

Mathematik

Dissertationsthema

**Das Deformationsbild
der Baum-Connes-Vermutung
für fast zusammenhängende
Lie-Gruppen**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Frank Malow
aus Münster
-2007-

Dekan:	Prof. Dr. Dr. h.c. Joachim Cuntz
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Siegfried Echterhoff
Zweiter Gutachter:	apl. Prof. Dr. Wend Werner
Tag der mündlichen Prüfung:	3. Mai 2007
Tag der Promotion:	3. Mai 2007

Zusammenfassung

Das Deformationsbild der Baum-Connes-Vermutung wird in der vorliegenden Arbeit auf den Fall fast zusammenhängender Lie-Gruppen und beliebiger Koeffizientenalgebren erweitert.

Zu einer fast zusammenhängenden Lie-Gruppe G mit maximal kompakter Untergruppe K wird ein stetiges Gruppenbündel $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0,1]}$ konstruiert, welches trivial außerhalb Null und dessen Nullfaser das semidirekte Produkt von K mit dem Tangentialraum $T_{eK}(G/K)$ der Quotientenmannigfaltigkeit ist. Für eine G -Algebra B ist $(B \rtimes_r \mathcal{G}_t)_{t \in [0,1]}$ ein oberhalb stetiges Feld von C^* -Algebren, und durch Auswertung in den Punkten Null und Eins kann das Deformationsbild der Assembly-Abbildung mit Koeffizienten in B definiert werden.

Für fast zusammenhängende Lie-Gruppen läßt sich die Assembly-Abbildung als Kasparov-Produkt mit dem Dirac-Element der Gruppe beschreiben. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß die Assembly-Abbildung für mittelbare Gruppen ein Isomorphismus ist, wird die Deformationsabbildung mithilfe einer stetigen Familie von Dirac-Elementen für $(\mathcal{G}_t)_{t \in [0,1]}$ mit der Assembly-Abbildung identifiziert. Zur Konstruktion dieser Familie wird LeGalls äquivariante Kasparov-Theorie und die Theorie von Pseudodifferentialoperatoren auf geblättern Mannigfaltigkeiten genutzt.

Schließlich wird noch gezeigt, daß für jede fast zusammenhängende Gruppe die K -Theorie der reduzierten Gruppen- C^* -Algebra $K_*(C_r^*(G))$ eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern ist.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Gruppoid-Algebren	1
1.1 Lokal-kompakte und differenzierbare Gruppoide	1
1.2 $C_0(X)$ -Algebren	10
1.3 Gruppoid- C^* -Algebren	16
1.3.1 Verschränkte Produkte	16
1.3.2 Gruppoid-Algebren mit Werten in Fell-Bündeln	31
1.4 Gruppoid-äquivariante KK-Theorie	38
2 PDOs auf geblätternen Mannigfaltigkeiten	43
2.1 Geblätternen Mannigfaltigkeiten	43
2.2 (Familien von) Pseudodifferentialoperatoren	66
3 Deformation von Lie-Gruppen und -Algebren	81
3.1 Deformation von Lie-Algebren	82
3.2 Fast zusammenhängende Lie-Gruppen	87
3.3 Deformation von Lie-Gruppen	93
3.4 Deformationsbild der Assembly-Abbildung	108
4 Dirac-Element für Deformationsgrupoide	111
4.1 Der homogene Raum \mathcal{G}/K	112
4.2 Konstruktion des Dirac-Elements	128
4.3 Assembly-Abbildung via Deformation	144
5 Fast zusammenhängende Gruppen	153
5.1 Fast zusammenhängende Gruppen und Deformation	153
5.2 Topologische K-Theorie mit trivialen Koeffizienten	158
A Die Assembly-Abbildung	163

B Clifford-Algebren	173
Literaturverzeichnis	179

Einleitung

Die Baum-Connes-Vermutung liefert eine Strategie, die K-Theorie reduzierter verschränkter Produkte der Form $B \rtimes_r G$ zu berechnen. Dabei ist G eine lokal-kompakte Gruppe, und B ist eine G -Algebra, d.h. eine C^* -Algebra, die mit einer stark stetigen Wirkung der Gruppe G versehen ist.

In [BCH94] wird von Baum, Connes und Higson die sog. topologische K-Theorie $K^{\text{top}}(G; B)$ von G (mit Werten in der G -Algebra B) und eine Assembly-Abbildung

$$\mu_{G,B} : K^{\text{top}}(G; B) \longrightarrow K_*(B \rtimes_r G)$$

konstruiert. Die Baum-Connes-Vermutung (mit Koeffizienten) besagt dann, daß die Assembly-Abbildung $\mu_{G,B}$ für jede G -Algebra B ein Isomorphismus ist.

Eine positive Beantwortung der Baum-Connes-Vermutung (mit trivialen Koeffizienten) hat wichtige Konsequenzen in vielen Bereichen der Mathematik, etwa in der Topologie und der Geometrie: So folgt aus der Baum-Connes-Vermutung z.B. die Novikov- und die Kadison-Vermutung. Auch in der harmonischen Analysis gibt es Anwendungen bei der Untersuchung quadrat-integrierbarer Darstellungen.

Kasparov und Skandalis haben in [KS03] gezeigt, daß die Assembly-Abbildung sich mit Methoden aus der G -äquivarianten KK-Theorie beschreiben läßt; sie ist gegeben als Komposition des reduzierten Descent-Homomorphismus mit einer durch ein Kasparov-Produkt definierten Abbildung. Für jede eigentliche G -Algebra B ist die Assembly-Abbildung nach [CEM01] ein Isomorphismus.

Mittlerweile ist die Baum-Connes-Vermutung für eine große Anzahl von Gruppen verifiziert worden: So zeigen z.B. Higson und Kasparov in [HK01], daß die Assembly-Abbildung für jede mittelbare Gruppe und beliebige Koeffizientenalgebren ein Isomorphismus ist. In seiner Doktorarbeit beweist V. Lafforgue u.a., daß jede halbeinfache Lie-Gruppe mit endlichem Zentrum die Vermutung mit trivialen Koeffizienten erfüllt.

Hierauf aufbauend konnte von Chabert, Echterhoff und Nest in [CEN03] gezeigt werden, daß letztere Aussage für jede fast zusammenhängende Gruppe gilt. Ist G eine fast zusammenhängende Gruppe mit maximal kompakter Untergruppe K , so besitzt der homogene Raum G/K die Struktur einer vollständigen Riemann-

schen Mannigfaltigkeit, und G/K ist ein Modell für den universellen eigentlichen G -Raum $\mathcal{E}G$. Hiermit läßt sich zeigen, daß die topologische K-Theorie $K^{\text{top}}(G; B)$ mit Werten in der G -Algebra B sich mit der K-Theorie $K_*(B \rtimes (V \rtimes K))$ identifizieren läßt. Dabei ist $V \rtimes K$ das semidirekte Produkt der maximal kompakten Untergruppe mit dem Tangentialraum $V = T_{eK}(G/K)$ des homogenen Raums.

Die oben erwähnten Resultate beruhen auf der sog. Dirac-Dual-Dirac-Methode, welche auf Kasparov zurückgeht. Für eine eigentliche G -Algebra \mathcal{A} werden Elemente $D \in \text{KK}^G(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ und $\eta \in \text{KK}^G(\mathbb{C}, \mathcal{A})$ konstruiert, so daß das Element $\gamma := \eta \otimes_{\mathcal{A}} D \in \text{KK}^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ die Bedingung

$$p^*(\gamma) = 1_{\mathcal{E}G} \in \mathcal{R} \text{KK}(\mathcal{E}G; C_0(\mathcal{E}G), C_0(\mathcal{E}G))$$

erfüllt. Besitzt die lokal-kompakte Gruppe G ein solches γ -Element, so ist die Assembly-Abbildung für jede G -Algebra injektiv, und sie läßt sich mit einer Abbildung identifizieren, welche durch das Kasparov-Produkt mit dem Descent des Dirac-Elements D gegeben ist.

Nicht für jede Gruppe ist die Dirac-Dual-Dirac-Methode anwendbar; Kasparov hat in [Kas88] aber gezeigt, daß jede fast zusammenhängende Gruppe ein γ -Element besitzt. In dieser Situation erfüllen das Dirac- und das Dual-Dirac-Element die Identität $D \otimes_{\mathbb{C}} \eta = 1_{\mathcal{A}}$. In Anhang A der vorliegenden Arbeit werden die Konstruktion der Assembly-Abbildung und die Dirac-Dual-Dirac-Methode ausführlicher beschrieben.

In dem grundlegenden Artikel [BCH94] wird von Baum, Connes und Higson erwähnt, daß sich für eine zusammenhängende Lie-Gruppe G mit maximal kompakter Untergruppe K durch eine Deformation direkt eine Abbildung zwischen der K-Theorie $K_*(T_{eK}(G/K) \rtimes K)$ des semidirekten Produkts und der K-Theorie der reduzierten Gruppen- C^* -Algebra $K_*(C_r^*(G))$ angeben läßt, welche äquivalent zur Assembly-Abbildung für G mit trivialen Koeffizienten ist. Dieses Deformationsbild der Baum-Connes-Vermutung wird in der vorliegenden Arbeit genauer studiert und auf den Fall fast zusammenhängender Lie-Gruppen und beliebiger Koeffizienten-Algebren erweitert.

Ist G eine reelle Lie-Gruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten und K eine maximal kompakte Untergruppe von G , so wird ein stetiges Gruppenbündel $\mathcal{G}^{[0,1]} = (\mathcal{G}_t^{[0,1]})_{t \in [0,1]}$ konstruiert, welches außerhalb Null trivial mit Faser G ist, und dessen Nullfaser das semidirekte Produkt $V \rtimes K$ der maximal kompakten Untergruppe mit dem Tangentialraum $V = T_{eK}(G/K)$ der Quotientenmannigfaltigkeit ist. Das Gruppenbündel läßt sich insbesondere als lokal-kompakter Gruppoid auffassen.

Ist B eine G -Algebra, so wird gezeigt, daß die Algebra $\mathcal{B} = C[0,1] \otimes B$ in natürlicher Weise eine stetige $\mathcal{G}^{[0,1]}$ -Wirkung besitzt, so daß das verschränkte Pro-

dukt $\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}^{[0,1]}$ gebildet werden kann. Es definiert ein oberhalb stetiges Feld von C^* -Algebren über dem Intervall $[0, 1]$.

Da das Bündel $\mathcal{G}^{[0,1]}$ trivial außerhalb Null und die Nullfaser eine mittelbare Gruppe ist, existiert eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow C_0((0, 1]) \otimes (B \rtimes_r G) \longrightarrow (C[0, 1] \otimes B) \rtimes_r \mathcal{G}^{[0,1]} \xrightarrow{q_0} B \rtimes (V \rtimes K) \longrightarrow 0.$$

Hieraus folgt, daß die Auswertungsabbildung in Null einen Isomorphismus in der K-Theorie definiert.

Zusammen mit der Auswertung in Eins $q_1 : (C[0, 1] \otimes B) \rtimes_r \mathcal{G}^{[0,1]} \longrightarrow B \rtimes_r G$ kann dann das Deformationsbild der Assembly-Abbildung definiert werden: Die Deformationsabbildung ist gegeben durch die Komposition

$$q_{1,*} \circ q_{0,*}^{-1} : K_*(B \rtimes (V \rtimes K)) \longrightarrow K_*(B \rtimes_r G).$$

Ist gezeigt, daß diese Abbildung äquivalent zur Assembly-Abbildung ist, so erhält man ein weiteres Kriterium, mit welchem man die Baum-Connes-Vermutung überprüfen kann: Für eine fast zusammenhängende Lie-Gruppe ist die Vermutung mit Koeffizienten in B genau dann erfüllt, wenn die durch die Auswertung in Eins induzierte Abbildung ein Epimorphismus in der K-Theorie ist.

Zum Nachweis, daß die beiden Abbildungen identifiziert werden können, wird ausgenutzt, daß jede fast zusammenhängende Lie-Gruppe ein γ -Element besitzt und die Assembly-Abbildung im wesentlichen durch das Dirac-Element gegeben ist.

In Anlehnung an Kasparovs Beschreibung des Dirac-Elements für fast zusammenhängende Lie-Gruppen aus [Kas95] und [Kas88] wird eine Familie von Dirac-Elementen für die Deformation konstruiert. Das von Kasparov definierte Dirac-Element einer fast zusammenhängenden (Lie-)Gruppe G mit maximal kompakter Untergruppe K wird repräsentiert von dem Zykel

$$\left[(L^2(G/K, \Lambda^*(G/K)), \frac{d + d^*}{\sqrt{1 + (d + d^*)^2}}) \right] \in \text{KK}^G(C_\tau(G/K), \mathbb{C}).$$

Dabei bezeichnet $L^2(G/K, \Lambda^*(G/K))$ den Hilbertraum der quadrat-integrierbaren komplexwertigen Differentialformen, $C_\tau(G/K)$ ist die Algebra der im Unendlichen verschwindenden Schnitte ins Clifford-Bündel, und der Operator ist durch die deRham-Ableitung d und den (formal) adjungierten Operator d^* gegeben.

Aus technischen Gründen ist es zweckmäßig, $\mathcal{G}^{[0,1]}$ zu einem glatten Gruppenbündel \mathcal{G} über \mathbb{R} zu erweitern, welches trivial außerhalb von Null mit Faser G ist.

Die kompakte Gruppe K wirkt faserweise auf \mathcal{G} , und der Quotient $M = \mathcal{G}/K$ ist eine geblätterte Mannigfaltigkeit. Auf dieser können vertikale Vektorbündel, d.h. solche Bündel, die tangential zu den Blättern liegen, betrachtet werden.

Das vertikale Tangentialbündel von M besitzt eine glatte \mathcal{G} -Wirkung. Hierdurch kann auf M eine vertikale Riemannsche Metrik und eine vertikale Orientierung konstruiert werden; dazu werden für Lie-Gruppen bekannte Resultate auf den Fall des Gruppenbündels \mathcal{G} erweitert.

Mithilfe der Metrik können dann das vertikale Clifford-Bündel, der Hilbertmodul der quadrat-integrierbaren vertikalen Differentialformen und der vertikale Dirac-Operator gebildet werden. Es wird gezeigt, daß letzterer ein Pseudodifferentialoperator von Ordnung Null ist. Unter Verwendung eines Resultats über glatte Familien von Pseudodifferentialoperatoren kann dann gezeigt werden, daß diese Konstruktionen ein Element in LeGalls Gruppoid-äquivarianter KK-Theorie definieren. Blattweise stimmt das Dirac-Element der Deformation mit den von Kasparov beschriebenen Dirac-Elementen überein. Zusätzlich liefert die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren eine alternative Möglichkeit um nachzuweisen, daß der Operator in Kasparovs Dirac-Element die Bedingungen für ein KK-Element erfüllt.

Die Identifikation der Deformations- mit der Assembly-Abbildung folgt dann aus den funktoriellen Eigenschaften der KK-Theorie und unter Verwendung der Tatsache, daß mittelbare Gruppen die Baum-Connes-Vermutung mit beliebigen Koeffizienten erfüllen.

Zu Beginn wurde erwähnt, daß die Baum-Connes-Vermutung eine Strategie liefert, die K-Theorie reduzierter verschränkter Produkte zu berechnen. Als Anwendung wird gezeigt, daß $K_*(C_r^*(G))$ für jede fast zusammenhängende Gruppe G eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern ist. Dieses Resultat wurde bisher in der Literatur nur unter einer zusätzlichen Orientierungsvoraussetzung beschrieben.

Aufbau der Arbeit

Im einzelnen ist die Arbeit wie folgt gegliedert:

In den ersten beiden Kapiteln wird das technische Fundament für die späteren Konstruktionen gelegt. So werden zunächst (lokal-kompakte bzw. glatte) Gruppoid- sowie ihre verschränkten Produkte eingeführt und die Grundlagen von LeGalls Gruppoid-äquivarianter KK-Theorie wiederholt. Für die späteren Anwendungen ist insbesondere der Fall lokal-kompakter bzw. glatter Gruppenbündel von Interesse; die exakten Sequenzen aus 1.3.6 sind von zentraler Bedeutung für die Definition des Deformationsbildes der Assembly-Abbildung.

Im zweiten Kapitel werden geblätterte Mannigfaltigkeiten und Familien von

Pseudodifferentialoperatoren eingeführt. Das Hauptaugenmerk liegt auf Blätterungen, welche durch surjektive Submersionen (mit zusammenhängenden Fasern) gegeben sind. Dies ist die Situation, die bei der Konstruktion der Familie von Dirac-Elementen vorliegen wird. Unter Verwendung der Morita-Äquivalenz von Gruppoid-Algebren mit Werten in Fell-Bündeln aus dem ersten Kapitel wird gezeigt, daß im Fall einer surjektiven Submersion die C^* -Algebra der Blätterung isomorph zur Algebra der kompakten Operatoren auf einem Hilbertmodul ist. Zusammen mit der exakten Sequenz 2.2.9 für Pseudodifferentialoperatoren von Ordnung Null kann dann gezeigt werden, daß ein solcher Operator kompakt ist, wenn alle Einschränkungen auf die Blätter kompakte Operatoren sind.

Der eigentliche Deformationsprozeß wird in Kapitel 3 beschrieben; die Deformation von Lie-Algebren dient dabei als Motivation für die Konstruktion auf dem Gruppenniveau. Nachdem die benötigten Resultate über Lie-Gruppen bereitgestellt sind, wird im dritten Abschnitt für eine fast zusammenhängende Lie-Gruppe G mit maximal kompakter Untergruppe K die Deformation durch Konstruktion eines glatten Gruppenbündels \mathcal{G} über \mathbb{R} beschrieben. Die Definition der glatten Struktur und der Nachweis, daß die Strukturabbildungen differenzierbar sind, beruhen wesentlich auf der analytischen Struktur von G und dem Campbell-Hausdorff-Theorem für Lie-Gruppen.

Als glatter Gruppoid besitzt \mathcal{G} ein Haarsystem, und durch Einschränkung erhält man einen lokal-kompakten Gruppoiden über dem Intervall $[0, 1]$. Ist B eine G -Algebra, so läßt sich in kanonischer Weise eine stetige Wirkung des Gruppenbündels auf der Algebra $C[0, 1] \otimes B$ definieren, und unter Verwendung des Resultats 1.3.6 kann das Deformationsbild der Assembly-Abbildung mit Koeffizienten in B beschrieben werden.

Um die Deformationsabbildung mit der Assembly-Abbildung zu identifizieren, wird im vierten Kapitel eine Familie von Dirac-Elementen für die Deformation konstruiert. Der homogene Raum \mathcal{G}/K besitzt die Struktur einer vertikal orientierbaren und Riemannschen geblättern Mannigfaltigkeit, und es wird gezeigt, daß die aus dem vertikalen Tangentialbündel konstruierten vertikalen Vektorbündel in natürlicher Weise eine \mathcal{G} -Wirkung besitzen.

Zusammen mit den allgemeinen Resultaten aus Kapitel 2 kann im zweiten Abschnitt dann das Dirac-Element der Deformation definiert werden, welches faserweise mit den Dirac-Elementen der Lie-Gruppen \mathcal{G}_t übereinstimmt. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß mittelbare Gruppen die Baum-Connes-Vermutung mit beliebigen Koeffizienten erfüllen, erhält man dann aus den funktoriellen Eigenschaften von Kasparovs (\mathcal{R}) KK-Theorie die Identifikation der Assembly-Abbildung mit dem Deformationsbild.

Kapitel 5 enthält zunächst einen kurzen Ausblick, welche der Konstruktion

nen sich auf den Fall fast zusammenhängender Gruppen übertragen lassen und welche Probleme für die Beschreibung des Deformationsbildes in dieser Situation noch zu lösen sind. Im zweiten Abschnitt wird dann gezeigt, daß für jede fast zusammenhängende Gruppe G die K-Theorie $K_*(C_r^*(G))$ stets eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern ist.

In Anhang A wird die Konstruktion der Assembly-Abbildung und die Dirac-Dual-Dirac-Methode beschrieben; dabei wird insbesondere auf den Fall fast zusammenhängender Gruppen eingegangen. Anhang B enthält schließlich einen kurzen Abriß der benötigten Resultate über (komplexe) Clifford-Algebren.

Es wird davon ausgegangen, daß der Leser mit der Theorie von C^* -Algebren und verschränkten Produkten lokal-kompakter Gruppen sowie Kasparovs äquivarianter KK-Theorie vertraut ist. Desweiteren werden grundlegende Kenntnisse über glatte Mannigfaltigkeiten vorausgesetzt.

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Prof. Dr. Siegfried Echterhoff für die Chance, ein neues und spannendes Gebiet der Mathematik für mich zu entdecken, und für seine – in fachlicher wie menschlicher Hinsicht – hervorragende Betreuung.

Desweiteren geht mein Dank an die Mitglieder der Arbeitsgruppe “Funktionalanalysis, Operatoralgebren und nichtkommutative Geometrie” an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster für die vielen fruchtbaren Diskussionen und ein Umfeld, in dem das Arbeiten Freude bereitet; insbesondere seien an dieser Stelle Robert Fischer, Helma Klüver und Walther Paravicini erwähnt.

Dr. Johannes Aastrup und Prof. Dr. Sönke Hansen haben mir den Zugang zur Theorie der Pseudodifferentialoperatoren erleichtert; in diesem Zusammenhang möchte ich mich bei Martin Gensburg für das sorgfältige Lesen des zweiten Kapitels bedanken.

Die Anregung, das Lemma 4.3.5 zur Identifikation der Assembly- mit der Deformationsabbildung zu nutzen, geht auf Georges Skandalis zurück. Die Diagramme der vorliegenden Arbeit entstanden unter Verwendung von Paul Taylors Macro-Paket “Commutative Diagrams in TeX”.

Schließlich möchte ich mich noch bei all den Freunden und meiner Familie bedanken, die mich im Verlauf der Arbeit unterstützt und begleitet haben. Insbesondere sind hier natürlich meine Eltern zu erwähnen – und Jörn.

Konventionen

Im folgenden werden C^* -Algebren stets als separabel vorausgesetzt, sofern es sich natürlich nicht um Multiplikatoralgebren handelt. Mit $A \otimes B$ wird das minimale Tensorprodukt zweier C^* -Algebren A und B bezeichnet. Sind die C^* -Algebren $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduiert, so ist in der Regel auch das graduierte Tensorprodukt gemeint. Zur Verdeutlichung wird hierfür zum Teil auch die Notation $A \hat{\otimes} B$ verwendet. Ist G eine lokal-kompakte Gruppe, so ist unter einer G -Algebra eine C^* -Algebra zu verstehen, die mit einer stark stetigen Wirkung von G versehen ist.

Für einen Hilbertmodul \mathcal{E} bezeichnet $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ die Algebra der adjungierbaren Operatoren, und $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ bezeichnet das Ideal der kompakten Operatoren.

Soweit nichts anderes gesagt wird, sind lokal-kompakte Räume auch Hausdorffsch und erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Für ein Bündel (oder Feld) E über einem Raum X ist $\Gamma(X, E)$ die Menge der Schnitte auf M mit Werten in E . Ist das Bündel E stetig oder glatt, so seien auch die Schnitte stetig bzw. glatt. In analoger Weise seien die im Unendlichen verschwindenden Schnitte, die Schnitte mit kompaktem Träger bzw. die beschränkten Schnitte mit $\Gamma_0(X, E)$, $\Gamma_c(X, E)$ bzw. $\Gamma_b(X, E)$ bezeichnet. Mit $\mathcal{L}(E)$ wird das Bündel (bzw. Feld) bezeichnet, dessen Faser in $x \in X$ aus den linearen Abbildungen $\text{Hom}(E_x, E_x)$ besteht.

Ein Banach-Bündel $E \longrightarrow X$ wird oberhalb stetig genannt, falls die Normfunktion von oben halbstetig ist in dem Sinn, daß für alle $r \in \mathbb{R}$ die Menge $\{e \in E \mid \|e\| < r\}$ offen in E ist. Analog sind oberhalb stetige Felder zu verstehen.

Für zwei Abbildungen $p : X \longrightarrow Z$ und $q : Y \longrightarrow Z$ ist

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid p(x) = q(y)\}$$

das Faserprodukt von X und Y über Z ; hierfür wird zum Teil auch die Notation $X \star Y$ verwendet.

Kapitel 1

Gruppoid-Algebren

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Begriffe und Konstruktionen für Gruppoiden, ihre verschränkten Produkte und die Gruppoid-äquivariante Kasparov-Theorie wiederholt werden. Für die weitere Arbeit ist insbesondere der Fall von Gruppenbündeln von Interesse. Das Resultat 1.3.6 wird später zur Definition des Deformationsbildes der Assembly-Abbildung genutzt. Der Begriff der Morita-Äquivalenz von Gruppoid- C^* -Algebren mit Werten in Fell-Bündeln wird im folgenden Kapitel benötigt, um später eine stetige Familie von Dirac-Elementen für die Deformation konstruieren zu können.

Die in diesem Kapitel angegebenen Beispiele finden im weiteren Verlauf der Arbeit Verwendung.

1.1 Lokal-kompakte und differenzierbare Gruppoiden

Ein Gruppoid ist eine kleine Kategorie mit Inversen. Diese Definition ist jedoch ziemlich unhandlich. Etwas ausführlicher läßt sich sagen:

Definition 1.1.1. Ein Gruppoid besteht aus zwei Mengen \mathcal{G} und $X = \mathcal{G}^{(0)}$ mit Abbildungen $r, s : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ sowie den folgenden Strukturabbildungen:

- einer Multiplikation

$$m : \mathcal{G}^{(2)} = \{(\gamma, \eta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid s(\gamma) = r(\eta)\} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad (\gamma, \eta) \mapsto \gamma \cdot \eta$$

- einer involutiven Abbildung (genannt Inversion)

$$i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad \gamma \mapsto \gamma^{-1},$$

- der Einsabbildung

$$u : \mathcal{G}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad x \mapsto u(x) =: e_x.$$

Diese genügen den folgenden algebraischen Bedingungen:

$$\begin{aligned} r(\gamma \cdot \eta) &= r(\gamma), & s(\gamma \cdot \eta) &= s(\eta), & (\gamma \cdot \eta) \cdot \xi &= \gamma \cdot (\eta \cdot \xi), \\ r(u(x)) &= x & &= s(u(x)), \\ \gamma \cdot (u(s(\gamma))) &= \gamma & &= u(r(\gamma)) \cdot \gamma, \\ r(\gamma^{-1}) &= s(\gamma), & s(\gamma^{-1}) &= r(\gamma) & \text{ und } & \gamma \cdot \gamma^{-1} = u(r(\gamma)) \end{aligned}$$

Sind \mathcal{G} und $\mathcal{G}^{(0)}$ lokal-kompakte topologische (Hausdorff-)Räume, so heißt der Gruppoid \mathcal{G} lokal-kompakt, falls alle Strukturabbildungen stetig sind.

Sind \mathcal{G} und $\mathcal{G}^{(0)}$ glatte Mannigfaltigkeiten, alle Strukturabbildungen glatt, Source- und Range-Abbildung Submersionen, und ist $\mathcal{G}^{(0)}$ via u eine Untermannigfaltigkeit von \mathcal{G} , so heißt \mathcal{G} ein differenzierbarer oder glatter Gruppoid.

Die Abbildungen r und s werden als Range- und Source-Abbildungen bezeichnet. In der Literatur findet sich für differenzierbare Gruppoide zum Teil auch die Bezeichnung Lie-Gruppoid.

Es sei angemerkt, daß ein Teil der Bedingungen in obiger Definition redundant ist. So folgt z.B. die Bedingung $s(\gamma^{-1}) = r(\gamma)$ aus den übrigen Axiomen; im Fall eines glatten Gruppoiden genügt es zu fordern, daß die Source- oder die Range-Abbildung eine Submersion ist, und die Glattheit der Inversion läßt sich aus der Glattheit der übrigen Strukturabbildungen folgern.

Für Teilmengen $U, V \subseteq \mathcal{G}^0$ setze man

$$\mathcal{G}_U := s^{-1}(U), \quad \mathcal{G}^V := r^{-1}(V) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_U^V := \mathcal{G}_U \cap \mathcal{G}^V.$$

Für $x \in X$ besitzt die Menge \mathcal{G}_x^x die Struktur einer Gruppe; diese wird als Isotropiegruppe von \mathcal{G} in x bezeichnet.

Bemerkung 1.1.2. In der Literatur wird im Fall eines lokal-kompakten bzw. glatten Gruppoiden meist nur verlangt, daß die Basis $\mathcal{G}^{(0)}$ ein Hausdorff-Raum ist. Für die vorliegende Arbeit sind (fast) ausschließlich Gruppoide von Interesse, bei denen auch der Raum \mathcal{G} Hausdorffsch ist, weshalb dies zu einem Teil der Definition gemacht wurde.

Aus den algebraischen Bedingungen ergeben sich gewisse topologische Konsequenzen. So läßt sich z.B. die Basis $\mathcal{G}^{(0)}$ eines lokal-kompakten bzw. glatten Gruppoiden immer als Unterraum bzw. Untermannigfaltigkeit von \mathcal{G} auffassen.

Im Fall eines glatten Gruppoiden sind Source- und Range-Abbildung Submersionen. Daher besitzt $\mathcal{G}^{(2)}$ in natürlicher Weise die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit: Es gilt

$$\mathcal{G}^{(2)} = (r, s)^{-1}(\Delta) \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G},$$

wobei $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{G}^{(0)}\} \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ die durch die Diagonale gegebene abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{G}^{(0)} \times \mathcal{G}^{(0)}$ bezeichnet.

Submersionen sind lokal Projektionen. Zu jedem Punkt aus \mathcal{G} gibt es daher eine offene Kartenumgebung $V \subseteq \mathcal{G}$, so daß durch die Kartenabbildung ein Diffeomorphismus $\psi : V \longrightarrow r(V) \times W \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \times \mathbb{R}^{\dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{G}^{(0)}}$ für eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^{\dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{G}^{(0)}}$ gegeben ist. Ein solches Paar (V, ψ) heißt r -faserweises Produkt.

Für $x \in r(V)$ bezeichne $\psi_x : (V \cap r^{-1}(x)) \longrightarrow W$ den durch Einschränkung erhaltenen Diffeomorphismus.

Auf die speziellen Eigenschaften (surjektiver) Submersionen wird im nächsten Kapitel noch genauer eingegangen.

Beispiele 1.1.3. (1) Jede Gruppe G ist ein Gruppoid, dessen Basis gerade aus dem Eins-Element der Gruppe besteht. Lokal-kompakte bzw. Lie-Gruppen liefern Beispiele für lokal-kompakte bzw. glatte Gruppoide.

(2) Stimmen für einen Gruppoiden die Source- und Range-Abbildung überein, so heißt \mathcal{G} auch ein Gruppenbündel über $\mathcal{G}^{(0)}$. In diesem Fall wird die Projektion auf die Basis mit $p := r = s : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ bezeichnet.

(3) Ist $p : M \longrightarrow B$ eine surjektive Submersion glatter Mannigfaltigkeiten, so ist das Faserprodukt $M \times_B M := \{(x, y) \in M \times M \mid p(x) = p(y)\}$ eine glatte Mannigfaltigkeit, welche sich in natürlicher Weise als glatter Gruppoid mit Basis M auffassen läßt. Die Strukturabbildungen sind dabei gegeben durch $s(x, y) = y$, $r(x, y) = x$, $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$, $(x, y)^{-1} = (y, x)$ und $u(x) = (x, x)$.

Definition 1.1.4. Ist \mathcal{G} ein lokal-kompakter Gruppoid mit Basis X , Z ein (lokal-kompakter) topologischer Raum und $\rho : Z \longrightarrow X$ eine offene, stetige Abbildung, so ist eine Linkswirkung von \mathcal{G} auf Z gegeben durch eine stetige Abbildung

$$\mathcal{G} \star Z = \{(\gamma, z) \in \mathcal{G} \times Z \mid s(\gamma) = \rho(z)\} \longrightarrow Z, \quad (\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z,$$

welche die Bedingungen

- $\rho(\gamma \cdot z) = r(\gamma)$ für alle $(\gamma, z) \in \mathcal{G} \star Z$,
- $u(x) \cdot z = z$ für alle $z \in Z$ und $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ mit $\rho(z) = x$, und
- $(\tilde{\gamma} \cdot \gamma) \cdot z = \tilde{\gamma} \cdot (\gamma \cdot z)$ für alle $(\tilde{\gamma}, \gamma) \in \mathcal{G}^{(2)}$ und $z \in Z$ mit $\rho(z) = s(\gamma)$

erfüllt. Das Faserprodukt $\mathcal{G} \star Z$ besitzt die Struktur eines lokal-kompakten Gruppoiden mit Basis $(\mathcal{G} \star Z)^{(0)} = Z$ unter den Strukturabbildungen

- $r_Z(\gamma, z) = \gamma \cdot z$ und $s_Z(\gamma, z) = z$,
- $(\gamma, \tilde{\gamma} \cdot z) \cdot (\tilde{\gamma}, z) = (\gamma \cdot \tilde{\gamma}, z)$,
- $(\gamma, z)^{-1} = (\gamma^{-1}, \gamma \cdot z)$ und
- $u_Z(z) = (u(\rho(z)), z)$.

Ein Gruppoid der Form $\mathcal{G} \star Z$ heißt Transformationsgruppoid. In analoger Weise sind Rechtswirkungen bzw. Wirkungen glatter Gruppoide auf glatten Mannigfaltigkeiten definiert. Eine (Links-)Wirkung $\mathcal{G} \star Z \longrightarrow Z$ heißt eigentlich, falls die Abbildung

$$\mathcal{G} \star Z \longrightarrow Z \times Z, \quad (\gamma, z) \mapsto (\gamma \cdot z, z)$$

eigentlich ist.

Insbesondere läßt sich auf diese Weise auch $\mathcal{G}^{(2)}$ als lokal-kompakter Gruppoid auffassen, indem man \mathcal{G} auf sich selbst von rechts oder links durch Multiplikation wirken läßt.

Es ist bekannt, daß jede lokal-kompakte Gruppe ein Haarmaß besitzt. Im Falle eines lokal-kompakten Gruppoide ist dieses zu ersetzen durch eine Familie von Maßen. Zunächst seien daher einige nützliche Bezeichnungen festgelegt. Unter einem Maß auf einem topologischen Raum ist im folgenden immer ein reguläres positives Borel-Maß zu verstehen.

Definition 1.1.5. Es sei $q : Y \longrightarrow X$ eine offene und surjektive stetige Abbildung lokal-kompakter topologischer Räume. Eine Familie von Maßen für q ist gegeben durch eine Familie $\mu = (\mu^x)_{x \in X}$ von Maßen auf Y , so daß für alle $x \in X$

$$\text{supp } \mu^x \subseteq q^{-1}(x) =: Y^x$$

gilt. Die Familie heißt *treu*, falls $\text{supp } \mu^x = Y^x$ gilt; sie heißt *stetig*, falls für alle $\phi \in C_c(Y)$ die Abbildung

$$\mu(\phi) : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \mu(\phi)(x) := \int_{y \in Y^x} \phi(y) \, d\mu^x(y)$$

ein Element von $C_c(X)$ ist.

Ist $q : Y \longrightarrow X$ eine surjektive Submersion glatter Mannigfaltigkeiten, so ist in analoger Weise eine glatte Familie von Maßen zu verstehen.

Ist $p : Z \longrightarrow X$ eine weitere offene und surjektive stetige Abbildung lokal-kompakter Räume und μ eine Familie von Maßen für $q : Y \longrightarrow X$, so läßt sich diese zu einer Familie $p^*(\mu)$ von Maßen für $p_Z : Z \times_X Y \longrightarrow Z$ zurückziehen:

Identifiziert man für $z \in Z$ die Faser $(Z \times_X Y)^z = \{(z, y) \in Z \times_X Y \mid p(z) = q(y)\}$ mit $q^{-1}(p(z)) = Y^{p(z)}$, so ist $p^*(\mu)^z = \mu^{p(z)}$ gerade das Bildmaß unter dieser Identifikation.

Ist μ eine treue bzw. stetige (oder glatte) Familie von Maßen, so gilt dasselbe auch für die Familie $p^*(\mu)$.

Definition 1.1.6. Ein (linkes) Haarsystem auf einem lokal-kompakten Gruppoide \mathcal{G} ist eine Familie $\{\lambda^x\}_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ regulärer positiver Borel-Maße auf \mathcal{G} , welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) Für alle $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ gilt $\text{supp}(\lambda^x) = \mathcal{G}^x = r^{-1}(x)$.
- (2) Für alle $\varphi \in C_c(\mathcal{G})$ ist die Abbildung

$$\lambda(\varphi) : \mathcal{G}^{(0)} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad x \mapsto \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \varphi(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$$

ein Element von $C_c(\mathcal{G}^{(0)})$.

- (3) Für alle $\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}$ und $\varphi \in C_c(\mathcal{G})$ gilt

$$\int_{\gamma \in \mathcal{G}^{s(\tilde{\gamma})}} \varphi(\tilde{\gamma} \cdot \gamma) d\lambda^{s(\tilde{\gamma})}(\gamma) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}^{r(\tilde{\gamma})}} \varphi(\gamma) d\lambda^{r(\tilde{\gamma})}(\gamma).$$

Analog ist ein rechtes Haarsystem definiert durch eine Familie regulärer positiver Borel-Maße $\{\rho_x\}_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ auf den Fasern bezüglich der Source-Abbildung, welche die analogen Bedingungen (1), (2) und

- (3') Für alle $\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}$ und $\varphi \in C_c(\mathcal{G})$ gilt

$$\int_{\gamma \in \mathcal{G}^{r(\tilde{\gamma})}} \varphi(\gamma \cdot \tilde{\gamma}) d\rho_{r(\tilde{\gamma})}(\gamma) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}^{s(\tilde{\gamma})}} \varphi(\gamma) d\rho_{s(\tilde{\gamma})}(\gamma)$$

erfüllt.

Ein (linkes) Haarsystem ist somit eine treue und stetige Familie für die Range-Abbildung, welche zusätzlich die Bedingung der Linksinvarianz erfüllt.

Im Gegensatz zu lokal-kompakten Gruppen besitzt nicht jeder lokal-kompakte Gruppoide ein Haarsystem; im Fall der Existenz sind Range- und Source-Abbildung notwendigerweise offene Abbildungen.

Ist $\lambda = (\lambda^x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ ein linkes Haarsystem, so definiert die Familie von Bildmaßen unter der Inversenbildung des Gruppoide $\lambda^{-1} := (\lambda_x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} := ((\lambda^x)^{-1})_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ ein rechtes Haarsystem für \mathcal{G} . Umgekehrt definiert jedes rechte in kanonischer Weise ein linkes Haarsystem für G .

Im Fall eines glatten Gruppoide scheint die Definition eines Haarsystems zunächst von unterschiedlicher Natur zu sein:

Definition 1.1.7. Ist \mathcal{G} ein glatter Gruppoid, so heißt eine Familie $\lambda = (\lambda^x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ von Maßen ein glattes linkes Haarsystem, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Ist (V, ψ) ein r -faserweises Produkt von \mathcal{G} mit $\psi(V) = r(V) \times W \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \times \mathbb{R}^d$ und bezeichnet λ_W die Einschränkung des Lebesgue-Maßes des \mathbb{R}^d auf die Teilmenge W , so ist für alle $x \in r(V)$ das Maß $\lambda^x \circ \psi_x^{-1}$ äquivalent zu λ_W , und die Radon-Nikodým-Ableitung definiert durch

$$(x, w) \mapsto \frac{d(\lambda^x \circ \psi_x^{-1})}{d\lambda_W}(w)$$

eine strikt positive, glatte Funktion in $C^\infty(r(V) \times W)$.

- (ii) Für alle $\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}$ und $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{G})$ gilt

$$\int_{\gamma \in \mathcal{G}^{s(\tilde{\gamma})}} \varphi(\tilde{\gamma} \cdot \gamma) d\lambda^{s(\tilde{\gamma})}(\gamma) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}^{r(\tilde{\gamma})}} \varphi(\gamma) d\lambda^{r(\tilde{\gamma})}(\gamma).$$

Natürlich definiert wieder jedes glatte linke ein glattes rechtes Haarsystem und umgekehrt. Desweiteren kann man zeigen, daß jedes glatte Haarsystem ein stetiges Haarsystem im Sinne der vorigen Definition ist; man vergleiche etwa [Pat99, Prop. 2.3.1].

Die folgenden Resultate sichern in gewissen Situationen die Existenz eines Haarsystems:

Satz 1.1.8. *Jeder differenzierbare Gruppoid besitzt ein (glattes) Haarsystem.*

Beweis. [Pat99, Thm. 2.3.1]. □

Ein lokal-kompaktes Gruppenbündel \mathcal{G} heißt l.c.c. (für locally conditionally compact), falls jeder Punkt aus \mathcal{G} eine Umgebung C besitzt, so daß für jede kompakte Menge $L \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ auch $C \cap p^{-1}(L)$ kompakt ist. Es gilt:

Satz 1.1.9. *Ist \mathcal{G} ein l.c.c. Gruppenbündel, so gilt: \mathcal{G} besitzt ein Haarsystem genau dann, wenn die Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ offen ist.*

Beweis. [Ren91, Lemma 1.3]. □

Beispiele 1.1.10. (1) Für jede lokal-kompakte Gruppe ist das Haarmaß ein stetiges Haarsystem.

(2) Aufgrund der in 1.1.1 getroffenen Konvention ist für jedes lokal-kompakte Gruppenbündel der Raum \mathcal{G} lokal-kompakt und Hausdorffsch. Somit besitzt jeder Punkt eine kompakte Umgebung in \mathcal{G} , und das Gruppenbündel besitzt genau dann ein stetiges Haarsystem, falls die Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ offen ist.

Für ein solches linkes Haarsystem $\lambda = (\lambda^x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ ist λ^x ein Haarmaß auf der lokal-kompakten Gruppe $\mathcal{G}^x = p^{-1}(x)$. Aus der Eindeutigkeit des Haarmaßes lokal-kompakter Gruppen und Bedingung (2) aus 1.1.6 folgt, daß ein stetiges Haarsystem auf einem lokal-kompakten Gruppenbündel \mathcal{G} eindeutig bis auf Multiplikation mit einer stetigen, strikt positiven Funktion auf der Basis $\mathcal{G}^{(0)}$ bestimmt ist.

(3) Ist $p : M \longrightarrow B$ eine surjektive Submersion glatter Mannigfaltigkeiten und $\mu = (\mu_x)_{x \in X}$ eine stetige und treue Familie von Maßen für p , so rechnet man sofort nach, daß $p^*(\mu)$ ein stetiges linkes Haarsystem für den lokal-kompakten Gruppoiden $M \times_B M$ ist.

Ist die Familie μ glatt in dem Sinne, daß bezüglich p -faserweiser Produkte die Maße lokal äquivalent zum Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{\dim M - \dim B}$ sind, so bildet die Familie $p^*(\mu)$ ein glattes linkes Haarsystem für den Gruppoiden $M \times_B M$.

(4) Ist $(\lambda^x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ ein Haarsystem für \mathcal{G} und wirkt \mathcal{G} von links auf Z , so lassen sich die Fasern via $\mathcal{G}^{\rho(z)} \longrightarrow (\mathcal{G} \star Z)^z, \gamma \mapsto (\gamma, \gamma^{-1} \cdot z)$ identifizieren, und die Familie $(\lambda^{\rho(z)})_{z \in Z}$ ist ein stetiges linkes Haarsystem für $\mathcal{G} \star Z$. Analog zeigt man im Fall einer Rechtswirkung, daß die Familie $(\lambda^{\sigma(z)})_{z \in Z}$ ein Haarsystem für den Transformationsgruppoiden $Z \star \mathcal{G}$ ist. Insbesondere läßt sich dies auf $\mathcal{G}^{(2)} = \mathcal{G} \times_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathcal{G}$ anwenden, und man erkennt, daß für $\varphi \in C_c(\mathcal{G}^{(2)})$ die Funktion

$$\gamma \mapsto \int_{\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}^s(\gamma)} \varphi(\gamma, \tilde{\gamma}) \, d\lambda^{s(\gamma)}(\tilde{\gamma})$$

ein Element von $C_c(\mathcal{G})$ ist.

Besitzt ein lokal-kompakter Gruppoid ein stetiges Haarsystem, so kann ähnlich wie im Fall lokal-kompakter Gruppen eine Modularfunktion definiert werden. Diese ist allerdings abhängig von der Wahl eines (quasi-invarianten) Maßes auf der Basis des Gruppoiden.

Ein (positives Borel-)Maß μ auf $\mathcal{G}^{(0)}$ heißt quasi-invariant, falls die von μ und dem linken bzw. rechten Haarsystem definierten regulären positiven Borel-Maße

$$\nu = \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \lambda^x \, d\mu(x) \quad \text{und} \quad \nu^{-1} = \int_{\mathcal{G}^{(0)}} \lambda_x \, d\mu(x)$$

äquivalent sind, also dieselben Nullmengen haben.

Für ein solches quasi-invariantes Maß auf der Basis definiert man die Modularfunktion D als Radon-Nikodym-Ableitung $D := \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$. Diese erfüllt

$$D(\gamma^{-1}) = D(\gamma)^{-1} \quad \nu\text{-fast überall} \quad \text{sowie} \quad D(\gamma \cdot \gamma') = D(\gamma) \cdot D(\gamma') \quad \nu^2\text{-fast überall;}$$

für Details vergleiche man etwa [Pat99, 3.1].

Im Fall eines lokal-kompakten Gruppenbündels $p : \mathcal{G} \longrightarrow X$ ist λ^x ein Haarmaß auf $\mathcal{G}^x = \mathcal{G}_x$ und als solches äquivalent zu $\lambda_x = (\lambda^x)^{-1}$. Somit gilt für jedes Maß μ auf $\mathcal{G}^{(0)}$ und jede Borel-meßbare Menge $E \subseteq \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \nu(E) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^x(E) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in X \\ &\Leftrightarrow \lambda_x(E) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in X \Leftrightarrow \nu^{-1}(E) = 0; \end{aligned}$$

für ein Gruppenbündel ist also jedes positive Borelmaß auf $\mathcal{G}^{(0)}$ quasi-invariant.

Ist in dieser Situation $\Delta_x : \mathcal{G}^x \longrightarrow \mathbb{R}^+$ die Modularfunktion der lokal-kompakten Gruppe $\mathcal{G}^x = \mathcal{G}_x$ für $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, so gilt für jede Borel-meßbare Funktion f auf \mathcal{G}

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}} f \, d\nu &= \int_{x \in X} \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} f(\gamma) \, d\lambda^x(\gamma) \, d\mu(x) \\ &= \int_{x \in X} \int_{\gamma \in \mathcal{G}_x} f(\gamma) \cdot \Delta_x(\gamma) \, d\lambda_x(\gamma) \, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{G}} f \cdot \Delta \, d\nu^{-1}, \end{aligned}$$

wobei die zweite Identität aus den Eigenschaften der Modularfunktion Δ_x folgt.

Die Modularfunktion D (bezüglich eines quasi-invarianten Maßes auf $\mathcal{G}^{(0)}$) ist im allgemeinen nur bis auf ν -Nullmengen eindeutig bestimmt; obige Rechnung zeigt, daß im Fall eines Gruppenbündels $D = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}} = \Delta$ gewählt werden kann. Es gilt:

Satz 1.1.11. *Für ein lokal-kompaktes Gruppenbündel ist die Abbildung*

$$\Delta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad \gamma \mapsto \Delta_{p(\gamma)}(\gamma)$$

ein stetiger Homomorphismus lokal-kompakter Gruppoide.

Beweis. Da die Verknüpfungen auf dem Gruppenbündel \mathcal{G} faserweise definiert sind, ist die Homomorphismus-Eigenschaft klar, und es bleibt nur die Stetigkeit von Δ zu zeigen.

Zu $\gamma_0 \in \mathcal{G}$ wähle man eine kompakte Umgebung $V \subseteq \mathcal{G}$. Das Pullback-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xleftarrow{\pi_1} & \mathcal{G} \times_X V \\ p \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X & \xleftarrow{p|_V} & V \end{array}$$

kommutiert; Zurückziehen der Familie $(\lambda^x)_{x \in X}$ liefert somit eine stetige Familie von Maßen $(\mu^v)_{v \in V}$ auf $\mathcal{G} \times_X V$ mit $\mu^v = \lambda^{p(v)}$, und es gilt

$$\int_{(\gamma, w) \in \pi_2^{-1}(v)} \phi(\gamma, w) d\mu^v(\gamma, w) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}_{p(v)}} \phi(\gamma, v) d\lambda^{p(v)}(\gamma)$$

für alle $\phi \in C_c(\mathcal{G} \times_X V)$. Es sei nun $\varphi \in C_c(\mathcal{G})^+$ mit

$$\lambda(\varphi)(p(v)) := \int_{\gamma \in \mathcal{G}_{p(v)}} \varphi(\gamma) d\lambda^{p(v)}(\gamma) > 0$$

für alle $v \in V$ gewählt. Eine solche Funktion existiert nach dem Lemma von Urysohn: Die Abbildung

$$V \xrightarrow{p|_V} X \xrightarrow{u} \mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}, \quad v \mapsto u(p(v)) = e_{p(v)}$$

ist stetig, also $u(p(V))$ eine kompakte Teilmenge von \mathcal{G} , und man kann $\varphi \in C_c(\mathcal{G})^+$ mit $\varphi(e_{p(v)}) = 1$ wählen.

Aufgrund der Eigenschaften eines Haarsystems ist die Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad v \mapsto \lambda(\varphi)(p(v))$$

ein Element von $C_c(V)^+$. Da die Abbildung

$$\tilde{m} : \mathcal{G} \times_X \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \times_X \mathcal{G}, \quad (\gamma, \eta) \mapsto (\gamma \cdot \eta, \eta)$$

eigentlich ist, ist $\phi : \mathcal{G} \times_X V \longrightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\phi(\gamma, w) = \varphi(\gamma \cdot w)$, ein Element von $C_c(\mathcal{G} \times_X V)$, denn der Träger $\text{supp}(\phi) = \tilde{m}^{-1}(\text{supp}(\varphi) \times_X V)$ ist kompakt in $\mathcal{G} \times_X V$. Da $(\mu^v)_{v \in V}$ eine stetige Familie von Maßen auf $\mathcal{G} \times_X V$ ist, ist die Abbildung

$$v \mapsto \mu(\phi)(v) = \int_{(\gamma, w) \in \pi_2^{-1}(v)} \phi(\gamma, w) d\mu^v(\gamma, w) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}_{p(v)}} \varphi(\gamma \cdot v) d\lambda^{p(v)}(\gamma)$$

ein Element von $C_c(V)^+$. Das Maß $\lambda^{p(v)}$ ist ein linkes Haarmaß auf der lokal-kompakten Gruppe $\mathcal{G}_{p(v)}$; unter Verwendung der Modularfunktion erhält man somit

$$\mu(\phi)(v) = \Delta_{p(v)}(v) \cdot \int_{\gamma \in \mathcal{G}_{p(v)}} \varphi(\gamma) d\lambda^{p(v)}(\gamma) = \Delta(v) \cdot \lambda(\varphi)(p(v)),$$

und die Abbildung

$$v \mapsto \Delta(v) = \frac{\mu(\phi)(v)}{\lambda(\varphi)(p(v))}$$

ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig in γ_0 , was zu zeigen war. \square

Bemerkung 1.1.12. Ist das Gruppenbündel $\mathcal{G} \longrightarrow X$ sogar differenzierbar, also ein Bündel von Lie-Gruppen, versehen mit einem glatten linken Haarsystem, so zeigt exakt derselbe Beweis, daß die Modularfunktion des Gruppenbündels glatt ist.

Schließlich sei noch an den Begriff der (Morita-)Äquivalenz von Gruppoïden erinnert:

Definition 1.1.13. Es seien \mathcal{G} und \mathcal{H} zwei lokal-kompakte Gruppoïde und X ein (lokal-kompakter) topologischer Raum, versehen mit offenen und surjektiven stetigen Abbildungen $\rho : X \longrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ und $\sigma : X \longrightarrow \mathcal{H}^{(0)}$.

Sind durch $\mathcal{G} \star_\rho X \longrightarrow X$ und $X \star_\sigma \mathcal{H} \longrightarrow X$ zwei freie, eigentliche und miteinander kommutierende Wirkungen gegeben, so daß die durch ρ bzw. σ induzierten Abbildungen den Orbitraum $\mathcal{G} \backslash X$ homöomorph auf $\mathcal{H}^{(0)}$ und X/\mathcal{H} homöomorph auf $\mathcal{G}^{(0)}$ abbilden, so heißt X eine (Morita-)Äquivalenz von \mathcal{G} und \mathcal{H} .

Äquivalente Gruppoïde haben Morita-äquivalente Gruppoïd- C^* -Algebren. Der Gruppoïd \mathcal{G} ist in natürlicher Weise isomorph zu $(X \star_\sigma X^{\text{opp}})/\mathcal{H}$, und $\mathcal{G} \backslash (X^{\text{opp}} \star_\rho X)$ ist isomorph zu \mathcal{H} , wobei jeweils die diagonale Wirkung der Gruppoïde auf dem Faserprodukt von X und X^{opp} zu betrachten ist; man vergleiche etwa [MRW87].

1.2 $C_0(X)$ -Algebren

Möchte man verschränkte Produkte lokal-kompakter Gruppoïde definieren, so ist zunächst zu klären, was unter stetigen \mathcal{G} -Algebren zu verstehen ist. Die richtige Wahl sind Felder von C^* -Algebren über der Basis X des Gruppoïden, oder – in anderer Sichtweise – $C_0(X)$ -Algebren. In diesem Abschnitt werden zunächst einige der benötigten Definitionen und Eigenschaften von $C_0(X)$ -Algebren und Hilbertmoduln über $C_0(X)$ -Algebren rekapituliert.

Zunächst werden diese Objekte ungraduiert eingeführt. In der Gruppoid-äquivarianten KK-Theorie werden $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduierte $C_0(X)$ -Algebren und Hilbertmoduln benötigt, so daß in einigen Formeln dann die passenden Vorzeichen zu wählen sind.

Im folgenden seien X, Y lokal-kompakte topologische Räume und $p : Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung.

Definition 1.2.1. Eine $C_0(X)$ -Algebra ist eine C^* -Algebra \mathcal{A} , welche mit einem nicht-entarteten $*$ -Homomorphismus

$$\vartheta : C_0(X) \longrightarrow Z\mathcal{M}(\mathcal{A})$$

ins Zentrum der Multiplikatoralgebra von \mathcal{A} versehen ist.

Insbesondere wird durch ϑ eine $C_0(X)$ -Bimodul-Struktur auf \mathcal{A} definiert. Der Homomorphismus ϑ ist in dem Sinne nicht-entartet, daß $C_0(X) \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}$ gilt.

Beispiele 1.2.2. • Ist $p : Y \longrightarrow X$ stetig, so ist $C_0(Y)$ eine $C_0(X)$ -Algebra via

$$p^* : C_0(X) \longrightarrow C_b(Y), \quad f \mapsto f \circ p.$$

- Ist D eine C^* -Algebra, so ist das Tensorprodukt $C_0(X) \otimes D$ eine $C_0(X)$ -Algebra; eine solche $C_0(X)$ -Algebra wird auch als triviale $C_0(X)$ -Algebra bezeichnet.

Definition 1.2.3. Es seien \mathcal{A} und \mathcal{B} $C_0(X)$ -Algebren.

- (1) Für jede abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq X$ ist

$$I_F := \{f \in C_0(X) \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in F\}$$

ein Ideal in $C_0(X)$. Die Einschränkung $\mathcal{A}_F := \mathcal{A}/I_F\mathcal{A}$ von \mathcal{A} auf F ist eine $C_0(F)$ -Algebra; für $F = \{x\}$ nennt man $\mathcal{A}_x := \mathcal{A}_{\{x\}}$ die Faser von \mathcal{A} in $x \in X$.

- (2) Das maximale Tensorprodukt $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ ist eine $C_0(X \times X)$ -Algebra. Bezeichnet $\Delta := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ die durch die Diagonale definierte abgeschlossene Teilmenge von $X \times X$, so ist

$$\mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{B} := (\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B})_{\Delta}$$

eine $C_0(X)$ -Algebra, genannt das $C_0(X)$ -Tensorprodukt von \mathcal{A} und \mathcal{B} . Für die Fasern gilt insbesondere

$$(\mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{B})_x \cong \mathcal{A}_x \otimes_{\max} \mathcal{B}_x.$$

Alternativ läßt sich $\mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{B}$ als Quotient von $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$ nach dem von

$$\{a \cdot \phi \otimes b - a \otimes \phi \cdot b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, \phi \in C_0(X)\}$$

erzeugten zweiseitigen Ideal beschreiben; vgl. dazu etwa [EW98, Def. 2.3 und Lemma 2.4].

(3) Für eine stetige Abbildung $p : Y \longrightarrow X$ besitzt das Pullback

$$p^* \mathcal{A} := \mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} C_0(Y) \cong (\mathcal{A} \otimes C_0(Y))_{\tilde{\Delta}}$$

für $\tilde{\Delta} := \{(p(y), y) \in X \times Y \mid y \in Y\}$ die Struktur einer $C_0(Y)$ -Algebra, und es gilt $(p^* \mathcal{A})_y \cong \mathcal{A}_{p(y)}$ sowie $p^*(\mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{B}) \cong p^* \mathcal{A} \otimes_{C_0(Y)} p^* \mathcal{B}$.

Bezeichnet $\pi : \mathcal{A} \otimes C_0(Y) \longrightarrow p^* \mathcal{A}$ den Quotienten-Homomorphismus, so besitzt dieser eine Fortsetzung auf die Multiplikator-Algebren, und \mathcal{A} wirkt auf $p^* \mathcal{A}$ über die Komposition

$$\mathcal{A} \longrightarrow M(\mathcal{A} \otimes C_0(Y)) \xrightarrow{\pi} M(p^* \mathcal{A}); \quad a \mapsto \pi(a \otimes 1).$$

Proposition 1.2.4. *Ist \mathcal{A} eine $C_0(X)$ -Algebra, so besitzt $\mathcal{A}^\sharp = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$ die Struktur eines (oberhalb) stetigen Feldes von C^* -Algebren. Bezeichnet $\Gamma_0(X, \mathcal{A}^\sharp)$ die Algebra der stetigen Schnitte, welche im Unendlichen verschwinden, so sind \mathcal{A} und $\Gamma_0(X, \mathcal{A}^\sharp)$ als $C_0(X)$ -Algebren isomorph.*

Ist $p : Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung, so gilt $p^(\mathcal{A}) \cong \Gamma_0(Y, p^* \mathcal{A}^\sharp)$.*

Beweis. [LeG94, 2.1.3 und 7.1.2] bzw. [DG83]. □

Bemerkung 1.2.5. Ist $\mathcal{A}^\sharp \longrightarrow X$ ein oberhalb stetiges Bündel von C^* -Algebren, so läßt sich \mathcal{A}^\sharp natürlich auch als oberhalb stetiges Feld von C^* -Algebren über X auffassen und definiert als solches eine $C_0(X)$ -Algebra.

Umgekehrt existiert zu jeder $C_0(X)$ -Algebra \mathcal{A} genau eine lokal-kompakte Topologie auf $\mathbb{A} = \coprod_{x \in X} \mathcal{A}_x$, so daß $\mathbb{A} \longrightarrow X$ ein oberhalb stetiges Bündel von C^* -Algebren mit $\Gamma_0(X, \mathbb{A}) \cong \mathcal{A}$ ist; man vergleiche z.B. [Wil06, Thm. C.25].

Für Anwendungen haben diese drei verschiedenen Standpunkte unterschiedliche Vorteile; sie werden im folgenden je nach Bedarf genutzt.

Als nützlich für spätere Rechnungen erweisen sich die beiden folgenden Kriterien:

Proposition 1.2.6 (Fells Kriterium). *Es sei $\mathbb{A} \longrightarrow X$ ein (oberhalb) stetiges Bündel von C^* -Algebren und $\Gamma \subset \Gamma_0(X, \mathbb{A})$ ein Unterraum, so daß*

(a) $\varphi \cdot f \in \Gamma$ für alle $f \in \Gamma$ und $\varphi \in C_0(X)$ gilt, und

(b) für alle $x \in X$ die Menge $\{f(x) \mid f \in \Gamma\}$ dicht in \mathbb{A}_x liegt.

Dann ist Γ eine dichte Teilmenge von $\Gamma_0(X, \mathbb{A})$.

Beweis. Vgl. [Wil06, Prop. C.24]. □

Aufgrund von 1.2.5 hätte man die obige Aussage genauso gut für oberhalb stetige Felder von C^* -Algebren formulieren können. Der Beweis nutzt nur die Struktur eines oberhalb stetigen Feldes von Banachräumen; im Fall oberhalb stetiger Felder von Hilbertmoduln über oberhalb stetigen Feldern von C^* -Algebren gilt daher die analoge Aussage. Das obige Resultat wird im folgenden kurz als Fells Kriterium bezeichnet.

Proposition 1.2.7. *Es sei $p : \mathbb{A} \longrightarrow X$ ein oberhalb stetiges Bündel von C^* -Algebren und (a_i) ein Netz in \mathbb{A} mit $\lim p(a_i) = p(a)$ für ein $a \in \mathbb{A}$. Falls für alle $\varepsilon > 0$ ein Netz (u_i) in \mathbb{A} und ein Element $u \in \mathbb{A}$ existiert, so daß die Bedingungen*

- (a) $u_i \rightarrow u$ in \mathbb{A} ,
- (b) $p(u_i) = p(a_i)$ für alle i ,
- (c) $\|a - u\| < \varepsilon$ und
- (d) $\|a_i - u_i\| < \varepsilon$ für große i

erfüllt sind, so konvergiert (a_i) gegen $a \in \mathbb{A}$.

Beweis. Vgl. [Wil06, Prop. C.20] bzw. [FD88, Prop. II.13.12]. □

Auch dieses Kriterium gilt analog für oberhalb stetige Felder von Hilbertmoduln.

Definition 1.2.8. Ein $*$ -Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ zweier $C_0(X)$ -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{B} , welcher zugleich ein $C_0(X)$ -Modul-Homomorphismus ist, heißt ein Homomorphismus von $C_0(X)$ -Algebren.

Jeder Homomorphismus von $C_0(X)$ -Algebren $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ induziert durch Übergang auf die Fasern $*$ -Homomorphismen $\varphi_x : \mathcal{A}_x \longrightarrow \mathcal{B}_x$. Es gilt:

Proposition 1.2.9. *Ist $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus von $C_0(X)$ -Algebren, so gilt:*

- (i) φ ist injektiv genau dann, wenn φ_x für alle $x \in X$ injektiv ist.
- (ii) Ist X parakompakt, so ist φ surjektiv genau dann, wenn φ_x für alle $x \in X$ surjektiv ist.

Beweis. [LeG99, Prop. 3.1] bzw. [Bla96, Prop. 2.8]. □

Lemma 1.2.10. *Ist \mathcal{A} eine $C_0(X)$ -Algebra, so gilt für $a \in \mathcal{A}$:*

$$a \geq 0 \Leftrightarrow a_x \geq 0 \text{ für alle } x \in X.$$

Beweis. Nach [Bla96, Prop. 2.8] ist die kanonische Abbildung $\mathcal{A} \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} \mathcal{A}_x$ ein injektiver $*$ -Homomorphismus; die $C_0(X)$ -Algebra \mathcal{A} läßt sich also als Unter- algebra von $\bigoplus_{x \in X} \mathcal{A}_x$ auffassen. Somit gilt für $a \in \mathcal{A}$

$$a \geq 0 \Leftrightarrow (a_x)_{x \in X} \geq 0,$$

und letzteres ist genau dann der Fall, wenn $a_x \geq 0$ für alle $x \in X$ ist. \square

Lemma 1.2.11. *Ist \mathcal{A} eine $C_0(X)$ -Algebra und $\mathcal{D} = C_0(X) \otimes D$ eine triviale $C_0(X)$ -Algebra, so definiert*

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{A} \otimes D \\ a \otimes (f \otimes d) &\mapsto a \cdot f \otimes d \end{aligned}$$

einen Isomorphismus, und für $x \in X$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{A} \otimes D \\ \tilde{q}_x \downarrow & & \downarrow q_x \otimes 1 \\ (\mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D})_x & \xrightarrow{\tau_x} & \mathcal{A}_x \otimes D, \end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen die Quotientenabbildungen auf die Faser sind und τ_x den Isomorphismus der Fasern bezeichnet.

Beweis. Die Tatsache, daß τ ein Isomorphismus ist, findet sich bei [Kas88, 1.6]. Der Homomorphismus τ_x ist gerade die Komposition des kanonischen Isomorphismus $(\mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D})_x \cong \mathcal{A}_x \otimes \mathcal{D}_x$ mit der Identifikation $\mathcal{D}_x \xrightarrow{\cong} D$, $(f \otimes d)_x \mapsto f(x) \cdot d$.

Nach Cohens Faktorisierungssatz läßt sich jedes Element von \mathcal{A} in der Form $a = g \cdot a'$ mit $g \in C_0(X)$ und $a' \in \mathcal{A}$ schreiben. Für $f \in C_0(X)$ gilt $(f - f(x)) \cdot g \in I_x$, und man erkennt

$$q_x(f \cdot a) = f \cdot a + I_x \mathcal{A} = f(x) \cdot a + (f - f(x)) \cdot g \cdot a' + I_x \mathcal{A} = q_x(a \cdot f(x)).$$

Durch direktes Nachrechnen folgt hiermit die Kommutativität des obigen Diagramms. \square

Für die Definition verschränkter Produkte von Gruppoiden muß noch die Wirkung eines Gruppoiden auf einer $C_0(X)$ -Algebra bzw. einem (oberhalb) stetigen Feld von C^* -Algebren definiert werden. Diese ist wie folgt erklärt:

Definition 1.2.12. Es sei \mathcal{A} eine $C_0(X)$ -Algebra und \mathcal{G} ein lokal-kompakter Gruppoid mit Basis X . Eine stetige \mathcal{G} -Wirkung auf \mathcal{A}^\sharp (bzw. auf \mathcal{A}) ist ein Isomorphismus $\alpha : s^*\mathcal{A} \longrightarrow r^*\mathcal{A}$ von $C_0(\mathcal{G})$ -Algebren, welcher die Bedingung $\alpha_{\gamma \cdot \eta} = \alpha_\gamma \circ \alpha_\eta$ für alle $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G}^{(2)}$ erfüllt. Dabei bezeichnet $\alpha_\gamma : \mathcal{A}_{s(\gamma)} \longrightarrow \mathcal{A}_{r(\gamma)}$ den durch Übergang auf die Fasern definierten Isomorphismus von C^* -Algebren.

Eine $C_0(X)$ -Algebra mit einer stetigen \mathcal{G} -Wirkung wird auch als \mathcal{G} -Algebra bezeichnet.

Schließlich soll als Vorbereitung für die weiteren Kapitel noch auf Hilbertmoduln über $C_0(X)$ -Algebren eingegangen werden.

Es sei im folgenden E ein Hilbertmodul über einer $C_0(X)$ -Algebra \mathcal{B} . Wie für jeden Hilbertmodul gilt $E \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B} \cong E$, und unter dieser Identifikation läßt sich E als (rechter) $C_0(X)$ -Banachmodul auffassen. Es existiert ein $*$ -Homomorphismus $C_0(X) \longrightarrow Z\mathcal{L}(E)$, und die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(E)$ besitzen die Struktur einer $C_0(X)$ -Algebra.

Ist \mathcal{A} eine weitere $C_0(X)$ -Algebra, so ist eine $C_0(X)$ -Darstellung von \mathcal{A} auf E definiert als eine $*$ -Darstellung $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, welche die Bedingung

$$\pi(a \cdot f)(\xi) = \pi(a)(\xi \cdot f) \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}, \xi \in E \text{ und } f \in C_0(X)$$

erfüllt.

Ist wieder $p : Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung, so läßt sich der Hilbert- \mathcal{B} -Modul E zu einem Hilbert- $p^*\mathcal{B}$ -Modul p^*E zurückziehen: Wie in 1.2.3 (3) wirkt \mathcal{B} von links auf $p^*\mathcal{B}$, und

$$p^*E := E \otimes_{\mathcal{B}} p^*\mathcal{B}$$

kann als internes Tensorprodukt von Hilbertmoduln definiert werden.

Für $x \in X$ ist die Faser von E in $x \in X$ definiert durch $E_x := E \otimes_{\mathcal{B}} B_x$. Wie im Fall der Algebren sieht man, daß $(p^*E)_y \cong E_{p(y)}$ gilt, und $E^\sharp = (E_x)_{x \in X}$ läßt sich als oberhalb stetiges Feld von Hilbertmoduln über dem oberhalb stetigen Feld $\mathcal{B}^\sharp = (B_x)_{x \in X}$ auffassen; man vergleiche z.B. [Laf06, Prop. 1.1.22].

Proposition 1.2.13. *Ist \mathcal{D} eine weitere $C_0(X)$ -Algebra, F ein Hilbert- \mathcal{D} -Modul und $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{L}(F)$ ein $*$ -Homomorphismus, so gilt*

$$p^*E \otimes_{p^*\mathcal{B}} p^*F \cong p^*(E \otimes_{\mathcal{B}} F).$$

Beweis. [LeG99, Prop. 4.2]. □

Das nächste Resultat findet sich im Beweis von [Kas88, 2.19]:

Lemma 1.2.14. *Ist \mathcal{D} eine $C_0(X)$ -Algebra, so gilt*

$$\mathcal{K}(E \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D})) \cong \mathcal{K}(E) \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D}.$$

*Insbesondere folgt hieraus $\mathcal{K}(p^*E) \cong p^*\mathcal{K}(E)$ und $\mathcal{K}(E_x) \cong \mathcal{K}(E)_x$.*

Definition 1.2.15. (i) Es sei \mathcal{G} ein lokal-kompakter Gruppoid mit Basis X , \mathcal{B} eine \mathcal{G} -Algebra und E ein Hilbert- \mathcal{B} -Modul. Eine stetige \mathcal{G} -Wirkung auf E ist gegeben durch ein unitäres Element $V \in \mathcal{L}(s^*E, r^*E)$, welches die Bedingung $V_\gamma \circ V_{\tilde{\gamma}} = V_{\gamma \cdot \tilde{\gamma}}$ für alle $(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \mathcal{G}^{(2)}$ erfüllt. Dabei ist zu beachten, daß r^*E unter der Wirkung $\beta : s^*\mathcal{B} \longrightarrow r^*\mathcal{B}$ als Hilbert- $s^*\mathcal{B}$ -Modul aufzufassen ist.

(ii) Ist \mathcal{A} eine weitere \mathcal{G} -Algebra, so heißt eine $C_0(X)$ -Darstellung $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ \mathcal{G} -äquivariant, falls für alle $\gamma \in \mathcal{G}$ und alle $a \in \mathcal{A}_{s(\gamma)}$

$$V_\gamma \pi_{s(\gamma)}(a) V_\gamma^* = \pi_{r(\gamma)}(\alpha_\gamma(a))$$

gilt.

1.3 Gruppoid- C^* -Algebren

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion verschränkter Produkte von Gruppoiden mit $C_0(X)$ -Algebren wiederholt. Im Fall von Gruppenbündeln lassen sich die verschränkten Produkte als oberhalb stetige Felder über der Basis auffassen, und mithilfe des Resultats 1.3.6 kann später das Deformationsbild der Assembly-Abbildung für fast zusammenhängende Lie-Gruppen definiert werden.

Die allgemeinere Konstruktion von Gruppoid- C^* -Algebren mit Werten in Fell-Bündeln sowie die Morita-Äquivalenz solcher Algebren werden im folgenden Kapitel benötigt, um später eine stetige Familie von Dirac-Elementen für die Deformation konstruieren zu können.

1.3.1 Verschränkte Produkte

Generelle Referenz für die im folgenden beschriebene Konstruktion verschränkter Produkte von Gruppoiden ist die Doktorarbeit von LeGall.

Ist \mathcal{G} ein lokal-kompakter Gruppoid mit Basis $\mathcal{G}^{(0)} = X$ und \mathcal{A} eine $C_0(X)$ -Algebra mit Gruppoid-Wirkung $\alpha : s^*\mathcal{A} \longrightarrow r^*\mathcal{A}$, so existiert ein (oberhalb) stetiges

Feld von C^* -Algebren $\mathcal{A}^\sharp = (\mathcal{A}_x)_{x \in X}$, so daß \mathcal{A} sich mit den stetigen Schnitten $\Gamma_0(X, \mathcal{A}^\sharp)$ identifizieren läßt. Das (volle und reduzierte) verschränkte Produkt ist wie folgt definiert:

Auf der Menge aller Schnitte mit kompaktem Träger $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ definiere man eine Involution durch

$$f^*(\gamma) = \alpha_\gamma(f(\gamma^{-1})^*)$$

sowie eine Multiplikation durch Faltung bezüglich des linken Haarsystems

$$f \star g(\gamma) = \int_{\eta \in \mathcal{G}^{r(\gamma)}} f(\eta) \cdot \alpha_\eta(g(\eta^{-1} \cdot \gamma)) \, d\lambda^{r(\gamma)}(\eta).$$

Die Operationen sind stetig bezüglich der induktiven Limes-Topologie. Mit der Norm

$$\|f\|_1 := \max\{|f|_1, |f^*|_1\},$$

wobei

$$|f|_1 := \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \|f(\gamma)\| \, d\lambda^x(\gamma)$$

gilt, wird $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ zu einer normierten $*$ -Algebra. Die Vervollständigung bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ ist eine involutive Banach-Algebra, welche mit $L^1(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ bezeichnet wird.

Das volle verschränkte Produkt $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}$ ist dann als die universelle einhüllende C^* -Algebra von $L^1(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ definiert, und $C^*(\mathcal{G}) := C_0(X) \rtimes \mathcal{G}$ bezeichnet die (volle) Gruppoid- C^* -Algebra. Alternativ wird das verschränkte Produkt auch mit $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ bezeichnet.

Die reduzierten verschränkten Produkte können durch konkrete Darstellung auf einem Hilbertmodul gewonnen werden:

Auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ definiere man eine Struktur als rechter $\Gamma_0(X, \mathcal{A}^\sharp)$ -Modul durch

$$(\xi \cdot \varphi)(\gamma) = \xi(\gamma) \cdot \alpha_\gamma(\varphi(s(\gamma)))$$

und ein inneres Produkt mit Werten in $\mathcal{A} = \Gamma_0(X, \mathcal{A}^\sharp)$ durch

$$\langle \xi, \eta \rangle(x) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}_x} \alpha_{\gamma^{-1}}[\xi(\gamma)^* \cdot \eta(\gamma)] \, d\lambda_x(\gamma).$$

Die Funktion unter dem Integral ist ein stetiger Schnitt mit kompaktem Träger auf \mathcal{G} mit Werten in $s^* \mathcal{A}^\sharp$, und Integration nach dem rechten Haarsystem $(\lambda_x)_{x \in X}$ liefert somit ein Element in $\Gamma_c(X, \mathcal{A}^\sharp) \subseteq \mathcal{A}$.

