Pfingsttagung 2002

Workshop 306

Stefan Schlie

Der TI-83 / TI-92 Plus im Mittelstufenunterricht

erstmalig veröffentlich in:
Bärbel Barzel, Detlef Berntzen, Victor Manuel David Sendas: Neues Lernen. Neue Medien. Viele Projekte im Land. Tagungsdokumentation. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. 21.-24. Mai 2002. Münster 2003 (=ZKL-Texte Nr. 25), ISBN 3-934064-30-2

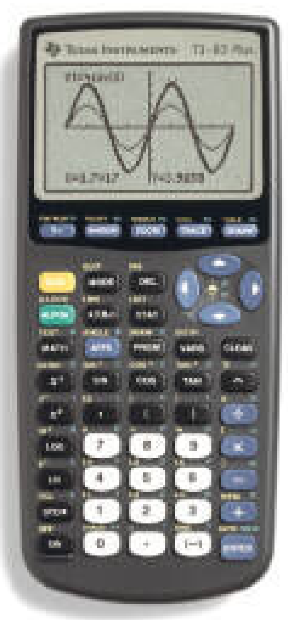
Der TI-83 / TI-92 PLUS im Mittelstufenunterricht

Workshop Nr. 306

Inhalt:

- **Quadratische Funktionen und Gleichungen in Klasse 9**
- **Wachstum in der Klasse 10**

Referent: Stefan Schlie, Osnabrück



Pfingsttagung
an der westfälischen Wilhelms-Universität in Münster
21. – 24.5.2002

Unterrichtseinheit „Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen“

- Einstieg: Die Regenrinnenaufgabe (ähnlich der Hühnerhofaufgabe)
  TI-83: Listen, Y-Fenster, Graph-Fenster, Tabelle
  Mathematisch: Extrempunkt, (Berechnung über CALC-Menü), Ortskurve der Extrempunkte
- Festigung: Die Kabelschachtaufgabe (ähnlich Hühnerhofaufgabe ohne Mauer)
  Gleiche Fragestellungen
- Wie können wir die Extremstelle auch zu Fuß berechnen?
  1. Satz: Die Extremstelle liegt in der Mitte der Nullstellen.
- Schülerfrage: Gilt der Satz auch noch, wenn eine Nullstelle nicht bei $x=0$ liegt?
  Weitere Funktionsgleichungen vom Lehrer vorgegeben:
  $y=-x^2-7x+10$, $y=2x^2-5$, $(y=x^2-x+3)$
- Begriffe: quadratische Funktion, Parabel
- 2. Satz: Die Extremstelle bei einer quadratische Funktion liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen, sofern zwei Nullstellen existieren.
- Beweis des Satzes fehlt noch.
  Lehrerfrage: Was haben wir von dem Satz?
  Eventuell nichts!!?? Denn das Problem wird ja nur verlagert. Vorher Extremstellenbestimmung, nachher Nullstellenbestimmung (bekannt aus Kl.9 von linearen Funktionen).
  Wir haben nur etwas davon, wenn wir die Nullstellen berechnen können.
- Aufgabe: Bestimme die Nullstellen der quadratischen Funktionsgleichungen und bestimme anschließend die Lage des Extrempunktes.
  Handelt es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt?
  Überprüfe mit dem TI-83 die Lage des Extrempunktes.
  $y=x(2x-6)$ $y=-(x-3)(x+4)$ $y=-x^2+4$ $y=3x^2-5$
  $y=1/2x^2+3x$ $y=2x^2+2$
- Systematisches Lösen quadratischer Gleichungen
  $y=ax^2+b$
  $y=(ax+b)(cx+d)$
  Weitere Übungen zur Form $y=(x-a)^2-b$
  Lösen der Gleichung $y=ax^2+bx+c$, zunächst mit $a=1$, dann allgemein (quadratische Ergänzung (müssen Schüler das noch beherrschen???))
- Wirtschaftaufgabe zur Festigung bzw. Vertiefung
- Verschieben und Strecken der Normalparabel ausgehend von einer Anwendungsaufgabe
- Wurzelfunktion

Term, Graph, Tabelle (Quadratische Funktionen, Extremwertaufgaben)

Aufgabenstellung (die Aufgabe kommt von A. Röttger)

1.
Ein Geschäftshaus soll durch einen Anbau erweitert werden, dazu muss auch eine neue Regenrinne installiert werden. Der Architekt schlägt aus ästhetischen Gründen eine Kastenrinne vor. Im Gespräch mit dem Unternehmer erfährt der Architekt, dass die Verwendung vorgefertigter Kupferblechstreifen von 55 cm Breite auch aus Kostengründen sinnvoll wäre. Der Unternehmer überträgt die Ausformung der Regenrinne einem Lehrling. Was hat dieser zu bedenken?

2.
Für andere Bauvorhaben sollen breitere bzw. schmalere Regenrinnen hergestellt werden. Dazu stehen vorgefertigte Bleichstreifen verschiedener Breite zur Verfügung.
Erarbeiten Sie eine Konstruktionsanleitung für den Bau einer Kastenrinne mit variabler Breite.

3.
Üblicherweise werden Regenrinnen mit halbkreisförmigem Querschnitt angefertigt. Warum?

Beispiellösung mit dem TI-83

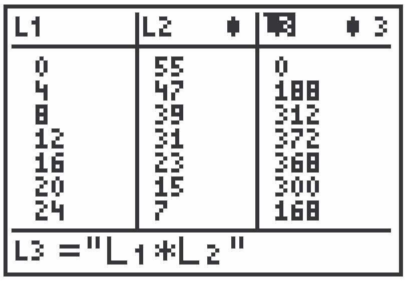
1.

Die Schülerinnen und Schüler lernen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe das Listen-Menü, das Funktionen - Menü (**Y=**) , den Umgang mit der Wertetabelle (**TABLE**) zu einer bestimmten Funktion sowie die Visualisierung (**GRAPH**) eines Funktionsgraphen kennen.

