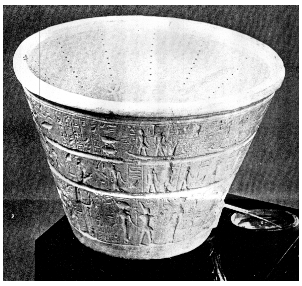
Dieter Stirn

Wie die Zeit verrinnt



Pädagogische Gesichtspunkte

Aufgabenstellung	Darstellung	Dokumentation
Anwendungsbezogen Teilweise geführt	Graphisch Tabellarisch Algebraisch	Protokoll im Schülerheft

Technologie

Tabellen-kalkulation	Graphischer Taschenrechner	Computeralgebra-system	Dynam. Geo-metriesoftware
X	(X)	X	

Ziele und Beschreibung der Einheit

- Methoden der Analysis auf eine Fragestellung aus der realen Umwelt anwenden können
- Den Einfluss von Parametern auf die untersuchte Größe erkennen und abschätzen können
- Ein mathematisches Modell auf ein reales Objekt anpassen können

Rolle der Technologie

Medium
- zum Visualisieren
- zum entdeckenden Lernen

Werkzeug zum Rechnen mit Termen

Notwendige Vorkenntnisse

- Kenntnisse aus der Differentialrechnung
- Kenntnisse der Regressionsrechnung
- Kenntnisse der Lösungsmethode von einfachen Differentialgleichungen (z.B. Auf-, Entladung eines Kondensators)

Dauer der Einheit

3 - 4 Unterrichtsstunden

Unterrichtsorganisation

- Die Erarbeitung der Grundlagen kann im traditionellen Lehrer-Schüler-Gespräch durchgeführt werden.
- Für die experimentellen Arbeiten eignet sich Partner- oder Gruppenarbeit am besten.
- Die Schüler sollen durchgängig zu selbstständigem Arbeiten angeleitet werden.

Aufgabenstellungen

Aufgabe 1: (Experiment und Auswertung)

Eine der ersten Uhren in der Geschichte der Zeitmessung ist wohl diejenige Wasseruhr, die aus einem achsensymmetrischen Hohlgefäß mit einer kleinen Ausflussöffnung besteht Der Wasserstand wird dabei entweder auf einer Skala am Rand des Gefäßes oder an einem Stab, der die Symmetrieachse des Gefäßes bildet, abgelesen.

Für das Experimentieren steht ein zylindrisches Gefäß mit einer kleinen Auslauföffnung, ein Messzylinder und eine Stoppuhr zur Verfügung.

a) Untersuchen Sie, wie die Höhe des Wasserspiegels mit der Zeit abnimmt, wenn das Wasser aus dem Gefäß fließt.

b) Erstellen Sie eine Tabelle, in der abhängig von der Zeit das verbleibende Wasservolumen im Gefäß dargestellt wird.

c) Stellen Sie die Tabelle graphisch dar.

d) Ermitteln Sie eine geeignete Regressionskurve für die Anpassung an die Messpunkte und bestimmen Sie deren Gleichung.

Aufgabe 2: (Modellbildung und Analyse)

Information

Nach dem hydrostatischen Prinzip gilt für die Austrittsgeschwindigkeit *v* des Wassers $v = \sqrt{2gh}$.

Das Volumen *dV* des Wassers, das in der Zeit *dt* aus der Öffnung strömt, wird berechnet durch $dV = A \cdot v \cdot dt$.

Es ist gleich groß der Abnahme der Wassermenge im Gefäß $dV = -B \cdot dh$.
D.h. es gilt: (1) $-B \cdot dh = A \cdot v \cdot dt$ mit
B: Öffnungsfläche des Gefäßes, A: Fläche der Auslauföffnung,
h : Höhe des Wasserspiegels im Gefäß (h= h(t)), g: Erdbeschleunigung.

Aufgabe 2.1 [1]

a) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen aus dem durchgeführten Experiment.
b) Vergleichen Sie die Lösung der Differentialgleichung mit der Regressionsgleichung.
c) Diskutieren Sie die Abweichung der Differentialgleichung von der Regressionsgleichung und stellen Sie den Modellcharakter der Differentialgleichung heraus.