Man rechnet nach, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ ist. Die Kompletterierung bezüglich dieses Skalarprodukts wird mit $L^2(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda^{-1})$ bezeichnet.

Das Maß λ_x ist gerade das Bildmaß von λ^x unter der Inversenbildung des Gruppoiden. Somit gilt

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle(x) &= \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \alpha_\gamma[\xi(\gamma^{-1})^* \cdot \eta(\gamma^{-1})] d\lambda^x(\gamma) \\ &= \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \xi^*(\gamma) \cdot \alpha_\gamma(\eta(\gamma^{-1} \cdot x)) d\lambda^x(\gamma) \\ &= (\xi^* \star \eta)(x), \end{aligned}$$

wobei X via der Eins-Abbildung u als Teilmenge von \mathcal{G} aufgefaßt und die Einschränkung von $r^* \mathcal{A}^\sharp$ auf X mit \mathcal{A}^\sharp identifiziert wird; es gilt also

$$\langle \xi, \eta \rangle = (\xi^* \star \eta)|_{\mathcal{G}^{(0)}}.$$

Aufgrund der Assoziativität der Faltung und der Verträglichkeit mit der Involution erkennt man an dieser Beschreibung des Skalarprodukts sofort, daß durch $\pi(f)(g) := f \star g$ für $g \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp) \subseteq L^2(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda^{-1})$ eine injektive $*$ -Darstellung

$$\pi : \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda^{-1})),$$

definiert wird, welche stetig bezüglich der induktiven Limes-Topologie ist.

Die reduzierte C^* -Norm $\|\cdot\|_r$ ist dann durch die Operatornorm $\|\pi(\cdot)\|$ gegeben, und das reduzierte verschränkte Produkt $\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$ wird als Abschluß von $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ in $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda^{-1}))$ definiert. Das verschränkte Produkt $C_0(X) \rtimes_r \mathcal{G} =: C_r^*(\mathcal{G})$ wird als reduzierte Gruppoid- C^* -Algebra von \mathcal{G} bezeichnet.

Schränkt man die durch Faltung definierte Darstellung von $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ für $x \in X$ zu einer Darstellung π_x auf $L^2(\mathcal{G}_x, r^* \mathcal{A}^\sharp|_{\mathcal{G}_x}, \lambda_x)$ ein, so gilt

$$\|f\|_r = \sup_{x \in X} \|\pi_x(f)\|.$$

Im folgenden seien die Darstellungen der Form π_x für $x \in X$ auch als linksreguläre Darstellungen bezeichnet; diese bilden eine treue Familie von Darstellungen.

Für $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ läßt sich $L^2(\mathcal{G}_x, r^* \mathcal{A}^\sharp|_{\mathcal{G}_x}, \lambda_x)$ kanonisch mit dem Hilbert- \mathcal{A}_x -Modul $L^2(\mathcal{G}_x, \lambda_x) \otimes \mathcal{A}_x$ identifizieren: Die Abbildung

$$C_c(\mathcal{G}_x) \otimes \mathcal{A}_x \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}_x, r^* \mathcal{A}^\sharp|_{\mathcal{G}_x}), \quad f \otimes a \mapsto [\gamma \mapsto f(\gamma) \cdot \alpha_\gamma(a)]$$

hat dichtes Bild und ist isometrisch bezüglich der inneren Produkte. Sie läßt sich somit zu einem isometrischen Isomorphismus $L^2(\mathcal{G}_x, \lambda_x) \otimes \mathcal{A}_x \cong L^2(\mathcal{G}_x, r^* \mathcal{A}^\sharp|_{\mathcal{G}_x}, \lambda_x)$

fortsetzen. Für Details der Konstruktion der vollen und reduzierten verschränkten Produkte vergleiche man [Ren80] - [Ren91], [LeG94] - [LeG99] und [Par07].

Nach Renaults Resultat über die (Des)Integration von Darstellungen genügt es zur Beschreibung der vollen und reduzierten C^* -Norm, die integrierte Form von kovarianten Darstellungen des Paares $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$ zu betrachten:

Ist μ ein quasi-invariantes Maß auf der Basis $X = \mathcal{G}^{(0)}$ des Gruppoiden und $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in X}$ ein meßbares Bündel von Hilberträumen, so ist die Struktur eines \mathcal{G} -Bündels auf \mathcal{H} durch unitäre Elemente $U_\gamma \in \mathcal{L}(H_{s(\gamma)}, H_{r(\gamma)})$ für $\gamma \in \mathcal{G}$ gegeben, so daß die folgenden Bedingungen gelten:

- $U_{u(x)} = \text{id}$ für alle $x \in \mathcal{G}^{(0)}$,
- $U_{\gamma \cdot \gamma'} = U_\gamma \circ U_{\gamma'}$ ν^2 -fast überall,
- $U_{\gamma^{-1}} = U_\gamma^{-1}$ ν -fast überall, und
- für alle $\xi, \eta \in L^2(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{H}, \mu)$ ist die Funktion $\gamma \mapsto \langle U_\gamma((\xi \circ s)(\gamma)), (\eta \circ r)(\gamma) \rangle$ ν -meßbar.

Das Maß ν^2 auf $\mathcal{G}^{(2)}$ ist dabei definiert durch

$$\nu^2(f) = \int_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \int_{\gamma' \in \mathcal{G}^x} \int_{\gamma \in \mathcal{G}_x} f(\gamma, \gamma') \, d\lambda_x(\gamma) \, d\lambda^x(\gamma') \, d\mu(x)$$

für $f \in C_c(\mathcal{G}^{(2)})$.

Definition 1.3.1. Eine (kovariante) Darstellung des Paares $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$ besteht aus einem Tripel (π, \mathcal{H}, μ) , wobei μ ein quasi-invariantes Maß auf $\mathcal{G}^{(0)}$, $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ ein meßbares \mathcal{G} -Bündel von Hilberträumen und $\pi : \mathcal{A}^\sharp \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine $*$ -Darstellung des Feldes \mathcal{A}^\sharp ist, welche die Bedingung

$$U_\gamma \cdot \pi(a) \cdot U_\gamma^{-1} = \pi(\alpha_\gamma(a))$$

für ν -fast alle $\gamma \in \mathcal{G}$ und $a \in \mathcal{A}_{s(\gamma)}$ erfüllt. Hierbei bezeichnet $\alpha : s^* \mathcal{A} \longrightarrow r^* \mathcal{A}$ wieder die stetige Wirkung auf der \mathcal{G} -Algebra \mathcal{A} .

Ist (π, \mathcal{H}, μ) eine kovariante Darstellung des Paares $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$, so wird durch die Formel

$$\langle \sigma_\pi(f) \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_{\gamma \in \mathcal{G}} \langle (\pi(f(\gamma)) \circ U_\gamma)(\xi_1(s(\gamma))), \xi_2(r(\gamma)) \rangle \, d\nu_0(\gamma)$$

eine $*$ -Darstellung

$$\sigma_\pi : \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\int^\oplus H_x \, d\mu\right)$$

definiert, welche stetig bezüglich der induktiven Limes-Topologie auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ und der schwachen Operator-Topologie auf $\mathcal{L}(\int^\oplus H_x \, d\mu)$ ist.

Dabei ist $\nu = \int_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \lambda^x \, d\mu(x)$, $D = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ die Radon-Nikodým-Ableitung, und das Maß ν_0 wird durch $D^{-1/2} \nu$ definiert. Die Darstellung σ_π heißt die integrierte Form von (π, \mathcal{H}, μ) . Im folgenden wird in der Notation kein Unterschied zwischen π und σ_π gemacht.

Ist \mathcal{H} separabel und die Darstellung von \mathcal{A}^\sharp auf \mathcal{H} nicht-entartet, so ist auch die integrierte Form der Darstellung nicht-entartet.

Im Unterschied zum Fall lokal-kompakter Gruppen ist in der Formel für die integrierte Form einer kovarianten Darstellung (π, \mathcal{H}, μ) das symmetrisierte Maß ν_0 anstelle von ν zu benutzen, damit σ_π eine $*$ -Darstellung wird. Im Gruppenfall ist die Involution nämlich unter Verwendung der Modularfunktion definiert, welche für Gruppoide nicht zur Verfügung steht.

Jeder kovariante Darstellung des Paares $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$ definiert somit eine stetige Darstellung von $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$. Umgekehrt sind die Darstellungen der Faltungsalgebra $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ unter gewissen Voraussetzungen äquivalent zur integrierten Form kovarianter Darstellungen von $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$, wie Renaults Desintegrationssatz zeigt:

Theorem 1.3.2. *Jede nicht-entartete stetige $*$ -Darstellung von $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ auf einem separablen Hilbertraum H ist äquivalent zur integrierten Form einer kovarianten Darstellung von $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$.*

Beweis. [Ren87, Thm. 4.1]. □

Bemerkung 1.3.3. Ist μ ein quasi-invariantes Maß auf der Basis $\mathcal{G}^{(0)}$ des Gruppoiden, so kann in der Definition einer kovarianten Darstellung alternativ auch gefordert werden, daß das meßbare Bündel von Hilberträumen nur auf einer Borel-Menge von $\mathcal{G}^{(0)}$ definiert ist, deren \mathcal{G} -Saturierung eine μ -Konullmenge ist; man vergleiche z.B. [Ren87, Def. 3.4].

Nach diesen allgemeinen Konstruktionen für lokal-kompakte Gruppoide soll nun wieder die spezielle Situation von Gruppenbündeln betrachtet werden. Man sieht leicht:

Proposition 1.3.4. *Ist \mathcal{G} ein lokal-kompaktes Gruppenbündel mit Haarsystem λ und \mathcal{A} eine \mathcal{G} -Algebra, so sind die vollen und reduzierten verschränkten Produkte $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ -Algebren.*

Beweis. Ist $\varphi \in C_0(\mathcal{G}^{(0)})$, so wird durch

$$(\varphi \cdot a)(\gamma) := (a \cdot \varphi)(\gamma) := \varphi(p(\gamma)) \cdot a(\gamma)$$

für $a \in \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ ein doppelter Zentralisator definiert, denn es gilt

$$((a \cdot \varphi) \star b)(\gamma) = (a \star (\varphi \cdot b))(\gamma).$$

Die linksregulären Darstellungen π_x für $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ sind durch Faltung definiert. Man rechnet direkt nach, daß

$$\pi_x(\varphi \cdot a) = \varphi(x) \cdot \pi_x(a) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{G}^{(0)} \text{ und } a \in \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$$

gilt. Hieraus folgt $\|\varphi \cdot a\|_r \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|a\|_r$, und man erhält einen $*$ -Homomorphismus

$$C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow Z\mathcal{M}(\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}).$$

Dieser ist nicht-entartet, denn für jedes $a \in \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ existiert ein $\varphi \in C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ mit $\varphi = 1$ auf $p(\text{supp } a)$. Somit gilt $\Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp) \subseteq C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \cdot \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$, und erstere Menge liegt bereits dicht in $\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$.

Im Fall des vollen verschränkten Produkts sei eine stetige, nicht-entartete $*$ -Darstellung L von $\Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ auf einem separablen Hilbertraum H gegeben. Wie in [Ren87, Lemme 4.6] folgt, daß es genau eine Darstellung ρ_L von $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ auf H gibt, so daß

$$L(\varphi \cdot a) = \rho_L(\varphi) \cdot L(a) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{G}^{(0)} \text{ und } a \in \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$$

gilt. Da $*$ -Darstellungen normverkleinernd sind, folgt

$$\|L(\varphi \cdot a)\| \leq \|\rho_L(\varphi)\| \cdot \|L(a)\| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|L(a)\|$$

und somit auch $\|\varphi \cdot a\| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|a\|$ für die volle C^* -Norm. Wie oben erhält man dann einen nicht-entarteten $*$ -Homomorphismus

$$C_0(\mathcal{G}^{(0)}) \longrightarrow Z\mathcal{M}(\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}).$$

□

Als $C^0(\mathcal{G}^{(0)})$ -Algebren lassen sich $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}$ und $\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$ somit auch als oberhalb stetige Felder über der Basis $\mathcal{G}^{(0)}$ des Gruppenbündels auffassen. Die Fasern dieser Felder werden im Anschluß an 1.3.6 näher beschrieben.

Die Konstruktion der vollen und reduzierten verschränkten Produkte ist angelehnt an den Gruppenfall - mit dem Unterschied, daß in den Formeln nicht die Modularfunktion auftaucht.

Wie im ersten Abschnitt angegeben, hängt die Modularfunktion eines lokal-kompakten Gruppoiden im allgemeinen ab von der Wahl eines quasi-invarianten Maßes auf der Basis, und sie ist nur bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt.

Im Fall eines Gruppenbündels $p : \mathcal{G} \longrightarrow X$ kann die Modularfunktion aber durch die faserweisen Modularfunktionen der Isotropiegruppen definiert werden. Mit dieser (kanonischen) Wahl der Modularfunktion kann die Definition der ver-
schränkten Produkte wie folgt modifiziert werden:

Auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ sei die Multiplikation genau wie oben durch Faltung definiert; die Involution definiere man durch

$$f_*(\gamma) = \Delta(\gamma^{-1}) \cdot \alpha_\gamma(f(\gamma^{-1})^*).$$

Man rechnet sofort nach, daß auch mit diesen Strukturabbildungen die stetigen Schnitte in $p^* \mathcal{A}^\sharp$ mit kompaktem Träger eine $*$ -Algebra bilden, welche im folgenden mit $\Gamma_{c,*}(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ bezeichnet sei.

Die Abbildung

$$\chi : \Gamma_{c,*}(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp), \quad f \mapsto \chi(f) : (\gamma \mapsto \Delta^{1/2}(\gamma) \cdot f(\gamma))$$

ist dann ein Isomorphismus von $*$ -Algebren (mit Inversem $\chi^{-1}(g) := \Delta^{-1/2} \cdot g$), denn es gilt

$$\begin{aligned} \chi(f)^*(\gamma) &= \alpha_\gamma((\chi(f)(\gamma^{-1}))^*) = \Delta^{1/2}(\gamma^{-1}) \cdot \alpha_\gamma(f(\gamma^{-1})^*) \\ &= \Delta^{1/2}(\gamma) \cdot (\Delta(\gamma^{-1}) \cdot \alpha_\gamma(f(\gamma^{-1})^*)) = \chi(f_*)(\gamma) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \chi(f) \star \chi(g)(\gamma) &= \int_{\eta \in \mathcal{G}^{p(\gamma)}} \chi(f)(\eta) \cdot \alpha_\eta(\chi(g)(\eta^{-1} \cdot \gamma)) \, d\lambda^{p(\gamma)}(\eta) \\ &= \int_{\eta \in \mathcal{G}^{p(\gamma)}} \Delta^{1/2}(\eta) \cdot f(\eta) \cdot \Delta^{1/2}(\eta^{-1} \cdot \gamma) \cdot \alpha_\eta(g(\eta^{-1} \cdot \gamma)) \, d\lambda^{p(\gamma)}(\eta) \\ &= \Delta^{1/2}(\gamma) \cdot \int_{\eta \in \mathcal{G}^{p(\gamma)}} f(\eta) \cdot \alpha_\eta(g(\eta^{-1} \cdot \gamma)) \, d\lambda^{p(\gamma)}(\eta) \\ &= \chi(f \star g)(\gamma), \end{aligned}$$

wobei in den Rechnungen ausgenutzt wurde, daß die Modularfunktion Δ ein Homomorphismus ist.

Definiert man den Hilbert- $\Gamma_0(X, \mathcal{A}^\sharp)$ -Modul $L^2(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda)$ als Komplettierung von $\Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle \langle \xi, \eta \rangle \rangle(x) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \alpha_{\gamma^{-1}}(\xi(\gamma)^* \cdot \eta(\gamma)) \, d\lambda^x(\gamma),$$

wobei die $\Gamma_0(X, \mathcal{A}^\sharp)$ -Modulstruktur wieder durch $(\xi \cdot \varphi)(\gamma) = \xi(x) \cdot \alpha_\gamma(\varphi(p(\gamma)))$ gegeben ist, so erhält man durch Faltung eine $*$ -Darstellung

$$\rho : \Gamma_{c,*}(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda)).$$

Diese ist auf den Fasern genau die aus dem Gruppenfall bekannte Konstruktion der reduzierten verschränkten Produkte, und wieder gilt $\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = (\xi_* \star \eta)|_X$.

Die letzte Identität ergibt sich dabei wie folgt: Da bei einem Gruppenbündel $\mathcal{G}^x = \mathcal{G}_x$ gilt, kann im Integral die Substitution $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$ durchgeführt werden, welches unter Beibehaltung des linken Haarmaßes durch ein Auftreten der Modularfunktion zu kompensieren ist. Letztere taucht jedoch bei der Definition von ξ_* auf. Genauer gilt:

$$\begin{aligned}
\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle(x) &= \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \alpha_{\gamma^{-1}}[\xi(\gamma)^* \cdot \eta(\gamma)] d\lambda^x(\gamma) \\
&\stackrel{\mathcal{G}^x = \mathcal{G}_x, \lambda^x = (\lambda_x)^{-1}}{=} \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \alpha_{\gamma}[\xi(\gamma^{-1})^* \cdot \eta(\gamma^{-1})] d\lambda_x(\gamma) \\
&\stackrel{d\lambda_x / d\lambda^x = \Delta_x}{=} \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \Delta_x(\gamma^{-1}) \cdot \alpha_{\gamma}[\xi(\gamma^{-1})^* \cdot \eta(\gamma^{-1})] d\lambda^x(\gamma) \\
&= \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \xi_*(\gamma) \cdot \alpha_{\gamma}(\eta(\gamma^{-1} \cdot x)) d\lambda^x(\gamma) \\
&= (\xi_* \star \eta)(x).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei wieder das Element $x \in X = \mathcal{G}^{(0)}$ mit $u(x) \in \mathcal{G}$ identifiziert.

Die Abbildung χ setzt sich zu einem unitären Isomorphismus

$$U : L^2(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda) \longrightarrow L^2(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda^{-1})$$

fort, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\langle U(\xi), U(\eta) \rangle &= ((\Delta^{1/2} \xi)^* \star (\Delta^{1/2} \eta))|_X = ((\Delta^{1/2} \xi_*) \star (\Delta^{1/2} \eta))|_X \\
&= (\Delta^{1/2} (\xi_* \star \eta))|_X = (\xi_* \star \eta)|_X = \langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt ausgenutzt wird, daß die Modularfunktion Δ trivial auf $X = \mathcal{G}^{(0)}$ ist.

Andererseits folgt aus der Verträglichkeit der Faltung mit der Abbildung χ

$$\pi(\chi(f))(U(\xi)) = (\Delta^{1/2} f) \star (\Delta^{1/2} \xi) = \Delta^{1/2}(f \star \xi) = U(\rho(f)(\xi))$$

und somit

$$\|\chi(f)\|_r = \|\pi(\chi(f))\| = \|\rho(f)\| =: \|f\|_{r, \text{Gruppe}},$$

und χ läßt sich zu einem Isomorphismus von C^* -Algebren auf die Vervollständigungen fortsetzen. Dieser ist verträglich mit der jeweiligen $C_0(X)$ -Modulstruktur.

Im Fall eines Gruppenbündels kann man also die reduzierten verschränkten Produkte mit denselben algebraischen Operationen wie im Gruppenfall definieren; die so erhaltene Kompletzierung sei im folgenden mit $C_{r,*}(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ bezeichnet.

Für die vollen verschränkten Produkte nutzt man aus, daß Renaults Desintegrationssatz auch für die $*$ -Algebra $\Gamma_{c,*}(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ gilt. Ist (π, \mathcal{H}, μ) eine kovariante Darstellung von $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$, so wird durch

$$\langle \tilde{\sigma}_\pi(f) \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_{\gamma \in \mathcal{G}} \langle (\pi(f(\gamma)) \circ U_\gamma)(\xi_1(s(\gamma))), \xi_2(r(\gamma)) \rangle d\nu(\gamma)$$

eine $*$ -Darstellung

$$\tilde{\sigma}_\pi : \Gamma_{c,*}(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\int^\oplus H_x d\mu\right)$$

definiert. Aufgrund der Definition der Maße ν und ν_0 gilt

$$\langle \tilde{\sigma}_\pi(f) \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \sigma_\pi(\chi(f)) \xi_1, \xi_2 \rangle$$

und somit

$$\sup_{(\pi, \mathcal{H}, \mu)} \|\tilde{\sigma}_\pi(f)\| = \sup_{(\pi, \mathcal{H}, \mu)} \|\sigma_\pi(\chi(f))\|$$

für alle $f \in \Gamma_{c,*}(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$. Das Supremum wird dabei jeweils über alle kovarianten Darstellungen von $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$ gebildet. Der erste Ausdruck beschreibt die volle C^* -Norm von $C_*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$, der zweite die volle C^* -Norm von $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$, und die Abbildung $\chi : \Gamma_{c,*}(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ läßt sich auch zu einem Isomorphismus der vollen verschränkten Produkte fortsetzen.

Obige Überlegungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Proposition 1.3.5. *Ist \mathcal{G} ein lokal-kompaktes Gruppen-Bündel und \mathcal{A} eine \mathcal{G} -Algebra, so sind $\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$ und $C_{r,*}(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ als $C_0(\mathcal{G}^{(0)})$ -Algebren isomorph. Die analoge Aussage gilt für die vollen verschränkten Produkte.*

Schließlich soll noch ein Resultat für verschränkte Produkte von Gruppoiden gezeigt werden, welches die Verallgemeinerung des Falls von Gruppoid- C^* -Algebren ist. Ein Beweis dieses Spezialfalls wurde in [Ram98, 2.4.2] gegeben; die Aussage über die vollen Gruppoid- C^* -Algebren findet sich auch in [HS87]. Zunächst seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

Eine Teilmenge $C \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ heißt invariant, falls für alle $\gamma \in \mathcal{G}$ aus $s(\gamma) \in C$ auch $r(\gamma) \in C$ folgt; mit $C \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ ist auch $\mathcal{G}^{(0)} \setminus C$ eine invariante Teilmenge von $\mathcal{G}^{(0)}$.

Ist C eine lokal-kompakte invariante Teilmenge von $\mathcal{G}^{(0)}$, so ist die Einschränkung $\mathcal{G}_C (= \mathcal{G}^C = \mathcal{G}_C^C)$ ein lokal-kompakter Gruppoid mit Basis C , und durch Einschränken erhält man aus einem stetigen Haarsystem $\lambda = (\lambda^x)_{x \in \mathcal{G}^0}$ für \mathcal{G} ein stetiges Haarsystem $\lambda_C = (\lambda^x)_{x \in C}$ für \mathcal{G}_C .

Bezeichnet π_x wieder die linksreguläre Darstellung für ein Element $x \in C$ und ist $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$, so folgt aus der Formel für die Faltung, daß $\pi_x(f)$ nur von der Einschränkung von f auf \mathcal{G}_C abhängt. Ist nämlich $\gamma \in \mathcal{G}_x \subseteq \mathcal{G}_C$, so folgt aus der Invarianz von C auch $r(\gamma) \in \mathcal{G}_C$. Für $g \in \Gamma_c(\mathcal{G}_x, r^* \mathcal{A}^\sharp|_{\mathcal{G}_x}) \subseteq L^2(\mathcal{G}_x, r^* \mathcal{A}^\sharp|_{\mathcal{G}_x}, \lambda_x)$ hängt das durch die Faltung definierte Element $\pi_x(f)(g) = f \star g$ nur von $f|_{\mathcal{G}_C}$ ab.

Ist $U \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ eine offene invariante Teilmenge, so ist $\mathcal{A}_U := C_0(U) \cdot \mathcal{A}$ eine $C_0(U)$ -Algebra, welche in natürlicher Weise mit einer \mathcal{G}_U -Wirkung versehen ist.

Ist $F \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ eine abgeschlossene invariante Teilmenge, so ist $\mathcal{A}_F := \mathcal{A}/I_{\mathcal{F}}\mathcal{A}$ eine $C_0(F)$ -Algebra, auf welcher eine stetige Wirkung von \mathcal{G}_F definiert ist. Am besten sieht man dieses unter dem Standpunkt (oberhalb) stetiger Felder.

Es gibt eine natürliche Einbettung $\iota : \Gamma_c(\mathcal{G}_U, r_U^* \mathcal{A}_U^\sharp) \hookrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$, indem man die Schnitte außerhalb von U durch Null fortsetzt; durch Einschränkung der Schnitte auf die abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{G}_F \subseteq \mathcal{G}$ erhält man andererseits eine Quotientenabbildung $q : \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp) \twoheadrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$.

Theorem 1.3.6. *Für einen lokal-kompakten Gruppoiden \mathcal{G} mit Haarsystem λ sei $F \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ eine abgeschlossene Teilmenge, $U := \mathcal{G}^{(0)} \setminus F$ invariant und \mathcal{A} eine \mathcal{G} -Algebra. Dann gilt:*

(i) *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_U \rtimes \mathcal{G}_U \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}_F \rtimes \mathcal{G}_F \longrightarrow 0$$

ist exakt.

(ii) *Falls \mathcal{G}_F mittelbar ist, so ist auch die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}_F \rtimes_r \mathcal{G}_F \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Da \mathcal{G}_U eine offene Teilmenge von \mathcal{G} ist, ist die Abbildung

$$\iota : \Gamma_c(\mathcal{G}_U, r_U^* \mathcal{A}_U^\sharp) \hookrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp), \quad \iota(f)(\gamma) = \begin{cases} f(\gamma) & \text{für } \gamma \in \mathcal{G}_U \\ 0 & \text{für } \gamma \in \mathcal{G}_F \end{cases}$$

wohldefiniert. Versieht man den lokal-kompakten Gruppoiden \mathcal{G}_U mit dem stetigen Haarsystem λ_U , so ist ι ein injektiver Homomorphismus von $*$ -Algebren. Um

diesen auf die vollen verschränkten Produkte fortsetzen zu können, ist zu zeigen, daß $\|\iota(f)\| \leq \|f\|$ für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}_U, r_U^* \mathcal{A}_U^\sharp)$ gilt.

Die volle C^* -Norm auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ ist gegeben als Supremum der Operatornorm bezüglich nicht-entarteter stetiger Darstellungen auf separablen Hilberträumen. Nach Renaults Desintegrationsatz 1.3.2 ist jede solche Darstellung aber äquivalent zur integrierten Form einer kovarianten Darstellung (L, \mathcal{H}, μ) , wobei \mathcal{H} ein Bündel von Hilberträumen über $\mathcal{G}^{(0)}$ und μ ein quasi-invariantes Maß auf $\mathcal{G}^{(0)}$ ist.

Durch Einschränken definiert μ ein quasi-invariantes Maß μ_U auf der Basis U von \mathcal{G}_U ; genauso läßt sich \mathcal{H} zu einem Bündel von Hilberträumen \mathcal{H}_U über U einschränken. Hierdurch erhält man eine kovariante Darstellung $(\mu_U, \mathcal{H}_U, L_U)$ von $(\mathcal{G}_U, \mathcal{A}_U^\sharp)$.

Für einen meßbaren Schnitt $\xi : \mathcal{G}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{H}$ bezeichne $\xi_U : U \longrightarrow \mathcal{H}_U$ die Einschränkung auf U . Für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}_U, r_U^* \mathcal{A}_U^\sharp)$ erfüllen die integrierten Darstellungen L und L_U die Gleichung

$$\langle L(\iota(f))\xi, \eta \rangle = \langle L_U(f)\xi_U, \eta_U \rangle.$$

Somit gilt $\|L(\iota(f))\| \leq \|L_U(f)\| \leq \|f\|$, und im Übergang zum Supremum folgt für die vollen C^* -Normen $\|\iota(f)\| \leq \|f\|$. Die Abbildung ι läßt sich daher zu einem $*$ -Homomorphismus $\iota : \mathcal{A}_U \rtimes \mathcal{G}_U \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}$ fortsetzen, dessen Bild ein Ideal in $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}$ ist.

Für den Nachweis der Injektivität sei bemerkt, daß jede kovariante Darstellung $(\mu_U, \mathcal{H}_U, L_U)$ von $(\mathcal{G}_U, \mathcal{A}_U^\sharp)$ eine kovariante Darstellung (μ, \mathcal{H}, L) von $(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ definiert, indem man das quasi-invariante Maß und das meßbare Bündel von Hilberträumen außerhalb von U durch Null fortsetzt; man vergleiche auch 1.3.3. Die integrierten Formen dieser Darstellungen erfüllen dann

$$\|L_U(f)\| = \|L(\iota(f))\| \leq \|\iota(f)\|$$

für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}_U, r_U^* \mathcal{A}_U^\sharp)$. Somit gilt auch $\|f\| \leq \|\iota(f)\|$, und hieraus folgt die Injektivität von ι .

Da \mathcal{G}_F eine abgeschlossene Teilmenge des normalen Raums \mathcal{G} ist, ist die durch Einschränkung definierte Abbildung $q : \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$ ein wohldefinierter und surjektiver $*$ -Homomorphismus; die Faltung auf $\Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$ ist dabei bezüglich des durch Einschränkung gegebenen Haarsystems λ_F definiert.

Um q zu einem Homomorphismus der vollen verschränkten Produkte fortsetzen zu können, ist zu zeigen, daß $\|q(f)\| \leq \|f\|$ für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ gilt.

Jede stetige $*$ -Darstellung von $\Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$ ist nach Renaults Desintegrationsatz äquivalent zur integrierten Form einer kovarianten Darstellung $(L_F, \mathcal{H}_F, \mu_F)$

von $(\mathcal{G}_F, \mathcal{A}_F^\sharp)$. Das Maß μ_F läßt sich zu einem quasi-invarianten Maß auf $\mathcal{G}^{(0)}$ fortsetzen. Ebenso läßt sich \mathcal{H}_F zu einem meßbaren Bündel von Hilberträumen über $\mathcal{G}^{(0)}$ fortsetzen, indem man $H_x = 0$ für $x \in U$ setzt, und man erhält eine kovariante Darstellung (L, \mathcal{H}, μ) von $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$. Jeder meßbare Schnitt ξ_F mit Werten in \mathcal{H}_F kann zu einem meßbaren Schnitt $\xi : \mathcal{G}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{H}$ fortgesetzt werden. Nach Definition der Darstellung L gilt dann

$$\langle L_F(q(f))\xi_F, \eta_F \rangle = \langle L(f)\xi, \eta \rangle$$

für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{A}^\sharp)$ und somit $\|L_F(q(f))\| \leq \|L(f)\| \leq \|f\|$. Hieraus folgt dann $\|q(f)\| \leq \|f\|$, und die Abbildung q läßt sich zu einem $*$ -Homomorphismus $q : \mathcal{A} \rtimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}_F \rtimes \mathcal{G}_F$ fortsetzen. Das Bild von q ist abgeschlossen und enthält die dichte Teilmenge $\Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^*\mathcal{A}_F^\sharp)$. Also ist q ein Epimorphismus.

Nach Konstruktion gilt $q \circ \iota = 0$. Für den Nachweis, daß die Sequenz (i) exakt ist, ist daher nur noch die Inklusion $\ker(q) \subseteq \iota(\mathcal{A}_U \rtimes \mathcal{G}_U)$ zu zeigen.

Hierfür genügt es zu zeigen, daß die Inklusion $\ker(q) \subseteq \ker(L)$ für jede nicht-entartete Darstellung L von $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}$ auf einem separablen Hilbertraum gilt, welche die Bedingung $L(\iota(\mathcal{A}_U \rtimes \mathcal{G}_U)) = 0$ erfüllt.

Ist L eine solche Darstellung, so kann nach Renaults Desintegrationssatz wieder angenommen werden, daß L die integrierte Form einer kovarianten Darstellung (L, \mathcal{H}, μ) von $(\mathcal{G}, \mathcal{A}^\sharp)$ ist. Für $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^*\mathcal{A}_F^\sharp)$ und $\varphi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{A}^\sharp)$ mit $q(\varphi) = f$ setze man

$$L_F(f) := L(\varphi).$$

Diese Zuordnung ist wohldefiniert: Sind nämlich $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{A}^\sharp)$ mit $q(\varphi_1) = f = q(\varphi_2)$, so gilt $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ auf der abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{G}_F \subseteq \mathcal{G}$. Die Funktion $\varphi_1 - \varphi_2$ läßt sich daher in der induktiven Limes-Topologie von $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{A}^\sharp)$ durch stetige Schnitte approximieren, deren Träger in \mathcal{G}_U liegen. Auf $\iota(\Gamma_c(\mathcal{G}_U, r_U^*\mathcal{A}_U^\sharp))$ gilt aber $L = 0$, und es folgt $L(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Die Zuordnung L_F ist somit wohldefiniert, und es gilt $L = L_F \circ q$ auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{A}^\sharp)$.

Da $\iota(\mathcal{A}_U \rtimes \mathcal{G}_U) \subseteq \ker(q)$ und $L(\iota(\mathcal{A}_U \rtimes \mathcal{G}_U)) = 0$ gilt, liegt der Träger des quasi-invarianten Maßes μ in der abgeschlossenen Menge $F \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$. Die kovariante Darstellung (L, \mathcal{H}, μ) läßt sich somit zu einer kovarianten Darstellung von $(\mathcal{G}_F, \mathcal{A}_F^\sharp)$ einschränken, und L_F ist gerade die integrierte Form dieser Einschränkung. Somit definiert L_F eine stetige Darstellung von $\Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^*\mathcal{A}_F^\sharp)$.

Insbesondere gilt dann $\|L_F(f)\| \leq \|f\|$ für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^*\mathcal{A}_F^\sharp)$, und L_F läßt sich zu einer Darstellung von $\mathcal{A}_F \rtimes \mathcal{G}_F$ fortsetzen. Auch auf $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}$ gilt die Identität $L = L_F \circ q$ und somit $\ker(q) \subseteq \ker(L)$. Dies schließt den Nachweis ab, daß durch (i) eine exakte Sequenz gegeben ist.

Für den Nachweis der zweiten Aussage sei angemerkt, daß die reduzierte C^* -Norm mithilfe der links-regulären Darstellungen π_x für $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ berechnet werden

kann. Die Teilmengen U bzw. F von $\mathcal{G}^{(0)}$ sind invariant. Ist $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ und $x \in U$, so hängt $\pi_x(f)$ nur von der Einschränkung von f auf \mathcal{G}_U ab; analog hängt $\pi_x(f)$ für $x \in F$ nur von der Einschränkung von f auf \mathcal{G}_F ab.

Ist $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}_U, r_U^* \mathcal{A}_U^\sharp)$, so gilt $\pi_x(\iota(f)) = 0$ für alle $x \in F = \mathcal{G}^{(0)} \setminus U$ und somit

$$\|\iota(f)\|_r = \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|\pi_x(\iota(f))\| = \sup_{x \in U} \|\pi_x(f)\| = \|f\|_r.$$

Die Abbildung $\iota : \Gamma_c(\mathcal{G}_U, r_U^* \mathcal{A}_U^\sharp) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ läßt sich daher zu einem injektiven $*$ -Homomorphismus $\iota_r : \mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$ fortsetzen.

Ist $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$, so gilt

$$\|q(f)\|_r = \sup_{x \in F} \|\pi_x(q(f))\| = \sup_{x \in F} \|\pi_x(f)\| \leq \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|\pi_x(f)\| = \|f\|_r;$$

daher läßt sich $q : \Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$ zu einem $*$ -Homomorphismus $q_r : \mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}_F \rtimes_r \mathcal{G}_F$ mit dichtem Bild, d.h. zu einem Epimorphismus, fortsetzen. Für diese Fortsetzungen gilt $q_r \circ \iota_r = 0$.

Es bleibt zu zeigen, daß die Inklusion $\ker(q_r) \subseteq \iota(\mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U)$ erfüllt ist. Dazu sei wieder eine nicht-entartete Darstellung L von $\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$ auf einem separablen Hilbertraum mit $L(\iota_r(\mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U)) = 0$ gegeben; es ist zu zeigen, daß $\ker(q_r) \subseteq \ker(L)$ gilt. Insbesondere definiert L eine Darstellung auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$, und wie oben folgt unter Verwendung von Renaults Desintegrationsatz, daß durch L_F eine stetige Darstellung von $\Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$ gegeben ist, welche $L = L_F \circ q$ auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ und $\|L_F(f)\| \leq \|f\|$ für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$ erfüllt.

Da der Gruppoid \mathcal{G}_F in (ii) als mittelbar vorausgesetzt ist, folgt aus [AR00, Prop. 6.1.10], daß die volle C^* -Norm $\|\cdot\|$ auf $\Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$ mit der reduzierten Norm $\|\cdot\|_r$ übereinstimmt. Somit gilt $\|L_F(f)\| \leq \|f\|_r$ für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}_F, r_F^* \mathcal{A}_F^\sharp)$, und L_F läßt sich zu einer Darstellung von $\mathcal{A}_F \rtimes_r \mathcal{G}_F$ fortsetzen. Für diese gilt $L = L_F \circ q_r$ auf $\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$.

Auch in diesem Fall ist daher $\ker(q_r) \subseteq \ker(L)$. Dies zeigt, daß auch die Sequenz (ii) exakt ist. \square

Bemerkung 1.3.7. Der obige Beweis zeigt, daß die Mittelbarkeit von \mathcal{G}_F nur benutzt wird, um die Exaktheit der Sequenz (ii) in der Mitte zu zeigen; auch ohne diese Voraussetzung ist durch $\iota_r : \mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$ ein injektiver und durch $q_r : \mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}_F \rtimes_r \mathcal{G}_F$ ein surjektiver $*$ -Homomorphismus gegeben.

Der Begriff der Mittelbarkeit von Gruppoiden ist ausführlich in [AR00] erklärt. Es sei an dieser Stelle nur folgendes angemerkt: Ist \mathcal{G} ein Gruppenbündel, so ist jede Teilmenge der Basis $\mathcal{G}^{(0)}$ invariant. Besteht die invariante Teilmenge $F \subseteq \mathcal{G}^{(0)}$ aus genau einem Punkt x , so ist \mathcal{G}_F genau dann mittelbar, wenn die Isotropiegruppe \mathcal{G}^x eine mittelbare lokal-kompakte Gruppe ist.

Das obige Resultat wird in Kapitel 3 dazu genutzt werden, das Deformationsbild der Assembly-Abbildung für fast zusammenhängende Lie-Gruppen G zu definieren.

Desweiteren kann man mit 1.3.6 die Fasern verschränkter Produkte von Gruppenbündeln näher beschreiben. Ist \mathcal{G} ein lokal-kompaktes Gruppenbündel über X mit stetigem Haarsystem $\lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ und \mathcal{A} eine stetige \mathcal{G} -Algebra, so sind die vollen und reduzierten verschränkten Produkte $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}$ und $\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$ nach 1.3.4 $C_0(X)$ -Algebren. Für die Fasern dieser Algebren gilt:

Satz 1.3.8. *Für $t \in X$ ist die Faser $(\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G})_t$ des vollen verschränkten Produkts isomorph zum verschränkten Produkt der Fasern $\mathcal{A}_t \rtimes \mathcal{G}_t$.*

Im Fall des reduzierten verschränkten Produkts ist $\mathcal{A}_t \rtimes_r \mathcal{G}_t$ ein Quotient der Faser $(\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G})_t$. Ist die Gruppe \mathcal{G}_t mittelbar, so ist die Quotientenabbildung ein Isomorphismus.

Beweis. Für $t \in X$ ist die offene Teilmenge $U := X \setminus \{t\}$ von X invariant. Die Menge

$$I_t := \{\varphi \in C_0(X) \mid \varphi(x) = 0\}$$

ist ein abgeschlossenes Ideal in $C_0(X)$, welches sich mit $C_0(U)$ identifizieren läßt. Mit ι und q seien wieder die Abbildungen aus 1.3.6 bezeichnet.

Da $C_0(U) \cdot \Gamma_c(\mathcal{G}_U, p^* \mathcal{A}_U^\sharp) = \Gamma_c(\mathcal{G}_U, p^* \mathcal{A}_U^\sharp)$ gilt, folgt

$$\iota(\Gamma_c(\mathcal{G}_U, p^* \mathcal{A}_U^\sharp)) \subseteq I_t \cdot \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp).$$

Umgekehrt läßt sich jeder Schnitt der Form $\varphi \cdot a$ für $\varphi \in C_0(U)$ und $a \in \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ als Element von $\Gamma_c(\mathcal{G}_U, p^* \mathcal{A}_U^\sharp)$ auffassen, und somit gilt

$$\iota(\Gamma_c(\mathcal{G}_U, p^* \mathcal{A}_U^\sharp)) = I_t \cdot \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp).$$

Wie in 1.3.6 gezeigt wurde, ist die Abbildung ι stetig bezüglich der vollen und reduzierten C^* -Normen, und sie läßt sich zu einem Monomorphismus der vollen bzw. reduzierten verschränkten Produkte fortsetzen. Auch für diese Fortsetzungen erhält man

$$\iota_{(r)}(\mathcal{A}_U \rtimes_{(r)} \mathcal{G}_U) = I_t \cdot (\mathcal{A} \rtimes_{(r)} \mathcal{G}).$$

Aus der Exaktheit der Sequenz (i) in 1.3.6 folgt somit für die Faser des vollen verschränkten Produkts

$$\mathcal{A}_t \rtimes \mathcal{G}_t \cong (\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}) / (\mathcal{A}_U \rtimes \mathcal{G}_U) \cong (\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}) / (I_t \cdot (\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G})) = (\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G})_t.$$

Im Fall der reduzierten verschränkten Produkte ist die Sequenz (ii) nicht notwendig exakt in der Mitte. Allerdings gilt $\mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U \subseteq \ker(q_r)$. Somit faktorisiert die Quotientenabbildung $q_r : \mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{A}_t \rtimes_r \mathcal{G}_t$ über einen Epimorphismus

$$\bar{q}_r : (\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}) / (\mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U) \longrightarrow \mathcal{A}_t \rtimes_r \mathcal{G}_t.$$

Unter der Identifikation von $\mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U$ mit $I_t \cdot (\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G})$ erhält man somit einen Epimorphismus der Faser

$$(\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G})_t = (\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}) / (I_t \cdot (\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G})) \longrightarrow \mathcal{A}_t \rtimes_r \mathcal{G}_t.$$

Ist \mathcal{G}_t mittelbar, so ist die Sequenz (ii) exakt. Dann gilt $\mathcal{A}_U \rtimes_r \mathcal{G}_U = \ker(q_r)$, und der oben angegebene Epimorphismus ist ein Isomorphismus von $(\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G})_t$ und $\mathcal{A}_t \rtimes_r \mathcal{G}_t$. \square

Beispiel 1.3.9. Es sei G eine lokal-kompakte Gruppe, X ein lokal-kompakter Raum und $\mathcal{G} := G \times X$ das triviale lokal-kompakte Gruppenbündel mit der kanonischen Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow X$.

Ist A eine G -Algebra, so wird die triviale $C_0(X)$ -Algebra $\mathcal{A} := C_0(X) \otimes A$ zu einer stetigen \mathcal{G} -Algebra unter faserweiser Wirkung der Gruppe G . In dieser Situation last sich die $*$ -Algebra $\Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$ mit $C_c(G \times X, A)$ identifizieren.

Für ein (fixiertes) linkes Haarmaß λ^0 auf G ist die konstante Familie von Maßen $\tilde{\lambda} = (\lambda^0)_{x \in X}$ ein stetiges Haarsystem auf \mathcal{G} . Ist $\lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ ein weiteres stetiges Haarsystem, so gibt es nach 1.1.10 (2) eine stetige Funktion $\mu : X \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$ mit $\lambda^x = \mu(x) \cdot \lambda^0$. Wie im Fall der Modularfunktion rechnet man nach, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \chi : \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp, \lambda) &\longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp, \tilde{\lambda}) \\ f &\longmapsto [\gamma \mapsto \mu^{1/2}(p(\gamma)) \cdot f(\gamma)] \end{aligned}$$

sich zu einem $C_0(X)$ -Isomorphismus der vollen und reduzierten verschränkten Produkte $\mathcal{A} \rtimes_{(r)}^\lambda \mathcal{G}$ und $\mathcal{A} \rtimes_{(r)}^{\tilde{\lambda}} \mathcal{G}$ fortsetzen last.

Faßt man die Gruppe G als lokal-kompakten Gruppoiden mit Haarsystem λ^0 auf, so last sich die kanonische Abbildung

$$C_c(X) \odot C_c(G, A) \longrightarrow C_c(G \times X, A) \cong \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$$

zu einem $C_0(X)$ -Isomorphismus

$$C_0(X) \otimes (A \rtimes_{(r)} G) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A} \rtimes_{(r)}^{\tilde{\lambda}} \mathcal{G}$$

fortsetzen. Das verschränkte Produkt eines trivialen Gruppenbündels mit einer trivialen $C_0(X)$ -Algebra ist somit insbesondere ein stetiges Feld von C^* -Algebren, dessen Faser $(\mathcal{A} \rtimes_{(r)} \mathcal{G})_t$ sich mit $\mathcal{A}_t \rtimes_{(r)} \mathcal{G}_t \cong A \rtimes_{(r)} G$ identifizieren last.

1.3.2 Gruppoid-Algebren mit Werten in Fell-Bündeln

Um die Konstruktion des Dirac-Elements auf den Fall eines Gruppenbündels zu verallgemeinern, wird ein Resultat über Familien von Pseudodifferentialoperatoren benötigt. Hierfür wird im folgenden Kapitel die Morita-Äquivalenz gewisser Gruppoid- C^* -Algebren mit Werten in Fell-Bündeln genutzt.

Diese Algebren wurden unter anderem von A. Kumjian und S. Yamagami betrachtet. Die Definitionen und die Aussage über die Äquivalenz der Gruppoid- C^* -Algebren wurden dem Artikel [Muh01] entnommen.

Im folgenden sei ein lokal-kompakter Gruppoid \mathcal{G} mit stetigem Haarsystem λ fixiert.

Definition 1.3.10. Ein Fell-Bündel über \mathcal{G} ist ein Banach-Bündel $\mathfrak{B} \xrightarrow{p} \mathcal{G}$, welches das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für alle $x \in \mathcal{G}^{(0)}$ ist die Faser \mathfrak{B}_x eine C^* -Algebra, und für alle $\gamma \in \mathcal{G}$ ist \mathfrak{B}_γ eine $\mathfrak{B}_{r(\gamma)}, \mathfrak{B}_{s(\gamma)}$ -Morita-Äquivalenz.
- (2) Für alle $(\gamma, \eta) \in \mathcal{G}^{(2)}$ existiert ein isometrischer Isomorphismus von Hilbert-Bimoduln $U_\eta^\gamma : \mathfrak{B}_\gamma \otimes_{\mathfrak{B}_{s(\gamma)}} \mathfrak{B}_\eta \longrightarrow \mathfrak{B}_{\gamma \cdot \eta}$, so daß durch

$$b_1 \bullet b_2 := U_\eta^\gamma(b_1 \otimes b_2)$$

ein assoziatives und bilineares Produkt auf

$$\mathfrak{B}^{(2)} := \{(b_1, b_2) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \mid (p(b_1), p(b_2)) \in \mathcal{G}^{(2)}\}$$

definiert wird.

- (3) Auf \mathfrak{B} existiert eine involutive Abbildung $b \mapsto b^\flat$ (d.h. es gilt $(b^\flat)^\flat = b$) mit
 - (a) $p(b^\flat) = p(b)^{-1}$,
 - (b) $b \mapsto b^\flat$ ist antilinear,
 - (c) $(b_1 \bullet b_2)^\flat = b_2^\flat \bullet b_1^\flat$ und
 - (d) für $b_1, b_2 \in \mathfrak{B}_\gamma$ gilt $b_1^\flat \bullet b_2 = \langle b_1, b_2 \rangle_{\mathfrak{B}_{s(\gamma)}}$ und $b_1 \bullet b_2^\flat = \mathfrak{B}_{r(\gamma)} \langle b_1, b_2 \rangle$.
- (4) Multiplikation und Involution sind stetig.

Das Bündel $\mathfrak{B}^{(2)}$ besitzt in natürlicher Weise die Struktur eines Banach-Bündels über $\mathcal{G}^{(2)}$. Für $\gamma \in \mathcal{G}$ ist das Bild von \mathfrak{B}_γ unter der Involution isomorph zu dem inversen Imprimitivitätsbimodul, und es gilt $\|b^\flat \bullet b\|_{\mathfrak{B}_{s(\gamma)}} = \|b\|_{\mathfrak{B}_\gamma}^2$ sowie $b^\flat \bullet b \geq 0$ in $\mathfrak{B}_{s(\gamma)}$. Aus Bedingung (2) der Definition folgt, daß ein Fell-Bündel saturiert im Sinne von [Kum98] ist.

Beispiele 1.3.11. (1) Ist $\mathcal{A} = \Gamma_0(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{A}^\sharp)$ eine \mathcal{G} -Algebra, so ist das zurückgezogene Feld $\mathfrak{B} = r^* \mathcal{A}^\sharp \xrightarrow{p} \mathcal{G}$ ein Fell-Bündel über \mathcal{G} . Ist die \mathcal{G} -Wirkung durch $\alpha : s^* \mathcal{A} \longrightarrow r^* \mathcal{A}$ gegeben, so sind Multiplikation und Involution definiert durch $b_1 \bullet b_2 = b_1 \cdot \alpha_{p(b_1)}(b_2)$ und $b^\flat = \alpha_{p(b)^{-1}}(b^*)$.

(2) Ist $\pi : M \longrightarrow B$ eine surjektive Submersion glatter Mannigfaltigkeiten und $E \longrightarrow M$ ein glattes hermitesches Vektorbündel (von endlichem Rang), so definiert $\mathfrak{B} := \text{End}(E) := r^* E \otimes s^*(E^*) \longrightarrow M \times_B M$ ein Banach-Bündel über dem Gruppoiden $M \times_B M$.

Dabei bezeichnet E^* das duale Bündel zu E . Ist $\gamma = (x, y) \in M \times_B M$, so gilt für die Faser $\text{End}(E)_\gamma = \text{Hom}(E_y, E_x)$.

Für $(b_1, b_2) \in \mathfrak{B}^{(2)}$ ist die Multiplikation $b_1 \bullet b_2 = b_1 \circ b_2$ als Komposition von Abbildungen gegeben; das Bild von $b \in \mathfrak{B}_{(x,y)} = \text{Hom}(E_y, E_x)$ unter der Involution ist durch den adjungierte Operator bezüglich der hermiteschen Struktur $b^\flat = b^* \in \text{Hom}(E_x, E_y)$ definiert.

Für ein Fell-Bündel $\mathfrak{B} \xrightarrow{p} \mathcal{G}$ sei die Algebra $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ der stetigen Schnitte mit kompaktem Träger versehen mit der induktiven Limes-Topologie. Definiert man Faltung und Involution durch

$$f \star g(\gamma) = \int_{r(\eta)=r(\gamma)} f(\eta) \bullet g(\eta^{-1}\gamma) \, d\lambda^{r(\gamma)}(\eta)$$

und

$$f^*(\gamma) = f(\gamma^{-1})^\flat,$$

so wird $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ zu einer topologischen $*$ -Algebra.

Im ersten Beispiel sieht man sofort, daß die $*$ -Algebrenstruktur von $\Gamma_c(\mathcal{G}, r^* \mathcal{A}^\sharp)$ mit der im vorigen Abschnitt definierten übereinstimmt.

Definition 1.3.12. Eine (kovariante) Darstellung des Paares $(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ besteht aus einem Tripel (π, \mathcal{H}, μ) , wobei μ ein quasi-invariantes Maß auf $\mathcal{G}^{(0)}$, $\mathcal{H} = (H_x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ ein meßbares Bündel von Hilberträumen und $\pi : \mathfrak{B} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{H})$ ein meßbarer $*$ -Funktorkomplex ist.

Letzteres bedeutet, daß $\pi(b) \in \text{Hom}(H_{s(\gamma)}, H_{r(\gamma)})$ für alle $b \in \mathfrak{B}_\gamma$ gilt und die Bedingungen $\pi(b^\flat) = \pi(b)^*$ sowie $\pi(b_1)\pi(b_2) = \pi(b_1 \bullet b_2)$ fast überall bezüglich des Maßes $\nu^{(2)} = \int_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \lambda^x \times \lambda_x \, d\mu(x)$ erfüllt sind.

Ist (π, \mathcal{H}, μ) eine Darstellung des Paares $(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$, so wird durch die Formel

$$\langle \sigma_\pi(f) \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_{\gamma \in \mathcal{G}} \langle \pi(f(\gamma)) \xi_1(s(\gamma)), \xi_2(r(\gamma)) \rangle \, d\nu_0(\gamma)$$

eine $*$ -Darstellung

$$\sigma_\pi : \Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B}) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\int^\oplus H_x \, d\mu\right)$$

definiert, welche stetig bezüglich der induktiven Limes-Topologie auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ und der schwachen Operator-Topologie auf $\mathcal{L}\left(\int^\oplus H_x \, d\mu\right)$ ist.

Dabei ist wie im vorigen Abschnitt $\nu = \int_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \lambda^x \, d\mu(x)$, $D = \frac{d\nu}{d\nu^{-1}}$ die Radon-Nikodým-Ableitung, und das Maß ν_0 wird durch $D^{-1/2}\nu$ definiert. Die Darstellung σ_π heißt die integrierte Form von (π, \mathcal{H}, μ) .

Das Analogon von Renaults Desintegrationsatz wurde in [Yam87] bewiesen; man vergleiche auch [Muh01, Thm. 9]:

Theorem 1.3.13. *Es sei H ein Hilbertraum, $H_0 \subseteq H$ ein dichter linearer Unterraum und $\sigma : \Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B}) \longrightarrow \mathcal{L}(H_0)$ eine stetige $*$ -Darstellung, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (1) *Für alle $\xi_1, \xi_2 \in H_0$ ist die Abbildung $f \mapsto \langle \xi_1, \sigma(f)\xi_2 \rangle$ stetig bezüglich der induktiven Limes-Topologie auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$.*
- (2) *Es gilt $\langle \xi_1, \sigma(f)\xi_2 \rangle = \langle \sigma(f^*)\xi_1, \xi_2 \rangle$ für alle $\xi_1, \xi_2 \in H_0$.*
- (3) *Die Darstellung σ ist nicht-entartet in dem Sinn, daß der von allen Vektoren der Form $\sigma(f)\xi$ für $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ und $\xi \in H_0$ erzeugte Unterraum dicht in H liegt.*

Dann existiert eine kovariante Darstellung (π, \mathcal{H}, μ) von $(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ und ein Isomorphismus $U : \int^\oplus H_x \, d\mu(x) \longrightarrow H$ von Hilberträumen, so daß $U\sigma_\pi(f)U^{-1} = \sigma(f)$ für alle $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ gilt. Dabei ist σ_π die integrierte Form der Darstellung (π, \mathcal{H}, μ) .

Aus 1.3.13 folgt, daß der Ausdruck $\sup \|\sigma(f)\|$ für jedes $f \in \Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ (wobei das Supremum über alle stetigen Darstellungen von $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ gebildet wird, welche die Voraussetzungen des Theorems erfüllen) endlich ist. Hierdurch wird eine C^* -Norm auf $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ definiert; die Vervollständigung bezüglich dieser Norm heißt die (volle) Gruppoid- C^* -Algebra des Fell-Bündels \mathfrak{B} . Sie wird mit $C^*(\mathcal{G}, \mathfrak{B})$ bezeichnet.

Beispiel 1.3.14. Ist $\mathfrak{B} = r^*\mathcal{A}^\sharp$ wie in 1.3.11 (1), so gilt $C^*(\mathcal{G}, \mathfrak{B}) = \mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}$.

Es seien nun \mathcal{G} und \mathcal{H} zwei (Morita-)äquivalente lokal-kompakte Gruppoide mit stetigen Haarsystemen, wobei die Äquivalenz durch den Raum $X = {}_G X_{\mathcal{H}}$ gegeben sei und $\rho : X \longrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ bzw. $\sigma : X \longrightarrow \mathcal{H}^{(0)}$ die jeweilige Projektion auf die Basis der Gruppoide bezeichnen. Der Gruppoid \mathcal{G} ist in natürlicher Weise isomorph zu

$X \star_\sigma X^{\text{opp}}/\mathcal{H}$, und es bezeichne $q_{\mathcal{G}} : X \star_\sigma X^{\text{opp}} \longrightarrow \mathcal{G}$ die Projektion. Analog ist $\mathcal{G} \setminus X^{\text{opp}} \star_\rho X$ isomorph zu \mathcal{H} ; die Projektion sei in diesem Fall mit $q_{\mathcal{H}}$ bezeichnet.

Außerdem sei für $i = 1, 2$ mit $\pi_i : X \star_\sigma X^{\text{opp}} \longrightarrow X$ (bzw. $X^{\text{opp}} \star_\rho X \longrightarrow X$) die Projektion auf die jeweilige Komponente bezeichnet. (Da schon genug Notationen auftauchen und aus dem Zusammenhang klar werden sollte, auf welchem Raum die Projektionen definiert sind, wird auf eine unterschiedliche Bezeichnung verzichtet.)

Desweiteren seien Fell-Bündel $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{G}$ und $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathcal{H}$ gegeben.

Definition 1.3.15. Eine $(\mathcal{G}, \mathfrak{A}), (\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ -Äquivalenz ist ein Paar (X, \mathfrak{E}) , bestehend aus einer \mathcal{G}, \mathcal{H} -Äquivalenz X und einem Banach-Bündel $\mathfrak{E} \xrightarrow{p} X$, so daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (I) Für alle $x \in X$ ist die Faser $\mathfrak{E}_x = p^{-1}(x)$ eine Morita-Äquivalenz der C^* -Algebren $\mathfrak{A}_{\rho(x)}$ und $\mathfrak{B}_{\sigma(x)}$.
- (II) Für alle $(\gamma, x) \in \mathcal{G} \star X = \{(\eta, y) \in \mathcal{G} \times X \mid s(\gamma) = \rho(x)\}$ ist ein normverkleinernder Homomorphismus $\mathfrak{A}_\gamma \otimes_{\mathfrak{A}_{s(\gamma)}} \mathfrak{E}_x \longrightarrow \mathfrak{E}_{\gamma \cdot x}$ von Hilbert- $\mathfrak{A}_{r(\gamma)}, \mathfrak{B}_{\sigma(x)}$ -Bimoduln gegeben, und durch diese Homomorphismen wird eine stetige Wirkung von \mathfrak{A} auf \mathfrak{E} definiert.

In analoger Weise existiert eine (Rechts-)Wirkung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{E} , so daß die beiden Wirkungen kommutieren.

- (III) Es gibt stetige Bündel-Abbildungen $[[\cdot, \cdot]]_{\mathfrak{A}} : \pi_1^*(\mathfrak{E}) \otimes \pi_2^*(\mathfrak{E}^*) \longrightarrow \mathfrak{A}$ und $[[\cdot, \cdot]]_{\mathfrak{B}} : \pi_1^*(\mathfrak{E}^*) \otimes \pi_2^*(\mathfrak{E}) \longrightarrow \mathfrak{B}$ über $q_{\mathcal{G}}$ bzw. $q_{\mathcal{H}}$, so daß $[[\cdot, \cdot]]_{\mathfrak{A}}$ faserweise einen Isomorphismus der $\mathfrak{A}_{\rho(x)}, \mathfrak{A}_{\sigma^{\text{opp}}(y)}$ -Imprimitivitätsbimoduln $\mathfrak{A}_{q_{\mathcal{G}}(x,y)}$ und $\mathfrak{E}_x \otimes_{\mathfrak{B}_{\sigma(x)}} \mathfrak{E}_y^*$ induziert, während $[[\cdot, \cdot]]_{\mathfrak{B}}$ faserweise einen Isomorphismus der $\mathfrak{B}_{\rho^{\text{opp}}(x)}, \mathfrak{B}_{\sigma(y)}$ -Imprimitivitätsbimoduln $\mathfrak{B}_{q_{\mathcal{H}}(x,y)}$ und $\mathfrak{E}_x^* \otimes_{\mathfrak{A}_{\rho(y)}} \mathfrak{E}_y$ induziert. Die Paarungen erfüllen die Bedingung

$$[[\xi, \eta]]_{\mathfrak{A}} \cdot \zeta = \xi \cdot [[\eta, \zeta]]_{\mathfrak{B}}.$$

Dabei bezeichnet \mathfrak{E}^* das Banach-Bündel, welches faserweise aus den inversen Morita-Äquivalenzen zu \mathfrak{E} besteht.

Alternativ lassen sich die Bedingungen für die Äquivalenz von Fell-Bündeln mit Hilfe des Linking-Gruppoiden

$$L = \begin{pmatrix} \mathcal{G} & X \\ X^{\text{opp}} & \mathcal{H} \end{pmatrix}$$

ausdrücken. Bezeichnet (nach dem Ansatz von Kumjian) $\mathfrak{L} \longrightarrow L$ das Banach-Bündel, welches durch $\mathfrak{L}|_{\mathcal{G}} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}|_{\mathcal{H}} = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}|_X = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{L}|_{X^{\text{opp}}} = \mathfrak{E}^*$ gegeben ist, so bedeuten die Bedingungen (I) bis (III), daß das Bündel \mathfrak{L} natürliche Operationen besitzt, welche es zu einem Fell-Bündel über L machen.

Beispiel 1.3.16. In der Situation einer surjektiven Submersion glatter Mannigfaltigkeiten $p : M \longrightarrow B$ und eines hermiteschen Vektorbündels $E \longrightarrow M$ sei nun weiter angenommen, daß es eine Einbettung $u : B \longrightarrow M$ mit $p \circ u = \text{id}$ gibt und B eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M ist.

Die Mannigfaltigkeit B kann als trivialer Gruppoid mit Basis B aufgefaßt werden; sie läßt sich mit $B \times_B B$ identifizieren. Identifiziert man desweiteren M mit $M \times_B B$, so können sowohl M als auch B als Untermannigfaltigkeiten von $M \times_B M$ aufgefaßt werden.

Vorsehen mit den kanonischen Projektionen auf M bzw. B ist das Faserprodukt $X := M \times_B B \cong M$ eine Morita-Äquivalenz der Gruppoide $M \times_B M$ und B .

Setzt man $\mathfrak{A} = \text{End}(E)$, $\mathfrak{B} = \text{End}(E)|_{B \times_B B}$ und $\mathfrak{E} = \text{End}(E)|_X$, so sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Fell-Bündel über den Gruppoide $M \times_B M$ bzw. B , und das Paar (X, \mathfrak{E}) ist eine $(M \times_B M, \mathfrak{A})$ - (B, \mathfrak{B}) -Äquivalenz im Sinne der obigen Definition. Die Operationen werden dabei in natürlicher Weise durch die Verknüpfung von Homomorphismen bzw. durch die adjungierten Operatoren bezüglich der hermiteschen Struktur auf E gegeben.

Ist (X, \mathfrak{E}) eine $(\mathcal{G}, \mathfrak{A})$, $(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ -Äquivalenz und bezeichnen $\lambda_{\mathcal{G}}$ bzw. $\lambda_{\mathcal{H}}$ die (linken) Haarsysteme der lokal-kompakten Gruppoide \mathcal{G} bzw. \mathcal{H} , so seien die folgenden Operationen für $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Gamma_c(X, \mathfrak{E})$, $\varphi \in \Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{A})$ und $\psi \in \Gamma_c(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ definiert:

$$\begin{aligned} (\varphi \cdot \xi)(x) &= \int_{r(\gamma)=\rho(x)} \varphi(\gamma) \cdot \xi(\gamma^{-1} \cdot x) \, d\lambda_{\mathcal{G}}^{\rho(x)}(\gamma) \\ (\xi \cdot \psi)(x) &= \int_{r(\eta)=\sigma(x)} \xi(x \cdot \eta) \cdot \psi(\eta^{-1}) \, d\lambda_{\mathcal{H}}^{\sigma(x)}(\eta) \\ C_c(\mathcal{G}, \mathfrak{A}) \langle \xi_1, \xi_2 \rangle(\gamma) &= \int_{r(\eta)=\sigma(x)} [[\xi_1(\gamma \cdot x \cdot \eta), \xi_2(\eta^{-1} \cdot x)]]_{\mathfrak{A}} \, d\lambda_{\mathcal{H}}^{\sigma(x)}(\eta) \\ \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{C_c(\mathcal{H}, \mathfrak{B})}(\eta) &= \int_{r(\gamma)=\rho(y)} [[\xi_1(y \cdot \gamma), \xi_2(\gamma^{-1} \cdot y \cdot \eta)]]_{\mathfrak{B}} \, d\lambda_{\mathcal{G}}^{\rho(y)}(\gamma) \end{aligned}$$

Dabei ist folgendes zu beachten:

In der dritten Formel ist $x \in X$ ein (beliebiges) Element mit $\rho(x) = s(\gamma)$ für $\gamma \in \mathcal{G}$. Ist $\eta \in \mathcal{H}$ mit $r(\eta) = \sigma(x)$, so macht das Argument von ξ_1 keine Probleme. Für das Argument von ξ_2 ist x als Element von X^{opp} aufzufassen. Der Gruppoid \mathcal{H} wirkt von links auf X^{opp} . Ist $\eta \in \mathcal{H}$ mit $r(\eta) = \sigma(x)$, so gilt $s(\eta^{-1}) = r(\eta) = \sigma(x) = \rho^{\text{opp}}(x)$. Somit ist $(\eta^{-1}, x) \in \mathcal{H} \star_{\rho^{\text{opp}}} X$, und die Verknüpfung $\eta^{-1} \cdot x$ ist definiert.

Desweiteren ist ξ_2 in der dritten Formel als Element von $\Gamma_c(X^{\text{opp}}, \mathfrak{E}^*)$ aufzufassen, indem man X mit X^{opp} und das Bündel \mathfrak{E} faserweise mit der jeweils inversen Morita-Äquivalenz identifiziert.

Analog ist die vierte Formel zu interpretieren, wobei dort ein Element $y \in X$ mit $\sigma(y) = r(\eta)$ gewählt wird.

Folgendes Theorem geht ebenfalls auf Yamagami zurück; man vergleiche auch [Muh01, Thm. 11]:

Theorem 1.3.17. *Mit den oben definierten Operationen besitzt $\mathfrak{X}_0 = \Gamma_c(X, \mathfrak{E})$ die Struktur eines $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{A}), \Gamma_c(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ -Prä-Äquivalenzbimoduls, welcher sich zu einer Morita-Äquivalenz von $C^*(\mathcal{G}, \mathfrak{A})$ und $C^*(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ vervollständigen läßt.*

Bemerkung 1.3.18. Yamagamis Beweis in [Yam87] wird analog zum Beweis für die Morita-Äquivalenz der Gruppoid- C^* -Algebren geführt. Wie im Fall trivialer Fell-Bündel (vgl. etwa [MRW87]) besitzen sowohl $A_0 = \Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{A})$ als auch $B_0 = \Gamma_c(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ eine approximative Eins, deren Elemente endliche Summen von Ausdrücken der Form ${}_{A_0}\langle \xi_i, \xi_i \rangle$ bzw. $\langle \xi_i, \xi_i \rangle_{B_0}$ mit $\xi_i \in \mathfrak{X}_0$ sind. Dann ist nur noch zu zeigen, daß für $\varphi \in A_0$, $\psi \in B_0$ und $\xi \in \mathfrak{X}_0$ die Bedingungen

$$\langle \varphi \cdot \xi, \varphi \cdot \xi \rangle_B \leq \|\varphi\|^2 \cdot \langle \xi, \xi \rangle_B$$

und

$$\langle \xi \cdot \psi, \xi \cdot \psi \rangle_B \leq \|\psi\|^2 \cdot {}_A\langle \xi, \xi \rangle$$

gelten.

In bestimmten Situationen (z.B. für Gruppenbündel, wo die (reduzierte) C^* -Norm faserweise definiert ist) kann man die Morita-Äquivalenz auch für die reduzierten verschränkten Produkte zeigen, indem man z.B. faserweise Greens Imprimitivitätssatz anwendet.

Beispiel 1.3.19. Die Morita-Äquivalenz für Gruppoid- C^* -Algebren mit Werten in Fell-Bündeln erinnert stark an Greens Imprimitivitätssatz für lokal-kompakte Gruppen, wie er sich z.B. in [Wil06, Cor. 4.17] findet:

Es sei G eine lokal-kompakte Gruppe, $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und B eine H -Algebra; die Wirkung von H auf A sei mit α bezeichnet. Die induzierte Algebra

$$\text{Ind } A = \{f \in C_b(G, A) \mid f(gh) = h^{-1} \cdot f(g) \text{ für alle } g \in G, h \in H, \|f(g)\| \xrightarrow{gH \rightarrow \infty} 0\}$$

ist eine G -Algebra unter Linkstranslation im Argument.

Setzt man $E_0 = C_c(G, \text{Ind } A)$, $X_0 = C_c(G, A)$ und $B_0 = C_c(H, A)$, so werden Modulwirkungen von E_0 und B_0 auf X_0 sowie innere Produkte auf X_0 mit Werten

in E_0 bzw. B_0 durch die folgenden Formeln definiert:

$$\begin{aligned} e \cdot x(s) &= \int_{t \in G} e(t, s) \cdot x(t^{-1}s) \cdot \Delta_G(t)^{1/2} dt \\ x \cdot b(s) &= \int_{h \in H} \alpha_h(x(sh) \cdot b(h^{-1})) \cdot \Delta_H(h)^{-1/2} dh \\ {}_{E_0}\langle x, y \rangle(s, t) &= \Delta_G(s)^{-1/2} \cdot \int_{h \in H} \alpha_h(x(th) \cdot y(s^{-1}th)^*) dh \\ \langle x, y \rangle_{B_0}(h) &= \Delta_H(h)^{-1/2} \cdot \int_{t \in G} x(t^{-1})^* \cdot \alpha_h(y(t^{-1}h)) dt \end{aligned}$$

Dabei sind $e \in E_0$, $x, y \in X_0$ sowie $b \in B_0$, und Δ_G bzw. Δ_H bezeichnen die Modularfunktionen von G und H .

Greens Imprimitivitätssatz besagt, daß die obigen Operationen X_0 zu einem Prä-Imprimitivitätsbimodul der Algebren E_0 und B_0 machen, der zu einer Morita-Äquivalenz der (vollen und reduzierten) verschränkten Produkte $\text{Ind } A \rtimes_{(r)} G$ und $A \rtimes_{(r)} H$ vervollständigt werden kann.

Ist A eine G -Algebra und die Wirkung von H auf A durch Einschränkung der G -Wirkung definiert, so ist die Abbildung

$$\Phi : \text{Ind } A \longrightarrow C_0(G/H, A), \quad \Phi(f)(sH) := \alpha_s(f(s))$$

ein G -äquivarianter Isomorphismus, wenn man auf $C_0(G/H, A) \cong C_0(G/H) \otimes A$ die diagonale G -Wirkung betrachtet. Die Menge $C_c(G/H \times G, A)$ läßt sich in kanonischer Weise als dichte Teilmenge von $E_0 = C_c(G, \text{Ind } A)$ auffassen.

Nach 1.1.4 und 1.1.10 (4) ist $G/H \times G$ ein lokal-kompakter Gruppoid, welcher ein stetiges Haarsystem besitzt, und A definiert ein Fell-Bündel über $G/H \times G$.

Ebenso läßt sich H als lokal-kompakter Gruppoid auffassen, dessen Basis gerade aus dem neutralen Element der Gruppe besteht, und A definiert ein Fell-Bündel über H . Dann ist G mit den offensichtlichen Operationen eine (Morita-)Äquivalenz der Gruppoide $G/H \times G$ und H . Unter der Identifikation von $C_c(G/H \times G, A)$ mit einer dichten Teilmenge von $C_c(G, \text{Ind } A)$ und unter Verwendung der Isomorphismen 1.3.5 stimmen die obigen Formeln mit den Formeln im Gruppoid-Fall überein.

Diese Aussage läßt sich auch auf Gruppenbündel verallgemeinern.

Die Arbeit [Yam87] von Yamagami ist leider nie veröffentlicht worden. Interessant wäre es, die Morita-Äquivalenz in der Situation reduzierter C^* -Algebren lokal-kompakter Gruppoide mit Werten in Fell-Bündeln zu untersuchen.

Ist $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Fell-Bündel über einem lokal-kompakten Gruppoid \mathcal{G} , so ist die Einschränkung $\mathfrak{A}^{(0)} := \mathfrak{A}|_{\mathcal{G}^{(0)}}$ auf die Basis von \mathcal{G} ein Bündel von C^* -Algebren.

Besitzt \mathcal{G} ein stetiges Haarsystem, so kann wie im Fall der verschränkten Produkte auf der Menge $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{A})$ der stetigen Schnitte mit kompaktem Träger durch

$$\langle \xi, \eta \rangle(x) := (\xi^\flat \bullet \eta)(x) \quad \text{für } x \in \mathcal{G}^{(0)}$$

ein inneres Produkt mit Werten in $\Gamma_c(\mathcal{G}^{(0)}, \mathfrak{A}^{(0)})$ definiert werden, und $\Gamma_c(\mathcal{G}, \mathfrak{A})$ wirkt auf der Vervollständigung durch Faltung von links. Hierdurch sollte auch eine reduzierte Gruppoid- C^* -Algebra von \mathcal{G} mit Werten in \mathfrak{A} definiert werden können, für welche das analoge Resultat zu 1.3.17 zu erwarten ist.

1.4 Gruppoid-äquivariante KK-Theorie

In seiner Doktorarbeit [LeG94] hat LeGall Kasparovs Definition äquivarianter KK-Theorie auf den Fall von Gruppoiden erweitert.

Ist \mathcal{G} ein Gruppoid und sind \mathcal{A}, \mathcal{B} $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduierte \mathcal{G} -Algebren, so ist ein \mathcal{G} -äquivarianter Hilbert- \mathcal{A}, \mathcal{B} -Bimodul definiert als ein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduierter Hilbert- \mathcal{B} -Modul \mathcal{E} mit \mathcal{G} -Wirkung (d.h. einem unitären Element $V \in \mathcal{L}(s^*\mathcal{E}, r^*\mathcal{E})$), auf dem \mathcal{A} von links durch eine \mathcal{G} -äquivariante Darstellung $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E})$ wirkt.

Definition 1.4.1. Für zwei \mathcal{G} -Algebren \mathcal{A} und \mathcal{B} ist ein \mathcal{G} -äquivarianter Kasparov-Zykel gegeben durch ein Tripel (\mathcal{E}, π, F) , wobei (\mathcal{E}, π) ein \mathcal{G} -äquivarianter Hilbert- \mathcal{A}, \mathcal{B} -Bimodul und $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ ein homogener Operator vom Grad 1 ist, so daß für alle $a \in \mathcal{A}$ und alle $a' \in r^*\mathcal{A}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $a(F - F^*) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$
- $a(F^2 - 1) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$
- $[a, F] \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$
- $a'(V s^* F V^* - r^* F) \in r^* \mathcal{K}(\mathcal{E})$

Die Menge aller \mathcal{G} -äquivarianten Kasparov- \mathcal{A}, \mathcal{B} -Zykel sei mit $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bezeichnet. Eine Homotopie in $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist ein Element von $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}[0, 1])$, und $\text{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist definiert als Menge der Äquivalenzklassen von $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ modulo Homotopie.