Die Aufgabenstellung ist bewusst offen formuliert. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich zunächst auf die „Kastenform“ - rechteckiger Querschnitt - verständigen und heraus arbeiten, dass es sinnvoll ist, eine Rinne mit möglichst großem Fassungsvermögen zu installieren. Dazu reicht es aus, die maximale Querschnittsfläche für einen Blechstreifen von 55 cm Länge zu ermitteln.

Verwendung des Listen-Menüs:

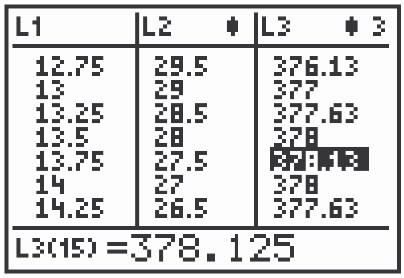
In L1 werden die Rinnenhöhen, in L2 die Breiten und in L3 die Flächeninhalte eingetragen.
In L1 tragen wir dazu von Hand Werte ein.
In den Kopf von L2 schreiben wir: 55-2L1,
in den Kopf von L3: L2*L1
Durch die Raute kann die Formel im Listenkopf angezeigt werden.



L1	L2	L3
0	55	0
4	47	188
8	39	312
12	31	372
16	23	368
20	15	300
24	7	168

L3 ="L1*L2"

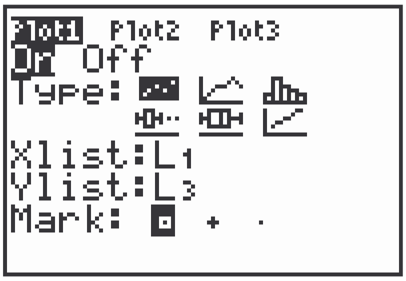
Eine Verfeinerung um 12cm herum ist geboten.
Der Befehl sortA(L1) sortiert die Listenwerte der ersten Liste von klein nach groß. Die Werte in L2 und L3 werden ebenfalls passend verschoben.

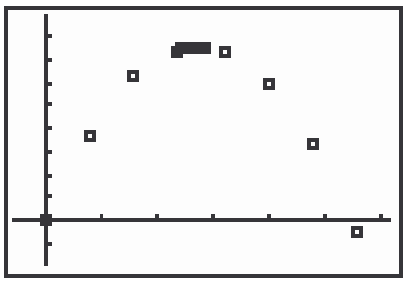


L1	L2	L3
12.75	29.5	376.13
13	29	377
13.25	28.5	377.63
13.5	28	378
13.75	27.5	378.13
14	27	378
14.25	26.5	377.63

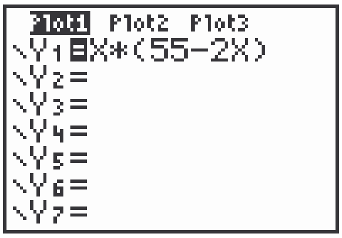
L3(15) =378.125

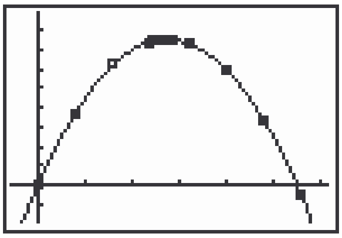
Mit Hilfe von STAT-PLOT wird das Zeichnen des Werte aus Liste 3 in Abhängigkeit von Liste 1 vorbereitet.
Anschließend wird über ZOOM STAT das passende Fenster gewählt.

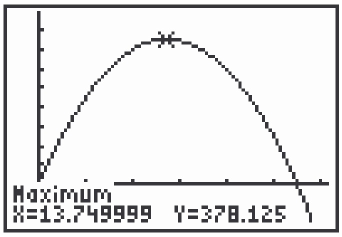




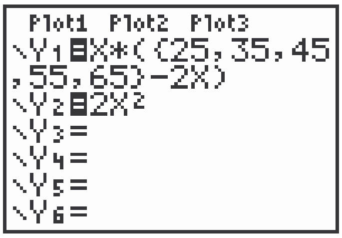
Eine Verallgemeinerung des Sachverhalts führt zu der Funktion A der Querschnittsfläche mit x als Höhe der Rinne : A(x) = x (55-2x)
Die Bestimmung des Maximums erfolgt mit dem GTR anhand des Graphen.

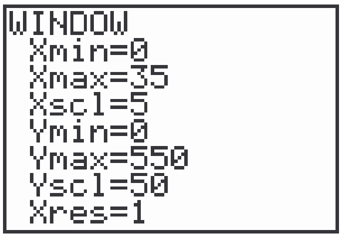


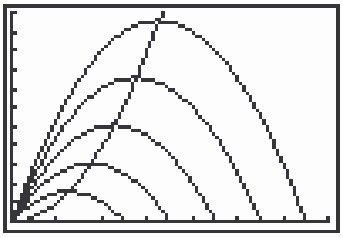




2.
Die Schülerinnen und Schüler werden mit selbst gewählten Werten für die Breite der Kupferbleche experimentieren.
Für die Kupferblechbreiten 25cm, 35cm, 45cm, 55cm, 65cm ergeben sich die nebenstehenden Graphen im GRAPH-Fenster.
Eine Analyse des jeweiligen Maximums zeigt für eine allgemeine Rinnenbreite b, dass die Rinne für folgende Werte optimal ist:
Höhe b/4, Breite b/2, $A_{max}=b^2/8$.
Daraus ergibt sich als Gleichung der Ortskurve der Maxima: $y=2x^2$.







3.

Die halbkreisförmige Regenrinne hat mit einer Querschnittsfläche von $\frac{b^2}{2\pi}$ das größere Volumen.

