Volle verschränkte Produkte für Quantengruppen und äquivariante KK-Theorie

Robert Fischer

Dezember 2003

Mathematik

Dissertationsthema

Volle verschränkte Produkte für Quantengruppen und äquivariante KK-Theorie

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

Robert Fischer
aus München

–2003–

Dekan:	**Prof. Dr. Klaus Hinrichs**
Erster Gutachter:	**Prof. Dr. Siegfried Echterhoff**
Zweiter Gutachter:	**Prof. Dr. Joachim Cuntz**
Tag der mündlichen Prüfung:	**02. 02. 2004**
Tag der Promotion:	**04. 02. 2004**

Danksagung

Für ihre Unterstützung möchte ich mich herzlich bei all jenen bedanken, die zum Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen haben:

allen voran Siegfried Echterhoff für seine ausgesprochen geduldige und aufmerksame Betreuung. Von seinem umfassenden Wissen und seiner Bereitschaft, dieses jederzeit zur Verfügung zu stellen, habe ich für diese Arbeit in großem Maße profitiert. Seine angenehme Art sorgt zudem für eine freundschaftliche Arbeitsatmosphäre unter seinen Doktoranden, in der ich mich äußerst wohl fühle. Besonders gefreut habe ich mich darüber, daß er den Anstoß zu einem Aufenthalt in Clermont-Ferrand während des vergangenen Sommers gab.

Des weiteren geht mein Dank an Joachim Cuntz, der durch seine freundliche Unterstützung für die Aufnahme in das Graduiertenkolleg „Analytische Topologie und Metageometrie“ zu Beginn meiner Zeit in Münster sorgte. Darüber hinaus ermöglichte seine großzügige Förderung aus dem Leibniz-Preis einen nahtlosen Übergang in meine derzeitige Anstellung am SFB 478, bei deren Bewilligung seine positive Fürsprache zudem von großer Bedeutung war.

Bei Saad Baaj möchte ich mich für die Möglichkeit eines Aufenthalts in Clermont-Ferrand bedanken, wo mir nicht zuletzt die vielen interessanten Diskussionen mit ihm zu neuen Einsichten verhalfen. Dem dortigen Fachbereich Mathematik danke ich für eine freundschaftliche Aufnahme, die es mir sehr erleichterte, in Clermont-Ferrand zurechtzukommen.

Weiter gilt mein Dank John Quigg sowie Stefaan Vaes für ihr Interesse an meiner Arbeit und die Zeit, die sie sich für Gespräche genommen haben, welche für mich sehr aufschlußreich gewesen sind.

Großen Dank schulde ich außerdem meinen freundlichen Kollegen Frank Malow und Walther Paravicini, ohne deren hilfreiche Korrekturen eine rechtzeitige Abgabe unmöglich gewesen wäre.

Schließlich kann ich Christiane für ihre liebevolle Geduld mit mir nicht dankbar genug sein. Ihr verspreche ich eine geruhsamere Adventszeit im nächsten Jahr.

Robert Fischer — Münster, Dezember 2003

Zusammenfassung

Verschränkte Produkte sind ein unentbehrliches Hilfsmittel beim Studium C^*-dynamischer Systeme. Sie treten in zwei Varianten auf: ein volles verschränktes Produkt mit universeller Eigenschaft und ein konkret dargestelltes reduziertes verschränktes Produkt. In der äquivarianten KK-Theorie entsprechen verschränkte Produkte dem äquivarianten Abstieg.

Wir konstruieren das volle verschränkte Produkt bzw. den vollen Abstieg für Hopf-C^*-Algebren in einer sehr allgemeinen Situation, sowohl auf C^*-algebraischer Ebene als auch auf dem Niveau der äquivarianten KK-Theorie. Für Quantengruppen erhalten wir das reduzierte verschränkte Produkt bzw. den reduzierten Abstieg als Komposition der vollen Variante mit einem Normalisierungs-Funktor. Dies erlaubt eine konzeptionelle Herangehensweise an Sätze über reduzierte bzw. maximale Dualität.

Die Frage nach maximaler Dualität führt bei C^*-Algebren zu dem Konzept der Maximalisierung, welche in dieser Arbeit durch eine universelle Eigenschaft beschrieben werden kann. Auf diese Weise zeigen wir die Funktorialität der Maximalisierung. Daneben ergibt sich eine Charakterisierung für Maximalisierbarkeit, und es folgen daraus viele Beispiele: Alle mittelbaren oder ko-mittelbaren regulären Quantengruppen besitzen Maximalisierungen. Wir geben zudem ein Beispiel einer regulären Quantengruppe an, welche Maximalisierungen besitzt, ohne mittelbar oder ko-mittelbar zu sein.

In der äquivarianten KK-Theorie erhalten wir Beispiele, für die der volle äquivariante Abstieg nicht bijektiv sein kann. Es besteht bei Gruppen vielmehr ein enger Zusammenhang mit der K-Mittelbarkeit: Für eine Gruppe mit dieser Eigenschaft ist der volle äquivariante Abstieg stets ein Isomorphismus.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **iii**

1. Kapitel: **Grundlagen und Notationen** **1**

§ 1.0 Generelle Notationen . . . 1
§ 1.1 Hilbert-Bimoduln . . . 2
§ 1.2 Hopf-C^*-Algebren und Duale . . . 9
§ 1.3 Quantengruppen . . . 13
§ 1.4 Kowirkungen . . . 18
§ 1.5 Kategorien . . . 21

2. Kapitel: **Verschränkte Produkte von Kowirkungen** **25**

§ 2.1 C^*-Algebren-Kowirkungen . . . 25
§ 2.2 Rechts-triviale Kowirkungen . . . 30
§ 2.3 Rechts-Hilbert-Bimodul-Kowirkungen . . . 31
§ 2.4 Duale Kowirkungen und kategorielle Beschreibung . . . 39
§ 2.5 Verträglichkeit mit kompakten Operatoren . . . 42
§ 2.6 Äußere Äquivalenz von Kowirkungen . . . 43
§ 2.7 Tensorprodukte mit trivialen Kowirkungen . . . 47
§ 2.8 Normalisierung von Kowirkungen . . . 50

3. Kapitel: **Duale Paare von Quantengruppen** **55**

§ 3.1 Symmetrische multiplikative Unitäre . . . 55
§ 3.2 Reduzierte verschränkte Produkte . . . 58
§ 3.3 Äquivalenz normaler und reduzierter Kowirkungen . . . 63

4. Kapitel: **Doppelt verschränkte Produkte und Dualität** **69**

§ 4.1 Die kanonischen Surjektionen . . . 70
§ 4.2 Reduzierte Dualität . . . 73
§ 4.3 Maximale Kowirkungen . . . 74
§ 4.4 Mittelbarkeit und volle Dualität . . . 78
§ 4.5 Maximalisierung von Kowirkungen . . . 80

5. Kapitel: **Äquivariante Kasparov-Theorie** **87**

§ 5.1 Äquivariante KK-Gruppen und Kasparov-Produkt . . . 87
§ 5.2 Voller Abstieg und Normalisierung . . . 92
§ 5.3 Der reduzierte Abstieg . . . 96
§ 5.4 Dualität . . . 98
§ 5.5 Voller Abstieg und K-Mittelbarkeit . . . 102

A Anhang: Relative Kommutanten von $\mathcal{K}$ **107**

Ausblick **115**

Literatur **117**

Einleitung

Quantengruppen

Die Theorie der „Quantengruppen" beginnt mit der Idee von Kac [**24**] (vgl. auch [**25**, **26**]), einen abstrakten Rahmen zu finden, innerhalb dessen sich Gruppen und ihre Duale als gleichwertige Objekte behandeln lassen, so daß die Pontrjagin-Dualität auch für nichtabelsche, nichtkompakte Gruppen greifbar wird. Aufbauend auf Ergebnissen von Tannaka, Krein und Stinespring [**63**, **32**, **33**, **61**] konnte Kac durch Einführung von „Ring-Gruppen" diese Zielsetzung für unimodulare Gruppen erreichen. Die Theorie wurde über die Jahre sukzessive erweitert und mündete schließlich in dem Begriff der „Kac-Algebren", welcher von Kac und Vainerman [**27**] sowie davon unabhängig von Enock und Schwartz [**17**] entwickelt wurde. Diese von Neumann-algebraische Theorie umfaßt schließlich beliebige lokalkompakte Gruppen und ist unter Pontrjagin-Dualität abgeschlossen.

Ende der achtziger Jahre konstruierte Woronowicz „kompakte Matrix-Pseudogruppen" [**67**, **68**]: Es handelt sich hierbei um Hopf-C^*-Algebren, die so viele darstellungstheoretische Gemeinsamkeiten mit kompakten Gruppen besitzen, daß für sie die Bezeichnung „Quantengruppe" nahezuliegen scheint. Insbesondere existiert auf kompakten Matrix-Pseudogruppen das Analogon eines invarianten Haar-Maßes. Des weiteren erfüllen sie eine Dualität im Sinne von Tannaka-Krein, vgl. [**69**]. Im Unterschied zu Kac-Algebren ist bei den kompakten Matrix-Pseudogruppen die Antipode nur auf einer dichten Unteralgebra definiert und nicht notwendigerweise involutiv. Es schien daher angebracht zu sein, die Theorie der Kac-Algebren zu erweitern.

In [**4**] stellen Baaj und Skandalis reguläre multiplikative Unitäre in den Vordergrund. Dies führt auf die Axiomatik des „Kac-Systems" und verallgemeinert gleichzeitig die kompakten Matrix-Pseudogruppen sowie Kac-Algebren. Von einem Kac-System ausgehend konstruieren Baaj und Skandalis ein Paar zueinander dualer Quantengruppen, welches analoge abstrakte Eigenschaften wie die Funktionenalgebra zusammen mit der reduzierten C^*-Algebra einer lokalkompakten Gruppe besitzt. Daher liegt die Bezeichnung als „reduzierte Quantengruppen" der multiplikativen Unitären nahe. Insbesondere wird für Kac-Systeme in [**4**] ein Dualitätssatz bewiesen, der die Sätze von Imai und Takai [**21**] sowie von Katayama [**31**] umfaßt.

Außerdem betrachten Baaj und Skandalis in [**4**] die unitäre Darstellungstheorie der reduzierten Quantengruppen. In diesem Zusammenhang konstruieren sie die zugehörigen vollen Quantengruppen, welche eine Verallgemeinerung der vollen Gruppen-C^*-Algebren sind: Sie besitzen die universelle Eigenschaft in Bezug auf unitäre Darstellungen. Daher stehen sie in demselben Verhältnis zu den reduzierten Quantengruppen wie im Gruppenfall die volle zur reduzierten Gruppen-C^*-Algebra. Insbesondere sind die reduzierten Quantengruppen als Hopf-C^*-Algebren Quotienten der zugehörigen vollen Variante.

Die Entwicklung blieb bei Kac-Systemen nicht stehen: In [**70**] konstruierte Woronowicz ein interessantes Beispiel einer Quantengruppe mit multiplikativer Unitärer, die *Quanten-$E(2)$-Gruppe*. Saad Baaj griff in [**1**, **2**] das Beispiel zur genaueren Analyse auf und beschrieb insbesondere das links- bzw. das rechts-invariante Haar-Maß. Er entdeckte, daß die Quanten-$E(2)$-Gruppe eine nicht-reguläre multiplikative Unitäre besitzt und daher nicht von einem Kac-System kommen kann: Sie ist vielmehr „semi-regulär". Reguläre multiplikative Unitäre können also nicht alle Beispiele erfassen, die man als Quantengruppen bezeichnen möchte.

Dies führte Woronowicz auf den Begriff der „handlichen“ (manageable) multiplikativen Unitären [**71**]. Die technischen Voraussetzungen unterscheiden sich wesentlich von denen eines Kac-Systems; insbesondere gehen sie nicht auseinander hervor. Zudem scheint es nicht klar zu sein, wie man aus der Axiomatik der handlichen multiplikativen Unitären die vollen (universellen) Versionen der Quantengruppen gewinnt.

Der Zugang durch multiplikative Unitäre hat jedoch noch ein prinzipielles Problem: Man konstruiert stets die Quantengruppe und ihr Dual gleichzeitig. Die Pontrjagin-Dualität ist also quasi „eingebaut“. Es ist jedoch wünschenswert, wie bei Gruppen zuerst eine „Quantengruppe“ zu definieren und das duale Objekt daraus zu konstruieren.

Diesem Ziel widmen sich Masuda und Nakagami in [**42**] im von Neumann-algebraischen Rahmen. Zusammen mit Woronowicz erarbeiten sie einen C^*-algebraischen Ansatz, der in [**43**] einen Abschluß zu finden scheint. Einen alternativen Zugang bieten Kustermans und Vaes in [**35**, **36**]: Sie geben in [**35**] eine einfache Definition einer (reduzierten) „lokalkompakten Quantengruppe“. Sie beruht in [**35**] auf einer Hopf-C^*-Algebra zusammen mit einem links- und einem rechts-invarianten Gewicht, welches ein Ersatz für das Haar-Maß ist. Kustermans und Vaes konstruieren aus den Gewichten eine multiplikative Unitäre mittels derer sie die duale Quantengruppe erhalten. Diese ist wieder „lokalkompakt“ im Sinne von [**35**]. Die Kategorie der lokalkompakten Quantengruppen scheint bisher der allgemeinste C^*-algebraische Rahmen zu sein, der alle bekannten Beispiele erfaßt und unter Dualität abgeschlossen ist. Des weiteren besitzen lokalkompakte Quantengruppen eine sehr schöne Strukturtheorie.

In [**34**] konstruiert Kustermans die „universellen Partner“ von lokalkompakten Quantengruppen. Dies sind die vollen Versionen der reduzierten Quantengruppen in [**35**]. Daher ist es wie bei Kac-Systemen auch im Rahmen lokalkompakter Quantengruppen (in ihrer C^*-algebraischen Variante) möglich, mit universellen Eigenschaften zu arbeiten.

Verschränkte Produkte und Dualitätssätze

Verschränkte Produkte wurden zuerst für C^*-Algebren mit einer Gruppenwirkung durch *-Automorphismen definiert. Ist G eine lokalkompakte Gruppe und A eine C^*-Algebra mit einer stark stetigen Wirkung von G durch *-Automorphismen $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$, so bezeichnet man das Tripel (A, G, α) als C^*-dynamisches System. Für solch ein System kann man das verschränkte Produkt $A \rtimes_\alpha G$ bilden, welches aus mehreren Gründen von Bedeutung ist: Auf diese Art entstehen beispielsweise viele interessante C^*-Algebren, und außerdem kodiert das verschränkte Produkt die kovarianten Darstellungen des Systems.

Ist G abelsch, so besitzt $A \rtimes_\alpha G$ eine duale Wirkung $\widehat{\alpha}$ der dualen Gruppe $\widehat{G}$. Der Dualitätssatz von Takai [**62**] stellt in diesem Fall eine Art Pontrjagin-Dualität für C^*-dynamische Systeme dar: $A \rtimes_\alpha G \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G} \cong A \otimes \mathcal{K}$, wobei $\mathcal{K}$ die kompakten Operatoren auf $L^2(G)$ sind. Dieses Ergebnis hat sich als wichtiges Mittel zum Studium verschränkter Produkte bei abelschen Gruppen erwiesen, daher war eine Verallgemeinerung dieses Satzes für nicht-abelsche Gruppen wünschenswert.

Für eine evtl. nicht-abelsche lokalkompakte Gruppe G dient die Gruppen-C^*-Algebra mit ihrer kanonischen Struktur einer Hopf-C^*-Algebra als Ersatz für die duale Gruppe. Wirkungen der dualen Gruppe werden dabei entsprechend durch „Kowirkungen“ der Gruppen-C^*-Algebra ersetzt.

Allerdings hat man im nicht-abelschen Fall die reduzierte bzw. die volle Gruppen-C^*-Algebra $C^*_r(G)$ bzw. $C^*(G)$ zur Verfügung. Erstere ist konkret durch die linksreguläre G-Darstellung auf $L^2(G)$ definiert, während die zweite universell bzgl. unitärer G-Darstellungen ist. Dementsprechend gibt es Kowirkungen von $C_r^*(G)$ bzw. $C^*(G)$, welche man als *reduzierte* bzw. *volle G-Kowirkungen* bezeichnet. Für beide Varianten existieren verschränkte Produkte (vgl. [**57**] oder [**21**, **52**]) mit dualen G-Wirkungen. Allgemeiner unterscheidet man für ein C^*-dynamisches System (A, G, α) das *reduzierte* bzw. *volle* verschränkte Produkt $A \rtimes_{\alpha,r} G$ bzw. $A \rtimes_\alpha G$, welches eine reduzierte bzw. volle duale G-Kowirkung besitzt.

Der übergreifende Rahmen für G-Wirkungen und G-Kowirkungen sind Kowirkungen von Hopf-C^*-Algebren und insbesondere Kowirkungen von Quantengruppen. Für diese wurden verschränkte Produkte bereits an mehreren Stellen studiert ([**4**, **45**, **46**, **48**, **50**, **66**]), sowohl in der reduzierten Variante als auch in sehr abstrakten Zusammenhängen. Wie bei Gruppen unterscheidet man bei Quantengruppen Kowirkungen der reduzierten bzw. vollen Variante und bezeichnet sie ebenso als *reduzierte* bzw. *volle* Kowirkungen.

Zunächst scheinen die reduzierten Versionen für Dualitätstheorie besser geeignet zu sein: In [**21**] gelingt es Imai und Takai, mittels reduzierter verschränkter Produkte und G-Kowirkungen den Dualitätssatz von Takai [**62**] auf C^*-dynamische Systeme (A, G, α) nicht-abelscher Gruppen zu erweitern: $A \rtimes_{\alpha,r} G \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G} \cong A \otimes \mathcal{K}$. Weitere Resultate zur Dualität nicht-abelscher Gruppen mithilfe von reduzierten Kowirkungen finden sich bei Landstad [**38**] und Quigg [**52**], um nur einige zu nennen.

In [**31**] beginnt Katayama mit reduzierten G-Kowirkungen (B, δ) und beweist einen entsprechenden Dualitätssatz.

Den Vorteil des abstrakten Zugangs durch Quantengruppen demonstriert der oben erwähnte Dualitätssatz von Baaj und Skandalis [**4**] auf wirkungsvolle Weise: Er vereinigt die reduzierten Dualitätssätze von Imai-Takai und Katayama wieder zu einem einzigen Satz.

Das volle verschränkte Produkt mit seiner universellen Eigenschaft scheint zuerst von Raeburn systematisch ausgenutzt worden zu sein, welcher auf dieser Grundlage in [**56**] einen eleganten Beweis der Takai-Dualität angibt. Des weiteren baut Raeburn diese Technik in [**55**] aus, um eine volle Variante des Dualitätssatzes von Imai und Takai zu gewinnen: $A \rtimes_\alpha G \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G} \cong A \otimes \mathcal{K}$. Im Hinblick auf reduzierte Dualität erscheint dieses Ergebnis zunächst überraschend, wird von Raeburn aber als ein deutlicher Hinweis auf die Ko-Mittelbarkeit von Gruppen gewertet (vgl. die Einleitung in [**55**]).

Der nächste logische Schritt war die Anwendung des Ansatzes von Raeburn auf volle G-Kowirkungen in [**53**]. Quigg konnte dort die Frage nach einer vollen Version der Katayama-Dualität durch ein Gegenbeispiel klären: Er zeigt, daß $C_r^*(G) \rtimes \widehat{G} \rtimes G \cong C^*(G) \otimes \mathcal{K}$ ist, und die rechte Seite unterscheidet sich im allgemeinen von $C_r^*(G) \otimes \mathcal{K}$. Allerdings war es ihm in [**53**] möglich, die volle Dualität für volle *duale* Kowirkungen zu beweisen, indem er das Ergebnis von Raeburn [**55**] über volle Imai-Takai-Dualität einsetzte.

Schließlich griff Nilsen in [**51**] die Methodik der universellen Eigenschaft von Raeburn auf. Sie definiert kanonische Surjektionen sowohl für G-Wirkungen als auch für G-Kowirkungen und leitet daraus die Dualitätssätze von Imai und Takai, von Katayama sowie von Raeburn ab.

Durch die Ergebnisse von Raeburn und Nilsen erscheint der Einsatz voller Kowirkungen, voller verschränkter Produkte und universeller Eigenschaften in der Dualitätstheorie auch für allgemeine Quantengruppen nützlich.

Normalisierung und Maximalisierung

Im allgemeinen erfüllen volle G-Kowirkungen weder die reduzierte noch die volle Dualität. Sie liegen aber stets „zwischen“ zwei eindeutig bestimmten Kowirkungen, der „Normalisierung“ und der „Maximalisierung“, wovon die erste der reduzierten und die zweite der vollen Version der Katayama-Dualität genügt.

Normalisierungen entstehen im Zuge der Arbeit von Quigg [**54**] über den Zusammenhang voller und reduzierter Kowirkungen von Gruppen. Er stellt dort fest, daß die reduzierten Kowirkungen (d.h. $C_r^*(G)$-Kowirkungen) zu einer bestimmten Klasse von vollen Kowirkungen (d.h. $C^*(G)$-Kowirkungen) korrespondieren, die er „normale“ Kowirkungen nennt. Normale Kowirkungen sind dadurch charakterisiert, daß sie die Dualität für reduzierte verschränkte Produkte erfüllen. Quigg zeigt in [**54**], daß jede volle Kowirkung eine „Normalisierung“ besitzt: Es handelt sich um eine normale Quotienten-Kowirkung mit demselben verschränkten Produkt.

„Maximale“ Kowirkungen sind genau jene, welche die Dualität für volle verschränkte Produkte erfüllen. Insbesondere sind duale Kowirkungen maximal. Echterhoff, Kalizewski und Quigg geben in [**14**] eine Konstruktion an, die jeder vollen Kowirkung ihre „Maximalisierung“ zuordnet: Dies ist eine maximale Kowirkung mit identischem verschränktem Produkt.

Äquivariante KK-Theorie

Die bivariante KK-Theorie für C^*-Algebren wurde von Kasparov in [**28**, **29**, **30**] entwickelt. Sie umfaßt gleichzeitig die K-Theorie und die K-Homologie und behandelt auch C^*-Algebren mit Wirkungen lokalkompakter Gruppen. Eine wesentliche Neuheit der KK-Theorie ist das Kasparov-Produkt (oder Schnittprodukt), welches die Komposition von Morphismen sowie Produkte der topologischen K-Theorie als Spezialfälle enthält. Des weiteren verwandelt das Produkt die KK-Theorie in eine Kategorie.

Kasparov definiert im Zusammenhang seiner Untersuchung der Novikov-Vermutung [**30**] außerdem zwei Versionen eines Abstiegsfunktors

$$j_{(r)}^G : KK^G(A,B) \longrightarrow KK(A \rtimes_{(r)} G, B \rtimes_{(r)} G)$$

von der äquivarianten in die gewöhnliche KK-Theorie.

In [**3**] definieren Baaj und Skandalis die äquivariante KK-Theorie für allgemeine Hopf-C^*-Algebren. Sie beweisen, daß der reduzierte Abstieg von Kasparov über einen Isomorphismus, den äquivarianten reduzierten Abstieg,

$$J_{G,r} : KK^G(A,B) \xrightarrow{\cong} KK_{C_r^*(G)}(A \rtimes_r G, B \rtimes_r G)$$

faktorisiert. Sie konstruieren zu diesem Zweck einen dualen äquivarianten Abstieg für reduzierte Kowirkungen und benutzen die reduzierten Dualitätssätze von Imai-Takai und Katayama. Dieses Ergebnis wird von denselben Autoren in [**4**] unter Ausnutzung ihres reduzierten Dualitätssatzes auf Kac-Systeme verallgemeinert, so daß sich der reduzierte Abstieg und der reduzierte duale Abstieg im Gruppenfall als Spezialfälle derselben Konstruktion ergeben: des reduzierten äquivarianten Abstiegs für Quantengruppen.

Die Konstruktionen der äquivarianten reduzierten Abstiege benutzen das reduzierte verschränkte Produkt und ist daher von konkreten Konstruktionen abhängig. Eine KK-theoretische Version des Ansatzes von Nilsen [**51**] ist die folgende Frage: Kann man den vollen Abstieg von Kasparov in einem äquivarianten Zusammenhang für Quantengruppen konstruieren und ggf. den reduzierten Abstieg sowie das Ergebnis von Baaj und Skandalis daraus zurückgewinnen?

Inhalt

Unter anderem ist die letzte Frage der Ausgangspunkt dieser Arbeit. Es werden volle Quantengruppen, volle Kowirkungen und konsequent universelle Eigenschaften benutzt. Diese sind hierbei in noch größerem Maße als bei Gruppen nützlich: Man muß beispielsweise für die Angabe von Morphismen lediglich abstrakte Eigenschaften nachweisen. Es bleibt einem folglich weitgehend erspart, konkrete Konstruktionen einzusetzen. Diese können bei Quantengruppen wesentlich komplizierter und unübersichtlicher als im Gruppen-Fall sein.

Wir konstruieren und studieren volle verschränkte Produkte für Hilbert-Bimoduln in dem sehr allgemeinen Rahmen der Hopf-C^*-Algebren. Daneben betrachten wir *äquivariante Morita-Kategorien* sowohl als Hilfsmittel als auch Prototyp für die äquivariante KK-Theorie. In diesen Zusammenhängen fassen wir die Normalisierung und das volle verschränkte Produkt als universelle Konstruktionen auf.

Bei Quantengruppen, analog wie bei Gruppen-Kowirkungen, kann das reduzierte verschränkte Produkt als Normalisierung der vollen Variante gewonnen werden und somit als Komposition zweier universeller Konstruktionen aufgefaßt werden. Wir weiten das Ergebnis von Quigg über die Korrespondenz voller und reduzierter Kowirkungen auf Quantengruppen aus. Der Einsatz neuer Techniken vereinfacht einerseits den Beweis und erlaubt gleichzeitig die Verallgemeinerung der Korrespondenz auf bestimmte nicht-reguläre Quantengruppen, die wir „symmetrisch“ nennen. Insbesondere steht sie für die lokalkompakten Quantengruppen im Sinne von [**35**] zur Verfügung. Folgt man dem originalen Beweis von Quigg [**54**], so ist das zunächst ein wenig überraschend, zeigt aber, daß die Normalisierung für Quantengruppen ein sinnvoller Begriff ist.

Wir folgen dem Ansatz von Raeburn und Nilsen [**55**, **51**] und konstruieren für jede volle S-Kowirkung (B, δ) einer regulären Quantengruppe (S, Δ) mittels universeller Eigenschaften die „kanonische“ Surjektion

$$\Phi_\delta : B \rtimes_\delta \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\delta}} S \longrightarrow B \otimes \mathcal{K}.$$

Hierbei ist $\widehat{S}$ die zu S duale Quantengruppe, und $\mathcal{K}$ bezeichnet die Algebra der kompakten Operatoren. Analog zu [**14**] bezeichnen wir (B, δ) als *maximal*, falls Φ_δ bijektiv ist. Wir orientieren uns weiter an einer Idee in [**14**] und setzen die Technik der Normalisierung ein, um mithilfe der kanonischen Surjektion einen einfachen Beweis des Satzes über reduzierte Dualität von Baaj und Skandalis [**4**] zu erhalten. Gleichzeitig ergibt sich, daß das verschränkte Produkt der kanonischen Surjektion

$$\Phi_\delta \rtimes \widehat{S} : (B \rtimes \widehat{S} \rtimes S) \rtimes \widehat{S} \longrightarrow (B \otimes \mathcal{K}) \rtimes \widehat{S}$$

ein Isomorphismus ist. Durch einen Vergleich mit der kanonischen Surjektion der dualen $\widehat{S}$-Kowirkung $(B \rtimes \widehat{S}, \widehat{\delta})$,

$$\widehat{\Phi}_{\widehat{\delta}} \rtimes S : (B \rtimes \widehat{S}) \rtimes S \rtimes \widehat{S} \longrightarrow B \rtimes \widehat{S} \otimes \mathcal{K},$$

gelingt es nachzuweisen, daß die duale Kowirkung stets maximal ist. Eine Mittelbarkeits-Voraussetzung an S ist also unnötig.

Diese Erkenntnis hat Auswirkungen auf die Maximalisierungs-Konstruktion: In dieser Arbeit können Beispiele regulärer Quantengruppen angegeben werden, die weder mittelbar noch ko-mittelbar sind, deren volle Kowirkungen sich aber dennoch „maximalisieren“ lassen. Zu diesem Zweck geben wir die folgende Charakterisierung an: Eine reguläre Quantengruppe läßt genau dann Maximalisierungen für jede volle Kowirkung zu, wenn es eine Maximalisierung der trivialen Kowirkung auf $\mathbb{C}$ gibt. Wir verwenden hierbei dieselbe Beweisidee wie Echterhoff, Kalizewski und Quigg in [**14**], lösen uns aber durch den Einsatz von „relativen Kommutanten“ von der konkreten Konstruktion. Daneben wird die in [**14**] aufgeworfene Frage nach der Natürlichkeit von Maximalisierungen (positiv) beantwortet.

Die parallele Betrachtung von Morita-Kategorien ist nicht nur ein Hilfsmittel, sondern gibt auch Aufschluß darüber, wie man in der äquivarianten KK-Theorie vorgehen sollte. Wir benutzen die Definition von Baaj und Skandalis [**3**] und konstruieren in einer sehr allgemeinen Situation einen äquivarianten vollen Abstieg

$$J_S : KK_S(A, B) \longrightarrow KK_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S}).$$

Wir orientieren uns zwar prinzipiell an der Idee von Baaj und Skandalis, die Konstruktion ist durch den Einsatz universeller Eigenschaften für den vollen Abstieg jedoch wesentlich durchsichtiger. Die Ideen zur Normalisierung lassen sich ebenfalls problemlos auf die äquivariante KK-Theorie übertragen. Damit ist es möglich, bei Quantengruppen den reduzierten Abstieg von Baaj und Skandalis als Komposition von vollem Abstieg und Normalisierung zu *definieren*.

Ganz allgemein können wir zeigen, daß der volle Abstieg J_S ein Isomorphismus ist, sobald A eine maximale oder B eine normale Kowirkung ist. Dieses Ergebnis beinhaltet den Dualitätssatz von Baaj und Skandalis über reduzierte Dualität in der äquivarianten KK-Theorie.

Es stellt sich natürlich sofort die Frage, unter welchen Bedingungen der volle Abstieg für eine gegebene Quantengruppe immer ein Isomorphismus ist. Für eine diskrete Gruppe (genauer für die Quantengruppe $C^*(G)$) stellt sich heraus, daß dies äquivalent zu der von Cuntz in [**12**] definierten K-Mittelbarkeit von G ist. Für allgemeine lokalkompakte Gruppen ist die K-Mittelbarkeit im allgemeinen stärker und impliziert die Bijektivität des vollen Abstiegs für alle vollen G-Kowirkungen A und B.

Aufbau

Im Hinblick auf äquivariante KK-Theorie ist es nötig, die Theorie der verschränkten Produkte auf Hilbert-Bimoduln zu erweitern.

Das erste Kapitel wiederholt die grundlegenden Begriffe. Insbesondere skizzieren wir die Theorien der Hilbert-Bimoduln und der Hopf-C^*-Algebren. Außerdem besprechen wir Quantengruppen, wobei wir den Zugang über multiplikative Unitäre benutzen. Wir erinnern an die Definition der Kowirkungen einer Hopf-C^*-Algebra für C^*-Algebren und allgemeiner für Hilbert-Bimoduln. In diesem Zusammenhang wird die äquivariante Morita-Kategorie eingeführt.

Im zweiten Kapitel wird ausführlich die Theorie der verschränkten Produkte für Hilbert-Bimoduln mit Kowirkungen einer Hopf-C^*-Algebra besprochen. Wir diskutieren unter anderem die universelle Eigenschaft verschränkter Produkte und die duale Kowirkung. Es werden bekannte Ergebnisse bei C^*-Algebren auf Hilbert-Bimoduln übertragen. Insbesondere wird die Theorie der normalen Kowirkungen auf Hopf-C^*-Algebren verallgemeinert und in diesem Zusammenhang weitere Ergebnisse zu normalen Kowirkungen besprochen. Wir beschreiben hierbei Normalisierungen durch eine universelle Eigenschaft.

Das Hauptergebnis des dritten Kapitels ist die Verallgemeinerung des Satzes von Quigg über die Äquivalenz reduzierter und normaler Kowirkungen auf Quantengruppen. Wir definieren symmetrische multiplikative Unitäre, um gleichzeitig die Kac-Systeme von Baaj und Skandalis sowie lokalkompakte Quantengruppen im Sinne von Kustermans und Vaes zu behandeln. Für Quantengruppen mit symmetrischer multiplikativer Unitärer definieren wir reduzierte verschränkte Produkte und identifizieren sie mit der Normalisierung der (vollen) verschränkten Produkte des zweiten Kapitels. Anschließend beweisen wir den Satz von Quigg für diesen Typ von Quantengruppen.

Im vierten Kapitel besprechen wir Dualitätstheorie für Quantengruppen mit symmetrischer multiplikativer Unitärer, welche außerdem regulär sind. Für solche definieren wir zu jeder vollen Kowirkung die kanonische Surjektion. Anschließend geben wir mit ihrer Hilfe einen konzeptionellen Beweis für die reduzierte Dualität an. Wir definieren maximale Kowirkungen durch eine universelle Eigenschaft und stellen die Beziehung zu der Definition von Echterhoff, Kalizewski und Quigg her. Für mittelbare reguläre Quantengruppen beweisen wir die Verallgemeinerung des Satzes von Raeburn über volle Dualität. Schließlich geben wir die Maximalisierungs-Konstruktion an und erhalten interessante Beispiele regulärer Quantengruppen mit Maximalisierungen.

Die Ergebnisse der vorangehenden drei Kapitel werden im fünften auf die äquivariante KK-Theorie angewandt. Der erste Abschnitt erinnert an die Definition der äquivarianten KK-Theorie von Baaj und Skandalis. Wir definieren im zweiten Abschnitt den vollen Abstieg und einen Normalisierungs-Funktor für die äquivariante KK-Theorie, indem wir auf die Ergebnisse des zweiten Kapitels zurückgreifen. Für Quantengruppen definieren wir anschließend den reduzierten Abstieg und identifizieren ihn mit dem reduzierten Abstieg von Baaj und Skandalis. Danach geben wir die allgemeinen Ergebnisse zur Dualität in der äquivarianten KK-Theorie an. Schließlich werden diese im Fall von Gruppen-Kowirkungen benutzt, um den vollen Abstieg mit der K-Mittelbarkeit in Zusammenhang zu bringen.

1. Kapitel: Grundlagen und Notationen

§ 1.0 Generelle Notationen

1.0.1 Banachräume. Seien A, X und Z Banachräume und $f : A \times X \to Z$ eine bilineare Funktion. Für Teilmengen $M \subseteq A$ und $N \subseteq X$ bezeichnen wir mit $f(M, N)$ den Unterraum

$$f(M, N) := Span\{ f(m, n) \in Z \mid m \in M, \ n \in N \}.$$

Ist z.B. $X = Z$ ein Banachraum mit Links-Wirkung einer Banachalgebra A, so bezeichnen wir $M \cdot N$ den Unterraum von X, der von Elementen der Form mn mit $m \in M$ und $n \in N$ aufgespannt wird.

1.0.2 Lineare Funktionale auf C^*-Algebren. Sei A eine C^*-Algebra. Mit A' bezeichnen wir den Raum der stetigen linearen Funktionale auf A. Durch die Wirkungen $(f \cdot b)(a) = (a \cdot f)(b) := f(ba)$ für $a, b \in A$ und $f \in A'$ wird A' zu einem A-Banach-Bimodul. Die Wirkungen sind nichtentartet, da A eine approximative Eins besitzt. Eine Teilmenge $\mathfrak{F} \subseteq A'$ heißt *A-invariant*, falls $A \cdot \mathfrak{F}, \mathfrak{F} \cdot A \subseteq \mathfrak{F}$ ist. Ist $\mathfrak{F} \subseteq A'$ ein abgeschlossener A-invarianter Teilraum, so wirkt A ebenfalls nichtentartet auf $\mathfrak{F}$ (benutze die approximative Eins). Jedes Element $f \in \mathfrak{F}$ läßt sich nach dem Zerlegungssatz von Cohen-Hewitt (vgl. [**20**, Theorem (32.22)]) folglich in der Form $f = f_1 \cdot a_1 = a_2 \cdot f_2$ mit geeigneten $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$ und $a_1, a_2 \in A$ schreiben. In der Notation 1.0.1 bedeutet dies insbesondere $\mathfrak{F} = A \cdot \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \cdot A$.

Für ein stetiges lineares Funktional $f \in A'$ setzen wir $\check{f}(a) := \overline{f(a^*)}$ und erhalten das Funktional $\check{f}$. Dies liefert eine antilineare und selbstinverse Bijektion $\check{(.)} : A' \to A'$. Mit M ist auch $\check{M}$ eine A-invariante Teilmenge.

1.0.3 Tensorprodukte. Soweit nicht explizit anderweitig vermerkt, benutzen wir für Tensorprodukte die folgenden Konventionen: für zwei C^*-Algebren A und B ist $A \otimes B$ stets das minimale Tensorprodukt zweier C^*-Algebren. Für das algebraische Tensorprodukt benutzen wir das Symbol $\odot$.

1.0.4 Positions-Notation. Für Elemente m in Multiplikator-Algebren von Tensorprodukten (vgl. 1.1.2) benutzen wir die Positions-Notation, wenn wir sie in Multiplikator-Algebren von Tensorprodukten einbetten, in denen die gleichen Tensorfaktoren vorkommen (vgl. [**4**, S. 478]). Man deutet hierbei durch die Position von Indizes an, daß der zu der Position gehörige Tensorfaktor von m an der zum Index gehörigen Stelle des Tensorprodukts stehen soll. Beispielsweise notieren wir für $m \in M(A \otimes B)$ durch m_{12} das Element $m \otimes 1_C \in M(A \otimes B \otimes C)$, durch m_{23} das Element $1_C \otimes m \in M(C \otimes A \otimes B)$ und durch m_{13} das Element $(id_A \otimes \sigma)(m \otimes 1_C) \in M(A \otimes C \otimes B)$, wobei σ die Vertauschung ist. Ähnlich gehen wir vor, wenn mehr Tensorfaktoren vorkommen. In dieser Notation läßt sich auch die Vertauschung durch $m_{21} = \sigma(m) \in M(B \otimes A)$ einfach notieren.

1.0.5 . Seien C, C', D und D' jeweils C^*-Algebren und $m \in M(C \otimes D)$ ein Multiplikator des Tensorprodukts (vgl. 1.1.2). Sind $\varphi : C \to M(C')$ und $\psi : D \to M(D')$ nichtentartete Morphismen, so bezeichnen wir mit

$$^{\varphi}m := (\varphi \otimes id_D)(m) \quad \text{bzw.} \quad m^{\psi} := (id_C \otimes \psi)(m) \qquad \text{bzw.} \quad ^{\varphi}m^{\psi} := (\phi \otimes \psi)(m)$$

die Multiplikatoren in $M(C' \otimes D)$ bzw. $M(C \otimes D')$ bzw. $M(C' \otimes D')$.

§ 1.1 Hilbert-Bimoduln

Hilbert-Bimoduln wurden von Rieffel [**59**] benutzt, um eine generelle Theorie von induzierten Darstellungen von C^*-Algebren zu entwickeln. Als generelle Referenz für die Theorie der Hilbertmoduln dient [**37**]. Für Hilbert-Bimoduln benutzen wir die Notationen und Ergebnisse aus dem ersten Kapitel von [**15**].

1.1.1 Rechts-Hilbertmoduln. Sei B eine C^*-Algebra. Ein Rechts-Hilbert-B-Modul ist ein Rechts-B-Modul X_B mit B-wertigem Skalarprodukt $\langle , \rangle_B : X \times X \to B$, das bilinear ist, die Eigenschaften $\langle x, x' \rangle_B = \langle x', x \rangle_B^*$ und $\langle x, x'b \rangle_B = \langle x, x' \rangle_B b$ für $x, x' \in X$ und $b \in B$ erfüllt und positiv definit ist. Das bedeutet, daß $\langle x, x \rangle_B \geq 0$ als Element von B ist, welches nur dann verschwindet, wenn $x = 0$ ist. Durch $||x|| := ||\langle x, x \rangle_B||_B^{1/2}$ wird eine Norm auf X erklärt, bezüglich der X vollständig sein soll (ansonsten sprechen wir von einem *prä*-Hilbertmodul). Wir nennen X_B abkürzend einen Hilbertmodul, die Tatsache, daß es ein Rechtsmodul ist, sowie die C^*-Algebra B verstehen sich in dieser Notation von selbst. Das Skalarprodukt $\langle , \rangle_B$ heißt voll, wenn $\langle X, X \rangle_B$ eine dichte Teilmenge B ist. In diesem Fall ist X_B ein *voller* Rechts-Hilbertmodul. Beispielsweise ist B_B als Rechtsmodul über sich selbst mit dem Skalarprodukt $\langle b, b' \rangle_B := b^* b'$ ein Rechts-Hilbert-B-Modul, dessen Skalarprodukt offensichtlich voll ist.

1.1.2 Adjungierbare Operatoren. Seien X_B und Y_B Hilbertmoduln. Mit $\mathcal{L}_B(X, Y)$ bezeichnen wir die *adjungierbaren Operatoren*, das sind diejenigen Abbildungen $F : X \to Y$, für die es eine adjungierte Abbildung $F^* : Y \to X$ gibt, so daß $\langle Fx, y \rangle_B = \langle x, F^* y \rangle_B$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt. Dann ist F automatisch B-linear und normstetig (bzgl. der oben definierten Normen). Insbesondere ist $\mathcal{L}_B(X) := \mathcal{L}_B(X, X)$ eine C^*-Algebra. Ein wichtiger Spezialfall ist die *Multiplikator-Algebra* $M(B) := \mathcal{L}_B(B_B)$ von B.

Die *kompakten Operatoren* $\mathcal{K}_B(X, Y)$ von X nach Y sind der Abschluß von Linearkombinationen von Operatoren der Form $\vartheta_{x,y} := y \cdot \langle x, - \rangle_B \in \mathcal{L}_B(X, Y)$, wobei $x \in X$ und $y \in Y$. Das Adjungierte ist $\vartheta_{y,x} \in \mathcal{L}_B(Y, X)$. Mit der obigen Notation 1.0.1 ist also $\mathcal{K}_B(X, Y) := \overline{Y \cdot \langle X, - \rangle}$. Die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(X_B) := \mathcal{K}_B(X, X)$ sind ein Ideal in $\mathcal{L}_B(X)$ und allgemein gilt $\mathcal{L}_B(X) = M(\mathcal{K}(X_B))$. Für den speziellen Hilbertmodul B_B identifiziert sich B durch Wirkung als Linksmultiplikatoren mit $\mathcal{K}(B_B)$. Insbesondere kann man B als Ideal in $M(B)$ auffassen. Sei A eine weitere C^*-Algebra, dann heißt ein *-Morphismus $\varphi : A \to M(B)$ *nichtentartet*, falls $\varphi(A) \cdot B$ dicht in B liegt.

1.1.3 Rechts-Hilbert-Bimoduln. Ein *Rechts-Hilbert-A-B-Bimodul* ist ein Hilbertmodul X_B mit einer nichtentarteten A-Wirkung durch adjungierbare Operatoren. Das bedeutet, daß es einen nichtentarteten *-Homomorphismus $\iota_A : A \to M(\mathcal{K}(X_B)) = \mathcal{L}_B(X)$ gibt. Wir verwenden die Schreibweise ${}_AX_B$ und sprechen von einem (Rechts-)Hilbert-Bimodul, wobei wir in der Regel die Wirkung ι_A unterdrücken und stattdessen die Notation $\iota_A(a)(b) = a \cdot x = ax$ verwenden. In diesem Fall ist die Nichtentartetheit von ι_A äquivalent dazu, daß $A \cdot X$ dicht in X liegt. Nach dem Zerlegungssatz von Cohen-Hewitt ([**20**, Theorem (32.22)]) läßt sich jedes Element x in X dann in der Form $x = ax'$ schreiben, mit a in A und x' in X. In diesem Fall sind A bzw. B die (Links- bzw. Rechts-) Koeffizienten-Algebren des Hilbert-Bimoduls ${}_AX_B$. Jeder Rechts-Hilbertmodul X_B ist in kanonischer Weise ein $\mathcal{K}(X_B)$-B-Hilbert-Bimodul, also übertragen sich Resultate über Hilbert-Bimoduln sofort auf Hilbertmoduln.

1.1.4 Strikte Topologie. Sei ${}_AX_B$ ein Rechts-Hilbert-Bimodul. Durch die Familie von Halbnormen $x \mapsto ||kx||$ und $x \mapsto ||xb||$ für $k \in \mathcal{K}(X_B)$ und $b \in B$ definiert man die *strikte Topologie* auf X. Offenbar ist die strikte Topologie nur von dem Rechts-Hilbertmodul X_B abhängig und hat nichts mit der linken Koeffizienten-Algebra A zu tun. Als Spezialfall gewinnt man die strikte Topologie für eine C^*-Algebra B als die strikte Topologie des Hilbert-Bimoduls B_B.

1.1.5 Multiplikator-Bimoduln. Es gibt eine Verallgemeinerung der Multiplikator-Algebra: Seien X_B und Y_B Rechts-Hilbertmoduln. Dann ist $\mathcal{L}_B(X,Y)$ ein Rechts-Hilbert-$\mathcal{L}_B(Y)$-$\mathcal{L}_B(X)$-Bimodul durch die offensichtlichen Wirkungen und mit $\mathcal{L}_B(X)$-wertigem Skalarprodukt $\langle F, G\rangle_{\mathcal{L}_B(X)} := F^* \circ G$. Analog ist $\mathcal{K}_B(X,Y)$ ein $\mathcal{K}(Y_B)$-$\mathcal{K}(X_B)$-Hilbert-Bimodul. Der *Multiplikator-Bimodul* eines Rechts-Hilbert-Bimoduls ${}_AX_B$ ist der Rechts-Hilbert-$M(A)$-$M(B)$-Bimodul $M(X) := \mathcal{L}_B(B_B, X_B)$ mit den offensichtlichen Wirkungen und dem obigen $M(B)$-wertigen Skalarprodukt. Für $x \in X$ definiert $b \mapsto xb$ ein Element von $\mathcal{L}_B(B_B, X_B)$. Auf diese Weise identifiziert sich X isometrisch mit dem Unterraum $\mathcal{K}(B_B, X_B) \subseteq \mathcal{L}_B(B, X) = M(X)$, vgl. [**15**, Definition 1.14 und Remark 1.15]. Nach [**15**, Proposition 1.27] ist $M(X)$ die strikte Vervollständigung von X. Ist ${}_AX_B$ ein Rechts-Hilbert-Bimodul, induziert die nichtentartete Wirkung $\iota_A : A \to \mathcal{L}_B(X)$ eine nichtentartete (sogar unitale) $M(A)$-Wirkung auf $M(X)$, wodurch ${}_{M(A)}M(X)_{M(B)}$ zu einem Rechts-Hilbert-$M(A)$-$M(B)$-Modul wird, den wir abkürzend mit $M({}_AX_B)$ bezeichnen. Wiederum nach [**15**, Proposition 1.27] sind alle natürlichen Operationen komponentenweise strikt stetig.

1.1.6 Imprimitivitäts-Bimoduln. Ein *Imprimitivitäts-A-B-Bimodul* (vgl. [**59**, Definition 6.10] oder [**15**, Definition 1.5]) ist ein Rechts-Hilbert-Bimodul ${}_AX_B$ mit vollem Skalarprodukt $\langle , \rangle_B$, so daß die Links-Wirkung ι_A einen Isomorphismus $A \cong \mathcal{K}(X_B)$ induziert. Das ist äquivalent dazu, daß es ein A-wertiges, linkes volles Skalarprodukt ${}_A\langle , \rangle$ gibt (mit spiegelsymmetrischen Eigenschaften wie für rechte Skalarprodukte), d.h. ${}_AX$ ist zusätzlich ein voller *Links*-Hilbert-A-Modul, so daß die beiden Skalarprodukte verträglich sind. Das bedeutet, es gilt ${}_A\langle x, y\rangle \cdot z = x \cdot \langle y, z\rangle_B$ für alle $x, y, z \in X$. Für Imprimitivitäts-Bimoduln gibt es nach [**13**] eine alternative (und symmetrische) Beschreibung von $M(X)$ durch Multiplikatoren (vgl. [**13**, Definition 1.1]). Es gibt natürlich auch A-adjungierbare Operatoren $\mathcal{L}_A$ für Links-Hilbert-A-Moduln und man kann nach [**13**, Proposition 1.3] $M(X) \cong \mathcal{L}_B(B, X_B) \cong \mathcal{L}_A(A, {}_AX)$ kanonisch identifizieren. Gibt es einen Imprimitivitäts-Bimodul ${}_AX_B$, so heißen A und B *stark Morita-äquivalent*, vgl. [**8**]. Wir nennen daher auch ${}_AX_B$ eine *starke Morita-Äquivalenz* zwischen A und B.

1.1.7 Rieffel-Korrespondenz. Ist ${}_AX_B$ ein Imprimitivitäts-Bimodul wie oben, so gibt die Rieffel-Korrespondenz eine natürliche Bijektion zwischen Darstellungen von A und B (vgl. [**59**, Theorem 6.23]). Wir verwenden die Variante [**15**, Proposition 1.8]:

Sei ${}_AX_B$ ein Imprimitivitäts-Bimodul. Es gibt inklusions-erhaltende natürliche Bijektionen zwischen den abgeschlossenen Idealen von B, den abgeschlossenen A-B-Untermoduln von X und den abgeschlossenen Idealen von A. Ist $I \subseteq B$ ein abgeschlossenes Ideal, so ist der zugehörige Untermodul von X gleich $X \cdot I$ und das zugehörige Ideal von A gleich $\overline{{}_A\langle X \cdot I, X \cdot I\rangle}$.

1.1.8 Konjugierte Moduln. Ist X_B ein Rechts-Hilbertmodul, so ist $\mathcal{K}_B(X, B)$ ein Rechts-Hilbert-$\mathcal{K}(X_B)$-Modul. Fassen wir ein Element $x \in X$ mittels der obigen Einbettung als einen Operator $x \in \mathcal{K}_B(B, X)$ auf, so bezeichnen wir mit x^* den entsprechenden Operator in $\mathcal{K}_B(X, B)$. Er ist offenbar durch $x^*(x') = \langle x, x' \rangle_B$ gegeben. Die Abbildung $x \mapsto x^*$ ist eine anti-lineare bijektive Abbildung. Daher bezeichnen wir mit $X^*_{\mathcal{K}(X)} := \mathcal{K}_B(X, B)_{\mathcal{K}(X)}$ den zu X *konjugierten* Rechts-Hilbertmodul, denn die Beschreibung durch kompakte Operatoren ist äquivalent zu der in [**15**, Example 1.6(3)]. Das $\mathcal{K}(X)$-wertige Skalarprodukt $\langle x^*, y^* \rangle_{\mathcal{K}(X)} = xy^* = \vartheta_{x,y}$ ist offenbar voll (vgl. 1.1.3). Die kanonische Links-Wirkung von B erweitert X^* zu einem Rechts-Hilbert-B-$\mathcal{K}(X)$-Bimodul und offenbar ist $\mathcal{K}(X^*_{\mathcal{K}(X)}) = \overline{\langle X, X \rangle_B}$. Ist X_B voll (vgl. 1.1.3), d.h. ${}_{\mathcal{K}(X)}X_B$ ist ein Imprimitivitäts-Bimodul, so ist $B = \mathcal{K}(X^*_{\mathcal{K}(X)})$ und ${}_B X^*_{\mathcal{K}(X)}$ ebenfalls ein Imprimitivitäts-Bimodul. In diesem Fall identifiziert sich $M(X^*)$ mit $\mathcal{L}_B(X, B)$, vgl. 1.1.6.

1.1.9 Morphismen. Seien X_B und Y_D Rechts-Hilbertmoduln. Ein *Morphismus von Rechts-Hilbertmoduln* ist ein Paar von Abbildungen $\Phi : X \to M(Y)$ und $\varphi : B \to M(D)$, wobei φ ein Morphismus von C^*-Algebren ist, so daß die Verträglichkeits-Bedingung $\langle \Phi(x), \Phi(x') \rangle_{M(D)} = \varphi(\langle x, x' \rangle_B)$ für $x, x' \in X$ gilt. Dann ist Φ nach [**15**, Remark 1.17] automatisch B-linear und normstetig, sogar eine Kontraktion. Wir verwenden die Schreibweise $\Phi_\varphi : X_B \longrightarrow M(Y_D)$. Der Morphismus Φ_φ heißt *nichtentartet*, falls φ nichtentartet ist und der Unterraum $\Phi(X) \cdot D \subseteq Y$ dicht in Y liegt. Er heißt *beidseitig nichtentartet*, falls zusätzlich der Teilraum $\mathcal{K}(Y) \cdot \Phi(X) \subseteq Y$ ebenfalls dicht in Y ist. Das ist automatisch der Fall, wenn X_B voll ist: $\overline{\mathcal{K}(Y) \cdot \Phi(X)} = \overline{Y \cdot Y^*\Phi(X)} = \overline{Y \cdot D\Phi(X)^*\Phi(X)} = \overline{Y \cdot D\varphi(B)} = Y$. Ist Φ_φ nichtentartet, so gibt es einen unitären Operator $\Phi_* : (X \otimes_\varphi D)_D \to Y_D$ (vgl. den ersten Teil von 1.1.11), der durch $x \otimes d \mapsto \Phi(x)d$ mit $x \in X$ und $d \in D$ definiert ist. Für nichtentartetes Φ_φ sind Y_D und $X \otimes_\varphi D$ also unitär isomorphe Hilbertmoduln (vgl. 1.1.19).

1.1.10 Bimodul-Morphismen. Sind ${}_A X_B$ und ${}_C Y_D$ Rechts-Hilbert-Bimoduln, so ist ein *Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln* zwischen ihnen ein Morphismus Φ_φ wie oben zusammen mit einem *-Morphismus $\psi : A \to M(C)$, so daß die zusätzliche Verträglichkeits-Bedingung $\Phi(ax) = \psi(a)\Phi(x)$ erfüllt ist. Wir verwenden die Notation

$$ {}_\psi\Phi_\varphi : {}_A X_B \longrightarrow M({}_C Y_D) $$

und bezeichnen ψ bzw. φ als (Links- bzw. Rechts-) Koeffizienten-Homomorphismen. Ein Morphismus ${}_\psi\Phi_\varphi$ von Rechts-Hilbert-Bimoduln heißt *(beidseitig) nichtentartet*, falls ψ nichtentartet und Φ_φ (beidseitig) nichtentartet ist. In diesem Fall ist Φ nach [**15**, Theorem 1.30] strikt stetig und besitzt eine eindeutige strikt stetige Fortsetzung zu einem Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln ${}_{\overline{\psi}}\overline{\Phi}_{\overline{\varphi}} : M({}_A X_B) = {}_{M(A)}M(X)_{M(B)} \to M({}_C Y_D)$, den wir meist einfach wieder mit ${}_\psi\Phi_\varphi$ bezeichnen. Indem man diese Fortsetzung benutzt, lassen sich nichtentartete Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln verknüpfen. Die Notation ${}_\psi\Phi_\varphi$ macht deutlich, daß die Koeffizienten-Morphismen als Teil des Rechts-Hilbert-Bimodul-Morphismus aufgefaßt werden. Insbesondere sind zwei Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln nur dann identisch, wenn auch ihre Koeffizienten-Abbildungen jeweils übereinstimmen. Außerdem nennen wir ${}_\psi\Phi_\varphi$ *injektiv*, wenn ψ, φ und Φ injektive Abbildungen sind. In diesem Fall ist Φ automatisch eine Isometrie. Der Morphismus ${}_\psi\Phi_\varphi$ ist *surjektiv*, wenn die Bilder von ψ, φ und Φ jeweils gleich C, D und Y sind . Er heißt ein *Isomorphismus*, wenn er gleichzeitig injektiv und surjektiv ist und induziert folglich einen isometrischen Isomorphismus ${}_A X_B \cong {}_C Y_D$.

1.1.11 Tensorprodukte. ([**37**, Chapter 4]) Wir betrachten Rechts-Hilbertmoduln X_B und Y_D. Dann kann man auf dem algebraischen Tensorprodukt $X \odot Y$ ein $B \otimes D$-wertiges Skalarprodukt durch $\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle_{B \otimes D} := \langle x, x' \rangle_B \otimes \langle y, y' \rangle_D$ definieren. Dessen Vervollständigung ist ein Rechts-Hilbert-$B \otimes D$-Modul, den wir als das *äußere Tensorprodukt* bezeichnen und mit $X \otimes Y$ notieren.

Hat man in der obigen Situation einen *-Homomorphismus $\varphi : B \to \mathcal{L}_D(Y)$, so kann man das sogenannte *balancierte* oder auch *innere* Tensorprodukt bilden: Hierzu betrachtet man auf $X \odot Y$ das D-wertige Prä-Skalarprodukt $\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle_D := \langle y, \varphi(\langle x, x' \rangle_B)(y') \rangle_D$ und vervollständigt $X \odot Y$ modulo den Nullraum zu einem Rechts-Hilbert-D-Modul $X \otimes_\varphi Y$. Wir bezeichnen ihn auch mit $X \otimes_B Y$, wenn der Morphismus φ sich von selbst versteht, da es eine C^*-algebraische Version des algebraischen Skalarprodukts $\otimes_B$ über B ist. Sind ${}_\psi\Phi_\varphi : {}_AX_B \to M({}_LZ_R)$ und ${}_\varphi\Gamma_\vartheta : {}_BY_C \to M({}_RW_D)$ Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln, so daß die Koeffizienten-Daten (B, β) und φ in der angegebenen Weise übereinstimmen. Dann kann man nach [**15**, Proposition 1.34] auf dem inneren Tensorprodukt einen Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln ${}_\psi(\Phi \otimes_B \Gamma)_\gamma : {}_A(X \otimes_B Y)_C \to M({}_L(Z \otimes_R)_D)$ definieren. Auf Elementen $x \in X$ und $y \in Y$ gilt $\Phi \otimes_B \Gamma(x \otimes y) = \Phi(x) \otimes \Gamma(y)$ in $M(Z) \otimes_{M(R)} M(W) \subseteq M(Y \otimes_R W)$ (vgl. [**15**, Lemma 1.32]). Er ist (beidseitig) nichtentartet, wenn Φ und Γ (beidseitig) nichtentartet sind.

1.1.12 Adjunktion nichtentarteter Morphismen. Seien X_B und Y_B Hilbertmoduln. Für $F \in \mathcal{L}_B(X, Y)$ betrachten wir die Abbildung $\tilde{F} : k \mapsto F \circ k$, mit k in $\mathcal{K}(X)$. $\tilde{F}$ definiert offenbar eine $\mathcal{K}(X)$-adjungierbare Abbildung von $\mathcal{K}(X)$ nach $\mathcal{K}_B(X, Y)$ und folglich ein Element in $M(\mathcal{K}_B(X, Y)_{\mathcal{K}(X)})$. Auf diese Weise erhält man eine isometrische Einbettung $\mathcal{L}_B(X, Y) \subseteq M(\mathcal{K}_B(X, Y))$ von Hilbert-Bimoduln mit Identitäten $id_{\mathcal{L}_B(Y)}$ und $id_{\mathcal{L}_B(X)}$ als Koeffizienten-Abbildungen. Seien zudem $\Phi_\varphi : X_B \to M(W_D)$ und $\Psi_\varphi : Y_B \to M(Z_D)$ nichtentartete Morphismen von Rechts-Hilbertmoduln mit derselben linken Koeffizienten-Abbildung φ. Unter Benutzung der kanonischen Isomorphismen $\Phi_* : X \otimes_\varphi D \cong Y$ und $\Psi : Y \otimes_\varphi D \cong Z$ aus 1.1.9 kann man eine Abbildung $Ad(\Psi, \Phi) : \mathcal{L}_B(X, Y) \longrightarrow \mathcal{L}_D(W, Z)$ durch $F \longmapsto \Psi_* \circ (F \otimes_\varphi 1_D) \circ \Psi_*^{-1}$ definieren. Für x in X, d in D und F in $\mathcal{L}_B(X, Y)$ bedeutet das offenbar $[Ad(\Psi, \Phi)(F)](\Phi(x)d) = \Psi(Fx)d$. Dadurch ist $Ad(\Psi, \Phi)$ eindeutig festgelegt, da Φ_φ nichtentartet ist. Analog definieren wir $Ad(\Phi) := Ad(\Phi, \Phi) : \mathcal{L}_B(X) \to \mathcal{L}_D(W)$ und $Ad(\Psi) := Ad(\Psi, \Psi) : \mathcal{L}_B(Y) \to \mathcal{L}_D(Z)$. Wir betrachten $\mathcal{L}_D(W, Z) \subseteq M(\mathcal{K}_D(W, Z))$ und erhalten:

Mit den Bezeichnungen wie oben ist die Einschränkung auf kompakte Operatoren

$$ {}_{Ad(\Psi)}Ad(\Psi, \Phi)_{Ad(\Phi)} : {}_{\mathcal{K}(Y)}\mathcal{K}_B(X, Y)_{\mathcal{K}(X)} \longrightarrow M({}_{\mathcal{K}(Z)}\mathcal{K}_D(W, Z)_{\mathcal{K}(W)}) $$

ein Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln. Für Elemente $m \in M(X)$ und $n \in M(Y)$ gilt $Ad(\Psi, \Phi)(nm^*) = \Psi(n)\Phi(m)^*$. Ist $Y \cdot \langle X, X \rangle_B$ dicht in Y oder Φ_φ beidseitig nichtentartet, so ist $Ad(\Psi, \Phi)$ nichtentartet. Insbesondere sind die Koeffizienten-Homomorphismen $Ad(\Psi)$ und $Ad(\Phi)$ stets nichtentartete *-Morphismen. Sind sowohl Φ_φ als auch Ψ_ψ beidseitig nichtentartet, so ist es auch $Ad(\Psi, \Phi)$.

Beweis. Fast alle Behauptungen sind nach Definition klar, wir zeigen nur die Nichtentartetheit unter den Zusatzbedingungen: Ist $\overline{Y\langle X, X \rangle_B} = Y$, so folgt

$$ \begin{aligned} \mathcal{K}_D(W, Z) &= \overline{Z \cdot W^*} = \overline{\Psi(Y)D \cdot D\Phi(X)^*} = \overline{\Psi(Y\langle X, X \rangle_B)DD\Phi(X)^*} \\ &= \overline{\Psi(Y)\Phi(X)^*\Phi(X)DD\Phi(X)^*} = \overline{\Psi(Y)\Phi(X)^* \cdot WW^*} \\ &= \overline{Ad(\Psi, \Phi)(\mathcal{K}(X, Y)) \cdot \mathcal{K}(W)}. \end{aligned} $$

Diese Bedingung ist für $Y = X$ stets erfüllt. Ist andererseits Φ_φ beidseitig nichtentartet, so folgt $\overline{Ad(\Psi,\Phi)(\mathcal{K}(X,Y)) \cdot \mathcal{K}(W)} = \overline{\Psi(Y) \cdot \Phi(X)^* \cdot \mathcal{K}(W)} = \overline{\Psi(Y) \cdot W^*}$. Der letzte Term ist gleich $\overline{\Psi(Y) \cdot D \cdot W^*} = \overline{Z \cdot W^*} = \mathcal{K}_D(W, Z)$. Die letzte Behauptung wird genauso bewiesen. □

Insbesondere können wir einen nichtentarteten Morphismus von Rechts-Hilbertmoduln Φ_φ durch den rechten Koeffizienten-Morphismus $Ad(\Phi)$ zu einem nichtentarteten Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln ergänzen. Das folgt direkt aus der Proposition, wenn man X bzw. W mit $\mathcal{K}_B(B, X)$ bzw. $\mathcal{K}_D(D, W)$ identifiziert.

1.1.13 Adjunktion und Bimodul-Morphismen. Wir erhalten zudem die folgende Charakterisierung für die Verträglichkeit der rechten Koeffizienten-Abbildung eines Hilbert-Bimodul-Homomorphismus: Sei ${}_\psi\Phi_\varphi : {}_AX_B \to M({}_CY_D)$ ein nichtentarteter Morphismus von Hilbert-Bimoduln. Dann ist die Verträglichkeit von Φ mit ψ äquivalent zu der Gleichung $\iota_C \circ \psi = Ad(\Phi) \circ \iota_A$, denn es gilt $Ad(\Phi)(\iota(a))(\Phi(x)d) = \Phi(ax)d = \psi(a)\Phi(x)d = \iota_C(\psi(a))(\Phi(x)d)$.

1.1.14 Adjunktion und Komposition. Man sieht leicht ein, daß Adjunktion mit Komposition verträglich ist: Sind in der Situation von 1.1.12 weitere nichtentartete Morphismen von Hilbertmoduln $\Phi'_\psi : W_D \to M(W'_{D'})$ und $\Psi'_\psi : Z_D \to M(Z'_{D'})$ gegeben, so gilt $Ad(\Psi' \circ \Psi, \Phi' \circ \Phi) = Ad(\Psi', \Phi') \circ Ad(\Psi, \Phi)$. Die Verknüpfung der beiden Funktionen $Ad(\Psi', \Phi')$ und $Ad(\Psi, \Phi)$ macht in jedem Fall Sinn, da das Bild von $Ad(\Psi, \Phi)$ in $\mathcal{L}_D(W, Z)$ enthalten ist. Diese triviale Beobachtung erlaubt es, Eigenschaften der Bimodul-Abbildungen Φ und Ψ auf $Ad(\Psi, \Phi)$ zu übertragen.

1.1.15 Konjugierte Morphismen. Sei $\Phi_\varphi : X_B \to M(Y_D)$ ein nichtentarteter Morphismus von Rechts-Hilbertmoduln, den wir gemäß 1.1.12 durch die linke Koeffizienten-Abbildung $Ad(\Phi) : \mathcal{K}(X) \to M(\mathcal{K}(Y))$ zu einem Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln erweitern. Unter Verwendung des Ergebnisses $\mathcal{L}_D(Y, D) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{K}(Y)}(\mathcal{K}(Y), \mathcal{K}_D(Y, D)) = M(Y^*_{\mathcal{K}(Y)})$ und den Bezeichungen aus 1.1.12 und 1.1.8 definieren wir durch

$$\Phi^*_{Ad(\Phi)} := Ad(\varphi, \Phi) : X^* = \mathcal{K}_B(X, B) \longrightarrow M(Y^*_{\mathcal{K}(Y)})$$

einen Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln. Er verträgt sich mit der linken Koeffizienten-Abbildung $\varphi : B \to M(D)$ und setzt sich folglich zu einem Morphismus ${}_\varphi\Phi^*_{Ad(\Phi)}$ von Rechts-Hilbert-Bimoduln fort. Wir nennen ${}_\varphi\Phi^*_{Ad(\Phi)} : {}_BX_{\mathcal{K}(X)} \to M({}_DY^*_{\mathcal{K}(Y)})$ den *zu Φ_φ konjugierten* Morphismus. Er ist offenbar genau dann nichtentartet, falls der Unterraum $\mathcal{K}(Y) \cdot \Phi(X)$ dicht in Y liegt. Insbesondere ist mit Φ_φ auch ${}_\varphi\Phi^*_{Ad(\Phi)}$ beidseitig nichtentartet (vgl. 1.1.10).

1.1.16 C^*-Algebren als Quelle. Wir zeigen als Anwendung der Adjunktions-Technik, daß jeder nichtentartete Hilbertmodul-Homomorphismus mit einer C^*-Algebra B_B als Quelle im wesentlichen ein nichtentarteter *-Morphismus ist. Sei dazu $\Phi_\varphi : B_B \longrightarrow M(Y_D)$ ein nichtentarteter Morphismus von Hilbertmoduln. Insbesondere kann man nach [**15**, Theorem 1.30] Φ auf $M(B)$ fortsetzen und das Element $\Phi(1_B)$ in $\mathcal{L}_D(D_D, Y_D)$ betrachten.

1. *Die Abbildung $\Phi(1_B)$ in $\mathcal{L}_D(D, Y)$ ist eine Unitäre (vgl. 1.1.19) und daher Y_D als Hilbert-D-Modul unitär äquivalent zu D_D.*

2. *Mit dieser Identifizierung $\Phi(1_B) : D_D \cong Y_D$ stimmen die Abbildungen φ und Φ überein. Genauer gesagt gilt $\Phi = \Phi(1_B) \circ \varphi$.*

Beweis. Für den ersten Teil müssen wir zeigen, daß die Abbildungen $\Phi(1_B) \in \mathcal{L}_D(D, Y)$ und $\Phi(1_B)^* \in \mathcal{L}_D(Y, D)$ zueinander invers sind. Zum einen folgt aus der Definition eines Hilbertmodul-Homomorphismus, $\Phi(1_B)^* \cdot \Phi(1_B) = \varphi(1_B \cdot 1_B^*) = \varphi(1_B) = 1_D = id_D$, wobei die komponentenweise strikte Stetigkeit eingeht. Zum anderen gilt mit der Adjunktions-Technik aus 1.1.12 die Beziehung $\Phi(1_B) \cdot \Phi(1_B)^* = Ad(\Phi)(1_B \cdot 1_B^*) = Ad(\Phi)(1_B) = 1_{\mathcal{K}(Y)} = id_Y$, da $Ad(\Phi)$ ein nichtentarteter *-Morphismus ist. Der zweite Teil $\Phi(1_B) \cdot \varphi(b) = \Phi(1_B \cdot b) = \Phi(b)$ folgt einfach aus der Verträglichkeit der Abbildungen Φ und φ und der strikten Stetigkeit von Φ_φ. □

1.1.17 Die Linking-Algebra. Die Linking-Algebra wurde ursprünglich in [**8**, S. 350] für Imprimitivitäts-Bimoduln definiert, vgl. auch [**58**, Lemma 3.20]. Für Rechts-Hilbert-(Bi)Moduln finden sich Definitionen in [**15**, § 1.5] und implizit auch in [**3**]. Sie erlaubt es einem, viele Resultate für C^*-Algebren auf Rechts-Hilbert-Bimoduln zu verallgemeinern. Sei X_B ein Hilbertmodul. Die *Linking-Algebra* $L(X)$ von X ist die Menge der Blockmatrizen $\left(\begin{smallmatrix} k & x_1 \\ x_2^* & b \end{smallmatrix}\right)$, wobei k in $\mathcal{K}(X)$, x_1, x_2 in X und b in B, mit der offensichtlichen Multiplikation (vgl. 1.1.8). Sie ist eine C^*-Algebra bzgl. einer geeigneten Norm und mit Involution $\left(\begin{smallmatrix} k & x_1 \\ x_2^* & b \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} k^* & x_2 \\ x_1^* & b^* \end{smallmatrix}\right)$. Ist $\Phi_\varphi : X_B \longrightarrow M(Y_D)$ ein nichtentarteter Homomorphismus von Hilbertmoduln, so gibt es einen eindeutigen nichtentarteten *-Morphismus $L(\Phi) : L(X) \to M(L(Y)) \cong LM(Y)$, der durch $\left(\begin{smallmatrix} k & x_1 \\ x_2^* & b \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} Ad(\Phi)(k) & \Phi(x_1) \\ \Phi(x_2)^* & \varphi(b) \end{smallmatrix}\right)$ definiert ist. $L(\cdot)$ wird somit zu einem Funktor der Kategorie der Rechts-Hilbertmoduln in die Kategorie der C^*-Algebren.

1.1.18 Abgeschlossene Bilder. Da Bilder von *-Homomorphismen zwischen C^*-Algebren stets abgeschlossene Unteralgebren sind, gilt dies auch für Hilbertmoduln.

Sei $\Phi_\varphi : X_B \to M(Y_D)$ ein nichtentarteter Homomorphismus von Rechts-Hilbertmoduln. Dann ist das Bild $\Phi(X) \subseteq M(Y_D)$ norm-abgeschlossen.

Beweis. Wir benutzen die Linking-Algebren $L(X)$ bzw. $L(Y)$ von X bzw. Y und betrachten den induzierten *-Algebren-Homomorphismus $L(\Phi) : L(X) \to ML(Y)$ dessen Bild $L(\Phi)(L(X))$ abgeschlossen in $M(L(Y))$ ist. Sei nun $(\Phi(x_i)) \to m \in M(Y)$ eine norm-konvergente Folge. Dann ist auch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \Phi(x_i) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \to \left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine konvergente Folge in $M(L(Y))$ und folglich $\left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in L(\Phi)(L(X))$. Es gibt also ein Element $\left(\begin{smallmatrix} k & x \\ z^* & b \end{smallmatrix}\right) \in L(X)$ mit $L(\Phi)(\left(\begin{smallmatrix} k & x \\ z^* & b \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} Ad(\Phi)(k) & \Phi(x) \\ \Phi(z)^* & \varphi(b) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, folglich erhält man $\Phi(x) = m$ und somit ist das Bild von Φ abgeschlossen. □

1.1.19 Unitäre. Ein *unitärer Operator* oder auch eine *Unitäre* zwischen Rechts-Hilbert-(Bi-)Moduln $_{(A)}Y_B$ und $_{(A)}Y_B$ ist ein bijektiver Operator U in $\mathcal{L}_B(X, Y)$, so daß $\langle Ux, Ux' \rangle_B$ gleich $\langle x, x' \rangle_B$ ist für alle x, x' in X (und ggf. $\iota_A^Y(a) = Ad(U)(\iota_A^X(a)) := U\iota_A^X(a)U^*$ für alle a in A, wobei ι_A^X und ι_A^Y die jeweiligen Links-A-Wirkungen sind). Existiert ein solcher, so heißen $_{(A)}X_B$ und $_{(A)}Y_B$ *unitär äquivalent.* Das folgende Ergebnis zeigt, daß unitäre Operatoren stets als Hilbert-Bimodul-Morphismen aufgefaßt werden können:

Die Unitären in $\mathcal{L}_B(X,Y)$ sind genau die nichtentarteten Morphismen von Hilbert-(Bi)-Moduln der Form ${}_{(id)}\Phi_{id} : {}_{(A)}X_B \to M({}_{(A)}Y_B)$ mit Identitäten als Koeffizienten-Homomorphismen.

Beweis. Das Bild von Φ ist wegen $\Phi(X) = \Phi(X \cdot B) = \Phi(X) \cdot B \subseteq Y$ und 1.1.18 eine abgeschlossene Teilmenge von Y, die mit Y übereinstimmt, da Φ nichtentartet ist. Zudem folgt aus der Definition von Hilbert-Bimodul-Homomorphismen $\langle \Phi(x), \Phi(x') \rangle_B = id_B(\langle x, x' \rangle_B) = \langle x, x' \rangle_B$. In diesem Fall ist also $\Phi \in \mathcal{L}_B(X,Y)$ eine Unitäre und es gilt die Identität $\Phi^* \circ \Phi = id_X$ und $\Phi^* \circ \Phi = id_Y$. Daraus folgt für $a \in A$ sofort $\iota_A^Y(a)(\Phi(x)) = \Phi(ax) = (\Phi \cdot a \cdot \Phi^*)\Phi(x) = Ad(\Phi)(\iota_A^X(a))(\Phi(x))$, also $\iota_A^Y = Ad(U) \circ \iota_A^X$. Die umgekehrte Richtung ist klar. □

1.1.20 Ein Kriterium für Isomorphie. Für zwei Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln ${}_\mu\Phi_\varphi : {}_AX_B \to M({}_CY_D)$ und ${}_\nu\Psi_\psi : {}_CY_D \to M({}_AX_B)$ gilt:

Sind die Kompositionen $\Psi \circ \Phi$ bzw. $\Phi \circ \Psi$ als Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln gleich den Inklusionen $X \subseteq M(X)$ bzw. $Y \subseteq M(Y)$, so sind ${}_\mu\Phi_\varphi$ und ${}_\nu\Psi_\psi$ bereits gegenseitig inverse Isomorphismen ${}_AX_B \cong {}_CY_D$ im Sinne von 1.1.10.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß Φ und Ψ im Sinne von 1.1.10 surjektiv sind. Wegen der strikten Stetigkeit lassen sich die Bimodul-Morphismen Φ und Ψ auf die jeweiligen Multiplikator-Moduln fortsetzen. Dann sind wegen der Voraussetzung $\Phi : M(X) \to M(Y)$ und $\Psi : M(Y) \to M(X)$ zueinander inverse Morphismen von Hilbert-Bimoduln, denn die Inklusionen $X \subseteq M(X)$ bzw. $Y \subseteq M(Y)$ besitzen die eindeutigen Fortsetzungen $id_{M(X)}$ bzw. $id_{M(Y)}$, vgl. 1.1.5. Insbesondere sind Φ und Ψ injektiv und daher isometrisch und es gilt $\overline{\varphi(M(B))} = \overline{M(D)}$ und $\overline{\psi(M(D)) = M(B)}$. Folglich erhalten wir $Y = \overline{\Phi(X) \cdot D} \subseteq \overline{\Phi(X) \cdot M(D)} = \overline{\Phi(X)\varphi(M(B))} = \overline{\Phi(X \cdot M(B))} = \Phi(X)$, da $X \cdot M(B) = X$ und das Bild $\Phi(X)$ nach 1.1.18 abgeschlossen ist. Wendet man Ψ auf diese Inklusion an, so folgt $\Psi(Y) \subseteq \Psi\Phi(X) = X$. Aus Symmetriegründen gilt wie oben $X \subseteq \Psi(Y)$. Insgesamt ist $\Psi(Y) = X$ und analog $\Phi(X) = Y$. Genauso folgert man die Behauptung für die Koeffizienten-Abbildungen. □

1.1.21 Idealisatoren. Die Technik der Linking-Algebra erlaubt eine ähnliche Charakterisierung der Multiplikator-(Bi)-Moduln als „Idealisator", vgl. [**37**, Proposition 2.3].

