P}_{v_{ik}} P_{v_{kj}}^{-1} v_j - \frac{\delta S}{\delta \Psi_\mu} \dot{P}_{\Psi_{\mu\lambda}} P_{\Psi_{\lambda\nu}}^{-1} \Psi_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Vorläufig ist diese Gleichung, weil sowohl der Renormierung, als auch dem Reskalieren noch Rechnung getragen werden muss. An dieser Stelle wurden die Terme, die die Spuren beinhalten, weggelassen. Damit bleibt zwar  $Z$  nicht länger invariant, aber es ändert sich auch nur um eine feldunabhängige Konstante, die aus dem Funktionalintegral herausgezogen werden kann und sich nachher bei der Mittelbildung heraushebt.

Gleichung (3.33) ist in der Tat eine sehr allgemeine Renormierungsgruppengleichung, obwohl es zunächst so aussieht, als sei sie auf den (sehr speziellen Fall) einer Theorie begrenzt, die nur ein  $N$ -komponentiges Vektorfeld und zwei  $M$ -komponentige Grassmann-Felder beinhaltet. Die Begründung ist wie folgt: Angenommen, eine Theorie enthält mehrere nicht-grassmannartige Felder, z.B.  $f, u, \phi, \dots$ , die nicht unbedingt alle dieselbe Anzahl von Komponenten haben müssen. Dann definiert man:

$$v = \{f, u, \phi, \dots\}, \quad (3.34)$$

und die obige Herleitung funktioniert wie gehabt. Ähnliches gilt bei mehreren Grassmann-Feldern. Um die verschiedenen Felder nachher wieder voneinander zu trennen, genügt eine passende Wahl der Tensoren  $P$ .

### Renormierung der Felder

Bisher wurde, von allgemeinen Symmetrieeigenschaften abgesehen, noch nichts über die Funktionen  $P$  ausgesagt. Es ist allgemein üblich, sie in den üblichen Propagator und eine Cutoff-Funktion  $K$  zu unterteilen. Sowohl für den Propagator, als auch den Cutoff, hat man eine große Wahlmöglichkeit, denn im Prinzip kann man jeden Term, der quadratisch in den Feldern ist, wahlweise zum kinetischen Term erklären, oder zu einer Wechselwirkung, so lange nur überhaupt ein kinetischer Term übrig bleibt. Ich werde mich zunächst an die kanonischen Definitionen halten, schon allein um eine gute Vergleichbarkeit mit anderen Arbeiten zu gewährleisten.

Deswegen lege ich für  $P_v^{-1}$  fest:

$$P_{v_{ij}}^{-1} := p^{k_{v_i}} \delta_{ij} K_v^{-1} \left( \frac{p^2}{\Lambda^2}, l \right). \quad (3.35)$$

Für  $P_\Psi^{-1}$  hingegen setze ich:

$$P_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} := p^{k_{\Psi_\mu}} M_{\mu\nu} K_\Psi^{-1} \left( \frac{p^2}{\Lambda^2}, l \right), \quad (3.36)$$

mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

in der jeder Eintrag für eine  $M \times M$ -Matrix steht, und  $l = \frac{\Lambda}{\Lambda_0}$ . Die Matrix  $M$  trennt - im Propagator - die Komponenten der Grassmannfelder in zwei konjugierte Familien. Dies ist möglich, weil

man hier die Wahl hat, welche quadratischen Terme man zum Propagator, und welche man zum Wechselwirkungsterm zählt. So wird also festgelegt, dass alle Terme, die der obigen Konvention nicht genügen, als Wechselwirkungen zu behandeln sind. Dies stellt insofern keine Einschränkung dar, als an keiner Stelle darauf zurückgegriffen wird, dass die Wechselwirkungen klein gegen den Propagator sein sollen, wie man das in der renormierten Störungstheorie der QFT zum Beispiel annimmt.

Mit der Wahl  $k_{v_i} = k_{\Psi_\mu} = 2$  sieht der kinetische Term gerade so aus, wie man das zum Beispiel von der skalaren Theorie gewohnt ist, multipliziert mit dem Cutoff  $K$ :<sup>11</sup>

$$S_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_p v_i p^2 v_i K_{v_i}^{-1} \left( \frac{p^2}{\Lambda^2}, l \right) + \int_p \psi_i^* p^2 \psi_i K_{\Psi_i}^{-1} \left( \frac{p^2}{\Lambda^2}, l \right). \quad (3.38)$$

Die Abhängigkeit des Cutoff von  $l$  stammt daher, dass man als zweiten Schritt, nach dem Ausintegrieren von Freiheitsgraden, die Felder renormieren muss. Dies hat folgenden Grund: Bislang wurde nur gefordert, dass die Statistik, also das erzeugende Funktional als Ganzes, invariant unter RG-Transformationen bleibt. Darüber soll aber auch gelten, dass auch physikalische Größen wie die Gesamtkopplung des Systems an die Quellen für jede einzelne Konfiguration erhalten bleiben. Dies ist ein Punkt, der schon in der grundlegenden Arbeit von Kadanoff<sup>12</sup> berücksichtigt wird, aber seit der Veröffentlichung der Wegner-Houghton-Arbeit<sup>13</sup> in Vergessenheit geriet<sup>14</sup>. Es ist also ein Feld zu renormieren nach

$$v_i = \zeta_{v_i}(l) v_i'. \quad (3.39)$$

Größen mit einem Strich sollen in diesem Abschnitt renormierte Größen bezeichnen, zum Beispiel  $v'$  das renormierte  $v$ -Feld, oder  $S'$  die vollständig renormierte Wirkung.

Dann ist klar, dass der renormierte Propagator von der Gestalt

$$\zeta_{v_i}^{-1} \zeta_{v_j}^{-1} P_{v_{ij}}^{-1} \quad (3.40)$$

ist. Am einfachsten berücksichtigt man die Feldrenormierung, indem man die Felder und den Propagator direkt durch ihre renormierten Pendanten ersetzt; in der Praxis ist also  $\zeta(l)$  zu bestimmen, und direkt einzubauen. Die richtige Form für die Funktionen  $\zeta$  findet man, wenn man sich das Skalierungsverhalten der Zweipunktfunktionen ansieht. Skaliert das Feld nämlich mit der kanonischen Dimension  $D_{v_i}$ , so sieht man direkt:

$$G_{ij}(p, S) = \langle v_i v_j \rangle(p) = \zeta_{v_i} \zeta_{v_j} \langle v_i' v_j' \rangle(p) \quad (3.41)$$

$$= \zeta_{v_i}(l) \zeta_{v_j}(l) l^{-D_{v_i}} l^{-D_{v_j}} \langle v_i' v_j' \rangle(lp) \quad (3.42)$$

$$= \zeta_{v_i}(l) \zeta_{v_j}(l) l^{-D_{v_i}} l^{-D_{v_j}} G_{ij}(lp, S'). \quad (3.43)$$

An einem Fixpunkt gilt  $S = S'$ . Andererseits ist aber das Skalieren der Zweipunktfunktionen bekannt, es gilt nämlich:

$$G_{ij}(p, S) = l^\theta G_{ij}(lp, S) \quad (3.44)$$

mit  $\theta = -D_{v_i} - D_{v_j} - \frac{\eta_{v_i}}{2} - \frac{\eta_{v_j}}{2}$ , also:

$$\zeta_{v_i}(l) = l^{\omega_{v_i}}. \quad (3.45)$$

<sup>11</sup>Von nun an soll gelten, dass Indizes an den grassmannwertigen Größen von 1 bis M laufen, und alle anderen von 1 bis N.

<sup>12</sup>[Kad 66]

<sup>13</sup>[WH 73]

<sup>14</sup>Ich berufe mich hier auf die Artikel von Bervillier, [Ber 04], dessen Darstellung ich auch teilweise übernehme, und Golner, [Gol 00].

Ein direkter Vergleich liefert außerdem  $\omega = -\frac{\eta}{2}$ . Damit ist aber aus dimensionellen Gründen die Abhängigkeit des Cutoffs von  $l$  auch geklärt, es muss gelten:

$$K_{v_i}^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, l\right) = l^{-\omega_{v_i} - \omega_{v_i}} \tilde{K}_v^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right), \quad (3.46)$$

denn der ursprüngliche Propagator lässt sich wie folgt umformen:

$$v' P^{-1} v' = \zeta(l) v' \zeta^{-2}(l) P^{-1} \zeta(l) v' \quad (3.47)$$

$$= v \tilde{P}^{-1} v, \quad (3.48)$$

mit  $\tilde{P}^{-1} = p^k \zeta^{-2}(l) \tilde{K}^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right) = p^k l^\eta \tilde{K}^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)$ . Beim Auswerten der Ableitung in der RG-Gleichung findet man also einen Extraterm, der von der direkten  $l$ -Abhängigkeit kommt. Offensichtlich gilt  $M^{-1} = -M$ , womit man schließlich die Gleichung (3.33) in dimensionslosen Größen auch so schreiben kann:

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \int_p p^{-k_{v_i}} \left( \frac{\eta_{v_i}}{2} \tilde{K}_v(p^2) + p^2 \tilde{K}'_v(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - 2p^{k_{v_i}} \tilde{K}_v^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta v_i} v_i \right\} \\ + 2 \int_p p^{-k_{\Psi_i}} & \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{\Psi_i}}{2} + \frac{\eta_{\Psi_i}^*}{2} \right) \tilde{K}_\Psi(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\Psi(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\delta}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} + p^{k_{\Psi_i}} \tilde{K}_\Psi^{-1}(p^2) \left( \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \psi_i^* + \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \psi_i \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

### Reskalierung aller Größen

Was nun noch fehlt, ist der Reskalierungsschritt. Um das richtige Skalierungsverhalten zu finden, schreibt man zunächst:

$$\Lambda = \Lambda_0 e^{-\tau}. \quad (3.50)$$

Dann ist nämlich  $\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau}$ ,  $\tau$  ist der Parameter, der im einführenden Kapitel bereits als „RG-Zeit“ eingeführt wurde. Weiterhin mache man sich klar, dass dimensionslose Größen, also solche, die durch die korrekte Potenz von  $\Lambda$  geteilt werden, sich beim Reskalieren nicht ändern. Die reskalierten Impulse lauten:

$$p' = \frac{p}{\Lambda}, \quad (3.51)$$

und die renormierten und reskalierten Felder

$$v' = l^{-\omega - D_v} v \Lambda_0^{-\omega - D_v}, \quad (3.52)$$

für die Grassmann-Felder entsprechend. Der erste Faktor  $l^{-\omega - D_v}$  wurde oben bereits hergeleitet, der Faktor  $\Lambda_0^{-\omega - D_v}$  ist eher kosmetisch, und sorgt dafür, dass  $v'$  auch wirklich dimensionslos ist (ohne sonst einen Effekt zu haben). Damit sieht man:

$$\dot{p} = -p, \quad (3.53)$$

$$\dot{v}_i = -(D_{v_i, \text{kan}} - \frac{\eta_{v_i}}{2}) v_i, \quad (3.54)$$

$$\dot{\psi}_i^* = -(D_{\psi_i^*, \text{kan}} - \frac{\eta_{\psi_i^*}}{2}) \psi_i^*, \quad (3.55)$$

$$\dot{\psi}_i = -(D_{\psi_i, \text{kan}} - \frac{\eta_{\psi_i}}{2}) \psi_i. \quad (3.56)$$

Hier wurde zwischen den kanonischen und den anomalen Dimensionen unterschieden. Beide hängen jeweils noch vom Index  $i$  ab.

Dazu ist zu sagen, dass unterschiedliche Feldkomponenten hier durchaus unterschiedliche Dimensionen haben können, schließlich ist  $v$  hier die Bezeichnung für einen Vektor, der aus allen in der Theorie vorkommenden, kommutierenden Feldern besteht. Bezeichnet jetzt das  $i$  nur verschiedene Raumrichtungen, sollten die Dimensionen aus Isotropiegründen sich allerdings nicht unterscheiden. Für die Grassmannfelder ist dies etwas komplizierter. Im Allgemeinen können die kanonischen Dimensionen von  $\psi^*$  und  $\psi$  unterschiedlich sein. In der QFT ist das nicht möglich, weil man mit Wahrscheinlichkeitsamplituden arbeitet und Hermitizität des Hamiltonians fordern muss. Da hier direkt mit Wahrscheinlichkeitsdichten gearbeitet wird, besteht kein Grund, Hermitizität irgendeines Operators zu fordern. Da man aber die Dimensionen von der kanonischen zur anomalen und zurück frei verschieben kann, reicht es häufig aus, wenn man annimmt, die kanonischen Dimensionen von  $\psi^*$  und  $\psi$  seien gleich, aber dafür unterscheiden sich die anomalen Dimensionen (was sie im Allgemeinen auch tun werden).

Nun lassen sich die verschiedenen Beiträge zum Skalierungsverhalten zusammentragen. Eine Integration skaliert offensichtlich wie folgt<sup>15</sup>:

$$\int d^D p \longrightarrow -D \int d^D p. \quad (3.57)$$

Die Anzahl der Integrationen entspricht der Anzahl der Felder in einem Term der Wirkung, vermindert um eins durch die Deltafunktion. Dabei wird davon ausgegangen, dass mit einer lokalen Theorie gearbeitet wird, in der jeder Term der Wirkung eine Delta-Funktion über die  $p$ -Werte enthält, wie zum Beispiel:

$$\int dp_1 dp_2 dp_3 dp_4 \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3) \phi(p_4) \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \quad (3.58)$$

Den lokalen Charakter dieser Terme sieht man direkt nach Fourier-Transformation.

Der Beitrag durch die Integrationen lautet also:

$$\text{Anz. der Integrale} \times S = \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} + \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - 1 \quad (3.59)$$

$$\longrightarrow +DS - D \left( \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} + \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \right). \quad (3.60)$$

Wie jedes einzelne Feld skaliert, wurde bereits erklärt; dieser Beitrag ist wiederum mit der Anzahl der vorhandenen Felder zu multiplizieren:

$$\text{Anz. der Felder} \longrightarrow - \left( D_{v_i, \text{kan}} - \frac{\eta_{v_i}}{2} \right) \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} - \left( D_{\psi_i^*, \text{kan}} - \frac{\eta_{\psi_i^*}}{2} \right) \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} - \left( D_{\psi_i, \text{kan}} - \frac{\eta_{\psi_i}}{2} \right) \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i}. \quad (3.61)$$

Der letzte Beitrag stammt aus der Anzahl der Potenzen von  $p$  in einem Term und berechnet sich so:

$$\text{Anz. der Ableitungen} \longrightarrow - \int_p v_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \int_p \psi_i^* p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} - \int_p \psi_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i}. \quad (3.62)$$

Hierbei bedeuten die Striche an den Ableitungen, dass sie sich nicht auf die in den Termen enthaltenen Delta-Funktionen beziehen.

Damit hat man nun alle Zutaten zusammen, um die vollständige Renormierungsgruppengleichung hinzuschreiben, hierbei ist zu erwähnen, dass man nun auch die Reskalierungsterme in dimensionslosen Größen schreibt:

<sup>15</sup>Der Pfeil sollte dabei gelesen werden als „gibt einen Beitrag von“.

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= \int_p p^{-k_{v_i}} \left( \frac{\eta_{v_i}}{2} \tilde{K}_v(p^2) + p^2 \tilde{K}'_v(p^2) \right) \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - 2p^{k_{v_i}} \tilde{K}_v^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta v_i} v_i \right\} \\
&+ 2 \int_p p^{-k_{\Psi_i}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{\Psi_i}}{2} + \frac{\eta_{\Psi_i}^*}{2} \right) \tilde{K}_\Psi(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\Psi(p^2) \right) \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\delta}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} + p^{k_{\Psi_i}} \tilde{K}_\Psi^{-1}(p^2) \left( \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \psi_i^* + \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \psi_i \right) \right\} \\
&- (D + D_{v_i, \text{kan}} - \frac{\eta_{v_i}}{2}) \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} - (D + D_{\psi_i^*, \text{kan}} - \frac{\eta_{\psi_i^*}}{2}) \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \\
&- (D + D_{\psi_i, \text{kan}} - \frac{\eta_{\psi_i}}{2}) \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \\
&- \int_p v_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \int_p \psi_i^* p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} - \int_p \psi_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \\
&+ DS
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Indizes an Größen, die nicht grassmannartig sind, laufen von 1 bis N, diejenigen Indizes an grassmannartigen Größen laufen von 1 bis M.

Diese Gleichung lässt sich weiter vereinfachen, indem man zulässt, dass die Ableitungen in der vorletzten Zeile doch auf die Delta-Funktionen wirken, was genau den Term  $DS$  ausgleicht. Danach kann man die Terme, die von der Anzahl der Potenzen von  $p$  stammen, partiell integrieren; außerdem ist durch die Form des Propagators  $D_{\text{kan}} = -\frac{D+k}{2}$  bekannt:

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= \int_p p^{-k_{v_i}} \left( \frac{\eta_{v_i}}{2} \tilde{K}_v(p^2) + p^2 \tilde{K}'_v(p^2) \right) \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - 2p^{k_{v_i}} \tilde{K}_v^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta v_i} v_i \right\} \\
&+ 2 \int_p p^{-k_{\Psi_i}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{\Psi_i}}{2} + \frac{\eta_{\Psi_i}^*}{2} \right) \tilde{K}_\Psi(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\Psi(p^2) \right) \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\delta}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} + p^{k_{\Psi_i}} \tilde{K}_\Psi^{-1}(p^2) \left( \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \psi_i^* + \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \psi_i \right) \right\} \\
&+ \frac{D + k_{v_i} + \eta_{v_i}}{2} \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} + \frac{D + k_{\Psi_i} + \eta_{\Psi_i^*}}{2} \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \\
&+ \frac{D + k_{\Psi_i} + \eta_{\Psi_i}}{2} \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \\
&+ \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} v_i \right) \frac{\delta S}{\delta v_i} + \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} \psi_i^* \right) \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} \psi_i \right) \frac{\delta S}{\delta \psi_i}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Diese Gleichung ist noch unhandlich, denkt man an eine Verwendung mit Hilfe der Ableitungsentwicklung. Grund sind die Faktoren  $p^{-k}$ , die man aber los wird, wenn man den Propagator anders definiert, weswegen ich eine Alternative diskutieren möchte:

### 3.2.1 Alternativer Propagator

Ich schlage folgende Propagatoren vor:<sup>16</sup>

$$P_{v_{ij}}^{-1} := m_v^2 \Lambda^{k_{v_i}} \delta_{ij} K_v^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, l\right), \quad (3.35')$$

$$P_{\Psi_{\mu\nu}}^{-1} := m_{\Psi}^2 \Lambda^{k_{\Psi\mu}} M_{\mu\nu} K_{\Psi}^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, l\right). \quad (3.36')$$

Dies ist äquivalent zur Neudefinition der Felder unter Ausnutzung der Reparametrisierungsinvarianz nach

$$vp^{\frac{k}{2}} \rightarrow v, \quad (3.65)$$

unter der Nebenbedingung, dass die Zweipunktfunktion der neuen Felder genauso skaliert wie die der alten Felder. Den kinetischen Term muss man dann folgendermaßen umformen:

$$vp^k v l^{-\eta} K^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, l\right) = v' v' l^k l^{-\eta} \hat{K}^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, l\right), \quad (3.66)$$

mit  $\hat{K}^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}, l\right) = l^{-k} l^{\eta} \tilde{K}^{-1}\left(\frac{p^2}{\Lambda^2}\right)$ . Dies führt direkt zur folgenden RG-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \int_p \left( \frac{-k_{v_i} + \eta_{v_i}}{2} m_v^{-2} \tilde{K}_v(p^2) + p^2 m_v^{-2} \tilde{K}'_v(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - 2m_v^2 \tilde{K}_v^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta v_i} v_i \right\} \\ & + 2 \int_p \left( \frac{1}{2} (-k_{\Psi_i} + \frac{\eta_{\psi_i}}{2} + \frac{\eta_{\psi_i^*}}{2}) m_{\Psi}^{-2} \tilde{K}_{\Psi}(p^2) + p^2 m_{\Psi}^{-2} \tilde{K}'_{\Psi}(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\delta}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} + m_{\Psi}^2 \tilde{K}_{\Psi}^{-1}(p^2) \left( \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \psi_i^* + \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \psi_i \right) \right\} \\ & + \frac{D - k_{v_i} + \eta_{v_i}}{2} \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} + \frac{D - k_{\Psi_i} + \eta_{\psi_i^*}}{2} \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \\ & + \frac{D - k_{\Psi_i} + \eta_{\psi_i}}{2} \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\partial S}{\partial \Lambda} \\ & + \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} v_i \right) \frac{\delta S}{\delta v_i} + \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} \psi_i^* \right) \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} \psi_i \right) \frac{\delta S}{\delta \psi_i}, \end{aligned} \quad (3.64')$$

oder, in der Version von Gleichung (3.63), in der wir sie später bei der Ableitungsentwicklung benötigen werden:

<sup>16</sup>Im Fall der skalaren Theorie entspricht dies, wie später gezeigt wird, wenn man zusätzlich den Cutoff exponentiell wählt, der Definition von Wilson.

$$\begin{aligned}
\dot{S} = & \int_p \left( \frac{-k_{v_i} + \eta_{v_i}}{2} m_v^{-2} \tilde{K}_v(p^2) + p^2 m_v^{-2} \tilde{K}'_v(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - 2m_v^2 \tilde{K}_v^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta v_i} v_i \right\} \\
& + 2 \int_p \left( \frac{1}{2} (-k_{\Psi_i} + \frac{\eta_{\Psi_i}}{2} + \frac{\eta_{\Psi_i^*}}{2}) m_{\Psi}^{-2} \tilde{K}_{\Psi}(p^2) + p^2 m_{\Psi}^{-2} \tilde{K}'_{\Psi}(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\delta}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} + m_{\Psi}^2 \tilde{K}_{\Psi}^{-1}(p^2) \left( \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \psi_i^* + \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \psi_i \right) \right\} \\
& + \frac{-D - k_{v_i} + \eta_{v_i}}{2} \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} + \frac{-D - k_{\Psi_i} + \eta_{\Psi_i^*}}{2} \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \\
& + \frac{-D - k_{\Psi_i} + \eta_{\Psi_i}}{2} \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\partial S}{\partial \Lambda} \\
& - \int_p v_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \int_p \psi_i^* p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} - \int_p \psi_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \\
& + DS.
\end{aligned} \tag{3.63'}$$

Man beachte, dass  $k$  nach wie vor die Potenz der Impulse bei der kanonischen Wahl des Propagators darstellt.

Neu hinzugekommen sind hier die Terme von der Gestalt

$$-\frac{\partial S}{\partial \Lambda}, \tag{3.67}$$

die berücksichtigen, dass es nun Anteile der Wirkung gibt, die explizit von der RG-Skala  $\Lambda$  abhängen, nämlich die kinetischen. Die neuen Terme in der RG-Gleichung sorgen dafür, dass die Zweipunktfunktionen in einfachster Näherung weiterhin kanonisch skalieren.

### 3.2.2 Äquivalenz zur Wilson-Gleichung im Fall der skalaren Theorie

Es soll nun gezeigt werden, dass diese Gleichung, die ja eine Verallgemeinerung der Polchinski-Gleichung darstellt, für die skalare Theorie äquivalent zur Wilson-Gleichung ist. In der skalaren Theorie fallen die Grassmannfelder natürlich weg, und es bleibt nur eine Komponente des Feldes  $v$ , die konventionell  $\phi$  genannt wird. Es ist außerdem

$$D_{\phi, \text{kan}} = - \left( \frac{D+2}{2} \right), \tag{3.68}$$

also  $k_{\phi} = 2$ , und ich setze  $m_v^2 = 1$ . Man findet somit die Gleichung (9) aus dem Artikel von Bervillier<sup>17</sup>:

$$\begin{aligned}
\dot{S} = & \int_p \left( \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) \tilde{K}(p^2) - p^2 \tilde{K}'(p^2) \right) \left\{ \frac{\delta}{\delta \phi} \frac{\delta S}{\delta \phi} - \frac{\delta S}{\delta \phi} \frac{\delta S}{\delta \phi} + 2\tilde{K}^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta \phi} \phi \right\} \\
& + \left( \frac{D-2+\eta}{2} \right) \int_p \phi \frac{\delta S}{\delta \phi} + \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} \phi \right) \frac{\delta S}{\delta \phi}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Wie bereits Bervillier<sup>18</sup> und Golner<sup>19</sup> erklären, erhält man daraus die Wilsonsche Renormierungsgruppengleichung (2.17)

<sup>17</sup>[Ber 04]

<sup>18</sup>[Ber 04]

<sup>19</sup>[Gol 00]

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \int_p (c + 2p^2) \left\{ \frac{\delta}{\delta\phi} \frac{\delta S}{\delta\phi} - \frac{\delta S}{\delta\phi} \frac{\delta S}{\delta\phi} + \frac{\delta S}{\delta\phi} \phi \right\} \\ & + \frac{D}{2} \int_p \phi \frac{\delta S}{\delta\phi} + \int_p p \left( \frac{\partial}{\partial p} \phi \right) \frac{\delta S}{\delta\phi}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

wenn man

$$\tilde{K}(p^2) = e^{-2p^2} \quad (3.71)$$

wählt und außerdem das Feld durch

$$\phi \rightarrow e^{-p^2} \phi \quad (3.72)$$

ersetzt. Dann gilt offensichtlich  $c = 1 - \frac{\eta}{2}$ .

### 3.3 Fazit

Im vorangegangenen Kapitel wurden RG-Gleichungen hergeleitet, die so allgemein formuliert sind, dass sie für eine große Zahl physikalischer Systeme anwendbar sind. Insbesondere sollte gezeigt werden, wie man die Flexibilität, die man bezüglich der Definition von Propagator und Cutoff in der Polchinski-Gleichung besitzt, ausnutzt, um die RG-Gleichung den Anforderungen anzupassen, die spätere Rechnungen, oder zum Beispiel die numerische Implementierung, mit sich bringen.

Ein besonderer Schwerpunkt wurde auf die verschiedenen Anteile der RG-Transformation, also Ausintegration, Renormierung und Reskalierung, gelegt, da diese in der Literatur oft nicht gut getrennt werden. Speziell ist hier der Renormierungsschritt, der laut Bervillier<sup>20</sup> und Golner<sup>21</sup> in den meisten Veröffentlichungen fehlt, explizit berücksichtigt worden.

Ich glaube, es ist durch die Gegenüberstellung beider Herleitungsversuche deutlich zu erkennen, wie sehr die Polchinski-Version der RG-Gleichung derjenigen von Wegner und Houghton einerseits, derjenigen von Wilson auf der anderen Seite, überlegen ist. Die Flexibilität, die man durch die nicht näher spezifizierte Form des Cutoffs gewinnt, zeigt ihren Effekt schon bei der Herleitung einer Gleichung. Doch auch im zentralen Ergebnis dieses Abschnitts, Gleichung (3.63'), ist der Cutoff noch nicht in letzter Konsequenz festgelegt; man hat weiterhin noch Möglichkeiten, ihn den Erfordernissen der noch folgenden Rechnungen anzupassen. Beispielsweise werden in einem späteren Kapitel die Konstanten  $k$  in einer Weise festgelegt, dass das Geschwindigkeitsfeld am trivialen Punkt ein bestimmtes Skalieren aufweist.

Darüber hinaus bleibt festzuhalten, dass man durch die Wahl des Polchinski-Cutoffs auch nichts einbüßt, denn durch spezielle Wahlen kann man immer noch die Wilson-Gleichung reproduzieren, wie oben gezeigt wurde; andererseits ist seit langem bekannt (und wird zum Beispiel von Morris<sup>22</sup> ausgeführt), dass sich die Wegner-Houghton-Gleichung in einem Limes aus der Wilson-Gleichung ergibt. Man kann also zu beiden Gleichungen zurück gelangen, wenn sich das im Laufe einer Rechnung als vorteilhaft erweisen sollte.

---

<sup>20</sup>[Ber 04]

<sup>21</sup>[Gol 00]

<sup>22</sup>[Mor 97]



## Kapitel 4

# Erzeugendes Funktional und Wirkung

Wie bereits im einführenden Kapitel erklärt wurde, setzt die exakte RG immer ein erzeugendes Funktional, beziehungsweise ein Wirkungsfunktional voraus. In diesem Teil werde ich solch ein Funktional herleiten, und zwar auf eine Weise, die sowohl der Navier-Stokes-Gleichung, als auch der Inkompressibilität Rechnung trägt.

Eine Wirkung  $S$ , und damit wegen  $S = \int H$  eine Hamiltonfunktion, für ein dissipatives System aufzustellen, ist im Prinzip kein Problem. Man erhält es als funktionale Fouriertransformierte der Bewegungsgleichung. Dieses Vorgehen wird mit den Namen Martin, Siggia und Rose<sup>1</sup> in Verbindung gebracht. Bemerkenswerterweise findet sich in deren ursprünglichem Artikel keine Erwähnung eines Funktionals, umso mehr aber eine Interpretation des neuen, unphysikalischen Feldes, das durch die Fouriertransformation entsteht: Es handelt sich bei diesem Feld um ein „Buchhaltungsfeld“, das die Dynamik der zu Grunde liegenden Gleichung erzwingt. Zum Beispiel nimmt es die Energie auf, die durch dissipative Effekte ansonsten das System verlassen würde.<sup>2</sup> Diese Interpretation wurde an anderen Stellen dieser Arbeit (insbesondere in Kapitel 4.2) ausgeweitet, um weitere, unphysikalische Felder in die Wirkung einzubauen. Jedes dieser Felder erfüllt Funktionen, die damit dem Geschwindigkeitsfeld als einzigem physikalischen Feld entzogen werden. Beispielsweise werden nichtlokale Wechselwirkungen des Geschwindigkeitsfeldes ersetzt durch zwei lokale Wechselwirkungen des Geschwindigkeitsfeldes mit einem unphysikalischen Feld und einen dazwischen liegenden Propagator. Im Prinzip geschehen diese Schritte also in der Motivation der Martin-Siggia-Rose-Arbeit.

Ein besonderes Problem entsteht dadurch, dass zwei unabhängige Gleichungen die Dynamik der turbulenten Flüssigkeiten bestimmen: Die Navier-Stokes-Gleichung, und die Inkompressibilitätsbedingung. Gerade die Inkompressibilität, die ja eng mit dem Druckterm zusammenhängt, wird in bisherigen Arbeiten stiefmütterlich behandelt. Meist wird sie bis zu einem bestimmten Moment berücksichtigt, findet dann aber keine Aufnahme in das Funktionalintegral; Procaccia<sup>3</sup> zum Beispiel verschiebt die Inkompressibilität in das Integralmaß (das er dann aber als eines annimmt, unter dem die bekannten Regeln der Gauß-Integration weiterhin gelten sollen). Man liest auch die Begründung, man könne die Inkompressibilität weglassen, wenn man eine Zufallskraft einführt, die selbst nur inkompressible Beiträge liefert, denn dann würden (durch die Dissipation) die kompressiblen Teile des Geschwindigkeitsfeldes abklingen, und nur die inkompressiblen getrieben. Das ist soweit wohl richtig, aber das Funktionalintegral umfasst alle Zeiten, also auch

---

<sup>1</sup>[MSR 73]

<sup>2</sup>Eine gute Darstellung, wie Funktionale für stochastische Differentialgleichungen aufzustellen sind, entnehme man dem Artikel [HMPPMV 99].

Außerdem soll hier kurz darauf hingewiesen werden, dass es eine sehr elegante Möglichkeit gibt, Systemen, die über eine Mastergleichung definiert sind, ein erzeugendes Funktional zuzuordnen; man geht dabei den Weg über eine Gleichung vom Typ der Schrödinger-Gleichung, verbunden mit der zweiten Quantisierung. Hierzu sind die Artikel von Doi, [Doi 76], und Peliti, [Pel 85], zu empfehlen.

<sup>3</sup>[LP 94]

die, die unendlich weit zurückliegen; kehrt man das obige Argument um, so wächst der kompressible Anteil des Geschwindigkeitsfeldes in diese Richtung. Auch Modelle, in denen man sowohl den Druckterm, als auch die Inkompressibilität, weglässt (Burger-Turbulenz, auch „Burgulence“ genannt), werden untersucht.

Dabei wird im nächsten Abschnitt gezeigt, wie man einfach und exakt beide Gleichungen berücksichtigen kann. Dieses Vorgehen ist allgemein genug, um im Prinzip immer zu funktionieren, wenn mehrere Gleichungen zusammen ein physikalisches System beschreiben, wenn auch die detaillierte Rechnung unter Umständen sehr viel komplizierter werden kann als im vorliegenden Fall.

## 4.1 Herleitung eines erzeugenden Funktionals

Ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung in drei Dimensionen

$$\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha - \nu \nabla^2 v_\alpha + \frac{1}{\rho} \partial_\alpha p = 0, \quad (4.1)$$

die unter der Nebenbedingung der Inkompressibilität

$$\mathbf{M}(v) := \partial_\alpha v_\alpha = 0 \quad (4.2)$$

zu lösen ist, wird nun zuerst ein erzeugendes Funktional für die Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  hergeleitet, aus dem dann das Wirkungsfunktional abgelesen werden kann. Zunächst wird eine stochastische Kraft  $f_\alpha$  in die Navier-Stokes-Gleichung eingefügt, die modellieren soll, wie durch die großskaligen Bewegungen Energie in die Strömung gelangt. Diese Kraft wird als gaußsches Rauschen modelliert, das in der Zeit  $\delta$ -korreliert ist:

$$\partial_t v_\alpha + v_\beta \partial_\beta v_\alpha - \nu \nabla^2 v_\alpha + \frac{1}{\rho} \partial_\alpha p = f_\alpha. \quad (4.3)$$

Unter Ausnutzung von 4.2 wird nun der Druckterm aus der Navier-Stokes-Gleichung eliminiert. Dafür wird 4.3 von links mit  $\partial_\alpha$  multipliziert. Indizes, über die (nach Einstein-Konvention) summiert wird, werden passend umbenannt, und man erhält:

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = \partial_\beta f_\beta - \partial_\beta (v_\gamma \partial_\gamma v_\beta). \quad (4.4)$$

Dies lässt sich formal lösen:

$$\frac{1}{\rho} p = \frac{\partial_\beta}{\nabla^2} f_\beta - \frac{\partial_\beta}{\nabla^2} (v_\gamma \partial_\gamma v_\beta), \quad (4.5)$$

wobei man den Term  $\frac{1}{\nabla^2}$  zum Beispiel als Fourier-Rücktransformierte von  $\frac{1}{k^2}$  verstehen kann. Im Ortsraum bedeutet dies

$$\frac{1}{\nabla^2} f(x) \propto \int d^D x' \frac{1}{|x - x'|} f(x'). \quad (4.6)$$

Der nichtlokale Charakter der Theorie wird hier direkt sichtbar, das obige Faltungsintegral verknüpft Feldwerte an verschiedenen Orten.

Die Umkehrung des Laplace-Operators ist an dieser Stelle eindeutig. Das sieht man, wenn man sich zwei Lösungen  $p$  und  $p'$  der Gleichung (4.4) ansieht. Diese können sich nur um eine harmonische Funktion  $\tilde{p} = p - p'$  unterscheiden, also

$$\nabla^2 \tilde{p} = 0. \quad (4.7)$$

<sup>4</sup>Alle Größen sind Funktionen von  $\vec{x}$  und  $t$ , was der Einfachheit halber weggelassen wurde.

Aus der Theorie der harmonischen Funktionen ist aber bekannt, dass  $\tilde{p}$  dann entweder mit wachsendem Betrag des Arguments unbeschränkt wächst, was als unphysikalisch zu verwerfen ist - der Druck sollte eher gegen ein konstantes Feld konvergieren. Oder aber  $\tilde{p}$  ist selbst schon konstant. Einen konstanten Druck kann man aber immer zu einem gegebenen Druckfeld hinzuaddieren, ohne die Physik zu verändern, da physikalisch nur Druckdifferenzen von Interesse sind. Also kann man o.B.d.A.  $\tilde{p} = 0$  annehmen.

Multipliziert man obige Gleichung nochmals von links mit  $\partial_\alpha$ , erhält man einen Ausdruck für den Druckterm der Navier-Stokes-Gleichung:

$$\frac{1}{\rho} \partial_\alpha p = \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\nabla^2} f_\beta - \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\nabla^2} (v_\gamma \partial_\gamma v_\beta), \quad (4.8)$$

und Einsetzen in 4.3 liefert:

$$\partial_t v_\alpha - \nu \nabla^2 v_\alpha + \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\nabla^2} \right) (v_\gamma \partial_\gamma v_\beta) = \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\nabla^2} \right) f_\beta. \quad (4.9)$$

Der Ausdruck in Klammern ist der (aus der Elektrodynamik bekannte) Projektor auf die transversalen Feldanteile, und er soll von nun an mit  $P_{\alpha\beta}$  bezeichnet werden. Das erste Zwischenergebnis lautet also:

$$\partial_t v_\alpha - \nu \nabla^2 v_\alpha + P_{\alpha\beta} (v_\gamma \partial_\gamma v_\beta) = P_{\alpha\beta} f_\beta, \quad (4.10)$$

und 4.2 gilt weiterhin als Nebenbedingung.

Das erzeugende Funktional soll in zwei unterschiedlichen Weisen hergeleitet werden, die sich von nun an unterscheiden.

#### 4.1.1 Ansatz 1: Faddeev-Popov-Methode

Wegen der Inkompressibilität ist es erlaubt, vor jeder Geschwindigkeitskomponente in (4.10) einen transversalen Projektor einzufügen, denn:

$$v_\alpha = P_{\alpha\beta} v_\beta + \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\nabla^2} v_\beta = P_{\alpha\beta} v_\beta, \quad (4.11)$$

da schon  $\partial_\beta v_\beta = 0$  gilt. Man erhält also:

$$\mathbf{N}(\vec{v}) := \partial_t P_{\alpha\beta} v_\beta - \nu \nabla^2 P_{\alpha\beta} v_\beta + P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} v_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} v_\epsilon) = P_{\alpha\beta} f_\beta. \quad (4.12)$$

Dabei soll hier und von nun an gelten, dass Ableitungen immer auf die nächste ableitbare Größe wirken sollen. Die Gleichung (4.12) mag auf den ersten Blick schwieriger aussehen als (4.10), aber sie hat einen entscheidenden Vorteil: sie ist invariant unter einer Transformation der Geschwindigkeitsfelder, die in infinitesimaler Form wie folgt aussieht:

$$v_\alpha \rightarrow v_\alpha + \partial_\alpha \Lambda(\vec{x}) =: U(v), \quad (4.13)$$

wobei  $\Lambda$  eine skalare Funktion ist. Die Invarianz von 4.12 ist offensichtlich, da bereits  $P_{\alpha\beta} v_\beta$  invariant ist:

$$\delta_{\alpha\beta} \partial_\beta \Lambda - \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\nabla^2} \partial_\beta \Lambda = \partial_\alpha \Lambda - \partial_\alpha \frac{\nabla^2}{\nabla^2} \Lambda = 0, \quad (4.14)$$

und  $v$  immer nur in Kombinationen mit  $P$  auftritt. Es handelt sich um das Analogon zur Eichinvarianz der Elektrodynamik, weshalb hier auch von Eichinvarianz gesprochen wird. Der entscheidende Unterschied liegt darin, dass (4.2) als Zusatzbedingung gilt, die nicht eichinvariant

ist; man kann (4.2) aber als Eichbedingung interpretieren, wenn das erzeugende Funktional aufgestellt wird. Dazu jedoch später.

Nach diesen Vorüberlegungen kann das erzeugende Funktional nun hergeleitet werden. Wie bereits erwähnt, können multiplikative Konstanten weggelassen werden, wovon nun mehrfach Gebrauch gemacht werden wird. Die Zustandssumme erhalten wir als Summe über die Mittelung der feinkörnigen Verteilung:

$$Z = \int \mathcal{D}v \langle \delta(v - \mathbf{N}^{-1}(Pf)) \rangle. \quad (4.15)$$

Hierzu gibt es zweierlei zu sagen:

- Die spitzen Klammern sind zu verstehen als Mittelung über alle möglichen Realisierungen der Zufallskraft  $f$ .
- Der Operator  $\mathbf{N}$  ist nicht invertierbar.  $\mathbf{N}^{-1}$  ist daher so zu verstehen, daß die Dirac-Funktion einen Beitrag liefert von jedem  $v$ , das die Navier-Stokes-Gleichung löst.

Die Mittelung über alle Zufallskräfte ist einfach einzubauen, wenn man deren gaußsche Verteilung einsetzt:

$$Z = \int \mathcal{D}v \int \mathcal{D}f \delta(v - \mathbf{N}^{-1}(Pf)) p(f) \quad (4.16)$$

$$\propto \int \mathcal{D}v \int \mathcal{D}f \delta(v - \mathbf{N}^{-1}(Pf)) e^{-\frac{1}{2} \int d^3x dt f F f}. \quad (4.17)$$

Als nächstes wird die Dirac-Funktion in eine brauchbare Form gebracht:

$$\Rightarrow Z \propto \int \mathcal{D}v \int \mathcal{D}f \delta(\mathbf{N}(v) - Pf) e^{-\frac{1}{2} \int d^3x dt f F f} \left| \frac{\delta \mathbf{N}_\alpha(v)(x)}{\delta v_\beta(x')} \right|. \quad (4.18)$$

Die Dirac-Funktion erhält man als funktionale Fourier-Transformation:

$$\delta(\mathbf{N}(v) - Pf) \propto \int \mathcal{D}u e^{i \int d^3x dt u(\mathbf{N}(v) - Pf)} \quad (4.19)$$

$$\propto \int \mathcal{D}u e^{i \int d^3x dt [u_\alpha \partial_t P_{\alpha\beta} v_\beta - u_\alpha \nu \nabla^2 P_{\alpha\beta} v_\beta + u_\alpha P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} v_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} v_\epsilon) - u_\alpha P_{\alpha\beta} f_\beta]}. \quad (4.20)$$

Nun zur Determinante. Zunächst berechne man die Funktionalableitung:

$$\frac{\delta \mathbf{N}_\alpha(v)(x)}{\delta v_\beta(y)} = \delta(x-y) \partial_t P_{\alpha\beta} - \nu \delta(x-y) \nabla^2 P_{\alpha\beta} + \delta(x-y) P_{\alpha\theta} (P_{\gamma\beta} \bullet \partial_\gamma P_{\theta\epsilon} v_\epsilon) + \delta(x-y) P_{\alpha\theta} (P_{\gamma\delta} v_\delta \partial_\gamma P_{\theta\beta} \bullet), \quad (4.21)$$

wobei der Punkt als Platzhalter dient; auf eine hier eingesetzte Funktion wirken die direkt voranstehenden Ableitungen (auch die im Projektor verborgenen). Die Determinante berechnet man nun durch Einführen von Grassmann-Variablen; eine Determinante lässt sich dann als Gauß-Integration schreiben:

<sup>5</sup>Hier wird die Notation von L'vov und Procaccia, [LP 94], verwendet.

$$\left| \frac{\delta \mathbf{N}_\alpha(v)(x)}{\delta v_\beta(y)} \right| \propto \int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi e^{-\int d^3x d^3y dt [\psi_\alpha^*(x) \delta(x-y) \partial_t P_{\alpha\beta} \psi_\beta(y) - \psi_\alpha^*(x) \delta(x-y) \nu \nabla^2 \tilde{P}_{\alpha\beta} \psi_\beta(y)]} * \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & * e^{-\int d^3x d^3y dt [\psi_\alpha^*(x) \delta(x-y) P_{\alpha\theta} (P_{\gamma\beta} \psi_\beta(y) \partial_\gamma P_{\theta\epsilon} v_\epsilon(y)) + \psi_\alpha^*(x) \delta(x-y) P_{\alpha\theta} (P_{\gamma\delta} v_\delta(y) \partial_\gamma P_{\theta\beta} \psi_\beta(y))] } \\ & \propto \int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi e^{-\int d^3x dt [\psi_\alpha^* \partial_t P_{\alpha\beta} \psi_\beta - \psi_\alpha^* \nu \nabla^2 \tilde{P}_{\alpha\beta} \psi_\beta]} * \\ & * e^{-\int d^3x dt [\psi_\alpha^* P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} \psi_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} v_\epsilon) + \psi_\alpha^* P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} v_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} \psi_\epsilon)]}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Was die Wahl der Funktion  $F$  angeht, die die Korrelation der stochastischen Kraft angibt, so ist man frei, diese beliebig zu wählen. Nun ist man aber, will man dreidimensionale Turbulenz modellieren, hauptsächlich an einer langreichweitig korrelierten Kraft interessiert, da man eine Energiekaskade von großen zu kleinen Längenskalen erwartet. Ich schlage deshalb vor:

$$F = -\rho^{-1} \nabla^2, \quad (4.24)$$

mit einem positiven Justierungsparameter  $\rho^6$ . Der Parameter  $\rho$  ist dabei nicht mit der Dichte zu verwechseln, die weiter oben genauso benannt wurde; da die Dichte aber aus allen Gleichungen eliminiert ist, und sie für die folgenden Kapitel keine Rolle mehr spielt, ist eine Verwechslung ausgeschlossen.