Aufgabenstellung (die Aufgaben 1 und 2 kommen von R. Fulge)

Das Unternehmen Pharma AG stellt Impfstoffe her. Da die AG für eines ihrer Produkte die einzige Anbieterin am Pharmamarkt ist und es eine große Anzahl von Nachfragern gibt, hält sie ein Angebotsmonopol.

Die Pharma AG hat ein Marktforschungsunternehmen mit einer Umfrage beauftragt. Diese hat ergeben, dass bei einem Preis von 150 € 2500 Packungen des Impfstoffes abgesetzt werden können, bei einem Preis von 50 € dagegen 7500 Packungen. Die Preisabsatzfunktion gibt diesen Zusammenhang zwischen dem Preis und der abgesetzten (verkauften) Menge des Produktes an. Sie hat einen linearen Verlauf.

Aufgabe 1

a) Zeichne in dein Heft den Graphen der Preisabsatzfunktion.
(Hinweis: In der Wirtschaft ist es üblich, die abgesetzte Menge auf der x-Achse und den Preis auf der y-Achse abzutragen.)

b) Wähle zwei Punkte auf dem Graphen, und erläutere die Bedeutung dieser Punkte in Bezug auf das praktische Problem. Erkläre an einem Beispiel, welche Auswirkungen eine Preisänderung hat, und begründe dies.

c) Lies den x- und y-Achsenabschnitt ab, und erläutere die Bedeutung dieser beiden Werte.

d) Gib die Funktionsgleichung der Preisabsatzfunktion p und deren Definitions- und Wertebereich an. Zeichne den Graphen der Preisabsatzfunktion auch im TI-83.

e) Erläutere die Bedeutung der Parameter in der Funktionsgleichung der Preisabsatzfunktion.

f) Erkläre, inwiefern die Aufgabenstellung unrealistisch bzw. nicht sinnvoll wäre, wenn die Pharma AG nicht alleiniger Anbieter des Impfstoffes, also Monopolist, wäre.

Wenn die Pharma AG den Impfstoff absetzt, erzielt sie einen Ertrag (dies sind die Einnahmen aus dem Verkauf des Produktes ohne Berücksichtigung der Herstellungskosten)

Aufgabe 2

a) Berechne den Ertrag bei Verkauf von 2500 bzw. 7500 Packungen des Impfstoffes.

b) Mit der Ertragsfunktion kann man allgemein den Ertrag in Abhängigkeit von der verkauften Stückzahl errechnen.
Stelle die Gleichung der Ertragsfunktion auf, und zeichne ihren Graphen. Erläutere deine Vorgehensweise. Beschreibe den Verlauf des Graphen.

c) Erkläre den Zusammenhang zwischen dem festgesetzten Preis und dem erzielten Ertrag.

d) Der Händler strebt einen Ertrag von mindestens 320000 € pro Jahr an. Bei welchen Preisen ist dies möglich? Erläutere den Rechenweg.

e) Erkläre, wie du als Unternehmer der Pharma AG den Preis festsetzen würdest.

Abschließend wollen wir noch einmal auf die wirtschaftliche Rahmenbedingungen für unser Projekt eingehen.

Aufgabe 3

a) Eigentliches Ziel jedes Unternehmens ist die Maximierung des Gewinns.
Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Gewinn und dem Ertrag?

b) Die monatlichen (Gesamt-)Herstellungskosten entsprechen den Funktionswerten der Funktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot \left(\left(\frac{x}{300} \right)^4 - 1857 \cdot \left(\frac{x}{300} \right)^2 + 180x + 668072 \right)$, x ist dabei die hergestellte Menge.
Berechne die Herstellungskosten für x=2500 und x=7000 Packungen.

c) Zeichne den Graphen zu K in das gleiche Koordinatensystem wie den Graphen der Ertragsfunktion.
Welche Bedeutung haben die Schnittpunkte der Graphen von K und E?

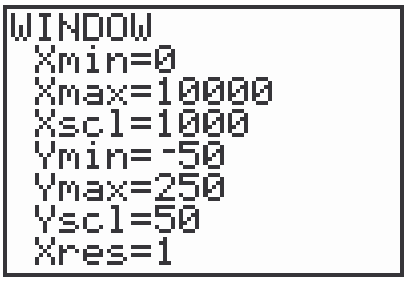
d) Welche Menge an Packungen sollte die AG aus wirtschaftlicher Sicht absetzen?
Begründe deine Vorgehensweise.

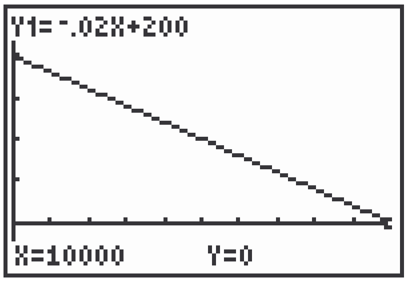
<u>Beispiellösungen mit dem TI-83</u>

<u>Aufgabe1:</u>
P(2500/150) und Q(7500/50) sind zwei Punkte des Graphen der Absatzfunktion. Die Steigung beträgt

$$m = \frac{50-150}{7500-2500} = -0{,}02\,.$$

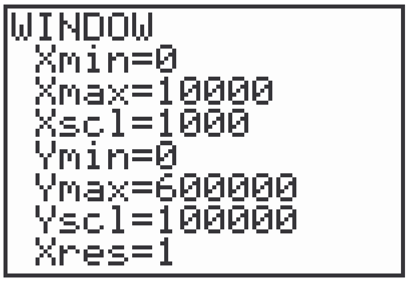
Für den y-Achsenabschnitt ergibt sich b=200.
Damit folgt für die Funktionsgleichung der Preisabsatzfunktion p:
p(x)=-0,02x+200.
Mit der passenden WINDOW-Einstellung lässt sich der Graph der Absatzfunktion gut darstellen.