Wie im Fall von Gruppen ist $\text{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ eine abelsche Gruppe, und es existiert ein bilineares (Kasparov-)Produkt

$$\otimes_{\mathcal{D}} : \text{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) \times \text{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{D}, \mathcal{B}) \longrightarrow \text{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Definition 1.4.2. Sind \mathcal{A} , \mathcal{B} und \mathcal{D} \mathcal{G} -Algebren für einen Gruppoiden \mathcal{G} mit Basis X , so bezeichne

$$\tau_{\mathcal{D}} : \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D})$$

den natürlichen Homomorphismus, welcher auf Kasparov-Zykeln durch

$$\tau_{\mathcal{D}}(\mathcal{E}, \pi, T) = (\mathcal{E} \otimes_{C_0(X), \mathrm{ext}} \mathcal{D}, \pi \otimes 1, T \otimes 1)$$

gegeben ist.

Das externe Tensorprodukt über $C_0(X)$ zweier Hilbertmoduln \mathcal{E} bzw. \mathcal{F} über $C_0(X)$ -Algebren \mathcal{B} bzw. \mathcal{D} ist dabei durch

$$\mathcal{E} \otimes_{C_0(X), \mathrm{ext}} \mathcal{F} := (\mathcal{E} \otimes_{\max} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B} \otimes_{\max} \mathcal{D}} (\mathcal{B} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D})$$

definiert.

Mit 1.4.2 läßt sich auch die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D}) \times \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{D} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2) &\xrightarrow{\otimes_{\mathcal{D}}} \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}_1 \otimes_{C_0(X)} \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes_{C_0(X)} \mathcal{B}_2), \\ (x, y) &\mapsto \tau_{\mathcal{A}_2}(x) \otimes_{\mathcal{B}_1 \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{A}_2} \tau_{\mathcal{B}_1}(y) \end{aligned}$$

des Kasparov-Produkts definieren.

Ein (striker) Morphismus $\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ zweier (lokal-kompakter) Gruppoide besteht aus zwei (stetigen) Abbildungen $\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ und $\varphi : \mathcal{H}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$, welche mit allen Strukturabbildungen verträglich sind.

Die Gruppoid-äquivariante KK-Theorie ist funktoriell bezüglich strikter Morphismen:

Proposition 1.4.3. *Ist $\phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein strikter Morphismus von Gruppoiden, so existiert eine natürliche Abbildung*

$$\phi^* : \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{KK}^{\mathcal{H}}(\varphi^* \mathcal{A}, \varphi^* \mathcal{B}),$$

welche auf Kasparov-Zykeln durch

$$\phi^*(\mathcal{E}, \pi, T) = (\varphi^* \mathcal{E}, \pi \otimes 1, T \otimes 1)$$

gegeben ist.

Beweis. [LeG94, 6.1.2]. □

Auch in der Gruppoid-äquivarianten KK-Theorie existieren natürliche Descent-Homomorphismen

$$j_{\mathcal{G},(r)} : \mathrm{KK}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{KK}(\mathcal{A} \rtimes_{(r)} \mathcal{G}, \mathcal{B} \rtimes_{(r)} \mathcal{G}),$$

welche mit dem Kasparov-Produkt verträglich sind. Wird ein $\mathrm{KK}^{\mathcal{G}}$ -Element durch den Kasparov-Zykel (\mathcal{E}, π, T) repräsentiert, so gilt

$$j_{\mathcal{G},r}([\mathcal{E}, \phi, T]) = [\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}), \tilde{\pi}, T \otimes 1].$$

Bezeichnet $(r^*\mathcal{E})_c$ den von Elementen der Form $\xi \otimes b$ für $\xi \in \mathcal{E}$ und $b \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{B}^{\sharp})$ erzeugten Vektorraum, so stellt dieser eine dichte Teilmenge von $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G})$ dar.

Ist die \mathcal{G} -Wirkung auf \mathcal{E} durch das unitäre Element $W \in \mathcal{L}(s^*\mathcal{E}, r^*\mathcal{E})$ definiert, so ist die Darstellung $\tilde{\pi}_r$ für $a \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{A}^{\sharp})$ und $\xi \in (r^*\mathcal{E})_c$ gegeben durch

$$(\tilde{\pi}_r(a)(\xi))(\gamma) := (a\xi)(\gamma) := \int_{\eta \in \mathcal{G}^r(\gamma)} a(\eta) \cdot W_{\eta} \xi(\eta^{-1}\gamma) W_{\eta}^* d\lambda^{r(\gamma)}(\eta).$$

Die Wirkung von \mathcal{B} auf $\mathcal{B} \rtimes_{(r)} \mathcal{G}$ ist dabei wie folgt definiert:

Ist $b \in \mathcal{B} = \Gamma_0(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{B}^{\sharp})$ und sind $f, g \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{B}^{\sharp})$, so werden durch

$$L(b)(f)(\gamma) := (b \cdot f)(\gamma) := b(r(\gamma)) \cdot f(\gamma)$$

und

$$R(b)(f)(\gamma) := (f \cdot b)(\gamma) := f(\gamma) \cdot \beta_{\gamma}(b(s(\gamma)))$$

Elemente $b \cdot f, f \cdot b \in \Gamma_c(\mathcal{G}, r^*\mathcal{B}^{\sharp})$ definiert. Mit der Formel für die Faltung rechnet man nach, daß die Identität $(f \cdot b) \star g = f \star (b \cdot g)$ gilt; desweiteren gilt

$$\|b \cdot f\|_{(r)} \leq \|b\|_{\infty} \cdot \|f\|_{(r)} \quad \text{sowie} \quad \|f \cdot b\|_{(r)} \leq \|b\|_{\infty} \cdot \|f\|_{(r)}.$$

Somit setzen sich $L(b)$ und $R(b)$ zu Abbildungen von $\mathcal{B} \rtimes_{(r)} \mathcal{G}$ fort. Das Paar $(L(b), R(b))$ ist daher ein doppelter Zentralisator für $\mathcal{B} \rtimes_{(r)} \mathcal{G}$; es definiert also ein Element der Multiplikatoralgebra. Hierdurch ist die (Links)Wirkung von \mathcal{B} auf $\mathcal{B} \rtimes_{(r)} \mathcal{G}$ definiert.

Die Details dieser Konstruktion findet man in [LeG94, Chap. 7.2].

Bemerkung 1.4.4. Im Falle eines Gruppenbündels (oder spezieller, einer Gruppe) stimmt diese Definition mit der gewöhnlichen Descent-Abbildung von Kasparov überein.

Im Gruppenfall, also für $\mathcal{G}^{(0)} = \{e\}$, setzt sich die Abbildung

$$E \otimes_B C_c(G, B) \longrightarrow C_c(G, E), \quad x \otimes f \mapsto (s \mapsto x \cdot f(s))$$

zu einem unitären Isomorphismus $E \otimes_B (B \rtimes_{(r)} G) \cong E \rtimes_{(r)} G$ fort. Dabei ist in der Formel für das innere Produkt zu beachten, daß in der Formel für die Involution die Modularfunktion der Gruppe G auftaucht, welche die Eigenschaft

$$\int_{s \in G} \Delta_G(s^{-1}) \cdot f(s^{-1}) \, ds = \int_{s \in G} f(s) \, ds$$

für alle $f \in C_c(G)$ hat.

Für $C_0(X)$ -Algebren definiert Kasparov in [Kas88, 2.19] eine modifizierte Version der KK-Gruppen, welche zusätzlich die Informationen über die $C_0(X)$ -Struktur enthält:

Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} $C_0(X)$ -Algebren, so ist die Gruppe $\mathcal{R}KK(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ definiert als Menge der Äquivalenzklassen bezüglich Homotopie von Kasparov-Zykeln $(E, T) \in \mathbb{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mit der zusätzlichen Bedingung, daß für alle $f \in C_0(X)$, $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ und $e \in E$ die Gleichung $(f \cdot a) \cdot e \cdot b = a \cdot e \cdot (b \cdot f)$ in E erfüllt ist.

Für Gruppenbündel sieht man leicht:

Proposition 1.4.5. *Ist \mathcal{G} ein lokal-kompaktes Gruppenbündel über $\mathcal{G}^{(0)}$ mit einem stetigem Haarsystem, so nehmen die Descent-Homomorphismen $j_{\mathcal{G},(r)}$ Werte in $\mathcal{R}KK(\mathcal{G}^{(0)}; \mathcal{A} \rtimes_{(r)} \mathcal{G}, \mathcal{B} \rtimes_{(r)} \mathcal{G})$ an.*

Beweis. Nach 1.3.4 sind die verschränkten Produkte $\mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$ und $\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}$ $C_0(\mathcal{G})$ -Algebren, und für alle $\varphi \in C_0(\mathcal{G}^{(0)})$, $a \in \mathcal{A} \rtimes_r \mathcal{G}$, $b \in \mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}$ und $e \in \mathcal{E} \otimes_B (\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G})$ gilt

$$(\varphi \cdot a) \cdot e \cdot b = a \cdot e \cdot (\varphi \cdot b),$$

wie man sofort auf den dichten Teilmengen $\Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$, $\Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{B}^\sharp)$ und $(p^* \mathcal{E})_c$ nachrechnet.

Genauso sieht man in dieser Situation, daß auch das Bild des vollen Descents $j_{\mathcal{G}}$ in $\mathcal{R}KK(\mathcal{G}^{(0)}; \mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}, \mathcal{B} \rtimes \mathcal{G})$ liegt. \square

Kapitel 2

Pseudodifferentialoperatoren auf geblätternen Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel werden einige Strukturen für geblätternen Mannigfaltigkeiten und Familien von (Pseudo)Differentialoperatoren entlang der Blätter beschrieben, welche später zur Konstruktion des Dirac-Elements der Deformation genutzt werden. Hierfür sind insbesondere Blätterungsstrukturen von Interesse, welche durch surjektive Submersionen gegeben sind.

Viele Konstruktionen dieses Kapitels können auch in einem allgemeineren Rahmen durchgeführt werden, z.B. für geblätternen Räume im Sinne von [MS06].

2.1 Geblätternen Mannigfaltigkeiten

Definition 2.1.1. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $m = r + q$. Ein glatter Atlas

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} = \{(U, \varphi) \mid U \subseteq M \text{ offen, } \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ Homöomorphismus auf } \varphi(U)\}$$

heißt Blätterungsatlas auf M , falls für je zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) in $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ der Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ lokal von der Form

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(x, y) = (g(x, y), h(y)) \quad (\dagger)$$

für $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^q$ ist.

Eine Karte in $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ heißt Blätterungskarte. Die Mannigfaltigkeit M (bzw. das Paar $(M, \mathfrak{A}_{\mathcal{F}})$) heißt eine geblätternen Mannigfaltigkeit der Kodimension q , falls $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ ein maximaler Atlas ist, dessen Kartenwechsel die Eigenschaft (\dagger) haben.

Eine Platte in M ist eine Zusammenhangskomponente der Untermannigfaltigkeit $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^r \times \{c\})$ für eine Karte (U, φ) aus einem maximalen Blätterungsatlas. Ein Weg von Platten ist eine Familie P_1, \dots, P_k von Platten mit $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$. Zwei Elemente $x, y \in M$ heißen äquivalent, falls ein Weg von Platten P_1, \dots, P_k mit $x \in P_1$ und $y \in P_k$ existiert. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation werden Blätter genannt.

Zu jedem Blätterungsatlas $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ von M existiert natürlich genau ein maximaler Blätterungsatlas, welcher $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ enthält.

Ist $(M, \mathfrak{A}_{\mathcal{F}})$ eine glatte geblätterte Mannigfaltigkeit, so kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ von einem Blätterungsatlas erzeugt wird, dessen Karten (U, φ) die Bedingung

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2, \quad U_1, U_2 \text{ offen(e Bälle) in } \mathbb{R}^r \text{ bzw. } \mathbb{R}^q \quad (\dagger)$$

erfüllen, und dessen Kartenwechsel global von der Form (\dagger) sind.

Jedes Blatt L ist eine Vereinigung von Platten. Die Einschränkung der Blätterungskarten dieser Platten definiert eine glatte Struktur auf L , welche das Blatt zu einer r -dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit machen. Die kanonische Abbildung $L \longrightarrow M$ ist eine injektive Immersion, und L ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von M genau dann, wenn diese Immersion eine Einbettung ist.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Definition einer Blätterungsstruktur. Diese finden sich zum Beispiel in [MM03, 1.2]. Eine dieser alternativen Charakterisierungen ist die folgende:

Satz 2.1.2. *Eine glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension $n = r + q$ besitzt genau dann eine Blätterungsstruktur der Kodimension q , wenn es ein integrierbares (glattes) Unterbündel $\mathcal{F} \subseteq TM$ vom Rang r gibt.*

Integrierbar bedeutet dabei, daß für je zwei Vektorfelder X, Y auf M mit Werten in \mathcal{F} auch das durch die Lie-Klammer gegebene Vektorfeld $[X, Y]$ Werte in \mathcal{F} hat.

Beweis. Ist (U, φ) eine Blätterungskarte für M , so ist das Unterbündel \mathcal{F} lokal auf U gegeben durch $\mathcal{F}|_U = \ker T(\text{pr}_{\mathbb{R}^q} \circ \varphi)$, und \mathcal{F} ist eindeutig bestimmt durch den Blätterungsatlas: \mathcal{F} besteht gerade aus den Elementen von TM , welche tangential zu den Blättern liegen.

Umgekehrt folgt aus der Integrierbarkeit von \mathcal{F} mit dem Satz von Frobenius, daß zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U von x und ein Diffeomorphismus $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ existiert mit $\mathcal{F}|_U = \ker T(\text{pr}_{\mathbb{R}^q} \circ \varphi)$. Diese Diffeomorphismen bilden den Blätterungsatlas. Für Details vergleiche man [MM03, 1.2]. \square

Aus dem Beweis folgt, daß die Blätterungsstrukturen von M in eindeutiger Weise den integrierbaren Unterbündeln von TM entsprechen. Im folgenden wird für eine geblätterte Mannigfaltigkeit die Notation (M, \mathcal{F}) verwendet, wobei \mathcal{F} das durch die Blätterungsstruktur eindeutig bestimmte integrierbare Unterbündel ist. Dieses wird im folgenden auch als vertikales Tangentialbündel bezeichnet.

Desweiteren folgt aus dem Beweis des obigen Satzes, daß Blätterungskarten insbesondere lokale Trivialisierungen für das vertikale Tangentialbündel \mathcal{F} liefern: Ist (U, φ) eine Blätterungskarte, so gilt $\mathcal{F}|_U = \ker(T(\text{pr}_{\mathbb{R}^q} \circ \varphi))$, und unter dem Vektorbündel-Isomorphismus $T(\varphi)|_U : T(M)|_U \longrightarrow T(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q)$ läßt sich $\mathcal{F}|_U$ mit dem trivialen Bündel $\ker T(\text{pr}_{\mathbb{R}^q})$ identifizieren.

Beispiele 2.1.3. (i) Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt eine (triviale) Blätterungsstruktur der Kodimension Null; die Blätter sind dann gerade die Zusammenhangskomponenten der Mannigfaltigkeit. Alle Aussagen über Blätterungen lassen sich somit auch auf gewöhnliche Mannigfaltigkeiten übertragen.

(ii) Eine glatte (surjektive) Submersion $p : M^n \longrightarrow N^q$ definiert eine Blätterung (M, \mathcal{F}) mit $\mathcal{F} = \ker(TM \xrightarrow{T(p)} TN)$.

Es ist leicht zu sehen, daß \mathcal{F} integrierbar ist: Sind X, Y Vektorfelder mit Werten in \mathcal{F} , so sind X und Y per Definition p -adaptiert zum Nullvektorfeld, d.h. es gilt $T(p) \cdot X = 0 = T(p) \cdot Y$. Nach [Hel78, Chapter I, Prop. 3.3] gilt dann jedoch

$$T(p) \cdot [X, Y] = [T(p) \cdot X, T(p) \cdot Y] = [0, 0] = 0,$$

also $[X, Y](x) \in \ker T(p)_x$ für alle $x \in M$.

Für spätere Anwendungen sei jedoch auch direkt eine Möglichkeit angegeben, den Blätterungsatlas in dieser Situation zu bestimmen:

Aufgrund der lokalen Form von Submersionen gibt es zu jedem Punkt $x \in M$ mit $y := p(x) \in N$ Karten (U, φ) um x in M und (V, ψ) um y in N , so daß $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ und $\psi(V) = V_2 \supseteq U_2$ gilt, und so daß die Abbildung $\psi \circ p \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \longrightarrow V_2$ mit der Projektion $(x, y) \mapsto y$ übereinstimmt.

Diese lokalen Karten (U, φ) für M bilden dann einen glatten Blätterungsatlas. Sind nämlich mit (U, φ) und $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ wie oben Karten für M gegeben, und sind zu $m \in U \cap \tilde{U}$ die entsprechenden Karten (V, ψ) und $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ um $p(m) \in N$ gewählt (wobei ggf. zu einer Verkleinerung von U bzw. \tilde{U} überge-

gangen werden muß), so gilt für $(x, y) \in \varphi(U)$ mit $(\tilde{x}, \tilde{y}) := (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x, y)$:

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= (\tilde{\psi} \circ p \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &= (\tilde{\psi} \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ p \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}))(x, y) \\ &= ((\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ p \circ \varphi^{-1}))(x, y) \\ &= (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1})(y). \end{aligned}$$

Somit sieht man, daß der Kartenwechsel $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ lokal von der Form (\dagger) ist, was zu zeigen war.

Im Fall einer surjektiven Submersion sind die Blätter gerade die Zusammenhangskomponenten von $M_c = p^{-1}(c)$ für $c \in N$, und die durch den Blätterungsatlas definierte glatte Struktur auf jedem Blatt stimmt mit der glatten Struktur als Untermannigfaltigkeit von M überein. Die Einschränkung des Unterbündels \mathcal{F} auf ein Blatt L läßt sich mit dem Tangentialbündel von L identifizieren.

Spezielle Beispiele für Blätterungen, die durch eine Submersion gegeben sind, werden der in späteren Kapiteln konstruierte Deformationsgruppoid \mathcal{G} , der zugehörige homogene Raum \mathcal{G}/K sowie das Faserprodukt $\mathcal{G} \star \mathcal{G}/K$ sein.

Definition 2.1.4. Ist die Blätterung (M, \mathcal{F}) durch eine surjektive Submersion $M \longrightarrow B$ (mit zusammenhängenden Fasern) gegeben, so wird der glatte Gruppoid

$$\text{Hol}(M, \mathcal{F}) := M \times_B M$$

aus 1.1.3 (3) als Holonomie-Gruppoid von (M, \mathcal{F}) bezeichnet.

Bemerkung 2.1.5. Die ad-hoc-Definition des Holonomie-Gruppoiden in der obigen Situation ist alles, was im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet wird. Es sei angemerkt, daß zu jeder beliebigen Blätterung (M, \mathcal{F}) der Holonomie-Gruppoid konstruiert werden kann. Ist die Blätterung aber wie in obiger Situation durch eine surjektive Submersion (mit zusammenhängenden Fasern) gegeben, so liefert die allgemeine Konstruktion gerade den Gruppoiden $M \times_B M$, da solche Blätterungen triviale Holonomie haben. Man vergleiche z.B. [MM03, 5.8 (1)].

Im allgemeinen ist der Holonomie-Gruppoid einer Blätterung ein glatter Gruppoid, dessen Totalraum nicht Hausdorffsch sein muß. Für eine surjektive Submersion $M \longrightarrow B$ ist das Faserprodukt $M \times_B M$ jedoch immer eine Hausdorff-Mannigfaltigkeit.

Die universellen Konstruktionen der linearen Algebra lassen sich insbesondere auf das vertikale Tangentialbündel \mathcal{F} einer geblättertten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) anwenden:

Das duale Bündel \mathcal{F}^* zu \mathcal{F} sei als vertikales Kotangentialebündel bezeichnet, das durch das k -fache äußere Produkt hieraus entstehende Bündel $\Lambda^k \mathcal{F}^*$ als Bündel der alternierenden vertikalen k -Formen und $\Lambda^* \mathcal{F}^* := \bigoplus_{k=0}^r \Lambda^k \mathcal{F}^*$ als vertikales äußeres Bündel (wobei $r = \text{rk } \mathcal{F}$ ist).

Eine (glatte) reellwertige vertikale Differentialform auf M ist ein glatter Schnitt

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^* \mathcal{F}^*.$$

Analog seien vertikale k -Formen auf M definiert; die Menge aller vertikalen Differentialformen (bzw. k -Formen) sei mit $\Omega^*(M, \mathcal{F})$ (bzw. $\Omega^k(M, \mathcal{F})$) bezeichnet. Unter punktwisem Dachprodukt ist $\Omega^*(M, \mathcal{F})$ eine Algebra.

Genauso lassen sich auch andere Konzepte der Geometrie auf geblätterte Mannigfaltigkeiten übertragen:

Besitzt \mathcal{F} eine Riemannsche Struktur, d.h. ist \mathcal{F} ein euklidisches Vektorbündel, so läßt sich \mathcal{F} kanonisch mit dem vertikalen Kotangentialebündel identifizieren, und letzteres erhält unter dieser Identifikation ebenfalls eine Riemannsche Struktur.

Eine Riemannsche Struktur ermöglicht ebenfalls eine Identifikation des Bündels $\Lambda^k \mathcal{F}^*$ mit dem dualen Bündel $(\Lambda^k \mathcal{F}^*)^*$, und es läßt sich eine Riemannsche Struktur auf $\Lambda^k \mathcal{F}^*$ und somit auch auf $\Lambda^* \mathcal{F}^*$ definieren. Ist e_1, \dots, e_r eine Orthonormalbasis von \mathcal{F}_x^* , so bilden die Elemente $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ für $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$ eine Orthonormalbasis von $\Lambda^k \mathcal{F}_x^*$, und $\Lambda^* \mathcal{F}_x^* = \bigoplus_{k=0}^r \Lambda^k \mathcal{F}_x^*$ ist als orthogonale Summe euklidischer Vektorräume ebenfalls ein euklidischer Vektorraum.

Hierdurch wird ein inneres Produkt auf den vertikalen Differentialformen mit Werten in den glatten Funktionen auf M definiert.

Die Riemannschen Strukturen definieren in kanonischer Weise auf den Komplexfizierungen der oben beschriebenen vertikalen Bündel die Struktur von glatten hermiteschen Vektorbündeln.

Bezeichnet $\xi \mapsto \xi^*$ die komplexe Konjugation auf $\mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$, so definiert die hermitesche Struktur eine quadratische Form auf $\mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$ durch

$$Q(\xi) := \langle \xi^*, \xi \rangle.$$

Zu dieser quadratischen Form kann das assoziierte Clifford-Bündel $\mathcal{Cl}(\mathcal{F}^*)$ gebildet werden; faserweise ist $\mathcal{Cl}(\mathcal{F}^*)_x$ die Clifford-Algebra zu $\mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C}$.

Wie in Anhang B beschrieben, wird die Clifford-Algebra bezüglich der Relation $\xi \cdot \xi = Q(\xi) \cdot 1$ gebildet; dies ist die Konvention, wie sie in den Arbeiten von Kasparov verwendet wird. (Es sei angemerkt, daß in der Literatur Clifford-Algebren

zum Teil auch durch die Relation $\xi \cdot \xi = -Q(\xi) \cdot 1$ definiert werden. Im Fall eines komplexen Vektorraums setzt sich die Abbildung $v \mapsto iv$ zu einem Isomorphismus der unterschiedlich definierten Clifford-Algebren fort.)

Proposition 2.1.6. *Das vertikale Clifford-Bündel $\mathcal{Cl}(\mathcal{F}^*)$ ist ein Bündel von C^* -Algebren über M .*

Beweis. Die Struktur als Bündel von C^* -Algebren ist durch eine Darstellung auf dem (vertikalen) äußeren Bündel $\Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$ wie folgt definiert: Für $\xi \in \mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C}$ bezeichne

$$\lambda_\xi : \Lambda^* \mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^* \mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C},$$

den durch $\lambda_\xi(\omega) := \xi \wedge \omega$ gegebenen Operator, und λ_ξ^* sei der adjungierte Operator zu λ_ξ bezüglich des Skalarprodukts auf der äußeren Algebra.

Sind $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C}$, so gilt

$$\lambda_\xi^*(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \langle \xi, w_i \rangle \cdot w_1 \wedge \dots \wedge \hat{w}_i \wedge \dots \wedge w_k;$$

insbesondere ist die Zuordnung $\xi \mapsto \lambda_\xi^*$ antilinear. Es gilt $\lambda_\xi^2 = 0 = (\lambda_\xi^*)^2$ und

$$(\lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}^*)^2 = Q(\xi) \cdot \text{id}.$$

Letzteres sieht man wie folgt: Ist e_1, \dots, e_r eine Orthonormalbasis von $\mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C}$ mit $e_i^* = e_i$, so gilt für $\xi = \sum_{j=1}^r a_j \cdot e_j$ und $\xi^* = \sum_{j=1}^r \bar{a}_j \cdot e_j$ zunächst $\lambda_{\xi^*}^* = \sum_{j=1}^r a_j \lambda_{e_j}^*$ aufgrund der Antilinearität von λ^* , und es folgt

$$(\lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}^*)^2 = \lambda_\xi \lambda_{\xi^*}^* + \lambda_{\xi^*}^* \lambda_\xi = \sum_{j,k=1}^r a_j a_k \cdot (\lambda_{e_j} \lambda_{e_k}^* + \lambda_{e_k}^* \lambda_{e_j}).$$

Durch Nachrechnen auf der Orthonormalbasis $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ für $i_1 < \dots < i_p$ und $0 \leq p \leq r$ von $\Lambda^* \mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C}$ erkennt man, daß

$$\lambda_{e_j} \lambda_{e_k}^* + \lambda_{e_k}^* \lambda_{e_j} = 0 \quad \text{für } j \neq k \quad \text{und} \quad \lambda_{e_j} \lambda_{e_j}^* + \lambda_{e_j}^* \lambda_{e_j} = \text{id}$$

gilt. Somit ergibt sich

$$(\lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}^*)^2 = \left(\sum_{j=1}^r a_j^2 \right) \cdot \text{id} = Q(\xi) \cdot \text{id}.$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft von Clifford-Algebren setzt sich die Abbildung

$$\mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^* \mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C}), \quad \xi \mapsto \lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}^*$$

zu einem Algebrenhomomorphismus

$$\mathbb{C}\ell(\mathcal{F}_x^*) \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^* \mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C})$$

fort. Mit der durch diese Darstellung gegebenen Norm und Involution ist $\mathbb{C}\ell(\mathcal{F}_x^*)$ eine C^* -Algebra, und $\mathbb{C}\ell(\mathcal{F}^*)$ wird zu einem Bündel von C^* -Algebren über M . \square

Bemerkung 2.1.7. Genau wie oben kann man auch berechnen, daß die Identität

$$(\lambda_a - \lambda_{a^*})^2 = -Q(\xi) \cdot \text{id} \quad \text{für alle } a \in \mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C}$$

gilt. Desweiteren kann man zeigen, daß für alle $\xi \in \mathcal{F}_x^*$ und $a \in \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$ die Operatoren $\lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^*$ und $\lambda_a + \lambda_{a^*}^*$ antikommutieren:

Dazu sei wieder e_1, \dots, e_r eine Orthonormalbasis von $\mathcal{F}_x^* \otimes \mathbb{C}$ mit $e_i^* = e_i$ gewählt; da $(i\xi)^* = -i\xi$ gilt, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $i\xi = c \cdot e_1$ für $c = i\|\xi\| \in \mathbb{C}$ gilt. Ist $a = \sum_{j=1}^r a_j \cdot e_j$ und somit $a^* = \sum_{j=1}^r \bar{a}_j \cdot e_j$, so folgt

$$\lambda_a + \lambda_{a^*}^* = \sum_{j=1}^r a_j \cdot (\lambda_{e_j} + \lambda_{e_j}^*) \quad \text{und} \quad \lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^* = c \cdot (\lambda_{e_1} - \lambda_{e_1}^*)$$

aus der Tatsache, daß die Zuordnung $a \mapsto \lambda_a$ linear und $a \mapsto \lambda_a^*$ antilinear ist. Es genügt daher zu zeigen, daß die Operatoren $(\lambda_{e_j} + \lambda_{e_j}^*)$ und $(\lambda_{e_1} - \lambda_{e_1}^*)$ für alle $j = 1, \dots, r$ antikommutieren.

Für $j = 1$ folgt dies durch direktes Nachrechnen unter Ausnutzung von $\lambda_{e_1}^2 = 0 = (\lambda_{e_1}^*)^2$. Ist $j \neq 1$, so sieht man durch Anwenden der Operatoren auf die Orthonormalbasis $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ für $i_1 < \dots < i_p$ und $0 \leq p \leq r$, daß sowohl $\lambda_{e_1} \lambda_{e_j} = -\lambda_{e_j} \lambda_{e_1}$ als auch $\lambda_{e_1} \lambda_{e_j}^* = -\lambda_{e_j}^* \lambda_{e_1}$ gilt. Für die adjungierten Operatoren gilt dann ebenfalls $\lambda_{e_j}^* \lambda_{e_1}^* = -\lambda_{e_1}^* \lambda_{e_j}^*$ und $\lambda_{e_j} \lambda_{e_1}^* = -\lambda_{e_1}^* \lambda_{e_j}$, und es folgt wie behauptet

$$(\lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^*)(\lambda_a + \lambda_{a^*}^*) = -(\lambda_a + \lambda_{a^*}^*)(\lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^*).$$

Diese Identitäten werden später zur Berechnung der Symbole gewisser Pseudodifferentialoperatoren genutzt.

Allgemein gilt für ein hermitesches Vektorbündel über (M, \mathcal{F}) :

Satz 2.1.8. *Es sei $p : M \longrightarrow B$ eine glatte surjektive Submersion (mit zusammenhängenden Fasern) und $(\mu_t)_{t \in B}$ eine glatte Familie von Maßen auf M . Ist $E \longrightarrow M$ ein glattes hermitesches Vektorbündel, so besitzt der Raum $\Gamma_c(M, E)$ der glatten Schnitte mit kompaktem Träger die Struktur eines Prä-Hilbert- $C_c^\infty(B)$ -Moduls. Dieser läßt sich zu einem Hilbert- $C_0(B)$ -Modul $L^2(M, E)$ vervollständigen.*

Beweis. Für $\varphi \in C_c^\infty(B)$ definiert $\varphi \circ p$ eine glatte beschränkte Funktion auf M , und durch punktweise Multiplikation

$$\Gamma_c(M, E) \times C_c^\infty(B) \longrightarrow \Gamma_c(M, E), \quad (\xi, \varphi) \mapsto \xi \cdot (\varphi \circ p)$$

wird $\Gamma_c(M, E)$ zu einem rechten $C_c^\infty(B)$ -Modul.

Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_x}$ das hermitesche Produkt auf E_x für $x \in M$. Für zwei glatte Schnitte mit kompaktem Träger $\xi, \eta \in \Gamma_c(M, E)$ definiert die Zuordnung

$$x \mapsto \langle \xi(x), \eta(x) \rangle_{E_x}$$

eine glatte Funktion auf M mit kompaktem Träger. Integration nach der glatten Familie von Maßen $(\mu_t)_{t \in B}$ liefert eine glatte Funktion mit kompaktem Träger $\langle \xi, \eta \rangle \in C_c^\infty(B)$, wobei

$$\langle \xi, \eta \rangle(t) = \int_{x \in M_t} \langle \xi(x), \eta(x) \rangle_{E_x} d\mu_t(x)$$

gilt. Hierdurch wird ein inneres Produkt auf $\Gamma_c(M, E)$ definiert, welches linear in der zweiten Komponente ist und die Bedingungen

$$\langle \xi, \eta \cdot \phi \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \cdot \phi, \quad \langle \xi, \eta \rangle^* = \langle \eta, \xi \rangle \quad \text{sowie} \quad \langle \xi, \xi \rangle \geq 0 \quad \text{in } C_0(B)$$

erfüllt. Da $C_c^\infty(B) \subseteq C_0(B)$ eine dichte $*$ -Unteralgebra ist, zeigen Standard-Argumente (man vgl. etwa [RW98, Lemma 2.16]), daß sich $\Gamma_c(M, E)$ zu einem Hilbert- $C_0(B)$ -Modul $L^2(M, E)$ komplettieren läßt. \square

Bemerkung 2.1.9. Der Hilbert- $C_0(B)$ -Modul $L^2(M, E)$ läßt sich auch als (oberhalb) stetiges Feld von Hilberträumen über B auffassen. Bezeichnet M_t das durch $p^{-1}(t)$ definierte Blatt von (M, \mathcal{F}) , so läßt sich die Faser dieses Feldes in $t \in B$ mit $L^2(M_t, E|_{M_t}, \mu_t)$ identifizieren.

Es sei für den Moment angenommen, daß es zu der surjektiven Submersion mit zusammenhängenden Fasern $p : M \longrightarrow B$ einen Spalt (d.h. eine glatte Abbildung $u : B \longrightarrow M$ mit $p \circ u = \text{id}$) gibt, so daß sich B mit einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit von M identifizieren läßt.

Nach 1.3.16 ist $X := M \cong M \times_B B$ eine Äquivalenz der glatten Gruppoide $M \times_B M$ und $B \cong B \times_B B$. Bezeichnet $(\mu_t)_{t \in B}$ wieder eine glatte Familie von Maßen für die Submersion $M \xrightarrow{p} B$, so definiert $\lambda = (\mu_{p(y)})_{y \in M}$ ein glattes linkes Haarsystem auf $M \times_B M$. Die Familie von Punktmaßen auf $B \cong B \times_B B$ ist ein glattes linkes Haarsystem des Gruppoiden B .

Setzt man $\mathfrak{A} := \text{End}(E)$, $\mathfrak{B} := \text{End}(E)|_{B \times_B B}$ und $\mathfrak{E} := \text{End}(E)|_X$, so sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Fell-Bündel über den Gruppoiden $M \times_B M$ bzw. B , und das Paar (X, \mathfrak{E}) ist

eine $(M \times_B M, \mathfrak{A})$ - (B, \mathfrak{B}) -Äquivalenz im Sinne von 1.3.15. Die Operationen auf dem Prä-Imprimitivitätsbimodul $\mathfrak{X}_0 := \Gamma_c(X, \mathfrak{E})$ aus 1.3.17 sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} (f \cdot \xi)(x, t) &= \int_{y \in M_t} f(x, y) \circ \xi((y, x) \cdot (x, t)) \, d\mu_t(y) \\ (\xi \cdot g)(x, t) &= \xi(x, t) \circ g(t) \\ \mathfrak{a}_0 \langle \xi, \eta \rangle(x, y) &= \xi((x, y) \cdot (y, p(y))) \circ \eta(y, p(y))^* = \xi(x, p(y)) \circ \eta(y, p(y))^* \\ \langle \xi, \eta \rangle_{\mathfrak{B}_0}(t) &= \int_{x \in M_t} \xi(x, t)^* \circ \eta(x, t) \, d\mu_t(x) \end{aligned}$$

für $f \in \Gamma_c(M \times_B M, \mathfrak{A}) =: \mathfrak{A}_0$, $g \in \Gamma_c(B, \mathfrak{B}) =: \mathfrak{B}_0$ und $\xi, \eta \in \Gamma_c(X, \mathfrak{E})$.

Unter Ausnutzung der Morita-Äquivalenz aus 1.3.17 kann man in dieser Situation zeigen:

Satz 2.1.10. *Die Gruppoid- C^* -Algebra $C^*(M \times_B M, \text{End}(E))$ ist isomorph zur Algebra der kompakten Operatoren auf $L^2(M, E)$.*

Beweis. Für $f \in \Gamma_c(M \times_B M, \text{End}(E))$ und $g \in \Gamma_c(M, E)$ setze man

$$\begin{aligned} (\varphi(f)(g))(x) &:= (f \star g)(x) := \int_{\gamma \in (M \times_B M)_x} f(\gamma^{-1})(g(r(\gamma))) \, d\lambda_x(\gamma) \\ &= \int_{y \in M_{p(x)}} f(x, y)(g(y)) \, d\mu_{p(x)}(y) \in E_x. \end{aligned}$$

Dann ist $\pi(f)(g)$ ein Element von $\Gamma_c(M, E)$, denn die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} M \times_B M & \longrightarrow & s^*E \otimes r^*E^* \otimes r^*E & \longrightarrow & s^*E, \\ (y, x) & \mapsto & f(x, y) \otimes g(y) & \mapsto & f(x, y)(g(y)) \end{array}$$

ist ein glatter Schnitt. Durch Integration nach dem (rechten) Haarsystem erhält man somit einen glatten Schnitt von M mit Werten in E , dessen Träger kompakt in M ist. Man rechnet direkt nach, daß durch

$$\varphi : \Gamma_c(M \times_B M, \text{End}(E)) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(M, E)), \quad f \mapsto \varphi(f)$$

eine stetige $*$ -Darstellung definiert wird.

Für $f_1, f_2 \in \Gamma_c(M, E)$ ist $f_2 \odot f_1'$, definiert durch

$$(f_2 \odot f_1')(x, y) := f_2(x) \cdot \langle f_1(y), \cdot \rangle_{E_y},$$

ein Element von $\Gamma_c(M \times_B M, \text{End}(E))$, und die Elemente dieser Form erzeugen einen dichten Unterraum bezüglich der induktiven Limes-Topologie.

Ist $g \in L^2(M, E)$, so folgt aus der Definition von φ und der Beschreibung des Skalarprodukts auf $L^2(M, E)$

$$\begin{aligned}\varphi(f_2 \odot f_1')(g)(x) &= f_2(x) \cdot \langle f_1, g \rangle(\text{pr}(x)) \\ &= (f_2 \cdot \langle f_1, g \rangle)(x) \\ &= \vartheta_{f_2, f_1}(g)(x).\end{aligned}$$

Das Bild von φ liegt daher (dicht) in den kompakten Operatoren auf $L^2(M, E)$. Wählt man eine treue Darstellung $\mathcal{K}(L^2(M, E)) \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$ auf einem (separablen) Hilbertraum, so folgt aus dem Desintegrationssatz 1.3.13, daß die Operatornorm $\|\varphi(\cdot)\|$ durch die C^* -Norm auf $C^*(M \times_B M, \text{End}(E))$ majorisiert wird. Die Darstellung φ läßt sich daher zu einer $*$ -Darstellung

$$\varphi : C^*(M \times_B M, \text{End}(E)) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(M, E))$$

fortsetzen, deren Bild gerade die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(L^2(M, E))$ sind.

Es bleibt die Injektivität dieser Fortsetzung zu zeigen. Hierzu nutzt man die Tatsache, daß $C^*(M \times_B M, \text{End}(E)) = C^*(M \times_B M, \mathfrak{A})$ nach 1.3.17 Morita-äquivalent zu $C^*(B, \text{End}(E)|_B) = C^*(B, \mathfrak{B})$ ist.

Da der Gruppoid B trivial und die Einschränkung $\text{End}(E)$ ein Bündel von C^* -Algebren über B ist, gilt $C^*(B, \text{End}(E)|_B) \cong C_0(B, \text{End}(E)|_B)$. Die Abbildung

$$\varrho : C_0(B, \text{End}(E)|_B) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(B, E|_B)), \quad \varrho(h)(g)(t) := h(t)(g(t))$$

ist eine treue $*$ -Darstellung. Bezeichnet \mathfrak{X} die Morita-Äquivalenz aus 1.3.17, so genügt es zu zeigen, daß die Darstellung φ unitär äquivalent zur induzierten Darstellung $\mathfrak{X} - \text{Ind } \varrho$ ist, denn mit ϱ ist dann auch φ injektiv.

Die Abbildung

$$\Phi : \Gamma_c(X, \mathfrak{E}) \otimes_{\Gamma_c(B, \mathfrak{B})} \Gamma_c(B, E|_B) \longrightarrow \Gamma_c(M, E), \quad \Phi(\xi \otimes h)(x) := \xi(x, t)(h(t))$$

erhält die inneren Produkte, denn für $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma_c(X, \mathfrak{E})$, $h_1, h_2 \in \Gamma_c(B, E|_B)$ und $t \in B$ gilt

$$\langle \xi_1 \otimes h_1, \xi_2 \otimes h_2 \rangle(t) = \langle \Phi(\xi_1 \otimes h_1), \Phi(\xi_2 \otimes h_2) \rangle(t),$$

wie man mithilfe der Formeln für die Operationen auf $\mathfrak{X}_0 = \Gamma_c(X, \mathfrak{E})$ nachrechnet. Außerdem ist das Bild von Φ faserweise dicht und invariant unter Multiplikation mit Funktionen aus $C_0(B)$; nach Fells Kriterium 1.2.6 liegt das Bild von Φ also dicht in $L^2(M, E)$. Die Abbildung Φ läßt sich daher zu einem isometrischen Isomorphismus

$$\Phi : \mathfrak{X} \otimes_{C^*(B, \mathfrak{B})} L^2(B, E|_B) \longrightarrow L^2(M, E)$$

von Hilbert- $C_0(B)$ -Moduln auf die Vervollständigungen fortsetzen.

Nach Definition der induzierten Darstellung gilt dann für $f \in \Gamma_c(M \times_B M, \mathfrak{A})$, $\xi \in \Gamma_c(X, \mathfrak{E})$ und $h \in \Gamma_c(B, E|_B)$

$$\begin{aligned}
\Phi((\mathfrak{X} - \text{Ind } \varrho)(f)(\xi \otimes h))(x) &= \Phi((f \cdot \xi) \otimes h)(x) \\
&= (f \cdot \xi)(x, t)(h(t)) \\
&= \int_{y \in M_t} [f(x, y) \circ \xi((y, t))](h(t)) \, d\mu_t(y) \\
&= \int_{y \in M_t} f(x, y)[\Phi(\xi \otimes h)(y)] \, d\mu_t(y) \\
&= (\varphi(f))(\Phi(\xi \otimes h))(x).
\end{aligned}$$

Unter dem Isomorphismus Φ ist daher $\mathfrak{X} - \text{Ind } \varrho$ unitär äquivalent zu φ , was noch zu zeigen war. \square

Für die Konstruktion des Dirac-Elements ist insbesondere der Hilbertmodul der quadrat-integrierbaren Differentialformen einer geblätterten Mannigfaltigkeit von Interesse. In der Situation von 2.1.8 gilt:

Satz 2.1.11. *Besitzt das durch die Submersion definierte Unterbündel \mathcal{F} eine Riemannsche Struktur, so wirkt die Algebra der im Unendlichen verschwindenden stetigen Schnitte $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell(\mathcal{F}^*))$ durch adjungierbare Operatoren auf dem Hilbertmodul $L^2(M, \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C})$ der quadrat-integrierbaren vertikalen Differentialformen.*

Beweis. Ist $\xi : M \longrightarrow T^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$ ein glattes komplexwertiges Kovektorfeld, so wirkt ξ punktweise durch $\lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}$ auf $\Gamma_c(M, \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C})$. Die Zuordnung ist $C_0^\infty(M)$ -linear, und aufgrund der universellen Clifford-Eigenschaft läßt sie sich auf die Algebra der glatten Schnitte von $\mathbb{C}\ell(\mathcal{F}^*)$ fortsetzen.

Ist χ ein solcher Schnitt und sind ω, η glatte vertikale Differentialformen mit kompaktem Träger, so gilt

$$\begin{aligned}
\|\chi(\omega)\|^2 &= \sup_{t \in B} \int_{x \in M_t} \langle \chi_x(\omega(x)), \chi_x(\omega(x)) \rangle \, d\mu_t(x) \\
&\leq \sup_{t \in B} \int_{x \in M_t} \|\chi_x\|^2 \langle \omega(x), \omega(x) \rangle \, d\mu_t(x) \\
&\leq \|\chi\|_\infty^2 \cdot \|\omega\|^2
\end{aligned}$$

sowie $\langle \chi(\omega), \eta \rangle = \langle \omega, \chi^*(\eta) \rangle$, da $\mathbb{C}\ell(\mathcal{F}^*)$ faserweise auf $\Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$ durch adjungierbare Operatoren wirkt. Die glatten Schnitte mit kompaktem Träger ins vertikale Clifford-Bündel wirken also durch adjungierbare Operatoren auf $L^2(M, \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C})$.

Da $\Gamma_c^\infty(M, \mathbb{C}\ell(\mathcal{F}^*))$ bezüglich der Supremumsnorm dicht in $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell(\mathcal{F}^*))$ liegt, läßt sich diese Darstellung auf $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell(\mathcal{F}^*))$ fortsetzen. \square

Es stellt sich natürlich die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine glatte Familie von Maßen auf M existiert. In der klassischen Situation einer glatten Mannigfaltigkeit kann das Integral glatter Funktionen (mit kompaktem Träger) über eine Volumenform bzw. mithilfe einer Riemannschen Struktur definiert werden. Ist die Mannigfaltigkeit orientierbar und Riemannsch, so liefern beide Definitionen dasselbe Integral; vgl. [War83, 4.10].

Definition 2.1.12. Es sei (M, \mathcal{F}) eine geblätterte Mannigfaltigkeit mit $\text{rk } \mathcal{F} = r$. Ein nirgends-verschwindender glatter Schnitt

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^r \mathcal{F}^*$$

heißt eine vertikale Volumenform auf (M, \mathcal{F}) . Die Blätterung (M, \mathcal{F}) heißt (vertikal) orientierbar, falls eine vertikale Volumenform existiert.

Ist (U, ϕ) eine Blätterungskarte der vertikal orientierten geblätterten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) mit Koordinatenfunktionen $(x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^q)$, so bilden die (vertikalen) Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r}$ einen lokalen Rahmen für $\mathcal{F}|_U$. Die Karte heißt positiv (orientiert), falls in jedem Punkt $p \in U$ die durch diesen Rahmen gegebene Basis von \mathcal{F}_p positiv orientiert ist.

Ist eine weitere Blätterungskarte $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ gegeben, deren Koordinatenfunktionen mit $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^r, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^q)$ bezeichnet seien, so folgt aus der speziellen Gestalt der Blätterungskarten, daß $\frac{\partial y^j}{\partial \tilde{x}^i} = 0$ und somit

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$$

für alle $p \in U \cap \tilde{U}$ gilt. Ist $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ ebenfalls positiv, so gilt $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) > 0$ auf $U \cap \tilde{U}$.

Bezüglich der positiven Karte (U, ϕ) läßt sich die vertikale Volumenform ω lokal in der Form

$$\omega_U = h_U \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$$

mit einer strikt positiven, glatten Funktion h_U auf U schreiben.

Besitzt das vertikale Tangentialbündel \mathcal{F} eine Riemannsche Metrik, so sind für eine Blätterungskarte (U, ϕ) mit Koordinatenfunktionen wie oben die Komponenten der Riemannschen Metrik definiert durch

$$g_{ij} \Big|_p := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle_p;$$

diese sind glatte Funktionen auf U mit $g_{ij} > 0$. Setzt man $G := \det(g_{ij})$, so ist dies ebenfalls eine glatte Funktion auf U , und es gilt $G > 0$, da die Matrix (g_{ij}) positiv und symmetrisch ist.

Satz 2.1.13. *Ist (M, \mathcal{F}) vertikal orientiert und besitzt \mathcal{F} eine Riemannsche Struktur, so kann eine vertikale Volumenform ω auf M dadurch definiert werden, daß für jede positive Blätterungskarte (U, ϕ)*

$$\omega_U = G^{1/2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$$

gilt, wobei $(x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^q)$ die Koordinatenfunktionen von (U, ϕ) sind. Die durch ω definierte Orientierung von (M, \mathcal{F}) stimmt mit der ursprünglich gegebenen überein.

Beweis. Nach den oben angestellten Überlegungen ist nur noch zu zeigen, daß die lokale Definition von ω verträglich mit Kartenwechseln ist.

Sind (U, ϕ) und $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ zwei positive Blätterungskarten mit Koordinatenfunktionen $(x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^q)$ bzw. $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^r, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^q)$, so gilt auf $U \cap \tilde{U}$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$$

und somit

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \right\rangle = \sum_{k,l=1}^r \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right\rangle = \sum_{k,l=1}^r \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j} \cdot g_{kl}.$$

Hieraus folgt

$$\tilde{G} = \det(\tilde{g}_{ij}) = \left[\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) \right]^2 \cdot \det(g_{kl}) = \left[\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) \right]^2 \cdot G.$$

Da beide Blätterungskarten positiv orientiert sind, ist $\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) > 0$. Somit ergibt sich $(\tilde{G})^{1/2} = \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) \cdot G^{1/2}$, und es folgt

$$\begin{aligned} \omega|_{U \cap \tilde{U}} &= (\tilde{G})^{1/2} d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^r \\ &= G^{1/2} \cdot \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\right) \cdot d\tilde{x}^1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}^r \\ &= G^{1/2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r, \end{aligned}$$

wobei die letzte Identität sich aus dem Transformationsverhalten von Differentialformen unter Kartenwechsel ergibt. \square

Im folgenden sei die Blätterung (M, \mathcal{F}) wieder durch eine surjektive Submersion $p : M \longrightarrow B$ mit zusammenhängenden Fasern gegeben. Die Einschränkung von \mathcal{F} auf die Faser $M_t = p^{-1}(t)$ läßt sich mit dem Tangentialbündel der Faser identifizieren.

Ist ω eine vertikale Volumenform auf (M, \mathcal{F}) , so definiert sie eine Orientierung auf dem Bündel \mathcal{F} , und die Einschränkung $\omega_t = \omega|_{M_t}$ ist eine Volumenform auf der r -dimensionalen Mannigfaltigkeit M_t (wobei wieder $r = \text{rk } \mathcal{F}$ sei).

Für eine glatte Funktion mit kompaktem Träger $f \in C_c^\infty(M)$ ist $f \cdot \omega_t$ eine glatte r -Form mit kompaktem Träger auf M_t , und die Zuordnung

$$t \mapsto \left(\int_M f \cdot \omega \right)(t) := \int_{M_t} f \cdot \omega_t$$

ist eine wohldefinierte Abbildung auf B . Insbesondere ist $f \mapsto \int_{M_t} f \cdot \omega_t$ eine nicht-triviale positive Linearform. Somit definiert eine vertikale Volumenform eine treue Familie von Maßen $(\mu_t)_{t \in B}$ auf M mit $\text{supp } \mu_t = M_t$. Es gilt:

Satz 2.1.14. *Die durch eine vertikale Volumenform $\omega : M \longrightarrow \Lambda^k \mathcal{F}^*$ definierte Familie von Maßen für $M \xrightarrow{p} B$ ist glatt. Lokal sind die Maße äquivalent zum Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^r .*

Beweis. Es sei (U, ϕ) eine (positiv orientierte) Blätterungskarte vom Typ (\ddagger) mit $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ und Koordinatenfunktionen $x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^q$. Desweiteren sei (V, ψ) eine Karte für B mit $V \supseteq p(U)$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & U_1 \times U_2 \\ p \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 \\ V & \xrightarrow{\psi} & \psi(V) \end{array}$$

kommutiert. Es existiert eine glatte Funktion $h > 0$ auf U , so daß für die Einschränkung der vertikalen Volumenform

$$\omega|_U = h \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r$$

gilt. Ist $f \in C_c^\infty(M)$ mit $\text{supp}(f) \subseteq U$, so gilt für alle $t \in p(U)$

$$\int_{M_t} f \cdot \omega_t = \int_{U_1} (f \circ \phi^{-1}) \cdot (h \circ \phi^{-1}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^r.$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} U_1 \times p(U) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x_1, \dots, x_r, t) &\mapsto (f \circ \phi^{-1}) \cdot (h \circ \phi^{-1})(x_1, \dots, x_r, \psi(t)) \end{aligned}$$

ist glatt, und als ein von einem Parameter abhängiges Integral ist dann auch die Abbildung $t \mapsto \int_{M_t} f \cdot \omega_t$ glatt für alle $t \in p(U)$. Durch Wahl einer geeigneten offenen Überdeckung von M durch Blätterungskarten mit einer untergeordneten Partition der Eins folgt dann die Aussage des Satzes. \square

Ist (M, \mathcal{F}) eine vertikal orientierte geblätterte Mannigfaltigkeit und (e_1, \dots, e_r) eine orientierte Orthonormalbasis von \mathcal{F}_x^* im Punkte $x \in M$ bezüglich einer Riemannschen Struktur auf \mathcal{F} , so bildet die Familie der Dachprodukte $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ für $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r$ eine Orthonormalbasis von $\Lambda^p \mathcal{F}_x^*$. Durch

$$\star(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{r-p}},$$

wobei $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{r-p}\} = \{1, \dots, r\}$ gilt und $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{r-p}}$ positiv orientiert ist, wird eine lineare Abbildung

$$\star : \Lambda^p \mathcal{F}_x^* \longrightarrow \Lambda^{r-p} \mathcal{F}_x^*$$

definiert. Die faserweise definierten Homomorphismen sind unabhängig von der Wahl der orientierten Orthonormalbasis. Die lokal bezüglich eines (positiv orientierten) orthonormalen Rahmens gegebenen Abbildungen verkleben daher zu einem Vektorbündelhomomorphismus $\star : \Lambda^p \mathcal{F}^* \longrightarrow \Lambda^{r-p} \mathcal{F}^*$.

Definition 2.1.15. Der Vektorbündelhomomorphismus \star definiert für alle $0 \leq p \leq r$ einen $C^\infty(M)$ -linearen glatten Homomorphismus

$$\star^p : \Omega^p(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r-p}(M, \mathcal{F}), \quad (\star^p \omega)(x) := \star(\omega(x)).$$

Der Operator

$$\star := \bigoplus_{p=0}^r \star^p : \Omega^*(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^*(M, \mathcal{F})$$

auf den glatten vertikalen Differentialformen von (M, \mathcal{F}) heißt der (vertikale) Hodge- \star -Operator auf (M, \mathcal{F}) .

Der vertikale Hodge- \star -Operator hat die gewohnten Eigenschaften; so gilt z.B.

$$\star^{r-p} \circ \star^p = (-1)^{p(r-p)} \cdot \text{id}.$$

Nächstes Ziel ist es, die deRham-Ableitung vertikaler Differentialformen auf einer geblätterten Mannigfaltigkeit zu definieren. Dazu sei zunächst die lokale Situation betrachtet:

Auf einer offenen Teilmenge $U = U_1 \times U_2$ von $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ sei eine Blätterung durch die Projektion $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ auf die zweite Komponente definiert. Das vertikale Tangentialbündel \mathcal{F} von U läßt sich mit dem trivialen Bündel $U \times \mathbb{R}^r$ identifizieren. Jede glatte vertikale Differentialform auf U ist von der Form

$$\omega = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} f_J dx_J,$$

wobei f_J eine glatte Funktion auf U und $dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ für die Teilmenge $J = \{j_1 < \dots < j_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ ist. In diesem einfachen Fall läßt sich jede vertikale Differentialform insbesondere auch als gewöhnliche Differentialform auf U auffassen. Jede glatte vertikale p -Form ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte auf glatten vertikalen Vektorfeldern.

Durch

$$d^{\mathcal{V}} \omega = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J$$

wird ein linearer Operator

$$d^{\mathcal{V}} : \Omega^*(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^*(U, \mathcal{F})$$

definiert; dieser wird als vertikale deRham-Ableitung bezeichnet.

Die vertikale deRham-Ableitung erfüllt wie das gewöhnliche deRham-Differential die folgenden Eigenschaften, wodurch der Operator $d^{\mathcal{V}}$ eindeutig charakterisiert wird:

- (i) $d^{\mathcal{V}} \Omega^p(U, \mathcal{F}) \subseteq \Omega^{p+1}(U, \mathcal{F})$ für $p \geq 0$.
- (ii) Ist $f \in \Omega^0(U, \mathcal{F}) = C^\infty(U)$, so ist $d^{\mathcal{V}} f$ die vertikale 1-Form, welche durch $d^{\mathcal{V}} f(X) = Xf$ für jedes vertikale Vektorfeld X auf U gegeben ist.
- (iii) $d^{\mathcal{V}} \circ d^{\mathcal{V}} = 0$.
- (iv) $d^{\mathcal{V}}(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d^{\mathcal{V}} \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \cdot \omega_1 \wedge (d^{\mathcal{V}} \omega_2)$ für $\omega_1 \in \Omega^p(U, \mathcal{F})$ und $\omega_2 \in \Omega^*(U, \mathcal{F})$.

Es ist klar, daß der Operator $d^{\mathcal{V}}$ vertikale Differentialformen mit kompaktem Träger in ebensolche überführt.

Wie bereits oben erwähnt, ist jede vertikale p -Form eindeutig durch die Werte auf vertikalen Vektorfeldern bestimmt. Ist ω eine vertikale p -Form auf U und sind X_1, \dots, X_{p+1} vertikale Vektorfelder, so gilt

$$(p+1) \cdot d^{\mathcal{V}} \omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}).$$

Dabei ist $X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})$ die glatte Funktion auf U , welche durch Richtungsableitung der Funktion $\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})$ nach dem vertikalen

Vektorfeld X_i gegeben ist, und im zweiten Summanden wird ausgenutzt, daß die Lie-Klammer zweier vertikaler Vektorfelder ebenfalls ein vertikales Vektorfeld ist. Die Aussagen sind bekannt aus der Theorie glatter Mannigfaltigkeiten.

Um zu zeigen, daß die lokale Beschreibung von d^V einen wohldefinierten Operator auf einer geblätterten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) definiert, ist das Verhalten unter dem Kartenwechsel bezüglich Blätterungskarten zu untersuchen:

Lemma 2.1.16. *Sind $U = U_1 \times U_2$ sowie $V = V_1 \times V_2$ offene Teilmengen von $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ und ist $\mu : U \longrightarrow V$ ein Diffeomorphismus, welcher von der Form $\mu(x, y) = (g(x, y), h(y))$ ist, so ist das vertikale deRham-Differential verträglich mit der Abbildung μ , d.h. es gilt $\mu^*(d^V \omega) = d^V(\mu^* \omega)$ für jede vertikale Differentialform ω auf V .*

Beweis. Unter der Identifikation $T(U) = T(U_1) \oplus T(U_2)$ gilt

$$\mathcal{F}_U = \{(X, 0) \in T(U) \mid X \in T(U_1)\}.$$

Die Ableitung von μ in einem Punkt $(x, y) \in U$ ist dann von der Form

$$d\mu_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}|_{(x,y)} & \frac{\partial g}{\partial y}|_{(x,y)} \\ 0 & \frac{\partial h}{\partial y}|_{(x,y)} \end{pmatrix}.$$

Es folgt, daß die Einschränkung von $d\mu$ auf die vertikalen Tangentialbündel einen Vektorbündelmorphismus $d\mu : \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F}_V$ und das Zurückziehen einer vertikalen Differentialform auf V mit μ eine vertikale Differentialform auf U definiert.

Da μ ein Diffeomorphismus ist, ist für ein vertikales Vektorfeld X auf U auch $Y = d\mu \cdot X$, definiert durch

$$Y_{\mu(x,y)} := d\mu_{(x,y)}(X_{(x,y)}),$$

ein vertikales Vektorfeld auf V . Zwei Vektorfelder X und Y , welche diese Bedingung erfüllen, heißen μ -adaptiert. Äquivalent zu obiger Bedingung ist, daß die Identität

$$(Yf) \circ \mu = X(f \circ \mu) \quad \text{für alle } f \in C^\infty(V)$$

gilt. Sind X_1, X_2 vertikale Vektorfelder auf U und ist $Y_i = d\mu \cdot X_i$ das zu X_i μ -adaptierte Vektorfeld, so sind auch $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ μ -adaptiert, d.h. es gilt $[Y_1, Y_2] = d\mu \cdot [X_1, X_2]$. Da die vertikalen Tangentialbündel integrierbar sind, sind die Lie-Klammern definitionsgemäß vertikale Vektorfelder auf U bzw. V . Für Details über adaptierte Vektorfelder vergleiche man z.B. [Hel78, Chapter I, Prop. 3.3]. Da μ ein Diffeomorphismus ist, ist jedes vertikale Vektorfeld auf V μ -adaptiert zu einem vertikalen Vektorfeld auf U .

Ist ω eine vertikale p -Form auf V , so ist ihr Pullback als vertikale p -Form festgelegt durch die Werte auf vertikalen Vektorfeldern. Sind X_i und Y_i μ -adaptierte (vertikale) Vektorfelder auf U bzw. V , so gilt

$$\mu^* \omega(X_1, \dots, X_p) = \omega(Y_1, \dots, Y_p) \circ \mu.$$

Andererseits ist das deRham-Differential gegeben durch

$$\begin{aligned} (p+1) \cdot d^{\mathcal{V}} \omega(Y_1, \dots, Y_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} Y_i \cdot \omega(Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_{p+1}). \end{aligned}$$

Somit gilt für das Pullback

$$\begin{aligned} \mu^*(d^{\mathcal{V}} \omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) &= d^{\mathcal{V}} \omega(Y_1, \dots, Y_{p+1}) \circ \mu \\ &= \frac{1}{p+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} (Y_i \cdot \omega(Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_{p+1})) \circ \mu \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_{p+1}) \circ \mu \right). \end{aligned}$$

Berechnet man nun das deRham-Differential von $\mu^* \omega$, so erhält man

$$\begin{aligned} d^{\mathcal{V}}(\mu^* \omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \frac{1}{p+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \cdot (\mu^* \omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (\mu^* \omega)([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}) \right) \\ &= \frac{1}{p+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \cdot (\omega(Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_{p+1}) \circ \mu) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_{p+1}) \circ \mu \right). \end{aligned}$$

Dabei wird im letzten Schritt ausgenutzt, daß auch die durch die Lie-Klammern $[X_i, X_j]$ und $[Y_i, Y_j]$ definierten vertikalen Vektorfelder μ -adaptiert sind. Für alle $i = 1, \dots, p+1$ gilt

$$f_i := \omega(Y_1, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_{p+1}) \in C^\infty(V).$$

Da X_i und Y_i μ -adaptiert sind, folgt $X_i \cdot (f_i \circ \mu) = (Y_i \cdot f_i) \circ \mu$. Dies zeigt die Identität $\mu^*(d^{\mathcal{V}} \omega) = d^{\mathcal{V}}(\mu^* \omega)$ und somit die Aussage des Lemmas. \square

Mit diesen Vorbereitungen erhält man sofort:

Satz 2.1.17. *Ist (M, \mathcal{F}) eine glatte geblätterte Mannigfaltigkeit, so liefert das lokal in Blätterungskarten der Form (\ddagger) definierte deRham-Differential eine wohldefinierte Abbildung*

$$d^{\mathcal{V}} : \Omega^{*,\mathcal{V}}(M) \longrightarrow \Omega^{*,\mathcal{V}}(M).$$

Die Einschränkung von $d^{\mathcal{V}}$ auf ein Blatt L entspricht dem gewöhnlichen deRham-Differential d_L auf L , d.h. für eine vertikale Differentialform $\omega \in \Omega^(M, \mathcal{F})$ gilt*

$$(d^{\mathcal{V}} \omega)|_L = d_L(\omega|_L).$$

Beweis. Die Blätterung (M, \mathcal{F}) besitzt eine Überdeckung durch Blätterungskarten der Form (\ddagger) . Nach dem vorausgehenden Lemma ist das lokal definierte deRham-Differential vertikaler Differentialformen für je zwei solche Karten verträglich mit den auftretenden Kartenwechseln. Die lokalen Operatoren verkleben somit zu einem wohldefinierten Operator

$$d^{\mathcal{V}} : \Omega^{*,\mathcal{V}}(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{*,\mathcal{V}}(M, \mathcal{F}).$$

Die Mannigfaltigkeitsstruktur eines Blattes $L \subseteq M$ ist über die Platten in L definiert. Ist (U, ϕ) eine Blätterungskarte der Form (\ddagger) , also $\phi(U) = U_1 \times U_2$, und P die durch $\phi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ definierte Platte, so hängt die Einschränkung

$$(d^{\mathcal{V}} \omega)|_P = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J$$

für $\omega = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} f_J dx_J$, gegeben in lokalen Koordinaten, nur von den Einschränkungen $f_J|_P = f_J(\cdot, c)$, also nur von der Einschränkung von $\omega|_P$ ab, und aus obiger Beschreibung folgt, daß $(d^{\mathcal{V}} \omega)|_L = d_L \omega|_L$ gerade dem gewöhnlichen deRham-Differential der durch Einschränkung erhaltenen Differentialform $\omega|_L$ entspricht. \square

Es ist klar, daß das vertikale deRham-Differential vertikale Differentialformen mit kompaktem Träger in ebensolche überführt; an der lokalen Form erkennt man, daß

$$\text{supp}(d^{\mathcal{V}} \omega) \subseteq \text{supp} \omega$$

gilt.

Bemerkung 2.1.18. Ist die Blätterung (M, \mathcal{F}) gegeben durch eine surjektive Submersion $p : M \longrightarrow B$ mit zusammenhängenden Fasern, so sind die Blätter $M_t = p^{-1}(t)$ abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von M . Nach Wahl einer geeigneten lokal endlichen Überdeckung von M durch Blätterungskarten (mit einer untergeordneten Partition der Eins) und durch Übergang zu lokalen Trivialisierungen des vertikalen äußeren Bündels läßt sich jede Differentialform mit kompaktem Träger auf einer Faser M_t zu einer vertikalen Differentialform auf M mit kompaktem Träger fortsetzen.

Definition 2.1.19. Ist (M, \mathcal{F}) eine vertikal orientierte Riemannsche geblätterte Mannigfaltigkeit mit $r = \text{rk } \mathcal{F}$, so definiert $d^{\mathcal{V},*,p} = (-1)^{r(p+1)+1} \star \circ d^{\mathcal{V}} \circ \star$ einen Operator auf den glatten vertikalen p -Formen $\Omega^p(M, \mathcal{F})$ mit Werten $\Omega^{p-1}(M, \mathcal{F})$. Der Operator

$$d^{\mathcal{V},*} := \bigoplus_{p=0}^r d^{\mathcal{V},*,p} : \Omega^{*,\mathcal{V}}(M) \longrightarrow \Omega^{*,\mathcal{V}}(M)$$

heißt der formal adjungierte Operator zum vertikalen deRham-Differential $d^{\mathcal{V}}$.

Es sei kurz an die Definition von Differentialoperatoren auf glatten Mannigfaltigkeiten erinnert. Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n , und sind E bzw. F glatte (komplexe) Vektorbündel über X , so heißt eine lineare Abbildung $P : \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, F)$ ein glatter Differentialoperator von Ordnung m auf X , falls folgendes gilt:

Jeder Punkt aus X besitzt eine Umgebung U mit Koordinatenfunktionen (x_1, \dots, x_n) und lokalen Trivialisierungen $E|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}^p$ sowie $F|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{C}^q$, so daß P auf U in der Form

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} A^\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist jedes $A^\alpha(x)$ eine $q \times p$ -Matrix glatter komplexwertiger Funktionen auf U , und es gilt $A^\alpha(x) \neq 0$ für mindestens ein $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = m$.

Für einen solchen Differentialoperator der Ordnung m ist sein Hauptsymbol als Schnitt $\sigma(P) \in \Gamma(X, (\otimes^m TX) \otimes \text{Hom}(E, F))$ wie folgt definiert:

Für einen Vektorraum W ist das m -fache Tensorprodukt $\otimes^m W$ kanonisch isomorph zum Raum der homogenen Polynomfunktionen vom Grad m auf dem Dualraum W^* . Für jeden Kotangentenvektor $\xi \in T_x^* X$ liefert das Hauptsymbol, welches in den obigen lokalen Koordinaten und Trivialisierungen durch

$$\sigma(x, \xi; P) = i^m \sum_{|\alpha|=m} A^\alpha(x) \xi^\alpha \quad \text{für } \xi = \sum_{k=1}^n \xi_k dx_k$$

definiert ist, einen Homomorphismus

$$\sigma(x, \xi; P) : E_x \longrightarrow F_x.$$

Durch die lokalen Beschreibungen ist $\sigma(P)$ eindeutig bestimmt. Lokal läßt sich auch das totale Symbol von P durch

$$\sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} A^\alpha(x) \xi^\alpha$$

definieren; die lokal definierten totalen Symbole verkleben aber im allgemeinen nicht zu einem globalen Element auf der Mannigfaltigkeit X .

Ferner gilt: Sind $P, P' : \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, F)$ und $Q : \Gamma(X, F) \longrightarrow \Gamma(X, F')$ Differentialoperatoren auf X (wobei P und P' von gleicher Ordnung seien), so gilt für alle $x \in X$, $\xi \in T_x^*X$ und $t, t' \in \mathbb{R}$

$$\sigma(x, \xi; tP + t'P') = t \cdot \sigma(x, \xi; P) + t' \cdot \sigma(x, \xi; P')$$

und

$$\sigma(x, \xi; Q \circ P) = \sigma(x, \xi; Q) \circ \sigma(x, \xi; P).$$

Gleiches läßt sich natürlich auch für reelle Vektorbündel E und F definieren; die obigen Aussagen finden sich etwa in [LM89, III.1].

Zurück zur Situation geblätterter Mannigfaltigkeiten:

Per Definition ist \mathcal{F} ein Unterbündel von TM ; im Übergang zu den dualen Bündeln erhält man somit einen kanonischen Epimorphismus von Vektorbündeln

$$T^*M \longrightarrow \mathcal{F}^*, \quad \xi \mapsto \xi^\vee.$$

Ist die Blätterung (M, \mathcal{F}) Riemannsch, so lassen sich die Riemannschen Strukturen auf \mathcal{F} bzw. \mathcal{F}^* und den äußeren Bündeln in kanonischer Weise zu hermiteschen Strukturen auf die Komplexifizierungen der Bündel fortsetzen; ebenso lassen sich die Operatoren d^\vee und $d^{\vee,*}$ auf die komplexwertigen vertikalen Differentialformen fortsetzen. Sowohl im reellen wie auch im komplexen Fall gilt:

Proposition 2.1.20. *Das vertikale deRham-Differential d^\vee und sein formal adjungierter Operator $d^{\vee,*}$ sind Differentialoperatoren von Ordnung 1. Die Hauptsymbole hängen nur von den Einschränkungen der Operatoren auf die Blätter und den Elementen des vertikalen Kotangentbündels \mathcal{F}^* von M ab, d.h. es gilt*

$$\sigma(x, \xi; d^\vee) = \sigma(x, \xi^\vee; d^\vee|_{L_x})$$

und

$$\sigma(x, \xi; d^{\vee,*}) = \sigma(x, \xi^\vee; d^{\vee,*}|_{L_x}),$$

wobei L_x das Blatt von M sei, welches x enthält.

Beweis. Per Definition ist das vertikale deRham-Differential lokal definiert auf Blätterungskarten der Form (\ddagger) . Ist (U, ϕ) eine solche Karte mit $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ mit lokalen Koordinaten (x_1, \dots, x_r) für U_1 und (y_1, \dots, y_q) für U_2 , so trivialisiert ϕ die Einschränkungen der Bündel \mathcal{F} , \mathcal{F}^* und der daraus konstruierten

äußeren Bündel. In den lokalen Koordinaten ist eine vertikale Differentialform $\omega \in \Omega^*(M, \mathcal{F})$ gegeben durch

$$\omega|_U = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} f_J dx_J,$$

wobei f_J eine glatte Funktion auf $U_1 \times U_2$ und $dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$ für $J = \{j_1 < \dots < j_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ ist.

Das vertikale deRham-Differential ist lokal gegeben durch

$$(d^\mathcal{V} \omega)|_{U_1 \times U_2} = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, r\}} \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J$$

und somit definitionsgemäß ein Differentialoperator der Ordnung 1 auf M , dessen Hauptsymbol mit dem totalen Symbol übereinstimmt.

Da \mathcal{F} ein Untervektorbündel des Tangentialbündels von M ist, hat man kanonisch einen Epimorphismus der dualen Bündel $T^*M \longrightarrow \mathcal{F}^*$; bezüglich der lokalen Koordinaten ist dieser gegeben durch die Projektion

$$\xi = \sum_{j=1}^r \xi_j dx_j + \sum_{k=1}^q \lambda_k dy_k \mapsto \sum_{j=1}^r \xi_j dx_j =: \xi^\mathcal{V}.$$

Aus der lokalen Beschreibung von $d^\mathcal{V}$ folgt, daß der Wert des Hauptsymbols nur von ξ_1, \dots, ξ_r und somit nur von $\xi^\mathcal{V} \in \mathcal{F}^*$ abhängt.

Der \star -Operator ist durch Vektorbündelmorphismen $\Lambda^p(\mathcal{F}^*) \longrightarrow \Lambda^{r-p}(\mathcal{F}^*)$ gegeben; die Operatoren $\star^p : \Omega^p(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \Omega^{r-p}(M, \mathcal{F})$ sind daher Differentialoperatoren der Ordnung Null. Für solche stimmen Hauptsymbol und totales Symbol überein. Die Symbole hängen nur von den Punkten $x \in M$, nicht aber von den Elementen des Kotangentialraums T_x^*M ab. Aufgrund der Verträglichkeit mit Summation und Komposition von Differentialoperatoren hängt somit das Hauptsymbol des formal adjungierten Operators

$$d^{\mathcal{V},*} = \sum_{p=0}^r (-1)^{r(p+1)+1} \star^{r-p+1} \circ d^\mathcal{V} \circ \star^p$$

nur von den Elementen des vertikalen Kotangentialbündels von M ab.

Anhand der Beschreibung des vertikalen deRham-Differentials und des Hodge- \star -Operators sieht man, daß die Einschränkung von $d^\mathcal{V}$ und $d^{\mathcal{V},*}$ auf ein Blatt $L \subset M$ Differentialoperatoren auf den glatten Schnitten von L mit Werten in $\Lambda^*(M, \mathcal{F})|_L$ sind, und aus der lokalen Darstellung dieser Operatoren folgt sofort, daß für $x \in L$ und $\xi \in T_x^*M$ die Formeln

$$\sigma(x, \xi; d^\mathcal{V}) = \sigma(x, \xi^\mathcal{V}; d^\mathcal{V}|_L) \quad \text{und} \quad \sigma(x, \xi; d^{\mathcal{V},*}) = \sigma(x, \xi^\mathcal{V}; d^{\mathcal{V},*}|_L)$$

gelten. □

Es sei nun wieder (M, \mathcal{F}) eine vertikal orientierte Riemannsche Blätterung, welche durch eine surjektive Submersion $p : M \longrightarrow B$ (mit zusammenhängenden Fasern) gegeben ist. Die Riemannsche Struktur auf \mathcal{F} definiert eine hermitesche Struktur auf der Komplexifizierung $\Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^* := \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$, und es bezeichne $(\mu_t)_{t \in B}$ die glatte Familie von Maßen, welche durch die vertikale Volumenform 2.1.13 gegeben ist. In dieser Situation gilt:

Satz 2.1.21. *Bezüglich des in 2.1.8 definierten inneren Produktes auf den glatten vertikalen Differentialformen $\Gamma_c(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^*)$ ist $d^{\mathcal{V},*}$ der adjungierte Operator zum vertikalen deRham-Differential $d^{\mathcal{V}}$.*

Sind die Blätter von (M, \mathcal{F}) vollständige Mannigfaltigkeiten, so ist $D := d^{\mathcal{V}} + d^{\mathcal{V},}$ ein regulärer Operator auf dem Hilbert- $C_0(B)$ -Modul $L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^*)$, und $\frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$ definiert einen adjungierbaren Operator auf $L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^*)$.*

Beweis. Das vertikale deRham-Differential und sein formal adjungierter Operator wirken blattweise auf den glatten Differentialformen mit kompaktem Träger, und die Einschränkungen auf ein Blatt $L \subseteq M$ entsprechen dem gewöhnlichen deRham-Differential und seinem formal adjungierten Operator auf L .