Sei $\Phi_\varphi : X_B \to M(Y_D)$ eine nichtentartete Isometrie von Hilbertmoduln. Dann ist die Fortsetzung $\bar{\Phi} : M(X_B) \to M(Y_D)$ eine Isometrie und das Bild $\Phi(M(X))$ stimmt überein mit der Teilmenge $M := \{m \in M(Y) | m \cdot \varphi(B) \cup Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) \cdot m \subseteq \Phi(X)\ \}$

Beweis. Man benutzt wieder Linking-Algebren. Mit Φ_φ ist auch die assoziierte Abbildung $L(\Phi) : L(X) \longrightarrow M(L(Y))$ der Linking-Algebren eine Isometrie. Also kann man nach [**37**, Proposition 2.3] die Multiplikator-Algebra $M(L(X)) \cong L(\Phi)(M(X))$ mit dem Idealisator $\{m \in M(L(Y))| \quad L(\Phi)(L(X)) \cdot m \cup m \cdot L(\Phi)(L(X)) \subseteq L(\Phi)(L(X))\}$ identifizieren. Unter dem Isomorphismus $L(M(Y)) \cong L(M(Y))$ entspricht diese Teilmenge offensichtlich der Menge $\widetilde{M}$ der Elemente $\left(\begin{smallmatrix} k & y_1 \\ y_2^* & d \end{smallmatrix}\right)$ in $L(M(Y))$ mit

$$\begin{pmatrix} k & y_1 \\ y_2^* & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) & \Phi(X) \\ \hline \Phi(X)^* & \varphi(B) \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) & \Phi(X) \\ \hline \Phi(X)^* & \varphi(B) \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} k & y_1 \\ y_2^* & d \end{pmatrix} \subseteq \left(\begin{array}{c|c} Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) & \Phi(X) \\ \hline \Phi(X)^* & \varphi(B) \end{array}\right).$$

Also stimmt das Bild $\Phi(M(X))$ mit den Elementen in $M(Y)$ überein, die als rechte obere Ecke eines Elements in $\widetilde{M}$ auftauchen. Das ist aber genau die Menge M aus dem Lemma, denn ist $m \in M \subseteq M(Y)$, so gilt

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) & \Phi(X) \\ \hline \Phi(X)^* & \varphi(B) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} m\Phi(X)^* & m\varphi(B) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \overset{(*)}{\subseteq} \left(\begin{array}{c|c} Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) & \Phi(X) \\ \hline \Phi(X)^* & \varphi(B) \end{array}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) & \Phi(X) \\ \hline \Phi(X)^* & \varphi(B) \end{array}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X))m \\ \hline 0 & \Phi(X)^* m \end{array}\right) \overset{(*)}{\subseteq} \left(\begin{array}{c|c} Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) & \Phi(X) \\ \hline \Phi(X)^* & \varphi(B) \end{array}\right).$$

Die Inklusionen $(*)$ folgen hierbei aus $X^* = \overline{X^* \cdot \mathcal{K}(X)}$ und der Bedingung an m. Also liegt $\left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{M}$ und somit $m \in \Phi(M(X))$. Ist umgekehrt $m \in \Phi(M(X))$, so gilt offensichtlich $m \in M$. □

1.1.22 C-Multiplikator-Bimoduln. (vgl. [**15**, Abschnitt 1.4]) Sei ${}_AX_B$ ein Rechts-Hilbert-Bimodul und C eine C^*-Algebra. Mit $M_C(X \otimes C)$ bezeichnen wir die Teilmenge $\{m \in M(X \otimes C) | m \cdot (1_B \otimes C) + (1_A \otimes C) \cdot m \subseteq X \otimes C\}$. Die *$C$-strikte Topologie* auf $M_C(X \otimes C)$ ist die von den Halbnormen $m \mapsto ||m(1 \otimes c)||$, $m \mapsto ||(1 \otimes c)m||$, $c \in C$, erzeugte lokalkonvexe Topologie. Die C-strikte Topologie auf $M_C(X \otimes C)$ ist stärker als die Einschränkung der strikten Topologie. Offensichtlich ist $X \otimes C \subseteq M_C(X \otimes C)$ und nach [**15**, Lemma 1.40] ist $M_C(X \otimes C)$ die C-strikte Vervollständigung von $X \otimes C$. $M_C(X \otimes C)$ ist ein Rechts-unter-Hilbert-$M_C(A \otimes C)$-$M_C(B \otimes C)$-Bimodul von $M(X \otimes C)$, den wir als *C-Multiplikator-Bimodul* von $X \otimes C$ bezeichnen. Wir nennen $M_C(B \otimes C) \subseteq M(B \otimes C)$ die *C-Multiplikator-Algebra* von B.

Ist ${}_\psi\Phi_\varphi : {}_AX_B \to M({}_LZ_R)$ ein Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln, so kann man den Morphismus $\Phi \otimes id_C : X \otimes C \to M(Z \otimes C)$ nach [**15**, Proposition 1.42] stets auf den C-Multiplikator-Bimodul $M_C(X \otimes C)$ fortsetzen. Dies ist auch dann möglich, wenn ${}_\psi\Phi_\varphi$ entartet ist.

1.1.23 C-Idealisatoren. Seien ${}_AX_B$, ${}_LZ_R$ Rechts-Hilbert-Bimoduln, C eine C^*-Algebra und ${}_\psi\Phi_\varphi : {}_AX_B \to M({}_LZ_R)$ eine nichtentartete Isometrie. Wie in 1.1.21 gibt es eine Charakterisierung des C-Multiplikator-Bimoduls als Idealisator.

Unter der Isometrie $\Phi \otimes id_C : M(X \otimes C) \longrightarrow M(Z \otimes C)$ identifiziert sich $M_C(X \otimes C) \cong (\Phi \otimes id_C)(M_C(X \otimes C))$ mit der Menge $M_C := \{m \in M(Z \otimes C) | m \cdot (1 \otimes C) \cup (1 \otimes C) \cdot m \subseteq \Phi(X) \otimes C\}$ von $M(Z \otimes C)$.

Beweis. Nach 1.1.21 wissen wir, daß $M(X \otimes C) \cong (\Phi \otimes id_C)(M(X \otimes C))$ gleich der Menge

$$M := \{m \in M(Z \otimes C) | (Ad(\Phi)(\mathcal{K}(X)) \otimes C) \cdot m \cup m \cdot (\varphi(B) \otimes C) \subseteq \Phi(X) \otimes C\}$$

ist, wobei wir die Identifizierung $L(Z \otimes C) \cong L(Z) \otimes C$ benutzen, vgl. [**15**, Remark 1.50]. Also besteht $(\Phi \otimes id_C)(M_C(X \otimes C))$ aus denjenigen Elementen m in M, die zusätzlich $(1 \otimes C)m \subseteq \Phi(X) \otimes C$ und $m(1 \otimes C) \subseteq \Phi(X) \otimes C$ erfüllen. Da aber trivialerweise $M_C \subseteq M$ ist, folgt die Behauptung. □

§ 1.2 Hopf-C^*-Algebren und Duale

Wir geben zunächst die Definition einer Hopf-Algebra. Dies ist das rein algebraische Analogon einer Quantengruppe (und wird mancherorts auch so genannt). Die Entwicklung der algebraischen Hopf-Algebren verläuft parallel zu den Quantengruppen. Es gibt viele Berührungspunkte der Hopf-Algebren mit der topologischen Theorie der Quantengruppen, und die beiden Theorien haben sich gegenseitig stark beeinflußt, worauf wir hier aber nicht eingehen werden. Standart-Referenzen für die generelle Theorie von Hopfalgebren sind [**60**] und [**44**].

1.2.1 Hopf-Algebren. Eine *Bialgebra* ist eine unitale Algebra A (über einem beliebigen Körper k), zusammen mit Algebren-Homomorphismen $\Delta : A \to A \otimes A$ und $\varepsilon : A \to k$, so daß die *Koassoziativität* $(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta$ und *Koeins-Bedingungen* $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id_A = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ gelten. Man benutzt hierbei das algebraische Tensorprodukt über k. Diese Gesetze sind dual zur Assoziativität und Eins der Multiplikation. Daher nennt man Δ das *Koprodukt* und ε die *Koeins*. Eine *Hopfalgebra* ist eine Bialgebra (A, Δ, ε) zusammen mit einer *Antipode*, d.h. einer k-linearen Abbildung $S : A \to A$, so daß $m_A \circ (S \otimes id) \circ \Delta = 1_A \cdot \varepsilon = m_A \circ (id \otimes S) \circ \Delta$ gilt, wobei m_A die Multiplikation bezeichnet.

Ein wichtiges Beispiel ist der Gruppenring $k[G]$ einer Gruppe G. Das Koprodukt und die Koeins sind auf der Basis G durch $\Delta(g) = g \otimes g$ und $\varepsilon(g) = 1_k$ gegeben. Die Antipode ist dann die Fortsetzung der Inversbildung $S(g) := g^{-1}$, und die Antipoden-Gleichungen oben spiegeln die Gesetze des Inversen abstrakt wider. Ist G endlich, so kann man auch auf der Funktionenalgebra k^G der k-wertigen Funktionen auf G eine Hopfalgebren-Struktur finden: Das Koprodukt ist hierbei durch Dualisieren der Multiplikation auf G gegeben, wobei man die Isomorphie $(k^{(G\times G)})^* \cong (k^G \otimes k^G)^* \cong (k^G)^* \otimes (k^G)^*$ ausnutzt. In der zweiten Isomorphie geht ein, daß G endlich ist. Die Koeins ist für $f \in k^G$ durch $f \mapsto f(1_G)$ gegeben.

Ist allgemeiner eine Hopfalgebra A endlich-dimensional, so erhält man durch Dualisieren aller Abbildungen wieder eine Hopfalgebra $A^* = Hom(A, k)$ mit Multiplikation Δ^* und Koprodukt m_A^*. Dies ist die *zu A duale Hopfalgebra*. Die triviale Tatsache, daß $A^{**} \cong A$ isomorph als Hopfalgebren sind, ist eine Verallgemeinerung der Pontrjagin-Dualität endlicher abelscher Gruppen.

1.2.2 Hopf-C^*-Algebren. Ein abstrakter Rahmen für eine Verallgemeinerung der Pontrjagin-Dualität für abelsche lokalkompakte Gruppen findet sich in [**64**, Definition 1.1.1] (vgl. auch [**4**] und [**3**]).

Definition. Für eine C^*-Algebra S bezeichnen wir im Unterschied zu [**3**] mit $\widetilde{M}(S \otimes S)$ die Unteralgebra $\{m \in M(S \otimes S) | [(S \otimes 1) + (1 \otimes S)]m + m[(S \otimes 1) + (1 \otimes S)] \subseteq S \otimes S\}$ von $M(S \otimes S)$ und definieren:

1. Eine *Hopf-C^*-Algebra* ist ein Paar (S, Δ), bestehend aus einer C^*-Algebra S und einem nichtentarteten *injektiven* *-Homomorphismus $\Delta : S \longrightarrow \widetilde{M}(S \otimes S)$, so daß die Koassoziativitäts-Gleichung $(\Delta \otimes id_S)\Delta = (id_S \otimes \Delta)\Delta$ erfüllt ist. Wir nennen Δ das *Koprodukt*. Das Koprodukt Δ ist *beidseitig nichtentartet*, falls die Teilräume $\Delta(S) \cdot (1 \otimes S)$ und $\Delta(S) \cdot (S \otimes 1)$ dicht in $S \otimes S$ liegen.

2. Seien (S, Δ) und (S', Δ') Hopf-C^*-Algebren. Ein *Morphismus von Hopf-C^*-Algebren* ist ein nichtentarteter *-Morphismus $\varphi : S \to M(S)$ mit $\Delta' \circ \varphi = (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta$.

3. Eine *Koeins auf* (S, Δ) ist ein nichtentarteter *-Morphismus $\varepsilon : S \to \mathbb{C}$, der dieselben Gleichungen $(\varepsilon \otimes id_S)\Delta = id_S = (id_S \otimes \varepsilon)\Delta$ wie im algebraischen Fall 1.2.1 erfüllt.

1.2.3 Unitäre Kodarstellungen. Sei (S,Δ) eine Hopf-C^*-Algebra und A eine C^*-Algebra. Eine *unitäre Kodarstellung* von S auf A ist eine Unitäre $u \in \mathcal{U}M(A\otimes S)$ mit $(id_A\otimes\Delta)(u) = u_{12}u_{13} \in \mathcal{U}M(A\otimes S\otimes S)$, vgl. [**4**, Définition 0.3], wobei wir die Positions-Notation 1.0.4 benutzen). Unitäre Kodarstellungen sind eine direkte Verallgemeinerung von unitären Darstellungen lokalkompakter Gruppen, vgl. 1.2.6.

1.2.4 Universelles Dual. Ein *universelles Dual* einer Hopf-C^*-Algebra (S,Δ) ist ein Paar $(\widehat{S},\mathfrak{u})$, bestehend aus einer C^*-Algebra $\widehat{S}$, zusammen mit einer *universellen* unitären Kodarstellung $\mathfrak{u}\in\mathcal{U}M(\widehat{S}\otimes S)$, derart, daß das Paar die *universelle Eigenschaft* in Bezug auf unitäre Kodarstellungen von S hat. Damit ist gemeint, daß es zu jeder unitären Kodarstellung $u\in\mathcal{U}M(A\otimes S)$ genau einen nichtentarteten *-Homomorphismus $\mu_u : \widehat{S}\to M(A)$ gibt mit $(\mu_u\otimes id_S)(\mathfrak{u}) = u$. Also kodieren die Darstellungen von $\widehat{S}$ mittels der universellen Kodarstellung $\mathfrak{u}$ sämtliche Kodarstellungen von S. Wir bezeichnen (S,Δ) als *dualisierbar*, falls ein universelles Dual $(\widehat{S},\mathfrak{u})$ existiert. Universelle Duale wurden zuerst im Rahmen multiplikativer Unitärer in [**4**, Appendice] konstruiert, vgl. auch [**50**] und [**48**].

Sei (S,Δ) dualisierbar. Das universelle Dual $(\widehat{S},\mathfrak{u})$ ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $(\widehat{T},\mathfrak{v})$ ein weiteres universelles Dual von (S,Δ), so gibt es wegen der jeweiligen universellen Eigenschaft nichtentartete *-Morphismen $\varphi:\widehat{S}\to M(\widehat{T})$ bzw. $\psi:\widehat{T}\to M(\widehat{S})$ mit $(\varphi\otimes id)(\mathfrak{u}) = \mathfrak{v}$ bzw. $(\psi\otimes id)(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$. Wegen der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft sind die Verknüpfungen $\psi\circ\varphi$ bzw. $\varphi\circ\psi$ gleich den Inklusionen $\widehat{S}\subseteq M(\widehat{S})$ bzw. $\widehat{T}\subseteq M(\widehat{T})$, und die Behauptung folgt aus dem Kriterium 1.1.20. □

Unter der Benutzung der Notation 1.0.4 rechnet man einfach nach, daß die Unitären $\mathfrak{u}_{13}\mathfrak{u}_{23}\in\mathcal{U}M((\widehat{S}\otimes\widehat{S})\otimes S)$ bzw. $1_S\in\mathcal{U}M(S)\cong\mathcal{U}M(\mathbb{C}\otimes S)$ unitäre Kodarstellungen von S auf $\widehat{S}\otimes\widehat{S}$ bzw. auf $\mathbb{C}$ sind. Die universelle Eigenschaft von $(\widehat{S},\mathfrak{u})$ garantiert die Existenz von eindeutigen nichtentarteten *-Morphismen $\widehat{\Delta}:\widehat{S}\to M(\widehat{S}\otimes\widehat{S})$ bzw. $\widehat{\varepsilon}:\widehat{S}\to\mathbb{C}$ mit $(\widehat{\Delta}\otimes id_S)(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}_{13}\mathfrak{u}_{23}$ bzw. $(\widehat{\varepsilon}\otimes id_S)(\mathfrak{u}) = 1_S$. Wegen

$$([(id_{\widehat{S}}\otimes\widehat{\Delta})\widehat{\Delta}]\otimes id_S)(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}_{14}\mathfrak{u}_{24}\mathfrak{u}_{34} = ([(\widehat{\Delta}\otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta}]\otimes id_S)(\mathfrak{u}) \in \mathcal{U}M(\widehat{S}\otimes\widehat{S}\otimes\widehat{S}\otimes S)$$

ist nach der universellen Eigenschaft $\widehat{\Delta}$ koassoziativ (vgl. 1.2.2). Ebenso rechnet man nach, daß $\widehat{\varepsilon}$ die Gleichungen einer Koeins erfüllt.

1.2.5 Stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebren. Unter einer zusätzlichen Voraussetzung kann man garantieren, daß ein universelles Dual $(\widehat{S},\mathfrak{u})$ mit dem Koprodukt $\widehat{\Delta}$ aus 1.2.4 automatisch eine Hopf-C^*-Algebra ist, vgl. [**4**, Corollaire A.6] und auch [**48**].

Sei (S,Δ) dualisierbar mit universellem Dual $(\widehat{S},\mathfrak{u})$. Es gebe zusätzlich einen S-invarianten abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{F}\subseteq S'$ (vgl. 1.0.2), so daß der Unterraum $(id_{\widehat{S}}\otimes\mathfrak{F})(\mathfrak{u})\subseteq\widehat{S}$ norm-dicht in $\widehat{S}$ liegt. Dann ist $(\widehat{S},\widehat{\Delta})$ eine beidseitig nichtentartete Hopf-C^*-Algebra mit Koeins $\widehat{\varepsilon}$.

Beweis. Wir benutzen hierbei freizügig Notationen ähnlich derer in 1.0.1 für Unterräume, wie z.B. $(id_{\widehat{S}}\otimes\mathfrak{F})(\mathfrak{u})$. Wir müssen nur noch zeigen, daß die Teilräume $\widehat{\Delta}(\widehat{S})\cdot(1\otimes\widehat{S})$ und

$\widehat{\Delta}(\widehat{S}) \cdot (\widehat{S} \otimes 1)$ dicht in $\widehat{S} \otimes \widehat{S}$ liegen. Wegen der S-Invarianz von $\mathfrak{F}$ (vgl. 1.0.2) und der Definition von $\widehat{\Delta}$ (vgl. 1.2.4) gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}([(id_{\widehat{S}} \otimes \mathfrak{F})(\mathfrak{u})]) \cdot (1 \otimes \widehat{S}) &= (id_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}} \otimes S \cdot \mathfrak{F})(\mathfrak{u}_{13}\mathfrak{u}_{23}(1 \otimes \widehat{S} \otimes 1)) \\
&= (id_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}} \otimes S \cdot \mathfrak{F})(\mathfrak{u}_{13}\mathfrak{u}_{23}(1 \otimes \widehat{S} \otimes S)) \\
&= (id_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}} \otimes S \cdot \mathfrak{F})(\mathfrak{u}_{13}(1 \otimes \widehat{S} \otimes S)) \\
&= (id_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}} \otimes \mathfrak{F})(u_{13}) \cdot (1 \otimes \widehat{S}) \\
&= ([(id \otimes \mathfrak{F})(\mathfrak{u})] \otimes \widehat{S}) \ .
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\widehat{\Delta}([(id_{\widehat{S}} \otimes \mathfrak{F})(\mathfrak{u})]) \cdot (\widehat{S} \otimes 1) = (\widehat{S} \otimes [(id_{\widehat{S}} \otimes \mathfrak{F})(\mathfrak{u})])$. Also folgt die Behauptung aus der Dichtheit von $(id_{\widehat{S}} \otimes \mathfrak{F})(\mathfrak{u}) \subseteq \widehat{S}$. □

Die Hopf-C^*-Algebra (S, Δ) heißt *stark dualisierbar*, falls es ein universelles Dual $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$ und eine S-invariante Teilmenge $\mathfrak{F} \subseteq S'$ wie oben gibt. In diesem Fall nennen wir $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$ ein *starkes universelles Dual* von (S, Δ).

1.2.6 Beispiele.

1. Die Funktionen-Algebra $\mathcal{C}_0(G)$ einer lokalkompakten Gruppe G ist ein Beipiel für eine beidseitig nichtentartete Hopf-C^*-Algebra, vgl. [**37**, Chapter 8]: Durch Dualisieren des Produkts erhält man einen C^*-Homomorphismus $\Delta_{\widehat{G}} : \mathcal{C}_0(G) \to \mathcal{C}_b(G \times G)$, der durch $\Delta_{\widehat{G}}(f)((s,t)) := f(st)$ definiert ist. Identifiziert man die beschränkten stetigen Funktionen $\mathcal{C}_b(G \times G)$ mit der Multiplikator-Algebra $M(\mathcal{C}_0(G) \otimes \mathcal{C}_0(G))$, so erhält man ein Koprodukt. Dieses ist beidseitig nichtentartet, denn für $f, g \in \mathcal{C}_0(G)$ ist $[(f \otimes id)\Delta_{\widehat{G}}(g)](s,t) = f(s)g(st) = (f \times g)(s, st)$. Elemente dieser Form liegen dicht in $\mathcal{C}_0(G \times G) \cong \mathcal{C}_0(G) \otimes \mathcal{C}_0(G)$, da die Abbildung $(s,t) \mapsto (s, st)$, $s, t \in G$, einen Homöomorphismus von $G \times G$ in sich definiert. Wie im algebraischen Fall hat $\mathcal{C}_0(G)$ durch Auswertung an 1_G eine Koeins. $\mathcal{C}_0(G)$ ist jedoch nur dann unital, wenn G eine kompakte Gruppe ist. Außerdem kann die Inversbildung der Gruppe nur auf Funktionen mit kompaktem Träger ausgedehnt werden. Daher ist das Analogon der Antipode nur auf einer dichten Unteralgebra von $\mathcal{C}_0(G)$ definiert.

   Sei A eine C^*-Algebra, dann ist ein Element $u \in \mathcal{U}M(A \otimes \mathcal{C}_0(G))$ nichts anderes als eine strikt stetige Abbildung $\widetilde{u} : G \to \mathcal{U}M(A)$. Denn $M(A \otimes \mathcal{C}_0(G))$ identifiziert sich kanonisch mit $\mathcal{C}_b(G, M^s(A))$, wobei wir $M(A)$ mit der strikten Topologie ausstatten, vgl. den Beweis von [**64**, Ex. 0.2.14]. Die Bedingung an die unitäre $\mathcal{C}_0(G)$-Kowirkung u bedeutet genau, daß die Abbildung $\widetilde{u}$ multiplikativ ist.

2. Ein weiteres Beispiel ist die Gruppen-C^*-Algebra $C^*(G)$, welche definitionsgemäß die universelle unitäre G-Darstellung $i_G : G \to \mathcal{U}M(C^*(G))$ trägt (vgl. [**56**, Definition 1] mit $A = \mathbb{C}$). Die entsprechende unitäre $\mathcal{C}_0(G)$-Kodarstellung bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}_G \in \mathcal{U}M(C^*(G) \otimes \mathcal{C}_0(G))$, vgl. [**51**]. Das Paar $(C^*(G), i_G)$ ist universell bzgl. unitärer Darstellungen von G. Man kann daher ein Koprodukt auf $C^*(G)$ durch die unitäre G-Darstellung $\Delta_G : s \mapsto i_G(s) \otimes i_G(s) \in \mathcal{U}M(C^*(G) \otimes C^*(G))$ mit $s \in G$ definieren, vgl. [**15**, S. 113]. $C^*(G)$ besitzt eine Koeins, die durch die triviale Darstellung $\varepsilon_G(s) = 1 \in \mathbb{C}$ für $s \in G$ bestimmt ist. In der Sprache der Hopf-C^*-Algebren

bedeutet die universelle Eigenschaft von $C^*(G)$ bzgl. unitärer G-Darstellungen einfach, daß das Paar $(C^*(G), \mathfrak{v}_G)$ ein universelles Dual von $(\mathcal{C}_0(G), \Delta_{\widehat{G}})$ ist. Es ist sogar ein starkes universelles Dual mit $\mathfrak{F} = \mathcal{C}_c(G) \subseteq \mathcal{L}^1(G)$, wobei wir $\mathcal{L}^1$-Funktionen in der gewohnten Weise durch Integrieren als lineare Funktionale auf $\mathcal{C}_0(G)$ auffassen. Umgekehrt ist mit $\mathfrak{w}_G := \sigma(\mathfrak{v}_G)$ das Paar $(\mathcal{C}_0(G), \mathfrak{w}_G)$ ein starkes universelles Dual von $(C^*(G), \Delta_G)$, vgl. [**57**, Theorem 4.1] oder [**15**, Theorem A.41].

3. Ein Hopf-C^*-Algebren-Quotient von $(C^*(G), \Delta_G)$ ist die reduzierte Gruppen-C^*-Algebra $C^*_r(G)$, das ist der Abschluß $\overline{\lambda(\mathcal{C}_c(G))} \subseteq \mathcal{L}(L^2(G))$, wobei λ die linksreguläre Darstellung von G auf $L^2(G)$ ist, vgl. [**15**, S. 110]. $C^*_r(G)$ besitzt genau dann eine Koeins, wenn die Gruppe G mittelbar ist. Das Paar $(\mathcal{C}_0(G), (\lambda \otimes id)(\mathfrak{w}_G))$ ist ein starkes universelles Dual von $C^*_r(G)$.

4. Sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra. Wir betrachten den Morphismus $\Delta^{op} := \sigma \circ \Delta : S \to M(S \otimes S)$, wobei σ die Vertauschung ist. Dieser ist offenbar ebenfalls koassoziativ und (S, Δ^{op}) ist wieder eine Hopf-C^*-Algebra. Wir nennen Δ^{op} das *zu* Δ *entgegengesetzte* Koprodukt.

§ 1.3 Quantengruppen

Die wichtigsten Beispiele von Hopf-C^*-Algebren entstehen im Zusammenhang mit multiplikativen Unitären. Dieser Begriff wurde von S. Baaj und G. Skandalis in [**4**] entwickelt. Die zugehörigen Hopf-C^*-Algebren treten definitionsgemäß als duale Paare auf und verallgemeinern die Dualität von $C^*_{(r)}(G)$ und $\mathcal{C}_0(G)$ bei Gruppen. Deshalb sprechen wir von *dualen Paaren von Quantengruppen*, um die spezielle Situation von allgemeineren Hopf-C^*-Algebren abzugrenzen.

1.3.1 Multiplikative Unitäre. (vgl. [**4**]) Sei H ein Hilbertraum. Eine *multiplikative Unitäre* auf H ist eine Unitäre $V \in \mathcal{U}M(H \otimes H)$ mit $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$. Mit $\mathcal{L}(H)_* \cong \mathcal{K}(H)'$ bezeichnen wir das Prädual von $\mathcal{L}(H)$. Wir definieren den Teilraum

$$\mathcal{C}(V) := \{(id \otimes \omega)(\Sigma V) | \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$$

[**4**, Lemme 3.2], wobei $\Sigma : H \otimes H \to H \otimes H$ der Vertauschungsoperator ist.

Definition. Seien K_X bzw. K_Y weitere Hilberträume. Eine *Darstellung* (bzw. *Kodarstellung*) von V ist eine Unitäre $X \in \mathcal{U}(K_X \otimes H)$ (bzw. $Y \in \mathcal{U}(H \otimes K_Y)$) mit $X_{12}X_{13}V_{23} = V_{23}X_{12}$ (bzw. $V_{12}Y_{13}Y_{23} = Y_{23}V_{12}$).

Insbesondere ist V gleichzeitig eine Darstellung und Kodarstellung über sich selbst. Wir definieren $\widehat{S}_X := \overline{\{(id \otimes \omega)(X) | \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}}$ bzw. $S_Y := \overline{\{(\omega \otimes id)(Y) | \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}}$, wobei X bzw. Y wie in der Definition sind. Dann ist $\widehat{S}_X$ bzw. S_Y eine nichtentartete Unteralgebra von $\mathcal{L}(K_X)$ bzw. $\mathcal{L}(K_Y)$ (vgl. [**4**, Définition 1.3 und Proposition A.3]), aber nicht notwendigerweise *-invariant. Außerdem setzen wir im Zusammenhang mit einer multiplikativen Unitären $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ stets $\mathcal{K} := \mathcal{K}(H)$ für die kompakten Operatoren auf H.

1.3.2 C^*-algebraische multiplikative Unitäre. Die Theorie wird sinnvoll, wenn man erreichen kann, daß die obigen Algebren invariant unter der Involution und damit

C^*-Algebren sind. Eine multiplikative Unitäre $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ heißt *C^*-algebraisch* (vgl. [**46**, Definition 2.1]), wenn für jede Darstellung $X \in \mathcal{U}(K_X \otimes H)$ bzw. Kodarstellung $Y \in \mathcal{U}(H \otimes K_Y)$ die Algebren S_X bzw. S_Y invariant unter der Involution sind (es reicht, dies für $X = Y = V$ zu prüfen, da z.B. $S_X = (id \otimes \mathcal{L}(H)_*)(X(1 \otimes S_V)X^*)$ ist, vgl. [**66**, I.2.2]) und zusätzlich $X \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_X \otimes \mathcal{K})$ bzw. $Y \in \mathcal{U}M(\mathcal{K} \otimes S_Y)$ gilt (wobei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$, vgl. 1.3.1). Insbesondere sind dann S_V bzw. $\widehat{S}_V$ C^*-Unteralgebren von $\mathcal{L}(H)$. Wie in [**4**, Théorème 3.8] beweist man:

Sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine C^*-algebraische multiplikative Unitäre. Mit den obigen Notationen ist $X \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_X \otimes S_V)$ und $Y \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_V \otimes S_Y)$. Für $x \in S_V$ bzw. $y \in \widehat{S}_V$ definieren die Formeln $\Delta(x) := V(x \otimes 1)V$ bzw. $\widehat{\Delta}(y) := V^*(1 \otimes y)V$ jeweils beidseitig nichtentartete Koprodukte (vgl. 1.2.2) auf S_V bzw. $\widehat{S}_V$. Wir nennen $(\widehat{S}_V, S_V)$ das zu V gehörige duale Paar reduzierter Quantengruppen.

Trotz der suggestiven Notation ist $(\widehat{S}_V, \widehat{\Delta})$ in diesem Fall nicht notwendigerweise ein *universelles* Dual von (S, Δ). Für unitäre Kodarstellungen von $(\widehat{S}_V, \widehat{\Delta})$ (vgl. 1.2.3) auf einer C^*-Algebra C treffen wir die folgende Konvention: Wir betrachten sie mittels der Vertauschung als Elemente $\widehat{u} := \sigma_{C,\widehat{S}_V}(u)$ in $\mathcal{U}M(\widehat{S}_V \otimes C)$. Die definierende Bedingung übersetzt sich dann in die Gleichung $(\widehat{\Delta} \otimes id_C)(\widehat{u}) = \widehat{u}_{13}\widehat{u}_{23}$ in $\mathcal{U}M(\widehat{S}_V \otimes \widehat{S}_V \otimes C)$. Mit dieser Konvention und der Definition der Koprodukte Δ bzw. $\widehat{\Delta}$ erkennt man: Eine Darstellung X in $\mathcal{U}(K_X \otimes H)$ bzw. eine Kodarstellung $Y \in \mathcal{U}(H \otimes K_Y)$ von V ist dasselbe wie eine unitäre Kodarstellung $X \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_X \otimes S_V)$ von (S_V, Δ) auf $\widehat{S}_X$ bzw. eine unitäre Kodarstellung $Y \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_V \otimes S_Y)$ von $(\widehat{S}_V, \widehat{\Delta})$ auf S_Y.

1.3.3 Beispiele. Die Definition einer C^*-algebraischen multiplikativen Unitären ist technischer Natur und soll dazu dienen, die existierenden Beispielklassen zusammenzufassen. Weitaus schwieriger ist es, die Eigenschaft „C^*-algebraisch" einer multiplikativen Unitären V aus greifbaren Bedingungen abzuleiten. Für *reguläres* V (d.h. $\overline{\mathcal{C}(V)} = \mathcal{K}$, vgl. [**4**, Proposition 3.2]) wird dies von S. Baaj und G. Skandalis in [**4**] bewiesen. Diese Bedingung wird von S. Baaj in [**2**] zu *semi-regulär* (d.h. $\mathcal{K} \subseteq \overline{\mathcal{C}(V)}$) abgeschwächt. Eine weitere große Beispielklasse sind die der „handlichen" (manageable) multiplikativen Unitären von S. Woronowicz [**71**].

1.3.4 Die universellen Partner. Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine C^*-algebraische multiplikative Unitäre, so gibt es starke universelle Duale (vgl. 1.2.5) von (S_V, Δ) und $(\widehat{S}_V, \widehat{\Delta})$. Die Konstruktion ist identisch mit der aus [**4**, Corollaire A.6]; wir werden sie der Vollständigkeit halber in mehreren Schritten skizzieren, um den Zusammenhang mit der Noation in § 1.2 herzustellen:

1. Da S_V und $\widehat{S}_V$ nichtentartete *-Unteralgebren von $\mathcal{L}(H)$ sind, ist das Prädual $\mathcal{L}(H)_*$ invariant unter S_V und $\widehat{S}_V$, d.h. es gilt $\overline{S_V \cdot \mathcal{L}(H)_* \cdot S_V} = \mathcal{L}(H)_* = \overline{\widehat{S}_V \cdot \mathcal{L}(H)_* \cdot \widehat{S}_V}$ (vgl. 1.0.2).

2. Für ω_1, ω_2 in $\mathcal{L}(H)_*$ und x in $\mathcal{L}(H)$ werden, wie in [**4**, Définition A.4], durch die Formeln $\omega_1 \widehat{\star} \omega_2(x) := (\omega_1 \otimes \omega_2)(V(x \otimes 1)V^*)$ bzw. $\omega_1 \star \omega_2(x) := (\omega_1 \otimes \omega_2)(V^*(1 \otimes x)V)$ jeweils Multiplikationen auf dem Prädual $\mathcal{L}(H)_*$ definiert. Man erhält die Algebren $(\mathcal{L}(H)_*, \widehat{\star})$ bzw. $(\mathcal{L}(H)_*, \star)$.

3. Für jede Darstellung $X \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_X \otimes S_V)$ bzw. Kodarstellung $Y \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_V \otimes S_Y)$ (vgl. 1.3.2) wird durch die Formel $\widehat{\mu}_X(\omega) := (id \otimes \omega)(X)$ bzw. $\mu_Y(\omega) := (\omega \otimes id)(Y)$ ($\omega \in \mathcal{L}(H)_*$) eine Darstellung $\widehat{\mu}_X : (\mathcal{L}(H)_*, \widehat{\star}) \to \widehat{S}_X$ bzw. $\mu_Y : (\mathcal{L}(H)_*, \star) \to S_Y$ mit dichtem Bild definiert.

4. Weiter werden mit obigen Notationen wie in [**4**, Définition A.4] durch $||\omega||_{\widehat{u}} := \sup\{||\widehat{\pi}_X(\omega)||_{\widehat{S_X}}\}$ bzw. $||\omega||_u := \sup\{||\pi_Y(\omega)||_{S_Y}\}$ die *universellen* C^*-Seminormen auf $(\mathcal{L}(H)_*, \widehat{\star})$ bzw. $(\mathcal{L}(H)_*, \star)$ definiert, wobei X bzw. Y die Darstellungen bzw. Kodarstellungen von V durchläuft. Es handelt sich tatsächlich um C^*-Seminormen, da $||.||_{\widehat{S}_X}$ bzw. $||.||_{S_Y}$ C^*-Normen sind. Die Vervollständigungen $\widehat{S}_u := \overline{(\mathcal{L}(H)_*, \widehat{\star})}^{||.||_{\widehat{u}}}$ bzw. $S_u := \overline{(\mathcal{L}(H)_*, \star)}^{||.||_u}$ bzgl. dieser universellen Seminormen sind folglich C^*-Algebren. Definitionsgemäß setzt sich jede Darstellung der Form $\widehat{\mu}_X$ bzw. μ_Y zu einem surjektiven *-Morphismus $\widehat{\mu}_X : \widehat{S}_u \to \widehat{S}_X$ bzw. $\mu_Y : S_u \to S_Y$ fort. Summiert man genügend viele Darstellungen bzw. Kodarstellungen von V auf, so erhält man treue Darstellungen von $\widehat{S}_u$ bzw. S_u:

$$\oplus_i \widehat{\mu}_{X_i} = \widehat{\mu}_{(\oplus_i X_i)} : \widehat{S}_u \hookrightarrow \mathcal{L}(\oplus_i K_{X_i}) \qquad \text{bzw.} \qquad \oplus_j \, \mu_{Y_j} = \mu_{(\oplus_j Y_j)} : S_u \hookrightarrow \mathcal{L}(\oplus_j K_{Y_j}).$$

Wir identifizieren $\widehat{S}_u$ bzw. S_u mit diesen Einbettungen und erhalten unitäre Kodarstellungen $\mathfrak{u} = \oplus_i X_i \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_u \otimes S_V)$ bzw. $\widehat{\mathfrak{u}} = \oplus_j Y_j \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_V \otimes S_u)$ im Sinne von 1.2.3, vgl. auch 1.3.2.

Sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine C^*-algebraische multiplikative Unitäre. Die Paare $(\widehat{S}_u, \mathfrak{u})$ bzw. $(S_u, \widehat{\mathfrak{u}})$ sind starke universelle Duale von (S_V, Δ) bzw. $(\widehat{S}_V, \widehat{\Delta})$ (vgl. 1.2.5). Die kanonischen Koprodukte (vgl. 1.2.4) bezeichnen wir mit $\widehat{\Delta}_u$ bzw. Δ_u und die Koeinsen mit $\widehat{\varepsilon}_u$ bzw. ε_u. Die *-Morphismen $\widehat{\pi} := \widehat{\mu}_V : \widehat{S}_u \to \widehat{S}_V$ bzw. $\pi := \mu_V : S_u \to S_V$ definieren surjektive Morphismen von Hopf-C^*-Algebren (vgl. 1.2.2(2)) mit $(\widehat{\pi} \otimes id)(\mathfrak{u}) = V = (id \otimes \pi)(\widehat{\mathfrak{u}})$.

Beweis. Wir zeigen nur die Behauptung für (S_V, Δ), die andere Seite geht analog. Anstatt allgemeine unitäre Kodarstellungen von (S_V, Δ) zu betrachten, reicht es aus, sich auf Darstellungen $X \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_X \otimes S_V)$ von V zu beschränken, vgl. die Technik im Beweis von Lemma 2.9. Für solche ist die universelle Eigenschaft klar: Nach Definition von $\mathfrak{u}$ gilt für $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ die Beziehung $(id_{\widehat{S}_u} \otimes \omega)(\mathfrak{u}) = \omega$ (aufgefaßt als Element von $\widehat{S}_u$). Daher folgt für jede Darstellung X die Beziehung $(id \otimes \omega)((\widehat{\mu}_X \otimes id)(\mathfrak{u})) = \widehat{\mu}_X((id \otimes \omega)(\mathfrak{u})) = \widehat{\mu}_X(\omega) = (id \otimes \omega)(X)$. Da $\mathcal{L}(H)_*$ Punkte von S_V trennt, ist folglich $(\widehat{\mu}_X \otimes id)(\mathfrak{u}) = X$. Umgekehrt gilt aufgrund der obigen Beziehung für eine nichtentartete Darstellung $\mu : \widehat{S}_u \to \mathcal{L}(K)$ auf einem Hilbertraum K und die zugehörige Darstellung $X_\mu := (\mu \otimes id)(\mathfrak{u})$ von V offenbar die Gleichung $\widehat{\mu}_{X_\mu} = \mu$. Damit ist $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$ ein universelles Dual von (S_V, Δ).

Wir fassen $\mathcal{L}(H)_*$ durch Einschränkung als S_V-invarianten Teilraum des linearen Duals von S_V auf (vgl. den (1.) Schritt). Dann liefert die obige Beziehung, daß $(id \otimes \mathcal{L}(H)_*)(\mathfrak{u}) = \mathcal{L}(H)_* \subseteq \widehat{S}_u$ (vgl. Noation 1.0.1) eine dichte Teilmenge von $\widehat{S}_u$ ist, daher sind mit $\mathfrak{F} = \mathcal{L}(H)_*$ die Bedingungen für ein starkes universelles Dual erfüllt. Die restlichen Behauptungen sind klar oder folgen mit der bereits bewiesenen universellen Eigenschaft von $(\widehat{S}_u, \mathfrak{u})$ und der definierenden Gleichung für V (vgl. 1.3.1). □

1.3.5 Dichte multiplikative Unitäre und die universelle Bi-Darstellung. Es stellt sich die Frage, ob $\widehat{S}_u$ und S_u gegenseitig universelle Duale sind. Unter einer zusätzlichen Voraussetzung ist dies der Fall: Eine C^*-algebraische multiplikative Unitäre V in

$\mathcal{U}(H \otimes H)$ heißt *dicht*, wenn die Menge $\mathcal{C}(V)$ (vgl. 1.3.1) σ-schwach dicht in $\mathcal{L}(H)$ ist. In diesem Fall liefert dieselbe Argumentation wie in [**46**, Lemma 2.5 und Proposition 2.6], vgl. auch [**34**, Proposition 3.8], die Existenz einer Unitären $\mathfrak{v} \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_u \otimes S_u)$ mit $\mathfrak{v}_{13} = \mathfrak{u}_{12}^* \cdot \widehat{\mathfrak{u}}_{23} \cdot \mathfrak{u}_{12} \cdot \widehat{\mathfrak{u}}_{23}^*$, aufgefaßt als Unitäre in $\mathcal{U}M(\widehat{S}_u \otimes \mathcal{K} \otimes S_u)$, vgl. 1.0.4. Aufgrund der Existenz dieser Unitären $\mathfrak{v}$ kann man dieselbe Argumentation wie in [**34**, Proposition (3.8) - Proposition (3.13)] durchführen und erhält:

Das Paar $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v})$ ist ein starkes universelles Dual von (S_u, Δ_u). Es gelten die Beziehungen $(id_{\widehat{S}_u} \otimes \pi)(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$ und $(\widehat{\Delta}_u \otimes id_{S_u})(\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}_{13} \cdot \mathfrak{v}_{23}$. Insbesondere ist das Koprodukt $\widehat{\Delta}_u$ und die Koeins $\widehat{\varepsilon}_u$ von $\widehat{S}_u$ unabhängig davon, ob man $\widehat{S}_u$ als universelles Dual von (S_V, Δ) oder von (S_u, Δ_u) betrachtet. Analog ist (mit der Konvention aus 1.3.2) das Paar $(S_u, \mathfrak{v})$ ein starkes universelles Dual von $(\widehat{S}_u, \widehat{\Delta}_u)$ und es gilt $(\widehat{\pi} \otimes id)(\mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$ sowie $(id \otimes \Delta_u)(\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}_{12} \cdot \mathfrak{v}_{13}$.

Beweis. Das folgt fast gänzlich aus dem Beweis von [**34**, Proposition 3.8], [**34**, Corollary 3.9], [**34**, Result 3.11] und den Propositionen [**34**, 3.12 und 3.13], wenn man die folgenden Unterschiede in der Notation beachtet: Die hier mit V, (S_V, Δ), (S_u, Δ_u), $(\widehat{S}_V, \widehat{\Delta})$, $(\widehat{S}_u, \widehat{\Delta}_u)$, π, $\widehat{\pi}$, $\mathfrak{u}$, $\widehat{\mathfrak{u}}$ bzw. $\mathfrak{v}$ bezeichneten Objekte werden in [**34**] durch W, $(\widehat{A}, \widehat{\Delta}^{op})$, $(\widehat{A}_u, \widehat{\Delta}_u^{op})$, (A, Δ), (A_u, Δ_u), $\widehat{\pi}$, π, $\mathcal{V}$, $\widehat{\mathcal{V}}$ bzw. $\mathcal{U}$ notiert. Hierbei deutet $\widehat{\Delta}_{(u)}^{op}$ an, daß in [**34**] auf $\widehat{A}_{(u)}$ das entgegengesetzte Koprodukt $\widehat{\Delta}^{op} = \sigma \circ \widehat{\Delta}$ benutzt wird (σ ist die Vertauschung), wodurch sich die Formeln ein wenig verändern. Wir zeigen nur noch, daß $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v})$ ein starkes universelles Dual ist. Betrachte hierfür $\mathcal{L}(H)_*$ durch Vorschalten von π als Teilmenge $\mathcal{L}(H)_*\pi$ des linearen Duals von S_u. Dann ist $\mathcal{L}(H)_*\pi$ invariant unter S_u (vgl. 1.0.2), und es ist $(id \otimes \mathcal{L}(H)_*\pi)(\mathfrak{v}) = (id \otimes \mathcal{L}(H)_*)(\mathfrak{u})$ eine dichte Teilmenge von $\widehat{S}_u$ (vgl. den Beweis der Behauptung in 1.3.4). Damit folgt die Behauptung mit $\mathfrak{F} = \mathcal{L}(H)_*\pi$ (vgl. 1.2.5). □

Wie in [**4**, Corollaire A.6] und [**34**] bemerkt, haben folglich (S_V, Δ) und (S_u, Δ_u) äquivalente „Kodarstellungs-Theorien“, denn beide sind äquivalent zu den nichtentarteten *-Morphismen von $\widehat{S}_u$. Das bedeutet: Zu jeder unitären Kodarstellung $u \in \mathcal{U}M(C \otimes S_V)$ existiert genau eine unitäre Kodarstellung $u' \in \mathcal{U}M(C \otimes S_u)$ mit $(id_C \otimes \pi)(u') = u$.

Definition. Mit den obigen Notationen nennen wir $(\widehat{S}_u, S_u)$ das zu V gehörige *universelle duale Paar* von Quantengruppen, $\mathfrak{v} \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_u \otimes S_u)$ die *beidseitig universelle unitäre Bi-Darstellung* und benutzen die suggestive Abkürzung als Tripel $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v}, S_u)$.

1.3.6 Lokalkompakte Quantengruppen. Für die Definition reduzierter lokalkompakter Quantengrppen verweisen wir auf [**35**, § 4]. Grob gesagt ist eine lokalkompakte Quantengruppe eine beidseitig nichtentartete Hopf-C^*-Algebra (A, Δ) mit jeweils einem links- bzw. einem rechts-invarianten treuen approximativen KMS-Gewicht (vgl. [**35**, Definition 4.1]), welchem bei Gruppen das links- bzw. rechts-invariante Integral entspricht. Auf dem Hilberttraum H der GNS-Darstellung der Gewichte läßt sich eine multiplikative Unitäre W definieren [**35**, Proposition 3.17], die nach [**35**, Proposition 6.10] „handlich“ (manageable) im Sinne von [**71**] und daher insbesondere C^*-algebraisch ist. Die Hopf-C^*-Algebren $(\widehat{S}_W, \widehat{\Delta}_W)$ (vgl. 1.3.2) und (A, Δ) stimmen überein und man kann das reduzierte Dual von (A, Δ) durch $(\widehat{A}, \widehat{\Delta}) := (S_W, \Delta_W^{op})$ definieren (wobei in [**35**] eine andere Konvention benutzt und anstatt Δ_W das entgegengesetzte Koprodukt $\Delta_W^{op} = \sigma \circ \Delta_W$ betrachtet wird, vgl. auch den Beweis der Behauptung in 1.3.5). Das reduzierte Dual ist ebenfalls eine lokalkompakte Quantengruppe, vgl. [**35**, Theorem 8.20]. Nach einer Argumentation in [**40**] ist W dicht: Denn der schwache Abschluß einer lokalkompakten Quantengruppe ist eine von Neumann-algebraische lokalkompakte Quantengruppe [**36**, Definition 1.1], welche einen Quantengruppen-Rahmen [**40**, Definition 3.4] induziert, vgl. [**40**, Proposition 3.16]. Insbesondere ist $\mathcal{C}(W)$ nach [**40**, Proposition 3.13] σ-schwach dicht in $\mathcal{L}(H)$.

1.3.7 Beispiele für lokalkompakte Quantengruppen. Bisher fallen alle bekannten Beispiele für Quantengruppen in diese Kategorie. Einige spezielle Beispiele sind:

1. Die Funktionenalgebra $\mathcal{C}_0(G)$ einer lokalkompakten Gruppe G. Dies sind zugleich alle Beispiele kommutativer lokalkompakter Quantengruppen, vgl. [**4**, § 2]. Ihr (reduziertes) Dual ist die volle (reduzierte) Gruppen-C^*-Algebra $(C^*_{(r)}(G), \Delta_{G,(r)})$.

2. Kompakte Quantengruppen, d.h. *unitale*, beidseitig nichtentartete Hopf-C^*-Algebren. Solche wurden zuerst von Woronowicz [**68**] betrachtet, vgl. [**68**, § 1]. Das linksinvariante Gewicht ist in diesem Fall ein Funktional (das *Haar-Maß*) und beidseitig invariant, vgl. [**68**, § 4]. Für beliebige unitale Hopf-C^*-Algebren wurde die Existenz des Haar-Maßes in [**65**] bewiesen. Es gibt hier eine (unproblematische) technische Feinheit: Das Haar-Maß ist hierbei im allgemeinen kein treues Funktional, man muß die kompakte Quantengruppe zuerst reduzieren, also das Bild in der GNS-Darstellung des Haar-Maßes betrachten, um eine lokalkompakte Quantengruppe im Sinne von [**35**] zu erhalten. Das Dual einer kompakten Quantengruppe nennt man in Anlehnung an den Gruppen-Fall eine *diskrete* Quantengruppe. Sie ist als Algebra eine direkte Summe von (endlichdimensionalen) Matrixalgebren (vgl. [**41**, § 8], hierbei insbesondere Definition 8.2).

3. Bicrossed-Produkte (vgl. [**4**, Remarques 8.20.c] und [**5**]), die man einer Zerlegung einer lokalkompakten Gruppe als Produkt zweier Untergruppen $G = G_1G_2$ zuordnen kann: Man identifiziert G_1 bzw. G_2 kanonisch mit G/G_2 bzw. $G_1\backslash G$ und erhält eine Links-Wirkung β von G_2 auf $G_1 \cong G/G_2$ und eine Rechts-Wirkung α von G_1 auf $G_2 \cong G_1\backslash G$, die einfach durch Translation erklärt sind, vgl. [**4**, S. 473]. Baaj und Skandalis konstruieren daraus eine multiplikative Ünitäre V auf $L^2(G)$ (vgl. [**4**, Remarques 8.20(c)]). Nach [**4**, Proposition 8.22] ist die zugehörige reduzierte Quantengruppe S_V gleich $G_1 \ltimes_{\alpha,r} \mathcal{C}_0(G_2)$. Die entsprechende universelle Quantengruppe ist das entprechende volle verschränkte Produkt $S_u = G_1 \ltimes_\alpha \mathcal{C}_0(G_2)$, vgl. [**5**, Proposition 3.7]. Zudem ist die kanonische Projektion π einfach die kanonische Abbildung in das reduzierte verschränkte Produkt. Die Duale sind $\widehat{S}_V = \mathcal{C}_0(G_1) \rtimes_{\beta,r} G_2$ und $\widehat{S}_u = \mathcal{C}_0(G_1) \rtimes_\beta G_2$.

1.3.8 Mittelbare Quantengruppen. Analog wie in [**4**, Remarques A.13.c] heißt eine dichte C^*-algebraische multiplikative Unitäre $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ *mittelbar* bzw. *ko-mittelbar*, falls die Surjektion $\widehat{\pi} : \widehat{S}_u \to \widehat{S}_V$ bzw. $\pi : S_u \to S_V$ ein Isomorphismus ist. Wir werden die Notation oft ein wenig mißbrauchen und verkürzend sagen: S sei *mittelbar*, wenn $\pi : S_u \to S_V$ ein Isomorphismus ist (analog heißt $\widehat{S}$ *mittelbar*, wenn $\widehat{\pi}$ ein Isomorphismus ist). In diesem Fall gibt es natürlich keinen Unterschied zwischen reduzierter und universeller Quantengruppe und wir setzen $S := S_V = S_u$.

1.3.9 Beispiele mittelbarer Quantengruppen.

1. Für eine lokalkompakte Gruppe G ist die Funktionenalgebra $\mathcal{C}_0(G)$ stets mittelbar, denn π entspricht der durch punktweise Multiplikation definierten Darstellung $M : \mathcal{C}_0(G) \to \mathcal{L}(L^2(G))$, und diese ist stets treu. Die Quantengruppe $C^*_r(G)$ ist genau dann mittelbar, wenn G eine mittelbare Gruppe ist.

2. Diskrete Quantengruppen (vgl. 1.3.7(2.)) sind stets mittelbar, denn als direkte Summe von Matrixalgebren gibt es genau eine C^*-Norm auf ihnen und deshalb stimmen reduzierte und universelle Vervollständigung überein (vgl. [**41**, Section 8]).

3. Betrachte das Beispiel s1.3.7(3.). Hier ist $S_V = G_1 \ltimes_{\alpha,r} \mathcal{C}_0(G_2)$ mittelbar, falls G_1 eine mittelbare Gruppe ist, vgl. [**5**, Proposition 3.7].

§ 1.4 Kowirkungen

1.4.1 Kowirkungen auf C^*-Algebren. Sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, vgl. 1.2.2, und A eine C^*-Algebra. Eine *Rechts-S-Kowirkung auf A* ist ein *injektiver* nichtentarteter C^*-Morphismus $\alpha : A \to M_S(A \otimes S)$ in die S-Multiplikator-Algebra, vgl. 1.1.22, der die *Koassoziativitäts*-Gleichung $(\alpha \otimes id_S)\alpha = (id_A \otimes \Delta)\alpha$ erfüllt. Wir bezeichnen auch abkürzend das Paar (A, α) als eine *S-äquivariante C^*-Algebra* oder einfach nur als *S-Kowirkung*. Besitzt (S, Δ) eine Koeins ε, so ist die Injektivität von α äquivalent zum Koeins-Gesetz $(id_A \otimes \varepsilon)\alpha = id_A$, weshalb wir Injektivität oben fordern.

Die S-Kowirkung (A, α) heißt *nichtentartet* (als Kowirkung), falls unter Verwendung der Notation 1.0.1 die Teilmenge $\alpha(A) \cdot (1_A \otimes S) \subseteq A \otimes S$ dicht in $A \otimes S$ liegt.

1.4.2 Kowirkungen auf Rechts-Hilbert-(Bi)-Moduln. Sei (S, Δ) wie oben. In [**3**, Abschnitt 2] wurde der Begriff einer S-Kowirkung auf Hilbertmoduln verallgemeinert, vgl. auch [**9**, Definition 2.7], [**47**] oder [**15**, § 2.3]. In der Sprache der S-Multiplikator-Bimoduln (vgl. 1.1.22) übersetzt sich die Definition aus [**3**] wie folgt, wobei wir gleichzeitig den Fall von Rechts-Hilbertmoduln und Rechts-Hilbert-Bimoduln behandeln und dies mit Klammern kennzeichnen:

Definition. Sei ${}_{(A)}X_B$ ein Rechts-Hilbert-(Bi)-Modul. Eine *S-Kowirkung* auf X ist ein *injektiver* nichtentarteter Morphismus ${}_{(\alpha)}\xi_\beta : {}_{(A)}X_B \to M_S(X \otimes S)$ in den S-Multiplikator-(Bi)-Modul, so daß die *Koassoziativitäts*-Gleichung $(\xi \otimes id_S)\xi = (id_X \otimes \Delta)\xi$ als Gleichung von Rechts-Hilbert-(Bi)-Moduln (vgl. die Konvention in 1.1.10) erfüllt ist. Wir bezeichnen abkürzend das Paar $({}_{(A)}X_B, {}_{(\alpha)}\xi_\beta)$ als *S-äquivarianten* Rechts-Hilbert-(Bi)-Modul oder auch einfach als eine *S-Kowirkung* und schreiben (X, ξ), wenn Mißverständnisse bzgl. der Koeffizienten-Daten ausgeschlossen sind.

Offensichtlich sind die Koeffizienten-Morphismen α und β S-Kowirkungen von Algebren im Sinne von 1.4.1. Wir bezeichnen (A, α) und (B, β) als die *Koeffizienten-Kowirkungen* von (X, ξ). Insofern sind S-Kowirkungen auf C^*-Algebren ein Spezialfall der obigen Definition.

Definition. Die Kowirkung $({}_{(A)}X_B, {}_{(\alpha)}\xi_\beta)$ heißt *nichtentartet* (als Kowirkung), falls die Koeffizienten-Kowirkungen (A, α) und (B, β) nichtentartet im Sinne von 1.4.1 sind und der Teilraum $(1_{\mathcal{K}(X)} \otimes S) \cdot \xi(X)$ dicht in $X \otimes S$ liegt. Insbesondere ist ξ in diesem Fall als Morphismus von Rechts-Hilbert-(Bi)-Moduln beidseitig nichtentartet (vgl. 1.1.10).

Die obigen Definitionen sind identisch mit [**15**, Definition 2.10], wenn man $S = C^*(G)$ setzt. Dasselbe Argument wie in [**15**, Remark 2.11] zeigt, daß für eine (nichtentartete) Kowirkung ξ der Unterraum $\xi(X) \cdot (1 \otimes S)$ eine (dichte) Teilmenge von $X \otimes S$ ist. Ist (S, Δ) beidseitig nichtentartet (vgl. 1.2.2), so gelten sinngemäß die meisten Ergebnisse aus [**15**, Chapter 2].

1.4.3 Adjunktion und Kowirkungen. Sei S eine C^*-Algebra, sowie $\Phi_\varphi : X_B \to M(W_D \otimes S)$ und $\Psi_\varphi : Y_B \to M(Z_D \otimes S)$ nichtentartete Morphismen von Rechts-Hilbert-moduln. Dann benutzen wir den kanonischen Isomorphismus $\mathcal{K}_{D\otimes S}(W_D \otimes S, Z_D \otimes S) \cong \mathcal{K}_D(W, Z) \otimes S$ und betrachten die Adjunktion $Ad(\Psi, \Phi)$ (vgl. 1.1.12) als Morphimus

$$Ad(\Psi, \Phi) : \mathcal{K}_B(X, Y) \longrightarrow M(\mathcal{K}_D(W, Z) \otimes S)$$

mit Koeffizienten-Morphismen $Ad(\Psi) : \mathcal{K}(Y) \to M(\mathcal{K}(Z) \otimes S)$ und $Ad(\Phi) : \mathcal{K}(X) \to M(\mathcal{K}(W) \otimes S)$. Sei nun (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, $W_D = X_B$, $Z_D = Y_B$ und $Y \cdot \langle X, X\rangle_B$ dicht in Y (vgl. 1.1.12).

Sind die nichtentarteten Morphismen $\Phi_\varphi : X_B \to M(X \otimes S)$ und $\Psi_\varphi : Y_B \to M(Y \otimes S)$ koassoziativ (vgl. 1.4.2), so auch $Ad(\Psi, \Phi) : \mathcal{K}_B(X, Y) \to M(\mathcal{K}_B(X, Y) \otimes S)$. Sind Φ_φ und Ψ_φ zusätzlich (nichtentartete) S-Kowirkungen, dann ist auch $Ad(\Psi, \Phi)$ eine (nichtentartete) Kowirkung.

Beweis. Wegen 1.1.14 gilt mit den offensichtlichen Identifikationen wie oben die Gleichung $(Ad(\Psi, \Phi) \otimes id_S) Ad(\Psi, \Phi) = Ad((\Psi \otimes id_S)\Psi, (\Phi \otimes id_S)\Phi) = Ad((id_Y \otimes \Delta)\Psi, (id_X \otimes \Delta)\Phi) = (id_{\mathcal{K}(X,Y)} \otimes \Delta) Ad(\Psi, \Phi)$. Sind Φ_φ und Ψ_φ (nichtentartete) S-Kowirkungen, so ist mit 1.1.12 und Notation 1.0.1

$$\begin{aligned}\overline{(1 \otimes S) \cdot Ad(\Psi, \Phi)(\mathcal{K}_B(X, Y))} &= \overline{(1 \otimes S) \cdot \Psi(Y) \cdot \Phi(X)^*} = \overline{(Y \otimes S) \cdot \Phi(X)^*} \\ &= \overline{Y \cdot X^* \otimes S} \subseteq \mathcal{K}_B(X, Y) \otimes S \ ,\end{aligned}$$

mit Gleichheit, wenn Φ und Ψ nichtentartete S-Kowirkungen sind. Analoges gilt für die Koeffizienten-Morphismen $Ad(\Psi)$ und $Ad(\Phi)$. □

Insbesondere kann man eine (nichtentartete) S-Kowirkung (X_B, ξ_β) auf einem Hilbertmodul stets durch $Ad(\xi) : \mathcal{K}(X) \to M(\mathcal{K}(X) \otimes S)$ zu einer (nichtentarteten) Rechts-Hilbert-Bimodul-S-Kowirkung $({}_{\mathcal{K}(X)}X_B, {}_{Ad(\xi)}\xi_\beta)$ fortgesetzt werden. Insofern sind S-Kowirkungen von Hilbertmoduln spezielle Hilbert-Bimodul-Kowirkungen.

1.4.4 Äquivariante Morphismen. Sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra. Für S-äquivariante Rechts-Hilbert-Bimoduln $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ sowie $({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$, vgl. 1.4.2, heißt ein Morphismus ${}_\psi\Phi_\varphi : {}_AX_B \to M({}_CY_D)$ zwischen ihnen ξ-ζ-*äquivariant*, falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} {}_AX_B & \xrightarrow{{}_\psi\Phi_\varphi} & M({}_CY_D) \\ {\scriptstyle {}_\alpha\xi_\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}_\gamma\zeta_\delta} \\ M_S(X \otimes S) & \xrightarrow{\Phi \otimes id_S} & M(Y \otimes S). \end{array}$$

Man beachte, daß der untere Morphismus $\Phi \otimes id_S$ nach 1.1.22 auch wohldefiniert ist, wenn Φ entartet ist. Wir benutzen ${}_\psi\Phi_\varphi : ({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \to M({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$ und ähnliche abkürzende

Notationen, falls sich die Koeffizienten-Daten von selbst verstehen. Analog bezeichnen wir $\Phi : X \to M(Y)$ als *äquivariant*, falls es keine Mißverständnisse bzgl. der Kowirkungen ξ und ζ gibt. Für den Spezialfall von C^*-Algebren-S-Kowirkungen (B, β) und (D, δ) erhält man den Begriff eines *(β-δ-)äquivarianten *-Morphismus* $\varphi : (B, \beta) \to M(D, \delta)$.

1.4.5 Äquivariante Tensorprodukte. Seien $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ und $({}_BY_C, {}_\beta\zeta_\gamma)$ S-äquivariante Rechts-Hilbert-Bimoduln. Wie in [**15**, Proposition 2.13] (vgl. auch Proposition 2.28) kann man auf dem inneren Tensorprodukt ${}_A(X \otimes_B Y)_C$ eine S-Kowirkung $\xi \sharp_B \zeta$ definieren.

Sind ${}_\psi\Phi_\varphi : (X, \xi) \to M({}_LZ_R, {}_\lambda\eta_\varrho)$ und ${}_\varphi\Gamma_\vartheta : (Y, \zeta) \to M({}_RW_D, {}_\varrho\chi_\delta)$ S-äquivariante Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln, so ist das Tensorprodukt $\Phi \otimes_B \Gamma$ (vgl. 1.1.11) automatisch $\xi \sharp_B \zeta$ - $\eta \sharp_R \chi$-äquivariant. Das folgt aus den offensichtlichen Eigenschaften des Morphismus Θ (vgl. [**15**, Lemma 2.12] oder auch Lemma 2.27).

1.4.6 Äquivariante Operatoren. Seien (X_B, ξ_β) und (Y_B, ζ_β) Rechts-Hilbertmodul-S-Kowirkungen mit denselben Koeffizienten-Daten. Ein Operator F in $\mathcal{L}_B(X, Y)$ heißt *S-invariant* , wenn $\zeta(F(x)) = (F \otimes id_S) \circ \xi(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Das ist unter Verwendung der Notationen aus 1.1.12 äquivalent zu der Gleichung $Ad(\zeta, \xi)(F) = F \otimes 1_S$ (weil $id_S = 1_S \in M(S)$ ist); daher rührt auch die Bezeichnung.

1.4.7 Äquivariante Unitäre. Seien $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ und $({}_AY_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ zwei S-äquivariante Rechts-Hilbert-Bimoduln mit denselben Koeffizienten-Kowirkungen. Sie heißen *S-äquivariant unitär äquivalent*, wenn es eine S-invariante Unitäre zwischen ihnen gibt. Das bedeutet (vgl. 1.1.19), daß es einen nichtentarteten S-äquivarianten Morphimus von Rechts-Hilbert-Bimoduln zwischen ihnen gibt, welcher Identitäten als Koeffizienten-Morphismen hat. Wir benutzen $[({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)]$ als Schreibweise für unitäre Äquivalenzklassen.

1.4.8 Konjugierte Kowirkungen. Sei (X_B, ξ_β) eine S-Kowirkung, so daß ξ beidseitig nichtentartet als Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln ist 1.1.10. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn X_B voll oder beidseitig nichtentartet ist. Unter Verwendung der Konventionen aus 1.1.12 und 1.1.15 definiert der zu ξ adjungierte Morphismus $\xi^* : {}_BX_{\mathcal{K}(X)} \to M((X \otimes S)^*) \cong M(X^*_{\mathcal{K}(X)} \otimes S)$ eine S-Kowirkung auf ${}_BX^*_{\mathcal{K}(X)}$, denn er ist koassoziativ nach 1.1.14. Wir nennen $({}_BX^*_{\mathcal{K}(X)}, {}_\beta\xi^*_{Ad(\xi)})$ die *zu* (X_B, ξ_β) *adjungierte* Kowirkung bzw. den *adjungierten äquivarianten* Rechts-Hilbertmodul. Das Tensorprodukt $({}_{\mathcal{K}(X)}(X \otimes_B X^*)_{\mathcal{K}(X)}, \xi \sharp_B \xi^*)$ ist äquivariant unitär isomorph zu $(\mathcal{K}(X), Ad(\xi))$. Der verbindende Morphismus $X \otimes_B X^* \to \mathcal{K}(X)$ ist durch $x \otimes y^* \mapsto xy^*$ gegeben (vgl. den Beweis von [**15**, Remark 2.17]).

1.4.9 Äquivariante Imprimitivitäts-Bimoduln. Unter einer *Imprimitivitäts-S*-Kowirkung verstehen wir eine S-Kowirkung auf einem Imprimitivitäts-Bimodul ${}_AX_B$ (vgl. 1.1.6). Dann ist automatisch die A-Wirkung ι_A auf X äquivariant und identifiziert (A, α) mit $(\mathcal{K}(X), Ad(\xi))$. Wir sagen, $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ ist ein *äquivarianter Imprimitivitäts-Bimodul* oder auch (A, α) und (B, β) sind *S-äquivariant Morita-äquivalent*. Die konjugierte Kowirkung $({}_BX^*_A, {}_\beta\xi^*_\alpha)$, vgl. 1.4.8, ist dann natürlich ebenfalls ein äquivarianter Imprimitivitäts-Bimodul. In diesem Fall ist das Tensorprodukt $({}_A(X \otimes_B X^*)_A, {}_\alpha(\xi \sharp_B \xi^*)_\alpha)$ äquivariant unitär äquivalent zu (A, α) und genauso $({}_B(X^* \otimes_A X)_B, {}_\beta(\xi^* \sharp_A \xi)_\beta)$ äquivalent zu (B, β), vgl. [**15**, Remark 2.17].

1.4.10 Beispiele. Sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra.

1. Das Paar (S, Δ) ist selbst eine Rechts-S-Kowirkung.

2. Ist A eine beliebige C^*-Algebra, so existiert stets die *triviale* S-Kowirkung δ_A^{tr} auf A, welche für $a \in A$ durch $\delta_A^{tr}(a) := a \otimes 1_S \in M_S(A \otimes S)$ definiert ist. Analog definiert man für einen Rechts-Hilbert-Bimodul ${}_AX_B$ die *triviale* Kowirkung ${}_{\delta_A^{tr}}\delta_X^{tr}{}_{\delta_B^{tr}} : {}_AX_B \to M_S(X \otimes S)$.

3. Ist G eine lokalkompakte Gruppe und $(S, \Delta) = (\mathcal{C}_0(G), \Delta_{\widehat{G}})$ wie in 1.2.6(1.), so sind $\mathcal{C}_0(G)$-Kowirkungen auf Hilbertmoduln dasselbe wie G-Wirkungen auf Hilbertmoduln im Sinne von [**30**]. Für den Zusammenhang zwischen G-Wirkungen und $\mathcal{C}_0(G)$-Kowirkungen auf C^*-Algebren siehe auch [**15**, § A.3].

4. Für $S = \mathbb{C}$ existieren nur triviale Kowirkungen, die keine weitere Struktur beinhalten. Die $\mathbb{C}$-äquivarianten Hilbert-Bimoduln sind folglich gewöhnliche Hilbert-Bimoduln.

1.4.11 Invariante Ideale. Sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra und (B, β) eine Algebren-S-Kowirkung. Sei $I \subseteq B$ ein Ideal in B. Nach [**15**, Lemma 1.46] kann man S-Multiplikatoren $M_S(I \otimes S)$ als C-Idealisator $M = \{m \in M_S(B \otimes S) | (1 \otimes S)m \cup m(1 \otimes S) \subseteq I \otimes S\}$ in $M_S(B \otimes S)$ einbetten. Das Ideal $I \subseteq B$ heißt *β-invariant*, falls unter dieser Identifikation $M \cong M_S(I \otimes S)$ das Bild $\beta(I) \subset M_S(I \otimes S)$ ist. Dann ist die Einschränkung $\beta_I := \beta|_I$ eine S-Kowirkung auf I. Ist β nichtentartet, so ist es offenbar auch β_I.

1.4.12 Links-Kowirkungen. Wir haben bis jetzt ausschließlich Rechts-S-Kowirkungen betrachtet. Symmetrisch zu Rechts-Kowirkungen ist eine Links-S-Kowirkungen auf einer C^*-Algebra A eine injektive Abbildungen $\alpha : A \to M(S \otimes A)$ mit den spiegelbildlichen Bedingungen. Dann ist $\alpha^{op} := \sigma_{S,A} \circ \alpha : A \to M(A \otimes S)$ eine Rechts-(S, Δ^{op})-Kowirkung (vgl. 1.2.6(4.)). Durch diese Konstruktion identifizieren sich die Links-(S, Δ)-Kowirkungen mit den Rechts-(S, Δ^{op})-Kowirkungen. Entsprechendes gilt natürlich auch für Kowirkungen auf Hilbert-Bimoduln.

§ 1.5 Kategorien

1.5.1 Kategorien von Rechts-Hilbert-Bimoduln. Wir benutzen die folgenden Kategorien von Rechts-Hilbert-Bimoduln:

Definition. Ist (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, so bezeichnen wir mit $\mathcal{HBM}_S$ die *Kategorie der S-äquivarianten Hilbert-Bimoduln*: Objekte sind S-Kowirkungen $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ von Hilbert-Bimoduln (vgl. 1.4.2) und Morphismen sind ξ-ζ-äquivariante nichtentartete Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln, vgl. 1.4.4. Für die Menge der $\mathcal{HBM}_S$-Morphismen zwischen (X, ξ) und (Y, ζ) verwenden wir die Notation $\mathcal{HBM}_S((X, \xi), (Y, \zeta))$. Mit $\mathcal{HBM}_S^{ne}$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie mit nichtentarteten Rechts-Hilbert-Bimodul-S-Kowirkungen als Objekten. Ist $S = \mathbb{C}$, so erhalten wir die Kategorie der Rechts-Hilbert-Bimoduln mit nichtentarteten Morphismen (ohne Kowirkungsstruktur) und schreiben $\mathcal{HBM}$ statt $\mathcal{HBM}_{\mathbb{C}}$.

Man kann die Kategorie der C^*-Algebren als Unterkategorie von $\mathcal{HBM}$ auffassen, indem man nur Objekte der Form ${}_AA_A$ und Morphismen der Form ${}_\varphi\varphi_\varphi : {}_AA_A \to M({}_BB_B)$ zuläßt, wobei A und B zwei C^*-Algebren sind und φ ein nichtentarteter *-Morphsmus ist. Genauso läßt sich die Kategorie der Rechts-Hilbertmoduln mit nichtentarteten Morphismen als Unterkategorie von $\mathcal{HBM}$ auffassen, indem man nur Objekte bzw. Morphismen der Form ${}_{\mathcal{K}(X)}X_B$ bzw. ${}_{Ad(\Phi)}\Phi_\varphi$ betrachtet (vgl. 1.1.3 und 1.1.12). Analoges gilt für die S-äquivarianten Kategorien. Sämtliche Ergebnisse für Hilbert-Bimoduln lassen sich daher auf die Algebren-Kategorien und Rechts-Hilbertmodul-Kategorien einschränken.

1.5.2 Morita-Kategorien. Sei (S,Δ) eine Hopf-C^*-Algebra. Die folgende „Kategorie“ ist eine bequeme Art, Konstruktionen zu studieren, die mit S-äquivarianten Morita-Äquivalenzen und Tensorprodukten verträglich sind. Sie ist die offensichtliche Verallgemeinerung der Kategorien $\mathcal{A}(G)$ ([**15**, Theorem 2.8]) und $\mathcal{C}(G)$ ([**15**, Theorem 2.15]) in [**15**, Chapter 2].

Wir betrachten die folgende Konstruktion: Wir fassen die unitäre Äquivalenzklasse $[({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)]$ einer Rechts-Hilbert-Bimodul-S-Kowirkung (vgl. 1.4.2) als *Morphismus* von (A,α) nach (B,β) auf und schreiben $[(X,\xi)]$, falls sich die Koeffizienten-Daten von selbst verstehen. Die Verknüpfung von Morphismen ist das innere Tensorprodukt: Ist $[(X,\xi)]$ ein Morphismus von (A,α) nach (B,β) und $[(Y,\zeta)]$ ein Morphimus von (B,β) nach (C,γ), so ist $[(X,\xi)]\cdot[(Y,\zeta)] := [(X\otimes_B Y, \xi\,\sharp_B\zeta)]$ (vgl. 1.4.5) ein Morphismus von (A,α) nach (C,γ). Dieses Produkt ist wohldefiniert, denn sind $\Phi : (X,\xi)\to(X',\xi')$ und $\Psi : (Y,\zeta)\to(Y',\zeta')$ unitäre Äquivalenzen, so ist das Tensorprodukt $\Phi\otimes_B\Psi : (X\otimes_B Y,\xi\,\sharp_B\zeta)\to(X'\otimes_B Y',\xi'\,\sharp_B\zeta')$ ebenfalls eine unitäre Äquivalenz (vgl. 1.4.7). Das Produkt ist offenbar assoziativ.

Definition. Die *S-äquivariante Morita-Kategorie* $\mathfrak{M}_S$ hat die C^*-Algebren-S-Kowirkungen als Objekte und die obigen Morphismen mit obigem Produkt. Wir sagen, $[(X,\xi)]$ sei ein *$\mathfrak{M}_S$-Morphismus* von (A,α) nach (B,β), und schreiben $[(X,\xi)]\in\mathfrak{M}_S((A,\alpha),(B,\beta))$. Die Koeffizienten-Daten verstehen sich dann von selbst, und die $\mathfrak{M}_S$-Identität von (A,α) ist $[(A,\alpha)]$. Mit $\mathfrak{M}_S^{ne}$ bezeichnen wir die Unterkategorie, deren Objekte bzw. Morphismen durch nichtentartete Kowirkungen definiert werden. Ist $\varphi : (A,\alpha)\to M(B,\beta)$ ein äquivarianter *-Morphismus, so bezeichnen wir mit $[\varphi] := [({}_AB_B, {}_\alpha\beta_\beta)]$ in $\mathfrak{M}_S((A,\alpha),(B,\beta))$ den induzierten $\mathfrak{M}_S$-Morphismus (die Links-Wirkung von A auf B_B ist durch φ gegeben).

Diese Definition liefert strenggenommen keine Kategorie, denn die $\mathfrak{M}_S$-Morphismen sind keine Mengen. $\mathfrak{M}_S$ reflektiert aber die algebraischen Eigenschaften einer Kategorie und kann leicht in eine Kategorie verwandelt werden, wenn man die Kardinalität der Hilbert-Bimoduln absolut beschränkt. Insbesondere kann man fordern, daß in der Definition alle C^*-Algebren separabel und alle Hilbertmoduln abzählbar erzeugt sein sollen. Dann ist die entstehende Morita-Kategorie wirklich eine Kategorie.

Setzt man $S=\mathbb{C}$ mit dem trivialen Koprodukt, so erhält man die Morita-Kategorie $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}$ „ohne“ Kowirkungen. Wir lassen in diesem Fall die redundanten Kowirkungs-Informationen (und den Index $\mathbb{C}$) weg. Man kann natürlich die S-äquivarianten Strukturen vergessen und erhält den Vergiß-Funktor $\mathfrak{M}_S\to\mathfrak{M}$.

1.5.3 $\mathfrak{M}_S$-Inverse und $\mathfrak{M}_S$-rechts-Inverse. Die $\mathfrak{M}_S$-Isomorphismen werden genau von den äquivarianten Morita-Äquivalenzen repräsentiert (vgl. [**15**, Remark 2.17]). Wir brauchen später eine verwandte Aussage, die auch direkt aus dem Beweis von [**15**, Remark 2.17] folgt:

Sei $[(X,\xi)]$ *in* $\mathfrak{M}_S((A,\alpha),(B,\beta))$ *und existiere ein Rechts-Inverses in* $\mathfrak{M}$*, d.h. ein* $\mathfrak{M}$*-Morphismus* $[Y]$ *in* $\mathfrak{M}(B,A)$ *mit* $[X]\cdot[Y]=[A]=1_A$*. Dann ist die Links-Wirkung* $\iota_A : A \to \mathcal{L}_B(X)$ *injektiv.*

Beweis. Sei ${}_{id_A}\Phi_{id_A} : X\otimes_B Y \to A$ eine unitäre Äquivalenz (vgl. 1.1.19). Dann ist wegen der Verträglichkeit der linken Koeffizienten-Abbildung (vgl. 1.1.13) $id_A = Ad(\Phi)\circ(\iota_A\otimes_B id_Y)$ und deshalb ι_A injektiv. $\square$

2.Kapitel: Verschränkte Produkte von Kowirkungen

§ 2.1 C^*-Algebren-Kowirkungen

Es sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra wie in 1.2.2. Man kann den Begriff der kovarianten Darstellungen, wie er für Algebren mit G-Wirkung bzw. G-Kowirkung exisitert, vgl. [**15**, § A.2 und § A.6], auf Algebren-S-Kowirkungen (vgl. 1.4.1) ausweiten (vgl. [**45**, Definition 2.8] und [**50**]):

2.1 Definition. Ein *kovarianter Homomorphismus* von (A, α) in eine C^*-Algebra B ist ein Paar (π, u), bestehend aus einem *-Homomorphismus $\pi : A \to M(B)$, zusammen mit einer unitären S-Kodarstellung $u \in \mathcal{U}M(B \otimes S)$ auf D (vgl. 1.2.3), so daß die *Kovarianz-Gleichung* $Ad(u) \circ (\pi \otimes 1_S) = (\pi \otimes id_S)\alpha$ erfüllt ist. Ein kovarianter Homomorphismus (π, u) heißt *nichtentartet*, falls π nichtentartet ist. Ist $B = \mathcal{K}(H)$ für einen Hilbertraum H, so sprechen wir von einer *kovarianten Darstellung auf* H.