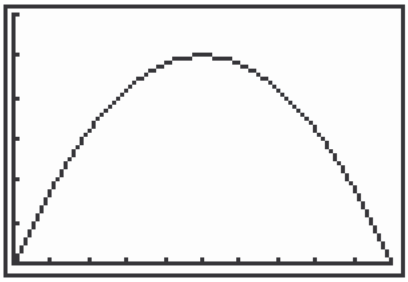


Die Nullstelle liegt bei x=10000.
D={0;10000}, W={0;200}

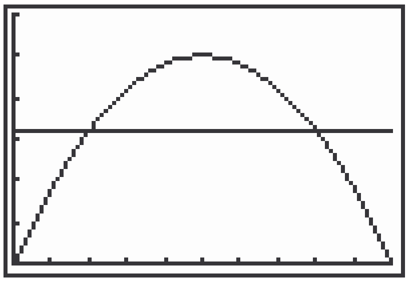
<u>Aufgabe 2:</u>
Für die Erträge ergibt sich:
E(2500)=2500·150€=375000€,
E(7500)=7500·50€=375000€.
Ertragsfunktionsgleichung:
E(x)=x·y_1= x·(-0,02x+200)=-0,02x²+200x.



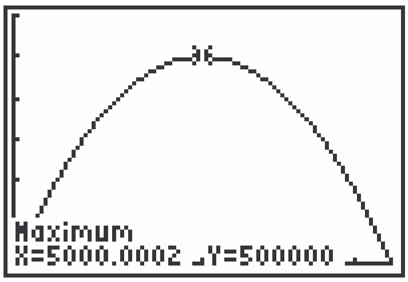
Zunächst steigt der Ertrag, da bei steigenden Absatzzahlen mehr verkauft wird. Ab einer Absatzmenge sinkt der Ertrag, da dann der festgesetzte in diesem Fall niedrige Preis pro Packung durchschlägt.



Die horizontale Linie zeigt den vom Händler angestrebten Mindestertrag von 320000€ an. Mit Hilfe von Intersect können die Koordinaten der Schnittpunkte bestimmt werden.

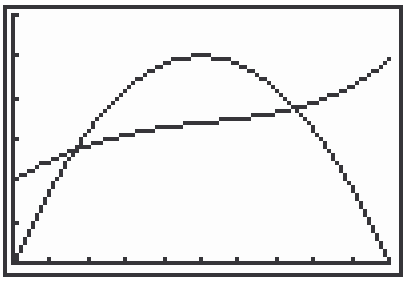


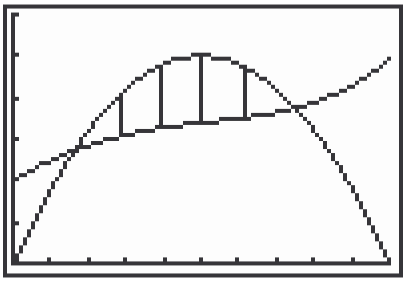
Ein Ertrag von mindestens 320000€ ergibt sich bei einer Absatzmenge von 2000 bis 8000 Stück.
Damit folgt über p(x)=-0,02x+200 ein pro Stückpreis von 160€ bis40€.
Um einen größtmöglichen Ertrag zu erlangen, muss das Maximum der Ertragsfunktion ermittelt werden. Dieses gelingt zum einen ebenfalls über das CALC-Menü des Rechners.



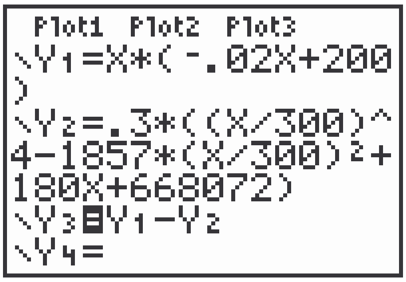
Zum anderen könnte auch die Mitte von 2000 und 8000 ermittelt werden, sofern man die (korrekte) Vermutung hat, dass der x-Wert des Maximums in der Mitte der Nullstellen liegt. In diesem Fall liegt das Ertragsmaximum bei 500000€. Das Maximum wird bei einer Absatzmenge von 5000 Stück erreicht.
Der Preis pro Stück liegt dann bei 100€.

Aufgabe 3:
G(x)=E(x)-K(x), wobei K die Kosten-, E die Ertrags- und G die Gewinnfunktion ist.
Die Herstellungskosten für x=2500 und x=7500 Packungen betragen K(2500)=298181€ und K(7500)=374422€.
Im Schnittpunkt der beiden Graphen beträgt der Gewinn 0€, da dann K(x)=E(x) ist.
Die Herstellungsmenge beträgt dann 1624 bzw. 7505 Stück.
Der Gewinn ist an der Stelle extremal, wo der Abstand zwischen den Graphen am größten ist.

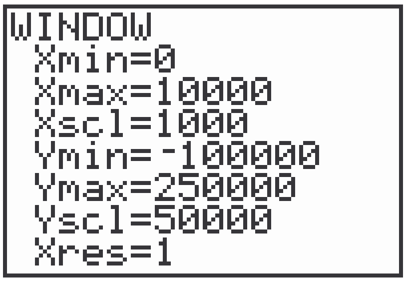




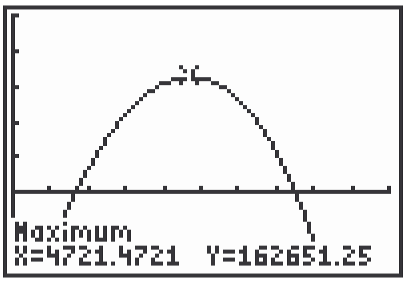
Um die Stelle zu ermitteln, lassen wir uns den Graphen der Gewinnfunktion im GRAPH-Fenster zeichnen.
Dazu geben wir in Y3 die Differenz der Funktionsterme aus Y1 und Y2 ein.



Mit der nebenstehende WINDOW-Einstellung zeigt sich ein guter Überblick über den Graphen der Gewinnfunktion.



