



Theoretische Physik

Modellierung der Dynamik granularer Materie durch ein viskoplastisches Kontinuumsmodell

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Thomas Stanislaus Zub
aus Niemodlin

- 2016 -

| | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| Dekan: | Prof. Dr. Christian Weinheimer |
| Erster Gutachter: | Prof. Dr. Stefan J. Linz |
| Zweiter Gutachter: | Prof. Dr. Ulrich Hansen |
| Tag der mündlichen Prüfung: | 21.10.2016 |
| Tag der Promotion: | 21.10.2016 |

Für Alexandra und Victoria

Inhaltsangabe

In dieser Arbeit werden zwei bekannte granulare Problemstellungen – der Fluss entlang der schrägen Ebene und die Musterbildung unter vertikaler Vibration – mithilfe eines Kontinuumsmodells untersucht. Dieses Modell wird basierend auf den Cauchy-Bewegungsgleichungen mit einer nichtnewtonschen Viskosität und einem plastischen Term abgeleitet und untersucht.

Dafür werden zunächst die wichtigsten Erkenntnisse der granularen Rheologie zusammengefasst und grundlegende Eigenschaften besprochen. Der Fokus liegt dabei auf der Bagnold-Reibung, die die Skalierung zwischen Scherspannung und Scherrate beschreibt, und der druckabhängigen Grenzspannung, die ein wesentlicher Effekt der Reynolds' Dilatanz ist. Dann erfolgt die Aufbereitung der Experimente und derer Resultate für den Fluss entlang der schrägen Ebene und der Musterbildung unter vertikaler Vibration. So zeigt sich im Fluss entlang der schrägen Ebene ein charakteristisches Geschwindigkeitsprofil mit einer hysteretischen Abhängigkeit vom Verkipfungswinkel. Bei der vertikalen Vibration entstehen subharmonische Muster in Form von zeitlich oszillierenden Rippeln, Quadraten und Hexagonen. Diese lassen sich in Abhängigkeit der Vibrationsstärke in klare Entstehungsgebiete aufteilen.

Aufbauend auf diesen Grundlagen wird auf Basis der Cauchy-Bewegungsgleichungen das Kontinuumsmodell abgeleitet. Es handelt sich dabei um eine inkompressible Impulsgleichung mit einer scherverdünnenden Viskosität und einer druckabhängigen Grenzspannung. Somit handelt es sich – analog zu Herschel-Bulkley-Fluiden – um ein viskoplastisches Kontinuumsmodell nichtnewtonscher Fluide. Das vorliegende Modell wird nun zunächst auf den Fluss entlang der schrägen Ebene angewendet. Dabei werden die Modellgleichungen um eine zusätzliche statische Grenzspannung erweitert, um im Anschluss auf eine effektiv eindimensionale Bewegungsgleichung reduziert zu werden. Das System reproduziert das charakteristische Bagnold-Profil der Geschwindigkeit und ermöglicht Einblicke in das raumzeitliche Verhalten. So lassen sich das Entstehen des Scherprofils analog zu den vorherigen Erkenntnissen der Literatur zeigen und eine Propagationsfront, die die Scherung induziert, beobachten und beschreiben.

Die Entstehung der Muster unter vertikaler Vibration wird durch das Abheben und das Aufschlagen des Granulats von der Platte induziert. Dieses Verhalten kann durch das inelastische Bouncing-Ball-Modell beschrieben werden. Aus diesem erfolgt dann die Kraftmodellierung für das Kontinuumsmodell, die den Effekt der Vibration berücksichtigt. Das mit dieser Kraftbeschreibung erweiterte Modell wird dann numerisch

behandelt. Da es sich bei der Musterbildung um ein Problem mit freier Oberfläche handelt, werden die Systemgleichungen im Rahmen der Volume-of-Fluid-Methode um eine zweite Phase erweitert. Hierfür wird angenommen, dass sich oberhalb des Granulats Luft befindet, welche allerdings keinen qualitativen Einfluss auf das System ausübt. Das erweiterte Modell ist dann im Rahmen der Finite-Volumen-Methode Ausgangspunkt der numerischen Lösung. Die notwendigen Verfahren und Methoden zur Diskretisierung und anschließenden Lösung werden vorgestellt. Die Durchführung geschieht mit der Bibliothek für numerische Strömungsmechanik OpenFoam[®] .

Die experimentell gefundenen Muster werden numerisch reproduziert und wesentliche Eigenschaften herausgestellt. So lässt sich das raumzeitliche Verhalten der Geschwindigkeit beschreiben, so wie der Einfluss des Aufschlags der Platte im System. Dafür werden charakteristische Größen, wie die mittlere kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der Zeit, untersucht.

Abstract

In this thesis, two fundamental granular problems – the chute flow and the pattern formation under vertical vibration – are studied with a continuum model. This model is derived from the Cauchy momentum equations with a non-Newtonian viscosity and a plastic contribution.

In the first step, important parts of the granular rheology are summarized and main properties are outlined. The focus lies on the Bagnold friction, describing the relationship between shear stress and shear rate, and the pressure-dependent yield stress, a main effect of the Reynolds' dilatancy. The description and results of the experimental setups of the chute flow and the pattern formation are represented. The chute flow shows a characteristic velocity profile as a function of the inclination angle. This dependence is of hysteretic nature, leading to two critical angles. The pattern formation under vertical vibration results in a subharmonic excitement of oscillatory patterns of quadratic, ripple-like or hexagonal form. The occurrence can be divided into regions mainly depending on the vibration strength.

Based on these foundations, the derivation of the continuum model based on the Cauchy momentum equations is performed. In summary, this model is an incompressible impulse equation with a shear-thickening viscosity and a pressure-dependent yield stress. Such a model is called – in analogy to Herschel-Bulkley fluids – a viscoplastic continuum model for non-Newtonian fluids. Subsequently, the model is applied to the chute flow. Therefore, an additional static yield is considered, followed by a reduction of the underlying model to a one-dimensional set of equations. The resulting system reproduces the characteristic Bagnold velocity profile and gives insight into the spatio-temporal behavior. In analogy to recent findings, the evolution of the shear profile can be analyzed leading to a propagation front inducing the shearing in the system.

The pattern formation under vertical vibration is driven by the lift and impact of the granular system on the plate. This behavior can be well described by the inelastic bouncing ball model. Based on this model, a forcing contribution of the vibration is carried out and attached to the full continuum model. The extended model is analyzed numerically. For the treatment of the free surface boundary of the granular system, a second phase is added to the system using the volume of fluid method. Air is chosen as the second phase assuming that no qualitative change of the granular behavior is induced. The two phase system is then solved with the finite volume method. The necessary steps for the discretization and the solution are explained in detail. The

realization is carried out with the computational fluid dynamics library OpenFoam[®] .

The experimentally observed patterns are reproduced and important properties are described. The spatio-temporal behavior of the velocity is analyzed, revealing the substantial influence of the impacts. For this analysis, the dependence on characteristic properties, for example the averaged kinetic energy, is investigated.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Granulare Rheologie | 5 |
| 2.1. Packungsdichte und Reynolds' Dilatanz | 5 |
| 2.2. Skalengesetze zwischen Scherspannung und Scherrate: Bagnold-Skalierung und Trägheitszahl | 7 |
| 2.3. Granulare Temperatur | 10 |
| 3. Granularer Fluss entlang der schrägen Ebene | 11 |
| 4. Strukturbildung unter vertikaler Vibration | 17 |
| 5. Theoretische Grundlagen | 23 |
| 5.1. Makromechanische Modelle | 23 |
| 5.2. Mikroskopische Modelle | 24 |
| 5.3. Kontinuumsmodelle | 25 |
| 5.4. Ableitung der Modellgleichungen | 26 |
| 5.5. Charakterisierung von Mustern durch die Rauheit w und die Schiefe s | 31 |
| 6. Resultate für den granularen Fluss entlang der schrägen Ebene | 35 |
| 6.1. Grundlagen und Erweiterung des Modells | 35 |
| 6.2. Reduktion auf eine eindimensionale Dynamik | 37 |
| 6.3. Analytische Lösung und Hystereseverhalten | 38 |
| 6.4. Dynamisches Verhalten | 41 |
| 7. Das inelastische Bouncing-Ball-Modell | 45 |
| 7.1. Modell | 45 |
| 7.2. Berechnung der Kräfte | 49 |
| 8. Numerische Lösung des Kontinuumsmodells | 53 |
| 8.1. Behandlung der freien Oberfläche: Volume-of-Fluid-Methode | 53 |
| 8.2. Finite-Volumen-Methode | 56 |
| 8.3. Interpolation von Oberflächengrößen | 59 |
| 8.4. Gradientenbestimmung | 60 |
| 8.5. Zeitliche Diskretisierung | 61 |
| 8.6. Lösung der Druckgleichung: das PISO-Verfahren | 64 |

| | |
|---|------------|
| 8.7. Lösung der Advektionsgleichung für das Phasenfeld: das MULES-Verfahren | 66 |
| 9. Resultate des granularen Systems unter vertikaler Vibration | 71 |
| 9.1. Geometrie und Randbedingungen | 71 |
| 9.2. Systemparameter und analysierte Größen | 74 |
| 9.3. Simulation des zweidimensionalen Systems | 75 |
| 9.4. Simulation des dreidimensionalen Systems | 81 |
| 9.5. Simulation des dreidimensionalen Systems ohne Plattenoszillation . . . | 87 |
| 9.6. Simulation des dreidimensionalen Systems mit einem Reibungswinkel $\varphi_d = 0^\circ$ | 90 |
| 10. Zusammenfassung und Ausblick | 93 |
| A. Anhang | 97 |
| A.1. Reduktion des granularen Systems auf eine Dimension | 97 |
| A.2. Berechnung der Aufschlagszeitpunkte | 98 |
| A.3. Simulation des zweidimensionalen Systems für eine Vibrationsstärke von $\Gamma = 3,0$ | 99 |
| A.4. Simulation des dreidimensionalen Systems für eine Vibrationsstärke von $\Gamma = 3,0$ | 103 |
| B. Literaturverzeichnis | 107 |

1. Einleitung

Granulare Systeme – wie beispielsweise Sand oder Kies – lassen sich häufig im Alltag beobachten und sind ein Gebiet aktueller Forschung und Anwendungen. So lassen sich beispielsweise plastische Eigenschaften bei der Aufschüttung von Kies oder der Hügelbildung bei Sanddünen, Segregationseffekte bei geschüttelten Systemen mit unterschiedlichen Korngrößen oder Musterbildung, wie Sandrillen an der Küste, beobachten. Anwendung finden sie in verschiedensten Gebieten, wie in der Landwirtschaft beim Bau und Entleeren von Silos [1,2], im Bergbau beim Transport und Lagern von Geröll oder Kohle, sowie in der Pharmazie bei der Produktion von Medikamenten und deren Transport mit Schwingförderern [3,4]. Es gibt also eine große Vielfalt dieser Systeme, die im Allgemeinen auf folgende Art klassifiziert werden:

Ein granulares System – auch granulare Materie genannt – ist ein Ensemble makroskopischer Teilchen, welches im Wesentlichen über abstoßende Kontaktkräfte, wie Stöße, wechselwirkt [5]. Die einzelnen Konstituenten haben typischerweise einen Durchmesser von wenigen Mikrometern bis einige Zentimeter und reichen von homogen geformten Sphären oder Scheiben, wie sie häufig im Experiment [5,6] realisiert werden, bis zu inhomogen geformten Teilchen unterschiedlicher Größen, wie sie typischerweise in der Natur zu finden sind (siehe Abbildung 1.1). Bereits bei dieser informellen Definition



Abbildung 1.1.: Links: Sanddüne mit Rippeln in Marokko [7]. Rechts: Geröll an der Ostseeküste [8].

lassen sich einige zentrale Eigenschaften dieser Systeme hervorheben: Die makroskopische Ausdehnung dieser Systeme legt – unter Vernachlässigung von Verformungen der einzelnen Konstituenten – eine Beschreibung im Rahmen der klassischen Mechanik nahe. Ein einzelnes granulares Teilchen verhält sich wie ein starrer Körper, welcher im Kontext von äußeren Kräften und Stößen mit seinen Nachbarn den Newton'schen

Gesetzen unterliegt. Nun besteht ein Granulat aus einer Vielzahl von Konstituenten und daher ist das Gesamtsystem ein klassisches Vielteilchenproblem starrer Körper. Zusätzlich ist jedoch bei diesen nun auch das umgebende Medium von hoher Wichtigkeit, da dieses zusätzliche Effekte induziert oder aber auch unterdrückt. So zeigen trockene granulare Systeme durch Reibung induzierte elektrostatische Effekte [9] und bei nassen Systemen lassen sich Adhäsionseffekte durch Wasserbrückenbindungen feststellen [10–12]. Ebenfalls ist der Übergang zu Fluid-Granulat-Suspensionen möglich, wie den Schuttstrom (engl.: debris flow), welcher bei geophysikalischen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt [13, 14].

Bereits Reynolds und Faraday beschäftigten sich mit granularer Materie und konnten so Eigenschaften wie Dilatanz [15] oder Musterbildung [16] beschreiben. So untersuchte Faraday Fluide und granulare Systeme auf einer vertikal oszillierenden Oberfläche und die dabei entstehende subharmonische Musterbildung, welche unter dem Namen Faraday-Wellen bekannt sind [17–19]. Reynolds konnte die Dilatanz granularer Systeme beschreiben, also die Auflockerung granularer Systeme, welche notwendig für Scherbewegungen ist. Die nach ihm benannte Reynolds' Dilatanz ist essentiell für das Verständnis von granularer Materie, da sich aus ihr viele Eigenschaften, wie die Möglichkeit der Hügelbildung, ergeben [20–22].

Eine bedeutende Arbeit zur mathematischen Beschreibung geht auf Bagnold zurück [23, 24]. Im Rahmen zweidimensionaler geometrischer Überlegungen konnte er einen Zusammenhang zwischen der Scherspannung und der Scherrate bei dicht gepackten, granularen Systemen ableiten und experimentell verifizieren [23]. Diese Relation – in der Literatur zumeist Bagnold-Skalierung genannt – stellt einen wichtigen Schritt zur Modellierung und Beschreibung granularer Systeme dar, da sie einen Ansatz für die wirkenden Spannungen und deren Effekt auf die Dynamik des Granulats ermöglicht. So folgte auch eine Erweiterung dieses Skalengesetzes in Abhängigkeit der Trägheitszahl, welches in einer Vielzahl an Untersuchungen bestätigt werden konnte [6, 23–25].

Einen weiteren wichtigen Schritt zum Verständnis dichter granularer Systeme gelang Jop *et al.* [26]. Die Bagnold-Skalierung wurde auf ein allgemeineres Gesetz generalisiert, welches nun zusätzliche druckabhängige plastische Effekte berücksichtigt und somit die Festkörpereigenschaften, wie Grenzspannungen, beschreiben kann. Basierend auf diesen konnten einige weitere Phänomene, wie die Hystereseeigenschaft beim Fluss entlang der schrägen Ebene [27], beschrieben werden.

Diese Arbeit legt den Hauptfokus auf zwei granulare Problemstellungen: Als erstes wird der Fluss entlang der schrägen Ebene, der als konzeptionell einfaches System viele Eigenschaften granularer Systeme zeigt, behandelt. Es werden charakteristische Skalengesetze abgeleitet und das raumzeitliche Verhalten beschrieben. Als zweites erfolgt die Beschreibung der Musterbildung unter vertikaler Vibration. Dies ist eine Paradebeispiel für die kollektive Dynamik solch eines Systems, welches zu verschiedenen Mustern [28–30] oder zeitlich oszillierende lokalisierte Strukturen [31], führt. Hierfür werden

in beiden Fällen zunächst Erkenntnisse vorheriger Forschung dargestellt und die für die Modellierung wichtigen Eigenschaften herausgestellt, um so die nötigen Zusammenhänge zur Modellierung durch die Cauchy-Bewegungsgleichungen zu ermöglichen. Dann erfolgt die Ableitung des auf den inkompressiblen Cauchy-Bewegungsgleichungen basierenden Modells. Hierfür wird ein Ansatz auf Basis der Überlegungen von Jop *et al.* [26] für den Spannungstensor verwendet, der eine nichtlineare Viskosität mit zusätzlicher druckabhängiger Grenzspannung beschreibt. Dabei wird eine Näherung durchgeführt, die die Gleichung in eine für die numerische Lösung einfachere Form bringt. Es folgt dann die Anwendung auf die erste in dieser Arbeit behandelte Problemstellung – dem Fluss entlang der schrägen Ebene. Das Modell wird auf eine analytisch lösbare, reduzierte Form gebracht und wichtige Erkenntnisse abgeleitet. Zur Darstellung der Musterbildung unter vertikaler Vibration wird ergänzend das inelastische Bouncing-Ball-Modell und die daraus folgende Kraftmodellierung der Vibration abgeleitet. Es folgt dann ein Kapitel, welches die für die numerische Behandlung erforderlichen Verfahren beschreibt. Dafür wird eine Erweiterung des Modells durch die Volume-of-Fluid-Methode durchgeführt, die eine Beschreibung der bei dem Vibrationsexperiment auftretenden freien Oberfläche durch ein Zwei-Phasen-System ermöglicht [32, 33]. Dann erfolgt die räumliche und zeitliche Diskretisierung des Systems anhand der Finite-Volumen-Methode und die Bestimmung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Zuletzt erfolgt die Behandlung des PISO- und MULES-Verfahrens, die zur Lösung der Inkompressibilität und der Phasenadvektionsgleichung notwendig sind [34, 35]. Die Umsetzung erfolgt mit der in C++ geschriebenen Programmbibliothek OpenFoam[®] in der Version 2.4.0 [36]. Die erhaltenen Resultate werden diskutiert und auftauchende Relationen abgeleitet. Abschließend werden die gefundenen Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick über weitere Ansätze dargelegt.

2. Granulare Rheologie

Die Rheologie beschäftigt sich mit den Fließ- und Verformungseigenschaften von einem System. Die Kenntnis über diese ist äußerst wichtig für das Verständnis solcher Systeme und eine Grundvoraussetzung für die kontinuumsmechanische Modellierung. Im Nachfolgenden werden einige wichtige Erkenntnisse granulare Rheologie vorgestellt, die – insbesondere im Falle der Skalengesetze für Scherspannung und Scherrate – Grundlage für die theoretische Modellierung dieser Arbeit sind.

2.1. Packungsdichte und Reynolds' Dilatanz

Da es sich bei granularen Systemen um makroskopische Vielteilchensysteme handelt, ist die Anordnung der einzelnen Konstituenten zueinander von entscheidender Bedeutung. Eine typische und im Kontext der granularen Rheologie häufig verwendete Größe ist die Packungsdichte Φ . Diese wird im Allgemeinen als Verhältnis des Gesamtvolumens der Konstituenten zum gesamten belegten Volumen definiert [37]. Diese ist nach oben hin durch die maximale Packungsdichte Φ_{\max} beschränkt, bei der die Konstituenten das maximal mögliche Volumen belegen. Diese wird allerdings im Experiment nicht erreicht, da dafür eine ideale Anordnung realisiert werden müsste [37], daher bezeichnet Φ_{\max} auch häufig einfach die Packungsdichte eines ruhenden Systems. Nach unten hin ist die Packungsdichte $\Phi \geq 0$ ebenfalls beschränkt. Bei diesem Zustand ist der Abstand der einzelnen Konstituenten sehr groß, daher werden Systeme mit geringer Packungsdichte als granulare Gase bezeichnet [38, 39].

Eine grundlegende Erkenntnis granularer Rheologie in Bezug auf die Packungsdichte stammt von Reynolds [15]. Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist ein System von ruhenden, harten, sphärischen Partikeln. Solch ein System von Kugeln würde in Abhängigkeit von der anfänglichen Anordnung unter Einfluss von Gravitation seine maximal mögliche Packungsdichte Φ_{\max} annehmen. Diese ermöglicht jedoch keine Bewegung der einzelnen Konstituenten relativ zueinander, da diese durch die dichte Packung direkt aneinander liegen und somit kein freier Raum für Bewegung vorhanden ist. Folglich kann das System nicht scheren und sich nur kollektiv in eine Richtung bewegen. Im Umkehrschluss erfordert also eine scherende Bewegung, bei der sich die Partikel relativ zueinander bewegen, eine Verringerung der Packungsdichte Φ . Unter äußeren Einflüssen, wie Gravitation, existiert dann sogar eine Grenzspannung im System, welche überwunden werden muss um eine Auflockerung des Systems zu ermöglichen, die

dann letztlich die Bewegung ermöglicht. Diese Eigenschaft wird *Reynolds' Dilatanz* genannt und stellt bereits einen wichtigen Unterschied im Vergleich zu anderen Systemen, wie beispielsweise newtonsche Fluide, dar. Die Abbildung 2.1 stellt diese schematisch dar. Auch wenn dieses Phänomen qualitativ verstanden ist, so fehlt eine funktionale

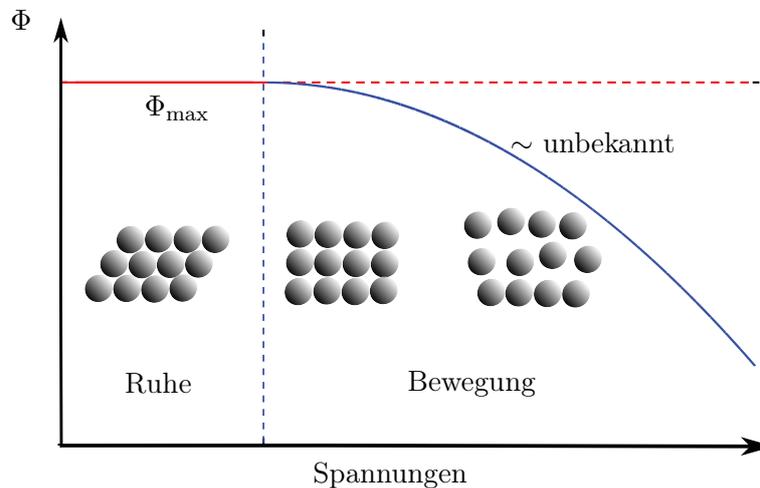


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung der Reynolds' Dilatanz. Granulare Systeme zeigen Bewegung erst ab einer Grenzspannung (blaue gestrichelte Linie). Das System verringert dann seine Packungsdichte um eine Bewegung der Konstituenten zueinander zu ermöglichen (blaue durchgezogene Linie).

Form, welche beispielsweise bei der mathematischen Modellierung verwendet werden könnte. Dies liegt an den zahlreichen Einflüssen, welche die Abhängigkeit von der Packungsdichte Φ bestimmen. So spielen die Systemränder und die Geometrie [6], die Ausbildung von Kraftketten bei dichten Systemen [18] oder die Anfangskonfiguration [37] eine entscheidende Rolle. So konnte beobachtet werden, dass der Druck am Boden eines Silos im Wesentlichen nicht von der Höhe abhängt, da die Kraftketten zu einem Druck an die Seitenwände führen [40, 41]. Dieser Effekt der Kraftketten wird auch als der Janssen-Effekt bezeichnet und ist auch ein Grund für die Stabilität von Sandhaufen [18, 22, 41].

Das in dieser Arbeit abgeleitete Modell nimmt an, dass die Variation der Packungsdichte gering ist bzw. der Effekt dieser bei den jeweiligen Problemstellungen vernachlässigt werden kann, es gilt also

$$\Phi \approx \text{const.}$$

Plastische Effekte, wie die Grenzspannungen, werden über andere Kriterien eingebunden, wie zum Beispiel dem Mohr-Coulomb-Kriterium. Solch eine Behandlung ist besonders im Rahmen der kontinuumsmechanischen Modellierung günstig, da sonst kompressible Systemgleichungen vonnöten wären.

2.2. Skalengesetze zwischen Scherspannung und Scherrate: Bagnold-Skalierung und Trägheitszahl

Die moderne Theorie granularer Systeme hat ihren Ausgangspunkt bei den Arbeiten von Bagnold. Dieser konnte ein Gesetz zwischen der Scherspannung τ und der Scherrate $\dot{\gamma}$ ableiten und experimentell verifizieren [23, 24]. Somit ist ein Ansatz zur mathematischen Modellierung gegeben, die die Berechnung von beispielsweise Strömungsprofilen ermöglicht. Ausgangspunkt dieser Ableitung ist ein zweidimensionales Kollisionsmodell, bei dem zwei parallele Schichten granularer Teilchen gegeneinander geschert werden. Anhand geometrischer Überlegungen lässt sich nun der Geschwindigkeitsübertrag eines Partikels bei der Scherung in Relation zur Scherspannung τ ansetzen und man erhält für die Scherspannung [23, 42, 43]

$$\tau = \nu_0 \rho_0 d_p^2 f(\Phi) \dot{\gamma}^2 \sim \dot{\gamma}^2. \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet $\dot{\gamma}$ die Scherrate, ν_0 einen konstanten Vorfaktor, ρ_0 die Dichte der Partikel, d_p den mittleren Partikeldurchmesser und $f(\Phi)$ eine unbekannt Funktion der Packungsdichte Φ . Des Weiteren folgt aus diesen eine Relation für die Scherspannung τ und der Normalspannung p der Form

$$\frac{\tau}{p} = \tan \alpha =: \mu, \quad (2.2)$$

wobei α einen Winkel, der von den umgebenden Parametern, wie äußere Kräfte, und der lokalen Anordnung abhängt, darstellt und als innerer Reibungswinkel bezeichnet wird. Der Koeffizient μ entspricht einem dimensionslosen Reibungskoeffizienten, welcher nicht notwendigerweise konstant ist. Auch wenn diese Überlegungen zunächst nur für ein Granulat-Fluid-Gemisch ohne den Einfluss von Gravitation getätigt und überprüft wurden, so lassen sich die Resultate auf andere Realisierungen übertragen, wie trockene granulare Systeme oder Systeme unter Gravitation [23, 24]. Mit diesen Gleichungen ist es nun unter Bestimmung der Scher- und Normalspannungen τ bzw. p eines Systems möglich Eigenschaften, wie Grenzspannungen oder Scherprofile, zu bestimmen. Diese Relationen werden daher auch als *Bagnold-Skalierung* bezeichnet.

Eine erweiterte Beschreibung der Rheologie granularer Materie geschah durch die Einführung der Trägheitszahl I und der Analyse dieser [6, 26, 44]. Diese ergibt sich aus der Betrachtung der relevanten Zeitskalen im System, nämlich der Scherzeit

$$t_c = \frac{1}{\dot{\gamma}},$$

welche die Zeitskala der Bewegungen granularer Partikel und Schichten zueinander

beschreibt, und der Trägheitszeit

$$t_i = d_p \sqrt{\frac{\rho}{p}},$$

welche die Verschiebungszeit bei Drücken beschreibt [26,44,45]. Mit ρ wird die effektive Dichte des Granulats bezeichnet, die mit der Packungsdichte Φ über die Gleichung

$$\rho = \Phi \rho_0$$

verknüpft ist. Die Trägheitszahl I ergibt sich dann aus dem Verhältnis der beiden Zeitskalen t_c und t_i zu

$$I = \frac{t_i}{t_c} = d_p \dot{\gamma} \sqrt{\frac{\rho}{p}}. \quad (2.3)$$

Ebenfalls lässt sich die Trägheitszahl I aus einer von zwei anderen dimensionslosen Kenngrößen, nämlich der Savage-Zahl [46] oder der Coulomb-Zahl [47], auch direkt ableiten. Die Wertebereiche dieser können nun folgendermaßen interpretiert und mit der vorliegenden Dynamik des Systems verknüpft werden [6,44]: Kleine Werte der Trägheitszahl I beschreiben ein System, welches von den Drücken dominiert wird und sich daher in einem quasi-statischen Zustand befindet. Hohe Werte dagegen beschreiben ein System, bei dem die Dynamik von den Bewegungen und Kollisionen der granularen Partikel bestimmt wird. Ebenfalls ist es möglich verschiedene Systeme mithilfe ihrer Trägheitszahl I zu vergleichen, da eine Variationen beider Zeitskalen t_c und t_i bei konstanter Trägheitszahl I keine Änderungen der Systemeigenschaften zeigt [44]. Auf Basis dieser lässt sich nun die Bagnold-Skalierung (2.2) erweitern und auf eine allgemeinere Form bringen [6,26]

$$\frac{\tau}{p} = \mu(I). \quad (2.4)$$

Durch diese ist nun eine Berücksichtigung der Effekte der verschiedenen Zustände, welche durch die Trägheitszahl I beschrieben werden, möglich. Hierfür ist dann ein geeigneter Ansatz für den Reibungskoeffizienten $\mu(I)$ notwendig. Dieses Skalengesetz gilt allerdings zunächst nur für eine Raumdimension und ist daher nur bedingt für räumlich mehrdimensionale Probleme geeignet. Jedoch ist eine Verallgemeinerung möglich, die eine Anwendung auf Systeme wie die Cauchy-Bewegungsgleichung oder andere kontinuumsmechanische Modelle ermöglicht. Dies wird durch das Prinzip der Koaxialität beschrieben [26,48]. Dafür wird das Vektorfeld \vec{v} , welches das als kontinuierlich angenommene Geschwindigkeitsfeld der granularen Partikel beschreibt, eingeführt. Dann generalisiert sich die Spannung τ zum Spannungstensor \mathbf{t} durch folgende Relation

$$\mathbf{t} = \tau \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \stackrel{(2.4)}{=} \mu(I) p \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \quad (2.5)$$

mit dem Schertensor

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{v} + (\vec{\nabla} \vec{v})^T \right)$$

und dessen Betrag

$$|\mathbf{D}| = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)} \equiv \dot{\gamma},$$

welche einer um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ skalierten Frobenius-Norm entspricht. Diese ist im Falle inkompressibler Systeme $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{tr}\mathbf{D} = 0$ und symmetrischer Matrizen $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ äquivalent zur zweiten Invarianten [49]

$$I_{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}\mathbf{D})^2 - \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}) \right] = -\frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^T) = -|\mathbf{D}|^2$$

des Schertensors \mathbf{D} . Mit dieser Verallgemeinerung lassen nun sich verschiedenste Ansätze im Rahmen der Kontinuumsmechanik untersuchen. Insbesondere haben alle diese, die die Bedingung

$$\mu(I \rightarrow 0) \rightarrow \mu_y \neq 0$$

erfüllen, gemein, dass sie eine Grenzspannung

$$|\mathbf{t}| \geq \tau_y = \mu_y p$$

aufweisen, welche die druckabhängigen plastischen Effekte im granularen System ähnlich zu denen in Bingham- oder Herschel-Bulkley-Fluiden beschreiben [50–53]. Ein erfolgreicher Ansatz für den dimensionslosen Reibungskoeffizienten $\mu(I)$ geht dabei auf Jop *et al.* zurück [26, 45, 54]. Dieser hat die Form

$$\mu(I) = \mu_y + \frac{\mu_2 - \mu_y}{I_0/I + 1}$$

mit $\mu_2 > \mu_y$ zwei Reibungskoeffizienten und I_0 einer Konstanten. Dieses Modell berücksichtigt neben der oben genannten Grenzspannung $\tau_y = \mu_y p$ ein Ansteigen der effektiven Reibung bei höherer Trägheitszahl I mit einem Grenzwert von

$$\mu(I \rightarrow \infty) \rightarrow \mu_2.$$

Der Ansatz wurde dabei so gewählt, dass bei entsprechender Wahl der Systemparameter μ_y, μ_2 und I_0 die experimentellen Ergebnisse [54, 55] reproduziert werden konnten. Es folgten zahlreiche Publikationen, die diesen Ansatz auf granulare Problemstellungen anwendeten. Das in dieser Arbeit abgeleitete Modell (siehe Kapitel 5) wird basierend auf der Gleichung (2.4) einen anderen Ansatz wählen, da die explizite Druckabhängigkeit (2.3) der Trägheitszahl I bei der transienten Lösung der inkompressiblen Cauchy-Gleichung zu massiven Problemen führen kann.

2.3. Granulare Temperatur

Weitere Entwicklungen granularer Rheologie gab es im Bezug auf die Packungsdichte Φ bzw. der effektiven Dichte ρ . Der Einfluss der granularen Dichte ρ legt eine Betrachtung als kompressibles System analog zur Hydrodynamik nahe. Hierfür ist es jedoch notwendig zusätzliche Größen, wie die granulare Temperatur oder die innere Energie, einzuführen [22, 56, 57]. Dies ergab zunächst analog zur Maxwell-Boltzmann-Verteilung den globalen Temperaturbegriff

$$\langle T \rangle_{\vec{r}} \sim \langle \vec{v}^2 \rangle_{\vec{r}} - \langle \vec{v} \rangle_{\vec{r}}^2,$$

der der global gemittelten, räumlichen Varianz der lokalen Geschwindigkeit \vec{v} entspricht, und dann zum lokalen Temperaturbegriff

$$T \sim \vec{v}^2 - \langle \vec{v} \rangle_{\vec{r}}^2$$

führt, der eine Verwendung im Rahmen kontinuumsmechanischer Beschreibung ermöglicht. Nun lässt sich durch Ansetzen einer Zustandsgleichung für Druck p , Temperatur T und Dichte ρ und einer Energiegleichung das System als voll kompressibles System behandeln. Dies wurde für eine Vielzahl von Problemstellungen erfolgreich durchgeführt [1, 48, 58, 59]. Die granulare Temperatur ist allerdings keine Temperatur im Sinne der Thermodynamik. Die Stöße der granularen Partikel erfolgen nicht voll elastisch, daher kommt es bei jeder Kollision zum Verlust von kinetischer Energie durch Umwandlung in thermische Energie bzw. Verformungsenergie. Daraus folgt aber, dass es zum Verlust von Temperatur kommt, auch wenn es sich um ein geschlossenes System handelt. Dieser Verlust zeigt sich dann in charakteristischen Effekten von granularen Gasen, wie Clusterbildung, welche unter dem Namen Maxwell-Dämon bekannt sind [60–63]. Ähnliche Untersuchungen im Rahmen der statischen Physik führten dann auch zum Begriff der granularen Entropie [59, 60, 64, 65].

Diese Arbeit widmet sich ausschließlich inkompressibler Systeme, bei denen eine Betrachtung der Temperatur, Entropie oder inneren Energie nicht notwendig ist. Das Einbinden dieser in hydrodynamische Modelle führt im Allgemeinen zu hochkomplexen Gleichungen, deren Untersuchungen schwierig sind. Das hier verwendete Modell soll möglichst „simpel“ gehalten werden, um die wesentlichen Einflüsse widerzuspiegeln. Daher wird nicht tiefer auf diesen Bereich eingegangen.