Ist die Orientierung und die glatte Familie von Maßen gegeben durch die vertikale Volumenform aus 2.1.13, so erhält man durch Einschränkung eine Volumenform auf jedem Blatt M_t für $t \in B$, und das Skalarprodukt von zwei glatten Differentialformen auf M_t ist gegeben durch Integration nach dieser Volumenform.

In dieser Situation ist aber aus der Theorie orientierter Riemannscher Mannigfaltigkeiten bekannt, daß $d^{\mathcal{V},*}|_{M_t}$ der adjungierte Operator zu $d^{\mathcal{V}}|_{M_t}$ ist; man vergleiche z.B. [War83, Prop. 6.2]. Da das Skalarprodukt auf $\Gamma_c(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^*)$ durch blattweise Integration erklärt ist, folgt die erste Aussage.

Die Blätter von (M, \mathcal{F}) sind vollständige und orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Aus [Wol73, Thm. 5.1 bzw. Lemma 6.6] folgt, daß die Einschränkung D_t von D auf ein Blatt M_t ein im wesentlichen selbstadjungierter Operator ist und $1 + D_t^2$ dichtes Bild in der jeweiligen Faser von $L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^*)$ hat. Diese Argumentation wird von Kasparov in [Kas88, 4.2] verwendet.

Desweiteren ist das Bild von D und somit auch das Bild von $1 + D^2$ abgeschlossen unter Multiplikation mit Funktionen aus $C_0^\infty(B)$, denn für ein Element $\xi \in L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^*)$ und eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(B)$ gilt

$$(\varphi \cdot D\xi)(x) = \varphi(p(x)) \cdot (D\xi)(x) = D|_{M_{p(x)}}(\varphi(p(x)) \cdot \xi|_{M_{p(x)}})(x) = D(\varphi \cdot \xi)(x),$$

wobei $M_{p(x)}$ das Blatt durch $x \in M$ ist. Nach dem Kriterium von Fell liegt das Bild von $1 + D^2$ also dicht in $L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^*)$, aufgefaßt als oberhalb stetiges Feld von Hilberträumen über B .

Somit ist D ein dicht definierter regulärer Operator mit dicht definiertem Adjungierten, und $\frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$ definiert einen adjungierbaren Operator auf dem Hilbertmodul $L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}^*)$; man vgl. etwa [Bla98, 13.3]. \square

Bemerkung 2.1.22. Die Einschränkung des Operators D_t auf das Blatt $M_t = p^{-1}(t)$ ist nach [LM89, Thm. II.5.12] der Dirac-Operator für M_t ; laut [LM89, Lemma I.5.1] sind die Symbole von D_t und D_t^2 in $\xi \in T_x^* M_t$ gegeben durch

$$\sigma(x, \xi; D_t) = i \cdot \xi \quad \text{bzw.} \quad \sigma(x, \xi; D_t) = \|\xi\|_x^2 \cdot \text{id};$$

das Symbol von D_t wirkt auf dem äußeren Bündel durch sogenannte Clifford-Multiplikation. An dieser Stelle ist jedoch Vorsicht geboten, da für einen Vektorraum V mit quadratischer Form Q die Clifford-Algebra in [LM89] bezüglich der Relation $v^2 = -Q(v) \cdot 1$ (und nicht durch $v^2 = Q(v) \cdot 1$ wie bei Kasparov) gegeben ist.

Allerdings läßt sich das Symbol auch wie folgt beschreiben: Es bezeichne λ_{ξ} für $\xi \in T_x^* M_t$ den durch das Dachprodukt $\lambda_{\xi}(\omega) = \xi \wedge \omega$ definierten Operator und λ_{ξ}^* den adjungierten Operator bezüglich des Skalarprodukts auf $\Lambda^* T_x^* M_t \otimes \mathbb{C}$. Die Zuordnung $\xi \mapsto \lambda_{\xi}^*$ ist nur komplex-konjugiert linear, und nach [LM89, Prop. I.3.9] gilt

$$\sigma(x, \xi; D_t) = i(\lambda_{\xi} - \lambda_{\xi}^*) = \lambda_{i\xi} + \lambda_{i\xi}^* = \lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^*.$$

Wie in 2.1.7 gezeigt, folgt dann

$$(\lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^*)^2 = -Q(i\xi) \cdot \text{id} = \|\xi\|^2 \cdot \text{id}$$

und somit die Formel für das Symbol von D_t^2 , da für Elemente des (reellen) Kotangentialbündels $\xi^* = \xi$ und $Q(\xi) = \|\xi\|^2$ gilt. Insbesondere folgt, daß die Operatornorm von $\sigma(x, \xi; D_t)$ den Wert $\|\xi\|$ hat.

2.2 (Familien von) Pseudodifferentialoperatoren

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, daß der in 2.1.21 definierte Operator $\frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung Null auf der geblätterten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) ist. Das Resultat 2.2.9 für Familien von Pseudodifferentialoperatoren kann dann später zum Nachweis genutzt werden, daß der Operator des zu konstruierenden Dirac-Elements die Bedingungen für ein $\text{KK}^{\mathcal{G}}$ -Element erfüllt.

Dazu werden zunächst ohne (vollständige) Beweise, aber mit zusätzlichen Anmerkungen, einige Resultate über Pseudodifferentialoperatoren auf geblätterten Mannigfaltigkeiten bereitgestellt, wie sie sich im Anhang von [HS87] finden; Verweise auf diesen Anhang werden in eckigen Klammern angegeben.

Es sei angemerkt, daß im folgenden stets nur Symbole und Pseudodifferentialoperatoren (kurz: PDOs) vom Typ $(\rho, \delta) = (1, 0)$ betrachtet und (im Gegensatz zur Arbeit von Hilsum und Skandalis) gleich schon die Formeln für Symbole und PDOs mit Werten in einem hermiteschen Vektorbündel gegeben werden. Die Notationen in der erwähnten Arbeit werden (leicht) modifiziert.

Definition 2.2.1 ([HS87, A.1]). Es sei X eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n , T ein glattes reelles Vektorbündel über X vom Rang r und E ein glattes hermitesches Vektorbündel über X .

Eine glatte Funktion $a : T \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ über X , definiert als Funktion auf dem Totalraum von T mit Werten in den Endomorphismen des Bündels E , heißt Symbol der Ordnung m (mit Werten in E), falls eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Für jede trivialisierende Karte $\phi : \Omega \times \mathbb{R}^r \longrightarrow T$ (mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und ϕ faserweise ein Isomorphismus), jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ und jedes Paar von Multi-Indices $p \in \mathbb{N}^n$ und $q \in \mathbb{N}^r$ existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\left\| \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial \xi^q} (a \circ \phi)(x, \xi) \right\| \leq C(1 + \|\xi\|)^{m-|q|} \quad \text{für alle } x \in K \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^r$$

gilt.

- (ii) X besitzt eine Überdeckung durch Karten, welche die Bedingung (i) erfüllen.

Der Träger $\text{supp}(a)$ des Symbols a ist definiert als Abschluß der Menge

$$\{x \in X \mid \exists \xi \in T_x : a(x, \xi) \neq 0\}.$$

Es bezeichne $\mathcal{S}^m = \mathcal{S}^m(X, T; \mathcal{L}(E))$ den Raum aller Symbole von Ordnung m mit kompaktem Träger.

Für $m = 0$ ist \mathcal{S}^0 eine involutive Unter algebra der beschränkten stetigen Funktionen (über X) auf dem Totalraum von T mit Werten in $\mathcal{L}(E)$, und es bezeichne $\bar{\mathcal{S}}^0$ den Abschluß von \mathcal{S}^0 in $C_b(T; \mathcal{L}(E))$.

Es gilt $C_c^\infty(T; \mathcal{L}(E)) \subseteq \mathcal{S}^0$ und somit $C_0(T; \mathcal{L}(E)) \subseteq \bar{\mathcal{S}}^0$. Man setze

$$C_X(T; \mathcal{L}(E)) := \{a \in C_b(T; \mathcal{L}(E)) \mid a\phi \in C_0(T; \mathcal{L}(E)) \forall \phi \in C_0(X)\},$$

$$\bar{\mathcal{S}}_X^0 := \bar{\mathcal{S}}_X^0(X, T; \mathcal{L}(E)) := \{a \in C_b(T; \mathcal{L}(E)) \mid a\phi \in \bar{\mathcal{S}}^0(X, T; \mathcal{L}(E)) \forall \phi \in C_0(X)\}$$

sowie

$$\Sigma_0(X, T; \mathcal{L}(E)) := \bar{\mathcal{S}}^0 / C_0(T; \mathcal{L}(E)) \quad \text{und} \quad \Sigma(X, T; \mathcal{L}(E)) := \bar{\mathcal{S}}_X^0 / C_X(T; \mathcal{L}(E)).$$

Letztere sind als Algebren der Hauptsymbole (von Ordnung Null) anzusehen.

Um Pseudodifferentialoperatoren auf geblätterten Mannigfaltigkeiten zu definieren, wird zunächst die lokale Situation betrachtet:

Es sei dazu Y eine Mannigfaltigkeit (ggf. mit Rand), $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times Y$ eine offene Teilmenge und E ein (triviales) hermitesches Vektorbündel über Ω . (Es sei kurz angemerkt, daß man die gewöhnliche Theorie von PDOs auf Mannigfaltigkeiten erhält, indem man $Y = \{\text{pt}\}$ wählt.) Man setze

$$\begin{aligned} \Omega^{(2)} &:= \Omega \times_Y \Omega \\ &= \{(x, x', y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times Y \mid r(x, x', y) = (x, y) \in \Omega, s(x, x', y) = (x', y) \in \Omega\}, \end{aligned}$$

wobei $r, s : \Omega^{(2)} \longrightarrow \Omega$ die Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente des Faserprodukts $\Omega \times_Y \Omega$ bezeichnen. Das Endomorphismenbündel von E über $\Omega^{(2)}$ ist definiert durch

$$\text{End}(E) := r^*E \otimes s^*E^*;$$

für die Fasern dieses Bündels gilt

$$\text{End}(E)_{(x, x', y)} = E_{(x, y)} \otimes E_{(x', y)}^* \cong \text{Hom}(E_{(x', y)}, E_{(x, y)}).$$

Faßt man die kanonische Projektion $\Omega \longrightarrow Y$ als surjektive Submersion auf, so ist $\Omega \times_Y \Omega$ der in den Beispielen von Abschnitt 1.3 behandelte glatte Gruppoid mit assoziiertem Fell-Bündel $\text{End}(E)$. Wie dort beschrieben, existiert auf $\text{End}(E)$ eine Involution, die ein Element $F \in \text{Hom}(E_{(x', y)}, E_{(x, y)})$ auf den adjungierten Operator $F^* \in \text{Hom}(E_{(x, y)}, E_{(x', y)})$ bezüglich der inneren Produkte abbildet. Da E als triviales Bündel vorausgesetzt war, läßt sich $\text{End}(E)$ mit einem Bündel von Matrixalgebren identifizieren.

Durch eine leichte Modifikation können auch Symbole der Ordnung m auf $\Omega^{(2)}$ mit Werten in $\text{End}(E)$ definiert werden. Ist T ein reelles Vektorbündel über Ω , so ist ein Symbol $a \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E))$ gegeben durch eine glatte Abbildung $a : r^*T \longrightarrow \text{End}(E)$ über $\Omega^{(2)}$ (mit kompaktem Träger auf $\Omega^{(2)}$), welche die Bedingungen aus Definition 2.2.1 erfüllt.

Funktionen dieser Art werden in der Literatur zum Teil auch als Amplituden bezeichnet; vgl. etwa [GES94, I.1.2]. Diese Bezeichnung wird im folgenden ebenfalls verwendet.

Durch Auswertung auf der Diagonalen hat man kanonische Abbildungen

$$\Delta^m : \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E)) \longrightarrow \mathcal{S}^m(\Omega, T; \mathcal{L}(E)), \quad \Delta^m(a)(x, y, \xi) := a(x, x, y, \xi)$$

und somit insbesondere eine kanonische Abbildung

$$\pi : \mathcal{S}^0(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E)) \longrightarrow \Sigma_0(\Omega, T; \mathcal{L}(E)),$$

welche a auf die Klasse von $\Delta^0(a)$ in $\Sigma_0(\Omega, T; \mathcal{L}(E))$ abbildet.

In dieser Situation gilt:

Satz 2.2.2 ([HS87, A.4.1 - A.4.4]). *Ist $a \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(E))$, so definiert für $f \in \Gamma^\infty(\Omega, E)$ die Formel*

$$(P_a f)(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \int e^{i\langle x-x', \xi \rangle} a(x, x', y, \xi) (f(x', y)) \, dx' \, d\xi$$

einen Operator

$$P_a : \Gamma^\infty(\Omega, E) \longrightarrow \Gamma_c^\infty(\Omega, E).$$

Dieser hat die folgenden Eigenschaften:

- (1.) *Gilt $a(x, x, y, \xi) = 0$ für alle $(x, y) \in \Omega$ und alle $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$, so existiert ein $b \in \mathcal{S}^{m-1}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(E))$ mit $P_a = P_b$.*
- (2.) *Sind $a \in \mathcal{S}^m$ und $a' \in \mathcal{S}^{m'}$, so existiert eine Amplitude $\tilde{a} \in \mathcal{S}^{m+m'}$, so daß $P_a P_{a'} = P_{\tilde{a}}$ und $\Delta^m(a) \cdot \Delta^{m'}(a') - \Delta^{m+m'}(\tilde{a}) \in \mathcal{S}^{m+m'-1}(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E))$ gilt.*
- (3.) *Es gilt $P_{a^*} = (P_a)^*$, wobei $a^*(x, x', y, \xi) = a(x', x, y, \xi)^*$ ist.*
- (4.) *Ist $\phi : \Omega' \longrightarrow \Omega$ ein Diffeomorphismus der Form $\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(y))$ und $a \in \mathcal{S}^m(\Omega'^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(\phi^* E))$, so gilt*

$$\phi^* P_a (\phi^*)^{-1} = P_{a^\phi} + P_b$$

für eine Amplitude $b \in \mathcal{S}^{m-1}(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(E))$, wobei $a^\phi(x, x', y, \xi) = a(\phi_1(x, y), \phi_1(x', y), \phi_2(y), ({}^t(\frac{\partial \phi_1}{\partial x})_{(x,y)})^{-1}(\xi))$ gilt.

Hierzu sind wahrscheinlich einige Anmerkungen angebracht:

- Der Operator P_a wird durch zweifache Integration nach dem Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^n definiert; die Integration erstreckt sich dabei über alle $\xi \in (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ und alle $x' \in \Omega_y = \{z \in \mathbb{R}^n \mid (z, y) \in \Omega\}$.
- Die Abbildung $r : \Omega^{(2)} \longrightarrow \Omega$, $(x, x', y) \mapsto (x, y)$ ist stetig, und somit ist $r(\text{supp}(a))$ eine kompakte Teilmenge von Ω . Ist $(x, y) \notin r(\text{supp}(a))$, so gilt $a(x, x', y, \xi) = 0$, und es folgt

$$\text{supp}(P_a f) \subseteq r(\text{supp}(a)).$$

- Sind die Amplituden a und a' aus (2.) skalarwertig, so existiert eine Amplitude $b \in \mathcal{S}^{m+m'-1}$ mit $P_a P_{a'} = P_{aa'} + P_b$.
Haben die Amplituden Werte in den Endomorphismen eines Vektorbündels, so macht das (punktweise) Produkt von Amplituden keinen Sinn. Wie in der gewöhnlichen Theorie der PDOs gilt aber für ihre “Hauptsymbole” die in (2.) angegebene Relation; man vgl. z.B. [GES94, Sect. I.1.2 und I.1.3].
- Der Diffeomorphismus $\phi : \Omega' \longrightarrow \Omega$ aus (4.) definiert einen Diffeomorphismus $\Phi : \Omega^{(2)} \longrightarrow \Omega^{(2)}$ durch $\Phi(x, x', y) = (\phi_1(x, y), \phi_1(x', y), \phi_2(y))$, und man rechnet nach, daß $\Phi^*(\text{End}(E)) = \text{End}(\phi^*E)$ gilt.
Desweiteren induziert ϕ durch $\phi^*(f)(x, y) := f(\phi(x, y))$ einen Isomorphismus $\phi^* : \Gamma^\infty(\Omega, E) \longrightarrow \Gamma^\infty(\Omega', \phi^*E)$.
- Die Abbildung $\phi : \Omega' \longrightarrow \Omega$ läßt sich als Diffeomorphismus geblätterter Mannigfaltigkeiten auffassen, wobei die Blätterungsstruktur jeweils durch die Projektion auf die zweite Komponente $(x, y) \mapsto y$ gegeben ist; das vertikale Tangentialbündel \mathcal{F} ist das triviale Bündel mit Faser \mathbb{R}^n . Die Ableitung von ϕ definiert einen Vektorbündelisomorphismus $d\phi : \mathcal{F}_{\Omega'} \longrightarrow \mathcal{F}_\Omega$; faserweise ist dieser gegeben durch

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)_{(x,y)} : (\mathcal{F}_{\Omega'})_{(x,y)} \longrightarrow (\mathcal{F}_\Omega)_{\phi(x,y)}.$$

Im Übergang zu den dualen Bündeln erhält man einen Isomorphismus von \mathcal{F}_Ω^* und $\mathcal{F}_{\Omega'}^*$, welcher auf den Fasern durch

$${}^t\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)_{(x,y)} : (\mathcal{F}_\Omega^*)_{\phi(x,y)} \longrightarrow (\mathcal{F}_{\Omega'}^*)_{(x,y)}$$

gegeben ist. In der Formel für a^ϕ in (4.) ist $\xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ als Element von $(\mathcal{F}_\Omega^*)_{(x,y)} \cong (r^*\mathcal{F}_\Omega^*)_{(x,x',y)}$ aufzufassen.

Beispiel 2.2.3. Ist $E \longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ ein glattes, hermitesches (triviales) Vektorbündel und D ein Differentialoperator (der Ordnung m) von der Form

$$D = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^r, |\alpha| \leq m} A_\alpha(x, y) \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$$

mit Werten in E , so ist das totale Symbol durch

$$a(x, y, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} i^{|\alpha|} \cdot A_\alpha(x, y) \cdot \xi^\alpha \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q, \xi \in \mathbb{R}^r$$

gegeben. Ist $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^r)$, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ und \hat{u} die Fourier-Transformierte zu u , so gilt

$$\begin{aligned} (D(u \cdot v))(x, y) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{r/2} \int_{\xi \in \mathbb{R}^r} e^{i \cdot \langle x, \xi \rangle} a(x, y, \xi) \cdot \hat{u}(\xi) \cdot v(y) \, d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^r \int_{\xi \in \mathbb{R}^r} \int_{x' \in \mathbb{R}^r} e^{i \cdot \langle x - x', \xi \rangle} a(x, y, \xi) \cdot u(x') \cdot v(y) \, dx' \, d\xi. \end{aligned}$$

Sind $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q)$, so zeigt dies, daß der Operator $\varphi D\psi$ ein PDO auf $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ von Ordnung m ist, dessen Amplitude kompakten Träger hat; die Amplitude ist dabei gegeben durch $\tilde{a}(x, x', y, \xi) = \varphi(x, y) \cdot a(x, y, \xi) \cdot \psi(x', y)$.

Insbesondere ist D ein sog. klassischer PDO im Sinne von [GES94, Section I.1.2], da das (totale) Symbol von D sich in der Form $\sum_{j=0}^\infty a_j$ schreiben läßt, wobei $a_j \in \mathcal{S}^{m-j}$ positiv homogen in ξ vom Grad $m - j$ ist; gleiches gilt für den Operator $\varphi D\psi$ und seine Amplitude.

Der adjungierte Operator $(P_a)^*$ aus 2.2.2 (3.) ist bezüglich des folgenden Skalarprodukts zu verstehen; man vergleiche hierzu auch 2.1.8:

Proposition 2.2.4 ([HS87, A.4.5 - A.4.6]). *Für $f, g \in \Gamma_c^\infty(\Omega, E)$ definiert die Zuordnung*

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle(y) = \int_{x \in \Omega_y} \langle f(x, y), g(x, y) \rangle_{E(x, y)} \, dx$$

ein Skalarprodukt mit Werten in $C_0(Y)$. Die Vervollständigung von $\Gamma_c^\infty(\Omega, E)$ bezüglich dieses Skalarprodukts ist ein Hilbert- $C_0(Y)$ -Modul $L^2(\Omega, E)$.

Ist $a \in \mathcal{S}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(E))$, so definiert P_a einen adjungierbaren Operator auf $L^2(\Omega, E)$, d.h. es gilt $P_a \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, E))$.

Gilt $a \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(E))$ mit $m < 0$, so ist der Operator P_a kompakt, d.h. es gilt $P_a \in \mathcal{K}(L^2(\Omega, E))$.

Die obige Proposition soll natürlich die lokale Situation einer geblätternen Mannigfaltigkeit beschreiben. Im allgemeinen ist das Skalarprodukt dabei lokal durch Integration nach einem Maß gegeben, welches nur äquivalent zum Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^r ist. Die Eigenschaft eines Operators, lokal ein PDO der Form P_a zu sein, hängt jedoch nicht vom Übergang zu einem äquivalenten Maß ab:

Satz 2.2.5. *Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$, $E \longrightarrow \Omega$ ein glattes, hermitesches, triviales Vektorbündel, $T \longrightarrow \Omega$ das (triviale) vertikale Kotangentenbündel der durch $\Omega \longrightarrow Y$ gegebenen Blätterung und $\rho \in C^\infty(\Omega)^+$ eine strikt positive glatte Funktion.*

Auf $\Gamma_c^\infty(\Omega, E)$ sei ein inneres Produkt durch

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle^\rho(y) = \int_{x \in \Omega_y} \langle f(x, y), g(x, y) \rangle_{E_{x, y}} \cdot \rho(x, y) \, dx$$

definiert; die Kompletzierung zu einem Hilbert- $C_0(\mathbb{R}^q)$ -Modul sei mit $L_\rho^2(\Omega, E)$ bezeichnet.

Für $a \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E))$ definiert der Operator P_a aus 2.2.2 ein Element von $\mathcal{L}(L_\rho^2(\Omega, E))$; der adjungierte Operator $P_a^\dagger \in \mathcal{L}(L_\rho^2(\Omega, E))$ ist von der Form P_{a^\dagger} für $a^\dagger = (\rho^{-1} \circ r) \cdot a^* \cdot (\rho \circ s) \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T, \text{End}(E))$.

Die Abbildung

$$U : \Gamma_c^\infty(\Omega, E) \longrightarrow \Gamma_c^\infty(\Omega, E), \quad f \mapsto \rho^{1/2} \cdot f$$

setzt sich zu einem isometrischen Isomorphismus von $L_\rho^2(\Omega, E)$ und $L^2(\Omega, E)$ fort, wobei $L^2(\Omega, E)$ bezüglich des Standardskalarprodukts gebildet wird.

Ist $b \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E))$ eine Amplitude, so definiert $U^{-1}P_bU$ einen PDO der Ordnung m auf $L_\rho^2(\Omega, E)$, und es gilt $U^{-1}P_bU = P_{b_U}$ für die Amplitude $b_U(x, x', y, \xi) = \rho^{-1/2}(x, y) \cdot b(x, x', y, \xi) \cdot \rho^{1/2}(x', y)$.

Umgekehrt definiert jeder PDO der Form P_b auf $L_\rho^2(\Omega, E)$ in analoger Weise einen PDO auf $L^2(\Omega, E)$.

Beweis. Die Tatsache, daß sich $\Gamma_c^\infty(\Omega, E)$ zu einem Hilbertmodul $L_\rho^2(\Omega, E)$ vervollständigen läßt, folgt aus 2.1.8. Bezeichnet $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ das Standardskalarprodukt aus 2.2.4, so gilt für $a \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E))$ und $\xi, \eta \in \Gamma_c^\infty(\Omega, E)$

$$\langle\langle P_a(f), g \rangle\rangle^\rho = \langle\langle P_a(\xi), \rho \cdot \eta \rangle\rangle = \langle\langle f, P_{a^*}(\rho \cdot g) \rangle\rangle = \langle\langle f, \rho^{-1} \cdot (P_{a^*}(\rho \cdot g)) \rangle\rangle^\rho.$$

Somit ist auch für dieses innere Produkt P_a ein adjungierbarer Operator mit adjungiertem Operator $P_a^\dagger := \rho^{-1}P_{a^*}\rho$; für letzteren gilt jedoch

$$P_a^\dagger(f)(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \int e^{i(x-x', \xi)} \rho^{-1}(x, y) \cdot a^*(x, x', y, \xi) (\rho(x', y) \cdot f(x', y)) \, dx' \, d\xi.$$

Setzt man $a^\dagger(x, x', y, \xi) := \rho^{-1}(x, y) \cdot a^*(x, x', y, \xi) \cdot \rho(x', y)$, so ist mit a und a^* auch $a^\dagger \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E))$, und es ist $P_a^* = P_{a^\dagger}$ ebenfalls ein PDO der Ordnung m auf Ω .

Die Abbildung $U : \Gamma_c^\infty(\Omega, E) \longrightarrow \Gamma_c^\infty(\Omega, E)$, $f \mapsto \rho^{1/2} \cdot f$ erhält die inneren Produkte und hat dichtes Bild; sie läßt sich somit zu einem isometrischen Isomorphismus auf die Kompletzierungen fortsetzen.

Ist $b \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E))$, so wird der Operator $U^{-1}P_bU$ auf $\Gamma_c(\Omega, E)$ durch

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \int e^{i(x-x', \xi)} \rho^{-1/2}(x, y) \cdot b(x, x', y, \xi) (\rho^{1/2}(x', y) \cdot f(x', y)) \, dx' \, d\xi$$

gegeben. Es gilt also $U^{-1}P_bU = P_{b_U}$ mit

$$b_U = (\rho^{-1/2} \circ r) \cdot b \cdot (\rho^{1/2} \circ s) \in \mathcal{S}^m(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E)).$$

Genauso zeigt man, daß jeder PDO der Form P_b auf $L_\rho^2(\Omega, E)$ durch UP_bU^{-1} einen PDO auf $L^2(\Omega, E)$ definiert. \square

Definition 2.2.6. Die Algebra $\Psi_0^*(\Omega, \mathbb{R}^n; \text{End}(E))$ der Pseudodifferentialoperatoren von Ordnung Null auf der (geblätternen) Mannigfaltigkeit (Ω, \mathbb{R}^n) ist definiert als die von den Operatoren der Form P_a für $a \in \mathcal{S}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(E))$ erzeugte abgeschlossene Unter algebra von $\mathcal{L}(L^2(\Omega, E))$.

Ist $k \in \Gamma_c^\infty(\Omega^{(2)}, \text{End}(E))$, so definiert die Faltung

$$(kf)(x, y) = \int_{x' \in \Omega_y} k(x, x', y)(f(x', y)) \, dx'$$

einen kompakten Operator auf $L^2(\Omega, E)$, und der Abschluß der Menge dieser Operatoren ist gerade $\mathcal{K}(L^2(\Omega, E))$.

Ist $T = \Omega \times (\mathbb{R}^n)^*$ das triviale Bündel über Ω und identifiziert man $\Omega^{(2)}$ mit dem Bild des Nullschnitts in r^*T , so läßt sich jede Funktion $k \in \Gamma_c^\infty(\Omega^{(2)}, \text{End}(E))$ als gleichmäßiger Limes von Funktionen in $C_c^\infty(r^*T; \text{End}(E))$ schreiben. Die Algebra $C_c^\infty(r^*T; \text{End}(E))$ der glatten Funktionen über $\Omega^{(2)}$ mit kompaktem Träger ist enthalten in $\mathcal{S}^0(\Omega^{(2)}, T; \text{End}(E))$.

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz lassen sich Integration und Limesbildung vertauschen. Daher ist der durch k definierte Operator ein Element von $\Psi_0^*(\Omega, \mathbb{R}^n; \text{End}(E))$; die kompakten Operatoren auf $L^2(\Omega, E)$ bilden ein Ideal in den Pseudodifferentialoperatoren von Ordnung Null.

Setzt man für einen PDO P_a mit $a \in \mathcal{S}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(E))$

$$\sigma(P_a) := \pi(a) \in \Sigma_0(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E)),$$

wobei wie oben $\pi(a)$ die durch $\Delta^0(a)$ definierte Restklasse bezeichnet, so läßt sich diese Abbildung zu einem surjektiven $*$ -Homomorphismus

$$\sigma : \Psi_0^*(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*; \text{End}(E)) \longrightarrow \Sigma_0(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E)),$$

fortsetzen. Es gilt:

Proposition 2.2.7 ([HS87, A.4.9]). *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(L^2(\Omega, E)) \longrightarrow \Psi_0^*(\Omega, \mathbb{R}^n; \text{End}(E)) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_0(\Omega, (\mathbb{R}^n)^*; \mathcal{L}(E)) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Nach diesen Überlegungen für die lokale Situation läßt sich nun die Algebra der PDOs (von Ordnung Null) auf einer glatten geblätternen Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) definieren.

Zur Vereinfachung sei dabei stets angenommen, daß die Blätterung durch eine surjektive Submersion glatter Mannigfaltigkeiten $M \longrightarrow B$ mit zusammenhängenden Fasern gegeben ist. Desweiteren sei (M, \mathcal{F}) vertikal orientierbar

und Riemannsch, und auf M sei die Volumenform (und die dadurch definierte glatte Familie von Maßen) wie in 2.1.13 gewählt. Nur diese spezielle Situation wird in der vorliegenden Arbeit Verwendung finden. In der allgemeinen Situation wäre der glatte Gruppoid $M \times_B M$ durch den Holonomie-Gruppoiden der Blätterung zu ersetzen.

Pseudodifferentialoperatoren auf (M, \mathcal{F}) können nun lokal bezüglich Blätterungskarten definiert werden; die Eigenschaft, lokal ein PDO zu sein, ist invariant unter Blätterungskartenwechseln, wie Punkt (4.) aus 2.2.2 zeigt.

Zunächst sei folgendes bemerkt: Es bezeichne $\mathcal{H} = \text{Hol}(M, \mathcal{F}) = M \times_B M$ den Holonomiegruppoiden der durch die Submersion gegebenen Blätterung (M, \mathcal{F}) . Dieser ist ein differenzierbarer Gruppoid mit Basis M . Als solcher besitzt er ein (glattes) linkes Haarsystem $\lambda = (\lambda^x)_{x \in M}$, welches durch die vertikale Volumenform auf M bestimmt ist.

Die (volle) C^* -Algebra der Blätterung (M, \mathcal{F}) mit Werten in den Endomorphismen eines hermiteschen Vektorbündels E über M ist dann wie in Kapitel 1.3 durch

$$C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) := C^*(\mathcal{H}, \text{End}(E))$$

definiert. Es sei zusätzlich vorausgesetzt, daß B als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in M eingebettet werden kann. Nach 2.1.10 gilt dann

$$C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \cong \mathcal{K}(L^2(M, E)).$$

Die Multiplikatoralgebra der C^* -Algebra der Blätterung (M, \mathcal{F}) kann daher mit der Algebra $\mathcal{L}(L^2(M, E))$ der adjungierbaren Operatoren auf dem Hilbertmodul $L^2(M, E)$ identifiziert werden.

Es sei nun $\phi : U \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ eine Blätterungskarte von (M, \mathcal{F}) . Für das mit ϕ^{-1} zurückgezogene Bündel über Ω sei $\tilde{E} \longrightarrow \Omega$ eine Trivialisierung, und es sei $a \in \mathcal{S}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^r)^*; \text{End } \tilde{E})$ eine Amplitude der Ordnung Null.

Für $\xi \in \Gamma_c(M, E)$ ist die Einschränkung ξ_U ein glatter Schnitt auf U , welcher sich zu einem glatten Schnitt $(\phi^{-1})^* \xi_U \in \Gamma(\Omega, \tilde{E})$ zurückziehen läßt. Anwendung des PDO P_a liefert einen glatten Schnitt $P_a((\phi^{-1})^* \xi_U) \in \Gamma_c(\Omega, \tilde{E})$ mit kompaktem Träger, so daß

$$(\phi^* \circ P_a \circ (\phi^{-1})^*)(\xi_U) \in \Gamma_c(U, E|_U) \subseteq \Gamma_c(M, E)$$

einen glatten Schnitt ins Bündel E mit kompaktem Träger in M definiert. Durch $\phi^* \circ P_a \circ (\phi^{-1})^*$ wird so ein Element von $\mathcal{L}(L^2(M, E))$ definiert, und man rechnet nach, daß diese Definition verträglich mit Blätterungskartenwechseln und unabhängig von der Wahl der Trivialisierung von $(\phi^{-1})^*(E|_U)$ ist.

Ebenso wird für jedes Element $k \in \Gamma_c(M \times_B M, \text{End}(E))$ durch Faltung ein sog. regularisierender Operator auf $C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E))$ und somit ebenfalls ein Element der Multiplikatoralgebra definiert.

Definition 2.2.8 ([HS87, A.5]). In $\mathcal{M}(C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)))$ betrachte man die Operatoren der Form $\sum_{j=1}^{<\infty} P_j + k$, wobei P_j lokal in einer Blätterungskarte ein PDO der Ordnung Null ist und durch $k \in \Gamma_c(M \times_B M, \text{End}(E))$ ein regularisierender Operator gegeben ist.

Die von diesen Operatoren erzeugte abgeschlossene Unteralgebra heißt die Algebra der Pseudodifferentialoperatoren von Ordnung Null auf (M, \mathcal{F}) . Sie wird mit $\Psi_0^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E))$ bezeichnet.

Zurückziehen von Funktionen aus $\phi \in C_0^\infty(M)$ vermöge der Range- bzw. Source-Abbildung von $M \times_B M$ liefert glatte beschränkte Funktionen $r^*\phi$ und $s^*\phi$ auf $M \times_B M$, und Multiplikation von links bzw. rechts mit diesen Funktionen definiert einen doppelten Zentralisator von $C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E))$.

Da $C_0^\infty(M)$ dicht in $C_0(M)$ liegt, läßt sich jede Funktion aus $C_0(M)$ somit als ein Element von $\mathcal{M}(C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)))$ auffassen. Identifiziert man die Multiplikatoralgebra wieder mit $\mathcal{L}(L^2(M, E))$, so sieht man natürlich viel einfacher, daß Multiplikation mit einer Funktion aus $C_0(M)$ einen adjungierbaren Operator auf $L^2(M, E)$ definiert. Setzt man

$$C_M^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) := \{T \in \mathcal{M}(C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E))) \mid \varphi T, T\varphi \in C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \forall \varphi \in C_0(M)\}$$

sowie

$$\Psi_{0,M}^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) := \{T \in \mathcal{M}(C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E))) \mid \varphi T, T\varphi \in \Psi_0^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \forall \varphi \in C_0(M)\}$$

und bezeichnet $\Sigma_M(M, \mathcal{F}^*; \mathcal{L}(E))$ die Algebra der Hauptsymbole von Ordnung Null aus 2.2.1, so gilt:

Proposition 2.2.9 ([HS87, A.5]). *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow C_M^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \longrightarrow \Psi_{0,M}^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \longrightarrow \Sigma_M(M, \mathcal{F}^*; \mathcal{L}(E)) \longrightarrow 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz von C^ -Algebren.*

Übersetzt in die vorliegende Situation heißt dies natürlich, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_M(L^2(M, E)) \longrightarrow \Psi_{0,M}^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \longrightarrow \Sigma_M(M, \mathcal{F}^*; \mathcal{L}(E)) \longrightarrow 0$$

exakt ist, wobei

$$\mathcal{K}_M(L^2(M, E)) := \{T \in \mathcal{L}(L^2(M, E)) \mid \varphi T, T\varphi \in \mathcal{K}(L^2(M, E)) \forall \varphi \in C_0(M)\}$$

gesetzt ist.

Der Nachweis, daß der vertikale Dirac-Operator $T = \frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$ einer geblätterten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) aus 2.1.21 ein Element von $\Psi_{0,M}^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(\Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}))$ ist, beruht im wesentlichen auf folgenden Schritten:

Für alle $\phi \in C_0(M)$ ist zu zeigen, daß die Operatoren ϕT und $T\phi$ (bis auf regularisierende Operatoren) in $\mathcal{L}(L^2(M, \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}))$ durch endliche Summen von Operatoren der Form P_a approximiert werden können, wobei P_a lokal bezüglich einer Blätterungskarte ein PDO der Ordnung Null ist. Dabei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß ϕ eine glatte Funktion ist.

Nach Wahl einer Überdeckung von M durch Blätterungskarten und einer untergeordneten Partition der Eins genügt es zu zeigen, daß $\psi_1 T \psi_2$ von der Form P_a ist, wobei $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(M)$ glatte Funktionen sind, deren Träger in derselben Blätterungskarte enthalten sind.

Lokal entspricht der Operator T dem vertikalen Dirac-Operator auf der geblätterten Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$. Durch Übergang zu Trivialisierungen der Bündel und unter Verwendung von 2.2.5 genügt es dann zu zeigen, daß (blattweise) der gewöhnliche Dirac-Operator auf \mathbb{R}^r , versehen mit dem Standardskalarprodukt, ein PDO von Ordnung Null ist.

Satz 2.2.10. *Der Operator $\frac{D}{\sqrt{1+D^2}} \in \mathcal{L}(L^2(M, \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}))$ aus 2.1.21 ist ein PDO der Ordnung Null auf (M, \mathcal{F}) .*

Beweis. Die Blätterung (M, \mathcal{F}) ist gegeben durch eine surjektive Submersion mit zusammenhängenden Fasern; in diesem Fall gilt $C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \cong \mathcal{K}(L^2(M, E))$ und somit $\mathcal{M}(C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E))) \cong \mathcal{L}(L^2(M, E))$, wobei $E = \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$ das komplexifizierte äußere Bündel des vertikalen Kotangentenbündels bezeichnet.

Der Operator $T := \frac{D}{\sqrt{1+D^2}} \in \mathcal{L}(L^2(M, E))$ erfüllt $\text{supp}(Tf) \subseteq \text{supp}(f)$ für alle $f \in \Gamma_c(M, E)$, da der Differentialoperator $D = d^\vee + d^{\vee,*}$ diese Eigenschaft hat. Es ist zu zeigen, daß für jede Funktion $\phi \in C_0^\infty(M)$ die Operatoren ϕT und $T\phi$ in Norm durch Elemente von $\Psi_0^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E))$ approximiert werden können.

Dazu sei eine (lokal endliche) offene Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von M durch (orientierte) Blätterungskarten gewählt, so daß für alle $i \in I$ der Abschluß \bar{V}_i kompakt

ist und eine offene Umgebung $U_i \supseteq \bar{V}_i$ besitzt, auf der eine (orientierte) Blätterungskarte der Form (\ddagger) definiert ist. Desweiteren sei $(\alpha_i)_{i \in I}$ eine der Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ untergeordnete glatte Partition der Eins. Es kann angenommen werden, daß das Bündel E über V_i und U_i trivialisierbar ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig, $C \subseteq M$ kompakt mit $|\phi(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in M \setminus C$ und L eine kompakte Teilmenge von M , deren Inneres L° die Menge C enthält. Für alle $\xi \in \Gamma_c(M, E)$ mit $\text{supp}(\xi) \subseteq M \setminus C^\circ$ gilt dann $\|\phi \cdot \xi\| \leq \varepsilon \cdot \|\xi\|$.

Da die Partition der Eins lokal endlich, ist die Menge $J = \{i \in I \mid V_i \cap L \neq \emptyset\}$ endlich. Man setze $\alpha := \sum_{j \in J} \alpha_j$. Dann sind α und $1 - \alpha$ glatte Funktionen auf M mit Werten in $[0, 1]$, nach Definition der Menge J ist $\text{supp}(1 - \alpha) \subseteq M \setminus L^\circ$, und es gilt

$$T - \alpha T \alpha = (1 - \alpha)T + \alpha T(1 - \alpha) = T(1 - \alpha) + (1 - \alpha)T \alpha.$$

Es sei nun ein beliebiges Element $f \in \Gamma_c^\infty(M, E)$ mit $\|f\| \leq 1$ gewählt. Es gilt $\text{supp}(1 - \alpha) \subseteq M \setminus L^\circ \subseteq M \setminus C$, und der Operator T verkleinert den Träger einer Funktion nur. Somit folgt

$$\text{supp}(1 - \alpha)T(f) \subseteq M \setminus L^\circ \quad \text{sowie} \quad \text{supp} \alpha T(1 - \alpha)(f) \subseteq M \setminus L^\circ,$$

und man erhält die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\phi(T - \alpha T \alpha)(f)\| &\leq \|\phi(1 - \alpha)T(f)\| + \|\phi \alpha T(1 - \alpha)(f)\| \\ &\leq \varepsilon \cdot \|1 - \alpha\| \cdot \|T\| \cdot \|f\| + \varepsilon \cdot \|\alpha\| \cdot \|T\| \cdot \|1 - \alpha\| \cdot \|f\| \\ &\leq 2\varepsilon \cdot \|T\|. \end{aligned}$$

Andererseits gilt $\|(1 - \alpha)\phi(f)\| = \|\phi(1 - \alpha)(f)\| \leq \varepsilon$, da $\text{supp}((1 - \alpha)f) \subseteq M \setminus L^\circ$ ist. Wählt man $\chi \in C^\infty(M)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi|_C = 1$ und $\chi|_{M \setminus L} = 0$ und schreibt man $f = \chi f + (1 - \chi)f$, so gilt $\text{supp}(\chi f) \subseteq L$ und somit $(1 - \alpha)T \alpha \chi(f) = 0$, da $(1 - \alpha)$ auf L die Nullfunktion ist. Da $\text{supp}(1 - \chi) \subseteq M \setminus C^\circ$ gilt, ergibt sich $\|\phi(1 - \chi)f\| \leq \varepsilon$. Zusammen erhält man

$$\begin{aligned} \|(T - \alpha T \alpha)\phi(f)\| &\leq \|T(1 - \alpha)\phi(f)\| + \|(1 - \alpha)T \alpha \phi(\chi + (1 - \chi))(f)\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|(1 - \alpha)\phi(f)\| + \|(1 - \alpha)T \alpha \phi \chi(f)\| \\ &\quad + \|(1 - \alpha)T \alpha \phi(1 - \chi)(f)\| \\ &\leq \varepsilon \cdot \|T\| + 0 + \|1 - \alpha\| \cdot \|T\| \cdot \|\alpha\| \cdot \|\phi(1 - \chi)(f)\| \\ &\leq 2\varepsilon \cdot \|T\|. \end{aligned}$$

Für den Nachweis, daß $T \in \Psi_{0,M}^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E))$ gilt, ist zu zeigen, daß sich die Elemente ϕT und $T \phi$ in Operatornorm durch PDOs der Ordnung Null approximieren lassen. Aufgrund der obigen Abschätzungen genügt es daher zu zeigen, daß

sich $\phi(\alpha T \alpha)$ und $(\alpha T \alpha)\phi$ durch endliche Summen von Operatoren der Form P_a darstellen lassen.

Nun gilt $\alpha T \alpha = \sum_{i,j \in J} \alpha_j T \alpha_i$, und die Summe ist endlich. Aus der Eigenschaft, daß der Operator T den Träger eines Schnitts verkleinert, folgt, daß $\alpha_j T \alpha_i = 0$ gilt, falls $\text{supp}(\alpha_i) \cap \text{supp}(\alpha_j) = \emptyset$ ist (also insbesondere für $V_i \cap V_j = \emptyset$).

Gilt $\text{supp}(\alpha_i) \cap \text{supp}(\alpha_j) \neq \emptyset$, so wähle man eine Funktion $\chi_j \in C^\infty(M)$ mit $0 \leq \chi_j \leq 1$, $\chi_j = 1$ auf $\text{supp}(\alpha_i) \cap \text{supp}(\alpha_j)$ und $\chi_j = 0$ auf $M \setminus V_i$; der Träger von χ_j ist also in der kompakten Menge \bar{V}_i enthalten. Da χ_j auf dem Durchschnitt der Träger von α_i und α_j konstant mit Wert 1 ist, gilt

$$\alpha_j T \alpha_i = \chi_j \alpha_j T \alpha_i.$$

Nach Wahl der Überdeckung ist eine orientierte Blätterungskarte auf der offenen Umgebung U_i von \bar{V}_i definiert; die Träger der Funktionen $\chi_j \alpha_j$ und α_i sind in U_i enthalten. Analog argumentiert man für die Operatoren $\phi \alpha_j T \alpha_i$ bzw. $\alpha_j T \alpha_i \phi$.

Für den Nachweis, daß der Operator T ein PDO von Ordnung Null auf M ist, ist somit nur noch das folgende Lemma zu zeigen. \square

Lemma 2.2.11. *Es sei $\phi : U \longrightarrow \Omega = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q$ eine orientierte Blätterungskarte für (M, \mathcal{F}) , so daß die Bündel \mathcal{F} und $E = \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C}$ über Ω trivial sind. Sind $\psi_1, \psi_2 \in C_c^\infty(M)$ mit $\text{supp}(\psi_i) \subset U$, so gilt $\psi_1 T \psi_2 = P_a$ für ein $a \in \mathcal{S}^0(\Omega^{(2)}, (\mathbb{R}^r)^*, E_\Omega)$.*

Beweis. Es sei über U ein orientierter vertikaler orthonormaler Rahmen gewählt, d.h. vertikale Vektorfelder X_1, \dots, X_r , welche die Bedingung $\langle X_i|_p, X_j|_p \rangle_p = \delta_{ij}$ erfüllen. (Ein solcher kann aus einem Rahmen, welcher zum Beispiel durch die Koordinatenfunktionen gegeben ist, mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens konstruiert werden.) Die Abbildung

$$\mathcal{F}|_U \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^r, \quad (p, \sum \lambda_i X_i|_p) \mapsto (\phi(p), (\lambda_1, \dots, \lambda_r))$$

ist dann ein glatter Isomorphismus von Vektorbündeln, welcher die Riemannsche Struktur von \mathcal{F} mit der kanonischen Riemannschen Struktur auf \mathbb{R}^r und die Orientierung auf \mathcal{F} mit der Standard-Orientierung auf \mathbb{R}^r identifiziert. In analoger Weise erhält man eine Trivialisierung des vertikalen äußeren Bündels.

Unter dieser Identifikation stimmt die Einschränkung von T auf U mit dem vertikalen Dirac-Operator auf Ω überein; letzterer sei mit T_Ω bezeichnet. Wie in 2.1.17 gezeigt, ist nämlich die vertikale deRham-Ableitung in lokalen Koordinaten definiert, und unter dem trivialisierenden Vektorbündelmorphismus wird eine orientierte Orthonormalbasis der Fasern des vertikalen äußeren Bündels auf die Standardbasis von $\Lambda^*(\mathbb{R}^r)^* \otimes \mathbb{C}$ abgebildet. Der vertikale Hodge- \star -Operator entspricht dann gerade dem gewöhnlichen Hodge- \star -Operator des \mathbb{R}^r .

Für den Nachweis, daß $\psi_1 T \psi_2$ ein PDO von Ordnung Null ist, reicht es nach 2.2.5 aus, das Standardskalarprodukt vertikaler Differentialformen auf Ω zu verwenden. Unter diesen Identifikationen entspricht T_Ω der konstanten Familie von Dirac-Operatoren auf dem \mathbb{R}^r .

Bezeichnet $D = d + d^*$ den (unbeschränkten) Dirac-Operator auf \mathbb{R}^r , so ist dieser als Differentialoperator der Ordnung 1 auch ein klassischer PDO der Ordnung 1 (dessen Symbol nicht notwendigerweise kompakten Träger hat). Somit ist der Operator $1 + D^2$ ein klassischer (Pseudo)Differentialoperator der Ordnung 2. Die Funktion ψ_2 hat kompakten Träger; es genügt daher, den Operator $1 + D^2$ auf Schnitten zu betrachten, deren Träger in einer festen kompakten Teilmenge $C_1 \subseteq \mathbb{R}^r$ enthalten sind.

Da D im wesentlichen selbstadjungiert ist, ist der Operator $1 + D^2$ positiv und selbstadjungiert. Wie in [GES94, Section I.1.7] beschrieben, können dann die (komplexen) Potenzen von $1 + D^2$ als PDOs definiert werden, welche mit den durch Funktionalkalkül definierten Potenzen übereinstimmen. Insbesondere ist $(1 + D^2)^{-1/2}$ ein PDO von Ordnung -1.

Mit D verkleinert auch $(1 + D^2)^{-1/2}$ den Träger einer Funktion höchstens. Gilt $\text{supp}(\psi_2) \subseteq C_1 \times C_2 \subseteq U_1 \times U_2$ für kompakte Mengen $C_1 \subseteq U_1$ und $C_2 \subseteq U_2$, so wähle man eine glatte Funktion mit kompaktem Träger $\chi \in C_c^\infty(U_1 \times U_2)$ mit $\chi = 1$ auf $C_1 \times C_2$. Unter der Identifikation von $T_\Omega = D_\Omega(1 + D_\Omega^2)^{-1/2}$ mit der konstanten Familie von Dirac-Operatoren auf $U_1 \times U_2$ erhält man die Zerlegung

$$\psi_1 \cdot T_\Omega \cdot \psi_2 = (\psi_1 \cdot D_\Omega \cdot \chi) \circ (\chi \cdot (1 + D_\Omega^2)^{-1/2} \cdot \psi_2).$$

Somit kann T_Ω als Komposition eines PDO von Ordnung 1 und eines PDO von Ordnung -1 geschrieben werden, deren Amplituden beide kompakten Träger haben. Aus 2.2.2 (2.) folgt dann, daß T_Ω ein PDO von Ordnung Null ist, dessen Amplitude einen kompakten Träger hat. Dies war zu zeigen. \square

Insbesondere folgt aus dieser Beschreibung des vertikalen Dirac-Operators auf (M, \mathcal{F}) , daß sein (Haupt)Symbol (bis auf Symbole von Ordnung kleiner als Null) durch

$$\sigma\left(x, \xi; \frac{D}{\sqrt{1 + D^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\xi\|^2}} \cdot (\lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^*) \quad \text{für } \xi \in \mathcal{F}_x^*$$

gegeben ist; man vgl. 2.1.22.

Bemerkung 2.2.12. Die Details von Shubins Konstruktion komplexer Potenzen von PDOs aus [GES94, Section I.1.7] im einzelnen anzugeben, würde den Rahmen der bisher beschriebenen Resultate weit überschreiten. Für die im Beweis von 2.2.11 vorliegende Situation sollen daher nur die wesentlichen Ideen kurz skizziert werden:

Es sei d das deRham-Differential auf \mathbb{R}^r , d^* der adjungierte Operator und $D := d + d^*$. Als Differentialoperator der Ordnung 2 ist $A := 1 + D^2$ ein klassischer PDO der Ordnung 2 (man vgl. etwa 2.2.3), dessen Symbol durch $a(x, \xi) = 1 + \|\xi\|^2$ für $x \in \mathbb{R}^r$ und $\xi \in (\mathbb{R}^r)^*$ gegeben ist; für das Hauptsymbol gilt $a_2(x, \xi) = \|\xi\|^2$.

Da A ein positiver Operator ist, gilt die folgende Elliptizitätsbedingung (mit einem Parameter λ):

$$a_2(x, \xi) - \lambda \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^r, \xi \in (\mathbb{R}^r)^* \setminus \{0\} \text{ und } \lambda \leq 0.$$

Daher kann zu $A - \lambda \cdot \text{id}$ eine Parametrix $B = B(\lambda)$ konstruiert werden, d.h. ein PDO von Ordnung -2, so daß

$$B(\lambda) \circ (A - \lambda \cdot \text{id}) = \text{id} + R_1(\lambda) \quad \text{und} \quad (A - \lambda \cdot \text{id}) \circ B(\lambda) = \text{id} + R_2(\lambda)$$

gilt, wobei R_1 und R_2 Operatoren mit glattem Kern sind. Für die Resolvente von $A - \lambda \cdot \text{id}$ gilt dann

$$(A - \lambda \cdot \text{id})^{-1} = B(\lambda) + T(\lambda);$$

dabei ist T ein Operator mit glattem Kern, welcher für $\lambda \rightarrow \infty$ mit Ordnung $|\lambda|^{-2}$ abfällt. Wählt man $\rho > 0$, so daß $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \rho\} \cap \text{Spec } A = \emptyset$ gilt, und ist $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ der Weg, welcher durch

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\infty < \lambda \leq \rho\}, \\ \Gamma_2 &= \{\rho \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid \pi \geq \varphi \geq -\pi\}, \\ \Gamma_3 &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \rho \geq \lambda > -\infty\} \end{aligned}$$

gegeben ist, so konvergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } z < 0$ das Integral

$$A^z := \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^z (A - \lambda \cdot \text{id})^{-1} d\lambda.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k > \text{Re } z$ setze man $A^z := A^k \circ A_{z-k}$. Hierdurch werden die komplexen Potenzen von A definiert, welche klassische PDOs der Ordnung $2z$ mit Hauptsymbol $(a_2)^z$ sind.

Durch Auswerten auf einem vollständigen Orthonormalsystem für A folgt, daß die Operatoren A^z mit den durch Funktionalkalkül definierten Potenzen übereinstimmen.

Kapitel 3

Deformation von Lie-Gruppen und -Algebren

In diesem Kapitel kann nun das Deformationsbild der Assembly-Abbildung für fast zusammenhängende Lie-Gruppen definiert werden.

Als Motivation für die folgenden Konstruktionen wird zunächst die Deformation von Lie-Algebren beschrieben. Im zweiten Abschnitt werden die benötigten Resultate für (fast zusammenhängende) Lie-Gruppen bereitgestellt, so daß im Anschluß die Deformation auf dem Gruppenniveau durchgeführt werden kann.

Ist G eine fast zusammenhängende Lie-Gruppe mit maximal kompakter Untergruppe K , so wird die Deformation durch ein glattes Gruppenbündel \mathcal{G} über \mathbb{R} beschrieben, welches außerhalb Null trivial mit Faser G ist, und dessen Nullfaser durch das semidirekte Produkt von K mit dem Tangentialraum $T_{eK}(G/K)$ der Quotientenmannigfaltigkeit gegeben ist. Informell gesprochen beschreibt die Deformation einen Prozeß, im Verlaufe dessen die Lie-Gruppe in einer Richtung flach gezogen wird, ohne die (geometrische) Struktur in der anderen Richtung zu ändern.

Die Betrachtung der glatten Kategorie und des Untergruppenbündels der Zusammenhangskomponenten von \mathcal{G} erfolgt aus technischen Gründen, um im folgenden Kapitel bei der Konstruktion der Familie von Dirac-Elementen der Deformation die Resultate aus Kapitel 2 nutzen zu können.

Nach diesen Vorbereitungen kann unter Verwendung des Resultats 1.3.6 das Deformationsbild der Assembly-Abbildung definiert werden: Ist B eine G -Algebra, so erhält man ein oberhalb stetiges Feld von C^* -Algebren über dem Intervall $[0, 1]$, welches trivial außerhalb von Null mit Faser $B \rtimes_r G$ ist, und dessen Nullfaser durch $B \rtimes (T_{eK}(G/K) \rtimes K)$ gegeben ist. Die Auswertungsabbildungen in Null und Eins

definieren dann eine Abbildung

$$K_*(B \rtimes (T_{eK}(G/K) \rtimes K)) \longrightarrow K_*(B \rtimes_r G).$$

Hierdurch ist das Deformationsbild der Assembly-Abbildung gegeben, wobei die linke Seite (wie in Anhang A beschrieben) mit der topologischen K-Theorie von G mit Koeffizienten in B zu identifizieren ist.

3.1 Deformation von Lie-Algebren

Zunächst sollen Deformationen von Lie-Algebren betrachtet werden, wie sie zuerst in [IW53] studiert wurden. In der Literatur werden Deformationen von diesem Typ auch als Kontraktionen bezeichnet. Im folgenden sei stets $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ eine endlich-dimensionale reelle Lie-Algebra mit $n := \dim \mathfrak{g} < \infty$.

Proposition 3.1.1. *Ist $U : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ eine invertierbare lineare Abbildung, so definiert*

$$[\cdot, \cdot]_U := U^{-1}[U(\cdot), U(\cdot)]$$

eine Lie-Klammer auf \mathfrak{g} , und

$$U : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_U) \longrightarrow (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$$

ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren.

Beweis. Da U und U^{-1} lineare Abbildungen sind und die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ linear in beiden Komponenten ist, ist auch $[\cdot, \cdot]_U$ in beiden Komponenten linear. Desweiteren gilt

$$[X, Y]_U = U^{-1}[U(X), U(Y)] = -U^{-1}[U(Y), U(X)] = -[Y, X]_U$$

und $[X, [Y, Z]_U]_U = U^{-1}[U(X), [U(Y), U(Z)]]$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, und es folgt

$$[X, [Y, Z]_U]_U + [Y, [Z, X]_U]_U + [Z, [X, Y]_U]_U = 0$$

aus der Jacobi-Identität der Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$, angewandt auf die Elemente $U(X)$, $U(Y)$ und $U(Z)$. Somit definiert auch $[\cdot, \cdot]_U$ eine Lie-Klammer auf \mathfrak{g} .

Schließlich gilt für $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$U([X, Y]_U) = U(U^{-1}([U(X), U(Y)])) = [U(X), U(Y)].$$

Die Abbildung $U : (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_U) \longrightarrow (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ respektiert die Lie-Multiplikation und ist somit ein Isomorphismus von Lie-Algebren. \square

Bemerkungen 3.1.2. (i) Fixiert man eine Basis X_1, \dots, X_n von \mathfrak{g} , so existieren eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij}^r \in \mathbb{R}$, so daß

$$[X_i, X_j] = \sum_{r=1}^n c_{ij}^r X_r$$

gilt, und die Lie-Multiplikation ist eindeutig durch die sogenannten Strukturkonstanten c_{ij}^r bestimmt.

Umgekehrt definiert jeder Satz von Konstanten a_{ij}^r , welcher die Bedingungen

- (1) $a_{ij}^r = -a_{ji}^r$ und
- (2) $\sum_{k=1}^n a_{ij}^k a_{kl}^r + a_{jl}^k a_{ki}^r + a_{li}^k a_{kj}^r = 0$

für alle $i, j, l, r = 1, \dots, n$ erfüllt, in eindeutiger Weise eine Lie-Multiplikation auf \mathfrak{g} (welche von der gewählten Basis abhängt).

(ii) Sind in der Situation des obigen Satzes die linearen Abbildungen U und U^{-1} bezüglich der gewählten Basis durch die Matrizen (u_{ij}) und (v_{rs}) gegeben, so berechnen sich die Strukturkonstanten von $[\cdot, \cdot]_U$ aus denen von $[\cdot, \cdot]$ wie folgt:

$$c_{ij}^r(U) = \sum_{r,k,l,m=1}^n v_{rm} u_{ki} u_{lj} c_{kl}^m.$$

Satz 3.1.3. *Es sei $\mathfrak{g} = \varphi \oplus \mathfrak{k}$ eine Zerlegung der Lie-Algebra in eine direkte Summe von Untervektorräumen. Für alle $t \neq 0$ sei eine lineare Abbildung von \mathfrak{g} auf sich selbst gegeben durch*

$$U_t = t \cdot \text{id}_{\varphi} \oplus \text{id}_{\mathfrak{k}},$$

und es sei

$$[\cdot, \cdot]_t := [\cdot, \cdot]_{U_t} = U_t^{-1}[U_t(\cdot), U_t(\cdot)]$$

Ist \mathfrak{k} eine Unteralgebra von \mathfrak{g} , so existiert

$$[\cdot, \cdot]_0 := \lim_{t \rightarrow 0} [\cdot, \cdot]_t$$

und definiert eine Lie-Multiplikation auf \mathfrak{g} mit folgenden Eigenschaften:

- (i) φ ist ein abelsches Ideal in $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_0)$.
- (ii) Die Lie-Multiplikation $[\cdot, \cdot]_0$ stimmt auf $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ mit der ursprünglichen überein.
- (iii) Sind $X, X' \in \varphi$, $Y, Y' \in \mathfrak{k}$ mit $[X, Y] = X' + Y'$, so ist $[X, Y]_0 = X'$.

Die Lie-Algebra $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_0)$ ist somit das semidirekte Produkt von φ und \mathfrak{k} .

Beweis. Nach der obigen Bemerkung genügt es, die Aussagen für die Strukturkonstanten nach Wahl einer Basis von \mathfrak{g} zu zeigen. Es seien dazu Basen X_1, \dots, X_k von \mathfrak{k} und X_{k+1}, \dots, X_n von \mathfrak{g} gewählt. Für $t \neq 0$ ist die Abbildung U_t invertierbar, und nach Teil (ii) der Bemerkung gilt für die Strukturkonstanten von U_t :

$$c_{ij}^r(t) = v_{rr} u_{ii} u_{jj} c_{ij}^r$$

mit

$$u_{ll} = \begin{cases} 1 & : l \leq k \\ t & : l > k \end{cases} \quad \text{und} \quad v_{rr} = \begin{cases} 1 & : r \leq k \\ t^{-1} & : r > k. \end{cases}$$

Damit lassen sich die neuen Strukturkonstanten explizit angeben:

$$c_{ij}^r(t) = \begin{cases} c_{ij}^r & : i, j, r \leq k \\ t \cdot c_{ij}^r & : i, r \leq k, \quad j > k \\ t \cdot c_{ij}^r & : j, r \leq k, \quad i > k \\ t^2 \cdot c_{ij}^r & : i, j > k, \quad r \leq k \\ t^{-1} \cdot c_{ij}^r & : i, j \leq k, \quad r > k \\ c_{ij}^r & : i \leq k, \quad j, r > k \\ c_{ij}^r & : j \leq k, \quad i, r > k \\ t \cdot c_{ij}^r & : i, j, r > k. \end{cases}$$

Ist \mathfrak{k} eine Unteralgebra von \mathfrak{g} , so gilt $c_{ij}^r = 0$ für $i, j \leq k$ und $r > k$. Also existiert in allen Fällen

$$a_{ij}^r := c_{ij}^r(0) := \lim_{t \rightarrow 0} c_{ij}^r(t);$$

genauer gilt

$$a_{ij}^r = \begin{cases} c_{ij}^r & : i, j, r \leq k \\ c_{ij}^r & : i \leq k, \quad j, r > k \\ c_{ij}^r & : j \leq k, \quad i, r > k \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Da die Strukturkonstanten c_{ij}^r die Bedingungen $c_{ij}^r = -c_{ji}^r$ und die Jacobi-Identität erfüllen, gilt dies auch für die a_{ij}^r . Erstere Bedingung ist klar, und für letztere berechnet man

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{ij}^k a_{kl}^m + a_{jl}^k a_{ki}^m + a_{li}^k a_{kj}^m &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v_{kk} u_{ii} u_{jj} v_{mm} u_{rr} u_{ll} (c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m + c_{li}^k c_{kj}^m) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da der Ausdruck in der Klammer identisch 0 ist. Also definieren die Strukturkonstanten in der Tat eine Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]_0$ auf \mathfrak{g} , deren geforderte Eigenschaften sich direkt aus den Werten der Strukturkonstanten ergeben. \square

Bezeichnet $\mathfrak{g}_t := (\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_t)$ für $t \in \mathbb{R}$ die bezüglich U_t deformierte Lie-Algebra, so läßt sich das Feld $(\mathfrak{g}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ als sog. Lie-Algebroid mit trivialem Anker auffassen, dessen Fasern außerhalb 0 isomorph zueinander sind. Genauer gilt:

Proposition 3.1.4. *Man betrachte $\mathcal{A} := \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ als Vektorraumbündel über \mathbb{R} , und es bezeichne $\Gamma(\mathcal{A})$ die Algebra der glatten Schnitte. Setzt man $[f, g](t) := [f(t), g(t)]_t$, so definiert die Abbildung*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \Gamma(\mathcal{A}) \times \Gamma(\mathcal{A}) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{A}) \\ (f, g) &\longmapsto [f, g], \end{aligned}$$

eine Lie-Multiplikation auf $\Gamma(\mathcal{A})$.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß mit $f, g \in \Gamma(\mathcal{A})$ auch $[f, g]$ differenzierbar ist. Dies sieht man aber sofort, wenn man eine Basis X_1, \dots, X_n von \mathfrak{g} wie in obigem Beweis wählt:

Gilt $f(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot X_i$ und $g(t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(t) \cdot X_j$ mit glatten Funktionen $\lambda_i, \mu_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$[f, g](t) = \sum_{i,j,r=1}^n \lambda_i(t) \cdot \mu_j(t) \cdot c_{ij}^r(t) \cdot X_r,$$

und die Glattheit folgt aus der Tatsache, daß auch die Funktionen c_{ij}^r glatt sind, wie an der expliziten Darstellung im vorigen Beweis zu sehen ist. \square

Ein Lie-Algebroid ist im allgemeinen nicht integrierbar, d.h. es muß keinen Lie-Gruppoid geben, dessen zugehöriger Lie-Algebroid mit dem gegebenen übereinstimmt. Mit anderen Worten: Es gibt keine Aussage, die dem dritten Theorem von Lie entsprechen würde.

Im folgenden Abschnitt wird der Deformationsprozeß daher durch direkte Konstruktion eines Bündels von Lie-Gruppen beschrieben. Die Konstruktion ist durch folgende Überlegungen motiviert:

Ist G eine endlich-dimensionale reelle Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und H eine abgeschlossene Untergruppe von G , so besitzt H selbst die Struktur einer Lie-Gruppe, und die zugehörige Lie-Algebra \mathfrak{h} ist in natürlicher Weise eine Unter- algebra von \mathfrak{g} .

In der Nullfaser des zu konstruierenden Bündels von Lie-Gruppen ist die Unter- gruppe H unverändert zu lassen und der Rest "flach" zu machen; genauer gesagt, wird die Lie-Gruppe G zum semidirekten Produkt von H mit dem Tangentialraum der Quotientenmannigfaltigkeit G/H deformiert.

Für $t \neq 0$ ist die deformierte Lie-Algebra \mathfrak{g}_t isomorph zu $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$. Also sollen auch die korrespondierenden Lie-Gruppen G_t lokal isomorph zu G sein. Aus der Theorie der Lie-Gruppen ist bekannt, daß die Exponentialfunktion eine Umgebung der Null in \mathfrak{g} diffeomorph auf eine Umgebung der Eins in G abbildet, und die Multiplikation wird dort beschrieben durch die Campbell-Hausdorff-Formel; man vgl. etwa [Tit83, III, 4.2 - 4.3].

Es bezeichne im folgenden $H_t(\cdot, \cdot)$ die Campbell-Hausdorff-Reihe für \mathfrak{g}_t , und man setze $H := H_1$. Sind $g_1, g_2 \in G$ mit $g_i = \exp(Z_i)$, so daß die Campbell-Hausdorff-Reihe $H_t(Z_1, Z_2)$ (bezüglich einer geeignet gewählten Norm) konvergiert, so definiere man $g_1 *_t g_2 := \exp(H_t(Z_1, Z_2))$. Mit dieser Verknüpfung ist $G_t := (G, *_t)$ eine "lokale Gruppe" zur Lie-Algebra \mathfrak{g}_t mit Exponentialfunktion $\exp_t = \exp$.

Die Summanden der Campbell-Hausdorff-Reihe sind iterierte Kommutatoren. Per vollständiger Induktion zeigt man leicht für die Deformationsabbildungen U_t :

Proposition 3.1.5.

$$U_t([\dots [X_1, X_2]_t, X_3]_t, \dots, X_k]_t) = [\dots [U_t(X_1), U_t(X_2)], U_t(X_3)], \dots, U_t(X_k)]$$

Hieraus ergibt sich sofort:

Korollar 3.1.6. Sind $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$, so daß die auftretenden Campbell-Hausdorff-Reihen konvergieren, so gilt $U_t(H_t(Z_1, Z_2)) = H(U_t(Z_1), U_t(Z_2))$.

Damit erhält man:

Satz 3.1.7. Für $g = \exp_t(Z) \in G_t$ setze man $\Phi_t(g) := \exp(U_t(Z)) \in G$. Dann ist $\phi_t : G_t \longrightarrow G$ ein lokaler Isomorphismus, für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_t & \xrightarrow{U_t} & \mathfrak{g} \\ \exp_t \downarrow & & \downarrow \exp \\ G_t & \xrightarrow{\Phi_t} & G. \end{array}$$

Beweis. Die Kommutativität des Diagramms ist klar nach Definition der Abbildungen. Sind $g_i = \exp_t(Z_i) \in G_t$ für $i = 1, 2$, so gilt unter Verwendung des obigen

Korollars

$$\begin{aligned}
\Phi_t(g_1 *_t g_2) &= \Phi_t(\exp(H_t(Z_1, Z_2))) \\
&= \exp(U_t(H_t(Z_1, Z_2))) \\
&= \exp(H(U_t(Z_1), U_t(Z_2))) \\
&= \exp(U_t(Z_1)) \cdot \exp(U_t(Z_2)) \\
&= \Phi_t(g_1) \cdot \Phi_t(g_2),
\end{aligned}$$

d.h. Φ_t ist ein lokaler Homomorphismus. Dieser ist sogar ein lokaler Isomorphismus, da die korrespondierende Abbildung auf dem Niveau der Lie-Algebren ein Isomorphismus ist. \square

3.2 Fast zusammenhängende Lie-Gruppen

Um die im vorigen Abschnitt beschriebene Deformation auf fast zusammenhängende Lie-Gruppen übertragen zu können, werden zunächst die benötigten Resultate aus der Theorie der Lie-Gruppen bereitgestellt; Lie-Gruppen sind dabei stets als reell-analytische Mannigfaltigkeiten zu verstehen.

Im folgenden sei G eine reelle Lie-Gruppe endlicher Dimension mit Lie-Algebra \mathfrak{g} , $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{h} und \mathfrak{m} ein Vektorraumkomplement von \mathfrak{h} in \mathfrak{g} . Desweiteren bezeichne $q : G \longrightarrow G/H$ die kanonische Quotientenabbildung, wobei G/H mit der Quotiententopologie versehen sei.

Theorem 3.2.1. *Es gibt genau eine analytische Struktur auf G/H , so daß G eine Lie-Transformationsgruppe für G/H ist; insbesondere ist G/H eine analytische Mannigfaltigkeit.*

Genauer gesagt: Es existiert eine Umgebung V_0 von 0 in \mathfrak{m} , so daß die Einschränkung der Exponentialfunktion V_0 homöomorph auf ihr Bild in G und die Quotientenabbildung das Bild $\exp(V_0)$ homöomorph auf $q(\exp(V_0))$ in G/H abbildet. Die analytische Struktur ist so definiert, daß die Abbildung

$$\text{Exp} := q \circ \exp|_{V_0} : V_0 \longrightarrow \text{Exp}(V_0) \subseteq G/H$$

ein Diffeomorphismus ist. Da $d \exp|_0 = \text{id}$ ist, läßt sich \mathfrak{m} mit dem Tangentialraum von G/H in $q(e) = eH$ identifizieren.

Beweis. [Hel78, II.4.1 und II.4.2]. \square

Satz 3.2.2. Für jedes $g \in G$ ist die Konjugation $I_g : G \longrightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}$ ein analytischer Diffeomorphismus mit $I_g(e) = e$ und induziert daher einen Isomorphismus

$$\text{Ad}(g) := dI_g|_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

Die Abbildung $\text{Ad} : G \longrightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ ist ein analytischer Homomorphismus, und es gilt

$$I_g(\exp(X)) = g \cdot \exp(X) \cdot g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)(X))$$

für alle $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Folgt aus [Hel78, II.1.12]. □

Satz 3.2.3. Für $g \in G$ ist die Linksmultiplikation

$$L_g : G/H \longrightarrow G/H, \quad xH \mapsto gxH$$

ein analytischer Diffeomorphismus. Ist $h \in H$, so gilt $L_h(eH) = eH$, und L_h induziert einen Isomorphismus

$$\tau_h := dL_h|_{eH} : V \longrightarrow V,$$

wobei $V := T_{eH}(G/H)$ den Tangentialraum von G/H in $q(e) = eH$ bezeichne. Es gilt $\tau_{hh'} = \tau_h \circ \tau_{h'}$, und die Abbildung

$$\tau : H \times V \longrightarrow V, \quad (h, X) \mapsto \tau_h(X)$$

ist analytisch. Daher ist das semidirekte Produkt $V \rtimes H$ eine Lie-Gruppe. Desweiteren kommutieren für $h \in H$ die folgenden Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{I_h} & G \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ G/H & \xrightarrow{L_h} & G/H \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}(h)} & \mathfrak{g} \\ d q|_e \downarrow & & \downarrow d q|_e \\ V & \xrightarrow{\tau_h} & V \end{array}$$

Gilt zusätzlich $\text{Ad}(h)(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$, so kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{m} & \xrightarrow{\text{Ad}(h)} & \mathfrak{m} \\
 \sigma \uparrow & & \uparrow \sigma \\
 V & \xrightarrow{\tau_h} & V,
 \end{array}$$

wobei $\sigma := (\text{d}q|_e)|_{\mathfrak{m}}^{-1}$ ist.

Beweis. Nach 3.2.1 ist G eine Lie-Transformationsgruppe für den homogenen Raum G/H . Insbesondere ist die Abbildung

$$G \times G/H \longrightarrow G/H, \quad (g, xH) \mapsto gxH$$

analytisch, und für alle $g \in G$ ist die Linkstranslation L_g ein Diffeomorphismus mit Inverse $L_{g^{-1}}$. Durch Übergang zu den Differentialen der Linkstranslationen erhält man durch

$$G \times T(G/H) \longrightarrow T(G/H), \quad (g, (xH, X)) \mapsto (gxH, \text{d}L_g(X))$$

eine glatte G -Wirkung auf dem Tangentialbündel $T(G/H)$.