Damit erhält man die langreichweitige Korrelation:

$$\langle f(x_1, t_1), f(x_2, t_2) \rangle = \rho \delta(t_1 - t_2) * \frac{1}{4\pi} * \frac{1}{|x_1 - x_2|}. \quad (4.25)$$

Der Parameter  $\rho$  ist zum Beispiel zu interpretieren als das Verhältnis einer Korrelationslänge zu einer typischen Länge des Systems.

An diesem Punkt wird es Zeit, sich wieder an die Eichbedingung (4.2) zu erinnern. Dass die Wirkung tatsächlich eichinvariant ist, sieht man leicht ein, wenn man erkennt, dass auch hier  $v$  immer zusammen mit  $P$  auftritt.

Die Prozedur, mit der die Inkompressibilität hier explizit in die Wirkung eingebaut werden soll, ist die, die man als Faddeev-Popov-Ansatz aus der QFT kennt. Es wird sofort der allgemeinere Fall  $\partial_\alpha v_\alpha = c$  betrachtet, der dann anschließend passend eingeschränkt wird. Dazu wird das obige Funktional mit einer 1 multipliziert:

$$1 = \int \mathcal{D}U \delta(U(v) - \mathbf{M}^{-1}(c)) \quad (4.26)$$

$$= \int \mathcal{D}U \delta(\mathbf{M}(U(v)) - c) \left| \frac{\delta \mathbf{M}(U(v))}{\delta U} \right|. \quad (4.27)$$

$U$  ist hier die Eichtransformation, die in Gleichung (4.13) definiert wurde.

Die Determinante ist schnell berechnet, wenn man sie in ein Integral über Grassmann-Felder umwandelt:

---

<sup>6</sup>Das Vorzeichen ist durchaus wichtig, denn wie zum Beispiel im Lehrbuch von Zinn-Justin [Zin 02] ausgeführt wird, muss bei der Gauß-Integration eines Terms der Form

$$\int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-\hat{\phi} A \hat{\phi}}$$

der Operator  $A$  symmetrisch und positiv sein. Dies trifft für  $A = -\nabla^2$  zu, wovon man sich zum Beispiel durch Fourier-Transformation überzeugen kann.

$$\left| \frac{\delta \mathbf{M}(U(v))}{\delta U} \right| = \left| \frac{\delta \mathbf{M}(U(v))}{\delta \Lambda} \right| \quad (4.28)$$

$$= \left| \frac{\delta(\partial_\alpha(v_\alpha + \partial_\alpha \Lambda))}{\delta \Lambda} \right| = |\nabla^2| \quad (4.29)$$

$$= \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* e^{-\int d^3x dt \eta^* \nabla^2 \eta}, \quad (4.30)$$

was wieder eine feldunabhängige Größe ist, die weggelassen wird. Also gilt zunächst:

$$Z \propto \int \mathcal{D}U \mathcal{D}u \mathcal{D}v \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}f e^{-S'[u,v,\psi,\psi^*,f]} \delta(\mathbf{M}(U(v)) - c), \quad (4.31)$$

wobei  $S'$  alle bisher hergeleiteten Terme enthält. Die Integration über  $U$  faktorisiert, denn zu jedem gegebenen  $v$  gibt es genau ein  $U$ , so dass  $U(v)$  die Eichbedingung löst. Sie gibt uns also nichts als eine (unendliche) Konstante, die wiederum weggelassen wird. Der gleicher Trick wird nun in umgekehrter Richtung benutzt: Man multipliziert obiges  $Z$  mit einem Faktor, der nicht von den Feldern abhängt, nämlich mit

$$e^{-\frac{1}{2\kappa} \int d^3x dt c^2}, \quad (4.32)$$

und dann wird zusätzlich über  $c$  integriert. Dies ist möglich, da die vorläufige Wirkung eichinvariant ist, also insbesondere für jedes  $c$  denselben Wert gibt. Man findet:

$$Z \propto \int \mathcal{D}c \mathcal{D}u \mathcal{D}v \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}f e^{-S'[u,v,\psi,\psi^*,f]} \delta(\mathbf{M}(v) - c) e^{-\frac{1}{2\kappa} \int d^3x dt c^2}. \quad (4.33)$$

Die Dirac-Funktion wird durch die Integration über  $c$  ausgewertet, und man findet so:

$$Z \propto \int \mathcal{D}u \mathcal{D}v \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}f e^{-S[u,v,\psi,\psi^*,f]}, \quad (4.34)$$

mit

$$\begin{aligned} S_1[u,v,\psi,\psi^*,f] = & \int d^3x dt \left[ \frac{1}{2\kappa} (\partial_\alpha v_\alpha)^2 - iu_\alpha \partial_t P_{\alpha\beta} v_\beta + iu_\alpha \nu \nabla^2 P_{\alpha\beta} v_\beta - iu_\alpha P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} v_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} v_\epsilon) \right. \\ & + iu_\alpha P_{\alpha\beta} f_\beta + \psi_\alpha^* \partial_t P_{\alpha\beta} \psi_\beta - \psi_\alpha^* \nu \nabla^2 P_{\alpha\beta} \psi_\beta + \psi_\alpha^* P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} \psi_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} v_\epsilon) \\ & \left. + \psi_\alpha^* P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} v_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} \psi_\epsilon) - \frac{1}{2\rho} f_\alpha \nabla^2 f_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Damit  $Z$  wirklich zu einem erzeugenden Funktional der verschiedenen Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung werden kann, müssen noch Quellenfelder eingeführt werden; und vergisst man die unwichtige Proportionalitätskonstante, erhält man endlich das erste zentrale Ergebnis dieses Abschnittes:

$$Z_1[\eta, \tau, \xi, \xi^*, \zeta] = \int \mathcal{D}u \mathcal{D}v \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}f e^{-S_1[u,v,\psi,\psi^*,f] + \int d^3x dt [\eta v + \tau u + \xi \psi + \xi^* \psi^* + \zeta f]}. \quad (4.36)$$

#### 4.1.2 Ansatz 2: Direkte Einbindung der Inkompressibilität mittels $\delta$ -Distribution

In einem zweiten Ansatz, dessen Stärken und Schwächen noch zu diskutieren sein werden, wird die Inkompressibilität direkt über eine Dirac-Funktion erzwungen:

$$\delta(\partial_\alpha v_\alpha) = \int \mathcal{D}\theta e^{i\theta \partial_\alpha v_\alpha}. \quad (4.37)$$

Im Übrigen funktioniert die Herleitung fast genauso wie in Ansatz 1, ist aber einfacher, da hier keine Projektoren stören. Ich gebe sofort das Ergebnis an:

$$\begin{aligned}
S_2[u, v, \psi, \psi^*, f, \theta] = & \int d^3x dt \left[ -iu_\alpha \partial_t v_\alpha + iu_\alpha \nu \nabla^2 v_\alpha - iu_\alpha P_{\alpha\beta} (v_\gamma \partial_\gamma v_\beta) \right. \\
& + iu_\alpha P_{\alpha\beta} f_\beta + \psi_\alpha^* \partial_t \psi_\alpha - \psi_\alpha^* \nu \nabla^2 \psi_\alpha + \psi_\alpha^* P_{\alpha\beta} (\psi_\gamma \partial_\gamma v_\beta) \\
& \left. + \psi_\alpha^* P_{\alpha\beta} (v_\gamma \partial_\gamma \psi_\beta) - \frac{1}{2\rho} f_\alpha \nabla^2 f_\alpha - i\theta \partial_\alpha v_\alpha \right], \quad (4.38)
\end{aligned}$$

mit dem erzeugenden Funktional

$$Z_2[\eta, \tau, \xi, \xi^*, \zeta, \mu] = \int \mathcal{D}u \mathcal{D}v \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}f \mathcal{D}\phi^4 e^{-S_2[u, v, \psi, \psi^*, f] + \int d^3x dt [\eta v + \tau u + \xi \psi + \xi^* \psi^* + \zeta f + \mu \theta]}. \quad (4.39)$$

### 4.1.3 Vergleich der beiden Ansätze zur Einbindung der Inkompressibilität

Auf den ersten Blick sieht zweifelsfrei Ansatz 2 sehr viel eleganter und einfacher aus. Die Herleitung ist weniger aufwändig, und, vor allem, die Theorie enthält keine Grassmannfelder, die sich bei späteren Rechenschritten noch als störend erweisen könnten.

Gerade die Rigidität des Einbindens mittels  $\delta$ -Distribution birgt allerdings auch Risiken. Die Einbindung der Inkompressibilität mit einer  $\delta$ -Distribution geschieht auf allen Skalen gleichzeitig, der Faddeev-Popov-Ansatz nur auf der kleinsten Skala. Die Inkompressibilitätsbedingung verändert sich also unter Ansatz 1, genau wie die Navier-Stokes-Gleichung, unter dem RG-Fluss, während sie bei Ansatz 2 unverändert bleibt. Dadurch, dass der Fluss approximiert werden muss, kann es aber vorkommen, dass die Lösungsmannigfaltigkeit von der Inkompressibilität weggetrieben wird - bei Ansatz 1 ist man dennoch in der Lage, diesem Fluss zu folgen, während die Lösungen unter Ansatz 2 nur noch die trivialen wären.

Es gibt noch eine weitere Gefahr. Es ist denkbar, dass bei einer Theorie mit zwei Gleichungen der Lösungsraum einer Gleichung ein Teilraum des Lösungsraum der anderen Gleichung ist; zum anderen ist möglich, dass der Schnitt beider Lösungsräume leer ist. Diese Gefahr besteht gleichermaßen mit beiden Ansätzen; im Bezug auf die Faddeev-Popov-Prozedur ist sie in der Literatur auch als „Gribov-Problem“ bekannt.

Ob eines dieser Szenarien im Fall der Turbulenz eintritt, ist eine interessante Frage; damit dieser nachgegangen werden kann, gebe ich die nächsten Schritte für jeweils beide Ansätze an. Ein Punkt bezüglich der oben berechneten Funktionaldeterminanten sei hier noch erwähnt: In der Literatur findet man häufig, dass diese weggelassen werden. Dies hat zum Hintergrund, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, stochastische Differentialgleichungen zu betrachten; diese Möglichkeiten unterscheiden sich darin, wie man die Ableitungen diskretisiert. Eine solche Diskretisierung liegt jedem Funktionalintegral zu Grunde. Ohne zu weit ins Detail gehen zu wollen, sei hier nur erwähnt, dass die symmetrische Definition, die nach Stratonovich benannt ist, gewählt wurde. Eine sehr spezielle Wahl ist die Ito-Konvention, an denen die Ableitungen sehr unsymmetrisch gewählt werden; unter dieser Konvention, so kann man zeigen, verschwinden die Funktionaldeterminanten. Allerdings büßt man damit die Reparametrisierungsinvarianz der Felder ein, die in dieser Arbeit später noch benötigt werden, daher wird dieser Weg hier nicht gewählt.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Zu Details und Beweisen sei auf [HMPPMV 99] verwiesen.

## 4.2 Umformen der nichtlokalen Terme

Die Wirkungen, die bislang hergeleitet wurden, sind noch nicht lokal. Dies fällt vielleicht auf den ersten Blick nicht sofort auf, aber wird deutlich, wenn man sich daran erinnert, dass sich in dem Symbol  $P$  der Ausdruck  $\frac{1}{\sqrt{z}}$  verbirgt, der zu verstehen ist als Integration zur Lösung der Poisson-Gleichung. Diese ist aber von der Form wie die Korrelation der stochastischen Kraft, also nichtlokal.

Für eine Entwicklung der Wirkung nach Potenzen der Ableitungen bzw. der Impulse ist es jedoch unumgänglich, mit einer lokalen Wirkung zu arbeiten. Insgesamt werden hier drei verschiedene Modelle betrachtet. Zwei Modelle, 1a und 1b, werden aus der ersten hergeleiteten Wirkung, und Modell 2 aus der zweiten gewonnen. 1a und 1b unterscheiden sich in der Vorgehensweise, mit der die Nichtlokalitäten beseitigt werden: Während bei Modell 1a zuerst einige Felder umdefiniert, und dann zusätzliche Felder eingefügt werden, wird bei Modell 1b auf die Neudefinition der Felder verzichtet. Dies dient vor allem, um zu untersuchen, inwieweit sich das Umdefinieren der Felder auf das Verhalten der Ableitungsentwicklung auswirkt, weil es Terme niedriger Ordnung in den Ableitungen in Terme höherer Ordnung verwandelt. Da das Umdefinieren der Felder im Modell zwei keine Vereinfachung bringt, wird es nicht weiter untersucht.

Die Rechenwege sollen hier exemplarisch am ersten Ansatz vorgeführt werden, die Rechnungen für die anderen beiden Ansätze verlaufen analog. Dazu wird obiges Funktional  $S_1$  nun in zwei Schritten umgeschrieben:

- Umdefinition der Felder: (Nur Modell 1a)

Bis auf  $v$  sind alle Felder in der Wirkung nicht physikalisch, sondern nur mathematisch motiviert. Ich kann sie also umdefinieren, und mache das wie folgt:

$$u \rightarrow \nabla^2 u, \quad (4.40)$$

$$\psi \rightarrow \nabla^2 \psi, \quad (4.41)$$

$$\psi^* \rightarrow \nabla^2 \psi^*. \quad (4.42)$$

Die Transformationsdeterminante ist dabei feldunabhängig, und kann daher weggelassen werden. Nach mehrfacher partieller Integration und der Definition  $Q_{\alpha\beta} := \nabla^2 \delta_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\beta$  lassen sich die Wirkungsterme dann wie folgt schreiben:

$$-iu_\beta \partial_t P_{\alpha\beta} v_\alpha + iu_\beta \nu \nabla^2 P_{\alpha\beta} v_\alpha \rightarrow iu_\beta Q_{\alpha\beta} (\partial_t - \nu \nabla^2) v_\alpha, \quad (4.43)$$

$$\psi_\alpha^* \partial_t P_{\alpha\beta} \psi_\beta \rightarrow \psi_\alpha^* \partial_t \nabla^2 Q_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (4.44)$$

$$-\psi_\alpha^* \nu \nabla^2 P_{\alpha\beta} \psi_\beta \rightarrow -\psi_\alpha^* \nu \nabla^4 Q_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad (4.45)$$

$$iu_\alpha P_{\alpha\beta} f_\beta \rightarrow i f_\alpha Q_{\alpha\beta} u_\beta. \quad (4.46)$$

Die neuen Terme sind nun lokal. Bei den Termen, bei denen der Projektor auf das Feld  $v$  wirkt, ist das jedoch anders. Sie transformieren sich zunächst wie folgt:

$$-iu_\alpha P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} v_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} v_\epsilon) \rightarrow -i Q_{\alpha\beta} u_\alpha \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} v_\epsilon P_{\gamma\delta} v_\delta, \quad (4.47)$$

$$\psi_\alpha^* P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} \psi_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} v_\epsilon) \rightarrow -\partial_\beta Q_{\alpha\gamma} \psi_\alpha^* Q_{\beta\epsilon} \psi_\epsilon P_{\gamma\delta} v_\delta, \quad (4.48)$$

$$\psi_\alpha^* P_{\alpha\beta} (P_{\gamma\delta} v_\delta \partial_\gamma P_{\beta\epsilon} \psi_\epsilon) \rightarrow Q_{\alpha\beta} \psi_\alpha^* \partial_\gamma Q_{\beta\epsilon} \psi_\epsilon P_{\gamma\delta} v_\delta. \quad (4.49)$$

Die verbliebenen Nichtlokalitäten beseitigt man durch das

- Hinzufügen zusätzlicher Felder: Es mag exotisch klingen, durch das Einfügen zunächst abstrakter Felder in die Wirkung einer Theorie zu versuchen, nichtlokale in lokale Wechselwirkungen zu verwandeln. Dies ist jedoch etwas, was in der Physik oft geschieht, auch wenn man es sich vielleicht nicht so explizit vor Augen führt. Als Beispiel diene für einen Moment

die Magnetostatik: Ein Magnet auf der einen Seite eines Tisches lenkt die Kompassnadel auf der anderen Seite des Tisches ab. Eine nichtlokale Wechselwirkung. Um diese theoretisch zu beschreiben, kann man ein zusätzliches Feld einfügen, das Magnetfeld. Dieses soll lokal an den Magneten koppeln, dann (sehr schnell) zur Kompassnadel propagieren und dort wieder lokal an diese koppeln. Auf diese Weise wurde eine nichtlokale Wechselwirkung durch zwei lokale Wechselwirkungen und eine dazwischen liegende Propagation ersetzt. Man kann sagen, dass diese Methode der Ausgangspunkt der Feldtheorie überhaupt ist. Die Vorgehensweise in diesem Abschnitt entspricht genau dieser Philosophie. Angenommen, es gibt einen Term der Form  $K \frac{1}{\nabla^2} L$  in der Wirkung, der zu beseitigen ist. Dazu definiere ich ein neues Feld  $M$ , und benenne weiterhin:

$$\hat{M} := M + \lambda^{-1} \frac{1}{\nabla^2} K + \lambda \frac{1}{2} \frac{1}{\nabla^2} L. \quad (4.50)$$

Dann sieht man aber:

$$-\hat{M} \nabla^2 \hat{M} + K \frac{1}{\nabla^2} L = -M \nabla^2 M - 2\lambda^{-1} MK - \lambda ML - \lambda^{-2} K \frac{1}{\nabla^2} K - \frac{1}{4} \lambda^2 L \frac{1}{\nabla^2} L. \quad (4.51)$$

Der Parameter  $\lambda$  ist nicht dimensionslos, er wurde eingeführt, damit  $M$  eine wohldefinierte Einheit bekommt, genau wie ein wohldefiniertes Skalierungsverhalten. Die Dimension von  $\lambda$  ist später mit Rücksicht auf die Selbstkonsistenz der erhaltenen Wirkung zu bestimmen. Andererseits ist die Integration über  $\hat{M}$  auf der linken Seite nun gaußisch, trägt also nur eine feldunabhängige Konstante zum erzeugenden Funktional bei und darf daher immer in die Wirkung eingefügt werden. Damit lässt sich der zu ersetzende Term durch die rechte Seite obiger Gleichung ersetzen. Man könnte einwenden, dass neue Nichtlokalitäten auftreten, aber sie lassen sich in gleicher Weise beseitigen, z.B. durch

$$-\hat{N} \nabla^2 \hat{N} - \frac{1}{4} \lambda^2 L \frac{1}{\nabla^2} L = -N \nabla^2 N - i\lambda N L, \quad (4.52)$$

mit

$$\hat{N} := N + \frac{1}{2} \lambda i \frac{1}{\nabla^2} L. \quad (4.53)$$

Dabei treten nun keine neuen nichtlokalen Terme auf.

Durch wiederholtes Anwenden dieses Rechenricks findet man, dass die Terme (4.47)-(4.49) auf folgende Art zu ersetzen sind:

$$\begin{aligned} (4.47) - (4.49) \quad \rightarrow \quad & - \sum_{k=1}^6 \phi^k \nabla^2 \phi^k - \lambda_1 \phi^1 \partial_\alpha v_\alpha - i\lambda_1 \phi^3 \partial_\alpha v_\alpha - \lambda_2 \phi^4 \partial_\alpha v_\alpha - i\lambda_2 \phi^6 \partial_\alpha v_\alpha \\ & - 2\lambda_2^{-1} \phi^4 \partial_\alpha C_\alpha - 2i\lambda_2^{-1} \phi^5 \partial_\alpha C_\alpha + B_\alpha (v_\alpha + 2\lambda_1^{-1} \partial_\alpha \phi^1 + 2i\lambda_1^{-1} \partial_\alpha \phi^2) \\ & - iQ_{\alpha\beta} u_\alpha (v_\delta + 2\lambda_1^{-1} \partial_\delta \phi^1 + 2i\lambda_1^{-1} \partial_\delta \phi^2) \partial_\delta v_\beta. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Zur Vereinfachung wurden hierbei zwei Abkürzungen eingeführt:

$$B_\alpha := -\partial_\beta Q_{\delta\alpha} \psi_\delta^* Q_{\beta\epsilon} \psi_\epsilon + Q_{\delta\beta} \psi_\delta^* \partial_\alpha Q_{\beta\epsilon} \psi_\epsilon, \quad (4.55)$$

$$C_\alpha := iQ_{\delta\beta} u_\delta \partial_\beta (v_\alpha + 2\lambda_1^{-1} \partial_\alpha \phi^1 + 2i\lambda_1^{-1} \partial_\alpha \phi^2). \quad (4.56)$$

Es müssen also insgesamt 6 neue, einkomponentige Felder  $\phi^1$  bis  $\phi^6$  eingeführt werden. Führt man die Rechnung auf andere Weise durch, kommt man auch auf andere Zahlen von nötigen Feldern, die auch mehr Komponenten haben können; nach allen Versuchen ist aber die hier vorgestellte Umformung das mir bekannte Optimum.

Bei Ansatz 2 entfällt zwar das Neudefinieren der Felder, also Schritt 1, aber dafür hat man bei Schritt 2 auch neue Grassmann-Felder einzufügen. Insgesamt benötigt man hier drei einkomponentige kommutierende und zwei einkomponentige antikommutierende Felder, um zu einer Theorie zu gelangen, die nur lokale Terme enthält.

### 4.3 Sortieren der Terme nach Ordnung der Ableitung

In der oben hergeleiteten Wirkung werden nun alle Terme ausmultipliziert, und alle vereinfachenden Benennungen rückgängig gemacht. Was übrigbleibt, wird nach Ordnung der Ableitungen sortiert, um die Ableitungsentwicklung vorzubereiten. Die Rechnung ist etwas länglich und führt bei der Problemlösung nicht weiter, also werden nur die Endergebnisse für die verschiedenen Modelle angegeben:

#### 4.3.1 Ansatz 1a

$$S_{1a} = \int d^D x dt \{ O_1[v, \phi^1, \phi^3, \phi^4, \phi^6] + O_2[\phi^1 - \phi^6, f, v, u] + O_3[v, u] \\ + O_4[v, u, \phi^1, \phi^2, \phi^4, \phi^5, \psi^*, \psi] + O_5[v, u, \phi^1, \phi^2, \phi^4, \phi^5, \psi^*, \psi] + O_6[\phi^1, \phi^2, \psi^*, \psi] \},$$

mit:

$$O_1 = -\lambda_1 \phi^1 \partial_\alpha v_\alpha - i\lambda_1 \phi^3 \partial_\alpha v_\alpha - \lambda_2 \phi^4 \partial_\alpha v_\alpha - i\lambda_2 \phi^6 \partial_\alpha v_\alpha,$$

$$O_2 = -\sum_{k=1}^6 \phi^k \nabla^2 \phi^k - \frac{\rho^{-1}}{2} f_\alpha \nabla^2 f_\alpha - \frac{1}{2\kappa} v_\alpha \partial_\alpha \partial_\beta v_\beta - i f_\alpha \partial_\alpha \partial_\beta u_\beta + i f_\alpha \nabla^2 u_\alpha \\ - i u_\alpha \nabla^2 \partial_t v_\alpha + i u_\alpha \partial_\alpha \partial_\beta \partial_t v_\beta,$$

$$O_3 = -i \nabla^2 u_\alpha v_\beta \partial_\beta v_\alpha + i \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha v_\delta \partial_\delta v_\beta,$$

$$O_4 = i u_\alpha \nabla^4 v v_\alpha - i u_\alpha \partial_\beta \partial_\alpha \nabla^2 v v_\beta + \psi_\alpha^* \nabla^4 \partial_t \psi_\alpha - \psi_\alpha^* \nabla^2 \partial_\alpha \partial_\beta \partial_t \psi_\beta \\ + 2i \lambda_1^{-1} \nabla^2 u_\alpha \partial_\beta \phi^1 \partial_\beta v_\alpha - 2\lambda_1^{-1} \nabla^2 u_\alpha \partial_\beta \phi^2 \partial_\beta v_\alpha + 2i \lambda_1^{-1} \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha \partial_\delta \phi^1 \partial_\delta v_\beta \\ - 2\lambda_1^{-1} \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha \partial_\delta \phi^2 \partial_\delta v_\beta + 2i \lambda_2^{-1} \nabla^2 u_\alpha \partial_\beta \phi^4 \partial_\alpha v_\beta - 2i \lambda_2^{-1} \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha \partial_\delta \phi^4 \partial_\beta v_\delta \\ - 2\lambda_2^{-1} \nabla^2 u_\alpha \partial_\beta \phi^5 \partial_\alpha v_\beta + 2\lambda_2^{-1} \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha \partial_\delta \phi^5 \partial_\beta v_\delta,$$

$$O_5 = 4i \lambda_3 \nabla^2 u_\alpha \partial_\alpha \partial_\beta \phi^1 \partial_\beta \phi^4 - 4\lambda_3 \nabla^2 u_\alpha \partial_\alpha \partial_\beta \phi^2 \partial_\beta \phi^4 - 4i \lambda_3 \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha \partial_\beta \partial_\delta \phi^1 \partial_\delta \phi^4 \\ + 4\lambda_3 \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha \partial_\beta \partial_\delta \phi^2 \partial_\delta \phi^4 - 4\lambda_3 \nabla^2 u_\alpha \partial_\alpha \partial_\beta \phi^1 \partial_\beta \phi^5 - 4i \lambda_3 \nabla^2 u_\alpha \partial_\alpha \partial_\beta \phi^2 \partial_\beta \phi^5 \\ + 4\lambda_3 \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha \partial_\beta \partial_\delta \phi^1 \partial_\delta \phi^5 + 4i \lambda_3 \partial_\alpha \partial_\beta u_\alpha \partial_\beta \partial_\delta \phi^2 \partial_\delta \phi^5 + \nabla^2 \psi_\alpha^* \partial_\beta \nabla^2 \psi_\alpha v_\beta \\ - \partial_\alpha \partial_\beta \psi_\alpha^* \partial_\delta \nabla^2 \psi_\beta v_\delta - \nabla^2 \psi_\alpha^* \partial_\delta \partial_\alpha \partial_\beta \psi_\beta v_\delta + \partial_\alpha \partial_\beta \psi_\alpha^* \partial_\delta \partial_\beta \partial_\epsilon \psi_\epsilon v_\delta \\ - \partial_\alpha \nabla^2 \psi_\beta^* \nabla^2 \psi_\alpha v_\beta + \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\delta \psi_\alpha^* \nabla^2 \psi_\beta v_\delta + \partial_\alpha \nabla^2 \psi_\delta^* \partial_\alpha \partial_\beta \psi_\beta v_\delta \\ - \partial_\beta \partial_\alpha \partial_\delta \psi_\alpha^* \partial_\beta \partial_\epsilon \psi_\epsilon v_\delta,$$

$$\begin{aligned}
O_6 = & \lambda_1^{-1} (2\nabla^2 \psi_\alpha^* \partial_\delta \nabla^2 \psi_\alpha \partial_\delta \phi^1 + 2i\nabla^2 \psi_\alpha^* \partial_\delta \nabla^2 \psi_\alpha \partial_\delta \phi^2 - 2\partial_\alpha \partial_\beta \psi_\alpha^* \partial_\delta \nabla^2 \psi_\beta \partial_\delta \phi^1 \\
& - 2i\partial_\alpha \partial_\beta \psi_\alpha^* \partial_\delta \nabla^2 \psi_\beta \partial_\delta \phi^2 - 2\nabla^2 \psi_\alpha^* \partial_\delta \partial_\alpha \partial_\epsilon \psi_\epsilon \partial_\delta \phi^1 - 2i\nabla^2 \psi_\alpha^* \partial_\delta \partial_\alpha \partial_\epsilon \psi_\epsilon \partial_\delta \phi^2 \\
& + 2\partial_\alpha \partial_\beta \psi_\alpha^* \partial_\delta \partial_\beta \partial_\epsilon \psi_\epsilon \partial_\delta \phi^1 + 2i\partial_\alpha \partial_\beta \psi_\alpha^* \partial_\delta \partial_\beta \partial_\epsilon \psi_\epsilon \partial_\delta \phi^2 \\
& - 2\partial_\beta \nabla^2 \psi_\delta^* \nabla^2 \psi_\beta \partial_\delta \phi^1 - 2i\partial_\beta \nabla^2 \psi_\delta^* \nabla^2 \psi_\beta \partial_\delta \phi^2 + 2\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\delta \psi_\alpha^* \nabla^2 \psi_\beta \partial_\delta \phi^1 \\
& + 2i\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\delta \psi_\alpha^* \nabla^2 \psi_\beta \partial_\delta \phi^2 + 2\partial_\beta \nabla^2 \psi_\delta^* \partial_\beta \partial_\epsilon \psi_\epsilon \partial_\delta \phi^1 + 2i\partial_\beta \nabla^2 \psi_\delta^* \partial_\beta \partial_\epsilon \psi_\epsilon \partial_\delta \phi^2 \\
& - 2\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\delta \psi_\alpha^* \partial_\beta \partial_\epsilon \psi_\epsilon \partial_\delta \phi^1 - 2i\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\delta \psi_\alpha^* \partial_\beta \partial_\epsilon \psi_\epsilon \partial_\delta \phi^2) \\
& - \psi_\alpha^* \nabla^6 \nu \psi_\beta + \psi_\alpha^* \nabla^4 \partial_\alpha \partial_\beta \nu \psi_\beta,
\end{aligned}$$

wobei  $\lambda_3 = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}$  definiert wurde.

### 4.3.2 Ansatz 1b

$$\begin{aligned}
S_{1b} = & \int d^D x dt \{ O_0[v, u, f] + O_1[v, u, f, \phi^1 - \phi^4, \phi^6 - \phi^8, \psi^*, \psi, \sigma^{1*}, \sigma^1, \sigma^{2*}] \\
& + O_2[\text{alle Felder}] + O_3[v, \phi^1, \phi^3 - \phi^5, \psi, \sigma^{1*}, \sigma^2] \\
& + O_4[\phi^1, \phi^3 - \phi^5, \phi^7, \phi^9, \sigma^{1*}, \sigma^2] \},
\end{aligned}$$

mit:

$$O_0 = -iu_\alpha \partial_t v_\alpha + iu_\alpha f_\alpha,$$

$$\begin{aligned}
O_1 = & -iu_\alpha \partial_\beta v_\alpha v_\beta + 2i\lambda_1^{-1} \phi^1 \partial_\alpha u_\alpha - 2\lambda_1^{-1} \phi^2 \partial_\alpha u_\alpha \\
& - \lambda_1 \phi^1 \partial_t \partial_\alpha v_\alpha + \lambda_1 \phi^1 \partial_\alpha f_\alpha - i\lambda_1 \phi^3 \partial_t \partial_\alpha v_\alpha \\
& + i\lambda_1 \phi^3 \partial_\alpha f_\alpha + \partial_\alpha \psi_\alpha^* \sigma^1 - \sigma^{1*} \partial_t \partial_\alpha \psi_\alpha \\
& - \lambda_2 \phi^4 \partial_\alpha v_\alpha - i\lambda_2 \phi^6 \partial_\alpha v_\alpha - \lambda_3 \phi^7 \partial_\alpha v_\alpha \\
& - i\lambda_3 \phi^8 \partial_\alpha v_\alpha - \sigma^{2*} \partial_\alpha \psi_\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_2 = & - \sum_i \phi^i \nabla^2 \phi^i + \frac{1}{2\kappa} (\partial_\alpha v_\alpha)^2 + iu_\alpha \nu \nabla^2 v_\alpha \\
& - iu_\alpha \nu \partial_\alpha \partial_\beta v_\beta - \psi_\alpha^* \nu \nabla^2 \psi_\alpha + \psi_\alpha^* \nu \partial_\alpha \partial_\beta \psi_\beta \\
& - \frac{1}{2\rho} f_\alpha \nabla^2 f_\alpha + \lambda_1 \partial_\beta \phi^1 v_\alpha \partial_\alpha v_\beta + i\lambda_1 \partial_\beta \phi^3 v_\alpha \partial_\alpha v_\beta \\
& - \sigma^{1*} \nabla^2 \sigma^1 + 2i\lambda_2^{-1} \phi^4 \partial_\beta u_\alpha \partial_\beta v_\alpha - 2\lambda_2^{-1} \phi^5 \partial_\beta u_\alpha \partial_\beta v_\alpha \\
& + 2i\lambda_2^{-1} \phi^4 u_\alpha \nabla^2 v_\alpha - 2\lambda_2^{-1} \phi^5 u_\alpha \nabla^2 v_\alpha - \sigma^{2*} \nabla^2 \sigma^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_3 = & -2\lambda_2^{-1}\phi^4\lambda_1\phi^1\nabla^2\partial_\alpha v_\alpha - 2\lambda_2^{-1}\phi^4\lambda_1\partial_\beta\phi^1\partial_\beta\partial_\alpha v_\alpha - 2i\lambda_2^{-1}\phi^4\lambda_1\phi^3\nabla^2\partial_\alpha v_\alpha \\
& - 2i\lambda_2^{-1}\phi^4\lambda_1\partial_\beta\phi^3\partial_\beta\partial_\alpha v_\alpha - 2i\lambda_2^{-1}\phi^5\lambda_1\phi^1\nabla^2\partial_\alpha v_\alpha - 2i\lambda_2^{-1}\phi^5\lambda_1\partial_\beta\phi^1\partial_\beta\partial_\alpha v_\alpha \\
& + 2\lambda_2^{-1}\phi^5\lambda_1\phi^3\nabla^2\partial_\alpha v_\alpha + 2\lambda_2^{-1}\phi^5\lambda_1\partial_\beta\phi^3\partial_\beta\partial_\alpha v_\alpha - 4\lambda_2^{-1}\phi^4\partial_\alpha\sigma^{1*}\nabla^2\psi_\alpha \\
& + 4\lambda_2^{-1}\phi^4\partial_\alpha\sigma^{1*}\partial_\alpha\partial_\beta\psi_\beta - 4i\lambda_2^{-1}\phi^5\partial_\alpha\sigma^{1*}\nabla^2\psi_\alpha + 4i\lambda_2^{-1}\phi^5\partial_\alpha\sigma^{1*}\partial_\alpha\partial_\beta\psi_\beta \\
& - 2\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\partial_\beta\phi^1\partial_\alpha v_\beta - 2i\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\partial_\beta\phi^3\partial_\alpha v_\beta - 2i\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\partial_\beta\phi^1\partial_\alpha v_\beta \\
& + 2\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\partial_\beta\phi^3\partial_\alpha v_\beta + 2\partial_\beta\partial_\alpha\sigma^{1*}\partial_\alpha v_\beta\sigma^2 + 2\partial_\alpha\sigma^{1*}\nabla^2 v_\alpha\sigma^2 \\
& + 2\partial_\alpha\sigma^{1*}\partial_\alpha\partial_\beta v_\beta\sigma^2 + 2\sigma^{1*}\nabla^2\partial_\alpha v_\alpha\sigma^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_4 = & -4\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\nabla^2\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\partial_\alpha\phi^1 - 4i\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\nabla^2\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\partial_\alpha\phi^1 \\
& - 4i\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\nabla^2\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\partial_\alpha\phi^3 + 4\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\nabla^2\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\partial_\alpha\phi^3 \\
& - 4\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\nabla^2\phi^4\lambda_1\nabla^2\phi^1 - 4i\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\nabla^2\phi^5\lambda_1\nabla^2\phi^1 \\
& - 4i\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\nabla^2\phi^4\lambda_1\nabla^2\phi^3 + 4\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\nabla^2\phi^5\lambda_1\nabla^2\phi^3 \\
& - 4\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^4\lambda_1\partial_\alpha\partial_\beta\phi^1 - 4i\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^5\lambda_1\partial_\alpha\partial_\beta\phi^1 \\
& - 4i\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^4\lambda_1\partial_\alpha\partial_\beta\phi^3 + 4\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^5\lambda_1\partial_\alpha\partial_\beta\phi^3 \\
& - 4\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\nabla^2\partial_\alpha\phi^1 - 4i\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\nabla^2\partial_\alpha\phi^1 \\
& - 4i\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\nabla^2\partial_\alpha\phi^3 + 4\lambda_3^{-1}\phi^7\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\nabla^2\partial_\alpha\phi^3 \\
& - 4i\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\nabla^2\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\partial_\alpha\phi^1 + 4\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\nabla^2\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\partial_\alpha\phi^1 \\
& + 4\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\nabla^2\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\partial_\alpha\phi^3 + 4i\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\nabla^2\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\partial_\alpha\phi^3 \\
& - 4i\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\nabla^2\phi^4\lambda_1\nabla^2\phi^1 + 4\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\nabla^2\phi^5\lambda_1\nabla^2\phi^1 \\
& + 4\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\nabla^2\phi^4\lambda_1\nabla^2\phi^3 + 4i\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\nabla^2\phi^5\lambda_1\nabla^2\phi^3 \\
& - 4i\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^4\lambda_1\partial_\alpha\partial_\beta\phi^1 + 4\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^5\lambda_1\partial_\alpha\partial_\beta\phi^1 \\
& + 4\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^4\lambda_1\partial_\alpha\partial_\beta\phi^3 + 4i\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^5\lambda_1\partial_\alpha\partial_\beta\phi^3 \\
& - 4i\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\nabla^2\partial_\alpha\phi^1 + 4\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\nabla^2\partial_\alpha\phi^1 \\
& + 4\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^4\lambda_1\nabla^2\partial_\alpha\phi^3 + 4i\lambda_3^{-1}\phi^9\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^5\lambda_1\nabla^2\partial_\alpha\phi^3 \\
& + 4\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^4\partial_\alpha\partial_\beta\sigma^{1*}\sigma^2 + 8\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^4\nabla^2\partial_\alpha\sigma^{1*}\sigma^2 \\
& + 4i\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\partial_\beta\phi^5\partial_\alpha\partial_\beta\sigma^{1*}\sigma^2 + 8i\lambda_2^{-1}\partial_\alpha\phi^5\nabla^2\partial_\alpha\sigma^{1*}\sigma^2 \\
& + 4\lambda_2^{-1}\phi^4\nabla^4\sigma^{1*}\sigma^2 + 4i\lambda_2^{-1}\phi^5\nabla^4\sigma^{1*}\sigma^2.
\end{aligned}$$

## 4.3.3 Ansatz 2

$$S_2 = \int d^D x dt \{ O_0[v, u, f, \psi^*, \psi] + O_1[\phi^1 - \phi^3, f, v, u, \psi^*, \psi, \sigma, \theta] \\ + O_2[\phi^1 - \phi^3, f, v, u, \psi, \sigma^*, \sigma] \},$$

mit:

$$O_0 = -iu_\alpha \partial_t v_\alpha + iu_\alpha f_\alpha + \psi_\alpha^* \partial_t \psi_\alpha,$$

$$O_1 = -iu_\alpha v_\beta \partial_\beta v_\alpha + 2\lambda^{-1} \phi^1 \partial_\alpha u_\alpha + i\lambda \phi^1 \partial_\alpha f_\alpha - 2i\lambda^{-1} \phi^2 \partial_\alpha u_\alpha \\ - \lambda \phi^3 \partial_\alpha f_\alpha + \psi_\alpha^* \psi_\beta \partial_\beta v_\alpha + \psi_\alpha^* v_\beta \partial_\beta \psi_\alpha + \partial_\alpha \psi_\alpha^* \sigma \\ - i\theta \partial_\alpha v_\alpha,$$

$$O_2 = \nu i u_\alpha \nabla^2 v_\alpha - \sum_{k=1}^3 \phi^k \nabla^2 \phi^k \\ + i\lambda \partial_\alpha \phi^1 v_\beta \partial_\beta v_\alpha - \lambda \partial_\alpha \phi^3 v_\beta \partial_\beta v_\alpha + \sigma^* \nabla^2 \sigma \\ + \partial_\alpha \sigma^* \psi_\beta \partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha \sigma^* v_\beta \partial_\beta \psi_\alpha - \frac{\rho^{-1}}{2} f_\alpha \nabla^2 f_\alpha \\ - \psi_\alpha^* \nu \nabla^2 \psi_\alpha.$$

Hier ist zu erwähnen, dass darauf verzichtet wurde, beim Einfügen der Felder  $\sigma^*$  und  $\sigma$  einen weiteren Parameter mit in die Rechnung zu nehmen. Dies hat zur Konsequenz, dass die neuen Grassmann-Felder unterschiedlich skalieren, was aber in der RG-Gleichung sowieso vorgesehen ist.

#### 4.4 Fourier-Transformation der Wirkungen

Auch werden die Ergebnisse nur angegeben, weil die Rechnung keine neuen Einsichten bringt. Die neuen Koordinaten nenne ich  $p, q, r$ , und verwende das folgende Symbol:

$$\int \left( \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \right)^n \delta(\sum p_n). \quad (4.57)$$

Dieses Symbol ist nicht im engeren Sinne als Integrationsmaß zu verstehen, sondern als Symbol, das sich auf jeden einzelnen der folgenden Terme bezieht; für jeden Term bezeichnet  $n$  die Anzahl der Felder, und die Delta-Funktion sorgt dafür, dass in jedem einzelnen Term die Summe der Impulse verschwindet.

Für spätere Rechnungen benötigt man nur die Wirkungen nach der Umdefinition der Felder (falls man eine solche vornimmt), aber vor dem Einfügen unphysikalischer Hilfsfelder; sowie die für die Ableitungsentwicklung vorbereiteten Endversionen.