3. Granularer Fluss entlang der schrägen Ebene

Unter den vielen Problemstellungen zu granularen Systemen ist der Fluss entlang der schrägen Ebene ein intensiv untersuchtes Gebiet [6, 23, 25–27, 45, 48, 54, 66–74]. Dies liegt vor allem an seiner einfachen Geometrie, welche analytische Untersuchungen erlaubt, sowie die wichtigen, grundlegenden Erkenntnisse über granulare Systeme, die aus diesem gewonnen werden können. Es handelt sich dabei um einen um den Winkel φ verkippten Boden, auf dem unter der Gravitationskraft \vec{g} ein Granulat zum Fließen gebracht wird. Das System wird dabei mithilfe von Wänden eingeschränkt, so dass ein Fluss nur die Ebene hinunter stattfinden kann. Ebenfalls wird unter der geschickten Anordnung eines Zu- und Abflusses versucht ein Strömungsprofil mit einer konstanten Höhe h zu erreichen, um so die Effekte des Zu- bzw. Abflusses möglichst zu reduzieren. Dieses idealisierte Modell findet beispielsweise Anwendung bei der Beschreibung von Sand auf Dünen, Ausladen von Kipplastern oder Schutthaufen, da damit die entstehenden Flüsse, welche das Material an der Oberfläche abtransportieren, beschrieben werden können. Eine mögliche schematische Realisierung zeigt die Abbildung 3.1.

Ausgangspunkt der mathematischen Beschreibung ist das zweidimensionale Modell. Dabei wird die räumliche Ausbreitung in die z -Richtung (in der Abbildung 3.1 in die Bildebene hinein) vernachlässigt. Des Weiteren wird angenommen, dass die Packungsdichte Φ bzw. die effektive Dichte ρ konstant sind. Mikrodynamische Simulationen

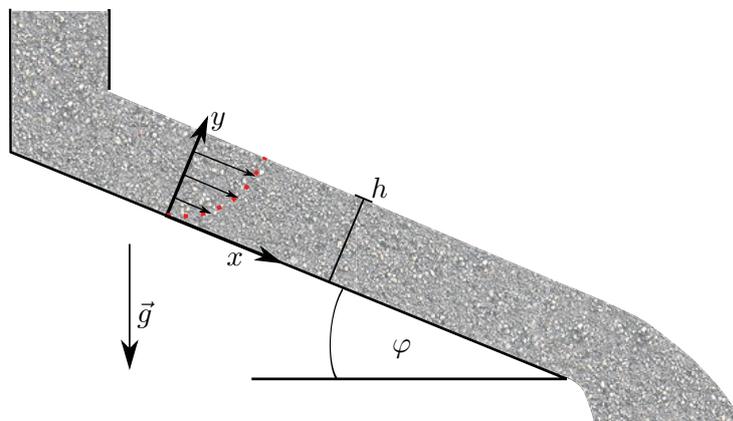


Abbildung 3.1.: Typischer experimenteller Aufbau des Flusses entlang der schrägen Ebene. Aufgrund der Verkipfung unter dem Winkel φ entsteht ein Strömungsprofil bei näherungsweise konstanter Höhe h .

bestätigen, dass dies zumindest für das Innere eine gute Näherung ist, da Änderungen der Packungsdichte Φ hauptsächlich an den Rändern stattfinden [66, 69, 72]. Dann lassen sich die Spannungen τ und p des Systems ansetzen [23, 48, 69, 71]

$$\begin{aligned}\tau &= \rho g \sin \varphi (h - y) \\ p &= \rho g \cos \varphi (h - y).\end{aligned}$$

Hierbei wurde zunächst angenommen, dass konstante Beiträge zu τ und p verschwinden, also die Spannungen an der Oberfläche $y = h$ vernachlässigt werden können. Mit diesen beiden Gleichungen bestimmt sich zunächst der dimensionslose Reibungskoeffizient (2.2) zu

$$\mu = \tan \alpha = \frac{\tau}{p} = \tan \varphi.$$

Der innere Reibungswinkel α ist also gerade durch den Verkippungswinkel φ gegeben. Mit der Skalierung der Scherspannung (2.1) – unter Zusammenfassung der konstanten Vorfaktoren in η – und Identifikation der Scherrate mit

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dy}v$$

lässt sich nun das Geschwindigkeitsprofil v bestimmen [23, 69]

$$\begin{aligned}\eta \left(\frac{d}{dy}v \right)^2 &= \rho g \sin \varphi (h - y) \\ \Rightarrow \frac{d}{dy}v &= \sqrt{\frac{\rho g \sin \varphi}{\eta}} (h - y)^{1/2} \\ \xrightarrow{v|_{y=0}=0} v &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\rho g \sin \varphi}{\eta}} \left[h^{3/2} - (h - y)^{3/2} \right].\end{aligned}$$

Die Bagnold-Skalierung führt also zu einem charakteristischen Geschwindigkeitsprofil v der Form

$$v \sim h^{3/2} - (h - y)^{3/2}, \quad (3.1)$$

welches in der Literatur häufig als *Bagnold-Profil* bezeichnet wird. Verglichen zum Profil eines newtonschen Fluids, welches in dieser Geometrie eine lineare Abhängigkeit der Form $v \sim y$ zeigt, wird bei einem Granulat ein Exponent von 3/2 beobachtet. Dies konnte experimentell und durch molekulardynamische Simulationen verifiziert werden [6, 23, 67, 69]. Dabei wurde jedoch auch gezeigt, dass dieses Gesetz im Allgemeinen nur im Inneren des Granulats und nicht an den Rändern gilt [69]. Das oben abgeleitete Geschwindigkeitsprofil beschreibt zwar die Höhenabhängigkeit, stellt jedoch die Winkelabhängigkeit nicht korrekt dar. Denn eine weitere wichtige Eigenschaft ist das Auftreten einer Winkelabhängigkeit φ des Geschwindigkeitsprofil v , bei der einen Hysterese auftritt. Geht man von einem ruhenden System aus, so existiert ein Ver-

kippungswinkel φ_s , unter dem kein Fluss entsteht. Erhöht man den Winkel φ über diesen hinaus, so setzt schlagartig die Strömung ein. Reduziert man nun adiabatisch den Winkel φ , dann erhält man einen zweiten Grenzwinkel φ_d mit $\varphi_d < \varphi_s$, unter dem kein weiterer Fluss möglich ist. Ein makromechanisches Modell für dieses Verhalten stellten Linz und Hänggi auf [75–78]. Ausgehend von der mittleren kinetischen Energie \bar{e}_{kin} und der daraus abgeleiteten mittleren Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\bar{e}_{\text{kin}}}$ konnten sie einen Ansatz in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{v} = g (\sin \varphi - [b_0 + b_2 v^2] \cos \varphi) \chi(\varphi, v)$$

mit

$$\chi(\varphi, v) = \Theta(v) + [1 - \Theta(v)] \Theta(\varphi - \varphi_s)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

ableiten. Neben der Gravitationsbeschleunigung $g \sin \varphi$ im verkippten System findet sich in der Gleichung eine entsprechende Form der Bagnold-Skalierung im Term $b_2 \cos \varphi v^2$ wieder. Zusätzlich enthält das Modell einen konstanten winkelabhängigen Reibungsterm $b_0 g \cos \varphi$, der mit der Yield-Funktion χ das Äquivalent zur klassischen Coulomb-Reibung darstellt. Diese Modell reproduziert die Hysterese-Eigenschaften des granularen Flusses entlang der schrägen Ebene [79]. Die stationäre Geschwindigkeit v^* eines fließenden Systems zeigt dabei eine charakteristische Abhängigkeit von den Winkeln φ und φ_d der Form

$$v^* \sim \sqrt{\tan \varphi - \tan \varphi_d}.$$

Ebenfalls lässt sich durch eine einfache Erweiterung Granulat in einem rotierenden Zylinder beschreiben, worauf in dieser Arbeit allerdings nicht eingegangen wird [79,80].

Mit der steigenden Leistung von Computern und der damit verbundenen effizienteren Möglichkeit für numerische Simulationen gewann eine andere Herangehensweise an Popularität. Die molekulardynamischen Simulationen – auch als Discrete Element Method (DEM) bezeichnet – behandeln ein granulares System auf Ebene seiner einzelnen Konstituenten. Das System wird als Vielteilchensystem angenommen, dessen Wechselwirkungen über die Newton'sche Mechanik bestimmt werden. Damit ist ein Einblick in die Bewegung der einzelnen Teilchen und des Ensembles möglich. Mithilfe dieser Simulationen konnte das Bagnold-Profil bestätigt werden, wenn auch gezeigt wurde, dass dies im Allgemeinen nur im Inneren des Systems gilt und Abweichungen an den Rändern entstehen [69, 72]. Des Weiteren ergaben sich neue Erkenntnisse im Bezug auf die Winkelabhängigkeit des Flusses. So wurde ein neues Regime für hohe Winkel $\varphi > \varphi_{\text{max}}$ festgestellt, bei dem ein instabiler Fluss entsteht. Ab diesem Winkel φ_{max} entsteht am Boden eine scherverdünnende Schicht, die zu einem Abheben und

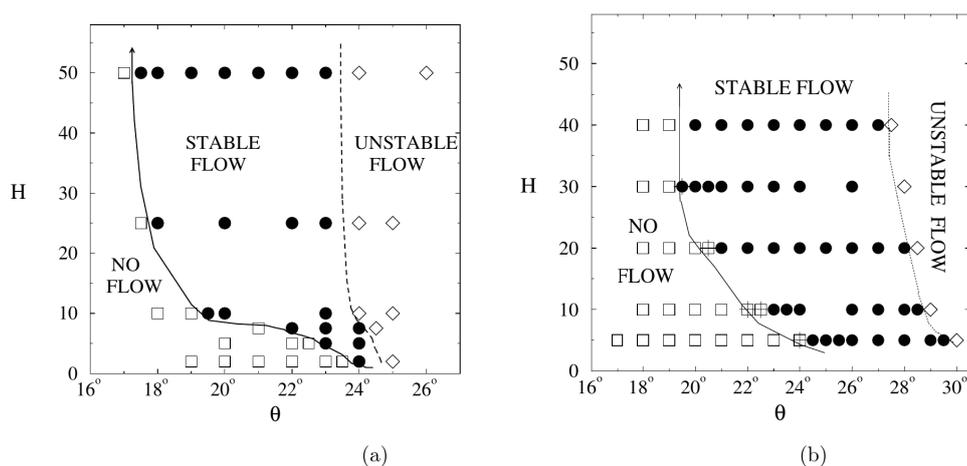


Abbildung 3.2.: Höhe h (hier: H) in Abhängigkeit des Verkipfungswinkels φ (hier: Θ), für welche die verschiedenen Flüsse auftreten (a: $2d$ -Simulationen; b: $3d$ -Simulationen) aus [69]. Es ist eine klare Separation der drei Regime – kein Fluss (Quadrat), stabiler Fluss (schwarze Punkte), instabiler Fluss (Raute) – zu erkennen. Die Höhe zeigt eine deutliche Abhängigkeit vom Verkipfungswinkel, die erst für große Höhen gegen einen konstanten Wert konvergiert.

einer instabilen Beschleunigung des gesamten Systems führt [25, 69]. Ebenfalls konnte gezeigt werden, dass die verschiedenen Grenzwinkel φ_d , φ_s und φ_{\max} von der Höhe h des Systems abhängen [25, 67, 69, 72]. So zeigt ein System geringerer Höhe deutlich höhere Grenzwinkel, die mit steigender Höhe abnehmen und für größere Höhen gegen konstante Werte konvergieren (siehe Abbildung 3.2).

Ebenfalls ermöglichen molekulardynamische Simulationen eine genauere Untersuchung der zeitabhängigen Dynamik, da das Verfolgen aller Konstituenten zu jedem Zeitpunkt möglich ist. So haben Silbert *et al.* [69] die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils untersucht und konnten das Entstehen des Scherprofils beobachten. Zu Beginn setzt sich das gesamte System homogen in Bewegung. Aufgrund des rauen Bodens, der meist durch festgeklebte Teilchen realisiert wird, bildet sich wegen der Reibungseffekte ein Scherung am Boden aus. Diese propagiert mit der Zeit entlang einer klaren Front von unten durch das gesamte System und induziert das höhenabhängige Geschwindigkeitsprofil. Nach einer gewissen Zeit geht das System in einen stationären Zustand über, dem charakteristischen Bagnold-Profil im Granulat (siehe Abbildung 3.3). Des Weiteren war es ihnen möglich die im Problem auftretende Hysterese numerisch nachzubilden und analytisch über eine Mohr-Coulomb-Analyse zu verifizieren.

In Kapitel 6 wird das in dieser Arbeit abgeleitete Modell auf den Fluss entlang der schrägen Ebene angewendet und die gewonnenen Resultate mit den hier vorgestellten Erkenntnissen verglichen.

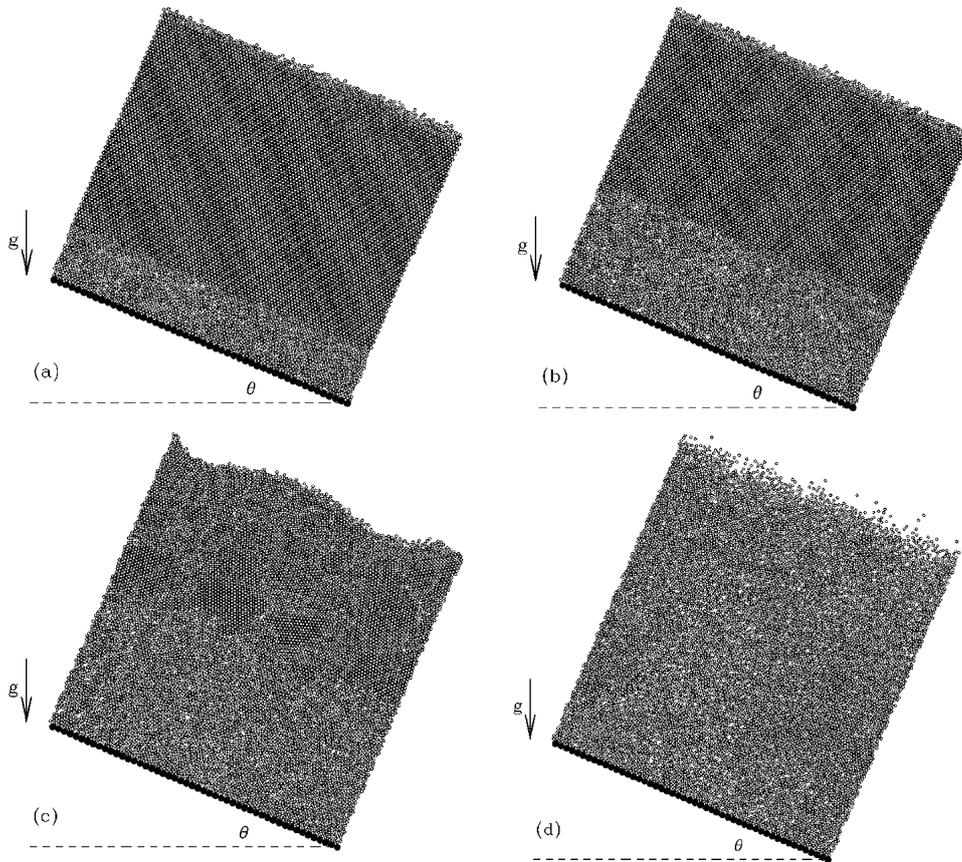


Abbildung 3.3.: Zeitausschnitte der 2d-Simulation für verschiedene Zeiten $t_a < t_b < t_c < t_d$ aus [69]. Die Bewegung propagiert vom Boden aus über eine klar sichtbare Front nach oben. Dabei wird das Granulat gelockert und die Packungsdichte verringert.

4. Strukturbildung unter vertikaler Vibration

Die Fähigkeit zur Bildung verschiedenster Strukturen in getriebenen, granularen Systemen ist lange bekannt und wurde bereits von Chladni, Savart und Faraday tiefergehend untersucht [16,81]. Bei diesen Experimenten wird eine horizontal ausgerichtete Metallplatte, die in der Mitte fixiert wird, durch Vibration angeregt. Granulat – meist in Form von Sand oder Salz – bildet dann Strukturen in Abhängigkeit der Vibration aus: die akustischen Figuren.

Weitere Erkenntnisse zur Strukturbildung bei granularer Materie stammen von Melo *et al.* [28–31]. Diese konnten bei Vibrationsexperimenten Muster in Form von quadratischen und rippelartigen Strukturen, hexagonale angeordnete Loch-/Punktstrukturen sowie lokalisierte Strukturen – die Oszillonen – finden. Sie haben alle gemein, dass sie aufgrund des periodischen Antriebs zeitlich oszillieren und zwar mit einer Periode, die der Vielfachen der doppelten Antriebsperiode entspricht. Somit handelt es sich ähnlich zu Faraday-Wellen um subharmonische Schwingungen [16–19]. Der experimentelle Aufbau besteht aus einer geschlossenen Box mit einer runden oder quadratischen Grundfläche. Diese wird zum Teil mit dem Granulat gefüllt und anschließend evakuiert um den Einfluss des umgebenden Mediums möglichst zu reduzieren. Dabei wird ebenfalls eine Präparation der Wände durchgeführt, so dass elektrostatische Effekte, die bei Reibungsprozessen entstehen würden, nach Möglichkeit unterdrückt werden. Bei dem Granulat handelt es sich um sphärische Metallkugeln – typischerweise aus Bronze oder Blei – mit einem Durchmesser von etwa 0,05 mm bis 0,8 mm. Die Box des Systems wird dann mechanisch in vertikaler Richtung mit der Frequenz f und der Amplitude A vibriert. Ein Beispiel für einen experimentellen Aufbau zeigt die Abbildung 4.1. Um das nun auftretende Verhalten qualitativ einfacher beschreiben zu können, werden zunächst dimensionslose Kenngrößen eingeführt:

Die dimensionslose Antriebsfrequenz

$$f^* := f \sqrt{\frac{h}{g}}$$

und die Vibrationsstärke

$$\Gamma := \frac{4\pi^2 f^2 A}{g}$$

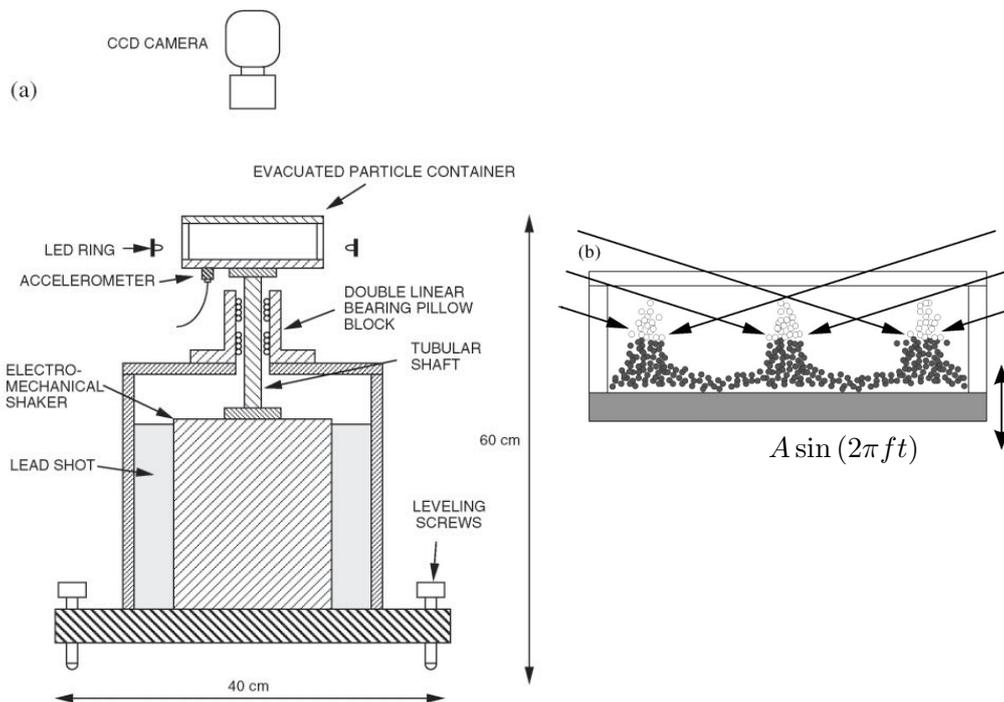


Abbildung 4.1.: Experimenteller Aufbau des granularen Systems unter vertikaler Vibration aus [30] (umstrukturiert und um die Plattenbewegung $A \sin(2\pi ft)$ ergänzt). Die Box mit dem Granulat wird mechanisch (a) mit der Frequenz f und der Amplitude A vibriert und die entstehenden Strukturen mit einem LED-Ring (b) belichtet. Die so sichtbar gemachten Strukturen werden anhand einer Kamera von oben aufgenommen.

mit h der mittleren Füllhöhe des Granulats und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ der Erdbeschleunigung. Die Vibrationsstärke ist ein Maß für die Stärke des Antriebs im Verhältnis zur Gravitationskraft g und ergibt sich als Vorfaktor der Plattenbeschleunigung normiert auf diese.

Nun lassen sich anhand verschiedener Parameterkombinationen A und f bzw. f^* und Γ unterschiedliche Strukturen wie Rippel, Quadrate, Hexagone oder Oszillationen beobachten [28–31]. Eine Auswahl dieser im direkten Vergleich mit molekulardynamischen Simulationen zeigt die Abbildung 4.2. Die vorgefundenen Muster erinnern – vor allem im Kontext einer fluiddynamischen Beschreibungen – an Faraday-Wellen [16]. Diese zeigen sich bei vertikal getriebenen Fluiden und bilden in Abhängigkeit des Antriebs dieselben Typen von Mustern und Strukturen, wenn auch bei diesen zusätzlich komplexere Muster beobachtet wurden [18, 19]. Das granulare System zeigt jedoch im Vergleich qualitative Unterschiede. Während beim Faraday-Experiment das Fluid sich stets auf der Platte befindet und durch diese eine sinusförmige Beschleunigung erfährt, wird das granulare System durch Aufschläge auf die Platte getrieben. Unter einer Vibrationsstärke $\Gamma < 1$ bleibt das Granulat stets auf der Platte liegen und zeigt nur eine

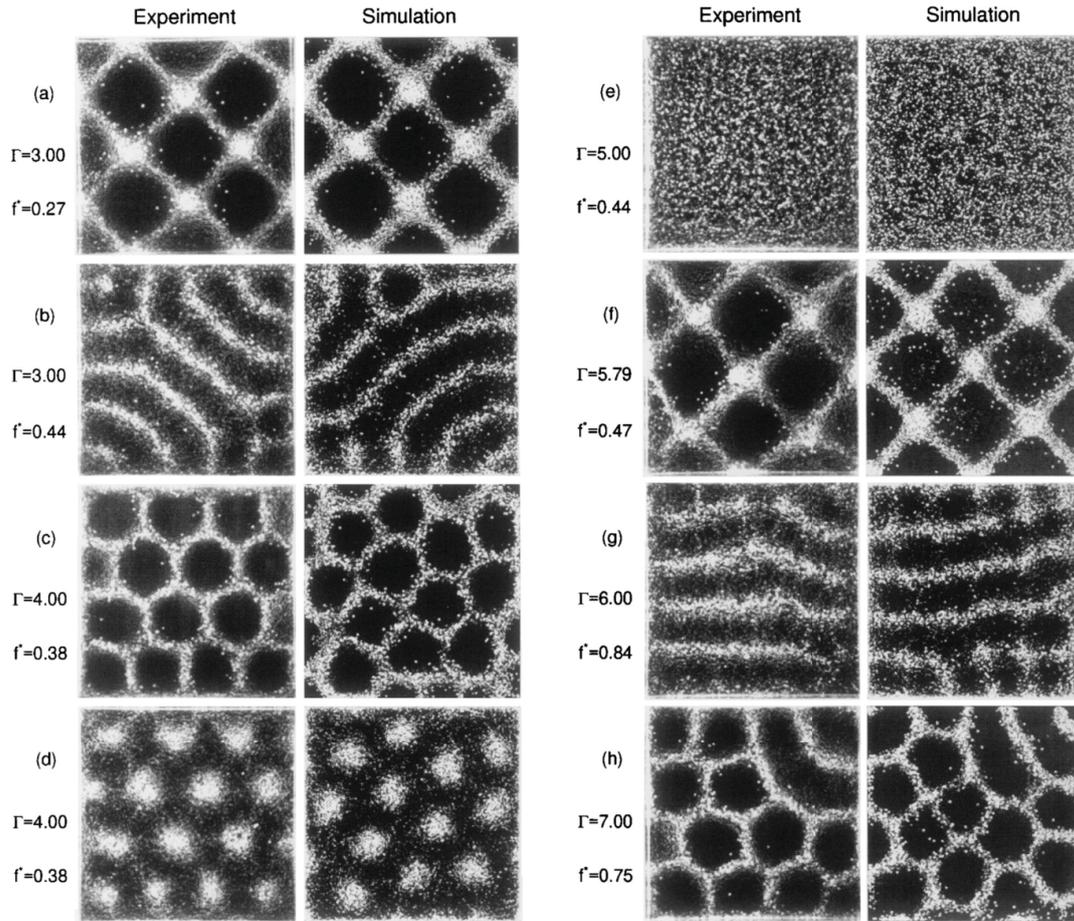


Abbildung 4.2.: Experimentell gefundene Muster im Vergleich mit molekulardynamischen Simulationen aus [28]. Für die verschiedenen Parameterkombinationen lassen sich verschiedene Muster finden. Da es sich um zeitlich oszillierende Strukturen handelt, wurde im Falle der Hexagone (c, d) das System (c) nach einer weiteren Periode (d) gezeigt, um den Wechsel von Lochstrukturen zu Punktstrukturen zu veranschaulichen.

flache Lösung. Ab einer Vibrationsstärke von $\Gamma \geq 1$ ist es möglich, dass das Granulat von der Platte abhebt und einen freien Fall durchführt. Nach einer gewissen Flugzeit t_{fl} schlägt dieses dann auf der Platte auf und bleibt abhängig von der Vibrationsstärke Γ auf dieser liegen, bis sich der Vorgang wiederholt. Ab einer Vibrationsstärke $\Gamma \approx 2,2$ kommt es dann zur Anregung von Mustern im System und zwar Rippen für höhere Frequenzen $f^* \gtrsim 0,4$ und Quadrate für entsprechende niedrigere Frequenzen. Für höhere Werte der Vibrationsstärke $\Gamma \gtrsim 4$ kommt es im System zu einer Periodenverdopplung, die durch eine Flugzeit t_{fl} größer als die Plattenperiode $T = \frac{1}{f}$ gekennzeichnet ist. Das System überspringt eine Plattenperiode T und geht beim Aufprall auf die Platte direkt in einen zweiten Flug mit einer geringeren Flugzeit t_{fl} über. Nach dieser schlägt es wiederum auf die Platte auf und bleibt dann auf dieser liegen, bis sich der Vorgang wiederholt. Durch diese zwei unterschiedlichen Flugzeiten t_{fl} werden die hexagonalen

Strukturen sowie der Wechsel zwischen Loch- und Punktmustern induziert. Für eine weitere Erhöhung der Vibrationsstärke Γ ergibt sich wieder ein flacher Bereich ohne Muster mit dann darauf folgendem Einsetzen von Rippeln/Quadraten mit der Frequenz $\frac{f^*}{4}$. Die zu den vorherigen Mustern halbierte Frequenz entsteht durch das Überspringen einer kompletten Plattenperiode T beim Flug. Diese von den Parametern Γ und f^* abhängigen Aufschläge sind maßgeblich für die Musterbildung des Granulats und lassen sich qualitativ durch das inelastische Bouncing-Ball-Modell beschreiben [28–31]. Das Kapitel 7 widmet sich der Ableitung und Analyse dieses Modells.

Die gefundenen Muster lassen sich nun anhand der dimensionslosen Größen f^* und Γ in verschiedene Bereiche unterteilen, in welchen diese stabil sind. Die Abbildung 4.3 zeigt solch eine f^* - Γ -Parameterkarte. Anhand der Abbildung lässt sich eine kla-

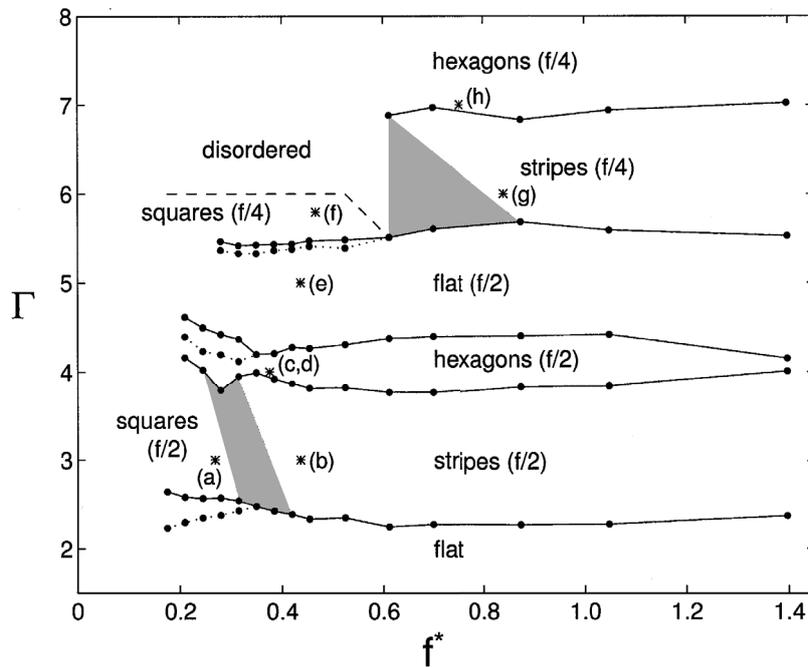


Abbildung 4.3.: f^* - Γ -Parameterkarte für die verschiedenen gefundenen Muster aus [28]. Der durch f^* - Γ aufgespannte Raum wird in die Stabilitätsbereiche der jeweiligen Muster unterteilt, die sich deutlich in flache Lösungen, Quadrate/Rippel und Hexagone unterteilen lassen.

re Unterteilung des f^* - Γ -Parameterraums in flache Lösungen, Quadrate/Rippel und Hexagone finden. Die so gefundenen Bereiche zeigen eine klare Abhängigkeit von der Vibrationsstärke Γ , während nur ein geringer Einfluss der Frequenz f^* beobachtet werden kann, sofern diese einen Wert von etwa $f^* \lesssim 0,4$ nicht unterschreitet. Für eine Vibrationsstärke $\Gamma \gtrsim 5,5$ lässt sich der Übergang von der ersten subharmonischen Frequenz $\frac{f}{2}$ zur zweiten subharmonischen Frequenz $\frac{f}{4}$ beobachten. Bei weiteren Untersuchungen zeigte sich, dass der Übergang der flachen Lösungen zu Rippeln bzw. Quadraten bei einer Vibrationsstärke von $\Gamma \approx 2,3$ bistabil ist [31]. In diesem können sich Oszillationen – zeitlich oszillierende, lokalisierte Strukturen – ausbilden. Diese ent-

stehen dabei nicht spontan aus dem flachen Bereich heraus, sondern werden durch eine Verringerung der Vibrationsstärke Γ aus einem Muster heraus oder durch das Stören einer flachen Oberfläche induziert.

Im Kapitel 9 wird das abgeleitete Modell auf diese Problemstellung angewandt und auf seine Fähigkeit zur Musterbildung untersucht. Vorbereitend darauf wird im Kapitel 7 das inelastische Bouncing-Ball-Modell abgeleitet und beschrieben, da dieses für die Kraftmodellierung notwendig ist.

5. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst grundlegende Typen von Ansätzen zur theoretischen Modellierung besprochen, die bei der Beschreibung und Analyse granularer Systeme Verwendung finden. Hierfür werden ihre Vor- und Nachteile dargestellt und in der Literatur verwendete Modelle kurz behandelt. Danach widmet sich die Arbeit der Beschreibung der Cauchy-Bewegungsgleichungen, welche eine allgemeine Klasse von Kontinuumsmodellen darstellt. Diese wird dann zunächst auf inkompressible Fluide reduziert. Im Anschluss wird – im Kontext der granularen Rheologie (siehe Kapitel 2) – das in dieser Arbeit verwendete Modell abgeleitet.

5.1. Makromechanische Modelle

Diese Klasse von Modellen beschreibt einzelne oder wenige charakteristische Größen des Gesamtsystems, welche oft aus statistischen Überlegungen oder räumlichen Mittelungen abgeleitet werden können. Ein typische Größe solcher Systeme wäre beispielsweise die über das Volumen Ω räumlich gemittelte Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v \, dV,$$

die eine charakteristische Gesamtgeschwindigkeit des Systems darstellt, oder im Fall diskreter Systeme die über das Ensemble $j = 1, \dots, N$ gemittelte Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j$$

mit N der Teilchenzahl und v_j der Geschwindigkeit des j -ten Teilchens. Mit solch einem Ansatz wäre es nun möglich, die Geschwindigkeit der einzelnen granularen Partikel auf eine wesentliche Größe zu reduzieren, um die kollektive Bewegung als Ganzes zu untersuchen. Ein ähnlicher Ansatz wurde beispielsweise von Linz und Hänggi [75–78] bei der Untersuchung der Flüsse entlang der schrägen Ebene und in rotierenden Trommeln verwendet (siehe Kapitel 3). Diese Größen lassen sich dann typischerweise durch gewöhnliche Differentialgleichungen der abhängigen Variablen ausdrücken. Somit sind ihre großen Vorteile eine mathematisch simplere Struktur im Vergleich zu molekulardynamischen Modellen und Kontinuumsmodellen und eine Reduktion auf wesentliche Eigenschaften, die häufig eine tiefer gehende analytische Untersuchung ermöglicht. Die

Einschränkung auf wenige charakteristische Größen ermöglicht jedoch keinen Einblick in die lokale Dynamik des Granulats, wie Scherschichten oder Clusterbildung. Hierfür sind dann komplexere Modelle notwendig.

5.2. Mikroskopische Modelle

Diese Klasse von Modellen setzt an der Ebene der einzelnen Konstituenten eines Systems an. Da es sich bei Granulat um makroskopische Vielteilchensysteme handelt, ist ein Ansatz der Modellierung auf der Ebene der Systempartikel naheliegend. Das granulare System wird dabei als N -Teilchensystem angenommen, dessen einzelne Konstituenten sich zunächst gemäß der Newton'schen Gesetze für starre Körper verhalten. Die Form wird dabei meist als sphärisch (in $3d$) oder scheibenförmig (in $2d$) angenommen, wobei meist eine Varianz der Durchmesser der verschiedenen Partikel zugelassen wird. Dann erfolgt ein Ansatz für die Wechselwirkung der einzelnen Teilchen untereinander, häufig unter Berücksichtigung folgender Eigenschaften:

- Teilelastische Stöße
- Endliche Kontaktzeiten
- Coulomb'sche Reibung
- Übertrag von Drehimpuls

Im Anschluss wird das Modell mithilfe spezieller Verfahren – den molekulardynamischen Simulationen – zeitlich gelöst und die Systemdynamik bestimmt. Das so gelöste System bietet den vollen Einblick in die Dynamik und Interaktion der Partikel und ermöglicht damit einen detaillierten Einblick in das System. So lassen sich viele granulare Problemstellungen qualitativ und quantitativ beschreiben, wie beispielsweise der Fluss entlang der schrägen Ebene mit Hystereseeigenschaft und Geschwindigkeitsprofilen [6, 25, 27, 66, 69], die Musterbildung unter vertikaler Vibration [28] oder einige andere [44, 59, 68, 73, 82–85]. Der hohe numerische Aufwand dieser Modelle spielt heutzutage nur eine untergeordnete Rolle, da die möglichen Rechenleistungen selbst bei großen Systemen eine Berechnung ermöglichen. Ihr Hauptnachteil ist die geringe Möglichkeit analytischen Zugang zum System zu erhalten. So können Zusammenhänge, wie Skalengesetze, nur empirisch aus der Numerik bestimmt werden oder kollektives Verhalten, wie Musterbildung, zwar beobachtet, aber nicht aus den Systemgleichungen abgeleitet werden. Ebenfalls sind Ansätze für Näherungsmodelle nur schwierig zu entwickeln.