Für alle $h \in H$ ist $\text{d}L_h : V \longrightarrow V$ ein Isomorphismus. Einschränken der obigen Wirkung auf die abgeschlossene Teilmenge $H \times V$ definiert somit eine glatte Wirkung

$$\tau : H \times V \longrightarrow V,$$

und das semidirekte Produkt $V \rtimes H$ ist eine analytische Lie-Gruppe. Die Verknüpfungen sind dabei gegeben durch

$$(X, h) \cdot (Y, l) = (X + \tau_h(Y), hl) \quad \text{und} \quad (X, h)^{-1} = (-\tau_{h^{-1}}(X), h^{-1}).$$

Die Kommutativität des ersten Diagramms rechnet man sofort nach; hieraus folgt dann die Kommutativität der anderen beiden Diagramme durch Übergang zu den Differentialen. \square

Bemerkung 3.2.4. Die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ der Untergruppe $H \subseteq G$ ist invariant unter der Einschränkung der adjungierten Darstellung auf H . Ist H sogar kompakt, so ist H vollständig reduzibel. Da \mathfrak{h} ein H -invarianter Teilraum von \mathfrak{g} für die Darstellung

$$\text{Ad}_H : H \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$$

ist, folgt insbesondere, daß für $H \subseteq G$ kompakt ein H -invariantes Komplement von \mathfrak{h} in \mathfrak{g} existiert. Für kompakte Untergruppen sei der Unterraum $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$ stets so gewählt, daß $\text{Ad}(H)(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$ gilt.

Satz 3.2.5. *Es existieren beschränkte, offene Nullumgebungen $U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$, $U_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{m}$ und $U_{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{h}$, so daß die Abbildungen*

$$\psi : U_{\mathfrak{g}} \longrightarrow G, Z \mapsto \exp(Z)$$

und

$$\phi : U_{\mathfrak{m}} \times U_{\mathfrak{h}} \longrightarrow G, (X, Y) \mapsto \exp X \cdot \exp(Y)$$

analytische Diffeomorphismen auf eine offene Umgebung des neutralen Elements in G sind. Da H eine (abgeschlossene) Untergruppe von G ist, kann $U_{\mathfrak{h}}$ so gewählt werden, daß $W_0 := \exp(U_{\mathfrak{h}})$ eine offene Umgebung von e in H ist, und auch die Abbildung

$$\tilde{\phi} : U_{\mathfrak{m}} \times W_0 \longrightarrow G, (X, h) \mapsto \exp(X) \cdot h$$

ist dann ein analytischer Diffeomorphismus auf ihr Bild.

Beweis. Folgt aus [Hel78, II.1.6 und II.2.4]. □

Ab jetzt sei die Lie-Algebra \mathfrak{g} mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen, welche die Bedingung

$$\|[X, Y]\| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{g}$$

erfüllt. Eine solche Norm existiert immer: Ist nämlich $\|\cdot\|'$ eine beliebige Norm auf \mathfrak{g} , so existiert aufgrund der Stetigkeit der Lie-Klammer eine Konstante $C > 0$ mit $\|[\cdot, \cdot]\|' \leq C \cdot \|\cdot\|' \cdot \|\cdot\|'$, und $\|\cdot\| := C \cdot \|\cdot\|'$ liefert das Gewünschte.

Satz 3.2.6. *Es bezeichne $H(T_1, T_2)$ die Campbell-Hausdorff-Reihe in den Variablen T_1, T_2 . Diese ist absolut konvergent auf der Menge*

$$\mathcal{O} = \{(Z_1, Z_2) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid \|Z_1\| + \|Z_2\| < \log 2\}$$

und gleichmäßig konvergent auf kompakten Teilmengen von \mathcal{O} . Für $(Z_1, Z_2) \in \mathcal{O}$ gilt

$$\exp(H(Z_1, Z_2)) = \exp(Z_1) \cdot \exp(Z_2).$$

Insbesondere folgt: Sind U_1, U_2 beschränkte Teilmengen von \mathfrak{g} , so existiert ein $\epsilon > 0$, so daß die Abbildung

$$\begin{aligned} U_1 \times U_2 \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathfrak{g}, \\ (Z_1, Z_2, t) &\mapsto H(t \cdot Z_1, t \cdot Z_2) \end{aligned}$$

wohldefiniert und analytisch ist.

Beweis. Vgl. [Bou98b, II, §7.2, Prop. 1] bzw. [Tit83, III, §3.5]. Die Campbell-Hausdorff-Reihe stellt auf \mathcal{O} eine analytische Abbildung dar, welche als absolut konvergente Reihe auf kompakten Teilmengen von \mathcal{O} gleichmäßig konvergiert. □

Die Campbell-Hausdorff-Reihe läßt sich in der Form $H(Z_1, Z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(Z_1, Z_2)$ schreiben, wobei die homogenen Anteile H_n Linearkombinationen n -facher Lie-Klammern sind. Für die ersten drei Terme gilt etwa $H_1(Z_1, Z_2) = Z_1 + Z_2$, $H_2(Z_1, Z_2) = \frac{1}{2}[Z_1, Z_2]$ und $H_3(Z_1, Z_2) = \frac{1}{12}[Z_1, [Z_1, Z_2]] - \frac{1}{12}[Z_2, [Z_1, Z_2]]$.

Zu einer lokal-kompakten Gruppe G bezeichne G_0 die Zusammenhangskomponente der Eins. Diese ist ein abgeschlossener Normalteiler in G , und die Gruppe der Zusammenhangskomponenten G/G_0 ist total unzusammenhängend.

Definition 3.2.7. Eine lokal-kompakte Gruppe G heißt fast zusammenhängend, falls die Gruppe G/G_0 der Zusammenhangskomponenten kompakt ist.

Bemerkung 3.2.8. Ist G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} , so ist daß Bild $\exp(\mathfrak{g})$ der Exponentialfunktion in G_0 enthalten. Somit enthält G_0 eine wegzusammenhängende Umgebung der Eins; daher ist G_0 auch offen in G , und die Topologie auf G/G_0 ist diskret.

Eine Lie-Gruppe G ist somit genau dann fast zusammenhängend, wenn G nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

Für fast zusammenhängende Lie-Gruppen hat man den folgenden Struktursatz:

Theorem 3.2.9. *Es sei G eine fast zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann gibt es eine kompakte Untergruppe $K \subseteq G$ und endlich viele Unterräume $S_1, \dots, S_k \subseteq \mathfrak{g}$, deren Summe direkt ist, so daß für $E_i := \exp(S_i)$ und $E := E_1 \times \dots \times E_k$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) Für alle $x \in K$ und alle $i = 1, \dots, k$ gilt $x \cdot E_i \cdot x^{-1} = E_i$.
- (ii) Die durch Multiplikation gegebene Abbildung $E \times K \longrightarrow G$ ist ein Diffeomorphismus analytischer Mannigfaltigkeiten.
- (iii) Zu jeder kompakten Untergruppe $L \subseteq G$ existiert ein Element $x \in E$ mit $x \cdot L \cdot x^{-1} \subseteq K$.

Inbesondere ist K eine maximal kompakte Untergruppe in G .

Beweis. Man vergleiche [Hoc68, XV, Thm. 3.1]. Die Tatsache, daß K maximal kompakt in G ist, folgt leicht: Ist nämlich $M \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe, welche K enthält, so folgt aus Bedingung (iii), daß ein Element $x \in G$ mit $xKx^{-1} \subseteq xMx^{-1} \subseteq K$ gibt. Somit müssen M und K die gleiche Dimension und die gleiche Anzahl von Zusammenhangskomponenten haben, woraus $M = K$ folgt. \square

Nach Aussage (iii) des Theorems ist klar, daß die maximal kompakte Untergruppe einer fast zusammenhängenden Lie-Gruppe eindeutig bis auf Konjugation bestimmt ist. Als weitere Folgerung erhält man:

Korollar 3.2.10. *Ist G eine fast zusammenhängende Lie-Gruppe mit maximal kompakter Untergruppe K , so ist der homogene Raum G/K zusammenhängend, $K \cap G_0$ ist eine maximal kompakte Untergruppe von G_0 , und $K_0 = K \cap G_0$ ist die Zusammenhangskomponente der Eins in K . Die homogenen Räume G/K und G_0/K_0 sind in kanonischer Weise diffeomorph.*

Beweis. Wie im Beweis von 3.2.9 sieht man, daß $K \cap G_0$ maximal kompakt in G_0 und somit nach 3.2.9 (ii), angewandt auf G_0 , zusammenhängend ist. Die restlichen Aussagen folgen dann sofort. \square

Bemerkung 3.2.11. Als zusammenhängende Lie-Gruppe wirkt G_0 orientierungserhaltend auf dem homogenen Raum G/K .

Ist λ ein Haarmaß der fast zusammenhängenden Lie-Gruppe G , so definiert die Einschränkung auf die offene Untergruppe G_0 ein Haarmaß λ_0 auf G_0 .

Die kanonischen Abbildungen $q : G \rightarrow G/K$ und $q_0 : G_0 \rightarrow G_0/K_0$ sind eigentlich. Ist $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G , so gibt es nach 3.2.9 Elemente $k_1, \dots, k_N \in K$, so daß G die disjunkte Vereinigung der Mengen $G_0 \cdot k_1, \dots, G_0 \cdot k_N$ ist. Ist $f \in C_c(G/K)$, so gilt $(f \circ q)(g \cdot k_i) = (f \circ q_0)(g)$ für alle $g \in G_0$ und $i = 1, \dots, N$, und es folgt

$$\int_G f \circ q \, d\lambda = N \cdot \int_{G_0} f \circ q_0 \, d\lambda_0.$$

Für eine kompakte Untergruppe ist nach 3.2.4 aus abstrakten Gründen klar, daß ein K -invariantes Vektorraumkomplement \mathfrak{m} von $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ existiert. Im folgenden Beispiel kann ein solches konkret beschrieben werden:

Beispiel 3.2.12. Es sei G eine halbeinfache und zusammenhängende Lie-Gruppe. Ist die zugehörige Lie-Algebra \mathfrak{g} von kompaktem Typ, so ist nach dem Satz von Weyl (vgl. [HN91, III.5.13]) die Gruppe G kompakt. Für $K = G$ und $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{m} = 0$ trivialerweise ein K -invariantes Vektorraumkomplement.

Ist die Lie-Algebra \mathfrak{g} nicht von kompaktem Typ, so betrachte man eine Cartan-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$, und es bezeichne $K := \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$ die von $\exp \mathfrak{k}$ erzeugte analytische Untergruppe in G . Da für $X \in \mathfrak{k}$ auch $(\exp X)^{-1} = \exp(-X) \in \exp \mathfrak{k}$ liegt, besteht K gerade aus endlichen Produkten von Elementen aus $\exp \mathfrak{k}$.

Die Cartan-Zerlegung hat die Eigenschaft, daß für die Lie-Klammer die Beziehungen

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$$

gelten. Ist $X \in \mathfrak{k}$ und $Y \in \mathfrak{g}$, so gilt also

$$\operatorname{ad}(X)(Y) = [X, Y] \in \mathfrak{g},$$

und per vollständiger Induktion erkennt man, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ auch

$$(\operatorname{ad}(X))^n(Y) \in \mathfrak{g}$$

gilt. Andererseits gilt in einer Lie-Gruppe die Beziehung

$$\operatorname{Ad}(\exp X) = \exp(\operatorname{ad}(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad} X)^n}{n!}.$$

Da \mathfrak{g} als endlich-dimensionaler Unterraum in \mathfrak{g} abgeschlossen ist, folgt also für alle $X \in \mathfrak{k}$ die Beziehung $\operatorname{Ad}(\exp X)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$. Andererseits ist Ad eine Darstellung von G , d.h. es gilt $\operatorname{Ad}(k_1 k_2) = \operatorname{Ad}(k_1) \operatorname{Ad}(k_2)$. Da die Untergruppe K von $\exp \mathfrak{k}$ erzeugt wird, folgt also $\operatorname{Ad}(k)(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ für alle $k \in K$.

Ist das Zentrum von G endlich, so ist nach [Hel78, VI.1.1(i)] K eine maximal kompakte Untergruppe von G , und die Cartan-Zerlegung (mit $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}$) liefert das Gewünschte.

Auch in dem Fall, daß G unendliches Zentrum besitzt, ist (G, K) ein Riemansches symmetrisches Paar im Sinne von [Hel78], und – ausgehend von der Cartan-Zerlegung der Lie-Algebra \mathfrak{g} – kann die maximal kompakte Untergruppe wie im Beweis von [Hel78, VI.2.2] gewählt werden:

Ist $Z(G)$ nicht endlich, so ist $K = \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$ nicht kompakt; es existiert eine Zerlegung $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_s \oplus \mathfrak{k}_a$, wobei \mathfrak{k}_a eine abelsche Unter algebra ist. Es bezeichnen K_s und K_a die analytische Untergruppen von K , welche zu \mathfrak{k}_s und \mathfrak{k}_a korrespondieren. Die Untergruppe K_a besitzt eine Zerlegung in ein direktes Produkt analytischer Untergruppen $K_a = T \times E$, wobei T ein Torus und E analytisch isomorph zu einem euklidischen Raum ist. Dann ist

$$\tilde{K} := K_s T = \{kt \mid k \in K_s, t \in T\}$$

eine maximal kompakte Untergruppe; ihre Elemente kommutieren mit denen aus E . Aus $K_a = T \times E$ folgt $\mathfrak{k}_a = \mathfrak{k}_T \oplus \mathfrak{k}_E$, und man setze $\mathfrak{m} := \mathfrak{k}_E \oplus \mathfrak{g}$.

Da $\tilde{K} \subseteq K$ gilt, folgt wie oben $\operatorname{Ad}(k)(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}$ für alle $k \in \tilde{K}$. Andererseits gilt $I_k|_E = \operatorname{id}_E$ für alle $k \in \tilde{K}$, und daher folgt mit $\operatorname{Ad}(k) = (dI_k)_e$ auch $\operatorname{Ad}(k)|_{\mathfrak{k}_E} = \operatorname{id}_{\mathfrak{k}_E}$, also insgesamt $\operatorname{Ad}(k)(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$, was zu zeigen war.

3.3 Deformation von Lie-Gruppen

In diesem Abschnitt wird nun die Deformation von fast zusammenhängenden Lie-Gruppen durch Konstruktion eines glatten Gruppenbündels \mathcal{G} über \mathbb{R} beschrieben. Die Konstruktion des Gruppenbündels ist motiviert durch [Con94, II.10.β].

Desweiteren wird das Untergruppenbündel der Zusammenhangskomponenten von \mathcal{G} eingeführt. Dieses wird im folgenden Kapitel bei der Konstruktion des Dirac-Elements zur Definition einer Orientierung benötigt, um wie in 2.1.21 das Resultat von Wolf für die Definition des vertikalen Dirac-Operators nutzen zu können.

Im folgenden sei stets G eine (endlich-dimensionale, reelle) fast zusammenhängende Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra \mathfrak{g} .

Auf der Lie-Algebra sei – wie im vorigen Abschnitt angegeben – eine Norm fixiert, welche die Bedingung $\|[X, Y]\| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ erfüllt.

Desweiteren sei $K \subseteq G$ eine maximal kompakte Untergruppe von G mit Lie-Algebra \mathfrak{k} und \mathfrak{m} ein Vektorraumkomplement von \mathfrak{k} in \mathfrak{g} , so daß $\text{Ad}(k)(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$ für alle $k \in K$ gilt.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende Notationen eingeführt:

Es bezeichne $V := T_{eK}(G/K)$ den Tangentialraum an G/K im Punkt eK ; dieser wird nach 3.2.1 mit dem K -invarianten Unterraum \mathfrak{m} der Lie-Algebra \mathfrak{g} identifiziert, so daß $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{k}$ gilt. Die Einschränkung der Norm auf \mathfrak{g} definiert eine Norm auf V .

Die maximal kompakte Untergruppe K wirkt auf V wie in 3.2.3, und es bezeichne $V \rtimes K$ das semidirekte Produkt. Unter der Identifikation von V mit dem Unterraum $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{g}$ gilt für die Wirkung $\tau = \text{Ad}$.

Desweiteren seien offene und zusammenhängende Umgebungen V_0 von $0 \in V$ und W_0 von $e \in K$ wie in 3.2.5 fixiert, so daß die Einschränkung der Abbildung

$$\varphi : V \times K \longrightarrow G, \quad (X, k) \mapsto \exp(X) \cdot k$$

auf $V_0 \times W_0$ ein Diffeomorphismus auf das Bild $\varphi(V_0 \times W_0) \subseteq G$ ist. Da die Multiplikation von G analytisch ist, ist für jedes $k \in K$ die Abbildung

$$V_0 \times W_0 k \longrightarrow G, \quad (X, hk) \mapsto \exp(X)hk$$

ebenfalls ein Diffeomorphismus auf ihr Bild. Im folgenden werden die Notationen $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$ und $\mathbb{R}^- = \{x < 0\}$ verwendet.

Man betrachte die disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{G} := (V \times K \times \{0\}) \dot{\cup} (G \times \mathbb{R}^\times)$$

mit der kanonischen Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$. Unter faserweisen Operationen ist \mathcal{G} ein Bündel von Gruppen über \mathbb{R} .

Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ setze man $\mathcal{G}_A := p^{-1}(A)$ und insbesondere $\mathcal{G}_t := \mathcal{G}_{\{t\}}$ für $t \in \mathbb{R}$. Ist $t \neq 0$, so läßt sich \mathcal{G}_t mit G identifizieren; ebenso kann \mathcal{G}_0 mit $V \times K$ identifiziert werden.

Satz 3.3.1. *Als Bündel von Gruppen ist \mathcal{G} ein Gruppoid bezüglich der folgenden Strukturabbildungen:*

- *Source- und Target-Abbildung:*
kanonische Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$

- *Eins-Abbildung:*

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad t \mapsto \begin{cases} (0, e, 0) & \text{für } t = 0 \\ (e, t) & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

- *Inversion:*

$$i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad (\xi, t) \mapsto (\xi^{-1}, t)$$

- *partielle Multiplikation:*

$$m : \mathcal{G}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad ((\xi_1, t), (\xi_2, t)) \mapsto (\xi_1 \cdot \xi_2, t),$$

wobei $\mathcal{G}^{(2)} := \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{G} = \{(\zeta, \eta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid p(\zeta) = p(\eta)\}$ ist.

Beweis. Klar. □

Ein erstes Ziel ist es, \mathcal{G} mit der Struktur eines glatten Gruppenbündels zu versehen. Als glatter Gruppoid besitzt \mathcal{G} dann ein glattes Haarsystem, wie im ersten Kapitel beschrieben wurde. Dazu betrachte man auf \mathcal{G} die folgende Topologie:

Definition 3.3.2. Es sei

$$\Phi : V \times K \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}$$

definiert durch

$$(X, k, t) \mapsto \begin{cases} (X, k, 0) & \text{für } t = 0 \\ (\exp(tX)k, t) & \text{für } t \neq 0. \end{cases}$$

Es bezeichne \mathfrak{T} die Topologie auf \mathcal{G} , welche von den Mengen des folgenden Typs erzeugt wird:

- (I) $O \subseteq G \times \mathbb{R}^\times$ offen,
- (II) $\Phi(U \times Wk \times (-\epsilon, \epsilon))$ für $\epsilon > 0$, U offen (und beschränkt) in V mit $tU \subseteq V_0$ für alle $|t| < \epsilon$, $k \in K$ und W offene Umgebung von $e \in K$ mit $W \subseteq W_0$.

Dabei bezeichnen V_0 bzw. W_0 die fixierten offenen und zusammenhängenden Umgebungen des neutralen Elements in V bzw. K .

Motiviert ist die Definition der Topologie auf \mathcal{G} durch den im ersten Abschnitt beschriebenen Deformationsprozeß für Lie-Algebren; man vergleiche insbesondere 3.1.7.

Bemerkung 3.3.3. Nach Wahl der Umgebungen bildet

$$\varphi : V \times K \longrightarrow G, (X, k) \mapsto \exp(X) \cdot k$$

die Menge $V_0 \times W_0$ diffeomorph auf ihr Bild in G ab. Da die Rechtsmultiplikation mit Elementen aus G ebenfalls ein Diffeomorphismus ist, ist die oben definierte Abbildung Φ auf jeder Menge des Typs (II) injektiv.

Die Mengen des Typs (II), welche als typische Umgebungen von Elementen der Nullfaser von \mathcal{G} anzusehen sind, besitzen die folgende Durchschnittseigenschaft:

Lemma 3.3.4. Für $i = 1, 2$ seien $M_i = U_i \times W_i k_i \times (-\epsilon_i, \epsilon_i) \subseteq V \times K \times \mathbb{R}$ gegeben, so daß $\Phi(M_i)$ eine offene Menge vom Typ (II) in \mathcal{G} ist. Dann existiert zu jedem Punkt in $\Phi(M_1) \cap \Phi(M_2) \cap \mathcal{G}_0$ eine offene Umgebung $M = U \times Wk \times (-\epsilon, \epsilon)$ in $V \times K \times \mathbb{R}$, so daß $\Phi(M)$ vom Typ (II) ist und $\Phi(M) \subseteq \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$ gilt. Die Mengen des Typs (II) bilden somit eine Umgebungsbasis der Punkte in \mathcal{G}_0 .

Beweis. Für $(X, k, 0) \in \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$ ist $U_1 \cap U_2 =: U$ eine offene (und beschränkte) Umgebung von X in V . Mit $\epsilon := \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ gilt dann $tU \subseteq V_0$ für alle $|t| < \epsilon$. Desweiteren ist $W_1 k_1 \cap W_2 k_2$ eine offene Umgebung von k in K . Setzt man $W := (W_1 k_1 \cap W_2 k_2) k^{-1} \cap W_0$, so ist $M = U \times Wk \times (-\epsilon, \epsilon)$ offen in $V \times K \times \mathbb{R}$, und es gilt $M \subseteq M_1 \cap M_2$. Daher ist $\Phi(M)$ vom Typ (II) mit $\Phi(M) \subseteq \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$. \square

Satz 3.3.5. Die Topologie \mathfrak{T} von \mathcal{G} besitzt folgende Eigenschaften:

- (i) Die Einschränkungen $\mathfrak{T}|_{\mathcal{G}_0}$ bzw. $\mathfrak{T}|_{\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}}$ definieren die Standard-Topologie von \mathcal{G}_0 bzw. $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times} = G \times \mathbb{R}^\times$.
- (ii) \mathfrak{T} ist Hausdorffsch.
- (iii) \mathfrak{T} erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
- (iv) \mathfrak{T} ist lokal-kompakt.

Beweis. Es ist klar, daß die Einschränkungen von Mengen des Typs (I) (bzw. des Typs (II)) die gewöhnliche Topologie von $G \times \mathbb{R}^\times$ (bzw. von \mathcal{G}_0) erzeugen. Für den Nachweis von (i) ist daher nur zu zeigen, daß die Einschränkung von Mengen des

Typs (II) auf $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}$ offen in $G \times \mathbb{R}^\times$ ist. Nun gilt aber für eine solche basis-offene Menge

$$\Phi(U \times Wk \times (-\epsilon, \epsilon)) \cap \mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times} = \Phi(U \times Wk \times (0, \epsilon)) \cup \Phi(U \times Wk \times (-\epsilon, 0)).$$

Die Abbildung

$$\mu : V \times K \times \mathbb{R}^\times \longrightarrow V \times K \times \mathbb{R}^\times, \quad (X, k, t) \mapsto (tX, k, t)$$

ist ein analytischer Diffeomorphismus, und die Einschränkung der Abbildung Φ auf $U \times Wk \times (0, \epsilon)$ ist gerade gegeben als Komposition der Abbildungen

$$U \times Wk \times (0, \epsilon) \xrightarrow{\mu} \mu(U \times Wk \times (0, \epsilon)) \xrightarrow{\varphi \times \text{id}} G \times \mathbb{R}^\times.$$

Dies zeigt, daß die Einschränkung von Φ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist, und somit ist $\Phi(U \times Wk \times (0, \epsilon)) \cap \mathcal{G}_{\mathbb{R}^+} = \Phi(U \times Wk \times (0, \epsilon))$ offen in $G \times \mathbb{R}^+$; analog argumentiert man für $\Phi(U \times Wk \times (-\epsilon, \epsilon)) \cap \mathcal{G}_{\mathbb{R}^-}$.

Nach Definition der Topologie ist klar, daß je zwei Punkte aus $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}$ und Punkte aus \mathcal{G}_0 von Punkten aus $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}$ durch offene Umgebungen in \mathcal{G} getrennt werden können.

Es seien also zwei Punkte $(X_1, k_1, 0)$ und $(X_2, k_2, 0)$ der Nullfaser \mathcal{G}_0 gegeben. Gilt $k_1 \neq k_2$, so gibt es eine offene, zusammenhängende Nullumgebung $\tilde{V} \subseteq V_0$ in V und eine offene Umgebung $\tilde{W} \subseteq W_0$ des Einselements in K , so daß für die offene Umgebung $\varphi(\tilde{V} \times \tilde{W}) = \exp(\tilde{V}) \cdot \tilde{W}$ des Einselements in G

$$\varphi(\tilde{V} \times \tilde{W}) \cdot k_1 \cap \varphi(\tilde{V} \times \tilde{W}) \cdot k_2 = \emptyset$$

gilt. Wählt man nun offene, beschränkte Umgebungen U_i von X_i in V und $\epsilon > 0$, so daß $t \cdot U_i \subseteq \tilde{V}$ für alle $0 < |t| < \epsilon$ gilt, so trennen die offenen Umgebungen $\Phi(U_1 \times \tilde{W}k_1 \times (-\epsilon, \epsilon))$ und $\Phi(U_2 \times \tilde{W}k_2 \times (-\epsilon, \epsilon))$ die Punkte $(X_1, k_1, 0)$ und $(X_2, k_2, 0)$.

Gilt dagegen $k_1 = k_2 =: k$ und $X_1 \neq X_2$, so gibt es offene und beschränkte Umgebungen $U_1, U_2 \subseteq V$ von X_1 bzw. X_2 mit trivialem Durchschnitt. Ist $\epsilon > 0$ so gewählt, daß $t \cdot U_i \subseteq V_0$ für alle $0 < |t| < \epsilon$ gilt, so gilt auch $t \cdot U_1 \cap t \cdot U_2 = \emptyset$ für alle $0 < |t| < \epsilon$, und die offenen Umgebungen $\Phi(U_1 \times W_0k \times (-\epsilon, \epsilon))$ und $\Phi(U_2 \times W_0k \times (-\epsilon, \epsilon))$ trennen die Punkte $(X_1, k, 0)$ und $(X_2, k, 0)$. Somit ist auch Aussage (ii) gezeigt.

Die Aussage (iii) ist klar, da sowohl $V \times K \times \mathbb{R}$ als auch $G \times \mathbb{R}^\times$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen und daher eine abzählbare Basis der Topologie besitzen. Gleiches gilt nach Definition der Topologie \mathfrak{T} dann auch für \mathcal{G} .

Es bleibt die Aussage (iv) zu zeigen. Da $G \times \mathbb{R}^\times$ lokal-kompakt ist, besitzt jeder Punkt aus $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}$ eine kompakte Umgebung. Gleiches ist auch für die Punkte

$\xi = (X, k, 0) \in \mathcal{G}_0$ zu zeigen. Da auch $V \times K \times \mathbb{R}$ lokal-kompakt ist, jede offene Umgebung eines Punktes also eine kompakte Umgebung enthält, genügt es, folgende Aussage zu zeigen: Ist $\Phi(M)$ eine basis-offene Umgebung des Typs (II) von ξ mit $M = U \times Wk \times (-\epsilon, \epsilon)$, so ist die Einschränkung $\Phi_M := \Phi|_M : M \longrightarrow \mathcal{G}$ von Φ auf M stetig. Es genügt dabei, die Stetigkeit auf Erzeugern der Topologie \mathfrak{T} zu testen. Man setze $M^\times := U \times Wk \times ((-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\})$, welches eine offene Teilmenge von M ist.

Ist $O \subset G \times \mathbb{R}^\times$ offen, so ist nach (i) auch $O \cap \Phi(M) = O \cap \Phi(M^\times)$ offen in $G \times \mathbb{R}^\times$. Da Φ_M injektiv ist, gilt $\Phi_M^{-1}(O) \subseteq M^\times$. Wie im Beweis von der Aussage (i) sieht man, daß die Einschränkung von Φ_M auf M^\times sich als Verknüpfung von Diffeomorphismen schreiben läßt und somit einen Diffeomorphismus auf ihr Bild induziert. Daher ist $\Phi_M^{-1}(O) = \Phi_M^{-1}(O \cap \Phi(M^\times)) \subseteq M^\times$ offen, insbesondere also auch offen in M .

Ist andererseits $\Phi(M_1)$ eine offene Menge vom Typ (II) in \mathcal{G} gegeben, so gilt $\Phi_M^{-1}(\Phi(M_1)) = \Phi_M^{-1}(\Phi(M_1) \cap \Phi(M))$. Man setze $T := \Phi(M_1) \cap \Phi(M)$, $T_0 := T \cap \mathcal{G}_0$ und $T^\times := T \cap \mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}$. Aufgrund des vorigen Falls ist $\Phi_M^{-1}(T^\times)$ offen in M . Nach 3.3.4 existiert zu jedem $\xi \in T_0$ eine offene Umgebung $\Phi(M_\xi)$ des Typs (II) von ξ mit $M_\xi \subseteq M$ und $\Phi(M_\xi) \subseteq T$; es gilt also $T = T^\times \cup \bigcup_{\xi \in T_0} \Phi(M_\xi)$ und somit

$$\Phi_M^{-1}(T) = \Phi_M^{-1}(T_1) \cup \bigcup_{\xi \in T_0} \Phi_M^{-1}(\Phi(M_\xi)) = \Phi_M^{-1}(T_1) \cup \bigcup_{\xi \in T_0} M_\xi$$

aufgrund der Injektivität von Φ_M . Als Vereinigung offener Mengen ist daher auch $\Phi_M^{-1}(\Phi(M_1)) = \Phi_M^{-1}(T)$ offen in M , woraus die Stetigkeit von Φ_M folgt. \square

Satz 3.3.6. *Das Gruppenbündel \mathcal{G} besitzt eine analytische Struktur, welche von Produktkarten auf den Erzeugern der Topologie vom Typ (I) und (II) erzeugt wird.*

Beweis. Sowohl $G \times \mathbb{R}^\times$ als auch $V \times K \times \mathbb{R}$ sind analytische Mannigfaltigkeiten. Betrachtet man Produktkarten von $G \times \mathbb{R}^\times$ und Produktkarten von $V \times K \times \mathbb{R}$, welche auf Mengen des Typs (II) definiert sind, so ist nur zu zeigen, daß die auftretenden Kartenwechsel glatt sind. Diese Karten erzeugen dann eine analytische Struktur auf \mathcal{G} .

Der Kartenwechsel zweier Karten von $G \times \mathbb{R}^\times$ ist glatt. Sind zwei offene Mengen $\Phi(M_1)$ und $\Phi(M_2)$ vom Typ (II) mit $M_i = U_i \times W_i k_i \times (-\epsilon_i, \epsilon_i)$ und zwei Produktkarten von $V \times K \times \mathbb{R}$ auf M_1 und M_2 gegeben, so genügt es zu zeigen, daß zu jedem Punkt aus $\Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$ eine Umgebung existiert, so daß die Einschränkung des Kartenwechsels auf diese Umgebung glatt ist.

Ist $(\xi, t) \in \Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$ mit $t = 0$, so enthält $\Phi(M_1) \cap \Phi(M_2)$ nach 3.3.4 eine Umgebung $\Phi(M)$ von $(\xi, 0)$ vom Typ (II) mit $M \subseteq M_1 \cap M_2$, und die Einschränkung des Kartenwechsels auf M ist glatt.

Ist $t > 0$, so genügt es, die Abbildung Φ auf $M_i^+ := U_i \times W_i k_i \times (0, \epsilon_i)$ zu betrachten. Dort läßt sich Φ als Komposition der folgenden (lokalen) Diffeomorphismen schreiben:

$$\begin{aligned} U_i \times W_i k_i \times (0, \epsilon_i) &\longrightarrow V_0 \times W k_i \times (0, \epsilon_i), & (X, k, t) &\mapsto (tX, k, t), \\ V_0 \times W k_i \times (0, \epsilon_i) &\longrightarrow G \times (0, \epsilon_i), & (X, k, t) &\mapsto (\exp(X) \cdot k, t) \end{aligned}$$

Als Komposition lokaler Diffeomorphismen ist auch in dieser Situation der Kartenwechsel glatt. Analog argumentiert man für $t < 0$.

Es bleibt der Kartenwechsel für eine Karte vom Typ (I) und eine Karte vom Typ (II) zu betrachten. Ist eine Produktkarte auf der Umgebung $U \times Wk \times (-\epsilon, \epsilon)$ gegeben, so gilt

$$\Phi(U \times Wk \times (-\epsilon, \epsilon)) \cap \mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times} = \Phi(U \times Wk \times ((-\epsilon, \epsilon) \cap \mathbb{R}^\times)),$$

und wie oben läßt sich die Einschränkung von Φ als Komposition der Abbildungen

$$\begin{aligned} U \times Wk \times ((-\epsilon, \epsilon) \cap \mathbb{R}^\times) &\longrightarrow V_0 \times Wk \times ((-\epsilon, \epsilon) \cap \mathbb{R}^\times), & (X, l, t) &\mapsto (tX, l, t), \\ V_0 \times Wk \times ((-\epsilon, \epsilon) \cap \mathbb{R}^\times) &\longrightarrow G \times ((-\epsilon, \epsilon) \cap \mathbb{R}^\times), & (X, l, t) &\mapsto (\exp(X) \cdot l, t) \end{aligned}$$

beschreiben. Die einzelnen Abbildungen sind analytische Diffeomorphismen auf ihr Bild; somit ist auch der Kartenwechsel mit einer Karte vom Typ (I) (lokal) ein analytischer Diffeomorphismus. \square

Mit dieser analytischen Struktur ist das Gruppenbündel \mathcal{G} eine analytische (und somit insbesondere eine glatte) Mannigfaltigkeit. Für den Nachweis, daß \mathcal{G} ein glatter Gruppoid ist, muß noch die Glattheit der Strukturabbildungen gezeigt werden.

Lemma 3.3.7. *Die kanonische Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Submersion.*

Beweis. Lokal bezüglich Produktkarten von $G \times \mathbb{R}^\times$ bzw. $V \times K \times \mathbb{R}$ ist $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ gerade die Projektion auf den letzten Faktor, und eine Abbildung ist genau dann eine Submersion, wenn sie lokal eine Projektion ist. \square

Lemma 3.3.8. *Die Eins-Abbildung $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist analytisch, und das Bild $u(\mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von \mathcal{G} .*

Beweis. Lokal ist die Abbildung u als kartesisches Produkt einer konstanten Abbildung mit der Identität auf \mathbb{R} gegeben und somit glatt. Anhand der Definition der analytischen Struktur auf \mathcal{G} sieht man sofort, daß $u(\mathbb{R})$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist. \square

Satz 3.3.9. *Die Inversion $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist analytisch.*

Beweis. Auf der offenen Teilmenge $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times} = G \times \mathbb{R}^\times$ von \mathcal{G} ist die Inversion i gerade durch $i_G \times \text{id}_{\mathbb{R}^\times}$ gegeben, wobei $i_G : G \longrightarrow G$ die Inversenbildung der Lie-Gruppe G bezeichnet. Daher ist $i|_{\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}}$ analytisch.

Für den Nachweis der Analytizität in der Nullfaser ist zunächst zu zeigen, daß die Inversenbildung bezüglich passend gewählter Kartenumgebungen beschrieben werden kann. Zu $(X, k, 0) \in \mathcal{G}_0$ sei $\Phi(U \times Wk^{-1} \times (-\epsilon, \epsilon))$ eine Kartenumgebung vom Typ (II) von $i(X, k, 0) = (\tau_{k^{-1}}(-X), k^{-1}, 0)$, wobei U als offene Kugel um Null in V (bezüglich der fixierten Norm) gewählt werden kann.

Die Inversenbildung in der Nullfaser

$$i_{\mathcal{G}_0} : V \rtimes K \longrightarrow V \rtimes K, \quad (Y, l) \mapsto (\tau_{l^{-1}}(-Y), l^{-1})$$

ist analytisch, also insbesondere stetig. Daher existiert eine offene, beschränkte Umgebung U_X von X in V sowie eine offene Umgebung W_X des Einselementes von K mit $W_X \subseteq W_0$, so daß $i_{\mathcal{G}_0}(U_X \times W_X k) \subseteq U \times Wk^{-1}$ gilt.

Aufgrund der Beschränktheit der Menge U_X existiert $0 < \epsilon_X \leq \epsilon$ mit $t \cdot U_X \subseteq V_0$ für alle $0 < |t| < \epsilon_X$. Ist $(Y, l, t) \in U_X \times W_X k \times (-\epsilon_X, \epsilon_X)$ mit $t \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} i(\Phi(Y, l, t)) &= i(\exp(tY) \cdot l, t) \\ &= (l^{-1} \exp(-tY) \cdot l \cdot l^{-1}, t) \\ &= (\exp(t \cdot \tau_{l^{-1}}(-Y)) \cdot l^{-1}, t) \\ &= \Phi(\tau_{l^{-1}}(-Y), l^{-1}, t) \in \Phi(U \times Wk^{-1} \times (-\epsilon, \epsilon)) \end{aligned}$$

unter Verwendung von 3.2.2 und 3.2.3.

Dies zeigt, daß die Inversenbildung lokal auf passend gewählten Kartenumgebungen beschrieben werden kann. Auf diesen Umgebungen ist die Abbildung i jedoch gegeben durch

$$\begin{aligned} U_X \times W_X k \times (-\epsilon_X, \epsilon_X) &\longrightarrow U \times Wk^{-1} \times (-\epsilon, \epsilon), \\ (Y, l, t) &\mapsto (\tau_{l^{-1}}(-Y), l^{-1}, t) = (i_{\mathcal{G}_0}(Y, l), t), \end{aligned}$$

woraus die Analytizität von i folgt. □

Schließlich ist noch zu zeigen, daß die partielle Multiplikation auf \mathcal{G} analytisch ist. Dazu sei zunächst in zwei Bemerkungen an bekannte Tatsachen aus der Theorie der Lie-Gruppen und -Algebren erinnert, deren eher technische Folgerungen im anschließenden Beweis genutzt werden.

Bemerkung 3.3.10. Für die Lie-Gruppe G und die Zerlegung $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{k}$ ihrer Lie-Algebra seien die kanonischen Projektionen auf die beiden Unterräume mit $\pi_V : \mathfrak{g} \longrightarrow V$ und $\pi_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{k}$ bezeichnet. Nach 3.2.5 sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha : V \oplus \mathfrak{k} &\longrightarrow G, & (X, Y) &\mapsto \exp(X) \cdot \exp(Y) \quad \text{und} \\ \beta : V \oplus \mathfrak{k} &\longrightarrow G, & (X, Y) &\mapsto \exp(X + Y) \end{aligned}$$

lokal in einer Umgebung von Null analytische Diffeomorphismen. Es gibt somit offene Nullumgebungen \mathcal{O}_α und \mathcal{O}_β in $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{k}$, so daß $\alpha^{-1} \circ \beta : \mathcal{O}_\beta \longrightarrow \mathcal{O}_\alpha$ ein analytischer Diffeomorphismus ist; für alle $Z \in \mathcal{O}_\beta$ gilt

$$(\alpha^{-1} \circ \beta)(Z) = \pi_V \circ (\alpha^{-1} \circ \beta)(Z) + \pi_{\mathfrak{k}} \circ (\alpha^{-1} \circ \beta)(Z).$$

Ist Z_1, \dots, Z_r eine Basis von V , Z_{r+1}, \dots, Z_{r+s} eine Basis von \mathfrak{k} , so wird (indem man ggf. zu einer Verkleinerung von \mathcal{O}_β übergeht) die Abbildung $\pi_V \circ (\alpha^{-1} \circ \beta)$ auf \mathcal{O}_β durch konvergente Potenzreihen $f_j \in \mathbb{R}[[\zeta_1, \dots, \zeta_{r+s}]]$ gegeben, d.h. es gilt

$$\pi_V \circ (\alpha^{-1} \circ \beta) \left(\sum_{j=1}^{r+s} a_j Z_j \right) = \sum_{j=1}^r f_j(a_1, \dots, a_{r+s}) \cdot Z_j.$$

Für $Z \in \mathfrak{g}$ lassen sich die Koeffizientenabbildungen $Z \mapsto a_j(Z)$ als Projektionen von \mathfrak{g} nach \mathbb{R} auffassen; diese sind als lineare Abbildungen insbesondere analytisch, und für $j > r$ gilt $a_j(Z) = a_j(\pi_{\mathfrak{k}}(Z))$.

Da $\alpha(0, 0) = e = \beta(0, 0)$ gilt, ist auch $f_j(0) = 0$ für alle j ; der konstante Term aller Potenzreihen f_j ist somit Null.

Jede Potenzreihe in den Variablen $\zeta_1, \dots, \zeta_{r+s}$ läßt sich eindeutig schreiben als Summe zweier Potenzreihen, wobei die erste eine Potenzreihe in den ersten r Variablen ζ_1, \dots, ζ_r und die zweite ein Element des von den Elementen $\zeta_{r+1}, \dots, \zeta_{r+s}$ erzeugten Ideals ist.

Für $1 \leq j \leq r$ besitzen die Potenzreihen f_j somit eine eindeutige Zerlegung $f_j = g_j + h_j$ mit $g_j \in \mathbb{R}[[\zeta_1, \dots, \zeta_r]]$ und $h_j \in (\zeta_{r+1}, \dots, \zeta_{r+s}) \subseteq \mathbb{R}[[\zeta_1, \dots, \zeta_{r+s}]]$, dem von $\zeta_{r+1}, \dots, \zeta_{r+s}$ erzeugten Ideal. Letztere lassen sich daher in der Form

$$h_j = \sum_{l=1}^s \zeta_{r+l} \cdot \tilde{h}_j^{(l)}$$

schreiben, wobei $\tilde{h}_j^{(l)}$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}[[\zeta_1, \dots, \zeta_{r+s}]]$ ist, welche das gleiche Konvergenzverhalten wie h_j aufweist.

Da $\alpha(X, 0) = \beta(X, 0)$ für alle $(X, 0) \in \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$ gilt, folgt aus dem Identitätssatz für Potenzreihen $g_j = \zeta_j$ für alle $1 \leq j \leq r$.

Insgesamt ergibt sich also für alle $Z = \sum_{j=1}^{r+s} a_j Z_j \in \mathcal{O}_\beta$:

$$\begin{aligned}
\pi_V(\alpha^{-1} \circ \beta)\left(\sum_{j=1}^{r+s} a_j Z_j\right) &= \sum_{j=1}^r f_j(a_1, \dots, a_{r+s}) \cdot Z_j \\
&= \sum_{j=1}^r (g_j + h_j)(a_1, \dots, a_{r+s}) \cdot Z_j \\
&= \sum_{j=1}^r a_j Z_j + \sum_{j=1}^r h_j(a_1, \dots, a_{r+s}) \cdot Z_j \\
&= \pi_V(Z) + \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^s a_{r+l} \cdot \tilde{h}_j^{(l)}(a_1, \dots, a_{r+s}) \cdot Z_j.
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt $\alpha(0, Y) = \beta(0, Y)$ für alle $(0, Y) \in \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$. Hieraus ergibt sich $(\alpha^{-1} \circ \beta)(0, Y) = 0 + Y$ und somit $\pi_V \circ (\alpha^{-1} \circ \beta)(0, Y) = 0$.

Ist $Z = \sum_{i=r+1}^{r+s} a_i \cdot Z_i$ ein Element von $(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \cap \mathfrak{k}$, so folgt aus obiger Darstellung insbesondere

$$\sum_{l=1}^s a_{r+l} \cdot \tilde{h}_j^{(l)}(0, \dots, 0, a_{r+1}, \dots, a_{r+s}) = 0$$

für alle $j = 1, \dots, r$. Wählt man speziell $Z = a_{r+l} \cdot Z_{r+l}$ für $l \in \{1, \dots, s\}$, so folgt

$$a_{r+l} \cdot \tilde{h}_j^{(l)}(0, \dots, 0, a_{r+l}, 0, \dots, 0) = 0$$

und damit

$$\tilde{h}_j^{(l)}(0, \dots, 0, a_{r+l}, 0, \dots, 0) = 0.$$

Die Potenzreihen $\tilde{h}_j^{(l)}$ haben daher den konstanten Term Null.

Potenzreihen konvergieren absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen ihres Konvergenzbereiches. Diese Tatsache wird später genutzt, um die Multiplikation im Gruppenbündel lokal beschreiben zu können. Schließlich sei noch an eine Aussage über die analytische Fortsetzbarkeit von Potenzreihen erinnert:

Ist $f \in \mathbb{R}[[\zeta_1, \dots, \zeta_d, t]]$ eine Potenzreihe in $d + 1$ Variablen, welche auf einem offenen Quader $Q_1 \times Q_2 \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ um Null konvergiert, und konvergiert $t^{-1} \cdot f(\cdot, t)$ für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig auf Q_1 gegen Null, so läßt sich $t^{-1} \cdot f$ in $t = 0$ zu einer analytischen Funktion mit dem Wert Null fortsetzen.

Schreibt man nämlich $f = t \cdot g + h$ mit zwei Potenzreihen $g \in \mathbb{R}[[\zeta_1, \dots, \zeta_d, t]]$ und $h \in \mathbb{R}[[\zeta_1, \dots, \zeta_d]]$, welche auf $Q_1 \times Q_2$ konvergieren, so folgt $h = 0$ und $g(x, 0) = 0$ für alle $x \in Q_1$ aus der Tatsache, daß $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \cdot f(x, t) = 0$ gilt.

Bemerkung 3.3.11. Ist – wie weiter oben bereits erwähnt – die Lie-Algebra \mathfrak{g} mit einer Norm versehen, welche $\|[X, Y]\| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ erfüllt, so konvergiert die Campbell-Hausdorff-Reihe absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von

$$\mathcal{O} = \{(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid \|X\| + \|Y\| < \log 2\}.$$

Nach 3.2.6 stellt sie dort eine analytische Funktion dar, für welche

$$\exp(H(X, Y)) = \exp(X) \exp(Y)$$

gilt. Ist $H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ die Zerlegung der Campbell-Hausdorff-Reihe in ihre homogenen Bestandteile, so sind die einzelnen H_n Linearkombinationen n -facher iterierter Kommutatoren in X und Y ; insbesondere gilt also

$$H_n(tX, tY) = t^n H_n(X, Y) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Der erste Summand ist dabei gegeben durch $H_1(X, Y) = X + Y$.

Da V ein abgeschlossener Teilraum von \mathfrak{g} ist, konvergiert die Einschränkung der Campbell-Hausdorff-Reihe auf kompakten Teilmengen von

$$\mathcal{O}_V = \{(X, Y) \in V \times V \mid \|X\| + \|Y\| < \log 2\}$$

ebenfalls absolut und gleichmäßig und stellt auch dort eine analytische Funktion dar. Für $X, Y \in V$ ergibt sich insbesondere $\pi_{\mathfrak{t}}(H(X, Y)) = \pi_{\mathfrak{t}}(\sum_{n=2}^{\infty} H_n(X, Y))$, da $H_1(X, Y) = X + Y$ ein Element von V ist.

Zu jeder beschränkten Teilmenge $C \subseteq \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ existiert $0 < \epsilon < 1$, so daß $t^{1/3} \cdot C$ für alle $0 \leq |t| \leq \epsilon$ in einer (fest gewählten) kompakten Nullumgebung in \mathcal{O} enthalten ist; dasselbe gilt für $t \cdot C$, da $\epsilon < 1$ vorausgesetzt ist.

Ist $(X, Y) \in C$, so konvergieren die Reihen $H(tX, tY)$ und $H(t^{1/3}X, t^{1/3}Y)$ absolut, und beide Ausdrücke konvergieren gleichmäßig für $t \rightarrow 0$ gegen Null. Es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} (*) \quad \left\| \sum_{n=2}^{\infty} H_n(tX, tY) \right\| &= \left\| \sum_{n=2}^{\infty} t^{2n/3} H_n(t^{1/3}X, t^{1/3}Y) \right\| \\ &= \left\| t^{4/3} \sum_{n=2}^{\infty} t^{\frac{2n-4}{3}} H_n(t^{1/3}X, t^{1/3}Y) \right\| \\ &\leq t^{4/3} \sum_{n=2}^{\infty} \|H_n(t^{1/3}X, t^{1/3}Y)\|. \end{aligned}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann nun gezeigt werden:

Satz 3.3.12. *Die partielle Multiplikation $m : \mathcal{G}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist analytisch.*

Beweis. Die offene Teilmenge $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}$ von $\mathcal{G}^{(2)}$ läßt sich mit $G \times G \times \mathbb{R}^\times$ identifizieren, und die Multiplikation ist (faserweise) gegeben durch die Multiplikation in G . Somit ist m dort analytisch.

Für den Nachweis der Analytizität in der Nullfaser ist zu zeigen, daß die Multiplikation in passend gewählten Kartenumgebungen als Komposition analytischer Abbildungen geschrieben werden kann.

Zu $\xi_1 = (X_1, k_1, 0)$ und $\xi_2 = (X_2, k_2, 0)$ in \mathcal{G}_0 mit

$$\xi := (X, k, 0) := m(\xi_1, \xi_2) = (X_1 + \tau_{k_1}(X_2), k_1 k_2, 0)$$

seien offene beschränkte Umgebungen U und U_0 von X in V mit $\bar{U}_0 \subseteq U$ sowie eine offene Umgebung W des neutralen Elements in K mit $W \cdot W \subseteq W_0$ gewählt. Hierbei ist W_0 wieder die bei der Definition der Topologie fixierte offene Nullumgebung des Einselements in K . Aufgrund der Stetigkeit der Multiplikation in $\mathcal{G}_0 = V \rtimes K$ existieren offene beschränkte Umgebungen U_i von X_i in V sowie offene Umgebungen W_i des neutralen Elements in K mit $W_i \subseteq W_0$, so daß

$$(U_1 \times W_1 \cdot k_1) \cdot (U_2 \times W_2 \cdot k_2) \subseteq U_0 \times W \cdot k \subseteq U \times W \cdot W \cdot k$$

gilt. Desweiteren sei $0 < \epsilon < 1$ gewählt, so daß einerseits $\Phi(U_i \times W_i \cdot k_i \times (-\epsilon, \epsilon))$ und $\Phi(U \times W \cdot W \cdot k \times (-\epsilon, \epsilon))$ offene Umgebungen vom Typ (II) sind und andererseits die Norm der Elemente $\epsilon^{1/3} \cdot Y_1$ und $\epsilon^{1/3} \cdot \tau_1(Y_2)$ für alle $Y_i \in U_i$ und $l_1 \in W \cdot k_1$ kleiner als $\frac{1}{4} \log 2$ ist.

Nach 3.3.11 konvergieren die Campbell-Hausdorff-Reihen $H(tY_1, t\tau_1(Y_2))$ und $H(t^{1/3}Y_1, t^{1/3}\tau_1(Y_2))$ dann für alle $|t| < \epsilon$ absolut, und auf den gewählten Umgebungen konvergieren die Reihen gleichmäßig für $t \rightarrow 0$ gegen Null.

Ist $Y_i \in U_i$, $l_i \in Wk_i$ und $0 < |t| < \epsilon$, so ist das Produkt wieder durch die Campbell-Hausdorff-Formel gegeben:

$$\begin{aligned} m(\Phi(Y_1, l_1, t), \Phi(Y_2, l_2, t)) &= (\exp(tY_1)l_1 \exp(tY_2)l_2, t) \\ &= (\exp(tY_1)l_1 \exp(tY_2)l_1^{-1}l_2, t) \\ &= (\exp(tY_1) \exp(t\tau_1(Y_2))l_1 l_2, t) \\ &= (\exp(H(tY_1, t\tau_1(Y_2)))l_1 l_2, t). \end{aligned}$$

Der Nachweis, daß hierdurch auf Kartenumgebungen eine analytische Abbildung gegeben ist, beruht im wesentlichen auf folgender Idee: Unter Ausnutzung des Kartenwechsels $\alpha^{-1} \circ \beta$ aus 3.3.10 ist zu zeigen, daß

$$\exp(H(tY_1, t\tau_1(Y_2))) = \exp(t \cdot A_1) \cdot \exp(A_2)$$

mit $A_1 \in U$ und $A_2 \in \mathfrak{k}$ geschrieben werden kann. Ist $\exp(A_2) \in W$, so gilt

$$\exp(A_2) \cdot l_1 \cdot l_2 \in W \cdot W \cdot k$$

und somit

$$m(\Phi(Y_1, l_1, t), \Phi(Y_2, l_2, t)) \in \Phi(U \times W \cdot W \cdot k \times (-\epsilon, \epsilon)),$$

und an der genauen Gestalt von A_1 und A_2 ist die Analytizität abzulesen. Es ist dann zu zeigen, daß die Abbildungen

$$\begin{aligned} U_1 \times W_1 k_1 \times U_2 \times W_2 k_2 \times (-\epsilon, \epsilon) &\xrightarrow{\tilde{A}_1} U \\ (Y_1, l_1, Y_2, l_2, t) &\mapsto \begin{cases} Y_1 + \tau_{l_1}(Y_2) & : t = 0 \\ A_1(Y_1, l_1, Y_2, l_2, t) & : t \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_1 \times W_1 k_1 \times U_2 \times W_2 k_2 \times (-\epsilon, \epsilon) &\xrightarrow{\tilde{A}_2} W \cdot W \cdot k \\ (Y_1, l_1, Y_2, l_2, t) &\mapsto \begin{cases} l_1 l_2 & : t = 0 \\ \exp(A_2(Y_1, l_1, Y_2, l_2, t)) l_1 l_2 & : t \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

analytisch sind.

Wie in 3.3.10 sei \mathcal{O}_β eine offene Nullumgebung in $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{k}$, so daß der Kartenwechsel $\chi := \alpha^{-1} \circ \beta$ auf \mathcal{O}_β definiert ist und einen Diffeomorphismus auf das Bild $\chi(\mathcal{O}_\beta)$ darstellt.

Durch Übergang zu kleinerem ϵ kann angenommen werden, daß für alle $Y_i \in U_i$, $l_i \in W k_i$ und $0 < |t| < \epsilon$

$$H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2)) \in \mathcal{O}_\beta$$

gilt, der Basiswechsel χ also definiert ist. Dann gilt

$$A_2 = (\pi_{\mathfrak{k}} \circ \chi)(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))),$$

und durch Übergang zu einem kleineren ϵ kann angenommen werden, daß $\exp(A_2)$ in W liegt. Nun ist der Ausdruck $(\pi_{\mathfrak{k}} \circ \chi)(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2)))$ auch für $t = 0$ definiert und nimmt dort den Wert Null an. Hieraus folgt

$$\tilde{A}_2(Y_1, l_1, Y_2, l_2, t) = \exp((\pi_{\mathfrak{k}} \circ \chi)(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2)))) \cdot l_1 \cdot l_2$$

für alle $(Y_1, l_1, Y_2, l_2, t) \in U_1 \times W_1 k_1 \times U_2 \times W_2 k_2 \times (-\epsilon, \epsilon)$, und als Verknüpfung analytischer Funktionen ist auch \tilde{A}_2 analytisch.

Es bleibt die Analytizität von \tilde{A}_1 zu verifizieren. Dazu sei Z_1, \dots, Z_{r+s} eine Basis von $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{k}$, so daß der Kartenwechsel χ durch die in 3.3.10 angegebenen Potenzreihen beschrieben wird. Es gilt

$$A_1 = t^{-1} \cdot (\pi_V \circ \chi)(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) \quad \text{für } t \neq 0.$$

Nach 3.3.10 gilt mit $a_j = a_j(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2)))$ und unter Verwendung der Zerlegung $H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ der Campbell-Hausdorff-Reihe:

$$\begin{aligned} & (\pi_V \circ \chi)(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) = \\ & \pi_V(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) + \sum_{j=1}^r \sum_{\nu=1}^s a_{r+\nu} \cdot \tilde{h}_j^{(\nu)}(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) \cdot Z_j = \\ & \pi_V(H_1(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) + \pi_V\left(\sum_{n=2}^{\infty} H_n(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))\right) \\ & \quad + \sum_{j=1}^r \sum_{\nu=1}^s a_{r+\nu} \cdot \tilde{h}_j^{(\nu)}(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) \cdot Z_j. \end{aligned}$$

Aufgrund der Wahl der Umgebungen U_i bzw. W_1 gilt

$$\pi_V(H_1(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) = \pi_V(tY_1 + t\tau_{l_1}(Y_2)) = t \cdot (Y_1 + \tau_{l_1}(Y_2)) \in t \cdot U_0,$$

und aus der Abschätzung (*) aus 3.3.11 folgt, daß der Ausdruck

$$t^{-1} \cdot \pi_V\left(\sum_{n=2}^{\infty} H_n(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))\right)$$

beschränkt ist und für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. Er läßt sich also insbesondere in $t = 0$ durch den Wert Null zu einer analytischen Funktion fortsetzen.

Für die Summanden des dritten Terms gilt nach 3.3.10: Die Funktionen $\tilde{h}_j^{(\nu)}$ sind analytisch mit $\tilde{h}_j^{(\nu)}(0) = 0$. Die Funktionen $a_{r+\nu}$ sind linear, und es gilt $a_{r+\nu}(Z) = 0$ für alle $Z \in V$. Somit folgt

$$\begin{aligned} a_{r+\nu}(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) &= a_{r+\nu}(H_1(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))) + a_{r+\nu}\left(\sum_{n=2}^{\infty} H_n(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))\right) \\ &= a_{r+\nu}\left(\sum_{n=2}^{\infty} H_n(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))\right), \end{aligned}$$

da $H_1(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2)) = t \cdot (Y_1 + \tau_{l_1}(Y_2))$ ein Element in V ist. Unter Verwendung der Abschätzung (*) aus 3.3.11 folgt, daß die Ausdrücke

$$t^{-1} \cdot a_{r+\nu}\left(\sum_{n=2}^{\infty} H_n(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2))\right)$$

für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen Null konvergieren und sich in $t = 0$ zu einer analytischen Funktion mit dem Wert Null fortsetzen lassen.

Nach Wahl der Umgebungen gilt $\bar{U}_0 \subseteq U$. Insbesondere kann ϵ so klein gewählt werden, daß für alle $(Y_1, l_1, Y_2, l_2, t) \in U_1 \times W_1 k_1 \times U_2 \times W_2 k_2 \times (-\epsilon, \epsilon)$ mit $t \neq 0$

$$A_1(Y_1, l_1, Y_2, l_2, t) = t^{-1} \cdot (\pi_V \circ \chi)(H(tY_1, t\tau_{l_1}(Y_2)))$$

ein Element von U ist und sich die Funktion A_1 in $t = 0$ durch

$$A_1(Y_1, l_1, Y_2, l_2, 0) = Y_1 + \tau_{l_1}(Y_2)$$

zu einer analytischen Funktion fortsetzen läßt. Diese Fortsetzung stimmt aber gerade mit \tilde{A}_1 überein, was den Nachweis der Glattheit der Multiplikation abschließt. \square

Zusammenfassend läßt sich sagen:

Theorem 3.3.13. *Das oben konstruierte Gruppenbündel $\mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathbb{R}$ ist ein glatter Gruppoid. Dieser wird im folgenden als Deformationsgruppoid zum Paar (G, K) bezeichnet.*

Als glatter Gruppoid besitzt \mathcal{G} ein glattes (linkes) Haarsystem; man vergleiche 1.1.8. Ein solches Haarsystem auf \mathcal{G} sei im weiteren fixiert.

Ist G_0 die Zusammenhangskomponente der Eins in G und $K_0 = K \cap G_0$ die Zusammenhangskomponente der Eins in K , so ist

$$\mathcal{G}^{\text{con}} := (V \times K_0 \times \{0\}) \dot{\cup} G_0 \times \mathbb{R}^\times$$

ein Untergruppenbündel von \mathcal{G} . Dieses wird im folgenden auch als Bündel der Zusammenhangskomponenten von \mathcal{G} bezeichnet. Es gilt:

Satz 3.3.14. *Das Bündel der Zusammenhangskomponenten \mathcal{G}^{con} ist offen und abgeschlossen in \mathcal{G} . Insbesondere ist \mathcal{G}^{con} ein glatter Gruppoid, und durch Einschränkung des Haarsystems von \mathcal{G} erhält man ein glattes Haarsystem für \mathcal{G}^{con} .*

Beweis. Da G_0 offen in G ist, ist die Teilmenge $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}^{\text{con}}$ offen in \mathcal{G} , und jede offene Umgebung vom Typ (II) eines Punktes in der Nullfaser $\mathcal{G}_0^{\text{con}}$ ist nach Definition der Topologie von \mathcal{G} bereits in \mathcal{G}^{con} enthalten. Somit ist \mathcal{G}^{con} offen in \mathcal{G} .

Zum Nachweis der Abgeschlossenheit kann das Folgenkriterium genutzt werden. Von Interesse ist dabei nur der folgende Fall: Es sei $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}^{\text{con}}$, welche gegen einen Punkt in \mathcal{G}_0 konvergiert.

Nach Definition der Topologie kann dabei ohne Einschränkung angenommen werden, daß $\gamma_n = (\exp(t_n \cdot X_n) \cdot k_n, t_n)$ gilt, wobei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in V , $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K und $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in \mathbb{R} ist.

Da $\exp(V) \subseteq G_0$ gilt, folgt aus $\gamma_n \in G_0$ auch $k_n \in \exp(-t_n \cdot X_n) \cdot G_0 \subseteq G_0$, und aus der Abgeschlossenheit von $K \cap G_0 = K_0$ in K ergibt sich $\lim k_n \in K_0$ und somit $\lim \gamma_n \in \mathcal{G}_0^{\text{con}}$, was zu zeigen war.

Die Einschränkung der analytischen Struktur von \mathcal{G} macht \mathcal{G}^{con} zu einem glatten Gruppoiden, und aus der Offenheit folgt die Aussage über das Haarsystem. \square

3.4 Deformationsbild der Assembly-Abbildung

Mithilfe des im vorigen Abschnitt konstruierten Deformationsgruppoiden \mathcal{G} einer fast zusammenhängenden Lie-Gruppe G mit maximal kompakter Untergruppe K kann nun das Deformationsbild der Assembly-Abbildung definiert werden.

Es bezeichne $\mathcal{G}_{[0,1]}$ die Einschränkung von \mathcal{G} auf die (invariante) Teilmenge $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Der Gruppoid $\mathcal{G}_{[0,1]}$ ist lokal-kompakt, und die Einschränkung des (glatten) Haarsystems von \mathcal{G} ist ein stetiges Haarsystem auf $\mathcal{G}_{[0,1]}$.

Proposition 3.4.1. *Ist B eine G -Algebra, so besitzt die triviale $C[0, 1]$ -Algebra $\mathcal{B} = C[0, 1] \otimes B$ in natürlicher Weise die Struktur einer $\mathcal{G}_{[0,1]}$ -Algebra.*

Beweis. Es bezeichne $\beta : G \longrightarrow \text{Aut}(B)$ die (stark stetige) Wirkung von G auf der C^* -Algebra B ; die Einschränkung der Wirkung auf die maximal kompakte Untergruppe macht B zu einer K -Algebra.

Bezeichnet $\mathcal{B} := C[0, 1] \otimes B$ die triviale $C[0, 1]$ -Algebra, so ist \mathcal{B} die Algebra der stetigen Schnitte auf $[0, 1]$ mit Werten im trivialen Bündel mit Faser B . Setzt man für $\gamma \in \mathcal{G}_{[0,1]}$

$$\alpha_\gamma(b) = \begin{cases} \beta_g(b), & \text{falls } \gamma = (g, t) \in G \times (0, 1] \\ \beta_k(b), & \text{falls } \gamma = (X, k, 0), \in \mathcal{G}_0 \end{cases}$$

so definiert α eine stetige $\mathcal{G}_{[0,1]}$ -Wirkung auf \mathcal{B} . Die Bedingung $\alpha_{\gamma \cdot \eta} = \alpha_\gamma \circ \alpha_\eta$ ist trivialerweise erfüllt, da $\beta_{gh} = \beta_g \circ \beta_h$ für alle $g, h \in G$ gilt. Es bleibt also nur zu zeigen, daß mit $F \in p^*\mathcal{B}$ auch $\alpha(F)$ ein stetiger Schnitt in $p^*\mathcal{B}$ ist.

Gilt $F = f \otimes b$ für $f \in C_0(\mathcal{G}_{[0,1]})$ und $b \in B$, so ist

$$\alpha(F)(\gamma) = f(\gamma) \otimes \alpha_\gamma(b)$$

stetig auf $\mathcal{G}_{(0,1]} = G \times (0, 1]$, und es bleibt noch die Stetigkeit in \mathcal{G}_0 zu zeigen.

Ist $(X, k, 0) \in \mathcal{G}_0$ und $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{G}_{(0,1]}$, welche gegen $(X, k, 0)$ konvergiert, so kann aufgrund der Definition der Topologie von $\mathcal{G}_{[0,1]}$ ohne Einschränkung

angenommen werden, daß $\gamma_n = (\exp(t_n X_n)k_n, t_n)$ für $t_n \neq 0$ gilt mit $\lim X_n = X$, $\lim k_n = k$ und $\lim t_n = 0$. Die Wirkung β ist stark stetig; insbesondere gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{\exp(t_n X_n)k_n}(b) = \beta_k(b)$$

und somit

$$\alpha(F)(\gamma_n) = F(\gamma_n) \otimes \beta_{\exp(t_n X_n)k_n}(b) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(X, k, 0) \otimes \beta_k(b) = \alpha(F)(X, k, 0).$$

Ist andererseits $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{G}_0 , welche gegen $(X, k, 0)$ konvergiert, gilt also $\gamma_n = (X_n, k_n, 0) \in \mathcal{G}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\lim (X_n, k_n) = (X, k)$, so folgt $\lim \alpha_{\gamma_n}(b) = \lim \beta_{k_n}(b) = \beta_k(b)$ wieder aufgrund der Tatsache, daß β eine stark stetige Wirkung ist. Dies zeigt, daß $\alpha(F) = \alpha(f \otimes b)$ ein Element von $p^*\mathcal{B}$ ist.

Die Elemente der Form $f \otimes b$ erzeugen einen dichten Unterraum von $p^*\mathcal{B} = C_0(\mathcal{G}_{[0,1]}) \otimes B$, und es folgt, daß $\alpha : p^*\mathcal{B} \longrightarrow p^*\mathcal{B}$ eine stetige $\mathcal{G}_{[0,1]}$ -Wirkung ist. \square

Bemerkung 3.4.2. Das reduzierte verschränkte Produkt $\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]}$ ist nach 1.3.4 eine $C[0,1]$ -Algebra und definiert somit ein (oberhalb) stetiges Feld von C^* -Algebren. Da die Nullfaser $\mathcal{G}_0 = V \rtimes K$ des Gruppenbündels eine mittelbare Gruppe ist, folgt aus 1.3.8, daß die Faser von $\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]}$ in Null mit $B \rtimes (V \rtimes K)$ identifiziert werden kann.

Außerhalb von Null ist das Gruppenbündel $\mathcal{G}_{(0,1]}$ jedoch trivial mit Faser G , und auch die Einschränkung $\mathcal{B}_{(0,1]}$ ist trivial. Nach 1.3.9 ist die Einschränkung $(\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})_{(0,1]}$ ein stetiges Feld von C^* -Algebren über $(0,1]$. Daher lassen die Fasern von $\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]}$ in $t \in (0,1]$ sich mit $B \rtimes_r G$ identifizieren.

Aufgrund von 1.3.5 können die gewöhnlichen Formeln aus dem Gruppenfall (d.h. unter Verwendung der Modularfunktion von G) benutzt werden.

Ist B eine G -Algebra, so läßt sich – wie in Anhang A beschrieben – die topologische K-Theorie von G mit Koeffizienten in B mit $K_*(B \rtimes (V \rtimes K)) = K_*(B \rtimes \mathcal{G}_0)$ identifizieren.

Wendet man das Theorem 1.3.6 auf den Deformations-Gruppoiden $\mathcal{G}_{[0,1]}$ und die triviale $C[0,1]$ -Algebra $\mathcal{B} = C[0,1] \otimes B$ mit der oben beschriebenen Wirkung des Gruppoiden $\mathcal{G}_{[0,1]}$ an, so erhält man für $F := \{t\} \subseteq [0,1]$ surjektive $*$ -Homomorphismen $q_t : C_r^*(\mathcal{G}_{[0,1]}, \mathcal{B}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_t, B)$, welche eine Abbildung in der K-Theorie induzieren.

Ist $t = 0$, so gilt $\mathcal{G}_{(0,1]} = G \times (0,1]$, und $C_r^*(\mathcal{G}_{(0,1]}, \mathcal{B}_{(0,1]}) \cong C_0((0,1]) \otimes C_r^*(G, B)$ ist zusammenziehbar. Daher gilt $K_*(C_r^*(\mathcal{G}_{(0,1]}, \mathcal{B}_{(0,1]}) = 0$.

Die Nullfaser $\mathcal{G}_0 \cong V \rtimes K$ des Gruppoiden ist eine mittelbare Gruppe. Nach 1.3.6 ist somit die Sequenz

$$0 \longrightarrow C_0([0, 1]) \otimes C_r^*(G, B) \longrightarrow \mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G} \xrightarrow{q_0} \mathcal{B}_0 \rtimes_r \mathcal{G}_0 \longrightarrow 0$$

exakt, und aus der exakten 6-Term-Sequenz in K-Theorie folgt, daß die Abbildung $q_{0,*}$ ein Isomorphismus in der K-Theorie ist.

Unter den Identifizierungen $C_r^*(\mathcal{G}_0, \mathcal{B}_0) = C^*(V \rtimes K, B) = B \rtimes (V \rtimes K)$ und $C_r^*(\mathcal{G}_1, \mathcal{B}_1) = C_r^*(G, B) = B \rtimes_r G$ gilt:

Definition 3.4.3. Die Abbildung

$$q_{1,*} \circ q_{0,*}^{-1} : K_*(C^*(V \rtimes K, B)) \longrightarrow K_*(C_r^*(G, B))$$

heißt die Deformationsabbildung für G mit Koeffizienten in der G -Algebra B .

Ziel der Arbeit ist es zu zeigen, daß sich diese Deformationsabbildung mit der Assembly-Abbildung für G (wie sie in Anhang A beschrieben wird) identifizieren läßt. Als nützlich wird sich dabei die folgende einfache Beobachtung erweisen:

Beispiel 3.4.4. Es sei $\mathcal{H} = (V \rtimes K) \times [0, 1]$ das triviale Gruppenbündel mit der kanonischen Struktur als lokal-kompakter Gruppoid und konstantem Haarsystem. Jede K -Algebra B läßt sich als $V \rtimes K$ -Algebra (mit trivialer Wirkung von V) auffassen, und das reduzierte verschränkte Produkt $(C[0, 1] \otimes B) \rtimes_r \mathcal{H}$ läßt sich nach 1.3.9 mit $C[0, 1] \otimes C^*(V \rtimes K, B)$ identifizieren.

Per Definition liefert die identische Abbildung

$$\text{id} : (C[0, 1] \otimes B) \rtimes_r \mathcal{H} \longrightarrow C[0, 1] \otimes C^*(V \rtimes K, B)$$

eine Homotopie zwischen den Evaluationsabbildungen q_0 und q_1 . In dieser Situation ist die Deformationsabbildung $q_{1,*} \circ q_{0,*}^{-1}$ für \mathcal{H} also gerade die Identität in der K-Theorie.

Kapitel 4

Dirac-Element für Deformationsgruppoiden

In diesem Kapitel soll Kasparovs Konstruktion des Dirac-Elements einer fast zusammenhängenden Gruppe auf den Fall des Deformationsgruppoiden übertragen werden. Wie im Anhang beschrieben, ist die Assembly-Abbildung für fast zusammenhängende Gruppen äquivalent zu der Abbildung, die durch Kasparov-Produkt mit dem Dirac-Element definiert wird. Faßt man das Dirac-Element für den Gruppoiden als stetige Familie von KK-Elementen auf und benutzt man die Tatsache, daß die Assembly-Abbildung für mittelbare Gruppen ein Isomorphismus ist, so kann schließlich die Deformations- mit der Assembly-Abbildung identifiziert werden.

Zunächst sei kurz an Kasparovs Konstruktion aus [Kas95] bzw. [Kas88] erinnert. Ist G eine fast zusammenhängende Gruppe mit maximal kompakter Untergruppe K , so besitzt der homogene Raum $M = G/K$ die Struktur einer (orientierbaren) vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit, und es kann der Hilbertraum der quadrat-integrierbaren (komplexwertigen) Differentialformen $L^2(M, \Lambda^* M)$ gebildet werden.

Die Algebra $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell(M))$ der Schnitte ins assoziierte Clifford-Bündel des Kotangentenbündels wirkt auf $L^2(M, \Lambda^* M)$ wie im Kapitel über geblätterte Mannigfaltigkeiten beschrieben. Bezeichnet d das deRham-Differential von Differentialformen und d^* den formal adjungierten Operator, so ist $T := \frac{d+d^*}{\sqrt{1+(d+d^*)^2}}$ ein adjungierbarer Operator, und das Paar $[(L^2(M, \Lambda^* M), T)]$ definiert ein Element in $\text{KK}^G(\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell(M)), \mathbb{C})$. Dieses Element ist das Dirac-Element für G .

Es bezeichne im folgenden \mathcal{G} wieder den Deformationsgruppoiden zum Paar (G, K) , wobei G eine fast zusammenhängende reelle Lie-Gruppe endlicher Dimension und K eine maximal kompakte Untergruppe von G ist.

4.1 Der homogene Raum \mathcal{G}/K

In diesem Abschnitt wird zunächst der homogene Raum \mathcal{G}/K konstruiert. Dieser ist eine geblätterte Mannigfaltigkeit, wobei die Blätterungsstruktur durch eine surjektive Submersion $\mathcal{G}/K \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist und \mathbb{R} als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in \mathcal{G}/K eingebettet werden kann.

Die Multiplikation des Deformationsgruppoiden definiert in natürlicher Weise eine \mathcal{G} -Wirkung auf dem homogenen Raum, und auch die vertikalen Vektorbündel aus dem zweiten Kapitel können mit einer glatten \mathcal{G} -Wirkung versehen werden.

Mithilfe dieser Wirkungen kann eine \mathcal{G} -invariante Riemannsche Struktur und eine vertikale Orientierung auf dem homogenen Raum definiert werden. Dazu werden zwei für Lie-Gruppen bekannte Resultate über die Fortsetzbarkeit von Vektorbündelmorphismen bzw. von äquivarianten Schnitten auf die Situation des Deformationsgruppoiden erweitert.

Satz 4.1.1. *Die kompakte Lie-Gruppe K wirkt frei und analytisch auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{G} durch faserweise Rechtsmultiplikation*

$$\beta : \mathcal{G} \times K \longrightarrow \mathcal{G}, \quad ((g, t), l) \mapsto \begin{cases} (X, kl, 0), & \text{falls } (g, t) = (X, k, 0) \in \mathcal{G}_0 \\ (gl, t), & \text{falls } (g, t) \in G \times \mathbb{R}^\times = \mathcal{G}_{\mathbb{R}^\times}. \end{cases}$$

Der Quotient $M := \mathcal{G}/K$ besitzt die Struktur einer analytischen Mannigfaltigkeit, und die kanonische Surjektion $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow M$ ist eine (offene und eigentliche) analytische Submersion.