Aufgabe 2.2 [2]

Annahme

Das Gefäß soll so geformt sein, dass in gleichen Zeitabschnitten der Wasserspiegel sich um das gleiche Maß erniedrigt.

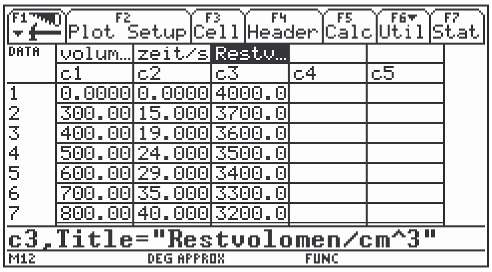
a) Stellen Sie die Gleichung (1) nach r(h) um. unter Berücksichtigung der Annahme: $B = \pi\, r(h)^2$ und $A = \pi\, d^2$ (mit d Radius der Auslauföffnung)
Ersetzen Sie $-\dfrac{dh}{dt}$ durch die Konstante c.
b) Variieren Sie die Parameter c und d und untersuchen Sie die Auswirkungen der Veränderungen auf $r(h_{max})$.
c) Variieren Sie die Parameter so, dass die Form des im Experiment verwendeten Gefäßes erreicht wird, dies gilt für $r(h_{max})$ und bestimmen Sie die Zeitspanne für die vollständige Entleerung des Gefäßes.
d) Variieren Sie den Parameter d so, dass der Wasserspiegel um 2cm/h sinkt und die obere Öffnung des Gefäßes einen Radius von ca. 15 cm besitzt. Die Höhe des Gefäßes soll 50 cm betragen.

Lösungsvorschläge (speziell für den TI-89)

[1] Voraussetzung für die Aufgabenstellung: Im Unterricht sind Differentialgleichungen bereits behandelt worden, die Methode der Variablentrennung ist bekannt.
[2] Sind im Unterricht nur einfache Differentialgleichungen behandelt worden (Bsp.: Abkühlungsvorgänge, Entladung eines Kondensators etc.), dann ergibt sich die Aufgabe 2.2 . Durch die Annahme einer speziellen Ausführung des Glaskörpers, wird die mathematische Bearbeitung sehr vereinfacht. Des weiteren stellt die Annahme einen plausibleren Realitätsbezug dar.

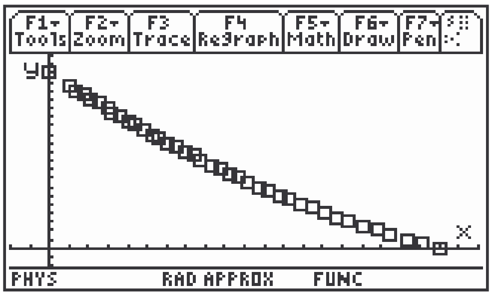
Für das Experiment wurde ein zylindrisches Glasgefäß mit einem Fassungsvermögen von 4 l verwendet. Die Auslauföffnung wurde durch ein Glasröhrchen definiert. Der Radius des Glasgefäßes betrug $r = 7{,}5$ cm, der Radius der Auslauföffnung war $d=1{,}8$ mm . Da die Höhe des Wasserspiegels nur sehr ungenau bestimmt werden konnte, wurde das ausfließende Wasser mit einem Messbecher aufgefangen und die Zeitspanne für jeweils 100 cm^3 Wasser mit einer Stoppuhr gemessen.

Zu Aufgabe 1



DATA	volum…	zeit/s	Restv…		
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0.0000	0.0000	4000.0		
2	300.00	15.000	3700.0		
3	400.00	19.000	3600.0		
4	500.00	24.000	3500.0		
5	600.00	29.000	3400.0		
6	700.00	35.000	3300.0		
7	800.00	40.000	3200.0		

Eintragen der Messwerte im Data/ Matrix Editor:
c1: gemessene Wassermengen
c2: die dazugehörige Zeit
In Spalte c3 wird das im Gefäß verbliebene Volumen generiert.