Es sei zunächst definiert:

$$\tilde{Q}_{\alpha\beta}(p) = p^2 \delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta, \quad (4.58)$$

$$\tilde{P}_{\alpha\beta}(p) = p^{-2} \tilde{Q}_{\alpha\beta}(p). \quad (4.59)$$

Die noch nichtlokalen Wirkungen sehen dann wie folgt aus:

##### 4.4.1 Ansatz 1a, nichtlokal

$$\begin{aligned} S_{1a}[u, v, \psi, \psi^*, f] = & \int \left( \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \right)^n \delta(\sum p_n) dt \left\{ -\frac{1}{2\kappa} p_\alpha v_\alpha(p) q_\alpha v_\alpha(q) \right. \\ & + i u_\beta(p) \tilde{Q}_{\alpha\beta}(q) (\partial_t + \nu q^2) v_\alpha(q) - \tilde{Q}_{\alpha\beta}(p) u_\alpha(p) q_\gamma \tilde{P}_{\beta\epsilon}(q) v_\epsilon(q) \tilde{P}_{\gamma\delta}(r) v_\delta(r) \\ & - i f_\alpha(p) \tilde{Q}_{\alpha\beta}(q) u_\beta(q) + \psi_\alpha^*(\partial_t + \nu q^2) q^2 \tilde{Q}_{\alpha\beta}(q) \psi_\beta(q) \\ & - i p_\beta \tilde{Q}_{\alpha\gamma}(p) \psi_\alpha^*(p) \tilde{Q}_{\beta\epsilon}(q) \psi_\epsilon(q) \tilde{P}_{\gamma\delta}(r) v_\delta(r) \\ & + i \tilde{Q}_{\alpha\beta}(p) \psi_\alpha^*(p) q_\gamma \tilde{Q}_{\beta\epsilon}(q) \psi_\epsilon(q) \tilde{P}_{\gamma\delta}(r) v_\delta(r) \\ & \left. + \frac{1}{2\rho} f_\alpha(p) q^2 f_\alpha(q) \right\}, \quad (4.60) \end{aligned}$$

##### 4.4.2 Ansatz 1b, nichtlokal

$$\begin{aligned} S_{1b}[u, v, \psi, \psi^*, f] = & \int \left( \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \right)^n \delta(\sum p_n) dt \left\{ -\frac{1}{2\kappa} p_\alpha v_\alpha(p) q_\alpha v_\alpha(q) - i u_\alpha(p) \partial_t \tilde{P}_{\alpha\beta}(q) v_\beta(q) \right. \\ & - i u_\alpha(p) \nu q^2 \tilde{P}_{\alpha\beta}(p) v_\beta(q) + u_\alpha(p) \tilde{P}_{\alpha\beta}(p) (\tilde{P}_{\gamma\delta}(q) v_\delta(q) r_\gamma \tilde{P}_{\beta\epsilon}(r) v_\epsilon(r)) \\ & + i u_\alpha(p) \tilde{P}_{\alpha\beta}(q) f_\beta(q) + \psi_\alpha^*(p) \partial_t \tilde{P}_{\alpha\beta}(q) \psi_\beta(q) \\ & + \psi_\alpha^*(p) \nu q^2 \tilde{P}_{\alpha\beta}(q) \psi_\beta(q) + i \psi_\alpha^*(p) \tilde{P}_{\alpha\beta}(p) (\tilde{P}_{\gamma\delta}(q) \psi_\delta(q) r_\gamma \tilde{P}_{\beta\epsilon}(r) v_\epsilon(r)) \\ & \left. + i \psi_\alpha^*(p) \tilde{P}_{\alpha\beta}(p) (\tilde{P}_{\gamma\delta}(q) v_\delta(q) r_\gamma \tilde{P}_{\beta\epsilon}(r) \psi_\epsilon(r)) + \frac{1}{2\rho} f_\alpha(p) q^2 f_\alpha(q) \right\}, \quad (4.61) \end{aligned}$$

## 4.4.3 Ansatz 2, nichtlokal

$$\begin{aligned}
S_2[u, v, \psi, \psi^*, f, \phi^4] = & \int \left( \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \right)^n \delta(\sum p_n) x dt \left\{ -iu_\alpha(p) \partial_t v_\alpha(q) - iu_\alpha(p) \nu q^2 v_\alpha \right. \\
& + \tilde{P}_{\alpha\beta}(p) u_\alpha(p) v_\gamma(q) r_\gamma v_\beta(r) + iu_\alpha(p) \tilde{P}_{\alpha\beta}(q) f_\beta(q) + \psi_\alpha^*(p) \partial_t \psi_\alpha(q) \\
& + \psi_\alpha^*(p) \nu q^2 \psi_\alpha(q) + i\tilde{P}_{\alpha\beta}(p) \psi_\alpha^*(p) \psi_\gamma(q) r_\gamma v_\beta(r) \\
& + i\tilde{P}_{\alpha\beta}(p) \psi_\alpha^*(p) v_\gamma(q) r_\gamma \psi_\beta(r) + \frac{1}{2\rho} f_\alpha(p) q^2 f_\alpha(q) \\
& \left. + \theta(p) q_\alpha v_\alpha(q) \right\}. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Für die lokalen Wirkungen findet man letztendlich:

## 4.4.4 Ansatz 1a, lokal

$$\begin{aligned}
S_1 = & \int \left( \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \right)^n \delta(\sum p_n) dt \{ O_1[v, \phi^1, \phi^3, \phi^4, \phi^6] + O_2[\phi^1 - \phi^6, f, v, u] + O_3[v, u] \\
& + O_4[v, u, \phi^1, \phi^2, \phi^4, \phi^5, \psi^*, \psi] + O_5[v, u, \phi^1, \phi^2, \phi^4, \phi^5, \psi^*, \psi] + O_6[\phi^1, \phi^2, \psi^*, \psi] \},
\end{aligned}$$

mit:

$$O_1 = -i\lambda_1 \phi^1(p) q_\alpha v_\alpha(q) + \lambda_1 \phi^3(p) q_\alpha v_\alpha(q) - i\lambda_2 \phi^4(p) q_\alpha v_\alpha(q) + \lambda_2 \phi^6(p) q_\alpha v_\alpha(q),$$

$$\begin{aligned}
O_2 = & \sum_{k=1}^6 \phi^k(p) q^2 \phi^k(q) + \frac{\rho^{-1}}{2} f_\alpha(p) q^2 f_\alpha(q) + \frac{1}{2\kappa} v_\alpha(p) q_\alpha q_\beta v_\beta(q) \\
& + i f_\alpha(p) q_\alpha q_\beta u_\beta(q) - i f_\alpha(p) q^2 u_\alpha(q) + i u_\alpha(p) q^2 \partial_t v_\alpha(q) \\
& - i u_\alpha(p) q_\alpha q_\beta \partial_t v_\beta(q),
\end{aligned}$$

$$O_3 = -p^2 u_\alpha(p) v_\beta(q) r_\beta v_\alpha(r) + p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) v_\delta(q) r_\delta v_\beta(r),$$

$$\begin{aligned}
O_4 = & iu_\alpha(p) q^4 \nu v_\alpha(q) - iu_\alpha(p) q_\beta q_\alpha q^2 \nu v_\beta(q) + \psi_\alpha^*(p) q^4 \partial_t \psi_\alpha(q) \\
& - \psi_\alpha^*(p) q^2 q_\alpha q_\beta \partial_t \psi_\beta(q) + 2i\lambda_1^{-1} p^2 u_\alpha(p) q_\beta \phi^1(q) r_\beta v_\alpha(r) \\
& - 2\lambda_1^{-1} p^2 u_\alpha(p) q_\beta \phi^2(q) r_\beta v_\alpha(r) + 2i\lambda_1^{-1} p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) q_\delta \phi^1(q) r_\delta v_\beta(r) \\
& - 2\lambda_1^{-1} p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) q_\delta \phi^2(q) r_\delta v_\beta(r) + 2i\lambda_2^{-1} p^2 u_\alpha(p) q_\beta \phi^4(q) r_\alpha v_\beta(r) \\
& - 2i\lambda_2^{-1} p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) q_\delta \phi^4(q) r_\beta v_\delta(r) - 2\lambda_2^{-1} p^2 u_\alpha(p) q_\beta \phi^5(q) r_\alpha v_\beta(r) \\
& + 2\lambda_2^{-1} p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) q_\delta \phi^5(q) r_\beta v_\delta(r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_5 = & -4\lambda_3 p^2 u_\alpha(p) q_\alpha q_\beta \phi^1(q) r_\beta \phi^4(r) - 4i\lambda_3 p^2 u_\alpha(p) q_\alpha q_\beta \phi^2(q) r_\beta \phi^4(r) \\
& + 4\lambda_3 p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) q_\beta q_\delta \phi^1(q) r_\delta \phi^4(r) + 4i\lambda_3 p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) q_\beta q_\delta \phi^2(q) r_\delta \phi^4(r) \\
& - 4i\lambda_3 p^2 u_\alpha(p) q_\alpha q_\beta \phi^1(q) r_\beta \phi^5(r) + 4\lambda_3 p^2 u_\alpha(p) q_\alpha q_\beta \phi^2(q) r_\beta \phi^5(r) \\
& + 4i\lambda_3 p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) q_\beta q_\delta \phi^1(q) r_\delta \phi^5(r) - 4\lambda_3 p_\alpha p_\beta u_\alpha(p) q_\beta q_\delta \phi^2(q) r_\delta \phi^5(r) \\
& + ip^2 \psi_\alpha^*(p) q_\delta q^2 \psi_\alpha(q) v_\beta(r) - ip_\alpha p_\beta \psi_\alpha^*(p) q_\delta q^2 \psi_\beta(q) v_\delta(q) \\
& - ip^2 \psi_\alpha^*(p) q_\delta q_\alpha q_\beta \psi_\beta(q) v_\delta(r) + ip_\alpha p_\beta \psi_\alpha^*(p) q_\delta q_\beta q_\epsilon \psi_\epsilon(q) v_\delta(r) \\
& - ip_\alpha p^2 \psi_\beta^*(p) q^2 \psi_\alpha(q) v_\beta(r) + ip_\beta p_\alpha p_\delta \psi_\alpha^*(p) q^2 \psi_\beta(q) v_\delta(r) \\
& + ip_\alpha p^2 \psi_\delta^*(p) q_\alpha q_\beta \psi_\beta(q) v_\delta(r) - ip_\beta p_\alpha p_\delta \psi_\alpha^*(p) q_\beta q_\epsilon \psi_\epsilon(q) v_\delta(r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_6 = & \lambda_1^{-1} [-2p^2 \psi_\alpha^*(p) q_\delta q^2 \psi_\alpha(q) r_\delta \phi^1(r) - 2ip^2 \psi_\alpha^*(p) q_\delta q^2 \psi_\alpha(q) r_\delta \phi^2(r) \\
& + 2p_\alpha p_\beta \psi_\alpha^*(p) q_\delta q^2 \psi_\beta(q) r_\delta \phi^1(r) + 2ip_\alpha p_\beta \psi_\alpha^*(p) q_\delta q^2 \psi_\beta(q) r_\delta \phi^2(r) \\
& + 2p^2 \psi_\alpha^*(p) q_\delta q_\alpha q_\epsilon \psi_\epsilon(q) r_\delta \phi^1(r) + 2ip^2 \psi_\alpha^*(p) q_\delta q_\alpha q_\epsilon \psi_\epsilon(q) r_\delta \phi^2(r) \\
& - 2p_\alpha p_\beta \psi_\alpha^*(p) q_\delta q_\beta q_\epsilon \psi_\epsilon(q) r_\delta \phi^1(r) - 2ip_\alpha p_\beta \psi_\alpha^*(p) q_\delta q_\beta q_\epsilon \psi_\epsilon(q) r_\delta \phi^2(r) \\
& + 2p_\beta p^2 \psi_\delta^*(p) q^2 \psi_\beta(q) r_\delta \phi^1(r) + 2ip_\beta p^2 \psi_\delta^*(p) q^2 \psi_\beta(q) r_\delta \phi^2(r) \\
& - 2p_\alpha p_\beta p_\delta \psi_\alpha^*(p) q^2 \psi_\beta(q) r_\delta \phi^1(r) - 2ip_\alpha p_\beta p_\delta \psi_\alpha^*(p) q^2 \psi_\beta(q) r_\delta \phi^2(r) \\
& - 2p_\beta p^2 \psi_\delta^*(p) q_\beta q_\epsilon \psi_\epsilon(q) r_\delta \phi^1(r) - 2ip_\beta p^2 \psi_\delta^*(p) q_\beta q_\epsilon \psi_\epsilon(q) r_\delta \phi^2(r) \\
& + 2p_\alpha p_\beta p_\delta \psi_\alpha^*(p) q_\beta q_\epsilon \psi_\epsilon(q) r_\delta \phi^1(r) + 2ip_\alpha p_\beta p_\delta \psi_\alpha^*(p) q_\beta q_\epsilon \psi_\epsilon(q) r_\delta \phi^2(r)] \\
& + \psi_\alpha^*(p) q^6 \nu \psi_\beta(q) - \psi_\alpha^*(p) q^4 q_\alpha q_\beta \nu \psi_\beta(q).
\end{aligned}$$

#### 4.4.5 Ansatz 1b, lokal

$$\begin{aligned}
S_{1b} = & \int \left( \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \right)^n \delta(\sum p_n) dt \{ O_0[v, u, f] + O_1[v, u, f, \phi^1 - \phi^4, \phi^6 - \phi^8, \psi^*, \psi, \sigma^{1*}, \sigma^1, \sigma^{2*}] \\
& + O_2[\text{alle Felder}] + O_3[v, \phi^1, \phi^3 - \phi^5, \psi, \sigma^{1*}, \sigma^2] \\
& + O_4[\phi^1, \phi^3 - \phi^5, \phi^7, \phi^9, \sigma^{1*}, \sigma^2] \},
\end{aligned}$$

mit:

$$O_0 = -iu_\alpha(p) \partial_t v_\alpha(q) + iu_\alpha(p) f_\alpha(q),$$

$$\begin{aligned}
O_1 = & u_\alpha(p) q_\beta v_\alpha(q) v_\beta(r) - 2\lambda_1^{-1} \phi^1(p) q_\alpha u_\alpha(q) - 2i\lambda_1^{-1} \phi^2(p) q_\alpha u_\alpha(q) \\
& - i\lambda_1 \phi^1(p) \partial_t q_\alpha v_\alpha(q) + i\lambda_1 \phi^1(p) q_\alpha f_\alpha(q) + \lambda_1 \phi^3(p) \partial_t q_\alpha v_\alpha(q) \\
& - \lambda_1 \phi^3(p) q_\alpha f_\alpha(q) + ip_\alpha \psi_\alpha^*(p) \sigma^1(q) - i\sigma^{1*}(p) \partial_t q_\alpha \psi_\alpha(q) \\
& - i\lambda_2 \phi^4(p) q_\alpha v_\alpha(q) + \lambda_2 \phi^6(p) q_\alpha v_\alpha(q) - i\lambda_3 \phi^7(p) q_\alpha v_\alpha(q) \\
& + \lambda_3 \phi^8(p) q_\alpha v_\alpha(q) - i\sigma^{2*}(p) q_\alpha \psi_\alpha(q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_2 = & \sum_i \phi^i(p) q^2 \phi^i(q) - \frac{1}{2\kappa} p_\alpha v_\alpha(p) q_\alpha v_\alpha(q) - i u_\alpha(p) \nu q^2 v_\alpha(q) \\
& + i u_\alpha(p) \nu q_\alpha q_\beta v_\beta(q) + \psi_\alpha^*(p) \nu q^2 \psi_\alpha(q) - \psi_\alpha^*(p) \nu q_\alpha q_\beta \psi_\beta(q) \\
& + \frac{1}{2\rho} f_\alpha(p) q^2 f_\alpha(q) - \lambda_1 p_\beta \phi^1(p) v_\alpha(q) r_\alpha v_\beta(r) - i \lambda_1 p_\beta \phi^3(p) v_\alpha(q) r_\alpha v_\beta(r) \\
& + \sigma^{1*}(p) q^2 \sigma^1(q) - 2i \lambda_2^{-1} \phi^4(p) q_\beta u_\alpha(q) r_\beta v_\alpha(r) + 2\lambda_2^{-1} \phi^5(p) q_\beta u_\alpha(q) r_\beta v_\alpha(r) \\
& - 2i \lambda_2^{-1} \phi^4(p) u_\alpha(q) r^2 v_\alpha(r) + 2\lambda_2^{-1} \phi^5(p) u_\alpha(q) r^2 v_\alpha(r) + \sigma^{2*}(p) q^2 \sigma^2(q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_3 = & 2i \lambda_2^{-1} \phi^4(p) \lambda_1 \phi^1(q) r^2 r_\alpha v_\alpha(r) + 2i \lambda_2^{-1} \phi^4(p) \lambda_1 q_\beta \phi^1(q) r_\beta r_\alpha v_\alpha(r) \\
& - 2\lambda_2^{-1} \phi^4(p) \lambda_1 \phi^3(q) r^2 r_\alpha v_\alpha(r) - 2\lambda_2^{-1} \phi^4(p) \lambda_1 q_\beta \phi^3(q) r_\beta r_\alpha v_\alpha(r) \\
& - 2\lambda_2^{-1} \phi^5(p) \lambda_1 \phi^1(q) r^2 r_\alpha v_\alpha(r) - 2\lambda_2^{-1} \phi^5(p) \lambda_1 q_\beta \phi^1(q) r_\beta r_\alpha v_\alpha(r) \\
& - 2i \lambda_2^{-1} \phi^5(p) \lambda_1 \phi^3(q) r^2 r_\alpha v_\alpha(r) - 2i \lambda_2^{-1} \phi^5(p) \lambda_1 q_\beta \phi^3(q) r_\beta r_\alpha v_\alpha(r) \\
& + 4i \lambda_2^{-1} \phi^4(p) q_\alpha \sigma^{1*}(q) r^2 \psi_\alpha(r) - 4i \lambda_2^{-1} \phi^4(p) q_\alpha \sigma^{1*}(q) r_\alpha r_\beta \psi_\beta(r) \\
& - 4\lambda_2^{-1} \phi^5(p) q_\alpha \sigma^{1*}(q) r^2 \psi_\alpha(r) + 4\lambda_2^{-1} \phi^5(p) q_\alpha \sigma^{1*}(q) r_\alpha r_\beta \psi_\beta(r) \\
& + 2i \lambda_2^{-1} p_\alpha \phi^4(p) \lambda_1 q_\beta \phi^1(q) r_\alpha v_\beta(r) - 2\lambda_2^{-1} p_\alpha \phi^4(p) \lambda_1 q_\beta \phi^3(q) r_\alpha v_\beta(r) \\
& - 2\lambda_2^{-1} p_\alpha \phi^5(p) \lambda_1 q_\beta \phi^1(q) r_\alpha v_\beta(r) - 2i \lambda_2^{-1} p_\alpha \phi^5(p) \lambda_1 q_\beta \phi^3(q) r_\alpha v_\beta(r) \\
& - 2i p_\beta p_\alpha \sigma^{1*}(p) q_\alpha v_\beta(q) \sigma^2(r) - 2i p_\alpha \sigma^{1*}(p) q^2 v_\alpha(q) \sigma^2(r) \\
& - 2i p_\alpha \sigma^{1*}(p) q_\alpha q_\beta v_\beta(q) \sigma^2(r) - 2i \sigma^{1*}(p) q^2 q_\alpha v_\alpha(q) \sigma^2(r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_4 = & -4\lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q^2 q_\alpha \phi^4(q) \lambda_1 r_\alpha \phi^1(r) - 4i \lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q^2 q_\alpha \phi^5(q) \lambda_1 r_\alpha \phi^1(r) \\
& - 4i \lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q^2 q_\alpha \phi^4(q) \lambda_1 r_\alpha \phi^3(r) + 4\lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q^2 q_\alpha \phi^5(q) \lambda_1 r_\alpha \phi^3(r) \\
& - 4\lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q^2 \phi^4(q) \lambda_1 r^2 \phi^1(r) - 4i \lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q^2 \phi^5(q) \lambda_1 r^2 \phi^1(r) \\
& - 4i \lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q^2 \phi^4(q) \lambda_1 r^2 \phi^3(r) + 4\lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q^2 \phi^5(q) \lambda_1 r^2 \phi^3(r) \\
& - 4\lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha q_\beta \phi^4(q) \lambda_1 r_\alpha r_\beta \phi^1(r) - 4i \lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha q_\beta \phi^5(q) \lambda_1 r_\alpha r_\beta \phi^1(r) \\
& - 4i \lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha q_\beta \phi^4(q) \lambda_1 r_\alpha r_\beta \phi^3(r) + 4\lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha q_\beta \phi^5(q) \lambda_1 r_\alpha r_\beta \phi^3(r) \\
& - 4\lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha \phi^4(q) \lambda_1 r^2 r_\alpha \phi^1(r) - 4i \lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha \phi^5(q) \lambda_1 r^2 r_\alpha \phi^1(r) \\
& - 4i \lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha \phi^4(q) \lambda_1 r^2 r_\alpha \phi^3(r) + 4\lambda_3^{-1} \phi^7(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha \phi^5(q) \lambda_1 r^2 r_\alpha \phi^3(r) \\
& - 4i \lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q^2 q_\alpha \phi^4(q) \lambda_1 r_\alpha \phi^1(r) + 4\lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q^2 q_\alpha \phi^5(q) \lambda_1 r_\alpha \phi^1(r) \\
& + 4\lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q^2 q_\alpha \phi^4(q) \lambda_1 r_\alpha \phi^3(r) + 4i \lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q^2 q_\alpha \phi^5(q) \lambda_1 r_\alpha \phi^3(r) \\
& - 4i \lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q^2 \phi^4(q) \lambda_1 r^2 \phi^1(r) + 4\lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q^2 \phi^5(q) \lambda_1 r^2 \phi^1(r) \\
& + 4\lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q^2 \phi^4(q) \lambda_1 r^2 \phi^3(r) + 4i \lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q^2 \phi^5(q) \lambda_1 r^2 \phi^3(r) \\
& - 4i \lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha q_\beta \phi^4(q) \lambda_1 r_\alpha r_\beta \phi^1(r) + 4\lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha q_\beta \phi^5(q) \lambda_1 r_\alpha r_\beta \phi^1(r) \\
& + 4\lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha q_\beta \phi^4(q) \lambda_1 r_\alpha r_\beta \phi^3(r) + 4i \lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha q_\beta \phi^5(q) \lambda_1 r_\alpha r_\beta \phi^3(r) \\
& - 4i \lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha \phi^4(q) \lambda_1 r^2 r_\alpha \phi^1(r) + 4\lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha \phi^5(q) \lambda_1 r^2 r_\alpha \phi^1(r) \\
& + 4\lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha \phi^4(q) \lambda_1 r^2 r_\alpha \phi^3(r) + 4i \lambda_3^{-1} \phi^9(p) \lambda_2^{-1} q_\alpha \phi^5(q) \lambda_1 r^2 r_\alpha \phi^3(r) \\
& + 4\lambda_2^{-1} p_\alpha p_\beta \phi^4(p) q_\alpha q_\beta \sigma^{1*}(q) \sigma^2(r) + 8\lambda_2^{-1} p_\alpha \phi^4(p) q^2 q_\alpha \sigma^{1*}(q) \sigma^2(r) \\
& + 4i \lambda_2^{-1} p_\alpha p_\beta \phi^5(p) q_\alpha q_\beta \sigma^{1*}(q) \sigma^2(r) + 8i \lambda_2^{-1} p_\alpha \phi^5(p) q^2 q_\alpha \sigma^{1*}(q) \sigma^2(r) \\
& + 4\lambda_2^{-1} \phi^4(p) q^4 \sigma^{1*}(q) \sigma^2(r) + 4i \lambda_2^{-1} \phi^5(p) q^4 \sigma^{1*}(q) \sigma^2(r).
\end{aligned}$$

## 4.4.6 Ansatz 2, lokal

$$S_2 = \int \left( \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \right)^n \delta(\sum p_n) dt \{ O_0[v, u, f, \psi^*, \psi] + O_1[\phi^1 - \phi^3, f, v, u, \psi^*, \psi, \sigma, \theta] \\ + O_2[\phi^1 - \phi^3, f, v, u, \psi, \sigma^*, \sigma] \},$$

mit:

$$O_0 = -iu_\alpha(p)\partial_t v_\alpha(q) + iu_\alpha(p)f_\alpha(q) + \psi_\alpha^*(p)\partial_t \psi_\alpha(q),$$

$$O_1 = u_\alpha(p)v_\beta(q)r_\beta v_\alpha(r) + 2i\lambda^{-1}\phi^1(p)q_\alpha u_\alpha(q) - \lambda\phi^1(p)q_\alpha f_\alpha(q) \\ + 2\lambda^{-1}\phi^2(p)q_\alpha u_\alpha(q) - i\lambda\phi^3(p)q_\alpha f_\alpha(q) + i\psi_\alpha^*(p)\psi_\beta(q)r_\beta v_\alpha(r) \\ + i\psi_\alpha^*(p)v_\beta(q)r_\beta \psi_\alpha(r) + ip_\alpha \psi_\alpha^*(p)\sigma(q) + \theta(p)q_\alpha v_\alpha(q),$$

$$O_2 = -\nu iu_\alpha(p)q^2 v_\alpha(q) + \sum_{k=1}^3 \phi^k(p)q^2 \phi^k(q) \\ - i\lambda p_\alpha \phi^1(p)v_\beta(q)r_\beta v_\alpha(r) + \lambda p_\alpha \phi^3(p)v_\beta(q)r_\beta v_\alpha(r) - \sigma^*(p)q^2 \sigma(q) \\ - p_\alpha \sigma^*(p)\psi_\beta(q)r_\beta v_\alpha(r) - p_\alpha \sigma^*(p)v_\beta(q)r_\beta \psi_\alpha(r) + \frac{\rho^{-1}}{2} f_\alpha(p)q^2 f_\alpha(q) \\ + \psi_\alpha^*(p)\nu q^2 \psi_\alpha(q).$$

## 4.5 Fazit

In diesem Kapitel wurden Wirkungen, und damit auch erzeugende Funktionale, für die hydrodynamische Turbulenz hergeleitet. Diese Herleitung folgt grob der Prozedur, wie sie für stochastische Differentialgleichungen im bereits zitierten Artikel von Hochberg und anderen<sup>8</sup> aufgeführt ist. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass es, unter Verwendung des Faddeev-Popov-Ansatzes der Quantenfeldtheorie, möglich ist, die Inkompressibilitätsbedingung in die Wirkung aufzunehmen.

Weiter wurde eine Methode demonstriert, wie man durch Einfügen abstrakter Felder in die Wirkung aus einer nichtlokalen Theorie eine lokale machen kann. An dieser Stelle wurde ausgenutzt, dass die Navier-Stokes-Gleichung eine klassische Theorie beschreibt, und die neuen Felder damit auch unendlich schnell propagieren können. Man kann diese Prozedur auch aus einer anderen Perspektive betrachten, und sagen, dass die Navier-Stokes-Gleichung eine effektive Theorie beschreibt, die man erhält, wenn man aus der fundamentalen Theorie die Felder ausintegriert, die in diesem Kapitel neu eingeführt wurden. Dazu ist zu sagen, dass die Art des Einfügens neuer Felder keinesfalls eindeutig ist, und den Hilfsfeldern deshalb auch an dieser Stelle keine physikalische Realität zuzusprechen ist.

Die hergeleiteten Wirkungen wurden dann für die RG-Analyse, speziell die Ableitungsentwicklung, vorbereitet.

---

<sup>8</sup>[HMPPMV 99]



# Kapitel 5

## RG-Gleichungen für die Turbulenz

Nach den geleisteten Vorüberlegungen ist man nun in der Lage, die RG-Gleichungen für die zu betrachtenden Modelle aufzustellen, und auch die Ableitungsentwicklung vorzubereiten.

### 5.1 Letzte Vorüberlegungen

Zum Aufstellen der exakten Gleichungen nach dem Modell der Gleichung (3.63') fehlen die Informationen über die kanonischen Dimensionen der vorkommenden Größen, sowie über die Exponenten  $k$  in den Propagatoren, wie sie oben definiert wurden.

#### 5.1.1 Die kanonischen Dimensionen

Aus den Fourier-Transformierten der Wirkungen kann man die Dimensionen der beteiligten Größen ablesen. Die Dimensionen der physikalisch bedeutungsvollen Größen entnimmt man der K41-Theorie, mit folgender Argumentation: Womit auch immer numerisch die Turbulenz identifiziert werden soll, die K41-Theorie stellt immerhin eine mögliche Lösung dar. Sie zeichnet sich durch die zwei Kolmogorov'schen Hypothesen aus: Zum einen sei die Theorie auf allen Skalen selbstähnlich, zum anderen nehme die Energiedissipation auf kleinsten Skalen einen festen Wert  $\epsilon$  an. Das heißt: K41 entspricht einem Fixpunkt des RG-Flusses, und zwar dem Gauß'schen (denn nur beim Gauß'schen FP lassen sich die gradzahligen Mehrpunktfunktion einfach auf die Zweipunktfunktion zurückführen, was einer dimensionellen Analyse gleichkommt). Darüber hinaus gilt für den Energiefluss  $\Pi'$  nach K41:<sup>1</sup>

$$\Pi'_l \propto \frac{\sqrt{\langle v^2(l) \rangle^3}}{l} \propto \epsilon. \quad (5.1)$$

Aus der Selbstähnlichkeit folgt dann sofort  $\sqrt{\langle v^2(l) \rangle} \propto l^{\frac{1}{3}}$ .<sup>2</sup> Somit gilt aber im  $k$ -Raum:

$$[\partial_t] = \frac{2}{3}, \quad [\nu] = -\frac{4}{3}, \quad (5.2)$$

$$[v] = -D - \frac{1}{3}. \quad (5.3)$$

Die Dimensionen der neu eingefügten Felder erhält man aus der vollständig umgeformten Wirkung. Man findet so:

---

<sup>1</sup>vgl. dazu zum Beispiel das Buch von Frisch, [Fri 95]

<sup>2</sup>Abweichungen vom K41-Verhalten, wonach ja eigentlich gesucht wird, zeichnen sich durch ein skalenabhängiges  $\epsilon(l)$  aus; das obige Argument ist dann nicht mehr gültig. Man geht aber zunächst einmal davon aus, dass  $\epsilon$  konstant ist, und betrachtet die Skalenabhängigkeit als anomales Verhalten, das zum Beispiel in der Nähe eines anderen Fixpunktes zu finden sein könnte.

- Ansatz 1a:

$$[f] = -D + \frac{1}{3}, \quad [u] = -\frac{7}{3}, \quad (5.4)$$

$$[\kappa] = -D + \frac{4}{3}, \quad [\rho] = -D + \frac{8}{3}, \quad (5.5)$$

$$[\psi^*] = [\psi] = -\frac{D}{2} - \frac{7}{3}, \quad [\phi^i] = -\frac{D}{2} - 1 \quad \forall i, \quad (5.6)$$

$$[\lambda_1] = [\lambda_2] = \frac{D}{2} + \frac{1}{3}, \quad [\lambda_3] = -D - \frac{2}{3}; \quad (5.7)$$

- Ansatz 1b:

$$[f] = -D + \frac{1}{3}, \quad [u] = -\frac{1}{3}, \quad (5.8)$$

$$[\kappa] = -D + \frac{4}{3}, \quad [\rho] = -D + \frac{8}{3}, \quad (5.9)$$

$$[\psi^*] = [\psi] = -\frac{D}{2} - \frac{1}{3}, \quad [\phi^i] = -\frac{D}{2} - 1 \quad \forall i, \quad (5.10)$$

$$[\lambda_1] = \frac{D}{2} - \frac{1}{3}, \quad [\lambda_2] = [\lambda_3] = \frac{D}{2} + \frac{1}{3}, \quad (5.11)$$

$$[\sigma^{1*}] = [\sigma^2] = -\frac{D}{2} - \frac{4}{3}, \quad [\sigma^1] = [\sigma^{2*}] = -\frac{D}{2} - \frac{2}{3}; \quad (5.12)$$

- Ansatz 2:

$$[f] = -D + \frac{1}{3}, \quad [u] = -\frac{1}{3}, \quad (5.13)$$

$$[\rho] = -D + \frac{8}{3}, \quad [\psi^*] = [\psi] = -\frac{D}{2} - \frac{1}{3}, \quad (5.14)$$

$$[\lambda] = \frac{D}{2} - \frac{1}{3}, \quad [\theta] = -\frac{2}{3}, \quad (5.15)$$

$$[\sigma^*] = -\frac{D}{2} - \frac{4}{3}, \quad [\sigma] = -\frac{D}{2} - \frac{2}{3}, \quad (5.16)$$

$$[\phi^i] = -\frac{D}{2} - 1 \quad \forall i. \quad (5.17)$$

### 5.1.2 Die Exponenten $k$

Die noch fehlenden Exponenten  $k$  erhält man aus der Beziehung

$$k = -2D_{\text{kan}} - D. \quad (5.18)$$

Für alle Modelle gilt

$$k_v = D + \frac{2}{3}, \quad k_{\phi^i} = 2 \quad \forall i, \quad (5.19)$$

$$k_f = D - \frac{2}{3}, \quad (5.20)$$

für die anderen Felder findet man:

- Ansatz 1a:

$$k_u = -D + \frac{14}{3}, \quad k_\Psi = \frac{14}{3}; \quad (5.21)$$

- Ansatz 1b:

$$k_u = -D + \frac{2}{3}, \quad k_\Psi = \frac{2}{3}, \quad (5.22)$$

$$k_{\sigma^{1*}} = k_{\sigma^2} = \frac{8}{3}, \quad k_{\sigma^1} = k_{\sigma^{2*}} = \frac{4}{3}; \quad (5.23)$$

- Ansatz 2:

$$k_u = -D + \frac{2}{3}, \quad k_\Psi = \frac{2}{3}, \quad (5.24)$$

$$k_\sigma = \frac{4}{3}, \quad k_{\sigma^*} = \frac{8}{3}, \quad (5.25)$$

$$k_\theta = -D + \frac{4}{3}. \quad (5.26)$$

Bevor nun die exakten RG-Gleichungen aufgestellt werden, führe ich noch ein Symbol ein. Der Operator

$$\int_p \phi \frac{\delta}{\delta\phi}$$

wird als „Zähloperator“ verwendet, der in diesem Fall zählt, wie oft das Feld  $\phi$  in einem Term vorkommt. In gleicher Weise braucht man einen Operator, der zählt, wie viele Zeitableitungen ein Term enthält, da  $\partial_t$  wie eine skalierende Größe behandelt wird. Rein formal werde ich dafür das Symbol

$$\partial_t \frac{\delta}{\delta\partial_t}$$

verwenden; dies ist jedoch auf keinen Fall als Ableitung im mathematischen Sinne zu verstehen.

## 5.2 Die exakten RG-Gleichungen

Damit sind nun alle Informationen zusammengetragen, die zum Aufstellen der exakten RG-Gleichungen benötigt werden. Das Ergebnis lautet:

### 5.2.1 Ansatz 1a

$$\begin{aligned}
\dot{S} = & \int_p \left( \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_v}{2} \tilde{K}_v(p^2) + p^2 \tilde{K}'_v(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - 2\tilde{K}_v^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta v_i} v_i \right\} \\
& + \int_p \left( \frac{-D + \frac{2}{3} + \eta_f}{2} \tilde{K}_f(p^2) + p^2 \tilde{K}'_f(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta f_i} \frac{\delta S}{\delta f_i} - \frac{\delta}{\delta f_i} \frac{\delta S}{\delta f_i} - 2\tilde{K}_f^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta f_i} f_i \right\} \\
& + \int_p \left( \frac{D - \frac{14}{3} + \eta_u}{2} \tilde{K}_u(p^2) + p^2 \tilde{K}'_u(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta u_i} \frac{\delta S}{\delta u_i} - \frac{\delta}{\delta u_i} \frac{\delta S}{\delta u_i} - 2\tilde{K}_u^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta u_i} u_i \right\} \\
& + \sum_i \int_p \left( \frac{-2 + \eta_{\phi^i}}{2} \tilde{K}_{\phi^i}(p^2) + p^2 \tilde{K}'_{\phi^i}(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - \frac{\delta}{\delta \phi^i} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - 2\tilde{K}_{\phi^i}^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^i \right\} \\
& + 2 \int_p \left( \frac{1}{2} \left( \frac{14}{3} - \eta_{\Psi} \right) \tilde{K}_{\Psi}(p^2) + p^2 \tilde{K}'_{\Psi}(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\delta}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} + \tilde{K}_{\Psi}^{-1}(p^2) \left( \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \right) \right\} \\
& + \left( -D - \frac{1}{3} + \frac{\eta_v}{2} \right) \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} + \left( -D + \frac{1}{3} + \frac{\eta_f}{2} \right) \int_p f_i \frac{\delta S}{\delta f_i} \\
& + \left( -\frac{7}{3} + \frac{\eta_u}{2} \right) \int_p u_i \frac{\delta S}{\delta u_i} + \sum_i \frac{-D - 2 + \eta_{\phi^i}}{2} \int_p \phi^i \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \\
& + \frac{-D - \frac{14}{3} + \eta_{\Psi}}{2} \left( \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \right) \\
& - \int_p v_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \int_p f_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta f_i} - \int_p u_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta u_i} \\
& - \sum_i \int_p \phi^i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - \int_p \psi_i^* p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} - \int_p \psi_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \\
& - \frac{2}{3} \partial_t \frac{\delta S}{\delta \partial t} - \frac{\partial S}{\partial \Lambda} + DS.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

## 5.2.2 Ansatz 1b

$$\begin{aligned}
\dot{S} = & \int_p \left( \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_v}{2} \tilde{K}_v(p^2) + p^2 \tilde{K}'_v(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - 2\tilde{K}_v^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta v_i} v_i \right\} \\
& + \int_p \left( \frac{-D + \frac{2}{3} + \eta_f}{2} \tilde{K}_f(p^2) + p^2 \tilde{K}'_f(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta f_i} \frac{\delta S}{\delta f_i} - \frac{\delta}{\delta f_i} \frac{\delta S}{\delta f_i} - 2\tilde{K}_f^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta f_i} f_i \right\} \\
& + \int_p \left( \frac{D - \frac{2}{3} + \eta_u}{2} \tilde{K}_u(p^2) + p^2 \tilde{K}'_u(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta u_i} \frac{\delta S}{\delta u_i} - \frac{\delta}{\delta u_i} \frac{\delta S}{\delta u_i} - 2\tilde{K}_u^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta u_i} u_i \right\} \\
& + \sum_i \int_p \left( \frac{-2 + \eta_{\phi^i}}{2} \tilde{K}_\phi(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\phi(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - \frac{\delta}{\delta \phi^i} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - 2\tilde{K}_\phi^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^i \right\} \\
& + 2 \int_p \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} - \eta_\Psi \right) \tilde{K}_\Psi(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\Psi(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\delta}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} + \tilde{K}_\Psi^{-1}(p^2) \left( \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \right) \right\} \\
& + 2 \sum_i \int_p \left( \frac{1}{2} (2 - \eta_{\sigma^i}) \tilde{K}_\sigma(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\sigma(p^2) \right) \times \\
& \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \sigma^{i*}} \frac{\delta S}{\delta \sigma^i} - \frac{\delta}{\delta \sigma^{i*}} \frac{\delta S}{\delta \sigma^i} + \tilde{K}_\sigma^{-1}(p^2) \left( \sigma^{i*} \frac{\delta S}{\delta \sigma^{i*}} + \sigma^i \frac{\delta S}{\delta \sigma^i} \right) \right\} \\
& + (-D - \frac{1}{3} + \frac{\eta_v}{2}) \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} + (-D + \frac{1}{3} + \frac{\eta_f}{2}) \int_p f_i \frac{\delta S}{\delta f_i} \\
& + (-\frac{1}{3} + \frac{\eta_u}{2}) \int_p u_i \frac{\delta S}{\delta u_i} + \sum_i \frac{-D - 2 + \eta_{\phi^i}}{2} \int_p \phi^i \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \\
& + \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_\Psi}{2} \left( \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \right) \\
& + \frac{-D - \frac{8}{3} + \eta_{\sigma^1}}{2} \int_p \sigma^{1*} \frac{\delta S}{\delta \sigma^{1*}} + \frac{-D - \frac{4}{3} + \eta_{\sigma^1}}{2} \int_p \sigma^1 \frac{\delta S}{\delta \sigma^1} \\
& + \frac{-D - \frac{4}{3} + \eta_{\sigma^2}}{2} \int_p \sigma^{2*} \frac{\delta S}{\delta \sigma^{2*}} + \frac{-D - \frac{8}{3} + \eta_{\sigma^2}}{2} \int_p \sigma^2 \frac{\delta S}{\delta \sigma^1} \\
& - \int_p v_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \int_p f_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta f_i} - \int_p u_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta u_i} \\
& - \sum_i \int_p \phi^i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - \int_p \psi_i^* p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} - \int_p \psi_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \\
& - \sum_i \int_p \sigma^{i*} p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \sigma^{i*}} - \sum_i \int_p \sigma^i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \sigma^i}
\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{3}\partial_t \frac{\delta S}{\delta \partial_t} - \frac{\partial S}{\partial \Lambda} + DS. \quad (5.28)$$

### 5.2.3 Ansatz 2

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \int_p \left( \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_v}{2} \tilde{K}_v(p^2) + p^2 \tilde{K}'_v(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \frac{\delta}{\delta v_i} \frac{\delta S}{\delta v_i} - 2\tilde{K}_v^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta v_i} v_i \right\} \\ & + \int_p \left( \frac{-D + \frac{2}{3} + \eta_f}{2} \tilde{K}_f(p^2) + p^2 \tilde{K}'_f(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta f_i} \frac{\delta S}{\delta f_i} - \frac{\delta}{\delta f_i} \frac{\delta S}{\delta f_i} - 2\tilde{K}_f^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta f_i} f_i \right\} \\ & + \int_p \left( \frac{D - \frac{2}{3} + \eta_u}{2} \tilde{K}_u(p^2) + p^2 \tilde{K}'_u(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta u_i} \frac{\delta S}{\delta u_i} - \frac{\delta}{\delta u_i} \frac{\delta S}{\delta u_i} - 2\tilde{K}_u^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta u_i} u_i \right\} \\ & + \int_p \left( \frac{D - \frac{4}{3} + \eta_\theta}{2} \tilde{K}_\theta(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\theta(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \theta} \frac{\delta S}{\delta \theta} - \frac{\delta}{\delta \theta} \frac{\delta S}{\delta \theta} - 2\tilde{K}_\theta^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta \theta} \theta \right\} \\ & + \sum_i \int_p \left( \frac{-2 + \eta_{\phi^i}}{2} \tilde{K}_\phi(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\phi(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - \frac{\delta}{\delta \phi^i} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - 2\tilde{K}_\phi^{-1}(p^2) \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \phi^i \right\} \\ & + 2 \int_p \left( \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} - \eta_\Psi \right) \tilde{K}_\Psi(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\Psi(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} - \frac{\delta}{\delta \psi_i^*} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} + \tilde{K}_\Psi^{-1}(p^2) \left( \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \right) \right\} \\ & + 2 \int_p \left( \frac{1}{2} (2 - \eta_\sigma) \tilde{K}_\sigma(p^2) + p^2 \tilde{K}'_\sigma(p^2) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{\delta S}{\delta \sigma^*} \frac{\delta S}{\delta \sigma} - \frac{\delta}{\delta \sigma^*} \frac{\delta S}{\delta \sigma} + \tilde{K}_\sigma^{-1}(p^2) \left( \sigma^* \frac{\delta S}{\delta \sigma^*} + \sigma \frac{\delta S}{\delta \sigma} \right) \right\} \\ & + \left( -D - \frac{1}{3} + \frac{\eta_v}{2} \right) \int_p v_i \frac{\delta S}{\delta v_i} + \left( -D + \frac{1}{3} + \frac{\eta_f}{2} \right) \int_p f_i \frac{\delta S}{\delta f_i} \\ & + \left( -\frac{1}{3} + \frac{\eta_u}{2} \right) \int_p u_i \frac{\delta S}{\delta u_i} + \sum_i \frac{-D - 2 + \eta_\phi^i}{2} \int_p \phi^i \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \\ & + \left( -\frac{2}{3} + \frac{\eta_\theta}{2} \right) \int_p \theta \frac{\delta S}{\delta \theta} + \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_\Psi}{2} \left( \int_p \psi_i^* \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} + \int_p \psi_i \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \right) \\ & + \frac{-D - \frac{8}{3} + \eta_\sigma}{2} \int_p \sigma^* \frac{\delta S}{\delta \sigma^*} + \frac{-D - \frac{4}{3} + \eta_\sigma}{2} \int_p \sigma \frac{\delta S}{\delta \sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_p v_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta v_i} - \int_p f_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta f_i} - \int_p u_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta u_i} \\
& - \sum_i \int_p \phi^i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \phi^i} - \int_p \psi_i^* p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i^*} - \int_p \psi_i p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \psi_i} \\
& - \int_p \theta p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \theta} - \int_p \sigma^* p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \sigma^*} - \int_p \sigma p \frac{\partial'}{\partial p} \frac{\delta S}{\delta \sigma} \\
& - \frac{2}{3} \partial_t \frac{\delta S}{\delta \partial_t} - \frac{\partial S}{\partial \Lambda} + DS.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

### 5.3 Fazit

In diesem Kapitel wurden die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Kapitel kombiniert. Die hergeleitete RG-Gleichung (3.63') wurde an die Wirkungsmodelle der Turbulenz angepasst, das heißt insbesondere für alle vorkommenden Felder formuliert. Die für das endgültige Aufstellen der Gleichungen nötigen Konstanten wurden zum Teil der K41-Theorie, zum Teil den Fourier-transformierten der Wirkungen aus dem vorherigen Kapitel entnommen. Dabei wurde die Re-parametrisierungsinvarianz der Felder in der Art ausgenutzt, dass eine beliebige Definition der kanonischen Dimension eines Feldes möglich ist - ich habe mich, zweckmäßigerweise, für die Definition entschieden, die dazu führt, dass die Mehrpunktfunktionen der Theorie in der Nähe des trivialen Fixpunkts gemäß der K41-Vorhersage skalieren. Dieser Punkt wird analytisch und numerisch in den nächsten Kapiteln überprüft, und bestätigt.

Die RG-Gleichungen, die in diesem Kapitel vorgestellt werden, sehen sehr kompliziert aus, sind es aber bei näherem Hinsehen nicht. Man kann die verschiedenen Beiträge der einzelnen Felder gut voneinander unterscheiden; jeder Beitrag für sich zeigt die Nähe zur Polchinski-Gleichung. Die Gleichungen (5.27), (5.28) und (5.29) stehen darüber hinaus in einer Form zur Verfügung, die eine Ableitungsentwicklung bereits erleichtert.

# Kapitel 6

## Die Ableitungsentwicklung

Die im vorangegangenen Kapitel hergeleiteten RG-Gleichungen sind in der exakten Form nicht handhabbar. Letztlich beschreiben sie als Funktionaldifferentialgleichungen unendlich viele Freiheitsgrade zugleich. Da exakte Lösungswege fehlen, ist man darauf angewiesen, die Gleichungen zu approximieren. Eine bewährte Methode ist die Ableitungsentwicklung.

### 6.1 Einige Erläuterungen zur Aufstellung der Ableitungsentwicklung

Bei dieser Art der Approximation der Wirkung werden die Terme sortiert nach der Anzahl von Ortsableitungen, die auf die Felder wirken, beziehungsweise nach Potenzen von  $p$  nach Fouriertransformation. Die Terme werden dann so zusammengefasst, dass man genau einen Term erhält, der gar keine Ableitungen enthält. Bei allen anderen Termen sorgt man durch partielle Integrationen dafür, dass keine Terme mehr auftreten, die ineinander umgeformt werden können (die Entwicklung soll also eindeutig sein). Beispielsweise sieht das für die skalare Theorie so aus:

$$S \propto \int_x V(\phi) + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 K(\phi) + \mathcal{O}(\partial^4). \quad (6.1)$$

Dann nähert man so viele Felder wie möglich als konstant an: Bei dem Term, der keine Ableitungen enthält, also alle (wodurch eine divergente Konstante auftaucht, die aber endlich ist, wenn man die Physik auf ein endliches Volumen begrenzt); Felder, die abgeleitet werden, darf man natürlich nicht als konstant annehmen. Außerdem gilt, dass wenn ein Feld nicht als konstant angenommen wird, mindestens noch ein zweites nicht so approximiert werden darf, weil sonst der Term durch die Deltafunktion in den Impulsen trivial wird.

Die entstandene Wirkung setzt man nun in die RG-Gleichung ein und vergleicht, welcher Term auf der rechten Seite der RG-Gleichung zu welchem auf der linken Seite einen Beitrag liefert.