Das Maximum beträgt 162651€. Das Maximum wird bei einer Absatzmenge von ca. 4721 Packungen erreicht.
Der Preis pro Packung beträgt dann 105,58€.



Finanzmathematik und Wachstum

Wir lauschen ein wenig dem Leben des Duckschen Clans in Entenhausen.

Aufgabe 1:
Tick, Trick und Track haben von Oma Duck 5000 Taler bekommen. Sie wollen das Geld sparen und zur Bank bringen. Dabei bieten die verschiedenen Banken in Entenhausen verschiedene Möglichkeiten, das Geld anzusparen.

a) Die Entenbank bietet an, dass Kapital für sechs Jahre festzulegen. Der jährliche Zinssatz beträgt 6 %. Am Ende eines jeden Jahres bekommen die Kinder die Zinsen ausbezahlt.
   I) Notiere in einer Tabelle die Kapitalentwicklung (Kapital plus Zinsen) für die ersten drei Jahre, und leite dabei eine Zuordnungsvorschrift *Zeit in Jahren → Kapital in Talern* her.
   II) Gib auch eine rekursive Darstellung der Vorschrift an.
   III) Begründe, dass es sich hier um ein lineares Wachstum handelt.

b) Diese Art der Geldanlage gibt es in leicht abgeänderte Form auch in Deutschland; es sind die Bundesschatzbriefe vom Typ A. Das Kapital wird ebenfalls für sechs Jahre fest angelegt. Der Zinssatz variiert allerdings von Jahr zu Jahr. Im ersten Jahr gibt es 2,75 %, im zweiten Jahr 3,25 %, im weiteren 3,75 %, 4,25 %, 4,50 % und 4,75 %.
   I) Berechne die Kapitalentwicklung nach sechs Jahren für ein Anfangskapital von 10000€.
   II) Bestimme die durchschnittliche Verzinsung.

c) Die Sparkasse von Entenhausen regt an, das Geld auf ein normales Sparbuch einzuzahlen. Somit besteht zumindest die Möglichkeit immer an das Geld heranzukommen. Dafür ist der Zinssatz allerdings geringer. Er beträgt 4%. Angenommen, Tick, Trick und Track legen ihr Kapital für sechs Jahre dort an. Die Zinsen verbleiben am Jahresende auf dem Konto, so dass diese im darauffolgenden Jahr mitverzinst werden.
   I) Notiere in einer Tabelle die Kapitalentwicklung für die ersten drei Jahre, und leite dabei eine Zuordnungsvorschrift *Zeit in Jahren → Kapital in €* her.
   II) Gib auch eine rekursive Darstellung der Vorschrift an.
   Zeichne den Graphen der Zuordnungsvorschrift.
   III) Was für ein Wachstum liegt hier vor? Begründe!

d) In Deutschland bieten die Sparkasse mit dem sogenannten Zuwachssparen und der Bund mit den Bundesschatzbriefen vom Typ B eine ähnliche Möglichkeit des Sparens an.
   Bei dem Zuwachssparen wird das Kapital für fünf Jahre festgelegt und in den verschiedenen Jahren verschieden stark verzinst. Im ersten Jahr gibt es 3,0%, dann 3,1%, 3,5%, 4,1% und 4,5%.
   Die Bundesschatzbriefe laufen über sieben Jahre zu den Zinssätzen 2,75 %, 3,25 %, 3,75 %, 4,25 %, 4,50 %, 4,75 % und 5,00%.
   I) Berechne für beide Angebote das Endkapital für ein Anfangskapital von 10000€. Nimm Stellung!
   II) Vergleiche beide Angebote miteinander. Berechne dazu für beide Angebote die Rendite. Das ist grob gesprochen die durchschnittliche Verzinsung über die Jahre der Laufzeit. Anders ausgedrückt ist das der über die Laufzeit konstante Zinssatz, der zum gleichen Endkapital führt.
   Warum kann man nicht einfach den Mittelwert der Zinssätze heranziehen?

Aufgabe 2:
Gustav Gans braucht, wie Du ja wahrscheinlich weißt, nicht zu arbeiten; er hat immer Glück und kommt somit auch ständig an Geld für seinen Lebensunterhalt und um Daisy zu beeindrucken. Er hat am Ende eines Jahres immer mindestens 1500 Taler zusammengespart.
Er schließt mit seiner Gans-Bank (die ist für Gänse besonders günstig) einen Ratensparvertrag über fünf Jahre ab. Zu Beginn zahlt er durch eine Einmalzahlung 2000 Taler ein und dann am Ende eines jeden Jahres 1500 Taler. Der jährliche Zinssatz beträgt 5,5%.

a) Notiere begründend in einer Tabelle die Kapitalentwicklung für die ersten drei Jahre.

b) Gib eine rekursive Darstellung an, die die Kapitalentwicklung in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren aufzeigt.
   Gib diese rekursive Darstellung in den TI-83 ein und betrachte die Kapitalentwicklung über TABLE bzw. über GRAPH.
   Berechne das Endkapital über das FINANCE-Menü. Gib dazu ein:
   N=5, I%=5,5, PV=-2000, PMT=-1500, FV egal, P/Y=1, C/Y=1, PMT:END. Gehe dann mit dem Cursor auf FV und drücke [ALPHA] [SOLVE].
c) Was für ein Wachstum liegt hier vor?
d) Was ändert sich, wenn der Gustav zu Beginn eines jeden Jahres die Rate von 1500 Taler einzahlt?