5.3. Kontinuumsmodelle

Ein weiterer Ansatz zur Beschreibung eines Systems ist die Betrachtung der charakteristischen Größen der Systempartikel, wie Drücke oder Geschwindigkeiten, als kontinuierliche Feldgrößen. Damit erfolgt keine Betrachtung des Systems auf mikroskopischer Ebene, jedoch werden räumliche Effekte, wie in den makroskopischen Modellen, nicht vernachlässigt. Diese Kontinuumsmodelle lassen sich als Zwischenstufe von mikroskopischen und makroskopischen Modellen auffassen und werden daher auch häufig mesoskopische Modelle genannt. Häufig werden diese Modelle eingesetzt, wenn es sich um Vielteilchensysteme handelt, die auf größeren Skalen Effekte, wie Musterbildung, zeigen. Typische Beispiele für Systeme sind Fluide und Festkörper, die durch solche Modelle beschrieben werden, da es sich bei ihnen um mikroskopische Vielteilchensysteme handelt, bei denen die meso- und makroskopischen Eigenschaften, wie Strömungen oder Verformungseigenschaften, von Interesse sind. Auch granulare Systeme lassen sich durch Kontinuumsmodelle beschreiben. Ein in der Literatur häufig verwendetes, empirisches Modell stammt von Aranson und Tsimring [86–88]. Dieses basiert auf einer Amplitudengleichung für das komplexe Feld ψ und einer Erhaltungsgleichung für die Masse, die miteinander verkoppelt sind. Dieses wird durch die Systemgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t \psi &= \gamma \psi^* - (1 - i\omega)\psi + (1 + ib)\vec{\nabla}^2 \psi - |\psi|^2 \psi - \rho \psi \\ \partial_t \rho &= \alpha \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} |\psi|^2) + \beta \vec{\nabla}^2 \rho\end{aligned}$$

beschrieben. Diese erste Gleichung entspricht dabei einer modifizierten Ginzburg-Landau-Gleichung, die durch den letzten Term $\rho \psi$ an die zweite Gleichung koppelt. Mit dieser Gleichung konnte die Musterbildung sowie der hysteretische Übergang zwischen flachen Lösungen und den Mustern beschrieben werden, bei denen lokalisierte Strukturen beobachtet werden.

Andere mögliche Ansätze können auf Basis hydrodynamischer Grundgleichungen und derer Näherungen gewählt werden. Ein Beispiel hierfür ist das Savage-Hutter-Modell [46, 89]. Savage und Hutter führten einen Ansatz für den Spannungstensor bestehend aus Coulomb-Reibung und einer geschwindigkeitsabhängigen Viskosität mit anschließender Shallow-Water-Approximation durch, bei der das Gleichungssystem bezüglich der vertikalen Raumkomponente gemittelt wird. Daraus resultiert das Modell

$$\begin{aligned}\partial_t h + \vec{\nabla}_2 \cdot (h \vec{v}_2) &= 0 \\ \partial_t (h \vec{v}_2) + \vec{\nabla}_2 \cdot (h \vec{v}_2 \otimes \vec{v}_2) + \vec{\nabla}_2 \cdot \left(\frac{h^2}{2} \vec{\beta} \right) &= h \left(\vec{g}_2 - \gamma \tan \delta \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} \right)\end{aligned}$$

mit $h(x, z, t)$ der Höhe, \vec{v}_2 der vertikal gemittelten Geschwindigkeit, $\vec{\beta}$ dem Normaldruck in x - bzw. z -Richtung, δ dem Reibungswinkel, \vec{g}_2 der Gravitationsbeschleunigung und

$\vec{\nabla}_2 = (\partial_x, \partial_z)^T$ der zweidimensionalen, räumlichen Ableitung. Das so abgeleitete Modell beschreibt Lawinenverhalten granularer Systeme mit den dazugehörigen Eigenschaften.

Es gibt einige weitere Kontinuumsmodelle, die zur Beschreibung granularen Verhaltens verwendet werden [3, 90, 91]. Häufig gelingt es ihnen jedoch nur einige spezielle Realisierungen zu beschreiben und es fehlt zumeist eine Erweiterung auf andere Problemstellungen. Im Nachfolgenden wird nun das in dieser Arbeit verwendete Modell abgeleitet und erläutert.

5.4. Ableitung der Modellgleichungen

Der Ausgangspunkt des in dieser Arbeit abgeleiteten Modells sind die Cauchy-Bewegungsgleichungen mit Massenerhaltung in drei Raumdimensionen [49]. Als allgemeiner Ansatz für zunächst beliebige Probleme, die aus einer Impulsbilanz beschrieben werden können, sind diese ein geeigneter Startpunkt für die kontinuumsmechanische Modellierung. Dabei wurde die – für strömungsmechanische Probleme typische – Euler-Darstellung gewählt. Diese lautet für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ und die Dichte $\rho = \rho(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} \rho \left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= \vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \vec{g}_{\text{eff}} \\ \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit \vec{g}_{eff} den externen Kräften und \mathbf{T} dem Cauchy-Spannungstensor. Im Allgemeinen wird mit den externen Kräften die Gravitationskraft $\vec{g}_{\text{eff}} = -g\vec{e}_y$ beschrieben, in den hier behandelten Problemstellungen kommen jedoch zusätzliche Beiträge hinzu, daher auch die Notation 'eff'. Dabei seien die folgenden mathematischen Operationen gegeben:

die Divergenz des Tensors

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} \right)_i = \partial_j T_{ij}$$

für die i -te Komponente der Divergenz des Cauchy-Spannungstensors \mathbf{T} und der Vektorgradient

$$\left(\vec{\nabla} \vec{v} \right)_{ij} = \partial_j v_i.$$

Generell orientiert sich diese Arbeit für mathematische Operationen und Darstellungen an der Konvention von Hutter und Jöhnk [49]. Im nächsten Schritt wird der Spannungstensor \mathbf{T} mit \mathbf{I} der Einheitsmatrix in den isotropen Anteil $-p\mathbf{I}$ mit p dem Druck und \mathbf{t} den viskosen Anteilen zerlegt [49]. Letzterer wird dabei auch einfach nur Spannungstensor \mathbf{t} genannt. Dann folgt die Impulsgleichung

$$\rho \left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{t} + \rho \vec{g}_{\text{eff}}. \quad (5.2)$$

Die korrekte Behandlung von Einflüssen des Drucks p ist für viele Problemstellungen wichtig. Dieser beschreibt im Falle kompressibler Systeme den thermodynamischen Druck und muss durch eine geeignete Zustandsgleichung in Abhängigkeit von der Dichte ρ und der Temperatur T bestimmt werden. Dies führt zur zusätzlichen Berücksichtigung einer Energiegleichung, die die Temperaturentwicklung im System beschreibt. Um eine eventuell unnötige Verkomplizierung der Systemgleichungen zu vermeiden, wird in dieser Arbeit ein anderer Weg gewählt. Es wird angenommen, dass Dichteschwankungen im System nur eine geringe Rolle spielen und daher vernachlässigbar sind. Das System wird also als inkompressibel angenommen. Dies trifft für granulare Systeme im Allgemeinen zwar nicht zu, jedoch lässt sich für einige Problemstellungen, wie den Fluss entlang der schrägen Ebene, zeigen, dass die Packungsdichte Φ und damit die effektive Dichte ρ nur sehr geringen Schwankungen unterliegt (siehe Kapitel 2.4). Mit der Massenerhaltung (5.1) folgt dann

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \xrightarrow{\rho \approx \text{const}} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

die Inkompressibilitätsbedingung. Diese Bedingung wird nun in der Bewegungsgleichung (5.2) durch den Druck p erfüllt. Der Druck p erfüllt dann die Rolle eines Lagrange-Parameters, der die Inkompressibilitätsbedingung berücksichtigt. Daher spricht man im Falle inkompressibler Systeme dann vom kinematischen oder mechanischen Druck p . Dieser erfüllt dann durch Divergenzbildung der Bewegungsgleichung (5.2) die Laplace-Gleichung

$$\Delta p = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{t} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right).$$

Diese ließe sich – unter der Annahme, dass der Spannungstensor \mathbf{t} nicht vom Druck p abhängt – mithilfe der Green'schen Funktionen formell lösen [92]. Würde man die Lösung dann in die Bewegungsgleichung (5.2) einsetzen, so erhielte man die Integro-Differential-Darstellung der Bewegungsgleichung. Das zeigt eine wichtige Eigenschaft solcher Systeme: Durch die Inkompressibilität können sich Druckänderungen instantan ausbreiten und führen zur einer nichtlinearen und nichtlokalen Kopplung des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} an sich selbst.

Im nächsten Schritt wird die Form des Spannungstensors \mathbf{t} weiter bestimmt. Zunächst folgt aus der Annahme, dass das Drehmoment im System erhalten ist, die Symmetrie des Spannungstensors $\mathbf{t} = \mathbf{t}^T$ [49]. Hierfür wird unter Vernachlässigung der Beiträge proportional zu \mathbf{I} und \mathbf{D}^2 [49] der Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mu_{\text{eff}} \mathbf{D} \\ \mu_{\text{eff}} &= \mu_{\text{eff}}(p, |\mathbf{D}|) \end{aligned}$$

mit $\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla} \vec{v} + \left(\vec{\nabla} \vec{v} \right)^T \right]$ dem Schertensor und einem noch näher zu bestimmenden Reibungskoeffizient μ_{eff} gewählt. Dabei wurde der Betrag des Tensors folgendermaßen

angesetzt

$$|\mathbf{D}| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{ij}^2}.$$

Dies entspricht einer um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ skalierten Frobenius-Norm. Einen wichtigen und prominenten Spezialfall solch eines Ansatzes erhält man für einen Reibungskoeffizienten $\mu_{\text{eff}} = 2\mu = \text{const.}$ Es folgt dann die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Fluide. Um nun die funktionale Form des Reibungskoeffizienten μ_{eff} zu bestimmen, wird der Ansatz von Jop *et al.* (2.4) sowie die Trägheitszahl (2.3) verwendet (siehe Kapitel 2.4). Dafür identifiziert man nun gemäß des Prinzips der Koaxialität (2.5) den Reibungskoeffizienten μ_{eff} mit dem dimensionslosen Reibungskoeffizienten $\mu(I)$ zu

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu(I)p}{|\mathbf{D}|}. \quad (5.3)$$

Um die weitere Form des Reibungskoeffizienten μ_{eff} anzusetzen, betrachtet man nun zunächst die Taylor-Entwicklung von $\mu(I)$ in I und setzt für die Trägheitszahl I die Definition (2.3) ein (der Partikeldurchmesser d_p wird in die Koeffizienten resorbiert). Dieses setzt man wiederum in Gleichung (5.3) ein und erhält

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}} &= \frac{p}{|\mathbf{D}|} \left(\mu_y + \xi \rho^{-1/2} \frac{|\mathbf{D}|}{\sqrt{p}} + \rho \eta \frac{|\mathbf{D}|^2}{p} + \mathcal{O}(I^3) \right) \\ &= \frac{\mu_y p}{|\mathbf{D}|} + \xi \rho^{-1/2} \sqrt{p} + \rho \eta |\mathbf{D}| + \frac{\mathcal{O}(I^3) p}{|\mathbf{D}|}. \end{aligned}$$

Es ergeben sich also ein druckabhängiger, plastischer Anteil $\frac{\mu_y p}{|\mathbf{D}|}$, ein druckabhängiger, scherunabhängiger Anteil $\xi \rho^{-1/2} \sqrt{p}$ und ein druckunabhängiger, linearer Anteil $\rho \eta |\mathbf{D}|$ im Reibungskoeffizienten μ_{eff} . Der letzte Term $\rho \eta |\mathbf{D}|$ entspricht dabei gerade der Bagnold-Skalierung. Um das Modell auf das Wesentliche zu reduzieren, wird nur der plastische Anteil und der Bagnold-Anteil berücksichtigt, also der Term $\xi \rho^{-1/2} \sqrt{p}$ und die höheren Ordnungen $\frac{\mathcal{O}(I^3) p}{|\mathbf{D}|}$ vernachlässigt. Dies liefert dann den gesuchten Spannungstensor

$$\mathbf{t} = \mu_{\text{eff}} \mathbf{D} = \left(\frac{\mu_y p}{|\mathbf{D}|} + \rho \eta |\mathbf{D}| \right) \mathbf{D}.$$

Ein ähnlicher Ansatz mit zusätzlicher Temperaturabhängigkeit wurde auch von Artoni *et al.* [48] im Rahmen des Flusses entlang der schrägen Ebene diskutiert. Der Spannungstensor \mathbf{t} ist nun vollständig bestimmt und das Modell somit geschlossen. Dies führt dann mit $p \rightarrow \rho p$ zu den mit der Dichte ρ skalierten Bewegungsgleichungen

$$\left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{\mu_y p}{|\mathbf{D}|} + \eta |\mathbf{D}| \right) \mathbf{D} \right] + \vec{g}_{\text{eff}}. \quad (5.4)$$

Diese Form entspricht einer Realisierung eines Herschel-Bulkley-Fluids, welches viskoplastische Fluide mit nichtnewtonschen Viskositäten beschreibt [51–53]. Eine Beson-

derheit im Vergleich zu den typischen Fällen dieser Fluide ist die druckabhängige Grenzspannung $\tau_y = \mu_y p$. Die Bewegungsgleichungen beschreiben also ein inkompressibles, dilatantes Fluid, welches eine vom Druck p abhängige Grenzspannung τ_y zeigt, bei der eine Bewegung des Systems erst einsetzt. Die Abbildung 5.1 visualisiert dies grafisch. Die Inkompressibilitätsbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ erfordert nun auch die Berücksich-

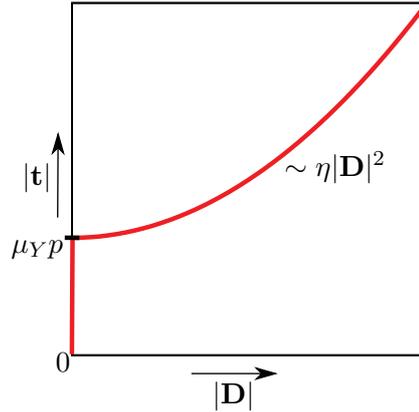


Abbildung 5.1.: Schematischer Verlauf des Betrages des Schertensors $|\mathbf{t}|$ in Abhängigkeit der Scherrate $|\mathbf{D}|$. Erst ab einer Scherspannung $|\mathbf{t}| = \mu_y p$ setzt sich das System in Bewegung und man erhält eine Scherrate $|\mathbf{D}| > 0$. Dann setzt der quadratische Verlauf des Bagnold-Terms ein.

tigung der Druckabhängigkeit der Grenzspannung τ_y . Dafür wird die Gleichung (5.4) zunächst umgeformt zu

$$\left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = - \left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p + \mu_y p \vec{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} + \eta \vec{\nabla} \cdot (|\mathbf{D}| \mathbf{D}) + \vec{g}_{\text{eff}}.$$

Dann führt die Divergenzbildung zur Bestimmungsgleichung für den Druck

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\left[\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right] \cdot \vec{\nabla} p \right) - \mu_y \vec{\nabla} \cdot \left(p \vec{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\eta \vec{\nabla} \cdot (|\mathbf{D}| \mathbf{D}) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right).$$

Der Beitrag $\mu_y p \vec{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}$ liefert eine explizite Druckabhängigkeit sowohl in der Geschwindigkeitsgleichung als auch in der Lösungsgleichung für den Druck selbst. Dies erschwert die Lösung und Behandlung insbesondere in der Numerik, daher wird, um das Modell möglichst simpel zu halten, dieser vernachlässigt. Es wird also

$$\mu_y p \vec{\nabla} \cdot \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \approx 0$$

angenommen. Damit wird die explizite Abhängigkeit der Bewegungsgleichung vom

Druck p eliminiert und man erhält die Ausgangsgleichungen dieser Arbeit

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= - \left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla} \cdot (|\mathbf{D}| \mathbf{D}) + \vec{g}_{\text{eff}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Der Einfluss der Grenzspannung τ_y resultiert nun in einem zusätzlichen Beitrag des Druckgradienten. Dieser kann – wie sich im Kapitel 6 bestätigen wird – als dynamische Coulomb-Reibung interpretiert werden. Ebenfalls hat die damit verbundene Näherung in Bezug auf die Ableitung aus der allgemeinen Cauchy-Bewegungsgleichung eine interessante Konsequenz: Folgt man der mathematischen Ableitung der allgemeinen Bewegungsgleichung [49] und vergleicht diese mit der Bewegungsgleichung (5.5), dann lassen sich die Terme folgendermaßen identifizieren:

1. $\left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}$ entspricht der Materialableitung der Geschwindigkeit \vec{v}
2. $-\vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla} \cdot (|\mathbf{D}| \mathbf{D})$ sind die Geschwindigkeitsflüsse, die durch Spannungen entstehen
3. \vec{g}_{eff} berücksichtigt die Volumenkräfte
4. $\mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \cdot \vec{\nabla} p$ stellt eine Produktion oder Vernichtung von Impuls $\rho \vec{v}$ bzw. Geschwindigkeit \vec{v} dar

Der vierte Beitrag – der Produktions- bzw. Vernichtungsterm – verschwindet normalerweise, da Änderungen des Impulses nur durch Flüsse oder äußere Kräfte entstehen. Der plastische Term würde normalerweise ohne die hier durchgeführte Näherung einen Beitrag bei den Geschwindigkeitsflüssen durch Spannungen (2.) liefern. Durch diese Näherung lässt sich dieser (außer durch direkte Berücksichtigung der Näherung) nicht in eine Divergenzform bringen und muss daher zu den Produktions- bzw. Vernichtungstermen gezählt werden. Im Kontext granularer Systeme kann man diesen allerdings physikalisch interpretieren: Bei der Bewegung, respektive Scherung, der granularen Partikel kommt es zu Stößen dieser miteinander und zur Reibung aneinander. Die Stöße sind im Allgemeinen jedoch inelastisch und daher wird bei diesen Prozessen der Impuls nicht erhalten, sondern es findet typischerweise die Umwandlung von kinetischer in thermischer Energie statt (Verformungseffekte können bei den häufig verwendeten harten Kugeln vernachlässigt werden). Solche Effekte könnten durch den Vernichtungsterm (4.) geeignet berücksichtigt werden. Dieser vernichtet Impuls bzw. Geschwindigkeit

$$-\mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \cdot \left(-\vec{\nabla} p \right)$$

bei auftretenden Druckgradienten $-\vec{\nabla} p$ entlang der Scherrichtungen $\frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}$. Der Yield-Koeffizient μ_y kann dann unter Berücksichtigung der Überlegungen von Bagnold (2.2) mit einem inneren Reibungswinkel $\mu_y = \tan \varphi_d$ identifiziert werden.

Die Modellgleichungen (5.5) werden nun in den folgenden Kapiteln auf zwei granulareren Problemstellungen – dem Fluss entlang der schrägen Ebene und der Musterbildung unter vertikaler Vibration – angewandt. Für die Musterbildung wird das Modell um einen zeitabhängigen Kraftterm, der aus dem inelastischen Bouncing-Ball-Modell folgt (siehe Kapitel 7), ergänzt und erweiterte numerische Verfahren (siehe Kapitel 8) angewendet.

5.5. Charakterisierung von Mustern durch die Rauheit w und die Schiefe s

Ein Ziel des in dieser Arbeit vorgestellten Modells ist die Reproduktion der im Experiment gefundenen Muster. Dafür erfolgt zumeist eine subjektive Klassifizierung der vorgefundenen Strukturen durch Betrachtung des Oberflächenprofils und des Fourierpektrums. Diese lassen sich dann gewöhnlich in Rippel, Quadrate oder hexagonale Loch- bzw. Punktstrukturen im Falle von Musterbildung einteilen. Für eine quantitative Beschreibung erfolgt die Berechnung von charakteristischen Größen, die eine objektive Beschreibung ermöglichen. Ausgangspunkt dieser ist das Höhenprofil h in Abhängigkeit der lateralen Koordinaten x und z (bzw. nur x im zweidimensionalen Fall) und der Zeit t . Aus diesem lassen sich nun die folgenden charakteristischen Größen ableiten [93–95]:

die mittlere Höhe

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int_S h \, dS,$$

die Rauheit, welche dem zweiten zentralen räumlichen Moment entspricht,

$$w = \sqrt{\frac{1}{S} \int_S (h - \bar{h})^2 \, dS},$$

und die Schiefe s als drittes zentrales räumliches Moment

$$s = \frac{1}{Sw^3} \int_S (h - \bar{h})^3 \, dS$$

mit S der gesamten lateralen Domäne. Mit der Rauheit w lässt sich die Stärke der Ausprägung klassifizieren, da sie gerade ein Maß der Abweichung von der mittleren Höhe \bar{h} darstellt. Die Schiefe s ist eine Kennzahl für die Asymmetrie zwischen Hügeln und Tälern. So zeigen Strukturen, die durch Täler dominiert werden – also Täler den größeren Teil der Struktur ausmachen –, eine positive Schiefe $s > 0$ und Strukturen, die durch Hügel dominiert werden – also Hügel den größeren Teil der Struktur ausmachen –, eine negative Schiefe $s < 0$. Im Allgemeinen lässt sich mit dieser Größe allerdings nicht das zugrunde liegende Muster klassifizieren. Dies soll im Nachfolgenden am Beispiel von hexagonalen Mustern verdeutlicht werden. Dafür betrachtet man folgende Komposition

| | a | b | c | d |
|-------|--------|--------|-------|--------|
| A_g | -0,05 | -0,05 | 0,05 | 0,05 |
| A_1 | 0 | 0,025 | 0 | -0,025 |
| A_2 | 0 | -0,005 | 0 | 0,005 |
| w | 0,123 | 0,151 | 0,123 | 0,151 |
| s | -0,816 | 0,202 | 0,816 | -0,202 |

Tabelle 5.1.: Verwendete Amplituden A_i (g steht für die sechs Grundmoden, 1 für die 12 nächsthöheren Moden und 2 für die 18 darauf folgenden Moden) mit den jeweiligen Werten für die Rauheit w und Schiefe s .

h von Kosinusmoden

$$h = \sum_{l=1}^N A_l \cos(\vec{k}_l \cdot \vec{r})$$

mit A_l der l -ten Amplitude und \vec{k} der l -ten Fouriermode. Die Vektoren sind je nach Dimensionalität entsprechend auszuwerten. Nun werden einmal die hexagonalen Grundmoden einmal ohne und einmal mit höheren Moden angesetzt und das entstehende Höhenfeld h analysiert. Dies zeigt die Abbildung 5.2. Man sieht an allen vier Realisierungen die deutliche Ausprägung der hexagonalen Lochstruktur (a und b) bzw. Punktstruktur (c und d). Durch das Anregen der höheren Moden lässt sich die tatsächliche Form jedoch stark variieren. So zeigt die durch Grundmoden angeregte Lochstruktur (a) eine deutliche Dominanz der Hügel im Vergleich zu den Tälern, während die mit höheren Moden erzeugte Struktur das Verhalten umgekehrt. Bei diesen sind die Täler durch die schmalen Hügel dominanter, welches sich in einer positiven Schiefe s äußert. Durch Änderungen der Vorzeichen der Amplituden A_i lassen sich die entsprechenden Punktmuster konstruieren, bei denen genau der umgekehrte Fall herrscht. Hier dominieren zunächst die Täler, während durch die höheren Moden eine Dominanz der Hügel erreicht wird. Die verwendeten und errechneten Werte finden sich in der Tabelle 5.1. Im Allgemeinen lässt sich beobachten, dass im Falle hexagonaler Strukturen für die Umkehrung des Vorzeichens der Schiefe s die Anregung höherer Moden notwendig ist.

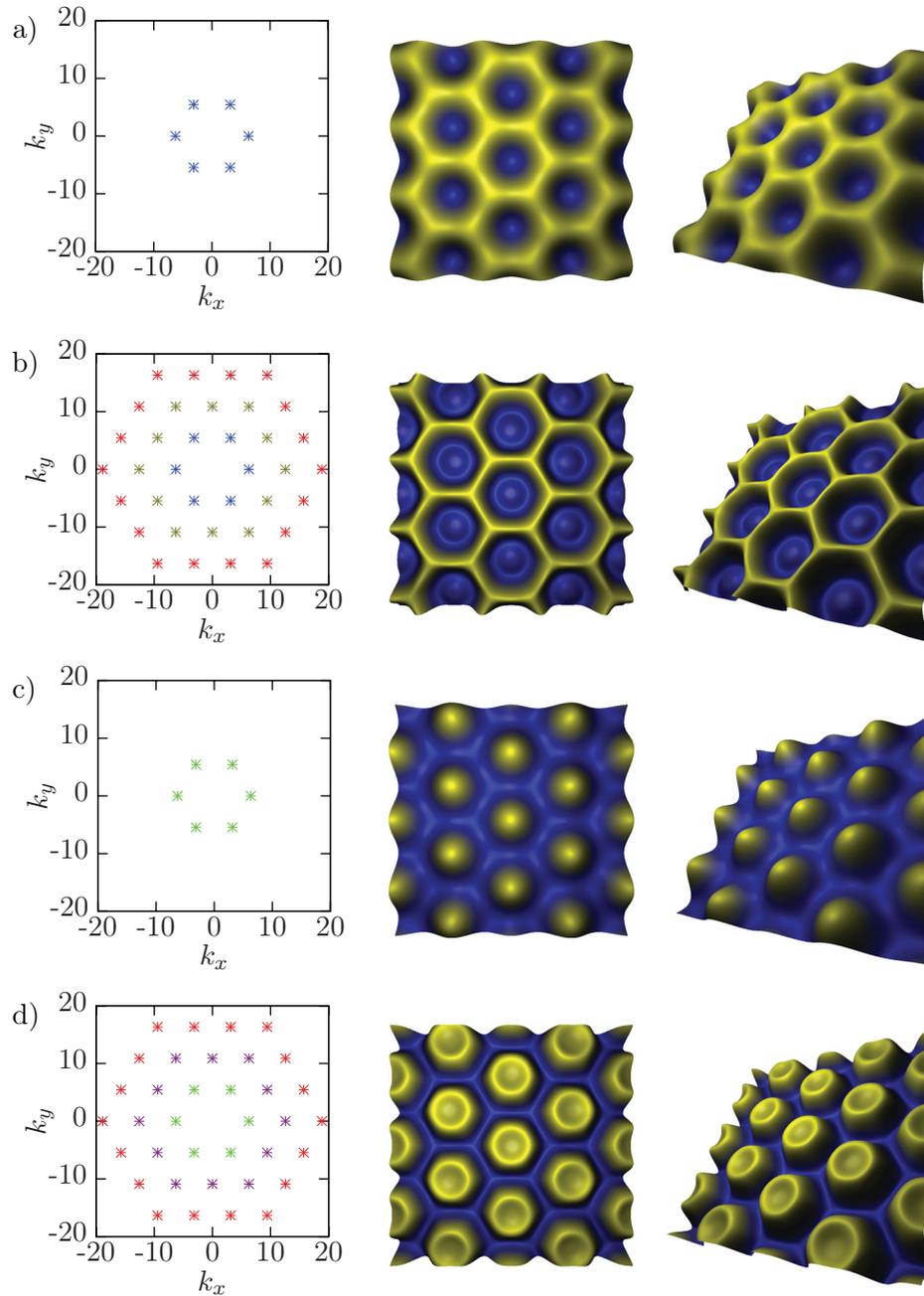


Abbildung 5.2.: Resultierende hexagonale Höhenprofile h für ausschließlich angeregte Grundmoden (a und c) sowie mit Anregung der höheren Moden (b und d). Es lassen sich klar die hexagonale Lochstrukturen (a und b) sowie die entsprechenden Punktstrukturen (c und d) identifizieren.

6. Resultate für den granularen Fluss entlang der schrägen Ebene

In diesem Kapitel werden die Modellgleichungen (5.5) auf den Fluss entlang der schrägen Ebene angewendet. Hierfür werden die Modellgleichungen zunächst um ein zusätzliches Yield-Feld χ erweitert, welches die Berücksichtigung eines zusätzlichen Grenzwinkels φ_s ermöglicht und somit zu den im Kapitel 3 beschriebenen hysteretischen Eigenschaften führt. Dann erfolgt eine Reduktion der Dynamik auf eine effektive eindimensionale Dynamik, die es ermöglicht das System analytisch zu behandeln. Zusätzlich wird die numerische Lösung besprochen, die einen Einblick in die zeitabhängige Dynamik liefert.

Für alle weiteren Behandlungen wird das System im um den Winkel φ verkippten Koordinatensystem betrachtet (siehe Abbildung 6.1). Dadurch reduziert sich der Einfluss der Verkipfung auf eine Rotation des Gravitationsvektors \vec{g} um den Winkel φ , welches damit die räumliche Behandlung des Systems vereinfacht.

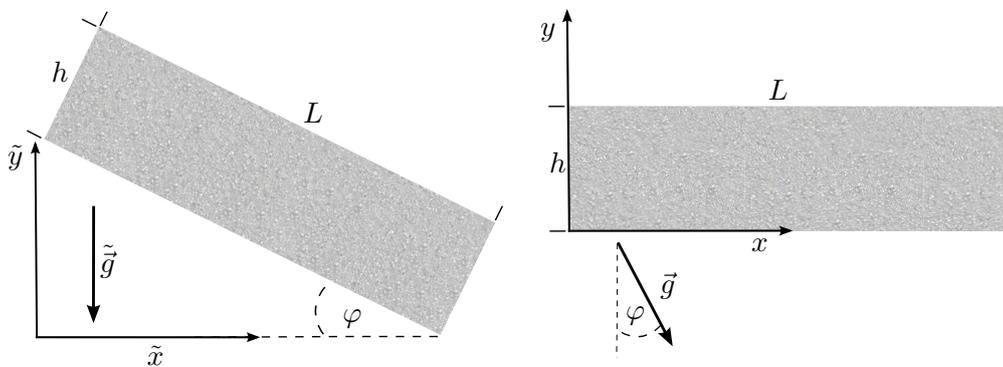


Abbildung 6.1.: Koordinatentransformation des Systems (links: ursprüngliches System; rechts: transformiert). Dies vereinfacht die Behandlung des Systems, da der Winkel φ ausschließlich über die transformierte Gravitationskraft \vec{g} Einfluss nimmt.

6.1. Grundlagen und Erweiterung des Modells

Um den granularen Fluss entlang der schrägen Ebene zu beschreiben, werden als erstes einige Annahmen über die Systemeigenschaften getroffen. Zunächst wird ein räumlich zweidimensionales System mit x der horizontalen und y der vertikalen Raumkoordi-

nate angenommen (entsprechend der Abbildung 6.1). Dies kann ohne Einschränkung selbst bei einer schrägen Verkipfung des Systems, bei der ein Beitrag des Gravitationsvektors \vec{g} in der dritten Raumkomponente z entstehen würde, angenommen werden, da stets eine Rotation des Koordinatensystems möglich ist, die diese vollständig in die horizontale Richtung x projizieren würde. Des Weiteren wird eine konstante Höhe h angenommen, das heißt, dass das System eine homogene Oberfläche ohne zusätzliche Strukturen zeigt und auch eine zeitabhängige Dynamik diese nicht ändert. Problemstellungen mit veränderlichen Oberflächen beim Fluss entlang der schrägen Ebene beschreiben häufig Lawinenbildung, welche ebenfalls ein häufig untersuchtes Gebiet bei granularen Systemen darstellt [75–77, 83, 89].

Ausgangspunkt für die Beschreibung sind nun die Modellgleichungen (5.5) in zwei Raumdimensionen

$$\begin{aligned} (\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= - \left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla} \cdot (|\mathbf{D}| \mathbf{D}) + \vec{g} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{g} &= g \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{y=0} &= 0 \\ (-p \mathbf{I} + \eta |\mathbf{D}| \mathbf{D})|_{y=h} \cdot \vec{e}_y &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Das System enthält bereits eine Grenzspannung, jedoch kann nicht erwartet werden, dass diese ein Hystereseverhalten in der Dynamik induziert. Daher ist es notwendig die Modellgleichungen geeignet zu erweitern, welches durch ein zusätzliches Yield-Feld χ geschieht. Dafür wird folgender Ansatz gewählt

$$\chi = \Theta \left(\left| -\vec{\nabla} p + \vec{g} \right| - \mu_s \left| \vec{\nabla} p \right| \right) \left(1 - \Theta(|\mathbf{D}|) \right) + \Theta(|\mathbf{D}|) \tag{6.2}$$

mit der Heaviside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

und μ_s einer zusätzlichen Yield-Konstante mit $\mu_s > \mu_y$. Dabei lassen sich zunächst folgende Lösungen des Yield-Feldes feststellen

$$\chi = \begin{cases} 1 & : |\mathbf{D}| > 0 \\ 1 & : \left| -\vec{\nabla} p + \vec{g} \right| > \mu_s \left| \vec{\nabla} p \right| \text{ und } |\mathbf{D}| = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Das Yield-Feld χ beschreibt – analog zur statischen Coulomb-Reibung – ein Kriterium für den aktuellen lokalen Zustand eines ruhenden Systems (ein lokal nicht ruhendes System hat stets einen Yield-Wert von $\chi = 1$). So kann ein System in Bewegung geraten, wenn die treibenden Kräfte aus Gravitation und Druckgradient $|\vec{\nabla}p + \vec{g}|$ einen Yield-Wert von $\mu_s |\vec{\nabla}p|$ überschreiten. Analog zur statischen Coulomb-Reibung skaliert der Grenzwert mit dem Betrag des Druckgradienten $|\vec{\nabla}p|$. Somit ergänzt das Yield-Feld χ das System um ein zusätzliches statisches Kriterium zur Ergänzung der bereits vorhandenen plastischen Eigenschaft. Das eingeführte Feld muss noch geeignet in die Bewegungsgleichungen eingebunden werden. Dazu soll das Yield-Feld χ sämtliche treibenden Kräfte ausschalten, sofern die Reibungskräfte im System überwiegen. Eine geeignete Einbindung ergibt sich demnach durch Multiplikation an den Druck- und Gravitationsterm. Dies führt zu den Systemgleichungen

$$\left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = -\chi \left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}\right) \cdot \vec{\nabla}p + \eta \vec{\nabla} \cdot (|\mathbf{D}|\mathbf{D}) + \chi \vec{g} \quad (6.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{g} = g \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\chi = \Theta \left(\left| -\vec{\nabla}p + \vec{g} \right| - \mu_s \left| \vec{\nabla}p \right| \right) \left(1 - \Theta(|\mathbf{D}|) \right) + \Theta(|\mathbf{D}|). \quad (6.4)$$

Das so erweiterte Modell ermöglicht nun eine Hysterese im plastischen Verhalten. Dabei führt die Anwendung des Yield-Feldes χ auf den Druckterm zu keinerlei Problemen bei der Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung, da das System für einen Yield $\chi = 0$ nicht schert ($\mathbf{D} = 0$) und somit die Bedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{tr} \mathbf{D} = 0$ erfüllt ist. Der Druck bestimmt sich in diesem Fall dann ausschließlich durch den hydrostatischen Anteil. Ausgehend von diesem Satz an Gleichungen wird nun das effektiv eindimensionale System abgeleitet.