Die Ableitungsentwicklung funktioniert bei der skalaren Feldtheorie recht gut. Sie führt auf ein System gekoppelter Differentialgleichungen, die man mit Hilfe der Numerik zu lösen versucht.<sup>1</sup> Eine Ableitungsentwicklung der hergeleiteten Wirkungen ist nicht so gradlinig und einfach, wie das für die skalare Theorie der Fall ist. Man sieht sich mehreren Problemen ausgesetzt: Zum einen enthält die Theorie Grassmann-Felder, zum anderen Felder, die vektorartig sind, und mit denen eine Ableitung kontrahieren kann (zum Beispiel zu einer Divergenz). Als drittes ist zu berücksichtigen, dass sowohl Zeit- als auch Ortsableitungen in der Theorie vorkommen, und da hier nichtrelativistisch gearbeitet wird, müssen beide Ableitungsarten getrennt voneinander betrachtet werden.

---

<sup>1</sup>Nachlesen lässt sich dies zum Beispiel in den Artikeln von Comellas, [Com 98], und Hasenfratz/Hasenfratz, [HH 86].

Bei Feldtheorien, die Grassmann-Felder enthalten, reicht eine Ableitungsentwicklung allein nicht aus, man hat auch nach den Potenzen der Grassmann-Felder zu entwickeln. Dies liegt letztlich daran, dass man nur eine endliche Anzahl von unabhängigen Grassmann-Variablen am selben Ort zur Verfügung hat, und das Produkt von zwei gleichen Grassmann-Feldern am selben Ort Null geben muss. Ein Beispiel: Die RG-Gleichung erzeuge als Beitrag für einen Term das Produkt der Terme  $A(\psi, \psi^*)$  und  $B(\psi, \psi^*)$ . In welcher Form hängen  $A$  und  $B$  von den Grassmann-Feldern ab? Enthält das Produkt dann zwei gleiche Grassmann-Felder am selben Ort, so verschwindet der Beitrag; das Produkt der Koeffizienten wird das im Allgemeinen nicht.

Man kann also nicht einfach, wie im skalaren Fall, die Koeffizienten vor den verschiedenen Ableitungstermen verrechnen, weil sie im Allgemeinen eine Anzahl von Grassmann-Feldern enthalten. Man muss genau buchhalten, welche Felder sich wo verbergen. Dies führt letztlich dazu, dass die Wirkung nicht nur nach den verschiedenen Ableitungstermen sortiert, sondern auch eine Entwicklung in den verschiedenen möglichen Kombinationen der Grassmann-Felder vorgenommen habe.

Nun tritt als nächstes Problem auf, dass einige Felder vektorartig sind, also noch mit verschiedenen anderen Feldern kontrahieren können. Damit die Entwicklung letztlich eindeutig wird und alle Eventualitäten umfasst, bleibt einem nichts anderes übrig, als auch die Abhängigkeit von allen anderen vektorartigen Feldern und wie diese kontrahieren explizit aus den Koeffizienten herauszuziehen. Der Vollständigkeit halber entwickelt man auch nach Potenzen der übrigen Felder.

Genau genommen macht man dann sogar zwei Ableitungsentwicklungen: Für die Orts- wie für die Zeitableitungen. In der Quantenfeldtheorie ist dies natürlich nicht nötig, da man kovariant arbeitet; hier allerdings gibt es erstmal keinen Zusammenhang zwischen Ort und Zeit.

Damit werden aus den Koeffizienten der Wirkung normale Zahlen, die in gewohnter Weise miteinander verrechnet werden können.

Ein weiterer Vorteil dieses Vorgehens liegt darin, dass die RG-Gleichung aufbricht in ein (unendliches) Set von gekoppelten, algebraischen Gleichungen. Die Schreibweise lässt es aber zu, all diese unendlich vielen Gleichungen in einer Art Tensorschreibweise als eine einzige (wenn auch komplizierte) Gleichung pro Term in der Ableitungsentwicklung zu schreiben. Das Gesagte wird an den detaillierten Ausführungen der nächste Abschnitte deutlicher.

## 6.2 Die Wirkungen

Um zu zeigen, dass eine Ableitungsentwicklung in der oben beschriebenen Art möglich ist, wurde das Modell 1a bis zur ersten Ordnung in den Ableitungen entwickelt. Für die Modelle 1b und 2 werden nur die Ratengleichungen der nullten Ordnung angegeben, da diese Modelle nicht numerisch untersucht wurden. Durch Vergleich mit dem Modell 1a ist aber eine äquivalente Herleitung der einzelnen Beiträge ohne Zweifel leicht möglich.

### 6.2.1 Die Lokale Potentialapproximation (LPA)

In der lokalen Potentialapproximation hat man es nur mit dem Term zu tun, der keine Ableitungen enthält, sowie dem kinetischen Teil, der aber nicht mitvariiert wird und somit auch nicht betrachtet werden muss. Wie bereits erklärt wurde, sind die Terme nach Potenzen der Grassmann-Felder zu entwickeln, und zusätzlich aus Feldkombinationen zusammensetzen, die invariant unter  $O(3)$ -Transformationen sind. Deswegen entwickelt man den Potentialterm wie folgt:

- Modell 1a:

$$\begin{aligned}
 V = \sum_{x,r,q,A} & \sum_{(x_1,x_2,\dots,x_6)}^q V_{(r_1,r_2,\dots,r_6)}^{(A_1,A_2,\dots,A_6)} \\
 & \times (vv)^{A_1} (uu)^{A_2} (ff)^{A_3} (vu)^{A_4} (vf)^{A_5} (uf)^{A_6} \\
 & \times (v\psi^*)^{r_1} (v\psi)^{r_2} (u\psi^*)^{r_3} (u\psi)^{r_4} (f\psi^*)^{r_5} (f\psi)^{r_6} (\psi^*\psi)^q \\
 & \times (\phi^1)^{x_1} (\phi^2)^{x_2} (\phi^3)^{x_3} (\phi^4)^{x_4} (\phi^5)^{x_5} (\phi^6)^{x_6},
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

- Modell 1b:

$$\begin{aligned}
 V = \sum_{x,r,s,q,A} & \sum_{(x_1,x_2,\dots,x_9)}^q V_{(r_1,r_2,\dots,r_6)(s_1,s_2,\dots,s_4)}^{(A_1,A_2,\dots,A_6)} \\
 & \times (vv)^{A_1} (uu)^{A_2} (ff)^{A_3} (vu)^{A_4} (vf)^{A_5} (uf)^{A_6} \\
 & \times (v\psi^*)^{r_1} (v\psi)^{r_2} (u\psi^*)^{r_3} (u\psi)^{r_4} (f\psi^*)^{r_5} (f\psi)^{r_6} (\psi^*\psi)^q \\
 & \times (\sigma^{1*})^{s_1} (\sigma^1)^{s_2} (\sigma^{2*})^{s_3} (\sigma^2)^{s_4} (\phi^1)^{x_1} \dots (\phi^9)^{x_9},
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

- Modell 2:

$$\begin{aligned}
 V = \sum_{x,r,s,q,A} & \sum_{(x_1,x_2,x_3,x_4)}^q V_{(r_1,r_2,\dots,r_6)(s_1,s_2)}^{(A_1,A_2,\dots,A_6)} \\
 & \times (vv)^{A_1} (uu)^{A_2} (ff)^{A_3} (vu)^{A_4} (vf)^{A_5} (uf)^{A_6} \\
 & \times (v\psi^*)^{r_1} (v\psi)^{r_2} (u\psi^*)^{r_3} (u\psi)^{r_4} (f\psi^*)^{r_5} (f\psi)^{r_6} (\psi^*\psi)^q \\
 & \times (\sigma^*)^{s_1} (\sigma)^{s_2} (\phi^1)^{x_1} \dots (\phi^9)^{x_3} (\theta)^{x_4}.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Einzigste Ausnahme dieser Konvention bilden die Propagatoren, da diese, zum Beispiel für das Feld  $v$ , wie folgt definiert wurden:

$$S_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \tilde{K}^{-1} m_v^2 (v, v). \tag{6.5}$$

Der Vorfaktor  $\frac{1}{2}\tilde{K}^{-1}$  ist in den Rechnungen zu berücksichtigen, da er explizit in die Herleitung der RG-Gleichung eingeflossen ist.

Die RG-Gleichungen verwandeln sich damit in Ratengleichungen für die Größen

- Modell 1a:

$${}_{(x_1, x_2, \dots, x_6)} qV_{(r_1, r_2, \dots, r_6)}^{(A_1, A_2, \dots, A_6)}, \quad (6.6)$$

- Modell 1b:

$${}_{(x_1, x_2, \dots, x_9)} qV_{(r_1, r_2, \dots, r_6)(s_1, s_2, \dots, s_4)}^{(A_1, A_2, \dots, A_6)}, \quad (6.7)$$

- Modell 2:

$${}_{(x_1, x_2, x_3, x_4)} qV_{(r_1, r_2, \dots, r_6)(s_1, s_2)}^{(A_1, A_2, \dots, A_6)}. \quad (6.8)$$

Für die Parameter gilt offensichtlich:

- Modell 1a:

$$x_i \in \mathbf{N}_0, \quad A_i \in \mathbf{N}_0, \quad (6.9)$$

$$r_i \in \{0, 1\}, \quad q \in \{0, \dots, D - r_1 - r_3 - r_5\}, \quad (6.10)$$

$$r_1 + r_3 + r_5 = r_2 + r_4 + r_6, \quad (6.11)$$

- Modell 1b:

$$x_i \in \mathbf{N}_0, \quad A_i \in \mathbf{N}_0, \quad (6.12)$$

$$r_i, s_i \in \{0, 1\}, \quad q \in \{0, \dots, D - r_1 - r_3 - r_5\}, \quad (6.13)$$

$$r_1 + r_3 + r_5 + s_1 + s_3 = r_2 + r_4 + r_6 + s_2 + s_4, \quad (6.14)$$

- Modell 2:

$$x_i \in \mathbf{N}_0, \quad A_i \in \mathbf{N}_0, \quad (6.15)$$

$$r_i, s_i \in \{0, 1\}, \quad q \in \{0, \dots, D - r_1 - r_3 - r_5\}, \quad (6.16)$$

$$r_1 + r_3 + r_5 + s_1 = r_2 + r_4 + r_6 + s_2. \quad (6.17)$$

Ich lege fest, dass die definierten Symbole Null sein sollen für jede Kombination der Indizes, die obige Relationen nicht erfüllen.

## 6.2.2 Erste Ordnung der Ableitungsentwicklung

Hier sind die Größen, mit denen gearbeitet werden muss, noch komplizierter. Die Koeffizienten sind von der Gestalt:

$${}_{(x_1, x_2, \dots, x_6)} qZ_{(r_1, r_2, \dots, r_6)}^{(A_1, A_2, \dots, A_6)}(\bar{a}, \bar{b}; \bar{\psi}, \bar{v}; p_1, p_2). \quad (6.18)$$

Die Erklärung für die Indizes, die um das  $Z$  herum verteilt sind, ist dieselbe wie in der LPA für  $V$ , die Terme in der Klammer kommen auf andere Art zustande. Wie bereits gesagt, haben die in der ersten Ordnung der Ableitungsentwicklung neu hinzukommenden Terme einen Anteil, der aus einem Integral über zwei Felder und einer Ableitung besteht. Stellt man sich kurz die Terme vor, in denen die Felder noch nicht als konstant angenähert sind, so haben zwei Felder eine Sonderrolle: Zum einen das Feld, das von  $\partial_i$  abgeleitet wird, und das vektorartige Feld, das mit  $\partial_i$  kontrahiert, zum Beispiel

$$v_i(\partial_i u_j). \quad (6.19)$$

Durch partielle Integration kann man immer dafür sorgen, dass es sich dabei nicht um ein und dasselbe Feld handelt. Ich lege fest, dass diese beiden Felder jene sein sollen, die als einzige nicht als konstant angenähert werden und also im Integral stehen.  $\bar{a}$  kodiere dann das Feld, das abgeleitet wird, und  $\bar{b}$  das Feld, das mit  $p$  kontrahiert. Dabei kodiere ich wie folgt:

$$1 \leftrightarrow v, \quad 2 \leftrightarrow u, \quad 3 \leftrightarrow f, \quad (6.20)$$

$$4 \leftrightarrow \psi^*, \quad 5 \leftrightarrow \psi, \quad 6 \dots 11 \leftrightarrow \phi^1 \dots \phi^6. \quad (6.21)$$

Damit ist klar:  $\bar{a} \in \{1, \dots, 11\}$  und  $\bar{b} \in \{1, \dots, 5\}$ . Das nächste Feld, das eine Sonderrolle spielt, ist das Feld, mit dem dasjenige kontrahiert, das abgeleitet wird, wenn dieses ein vektorartiges ist. Dies werde mit  $\bar{\psi}$  und  $\bar{v}$  kodiert, wobei gilt:  $\bar{\psi} \in \{0, 4, 5\}$  und  $\bar{v} \in \{0, 1, 2, 3\}$ , wobei natürlich die Null heißen soll, dass kein solches Feld vorliegt. Im Prinzip ist die Notation hier umfangreicher als sie sein müsste, da man die Information aus  $\bar{\psi}$  und  $\bar{v}$  auch in eine einzige Variable kodieren könnte. Ich habe mich für zwei Variablen entschieden, weil mir das half, die Übersicht in den doch recht umfangreichen Termen der Ratengleichungen nicht zu verlieren.

Schließlich ist es erwünscht, dass die Koeffizienten normale Zahlen darstellen, also insbesondere Skalare, die miteinander vertauschen. Um das zu erreichen, muss ich eventuell in  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  oder  $\bar{\psi}$  kodierte Grassmann-Felder wieder ausgleichen, indem ich explizit Kontraktionen der jeweils konjugierten Grassmann-Felder mit "normalen" Feldern aus dem restlichen Term herausziehe.  $p_1$  und  $p_2$  können also die Werte  $0, r_1 \dots r_6$  annehmen, wobei hier z.B.  $r_1$  als Symbol gemeint ist, und nicht als Variable. Natürlich könnte man die Terme auch in der in der LPA definierten Entwicklung stehen lassen, aber diese Handhabung erleichtert die Rechnung. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass nur  $p_1$  besetzt wird, wenn nur ein Ausgleichsterm benötigt wird.

Für die um  $Z$  verteilten Indizes gelten natürlich die gleichen Einschränkungen wie in der lokalen Potentialapproximation. Für die Variablen in der Klammer gelten etwas kompliziertere Regeln, die sich aber aus ihrer Bedeutung leicht erschließen lassen. Es sei auf die zusätzliche Regel hingewiesen:

$$r_i = 0 \quad \text{für} \quad p_1 = r_i \quad \text{oder} \quad p_2 = r_i. \quad (6.22)$$

Wie auch in der lokalen Potentialapproximation gelte hier, dass alle Koeffizienten Null ergeben sollen, deren Indizes und Variablen keine „zulässige“ Kombination darstellen.

### 6.2.3 Die Zeitableitungen

Sowohl der Potentialterm, als auch die Terme mit einer Ableitung nach dem Ort werden natürlich noch nach Ordnung der Ableitungen nach der Zeit entwickelt, und zwar bis zur Ordnung zwei. Deswegen erhält jeder Term noch zusätzlich die Abhängigkeit:

$$\Gamma[\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2], \quad (6.23)$$

wobei Der angibt, wieviele Zeitableitungen der Term enthält,  $K_1$  und  $K_2$  zeigen an, in welchen Untertermen sich die Ableitungen verbergen (zum Beispiel  $A_1, p_2 r_1$ ), und letztlich sagen  $L_1$  und  $L_2$  aus, welche Felder nach der Zeit abgeleitet werden, also zum Beispiel  $v, f$ .

### 6.3 Die Ratengleichungen

Um nicht unnötig viele Indizes notieren zu müssen, werden im Folgenden nur die Indizes angegeben, die von einer Konvention abweichen, die ich für die einzelnen Terme setze. So sollen für Terme, in denen zwei Koeffizienten  $\Gamma$ ,  $\Theta$  vorkommen (die jeweils für  $V$  und  $Z$  stehen können), folgende Konvention gelten:

$$\Gamma\Theta \rightsquigarrow_{(w_1, w_2, \dots, w_6)}^p \Gamma_{(l_1, l_2, \dots, l_6)}^{(m_1, m_2, \dots, m_6)} \quad (x_1 - w_1, x_2 - w_2, \dots, x_6 - w_6) \Theta_{(r_1 - l_1, r_2 - l_2, \dots, r_6 - l_6)}^{(A_1 - m_1, A_2 - m_2, \dots, A_6 - m_6)}, \quad (6.24)$$

und bei nur einem Koeffizienten  $\Gamma$ :

$$\Gamma \rightsquigarrow_{(x_1, x_2, \dots, x_6)}^q \Gamma_{(r_1, r_2, \dots, r_6)}^{(A_1, A_2, \dots, A_6)}. \quad (6.25)$$

Um Abweichungen von diesen Konventionen deutlich zu machen, gehe ich wie folgt vor. Wird ein Index zum Beispiel um 1, verglichen mit dem konventionellen Wert, erhöht, schreibe ich  $V^{A_4+1}$ , wird ein Index durch eine andere Größe (hier auch eine 1) ersetzt, verwende ich dafür das Symbol „ $\circ$ “, also zum Beispiel  $V_{r_1 \circ 1}$ .

Die Gleichungen sollen nur gelten für Größen, deren Indizes und Variablen eine zulässige Kombination ergeben. Die hier neu auftretenden Symbole werden im Anhang definiert.

Dort treten als zusätzliche Variablen zur Indizierung der Zeitableitungen die Größen  $E$  und  $E'$  auf. Damit ist gemeint, dass die Zeitableitung an dem vektorartigen Feld steht, das übrig bleibt, wenn man das jeweils andere Feld eines Skalarproduktes durch Feldableitung „verliert“. Es taucht nur in Zwischenrechnungen auf, da es am Ende der Rechnung mit einem anderen Feld kontrahiert wird.

Außerdem soll auf eine „Propagatorkorrektur“ (PK) hingewiesen werden. Diese trägt der expliziten Abhängigkeit des von mir eingeführten Propagators von der Cutoffskala  $\Lambda$  Rechnung, ist also nur dann nötig, wenn die Größe  $V$ , die gerade untersucht wird, zum kinetischen Teil der Wirkung gehört. Zum Beispiel beträgt die Korrektur für den kinetischen Term der  $v$ -Felder im Modell 1a:

$$\left(-D - \frac{2}{3} + \eta_v\right) * V. \quad (6.26)$$

Für die Propagatoren der anderen Felder und die in den anderen Modellen geht das analog. Alle anderen Terme sollten selbsterklärend sein.

#### 6.3.1 Gleichungen nullter Ordnung der Ableitungsentwicklung

- Modell 1a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \binom{q}{(x)} V_{(r)}^{(A)} \right) &= \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_v}{2} \tilde{K}_v(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{v,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{v,0} \right) \\ &+ \frac{D - \frac{14}{3} + \eta_u}{2} \tilde{K}_u(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{u,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{u,0} \right) \\ &+ \frac{-D + \frac{2}{3} + \eta_f}{2} \tilde{K}_f(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{f,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{f,0} \right) \\ &+ \left( -\frac{14}{3} + \eta_\Psi \right) \tilde{K}_\Psi(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{\Psi,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{\Psi,0} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^6 \frac{-2 + \eta_{\phi^i}}{2} \tilde{K}_{\phi^i}(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{\phi^i,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{\phi^i,0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{\eta_v}{2} \right) (2A_1 + A_4 + A_5 + r_1 + r_2) \right. \\
& + \left( -D + \frac{7}{3} - \frac{\eta_u}{2} \right) (2A_2 + A_4 + A_6 + r_3 + r_4) \\
& + \left( -\frac{1}{3} - \frac{\eta_f}{2} \right) (2A_3 + A_5 + A_6 + r_5 + r_6) \\
& + \left( -\frac{D}{2} + \frac{7}{3} - \frac{\eta_\Psi}{2} \right) (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + 2q) \\
& + \left. \sum_{i=1}^6 \left( -\frac{D}{2} + 1 - \frac{\eta_{\phi^i}}{2} \right) x_i - \frac{2}{3} \text{Der} + D + \text{PK} \right\} \\
& \times {}_{(x)}^q V_{(r)}^{(A)},
\end{aligned}$$

• Modell 1b:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( {}_{(x)}^q V_{(r)(s)}^{(A)} \right) &= \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_v}{2} \tilde{K}_v(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{v,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{v,0} \right) \\
& + \frac{D - \frac{2}{3} + \eta_u}{2} \tilde{K}_u(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{u,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{u,0} \right) \\
& + \frac{-D + \frac{2}{3} + \eta_f}{2} \tilde{K}_f(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{f,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{f,0} \right) \\
& + \left( -\frac{2}{3} + \eta_\Psi \right) \tilde{K}_\Psi(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{\Psi,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{\Psi,0} \right) \\
& + \sum_{i=1}^9 \frac{-2 + \eta_{\phi^i}}{2} \tilde{K}_{\phi^i}(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{\phi^i,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{\phi^i,0} \right) \\
& + \sum_{i=1}^2 (-2 + \eta_{\sigma^i}) \tilde{K}_{\sigma^i}(0) \left( \left\langle \left\langle V, V \right\rangle \right\rangle_{\sigma^i,0} - \left\langle \left\langle V \right\rangle \right\rangle_{\sigma^i,0} \right) \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{\eta_v}{2} \right) (2A_1 + A_4 + A_5 + r_1 + r_2) \right. \\
& + \left( -D + \frac{1}{3} - \frac{\eta_u}{2} \right) (2A_2 + A_4 + A_6 + r_3 + r_4) \\
& + \left( -\frac{1}{3} - \frac{\eta_f}{2} \right) (2A_3 + A_5 + A_6 + r_5 + r_6) \\
& + \left( -\frac{D}{2} + \frac{1}{3} - \frac{\eta_\Psi}{2} \right) (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + 2q) \\
& + \left( -\frac{D}{2} + \frac{4}{3} - \frac{\eta_{\sigma^1}}{2} \right) s_1 + \left( -\frac{D}{2} + \frac{2}{3} - \frac{\eta_{\sigma^1}}{2} \right) s_2 \\
& + \left( -\frac{D}{2} + \frac{2}{3} - \frac{\eta_{\sigma^2}}{2} \right) s_3 + \left( -\frac{D}{2} + \frac{4}{3} - \frac{\eta_{\sigma^2}}{2} \right) s_4 \\
& + \left. \sum_{i=1}^9 \left( -\frac{D}{2} + 1 - \frac{\eta_{\phi^i}}{2} \right) x_i - \frac{2}{3} \text{Der} + D + \text{PK} \right\} \\
& \times {}_{(x)}^q V_{(r)(s)}^{(A)},
\end{aligned}$$

- Modell 2:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( {}^q V_{(r)(s)}^{(A)} \right) = & -\frac{D - \frac{2}{3} + \eta_v}{2} \tilde{K}_v(0) \left( \langle \langle V, V \rangle \rangle_{v,0} - \langle \langle V \rangle \rangle_{v,0} \right) \\
& + \frac{D - \frac{2}{3} + \eta_u}{2} \tilde{K}_u(0) \left( \langle \langle V, V \rangle \rangle_{u,0} - \langle \langle V \rangle \rangle_{u,0} \right) \\
& + \frac{-D + \frac{2}{3} + \eta_f}{2} \tilde{K}_f(0) \left( \langle \langle V, V \rangle \rangle_{f,0} - \langle \langle V \rangle \rangle_{f,0} \right) \\
& + \left( -\frac{2}{3} + \eta_\Psi \right) \tilde{K}_\Psi(0) \left( \langle \langle V, V \rangle \rangle_{\Psi,0} - \langle \langle V \rangle \rangle_{\Psi,0} \right) \\
& + \sum_{i=1}^3 \frac{-2 + \eta_{\phi^i}}{2} \tilde{K}_{\phi^i}(0) \left( \langle \langle V, V \rangle \rangle_{\phi^i,0} - \langle \langle V \rangle \rangle_{\phi^i,0} \right) \\
& + \frac{D - \frac{4}{3} + \eta_\theta}{2} \tilde{K}_\theta(0) \left( \langle \langle V, V \rangle \rangle_{\theta,0} - \langle \langle V \rangle \rangle_{\theta,0} \right) \\
& + (-2 + \eta_\sigma) \tilde{K}_\sigma(0) \left( \langle \langle V, V \rangle \rangle_{\sigma^i,0} - \langle \langle V \rangle \rangle_{\sigma^i,0} \right) \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{\eta_v}{2} \right) (2A_1 + A_4 + A_5 + r_1 + r_2) \right. \\
& + \left( -D + \frac{1}{3} - \frac{\eta_u}{2} \right) (2A_2 + A_4 + A_6 + r_3 + r_4) \\
& + \left( -\frac{1}{3} - \frac{\eta_f}{2} \right) (2A_3 + A_5 + A_6 + r_5 + r_6) \\
& + \left( -\frac{D}{2} + \frac{1}{3} - \frac{\eta_\Psi}{2} \right) (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + 2q) \\
& + \left( -\frac{D}{2} + \frac{4}{3} - \frac{\eta_\sigma}{2} \right) s_1 + \left( -\frac{D}{2} + \frac{2}{3} - \frac{\eta_\theta}{2} \right) s_2 \\
& + \sum_{i=1}^3 \left( -\frac{D}{2} + 1 - \frac{\eta_{\phi^i}}{2} \right) x_i + \left( -D + \frac{2}{3} - \frac{\eta_\theta}{2} \right) x_4 \\
& \left. + -\frac{2}{3} \text{Der} + D + \text{PK} \right\} \\
& \times {}^q V_{(r)(s)}^{(A)}.
\end{aligned}$$

### 6.3.2 Lokale Potentialapproximation (LPA)

Beschränkt man sich ausschließlich auf Terme nullter Ordnung in den Ableitungen, und sieht diese nicht als Teil einer höheren Ordnung an, so ist es vorteilhaft, eine RG-Gleichung vom Typ (3.64'), statt wie angegeben vom Typ (3.63'), zu verwenden, da die Felder hier zunächst mit den kanonischen Dimensionen skalieren, was im anderen Fall durch das Skalieren der Ableitungen verschleiert wird. Für Modell 1a erhält man so:

- Modell 1a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \binom{q}{(x)} V_{(r)}^{(A)} &= \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_v}{2} \tilde{K}_v(0) \left( \langle \langle \langle V, V \rangle \rangle \rangle_{v,0} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{v,0} \right) \\
&+ \frac{D - \frac{14}{3} + \eta_u}{2} \tilde{K}_u(0) \left( \langle \langle \langle V, V \rangle \rangle \rangle_{u,0} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{u,0} \right) \\
&+ \frac{-D + \frac{2}{3} + \eta_f}{2} \tilde{K}_f(0) \left( \langle \langle \langle V, V \rangle \rangle \rangle_{f,0} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{f,0} \right) \\
&+ \left( -\frac{14}{3} + \eta_\Psi \right) \tilde{K}_\Psi(0) \left( \langle \langle \langle V, V \rangle \rangle \rangle_{\Psi,0} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{\Psi,0} \right) \\
&+ \sum_{i=1}^6 \frac{-2 + \eta_{\phi^i}}{2} \tilde{K}_{\phi^i}(0) \left( \langle \langle \langle V, V \rangle \rangle \rangle_{\phi^i,0} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{\phi^i,0} \right) \\
&+ \left\{ \left( D + \frac{1}{3} - \frac{\eta_v}{2} \right) (2A_1 + A_4 + A_5 + r_1 + r_2) \right. \\
&+ \left( \frac{7}{3} - \frac{\eta_u}{2} \right) (2A_2 + A_4 + A_6 + r_3 + r_4) \\
&+ \left( D - \frac{1}{3} - \frac{\eta_f}{2} \right) (2A_3 + A_5 + A_6 + r_5 + r_6) \\
&+ \left( \frac{D}{2} + \frac{7}{3} - \frac{\eta_\Psi}{2} \right) (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + 2q) \\
&+ \left. \sum_{i=1}^6 \left( \frac{D}{2} + 1 - \frac{\eta_{\phi^i}}{2} \right) x_i - \frac{2}{3} \text{Der} + \text{PK} \right\} \\
&\times \binom{q}{(x)} V_{(r)}^{(A)},
\end{aligned}$$

### 6.3.3 Gleichungen erster Ordnung der Ableitungsentwicklung, Modell 1a

Die Gleichung für  $V$  ist mit der nullter Ordnung identisch, es kommt neu hinzu:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \binom{q}{(x)} Z_{(r)}^{(A)}(\bar{a}, \bar{b}; \bar{\psi}, \bar{v}; p_1, p_2) &= \frac{-D - \frac{2}{3} + \eta_v}{2} \tilde{K}_v(0) \left( 2 \langle \langle \langle V, Z \rangle \rangle \rangle_{v,0} + 2 \langle \langle \langle V, Z \rangle \rangle \rangle_{v,1} - \langle \langle \langle Z \rangle \rangle \rangle_{v,0} - \langle \langle \langle Z \rangle \rangle \rangle_{v,1} \right) \\
&+ \frac{D - \frac{14}{3} + \eta_u}{2} \tilde{K}_u(0) \left( 2 \langle \langle \langle V, Z \rangle \rangle \rangle_{u,0} + 2 \langle \langle \langle V, Z \rangle \rangle \rangle_{u,1} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{u,0} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{u,1} \right) \\
&+ \frac{-D + \frac{2}{3} + \eta_f}{2} \tilde{K}_f(0) \left( 2 \langle \langle \langle V, Z \rangle \rangle \rangle_{f,0} + 2 \langle \langle \langle V, Z \rangle \rangle \rangle_{f,1} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{f,0} - \langle \langle \langle V \rangle \rangle \rangle_{f,1} \right) \\
&+ \left( -\frac{14}{3} + \eta_\Psi \right) \tilde{K}_\Psi(0) \left( \langle \langle \langle V, Z \rangle \rangle \rangle_{\Psi,0} + \langle \langle \langle Z, V \rangle \rangle \rangle_{\Psi,0} + \langle \langle \langle V, Z \rangle \rangle \rangle_{\Psi,1} \right. \\
&\quad \left. - \langle \langle \langle Z \rangle \rangle \rangle_{\Psi,0} - \langle \langle \langle Z \rangle \rangle \rangle_{\Psi,1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^6 \frac{-2 + \eta_{\phi^i}}{2} \tilde{K}_{\phi}(0) \left( 2 \left\langle \left\langle V, Z \right\rangle \right\rangle_{\phi^i, 0} + 2 \left\langle \left\langle V, Z \right\rangle \right\rangle_{\phi^i, 1} - \left\langle \left\langle Z \right\rangle \right\rangle_{\phi^i, 0} \right) \\
& + \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{\eta_v}{2} \right) (2A_1 + A_4 + A_5 + r_1 + r_2 + \delta_{p_2, r_1} + \delta_{p_2, r_2} + \delta_{p_1, r_1} + \delta_{p_1, r_2} + \delta_{\bar{v}, 1} + \delta_{\bar{a}, 1} + \delta_{\bar{b}, 1}) \right. \\
& \left( -D + \frac{7}{3} - \frac{\eta_u}{2} \right) (2A_2 + A_4 + A_6 + r_3 + r_4 + \delta_{p_2, r_3} + \delta_{p_2, r_4} + \delta_{p_1, r_3} + \delta_{p_1, r_4} + \delta_{\bar{v}, 2} + \delta_{\bar{a}, 2} + \delta_{\bar{b}, 2}) \\
& + \left( -\frac{1}{3} - \frac{\eta_f}{2} \right) (2A_3 + A_5 + A_6 + r_5 + r_6 + \delta_{p_2, r_5} + \delta_{p_2, r_6} + \delta_{p_1, r_5} + \delta_{p_1, r_6} + \delta_{\bar{v}, 3} + \delta_{\bar{a}, 3} + \delta_{\bar{b}, 3}) \\
& + \left( -\frac{D}{2} + \frac{7}{3} - \frac{\eta_{\Psi}}{2} \right) (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + 2q + (1 - \delta_{p_2, 0}) + (1 - \delta_{p_1, 0}) + \delta_{\bar{\psi}, 4} + \delta_{\bar{a}, 4} + \delta_{\bar{b}, 4}) \\
& \left. + \sum_{i=1}^6 \left( -\frac{D}{2} + 1 - \frac{\eta_{\phi^i}}{2} \right) (x_i + \delta_{\bar{a}, i+5}) - \frac{2}{3} \text{Der} + D - 1 \right\} \\
& \times \binom{q}{(x)} Z_{(r)}^{(A)}(\bar{a}, \bar{b}; \bar{\psi}, \bar{v}; p_1, p_2)
\end{aligned}$$

## 6.4 Kanonisches Skalieren in der LPA und der Faktor $\tilde{K}(0)$

Besonderes Augenmerk legt man bei RG-Untersuchungen auf das kanonische Skalieren der Mehrpunktfunktionen in der Nähe des trivialen Fixpunkts. Es ist instruktiv, sich zu verdeutlichen, wie sich dieses Skalieren ergibt, man erkennt darin viel von der Wirkungsweise der RG-Gleichung. Deswegen soll hier, beispielhaft an zwei Operatoren (nämlich  $\langle vv \rangle$  und  $\langle vvvv \rangle$ ), vorgerechnet werden, welche Terme der RG-Gleichung Beiträge liefern. Gleichzeitig wird so nachgewiesen, dass obige Festlegungen tatsächlich auf ein kanonisches Skalieren führen, das der K41-Voraussage entspricht.

Der Einfachheit halber werden in dieser Rechnung zunächst nur Terme berücksichtigt, die ausschließlich  $v$ -Felder enthalten, und nachher kurz auf den allgemeineren Fall, der alle Felder einschließt, eingegangen.

### 6.4.1 Skalieren des Terms $\langle vv \rangle$ im Modell 1a

Aus der Ratengleichung für die lokale Potentialapproximation entnehmen wir:

$$\left\langle \left\langle \langle vv \rangle, \langle vv \rangle \right\rangle \right\rangle_{v,0} = \frac{1}{2} * \tilde{K}_v^{-1} * \langle vv \rangle * \frac{1}{2} * \tilde{K}_v^{-1} * \langle vv \rangle * 4 \quad (6.27)$$

$$= \tilde{K}_v^{-2} * \langle vv \rangle^2, \quad (6.28)$$

$$\left\langle \left\langle \langle vv \rangle \right\rangle \right\rangle_{v,0} = 12 * \langle vvvv \rangle; \quad (6.29)$$

und damit:

$$\frac{d}{dt} \langle vv \rangle = -\frac{2}{3} * \langle vv \rangle + 44 * \tilde{K}_v^2 * \frac{\langle vvvv \rangle}{\langle vv \rangle}, \quad (6.30)$$

wie man unter Verwendung von  $D = 3$  und  $\eta = 0$  sieht.

### 6.4.2 Skalieren des Terms $\langle vvvv \rangle$ im Modell 1a

Genauso findet man das Skalieren des Terms vierter Ordnung in den  $v$ -Feldern. Zunächst ergibt sich:

$$\left\langle \left\langle \langle vvvv \rangle, \langle vvvv \rangle \right\rangle \right\rangle_{v,0} = \frac{1}{2} \tilde{K}_v^{-1} * \langle vv \rangle * \langle vvvv \rangle * 8 * 2 \quad (6.31)$$

$$= 8 * \tilde{K}_v^{-1} * \langle vv \rangle * \langle vvvv \rangle, \quad (6.32)$$

$$\left\langle \left\langle \langle vvvv \rangle \right\rangle \right\rangle_{v,0} = 30 * \langle vvvvvv \rangle, \quad (6.33)$$

und damit dann

$$\frac{d}{dt} \langle vvvv \rangle = -\frac{4}{3} * \langle vvvv \rangle + 55 * \tilde{K}_v * \frac{\langle vvvvvv \rangle}{\langle vv \rangle}. \quad (6.34)$$

### 6.4.3 Interpretation des Skalierens

Obige Rechnungen lassen sich im Prinzip für alle denkbaren Mehrpunktfunktionen durchführen, auch solche, die andere als das  $v$ -Feld enthalten. Sie verlaufen dann völlig analog.

Worauf es hier ankommt, ist zu zeigen, dass das Skalieren dem der K41-Theorie entspricht, korrigiert durch einen Term, der mindestens der Ordnung  $\mathcal{O}(\tilde{K})$  entspricht. Dies bleibt auch richtig, wenn man nicht das  $v$ -Feld, sondern andere Felder ausintegriert. Entscheidend sind hier zwei Punkte:

- In der Nähe des trivialen Fixpunktes skalieren die Operatoren so, wie es die K41-Theorie vorhersagt, und zwar *unabhängig* von der speziellen Wahl von  $\tilde{K}(0)$ .
- Die Grösse  $\tilde{K}(0)$  legt fest, wie groß pro Rechenschritt der Anteil der Terme ist, die durch Ausintegration von Freiheitsgraden entstehen, gemessen an den Reskalierungs- und Renormierungstermen. Anders gesagt: Die Wahl von  $\tilde{K}(0)$  legt fest, was „*in der Nähe* des trivialen Fixpunkts“ bedeutet.

Die Unabhängigkeit des Skalierens von  $\tilde{K}(0)$  konnte numerisch überprüft und bestätigt werden.

## 6.5 Fazit

Wie unzweifelhaft zu erkennen ist, ist das Aufstellen der Ratengleichungen, die sich aus der Ableitungsentwicklung der Wirkung und der RG-Gleichung ergeben, eine Frage der Buchhaltung. Wirklich komplizierte Probleme trifft man hier nicht an, die Rechnungen sind allesamt sehr elementar. Allerdings ist hier besondere Sorgfalt geboten, um die verschiedenen Möglichkeiten, Terme zu kontrahieren oder abzuleiten, auch alle zu berücksichtigen. Wie die Terme im Anhang eindrucksvoll dokumentieren, steigt der Arbeitsaufwand, der zu bewältigen ist, mit der Ordnung der Ableitungsentwicklung sehr schnell an.

Andererseits bleibt festzuhalten, dass eine Entwicklung, wie sie hier vorgenommen wurde, offensichtlich zwar mit hohem Aufwand verbunden, aber auf jeden Fall möglich ist. Die Ratengleichungen haben die schöne Eigenschaft, gut numerisch implementiert werden zu können, und so eine detaillierte Verfolgung des RG-Flusses vieler Kopplungen zu ermöglichen. Die numerische Vorgehensweise wird im nächsten Kapitel dokumentiert.

Ein erstes Ergebnis, das den Ratengleichungen für die lokale Potentialapproximation entnommen ist, konnte auch schon präsentiert werden: Es wurde gezeigt, dass in niedrigster Näherung in den Cutoff-Funktionen  $K$  die RG-Flüsse in der Nähe des trivialen Fixpunktes gemäß der K41-Vorhersage skalieren, und zwar in jeder Ordnung der Mehrpunktfunktionen. Dieses Ergebnis ist nicht zu unterschätzen, besagt es doch, dass die K41-Theorie als Fixpunkt, nämlich als trivialer, in der RG-Analyse enthalten ist. Wie bereits gesagt, weisen experimentelle und numerische Ergebnisse darauf hin, dass die Statistik der Turbulenz von einem Crossover-Phänomen zwischen zwei Fixpunkten bestimmt wird, von denen der makroskopische Fixpunkt der K41-Theorie entspricht. Dieses Szenario ist also auch in dieser RG-Analyse möglich, gesucht wird dafür ein Fixpunkt, von dem die Trajektorien in den trivialen Fixpunkt geleitet werden.



# Kapitel 7

## Numerische Verfolgung des RG-Flusses

Die oben hergeleiteten Ratengleichungen, zu unhandlich, um ihnen auf analytischem Weg noch Informationen zu entziehen, werden mithilfe eines dafür geschriebenen C++-Programmes integriert. Es handelt sich um Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit in einem sehr hochdimensionalen Raum, dessen kanonische Basis die der Kopplungskonstanten ist. Gerade die hohe Dimension dieses Raumes stellt einen vor einige Probleme, auf die nicht im Detail eingegangen werden kann. Auch eine vollständige Dokumentation des Programms wird hier nicht wiedergegeben; diese findet sich jedoch auf der CD im Anhang.

### 7.1 Besonderheiten der Programme

Bei der numerischen Implementierung der Ratengleichungen wird schnell klar, welchen großen Nutzen die Tensorschreibweise hat, die im vorhergehenden Kapitel eingeführt wurde. In sehr effizienter Art ist es möglich, diese fast identisch für die Programmierung zu verwenden. Dies bedeutet, dass sehr viele Terme durch eine übersichtliche Anzahl von nicht zu langen Unterprogrammen berechnet werden können. So werden alle Terme, die keine Ableitungen enthalten, egal wie viele und welche Felder darin enthalten sind, von im Wesentlichen einer Funktion integriert; eine weitere Funktion integriert die Terme mit einer Zeitableitung, aber ohne Ortsableitung, und so weiter.

Auf einige Besonderheiten, die sich als wichtig herausgestellt haben, oder die für die Verwendung der Programme direkt unabdingbar sind, soll an dieser Stelle hingewiesen werden.

#### 7.1.1 Integrationsverfahren

In das Programm sind verschiedene Integrationsverfahren eingebaut; es stehen zur Wahl das

- Prädiktor-Korrektor-Verfahren 0. bis 2. Stufe sowie der
- Runge-Kutta-Algorithmus.

Statt nur eines der Verfahren zu implementieren, habe ich mich dazu entschlossen, die Verfahren auf ihre Leistung (Rechengenauigkeit gegen Rechenzeit) zu vergleichen. Die Praktikabilität eines Integrationsverfahrens ist dabei stark eingeschränkt, wenn die Rechenzeit nicht in handhabbaren Grenzen bleibt; ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren 2. Stufe benötigt ein Vielfaches der Zeit, die die direkte Integration (entspricht der 0. Stufe) benötigen würde; andererseits will man sich auch vor Rechenfehlern schützen, die sich bei der direkten Integration unkorrigiert summieren können.

Als praktikable Lösung, die sowohl von der Rechengenauigkeit wie auch vom Aufwand vertretbar ist, hat sich eine Kombination verschiedener Verfahren herausgestellt: Beginnend mit der direkten Integration ist schnell ein Überblick über das Flussfeld zu gewinnen, zum Beispiel um Fixpunkte aufzuspüren. Die genaue Lage, die Exponenten - alles, wofür exakte Rechnungen gefragt sind - lässt sich danach mit einem genaueren (wenn auch langsameren) Integrationsverfahren (Prädiktor-Korrektor höherer Stufe, Runge-Kutta) untersuchen.

Auf den ersten Blick scheint die Gefahr zu bestehen, dass man mit einem groben Integrationsverfahren ganze Fixpunkte verpasst, also nicht findet, weil die Rechenfehler sich zu stark summieren. Bei genauerer Betrachtung relativiert sich diese Gefahr - ein Fixpunkt ist mehr als nur ein Punkt, er beeinflusst die Topologie des Flussfeldes insgesamt. So lange die direkte Integration überhaupt ein konsistent aussehendes Flussfeld ergibt (und das hat sich in allen durchgeführten Rechnungen so gezeigt), wird man auch Informationen über vorhandene Fixpunkte bekommen.

### 7.1.2 Die „linked list“

Wie in der Herleitung erklärt wird, ist jede Kopplungskonstante eindeutig über die Kombination an Indizes zu erkennen, die für deren Beschreibung eingeführt wurden. Nun ist nicht jede Kombination vernünftig, im Gegenteil gehört zu den allermeisten Indexkombinationen keine korrespondierende Kopplungskonstante. Die Numerik muss also in der Lage sein, sinnvolle von sinnlosen Indizes zu unterscheiden. Aus dem gleichen Grund macht es keinen Sinn, zur Beschreibung der Kopplungen ein hochdimensionales Array anzulegen, und die Indizes die Position der jeweiligen Kopplung in diesem Array beschreiben zu lassen - damit handelt man sich eine gewaltige Zahl von unsinnigen Arrayeinträgen ein. Schon bei einem sehr einfachen Modell, dass nur das Geschwindigkeitsfeld  $v$  bis zur 4. Ordnung selbst zulässt, sprengt das benötigte Array den Speicherplatz des verwendeten Desktop-PCs. Deshalb habe ich mich für die Programmierung einer „linked list“ entschieden; also einer Liste von Strukturen, wobei der letzte Eintrag der Struktur einen Pointer auf den Speicherplatz der nächsten Struktur enthält. Auch wenn dies zunächst schwieriger zu programmieren ist, spart es dennoch sowohl Speicherplatz, wie auch Rechenzeit, da die Liste nur physikalisch sinnvolle Einträge enthält. Die Verwendung der „linked list“ hat sich schon in den ersten Testläufen als sehr hilfreich erwiesen.