Ebenso lassen sich verschränkte Produkte auf C^*-Algebren mit S-Kowirkung (A, α) verallgemeinern, vgl. die Definitionen [**56**, Def. 1], [**57**, Def. 2.8], [**50**, § 5], [**45**, Def. 2.11(b)] und [**48**, Def. 2.9(b)]:

2.2 Definition. Es sei (A, α) eine S-Kowirkung. Ein *verschränktes Produkt* von (A, α) ist ein Tripel $(C, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$, bestehend aus einer C^*-Algebra C zusammen mit einem nichtentarteten kovarianten Homomorphismus $(j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ von (A, α) nach C, das die *universelle Eigenschaft* bzgl. kovarianter Homomorphismen von (A, α) besitzt. Damit ist gemeint, daß zu jedem nichtentarteten kovarianten Homomorphismus (π, u) von (A, α) auf einer C^*-Algebra B genau ein nichtentarteter *-Homomorphismus $\pi \times u : C \longrightarrow M(B)$ mit $(\pi \times u) \circ j_\alpha = \pi$ und $(\pi \times u \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha) = u$ existiert.

2.3 Bemerkung.

1. Ist (S, Δ) dualisierbar wie in 1.2.4, so ist das universelle Dual $(\widehat{S}, \iota, \mathfrak{u})$ ein verschränktes Produkt der trivialen S-Kowirkung $(\mathbb{C}, \delta^{tr})$ auf $\mathbb{C}$, wobei $\iota : \mathbb{C} \to M(\widehat{S})$ die Einbettung als Skalare bezeichnet.

2. Ist $\varphi : C \to M(B)$ mit den Notationen in Definition 2.2 ein nichtentarteter *-Morphismus, so ist $(\varphi \circ j_\alpha, (\varphi \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha))$ offenbar ein nichtentarteter kovarianter Homomorphismus von (A, α) nach B und $\varphi = (\varphi j_\alpha) \times (\varphi \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha)$. Die nichtentarteten *-Morphismen von C kodieren also exakt die nichtentarteten kovarianten Homomorphismen von (A, α).

3. Da man jede C^*-Algebra treu auf einem Hilbertraum darstellen kann, reicht es, die universelle Eigenschaft von $(C, j_A, \mathfrak{u}_\alpha)$ für alle nichtentarteten kovarianten Darstellungen auf einem Hilbertraum H zu fordern (vgl. auch den Beweis von Lemma 2.9).

Wie das universelle Dual von (S, Δ) brauchen verschränkte Produkte in dieser Allgemeinheit nicht zu existieren. Wir werden später sehen (Lemma 2.11), daß aus der Existenz eines starken universellen Duals $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$ (vgl. 1.2.5) mit einer milden Zusatzbedingung automatisch die Existenz von verschränkten Produkten folgt. Es gibt bis auf Isomorphie jedoch höchstens ein verschränktes Produkt von (A, α), vgl. [**45**, Remark 2.12(a)] und [**50**, Thm 5.2]):

2.4 Lemma. *Es sei* (A, α) *eine Algebren-*S*-Kowirkung. Sind* $(C, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ *und* $(D, i_\alpha, \mathfrak{v}_\alpha)$ *verschränkte Produkte von* (A, α)*, so gibt es genau einen Isomorphismus* $\varphi : C \to D$ *mit* $\varphi \circ j_\alpha = i_\alpha$ *und* $(\varphi \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha) = \mathfrak{v}_\alpha$*.*

Beweis. Wegen der jeweiligen universellen Eigenschaften gibt es nichtentartete *-Morphismen $\varphi := i_\alpha \times \mathfrak{v}_\alpha : C \to M(D)$ und $\psi := j_\alpha \times \mathfrak{u}_\alpha : D \to M(C)$ mit den Eigenschaften aus der Definition 2.2. Aus der Eindeutigkeit in den jeweiligen universellen Eigenschaften folgt, daß die Verknüpfungen $\psi \circ \varphi$ bzw. $\varphi \circ \psi$ gleich den Inklusionen $C \subseteq M(C)$ bzw. $D \subseteq M(D)$ sind. Also folgt die Behauptung aus 1.1.20. □

2.5 Notation. Aufgrund der Eindeutigkeit werden wir das verschränkte Produkte von (A, α) mit $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ bezeichnen. Besteht keine Verwechslungsgefahr, so schreiben wir auch einfach $A \rtimes \widehat{S}$. Wir verwenden die Notation $(\pi, u) : (A, \widehat{S}) \to M(B)$ als Notation für kovariante Homomorphismen (auch wenn kein universelles Dual im Sinne von 1.2.4 existiert).

2.6 Bemerkung. Es sei (S, Δ) eine dualisierbare Hopf C^*-Algebra mit universellem Dual $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$ (vgl. 1.2.4) und (A, α) eine Algebren-S-Kowirkung wie in 1.4.1.

1. Unitäre Kodarstellungen $u \in \mathcal{U}M(B \otimes S)$ korrespondieren definitionsgemäß zu nichtentarteten *-Morphismen $\mu : \widehat{S} \to M(B)$ durch die Beziehung $(\mu \otimes id_S)(\mathfrak{u}) = u$. Wir sagen μ *gehört zu* u und umgekehrt und betrachten μ und u als völlig gleichwertig. Ist $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ das verschränkte Produkt aus 2.2, so bezeichnen wir mit $j^\alpha_{\widehat{S}} : \widehat{S} \to M(A \rtimes_\alpha \widehat{S})$ den zu $\mathfrak{u}_\alpha$ gehörigen *-Morphismus.

2. Mit den Konventionen des ersten Teils lassen sich kovariante Homomorphismen von (A, α) nach B als Paare $(\pi, \mu) : (A, \widehat{S}) \to M(B)$ von *-Morphismen auffassen, wobei $\mu : \widehat{S} \to M(B)$ nichtentartet ist und die Kovarianz-Gleichung $Ad((\mu \otimes id)(\mathfrak{u})) \circ (\pi \otimes 1_S) = (\pi \otimes id_S)\alpha$ erfüllt ist. Wir verwenden dementsprechend die Notation $\pi \times \mu := \pi \times u : A \rtimes_\alpha \widehat{S} \to M(B)$. Es gilt dann $(\pi \times \mu) \circ j^\alpha_{\widehat{S}} = \mu$ wegen der Gleichung $((\pi \times \mu) j^\alpha_{\widehat{S}} \otimes id_S)(\mathfrak{u}) = (\pi \times u \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha) = u = (\mu \otimes id_S)(\mathfrak{u})$ und der universellen Eigenschaft von $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$.

3. Die universelle Eigenschaft übersetzt sich in der Schreibweise $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, j_\alpha, j^\alpha_{\widehat{S}})$ wie folgt: Zu jedem nichtentarteten kovarianten Homomorphismus $(\pi, \mu) : (A, \widehat{S}) \to M(B)$ existiert genau ein nichtentarteter *-Morphismus $\pi \times \mu : A \rtimes_\alpha \widehat{S} \to M(B)$ mit $(\pi \times \mu) \circ j_\alpha = \pi$ und $(\pi \times \mu) \circ j^\alpha_{\widehat{S}} = \mu$. Das ist eine üblichere Formulierung der universellen Eigenschaft, vgl. [**56**, Definition 1].

In diesem Zusammenhang läßt sich für stark dualisierbares (S, Δ) (vgl. 1.2.5) charakterisieren, wann zwei *-Homomorphismen $\pi : A \to M(B)$ und $\mu : \widehat{S} \to M(B)$ kommutierende Bilder haben:

2.7 Lemma. *Die* **-Morphismen* π *und* μ *wie oben haben genau dann kommutierende Bilder, wenn* $(\pi, \mu) : (A, \widehat{S}_u) \to M(B)$ *kovariant bezüglich der trivialen* S*-Kowirkung auf* A *ist, d.h. wenn die zu* μ *gehörige unitäre Kodarstellung* u *mit Elementen der Form* $\pi(a) \otimes 1_S$ *für* $a \in A$ *vertauscht.*

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnung $\mathfrak{F} \subseteq S'$ wie in 1.2.5 und verwenden die zu μ gehörige unitäre Kodarstellung u. Man muß aus der Kovarianzgleichung die Kommutativität $\pi(a)\mu(\widehat{s}) = \mu(\widehat{s})\pi(a)$ nur für alle a in A und für Elemente $\widehat{s}$ in $\widehat{S}$ der Form $\widehat{s} = (id \otimes f)(\mathfrak{u})$ mit $f \in \mathfrak{F}$ nachweisen. Dies folgt aus $\pi(a)\mu(\widehat{s}) = (id \otimes f)((\pi(a) \otimes 1_S) \cdot u) = (id \otimes f)(u \cdot (\pi(a) \otimes 1_S)) = \mu(\widehat{s})\pi(a)$. Die umgekehrte Richtung ist trivial. □

Insbesondere ist in diesem Fall der Abschluß $\overline{\pi(A)\mu(\widehat{S}_u)} = \overline{\mu(\widehat{S}_u)\pi(A)} \subseteq M(B)$ eine C^*-Unteralgebra von $M(B)$. Allgemeiner gilt für kovariante Homomorphismen das folgende Lemma, vgl. [**56**, Beweis von Proposition 3(2)], [**50**, Lemma 5.1] und [**15**, Proposition A.36]. Es kann genau wie die entsprechende Aussage für Hilbert-Bimoduln (Lemma 2.25) bewiesen werden.

2.8 Lemma. *Für eine stark dualisierbare (S, Δ) Hopf-C^*-Algebra wie in 1.2.5 und eine Algebren-S-Kowirkung (A, α) gilt:*

1. *Ist $(\pi, \mu) : (A, \widehat{S}) \to M(B)$ ein kovarianter Homomorphismus im Sinne von 2.6, so ist $C^*(\pi, \mu) := \overline{\pi(A) \cdot \mu(\widehat{S})} = \overline{\mu(\widehat{S}) \cdot \pi(A)} \subseteq M(B)$ eine C^*-Unteralgebra von $M(B)$.*

2. *Ist $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, j_\alpha, j^\alpha_{\widehat{S}})$ das verschränkte Produkt von (A, α) (vgl. Bemerkung 2.6), so ist $C^*(j_\alpha, j^\alpha_{\widehat{S}}) = A \rtimes_\alpha \widehat{S}$ und insbesondere $j_\alpha(A) \cdot j^\alpha_{\widehat{S}}(\widehat{S})$ dicht in $A \rtimes_\alpha \widehat{S}$.* □

Die Beschränkung auf nichtentartete kovariante Homomorphismen in der Definition 2.2 von verschränkten Produkten vereinfacht den Umgang mit der universellen Eigenschaft erheblich. Aber natürlich erhält man auch die folgende universelle Eigenschaft für evtl. entartete kovariante Homomorphismen (vgl. [**56**, Definition 1] und [**15**, Theorem A.41]):

2.9 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.8 gibt es zu jedem (evtl. entarteten) kovarianten Homomorphismus $(\pi, \mu) : (A, \widehat{S}) \to M(B)$ von (A, α) einen eindeutigen (evtl. entarteten) *-Homomorphismus $\pi \times \mu : A \rtimes_\alpha \widehat{S} \to M(B)$ mit $\pi \times \mu(j_\alpha(a) j^\alpha_{\widehat{S}}(\widehat{s})) = \pi(a)\mu(\widehat{s})$ für alle $a \in A$ und $\widehat{s} \in \widehat{S}$.*

Beweis. Wegen Lemma 2.8 ist $\pi \times \mu$ eindeutig bestimmt, und wir müssen nur noch die Existenz zeigen. Wir wählen eine treue, nichtentartete Darstellung $\rho : B \to \mathcal{L}(H)$ von B auf einem Hilbertraum H und setzen $H_\pi := \overline{\rho\pi(A) \cdot H}$. Dann ist H_π ein $\widehat{S}$-invarianter Teilraum von H, denn wegen Lemma 2.8 gilt

$$\begin{aligned}\overline{\rho\mu(\widehat{S})H_\pi} &= \overline{\rho\mu(\widehat{S})\rho\pi(A)H} = \overline{\rho(\mu(\widehat{S}_u)\pi(A))H} = \overline{\rho(\pi(A)\mu(\widehat{S}))H} \\ &= \overline{\rho\pi(A)\rho\mu(\widehat{S})H} = \overline{\rho\pi(A)H} = H_\pi\,,\end{aligned}$$

wobei außerdem ausgenutzt wird, daß die Darstellung $\rho \circ \mu$ von $\widehat{S}$ auf H nichtentartet ist. Also ist auch $H_\pi^\perp$ ein $\widehat{S}$-invarianter Teilraum. Die Darstellungen $\rho\pi$ bzw. $\rho\mu$ von A bzw. $\widehat{S}$ auf H besitzen also bezüglich der Zerlegung $H = H_\pi \oplus H_\pi^\perp$ die Form $\rho\pi = \left(\begin{smallmatrix} \rho\pi|_{H_\pi} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\rho\mu = \left(\begin{smallmatrix} \rho\mu|_{H_\pi} & 0 \\ 0 & \rho\mu|_{H_\pi^\perp} \end{smallmatrix}\right)$. Die obige Rechnung zeigt weiterhin, daß $(\rho\pi\,|_{H_\pi}, \rho\mu\,|_{H_\pi}) : (A, \widehat{S}_u) \to \mathcal{L}(H_\pi)$ eine nichtentartete kovariante Darstellung auf H_π ist. Nach der universellen Eigenschaft des verschränkten Produkts gibt es daher genau eine nichtentartete Darstellung $\varphi : A \rtimes_\alpha S \to \mathcal{L}(H_\pi)$ mit $\varphi \circ j_\alpha = \rho\pi\,|_{H_\pi}$ und $\varphi \circ j^\alpha_{\widehat{S}} = \rho\mu\,|_{H_\pi}$. Wir fassen sie durch triviale Fortsetzung $\widetilde{\varphi} : z \mapsto \left(\begin{smallmatrix} \varphi(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ als (evtl. entartete) Darstellung von $A \rtimes_\alpha \widehat{S}$ auf $H = H_\pi \oplus H_\pi^\perp$ auf. Die Darstellung $\widetilde{\varphi}$ faktorisiert über $M(B)$, denn mit $z = j_\alpha(a) j_{\widehat{S}}^\alpha(\widehat{s})$ in $A \rtimes_\alpha \widehat{S}$ ist $\widetilde{\varphi}(z) = \left(\begin{smallmatrix} \rho\pi(a)\rho\mu(\widehat{s})|_{H_\pi} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \rho\pi|_{H_\pi}(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \rho\mu|_{H_\pi}(\widehat{s}) & 0 \\ 0 & \rho\mu|_{H_\pi^\perp}(\widehat{s}) \end{smallmatrix}\right) = \rho\pi(a)\rho\mu(\widehat{s}) = \rho(\pi(a))\mu(\widehat{s}))$ ein Element in $\rho(M(B))$. Man erhält deshalb einen *-Homomorphismus $\pi \times \mu : A \rtimes_\alpha \widehat{S} \to M(B)$, der wegen $\rho \circ (\pi \times \mu) = \widetilde{\varphi}$ offenbar die geforderte Eigenschaft erfüllt. □

2.10 Bemerkung. Die Lemmata 2.8 und 2.9 zeigen, daß für stark dualisierbares (S, Δ) die offensichtliche Verallgemeinerung der Definition (2.1) in [**56**] mit der Definition 2.2 übereinstimmt.

Der Rest dieses Abschnitts soll dazu dienen, das verschränkte Produkt von (A, α) unter der Voraussetzung zu konstruieren, daß (S, Δ) stark dualisierbar wie in 1.2.5 ist und es überhaupt einen nichtentarteten kovarianten Homomorphismus von (A, α) gibt.

Wir folgen dabei einer Beweisidee von Ng, welcher in [**48**, Theorem 2.12] versucht, das verschränkte Produkt $A \rtimes_\alpha \widehat{S}$ als Quotient des freien Produkts $A * \widehat{S}$ zu realisieren. Der dort angegebene Beweis ist jedoch unvollständig, da er nur für den Fall unitaler Algebren A und $\widehat{S}$ anwendbar ist. Aus der Beweisführung in [**48**, Theorem 2.12] würde sonst folgen, daß die Homomorphismen $j_\alpha : A \to M(A \rtimes_\alpha \widehat{S})$ und $j_{\widehat{S}}^\alpha : \widehat{S} \to M(A \rtimes_\alpha \widehat{S})$ schon Werte in $A \rtimes_\alpha \widehat{S}$ selbst annehmen, was im allgemeinen (schon bei Gruppen) nicht korrekt ist. Das Problem besteht darin, daß die kanonischen Abbildungen von A und $\widehat{S}$ in das freie Produkt i.a. entartet sind.

2.11 Satz. *Es sei (S, Δ) stark dualisierbar und (A, α) eine Algebren-S-Kowirkung (vgl. 1.4.1). Es gibt genau dann ein verschränktes Produkt für (A, α), wenn es einen nichtentarteten kovarianten Homomorphismus von (A, α) gibt.*

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß die Bedingung hinreichend für die Existenz verschränkter Produkte ist. Wir betrachten das freie Produkt $M(A) * M(\widehat{S})$ mit kanonischen Abbildungen $\tau_1 : M(A) \to M(A) * M(\widehat{S})$ und $\tau_2 : M(\widehat{S}) \to M(A) * M(\widehat{S})$. Diese sind unital, insbesondere also nichtentartet. Jeder nichtentartete kovariante Homomorphismus $(\pi, \mu) : (A, \widehat{S}) \to M(B)$ definiert mittels der universellen Eigenschaft des freien Produkts einen (unitalen) *-Homomorphismus $\bar{\pi} * \bar{\mu} : M(A) * M(\widehat{S}) \to M(B)$ mit $(\bar{\pi} * \bar{\mu}) \circ \tau_1 = \bar{\pi}$ und $(\bar{\pi} * \bar{\mu}) \circ \tau_2 = \bar{\mu}$. Wir benutzen hierbei Querstriche, um die Fortsetzungen der *-Homomorphismen auf die Multiplikator-Algebren zu verdeutlichen. Wir bezeichnen mit I die folgende Teilmenge von $M(A) * M(\widehat{S})$:

$$I := \{x \in M(A) * M(\widehat{S}) \mid \bar{\pi} * \bar{\mu}(x) = 0 \text{ für alle nichtentarteten kovarianten} \\ \text{Homomorphismen } (\pi, \mu) \text{ von } (A, \alpha)\,\}.$$

Offenbar ist I ein abgeschlossenes Ideal von $M(A) * M(\widehat{S})$. Es ist ein echtes Ideal, da nach Voraussetzung mindestens ein nichtentarteter kovarianter Homomorphismus existiert und deshalb $1 \notin I$ ist. Wir bezeichnen die Quotientenabbildung mit $q : M(A) * M(\widehat{S}) \to M(A) * M(\widehat{S})/I$ und den Quotienten mit D. Man erhält *-Homomorphismen

$$\varphi_A : A \subseteq M(A) \xrightarrow{\tau_1} M(A) * M(\widehat{S}) \xrightarrow{q} D \quad \text{und}$$
$$\varphi_{\widehat{S}} : \widehat{S} \subseteq M(\widehat{S}) \xrightarrow{\tau_2} M(A) * M(\widehat{S}) \xrightarrow{q} D,$$

die nichtentartet sind. Das Paar $(\varphi_A, \varphi_{\widehat{S}})$ ist im Sinne von Bemerkung 2.6 kovariant: Dazu müssen wir für $a \in A$ die Gleichung $Ad((\varphi_{\widehat{S}} \otimes id_S)(\mathfrak{u}))(\varphi_A(a) \otimes 1_S) = (\varphi_A \otimes id_S)(\alpha(a))$ zeigen. Nach Definition von φ_A und $\varphi_{\widehat{S}}$ ist diese Gleichung äquivalent dazu, daß die Differenz $m := Ad(\tau_2 \otimes id_S)(\mathfrak{u}))(\tau_1(a) \otimes 1_S) - (\tau_1 \otimes id_S)(\alpha(a))$ im Kern von $q \otimes id_S : M(M(A) * M(\widehat{S}) \otimes S) \to M(D \otimes S)$ liegt. Wir betrachten dazu einen nichtentarteten kovarianten Homomorphismus $(\pi, \mu) : (A, \widehat{S}) \to M(B)$. Dann ist wegen der Kovarianz von (π, μ) das Element $(\bar{\pi} * \bar{\mu} \otimes id_S)(m)$ gleich

$$\begin{aligned}
&[Ad(((\bar{\pi} * \bar{\mu})\tau_2 \otimes id_S)(\mathfrak{u}))(\bar{\pi} * \bar{\mu})\tau_1(a) \otimes 1_S)] - ((\bar{\pi} * \bar{\mu})\tau_1 \otimes id_S)(\alpha(a)) \\
&= Ad((\mu \otimes id_S)(\mathfrak{u}))(\pi(a) \otimes 1_S) - (\pi \otimes id_S)(\alpha(a)) = 0.
\end{aligned}$$

Für jedes beschränkte lineare Funktional f in S' (vgl. 1.0.2) gilt demnach

$$\bar{\pi} * \bar{\mu}((id \otimes f)(m)) = (id \otimes f)((\bar{\pi} * \bar{\mu} \otimes id_S)(m)) = 0.$$

Also ist $(id \otimes f)(m) \in I$, da die kovariante Darstellung (π, μ) beliebig war. Somit ist für jedes $f \in S'$ das Element $(id \otimes f)((q \otimes id_S)(m)) = q((id \otimes f)(m)) = 0$, weshalb nach einem Lemma über „Abschneiden“ mit linearen Funktionalen [**15**, Lemma A.30] bereits $(q \otimes id_S)(m) = 0$ folgt. Damit ist die Kovarianz von $(\varphi_A, \varphi_{\widehat{S}})$ bewiesen.

Wir werden zeigen, daß $C := C^*(\varphi_A, \varphi_{\widehat{S}}) \subseteq D$, vgl. Lemma 2.8, zusammen mit den Morphismen φ_A und $\varphi_{\widehat{S}}$ ein verschränktes Produkt $(C, \varphi_A, \varphi_{\widehat{S}})$ von (A, α) ist: Wegen $C = \overline{\varphi_A(A) \cdot \varphi_{\widehat{S}}(\widehat{S})} = \overline{\varphi_{\widehat{S}}(\widehat{S}) \cdot \varphi_A(A)}$ kann man φ_A bzw. $\varphi_{\widehat{S}}$ als nichtentartete *-Morphismen von A bzw. $\widehat{S}$ nach $M(C)$ auffassen. Der kovariante Homomorphismus $(\varphi_A, \varphi_{\widehat{S}})$ ist universell, denn für jeden nichtentarteten kovarianten Homomorphismus $(\pi, \mu) : (A, \widehat{S}) \to M(B)$ faktorisiert $\bar{\pi} * \bar{\mu}$ nach Konstruktion über D, d.h. es gibt einen Morphismus $\psi : D \to M(B)$ mit $\psi \circ q = \bar{\pi} * \bar{\mu}$. Die Einschränkung auf C ergibt einen unitalen *-Homomorphismus $\pi \times \mu := \psi |_C : C \to M(D)$ und ist wegen $\overline{\pi \times \mu(C) \cdot B} = \overline{\pi(A) \cdot \mu(C) \cdot B} = B$ nichtentartet (denn π und μ sind nichtentartet). Es folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\pi \times \mu) \circ \varphi_A &= \psi \circ q \circ \tau_1 \circ \tau_A = (\bar{\pi} * \bar{\mu}) \circ \tau_1 \circ \tau_A = \pi \quad \text{und} \\
(\pi \times \mu) \circ \varphi_{\widehat{S}} &= \psi \circ q \circ \tau_2 \circ \tau_{\widehat{S}} = (\bar{\pi} * \bar{\mu}) \circ \tau_2 \circ \tau_{\widehat{S}} = \mu
\end{aligned}$$

mit der universellen Eigenschaft des freien Produkts (hierbei bezeichnen τ_A und $\tau_{\widehat{S}}$ die Einbettungen in die Multiplikator-Algebren). Also ist $(C, \varphi_A, \varphi_{\widehat{S}})$ ein verschränktes Produkt von (A, α). □

Die Bedingung des Satzes ist sehr schwach, denn durch Induzieren eines kovarianten Homomorphismus der Hopf-C^*-Algebra (S, Δ) selbst (vgl. 1.4.10) erhält jede C^*-Algebra mit S-Kowirkung (A, α) einen kovarianten Homomorphismus:

2.12 Lemma. *Es sei (A, α) eine Algebren-S-Kowirkung. Ist $(\pi, u) : (S, \widehat{S}) \to M(B)$ ein kovarianter Homomorphismus nach B, so ist das von (π, u) induzierte Paar*

$$((id_A \otimes \pi)\alpha, 1_A \otimes u) : (A, \widehat{S}) \longrightarrow M(A \otimes B)$$

ein kovarianter Homomorphismus von (A, α) auf $A \otimes B$.

Die Kovarianz-Bedingung von $(id_A \otimes \pi)\alpha, 1_A \otimes u)$ folgt sofort aus derjenigen von (π, u).

2.13 Korollar. *Es sei (S, Δ) eine stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra (vgl. 1.2.5), die einen kovarianten Homomorphismus $(\pi, \mu) : (S, \widehat{S}) \to M(B)$ besitzt. Dann existiert das verschränkte Produkt $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, j_\alpha, j^\alpha_{\widehat{S}})$ für jede Algebren-S-Kowirkung (A, α).*

§ 2.2 Rechts-triviale Kowirkungen

Es sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra wie in 1.2.2. Um die Konstruktionen aus Abschnitt § 2.1 auf Rechts-Hilbert-Bimoduln zu verallgemeinern ist es zweckmäßig, den Begriff der unitären Kodarstellung in 1.2.3 umzuformulieren: Wir erhalten eine größere Flexibilität.

2.14 Definition. Es sei Z_R ein Rechts-Hilbertmodul. Eine *rechts-triviale S-Kowirkung* auf Z_R ist ein nichtentarteter Morphimus von Hilbertmoduln $\delta_Z^\bullet : Z_R \to M(Z_R \otimes S)$ mit der trivialen Kowirkung δ_R^{tr} auf R als rechter Koeffizienten-Abbildung (vgl. 1.4.10), so daß $\delta_Z^\bullet$ koassoziativ ist, vgl. 1.4.2.

2.15 Beispiel. Triviale S-Kowirkungen $\delta_Z^{tr} : Z_R \to M(Z \otimes S)$ (vgl. 1.4.10) sind rechts-trivial. Allgemeiner sei $u \in \mathcal{U}M(\mathcal{K}(Z) \otimes S)$ eine unitäre Kodarstellung von S auf $\mathcal{K}(Z)$. Dann ist $\delta_Z^u := u \circ \delta_Z^{tr} : Z_R \to M(Z \otimes S)$ eine rechts-triviale S-Kowirkung, denn es gilt

$$(\delta_Z^u \otimes id_S)\delta_Z^u = u_{12} \cdot u_{13} \cdot (\delta_Z^{tr} \otimes id_S)\delta_Z^{tr} = (id \otimes \Delta)(u) \cdot (id \otimes \Delta)\delta_Z^{tr} = (id \otimes \Delta)\delta_Z^u.$$

2.16 Lemma. *Mit den Bezeichnungen wie in Definition 2.14 und Beispiel 2.15 ist jede rechts-triviale S-Kowirkung $\delta_Z^\bullet : Z \to M(Z \otimes S)$ von der Form $\delta_Z^\bullet = \delta_Z^u$ mit $u := Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr})(1_{\mathcal{K}(Z)})$.*

Beweis. Die Adjunktion $Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr}) : \mathcal{K}_R(Z) \to M(\mathcal{K}_R(Z) \otimes S)$ (vgl. 1.1.12) ist mit den Konventionen aus 1.4.3 ein nichtentarteter Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln und das Element $u := Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr})(1_{\mathcal{K}(Z)})$ wegen 1.1.16 eine Unitäre in $\mathcal{U}M(\mathcal{K}(Z) \otimes S)$. Für ein z in Z folgt die Gleichung $\delta_Z^\bullet(z) = \delta_Z^\bullet(1_{\mathcal{K}(Z)} \cdot z) = Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr})(1_{\mathcal{K}(Z)}) \cdot \delta_Z^{tr}(z) = (u \cdot \delta_Z^{tr})(z)$, wobei wir in der zweiten Identität die Definition von $Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr})$ in 1.1.12 und strikte Stetigkeit verwendet haben. Wegen 1.4.3 ist $Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr})$ koassoziativ (vgl. 1.4.2) und u daher eine unitäre Kodarstellung:

$$\begin{aligned}(id_{\mathcal{K}(X)} \otimes \Delta)(u) &= (id \otimes \Delta)(Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr})(1)) = (Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr}) \otimes id)(Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr})(1)) \\ &= (Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr}) \otimes id_S)(u) \\ &= (Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr}) \otimes id_S)(1_{\mathcal{K}(Z)} \otimes 1_S) \cdot (Ad(\delta_Z^{tr}) \otimes id_S)(u) \\ &= u_{12} \cdot u_{13} \in \mathcal{U}M(\mathcal{K}(Z) \otimes S \otimes S).\end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt dabei mit der offensichtlichen Beziehung $Ad(\delta_Z^{tr}) = \delta_{\mathcal{K}(Z)}^{tr}$. □

2.17 Bemerkung.
1. Mit den obigen Notationen definieren die Zuordnungen $\delta_Z^\bullet \mapsto u := Ad(\delta_Z^\bullet, \delta_Z^{tr})(1)$ und $u \mapsto \delta_Z^u$ eine Korrespondenz zwischen rechts-trivialen S-Kowirkungen auf Z_R und unitären Kodarstellungen von S auf $\mathcal{K}(Z)$. Wir sagen $\delta_Z^\bullet$ *gehöre zu* u und umgekehrt. Ist (S, Δ) zusätzlich dualisierbar (siehe 1.2.4), so bezeichnen wir $\delta_Z^\bullet$, u und $\mu : \widehat{S} \to M(\mathcal{K}(Z))$ (vgl. Bemerkung 2.6) als *einander zugehörig* und betrachten sie als gleichwertige Beschreibungen.

2. Es sei zusätzlich $\iota_L : L \to M(\mathcal{K}(Z))$ eine Links-Wirkung auf Z_R und $_LZ_R$ somit ein Rechts-Hilbert-L-R-Bimodul. Die C^*-Algebra L besitze eine S-Kowirkung $\lambda : L \to M(L \otimes S)$. Dann ist $\delta_Z^\bullet$ genau dann zu einem Rechts-Hilbert-Bimodul-Morphismus mit linker Koeffizienten-Abbildung λ fortsetzbar, wenn das Paar $(\iota_L, u) : (L, \widehat{S}) \to M(\mathcal{K}(Z))$ kovariant ist, denn mit den Konventionen aus 1.4.3 ist die Verträglichkeit für die linke Koeffizienten-Abbildung nach 1.1.13 äquivalent zu $(\iota_L \otimes id_S)\lambda = Ad(\delta_Z^\bullet) \circ \iota_L = Ad(u)(\iota_L \otimes 1_S)$.

§ 2.3 Rechts-Hilbert-Bimodul-Kowirkungen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Theorie verschränkter Produkte auf Hilbert-Bimoduln und erhalten dieselben Resultate wie in [**47**]. Der hier vorgeführte Zugang entstand unabhängig von [**47**] und beruht wesentlich auf den Ergebnissen über Hilbert-Bimoduln in [**15**]. Für den gesamten Abschnitt sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, vgl. 1.2.2.

2.18 Definition. Es sei $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-Kowirkung (vgl. 1.4.2). Ein *kovarianter Homomorphismus* von X in einen Bimodul ${}_LZ_R$ ist ein Tripel $({}_\vartheta\Pi_\nu, u, v)$, bestehend aus einem nichtentarteten Homomorphismus von Hilbert-Bimoduln ${}_\vartheta\Pi_\nu : {}_AX_B \to M({}_LZ_R)$ und unitären S-Kodarstellungen $u \in \mathcal{U}M(L \otimes S)$ bzw. $v \in \mathcal{U}M(R \otimes S)$ auf L bzw. R, so daß die *Kovarianz-Gleichung* $Ad(u, v) \circ (\Pi \otimes 1_S) = (\Pi \otimes id_S)\xi$ von Rechts-Hilbert-Bimodul-Homomorphismen erfüllt ist.

2.19 Bemerkung.
1. Nach unserer Konvention 1.1.10 für die Identität von Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln gelten insbesondere auch die Koeffizienten-Gleichungen $Ad(u) \circ (\vartheta \otimes 1_S) = (\vartheta \otimes id_S)\alpha$ bzw. $Ad(v) \circ (\nu \otimes 1_S) = (\nu \otimes id_S)\beta$. Die Paare $(\vartheta, u) : (A, \widehat{S}) \to M(L)$ bzw. $(\nu, v) : (B, \widehat{S}) \to M(R)$ sind also kovariante Homomorphismen im Sinne von Definition 2.1.

2. Tatsächlich ist die Definition kovarianter Homomorphismen für C^*-Algebren mit S-Kowirkung ein Spezialfall der Definition 2.18, vgl. auch 1.5.1: Ein Morphismus von Hilbert-Bimoduln mit einer S-äquivarianten C^*-Algebra (B, β) als Quelle ist (bis auf eine unitäre Äquivalenz) bereits ein Morphismus von C^*-Algebren (vgl. 1.1.16). Also stimmen kovariante Homomorphismen von (B, β) , aufgefaßt als Hilbertmodul, mit denen als C^*-Algebra überein.

3. Sind $\delta_L^\bullet$ bzw. $\delta_R^\bullet$ die zu u bzw. v gehörigen rechts-trivialen S-Kowirkungen (vgl. 2.17), so ist die Kovarianz-Gleichung äquivalent zu $Ad(\delta_L^\bullet, \delta_R^\bullet) \circ \Pi = (\Pi \otimes id_S)\xi$, wobei wir $\delta_L^\bullet$ auf kanonische Weise als rechts-triviale S-Kowirkung auf Z auffassen.

2.20 Notation. Wie bei C^*-Algebren (vgl. 2.5) verwenden wir die Notation $({}_\vartheta\Pi_\nu, u, v) : (({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta), \widehat{S}) \to M({}_LZ_R)$ für kovariante Homomorphismen von (X, ξ), selbst wenn das universelle Dual $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$ nicht existiert. Gelegentlich kürzen wir zu $(\Pi, u, v) : (X, \widehat{S}) \to M(Z)$ ab, falls sich die Koeffizienten-Daten und Kowirkungen von selbst verstehen.

2.21 Definition. Es sei $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-Kowirkung auf einem Rechts-Hilbert-Bimodul. Ein *verschränktes Produkt* von $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ ist ein Tupel $({}_CY_D, {}_{j_\alpha}j_{\xi_{j_\beta}}, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$, bestehend aus einem kovarianten Homomorphismus $({}_{j_\alpha}j_{\xi_{j_\beta}}, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta) : ({}_AX_B, \widehat{S}) \longrightarrow M({}_CY_D)$ in einen Rechts-Hilbert-Bimodul ${}_CY_D$, welcher die *universelle Eigenschaft* bzgl. kovarianter Homomorphismen von (X, ξ) besitzt. Damit ist gemeint, daß es zu jedem kovarianten Homomorphismus $({}_\vartheta\Pi_\nu, u, v) : (X, \widehat{S}) \to M({}_LZ_R)$ genau einen nichtentarteten Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln

$$ {}_{\vartheta\times u}[\Pi \times (u, v)]_{\nu\times v} : {}_CY_D \longrightarrow M({}_LZ_R)$$

mit $[\Pi \times (u, v)] \circ j_\xi = \Pi$ und $([\vartheta \times u] \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha) = u$ bzw. $([\nu \times v] \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\beta) = v$ gibt.

2.22 Bemerkung. Wir benutzen dieselben Bezeichnungen wie in Definition 2.21.

1. Die Notation des verschränkten Produkts deutet an, daß die Koeffizienten-Algebren $(C, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ und $(D, j_\beta, \mathfrak{u}_\beta)$ automatisch verschränkte Produkte der C^*-Algebren-Kowirkungen (A, α) und (B, β) im Sinne von Definition 2.2 sind. Wir werden das in einer späteren Konstruktion (vgl. Satz 2.31) sehen.

2. Wie bei C^*-Algebren (Bemerkung 2.3) kodiert das verschränkte Produkt ${}_CY_D$ genau die kovarianten Homomorphismen von (X, ξ). Denn ist ${}_\psi\Phi_\varphi : {}_CY_D \to M({}_LZ_R)$ ein nichtentarteter Morphismus, so ist mit ${}^\psi\mathfrak{u}_\alpha := (\psi \otimes id)(\mathfrak{u}_\alpha)$ und ${}^\varphi\mathfrak{u}_\beta := (\varphi \otimes id)(\mathfrak{u}_\beta)$ das Tripel $(\Phi \circ j_\xi, {}^\psi\mathfrak{u}_\alpha, {}^\varphi\mathfrak{u}_\beta)$ kovariant und $\Phi = (\Phi \circ j_\xi) \times ({}^\psi\mathfrak{u}_\alpha, {}^\varphi\mathfrak{u}_\beta)$.

3. Ist (S, Δ) dualisierbar (vgl. 1.2.4) und sind μ_u bzw. μ_v die zu u bzw. v gehörigen *-Morphismen (vgl. Bemerkung 2.6), so verwenden wir auch die Schreibweise $({}_\vartheta\Pi_\nu, \mu_u, \mu_v) : (X, \widehat{S}) \to M(Z)$ für kovariante Homomorphismen von (X, ξ) sowie $\Pi \times (\mu_u, \mu_v)$ für den zugehörigen Morphismus des verschränkten Produkts. In diesem Kontext übersetzen sich die Gleichungen der Definition 2.21 zu $\Pi \times (\mu_u, \mu_v) \circ j_\xi = \Pi$ und $\vartheta \times \mu_u \circ j^\alpha_{\widehat{S}} = \mu_u$ bzw. $\nu \times \mu_v \circ j^\beta_{\widehat{S}} = \nu$ (vgl. Bemerkung 2.6).

Wie bei C^*-Algebren gibt es bis auf Isomorphie höchstens ein verschränktes Produkt. Das folgt genau wie Lemma 2.4 aus den jeweiligen universellen Eigenschaften und der Charakterisierung 1.1.20 für Isomorphismen.

2.23 Lemma. *Es seien $({}_CY_D, {}_{j_\alpha}j_{\xi_{j_\beta}}, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ und $({}_{C'}Y'_{D'}, {}_{i_\alpha}i_{\xi_{i_\beta}}, \mathfrak{v}_\alpha, \mathfrak{v}_\beta)$ verschränkte Produkte von $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$. Dann gibt es genau einen Isomorphismus ${}_\psi\Phi_\varphi : {}_CY_D \to {}_{C'}Y'_{D'}$ von Rechts-Hilbert-Bimoduln mit $\Phi \circ j_\xi = i_X$ und $(\psi \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha) = \mathfrak{v}_\alpha$ bzw. $(\varphi \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\beta) = \mathfrak{v}_\beta$.*

2.24 Beispiel. Ist G eine lokalkompakte Gruppe und X ein Hilbertmodul mit G-Wirkung (vgl. Beispiel 1.4.10), so entsteht das verschränkte Produkt eines Hilbert-Bimoduls X mit G-Wirkung durch Vervollständigung des Prä-Hilbertmoduls $\mathcal{C}_c(G, X)$ mit diversen Strukturabbildungen und Einbettung durch konstante Funktionen (vgl. [**30**, Definition 3.8] oder [**15**, Proposition 3.2]).

Das folgende Ergebnis verallgemeinert Lemma 2.8 auf Hilbert-Bimoduln:

2.25 Lemma. *Es sei (S, Δ) eine stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra, vgl. 1.2.5, und $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-Kowirkung. Unter Verwendung der Notation 1.0.1 gilt:*

1. *Ist $({}_\vartheta\Pi_\nu, u, v) : ({}_AX_B, \widehat{S}) \to M({}_LZ_R)$ ein kovarianter Homomorphismus und bezeichnen μ_L bzw. μ_R die zu u bzw. v gehörigen *-Morphismen (vgl. 2.6), so stimmen die Normabschlüsse $\overline{\mu_L(\widehat{S})\Pi(X)} = \overline{\Pi(X)\mu_R(\widehat{S})}$ als Teilmengen von $M(Z)$ überein.*

2. *Ist $({}_CY_D, j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ ein verschränktes Produkt von (X, ξ), so gilt $Y = \overline{\mu_C(\widehat{S})j_\xi(X)} = \overline{j_\xi(X)\mu_D(\widehat{S})}$, wobei μ_C bzw. μ_D die zu $\mathfrak{u}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{u}_\beta$ gehörigen *-Morphismen sind.*

Beweis. Wir erinnern an den S-invarianten Teilraum $\mathfrak{F} \subseteq S'$ aus 1.2.5. Für (1.) reicht es, $\mu_L(\widehat{s})\Pi(x) \in \overline{\Pi(X)\mu_R(\widehat{S})}$ und $\Pi(x)\mu_R(\widehat{s}) \in \overline{\mu_L(\widehat{S})\Pi(X)}$ für alle x in X und $\widehat{s}$ in $\widehat{S}$ zu zeigen. Es genügt, $\widehat{s}$ von der Form $\widehat{s} = (id \otimes f)(\mathfrak{u})$ oder $\widehat{s} = (id \otimes \check{f})(\mathfrak{u}^*)$ (vgl. 1.0.2) mit $f \in \mathfrak{F}$ anzunehmen, denn wegen $(id \otimes f)(\mathfrak{u})^* = (id \otimes \check{f})(\mathfrak{u}^*)$ ist mit den

Voraussetzungen an $\mathfrak{F} \subseteq S'$ auch $(id \otimes \check{\mathfrak{F}})(\mathfrak{u}^*)$ in $\widehat{S}$ dicht. Für $\widehat{s} = (id \otimes f)(\mathfrak{u})$ erhalten wir wegen $\mu_L(\widehat{s}) = (id \otimes f)((\mu_L \otimes id)(\mathfrak{u})) = (id \otimes f)(u)$:

$$\begin{aligned}\mu_L(\widehat{s})\Pi(x) &= (id \otimes f)(u) \cdot \Pi(x) = (id \otimes f)(u \cdot (\Pi(x) \otimes 1_S)) \\ &= (id \otimes f)((\Pi \otimes id_S)(\xi(x)) \cdot v).\end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt dabei aus der Kovarianz. Im folgenden deuten wir durch das Symbol $\sim$ an, daß ein Limesübergang stattfindet. Die Notation $(1_A \otimes s)\xi(x) \sim \sum_i x_i \otimes s_i$ weist etwa darauf hin, daß sich $(1_A \otimes s)\xi(x)$ als Norm-Grenzwert von Elementen der Form $\sum_i x_i \otimes s_i$, mit x_i in X und s_i in S, schreiben läßt. Wegen der S-Invarianz von $\mathfrak{F}$ kann man im letzten Term oben $f = f's$ schreiben und erhält

$$\begin{aligned}(id \otimes f')((\Pi \otimes id_S)((1_A \otimes s)\xi(x)) \cdot v) &\sim \sum_i (id \otimes f')((\Pi(x_i) \otimes s_i) \cdot v) \\ &= \sum_i \Pi(x_i)(id \otimes f's_i)(v) \\ &= \sum_i \Pi(x_i)\mu_R((id \otimes f's_i)(\mathfrak{u})) \in \overline{\Pi(X)\mu_R(\widehat{S})}\,,\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung die S-Invarianz von $\mathfrak{F}$ erneut eingeht. Aufgrund der Normstetigkeit aller beteiligten Abbildungen ist also $\mu_L(\widehat{s})\Pi(x)$ in $\overline{\Pi(X)\mu_R(\widehat{S})}$ enthalten. Auf die gleiche Art und Weise beweist man für $\widehat{s} = (id \otimes \check{f})(\mathfrak{u}^*)$ die Beziehung $\Pi(x)\mu_R(\widehat{s}) \in \overline{\mu_L(\widehat{S})\Pi(X)}$.

Für den zweiten Teil definiere $\widetilde{Y} := \overline{j_\xi(X)\mu_D(\widehat{S})} = \overline{\mu_C(\widehat{S})j_\xi(X)}$ und $\widetilde{C} := \overline{j_A(A)\mu_C(\widehat{S})}$ bzw. $\widetilde{D} := \overline{j_B(B)\mu_D(\widehat{S})}$. Dann sind $\widetilde{C}$ bzw. $\widetilde{D}$ nach dem ersten Teil C^*-Unteralgebren von $M(C)$ bzw. $M(D)$ und $\widetilde{Y}$ ein Unter-Hilbert-$\widetilde{C}$-$\widetilde{D}$-Bimodul von $M({}_CY_D)$. Die Inklusion ${}_i\tau_j := ({}_{\widetilde{C}}\widetilde{Y}_{\widetilde{D}} \subseteq M({}_CY_D))$ ist nichtentartet und j_ξ nimmt offenbar Werte in $M(\widetilde{Y}) \subseteq M(Y)$ an (vgl. 1.1.21). Genauso liegen $\mathfrak{u}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{u}_\beta$ in $\mathcal{U}M(\widetilde{C} \otimes S) \subseteq M(C \otimes S)$ bzw. $\mathcal{U}M(\widetilde{D} \otimes S) \subseteq M(D \otimes S)$. Das bedeutet, es gibt „Faktorisierungen" $j_\xi = \tau \circ \widetilde{\jmath}_\xi$, $u_\alpha = (i \otimes id_S)(\widetilde{\mathfrak{u}}_\alpha)$ und $\mathfrak{u}_\beta = (j \otimes id_S)(\widetilde{\mathfrak{u}}_\beta)$, wobei

$$({}_{\widetilde{\jmath}_\alpha}(\widetilde{\jmath}_\xi)_{\widetilde{\jmath}_\beta}, \widetilde{\mathfrak{u}}_\alpha, \widetilde{\mathfrak{u}}_\beta) : ({}_AX_B, \widehat{S}) \longrightarrow M({}_{\widetilde{C}}\widetilde{Y}_{\widetilde{D}})$$

ein kovarianter Homomorphismus ist. Nach der universellen Eigenschaft existiert ein nichtentarteter Morphimus

$${}_{\widetilde{\jmath}_\alpha \times \widetilde{u}_\alpha}[\widetilde{\jmath}_\xi \times (\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{u}_\beta)]_{\widetilde{\jmath}_\beta \times \widetilde{u}_\beta} : {}_CY_D \longrightarrow M({}_{\widetilde{C}}\widetilde{Y}_{\widetilde{D}})$$

mit $[\widetilde{\jmath}_\xi \times (\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{u}_\beta)] \circ j_\xi = \widetilde{\jmath}_\xi$ und $([\widetilde{\jmath}_\alpha \times \widetilde{u}_\alpha] \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha) = \widetilde{u}_\alpha$ bzw. $([\widetilde{\jmath}_\beta \times \widetilde{u}_\beta] \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\beta) = \widetilde{u}_\beta$. Wendet man τ auf diese Gleichungen an, so erkennt man aufgrund der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft, daß die Komposition $\tau \circ [\widetilde{\jmath}_\xi \times (\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{u}_\beta)]$ gleich der Inklusion $Y \subseteq M(Y)$ ist. Trivialerweise ist die umgekehrte Komposition $[\widetilde{\jmath}_\xi \times (\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{u}_\beta)] \circ \tau$ gleich der Inklusion $\widetilde{Y} \subseteq M(\widetilde{Y})$. Also sind $[\widetilde{\jmath}_\xi \times (\widetilde{u}_\alpha, \widetilde{u}_\beta)]$ und τ nach 1.1.20 zueinander inverse Isomorphismen ${}_CY_D \cong {}_{\widetilde{C}}\widetilde{Y}_{\widetilde{D}}$ von Rechts-Hilbert-Bimoduln. Insbesondere ist τ surjektiv (im Sinne von 1.1.10) und ${}_{\widetilde{C}}\widetilde{Y}_{\widetilde{D}}$ sogar gleich ${}_CY_D$. □

Es gibt eine nützliche Charakterisierung von verschränkten Produkten von Hilbert-Bimoduln, indem man verschränkte Produkte von C^*-Algebren (Definition 2.2) benutzt.

2.26 Proposition. *Es seien* $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ *eine S-Kowirkung,* $(C, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ *bzw.* $(D, j_\beta, \mathfrak{u}_\beta)$ *verschränkte Produkte von* (A, α) *bzw.* (B, β) *sowie* $\Phi : {}_AX_B \to M({}_DY_C)$ *ein nichtentarteter Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln mit Koeffizienten-Abbildungen* j_α *bzw.* j_β*. Ist das Tripel* $({}_{j_\alpha}\Phi_{j_\beta}, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta) : ({}_AX_B, \widehat{S}) \to M({}_CY_D)$ *ein kovarianter Homomorphismus von* (X, ξ)*, dann ist* $(Y, \Phi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ *bereits ein verschränktes Produkt von* (X, ξ)*.*

Beweis. Wir müssen die universelle Eigenschaft von $({}_CY_D, \Phi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ zeigen. Sei dazu $({}_\vartheta\Pi_\nu, u, v) : ({}_AX_B, \widehat{S}) \to M({}_LZ_R)$ ein kovarianter Homomorphismus. Es gibt nach Voraussetzung eindeutig bestimmte *-Homomorphismen $\vartheta \times u : C \to M(L)$ und $\nu \times v : D \to M(R)$ mit den Eigenschaften $\vartheta \times u \circ j_\alpha = \vartheta$ und $(\vartheta \times u \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha) = v$ bzw. $\nu \times v \circ j_\beta = \nu$ und $(\nu \times v \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\beta) = v$. Wir definieren einen nichtentarteten Morphismus von Rechts-Hilbertmoduln

$$\Psi_{\nu\times v} : Y_D \cong X \otimes_B D \overset{\Pi\otimes_B(\nu\times v)}{\longrightarrow} M(Z \otimes_R R) \cong M(Z_R),$$

wobei wir die Identifikation $Y_D \cong X \otimes_B D$ aus 1.1.9 verwenden. Er ist wohldefiniert, da Π_ν und ${}_\nu(\nu \times v)$ verträglich sind. Auf Elementen x in X und d in D bedeutet dies $\Psi(\Phi(x)d) = \Pi(x) \cdot (\nu \times v(d))$. Offenbar gilt dann $\Psi \circ \Phi = \Pi$, und Ψ ist dadurch eindeutig bestimmt. Wir müssen also nur noch die Verträglichkeit von Ψ mit der linken Koeffizientenabbildung $\vartheta \times u$ zeigen. Nach 1.1.13 ist dies gleichwertig zu der Identität

$$Ad(\Psi) \circ \iota_C = \iota_L \circ (\vartheta \times u) : C \longrightarrow M(\mathcal{K}_R(Z)) = \mathcal{L}_R(Z)$$

von *-Homomorphismen (mit ι notieren wir jeweils die Wirkungen). Dazu benutzen wir die universelle Eigenschaft von $(C, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$: Erstens gilt mit 1.1.13 und 1.1.14

$$\begin{aligned} Ad(\Psi) \circ \iota_C \circ j_\alpha &= Ad(\Psi) \circ Ad(\Phi) \circ \iota_A = Ad(\Psi \circ \Phi) \circ \iota_A = Ad(\Pi) \circ \iota_A \\ &= \iota_L \circ \vartheta = \iota_L \circ (\vartheta \times V_L) \circ j_\alpha. \end{aligned}$$

Zweitens erhält man für x in X, d in D und s in S (unter Verwendung der kanonischen Identifizierungen aus 1.4.3) die Beziehung

$$\begin{aligned} &(Ad(\Psi) \circ \iota_C \otimes id_S)(u_\alpha)[(\Psi \otimes id_S)(\Phi(x)d \otimes s)] \\ &\qquad = (\Psi \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha \cdot (\Phi(x)d \otimes s)) \\ &\qquad \overset{(1)}{=} (\Psi \otimes id_S)((\Phi \otimes id_S)(\xi(x)) \cdot \mathfrak{u}_\beta \cdot (d \otimes s)) \\ &\qquad \overset{(2)}{=} (\Pi \otimes id_S)(\xi(x)) \cdot ((\nu \times v \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\beta \cdot (d \otimes s))) \\ &\qquad = (\Pi \otimes id_S)(\xi(x)) \cdot ((\nu \times v \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\beta) \cdot (\nu \times v(d) \otimes s)) \\ &\qquad = (\Pi \otimes id_S)(\xi(x)) \cdot v \cdot (\nu \times v(d) \otimes s) \\ &\qquad \overset{(3)}{=} u \cdot (\Pi(x) \otimes 1_S) \cdot (\nu \times v(d) \otimes s) \\ &\overset{(4)}{=} (\iota_L \circ (\vartheta \times u) \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha)[(\Psi \otimes id_S)(\Phi(x)d \otimes s)]. \end{aligned}$$

Hierbei wurden in (1) sowie (3) Kovarianz-Gleichungen (vgl. Definition 2.18) ausgenutzt und in (2) sowie (4) die Eigenschaft $\Psi\Phi = \Pi$ verwendet. Da Φ nichtentartet ist und $\Phi(X)D$ in Y dicht liegt, gilt aus Stetigkeitsgründen $(Ad(\Phi) \circ \iota_C \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha) = (\iota_L \circ (\vartheta \times u) \otimes id_S)(\mathfrak{u}_\alpha)$. Folglich sind nach der universellen Eigenschaft von $(C, j_A, \mathfrak{u}_\alpha)$ die Abbildungen $Ad(\Psi) \circ \iota_C$ und $\iota_L \circ (\vartheta \times u)$ identisch. □

Die folgenden Ergebnisse benötigen wir für den Nachweis der Existenz verschränkter Produkte (unter denselben schwachen Voraussetzungen wie bei C^*-Algebren). Für Tensorprodukte von Hilbert-Bimodul-Homomorphismen verweisen wir auf [**15**, Proposition 1.34] und [**15**, Proposition 1.38]. Es gilt das folgende Lemma ([**15**, Lemma 2.12]):

2.27 Lemma. *Sind ${}_AX_B$ und ${}_BY_C$ Rechts-Hilbert-Bimoduln und D eine C^*-Algebra, so existiert ein Isomorphismus von Hilbert-Bimoduln*

$$\Theta : (X \otimes D) \otimes_{B\otimes D} (Y \otimes D) \xrightarrow{\cong} (X \otimes_B Y) \otimes D$$

mit $\Theta((x \otimes d) \otimes (y \otimes d')) = (x \otimes y) \otimes dd'$. □

Mithilfe von Θ erhält man eine Möglichkeit, S-Kowirkungen auf Hilbert-Bimoduln zu tensorieren. Wir brauchen im Hinblick auf rechts-triviale Kowirkungen eine etwas allgemeinere Aussage als in [**15**, Propositon 2.13], die aber genauso bewiesen wird.

2.28 Proposition. *Es sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-Kowirkung und ${}_BY_C$ ein Rechts-Hilbert-Bimodul sowie ${}_\beta\zeta_\gamma : {}_BY_C \to M(Y \otimes S)$ ein nichtentarteter koassoziativer (vgl. 1.4.2) Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln. Dann ist*

$$\xi \sharp_B \zeta := \Theta \circ (\xi \otimes_B \zeta) : {}_AX \otimes_B Y_C \to M({}_AX \otimes_B Y_C \otimes S)$$

ebenfalls ein koassoziativer Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln mit Koeffizienten-Abbildungen α und γ. Insbesonder erhalten wir die Spezialfälle:

1. *Ist ${}_\beta\zeta_\gamma$ zudem eine (nichtentartete) S-Kowirkung (vgl. 1.4.2), so auch $\xi \sharp_B \zeta$.*
2. *Ist $(\zeta, \gamma) = (\delta_Y^\bullet, \delta^{tr})$ eine rechts-triviale Kowirkung auf Y_C (vgl. Definition 2.14), so ist auch $\xi \sharp_B \delta_Y^\bullet$ rechts-trivial.*

Beweis. Der allgemeine Teil wird wie in [**15**, Prop. 2.13] bewiesen. Zum Beweis der dort mit (3) bezeichneten Gleichung

$$(\Theta \otimes id) \circ \Theta \circ ((id \otimes \Delta) \otimes_{B\otimes S} (id \otimes \Delta)) \circ (\xi \otimes_B \zeta) = (id \otimes \Delta) \circ \Theta \circ (\xi \otimes_B \zeta)$$

schreibt man für $s, s' \in S$ die Elemente $\Delta(s)$ bzw. $\Delta(s')$ als strikte Limiten $\Delta(s) \sim_{str} \sum_i s_i \otimes t_i$ und $\Delta(s') \sim_{str} \sum_j s'_j \otimes t'_j$ in $M(S \otimes S)$. Dann folgt die Behauptung genauso wie in [**15**, Proposition 2.13] aus der strikten Stetigkeit aller beteiligten Abbildungen. Der zweite Spezialfall folgt direkt aus dem allgemeinen Teil, während der erste einfach der Rest der Aussage in [**15**, Proposition 2.13] ist. □

Das folgende Lemma ist der Schlüssel zur Konstruktion verschränkter Produkte von Rechts-Hilbert-Bimodul-Kowirkungen $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, auf dem natürlichen Kandidaten $X \otimes_B (B \rtimes_\beta \widehat{S})$ für das verschränkte Produkt als Rechts-$(B \rtimes_\beta \widehat{S})$-Hilbertmodul eine verträgliche Wirkung von $A \rtimes_\alpha \widehat{S}$ zu finden. Dafür braucht man eine geeignete rechts-triviale Kowirkung, die bei Gruppen-Wirkungen der diagonalen Wirkung auf $X \otimes_B (B \rtimes_\beta \widehat{S})$ entspricht, vgl. Beispiel 2.30.

2.29 Lemma. *Es sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-Kowirkung (vgl. 1.4.2) und $\iota_A : A \to \mathcal{L}_B(X)$ die A-Wirkung auf X_B. Es existiere das verschränkte Produkt $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, \mathfrak{u}_\alpha)$ von (A, α). Ist $(\nu, v) : (B, \widehat{S}) \to M(R)$ ein nichtentarteter kovarianter *-Morphismus (vgl. Definition 2.1) und $\delta_R^\bullet$ die zu v gehörige rechts-triviale Kowirkung (vgl. Bemerkung 2.19), so gilt:*

1. *Aus der Kovarianz-Bedingung für* (ν, v) *folgt die Existenz der rechts-trivialen Kowirkung* $\xi \sharp_B \delta_R^\bullet : X \otimes_B R \to M((X \otimes_B R) \otimes S)$ *auf* $X \otimes_B R$.

2. *Ist* $\xi \sharp_B v$ *die zu* $\xi \sharp_B \delta_R^\bullet$ *gehörige unitäre Kodarstellung, so ist* $(\iota_A \otimes 1_R, \xi \sharp_B v)$ *kovariant. Deshlb kann man einen nichtentarteten* **-Homomorphismus*

$$\iota_{A \rtimes \widehat{S}} := (\iota_A \otimes 1_R) \times (\xi \sharp_B v) : A \rtimes \widehat{S} \longrightarrow M(\mathcal{K}(X \otimes_B R))$$

definieren, so daß ${}_{A \rtimes \widehat{S}}(X \otimes_B R)_R$ *zu einem Rechts-Hilbert-Bimodul wird.*

3. *Wir definieren die Abbildung* $\Phi : X \to M(X \otimes_B R)$ *durch* $\Phi(x)(r) := x \otimes_B r$ *für* x *in* X *und* r *in* R. *Dann ist* $({}_{j_A}\Phi_\nu, \mathfrak{u}_\alpha, v) : ({}_A X_B, \widehat{S}) \to M({}_{A \rtimes \widehat{S}}(X \otimes_B R)_R)$ *ein nichtentarteter kovarianter Homomorphismus von* $({}_A X_B, {}_\alpha\xi_\beta)$.

Beweis. Für die erste Behauptung muß man die Verträglichkeit von β und $\delta_R^\bullet$ zeigen. Diese ist aber genau durch die Kovarianz-Bedingung $Ad(\delta_R^\bullet) \circ \nu = (\nu \otimes id_S) \circ \beta$ gegeben (vgl. die Bemerkungen 2.17 und 2.19), denn B bzw. $B \otimes S$ wirken auf R bzw. $R \otimes S$ durch ν bzw. $\nu \otimes id_S$. Also existiert $\xi \sharp_B \delta_R^\bullet$ nach Proposition 2.28.

Der zweite Teil folgt mit $x \in X$, $a \in A$ und $r \in R$ aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
[Ad(\xi \sharp_B \delta_R^\bullet)(\iota_A(a) \otimes_B 1_R)](\xi \sharp_B \delta_R^\bullet(x \otimes r)) &= \xi \sharp_B \delta_R^\bullet(ax \otimes r) = \Theta(\xi(ax) \otimes_{B \otimes S} \delta_R^\bullet(r)) \\
&= \Theta(\alpha(a)\xi(x) \otimes_{R \otimes S} \delta_R^\bullet(r)) \\
&\overset{*}{=} ((\iota_A \otimes 1_R) \otimes id_S)(\alpha(a)) \cdot \Theta(\xi(x) \otimes_{R \otimes S} \delta_R^\bullet(r)) \\
&= ((\iota_A \otimes 1_R) \otimes id_S)(\alpha(a)) \cdot (\xi \sharp_B \delta_R^\bullet(x \otimes r)).
\end{aligned}$$

Die mit $(*)$ gekennzeichnete Identität ergibt sich aus folgender Überlegung: Für Elemente s_1, s_2, s_3 in S ist

$$\begin{aligned}
\Theta \circ [(\iota_A(a) \otimes s_1) \otimes_{R \otimes S} (id_R \otimes id_S)]&((x \otimes s_2) \otimes (r \otimes s_3)) \\
&= \Theta((ax \otimes s_1 s_2) \otimes (r \otimes s_3)) \\
&= (ax \otimes r) \otimes s_1 s_2 s_3 \\
= [((\iota_A \otimes 1_R) \otimes id_S)(a \otimes s_1)] &\circ \Theta((x \otimes s_2) \otimes (r \otimes s_3)),
\end{aligned}$$

woraus $[((\iota_A \otimes 1_R) \otimes id_S)(a \otimes s_1)] \circ \Theta = \Theta \circ [(\iota_A(a) \otimes s_1) \otimes_{R \otimes S} (id_R \otimes id_S)]$ für alle $a \in A$ und $s_1 \in S$ folgt. Wegen der Normstetigkeit und der striktem Stetigkeit von ι_A ist diese Gleichung für alle Elemente in $M(A \otimes S)$ gültig, insbesondere auch für $\alpha(a)$.

Wir kommen zum Beweis des dritten Teils. Offensichtlich ist $\Phi(x) \in M(X \otimes_B R)$ (denn $\Phi(x)$ hat ein Adjungiertes $\Phi(x)^*(x' \otimes_B r) = \nu(\langle x, x' \rangle_B)(r)$) und die Abbildung Φ ist j_A-ν-verträglich:

$$\Phi(axb)(r) = axb \otimes_B r = (\iota_A \otimes_B 1_R)(a)(x \otimes_B \nu(b)(r)) = \iota_{A \rtimes \widehat{S}}(j_A(a))(\Phi(x)(\nu(b)r)).$$

Nach Definition von Φ ist außerdem $\Phi(x)^*\Phi(x') = \Phi(x)^*(x \otimes_B 1_R) = \nu(\langle x, x' \rangle_B)$ und folglich ${}_{j_A}\Phi_\nu : {}_A X_B \to M({}_{A \rtimes \widehat{S}}(X \otimes_B R)_R)$ ein nichtentarteter Hilbert-Bimodul-Homomorphismus. Es bleibt nur noch die Kovarianz-Identität

$$Ad(\delta_\alpha^\bullet, \delta_R^\bullet)(\Phi(x)) = (\Phi \otimes id_S)(\xi(x))$$

zu zeigen, wobei $\delta_\alpha^\bullet$ die zu $\mathfrak{u}_\alpha$ gehörige rechts-triviale Kowirkung ist (vgl. Bemerkung 2.19). Wir beobachten zunächst, daß nach Definition von $\iota_{A \rtimes \widehat{S}}$ die Gleichung $(\iota_{A \rtimes \widehat{S}} \otimes id) \circ \delta_\alpha^\bullet =$

$\xi \sharp_B \delta_R^\bullet \circ \iota_A$ gilt (dabei wird $\xi \sharp_B \delta_R^\bullet$ als rechts-triviale Kowirkung auf $\mathcal{K}(X \otimes_B R)$ aufgefaßt). Für $r, r' \in R$, $x \in X$ und $s \in S$ gilt deshalb die Identität

$$\begin{aligned} Ad(\delta_\alpha^\bullet, \delta_R^\bullet)(\Phi(x)) \cdot [\delta_R^\bullet(r)(r' \otimes s)] &= \delta_\alpha^\bullet(\Phi(x)r)(r' \otimes s) \\ &= \xi \sharp_B \delta_R^\bullet(x \otimes_B r)(r' \otimes s) \\ &= \Theta(\xi(x) \otimes_{B \otimes S} \delta_R^\bullet(r))(r' \otimes s) \\ &\overset{(*)}{=} (\Phi \otimes id_S)(\xi(x)) \cdot [\delta_R^\bullet(r)(r' \otimes s)], \end{aligned}$$

wobei die Gleichung $(*)$ aus

$$\Theta((x \otimes s_1) \otimes_{B \otimes S} (r \otimes s_2)) = (x \otimes_B r) \otimes s_1 s_2 = (\Phi \otimes id_S)(x \otimes s_1) \cdot (r \otimes s_2)$$

und strikter Stetigkeit folgt. Da Summen von Elementen der Form $\delta_R^\bullet(r)(r' \otimes s)$ dicht in $R \otimes S$ liegen, folgt die Behauptung. □

2.30 Beispiel. Für $S = \mathcal{C}_0(G)$ entspricht der rechts-trivialen Kowirkung $\xi \sharp_B \delta_D^\bullet$ der diagonalen G-Wirkung $t \cdot (x \otimes_B d) := (t \cdot x) \otimes_B (t \cdot d)$ auf dem Hilbertmodul $X \otimes_B D$, wobei $t \in G$, vgl. [**3**, S. 706].

Mit diesen Vorbereitungen ist es einfach, die Existenz des verschränkten Produktes für Hilbert-Bimoduln aus der Existenz verschränkter Produkte von C^*-Algebren abzuleiten:

2.31 Satz. *Es sei* $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ *eine Hilbert-Bimodul-S-Kowirkung, für welche die verschränkten Produkte* $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ *bzw.* $(B \rtimes_\beta \widehat{S}, j_\beta, \mathfrak{u}_\beta)$ *im Sinne der Definition 2.2 existieren. Dann gibt es eine Realisierung* $({}_{A \rtimes \widehat{S}}Y_{B \rtimes \widehat{S}}, j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ *des verschränkten Produkts von* (X, ξ) *mit* $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ *bzw.* $(B \rtimes_\beta \widehat{S}, j_\beta, \mathfrak{u}_\beta)$ *als Koeffizienten-Tripeln.*

Beweis. Wir betrachten den Hilbertmodul $Y_{B \rtimes \widehat{S}} := (X \otimes_B B \rtimes_\beta \widehat{S})$. Dieser trägt nach Lemma 2.29 eine $A \rtimes_\alpha \widehat{S}$-Wirkung

$$\iota_{A \rtimes \widehat{S}} := (\iota_A \otimes 1_{B \rtimes \widehat{S}}) \times (\xi \sharp_B \mathfrak{u}_\beta) : A \rtimes_\alpha \widehat{S} \longrightarrow M(\mathcal{K}_{B \rtimes \widehat{S}}(Y))$$

und wir bekommen den Hilbert-Bimodul ${}_{A \rtimes \widehat{S}}Y_{B \rtimes \widehat{S}}$. Nach dem dritten Teil des Lemmas 2.29 definiert für $x \in X$ und $d \in B \rtimes_\beta \widehat{S}$ die Abbildung

$$j_\xi : X \longrightarrow M(Y_{B \rtimes \widehat{S}}) \qquad j_\xi(x)(d) := x \otimes_B d$$

einen Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln, der mit den Koeffizienten-Abbildungen j_α und j_β verträglich ist. Proposition 2.26 beweist, daß $({}_{A \rtimes \widehat{S}}Y_{B \rtimes \widehat{S}}, j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ ein verschränktes Produkt von $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ ist. □

2.32 Korollar. *Es sei* (S, Δ) *eine stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra (vgl. 1.2.5), so daß es einen kovarianten Homomorphismus* $(\pi, u) : (S, \widehat{S}) \to M(R)$ *gibt. Dann existiert das verschränkte Produkt* $({}_CY_D, j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ *für jede S-Kowirkung* $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$. *Zudem sind die Koeffizienten-Tripel* $(C, j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ *bzw.* $(D, j_\beta, \mathfrak{u}_\beta)$ *automatisch verschränkte Produkte der Koeffizienten-Kowirkungen* (A, α) *bzw.* (B, β).

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz 2.31 zusammen mit Korollar 2.13. □

Hat man einen S-äquivarianten Hilbertmodul (X_B, ξ_β), so kann man die Theorie von kovarianten Homomorphismen und verschränkten Produkten auf den Bimodul-Fall zurückführen:

2.33 Bemerkung. Es sei (X_B, ξ_β) ein Rechts-Hilbertmodul mit einer S-Kowirkung. Diesen erweitern wir zu einem S-äquivarianten Hilbert-Bimodul $({}_{\mathcal{K}(X)}X_B, {}_{Ad(\xi)}\xi_\beta)$, vgl. 1.4.3. Wir bezeichnen mit $({}_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}}, j_\xi, \mathfrak{u}_{Ad(\xi)}, \mathfrak{u}_\beta)$ dessen verschränktes Produkt. Ein *kovarianter Homomorphismus* von (X_B, ξ_β) auf dem Hilbertmodul ist ein kovarianter Homomorphismus $({}_{Ad(\Pi)}\Pi_\nu, u, v) : (({}_{\mathcal{K}(X)}X_B, {}_{Ad(\xi)}\xi_\beta), \widehat{S}) \to M({}_{\mathcal{K}(Z)}Z_R)$ im Sinne von Definition 2.18. Es reicht, daß die Kovarianz-Gleichung $Ad(u,v) \circ (\Pi_\nu \otimes 1_S) = (\Pi_\nu \otimes id_S)\xi_\beta$ als Gleichung von Rechts-Hilbertmoduln erfüllt ist, $(Ad(\Pi), u) : (\mathcal{K}(X), \widehat{S}) \to M(\mathcal{K}(Z))$ ist dann automatisch kovariant. Wir definieren die unitäre Kodarstellung

$$\mathfrak{u}_\xi := (\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}} \otimes id_S)(\mathfrak{u}_{Ad(\xi)}) \in \mathcal{U}M(\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S}) \otimes S),$$

wobei $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}$ die Wirkung von $\mathcal{K}(X) \rtimes_{Ad(\xi)} \widehat{S}$ auf $X \rtimes_\xi \widehat{S}$ ist.

Die Definition in Bemerkung 2.33 ist selbstverständlich konsistent mit der Definition für Hilbert-Bimoduln:

2.34 Bemerkung. Mit den Voraussetzungen und Notationen der Bemerkung 2.33 sei $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ zusätzlich ein S-äquivarianter Hilbert-Bimodul. Es bezeichne ι_A die A-Wirkung auf X sowie $(A \rtimes_\alpha \widehat{S}, \mathfrak{u}_\alpha)$ das verschränkte Produkt von (A, α). Dann ist der Morphismus $(Ad(j_\xi) \circ \iota_A, \mathfrak{u}_\xi) : (A, \widehat{S}) \to M(\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S}))$ kovariant (vgl. Definition 2.2) und definiert daher eine nichtentartete Links-Wirkung $\iota_{A\rtimes\widehat{S}} := (Ad(j_\xi)\iota_A) \times \mathfrak{u}_\xi : A \rtimes_\alpha \widehat{S} \to M(\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S}))$, die $X \rtimes_\xi \widehat{S}$ zu einem Rechts-Hilbert-$(A \rtimes_\alpha \widehat{S})$-$(B \rtimes_\beta \widehat{S})$-Bimodul erweitert. Nach Definition gilt $\iota_{A\rtimes\widehat{S}} \circ j_\alpha = Ad(j_\xi) \circ \iota_A$ und daher ist wegen 1.1.13 der Morphismus j_α eine verträgliche linke Koeffizienten-Abbildung für j_ξ. Offenbar ist $({}_{j_\alpha}j_{\xi_{j_\beta}}, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ dann ein kovarianter Homomorphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln. Mit der Charakterisierung aus Proposition 2.26 ist folglich $({}_{A\rtimes\widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}}, {}_{j_\alpha}j_{\xi_{j_\beta}}, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ das verschränkte Produkt von $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$.

2.35 Notation. Der Satz 2.31, zusammen mit der Eindeutigkeits-Aussage in Lemma 2.23, rechtfertigt die Notation $({}_{A\rtimes\widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}}, {}_{j_\alpha}j_{\xi_{j_\beta}}, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ oder abkürzend $X \rtimes \widehat{S}$ für das verschränkte Produkt von $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$. Denn es gibt keine Kollision mit den Notationen der verschränkten Produkte für die Koeffizienten-Kowirkungen. Der Hilbertmodul $X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}}$ ist zudem nach Bemerkung 2.34 von der linken Koeffizienten-Kowirkung unabhängig. Ist (X_B, ξ_β) ein S-äquivarianter Hilbertmodul, so benutzen wir die Notation $(\Pi_\nu, u, v) : ((X_B, \xi_\beta), \widehat{S}) \to M(Z_R)$ für kovariante Morphismen, vgl. Bemerkung 2.33. In diesem Fall bezeichnen wir außerdem mit $(X \rtimes_\xi \widehat{S}, j_\xi, \mathfrak{u}_\xi, \mathfrak{u}_\beta)$ das verschränkte Produkt und mit $j^\xi_{\widehat{S}}$ den zu $\mathfrak{u}_\xi$ gehörigen *-Morphismus (vgl. Bemerkung 2.6).

2.36 Bemerkung. Verschränkte Produkte sind mit S-äquivarianten Morphismen verträglich. Sei dazu ${}_\psi\Phi_\varphi : ({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \to M({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$ ein S-äquivarianter Morphismus (vgl. 1.4.4) von S-Hilbert-Bimodul-S-Kowirkungen. Mit den obigen Notationen ist das Tripel $(j_\zeta \circ \Phi, \mathfrak{u}_\gamma, \mathfrak{u}_\delta) : (X, \widehat{S}) \to M(Y \rtimes_\zeta \widehat{S})$ kovariant und induziert einen nichtentarteten Morphismus

$$\Phi \rtimes \widehat{S} := (j_\zeta \circ \Phi) \times (\mathfrak{u}_\gamma, \mathfrak{u}_\delta) : X \rtimes_\xi \widehat{S} \longrightarrow M(Y \rtimes_\zeta \widehat{S})$$

mit Koeffizienten-Morphismen $\psi \rtimes \widehat{S} := (j_\gamma \circ \psi) \times \mathfrak{u}_\gamma)$ und $\varphi \rtimes \widehat{S} := (j_\delta \circ \varphi) \times \mathfrak{u}_\delta)$. Denn aus der Äquivarianz von Φ folgt $Ad(\mathfrak{u}_\gamma, \mathfrak{u}_\delta)(j_\zeta \circ \Phi \otimes 1_S) = (j_\zeta \otimes id_S) \circ \zeta \circ \Phi = (j_\zeta \circ \Phi \otimes id_S)\zeta$.

Diese Konstruktion ist offenbar mit der Komposition äquivarianter Morphismen und Identitäten in $\mathcal{HBM}_S$ (vgl. 1.5.1) verträglich. Das folgt sofort aus der universellen Eigenschaft des verschränkten Produkts.

§ 2.4 Duale Kowirkungen und kategorielle Beschreibung

Es sei in diesem Abschnitt (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, für die verschränkte Produkte existieren. Wir erinnern an stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebren (S, Δ): In diesem Fall ist nach 1.2.5 und 1.2.4 das universelle Dual $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$ eine beidseitig nichtentartete Hopf-C^*-Algebra mit Koprodukt $\widehat{\Delta}$ und Koeins $\widehat{\varepsilon}$. Auf verschränkten Produkten existiert dann eine kanonische $\widehat{S}$-Kowirkung.