Beweis. Offenbar definiert β eine freie Wirkung von K auf \mathcal{G} . Faßt man $\mathcal{K} := K \times \mathbb{R}$ als abgeschlossenen Untergruppoiden von \mathcal{G} auf, so läßt sich $\mathcal{G} \times K$ mit dem Faserprodukt $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{K}$ identifizieren, und die Analytizität von β ergibt sich aus der Analytizität der Multiplikation von \mathcal{G} , eingeschränkt auf die Untermannigfaltigkeit $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}^{(2)}$.

Die Tatsache, daß auf M eine analytische Struktur existiert, so daß π eine (offene) analytische Submersion ist, folgt dann aus [Var84, Cor. 2.9.11], und die Eigentlichkeit ist eine Konsequenz der Kompaktheit von K . \square

Da K faserweise auf \mathcal{G} wirkt, hat man eine natürliche Projektion $\text{pr} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, welche mit der Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ verträglich ist, d.h. es gilt $p = \text{pr} \circ \pi$. Im folgenden wird die Nullfaser $M_0 = \text{pr}^{-1}(0)$ mit V , für $t > 0$ die Faser M_t mit G/K und $M_{\mathbb{R}^\times}$ mit $G/K \times \mathbb{R}^\times$ identifiziert.

Faserweise gilt $M_t = \mathcal{G}_t/K$; nach 3.2.10 sind somit die Fasern von M zusammenhängend, und M läßt sich als Quotient $\mathcal{G}^{\text{con}}/K_0$ des Untergruppoiden der Zusammenhangskomponenten beschreiben.

Bezeichnet $q : G \longrightarrow G/K$ die kanonische Projektion, so ist die Abbildung

$$\text{Exp} := q \circ \exp|_V : V \longrightarrow G/K$$

nach 3.2.1 lokal in einer Umgebung von 0 ein Diffeomorphismus auf ihr Bild. Definiert man die Abbildung

$$\tilde{\Phi} : V \times \mathbb{R} \longrightarrow M, \quad (X, t) \mapsto \begin{cases} (X, 0) & \text{für } t = 0 \\ (\text{Exp}(tX), t) & \text{für } t \neq 0, \end{cases}$$

so wird wie bei der Definition der Karten für \mathcal{G} die analytische Struktur von M durch Kartenumgebungen folgenden Typs erzeugt:

- (I) $\mathcal{O} \times I$ für $\mathcal{O} \subseteq G/K$ offen, $I \subseteq \mathbb{R}^\times$ offen,
- (II) $\tilde{\Phi}(U \times (-\epsilon, \epsilon))$ für $\epsilon > 0$, $U \subseteq V$ offen und beschränkt mit $\text{Exp}|_{tU}$ ist Diffeomorphismus auf $\text{Exp}(tU) \subseteq G/K$ für alle $0 < |t| < \epsilon$.

Aus dieser Beschreibung der analytischen Struktur folgt, daß die natürliche Abbildung $\text{pr} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal eine Projektion und somit eine Submersion ist. Desweiteren ist die Abbildung $\tilde{u} : \mathbb{R} \longrightarrow M$, welche als Komposition $\tilde{u} = \pi \circ u$ gegeben ist, glatt. Man setze $M^0 := \tilde{u}(\mathbb{R})$. Aus der Beschreibung der analytischen Struktur folgt sofort:

Proposition 4.1.2. *Die Abbildung $\text{pr} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine surjektive Submersion, und M^0 ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M . Insbesondere wird durch pr auf M die Struktur einer geblätterten Mannigfaltigkeit definiert, deren Blätter $M_t = \text{pr}^{-1}(t)$ zusammenhängend sind.*

Die beiden Abbildungen $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\text{pr} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ sind surjektive Submersionen. Hieraus folgt, daß

$$p \times \text{pr} : \mathcal{G} \times M \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

transversal zur Diagonalen $\Delta \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist; das Pullback

$$\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M = (p \times \text{pr})^{-1}(\Delta) = \{(\gamma, x) \in \mathcal{G} \times M \mid p(\gamma) = \text{pr}(x)\}$$

ist daher eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{G} \times M$.

Wie im Gruppenfall wirkt der Deformationsgruppoid durch Multiplikation von links auf dem Quotienten \mathcal{G}/K :

Satz 4.1.3. Die Multiplikation auf \mathcal{G} definiert kanonisch eine analytische Linkswirkung

$$\alpha : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow M, \quad (\gamma, x) \mapsto \gamma \cdot x,$$

und die induzierte Abbildung

$$(\pi_{\mathcal{G}}, \alpha) : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \quad (\gamma, x) \mapsto (\gamma, \alpha(\gamma, x))$$

ist ein Diffeomorphismus.

Beweis. Es ist klar, daß durch α eine Linkswirkung gegeben ist. Die Analytizität von α folgt aus der Existenz lokaler Schnitte für die Submersion $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow M$ und der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{G} & \xrightarrow{\pi \circ m} & M \\ \text{id}_{\mathcal{G}} \star \pi \downarrow & \nearrow \alpha & \\ \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M & & \end{array}$$

Die inverse Abbildung zu $(\pi_{\mathcal{G}}, \alpha)$ ist gegeben durch $(i \star \text{id}_M) \circ (\pi_{\mathcal{G}}, \alpha) \circ (i \star \text{id}_M)$, wobei $i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ die Inversenbildung in \mathcal{G} ist. \square

Genauso wirkt \mathcal{G}^{con} von links durch Multiplikation auf M ; beide Wirkungen sind faserweise transitiv.

Da $\text{pr} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine surjektive Submersion ist, wird hierdurch eine Blätterungsstruktur auf M gegeben, und wie in Kapitel 2 kann man definieren:

Definition 4.1.4. Das vertikale Tangentialbündel von M ist definiert als

$$T^{\mathcal{V}}(M) := \ker(T(M) \longrightarrow \text{pr}^* T(\mathbb{R})).$$

Die Einschränkung des vertikalen Vektorbündels auf eine Faser M_t von M entspricht, wie in Kapitel 2 beschrieben, dem Tangentialbündel der Faser. Desweiteren läßt sich die Einschränkung von $T^{\mathcal{V}}(M)$ auf die abgeschlossene Untermannigfaltigkeit M^0 mit dem trivialen Bündel $M^0 \times V$ identifizieren. Da $M^0 \cong \mathbb{R}$ zusammenziehbar ist, ist jedes Vektorbündel über M^0 trivialisierbar.

Im weiteren Verlauf wird benötigt, daß der Deformationsgruppoid \mathcal{G} glatt auf dem vertikalen Tangentialbündel operiert. Dazu sei zunächst folgendes überlegt:

Es sei $E \xrightarrow{f} M$ ein glattes Vektorbündel; als solches ist es lokal trivial, und f ist insbesondere eine surjektive Submersion. Somit ist auch die Komposition $\tilde{f} := f \circ \text{pr} : E \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal eine Projektion, insbesondere also auch eine (surjektive) Submersion.

Das Faserprodukt $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E = \{(\gamma, e) \in \mathcal{G} \times E \mid p(\gamma) = \tilde{f}(e)\}$ ist daher eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{G} \times E$, und eine Wirkung des glatten Gruppoiden \mathcal{G} auf dem Totalraum von E (als glatte Mannigfaltigkeit) ist definiert wie in 1.1.4.

Definition 4.1.5. Ein glattes Vektorbündel $f : E \longrightarrow M$ heißt \mathcal{G} -Vektorbündel, falls eine glatte Wirkung $\alpha_f : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E \longrightarrow E$ existiert, die mit α verträglich ist in dem Sinn, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E & \xrightarrow{\alpha_f} & E \\ \text{id}_{\mathcal{G}} \star f \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M & \xrightarrow{\alpha} & M \end{array}$$

kommutiert, und so daß für alle $(\gamma, x) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ die induzierte Abbildung der Fasern $\alpha_{f,(\gamma,x)} : E_x \longrightarrow E_{\gamma \cdot x}$ ein Homomorphismus ist.

Aus den algebraischen Bedingungen einer Wirkung wie in 1.1.4 folgt dann, daß $\alpha_{f,(\gamma,x)}$ für alle $(\gamma, x) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ ein linearer Isomorphismus ist.

Bemerkung 4.1.6. Genau wie in 4.1.3 zeigt man, daß für eine glatte Wirkung α_f die Abbildung $(\pi_{\mathcal{G}}, \alpha_f)$ ein Diffeomorphismus über $(\pi_{\mathcal{G}}, \alpha)$ ist.

Bezeichnet $\pi_M : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow M$, $\pi_M(\gamma, x) := x$ die Projektion auf den zweiten Faktor, so läßt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E &= \{(\gamma, (x, e)) \in \mathcal{G} \times E \mid p(\gamma) = (f \circ \text{pr})(x, e) = \text{pr}(x)\} \\ &= \{((\gamma, x), e) \mid (\gamma, x) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, e \in E_x\} \\ &= \pi_M^*(E) \end{aligned}$$

mit dem Pullback von E mittels π_M identifizieren.

Hieraus folgt sofort:

Proposition 4.1.7. Ist $\alpha_f : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E \longrightarrow E$ eine Abbildung, welche die algebraischen Bedingungen einer Gruppoid-Wirkung aus 1.1.4 erfüllt, so definiert α_f auf E die Struktur eines \mathcal{G} -Vektorbündels genau dann, wenn die Abbildung

$$\psi_{\alpha_f} : \pi_M^*(E) \longrightarrow \pi_M^*(E), \quad ((\gamma, x), e) \mapsto ((\gamma, \gamma \cdot x), \alpha_{f,(\gamma,x)}(e))$$

eine glatter Vektorbündel-Homomorphismus über $(\pi_{\mathcal{G}}, \alpha)$ ist.

Bemerkung 4.1.8. Die Abbildung $\psi_{\alpha_f} : \pi_M^*(E) \longrightarrow \pi_M^*(E)$ ist genau dann ein glatter Vektorbündelmorphismus, falls für alle $(\gamma_0, x_0) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ eine offene Umgebung U von (γ_0, x_0) existiert, so daß die Einschränkungen $\pi_M^*(E)|_U \cong U \times W$ und $\pi_M^*(E)|_{(\pi_{\mathcal{G}} \star \alpha)(U)} \cong (\pi_{\mathcal{G}} \star \alpha)(U) \times \tilde{W}$ trivialisierbar sind und die Abbildung

$$U \longrightarrow \text{Hom}(W, \tilde{W}), \quad (\gamma, x) \mapsto \alpha_{f,(\gamma,x)}$$

glatt ist.

Aus 4.1.7 und 4.1.8 ergibt sich:

Proposition 4.1.9. *Ist E ein \mathcal{G} -Vektorbündel über M und τ ein glatter Vektorfunktorkontraktor von Isomorphismen (im Sinne von [Bou67, 7.6.6]), so ist auch $\tau(E)$ ein \mathcal{G} -Vektorbündel.*

Beweis. Klar mit abstract nonsense. □

Diese Überlegungen sollen nun zum Nachweis genutzt werden, daß das vertikale Tangentialbündel von M die Struktur eines \mathcal{G} -Vektorbündels besitzt. Die Wirkung ist dabei folgendermaßen gegeben:

Der Deformationsgruppoid \mathcal{G} wirkt faserweise auf dem Quotienten M durch Linksmultiplikation; für $\gamma \in \mathcal{G}_t$ ist die Abbildung

$$L_\gamma : M_t \longrightarrow M_t, \quad x \mapsto \gamma \cdot x$$

ein Diffeomorphismus, induziert also einen Isomorphismus der Tangentialräume

$$T(L_\gamma) : T_x(M_t) \longrightarrow T_{\gamma \cdot x}(M_t),$$

wobei die Tangentialräume der Faser mit den jeweiligen vertikalen Tangentialräumen von M identifiziert werden können.

Um zu zeigen, daß $T^\vee(M)$ ein \mathcal{G} -Vektorbündel ist, müssen zunächst einige Überlegungen zu den auftretenden vertikalen Tangentialbündeln angestellt werden:

Bemerkung 4.1.10. Es bezeichnen $p_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \times M \longrightarrow \mathcal{G}$ und $p_M : \mathcal{G} \times M \longrightarrow M$ die kanonischen Projektionen. Unter dem Isomorphismus

$$T(\mathcal{G} \times M) \xrightarrow{\cong} T(\mathcal{G}) \times T(M), \quad Z \mapsto (T(p_{\mathcal{G}})(Z), T(p_M)(Z))$$

läßt sich $T^\vee(\mathcal{G}) \times T^\vee(M) := p_{\mathcal{G}}^*(T^\vee(\mathcal{G})) \oplus p_M^*(T^\vee(M))$ als Untervektorbündel von $T(\mathcal{G} \times M)$ auffassen.

Das Tangentialbündel der Untermannigfaltigkeit $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ von $\mathcal{G} \times M$ besitzt die Beschreibung

$$T(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) = \{(X, Y) \in T(\mathcal{G} \times M) \mid T(p)(X) = T(\text{pr})(Y)\}.$$

Da p und pr surjektive Submersionen sind, ihre Differentiale also surjektive Homomorphismen der jeweiligen Tangentialbündel liefern, folgt aus obiger Beschreibung von $T(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)$, daß auch die Einschränkungen $\pi_{\mathcal{G}} = p_{\mathcal{G}}|_{\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M}$ und $\pi_M = p_M|_{\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M}$ surjektive Submersionen sind.

Ist $(X, Y) \in T(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)$, so gilt $T(\pi_{\mathcal{G}})(X, Y) = X$; ist $(X, Y) \in \ker T(\pi_{\mathcal{G}})$, so folgt $X = 0$ und damit $T(\text{pr})(Y) = T(p)(0) = 0$, d.h. es gilt $Y \in T^{\vee}(M)$. Das vertikale Tangentialbündel $\ker T(\pi_{\mathcal{G}})$ der durch $\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathcal{G}$ definierten Blätterung läßt sich daher mit dem zurückgezogenen Bündel $\pi_M^* T^{\vee}(M)$ identifizieren.

Desweiteren kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M & \xrightarrow{\pi_M} & M \\ \pi_{\mathcal{G}} \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}, \end{array}$$

und $p_0 := p \circ \pi_{\mathcal{G}} = \text{pr} \circ \pi_M$ ist eine surjektive Submersion. Ist $(X, Y) \in T(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)$, so gilt $T(p_0)(X, Y) = T(p)(X) = T(\text{pr})(Y)$. Für das durch p_0 definierte vertikale Tangentialbündel erhält man somit

$$\begin{aligned} T^{\vee}(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) &:= \ker \left(T(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) \xrightarrow{T(p_0)} T(\mathbb{R}) \right) \\ &= \{ (X, Y) \in T(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) \mid T(p)(X) = 0 = T(\text{pr})(Y) \} \\ &\cong \pi_{\mathcal{G}}^*(T^{\vee}(\mathcal{G})) \oplus \pi_M^*(T^{\vee}(M)). \end{aligned}$$

Proposition 4.1.11. *Es sei $\alpha : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow M$ die Wirkung aus 4.1.3 durch faserweise Linksmultiplikation. Die Einschränkung ihres Differentials auf die vertikalen Tangentialbündel definiert eine glatte Abbildung*

$$T(\alpha) : T^{\vee}(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) \longrightarrow T^{\vee}(M).$$

Ist $(\gamma, x) \in (\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)_t$ und $(X, Y) \in T^{\vee}_{(\gamma, x)}(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)$, so gilt

$$T(\alpha)(X, Y) = T(R_x)_{\gamma}(X) + T(L_{\gamma})_x(Y),$$

wobei $R_x : \mathcal{G}_t \longrightarrow M_t$, $\tilde{\gamma} \mapsto \tilde{\gamma} \cdot x$ und $L_{\gamma} : M_t \longrightarrow M_t$, $\tilde{x} \mapsto \gamma \cdot \tilde{x}$ faserweise durch Multiplikation gegeben sind.

Beweis. Für den ersten Teil der Aussage ist nur zu zeigen, daß die Ableitung von α vertikale Tangentialvektoren in vertikale Tangentialvektoren überführt. Dies ist

aber klar aufgrund der Definition der vertikalen Tangentialbündel, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M & \xrightarrow{\alpha} & M \\
 & \searrow \pi_0 & \downarrow \text{pr} \\
 & & \mathbb{R}
 \end{array}$$

kommutiert und somit $T(\alpha)(T^{\mathcal{V}}(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)) \subseteq \ker T(\text{pr}) = T^{\mathcal{V}}(M)$ gilt.

Ist $(X, Y) \in T^{\mathcal{V}}_{(\gamma, x)}(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)$, so gilt $(X, Y) = (X, 0) + (0, Y)$. Die Abbildung

$$\iota : \mathcal{G}_t \longrightarrow (\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)_t \hookrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \quad \tilde{\gamma} \mapsto (\tilde{\gamma}, x)$$

ist eine abgeschlossene Immersion. Ist $\tilde{\gamma} = (g, t) \in \mathcal{G}_t$, so gilt unter der Identifikation $T^{\mathcal{V}}_{\tilde{\gamma}}(\mathcal{G}) = T_g(\mathcal{G}_t)$ für ihr Differential $T(\iota)(X) = (X, 0)$. Desweiteren läßt sich die Komposition $\alpha \circ \iota$ mit $R_x : \mathcal{G}_t \longrightarrow M_t \hookrightarrow M$ identifizieren. Daher folgt

$$T(\alpha)_{(\gamma, x)}(X, 0) = T(\alpha)_{(\gamma, x)}(T(\iota)_{\tilde{\gamma}}(X)) = T(\alpha \circ \iota)_{\tilde{\gamma}}(X) = T(R_x)_{\tilde{\gamma}}(X).$$

Analog zeigt man $T(\alpha)_{(\gamma, x)}(0, Y) = T(L_{\gamma})_x(Y)$. □

Lemma 4.1.12. *Die Einschränkung des Differentials der Abbildung*

$$\hat{\alpha} := (\pi_{\mathcal{G}}, \alpha) : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \quad (\gamma, x) \mapsto (\gamma, \gamma \cdot x)$$

definiert eine glatte Abbildung

$$T(\hat{\alpha}) : T^{\mathcal{V}}(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) \longrightarrow T^{\mathcal{V}}(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M),$$

und für $(X, Y) \in T^{\mathcal{V}}(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)$ gilt:

$$T(\hat{\alpha})(X, Y) = (X, T(\alpha)(X, Y)).$$

Beweis. Die Tatsache, daß $T(\hat{\alpha})$ eine glatte Abbildung auf dem vertikalen Tangentialbündel definiert, folgt wie im vorigen Beweis aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \\
 & \searrow p_0 & \downarrow p_0 \\
 & & \mathbb{R}.
 \end{array}$$

Ist $(X, Y) \in T^\vee(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)$, so folgt

$$T(\hat{\alpha})(X, Y) = (T(\pi_{\mathcal{G}} \circ \hat{\alpha})(X, Y), T(\pi_M \circ \hat{\alpha})(X, Y)) = (X, T(\alpha)(X, Y)),$$

da $\pi_{\mathcal{G}} \circ \hat{\alpha} = \pi_{\mathcal{G}}$ und $\pi_M \circ \hat{\alpha} = \alpha$ gilt. \square

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun zeigen:

Satz 4.1.13. *Das vertikale Tangentialbündel $T^\vee(M)$ ist ein \mathcal{G} -Vektorbündel.*

Beweis. Bezeichnet wieder $L_\gamma : M_t \longrightarrow M_t$ die Linksmultiplikation mit $\gamma \in \mathcal{G}_t$, so ist die Abbildung

$$\tilde{\alpha} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} T^\vee(M) \longrightarrow T^\vee(M), \quad (\gamma, (x, Y)) \mapsto (\gamma \cdot x, T(L_\gamma)(Y))$$

eine Wirkung über $\alpha : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow M$ durch lineare Isomorphismen. Nach 4.1.7 ist also nur noch zu zeigen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \pi_M^*(T^\vee(M)) &\longrightarrow \pi_M^*(T^\vee(M)), \\ ((\gamma, x), Y) &\mapsto ((\gamma, \gamma \cdot x), T(L_\gamma)(Y)) \end{aligned}$$

glatt ist. Nach 4.1.10 gilt $T^\vee(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) \cong \pi_{\mathcal{G}}^*(T^\vee(\mathcal{G})) \oplus \pi_M^*(T^\vee(M))$. Daher sind

$$\iota : \pi_M^*(T^\vee(M)) \longrightarrow T^\vee(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M), \quad Y \mapsto (0, Y)$$

und

$$q : T^\vee(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) \longrightarrow \pi_M^*(T^\vee(M)), \quad (X, Y) \mapsto Y$$

glatte Morphismen von Vektorbündeln, und aus 4.1.11 und 4.1.12 folgt, daß ψ sich als Komposition $\psi = q \circ T(\hat{\alpha}) \circ \iota$ schreiben läßt. Somit ist ψ insbesondere glatt. \square

Mit 4.1.9 folgt:

Korollar 4.1.14. *Das vertikale Kotangentialbündel, das vertikale äußere Bündel und die jeweiligen Komplexifizierungen sind glatte \mathcal{G} -Vektorbündel.*

Die Existenz einer \mathcal{G} -invarianten Riemannschen Metrik auf dem vertikalen Tangentialbündel von M läßt sich ähnlich wie im Fall von Lie-Gruppen zeigen. Dazu werden die folgenden zwei Resultate benötigt, welche Modifikationen der entsprechenden Aussagen für Lie-Gruppen sind. Letztere finden sich zum Beispiel in [Bou98b, III, §1.8].

Im folgenden wird wieder mit M^0 die durch die Einbettung $\mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{u}} M$ definierte abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von M aus 4.1.2 bezeichnet und $\mathcal{K} = K \times \mathbb{R}$ als (abgeschlossener) Untergruppoid von \mathcal{G} aufgefaßt.

Der Gruppoid \mathcal{K} wirkt glatt auf M^0 , und die Einschränkung eines glatten \mathcal{G} -Vektorbündels $E \longrightarrow M$ auf M^0 ist ein glattes \mathcal{K} -Vektorbündel.

Satz 4.1.15. *Es seien E und F glatte \mathcal{G} -Vektorbündel über M . Desweiteren sei ein glatter, \mathcal{K} -äquivarianter Morphismus $\Phi^0 : E|_{M^0} \longrightarrow F|_{M^0}$ der Einschränkungen der Vektorbündel auf M^0 gegeben; für alle $(k, v) \in \mathcal{K} \times_{\mathbb{R}} E|_{M^0}$ gilt also*

$$\Phi^0(k \cdot v) = k \cdot \Phi^0(v).$$

Dann existiert genau eine Fortsetzung $\Phi : E \longrightarrow F$ von Φ^0 zu einem glatten \mathcal{G} -äquivarianten Morphismus von \mathcal{G} -Vektorbündeln, so daß also $\Phi(\gamma \cdot w) = \gamma \cdot \Phi(w)$ für alle $(\gamma, w) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E$ gilt.

Beweis. Da $M^0 \cong_{\mathbb{R}}$ zusammenziehbar ist, sind die Einschränkungen $E|_{M^0}$ und $F|_{M^0}$ trivialisierbar mit Faser E^0 bzw. F^0 . Der Gruppoid \mathcal{G} wirkt faserweise transitiv auf M , und E ist ein \mathcal{G} -Vektorbündel; daher ist die Abbildung

$$\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E|_{M^0} \longrightarrow E, \quad (\gamma, v) \mapsto \gamma \cdot v$$

surjektiv. Ist $w \in E$ und $(\gamma, v) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E|_{M^0}$ mit $\gamma \cdot v = w$, so gilt für eine \mathcal{G} -äquivariante Fortsetzung

$$\Phi(w) = \Phi(\gamma \cdot v) = \gamma \cdot \Phi(v) = \gamma \cdot \Phi^0(v).$$

Dies zeigt die Eindeutigkeitsaussage.

Ist $w = \gamma \cdot v = \tilde{\gamma} \cdot \tilde{v}$ für $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathcal{G}$ und $v, \tilde{v} \in E|_{M^0}$, so muß $p(\gamma) = p(\tilde{\gamma})$ und $v, \tilde{v} \in E_x$ für $x = \tilde{u}(p(\gamma)) \in M^0$ gelten. Dann ist $\gamma \cdot x = \tilde{\gamma} \cdot x$, und aus $\gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma} \cdot x = x \in M^0$ folgt $\gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma} \in \mathcal{K} = \mathcal{K} \times \mathbb{R}$. Aufgrund der \mathcal{K} -Äquivarianz von Φ^0 ergibt sich dann

$$\gamma \cdot \Phi^0(v) = \gamma \cdot \Phi^0(\gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma} \cdot \tilde{v}) = \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma} \cdot \Phi^0(\tilde{v}) = \tilde{\gamma} \cdot \Phi^0(\tilde{v}).$$

Durch $\Phi(\gamma \cdot v) := \gamma \cdot \Phi^0(v)$ für $(\gamma, v) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} E|_{M^0}$ wird also eine wohldefinierte \mathcal{G} -äquivariante Fortsetzung $\Phi : E \longrightarrow F$ von Φ^0 definiert. Es bleibt zu zeigen, daß diese Abbildung ein glatter Vektorbündelmorphismus ist.

Ist $x \in M$ mit $x = \gamma_x \cdot u_x$ für $(\gamma_x, u_x) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M^0$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_x & \xrightarrow{\Phi_x} & F_x \\ \gamma^{-1} \cdot \downarrow & & \uparrow \gamma \cdot \\ E_{u_x} & \xrightarrow{\Phi_{u_x}^0} & F_{u_x}, \end{array}$$

und nach Übergang zu lokalen Trivialisierungen der Bündel ist zu zeigen, daß die Zuordnung $x \mapsto \Phi_x = \gamma_x \circ \Phi_{u_x}^0 \circ \gamma_x^{-1}$ glatt ist.

Dazu sei $x_0 \in M$ fixiert. Die Abbildung $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow M$ ist eine Submersion. Daher existiert eine offene Umgebung U von $x_0 \in M$ und eine Untermannigfaltigkeit \tilde{U} von \mathcal{G} , so daß die Einschränkung

$$\theta := \pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow U$$

ein Diffeomorphismus ist. Durch Übergang zu einer Verkleinerung von \tilde{U} bzw. U kann folgendes angenommen werden:

- (1) Die Einschränkungen $E|_U$ bzw. $F|_U$ sind trivial mit Faser N bzw. \tilde{N} .
- (2) Für $\gamma \in \mathcal{G}$ und $u_\gamma := \tilde{u}(p(\gamma)) \in M^0$ bezeichne $\psi_\gamma : E_{u_\gamma} \longrightarrow E_{\gamma \cdot u_\gamma}$ den durch $v \mapsto \gamma \cdot v$ gegebenen Isomorphismus. Identifiziert man unter der Trivialisierung $E|_{M^0} \cong M^0 \times E^0$ die Fasern E_{u_γ} mit E^0 , so sind die Abbildungen

$$\tilde{U} \longrightarrow \text{Hom}(E^0, N), \quad \gamma \mapsto \psi_\gamma \quad \text{und} \quad \tilde{U} \longrightarrow \text{Hom}(N, E^0), \quad \gamma \mapsto \psi_\gamma^{-1}$$

glatt. Analoge Aussagen gelten für das Bündel F mit Abbildungen $\tilde{\psi}_\gamma$.

Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, daß Vektorbündel per Definition lokal trivial sind. Die zweite Aussage ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

Es sei $\gamma_0 = \theta^{-1}(x_0) \in \tilde{U}$ und $u_0 = \tilde{u}(p(\gamma_0)) \in M^0$, also $x_0 = \gamma_0 \cdot u_0$. Die \mathcal{G} -Wirkung auf E definiert nach 4.1.7 einen Vektorbündelautomorphismus von $\pi_M^*(E)$. Nach 4.1.8 ist dieser lokal auf einer offenen Umgebung W_0 von (γ_0, u_0) in $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ gegeben durch eine glatte Abbildung

$$W_0 \longrightarrow \text{Iso}(E^0, N), \quad (\gamma, x) \mapsto \psi_{(\gamma, x)}.$$

Die Abbildung $\iota_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$, definiert durch $\iota_{\mathcal{G}}(\gamma) = (\gamma, \tilde{u}(p(\gamma)))$, ist glatt, und auf $\iota_{\mathcal{G}}^{-1}(W_0)$ entspricht $\psi_{\iota_{\mathcal{G}}(\gamma)}$ gerade der Abbildung ψ_γ aus Punkt (2).

Mit \tilde{U} ist auch $\tilde{U} \cap \iota_{\mathcal{G}}^{-1}(W_0)$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathcal{G} , und der Übergang zu dieser Verkleinerung liefert die gewünschten Eigenschaften aus (2) für das Bündel E . In analoger Weise erhält man die Aussage (2) auch für das Bündel F .

Ist $\Phi_x : N \longrightarrow \tilde{N}$ die Einschränkung von Φ auf die Fasern in $x \in U$, und ist $u_x := \tilde{u}(p(x)) \in M^0$, so ist Φ_x gegeben als Komposition

$$N \xrightarrow{\psi_{\theta^{-1}(x)}^{-1}} E^0 \xrightarrow{\Phi_{u_x}^0} F^0 \xrightarrow{\tilde{\psi}_{\theta^{-1}(x)}} \tilde{N};$$

hierbei wurde ausgenutzt, daß die Einschränkungen der Bündel E und F auf M^0 trivialisierbar mit Faser E^0 und F^0 sind. Faßt man Φ^0 als glatten Morphismus der Trivialisierungen auf, so folgt aus obiger Beschreibung, daß die Abbildung

$$U \longrightarrow \text{Hom}(N, \tilde{N}), \quad x \mapsto \Phi_x$$

als Verknüpfung glatter Abbildungen wieder glatt ist. Dies zeigt, daß $\Phi : E \longrightarrow F$ ein glatter Morphismus von Vektorbündeln ist. \square

Korollar 4.1.16. *Es sei E ein glattes \mathcal{G} -Vektorbündel über M , so daß die Einschränkung $E|_{M^0}$ ($K \times \mathbb{R}$)-äquivariant mit dem trivialen Bündel mit Faser E^0 identifiziert werden kann. Desweiteren sei ein glatter Schnitt $\sigma^0 : M^0 \longrightarrow E|_{M^0}$ gegeben, so daß die Wirkung von $K \times \mathbb{R}$ auf $\sigma^0(M^0)$ trivial ist, d.h. es gelte*

$$\sigma^0(k \cdot x) = \sigma^0(x) = k \cdot \sigma^0(x) \quad \text{für alle } (k, x) \in (K \times \mathbb{R}) \times_{\mathbb{R}} M^0.$$

Dann besitzt σ^0 eine eindeutige Fortsetzung zu einem glatten \mathcal{G} -äquivarianten Schnitt $\sigma : M \longrightarrow E$.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist wie oben wieder klar: Ist $\sigma : M \longrightarrow E$ eine \mathcal{G} -äquivariante Fortsetzung von σ^0 , so gibt es zu jedem $x \in M$ Elemente $\gamma \in \mathcal{G}$ und $u_x \in M^0$ mit $x = \gamma \cdot u_x$. Aufgrund der \mathcal{G} -Äquivarianz von σ gilt dann

$$\sigma(x) = \sigma(\gamma \cdot u_x) = \gamma \cdot \sigma(u_x) = \gamma \cdot \sigma^0(u_x).$$

Dies zeigt, daß höchstens eine \mathcal{G} -äquivariante Fortsetzung von σ^0 existiert.

Andererseits läßt sich durch obige Gleichung eine Fortsetzung zu einem \mathcal{G} -äquivarianten Schnitt $\sigma : M \longrightarrow E$ definieren. Ist nämlich $x = \gamma \cdot u_\gamma = \tilde{\gamma} \cdot u_{\tilde{\gamma}}$ für $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathcal{G}$ und $u_\gamma, u_{\tilde{\gamma}} \in M^0$, so gilt wieder $u_\gamma = u_{\tilde{\gamma}}$ und $\gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma} \in K \times \mathbb{R}$, und aus der $(K \times \mathbb{R})$ -Invarianz von σ^0 folgt

$$\gamma \cdot \sigma^0(u_\gamma) = \gamma \cdot \sigma^0(\gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma} \cdot u_{\tilde{\gamma}}) = \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma} \cdot \sigma^0(u_{\tilde{\gamma}}) = \tilde{\gamma} \cdot \sigma^0(u_{\tilde{\gamma}}).$$

Somit ist durch $\sigma(\gamma \cdot x) := \gamma \cdot \sigma^0(x)$ für $(\gamma, x) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M^0$ ein wohldefinierter und \mathcal{G} -äquivarianter Schnitt $\sigma : M \longrightarrow E$ gegeben, welcher σ^0 fortsetzt.

Es bleibt die Glattheit von σ zu zeigen. Dazu sei eine $(K \times \mathbb{R})$ -äquivariante Trivialisierung $E|_{M^0} \cong M^0 \times E^0$ gewählt. Es bezeichne F das triviale Vektorbündel auf M , dessen Faser aus dem Unterraum der K -invarianten Elemente von E^0 besteht. Versehen mit der trivialen \mathcal{G} -Wirkung ist F ein \mathcal{G} -Vektorbündel über M .

Die Einschränkung von F auf M^0 läßt sich als Untervektorbündel von $E|_{M^0}$ auffassen. Die Einbettung $\Phi^0 : F|_{M^0} \hookrightarrow E|_{M^0}$ ist insbesondere $(K \times \mathbb{R})$ -äquivariant; nach 4.1.15 läßt sie sich zu einem \mathcal{G} -äquivarianten glatten Vektorbündelmorphismus $\Phi : F \longrightarrow E$ fortsetzen.

Da $k \cdot \sigma^0(x) = \sigma^0(x)$ für alle $(k, x) \in (K \times \mathbb{R}) \times_{\mathbb{R}} M^0$ gilt, läßt sich σ^0 als $(K \times \mathbb{R})$ -äquivarianter Schnitt $M^0 \longrightarrow F|_{M^0}$ auffassen. Das Bündel F ist trivial mit trivialer \mathcal{G} -Wirkung. Daher definiert

$$\tilde{\sigma} : M \longrightarrow F, \quad x \mapsto (x, \sigma^0(u_x))$$

einen glatten, \mathcal{G} -äquivarianten Schnitt, wobei $u_x := \tilde{u} \circ \text{pr}(x)$ glatt von x abhängt. Aus der \mathcal{G} -Äquivarianz von Φ folgt dann für $x = \gamma \cdot u_x$ (mit $\gamma \in \mathcal{G}$)

$$\sigma(x) = \gamma \cdot \sigma^0(u_x) = \gamma \cdot \Phi^0(\sigma^0(u_x)) = \Phi(\gamma \cdot \sigma^0(u_x)) = \Phi(\tilde{\sigma}(x));$$

die letzte Identität ergibt sich aufgrund der \mathcal{G} -Äquivarianz von $\tilde{\sigma}$, wobei in den vorletzten beiden Termen σ^0 als Schnitt $M^0 \longrightarrow F|_{M^0}$ aufzufassen ist. Als Verknüpfung glatter Abbildungen ist somit auch σ glatt, was den Beweis abschließt. \square

Beispiel 4.1.17. Die Einschränkung des vertikalen Tangentialbündels $T^{\mathcal{V}}(M)$ auf die Untermannigfaltigkeit M^0 läßt sich $(K \times \mathbb{R})$ -äquivariant mit dem trivialen Bündel $M^0 \times V$ identifizieren, wobei V wieder den Tangentialraum $T_{eK}(G/K)$ bezeichnet. Dies sieht man wie folgt:

Nach Definition der analytischen Struktur auf M ist die Abbildung

$$\Phi : V \times \mathbb{R} \longrightarrow M, \quad (X, t) \mapsto \begin{cases} (X, 0) & \text{für } t = 0 \\ (\text{Exp}(tX), t) & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

lokal in einer Umgebung von $(0, 0) \in V \times \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild. Das Tangentialbündel von $V \times \mathbb{R}$ läßt sich mit $(V \times \mathbb{R}) \times (V \times \mathbb{R})$ identifizieren; für das vertikale Tangentialbündel gilt dann $T^{\mathcal{V}}(V \times \mathbb{R}) = (V \times \mathbb{R}) \times (V \times \{0\})$.

Auf $V \times \mathbb{R}^{\times}$ ist die Abbildung Φ als Komposition $\Phi = (\text{Exp} \times \text{id}) \circ \mu$ gegeben, wobei

$$\mu : V \times \mathbb{R}^{\times} \longrightarrow V \times \mathbb{R}^{\times}, \quad (X, t) \mapsto (tX, t)$$

ein Diffeomorphismus ist. Für einen Tangentialvektor $(v, \lambda) \in T_{(X,t)}(V \times \mathbb{R})$ gilt dann $T(\mu)_{(X,t)}(v, \lambda) = (t \cdot v + \lambda \cdot X, \lambda)$. Insbesondere folgt (für $\lambda = 0$), daß die Ableitung von μ vertikale Tangentialvektoren auf vertikale Tangentialvektoren abbildet.

Für $(v, 0) \in T_{(0,t)}^{\mathcal{V}}(V \times \mathbb{R}^{\times})$, d.h. für $t \neq 0$, ergibt sich aus $T(\text{Exp})_0 = \text{id}$ dann $T(\Phi)_{(0,t)}(v, 0) = (t \cdot v, 0)$. Unter der Identifizierung von M^0 mit $\{0\} \times \mathbb{R} \subseteq V \times \mathbb{R}$ folgt, daß die Abbildung

$$M^0 \times V \longrightarrow T^{\mathcal{V}}(M)|_{M^0}, \quad (t, v) \mapsto \begin{cases} (0, v) & \text{für } t = 0 \\ (t, t \cdot v) & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

eine Trivialisierung der Einschränkung $T^{\mathcal{V}}(M)|_{M^0}$ des vertikalen Tangentialbündels ist. Diese ist $(K \times \mathbb{R})$ -äquivariant, da die Gruppe K linear auf V wirkt.

Genauso lassen sich die aus dem vertikalen Tangentialbündel konstruierten Vektorbündel (wie z.B. das vertikale Kotangentialbündel, die daraus gewonnen äußeren Bündel und die jeweiligen Komplexifizierungen) über M^0 $(K \times \mathbb{R})$ -äquivariant trivialisieren. Für das vertikale Kotangentialbündel ist etwa die Abbildung

$$M^0 \times V^* \longrightarrow T^{\mathcal{V},*}(M)|_{M^0}, \quad (t, w) \mapsto \begin{cases} (t, w) & \text{für } t = 0 \\ (t, t^{-1}w) & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

eine $(K \times \mathbb{R})$ -äquivariante Trivialisierung.

Als Anwendung von 4.1.16 ergibt sich:

Satz 4.1.18. *Das vertikale Tangentialbündel $T^{\mathcal{V}}(M)$ besitzt eine \mathcal{G} -invariante Riemannsche Metrik.*

Beweis. Da die Gruppe K kompakt ist, existiert auf $V = T_{eK}(G/K)$ ein K -invariantes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Setzt man für $X, Y \in T_{gK}(G/K)$

$$\langle X, Y \rangle_{gK} = \langle T(L_g)^{-1}(X), T(L_g)^{-1}(Y) \rangle_0,$$

so wird hierdurch eine G -invariante Riemannsche Metrik auf dem homogenen Raum G/K definiert.

Unter der Identifizierung von $(T^{\mathcal{V},*}(M) \otimes T^{\mathcal{V},*}(M))|_{M^0}$ mit dem trivialen Bündel läßt sich der konstante Schnitt

$$M^0 \longrightarrow M^0 \times (V^* \otimes V^*), \quad x \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_0$$

nach 4.1.16 zu einem \mathcal{G} -invarianten Skalarprodukt auf $T^{\mathcal{V}}(M)$ fortsetzen. \square

Die \mathcal{G} -invariante Riemannsche Metrik auf dem vertikalen Tangentialbündel von M definiert in kanonischer Weise auf dem vertikalen Kotangentialbündel und dem vertikalen äußeren Bündel (bzw. den jeweiligen Komplexifizierungen) \mathcal{G} -invariante euklidische (bzw. hermitesche) Metriken.

Beispiel 4.1.19. Wie eben bemerkt, existiert auf dem komplexifizierten vertikalen Kotangentialbündel $T^{\mathcal{V},*}(M) \otimes \mathbb{C}$ eine \mathcal{G} -invariante hermitesche Metrik, und es bezeichne Q die assoziierte quadratische Form. Diese ist ebenfalls invariant unter der Wirkung von \mathcal{G} , und wie im zweiten Kapitel beschrieben kann das assoziierte vertikale Clifford-Bündel $\mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)$ gebildet werden.

Für $(\gamma, x) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ erfüllt die kanonische Abbildung

$$\iota_{(\gamma,x)} : T_x^{\mathcal{V},*}(M) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\gamma} T_{\gamma \cdot x}^{\mathcal{V},*}(M) \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}\ell_{\gamma \cdot x}^{\mathcal{V}}(M)$$

die Relation

$$\iota_{(\gamma,x)}(\xi) \cdot \iota_{(\gamma,x)}(\xi) = Q_{\gamma \cdot x}(\gamma \cdot \xi) \cdot 1 = Q_x(\xi) \cdot 1,$$

wobei die letzte Identität aus der \mathcal{G} -Invarianz der quadratischen Form folgt.

Aufgrund der universellen Eigenschaft von Clifford-Algebren setzt sich $\iota_{(\gamma,x)}$ daher zu einem Isomorphismus $\mathbb{C}\ell_x^{\mathcal{V}}(M) \longrightarrow \mathbb{C}\ell_{\gamma \cdot x}^{\mathcal{V}}(M)$ fort. Hierdurch wird auf dem vertikalen Clifford-Bündel die Struktur eines glatten \mathcal{G} -Vektorbündels definiert.

Bemerkung 4.1.20. Es bezeichne \mathcal{G}^{con} wieder das Untergruppenbündel der Zusammenhangskomponenten von \mathcal{G} aus 3.3.14. Durch Einschränkung der Wirkung besitzt jedes glatte \mathcal{G} -Vektorbündel auf M in natürlicher Weise die Struktur eines glatten \mathcal{G}^{con} -Vektorbündels, und die Riemannsche Struktur aus 4.1.18 ist ebenfalls \mathcal{G}^{con} -invariant.

Die Resultate 4.1.15 und 4.1.16 gelten genauso, wenn man \mathcal{G} durch \mathcal{G}^{con} und $K \times \mathbb{R}$ durch $K_0 \times \mathbb{R}$ ersetzt.

Als weitere Folgerung von 4.1.16 erhält man dann:

Satz 4.1.21. *Auf M existiert eine vertikale Volumenform, d.h. ein nirgends verschwindender glatter Schnitt*

$$\omega : M \longrightarrow \Lambda^n(T^{\mathcal{V},*}(M)),$$

wobei $n = \dim G/K$ ist. Hierdurch wird insbesondere eine Orientierung auf den Fasern M_t definiert.

Beweis. Ist v_1, \dots, v_n eine Orthonormalbasis von V^* , so folgt aufgrund der K_0 -Invarianz des Skalarprodukts auf $\Lambda^n(V^*)$ für alle $k \in K_0$

$$\|k \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_n)\| = \|v_1 \wedge \dots \wedge v_n\|$$

und somit $k \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \pm v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Da K_0 als zusammenhängende Lie-Gruppe orientierungserhaltend wirkt, folgt $k \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ für alle $k \in K_0$.

Unter Identifizierung der Einschränkung von $\Lambda^n(T^{\mathcal{V},*}(M))$ auf M^0 mit dem trivialen Bündel mit Faser $\Lambda^n(V^*)$ läßt sich die konstante Abbildung

$$M^0 \longrightarrow M^0 \times \Lambda^n(V^*), \quad x \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_n$$

nach 4.1.16 zu einem nirgends verschwindenden \mathcal{G}^{con} -äquivarianten Schnitt auf M fortsetzen. \square

Die im obigen Beweis konstruierte vertikale Volumenform ist per Definition linksinvariant unter der Wirkung von \mathcal{G}^{con} , d.h. es gilt $\omega(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot \omega(x)$ für alle $(\gamma, x) \in \mathcal{G}^{\text{con}} \times_{\mathbb{R}} M$.

Die Submersion $M \xrightarrow{\text{pr}} \mathbb{R}$ definiert eine Blätterungsstruktur auf M ; aus der Existenz der oben konstruierten vertikalen Volumenform folgt somit, daß M vertikal orientierbar ist. Andererseits besitzt das vertikale Tangentialbündel eine (konstruktionsgemäß linksinvariante) Riemannsche Metrik. In dieser Situation wurde bereits im zweiten Kapitel eine Volumenform konstruiert. Aufgrund der Linksinvarianz der Riemannschen Metrik gilt:

Satz 4.1.22. Die in 2.1.13 definierte vertikale Volumenform auf M , welche in positiv orientierten lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n, t durch

$$\omega = g^{1/2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n := \left(\det \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \right)^{1/2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

gegeben wird, ist linksinvariant unter der Wirkung von \mathcal{G}^{con} .

Beweis. Für $\gamma \in \mathcal{G}_t^{\text{con}}$ bezeichne $L_\gamma : M_t \longrightarrow M_t$, $x \mapsto \gamma \cdot x$ den durch Linksmultiplikation gegebenen Diffeomorphismus. Es ist zu zeigen, daß $L_\gamma^*(\omega_t) = \omega_t$ gilt, wobei ω_t die Einschränkung der vertikalen Volumenform ist, welche durch die Riemannsche Metrik gegeben wird. Es genügt, die Aussage lokal auf Kartenumgebungen zu zeigen.

Dazu sei $p \in M_t$ und (U, ϕ) eine positiv orientierte Blätterungskarte für M mit $L_\gamma(p) \in U$. Die Koordinatenfunktionen der Karte seien mit x^1, \dots, x^n, t bezeichnet. Dann existiert eine Blätterungskarte (V, ψ) um $p \in M$ mit Koordinatenfunktionen y^1, \dots, y^n, t , so daß $V \cap M_t = L_{\gamma^{-1}}(U \cap M_t)$ und $y^i = x^i \circ L_\gamma$ auf $V \cap M_t$ gilt. Diese Karte ist ebenfalls positiv orientiert, da $\mathcal{G}_t^{\text{con}}$ als zusammenhängende Lie-Gruppe orientierungserhaltend auf $M_t = \mathcal{G}_t/K$ wirkt.

Für diese speziellen Koordinatenumgebungen gilt aufgrund der Definition des Differentials der Abbildung L_γ

$$T(L_\gamma)_m \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_m \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma \cdot m}$$

für alle $m \in V \cap M_t$. Aus der Linksinvarianz der Riemannschen Metrik folgt dann

$$\begin{aligned} g_{ij}^\phi(L_\gamma(m)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma \cdot m}, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\gamma \cdot m} \right\rangle_{\gamma \cdot m} \\ &= \left\langle T(L_{\gamma^{-1}})_{\gamma \cdot m} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma \cdot m} \right), T(L_{\gamma^{-1}})_{\gamma \cdot m} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\gamma \cdot m} \right) \right\rangle_m \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_m, \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_m \right\rangle_m \\ &= g_{ij}^\psi(m) \end{aligned}$$

und somit auch

$$g^\phi(L_\gamma(m)) = \det(g_{ij}^\phi(L_\gamma(m))) = \det(g_{ij}^\psi(m)) = g^\psi(m).$$

Auf $U \cap M_t$ ist die vertikale Volumenform gegeben durch

$$\omega_t = (g^\phi)^{1/2} \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Für die zurückgezogene Form $L_\gamma^*(\omega_t)$ auf $V \cap M_t$ gilt dann

$$\begin{aligned} L_\gamma^*(\omega_t) &= [(g^\phi)^{1/2} \circ L_\gamma] \cdot d(x^1 \circ L_\gamma) \wedge \dots \wedge d(x^n \circ L_\gamma) \\ &= (g^\psi)^{1/2} \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n. \end{aligned}$$

Letzteres entspricht aber genau der lokalen Beschreibung von ω_t bezüglich der Karte (V, ψ) . \square

Bemerkung 4.1.23. Nach 4.1.1 ist die Abbildung $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow M$ eigentlich; gleiches gilt für die kanonische Abbildung $\tilde{\pi} : \mathcal{G}^{\text{con}} \longrightarrow M$. Für alle $f \in C_c(M)$ ist daher $\pi^* f = f \circ \pi$ ein Element von $C_c(\mathcal{G})$ und $\tilde{\pi}^* f = f \circ \tilde{\pi}$ ein Element von $C_c(\mathcal{G}^{\text{con}})$.

Ist $\lambda = (\lambda^t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein glattes Haarsystem für \mathcal{G} und bezeichnet $\tilde{\lambda}$ das durch Einschränkung gewonnene glatte Haarsystem von \mathcal{G}^{con} , so definiert die Familie von Bildmaßen $(\tilde{\pi}(\tilde{\lambda}^t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine glatte und treue Familie von Maßen auf M ; für diese Familie von Maßen gilt

$$\int_{x \in M_t} f(x) \, d\tilde{\pi}(\tilde{\lambda}^t)(x) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}_t^{\text{con}}} (f \circ \tilde{\pi})(\gamma) \, d\tilde{\lambda}^t(\gamma).$$

Andererseits definiert die linksinvariante vertikale Volumenform ebenfalls eine glatte und treue Familie von Maßen auf M , und beide Familien stimmen bis auf Multiplikation mit einer strikt positiven glatten Funktion auf \mathbb{R} überein. Dies sieht man folgendermaßen:

Durch faserweise Integration nach der vertikalen Volumenform wird eine (nicht-triviale) linksinvariante positive Linearformen auf $C_c(M_t)$ definiert. Es gilt $M_t = \mathcal{G}_t/K = \mathcal{G}_t^{\text{con}}/K_0$, als kompakte Gruppe ist K_0 unimodular, und die Einschränkung der Modularfunktion von $\mathcal{G}_t^{\text{con}}$ auf K_0 ist die konstante Funktion mit Wert Eins. Fixiert man auf K_0 ein Haarmaß mit $\int_{K_0} dk = 1$, so ist die Abbildung

$$C_c(\mathcal{G}_t^{\text{con}}) \longrightarrow C_c(M_t), \quad f \mapsto (f^b : \gamma K_0 \mapsto \int_{k \in K_0} f(\gamma k) \, dk)$$

surjektiv, und es gilt $(g \circ \tilde{\pi})^b = g$ für alle $g \in C_c(M_t)$.

Nach dem Satz von Weyl (vgl. etwa [Els96, Kapitel VIII, §3.5]) stimmt die durch Integration nach der Volumenform gewonnene Linearform bis auf einen positiven Faktor mit derjenigen Linearform auf $C_c(M_t)$ überein, welche durch $g \mapsto \int_{\mathcal{G}_t^{\text{con}}} g \circ \tilde{\pi} \, d\tilde{\lambda}^t$ gegeben wird, und wie in Beispiel 1.1.10 (ii) sieht man, daß die Faktoren eine glatte Funktion auf \mathbb{R} definieren.

Durch Multiplikation des Haarsystems von \mathcal{G}^{con} (und \mathcal{G}) mit einer Funktion aus $C^\infty(\mathbb{R})^+$ kann daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß beide Konstruktionen dieselbe Familie von Maßen auf M liefern, welche lokal in den Fasern äquivalent zum Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^n sind.

Ist N die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der fast zusammenhängenden Lie-Gruppe G , so gilt unter Verwendung von 3.2.11

$$\int_{M_t} f \cdot \omega_t = \int_{\mathcal{G}_t^{\text{con}}} f \circ \tilde{\pi} \, d\tilde{\lambda}^t = \frac{1}{N} \int_{\mathcal{G}_t} f \circ \pi \, d\lambda^t$$

für alle $f \in C_c(M)$. Im folgenden sei das Haarsystem auf \mathcal{G} stets so normiert, daß die Familie von Bildmaßen $\tilde{\pi}(\tilde{\lambda})$ auf M mit der durch die vertikale Volumenform aus 4.1.22 definierten Familie von Maßen auf M übereinstimmt.

4.2 Konstruktion des Dirac-Elements

In diesem Abschnitt kann nun in Analogie zu [Kas88, 4.2] die Familie von Dirac-Elementen für den Deformationsgruppoiden \mathcal{G} konstruiert werden.

Unter Verwendung der im vorigen Abschnitt konstruierten \mathcal{G} -Wirkungen auf den vertikalen Vektorbündeln wird eine Wirkung des Gruppoiden auf der Algebra $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\nu(M))$ der im Unendlichen verschwindenden Schnitte ins vertikale Clifford-Bündel sowie auf dem Hilbertmodul $L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^{*,\nu}(M))$ der quadratintegrierbaren vertikalen Differentialformen konstruiert, so daß eine \mathcal{G} -äquivalente Darstellung von $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\nu(M))$ auf $L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^{*,\nu}(M))$ existiert.

Ist F der vertikale Dirac-Operator aus 2.1.21, so kann unter Verwendung der Resultate über Familien von Pseudodifferentialoperatoren gezeigt werden, daß das Paar $[(L^2(M, \Lambda_{\mathbb{C}}^{*,\nu}(M))), F]$ ein Element in der \mathcal{G} -äquivalenten KK-Theorie definiert.

Zusätzlich wird in 4.2.6 eine Morita-Äquivalenz für das reduzierte verschränkte Produkt von $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\nu(M))$ und \mathcal{G} konstruiert, welche im folgenden Abschnitt zur Identifikation der Assembly-Abbildung mit der Deformationsabbildung genutzt wird.

Es sei angemerkt, daß sowohl das vertikale Clifford-Bündel als auch das vertikale äußere Bündel eine natürliche $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung besitzen, welche von der \mathcal{G} -Wirkung respektiert wird.

Proposition 4.2.1. *Die Algebra $\mathcal{A} := \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\nu(M))$ der im Unendlichen verschwindenden stetigen Schnitte ins vertikale Clifford-Bündel von M ist eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduierte $C_0(\mathbb{R})$ -Algebra.*

Beweis. Jede Clifford-Algebra ist eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduierte C^* -Algebra. Da $\mathbb{C}\ell^\nu(M)$ ein stetiges Bündel von C^* -Algebren über M ist, ist \mathcal{A} eine $C_0(M)$ -Algebra unter punktwiser Multiplikation, und durch

$$(\varphi \cdot a)(x) = \varphi(\text{pr}(x)) \cdot a(x) \quad \text{für } \varphi \in C_0(\mathbb{R}) \text{ und } a \in \mathcal{A}$$

wird auf \mathcal{A} die Struktur einer $C_0(\mathbb{R})$ -Algebra definiert. □

Die \mathcal{G} -Wirkung auf der Algebra $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ läßt sich unter Verwendung der \mathcal{G} -Wirkung auf dem vertikalen Clifford-Bündel definieren, welche im vorigen Abschnitt beschrieben wurde. Um dies zu formalisieren, werden zunächst einige Zwischenschritte benötigt.

Im folgenden seien wieder mit $\pi_{\mathcal{G}}$ und π_M die Projektionen von $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ auf \mathcal{G} bzw. M bezeichnet.

Lemma 4.2.2. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)) \otimes C_0(\mathcal{G}) &\longrightarrow \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)), \\ s \otimes f &\longmapsto [(\gamma, x) \mapsto f(\gamma) \cdot s(x)] \end{aligned}$$

ist ein graduierungserhaltender $C_0(\mathcal{G})$ -Homomorphismus.

Beweis. Für $f \in C_0(\mathcal{G})$, $s \in \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ und $(\gamma, x) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ ist

$$\psi(s \otimes f)(\gamma, x) = f(\gamma) \cdot s(x) \in \mathbb{C}\ell_x^\mathcal{V}(M) \cong (\pi_M^* \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))_{(\gamma, x)}.$$

Daher definiert $\psi(s \otimes f)$ einen Schnitt auf $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ mit Werten in $\pi_M^* \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)$.

Mit f und s verschwindet auch $\psi(s \otimes f)$ im Unendlichen: Ist $\epsilon > 0$, so existieren kompakte Teilmengen $C \subseteq \mathcal{G}$ und $L \subseteq M$, so daß f bzw. s außerhalb von C bzw. M in Norm kleiner als ϵ sind. Dann ist $C \times_{\mathbb{R}} L$ eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$, und für alle $(\gamma, x) \in (\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) \setminus (C \times_{\mathbb{R}} L)$ gilt

$$\|f(\gamma) \cdot s(x)\| < \epsilon \cdot \max\{\|f\|_\infty, \|s\|_\infty\}.$$

Für den Nachweis, daß $\psi(s \otimes f)$ stetig ist, sei ein Netz (γ_i, x_i) in $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ gegeben, welches gegen (γ_0, x_0) konvergiert. Es ist zu zeigen, daß das Netz $(f(\gamma_i) \cdot s(x_i))$ in $\pi_M^* \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)$ gegen $f(\gamma_0) \cdot s(x_0)$ konvergiert.

Mit $\mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M) \longrightarrow M$ ist auch $\pi_M^* \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M) \longrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ ein stetiges Bündel von C^* -Algebren. Man setze

$$a_i := f(\gamma_i) \cdot s(x_i), \quad u_i := f(\gamma_0) \cdot s(x_i) \quad \text{und} \quad a := u := f(\gamma_0) \cdot s(x_0)$$

mit $a_i, u_i \in (\pi_M^* \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))_{(\gamma_i, x_i)}$ und $a = u \in (\pi_M^* \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))_{(\gamma_0, x_0)}$. Aufgrund der Stetigkeit von s und f konvergiert (u_i) gegen u und $(a_i - u_i)$ gegen Null, und aus 1.2.7 folgt die Stetigkeit von $\psi(s \otimes f)$.

Auf $C_0(\mathcal{G})$, $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ und $\Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ sind die $*$ -Algebrenstrukturen jeweils punktweise definiert. Daher ist klar, daß ψ einen $*$ -Homomorphismus auf dem algebraischen Tensorprodukt $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)) \odot C_0(\mathcal{G})$ definiert, welcher sich auf $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)) \otimes C_0(\mathcal{G})$ fortsetzen läßt.

Die $C_0(\mathcal{G})$ -Modulstruktur auf $\Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ ist durch punktweise Multiplikation nach Zurückziehen von Funktionen via der stetigen Abbildung $\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathcal{G}$ definiert, und man rechnet sofort nach, daß ψ ein $C_0(\mathcal{G})$ -Modulhomomorphismus ist, welcher die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung respektiert. \square

Lemma 4.2.3. *Die Abbildung ψ aus 4.2.2 faktorisiert über*

$$p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) = \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \otimes_{C_0(\mathbb{R})} C_0(\mathcal{G})$$

zu einem graduierungserhaltenden $C_0(\mathcal{G})$ -Isomorphismus

$$\bar{\psi} : p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \xrightarrow{\cong} \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)).$$

Beweis. Es gilt $\psi(s \cdot \phi \otimes f) = \psi(s \otimes \phi \cdot f)$ für alle $f \in C_0(\mathcal{G})$, $s \in \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ und $\phi \in C_0(\mathbb{R})$. Nach 1.2.3 (2) faktorisiert ψ über $p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$, und man erhält einen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduerten $*$ -Homomorphismus

$$\bar{\psi} : p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \longrightarrow \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)),$$

welcher mit den $C_0(\mathcal{G})$ -Modulstrukturen verträglich ist.

Für den Nachweis, daß $\bar{\psi}$ ein Isomorphismus ist, genügt es nach 1.2.9 zu zeigen, daß die induzierten Abbildungen auf den Fasern bijektiv sind. Für die Fasern in $\gamma \in \mathcal{G}$ gilt jedoch

$$\begin{aligned} (\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \otimes_{C_0(\mathbb{R})} C_0(\mathcal{G}))_{\gamma} &\cong \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))_{p(\gamma)} \cong \Gamma_0(M_{p(\gamma)}, \mathbb{C}\ell(M_{p(\gamma)})), \\ (s \otimes f)_{\gamma} &\mapsto f(\gamma) \cdot s_{p(\gamma)} = f(\gamma) \cdot s|_{M_{p(\gamma)}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)))_{\gamma} &\cong \Gamma_0(M_{p(\gamma)}, \mathbb{C}\ell(M_{p(\gamma)})), \\ F &\mapsto F|_{\{\gamma\} \times M_{p(\gamma)}}. \end{aligned}$$

Der Homomorphismus $\bar{\psi}_{\gamma}$ der Fasern in $\gamma \in \mathcal{G}$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} (\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \otimes_{C_0(\mathbb{R})} C_0(\mathcal{G}))_{\gamma} &\xrightarrow{\bar{\psi}_{\gamma}} (\Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)))_{\gamma}, \\ f(\gamma) \cdot s|_{M_{p(\gamma)}} = (s \otimes f)_{\gamma} &\mapsto [(\tilde{\gamma}, x) \mapsto f(\tilde{\gamma}) \cdot s(x)]|_{\{\gamma\} \times M_{p(\gamma)}}. \end{aligned}$$

Unter den obigen Identifikationen ist $\bar{\psi}_{\gamma}$ die Identität auf der Faser und somit bijektiv. Dies zeigt, daß $\bar{\psi}$ ein (graduierter) Isomorphismus von $C_0(\mathcal{G})$ -Algebren ist. \square

Die \mathcal{G} -Wirkungen auf M und $\mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)$ definieren nach 4.1.3 und 4.1.6 Diffeomorphismen $\alpha : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ und $\tilde{\alpha} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M) \longrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \end{array}$$

kommutiert. Unter der Identifikation $\pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M) \cong \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)$ aus 4.1.6 gilt:

Satz 4.2.4. *Die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) & \longrightarrow & \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)), \\ F & \mapsto & \tilde{\alpha} \circ F \circ \alpha^{-1} \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von $C_0(\mathcal{G})$ -Algebren; dieser definiert unter dem Isomorphismus $\bar{\psi} : p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \longrightarrow \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ aus 4.2.3 eine stetige \mathcal{G} -Wirkung

$$\varphi : p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \longrightarrow p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$$

auf $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$, welche die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung respektiert.

Beweis. Für $F \in \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ folgt aus der Kommutativität des obigen Diagramms, daß auch $\tilde{\alpha} \circ F \circ \alpha^{-1}$ ein stetiger Schnitt auf $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ mit Werten in $\pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)$ ist, welcher wie F im Unendlichen verschwindet.

Genauso ist auch $\tilde{\alpha}^{-1} \circ F \circ \alpha$ ein Element von $\Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$; die Abbildung

$$\Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \longrightarrow \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)), \quad F \mapsto \tilde{\alpha} \circ F \circ \alpha^{-1}$$

ist daher bijektiv, und man rechnet direkt nach, daß sie ein graduierungserhaltender $C_0(\mathcal{G})$ -Homomorphismus ist.

Unter dem Isomorphismus von $p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ und $\Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ aus 4.2.3 erhält man somit einen graduierungserhaltenden Isomorphismus von $C_0(\mathcal{G})$ -Algebren

$$\varphi : p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \longrightarrow p^* \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)).$$

Für den Nachweis, daß durch φ eine \mathcal{G} -Wirkung auf $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ definiert wird, ist noch die Bedingung $\varphi_{\gamma \cdot \tilde{\gamma}} = \varphi_{\gamma} \circ \varphi_{\tilde{\gamma}}$ für alle $(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \mathcal{G}^{(2)}$ zu zeigen.

Jedes Element der Faser $\Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))_{\gamma}$ läßt sich als Einschränkung $F|_{\{\gamma\} \times M_{p(\gamma)}}$ eines Schnitts $F \in \Gamma_0(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ schreiben. Das Bild unter der induzierten Abbildung der Fasern ist dann gegeben durch

$$F|_{\{\gamma\} \times M_{p(\gamma)}} \mapsto (\tilde{\alpha} \circ F \circ \alpha)|_{\{\gamma\} \times M_{p(\gamma)}}.$$

Identifiziert man die Faser in $\gamma \in \mathcal{G}_t$ wieder mit $\Gamma_0(M_t, \mathbb{C}\ell(M_t))$, so ist die Abbildung der Faser gegeben durch

$$\begin{aligned} \varphi_{\gamma} : \Gamma_0(M_t, \mathbb{C}\ell(M_t)) &\longrightarrow \Gamma_0(M_t, \mathbb{C}\ell(M_t)), \\ f &\mapsto [x \mapsto \gamma \cdot f(\gamma^{-1} \cdot x)]. \end{aligned}$$

Ist nun $\tilde{\gamma}$ ein weiteres Element von \mathcal{G}_t , so gilt

$$\varphi_{\gamma}(\varphi_{\tilde{\gamma}}(f))(x) = \gamma \cdot \varphi_{\tilde{\gamma}}(f)(\gamma^{-1} \cdot x) = \gamma \cdot \tilde{\gamma} \cdot f(\tilde{\gamma}^{-1} \cdot \gamma^{-1} \cdot x) = \varphi_{\gamma \cdot \tilde{\gamma}}(f)(x).$$

Es gilt also $\varphi_{\gamma} \circ \varphi_{\tilde{\gamma}} = \varphi_{\gamma \cdot \tilde{\gamma}}$ für alle $(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Somit definiert φ eine stetige Wirkung von \mathcal{G} auf $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$. \square

Faserweise ist hierdurch die Wirkung der Gruppe \mathcal{G}_t auf $\Gamma_0(M_t, \mathbb{C}\ell(M_t))$ gegeben, wie sie in den Arbeiten von Kasparov auftaucht.

Bemerkung 4.2.5. Die Algebra $\mathcal{A} = \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ läßt sich auch als induzierte Algebra des Untergruppenbündels $\mathcal{K} = K \times \mathbb{R} \subseteq \mathcal{G}$ auffassen.

Es bezeichne $\mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M^0)$ die Einschränkung des vertikalen Clifford-Bündels auf die Untermannigfaltigkeit $M^0 \subset M = \mathcal{G}/\mathcal{K}$, wobei sich M^0 wieder mit \mathbb{R} identifizieren läßt. Ist $\mathcal{B} = \Gamma_0(M^0, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M^0))$ die Algebra der stetigen Schnitte in das Bündel $\mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M^0)$, so ist \mathcal{A} als $C_0(\mathbb{R})$ -Algebra isomorph zur induzierten Algebra

$$\begin{aligned} \text{Ind } \mathcal{B} := \{f \in \Gamma_b(\mathcal{G}, p^* \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M^0)) \mid & f(\gamma \cdot k) = k^{-1} \cdot f(\gamma) \text{ für } (\gamma, k) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \mathcal{K} \\ & \text{und } \|f(\gamma \mathcal{K})\| \xrightarrow{\gamma \mathcal{K} \rightarrow \infty} 0\}. \end{aligned}$$

Unter der Identifikation von M^0 mit \mathbb{R} kann dabei das Bündel $\mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M^0)$ vermöge der Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ zu einem glatten Bündel von C^* -Algebren über \mathcal{G} zurückgezogen werden.

Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$\Phi : \text{Ind } \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}, \quad \Phi(f)(\gamma \mathcal{K}) := \gamma \cdot f(\gamma).$$

Faßt man \mathcal{A} und $\text{Ind } \mathcal{B}$ als (oberhalb) stetige Felder von C^* -Algebren über \mathbb{R} auf, so wird auf $\text{Ind } \mathcal{B}$ eine \mathcal{G} -Wirkung definiert durch

$$(\gamma \cdot f)(\eta) := f(\gamma^{-1} \cdot \eta)$$

für $f \in (\text{Ind } \mathcal{B})_t$ und $\gamma, \eta \in \mathcal{G}_t$. Es gilt

$$\Phi(\gamma \cdot f)(\eta \mathcal{K}) = \eta \cdot [(\gamma \cdot f)(\eta)] = \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \eta \cdot f(\gamma^{-1} \cdot \eta) = \gamma \cdot \Phi(f)(\gamma^{-1} \cdot \eta \mathcal{K}).$$

Somit ist Φ ein \mathcal{G} -äquivarianter Isomorphismus.

Bezeichnet $V = T_{eK}(G/K)$ wieder den Tangentialraum der Quotientenmannigfaltigkeit, so läßt sich das Bündel $\mathcal{C}\ell^\mathcal{V}(M^0)$ ($K \times \mathbb{R}$)-äquivariant mit dem trivialen Bündel $M^0 \times \mathcal{C}\ell(V^*)$ identifizieren, da die Untermannigfaltigkeit $M^0 \cong \mathbb{R}$ von M zusammenziehbar ist. Das verschränkte Produkt $\Gamma_0(M^0, \mathcal{C}\ell^\mathcal{V}(M^0)) \rtimes_r (K \times \mathbb{R})$ ist somit als $C_0(\mathbb{R})$ -Algebra isomorph zu $C_0(\mathbb{R}) \otimes (\mathcal{C}\ell(V^*) \rtimes K)$.

Das folgende Resultat wird im nächsten Abschnitt zur Modifikation der durch das Dirac-Element definierten Assembly-Abbildung genutzt:

Satz 4.2.6. *Die $C_0(\mathbb{R})$ -Algebren $\Gamma_0(M, \mathcal{C}\ell^\mathcal{V}(M)) \rtimes_r \mathcal{G}$ und $C_0(\mathbb{R}) \otimes (\mathcal{C}\ell(V^*) \rtimes K)$ sind Morita-äquivalent.*

Beweis. Man setze $\mathcal{A} = \Gamma_0(M, \mathcal{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ und $\mathcal{B} = \Gamma_0(\mathbb{R}, \mathcal{C}\ell^\mathcal{V}(M^0))$, wobei M^0 mit \mathbb{R} identifiziert wird. Nach den vorausgehenden Bemerkungen und nach 1.3.5 genügt es zu zeigen, daß die Algebren $\mathfrak{A} := C_{r,*}(\mathcal{G}, \mathcal{A})$ und $\mathfrak{B} := C_{r,*}(K \times \mathbb{R}, \mathcal{B})$ Morita-äquivalent sind.

Wie in 4.2.5 läßt sich für alle $t \in \mathbb{R}$ die Faser \mathcal{A}_t mit der induzierten Algebra $\text{Ind}_K^{\mathcal{G}_t} \mathcal{B}_t$ identifizieren. Die Algebra \mathcal{B} ist eine $(K \times \mathbb{R})$ -Algebra. Als kompakte Gruppe ist K unimodular, und auf K sei ein Haarmaß μ mit $\mu(K) = 1$ fixiert. Für $\mathcal{K} := K \times \mathbb{R}$ bezeichne $q : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ die kanonische Projektion.

Setzt man $\mathfrak{A}_0 := \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{A}^\sharp)$, $\mathfrak{B}_0 := \Gamma_c(K \times \mathbb{R}, q^* \mathcal{B}^\sharp)$ und $\mathfrak{X}_0 := \Gamma_c(\mathcal{G}, p^* \mathcal{B}^\sharp)$, so sind dies $C_0(\mathbb{R})$ -Moduln unter faserweise Multiplikation, und \mathfrak{A}_0 bzw. \mathfrak{B}_0 sind dichte $*$ -Unteralgebren von \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} .

Für $a \in \mathfrak{A}_0$, $b \in \mathfrak{B}_0$ und $x, y \in \mathfrak{X}_0$ definiere man die folgenden Operationen:

$$\begin{aligned} a \cdot x(\gamma) &= \int_{\eta \in \mathcal{G}_{p(\gamma)}} a(\eta, \gamma) \cdot x(\eta^{-1} \cdot \gamma) \cdot \Delta_{p(\gamma)}(\eta)^{1/2} \, d\lambda^{p(\gamma)}(\eta) \\ x \cdot b(\gamma) &= \int_{k \in \mathcal{K}_{p(\gamma)}} \alpha_k(x(\gamma \cdot k) \cdot b(k^{-1})) \, d\mu(k) \\ \mathfrak{A}_0 \langle x, y \rangle(\gamma, \eta) &= \Delta_{p(\gamma)}(\gamma)^{-1/2} \cdot \int_{k \in \mathcal{K}_{p(\gamma)}} \alpha_k(x(\eta \cdot k) \cdot y(\gamma^{-1} \cdot \eta \cdot k)^*) \, d\mu(k) \\ \langle x, y \rangle_{\mathfrak{B}_0}(k) &= \int_{\gamma \in \mathcal{G}_{q(k)}} x(\gamma^{-1})^* \cdot \alpha_k(y(\gamma^{-1} \cdot k)) \, d\lambda^t(\gamma) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet Δ_t die Modularfunktion der Isotropiegruppe \mathcal{G}_t , α ist die Wirkung von \mathcal{G} auf \mathcal{A} , und faserweise wird \mathcal{A}_t mit der induzierten Algebra von \mathcal{B}_t identifiziert.

Die obigen Operationen sind faserweise definiert, also insbesondere mit den $C_0(\mathbb{R})$ -Modulstrukturen verträglich, und sie sind stetig bezüglich der induktiven Limes-Topologien. Faserweise entsprechen die Operationen denen aus Greens Imprimitivitätssatz; man vergleiche auch 1.3.19.

Mit den obigen Operationen ist \mathfrak{X}_0 ein Prä-Hilbert- $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0$ -Bimodul, und es genügt zu zeigen, daß \mathfrak{X}_0 ein Prä-Imprimitivitätsbimodul im Sinne von [RW98, Def. 3.9] ist. Dies folgt durch faserweise Anwendung von Greens Imprimitivitätssatz: Zunächst gilt $\mathfrak{a}_0 \langle x, y \rangle \cdot z = x \cdot \langle y, z \rangle_{\mathfrak{B}_0}$, da die Operationen faserweise definiert sind.

Nach Green liegt das Bild der inneren Produkte $\mathfrak{a}_0 \langle \mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_0 \rangle$ und $\langle \mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_0 \rangle_{\mathfrak{B}_0}$ faserweise dicht in \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} . Da es außerdem invariant unter Multiplikation mit Funktionen aus $C_0(\mathbb{R})$ ist, folgt aus Fells Kriterium 1.2.6, daß das Bild der inneren Produkte dicht in \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} liegt.

Ebenfalls nach Green gilt für $x \in \mathfrak{X}_0$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$(\mathfrak{a}_0 \langle x, x \rangle)_t = (\mathfrak{a}_0)_t \langle x_t, x_t \rangle \geq 0 \text{ in } \mathfrak{A}_t.$$

Nach 1.2.10 ist dann $\mathfrak{a}_0 \langle x, x \rangle \geq 0$ in \mathfrak{A} , und genauso sieht man, daß $\langle x, x \rangle_{\mathfrak{B}_0} \geq 0$ in \mathfrak{B} ist. Es bleibt zu zeigen, daß für alle $a \in \mathfrak{A}_0, b \in \mathfrak{B}_0$ und $x \in \mathfrak{X}_0$

$$\langle a \cdot x, a \cdot x \rangle_{\mathfrak{B}_0} \leq \|a\|^2 \cdot \langle x, x \rangle_{\mathfrak{B}_0} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_0 \langle x \cdot b, x \cdot b \rangle \leq \|b\|^2 \cdot \mathfrak{a}_0 \langle x, x \rangle$$

ist. Nach Green gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ faserweise

$$(\langle a \cdot x, a \cdot x \rangle_{\mathfrak{B}_0})_t = \langle a_t \cdot x_t, a_t \cdot x_t \rangle_{(\mathfrak{B}_0)_t} \leq \|a_t\|^2 \cdot \langle x_t, x_t \rangle_{(\mathfrak{B}_0)_t} = \|a_t\|^2 \cdot (\langle x, x \rangle_{\mathfrak{B}_0})_t.$$

Mit $\|a_t\| \leq \|a\|$ folgt aus 1.2.10 dann $\langle a \cdot x, a \cdot x \rangle_{\mathfrak{B}_0} \leq \|a\|^2 \cdot \langle x, x \rangle_{\mathfrak{B}_0}$, und analog ergibt sich die zweite Ungleichung.