### 7.1.3 „Scheduler“-Funktion

Weiter hat es sich als wertvoll erwiesen, als zentralen Bestandteil des Programms eine „Scheduler“-Funktion einzubauen, die selbst zwar keinen eigenständigen Inhalt hat, aber die Funktionsaufrufe an andere Funktionen weiterleitet. Auch wenn der Scheduler zunächst so wirkt, als sei er überflüssig und erhöhe nur den Arbeitsaufwand des Programmierers und Speicher- wie Rechenzeitbedarf des Programmes, so hat er sich doch als hilfreich herausgestellt. Zum einen erlaubt er, durch die in C++ mögliche Mehrfachdefinition einer Funktion, eine sehr platzsparende Programmierung; wichtiger ist jedoch, dass der Scheduler eine große Hilfe beim Debuggen darstellt. Um nicht den Überblick über die vielen, zum Teil rekursiven, Programmaufrufe zu verlieren, reicht es aus, den Scheduler zu debuggen, also sich von ihm Zwischenergebnisse anzeigen zu lassen, zusammen mit der Information, wer dieses Ergebnis an wen zurückgibt; so ist der „Schuldige“ im Falle unsinniger Ergebnisse schnell gefunden. Zur besseren Lesbarkeit trägt ein Scheduler allerdings nicht bei.

### 7.1.4 Programmaufrufe

Nicht nur das Hauptprogramm will aufgerufen werden, auch hat sich während der ersten Erprobung herausgestellt, dass eine Reihe von Hilfsprogrammen nützlich sind, die neben ihren Aufrufen auch kurz beschrieben werden sollen. Allen Programmen ist gemein, dass sie für den

Einsatz auf UNIX-Rechnern geschrieben wurden; eine Umstellung auf andere Betriebssysteme sollte allerdings problemlos möglich sein.

Die meisten Programme speichern alle Zwischenergebnisse in einem File mit der Endung `.dat`. Diese Dateien sind so aufgebaut, dass in einer Zeile immer die Werte aller Operatoren zu einem bestimmten Zeitpunkt der RG-Zeit aufgeführt sind und zwar in der Reihenfolge, die sich aus der Kodierung der Indizes ergibt, die in das Hauptprogramm implementiert ist.<sup>1</sup> Der erste Wert in jeder Zeile ist dabei die Zeitvariable selbst.

Eine Ausnahme bildet das Hauptprogramm selbst. Die Datenflut ist zu groß, um sie unkommentiert abzuspeichern; die Datei, die die Ergebnisse einer RG-Analyse enthält, heisst `ergebnis.dat`. Statt in einer Zeile sind alle Werte untereinander gespeichert, mit den nötigen Informationen, um die Werte zuordnen zu können. Insbesondere die Zeitvariable ist besonders gekennzeichnet.

Tabelle 7.1: Programme zur Verfolgung von RG-Flüssen

Programmaufruf	Beschreibung	Ausgabedateien
<code>./turbo-rg</code> <code>ITER X_START</code> <code>Y_START Z_START</code> <code>-plot/noplot</code>	Das Hauptprogramm berechnet genau einen RG-Fluss. Die Startwerte sind, mit Ausnahme der drei, die über die Kommandozeile übergeben werden, im File <code>turbo-rg.c</code> einzustellen, bevor kompiliert wird. Das hat sich so bewährt; der Raum ist zu hochdimensional, als dass man alle Startwerte über die Kommandozeile übergeben müsste; andererseits reichen auch die drei, da man ohnehin nicht alle gleichzeitig variiert. Für die „shooting method“ ist die Variation von drei Startwerten im Regelfall ausreichend. <sup>2</sup>	<code>ergebnis.dat</code> , <code>zumplot.dat</code> , <code>graph.eps</code> , <code>graph.pdf</code>
<code>./viereck</code> <code>ITER X_MITTE</code> <code>Y_MITTE RAND</code> <code>-plot/noplot</code>	Es hat sich als mühselig herausgestellt, zu versuchen, per Hand mittels des Hauptprogramms einen Überblick über das RG-Flussfeld als Ganzes zu gewinnen. Das Programm <code>viereck</code> ist nicht viel mehr als ein Script, das das Hauptprogramm <code>los</code> insgesamt 16 mal aufruft; die Startwerte sind dabei in einem Viereck um den angegebenen Mittelpunkt angeordnet. Indem man den Ursprung als Mittelpunkt wählt, und die Kantenlänge des Vierecks immer größer werden lässt, erhält man schnell einen Eindruck von der Topologie des Flusses. Aber auch um anfänglich eine Vorstellung vom Verhalten eines Fixpunktes zu gewinnen, leistet das Programm gute Dienste.	<code>viereck.dat</code> , <code>viereck.eps</code> , <code>viereck.pdf</code>

<sup>1</sup>Für genauere Informationen vergleiche die auskommentierte Version des Programms auf der beigefügten CD.

<sup>2</sup>Alternativ wäre zu überlegen, die Startwerte aller Kopplungen in einem Datenfile zu speichern, und dann beim Programmstart auszulesen. Auch könnte man dort festlegen, wie die Werte für den Cutoff und die anomalen Dimensionen zu wählen wären, und welche Werte grafisch auszuwerten sind. Auch wenn dies die komfortabelste Lösung wäre, war sie bisher in keiner Weise notwendig.

Tabelle 7.1: Programme zur Verfolgung von RG-Flüssen

Programmaufruf	Beschreibung	Ausgabedateien
<pre>./ausschnitt DATEINAME X_UNTEN X_OBEN Y_UNTEN Y_OBEN -plot/noplot</pre>	<p>Manchmal ist es schwierig, die Anzahl der zu berechnenden Iterationen so einzustellen, dass man genau in dem Bereich rechnet, der interessiert; besonders, wenn sich der Fluss in der Nähe eines Fixpunktes aufhält. Dort verläuft der Fluss sehr langsam („critical slowing down“), während die Bewegung entlang der Eigenrichtungen recht schnell verläuft. Im Allgemeinen erhält man also meist Rechnungen, bei denen beispielsweise zu viel von der repulsiven Richtung berechnet wird; oder bei der der Fluss in unmittelbarer Nähe des Fixpunktes abbricht. Im zweiten Fall wird man die Rechnung wiederholen müssen; für den ersten Fall habe ich das Programm <code>ausschnitt</code> beigefügt, das aus einem <code>.dat</code>-File genau die Werte heraus sucht, die sich innerhalb eines vorgeschriebenen Rechtecks befinden. Damit kann man sich, im Rahmen der Genauigkeit der Rechnung, in einen bereits berechneten Graphen „hineinzoomen“.</p>	<pre>ausschnitt.dat, ausschnitt.eps, ausschnitt.pdf</pre>
<pre>./fusion DATEI1 DATEI2 ... DATEIn -plot/noplot</pre>	<p>Manchmal ist es für die Anschauung förderlich, die Ergebnisse mehrerer Rechnungen in einen Ausgabefile zusammenzuführen. Beispielsweise ist ein Fixpunkt dann besonders gut sichtbar, wenn man für jeden der vier Quadranten, die von den Separatrizen gebildet werden, eine Trajektorie zusammen in einem Diagramm aufträgt. Dafür dient das Programm <code>fusion</code>, das aus <code>.dat</code>-Dateien die Werte nimmt, in der Datei <code>fusion.dat</code> zusammenführt und als <code>fusion.pdf</code> anzeigt, wenn dies gewünscht ist.</p>	<pre>fusion.dat, fusion.eps, fusion.pdf</pre>
<pre>./ExpPlot DATEINAME FP_X FP_Y -plot/noplot</pre>	<p>Relativ zu einem angegebenen Fixpunkt wird einem Datensatz der laufende Skalierungsexponent abgewonnen. Den bestimmt das Programm aus je zwei benachbarten Datenpunkten und den zugehörigen RG-Zeiten. „Den“ Exponenten meint dabei den Exponenten des Operators, der den euklidischen Abstand des Datenpunktes vom Fixpunkt bezeichnet. Im Allgemeinen ist dies kein skalierender Operator, es sollte darüber hinaus in der Nähe des Fixpunkts schließlich mehrere, mit unterschiedlichen Exponenten skalierende Operatoren geben. Der Vorteil dieses Programms wird dann sichtbar, wenn man es auf eine Trajektorie anwendet, die sich einem Fixpunkt entlang einer attraktiven Richtung annähert und, nach einer Übergangszeit, sich entlang einer repulsiven Richtung entfernt. <code>ExpPlot</code> zeichnet dann nämlich sowohl den Exponenten der repulsiven, als auch den der attraktiven Richtung.</p>	<pre>ExpPlot.dat, ExpPlot.eps, ExpPlot.pdf</pre>

Tabelle 7.1: Programme zur Verfolgung von RG-Flüssen

Programmaufruf	Beschreibung	Ausgabedateien
<code>./MeanExp</code> DATEINAME VON BIS	Dieses Programm berechnet aus einer Datei, in der laufende Exponenten gespeichert sind, den Mittelwert nebst Standardabweichung dieses Exponenten. Dabei kann man angeben, welche Iterationen man in die Berechnung einfließen lassen möchte und welche nicht; dies ist dann erforderlich, wenn eine Datenreihe in einem bestimmten Bereich ein eindeutiges Scaling zeigt, in anderen Bereichen vielleicht ein anderes Scaling, oder gar keines.	Keine Ausgabedatei, Ausgabe erfolgt am Bildschirm
<code>./vextract</code> DATEINAME TERMZAHL X_UNTEN X_OBEN Y_UNTEN Y_OBEN	Aus der Flut von Daten, die das Hauptprogramm produziert, extrahiert dieses Hilfsprogramm alle Daten von Termen, die entweder ausschließlich das Feld $v$ , oder maximal ein Feld $u$ enthalten, sowie den $u$ -Propagator. Wie an späterer Stelle erklärt wird, werden diese Daten benötigt, um das Skalieren der Mehrpunktfunktionen zu bestimmen.	<code>vuterge.dat</code>
<code>./vexpextract</code> DATEINAME	Dieses Programm nimmt die Ergebnisse von <code>vextract</code> , und berechnet daraus die laufenden Skalierungsexponenten der Strukturfunktionen, gemessen am trivialen Fixpunkt. Diese werden in einzelnen Dateien abgelegt. Die Mittelwerte lassen sich mit <code>MeanExp</code> berechnen.	<code>u2exp.dat</code> , <code>v1exp.dat</code> - <code>v7exp.dat</code>

Tabelle 7.2: Parameter der oben beschriebenen Programme

Parameter	Beschreibung
ITER	Anzahl der zu berechnenden Iterationen (= Zeitschritte)
X_START	Anfangswert der auf der x-Achse aufzutragenden Größe, z.B. <i>vv</i>
Y_START	Anfangswert der auf der y-Achse aufzutragenden Größe, z.B. <i>vvvv</i>
Z_START	Anfangswert der dritten festzulegenden Größe, z.B. <i>vvvvvv</i>
-plot/noplot	Schalter, der festlegt, ob ein PDF des Flusses angezeigt werden soll (Acrobat Reader benötigt)
X_MITTE	X-Wert des Mittelpunkts des Vierecks
Y_MITTE	Y-Wert des Mittelpunkts des Vierecks
RAND	halbe Kantenlänge des Vierecks
DATEINAME	Name des <i>.dat</i> -Files, das für die Programmausführung geöffnet werden soll. Im Fall eines Aufrufs von <b>MeanExp</b> ist daran zu denken, dass <b>DATEINAME</b> von <b>ExpPlot</b> erstellt worden sein muss.
X_UNTEN	Untere Grenze der X-Werte für den zu berechnenden Ausschnitt
X_OBEN	Obere Grenze der X-Werte für den zu berechnenden Ausschnitt
Y_UNTEN	Untere Grenze der Y-Werte für den zu berechnenden Ausschnitt
Y_OBEN	Obere Grenze der Y-Werte für den zu berechnenden Ausschnitt
DATEI1 ... DATEIn	die <i>.dat</i> -Dateien, die fusioniert werden sollen
FP_X	vermutlicher X-Wert des Fixpunkts
FP_Y	vermutlicher Y-Wert des Fixpunkts
VON	Erste Datensatznummer, ab der gemittelt wird
BIS	Letzte Datensatznummer, bis zu der gemittelt wird
TERMZAHL	Zahl der Terme, die pro Iteration berechnet wurden

## 7.2 Erste Versuche

Die Erprobungsphase der Programme begann mit einigen sehr einfachen Modellen, die zwar unphysikalisch waren - in Bezug auf die RG-Gleichung war das Skalieren nicht irgendeinem bekannten System entsprechend - jedoch viele für die Entwicklung der Methodik wichtige Szenarien bereithielten. Schon bei den ersten Versuchen war so gleich ein nichttrivialer Fixpunkt zu finden, der allerdings einer physikalisch nicht sinnvollen Theorie entsprach. Der triviale Fixpunkt konnte in unterschiedlichen Modellen untersucht werden, er war entweder ausschließlich repulsiv ( $\eta < 1,5$ ), oder er besaß eine repulsive und eine attraktive Richtung ( $\eta > 1,5$ ). Der Grenzfall eines Fixpunkts mit marginalem Operator ( $\eta = 1,5$ ) konnte ebenfalls studiert werden. Außerdem zeigte ein Modell auch einen Fokusfixpunkt (nur für  $\eta > 1,5$ ). Somit boten sich an diesen - verhältnismäßig einfachen - Modellen schon alle Chancen, die Methodik zur Analyse verschiedener Strukturen zu entwickeln und zu erproben.

Alle untersuchten, unphysikalischen Modelle hatten gemein, dass sie ausschließlich das Feld  $v$  enthielten, und das auch nur bis zur Ordnung 4. Das hat zum Vorteil, dass Rechnungen sehr schnell gehen, und die Plots, die zu sehen sein werden, schon den kompletten Phasenraum zeigen. Als günstiges Modell für die Turbulenz sollen diese Hilfsmodelle ausdrücklich nicht verstanden sein, sie dienten nur zur Erprobung und Erweiterung der Hilfsprogramme.

### 7.2.1 Suche nach Strukturen im RG-Flussfeld

Die ersten Rechnungen begannen mit willkürlichen Startwerten für die beteiligten Operatoren; die anomale Dimension des Feldes wurde auf Null gesetzt. Schnell wurde deutlich, dass auf diese Weise kein systematisches Bild der Topologie des RG-Flusses zu erhalten ist, weswegen das bereits beschriebene Programm `viereck` hinzugefügt wurde, mit dem ein allgemeiner Eindruck sehr viel schneller zu bekommen ist. Ich ging dabei in der Art vor, dass ich, mit wachsender Seitenlänge des Vierecks, immer größere Boxen um den Ursprung legte, und von dort aus relativ kurze Rechnungen (100 Iterationen) machen ließ, was ausreicht, um die Flussrichtungen zu erkennen. So findet man Regionen, in denen sich der Fluss „unerwartet“ verhält, zum Beispiel in eine Richtung abbiegt, die sich von den Richtungen benachbarter Flüsse unterscheidet. Ein Beispiel ist in Abbildung (7.1) zu sehen, wo die Flüsse in der unteren rechten Ecke auseinanderlaufen.

Findet man eine solche Region, so kann man (zunächst wieder unter Verwendung des Programmes `viereck`) dort hineinzoomen, und den Ort, an dem sich die Topologie des Flusses nichttrivial verhält, genauer eingrenzen. In Abbildung (7.2) sieht man zum Beispiel eine Detailansicht der unteren rechten Ecke des Plots (7.1).

Es wird klar, dass sich hier ein Fixpunkt mit einer repulsiven und einer attraktiven Richtung verbergen muss. Ähnlich sieht man, dass auch der Punkt, an dem sich die attraktive Richtung des gerade entdeckten FP mit der X-Achse schneidet, von Interesse sein dürfte, weil dort das Verhalten des Flussfeldes nicht intuitiv klar ist. Eine Untersuchung liefert auch hier einen nichttrivialen Fixpunkt.

### 7.2.2 Genaue Lokalisierung eines Fixpunkts - „shooting method“

Hat man einen Fixpunkt schon einmal grob eingegrenzt, dann ist die „shooting method“ eine einfache (und schnelle) Methode, seine Position genauer zu bestimmen. Dazu versucht man, den Startwert einer Rechnung möglichst genau auf die attraktive Richtung des Fixpunkts zu platzieren. Man geht dabei iterativ vor. Stellt man fest, dass die berechnete Trajektorie zum Beispiel links am Fixpunkt vorbeiläuft (zu erkennen an der Krümmung), dann ist der nächste Startwert ein Stück weiter rechts zu wählen. Durch Intervallhalbierung nähert man sich schnell an den Fixpunkt an. Aus vier Trajektorien, die in der unmittelbaren Nähe der attraktiven Richtungen

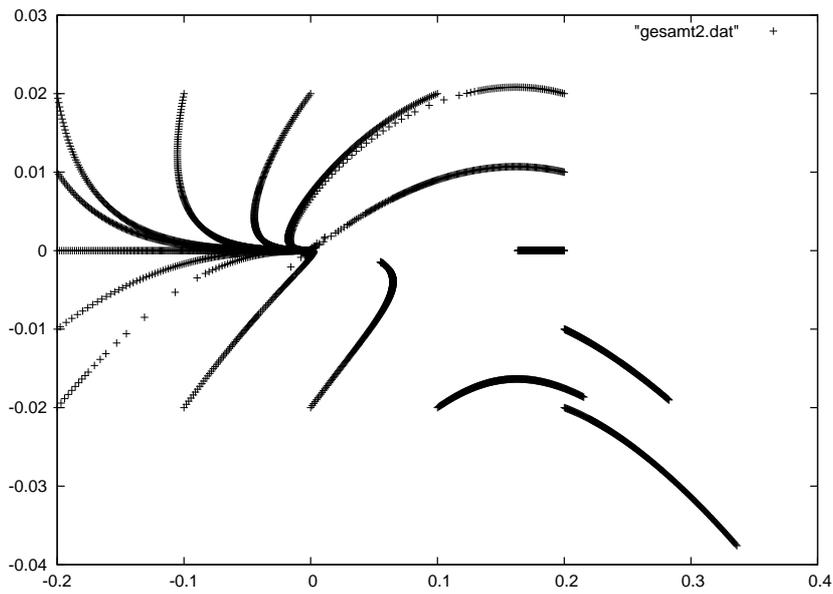


Abbildung 7.1: Hinweis auf einen versteckten Fixpunkt (unphysikalisches System)

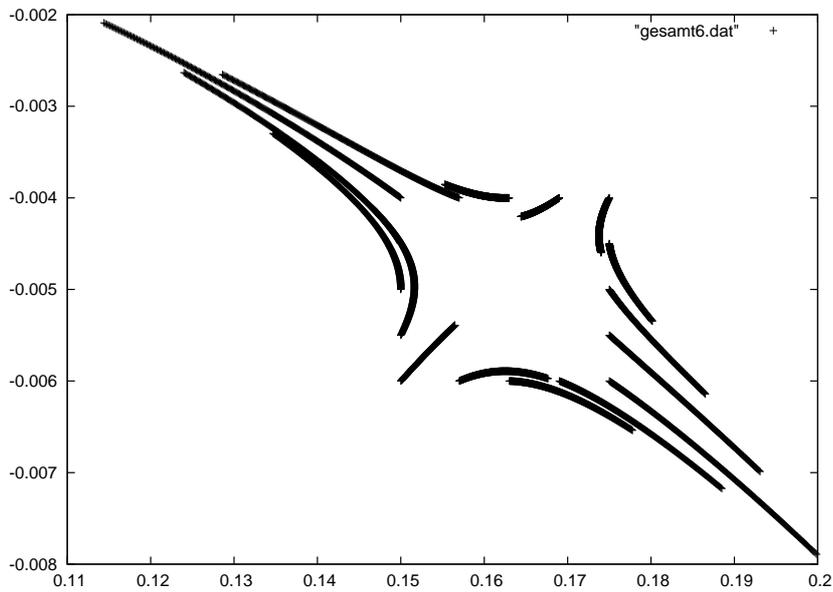


Abbildung 7.2: Zoom in die obige Struktur aus (7.1) (unphysikalisches System)

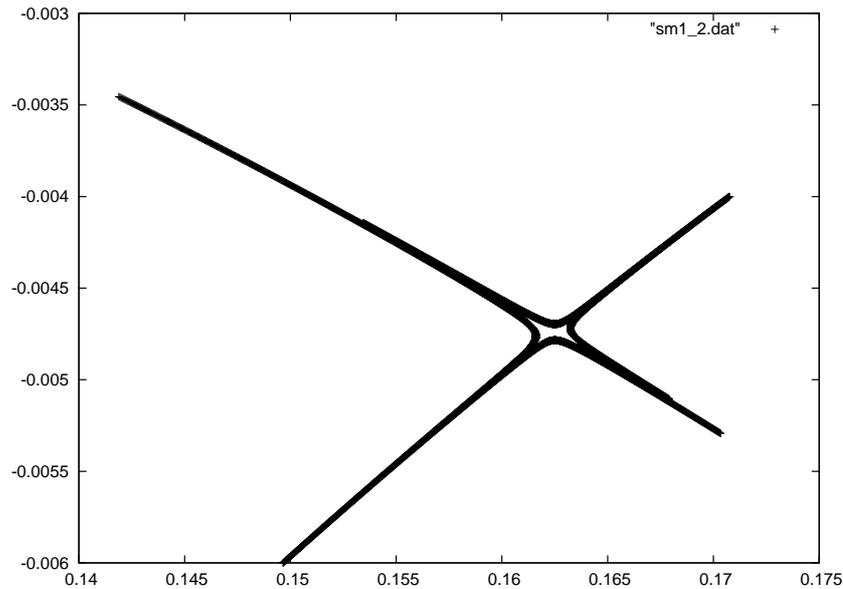


Abbildung 7.3: Mittels „shooting method“ aufgespürter Fixpunkt (unphysikalisches System)

starten, setzt man in der folgenden Art ein Bild zusammen, dass in jedem der von den Separatrisen aufgespannten Quadranten genau eine Trajektorie verläuft. Die Position des Fixpunktes ist dann gut zu bestimmen, wenn die Trajektorien so erscheinen, als hätten sie zwar einen Knick, seien sonst aber ungekrümmt. Außer der Position des Fixpunkts kann man dann auch die Eigenrichtungen gut ablesen. Ein solcher Fixpunkt sieht zum Beispiel so aus wie der in Abbildung (7.3), bei dem es sich um den gleichen handelt, der schon in der vorhergehenden Abbildungen zu erahnen ist.

Einen vergleichbaren Fixpunkt fand man auch in einem anderen, sehr einfachen Modell für  $\eta > 1,5$ , der in Abb. 7.4 zu sehen ist; es handelt sich dabei um den trivialen Fixpunkt im Koordinatenursprung. Er ist nicht ganz so deutlich zu erkennen, weil eine Eigenrichtung mit einer der Koordinatenachsen (der Masseachse des  $vv$ -Operators) zusammenfällt.

Natürlich lässt sich auf ähnliche Weise auch die Position eines Fixpunktes bestimmen, der zwei attraktive oder zwei repulsive Richtungen besitzt. Der erste Fall ist denkbar einfach - bereits eine einzelne Trajektorie, über einen genügend langen Zeitraum betrachtet, konvergiert gegen den Fixpunkt. Die Eigenrichtungen zu bestimmen ist schon schwieriger - dazu verteilt man, wenn man nicht schon durch andere Überlegungen eine oder mehrere Eigenrichtungen kennt, Startwerte rund um dem Fixpunkt. Die Eigenrichtungen erkennt man graphisch daran, dass eine Trajektorie sich auf ihr ungekrümmt dem Fixpunkt nähert. Den Fall des in jede Richtung repulsiven Fixpunkts führt man auf den vorher besprochenen Fall des attraktiven Fixpunkts zurück, indem man im Programm die Zeitrichtung umkehrt; sonst tut man sich unter Umständen schon mit dem Aufspüren schwer. Auch hierzu seien zwei Beispiele mit den Abbildungen 7.5 und 7.6 gegeben.

Das Gesagte überträgt sich in einfacher Weise auch auf Fokusfixpunkte. Der große Unterschied ist allerdings, dass bei einem Fokusfixpunkt Eigenrichtungen nur dann zu definieren sind, wenn man die zweidimensionale Projektion, in der der Fixpunkt sichtbar ist, auf die komplexe Zahlenebene abbildet, und dort nach komplexen Skalierungsexponenten sucht. Auch einen Fokusfixpunkt konnten meine Rechnungen zeigen; man sieht ihn in Abbildung (7.7). Die „drehende“ Eigenschaft des Fixpunkts ist zu erahnen. Sie wird deutlicher, wenn man die Details vergrößert (Abb. 7.8).

Die „shooting method“ zu automatisieren, indem man ein zusätzliches Programm schreibt, lohnt

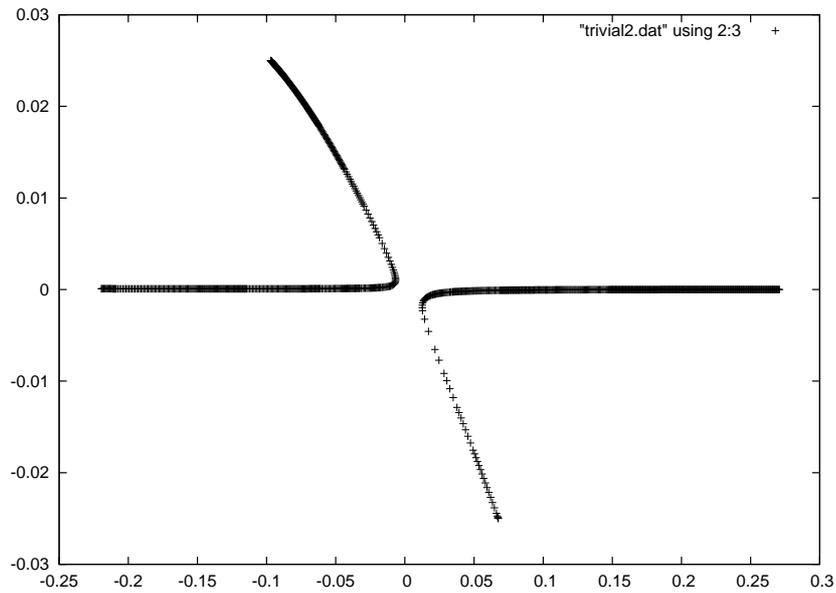


Abbildung 7.4: Mittels „shooting method“ aufgespürter (trivialer) Fixpunkt, im Text beschriebenes System für  $\eta > 1,5$ , unphysikalisch.

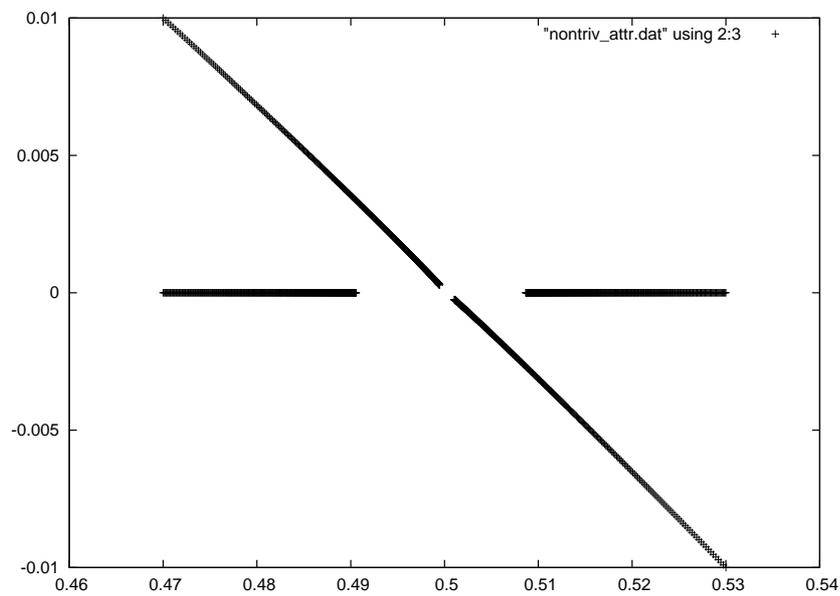


Abbildung 7.5: Gaußscher, nichttrivialer Fixpunkt, vollständig attraktiv, unphysikalisches System

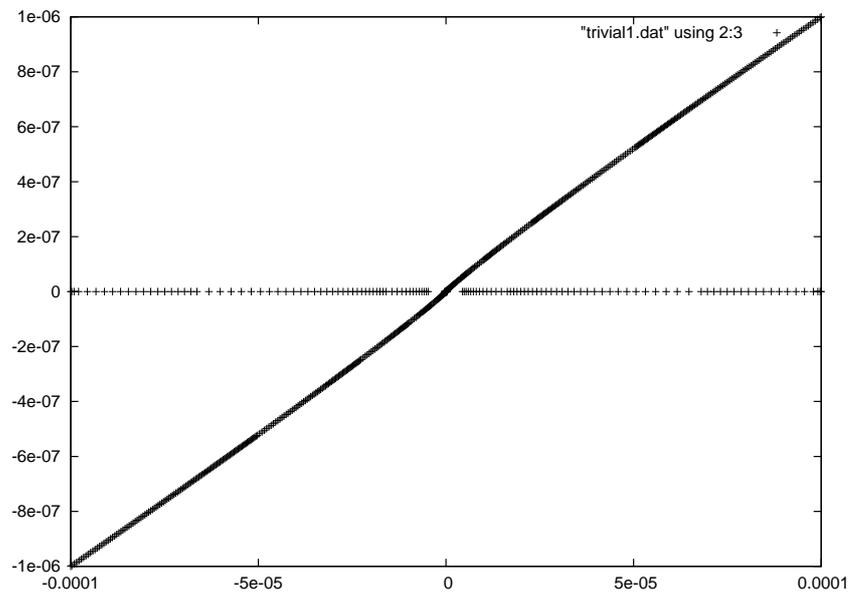
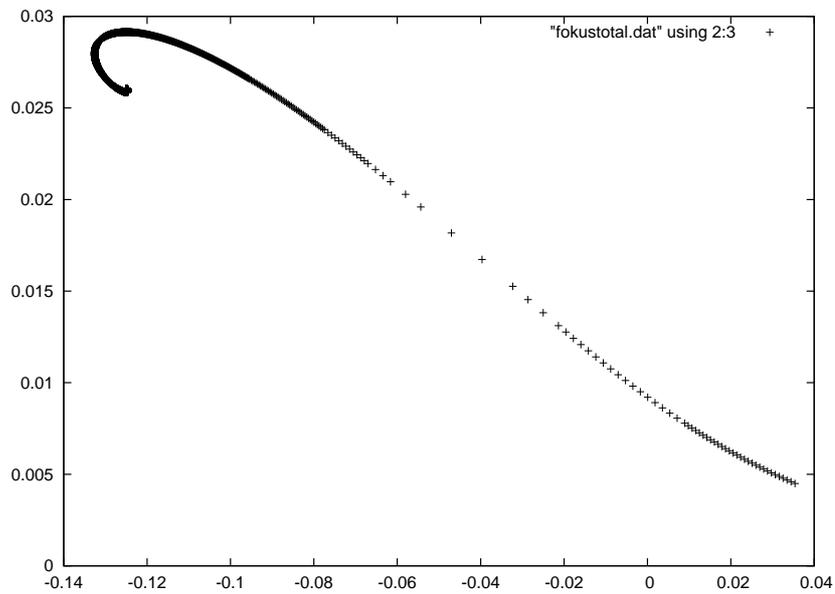
Abbildung 7.6: Trivialer Fixpunkt für  $\eta < 1,5$ , vollständig repulsiv, unphysikalisches System

Abbildung 7.7: Fokusfixpunkt in der Totalen, unphysikalisches System

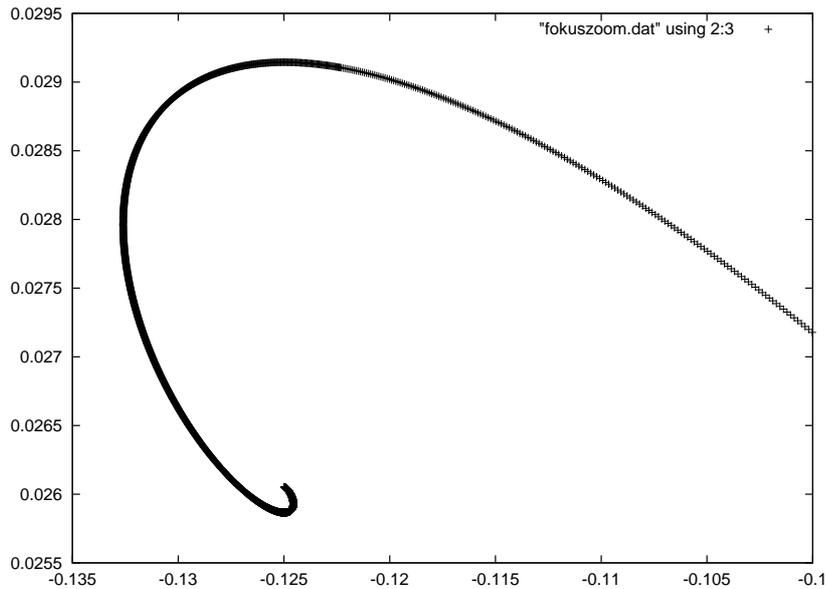


Abbildung 7.8: Fokusfixpunkt im Detail

sich meiner Meinung nach nicht. Dazu ist der Aufwand für einen gewöhnlichen Fixpunkt nicht groß genug, und die unterschiedlichen Typen von Fixpunkten machen auch ein angepasstes Vorgehen beim Suchen notwendig.

### 7.2.3 Bestimmung der Exponenten

Um die Skalierungsexponenten eines Fixpunktes mit einer attraktiven und einer repulsiven Richtung zu finden, wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen: Man wähle eine Trajektorie aus, die sich entlang einer attraktiven Richtung annähert, und dann entlang einer repulsiven Richtung entfernt. Je näher die Trajektorie dabei an die Eigenrichtungen herankommt, desto genauer wird die Berechnung der Exponenten. Auf den Datenfile dieser Trajektorie wende man das Programm `ExpPlot` an, das den laufenden Skalierungsexponenten bestimmt. Als Beispiel sei es auf den Fixpunkt aus Abb. (7.4) angewendet, man erhält so diesen Verlauf in Abb. 7.9. Man sieht deutlich zwei Plateaus; das erste gehört zur attraktiven Richtung des Fixpunkts, das zweite zur repulsiven Richtung. Die Mittelwerte für die Plateaus berechnet das Programm `MeanExp`. In der folgenden Tabelle werden die Skalierungsexponenten der Fixpunkte (7.4) - (7.6) aufgetragen:

Tabelle 7.3: Exponenten der Fixpunkte aus Abb. (7.4) - (7.6)

Diagramm	Exponent	Eigenrichtung
7.4	$-0,494 \pm 0,001$	attraktiv, nicht entlang einer Koordinatenachse
	$0,991 \pm 0,001$	repulsiv, entlang der $vv$ -Achse
7.5	$-1,138 \pm 0,005$	attraktiv, nicht entlang einer Koordinatenachse
	$-0,997 \pm 0,026$	attraktiv, entlang der $vv$ -Achse
7.6	$3,192 \pm 0,002$	repulsiv, nicht entlang einer Koordinatenachse
	$2,002 \pm 0,001$	repulsiv, entlang der $vv$ -Achse

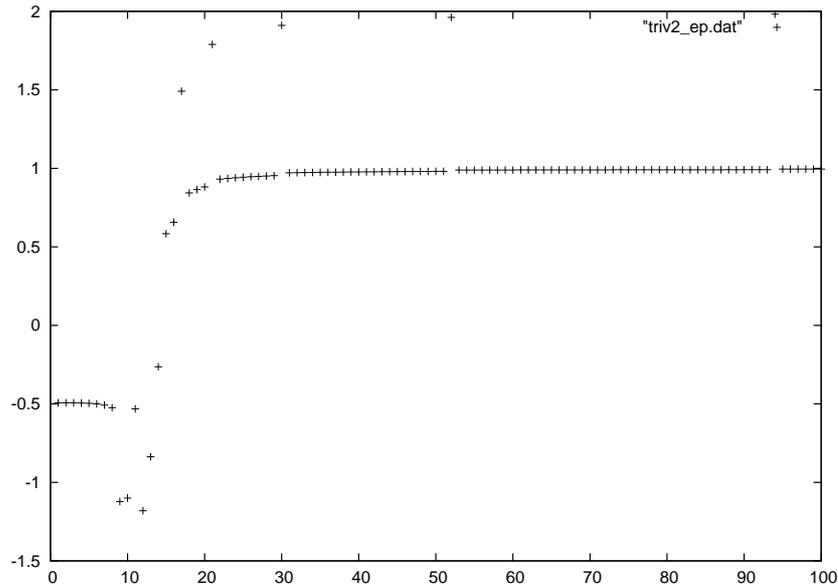


Abbildung 7.9: Laufender Exponent des FP aus Abb. (7.4)

Es sei erwähnt, dass die Bestimmung der Exponenten nicht immer ganz einfach ist. Ein wenig Fingerspitzengefühl ist gefragt, wenn man den Abstand der Trajektorie vom Fixpunkt auswählt. Analysiert man nämlich eine Trajektorie, die zu weit vom Fixpunkt entfernt verläuft, dann kann man nicht hoffen, dass man sich in dem Bereich befindet, in dem sich die Flussgleichung linear approximieren lässt; man findet also keine Plateaus ähnlich denen in Abb. (7.9). Befindet man sich mit der Analyse aber zu nahe am Fixpunkt, dann bewegt sich die Trajektorie dort so langsam („critical slowing down“ durch die automatische Schrittweitenanpassung des Integrationsverfahrens), dass man Probleme mit der numerischen Auflösung des Flusses bekommt - dann findet man nicht nur keine Plateaus, sondern überhaupt nichts, was einem wohldefinierten Wert ähnelt. Durch einiges Probieren war es mir aber bislang immer möglich, den Bereich des Skalierens ausfindig zu machen.

#### 7.2.4 Ideale Trajektorien und Flusstopologie

Hat man die Fixpunkte bestimmt, kann man nach „idealen“ Trajektorien suchen, die diese Fixpunkte verbinden. Das macht Sinn, weil man dadurch manchmal bereits einen sehr guten Überblick über die Topologie eines RG-Flussfelds bekommt. Als Beispiel seien hier die idealen Trajektorien des obigen Systems bei  $\eta > 1.5$  (Abb. 7.10) gezeigt, es wurden einige typische Trajektorien hinzugefügt, um die Topologie zu verdeutlichen.

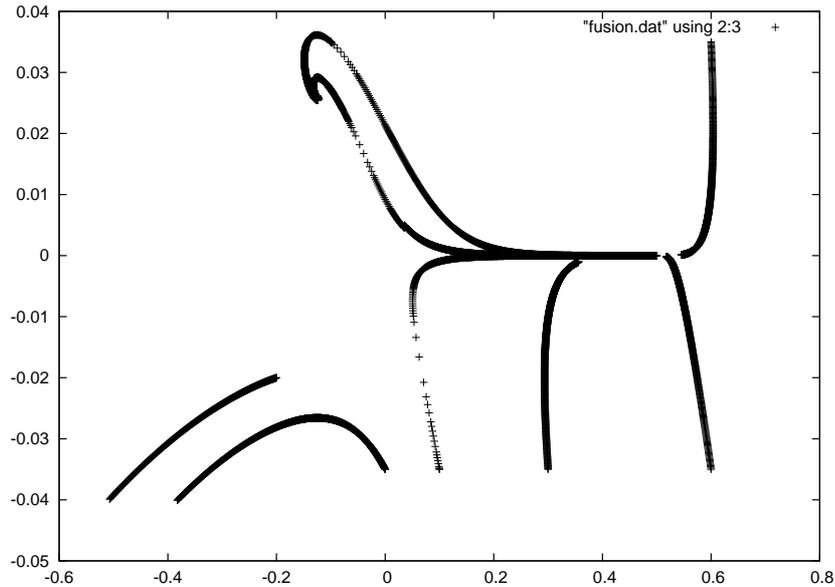


Abbildung 7.11: Topologie des RG-Flusses für obiges System bei  $\eta > 1,5$ . Die Trajektorien in der oberen Halbebene drehen sich mit dem Uhrzeigersinn um den Fokusfixpunkt, und von dort zum unphysikalischen Fixpunkt bei  $(0,5; 0)$ .

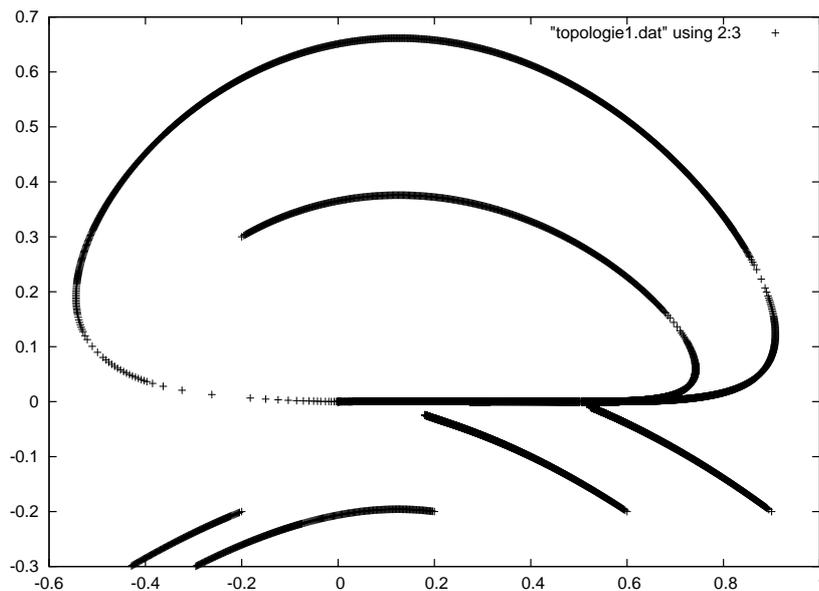


Abbildung 7.10: Topologie des RG-Flusses für obiges System bei  $\eta < 1,5$ . Die Trajektorien in der oberen Halbebene drehen sich mit dem Uhrzeigersinn, die auf der unteren Halbebene laufen von rechts nach links.

Außerdem sei in Abb. 7.11 die Topologie des Flussfelds für  $\eta < 1,5$  (Abb. 7.11) demonstriert; die Wichtigkeit des Fokusfixpunkts ist im Vergleich deutlich erkennbar.

### 7.2.5 Der Wert $\eta = 1,5$ und die Änderung der Topologie

In den Erklärungen zur Upper Critical Dimension wurde bereits darauf eingegangen, dass sich die Topologie des Flussfelds nicht plötzlich und „unstetig“ durch Variation eines Parameters (in dem Fall der Dimension der Theorie) ändern sollte. Insbesondere sollten Fixpunkte nicht einzeln

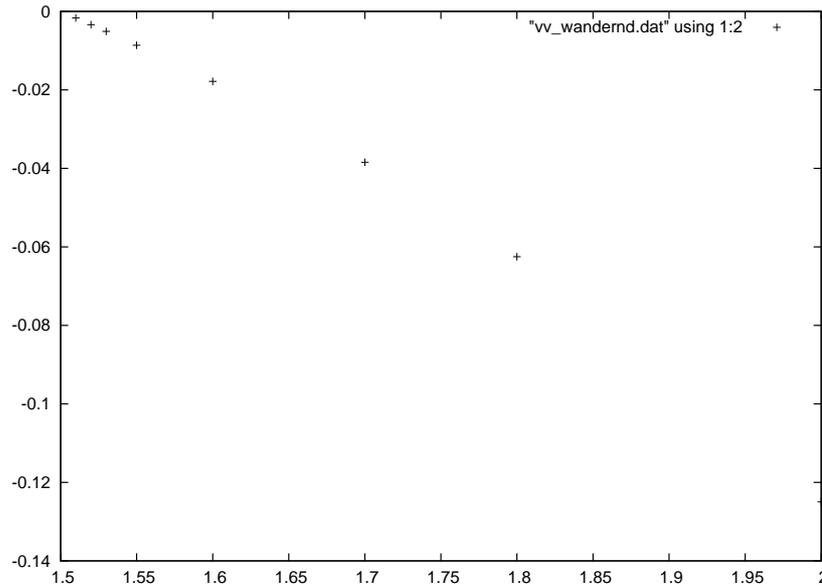


Abbildung 7.12:  $vv$ -Koordinate des wandernden Fixpunkts, aufgetragen gegen  $\eta$

irgendwo auftauchen, nur weil man den Parameter infinitesimal ändert - ein Auftauchen als Paar, oder ein „Herauslaufen“ aus einem anderen Fixpunkt sind jedoch denkbar.

Das Gesagte gilt, in leicht abgewandelter Form, auch für die anomale Dimension  $\eta$ . Betrachtet man nur die exakte RG-Gleichungen, dann sollte sich die Topologie des Flussfelds mit  $\eta$  überhaupt nicht ändern, weil die Gleichungen reparametrisierungsinvariant sind. Diese Invarianz wird aber durch die Approximation der Gleichung zerstört. Dann sollte aber die Abhängigkeit der Topologie von  $\eta$  in einer gewissen Weise „stetig“ sein.

Das Auftauchen eines neuen Fixpunkts durch Justieren von  $\eta$  setzt in jedem Fall einen marginalen Operator voraus. Deswegen ist der Wert  $\eta = 1,5$  von besonderer Bedeutung; 1,5 ist nämlich genau der Skalierungsexponent des  $vvvv$ -Operators des trivialen Fixpunkts. Bei  $\eta = 1,5$  wird dieser Operator marginal, erhöht man  $\eta$  darüber hinaus, löst sich der Fokusfixpunkt aus dem trivialen Fixpunkt und wandert von diesem weg. Dieses Wandern wurde untersucht, indem der Ort des Fixpunkts für verschiedene  $\eta$  bestimmt wurde. Trägt man die Werte für  $vv$  ( $vvvv$ ) gegen  $\eta$  auf, so sieht man eine näherungsweise lineare Trennung der Fixpunkte (Abb. 7.12 und 7.13).