2.37 Definition. Neben den generellen Voraussetzungen dieses Abschnitts sei (S, Δ) zusätzlich stark dualisierbar (vgl. 1.2.4 und 1.2.5) und $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ ein S-äquivarianter Rechts-Hilbert-Bimodul. Mit den Konventionen der Bemerkungen 2.6 und 2.22 ist

$$((j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}}), (j^\alpha_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta}, (j^\beta_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta}) : (X, \widehat{S}) \longrightarrow M(X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes \widehat{S})$$

ein kovarianter Homomorphismus. Wir definieren $\widehat{\xi} := (j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}}) \times ((j^\alpha_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta}, (j^\beta_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta})$ mit $\widehat{\alpha} := (j_\alpha \otimes 1_{\widehat{S}}) \times ((j^\alpha_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta})$ bzw. $\widehat{\beta} := (j_\beta \otimes 1_{\widehat{S}}) \times ((j^\beta_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta})$ als Koeffizienten-Abbildungen. Dann ist $({}_{A \rtimes \widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B \rtimes \widehat{S}}, {}_{\widehat{\alpha}}\widehat{\xi}_{\widehat{\beta}})$ eine nichtentartete Rechts-Hilbert-Bimodul-$\widehat{S}$-Kowirkung (vgl. 1.4.2). Diese nennen wir die *zu* (X, ξ) *duale* $\widehat{S}$*-Kowirkung.*

Beweis der Behauptungen in Definition 2.37. Unter Verwendung der Positions-Notation 1.0.4 sind $\mathfrak{u}_{\alpha,13} \cdot \mathfrak{u}_{23}$ bzw. $\mathfrak{u}_{\beta,13} \cdot \mathfrak{u}_{23}$ die zu $(j^\alpha_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta}$ bzw. $(j^\beta_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})\widehat{\Delta}$ gehörigen unitären S-Kodarstellungen (vgl. Bemerkung 2.6). Dann folgt aus

$$Ad(\mathfrak{u}_{\alpha,13}\mathfrak{u}_{23}, \mathfrak{u}_{\beta,13}\mathfrak{u}_{23}) \circ ((j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}}) \otimes 1_S) = (Ad(\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta) \circ (j_\xi \otimes 1_S))_{13} \overset{(*)}{=} ((j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}}) \otimes id_S)\xi$$

die Kovarianz, wobei in $(*)$ die Kovarianz des universellen Tripels $(j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ verwendet wird. Folglich ist $\widehat{\xi}$ wohldefiniert. Die $\widehat{S}$-Koassoziativität von $\widehat{\xi}$ (vgl. 1.4.2) folgt sofort aus der universellen Eigenschaft des verschränkten Produkts. Von den verbleibenden Behauptung zeigen wir lediglich die Gleichung $\overline{(1 \otimes S) \cdot \widehat{\xi}(X \rtimes_\xi \widehat{S})} = X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes \widehat{S}$, die anderen folgen analog. Wir benutzen $X \rtimes_\xi \widehat{S} = \overline{j_\xi(X) j^\beta_{\widehat{S}}(\widehat{S})}$ (vgl. Lemma 2.25) und erhalten

$$\begin{aligned}
\overline{(1 \otimes \widehat{S}) \cdot \widehat{\xi}(j_\xi(X) j^\beta_{\widehat{S}}(\widehat{S}))} &= \overline{(1 \otimes \widehat{S})(j_\xi(X) \otimes 1_{\widehat{S}})(j^\beta_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})(\widehat{\Delta}(\widehat{S}))} \\
&= \overline{(j_\xi(X) \otimes 1_{\widehat{S}})(j^\beta_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})((1_{\widehat{S}} \otimes \widehat{S}) \cdot \widehat{\Delta}(\widehat{S}))} \\
&\overset{(*)}{=} \overline{(j_\xi(X) \otimes 1_{\widehat{S}})(j^\beta_{\widehat{S}} \otimes id_{\widehat{S}})(\widehat{S} \otimes \widehat{S})} \\
&= \overline{(j_\xi(X) j^\beta_{\widehat{S}}(\widehat{S}) \otimes \widehat{S}} \\
&= X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes \widehat{S}\ ,
\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ eingeht, daß $(\widehat{S}, \widehat{\Delta})$ beidseitig nichtentartet ist. □

Das verschränkte Produkt ist mit vielen natürlichen Konstruktionen auf Rechts-Hilbert-Bimoduln verträglich (vgl. [**15**, Theorem 3.7 und 3.13]):

2.38 Satz. *Es sei (S, Δ) eine stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra, für die verschränkte Produkte existieren. Dann induziert das verschränkte Produkt Funktoren der folgenden Kategorien (vgl. Abschnitt § 1.5):*

$$1. \qquad (.) \rtimes \widehat{S} : \mathcal{HBM}_S \longrightarrow \mathcal{HBM}^{ne}_{\widehat{S}}$$
$$2. \qquad (.) \rtimes \widehat{S} : \mathfrak{M}_S \longrightarrow \mathfrak{M}^{ne}_{\widehat{S}}$$

Beweis. Für den ersten Teil muß man wegen Bemerkung 2.36 nur noch verifizieren, daß für einen S-äquivarianten nichtentarteten Morphismus $\Phi : (X, \xi) \to M(Y, \zeta)$ das verschränkte Produkt $\Phi \rtimes \widehat{S}$ (vgl. Bemerkung 2.36) $\widehat{S}$-äquivariant bzgl. der dualen Kowirkungen $\widehat{\xi}$ bzw. $\widehat{\zeta}$ ist. Das folgt sofort aus den Definitionen von $\widehat{\xi}$, $\widehat{\zeta}$ und $\Phi \rtimes \widehat{S}$ sowie der universellen Eigenschaft des verschränkten Produkts.

Aus dem ersten Teil folgt sofort, daß das verschränkte Produkt äquivariante unitäre Äquivalenzen (vgl. 1.4.7) erhält, denn es ist $j_\alpha \times j^\alpha_{\widehat{S}} = id_{A \rtimes \widehat{S}}$ und $j_\beta \times j^\beta_{\widehat{S}} = id_{B \rtimes \widehat{S}}$. Also ist die Abbildung $(.) \rtimes \widehat{S} : \mathfrak{M}_S((A, \alpha), (B, \beta)) \to \mathfrak{M}_{\widehat{S}}((A \rtimes_\alpha \widehat{S}, \widehat{\alpha}), (B \rtimes_\beta \widehat{S}, \widehat{\beta}))$ wohldefiniert und erhält offenbar die $\mathfrak{M}_S$-Identitäten. Man muß für den zweiten Teil also nur noch die Verträglichkeit mit dem Produkt, d.h. für $[(X, \xi)]$ in $\mathfrak{M}_S((A, \alpha), (B, \beta))$ und $[(Y, \zeta)]$ in $\mathfrak{M}_S((B, \beta), (C, \gamma))$ die Gleichung

$$([(X, \xi)] \cdot [(Y, \zeta)]) \rtimes \widehat{S} \overset{(!)}{=} [(X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi})] \cdot [(Y \rtimes_\zeta \widehat{S}, \widehat{\zeta})]$$

zeigen. Betrachte dazu das Tensorprodukt $j_\xi \otimes_B j_\zeta : X \otimes_B Y \to M(X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes_{B \rtimes \widehat{S}} Y \rtimes_\zeta \widehat{S})$ (vgl. 1.1.11) mit Koeffizienten-Morphismen j_α und j_γ. Dann ist $(j_\xi \otimes_B j_\zeta, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\gamma)$ kovariant in Bezug auf die Kowirkung $\xi \sharp_B \zeta$ (vgl. [**15**, Lemma 2.12 und Proposition 2.13] oder auch Lemma 2.27 und Proposition 2.28): Für $x \in X$ und $y \in Y$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_\alpha \cdot & ((j_\xi \otimes_B j_\zeta)(x \otimes_B y) \otimes 1_S) \cdot \mathfrak{u}^*_\gamma \\
&= \mathfrak{u}_\alpha \cdot [\Theta((j_\xi(x) \otimes 1_S) \otimes_{M(B \rtimes \widehat{S} \otimes S)} (j_\zeta(y) \otimes 1_S))] \cdot \mathfrak{u}^*_\gamma \\
&= \Theta[(\mathfrak{u}_\alpha \cdot (j_\xi(x) \otimes 1_S)) \otimes_{M(B \rtimes \widehat{S} \otimes S)} ((j_\zeta(y) \otimes 1_S) \cdot \mathfrak{u}^*_\gamma,
\end{aligned}$$

wobei wir die offensichtlichen Eigenschaften von Θ benutzt haben. Unter Verwendung der Kovarianzen ist dieses Element gleich

$$\begin{aligned}
\Theta[& (j_\xi \otimes id_S)(\xi(x)) \cdot \mathfrak{u}_\beta \otimes_{M(B \rtimes \widehat{S} \otimes S)} (j_\zeta(y) \otimes 1_S) \cdot \mathfrak{u}^*_\gamma] \\
&= \Theta[(j_\xi \otimes id_S)(\xi(x)) \otimes_{M(B \rtimes \widehat{S} \otimes S)} \mathfrak{u}_\beta \cdot (j_\zeta(y) \otimes 1_S) \cdot \mathfrak{u}^*_\gamma] \\
&= \Theta[(j_\xi \otimes id_S)(\xi(x)) \otimes_{M(B \rtimes \widehat{S} \otimes S)} (j_\zeta \otimes id_S)(\zeta(y))] \\
&= ((j_\xi \otimes_B j_\zeta) \otimes id_S)[\Theta(\xi(x) \otimes_{M(B \otimes S)} \zeta(y))] \\
&= ((j_\xi \otimes_B j_\zeta) \otimes id_S)(\xi \sharp_B \zeta(x \otimes_B y)).
\end{aligned}$$

Der zugehörige Morphismus $(j_\xi \otimes_B j_\zeta) \times (\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\gamma)$ ist nichtentartet mit den Identitäten als Koeffizienten-Abbildungen. Man verifiziert unter Benutzung der Definitionen und der universellen Eigenschaft leicht seine $(\widehat{\xi \sharp_B \zeta})$- $(\widehat{\xi} \sharp_{B \rtimes \widehat{S}} \widehat{\zeta})$-Äquivarianz. Nach 1.4.7 induziert er folglich eine $\widehat{S}$-unitäre Äquivalenz der $\widehat{S}$-Kowirkungen $({}_{A \rtimes \widehat{S}}(X \otimes_B Y) \rtimes_{\xi \sharp \zeta} \widehat{S}_{C \rtimes \widehat{S}}, \widehat{\xi \sharp_B \zeta})$ und $({}_{A \rtimes \widehat{S}}(X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes_{B \rtimes \widehat{S}} Y \rtimes_\zeta \widehat{S})_{C \rtimes \widehat{S}}, \widehat{\xi} \sharp_{B \rtimes \widehat{S}} \widehat{\zeta})$. Damit ist die Gleichung (!) gezeigt. □

Da nach 1.5.3 die $\mathfrak{M}_S$- bzw. $\mathfrak{M}_{\widehat{S}}$-Isomorphismen genau durch äquivariante Morita-Äquivalenzen repräsentiert werden und ein Funktor Isomormphismen erhält folgt sofort:

2.39 Korollar. *Mit den Voraussetzungen aus Satz 2.38 sei $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine Imprimitivitäts-S-Kowirkung (vgl. 1.4.9). Das verschränkte Produkt $({}_{A\rtimes\widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}}, {}_{\widehat{\alpha}}\widehat{\xi}_{\widehat{\beta}})$ ist dann ein $\widehat{S}$-äquivarianter Imprimitivitäts-Bimodul.*

Als Folgerung aus dem Beweis von Satz 2.38 erhält man die Verträglichkeit des verschränkten Produkts mit inneren Tensorprodukten, vgl. [**30**, Lemma 3.10]:

2.40 Korollar. *Es sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, für die verschränkte Produkte existieren sowie ${}_\vartheta\Phi_\varphi : ({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \to M({}_DW_L, {}_\delta\chi_\lambda)$ und ${}_\varphi\Psi_\psi : ({}_BY_C, {}_\beta\zeta_\gamma) \to M({}_LZ_R, {}_\lambda\Lambda_\varrho)$ nichtentartete S-äquivariante Morphismen von Rechts-Hilbert-Bimoduln. Dann kommutiert mit Notationen analog wie im Beweis von 2.38 das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes_B Y) \rtimes_{\xi\sharp\zeta} \widehat{S} \arrow[r, "(j_\xi\otimes_B j_\zeta)\times(u_\alpha,u_\gamma)", "\cong"'] \arrow[d, "(\Phi\otimes_B\Psi)\rtimes\widehat{S}"'] & X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes_{B\rtimes\widehat{S}} Y \rtimes_\zeta \widehat{S} \arrow[d, "\Phi\rtimes\widehat{S}\otimes_{B\rtimes\widehat{S}}\Psi\rtimes\widehat{S}"] \\
M((W \otimes_L Z) \rtimes_{\chi\sharp\Lambda} \widehat{S}) \arrow[r, "\cong", "(j_\chi\otimes_L j_\Lambda)\times(u_\delta,u_\varrho)"'] & M(W \rtimes_\chi \widehat{S} \otimes_{L\rtimes\widehat{S}} Z \rtimes_\Lambda \widehat{S})
\end{tikzcd}$$

mit den offensichtlichen Koeffizienten-Daten. Die horizontalen Abbildungen sind unitäre Äquivalenzen. Ist (S, Δ) zusätzlich stark dualisierbar, so sind die Abbildungen $\widehat{S}$-äquivariant bzgl. der dualen $\widehat{S}$-Kowirkungen (bzw. deren Tensorprodukten).

Beweis. Der wesentliche Teil folgt direkt aus der Argumentation im Beweis von Satz 2.38. Diese ist auch unter den abgeschwächten Voraussetzungen noch möglich. Der Rest folgt unmittelbar aus der universellen Eigenschaft des verschränkten Produkts und den Definitionen der jeweils beteiligten dualen Kowirkungen. □

Für spätere Zwecke benötigen wir das folgende Ergebnis:

2.41 Lemma. *Mit den Voraussetzungen des Satzes 2.38 seien $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ und $({}_AY_B, {}_\alpha\zeta_\beta)$ zwei S-äquivariante Hilbert-Bimoduln mit denselben Koeffizienten-Daten. Die Teilmenge*

$$Ad(j_\zeta, j_\xi)(\mathcal{L}_B(X, Y)) \subseteq \mathcal{L}_{B\rtimes\widehat{S}}(X \rtimes_\xi \widehat{S}, Y \rtimes_\zeta \widehat{S})$$

besteht aus $\widehat{S}$-invarianten Operatoren (vgl. 1.4.4). Insbesondere ist für $F \in \mathcal{L}_B(X)$ der Operator $Ad(j_\xi)(F) \in \mathcal{L}_{B\rtimes\widehat{S}}(X \rtimes_\xi \widehat{S})$ invariant unter der dualen $\widehat{S}$-Kowirkung.

Beweis. Sei $F \in \mathcal{L}_B(X, Y)$. Dann gilt für $x \in X$ und $d \in B \rtimes \widehat{S}$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
(Ad(j_\zeta, j_\xi)(F) \otimes id_{\widehat{S}})(\widehat{\xi}(j_\xi(x)d)) &= (Ad(j_\zeta, j_\xi)(F) \otimes id_{\widehat{S}})((j_\xi(x) \otimes 1_S) \cdot \widehat{\beta}(d)) \\
&= (j_\zeta(Fx) \otimes 1_{\widehat{S}}) \cdot \widehat{\beta}(d) \\
&= \widehat{\zeta}(Ad(j_\zeta, j_\xi)(F)(j_\xi(x))) \cdot \widehat{\beta}(d) \\
&= \widehat{\zeta}(Ad(j_\zeta, j_\xi)(F)(j_\xi(x)d)).
\end{aligned}$$

Da Linearkombinationen von Elementen der Form $j_\xi(x)d$ dicht in $X \rtimes_\xi \widehat{S}$ sind, gilt die Gleichung aus Stetigkeitsgründen für ganz $X \rtimes_\xi \widehat{S}$, und somit folgt die Behauptung. □

§ 2.5 Verträglichkeit mit kompakten Operatoren

In diesem Abschnitt sei (S,Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, für die verschränkte Produkte existieren. Ist (X_B, ξ_β) eine nichtentartete S-Kowirkung auf einem Rechts-Hilbertmodul, so bezeichne $(X \rtimes_\xi \widehat{S}, j_\xi, \mathfrak{u}_\xi, \mathfrak{u}_\beta)$ das verschränkte Produkt (vgl. Bemerkung 2.35). Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, daß sich das verschränkte Produkt $\mathcal{K}(X) \rtimes_{Ad(\xi)} \widehat{S}$ mittels der Links-Wirkung $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}$ kanonisch mit den kompakten Operatoren $\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S})$ identifizieren läßt. Das folgt nicht automatisch aus Satz 2.38, denn X_B wird nicht als rechts-voll vorausgesetzt (vgl. 1.1.3).

2.42 Lemma. *Mit den obigen Bezeichnungen ist $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}$ gleich $Ad(j_\xi) \times u_\xi$. Ist (S,Δ) zusätzlich stark dualisierbar (vgl. 1.2.5), so ist $\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S}) = \overline{Ad(j_\xi)(\mathcal{K}(X))j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})}$, wobei $j^\xi_{\widehat{S}}$ den zu $\mathfrak{u}_\xi$ gehörigen *-Morphismus bezeichnet (vgl. Bemerkung 2.6). Insbesondere ist in diesem Fall $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}} : \mathcal{K}(X) \rtimes_{Ad(\xi)} \widehat{S} \to \mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S})$ surjektiv.*

Beweis. Es ist $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}} \circ j_{Ad(\xi)} = Ad(j_\xi)$, weil $j_{Ad(\xi)}$ eine linke Koeffizienten-Abbildung für j_ξ ist, vgl. auch 1.1.13. Nach Definition gilt $u_\xi = (\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}} \otimes id_S)(\mathfrak{u}_{Ad(\xi)})$. Wegen der Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft folgt daher die Behauptung.

Ist $(\widehat{S}, \mathfrak{u})$ ein starkes Dual wie in 1.2.5, so ist nach Lemma 2.25 und den Konventionen aus Bemerkung 2.6(1.) $\mathcal{K}(X) \rtimes_{Ad(\xi)} \widehat{S} = \overline{j_{Ad(\xi)}(\mathcal{K}(X)) \cdot j^{Ad(\xi)}_{\widehat{S}}(\widehat{S})}$ und $X \rtimes_\xi \widehat{S} = \overline{j^\xi(\widehat{S}) \cdot j_\xi(X)} = \overline{j_\xi(X) \cdot j^\beta_{\widehat{S}}(\widehat{S})}$. Folglich ist $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}$ surjektiv wegen der Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S}) &= \overline{X \rtimes_\xi \widehat{S} \cdot (X \rtimes_\xi \widehat{S})^*} = \overline{j_\xi(X) \cdot (j^\beta_{\widehat{S}}(\widehat{S}) \cdot j_\xi(X)^*) \cdot j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})} \\ &= \overline{j_\xi(X) j_\xi(X)^* \cdot j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})} = \overline{Ad(j_\xi)(\mathcal{K}(X)) \cdot j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})}\end{aligned}$$

und $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}(\mathcal{K}(X) \rtimes_{Ad(\xi)} \widehat{S}) = Ad(j_\xi) \times u_\xi(\mathcal{K}(X) \rtimes_{Ad(\xi)} \widehat{S}) = \overline{Ad(j_\xi)(\mathcal{K}(X)) \cdot j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})}$. □

Mit dieser Vorbereitung bekommen wir das folgende Ergebnis (vgl. [**3**, Proposition 6.9], [**66**, Lemme 5.2] und im Gruppenfall [**15**, Lemma 3.3 und Lemma 3.10]):

2.43 Satz. *Es sei (S,Δ) eine stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra wie in 1.2.5, für die verschränkte Produkte existieren sowie (X_B, ξ_β) ein S-äquivarianter Rechts-Hilbertmodul und ξ als Morphismus von recht-Hilbertmoduln beidseitig nichtentartet (vgl. 1.1.10). Bezeichnet $(X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}}, j_\xi, u_\xi, \mathfrak{u}_\beta)$ das verschränkte Produkt, dann ist die kanonische Koeffizienten-Abbildung $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}} = Ad(j_\xi) \times \mathfrak{u}_\xi : \mathcal{K}(X) \rtimes_{Ad(\xi)} \widehat{S} \to \mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S})$ aus Lemma 2.42 ein $\widehat{S}$-äquivarianter Isomorphismus. Insbesondere ist das Tripel $(\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S}), Ad(j_\xi), \mathfrak{u}_\xi)$ ein verschränktes Produkt von $(\mathcal{K}(X), Ad(\xi))$.*

Beweis. Wegen Lemma 2.42 muß man nur noch die Injektivität von $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}$ zeigen. Wir benutzen die Notationen aus Abschnitt § 1.5. Die Kowirkung (X,ξ) definiert einen $\mathfrak{M}_S$-Morphismus $[(X,\xi)] \in \mathfrak{M}_S((\mathcal{K}(X), Ad(\xi)), (B,\beta))$. Nach 1.4.8 definiert die adjungierte Kowirkung $({}_BX^*_{\mathcal{K}(X)}, {}_\beta\xi^*_{Ad(\xi)})$ ein $\mathfrak{M}_S$-Element $[(X^*, \xi^*)]$ in $\mathfrak{M}_S((B,\beta), (\mathcal{K}(X), Ad(\xi)))$, welches $\mathfrak{M}_S$-rechts-invers zu $[(X,\xi)]$ ist. Da Funktoren Rechts-Inverse erhalten, ist also nach Satz 2.38 $[(X^* \rtimes_{\xi^*} \widehat{S}, \widehat{\xi^*})]$ ein $\mathfrak{M}_{\widehat{S}}$-rechts-Inverses von $[(X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi})]$. Nach 1.5.3 ist also die Links-Wirkung $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}$ injektiv. □

Außerdem ist $\iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}$ mit kovarianten Morphismen verträglich:

2.44 Lemma. *Wir benutzen dieselben Voraussetzungen wie in Satz 2.43.*

1. *Ist* $(\Pi, u, v) : ((X_B, \xi_\beta), \widehat{S}) \to M(Z_R)$ *ein kovarianter Homomorphismus, vgl. Bemerkung 2.33, so gilt* $Ad(\Pi) \times u = Ad(\Pi \times (u, v)) \circ \iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}$.

2. *Ist* $\Phi_\varphi : (X_B, \xi_\beta) \to M(Y_D, \zeta_\delta)$ *ein äquivarianter nichtentarteter Morphismus, vgl. 1.4.4, so kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{K}(X) \rtimes_{Ad(\xi)} \widehat{S} & \xrightarrow{Ad(\Phi)\rtimes\widehat{S}} & M(\mathcal{K}(Y) \rtimes_\zeta \widehat{S}) \\
{\scriptstyle \iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_{\mathcal{K}(Y)\rtimes\widehat{S}}} \\
\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S}) & \xrightarrow{Ad(\Phi\rtimes\widehat{S})} & M(\mathcal{K}(Y \rtimes_\zeta \widehat{S})).
\end{array}$$

Beweis. Nach Definition ist $Ad(\Phi)\times u$ eine verträgliche linke Koeffizienten-Abbildung für $\Phi \times (u, v)$. Daher folgt der erste Teil aus 1.1.13. Der zweite Teil folgt nach Definition von $\Phi \rtimes \widehat{S} = (j_\zeta\Phi) \times (\mathfrak{u}_\zeta, \mathfrak{u}_\delta)$ (vgl. Notation 2.35 und Bemerkung 2.36) direkt aus dem ersten Teil: $Ad(\Phi \rtimes \widehat{S}) \circ \iota_{\mathcal{K}(X)\rtimes\widehat{S}} = Ad(j_\zeta\Phi) \times \mathfrak{u}_\zeta = (Ad(j_\zeta) \circ Ad(\Phi)) \times \mathfrak{u}_\zeta = \iota_{\mathcal{K}(Y)\rtimes\widehat{S}} \circ Ad(\Phi) \times \mathfrak{u}_\zeta$. Die letzte Identität folgt hierbei leicht aus der Definition von $\iota_{\mathcal{K}(Y)\rtimes\widehat{S}}$. □

§ 2.6 Äußere Äquivalenz von Kowirkungen

Sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra. Da das verschränkte Produkt eine funktorielle Konstruktion ist (vgl. Bemerkung 2.36), ergeben äquivariant isomorphe Rechts-Hilbert-Bimoduln (vgl. 1.4.4 und 1.1.10) natürlich auch isomorphe verschränkte Produkte. Wir werden in diesem Abschnitt den etwas allgemeineren Fall der äußeren Äquivalenz besprechen.

Wir werden zunächst nur Rechts-Hilbertmoduln (X_B, ξ_β) mit S-Kowirkung ohne eine zusätzliche Bimodulstruktur betrachten. Zur Definition von äußerer Äquivalenz brauchen wir die folgende Äquivalenzrelation auf der Menge der S-Kowirkungen auf X mit fixierter Koeffizienten-Kowirkung β.

2.45 Definition. Sei X_B ein Rechts-Hilbertmodul und $\beta : B \to M(B \otimes S)$ eine Kowirkung auf B. Zwei S-Kowirkungen ξ_β und ξ'_β auf X (vgl. 1.4.2) mit derselben Koeffizienten-Kowirkung β heißen *stark äußerlich äquivalent*, wenn es eine Unitäre $u \in \mathcal{U}M(\mathcal{K}(X) \otimes S)$ mit $\xi'(x) = u \cdot \xi(x)$ für alle $x \in X$ gibt.

Offenbar ist starke äußere Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der S-Kowirkungen auf X_B mit Koeffizienten-Kowirkung β. Es stellt sich natürlich die Frage, welche Bedingungen die Unitäre $u \in \mathcal{U}M(\mathcal{K}(X) \otimes S)$ erfüllen muß. In Lemma 2.48 werden wir sehen, daß dies genau die Kozykel-Bedingungen für u sind.

2.46 Definition. Es sei (X_B, ξ_β) eine S-Kowirkung. Ein Element u in den unitären Operatoren $\mathcal{U}M(\mathcal{K}(X) \otimes S)$ heißt ein *Kozykel für* ξ, falls mit den Notationen aus 1.0.1 und 1.0.4 die Gleichung $(id_{\mathcal{K}(X)} \otimes \Delta)(u) = u_{12} \cdot (Ad(\xi) \otimes id_S)(u)$ in $\mathcal{U}M(\mathcal{K}(X) \otimes S \otimes S)$ erfüllt ist und zusätzlich die Inklusion $(1 \otimes S) \cdot u \cdot \xi(X) \subseteq X \otimes S$ gilt.

Die hier gegebene Definition ist stärker als [**39**, 2.7 Definition] und [**4**, Définition 0.4], aber im Zusammenhang mit Rechts-Hilbert-Bimoduln besser geeignet, vgl. Lemma 2.48.

2.47 Beispiel. 1. Die Identität $1 = 1_{\mathcal{K}(X)\otimes S}$ ist ein Kozykel für jede S-Kowirkung.

2. Die stark äußerliche Äquivalenzklasse der trivialen Kowirkung $\delta^{tr}(x) := x \otimes 1_S$ umfaßt genau die rechts-trivialen Kowirkungen $\delta^\bullet_X$ (vgl. Definition 2.14) auf X mit der analytischen Zusatzbedingung $(1 \otimes S) \cdot \delta^\bullet_X(X) \subseteq X \otimes S$. Die zugehörigen Kozykel sind daher nach Lemma 2.16 die unitären Kodarstellungen u in $\mathcal{UM}(\mathcal{K}(X) \otimes S)$ mit der zusätzlichen Bedingung $(1 \otimes S)u(X \otimes 1_S) \subseteq X \otimes S$.

3. Im Falle einer Wirkung einer Gruppe G auf dem Rechts-Hilbertmodul X_B entsprechen die Kozykel gerade den strikt stetigen Abbildungen $u : G \to \mathcal{UL}(X)$ mit $s \mapsto u_s$, für welche die Gleichung $u_{st} = u_s \cdot Ad(\xi)_s(u_t)$ für $s, t \in G$ gilt. Die analytische Bedingung ist wegen der Kommutativität von $\mathcal{C}_0(G)$ immer erfüllt.

2.48 Lemma. *Es sei (X_B, ξ_β) eine S-Kowirkung und $u \in \mathcal{UM}(\mathcal{K}(X) \otimes S)$. Die Abbildung $u\xi : X \to M(X \otimes S)$, wobei $u\xi(x) := u \cdot \xi(x)$ für $x \in X$, definiert genau dann eine S-Kowirkung auf X_B, wenn u ein Kozykel für ξ ist. Die rechte Koeffizienten-Abbildung für $u\xi$ ist dann ebenfalls β.*

Beweis. Man rechnet unter Verwendung der Positions-Notation 1.0.4 einfach die beiden Seiten für die Kowirkungsidentität aus und erhält

$$(u\xi \otimes id)u\xi(x) = u_{12} \cdot (\xi \otimes id)(u \cdot \xi(x)) = u_{12}(Ad(\xi) \otimes id)(u) \cdot (\xi \otimes id)(\xi(x)) \quad \text{sowie}$$
$$(id \otimes \Delta)(u\xi(x)) = (id_{\mathcal{K}(X)} \otimes \Delta)(u) \cdot (id \otimes \Delta)(\xi(x)) = (id \otimes \Delta)(u) \cdot (\xi \otimes id)(\xi(x)).$$

Da $(\xi \otimes id)\xi$ als Morphismus nichtentartet ist, sind beide Seiten genau dann identisch, wenn u ein Kozykel für ξ ist. Die restlichen Aussagen sind klar. □

Analog wie in Lemma 2.48 zeigt man:

2.49 Lemma. *Es seien $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ ein S-äquivarianter Hilbert-Bimodul (vgl. 1.4.2) und $u \in \mathcal{UM}(A \otimes S)$ bzw. $v \in \mathcal{UM}(B \otimes S)$ Kozykel für α bzw. β im Sinne der Definition 2.46. Der Morphismus*

$${}_{Ad(u)\alpha}Ad(u, v)\xi_{Ad(v)\beta} : {}_AX_B \to M(X \otimes S)$$

(vgl. 1.1.12) ist eine Rechts-Hilbert-Bimodul-S-Kowirkung auf ${}_AX_B$.

Nimmt man $v = 1$ an, so erhält man als Spezialfall die eine Richtung des vorangehenden Lemmas 2.48 zurück. Wir können jetzt die äußere Äquivalenz von Hilbert-Bimodul-Kowirkungen definieren.

2.50 Definition. Es seien $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-Kowirkung und $u \in \mathcal{UM}(A \otimes S)$ bzw. $v \in \mathcal{UM}(B \otimes S)$ Kozykel für α bzw. β. Mit denselben Notationen wie in Lemma 2.49 heißt eine Kowirkung der Form $Ad(u, v)\xi$ *äußerlich äquivalent zu* ξ.

2.51 Bemerkung. 1. Äußere Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation. Das folgt sofort aus der Tatsache, daß starke äußere Äquivalenz eine solche ist.

2. Ist die obige Kowirkung ${}_\alpha\xi_\beta$ nichtentartet und sind $(1 \otimes S) \cdot u \cdot \alpha(A) \subseteq A \otimes S$ bzw. $(1 \otimes S) \cdot v \cdot \beta(B) \subseteq B \otimes S$ dicht in $A \otimes S$ bzw. $B \otimes S$, so ist auch $Ad(u, v)\xi$ nichtentartet.

3. Sei wie oben (A, α) eine S-Kowirkung und $u \in \mathcal{U}M(A \otimes S)$ ein α-Kozykel. Dann ist $(A, Ad(u)\alpha)$ äquivariant Morita-äquivalent (vgl. 1.4.9) zu (A, α). Der verbindende Imprimitivitäts-Bimodul ist $(A, u\alpha)$, denn es gilt offensichtlich $Ad(u\alpha) = Ad(u)\alpha$.

Äußerlich äquivalente Kowirkungen haben isomorphe verschränkte Produkte. Das wird in der folgenden Proposition präzisiert.

2.52 Proposition. *Mit denselben Notationen wie in Lemma 2.49 sei $Ad(u,v)\xi$ äußerlich äquivalent zu der Rechts-Hilbert-Bimodul-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$. Dann ist mit den Notationen aus 2.35*

$$(j_\xi, (j_\alpha \otimes id)(u) \cdot \mathfrak{u}_\alpha, (j_\beta \otimes id)(v) \cdot \mathfrak{u}_\beta) : ((X, Ad(u,v)\xi), \widehat{S}) \longrightarrow M(X \rtimes_\xi \widehat{S})$$

kovariant und induziert einen Isomorphismus

$$\Lambda^X_{u,v} := j_\xi \times ((j_\alpha \otimes id)(u)\mathfrak{u}_\alpha, (j_\beta \otimes id)(v)\mathfrak{u}_\beta) : X \rtimes_{Ad(u,v)\xi} \widehat{S} \longrightarrow X \rtimes_\xi \widehat{S}$$

mit Koeffizienten-Morphismen $\lambda^A_u := j_\alpha \times (j_\alpha \otimes id)(u)\mathfrak{u}_\alpha$ und $\lambda^B_v := j_\beta \times (j_\beta \otimes id)(v)\mathfrak{u}_\beta$. Falls (S, Δ) ein starkes universelles Dual $\widehat{S}$ besitzt, so ist $\Lambda^X_{u,v}$ mit den dualen $\widehat{S}$-Kowirkungen (vgl. Lemma 2.37) verträglich.

Beweis. Die Unitäre $(j_\alpha \otimes id)(u)\mathfrak{u}_\alpha$ ist eine unitäre Kodarstellung:

$$\begin{aligned}(id_{A \rtimes \widehat{S}} \otimes \Delta)((j_\alpha \otimes id)(u)\mathfrak{u}_\alpha) &= (j_\alpha \otimes id \otimes id)(u_{12}(\alpha \otimes id)(u)) \cdot (\mathfrak{u}_\alpha)_{12}(\mathfrak{u}_\alpha)_{13} \\ &= (j_\alpha \otimes id)(u)_{12} \cdot [((j_\alpha \otimes id)\alpha \otimes id)(u) \cdot \mathfrak{u}_{\alpha,12}] \cdot \mathfrak{u}_{\alpha,13} \\ &\overset{(*)}{=} (j_\alpha \otimes id)(u)_{12} \cdot [\mathfrak{u}_{\alpha,12} \cdot (j_\alpha \otimes 1 \otimes id_S)(u)] \cdot \mathfrak{u}_{\alpha,13} \\ &= [(j_\alpha \otimes id)(u)\mathfrak{u}_\alpha]_{12} \cdot [(j_\alpha \otimes id)(u)\mathfrak{u}_\alpha]_{13},\end{aligned}$$

wobei die Kovarianz von $(j_\alpha, \mathfrak{u}_\alpha)$ in $(*)$ eingeht. Genauso ist $(j_\beta \otimes id)(v)\mathfrak{u}_\beta$ eine unitäre Kodarstellung. Wir zeigen die $Ad(u,v)\xi$-Kovarianz des Tripels in Proposition 2.52:

$$\begin{aligned}(j_\alpha \otimes id)(u)\mathfrak{u}_\alpha \cdot (j_\xi \otimes 1_S) \cdot \mathfrak{u}^*_\beta(j_\beta \otimes id)(v^*) &\overset{(*)}{=} (j_\alpha \otimes id)(u) \cdot (j_\xi \otimes id)\xi \cdot (j_\beta \otimes id)(u^*) \\ &= (j_\xi \otimes id) \circ Ad(u,v)\xi \ ,\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ natürlich die Kovarianz des universellen kovarianten Homomorphismus $(j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ verwenden. Zunächst werden wir die Bijektivität der Koeffizienten-Abbildungen λ^A_u und λ^B_v zeigen. Dazu betrachten wir als Spezialfall der Proposition (B, β) selbst als Hilbert-Bimodul mit den Kozykel v und $1 = 1_{B \otimes S}$. Der zugehörige Morphismus

$$\Lambda^B_{v,1} := j_\beta \times ((j_\beta \otimes id)(v)\mathfrak{u}_\beta, \mathfrak{u}_\beta) : {}_{B \rtimes_{Ad(v)\beta} \widehat{S}}(B \rtimes_{v\beta} \widehat{S})_{B \rtimes_\beta \widehat{S}} \longrightarrow M({}_{B \rtimes_\beta \widehat{S}}(B \rtimes_\beta \widehat{S})_{B \rtimes_\beta \widehat{S}})$$

hat λ^B_v als linke und $id_{B \rtimes \widehat{S}}$ als rechte Koeffizienten-Abbildung. Deshalb ist $\Lambda^B_{v,1}$ eine Isometrie mit Bild

$$\Lambda^B_{v,1}(B \rtimes_{v\beta} \widehat{S}) = \Lambda^B_{v,1}(\overline{j_{v\beta}(B) \cdot B \rtimes_\beta \widehat{S}}) = \overline{j_\beta(B) \cdot B \rtimes_\beta \widehat{S}} = B \rtimes_\beta \widehat{S},$$

also ein Isomorphismus $\Lambda^B_{v,1} : B \rtimes_{v\beta} \widehat{S} \to B \rtimes_\beta \widehat{S}$ von Rechts-Hilbertmoduln. Unter dem kanonischen Isomorphismus (vgl. Satz 2.43)

$$\mathcal{K}(B \rtimes_{v\beta} \widehat{S}) \cong \mathcal{K}(B_B) \rtimes_{Ad(v\beta)} \widehat{S} = B \rtimes_{Ad(v)\beta} \widehat{S}$$

geht $Ad(\Lambda^B_{v,1})$ in λ^B_v über, folglich ist die Koeffizienten-Abbildung $\lambda^B_v : B \rtimes_{Ad(v)\beta} \widehat{S} \to B \rtimes_\beta \widehat{S}$ ein Isomorphismus. Betrachten wir wieder den allgemeinen Fall, so hat $\Lambda^X_{u,v}$ also Isomorphismen als Koeffizienten-Abbildungen, insbesondere ist $\Lambda^X_{u,v}$ eine Isometrie nach [**15**, Lemma 1.20]. Das Bild von $\Lambda^X_{u,v}$ ist

$$\begin{aligned}\Lambda^X_{u,v}(X \rtimes_{Ad(u,v)\xi} \widehat{S}) &= \Lambda^X_{u,v}(\overline{j_{Ad(u,v)\xi}(X) \cdot B \rtimes_{Ad(v)\beta} \widehat{S}}) = \overline{j_\xi(X) \cdot \lambda^B_v(B \rtimes_{Ad(v)\beta} \widehat{S})}\\ &= \overline{j_\xi(X) \cdot B \rtimes_\beta \widehat{S}} = X \rtimes_\xi \widehat{S}.\end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit den dualen Kowirkungen folgt direkt aus den Definitionen und der universellen Eigenschaft. □

2.53 Bemerkung. Insbesondere gewinnt man aus der Proposition, daß eine Kowirkung auf einer C^*-Algebra A der Form $(A, Ad(u)\alpha)$, wobei u ein α-Kozykel im Sinne der Definition 2.46 ist, dasselbe verschränkte Produkt hat wie (A,α), vgl. auch [**39**, 2.9 Theorem].

Die Isomorphismen der Form $\Lambda^X_{u,v}$ wie in der Proposition 2.52 sind natürlich:

2.54 Lemma. *Es seien $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ und $({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$ S-äquivariante Rechts-Hilbert-Bimoduln sowie ${}_\psi\Phi_\varphi : (X,\xi) \longrightarrow M(Y,\zeta)$ ein nichtentarteter S-äquivarianter Morphismus von Hilbert-Bimoduln (vgl. 1.4.4). Dann sind ${}^\psi u := (\psi \otimes id)(u)$ bzw. ${}^\varphi v := (\varphi \otimes id)(v)$ Kozykel für γ bzw. δ. Mit den analogen Bezeichnungen wie in Proposition 2.52 ist ${}_\psi\Phi_\varphi$ äquivariant bzgl. der Kowirkungen $Ad(u,v)\xi$ und $Ad({}^\psi u, {}^\varphi v)\zeta$. Zudem ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X \rtimes_{Ad(u,v)\xi} \widehat{S} & \xrightarrow{\Phi \rtimes \widehat{S}} & M(Y \rtimes_{Ad({}^\psi u, {}^\varphi v)\zeta} \widehat{S}) \\ {\scriptstyle \Lambda^X_{u,v}} \downarrow {\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong} \downarrow {\scriptstyle \Lambda^Y_{({}^\psi u),({}^\varphi v)}} \\ X \rtimes_\xi \widehat{S} & \xrightarrow{\Phi \rtimes \widehat{S}} & M(Y \rtimes_\zeta \widehat{S}) \end{array}$$

kommutativ, wobei wir die Bezeichungen aus Bemerkung 2.36 verwenden.

Beweis. Die erste Behauptung rechnen wir stellvertretend für u nach:

$$(id \otimes \Delta)({}^\psi u) = (\psi \otimes id)(u)_{12} \cdot ((\psi \otimes id) \circ \alpha) \otimes id)(u) = ({}^\psi u)_{12} \cdot (\gamma \otimes id)({}^\psi u),$$

wobei wir die Äquivarianz $(\psi \otimes id) \circ \alpha = \gamma \circ \psi$ benutzen. Offensichtlich ist dann Φ ebenfalls äquivariant für die Kowirkungen $Ad(u,v)\xi$ bzw. $Ad({}^\psi u, {}^\varphi v)\zeta$ auf X bzw. Y. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir den oberen Pfeil des Diagrams mit $\Phi \rtimes_{u,v} \widehat{S}$ und seine Koeffizienten-Morphismen mit $\psi \rtimes_u \widehat{S}$ und $\varphi \rtimes_v \widehat{S}$. Die Kommutativität prüft man mittels der universellen Eigenschaft: Zunächst gilt

$$\Lambda^Y_{{}^\psi u, {}^\varphi v} \circ \Phi \rtimes_{u,v} \widehat{S} \circ j_{Ad(u,v)\xi} = \Lambda^Y_{{}^\psi u, {}^\varphi v} \circ j_{Ad({}^\psi u, {}^\varphi B)\zeta} \circ \Phi = j_\zeta \circ \Phi = \Phi \rtimes \widehat{S} \circ j_{Ad(u,v)\xi}\,,$$

und man muß nur noch die Bedingungen

$$\begin{aligned}((\lambda^C_{{}^\psi u} \circ \psi \rtimes_u \widehat{S}) \otimes id)(\mathfrak{u}_{Ad(u)\alpha}) &= ((\psi \rtimes \widehat{S} \circ \lambda^A_u) \otimes id)(\mathfrak{u}_{Ad(u)\alpha}) \quad \text{sowie}\\ ((\lambda^B_{{}^\varphi v} \circ \varphi \rtimes_v \widehat{S}) \otimes id)(\mathfrak{u}_{Ad(v)\beta}) &= ((\varphi \rtimes \widehat{S} \circ \lambda^B_v) \otimes id)(\mathfrak{u}_{Ad(v)\beta})\end{aligned}$$

nachweisen. Die Gleichungen rechnet man durch Einsetzen der Definitionen von $\psi \rtimes_u \widehat{S}$, $\lambda^C_{\psi_u}$ etc. einfach nach:

$$\begin{aligned}((\lambda^C_{\psi_u} \circ \psi \rtimes_u \widehat{S}) \otimes id)(\mathfrak{u}_{Ad(u)\alpha}) &= (\lambda^C_{\psi_u} \otimes id)(\mathfrak{u}_{Ad({}^{\psi}u)\gamma}) \\ &= (j_\gamma \otimes id)({}^{\psi}u) \cdot \mathfrak{u}_\gamma \\ &= (j_\gamma \circ \psi \otimes id)(u) \cdot (\psi \rtimes \widehat{S} \otimes id)(\mathfrak{u}_\alpha) \\ &= (\psi \rtimes \widehat{S} \otimes id)((j_\alpha \otimes id)(u)\mathfrak{u}_\alpha) \\ &= ((\psi \rtimes \widehat{S} \circ \lambda^A_u \otimes id)(\mathfrak{u}_{Ad(u)\alpha}).\end{aligned}$$

Ebenso folgt die entsprechende Gleichung für die linke Koeffizienten-Abbildung. □

§ 2.7 Tensorprodukte mit trivialen Kowirkungen

Es sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, für die verschränkte Produkte existieren. Wir betrachten einen Hilbert-Bimodul $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ mit S-Kowirkung und einen Hilbert-Bimodul ${}_CY_D$, den wir mit der trivialen S-Kowirkung δ^{tr}_Y ausstatten (vgl. 1.4.10). Auf dem Tensorprodukt (vgl. 1.1.11) gibt es eine natürliche S-Kowirkung. Wir benötigen dazu die Vertauschung

$$\sigma := \sigma_{Y,S} : Y \otimes S \longrightarrow S \otimes Y \qquad y \otimes s \longmapsto s \otimes y \ ,$$

mit den Koeffizienten-Morphismen $\sigma_{C,S}$ und $\sigma_{D,S}$, welche eine Isomorphie zwischen Hilbert-Bimoduln ist.

2.55 Definition. Mit den Bezeichnungen wie oben ist durch

$$\xi \otimes_* id_Y := (id_X \otimes \sigma) \circ (\xi \otimes id_Y) : X \otimes Y \longrightarrow M((X \otimes Y) \otimes S)$$

eine S-Kowirkung auf dem Rechts-Hilbert-Bimodul ${}_{A\otimes C}(X \otimes Y)_{B\otimes D}$ gegeben. Die Koeffizienten-Kowirkungen sind $\alpha \otimes_* id_C := (id_A \otimes \sigma_{C,S}) \circ (\alpha \otimes id_S)$ und $\beta \otimes_* id_D := (id_B \otimes \sigma_{D,S}) \circ (\beta \otimes id_D)$.

Man kann das Tensorprodukt aus dem verschränkten Produkt „herausziehen“. Da im allgemeinen das minimale C^*-Tensorprodukt nicht universell ist, kann man nur im Fall nuklearer Koeffizienten-Algebren eine Isomorphie erwarten:

2.56 Lemma. *Es sei (S, Δ) eine stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra wie in 1.2.5. Mit den Bezeichnungen von oben und den Notationen 2.35 und 1.0.4 existiert eine kovarianter Morphismus $(j_\xi \otimes id_Y, \mathfrak{u}_{\alpha,13}, \mathfrak{u}_{\beta,13}) : ((X \otimes Y, \xi \otimes_* id_Y), \widehat{S}) \to M(X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes Y)$. Er induziert eine $(\xi \widehat{\otimes_* id_Y})$-$(\widehat{\xi} \otimes_* id_Y)$-äquivariante Surjektion*

$$(j_\xi \otimes id_Y) \times (\mathfrak{u}_{\alpha,13}, \mathfrak{u}_{\beta,13}) : (X \otimes Y) \rtimes_{\xi\otimes_* id} \widehat{S} \longrightarrow X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes Y.$$

Sind die Koeffizienten-Algebren C und D von Y nuklear, so ist die Surjektion ein Isomorphismus.

Beweis. Die $\xi \otimes_* id$-Kovarianz des Tripels für folgt offensichtlich sofort aus der ξ-Kovarianz des kanonischen Tripels $(j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$. Wir bezeichnen mit $j^\alpha_{\widehat{S}}$ bzw. $j^\beta_{\widehat{S}}$ die zu $\mathfrak{u}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{u}_\beta$ gehörigen *-Morphismen (vgl. Bemerkung 2.6), dann sind die zu $\mathfrak{u}_{\alpha,13}$ bzw. $\mathfrak{u}_{\beta,13}$ gehörigen

*-Morphismen offensichtlich gleich $j^{\alpha}_{\widehat{S}} \otimes 1_C$ bzw. $j^{\beta}_{\widehat{S}} \otimes 1_D$. Der resultierende Morphismus hat dann nach Lemma 2.25 das Bild

$$\begin{aligned}[(j_\xi \otimes id_Y) \times ((\mathfrak{u}_\alpha)_{13}, (\mathfrak{u}_\beta)_{13})]\overline{(j_{\xi\otimes_* id}(X \otimes Y) \cdot j^{\beta\otimes_* id}_{\widehat{S}}(\widehat{S}))} &= \overline{(j_\xi(X) \otimes Y) \cdot (j^{\beta}_{\widehat{S}} \otimes 1_D)(\widehat{S})} \\ &= (X \rtimes_\xi \widehat{S}) \otimes Y\end{aligned}$$

und ist folglich surjektiv. Die $\widehat{S}$-Äquivarianz folgt direkt aus der Definition.

Für die letzte Behauptung muß man also aus der Nuklearität von C und D nur noch die Isomorphie der Koeffizienten-Abbildungen $(j_\alpha \otimes id_C) \times \mathfrak{u}_{\alpha,13}$ und $(j_\beta \otimes id_D) \times \mathfrak{u}_{\beta,13}$ ableiten. Wir betrachten die *-Homomorphismen

$$\begin{aligned}(j_{\beta\otimes_* id} \circ (id_B \otimes 1_D)) \times \mathfrak{u}_{\beta\otimes_* id} : B \rtimes_\beta \widehat{S} &\longrightarrow M((B \otimes D) \rtimes_{\beta\otimes_* id} \widehat{S}) \quad \text{und} \\ j_{\beta\otimes_* id} \circ (1_B \otimes id_D) : D &\longrightarrow M((B \otimes D) \rtimes_{\beta\otimes_* id} \widehat{S}).\end{aligned}$$

Diese haben kommutierende Bilder: $j_{\beta\otimes_* id} \circ (1_B \otimes id_D)$ vertauscht einerseits trivialerweise mit $j_{\beta\otimes_* id} \circ (id_B \otimes 1_D)$. Andererseits kommutiert $j_{\beta\otimes_* id} \circ (1_B \otimes id_D)$ nach Lemma 2.7 auch mit dem zu $\mathfrak{u}_{\beta\otimes_* id}$ gehörigen *-Morphismus $j^{\beta\otimes_* id}_{\widehat{S}}$ vertauscht, denn es ist

$$\begin{aligned}Ad(\mathfrak{u}_{\beta\otimes_* id}) \circ ((j_{\beta\otimes_* id} \circ (1_B \otimes id_D)) \otimes 1_S) &= (j_{\beta\otimes_* id} \otimes id_S) \circ (\beta \otimes_* id_D) \circ (1_B \otimes id_D) \\ &= (j_{\beta\otimes_* id} \circ (1_B \otimes id_D)) \otimes 1_S.\end{aligned}$$

Also gibt es nach der universellen Eigenschaft des *maximalen* C^*-Tensorprodukts einen eindeutig bestimmten *-Homomorphismus $(B \rtimes_\beta \widehat{S}) \otimes_{max} D \to M((B \otimes D) \rtimes_{\beta\otimes_* id} \widehat{S})$, dessen Einschränkungen auf die Tensorkomponenten die beiden obigen Morphismen ergibt. Da D nuklear ist, stimmen maximales und minimales Tensorprodukt überein und man macht sich (z.B. mittels universeller Eigenschaften) leicht klar, daß der eben konstruierte *-Morphismus das Inverse von $(j_\beta \otimes id_D) \times (\mathfrak{u}_{\alpha,13}, \mathfrak{u}_{\beta,13})$ ist. Analog folgt die Isomorphie der linken Koeffizienten-Abbildung für nukleares C. □

Kombiniert man dieses Ergebnis mit der Proposition 2.52, so ergibt sich eine Verallgemeinerung von Lemma 2.56 für Tensorprodukte mit Kowirkungen, die äußerlich äquivalent zur trivialen sind. Wir brauchen dafür die folgenden Konventionen.

2.57 Bemerkung. Sei $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-Kowirkung und ${}_CY_D$ ein Rechts-Hilbert-Bimodul. Wir betrachten zusätzlich Kozykel $u \in \mathcal{U}M(C \otimes S)$ und $v \in \mathcal{U}M(D \otimes S)$ für die trivialen Kowirkungen, d.h. u und v sind unitäre Kodarstellungen (vgl. 1.2.3) mit der zusätzlichen analytischen Bedingung $(1 \otimes S) \cdot u \cdot (C \otimes 1_S) \subseteq C \otimes S$ und $(1 \otimes S) \cdot v \cdot (D \otimes 1_S) \subseteq D \otimes S$ aus 2.47. Mit $\mu_u : \widehat{S} \to M(C)$ bzw. $\mu_v : \widehat{S} \to M(D)$ bezeichnen wir die zu u bzw. v gehörigen nichtentarteten *-Morphismen (vgl. Bemerkung 2.6). Mit $\iota : \mathbb{C} \to M(A)$ bzw. $\iota : \mathbb{C} \to M(B)$ notieren wir die Einbettungen durch Skalare. Dann ist $(\iota \otimes id_C)$ S-äquivariant bzgl. der trivialen Kowirkung auf C und der Kowirkung $\alpha \otimes_* id_C$ auf $A \otimes C$, analog ist $(\iota \otimes id_D)$ S-äquivariant. Wegen Lemma 2.54 sind dann insbesondere $1_A \otimes u = ((\iota \otimes id_C) \otimes id_S)(u)$ bzw. $1_B \otimes v = ((\iota \otimes id_D) \otimes id_S)(v)$ Kozykel für $\alpha \otimes_* id_C$ bzw. $\beta \otimes_* id_D$ und folglich ist

$$\xi\natural(u, v) := Ad(1_A \otimes u, 1_B \otimes v) \circ (\xi \otimes_* id_Y) : (X \otimes Y) \longrightarrow M((X \otimes Y) \otimes S)$$

eine S-Kowirkung auf $X \otimes Y$. Die Koeffizienten-Kowirkungen bezeichnen wir dementsprechend mit $\alpha\natural u$ und $\beta\natural v$.

Wir erhalten eine Verallgemeinerung von Lemma 2.56:

2.58 Lemma. *Es sei (S,Δ) wie in Lemma 2.56 und $(\widehat{S},\widehat{\Delta})$ das starke universelle Dual mit Koprodukt $\widehat{\Delta}$ (vgl. 1.2.5). Es bezeichne $\widehat{\Delta}^{op} := \sigma\circ\widehat{\Delta}$ das entgegengesetzte Koprodukt auf $\widehat{S}$ (vgl. 1.2.6). Mit den Bezeichungen aus Bemerkung 2.57 gibt es einen kovarianten Homomorphismus*

$$(j_\xi\otimes id_Y, (j^\alpha_{\widehat{S}}\otimes\mu_u)\widehat{\Delta}^{op}, (j^\beta_{\widehat{S}}\otimes\mu_v)\widehat{\Delta}^{op})) : ((X\otimes Y, \xi\natural(u,v)), \widehat{S}) \longrightarrow M((X\rtimes_\xi\widehat{S})\otimes Y)$$

(in der Schreibweise aus Bemerkung 2.22), der einen surjektiven Morphismus

$$_{\omega(u)}\Omega(u,v)_{\omega(v)} : (X\otimes Y)\rtimes_{\xi\natural(u,v)}\widehat{S}\longrightarrow (X\rtimes_\xi\widehat{S})\otimes Y$$

von Hilbert-Bimoduln induziert. Dieser ist $(\widehat{\xi\natural(u,v)})$-$(\widehat{\xi}\otimes_* id_Y)$-äquivariant. Weiterhin gilt die folgende Identität von Morphismen von Hilbert-Bimoduln,

$$\Omega(u,v) = [(j_\xi\otimes id_Y)\times(\mathfrak{u}_{\alpha,13},\mathfrak{u}_{\beta,13})]\circ\Lambda^{X\otimes Y}_{(1\otimes u),(1\otimes v)},$$

wobei wir die Notationen aus Proposition 2.52 und Lemma 2.56 benutzen. Insbesondere ist $\Omega(u,v)$ ein Isomorphismus falls die Koeffizienten-Algebren C und D nuklear sind.

Wir benutzen hierbei parallel die Konventionen aus den Bemerkung 2.6 und 2.22.

Beweis. Wir müssen nach Bemerkung 2.22 nur zeigen, daß die Verknüpfung

$$[(j_X\otimes id_Y)\times(\mathfrak{u}_{\alpha,13},\mathfrak{u}_{\beta,13})]\circ\Lambda^{X\otimes Y}_{1\otimes u,1\otimes v} : (X\otimes Y)\rtimes_{\xi\natural(u,v)}\widehat{S}\longrightarrow X\rtimes_\xi\widehat{S}\otimes Y$$

durch Vorschalten der kanonischen Abbildungen $j_{\xi\natural(u,v)}$, $j^{\alpha\natural u}_{\widehat{S}}$ und $j^{\beta\natural v}_{\widehat{S}}$ das Tripel

$$(j_\xi\otimes id_Y, (j^\alpha_{\widehat{S}}\otimes\mu_u)\widehat{\Delta}^{op}, (j^\alpha_{\widehat{S}}\otimes\mu_v)\widehat{\Delta}^{op})$$

ergibt. Dieses ist dann automatisch kovariant bzgl. der Kowirkung $\xi\natural(u,v)$ und die restlichen Behauptungen sind mit Proposition 2.52 und Lemma 2.56 klar. Man setzt die Definitionen ein und erhält für die erste Komponente des Tripels

$$[(j_\xi\otimes id)\times(\mathfrak{u}_{\alpha,13},\mathfrak{u}_{\beta,13})]\circ\Lambda^{X\otimes Y}_{(1\otimes u),(1\otimes v)}\circ j_{\xi\natural(u,v)} = [(j_\xi\otimes id)\times(\mathfrak{u}_{\alpha,13},\mathfrak{u}_{\beta,13})]\circ j_{\xi\otimes_* id} = j_\xi\otimes id_Y.$$

Für die zweite Komponente muß man die Gleichung $[(j_\alpha\otimes id_C)\times\mathfrak{u}_{\alpha,13}]\circ\lambda^{A\otimes C}_{1\otimes u}\circ j^{\alpha\natural u}_{\widehat{S}} = (j^\alpha_{\widehat{S}}\otimes\mu_u)\widehat{\Delta}^{op}$ zeigen. Es genügt, daß beide Seiten dasselbe Ergebnis liefern, wenn sie auf den linken Tensoranden der universellen Kowirkung $\mathfrak{u}\in\mathcal{U}M(\widehat{S}\otimes S)$ angewendet werden (vgl. 1.2.4): Man setzt die Definitionen der beteiligten Morphismen ein und erhält auf der einen Seite

$$\begin{aligned}
(([(j_\alpha\otimes id_C)\times\mathfrak{u}_{\alpha,13}]\circ\lambda^{A\otimes C}_{1\otimes u}\circ j^{\alpha\natural u}_{\widehat{S}})\otimes id_S)(\mathfrak{u})\\
&= ((([(j_\alpha\otimes id_C)\times\mathfrak{u}_{\alpha,13}]\circ\lambda^{A\otimes C}_{1\otimes u})\otimes id_S)(\mathfrak{u}_{\alpha\natural u})\\
&= ([(j_\alpha\otimes id_C)\times\mathfrak{u}_{\alpha,13}]\otimes id_S)((j_{\alpha\otimes_* id}\otimes id_S)(1_A\otimes u)\cdot\mathfrak{u}_{\alpha\otimes_* id})\\
&= ((j_\alpha\otimes id_C)\otimes id_S)(1_A\otimes u)\cdot\mathfrak{u}_{\alpha,13}\\
&= (1_{A\rtimes\widehat{S}}\otimes u)\cdot\mathfrak{u}_{\alpha,13}.
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ergibt sich nach Definition des dualen Koprodukts $\widehat{\Delta}$ (vgl. 1.2.4)

$$\begin{aligned}((j_{\widehat{S}}^{\alpha} \otimes \mu_u)\widehat{\Delta}^{op} \otimes id_S)(\mathfrak{u}) &= ((j_{\widehat{S}}^{\alpha} \otimes \mu_u) \otimes id_S)((\sigma \otimes id_S)((\widehat{\Delta} \otimes id_S)(\mathfrak{u}))) \\ &= ((j_{\widehat{S}}^{\alpha} \otimes \mu_u) \otimes id_S)((\sigma \otimes id_S)(\mathfrak{u}_{13} \cdot \mathfrak{u}_{23}) \\ &= (j_{\widehat{S}}^{\alpha} \otimes \mu_u \otimes id_S)(\mathfrak{u}_{23} \cdot \mathfrak{u}_{13}) \\ &= (1_{A \rtimes \widehat{S}} \otimes u) \cdot \mathfrak{u}_{\alpha,13}.\end{aligned}$$

Folglich sind beide Seiten identisch. Eine analoge Rechung zeigt, daß für die rechte Seite $[(j_\beta \otimes id_D) \times (j_{\widehat{S}}^{\beta} \otimes 1_D)] \circ \lambda_{1\otimes v}^{B\otimes D} \circ j_{\widehat{S}}^{\beta\natural V} = (j_{\widehat{S}}^{\beta} \otimes \mu_V)\widehat{\Delta}^{op}$ gilt. □

§ 2.8 Normalisierung von Kowirkungen

In diesem Abschnitt sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra für die verschränkte Produkte existieren.

Im allgemeinen wird die Strukturabbildung $j_\xi : X \to M(X \rtimes_\xi \widehat{S})$ eines S-äquivarianten Rechts-Hilbert-Bimoduls $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ nicht injektiv sein, und man kann X deshalb nicht kanonisch als Unter-Bimodul von $M(X \rtimes_\xi \widehat{S})$ realisieren. Wir betrachten in diesem Abschnitt die Klasse der S-Kowirkungen, die diese Eigenschaft besitzen, die sog. *normalen* Kowirkungen. Diese wurden zuerst im Fall von G-Kowirkungen auf C^*-Algebren in [**54**] betrachtet.

2.59 Definition. 1. Eine S-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ heißt *normal*, falls die Strukturabbildung ${}_{j_\alpha}j_{\xi_{j_\beta}} : {}_AX_B \to M({}_{A\rtimes\widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}})$ (vgl. Definition 2.21) injektiv als Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln ist (vgl. 1.1.10).

2. Mit $\mathcal{HBM}_S^{n,(ne)}$ bzw. $\mathfrak{M}_S^{n,(ne)}$ sei die volle Unterkategorie von $\mathcal{HBM}_S^{(ne)}$ bzw. $\mathfrak{M}_S^{(ne)}$ (vgl. § 1.5) bezeichnet, deren Objekte bzw. Objekte und Morphismen normale (nichtentartete) S-Kowirkungen sind.

2.60 Beispiel. Bezeichne ${}_{A\rtimes\widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}}$ das verschränkte Produkt einer (nichtentarteter) S-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ und $(j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ den universellem kovarianten Homomorphismus. Seien $\delta_\alpha^\bullet$ bzw. $\delta_\beta^\bullet$ die zu $\mathfrak{u}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{u}_\beta$ gehörigen unitären Kowirkungen (vgl. Bemerkung 2.17). ${}_{j_\alpha(A)}j_\xi(X)_{j_\beta(B)}$ ist ein Unter-rechts-Hilbert-Bimodul von $M({}_{A\rtimes\widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}})$, den wir im folgenden auch mit $j_\xi(X)$ bezeichnen. Dann ist wegen der Kovarianz-Identität $Ad(\delta_\alpha^\bullet, \delta_\beta^\bullet) \circ j_\xi = (j_\xi \otimes id_S)\xi$ (vgl. Bemerkung 2.19(3.)) die Einschränkung der Adjunktion $\xi^n := Ad(\delta_\alpha^\bullet, \delta_\beta^\bullet)|_{j_\xi(X)}$ eine (nichtentartete) S-Kowirkung auf $j_\xi(X)$ mit Koeffizienten-Kowirkungen $\alpha^n := Ad(\delta_\alpha^\bullet)$ und $\beta^n := Ad(\delta_\beta^\bullet)$, so daß $j_\xi : (X, \xi) \to (j_\xi(X), \xi^n)$ eine S-äquivariante Surjektion ist. Man verifiziert deshalb leicht, daß die Inklusion $\iota : j_\xi(X) \subseteq M(X \rtimes_\xi \widehat{S})$ zusammen mit den unitären Kodarstellungen $\mathfrak{u}_\alpha$ und $\mathfrak{u}_\beta$ ein universeller kovarianter Homomorphismus für $(j_\xi(X), \xi^n)$ ist. Folglich ist $({}_{A\rtimes\widehat{S}}X \rtimes_\xi \widehat{S}_{B\rtimes\widehat{S}}, \iota, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ ein verschränktes Produkt der Kowirkung $(j_\xi(X), \xi^n)$, die deshalb normal ist.

Abstrakt ausgedrückt ist $\iota \times (\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta) : j_\xi(X) \rtimes_{\xi^n} \widehat{S} \to X \rtimes_\xi \widehat{S}$ ein Isomorphimus mit Inverser $j_\xi \rtimes \widehat{S}$ (man benutze das Kriterium 1.1.20 für Isomorphie).

2.61 Bemerkung. Wegen $\ker(j_\xi) = \overline{X \cdot \ker(j_\beta)}$ (vgl. [**15**, Lemma 1.20]) ist eine Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ genau dann normal, wenn die beiden Koeffizienten-Kowirkungen (A, α) und (B, β) normal sind.

Das folgende Lemma charakterisiert normale Kowirkungen und ist eine Verallgemeinerung von [**54**, Lemma 2.2]. Es wird auch genauso bewiesen.

2.62 Lemma. *Eine Rechts-Hilbert-Bimodul-S-Kowirkung* $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ *ist genau dann normal, wenn es einen kovarianten Homomorphismus* $(\Pi, u, v) : (X, \widehat{S}) \to M({}_CY_D)$ *mit injektivem* Π *gibt.* □

Es ist zwar nicht jede Kowirkung normal, aber sie besitzt zumindest einen eindeutig bestimmten „größten" normalen Quotienten. Diesen nennen wir die *Normalisierung:*

2.63 Definition. Es sei $({}_AX_B, {}_\beta\xi_\beta)$ ein S-äquivarianter Rechts-Hilbert-Bimodul. Eine *Normalisierung* von (X, ξ) ist ein normaler S-äquivarianter Quotient von (X, ξ) mit Quotientenabbildung

$$ {}_{\eta_\alpha}\eta_{\xi_{\eta_\beta}} : ({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \longrightarrow ({}_{A^n}X^n{}_{B^n}, {}_{\alpha^n}\xi^n{}_{\beta^n}) \ , $$

der die *universelle Eigenschaft* bzgl. äquivarianter Morphismen in normale Kowirkungen besitzt. Damit ist gemeint, daß jeder nichtentartete S-äquivariante Morphimus ${}_\psi\Phi_\varphi$: $(X, \xi) \to M({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$ in eine normale Kowirkung (Y, ζ) über η_ξ faktorisiert. Diese Faktorisierung ist eindeutig, da η_ξ surjektiv ist. Wir nennen η_ξ die *Normalisierungs-Abbildung* oder kurz *Normalisierung.*

Dieser Begriff wäre natürlich nutzlos, wenn man nicht die Existenz von Normalisierungen zeigen könnte. Die folgende Konstruktion ist die naheliegende Verallgemeinerung von [**54**, Proposition 2.3] und stellt die ursprüngliche Definition der Normalisierung in [**54**, Definition 2.4] dar.

2.64 Lemma. *Mit den Bezeichnungen aus Beispiel 2.60 ist* $j_\xi : (X, \xi) \to (j_\xi(X), \xi^n)$ *eine Normalisierung.*

Beweis. Wir unterdrücken die Koeffizienten-Daten. Es sei (Y, ζ) eine normale S-Kowirkung und $\Phi : (X, \xi) \to M(Y, \zeta)$ äquivariant und nichtentartet. Dann gibt es nach Bemerkung 2.36 einen Morphismus $\Phi \rtimes \widehat{S}$ der verschränkten Produkte mit $j_\zeta \circ \Phi = \Phi \rtimes \widehat{S} \circ j_\xi$. Da j_ζ nach Voraussetzung injektiv ist, faktorisiert Φ also über j_ξ. □

Man kann die Normalisierung von Hilbertmoduln auch konkret construieren, sobald man die Normalisierung von C^*-Algebren zur Verfügung hat.

2.65 Bemerkung.

1. Die Konstruktion der Normalisierung von $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ zeigt insbesondere, daß die Koeffizienten-Algebren der Normalisierung mit den Normalisierungen der Koeffizienten-Abbildungen identisch sind, denn sie stimmen beide mit $j_\beta(B)$ bzw. $j_\alpha(A)$ überein.

2. Aus dem ersten Teil folgt, daß die Normalisierung von $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ als B^n-Hilbertmodul isomorph zu $X \otimes_B B^n$ ist: $X \otimes_B B^n \xrightarrow{\cong} X^n{}_{B^n}$ mit $x \otimes_B b \longmapsto \eta_\xi(x)b$ für x in X und b in B^n.

Die folgende Proposition klärt die funktorielle Eigenschaft der Normalisierung und zeigt insbesondere, daß Normalisierungen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind.

2.66 Proposition. *Es sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra für die verschränkte Produkte existieren. Die Normalisierung definiert Funktoren der folgenden Kategorien (vgl. § 1.5):*

$$\begin{array}{ll} 1. & (\cdot)^n : \mathcal{HBM}_S^{(ne)} \to \mathcal{HBM}_S^{n,(ne)} \\ 2. & (\cdot)^n : \mathfrak{M}_S^{(ne)} \to \mathfrak{M}_S^{n,(ne)} \end{array}$$

Die Normalisierungs-Abbildungen definieren in beiden Fällen eine natürliche Transformation $\eta_\bullet$ bzw. $[\eta_\bullet] : \mathcal{I}d \to (.)^n$ vom Identitätsfunktor auf $\mathcal{HBM}_S^{(ne)}$ bzw. $\mathfrak{M}_S^{(ne)}$ in den Normalisierungs-Funktor. Dieser ist daher eine Retraktion des Inklusions-Funktors $\mathcal{HBM}_S^{n,(ne)} \subseteq \mathcal{HBM}_S^{(ne)}$ bzw. $\mathfrak{M}_S^{n,(ne)} \subseteq \mathfrak{M}_S^{(ne)}$ (das bedeutet, er fixiert normale Kowirkungen bis auf kanonische Isomorphie).

Beweis. Normalisierungen existieren nach Lemma 2.64. Für den ersten Fall sei $\Phi : (X, \xi) \to M(Y, \zeta)$ ein S-äquivarianter Morphismus. Dann gibt es nach der universellen Eigenschaft in Definition 2.63 einen eindeutig bestimmten Morphismus $\Phi^n : (X^n, \xi^n) \to M(Y^n, \zeta^n)$ mit $\eta_\zeta \circ \Phi = \Phi^n \circ \eta_\xi$. Es folgt gleichzeitig die Funktorialität und Natürlichkeit von $\eta_\bullet$. Die restlichen Behauptungen für (1.) sind klar. Der zweite Teil wird auf S. 53 bewiesen. □

Die folgenden Aussagen sind eine direkte Folgerung der universellen Eigenschaft einer Normalisierung (Definition 2.63) und der Eindeutigkeits-Aussage im ersten Teil der Proposition 2.66.

2.67 Korollar. *Es seien (X, ξ) und (Y, ζ) S-Kowirkungen, so daß die Normalisierung η_ξ über surjektive und äquivariante Morphismen Λ und Γ faktorisiert:*

$$\begin{array}{ccc} (X, \xi) & \xrightarrow{\eta_\xi} & (X^n, \xi^n) \\ \Lambda \downarrow & & \| \\ (Y, \zeta) & \xrightarrow{\Gamma} & (X^n, \xi^n). \end{array}$$

Dann ist $\Gamma : (Y, \zeta) \to (X^n, \xi^n)$ eine Normalisierung. Ist insbesondere (Y, ζ) eine normale Kowirkung, so ist Γ ein Isomorphismus und Λ eine Normalisierung.

Es gibt die folgende nützliche Charakterisierung der Normalisierung, welche mit der Definition in [**14**, Section 2] übereinstimmt.

2.68 Proposition. *Es sei (X, ξ) eine S-Kowirkung und $\widetilde{\eta} : (X, \xi) \to (\widetilde{X}, \widetilde{\xi})$ ein surjektiver äquivarianter Morphismus, wobei $(\widetilde{X}, \widetilde{\xi})$ eine normale S-Kowirkung ist. Dieser ist genau dann eine Normalisierung im Sinne von Definition 2.63, wenn sein verschränktes Produkt $\widetilde{\eta} \rtimes \widehat{S} : X \rtimes_\xi \widehat{S} \to \widetilde{X} \rtimes_{\widetilde{\xi}} \widehat{S}$ ein Isomorphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus Lemma 2.64, der Bijektivität von $j_\xi \rtimes \widehat{S}$ (vgl. Beispiel 2.60) und der Eindeutigkeit der Normalisierung (vgl. Proposition 2.66(1.)). Ist umgekehrt $\widetilde{\eta} \rtimes \widehat{S} : X \rtimes_\xi \widehat{S} \to \widetilde{X} \rtimes_{\widetilde{\xi}} \widehat{S}$ ein Isomorphimus, so betrachte einen äquivarianten nichtentarteten Morphismus $\Phi : (X, \xi) \to M(Y, \zeta)$ in eine normale Kowirkung (Y, ζ). Dann gilt $j_\zeta \circ \Phi = \Phi \rtimes \widehat{S} \circ j_\xi = \Phi \rtimes \widehat{S} \circ (\widetilde{\eta} \rtimes \widehat{S})^{-1} \circ \widetilde{\eta}$, und Φ faktorisiert wegen der Injektivität von j_ζ über $\widetilde{\eta}$. □

Beweis des zweiten Teils von Proposition 2.66. Nach dem ersten Teil erhält der Normalisierungs-Funktor äquivariante unitäre Äquivalenzen (vgl. 1.4.7). Folglich ist die Zuordnung $[(X,\xi)] \mapsto [(X^n,\xi^n)]$ eine wohldefinierte Abbildung $\mathfrak{M}_S((A,\alpha),(B,\beta)) \to \mathfrak{M}_S^n((A^n,\alpha^n),(B^n,\beta^n))$, die offenbar mit den $\mathfrak{M}_S$-Identitäten verträglich ist. Es bleibt zu zeigen, daß die Normalisierung das $\mathfrak{M}_S$-Produkt erhält. Seien $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ und $({}_BY_C, {}_\beta\zeta_\gamma)$ Rechts-Hilbert-Bimodul-S-Kowirkungen. Dann ist das Tensorprodukt (vgl. 1.4.5) der Normalisierungen $\eta_\xi \otimes_B \eta_\zeta : (X \otimes_B Y, \xi \sharp_B \zeta) \to (X^n \otimes_{B^n} Y^n, \xi^n \sharp_{B^n} \zeta^n)$ ein surjektiver S-äquivarianter Morphimus in eine (wegen Bemerkung 2.61) normale S-Kowirkung. Benutzt man die Verträglichkeit von verschränkten Produkten mit inneren Tensorprodukten (Korollar 2.40), so folgt, daß $(\eta_\xi \otimes_B \eta_\zeta) \rtimes \widehat{S}$ ein Isomorphismus ist. Also ist nach Proposition 2.68 die Abbildung $\eta_\xi \otimes_B \eta_\zeta : X \otimes_B Y \to X^n \otimes_{B^n} Y^n$ eine Normalisierung. Die Normalisierung ist daher mit dem inneren Tensorprodukt verträglich. Die induzierte Abbildung auf $\mathfrak{M}_S$-Niveau erhält also Produkte. Man beachte, daß die Familie $[\eta_\bullet]$ durch die Abbildungen $[\eta]_{(A,\alpha)} := [\eta_\alpha]$ in $\mathfrak{M}_S((A,\alpha),(A^n,\alpha^n))$ gegeben ist. Die Natürlichkeit folgt somit aus Bemerkung 2.65. Die restlichen Aussagen sind klar. □

Da $\mathfrak{M}_S$-Isomorphismen genau durch äquivariante Imprimitivitäts-Bimoduln gegeben sind (vgl. 1.5.3), folgt sofort:

2.69 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Proposition 2.72 sei* $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ *eine äquivariante Morita-Äquivalenz. Dann ist auch die Normalisierung* $({}_{A^n}X^n{}_{B^n}, {}_{\alpha^n}\xi^n{}_{\beta^n})$ *eine Morita-Äquivalenz und die kanonische Surjektion* $\eta_\xi : {}_AX_B \to {}_{A^n}X^n{}_{B^n}$ *ein Morphismus von Imprimitivitäts-Bimoduln.*

Man kann auch adjungierbare Operatoren zwischen Hilbertmoduln normalisieren. Diese werden durch Adjungieren mit den Normalisierungs-Abbildungen konstruiert.

2.70 Lemma. *Es seien* $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ *und* $({}_CY_B, {}_\gamma\zeta_\beta)$ *S-äquivariante Hilbert-Bimoduln über* (B,β). *Die Adjunktion* $(\cdot)^n := Ad(\eta_\zeta,\eta_\xi) : \mathcal{L}_B(X_B,Y_B) \to \mathcal{L}_{B^n}(X^n{}_{B^n}, Y^n{}_{B^n})$ *(vgl. 1.1.12) ist natürlich: Für* F *in* $\mathcal{L}_B(X,Y)$ *gilt* $F^n \circ \eta_\xi = \eta_\zeta \circ F$. *Weiterhin induziert sie eine Surjektion* $(\cdot)^n : \mathcal{K}_B(X,Y) \to \mathcal{K}_{B^n}(X^n,Y^n)$. *Insbesondere haben wir einen surjektiven Homomorphismus* $Ad(\eta_\xi) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X^n)$ *von* C^**-Algebren.*

Beweis. Die Morphismen η_ξ und η_ζ sind surjektiv und insbesondere nichtentartet. Also kann man 1.1.12 anwenden und erhält die Adjunktions-Abbildung $Ad(\eta_\zeta,\eta_\xi)$, welche alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Jeder Rang-Eins-Operator in $\mathcal{K}(X^n,Y^n)$ ist von der Form $\vartheta_{\eta_\zeta(y),\eta_\xi(x)} = Ad(\eta_\zeta,\eta_\xi)(\vartheta_{y,x})$, woraus die letzte Behauptung folgt. □

Wir werden nun auf eine weitere Verträglichkeit der Normalisierung mit äquivarianten Morita-Äquivalenzen (vgl. 1.4.9) hinarbeiten. Der wichtigste Schritt ist:

2.71 Lemma. *Es sei* $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ *ein Hilbert-Bimodul mit S-Kowirkung und normaler Koeffizienten-Kowirkung* (B,β). *Dann ist die Normalisierung durch* ${}_{\eta_\alpha}(id_X)_{id_B} : {}_AX_B \to {}_{A^n}X_B$ *gegeben.*

Beweis. Wegen $\ker(j_\xi) = \overline{X \cdot \ker(j_\beta)}$ (vgl. [**15**, Lemma 1.20]) ist auch die Abbildung j_ξ injektiv. Das Bild des Struktur-Homomorphismus ${}_{j_\alpha(A)}j_\xi(X)_{j_\beta(B)}$ identifiziert sich folglich mit ${}_{j_\alpha(A)}X_B$. Also muß man nur noch die linke Koeffizienten-Kowirkung normalisieren. □

Dieselbe Technik zeigt sofort, daß Normalität unter starker Morita-Äquivalenz invariant ist.

2.72 Proposition. *Es sei (S, Δ) eine stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra (vgl. 1.2.5) für welche verschränkte Produkte existieren und $({}_A X_B, {}_\alpha \xi_\beta)$ ein äquivarianter Imprimitivitäts-Bimodul (vgl. 1.4.9). Dann ist (A, α) genau dann normal, wenn (B, β) normal ist.*

Beweis. Wir benutzen die Realisierung $(\mathcal{K}(X \rtimes_\xi \widehat{S}), Ad(j_\xi), j^\xi_{\widehat{S}})$ des verschränkten Produkts von $(\mathcal{K}(X), Ad(\xi)) \cong (A, \alpha)$ (vgl. Satz 2.43). Dann identifiziert sich j_α mit $Ad(j_\xi)$. Somit ist genau dann eine der Abbildungen j_α, j_ξ und j_β injektiv, wenn alle drei gleichzeitig injektiv sind. □

Es gibt einen natürlichen Kandidaten für die Normalisierung von $(\mathcal{K}(X), Ad(\xi))$:

2.73 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Proposition 2.72 an (S, Δ) sei $({}_A X_B, {}_\alpha \xi_\beta)$ eine S-Kowirkung, wobei ξ als Morphismus beidseitig nichtentartet ist (vgl. 1.1.10). Dann ist der surjektive *-Homomorphismus $Ad(\eta_\xi) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X^n)$ eine Normalisierung.*

Beweis. Eine ähnliche Argumentation wie im Beweis von Proposition 2.72 zeigt, daß $(\mathcal{K}(X^n), Ad(\xi^n))$ eine normale Kowirkung ist. Offenbar ist $Ad(\eta_\xi)$ äquivariant. Aus dem Lemma 2.44(2.) folgt die Verträglichkeit $\iota_{\mathcal{K}(X^n) \rtimes \widehat{S}} \circ (Ad(\eta_\xi) \rtimes \widehat{S}) = Ad(\eta_\xi \rtimes \widehat{S}) \circ \iota_{\mathcal{K}(X) \rtimes \widehat{S}}$. Daher ist mit $\eta_\xi \rtimes \widehat{S}$ auch $Ad(\eta_\xi) \rtimes \widehat{S}$ ein Isomorphismus. Damit ist nach Proposition 2.68 $Ad(\eta_\xi)$ eine Normalisierung. □

3. Kapitel: Duale Paare von Quantengruppen

Wir verwenden die Bezeichnungen aus § 1.3. In diesem Abschnitt sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine dichte multiplikative Unitäre und $(\widehat{S}_V, S_V)$ bzw. $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v}, S_u)$ das zugehörige reduzierte bzw. universelle Paar von Quantengruppen mit beidseitig universeller Bi-Darstellung $\mathfrak{v}$ (vgl. 1.3.5). Mit $\mathcal{K}$ seien wie in 1.3.1 die kompakten Operatoren auf H bezeichnet. Wir benutzen außerdem die folgenden Sprechweisen und Notationen:

3.1 Notation. Unter einer *vollen* bzw. *reduzierten S-Kowirkung* verstehen wir eine Kowirkung der Hopf-C^*-Algebra (S_u, Δ_u) bzw. (S_V, Δ) im Sinne von § 1.4. Eine analoge Sprechweise verwenden wir auch für das Dual $\widehat{S}$ von S.