Aufgabe 3:
Goofy braucht unbedingt ein neues Auto, sein altes fällt fast schon auseinander. Der Gebrauchtwagenhändler bietet ihm einen Wagen für 5000 Taler an.
Da Goofy nicht soviel Geld hat, muss er einen Kredit aufnehmen.
a) Der Händler macht ihm folgendes Angebot: Goofy zahlt einmalig 1000 Taler, anschließend am Ende eines jeden Jahres 750 Taler. Der jährliche Zinssatz beträgt 7%.
   I) Notiere in einer Tabelle die Schuldenentwicklung für die Zeit der Tilgung des Kredits. Nach wie vielen Jahren ist der Kredit abbezahlt? Wie hoch ist die letzte Rate?
   II) Gib für die Tilgungszeit eine rekursive Darstellung an, die die Schuldenentwicklung in Abhängigkeit der Zeit in Jahren aufzeigt.
   III) Stelle die Zuordnung graphisch dar.
b) Den Wagen möchte Goofy gerne kaufen, er ist sich aber noch nicht sicher, ob er auch den Kredit des Händlers annehmen soll. Er beschließt, bei der Maus-Kasse nach einem Kredit zu fragen.
   Die Kasse bietet einen Kredit ohne Einmalzahlung zu 8% an. Dafür sollen die jährlichen Raten 1200 Taler betragen, immer am Jahresende zu zahlen.
   I) Notiere in einer Tabelle die Schuldenentwicklung für die Zeit der Tilgung des Kredits. Nach wie vielen Jahren ist der Kredit abbezahlt? Wie hoch ist die letzte Rate?
   II) Gib für die Tilgungszeit eine rekursive Darstellung an, die die Schuldenentwicklung in Abhängigkeit der Zeit in Jahren aufzeigt.
   III) Stelle die Zuordnung graphisch dar.
c) Für welchen Kredit sollte Goofy sich entscheiden.

Aufgabe 4:
In Deutschland nimmt der Bürger häufig einen Kredit auf, um sich eigene vier Wände leisten zu können. Die Rückzahlung dauert bei einer Tilgung von 1% in der Regel ca. 30 Jahre. Eine Tilgung von 1% bedeutet, dass neben den Zinsen, die für den Kredit bezahlt werden müssen, 1% der Kreditsumme jährlich zurückbezahlt wird. Somit kann es nicht zu einer Überschuldung kommen.
Jemand leiht sich für einen Hausbau 100000 € zu 6,7%. Die Tilgung betrage 1%. Die monatliche Rate ist am Ende eines Monats fällig. Die Verzinsung erfolgt monatlich zu 6,7:12%.
a) Gib in einer Tabelle die Restschulden für die ersten drei Monate an und leite dabei eine rekursive Darstellung der Vorschrift *Zeit t in Monaten → Restschulden in €* her.
b) Gib die rekursive Vorschrift in den TI-83 ein und zeichne den Graphen der Zuordnungsvorschrift für den Zeitraum des ersten Jahres.
c) Finde eine rekursive Darstellung für die Vorschrift *Zeit t in Jahren → Restschulden in €*. Zeichne den zugehörigen Graphen für den Zeitraum der ersten 10 Jahre.

Über das <u>FINANCE-Menü</u> können Fragen zum Kreditwesen ebenfalls beantwortet werden.
Dazu zunächst ein paar Hinweise zum FINANCE-Menü
Eine wichtige Funktion ist dabei der TVM-Solver [CALC] 1 im FINANCE-Menü.
Die dort stehenden Variablen haben folgende Bedeutung:

1: N	Gesamtzahl der Zahlungsperioden,
2: I%	Jahreszinssatz
3: PV	Gegenwartswert, negativ bei einem vorhandenen Kapital, positiv bei einem Kredit
4: PMT	Zahlungsbetrag (Rate r), negativ bei Einzahlung, positiv bei Auszahlung
5: FV	Terminwert (aktuelles Kapital), negativ bei Schulden, positiv bei Guthaben

6: P/Y Anzahl der Zahlungsperioden pro Jahr
7: C/Y Anzahl der Verzinsungsperioden, also C/Y = 1 heißt jährliche Verzinsung
END, BEGIN: Zahlung am Ende bzw. am Anfang des Zahlungszeitraumes.

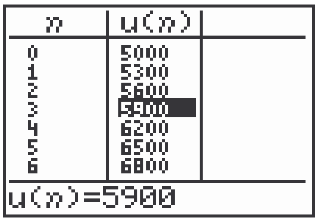
Der TVM-Solver wird so angewendet, dass vier der ersten fünf Variablen eingegeben werden müssen und die fünfte dann mit [ALPHA] [SOLVE] bestimmt wird. Dabei muss der Cursor auf die zu bestimmende Variable gesetzt werden.

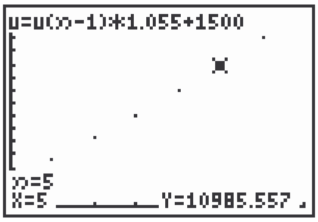
Mit Hilfe von bal([CALC] 9 kann z.B. für eine Hypothek ein Tilgungsplan erstellt werden. Die Restschuldensumme kann dann in Abhängigkeit von der Zeit graphisch und /oder tabellarisch dargestellt werden. Dabei ist aber zu beachten, dass der Tilgungsplan ausschließlich für eine Zahlung am Ende des Zahlungszeitraumes aufgestellt wird.