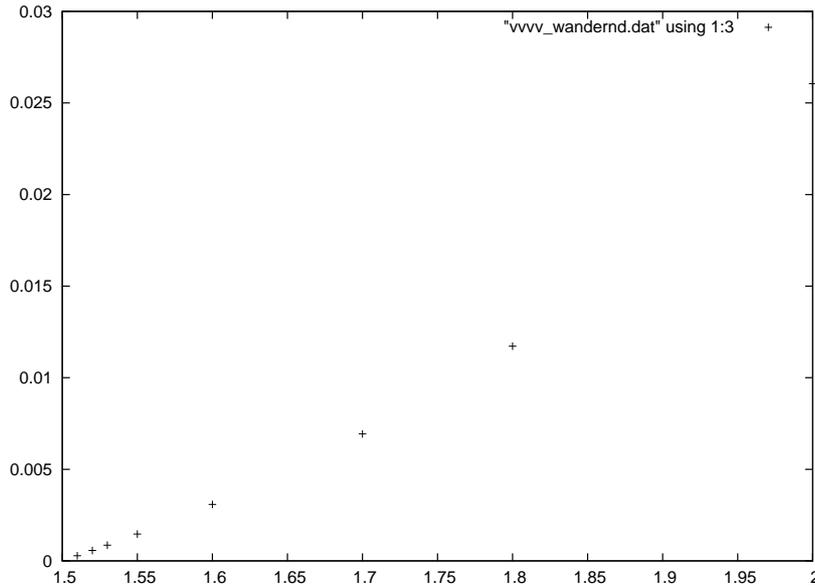


Abbildung 7.13:  $vvvv$ -Koordinate des wandernden Fixpunkts, aufgetragen gegen  $\eta$

### 7.3 Analyse der Lokalen Potentialapproximation, Modell 1a

Die RG-Analyse eines so komplexen Systems, wie es von einer der Wirkungen aus Kapitel 4 erzeugt wird, ist schwer durchzuführen, und führt weniger schnell auf leicht interpretierbare Strukturen. Es ist leicht zu sehen, warum dies der Fall ist: Schon wenn man sich nur auf die in allen Fällen vorkommenden Felder  $u$ ,  $v$  und  $f$  beschränkt, dabei die  $v$ -Felder bis zur sechsten, und die beiden anderen jeweils bis zur zweiten Ordnung in den Feldpotenzen berücksichtigt, hat man damit bereits 128 Terme zu berechnen. Der Kopplungskonstantenraum ist also 128-dimensional, und dort nach Fixpunkten, Grenzzyklen, oder anderem universellen Verhalten zu suchen, hochgradig nichttrivial. Auch wenn erste Erfolge bereits erzielt sind, kann die Arbeit in diesem Punkt noch nicht als beendet angesehen werden; für eine systematische Untersuchung der Flusstopologie in einem so hochdimensionalen Raum war die für diese Arbeit zur Verfügung stehende Zeit nicht ausreichend.

#### 7.3.1 Das Skalieren des trivialen Fixpunkts

Den trivialen Fixpunkt muss man nicht erst suchen, und ihn zu analysieren, ist somit immer möglich. Dafür hat man einen Fluss in die unmittelbare Nähe des Koordinatenursprungs zu platzieren, und seine Bewegung auf ein mögliches Skalieren, zum Beispiel unter Zuhilfenahme der dafür geschriebenen Skripte, zu untersuchen.

Wie bereits in Kapitel 6 erläutert wurde, ist dabei der Ausdruck „in unmittelbarer Nähe“ nicht wohldefiniert, sondern hängt vor allem von den Relikten der Cutoff-Funktion,  $\tilde{K}(0)$ , für die diversen Felder ab. Die einfachste Möglichkeit ist, den Einzugsbereich des trivialen Fixpunktes dadurch sehr groß zu machen, dass man die Konstanten  $\tilde{K}(0)$  sehr klein wählt. Wie gezeigt, sollte der Fluss dann das von der K41-Theorie vorhergesagte Skalieren der Mehrpunktfunktionen zeigen.

Dies ist auch numerisch einwandfrei zu zeigen. So findet man für das Skalieren am trivialen Fixpunkt bei  $\tilde{K}_v(0) = \tilde{K}_u(0) = \tilde{K}_f(0) = 0.0001$  für die Exponenten der zweiten, vierten und sechsten Strukturfunktion direkt:

Tabelle 7.4: Skalierungsexponenten für Modell 1a am trivialen Fixpunkt

Ordnung der Strukturfunktion	Skalierungsexponent
2	$-0,666 \pm 0,017$
4	$-1,338 \pm 0,035$
6	$-1,999 \pm 0,052$

Die Genauigkeit ist hierbei im Wesentlichen durch die Anzahl der berechneten Iterationen im Einzugsbereich des trivialen Fixpunkts beschränkt, und daher im Prinzip beliebig zu verbessern. Obige Ergebnisse sind unabhängig von der speziellen Wahl der Konstanten  $\tilde{K}(0)$ , so lange diese klein genug sind, damit der triviale Fixpunkt einen genügend großen Einflussbereich hat.

Wie man sieht, entspricht das Skalieren der geraden Strukturfunktionen, das sich direkt aus den Datenpunkten ermitteln lässt, der K41-Vorhersage. An die Exponenten der ungeraden Strukturfunktionen gelangt man nur mit einem Umweg, da diese für sich keine in der Wirkung vorkommenden Operatoren bilden. Wohl aber findet man die Kombinationen  $uv$ ,  $uvvv$ ,  $uvvvv$ . Mittelt man hier über den Effekt, den das  $u$ -Feld zum Skalieren beiträgt, so erhält man einen Schätzer für das Skalieren der (verbleibenden)  $v$ -Felder.

Um das Skalieren eines einzelnen  $u$ -Feldes näherungsweise zu bestimmen, schlage ich vor, die  $u$ -Zweipunktfunction zu betrachten, und deren Skalieren zu „halbieren“, also den Exponenten auf die zwei beteiligten  $u$ -Felder aufzuteilen. Auf diese Weise findet man:

Tabelle 7.5: Skalierungsexponenten für Modell 1a am trivialen Fixpunkt

Ordnung der Strukturfunktion	Skalierungsexponent
1	$-0,3334 \pm 0,0018$
3	$-1,0004 \pm 0,0012$
5	$-1,6681 \pm 0,0012$
7	$-2,3348 \pm 0,0012$

### 7.3.2 Reelle oder komplexe Koeffizienten?

Die Herleitung der Wirkungen bedingt es, dass die Koeffizienten teilweise reell, teilweise imaginär sind. Es reicht aber aus, mit reellen Koeffizienten zu rechnen, wenn man sich folgendes überlegt: Die Faktoren  $i$  treten immer in Verbindung mit bestimmten Feldern auf, und anders herum! Zum Beispiel ist das für die Wirkung (4.35) das Feld  $u$ , das durch die funktionale Fourier-Transformation in die Wirkung gelangt. Man kann mit reellen Koeffizienten rechnen, wenn man nur daran denkt, dass zu Koeffizienten, die vor einer ungeraden Potenz von Feldern  $u$  stehen, ein Faktor  $i$  hinzuzudenken ist. Der einzige Moment, in dem dies eine Rolle spielt, ist, wenn man das Produkt zweier Koeffizienten berechnet, die beide imaginär zu denken sind; dann ist das Ergebnis mit einem Faktor  $-1$  zu versehen.

Was wie ein Detail aussieht, erweist sich bei näherem Hinsehen als sehr interessant. Im fertigen Programm war es ein Leichtes, die obige Rechenregel zu implementieren; es hat mich aber interessiert, wie groß deren Effekt ist, und Rechnungen auch ohne sie versucht. Dabei stellt sich heraus, dass Rechnungen, in denen man ausschließlich mit reellen Koeffizienten arbeitet und auch die eben erklärte Regel nicht beachtet, sehr instabil verlaufen, und die Tendenz haben, in Richtung irgendeines Koeffizienten auszuberechnen. Nach Einbau der Regel hingegen sind die

Rechnungen sehr stabil, streben schon nach wenigen Iterationen zu Werten der Koeffizienten, die sich danach nur noch in kleinen Schritten ändern, zeigen mehr Strukturen, und brechen auch sehr viel seltener aus.

Es sind also tatsächlich die imaginären Koeffizienten, die die Rechnung stabilisieren. Dies entspricht einer Beobachtung, die, wie ich aus einer Besprechung erfahren habe, andere in ähnlicher Weise gemacht haben, die sich mit Monte-Carlo-Rechnungen in der Burger-Turbulenz versuchten. Burgers Gleichung entspricht der Navier-Stokes-Gleichung, aber ohne Druckterm, und ohne Inkompressibilität. Auch bei diesen Arbeiten wurde versucht, nach analytischer Vervollständigung der Wirkung mit reellen Koeffizienten zu rechnen. Dabei stellte man fest, dass die Wirkung dann nicht nach unten begrenzt ist, was aber für Monte-Carlo-Rechnungen zwingend nötig ist (ganz abgesehen von der physikalischen Motivation eines existierenden Vakuums der Theorie). Auch hier scheinen die imaginären Koeffizienten für die Rechnungen und die Physik entscheidend zu sein.

An dieser Stelle handelt es sich dabei nur um eine Beobachtung, der allerdings nachgegangen werden sollte. Möglicherweise ist die Wichtigkeit der imaginären Vorfaktoren damit zu erklären, dass die Theorie nichttriviale Propagatoren enthält. Eine analytische Fortsetzung der  $u$ -Felder entspricht einer Wick-Rotation, wie man sie aus der Quantenfeldtheorie kennt. Rotiert man die Theorie dabei über vorhandene Singularitäten in der komplexen Zeitebene, also Propagatoren, hinweg, so ändert man sie natürlich fundamental. Aber das ist reine Spekulation, und sollte genau überprüft werden.

## 7.4 Fazit

In diesem Kapitel wurde demonstriert, dass die Ratengleichungen des vorangegangenen Kapitels numerisch integriert werden können, und der Fluss im Detail verfolgt werden kann.

Dabei wurde zunächst das Hauptprogramm, das die Integration der Ratengleichungen vornimmt, vorgestellt, einige Besonderheiten wurden erklärt. Insbesondere wurde kurz die „linked list“ vorgestellt, die das zentrale Element des Programms darstellt. Man stellt bei RG-Simulationen sonst nämlich sehr schnell fest, dass man an die Grenzen gerät, die einem die moderne Rechnerleistung heute setzt, sowohl was den zur Verfügung stehenden Speicher, als auch die Rechenleistung angeht. Basierend auf der „linked list“ halte ich den verwendeten Code schon für sehr effektiv; einzelne Optimierungen sind sicher noch möglich.

Anhand einfacher Beispielsysteme wurden die gängigsten Szenarien der RG-Theorie vorgeführt, und Ansätze zu deren Analyse präsentiert. Dabei wird schnell klar, dass weitere Programme wünschenswert und hilfreich sind, um die Suche nach Strukturen im Kopplungskonstantenraum zumindest teilweise zu automatisieren, und gefundene Ergebnisse analysieren zu können. Die von mir zu diesem Zweck dem Hauptprogramm hinzugefügten Hilfsprogramme wurden hier ebenfalls kurz dargestellt.

Zu den vorgeführten Szenarien, die in teilweise unphysikalischen Testsystemen gefunden und zum Zweck des Erlernens der Methodik untersucht wurden, gehören repulsive und attraktive Fixpunkte, Fokusfixpunkte, die Abhängigkeit der Topologie von äußeren Parametern sowie das Wandern eines Fixpunkts unter Variation der anomalen Dimension.

Bezogen auf die Turbulenzmodelle der vorangegangenen Kapitel können zwei Ergebnisse präsentiert werden. Das eine ist nur eine Beobachtung, die weitere Aufmerksamkeit verdient: Die numerischen Rechnungen zur RG-Analyse werden instabil, wenn man alle Koeffizienten in den Wirkungen, nach analytischer Fortsetzung der Felder, reell wählt. Dies ist kein Einzelergebnis, sondern wird ähnlich von anderen Gruppen, die zum Beispiel mit Monte-Carlo-Methoden arbeiten, bestätigt. Eine über eine Hypothese hinausgehende Erklärung ist mir dafür nicht bekannt; diesen Punkt sollte man weiter untersuchen.

Das zentrale Ergebnis dieses Kapitels ist aber das Skalieren der Strukturfunktionen in der Nähe des trivialen Fixpunkts. Wie gezeigt wurde, entsprechen die gemessenen Exponenten in sehr guter Genauigkeit den Vorhersagen der K41-Theorie, und zwar in allen untersuchten Ordnungen. Dies ist insofern bemerkenswert, als hier die Strukturfunktionen bis zur Ordnung 7 simuliert wurden; dies ist zu vergleichen mit anderen Arbeiten zur RG-Theorie, in denen maximal die zweite Strukturfunktion und die laufende Viskosität berechnet werden können. Darüber hinaus sei darauf hingewiesen, dass die Ordnung, bis zu der die Strukturfunktionen simuliert werden, nur von der Rechenzeit begrenzt wird, die man dafür aufzuwenden hat; es sind theoretisch noch beliebig viele Exponenten ohne großen Mehraufwand zu berechnen. Wie sinnvoll das ist, sei allerdings dahingestellt, denn die Genauigkeit, mit denen die Skalierungsexponenten experimentell bekannt sind, nimmt mit steigender Ordnung sehr schnell ab.

Bleibt festzuhalten, dass, vorbereitet durch eine Ableitungsentwicklung, eine RG-Analyse sehr vieler Operatoren gleichzeitig mit der exakten RG leicht möglich ist. Die Tensorschreibweise der Ratengleichungen ist direkt in den Code implementierbar; dadurch können ohne Schwierigkeiten mehrere hundert Operatoren zugleich betrachtet werden. Mit den Mitteln der feldtheoretischen RG ist dies so nicht möglich.

Schön wäre es sicher gewesen, über den trivialen Fixpunkt hinaus weitere Strukturen für die Turbulenzmodelle zu finden, seien es zum Beispiel Fixpunkte, oder Crossover-Phänomene zwischen Fixpunkten. Dies ist leider bislang nicht gelungen. Das liegt vor allem daran, dass der zu untersuchende Raum schon bei wenigen zugelassenen Feldern sehr hochdimensional wird, und in ihm die Suche nach Strukturen entsprechend zeitaufwändig. Weitere Untersuchungen sollten hier durchgeführt werden.



## Kapitel 8

# Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist gezeigt worden, dass die Methodik der Renormierungsgruppe noch viel bislang unerschöpftes Potential besitzt, um statistische Analysen, zum Beispiel von nichtlinearen dynamischen Systemen wie der Turbulenz, zu ermöglichen.

Es konnte eine RG-Gleichung hergeleitet werden, die für die Arbeit an einer großen Zahl physikalischer Systeme geeignet ist. Verschiedene Versionen der Gleichung, insbesondere der Propagatordefinition, wurden diskutiert, und Standpunkt untermauert, dass die Polchinski-Version der Propagatordefinition anderen Versionen an Flexibilität überlegen ist. Die Äquivalenz der hergeleiteten Gleichung zur Wilson-Gleichung wurde in einem Spezialfall demonstriert.

Bezogen auf die Turbulenz wurde zunächst gezeigt, wie ein erzeugendes Funktional (oder ein Wirkungsfunktional) aufgestellt werden kann, das die statistischen Eigenschaften des zu untersuchenden Systems verkörpert. Insbesondere konnte gezeigt werden, dass mit der Faddeev-Popov-Methode eine Möglichkeit besteht, Systeme zu analysieren, die durch mehrere unabhängige Gleichungen beschrieben werden. Weiterhin wurde demonstriert, wie man nichtlokale Terme in der Wirkung systematisch zu Gunsten lokaler Wechselwirkungen und Geisterfelder eliminieren kann. Die Möglichkeit einer Ableitungsentwicklung, kombiniert mit einer Ableitung in den Feldpotenzen, konnte gezeigt werden. Diese Entwicklung ist explizit bis zur ersten Ordnung in den Ableitung vorgeführt worden. Es wurde gezeigt, dass diese Entwicklung vorteilhaft für die RG-Analyse ist, da sie die Funktionaldifferentialgleichung in ein System von Ratengleichungen aufbricht.

Weiterhin wurde demonstriert, dass man die Reparametrisierungsinvarianz der RG-Gleichung in einer Art ausnutzen kann, dass der triviale Fixpunkt ein bestimmtes Skalieren, in diesem Fall das von der K41-Theorie vorhergesagte, vorweist. Diese Eigenschaft des trivialen Fixpunkts wurde analytisch gezeigt.

Außerdem ist es gelungen, das System aus Ratengleichungen in leicht zu verallgemeinernder Weise numerisch umzusetzen. Die Gleichungen konnten integriert werden, verschiedene Integrationsverfahren wurden verglichen. Anhand speziell konstruierter, unphysikalischer Systeme wurde eine Reihe von Analyseprogrammen entwickelt, um die gewünschten Informationen aus den Datensätzen zu extrahieren. Verschiedene Strukturen wurden gefunden, und es wurde demonstriert, wie diese zu analysieren sind.

Bezogen auf die RG-Analyse der hydrodynamischen Turbulenz konnte gezeigt werden, dass K41-Skalieren sämtlicher Strukturfunktionen als der triviale Fixpunkt des RG-Flusses gefunden werden kann. Die Exponenten wurden bis zur Ordnung 7 berechnet, und sind in sehr guter Übereinstimmung mit der K41-Voraussage.

Weiter konnte festgestellt werden, dass die Stabilität der numerischen Rechnungen stark davon abhängt, ob die imaginären Koeffizienten in der Wirkung als solche berücksichtigt werden, oder durch Wick-Rotation zu reellen Koeffizienten umgewandelt werden. Im zweiten Fall wird die Numerik instabil, in dem Sinne, dass einzelne Koeffizienten schnell und unbegrenzt wachsen. Eine mögliche Deutung, die noch zu untersuchen wäre, wurde vorgeschlagen.

Weiter wurde argumentiert, dass Szenarien, die sich nicht auf Fixpunkte beschränken, das intermittente Skalieren der Turbulenz erklären könnten, insbesondere Crossover-Szenarien wurden vorgeschlagen.

Und letztlich ist wohl die Überlegenheit der exakten Renormierungsgruppe, verglichen mit der feldtheoretischen, deutlich geworden. Hier hat man die Möglichkeit, eine große Zahl an Operatoren gleichzeitig zu verfolgen, und auch Flüsse fern von jedem Fixpunkt zu untersuchen. Durch die grafische Darstellbarkeit der Ergebnisse sind Szenarien leicht zu erkennen, und zu analysieren.

In aufbauenden Arbeiten sollte zunächst weiter nach deutlichen Strukturen gesucht werden, die die intermittenten Exponenten erklären können, insbesondere ein Crossover wäre zu untersuchen. Dabei ist zu klären, wie dieses Crossover universelle Observablen produzieren kann. Unter Umständen müssen dafür Flüsse mit noch mehr Feldern simuliert werden.

Darüber hinaus ist die erste Ordnung der Ableitungsentwicklung in die Numerik zu implementieren. Wenn möglich, sollte dies auch für die Modelle 1b und 2 geschehen, um die Aussagekraft der Modelle zu vergleichen.

Eine Entwicklung bis zur Ordnung 2 in den Ableitungen wäre ebenfalls wünschenswert, um die Propagatoren einerseits, die Laplace-Operatoren andererseits angemessen in der Theorie vertreten zu sehen.

Bei all diesen Vorschlägen ist zu berücksichtigen, dass man schnell an die Grenzen der Rechenkapazität eines normalen Desktopcomputers gelangt, schon mit der in der vorliegenden Arbeit verwendeten nullten Ordnung der Ableitungsentwicklung. Die Aktualisierung der Operatorwerte sollte aber gut zu parallelisieren sein, wenn man diesen Weg einzuschlagen gedenkt.

Außerdem ist die in dieser Arbeit vorgestellte Vorgehensweise auf andere Modelle anzuwenden, insbesondere auf die als „Burgulence“ bezeichnete Turbulenz der Burger-Gleichung. Hier wäre die Anwendbarkeit der Ableitungsentwicklung zu überprüfen, da es sich bei der Burger-Turbulenz um eine Schockwellenturbulenz handelt.

Auch über eine Übertragbarkeit auf Systeme der Magnetohydrodynamik wäre nachzudenken.

# Anhang A

## Terme der Ableitungsentwicklung

### A.1 Die Ableitungsentwicklung, Modell 1

#### A.1.1 Nullte Ordnung in den Ableitungen

In diesem Abschnitt wurden alle Terme gesammelt, die entweder für die Gleichungen nullter Ordnung in den Ableitungen (inklusive der LPA) benötigt werden, oder sowohl für die Gleichungen nullter wie erster Ordnung. Daher tauchen hier mitunter Symbole auf, die nur für die Gleichungen erster Ordnung Sinn machen; aufgefasst als Symbol für Gleichungen nullter Ordnung ist dieser Term dann einfach wegzulassen.

- Bei allen folgenden Termen sind  $\Gamma$  und  $\Theta$  sinngemäß durch  $V$  oder  $Z(\dots)$  zu ersetzen.

$$\begin{aligned}
\left\langle\left\langle\Gamma, \Theta\right\rangle\right\rangle_{v,0} &= \sum_{m,l,p,w} (-1)^{E \times} \\
&\left\{ \theta(m_1 - \epsilon) \Gamma_{A_1,v}^{A_1,v} \Theta_{A_1,v} \right. \\
&+ \theta(A_2 - m_2 - \epsilon) \Gamma_{A_4,v}^{A_4,v} \Theta_{A_4,v}^{A_2-m_2-1} + \theta(A_3 - m_3 - \epsilon) \Gamma_{A_1,v}^{A_5,v} \Theta_{A_1,v}^{A_3-m_3-1} \\
&+ \theta(A_4 - m_4 - \epsilon) \left( \Gamma_{A_4,v}^{A_1,v} \Theta_{A_4,v}^{A_4-m_4-1} + \Theta_{A_4,v}^{A_1,v} \Gamma_{A_4,v}^{A_4-m_4-1} \right) \\
&+ \theta(A_5 - m_5 - \epsilon) \left( \Gamma_{A_5,v}^{A_1,v} \Theta_{A_5,v}^{A_5-m_5-1} + \Theta_{A_5,v}^{A_1,v} \Gamma_{A_5,v}^{A_5-m_5-1} \right) \\
&+ \delta_{l_1,0} \delta_{r_1,1} \left( \Gamma_{r_1,v}^{A_1,v} \Theta_{r_1,v} + \Theta_{r_1,v}^{A_1,v} \Gamma_{r_1,v} \right) + \delta_{l_2,0} \delta_{r_2,1} \left( \Gamma_{r_2,v}^{A_1,v} \Theta_{r_2,v} + \Theta_{r_2,v}^{A_1,v} \Gamma_{r_2,v} \right) \\
&+ \theta(A_6 - m_6 - \epsilon) \left( \Gamma_{A_5,v}^{A_4,v} \Theta_{A_5,v}^{A_6-m_6-1} + \Theta_{A_5,v}^{A_4,v} \Gamma_{A_5,v}^{A_6-m_6-1} \right) \\
&+ (-1)^{r_2-l_2} \delta_{r_1,l_1} \delta_{l_3,0} \delta_{r_3,1} \left( \Gamma_{r_1,v}^{A_4,v} \Theta_{r_3-l_3 \circ 0} + \Theta_{r_1,v}^{A_4,v} \Gamma_{r_3-l_3 \circ 0} \right) \\
&+ (-1)^{r_3-l_3} \delta_{r_2,l_2} \delta_{l_4,0} \delta_{r_4,1} \left( \Gamma_{r_2,v}^{A_4,v} \Theta_{r_4-l_4 \circ 0} + \Theta_{r_2,v}^{A_4,v} \Gamma_{r_4-l_4 \circ 0} \right) \\
&+ (-1)^{r_2-l_2+r_3-l_3+r_4-l_4} \delta_{r_1,l_1} \delta_{l_5,0} \delta_{r_5,1} \left( \Gamma_{r_1,v}^{A_5,v} \Theta_{r_5-l_5 \circ 0} + \Theta_{r_1,v}^{A_5,v} \Gamma_{r_5-l_5 \circ 0} \right) \\
&+ (-1)^{r_3-l_3+r_4-l_4+r_5-l_5} \delta_{r_2,l_2} \delta_{l_6,0} \delta_{r_6,1} \left( \Gamma_{r_2,v}^{A_5,v} \Theta_{r_6-l_6 \circ 0} + \Theta_{r_2,v}^{A_5,v} \Gamma_{r_6-l_6 \circ 0} \right)
\end{aligned}$$

$$+ (-1)^{1+r_1} \delta_{r_2, l_2} \delta_{l_1, 0} \theta(q-p-\epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} r_1, v \\ \odot \\ r_2, v \end{smallmatrix} q-p-1 \Theta + \Theta \begin{smallmatrix} r_1, v \\ \odot \\ r_2, v \end{smallmatrix} q-p-1 \Gamma \right) \Bigg\}$$

•

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \Gamma, \Theta \right\rangle \right\rangle_{u,0} &= \sum_{m,l,p,w} (-1)^E \times \\ &\left\{ \theta(m_2 - \epsilon) \Gamma^{m_2-1} \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ A_{2,u} \end{smallmatrix} \Theta \right. \\ &+ \theta(A_1 - m_1 - \epsilon) \Gamma \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ A_{4,u} \end{smallmatrix} \Theta^{A_1-m_1-1} + \theta(A_3 - m_3 - \epsilon) \Gamma \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ A_{6,u} \end{smallmatrix} \Theta^{A_3-m_3-1} \\ &+ \theta(A_4 - m_4 - \epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ A_{4,u} \end{smallmatrix} \Theta^{A_4-m_4-1} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ A_{4,u} \end{smallmatrix} \Gamma^{A_4-m_4-1} \right) \\ &+ \theta(A_6 - m_6 - \epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ A_{6,u} \end{smallmatrix} \Theta^{A_6-m_6-1} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ A_{6,u} \end{smallmatrix} \Gamma^{A_6-m_6-1} \right) \\ &+ \delta_{l_3,0} \delta_{r_3,1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ r_{3,u} \end{smallmatrix} \Theta + \Theta \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ r_{3,u} \end{smallmatrix} \Gamma \right) + \delta_{l_4,0} \delta_{r_4,1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ r_{4,u} \end{smallmatrix} \Theta + \Theta \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ r_{4,u} \end{smallmatrix} \Gamma \right) \\ &+ \theta(A_5 - m_5 - \epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ A_{6,u} \end{smallmatrix} \Theta^{A_5-m_5-1} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ A_{6,u} \end{smallmatrix} \Gamma^{A_5-m_5-1} \right) \\ &+ (-1)^{r_2-l_2} \delta_{r_3, l_3} \delta_{l_1, 0} \delta_{r_1, 1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ r_{3,u} \end{smallmatrix} \Theta_{r_1-l_1} \circ 0 + \Theta \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ r_{3,u} \end{smallmatrix} \Gamma_{r_1-l_1} \circ 0 \right) \\ &+ (-1)^{r_3-l_3} \delta_{r_4, l_4} \delta_{l_2, 0} \delta_{r_2, 1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ r_{4,u} \end{smallmatrix} \Theta_{r_2-l_2} \circ 0 + \Theta \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ r_{4,u} \end{smallmatrix} \Gamma_{r_2-l_2} \circ 0 \right) \\ &+ (-1)^{r_4-l_4} \delta_{r_3, l_3} \delta_{l_5, 0} \delta_{r_5, 1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ r_{3,u} \end{smallmatrix} \Theta_{r_5-l_5} \circ 0 + \Theta \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ r_{3,u} \end{smallmatrix} \Gamma_{r_5-l_5} \circ 0 \right) \\ &+ (-1)^{r_5-l_5} \delta_{r_4, l_4} \delta_{l_6, 0} \delta_{r_6, 1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ r_{4,u} \end{smallmatrix} \Theta_{r_6-l_6} \circ 0 + \Theta \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ r_{4,u} \end{smallmatrix} \Gamma_{r_6-l_6} \circ 0 \right) \\ &\left. + (-1)^{r_5+r_6-l_1-l_2+l_5+l_6} \delta_{r_4, l_4} \delta_{l_3, 0} \theta(q-p-\epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} r_{3,u} \\ \odot \\ r_{4,u} \end{smallmatrix} q-p-1 \Theta + \Theta \begin{smallmatrix} r_{3,u} \\ \odot \\ r_{4,u} \end{smallmatrix} q-p-1 \Gamma \right) \right\} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \Gamma, \Theta \right\rangle \right\rangle_{f,0} &= \sum_{m,l,p,w} (-1)^E \times \\ &\left\{ \theta(m_3 - \epsilon) \Gamma^{m_3-1} \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ A_{3,f} \end{smallmatrix} \Theta \right. \\ &+ \theta(A_1 - m_1 - \epsilon) \Gamma \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ A_{5,f} \end{smallmatrix} \Theta^{A_1-m_1-1} + \theta(A_2 - m_2 - \epsilon) \Gamma \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ A_{6,f} \end{smallmatrix} \Theta^{A_2-m_2-1} \\ &+ \theta(A_5 - m_5 - \epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ A_{5,f} \end{smallmatrix} \Theta^{A_5-m_5-1} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ A_{5,f} \end{smallmatrix} \Gamma^{A_5-m_5-1} \right) \\ &+ \theta(A_6 - m_6 - \epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ A_{6,f} \end{smallmatrix} \Theta^{A_6-m_6-1} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ A_{6,f} \end{smallmatrix} \Gamma^{A_6-m_6-1} \right) \\ &+ \delta_{l_5,0} \delta_{r_5,1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{smallmatrix} \Theta + \Theta \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{smallmatrix} \Gamma \right) + \delta_{l_6,0} \delta_{r_6,1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{smallmatrix} \Theta + \Theta \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{smallmatrix} \Gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \theta(A_4 - m_4 - \epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ A_{5,f} \end{smallmatrix} \Theta^{A_4 - m_4 - 1} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ A_{5,f} \end{smallmatrix} \Gamma^{A_4 - m_4 - 1} \right) \\
& + (-1)^{r_4 - l_4} \delta_{r_5, l_5} \delta_{l_3, 0} \delta_{r_3, 1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{smallmatrix} \Theta_{r_3 - l_3 \cup 0} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{smallmatrix} \Gamma_{r_3 - l_3 \cup 0} \right) \\
& + (-1)^{r_5 - l_5} \delta_{r_6, l_6} \delta_{l_4, 0} \delta_{r_4, 1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{smallmatrix} \Theta_{r_4 - l_4 \cup 0} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{smallmatrix} \Gamma_{r_4 - l_4 \cup 0} \right) \\
& + (-1)^{r_2 - l_2 + r_3 - l_3 + r_4 - l_4} \delta_{r_5, l_5} \delta_{l_1, 0} \delta_{r_1, 1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{smallmatrix} \Theta_{r_1 - l_1 \cup 0} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{smallmatrix} \Gamma_{r_1 - l_1 \cup 0} \right) \\
& + (-1)^{r_3 - l_3 + r_4 - l_4 + r_5 - l_5} \delta_{r_6, l_6} \delta_{l_2, 0} \delta_{r_2, 1} \left( \Gamma \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{smallmatrix} \Theta_{r_2 - l_2 \cup 0} + \Theta \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{smallmatrix} \Gamma_{r_2 - l_2 \cup 0} \right) \\
& + (-1)^{1+r_6} \delta_{r_6, l_6} \delta_{l_5, 0} \theta(q - p - \epsilon) \left( \Gamma \begin{smallmatrix} r_{5,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{smallmatrix} \Theta^{q-p-1} + \Theta \begin{smallmatrix} r_{5,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{smallmatrix} \Gamma^{q-p-1} \right) \Big\}
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\langle\langle \Gamma, \Theta \rangle\rangle_{\Psi, 0} &= \sum_{m, l, p, w} (-1)^{E \times} \\
& \left\{ \delta_{l_1, 0} \left\{ (-1)^{r_1} \theta(A_1 - m_1 - \epsilon) \delta_{r_2, l_2} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{1, \psi^*} \\ \odot \\ r_{2, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_1 - m_1 - 1} \right. \right. \\
& \quad + (-1)^{r_1 + r_2 - l_2 + r_3 - l_3} \theta(A_4 - m_4 - \epsilon) \delta_{r_4, l_4} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{1, \psi^*} \\ \odot \\ r_{4, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_4 - m_4 - 1} \\
& \quad + (-1) \theta(A_5 - m_5 - \epsilon) \delta_{r_6, l_6} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{1, \psi^*} \\ \odot \\ r_{6, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_5 - m_5 - 1} \\
& \quad \left. + (-1)(q - p + 1) \delta_{r_1, 1} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{1, \psi^*} \\ \odot \\ q, \psi \end{smallmatrix} \Theta_{r_1 - l_1 \cup 0} \right\} \\
& + \delta_{l_3, 0} \left\{ (-1)^{r_1 - l_1} \theta(A_4 - m_4 - \epsilon) \delta_{r_2, l_2} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{3, \psi^*} \\ \odot \\ r_{2, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_4 - m_4 - 1} \right. \\
& \quad + (-1)^{r_1 + r_2 + r_3} \theta(A_2 - m_2 - \epsilon) \delta_{r_4, l_4} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{3, \psi^*} \\ \odot \\ r_{4, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_2 - m_2 - 1} \\
& \quad + (-1)^{1 + l_1 + l_2} \theta(A_6 - m_6 - \epsilon) \delta_{r_6, l_6} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{3, \psi^*} \\ \odot \\ r_{6, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_6 - m_6 - 1} \\
& \quad \left. + (-1)^{1 + r_1 + r_2} (q - p + 1) \delta_{r_3, 1} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{3, \psi^*} \\ \odot \\ q, \psi \end{smallmatrix} \Theta_{r_3 - l_3 \cup 0} \right\} \\
& + \delta_{l_5, 0} \left\{ (-1)^{r_1 + r_2 + l_1 + l_2} \theta(A_5 - m_5 - \epsilon) \delta_{r_2, l_2} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{5, \psi^*} \\ \odot \\ r_{2, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_5 - m_5 - 1} \right. \\
& \quad + (-1)^{r_1 + r_2} \theta(A_6 - m_6 - \epsilon) \delta_{r_4, l_4} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{5, \psi^*} \\ \odot \\ r_{4, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_6 - m_6 - 1} \\
& \quad + (-1)^{r_6} \theta(A_3 - m_3 - \epsilon) \delta_{r_6, l_6} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{5, \psi^*} \\ \odot \\ r_{6, \psi} \end{smallmatrix} \Theta^{A_3 - m_3 - 1} \\
& \quad \left. + (-1)^{1 + r_6} (q - p + 1) \delta_{r_5, 1} \Gamma \begin{smallmatrix} r_{5, \psi^*} \\ \odot \\ q, \psi \end{smallmatrix} \Theta_{r_5 - l_5 \cup 0} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p+1) \left\{ \delta_{l_2,0} \delta_{r_2,1} \Gamma_{r_2,\psi}^{q,\psi^*} \Theta_{r_2-l_2 \circ 0} + \delta_{l_4,0} \delta_{r_4,1} \Gamma_{r_4,\psi}^{q,\psi^*} \Theta_{r_4-l_4 \circ 0} \right. \\
& \quad + \delta_{l_6,0} \delta_{r_6,1} \Gamma_{r_6,\psi}^{q,\psi^*} \Theta_{r_6-l_6 \circ 0} \\
& \quad \left. + (q-p)\theta(q-p-\epsilon) \Gamma_{q,\psi}^{q,\psi^*} q^{-p-1} \Theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \left\langle \left\langle \Gamma, \Theta \right\rangle \right\rangle_{\phi^i, 0} = \sum_{m,l,p,w,z} (-1)^E \times \Gamma_{x_i, \phi^i}^{x_i, \phi^i} \Theta$$

Bei diesem und den vier vorhergehenden Termen gilt die Konvention:

$$\Gamma \Theta \rightsquigarrow \left( \begin{matrix} p \\ (w_1, w_2, \dots, w_6) \end{matrix} \Gamma_{(l_1, l_2, \dots, l_6)}^{(m_1, m_2, \dots, m_6)} \begin{matrix} q-p \\ (x_1-w_1, x_2-w_2, \dots, x_6-w_6) \end{matrix} \Theta_{(r_1-l_1, r_2-l_2, \dots, r_6-l_6)}^{(A_1-m_1, A_2-m_2, \dots, A_6-m_6)} \right) [\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2]$$

$$\bullet \quad \sum_{m,l,p,w,z} = \sum_{m_1=0}^{A_1} \dots \sum_{m_6=0}^{A_6} \sum_{l_1=0}^{r_1} \dots \sum_{l_6=0}^{r_6} \sum_{p=0}^q \sum_{w_1=0}^{x_1} \dots \sum_{w_6=0}^{z_6}$$

$$\bullet \quad E = l_1(r_2 - l_2) + (l_1 + l_2)(r_3 - l_3) + (l_5 + l_6)(r_4 - l_4) + l_6(r_5 - l_5)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \left\langle \left\langle \Gamma \right\rangle \right\rangle_{v,0} &= \frac{A_1,v}{A_1,v} \Gamma^{A_1-1} + \frac{A_1,v}{E,v} \Gamma + 2 \frac{A_1,v}{A_4,v} \Gamma^{A_4-1} + 2 \frac{A_1,v}{A_5,v} \Gamma^{A_5-1} \\
&+ 2 \delta_{r_1,1} \frac{A_1,v}{r_1,v} \Gamma_{r_1 \circ 0} + 2 \delta_{r_2,1} \frac{A_1,v}{r_2,v} \Gamma_{r_2 \circ 0} + \frac{A_4,v}{A_4,v} \Gamma^{A_2-1} + 2 \frac{A_4,v}{A_5,v} \Gamma^{A_6-1} \\
&+ 2(-1)^{r_2} \delta_{r_1,0} \delta_{r_3,1} \frac{A_4,v}{r_1,v} \Gamma_{r_3 \circ 0} + 2(-1)^{r_3} \delta_{r_2,0} \delta_{r_4,1} \frac{A_4,v}{r_2,v} \Gamma_{r_4 \circ 0} \\
&+ \frac{A_5,v}{A_5,v} \Gamma^{A_3-1} + 2(-1)^{r_2+r_3+r_4} \delta_{r_1,0} \delta_{r_5,1} \frac{A_5,v}{r_1,v} \Gamma_{r_5 \circ 0} \\
&+ 2(-1)^{r_3+r_4+r_5} \delta_{r_2,0} \delta_{r_6,1} \frac{A_5,v}{r_2,v} \Gamma_{r_6 \circ 0} \\
&+ 2 \delta_{r_1,0} \delta_{r_2,0} \frac{r_1,v}{r_2,v} q^{-1} \Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \left\langle \left\langle \Gamma \right\rangle \right\rangle_{u,0} &= \frac{A_2,u}{A_2,u} \Gamma^{A_2-1} + \frac{A_2,u}{E,u} \Gamma + 2 \frac{A_2,u}{A_4,u} \Gamma^{A_4-1} + 2 \frac{A_2,u}{A_6,u} \Gamma^{A_6-1} \\
&+ 2 \delta_{r_3,1} \frac{A_2,u}{r_3,u} \Gamma_{r_3 \circ 0} + 2 \delta_{r_4,1} \frac{A_2,u}{r_4,u} \Gamma_{r_4 \circ 0} + \frac{A_4,u}{A_4,u} \Gamma^{A_1-1} + 2 \frac{A_4,u}{A_6,u} \Gamma^{A_5-1} \\
&+ 2(-1)^{r_2} \delta_{r_3,0} \delta_{r_1,1} \frac{A_4,u}{r_3,u} \Gamma_{r_1 \circ 0} + 2(-1)^{r_3} \delta_{r_4,0} \delta_{r_2,1} \frac{A_4,u}{r_4,u} \Gamma_{r_2 \circ 0} \\
&+ \frac{A_6,u}{A_6,u} \Gamma^{A_3-1} + 2(-1)^{r_4} \delta_{r_3,0} \delta_{r_5,1} \frac{A_6,u}{r_3,u} \Gamma_{r_5 \circ 0} \\
&+ 2(-1)^{r_5} \delta_{r_4,0} \delta_{r_6,1} \frac{A_6,u}{r_4,u} \Gamma_{r_6 \circ 0} \\
&+ 2 \delta_{r_3,0} \delta_{r_4,0} \frac{r_3,u}{r_4,u} q^{-1} \Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle\Gamma\rangle\rangle_{f,0} &= \begin{matrix} A_{3,f} \\ \odot \\ A_{3,f} \end{matrix} \Gamma^{A_3-1} + \begin{matrix} A_{3,f} \\ \odot \\ E,f \end{matrix} \Gamma + 2 \begin{matrix} A_{3,f} \\ \odot \\ A_{5,f} \end{matrix} \Gamma^{A_5-1} + 2 \begin{matrix} A_{3,f} \\ \odot \\ A_{6,f} \end{matrix} \Gamma^{A_6-1} \\
&+ 2\delta_{r_5,1} \begin{matrix} A_{3,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{matrix} \Gamma_{r_5\circ 0} + 2\delta_{r_6,1} \begin{matrix} A_{3,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{matrix} \Gamma_{r_6\circ 0} + \begin{matrix} A_{5,f} \\ \odot \\ A_{5,f} \end{matrix} \Gamma^{A_1-1} + 2 \begin{matrix} A_{5,f} \\ \odot \\ A_{6,f} \end{matrix} \Gamma^{A_4-1} \\
&+ 2(-1)^{r_2+r_3+r_4} \delta_{r_5,0} \delta_{r_1,1} \begin{matrix} A_{5,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{matrix} \Gamma_{r_1\circ 0} + 2(-1)^{r_3+r_4+r_5} \delta_{r_6,0} \delta_{r_2,1} \begin{matrix} A_{5,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{matrix} \Gamma_{r_2\circ 0} \\
&+ \begin{matrix} A_{6,f} \\ \odot \\ A_{6,f} \end{matrix} \Gamma^{A_2-1} + 2(-1)^{r_4} \delta_{r_5,0} \delta_{r_3,1} \begin{matrix} A_{6,f} \\ \odot \\ r_{5,f} \end{matrix} \Gamma_{r_3\circ 0} \\
&+ 2(-1)^{r_5} \delta_{r_6,0} \delta_{r_4,1} \begin{matrix} A_{6,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{matrix} \Gamma_{r_4\circ 0} \\
&+ 2\delta_{r_5,0} \delta_{r_6,0} \begin{matrix} r_{5,f} \\ \odot \\ r_{6,f} \end{matrix} q^{-1} \Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle\Gamma\rangle\rangle_{\Psi,0} &= \begin{matrix} q,\psi \\ \odot \\ q,\psi^* \end{matrix} q^{-1} \Gamma - \begin{matrix} q,\psi \\ \odot \\ E,\psi^* \end{matrix} \Gamma \\
&+ \delta_{r_1,1} \begin{matrix} q,\psi \\ \odot \\ r_{1,\psi^*} \end{matrix} \Gamma_{r_1\circ 0} + \delta_{r_3,1} \begin{matrix} q,\psi \\ \odot \\ r_{3,\psi^*} \end{matrix} \Gamma_{r_3\circ 0} \\
&+ \delta_{r_5,1} \begin{matrix} q,\psi \\ \odot \\ r_{5,\psi^*} \end{matrix} \Gamma_{r_5\circ 0} + \delta_{r_2,1} \begin{matrix} r_2,\psi \\ \odot \\ q,\psi^* \end{matrix} \Gamma_{r_2\circ 0} \\
&+ \delta_{r_4,1} \begin{matrix} r_4,\psi \\ \odot \\ q,\psi^* \end{matrix} \Gamma_{r_4\circ 0} + \delta_{r_6,1} \begin{matrix} r_6,\psi \\ \odot \\ q,\psi^* \end{matrix} \Gamma_{r_6\circ 0} \\
&+ (-1) \delta_{r_1,0} \delta_{r_2,0} \begin{matrix} r_2,\psi \\ \odot \\ r_{1,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_1-1} + (-1)^{1+r_2+r_3} \delta_{r_1,0} \delta_{r_4,0} \begin{matrix} r_4,\psi \\ \odot \\ r_{1,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_4-1} \\
&+ (-1) \delta_{r_1,0} \delta_{r_6,0} \begin{matrix} r_6,\psi \\ \odot \\ r_{1,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_5-1} + \delta_{r_2,0} \delta_{r_3,0} \begin{matrix} r_2,\psi \\ \odot \\ r_{3,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_4-1} \\
&+ (-1) \delta_{r_3,0} \delta_{r_4,0} \begin{matrix} r_4,\psi \\ \odot \\ r_{3,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_2-1} + (-1)^{1+r_1+r_2} \delta_{r_3,0} \delta_{r_6,0} \begin{matrix} r_6,\psi \\ \odot \\ r_{3,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_6-1} \\
&+ (-1)^{r_3+r_4} \delta_{r_2,0} \delta_{r_5,0} \begin{matrix} r_2,\psi \\ \odot \\ r_{5,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_5-1} + \delta_{r_4,0} \delta_{r_5,0} \begin{matrix} r_4,\psi \\ \odot \\ r_{5,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_6-1} \\
&+ (-1) \delta_{r_5,0} \delta_{r_6,0} \begin{matrix} r_6,\psi \\ \odot \\ r_{5,\psi^*} \end{matrix} \Gamma^{A_3-1}
\end{aligned}$$

$$\langle\langle\Gamma\rangle\rangle_{\phi^i,0} = \begin{matrix} x_i,\phi^i \\ \odot \\ x_i,\phi^i \end{matrix} \Gamma$$