Für $\widehat{S}$ notieren wir außerdem verschränkte Produkte einer vollen oder reduzierten $\widehat{S}$-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ naheliegenderweise mit $({}_{A\rtimes S}X \rtimes_\xi S_{B\rtimes S}, \hat{\jmath}_\xi, \widehat{\mathfrak{u}}_\alpha, \widehat{\mathfrak{u}}_\beta)$ und verwenden $\hat{\jmath}^\alpha_S$ bzw. $\hat{\jmath}^\beta_S$ für die zu $\widehat{\mathfrak{u}}_\alpha$ bzw. $\widehat{\mathfrak{u}}_\beta$ gehörigen *-Morphismen (vgl. Bemerkung 2.6).

Für Kowirkungen einer lokalkompakten Gruppe G (d.h. falls $S = C^*_r(G)$ bzw. $S = C^*_r(G)$ ist) sprechen wir von *reduzierten* bzw. vollen G-Kowirkungen.

Ist (X, ξ) ein Hilbertmodul mit $\mathcal{C}_0(G)$-Kowirkung (d.h. mit einer G-Wirkung), so verwenden wir die übliche Notation $X \rtimes_\xi G$ für das verschränkte Produkt. Entsprechend verwenden wir in Anlehnung an den abelschen Fall für das verschränkte Produkt einer (reduzierten oder vollen) G-Kowirkung (X, ξ) die Bezeichnung $X \rtimes_\xi \widehat{G}$.

§ 3.1 Symmetrische multiplikative Unitäre

Wir werden zunächst einige Kovarianz-Gleichungen herleiten.

3.2 Lemma. *Es seien $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ und $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v}, S_u)$ wie oben. Für ein Paar von nicht-entarteten *-Morphismen $\nu : S_u \to M(C)$ und $\mu : \widehat{S}_u \to M(C)$ die folgenden Aussagen sind äquivalent (man beachte die Notationen 1.0.4 und 1.0.5):*

1. *Das Paar $(\nu, \mu) : (S_u, \widehat{S}_u) \to M(C)$ ist kovariant im Sinne von Definition 2.1 bzw. Bemerkung 2.6.*

2. *Es gilt die Gleichung $\mathfrak{v}_{13} = (\mathfrak{v}^\nu)^*_{12} \cdot ({}^\mu\mathfrak{v})_{23} \cdot (\mathfrak{v}^\nu)_{12} \cdot ({}^\mu\mathfrak{v})^*_{23}$ in $\mathcal{U}M(\widehat{S}_u \otimes C \otimes S_u)$.*

3. *Es gilt die Kovarianz-Identität $Ad(\mathfrak{v}^\nu) \circ (id \otimes \mu) \circ \widehat{\Delta}_u = 1_{\widehat{S}_u} \otimes \mu$.*

Beweis. Nach Definition ist (1.) die Identität $Ad({}^\mu\mathfrak{v}) \circ (\nu \otimes 1_{S_u}) = (\nu \otimes id) \circ \Delta_u$. Wendet man diese Gleichung auf den zweiten Tensoranden von $\mathfrak{v}$ an, so folgt nach Umsortieren (2.). Aus der universellen Eigenschaft von $(S_u, \mathfrak{v})$ folgt demnach, daß (1.) und (2.) äquivalent sind. Analog zeigt man die Äquivalenz von (2.) und (3.), indem man die universelle Eigenschaft von $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v})$ (mit der Konvention aus 1.3.2) benutzt. □

3.3 Bemerkung. Eine dem zweiten Teil sehr verwandte Gleichung wurde in [**4**, (3) auf S. 482] als Definition für Kovarianz benutzt. Man erhält sie durch Anwenden von $(\widehat{\pi} \otimes id_C \otimes \pi)$ auf die Gleichung in (2.) und Umsortieren.

Man hat nach Konstruktion von $\mathfrak{v}$ in 1.3.5 die Gleichung des zweiten Teils mit $\nu = \pi$ und $\mu = \widehat{\pi}$ zur Verfügung, denn es ist $\mathfrak{u} = \mathfrak{v}^\pi$ und $\widehat{\mathfrak{u}} = {}^\pi\mathfrak{v}$. Insbesondere folgt aus dem Lemma 3.2:

3.4 Korollar. *Mit den Notationen aus Lemma 3.2 ist* $(\pi, \widehat{\pi}) : (S_u, \widehat{S}_u) \to M(\mathcal{K})$ *kovariant, und dies ist äquivalent zu der Kovarianz-Identität* $Ad(\mathfrak{v}^\pi) \circ (id \otimes \widehat{\pi}) \circ \widehat{\Delta}_u = 1_{\widehat{S}_u} \otimes \widehat{\pi}$.

Aus dem Korollar liest man sofort ab, daß $\ker((\pi \otimes id) \circ \Delta_u) = \ker(\pi)$ und genauso $\ker((id \otimes \widehat{\pi}) \circ \widehat{\Delta}_u) = \ker(\widehat{\pi})$ ist. Also hat man Faktorisierungen:

3.5 Korollar. *Es sei* $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ *wie oben. Es gibt einen eindeutigen injektiven nichtentarteten* **-Morphismus* $\Delta_{rf} : S_V \to M(S_V \otimes S_u)$ *mit* $\Delta_{rf} \circ \pi = (\pi \otimes id) \circ \Delta_u$*. Dieser ist eine nichtentartete Rechts-*S_u*-Kowirkung. Analog gibt es eine eindeutig bestimmte nichtentartete Links-*$\widehat{S}_u$*-Kowirkung* ${}_{fr}\widehat{\Delta} : \widehat{S}_V \to M(\widehat{S}_u \otimes \widehat{S}_V)$ *auf* $\widehat{S}_V$ *mit* ${}_{fr}\widehat{\Delta} \circ \widehat{\pi} = (id \otimes \widehat{\pi}) \circ \widehat{\Delta}_u$.

Da $\widehat{S}_u$ bzw. S_u gegenseitige starke universelle Duale sind (vgl. 1.3.5), kann man den Existenzsatz 2.13 anwenden und sieht, daß verschränkte Produkte von C^*-Algebren mit Rechts-S_u-Kowirkung existieren. Die Situation ist aber in dem Sinne unsymmetrisch, daß es keine „kanonische" kovariante Darstellung des Paares $(\widehat{S}_u, S_u)$ gibt. Man hat zwar die Kovarianz-Gleichung 3.2(2.), aber das liefert kein kovariantes Paar $(\widehat{\pi}, \pi) : (\widehat{S}_u, S_u) \to M(\mathcal{K})$, sondern garantiert lediglich die Existenz von verschränkten Produkten von C^*-Algebren mit *Links*-$\widehat{S}_u$-Kowirkung. Man muß also eine zusätzliche Symmetriebedingung an die multiplikative Unitäre V stellen:

3.6 Definition. Unter Verwendung der Begriffe aus § 1.3 heißt eine C^*-algebraische dichte multiplikative Unitäre $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ *symmetrisch*, wenn es einen unitären Operator $U \in \mathcal{U}(H)$ mit $U^2 \in \mathbb{C} \cdot 1_H$ gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Paar $(Ad(U) \circ \widehat{\pi}, \pi) : (\widehat{S}_u, S_u) \to M(\mathcal{K})$ ist kovariant. Das bedeutet, es gilt $Ad({}^\pi\sigma(\mathfrak{v})) \circ (Ad(U)\widehat{\pi} \otimes 1_{\widehat{S}_u}) = (Ad(U)\widehat{\pi} \otimes id) \circ \widehat{\Delta}_u$ (vgl. Definition 2.2 bzw. Bemerkung 2.6 und die Behauptung in 1.3.5).

2. Die Bilder von $Ad(U)\pi$ und π sowie von $Ad(U)\widehat{\pi}$ und $\widehat{\pi}$ kommutieren jeweils.

Hierbei ist $\mathfrak{v}$ die beidseitig universelle Darstellung zu V (vgl. die Definition in 1.3.5), und $\sigma(\mathfrak{v}) \in \mathcal{U}M(S_u \otimes \widehat{S}_u)$ bezeichnet die zu $\mathfrak{v}$ „geflippte" Unitäre (vgl. 1.0.4). Wir setzen zur Abkürzung $\pi_U := Ad(U)\pi$ und $\widehat{\pi}_U := Ad(U)\widehat{\pi}$.

3.7 Bemerkung. Da U bis auf einen nichttrivialen Skalar mit seinem Adjungierten U^* übereinstimmt, ist es egal, ob man mit U oder mit U^* konjugiert. Insbesondere sind also $Ad(U) = Ad(U^*) : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ dieselben *-Automorphismen, und folglich ist $Ad(U)^2 = id_{\mathcal{L}(H)}$. Durch Reskalieren kann man natürlich immer erreichen, daß $U^2 = 1$ ist. Aus dem zweiten Teil und der Definition 3.6 folgt sofort die Kovarianz-Identität $Ad({}^{\pi_U}\sigma(\mathfrak{v})) \circ (\widehat{\pi} \otimes 1_{\widehat{S}_u}) = (\widehat{\pi} \otimes id) \circ \widehat{\Delta}_u$, vgl. 1.0.5. Zur Abkürzung bezeichnen wir als *symmetrische multiplikative Unitäre* eine multiplikative Unitäre, die der Definition 3.6 genügt. Insbesondere existieren in dieser Situation also auch verschränkte Produkte von C^*-Algebren mit *Rechts*-$\widehat{S}_u$-Kowirkungen (und auch verschränkte Produkte von C^*-Algebren mit *Links*-S_u-Kowirkungen, vgl. das folgende Korollar 3.12).

3.8 Bemerkung. Die Definition 3.6 dient dazu, die verschiedenen existierenden Beispiel-Klassen zusammenzufassen und ihre Eigenschaften abstrakt zu formulieren. Daher ist die Axiomatik der Definition 3.6 sehr ähnlich der eines *schwachen Kac-Systems* in [**66**, I.2.2]. Denn aus der Kovarianz von $(\widehat{\pi}_U, \pi)$ oben folgt analog wie in Lemma 3.2(2.) die

Gleichung $(\sigma(\mathfrak{v})^{\widehat{\pi}_U})_{12} \cdot \sigma(\mathfrak{v})_{13} \cdot ({}^{\pi}\sigma(\mathfrak{v}))_{23} = ({}^{\pi}\sigma(\mathfrak{v}))_{23} \cdot (\sigma(\mathfrak{v})^{\widehat{\pi}_U})_{12}$ in $\mathcal{U}M(S_u \otimes \mathcal{K} \otimes \widehat{S}_u)$ (vgl. auch Korollar 3.12(1.)). Wendet man darauf $(\pi \otimes id_{\mathcal{K}} \otimes \widehat{\pi}_U)$ an, so erhält man mit $\widehat{V} := (\pi \otimes \widehat{\pi}_U)(\sigma(\mathfrak{v})) \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine mulitplikative Unitäre, welche sich in die Axiomatik eines schwachen Kac-Systems fügt. Offensichtlich gilt $S_{\widehat{V}} = Ad(U)(\widehat{S}_V)$ und $\widehat{S}_{\widehat{V}} = S_V$.

3.9 Beispiel. Beispiele für symmetrische multiplikative Unitäre sind etwa Kac-Systeme (H, V, U), vgl. [**4**, Définition 6.4], und insbesondere die zu lokalkompakten Gruppen gehörenden multiplikativen Unitären. Wir geben zum besseren Vergleich die korrespondierenden Bezeichnungen an, sofern sie nicht schon mit den hier verwendeten übereinstimmen:

Kac-System (H, V, U)	symmetrisches V
$S_p, \widehat{S}_p$	$S_u, \widehat{S}_u$
L, ρ	$\pi, \widehat{\pi}$
R, λ	$\pi_U, \widehat{\pi}_U$
V', V''	$\mathfrak{u}, \widehat{\mathfrak{u}}$

Daneben ist eine multiplikative Unitäre W, die zu einer lokalkompakten Quantengruppe nach Kustermans und Vaes ([**35**] und [**36**], vgl. auch 1.3.6) symmetrisch: Man benutzt die modulare Konjugation J des links-invarianten Gewichts (und ebenso $\widehat{J}$ für das Dual), welche ein selbstinverser anti-unitärer Operator auf der GNS-Darstellung H ist, vgl. die Einleitung von [**36**]. Das Produkt $U := J\widehat{J}$ ist ein unitärer Operator mit $U^2 \in \mathbb{C} \cdot 1$ [**40**, Proposition 3.13 und 3.14], wodurch W nach [**40**, Definition 3.4(4) und Lemma 3.7] eine symmetrische multiplikative Unitäre wird.

3.10 Bemerkung. Für lokalkompakte Quantengruppen nach Kustermans und Vaes (vgl. 1.3.6) erhält man eine starke Beziehung zwischen den vollen (reduzierten) verschränkten Produkten $S \rtimes_{(r)} \widehat{S}$ und $\widehat{S} \rtimes_{(r)} S$: Die modularen Konjugationen erlauben die Definition einer *unitären Antipode* R. Dies ist ein Anti-Automorphismus von S_W (man beachte die Unterschiede in der Notation) mit $R^2 = id$, vgl. [**35**, Proposition 5.20], der zudem das Koprodukt Δ auf S_W in das entgegengesetzte Koprodukt Δ^{op} (vgl. 1.2.6(4.)) überführt: $\Delta \circ R = (R \otimes R) \circ \Delta^{op}$. Sie ist für die Definition der Antipode wichtig, vgl. Definition (5.22) und Proposition (5.22) in [**35**]. Die unitäre Antipode R läßt sich auf das Niveau der universellen Quantengruppen heben (vgl. [**34**, § 6]), und man erhält einen Anti-Automorphismus R_u von S_u mit analogen Eigenschaften. Ebenso erhält man eine duale unitäre Antipode $\widehat{R}_u$ für $\widehat{S}_u$.

Aufgrund der Eigenschaften von R_u und $\widehat{R}_u$ ergibt sich der folgende Zusammenhang von kovarianten Homomorphismen: Ein Paar $(\nu, \mu) : (S_u, \widehat{S}_u) \to M(D)$ von Morphismen in eine C^*-Algebra D ist genau dann kovariant (bzgl. der S_u-Kowirkung Δ_u), wenn das Paar $(\mu \circ \widehat{R}_u, \nu \circ R_u) : (\widehat{S}_u, S_u) \to M(D^{op})$ kovariant (bzgl. der $\widehat{S}_u$-Kowirkung $\widehat{\Delta}_u$) ist, vgl. die Notation 2.5 und Bemerkung 2.6. Wir erhalten eine natürliche Bijektion von kovarianten Morphismen. Aus der universellen Eigenschaft folgt insbesondere $S_u \rtimes \widehat{S} \cong (\widehat{S}_u \rtimes S)^{op}$. Eine analoge Aussage folgt sofort für die reduzierten verschränkten Produkte.

3.11 Bemerkung. Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine symmetrische multiplikative Unitäre (vgl. Bemerkung 3.7), so hat das Tripel $(S_u, \sigma(\mathfrak{v}), \widehat{S}_u)$ völlig analoge abstrakte Eigenschaften wie das universelle duale Paar $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v}, S_u)$ (vgl. die Definition in 1.3.5). Man erhält daher für $(\widehat{S}_u, \widehat{\Delta}_u)$ analoge Ergebnisse wie für (S_u, Δ_u), wenn man konsequent $\mathfrak{v}$ durch $\sigma(\mathfrak{v})$ und das kovariante Paar $(\pi, \widehat{\pi}) : (S_u, \widehat{S}_u) \to \mathcal{L}(H)$ durch $(\widehat{\pi}_U, \pi) : (\widehat{S}_u, S_u) \to \mathcal{L}(H)$ ersetzt.

Man erhält analog wie in Lemma 3.2 und den Korollaren 3.4 sowie 3.5:

3.12 Korollar. *Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine symmetrische multiplikative Unitäre (vgl. Definition 3.6), so folgt:*

1. *Es gilt die Kovarianzgleichung $Ad(\sigma(\mathfrak{v})^{\widehat{\pi}_U}) \circ (id \otimes \pi) \circ \Delta_u = 1_{S_u} \otimes \pi$, und diese ist äqiuvalent zu der Gleichung $\sigma(\mathfrak{v})_{13} = (\sigma(\mathfrak{v})^{\widehat{\pi}_U})^*_{12} \cdot ({}^{\pi}\sigma(\mathfrak{v}))_{23} \cdot (\sigma(\mathfrak{v})^{\widehat{\pi}_U})_{12} \cdot ({}^{\pi}\sigma(\mathfrak{v}))^*_{23}$ in $\mathcal{U}M(S_u \otimes \mathcal{K} \otimes \widehat{S}_u)$.*
2. *Es gibt eine nichtentartete $\widehat{S}_u$-Kowirkung $\widehat{\Delta}_{rf} : \widehat{S}_V \to M(\widehat{S}_V \otimes \widehat{S}_u)$ auf $\widehat{S}_V$, die durch $\widehat{\Delta}_{rf} \circ \widehat{\pi} = (\widehat{\pi} \otimes id) \circ \widehat{\Delta}_u$ eindeutig bestimmt ist.*
3. *Man hat eine Links-S_u-Kowirkung ${}_{fr}\Delta : S_V \to M(S_u \otimes S_V)$ auf S_V, die nichtentartet und durch die Beziehung ${}_{fr}\Delta \circ \pi = (id \otimes \pi) \circ \Delta_u$ eindeutig bestimmt ist.*

§ 3.2 Reduzierte verschränkte Produkte

Wir haben für dichte multiplikative Unitäre (vgl. 1.3.5) die Theorie der universellen verschränkten Produkte zur Verfügung. Die konkret konstruierten (reduzierten) verschränkten Produkte aus [**4**, § 7] kann man als Quotient von universellen verschränkten Produkten wiedergewinnen. Wir brauchen zunächst folgendes Ergebnis:

3.13 Lemma. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine dichte C^*-algebraische mutliplikative Unitäre (vgl. 1.3.5). Wir betrachten eine volle bzw. reduzierte S-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ (vgl. Notation 3.1). Dann ist mit den Notationen aus § 1.3 das Tripel*

$$((id \otimes \pi)\xi, 1_A \otimes \widehat{\pi}, 1_B \otimes \widehat{\pi}) \qquad bzw. \qquad (\xi, 1_A \otimes \widehat{\pi}, 1_B \otimes \widehat{\pi})$$

ein kovarianter Homomorphismus $(X, \widehat{S}_u) \to M(X \otimes \mathcal{K})$, vgl. Bemerkung 2.6. Hierbei fassen wir $\widehat{S}_u$ gemäß 1.3.4 als starkes universelles Dual von (S_u, Δ_u) bzw. (S_V, Δ) und S_V als C^*-Unteralgebra von $M(\mathcal{K}) = \mathcal{L}(H)$ auf.

Beweis. Die Paare $(\pi, \widehat{\pi}) : (S_u, \widehat{S}_u) \to M(\mathcal{K})$ bzw. $(id_{S_V}, \widehat{\pi}) : (S_V, \widehat{S}_u) \to M(\mathcal{K})$ sind kovariant. Man erhält die obigen kovarianten Tripel analog wie in Lemma 2.12 auch für Hilbert-Bimoduln. □

3.14 Korollar. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.13 ist eine volle S-Kowirkung (X, ξ) genau dann normal (im Sinne von Definition 2.59), wenn $(id \otimes \pi)\xi$ injektiv (vgl. 1.1.10) ist. Jede reduzierte S-Kowirkung ist bereits normal.*

Beweis. Der größte Teil der Behauptungen folgt aus der Charakterisierung normaler Kowirkungen in Lemma 2.62. Wir müssen nur noch zeigen, daß für eine normale volle S-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ die Komposition $(id \otimes \pi)\widehat{\xi}$ injektiv ist. Wegen der Kovarianz des universellen Tripels $(j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ (vgl. Notation 2.35) folgt ganz allgemein die Beziehung $(j_\xi \otimes \pi)\xi = (id_{X \rtimes \widehat{S}} \otimes \pi) \circ Ad(\mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta) \circ (j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}_u}) = Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha, \mathfrak{u}^\pi_\beta) \circ (j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}_V})$, wobei wir die Notation 1.0.5 verwenden. Ist (X, ξ) normal, also j_ξ injektiv, so ist es auch $(id \otimes \pi)\xi$. □

Die folgende Definition ergibt im Fall reduzierter S-Kowirkungen genau die Definition reduzierter verschränkter Produkte aus [**4**, § 7] und verallgemeinert auf naheliegende Weise die Konstruktion bei Gruppen (vgl. etwa [**15**, Appendix]):

3.15 Definition. Mit denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Lemma 3.13 betrachten wir eine volle bzw. reduzierte S-Kowirkung (X, ξ). Wir setzen $j_{\xi,r} := (id \otimes \pi)\xi$ bzw. $j_{\xi,r} := \xi$ (mit den offensichtlichen Notationen für die Koeffizienten-Morphismen), sowie $j_{\widehat{S}}^{\alpha,r} := (1_A \otimes \widehat{\pi})$ und $j_{\widehat{S}}^{\beta,r} := (1_B \otimes \widehat{\pi})$. Weiter sei

$$\widehat{\pi}_\xi := j_{\xi,r} \times (j_{\widehat{S}}^{\alpha,r}, j_{\widehat{S}}^{\beta,r}) : X \rtimes_\xi \widehat{S} \to M(X \otimes \mathcal{K})$$

der zugehörige Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln (vgl. Bemerkung 2.22). Das *reduzierte verschränkte Produkt* von (X, ξ) ist der das Bild von $\widehat{\pi}_\xi$ als Unter-Hilbert-Bimodul $\mathrm{Im}(\widehat{\pi}_\xi) \subseteq M(X \otimes \mathcal{K})$. Wir bezeichen es als Tupel $(X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}, j_{\xi,r}, j_{\widehat{S}}^{\alpha,r}, j_{\widehat{S}}^{\beta,r})$ oder einfach nur mit $X \rtimes_r \widehat{S}$, wenn die Kowirkung sich von selbst versteht.

Auf den reduzierten verschränkten Produkten existiert für symmetrisches V eine volle und eine reduzierte duale $\widehat{S}$-Kowirkung:

3.16 Proposition. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch (Definition 3.6) und $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine volle bzw. reduzierte S-Kowirkung (vgl. Notation 3.1). Sei $(X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi})$ das verschränkte Produkt mit dualer $\widehat{S}_u$-Kowirkung (vgl. § 2.4). Mit den Bezeichnungen aus § 1.3 und Definition 3.15 gilt:*

1. *Das Tripel $(\widehat{\pi}_\xi, 1_A \otimes \pi_U, 1_B \otimes \pi_U)$ ist ein kovarianter Morphismus von $(X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi})$ auf $X \otimes \mathcal{K}$ und induziert einen Morphismus*

$$\Phi_\xi := \widehat{\pi}_\xi \times (1_A \otimes \pi_U, 1_B \otimes \pi_U) : X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S \longrightarrow M(X \otimes \mathcal{K})$$

   von Rechts-Hilbert-Bimoduln mit entsprechend bezeichneten Koeffizienten-Abbildungen.

2. *Auf dem reduzierten verschränkten Produkt $X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}$ existiert jeweils eine volle und eine reduzierte duale $\widehat{S}$-Kowirkung*

$$\widehat{\xi}_{rf} : X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \to M(X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \otimes \widehat{S}_u) \qquad \text{und} \qquad \widehat{\xi}_r : X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \to M(X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \otimes S_V),$$

   welche als Kowirkungen nichtentartet sind. Der Morphismus $\widehat{\pi}_\xi$ ist $\widehat{\xi}$ - $\widehat{\xi}_{rf}$-äquivariant ist (vgl. § 1.4), und es gilt die Beziehung $\widehat{\xi}_r = (id \otimes \widehat{\pi})\widehat{\xi}_{rf}$. Die Koeffizienten-Kowirkungen bezeichnen wir analog mit $\widehat{\alpha}_{rf}$, $\widehat{\alpha}_r$ etc. .

Beweis. Wir müssen die Gleichung $(id_X \otimes Ad({}^{\pi_U}\sigma(\mathfrak{v}))) \circ (\widehat{\pi}_\xi \otimes 1_{\widehat{S}_u}) = (\widehat{\pi}_\xi \otimes id_{\widehat{S}_u}) \circ \widehat{\xi}$ zeigen. Wegen der universellen Eigenschaft von $X \rtimes_\xi \widehat{S}$ reicht es (vgl. Bemerkung 2.22(3.)), die Gleichung nach Verknüpfung mit j_ξ und die zugehörigen Identitäten der Koeffizienten-Abbildungen nach Verknüpfung mit $j_{\widehat{S}}^\alpha$ und $j_{\widehat{S}}^\beta$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}(id_X \otimes Ad({}^{\pi_U}\sigma(\mathfrak{v}))) \circ (\widehat{\pi}_\xi \otimes 1_{\widehat{S}_u}) \circ j_\xi &= (id_X \otimes Ad({}^{\pi_U}\sigma(\mathfrak{v}))) \circ (j_{\xi,r} \otimes 1_{\widehat{S}_u}) \\ &\overset{(1)}{=} (j_{\xi,r} \otimes 1_{\widehat{S}_u}) \\ &= (\widehat{\pi}_X \otimes id_{\widehat{S}_u}) \circ \widehat{\xi} \circ j_\xi \,,\end{aligned}$$

wobei wir in (1) benutzt haben, daß $j_{\xi,r}$ Werte in $M(X \otimes \pi(S_u))$ annimmt und die Bilder von π_U und π kommutieren. Für die rechten (genauso für die linken) Koeffizienten gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}(id_A \otimes Ad({}^{\pi_U}\sigma(\mathfrak{v}))) \circ (\widehat{\pi}_\alpha \otimes 1_{\widehat{S}}) \circ j^\alpha_{\widehat{S}} &= 1_A \otimes (Ad({}^{\pi_U}\sigma(\mathfrak{v})) \circ (\pi \otimes 1_{\widehat{S}_u}) \\ &\overset{(2)}{=} 1_A \otimes (\pi \otimes id)\widehat{\alpha} \\ &= (\widehat{\pi}_\alpha \otimes id)\widehat{\alpha} \circ j^\alpha_{\widehat{S}},\end{aligned}$$

wobei man in (2) die Kovarianzgleichung der Bemerkung 3.7 einsetzen muß. Die obige Kovarianzgleichung impliziert, daß die Verknüpfungen $(\widehat{\pi}_\xi \otimes id_{\widehat{S}_u}) \circ \widehat{\xi}$ und $(\widehat{\pi}_\xi \otimes \widehat{\pi}) \circ \widehat{\xi}$ beide injektiv über das reduzierte verschränkte Produkt $X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}$ faktorisieren. Also folgt der zweite Teil direkt aus dem ersten, da $\widehat{\xi}$ eine nichtentartete $\widehat{S}_u$-Kowirkung ist (vgl. Definition 2.37). □

Da insbesondere folgt, daß $(id \otimes \pi_U)\widehat{\xi}_{rf} = (id \otimes Ad(U))\widehat{\xi}_r$ injektiv ist, kann man das Analogon zu Korollar 3.14 für $\widehat{S}$ anwenden und erhält:

3.17 Korollar. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Proposition 3.16 ist das reduzierte verschränkte Produkt $(X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}, \widehat{\xi}_{rf})$ stets eine normale volle $\widehat{S}$-Kowirkung.*

Die Abbildungen $\widehat{\pi}_\xi$ sind in folgendem Sinne natürlich:

3.18 Lemma. *Unter denselben Voraussetzungen wie in der Proposition 3.16 sei ein äquivarianter nichtentarteter Morphismus ${}_\psi\Phi_\varphi : ({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \to M({}_{A'}X'_{B'}, {}_{\alpha'}\xi'_{\beta'})$ von Rechts-Hilbert-Bimoduln mit voller bzw. reduzierter S-Kowirkung gegeben. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\Phi \rtimes_r \widehat{S} : X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \to M(X' \rtimes_{\xi',r} \widehat{S})$ mit $\Phi \rtimes_r \widehat{S} \circ \widehat{\pi}_\xi = \widehat{\pi}_{\xi'} \circ \Phi \rtimes \widehat{S}$. Der Morphismus $\Phi \rtimes_r \widehat{S}$ ist offenbar nichtentartet und äquivariant bzgl. der vollen bzw. reduzierten $\widehat{S}$-Kowirkungen $\widehat{\xi}_{rf}$ und $\widehat{\xi'}_{rf}$ bzw. $\widehat{\xi}_r$ und $\widehat{\xi'}_r$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die Verknüpfung $\widehat{\pi}_{\xi'} \circ \Phi \rtimes \widehat{S}$ über das reduzierte verschränkte Produkt $X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}$ faktorisiert. Dazu rechnet man einfach die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \widehat{\pi}_{\xi'} \circ (\Phi \rtimes \widehat{S}) \circ j_\xi = j_{\xi,r} \circ \Phi \overset{(*)}{=} (\Phi \otimes id_\mathcal{K}) \circ j_{\xi,r} = (\Phi \otimes id_\mathcal{K}) \circ \widehat{\pi}_\xi \circ j_\xi \\ \text{und} \quad & \widehat{\pi}_{\alpha'} \circ (\psi \rtimes \widehat{S}) \circ j^\alpha_{\widehat{S}} = (1_{A' \rtimes_r \widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}) = (\psi \otimes id_\mathcal{K}) \circ \widehat{\pi}_\alpha \circ j^\alpha_{\widehat{S}} \\ \text{bzw.} \quad & \widehat{\pi}_{\beta'} \circ (\varphi \rtimes \widehat{S}) \circ j^\beta_{\widehat{S}} = (\varphi \otimes id_\mathcal{K}) \circ \widehat{\pi}_\beta \circ j^\beta_{\widehat{S}} \end{aligned}$$

nach, wobei in $(*)$ die S-Äquivarianz von Φ benutzt wurde. Also ist $\widehat{\pi}_{\xi'} \circ (\Phi \rtimes \widehat{S}) = (\Phi \otimes id_\mathcal{K}) \circ \widehat{\pi}_\xi$ (vgl. Bemerkung 2.22(3.)). Deshalb können wir für $\Phi \rtimes_r \widehat{S}$ die Einschränkung $(\Phi \otimes id)|_{X \rtimes_r \widehat{S}}: X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \to M(X' \rtimes_{\xi',r} \widehat{S})$ setzen. Die restlichen Aussagen sind klar. □

Wir werden zeigen, daß der Morphismus $\widehat{\pi}_\xi$ wie in Korollar 3.17 bereits eine Normalisierung im Sinne von Definition 2.63 ist. Als Vorbereitung brauchen wir das folgende Ergebnis (vgl. [**66**, Lemme 4.6] im Fall reduzierter S-Kowirkungen):

3.19 Lemma. *Unter den Voraussetzungen der Proposition 3.16 sei $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine volle oder reduzierte S-Kowirkung. Dann gilt die Identität $(j_\xi \otimes id)\widehat{\pi}_\xi = Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha, \mathfrak{u}^\pi_\beta)(id \otimes \widehat{\pi})\widehat{\xi}$ (vgl. Definition 3.15) in $\mathcal{HBM}(X \rtimes_\xi \widehat{S}, X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes \mathcal{K})$ (vgl. 1.5.1).*

Ist (X,ξ) eine normale S-Kowirkung, vgl. Definition 2.59, so existiert ein injektiver nichtentarteter Morphismus von Hilbert-Bimoduln $\widehat{\xi}_{rfr} : X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \to M(X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes \widehat{S}_V)$ mit $(id_{X\rtimes\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}) \circ \widehat{\xi} = \widehat{\xi}_{rfr} \circ \widehat{\pi}_\xi$. Es folgt automatisch $(\widehat{\pi}_X \otimes id) \circ \widehat{\xi}_{rfr} = \widehat{\xi}_r$.

Beweis. Wir betrachten die zu $\mathfrak{u}_\alpha$ bzw. $\mathfrak{u}_\beta$ gehörigen *-Homomorphismen $j^\alpha_{\widehat{S}}$ bzw. $j^\beta_{\widehat{S}}$. Mit der Notation 1.0.5 ist dann $\mathfrak{u}^\pi_\alpha = {}^{j^\alpha_{\widehat{S}}}\mathfrak{v}^\pi$ und $\mathfrak{u}^\pi_\beta = {}^{j^\beta_{\widehat{S}}}\mathfrak{v}^\pi$. Zunächst gelten die Gleichungen

$$(id_{X\rtimes\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi})\widehat{\xi} \circ j_\xi = (id_{X\rtimes\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}) \circ (j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}_u}) = j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}_V}$$
$$(id_{A\rtimes\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi})\widehat{\alpha} \circ j^\alpha_{\widehat{S}} = (j^\alpha_{\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi})\widehat{\Delta}_u$$

(und eine analoge Gleichung für die rechte Koeffizienten-Abbildung). Wegen der Kovarianz des universellen Tripels $(j_\xi, j^\alpha_{\widehat{S}}, j^\beta_{\widehat{S}})$ erhält man nach Konjugieren

$$Ad({}^{j^\alpha_{\widehat{S}}}\mathfrak{v}^\pi, {}^{j^\beta_{\widehat{S}}}\mathfrak{v}^\pi) \circ (j_\xi \otimes 1_{\widehat{S}_V}) = (j_\xi \otimes id) \circ j_{\xi,r} = (j_\xi \otimes id) \circ \widehat{\pi}_\xi \circ j_\xi \qquad \text{und}$$
$$Ad({}^{j^\alpha_{\widehat{S}}}\mathfrak{v}^\pi) \circ (j^\alpha_{\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi})\widehat{\Delta}_u \stackrel{(*)}{=} (1_{A\rtimes\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}) = (j_\xi \otimes id) \circ j^{\alpha,r}_{\widehat{S}} = (j_\xi \otimes id) \circ \widehat{\pi}_\alpha \circ j^\alpha_{\widehat{S}}\ ,$$

wobei man im Fall einer reduzierten S-Kowirkung (X,ξ) die Beziehung $\mathfrak{v}^\pi = \mathfrak{u}$ aus 1.3.5 benutzt. Die Gleichung $(*)$ folgt aus der Kovarianz-Identität in Lemma 3.2(3.) mit $(\nu,\mu) = (\pi,\widehat{\pi})$; es gilt natürlich eine analoge Beziehung für B. Also folgt die Identität in Lemma 3.19 aus der universellen Eigenschaft des verschränkten Produkts, vgl. Bemerkung 2.22(3.).

Ist die S-Kowirkung (X,ξ) zusätzlich normal (was bei reduzierter S-Kowirkung automatisch der Fall ist, vgl. Korollar 3.14), so ist j_ξ injektiv, und man erhält die gewünschte Faktorisierung. Diese hat offensichtlich die geforderten Eigenschaften. □

Mit diesen Vorbereitungen erhält man:

3.20 Proposition. *Unter den Voraussetzungen von Proposition 3.16 ist für eine reduzierte oder volle S-Kowirkung (X,ξ) die Surjektion $\widehat{\pi}_\xi : (X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi}) \to (X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}, \widehat{\xi}_{rf})$ eine Normalisierung im Sinne von Definition 2.63.*

Beweis. Sei $\Lambda \in \mathcal{HBM}_{\widehat{S}_u}((X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi}), ({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta))$ ein $\widehat{S}_u$-äquivarianter Morphismus (vgl. 1.5.1), wobei (Y,ζ) eine normale volle $\widehat{S}$-Kowirkung ist. Sei $(Y \rtimes_\zeta S, \hat{\jmath}_\zeta, \widehat{\mathfrak{u}}_\gamma, \widehat{\mathfrak{u}}_\delta)$ das verschränkte Produkt von (Y,ζ) (vgl. Bemerkung 2.35). Für die universelle Eigenschaft der Normalisierung (Definition 2.63) müssen wir zeigen, daß Λ über $\widehat{\pi}_\xi$ faktorisiert.

Wir nehmen zunächst an, daß (X,ξ) normal ist. Dann gilt nach Definition des verschränkten Produkts $\Lambda \rtimes \widehat{S} = (j_\zeta \circ \Lambda) \times (\widehat{\mathfrak{u}}_\gamma, \widehat{\mathfrak{u}}_\delta)$ (vgl. Bemerkung 2.36) die Gleichung

$$\begin{aligned}(id_{Y\rtimes S} \otimes \widehat{\pi}) \circ Ad(\widehat{\mathfrak{u}}_\gamma, \widehat{\mathfrak{u}}_\delta) \circ (\hat{\jmath}_\zeta \otimes 1_{\widehat{S}_u}) \circ \Lambda &= (\hat{\jmath}_\zeta\Lambda \otimes \widehat{\pi}) \circ \widehat{\xi} \\ &= (\Lambda \rtimes S \otimes id_{\mathcal{K}}) \circ (j_\xi \otimes \widehat{\pi})\widehat{\zeta} \\ &\stackrel{(*)}{=} (\Lambda \rtimes S \otimes id_{\mathcal{K}}) \circ \widehat{\xi}_{rfr} \circ \widehat{\pi}_\xi\ ,\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ das Lemma 3.19 einsetzen. Da nach Voraussetzung $\hat{\jmath}_\zeta$ injektiv ist, faktorisiert Λ über $\widehat{\pi}_\xi$.

Sei nun (X,ξ) beliebig und $\eta_\xi : (X,\xi) \to (X^n,\xi^n)$ die zugehörige Normalisierung (vgl. Definition 2.63). Man beachte, daß nach der Charakterisierung 2.68 der Morphismus $\eta_\xi \rtimes \widehat{S} : X \rtimes_\xi \widehat{S} \cong X^n \rtimes_{\xi^n} \widehat{S}$ ein Isomorphismus ist. Damit erhalten wir wegen der Natürlichkeits-Aussage in Lemma 3.18 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi}) \arrow[r, "\eta_\xi \rtimes \widehat{S}", "\cong"'] \arrow[d, "\widehat{\pi}_\xi"'] & (X^n \rtimes_{\xi^n} \widehat{S}, \widehat{\xi^n}) \arrow[r, "\Lambda\circ(\eta_\xi \rtimes \widehat{S})^{-1}"] \arrow[d, "\widehat{\pi}_{\xi^n}"] & M(Y,\zeta) \arrow[d, equal] \\
(X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}, \widehat{\xi}_{rf}) \arrow[r, "\eta_\xi \rtimes_r \widehat{S}"] & (X^n \rtimes_{\xi^n,r} \widehat{S}, \widehat{\xi^n}_{rf}) \arrow[r, "\widetilde{\Lambda}"] & M(Y,\zeta)
\end{tikzcd}$$

von $\widehat{S}_u$-äquivarianten Morphismen, wobei die obere Komposition gleich Λ ist. Die Faktorisierung $\widetilde{\Lambda} \circ \widehat{\pi}_{\xi^n} = \Lambda \circ (\eta_\xi \rtimes \widehat{S})^{-1}$ wurde bereits im oberen Teil bewiesen. Man erhält insgesamt die Faktorisierung $\Lambda = \widetilde{\Lambda} \circ (\eta_\xi \rtimes_r \widehat{S}) \circ \widehat{\pi}_\xi$ und somit die Behauptung. □

Wegen Proposition 3.20 und dem Diagramm Im Beweis ist $\widehat{\pi}_{\xi^r} \circ (\eta_\xi \rtimes \widehat{S})$ eine Normalisierungs-Abbildung. Mit Korollar 2.67 folgt daher:

3.21 Korollar. *Unter denselben Voraussetzungen wie in Proposition 3.16 sei (X,ξ) eine reduzierte oder volle S-Kowirkung mit Normalisierung $\eta_\xi : (X,\xi) \to (X^n,\xi^n)$. Dann ist das reduzierte verschränkte Produkt $\eta_\xi \rtimes_r \widehat{S} : X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \to X^n \rtimes_{\xi^n,r} \widehat{S}$ ein Isomorphismus.*

Die Konstruktion des reduzierten verschränkte Produkts ist funktoriell und mit Tensorprodukten verträglich. Wir fassen dies im folgenden zusammen:

3.22 Proposition. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichungen von Proposition 3.16 induziert das reduzierte verschränkte Produkt Funktoren der folgenden Kategorien (vgl. § 1.5 und Definition 2.59):*

1. $(\cdot) \rtimes_r \widehat{S} : \mathcal{HBM}_S \to \mathcal{HBM}^{n,ne}_{\widehat{S}_u}$
2. $(\cdot) \rtimes_r \widehat{S} : \mathfrak{M}_S \to \mathfrak{M}^{n,ne}_{\widehat{S}_u}$,

wobei man für S sowohl S_V als auch S_u einsetzen darf. Wir haben eine natürliche Äquivalenz $(.) \rtimes_r \widehat{S} \cong ((\cdot) \rtimes \widehat{S})^n$ von Funktoren (vgl. Satz 2.38 und Proposition 2.66). Insbesondere induzieren die Morphismen $\widehat{\pi}_\xi : X \rtimes_\xi \widehat{S} \to X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}$ im (1.) bzw. (2.) Fall eine natürliche Transformation von Funktoren $\widehat{\pi}_\bullet$ bzw. $[\widehat{\pi}_\bullet] : (.) \rtimes \widehat{S} \to (.) \rtimes_r \widehat{S}$ der entsprechenden Kategorien.

3.23 Bemerkung. Für Morphismen Φ in $\mathcal{HBM}_S((X,\xi),(X',\xi'))$ (vgl. 1.5.1) ist das reduzierte verschränkte Produkt durch den Morphismus $\Phi \rtimes_r \widehat{S}$ aus Lemma 3.18 gegeben. Die abkürzende Notation $\widehat{\pi}_\bullet$ bzw. $[\widehat{\pi}_\bullet]$ ist folgendermaßen zu verstehen: Im ersten Fall besteht $\widehat{\pi}_\bullet : (\cdot) \rtimes \widehat{S} \to (\cdot) \rtimes_r \widehat{S}$ aus den Morphismen $\widehat{\pi}_\xi : X \rtimes_\xi \widehat{S} \to X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}$ selbst, wobei (X,ξ) ein Objekt in $\mathcal{HBM}_S$ ist. Im zweiten Fall ist die natürliche Transformation $[\widehat{\pi}_\bullet]$ wie folgt definiert: Für ein Objekt $(A,\alpha) \in \mathfrak{M}_S$ ist der zugehörige Morphimus gleich $[\widehat{\pi}_\alpha] \in \mathfrak{M}_{\widehat{S}_u}((A \rtimes_\alpha \widehat{S}, \widehat{\alpha}), (A \rtimes_{\alpha,r} \widehat{S}, \widehat{\alpha}_{rf}))$, vgl. die Definition in 1.5.2.

Beweis von Proposition 3.22. Wir wissen nach Proposition 3.20 bereits, daß $\widehat{\pi}_\xi$ eine Normalisierungs-Abbildung. Benutzt man für ein $\Phi \in \mathcal{HBM}_S((X,\xi),(X',\xi'))$ die Normalisierungen $\widehat{\pi}_\xi$ und $\widehat{\pi}_{\xi'}$, so gilt wegen Lemma 3.18 die Beziehung $(\Phi \rtimes \widehat{S})^n = \Phi \rtimes_r \widehat{S}$, vgl. auch den Beweis von Proposition 2.66. Also haben wir einen natürlichen Isomorphismus $X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \cong (X \rtimes_\xi \widehat{S})^n$. Dieser induziert die natürliche Äquivalenz von Funktoren $(\cdot) \rtimes_r \widehat{S} \cong ((\cdot) \rtimes \widehat{S})^n$ in beiden Fällen. Alle restlichen Aussagen sind dann eine Kombination der Ergebnisse in Satz 2.38 und Proposition 2.66. □

3.24 Bemerkung. Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine symmetrische multiplikative Unitäre, so gelten analoge Ergebnisse auch für $\widehat{S}$-Kowirkungen (vgl. Bemerkung 3.11). Denn in diesem Fall hat man ein Analogon zu Lemma 3.13 für $\widehat{S}$-Kowirkungen zur Verfügung: Für eine volle bzw. reduzierte $\widehat{S}$-Kowirkung (Y,ζ) ist das Tripel $((id \otimes \widehat{\pi}_U)\zeta, 1 \otimes \pi, 1 \otimes \pi)$ bzw. $((id \otimes Ad(U))\zeta, 1 \otimes \pi, 1 \otimes \pi)$ ein kovarianter Homomorphismus $(Y, S_u) \to M(Y \otimes \mathcal{K})$. Daher lassen sich wie in Definition 3.15 reduzierte verschränkte Produkte für $\widehat{S}$-Kowirkungen definieren. Naheliegenderweise verwenden wir die Bezeichungen $\hat{\jmath}_{\zeta,r} := (id \otimes \widehat{\pi}_U)\zeta$ bzw. $\hat{\jmath}_{\zeta,r} := (id \otimes Ad(U))\zeta$, $\hat{\jmath}^{\gamma,r}_{\widehat{S}} := (1_C \otimes \pi)$ und $\hat{\jmath}^{\delta,r}_{\widehat{S}} := (1_D \otimes \pi)$ sowie $\pi_{\zeta,r} := \hat{\jmath}_{\zeta,r} \times (\hat{\jmath}^{\gamma,r}_{\widehat{S}}, \hat{\jmath}^{\delta,r}_{\widehat{S}})$. Das reduzierte verschränkte Produkt $Y \rtimes_{\zeta,r} S$ von (Y,ζ) ist dann gleich dem Bild $\mathrm{Im}(\pi_\zeta) \subseteq M(Y \otimes \mathcal{K})$. Entsprechent gibt es eine volle bzw. eine reduzierte S-Kowirkung $\widehat{\zeta_{rf}}$ bzw. $\widehat{\zeta_r}$ auf $Y \rtimes_{\zeta,r} S$ und wir setzen $\widehat{\Phi}_\zeta := \pi_\zeta \times (1 \otimes \widehat{\pi}, 1 \otimes \widehat{\pi})$, vgl. Proposition 3.16.

§ 3.3 Äquivalenz normaler und reduzierter Kowirkungen

In diesem Abschnitt werden wir auf die Beziehung zwischen vollen und reduzierten S-Kowirkungen eingehen (vgl. die Notation 3.1). Im gesamten Abschnitt betrachten wir ausschließlich nichtentartete (volle oder reduzierte) Kowirkungen, vgl. (§ 1.4).

3.25 Bemerkung. Ist in der Situation von Korollar 3.14 eine normale volle S-Kowirkung (X,ξ) gegeben, so ist der Morphismus $\xi^r := (id \otimes \pi)\xi$ injektiv und induziert daher eine reduzierte S-Kowirkung auf X.

Also kann man aus jeder normalen vollen S-Kowirkung durch Nachschalten der kanonischen Projektion π eine reduzierte Kowirkung erhalten (vgl. [**57**, Lemma 3.1]). Es ist bemerkenswert, daß jede reduzierte Kowirkung von dieser Art ist. Für Gruppen-Kowirkungen ist dieses Resultat der Gegenstand der Untersuchung in [**54**]. Die folgende Proposition ist eine Verallgemeinerung von [**54**, Theorem 4.7]. Interessanterweise vereinfacht die Verwendung der Terminologie von Quantengruppen den Beweis.

3.26 Proposition. *Für ein symmetrisches $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ (Definition 3.6) und eine nichtentartete reduzierte S-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ gibt es genau eine nichtentartete volle S-Kowirkung ${}_{\alpha^f}\xi^f{}_{\beta^f} : {}_AX_B \to M(X \otimes S_u)$ auf X mit $(\xi^f)^r = (id_X \otimes \pi) \circ \xi^f = \xi$, vgl. Korollar 3.5 für Δ_{rf}. Diese ist automatisch normal und durch die Beziehung $(\xi \otimes id_{S_u})\xi^f = (id_X \otimes \Delta_{rf})\xi$ eindeutig festgelegt.*

Die Idee des Beweises ist relativ einfach. Wesentlich hierbei ist, daß nach Definition Kowirkungen stets injektiv und sie folglich isometrische Einbettungen sind: Man bettet $X \cong \xi(X)$ als Unter-rechts-Hilbert-Bimodul in $M(X \otimes S_V)$ ein. Auf $X \otimes S_V$ hat man durch $id \otimes \Delta_{rf} : X \otimes S_V \longrightarrow M((X \otimes S_V) \otimes S_u)$ eine nichtentartete volle S-Kowirkung.

Der Kandidat für die volle Kowirkung auf $X \cong \xi(X)$ ist die Einschränkung der Kowirkung $(id_X \otimes \Delta_{rf}) \mid_{\xi(X)}$ auf $\xi(X)$. Deshalb benötigt man für den Beweis eine technische Hilfsaussage über die Einschränkung voller Kowirkungen auf Unter-Hilbert-Bimoduln:

3.27 Lemma. *Unter den Voraussetzungen der Proposition 3.26 sei $({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$ eine nichtentartete volle S-Kowirkung und ${}_AX_B \subseteq M(Y)$ ein nichtentarteter Unter-rechts-Hilbert-Bimodul. Die Einschränkung $\xi := \zeta|_X$ induziert genau dann eine nichtentartete volle S-Kowirkung auf X, falls die Mengen $(id_X \otimes \pi)(\zeta(X)) \cdot (1 \otimes S_V)$ und $(1 \otimes S_V) \cdot (id_X \otimes \pi)(\zeta(X))$ norm-dicht in $X \otimes S_V \subseteq M(Y \otimes S_V)$ liegen.*

Beweis. Nach der Charakterisierung des C-Multiplikators (vgl. 1.1.22) in 1.1.23 muß man nur noch

$$\overline{\zeta(X)(1 \otimes S_u)} = X \otimes S_u = \overline{(1 \otimes S_u)\zeta(X)}$$

in $M(Y \otimes S_u)$ und die analoge Aussage für die Koeffizienten-Algebren verifizieren, denn die Kowirkungseigenschaft und die Injektivität sind klar. Der wesentliche Trick besteht darin, X in $X = \overline{(id_Y \otimes \mathcal{L}(H)_*)(X \otimes 1_{\mathcal{K}})} = \overline{(id_Y \otimes \mathcal{L}(H)_*)(X \otimes S_V)}$ umzuschreiben (vgl. 1.0.1), wobei die S_V-Invarianz von $\mathcal{L}(H)_*$ (vgl. 1.3.4(1.)) und $\overline{\mathcal{L}(H)_*(1_{\mathcal{K}})} = \mathbb{C}$ eingehen. Wir geben zunächst ein paar Zwischenrechnungen an: Wegen der Vorausetzung erhält man $X \otimes S_V = \overline{(id \otimes \pi)((1 \otimes S_u)\zeta(X))}$ und folglich gilt mit $(id \otimes \pi)\Delta_u = {}_{fr}\Delta \circ \pi$ (vgl. Korollar 3.12) die Gleichung

$$\begin{aligned}(\zeta \otimes id_{S_V})(X \otimes S_V) &= \overline{(id_{Y \otimes S_u} \otimes \pi)((\zeta \otimes id)((1 \otimes S_u)\zeta(X))} \\ &= \overline{(id_{Y \otimes S_u} \otimes \pi)((1 \otimes 1 \otimes S_u) \cdot (\zeta \otimes id)(\zeta(X)))} \\ &= \overline{(id_{Y \otimes S_u} \otimes \pi)((1 \otimes 1 \otimes S_u) \cdot (id_Y \otimes \Delta_u)(\zeta(X)))} \\ &= \overline{(1 \otimes 1 \otimes S_V) \cdot (id_Y \otimes {}_{fr}\Delta)((id \otimes \pi)(\zeta(X)))}.\end{aligned}$$

Diese kann man in der folgenden Rechnung einsetzen und bekommt

$$\begin{aligned}\overline{(1 \otimes S_u \otimes 1) \cdot ((\zeta \otimes id)(X \otimes S_V))} &= \overline{(1 \otimes S_u \otimes S_V) \cdot (id \otimes {}_{fr}\Delta)((id \otimes \pi)(\zeta(X)))} \\ &\overset{(*)}{=} \overline{(1 \otimes ((1 \otimes S_V)_{fr}\Delta(S_V))) \cdot (id \otimes {}_{fr}\Delta)(id \otimes \pi)(\zeta(X))} \\ &= \overline{(1 \otimes 1 \otimes S_V) \cdot (id \otimes {}_{fr}\Delta)((1 \otimes S_V) \cdot (id \otimes \pi)(\zeta(X)))} \\ &= \overline{(1 \otimes 1 \otimes S_V) \cdot ((id \otimes {}_{fr}\Delta)(X \otimes S_V))} \\ &\overset{(*)}{=} X \otimes S_u \otimes S_V \subseteq M(Y \otimes S_u \otimes S_V).\end{aligned}$$

In (*) benutzen wir jeweis, daß (S_u, Δ_u) beidseitig nichtentartet ist (vgl. 1.2.2) und deshalb

$$S_u \otimes S_V = (id \otimes \pi)(S_u \otimes S_u) = \overline{(id \otimes \pi)((1 \otimes S_u)\Delta_u(S_u))} = \overline{(1 \otimes S_V)_{fr}\Delta(S_V)}$$

gilt. Insgesamt erhält man mit den Zwischenrechnungen und der S_V-Invarianz von $\mathcal{L}(H)_*$ das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned}\overline{(1 \otimes S_u)\zeta(X)} &= \overline{(1 \otimes S_u) \cdot \zeta((id_Y \otimes \mathcal{L}(H)_*)(X \otimes S_V))} \\ &= \overline{(id_Y \otimes id_{S_u} \otimes \mathcal{L}(H)_*)((1 \otimes S_u \otimes 1) \cdot ((\zeta \otimes id)(X \otimes S_V)))} \\ &= \overline{(id_Y \otimes id_{S_u} \otimes \mathcal{L}(H)_*)(X \otimes S_u \otimes S_V)} \\ &= X \otimes S_u \subseteq M(Y \otimes S_u)\ .\end{aligned}$$

Der Beweis von $\overline{\zeta(X)(1 \otimes S_u)} = X \otimes S_u$ läßt sich ähnlich bewerkstelligen, ebenso wie die Rechnungen für die Koeffizienten-Algebren. □

Beweis der Proposition 3.26. Wie vorausgesetzt sei (X, ξ) eine nichtentartete reduzierte S-Kowirkung. Wir betrachten die volle S-Kowirkung (vgl. Korollar 3.5)

$$\zeta := (id \otimes \Delta_{rf}) : X \otimes S_V \longrightarrow M((X \otimes S_V) \otimes S_u)$$

auf dem Hilbert-Bimodul ${}_{A \otimes S_V}(X \otimes S_V)_{B \otimes S_V}$ und fassen X als Unter-Hilbert-Bimodul von $M(X \otimes S_V)$ mittels der Isometrie $\xi : X \overset{\cong}{\to} \xi(X) \subseteq M(X \otimes S_V)$ auf. Es gilt

$$(id_{X \otimes S_V} \otimes \pi) \circ \zeta \circ \xi = (id_X \otimes (id \otimes \pi)\Delta_{rf}) \circ \xi = (id_X \otimes \Delta_r) \circ \xi = (\xi \otimes id)\xi \,,$$

weil offenbar $(id \otimes \pi)\Delta_{rf} = \Delta$ ist. Folglich ist die Einschränkung $(id \otimes \pi)\zeta \mid_{\xi(X)}$ eine nichtentartete reduzierte Kowirkung auf $\xi(X)$, so daß $\xi : (X, \xi) \overset{\cong}{\longrightarrow} (\xi(X), (id \otimes \pi)\zeta \mid_{\xi(X)})$ ein S_V-äquivarianter Isomorphismus ist. Insbesondere läßt sich das Lemma 3.27 anwenden, und

$$\zeta \mid_{\xi(X)} = (id \otimes \Delta_{rf}) \mid_{\xi(X)} : \xi(X) \longrightarrow M(\xi(X) \otimes S_u)$$

definiert eine nichtentartete volle S-Kowirkung auf $\xi(X)$, welche nach Korollar 3.14 normal ist. Mit der Isometrie ξ läßt sich diese Kowirkung zu einer normalen vollen Kowirkung $\xi^f : X \to M(X \otimes S_u)$ zurückziehen und erfüllt per Definition die Gleichung $(\xi \otimes id) \circ \xi^f \overset{(*)}{=} (id \otimes \Delta_{rf}) \circ \xi$. Dadurch ist ξ^f eindeutig bestimmt. Wendet man $(id_{X \otimes S_V} \otimes \pi)$ auf die Gleichung (*) an, so folgt

$$(\xi \otimes id_{S_V}) \circ [(id \otimes \pi) \circ \xi^f] = (id \otimes \Delta) \circ \xi = (\xi \otimes id_{S_V}) \circ \xi \ ,$$

und wegen der Injektivität von $\xi \otimes id$ ist daher $(id \otimes \pi)\xi^f = \xi^r$. □

3.28 Bemerkung. In diesem Zusammenhang taucht das folgende Problem auf: Unter den Voraussetzungen der Proposition 3.26 sei dazu $({}_A X_B, {}_\alpha \xi_\beta)$ eine normale volle S-Kowirkung auf einem Hilbert-Bimodul und $\xi^r = (id \otimes \pi)\xi$ die zugehörige reduzierte Kowirkung (Bemerkung 3.25). Da $\widehat{S}_u$ das universelle Dual von S_V bzw. von S_u ist, hat man a priori zwei Möglichkeiten verschränkte Produkte zu bilden: $X \rtimes_\xi \widehat{S}$ sowie $X \rtimes_{\xi^r} \widehat{S}$ mit universellen kovarianten Homomorphismen $(j_\xi, j^\alpha_{\widehat{S}}, j^\beta_{\widehat{S}})$ bzw. $(j_{\xi^r}, j^{\alpha^r}_{\widehat{S}}, j^{\beta^r}_{\widehat{S}})$, wobei man $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v})$ als universelles Dual von S_u bzw. $(\widehat{S}_u, \mathfrak{u})$ als universelles Dual von S_V auffaßt (vgl. § 1.3). Wegen $\mathfrak{u} = (id \otimes \pi)(\mathfrak{v})$ ist $(j_\xi, j^\alpha_{\widehat{S}}, j^\beta_{\widehat{S}}) : ((X, \xi^r), \widehat{S}) \to M(X \rtimes_\xi \widehat{S})$ ein kovarianter Homomorphismus und induziert einen kanonischen Homomorphismus $X \rtimes_{\xi^r} \widehat{S} \to X \rtimes_\xi \widehat{S}$, der wegen Lemma 2.25 surjektiv ist.

Wir werden zeigen, daß dies nur scheinbar eine Zweideutigkeit ist, denn der kanonische Morphismus der Bemerkung 3.28 ist bereits ein Isomorphismus. Mit anderen Worten: $(X \rtimes_\xi \widehat{S}, j_\xi, j^\alpha_{\widehat{S}}, j^\beta_{\widehat{S}})$ ist auch ein verschränktes Produkt von (X, ξ^r).

3.29 Lemma. *Es sei V wie in Proposition 3.26. Mit den Bezeichungen der Bemerkung 3.28 sei $(\Lambda, u, v) : ((X, \xi^r), \widehat{S}_u) \to M({}_L Z_R)$ ein kovarianter Homomorphismus der reduzierten S-Kowirkung (X, ξ^r). Seien $u' \in \mathcal{U}M(C \otimes S_u)$ und $v' \in \mathcal{U}M(D \otimes S_u)$ die zugehörigen unitären S_u-Kowirkungen (vgl. 1.3.5). Dann ist*

$$(\Lambda, u', v') : ((X, \xi), \widehat{S}_u) \longrightarrow M({}_L Z_R)$$

ein kovarianter Homomorphismus der vollen S-Kowirkung (X, ξ). Diese Konstruktion induziert eine Bijektion der kovarianten Homomorphismen von (X, ξ^r) und (X, ξ). Insbesondere ist der kanonische Homomorphismus $X \rtimes_{\xi^r} \widehat{S} \to X \rtimes_\xi \widehat{S}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Da (Λ, u, v) kovariant ist, gilt die Gleichung $Ad(u,v)\circ(\Lambda\otimes 1_{S_V}) = (\Lambda\otimes id_{S_V})\circ\xi^r$. Auf diese Identität wenden wir $(id_X \otimes {}_{fr}\Delta)$ an (vgl. Korollar 3.12) und erhalten für die linke Seite

$$\begin{aligned}(id_X \otimes {}_{fr}\Delta)\circ Ad(u,v)\circ(\Lambda\otimes 1_{S_V}) &\overset{(*)}{=} Ad(u'_{12}\cdot u_{13}, v'_{12}\cdot v_{13})\circ(\Lambda\otimes 1_{S_u}\otimes 1_{S_V})\\ &= Ad(u'_{12}, v'_{12})\circ(\Lambda\otimes 1_{S_u}\otimes id_{S_V})\circ\xi^r\\ &= [(Ad(u',v')\circ(\Lambda\otimes 1_{S_u}))\otimes id_{S_V}]\xi^r\ ,\end{aligned}$$

wobei wir die Positions-Notation 1.0.4 verwenden und in $(*)$ die Beziehung

$$\begin{aligned}(id\otimes {}_{fr}\Delta)(u) &= (id\otimes {}_{fr}\Delta\pi)(u') = (id\otimes id\otimes\pi)(id\otimes\Delta_u)(u')\\ &= (id\otimes id\otimes\pi)(u'_{12}u'_{13}) = u'_{12}u_{13}\end{aligned}$$

benutzen (vgl. Korollar 3.12(3.)). Für die rechte Seite ergibt sich

$$\begin{aligned}(id_X\otimes {}_{fr}\Delta)\circ(\Lambda\otimes id_{S_V})\xi^r &= (\Lambda\otimes {}_{fr}\Delta\pi)\xi\\ &= (\Lambda\otimes id_{S_u}\otimes\pi)(id_X\otimes\Delta_u)\xi\\ &= [((\Lambda\otimes id_{S_u})\xi)\otimes id_{S_V}]\xi^r.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $[(Ad(u',v')\circ(\Lambda\otimes 1_{S_u}))\otimes id_{S_V}]\xi^r = [((\Lambda\otimes id_{S_u})\xi)\otimes id_{S_V}]\xi^r$. Für $x\in X$, $\omega\in\mathcal{L}(H)_*$ und $s\in S_V$ erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned}&[Ad(u',v')\circ(\Lambda\otimes 1_{S_u})]((id\otimes\omega)(\xi^r(x)(1\otimes s)))\\ &\qquad= (id_X\otimes id_{S_u}\otimes\omega\cdot s)(((Ad(u',v')\circ(\Lambda\otimes 1_{S_u}))\otimes id_{S_V})\xi^r(x))\\ &\qquad= (id_X\otimes id_{S_u}\otimes\omega\cdot s)(((\Lambda\otimes id_{S_u})\xi)\otimes id_{S_V})\xi^r(x))\\ &\quad= [(\Lambda\otimes id_{S_u})\xi]((id\otimes\omega)(\xi^r(x)(1\otimes s))).\end{aligned}$$

Da die S_V-Kowirkung ξ^r nichtentartet ist, liegen die Elemente der Form $\xi^r(x)(1\otimes s)$ dicht in $X\otimes S_V$ und folglich die Elemente der Form $(id\otimes\omega)(\xi^r(x)(1\otimes s))$ dicht in X. Also gilt die Kovarianzgleichung $Ad(u',v')\circ(\Lambda\otimes 1_{S_u}) = (\Lambda\otimes id_{S_u})\xi$. Diese Konstruktion ist offenbar bijektiv mit Inversem $(\Lambda, u', v')\longmapsto(\Lambda, (id\otimes\pi)(v'), (id\otimes\pi)(u'))$. Sie überführt einen kovarianten Homomorphismus von (X,ξ) in einen kovarianten Homomorphismus von (X,ξ^r). Folglich besitzt $(X\rtimes_\xi S, j_\xi, j_\xi^\alpha, j_\xi^\beta)$ die universelle Eigenschaft für das verschränkte Produkt von (X,ξ^r), und der kanonische Homomorphismus ist bijektiv. □

Die Korrespondenz von normalen vollen und reduzierten S-Kowirkungen ist natürlich:

3.30 Satz. *Ist $V\in\mathcal{U}(H\otimes H)$ symmetrisch (Definition 3.6), so gibt es mit den Bezeichnungen aus Definition 2.59, § 1.3 sowie § 1.5 zueinander inverse Äquivalenzen der folgenden Kategorien:*

1. $(\cdot)^r : \mathcal{HBM}^{n,ne}_{S_u}\to\mathcal{HBM}^{ne}_{S_V}$ *mit Inversem* $(\cdot)^f : \mathcal{HBM}^{ne}_{S_V}\to\mathcal{HBM}^{n,ne}_{S_u}$
2. $(\cdot)^r : \mathfrak{M}^{n,ne}_{S_u}\to\mathfrak{M}^{ne}_{S_V}$ *mit Inversem* $(\cdot)^f : \mathfrak{M}^{ne}_{S_V}\to\mathfrak{M}^{n,ne}_{S_u}$.

3.31 Bemerkung. Die Funktoren verändern lediglich Kowirkungen. Im ersten Fall bedeutet das: Für (X,ξ) in $\mathcal{HBM}^{n,ne}_{S_u}$ bzw. in $(X,\xi)\in\mathcal{HBM}^{ne}_{S_V}$ ist $(X,\xi)^r := (X,\xi^r)$ bzw. $(X,\xi)^f := (X,\xi^f)$ (vgl. Bemerkung 3.25 und Proposition 3.26). Äquivariante Morphismen in werden nicht verändert.

Im zweiten Fall modifiziert man zudem Morphismen $[(X,\xi)]$ in $\mathfrak{M}^{n,ne}_{S_u}((A,\alpha),(B,\beta))$ bzw. $[(X,\xi)]$ in $\mathfrak{M}^{ne}_{S_V}((A,\alpha),(B,\beta))$ zu $[(X,\xi)]^r := [(X,\xi^r)]\in\mathfrak{M}^{ne}_{S_V}((A,\alpha^r),(B,\beta^r))$ bzw. $[(X,\xi)]^f := [(X,\xi^f)]\in\mathfrak{M}^{n,ne}_{S_u}((A,\alpha^f),(B,\beta^f))$.

Beweis von Satz 3.30. Für den ersten Teil sei $\Phi \in \mathcal{HBM}_{S_u}^{n,ne}((X,\xi),(Y,\zeta))$. Dann ist Φ offensichtlich auch ξ^r-ζ^r-äquivariant, und $(\cdot)^r$ setzt sich zu einem Funktor fort. Ist umgekehrt $\Phi \in \mathcal{HBM}_{S_V}^{ne}((X,\xi),(Y,\zeta))$, so gilt unter mehrfacher Anwendung von Proposition 3.26 die Beziehung

$$(\zeta \otimes id)\zeta^f \Phi = (id \otimes \Delta_{rf})\zeta\Phi = (\Phi \otimes \Delta_{rf})\xi = (\Phi\xi \otimes id)\xi^f = (\zeta \otimes id)(\Phi \otimes id)\xi^f.$$

Wegen der Injektivität von ζ folgt die ξ^f-ζ^f-Äquivarianz von Φ, daher ist $(\cdot)^f$ ein Funktor. Ist $(X,\xi) \in \mathcal{HBM}_{S_V}^{ne}$, so ist $(\xi^f)^r = \xi$. Ist umgekehrt $(X,\xi) \in \mathcal{HBM}_{S_u}^{n,ne}$, so hat man wegen Proposition 3.26 die Gleichung

$$\begin{aligned}(\xi^r \otimes id)(\xi^r)f &= (id \otimes \Delta_{rf})\xi^r = (id \otimes \Delta_{rf}\pi)\xi \\ &\overset{(*)}{=} (id \otimes \pi \otimes id)(\xi \otimes id)\xi = (\xi^r \otimes id)\xi \ ,\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Identität aus Korollar 3.5 eingeht. Die Injektivität von ξ^r liefert $(\xi^r)^f = \xi$. Also sind die beiden Funktoren zueinander invers.

Um den zweiten Teil zu beweisen, beachte man, daß wegen des ersten Teils die Konstruktionen mit äquivariant unitären Äquivalenzklassen von Rechts-Hilbert-Bimoduln verträglich sind. Sie induzieren daher wohldefinierte Abbildungen auf den Morphismen der Morita-Kategorien, die offenbar die Einselemente erhalten. Für die Verträglichkeit mit dem Produkt seien $[(X,\xi)] \in \mathfrak{M}_{S_V}^{ne}((A,\alpha),(B,\beta))$ und $[(Y,\zeta)] \in \mathfrak{M}_{S_V}^{ne}((B,\beta),(C,\gamma))$. Wir müssen nur die Kowirkungen auf dem Tensorprodukt überprüfen (vgl. Proposition 2.28). Dazu rechnet man die Gleichung

$$(id \otimes \pi)(\xi^f \sharp_B \zeta^f) = \Theta \circ ([(id \otimes \pi)\xi^f] \otimes_{B \otimes S_V} [(id \otimes \pi)\zeta^f]) = \Theta \circ (\xi \otimes_{B\otimes S_V} \zeta) = \xi \sharp_B \zeta$$

nach, woraus nach dem ersten Teil die $\xi^f \sharp_B \zeta^f = (\xi \sharp_B \zeta)^f$ folgt. Also ist $(\cdot)^f$ mit Tensorprodukten verträglich und induziert einen Funktor der Morita-Kategorien. Analog zeigt man die Verträglichkeit von $(\cdot)^r$ mit Tensorprodukten. Wie im ersten Teil sind die beiden Funktoren dann offensichtlich zueinander invers. □

3.32 Bemerkung. Der Satz 3.30 erlaubt es, reduzierte Kowirkungen als einen speziellen Typ von vollen Kowirkungen aufzufassen. Man kann die Kategorie der reduzierten Kowirkungen mit derjenigen vollen normalen Kowirkungen identifizieren und ausschließlich in der Kategorie der vollen Kowirkungen arbeiten. Anschließend kann man durch Normalisieren wieder in die Kategorie der reduzierten Kowirkungen „absteigen“. Das Lemma 3.29 garantiert einem hierbei, daß es keine Rolle spielt, ob man das universelle verschränkte Produkt bezüglich der reduzierten Kowirkung oder der zugehörigen vollen normalen Kowirkung bildet.

4.KAPITEL: Doppelt verschränkte Produkte und Dualität

In diesem Abschnitt soll für eine S-Kowirkung (A, α) die Frage untersucht werden, welche Beziehung zwischen dem doppelt verschränkte Produkt $A \rtimes_{\alpha(,r)} \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\alpha}(,r)} S$ und dem Tensorprodukt $A \otimes \mathcal{K}$ besteht. Insbesondere werden wir den Dualitätssatz

$$A \rtimes_{\alpha,r} \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\alpha},r} S \cong A \otimes \mathcal{K}$$

von Baaj und Skandalis [**4**, Théorème 7.5] beweisen, der die reduzierte Imai-Takai-Dualität [**21**, Proposition 3.4] und die reduzierte Katayama-Dualität [**31**, Theorem 8] verallgemeinert.

Man kann den Dualitätssatz (mittels einer natürlichen Abbildung) nur dann erwarten, wenn die multiplikative Unitäre $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ zusätzlich zu den bereits geforderten Eigenschaften regulär ist (vgl. [**4**, 3.3 Définition], [**4**, 3.2 Proposition] und [**4**, 3.10 Définition]).

4.1 Definition. Eine multiplikative Unitäre $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ heißt *regulär*, falls $\overline{\mathcal{C}(V)} = \mathcal{K}$ ist (vgl. 1.3.1). Wir sagen *V ist biregulär*, falls V regulär und zusätzlich die Menge von Operatoren $\{(\omega \otimes id)(\Sigma V) \,|\, \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ norm-dicht in $\mathcal{K}$ ist.

4.2 Lemma. *Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch (Definition 3.6) und regulär, so ist V genau dann biregulär wenn $\widehat{V}$ aus Bemerkung 3.8 regulär ist. In diesem Fall ist $\widehat{V}$ ebenfalls symmetrisch und biregulär.*

Beweis. Ist $\Sigma \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ die Vertauschung, so gilt $\widehat{V} = (1 \otimes U)\Sigma V \Sigma (1 \otimes U)$ und daher $\mathcal{C}(\widehat{V}) = (id \otimes \mathcal{L}(H)_*)(\Sigma \widehat{V}) = U \cdot (\mathcal{L}(H)_* \otimes id)(\Sigma V)$. Daraus folgt die Behauptung. □

4.3 Beispiel.

1. Kac-Systeme (H, V, U) sind biregulär, vgl. [**4**, Définition 6.4] und nach [**4**, Proposition 6.9] gilt $\overline{\widehat{\pi}_U(\widehat{S_u}) \cdot \pi(S_u)} = \mathcal{K} = \overline{\pi(S_u) \cdot \widehat{\pi}(\widehat{S_u})}$.
2. Eine multiplikative Unitäre W, die zu einer lokalkompakten Quantengruppe im Sinne von Kustermans und Vaes gehört (vgl. 1.3.6), erfüllt viele der Eigenschaften eines Kac-Systems (vgl. hierzu [**40**, Proposition 3.13] und Beispiel 3.9). Ist W zusätzlich regulär, so ist sie auch automatisch biregulär, denn mit [**4**, Proposition 6.3] gilt $\overline{S_W \cdot \widehat{S}_W} = \mathcal{K}$. Es folgt für $U := J\widehat{J}$ (vgl. Beispiel 3.9), daß auch $\overline{\widehat{\pi}_U(\widehat{S}_u) \cdot \pi(S_u)} = \overline{J\widehat{J}\widehat{S}_W \widehat{J} J S_W} = \overline{J\widehat{S}_W S_W J} = \mathcal{K}$ gilt, da wegen [**40**, Lemma 3.7] $JS_W J = S_W$ und $\widehat{J}\widehat{S}_W \widehat{J} = \widehat{S}_W$ ist (Man beachte die Unterschiede in der Notation, vgl. 1.3.6). Also ist nach [**4**, Proposition 6.9] auch $\widehat{W}$ regulär und daher W biregulär.

4.4 Definition. Motiviert durch die Beispiele nennen wir eine symmetrische multiplikative Unitäre $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ *stark biregulär*, falls $\overline{\pi(S_u)\widehat{\pi}(\widehat{S_u})} = \mathcal{K} = \overline{\pi(S_u) \cdot \widehat{\pi}_U(\widehat{S_u})}$ gilt.

4.5 Bemerkung. Eine stark biregulare symmetrische multiplikative Unitäre V ist automatisch biregulär: Da V symmetrisch ist, folgt aus $\overline{\pi(S_u)\widehat{\pi}(\widehat{S_u})} = \mathcal{K}$ nach [**4**, Proposition 6.9] die Regularität von V. Das Argument trifft auch auf $\widehat{V}$ zu, also gilt mit Lemma 4.2 die Behauptung. Für Kac-Systeme ist Biregularität also äquivalent zu starker Biregularität. Eine multiplikative Unitäre W wie in Beispiel 4.3(2.) ist genau dann stark biregulär, wenn sie regulär ist.

Da biduale Kowirkungen nach Definition 2.37 stets nichtentartet sind, ist Dualitäts-Theorie nur für nichtentartete Kowirkungen sinnvoll. Wir werden daher sämtliche Kowirkungen als nichtentartet voraussetzen.