6.2. Reduktion auf eine eindimensionale Dynamik

Aus dem nun erweiterten Modell für den Fluss entlang der schrägen Ebene kann nun eine effektiv eindimensionale Dynamik abgeleitet werden. Die laterale Ausbreitung des Systems L ist typischerweise um einiges größer als die Höhe h , daher gilt

$$\frac{h}{L} \ll 1.$$

Dann lässt sich das System in der Modellierung als periodisch fortsetzbar annehmen und Variationen bezüglich der lateralen Änderung der Geschwindigkeit \vec{v} und des Druckes p verschwinden. Diese Annahme kommt häufig im Kontext der Strömungen in geraden Rohren vor, bei denen dann eine Reduktion und analytische Lösung

des Problems ermöglicht wird [96]. Die verschwindende laterale Änderung führt zu den beiden Gleichungen

$$\partial_x v_x = 0 \quad (6.5)$$

und

$$\partial_x p = 0. \quad (6.6)$$

Aus der Inkompressibilitätsbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ lässt sich dann direkt folgern

$$\partial_y v_y = 0 \xrightarrow{(6.1)} v_y = 0. \quad (6.7)$$

Das System zeigt also keine hochtreibende Strömung, sondern nur ein Profil in lateraler Richtung v_x , welches nur Variationen in vertikaler Richtung y zeigt. Mit diesem Resultat lässt sich nun das gesamte System auf eine Raumdimension reduzieren. Es folgen für einen Verkipfungswinkel $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$ die Systemgleichungen (Zwischenschritte siehe Anhang A.1)

$$\partial_t v_x = \chi g (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi) + \frac{1}{4} \eta \partial_y (\partial_y v_x)^2 \quad (6.8)$$

$$\chi = \Theta (\sin \varphi - \mu_s \cos \varphi) (1 - \Theta (\partial_y v_x)) + \Theta (\partial_y v_x) \quad (6.9)$$

$$v_x|_{y=0} = 0 \quad (6.10)$$

$$(\partial_y v_x)|_{y=h} = 0. \quad (6.11)$$

Das System ist nun effektiv räumlich eindimensional. Der Druck reduziert sich auf den rein hydrostatischen Anteil

$$p = g \cos \varphi (h - y),$$

da die Inkompressibilitätsbedingung stets erfüllt ist. Dies bedeutet insbesondere, dass die nicht-lokale Kopplung der Geschwindigkeit \vec{v} über den Druck p verschwindet. Diese Gleichungen sind nun der Ausgangspunkt aller weiteren Analysen des Systems.

6.3. Analytische Lösung und Hystereseverhalten

Basierend auf den Gleichungen (6.8) bis (6.11) lässt sich nun zunächst das stationäre Verhalten des Systems untersuchen. Dafür folgt zunächst aus der Gleichung (6.8) für den stationären Fall

$$\begin{aligned} 0 &= \chi g (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi) + \frac{1}{4} \eta \partial_y (\partial_y v_x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad \partial_y (\partial_y v_x)^2 &= -\frac{4\chi g}{\eta} (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi) \\ \xrightarrow{(6.11)} \quad (\partial_y v_x)^2 &= \int_y^h \frac{4\chi g}{\eta} (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi) dy. \end{aligned}$$

Um das Integral zu lösen, ist eine genauere Betrachtung der Yield-Funktion (6.9) erforderlich. Da im stationären Zustand der Fluss entweder voll entwickelt ist $\chi = 1$ oder komplett gestoppt $\chi = 0$ kann man für die Integration annehmen, dass die Yield-Funktion χ unabhängig von der vertikalen Position y ist. Dies gilt insbesondere, da die Yield-Funktion χ nur indirekt über die Heaviside-Funktion $\Theta(\partial_y v_x)$ von der vertikalen Komponente y abhängt und nicht direkt von der Scherrate $\partial_y v_x$ selbst. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
 (\partial_y v_x)^2 &= \frac{4\chi g}{\eta} (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi) (h - y) \\
 \xleftrightarrow{\partial_y v_x \geq 0} \quad \partial_y v_x &= 2\sqrt{\frac{\chi g}{\eta} (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi) (h - y)} \\
 \xleftrightarrow{(6.10)} \quad v_x &= \int_0^y 2\sqrt{\frac{\chi g}{\eta} (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi) (h - y)} dy \\
 \Leftrightarrow \quad v_x &= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\chi g}{\eta} (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi)} \left(h^{3/2} - (h - y)^{3/2} \right).
 \end{aligned}$$

Dies ist die stationäre Lösung des eindimensionalen Modells. Sie zeigt die gesuchte Bagnold-Skalierung (3.1)

$$v_x \sim h^{3/2} - (h - y)^{3/2}$$

und gibt somit das Geschwindigkeitsprofil korrekt wieder. Des Weiteren ergibt sich eine Winkelabhängigkeit der Geschwindigkeit der Form

$$v_x \sim \sqrt{\chi (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi)},$$

die zusätzlich zwei Grenzspannungen über die Koeffizienten μ_y und μ_s berücksichtigt. Betrachtet man nun die jeweiligen Grenzübergänge, für welche die Dynamik startet bzw. stoppt,

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi - \mu_y \cos \varphi &= 0 \\
 \sin \varphi - \mu_s \cos \varphi &= 0,
 \end{aligned}$$

dann lassen sich die Reibungskoeffizienten μ_y und μ_s mit den Grenzwinkeln φ_d und φ_s verknüpfen zu

$$\begin{aligned}
 \mu_y &= \tan \varphi_d \\
 \mu_s &= \tan \varphi_s.
 \end{aligned}$$

Damit wird das korrekte Hystereseverhalten der Geschwindigkeit v_x vom Verkippungswinkel φ wiedergegeben. Dies wird in der Abbildung 6.2 für die maximale Geschwindigkeit $v_x(y = h)$ visualisiert. Für kleine Winkel $\varphi < \varphi_d$ bildet sich kein Fluss aus, da die Reibungskräfte, welche durch den dynamischen Yield μ_y entstehen, überwiegen. Bei

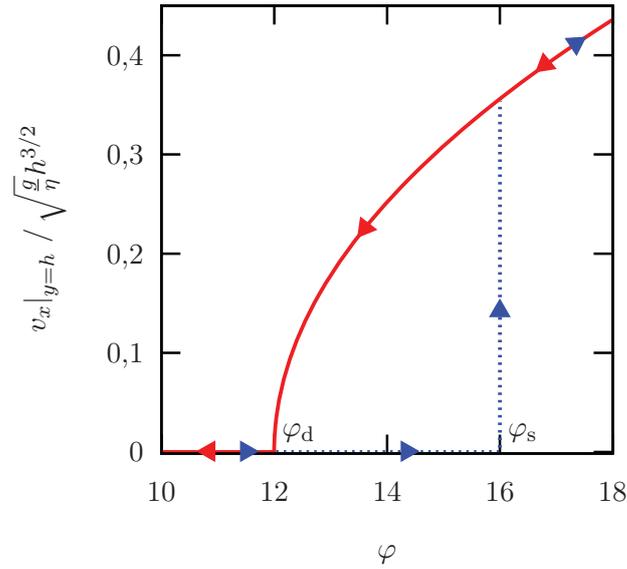


Abbildung 6.2.: Maximale Geschwindigkeit $v_x|_{y=h}$ in Abhängigkeit des Verkippungswinkels φ mit den Reibungswinkeln $\varphi_d = 12^\circ$ und $\varphi_s = 16^\circ$. Unter adiabatischer Erhöhung des Verkippungswinkels φ setzt eine Bewegung erst beim Erreichen des Winkels φ_s ein (blaue gestrichelte Linie). Bei adiabatischer Reduktion des Winkels φ hört die Bewegung erst bei einem niedrigeren Winkel φ_d auf (rote Linie).

einem Winkel zwischen dem statischen und dynamischen Reibungswinkel $\varphi_d < \varphi < \varphi_s$ verbleibt ein ruhendes System in Ruhe, während ein bereits sich bewegendes oder gestörtes System fließt. Eine geringe Störung ist bereits ausreichend, da damit verbunden eine zumindest lokale Scherung $\partial_y v_x > 0$ existiert, die zu einem Yield-Term $\chi = 1$ und einer lokalen Bildung eines Flusses führt. Diese setzt sich dann fort, bis das gesamte System fließt. Daher ist dieser Bereich instabil. Für einen Winkel oberhalb des statischen Reibungswinkels $\varphi > \varphi_s$ kommt es immer zu einer Ausbildung des Flusses, da die angreifenden Kräfte die Reibungskräfte überwiegen. Das Geschwindigkeitsprofil zeigt dabei für eine charakteristische Geschwindigkeit, wie die maximale Geschwindigkeit $v_x(y = h)$, die oben beschriebene, winkelabhängige Skalierung.

Die so beschriebene Hysterese stimmt mit der in der Literatur gefundenen Abhängigkeiten (siehe Kapitel 3) überein. Allerdings kann eine Abhängigkeit der Reibungswinkel φ_d und φ_s von der Höhe h nicht beobachtet werden. Dies lässt sich auf die fehlende Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten μ_y und μ_s von der Höhe h bzw. vertikalen Komponente y zurückführen [48].

Das gefundene Modell beschreibt also die erwarteten statischen Eigenschaften der Bagnold-Skalierung und der winkelabhängigen Hysterese. Zusätzlich ist nun ein Einblick in die zeitabhängige Dynamik möglich.

6.4. Dynamisches Verhalten

Um die Entwicklung des Profils v_x in Abhängigkeit von der Zeit t zu erhalten, kann die Bewegungsgleichung (6.8) zeitlich integriert werden. Zur Vereinfachung wird dazu das System zunächst entdimensionalisiert und das Yield-Feld als $\chi = 1$ angenommen, da sich sonst keine Dynamik ausbilden kann. Dabei werden folgende dimensionslose Größen eingeführt

$$\begin{aligned} z &:= \frac{y}{h} \\ \tau &:= t \sqrt{\frac{g(\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi)}{h}} \\ u &:= v_x \frac{1}{\sqrt{hg(\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi)}} \\ \beta &:= \frac{\eta}{4h^2}. \end{aligned}$$

Die Skalierung der Zeit t und der Geschwindigkeit v_x mit dem Winkelanteil $\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi$ spiegelt dabei wider, dass eine Erniedrigung oder Erhöhung der Winkel φ und φ_d sich direkt auf die effektiven Kräfte im System auswirken, welche wiederum einen Einfluss auf die Zeit- und Geschwindigkeitsskalen haben. Die Skalierung liefert einen dimensionslosen Reibungskoeffizienten β , der das Verhältnis der Bagnold-Reibung η zur Höhe h beschreibt. Die entdimensionalisierten Systemgleichungen haben dann die Form

$$\partial_\tau u = 1 + \beta \partial_z (\partial_z u)^2 \quad (6.12)$$

$$u|_{z=0} = 0 \quad (6.13)$$

$$(\partial_z u)|_{z=1} = 0 \quad (6.14)$$

mit der stationären Lösung

$$u = \frac{2}{3} \beta^{-1/2} \left(1 - (1 - z)^{3/2} \right).$$

Die numerische Lösung der Bewegungsgleichung (6.12) wurde mit einem Runge-Kutta-4-Verfahren mit finiten Differenzen bewerkstelligt. Solch ein Ergebnis für einen Reibungskoeffizienten $\beta = 0,5$ zeigt die Abbildung 6.3. In dieser ist die Geschwindigkeit u in Abhängigkeit der vertikalen Komponente z für verschiedene Zeiten τ aufgetragen. Die Achsen wurden dabei getauscht, da sich dadurch eine Darstellung analog zum Experiment ergibt. Das System fließt so von links nach rechts mit der Geschwindigkeit u (orange Linien), während unten (an der u -Achse) sich der Boden befindet und oben die Oberfläche des Granulats. Man sieht, dass das Granulat sich zu Beginn als ganzer Block mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt. Aufgrund der Randbedingung (6.10) am Boden und der dadurch einsetzenden Scherung treten die Reibungseffekte

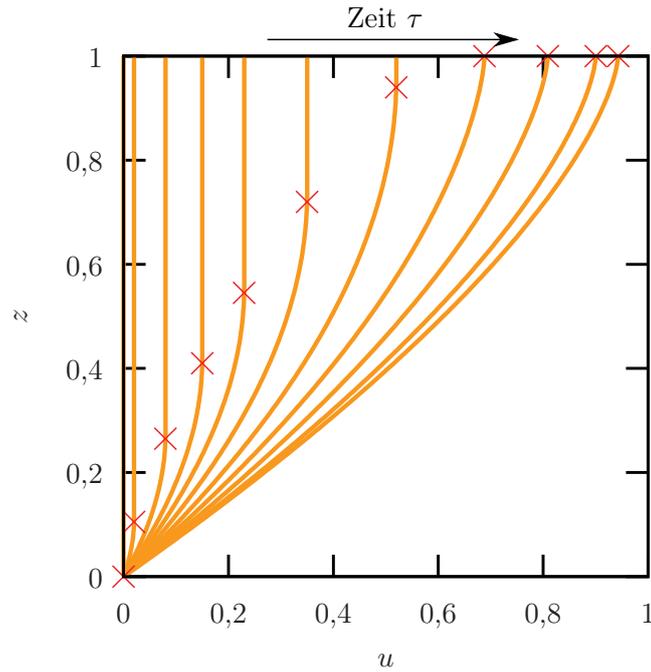


Abbildung 6.3.: Geschwindigkeitsprofil $u(z)$ für verschiedene Zeiten τ für einen Reibungskoeffizienten $\beta = 0,5$. Startend bei der Anfangsbedingung $u = 0$ (z -Achse) bildet sich für höhere Zeiten τ das Geschwindigkeitsprofil (orange Linie von links nach rechts) aus, bis es gegen das stationäre Bagnold-Profil konvergiert. Für endliche Zeiten τ existiert ein Übergang von scherender zu nicht-scherender Geschwindigkeit (rotes Kreuz). Dies zeigt eine Propagationsfront beginnend am Boden, die die Scherung induziert.

des Bagnold-Terms in Kraft. Dadurch wird das charakteristische Bagnold-Profil beginnend am Boden mit wachsender Zeit τ durch das gesamte Granulat induziert. Der Übergang zwischen scherender und nicht-scherender Geschwindigkeit u zeigt eine klare Propagationsfront, welche nach endlicher Zeit τ_{fr} die Oberfläche des Systems erreicht. Die Geschwindigkeit u schert dann vollständig und relaxiert dann nach weiterer Zeit τ gegen das stationäre Bagnold-Profil. Der nicht-scherende Teil des Systems entwickelt sich dabei gemäß Gleichung (6.12) mit

$$\partial_{\tau}u = 1.$$

Die Zeit τ_{fr} , bei der eine vollständige Scherung des Systems erreicht wird, lässt sich nun unter Ausnutzung dieser Gleichung weiter analysieren. Dafür wird aus der Zeitreihe der Geschwindigkeit u numerisch die Beschleunigung $\partial_{\tau}u$ ermittelt. Erreicht die Propagationsfront die Oberfläche, so gilt gerade

$$(\partial_{\tau}u)|_{y=h} < 1.$$

Durch diese Bedingung lässt sich numerisch dann die Propagationszeit τ_{fr} in Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten β bestimmen. Dies zeigt die Abbildung 6.4. Die Pro-

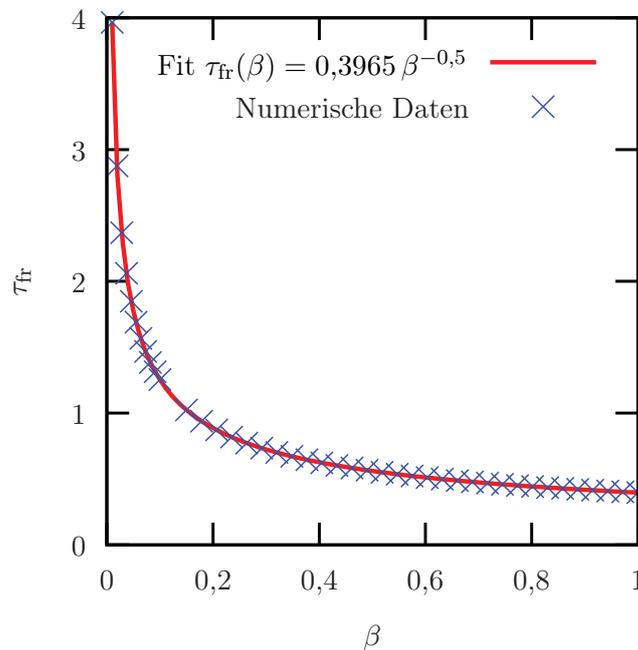


Abbildung 6.4.: Propagationszeit τ_{fr} in Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten β . Die numerisch ermittelten Daten (blaue Kreuze) lassen sich quantitativ mit dem Fit $\tau_{\text{fr}} \sim \beta^{-0,5}$ (rote Linie) bestimmen.

pagationszeit τ_{fr} zeigt eine klare Abhängigkeit vom Reibungskoeffizienten β der Form

$$\tau_{\text{fr}} = \alpha \beta^{-0,5},$$

die mit dem konstanten Koeffizienten $\alpha = 0,3965$ in quantitative Übereinstimmung mit den numerischen Daten gebracht werden kann. Dabei ergibt sich im Limes $\beta \rightarrow 0$ der reibungslose Fall, womit dann auch die Propagationszeit divergiert $\tau_{\text{fr}} \rightarrow \infty$. Dies spiegelt im Wesentlichen wider, dass ein reibungsfreies System kein Scherprofil ausbildet und somit keine Propagationsfront existiert.

7. Das inelastische Bouncing-Ball-Modell

Das inelastische Bouncing-Ball-Modell gehört zur einer Klasse von Modellen, die die vertikale Bewegung eines Balls, welcher von einer oszillierenden Platte angetrieben wird, beschreibt. Der konzeptionell einfache Aufbau dieser Modelle zeigt eine Fülle von dynamischen Verhalten nichtlinearer Systeme, wie Periodenverdopplung oder Chaos, und ein breites Spektrum an Anwendungen [97–99]. Auch im Kontext granularer Fragestellungen findet ein in horizontaler Richtung erweitertes Bouncing-Ball-Modell Anwendung. Die Schwingförderer ermöglichen durch die Vibration der Platte einen horizontalen Transport des Granulats, dessen Richtung von der Vibrationsstärke kontrolliert werden kann [4, 100, 101].

Wie bereits im Kapitel 4 herausgestellt, lässt sich der Einfluss der vertikalen Vibration auf das granulare System durch das Bouncing-Ball-Modell verstehen. Zur theoretischen Modellierung wird in den nachfolgenden Unterkapiteln das *inelastische Bouncing-Ball-Modell* vorgestellt und die wesentlichen Gleichungen abgeleitet.

7.1. Modell

Das inelastische Bouncing-Ball-Modell beschreibt die Bewegung eines Balls unter Gravitation, welcher durch eine Platte angetrieben wird. Die Platte selbst bewegt sich vertikal oszillierend gemäß der Trajektorie

$$y_{\text{pl}}(t) = A \sin(2\pi ft) \quad (7.1)$$

mit A der Schwingungsamplitude und f der Antriebsfrequenz. Abhängig von diesen Parametern kann der Ball von der Platte abheben und durchläuft dann einen freien Fall bis zum Aufschlag auf die Platte. Die Bewegung des Balls lässt sich somit in drei Phasen aufteilen: die Bewegung auf der Platte, der freie Fall und der Aufschlag auf die Platte. Die Abbildung 7.1 illustriert die verschiedenen Phasen in der Bewegung des Balls. Zur weiteren mathematischen Beschreibung soll das System dabei folgende Annahmen erfüllen:

1. Die Bewegung des Balls beschränkt sich auf die vertikale y -Komponente. Im einfachen Modell sind die vertikale und horizontale Bewegung unabhängig voneinander und lassen sich daher getrennt beschreiben. Da der Antrieb und die

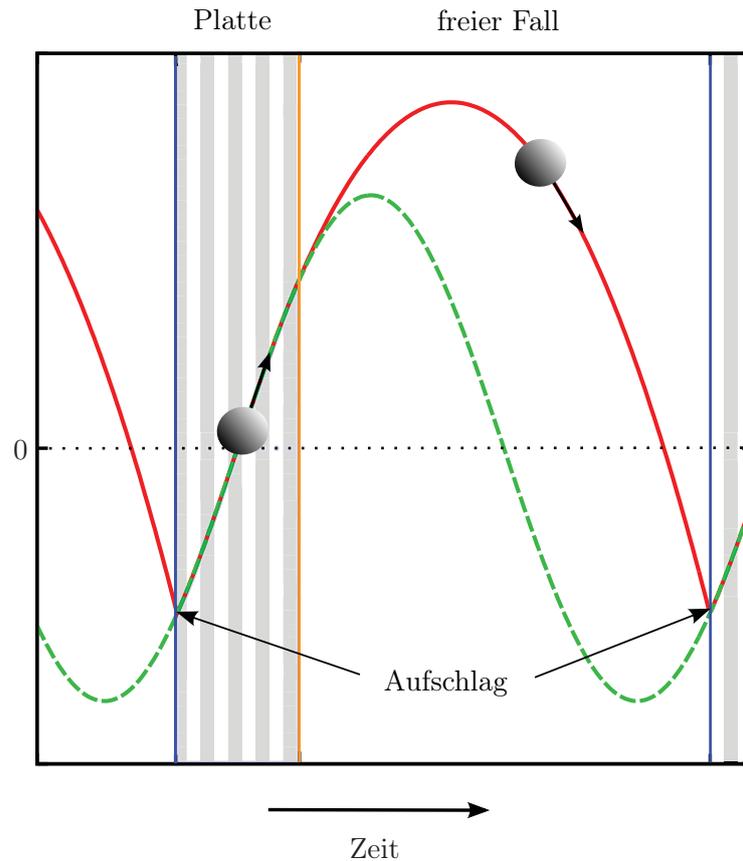


Abbildung 7.1.: Verschiedene Phasen (schraffiert: auf der Platte; weißer Bereich: freier Fall; blaue Linie: Aufschlag) in der Dynamik des Balls (rot: Bewegung des Balls; grün: Bewegung der Platte).

Gravitationskraft rein vertikal wirken, besteht kein Einfluss auf die horizontale Geschwindigkeitskomponente des Balls.

2. Der Aufschlag des Balls auf die Platte erfolgt vollständig inelastisch. Damit folgt, dass der Ball (zumindest für eine infinitesimale Zeit) auf der Platte liegen bleibt, bis es zum nächsten Abheben kommt. Auch wenn diese Annahme selbst bei harten Bällen – also bei niedrigen Restitutionskoeffizienten – im Allgemeinen nicht erfüllt ist, wird dies hier angenommen, da die teilelastische Dynamik deutlich komplexer und für die grundlegende Beschreibung der Kräfte auf das granulare System nicht zielführend ist.
3. Die Bewegung des Balls beeinflusst die Oszillation der Platte nicht. Dies lässt sich unter der Voraussetzung annehmen, dass die Platte deutlich schwerer ist als der Ball. Dann folgt für die Geschwindigkeit v_n nach dem Aufschlag

$$v_n = \frac{m_{\text{pl}}v_{\text{pl}} + m_{\text{b}}v_{\text{b}}}{m_{\text{pl}} + m_{\text{b}}} \approx v_{\text{pl}}.$$

Im Experiment lässt sich im Allgemeinen ein geringer Einfluss auf die Platte feststellen [30, Fig. 3], dieser wird jedoch als zu vernachlässigen angenommen.

Der Ball unterliegt der Gravitationskraft und wird durch diese auf der Platte gehalten. Nun ist es möglich, dass die Platte stärker nach unten beschleunigt als die Gravitationskraft auf den Ball wirkt. In diesem Fall hebt der Ball aufgrund seiner Trägheit von dieser ab. Dieses Verhalten ergibt die Bedingung

$$\begin{aligned} -g &\stackrel{!}{\geq} \ddot{y}_{\text{pl}}(t_{\text{off}}^{(i)}) \\ \Leftrightarrow & 1 \leq \Gamma \sin\left(2\pi f t_{\text{off}}^{(i)}\right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

mit

$$\Gamma := \frac{4\pi^2 f^2 A}{g} \quad (7.3)$$

der Vibrationsstärke. Die Gleichung (7.2) ist die *Abhebebedingung*, welche die Zeitpunkte $t_{\text{off}}^{(i)}$ des i -ten Abhebens von der Platte bestimmt. Aus ihr folgt direkt, dass für eine Vibrationsstärke $\Gamma \leq 1$ kein Abheben stattfinden kann und der Ball stets auf der Platte verbleibt. Daher reicht es sich auf den Fall $\Gamma > 1$ zu beschränken. Um nun Aussagen über die i -te Aufschlagszeit $t_{\text{imp}}^{(i)}$ treffen zu können, betrachtet man nun zunächst die Bewegung des freien Falls des Balls. Für die vertikale Position y_{b} des Balls während des freien Falls gilt

$$y_{\text{b}}(t) = y_{\text{off}}^{(i)} + v_{\text{off}}^{(i)} \left(t - t_{\text{off}}^{(i)}\right) - \frac{1}{2}g \left(t - t_{\text{off}}^{(i)}\right)^2$$

mit

$$\begin{aligned} y_{\text{off}}^{(i)} &:= y(t_{\text{off}}^{(i)}) = A \sin\left(2\pi f t_{\text{off}}^{(i)}\right) \\ v_{\text{off}}^{(i)} &:= v(t_{\text{off}}^{(i)}) = 2\pi f A \cos\left(2\pi f t_{\text{off}}^{(i)}\right). \end{aligned}$$

Aus der Kollision des Balls mit der Platte lässt sich nun die i -te Aufschlagszeit $t_{\text{imp}}^{(i)}$ bestimmen. Die Bestimmungsgleichung für diese ergibt sich zu

$$\begin{aligned} y_{\text{b}}(t) &\stackrel{!}{=} y_{\text{pl}}(t) \\ y_{\text{off}}^{(i)} + v_{\text{off}}^{(i)} \left(t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)}\right) - \frac{1}{2}g \left(t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)}\right)^2 &= A \sin\left(2\pi f t_{\text{imp}}^{(i)}\right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Die Gleichung (7.4) ist die *Aufschlagsbedingung*, die den i -ten Aufschlagszeitpunkt $t_{\text{imp}}^{(i)}$ bestimmt. Diese ist aufgrund des Sinus-Terms transzendent und muss daher numerisch gelöst werden. Darauf wird im Anhang A.2 eingegangen. Die vollständige Bewegung

y_b des Balls wird dann beschrieben durch

$$y_b(t) = \begin{cases} A \sin(2\pi f t) & : t \in [t_{\text{imp}}^{(i-1)}, t_{\text{off}}^{(i)}] \\ y_{\text{off}}^{(i)} + v_{\text{off}}^{(i)} (t - t_{\text{off}}^{(i)}) - \frac{1}{2}g (t - t_{\text{off}}^{(i)})^2 & : t \in [t_{\text{off}}^{(i)}, t_{\text{imp}}^{(i)}] \end{cases} \quad (7.5)$$

Die Gleichung (7.5) sowie die beiden Bedingungen (7.2) und (7.4) beschreiben das inelastische Bouncing-Ball-Modell und sind Ausgangspunkt der mathematischen Modellierung der vertikaler Vibration des granularen Systems. Aus ihnen wird dann im Unterkapitel 7.2 die Kraftberechnung abgeleitet. Eine charakteristische Größe, welche aus dem System abgeleitet werden kann, ist die Flugzeit

$$t_{\text{fl}}^{(i)} := t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)}.$$

Nimmt man nun an, dass das System genügend eingeschwungen ist, so lässt sich die Flugzeit t_{fl} in Abhängigkeit von der Vibrationsstärke Γ betrachten (siehe Abbildung 7.2). Die Flugzeit t_{fl} wächst aus der 0 bei $\Gamma = 1$ heraus (für $\Gamma \leq 1$ kann kein Abheben

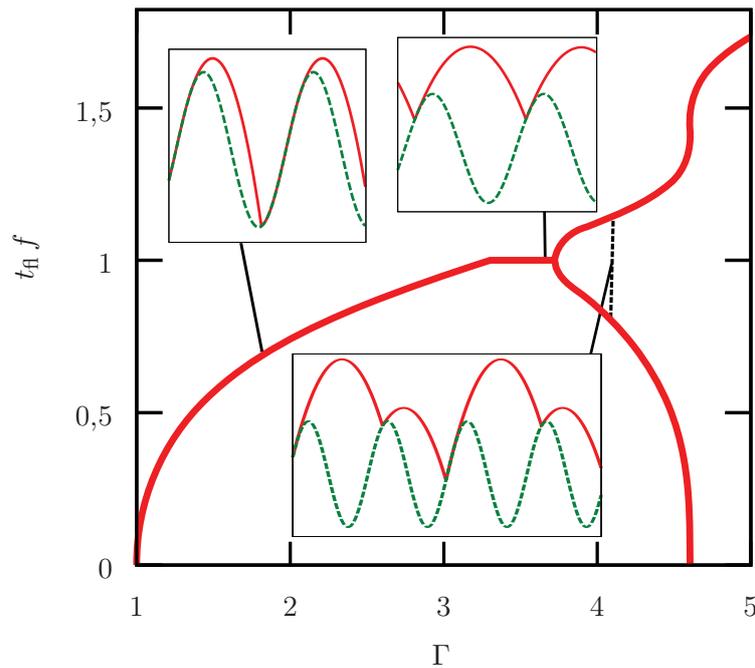


Abbildung 7.2.: Auf die Periode $\frac{1}{f}$ skalierte Flugzeit t_{fl} in Abhängigkeit der Vibrationsstärke Γ . Die Flugzeit t_{fl} zeigt einen klaren Anstieg, der dann bei $\Gamma \approx 3,3$ in ein Plateau übergeht. Darauf folgt dann die Periodenverdopplung.

stattfinden) an und steigt zunächst bis zu einem Wert von $\Gamma \approx 3,3$ auf die Plattenperiode $t_{\text{fl}} = \frac{1}{f}$ an. Für diesen Bereich an Vibrationsstärken Γ nimmt die Dynamik des Balls zwei Phasen ein: die Bewegung auf der Platte und der freie Fall (siehe Abbildung 7.2, links oben). Für höhere Vibrationsstärken Γ erreicht die Flugzeit t_{fl} das Plateau

$\frac{1}{f}$. In diesem Bereich kommt der Ball nicht auf der Platte zum Erliegen, sondern hebt direkt nach dem Aufprall wieder ab, da die Abhebebedingung (7.2) direkt wieder erfüllt ist. Aufgrund der Inelastizität des Balls hebt dieser mit der Geschwindigkeit der Platte zum Zeitpunkt des Aufpralls ab, weshalb die Bewegung zu Beginn sehr nah an der Platte liegt (siehe Abbildung 7.2, mittig oben). Eine weitere Erhöhung der Vibrationsstärke Γ führt zu einer Periodenverdopplung der Flugzeit t_{fl} . Dem Ball ist es nun möglich eine Plattenperiode $\frac{1}{f}$ zu überspringen. Dies führt zu zwei Flugzeiten t_{fl} , da der Ball zunächst abhebt und beim Aufprall auf die Platte direkt weiterspringt. Erst beim zweiten Aufprall bleibt dieser liegen bis die Abhebebedingung wieder erfüllt ist (siehe Abbildung 7.2, unten).

Die Einflüsse für höhere Vibrationsstärken $\Gamma \geq 4,5$ werden in dieser Arbeit bei der Musterbildung unter vertikaler Vibration nicht behandelt, daher wird auf diese Bereiche nicht näher eingegangen.

7.2. Berechnung der Kräfte

Für das granulare System ist es nun notwendig, aus dem inelastischen Bouncing-Ball-Modell eine externe Kraft abzuleiten, die die Einflüsse der Vibration auf das Granulat geeignet modelliert. Während die Berechnung der Kräfte auf der Platte und im freien Fall durch die zweite zeitliche Ableitung aus der Gleichung (7.5) folgen, kann die Kraft beim Aufprall auf die Platte aufgrund der vollständigen Inelastizität des Bouncing-Ball-Modells nicht abgeleitet werden. Die Beschleunigung beim Aufprall muss daher geeignet modelliert werden. Ausgangspunkt dieser Modellierung ist der Geschwindigkeitsübertrag

$$\begin{aligned} \Delta v_{\text{imp}}^{(i)} &= v_{\text{pl}}(t_{\text{imp}}^{(i)}) - v_{\text{b}}(t_{\text{imp}}^{(i)}) \\ &= 2\pi f A \cos\left(2\pi f t_{\text{imp}}^{(i)}\right) - \left[2\pi f A \cos\left(2\pi f t_{\text{off}}^{(i)}\right) - g\left(t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)}\right)\right] \\ &= 2\pi f A \left[\cos\left(2\pi f \left[t_{\text{off}}^{(i)} + t_{\text{fl}}^{(i)}\right]\right) - \cos\left(2\pi f t_{\text{off}}^{(i)}\right) + \frac{g}{2\pi f A} t_{\text{fl}}^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (7.6)$$

des i -ten Aufschlags. Mit diesem lässt sich zunächst eine Bedingung für die zu modellierende Beschleunigung $a_{\text{imp}}^{(i)}$ beim i -ten Aufschlag aufstellen

$$\Delta v_{\text{imp}}^{(i)} = \int_{t_{\text{imp}}^{(i)}}^{t_{\text{imp}}^{(i)} + t_{\text{rel}}} a_{\text{imp}}^{(i)}(t) dt$$

mit t_{rel} einer geeigneten Relaxationszeit. Es wird davon ausgegangen, dass die Relaxationszeit t_{rel} unabhängig von den Systemparametern und Anfangsbedingungen gewählt werden kann. Des Weiteren sollte für die Relaxationszeit

$$t_{\text{rel}} \ll \frac{1}{f}$$

gelten. Somit überlagern sich die Einflüsse aufeinander folgender Aufpralle nicht, da die Kraft abgeklungen ist, bevor ein weiterer Aufprall stattfindet. Ebenfalls garantiert diese Bedingung, dass die zeitliche Dauer eines Aufpralls deutlich kleiner ist, als andere Effekte im System der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{f}\right)$. Der Kraftansatz, welcher in dieser Arbeit gewählt wurde, ist folgender:

$$a_{\text{imp}}^{(i)}(t) = \frac{\Delta v_{\text{imp}}^{(i)}}{\sigma} \exp\left(-\frac{t - t_{\text{imp}}^{(i)}}{\sigma}\right) \quad (7.7)$$

mit $\sigma < t_{\text{rel}} \ll \frac{1}{f}$ der Relaxationszeit des Aufschlags. Dies entspricht einem exponentiellen Abklingen des Aufpralls auf der Platte. Dieser klingt zwar erst im Unendlichen auf 0 ab, allerdings sind die Beiträge für höhere Zeiten vernachlässigbar mit dem Fehler

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\Delta v_{\text{imp}}^{(i)} - \int_{t_{\text{imp}}^{(i)}}^{t_{\text{imp}}^{(i)} + t_{\text{rel}}} a_{\text{imp}}^{(i)}(t) dt}{\Delta v_{\text{imp}}^{(i)}} \\ &= \exp\left(-\frac{t_{\text{rel}}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Dies ergibt für einen exemplarischen Wert von $\sigma = \frac{1}{4}t_{\text{rel}}$ einen Fehler von

$$\epsilon = 1,83\%.$$

Die funktional einfache Form ermöglicht überdies eine numerisch effiziente Behandlung. Um bei der numerischen Berechnung zu garantieren, dass der Geschwindigkeitsübertrag $\Delta v_{\text{imp}}^{(i)}$ im Rahmen dieser Kraft $a_{\text{imp}}^{(i)}$ erhalten bleibt, wird folgende Diskretisierung vorgenommen. Sei $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Folge der diskreten Zeitpunkte in der numerischen Berechnung. Die diskretisierte Kraft a_k lässt sich dann mit $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\Delta v_k}{\Delta t_k} \\ &= \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a_{\text{imp}}^{(i)}(t) dt \\ &= \frac{\Delta v_{\text{imp}}^{(i)}}{\Delta t_k} \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{t_{k+1} - t_{\text{imp}}^{(i)}}{\sigma}\right) & : t_k \leq t_{\text{imp}}^{(i)} \leq t_{k+1} \\ \exp\left(-\frac{t_k - t_{\text{imp}}^{(i)}}{\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{t_{k+1} - t_{\text{imp}}^{(i)}}{\sigma}\right) & : \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Diese diskretisierte Beschleunigung a_k erhält den Geschwindigkeitsübertrag $\Delta v_{\text{imp}}^{(i)}$ unabhängig von den Zeitschritten t_k oder den Schrittweiten Δt_k .