Somit ist \mathfrak{X}_0 ein Prä-Imprimitivitätsbimodul, welcher sich zu einer Morita-Äquivalenz von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} vervollständigen läßt. \square

Zurück zur Konstruktion des Dirac-Elements:

Bezeichnet $\Lambda^{\mathcal{V},*}(M)$ das (komplexifizierte) vertikale äußere Bündel auf M , so besitzt dieses nach den Überlegungen aus dem zweiten eine glatte hermitesche Struktur.

Unter Verwendung der glatten Familie von Maßen, welche durch die linksinvariante vertikale Volumenform 4.1.22 definiert wird, kann wie in 2.1.8 der Hilbert- $C_0(\mathbb{R})$ -Modul $L^2(M) := L^2(M, \Lambda^{\mathcal{V},*}(M))$ konstruiert werden; er läßt sich als oberhalb stetiges Feld von Hilbert-Räumen über \mathbb{R} auffassen. Die Faser $L^2(M)_t$ ist gerade die Komplettierung von $\Gamma_c(M_t, \Lambda^*(M_t))$, also $L^2(M_t)$.

Nach 2.1.11 wirkt $\mathcal{A} = \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\vee(M))$ durch adjungierbare Operatoren auf $L^2(M)$, und man sieht sofort, daß diese Darstellung $\chi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(M))$ ein graduierungserhaltender $C_0(\mathbb{R})$ -Homomorphismus ist.

Es bleibt eine \mathcal{G} -Wirkung auf $L^2(M)$ zu konstruieren und nachzuweisen, daß die Darstellung χ \mathcal{G} -äquivariant ist. Zur Definition der Wirkung wird wieder ausgenutzt, daß das vertikale äußere Bündel ein \mathcal{G} -Vektorbündel ist.

Definitionsgemäß gilt für den via der Projektion $p : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ zurückgezogenen Hilbertmodul

$$p^*L^2(M) = L^2(M) \otimes_{C_0(\mathbb{R})} p^*C_0(\mathbb{R}).$$

Unter dem Isomorphismus $p^*C_0(\mathbb{R}) = C_0(\mathcal{G}) \otimes_{C_0(\mathbb{R})} C_0(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathcal{G})$ läßt sich dann $p^*L^2(M)$ als internes Tensorprodukt $L^2(M) \otimes_{C_0(\mathbb{R})} C_0(\mathcal{G})$ beschreiben, wobei $C_0(\mathbb{R})$ wieder durch

$$p^* : C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow C_b(\mathcal{G}) = M(C_0(\mathcal{G})), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ p$$

auf $C_0(\mathcal{G})$ wirkt. Die Menge $\Gamma_c(M, \Lambda^{\vee,*}(M)) \odot_{C_0(\mathbb{R})} C_c(\mathcal{G})$ ist ein dichter Teilraum von $p^*L^2(M)$; für die Fasern in $\gamma \in \mathcal{G}_t$ gilt

$$\begin{aligned} (\Gamma_c(M, \Lambda^{\vee,*}(M)) \odot_{C_0(\mathbb{R})} C_c(\mathcal{G}))_\gamma &\xrightarrow{\cong} \Gamma_c(M_t, \Lambda^*(M_t)), \\ (s \otimes f)_\gamma &\mapsto f(\gamma) \cdot s|_{M_t}. \end{aligned}$$

Lemma 4.2.7. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma_c(M, \Lambda^{\vee,*}(M)) \odot_{C_0(\mathbb{R})} C_c(\mathcal{G}) &\longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*(\Lambda^{\vee,*}(M))) \\ s \otimes f &\mapsto [(\gamma, x) \mapsto f(\gamma) \cdot s(x)] \end{aligned}$$

läßt sich zu einem isometrischen Isomorphismus von Hilbert- $C_0(\mathcal{G})$ -Moduln

$$\psi : p^*L^2(M) \longrightarrow L^2(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*(\Lambda^{\vee,*}(M)))$$

auf die Kompletterungen fortsetzen.

Beweis. Nach 4.1.10 ist die Abbildung $\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow M$ eine surjektive Submersion, deren Fasern $(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)_\gamma \cong M_{p(\gamma)}$ zusammenhängend sind. Bezeichnet $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die durch die vertikale Volumenform gegebene glatte Familie von Maßen für $\text{pr} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, so läßt sie sich zu einer glatten Familie von Maßen für die Abbildung $\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathcal{G}$ zurückziehen; man vergleiche auch die Bemerkung im Anschluß an 1.1.5. Nach 2.1.8 besitzt $\Gamma_c(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*(\Lambda^{\vee,*}(M)))$ daher die Struktur eines Prä-Hilbertmoduls, welcher sich zu einem Hilbert- $C_0(\mathcal{G})$ -Modul vervollständigen läßt.

Sind $s \in \Gamma_c(M, \Lambda^{\mathcal{V},*}(M))$ und $f \in C_c(\mathcal{G})$, so wird durch $\psi(s \otimes f)$ ein Schnitt ins Bündel $\pi_M^*(\Lambda^{\mathcal{V},*}(M))$ definiert, und der Träger von $\psi(s \otimes f)$ ist enthalten in der kompakten Menge

$$(\text{supp}(f) \times \text{supp}(s)) \cap \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M.$$

Ähnlich wie in 4.2.2 folgt aus dem Kriterium 1.2.7, daß $\psi(s \otimes f)$ ein stetiger Schnitt ist, und man rechnet direkt nach, daß die Abbildung ψ ein $C_0(\mathcal{G})$ -Modulhomomorphismus ist. Außerdem erhält ψ die inneren Produkte: Sind $s_1 \otimes f_1, s_2 \otimes f_2$ Elemente von $\Gamma_c(M, \Lambda^{\mathcal{V},*}(M)) \odot_{C_0(\mathbb{R})} C_c(\mathcal{G})$ und ist $\gamma \in \mathcal{G}$ mit $p(\gamma) = t$, so gilt

$$\begin{aligned} \langle \psi(s_1 \otimes f_1), \psi(s_2 \otimes f_2) \rangle(\gamma) &= \int_{x \in M_t} \langle f_1(\gamma) \cdot s_1(x), f_2(\gamma) \cdot s_2(x) \rangle_x \, d\mu_t(x) \\ &= \overline{f_1(\gamma)} \cdot \left(\int_{x \in M_t} \langle s_1(x), s_2(x) \rangle_x \, d\mu_t(x) \right) \cdot f_2(\gamma) \\ &= \langle s_1 \otimes f_1, s_2 \otimes f_2 \rangle(\gamma). \end{aligned}$$

Das Bild von ψ liegt dicht in $\Gamma_c(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*(\Lambda^{\mathcal{V},*}(M)))$. Somit setzt sich ψ zu einem isometrischen Isomorphismus fort. \square

Bemerkung 4.2.8. Identifiziert man die Fasern von $\Gamma_c(M, \Lambda^{\mathcal{V},*}(M)) \odot_{C_0(\mathbb{R})} C_c(\mathcal{G})$ bzw. $\Gamma_c(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*(\Lambda^{\mathcal{V},*}(M)))$ in $\gamma \in \mathcal{G}_t$ mit $\Gamma_c(M_t, \Lambda^*(M_t))$, so ist die induzierte Abbildung $\psi_\gamma : L^2(M_t) \longrightarrow L^2(M_t)$ der Fasern gerade die Identität.

Nach 4.1.6 kann das zurückgezogene Bündel $\pi_M^*(\Lambda^{\mathcal{V},*}(M))$ mit $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\mathcal{V},*}(M)$ identifiziert werden. Die \mathcal{G} -Wirkungen auf $\Lambda^{\mathcal{V},*}(M)$ und M definieren Diffeomorphismen

$$\tilde{\alpha} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\mathcal{V},*}(M) \longrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\mathcal{V},*}(M) \quad \text{und} \quad \alpha : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M,$$

so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\mathcal{V},*}(M) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\mathcal{V},*}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \end{array}$$

kommutiert. Wie im Fall der Algebren kann so eine \mathcal{G} -Wirkung auf $L^2(M)$ definiert werden:

Satz 4.2.9. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} U : \Gamma_c(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\nu,*}(M)) &\longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\nu,*}(M)); \\ F &\longmapsto \tilde{\alpha} \circ F \circ \alpha^{-1} \end{aligned}$$

setzt sich zu einem unitären Operator auf die Kompletzierung fort. Unter dem Isomorphismus ψ aus 4.2.7 definiert U eine Wirkung auf $L^2(M)$, welche mit der $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung verträglich ist, und die Linkswirkung von $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\nu}(M))$ auf $L^2(M)$ ist \mathcal{G} -äquivariant.

Beweis. Wie in 4.2.4 sieht man, daß U ein $C_0(\mathcal{G})$ -linearer Isomorphismus ist und die inverse Abbildung durch $U^{-1}(F) = \tilde{\alpha}^{-1} \circ F \circ \alpha$ gegeben ist.

Für $F, G \in \Gamma_c(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\nu,*}(M))$ und $(\gamma, x) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ schreibe man

$$U(F)(\gamma, x) = \gamma \cdot F(\gamma, \gamma^{-1} \cdot x) \quad \text{und} \quad U(G)(\gamma, x) = \gamma \cdot G(\gamma, \gamma^{-1} \cdot x).$$

Die Funktion $x \mapsto \langle U(F)(\gamma, x), U(G)(\gamma, x) \rangle_x$ ist ein Element von $C_c(M_{p(\gamma)})$. Bezeichnet $(\mu_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die durch die vertikale Volumenform gegebene glatte Familie von Maßen für $\text{pr} : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda^t)_{t \in \mathbb{R}}$ das glatte Haarsystem für \mathcal{G} , und ist N die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der fast zusammenhängenden Lie-Gruppe $G = \mathcal{G}_1$, so gilt nach 4.1.23 für $\gamma \in \mathcal{G}_t$

$$\begin{aligned} \langle U(F), U(G) \rangle(\gamma) &= \frac{1}{N} \int_{\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}_t} \langle U(F)(\gamma, \pi(\tilde{\gamma})), U(G)(\gamma, \pi(\tilde{\gamma})) \rangle_{\pi(\tilde{\gamma})} d\lambda^t(\tilde{\gamma}) \\ &= \frac{1}{N} \int_{\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}_t} \langle \gamma \cdot F(\gamma, \gamma^{-1} \cdot \pi(\tilde{\gamma})), \gamma \cdot G(\gamma, \gamma^{-1} \cdot \pi(\tilde{\gamma})) \rangle_{\pi(\tilde{\gamma})} d\lambda^t(\tilde{\gamma}) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} \frac{1}{N} \int_{\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}_t} \langle F(\gamma, \gamma^{-1} \cdot \pi(\tilde{\gamma})), G(\gamma, \gamma^{-1} \cdot \pi(\tilde{\gamma})) \rangle_{\gamma^{-1} \pi(\tilde{\gamma})} d\lambda^t(\tilde{\gamma}) \\ &\stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{1}{N} \int_{\tilde{\gamma} \in \mathcal{G}_t} \langle F(\gamma, \pi(\tilde{\gamma})), G(\gamma, \pi(\tilde{\gamma})) \rangle_{\pi(\tilde{\gamma})} d\lambda^t(\tilde{\gamma}) \\ &= \langle F, G \rangle(\gamma). \end{aligned}$$

Die Identität (\dagger) folgt aus der \mathcal{G} -Invarianz der Metrik auf $\Lambda^{\nu,*}(M)$, und (\ddagger) folgt aus der Linksinvarianz des Haarsystems sowie der Tatsache, daß $\gamma^{-1} \cdot \pi(\tilde{\gamma}) = \pi(\gamma^{-1} \cdot \tilde{\gamma})$ gilt.

Somit läßt sich U zu einem adjungierbaren Operator mit $U^* = U^{-1}$ auf die Kompletzierung fortsetzen. Unter dem Isomorphismus aus 4.2.7 definiert U ein unitäres Element in $\mathcal{L}(p^*L^2(M))$. Dieses erhält die Graduierung auf $L^2(M)$, da \mathcal{G} graduierungserhaltend auf $\Lambda^{\nu,*}(M)$ wirkt.

Für den Nachweis, daß durch U eine stetige Wirkung auf $L^2(M)$ definiert wird, bleibt die Bedingung $U_{\gamma \cdot \tilde{\gamma}} = U_{\gamma} \circ U_{\tilde{\gamma}}$ für alle $(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \mathcal{G}^{(2)}$ zu zeigen.

Ist $F \in \Gamma_c(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} \Lambda^{\mathcal{V},*}(M))$ und $\gamma \in \mathcal{G}_t$, so gilt für $x \in M_t$

$$U(F)(\gamma, x) = \gamma \cdot F(\gamma, \gamma^{-1} \cdot x).$$

Unter der Identifizierung der Faser $(p^*L^2(M))_{\gamma}$ mit $L^2(M_t)$ ist die von U induzierte Abbildung der Fasern gegeben durch

$$U_{\gamma} : L^2(M_t) \longrightarrow L^2(M_t); \quad f \mapsto [x \mapsto \gamma \cdot f(\gamma^{-1} \cdot x)].$$

Wie im Beweis von 4.2.4 folgt dann $U_{\gamma \cdot \tilde{\gamma}} = U_{\gamma} \circ U_{\tilde{\gamma}}$ für alle $(\gamma, \tilde{\gamma}) \in \mathcal{G}^{(2)}$. Somit definiert U eine stetige Wirkung von \mathcal{G} auf $L^2(M)$; die Wirkung auf den Fasern entspricht dabei wieder der von Kasparov betrachteten Wirkung der Gruppe \mathcal{G}_t .

Für die \mathcal{G} -Äquivarianz der Darstellung von $\chi : \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(M))$ ist zu zeigen, daß für alle $\gamma \in \mathcal{G}$ und $a \in \mathcal{A}$

$$U_{\gamma} \chi_{p(\gamma)}(a_{p(\gamma)}) U_{\gamma}^* = \chi_{p(\gamma)}(\alpha_{\gamma}(a_{p(\gamma)}))$$

gilt. Da die Konstruktion faserweise mit der von Kasparov übereinstimmt, folgt dies aus [Kas88, 4.2]. Man argumentiert wie folgt: Die Algebra der Schnitte ins vertikale Clifford-Bündel wird von vertikalen Kovektorfeldern erzeugt. Ist $\gamma \in \mathcal{G}_t$, $\omega_t \in L^2(M_t, \Lambda^* M_t)$ und $a_t \in \Gamma_0(M_t, \mathbb{C}\ell(M_t))$ ein Kovektorfeld, so gilt für den durch das Dachprodukt gegebenen Operator

$$\gamma \cdot (\lambda_{a_t}(\omega_t)) = \gamma \cdot (a_t \wedge \omega_t) = (\gamma \cdot a_t) \wedge (\gamma \cdot \omega_t) = \lambda_{\gamma \cdot a_t}(\gamma \cdot \omega_t).$$

Aufgrund der \mathcal{G} -Invarianz der Metrik gilt auch $\gamma \cdot (\lambda_{a_t}^*(\omega_t)) = \lambda_{\gamma \cdot a_t}^*(\gamma \cdot \omega_t)$, und da $\chi(a_t) = \lambda_{a_t} + \lambda_{a_t}^*$ ist, folgt die \mathcal{G} -Äquivarianz der Darstellung χ . \square

Bemerkung 4.2.10. Ist $\gamma \in \mathcal{G}_t$ und bezeichnet $L_{\gamma^{-1}} : M_t \longrightarrow M_t$, $x \mapsto \gamma^{-1} \cdot x$ den durch Linkstranslation gegebenen Diffeomorphismus, so entspricht $U_{\gamma}(\omega)$ für $\omega \in L^2(M_t)$ gerade der zurückgezogenen Differentialform $(L_{\gamma^{-1}})^*(\omega)$.

Nach 4.1.1 und 4.1.10 sind $\text{pr} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathcal{G}$ surjektive Submersionen. Sie definieren auf M und $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ die Struktur geblätterter Mannigfaltigkeiten.

Im ersten Fall gilt für das vertikale Tangentialbündel $\mathcal{F} = T^{\mathcal{V}}(M)$, und im zweiten Fall läßt sich $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \ker(T(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M) \longrightarrow T(\mathcal{G}))$ nach 4.1.10 mit $\pi_M^*(T^{\mathcal{V}}(M))$ identifizieren.

Im folgenden bezeichne $F := \frac{D}{\sqrt{1+D^2}} \in \mathcal{L}(L^2(M))$ den vertikalen Dirac-Operator aus 2.1.21 für M .

Lemma 4.2.11. *Unter dem Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \psi : p^*L^2(M) = L^2(M) \otimes_{C_0(\mathbb{R})} C_0(\mathcal{G}) &\longrightarrow L^2(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*(\Lambda^{\mathcal{V},*}(M))), \\ s \otimes f &\longmapsto [(\gamma, x) \mapsto f(\gamma) \cdot s(x)] \end{aligned}$$

aus 4.2.7 entspricht $F \otimes 1$ dem vertikalen Dirac-Operator für $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$. Die durch Einschränkung erhaltenen Operatoren $(F \otimes 1)_{\gamma} = F_{p(\gamma)}$ auf $L^2(M_{p(\gamma)})$ sind gerade die Operatoren aus Kasparovs Dirac-Element der Isotropiegruppe \mathcal{G}_t . Nach 2.2.10 sind alle diese Operatoren PDOs von Ordnung Null.

Beweis. Da $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \pi_M^*(T^{\mathcal{V}}(M))$ gilt, läßt sich auch das vertikale äußere Bündel $\Lambda^*(\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^* \otimes \mathbb{C})$ mit $\pi_M^*(\Lambda^{\mathcal{V},*}(M))$ identifizieren. Ist $d_M^{\mathcal{V}}$ die vertikale deRham-Ableitung und \star_M der vertikale Hodge- \star -Operator von M , so ist nach Konstruktion des vertikalen Dirac-Operators nur zu zeigen, daß unter dem Isomorphismus ψ die Operatoren $d_M^{\mathcal{V}} \otimes 1$ und $\star_M \otimes 1$ der vertikalen deRham-Ableitung bzw. dem vertikalen Hodge- \star -Operator auf $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ entsprechen.

Es sei $n := \text{rk}(T^{\mathcal{V}}(M))$. Ist die vertikale Orientierung auf M gegeben durch die vertikale Volumenform $\text{vol}_M : M \longrightarrow \Lambda^n(T^{\mathcal{V},*}(M))$, so ist durch

$$\text{vol}_{\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M} : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \longrightarrow \pi_M^*(\Lambda^n(T^{\mathcal{V},*}(M))) \cong \Lambda^n \mathcal{F}_{\mathcal{G}}^*, \quad (\gamma, x) \mapsto \text{vol}_M(x)$$

eine vertikale Volumenform auf $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ gegeben. Diese definiert auf den Fasern $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}})_{(\gamma,x)} = T^{\mathcal{V}}(M)_x$ dieselbe Orientierung wie vol_M . Der vertikale Hodge- \star -Operator hängt jedoch nur von der Orientierung auf den Fasern ab. Dies zeigt, daß unter dem Isomorphismus ψ der Operator $\star_M \otimes 1$ dem vertikalen Hodge- \star -Operator von $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ entspricht.

Die vertikale deRham-Ableitung ist lokal auf Koordinatenumgebungen definiert. Jeder Punkt $(\gamma_0, x_0) \in \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ besitzt eine offene Umgebung der Form $U = U_{\mathcal{G}} \times U_M \times I$ mit $U_{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G}_t$, $U_M \subseteq M_t$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ für $t = p(\gamma_0) = \text{pr}(x_0)$. In lokalen Koordinaten sieht man sofort, daß

$$\psi((d_M^{\mathcal{V}} \otimes 1)(s \otimes f)) = d_{\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M}^{\mathcal{V}}(\psi(s \otimes f))$$

für alle $s \in \Gamma_c^{\infty}(M, \Lambda^{\mathcal{V},*}(M) \otimes \mathbb{C})$ und $f \in C_0^{\infty}(\mathcal{G})$ gilt, und die Elemente der Form $\psi(s \otimes f)$ erzeugen einen dichten Unterraum von $L^2(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*(\Lambda^{\mathcal{V},*}(M)))$. Der Operator $d_M^{\mathcal{V}} \otimes 1$ entspricht also der vertikalen deRham-Ableitung von $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$, und zusammen mit obigen Überlegungen für den vertikalen Hodge- \star -Operator folgt, daß der Operator $F \otimes 1$ sich mit dem vertikalen Dirac-Operator auf $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ identifizieren läßt.

Analoge Überlegungen zeigen, daß die Einschränkung der Operatoren F bzw. $F \otimes 1$ den Operatoren aus Kasparovs Dirac-Element der jeweiligen Isotropiegruppe entsprechen. Faßt man die Fasern M_t von M und $(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)_{\gamma} \cong M_{p(\gamma)}$ von $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ als

trivial geblätterte Mannigfaltigkeiten auf, so folgt aus 2.2.10, daß die Operatoren F , $F \otimes 1$ und alle durch Einschränkung erhaltenen Operatoren der Fasern PDOs von Ordnung Null sind. \square

Vermöge der Abbildung

$$u_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \xrightarrow{\cong} \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M^0 \hookrightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \quad \gamma \mapsto (\gamma, p(\gamma))$$

läßt sich \mathcal{G} mit einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ identifizieren, und es gilt $\pi_{\mathcal{G}} \circ u_{\mathcal{G}} = \text{id}$.

Bezeichnet $E = \Lambda^* \mathcal{F}^* \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{\mathcal{V},*}(M)$ das komplexe vertikale äußere Bündel von M , so ist die Einschränkung $E|_{M^0}$ trivialisierbar, da $M^0 \cong \mathbb{R}$ zusammenziehbar ist. Die Einschränkung $\pi_M^* E|_{u_{\mathcal{G}}(\mathcal{G})}$ läßt sich mit dem zurückgezogenen Bündel $E|_{M^0}$ identifizieren und ist somit ebenfalls trivialisierbar.

Unter Verwendung von 2.1.10 sieht man, daß die volle C^* -Algebra der Blätterung mit Werten in den Endomorphismen des vertikalen äußeren Bündels isomorph zur Algebra der kompakten Operatoren auf dem entsprechenden L^2 -Hilbertmodul ist, d.h. es gilt sowohl

$$C^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \cong \mathcal{K}(L^2(M))$$

als auch

$$C^*(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \mathcal{F}_{\mathcal{G}}; \text{End}(\pi_M^* E)) \cong \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^* E)).$$

Nach 2.2.9 erhält man für die geblätterte Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_M(L^2(M, E)) \longrightarrow \Psi_0^*(M, \mathcal{F}; \text{End}(E)) \xrightarrow{\sigma} \Sigma_M(M, \mathcal{F}^*; \mathcal{L}(E)) \longrightarrow 0.$$

Genauso erhält man für die geblätterte Mannigfaltigkeit $(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \mathcal{F}_{\mathcal{G}})$ und die Fasern von M bzw. $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ (welche als trivial geblätterte Mannigfaltigkeiten aufgefaßt werden können) die entsprechenden kurzen exakten Sequenzen.

Es folgt, daß ein PDO der Ordnung Null auf M genau dann (faserweise) kompakt (bis auf Multiplikation mit einer im Unendlichen verschwindenden Funktion) ist, falls sein Symbol (faserweise) Null ist. Das Symbol eines PDO von Ordnung Null auf M ist jedoch genau dann Null, wenn die Einschränkung auf jede Faser M_t Null ist; mit dem Symbol eines PDO von Ordnung Null ist dabei das Bild unter der Abbildung σ gemeint.

Somit ist ein PDO von Ordnung Null auf M kompakt (bis auf Multiplikation mit einer im Unendlichen verschwindenden Funktion), wenn die Einschränkung des Operators auf jede Faser kompakt (bis auf Multiplikation mit einer im Unendlichen verschwindenden Funktion) ist. Die gleichen Überlegungen gelten für PDOs der Ordnung Null auf $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$.

Satz 4.2.12. *Das Tripel $\mathcal{E} := (L^2(M), \chi, F)$ definiert einen \mathcal{G} -äquivalenten Kasparov- $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)), C_0(\mathbb{R})$ -Zykel und somit ein Element in der \mathcal{G} -äquivalenten Kasparov-Gruppe $\mathrm{KK}^\mathcal{G}(\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)), C_0(\mathbb{R}))$.*

Beweis. Aufgrund der vorausgehenden Resultate dieses Abschnitts ist klar, daß $L^2(M)$ ein \mathcal{G} -äquivarianter Hilbert- $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)), C_0(\mathbb{R})$ -Bimodul ist.

Die vertikale deRham-Ableitung und der formal adjungierte Operator sind homogen vom Grad 1 auf glatten vertikalen Differentialformen mit kompaktem Träger. Somit ist auch $F = \frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$ ein homogener Operator vom Grad 1. Nach 1.4.1 bleiben noch die folgenden Bedingungen zu zeigen:

Für alle $a \in \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ und $a' \in p^*\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ gilt

- (i) $a(F - F^*) \in \mathcal{K}(L^2(M))$,
- (ii) $a(F^2 - 1) \in \mathcal{K}(L^2(M))$,
- (iii) $[F, a] \in \mathcal{K}(L^2(M))$ und
- (iv) $a'(U(F \otimes 1)U^* - (F \otimes 1)) \in \mathcal{K}(p^*(L^2(M)))$.

Hierbei bezeichnet U die \mathcal{G} -Wirkung auf $L^2(M)$ aus 4.2.9. Im vorliegenden Fall eines Gruppenbündels vereinfacht sich Bedingung (iv), da die Source- und Range-Abbildung übereinstimmen. Desweiteren wurde der Isomorphismus 1.2.14 von $p^*(\mathcal{K}(L^2(M)))$ und $\mathcal{K}(p^*(L^2(M)))$ genutzt.

Da der Operator F selbstadjungiert ist, ergibt sich Bedingung (i) sofort. Die Elemente aus $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ wirken auf $L^2(M)$ durch Clifford-Multiplikation wie in 2.1.11; diese ist gegeben durch das Dachprodukt und Kontraktion mit vertikalen Differentialformen. Die durch Clifford-Multiplikation gegebenen Operatoren sind also Differentialoperatoren der Ordnung 0.

Als solche hängt ihr Symbol nur von den Punkten $x \in M$ und nicht von den Elementen der Kotangentiale Räume T_x^*M ab: Die Symbole der Operatoren aus (i) bis (iii) hängen somit nach 2.1.20 nur von den Elementen des vertikalen Kotangentialebündels $T^{\mathcal{V},*}M$ ab, und ihre Werte stimmen mit den Werten der Symbole überein, die man durch Einschränkung auf die Fasern erhält.

Nach [Kas88, 4.2] sind die Einschränkungen der Operatoren aus (ii) und (iii) kompakte Operatoren auf der jeweiligen Faser von $L^2(M)$, und diese haben nach 2.2.9 Symbol Null. Nach den oben angestellten Überlegungen ist dann auch das Symbol der Operatoren $a(F^2 - 1)$ und $[F, a]$ identisch Null, und somit folgt aus 2.2.9, daß sie Elemente von $\mathcal{K}_M(L^2(M, E))$ sind.

Für $\varphi \in C_0(M)$ und $a \in \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ gilt daher $\varphi \cdot a \cdot (F^2 - 1) \in \mathcal{K}(L^2(M))$. Da nach Cohens Faktorisierungssatz $C_0(M) \cdot \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M)) = \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^\mathcal{V}(M))$ gilt, folgt Bedingung (ii).

Für Aussage (iii) kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $a = a_1 \cdot a_2$ ist, wobei $a_i \in \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ homogene Elemente sind. In diesem Fall gilt für den Kommutator

$$[F, a] = [F, a_1]a_2 + (-1)^{\partial F \cdot \partial a_1} a_1[F, a_2].$$

Benutzt man wieder, daß $C_0(M) \cdot \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ dicht in $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ liegt, so erkennt man, daß die beiden Summanden kompakte Operatoren sind, und somit auch $[F, a]$ in $\mathcal{K}(L^2(M))$ liegt.

Für den Nachweis von (iv) sei zunächst an folgende Resultate erinnert: Der zurückgezogene Hilbertmodul $p^*L^2(M)$ läßt sich mit $L^2(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*(E))$ identifizieren; dabei bezeichnet E wieder das vertikale (komplexifizierte) äußere Bündel auf M und $\pi_M : \mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M \rightarrow M$ die Projektion auf die zweite Komponente. Unter dieser Identifikation entspricht $F \otimes 1$ nach 4.2.11 dem vertikalen Dirac-Operator auf $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$, welcher ein PDO von Ordnung Null ist.

Um nun ähnlich wie für Bedingung (ii) und (iii) argumentieren zu können, ist zu zeigen, daß auch die Operatoren U und U^* aus 4.2.9 PDOs von Ordnung Null sind, deren Symbol nur von den vertikalen Kotangentialvektoren auf M und der Einschränkung der Operatoren auf die \mathcal{G} -Fasern von $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ abhängt.

Die unitären Elemente aus 4.2.9 werden definiert durch die \mathcal{G} -Wirkung auf der Mannigfaltigkeit M und dem Vektorbündel E ; letztere ist gegeben durch lineare Isomorphismen der Fasern von E . Somit sind U und U^* Differentialoperatoren der Ordnung Null, und als solche ist ihr Symbol unabhängig von den Kotangentialvektoren von $T^*(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M)$.

Es sei zunächst angenommen, daß $a' = a \odot \varphi$ für $a \in \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))$ und $\varphi \in C_0(\mathcal{G})$ gilt. Identifiziert man die Faser von $L^2(\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M, \pi_M^*E)$ in $\gamma \in \mathcal{G}_t$ mit $L^2(M_t)$, so ist die Einschränkung des Operators aus (iv) gegeben durch

$$a'_\gamma \cdot (U_\gamma F_t U_\gamma^* - F_t) = \varphi(\gamma) \cdot a|_{L^2(M_t)} \cdot (\gamma F_t \gamma^{-1} - F_t).$$

Nach [Kas88, 4.2] sind diese Operatoren kompakt; sie haben somit Symbol Null. Dann ist auch das Symbol von $a'(U(F \otimes 1)U^* - (F \otimes 1))$ identisch Null, und aus der kurzen exakten Sequenz 2.2.9 für die geblätterte Mannigfaltigkeit $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ folgt, daß der Operator $a'(U(F \otimes 1)U^* - (F \otimes 1))$ kompakt bis auf Multiplikation mit einer im Unendlichen verschwindenden Funktion auf $\mathcal{G} \times_{\mathbb{R}} M$ ist.

Da die Elemente der Form $a \odot \varphi$ einen dichten Unterraum von $p^*L^2(M)$ erzeugen, gilt dies für alle Elemente $a' \in p^*L^2(M)$. Eine weitere Anwendung von Cohens Faktorisierungssatz zeigt dann, daß auch Bedingung (iv) erfüllt ist. Somit sind die definierenden Eigenschaften für einen Kasparov-Zykel gezeigt. \square

Bemerkung 4.2.13. Unter Verwendung von 2.1.22 kann man auch direkt nachrechnen, daß die Symbole der Operatoren in (i) - (iv) (faserweise) Null sind. Dies liefert eine alternative Möglichkeit, die Operator-Bedingungen von Kasparovs Dirac-Element aus [Kas88, 4.2] nachzuweisen.

Nach 2.1.22 gilt für die (Haupt)Symbole von D_t bzw. D_t^2

$$\sigma(x, \xi; D_t) = \lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^* \quad \text{bzw.} \quad \sigma(x, \xi; D_t^2) = \|\xi\|^2;$$

dabei bezeichnet $\lambda_{i\xi}$ wieder den durch das Dachprodukt gegebenen Operator auf dem äußeren Bündel. Bis auf Terme von Ordnung kleiner als Null ist das Symbol des klassischen PDO F_t dann durch

$$\sigma(x, \xi; F_t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\xi\|^2}} \cdot (\lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^*)$$

gegeben; man vergleiche auch 2.2.12.

Als Algebra wird $\Gamma_0(M_t, \mathcal{C}\ell(M_t))$ erzeugt von $C_0(M_t)$ und Kovektorfeldern, welche im Unendlichen verschwinden. Es genügt daher für Erzeuger $b \in C_0(M_t)$ und $a \in \Gamma_0(M_t, T^*(M_t) \otimes \mathbb{C})$ zu zeigen, daß das Symbol der Operatoren (i) - (iv) faserweise Null ist.

Das Kovektorfeld a wirkt auf den Differentialformen punktweise durch Clifford-Multiplikation. Aus 2.1.6 folgt somit, daß das (Haupt)Symbol in einem Punkt $\xi \in T_x^*(M_t)$ durch $\sigma(x, \xi; a) = \lambda_{a(x)} + \lambda_{(a(x))^*}^*$ gegeben ist.

Da F_t selbstadjungiert ist, gilt $\sigma(a(F_t - F_t^*)) = 0$ und $\sigma(b(F_t - F_t^*)) = 0$. Nach 2.1.22 gilt (bis auf Symbole von Ordnung kleiner als Null)

$$\sigma(x, \xi; F_t^2 - 1) = \frac{\|\xi\|^2}{1 + \|\xi\|^2} - 1 = -\frac{1}{1 + \|\xi\|^2}.$$

Somit ist $\sigma(a(F_t^2 - 1))$ durch eine stetige Funktion auf dem Totalraum des Kotangentialsbündels $T^*(M_t)$ mit Werten in $\mathcal{L}(E|_{M_t})$ gegeben, welche im Unendlichen verschwindet, d.h. durch ein Element von $C_{M_t}(T^*M_t; \mathcal{L}(E|_{M_t}))$. Nach 2.2.1 ist dann $\sigma(a(F_t^2 - 1)) = 0$ in $\Sigma_{M_t}(M_t, T^*M_t; \mathcal{L}(E|_{M_t}))$; ebenso gilt $\sigma(b(F_t^2 - 1)) = 0$.

Für $\xi \in T_x^*(M_t)$ gilt nach 2.1.7 für den graduierten Kommutator

$$[(\lambda_{i\xi} - \lambda_{(i\xi)^*}^*), (\lambda_{a(x)} + \lambda_{(a(x))^*}^*)] = 0.$$

Somit ist $[D_t, a]$ ein PDO der Ordnung Null; man vergleiche auch 2.2.2. Der Operator $(1 + D_t^2)^{-1/2}$ ist ein PDO von Ordnung -1. Sein Symbol ist gegeben durch die skalare Funktion $\xi \mapsto (1 + \|\xi\|^2)^{-1/2}$; diese kommutiert mit $\sigma(a)$. Daher ist $[a, (1 + D_t^2)^{-1/2}]$ ein PDO von Ordnung -2, und es folgt $\sigma([F_t, a]) = 0$, da

$$[F_t, a] = [D_t, a] \cdot (1 + D_t^2)^{-1/2} + D_t \cdot [a, (1 + D_t^2)^{-1/2}]$$

ein PDO von Ordnung -1 ist. Analog zeigt man $\sigma([F_t, b]) = 0$.

Schließlich ist der Operator F_t invariant unter der Wirkung von \mathcal{G}_t : Nach 4.2.10 ist die Wirkung von $\gamma \in \mathcal{G}_t$ auf glatten Differentialformen gegeben durch Zurückziehen via der Linkstranslation $L_{\gamma^{-1}}$. Aus der Theorie glatter Mannigfaltigkeiten ist bekannt, daß die deRham-Ableitung mit dem Pullback via glatter Abbildungen vertauscht, d.h. es gilt $d_t U_\gamma = U_\gamma d_t$; dies zeigt man wie im Beweis von 2.1.16. Da \mathcal{G}_t unitär auf $L^2(M_t)$ wirkt, kommutiert auch der adjungierte Operator d_t^* mit U_γ . Hieraus folgt dann $U_\gamma F_t U_{\gamma^{-1}} - F_t = 0$, und somit haben auch die Operatoren aus (iv) faserweise Symbol Null.

Aus der exakten Sequenz 2.2.9 für die Fasern M_t folgt mit Cohens Faktorisierungssatz, daß die Operatoren aus (i) - (iv) faserweise kompakt sind. Somit kann man auch auf diese Weise zeigen, daß der Operator aus Kasparovs Dirac-Element [Kas88, 4.2] die Bedingungen für ein KK-Element erfüllt.

Da \mathcal{G} ein Gruppenbündel ist, ist jede Teilmenge der Basis $\mathcal{G}^{(0)} = \mathbb{R}$ invariant. Betrachtet man speziell die abgeschlossene Teilmenge $[0, 1]$, so ist die Einschränkung $\mathcal{G}_{[0,1]}$ ein lokal-kompakter Gruppoid. Durch Einschränkung des Haarsystems von \mathcal{G} erhält man ein stetiges Haarsystem auf $\mathcal{G}_{[0,1]}$, und die kanonische Abbildung $\phi : \mathcal{G}_{[0,1]} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist ein strikter Morphismus lokal-kompakter Gruppoide.

Bezeichnet $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die kanonische Einbettung, so induziert der strikte Morphismus (ϕ, φ) nach 1.4.3 eine Abbildung

$$\phi^* : \text{KK}^{\mathcal{G}}(\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)), C_0(\mathbb{R})) \longrightarrow \text{KK}^{\mathcal{G}_{[0,1]}}(\varphi^*(\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))), C[0, 1]).$$

Definition 4.2.14. Ist $[\mathcal{E}] := [(L^2(M), \chi, F)] \in \text{KK}^{\mathcal{G}}(\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)), C_0(\mathbb{R}))$ das Element aus 4.2.12, so heißt

$$[D_{\mathcal{G}}] := \phi^*([\mathcal{E}]) \in \text{KK}^{\mathcal{G}_{[0,1]}}(\varphi^*(\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))), C[0, 1])$$

das Dirac-Element der Deformation.

Faserweise stimmt das Dirac-Element des Deformationsgruppoiden mit den von Kasparov in [Kas88, 4.2] definierten Dirac-Elementen der Isotropiegruppen überein.

4.3 Assembly-Abbildung via Deformation

Nachdem das Dirac-Element der Deformation im vorigen Abschnitt konstruiert wurde, kann nun gezeigt werden, daß für eine fast zusammenhängende Lie-Gruppe G die Assembly-Abbildung (mit beliebigen Koeffizienten) mit der Deformationsabbildung 3.4.3 identifiziert werden kann. Dabei wird ausgenutzt, daß mittelbare Gruppen – also insbesondere auch die Nullfaser $V \rtimes K$ des Deformationsgruppoiden – die Baum-Connes-Vermutung erfüllen.

Wie am Ende von Anhang A beschrieben, wird die topologische K-Theorie von G mit Koeffizienten in der G -Algebra B mit $K_*(B \rtimes (V \rtimes K))$ identifiziert und die Assembly-Abbildung durch das Kasparov-Produkt mit dem modifizierten Dirac-Element von G beschrieben; man vgl. A.9.

Auch für das Dirac-Element der Deformation aus 4.2.14 müssen die entsprechenden Modifikationen durchgeführt werden. Insbesondere wird hier die Morita-Äquivalenz aus 4.2.6 genutzt.

Zunächst sei noch einmal an Kasparovs Definition der $\mathcal{R}KK$ -Gruppen erinnert:

Definition 4.3.1. Es seien \mathcal{A} und \mathcal{B} $C_0(X)$ -Algebren. Ähnlich wie $KK(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ist die Gruppe $\mathcal{R}KK(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ definiert als Menge der Äquivalenzklassen (bezüglich Homotopie) von Kasparov-Zykeln $(E, T) \in \mathbb{E}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mit der zusätzlichen Bedingung, daß für alle $f \in C_0(X)$, $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ und $e \in E$ die Gleichung $(fa)eb = ae(bf)$ in E erfüllt ist.

Man hat einen natürlichen Vergiß-Funktor

$$\mathcal{F} : \mathcal{R}KK(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow KK(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

und auch in der $\mathcal{R}KK$ -Theorie ist das Kasparov-Produkt definiert.

Proposition 4.3.2. *Ist \mathcal{D} eine σ -unitale $C_0(X)$ -Algebra, so existiert ein natürlicher Homomorphismus*

$$\sigma_{X, \mathcal{D}} : \mathcal{R}KK(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{R}KK(X; \mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D}),$$

welcher mit dem Kasparov-Produkt verträglich ist.

Beweis. Der Beweis findet sich in [Kas88, 2.19 und 2.21]. Ist $\eta = [E, \alpha, T]$ ein Element in $\mathcal{R}KK(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$, so gilt

$$\sigma_{X, \mathcal{D}}(\eta) = [E \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D}), \tilde{\alpha}, T \otimes 1] \in \mathcal{R}KK(X; \mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D}),$$

wobei die Wirkung $\tilde{\alpha}$ gegeben ist durch

$$(a \otimes d)(e \otimes b \otimes d_1) = (-1)^{\partial d(\partial e + \partial b)} ae \otimes b \otimes dd_1$$

für $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $e \in E$ und $d, d_1 \in \mathcal{D}$. □

Als Folgerung erhält man:

Korollar 4.3.3. *Es sei $\mathcal{D} = C_0(X) \otimes D$ eine triviale $C_0(X)$ -Algebra. Unter den Isomorphismen $\mathcal{A} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D} \cong \mathcal{A} \otimes D$ bzw. $\mathcal{B} \otimes_{C_0(X)} \mathcal{D} \cong \mathcal{B} \otimes D$ definieren $\sigma_{X, \mathcal{D}}(\eta)$ und $\sigma_D(\eta)$ für $\eta \in \mathcal{R}KK(X; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ dasselbe Element in $KK(\mathcal{A} \otimes D, \mathcal{B} \otimes D)$.*

Definition 4.3.4. Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} $C_0(X)$ -Algebren, so bezeichne für eine stetige Abbildung $p : Y \longrightarrow X$

$$p^* : \mathcal{R}KK(X; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sigma_{X, C_0(Y)}} \mathcal{R}KK(X; p^*\mathcal{A}, p^*\mathcal{B}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{K}K(p^*\mathcal{A}, p^*\mathcal{B})$$

den durch $p^*(\xi) := \mathcal{F}(\sigma_{X, C_0(Y)}(\xi))$ definierten Homomorphismus abelscher Gruppen. Hierbei ist \mathcal{F} wieder der Vergiß-Funktor.

Speziell wird die folgende Situation betrachtet werden:

Es sei $X = [0, 1]$, $Y = \{t\} \subseteq X$, und es bezeichne $\iota : Y \longrightarrow X$ die kanonische Einbettung. Für eine $C[0, 1]$ -Algebra \mathcal{B} gilt dann $\iota^*\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_t$, und ist E ein Hilbert- \mathcal{B} -Modul, so gilt analog $\iota^*E \cong E_t$. Die Abbildung

$$\iota^* : \mathcal{R}KK([0, 1]; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{K}K(\mathcal{A}_t, \mathcal{B}_t)$$

aus 4.3.4 wird in dieser Situation auch als Einschränkungshomomorphismus auf die Faser in $t \in [0, 1]$ bezeichnet.

Mithilfe von folgendem Lemma wird gezeigt werden, daß die Deformations- und die Baum-Connes-Assembly-Abbildung identifiziert werden können; die Idee, diese Methode zu nutzen, geht auf eine Anregung von G. Skandalis zurück.

Lemma 4.3.5. *Es seien \mathcal{A}, \mathcal{B} $C[0, 1]$ -Algebren, $t \in [0, 1]$, und es sei ein Element $\eta \in \mathcal{R}KK([0, 1]; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ gegeben. Bezeichnet $\iota : \{t\} \longrightarrow [0, 1]$ die kanonische Einbettung, so kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} K_*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\otimes_{\mathcal{A}} \eta} & K_*(\mathcal{B}) \\ \downarrow q_{t,*} & & \downarrow r_{t,*} \\ K_*(\mathcal{A}_t) & \xrightarrow{\otimes_{\iota^*\mathcal{A}} \iota^*(\eta)} & K_*(\mathcal{B}_t). \end{array}$$

Beweis. Die Quotientenabbildung $q_t : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_t$ ist unter der Identifikation von \mathcal{A}_t mit $\iota^*\mathcal{A}$ durch $a \mapsto a \otimes 1$ gegeben; gleiches gilt für $r_t : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_t$. Es genügt zu zeigen, daß

$$q_t^*(\iota^*(\eta)) = r_{t,*}(\eta) \in \mathcal{K}K(\mathcal{A}, \iota^*\mathcal{B})$$

gilt. Aufgrund der funktoriellen Eigenschaften des Kasparov-Produkts (man vgl. etwa [Bla98, 18.7.1]) folgt dann nämlich für $\xi \in \mathcal{K}K(D, \mathcal{A})$

$$\begin{aligned} q_{t,*}(\xi) \otimes_{\mathcal{A}_t} \iota^*(\eta) &= \xi \otimes_{\mathcal{A}} q_t^*(\iota^*(\eta)) \\ &= \xi \otimes_{\mathcal{A}} r_{t,*}(\eta) \\ &= r_{t,*}(\xi \otimes_{\mathcal{A}} \eta), \end{aligned}$$

d.h. für jede separable C^* -Algebra D kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{KK}(D, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\otimes^{\mathcal{A}} \eta} & \mathrm{KK}(D, \mathcal{B}) \\ \downarrow q_{t,*} & & \downarrow r_{t,*} \\ \mathrm{KK}(D, \mathcal{A}_t) & \xrightarrow{\otimes^{\iota^* \mathcal{A} \iota^*}(\eta)} & \mathrm{KK}(D, \mathcal{B}_t). \end{array}$$

Wählt man $D = \mathbb{C}$, so erhält man die Aussage des Lemmas für K_0 , und für $D = C_0(\mathbb{R})$ folgt die Aussage für K_1 .

Wird η von dem Zykel $[E, \phi, T] \in \mathcal{R}\mathrm{KK}([0, 1]; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ repräsentiert, so gilt

$$\iota^*(\eta) = [E \otimes_{\mathcal{B}} \iota^* \mathcal{B}, \tilde{\phi}, T \otimes 1] \quad \text{und somit} \quad q_t^*(\iota^*(\eta)) = [E \otimes_{\mathcal{B}} \iota^* \mathcal{B}, \tilde{\phi} \circ q_t, T \otimes 1].$$

Andererseits gilt

$$r_{t,*}(\eta) = [E \otimes_{\mathcal{B}} \iota^* \mathcal{B}, \phi \otimes 1, T \otimes 1].$$

Die Linkswirkung von \mathcal{B} auf $\iota^* \mathcal{B}$ ist dabei jeweils durch den Quotientenhomomorphismus $r_t : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_t \cong \iota^* \mathcal{B}$ gegeben.

Für die Identität $q_t^*(\iota^*(\eta)) = r_{t,*}(\eta)$ ist also nur zu zeigen, daß die Wirkungen von \mathcal{A} übereinstimmen. Nach Definition der Wirkung $\tilde{\phi}$ aus 4.3.2 gilt für $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$, $e \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\tilde{\phi}(a \otimes \lambda)(e \otimes b \otimes \mu) = \phi(a)(e) \otimes b \otimes \lambda \mu$$

und somit

$$(\tilde{\phi} \circ q_t)(a)(e \otimes b \otimes \mu) = \tilde{\phi}(a \otimes 1)(e \otimes b \otimes \mu) = \phi(a)(e) \otimes b \otimes \mu = (\phi \otimes 1)(a)(e \otimes b \otimes \mu).$$

Dies zeigt $\tilde{\phi} \circ q_t = \phi \otimes 1$, was den Beweis abschließt. \square

Es sei nun B eine G -Algebra und $\mathcal{B} := C[0, 1] \otimes B$ die $\mathcal{G}_{[0,1]}$ -Algebra aus 3.4.1. Man setze $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))_{[0,1]} := \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M)) \otimes_{C_0(\mathbb{R})} C[0, 1]$; insbesondere gilt dann $\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))_{[0,1]} \otimes_{C[0,1]} \mathcal{B} \cong \Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))_{[0,1]} \otimes B$. Nach 1.4.2 und 1.4.5 ist klar:

Proposition 4.3.6. *Ist $[D_{\mathcal{G}}]$ das Dirac-Element der Deformation für (G, K) aus 4.2.14, so definiert*

$$[D_{\mathcal{G}, B}] := j_{\mathcal{G}_{[0,1]}, r}(\tau_{\mathcal{B}}([D_{\mathcal{G}}]))$$

ein Element von $\mathcal{R}\mathrm{KK}([0, 1]; (\Gamma_0(M, \mathbb{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))_{[0,1]} \otimes B) \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]}, \mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})$. Es wird als Dirac-Element der Deformation für die Koeffizienten-Algebra B bezeichnet.

Unter den Isomorphismen 1.3.5 verschränkter Produkte von Gruppenbündeln entspricht die Einschränkung von $[D_{\mathcal{G}, B}]$ auf eine Faser in $t \in [0, 1]$ dem reduzierten Descent von Kasparovs Dirac-Element der Gruppe \mathcal{G}_t .

Ähnlich wie im Anhang A.9 kann nun das Dirac-Element $[D_{\mathcal{G},B}]$ folgendermaßen modifiziert werden: Es bezeichne

- $\tilde{\delta} = \sigma_{C[0,1]}(\delta) \in \text{KK}^{K \times [0,1]}(C[0,1] \otimes C_0(V), C[0,1] \otimes \mathcal{C}\ell(V^*))$ die $\text{KK}^{K \times [0,1]}$ -Äquivalenz, welche aus der KK^K -Äquivalenz $\delta \in \text{KK}^K(C_0(V), \mathcal{C}\ell(V^*))$ aus Kasparovs Bott-Periodizitätssatz [Kas81, §5, Thm.7] gewonnen wird,
- $[\mathfrak{X}_{\mathcal{B}}]$ die durch 4.2.6 gegebene Morita-Äquivalenz der verschränkten Produkte $C[0,1] \otimes ((\mathcal{C}\ell(V^*) \otimes B) \rtimes K)$ und $(\Gamma_0(M, \mathcal{C}\ell^{\mathcal{V}}(M))_{[0,1]} \otimes B) \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]}$,
- $\Psi : C[0,1] \otimes (B \rtimes (V \rtimes K)) \longrightarrow C[0,1] \otimes ((B \otimes C_0(V)) \rtimes K)$ den Isomorphismus, welcher durch den Isomorphismus $B \rtimes (V \rtimes K) \longrightarrow (B \otimes C^*(V)) \rtimes K$ für semidirekte Produkte von Gruppen und den K -äquivarianten Isomorphismus $B \otimes C^*(V) \cong B \otimes C_0(V)$ gegeben ist. Unter der Identifikation aus 3.4.4 läßt sich Ψ als Isomorphismus vom verschränkten Produkt des trivialen Gruppenbündels $\mathcal{B} \rtimes ((V \rtimes K) \times [0,1])$ auf $C[0,1] \otimes ((B \otimes C_0(V)) \rtimes K)$ auffassen.

Unter Verwendung des Kasparov-Produkts in der $\mathcal{R}\text{KK}$ -Theorie setze man dann

$$\begin{aligned} [\tilde{D}] := [\tilde{D}_{\mathcal{G},B}] &:= [\Psi] \otimes j_{K \times [0,1]}(\tau_{\mathcal{B}}(\tilde{\delta})) \otimes [\mathfrak{X}_{\mathcal{B}}] \otimes [D_{\mathcal{G},B}] \\ &\in \mathcal{R}\text{KK}([0,1]; C[0,1] \otimes (B \rtimes (V \rtimes K)), \mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Der Einschränkungshomomorphismus ι_t^* aus 4.3.4 für $\iota_t : \{t\} \hookrightarrow [0,1]$ ist verträglich mit dem Kasparov-Produkt. Die $\mathcal{R}\text{KK}$ -Elemente $[\Psi]$ und $j_{K \times [0,1]}(\tau_{\mathcal{B}}(\tilde{\delta}))$ sind trivial über $[0,1]$; insbesondere gilt

$$\iota_0^*(j_{K \times [0,1]}(\tau_{\mathcal{B}}(\tilde{\delta}))) = \iota_1^*(j_{K \times [0,1]}(\tau_{\mathcal{B}}(\tilde{\delta}))) = j_K(\sigma_B(\delta))$$

in $\text{KK}((B \otimes C_0(V)) \rtimes K, (B \otimes \mathcal{C}\ell(V^*)) \rtimes K)$ und

$$\iota_0^*([\Psi]) = \iota_1^*([\Psi]) = [\psi] \in \text{KK}(B \rtimes (V \rtimes K), (B \otimes C_0(V)) \rtimes K),$$

wobei ψ den Isomorphismus $B \rtimes (V \rtimes K) \xrightarrow{\cong} (B \otimes C_0(V)) \rtimes K$ bezeichnet.

Unter den Isomorphismen aus 1.3.5 entsprechen die durch Einschränkung erhaltenen Elemente $\iota_t^*([\mathfrak{X}_{\mathcal{B}}])$ gerade den Morita-Äquivalenzen aus Greens Imprimitivitätssatz; man vergleiche auch 1.3.19 und 4.2.6. Insbesondere sind die durch das Kasparov-Produkt mit diesen Elementen definierten Abbildungen Isomorphismen in der KK -Theorie.

Bezeichnet $D_{V \rtimes K}$ Kasparovs Dirac-Element der mittelbaren Gruppe $V \rtimes K$, so entspricht das Element $\iota_0^*([D_{\mathcal{G},B}])$ gerade $j_{V \rtimes K}(\sigma_B(D_{V \rtimes K}))$, und das Kasparov-Produkt mit letzterem ist ein Isomorphismus in der KK -Theorie, da mittelbare Gruppen die Baum-Connes-Vermutung für beliebige Koeffizienten erfüllen. Dies

folgt aus der in Anhang A beschriebenen Dirac-Dual-Dirac-Methode, da für mittelbare Gruppen das Dirac- und das Dual-Dirac-Element zueinander inverse KK-Äquivalenzen sind. Mit 4.3.5 läßt sich nun zeigen:

Theorem 4.3.7. *Für jede G -Algebra B läßt sich die Deformationsabbildung 3.4.3 mit der Baum-Connes-Assembly-Abbildung A.9 identifizieren.*

Beweis. Man betrachte $\mathcal{A} = C[0, 1] \otimes (B \rtimes (V \rtimes K))$ und $\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]}$ für die $\mathcal{G}_{[0,1]}$ -Algebra $\mathcal{B} = C[0, 1] \otimes B$. Es bezeichne $\iota_t : \{t\} \rightarrow [0, 1]$ wieder die kanonische Einbettung für $t \in [0, 1]$, und es sei $[\tilde{D}] \in \mathcal{R} \text{KK}([0, 1]; \mathcal{A}, \mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})$ das (modifizierte) Dirac-Element für $\mathcal{G}_{[0,1]}$ mit Koeffizienten in der $\mathcal{G}_{[0,1]}$ -Algebra \mathcal{B} .

Mit $q_t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_t$ und $r_t : \mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]} \rightarrow (\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})_t$ seien die kanonischen Quotientenabbildungen bezeichnet. Dabei kann die Faser $(\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})_1$ mit $B \rtimes_r G$ und $(\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})_0$ mit $B \rtimes (V \rtimes K)$ identifiziert werden; analog lassen sich die Fasern \mathcal{A}_0 und \mathcal{A}_1 mit $B \rtimes (V \rtimes K)$ identifizieren.

Nach 4.3.5 kommutiert für alle $t \in [0, 1]$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\otimes_{\mathcal{A}}[\tilde{D}]} & K_*(\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]}) \\ \downarrow q_{t,*} & & \downarrow r_{t,*} \\ K_*(\mathcal{A}_t) & \xrightarrow{\otimes_{\iota_t^*(\mathcal{A})}\iota_t^*([\tilde{D}])} & K_*((\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})_t). \end{array}$$

Wie in Kapitel 3.3 beschrieben, induzieren q_0 und r_0 Isomorphismen in K-Theorie; also kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_*(\mathcal{A}_1) & \xrightarrow{\otimes_{\iota_1^*(\mathcal{A})}\iota_1^*([\tilde{D}])} & K_*((\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})_1) \\ \uparrow q_{1,*} & & \uparrow r_{1,*} \\ K_*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\otimes_{\mathcal{A}}[\tilde{D}]} & K_*(\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]}) \\ \uparrow q_{0,*}^{-1} & & \uparrow r_{0,*}^{-1} \\ K_*(\mathcal{A}_0) & \xrightarrow{\otimes_{\iota_0^*(\mathcal{A})}\iota_0^*([\tilde{D}])} & K_*((\mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]})_0). \end{array}$$

Dabei entspricht die obere horizontale Abbildung gerade der Assembly-Abbildung A.9 für G mit Koeffizienten in B , und die durch Kasparov-Produkt mit $\iota_0^*([\tilde{D}])$ gegebene untere horizontale Abbildung ist die Assembly-Abbildung für die mittelbare Gruppe $V \rtimes K$ mit Koeffizienten in B . Das γ -Element von $V \rtimes K$ ist jedoch

das Einselement in $\mathrm{KK}^{V \rtimes K}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Daher ist die untere horizontale Abbildung ein Isomorphismus von $\mathrm{K}_*(B \rtimes (V \rtimes K))$.

Da \mathcal{A} eine triviale $C[0, 1]$ -Algebra ist, ist die Abbildung $q_{1,*} \circ q_{0,*}^{-1}$ nach 3.4.4 gerade die Identität, während $r_{1,*} \circ r_{0,*}^{-1}$ die in 3.4.3 definierte Deformationsabbildung ist.

Das obige kommutative Diagramm wird damit zu

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{K}_*(B \rtimes (V \rtimes K)) & \xrightarrow{\mu_B} & \mathrm{K}_*(B \rtimes_r G) \\
 \uparrow \mathrm{id} & & \uparrow \text{deform} \\
 \mathrm{K}_*(B \rtimes (V \rtimes K)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{K}_*(B \rtimes (V \rtimes K)),
 \end{array}$$

und unter dem durch die untere horizontale Abbildung gegebenen Isomorphismus läßt sich die Deformationsabbildung 3.4.3 mit der Assembly-Abbildung A.9 identifizieren. \square

Bemerkung 4.3.8. Nach den Bemerkungen vor 4.3.7 gilt $\iota_0^*(\Psi) = \iota_1^*(\Psi)$ und $\iota_0^*(j_{K \times [0,1]}(\tau_{\mathcal{B}}(\tilde{\delta}))) = \iota_1^*(j_{K \times [0,1]}(\tau_{\mathcal{B}}(\tilde{\delta})))$. Aus dem letzten Diagramm im obigen Beweis erhält man somit das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, (B \otimes \Gamma_0(G/K, \mathcal{C}\ell(G/K))) \rtimes_r G) & \xrightarrow{\cdot \otimes j_{G,r}(\sigma_B(D_G))} & \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, B \rtimes_r G) \\
 \downarrow \cdot \otimes \iota_1^*([X_{\mathcal{B}}^*]) & & \downarrow \mathrm{id} \\
 \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, (B \otimes \mathcal{C}\ell(V^*)) \rtimes_r K) & & \\
 \downarrow \cdot \otimes \iota_0^*([X_{\mathcal{B}}]) & & \\
 \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, (B \otimes (C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*))) \rtimes (V \rtimes K)) & & \\
 \downarrow \cdot \otimes j_{V \rtimes K}(\sigma_B(D_{V \rtimes K})) & & \\
 \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, B \rtimes (V \rtimes K)) & \xrightarrow{\text{deform}} & \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, B \rtimes_r G).
 \end{array}$$

Dabei ist $X_{\mathcal{B}}^*$ die inverse Morita-Äquivalenz zu $X_{\mathcal{B}}$, es bezeichnen D_G bzw. $D_{V \rtimes K}$ Kasparovs Dirac-Elemente für die Gruppen $G = \mathcal{G}_1$ bzw. $V \rtimes K = \mathcal{G}_0$, und die untere horizontale Abbildung ist die Deformationsabbildung.

Identifiziert man (wie in Anhang A beschrieben) die topologische K-Theorie $\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; B)$ mit $\mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, (B \otimes \Gamma_0(G/K, \mathcal{C}\ell(G/K))) \rtimes_r G)$, so entspricht die obere

horizontale Abbildung der Assembly-Abbildung μ_B . Die vertikalen Abbildungen auf der linken Seite sind Isomorphismen.

Die Identifikation der Assembly-Abbildung μ_B mit der Deformationsabbildung ist daher bis auf Morita-Äquivalenz durch die dritte vertikale Abbildung gegeben. Diese entspricht der Assembly-Abbildung der Gruppe $V \rtimes K$ mit Koeffizienten in B , wobei die Untergruppe V trivial auf B wirkt. Die Abbildung ist gegeben durch Multiplikation mit dem Dirac-Element

$$D_{V \rtimes K} = [L^2(V, \Lambda^*(V^* \otimes \mathbb{C}), \frac{d + d^*}{\sqrt{1 + (d + d^*)^2}}] \in \text{KK}^{V \rtimes K}(C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*), \mathbb{C}).$$

Dieses ist eine KK-Äquivalenz; das inverse Element ist gegeben durch das Dual-Dirac-Element

$$\eta_{V \rtimes K} = [C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*), F] \in \text{KK}^{V \rtimes K}(\mathbb{C}, C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*)).$$

Unter der Identifikation von V mit V^* ist der Operator F definiert durch punktweise (Clifford-)Multiplikation mit der beschränkten Funktion

$$F : V \longrightarrow V^* \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(V^*), \quad v \mapsto \frac{v}{\sqrt{1 + \|v\|^2}}.$$

Die mittelbare Gruppe $V \rtimes K$ ist ein semidirektes Produkt. Es existiert ein partieller Descent-Funktor $J_V : \text{KK}^{V \rtimes K} \longrightarrow \text{KK}^K$, für den $j_{V \rtimes K} = j_K \circ J_V$ gilt. Dieser wurde von Jérôme Chabert in [Cha00] konstruiert.

Da V trivial auf $\mathcal{C}\ell(V^*)$ wirkt, gilt

$$(C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*)) \rtimes V \cong (C_0(V) \rtimes V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*) \cong \mathcal{K}(L^2(V)) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*),$$

und wie bereits bemerkt, läßt sich $C^*(V)$ K -äquivariant mit $C_0(V)$ identifizieren. Somit läßt sich $J_V(D_{V \rtimes K})$ als Element von

$$\text{KK}^K(\mathcal{K}(L^2(V)) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*), C^*(V)) \cong \text{KK}^K(\mathcal{C}\ell(V^*), C_0(V))$$

auffassen. Es wäre interessant, dieses Element genauer zu beschreiben und z.B. zu untersuchen, ob es Kasparovs K -äquivarianter Bott-Periodizität aus [Kas81, §5, Thm.7] entspricht.

Für eine fast zusammenhängende Lie-Gruppe G und eine G -Algebra B ergibt sich aus 4.3.7 eine weitere Möglichkeit zu zeigen, ob G die Baum-Connes-Vermutung mit Koeffizienten in B erfüllt:

Bezeichnet $\mathcal{B} = C[0, 1] \otimes B$ die triviale $C[0, 1]$ -Algebra mit der Wirkung des Deformationsgruppoiden \mathcal{G} , so folgt aus der Beschreibung der Deformationsabbildung

3.4.3 und obigem Theorem, daß die Assembly-Abbildung für G mit Koeffizienten in B genau dann ein Isomorphismus ist, wenn der durch Evaluation in 1 gegebene Homomorphismus

$$q_1 : \mathcal{B} \rtimes_r \mathcal{G}_{[0,1]} \longrightarrow B \rtimes_r G$$

einen Isomorphismus in der K-Theorie induziert.

Jede fast zusammenhängende Lie-Gruppe besitzt ein γ -Element; wie im Anhang beschrieben, folgt aus dem Satz von Tu (vgl. [Tu99, Prop. 5.23]), daß die Assembly-Abbildung für jede Koeffizientenalgebra B injektiv ist. Diese Tatsache ergibt sich schon aus Kasparovs Arbeiten [Kas95] bzw. [Kas88].

Zum Nachweis der Baum-Connes-Vermutung mit Koeffizienten in der G -Algebra B genügt es daher aufgrund von 4.3.7 zu zeigen, daß die von q_1 induzierte Abbildung in der K-Theorie surjektiv ist.

Kapitel 5

Fast zusammenhängende Gruppen

Möchte man versuchen, das Deformationsbild der Assembly-Abbildung auf eine größere Klasse von Gruppen zu erweitern, so liegt es nahe, als nächstes fast zusammenhängende Gruppen zu betrachten.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird unter Verwendung bekannter Strukturresultate für fast zusammenhängende Gruppen ein kurzer Ausblick gegeben, welche Schritte noch unternommen werden müssen, um das Deformationsbild der Assembly-Abbildung auch in dieser Situation definieren zu können.

Nach [CEN03] erfüllt jede fast zusammenhängende Gruppe die Baum-Connes-Vermutung mit trivialen Koeffizienten. Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, daß die K -Theorie der reduzierten Gruppen- C^* -Algebra in dieser Situation eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern ist. Dieses Resultat wurde in der Literatur bisher nur unter einer zusätzlichen Orientierungsvoraussetzung beschrieben. Insbesondere gilt die Aussage natürlich für die in den vorigen Kapiteln betrachteten fast zusammenhängenden Lie-Gruppen.

5.1 Fast zusammenhängende Gruppen und Deformation

Es sei zunächst an die Definition 3.2.7 erinnert:

Ist G eine lokal-kompakte Gruppe, so ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements G_0 ein abgeschlossener Normalteiler in G . Die Gruppe G heißt fast zusammenhängend, falls die Gruppe der Zusammenhangskomponenten G/G_0 kompakt ist.

Die folgenden Aussagen über fast zusammenhängende Gruppen finden sich im Anhang des Artikels [Abe75] von Abels:

Jede fast zusammenhängende Gruppe G besitzt eine maximal kompakte Untergruppe K , und letztere ist eindeutig (bis auf Konjugation mit Elementen in G) bestimmt. Der homogene Raum G/K ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, auf der eine stetige Wirkung der Gruppe durch Linksmultiplikation definiert ist.

Es bezeichne $L(G)$ die Menge aller stetigen Homomorphismen von der additiven Gruppe \mathbb{R} nach G , versehen mit der kompakt-offenen Topologie (welche mit der Topologie übereinstimmt, die durch gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen gegeben ist).

Sind $X, Y \in L(G)$, so konvergiert die Folge $((X(s/n) \cdot Y(s/n))^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G gegen einen Wert $(X + Y)(s)$. Die hierdurch definierte Addition und die skalare Multiplikation, welche durch $(r \cdot X)(s) = X(r \cdot s)$ gegeben ist, sind stetig, und nach Abels ist $L(G)$ ein vollständiger lokal-konvexer topologischer \mathbb{R} -Vektorraum.

Die adjungierte Darstellung $\text{Ad} : G \times L(G) \longrightarrow L(G)$, definiert durch

$$\text{Ad}_x(X)(s) := x \cdot X(s) \cdot x^{-1},$$

ist stetig. Desweiteren gibt es eine stetige Abbildung

$$\exp : L(G) \longrightarrow G, \quad \exp(X) := X(1),$$

welche der Exponentialabbildung einer Lie-Gruppe entspricht; insbesondere gilt $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$. Aufgrund der Definitionen ist klar, daß

$$x \cdot \exp(X) \cdot x^{-1} = \exp(\text{Ad}_x(X))$$

für alle $x \in G$ und $X \in L(G)$ gilt.

Abels bemerkt, daß auf $L(G)$ eine stetige Lie-Algebrenstruktur definiert werden kann, so daß das Campbell-Hausdorff-Theorem gilt.

Für fast zusammenhängende Gruppen hat man den folgenden Struktursatz, welcher das Analogon des Resultats 3.2.9 für Lie-Gruppen ist:

Theorem 5.1.1. *Ist G eine fast zusammenhängende Gruppe und $K \subseteq G$ eine maximal kompakte Untergruppe, so existiert eine Teilmenge E von G , so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Für alle $x \in K$ gilt $x \cdot E \cdot x^{-1} = E$.*
- (ii) *Die Multiplikation $E \times K \longrightarrow G$ ist ein Homöomorphismus.*

(iii) Zu jeder kompakten Untergruppe $L \subseteq G$ existiert ein Element $x \in E$ mit $x \cdot L \cdot x^{-1} \subseteq K$.

(iv) Betrachtet man $L(G)$ als K -Modul unter Einschränkung der adjungierten Darstellung auf K , so gibt es endlich-dimensionale Unterräume V_1, \dots, V_r von $L(G)$, deren Summe $V := V_1 + \dots + V_r$ direkt ist, so daß die Abbildung

$$\sigma : V_1 \oplus \dots \oplus V_r \longrightarrow G, \quad \sigma(x_1, \dots, x_r) := \exp(x_1) \cdot \dots \cdot \exp(x_r)$$

ein Homöomorphismus auf E ist, und so daß für alle $1 \leq i \leq r$ die Mengen $E_i := \exp(V_i)$ invariant unter der Wirkung von K sind.

Desweiteren gilt $L(G) = V \oplus L(K)$, und die Abbildungen $\sigma : V \longrightarrow E$ sowie $\pi|_E : E \longrightarrow G/K$ sind K -äquivalente Isomorphismen.

Beweis. [Abe75, Theorem A.5 und Korollar A.6]. □

Insbesondere folgt hieraus, daß der homogene Raum G/K zusammenhängend ist.

Der endlich-dimensionale Unterraum $V \subseteq L(G)$ und die Unterräume V_1, \dots, V_r von V sind invariant unter der adjungierten Wirkung von K . Also kann das semidirekte Produkt $V \rtimes K$ gebildet und das Gruppenbündel

$$\mathcal{G} := (V \rtimes K) \times \{0\} \dot{\cup} G \times (0, 1]$$

betrachtet werden. Nach (ii) und (iv) ist die Abbildung

$$\varphi : V \times K \longrightarrow G, \quad (v, k) \mapsto \sigma(v) \cdot k$$

ein Homöomorphismus. Setzt man

$$\Phi : V \times K \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{G}, \quad (v, k, t) \mapsto \begin{cases} (v, k, 0) & : t = 0 \\ (\sigma(t \cdot v) \cdot k, t) & : t \neq 0, \end{cases}$$

so kann ähnlich wie in 3.3.2 auf \mathcal{G} die Topologie betrachtet werden, welche von den Mengen des Typs

(I) $O \subseteq G \times (0, 1]$ offen und

(II) $\Phi(U \times W \times [0, \epsilon))$ für $0 < \epsilon < 1$, U offen in V , W offen in K

erzeugt wird. Da die Abbildung φ ein Homöomorphismus ist, kann man wie in Kapitel 3.3 zeigen, daß \mathcal{G} mit der von diesen Mengen erzeugten Topologie ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum ist, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, daß die Einschränkung der Topologie auf \mathcal{G}_0 bzw. $G \times (0, 1]$ der gewöhnlichen

Topologie entspricht, und daß die natürliche Projektion $\mathcal{G} \longrightarrow [0, 1]$ eine offene und stetige Abbildung ist. Desweiteren ist die Einsabbildung $[0, 1] \hookrightarrow \mathcal{G}$ stetig.

Mit einer analogen Argumentation wie im Beweis von [Abe75, A.5] kann man auch zeigen, daß die Einschränkung von \exp einen lokalen Homöomorphismus $V \longrightarrow E$ liefert. Aus 5.1.1 (ii) folgt dann, daß

$$V \times K \longrightarrow G, \quad (v, k) \mapsto \exp(v) \cdot k$$

eine offene Umgebung des neutralen Elements in $V \times K$ homöomorph auf eine offene Umgebung der Eins in G abbildet, und es kann exakt dieselbe Definition der Topologie wie in Kapitel 3.3 gewählt werden.

Für alle $X \in L(G)$ ist $\exp(-X) = \exp(X)^{-1}$. Ist dann $v \in V$ und $k \in K$, so gilt

$$(\exp(v) \cdot k)^{-1} = k^{-1} \cdot \exp(-v) = \exp(\text{Ad}_{k^{-1}}(-v)) \cdot k^{-1}.$$

Aufgrund der Stetigkeit der adjungierten Darstellung kann man genau wie in 3.3.9 zeigen, daß die faserweise Inversenbildung eine stetige Abbildung auf \mathcal{G} ist.

Bei der Multiplikation ergibt sich allerdings ein Problem: Im Fall einer fast zusammenhängenden Lie-Gruppe wurden in 3.3.10 und 3.3.11 die Analytizität der Multiplikation und die Konvergenzeigenschaften der Campbell-Hausdorff-Reihe ausgenutzt.

Nach [Abe75, A.6] gilt $L(G) = V \oplus L(K)$. Möchte man die Beweisstrategie auf den Fall fast zusammenhängender Gruppen übertragen, so ist zu zeigen, daß die Abbildungen

$$L(G) \longrightarrow G, \quad X \mapsto \exp(X) \quad \text{und} \quad V \oplus L(K) \longrightarrow G, \quad (v, Y) \mapsto \exp(v) \cdot \exp(Y)$$

eine offene Nullumgebung in $L(G)$ homöomorph auf eine offene Umgebung der Eins in G abbilden. Die Gestalt des durch diese beiden Abbildungen gegebenen "Kartenwechsels" ist zu untersuchen, und es ist ein Ersatz für die Abschätzung in 3.3.11 zu zeigen, um den Beweis der Stetigkeit der Multiplikation aus dem Lie-Gruppenfall zu übertragen.

Ist die Stetigkeit der Multiplikation gezeigt, so folgt, daß $\mathcal{G} \longrightarrow [0, 1]$ ein lokal-kompaktes Gruppenbündel mit offener Projektion auf die Basis ist; \mathcal{G} besitzt daher ein stetiges Haarsystem, und wie in Kapitel 3.4 kann für jede G -Algebra B das Deformationsbild der Assembly-Abbildung definiert werden.

Zur Identifikation der Deformations- mit der Assembly-Abbildung wurde im Lie-Gruppenfall eine stetige Familie von Dirac-Elementen konstruiert. Zur Übertragung dieser Konstruktion kann das folgende Resultat verwendet werden:

Theorem 5.1.2. *Es sei G eine fast zusammenhängende Gruppe. Dann enthält jede Umgebung des Einselements von G einen kompakten Normalteiler N , so daß G/N eine Lie-Gruppe ist.*

Beweis. [MZ55, 4.6]. □

Ist K eine maximal kompakte Untergruppe von G (welche bis auf Konjugation eindeutig bestimmt ist), so ist der kompakte Normalteiler N in K enthalten, und K/N ist eine maximal kompakte Untergruppe von G/N . Der Normalteiler N wirkt trivial auf dem homogenen Raum G/K , denn für $g \in G$ gilt

$$N \cdot g \cdot K = g \cdot N \cdot K = g \cdot K,$$

und es ist $G/K \cong (G/N)/(K/N)$. Die Lie-Gruppe G/N ist mit G fast zusammenhängend, und die Wirkung von G auf G/K faktorisiert über $G \longrightarrow G/N$.