§ 4.1 Die kanonischen Surjektionen

Wir folgen einer Idee von Nilsen [**51**], welche die Dualitätstheorie auf der Existenz von abstrakt definierten kanonischen Surjektionen $(A \rtimes_\delta \widehat{G}) \rtimes_{\widehat{\delta}} G \to A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ aufgebaut wird (vgl. den ersten Paragraphen des 2. Abschnitts in [**51**]). Die Definition dieser Surjektionen läßt sich auf Quantengruppen übertragen. Sie sind äquivariant, wenn man eine geeignete natürliche Kowirkung auf $A \otimes \mathcal{K}$ betrachtet. Wesentlich für deren Existenz ist die Regularität von V. Als Vorbereitung benötigen wir das folgende Lemma

4.6 Lemma. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine dichte C^*-algebraische multiplikative Unitäre. Mit $(\widehat{S}_u, \mathfrak{u})$ bzw. $(S_u, \widehat{\mathfrak{u}})$ seien die starken universellen Duale von (S_V, Δ) bzw. $(\widehat{S}_V, \widehat{\Delta})$ und mit $\mathfrak{v}$ die zugehörige beidseitig universelle Kodarstellung (vgl. 1.3.5) bezeichnet. Dann gilt:*

1. *V ist genau dann regulär, wenn $\overline{(\widehat{S}_u \otimes 1) \cdot \mathfrak{v} \cdot (1 \otimes S_u)} = \widehat{S}_u \otimes S_u$ gilt.*

2. *Ist V symmetrisch (Definition 3.6), so gilt $\overline{(1 \otimes S_u) \cdot \mathfrak{v} \cdot (\widehat{S}_u \otimes 1)} = \widehat{S}_u \otimes S_u$ genau dann, wenn $\widehat{V}$ regulär ist, vgl. Bemerkung 3.8.*

Beweis. Die Regularität von V ist äquivalent zu $\overline{(\mathcal{K} \otimes 1)V(1 \otimes \mathcal{K})} = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ (vgl. [**4**, Proposition 3.2]). Die Bedingung in (1.) ist dann offenbar hinreichend, da $\widehat{\pi}$ und π nichtentartet sind. Ist umgekehrt V regulär, so folgt nach [**4**, Proposition 3.6] die Gleichung $\overline{(\widehat{S}_V \otimes 1)V(1 \otimes S_V)} \overset{(*)}{=} \widehat{S}_V \otimes S_V$. Wir benutzen die Abbildungen ${}_{fr}\widehat{\Delta}$ und Δ_{rf} aus Korollar 3.5, welche die Beziehungen

$$\overline{(1 \otimes \mathcal{K}) \cdot {}_{fr}\widehat{\Delta}(\widehat{S}_V)} = \widehat{S}_V \otimes \mathcal{K} = \overline{{}_{fr}\widehat{\Delta}(\widehat{S}_V) \cdot (1 \otimes \mathcal{K})} \quad \text{und}$$
$$\overline{(\mathcal{K} \otimes 1) \cdot \Delta_{rf}(S_V)} = \mathcal{K} \otimes S_V = \overline{\Delta_{rf}(S_V) \cdot (\mathcal{K} \otimes 1)} \ ,$$

erfüllen; dies folgt aus der Tatsache, daß $\widehat{\Delta}_u$ sowie Δ_u als Kowirkungen beidseitig nichtentartet (vgl. 1.2.5) und $\widehat{\pi}$ sowie π als Morphismen nichtentartet sind. Wendet man die Abbildung $({}_{fr}\widehat{\Delta} \otimes \Delta_{rf})$ auf die Gleichung $(*)$ an, so erhält man

$$\overline{({}_{fr}\widehat{\Delta}(\widehat{S}_V) \otimes 1 \otimes 1) \cdot ({}_{fr}\widehat{\Delta} \otimes \Delta_{rf})(V) \cdot (1 \otimes 1 \otimes \Delta_{rf}(S_V))} = \overline{({}_{fr}\widehat{\Delta}(\widehat{S}_V) \otimes \Delta_{rf}(S_V))}.$$

Mit den Eigenschaften der Abbildungen ${}_{fr}\widehat{\Delta}$ und Δ_{rf} (vgl. Korollar 3.5) und den Beziehungen zwischen V, $\mathfrak{u}$, $\widehat{\mathfrak{u}}$ und $\mathfrak{v}$ (vgl. 1.3.5) ergibt sich $({}_{fr}\widehat{\Delta} \otimes \Delta_{rf})(V) = \mathfrak{u}_{13} \cdot V_{23} \cdot \mathfrak{v}_{14} \cdot \widehat{\mathfrak{u}}_{24}$, wobei wir die Positions-Notation aus 1.0.4 verwenden. Setzt man das in die letzte Gleichung ein und multipliziert von links und von rechts mit $(1 \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes 1)$, so ergibt sich mit den obigen Beziehungen für den linken Term

$$\begin{aligned} &\overline{(\widehat{S}_u \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes 1) \cdot (\mathfrak{u}_{13} \cdot V_{23} \cdot \mathfrak{v}_{14} \cdot \widehat{\mathfrak{u}}_{24}) \cdot (1 \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes S_u)} \\ &= \overline{(\widehat{S}_u \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes 1) \cdot \mathfrak{v}_{14} \cdot (1 \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes S_u)} \end{aligned}$$

und für den rechten Term $(\widehat{S}_u \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \otimes S_u)$. Schneidet man die resultierenden Terme mit Funktionalen der Form $(id \otimes \mathcal{L}(H)_* \otimes \mathcal{L}(H)_* \otimes id)$ ab, so ergibt sich insgesamt

$$\overline{(\widehat{S}_u \otimes 1) \cdot \mathfrak{v} \cdot (1 \otimes S_u)} = \widehat{S}_u \otimes S_u,$$

und es folgt die erste Behauptung.

Für den zweiten Teil beachte man, daß $\widehat{V} = (id \otimes Ad(U))(\Sigma V \Sigma)$ nach [**4**, Proposition 3.6] genau dann regulär ist, wenn $\overline{(\widehat{S}_{\widehat{V}} \otimes 1)\widehat{V}(1 \otimes S_{\widehat{V}})} = \widehat{S}_{\widehat{V}} \otimes S_{\widehat{V}}$ gilt . Wegen $\widehat{S}_{\widehat{V}} = S_V$ und $S_{\widehat{V}} = Ad(U)(\widehat{S}_V)$ (vgl. Bemerkung 3.8) ist diese Gleichung zu $\overline{(1 \otimes S_V)V(\widehat{S}_V \otimes 1)} = \widehat{S}_V \otimes S_V$ äquivalent. Man kann nun den Trick des ersten Teils mit den Abbildungen $\widehat{\Delta}_{rf}$ und ${}_{fr}\Delta$ aus Korollar 3.12 wiederholen. □

4.7 Korollar. *Ist V symmetrisch und biregulär und C eine C^*-Algebra, erfüllt jede volle unitäre S-Kodarstellung $u \in \mathcal{UM}(C \otimes S_u)$ die analytische Bedingung $\overline{(1 \otimes S_u)u(C \otimes 1)} = C \otimes S_u$ aus Beispiel 2.47(3.). Daher ist u ein Kozykel für die triviale Kowirkung δ_C^{tr} auf C. Insbesondere ist $Ad(u) \circ \delta_C^{tr} : C \longrightarrow M(C \otimes S_u)$ eine nichtentartete volle S-Kowirkung auf C, die wir auch einfach mit $Ad(u)$ bezeichnen.*

Beweis. Der zu u gehörige nichtentartete *-Homomorphismus sei mit $\mu_C : \widehat{S}_u \to M(C)$ bezeichnet. Dann liefert die Identität

$$\begin{aligned}\overline{(1 \otimes S_u) \cdot u \cdot (C \otimes 1_S)} &= \overline{(1 \otimes S_u) \cdot (\mu_C \otimes id_S)(\mathfrak{v}) \cdot (\mu_C(\widehat{S}_u) \cdot C \otimes 1_S)} \\ &= \overline{(\mu_C \otimes id_S)((1_{\widehat{S}} \otimes S_u)\mathfrak{v}(\widehat{S}_u \otimes 1_S)) \cdot (C \otimes 1_S)} \\ &\overset{(*)}{=} \overline{(\mu_C(\widehat{S}_u) \otimes S_u) \cdot (C \otimes 1_S)} = C \otimes S_u\end{aligned}$$

das gewünschte Resultat, wobei in $(*)$ das Lemma 4.6 benutzt wird. □

Ist $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ ein Hilbert-Bimodul mit nichtentarteter voller S-Kowirkung, so gibt es eine natürliche Kowirkung auf $X \otimes \mathcal{K}$, für welche die Abbildung Φ_ξ aus Proposition 3.16 äquivariant ist.

4.8 Definition. Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch und stark biregulär (vgl. die Definitionen 3.6 und 4.4). Mit den Bezeichnungen aus § 1.3 betrachten wir die volle unitäre S-Kodarstellung $\mathfrak{v}_U := (\widehat{\pi}_U \otimes id_{S_u})(\mathfrak{v})$ in $\mathcal{UM}(\mathcal{K} \otimes S_u)$. Ist $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \in \mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ (vgl. die Definition in 1.5.1), so gilt:

1. Durch die Adjunktion mit $\mathfrak{v}_U$ (vgl. Bemerkung 2.57) wird durch

   $$\xi\natural\mathfrak{v}_U := \xi\natural(\mathfrak{v}_U, \mathfrak{v}_U) = Ad(1_A \otimes \mathfrak{v}_U, 1_B \otimes \mathfrak{v}_U)(\xi \otimes_* id_{\mathcal{K}}) : X \otimes \mathcal{K} \longrightarrow M((X \otimes \mathcal{K}) \otimes S_u)$$

   eine nichtentartete volle S-Kowirkungen auf $X \otimes \mathcal{K}$ definiert.

2. Die *kanonische Surjektion* ist definiert durch den Hilbert-Bimodul-Morphismus

   $$\Phi_\xi := \widehat{\pi}_\xi \times (1_A \otimes \pi_U, 1_B \otimes \pi_U) : X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S \longrightarrow X \otimes \mathcal{K}$$

   (vgl. die Notation 3.1 und Proposition 3.16). Sie ist surjektiv und $\widehat{\widehat{\xi}}$-$(\xi\natural\mathfrak{v}_U)$-äquivariant.

Analog definiert man die $\widehat{S}_u$-Kodarstellung $\widehat{\mathfrak{v}_U} := (\pi_U \otimes id)(\sigma(\mathfrak{v}))$. Für eine volle nichtentartete $\widehat{S}$-Kowirkung (Y,ζ) ist $\zeta\natural\widehat{\mathfrak{v}_U} := \zeta\natural(\widehat{\mathfrak{v}_U},\widehat{\mathfrak{v}_U})$ dann eine nichtentartete volle $\widehat{S}$-Kowirkung auf $Y \otimes \mathcal{K}$. Die entsprechende *kanonische Surjektion* ist der Morphismus $\widehat{\Phi}_\zeta$ aus Proposition 3.16.

Beweis der Behauptungen in Definition 4.8. Wegen Lemma 4.7 folgt der erste Teil aus der Diskussion in § 2.6 und § 2.7. Insbesondere ist die Kowirkung wegen Bemerkung 2.51(2.) nichtentartet.

Für den zweiten Teil beachte man , daß $\Phi_\xi = (id_X \otimes \pi)\xi \times (1 \otimes \widehat{\pi}) \times (1 \otimes (\pi_U))$ gilt, wobei wir die Notation in der offensichtlichen Weise abkürzen. Die Surjektivität folgt aus Lemma 2.25 und der Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\Phi_\xi) &= \overline{(id \otimes \pi)(\xi(X))(1 \otimes \widehat{\pi}(\widehat{S}_u) \cdot (\pi_U(S_u)))} \\
&\overset{(*)}{=} \overline{(id \otimes \pi)(\xi(X))(1 \otimes \mathcal{K})} \\
&= \overline{(id \otimes \pi)(\xi(X))(1 \otimes \pi(S_u)\mathcal{K})} \\
&= \overline{(id \otimes \pi)(\xi(X)(1 \otimes S_u))(1 \otimes \mathcal{K})} \\
&= X \otimes \mathcal{K}.
\end{aligned}$$

Hierbei folgt die Gleichung $(*)$ aus $\overline{\widehat{\pi}(\widehat{S}_u) \cdot \pi_U(S_u)} = \overline{Ad(U)(\widehat{\pi}_U(\widehat{S}_u) \cdot \pi(S_u))} = \mathcal{K}$, weil V stark biregulär ist. Außerdem ist in der letzten Identität wesentlich, daß wir nichtentartete Kowirkungen betrachten.

Die Verträglichkeit mit den Kowirkungen, $(\Phi_\xi \otimes id) \circ \widehat{\widehat{\xi}} \overset{(!)}{=} \xi\natural\mathfrak{v}_U \circ \Phi_\xi$, zeigt man mittels der universellen Eigenschaft des verschränkten Produkts: Für die linke Seite erhalten wir durch Vorschalten der kanonischen Abbildungen

$$\begin{aligned}
(\Phi_\xi \otimes id)\widehat{\widehat{\xi}} \circ \hat{\jmath}_{\widehat{\xi}} \circ j_\xi &= (id \otimes \pi)\xi \otimes 1_{S_u} \\
(\Phi_\alpha \otimes id)\widehat{\widehat{\alpha}} \circ \hat{\jmath}_{\widehat{\alpha}} \circ j^{\alpha}_{\widehat{S}} &= 1_A \otimes \widehat{\pi} \otimes 1_{S_u} \\
\text{und} \qquad (\Phi_\alpha \otimes id)\widehat{\widehat{\alpha}} \circ \hat{\jmath}^{\widehat{\alpha}}_S &= 1_A \otimes [(\pi_U \otimes id)\Delta_u].
\end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, daß die entsprechenden Terme für $\xi\natural\mathfrak{v}_U \circ \Phi_\xi$ mit den jeweiligen rechten Seiten übereinstimmen, dann folgt die zu zeigende Äquivarianz. Zunächst macht man sich klar, daß man $\xi\natural\mathfrak{v}_U$ als Komposition

$$\xi\natural\mathfrak{v}_U = (id_X \otimes Ad(\mathfrak{v}_U)) \circ (id \otimes \sigma) \circ (\xi \otimes id_{\mathcal{K}}) = (id_X \otimes \sigma) \circ (id_X \otimes Ad(\sigma(\mathfrak{v}_U))) \circ (\xi \otimes id_{\mathcal{K}})$$

schreiben kann, wobei σ die Vertauschung ist. Unter Verwendung der Notation 1.0.5 folgt

$$\begin{aligned}
\xi\natural\mathfrak{v}_U \circ (id \otimes \pi)\xi &= (id_X \otimes \sigma) \circ (id \otimes Ad(\sigma(\mathfrak{v}_U))) \circ (\xi \otimes \pi)\xi \\
&= (id_X \otimes \sigma) \circ (id_X \otimes Ad(\sigma(\mathfrak{v}_U))) \circ (id_X \otimes (id \otimes \pi)\Delta_u) \circ \xi \\
&= (id_X \otimes \sigma) \circ (id_X \otimes [Ad(\sigma(\mathfrak{v})^{\widehat{\pi}_U}) \circ (id \otimes \pi)\Delta_u]) \circ \xi \\
&\overset{(*)}{=} (id \otimes \sigma) \circ (id_X \otimes [1_{S_u} \otimes \pi]) \circ \xi \\
&= (id \otimes \pi)\xi \otimes 1_{S_u},
\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Kovarianz-Gleichung aus Korollar 3.12(1.) eingesetzt wird. Die verbleibenden Gleichungen

$$\alpha \natural \mathfrak{v}_U \circ (1_A \otimes \widehat{\pi}) = 1_A \otimes \widehat{\pi} \otimes 1_{S_u} \quad \text{und}$$
$$\alpha \natural \mathfrak{v}_U \circ (1_A \otimes \pi_U) = 1_A \otimes (\pi_U \otimes id)\Delta_u$$

sind sogar noch einfacher: Für die erste benutzt man, daß $\widehat{\pi}_U$ und $\widehat{\pi}$ vertauschen, und die zweite ist im wesentlichen die Kovarianz von $(\pi, \widehat{\pi})$. Also ist nach der universellen Eigenschaft die Gleichung $(\Phi_\xi \otimes id) \circ \widehat{\widehat{\xi}} = \xi \natural \mathfrak{v}_U \circ \Phi_\xi$ erfüllt, d.h. Φ_ξ ist äquivariant. □

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch erwähnen, daß die kanonischen Surjektionen natürlich sind, was man durch eine offensichtliche Anwendung der universellen Eigenschaft des verschränkten Produkts leicht beweisen kann:

4.9 Lemma. *Es sei V wie in Definition 4.8 und $\Lambda : (X, \xi) \to M(X', \xi')$ ein Morphismus in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ (vgl. 1.5.1). Dann gilt $\Phi_{\xi'} \circ (\Lambda \rtimes \widehat{S} \rtimes S) = (\Lambda \otimes id_{\mathcal{K}}) \circ \Phi_\xi$.* □

§ 4.2 Reduzierte Dualität

Ziel dieses Abschnitts ist der Satz von Baaj-Skandalis [**4**, Théorème 7.5] über reduzierte Dualität. Auf dem Weg dorthin werden wir jedoch Ergebnisse erhalten, die eine eigenständige Bedeutung haben und ihre Anwendung bei der maximalen Dualität finden.

4.10 Proposition. *Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch (Definition 3.6) und stark biregulär (Definition 4.4) sowie $({}_A X_B, {}_\alpha \xi_\beta) \in \mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ (vgl. 1.5.1), dann gibt es einen äquivarianten Isomorphismus $\Phi_{\xi,fr}$, der das folgende kommutative Diagramm vervollständigt:*

$$\begin{array}{ccc}
(X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S, \widehat{\widehat{\xi}}) & \xrightarrow{\Phi_\xi} & (X \otimes \mathcal{K}, \xi \natural \mathfrak{v}_U) \\
{\scriptstyle \pi_{\widehat{\xi}}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \eta_\xi \otimes id_{\mathcal{K}}} \\
(X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi},r} S, \widehat{\widehat{\xi}}_{rf}) & \xrightarrow[\Phi_{\xi,fr}]{\cong} & (X^n \otimes \mathcal{K}, \xi^n \natural \mathfrak{v}_U).
\end{array}$$

Beweis. Wir fassen $X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi},r} S$ und $X^n \otimes \mathcal{K} \cong j_\xi(X) \otimes \mathcal{K}$ in der offensichtlichen Art und Weise als Unteralgebren von $M(X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes \mathcal{K})$ auf (vgl. die Definition von $\pi_{\widehat{\xi}}$ in Bemerkung 3.24 und Lemma 2.64). Außerdem benutzen wir die Notation 1.0.5. Dann leistet die Einschränkung der Adjunktion $Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha, \mathfrak{u}^\pi_\beta) : M(X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes \mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} M(X \rtimes_\xi \widehat{S} \otimes \mathcal{K})$ das Gewünschte, da

$$\begin{aligned}
Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha, \mathfrak{u}^\pi_\beta) \circ \pi_{\widehat{\xi}} \circ \hat{\jmath}_{\widehat{\xi}} &= Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha, \mathfrak{u}^\pi_\beta) \circ (id_{X \rtimes \widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}) \circ \widehat{\xi} \\
&= (j_\xi \otimes id) \circ \widehat{\pi}_\xi \\
&= (j_\xi \otimes id) \circ \Phi_\xi \circ \hat{\jmath}_{\widehat{\xi}}
\end{aligned}$$

gilt, wie wir bereits aus Lemma 3.19 wissen. Die Gleichung für die linken Koeffizien, $Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha) \circ \Phi_\alpha \circ \hat{\jmath}_{\widehat{\alpha}} = Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha) \circ (1_{A \rtimes \widehat{S}} \otimes \pi_U) = (j_\alpha \otimes \pi_U)$, folgt, weil π_U und π kommutieren. Genauso zeigt man die entsprechende Gleichung für die rechten Koeffizienten. Also ist $Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha, \mathfrak{u}^\pi_\beta) \circ \pi_{\widehat{\xi}} = (j_\xi \otimes id) \circ \Phi_\xi$, und die Behauptung folgt. □

4.11 Bemerkung. Bei Gruppen-Kowirkungen stimmen reduzierte und volle verschränkte Produkte überein ($\mathcal{C}_0(G)$ ist mittelbar). Die Proposition 4.10 verallgemeinert daher den reduzierten Dualitätssatz von Katayama (vgl. [**31**, Theorem 8], [**51**, Corollary 2.6] oder [**15**, Theorem A.69]).

Die Proposition 4.10 hat zwei wesentliche Konsequenzen: Zum einen erhält man aus ihr den Satz über reduzierte Dualität von Baaj und Skandalis [**4**, Théorème 7.5] (vgl. Satz 4.12).

Zum anderen kann man daraus folgern, daß das verschränkte Produkt

$$\Phi_\xi \rtimes \widehat{S} : (X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S) \rtimes_{\widehat{\widehat{\xi}}} S \longrightarrow (X \otimes \mathcal{K}) \rtimes_{\xi \natural \mathfrak{v}_U} S$$

ein Isomorphismus ist. Die zweite Konsequenz wird in § 4.3 wesentlich sein und soll deshalb erst dort bewiesen werden.

4.12 Satz. *Ist V wie in Proposition 4.10 und (X, ξ) eine volle nichtentartete S-Kowirkung, so existiert ein eindeutig bestimmter äquivarianter Isomorphismus $\Phi_{\xi,r}$, der das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}
(X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S, \widehat{\widehat{\xi}}) & \xrightarrow{\Phi_\xi} & (X \otimes \mathcal{K}, \xi \natural \mathfrak{v}_U) \\
{\scriptstyle \eta_{\widehat{\xi}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \eta_\xi \otimes id} \\
(X \rtimes_r \widehat{S} \rtimes_r S, \widehat{(\widehat{\xi}_{rf})}_{rf}) & \underset{\cong}{\xrightarrow{\Phi_{\xi,r}}} & (X^n \otimes \mathcal{K}, \xi^n \natural \mathfrak{v}_U)
\end{array}$$

kommutativ vervollständigt. Hierbei ist $\eta_{\widehat{\xi}} := \pi_{\widehat{\xi}_{rf}} \circ (\widehat{\pi}_\xi \rtimes \widehat{S}) = (\widehat{\pi}_\xi \rtimes_r \widehat{S}) \circ \pi_{\widehat{\xi}}$.

Inbesondere ist für eine nichtentartete reduzierte S-Kowirkung (X, ξ) der Morphismus

$$\Phi_{\xi,r} := \Phi_{\xi^f,r} : (X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi},r} S, (\widehat{\widehat{\xi}})^r) \xrightarrow{\cong} (X \otimes \mathcal{K}, \xi \natural ({}_U V))$$

ein äquivarianter Isomomorphismus, wobei ${}_U V := (Ad(U) \otimes id)(V) \in \mathcal{UM}(\mathcal{K} \otimes S_V)$ und $\xi \natural ({}_U V) := \xi \natural ({}_U V, {}_U V)$ sind (vgl. Bemerkung 2.57 und für ξ^f die Proposition 3.26).

Beweis. Da $\widehat{\pi}_\xi$ nach Proposition 3.20 eine Normalisierung ist, muß nach Korollar 3.21 die Abbildung $\widehat{\pi}_\xi \rtimes_r S$ ein Isomorphismus sein. Folglich erhält man aus Proposition 4.10 den Isomorphismus $\Phi_{\xi,r} := \Phi_{\xi,fr} \circ (\widehat{\pi}_\xi \rtimes_r S)^{-1}$, der das Diagramm kommutativ vervollständigt. Die Natürlichkeit $\pi_{\widehat{\xi}_{rf}} \circ (\widehat{\pi}_\xi \rtimes \widehat{S}) = (\widehat{\pi}_\xi \rtimes_r \widehat{S}) \circ \pi_{\widehat{\xi}}$ ist dabei aus Lemma 3.18 bekannt.

Eine reduzierte S-Kowirkung (X, ξ) kann man nach Satz 3.30 als volle normale S-Kowirkung (X, ξ^f) auffassen. Dann ist $\Phi_{\xi,r} := \Phi_{(\xi^f),r}$ auch äquivariant bezüglich der entsprechenden reduzierten Kowirkungen $\widehat{(\widehat{\xi}_{rf})}_r$ bzw. $(\xi^f \natural \mathfrak{v}_U)^r$. Aufgrund der Definitionen von $\mathfrak{v}_U$ und ${}_U V$ ist klar, daß $(\xi^f \natural \mathfrak{v}_U)^r = (id \otimes \pi) \circ (\xi^f \natural \mathfrak{v}_U) = \xi \natural ({}_U V)$ gilt. □

§ 4.3 Maximale Kowirkungen

Im Hinblick auf reduzierte Dualität ist eine natürliche Frage, für welche vollen S-Kowirkungen (X, ξ) die kanonische Surjektion $\Phi_\xi : X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S \to X \otimes \mathcal{K}$ selbst ein Isomorphismus ist. Das ist im allgemeinen sicher nicht der Fall, da bereits bei Gruppen-Kowirkungen Gegenbeispiele existieren. So ist z.B. für eine Gruppe G das doppelt verschränkte Produkt der reduzierten Gruppen-C^*-Algebra isomorph zum Tensorprodukt der vollen Gruppen-C^*-Algebra mit den kompakten Operatoren auf $L^2(G)$ (vgl. [**53**, Example 2.12]): $C_r^*(G) \rtimes \widehat{G} \rtimes G \cong C^*(G) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$. Im allgemeinen sind für nicht-mittelbare Gruppen die Algebren $C_r^*(G) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ und $C^*(G) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ jedoch nicht isomorph.

In Anlehnung an [**14**, Definition 3.1] definieren wir deshalb maximale Kowirkungen:

4.13 Definition. Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch (Definition 3.6) und stark biregulär (Definition 4.4), so definieren wir:

1. Eine nichtentartete volle S-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ heißt *maximal*, wenn die kanonische Surjektion $\Phi_\xi : X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S \to X \otimes \mathcal{K}$ ein Isomorphismus ist.

2. Mit $\mathcal{HBM}_{S_u}^m$ bzw. $\mathfrak{M}_{S_u}^m$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $\mathcal{HBM}_{S_u}^{ne}$ bzw. $\mathfrak{M}_{S_u}^{ne}$ (vgl. § 1.5), deren Objekte maximale Kowirkungen sind.

Analog definieren wir maximale $\widehat{S}$-Kowirkungen mit der entsprechenden kanonischen Surjektion $\widehat{\Phi}_\zeta$ aus Definition 4.8.

Man fragt sich natürlich sofort, ob es überhaupt maximale Kowirkungen gibt. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist Satz 4.16, nach dem duale Kowirkungen $(X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi})$ stets maximal sind. Das ist eine Verallgemeinerung des Ergebnisses für Gruppen-Kowirkungen (vgl. [**53**, Theorem 3.7] oder [**14**, Proposition 3.4]). Die dort angegebenen Beweise benutzen die volle Imai-Takai-Dualität (siehe z.B. [**57**, Theorem 5.1][**15**, Theorem A.67]) für Algebren mit Gruppen-Wirkung aus. Tatsächlich kann man darauf verzichten und das Ergebnis ganz allgemein für reguläre Quantengruppen (genauer stark biregulär symmetrische multiplikative Unitäre) erhalten. Folgende Idee liegt dem Beweis zugrunde: Zunächst zeigt man, daß für eine volle nichtentartete S-Kowirkung (X, ξ) das verschränkte Produkt der kanonischen Surjektion

$$\Phi_\xi \rtimes \widehat{S} : (X \rtimes \widehat{S} \rtimes S) \rtimes \widehat{S} \longrightarrow (X \otimes \mathcal{K}) \rtimes \widehat{S}$$

ein Isomorphismus ist, wie schon im vorangehenden Abschnitt § 4.2 angedeutet wurde. Unabhängig davon ergibt sich eine Beziehung zwischen den kanonischen Surjektionen Φ_ξ und $\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}}$ (vgl. Definition 4.8), welche sicherstellt, daß

$$\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}} : (X \rtimes \widehat{S}) \rtimes S \rtimes \widehat{S} \longrightarrow X \rtimes \widehat{S} \otimes \mathcal{K}$$

genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}$ einer ist. Beide Ergebnisse zusammen ergeben die Maximalität der dualen $\widehat{S}$-Kowirkung $(X \rtimes \widehat{S}, \widehat{\xi})$.

4.14 Proposition. *Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch und stark biregulär sowie (X, ξ) eine nichtentartete volle S-Kowirkung, so ist das verschränkte Produkt der kanonischen Surjektion $\Phi_\xi \rtimes S : (X \rtimes \widehat{S} \rtimes S) \rtimes_{\widehat{\widehat{\xi}}} \widehat{S} \xrightarrow{\cong} (X \otimes \mathcal{K}) \rtimes_{\xi \natural \mathfrak{v}_U} \widehat{S}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Wir benutzen das Diagramm aus Proposition 4.10. Nach Proposition 3.20 ist bekannt, daß der linke vertikale Pfeil $\pi_{\widehat{\xi}}$ eine Normalisierung ist. Mit Korollar 2.67 kann man schließen, daß auch der rechte Pfeil $\eta_\xi \otimes id_{\mathcal{K}}$ eine Normalisierung ist. Wendet man das verschränkte Produkt an, so erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
X \rtimes \widehat{S} \rtimes S \rtimes \widehat{S} & \xrightarrow{\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}} & (X \otimes \mathcal{K}) \rtimes \widehat{S} \\
{\scriptstyle \pi_{\widehat{\xi}} \rtimes \widehat{S}} \Big\downarrow \cong & & \cong \Big\downarrow {\scriptstyle (\eta_\xi \otimes id) \rtimes \widehat{S}} \\
X \rtimes \widehat{S} \rtimes_r S \rtimes \widehat{S} & \xrightarrow[\cong]{(\Phi_{\xi, fr}) \rtimes \widehat{S}} & (X^n \otimes \mathcal{K}) \rtimes \widehat{S},
\end{array}$$

in dem die vertikalen Morphismen (vgl. Proposition 2.68) und der untere Morphismus Isomorphismen sind. Also ist auch $\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}$ ein Isomorphismus. □

Für den zweiten Beweisschritt brauchen wir die Ergebnisse und Notationen aus § 2.6 sowie § 2.7 und hierbei insbesondere das Lemma 2.58 mit der Definition von $\Omega_X(u,v)$. Die oben erwähnte Beziehung zwischen Φ_ξ und $\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}}$ ist die folgende (beachte $\mathfrak{v}_U = (\widehat{\pi}_U \otimes id)(\mathfrak{v})$):

4.15 Proposition. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch und stark biregulär. Für eine nichtentartete volle S-Kowirkung $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}
X \rtimes \widehat{S} \rtimes S \rtimes_{\widehat{\widehat{\xi}}} \widehat{S} & \xrightarrow{\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}}} & X \rtimes \widehat{S} \otimes \mathcal{K} \\
{\scriptstyle \Phi_\xi \rtimes \widehat{S}}\Big\downarrow \cong & & \cong \Big\downarrow {\scriptstyle Ad(\mathfrak{u}^\pi_\alpha, \mathfrak{u}^\pi_\beta)\circ(id_{X \rtimes \widehat{S}} \otimes Ad(U))} \\
(X \otimes \mathcal{K}) \rtimes_{\xi\natural\mathfrak{v}_U} \widehat{S} & \underset{\cong}{\xrightarrow{\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U)}} & X \rtimes \widehat{S} \otimes \mathcal{K}\,,
\end{array}$$

wobei $\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U) := \Omega_\xi(\mathfrak{v}_U, \mathfrak{v}_U)$ ist (vgl. Lemma 2.58).

Hierbei benutzen wir die Bezeichnungen aus Definition 3.6. Außerdem ist $\mathfrak{u}_\alpha = {}^{j^\alpha_{\widehat{S}}}\mathfrak{v}$ die universelle unitäre S_u-Kodarstellung in $\mathcal{U}M(A \rtimes_\alpha \widehat{S} \otimes S_u)$ und $\mathfrak{u}^\pi_\alpha = (id_{A \rtimes \widehat{S}} \otimes \pi)(\mathfrak{u}_\alpha)$. Analog ist $\mathfrak{u}^\pi_\beta$ definiert. Wegen Lemma 2.58 und der Nuklearität von $\mathcal{K}$ ist $\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U)$ ein Isomorphismus. Also folgt aus dem Diagramm, daß $\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}}$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}$ ein Isomorphismus ist. Dies ist aber wegen Proposition 4.14 unter den Voraussetzungen immer der Fall. Als Folgerung erhält man daher sofort das Hauptergebnis diese Abschnitts:

4.16 Satz. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch und stark biregulär (vgl. die Definitionen 3.6 und 4.4). Für jede nichtentartete volle S-Kowirkung (X, ξ) ist die volle duale Kowirkung $\widehat{\xi}$ auf dem verschränkten Produkt $X \rtimes_\xi \widehat{S}$ maximal.* □

Beweis der Proposition 4.15. Wir verwenden die universelle Eigenschaft des iterierten verschränkten Produkts $X \rtimes \widehat{S} \rtimes S \rtimes \widehat{S}$ und werden zeigen, daß die beiden Wege des Diagramms auf den einzelnen „Komponenten" übereinstimmen. Definitionsgemäß gilt für die kanonische Surjektion $\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}} = ((id \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\xi}) \times (1 \otimes \pi) \times (1 \otimes \widehat{\pi})$, wobei wir die Notation in der offensichtlichen Weise abgekürzt haben. Man rechnet einfach

$$(id_{X \rtimes \widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\xi} = (j_\xi \otimes 1_{\mathcal{K}}) \times ((j^\alpha_{\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\Delta}_u), (j^\beta_{\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\Delta}_u)$$

nach und erhält folglich $\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}} = (j_\xi \otimes 1_{\mathcal{K}}) \times ((j^\xi_{\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\Delta}_u) \times (1 \otimes \pi) \times (1 \otimes \widehat{\pi})$ als Zerlegung von $\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}}$ in „Komponenten". Hierbei verwenden wir in naheliegender Weise die suggestive Notation $j^\xi_{\widehat{S}}$ anstelle des Tupels $(j^\alpha_{\widehat{S}}, j^\alpha_{\widehat{S}})$. Für den unteren Weg $\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U) \circ (\Phi_\xi \rtimes \widehat{S})$ des Diagramms betrachten wir zunächst die Zerlegungen von $\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}$ und $\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U)$, wobei wir eine ähnliche Notation wie oben benutzen:

$$\begin{aligned}
\Phi_\xi \rtimes \widehat{S} &= (j_{\xi\natural\mathfrak{v}_U} \circ \Phi_\xi) \times j^{\xi\natural\mathfrak{v}_U}_{\widehat{S}} \\
&= (j_{\xi\natural\mathfrak{v}_U} \circ (id_X \otimes \pi)\xi) \times (j_{\xi\natural\mathfrak{v}_U} \circ (1 \otimes \widehat{\pi})) \times (j_{\xi\natural\mathfrak{v}_U} \circ (1 \otimes \pi_U)) \times j^{\xi\natural\mathfrak{v}_U}_{\widehat{S}} \qquad \text{und} \\
\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U) &= (j_\xi \otimes id_{\mathcal{K}}) \times ((j^\xi_{\widehat{S}} \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\Delta}^{op}_u).
\end{aligned}$$

Diese folgen leicht aus den Definitionen; man beachte, daß $\mathfrak{v}_U = (\widehat{\pi}_U \otimes id_S)(\mathfrak{v})$ und somit der zugehörige *-Morphismus gleich $\widehat{\pi}_U$ ist, vgl. Bemerkung 2.6. Für die Verknüpfung ergibt sich deshalb die Zerlegung

$$\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U) \circ (\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}) = [((j_\xi \otimes \pi)\xi) \times (1 \otimes \widehat{\pi}) \times (1 \otimes \pi_U)] \times ((j_{\widehat{S}}^\xi \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\Delta}_u^{op}).$$

Insgesamt erhält man

$$(id_{X \rtimes \widehat{S}} \otimes Ad(U)) \circ \widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}} = (j_\xi \otimes 1_\mathcal{K}) \times ((j_{\widehat{S}}^\xi \otimes \widehat{\pi})\widehat{\Delta}_u) \times (1 \otimes \pi_U) \times (1 \otimes \widehat{\pi}_U) \quad \text{und}$$
$$\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U) \circ (\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}) = ((j_\xi \otimes \pi)\xi) \times (1 \otimes \widehat{\pi}) \times (1 \otimes \pi_U) \times ((j_{\widehat{S}}^\xi \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\Delta}_u^{op}).$$

Um die Kommutativität des Diagramms zu zeigen, müssen wir nur noch verifizieren, daß das Nachschalten von $Ad(\mathfrak{u}_\alpha^\pi, \mathfrak{u}_\beta^\pi)$ auf jeder Komponente von $(id \otimes Ad(U))\widehat{\Phi}_{\widehat{\xi}}$ die entsprechende Komponente von $\Omega_\xi(\mathfrak{v}_U) \circ (\Phi_\xi \rtimes \widehat{S})$ ergibt.

Für die erste Komponente ist das einfach die Kovarianz von $(j_\xi, \mathfrak{u}_\alpha, \mathfrak{u}_\beta)$ und für die dritte Komponente folgt das aus der Tatsache, daß die Bilder von π_U und π kommutieren. Für die zweite Komponente benutzt man die Kovarianz-Identität aus Korollar 3.4. Die Identität für die letzte Komponente folgt aus einer Umformulierung der Kovarianz von $(\widehat{\pi}_U, \pi)$, denn durch Anwenden der Vertauschung σ auf diese Kovarianz-Gleichung (vgl. Definition 3.6) erhält man $Ad(\mathfrak{v}^\pi) \circ (1_{\widehat{S}_u} \otimes \widehat{\pi}_U) = (id \otimes \widehat{\pi}_U)\widehat{\Delta}_u^{op}$. □

Schließlich soll die Verträglichkeit von maximalen Kowirkungen mit starken Morita-Äquivalenzen besprochen werden. Der wichtigste Schritt ist die folgende Proposition.

4.17 Proposition. *Es sei V wie in Proposition 4.15 sowie (X_B, ξ_β) eine nichtentartete volle S-Kowirkung und die Koeffizienten-Kowirkung (B, β) maximal. Dann ist die zugehörige adjungierte Kowirkung $Ad(\xi) : \mathcal{K}(X) \to M(\mathcal{K}(X) \otimes S)$ (vgl. 1.4.3) ebenfalls maximal.*

Beweis. Wir wissen nach Satz 2.43 bereits, daß $\mathcal{K}(X \rtimes \widehat{S} \rtimes S)$ isomorph zum doppelten verschränkten Produkt von $(\mathcal{K}(X), Ad(\xi))$ ist. Mit den natürlichen Isomorphismen (Lemma 2.44) verifiziert man leicht $Ad(\Phi_\xi) \circ (\iota_{\mathcal{K}(X \rtimes \widehat{S}) \rtimes S}) \circ (\iota_{X \rtimes \widehat{S}} \rtimes S) = \Phi_{Ad(\xi)}$. Nach Definition ist die zu (B, β) gehörige kanonische Surjektion $\Phi_\beta : B \rtimes_\beta \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\beta}} S \to B \otimes \mathcal{K}$ ein Isomorphismus. Deshalb ist nach 1.1.7 auch die kanonische Surjektion $\Phi_\xi : X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S \to X \otimes \mathcal{K}$ für (X, ξ) ein Isomorphismus, denn sie hat Φ_β als rechte Koeffizienten-Abbildung. Folglich ist ihr Adjungiertes $Ad(\Phi_\xi) : \mathcal{K}(X \rtimes \widehat{S} \rtimes S) \to \mathcal{K}(X \otimes \mathcal{K})$ ebenfalls ein Isomorphismus, also auch $\Phi_{Ad(\xi)}$. □

Mit derselben Beweistechnik kann man sofort einige Folgerungen angeben. Da das Ideal $B_X := \overline{\langle X, X \rangle_B} \subseteq B$ gleich den kompakten Operatoren des adjungierten Hilbertmoduls $X^*_{\mathcal{K}(X)}$ ist (vgl. 1.4.8), hat man durch Adjungieren von $\xi^*_{Ad(\xi)}$ eine volle S-Kowirkung

$$\beta_X := Ad(\xi^*_{Ad(\xi)}) : B_X \longrightarrow M(B_X \otimes S_u),$$

die mit der Einschränkung $\beta\,|_{B_X}$ übereinstimmt. Folglich ist $B_X \subseteq B$ ein β-invariantes Ideal (vgl. 1.4.11). Ein zweifaches Anwenden der Proposition 4.17 zeigt, daß mit (B, β) auch (B_X, β_X) maximal ist. Insbesondere kann man auf die Verträglichkeit der Maximalität mit starken Morita-Äquivalenzen (vgl. [**14**, Proposition 3.5]), äußerer Äquivalenz (vgl. Definition 2.50) und invarianten Idealen schließen.

4.18 Korollar. *Ist V wie in Proposition 4.15 und $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ ein äquivarianter Imprimitivitäts-Bimodul (1.4.9) mit nichtentarteter voller S-Kowirkung, so gilt:*

1. *(A, α) ist genau dann maximal, wenn (B, β) maximal ist.*
2. *Sind $u \in \mathcal{U}M(A \otimes S_u)$ bzw. $v \in \mathcal{U}M(B \otimes S_u)$ Kozykel für α bzw. β, so ist die zu ξ äußerlich äquivalente S-Kowirkung $Ad(u, v)\xi$ ebenfalls maximal.*
3. *Ist (B, β) eine maximale Kowirkung und $I \subseteq B$ ein β-invariantes Ideal (1.4.11), so ist auch die Einschränkung $\beta_I : I \to M(I \otimes S_u)$ eine maximale Kowirkung.*

Beweis. Der erste Teil folgt direkt aus der Proposition 4.17 und der obigen Diskussion. Für den zweiten Teil reicht es, daß die Koeffizienten-Kowirkungen $Ad(u)\alpha$ und $Ad(v)\beta$ der Kowirkung $Ad(u, v)\xi$ maximal sind. Das folgt direkt aus (1.), da nach Bemerkung 2.51(3.) $Ad(u)\alpha$ bzw. $Ad(v)\beta$ Morita-äquivalent zu α bzw. β sind. Für die dritte Behauptung fassen wir das β-invariante Ideal I als äquivarianten Rechts-Hilbert-B-Modul $(I_B, (\beta|_I)_\beta)$ mit nichtentarteter voller S-Kowirkung auf. Wie wir bereits vor dem Korollar gesehen haben, ist mit (B, β) dann auch $(I, \beta|_I) = (B_I, \beta_I)$ maximal. □

§ 4.4 Mittelbarkeit und volle Dualität

Wir werden in diesem Abschnitt auf mittelbare Quantengruppen eingehen, vgl. 1.3.8. Diese erfüllen stets eine „einseitige" volle Dualität (in diesem Fall gibt es natürlich keinen Unterschied zwischen vollen und reduzierten S-Kowirkungen). Zur Motivation sei an die volle Imai-Takai-Dualität bei Gruppen erinnert: Ist (A, G, α) eine C^*-Algebra mit G-Wirkung (d.h. mit einer $\mathcal{C}_0(G)$-Kowirkung), so ist

$$\psi := (id \otimes M^-)\alpha \times (1 \otimes \lambda) \times (1 \otimes M) : A \rtimes_\alpha G \rtimes_{\widehat{\alpha}} \widehat{G} \longrightarrow A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$$

ein Isomorphismus, vgl. [**51**, Corollary 2.12]. Der Morphismus ψ ist hier nichts anderes also die kanonische Surjektion im Fall einer $\mathcal{C}_0(G)$-Kowirkung.

Wir haben jedoch bereits im letzten Abschnitt § 4.3 ein Beispiel gesehen (und zwar bei $C^*(G)$-Kowirkungen), welches volle Dualität nicht erfüllt. Die Besonderheit der Quantengruppe $\mathcal{C}_0(G)$, die zur vollen Dualität führt ist ihre Mittelbarkeit, d.h. die Injektivität der kanonischen Darstellung $M : \mathcal{C}_0(G) \to \mathcal{L}(L^2(G))$, die durch $M_f(x)(s) := f(s)x(s)$ für $f \in \mathcal{C}_0(G)$ und $x \in L^2(G)$ definiert ist und welche in der abstrakten Situation der Darstellung $\pi : S_u \to S_V \subseteq \mathcal{L}(H)$ entspricht. Wie bei der Mittelbarkeit von Gruppen gibt es eine Charakterisierung mittels der trivialen Wirkung, welche der Koeinheit $\varepsilon : S_u \to \mathbb{C}$ entspricht. Etwas allgemeiner ist S genau dann mittelbar, wenn es eine nichttriviale eindimensionale Darstellung $\rho_r : S_V \to \mathbb{C}$ gibt.

4.19 Lemma. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine dichte C^*-algebraische multiplikative Unitäre (vgl. 1.3.5). Bezeichnen $(\widehat{S}_V, S_V)$ bzw. $(\widehat{S}_u, \mathfrak{v}, S_u)$ die reduzierten bzw. universellen dualen Paare von Quantengruppen, dann sind äquivalent:*

1. *S ist mittelbar (1.3.8), d.h. $\pi : S_u \to S_V$ ist ein Isomorphismus.*
2. *Die Koeinheit ε faktorisiert über π, d.h. es gibt ein $\varepsilon_r : S_V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\varepsilon = \varepsilon_r \circ \pi$.*
3. *Es existiert eine nichttriviale eindimensionale Darstellung $\rho_r : S_V \to \mathbb{C}$.*

4.20 Bemerkung. Die Äquivalenz von (1.) und (2.) wurde bereits in [**4**, Remarques A.13.c] bemerkt. Die Idee der Charakterisierung in (3.) ist der Theorie der (algebraischen) Hopfalgebren entnommen. Ein Beweis für die Gleichwertigkeit von (2.) und (3.) mit derselben zugrundeliegenden Idee findet sich bereits in [**49**], aber mit den Konstruktionen aus Kapitel 3 wird der Beweis durchsichtiger und liegt wesentlich näher am algebraischen Fall.

Beweis von Lemma 4.19. Wir zeigen (2.) $\Rightarrow$ (1.) und (3.) $\Rightarrow$ (2.), die umgekehrten Implikationen sind trivial. Es gebe eine Faktorisierung $\varepsilon = \varepsilon_r \circ \pi$. Dann ist $(\varepsilon_r \otimes id_{S_u}) \circ \Delta_{rf}$ (vgl. Korollar 3.5) das Inverse von π, denn das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S_u & \xrightarrow{\Delta_u} & M(S_u \otimes S_u) & \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} & M(S_u) \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle \pi \otimes id}\big\downarrow & & \big\| \\ S_V & \xrightarrow{\Delta_{rf}} & M(S_V \otimes S_u) & \xrightarrow{\varepsilon_r \otimes id} & M(S_u) \end{array}$$

kommutiert und die obere Komposition $(\varepsilon \otimes id)\Delta_u$ ist die Identität, vgl. 1.2.2.

Sei andererseits ρ_r eine eindimensionale Darstellung von S_V. Wir müssen daraus eine Faktorisierung $\varepsilon = \varepsilon_r \circ \pi$ ableiten. Dazu setzen wir $\rho := \rho_r \circ \pi : S_u \to \mathbb{C}$ und betrachten die zu ρ gehörige unitäre Kodarstellung $u \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_u \otimes \mathbb{C})$ (vgl. die Konvention in 1.3.2). Mit der Identifizierung $\widehat{S}_u \otimes \mathbb{C} \cong \widehat{S}_u$ gilt $\widehat{\Delta}_u(u) = u \otimes u$, also ist u ein sog. *gruppenähnliches* Element. Dasselbe trifft dann natürlich auch auf das adjungierte Element u^* in $\mathcal{U}M(\widehat{S}_u) \cong \mathcal{U}M(\widehat{S}_u \otimes \mathbb{C})$ zu. Deshalb ist u^* ebenfalls eine unitäre Kodarstellung, und wir erhalten eine entsprechende Darstellung $\rho^* : S_u \to \mathbb{C}$ mit $(id \otimes \rho^*)(\mathfrak{v}) = u^*$. Diese vervollständigt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S_u & \xrightarrow{\Delta_u} & M(S_u \otimes S_u) & \xrightarrow{\rho \otimes \rho^*} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & {\scriptstyle \pi \otimes id}\big\downarrow & & \big\| \\ S_V & \xrightarrow{\Delta_{rf}} & M(S_V \otimes S_u) & \xrightarrow{\rho_r \otimes \rho^*} & \mathbb{C}. \end{array}$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die obere Zeile die triviale Darstellung ε ist. Dazu wendet man sie auf den rechten Tensoranden von $\mathfrak{v} \in \mathcal{U}M(\widehat{S}_u \otimes S_u)$ (vgl. 1.3.5) an und erhält

$$\begin{aligned} (id \otimes ((\rho \otimes \rho^*)\Delta_u))(\mathfrak{v}) &= (id \otimes \rho \otimes \rho^*)(\mathfrak{v}_{12} \cdot \mathfrak{v}_{13}) \\ &= (id \otimes \rho)(\mathfrak{v}) \cdot (id \otimes \rho^*)(\mathfrak{v}) \\ &= u \cdot u^* = id_{\widehat{S}_u} = (id_{\widehat{S}_u} \otimes \varepsilon)(\mathfrak{v}). \end{aligned}$$

Da Darstellungen von S_u nach der universellen Eigenschaft durch die zugehörigen unitären Kodarstellungen eindeutig bestimmt sind, folgt $(\rho \otimes \rho^*) \circ \Delta_u = \varepsilon$. □

Wie bei Gruppen existiert eine weitere Charakterisierung für Mittelbarkeit:

4.21 Proposition. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch (Definition 3.6). Die zugehörige Quantengruppe S ist genau dann mittelbar, wenn für jede volle $\widehat{S}$-Kowirkung (Y, ζ) die kanonische Abbildung $\pi_\zeta : Y \rtimes_\zeta S \to Y \rtimes_{\zeta,r} S$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Wegen $\pi = \pi_{\delta_{\mathbb{C}}^{tr}}$, wobei δ_C^{tr} die triviale volle $\widehat{S}$-Kowirkung auf $\mathbb{C}$ bezeichnet, ist die Bedingung jedenfalls hinreichend für die Mittelbarkeit von S. Umgekehrt wissen wir nach Proposition 3.20, daß π_ζ eine Normalisierung ist. Da für mittelbares S jede Kowirkung normal ist (vgl. Korollar 3.14), sind in diesem Fall alle Normalisierungen notwendigerweise Isomorphismen. □

Ein ähnliches Ergebnis in dieser Richtung sagt aus, daß für mittelbare Quantengruppen stets die volle Dualität erfüllt ist. Als Spezialfall erhalten wir insbesondere die volle Imai-Takai-Dualität für Wirkungen einer lokalkompakten Gruppe G, denn $\mathcal{C}_0(G)$ ist mittelbar:

4.22 Satz. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch und stark biregulär (vgl. die Definitionen 3.6 und 4.4). Ist S mittelbar, so ist jede nichtentartete S-Kowirkung (X, ξ) maximal, d.h. die kanonische Surjektion $\Phi_\xi : X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S \to X \otimes \mathcal{K}$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Proposition 4.10 haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S, \widehat{\widehat{\xi}}) & \xrightarrow{\Phi_\xi} & (X \otimes \mathcal{K}, \xi \natural \mathfrak{v}_U) \\ {\scriptstyle \pi_{\widehat{\xi}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta_\xi \otimes id_{\mathcal{K}}} \\ (X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi},r} S, \widehat{\widehat{\xi}}_{fr}) & \underset{\Phi_{\xi,fr}}{\xrightarrow{\cong}} & (X^n \otimes \mathcal{K}, \xi^n \natural \mathfrak{v}_U). \end{array}$$

zur Verfügung, wobei $\Phi_{\xi,fr}$ ein Isomorphismus und die beiden vertikalen Pfeile Normalisierungen sind. Also sind wegen der Mittelbarkeit von S nach Korollar 3.14 die vertikalen Pfeile Isomorphismen und somit auch Φ_ξ. □

§ 4.5 Maximalisierung von Kowirkungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Maximalisierungs-Konstruktion von [**14**] auf Quantengruppen verallgemeinern. Hierbei ordnen wir jeder vollen S-Kowirkung auf kanonische Art und Weise eine maximale S-Kowirkung zu, so daß die verschränkten Produkte übereinstimmen.

Die Maximalisierung einer G-Kowirkung aus [**14**, Definition 3.1] (vgl. auch Lemma 4.28) besitzt eine universelle Eigenschaft, die wir hier als Definition benutzen:

4.23 Definition. Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch und stark biregulär (vgl. die Definitionen 3.6 und 4.4) sowie (X, ξ) eine nichtentartete volle S-Kowirkung. Eine *Maximalisierung von* (X, ξ) ist eine maximale S-Kowirkung (X^m, ξ^m) zusammen mit einem surjektiven äquivarianten Morphismus $\psi_\xi : (X^m, \xi^m) \to (X, \xi)$ derart, daß die folgende universelle Eigenschaft gilt: Jeder Morphismus $\Lambda : (Z, \chi) \to M(X, \xi)$ in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ (vgl. 1.5.1) mit einer maximalen Kowirkung (Z, χ) faktorisiert eindeutig über ψ_ξ, d.h. es gibt genau einen Morphismus $\Lambda^m \in \mathcal{HBM}_{S_u}((Z, \chi), (X^m, \xi^m))$ mit $\Lambda = \Lambda^m \circ \psi_\xi$. Abkürzend nennen wir auch den Morphismus ψ_ξ eine *Maximalisierung.*

Aus der universellen Eigenschaft folgt sofort, daß die Maximalisierung funktoriell ist:

4.24 Satz. *Es sei V eine multiplikative Unitäre wie in Definition 4.23, für die jede nichtentartete volle S-Kowirkung (X, ξ) eine Maximalisierung besitzt. Dann induziert die Maximalisierung einen Funktor $(\cdot)^m : \mathcal{HBM}^{ne}_{S_u} \longrightarrow \mathcal{HBM}^m_{S_u}$. Die Familie der Morphismen $\psi_\xi : (X^m, \xi^m) \to (X, \xi)$ ist eine natürliche Transformation $\psi_\bullet : (\cdot)^m \to \mathcal{I}d$ von Funktoren. Zudem ist die Maximalisierung ψ_ξ genau dann ein Isomorphismus, wenn (X, ξ) maximal ist.*

Beweis. Sei $\Phi : (X, \xi) \to (Y, \zeta)$ ein Morphismus in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$. Dann faktorisiert $\Phi \circ \psi_\xi$ eindeutig über die Maximalisierung ψ_ζ. Das bedeutet, es existiert genau ein Homomorphismus $\Phi^m : (X^m, \xi^m) \to (Y^m, \zeta^m)$ mit $\psi_\zeta \circ \Phi^m = \Phi \circ \psi_\xi$. Wegen der Eindeutigkeits-Bedingung ist die Zuordnung $\Phi \mapsto \Phi^m$ funktoriell, und die Gleichung zeigt, daß $\psi_\bullet$ eine natürliche Transformation ist. Die letzte Behauptung ist klar. □

Die universelle Eigenschaft impliziert insbesondere, daß „zwischen" einer Kowirkung und ihrer Maximalisierung keine weitere maximale Kowirkung liegt.

4.25 Lemma. *Es sei V wie in Definition 4.23. Wir betrachten surjektive Morphismen $\Upsilon : (X', \xi') \to (Y, \zeta)$ und $\Gamma : (Y, \zeta) \to (X, \xi)$ in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ und nehmen (X', ξ') sowie (Y, ζ) als maximal an. Ist dann die Komposition $\Gamma \circ \Upsilon$ eine Maximalisierung, so ist Υ ein Isomorphismus und insbesondere ist Γ eine Maximalisierung.*

Beweis. Wegen der Maximalität von (Y, ζ) gibt es nach Voraussetzung genau einen Morphismus $\Gamma^m : (Y, \zeta) \to (X', \xi')$ mit $(\Gamma \circ \Upsilon) \circ \Gamma^m = \Gamma$. Es folgt $(\Gamma \circ \Upsilon) \circ (\Gamma^m \circ \Upsilon) = \Gamma \circ \Upsilon = (\Gamma \circ \Upsilon) \circ id_{X'}$. Aufgrund der Eindeutigkeit muß $(\Gamma^m \circ \Upsilon) = id_{X'}$ gelten und folglich Υ injektiv sein. Also ist Υ ein Isomorphismus. □

4.26 Definition. Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch und stark biregulär. Die volle Unterkategorie von $\mathcal{HBM}_{S_u}(\mathcal{K})$ (vgl. Definition A.8), deren Objekte nichtentartete volle S-Kowirkungen sind, bezeichnen wir mit $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}(\mathcal{K})$. Analog werden die vollen Unterkategorien $\mathcal{HBM}^{m}_{S_u}(\mathcal{K})$ und $\mathcal{HBM}^{n}_{S_u}(\mathcal{K})$ definiert (vgl. die Definitionen 4.13 und 2.59).

4.27 Notation. Der Übersichtlichkeit halber benutzen wir für einen äquivarianten Hilbert-Bimodul $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \in \mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ und einen äquivarianten Morphismus ${}_\mu\Upsilon_\nu$ gelegentlich die Notationen

$$(\overline{X}, \overline{\xi}) := (X \rtimes_\xi \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\xi}} S, \widehat{\widehat{\xi}}) \qquad \text{und} \qquad \overline{\Upsilon} := \Upsilon \rtimes \widehat{S} \rtimes S.$$

Wir verwenden diese Abkürzungen vor allem in Beweisen und Diagrammen. Weiter sei die Einbettung von $\mathbb{C}$ durch Skalare in Multiplikator-Algebren stets mit ι bezeichnet: Aus dem Zusammenhang wird klar werden, in welche Algebra eingebettet wird. Folglich notieren wir auch die Einbettung

$$\overline{\iota} = \iota \rtimes \widehat{S} \rtimes S : \overline{\mathbb{C}} = \widehat{S} \rtimes_{\Delta_u} S \longrightarrow M(A \rtimes_\alpha \widehat{S} \rtimes_{\widehat{\alpha}} S) = M(\overline{A})$$

immer mit $\overline{\iota}$, unabhängig von der Algebra A. Die kanonische Surjektion der trivialen Kowirkung auf $\mathbb{C}$ kürzen wir mit $\phi := \Phi_{\delta^{tr}_{\mathbb{C}}}$ ab und betrachten sie als Abbildung

$$\phi := \Phi_{\delta^{tr}_{\mathbb{C}}} : \widehat{S} \rtimes S \cong \mathbb{C} \rtimes \widehat{S} \rtimes S \longrightarrow \mathbb{C} \otimes \mathcal{K} \cong \mathcal{K}.$$

Bevor wir ein Kriterium für die Existenz von Maximalisierungen beweisen, wollen wir zunächst einsehen, daß die Definition [**14**, 3.1] die universelle Eigenschaft von Definition 4.23 impliziert.

4.28 Lemma. *Es sei V wie in der Definition 4.23. Wir betrachten einen surjektiven Morphismus $\Upsilon : (X', \xi') \to (X, \xi)$ in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ mit einer maximalen S-Kowirkung (X', ξ'). Ist das verschränkte Produkt $\Upsilon \rtimes \widehat{S}$ ein Isomorphismus, so ist Υ eine Maximalisierung (im Sinne von Definition 4.23).*

Beweis. Wegen der Voraussetzung ist auch $\Upsilon \rtimes \widehat{S} \rtimes S = \overline{\Upsilon}$ ein Isomorphimus, wobei wir hier und im folgenden die Notationen aus 4.27 benutzen. Sei $\Lambda : (Z, \chi) \to M(X, \xi)$ ein Morphismus in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ und (Z, χ) maximal. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\overline{Z}, \overline{\chi}) \arrow[r, "\overline{\Lambda}"] \arrow[d, "\Phi_\chi"', "\cong"] & (\overline{X}, \overline{\xi}) \arrow[d, "\Phi_\xi"] & (\overline{X'}, \overline{\xi'}) \arrow[l, "\overline{\Upsilon}"', "\cong"] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{\xi'}"] \\
(Z \otimes \mathcal{K}, \chi \natural \mathfrak{v}_U) \arrow[r, "\Lambda \otimes id"] & (X \otimes \mathcal{K}, \xi \natural \mathfrak{v}_U) & (X' \otimes \mathcal{K}, \xi' \natural \mathfrak{v}_U), \arrow[l, "\Upsilon \otimes id"']
\end{tikzcd}$$

in dem die äußeren vertikalen Pfeile und $\overline{\Upsilon}$ Isomorphismen sind. Folglich kann man die Abbildung $\widetilde{\Lambda} := \Phi_{\xi'} \circ \overline{\Upsilon}^{-1} \circ \overline{\Lambda} \circ \Phi_\chi^{-1}$ definieren. Wegen der Natürlichkeit von Kozykeln (vgl. Lemma 2.54) ist $\widetilde{\Lambda}$ auch äquivariant bzgl. der Kowirkungen $\chi \otimes_* id$ und $\xi' \otimes_* id$. Seine Koeffizienten-Morphismen fixieren offenbar punktweise die kompakten Operatoren, d.h. $\widetilde{\Lambda}$ ist ein Morphimus in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}(\mathcal{K})$ (vgl. Definition A.8). Nach Proposition A.17 ist $\widetilde{\Lambda}$ also von der Form $\widetilde{\Lambda} = \Lambda^m \otimes id_{\mathcal{K}}$, wobei $\Lambda^m : (Z, \chi) \to M(X', \xi')$ äquivariant ist. Es gilt nach dem Diagramm die Beziehung $(\Upsilon \circ \Lambda^m) \otimes id_{\mathcal{K}} = \Lambda \otimes id_{\mathcal{K}}$, und mit derselben Proposition folgt $\Upsilon \circ \Lambda^m = \Lambda$. Durch diese Beziehung ist Λ^m auch eindeutig bestimmt, denn ist Λ' ein weiterer Morphimus mit $\Upsilon \circ \Lambda' = \Lambda$, so vervollständigt $\Lambda' \otimes id_{\mathcal{K}}$ ebenfalls das Diagramm. Daher ist $\Lambda' \otimes id_{\mathcal{K}} = \Phi_{\xi'} \circ \overline{\Upsilon}^{-1} \circ \overline{\Lambda} \circ \Phi_\chi^{-1} = \Lambda^m \otimes id_{\mathcal{K}}$ und somit $\Lambda' = \Lambda^m$. Also erfüllt Υ die universelle Eigenschaft aus Definition 4.23. □

Als Konsequenz kann man sofort Beispiele von Maximalisierungen angeben:

4.29 Korollar. *Ist V wie in Definition 4.23 und $(X, \xi) \in \mathcal{HBM}^m_{S_u}$, so gilt:*

1. *Die kanonische Surjektion $\Phi_\xi : (\overline{X}, \overline{\xi}) \to (X \otimes \mathcal{K}, \xi \natural \mathfrak{v}_U)$ ist eine Maximalisierung.*
2. *Die kanonische Abbildung $\widehat{\pi}_\xi : (X \rtimes_\xi \widehat{S}, \widehat{\xi}) \to X \rtimes_{\xi,r} \widehat{S}, \widehat{\xi}_{rf})$ ist eine Maximalisierung (in $\mathcal{HBM}^{ne}_{\widehat{S}_u}$).*

Beweis. In beiden Fällen wissen wir nach Satz 4.16, daß die linken Seiten maximale Kowirkungen sind. Die verschränkten Produkte der Morphismen sind in beiden Fällen Isomorphismen: Für $\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}$ folgt das nach Proposition 4.14, während der zweite Morphismus eine Normalisierung ist (vgl. Proposition 3.20) und die Behauptung aus der Charakterisierung in Proposition 2.68 folgt. □

In [**14**, Theorem 3.3] wird die Existenz und Eindeutigkeit von Maximalisierungen für Gruppen-Kowirkungen auf C^*-Algebren gezeigt. Die Idee des Beweises von [**14**] ist folgende: Man betrachtet eine Algebra A mit nichtentarteter G-Kowirkung δ und identifiziert sie mit der Unteralgebra $A \otimes P \subseteq A \otimes \mathcal{K}$, wobei $P \in \mathcal{K}$ eine eindimensionale Projektion ist. Die daraus erhaltene Projektion $p := (k_{\mathcal{C}(G)} \times k_G)((M \times \rho)^{-1}(P))$ in $A \rtimes \widehat{G} \rtimes G$ (vgl. den Beweis von [**14**, Theorem 3.3]) liefert eine Unteralgebra $p(A \rtimes \widehat{G} \rtimes G)p \subseteq A \rtimes \widehat{G} \rtimes G$, welche durch die kanonische Surjektion Φ_δ auf $A \otimes P$ abgebildet wird. Die biduale Kowirkung wird durch einen Kozykel zu einer Kowirkung $\widetilde{\delta}$ abgeändert, für die $\widetilde{\delta}(p) = p \otimes 1_G$ gilt. Folglich schränkt sich die Kowirkung $\widetilde{\delta}$ zu einer Kowirkung δ^m auf $p(A \rtimes \widehat{G} \rtimes G)p$ ein. Damit ist

$$(\Phi_\delta)\big|_{p(A \rtimes \widehat{G} \rtimes G)p} \colon (p(A \rtimes \widehat{G} \rtimes G)p, \delta^m) \longrightarrow (A \otimes P, \delta \otimes_* id_{\mathcal{K}}) \cong (A, \delta)$$

eine Maximalisierung im Sinne von [**14**, Definition 3.1].

Anstatt eine Projektion zu verwenden, werden wir hier die Technik der relativen Kommutanten (vgl. Anhang A) benutzen, um ein Kriterium für die Existenz von Maximalisierungen im Sinne der Definition 4.23 zu beweisen.

4.30 Satz. *Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ symmetrisch und stark biregulär (vgl. die Definitionen 3.6 und 4.4), so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Jede S-Kowirkung $(X, \xi) \in \mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ besitzt eine Maximalisierung im Sinne von* [**14**, Definition 3.1]*, vgl. Lemma 4.28.*
2. *Jede S-Kowirkung $(X, \xi) \in \mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$ besitzt eine Maximalisierung im Sinne von Definition 4.23.*
3. *Die triviale S-Kowirkung $\delta^{tr}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to M(\mathbb{C} \otimes S_u)$ besitzt eine Maximalisierung.*
4. *Die kanonische Projektion $\phi = \Phi_{\delta^{tr}_{\mathbb{C}}} : (\widehat{S} \rtimes_{\widehat{\Delta}_u} S, \widehat{\widehat{\Delta}_u}) \to (\mathcal{K}, Ad(\mathfrak{v}_U))$ besitzt einen äquivarianten Schnitt $\varsigma : (\mathcal{K}, Ad(\mathfrak{v}_U)) \to M(\widehat{S} \rtimes S, \widehat{\widehat{\Delta}_u})$ in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$, d.h. $\phi \circ \varsigma = id_{\mathcal{K}}$.*

Beweis. Wir werden des öfteren auf die Notation 4.27 zurückgreifen. Die Implikation (1.) $\Rightarrow$ (2.) ist Lemma 4.28 und (2.) $\Rightarrow$ (3.) ist trivial. Ist andererseits $\psi : (C, \gamma) \to (\mathbb{C}, \delta^{tr}_{\mathbb{C}})$ eine Maximalisierung, dann definiert die Komposition

$$(\mathcal{K}, Ad(\mathfrak{v}_U)) \xrightarrow{\iota \otimes id_{\mathcal{K}}} M(C \otimes \mathcal{K}, \gamma \natural \mathfrak{v}_U) \xrightarrow{\Phi^{-1}_{\overline{\gamma}}} M(\overline{C}, \overline{\gamma}) \xrightarrow{\overline{\psi}} M(\widehat{S} \rtimes_{\widehat{\Delta}_u} S, \widehat{\widehat{\Delta}_u})$$

einen äquivarianten Morphismus, der wegen der Natürlichkeit von $\Phi_\bullet$ ein Schnitt für ϕ ist. Es bleibt (4.) $\Rightarrow$ (1.) zu zeigen. Sei dazu $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-Kowirkung in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}$. Mittels des Schnitts ς kann man erstens $\mathcal{K} \cong \overline{\iota}(\varsigma(\mathcal{K}))$ als nichtentartete Unteralgebra der Koeffizienten-Algebren $\overline{A}$ und $\overline{B}$ auffassen. Zweitens kann der Kozykel $\mathfrak{v}_U{}^*$ (vgl. Definition 4.8) für die Kowirkung $(\mathcal{K}, Ad(\mathfrak{v}_U))$ in Kozykel $u := (\overline{\iota} \circ \varsigma \otimes id_{S_u})(\mathfrak{v}_U{}^*) \in \mathcal{U}M(\overline{A} \otimes S_u)$ bzw. $v := (\overline{\iota} \circ \varsigma \otimes id_{S_u})(\mathfrak{v}_U{}^*) \in \mathcal{U}M(\overline{B} \otimes S_u)$ für die biduale Kowirkung $\overline{\alpha}$ bzw. $\overline{\beta}$ transportiert werden. Folglich erhält man eine zu $\overline{\xi}$ äußerlich äquivalente Kowirkung ${}_{\widetilde{\alpha}}\widetilde{\xi}_{\widetilde{\beta}} := Ad(u, v) \circ \xi$ (vgl. Definition 2.50). Die Kowirkung $(\overline{X}, \widetilde{\xi})$ ist wegen Korollar 4.18 ebenfalls maximal. Wegen der Natürlichkeit von Kozykeln (vgl. Lemma 2.54) und $\phi \circ \varsigma = id_{\mathcal{K}}$ sind für die Koeffizienten-Abbildungen die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\overline{A}, \widetilde{\alpha}) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & (A \otimes \mathcal{K}, \alpha \otimes_* id_{\mathcal{K}}) \\ {\scriptstyle \overline{\iota}\circ\varsigma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota \otimes id_{\mathcal{K}}} \\ (\mathcal{K}, \delta^{tr}_{\mathcal{K}}) & = & (\mathcal{K}, \delta^{tr}_{\mathcal{K}}) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} (\overline{B}, \widetilde{\beta}) & \xrightarrow{\Phi_\beta} & (B \otimes \mathcal{K}, \beta \otimes_* id_{\mathcal{K}}) \\ {\scriptstyle \overline{\iota}\circ\varsigma}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \iota \otimes id_{\mathcal{K}}} \\ (\mathcal{K}, \delta^{tr}_{\mathcal{K}}) & = & (\mathcal{K}, \delta^{tr}_{\mathcal{K}}) \end{array}$$

kommuativ. Also ist Φ_ξ ist ein Morphismus in $\mathcal{HBM}^{ne}_{S_u}(\mathcal{K})$, vgl. die Definitionen 4.26 und A.8. Wir können daher

$$(X^m, \xi^m) := (\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\overline{X}), \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\widetilde{\xi})) \quad \text{und} \quad \psi_\xi := \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\Phi_\xi)$$

setzen, vgl. Anhang A. Nach Proposition A.17 ist $\psi_\xi : (X^m, \xi^m) \to (X, \xi)$ surjektiv und vervollständigt das kommutative Diagramm

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} (X \rtimes \widehat{S} \rtimes S, \widetilde{\xi}) & \xrightarrow{\Phi_\xi} & (X \otimes \mathcal{K}, \xi \otimes_* id_{\mathcal{K}}) \\ {\scriptstyle \iota_{X^m}\cdot(\bar{\iota}\varsigma)}\big\uparrow \cong & & \big\| \\ (X^m \otimes X, \xi^m \otimes_* id_{\mathcal{K}}) & \xrightarrow{\psi_\xi \otimes id_{\mathcal{K}}} & (X \otimes \mathcal{K}, \xi \otimes_* id_{\mathcal{K}}), \end{array}$$

wobei wir durch die Notation $\iota_{X^m} \cdot (\bar{\iota}\varsigma)$ andeuten, wie $\mathcal{K}$ in die Koeffizienten-Algebren von $X \rtimes \widehat{S} \rtimes S$ eingebettet wird. Die Kowirkung (X^m, ξ^m) ist maximal: Dazu muß man nur die Maximalität der Koeffizienten-Kowirkungen (A^m, α^m) und (B^m, β^m) zeigen. (A^m, α^m) ist Morita-äquivalent zu der maximalen Kowirkung $(A^m \otimes \mathcal{K}, \alpha^m \otimes_* id_{\mathcal{K}}) \cong (\overline{A}, \widetilde{\alpha})$, und ist nach Korollar 4.18 daher bereits selbst maximal. Analoges gilt für (B^m, β^m). Wir müssen nur noch zeigen, daß das verschränkte Produkt $\psi_\xi \rtimes \widehat{S}$ ein Isomorphismus ist. Dies folgt aus der Bijektivität von $\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}$ (Proposition 4.14) in mehreren Schritten: Zunächst erhalten wir aus der Natürlichkeit von Kozykeln (Lemma 2.54) das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} \rtimes_{\widehat{\xi}} \widehat{S} & \xrightarrow[\cong]{\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}} & (X \otimes \mathcal{K}) \rtimes_{\xi \natural \mathfrak{v}_U} \widehat{S} \\ \cong\big\uparrow & & \cong\big\uparrow \\ \overline{X} \rtimes_{\widetilde{\xi}} \widehat{S} & \xrightarrow{\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}} & (X \otimes \mathcal{K}) \rtimes_{\xi \otimes_* id} \widehat{S}. \end{array}$$

Anschließend wendet man das verschränkte Produkt auf das Diagramm $(*)$ an und erhält den oberen Teil des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} \rtimes_{\widetilde{\xi}} \widehat{S} & \xrightarrow{\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}} & (X \otimes \mathcal{K}) \rtimes_{\xi \otimes_* id} \widehat{S} \\ \cong\big\uparrow & & \big\| \\ (X^m \otimes \mathcal{K}) \rtimes_{\xi^m \otimes_* id} \widehat{S} & \xrightarrow{(\psi_\xi \otimes id_{\mathcal{K}}) \rtimes \widehat{S}} & (X \otimes \mathcal{K}) \rtimes_{\xi \otimes_* id} \widehat{S} \\ \cong\big\downarrow & & \big\downarrow\cong \\ (X^m \rtimes_{\xi^m} \widehat{S}) \otimes \mathcal{K} & \xrightarrow{(\psi_\xi \rtimes \widehat{S}) \otimes id_{\mathcal{K}}} & (X \rtimes_\xi \widehat{S}) \otimes \mathcal{K}. \end{array}$$

Für den unteren Teil des Diagramms benutzt man die (offensichtlich natürlichen) Isomorphismen aus Lemma 2.56. Setzt man die Diagramme zusammen und beachtet, daß sämtliche vertikalen Pfeile Isomorphismen sind, so folgt aus der Bijektivität von $\Phi_\xi \rtimes \widehat{S}$ auch die von $(\psi_\xi \rtimes \widehat{S}) \otimes id_{\mathcal{K}}$. Insbesondere ist $\psi_\xi \rtimes \widehat{S}$ bijektiv. □

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich, daß die Kategorien der nichtentarteten normalen vollen S-Kowirkungen und die der maximalen S-Kowirkungen äquivalent sind.

4.31 Korollar. *Es sei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine symmetrische und stark bireguläre multiplikative Unitäre, für welche eine (und damit alle) der vier Bedingungen von Satz 4.30 erfüllt ist. Dann induzieren der Maximalisierungs-Funktor und der Normalisierungs-Funktor zueinander inverse Kategorien-Äquivalenzen*

$$(\cdot)^m : \mathcal{HBM}^{n,ne}_{S_u} \longrightarrow \mathcal{HBM}^{m}_{S_u} \qquad \textit{und} \qquad (\cdot)^n : \mathcal{HBM}^{m}_{S_u} \longrightarrow \mathcal{HBM}^{n,ne}_{S_u}$$

zwischen den normalen und maximalen nichtentarteten S-Kowirkungen. □

4.32 Bemerkung. Man kann sich die maximalen bzw. normalen Kowirkungen als zwei extremale Situationen vorstellen: Jede nichtentartete volle S-Kowirkung (X, ξ) liegt „zwischen“ ihrer Maximalisierung und ihrer Normalisierung

$$(X^m, \xi^m) \xrightarrow{\psi_\xi} (X, \xi) \xrightarrow{\eta_\xi} (X^n, \xi^n).$$

Es kann mehrere Kowirkungen dazwischen geben, aber jeweils nur ein extremales „Ende“ (X^m, ξ^m) bzw. (X^n, ξ^n), welches die volle bzw. die reduzierte Dualität erfüllt.

4.33 Korollar. *Ist $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine symmetrische und stark bireguläre multiplikative Unitäre und ist $\widehat{S} \rtimes S$ isomorph zu $\mathcal{K}$, dann sind insbesondere die äquivalenten Bedingungen aus Satz 4.30 erfüllt, und daher existieren Maximalisierungen.*

Beweis. Die C^*-Algebra $\widehat{S} \rtimes S \cong \mathcal{K}$ ist einfach und $\phi : \widehat{S} \rtimes S \to \mathcal{K}$ daher injektiv, also ein Isomorphismus. Also ist $(\mathbb{C}, \delta_{\mathbb{C}}^{tr})$ bereits maximal und besitzt daher sich selbst als Maximalisierung. □

Diese triviale Beobachung kann man benutzen um Beispiele für Paare von Quantengruppen $(\widehat{S}, S)$ zu finden, für die Maximalisierungen existieren:

4.34 Beispiel. Für die folgenden Quantengruppen-Paare gilt $\widehat{S} \rtimes S \cong \mathcal{K}$. Wir schreiben $\widehat{S} \rtimes S$, analog $S \rtimes \widehat{S}$, weil nach den Propositionen 2.68 und 3.20 S_V und S_u dasselbe volle verschränkte Produkt haben.

1. Für eine lokalkompakte Gruppe G gilt stets $\mathcal{C}_0(G) \rtimes \widehat{G} \cong \mathcal{K}(L^2(G))$, vgl. Notation 3.1.

2. Allgemeiner folgt dies für ein Paar $(\widehat{S}_W, S_W)$ lokalkompakter Quantengruppen im Sinne von Kustermans und Vaes (vgl. 1.3.6), für welche die zugehörige multiplikative Unitäre W regulär und eine der beiden Seiten mittelbar ist (vgl. § 4.4). Ist z.B. $\widehat{S}$ mittelbar, so gilt $S \rtimes \widehat{S} \cong \mathcal{K}$ nach Satz 4.22. Für Quantengruppen nach Kustermans und Vaes gilt zudem allgemein $\widehat{S} \rtimes S \cong (S \rtimes \widehat{S})^{op}$, vgl. Bemerkung 3.10. Insbesondere ist in unserer Situation $\widehat{S} \rtimes S \cong \mathcal{K}$.

3. Ein Spezialfall des zweiten Teils sind kompakte bzw. diskrete Quantengruppen, vgl. Beispiel 1.3.9(2.).

4.35 Beispiel. Die in diesem Zusammenhang wohl interessantesten Beispiele sind Bicrossed-Produkte (vgl. Beispiel 1.3.7(3.)) einer Zerlegung $G = G_1 G_2$. Hier ergeben sich nach [**5**, Proposition 3.8] die vollen (reduzierten) Quantengruppen zu $S_{u,(V)} = G_1 \ltimes_{(r)} \mathcal{C}_0(G_2)$ und $\widehat{S}_{u,(V)} = \mathcal{C}_0(G_1) \rtimes_{(r)} G_2$. Es gilt nach derselben Proposition

$$S \rtimes \widehat{S} \cong (G_2 \times G_1) \ltimes \mathcal{C}_0(G).$$

Da in unserer Situation $G_2 \times G_1 \cong G$ als G-Raum ist, folgt, daß $S \rtimes \widehat{S}$ isomorph zu $(G_2 \times G_1) \ltimes \mathcal{C}_0(G_2 \times G_1) \cong \mathcal{K}(L^2(G_2 \times G_1))$ ist. Analoges gilt auch für $\widehat{S} \rtimes S$. Sind G_1 und G_2 beide nicht mittelbare Gruppen, so ist für das Bicrossed-Produkt weder S noch $\widehat{S}$ mittelbar. Trotzdem funktioniert die Maximalisierungs-Konstruktion.

5.Kapitel: Äquivariante Kasparov-Theorie

In diesem Abschnitt wird ein äquivarianter voller Abstieg für beliebige stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebren (die den Einschränkungen unten gehorchen) definiert. Für Quantengruppen kann der äquivariante reduzierte Abstieg aus der vollen Version abgeleitet werden. Dazu werden die Techniken und Ergebnisse der letzten Kapitel verwendet, insbesondere Normalisierung und Dualität.

5.1 Bemerkung. Zur Definition von Kasparov-Zykeln werden Hilbertmoduln (X_B, ξ_β) mit einer evtl. entarteten Linkswirkung $\varphi : (A, \alpha) \to M(\mathcal{K}(X), Ad(\xi))$ benutzt, die wir ebenfalls als Hilbert-Bimoduln bezeichnen wollen. Mit dieser erweiterten Definition lassen sich dennoch alle Konstruktionen wie verschränktes Produkt und Normalisierung aus den letzten Abschnitten durchführen. Man betrachtet zunächst den Hilbert-Bimodul $({}_{\mathcal{K}(X)}X_B, {}_{Ad(\xi)}\xi_\beta)$ und führt damit die Konstruktionen durch. Anschließend kann man mithilfe von Lemma 2.9 und der universellen Eigenschaft der Normalisierung (Definition 2.63) die (evtl. entartete) Linkswirkung von $A \rtimes \widehat{S}$ oder A^n etc. nachträglich definieren. Man erhält wieder einen Hilbert-Bimodul in der erweiterten Definition. Für innere Tensorprodukte ergibt sich kein Problem. Wir werden daher im folgenden stillschweigend die Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte auch für die erweiterte Definition von Hilbert-Bimoduln verwenden.