Zur Beschreibung eines Systems, welches von der Platte getrieben wird, ist es nun zielführend, die Kräfte eines zum Bouncing Ball mitbewegten Systems zu untersuchen.

Im Falle eines Fluids ist dies besonders ratsam, da die Platte Teil des Randes ist und somit der Effekt der Platte über die Randbedingung das System beeinflusst. In einem inkompressiblen Fluid pflanzen sich Kräfte und Druckänderungen instantan fort, daher können die Kräfte über die Platte durch die Transformation in das mitbewegte System behandelt werden. Die Kräfte werden dann zu den wirkenden Volumenkräften des Fluids. Betrachtet man die vertikale Koordinate y im granularen System, so lässt sich eine Transformation der Form

$$\tilde{y} = y - y_b$$

durchführen. Mit dem Kraftansatz (7.7) lässt sich nun für das Zeitintervall $t_{\text{imp}}^{(i-1)} \leq t < t_{\text{imp}}^{(i)}$ die zweite zeitliche Ableitung ansetzen, welche die Volumenkräfte beschreibt. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{y}}^{(i-1)}(t) &= \ddot{y} - \ddot{y}_b \\ &= -g - \left[a_{\text{imp}}^{(i-1)}(t) + \begin{cases} -g\Gamma \sin(2\pi ft) & : t \in [t_{\text{imp}}^{(i-1)}, t_{\text{off}}^{(i)}] \\ -g & : t \in [t_{\text{off}}^{(i)}, t_{\text{imp}}^{(i)}] \end{cases} \right] \\ &= -a_{\text{imp}}^{(i-1)}(t) + \begin{cases} -g(1 - \Gamma \sin(2\pi ft)) & : t \in [t_{\text{imp}}^{(i-1)}, t_{\text{off}}^{(i)}] \\ 0 & : t \in [t_{\text{off}}^{(i)}, t_{\text{imp}}^{(i)}] \end{cases}. \end{aligned}$$

Dies sind die effektiven Kräfte, welche im mitbewegten granularen System wirken. Die Beschleunigung $\ddot{\tilde{y}}$ für einige Vibrationsstärken Γ zeigt die Abbildung 7.3. Bei jedem

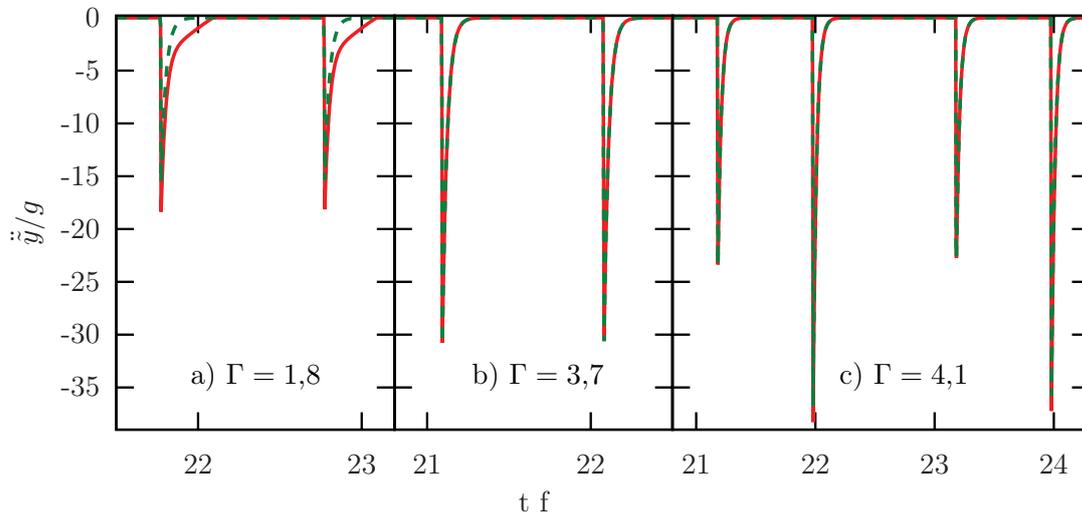


Abbildung 7.3.: Effektive Beschleunigung $\ddot{\tilde{y}}$ im mitbewegten System in Abhängigkeit der mit $\frac{1}{f}$ skalierten Zeit $t f$ für drei verschiedene Vibrationsstärken Γ (grün gestrichelt: nur Aufschlag; rot: vollständig).

Aufschlag lässt sich eine klare Beschleunigungsspitze beobachten, die dann exponentiell abfällt. Zusätzlich kommt dann noch ein Beitrag der Plattenbeschleunigung hinzu (Abb. 7.3, a), falls das System nach dem Aufschlag auf der Platte liegen bleibt. Für

Vibrationsstärken Γ , bei denen keine Periodenverdopplung auftritt, lässt sich direkt sehen, dass der Zeitabstand zweier benachbarter Aufschläge stets eine Plattenperiode $\frac{1}{f}$ (Abb. 7.3, a und b) beträgt. Bei der Periodenverdopplung allerdings kann das System zunächst weiterspringen, bevor es dann beim zweiten Aufschlag liegen bleibt. Somit ergeben sich zwei unterschiedliche Zeitabstände benachbarter Beschleunigungsspitzen, die summiert dann die doppelte Plattenperiode $\frac{2}{f}$ ergeben (Abb. 7.3, c). Die Stärke der Beschleunigungsspitzen variiert deutlich in Abhängigkeit der Vibrationsstärke Γ und der Flugzeit t_{fl} , was sich aus der funktionalen Abhängigkeit des Impulsübertrages (7.6) von den Größen Γ und t_{fl} ergibt. Allgemein lässt sich jedoch feststellen, dass die Beschleunigungsspitzen typischerweise eine Größenordnung $\mathcal{O}(10g)$ größer sind als die Gravitationsbeschleunigung g .

Das so abgeleitete Kraftmodell wird in Kapitel 9 auf das granulare System angewandt und ermöglicht so eine Beschreibung der Vibration der Box.

8. Numerische Lösung des Kontinuumsmodells

Die mathematische Struktur der Cauchy-Bewegungsgleichung erfordert im Rahmen der fluiddynamischen Beschreibung erweiterte Verfahren zur Lösung, die im Nachfolgenden vorgestellt werden. Als Erstes wird die Volume-of-Fluid-Methode erläutert, welche eine Behandlung der freien Oberfläche in einem Zwei-Phasen-Modell ermöglicht. Die dort abgeleiteten Gleichungen sind dann die Grundlage der numerischen Integration. Dabei wird der Fokus auf die Finite-Volumen-Methode und die Finite-Differenzen-Methode gelegt, welche zur Lösung der Gleichungen verwendet wurden. Eine andere häufig verwendete Methode – die Finite-Elemente-Methode – wird dabei nicht besprochen. Des Weiteren wird der PISO-Algorithmus und seine im Rahmen des Modells notwendige Modifikation vorgestellt. Dieser findet häufig Verwendung bei der Lösung der Druckgleichung zeitabhängiger Problemstellungen. Zum Schluss wird noch auf die Lösung der Phasengleichung der Volume-of-Fluid-Methode eingegangen, die als Advektionsgleichung gesondert behandelt werden muss. Da das System mithilfe der C++-Bibliothek OpenFoam[®] gelöst wurde, wird der Fokus auf den in dieser Bibliothek implementierten Verfahren gelegt.

8.1. Behandlung der freien Oberfläche: Volume-of-Fluid-Methode

Die numerische Lösung von Systemen mit freier Oberfläche erfordert zusätzliche Methoden, da die freie Oberfläche sich als zeitlich veränderliche Randbedingung im Allgemeinen nicht als Randbedingung eines statischen Gitters beschreiben lässt. Um nun ein solches System beschreiben zu können, wird in dieser Arbeit die von Hirt und Nichols entwickelte Volume-of-Fluid-Methode verwendet [33]. Eine weitere, bekannte Alternative wäre die Level-Set-Methode [102]. Die Volume-of-Fluid-Methode erweitert das System um eine zweite Phase und führt ein Phasenfeld $\alpha \in [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften ein:

- $\alpha = 1$ entspricht der ersten Phase, also dem zu untersuchenden System
- $\alpha = 0$ entspricht der zweiten, zusätzlichen Phase
- $0 < \alpha < 1$ entspricht der Kontaktfläche zwischen beiden Phasen

Die freie Oberfläche wird nun vollständig durch den Phasenübergang von α beschrieben, welcher sich vollständig in der Domäne befindet und damit keine Randbedingung dieser darstellt. Allerdings ist es nun notwendig, ein zusätzliches Skalarfeld zu lösen und die hinzugefügte Phase muss bei der Berechnung der Cauchy-Bewegungsgleichung zusätzlich berücksichtigt werden. Um dies zu bewerkstelligen, werden die Systemgleichungen bezüglich beider Phasen interpoliert. In dieser Arbeit – wie bei vielen Problemstellungen dieser Art – wird Luft als zweite Phase genutzt. Dabei werden granulare Größen mit dem Index 'g' und Luft-Größen mit dem Index 'air' versehen. Die Behandlung der freien Oberfläche impliziert in der Regel, dass das Zwei-Phasen-System nicht mischt, da die granulare Phase als inkompressibel angenommen wurde. Ebenfalls ist es sinnvoll, die zweite Phase als inkompressibel anzunehmen. Daraus lässt sich folgern, dass beide Phasen durch ein gemeinsames Geschwindigkeitsfeld \vec{v} mit den Relationen

$$\vec{v}_g = \alpha \vec{v} \quad \text{und} \quad \vec{v}_{\text{air}} = (1 - \alpha) \vec{v}$$

beschreibbar sind. Insbesondere folgt dann die Inkompressibilität des gemeinsamen Geschwindigkeitsfeldes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_g + \vec{v}_{\text{air}}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_g + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\text{air}} = 0.$$

Das erweiterte Geschwindigkeitsfeld macht eine zusätzliche Bewegungsgleichung nicht notwendig. Stattdessen werden die physikalischen Größen beider Systeme geeignet interpoliert. Diese interpolierten Größen beschreiben dann die hydrodynamischen Charakteristiken des Zwei-Phasen-Systems. Die Größen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_{\text{air}} && \text{Dichte} \\ \mu_{\text{eff}} &= \alpha \rho_g \eta |\mathbf{D}| + (1 - \alpha) \mu_{\text{air}} && \text{dyn. Viskosität} \\ \mu_y &= \alpha \mu_{y,g} && \text{Yield-Koeffizient.} \end{aligned}$$

Ebenfalls ist es möglich die kinematische Viskosität

$$\begin{aligned} \nu_{\text{eff}} &= \frac{\mu_{\text{eff}}}{\rho} = \frac{\alpha \rho_g \eta |\mathbf{D}| + (1 - \alpha) \mu_{\text{air}}}{\rho} \\ &= \frac{\alpha \rho_g \eta |\mathbf{D}| + (1 - \alpha) \rho_{\text{air}} \nu_{\text{air}}}{\rho} \end{aligned}$$

als über die Dichte ρ gemittelten Wert der jeweiligen kinematischen Viskositäten $\eta |\mathbf{D}|$ und ν_{air} darzustellen. Für die Dichte ρ gilt nun die Kontinuitätsgleichung, welche die Massenerhaltung im System garantiert, sofern keine Zu-/Abflüsse existieren. Aus dieser

folgt dann

$$\begin{aligned}
 \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\
 (\rho_g - \rho_{\text{air}}) \partial_t \alpha + \vec{\nabla} \cdot ([\alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_{\text{air}}] \vec{v}) &= 0 \\
 (\rho_g - \rho_{\text{air}}) \partial_t \alpha + (\rho_g - \rho_{\text{air}}) \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{v}) + \underbrace{\rho_{\text{air}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}_{=0} &= 0 \\
 \Leftrightarrow \partial_t \alpha + \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{v}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Es folgt wiederum eine Advektionsgleichung, welche die Erhaltung der Phase α garantiert. Dies war zu erwarten, da ein nicht erhaltenes Phasenfeld α zu Änderungen der Dichteanteile beider Medien führen würde, welches wiederum einen Widerspruch zur Erhaltung der Kontinuitätsgleichung darstellt.

Nun lässt sich die Impulsbilanzgleichung mit Dichteberücksichtigung ähnlich zum Ein-Phasen-System aufstellen

$$\partial_t (\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = - \left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu_{\text{eff}} \mathbf{D}) + \rho g_{\text{eff}} \vec{e}_y. \quad (8.1)$$

Hierbei wurde bereits angenommen, dass keine Oberflächenspannung zwischen den beiden Medien herrscht, da dies beim Granulat-Luft-System zunächst nicht zu erwarten wäre. Es gibt allerdings Untersuchungen mit dem Ergebnis, dass aufgrund einer Anisotropie im kinetischen Energietensor eine effektive Oberflächenspannung induziert werden kann [82]. Aus der Gleichung (8.1) gehen die beiden Limites ¹

$$\begin{aligned}
 \alpha = 1 : \quad \rho_g \left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= - \left(\mathbf{I} - \mu_{y,g} \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\rho_g \eta |\mathbf{D}| \mathbf{D}) + \rho_g g_{\text{eff}} \vec{e}_y \\
 \alpha = 0 : \quad \rho_{\text{air}} \left(\partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2} \mu_{\text{air}} \Delta \vec{v} + \rho_{\text{air}} g_{\text{eff}} \vec{e}_y
 \end{aligned}$$

hervor. Es folgen also die abgeleitete Systemgleichung für das Granulat sowie die Navier-Stokes-Gleichung für Luft je in inkompressibler Form. Zuletzt ist noch eine Modifizierung des Yield-Terms notwendig. Dieser kann für kleine Scherraten $|\mathbf{D}|$ numerische Probleme erzeugen, da er insbesondere im Limes $|\mathbf{D}| \rightarrow 0$ nicht klar definiert ist. Daher wird analog zur Modifikation von Papanastasiou, die bei Bingham- und Herschel-Bulkley-Fluiden durchgeführt wird [51], der Yield-Term mit einem zusätzlichen Exponentialterm modifiziert. Diese Änderung lautet

$$\mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \quad \rightarrow \quad \mu_y \left(1 - e^{-m|\mathbf{D}|} \right) \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}$$

¹Aus der der Inkompressibilität $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ folgt die Identität

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\Delta \vec{v} + \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{v}] \right) = \frac{1}{2} \Delta \vec{v}.$$

mit m einer Konstanten, welche typischerweise von der Größenordnung $\mathcal{O}(10^3\text{s})$ ist. Damit ist der Yield-Term auch für den Übergang

$$|\mathbf{D}| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_y \left(1 - e^{-m|\mathbf{D}|}\right) \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \rightarrow 0$$

wohldefiniert. Durch die Wahl einer großen Konstanten m verschwindet der Exponentialterm hinreichend schnell und seine Einflüsse sind bereits für geringe Scherraten $|\mathbf{D}|$ vernachlässigbar. Zur weiteren numerischen Behandlung folgt jetzt im nächsten Schritt die Diskretisierung der Domäne durch die Finite-Volumen-Methode.

8.2. Finite-Volumen-Methode

Die Cauchy-Bewegungsgleichungen lassen sich aus einer Bilanzgleichung von Spannungen und Flüssen im System ableiten [49, 96, 103]. Daher lässt sie sich auch in eine äquivalente Integralform bringen, welche dann in der Finite-Volumen-Methode durch eine endliche Anzahl an Teilvolumina diskretisiert werden kann. Sei also V ein zunächst beliebiges Volumen, welches in der Lösungsdomäne Ω enthalten ist, mit dem Rand ∂V . Dann gilt für die Systemgleichung (8.1) in diesem Volumenelement V unter Anwendung des Satzes von Gauss

$$\begin{aligned} \int_V \partial_t (\rho \vec{v}) \, dV &= \int_{\partial V} (-\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + \mu_{\text{eff}} \mathbf{D}) \cdot d\vec{S} \\ &+ \int_V \left[- \left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p + \rho g_{\text{eff}} \vec{e}_y \right] dV. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Die zunächst beliebige Wahl von V wird nun bei der Diskretisierung der Domäne Ω genutzt. Hierfür teilt man die Domäne Ω in eine endliche Anzahl an Teilvolumina V_i mit $i = 1, \dots, N$ und betrachtet alle Feldgrößen als räumliche Mittelwerte dieser. Dies kann beispielsweise erreicht werden, indem die Volumina als polygonale Zellen gewählt werden. Ein Beispiel eines solchen Gitters zeigt die Abbildung 8.1. Für jedes dieser Teilvolumina V_i lässt sich nun die Integralform (8.2) aufstellen. Durch die Wahl polygonaler Volumina sind die Ränder stückweise linear und die Oberflächenintegrale lassen sich in lineare Anteile S zerlegen. Zusätzlich sind die Oberflächennormalen \vec{n}_S der Oberflächenanteile S konstant. Die Systemgleichung lässt sich dann umformen zu

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \partial_t (\rho \vec{v}) \, dV &= \sum_{S \in \partial V_i} \int_S (-\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + \mu_{\text{eff}} \mathbf{D}) \cdot \vec{n}_S \, dS \\ &- \int_{V_i} \left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p \, dV + \int_{V_i} \rho g_{\text{eff}} \vec{e}_y \, dV. \end{aligned}$$

Um die Integrale numerisch lösen zu können, müssen diese nun geeignet approximiert werden. Dafür erfolgt zunächst die Betrachtung der geometrischen Schwerpunkte der

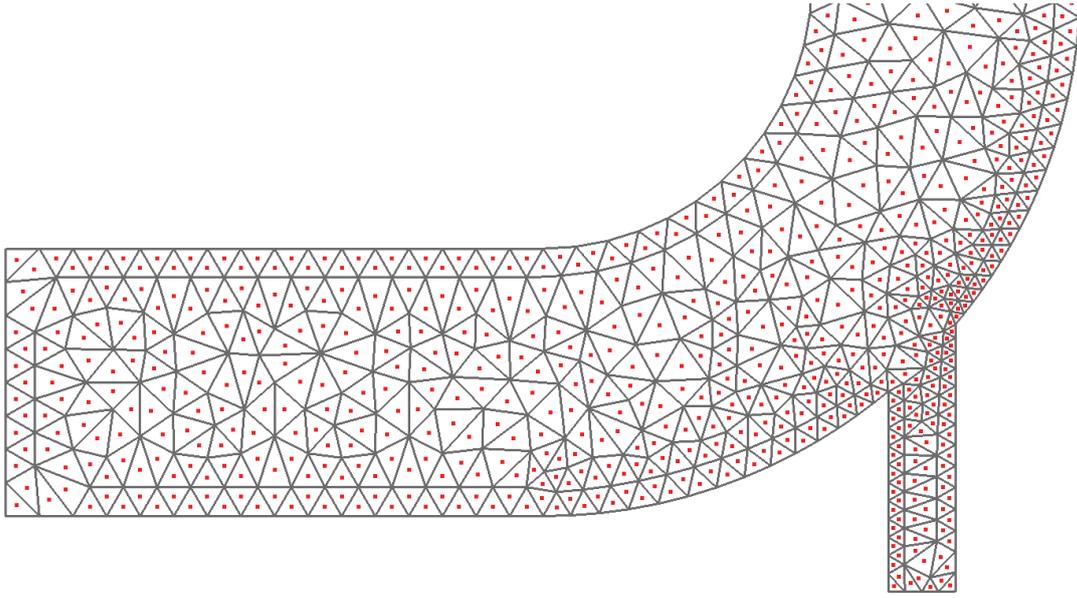


Abbildung 8.1.: Gitter zur Realisierung einer Strömung in einem gekrümmten Rohr (grau: Ränder S der Volumina V_i ; rot: Mittelpunkte \vec{r}_i der Volumina V_i) aus einem Tutorial von OpenFoam[®].

Volumina \vec{r}_i und der Oberflächen \vec{r}_S . Aus deren Definitionen lässt sich nun ableiten

$$\vec{r}_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \vec{r} dV \Leftrightarrow \int_{V_i} (\vec{r} - \vec{r}_i) dV = 0 \quad (8.3)$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{S} \int_S \vec{r} dS \Leftrightarrow \int_S (\vec{r} - \vec{r}_S) dS = 0. \quad (8.4)$$

Sei nun Θ eine beliebige Feldgröße des Systems mit $\Theta_i := \Theta(\vec{r}_i)$ und $(\vec{r} - \vec{r}_i)^2 = (\vec{r} - \vec{r}_i) \otimes (\vec{r} - \vec{r}_i)$. Diese lässt sich nun lokal in eine Taylor-Reihe der Form

$$\Theta = \Theta_i + \left(\vec{\nabla} \Theta \right)_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i) + \mathcal{O}((\vec{r} - \vec{r}_i)^2)$$

entwickeln. Die Integration dieser Reihe über das Teilvolumen V_i liefert dann die nötige Approximation

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \Theta dV &= \int_{V_i} \left[\Theta_i + \left(\vec{\nabla} \Theta \right)_i \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i) + \mathcal{O}((\vec{r} - \vec{r}_i)^2) \right] dV \\ &= V_i \Theta_i + \left(\vec{\nabla} \Theta \right)_i \cdot \underbrace{\int_{V_i} (\vec{r} - \vec{r}_i) dV}_{\stackrel{(8.3)}{=} 0} + \int_{V_i} \mathcal{O}((\vec{r} - \vec{r}_i)^2) dV \\ &= V_i \Theta_i + \int_{V_i} \mathcal{O}((\vec{r} - \vec{r}_i)^2) dV \\ &\approx V_i \Theta_i. \end{aligned}$$

Ein analoges Resultat folgt für die entsprechenden Integrale über die Oberfläche S und für die Komposition von mehreren Feldgrößen, da stets die linearen Anteile durch die Gleichungen (8.3) und (8.4) verschwinden. Dies hat zur Folge, dass die Approximation der Integrale auf dieser Art stets von quadratischer Ordnung im Raum ist. Im Umkehrschluss folgt die Konsequenz, dass die Approximation der Ableitungen durch finite Differenzen ebenfalls nur eine quadratische Ordnung der Feldgrößen liefern kann, da die Ordnung durch die Finite-Volumen-Methode begrenzt ist.

Im nächsten Schritt müssen nun die jeweiligen Integralterme ausgewertet werden. Es folgt dann die Impulsdichte

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \rho \vec{v} \, dV &\approx V_i (\rho \vec{v})_i \\ &= V_i \rho_i \vec{v}_i, \end{aligned}$$

der Spannungsteil

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \partial V_i} \int_S \mu_{\text{eff}} \mathbf{D} \cdot \vec{n}_S \, dS &\approx \sum_{S \in \partial V_i} (\mu_{\text{eff}} \mathbf{D})_S \cdot \vec{S} \\ &= \sum_{S \in \partial V_i} \mu_{\text{eff},S} \mathbf{D}_S \cdot \vec{S}, \end{aligned}$$

der Konvektionsterm

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \partial V_i} \int_S \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \cdot \vec{n}_S \, dS &\approx \sum_{S \in \partial V_i} (\rho \vec{v} \otimes \vec{v})_S \cdot \vec{S} \\ &= \sum_{S \in \partial V_i} \underbrace{\vec{S} \cdot (\rho \vec{v})_S}_{=: \Phi_\rho} \vec{v}_S \\ &= \sum_{S \in \partial V_i} \Phi_\rho \vec{v}_S \end{aligned}$$

und der Druckterm

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p \, dV &\approx V_i \left[\left(\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p \right]_i \\ &= V_i \left(\mathbf{I} - \mu_{Y,i} \frac{\mathbf{D}_i}{|\mathbf{D}_i|} \right) \cdot \vec{\nabla} p_i. \end{aligned}$$

Nach diesen Schritten sind alle Integrale des Systems gelöst und man erhält dann mit dem Materialfluss $\Phi_\rho := \vec{S} \cdot (\rho \vec{v})_S$ durch die Oberfläche S die Ausgangsgleichung

$$\partial_t(\rho_i \vec{v}_i) + \frac{1}{V_i} \sum_{S \in \partial V_i} \left(\Phi_\rho \vec{v}_S - \mu_{\text{eff},S} \mathbf{D}_S \cdot \vec{S} \right) = - \left(\mathbf{I} - \mu_{Y,i} \frac{\mathbf{D}_i}{|\mathbf{D}_i|} \right) \cdot \vec{\nabla} p_i + \rho_i g_{\text{eff}} \vec{e}_y. \quad (8.5)$$

Die räumliche Behandlung im Rahmen der Finite-Volumen-Methode ist soweit abge-

geschlossen. In den nächsten Schritten folgt nun die Behandlung der Interpolationen auf die Oberflächen sowie die Berechnung der Gradienten $\vec{\nabla}v$ und $\vec{\nabla}p$.

8.3. Interpolation von Oberflächengrößen

Die Finite-Volumen-Methode berücksichtigt sowohl Größen in den Volumina als auch auf dessen Rändern. Hierfür ist es jedoch nötig, diese zueinander in Relation zu setzen, welches durch geeignete Interpolationen der Oberflächengrößen auf die Volumengrößen geschieht. Meist geschieht dies durch eine lineare Interpolation der Volumengrößen, die im Rahmen der Finite-Volumen-Methode von zweiter Ordnung ist [104]. Es sind auch Verfahren höherer Ordnung möglich, die jedoch die Berücksichtigung zusätzlicher Werte benötigen.

Zur Anschauung betrachtet man exemplarisch die Abbildung 8.2, die einen zwei-dimensionalen Fall darstellt. Die Interpolation lässt sich analog auf den dreidimensionalen Fall übertragen. Sei Φ die Größe in den Volumina V_P und V_N , die auf die

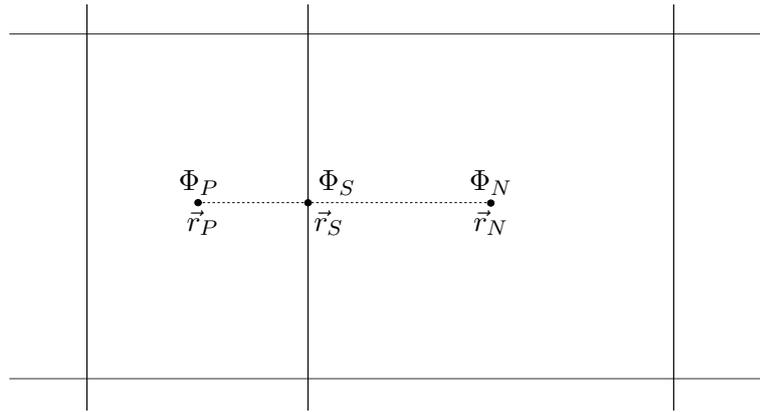


Abbildung 8.2.: Skizze zur Interpolation der Volumengrößen Φ_P und Φ_N auf die Oberflächengröße Φ_S .

Oberfläche S interpoliert werden soll. Die lineare Interpolation ist dann gegeben durch

$$\Phi_S = f\Phi_P + (1 - f)\Phi_N$$

$$f = \frac{|\vec{r}_N - \vec{r}_S|}{|\vec{r}_P - \vec{r}_S| + |\vec{r}_N - \vec{r}_S|}.$$

Diese Interpolation berücksichtigt, dass ein orthogonales Gitter nicht notwendigerweise gleich große Volumina enthält, wodurch sich unterschiedliche Abstände vom Volumenzentrum zur Oberfläche ergeben können.

Diese Art der Interpolation ist für die meisten Terme ausreichend, führt allerdings bei den Flusstermen – wie bei der Advektionsgleichung oder dem Konvektionsterm – zu Oszillationen und damit zur Divergenz der Numerik. Der Hauptgrund hierfür sind auftretende hohe Gradienten in den Flüssen, die nur ungenügend vom linearen

Interpolationsverfahren erfasst werden. Dies ließe sich durch die Upwind-Interpolation

$$\Phi_S = \begin{cases} \Phi_P & : \text{Fluss von } P \text{ nach } N \\ \Phi_N & : \text{Fluss von } N \text{ nach } P \end{cases}$$

beheben, welche allerdings nur von erster Ordnung ist. Eine Möglichkeit diesen beiden Problemen entgegenzuwirken ist die Verwendung eines Flussbegrenzers Ψ . Anhand der Gradienten der Oberflächenflüsse interpoliert dieser zwischen dem linearen Verfahren Φ_{lin} (geringe Gradienten) und dem Upwind-Verfahren Φ_{up} (hohe Gradienten)

$$\Phi_S = \Phi_{\text{up}} + \Psi (\Phi_{\text{lin}} - \Phi_{\text{up}}).$$

Somit bleibt die höhere Ordnung des linearen Verfahrens erhalten, während die Stabilität des Upwind-Verfahrens gegeben ist. Durch numerisches Testen haben sich dabei zwei Flussbegrenzer bewährt: das OSPRE-Schema für den Konvektionsterm der Bewegungsgleichung und das van-Leer-Schema für die Lösung der Phasenadvektionsgleichung [105, 106].

8.4. Gradientenbestimmung

Ausgehend von Gleichung (8.5) müssen zur weiteren räumlichen Behandlung noch der Gradient der Geschwindigkeit $\vec{\nabla} \vec{v}$, welcher im Schertensor \mathbf{D} vorkommt, und der Gradient des Drucks $\vec{\nabla} p$ bestimmt werden. Sei exemplarisch $\Phi(\vec{r})$ ein Feld, dessen Gradient $\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}_P)$ am Volumenpunkt \vec{r}_P bestimmt werden soll. Dann lässt sich nun zunächst mit der Finite-Volumen-Methode der Ansatz

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_P) + \left(\vec{\nabla} \Phi \right)_{\vec{r}_P} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_P) + \mathcal{O}((\vec{r}_N - \vec{r}_P) \otimes (\vec{r} - \vec{r}_P))$$

aufstellen. Dieser Gradient lässt sich nun mithilfe der Nachbarsvolumina N bestimmen. Unter Berücksichtigung aller nächster Nachbarn (also alle Nachbarn, die eine Oberfläche mit dem Volumen P teilen) führt dies zu einem überbestimmten System, da 2 bzw. 3 Raumkomponenten gesucht sind, aber 4 bzw. 6 nächste Nachbarn vorhanden sind. Hierfür wird dann die Methode der kleinsten Quadrate verwendet, die die Fehlerquadrate minimiert und damit eine Lösung quadratischer Ordnung unter Berücksichtigung aller nächster Nachbarn bietet. Dann folgt das zu lösende Gleichungssystem [107]

$$\left(\vec{\nabla} \Phi \right)_{\vec{r}_P} = \left[\sum_N (\vec{r}_N - \vec{r}_P) \otimes (\vec{r}_N - \vec{r}_P) \right]^{-1} \sum_N [\Phi(\vec{r}_N) - \Phi(\vec{r}_P)] (\vec{r}_N - \vec{r}_P).$$

Im Allgemeinen gilt diese Form nur für orthogonale Gitter, eine Implementierung für nicht-orthogonale Gitter wurde in OpenFoam[®] realisiert. Da das hier behandelte Gitter orthogonal ist, wird nicht weiter auf generalisierte Verfahren der kleinsten Quadrate

eingegangen.

Einfacher gestaltet sich die Berechnung der Gradienten $\vec{\nabla}\Phi$ auf den Oberflächen \vec{S} . Diese lassen sich – analog zum Unterkapitel 8.3 – für orthogonale Gitter durch die lineare Interpolation direkt berechnen

$$\vec{S} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)_S = |\vec{S}| \frac{\Phi_N - \Phi_P}{|\vec{r}_N - \vec{r}_P|}.$$

Diese ist ebenfalls im Rahmen der Finite-Volumen-Methode von zweiter Ordnung.

Mit den Gradientenbestimmungen ist das System nun vollständig räumlich diskretisiert und eine zeitliche Diskretisierung kann stattfinden. Die zeitliche Diskretisierung wird dabei über das implizite Euler- und Crank-Nicolson-Verfahren abgehandelt. Da es sich bei beiden Verfahren um implizite Verfahren handelt, muss im Anschluss an die vollständige zeitliche Diskretisierung noch ein algebraisches System gelöst werden.

8.5. Zeitliche Diskretisierung

Bei dem nun vollständig räumlich diskretisierten System kann nun die zeitliche Diskretisierung durchgeführt werden. Um die nachfolgenden Gleichungen übersichtlich zu halten, werden die weiteren räumlichen Diskretisierungen nicht eingesetzt. Als Ausgangspunkt der zeitlichen Behandlung betrachtet man die zeitliche Integration der Bewegungsgleichung (8.5) zur Zeit t über einen Zeitschritt Δt

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \partial_t(\rho_i \vec{v}_i) dt + \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{V_i} \sum_{S \in \partial V_i} (\Phi_\rho \vec{v}_S - \mu_{\text{eff},S} \mathbf{D}_S \cdot \vec{S}) dt \\ = - \int_t^{t+\Delta t} \left(\mathbf{I} - \mu_{y,i} \frac{\mathbf{D}_i}{|\mathbf{D}_i|} \right) \cdot \vec{\nabla} p_i dt + \int_t^{t+\Delta t} \rho_i g_{\text{eff}} \vec{e}_y dt. \end{aligned}$$

Die zeitliche Ableitung der Impulsdichte lässt sich direkt lösen, die anderen Terme erfordern eine entsprechende Näherung. Die Bestimmung des Druckes p erfolgt dabei gesondert mithilfe des PISO-Verfahrens im Unterkapitel 8.6. Für die restlichen Terme kommen zwei typische Diskretisierungsverfahren zum Einsatz – das implizite Euler- und das Crank-Nicolson-Verfahren – sowie eine anschließende zeitliche Linearisierung, die die direkte Lösung des Gravitationsterms ermöglicht.