Bei diesem und den vier vorhergehenden Termen gilt die Konvention:

$$\Gamma \rightsquigarrow_{(x_1,x_2,\dots,x_6)}^q \Gamma_{(r_1,r_2,\dots,r_6)}^{(A_1,A_2,\dots,A_6)} [\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2].$$

•

$$\begin{aligned}
& \Gamma \begin{array}{c} R_1, S_1 \\ \odot \\ R_2, S_2 \end{array} \Theta[\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
&= \delta_{\text{Der},0} \left( \begin{array}{c} \{R_1, S_1\} T_0(\Gamma[0]) \\ \{R_2, S_2\} T_0(\Theta[0]) \end{array} \right) \\
&+ \delta_{\text{Der},1} \left( \begin{array}{c} \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, K_1, L_1]) \\ \{R_2, S_2\} T_0(\Theta[0]) \\ + \{R_1, S_1\} T_0(\Gamma[0]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, K_1, L_1]) \\ + \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, E, \frac{R_1}{S_1}]) \\ \{R_2, S_2\} T_0(\Theta[0]) \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \mu(R_2, K_1) \\ + \{R_1, S_1\} T_0(\Gamma[0]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, E, \frac{R_2}{S_2}]) \delta_{L_1, \frac{R_2}{S_2}} \mu(R_1, K_1) \end{array} \right) \\
&+ \delta_{\text{Der},2} \left( \begin{array}{c} \{R_1, S_1\} T_0(\Gamma[0]) \\ \{R_2, S_2\} T_2(\Theta[2, K_1, L_1, K_2, L_2]) \\ + \{R_1, S_1\} T_2(\Gamma[2, K_1, L_1, K_2, L_2]) \\ \{R_2, S_2\} T_0(\Theta[0]) \\ + \{R_1, S_1\} T_2(\Gamma[2, K_1, L_1, E, \frac{R_1}{S_1}]) \\ \{R_2, S_2\} T_0(\Theta[0]) \delta_{L_2, \frac{R_1}{S_1}} \mu(R_2, K_2) \\ + \{R_1, S_1\} T_2(\Gamma[2, K_2, L_2, E, \frac{R_1}{S_1}]) \\ \{R_2, S_2\} T_0(\Theta[0]) \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \mu(R_2, K_1) \\ + \{R_1, S_1\} T_0(\Gamma[0]) \\ \{R_2, S_2\} T_2(\Theta[2, K_1, L_1, E, \frac{R_2}{S_2}]) \delta_{L_2, \frac{R_2}{S_2}} \mu(R_1, K_2) \\ + \{R_1, S_1\} T_0(\Gamma[0]) \\ \{R_2, S_2\} T_2(\Theta[2, K_2, L_2, E, \frac{R_2}{S_2}]) \delta_{L_1, \frac{R_2}{S_2}} \mu(R_1, K_1) \\ + \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, K_1, L_1]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, K_2, L_2]) \\ + \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, K_2, L_2]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, K_1, L_1]) \\ + \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, K_1, L_1]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, E, \frac{R_2}{S_2}]) \delta_{L_2, \frac{R_2}{S_2}} \mu(R_1, K_2) \\ + \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, K_2, L_2]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, E, \frac{R_2}{S_2}]) \delta_{L_1, \frac{R_2}{S_2}} \mu(R_1, K_1) \\ + \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, E, \frac{R_1}{S_1}]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, K_1, L_1]) \delta_{L_2, \frac{R_1}{S_1}} \mu(R_2, K_2) \\ + \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, E, \frac{R_1}{S_1}]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, K_2, L_2]) \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \mu(R_2, K_1) \\ + \{R_1, S_1\} T_1(\Gamma[1, E, \frac{R_2}{S_2}]) \\ \{R_2, S_2\} T_1(\Theta[1, E, \frac{R_2}{S_2}]) \delta_{K_1, \frac{R_1}{S_1} * \frac{R_2}{S_2}} \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 0} \\ + \{R_1, S_1\} T_2(\Gamma[2, E, \frac{R_1}{S_1}, 1, 1]) \\ \{R_2, S_2\} T_0(\Theta[0]) \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 1} \mu(R_2, K_1) \\ + \{R_1, S_1\} T_0(\Gamma[0]) \\ \{R_2, S_2\} T_2(\Theta[2, E, \frac{R_2}{S_2}, 1, 1]) \delta_{L_1, \frac{R_2}{S_2}} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 1} \mu(R_1, K_1) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

mit der Bezeichnung

$$\begin{aligned} \mu(R_i, K_j) &= \delta_{K_j, \frac{R_1}{S_1} * \frac{R_2}{S_2}} (1 - \delta_{R_i, \bar{v}}) (1 - \delta_{R_i, \bar{\psi}}) (1 - \delta_{R_i, \bar{a}}) (1 - \delta_{R_i, \bar{b}}) \\ &\quad + \delta_{K_j, R_i} (\delta_{R_i, \bar{v}} + \delta_{R_i, \bar{\psi}} + \delta_{R_i, \bar{a}} + \delta_{R_i, \bar{b}}) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} &\Gamma \begin{array}{c} R_1, S_1 \\ \otimes \\ R_2, S_2 \end{array} \Theta[\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2] \\ &= \left\{ (\delta_{R_2, p_2 r_x} + (-1)^{1 - \delta_{p_2, 0}} \delta_{R_2, p_1 r_x}) \left( -\delta_{R_1, r_1} \delta_{l_1, 0} \delta_{S_1, v} + (-1)^{l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_2} \delta_{l_2, 0} \delta_{S_1, v} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{l_4 + l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_3} \delta_{l_3, 0} \delta_{S_1, u} + (-1)^{l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_4} \delta_{l_4, 0} \delta_{S_1, u} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{l_6} \delta_{R_1, r_5} \delta_{l_5, 0} \delta_{S_1, f} + \delta_{R_1, r_6} \delta_{l_6, 0} \delta_{S_1, f} \right) \text{ für alle } x \right. \\ &+ \left( \delta_{R_2, \bar{v}} \delta_{\bar{\psi}, 4} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0}} + \delta_{R_2, \bar{a}} \delta_{\bar{a}, 4} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0} + \delta_{\bar{\psi}, 0} - 1} + \delta_{R_2, \bar{b}} \delta_{\bar{b}, 4} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0} + \delta_{\bar{\psi}, 0} - \delta_{\bar{a}, 4} - \delta_{\bar{a}, 5} - 1} \right) \\ &\quad \times \left( -\delta_{R_1, r_1} \delta_{l_1, 0} \delta_{S_1, v} + (-1)^{l_4 + l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_3} \delta_{l_3, 0} \delta_{S_1, u} + (-1)^{l_6} \delta_{R_1, r_5} \delta_{l_5, 0} \delta_{S_1, f} \right) \\ &+ \left( \delta_{R_2, \bar{v}} \delta_{\bar{\psi}, 5} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0}} + \delta_{R_2, \bar{a}} \delta_{\bar{a}, 5} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0} + \delta_{\bar{\psi}, 0} - 1} + \delta_{R_2, \bar{b}} \delta_{\bar{b}, 5} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0} + \delta_{\bar{\psi}, 0} - \delta_{\bar{a}, 4} - \delta_{\bar{a}, 5} - 1} \right) \\ &\quad \times \left( (-1)^{l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_2} \delta_{l_2, 0} \delta_{S_1, v} + (-1)^{l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_4} \delta_{l_4, 0} \delta_{S_1, u} + \delta_{R_1, r_6} \delta_{l_6, 0} \delta_{S_1, f} \right) \\ &+ (\delta_{R_2, p_2 r_x} + (-1)^{1 - \delta_{p_2, 0}} \delta_{R_2, p_1 r_x}) \left( \delta_{R_1, r_1} \delta_{l_1, 0} \delta_{S_1, \psi^*} + (-1)^{l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_2} \delta_{l_2, 0} \delta_{S_1, \psi} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l_1 + l_2} \delta_{R_1, r_3} \delta_{l_3, 0} \delta_{S_1, \psi^*} + (-1)^{l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_4} \delta_{l_4, 0} \delta_{S_1, \psi} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \delta_{R_1, r_5} \delta_{l_5, 0} \delta_{S_1, \psi^*} + \delta_{R_1, r_6} \delta_{l_6, 0} \delta_{S_1, \psi} \right) \text{ für alle } x \\ &+ \delta_{R_2, \bar{\psi}} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0}} \left( \delta_{R_1, r_1} \delta_{l_1, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{v}, 1} + (-1)^{l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_2} \delta_{l_2, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{v}, 1} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l_1 + l_2} \delta_{R_1, r_3} \delta_{l_3, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{v}, 2} + (-1)^{l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_4} \delta_{l_4, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{v}, 2} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \delta_{R_1, r_5} \delta_{l_5, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{v}, 3} + \delta_{R_1, r_6} \delta_{l_6, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{v}, 3} \right) \\ &+ \delta_{R_2, \bar{a}} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0} + \delta_{\bar{\psi}, 0} - 1} \left( \delta_{R_1, r_1} \delta_{l_1, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{a}, 1} + (-1)^{l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_2} \delta_{l_2, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{a}, 1} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l_1 + l_2} \delta_{R_1, r_3} \delta_{l_3, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{a}, 2} + (-1)^{l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_4} \delta_{l_4, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{a}, 2} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \delta_{R_1, r_5} \delta_{l_5, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{a}, 3} + \delta_{R_1, r_6} \delta_{l_6, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{a}, 3} \right) \\ &+ \delta_{R_2, \bar{b}} (-1)^{\delta_{p_1, 0} + \delta_{p_2, 0} + \delta_{\bar{\psi}, 0} - \delta_{\bar{a}, 4} - \delta_{\bar{a}, 5} - 1} \left( \delta_{R_1, r_1} \delta_{l_1, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{b}, 1} + (-1)^{l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_2} \delta_{l_2, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{b}, 1} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l_1 + l_2} \delta_{R_1, r_3} \delta_{l_3, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{b}, 2} + (-1)^{l_5 + l_6} \delta_{R_1, r_4} \delta_{l_4, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{b}, 2} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \delta_{R_1, r_5} \delta_{l_5, 0} \delta_{S_1, \psi^*} \delta_{\bar{b}, 3} + \delta_{R_1, r_6} \delta_{l_6, 0} \delta_{S_1, \psi} \delta_{\bar{b}, 3} \right) \left. \right\} \mathfrak{B} \left( \Gamma \begin{array}{c} R_1, S_1 \\ \odot \\ R_2, S_2 \end{array} \Theta[\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2] \right) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} R_1, S_1 \\ \odot \\ R_2, S_2 \end{matrix} \Gamma[\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
&= \delta_{\text{Der},0} \left( \{R_1, S_1\} T_0(\{R_2, S_2\} T'_0(\Gamma[0])) \right) \\
&+ \delta_{\text{Der},1} \left( \{R_1, S_1\} T_1(\{R_2, S_2\} T'_1(\Gamma[1, K_1, L_1])) \right. \\
&\quad + \{R_1, S_1\} T_1(\{R_2, S_2\} T'_1(\Gamma[1, E, \frac{R_1}{S_1}])) \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \mu(R_2, K_1) \\
&\quad \left. + \{R_1, S_1\} T_1(\{R_2, S_2\} T'_1(\Gamma[1, E', \frac{R_2}{S_2}])) \delta_{L_1, \frac{R_2}{S_2}} \mu(R_1, K_1) \right) \\
&+ \delta_{\text{Der},2} \left( \{R_1, S_1\} T_2(\{R_2, S_2\} T'_2(\Gamma[2, K_1, L_1, K_2, L_2])) \right. \\
&\quad + \{R_1, S_1\} T_2(\{R_2, S_2\} T'_2(\Gamma[2, E, \frac{R_1}{S_1}, K_2, L_2])) (1 - \delta_{K_2,1}) \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \mu(R_2, K_1) \\
&\quad + \{R_1, S_1\} T_2(\{R_2, S_2\} T'_2(\Gamma[2, E, \frac{R_1}{S_1}, K_1, L_1])) (1 - \delta_{K_1,1}) \delta_{L_2, \frac{R_1}{S_1}} \mu(R_2, K_2) \\
&\quad + \{R_1, S_1\} T_2(\{R_2, S_2\} T'_2(\Gamma[2, E', \frac{R_2}{S_2}, K_2, L_2])) (1 - \delta_{K_2,1}) \delta_{L_1, \frac{R_2}{S_2}} \mu(R_1, K_1) \\
&\quad + \{R_1, S_1\} T_2(\{R_2, S_2\} T'_2(\Gamma[2, E', \frac{R_2}{S_2}, K_1, L_1])) (1 - \delta_{K_1,1}) \delta_{L_2, \frac{R_2}{S_2}} \mu(R_1, K_2) \\
&\quad + \{R_1, S_1\} T_2(\{R_2, S_2\} T'_2(\Gamma[2, E, \frac{R_1}{S_1}, 1, 1])) \delta_{K_1, \frac{R_1}{S_1} * \frac{R_2}{S_2}} \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \\
&\quad + \{R_1, S_1\} T_2(\{R_2, S_2\} T'_2(\Gamma[2, E', \frac{R_2}{S_2}, 1, 1])) \delta_{K_1, \frac{R_1}{S_1} * \frac{R_2}{S_2}} \delta_{L_1, \frac{R_2}{S_2}} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \\
&\quad \left. + \{R_1, S_1\} T_2(\{R_2, S_2\} T'_2(\Gamma[2, E, \frac{R_1}{S_1}, E', \frac{R_2}{S_2}])) \delta_{K_1, \frac{R_1}{S_1} * \frac{R_2}{S_2}} \delta_{L_1, \frac{R_1}{S_1}} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0} \right)
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} R_1, S_1 \\ \otimes \\ R_2, S_2 \end{matrix} \Theta[\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
&= \text{genau wie } \Gamma \begin{matrix} R_1, S_1 \\ \otimes \\ R_2, S_2 \end{matrix} \Theta[\text{Der}, K_1, L_1, K_2, L_2],
\end{aligned}$$

nur dass jedes  $l$  durch ein  $r$  ersetzt werden muss.

•

$$\begin{aligned}
& \{k,l\}T_0(\Gamma[0]) \\
&= \delta_{k,A_1}\delta_{l,v}(2A_1+2)\Gamma^{A_1+1}[0] + \text{analog: } \delta_{k,A_2}, \delta_{k,A_3} \\
&+ \delta_{k,A_4}\delta_{l,v}(A_4+1)\Gamma^{A_4+1}[0] + \text{analog: } \delta_{k,A_4}\delta_{l,u}, \delta_{k,A_5}, \delta_{k,A_6} \\
&+ \delta_{k,r_1}\delta_{l,v}\delta_{r_1,0}\Gamma_{r_1\circ 1}[0] + \text{analog alle anderen } \delta_{k,r_i} \\
&+ \delta_{k,q}\delta_{l,\psi^*}(q+1)^{q+1}\Gamma[0] + \text{analog: } \delta_{k,q}\delta_{l,\psi} \\
&+ \delta_{k,x_1}\delta_{l,\phi^1}(x_1+1)_{x_1+1}\Gamma[0] + \text{analog alle anderen } \delta_{k,x_i} \\
&+ \delta_{k,p_1r_1}\delta_{l,v}\Gamma(p_1\circ r_1)[0] + \text{analog alle anderen } \delta_{k,p_1r_i}, \delta_{k,p_2r_i} \\
&+ \delta_{k,\bar{v}}\delta_{l,v}\Gamma(\bar{v}\circ 1)[0] + \text{analog alle anderen } \delta_{k,\bar{v}}, \delta_{k,\bar{\psi}}, \delta_{k,\bar{a}}, \delta_{k,\bar{b}},
\end{aligned}$$

$$\{k,l\}T'_0(\Gamma[0]) = \{k,l\}T_0(\Gamma[0]) + \delta_{k,E}\Gamma[0]$$

•

$$\begin{aligned}
& \{k,l\}T_1(\Gamma[1, K_1, L_1]) \\
&= \delta_{k,A_1}\delta_{l,v}[-2\Gamma^{A_1+1}[1, A_1, v]\delta_{K_1,A_1}\delta_{L_1,v} - U\Gamma^{A_1+1}[1, A_1, v] + (2A_1+2)\Gamma^{A_1+1}[1, K_1, L_1]] \\
&+ \text{analog: } \delta_{k,A_2}, \delta_{k,A_3} \\
&+ \delta_{k,A_4}\delta_{l,v}[(A_4+1)\Gamma^{A_4+1}[1, K_1, L_1] - \Gamma^{A_4+1}[1, A_4, v]\delta_{K_1,A_4}\delta_{L_1,v} - \Gamma^{A_4+1}[1, A_4, u]\delta_{K_1,A_4}\delta_{L_1,u} \\
&\quad - U\Gamma^{A_4+1}[1, A_4, v] - \Gamma^{A_4+1}[1, A_4, v]\delta_{K_1,E}\delta_{L_1,u} + \Gamma^{A_4+1}[A_4, u]\delta_{K_1,E}\delta_{L_1,u}] \\
&+ \text{analog: } \delta_{k,A_4}\delta_{l,u}, \delta_{k,A_5}, \delta_{k,A_6} \\
&+ \delta_{k,r_1}\delta_{l,v}\delta_{r_1,0}[-U\Gamma_{r_1\circ 1}[1, r_1, v] + (\Gamma_{r_1\circ 1}[1, r_1, \psi^*] - \Gamma_{r_1\circ 1}[1, r_1, v])\delta_{K_1,E}\delta_{L_1,\psi^*} \\
&\quad + \Gamma_{r_1\circ 1}[1, K_1, L_1]] \\
&+ \text{analog alle anderen } \delta_{k,r_i} \\
&+ \delta_{k,q}\delta_{l,\psi^*}[-{}^{q+1}\Gamma[1, q, \psi^*]\delta_{K_1,q}\delta_{L_1,\psi^*} - {}^{q+1}\Gamma[1, q, \psi]\delta_{K_1,q}\delta_{L_1,\psi} \\
&\quad + (-{}^{q+1}\Gamma[1, q, \psi^*] + {}^{q+1}\Gamma[1, q, \psi])\delta_{K_1,E}\delta_{L_1,\psi} - U{}^{q+1}\Gamma[1, q, \psi^*] + (q+1){}^{q+1}\Gamma[1, K_1, L_1]] \\
&+ \text{analog: } \delta_{k,q}\delta_{l,\psi} \\
&+ \delta_{k,x_1}\delta_{l,\phi^1}[-U_{x_1+1}\Gamma[1, x_1, \phi^1] + (x_1+1)(1 - \delta_{K_1,x_1})_{x_1+1}\Gamma[1, K_1, L_1]] \\
&+ \text{analog alle anderen } \delta_{k,x_i} \\
&+ \delta_{k,p_1r_1}\delta_{l,v}[\Gamma(p_1\circ r_1)[1, p_1r_1, \psi^*]\delta_{K_1,E}\delta_{L_1,\psi^*} - U\Gamma(p_1\circ r_1)[1, p_1r_1, v] \\
&\quad + \Gamma(p_1\circ r_1)[1, p_1r_1, v]\delta_{K_1,E}\delta_{L_1,\psi^*} + \Gamma(p_1\circ r_1)[1, K_1, L_1](1 - \delta_{K_1,p_1r_1})] \\
&+ \text{analog alle anderen } \delta_{k,p_1r_i}, \delta_{k,p_2r_i} \\
&+ \delta_{k,\bar{v}}\delta_{l,v}[\Gamma(\bar{v}\circ 1)[1, K_1, L_1](1 - \delta_{K_1,\bar{v}}) - U\Gamma(\bar{v}\circ 1)[1, \bar{v}, v]] \\
&+ \text{analog alle anderen } \delta_{k,\bar{v}}, \delta_{k,\bar{\psi}}, \delta_{k,\bar{a}}, \delta_{k,\bar{b}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{k,l\}T'_1(\Gamma[1, K_1, L_1]) &= \{k,l\}T_0(\Gamma[0]) \quad \text{mit } E' \text{ statt } E \\
&+ \delta_{k,E}[-U\Gamma[1, E, l] + \Gamma[1, K_1, L_1](1 - \delta_{K_1,E})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{k,l\} T_2(\Gamma[2, K_1, L_1, K_2, L_2]) \\
&= \delta_{k,A_1} \delta_{l,v} \left[ \Gamma^{A_1+1}[2, A_1, v, 1, 0] \{ \delta_{K_1,A_1} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0} - 2U \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,v} - 2\delta_{K_1,E} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \right. \\
&\quad + \Gamma^{A_1+1}[2, A_1, v, 1, 1] \{ \delta_{K_1,A_1} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} + 2U \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,v} \\
&\quad\quad + 2\delta_{K_1,E} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} + U_2 \} \\
&\quad + \Gamma^{A_1+1}[2, A_1, v, A_1, v] \{ \delta_{K_1,A_1} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,A_1} \delta_{L_2,v} - 2U \delta_{K_2,A_1} \delta_{L_2,v} \\
&\quad\quad - 2\delta_{K_1,A_1} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} - 2\delta_{K_1,A_1} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0} \} \\
&\quad + (1 - \delta_{K_1,A_1})(1 - \delta_{K_1,1}) \left( \underbrace{\{A_1, v\}}_{\{A_1, v\}} T_1(\Gamma[2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, K, L]) \delta_{K_2,K} \delta_{L_2,L} \right. \\
&\quad\quad \left. + \Gamma^{A_1+1}[2, A_1, v, K, L] \delta_{K_1,K} (-\delta_{L_1,L} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} + \delta_{K_2,K} \delta_{L_2,L} - \delta_{L_1,L} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0}) \right) \\
&\quad + (1 - \delta_{K_1,A_1})(1 - \delta_{K_2,A_1})(2A_1 + 2) \Gamma^{A_1+1}[2, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
&+ \text{analog: } \delta_{k,A_2}, \delta_{k,A_3} \\
&+ \delta_{k,A_4} \delta_{l,v} \left[ \Gamma^{A_4+1}[2, A_4, v, 1, 1] \{ A_4 \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} + U_2 + 2U \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,u} \right. \\
&\quad\quad \left. + 2\delta_{K_1,E} \delta_{L_1,u} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \right. \\
&\quad + \Gamma^{A_4+1}[2, A_4, u, 1, 1] \{ A_4 \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} + \delta_{K_1,E} \delta_{L_1,u} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \\
&\quad + \Gamma^{A_4+1}[2, A_4, v, 1, 0] \{ A_4 \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0} - U \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,u} \\
&\quad\quad - \delta_{K_1,E} \delta_{L_1,u} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \\
&\quad + \Gamma^{A_4+1}[2, A_4, v, A_4, v] \{ (A_4 + 1) \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,A_4} \delta_{L_2,v} - 2U \delta_{K_2,A_4} \delta_{L_2,v} \\
&\quad\quad + 2\delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,A_4} \delta_{L_2,u} - 2\delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,u} \\
&\quad\quad - 2\delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0} - 2\delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \\
&\quad + \Gamma^{A_4+1}[2, A_4, u, A_4, u] \{ (A_4 - 1) \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,u} \delta_{K_2,A_4} \delta_{L_2,u} + 2\delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,u} \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,u} \} \\
&\quad + \Gamma^{A_4+1}[2, A_4, v, A_4, u] \{ A_4 \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,A_4} \delta_{L_2,u} - U \delta_{K_2,A_4} \delta_{L_2,u} \\
&\quad\quad + \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,u} + \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,A_4} \delta_{L_2,v} \\
&\quad\quad - \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,u} \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,u} - \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0} \\
&\quad\quad - \delta_{K_1,A_4} \delta_{L_1,v} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \\
&\quad + (1 - \delta_{K_1,A_4})(1 - \delta_{K_1,1}) \left( \left( \underbrace{\{A_4, v\}}_{\{A_4, v\}} T_1(\Gamma[2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, K, L]) + \{A_4, v\} T_1(\Gamma[2, \mathbf{E}, u, K, L]) \right) \delta_{K_2,K} \delta_{L_2,L} \right. \\
&\quad\quad \left. + \Gamma^{A_4+1}[2, A_4, v, K, L] \delta_{K_1,K} (-\delta_{L_1,L} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} + \delta_{K_2,K} \delta_{L_2,L} - \delta_{L_1,L} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0}) \right) \\
&\quad + (1 - \delta_{K_1,A_4})(1 - \delta_{K_2,A_4})(A_4 + 1) \Gamma^{A_4+1}[2, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
&+ \text{analog: } \delta_{k,A_4} \delta_{l,u}, \delta_{k,A_5}, \delta_{k,A_6}, \delta_{k,q} \\
&+ \delta_{k,r_1} \delta_{l,v} \delta_{r_1,0} \left[ \Gamma_{r_1 \circlearrowleft} [2, r_1, v, 1, 1] \{ U_2 + 2U \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,\psi^*} + 2\delta_{K_1,E} \delta_{L_1,\psi^*} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \right. \\
&\quad + \Gamma_{r_1 \circlearrowleft} [2, r_1, \psi^*, 1, 1] \delta_{K_1,E} \delta_{L_1,\psi^*} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \\
&\quad + \Gamma_{r_1 \circlearrowleft} [2, r_1, v, 1, 0] \{ -U \delta_{K_2,E} \delta_{L_2,\psi^*} - \delta_{K_1,E} \delta_{L_1,\psi^*} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \\
&\quad + (1 - \delta_{K,r_1})(1 - \delta_{K,1}) \left( \left( \underbrace{\{r_1, v\}}_{\{r_1, v\}} T_1(\Gamma[2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, K, L]) + \{r_1, v\} T_1(\Gamma[2, \mathbf{E}, \psi^*, K, L]) \right) \delta_{K_2,K} \delta_{L_2,L} \right. \\
&\quad\quad \left. + \Gamma_{r_1 \circlearrowleft} [2, r_1, v, K, L] \delta_{K_1,K} (-\delta_{L_1,L} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} + \delta_{K_2,K} \delta_{L_2,L} - \delta_{L_1,L} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,0}) \right) \\
&\quad + (1 - \delta_{K_1,r_1})(1 - \delta_{K_2,r_1}) \Gamma_{r_1 \circlearrowleft} [2, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
&+ \text{analog alle anderen } \delta_{k,r_i} \\
&+ \delta_{k,x_1} \delta_{l,\phi^1} \left[ x_{1+1} \Gamma[2, x_1, \phi^1, 1, 1] \{ x_1 \delta_{K_1,x_1} \delta_{L_1,\phi^1} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} + U_2 \} \right. \\
&\quad + x_{1+1} \Gamma[2, x_1, \phi^1, x_1, \phi^1] \{ (x_1 + 1) \delta_{K_1,x_1} \delta_{L_1,\phi^1} \delta_{K_2,x_1} \delta_{L_2,\phi^1} - 2U \delta_{K_2,x_1} \delta_{L_2,\phi^1} \\
&\quad\quad \left. - 2\delta_{K_1,x_1} \delta_{L_1,\phi^1} \delta_{K_2,1} \delta_{L_2,1} \} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \delta_{K,x_1})(1 - \delta_{K,1})((\{x_1, \phi^1\} T_1 \Gamma[2, \underbrace{0, 0}, K, L]) \delta_{K_2, K} \delta_{L_2, L} \\
& \quad + x_{1+1} \Gamma[2, x_1, \phi^1, K, L] \delta_{K_1, K} (-\delta_{L_1, L} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 1} + \delta_{K_2, K} \delta_{L_2, L} - \delta_{L_1, L} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 0})) \\
& + (1 - \delta_{K_1, x_1})(1 - \delta_{K_2, x_1}) x_{1+1} \Gamma[2, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
& + \text{analog alle anderen } \delta_{k, x_i} \\
& + \delta_{k, p_1 r_1} \delta_{l, v} [\Gamma(p_1 \circ r_1)[2, p_1 r_1, v, 1, 1] \{U_2 + 2U \delta_{K_2, E} \delta_{L_2, \psi^*} + 2\delta_{K_1, E} \delta_{L_1, \psi^*} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 1}\} \\
& \quad + \Gamma(p_1 \circ r_1)[2, p_1 r_1, \psi^*, 1, 1] \delta_{K_1, E} \delta_{L_1, \psi^*} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 1} \\
& \quad + \Gamma(p_1 \circ r_1)[2, P_1 r_1, v, 1, 0] \{-U \delta_{K_2, E} \delta_{L_2, \psi^*} - \delta_{K_1, E} \delta_{L_1, \psi^*} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 1}\} \\
& \quad + (1 - \delta_{K, p_1 r_1})(1 - \delta_{K, 1})((\{p_1 r_1, v\} T_1(\Gamma[2, \underbrace{0, 0}, K, L]) + \{p_1 r_1, v\} T_1(\Gamma[2, \underbrace{E, \psi^*}, K, L])) \delta_{K_2, K} \delta_{L_2, L} \\
& \quad + \Gamma(p_1 \circ r_1)[2, p_1 r_1, v, K, L] \delta_{K_1, K} (-\delta_{L_1, L} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 1} + \delta_{K_2, K} \delta_{L_2, L} - \delta_{L_1, L} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 0})) \\
& \quad + (1 - \delta_{K_1, p_1 r_1})(1 - \delta_{K_2, p_1 r_1}) \Gamma(p_1 \circ r_1)[2, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
& + \text{analog alle anderen } \delta_{k, p_1 r_i}, \delta_{k, p_2 r_i} \\
& + \delta_{k, \bar{v}} \delta_{l, v} [\Gamma(\bar{v} \circ 1)[2, \bar{v}, v, 1, 1] U_2 \\
& \quad + (1 - \delta_{K, \bar{v}})(1 - \delta_{K, 1}) (\{ \bar{v}, v \} T_1(\Gamma[2, \underbrace{0, 0}, K, L]) \delta_{K_2, K} \delta_{L_2, L} \\
& \quad + \Gamma(\bar{v} \circ 1)[2, \bar{v}, v, K, L] \delta_{K_1, K} (-\delta_{L_1, L} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 1} + \delta_{K_2, K} \delta_{L_2, L} - \delta_{L_1, L} \delta_{K_2, 1} \delta_{L_2, 0})) \\
& \quad + (1 - \delta_{K_1, \bar{v}})(1 - \delta_{K_2, \bar{v}}) \Gamma(\bar{v} \circ 1)[2, K_1, L_1, K_2, L_2] \\
& + \text{analog alle anderen } \delta_{k, \bar{v}}, \delta_{k, \bar{\psi}}, \delta_{k, \bar{a}}, \delta_{k, \bar{b}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{k, l\} T_2'(\Gamma[2, K_1, L_1, K_2, L_2]) \\
& = \{k, l\} T_2(\Gamma[2, K_1, L_1, K_2, L_2]) \text{ mit } E' \text{ statt } E \\
& \quad + \delta_{k, E} [-U(1 - \delta_{K_2, 1}) \Gamma[2, E, l, K_2, L_2] - U(1 - \delta_{K_1, 1}) \Gamma[2, E, l, K_1, L_1] \\
& \quad \quad + U_2 \Gamma[2, E, l, 1, 1] + (1 - \delta_{K_1, E})(1 - \delta_{K_1, E}) \Gamma[2, K_1, L_1, K_2, L_2]
\end{aligned}$$

### A.1.2 Erste Ordnung in den Ableitungen

(Nur neu hinzukommende Terme)