Für den gesamten Abschnitt betrachten wir ausschließlich beidseitig nichtentartete Hopf-C^*-Algebren (S, Δ), die zusätzlich noch separabel sein sollen. Für Paare von Quantengruppen $(\widehat{S}_V, S_V)$ wie in § 1.3 werden wir daher annehmen, daß der zugrundeliegende Hilbertraum H separabel ist. Außerdem sollen alle vorkommenden Kowirkungen auf Hilbertmoduln und C^*-Algebren nichtentartet sein (vgl. 1.4.2). Der Einfachheit halber werden wir auch annehmen, daß alle C^*-Algebren separabel sind, obwohl man das Kasparov-Produkt auch für etwas allgemeinere Situationen konstruieren kann.

§ 5.1 Äquivariante KK-Gruppen und Kasparov-Produkt

In diesem Abschnitt erinnern wir an die Definitionen in [**3**, § 3 und § 5] unter Einbeziehung der Definitionen der vorangehenden Kapitel. Zunächst braucht man den Begriff einer Graduierung:

5.2 Definition. Unter Beachtung der generellen Voraussetzungen dieses Kapitels sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, (A, α) eine S-äquivariante C^*-Algebra und (X_B, ξ_β) ein S-äquivarianter Rechts-Hilbertmodul (vgl. § 1.4). Wir fassen S stets als trivial $\mathbb{Z}_2$-graduierte Algebra auf.

1. (A, α) heißt *graduiert*, falls A eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte C^*-Algebra ist, für die α ein graduierter Morphismus ist. Wir nennen in diesem Fall (A, α) abkürzend eine *graduiert S-äquivariante C^*-Algebra* oder eine *graduierte S-Kowirkung*.

2. Die S-Kowirkung (X_B, ξ_β) heißt *graduiert*, falls (B, β) graduiert im Sinne von (1.) ist und X eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung trägt, für die das Skalarprodukt, die Rechts-B-Wirkung und ξ graduiert sind. Wir benutzen analoge abkürzende Bezeichnungen wie in (1.).

3. Ein S-äquivarianter Hilbert-Bimodul $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ heißt *graduiert* , falls (A, α) bzw. (X_B, ξ_β) graduiert im Sinne von (1.) bzw. (2.) sind und die A-Wirkung ι_A auf X zusätzlich graduiert ist.

5.3 Bemerkung. Ist (X_B, ξ_β) ein graduiert S-äquivarianter Hilbertmodul, so ist automatisch die S-Kowirkung $(\mathcal{K}(X), Ad(\xi))$ (vgl. 1.4.3) eine graduiert S-äquivariante C^*-Algebra im Sinne von Definition 5.2(1.). Ist (Y_C, ζ_γ) ein weiterer graduiert S-äquivarianter Hilbertmodul und $\psi : B \to M(\mathcal{K}(Y), Ad(\zeta))$ eine (evtl. entartete) graduiert äquivariante Wirkung von B auf Y, so besitzt das innere Tensorprodukt eine kanonische graduiert äquivariante Struktur, die wir mit einem Dach in der Notation $(X \widehat{\otimes}_B Y, \xi \sharp_B \zeta)$ andeuten.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[0,1]$ die C^*-Algebra der komplexwertigen stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall und fassen sie als trivial $\mathbb{Z}_2$-graduierte C^*-Algebra auf.

5.4 Definition. Es sei (A, α) eine graduierte S-Kowirkung wie in Definition 5.2. Mit

$$(A[0,1], \alpha[0,1]) := (A \otimes \mathbb{C}[0,1], \alpha \otimes_* id_{\mathbb{C}[0,1]})$$

(vgl. Definition 2.55) bezeichnen wir die Algebra der stetigen Funktionen des Einheitsintervalls nach A. Sie trägt eine kanonische $\mathbb{Z}_2$-Graduierung und wird auf diese Weise eine äquivariant graduierte C^*-Algebra. Die Auswertungsabbildungen

$$ev_t : (A[0,1], \alpha[0,1]) \longrightarrow (A, \alpha) \ , \qquad a \otimes f \longmapsto f(t)a$$

wobei $t \in [0,1]$ ist, sind offenbar graduiert S-äquivariant und surjektiv.

Mit diesen Vorbereitungen können wir S-äquivariante Kasparov-Zykel definieren (vgl. [**3**, 3.1 Définition]):

5.5 Definition. Unter Beachtung der generellen Voraussetzungen (vgl. Bemerkung 5.1) sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra und (A, α) sowie (B, β) graduiert S-äquivariante C^*-Algebren. Ein *S-äquivarianter Kasparov-(A,B)-Zykel* ist ein graduiert S-äquivarianter Hilbertmodul (X_B, ξ_β) mit einer (evtl. entarteten) graduiert S-äquivarianten A-Wirkung $\varphi : (A, \alpha) \to M(\mathcal{K}(X), Ad(\xi))$ und einem Operator $F \in \mathcal{L}_B(X)$ vom Grad 1, für welche die folgenden Bedingungen gelten:

(a) Das Tripel (X, φ, F) ist ein *Kasparov-Zykel*, d.h. die Mengen $[\varphi(A), F]$, $\varphi(A)(F^2 - 1)$ und $\varphi(A)(F - F^*)$ sind in den kompakten Operatoren $\mathcal{K}(X)$ enthalten. Hierbei bezeichnet $[,]$ den graduierten Kommutator.

(b) Die Menge $(\varphi(A) \otimes S)(F \otimes 1_S - Ad(\xi)(F))$ ist in $\mathcal{K}(X) \otimes S$ enthalten. Wir sagen: Der Operator F ist *wesentlich S-äquivariant.*

Wir kürzen S-äquivariante Zykel als Tripel $((X, \xi), \varphi, F)$ ab und verwenden die Kurzschreibweise (X, F), wenn die Kowirkungsdaten und φ sich von selbst verstehen. Der Zykel $((X, \xi), \varphi, F)$ heißt *degeneriert* oder *entartet*, falls die Mengen in (a) und (b) identisch verschwinden. Wir bezeichnen die „Menge“ der S-äquivarianten Kasparov-Zykel mit $\mathbb{E}_S((A, \alpha), (B, \beta))$ und die „Teilmenge“ der degenerierten Zykel mit $\mathbb{D}_S((A, \alpha), (B, \beta))$. Verstehen sich die Kowirkungen von selbst, so werden die „Mengen“ auch mit $\mathbb{E}_S(A, B)$ und $\mathbb{D}_S(A, B)$ abgekürzt.

5.6 Definition. Es seien (S,Δ), (A,α) und (B,β) wie in Definition 5.5.

1. Zwei S-äquivariante Kasparov-Zykel $((X,\xi),\varphi,F)$ und $((X',\xi'),\varphi',F')$ in $\mathbb{E}_S(A,B)$ heißen *unitär äquivalent*, falls es eine S-äquivariante graduierungserhaltende Unitäre $U:(X,\xi)\overset{\cong}{\to}(X',\xi')$ (vgl. 1.4.7) mit $\varphi' = Ad(U)\circ\varphi$ und $F' = Ad(U)(F)$ gibt.

2. Eine *S-äquivariante Homotopie* zwischen zwei Kasparov-Zykeln $((X_0,\xi_0),\varphi_0,F_0)$ und $((X_1,\xi_1),\varphi_1,F_1)$ in $\mathbb{E}_S(A,B)$ ist ein S-äquivarianter Zykel $((X,\xi),\varphi,F)$ in $\mathbb{E}_S((A,\alpha),(B[0,1],\beta[0,1]))$, für welchen der Zykel
$$((X\otimes_{ev_t}B,\xi\sharp_{B[0,1]}\beta),\varphi\otimes_{ev_t}1_B,F\otimes_{ev_t}1_B)\in\mathbb{E}_S((A,\alpha),(B,\beta))$$
(vgl. 1.1.11) für die Definition von $X\otimes_{ev_t}B$) äquivariant unitär äquivalent zu (X_t,F_t) ist, wobei für $t=0$ bzw. $t=1$ ist. (X_0,F_0) und (X_1,F_1) heißen in diesem Fall *S-äquivariant homotop.*

Mit diesen Vorbereitungen können wir die äquivarianten Kasparov-Gruppen definieren (vgl. [**3**, 3.2 Définition]):

5.7 Definition. Mit den Bezeichnungen aus Definition 5.5 sei $KK_S((A,\alpha),(B,\beta))$ die Menge der Äquivalenzklassen in $\mathbb{E}_S((A,\alpha),(B,\beta))$ unter Homotopie im Sinne von Definition 5.6. Wir verwenden auch die Abkürzung $KK_S(A,B)$, falls Mißverständnisse bzgl. der Kowirkungen ausgeschlossen sind. Für $((X,\xi),\varphi,F)$ in $\mathbb{E}_S(A,B)$ ist $[(X,\xi),\varphi,F]$, oder kürzer $[X,F]$, seine Homotopie-Klasse in $KK_S(A,B)$. Nicht näher bestimmte Elemente $\boldsymbol{x}$ in $KK_S(A,B)$ notieren wir mit fettgedruckten kleinen römischen Buchstaben.

Die folgende Bemerkung faßt die wichtigsten grundlegenden Eigenschaften der Mengen $KK_S(A,B)$ zusammen, vgl. [**3**, § 3 (3.3)-(3.5)]:

5.8 Bemerkung. Mit den Bezeichungen der Definition 5.7 ist $KK_S(A,B)$ eine abelsche Gruppe, wobei das Nullelement von den entarteten Zykeln $\mathbb{D}_S(A,B)$ repräsentiert wird. Die Zuordnung
$$((A,\alpha),(B,\beta))\longmapsto KK_S((A,\alpha),(B,\beta))$$
ist ein homotopieinvarianter Bifunktor von der Kategorie der separablen graduiert S-äquivarianten C^*-Algebren in die abelschen Gruppen. Er ist kontravariant im ersten und kovariant im zweiten Argument. Weiter gilt: Ist $({}_AX_B,{}_\alpha\xi_\beta)$ ein graduiert S-äquivarianter Hilbert-Bimodul (Definition 5.2), wobei die A-Wirkung ι_A evtl. entartet sein darf, mit $\iota_A(A)\subseteq\mathcal{K}(X)$, dann definiert $((X,\xi),\iota_A,0)$ einen S-äquivarianten Kasparov-(A,B)-Zykel Wir erhalten folglich ein Element $[(X,\xi),\iota_A,0]$ in $KK_S(A,B)$, welches wir auch mit $[(X,\xi)]$ oder einfach mit $[X]$ abkürzen. Ist speziell $\varphi:(A,\alpha)\to(B,\beta)$ ein graduiert S-äquivarianter *-Morphismus, so definiert $[\varphi]:=[{}_AB_B]$ ein Element in $KK_S(A,B)$. Insbesondere kann man für jede graduiert äquivariante S-Kowirkung (A,α) eine ausgezeichnete Klasse $\mathbf{1}_A:=[id_A]$ in $KK_S(A,A)$ definieren.

5.9 Beispiel. Für eine lokalkompakte Gruppe G, für die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, seien (A,α) und (B,β) separable C^*-Algebren mit G-Wirkung. Dann sind für $(S,\Delta)=(\mathcal{C}_0(G),\Delta_{\widehat{G}})$ (vgl. 1.2.6(1.)) die Gruppen $KK_G(A,B)$ und $KK_{\mathcal{C}_0(G)}(A,B)$ identisch (vgl. [**3**, 3.4 Remarques]), wobei $KK_G(A,B)$ die G-äquivariante KK-Theorie nach Kasparov [**29**], [**30**] ist.

Wie im Fall lokalkompakter Gruppen (vgl. [**29**], [**30**]) gibt es auch für die S-äquivariante Theorie ein Kasparov-Produkt. Als Vorbereitung brauchen wir den folgenden Begriff einer Konnexion (vgl. [**11**, Definition A1] oder auch [**3**, S. 700]):

5.10 Bemerkung. Es seien X_B und Y_C graduierte Hilbertmoduln und $\psi : B \to \mathcal{L}_C(Y)$ eine graduierte Links-Wirkung von B auf Y. Für x in X sei $T_x \in \mathcal{L}_C(Y, X\widehat{\otimes}_\psi Y)$ durch $T_x(y) := x \otimes y$ definiert. Wir setzen $\widetilde{T}_x := \left(\begin{smallmatrix} 0 & T_x \\ T_x^* & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{L}_C((X\widehat{\otimes}_\psi Y) \oplus Y)$. Sei $F_2 \in \mathcal{L}_C(Y)$. Ein Operator $F \in \mathcal{L}_C((X\widehat{\otimes}_\psi Y) \oplus Y)$ heißt *F_2-Konnexion für X*, falls für jedes $x \in X$ der graduierte Kommutator $[\widetilde{T}_x, \left(\begin{smallmatrix} F & 0 \\ 0 & F_2 \end{smallmatrix}\right)]$ kompakt ist, d.h. in $\mathcal{K}((X\widehat{\otimes}_\psi Y) \oplus Y)$ liegt.

Die folgende Definition vereinfacht die Konstruktion des Kasparov-Produkts (vgl. [**3**, 5.2 Définition]):

5.11 Definition. Es seien (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra und (A, α), (B, β) sowie (C, γ) graduiert äquivariante C^*-Algebren (unter Beachtung der generellen Voraussetzungen dieses Kapitels). Wir betrachten Zykel $((X, \xi), \varphi_1, F_1)$ in $KK_S(A, B)$ sowie $((Y, \zeta), \psi, F_2))$ in $KK_S(B, C)$ und setzen $\varphi := \varphi_1 \otimes_\psi 1$ als die kanonische A-Wirkung auf $X\widehat{\otimes}_\psi Y$. Mit $F_1 \#_S F_2$ sei die Menge der Operatoren F in $\mathcal{L}_C(X\widehat{\otimes}_\psi Y)$ bezeichnet, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(a) $((X\widehat{\otimes}_\psi Y, \xi \sharp_B \zeta), \varphi, F)$ ist ein Zykel in $\mathbb{E}_S(A, C)$.

(b) F ist eine F_2-Konnexion für X.

(c) Für jedes $a \in A$ ist das Bild des Operators $\varphi(a)[F_1 \otimes_\psi 1, F]\varphi(a)^*$ in der Quotienten-C^*-Algebra $\mathcal{L}_C(X\widehat{\otimes}_\psi Y)/\mathcal{K}(X\widehat{\otimes}_\psi Y)$ ein positives Element.

Mit dieser Begriffsbildung kann man die Existenz des Kasparov-Produkts für die S-äquivariante Theorie beweisen (vgl. [**3**, 5.3 Théorème]):

5.12 Satz. *Mit den Notationen aus Definition 5.11 betrachten wir die Menge $F_1 \#_S F_2$. Diese ist nicht leer, und zudem ist die Klasse $[X\widehat{\otimes}_\psi Y, F]$ in $KK_S(A, C)$ unabhängig von der Auswahl des Elements F in $F_1 \#_S F_2$ sowie den Repräsentanten der Klassen $[X, F_1]$ bzw. $[Y, F_2]$ in $KK_S(A, B)$ bzw. $KK_S(B, C)$.*

5.13 Bemerkung. Mit den Bezeichnungen der Definition 5.11 setze $\boldsymbol{x} := [X, F_1]$ in $KK_S(A, B)$ und $\boldsymbol{y} := [Y, F_2]$ in $KK_S(B, C)$. Das *Kasparov-Produkt* von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ ist die Klasse $[X\widehat{\otimes}_\psi Y, F]$ in $KK_S(A, C)$ und wird mit $\boldsymbol{x} \otimes_B \boldsymbol{y}$ bezeichnet. Das Kasparov-Produkt ist bilinear, assoziativ, kontravariant in A, kovariant in C und natürlich in der Variablen B. Für *-Morphismen $\varphi : (A, \alpha) \to (A', \alpha')$ bzw. $\psi : (B, \beta) \to (B', \beta')$ besteht außerdem der folgende Zusammenhang mit der Funktorialität von $KK_S(-, -)$: Es sind $\varphi^* = [\varphi] \otimes_{A'} (\cdot)$ bzw. $\psi_* = (\cdot) \otimes_B [\psi]$ identisch als Abbildungen $KK_S(A', B) \to KK_S(A, B)$ bzw. $KK_S(A, B) \to KK_S(A, B')$. Insbesondere gilt $\mathbf{1}_A \otimes_A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \otimes_B \mathbf{1}_B$ für alle $x \in KK_S(A, B)$ (vgl. [**3**, § 5 (5.4)-(5.8)]), und $KK_S(A, A)$ ist ein Ring mit Eins $\mathbf{1}_A$.

5.14 Bemerkung. Nach der vorangehenden Bemerkung 5.13 läßt sich jedes Element $\boldsymbol{x} = [(X, \xi), \varphi, F]$ in $KK_S(A, B)$ in der Form $\boldsymbol{x} = \mathbf{1} \otimes_A \boldsymbol{x}$ schreiben. Insbesondere kann $\boldsymbol{x}$ also durch einen Zykel $((A\widehat{\otimes}_\varphi X, \alpha \sharp_A \xi), id_A \otimes_\varphi 1, \widetilde{F})$ in $\mathbb{E}_S(A, B)$ repräsentiert werden, wobei $\widetilde{F}$ in $0 \#_S F$ ist. Der Hilbertmodul $A\widehat{\otimes}_\varphi X$ ist isomorph zu $\overline{\varphi(A)X}$, daher ist die

Links-A-Wirkung nichtentartet. Also kann jedes Element $\boldsymbol{x}$ in $KK_S(A,B)$ durch einen Zykel repräsentiert werden, dessen Hilbertmodul ein S-äquivarianter Rechts-Hilbert-(A,B)-Bimodul im (strengen) Sinne von 1.1.3 und 1.4.2 ist. Wir werden diese Bemerkung vor allem in Beweisen stillschweigend anwenden und die Links-Wirkung als nichtentartet annehmen, wo es vonnöten ist.

5.15 Bemerkung. Wir betrachten unter Benutzung der Notationen aus Definition 5.11 die folgenden Spezialfälle etwas genauer:

1. Ist B eine separable C^*-Algebra mit trivialer S-Kowirkung δ_B^{tr} und $((X,\xi),\varphi,F)$ in $\mathbb{E}_S(A,B)$, so ist ξ eine rechts-triviale Kowirkung (vgl. § 2.2). Nach Beispiel 2.47 ist ξ daher durch eine unitäre S-Kodarstellung $u \in \mathcal{U}M(\mathcal{K}(X) \otimes S)$ (vgl. 1.2.3) mit der analytischen Zusatzbedingung $(1 \otimes S) \cdot u \cdot (X \otimes 1_S) \subseteq X \otimes S$ gegeben. Die wesentliche S-Invarianz von F in Definition 5.5(b) übersetzt sich in die Bedingung, daß $(\varphi(A) \otimes S) \cdot (F \otimes 1_S - u \cdot (F \otimes 1_S) \cdot u^*)$ in $\mathcal{K}(X) \otimes S$ liegt. Dies ist gleichwertig zu: $(\varphi(A) \otimes S) \cdot [F \otimes 1_S, u] \subseteq \mathcal{K}(X) \otimes S$.

2. Speziell für $A = \mathbb{C}$ besteht ein Zykel in $\mathbb{E}_S(\mathbb{C},B)$ aus einem graduierten Hilbert-B-Modul $E = E_B$, einer graduierten unitären S-Kodarstellung $u \in \mathcal{U}M(\mathcal{K}(E) \otimes S)$ mit $(1 \otimes S) \cdot u \cdot (E \otimes 1) \subseteq E \otimes S$ und einem ungeraden Operator $F \in \mathcal{L}_B(E)$. Wir können annehmen, daß die Links-$\mathbb{C}$-Wirkung auf E nichtentartet und damit gleich der Einbettung durch Skalare ist. Daher kann man sie vernachlässigen. Wir notieren in diesem Fall daher Zykel als Tripel (E,u,F) mit den verbleibenden Bedingungen:

   (a′) Die Operatoren $F^2 - 1$ und $F - F^*$ sind in $\mathcal{K}(E)$.

   (b′) Die Menge $(1 \otimes S) \cdot [F \otimes 1_S, u]$ liegt in $\mathcal{K}(E) \otimes S$.

5.16 Definition. Es sei (S,Δ) eine separable Hopf-C^*-Algebra. Mit KK_S bezeichnen wir die folgende additive Kategorie: Die Objekte sind graduiert S-äquivariante separable C^*-Algebren, und die Menge der Morphismen von Objekten (A,α) nach (B,β) ist die Kasparov-Gruppe $KK_S((A,\alpha),(B,\beta))$. Die Verknüpfung ist das Kasparov-Produkt, und das Einselement von (A,α) ist durch $\mathbf{1}_A = [id_A]$ in $KK_S(A,A)$ gegeben.

5.17 Bemerkung. Für eine separable Hopf-C^*-Algebra (S,Δ) wie oben sei $\mathfrak{M}_S^{c,ne}$ die Unterkategorie von $\mathfrak{M}_S^{ne}$ (vgl. 1.5.1), deren Objekte separable (nichtentartete) S-äquivariante C^*-Algebren sind und deren Morphismen $[(X,\xi)] \in \mathfrak{M}_S^{c,ne}((A,\alpha),(B,\beta))$ durch solche Hilbert-Bimoduln repräsentiert sind, für welche die Bilder der Links-A-Wirkung ι_A auf X kompakte Operatoren sind, d.h. es gilt $\iota_A(A) \subseteq \mathcal{K}(X)$ (vgl. Bemerkung 5.8). Dann wird durch die Zuordnung

$$\mathfrak{M}_S^{c,ne}((A,\alpha),(B,\beta)) \ni [(X,\xi)] \longmapsto [(X,\xi),\iota_A,0] = [(X,\xi)] \in KK_S(A,B)$$

ein Funktor $\mathfrak{M}_S^{c,ne} \to KK_S$ definiert. Sind (A,α) und (B,β) $\mathfrak{M}_S$-äquivalent, so betrachte einen $\mathfrak{M}_S$-Isomorphismus $[(X,\xi)]$ in $\mathfrak{M}_S(A,B)$. Dann ist $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ eine S-äquivariante Morita-Äquivalenz (vgl. 1.5.3), also liegt $[(X,\xi)]$ automatisch in $\mathfrak{M}_S^{c,ne}(A,B)$,x und die Klasse $[(X,\xi)]$ in $KK_S(A,B)$ ist eine KK_S-Äquivalenz. Insbesondere sind (A,α) und (B,β) isomorph in der Kategorie KK_S.

§ 5.2 Voller Abstieg und Normalisierung

In diesem Abschnitt wird eine universelle Version des Abstiegsfunktors für stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebren konstruiert. Er ist eine Verallgemeinerung des vollen Abstiegs j^G in [**30**, 3.11 Theorem]. Anschließend werden wir die Normalisierungs-Konstruktion auf dem Niveau der äquivarianten KK-Theorie besprechen. Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir die folgende Notation:

5.18 Notation. Es sei $\Phi_\varphi : X_B \to M(Y_D)$ ein nichtentarteter Morphismus von Rechts-Hilbertmoduln (vgl. 1.1.10) und $F \in \mathcal{L}_B(X)$. Wir benutzen $\Phi(F) := Ad(\Phi)(F)$ als abkürzende suggestive Notation für die Adjunktion von Φ, angewandt auf F, sofern die Gefahr von Mißverständnissen nicht besteht. Da sich Adjunktion mit Komposition verträgt (vgl. 1.1.13), macht diese Abkürzung auch bei Kompositionen von Morphismen Sinn.

Es sei (S, Δ) eine separable beidseitig nichtentartete und stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra (vgl. 1.2.2 und 1.2.5) und (A, α) sowie (B, β) graduiert S-äquivariante C^*-Algebren (unter Beachtung der generellen Voraussetzungen). Die Idee für den vollen Abstieg ist dieselbe wie in [**30**] und [**3**]: Ist $((X, \xi), \varphi, F)$ in $\mathbb{E}_S(A, B)$ ein Zykel, so betrachtet man das Tripel $((X \rtimes \widehat{S}, \widehat{\xi}), \varphi \rtimes \widehat{S}, j_\xi(F))$ und zeigt, daß es in $\mathbb{E}_{\widehat{S}}((A \rtimes \widehat{S}, \widehat{\alpha}), (B \rtimes \widehat{S}, \widehat{\beta}))$ liegt. Dann beweist man, daß die Abbildung

$$J_S : KK_S(A, B) \longrightarrow KK_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S}), \quad [X, F] \to [X \rtimes \widehat{S}, j_\xi(F)]$$

wohldefiniert ist. Dies geschieht in den beiden folgenden Lemmata. Insgesamt ist J_S ein additiver Funktor von KK_S nach $KK_{\widehat{S}}$ (Satz 5.22).

5.19 Lemma. *$(X \rtimes \widehat{S}, j_\xi(F))$ wie oben ist ein Zykel in $KK_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$.*

Beweis. Wir müssen die Bedingungen (a) und (b) der Definition 5.5 verifizieren. Wegen der $\widehat{S}$-Invarianz von $j_\xi(F)$ (vgl. Lemma 2.41) ist $\widehat{\xi}(j_\xi(F)) = (j_\xi(F) \otimes 1_{\widehat{S}})$ und (b) trivialerweise erfüllt. In (a) bereitet lediglich die Bedingung an Kommutatoren Schwierigkeiten, Die Übrigen folgen aus $\mathcal{K}(X \rtimes \widehat{S}) = \overline{j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S}) j_\xi(\mathcal{K}(X))} = \overline{j_\xi(\mathcal{K}(X)) j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})}$ (vgl. Lemma 2.25, wobei wir Notation 2.35) verwenden, der Verträglichkeit der Wirkung φ mit ξ (vgl. 1.1.13) und der Tatsache, daß (X, F) ein Zykel in $\mathbb{E}_S(A, B)$ ist. Für Kommutatoren erhält man

$$\begin{aligned}[j_\xi(F), \varphi \rtimes \widehat{S}(A \rtimes \widehat{S})] &\subseteq \overline{[j_\xi(F), j_\xi(\varphi(A)) j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})]} \\ &\subseteq \overline{j_\xi([F, \varphi(A)]) j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})} \pm \overline{j_\xi(\varphi(A))[j_\xi(F), j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S})]}.\end{aligned}$$

Der erste Summandentyp ist wegen $[F, \varphi(A)] \subseteq \mathcal{K}(X)$ offensichtlich in $\mathcal{K}(X \rtimes \widehat{S})$. Für den zweiten Typ reicht es, $\widehat{s} \in \widehat{S}$ von der Form $\widehat{s} = (id \otimes f)(\mathfrak{u})$ für $f \in \mathfrak{F}$ anzunehmen (vgl. 1.2.5). Dann gilt $j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{s}) = (id \otimes f)(\mathfrak{u}_\xi)$ (vgl. Notation 2.35) und folglich

$$\begin{aligned} j_\xi(F) j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{s}) &= (id \otimes f)((j_\xi(F) \otimes 1_S) \cdot \mathfrak{u}_\xi) \quad \text{sowie} \\ j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{s}) j_\xi(F) &= (id \otimes f)(\mathfrak{u}_\xi \cdot (j_\xi(F) \otimes 1_S)) \overset{(*)}{=} (id \otimes f)((j_\xi \otimes id_S)(\xi(F)) \cdot \mathfrak{u}_\xi), \end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Kovarianz von $(j_\xi, \mathfrak{u}_\xi)$ eingeht. Wegen der S-Invarianz der Menge $\mathfrak{F}$ findet man eine Faktorisierung $f = f_1 \cdot s$ mit geeigneten $f_1 \in \mathfrak{F}$ und $s \in S$. Insgesamt erhält man mit $a \in A$ die Inklusion

$$\begin{aligned} j_\xi(\varphi(a))[j_\xi(F), j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{s})] &= (id \otimes f)\{(j_\xi \otimes id_S)((\varphi(a) \otimes 1_S)(F \otimes 1_S - \xi(F)) \cdot \mathfrak{u}_\xi)\} \\ &= (id \otimes f_1)\{(j_\xi \otimes id_S)((\varphi(a) \otimes s)(F \otimes 1_S - \xi(F)) \cdot \mathfrak{u}_\xi)\} \\ &\overset{(1)}{\in} (id \otimes f_1)((j_\xi(\mathcal{K}(X)) \otimes S) \cdot \mathfrak{u}_\xi) \\ &\overset{(2)}{\subseteq} (id \otimes \mathfrak{F})((j_\xi(\mathcal{K}(X)) \otimes 1_S) \cdot \mathfrak{u}_\xi) \\ &\subseteq j_\xi(\mathcal{K}(X)) \cdot j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S}) \subseteq \mathcal{K}(X \rtimes \widehat{S}), \end{aligned}$$

wobei in (1) die wesentliche S-Invarianz von F (vgl. Definition 5.5(b)) und in (2) die S-Invarianz von $\mathfrak{F}$ eingeht. □

5.20 Lemma. *Mit den Notationen wie oben seien* $((X_t, \xi_t), \varphi_t, F_t)$, *für* $t = 0, 1$, *homotope Zykel in* $\mathbb{E}_S(A, B)$ *und* $((X, \xi), \varphi, F)$ *in* $\mathbb{E}_S(A, B[0,1])$ *eine Homotopie zwischen ihnen. Dann ist der Zykel* $((X \rtimes \widehat{S}, \widehat{\xi}), \varphi \rtimes \widehat{S}, j_\xi(F))$ *in* $\mathbb{E}_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, B[0,1] \rtimes \widehat{S})$ *unter Verwendung der kanonischen Isomorphie* $B[0,1] \rtimes \widehat{S} \cong B \rtimes \widehat{S}[0,1]$ *(Lemma 2.56) eine Homotopie zwischen den Zykeln* $(X_0 \rtimes \widehat{S}, j_{\xi_0}(F_0))$ *und* $(X_1 \rtimes \widehat{S}, j_{\xi_1}(F_1))$ *in* $\mathbb{E}_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$.

Beweis. Für die Dauer des Beweises seien mit $I_B : B[0,1] \rtimes \widehat{S} \to B \rtimes \widehat{S}[0,1]$ der kanonische Isomorphismus und mit $U_t : X \widehat{\otimes}_{ev_t} B \cong X_t$, für $t = 0$ bzw. $t = 1$, die unitären Äquivalenzen bezeichnet. Man erhält eine Kette von graduiert $\widehat{S}$-unitären Äquivalenzen:

$$(X \rtimes \widehat{S}) \widehat{\otimes}_{ev_t \circ I_B} B \rtimes \widehat{S} = (X \rtimes \widehat{S}) \widehat{\otimes}_{ev_t \rtimes \widehat{S}} B \rtimes \widehat{S} \cong (X \widehat{\otimes}_{ev_t} B) \rtimes \widehat{S} \overset{U_t \rtimes \widehat{S}}{\cong} X_t \rtimes \widehat{S}.$$

Unter diesen Isomorphismen übersetzen sich die Links-$(A \rtimes \widehat{S})$-Wirkung und der lineare Operator für $t = 0, 1$ in

$$\begin{aligned} \varphi \rtimes \widehat{S} \otimes_{ev_t \circ I_B} 1 = \varphi \rtimes \widehat{S} \otimes_{ev_t \rtimes \widehat{S}} 1 &\mapsto (\varphi \otimes_{ev_t} 1) \rtimes \widehat{S} \mapsto \varphi_t \rtimes \widehat{S} \quad \text{und} \\ j_\xi(F) \otimes_{ev_t \circ I_B} 1 = j_\xi(F) \otimes_{ev_t \rtimes \widehat{S}} 1 &\mapsto j_{\xi \sharp_{ev_t} \beta}(F \otimes_{ev_t} 1) \mapsto j_{\xi_t}(F). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

5.21 Korollar. *Mit den obigen Notationen ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} J_S : KK_S((A, \alpha), (B, \beta)) &\longrightarrow KK_{\widehat{S}}((A \rtimes \widehat{S}, \widehat{\alpha}), (B \rtimes \widehat{S}, \widehat{\beta})) \\ [(X, \xi), \varphi, F] &\longmapsto [(X \rtimes \widehat{S}, \widehat{\xi}), \varphi \rtimes \widehat{S}, j_\xi(F)] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Homomorphismus abelscher Gruppen. Ist $\varphi : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ *ein graduiert* S*-äquivarianter Morphismus, so gilt* $J_S([\varphi]) = [\varphi \rtimes \widehat{S}]$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit folgt aus den vorangehenden Lemmata 5.19 und 5.20. Die Verträglichkeit mit der Addition ist offensichtlich, da das verschränkte Produkt mit direkten Summen vertauscht. Der Rest ist klar. □

Die Abbildung J_S ist auch mit dem Kasparov-Produkt verträglich, genauer gilt das vorhin angedeutete Ergebnis:

5.22 Satz. *Ist (S, Δ) eine separable und stark dualisierbare Hopf-C^*-Algebra, dann setzt sich J_S aus Korollar 5.21 zu einem Funktor $J_S : KK_S \to KK_{\widehat{S}}$ fort, indem man für Objekte $J_S((A, \alpha)) := (A \rtimes \widehat{S}, \widehat{\alpha})$ definiert. J_S heißt der* volle Abstiegs-Funktor *oder* voller Abstieg.

Beweis. Wegen $J_S(\mathbf{1}_A) = J_S([id_A]) = [id_A \rtimes \widehat{S}] = \mathbf{1}_{A \rtimes \widehat{S}}$ ist der Abstieg mit den Einselementen verträglich. Für die Verträglichkeit mit dem Kasparov-Produkt betrachte Objekte (A, α), (B, β) und (C, γ) in KK_S und $\boldsymbol{x} = [(X, \xi), \varphi, F_1]$ bzw. $\boldsymbol{y} = [(Y, \zeta), \psi, F_2]$ in $KK_S(A, B)$ bzw. $KK_S(B, C)$. Mit $F \in F_1 \#_S F_2$ (vgl. Definition 5.11) ist $J_S(\boldsymbol{x} \otimes_B \boldsymbol{y})$ gleich $[(X \widehat{\otimes}_B Y) \rtimes \widehat{S}, j_{\xi \sharp_B \zeta}(F)]$ und wird wegen Korollar 2.40 durch den Zykel $(\mathcal{E}, \widetilde{F})$ repräsentiert, wobei wir das Symbol $\mathcal{E}$ bzw. $\widetilde{F}$ als Abkürzung für $(X \rtimes \widehat{S}) \widehat{\otimes}_{B \rtimes \widehat{S}} (Y \rtimes \widehat{S})$ bzw. $(j_\xi \otimes_B j_\zeta)(F)$ benutzen. Man muß also nur noch zeigen, daß $\widetilde{F}$ in $j_\xi(F_1) \#_{\widehat{S}} j_\zeta(F_2)$ liegt, dann folgt mit Satz 5.12 $J_S(\boldsymbol{x} \otimes_B \boldsymbol{y}) = J_S(\boldsymbol{x}) \otimes_{B \rtimes \widehat{S}} J_S(\boldsymbol{y})$. Die Bedingung (a) in Definition 5.11 ist klar. Es reicht, die Bedingung (b) für Elemente $z := j_\xi(x) \cdot d$ in $X \rtimes \widehat{S}$ mit $d \in B \rtimes \widehat{S}$ und x in X zu prüfen. Es gilt dann $T_z = T_{j_\xi(x)} \circ (\psi \rtimes \widehat{S}(d))$, wobei $T_{j_\xi(x)}$ in $\mathcal{L}(Y \rtimes \widehat{S}, \mathcal{E})$ durch $T_{j_\xi(x)}(\widetilde{y}) := j_\xi(x) \otimes \widetilde{y} \in \mathcal{E}$ für $\widetilde{y} \in Y \rtimes \widehat{S}$ definiert ist. Man verifiziert $T_{j_\xi(x)} = Ad(j_\xi \otimes_B j_\zeta, j_\zeta)(T_x)$ (vgl. 1.1.12) und erhält insgesamt $T_{j_\xi(x)d} = \vartheta_x \cdot d$, wobei wir hier und im folgenden die Notation abkürzen und d statt $\psi \rtimes \widehat{S}(d)$ sowie ϑ_x statt $Ad(j_\xi \otimes_B j_\zeta, j_\zeta)(T_x)$ verwenden. Folglich ist $\widetilde{T}_z = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^* \end{smallmatrix}\right) \cdot \widetilde{\vartheta}_x \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, wobei $\widetilde{\vartheta}_x := ((j_\xi \otimes_B j_\zeta) \oplus j_\zeta)(\widetilde{T}_x)$ (vgl. Bemerkung 5.10 und Notation 5.18). Wir deuten durch „$\equiv_{\mathcal{K}}$“ an, daß zwei Operatoren eine kompakte Differenz haben und erhalten

$$\begin{aligned}
[\widetilde{T}_z, \begin{pmatrix} \widetilde{F} & 0 \\ 0 & j_\zeta(F_2) \end{pmatrix}] &= [\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^* \end{smallmatrix}\right) \cdot \widetilde{\vartheta}_x \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right), \begin{pmatrix} \widetilde{F} & 0 \\ 0 & j_\zeta(F_2) \end{pmatrix}] \overset{(1)}{\equiv_{\mathcal{K}}} \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^* \end{smallmatrix}\right) \cdot [\widetilde{\vartheta}_x, \begin{pmatrix} \widetilde{F} & 0 \\ 0 & j_\zeta(F_2) \end{pmatrix}] \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \\
&\overset{(2)}{=} \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d^* \end{smallmatrix}\right) \cdot ((j_\xi \otimes_B j_\zeta) \oplus j_\zeta)([\widetilde{T}_x, \left(\begin{smallmatrix} F & 0 \\ 0 & F_2 \end{smallmatrix}\right)]) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right),
\end{aligned}$$

Dabei folgt (1) aus $[\psi \rtimes \widehat{S}(d), j_\zeta(F_2)] \subseteq \mathcal{K}(Y \rtimes \widehat{S})$ (vgl. den Beweis von Lemma 5.19), und in (2) werden einfach die Definitionen von $\widetilde{\vartheta}_x$ und $\widetilde{F}$ eingesetzt. Da F eine F_2-Konnexion für X ist, liegt der letzte Term in

$$\begin{aligned}
&\overline{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \rtimes \widehat{S} \end{smallmatrix}\right) \cdot ((j_\xi \otimes_B j_\zeta) \oplus j_\zeta)(\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}(Y, X \widehat{\otimes}_B Y) \\ \mathcal{K}(Y, X \widehat{\otimes}_B Y) & 0 \end{pmatrix}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \rtimes \widehat{S} \end{smallmatrix}\right)} \\
&\overset{(3)}{=} \overline{\begin{pmatrix} 0 & B \rtimes \widehat{S} \cdot (j_\xi \otimes_B j_\zeta)(X \widehat{\otimes}_B Y) \cdot j_\zeta(Y)^* \\ j_\zeta(Y) \cdot (j_\xi \otimes_B j_\zeta)(X \widehat{\otimes}_B Y)^* \cdot B \rtimes \widehat{S} & 0 \end{pmatrix}} \\
&\overset{(4)}{\subseteq} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}(Y \rtimes \widehat{S}, \mathcal{E}) \\ \mathcal{K}(\mathcal{E}, Y \rtimes \widehat{S}) & 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{E} \oplus (Y \rtimes \widehat{S})),
\end{aligned}$$

und somit ist $\widetilde{F}$ eine $j_\zeta(F_2)$-Konnexion für $X \rtimes \widehat{S}$. Hierbei gilt die Gleichung (3) nach 1.1.12. Die Inklusion (4) folgt aus der Tatsache, daß

$$B \rtimes \widehat{S} \cdot (j_\xi \otimes_B j_\zeta)(X \otimes_B Y) \subseteq \overline{j_\xi(\psi(B)) \cdot j^\xi_{\widehat{S}}(\widehat{S}) \cdot (j_\xi \otimes_B j_\zeta)(X \otimes_B Y)} \subseteq \mathcal{E},$$

wobei wir unter Verwendung der Notation 2.35 das Lemma 2.25 und die Verträglichkeit des verschränkten Produkts mit Tensorprodukten (Korollar 2.40) benutzen. Die verbleibende

Bedingung (c) ist noch einfacher: Hierfür kann man ein Element $\widetilde{a} \in A \rtimes \widehat{S}$ von der Form $\widetilde{a} = j^{\alpha}_{\widehat{S}}(\widehat{s}) \cdot j_{\alpha}(a)$ für $\widehat{s} \in \widehat{S}$ und $a \in A$ annehmen. Nach Voraussetzung ist

$$\varphi(a)[F_1 \otimes_{\psi} 1, F]\varphi(a)^* = P + K,$$

wobei $P \in \mathcal{L}_C(X \widehat{\otimes}_B Y)$ positiv und $K \in \mathcal{K}(X \widehat{\otimes}_B Y)$ ist. Unter Benutzung derselben Ergebnisse wie im Beweis von (b) erhält man

$$\begin{aligned}
(\varphi \rtimes \widehat{S}(\widetilde{a}))\cdot&[j_{\xi}(F_1) \otimes_{\psi \rtimes \widehat{S}} 1, \widetilde{F}] \cdot (\varphi \rtimes \widehat{S}(\widetilde{a}))^* \\
&= j^{\xi}_{\widehat{S}}(\widehat{s}) j_{\xi}(\varphi(a)) \cdot (j_{\xi} \otimes_B j_{\zeta})([F_1 \otimes_{\psi} 1, F]) \cdot j_{\xi}(\varphi(a))^* j^{\xi}_{\widehat{S}}(\widehat{s})^* \\
&= j^{\xi}_{\widehat{S}}(\widehat{s}) \cdot (j_{\xi} \otimes_B j_{\zeta})(\varphi(a)[F_1 \otimes_{\psi} 1, F]\varphi(a)^*) \cdot j^{\xi}_{\widehat{S}}(\widehat{s})^* \\
&= j^{\xi}_{\widehat{S}}(\widehat{s}) \cdot (j_{\xi} \otimes_B j_{\zeta})(P) \cdot j^{\xi}_{\widehat{S}}(\widehat{s})^* + j^{\xi}_{\widehat{S}}(\widehat{s}) \cdot (j_{\xi} \otimes_B j_{\zeta})(K) \cdot j^{\xi}_{\widehat{S}}(\widehat{s})^* ,
\end{aligned}$$

wobei der erste Summand positiv und der zweite nach Lemma 2.25 kompakt ist. □

Wie für die Morita-Kategorie $\mathfrak{M}_S$ (vgl. Proposition 2.66) gibt es auch für KK_S einen Normalisierungs-Funktor. Zunächst definieren wir die Unterkategorie der normalen KK_S-Objekte:

5.23 Definition. Mit S wie oben bezeichne KK^n_S die volle Unterkategorie von KK_S, deren Objekte normale S-äquivariante C^*-Algebren sind (vgl. Definition 2.59).

5.24 Bemerkung. Wegen Bemerkung 2.61 kommen für Objekte (A, α) und (B, β) in KK^n_S auch in den Zykeln $((X, \xi), \varphi, F)$ in $\mathbb{E}_S(A, B)$ nur normale S-Kowirkungen (X, ξ) vor.

5.25 Lemma. *Mit S wie oben seien (A, α) und (B, β) Objekte in KK_S. Dann ist mit den Notationen aus § 2.8 die Abbildung*

$$\begin{aligned}
(\cdot)^n : KK_S((A, \alpha), (B, \beta)) &\longrightarrow KK^n_S((A^n, \alpha^n), (B^n, \beta^n)) \\
[(X, \xi), \varphi, F] &\longmapsto [(X^n, \xi^n), \varphi^n, F^n]
\end{aligned}$$

ein wohldefinierter Morphismus abelscher Gruppen. Hierbei bezeichnet $F^n := Ad(\eta_{\xi})(F)$ die Normalisierung von F, vgl. Lemma 2.70.

Beweis. Man muß zunächst die Zykel-Bedingungen für (X^n, F^n) nachrechnen. Diese folgen sofort aus den Zykel-Bedingungen für (X, F) und der Surjektivität von $\eta_{\alpha} : A \to A^n$ und $Ad(\eta_{\xi}) : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X^n)$. Wegen $(B[0,1], \beta[0,1])^n = (B^n[0,1], \beta^n[0,1])$ und der Verträglichkeit von Normalisierungen mit Tensorprodukten (vgl. den Beweis von Proposition 2.66) werden bei dieser Konstruktion Homotopien in Homotopien überführt. Daraus folgt die Behauptung, denn die Verträglichkeit mit direkten Summen ist klar. □

Diese Konstruktion setzt sich zu einem *Normalisierungs-Funktor* fort:

5.26 Proposition. *Mit den Notationen aus Lemma 5.25 setzt sich $(\cdot)^n$ zu einem Funktor $(\cdot)^n : KK_S \to KK^n_S$ fort, indem man auf Objekten $(A, \alpha)^n := (A^n, \alpha^n)$ setzt. Zudem ist $(\cdot)^n$ eine Retraktion für den Inklusionsfunktor $KK^n_S \subseteq KK_S$, d.h. er läßt normale Kowirkungen bis auf kanonische Isomorphie unverändert.*

Beweis. Offenbar erhält die Normalisierung Einselemente in KK_S. Man muß nur noch die Verträglichkeit mit dem Kasparov-Produkt zeigen. Dazu seien (A, α), (B, β) und (C, γ) Objekte in KK_S und $((X, \xi), \varphi, F_1)$ in $\mathbb{E}_S(A, B)$ sowie $((Y, \zeta), \psi, F_2)$ in $\mathbb{E}_S(B, C)$. Zudem sei F in $F_1 \#_S F_2$. Da die Normalisierung Tensorprodukte erhält (vgl. Proposition 2.66(2.)), muß wegen Satz 5.12 nur noch $F^n \in F_1^n \#_S F_2^n$ verifiziert werden. Die Bedingungen (a)-(c) der Definition 5.11 folgen mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis von Satz 5.22 aus den entsprechenden Bedingungen für F und der Surjektivität der Normalisierungs-Abbildungen. Wir zeigen exemplarisch (b): Es gilt $T_{\eta_\xi(x)} = Ad(\eta_\xi \otimes_B \eta_\zeta, \eta_\zeta)(T_x)$ und deshalb $\widetilde{T}_{\eta_\xi(x)} = ((\eta_\xi \otimes_B \eta_\zeta) \oplus \eta_\zeta)(\widetilde{T}_x)$. Es folgt (beachte Notation 5.18)

$$[\widetilde{T}_{\eta_\xi(x)}, \left(\begin{smallmatrix} F^n & 0 \\ 0 & F_2^n \end{smallmatrix}\right)] = ((\eta_\xi \otimes_B \eta_\zeta) \oplus \eta_\zeta)([\widetilde{T}_x, \left(\begin{smallmatrix} F & 0 \\ 0 & F_2 \end{smallmatrix}\right)]) \subseteq ((\eta_\xi \otimes_B \eta_\zeta) \oplus \eta_\zeta)(\mathcal{K}(X \widehat{\otimes}_B Y \oplus Y)),$$

und die letzte Menge ist gleich $\mathcal{K}(X^n \widehat{\otimes}_{B^n} Y^n \oplus Y^n)$ wegen der Surjektivität der Normalisierungen. Die letzte Behauptung ist mit Bemerkung 5.24 ebenfalls klar. □

Eine erste Anwendung von Lemma 5.26 ist das folgende Ergebnis:

5.27 Korollar. *Für S wie oben sei (A, α) ein Objekt in KK_S sowie (B, β) in KK_S^n eine normale S-Kowirkung. Dann ist $(\cdot)^n : KK_S(A, B) \to KK_S^n(A^n, B)$ ein Isomorphismus mit Inversem $\eta_\alpha^* : KK_S^n(A^n, B) \to KK_S(A, B)$ (vgl. Definition 2.63).*

Beweis. Die Bijektion besteht bereits auf Zykel-Niveau: Ist $((X, \xi), \varphi, F)$ ein Kasparov-Zykel in $\mathbb{E}_S(A, B)$, so ist (X_B, ξ_β) nach Lemma 2.71 bereits eine normale Kowirkung. Daher faktorisiert φ über die Normalisierung, d.h. $\varphi = \varphi^n \circ \eta_\alpha$. Das Tripel $((X, \xi), \varphi^n, F)$ ist ein Zykel in $\mathbb{E}_S(A^n, B)$. Diese Konstruktion ist offenbar eine Bijektion der (A, B)-Zykeln mit den (A^n, B)-Zykeln und liefert den angegebenen Isomorphismus auf KK_S-Niveau. □

Um Mißverständnissen vorzubeugen benutzen wir im folgenden gelegentlich auch eine genauere Bezeichnung:

5.28 Notation. Für S wie oben seien (A, α) und (B, β) Objekte in KK_S. Wir setzen

$$\begin{aligned} J_S(A, B) &:= J_S : KK_S(A, B) \longrightarrow KK_{\widehat{S}_u}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S}) \quad \text{und} \\ (\cdot)^n(A, B) &:= (\cdot)^n : KK_S(A, B) \longrightarrow KK_S^n(A^n, B^n), \end{aligned}$$

um genauer zu spezifizieren, welche KK_S-Gruppe die Quelle ist. Genauso verfahren wir mit anderen Funktoren.

§ 5.3 Der reduzierte Abstieg

In diesem Abschnitt werden wir den reduzierten Abstiegsfunktor (vgl. [**30**, 3.11 Theorem] und [**3**, 6.19 Théorème]) konstruieren, indem wir den vollen Abstieg mit der Normalisierung aus § 2.8 kombinieren.

Für den gesamten Abschnitt ei $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ eine symmetrische multiplikative Unitäre (vgl. Definition 3.6), wobei wir gemäß den generellen Voraussetzungen dieses Kapitels H als separabel annehmen. Zunächst müssen wir die S_V-äquivariante KK-Theorie mit der KK-Theorie für normale S_u-Kowirkungen $KK_{S_u}^n$ identifizieren, vgl. die Äquivalenz von normalen und reduzierten Kowirkungen in § 3.3 und Definition 5.23.

5.29 Proposition. *Ist V wie oben, und sind (A,α) sowie (B,β) normale volle S-Kowirkungen (unter Beachtung der generellen Voraussetzungen), dann ist mit den Notationen aus Bemerkung 3.25 die Abbildung*

$$KK_{S_u}((A,\alpha),(B,\beta)) \longrightarrow KK_{S_V}((A,\alpha^r),(B,\beta^r)), \quad [(X,\xi),\varphi,F] \mapsto [(X,\xi^r),\varphi,F]$$

ein wohldefinierter Isomorphismus abelscher Gruppen. Er setzt sich fort zu einer Äquivalenz $KK^n_{S_u} \stackrel{\cong}{\to} KK_{S_V}$ von additiven Kategorien.

Beweis. Mit der Koeffizienten-Algebra (B,β) ist nach Bemerkung 2.61 auch die Hilbertmodul-S-Kowirkung (X,ξ) normal. Also ist $\xi^r = (id \otimes \pi)\xi$ eine reduzierte S-Kowirkung (vgl. Korollar 3.14). Da (A,α) normal und π surjektiv ist, folgen die Zykel-Bedingungen aus Definition 5.5 für $((X,\xi^r),\varphi,F))$ aus denen für $((X,\xi),\varphi,F))$. Da man das Verfahren auch für Homotopien durchführen kann (und mit (B,β) auch $(B[0,1],\beta[0,1])$ normal ist), folgt die Wohldefiniertheit. Die Verträglichkeit mit Einselementen und dem Skalarprodukt sowie die Additivität ist mit Satz 3.30 klar, da φ und F nicht verändert werden und π surjektiv ist. Für die Umkehrabbildung muß man nur einsehen, daß für $((X,\xi),\varphi,F)$ in $\mathbb{E}_{S_V}((A,\alpha^r),(B,\beta^r))$ das Tripel $((X,\xi^f),\varphi,F)$ ein Zykel in $\mathbb{E}_{S_u}((A,\alpha),(B,\beta))$ ist, wobei wir die Notationen aus Proposition 3.26 verwenden. Lediglich Bedingung (b) in Definition 5.5 nicht trivial. Wegen der S_V-Invarianz von $\mathcal{L}(H)_*$ ist $\overline{(\varphi(A)\otimes S_u)\cdot(F\otimes 1_{S_u} - \xi^f(F))}$ gleich

$$\begin{aligned}
&\overline{(id\otimes id\otimes \mathcal{L}(H)_*)\{(\varphi(A)\otimes S_u\otimes S_V)\cdot(F\otimes 1_{S_u}\otimes 1_{S_V} - (\xi^f\otimes id_{S_V})(F\otimes 1_{S_V}))\}} \\
&\stackrel{(1)}{\equiv}_{\mathcal{K}} \overline{(id\otimes id\otimes \mathcal{L}(H)_*)\{(\varphi(A)\otimes S_u\otimes S_V)\cdot(F\otimes 1_{S_u}\otimes 1_{S_V} - (\xi^f\otimes id_{S_V})(\xi(F)))\}} \\
&\stackrel{(2)}{=} \overline{(id\otimes id\otimes \mathcal{L}(H)_*)\{(1\otimes 1_{S_u}\otimes S_V)\cdot(id\otimes {}_{fr}\Delta)[(\varphi(A)\otimes S_V)\cdot(F\otimes 1_{S_V} - \xi(F))]\}} \\
&\stackrel{(3)}{\subseteq} \overline{(id\otimes id\otimes \mathcal{L}(H)_*)\{(1\otimes 1_{S_u}\otimes S_V)\cdot(id\otimes {}_{fr}\Delta)[\mathcal{K}(X)\otimes S_V]\}} \\
&= \overline{(id\otimes id\otimes \mathcal{L}(H)_*)\{\mathcal{K}(X)\otimes((1\otimes S_V)_{fr}\Delta(S_V))\}} \stackrel{(4)}{=} \mathcal{K}(X)\otimes S_u,
\end{aligned}$$

(wobei wir mit „$\equiv_{\mathcal{K}}$“ andeuten, daß sich die beiden Mengen nur durch kompakte Operatoren unterscheiden). Die folgenden Überlegungen führen auf die noch zu beweisenden Beziehungen (1)-(4): Für $a \in A$, $s \in S_u$ und $r \in S_V$ gilt

$$((\varphi\otimes id)((1\otimes s)\alpha^f(a))\otimes r)\cdot(\xi^f\otimes id)(F\otimes 1_{S_V}) = (1\otimes s\otimes 1)\cdot(\xi^f\otimes id)((\varphi(a)\otimes r)(F\otimes 1_{S_V})).$$

Wegen $(X,F) \in \mathbb{E}_{S_V}((A,\alpha^r),(B,\beta^r))$ gilt $(\varphi(a)\otimes r)\cdot(F\otimes 1_{S_V}) \equiv_{\mathcal{K}} (\varphi(a)\otimes r)\cdot\xi(F)$ und zusammen mit der Tatsache, daß α^f eine nichtentartete S_u-Kowirkung ist, folgt (1). Betrachte weiter die Identität

$$(\xi^f\otimes id_{S_V})\xi = (\xi^f\otimes\pi)\xi^f = (id_X\otimes(id\otimes\pi)\Delta_u)\xi^f = (id_X\otimes({}_{fr}\Delta\pi))\xi^f = (id_X\otimes {}_{fr}\Delta)\xi,$$

die sich aus Korollar 3.12 und Proposition 3.26 ableitet. Dann folgt (2) zusammen mit der Gleichung $\overline{(1\otimes S_V)\cdot {}_{fr}\Delta(S_V)} = S_u\otimes S_V$, die auch direkt (4) impliziert. Für (3) setzt man schließlich erneut ein, daß $((X,\xi),\varphi,F)$ ein Zykel in $\mathbb{E}_{S_V}((A,\alpha^r),(B,\beta^r))$ ist, und daher $(\varphi(A)\otimes S_V)(F\otimes 1_{S_V} - \xi(F))$ in $\mathcal{K}(X)\otimes S_V$ liegt. Da jede (nichtentartete) S_V-äquivariante C^*-Algebra von der Form (A,α^r) ist, erhält man eine Äquivalenz von Kategorien. □

Wir definieren den reduzierten Abstieg unter Benutzung von Proposition 3.20:

5.30 Definition. Es sei V eine symmetrische multiplikative Unitäre wie oben. Der *reduzierte Abstiegs-Funktor* ist durch die Verknüpfung

$$J_{S,r} := (\cdot)^n \circ J_S : KK_S^n \longrightarrow KK_{\widehat{S}}^n \,, \quad (A,\alpha) \mapsto (A \rtimes \widehat{S}, \widehat{\alpha})^n = (A \rtimes_r \widehat{S}, \widehat{\alpha}_{rf})$$

des vollen Abstiegs mit der Normalisierung erklärt.

5.31 Bemerkung. Identifiziert man die Kategorien KK_S^n bzw. $KK_{\widehat{S}}^n$ mit den reduziert äquivarianten Kategorien KK_{S_V} bzw. $KK_{\widehat{S}_V}$ wie in Proposition 5.29, so erhält man den reduzierten Abstieg von Baaj und Skandalis [**3**, 6.19 Théorème]: Für Objekte (A,α) sowie (B,β) in KK_S^n und einen Zykel (X,F) in $\mathbb{E}_S(A,B)$ ist $J_{S,r}([X,F]) = [X \rtimes_r \widehat{S}, j_{\widehat{S}}^{\xi,r}(F)]$, wobei wir benutzen, daß $\widehat{\pi}_\xi : X \rtimes \widehat{S} \to X \rtimes_r \widehat{S}$ nach Proposition 3.20 eine Normalisierung und $Ad(\widehat{\pi}) \circ j_{\widehat{S}}^{\xi} = (1_{\mathcal{K}(X)} \otimes \pi) = j_{\widehat{S}}^{\xi,r}$ ist (vgl. Definition 3.15). Bereits auf Zykel-Niveau ist für eine lokalkompakte Gruppe G und $S_u = C^*(G)$ der reduzierte Abstieg $J_{C^*(G),r}$ modulo die Isomorphie also genau dasselbe wie die Abbildung $J_{\widehat{G}}$ in [**3**, 6.19 Théorème].

Nach Definition besteht der folgende Zusammenhang mit dem vollen Abstieg:

5.32 Bemerkung. Ist V eine symmetrische multiplikative Unitäre wie oben und sind (A,α) und (B,β) in KK_{S_u}, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} KK_{S_u}((A,\alpha),(B,\beta)) & \xrightarrow{J_S} & KK_{\widehat{S}_u}((A \rtimes \widehat{S}, \widehat{\alpha}), (B \rtimes \widehat{S}, \widehat{\beta}))) \\ {\scriptstyle (\cdot)^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\cdot)^n} \\ KK_{S_u}^n((A^n,\alpha^n),(B^n,\beta^n)) & \xrightarrow{J_{S,r}} & KK_{\widehat{S}_u}^n((A \rtimes_r \widehat{S}, \widehat{\alpha}_{rf}), (B \rtimes_r \widehat{S}, \widehat{\beta}_{rf})). \end{array}$$

Da V symmetrisch ist, haben wir natürlich auch einen vollen bzw. reduzierten Abstiegs-Funktor für $\widehat{S}$, den wir mit $J_{\widehat{S}}$ bzw. $J_{\widehat{S},r}$ bezeichnen.

§ 5.4 Dualität

In diesem Abschnitt werden wir die Resultate über Dualität in Kapitel 4 auf die äquivariante KK-Theorie anwenden. Für den gesamten Abschnitt sei H ein separabler Hilbertraum und $V \in \mathcal{U}(H \otimes H)$ stets eine symmetrische und stark bireguläre multiplikative Unitäre (vgl. Definitionen 3.6 und 4.4). Zur Abkürzung benutzen wir die folgende Notation.

5.33 Definition. Mit V wie oben sei (A,α) ein Objekt in KK_{S_u}. Unter Benutzung der Notationen aus § 4.1 und § 2.7 definieren wir

1. $\boldsymbol{m}_\alpha := [(A \otimes H, \alpha\natural(\mathfrak{v}_U, 1))] \in KK_{S_u}((A \otimes \mathcal{K}, \alpha\natural\mathfrak{v}_U), (A,\alpha))$ und
2. $\boldsymbol{\varpi}_\alpha := [\Phi_\alpha] \otimes_{A\otimes\mathcal{K}} \boldsymbol{m}_\alpha \in KK_{S_u}((\overline{A}, \overline{\alpha}), (A,\alpha))$,

wobei wir wie in Notation 4.27 die Abkürzung $(\overline{A}, \overline{\alpha}) := (A \rtimes \widehat{S} \rtimes S, \widehat{\widehat{\alpha}})$ verwenden.

5.34 Bemerkung. Da $(A \otimes H, \alpha\natural(\mathfrak{v}_U, 1))$ nach Bemerkung 5.17 eine äquivariante Morita-Äquivalenz zwischen $(A \otimes \mathcal{K}, \alpha\natural\mathfrak{v}_U)$ und (A,α) ist, muß $\boldsymbol{m}_\alpha$ ein Isomorphismus in KK_{S_u} sein. Offensichtlich wird das Element $\boldsymbol{\varpi}_\alpha$ durch den Zykel $((A \otimes H, \alpha\natural(\mathfrak{v}_U, 1)), \Phi_\alpha, 0)$ in $\mathbb{E}_{S_u}(A \otimes \mathcal{K}, A)$ repräsentiert. Ist (A,α) eine maximale S-Kowirkung (vgl. Definition 4.13), so ist $\Phi_\alpha : (\overline{A}, \overline{\alpha}) \to (A \otimes \mathcal{K}, \alpha\natural\mathfrak{v}_U)$ ein Isomorphismus von S-äquivarianten C^*-Algebren und in diesem Fall $\boldsymbol{\varpi}_\alpha$ ein KK_{S_u}-Isomorphismus.

Das entscheidende Ergebnis für die Dualität ist die folgende Proposition. Ihr Beweis ist eine Adaption des Beweises von [**3**, 6.19 Théorème] auf volle S-Kowirkungen und volle verschränkte Produkte.

5.35 Proposition. *Ist V eine multiplikative Unitäre wie oben, und sind (A,α) sowie (B,β) Objekte in KK_{S_u}, so betrachte man ein Element $\boldsymbol{x} = [(X,\xi),\varphi,F]$ in $KK_{S_u}(A,B)$. Unter Benutzung der Notation 4.27 und der Bezeichnungen in § 2.7 und § 4.1 gilt:*

1. *Das Element $J_{\widehat{S}}(J_S(\boldsymbol{x})) \otimes_{\overline{B}} \boldsymbol{\varpi}_\beta$ in $KK_{S_u}((\overline{A},\overline{\alpha}),(B,\beta))$ wird repräsentiert durch den Zykel*
$$((X\otimes H, \xi\natural(\mathfrak{v}_U,1)), (\varphi\otimes id_{\mathcal{K}})\Phi_\alpha, (id\otimes\pi)(\xi(F))) \in \mathbb{E}_{S_u}(\overline{A},B).$$
2. *Das Element $\boldsymbol{\varpi}_\alpha \otimes_A \boldsymbol{x}$ in $KK_{S_u}(\overline{A},B)$ wird repräsentiert durch den Zykel*
$$((X\otimes H, \xi\natural(\mathfrak{v}_U,1)), (\varphi\otimes id_{\mathcal{K}})\Phi_\alpha, F\otimes 1_{\mathcal{K}}) \in \mathbb{E}_{S_u}(\overline{A},B).$$
3. *Es gilt $J_{\widehat{S}}(J_S(\boldsymbol{x})) \otimes_{\overline{B}} \boldsymbol{\varpi}_\beta = \boldsymbol{\varpi}_\alpha \otimes_A \boldsymbol{x}$. Folglich bilden die KK_{S_u}-Morphismen $\boldsymbol{\varpi}_\alpha$ eine natürliche Transformation von Funktoren $\boldsymbol{\varpi}_\bullet : J_{\widehat{S}}\circ J_S \to \mathcal{I}d_{KK_{S_u}}$.*

Beweis. Man beachte, daß nach Definition $J_{\widehat{S}}(J_S(\boldsymbol{x})) \otimes_{\overline{B}} \boldsymbol{\varpi}_\beta$ durch den Zykel
$$((\overline{X}\widehat{\otimes}_{\Phi_\beta}(B\otimes H), \overline{\xi}\sharp_{\overline{B}}(\beta\natural\mathfrak{v}_U)), \overline{\varphi}\otimes_{\Phi_\beta} 1_{B\otimes\mathcal{K}}, \hat{\jmath}_{\widehat{\xi}}(j_\xi(F))\otimes_{\Phi_\beta} 1_{B\otimes\mathcal{K}})$$
repräsentiert wird, wobei wir $\varphi \rtimes \widehat{S} \rtimes S$ mit $\overline{\varphi}$ abkürzen. Wir betrachten die offensichtlich unitäre Abbildung $\overline{X}\widehat{\otimes}_{\Phi_\beta}(B\otimes H) \xrightarrow{\cong} X\otimes H$, die durch $x\otimes(b\otimes h)\mapsto \Phi_\xi(x)\cdot(b\otimes h)$ erklärt ist, wobei $x\in\overline{X}$, $b\in B$ und $h\in H$ sind. Mittels dieser äquivarianten Unitären geht die Wirkung $\overline{\varphi}\otimes_{\Phi_\beta} 1$ in $(\varphi\otimes id_{\mathcal{K}})\Phi_\alpha$ und der Operator $\hat{\jmath}_{\widehat{\xi}}(j_\xi(F))\otimes_{\Phi_\beta} 1$ in $(id\otimes\pi)(\xi(F))$ über. Also folgt der erste Teil.

Das Element $\boldsymbol{\varpi}_\alpha \otimes_A \boldsymbol{x}$ im zweiten Teil wird von einem Zykel repräsentiert, dessen Hilbertmodul gleich $((A\otimes H)\widehat{\otimes}_\varphi X, (\alpha\natural(\mathfrak{v}_U,1))\sharp_A\xi)$ ist und auf dem $\overline{A}$ mittels $\Phi_\alpha\otimes_\varphi 1$ wirkt (vgl. Bemerkung 5.34). Man betrachte die äquivariante Unitäre $(A\otimes H)\widehat{\otimes}_\varphi X \xrightarrow{\cong} X\otimes H$, die durch $(a\otimes h)\otimes x\mapsto\varphi(a)x\otimes h$, für $a\in A$, $h\in H$ und $x\in X$ definiert ist. Unter dieser Unitären geht die Wirkung $\Phi_\alpha\otimes_\varphi 1$ in $(\varphi\otimes id_{\mathcal{K}})\Phi_\alpha$ über. Die Operatoren der Form $T_{a\otimes h}\in\mathcal{L}_B(X,(A\otimes H)\widehat{\otimes}_\varphi X)$, vgl. Bemerkung 5.10, verknüpft mit der Unitären ergeben Operatoren $T'_{a\otimes h}\in\mathcal{L}_B(X,X\otimes H)$, wobei $T'_{a\otimes h}(x)=\varphi(a)x\otimes h$ ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $F\otimes 1_{\mathcal{K}}$ unter Benutzung der Unitären ein Element in $0\#_{S_u}F$ ist. Die Bedingung (c) in Definition 5.11 ist trivial, und (b) ist gleichwertig dazu, daß für alle $a\in A$ und $h\in H$ die Operatoren der Form
$$\begin{aligned} (F\otimes 1)\circ T'_{a\otimes h} - (-1)^{|a|}T'_{a\otimes h}\circ F \quad &\text{in}\quad \mathcal{K}(X,X\otimes H) \quad \text{und}\\ (T'_{a\otimes h})^*\circ(F\otimes 1) - (-1)^{|a|}F\circ(T'_{a\otimes h})^* \quad &\text{in}\quad \mathcal{K}(X\otimes H,X)\end{aligned}$$
liegen, wobei $|a|$ den Grad von a bezeichnet (o.E. kann a natürlich als homogen angenommen werden). Der erste Term liefert den Operator $x\mapsto[\varphi(a),F](x)\otimes h$, wobei $x\in X$, und ist nach Voraussetzung in $\mathcal{K}(X)\otimes H\subseteq\mathcal{K}(X,X\otimes H)$. Genauso verifiziert man, daß der zweite Term den Operator $x\otimes h'\mapsto[\varphi(a^*),F](x)\cdot\langle h,h'\rangle$ ergibt, wobei $x\in X$ und

$h' \in H$. Dieser liegt aber nach Voraussetzung in $\mathcal{K}(X) \otimes H^* \subseteq \mathcal{K}(X \otimes H, X)$. Also ist (b) erfüllt. Wir zeigen nun Bedingung (a) und den dritten Teil gleichzeitig: Es ist

$$(\varphi \otimes \pi)\Phi_\alpha(\overline{A}) \cdot (F \otimes 1_{\mathcal{K}} - (id \otimes \pi)(\xi(F))) = (1 \otimes \mathcal{K}) \cdot (id \otimes \pi)((\varphi(A) \otimes S_u) \cdot (F \otimes 1_{S_u} - \xi(F))).$$

Die letzte Menge ist wegen Definition 5.5(b) in $\mathcal{K}(X \otimes H)$ enthalten. Daher ist $F \otimes 1_{\mathcal{K}}$ eine kompakte Störung von $(id \otimes \pi)(\xi(F))$. Das Tripel in (1.) ist ein Zykel in $\mathbb{E}_{S_u}(\overline{A}, B)$, also auch das Tripel in (2.) und beide definieren dasselbe Element in $KK_{S_u}(\overline{A}, B)$, da sie insbesondere operatorhomotop sind (vgl. [**3**, 5.1 Remarques(2)]). Also folgen gleichzeitig Bedingung (a) und Teil (3) der Behauptung. □

5.36 Korollar. *Mit V wie oben seien (A, α) und (B, β) Objekte in KK_{S_u}. Sind sie als volle S-Kowirkungen gleichzeitig maximal (vgl. Definition 4.13), dann ist der volle Abstieg $J_S : KK_{S_u}(A, B) \to KK_{\widehat{S}_u}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Bemerkung 5.34 sind $\boldsymbol{\varpi}_\alpha$ und $\boldsymbol{\varpi}_\beta$ Isomorphismen in KK_{S_u}. Folglich ist wegen der Proposition 5.35(3.) die Abbildung $J_{\widehat{S}} \circ J_S : KK_{S_u}(A, B) \to KK_{S_u}(\overline{A}, \overline{B})$ bijektiv. Also ist $J_{\widehat{S}}(A, B)$ injektiv und $J_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, A \rtimes \widehat{S})$ surjektiv, wobei wir die Notation 5.28 verwenden. Da nach Satz 4.16 die dualen $\widehat{S}_u$-Kowirkungen $(A \rtimes \widehat{S}, \widehat{\alpha})$ und $(B \rtimes \widehat{S}, \widehat{\beta})$ maximal sind, ist analog wie eben $J_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$ ebenfalls injektiv, also ein Isomorphismus. Folglich ist $J_S(A, B)$ ein Isomorphismus. □

Eine weitere Folgerung der Proposition 5.35 ist [**3**, 6.19 Théorème]: Der reduzierte Abstieg ist eine Äquivalenz von Kategorien. Wir formulieren dieses Ergebnis (Korollar 5.38) mit der äquivalenten Kategorie $KK^n_{S_u}$, vgl. Proposition 5.29. Vorher benötigen wir die folgende Beoachtung:

5.37 Bemerkung. Mit den Voraussetzungen aus Proposition 5.35 sei zudem $\varphi : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ ein äquivarianter *-Morphismus. Die Normalisierung von $[\varphi]$ in $KK_{S_u}(A, B)$ ist dann durch $[\varphi]^n = [\varphi^n]$ gegeben. Ebenso ist $\boldsymbol{m}_\alpha{}^n = \boldsymbol{m}_{\alpha^n}$ in $KK_{S_u}(A^n \otimes \mathcal{K}, A^n)$. Daher gilt $\boldsymbol{\varpi}_\alpha{}^n = ([\Phi_\alpha] \otimes_{A \otimes \mathcal{K}} \boldsymbol{m}_\alpha)^n = [\Phi_\alpha{}^n] \otimes_{A^n \otimes \mathcal{K}} \boldsymbol{m}_{\alpha^n} = [\Phi_{\alpha, fr}] \otimes_{A^n \otimes \mathcal{K}} \boldsymbol{m}_{\alpha^n}$, wobei wir benutzen, daß der Isomorphismus $\Phi_{\alpha, fr} : A \rtimes \widehat{S} \rtimes_r S \to A^n \otimes \mathcal{K}$ aus Proposition 4.10 gleich $\Phi_\alpha{}^n$ ist. Also ist $\boldsymbol{\varpi}_\alpha{}^n$ ein KK_{S_u}-Isomorphimus für alle KK_{S_u}-Objekte (A, α).

5.38 Korollar. *Für V wie oben seien (A, α) sowie (B, β) Objekte in $KK^n_{S_u}$, d.h. insbesondere normale S_u-Kowirkungen. Dann sind die Abbildungen*

$$J_{S,r}(A, B) : KK^n_{S_u}(A, B) \longrightarrow KK^n_{\widehat{S}_u}(A \rtimes_r \widehat{S}, B \rtimes_r \widehat{S}) \quad \textit{und}$$
$$J_S(A, B) : KK^n_{S_u}(A, B) \longrightarrow KK_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$$

Isomorphismen abelscher Gruppen (wir benutzen die Notation 5.28).

Beweis. Wir verwenden im Beweis des öfteren die Notation 4.27. Man betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
KK^n_{S_u}(A, B) & \xrightarrow{J_S} & KK_{\widehat{S}_u}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S}) & \xrightarrow{J_{\widehat{S}}} & KK_{S_u}(\overline{A}, \overline{B}) \\
\Big\| & & {\scriptstyle (\cdot)^n}\Big\downarrow & & {\scriptstyle (\cdot)^n}\Big\downarrow \\
KK^n_{S_u}(A, B) & \xrightarrow{J_{S,r}} & KK^n_{\widehat{S}_u}(A \rtimes_r \widehat{S}, B \rtimes_r \widehat{S}) & \xrightarrow{J_{\widehat{S},r}} & KK^n_{S_u}(A \rtimes \widehat{S} \rtimes_r S, B \rtimes \widehat{S} \rtimes_r S),
\end{array}$$

wobei wir die Isomorphismen $A \rtimes_r \widehat{S} \rtimes_r S \cong A \rtimes \widehat{S} \rtimes_r S$ und $A \rtimes_r \widehat{S} \rtimes S \cong \overline{A}$ (analog für B) vernachlässigen. Es gilt für $\boldsymbol{x} \in KK^n_{S_u}(A, B)$ nach Proposition 5.35 die Beziehung

$$J_{\widehat{S},r}(J_{S,r}(\boldsymbol{x})) \otimes_{\overline{B}^n} \boldsymbol{\varpi_\beta}^n = (J_{\widehat{S}}(J_S(\boldsymbol{x})) \otimes_{\overline{B}} \boldsymbol{\varpi_\beta})^n = \boldsymbol{\varpi_\alpha}^n \otimes_{A^n} \boldsymbol{x},$$

weil $\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{x}$ ist. Da $\boldsymbol{\varpi_\alpha}^n$ und $\boldsymbol{\varpi_\beta}^n$ Isomorphismen in KK_{S_u} sind, kann man mit derselben Technik wie im Beweis von Korollar 5.36 schließen, daß $J_{S,r}(A, B)$ ein Isomorphismus ist, dessen Inverser im wesentlichen $J_{\widehat{S},r}(A \rtimes_r \widehat{S}, B \rtimes_r \widehat{S})$ ist. Für die zweite Abbildung $J_S(A, B)$ beachte, daß $J_{S,r}(A, B) = [(\cdot)^n(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})] \circ J_S(A, B)$ ist, folglich ist nach dem eben Gezeigten $J_S(A, B)$ injektiv und $(\cdot)^n(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$ surjektiv. Nach Korollar 5.36 ist

$$J_{\widehat{S}}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S}) = J_{\widehat{S}}(A \rtimes_r \widehat{S}, B \rtimes_r \widehat{S}) \circ [(\cdot)^n(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})]$$

ein Isomorphismus. Deshalb ist $(\cdot)^n(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$ zusätzlich injektiv, also bijektiv. Insgesamt ist $J_S(A, B)$ ein Isomorphismus. □

Aus den speziellen Situationen in den Korollaren 5.36 und 5.38 kann man das folgende allgemeinere Ergebnis ableiten:

5.39 Satz. *Mit V wie oben seien (A, α) sowie (B, β) Objekte in KK_{S_u}, für die (A, α) maximal oder (B, β) normal ist. Der volle Abstieg*

$$J_S(A, B) : KK_{S_u}(A, B) \longrightarrow KK_{\widehat{S}_u}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$$

ist dann ein Isomorphismus.