Das Crank-Nicolson-Verfahren ist ein implizites Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit, welches die Mittelung zwischen einem expliziten und einem impliziten Euler-Schritt darstellt [104]. Dieses wird auf den Konvektions- und Spannungsterm ange-

wendet und liefert mit $f(t + \Delta t) = f^{(n+1)}$, $f(t) = f^{(n)}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{(n+1)} \vec{v}_i^{(n+1)} - \rho_i^{(n)} \vec{v}_i^{(n)}}{\Delta t} \\ & + \frac{1}{2V_i} \sum_{S \in \partial V_i} \left(\Phi_\rho^{(n+1)} \vec{v}_S^{(n+1)} + \Phi_\rho^{(n)} \vec{v}_S^{(n)} - \left[\mu_{\text{eff},S}^{(n+1)} \mathbf{D}_S^{(n+1)} + \mu_{\text{eff},S}^{(n)} \mathbf{D}_S^{(n)} \right] \cdot \vec{S} \right) \\ & = - \int_t^{t+\Delta t} \left(\mathbf{I} - \mu_{y,i} \frac{\mathbf{D}_i}{|\mathbf{D}_i|} \right) \cdot \vec{\nabla} p_i \, dt + \int_t^{t+\Delta t} \rho_i g_{\text{eff}} \vec{e}_y \, dt. \end{aligned}$$

Die vorliegende diskretisierte Gleichung hängt nichtlinear vom gesuchten Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}^{(n+1)}$ ab, was wiederum bedeutet, dass bei einer vollständigen Diskretisierung ein nichtlineares, algebraisches System gelöst werden müsste. Da dies im Allgemeinen sehr aufwendig ist und komplexe Verfahren notwendig macht, wird im nächsten Schritt eine zeitliche Linearisierung durchgeführt. Dafür wird angenommen, dass die Dichte ρ , der Fluss Φ_ρ , die Viskosität μ_{eff} sowie der Yield-Term $\mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}$ sich zeitlich nur geringfügig ändern und somit eine Betrachtung zur aktuellen Zeit t ausreicht. Daraus folgt dann das linearisierte, algebraische System

$$\begin{aligned} & \rho_i^{(n)} \frac{\vec{v}_i^{(n+1)} - \vec{v}_i^{(n)}}{\Delta t^{(n)}} + \frac{1}{2V_i} \sum_{S \in \partial V_i} \left(\Phi_\rho^{(n)} \left[\vec{v}_S^{(n+1)} + \vec{v}_S^{(n)} \right] - \mu_{\text{eff},S}^{(n)} \left[\mathbf{D}_S^{(n+1)} + \mathbf{D}_S^{(n)} \right] \cdot \vec{S} \right) \\ & = - \left(\mathbf{I} - \mu_{y,i}^{(n)} \frac{\mathbf{D}_i^{(n)}}{|\mathbf{D}_i^{(n)}|} \right) \cdot \int_t^{t+\Delta t} \vec{\nabla} p_i \, dt + \rho_i^{(n)} \int_t^{t+\Delta t} g_{\text{eff}} \vec{e}_y \, dt. \end{aligned}$$

Im Rahmen dieser Linearisierung lässt sich nun auch der Kraftterm durch direktes Aufintegrieren exakt lösen (siehe Unterkapitel 7.2). Der Zeitschritt $\Delta t^{(n)}$ wurde dabei mit den Zeitindex (n) modifiziert. Dies wurde durchgeführt, da es bei dem linearisierten System ratsam ist, das Courant-Lewy-Friedrichs-(CFL-)Kriterium zu erfüllen [108]. Ansonsten führt die zeitliche Linearisierung der nichtlinearen Terme zu numerischen Fehlern, da beispielsweise beim konvektiven Transport der Geschwindigkeit \vec{v} oder der Phase α Zellen übersprungen werden können. Daher wird zu jedem Zeitpunkt n bzw. $t^{(n)}$ die Courant-Zahl $\text{Co}^{(n)}$ mit dem vorherigen Zeitschritt $\Delta t^{(n-1)}$ berechnet

$$\text{Co}^{(n)} = \frac{1}{2} \Delta t^{(n-1)} \max_i \left(\frac{\sum_{S \in \partial V_i} |\vec{S} \cdot \vec{v}_S|}{V_i} \right).$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt dabei, dass die Summe die Beträge der Oberflächenflüsse $|\vec{S} \cdot \vec{v}_S|$ für eine Richtung doppelt zählt. Die Bedingung fordert nun, dass die Courant-Zahl $\text{Co}^{(n)}$ stets kleiner oder gleich einem maximalen Wert Co^{max} ist, welcher typischerweise kleiner eins ist

$$\text{Co}^{(n)} \stackrel{!}{\leq} \text{Co}^{\text{max}} \left(\stackrel{\text{i.d.R.}}{=} 1 \right).$$

Dann lässt sich der Zeitschritt $\Delta t^{(n)}$ aus dieser Forderung mit dem vorherigen Zeit-

schritt $\Delta t^{(n-1)}$ berechnen

$$\Delta t^{(n)} = \frac{\text{Co}^{\max}}{\text{Co}^{(n)}} \Delta t^{(n-1)}.$$

Dieser wird nun verwendet, um die Felder im nächsten Zeitschritt $n + 1$ bzw. $t^{(n+1)}$ zu bestimmen. Numerisch hat sich eine maximale Courant-Zahl von $\text{Co}^{\max} = 0,5$ als sinnvoll erwiesen, da diese auch ein spontanes Ansteigen der Geschwindigkeit bei den Beschleunigungsspitzen abfangen kann.

Auch wenn das vorliegende System implizit diskretisiert wurde, zeigt es in der numerischen Behandlung keine Konvergenz. Als Konsequenz könnte man auf das implizite Euler-Verfahren zurückgreifen, welches zwar in der numerischen Behandlung konvergiert, dafür allerdings nur von erster Ordnung in der Zeit ist. Daher wird hier eine Technik verwendet, die die Präzisionsvorteile des Crank-Nicolson-Verfahren zum Großteil erhält und die Stabilität des impliziten Euler-Verfahren nutzt.

Dazu wird das Crank-Nicolson-Verfahren mit einer zusätzlichen GewichtungsvARIABLE $0 \leq c \leq 1$ versehen, die eine Änderung in den impliziten und expliziten Euler-Anteilen im Verfahren induziert. Dies führt dann zu einer zeitlichen Diskretisierung des Beispielfeldes β von

$$\frac{\beta^{(n+1)} - \beta^{(n)}}{\Delta t^{(n)}} = \frac{1}{1+c} f\left(\beta^{(n+1)}, t + \Delta t^{(n)}\right) + \frac{c}{1+c} f\left(\beta^{(n)}, t\right).$$

Es ergeben sich zunächst folgende Grenzwerte: das Crank-Nicolson-Verfahren für $c = 1$ und das implizite Euler-Verfahren für $c = 0$. Für $c < 1$ ergibt sich somit ein höherer impliziter Anteil und ein verringerter expliziter Anteil. Damit kann nun die Stabilität des Verfahrens erhöht werden. Als sinnvoller Erfahrungswert zeigt sich ein Koeffizient von $c = 0,9$. Die oben durchgeführte Linearisierung der Impulsgleichung modifiziert sich dann zu

$$\begin{aligned} \rho_i^{(n)} \frac{\vec{v}_i^{(n+1)} - \vec{v}_i^{(n)}}{\Delta t^{(n)}} + \frac{1}{V_i} \sum_{S \in \partial V_i} \left(\Phi_\rho^{(n)} \left[\frac{1}{1+c} \vec{v}_S^{(n+1)} + \frac{c}{1+c} \vec{v}_S^{(n)} \right] \right. \\ \left. - \mu_{\text{eff},S}^{(n)} \left[\frac{1}{1+c} \mathbf{D}_S^{(n+1)} + \frac{c}{1+c} \mathbf{D}_S^{(n)} \right] \cdot \vec{S} \right) \\ = - \left(\mathbf{I} - \mu_{y,i}^{(n)} \frac{\mathbf{D}_i^{(n)}}{|\mathbf{D}_i^{(n)}|} \right) \cdot \int_t^{t+\Delta t} \vec{\nabla} p_i \, dt + \int_t^{t+\Delta t} \rho_i g_{\text{eff}} \vec{e}_y \, dt. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt werden alle Terme ohne Druckanteil auf die linke Seite der Gleichung gebracht. Sortiert man diese nun nach Termen in der Geschwindigkeit $\vec{v}_i^{(n+1)}$, Kopplungstermen $\vec{v}_l^{(n+1)}$ und explizit behandelbaren Termen $\vec{Q}_i^{(n)}$, dann folgt das Gleichungssystem

$$\alpha_i \vec{v}_i^{(n+1)} + \sum_{l, l \neq i} \beta_i^{(l)} \vec{v}_l^{(n+1)} - \vec{Q}_i^{(n)} = - \left(\mathbf{I} - \mu_{y,i}^{(n)} \frac{\mathbf{D}_i^{(n)}}{|\mathbf{D}_i^{(n)}|} \right) \cdot \int_t^{t+\Delta t} \vec{\nabla} p_i \, dt. \quad (8.6)$$

Die direkte Lösung dieser Gleichung ist ohne Weiteres nicht so einfach möglich, da der Druckterm von der gesuchten Geschwindigkeit $\vec{v}^{(n+1)}$ abhängt. Eine Möglichkeit wäre den Druckterm explizit zu behandeln, dies würde jedoch die Inkompressibilitätsbedingung der gesuchten Lösung $\vec{v}^{(n+1)}$ verletzen. Ein Verfahren, welches die Lösung ermöglicht, und dabei wesentliche Eigenschaften, wie die Inkompressibilität der Lösung $\vec{v}^{(n+1)}$ gewährt, ist das PISO-Verfahren. Dies ist ein häufig verwendetes Verfahren bei der Lösung zeitabhängiger Strömungsproblemen.

8.6. Lösung der Druckgleichung: das PISO-Verfahren

Die Anwendung der Inkompressibilitätsbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ auf die Systemgleichung (5.5) führt auf eine modifizierte Poisson-Gleichung der Form

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\left[\mathbf{I} - \mu_y \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|} \right] \cdot \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \cdot (\eta |\mathbf{D}| \mathbf{D}) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right] \quad (8.7)$$

bzw. eine analog ableitbare Version unter der Volume-of-Fluid-Methode (8.1). Um den Druck der Gleichung (8.6) implizit zu behandeln und damit die Inkompressibilität des nächsten Zeitschrittes zu berücksichtigen, wäre es notwendig, die Gleichung (8.6) mit der diskretisierten Form der Druckgleichung (8.7) gleichzeitig zu lösen, welches im Allgemeinen numerisch äußerst aufwendig ist. Des Weiteren garantiert diese zwar, dass eine analytische Geschwindigkeit inkompressibel ist, jedoch nicht bei numerisch bestimmten Werten, da diese durch die numerischen Verfahren die analytische Form der Impulsgleichungen nicht erfüllen und somit der Druck bei diesen nicht die Inkompressibilität vollständig garantiert.

Eine mögliche Lösung dieser Probleme, insbesondere bei der zeitabhängigen Berechnung, bietet das PISO-Verfahren (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) [34]. Bei diesem erfolgt eine implizite Druckberechnung durch ein Prediktor-Korrektor-Schema. Zusätzlich wird die Inkompressibilität des numerischen Wertes berücksichtigt. Dabei wird die diskretisierte und linearisierte Cauchy-Bewegungsgleichung (8.6), ausgehend von einem impliziten Druck $p_i^{(n+1)}$, folgendermaßen umgeformt

$$\begin{aligned} \alpha_i \vec{v}_i^{(n+1)} + \sum_{l,l \neq i} \beta_i^{(l)} \vec{v}_l^{(n+1)} - \vec{Q}_i^{(n)} &= - \left(\mathbf{I} - \mu_{y,i}^{(n)} \frac{\mathbf{D}_i^{(n)}}{|\mathbf{D}_i^{(n)}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p_i^{(n+1)} \\ \Leftrightarrow \vec{v}_i^{(n+1)} + \underbrace{\frac{1}{\alpha_i} \sum_{l,l \neq i} \beta_i^{(l)} \vec{v}_l^{(n+1)} - \frac{1}{\alpha_i} \vec{Q}_i^{(n)}}_{:= -\vec{u}_i^{(n+1)}} &= -\frac{1}{\alpha_i} \left(\mathbf{I} - \mu_{y,i}^{(n)} \frac{\mathbf{D}_i^{(n)}}{|\mathbf{D}_i^{(n)}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p_i^{(n+1)} \\ \Leftrightarrow \vec{v}_i^{(n+1)} &= \vec{u}_i^{(n+1)} - \frac{1}{\alpha_i} \left(\mathbf{I} - \mu_{y,i}^{(n)} \frac{\mathbf{D}_i^{(n)}}{|\mathbf{D}_i^{(n)}|} \right) \cdot \vec{\nabla} p_i^{(n+1)} \quad (8.8) \end{aligned}$$

mit

$$\vec{u}_i^{(n+1)} := -\frac{1}{\alpha_i} \left[\sum_{l,l \neq i} \beta_i^{(l)} \vec{v}_l^{(n+1)} - \vec{Q}_i^{(n)} \right]. \quad (8.9)$$

Diese Schritte werden mit Splitting of Operators bezeichnet. Im nächsten Schritt wird die Gleichung (8.8) auf die Oberflächen $S \in \partial V_i$ interpoliert und dann in die Inkompressibilitätsbedingung eingesetzt

$$\begin{aligned} \int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^{(n+1)} dV &= \sum_{S \in \partial V_i} \vec{S} \cdot \vec{v}_S^{(n+1)} = 0 \\ \Rightarrow \sum_{S \in \partial V_i} \vec{S} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} \left[\mathbf{I} - \mu_{y,i}^{(n)} \frac{\mathbf{D}_i^{(n)}}{|\mathbf{D}_i^{(n)}|} \right] \cdot \vec{\nabla} p_i^{(n+1)} \right)_S &= \sum_{S \in \partial V_i} \vec{S} \cdot \vec{u}_S^{(n+1)} \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} \left[\mathbf{I} - \mu_{y,i}^{(n)} \frac{\mathbf{D}_i^{(n)}}{|\mathbf{D}_i^{(n)}|} \right] \cdot \vec{\nabla} p_i^{(n+1)} \right) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_i^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Die so erhaltene Bestimmungsgleichung für den Druck garantiert, dass die numerisch berechnete Geschwindigkeit $\vec{v}^{(n+1)}$ im nächsten Zeitschritt divergenzfrei ist. Allerdings hängt diese Gleichung ebenfalls von dieser ab, was wiederum eine gleichzeitige Lösung mit der Geschwindigkeitsgleichung (8.6) erfordert. Um dies zu umgehen, wird nun das Verfahren um Prediktor-Korrektor-Schritte erweitert. Der Prediktor dient dabei als Schätzwert und wird dann iterativ korrigiert bis die gewünschte Lösung erhalten wird. Zwei Arten der Prediktor-Bestimmung sind hierbei möglich:

1. Durch die direkte Lösung der diskretisierten Cauchy-Gleichung (8.6) mit explizitem Druck $p_i^{(n)}$ lässt sich ein Schätzwert $\vec{v}^{(k=0)}$ ableiten.
2. Die Geschwindigkeit $\vec{v}^{(n)}$ des vorherigen Zeitschrittes kann als Prediktor $\vec{v}^{(k=0)}$ verwendet werden.

Mit dem Prediktor $\vec{v}^{(k=0)}$ ist es nun möglich die gesuchten Lösung iterativ zu bestimmen. Für die k -te Korrektur werden dann folgende Schritte durchgeführt:

1. Bestimmung des Feldes $\vec{u}_S^{(k)}$

$$\vec{u}_S^{(k)} = - \left(\frac{1}{\alpha_i} \left[\sum_{l,l \neq i} \beta_i^{(l)} \vec{v}_l^{(k-1)} - \vec{Q}_i \right] \right)_S$$

2. Berechnung des Druck-Korrektors

$$\sum_{S \in \partial V_i} \vec{S} \cdot \left(\frac{1}{\alpha_i} \left[\mathbf{I} - \mu_{y,i} \frac{\mathbf{D}_i}{|\mathbf{D}_i|} \right] \cdot \vec{\nabla} p_i^{(k)} \right)_S = \sum_{S \in \partial V_i} \vec{S} \cdot \vec{u}_S^{(k)}$$

3. Korrektur des Geschwindigkeitsfeldes

$$\vec{v}_S^{(k)} = \vec{u}_S^{(k)} - \left(\frac{1}{\alpha_i} \left[\mathbf{I} - \mu_{y,i} \frac{\mathbf{D}_i}{|\mathbf{D}_i|} \right] \cdot \vec{\nabla} p_i^{(k)} \right)_S$$

Typischerweise wird nach einer festen Anzahl m an Schritten (entspricht einem Prediktor- und $(m-1)$ -Korrektor-Schritten) das Verfahren abgebrochen und die gesuchten Lösungen $\vec{v}^{(n+1)} = \vec{v}^{(m)}$ und $p^{(n+1)} = p^{(m)}$ erhalten. In dieser Arbeit hat sich eine Anzahl $m = 5$ an Schritten als ausreichend herausgestellt.

Die vorliegenden algebraischen Gleichungssysteme wurden mithilfe der iterativen Verfahren der vorkonditionierten, konjugierten Gradienten (preconditioned conjugate gradients, kurz: PCG) für die Druckgleichung und der vorkonditionierten, bikonjugierten Gradienten (preconditioned biconjugate gradient, kurz: PBiCG) für die Geschwindigkeitsgleichung gelöst [104, 109]. Als Vorkonditionierer kommen die Verfahren der unvollständigen Cholesky-Faktorisierung (diagonal-based incomplete Cholesky factorization, kurz: DIC) für den Druck und die unvollständige LU-Faktorisierung (diagonal-based incomplete LU factorization, kurz: DILU) für die Geschwindigkeit zum Einsatz [104]. Das PCG-Verfahren ist im Allgemeinen auch unter den Abkürzungen ICCG bekannt. Das 'diagonal-based' steht lediglich für die Verwendung der Diagonalmatrix bei der jeweiligen Zerlegung (es ist auch einer Zerlegung ohne Diagonalmatrix möglich).

8.7. Lösung der Advektionsgleichung für das Phasenfeld: das MULES-Verfahren

Die Lösung des Phasenfelds α für die Volume-of-Fluid-Methode erfordert die Lösung einer Advektionsgleichung der Form

$$\partial_t \alpha + \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{v}) = 0.$$

Auch wenn diese Gleichung einfacherer Struktur ist, ist ihre numerische Lösung nicht trivial, da abhängig vom Verfahren typischerweise eins von zwei Problemen auftritt:

1. Das Verfahren ist diffusiv (wie z.B. Upwind-Verfahren), d.h. es finden diffusive Effekte insbesondere bei hohen Gradienten von α statt, die zu einem „Aufweichen“ der Lösung führen.
2. Das Verfahren ist unbeschränkt (wie z.B. zentrale Differenzen), d.h. das Verfahren ist nicht beschränkt bezüglich der Grenzen des Feldes (z.B. $0 \leq \alpha \leq 1$).

Beide Probleme führen nach einer gewissen Zeit zu starken numerischen Fehlern, insbesondere die Unbeschränktheit kann zu Oszillation im Phasenfeld führen, die letztlich in

der Divergenz der Numerik resultiert. Um diesen Problemen entgegenzuwirken, werden zwei Ansätze durchgeführt.

Als erstes wird die Gleichung in eine andere Form überführt, welche ein zusätzlichen Kompressionsterm aufweist, der der numerischen Diffusion entgegenwirkt [110–112]. Die Idee ist die Folgende: die beiden Phasen wurden als inkompressibel und nicht-mischend angenommen, daher sollte das Phasenfeld im Idealfall einen scharfen Übergang zwischen 0 und 1 durchführen. Eine numerische Kompression dieses Übergangs sollte somit keinen systematischen Fehler induzieren und kann somit diffusiven Effekten bei der Lösung des Phasenfeldes α entgegenwirken. Dies geschieht mit folgendem Ansatz für das Phasenfeld

$$\partial_t \alpha + \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\alpha(1 - \alpha) \vec{v}_c) = 0. \quad (8.11)$$

Der zusätzliche Term $\vec{\nabla} \cdot (\alpha(1 - \alpha) \vec{v}_c)$ soll dies nun bewerkstelligen. Dazu liefert er zunächst nur einen Beitrag an der Oberfläche, da nur dort $\alpha(1 - \alpha) \neq 0$ ist. Daher kann ein Einfluss auf die innere Dynamik der jeweiligen Phase vernachlässigt werden. Nun muss die Kompressionsgeschwindigkeit \vec{v}_c geeignet bestimmt werden, welches in der Finite-Volumen-Darstellung geschieht. Die Gleichung (8.11) ergibt sich für das Teilvolumina V_i zu

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{V_i} \alpha \, dV + \int_{\partial V_i} \alpha \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{\partial V_i} \alpha(1 - \alpha) \vec{v}_c \cdot d\vec{S} &= 0 \\ V_i \partial_t \alpha_i + \sum_{S \in \partial V_i} (\alpha \vec{v})_S \cdot \vec{S}_i + \sum_{S \in \partial V_i} (\alpha(1 - \alpha) \vec{v}_c)_S \cdot \vec{S}_i &= 0 \\ V_i \partial_t \alpha_i + \sum_{S \in \partial V_i} \alpha_S \Phi_S + \sum_{S \in \partial V_i} \alpha_S (1 - \alpha_S) \Phi_{S,c} &= 0 \end{aligned}$$

mit den Flüssen $\Phi_S := \vec{v}_S \cdot \vec{S} = \varphi_S$ und $\Phi_{S,c} := \vec{v}_c \cdot \vec{S}$. Der Fluss aus der Kompressionsgeschwindigkeit \vec{v}_c wird nun bei OpenFoam[®] folgendermaßen angesetzt [111, 112]

$$\Phi_{S,c} = c_\alpha |\Phi_S| \vec{n}_S \cdot \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$$

mit $c_\alpha > 0$ einer positiven Konstante, welche die Stärke der Kompression kontrolliert, und der Oberflächennormalen

$$\vec{n}_S = \frac{(\vec{\nabla} \alpha)_S}{\left| (\vec{\nabla} \alpha)_S \right| + \delta}$$

Der Parameter δ dient zur numerischen Stabilität der Normalenberechnung. Der so erhaltene Kompressionsfluss $\Phi_{S,c}$ komprimiert den Übergang in Richtung der Oberflächennormalen \vec{n}_S . In den Simulationen wurde ein Kompressionskonstante von $c_\alpha = 1$ verwendet.

Der zweite Ansatz, der der Unbeschränktheit entgegenwirkt, basiert auf den Methoden des Fluss-korrigierten Transports (flux-corrected transport, kurz: FCT). Diese Klasse der Methoden erlauben die effiziente numerische Behandlung von Schocks oder starken Gradienten [113–115]. Das in OpenFoam[®] verwendete Schema MULES (Multi-Dimensional Limiter for Explicit Solution) basiert dabei auf dem von Zalesak [114] entwickeltem Verfahren. Das Verfahren verfolgt dabei folgendes Konzept [35]: Das zugrunde liegende Problem lässt sich in eine Gleichung der Form

$$\partial_t \alpha + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

bringen, wobei \vec{F} die vorhandenen Flüsse beschreibt. Diese wird zunächst in die zeitlich diskretisierte Finite-Volumen-Darstellung

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n - \frac{\Delta t_n}{V_i} \sum_{S \in \partial V_i} F_S$$

mit $F_S = \vec{S} \cdot \vec{F}_S$ gebracht. Im nächsten Schritt wird der Fluss F_S mit einem Verfahren diskretisiert, welches die Beschränktheit garantiert und zumeist von niedriger Ordnung ist (Index L). Bei OpenFoam[®] wird als beschränktes Verfahren das Upwind-Verfahren verwendet. Mit diesem erhält man nun den diskretisierten Fluss F_S^L und kann nun das Phasenfeld in niedriger Ordnung lösen

$$\alpha_i^L = \alpha_i^n - \frac{\Delta t_n}{V_i} \sum_{S \in \partial V_i} F_S^L. \quad (8.12)$$

Das System wird nun um einen anti-diffusiven Anteil F_S^A korrigiert, der der auftretenden numerischen Diffusion des Verfahrens niedriger Ordnung entgegenwirkt. Dafür wird der Fluss F_S mit einem Verfahren höherer Ordnung, dass nun nicht notwendigerweise beschränkt sein muss, berechnet (Index H). Die Korrektur ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} F_S^A &= F_S^H - F_S^L \\ \alpha_i^{n+1} &= \alpha_i^L - \frac{\Delta t_n}{V_i} \sum_{S \in \partial V_i} \lambda_S F_S^A \\ &\stackrel{(8.12)}{=} \alpha_i^n - \frac{\Delta t_n}{V_i} \sum_{S \in \partial V_i} (1 - \lambda_S) F_S^L + \lambda_S F_S^H. \end{aligned}$$

Diese Methode entspricht also einer Interpolation eines Verfahrens niedriger Ordnung mit einem Verfahren höherer Ordnung. Die Gewichtungsfaktoren $0 \leq \lambda_S \leq 1$ spielen dabei eine entscheidende Rolle, da diese garantieren, dass das interpolierte Verfahren trotz der Anteile höherer Ordnung beschränkt bleibt. Dafür werden diese derart bestimmt, dass die Korrektur mit dem anti-diffusiven Fluss F_S^A keine neuen lokalen Mi-

nima oder Maxima im Phasenfeld α erzeugt und somit eine vorher beschränkte Lösung automatisch beschränkt bleibt. Die Bestimmung dieser ist dabei nicht eindeutig. Bei dem MULES-Verfahren werden dafür zunächst die Grenzen des lokalen Phasenfeldes α_i festgelegt. Diese ergeben sich aus dem Phasenfeld des vorherigen Zeitschrittes α_i^n und allen Nachbarn $\{\alpha_{i,N}^n\}_N$ des lokalen Feldes. Zusätzlich werden dann noch globale Minima $\alpha_{\text{global}}^{\min}$ und Maxima $\alpha_{\text{global}}^{\max}$ berücksichtigt. Im Falle des Phasenfeldes α sind dies $\alpha_{\text{global}}^{\min} = 0$ und $\alpha_{\text{global}}^{\max} = 1$. Dann ergibt sich der lokale Grenzwert zu

$$\begin{aligned}\alpha_i^{\max} &= \min \left\{ \max \left\{ \alpha_i^n, \{\alpha_{i,N}^n\}_N \right\}, \alpha_{\text{global}}^{\max} \right\} \\ \alpha_i^{\min} &= \max \left\{ \min \left\{ \alpha_i^n, \{\alpha_{i,N}^n\}_N \right\}, \alpha_{\text{global}}^{\min} \right\}.\end{aligned}$$

Als nächstes werden geeignete Flüsse berechnet aus deren Abschätzung die Gewichtungsfaktoren λ_S berechnet werden. Dies sind zum einen die maximalen möglichen Zu- und Abflüsse Q_i^\pm des anti-diffusiven Anteils A_S , welche keinen neuen Maxima und Minima generieren

$$\begin{aligned}Q_i^+ &= \frac{V_i}{\Delta t_n} (\alpha_i^{\max} - \alpha_i^L) \\ Q_i^- &= \frac{V_i}{\Delta t_n} (\alpha_i^L - \alpha_i^{\min}),\end{aligned}$$

zum anderen die Zu- und Abflüsse, die durch den anti-diffusiven Anteil F_S^A entstehen,

$$\begin{aligned}P^+ &= - \sum_{S \in \partial V_i} F_S^{A,-} \\ P^- &= \sum_{S \in \partial V_i} F_S^{A,+}.\end{aligned}$$

Zuflüsse werden dabei mit $F_S^{A,-}$ und Abflüsse mit $F_S^{A,+}$ bezeichnet. Die Vorzeichen und Bezeichnungen berücksichtigen beim Fluss F_S , dass ein negativer Fluss einen Zufluss in die Zelle und ein positiver Fluss einen Abfluss in die Zelle darstellt. Das jeweilige Zellengewicht $\lambda_i^{\pm,k}$ wird nun beginnend mit $\lambda_S^{\pm,k=1} = 1$ iterativ über k berechnet

$$\lambda_i^{\pm,k+1} = \max \left\{ \min \left\{ 1, \frac{Q_i^\pm \pm \sum_S \lambda_S^k F_S^{A,\pm}}{P_i^\pm} \right\}, 0 \right\},$$

wobei die Gewichtungsfaktoren der Oberflächen $\lambda_S^{\pm,k}$ sich aus

$$\lambda_S^k = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_i^{-,k}, \{\lambda_{i,N}^{+,k}\}_N \right\} & : F_S^A \geq 0 \\ \min \left\{ \lambda_i^{+,k}, \{\lambda_{i,N}^{-,k}\}_N \right\} & : F_S^A < 0 \end{cases}$$

ergeben. Die Gewichtungsfaktoren λ_S^k werden typischerweise nach drei Iterationen abgebrochen und die Lösung des Phasenfeldes α_i^{n+1} bestimmt.

Die Kombination aus Kompressionsterm und Fluss-korrigierten Transports ermöglicht damit eine effiziente Bestimmung des Phasenfeldes α bei Erhalt des scharfen Übergangs.

9. Resultate des granularen Systems unter vertikaler Vibration

Dieses Kapitel widmet sich der Simulation des Systems unter vertikaler Vibration, welches experimentell im Kapitel 4 besprochen wurde. Dafür wird zunächst der numerische Rahmen, wie der Aufbau, die Randbedingungen und die gewählten Größen, vorgestellt. Im Anschluss werden die gewonnenen Ergebnisse für den zweidimensionalen Fall vorgestellt, die bereits einen qualitativen Einblick in die Dynamik liefern. Danach folgen die Ergebnisse der dreidimensionalen Untersuchungen.

9.1. Geometrie und Randbedingungen

Die im Experiment häufig verwendete Geometrie ist die einer evakuierten Box mit quadratischer Grundfläche der Breite und Länge L und der Höhe H , wenn auch in den ersten Experimenten [29,31] radialsymmetrische Behälter verwendet wurden. Daher wird in den numerischen Simulationen ebenfalls diese Geometrie verwendet, vor allem, weil sie bei der Diskretisierung der Domäne ein vollständig orthogonales Gitter ermöglicht. Aus dem Experiment [28] abgeleitet, lassen sich dann folgende Größen ansetzen

$$\begin{aligned}H_g &= n d_p = 5 d_p = 2,75 \text{ mm} \\L &= m d_p = 120 d_p = 66 \text{ mm},\end{aligned}$$

wobei H_g der mittleren Füllhöhe des Granulats und $d_p = 0,55 \text{ mm}$ dem angesetzten Partikeldurchmesser entspricht. Die tatsächliche Höhe H der Box und damit die Füllhöhe der zweiten Phase Luft muss allerdings geeignet gewählt werden. Dabei ist zu beachten, dass ein zu geringer Anteil an Granulat, also eine hohe Box, zu einer schlechten numerischen Auflösung des Granulats führt, während eine zu kleine Box darin resultiert, dass das Granulat während der Bewegung die „Decke“ der Box berührt. Numerisch führt dies zum Austreten von Granulat aus der Box, da diese als oben offen angenommen wird. Diese Annahme geschieht vornehmlich aus numerischen Gründen¹. Durch Testen verschiedener Einstellungen hat sich ein Volumenverhältnis

¹Typischerweise werden Simulationen zu freien Oberflächen bei Systemen durchgeführt, bei denen die obere Randbedingung als Atmosphäre angenommen wird, wie z. B. bei der Wellenbildung bei Schiffen. Diese ermöglicht ein Ein- und Ausströmen der Luft, welches zur Regulation des Phasenfeldes verwendet wird.

bzw. Höhenverhältnis von Granulat zur Gesamtbox von

$$\frac{V_g}{V_{\text{ges}}} = \frac{H_g}{H} \approx 40\%$$

als geeignet erwiesen. Im nächsten Schritt werden die Randbedingungen für die gesuchten Felder \vec{v} , p und α festgelegt. Die Abbildung 9.1 zeigt die Domäne mit dem Startfeld für das Phasenfeld α und den Randbedingungen, die im Nachfolgenden besprochen werden. Basierend auf der hohen lateralen Ausdehnung L im Vergleich zur

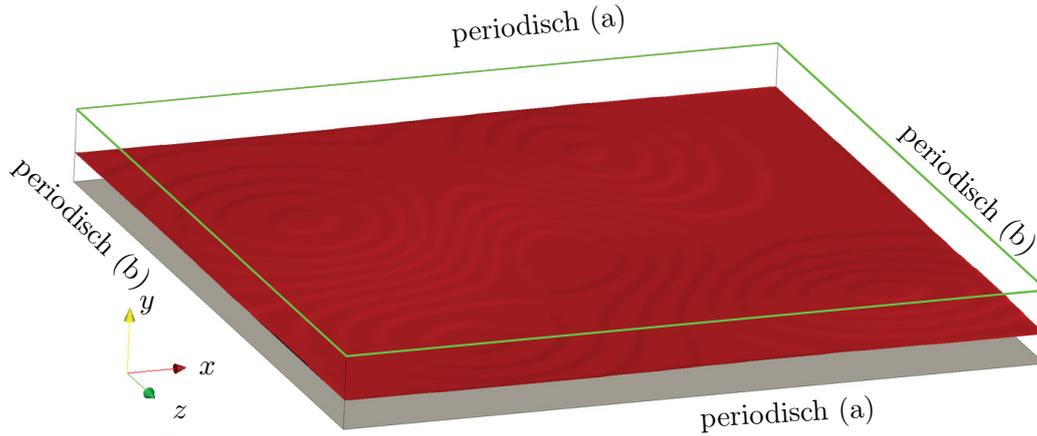


Abbildung 9.1.: Aufbau der Domäne. Der Übergang des Phasenfeldes α (rote Fläche) von Granulat (darunter) nach Luft (darüber) ist leicht aufgeraut um ein schnelleres Ausbilden von Strukturen zu ermöglichen. Die periodischen Bereiche sind je paarweise verknüpft (Indizes a und b). Am Boden (graue Fläche) wurde ein nicht-permeables Material mit hohem Reibungskoeffizienten, welches zu einer No-Slip-Randbedingung führt, angenommen.

Höhe H , lässt sich das System als periodisch fortsetzbar annehmen, also für eine beliebige Feldgröße f soll gelten

$$\begin{aligned} f(\vec{r} + L\vec{e}_x) &= f(\vec{r}) \\ f(\vec{r} + L\vec{e}_z) &= f(\vec{r}). \end{aligned}$$

Es werden also periodische Randbedingungen für die Felder \vec{v} , p und α in die lateralen Richtungen x und z angenommen (siehe Abbildung 9.1, periodisch).