•

$$\begin{aligned}
\langle\langle V, Z \rangle\rangle_{v,1} &= \sum_{m,l,p,w} (-1)^E \times \\
&\left\{ \delta_{p_2,r_1} V \overset{A_{1,v}}{\underset{p_2r_{1,v}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2,r_2} V \overset{A_{1,v}}{\underset{p_2r_{2,v}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) \right. \\
&+ \delta_{p_1,r_1} V \overset{A_{1,v}}{\underset{p_1r_{1,v}}{\odot}} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1,r_2} V \overset{A_{1,v}}{\underset{p_1r_{2,v}}{\odot}} Z(p_1 \circ 0) \\
&+ \delta_{p_2,r_3} V \overset{A_{4,v}}{\underset{p_2r_{3,v}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2,r_4} V \overset{A_{4,v}}{\underset{p_2r_{4,v}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) \\
&+ \delta_{p_1,r_3} V \overset{A_{4,v}}{\underset{p_1r_{3,v}}{\odot}} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1,r_4} V \overset{A_{4,v}}{\underset{p_1r_{4,v}}{\odot}} Z(p_1 \circ 0) \\
&+ \delta_{p_2,r_5} V \overset{A_{5,v}}{\underset{p_2r_{5,v}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2,r_6} V \overset{A_{5,v}}{\underset{p_2r_{6,v}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) \\
&+ \delta_{p_1,r_5} V \overset{A_{5,v}}{\underset{p_1r_{5,v}}{\odot}} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1,r_6} V \overset{A_{5,v}}{\underset{p_1r_{6,v}}{\odot}} Z(p_1 \circ 0) \\
&+ \delta_{\bar{v},1} V \overset{A_{1,v}}{\underset{\bar{v},v}{\odot}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + \delta_{\bar{v},2} V \overset{A_{4,v}}{\underset{\bar{v},v}{\odot}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
&+ \delta_{\bar{v},3} V \overset{A_{5,v}}{\underset{\bar{v},v}{\odot}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
&+ \delta_{\bar{a},1} V \overset{A_{1,v}}{\underset{\bar{a},v}{\odot}} Z(\bar{a} \circ 0) + \delta_{\bar{a},2} V \overset{A_{4,v}}{\underset{\bar{a},v}{\odot}} Z(\bar{a} \circ 0) + \delta_{\bar{a},3} V \overset{A_{5,v}}{\underset{\bar{a},v}{\odot}} Z(\bar{a} \circ 0) \\
&+ \delta_{\bar{b},1} V \overset{A_{1,v}}{\underset{\bar{b},v}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) + \delta_{\bar{b},2} V \overset{A_{4,v}}{\underset{\bar{b},v}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) + \delta_{\bar{b},3} V \overset{A_{5,v}}{\underset{\bar{b},v}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
&+ \theta(q-p-\epsilon) \left\{ V \overset{r_{2,v}}{\underset{p_2r_{1,v}}{\otimes}} Z(p_2 \circ 0) + V \overset{r_{2,v}}{\underset{p_1r_{1,v}}{\otimes}} Z(p_1 \circ 0) \right. \\
&\quad \left. + V \overset{r_{1,v}}{\underset{p_2r_{2,v}}{\otimes}} Z(p_2 \circ 0) + V \overset{r_{1,v}}{\underset{p_2r_{2,v}}{\otimes}} Z(p_1 \circ 0) \right\} \\
&+ V \overset{r_{1,v}}{\underset{\bar{v},v}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + V \overset{r_{2,v}}{\underset{\bar{v},v}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
&+ V \overset{r_{1,v}}{\underset{\bar{a},v}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) + V \overset{r_{2,v}}{\underset{\bar{a},v}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) \\
&+ \left. V \overset{r_{1,v}}{\underset{\bar{b},v}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) + V \overset{r_{2,v}}{\underset{\bar{b},v}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) \right\}
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\langle\langle V, Z \rangle\rangle_{u,1} &= \sum_{m,l,p,w} (-1)^E \times \\
&\left\{ \delta_{p_2,r_3} V \overset{A_{2,u}}{\underset{p_2r_{3,u}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2,r_4} V \overset{A_{2,u}}{\underset{p_2r_{4,u}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) \right. \\
&+ \delta_{p_1,r_3} V \overset{A_{2,u}}{\underset{p_1r_{3,u}}{\odot}} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1,r_4} V \overset{A_{2,u}}{\underset{p_1r_{4,u}}{\odot}} Z(p_1 \circ 0) \\
&+ \delta_{p_2,r_1} V \overset{A_{4,u}}{\underset{p_2r_{3,u}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2,r_2} V \overset{A_{4,u}}{\underset{p_2r_{4,u}}{\odot}} Z(p_2 \circ 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{p_1, r_1} V \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ p_1 r_{3,u} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1, r_2} V \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ p_1 r_{4,u} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) \\
& + \delta_{p_2, r_5} V \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ p_2 r_{3,u} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2, r_6} V \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ p_2 r_{4,u} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) \\
& + \delta_{p_1, r_5} V \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ p_1 r_{3,u} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1, r_6} V \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ p_1 r_{4,u} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v}, 1} V \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ \bar{v}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + \delta_{\bar{v}, 2} V \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ \bar{v}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v}, 3} V \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ \bar{v}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{a}, 1} V \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ \bar{a}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{a} \circ 0) + \delta_{\bar{a}, 2} V \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ \bar{a}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{a} \circ 0) + \delta_{\bar{a}, 3} V \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ \bar{a}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{a} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{b}, 1} V \begin{smallmatrix} A_{4,u} \\ \odot \\ \bar{b}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{b} \circ 0) + \delta_{\bar{b}, 2} V \begin{smallmatrix} A_{2,u} \\ \odot \\ \bar{b}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{b} \circ 0) + \delta_{\bar{b}, 3} V \begin{smallmatrix} A_{6,u} \\ \odot \\ \bar{b}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \theta(q - p - \epsilon) \left\{ V \begin{smallmatrix} r_{4,u} \\ \otimes \\ p_2 r_{3,u} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) + V \begin{smallmatrix} r_{4,u} \\ \otimes \\ p_1 r_{3,u} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) \right. \\
& \quad \left. + V \begin{smallmatrix} r_{3,u} \\ \otimes \\ p_2 r_{4,u} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) + V \begin{smallmatrix} r_{3,u} \\ \otimes \\ p_2 r_{4,u} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) \right\} \\
& + V \begin{smallmatrix} r_{3,u} \\ \otimes \\ \bar{v}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + V \begin{smallmatrix} r_{4,u} \\ \otimes \\ \bar{v}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + V \begin{smallmatrix} r_{3,u} \\ \otimes \\ \bar{a}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{a} \circ 0) + V \begin{smallmatrix} r_{4,u} \\ \otimes \\ \bar{a}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{a} \circ 0) \\
& + V \begin{smallmatrix} r_{3,u} \\ \otimes \\ \bar{b}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{b} \circ 0) + V \begin{smallmatrix} r_{4,u} \\ \otimes \\ \bar{b}, u \end{smallmatrix} Z(\bar{b} \circ 0) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\langle V, Z \rangle\rangle_{f,1} & = \sum_{m,l,p,w} (-1)^E \times \\
& \left\{ \delta_{p_2, r_5} V \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ p_2 r_{5,f} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2, r_6} V \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ p_2 r_{6,f} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) \right. \\
& + \delta_{p_1, r_5} V \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ p_1 r_{5,f} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1, r_6} V \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ p_1 r_{6,f} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) \\
& + \delta_{p_2, r_1} V \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ p_2 r_{5,f} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2, r_2} V \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ p_2 r_{6,f} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) \\
& + \delta_{p_1, r_1} V \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ p_1 r_{5,f} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1, r_2} V \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ p_1 r_{6,f} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) \\
& + \delta_{p_2, r_3} V \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ p_2 r_{5,f} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) + \delta_{p_2, r_5} V \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ p_2 r_{6,f} \end{smallmatrix} Z(p_2 \circ 0) \\
& + \delta_{p_1, r_3} V \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ p_1 r_{5,f} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) + \delta_{p_1, r_4} V \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ p_1 r_{6,f} \end{smallmatrix} Z(p_1 \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v}, 1} V \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ \bar{v}, f \end{smallmatrix} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + \delta_{\bar{v}, 2} V \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ \bar{v}, f \end{smallmatrix} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v}, 3} V \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ \bar{v}, f \end{smallmatrix} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{a}, 1} V \begin{smallmatrix} A_{5,f} \\ \odot \\ \bar{a}, f \end{smallmatrix} Z(\bar{a} \circ 0) + \delta_{\bar{a}, 2} V \begin{smallmatrix} A_{6,f} \\ \odot \\ \bar{a}, f \end{smallmatrix} Z(\bar{a} \circ 0) + \delta_{\bar{a}, 3} V \begin{smallmatrix} A_{3,f} \\ \odot \\ \bar{a}, f \end{smallmatrix} Z(\bar{a} \circ 0) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{\bar{b},1} V \overset{A_{5,f}}{\underset{\bar{b},f}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) + \delta_{\bar{b},2} V \overset{A_{6,f}}{\underset{\bar{b},f}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) + \delta_{\bar{b},3} V \overset{A_{3,f}}{\underset{\bar{b},f}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \theta(q-p-\epsilon) \left\{ V \overset{r_{6,f}}{\underset{p_2 r_{5,f}}{\otimes}} Z(p_2 \circ 0) + V \overset{r_{6,f}}{\underset{p_1 r_{5,f}}{\otimes}} Z(p_1 \circ 0) \right. \\
& \quad \left. + V \overset{r_{5,f}}{\underset{p_2 r_{6,f}}{\otimes}} Z(p_2 \circ 0) + V \overset{r_{5,f}}{\underset{p_2 r_{6,f}}{\otimes}} Z(p_1 \circ 0) \right\} \\
& + V \overset{r_{5,f}}{\underset{\bar{v},f}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + V \overset{r_{6,f}}{\underset{\bar{v},f}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + V \overset{r_{5,f}}{\underset{\bar{a},f}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) + V \overset{r_{6,f}}{\underset{\bar{a},f}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) \\
& + V \overset{r_{5,f}}{\underset{\bar{b},f}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) + V \overset{r_{6,f}}{\underset{\bar{b},f}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \langle V, Z \rangle \rangle_{\phi^i, 1} & = \sum_{m,l,p,w} (-1)^E \times \left\{ \mathfrak{N} \left( V \overset{x_i, \phi^i}{\underset{\bar{a}, \phi^i}{\odot}} Z(\bar{a} \circ 0) \right) \right. \\
& \quad \left. + \delta_{w,0} \delta_{p,0} \delta_{l,0} \delta_{m,0} V \overset{x_i, \phi^i}{\underset{\bar{a}, \phi^i}{\odot}} \mathfrak{N}(Z(\bar{a} \circ 0)) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \langle V, Z \rangle \rangle_{\Psi, 1} & = \sum_{m,l,p,w} (-1)^E \times \\
& \left\{ \sum_{i=1}^2 \left( V \overset{r_{1,\psi^*}}{\underset{p_i r_{2,\psi}}{\otimes}} Z^{A_1-m_1-1}(p_i \circ 0) + V \overset{r_{1,\psi^*}}{\underset{p_i r_{4,\psi}}{\otimes}} Z^{A_4-m_4-1}(p_i \circ 0) + V \overset{r_{1,\psi^*}}{\underset{p_i r_{6,\psi}}{\otimes}} Z^{A_5-m_5-1}(p_i \circ 0) \right. \right. \\
& + V \overset{r_{3,\psi^*}}{\underset{p_i r_{2,\psi}}{\otimes}} Z^{A_4-m_4-1}(p_i \circ 0) + V \overset{r_{3,\psi^*}}{\underset{p_i r_{4,\psi}}{\otimes}} Z^{A_2-m_2-1}(p_i \circ 0) + V \overset{r_{3,\psi^*}}{\underset{p_i r_{6,\psi}}{\otimes}} Z^{A_6-m_6-1}(p_i \circ 0) \\
& + V \overset{r_{5,\psi^*}}{\underset{p_i r_{2,\psi}}{\otimes}} Z^{A_5-m_5-1}(p_i \circ 0) + V \overset{r_{5,\psi^*}}{\underset{p_i r_{4,\psi}}{\otimes}} Z^{A_6-m_6-1}(p_i \circ 0) + V \overset{r_{5,\psi^*}}{\underset{p_i r_{6,\psi}}{\otimes}} Z^{A_3-m_3-1}(p_i \circ 0) \\
& - V \overset{r_{2,\psi}}{\underset{p_i r_{1,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_1-m_1-1}(p_i \circ 0) - V \overset{r_{2,\psi}}{\underset{p_i r_{3,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_4-m_4-1}(p_i \circ 0) - V \overset{r_{2,\psi}}{\underset{p_i r_{5,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_5-m_5-1}(p_i \circ 0) \\
& - V \overset{r_{4,\psi}}{\underset{p_i r_{1,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_4-m_4-1}(p_i \circ 0) - V \overset{r_{4,\psi^*}}{\underset{p_i r_{3,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_2-m_2-1}(p_i \circ 0) - V \overset{r_{4,\psi}}{\underset{p_i r_{5,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_6-m_6-1}(p_i \circ 0) \\
& \left. - V \overset{r_{6,\psi}}{\underset{p_i r_{1,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_5-m_5-1}(p_i \circ 0) - V \overset{r_{6,\psi}}{\underset{p_i r_{3,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_6-m_6-1}(p_i \circ 0) - V \overset{r_{6,\psi}}{\underset{p_i r_{5,\psi^*}}{\otimes}} Z^{A_3-m_3-1}(p_i \circ 0) \right) \\
& + V \overset{r_{1,\psi^*}}{\underset{\bar{\psi}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + V \overset{r_{3,\psi^*}}{\underset{\bar{\psi}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + V \overset{r_{5,\psi^*}}{\underset{\bar{\psi}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + V \overset{r_{2,\psi}}{\underset{\bar{\psi}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + V \overset{r_{4,\psi}}{\underset{\bar{\psi}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + V \overset{r_{6,\psi}}{\underset{\bar{\psi}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + V \overset{r_{1,\psi^*}}{\underset{\bar{a}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) + V \overset{r_{3,\psi^*}}{\underset{\bar{a}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) + V \overset{r_{5,\psi^*}}{\underset{\bar{a}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) + V \overset{r_{2,\psi}}{\underset{\bar{a}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) \\
& + V \overset{r_{4,\psi}}{\underset{\bar{a}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) + V \overset{r_{6,\psi}}{\underset{\bar{a}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{a} \circ 0) + V \overset{r_{1,\psi^*}}{\underset{\bar{b}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) + V \overset{r_{3,\psi^*}}{\underset{\bar{b}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + V \overset{r_{5,\psi^*}}{\underset{\bar{b}, \psi}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) + V \overset{r_{2,\psi}}{\underset{\bar{b}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) + V \overset{r_{4,\psi}}{\underset{\bar{b}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) + V \overset{r_{6,\psi}}{\underset{\bar{b}, \psi^*}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^2 \left( V \underset{p_i r_2, \psi}{\odot}^{q, \psi^*} Z(p_i \circ 0) + V \underset{p_i r_4, \psi}{\odot}^{q, \psi^*} Z(p_i \circ 0) + V \underset{p_i r_6, \psi}{\odot}^{q, \psi^*} Z(p_i \circ 0) \right. \\
& + V \underset{p_i r_1, \psi^*}{\odot}^{q, \psi} Z(p_i \circ 0) + V \underset{p_i r_3, \psi^*}{\odot}^{q, \psi} Z(p_i \circ 0) + V \underset{p_i r_5, \psi^*}{\odot}^{q, \psi} Z(p_i \circ 0) \left. \right) \\
& + V \underset{\bar{\psi}, \psi^*}{\odot}^{q, \psi} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) + V \underset{\bar{\psi}, \psi}{\odot}^{q, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0, \bar{\psi} \circ 0) \\
& + V \underset{\bar{a}, \psi^*}{\odot}^{q, \psi} Z(\bar{a} \circ 0) + V \underset{\bar{a}, \psi}{\odot}^{q, \psi^*} Z(\bar{a} \circ 0) + V \underset{\bar{b}, \psi^*}{\odot}^{q, \psi} Z(\bar{b} \circ 0) + V \underset{\bar{b}, \psi}{\odot}^{q, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0) \left. \right\}
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
& \langle \langle Z \rangle \rangle_{v,1} \\
& = \sum_{i=1}^2 \left( \underset{p_i r_1, v}{\odot}^{A_1, v} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_1} + \underset{p_i r_2, v}{\odot}^{A_1, v} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_2} \right. \\
& + \underset{p_i r_1, v}{\odot}^{A_4, v} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_3} + \underset{p_i r_2, v}{\odot}^{A_4, v} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_4} \\
& + \underset{p_i r_1, v}{\odot}^{A_5, v} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_5} + \underset{p_i r_2, v}{\odot}^{A_5, v} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_6} \\
& + \underset{p_i r_2, v}{\otimes}^{r_1, v} q^{-1} Z(p_i \circ 0) + \underset{p_i r_1, v}{\otimes}^{r_2, v} q^{-1} Z(p_i \circ 0) \left. \right) \\
& + \delta_{\bar{v}, 1} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{A_1, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b}, 1} \underset{\bar{b}, v}{\odot}^{A_1, v} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v}, 2} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{A_4, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b}, 2} \underset{\bar{b}, v}{\odot}^{A_4, v} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v}, 3} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{A_5, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b}, 3} \underset{\bar{b}, v}{\odot}^{A_5, v} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \underset{\bar{v}, v}{\otimes}^{r_1, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \underset{\bar{v}, v}{\otimes}^{r_2, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) \\
& + \underset{\bar{b}, v}{\otimes}^{r_1, v} Z(\bar{b} \circ 0) + \underset{\bar{b}, v}{\otimes}^{r_2, v} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \delta_{p_2, 0} \left\{ -\delta_{\bar{\psi}, 4} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{p_2 r_1, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_2 \circ 0) - \delta_{\bar{\psi}, 5} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{p_2 r_2, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_2 \circ 0) \right. \\
& \quad - \delta_{\bar{b}, 4} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{p_2 r_1, v} Z(\bar{b} \circ 0; p_2 \circ 0) - \delta_{\bar{b}, 5} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{p_2 r_2, v} Z(\bar{b} \circ 0; p_2 \circ 0) \\
& \quad + \delta_{\bar{\psi}, 4} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{p_1 r_1, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + \delta_{\bar{\psi}, 5} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{p_1 r_2, v} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \\
& \quad \left. + (-1)^{\delta_{p_1, 0}} \delta_{\bar{b}, 4} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{p_1 r_1, v} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + (-1)^{\delta_{p_1, 0}} \delta_{\bar{b}, 5} \underset{\bar{v}, v}{\odot}^{p_1 r_2, v} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right\} \\
& - \mathfrak{N}(Z(\bar{a} \circ \bar{b}, \bar{b} \circ 1; \bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \\
& \langle \langle Z \rangle \rangle_{u,1} \\
& = \sum_{i=1}^2 \left( \overset{A_{2,u}}{\underset{p_i r_{3,u}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_3} + \overset{A_{2,u}}{\underset{p_i r_{4,u}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_4} \right. \\
& + \overset{A_{4,u}}{\underset{p_i r_{3,u}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_1} + \overset{A_{4,u}}{\underset{p_i r_{4,u}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_2} \\
& + \overset{A_{6,u}}{\underset{p_i r_{3,u}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_5} + \overset{A_{6,u}}{\underset{p_i r_{4,u}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_6} \\
& \left. + \overset{r_{3,u}}{\underset{p_i r_{4,u}}{\otimes}} q^{-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{r_{4,u}}{\underset{p_i r_{3,u}}{\otimes}} q^{-1} Z(p_i \circ 0) \right) \\
& + \delta_{\bar{v},1} \overset{A_{4,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b},1} \overset{A_{4,u}}{\underset{\bar{b},u}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v},2} \overset{A_{2,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b},2} \overset{A_{2,u}}{\underset{\bar{b},u}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v},3} \overset{A_{6,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b},3} \overset{A_{6,u}}{\underset{\bar{b},u}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \overset{r_{3,u}}{\underset{\bar{v},u}{\otimes}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \overset{r_{4,u}}{\underset{\bar{v},u}{\otimes}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) \\
& + \overset{r_{3,u}}{\underset{\bar{b},u}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) + \overset{r_{4,u}}{\underset{\bar{b},u}{\otimes}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \delta_{p_2,0} \left\{ -\delta_{\bar{\psi},4} \overset{p_2 r_{3,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_2 \circ 0) - \delta_{\bar{\psi},5} \overset{p_2 r_{4,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_2 \circ 0) \right. \\
& \quad - \delta_{\bar{b},4} \overset{p_2 r_{3,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0; p_2 \circ 0) - \delta_{\bar{b},5} \overset{p_2 r_{4,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0; p_2 \circ 0) \\
& \quad + \delta_{\bar{\psi},4} \overset{p_1 r_{3,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + \delta_{\bar{\psi},5} \overset{p_1 r_{4,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \\
& \quad \left. + (-1)^{\delta_{p_1,0}} \delta_{\bar{b},4} \overset{p_1 r_{3,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + (-1)^{\delta_{p_1,0}} \delta_{\bar{b},5} \overset{p_1 r_{4,u}}{\underset{\bar{v},u}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right\} \\
& - \mathfrak{N}(Z(\bar{a} \circ \bar{b}, \bar{b} \circ 2; \bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 2))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \\
& \langle \langle Z \rangle \rangle_{f,1} \\
& = \sum_{i=1}^2 \left( \overset{A_{3,f}}{\underset{p_i r_{5,f}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_5} + \overset{A_{3,f}}{\underset{p_i r_{6,f}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_6} \right. \\
& + \overset{A_{5,f}}{\underset{p_i r_{5,f}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_1} + \overset{A_{5,f}}{\underset{p_i r_{6,f}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_2} \\
& + \overset{A_{6,f}}{\underset{p_i r_{5,f}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_3} + \overset{A_{6,f}}{\underset{p_i r_{6,f}}{\odot}} Z(p_i \circ 0) \delta_{p_i, r_4} \\
& \left. + \overset{r_{5,f}}{\underset{p_i r_{6,f}}{\otimes}} q^{-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{r_{6,f}}{\underset{p_i r_{5,f}}{\otimes}} q^{-1} Z(p_i \circ 0) \right) \\
& + \delta_{\bar{v},1} \overset{A_{5,f}}{\underset{\bar{v},f}{\odot}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b},1} \overset{A_{5,f}}{\underset{\bar{b},f}{\odot}} Z(\bar{b} \circ 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{\bar{v},2} \overset{A_{6,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b},2} \overset{A_{6,f}}{\odot_{\bar{b},f}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \delta_{\bar{v},3} \overset{A_{3,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \delta_{\bar{b},3} \overset{A_{3,f}}{\odot_{\bar{b},f}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \overset{r_{5,f}}{\otimes_{\bar{v},f}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) + \overset{r_{6,f}}{\otimes_{\bar{v},u}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0) \\
& + \overset{r_{5,f}}{\otimes_{\bar{b},f}} Z(\bar{b} \circ 0) + \overset{r_{6,f}}{\otimes_{\bar{b},f}} Z(\bar{b} \circ 0) \\
& + \delta_{p_2,0} \left\{ -\delta_{\bar{\psi},4} \overset{p_2 r_{5,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_2 \circ 0) - \delta_{\bar{\psi},5} \overset{p_2 r_{6,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_2 \circ 0) \right. \\
& \quad - \delta_{\bar{b},4} \overset{p_2 r_{5,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{b} \circ 0; p_2 \circ 0) - \delta_{\bar{b},5} \overset{p_2 r_{6,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{b} \circ 0; p_2 \circ 0) \\
& \quad + \delta_{\bar{\psi},4} \overset{p_1 r_{5,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + \delta_{\bar{\psi},5} \overset{p_1 r_{6,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \\
& \quad \left. + (-1)^{\delta_{p_1,0}} \delta_{\bar{b},4} \overset{p_1 r_{5,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + (-1)^{\delta_{p_1,0}} \delta_{\bar{b},5} \overset{p_1 r_{6,f}}{\odot_{\bar{v},f}} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right\} \\
& - \mathfrak{N}(Z(\bar{a} \circ \bar{b}, \bar{b} \circ 3; \bar{\psi} \circ 0, \bar{v} \circ 3))
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
& \langle\langle Z \rangle\rangle_{\Psi,1} \\
& = \sum_{i=1}^2 \left( \overset{p_i r_{2,\psi}}{\otimes_{r_1,\psi^*}} A_{1-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{p_i r_{4,\psi}}{\otimes_{r_1,\psi^*}} A_{4-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{p_i r_{6,\psi}}{\otimes_{r_1,\psi^*}} A_{5-1} Z(p_i \circ 0) \right. \\
& \quad + \overset{p_i r_{2,\psi}}{\otimes_{r_3,\psi^*}} A_{4-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{p_i r_{4,\psi}}{\otimes_{r_3,\psi^*}} A_{2-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{p_i r_{6,\psi}}{\otimes_{r_3,\psi^*}} A_{6-1} Z(p_i \circ 0) \\
& \quad + \overset{p_i r_{2,\psi}}{\otimes_{r_5,\psi^*}} A_{5-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{p_i r_{4,\psi}}{\otimes_{r_5,\psi^*}} A_{6-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{p_i r_{6,\psi}}{\otimes_{r_5,\psi^*}} A_{3-1} Z(p_i \circ 0) \\
& \quad + \overset{r_2,\psi}{\otimes_{p_i r_1,\psi^*}} A_{1-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{r_2,\psi}{\otimes_{p_i r_3,\psi^*}} A_{4-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{r_2,\psi}{\otimes_{p_i r_5,\psi^*}} A_{5-1} Z(p_i \circ 0) \\
& \quad + \overset{r_4,\psi}{\otimes_{p_i r_1,\psi^*}} A_{4-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{r_4,\psi}{\otimes_{p_i r_3,\psi^*}} A_{2-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{r_4,\psi}{\otimes_{p_i r_5,\psi^*}} A_{6-1} Z(p_i \circ 0) \\
& \quad + \overset{r_6,\psi}{\otimes_{p_i r_1,\psi^*}} A_{5-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{r_6,\psi}{\otimes_{p_i r_3,\psi^*}} A_{5-1} Z(p_i \circ 0) + \overset{r_6,\psi}{\otimes_{p_i r_5,\psi^*}} A_{3-1} Z(p_i \circ 0) \\
& \quad + \overset{q,\psi}{\odot_{p_i r_1,\psi^*}} Z \delta_{p_i,r_1} + \overset{q,\psi}{\odot_{p_i r_3,\psi^*}} Z \delta_{p_i,r_3} + \overset{q,\psi}{\odot_{p_i r_5,\psi^*}} Z \delta_{p_i,r_5} \\
& \quad \left. - \overset{p_i r_{2,\psi}}{\odot_{q,\psi^*}} Z \delta_{p_i,r_2} - \overset{p_i r_{4,\psi}}{\odot_{q,\psi^*}} Z \delta_{p_i,r_4} - \overset{p_i r_{6,\psi}}{\odot_{q,\psi^*}} Z \delta_{p_i,r_6} \right) \\
& \quad + \delta_{\bar{\psi},0} \left( \overset{r_2,\psi}{\otimes_{\bar{\psi},\psi^*}} Z(\bar{v} \circ 0) + \overset{\bar{\psi},\psi}{\otimes_{r_1,\psi^*}} Z(\bar{v} \circ 0) \right) + \delta_{\bar{\psi},0} \left( \overset{r_4,\psi}{\otimes_{\bar{\psi},\psi^*}} Z(\bar{v} \circ 0) + \overset{\bar{\psi},\psi}{\otimes_{r_3,\psi^*}} Z(\bar{v} \circ 0) \right) \\
& \quad + \delta_{\bar{\psi},0} \left( \overset{r_6,\psi}{\otimes_{\bar{\psi},\psi^*}} Z(\bar{v} \circ 0) + \overset{\bar{\psi},\psi}{\otimes_{r_5,\psi^*}} Z(\bar{v} \circ 0) \right) + \left( \overset{r_2,\psi}{\otimes_{\bar{b},\psi^*}} Z(\bar{b} \circ 0) + \overset{\bar{b},\psi}{\otimes_{r_1,\psi^*}} Z(\bar{b} \circ 0) \right) \\
& \quad + \left( \overset{r_4,\psi}{\otimes_{\bar{b},\psi^*}} Z(\bar{b} \circ 0) + \overset{\bar{b},\psi}{\otimes_{r_3,\psi^*}} Z(\bar{b} \circ 0) \right) + \left( \overset{r_6,\psi}{\otimes_{\bar{b},\psi^*}} Z(\bar{b} \circ 0) + \overset{\bar{b},\psi}{\otimes_{r_5,\psi^*}} Z(\bar{b} \circ 0) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{p_2,0} \delta_{\bar{\psi},0} \delta_{\bar{v},1} \left( - \frac{p_2 r_2, \psi}{\bar{\psi}, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0) + \frac{\bar{\psi}, \psi}{p_2 r_1, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0) \right. \\
& \quad \left. + \frac{p_1 r_2, \psi}{\bar{\psi}, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) - \frac{\bar{\psi}, \psi}{p_1 r_1, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right) \\
& + \delta_{p_2,0} \delta_{\bar{\psi},0} \delta_{\bar{v},2} \left( - \frac{p_2 r_4, \psi}{\bar{\psi}, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0) + \frac{\bar{\psi}, \psi}{p_2 r_3, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0) \right. \\
& \quad \left. + \frac{p_1 r_4, \psi}{\bar{\psi}, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) - \frac{\bar{\psi}, \psi}{p_1 r_3, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right) \\
& + \delta_{p_2,0} \delta_{\bar{\psi},0} \delta_{\bar{v},3} \left( - \frac{p_2 r_6, \psi}{\bar{\psi}, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0) + \frac{\bar{\psi}, \psi}{p_2 r_5, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0) \right. \\
& \quad \left. + \frac{p_1 r_6, \psi}{\bar{\psi}, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) - \frac{\bar{\psi}, \psi}{p_1 r_5, \psi^*} Z(\bar{v} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right) \\
& + \delta_{p_2,0} \delta_{\bar{b},1} \left( \frac{p_2 r_2, \psi}{\bar{b}, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0) - \frac{\bar{b}, \psi}{p_2 r_1, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0) \right. \\
& \quad \left. - (-1)^{\delta_{p_1,0}} \frac{p_1 r_2, \psi}{\bar{b}, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + (-1)^{\delta_{p_1,0}} \frac{\bar{b}, \psi}{p_1 r_1, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right) \\
& + \delta_{p_2,0} \delta_{\bar{b},2} \left( \frac{p_2 r_4, \psi}{\bar{b}, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0) - \frac{\bar{b}, \psi}{p_2 r_3, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0) \right. \\
& \quad \left. - (-1)^{\delta_{p_1,0}} \frac{p_1 r_4, \psi}{\bar{b}, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + (-1)^{\delta_{p_1,0}} \frac{\bar{b}, \psi}{p_1 r_3, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right) \\
& + \delta_{p_2,0} \delta_{\bar{b},3} \left( \frac{p_2 r_6, \psi}{\bar{b}, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0) - \frac{\bar{b}, \psi}{p_2 r_5, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0) \right. \\
& \quad \left. - (-1)^{\delta_{p_1,0}} \frac{p_1 r_6, \psi}{\bar{b}, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) + (-1)^{\delta_{p_1,0}} \frac{\bar{b}, \psi}{p_1 r_5, \psi^*} Z(\bar{b} \circ 0; p_1 \circ 0, p_2 \circ p_1) \right) \\
& + (-1)^{\delta_{p_1,0} + \delta_{p_2,0}} (\mathfrak{N}(Z(\bar{a} \circ \bar{b}, \bar{b} \circ 4; \bar{\psi} \circ 5, \bar{v} \circ 0)) - \mathfrak{N}(Z(\bar{a} \circ \bar{b}, \bar{b} \circ 5; \bar{\psi} \circ 4, \bar{v} \circ 0)))
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}(VZ) & = \delta_{\bar{a},6} (x_1) \mathfrak{A}'_h (z_1+1 VZ) \\
& + \delta_{\bar{a},7} \delta_{z_1,0} (x_2) \mathfrak{A}'_h (z_2+1 VZ) \\
& + \delta_{\bar{a},8} \delta_{z_1,0} \delta_{z_2,0} (x_3) \mathfrak{A}'_h (z_3+1 VZ) \\
& + \delta_{\bar{a},9} \delta_{z_1,0} \delta_{z_2,0} \delta_{z_3,0} (x_4) \mathfrak{A}'_h (z_4+1 VZ) \\
& + \delta_{\bar{a},10} \delta_{z_1,0} \delta_{z_2,0} \delta_{z_3,0} \delta_{z_4,0} (x_5) \mathfrak{A}'_h (z_5+1 VZ) \\
& + \delta_{\bar{a},11} \delta_{z_1,0} \delta_{z_2,0} \delta_{z_3,0} \delta_{z_4,0} \delta_{z_5,0} (x_6) \mathfrak{A}'_h (z_6+1 VZ) \\
& + \delta_{\bar{a},1} \delta_{\bar{v},1} \delta_{z,0} (A_1) \mathfrak{A}'_h (V^{m_1+1} Z) \\
& + \delta_{\bar{a},2} \delta_{\bar{v},2} \delta_{z,0} \delta_{m_1,0} (A_2) \mathfrak{A}'_h (V^{m_2+1} Z) \\
& + \delta_{\bar{a},3} \delta_{\bar{v},3} \delta_{z,0} \delta_{m_1,0} \delta_{m_2,0} (A_3) \mathfrak{A}'_h (V^{m_3+1} Z) \\
& + \delta_{\bar{a},1} \delta_{\bar{v},2} \delta_{z,0} \delta_{m_1,0} \delta_{m_2,0} \delta_{m_3,0} (A_4) \mathfrak{A}'_h (V^{m_4+1} Z) \\
& + \delta_{\bar{a},1} \delta_{\bar{v},3} \delta_{z,0} \delta_{m_1,0} \delta_{m_2,0} \delta_{m_3,0} \delta_{m_4,0} (A_5) \mathfrak{A}'_h (V^{m_5+1} Z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{\bar{a},2} \delta_{\bar{v},3} \delta_{z,0} \delta_{m_1,0} \delta_{m_2,0} \delta_{m_3,0} \delta_{m_4,0} \delta_{m_5,0} \mathfrak{A}'_h(V^{m_6+1}Z) \\
& + (-1)^{\delta_{p_1,0} + \delta_{p_2,0} + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{\bar{a},1} \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{z,0} \delta_{m,0} \mathfrak{B}((r_1) \mathfrak{A}'_h(V_{l_1 \cup 1}Z)) \\
& + (-1)^{\delta_{p_1,0} + \delta_{p_2,0} + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{\bar{a},2} \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{z,0} \delta_{m,0} \delta_{l_1,0} \mathfrak{B}((r_3) \mathfrak{A}'_h(V_{l_3 \cup 1}Z)) \\
& + (-1)^{\delta_{p_1,0} + \delta_{p_2,0} + l_6} \delta_{\bar{a},3} \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{z,0} \delta_{m,0} \delta_{l_1,0} \delta_{l_3,0} \mathfrak{B}((r_5) \mathfrak{A}'_h(V_{l_5 \cup 1}Z)) \\
& + \delta_{\bar{a},5} \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{z,0} \delta_{m,0} \delta_{l,0} \mathfrak{A}'_h({}^{p+1}VZ)
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}(Z) & = \delta_{\bar{a},6} \delta_{x_1} \mathfrak{A}'_h(x_1+1Z) \\
& + \delta_{\bar{a},7} \delta_{x_1,0} \delta_{x_2} \mathfrak{A}'_h(x_2+1Z) \\
& + \delta_{\bar{a},8} \delta_{x_1,0} \delta_{x_2,0} \delta_{x_3} \mathfrak{A}'_h(x_3+1Z) \\
& + \delta_{\bar{a},9} \delta_{x_1,0} \delta_{x_2,0} \delta_{x_3,0} \delta_{x_4} \mathfrak{A}'_h(x_4+1Z) \\
& + \delta_{\bar{a},10} \delta_{x_1,0} \delta_{x_2,0} \delta_{x_3,0} \delta_{x_4,0} \delta_{x_5} \mathfrak{A}'_h(x_5+1Z) \\
& + \delta_{\bar{a},11} \delta_{x_1,0} \delta_{x_2,0} \delta_{x_3,0} \delta_{x_4,0} \delta_{x_5,0} \delta_{x_6} \mathfrak{A}'_h(x_6+1Z) \\
& + \delta_{\bar{a},1} \delta_{\bar{v},1} \delta_{x,0} \mathfrak{A}'_h(Z^{A_1+1}) \\
& + \delta_{\bar{a},2} \delta_{\bar{v},2} \delta_{x,0} \delta_{A_1,0} \mathfrak{A}'_h(Z^{A_2+1}) \\
& + \delta_{\bar{a},3} \delta_{\bar{v},3} \delta_{x,0} \delta_{A_1,0} \delta_{A_2,0} \mathfrak{A}'_h(Z^{A_3+1}) \\
& + \delta_{\bar{a},1} \delta_{\bar{v},2} \delta_{x,0} \delta_{A_1,0} \delta_{A_2,0} \delta_{A_3,0} \mathfrak{A}'_h(Z^{A_4+1}) \\
& + \delta_{\bar{a},1} \delta_{\bar{v},3} \delta_{x,0} \delta_{A_1,0} \delta_{A_2,0} \delta_{A_3,0} \delta_{A_4,0} \mathfrak{A}'_h(Z^{A_5+1}) \\
& + \delta_{\bar{a},2} \delta_{\bar{v},3} \delta_{x,0} \delta_{A_1,0} \delta_{A_2,0} \delta_{A_3,0} \delta_{A_4,0} \delta_{A_5,0} \mathfrak{A}'_h(Z^{A_6+1}) \\
& + (-1)^{\delta_{p_1,0} + \delta_{p_2,0} + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6} \delta_{\bar{a},1} \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{x,0} \delta_{A,0} \mathfrak{B}((r_1) \mathfrak{A}'_h(Z_{r_1 \cup 1})) \\
& + (-1)^{\delta_{p_1,0} + \delta_{p_2,0} + r_4 + r_5 + r_6} \delta_{\bar{a},2} \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{x,0} \delta_{A,0} \delta_{r_1,0} \mathfrak{B}((r_3) \mathfrak{A}'_h(Z_{r_3 \cup 1})) \\
& + (-1)^{\delta_{p_1,0} + \delta_{p_2,0} + r_6} \delta_{\bar{a},3} \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{x,0} \delta_{A,0} \delta_{r_1,0} \delta_{r_3,0} \mathfrak{B}((r_5) \mathfrak{A}'_h(Z_{r_5 \cup 1})) \\
& + \delta_{\bar{a},5} \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{x,0} \delta_{A,0} \delta_{r,0} \mathfrak{A}'_h({}^{q+1}Z) \\
& + \delta_{\bar{\psi},4} \delta_{x,0} \delta_{A,0} \delta_{r,0} \delta_{q,0} \delta_{p_2,0} \left( \delta_{\bar{a},1} (-{}_{(p_2 r_1)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_2 \circ r_1)) + \delta_{p_1,0} {}_{(p_1 r_1)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_1 \circ r_1))) \right. \\
& \quad + \delta_{\bar{a},2} (-{}_{(p_2 r_3)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_2 \circ r_3)) + \delta_{p_1,0} {}_{(p_1 r_3)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_1 \circ r_3))) \\
& \quad \left. + \delta_{\bar{a},3} (-{}_{(p_2 r_5)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_2 \circ r_5)) + \delta_{p_1,0} {}_{(p_1 r_5)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_1 \circ r_5))) \right) \\
& + \delta_{\bar{\psi},5} \delta_{x,0} \delta_{A,0} \delta_{r,0} \delta_{q,0} \delta_{p_2,0} \left( \delta_{\bar{a},1} (-{}_{(p_2 r_2)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_2 \circ r_2)) + \delta_{p_1,0} {}_{(p_1 r_2)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_1 \circ r_2))) \right. \\
& \quad + \delta_{\bar{a},2} (-{}_{(p_2 r_4)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_2 \circ r_4)) + \delta_{p_1,0} {}_{(p_1 r_4)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_1 \circ r_4))) \\
& \quad \left. + \delta_{\bar{a},3} (-{}_{(p_2 r_6)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_2 \circ r_6)) + \delta_{p_1,0} {}_{(p_1 r_6)} \mathfrak{A}'_h(Z(p_1 \circ r_6))) \right)
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}(\Gamma_{\begin{smallmatrix} R_1, S_1 \\ \circlearrowleft \\ R_2, S_2 \end{smallmatrix}} \Theta) & = \delta_{l_1,0} (-1)^{l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{p_2, r_1} \mathfrak{A}'_h(\Gamma_{l_1 \cup 1} \begin{smallmatrix} R_1, S_1 \\ \circlearrowleft \\ R_2, S_2 \end{smallmatrix} \Theta(p_2 \circ 0)) \\
& + \delta_{l_1,1} (-1)^{l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6} \delta_{p_2,0} \mathfrak{A}'_r(\Gamma_{l_1 \cup 0} \begin{smallmatrix} R_1, S_1 \\ \circlearrowleft \\ R_2, S_2 \end{smallmatrix} \Theta(p_2 \circ r_1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_{l_2,0}(-1)^{l_3+l_4+l_5+l_6} \delta_{p_2,l_2} \{p_2,r_2\} \mathfrak{A}_h(\Gamma_{l_2 \circ 1} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ 0)) \\
& + \delta_{l_2,1}(-1)^{l_3+l_4+l_5+l_6} \delta_{p_2,0} \{p_2,r_2\} \mathfrak{A}_r(\Gamma_{l_2 \circ 0} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ r_2)) \\
& + \delta_{l_3,0}(-1)^{l_4+l_5+l_6} \delta_{p_2,l_3} \{p_2,r_3\} \mathfrak{A}_h(\Gamma_{l_3 \circ 1} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ 0)) \\
& + \delta_{l_3,1}(-1)^{l_4+l_5+l_6} \delta_{p_2,0} \{p_2,r_3\} \mathfrak{A}_r(\Gamma_{l_3 \circ 0} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ r_3)) \\
& + \delta_{l_4,0}(-1)^{l_5+l_6} \delta_{p_2,l_4} \{p_2,r_4\} \mathfrak{A}_h(\Gamma_{l_4 \circ 1} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ 0)) \\
& + \delta_{l_4,1}(-1)^{l_5+l_6} \delta_{p_2,0} \{p_2,r_4\} \mathfrak{A}_r(\Gamma_{l_4 \circ 0} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ r_4)) \\
& + \delta_{l_5,0}(-1)^{l_6} \delta_{p_2,l_5} \{p_2,r_5\} \mathfrak{A}_h(\Gamma_{l_5 \circ 1} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ 0)) \\
& + \delta_{l_5,1}(-1)^{l_6} \delta_{p_2,0} \{p_2,r_5\} \mathfrak{A}_r(\Gamma_{l_5 \circ 0} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ r_5)) \\
& + \delta_{l_6,0} \delta_{p_2,l_6} \{p_2,r_6\} \mathfrak{A}_h(\Gamma_{l_6 \circ 1} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ 0)) \\
& + \delta_{l_6,1} \delta_{p_2,0} \{p_2,r_6\} \mathfrak{A}_r(\Gamma_{l_6 \circ 0} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ r_6)) \\
& + (-1)^{1-\delta_{p_2,0}} * \text{dasselbe mit } p_1 \text{ statt } p_2,
\end{aligned}$$

$\mathfrak{B}(\overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta)$  entsprechend, mit  $r$  statt  $l$  und zum Beispiel

$$\{p_2,r_6\} \mathfrak{A}_h(\overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta_{l_6 \circ 1}(p_2 \circ 0)) \quad \text{statt} \quad \{p_2,r_6\} \mathfrak{A}_h(\Gamma_{l_6 \circ 1} \overset{R_1,S_1}{\underset{R_2,S_2}{\odot}} \Theta(p_2 \circ 0)).$$

•

$$\begin{aligned}
& \{p_i,r_j\} \mathfrak{A}_h(\Gamma) \\
& = \Gamma (\delta_{\text{Der},0} + \delta_{\text{Der},1}(1 - \delta_{K_1,p_i}) + \delta_{\text{Der},2}(1 - \delta_{K_1,p_i})(1 - \delta_{K_2,p_i})) \\
& + \Gamma[1, r_j, L_1] \delta_{K_1,p_i} \\
& + \Gamma[2, r_j, L_1, K_2, L_2](1 - \delta_{K_2,p_i})(1 - \delta_{K_2,1}) \delta_{K_1,p_i} \\
& + \Gamma[2, K_1, L_1, r_j, L_2](1 - \delta_{K_1,p_i})(1 - \delta_{K_1,1}) \delta_{K_2,p_i} \\
& + \Gamma[2, r_j, L_1, 1, L_2] \delta_{K_1,p_i} \delta_{K_2,1}
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
& \{p_i,r_j\} \mathfrak{A}_r(\Gamma) \\
& = \Gamma (\delta_{\text{Der},0} + \delta_{\text{Der},1}(1 - \delta_{K_1,r_j}) + \delta_{\text{Der},2}(1 - \delta_{K_1,r_j})(1 - \delta_{K_2,r_j})) \\
& + \Gamma[1, p_i, L_1] \delta_{K_1,r_j} \\
& + \Gamma[2, p_i, L_1, K_2, L_2](1 - \delta_{K_2,r_j})(1 - \delta_{K_2,1}) \delta_{K_1,r_j} \\
& + \Gamma[2, K_1, L_1, p_i, L_2](1 - \delta_{K_1,r_j})(1 - \delta_{K_1,1}) \delta_{K_2,r_j}
\end{aligned}$$

$$+ \Gamma[2, p_i, L_1, 1, L_2] \delta_{K_1, r_j} \delta_{K_2, 1}$$

•

$$\begin{aligned} & \{R\} \mathfrak{A}'_h(\Gamma) \\ &= \Gamma (\delta_{\text{Der}, 0} + \delta_{\text{Der}, 1} (1 - \delta_{K_1, \bar{v}}) (1 - \delta_{K_1, \bar{\psi}}) (1 - \delta_{K_1, \bar{a}}) \\ & \quad + \delta_{\text{Der}, 2} (1 - \delta_{K_1, \bar{v}}) (1 - \delta_{K_2, \bar{v}}) (1 - \delta_{K_1, \bar{\psi}}) (1 - \delta_{K_2, \bar{\psi}}) (1 - \delta_{K_1, \bar{a}}) (1 - \delta_{K_2, \bar{a}})) \\ & + \Gamma[1, R', L_1] \nu(1) \\ & + \Gamma[2, R', L_1, K_2, L_2] (1 - \delta_{K_2, \bar{a}}) (1 - \delta_{K_2, \bar{v}}) (1 - \delta_{K_2, \bar{\psi}}) (1 - \delta_{K_2, \bar{i}}) \nu(1) \\ & + \Gamma[2, K_1, L_1, R', L_2] (1 - \delta_{K_1, \bar{a}}) (1 - \delta_{K_1, \bar{v}}) (1 - \delta_{K_1, \bar{\psi}}) (1 - \delta_{K_1, \bar{i}}) \nu(2) \\ & + \Gamma[2, R', L_1, 1, 0] (\delta_{R', R} (\delta_{R, A_1} \delta_{K_1, \bar{a}} \delta_{K_2, \bar{v}} + \text{analog alle anderen } A_i \\ & \quad + \delta_{R, r_1} \delta_{K_1, \bar{a}} \delta_{K_2, \bar{\psi}} + \text{analog } r_3, r_5 \\ & \quad + \delta_{R, q} \delta_{K_1, \bar{a}} \delta_{K_2, \bar{\psi}}) \\ & \quad \delta_{R, p_2 r_1} \delta_{R', p_2} \delta_{K_1, \bar{a}} \delta_{K_2, \bar{\psi}} + \text{analog alle anderen } p_1 r_x, p_2 r_x), \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned} \nu(i) &= \delta_{R', R} (\delta_{R, x_i} \delta_{K_i, \bar{a}} + \delta_{R, A_1} \delta_{K_i, \bar{v}} + \text{analog: } A_2, A_3 \\ & \quad + \delta_{R, A_4} \delta_{L_i, v} \delta_{K_i, \bar{a}} + \delta_{R, A_4} \delta_{L_i, u} \delta_{K_i, \bar{v}} + \text{analog: } A_5, A_6 \\ & \quad + \delta_{R, r_1} \delta_{L_i, v} \delta_{K_i, \bar{a}} + \delta_{R, r_1} \delta_{L_i, \psi^*} \delta_{K_i, \bar{\psi}} + \text{analog: } r_3, r_5 \\ & \quad + \delta_{R, q} \delta_{L_i, \psi^*} \delta_{K_i, \bar{\psi}} + \delta_{R, q} \delta_{L_i, \psi} \delta_{K_i, \bar{a}}) \\ & + \delta_{R', p_2} \delta_{R, p_2 r_1} \delta_{L_i, v} \delta_{K_i, \bar{a}} + \delta_{R', p_2} \delta_{R, p_2 r_1} \delta_{L_i, \psi^*} \delta_{K_i, \bar{\psi}} + \text{analog alle anderen } p_1 r_x, p_2 r_x \end{aligned}$$



# Literaturverzeichnis

- [AAV 99] L.T. Adzhemyan, N.V. Antonov, A.N. Vasiliev, *The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence*, London 1999
- [BB 01] C. Bagnuls, C. Bervillier, Phys. Rep. 348 (2003), 91
- [BG 95] G. Benfatto, G. Gallavotti, *Renormalization Group*, Princeton 1995
- [Ber 04] C. Bervillier, Phys. Lett. A332 (2004), 93
- [BH 99] M. Böckmann, D. Homeier, Protokoll zu: *Experimentelle Übungen für Physiker I: Übung E6 - Elektrische Resonanz* (1999, unveröffentlicht)
- [Bré 75] E. Brézin, Les Houches XXVIII (1975), 330
- [BT 94] R.D. Ball, R.S. Thorne, Annals Phys. 236 (1994), 117
- [BTW 02] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, Phys. Rept. 363, 223
- [BZ 01] A. Bonanno, D. Zappalà, Phys. Lett. B504 (2001), 181
- [CD 01] M. Chaichian, A. Demichev, *Path Integrals in Physics*, London 2001
- [CFP 92] R.J. Creswick, H.A. Farach, C.P. Poole, *Introduction to Renormalization Group Methods in Physics*, New York 1992
- [CKM 97] J. Comellas, Y. Kubyshev, E. Moreno, Nucl. Phys. B490 (1997), 653
- [Col 84] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge 1984
- [Com 96] J. Comellas, hep-th/9609236
- [Com 98] J. Comellas, Nucl. Phys. B509 (1998), 662
- [Del 04] B. Delamotte, Am. J. Phys. 72 (2004), 170
- [DGS 97] B. Dubrulle, F. Graner, D. Sornette (Eds.), *Scale Invariance and Beyond*, Les Ulis 1997
- [Doi 76] M. Doi, J. Phys. A9/9 (1976), 1465
- [Dub 94] B. Dubrulle, Phys. Rev. Lett. 73/7 (1994), 959
- [DM 79] C. DeDominicis, P.C. Martin, Phys. Rev. A19/1 (1979), 419
- [EG 94] G. Eyink, N. Goldenfeld, cond-mat/9407021v1
- [Fis 98] M. E. Fisher, Rev. Mod. Phys. 70/2 (1998), 653

- [FNS 77] D. Forster, D.R. Nelson, M.J. Stephen, Phys. Rev. A16/2 (1977), 732
- [Fri 03] R. Friedrich, Phys. Rev. Lett. 90/8 (2003), 084501-1
- [Fri 95] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge 1995
- [FS 80] L.D. Faddeev, A.A. Slavnov, *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, Reading 1980
- [GL 54] M. Gell-Mann, F.E. Low, Phys. Rev. 95/5 (1954), 1300
- [Gol 00] G.R. Golner, hep-th/9801124v3
- [HH 86] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, Nucl. Phys. B270 (1986), 687
- [HMPPMV 99] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, M. Visser, Phys. Rev. E60 (1999), 6343
- [Kad 66] L. P. Kadanoff, Physics 2/6 (1966), 263
- [Kol 41] A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR 32 (1941), 16
- [Kug 97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Berlin 1997
- [LL 91] L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band VI - Hydrodynamik, Berlin 1991
- [LP 94] V. L'vov, I. Procaccia, *Exact Resummations in the Theory of Hydrodynamic Turbulence*, Les Houches 1994
- [LP 95] S.B. Liao, J. Polonyi, Phys. Rev. D51 (1995), 4474
- [McC 90] W. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford 1990
- [Mor 97] T.R. Morris, hep-th/9709100v1
- [Mor 98] T.R. Morris, Prog. Theor. Phys. Suppl. 131 (1998), 395
- [MSR 73] P.C. Martin, E.D. Siggia, H.A. Rose, Phys. Rev. A8/1 (1973), 423
- [MY 65] S. Monin, A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, Moskau 1965
- [NCS 74] J.F. Nicoll, Chang, Stanley, Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 540
- [OB 02] M. Oberlack, F.H. Busse (Eds.), *Theories of Turbulence*, Udine 2002
- [Pel 85] L. Peliti, J. Physique 46 (1985), 1469
- [PS 95] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge 1995
- [Pol 83] J. Polchinski, Nucl. Phys. B231 (1984), 269
- [Pop 00] S.B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge 2000
- [Sal 99] M. Salmhofer, *Renormalization: An Introduction*, Berlin 1999
- [SC 00] C. Sire, P.H. Chavanis, Phys. Rev. E61 (2000), 6644
- [SJ 98] D. Sornette, A. Johansen, Physica A261 (1998), 581

- [Sor 98] D. Sornette, Phys. Rep. 297 (1998), 239
- [TW 94] N. Tetradis, C. Wetterich, Nucl. Phys. B422 (1994), 541
- [vDy 82] M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Stanford 1982
- [Wet 93] C. Wetterich, Phys. Lett. B301 (1993), 90
- [WH 73] F. Wegner, A. Houghton, Phys. Rev. A8 (1973), 401
- [Wil 71] K.G. Wilson, Phys. Rev. B 4/9 (1971), 3174
- [Wil 71a] K.G. Wilson, Phys. Rev. B 4/9 (1971), 3184
- [WK 74] K.G. Wilson, J. Kogut, Phys. Rep. C12 (1974), 75
- [Zap 02] D. Zappalà, Phys. Rev. D66 (2002), 105020
- [Zin 02] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* 4<sup>th</sup> ed., Oxford 2002



# Schlusswort

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Münster dafür, dass er es mir ermöglicht hat, dieses interessante und dankbare Thema zu bearbeiten. Er hat mir den Freiraum gegeben, eigenen Ideen und Impulsen nachzugehen, und war dennoch beratend zur Stelle, wenn ich seine Unterstützung brauchte. Vielen Dank für die Zusammenarbeit in den letzten Jahren!

Auch Herrn Prof. Dr. R. Friedrich möchte ich danken - nämlich dafür, dass er mir die Schönheit der Fluidmechanik näher gebracht hat, aber auch für die viele Zeit, die er in die vielen Gespräche mit mir investiert hat.

Meinen Eltern und meiner Schwester Mareike danke ich, weil sie mich immer dann unterstützt haben, wenn ich mal wieder die Krise gekriegt habe, weil irgendwas nicht so klappte, wie ich mir das vorgestellt hatte.

Besonders danken möchte ich den Kollegen und Freunden, die mit vielen Diskussionen und noch mehr Kaffee dazu beigetragen haben, dass ich noch immer fest davon überzeugt bin, dass theoretische Physik das Schönste aller Forschungsgebiete ist - also Melanie Müller, Alexander Ferling, Patrick Fritzsich, Tobias Sudmann und Stefanie Rau.

Ein großes „Danke“ geht schließlich an all die Freunde, Bekannten und Verwandten, die es mit mir und meinem Wechsel zwischen Begeisterung und Frust ausgehalten haben, besonders in den letzten Monaten vor der Abgabe. Ganz besonders danke ich Bettina Drosdol, die in den entscheidenden Momenten mit ihrer Hilfe immer zur Stelle war, und auch die Arbeit auf Rechtschreibfehler durchsucht hat, und Andrea Börste, die überhaupt immer für mich da war, und das Eingangszitat beigesteuert hat.

Schließen möchte ich mit einem Zitat eines Studienkollegens, Markus Böckmann, mit dem ich im zweiten Semester zusammen im Anfängerpraktikum geschwitzt habe. Hey, versprochen ist versprochen, und was kann man jener (frühen) Erkenntnis schon noch hinzufügen:

*„Zusammenfassend müssen wir sagen, daß dieses Experiment mehr Fragen aufgeworfen, als beantwortet hat. Das Vertrauen in dieses Experiment ist von uns sehr gering, aber wir können auch nicht genau sagen, woran diese Abweichungen liegen.*

*Aber das ist wohl das Wesen der Physik.“*

Böckmann & Homeier [BH 99]



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

---

Dirk Homeier  
geboren am 13.2.1978 in Unna  
geschieden

## Schulausbildung

---

8/1984 - 7/1988 Besuch der Grundschule Uhlandschule in Werne a.d. Lippe  
8/1988 - 6/1997 Besuch des Anne-Frank-Gymnasiums in Werne a.d. Lippe  
10.6.1997 Allgemeine Hochschulreife

## Wehersatzdienst

---

8/1997 - 9/1998 Zivildienst im Altenheim St. Katharina in Werne a.d. Lippe

## Studium

---

10/1998 - 10/2000 Grundstudium der Physik und Mathematik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster  
28.9.2000 Vordiplom in Mathematik an der WWU Münster  
28.9.2000 Vordiplom in Physik an der WWU Münster  
10/2000 - 9/2001 Hauptstudium der Physik an der WWU Münster  
10/2001 - 9/2002 Hauptstudium der Physik an der ENS Paris  
9.10.2002 Licence in Physik an der ENS Paris  
3.2.2002 Maîtrise in Physik an der ENS Paris  
10/2001 - 9/2002 Aufbauende Studien an der WWU Münster  
10/2002 Beginn der Dissertation bei Prof. Dr. G. Münster am Institut für Theoretische Physik der WWU Münster

## Berufstätigkeit

---

10/2000 - 3/2001 Studentische Hilfskraft am Institut für Mathematik der WWU Münster  
4/2002 - 3/2006 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik der WWU Münster  
4/2006 - 12/2006 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik der WWU Münster