Beweis. Ist (B, β) normal, so folgt die Behauptung aus den Korollaren 5.27 und 5.38. Ist alternativ (A, α) eine maximale S-Kowirkung, so ist $\boldsymbol{\varpi}_\alpha$ ein KK_{S_u}-Isomorphismus ist (vgl. Bemerkung 5.38. Aus Proposition 5.35(3.) folgt die Injektivität von $J_S(A, B)$. Andererseits kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
KK_{S_u}(A, \overline{B}) & \xrightarrow[\cong]{J_S} & KK_{\widehat{S}_u}(A \rtimes \widehat{S}, \overline{B} \rtimes \widehat{S}) \\
{\scriptstyle \otimes_{\overline{B}} \boldsymbol{\varpi}_\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \otimes_{\overline{B} \rtimes \widehat{S}} J_S(\boldsymbol{\varpi}_\beta)} \\
KK_{S_u}(A, B) & \xrightarrow[J_S]{} & KK_{\widehat{S}_u}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S}),
\end{array}$$

wobei $J_S(A, \overline{B})$ nach Korollar 5.36 ein Isomorphismus ist. Zudem ist das Element

$$J_S(\boldsymbol{\varpi}_\beta) = [\Phi_\beta \rtimes \widehat{S}] \otimes_{(B \otimes \mathcal{K}) \rtimes \widehat{S}} J_S(\boldsymbol{m}_\beta)$$

$KK_{\widehat{S}_u}$-invertierbar, da $\Phi_\beta \rtimes \widehat{S}$ nach Proposition 4.14 ein Isomorphismus von C^*-Algebren ist. Aus dem Diagramm folgt daher die noch fehlende Surjektivität von $J_S(A, B)$ und insgesamt die Behauptung. □

5.40 Korollar. *Mit V wie oben sowie den Notationen aus dem Satz 5.39 sei (A, α) maximal und (B, β) normal sowie $\boldsymbol{x} \in KK_{S_u}(A, B)$. Ist $J_S(\boldsymbol{x})$ in $KK_{\widehat{S}_u}(A \rtimes \widehat{S}, B \rtimes \widehat{S})$ invertierbar und das $KK_{\widehat{S}}$-Inverse $J_S(\boldsymbol{x})^{-1}$ im Bild von J_S enthalten, so ist $\boldsymbol{x}$ ein KK_{S_u}-Isomorphimsus und $J_S(B, A)$ bijektiv.*

Beweis. Wir setzen $\widetilde{\boldsymbol{y}} := J_S(\boldsymbol{x})^{-1}$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\boldsymbol{y}$ in $KK_{S_u}(B, A)$ mit $J_S(\boldsymbol{y}) = \widetilde{\boldsymbol{y}}$. Es folgt $J_S(\boldsymbol{y} \otimes_A \boldsymbol{x}) = \widetilde{\boldsymbol{y}} \otimes_{A \rtimes \widehat{S}} x = \mathbf{1}_{B \rtimes \widehat{S}} = J_S(\mathbf{1}_B)$, und analog gilt die Gleichung $J_S(\boldsymbol{x} \otimes_B \boldsymbol{y}) = J_S(\mathbf{1}_A)$. Da nach dem Satz (bzw. den vorangehenden Korollaren) $J_S(A, A)$ und $J_S(B, B)$ bijektiv sind, folgt $\boldsymbol{y} \otimes_A \boldsymbol{x} = \mathbf{1}_B$ und $\boldsymbol{y} \otimes_B \boldsymbol{x} = \mathbf{1}_A$. Insbesondere sind A und B in KK_{S_u} isomorph und daher $J_S(B, A)$ bijektiv. □

§ 5.5 Voller Abstieg und K-Mittelbarkeit

In diesem Abschnitt gehen wir auf die Beziehung zwischen vollem Abstieg und K-Mittelbarkeit ein. Dieser Begriff wurde für diskrete Gruppen von Cuntz [**12**] definiert und von Julg und Valette in [**22**, **23**] auf lokalkompakte Gruppen ausgedehnt, vgl. unten. Für eine kurze Übersicht über K-Mittelbarkeit bei Gruppen verweisen wir auf [**6**, Abschnitt 20.9]. Die Definition in [**22**, **23**] kann man ohne Probleme auf Quantengruppen übertragen (vgl. [**66**, II.5.4]). Wir werden uns auf den Fall einer lokalkompakten Gruppe G beschränken, da die meisten Aussagen dieses Abschnitts sich (zumindest auf diese Art) im allgemeinen nicht beweisen lassen. An den problematischen Stellen werden wir die Schwierigkeiten mit allgemeinen Quantengruppen genauer besprechen. Damit die generellen Voraussetzungen dieses Kapitels erfüllt sind (vgl. Bemerkung 5.1) nehmen wir für den gesamten Abschnitt zusätzlich an, daß die vorkommenden lokalkompakten Gruppen das zweite Abzählbarkeits-Axiom erfüllen.

5.41 Bemerkung. Für eine geeignete Wahl der multiplikativen Unitären V kann bei einer lokalkompakten Gruppe G die folgende Situation erreicht werden: Die reduzierte duale Quantengruppe $(\widehat{S}, \widehat{\Delta})$ ist gleich $(\mathcal{C}_0(G), \Delta_{\widehat{G}})$, welche mittelbar ist, vgl. 1.3.8. Die volle bzw. reduzierte Quantengruppe (S_u, Δ_u) bzw. (S_V, Δ) ist gleich der vollen bzw. reduzierten Gruppen-C^*-Algebra $(C^*(G), \Delta_G)$ bzw. $(C^*_r(G), \Delta_{G,r})$ (vgl. 1.2.6). Die kanonische Projektion π ist dabei mit der linksregulären Darstellung $\lambda : C^*(G) \to C^*_r(G)$ identisch. Wir verwenden daher für eine C^*-Algebra mit G-Wirkung (A, α) auch die üblichere Notation $\lambda_\alpha : A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_{\alpha,r} G$ anstelle von π_α (vgl. Definition 3.15 und Bemerkung 3.24).

Wir gleichen uns des weiteren den Notationen in [**3**] an und benutzen KK_G statt $KK_{\mathcal{C}_0(G)}$ für Kasparovs G-äquivariante KK-Theorie (vgl. Beispiel 5.9) sowie $KK_{\widehat{G}}$ statt $KK_{C^*(G)}$. Dementsprechend wird $J_{G,(r)}$ bzw. $J_{\widehat{G},(r)}$ als Symbol für den vollen (reduzierten) Abstieg $J_{\mathcal{C}_0(G),(r)} : KK_G \to KK_{\widehat{G}}$ bzw. $J_{C^*(G),(r)} : KK_{\widehat{G}} \to KK_G$ verwendet. Eine (nichtentartete) volle bzw. reduzierte $C^*(G)$-Kowirkung (D, δ) bezeichnen wir als *(nichtentartete) volle* bzw. *reduzierte G-Kowirkung*. Wegen der Mittelbarkeit von $\mathcal{C}_0(G)$ stimmt das volle verschränkte Produkt von (D, δ) mit dem reduzierten überein (vgl. Proposition 4.21) und wird entsprechend mit $D \rtimes_\delta \widehat{G}$ bezeichnet.

Zunächst erinnern wir an den Begriff der K-Mittelbarkeit für diskrete Gruppen [**12**], um ein Beispiel zu erhalten, bei dem der volle Abstieg kein Isomorphismus ist.

5.42 Bemerkung. Ist G eine abzählbare diskrete Gruppe, so sind nach [**12**, 2.1 Theorem] die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Das Element $[\lambda]$ in $KK(C^*(G), C^*_r(G))$ ist KK-invertierbar.

(b) Für jede separable C^*-Algebra mit G-Wirkung (A, α) ist $[\lambda_\alpha]$ invertierbar als Element von $KK(A \rtimes_\alpha G, A \rtimes_{\alpha,r} G)$.

(c) Das Einselement $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ wird durch einen Zykel (E, u, F) repräsentiert (vgl. Bemerkung 5.15(2.)) für den der zugehörige *-Homomorphismus $\mu_u : C^*(G) \to M(\mathcal{K}(E))$ über λ faktorisiert, d.h. für den ein $\mu_{u,r} : C^*_r(G) \to M(\mathcal{K}(E))$ mit $\mu_u = \mu_{u,r} \circ \lambda$ existiert.

Die Gruppe G heißt *K-mittelbar*, falls sie eine der äquivalenten Bedingungen (a)-(c) erfüllt.

5.43 Beispiel. Es gibt Beispiele für Gruppen, die nicht K-mittelbar sind: Ist etwa G eine abzählbare nichtkompakte diskrete Gruppe mit Kazhdans Eigenschaft (T), wie z.B. $G = Sl_3(\mathbb{Z})$, dann besitzt $C^*(G)$ einen direkten Summanden $\mathbb{C}$, der unter λ annuliert wird (vgl. [**6**, Abschnitt 20.9]). Folglich hat $\lambda_* : K(C^*(G)) \to K(C_r^*(G))$ einen nichttrivialen Kern und G ist nach der Charakterisierung in Bemerkung 5.42 nicht K-mittelbar.

Das folgende Beispiel illustriert bei diskreten Gruppen den Zusammenhang zwischen der Bijektivität des vollen Abstiegs und der K-Mittelbarkeit:

5.44 Beispiel. Sei G eine abzählbare diskrete Gruppe. Dann ist nach Korollar 5.40 der volle Abstieg

$$J_{\widehat{G}} : KK_{\widehat{G}}(C^*(G), C_r^*(G)) \to KK_G(C^*(G) \rtimes \widehat{G}, C_r^*(G) \rtimes \widehat{G})$$

(beachte Bemerkung 5.41) genau dann ein Isomorphismus, wenn es ein Element $\boldsymbol{y}$ in $KK_{\widehat{G}}(C^*(G), C_r^*(G))$ mit $J_{\widehat{G}}(\boldsymbol{y}) = [(\lambda \rtimes \widehat{G})^{-1}]$ gibt. $\boldsymbol{y}$ ist dann automatisch ein $KK_{\widehat{G}}$-Inverses für $[\lambda]$. Insbesondere kann die Abbildung $J_{\widehat{G}}(C^*(G), C_r^*(G))$ (vgl. Notation 5.28) nicht surjektiv sein, falls G nicht K-mittelbar ist. Umgekehrt werden wir sehen, daß aus der K-Mittelbarkeit von G die Existenz des Elements $\boldsymbol{y}$ folgt, vgl. Lemma 5.49. Eine diskrete Gruppe G wie oben ist also genau dann K-mittelbar, wenn $J_{\widehat{G}}$ ein Isomorphismus ist, vgl. auch Satz 5.46.

Für eine lokalkompakte Gruppe G gilt (unter den Voraussetzungen der Bemerkung 5.41) stets die Implikation (c)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(a) der Bedingungen in Bemerkung 5.42, vgl. [**23**, S. 291]. Daher benutzen Julg und Valette in [**22**, **23**] im allgemeinen die stärkste Eigenschaft als Definition.

5.45 Definition. Eine lokalkompakte Gruppe G wie in Bemerkung 5.41 heißt *K-mittelbar*, falls sie die Bedingung (c) in Bemerkung 5.42 erfüllt.

Das Beispiel 5.44 zeigt einen Zusammenhang zwischen K-Mittelbarkeit und der Bijektivität von $J_{\widehat{G}}$ auf. Insbesondere ist demnach das folgende Hauptergebnis dieses Abschnitts eine nichttriviale Aussage:

5.46 Satz. *Für eine K-mittelbare lokalkompakte Gruppe G sind die vollen Abstiegs-Funktoren $J_{\widehat{G}} : KK_{\widehat{G}} \to KK_G$ und $J_G : KK_G \to KK_{\widehat{G}}$ zueinander inverse Äquivalenzen additiver Kategorien.*

Zunächst brauchen wir das folgende Ergebnis, was ganz allgemein für lokalkompakte Gruppen gilt:

5.47 Lemma. *Mit den Einschränkungen und den Notationen der Bemerkung 5.41 sei G eine lokalkompakte Gruppe, (A, α) eine separable C^*-Algebra mit G-Wirkung und (D, δ) eine separable C^*-Algebra mit voller G-Kowirkung. Dann sind die Abbildungen*

1. $$\begin{aligned} KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) &\longrightarrow KK_{\widehat{G}}(A \rtimes G, A \rtimes G) \\ [E, u, F] &\longmapsto [(A \rtimes G \otimes E, \widehat{\alpha} \otimes_* id), (id \otimes \mu_u)\widehat{\alpha}, 1_{A \rtimes G} \otimes F] \quad \textit{bzw.} \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) &\longrightarrow KK_{\widehat{G}}((D \otimes \mathcal{K}, \delta \natural \mathfrak{v}_U), (D \otimes \mathcal{K}, \delta \natural \mathfrak{v}_U)) \\ [E, u, F] &\longmapsto [(D \otimes \mathcal{K} \otimes E, \delta \natural \mathfrak{v}_U \otimes_* id), (id \otimes \mu_u)\delta \natural \mathfrak{v}_U, 1_{D \otimes \mathcal{K}} \otimes F] \end{aligned}$$

wohldefinierte Morphismen abelscher Gruppen und bilden das Einselement $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ auf $\mathbf{1}_{A \rtimes G}$ bzw. $\mathbf{1}_{D \otimes \mathcal{K}}$ ab.

5.48 Bemerkung. In dem Lemma 5.47 verwenden wir die kanonische G-Kowirkung $\delta\natural\mathfrak{v}_U$ aus Definition 4.8(1.). Wir benutzen außerdem die Notation in Bemerkung 5.15(2.) für Zykel in $\mathbb{E}_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ und bezeichnen mit μ_u die zu u gehörige *-Darstellung von $C^*(G)$ auf E. In der Definition der Abbildungen oben erkennt man bereits ein Problem bei allgemeinen Quantengruppen: Die Wirkungen $(id\otimes\mu_u)\widehat{\alpha}$ bzw. $(id\otimes\mu_u)\delta\natural\mathfrak{v}_U$ von $C^*(G)$ auf den entsprechenden Hilbertmoduln sind nur deshalb äquivariant, weil die Quantengruppe $C^*(G)$ kokommutativ ist (d.h. $\Delta^{op} = \Delta$). Ist für Paar von Quantengruppen $(\widehat{S}_V, S_V)$ die C^*-Algebra S_V kokommutativ, so muß $\widehat{S}_V$ kommutativ sein, und somit ist $\widehat{S}_V$ die Funktionenalgebra einer lokalkompakten Gruppe, vgl. Beispiel 1.3.7. Man kann folglich gleich von einer Gruppe ausgehen.

Beweis von Lemma 5.47. Für den ersten Teil benutzen wir das äußere Produkt von Kasparov (vgl. [**30**, 2.5 Definition])

$$\begin{aligned}\sigma_A : KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) &\longrightarrow KK_G(A,A)\\ [E,u,F] &\longmapsto [(A\otimes E, \alpha\natural(u,1)), id_A\otimes 1, 1_A\otimes F]\end{aligned}$$

und verknüpfen es mit dem vollen Abstieg J_G. Das Element $J_G(\sigma_A([E,u,F]))$ wird durch den Zykel

$$(((A\otimes E)\rtimes_{\alpha\natural(u,1)} G, \widehat{\alpha\natural(u,1)}), (id_A\otimes 1)\rtimes G, Ad(j_{\alpha\natural(u,1)})(1_A\otimes F))$$

repräsentiert. Unter dem Isomorphismus

$${}_{\omega(u)}\Omega(u,1)_{id} : ((A\otimes E)\rtimes_{\alpha\natural\mathfrak{v}_U} G, \widehat{\alpha\natural\mathfrak{v}_U}) \xrightarrow{\cong} (A\rtimes G\otimes E, \widehat{\alpha}\otimes_* id)$$

aus Lemma 2.58 geht der Operator $Ad(j_{\alpha\natural(u,1)})(1_A\otimes F)$ offenbar in $1_{A\rtimes G}\otimes F$ über. Die Links-Wirkung übersetzt sich in

$$\omega(u)\circ((id_A\otimes 1)\rtimes G) = (j_\alpha\otimes 1_{\mathcal{K}(E)})\times((j^\alpha_{C^*(G)}\otimes\mu_u)\Delta_G^{op}) \overset{(*)}{=} (id_{A\rtimes G}\otimes\mu_u)\circ\widehat{\alpha},$$

wobei $(*)$ wegen der Kokommutativität $\Delta_G = \Delta_G^{op}$ von $(C^*(G),\Delta_G)$ folgt. Also ist die erste Abbildung wohldefiniert und erhält offensichtlich die Addition.

Wir beweisen nun, daß die zweite Abbildung wohldefiniert ist: Ist (E,u,F) ein Zykel in $\mathbb{E}_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, so ist das Tripel $((\overline{D}\otimes E, \overline{\delta}\otimes_* id), (id_{\overline{D}}\otimes\mu_u)\overline{\delta}, 1_{\overline{D}}\otimes F)$ nach dem Beweis des ersten Teils ein Zykel in $\mathbb{E}_{\widehat{G}}(\overline{D},\overline{D})$, wobei $(\overline{D},\overline{\delta})$ abkürzend für das doppelt verschränkte Produkt $(D\rtimes\widehat{G}\rtimes G, \widehat{\widehat{\delta}})$ steht. Auf dieses Tripel wenden wir die kanonische Surjektion $\Phi_\delta : (\overline{D},\overline{\delta}) \to (D\otimes\mathcal{K}, \delta\natural\mathfrak{v}_U)$ aus § 4.1 an. Wir erhalten, daß auch das Tripel

$$((D\otimes\mathcal{K}\otimes E, \delta\natural\mathfrak{v}_U\otimes_* id), (id\otimes\mu_u)\delta\natural\mathfrak{v}_U, 1_{D\otimes\mathcal{K}}\otimes F)$$

die Zykel-Eigenschaften besitzt und daher ein Element in $KK_{\widehat{G}}(D\otimes\mathcal{K}, D\otimes\mathcal{K})$ definiert. Seien nun (E_0,u_0,F_0) und (E_1,u_1,F_1) in $\mathbb{E}_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ homotop und (E,u,F) in $\mathbb{E}_G(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ eine Homotopie zwischen ihnen. Man kann die Konstruktion der ersten Abbildung für $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ wiederholen und mit einem analogen Trick wie oben einsehen, daß

$$((D\otimes\mathcal{K}\otimes E, \delta\natural\mathfrak{v}_U\otimes_* id), (id_{D\otimes\mathcal{K}}\otimes\mu_u)\delta\natural\mathfrak{v}_U, 1_{D\otimes\mathcal{K}}\otimes F) \in \mathbb{E}_{\widehat{G}}(D\otimes\mathcal{K}, (D\otimes\mathcal{K})[0,1])$$

ein Zykel ist (der rechte Eintrag $\mathbb{C}[0,1]$ bereitet keine Probleme). Er ist eine Homotopie zwischen $(D\otimes\mathcal{K}\otimes E_0, (id\otimes\mu_{u_0})\delta\natural\mathfrak{v}_U, 1\otimes F_0)$ und $(D\otimes\mathcal{K}\otimes E_1, (id\otimes\mu_{u_1})\delta\natural\mathfrak{v}_U, 1\otimes F_1)$:

Durch Tensorieren mit den Auswertungsabbildungen ev_t, für $t = 0$ sowie $t = 1$, erhält man Zykel, die offenbar äquivalent zu

$$((D \otimes \mathcal{K} \otimes (E \otimes_{ev_t} \mathbb{C}), \delta\natural\mathfrak{v}_U \otimes_* id), (id_{D\otimes\mathcal{K}} \otimes (\mu_u \otimes_{ev_t} 1))\delta\natural\mathfrak{v}_U, 1_{D\otimes\mathcal{K}} \otimes (F \otimes_{ev_t} 1))$$

sind. Bezeichnen des weiteren $f_t : E \otimes_{ev_t} \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} E_t$, für $t = 0$ und $t = 1$, die unitären Äquivalenzen in der Definition der Homotopie, so sind $(id_{D\otimes\mathcal{K}} \otimes f_t)$ unitäre Äquivalenzen zwischen $(D \otimes \mathcal{K} \otimes (E \otimes_{ev_t} \mathbb{C}), 1 \otimes (F \otimes_{ev_t} 1))$ und $(D \otimes \mathcal{K} \otimes E_t, 1 \otimes F_t)$. Also ist die zweite Abbildung wohldefiniert und offenbar mit der Addition verträglich. Für die Behauptung über die Einselemente realisieren wir $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ durch den Zykel $(\mathbb{C}, 1, 0)$. Die zum Einselement $1 \in \mathcal{UM}(\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}_0(G))$ gehörige Darstellung ist die Koeins $\mu_1 = \varepsilon_G : C^*(G) \to \mathbb{C}$, d.h. die triviale G-Darstellung. Folglich wird das Bild von $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ im ersten Fall durch den Zykel $(A \rtimes G, (id \otimes \varepsilon_G)\widehat{\alpha}, 0)$ repräsentiert. Wegen $(id_{A\rtimes G} \otimes \varepsilon_G)\widehat{\alpha} = id_{A\rtimes G}$ ist dieser gleich $(A \rtimes G, id, 0)$ und repräsentiert daher $\mathbf{1}_{A\rtimes G}$. Dieselbe Argumentation gilt auch für die zweite Abbildung. □

Der wichtigste Schritt für den Beweis von Satz 5.46 ist eine Verschärfung der Implikation (c)⇒(b), vgl. Bemerkung 5.42, für lokalkompakte Gruppen:

5.49 Lemma. *Es sei G eine lokalkompakte Gruppe, die K-mittelbar ist. Für jede separable C^*-Algebra mit G-Wirkung (A, α) ist $[\lambda_\alpha]$ in $KK_{\widehat{G}}(A \rtimes_\alpha G, A \rtimes_{\alpha,r} G)$ dann sogar äquivariant invertierbar, d.h. es gibt ein $KK_{\widehat{G}}$-Inverses $\boldsymbol{y}_\alpha$ von $[\lambda_\alpha]$.*

Beweis. Der erste Teil des Beweises orientiert sich am Beweis von [**66**, Théorème 5.14]: Ist (E, u, F) in $\mathbb{E}_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ein Repräsentant von $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ wie in (c) aus Bemerkung 5.42, so gilt $\mu_u = \mu_{u,r} \circ \lambda$. Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.19 ergibt sich

$$(id_{A\rtimes G} \otimes \mu_u)\widehat{\alpha} = (id_{A\rtimes G} \otimes \mu_{u,r}) \circ (id \otimes \lambda)\widehat{\alpha} = (id_{A\rtimes G} \otimes \mu_{u,r})\widehat{\alpha}_{rfr} \circ \lambda_\alpha,$$

denn (A, α) ist wegen der Mittelbarkeit von $\mathcal{C}_0(G)$ normal. Die erste Abbildung in Lemma 5.47 liefert

$$\mathbf{1}_{A\rtimes G} = [(A \rtimes G \otimes E, \widehat{\alpha} \otimes_* id), (id \otimes \mu_{u,r})\widehat{\alpha}_{rfr} \circ \lambda_\alpha, 1 \otimes F].$$

Das Tripel $(A \rtimes G \otimes E, \widehat{\alpha} \otimes_* id), (id \otimes \mu_{u,r})\widehat{\alpha}_{rfr}, 1 \otimes F)$ besitzt wegen der Surjektivität von λ_α offenbar die Zykel-Eigenschaften und definiert ein Element $\boldsymbol{y}_\alpha$ in $KK_{\widehat{G}}(A \rtimes_r G, A \rtimes G)$, so daß $\mathbf{1}_{A\rtimes G} = \lambda_\alpha^*(\boldsymbol{y}_\alpha) = [\lambda_\alpha] \otimes_{A\rtimes_r G} \boldsymbol{y}_\alpha$ gilt. Wir nutzen nun im Unterschied zum Beweis von [**66**, Théorème 5.14] aus, daß $\boldsymbol{y}_\alpha$ ein äquivariantes KK-Element ist. Insbesondere ist $\boldsymbol{y}_\alpha$ ein $KK_{\widehat{G}}$-Rechtsinverses von $[\lambda_\alpha]$, also gilt zwangsläufig $J_{\widehat{G}}(\boldsymbol{y}_\alpha) = [\lambda_\alpha \rtimes \widehat{G}]^{-1} = [(\lambda_\alpha \rtimes \widehat{G})^{-1}]$. Mit Korollar 5.40 folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 5.46. Zunächst zeigen wir den einfachen Teil, der nur die Mittelbarkeit der Quantengruppe $\mathcal{C}_0(G)$ benutzt. Demnach ist jede C^*-Algebra mit G-Wirkung als $\mathcal{C}_0(G)$-Kowirkung maximal. Daher ist die natürliche Transformation

$$\widehat{\boldsymbol{\varpi}}_{\bullet} : J_{\widehat{G}} \circ J_G \to \mathcal{I}d_{KK_G}$$

von Funktoren eine natürliche Äquivalenz (vgl. Definition 5.33, Proposition 5.35(3.) und Bemerkung 5.37), wobei $\widehat{\boldsymbol{\varpi}}$ andeutet, daß wir die duale Quantengruppe $\mathcal{C}_0(G) = \widehat{S}$ betrachten.

Wir werden nun unter der Voraussetzung der K-Mittelbarkeit von G zeigen, daß auch die „duale" natürliche Transformation $\boldsymbol{\varpi_\bullet} : J_G \circ J_{\widehat{G}} \to \mathcal{I}d_{KK_{\widehat{G}}}$ eine natürliche Äquivalenz ist. Es reicht zu beweisen, daß $[\Phi_\delta]$ in $KK_{\widehat{G}}((\overline{D}, \overline{\delta}), (D \otimes \mathcal{K}, \delta \natural \mathfrak{v}_U))$ für jede separable C^*-Algebra (D, δ) mit voller G-Kowirkung ein $KK_{\widehat{G}}$-Isomorphimus ist, wobei wir wieder $(D \rtimes \widehat{G} \rtimes G, \widehat{\widehat{\delta}})$ durch $(\overline{D}, \overline{\delta})$ abkürzen. Wir haben nach Proposition 4.10 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (D \rtimes_\delta \widehat{G} \rtimes_{\widehat{\delta}} G, \widehat{\widehat{\delta}}) & \xrightarrow{\Phi_\delta} & (D \otimes \mathcal{K}, \delta \natural \mathfrak{v}_U) \\ {\scriptstyle \lambda_{\widehat{\delta}}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle \eta_\delta \otimes id_{\mathcal{K}}} \\ (D \rtimes_\delta \widehat{G} \rtimes_{\widehat{\delta}, r} G, \widehat{\widehat{\delta}}_{rf}) & \xrightarrow[\Phi_{\delta, fr}]{\cong} & (D^n \otimes \mathcal{K}, \delta^n \natural \mathfrak{v}_U). \end{array}$$

Da $[\lambda_{\widehat{\delta}}]$ unter der Voraussetzung der K-Mittelbarkeit nach Lemma 5.49 ein $KK_{\widehat{G}}$-Inverses $\boldsymbol{y}_{\widehat{\delta}}$ besitzt, ist auch $[\Phi_\delta] \otimes_{D \otimes \mathcal{K}} [\eta_\delta \otimes id_{\mathcal{K}}] = [\lambda_{\widehat{\delta}}] \otimes_{D \rtimes \widehat{G} \rtimes_r G} [\Phi_{\delta, fr}]$ in $KK_{\widehat{G}}$ invertierbar. Insbesondere gilt $1_{\overline{D}} = [\Phi_\delta] \otimes_{D \otimes \mathcal{K}} \boldsymbol{z}_\delta$ mit $\boldsymbol{z}_\delta := [\Phi_{\delta, fr}^{-1} \circ (\eta_\delta \otimes id_{\mathcal{K}})] \otimes_{D \rtimes \widehat{G} \rtimes_r G} \boldsymbol{y}_{\widehat{\delta}}$. Offenbar wird das Element $\boldsymbol{z}_\delta$ in $KK_{\widehat{G}}(D \otimes \mathcal{K}, \overline{D})$, wegen der expliziten Form von $\boldsymbol{y}_{\widehat{\delta}}$ (vgl. den Beweis von Lemma 5.49), durch den Zykel

$$(\overline{D} \otimes E, (id_{\overline{D}} \otimes \mu_{u,r}) \widehat{\widehat{\delta}}_{rfr} \circ \Phi_{\delta, fr}^{-1} \circ (\eta_\delta \otimes id_{\mathcal{K}}), 1_{\overline{D}} \otimes F)$$

repräsentiert, wobei (E, u, F) in $\mathbb{E}_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ein Repräsentant für $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ wie in Bedingung (c) der Bemerkung 5.42 ist. Für die umgekehrte Komposition $\boldsymbol{z}_\delta \otimes_{\overline{D}} [\Phi_\delta]$ erhält man mit der Abkürzung $\widetilde{\varphi} := (id_{\overline{D}} \otimes \mu_{u,r}) \widehat{\widehat{\delta}}_{rfr} \circ \Phi_{\delta, fr}^{-1} \circ (\eta_\delta \otimes id)$ den Repräsentanten

$$((\overline{D} \otimes E) \otimes_{\Phi_\delta} (D \otimes \mathcal{K}), \widetilde{\varphi} \otimes_{\Phi_\delta} 1, (1_{\overline{D}} \otimes F) \otimes_{\Phi_\delta} 1)\,.$$

Dieser ist unitär äquivalent zu $(D \otimes \mathcal{K} \otimes E, (\Phi_\delta \otimes id) \circ \widetilde{\varphi}, 1_{D \otimes \mathcal{K}} \otimes F)$. Wir berechnen die Wirkung $(\Phi_\delta \otimes id) \circ \widetilde{\varphi}$: Da Φ_δ surjektiv ist, kann jedes Element in $D \otimes \mathcal{K}$ in der Form $\Phi_\delta(\overline{d})$ mit $\overline{d} \in \overline{D}$ geschrieben werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (\Phi_\delta \otimes \mu_{u,r}) \widetilde{\varphi}(\Phi_\delta(\overline{d})) &= ((\Phi_\delta \otimes \mu_{u,r}) \widehat{\widehat{\delta}}_{rfr} \circ \Phi_{\delta, fr}^{-1} \circ (\eta_\delta \otimes id) \circ \Phi_\delta)(\overline{d}) \\ &\overset{(1)}{=} ((\Phi_\delta \otimes \mu_{u,r}) \widehat{\widehat{\delta}}_{rfr} \circ \lambda_{\widehat{\delta}})(\overline{d}) \\ &\overset{(2)}{=} ((\Phi_\delta \otimes \mu_{u,r} \circ \lambda) \widehat{\widehat{\delta}})(\overline{d}) \\ &\overset{(3)}{=} ((id_{D \otimes \mathcal{K}} \otimes \mu_u) \delta \natural \mathfrak{v}_U)(\Phi_\delta(\overline{d})), \end{aligned}$$

wobei wir in (1) das obige kommutative Diagramm, in (2) das Lemma 3.19 und in (3) die Verträglichkeit von Φ_δ mit den Kowirkungen (und natürlich $\mu_u = \mu_{u,r} \circ \lambda$) benutzen. Insgesamt ist $(\Phi_\delta \otimes id) \circ \widetilde{\varphi} = (id_{D \otimes \mathcal{K}} \otimes \mu_u) \delta \natural \mathfrak{v}_U$, und der obige Zykel repräsentiert nach Lemma 5.47 das Einselement $\mathbf{1}_{D \otimes \mathcal{K}}$. Also ist $\boldsymbol{z}_\delta$ ein $KK_{\widehat{G}}$-Inverses von $[\Phi_\delta]$, und die Behauptung folgt. □

A Relative Kommutanten von $\mathcal{K}$

In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathcal{K} := \mathcal{K}(H)$ stets die kompakten Operatoren eines fixierten separablen Hilbertraums H. Wir studieren die Struktur von C^*-Algebren, deren Multiplikator-Algebra die kompakten Operatoren als nichtentartete C^*-Unteralgebra enthält. Wir werden in Proposition A.4 sehen, daß sich die C^*-Algebra dann kanonisch als Tensorprodukt von $\mathcal{K}$ mit der relativen Kommutante (siehe Definition A.1) schreiben läßt. Im folgenden sei D eine C^*-Algebra und $R \subseteq M(D)$ eine nichtentartete C^*-Unteralgebra.

A.1 Definition. Die *relative Kommutante von R bezüglich D* ist die C^*-Unteralgebra

$$\mathfrak{C}_R(D) := \{m \in M(D) \quad | \quad [m, R] = 0 \quad \text{und} \quad m \cdot R \subseteq D\}$$

der Multiplikator-Algebra $M(D)$.

Offensichtlich gilt dann auch $R \cdot m \subseteq D$ für alle $m \in \mathfrak{C}_R(D)$, da m mit allen Elementen von R kommutiert. Deshalb sprechen wir von der *relativen* Kommutante bezüglich D. Im Fall $R = \mathcal{K}$ ist die relative Kommutante eine nichtentartete C^*-Unteralgebra von $M(D)$.

A.2 Lemma. *Ist D eine C^*-Algebra und $\mathcal{K} \subseteq M(D)$ nichtentartet, dann gilt $\overline{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D) \cdot \mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K} \cdot \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D)} = D$. Insbesondere ist die relative Kommutante $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D)) \subseteq M(D)$ eine nichtentartete Unteralgebra von $M(D)$.*

Die Beweisidee ist einfach: Wir konstruieren eine geeignete Unteralgebra von $M(D\otimes\mathcal{K})$ und schneiden diese mit linearen Funktionalen von $\mathcal{K}$ nach $M(D)$ herunter. Die resultierende Teilmenge von $M(D)$ wird in der relativen Kommutante liegen und bereits genügend groß sein, um die Behauptung des Lemmas zu zeigen.

Beweis. Wir betrachten die Vertauschung $\Sigma : H \otimes H \to H \otimes H$ mit $\Sigma(\xi \otimes \eta) := \eta \otimes \xi$ für ξ, η in H, welche eine selbstinverse Unitäre in $\mathcal{U}(H \otimes H)$ ist. Offenbar induziert die Adjunktion mit Σ die Vertauschung $\sigma = Ad(\Sigma) : \mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ auf $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$, $\sigma(k_1 \otimes k_2) = k_2 \otimes k_1$ und daher gilt $\Sigma \cdot (k \otimes 1) \cdot \Sigma = 1 \otimes k$ für alle k in $\mathcal{K}$. Wir betten $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K} \subseteq M(D \otimes \mathcal{K})$ auf die kanonische Weise als nichtentartete C^*-Unteralgebra ein und bezeichnen das Bild von Σ unter dieser Einbettung ebenfalls mit $\Sigma \in \mathcal{U}M(D \otimes \mathcal{K})$. Für $d \in D$ und $k \in \mathcal{K}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\Sigma(d \otimes 1_{\mathcal{K}})\Sigma \cdot (k \otimes 1_{\mathcal{K}}) &= \Sigma(d \otimes 1)(1 \otimes k)\Sigma = \Sigma(d \otimes k)\Sigma \\ &= (k \otimes 1_{\mathcal{K}}) \cdot \Sigma(d \otimes 1_{\mathcal{K}})\Sigma.\end{aligned}$$

Insbesondere kommutieren die Elemente der Unteralgebren $\widetilde{C} := Ad(\Sigma)(D \otimes 1_{\mathcal{K}})$ und $\mathcal{K} \otimes 1_{\mathcal{K}}$ von $M(D \otimes \mathcal{K})$ und außerdem liegt $\widetilde{C} \cdot (\mathcal{K} \otimes 1_{\mathcal{K}})$ dicht in $D \otimes \mathcal{K}$. Durch Abschneiden mit Funktionalen aus dem Prädual $\mathcal{L}(H)_* \cong \mathcal{K}^*$ erhält man die Teilmenge

$$C := \mathrm{Span}\{(id \otimes \omega)(\widetilde{c}) \mid \widetilde{c} \in \widetilde{C}, \quad \omega \in \mathcal{L}(H)_* \} \subseteq M(D)$$

der Multiplikator-Algebra von D. Wegen der Eigenschaften von $\widetilde{C}$ vertauschen Elemente von C und $\mathcal{K}$: $(id \otimes \omega)(\widetilde{c}) \cdot k = (id \otimes \omega)(\widetilde{c} \cdot (k \otimes 1_{\mathcal{K}})) = (id \otimes \omega)((k \otimes 1_{\mathcal{K}}) \cdot \widetilde{c}) = k \cdot (id \otimes \omega)(\widetilde{c})$. Zudem liegt die Teilmenge $C \cdot \mathcal{K}$ liegt wegen

$$\overline{C \cdot \mathcal{K}} = \overline{(id \otimes \mathcal{L}(H)_*)(\widetilde{C} \cdot (\mathcal{K} \otimes 1_{\mathcal{K}}))} = \overline{(id \otimes \mathcal{L}(H)_*)(D \otimes \mathcal{K})} = D$$

dicht in D. Daraus folgt erstens, daß C eine Teilmenge der relativen Kommutante $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D)$ ist, und zweitens wegen der Inklusionskette $D = \overline{C \cdot \mathcal{K}} \subseteq \overline{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D) \cdot \mathcal{K}} \subseteq D$ auch direkt die Behauptung. $\square$

Da nach Konstruktion der relativen Kommutante die Elemente der Unteralgebren $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D)$ und $\mathcal{K}$ kommutieren (und da $\mathcal{K}$ nuklear ist), haben wir einen kanonischen *-Homomorphismus $\iota_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D)} \cdot \iota_{\mathcal{K}} : \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D) \otimes \mathcal{K} \to D$ mit $c \otimes k \mapsto ck$, wobei wir die universelle Eigenschaft des maximalen Tensorprodukts ausnutzen. Nach Lemma A.2 ist dieser Morphismus surjektiv. Wir wollen im folgenden beweisen, daß er sogar ein Isomorphismus ist. Dazu benötigen wir zunächst eine Aussage über die Struktur von Idealen des Tensorprodukts.

A.3 Lemma. *Sei C eine C^*-Algebra und $\varphi : C \to M(D)$ ein nichtentarteter *-Homomorphismus mit $[\varphi(c), \mathcal{K}] = 0$ für alle $c \in C$.*

1. *Jedes Ideal $J \lhd (C \otimes \mathcal{K})$ hat die Form $J = I \otimes \mathcal{K}$ für ein Ideal $I \lhd C$.*

2. *Der Kern der kanonischen Abbildung*

$$\varphi \cdot \iota_{\mathcal{K}} : C \otimes \mathcal{K} \longrightarrow M(D), \qquad c \otimes k \longmapsto \varphi(c) \cdot k$$

   ist durch $\ker(\varphi \cdot \iota_{\mathcal{K}}) = \ker(\varphi) \otimes \mathcal{K}$ gegeben.

Beweis. Der erste Teil ist eine einfache Anwendung der Rieffel-Korrespondenz (vgl. 1.1.7) für den Imprimitivitäts-Bimodul ${}_{C\otimes\mathcal{K}}(C \otimes H)_C$. Demnach gibt es eine Bijektion zwischen den Idealen J von $C \otimes \mathcal{K}$ und den Idealen I von C, die durch die Beziehung

$$J = {}_{C\otimes\mathcal{K}}\langle (C \otimes H) \cdot I, (C \otimes H) \cdot I \rangle$$

gegeben ist. Die rechte Seite der Gleichung ist aber offenbar gleich $I \otimes \mathcal{K}$.

Für den zweiten Teil müssen wir nur $\ker(\varphi \cdot \iota_{\mathcal{K}}) \subseteq \ker(\varphi) \otimes \mathcal{K}$ zeigen, denn die andere Inklusion ist trivial. Sei dazu $I \lhd C$ ein Ideal mit $\ker(\varphi \cdot \iota_{\mathcal{K}}) = I \otimes \mathcal{K}$. Wir müssen nur noch $I \subset \ker(\varphi)$ nachweisen. Man betrachte ein Element c in I. Für ein Element d in D haben wir eine Faktorisierung $d = k \cdot d'$ mit $k \in \mathcal{K}$ und $k' \in D$. Da $\mathcal{K} \subseteq M(D)$ nichtentartet ist. Dann folgt die Gleichung $\varphi(c) \cdot d = \varphi(c)\iota_{\mathcal{K}}(k) \cdot d' = (\varphi \cdot \iota_{\mathcal{K}})(c \otimes k) \cdot d' = 0$, denn das Element $c \otimes k$ liegt in $I \otimes \mathcal{K} = \ker(\varphi \cdot \iota_{\mathcal{K}})$. Da dies für alle $d \in D$ gilt, ist folglich $\varphi(c) = 0$ als Multiplikator in $M(D)$. Also liegt c in $\ker(\varphi)$. $\square$

Da die Einbettung $\iota_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D)}$ injektiv ist, erhält man als unmittelbare Konsequenz des zweiten Teils $\ker(\iota_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D)} \cdot \iota_{\mathcal{K}}) = 0$. Zusammen mit den obigen Betrachtungen folgt:

A.4 Proposition. *Ist D eine C^*-Algebra mit $\mathcal{K} \subseteq M(D)$ als nichtentartete C^*-Unteralgebra, so ist die kanonische Abbildung $\iota_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D)} \cdot \iota_{\mathcal{K}} : \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(D) \otimes \mathcal{K} \to D$, $c \otimes k \mapsto c \cdot k$, ein Isomorphismus.* $\square$

Die weiteren Ergebnisse wie Funktorialität oder eine Charakterisierung der relativen Kommutante als abgeschlossener Unterraum werden wir allgemeiner für S-äquivariante Hilbert-Bimoduln besprechen.

Man betrachte eine Hopf-C^*-Algebra (S, Δ) (vgl. 1.2.2) und einen S-äquivarianten Hilbert-Bimoduln $({}_A X_B, {}_\alpha\xi_\beta)$, vgl. 1.4.2). Ist R eine C^*-Algebra, die nichtentartet in $M(A)$ und $M(B)$ eingebettet und deren induzierte Wirkung auf X nichtentartet, so definieren wir:

A.5 Definition. Die *relative Kommutante* von R in X ist die Teilmenge

$$\mathfrak{C}_R(X) := \{ m \in M(X) \mid r \cdot m = m \cdot r \text{ für alle } r \in R \quad \text{und } m \cdot R \subseteq X \ \}$$

des Multiplikator-Bimoduls $M(X)$.

Offenbar ist $\mathfrak{C}_R(X) \subseteq M(X)$ ein normabgeschlossener Unterraum. Für $R = \mathcal{K}$ hat man analog wie in A.2:

A.6 Lemma. *Es sei $\mathcal{K} \subseteq M(A)$ sowie $\mathcal{K} \subseteq M(B)$ als nichtentartete Unteralgebra enthalten, für welche die induzierte Wirkung von $\mathcal{K}$ auf X nichtentartet ist. Dann gilt $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \cdot \mathcal{K} = \mathcal{K} \cdot \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) = X$. Die relative Kommutante $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ ist ein nichtentarteter Unter-Hilbert-$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A)$-$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(B)$-Bimodul von ${}_{M(A)}M(X)_{M(B)}$.*

Beweis. Den ersten Teil beweist man genau wie bei A.2. Man betrachtet hierzu die Teilmenge $\widetilde{C}_X := \Sigma_A \cdot (X \otimes 1_{\mathcal{K}}) \cdot \Sigma_B$ von $M(X \otimes \mathcal{K})$, wobei $\Sigma_A \in \mathcal{U}M(A \otimes \mathcal{K})$ bzw. $\Sigma_B \in \mathcal{U}M(B \otimes \mathcal{K})$ das Bild des Vertauschungsoperators $\Sigma \in \mathcal{U}M(\mathcal{K} \otimes \mathcal{K})$ in $M(A \otimes \mathcal{K})$ bzw. $M(B \otimes \mathcal{K})$ ist. Für den zweiten Teil macht man sich zunächst klar, daß mit $m \in \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ auch $m^* \in \mathcal{L}_B(X, B)$ mit kompakten Operatoren k in $\mathcal{K}$ vertauscht: $m^* \cdot k = k \cdot m^*$. Sind nun m, m' Elemente von $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$, so gilt deshalb

$$\begin{aligned} &\langle m, m' \rangle_{M(B)} \cdot k = m^* \cdot m' \cdot k = k \cdot m^* \cdot m' = k \cdot \langle m, m' \rangle_{M(B)} \\ \text{und} \quad &\langle m, m' \rangle_{M(B)} \cdot k = m^* \cdot m' \cdot k \in m^*(X) \subseteq B. \end{aligned}$$

Also ist $\langle m, m' \rangle_{M(B)}$ ein Element von $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(B)$. Folglich ist $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(B)}$ ein nichtentarteter Unter-Hilbertmodul von $M(X)_{M(B)}$. Die Einschränkung der Wirkung von $M(A)$ auf $M(X)$ ergibt offenbar eine $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A)$-Wirkung auf $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$. □

A.7 Bemerkung. Sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra. Wir statten $\mathcal{K}$ mit der trivialen S-Kowirkung $\delta_{\mathcal{K}}^{tr}$ aus (vgl. 1.4.10) und betrachten die folgende Kategorie: Die Objekte sind S-äquivariante Rechts-Hilbert-Bimoduln $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$, derart daß

(a) die kompakten Operatoren $(\mathcal{K}, \delta_{\mathcal{K}}^{tr}) \subseteq M(A, \alpha)$ und $(\mathcal{K}, \delta_{\mathcal{K}}^{tr}) \subseteq M(B, \beta)$ als nichtentartete S-äquivariante Unteralgebra enthalten sind und

(b) die induzierte Wirkung von $\mathcal{K}$ auf X nichtentartet ist.

Die Morphismen ${}_\psi\Phi_\varphi : ({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \to M({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$ sind S-äquivariante nichtentartete Morphismen solcher Rechts-Hilbert-Bimoduln, welche die kompakten Operatoren *fixieren.* Das soll bedeuten, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} M(A,\alpha) \arrow[r, "\psi"] & M(C,\gamma) \\ (\mathcal{K}, \delta_{\mathcal{K}}^{tr}) \arrow[u] \arrow[r, equal] & (\mathcal{K}, \delta_{\mathcal{K}}^{tr}) \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} M(B,\beta) \arrow[r, "\varphi"] & M(D,\delta) \\ (\mathcal{K}, \delta_{\mathcal{K}}^{tr}) \arrow[u] \arrow[r, equal] & (\mathcal{K}, \delta_{\mathcal{K}}^{tr}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

kommutieren, wobei die vertikalen Pfeile die Inklusionen in (a) sind.

A.8 Definition. Ist (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra, so bezeichnen wir mit $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$ die in Bemerkung A.7 definierte Unterkategorie von $\mathcal{HBM}_S$ (vgl. 1.5.1). Für $S = \mathbb{C}$ schreiben wir $\mathcal{HBM}(\mathcal{K})$.

A.9 Bemerkung. Ein Rechts-Hilbert-Bimodul $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \in \mathcal{HBM}_S$ ist also genau dann in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$, wenn $\alpha(k) = k \otimes 1_S$ und $\beta(k) = k \otimes 1_S$ für alle $k \in \mathcal{K} \subseteq M(A)$ sowie $k \in \mathcal{K} \subseteq M(B)$ gilt. Das bedeutet, die Kowirkung ${}_\alpha\xi_\beta$ ist ein Morphismus in $\mathcal{HBM}(\mathcal{K})$, wenn man die kompakten Operatoren auf natürliche Art und Weise $\mathcal{K} \cong \mathcal{K} \otimes 1_S \subseteq M(A \otimes S)$ sowie $\mathcal{K} \cong \mathcal{K} \otimes 1_S \subseteq M(B \otimes S)$ in die Multiplikatoren der Koeffizienten-Algebren von $X \otimes S$ einbettet.

Zunächst diskutieren wir die Eigenschaften der relativen Kommutante von $\mathcal{K}$ der Objekte in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$, ohne die Kowirkungen zu beachten. Später werden wir, unter Benutzung der nichtäquivarianten Aussagen, Kowirkungen auf relativen Kommutanten konstruieren. Mit diesen Kowirkungen gelten dann auch die äquivarianten Analoga der Aussagen.

Das folgende Ergebnis verallgemeinert Proposition A.4:

A.10 Proposition. *Ist (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra und $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ ein Hilbert-Bimodul in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln*

$$\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)} \cdot \iota_\mathcal{K} : {}_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(A)\otimes\mathcal{K}}(\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{K})_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(B)\otimes\mathcal{K}} \longrightarrow {}_AX_B, \qquad c \otimes k \mapsto c \cdot k,$$

mit Koeffizienten-Morphismen $\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(A)} \cdot \iota_\mathcal{K}$ bzw. $\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(B)} \cdot \iota_\mathcal{K}$ wie in Proposition A.4.

Beweis. Wir müssen zunächst zeigen, daß sich die lineare Abbildung

$$\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)} \cdot \iota_\mathcal{K} : \mathfrak{C}_\mathcal{K}(X) \odot \mathcal{K} \longrightarrow X, \qquad c \otimes k \longmapsto c \cdot k$$

des algebraischen Tensorprodukts auf die Vervollständigung $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{K}$ fortsetzt: Seien dazu $z := \sum_i c_i \otimes k_i$ und $z' := \sum_j c'_j \otimes k'_j$ Elemente von $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X) \odot \mathcal{K}$. Dann gilt wegen der Isometrie von $\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(B)} \cdot \iota_\mathcal{K}$ (vgl. Proposition A.4) die Gleichung

$$\begin{aligned}\langle z, z' \rangle_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(B)\otimes\mathcal{K}} &= (\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(B)} \cdot \iota_\mathcal{K})(\langle z, z' \rangle_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(B)\otimes\mathcal{K}}) = \sum_{ij} \langle c_i, c'_j \rangle_{M(B)} k_i^* k'_j \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{ij} \langle c_i k_i, c'_j k_j \rangle_B = \langle (\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)} \cdot \iota_\mathcal{K})(z), (\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)} \cdot \iota_\mathcal{K})(z') \rangle_B \ ,\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ ausgenutzt haben, daß k_i mit c_i und c'_j vertauscht. Insbesondere ist die Abbildung $\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)} \cdot \iota_\mathcal{K}$ stetig und setzt sich zu einer Isometrie auf $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{K}$ fort. Wegen Lemma A.2 hat sie ein dichtes Bild in X. Die obige Rechnung zeigt weiterhin, daß $\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)} \cdot \iota_\mathcal{K}$ ein Morphismus von Rechts-Hilbertmoduln ist. Wegen der Abgeschlossenheit des Bildes (vgl. 1.1.18) ist er surjektiv. Die Verträglichkeit mit der linken Koeffizienten-Abbildung ist offensichtlich. □

Die Proposition liefert uns insbesondere eine nützliche Antwort auf die Frage, wann abgeschlossene Teilräume von $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)$ bereits mit $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)$ übereinstimmen.

A.11 Lemma. *Mit den Bezeichnungen wie in Proposition A.10 sei (X, ξ) in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$ sowie $Z \subseteq M(X)$ ein abgeschlossener Unterraum mit $[z, k] = 0$ für alle z in Z und k in $\mathcal{K}$. Ist zusätzlich $Z \cdot \mathcal{K} = \mathrm{Span}\{z \cdot k \mid z \in Z,\ k \in \mathcal{K}\ \}$ dicht in X, so stimmt Z mit der relativen Kommutante $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)$ bereits überein.*

Beweis. Offensichtlich ist nach Voraussetzung $Z \subseteq \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$. Wegen der Proposition A.10 und der Voraussetzung ist das algebraische Tensorprodukt $Z \odot \mathcal{K}$ eine dichte Teilmenge von $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \otimes \mathcal{K}$. Wir wählen ein beliebiges nichttriviales Element $k \in \mathcal{K}$ und dazu ein lineares Funktional $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ mit $\omega(k) = 1$. Für $c \in \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ ist das Element $c \otimes k \in \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \otimes \mathcal{K}$ dann Grenzwert eines Netzes $(y_i)_{i \in I} \subseteq Z \odot \mathcal{K}$. Durch Anwenden von $(id \otimes \omega)$ erhält man, daß das resultierende Netz

$$(id \otimes \omega)(y_i) \to (id \otimes \omega)(c \otimes k) = c$$

gegen das Element $c \in \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ konvergiert. Da die Elemente $(id \otimes \omega)(y_i)$ für alle $i \in I$ in Z liegen, ist wegen der Abgeschlossenheit auch c ein Element von Z. $\square$

Wir erhalten die beiden Folgerungen:

A.12 Korollar. *Sei (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra und $({}_A X_B, {}_\alpha \xi_\beta)$ in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$. Dann ist die Wirkung von $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A)$ auf $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ aus Lemma A.6 ebenfalls nichtentartet.*

Beweis. Es gilt $\overline{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A) \cdot \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \cdot \mathcal{K}} = \overline{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A) \cdot X} = X$ da nach Lemma A.2 mit A auch $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A)$ nichtentartet auf X wirkt. Mit Lemma A.11 folgt $\overline{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A) \cdot \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)} = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$. $\square$

A.13 Korollar. *Für eine Hopf-C^*-Algebra (S, Δ) und einen S-äquivarianten Hilbert-Bimodul $({}_L Z_R, {}_\lambda \Lambda_\rho)$ setze man $Y := {}_L Z_R \otimes \mathcal{K}$. Betten wir die kompakten Operatoren in der offensichtlichen Weise als Unteralgebra $\mathcal{K} \cong (1 \otimes \mathcal{K})$ von $M(L \otimes \mathcal{K})$ sowie $M(R \otimes \mathcal{K})$ ein, so ist $(Z \otimes \mathcal{K}, \Lambda \otimes_* id_{\mathcal{K}})$ (vgl. Definition 2.55) ein Objekt in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$. Die relative Kommutante $\mathfrak{C}_{1 \otimes \mathcal{K}}(Y)$ ist als Teilmenge von $M(Y)$ gleich ${}_{L \otimes 1}(Z \otimes 1_{\mathcal{K}})_{R \otimes 1}$ und identifiziert sich kanonisch mit ${}_L Z_R$.*

Beweis. Wendet man das Lemma A.11 zuerst auf die Koeffizientenalgebren an, so erhält man $\mathfrak{C}_{1 \otimes \mathcal{K}}(L \otimes \mathcal{K}) = L \otimes 1_{\mathcal{K}}$ und ein analoges Ergebnis für R. Wendet man jetzt das Lemma auf $Y = Z \otimes \mathcal{K}$ an, so folgt $\mathfrak{C}_{1 \otimes \mathcal{K}}(Y) = Z \otimes 1_{\mathcal{K}}$ und somit die Behauptung. $\square$

Wir wollen nun sehen, daß die Konstruktion der relativen Kommutante ein Funktor ist. Dazu müssen wir zunächst den Multiplikator-Bimodul der relativen Kommutante als Teilmenge des Multiplikator-Bimoduls des ursprünglichen Rechts-Hilbert-Bimoduls realisieren (dies rechtfertigt übrigens auch die Bezeichnung „relative“ Kommutante):

A.14 Lemma. *Mit den Bezeichnungen aus Proposition A.10 sei (X, ξ) in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$. Der Multiplikator-Bimodul der relativen Kommutante $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ identifiziert sich mit der Kommutante $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(M(X)) := \{m \in M(X) | \, [m, \mathcal{K}] = 0\}$ von $\mathcal{K}$ in $M(X)$.*

Beweis. Nach 1.1.23 kann man $M(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X))$ kanonisch mit dem Idealisator

$$\{m \in M(X) | m \cdot \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \cup \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \cdot m \subseteq \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\}$$

identifizieren. Man verifiziert sofort, daß diese Teilmenge mit der Kommutante $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(M(X))$ übereinstimmt. $\square$

A.15 Lemma. *Ist (S, Δ) eine Hopf-C^*-Algebra und ${}_\psi \Phi_\varphi : ({}_A X_B, {}_\alpha \xi_\beta) \to M({}_C Y_D, {}_\gamma \zeta_\delta)$ ein Morphismus von Rechts-Hilbert-Bimoduln in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$, so induziert die Einschränkung von ${}_\psi \Phi_\varphi$ einen nichtentarteten Morphismus*

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\Phi) := \Phi|_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)} : \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \longrightarrow M(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(Y))$$

mit Koeffizienten-Abbildungen $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\psi) := \psi|_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A)}$ und $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\varphi) := \varphi|_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(B)}$.

Beweis. Für c in $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ kommutiert $\Phi(c)$ mit allen Elementen k in $\mathcal{K}$: $\Phi(c)\cdot k = \Phi(c)\varphi(k) = \Phi(ck) = \Phi(kc) = \psi(k)\Phi(c) = k\cdot\Phi(c)$. Deshalb ist $\varphi(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X))$ eine Teilmenge von $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(M(Y)) = M(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(Y))$, vgl. Lemma A.14. Also ist die Einschränkung wohldefiniert. Sie ist aber auch nichtentartet, da

$$\overline{\Phi(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X))\cdot\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(Y)\cdot\mathcal{K}} = \overline{\Phi(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X))\cdot\mathcal{K}\cdot Y} = \overline{\Phi(X)\cdot Y} = Y$$

gilt. Folglich ist $\overline{\Phi(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X))\cdot\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(Y)} = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(Y)$ nach Lemma A.11 und Analoges gilt auch für die Koeffizienten-Morphismen. □

Mit diesen Vorbereitungen erhält man durch Einschränkung eine Kowirkung auf der relativen Kommutante:

A.16 Lemma. *Ist (S,Δ) eine Hopf-C^*-Algebra und $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$ ein Hilbert-Bimodul, so ist $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\otimes S = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}\otimes 1_S}(X\otimes S)$, als Teilmenge von $M(X\otimes S)$ betrachtet. Die Einschränkung der Kowirkung ξ (vgl. Lemma A.15)*

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\xi) = \xi\,|_{\,\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)} : \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \longrightarrow M(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}\otimes 1}(X\otimes S)) = M(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\otimes S)$$

induziert eine S-Kowirkung auf $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ mit Koeffizienten-Morphismen $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\alpha) = \alpha\,|_{\,\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(A)}$ und $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\beta) = \beta\,|_{\,\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(B)}$. Mit ξ ist auch $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\xi)$ nichtentartet.

Die Bezeichnung $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}\otimes 1}(X\otimes S)$ aus Definition A.5 erinnert dabei daran, wie $\mathcal{K}$ in die Koeffizienten-Algebren $M(A\otimes S)$ und $M(B\otimes S)$ eingebettet wird.

Beweis. Die Voraussetzung an die Koeffizienten-Kowirkungen (vgl. die Bemerkungen A.7 und A.9) besagt genau, daß diese die kompakten Operatoren fixieren. Das erlaubt uns die Anwendung von Lemma A.15 (mit $S=\mathbb{C}$), und die Einschränkung ergibt den nichtentarteten Morphismus von Hilbert-Bimoduln

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\xi) = \xi|_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)}\colon \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \longrightarrow M(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}\otimes 1}(X\otimes S)).$$

Wir betrachten $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\otimes S$ als Teilmenge von $M(X\otimes S)$, die offenbar in der relativen Kommutante $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}\otimes 1}(X\otimes S)$ enthalten ist. Wegen

$$\overline{(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\otimes S)\cdot(\mathcal{K}\otimes 1_S)} = \overline{(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\cdot\mathcal{K})\otimes S} = X\otimes S$$

folgt $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\otimes S = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}\otimes 1}(X\otimes S)$ aus der Charakterisierung A.11, analoge Gleichungen gelten für die Koeffizienten-Algebren. Die Kowirkungs-Identität ist klar, da es sich um eine Einschränkung handelt. Wir müssen nur noch die analytische Bedingung für Kowirkungen testen und betrachten deshalb den abgeschlossenen Unterraum $Z := \overline{(1\otimes S)\cdot\xi(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X))}$ von $M(X\otimes S)$. Da sich nach Bemerkung A.7 die Abbildungen α und β zu den trivialen Kowirkungen auf $\mathcal{K}$ einschränken, rechnet man leicht nach, daß die Elemente von Z mit denen in $\mathcal{K}\otimes 1_S$ kommutieren. Die Rechnung

$$\begin{aligned}\overline{Z\cdot(\mathcal{K}\otimes 1_S)} &= \overline{(1\otimes S)\cdot\xi(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X))\cdot\beta(\mathcal{K})} = \overline{(1\otimes S)\cdot\xi(\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\cdot\mathcal{K})}\\ &= \overline{(1\otimes S)\cdot\xi(X)} \overset{(*)}{\subseteq} X\otimes S\end{aligned}$$

zeigt, daß Z in $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}\otimes 1}(X\otimes S) = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\otimes S$ enthalten ist. Ist zudem ξ nichtentartet, d.h. ist $X\otimes S$ gleich $\overline{(1\otimes S)\cdot\xi(X)}$, so gilt in $(*)$ die Gleichheit. Folglich gilt nach Lemma A.11 die Identität $Z = \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)\otimes S$, und $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\xi)$ ist als Kowirkung nichtentartet. □

Die Aussagen A.10-A.15 gelten auch im äquivarianten Zusammenhang, wenn man die kanonischen Kowirkungen auf den Objekten benutzt: Wir statten relative Kommutanten von $\mathcal{K}$ stets mit den Kowirkungen aus Lemma A.16 aus und versehen Tensorprodukte der Form $Z \otimes \mathcal{K}$ stets mit der natürlichen Kowirkung aus Definition 2.55. Wir sammeln die vorangehenden Aussagen in der folgenden Proposition A.17, auf die wir im Haupttext zurückgreifen werden:

A.17 Proposition. *Ist (S, Δ) eine Hopf-C*-Algebra, so gelten für Objekte $({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta)$ sowie $({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$ und Morphismen ${}_\psi\Phi_\varphi : ({}_AX_B, {}_\alpha\xi_\beta) \to M({}_CY_D, {}_\gamma\zeta_\delta)$ in $\mathcal{HBM}_S(\mathcal{K})$ die folgenden Aussagen:*

1. *Die Zuordnungen $(X, \xi) \mapsto (\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X), \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\xi))$ und $\Phi \mapsto \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi)$ definieren einen Funktor*
$$\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\cdot) : \mathcal{HBM}_S(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{HBM}_S.$$
Mit $\Phi : (X, \xi) \to (Y, \zeta)$ ist auch $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi) : (\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X), \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\xi)) \to (\mathfrak{C}_\mathcal{K}(Y), \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\zeta))$ ein surjektiver Morphismus von Hilbert-Bimoduln.

2. *Das Diagramm von S-äquivarianten Hilbert-Bimodul-Homomorphismen*
$$\begin{array}{ccc} (X,\xi) & \xrightarrow{\Phi} & M(Y,\zeta) \\ {\scriptstyle \iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)}\cdot\iota_\mathcal{K}}\Big\uparrow \cong & & \cong \Big\uparrow {\scriptstyle \iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(Y)}\cdot\iota_\mathcal{K}} \\ (\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)\otimes\mathcal{K}, \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\xi)\otimes_* id_\mathcal{K}) & \xrightarrow{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi)\otimes id_\mathcal{K}} & M(\mathfrak{C}_\mathcal{K}(Y)\otimes\mathcal{K}, \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\zeta)\otimes_* id_\mathcal{K}) \end{array}$$
kommutiert, und die vertikalen Pfeile sind Isomorphismen. Insbesondere ist Φ genau dann injektiv (bijektiv), wenn $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi)$ injektiv (bijektiv) ist.

3. *Ist $(Y, \zeta) = (Z \otimes \mathcal{K}, \Lambda \otimes_* id_\mathcal{K})$ wie in Korollar A.13 sowie $\psi(k) = 1_L \otimes k$ und $\varphi(k) = 1_R \otimes k$ für alle $k \in \mathcal{K}$, so läßt sich $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi)$ als äquivarianter Morphismus*
$$\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi) : (\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X), \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\xi)) \longrightarrow M(Z, \zeta)$$
auffassen. Ist insbesondere $\Phi : (X, \xi) \to (Z \otimes \mathcal{K}, \Lambda \otimes_* id_\mathcal{K})$ surjektiv, so ist es auch der Morphismus $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi) : (\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X), \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\xi)) \to (Z, \zeta)$.

Hierbei verwenden wir die Konventionen aus 1.1.10 für surjektive bzw. injektive Morphismen.

Beweis. Die meisten Aussagen sind klar oder bereits bewiesen. Da $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi)$ als die Einschränkung $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi) = \Phi\,|_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)}$ definiert ist, folgt die Funktorialität trivialerweise. Wir zeigen lediglich noch die Aussagen über Surjektivität und die Äquivarianz. Aus der Surjektivität von Φ folgt
$$\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi)(\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)) \cdot \mathcal{K} = \Phi(\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X))\varphi(\mathcal{K}) = \Phi(\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X) \cdot \mathcal{K}) = \Phi(X) = Y\ ,$$
also liegt $\Phi(\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X))$ in $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(Y)$. Mit Lemma A.11 folgt die Surjektivität von $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi)$. Im zweiten Teil folgt durch einfaches Nachrechnen die Kommutativität des Diagramms aus der Definition von $\mathfrak{C}_\mathcal{K}(\Phi)$ als Einschränkung; die vertikalen Pfeile sind nach A.10 Isomorphismen. Der dritte Teil ist einfach nur Korollar A.13 zusammen mit der Surjektivitäts-Aussage des ersten Teils. Wir werden für die Aussagen zur Äquivarianz nur zeigen, daß der kanonische Isomorphismus
$$\iota_{\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X)} \cdot \iota_\mathcal{K} : (\mathfrak{C}_\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{K}, \mathfrak{C}_\mathcal{K}(\xi) \otimes_* id_\mathcal{K}) \longrightarrow (X, \xi)$$

äquivariant ist, denn die restlichen lassen sich mit Lemma A.16 beweisen: Dazu betrachten wir Elemente $c \in \mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)$ sowie $k \in \mathcal{K}$ und schreiben $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\xi)(c)$ als strikten Limes

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\xi)(c) = \xi(c) \sim_{str} \sum_i c_i \otimes s_i.$$

Wir nutzen aus, daß alle auftretenden Abbildungen norm- und strikt-stetig sind und berechnen

$$\begin{aligned}
(\iota_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)} \cdot \iota_{\mathcal{K}} \otimes id_S)((\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(\xi) \otimes_* id_{\mathcal{K}})(c \otimes k)) &\sim \sum_i (\iota_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)} \cdot \iota_{\mathcal{K}} \otimes id_S)((id \otimes \sigma)(c_i \otimes s_i \otimes k)) \\
&= \sum_i (c_i \cdot k) \otimes s_i \\
&= \sum_i (c_i \otimes s_i) \cdot (k \otimes 1_S) \\
&\sim \xi(c) \cdot (k \otimes 1_S) \\
&\overset{(*)}{=} \xi(c \cdot k) = \xi((\iota_{\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X)} \cdot \iota_{\mathcal{K}})(c \otimes k)) \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ verwenden, daß $\beta(k) = k \otimes 1_S$ ist. Also ist der kanonische Isomorphismus $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}}(X) \otimes \mathcal{K} \cong X$ äquivariant. $\square$

Ausblick

Wir wollen nun auf mögliche weitergehende Untersuchungen eingehen. Es bieten sich dazu die folgenden beiden Ansätze an:

Erstens zeigen die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit eine starke Parallele zwischen den reduzierten und den maximalen Kowirkungen auf. Es ist daher zu erwarten, daß sich jeweils Ergebnisse der reduzierten sowie der maximalen Theorie mittels der Maschinerie von Normalisierung und Maximalisierung ineinander überführen lassen. Wir denken dabei insbesondere daran, diese Technik auf die Resultate von Echterhoff, Kalizewski, Quigg und Raeburn zur Natürlichkeit von Imprimitivitätssätzen [**15**] anzuwenden. Diese Resultate existieren sowohl in vollen als auch in reduzierten Versionen, deren Beweise sehr ähnlich sind, aber getrennt voneinander geführt werden müssen. Die Maximalisierung könnte helfen, die maximale Variante direkt aus der reduzierten abzuleiten.

Zweitens ist es im Zusammenhang mit der äquivarianten KK-Theorie naheliegend, den partiellen Abstieg von Chabert und Echterhoff [**10**] in einen äquivarianten Zusammenhang zu stellen und für allgemeine Quantengruppen zu studieren.

Eine Voraussetzung für beide Ansätze wäre idealerweise eine gute C^*-algebraische Theorie für Erweiterungen von Quantengruppen. Eine solche steht bisher leider nur auf dem Niveau der von Neumann-Algebren zur Verfügung.

Eine möglicher Zwischenschritt ist jedoch die Betrachtung von regulären Bicrossed-Produkten: Für diese besteht die Hoffnung, Ergebnisse in der angedeuteten Weise erhalten zu können, ohne eine allgemeine Erweiterungstheorie für Quantengruppen entwickeln zu müssen, da Bicrossed-Produkte aus lokalkompakten Gruppen zusammengesetzt sind.

Literatur

[1] S. Baaj, “Représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$”, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **314**, 1021-1026 (1992).

[2] S. Baaj, “Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz”, Connes, A. (ed.), Recent advances in operator algebras. Collection of talks given in the conference on operator algebras held in Orléans, France in July 1992. Paris: Société Mathématique de France, Astérisque. **232**, 11-48 (1995).

[3] S. Baaj, G. Skandalis, “C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante”, K-Theory **2**, No.6, 683-721 (1989).

[4] S. Baaj, G. Skandalis, “Unitaires multiplicatifs et dualité pour les products croisés de C^*-algèbres”, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sr. **26**, No.4, 452-488 (1993).

[5] S. Baaj, G. Skandalis, S. Vaes, “Non-semi-regular quantum groups coming from number theory”, Commun. Math. Phys. **235**, No.1, 139-167 (2003).

[6] B. Blackadar, “K-Theory for Operator Algebras”, 2nd ed. , Mathematical Sciences Research Institute **5**. Cambridge: Cambridge University Press (1998).

[7] E. Blanchard “Déformations de C^*-algèbres de Hopf”, Bull. Soc. Math. Fr. **124**, No.1, 141-215 (1996).

[8] L.G. Brown, P. Green, M.A. Rieffel “Stable isomorphism and strong Morita equivalence of C^*-algebras”, Pac. J. Math. **71**, 349-363 (1977).

[9] H.H. Bui “Morita equivalence of twisted crossed products by coactions”, J. Funct. Anal. **123**, No.1, 59-98 (1994).

[10] J. Chabert, S. Echterhoff “Twisted equivariant KK-theory and the Baum-Connes conjecture for group extensions”, K-Theory **23**, No.2, 157-200 (2001).

[11] A. Connes, G. Skandalis “The longitudinal index theorem for foliations”, Publ. Res. Inst. Math. Sci. (Kyoto Univ.) **20**, 1139-1183 (1984).

[12] J. Cuntz “K-theoretic amenability for discrete groups”, J. Reine Angew. Math. **344**, 180-195 (1983).

[13] S. Echterhoff, I. Raeburn, “Multipliers of imprimitivity bimodules and Morita equivalence of crossed products”, Math. Scand. **76**, No.2, 289-309 (1995).

[14] S. Echterhoff, S. Kalizewski, J. Quigg “Maximal Coactions”, preprint **No. 188**, SFB 478, WWU Münster (2001).

[15] S. Echterhoff, S. Kalizewski, J. Quigg, I. Raeburn “A Categorical Approach to Imprimitivity Theorems for C^*-Dynamical Systems”, preprint **No. 238**, SFB 478, WWU Münster (2002).

[16] S. Echterhoff, J. Quigg “Induced coactions of discrete groups on C^*-algebras” Canad. J. Math. **51**, 745-770 (1999).

[17] M. Enock, J.M. Schwartz “Une dualité dans les algèbres de von Neumann”, Bull. Soc. Math. Fr., Suppl., Mém. **44**, 1-144 (1975).

[**18**] M. Enock, J.M. Schwartz “Kac algebras and duality of locally compact groups” Berlin: Springer-Verlag (1992).

[**19**] M. Enock, J.M. Vallin “C^*-algèbres de Kac et algèbres de Kac”, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **66**, 619-650 (1993).

[**20**] E. Hewitt, K.A. Ross “Abstract harmonic analysis”, Volume I/II, 2nd printing/ 2nd ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen **No. 115/152**, Springer (1994).

[**21**] S. Imai, H. Takai “On a duality for C^*-crossed products by a locally compact group”, J. Math. Soc. Japan **30**, 495-504 (1978).

[**22**] P. Julg, A. Valette “K-moyennabilité pour les groupes opérant sur les arbres”, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **296**, 977-980 (1983).

[**23**] P. Julg, A. Valette “Group actions on trees and K-amenability”, Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory, Proc. Conf., Busteni/Rom. 1983, Lect. Notes Math. **1132**, 289-296 (1985).

[**24**] G.I. Kac “Generalization of the group principle of duality” Sov. Math., Dokl. **2**, 581-584 (1961); translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR **138**, 275-278 (1961).

[**25**] G.I. Kac “Ring groups and the duality principle”, part I, Trans. Mosc. Math. Soc, 291-339 (1963).

[**26**] G.I. Kac “Ring groups and the duality principle”, part II, Trans. Mosc. Math. Soc. **13**, 94-126 (1965).

[**27**] G.I. Kac, L.I. Vainerman “Nonunimodular ring-groups and Hopf- von Neumann algebras”, Math. USSR Sb. **23**, 185-214 (1974).

[**28**] G.G. Kasparov “The operator K-functor and extensions of C^*-algebras”, Math. USSR, Izv. **16**(3), 513-572 (1981).

[**29**] G.G. Kasparov “ K-theory, group-C^*-algebras and higher signatures”, Conspectus parts 1 and 2, Preprint Chernogolovka (1981).

[**30**] G.G. Kasparov “Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture”, Invent. Math. **91**, No.1, 147-201 (1988).

[**31**] Y. Katayama “ Takesaki’s duality for a nondegenerate co-action”, Math. Scand. **55**, 141-151 (1984).

[**32**] M.G. Krein “A principle of duality for bicompact groups and quadratic block algebras”, Dokl. Akad. Nauk USSR **69**, 725-728 (1949).

[**33**] M.G. Krein “Hermitian-positive kernels in homogeneous spaces”, Parts 1/2, english translation, Amer. Math. Soc. Transl.(2) **34**, 69-164 (1963).

[**34**] J. Kustermans “Locally compact quantum groups in the universal setting”, Int. J. Math. **12**, No.3, 289-338 (2001).

[**35**] J. Kustermans, S. Vaes “Locally compact quantum groups”, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. **33**, No.6, 837-934 (2000).

[**36**] J. Kustermans, S. Vaes “Locally compact quantum groups in the Von Neumann algebraic Setting”, Math. Scand. **92**, 68-92 (2003).

[**37**] E. C. Lance “Hilbert C^*-modules. A toolkit for operator algebraists”, London Mathematical Society Lecture Note Series **210**. Cambridge Univ. Press (1995).

[**38**] M.B. Landstad “Duality theory for covariance algebras”, Trans. Am. Math. Soc. **248**, No. 2, 223-267 (1979).

[**39**] M.B. Landstad, J. Phillips, I. Raeburn, C.E. Sutherland “Representations of crossed products by coactions and principal bundles”, Trans. Am. Math. Soc. **299**, No.2, 747-784 (1987).

[**40**] A. Maes, A. Van Daele “The multiplicative unitary as a basis for duality”, preprint math.OA/0205284 (2002).

[**41**] A. Maes, A. Van Daele “Notes on compact quantum groups” Nieuw Arch. Wiskd., IV. Ser. **16**, No.1-2, 73-112 (1998).

[**42**] T. Masuda, Y. Nakagami “A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups”, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30**, No.5, 799-850 (1994).

[**43**] T. Masuda, Y. Nakagami, S. L. Woronowicz “A C^*-algebraic framework for quantum groups”, preprint math.QA/0309338 (2003).

[**44**] S. Montgomery “Hopf algebras and their actions on rings”, Expanded version of ten lectures given at the CBMS Conference on Hopf algebras and their actions on rings, DePaul University in Chicago, USA, August 10-14, 1992. Regional Conference Series in Mathematics **82**. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (1993).

[**45**] C.-K. Ng “Coactions and crossed products of Hopf C^*-algebras”, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **72**, No.3, 638-656 (1996).

[**46**] C.-K. Ng “Morphisms of multiplicative unitaries”, J. Oper. Theory **38**, No.2, 203-224 (1997).

[**47**] C.-K. Ng “Coactions on Hilbert-C^*-modules”, preprint.

[**48**] C.-K. Ng “Duality of Hopf C^*-algebras”, preprint.

[**49**] C.-K. Ng “An example of amenable Kac systems”, Proc. Am. Math. Soc. **130**, No.10, 2995-2998 (2002).

[**50**] M. Nilsen “Full crossed products by Hopf C^*-algebras”, preprint math.OA/9806026 (1998).

[**51**] M. Nilsen “Duality for full crossed products of C^*-Algebras by non-amenable groups”, Proc. Am. Math. Soc. **126**, No. 10, 2969-2978 (1998).

[**52**] J. Quigg “Duality for reduced twisted crossed products of C^*-algebras”, Indiana Univ. Math. J. **35**, 549-571 (1986).

[**53**] J. Quigg “Full C^*-crossed product duality”, J. Aust. Math. Soc., Ser. A **50**, No.1, 34-52 (1991).

[**54**] J. Quigg "Full and reduced C^*-coactions", Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **116**, No.3, 435-450 (1994).

[**55**] I. Raeburn "A duality theorem for crossed products of nonabelian groups", Harmonic analysis and operator algebras, Miniconf. Canberra/Aust. 1987, Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. **15**, 214-227 (1987).

[**56**] I. Raeburn "On crossed products and Takai duality", Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. **31**, No.2, 321-330 (1988).

[**57**] I. Raeburn "On crossed products by coactions and their representation theory" Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **64**, No.3, 625-652 (1992).

[**58**] I. Raeburn, D.P. Williams "Morita equivalence and continuous-trace C^*-algebras" Mathematical Surveys and Monographs **60**. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (1998).

[**59**] M.A. Rieffel "Induced representations of C*-algebras", Adv. Math. **13**, 176-257 (1974).

[**60**] M. E. Sweedler "Hopf Algebras", Mathematics lecture notes series, Benjamin, New York (1969).

[**61**] W.F. Stinespring "Integration theorems for gages and duality for uni-modular groups" Trans. Am. Math. Soc. **90**, 15-56 (1959).

[**62**] H. Takai "On a duality for crossed products of C^*-algebras", J. Funkt. Anal. **19**, 25-39 (1975).

[**63**] T. Tannaka "Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen", Tohoku Math. J. **45**, 1-12 (1938).

[**64**] J.M. Vallin "C^*-algèbres de Hopf et C^*-algèbres de Kac", Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **50**, 131-174 (1985).

[**65**] A. van Daele "The Haar measure on a compact quantum group", Proc. Am. Math. Soc. **123**, No.10, 3125-3128 (1995).

[**66**] R. Vergnioux "KK-théorie équivariante et opérateur de Julg-Valette pour les groupes quantiques", Dissertation (2002).

[**67**] S.L. Woronowicz "Twisted SU(2) group. An example of a non-commutative differential calculus" Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23**, No.1, 117-181 (1987).

[**68**] S.L. Woronowicz "Compact matrix pseudogroups", Commun. Math. Phys. **111**, 613-665 (1987).

[**69**] S.L. Woronowicz "Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups", Invent. Math. **93**, No.1, 35-76 (1988).

[**70**] S.L. Woronowicz "Quantum $E(2)$ group and its Pontryagin dual", Lett. Math. Phys. **23**, 251-263 (1991).

[**71**] S.L. Woronowicz "From multiplicative unitaries to quantum groups", Int. J. Math. **7**, No.1, 127-149 (1996).

Lebenslauf

Persönliche Daten:

	Robert Fischer geboren am 14. März 1975 in München ledig
Vater:	Kurt Fischer
Mutter:	Giesela Fischer, geb. Weis

Schulbildung:

Sept. 1981 - Juli 1985	Grundschule in Waldtrudering, München
Sept. 1985 - Juni 1994	Ernst-Mach-Gymnasium Haar, bei München

Hochschulreife: Abitur am 1. Juli 1994

Hochschulstudium:

Nov. 1994:	Beginn des Studiums der Physik an der Ludwig-Maximilians-Universität München
April 1996:	Vordiplom in Physik
Sept. 1996:	Vordiplom in Mathematik
Mai 1997:	Studienfachwechsel zu Diplom-Mathematik
Sept. 1999:	Exmatrikulation (Zivildienst)

Prüfungen: Diplom im Fach Mathematik am 28. Juli 2000

Zivildienst: September 1999 bis Juli 2000

Ableistung des Zivildienstes im Bereich der individuellen Schwerbehindertenbetreuung (ISB)

Promotionsstudium: seit Oktober 2000

Promotionsstudium an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster bei Prof. Dr. Siegfried Echterhoff

Tätigkeiten: seit dem 3. November 2003

wiss. Mitarbeiter an der WWU Münster