Der Boden des Systems, welcher für das Granulat nicht permeabel ist, wird als rau angenommen. In typischen granularen Experimenten wird dies durch eine am Boden festgeklebte Schicht an Konstituenten realisiert [67, 73]. Dadurch bleiben die mechanischen Eigenschaften am Boden ähnlich und man erhält einen rauen Boden. Dies entspricht dann der Annahme einer No-Slip-Randbedingung

$$\vec{v}|_{y=0} = 0.$$

Bei den Vibrationsexperimenten wurde diese Form der Präparation nicht verwendet [29, 116], da zur Vermeidung elektrostatischer Aufladung ein Aluminium-Boden eingesetzt wurde. In dieser Arbeit wird jedoch angenommen, dass die unterste Schicht im Vergleich zu den darüber liegenden Schichten nur eine geringe Mobilität aufweist und daher die Annahme trotzdem gültig ist. Für das Phasenfeld α wird angenommen, dass die zweite Phase Luft während der kompletten Simulation den Boden nicht erreicht. Dies muss im Allgemeinen nicht vorausgesetzt werden, jedoch führt dies zu einer numerisch stabileren Randbedingung, die geringere numerische Verluste aufweist. Dies ergibt dann die folgenden Randbedingungen am Boden

$$\begin{aligned} \vec{v}|_{y=0} &= 0 \\ \left(\vec{\nabla} p\right)\Big|_{y=0} \cdot \vec{e}_y &= \partial_y p|_{y=0} = 0 \\ \alpha|_{y=0} &= 1. \end{aligned}$$

Diese beschreiben dann vollständig die Interaktion mit dem Boden. Die obere Randbedingung wird – wie oben bereits beschrieben – als offen angenommen, daher ist ein Austausch der Medien Luft und Granulat mit der Atmosphäre möglich. Die Experimente wurden stets in geschlossenen evakuierten Boxen durchgeführt, da so die Einflüsse eines Mediums wie Luft, welches das Granulat durchdringen würde, verhindert werden können. Das hier vorgestellte System ist als nicht-mischbar angenommen, daher können Einflüsse der Phase Luft auf das Granulat nur über die Kontaktfläche beider Phasen entstehen. Die Randbedingungen werden folgendermaßen gewählt

$$\begin{aligned} \left(\vec{\nabla} \vec{v}\right)\Big|_{y=H} \cdot \vec{e}_y &= \partial_y \vec{v}|_{y=H} = 0 \\ p|_{y=H} &= p_0 - \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 = -\frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 \\ \left(\vec{\nabla} \alpha\right)\Big|_{y=H} \cdot \vec{e}_y &= \partial_y \alpha|_{y=H} = 0. \end{aligned}$$

Die zweite Randbedingung entspricht der Bernoulli-Gleichung für den Gesamtdruck p bei einem verschwindenden atmosphärischen Druck $p_0 = 0$, welche einen sinnvollen Austausch ermöglicht. Diese gilt nur für die zweite Phase Luft und ist daher im Idealfall gültig, da das Granulat die obere Randbedingung nicht berührt. Die anderen beiden Randbedingungen berücksichtigen, dass ein Ein- oder Ausströmen der Phase nur durch in der Domäne erzeugte Flüsse entsteht.

Es sei zu beachten, dass diese Formen der Randbedingungen den analytischen Formen entsprechen. Die tatsächlichen numerischen Umsetzungen in OpenFoam[®] sind komplexer, da zusätzliche Korrekturen eingehen, die beispielsweise Verluste oder numerische Instabilitäten abfangen.

9.2. Systemparameter und analysierte Größen

Die Systemgleichungen wurden im Rahmen der Volume-of-Fluid-Methode (siehe Kapitel 8.1) simuliert. Dafür wurden zunächst folgende Systemparameter des Granulats gewählt

$$\begin{aligned}\rho &= 2600 \text{ kg/m}^3 \\ \eta &= 4,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \approx 1,35 d_p^2 \\ \varphi_d = 10^\circ &\Leftrightarrow \mu_y \approx 0,1763.\end{aligned}$$

Für den Antrieb, respektive dem inelastischen Bouncing-Ball-Modell, wurde folgende Wahl getroffen

$$\begin{aligned}\sigma &= 1 \text{ ms} \\ f^* = 0,5 &\Leftrightarrow f = \sqrt{\frac{g}{H_g}} f^* \approx 29,86 \text{ Hz}.\end{aligned}$$

Die Vibrationsstärke Γ wurde dabei variiert um zunächst die Abhängigkeit von dieser zu untersuchen. Soweit nicht anders angemerkt, werden alle Simulationen erst nach einer Einschwingzeit von $t_0 = 5,0 \text{ s}$ untersucht. Dies ermöglicht dem System weitestgehend zu relaxieren, so dass Anfangsbedingungen keinen Einfluss haben.

Aus dem Übergang des Phasenfeldes $\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 0$ lässt sich das Höhenprofil h des Granulats rekonstruieren. Dafür wird angenommen, dass die Höhe h sich aus der vertikalen Position y_i und y_{i+1} zweier vertikal benachbarter Zellen i und $i + 1$ ergibt, welche die Bedingungen

$$\alpha_i \geq 0,5 \quad \text{und} \quad \alpha_{i+1} < 0,5$$

erfüllen. Die Höhe h lässt sich dann interpolieren zu

$$h = y_i + (y_{i+1} - y_i) \frac{\alpha_i - 0,5}{\alpha_i - \alpha_{i+1}}.$$

Um einige granulare Eigenschaften zu verdeutlichen, ist es sinnvoll, räumlich gemittelte Größen des granularen Systems zu betrachten. Dafür lässt sich zunächst das Gesamtvolumen V_g des Granulats auf folgende Art darstellen

$$V_g = \int_{V_g} dV = \int_V \alpha dV.$$

Da ein Phasenfeld $\alpha = 1$ gerade das Vorhandensein von Granulat beschreibt, summiert das Integral gerade über alle Bereiche, die durch Granulat gefüllt sind, gewichtet mit dem Phasenfeld α und liefert somit das gesuchte Volumen. Dabei ist wichtig zu beachten, dass dies im Allgemeinen (nämlich im Falle, dass beide Phasen mischen können) nicht dem vom Granulat effektiv belegtem Volumen entspricht, welches bei der

Beschreibung der Packungsdichte vorkommt, da dieses durch

$$V_{\text{eff}} = \int_V 1_{\{\alpha>0\}} dV \quad \text{mit} \quad 1_{\{\alpha>0\}} = \begin{cases} 1 & : \alpha > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben wäre. Nun lassen sich für verschiedene Feldgrößen (beispielsweise φ) der granulare räumliche Mittelwert $\langle \dots \rangle_g$ durch

$$\langle \varphi \rangle_g := \frac{1}{V_g} \int_V \varphi \alpha dV = \frac{\int_V \varphi \alpha dV}{\int_V \alpha dV}$$

bestimmen. Dabei sind von besonderem Interesse die mittlere granulare kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$ an der sich der Einfluss der Reibungsverluste und der Aufschläge im System verdeutlichen lassen.

Zur Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} ist es nützlich, dieses in Form von Strömungslinien \vec{r}_{sl} darzustellen [96]. Die durch s parametrisierte Trajektorie $\vec{r}_{\text{sl}}(s)$ beschreibt eine Strömungslinie zu einer festen Zeit t , falls diese die Gleichung

$$\frac{d\vec{r}_{\text{sl}}}{ds} = \vec{v}(\vec{r}_{\text{sl}})$$

erfüllt. Dies bedeutet im Wesentlichen, dass die Kurve \vec{r}_{sl} stets tangential zur Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}_{\text{sl}})$ verläuft und somit ein masseloses Partikel sich entlang dieser Linie bewegen würde (die Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}_{\text{sl}})$ wird dabei als zeitlich konstant angenommen). Nun kann man die Strömungslinien \vec{r}_{sl} für verschiedene Zeiten t betrachten, um eine Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils \vec{v} mit der Zeit t zu erhalten.

9.3. Simulation des zweidimensionalen Systems

Zunächst wird eine räumlich zweidimensionale Version des Systems simuliert. Diese ermöglicht einen qualitativen Einblick in die Dynamik und erste Erkenntnisse können dabei bereits gewonnen werden. Dafür wird eine der lateralen räumlichen Komponenten, die z -Richtung, vernachlässigt. Somit ergibt sich ein räumlich zweidimensionales System in der x - y -Ebene. Dabei wurde eine Domänendiskretisierung von

$$\begin{aligned} n_x &= 400 \\ n_y &= 100 \end{aligned}$$

gewählt, welches auf eine Gesamtanzahl an Teilvolumina V_i von 40000 führt. Alle vorher diskutierten Eigenschaften und Parameter des Systems bleiben dabei erhalten.

Nun lassen sich das resultierende Oberflächenprofil h und der Betrag des Fourierpektrums $|\mathcal{F}[h]|$ für verschiedene Vibrationsstärken Γ untersuchen.

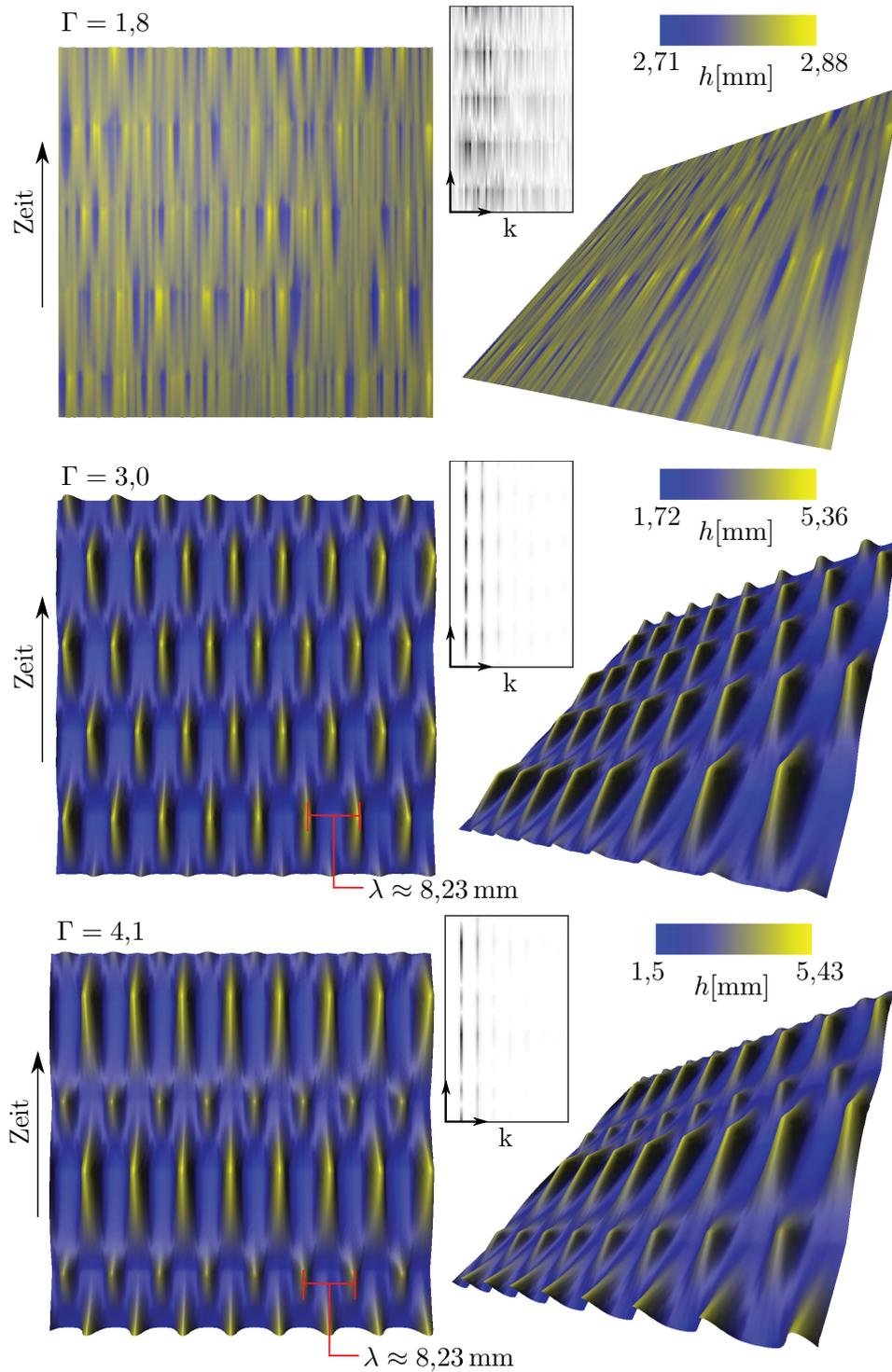


Abbildung 9.2.: Oberflächenprofil h (links: Blickwinkel von oben; rechts: schräger Blickwinkel) und Betrag des Fourierpektrums $|\mathcal{F}[h]|$ (mittig, Ausschnitt der dominanten, positiven Moden ohne $k = 0$ -Mode) in Abhängigkeit von der Zeit t für drei verschiedene Vibrationsstärken Γ . Es zeigen sich zwei Arten von Systemdynamik: unstrukturiert ($\Gamma = 1,8$) und zeitlich oszillierende, räumlich periodische Wellen ($\Gamma = 3,0$ und $\Gamma = 4,1$).

Im Betrag des Fourierspektrums $|\mathcal{F}[h]|$ wurde dabei die $k = 0$ -Mode entfernt, da diese lediglich Auskunft über die mittlere Höhe \bar{h} liefert, und die negativen Moden werden nicht gezeigt, da das Höhenfeld h reell ist und somit das Fourierspektrum symmetrisch bezüglich $k = 0$ ist. Die Abbildung 9.2 stellt eine Auswahl von drei Realisierungen, die die möglichen auftretenden Fälle beschreiben, dar.

Es zeigt sich zunächst, dass für eine niedrige Vibrationsstärke $\Gamma = 1,8$ keine periodischen Strukturen auftreten. Das System bleibt unstrukturiert und der Effekt der Aufschläge lässt sich lediglich an leichten Kanten im zeitlichen Verlauf des Höhenprofils oder des Fourierspektrums sehen. Das Höhenprofil ist daher auch nur sehr gering ausgeprägt mit einem Höhenabstand $\Delta h := h_{\max} - h_{\min} \approx 0,172$ mm. Erhöht man die Vibrationsstärke Γ , so setzt die Ausbildung von Strukturen ein. Für eine Vibrationsstärke von $\Gamma = 3,0$ erhält man so die Ausbildung von räumlich periodischen, zeitlich oszillierenden Wellenstrukturen der Wellenlänge $\lambda \approx 8,23$ mm. Das Höhenprofil ist deutlich ausgeprägter mit einem Höhenabstand $\Delta h \approx 3,64$ mm, welches sich insbesondere in den tiefen, breiten Tälern und den schmalen, sehr hohen Hügeln widerspiegelt. Dies führt zu einem Aspektverhältnis von $\delta := \frac{\Delta h}{\lambda} \approx 0,44$. Diese gehen nach einem weiteren Aufschlag in eine räumlich gleiche Wellenstruktur, welche um eine halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ versetzt ist, über. Für höhere Vibrationsstärken $\Gamma = 4,1$ ergibt sich eine Änderung des zeitlichen Verhaltens. Es entsteht eine zweite Wellenstruktur, welche eine geringere Lebensdauer sowie eine geringere Ausprägung als die vorhergehende Struktur bei gleichbleibender Wellenlänge $\lambda \approx 8,23$ mm zeigt. Die vorhergehende Struktur zeigt im gleichen Zug eine höhere Lebensdauer als für kleinere Vibrationsstärken, wie $\Gamma = 3,0$. Dieses Verhalten steht im direkten Bezug zur Periodenverdopplung beim inelastischen Bouncing-Ball-Modell. Diese wird durch zwei unterschiedliche Flugzeiten t_{fl} gekennzeichnet, wobei eine größer ist als die Plattenperiode T und eine kleiner ist (siehe Kapitel 7, Abbildung 7.2). So ist es dem System möglich, bei der längeren Flugzeit die Wellen stärker auszubilden, bevor der nächste Aufschlag entsteht als bei der kürzeren Flugdauer. Daher führt diese zu einer schwächeren Ausprägung sowie kürzeren Lebensdauer.

Um den Transportprozess im Granulat, der zur Ausbildung der Wellenstruktur führt, zu verstehen, betrachtet man das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} des Systems in Abhängigkeit der Zeit t für einen lateralen Ausschnitt aus dem gesamten System. Der Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ wird auf einer Farbskala (blau entspricht niedrige und rot hohe Geschwindigkeiten) aufgetragen und zusätzlich werden die Strömungslinien (weiße Linien) mit Richtung (gelbe Spitzen) betrachtet. Auf diese Art lässt sich sowohl die Stärke der Strömungen als auch deren Richtung visualisieren. Dies zeigt die Abbildung 9.3 für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 4,1$ (siehe Anhang A.3 für die Darstellung für eine Vibrationsstärke von $\Gamma = 3,0$).

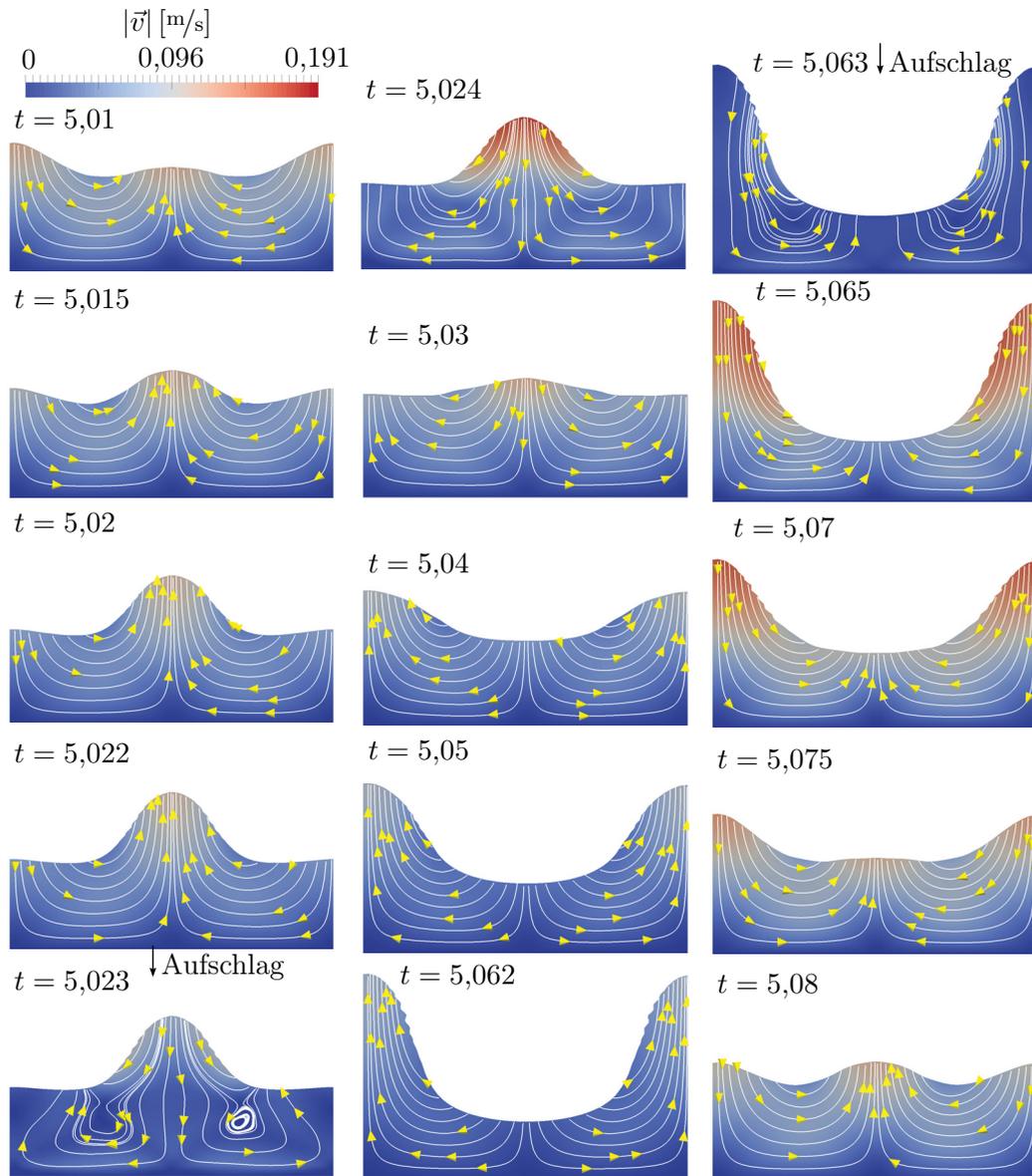


Abbildung 9.3.: Betrag des Geschwindigkeitsfeldes $|\vec{v}|$ für verschiedene Zeitpunkte t (Ausschnitt aus dem gesamten Feld). Die weißen Linien zeigen die Strömungslinien in Richtung der gelben Spitzen. Das System zeigt einen Transport von Granulat von den Tälern in die Hügel. Beim Aufschlag kommt es zu einer Änderung des Geschwindigkeitsfeldes, welches den Transport umkehrt und die um die halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ versetzte Struktur induziert.

Das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} trägt Granulat von den Tälern ab und transportiert dieses zu den Spitzen. Dies führt zum Anwachsen der Struktur, bis es zu einem weiteren Aufschlag kommt. Dieser induziert eine Umkehr des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} , welche den gesamten Prozess umkehrt und einen Rückgang des Materials zurück in die Täler induziert. Dieser Abtransport führt zum Schrumpfen der Spitzen und dann zum Anwachsen der Täler zu neuen Spitzen bis diese eine ähnliche Struktur, um eine halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ versetzt, haben. Diese prägt sich nun abhängig von der Flugdauer stärker oder schwächer aus als die vorherige. Die stärkste Ausprägung der Strukturen findet dabei bei der langen Flugzeit statt, da das System länger Zeit hat Material in die Spitzen zu transportieren, bevor der nächste Aufschlag zur Umkehr führt. Ebenfalls lässt sich beobachten, dass die Geschwindigkeit \vec{v} in den oberen Schichten – und dort vor allem in den Spitzen – die höchsten Werte annimmt. Dies lässt sich dadurch verstehen, dass aus bzw. zu den Spitzen der Materialtransport einen engeren Bereich durchläuft als in den breiteren Tälern und dadurch für den Transport höhere Geschwindigkeiten vonnöten sind. Das zeitliche Verhalten der Dynamik ist subharmonisch mit der zweifachen Plattenperiode $2T$, da zwei aufeinander folgende Aufschläge nötig sind, um die Struktur in den ursprünglichen Zustand zu bringen. Zuletzt lässt sich noch sehen, dass der Transport stets zwischen Tal bzw. Hügel und den jeweils benachbarten Hügeln bzw. Tälern stattfindet. Es kommt also nicht zu einem Domänen übergreifenden Transport von Granulat.

Weitere Systemeigenschaften, wie die Oberflächenmorphologie, lassen sich ebenfalls betrachten. Hierfür wird die zeitliche Entwicklung der mittleren granularen kinetischen Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$, der Rauheit w sowie der Schiefe s betrachtet. Zusätzlich wird die effektive Beschleunigung g_{eff} zur Referenz beigefügt, da sich an dieser die Zeitpunkte $t_{\text{imp}}^{(i)}$ der Aufschläge deutlich zeigen. Dies wird in der Abbildung 9.4 dargestellt. An der mittleren granularen kinetischen Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$ sieht man, dass der Aufschlag Energie im System deponiert, die dann im weiteren zeitlichen Verlauf exponentiell abfällt. Dabei ist zu beobachten, dass die Energie im Übergang in die kleinere Struktur deutlich höher ist als beim Übergang in die stark ausgeprägte Struktur. Zusätzlich lässt sich deutlich sehen, dass der Aufschlag zunächst in einem schlagartigen Verlust von kinetischer Energie führt, das System also massiv abbremst, bevor eine Beschleunigung und damit Erhöhung der Energie stattfindet. Die Rauheit w steigt zunächst bis zu einem Maximum an, welches abhängig von der Höhe der Struktur höher oder geringer ausfällt. Aufgrund der konstanten mittleren Höhe \bar{h} des Systems, erreicht die Struktur mit den größeren Höhen h_{max} bzw. tieferen Tälern h_{min} auch eine höhere Rauheit w . Der Übergang zwischen steigender und fallender Rauheit w bildet dabei eine scharfe Kante, was durch die schnelle Änderung der Geschwindigkeit \vec{v} durch die Aufschläge induziert wird. Durch diese wird das verhältnismäßig langsame Anwachsen der Struktur schlagartig in ein Abflachen überführt, welches sich direkt in einer sinkenden Rauheit w äußert. An der Schiefe s des Systems lässt sich zunächst sehen, dass die

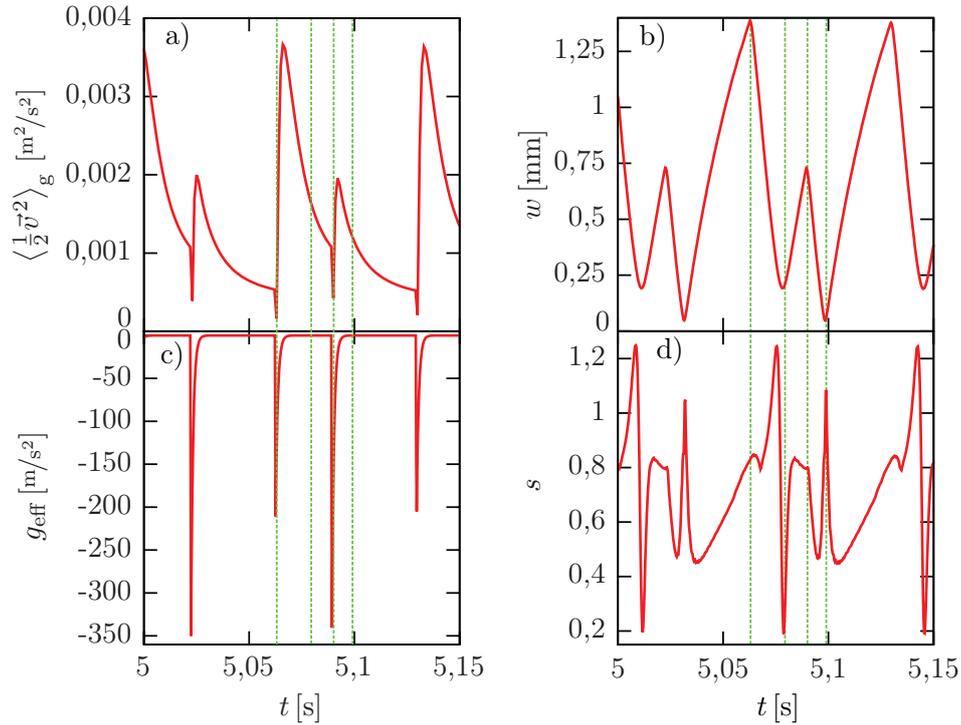


Abbildung 9.4.: a) Mittlere granulare kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \bar{v}^2 \rangle_g$, b) Rauheit w , c) effektive Beschleunigung g_{eff} , d) Schiefe s je in Abhängigkeit der Zeit t . Die grün gestrichelten Linien markieren charakteristische Zeitpunkte während der Dynamik.

Strukturen durch die Täler dominiert werden, also hohe, schmale Spitzen und breite, flache Täler aufweisen, da diese deutlich positive Werte zeigen ($s \approx 0,8$ für die kleineren und $s \approx 0,84$ für die größeren Strukturen). Dies wird durch die Anregung der höheren Moden im Fourierspektrum $\mathcal{F}[h]$ ermöglicht, da sonst die wellenartigen Strukturen eine Sinus- bzw. Kosinusform zeigen würden, welche eine verschwindende Schiefe $s = 0$ besitzen. Die Spitzen im Verlauf lassen sich durch den Verlauf der Rauheit w erklären, da die Schiefe s auf die dritte Potenz dieser normiert wird. Die Rauheit w fällt beim Abflachen stark ab, allerdings behalten die Strukturen zunächst ihre durch Täler dominierte Form bei. Erst beim Übergang in das Anwachsen der nächsten Struktur fällt die Schiefe dann ab, da die räumliche Asymmetrie kurzzeitig verschwindet, bevor das Ausprägen der nächsten Struktur diese wieder induziert und dann zum Ansteigen der Rauheit w und der Schiefe s führt. Beim Übergang von abflachender zu anwachsender Struktur zeigt die Schiefe s somit einen klaren Sprung, mit welchem dieser Übergang klassifiziert werden kann.

9.4. Simulation des dreidimensionalen Systems

In diesem Unterkapitel werden die Ergebnisse der Simulation des vollen dreidimensionalen Systems besprochen. Dabei wurde die folgende Domänendiskretisierung

$$n_x = 140$$

$$n_y = 80$$

$$n_z = 140$$

gewählt, was eine Gesamtanzahl an Teilvolumina V_i von $1,568 \cdot 10^6$ ergibt. Alle weiteren Parameter sind wie im Unterkapitel 9.2 besprochen. Eine Simulation wurde dabei parallelisiert auf 24 Kernen des Typs Intel[®]Xeon[®] CPU E5-2695 v2 mit einer Laufzeit von etwa 40 Stunden durchgeführt.

Zunächst werden einige charakteristische Ausprägungen besprochen, die das System für verschiedene Vibrationsstärken Γ zeigt. Dies zeigt die Abbildung 9.5. Man sieht zunächst, dass für niedrige Vibrationsstärken ($\Gamma = 1,8$) zunächst keine ausgeprägten Muster zu erkennen sind. Es lässt sich lediglich eine schwache Unterstruktur erkennen, die sich im Betrag des Fourierspektrums $|\mathcal{F}[h]|$ durch vier schwach angeregte Moden, die typisch für quadratische Muster sind, kennzeichnet. Für geringere Vibrationsstärken Γ wird diese Ausprägung etwas stärker, was zu schwach ausgeprägten labyrinthartigen Strukturen führt. Dies lässt sich auf eine schwache Resonanz auf die sinusförmige Plattenbewegung zurückführen, die bei den geringen Vibrationsstärken Γ durch die hohe Verweildauer auf der Platte entsteht. Für höhere Vibrationsstärken ab $\Gamma \approx 1,81$ setzt dann die Musterbildung in Form von rippelartigen Strukturen ein. Am Beispiel für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 3,0$ bildet sich ein zeitlich oszillierendes, rippelartiges Muster aus. Eine Plattenperiode T später erhält man das entsprechend versetzte Muster, bei dem die Täler zu Hügeln werden und umgekehrt. Das Muster ist nicht homogen ausgerichtet, sondern zeigt Defekte in der Ausprägung und den Übergängen von vertikal und schräg ausgerichteten Rippeln. Der Betrag des Fourierspektrums $|\mathcal{F}[h]|$ zeigt zwei dominante Moden in diagonaler Richtung, welche allerdings kreisförmig in Richtung der Horizontalen verschmiert sind. Dies lässt sich im Höhenprofil erklären: Die Hauptausrichtung der Rippel liegt in diagonaler Richtung (links unten nach rechts oben). Allerdings zeigt das Feld in der Mitte eine Änderung der Ausrichtung in horizontaler Richtung, die für die Verschmierung der Fouriermode sorgt. Für höhere Vibrationsstärken Γ setzt die Periodenverdopplung ein und führt zunächst in die Ausprägung von zeitlich oszillierenden Loch-Punkt-Mustern. Für eine Vibrationsstärke von $\Gamma = 4,0$ zeigen sich hexagonal angeordnete Lochstrukturen und für eine weitere Plattenperiode T später hexagonal angeordnete Punktstrukturen. Auch diese zeigen Defekte diesmal in der Form quadratischer Strukturen.

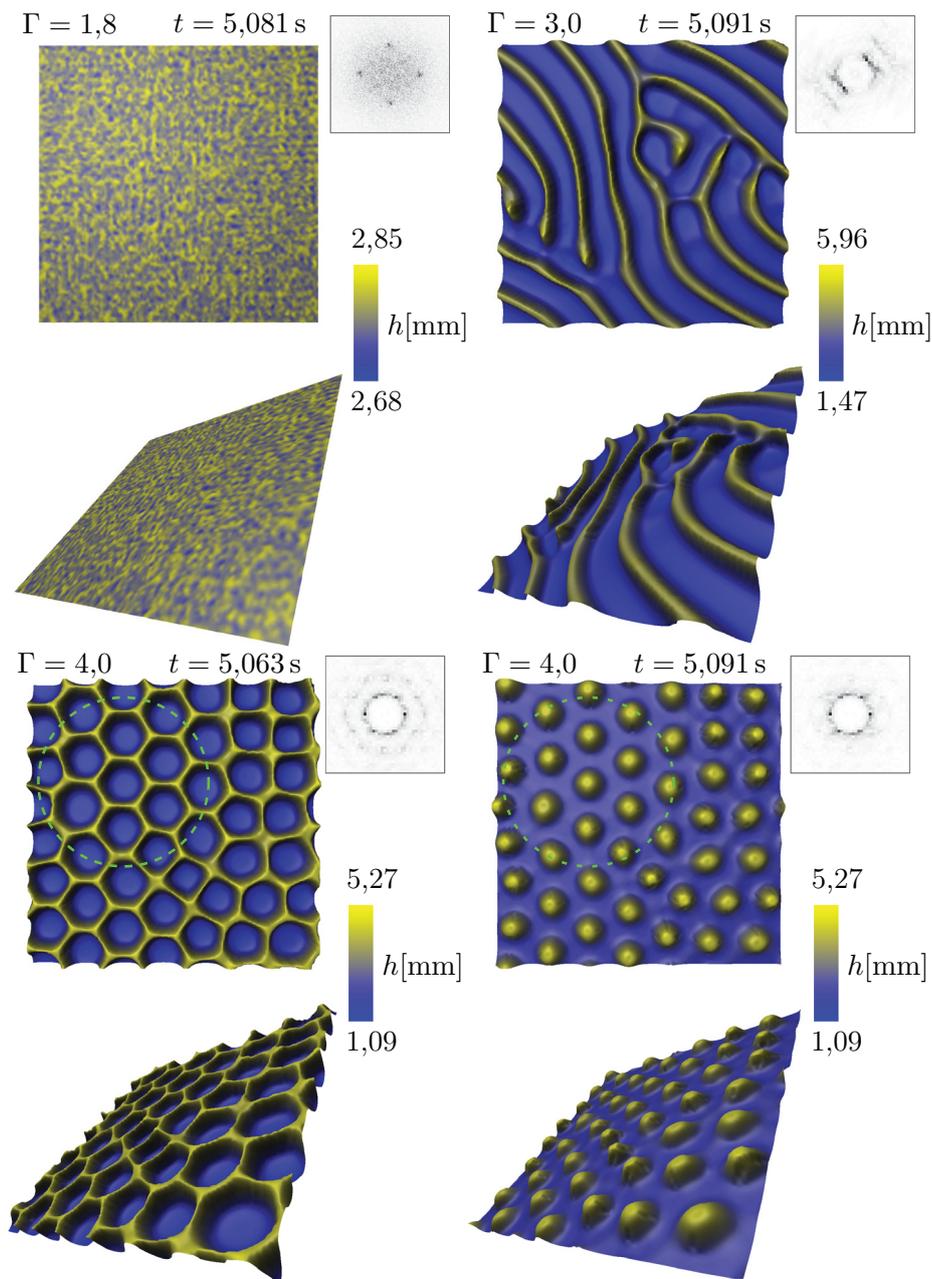


Abbildung 9.5.: Oberflächenprofil h und Betrag des Fourierspektrums $|\mathcal{F}[h]|$ (Ausschnitt der dominanten Moden ohne $k = 0$ -Mode) für drei verschiedene Vibrationsstärken Γ . Es zeigt sich zunächst unstrukturiertes Verhalten für $\Gamma = 1,8$ (links oben) sowie zeitlich oszillierende, rippelartige Muster für $\Gamma = 3,0$ (rechts oben) und zeitlich oszillierende, hexagonale Loch- und Punktmuster (links unten bzw. rechts unten) für $\Gamma = 4,0$. Die grün gestrichelte Linie entspricht dem Ausschnitt in der Abbildung 9.7.