Insbesondere erhält man das Dirac-Element von G als Bild des Dirac-Elements von G/N unter dem kanonischen Homomorphismus

$$\mathrm{KK}^{G/N}(C_\tau(G/K), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{KK}^G(C_\tau(G/K), \mathbb{C}),$$

wobei $C_\tau(G/K)$ wie in Anhang A die Algebra der im Unendlichen verschwindenden stetigen Schnitte mit Werten im Clifford-Bündel von G/K bezeichnet. Wie im dritten und vierten Kapitel kann der Deformationsgruppoid $\tilde{\mathcal{G}}$ und das Dirac-Element der Deformation für G/N konstruiert werden.

Ist $\tilde{\mathcal{G}}_{[0,1]}$ die Einschränkung zu einem stetigen Gruppenbündel über $[0, 1]$, so hat man einen kanonischen Homomorphismus von Gruppenbündeln $q_N : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}_{[0,1]}$, welcher stetig ist bezüglich der oben definierten Topologie auf \mathcal{G} .

Wenn gezeigt ist, daß \mathcal{G} mit dieser Topologie ein lokal-kompakter Gruppoid ist (d.h. falls der Nachweis der Stetigkeit der Multiplikation gelungen ist), dann ist die Abbildung q_N ein strikter Morphismus. Das Dirac-Element für $\tilde{\mathcal{G}}_{[0,1]}$ läßt sich dann zu einer stetigen Familie von Dirac-Elementen für \mathcal{G} zurückziehen, und genau wie in Kapitel 4.3 zeigt man, daß die Deformationsabbildung mit der Assembly-Abbildung übereinstimmt.

Somit ist zumindest eine Strategie gegeben, wie man versuchen kann, das Deformationsbild der Assembly-Abbildung auf fast zusammenhängende Gruppen zu übertragen. Im Detail steckt hier natürlich noch Arbeit.

5.2 Topologische K-Theorie mit trivialen Koeffizienten

Zentrales Resultat der Arbeit [CEN03] ist die Aussage, daß für jede fast zusammenhängende Gruppe G (also insbesondere auch für jede fast zusammenhängende Lie-Gruppe) die Assembly-Abbildung mit trivialen Koeffizienten ein Isomorphismus ist. Zur Bestimmung der K-Gruppen $K_*(C_r^*(G))$ genügt es in dieser Situation daher, die topologische K-Theorie $K_*^{\text{top}}(G)$ zu berechnen.

Ist wieder $K \subseteq G$ eine maximal kompakte Untergruppe und $V = T_{eK}(G/K)$ der Tangentialraum der Quotientenmannigfaltigkeit, so läßt sich die topologische K-Theorie von G (wie in Anhang A beschrieben) mit

$$K_*(C_0(V) \rtimes K) \cong KK_*(\mathbb{C}, \mathcal{C}\ell(V^*) \rtimes K)$$

identifizieren. Dabei ist $\mathcal{C}\ell(V^*)$ die ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduierte) assoziierte Clifford-Algebra des Kotangentialraums V^* der Mannigfaltigkeit G/K im Punkt eK .

In der oben erwähnten Arbeit wird unter der Voraussetzung, daß die Wirkung von K eine auf V gegebene Orientierung erhält, bewiesen, daß die auftretenden K-Gruppen frei sind. Dieses Resultat gilt jedoch auch ohne die Orientierungsvoraussetzung, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird.

Das folgende Resultat ist wohlbekannt:

Proposition 5.2.1. *Für jede lokal-kompakte Gruppe G ist $C_r^*(G \times \mathbb{R})$ isomorph zu $C_r^*(G) \otimes C_0(\mathbb{R})$, und somit gilt $K_*(C_r^*(G \times \mathbb{R})) \cong K_{*+1}(C_r^*(G))$.*

Anwenden läßt es sich insbesondere auf eine fast zusammenhängende Gruppe G mit maximal kompakter Untergruppe K . Mit G ist auch $G \times \mathbb{R}$ eine fast zusammenhängende Gruppe, deren maximal kompakte Untergruppe sich mit K identifizieren läßt. Für den Tangentialraum der Quotientenmannigfaltigkeit $(G \times \mathbb{R})/K$ im Punkt eK gilt dann

$$T_{eK}(G \times \mathbb{R}/K) \cong T_{eK}(G/K) \times \mathbb{R}.$$

Zur Berechnung von $K_*(C_r^*(G))$ genügt es also unter Verwendung des obigen Resultats, den Fall zu betrachten, daß $\dim G/K = \dim T_{eK}(G/K)$ gerade ist.

Im folgenden sei für $k \in \mathbb{N}$ mit $M_k = M_k(\mathbb{C})$ die Algebra der komplexwertigen $k \times k$ -Matrizen bezeichnet.

Lemma 5.2.2. *Auf der Matrixalgebra M_k sei eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung durch einen Automorphismus $\epsilon : M_k \longrightarrow M_k$ mit $\epsilon^2 = \text{id}$ gegeben. Dann ist (M_k, ϵ) Morita-äquivalent zu M_k mit der trivialen Wirkung.*

Beweis. Für jeden separablen Hilbertraum H ist die Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow U(H) \xrightarrow{\text{Ad}} \text{Aut}(\mathcal{K}(H)) \longrightarrow 1$$

exakt; man vergleiche z.B. [RW98, Chapter 1]. Daher gilt $\epsilon = \text{Ad}_u$ für ein unitäres Element $u \in M_k$ mit $u^2 = 1$. Die Abbildung $U : M_k \longrightarrow M_k$, definiert durch $x \mapsto u \cdot x$, erfüllt $U^2 = \text{id}$, und (M_k, U) ist eine Morita-Äquivalenz der graduierten Algebren (M_k, ϵ) und (M_k, id) . \square

Für die K-Theorie $K_*(C_r^*(G))$ einer fast zusammenhängende Gruppe G läßt sich nun zeigen:

Theorem 5.2.3. *Ist G eine fast zusammenhängende Gruppe, so ist $K_*(C_r^*(G))$ eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern.*

Beweis. Es sei wieder $V = T_{eK}(G/K)$ der Tangentialraum der Quotientenmannigfaltigkeit, wobei K eine maximal kompakte Untergruppe von G ist. Nach 5.2.1 genügt es den Fall zu betrachten, daß $\dim V = 2k$ gerade ist. Die kompakte Gruppe K wirkt auf dem euklidischen Raum V (und dem Dualraum V^*) durch lineare Isometrien. Die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung der Clifford-Algebra, die durch den Homomorphismus

$$V^* \longrightarrow V^* \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(V^*), \quad v \mapsto -v$$

gegeben ist, kommutiert mit der K -Wirkung auf $\mathcal{C}\ell(V^*)$.

Nach [CEN03] ist die Assembly-Abbildung mit trivialen Koeffizienten für eine fast zusammenhängende Gruppe ein Isomorphismus. Wie in Anhang A beschrieben, gilt somit

$$K_*(C_r^*(G)) \cong K_*^{\text{top}}(G) \cong \text{KK}_*(\mathbb{C}, \mathcal{C}\ell(V^*) \rtimes K),$$

wobei $\mathcal{C}\ell(V^*)$ die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduierte Clifford-Algebra ist.

Unter Verwendung des Isomorphismus B.6 von $\mathcal{C}\ell(V^*)$ und M_{2k} kann eine K -Wirkung und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung auf der Matrixalgebra M_{2k} definiert werden. Dann sind auch die verschränkten Produkte $\mathcal{C}\ell(V^*) \rtimes K$ und $M_{2k} \rtimes K$ isomorph, wobei letztere Algebra eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung trägt, und es gilt

$$K_*(C_r^*(G)) \cong \text{KK}_*(\mathbb{C}, M_{2k} \rtimes K).$$

Nach einem Resultat von Mackey, Takesaki und Green ist das verschränkte Produkt $M_{2k} \rtimes K$ isomorph zu $M_{2k} \otimes C^*(K, \omega)$ (vgl. [Ech96, 1.14.15]), wobei $C^*(K, \omega)$ die getwistete Gruppen- C^* -Algebra von K für einen (Borel-)Kozykel $\omega \in H^2(K, \mathbb{T})$ ist.

Die getwistete Gruppen- C^* -Algebra $C^*(K, \omega)$ ist ein Quotient der gewöhnlichen Gruppen- C^* -Algebra $C^*(K \times_{\omega} \mathbb{T})$ der zentralen Erweiterung $K \times_{\omega} \mathbb{T}$ (vgl.

[Ech96, 1.1 und 1.1.4]). Mit K und \mathbb{T} ist auch die Erweiterung $K \times_{\omega} \mathbb{T}$ kompakt; somit ist $C^*(K \times_{\omega} \mathbb{T})$ isomorph zu einer direkten Summe von (höchstens abzählbar vielen) Matrixalgebren. Selbiges gilt dann auch für den Quotienten $C^*(K, \omega)$, da Matrixalgebren einfach sind.

Ist $C^*(K, \omega) \cong \bigoplus_{i \in I} M_{l_i}$, so gilt

$$M_{2^k} \rtimes K \cong M_{2^k} \otimes C^*(K, \omega) \cong M_{2^k} \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} M_{l_i} \right) \cong \bigoplus_{i \in I} (M_{2^k} \otimes M_{l_i}) \cong \bigoplus_{i \in I} M_{2^k \cdot l_i}.$$

Somit ist $M_{2^k} \rtimes K$ isomorph zu einer (höchstens abzählbaren) direkten Summe von Matrixalgebren $\bigoplus_{j \in J} M_j$, und unter diesem Isomorphismus ist auf $\bigoplus_{j \in J} M_j$ eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung durch einen Automorphismus ϵ mit $\epsilon^2 = 1$ definiert.

Matrixalgebren sind einfach, und für alle $j_0 \in J$ ist mit M_{j_0} auch $\epsilon(M_{j_0})$ ein Ideal in $\bigoplus_{j \in J} M_j$. Es folgt, daß es genau einen Index $j_1 \in J$ mit $\epsilon(M_{j_0}) = M_{j_1}$ gibt. Somit gilt

$$M_{2^k} \rtimes K \cong \left(\bigoplus_{j \in J_1} M_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{k \in J_2} (N_k^{(0)} \oplus N_k^{(1)}) \right),$$

wobei M_j und $N_k^{(0)} = N_k^{(1)}$ Matrixalgebren mit $\epsilon(M_j) = M_j$ und $\epsilon(N_k^{(0)}) = N_k^{(1)}$ sind.

Der Funktor $B \mapsto \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, B)$ ist verträglich mit endlichen direkten Summen. Hieraus folgt

$$\mathrm{K}_*(C_r^*(G)) \cong \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, M_{2^k} \rtimes K) \cong \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, \bigoplus_{j \in J_1} M_j) \oplus \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, \bigoplus_{k \in J_2} (N_k^{(0)} \oplus N_k^{(1)})),$$

und für den Nachweis, daß $\mathrm{K}_*(C_r^*(G))$ eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern ist, genügt es zu zeigen, daß dies für die beiden Summanden auf der rechten Seite gilt.

Ist $j \in J_1$, so definiert ϵ eine Graduierung auf der Matrixalgebra M_j . Nach 5.2.2 ist (M_j, ϵ) Morita-äquivalent zu (M_j, id) . Somit ist auch $(\bigoplus_{j \in J_1} M_j, \epsilon)$ Morita-äquivalent zu $\bigoplus_{j \in J_1} M_j$ mit der trivialen Graduierung, und es folgt

$$\mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, \bigoplus_{j \in J_1} M_j) \cong \mathrm{K}_*(\bigoplus_{j \in J_1} M_j) \cong \bigoplus_{j \in J_1} \mathrm{K}_*(M_j)$$

aufgrund der Stetigkeit der K-Theorie. Für Matrixalgebren gilt jedoch $\mathrm{K}_0(M_j) \cong \mathbb{Z}$ und $\mathrm{K}_1(M_j) = 0$, und es ist gezeigt, daß $\mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, \bigoplus_{j \in J_1} M_j)$ eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern ist.

Es bleibt $\mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, \bigoplus_{k \in J_2} (N_k^{(0)} \oplus N_k^{(1)}))$ zu betrachten. Für $k \in J_2$ setze man $N := N_k^{(0)} = N_k^{(1)}$, $f := \pi_2 \circ \epsilon \circ \iota_1$ und $g := \pi_1 \circ \epsilon \circ \iota_2$, wobei $\iota_i : N \hookrightarrow N \oplus N$

die kanonische Einbettung und $\pi_i : N \oplus N \longrightarrow N$ den kanonischen Quotienten-
homomorphismus bezeichne.

Aus $\epsilon^2 = \text{id}$ folgt, daß f und g zueinander inverse Morphismen sind. Für die
Einschränkung von ϵ auf $N \oplus N$ gilt dann

$$\epsilon = \mathcal{F} \circ (f, f^{-1}) : N \oplus N \longrightarrow N \oplus N, \quad (a, b) \mapsto (f^{-1}(b), f(a)).$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{F} den durch $\mathcal{F}(a, b) = (b, a)$ definierten Isomorphismus von
 $N \oplus N$. Die Abbildung

$$h := (f, \text{id}) : N \oplus N \longrightarrow N \oplus N, \quad (a, b) \mapsto (f(a), b)$$

ist ein Isomorphismus. Für diesen gilt

$$(h \circ \epsilon)(a, b) = h(f^{-1}(b), f(a)) = (b, f(a)) = (\mathcal{F} \circ h)(a, b),$$

und somit ist h ein graduierungserhaltender Isomorphismus von $(N \oplus N, \epsilon)$ und
 $(N \oplus N, \mathcal{F})$. Identifiziert man die Clifford-Algebra $\mathcal{C}\ell_1$ wie in B.3 mit $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ (wobei
der Graduierungsoperator auf $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ durch $\alpha(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$ gegeben ist), so ist
 $(N \oplus N, \mathcal{F})$ isomorph zum graduierten Tensorprodukt $N \hat{\otimes} \mathcal{C}\ell_1$. Die Matrixalgebra
 N im letzten Ausdruck ist dabei trivial graduiert.

Im Übergang zur direkten Summe erhält man einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{k \in J_2} (N_k^{(0)} \oplus N_k^{(1)}) \cong \bigoplus_{k \in J_2} (N_k^{(0)} \hat{\otimes} \mathcal{C}\ell_1) \cong \left(\bigoplus_{k \in J_2} N_k^{(0)} \right) \hat{\otimes} \mathcal{C}\ell_1$$

graduierter C^* -Algebren, wobei $\bigoplus_{k \in J_2} N_k^{(0)}$ im letzten Term mit der trivialen
Graduierung versehen ist. Wieder unter Ausnutzung der Stetigkeit der K-Theorie
folgt

$$\begin{aligned} \text{KK}_*(\mathbb{C}, \bigoplus_{k \in J_2} (N_k^{(0)} \oplus N_k^{(1)})) &\cong \text{KK}_*(\mathbb{C}, \left(\bigoplus_{k \in J_2} N_k^{(0)} \right) \hat{\otimes} \mathcal{C}\ell_1) \\ &\cong \text{KK}_{*+1}(\mathbb{C}, \bigoplus_{k \in J_2} N_k^{(0)}) \cong \bigoplus_{k \in J_2} \text{K}_{*+1}(N_k^{(0)}). \end{aligned}$$

Für die (trivial graduierte) Matrix-Algebra $N_k^{(0)}$ gilt aber

$$\text{K}_{*+1}(N_k^{(0)}) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } * = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{für } * = 1. \end{cases}$$

Somit ist gezeigt, daß auch $\text{KK}_*(\mathbb{C}, \bigoplus_{k \in J_2} (N_k^{(0)} \oplus N_k^{(1)}))$ eine freie Gruppe in
höchstens abzählbar vielen Erzeugern ist. \square

Ist speziell V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, auf dem eine kompakte Gruppe K wirkt, so ist das semidirekte Produkt $G := V \rtimes K$ eine fast zusammenhängende Gruppe; diese ist insbesondere mittelbar. Nach Wahl eines K -invarianten Skalarprodukts läßt sich V K -äquivariant mit der dualen Gruppe \hat{V} identifizieren, und es gilt

$$C^*(V \rtimes K) \cong C^*(V) \rtimes K \cong C_0(V) \rtimes K.$$

Nach dem Green-Julg-Theorem gilt $K_*^K(C_0(V)) \cong K_*(C_0(V) \rtimes K)$. Als Folgerung aus obigem Resultat ergibt sich somit:

Korollar 5.2.4. *Ist V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit stetiger Wirkung einer kompakten Gruppe K , so ist $K_*^K(C_0(V))$ eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern.*

Für den Fall, daß die kompakte Gruppe K endlich ist, wurde letzteres Ergebnis mit anderen Methoden in [Kar02] bewiesen. Desweiteren zeigt Karoubi, daß sich in dieser Situation der Rang der K -Gruppen durch die Anzahl gewisser Konjugationsklassen der endlichen Gruppe K beschreiben läßt.

Wirkt die maximal kompakte Untergruppe K der fast zusammenhängenden Gruppe G orientierungserhaltend auf dem Tangentialraum $V = T_{eK}(G/K)$, so läßt sich das Resultat 5.2.3 noch verfeinern, wie in [CEN03, §7] gezeigt wurde: Ist $n = \dim G/K$, so ist $K_{0+n}(C_r^*(G))$ eine freie Gruppe in höchstens abzählbar vielen Erzeugern, und es gilt $K_{1+n}(C_r^*(G)) = 0$.

Insbesondere gilt dieses Resultat für jede zusammenhängende Lie-Gruppe. In diesem Fall ist auch die maximal kompakte Untergruppe K zusammenhängend, und K wirkt orientierungserhaltend auf $V = T_{eK}(G/K)$.

Anhang A

Die Assembly-Abbildung

Die Beschreibung der Baum-Connes-Assembly-Abbildung, wie sie in diesem Anhang gegeben wird, folgt im wesentlichen der Arbeit [KS03].

Desweiteren wird auf die Dirac-Dual-Dirac-Methode eingegangen. Dieser Zugang zur Untersuchung der Baum-Connes-Vermutung basiert auf Ideen, die Kasparov in [Kas95] und [Kas88] beschrieben hat; er wurde u.a. von Tu weiterentwickelt.

Jede fast zusammenhängende Gruppe besitzt ein γ -Element. In dieser Situation kann die Assembly-Abbildung im wesentlichen durch das Kasparov-Produkt mit dem Dirac-Element der Gruppe beschrieben werden. Diese Darstellung der Assembly-Abbildung (wie sie sich in A.9 findet) wird im Rest der vorliegenden Arbeit benutzt.

Definition A.1. Der universelle eigentliche G -Raum einer lokal-kompakten Gruppe G ist ein eigentlicher metrisierbarer G -Raum $\mathcal{E}G$, welcher die folgenden Bedingungen erfüllt:

Der Quotientenraum $\mathcal{E}G/G$ ist parakompakt, und zu jedem eigentlichen metrisierbaren G -Raum X mit X/G parakompakt existiert eine (bis auf G -äquivalente Homotopie) eindeutig bestimmte G -äquivalente Abbildung $X \longrightarrow \mathcal{E}G$.

Zu jeder lokal-kompakten Gruppe G existiert ein Modell für den universellen eigentlichen G -Raum $\mathcal{E}G$. Dieses ist bis auf G -äquivalente Homotopie eindeutig bestimmt.

Beispiel A.2. Es sei G eine fast zusammenhängende Gruppe, d.h. eine lokal-kompakte Gruppe, so daß der Quotient G/G_0 kompakt ist. Hierbei bezeichnet G_0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G .

Jede fast zusammenhängende Gruppe besitzt eine maximal kompakte Untergruppe $K \subseteq G$. Diese ist bis auf Konjugation eindeutig bestimmt. Nach [Abe75]

ist der Quotient G/K ein Modell für $\mathcal{E}G$, und G/K besitzt die Struktur einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit, welche K -äquivariant diffeomorph zum Tangentialraum $T_{eK}(G/K)$ ist; man vergleiche auch [Kas88, 5.6].

Definition A.3. Für eine G - C^* -Algebra B definiert man die topologische K -Theorie von G mit Werten in der G -Algebra B durch

$$K_*^{\text{top}}(G; B) := \varinjlim \text{KK}_*^G(C_0(X), B),$$

wobei der induktive Limes über das gerichtete System aller G -kompakten Teilmengen $X \subseteq \mathcal{E}G$ zu bilden ist.

Ist X ein eigentlicher G -Raum, so ist $C_0(X)$ eine eigentliche G -Algebra, und das volle verschränkte Produkt von $C_0(X)$ mit G stimmt mit dem reduzierten überein. Wie folgt lässt sich ein Hilbert- $C_0(X) \rtimes G$ -Modul $\Lambda_{X,G}$ konstruieren:

Auf $C_c(X)$ ist eine rechte Wirkung von $C_c(G, C_0(X)) \subseteq C_0(X) \rtimes G$ durch

$$\xi \cdot f = \int_{s \in G} s(\xi) \cdot s(f(s^{-1})) \cdot \Delta_G^{-1/2}(s) \, ds$$

und ein $C_c(G, C_0(X))$ -wertiges inneres Produkt durch

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle(t) = \Delta_G^{-1/2}(t) \cdot \bar{\xi}_1 \cdot t(\xi_2)$$

definiert. Die G -Wirkung auf $C_c(X)$ ist dabei gegeben durch $(s(\xi))(x) = \xi(s^{-1}x)$.

Eine cut-off-Funktion für X ist eine stetige, positive Funktion $c : X \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für jede kompakte Teilmenge $C \subseteq X$ auch $\text{supp } c \cap G \cdot C$ kompakt ist, und für die die Bedingung

$$\int_{s \in G} c(s^{-1}x) \, ds = 1 \quad \text{für alle } x \in X$$

gilt. Eine solche cut-off-Funktion existiert, und

$$\iota : C_c(X) \rightarrow C_c(G, C_0(X)), \quad \iota(\xi)(s) := \Delta_G^{-1/2}(s) \cdot c^{1/2} \cdot s(\xi)$$

definiert eine Einbettung von $C_c(X)$ in den Prä-Hilbertmodul $C_c(G, C_0(X)) \subseteq C_0(X) \rtimes G$. Das oben definierte innere Produkt ist positiv, und $C_c(X)$ läßt sich zu einem Hilbert- $C_0(X) \rtimes G$ -Modul $\Lambda_{X,G}$ vervollständigen.

Ebenso wie die obige Aussage wird in [KS03] gezeigt, daß die Algebra der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(\Lambda_{X,G})$ isomorph zu $C_0(G \setminus X)$ ist, wobei letztere auf $C_c(X)$ durch punktweise Multiplikation wirkt.

Zusammen mit dem Null-Operator definiert der oben konstruierte Hilbertmodul somit ein Element $[\Lambda_{X,G}] \in \text{KK}(C_0(G \setminus X), C_0(X) \rtimes G)$.

Ist X G -kompakt, der Raum $G \setminus X$ also kompakt, so ist $C_0(G \setminus X)$ unital. Somit existiert ein kanonischer Homomorphismus $u : \mathbb{C} \longrightarrow C_0(G \setminus X)$, und durch $\lambda_{X,G} := u^*([\Lambda_{X,G}])$ wird ein Element von $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C_0(X) \rtimes G) \cong K_0(C_0(X) \rtimes G)$ definiert.

Definition A.4. Ist X eine G -kompakte Teilmenge von $\mathcal{E}G$, so ist die Assembly-Abbildung $\mu_B[X]$ auf dem Niveau von X mit Koeffizienten in der G -Algebra B definiert als Komposition

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{KK}_*^G(C_0(X), B) & \xrightarrow{\mu_B[X]} & \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, B \rtimes_r G) \\ \downarrow j_{G,r} & \nearrow \lambda_{X,G} \otimes \cdot & \\ \mathrm{KK}_*(C_0(X) \rtimes G, B \rtimes_r G) & & \end{array}$$

Die vertikale Abbildung ist dabei Kasparovs Descent-Homomorphismus. (Man beachte, daß die Algebra $C_0(X)$ eigentlich ist und somit $C_0(X) \rtimes G \cong C_0(X) \rtimes_r G$ gilt.) Die durch Übergang zum induktiven Limes erhaltene Abbildung

$$\mu_B : K_*^{\mathrm{top}}(G; B) \longrightarrow K_*(B \rtimes_r G)$$

heißt die Assembly-Abbildung für G mit Koeffizienten in der G -Algebra B .

In einem abstrakten Rahmen wird in [MN06] gezeigt, daß die Assembly-Abbildung in natürlicher Weise isomorph ist zu einer Abbildung, welche durch einen sog. Dirac-Morphismus gegeben ist. Besitzt die lokal-kompakte Gruppe G ein γ -Element, so läßt sich diese Variante aber auch konkreter beschreiben.

Definition A.5. Ein Element $\gamma = \gamma_G \in \mathrm{KK}^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ heißt γ -Element für die lokal-kompakte Gruppe G , falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es gibt eine eigentliche G -Algebra \mathcal{A} und Elemente $D \in \mathrm{KK}^G(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ sowie $\eta \in \mathrm{KK}^G(\mathbb{C}, \mathcal{A})$, so daß $\gamma_G = \eta \otimes_{\mathcal{A}} D$ gilt. Die Elemente D bzw. η heißen das Dirac- bzw. das Dual-Dirac-Element von G .
- (2) Es gilt $p_Z^*(\gamma_G) = 1_Z \in \mathcal{R}\mathrm{KK}^G(Z; C_0(Z), C_0(Z))$ für jeden eigentlichen G -Raum Z , wobei p_Z die kanonische Abbildung von Z auf die einpunktige Menge $\{pt\}$ ist.

Eine G -Algebra \mathcal{A} ist eigentlich, falls \mathcal{A} eine $C_0(X)$ -Algebra für einen eigentlichen G -Raum X mit G -äquivarianter Strukturabbildung $C_0(X) \longrightarrow Z\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist.

Aufgrund der universellen Eigenschaft von $\mathcal{E}G$ ist Bedingung (2) äquivalent zu der Bedingung, daß

$$p_{\mathcal{E}G}^*(\gamma_G) = 1_{\mathcal{E}G} \in \mathcal{R} \text{KK}^G(\mathcal{E}G; C_0(\mathcal{E}G), C_0(\mathcal{E}G))$$

gilt. Das γ -Element ist ein Idempotent und eindeutig bestimmt, falls es existiert. Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G , so ist $\gamma_H := \text{res}_H^G(\gamma_G)$ das γ -Element für H .

Aus Bedingung (2) der Definition eines γ -Elements folgt, daß für jeden eigentlichen G -Raum X und jede G - C^* -Algebra B das Kasparov-Produkt über \mathbb{C} mit γ die Identität auf $\text{KK}_*^G(C_0(X), B)$ ist. Bezeichnet nämlich

$$F_X : \mathcal{R} \text{KK}_*^G(X; C_0(X), C_0(X)) \longrightarrow \text{KK}_*^G(C_0(X), C_0(X))$$

den Vergrößer-Funktor, so gilt

$$F_X(1_X) = 1_{C_0(X)} \quad \text{sowie} \quad F_X \circ p_X^* = \sigma_{C_0(X)},$$

und aus der Kommutativität des Kasparov-Produkts über \mathbb{C} folgt

$$x \otimes_{\mathbb{C}} \gamma = \gamma \otimes_{\mathbb{C}} x = \sigma_{C_0(X)}(\gamma) \otimes_{C_0(X)} x = F_X(p_X^*(\gamma)) \otimes_{C_0(X)} x = 1_{C_0(X)} \otimes_{C_0(X)} x = x$$

für alle $x \in \text{KK}_*^G(C_0(X), B)$. Insbesondere folgt hieraus, daß die Abbildung

$$\cdot \otimes_{\mathbb{C}} \eta : \text{KK}_*^G(C_0(X), B) \longrightarrow \text{KK}_*^G(C_0(X), \mathcal{A} \otimes B), \quad x \mapsto x \otimes_{\mathbb{C}} \eta = x \otimes_B \sigma_B(\eta)$$

ein injektiver Homomorphismus ist. Das gleiche gilt im Übergang zum induktiven Limes, also für $\text{K}_*^{\text{top}}(G; B)$.

Beispiel A.6. Kasparov hat in [Kas88] gezeigt, daß jede fast zusammenhängende lokal-kompakte Gruppe G ein γ -Element besitzt.

Wirkt eine solche Gruppe G eigentlich und isometrisch auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M , so ist das Dirac-Element wie in [Kas88, 4.2] ein Element in $\text{KK}^G(C_\tau(M), \mathbb{C})$, wobei $C_\tau(M)$ die Algebra der stetigen Schnitte ins assoziierte Clifford-Bündel des (komplexifizierten) Kotangentialbündels bezeichnet, welche im Unendlichen verschwinden.

Ist $L^2(M, \Lambda^* M)$ der Hilbertraum der (komplexen) quadrat-integrierbaren Differentialformen auf M , d die deRham-Ableitung und d^* der (formal) adjungierte Operator zu d , so gilt für das Dirac-Element

$$D = [L^2(M, \Lambda^* M), \frac{d + d^*}{\sqrt{1 + (d + d^*)^2}}] \in \text{KK}^G(C_\tau(M), \mathbb{C}).$$

Kovektorfelder wirken dabei auf den Differentialformen durch punktweises Dachprodukt und Kontraktion; aufgrund der universellen Clifford-Eigenschaft erhält man eine Linkswirkung der Algebra $C_\tau(M)$ auf dem Hilbertraum $L^2(M, \Lambda^*M)$.

Ist K eine maximal kompakte Untergruppe von G , so kann $M = G/K$ als Modell für den universellen eigentlichen G -Raum $\mathcal{E}G$ gewählt werden. In Kasparovs Notation ist G/K eine spezielle G -Mannigfaltigkeit, und es gilt

$$D \otimes_{\mathbb{C}} \eta = 1_{C_\tau(G/K)};$$

daher sind $\cdot \otimes_{\mathbb{C}} \eta$ und $\cdot \otimes_{C_\tau(G/K)} D$ zueinander inverse Isomorphismen zwischen $K_*^{\text{top}}(G; B)$ und $K_*^{\text{top}}(G, C_\tau(G/K) \otimes B)$. Man vergleiche [Kas88, 5.1, 5.6 und 5.7].

Ist die fast zusammenhängende Gruppe mittelbar, so sind D und η zueinander inverse KK^G -Äquivalenzen, d.h. es gilt auch

$$\gamma_G = \eta \otimes_{C_\tau(G/K)} D = 1_{\mathbb{C}}.$$

Gilt speziell $G = V \rtimes K$ für einen euklidischen Vektorraum V , auf dem die kompakte Gruppe K durch lineare Isometrien wirkt, so ist $C_\tau(V \rtimes K/K)$ isomorph zu $C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*)$, und das Dual-Dirac-Element ist durch

$$\eta = [C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*), F] \in \text{KK}^{V \rtimes K}(\mathbb{C}, C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*))$$

gegeben. Unter der kanonischen Identifikation von V mit V^* ist der Operator F dabei durch die beschränkte Funktion

$$F : V \longrightarrow V^* \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(V^*), \quad v \mapsto \frac{v}{\sqrt{1 + \|v\|^2}}$$

definiert, welche durch punktweise Clifford-Multiplikation auf $C_0(V) \otimes \mathcal{C}\ell(V^*)$ wirkt.

Die Aussage wird von Kasparov in [Kas81, §5, Thm. 7] in der K -äquivarianten KK -Theorie gezeigt. Betrachtet man die Wirkung von V auf $C_0(V)$ durch Translation im Argument und versieht man $\mathcal{C}\ell(V^*)$ mit der trivialen Wirkung von V , so definiert η auch ein Element in der $V \rtimes K$ -äquivarianten KK -Theorie, und die Aussage über das Produkt folgt aus der Tatsache, daß für mittelbare (fast zusammenhängende) Gruppen die Restriktionsabbildung ein Isomorphismus ist; man vergleiche auch [Kas88, 5.9].

Proposition A.7 (Tu). *Besitzt G ein γ -Element, so ist für jede G -Algebra B die Assembly-Abbildung μ_B mit Koeffizienten in B injektiv.*

Beweis. [Tu99, Prop. 5.23]. □

Theorem A.8. Für jede eigentliche G -Algebra \mathcal{A} ist die Assembly-Abbildung $\mu_{\mathcal{A}}$ mit Koeffizienten in \mathcal{A} bijektiv.

Beweis. [CEM01, Thm. 2.2]. □

Ist \mathcal{A} eine eigentliche und B eine beliebige G -Algebra, so ist auch die G -Algebra $\mathcal{A} \otimes B$ eigentlich.

Ist $\gamma = \eta \otimes_{\mathcal{A}} D$ ein γ -Element der lokal-kompakten Gruppe G mit $D \in \text{KK}^G(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ und $\eta \in \text{KK}^G(\mathbb{C}, \mathcal{A})$ für eine eigentliche G -Algebra \mathcal{A} , so ist nach den weiter oben angestellten Überlegungen die durch das Kasparov-Produkt mit dem Dual-Dirac-Element gegebene Abbildung auf der topologischen K-Theorie injektiv. Zusammen mit A.8 folgt, daß $K_*^{\text{top}}(G; B)$ mit $\mu_{\mathcal{A} \otimes B}(K_*^{\text{top}}(G; B) \otimes_{\mathbb{C}} \eta)$ identifiziert werden kann.

Das Kasparov-Produkt ist assoziativ und mit dem Descent verträglich. Somit kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 K_*^{\text{top}}(G; B) & \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathbb{C}} \eta} & K_*^{\text{top}}(G; \mathcal{A} \otimes B) & \xrightarrow{\cdot \otimes_{\mathcal{A}} D} & K_*^{\text{top}}(G; B) \\
 \mu_B \downarrow & & \cong \downarrow \mu_{\mathcal{A} \otimes B} & & \downarrow \mu_B \\
 K_*(B \rtimes_r G) & \xrightarrow{\cdot \otimes j_{G,r}(\eta \otimes 1_B)} & K_*((\mathcal{A} \otimes B) \rtimes_r G) & \xrightarrow{\cdot \otimes j_{G,r}(D \otimes 1_B)} & K_*(B \rtimes_r G).
 \end{array}$$

Unter dem Isomorphismus $K_*^{\text{top}}(G; B) \cong \mu_{\mathcal{A} \otimes B}(K_*^{\text{top}}(G; B) \otimes_{\mathbb{C}} \eta)$ entspricht die Assembly-Abbildung μ_B daher dem Kasparov-Produkt mit $j_{G,r}(D \otimes 1_B)$.

Nach A.7 ist die Assembly-Abbildung μ_B injektiv; da die Assembly-Abbildung für eigentliche Algebren ein Isomorphismus ist, folgt aus der Kommutativität des rechten Quadrats, daß μ_B genau dann surjektiv (und somit ein Isomorphismus) ist, wenn die durch das Produkt mit $j_{G,r}(D \otimes 1_B)$ gegebene Abbildung surjektiv ist.

Da die durch Multiplikation mit dem γ -Element gegebene obere horizontale Abbildung die Identität auf $K_*^{\text{top}}(G; B)$ ist, ist μ_B genau dann ein Isomorphismus, wenn die Abbildung

$$\cdot \otimes_{B \rtimes_r G} j_{G,r}(\gamma \otimes 1_B) : K_*(B \rtimes_r G) \longrightarrow K_*(B \rtimes_r G)$$

die Identität auf $K_*(B \rtimes_r G)$ ist. Letztere Bedingung ist insbesondere für alle Gruppen erfüllt, für die $\gamma_G = 1$ gilt.

Ist G wieder eine fast zusammenhängende Gruppe, so gilt $D \otimes_{\mathbb{C}} \eta = 1_{C_\tau(G/K)}$. In diesem Fall liefern die Kasparov-Produkte mit dem Dirac- bzw. Dual-Dirac-Element zueinander inverse Isomorphismen der topologischen K-Theorie $K_*^{\text{top}}(G; B)$ mit $K_*^{\text{top}}(G; C_\tau(G/K) \otimes B)$.

Desweiteren ist für eine fast zusammenhängende Gruppe G mit maximal kompakter Untergruppe K der universelle eigentliche G -Raum $\mathcal{E}G = G/K$ bereits G -kompakt. Für jede G -Algebra B gilt daher

$$\mathbb{K}_*^{\text{top}}(G; B) = \mathbb{K}_*^G(C_0(G/K), B).$$

Da in diesem Fall $G \setminus \mathcal{E}G = \{pt\}$ gilt, folgt

$$\lambda_{G/K, G} = \Lambda_{G/K, G} \in \mathbb{K}(\mathbb{C}, C_0(G/K) \rtimes G),$$

und die Assembly-Abbildung mit Koeffizienten in der G -Algebra B ist gegeben als Komposition

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_*^G(C_0(G/K), B) & \xrightarrow{\mu_B} & \mathbb{K}_*(\mathbb{C}, B \rtimes_r G) \\ \downarrow j_{G,r} & \nearrow \lambda_{G/K, G} \otimes \cdot & \\ \mathbb{K}_*(C_0(X) \rtimes G, B \rtimes_r G) & & \end{array}$$

Wie oben bemerkt wurde, ist die Multiplikation mit dem γ -Element die Identität auf $\mathbb{K}_*^G(C_0(G/K), B)$, und nach [Kas88, Cor. zu Thm. 5.7] ist die Restriktionsabbildung

$$r_K^G : \mathbb{K}_*^G(C_0(G/K), B) \longrightarrow \mathbb{K}_*^K(C_0(G/K), B)$$

ein Isomorphismus. Unter Verwendung des K -äquivarianten Diffeomorphismus $V = T_{eK}(G/K) \cong G/K$ erhält man somit die Identifikation

$$\mathbb{K}_*^{\text{top}}(G; B) \cong \mathbb{K}_*^G(C_0(G/K), B) \cong \mathbb{K}_*^K(C_0(G/K), B) \cong \mathbb{K}_*^K(C_0(V), B).$$

Wie in [CE01b, Lemma 7.7] sieht man, daß Tensorieren mit $C_0(V)$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\sigma_{C_0(V)} : \mathbb{K}_*^K(C_0(V), B) \longrightarrow \mathbb{K}_*^K(C_0(V) \otimes C_0(V), B \otimes C_0(V))$$

liefert. Aus Kasparovs Bott-Periodizitätssatz [Kas81, §5, Thm.7] folgt jedoch, daß die Algebra $C_0(V) \otimes C_0(V)$ \mathbb{K}_*^K -äquivalent zu \mathbb{C} ist, und man erhält die Identifikationen

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_*^K(C_0(V), B) &\stackrel{\sigma_{C_0(V)}}{\cong} \mathbb{K}_*^K(C_0(V) \otimes C_0(V), C_0(V) \otimes B) \\ &\cong \mathbb{K}_*^K(\mathbb{C}, C_0(V) \otimes B) \stackrel{G-J}{\cong} \mathbb{K}_*((B \otimes C_0(V)) \rtimes K), \end{aligned}$$

wobei der letzte Isomorphismus aus dem Green-Julg-Theorem folgt.

Als euklidischer Vektorraum mit linearer K -Wirkung ist V in kanonischer Weise K -äquivariant isomorph zu $V^* \cong \hat{V}$. Für abelsche Gruppen gilt $C_0(\hat{V}) \cong C^*(V)$; somit läßt sich $C_0(V)$ K -äquivariant mit $C^*(V)$ identifizieren. Unter der trivialen Wirkung von V auf B gilt $B \otimes C^*(V) \cong B \rtimes V$, und es folgt

$$(B \otimes C_0(V)) \rtimes K \cong (B \otimes C^*(V)) \rtimes K \cong (B \rtimes V) \rtimes K \cong B \rtimes (V \rtimes K).$$

Abelsche und kompakte Gruppen sind mittelbar. Somit ist auch das semidirekte Produkt $V \rtimes K$ eine mittelbare Gruppe, und für mittelbare Gruppen stimmen die vollen und reduzierten verschränkten Produkte überein.

Somit läßt sich für eine fast zusammenhängende Gruppe G die topologische K -Theorie $K_*^{\text{top}}(G; B)$ von G mit Koeffizienten in B mit $K_*(B \rtimes (V \rtimes K))$ identifizieren.

Die topologische K -Theorie mit Werten in der G -Algebra B läßt sich auch noch auf eine andere Weise mit $K_*(B \rtimes (V \rtimes K))$ identifizieren:

Der homogene Raum G/K besitzt die Struktur einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppe G via Linkstranslation durch Isometrien wirkt. Bezeichnet wieder V den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit G/K im Punkt eK , so läßt sich $C_\tau(G/K)$ mit der induzierten Algebra

$$\begin{aligned} \text{Ind}_K^G(\mathcal{C}\ell(V^*)) = \{f \in C_b(G, \mathcal{C}\ell(V^*)) \mid f(gk) = k^{-1} \cdot f(g) \forall g \in G, k \in K \\ \text{und } \|f(g)\| \xrightarrow{gK \rightarrow \infty} 0\} \end{aligned}$$

identifizieren, wobei der G -äquivariante Isomorphismus durch

$$\text{Ind}_K^G(\mathcal{C}\ell(V^*)) \longrightarrow C_\tau(G/K); \quad f \mapsto (gK \mapsto g \cdot f(g))$$

gegeben wird. Nach [Kas95, §5, Lemma 1 (2)] ist die Abbildung

$$\text{Ind}_K^G(\mathcal{C}\ell(V^*)) \otimes B \longrightarrow \text{Ind}_K^G(\mathcal{C}\ell(V^*) \otimes B), \quad \sum_i f_i(g) \otimes b_i \mapsto \sum_i f_i(g) \otimes g^{-1} \cdot b_i$$

für jede G -Algebra B ein G -äquivarianter Isomorphismus.

Somit sind nach Greens Imprimitivitätssatz $\mathcal{C}\ell(V^*) \rtimes K$ und $C_\tau(G/K) \rtimes_r G$ Morita-äquivalent; ebenso hat man eine Morita-Äquivalenz von $(\mathcal{C}\ell(V^*) \otimes B) \rtimes K$ und $\text{Ind}_K^G(\mathcal{C}\ell(V^*) \otimes B) \rtimes_r G \cong (C_\tau(G/K) \otimes B) \rtimes_r G$.

Nach Kasparovs Bott-Periodizitätssatz [Kas81, §5, Thm.7] sind die Algebren $C_0(V)$ und $\mathcal{C}\ell(V^*)$ KK^K -äquivalent; Tensorieren mit B liefert somit eine KK^K -Äquivalenz der Algebren $C_0(V) \otimes B$ und $\mathcal{C}\ell(V^*) \otimes B$.

Aus der Verträglichkeit der Descent-Abbildung mit dem Kasparov-Produkt und der Tatsache, daß der Descent das Einselement auf das Einselement abbildet,

folgt daher die KK-Äquivalenz von $(\mathcal{C}\ell(V^*) \otimes B) \rtimes K$ und $(C_0(V) \otimes B) \rtimes K$. Letztere Algebra ist wie oben beschrieben isomorph zu $B \rtimes (V \rtimes K)$.

Somit erhält man Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, B \rtimes (V \rtimes K)) &\cong \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, (C_0(V) \otimes B) \rtimes K) \\ &\cong \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, (\mathcal{C}\ell(V^*) \otimes B) \rtimes K) \\ &\cong \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, (C_\tau(G/K) \otimes B) \rtimes_r G); \end{aligned}$$

der zweite Isomorphismus folgt dabei aus Kasparovs Bott-Periodizität, der dritte aus der Morita-Äquivalenz aus Greens Imprimitivitätssatz.

Nach A.6 ist die Abbildung $\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; B) \xrightarrow{\cdot \otimes \mathcal{C}\eta} \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; C_\tau(G/K) \otimes B)$ ein Isomorphismus; gleiches gilt für die Assembly-Abbildung mit Koeffizienten in der eigentlichen G -Algebra $C_\tau(G/K) \otimes B$, d.h. es gilt

$$\mathrm{K}_*(B \rtimes (V \rtimes K)) \cong \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, (C_\tau(G/K) \otimes B) \rtimes_r G) \cong \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; B).$$

Diese zweite Identifikation muß nicht mit der vorigen übereinstimmen.

Anwenden lassen sich letztere Überlegungen natürlich insbesondere auf den Fall einer fast zusammenhängenden Lie-Gruppe G mit maximal kompakter Untergruppe K . Zusammenfassend läßt sich folgendes festhalten:

Ist G eine fast zusammenhängende (Lie-)Gruppe mit maximal kompakter Untergruppe K , so bezeichne $V = T_{eK}(G/K)$ den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit G/K im Punkt eK und V^* den Dualraum zu V , welcher mit dem Pontrjagin-Dual \hat{V} identifiziert werden kann. Für eine G -Algebra B sei

- $[D_G] \in \mathrm{KK}^G(C_\tau(G/K), \mathbb{C})$ Kasparovs Dirac-Element,
- $\delta \in \mathrm{KK}^K(C_0(V), \mathcal{C}\ell(V^*))$ die KK^K -Äquivalenz aus Kasparovs Bott-Periodizitätssatz,
- $[\mathfrak{X}_{\mathfrak{B}}] \in \mathrm{KK}((\mathcal{C}\ell(V^*) \otimes B) \rtimes K, (C_\tau(G/K) \otimes B) \rtimes_r G)$ das durch die Morita-Äquivalenz gegebene KK-Element und
- $\psi : B \rtimes (V \rtimes K) \longrightarrow (B \otimes C_0(V)) \rtimes K$ der Isomorphismus, welcher durch den K -äquivarianten Isomorphismus $B \otimes C^*(V) \cong B \otimes C_0(V)$ und den Isomorphismus $B \rtimes (V \rtimes K) \longrightarrow (B \otimes C^*(V)) \rtimes K$ für semidirekte Produkte von Gruppen gegeben ist.

Definition A.9. Das Element

$$[D_{G,B}] := [\psi] \otimes j_K(\delta \otimes 1_B) \otimes [\mathfrak{X}_{\mathfrak{B}}] \otimes j_{G,r}([D_G] \otimes 1_B) \in \text{KK}(B \rtimes (V \rtimes K), B \rtimes_r G)$$

heißt das Dirac-Element zum Paar (G, K) für die Koeffizientenalgebra B .

Unter den oben gemachten Identifikationen wird die Assembly-Abbildung mit Koeffizienten in B

$$\begin{aligned} \mu_B : \text{K}_*^{\text{top}}(G; B) \cong \text{K}_*(B \rtimes (V \rtimes K)) &\longrightarrow \text{K}_*(B \rtimes_r G), \\ x &\mapsto x \otimes [D_{G,B}] \end{aligned}$$

dann durch das Kasparov-Produkt mit dem Dirac-Element für (G, K) gegeben.

Anhang B

Clifford-Algebren

An dieser Stelle sollen kurz einige Resultate aus der Theorie der Clifford-Algebren bereitgestellt werden, welche im Verlauf der Arbeit benötigt werden. Im allgemeinen können Clifford-Algebren für (endlich-dimensionale) Vektorräume über einem beliebigen Körper k definiert werden, wobei an einigen Stellen vorausgesetzt werden muß, daß die Charakteristik von k ungleich 2 ist. Für die vorliegende Arbeit sind aber nur Clifford-Algebren über reellen oder komplexen Vektorräumen von Interesse. Deshalb sei im folgenden stets $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$.

Referenzen für die Theorie von Clifford-Algebren sind z.B. der Artikel [ABS64], die Bücher [Cru90] und [Kar78], sowie die Arbeiten [Kas81] und [Kas88]. Im Gegensatz zu den übrigen erwähnten Autoren verwendet Kasparov eine abweichende Vorzeichenkonvention. Zumindest im Fall komplexer Clifford-Algebren sind die unterschiedlich definierten Strukturen zueinander isomorph.

Die folgende Definition verwendet die Konvention von Kasparov:

Definition B.1. Es sei V ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum mit einer quadratischen Form Q . In der Tensoralgebra

$$T(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$$

(wobei $V^{\otimes 0} = k$ gilt und $V^{\otimes n}$ das n -fache Tensorprodukt von V bezeichnet) sei $I(Q)$ das von der Menge

$$\{v \otimes v - Q(v) \cdot 1 \mid v \in V\}$$

erzeugte zweiseitige Ideal. Der Quotient

$$Cl(V) := Cl(V, Q) := T(V)/I(Q)$$

heißt die Clifford-Algebra von V (bzw. zum Paar (V, Q)).

Die Tensoralgebra $T(V)$ besitzt in natürlicher Weise eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung mit $T(V)^{(0)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes 2n}$ und $T(V)^{(1)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes 2n+1}$. Das Ideal $I(Q)$ wird von homogenen Elementen erzeugt, und diese Zerlegung definiert auch eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung auf $\mathcal{C}l(V)$.

Als Algebra wird $\mathcal{C}l(V)$ von k und V unter der Relation $v \cdot v = Q(v) \cdot 1$ für alle $v \in V$ erzeugt; es gibt eine kanonische Einbettung $\iota : V \hookrightarrow \mathcal{C}l(V)$.

Die Clifford-Algebra erfüllt die folgende universelle Eigenschaft:

Satz B.2. *Es sei V ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum mit einer quadratischen Form Q , A eine unitale k -Algebra und $\phi : V \rightarrow A$ ein Homomorphismus, welcher die Bedingung $\phi(v) \cdot \phi(v) = Q(v) \cdot 1$ für alle $v \in V$ erfüllt.*

Dann existiert genau ein Algebrenhomomorphismus $\bar{\phi} : \mathcal{C}l(V) \rightarrow A$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & A \\ \downarrow \iota & \nearrow \bar{\phi} & \\ \mathcal{C}l(V) & & \end{array}$$

Beweis. Da $\mathcal{C}l(V)$ als Algebra von k und V erzeugt wird, gibt es höchstens einen Algebrenhomomorphismus $\bar{\phi}$, welcher ϕ fortsetzt.

Aufgrund der universellen Eigenschaft der Tensoralgebra läßt sich die Abbildung ϕ zu einem Algebrenhomomorphismus $\tilde{\phi} : T(V) \rightarrow A$ fortsetzen. Aus der Bedingung $\phi(v) \cdot \phi(v) = Q(v) \cdot 1$ folgt, daß das Ideal $I(Q)$ im Kern von $\tilde{\phi}$ enthalten ist. Somit faktorisiert $\tilde{\phi}$ über einen Homomorphismus $\bar{\phi} : \mathcal{C}l(V) \rightarrow A$. \square

Die universelle Eigenschaft charakterisiert die Clifford-Algebra zum Paar (V, Q) eindeutig bis auf Isomorphie.

Die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung auf $\mathcal{C}l(V)$ wird durch den Isomorphismus der Clifford-Algebra gegeben, welcher von dem Homomorphismus $V \rightarrow \mathcal{C}l(V), v \mapsto -v$ induziert wird.

Ist die quadratische Form nicht-entartet, so erhält man durch Polarisierung ein Skalarprodukt auf V . Umgekehrt definiert jedes Skalarprodukt in kanonischer Weise eine quadratische Form auf V .

Wirkt eine lokal-kompakte Gruppe G (stark stetig) durch lineare Isometrien auf einem euklidischen (oder hermiteschen) Vektorraum V , so ist die quadratische Form Q invariant unter dieser Wirkung, und aufgrund der universellen Eigenschaft setzt sich die Wirkung in kanonischer Weise zu einer G -Wirkung auf $\mathcal{C}l(V)$ fort.

Ist e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis von V bezüglich Q , so erfüllen diese Elemente die Relationen

$$e_i \cdot e_i = 1 \quad \text{ sowie } \quad e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i \quad \text{ für } i \neq j,$$

und die Elemente der Form $e_I = e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_r}$ für $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ (wobei $e_\emptyset = 1$ zu setzen ist) bilden eine k -Basis von $\text{Cl}(V)$. Die Clifford-Algebra ist somit eine k -Algebra der Dimension $2^{\dim V}$.

Gilt $k = \mathbb{R}$, so läßt sich die quadratische Form auf V in kanonischer Weise zu einer quadratischen Form die Komplexifizierung $V \otimes \mathbb{C}$ fortsetzen, und es gilt

$$\text{Cl}(V \otimes \mathbb{C}) \cong \text{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}.$$

In dieser Situation wird auch die suggestive Notation $\mathbb{C}\ell(V)$ für die komplexe Clifford-Algebra eines reellen Vektorraums verwendet.

Beispiel B.3. Gilt $\dim V = 1$ und ist $v \in V$ ein Element mit $Q(v) = 1$, so ist $\{1, v\}$ eine Basis von $\text{Cl}(V)$. Die Elemente $e_1 = \frac{1}{2}(1 + v)$ und $e_2 = \frac{1}{2}(1 - v)$ bilden ebenfalls eine Basis von $\text{Cl}(V)$, welche die Bedingungen $e_i \cdot e_i = e_i$ und $e_1 \cdot e_2 = 0 = e_2 \cdot e_1$ erfüllen. Durch $e_1 \mapsto (1, 0)$ und $e_2 \mapsto (0, 1)$ wird somit ein Algebrenisomorphismus $\text{Cl}(V) \xrightarrow{\cong} k \oplus k$ definiert. Unter diesem Isomorphismus wird die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung auf $k \oplus k$ durch den Automorphismus $\mathcal{F}(\lambda, \mu) = (\mu, \lambda)$ gegeben.

Ist dagegen V ein reeller euklidischer Vektorraum mit $\dim V = 2$, so ist die (komplexe) Clifford-Algebra $\mathbb{C}\ell(V)$ isomorph zur Algebra der 2×2 -Matrizen mit Werten in \mathbb{C} .

Für eine Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ von V wird nämlich durch

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 \cdot e_2 \mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus $\mathbb{C}\ell_2 \xrightarrow{\cong} M_2(\mathbb{C})$ definiert. Unter diesem Isomorphismus gilt für die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung auf $M_2(\mathbb{C})$

$$M_2(\mathbb{C})^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{ und } \quad M_2(\mathbb{C})^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Proposition B.4. Für zwei endlich-dimensionale k -Vektorräume V und W mit quadratischen Formen Q_V und Q_W gilt

$$\text{Cl}(V \oplus W) \cong \text{Cl}(V) \hat{\otimes} \text{Cl}(W).$$

Dabei ist $V \oplus W$ die orthogonale direkte Summe der beiden Vektorräume, versehen mit der quadratischen Form $Q_V \oplus Q_W$, und auf der rechten Seite bezeichnet $\hat{\otimes}$ das graduierte Tensorprodukt der beiden Clifford-Algebren.

Beweis. Aufgrund der Eigenschaften des graduierten Tensorprodukts erfüllt die lineare Abbildung

$$f : V \oplus W \longrightarrow \mathcal{Cl}(V) \hat{\otimes} \mathcal{Cl}(W), \quad (v, w) \mapsto v \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} w$$

die Bedingung

$$\begin{aligned} f(v, w) \cdot f(v, w) &= (v \cdot v) \hat{\otimes} 1 + (v \hat{\otimes} 1) \cdot (1 \hat{\otimes} w) + (1 \hat{\otimes} w) \cdot (v \hat{\otimes} 1) + 1 \hat{\otimes} (w \cdot w) \\ &= (v \cdot v) \hat{\otimes} 1 + v \hat{\otimes} w - v \hat{\otimes} w + 1 \hat{\otimes} (w \cdot w) \\ &= (Q_V(v) + Q_W(w)) \cdot (1 \hat{\otimes} 1). \end{aligned}$$

Aus der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebren folgt, daß f sich zu einem Algebrenhomomorphismus

$$\bar{f} : \mathcal{Cl}(V \oplus W) \longrightarrow \mathcal{Cl}(V) \hat{\otimes} \mathcal{Cl}(W)$$

fortsetzen läßt. Da $f(V \oplus 0) = V \hat{\otimes} 1$ und $f(0 \oplus W) = 1 \hat{\otimes} W$ gilt, ist die Abbildung \bar{f} surjektiv. Aus Dimensionsgründen ist \bar{f} ein Isomorphismus. \square

Proposition B.5. *Sind V und W zwei (endlich-dimensionale) reelle Vektorräume mit quadratischen Formen Q_V bzw. Q_W und ist $\dim V = 2k$ gerade, so existiert ein Isomorphismus*

$$\mathcal{Cl}(V \oplus W) \cong \mathcal{Cl}(V) \otimes \mathcal{Cl}(W),$$

wobei auf der rechten Seite das ungraduierte Tensorprodukt verwendet wird und $V \oplus W$ die orthogonale direkte Summe der beiden Vektorräume bezeichnet.

Beweis. Ist e_1, \dots, e_{2k} eine Orthonormalbasis von V , so erfüllt $\varepsilon := ie_1e_2$ die Bedingungen $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon^* := -ie_2e_1 = \varepsilon$ und $\varepsilon \cdot v = -v \cdot \varepsilon$ für alle $v \in V$. Setzt man

$$f(v, w) = v \otimes 1 + \varepsilon \otimes w \quad \text{für } v \in V \text{ und } w \in W,$$

so gilt

$$f(v, w) \cdot f(v, w) = (v \cdot v) \otimes 1 + 1 \otimes (w \cdot w) = (Q_V(v) + Q_W(w)) \cdot (1 \otimes 1),$$

und aufgrund der universellen Eigenschaft setzt sich die Abbildung zu einem Algebrenhomomorphismus

$$f : \mathcal{Cl}(V \oplus W) \longrightarrow \mathcal{Cl}(V) \otimes \mathcal{Cl}(W)$$

fort. Für $v \in V$ und $w \in W$ gilt $f(v, 0) = v \otimes 1$ sowie $f(0, w) = \varepsilon \otimes w$. Die (komplexen) Vielfachen dieser Elemente erzeugen $\mathcal{Cl}(V) \otimes \mathcal{Cl}(W)$ als Algebra. Somit ist die Abbildung f surjektiv und daher ein Isomorphismus, da $\mathcal{Cl}(V \oplus W)$ und $\mathcal{Cl}(V) \otimes \mathcal{Cl}(W)$ endlich-dimensionale Vektorräume von gleicher Dimension sind. \square

Bezeichnet α den Isomorphismus von $\mathcal{Cl}(V)$, welcher die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Graduierung definiert (also den durch $\alpha(v) = -v$ für $v \in V$ gegebenen Isomorphismus der Clifford-Algebra $\mathcal{Cl}(V)$), und β den Graduierungsoperator von $\mathcal{Cl}(W)$, so wird unter dem Isomorphismus f auch $\mathcal{Cl}(V) \otimes \mathcal{Cl}(W)$ zu einer $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduierter Algebra, wobei der Graduierungsoperator durch den Automorphismus (α, β) gegeben wird.

Unter Ausnutzung des Isomorphismus $M_k(\mathbb{C}) \otimes M_l(\mathbb{C}) \cong M_{k \cdot l}(\mathbb{C})$ für Matrixalgebren folgt aus B.5 per Induktion:

Satz B.6. *Es sei V ein reeller Vektorraum mit quadratischer Form Q . Ist $\dim V = 2k$ gerade, so gilt $\mathcal{Cl}(W) \cong M_{2^k}(\mathbb{C})$.*

Es sei nun wieder V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$; das Skalarprodukt und die assoziierte quadratische Form seien in kanonischer Weise auf die Komplexifizierung fortgesetzt. Es bezeichne $\Lambda^*V \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{r=0}^n \Lambda^r V \otimes \mathbb{C}$ die (komplexifizierte) assoziierte äußere Algebra.

Der durch das Skalarprodukt gegebene kanonische Isomorphismus $V \cong V^*$ definiert für alle $1 \leq r \leq n$ einen Isomorphismus $(\Lambda^r V \otimes \mathbb{C})^* \cong \Lambda^r(V \otimes \mathbb{C})^*$; auf der äußeren Algebra kann somit ein Skalarprodukt definiert werden, so daß $\Lambda^*V \otimes \mathbb{C}$ ein komplexer Hilbertraum ist.

Durch eine Einbettung der Clifford-Algebra $\mathcal{Cl}(V)$ in die beschränkten Operatoren dieses Hilbertraums wird auf $\mathcal{Cl}(V)$ die Struktur einer C^* -Algebra definiert. Diese Konstruktion wurde im zweiten Kapitel bereits beschrieben. Der Vollständigkeit halber wird sie an dieser Stelle noch einmal wiederholt:

Für $\xi \in V \otimes \mathbb{C}$ bezeichne ξ^* das durch komplexe Konjugation erhaltene Element,

$$\lambda_\xi : \Lambda^*V \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \Lambda^*V \otimes \mathbb{C}$$

den durch $\lambda_\xi(\omega) := \xi \wedge \omega$ definierten Operator, und λ_ξ^* den adjungierten Operator bezüglich des Skalarprodukts der äußeren Algebra.

Sind $w_1, \dots, w_k \in V \otimes \mathbb{C}$, so gilt

$$\lambda_\xi^*(w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \langle \xi, w_j \rangle \cdot w_1 \wedge \dots \wedge \hat{w}_j \wedge \dots \wedge w_k;$$

insbesondere ist die Zuordnung $\xi \mapsto \lambda_\xi^*$ antilinear. Es gilt $\lambda_\xi^2 = 0 = (\lambda_\xi^*)^2$ und

$$(\lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}^*)^2 = Q(\xi) \cdot \text{id}.$$

Letzteres sieht man wie folgt: Ist e_1, \dots, e_n eine (komplexe) Orthonormalbasis von $V \otimes \mathbb{C}$ mit $e_i^* = e_i$, so gilt für $\xi = \sum_{j=1}^n a_j \cdot e_j$ und $\xi^* = \sum_{j=1}^n \bar{a}_j \cdot e_j$ unter Ausnutzung der Antilinearität von $\xi \mapsto \lambda_\xi^*$

$$(\lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}^*)^2 = \lambda_\xi \lambda_{\xi^*}^* + \lambda_{\xi^*}^* \lambda_\xi = \sum_{j,k=1}^n a_j a_k \cdot (\lambda_{e_j} \lambda_{e_k}^* + \lambda_{e_k}^* \lambda_{e_j}).$$

Durch Nachrechnen auf der Orthonormalbasis $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ für $i_1 < \dots < i_p$ und $0 \leq p \leq n$ von $\Lambda^* V \otimes \mathbb{C}$ erkennt man, daß

$$\lambda_{e_j} \lambda_{e_k}^* + \lambda_{e_k}^* \lambda_{e_j} = 0 \quad \text{für } j \neq k \quad \text{und} \quad \lambda_{e_j} \lambda_{e_j}^* + \lambda_{e_j}^* \lambda_{e_j} = \text{id}$$

gilt. Somit ergibt sich

$$(\lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}^*)^2 = \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \cdot \text{id} = Q(\xi) \cdot \text{id}.$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft von Clifford-Algebren setzt sich die Abbildung

$$V \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^* V \otimes \mathbb{C}), \quad \xi \mapsto \lambda_\xi + \lambda_{\xi^*}^*$$

zu einem Algebrenhomomorphismus

$$\mathbb{C}l(V) \longrightarrow \mathcal{L}(\Lambda^* V \otimes \mathbb{C})$$

fort. Mit der von dieser Darstellung gegebenen Operatornorm und Involution wird $\mathbb{C}l(V)$ zu einer C^* -Algebra; alle weiter oben angegebenen Strukturen und Isomorphismen der Clifford-Algebra sind mit dieser Struktur als C^* -Algebra verträglich.

Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so läßt sich das Tangentialbündel von M in kanonischer Weise mit dem Kotangentialbündel identifizieren. Auf der Komplexifizierung des Kotangentialbündels ist dann eine hermitesche Metrik definiert, bezüglich derer das assoziierte Clifford-Bündel gebildet werden kann. Dieses ist ein Bündel von C^* -Algebren über der Mannigfaltigkeit M , da sich die oben betrachtete faserweise Konstruktion auf das Bündel übertragen läßt.

Literaturverzeichnis

- [Abe75] ABELS, HERBERT: *Parallelizability of proper actions, global K -slices and maximal compact subgroups*. Math. Ann., 212:1–19, 1974/75.
- [ABS64] ATIYAH, M.F., BOTT, R. und SHAPIRO, A.: *Clifford modules*. Topology, 3(suppl. 1):3–38, 1964.
- [AR00] ANANTHARAMAN-DELAROCHE, C. und RENAULT, J.: *Amenable groupoids*, Band 36 der Reihe *Monographies de L'Ens. Math.* L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000.
- [BCH94] BAUM, PAUL, CONNES, ALAIN und HIGSON, NIGEL: *Classifying space for proper actions and K -theory of group C^* -algebras*. In: *C^* -algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*, Band 167 der Reihe *Contemp. Math.*, Seiten 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Bla96] BLANCHARD, ÉTIENNE: *Déformations de C^* -algèbres de Hopf*. Bull. Soc. Math. France, 124(1):141–215, 1996.
- [Bla98] BLACKADAR, BRUCE: *K -theory for operator algebras*, Band 5 der Reihe *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge University Press, Cambridge, Second Auflage, 1998.
- [Bla06] BLACKADAR, BRUCE: *Operator algebras*, Band 122 der Reihe *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Bou67] BOURBAKI, NICOLAS: *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIII. Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats (Paragraphes 1 à 7)*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1333. Hermann, Paris, 1967.
- [Bou98a] BOURBAKI, NICOLAS: *General topology. Chapters 1–4*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Bou98b] BOURBAKI, NICOLAS: *Lie groups and Lie algebras. Chapters 1–3*. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998.

- [CE01a] CHABERT, JÉRÔME und ECHTERHOFF, SIEGFRIED: *Permanence properties of the Baum-Connes conjecture*. Doc. Math., 6:127–183 (electronic), 2001.
- [CE01b] CHABERT, JÉRÔME und ECHTERHOFF, SIEGFRIED: *Twisted Equivariant KK-Theory and the Baum-Connes Conjecture for Group Extensions*. K-Theory, 23:157–200, 2001.
- [CEM01] CHABERT, JÉRÔME, ECHTERHOFF, SIEGFRIED und MEYER, RALF: *Deux remarques sur l'application de Baum-Connes*. Comptes Rendues Acad. Sci. Paris, 332, Série 1:607–610, 2001.
- [CEN03] CHABERT, JÉRÔME, ECHTERHOFF, SIEGFRIED und NEST, RYSZARD: *The Connes-Kasparov conjecture for almost connected groups and for linear p -adic groups*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., (97):239–278, 2003.
- [Cha00] CHABERT, JÉRÔME: *Baum-Connes conjecture for semi-direct products*. Journal für reine und angewandte Mathematik, 521:161–184, 2000.
- [Con94] CONNES, ALAIN: *Noncommutative geometry*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.
- [Cru90] CRUMEYROLLE, ALBERT: *Orthogonal and symplectic Clifford algebras*, Band 57 der Reihe *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.
- [DG83] DUPRÉ, M.J. und GILLETTE, R.M.: *Banach bundles, Banach modules and automorphisms of C^* -algebras*. Research Notes in Mathematics, 92. Boston - London - Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1983.
- [Dix64] DIXMIER, JACQUES: *Les C^* -algèbres et leurs représentations*. Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX. Gauthier-Villars & Cie, Éditeur-Imprimeur, Paris, 1964.
- [Ech96] ECHTERHOFF, SIEGFRIED: *Crossed products with continuous trace*. Mem. Amer. Math. Soc., 123(586):viii+134, 1996.
- [Els96] ELSTRODT, JÜRGEN: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 1996.
- [EW98] ECHTERHOFF, SIEGFRIED und WILLIAMS, DANA P.: *Crossed products by $C_0(X)$ -actions*. J. Funct. Anal., 158(1):113–151, 1998.

- [FD88] FELL, J.M.G. und DORAN, R. S.: *Representations of $*$ -algebras, locally compact groups, and Banach $*$ -algebraic bundles. Vol. 1*, Band 125 der Reihe *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.
- [GES94] GAMKRELIDZE, R.V., EGOROV, YU.V. und SHUBIN, M.A. (Herausgeber): *Partial differential equations II. Elements of the modern theory. Equations with constant coefficients*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. 31. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [Hel78] HELGASON, SIGURDUR: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Band 80 der Reihe *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., New York, 1978.
- [HK01] HIGSON, NIGEL und KASPAROV, GENNADI: *E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*. Invent. Math., 144(1):23–74, 2001.
- [HN91] HILGERT, JOACHIM und NEEB, KARL-HERMANN: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Braunschweig: Vieweg, 1991.
- [Hoc68] HOCHSCHILD, G.: *La structure des groupes de Lie*. Monographies universitaires de mathématiques. 27. Paris: Dunod 1968. XVII, 254 p. , 1968.
- [HS87] HILSUM, MICHEL und SKANDALIS, GEORGES: *Morphismes K -orientés d'espaces de feuilles et functorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 20(3):325–390, 1987.
- [IW53] INONU, E. und WIGNER, E. P.: *On the contraction of groups and their representations*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 39:510–524, 1953.
- [JT91] JENSEN, KJELD KNUDSEN und THOMSEN, KLAUS: *Elements of KK-Theory*. Birkhäuser, 1991.
- [Kar78] KAROUBI, MAX: *K-theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1978. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 226.
- [Kar02] KAROUBI, MAX: *Equivariant K-theory of real vector spaces and real projective spaces*. Topology Appl., 122(3):531–546, 2002.
- [Kas81] KASPAROV, GENNADI: *The Operator K-Function and Extensions of C^* -Algebras*. Math. USSR Izvestija, 16(3):513–572, 1981.

- [Kas88] KASPAROV, GENNADI: *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*. *Inventiones Mathematicae*, 91:147–201, 1988.
- [Kas95] KASPAROV, G.G.: *K-theory, group C*-algebras, and higher signatures (conspectus)*. In: *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993)*, Band 226 der Reihe *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, Seiten 101–146. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [KS03] KASPAROV, GENNADI und SKANDALIS, GEORGES: *Groups acting properly on “bolic” spaces and the Novikov conjecture*. *Ann. of Math. (2)*, 158(1):165–206, 2003.
- [Kum98] KUMJIAN, ALEX: *Fell bundles over groupoids*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(4):1115–1125, 1998.
- [Laf99] LAFFORGUE, VINCENT: *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes*. Thèse de Doctorat, Université Paris Sud, 1999.
- [Laf06] LAFFORGUE, VINCENT: *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach, groupoïdes et conjecture de Baum-Connes*. <http://www.math.jussieu.fr/~vlafforg/>, 2006.
- [Lan03] LANDSMAN, N.P.: *Deformation quantization and the Baum-Connes conjecture*. *Comm. Math. Phys.*, 237(1-2):87–103, 2003.
- [LeG94] LEGALL, PIERRE-YVES: *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes*. Thèse de Doctorat, Université Paris VII, 1994.
- [LeG99] LEGALL, PIERRE-YVES: *Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes. I. K-Theory*, 16(4):361–390, 1999.
- [LeG01] LEGALL, PIERRE-YVES: *Groupoid C*-algebras and operator K-theory*. In: *Groupoids in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999)*, Band 282 der Reihe *Contemp. Math.*, Seiten 137–145. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [LM89] LAWSON, JR., H. BLAINE und MICHELSON, MARIE-LOUISE: *Spin geometry*, Band 38 der Reihe *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [LR01] LANDSMAN, N.P. und RAMAZAN, B.: *Quantization of Poisson algebras associated to Lie algebroids*. In: *Groupoids in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999)*, Band 282 der Reihe *Contemp. Math.*, Seiten 159–192. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

- [MM03] MOERDIJK, I. und MRČUN, J.: *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Band 91 der Reihe *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [MN06] MEYER, RALF und NEST, RYSZARD: *The Baum-Connes conjecture via localisation of categories*. *Topology*, 45(2):209–259, 2006.
- [MRW87] MUHLY, PAUL S., RENAULT, JEAN N. und WILLIAMS, DANA P.: *Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras*. *J. Operator Theory*, 17(1):3–22, 1987.
- [MS06] MOORE, CALVIN C. und SCHOCHET, CLAUDE L.: *Global analysis on foliated spaces*, Band 9 der Reihe *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge University Press, New York, Second Auflage, 2006.
- [Muh01] MUHLY, PAUL S.: *Bundles over groupoids*. In: *Groupoids in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999)*, Band 282 der Reihe *Contemp. Math.*, Seiten 67–82. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [MZ55] MONTGOMERY, DEANE und ZIPPIN, LEO: *Topological transformation groups*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics). New York: Interscience Publishers, Inc. XI, 1955.
- [Par07] PARAVICINI, WALTHER: *KK-Theory for Banach Algebras and Proper Groupoids*. Doktorarbeit, Westf. Wilhelms-Universität Münster, 2007.
- [Pat99] PATERSON, ALAN L. T.: *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Band 170 der Reihe *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.
- [Ped79] PEDERSEN, GERT K.: *C^* -algebras and their automorphism groups*, Band 14 der Reihe *London Mathematical Society Monographs*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1979.
- [Ram98] RAMAZAN, BIRANT: *Quantification par déformation des variétés de Lie-Poisson*. Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, 1998.
- [Ren80] RENAULT, JEAN: *A groupoid approach to C^* -algebras*, Band 793 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [Ren87] RENAULT, JEAN: *Représentation des produits croisés d'algèbres de groupoïdes*. *J. Operator Theory*, 18(1):67–97, 1987.

- [Ren91] RENAULT, JEAN: *The ideal structure of groupoid crossed product C^* -algebras*. J. Operator Theory, 25(1):3–36, 1991. With an appendix by Georges Skandalis.
- [RW98] RAEBURN, IAIN und WILLIAMS, DANA P.: *Morita equivalence and continuous-trace C^* -algebras*, Band 60 der Reihe *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [Tit83] TITS, JACQUES: *Liesche Gruppen und Algebren*. Hochschultext. [University Textbooks]. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Tu99] TU, JEAN-LOUIS: *La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques*. K-Theory, 16(2):129–184, 1999.
- [Tu00] TU, JEAN-LOUIS: *The Baum-Connes conjecture for groupoids*. In: *C^* -algebras (Münster, 1999)*, Seiten 227–242. Springer, Berlin, 2000.
- [Tu04] TU, JEAN-LOUIS: *Non-Hausdorff groupoids, proper actions and K-theory*. Doc. Math., 9:565–597 (electronic), 2004.
- [Val02] VALETTE, ALAIN: *Introduction to the Baum-Connes conjecture*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [Var84] VARADARAJAN, V. S.: *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Band 102 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [War83] WARNER, FRANK W.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Band 94 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Wil06] WILLIAMS, DANA P.: *Crossed Products of C^* -algebras (preliminary version)*. <http://www.math.dartmouth.edu/cpsa/>, 2006.
- [WO93] WEGGE-OLSEN, NIELS ERIK: *K-theory and C^* -algebras: a friendly approach*. Oxford University Press, 1993.
- [Wol73] WOLF, JOSEPH A.: *Essential self-adjointness for the Dirac operator and its square*. Indiana Univ. Math. J., 22:611–640, 1972/73.
- [Yam87] YAMAGAMI, SHIGERU: *On the ideal structure of C^* -algebras over locally compact groupoids*. Preprint, 1987.