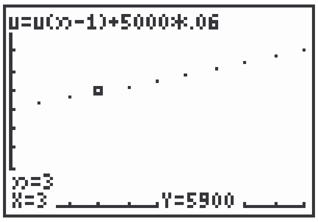
d) Wie groß sind die Restschulden nach einem Monat (einem Jahr, einem Jahrzehnt)?
e) Wie groß ist die Laufzeit des Kredits?
   Wie ändert sich die Laufzeit bei Erhöhung der Tilgung?
f) Stelle einen Tilgungsplan auf und lass mit dem TI den Graphen zeichnen. Beschreibe den Verlauf des Graphen und begründe ihn.
   Hinweis: Im y-Fenster: u(n)=bal(12n) (explizite Darstellung)
   Wie sieht der Tilgungsplan für eine Tilgung von 2% und von 3% aus?
g) Auch über die Parameterdarstellung kann ein Tilgungsplan erstellt werden:
   x_T=T, y_T=bal(12T).
   x_T=T, y_T=u(T), mit der Folge u aus Aufgabenteil c) ist auch möglich, dauert aber deutlich länger.
h) In der Praxis laufen solche Verträge 5, 10 oder 15 Jahre. Anschließend muss man einen neuen Vertrag über die Restschulden abschließen.
   Angenommen, der obige Vertrag mit 1% Tilgung laufe 10 Jahre. Wie hoch sind bei Vertragsende die Restschulden? Der Vertragsnehmer möchte nach weiteren 10 Jahren den Kredit abbezahlen. Wie hoch müsste dann die Tilgung sein? Welche monatlichen Zahlungen kämen auf den Kreditnehmer zu?
   Anmerkung: In der Realität tauchen zusätzlich noch Gebühren auf.

Beispiellösungen mit dem TI-83:

1a)







Zuordnungsvorschrift: u(n)=300n+5000

Rekursive Darstellung: u(n)=u(n-1)+300, u(0)=5000

Es handelt sich hier um ein lineares Wachstum, da jedes Jahr ein konstanter Wert (300) zum aktuellen Kontostand hinzu addiert wird.

1b) Nach 1 Jahr: 10000+275=10275

Nach 2 Jahren: 10275+325=10600

Nach 3 Jahren: 10600+375=10975

Nach 4 Jahren: 10975+425=11400

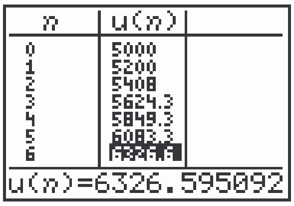
Nach 5 Jahren: 11400+450=11850

Nach 6 Jahren: 11850+475=12325

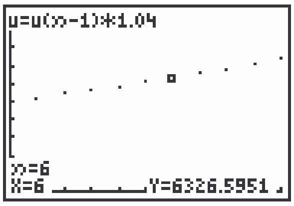
Durchschnittliche Verzinsung: (2,75+3,25+3,75+4,25+4,50+4,75)/6=3,875.

Zinssatz: 3,875%.

1c)



TABELLE



GRAPH

Zuordnungsvorschrift: $v(n) = 5000 \cdot 1{,}04^n$

Rekursive Darstellung: v(n)=1,04*v(n-1), v(0)=5000

Hier liegt ein exponentielles Wachstum vor, da der Bestand von Jahr zu Jahr mit demselben Faktor (1,04) multipliziert wird.

1d) Sparkassenangebot: Endkapital: 11956,48 €

Bundesangebot: Endkapital: 13188,51 €

Um die beiden Angebote miteinander zu vergleichen, müssen wir die durchschnittliche Verzinsung berechnen, da hier die beiden Angebote eine unterschiedliche Laufzeit haben.

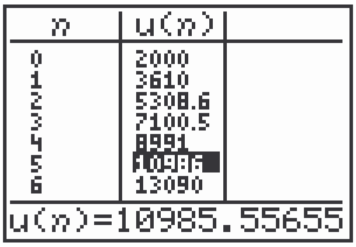
Sparkasse: $11956{,}48 = 10000 \cdot q^5 \Leftrightarrow \sqrt[5]{1{,}195648} \approx 1{,}0364$ Zinssatz: 3,64%

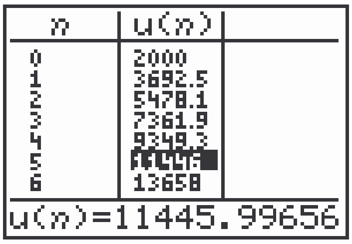
Bund: $13188{,}51 = 10000 \cdot q^7 \Leftrightarrow q = \sqrt[7]{1{,}318851} \approx 1{,}0403$ Zinssatz: 4,03% .

Man kann nicht einfach den Mittelwert der Zinssätze berechnen, da wir hier ein Zuwachssparen vorliegen haben. Das Kapital des vorherigen Jahres wird ja mitverzinst.

2)

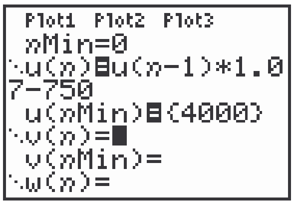
Rekursive Darstellung: u(n)=u(n-1)*1,055+1500, u(0)=2000
Hier haben wir die Überlagerung eines linearen und eines exponentiellen Wachstums vorliegen.

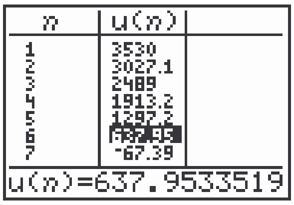


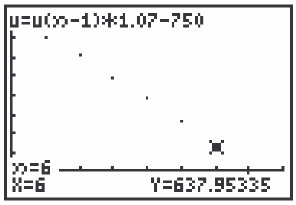


Wenn Gustav das Geld zu Beginn eins jeden Jahres einzahlt, wird der Betrag im Laufe des Jahres mitverzinst.
Rekursive Darstellung: u(n)=(u(n-1)+1500)*1,055

3a)

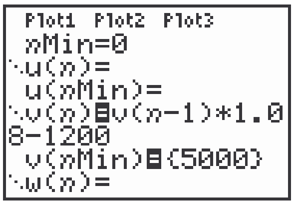


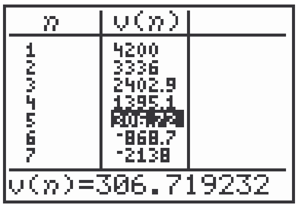


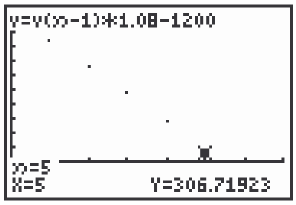


Der Kredit ist nach 7 Jahren abbezahlt. Die letzte Rate beträgt 637,95*1,07=682,61 Taler.