Graphische Darstellung der Tabellenwerte:
x: c2
y :c3

Die optimale Regressionskurve wird mit Hilfe des vom TI89 bereitgestellten Kalküls angegeben:

$$V = 0{,}025\, t^2 - 21{,}52\, t + 4008{,}3$$

Darin bedeuten: V das Restvolumen in cm^3 , t die Zeit in Sekunden.

Zu Aufgabe 2.1

Die Lösung der Differentialgleichung (1) ist :

$$h(t) = \frac{A^2}{2B^2} \cdot g \cdot t^2 - \frac{A}{B}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{h_{max}} \cdot t + h_{max}$$

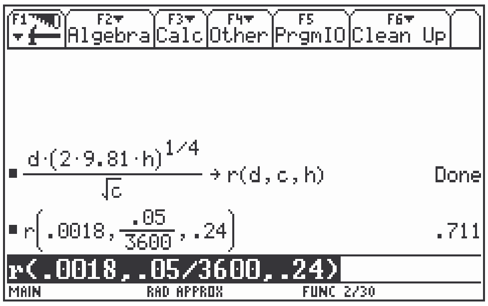
Unter der Annahme B = const ergibt sich nach Multiplikation mit B und unter Einsatz der Randbedingung $A=0{,}102\ cm^2$, $B=176{,}71\ cm^2$ und $h_{max} =22{,}6$ cm:

$$\frac{A^2}{2B} \cdot g = 0{,}023\, \frac{cm^3}{s^2}, \qquad A \cdot \sqrt{2g \cdot h_{max}} = 21{,}43\, \frac{cm^3}{s}, \qquad h_{max} \cdot B = 4000\ cm^3$$

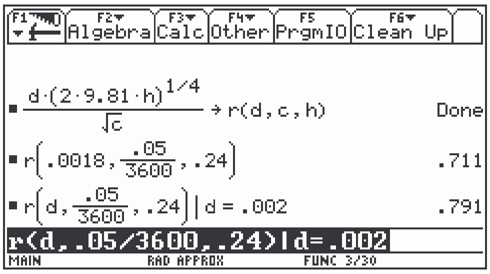
Zu Aufgabe 2.2

Mit $c = \frac{A}{B} \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)}$, $B = \pi \cdot r(h)^2$, $A = \pi \cdot d^2$ folgt: (2) $r(h) = \frac{d \cdot \sqrt[4]{2g \cdot h(t)}}{\sqrt{c}}$

Durch gezieltes Verändern der Parameter werden nun die vorhandenen Größen im Experiment realisiert.

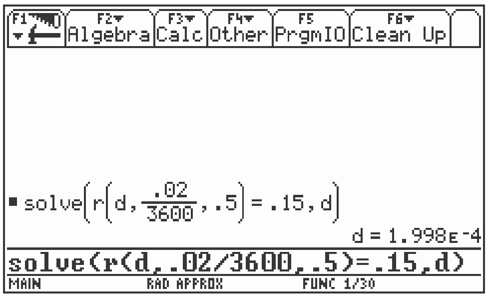


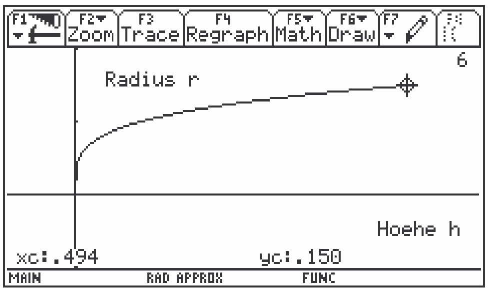
Zuweisung der Variablen r(d,c,h)



Experimentieren durch verschiedene Wertzuweisungen

Veränderungen der Parameter können mit dem „Mit"-Operator definiert werden.





Graph der Funktion r(h), dargestellt für 0< h < 0,5 m.

Ein Radius von 0,2 mm für die Auslauföffnung erscheint vielleicht unrealistisch. Welcher Radius ist aber realistisch?!

Literaturhinweise

[1] Mackensen, v. L. (o.J.): Neue Ergebnisse zur ägyptischen Zeitmessung, Sonderdruck der Staatl. Kunstsammlung Kassel, Abt. für Technikgeschichte, Callwey Verlag, München