3b)





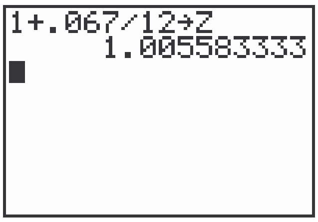


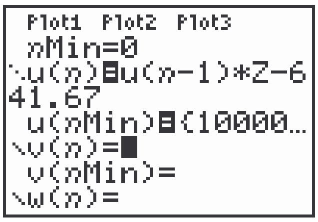
Der Kredit ist nach 6 Jahren abbezahlt. Die letzte Rate beträgt 306,72*1,08=331,26 Taler.

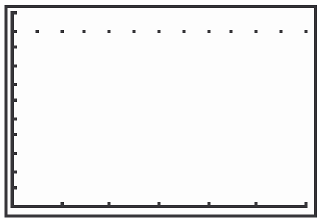
3c) Autohändler: 1000Taler+6*750Taler+682,61Taler=6182,61Taler
Maus-Kasse: 5*1200Taler+331,26Taler=6331,26 Taler.
Goofy sollte den Kredit des Autohändlers nehmen.

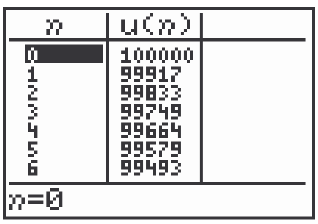
4a) Nach dem ersten Monat: u_1=100000*(1+0,067:12)-641,67
(100000*0,077:12=641,67)
Zur Abkürzung: Z=1+0,067:12
Nach dem zweiten Monat: $u_2=u_1$ *Z-641,67
Nach dem dritten Monat: $u_3=u_2$*Z-641,67
Rekursive Darstellung der Folge: $u_n=u_{n-1}$*Z-641,67, u_0=100000

4b)







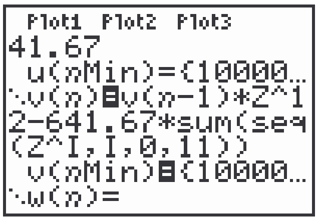


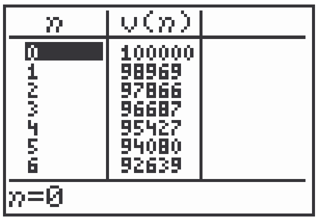
4c) Nach dem ersten Jahr:

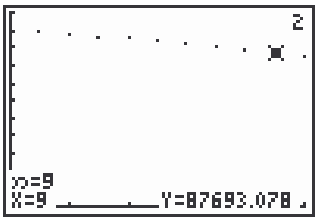
$$v_1 = (((100000 \cdot Z - 641{,}67) \cdot Z - 641{,}67) \cdot Z - 641{,}67) \cdot Z....... - 641{,}67$$

$$= 100000 \cdot Z^{12} - 641{,}67 \cdot \sum_{i=0}^{11} Z^i$$

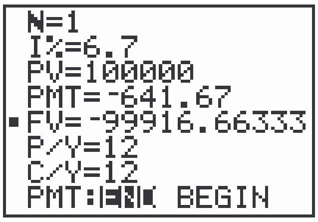
Allgemein: $v_n = v_{n-1} \cdot Z^{12} - 641{,}67 \cdot \sum_{i=0}^{11} Z^i$, v_0=100000

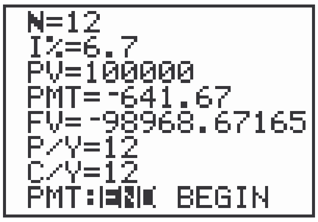


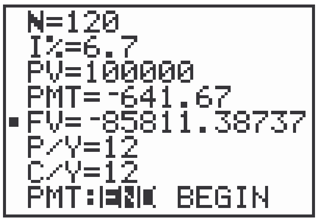




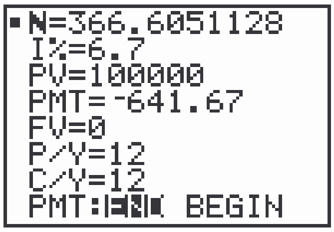
4d)



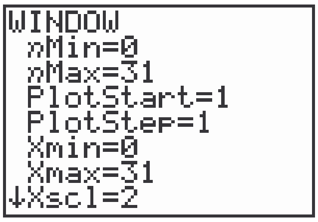


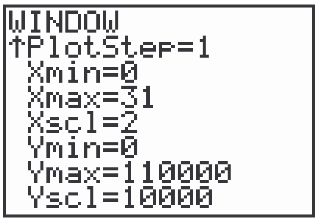


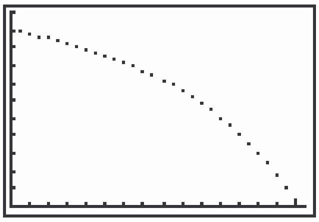
4e) Der Kredit ist nach ca. 367 Monaten (30 Jahre, 7 Monate) abbezahlt.
Bei einer Tilgung von 2% beträgt die Laufzeit ca. 258 Monate (Tilgungsrate 713,33€), bei 3% ca. 207 Monate (Rate: 816,67€).



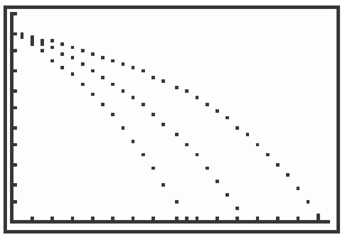
4f)







Die nebenstehende Graphik zeigt die Tilgungspläne für 2%, 3% und 4% im Vergleich.



4h) Restschulden: 85811,39DM
Die monatliche Rate beträgt dann 983,13DM. Das entspricht einer Tilgung von rund 6,57%.