Anmerkung: Der Betrag des Fourierspektrums $|\mathcal{F}[h]|$ für die Vibrationsstärke $\Gamma = 1,8$ zeigt dabei einen größeren Ausschnitt als für die anderen Vibrationsstärken und ist somit nicht direkt mit diesen vergleichbar.

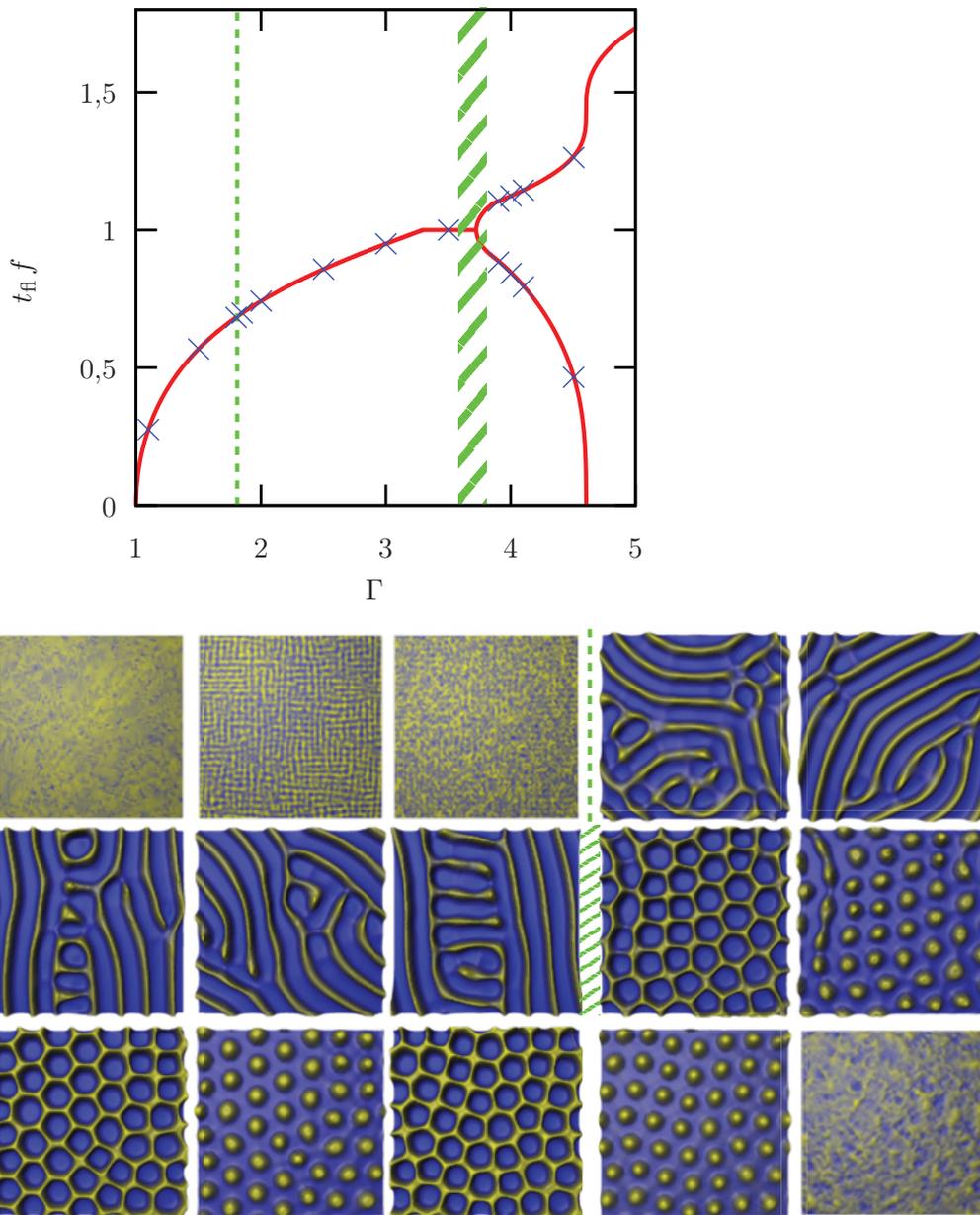


Abbildung 9.6.: Flugzeit t_{fl} in Abhängigkeit der Vibrationsstärke Γ (Graph links oben). Die blauen Kreuze markieren die Vibrationsstärken Γ für die jeweiligen simulierten Ausschnitte. Die grün gestrichelte Linie markiert den Übergang zwischen unstrukturierten zur rippelartigen Strukturen bei $\Gamma = 1,81$. Der grün schraffierte Bereich zeigt den Übergang zwischen Rippeln zu den Loch-/Punktstrukturen. Darunter sind die gefundenen Muster in Reihenfolge ihres Auftretens gezeigt (die Loch-/Punktstrukturen dabei paarweise).

Der Betrag des Fourierspektrums $|\mathcal{F}[h]|$ zeigt die sechs dominanten hexagonalen Moden, die auf einem Ring angeregter Moden liegen. Zusätzlich sind im Falle der Lochstrukturen die höheren Moden leicht angeregt. Um einen Überblick über die gefundenen Strukturen zu geben und diese dann in den Kontext des inelastischen Bouncing-Ball-Modells zu setzen, wird das Auftreten dieser für die jeweilige Vibrationsstärke Γ im Verlauf der Flugzeit t_{fl} des inelastischen Bouncing-Ball-Modells eingetragen. Diese Gesamtübersicht zeigt die Abbildung 9.6. In allen Fällen könnte eine zu geringe Einschwingzeit t_0 die Ursache für die nicht vollständige Ausrichtung der Strukturen und der Defekte sein. Allerdings zeigt das System bereits bei der hier verwendeten Einschwingzeit $t_0 = 5$ s keine sichtbaren Änderungen im Verhalten des zeitlichen Verlaufs der Muster. Höhere Einschwingzeiten sind zusätzlich aufgrund der hohen Simulationsdauer im Rahmen der zur Verfügung stehenden Rechenleistung leider nicht praktikabel.

Als Nächstes wird das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} und der damit verbundene Materialtransport für die Vibrationsstärke $\Gamma = 4,0$ betrachtet. Hierfür werden die Strömungslinien \vec{r}_{sl} für verschiedene Zeiten t in einem Ausschnitt des Feldes (siehe in Abbildung 9.5 der grün gestrichelte Kreis) betrachtet. Diese werden dann mit einer Farbskala versehen, die den Betrag $|\vec{v}|$ der Geschwindigkeit widerspiegelt. Dies zeigt die Abbildung 9.7. Zunächst lässt sich an der Richtung der Strömungslinien \vec{r}_{sl} sehen, dass der Transport sich stets auf ein einzelnes Hexagon, also zwischen dem Hügel und dem direkt umgebenden Tal im Fall von Punktstrukturen oder vom Tal und den umgebenden Hügeln im Fall von Lochstrukturen, konzentriert. Es findet also kein Domänen übergreifender Transport statt. Im zeitlichen Verlauf $t = 5,04$ s \rightarrow $5,05$ s \rightarrow $5,061$ s sieht man das Anwachsen der hexagonalen Struktur, wobei die höchsten Geschwindigkeiten $|\vec{v}|$ sich auf die Hügel konzentriert. Beim Aufschlag $t = 5,062$ s kommt es dann zum massiven Abbremsen der Geschwindigkeit, mit darauf folgender Beschleunigung des Systems in die umgekehrte Richtung. Dies führt dann im weiteren Verlauf $t = 5,07$ s zur Abflachung der Lochstruktur und zur Ausprägung der Punktstruktur $t = 5,085$ s \rightarrow $5,09$ s. Dann erfolgt ein weiterer Aufschlag $t = 5,091$ s, der wiederum zu einem Abbremsen des Systems und einer darauf folgenden Geschwindigkeitsumkehr resultiert. Das System flacht ab im weiteren Verlauf $t = 5,095$ s \rightarrow $5,1$ s und bildet dann wiederum hexagonale Lochstrukturen aus. Das qualitative Verhalten entspricht dabei den Erkenntnissen des zweidimensionalen Systems.

Als Nächstes werden gemittelte charakteristische Größen, analog zum zweidimensionalen Fall, betrachtet. Hierfür wird der zeitliche Verlauf der mittleren granularen kinetischen Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_{\text{g}}$, der Rauheit w , der Schiefe s sowie zur Referenz der effektiven Beschleunigung g_{eff} betrachtet. Dies zeigt die Abbildung 9.8. Die mittlere granulare kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_{\text{g}}$ zeigt – analog zum zweidimensionalen System – den starken Einfluss der Aufschläge im System. Diese führen zu einem starken Abfall der kinetischen Energie gefolgt von einem starken Anstieg. Dann folgt im zeitlichen Verlauf der exponentielle Abfall, bis es zu einem weiteren Aufschlag kommt und

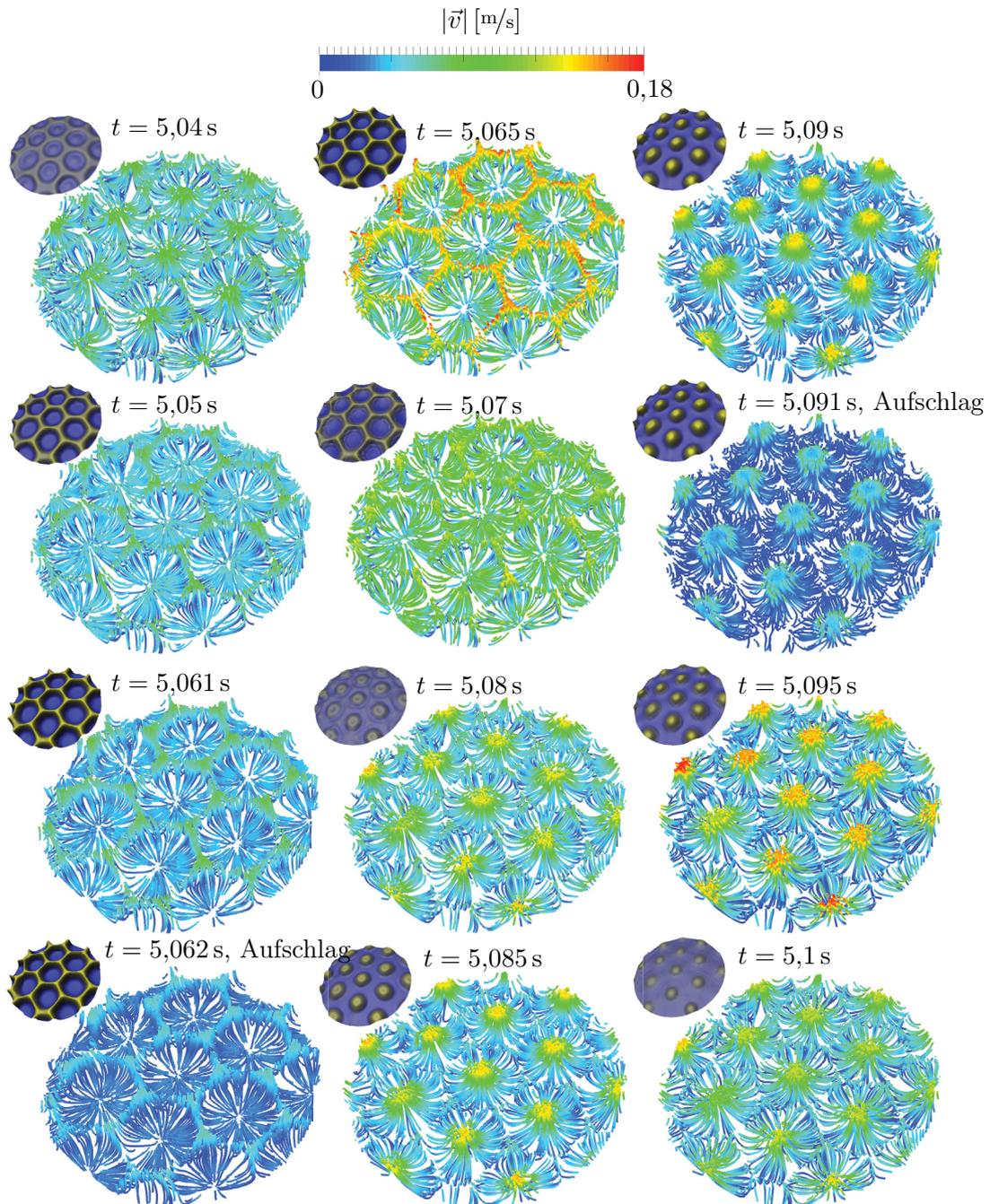


Abbildung 9.7.: Ausschnitt aus dem Gesamtfeld der Strömungslinien \vec{r}_{sl} für verschiedene Zeiten t für einen Gesamtzeitraum von zwei Plattenperioden $2T$ für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 4,0$. In der oberen linken Ecke liegt der entsprechende Musterausschnitt (siehe Abbildung 9.5, grün gestrichelte Linie). Die Farbcodierung entspricht dem Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$.

sich dieser Vorgang wiederholt. Dabei lässt sich im Vergleich mit der Abbildung 9.7 feststellen, dass der Aufschlag zum Zeitpunkt $t = 5,062\text{ s}$, welcher zur Bildung der Punktstrukturen führt, eine höhere kinetische Energie aufweist als der darauf folgende Aufschlag zum Zeitpunkt $t = 5,091\text{ s}$, der zur Bildung der Lochstrukturen führt. Dies ist insbesondere nicht zu erwarten, da die effektive Beschleunigung g_{eff} bei dem zweiten Aufschlag deutlich höher ist als bei dem ersten. Eine mögliche Erklärung wäre der höhere Aufwand beim Abbremsen beim zweiten Aufschlag. Das System zeigt vor diesem eine höhere kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$, welche durch den Aufschlag zunächst vernichtet wird, bevor eine Beschleunigung in die umgekehrte Richtung erfolgen kann. Beim ersten Aufschlag ist dieser Aufwand aufgrund der vorherigen, geringeren kinetischen Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$ nicht so hoch und daher kann eine stärkere Beschleunigung in umgekehrter Richtung erfolgen. Die Rauheit w zeigt ein regelmäßiges An- und Absteigen in Abhängigkeit der Aufschläge. So wächst diese zunächst an bis ein Aufschlag auftritt, der dann das Abflachen der vorherrschenden Struktur induziert. Mit diesem Abflachen setzt dann auch das Absinken der Rauheit w an, bis ein lokales Minimum erreicht wird. Ab diesem setzt dann das Ausbilden der nächsten Struktur ein, welches wiederum zum Anstieg der Rauheit w führt. Die hexagonalen Lochstrukturen weisen dabei eine deutlich höhere Rauheit w als die Punktstrukturen auf. Dies liegt an den verhältnismäßig deutlich breiteren Hügeln der Punktstrukturen im Vergleich zu den Lochstrukturen. Die Lochstrukturen zeigen sehr breite Täler mit steilen Flanken, was zu einer höheren räumlichen Varianz $(h - \bar{h})^2$ bezüglich der mittleren Höhe \bar{h} führt und damit zum stärkeren Anstieg der Rauheit w . Die Schiefe s zeigt einen hohen Wert von $s \approx 1,2$ bei den voll ausgeprägten Punktstrukturen, was eine klare Indiz für die durch Täler dominierte Struktur ist. Die Lochstrukturen zeigen ebenfalls eine positive – wenn auch deutlich geringere – Schiefe von $s \approx 0,35$. Durch die sehr schmalen hohen Flanken dominieren die Täler auch in diesem Muster. Dies wird durch die Anregung der höheren Moden im Fourierspektrum $\mathcal{F}[h]$ ermöglicht, welche im Falle der Punktstrukturen nicht signifikant angeregt sind.

Das vorliegende System kann also die im Experiment gefundene Musterbildung beschreiben und ermöglicht einen Einblick in die innere Dynamik. Es bleibt jedoch bei der Komplexität des Modells die Frage, welche Terme relevant für die Ausbildung der Strukturen sind und welchen Effekt diese dann auf die Musterbildung haben. Dabei werden in den nachfolgenden beiden Unterkapiteln einmal ein System ohne Plattenoszillation, also mit reinem Aufschlagantrieb, und einmal ohne zusätzliche druckabhängige Grenzspannung τ_y , gleichbedeutend mit $\varphi_d = 0^\circ$, besprochen. Die restlichen Terme sind aufgrund ihrer Funktionsweise essentiell: Der Konvektionsterm beschreibt den Materialtransport im System, der Schertensor mit der Bagnold-Reibung sorgt für die notwendigen Reibungsverluste der durch den Antrieb deponierten Energie im System und der normale Druckterm ist für die Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung notwendig.

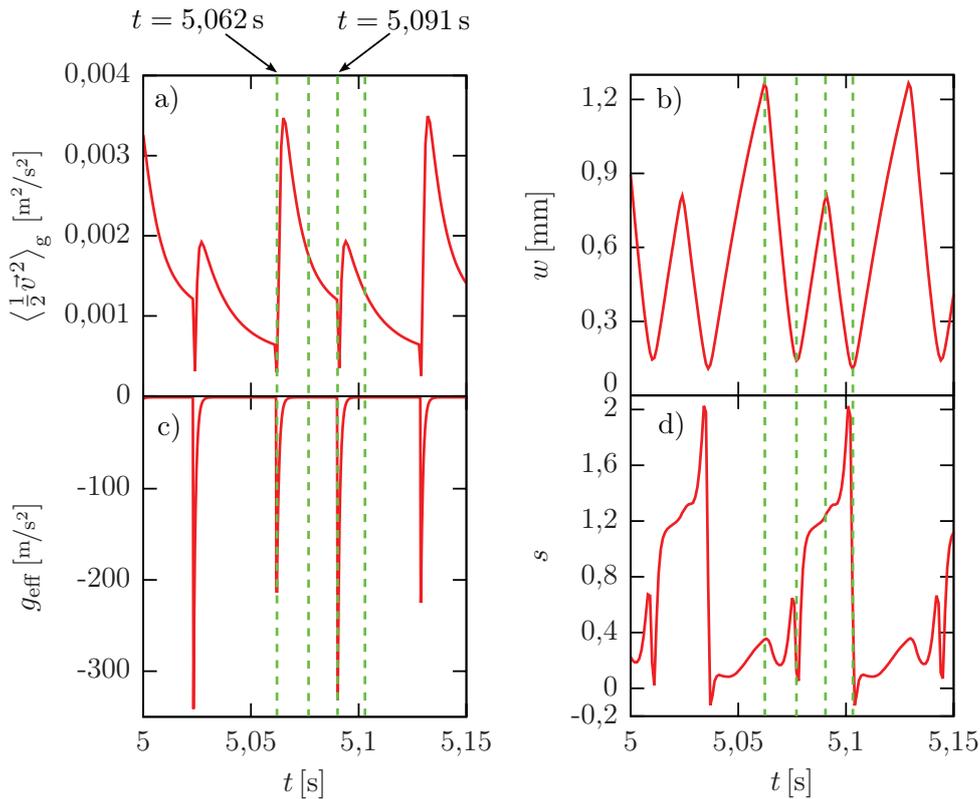


Abbildung 9.8.: a) Mittlere granulare kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$, b) Rauheit w , c) effektive Beschleunigung g_{eff} , d) Schiefe s je in Abhängigkeit der Zeit t . Die grün gestrichelten Linien markieren charakteristische Zeitpunkte während der Dynamik.

9.5. Simulation des dreidimensionalen Systems ohne Plattenoszillation

In diesem Unterkapitel wird untersucht, welchen Effekt das Fehlen der Sinusbewegung der Platte auf die Dynamik hat. Das System wird also nur noch von den Aufschlägen getrieben und die Anteile, bei dem das Granulat auf der Platte liegen bleibt, verschwinden. Naheliegenderweise zeigt sich kein Effekt bei den Vibrationsstärken, die durch ein direktes Abheben gekennzeichnet sind (siehe Kapitel 7, Abbildung 7.2 das Plateau). Daher bleibt zu untersuchen, ob es einen Effekt auf die Muster bzw. den unstrukturierten Bereich für niedrige Vibrationsstärken Γ und einen Einfluss auf die hexagonalen Strukturen gibt. Für eine Vibrationsstärke von $\Gamma = 1,8$ lassen sich nun Strukturen erkennen, bei welcher mit Plattenoszillation keine Muster gefunden wurden. Siehe die Abbildung 9.9. Es zeigt sich zunächst, dass das System rippelartige Strukturen annimmt, wenn auch mit starker Unordnung. Mit einem Höhenverhältnis von $\Delta h \approx 0,93$ mm sind diese zudem verhältnismäßig flach. Das System mit Plattenoszillation zeigt bei dieser Vibrationsstärke $\Gamma = 1,8$ im Vergleich keine Musterbildung

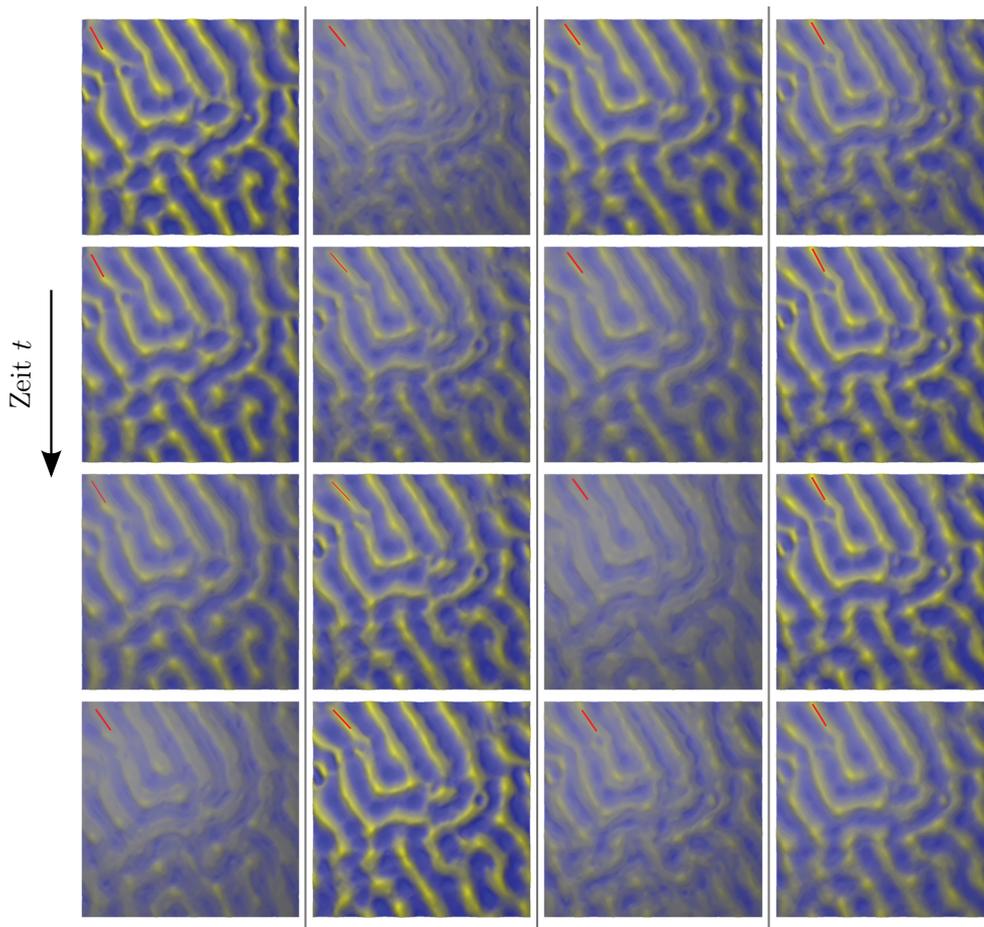


Abbildung 9.9.: Oberflächenprofil h in Abhängigkeit der Zeit t (Zeitverlauf von oben nach unten, nächste Spalte ergibt das nächste Zeitintervall) für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 1,8$. Es bilden sich rippelartige Strukturen, die im Zeitverlauf einem leichten Drift unterliegen (rote Linie als Orientierung).

(siehe Abbildung 9.5). Die fehlende Plattenoszillation unterbindet also die Ausbildung der Strukturen bis die kritische Vibrationsstärke erreicht ist. Dieser Übergang lässt sich mit der mit steigender Vibrationsstärke Γ sinkenden Verweildauer auf der Platte erklären. Mit sinkender Verweildauer nimmt der Einfluss ab und die Musterbildung kann dann stattfinden. Zusätzlich lässt sich auch beobachten, dass das System einem leichten Drift unterliegt.

Zuletzt wird der Einfluss der fehlenden Plattenoszillation auf die hexagonalen Loch-/Punktstrukturen bei einer Vibrationsstärke $\Gamma = 4,0$ dargestellt. Dafür werden einmal die Ergebnisse der Simulation mit und ohne Plattenoszillation in einem direkten Vergleich betrachtet. Dies zeigt die Abbildung 9.10. Man kann sehen, dass der zeitlich oszillierende Wechsel zwischen Loch- und Punktstrukturen erhalten bleibt, allerdings führt die fehlende Plattenoszillation zur einer breiteren Anregung von Moden im Fourierpektrum $\mathcal{F}[h]$. Diese liegen auf einem Ring, auf dem auch die hexagonalen

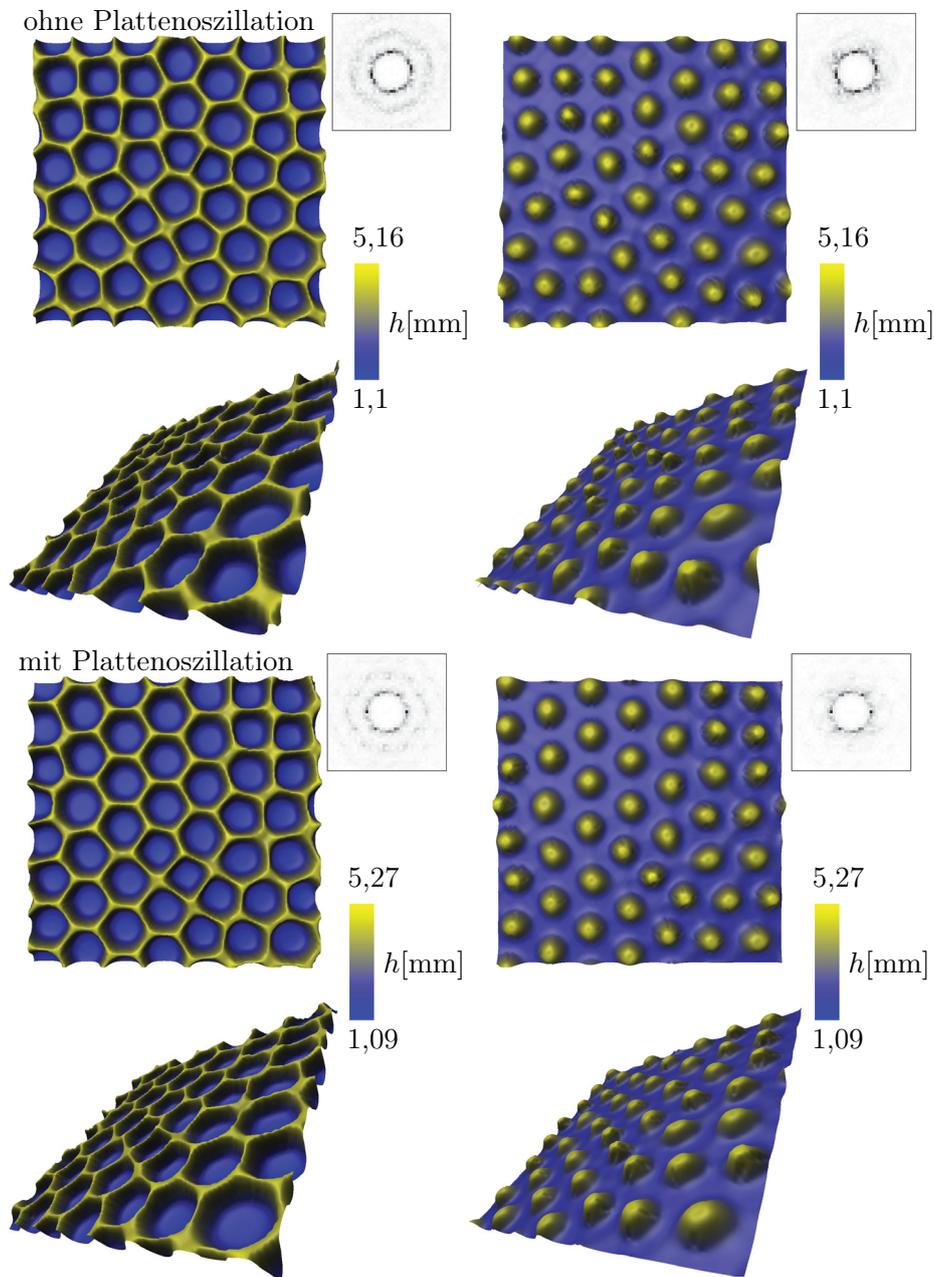


Abbildung 9.10.: Oberflächenprofil h und Betrag des Fourierspektrums $|\mathcal{F}[h]|$ (Ausschnitt der dominanten Moden ohne $k = 0$ -Mode) für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 4,0$ einmal ohne (oben) und einmal mit (unten) Plattenoszillation. Die fehlende Plattenoszillation zeigt sich in einer deutlich breiteren Anregung von Fouriermoden, die zu einer stärkeren Ausprägung von Defekten führt.

Moden zu finden sind. Dies führt zu einer starken Defektbildung im System, die sich in einer stark variierenden Anzahl an Nachbarn der Löcher bzw. Punkten äußert. Es lässt sich also beobachten, dass die Plattenoszillation in diesem Fall die Anregung von störenden Moden verhindert, also stabilisierenden Charakter auf die Ausbildung der Strukturen hat.

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass die qualitativen Eigenschaften der Musterbildung bei einem System ohne Plattenoszillation erhalten bleiben, es allerdings zu Einflüssen im Bereich der Stabilität kommt.

9.6. Simulation des dreidimensionalen Systems mit einem Reibungswinkel $\varphi_d = 0^\circ$

In diesem Teil wird ein verschwindender Reibungswinkel $\varphi_d = 0^\circ$, was gleichbedeutend mit einem System ohne druckabhängiger Grenzspannung τ_y ist, auf die Systemdynamik untersucht. Zwar sollten auch hier alle anderen Parameter nach Möglichkeit konstant gehalten werden, allerdings zeigt sich, dass das System zu sehr hohen Strukturen neigt, die über die Decke zu einem Verlust vom Phasenfeld α und damit von Granulat führen. Dies ergibt bei der typischen Einschwingzeit $t_0 = 5$ s einen Verlust von etwa 30% am Phasenfeld α . Dies resultiert aus den geringeren Reibungsverlusten im Geschwindigkeitsfeld, die durch den fehlenden Term entstehen. Daher muss eine anderweitige Anpassung erfolgen. Dies geschieht durch Erhöhung der Viskositätskonstante η des Bagnold-Terms, die dann für höhere Reibungsverluste sorgt. Erhöht man die Viskositätskonstante um eine Größenordnung auf

$$\eta = 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \approx 13,25 d_p^2,$$

so kann man den Verlust von Granulat unterbinden. Das System zeigt dann im Modell wiederum Musterbildung, diesmal aber in einer anderen Form. Dies zeigt die Abbildung 9.11. Man sieht, dass das System Muster ausbildet allerdings nun in quadratischer Form. Dies geschieht unabhängig von der Vibrationsstärke Γ . Der für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 4,0$ auftretende Wechsel von Loch- und Punktstrukturen tritt ebenfalls nicht mehr auf. Der Einfluss der Periodenverdopplung zeigt sich lediglich in einer kürzeren Verweildauer und schwächeren Ausprägung der versetzten Struktur (siehe in der Abbildung 9.11 für $\Gamma = 4,0$ und $t = 5,091$ s). Daher lässt sich insgesamt feststellen, dass das System zur Musterbildung fähig ist, allerdings wichtige qualitative Eigenschaften fehlen.

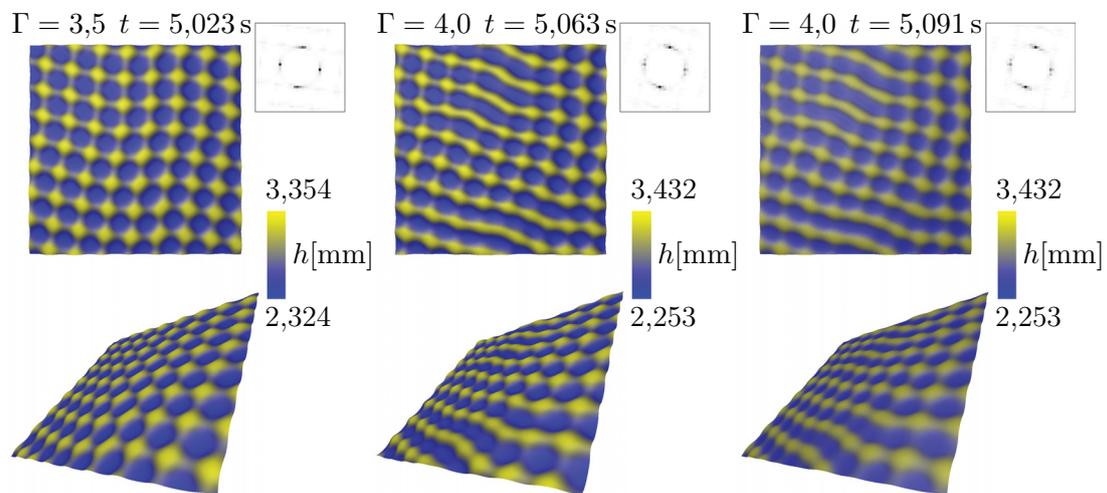


Abbildung 9.11.: Oberflächenprofil h und Betrag des Fourierpektrums $|\mathcal{F}[h]|$ (Ausschnitt der dominanten Moden ohne $k = 0$ -Mode) für zwei verschiedene Vibrationsstärken Γ . In beiden Fällen zeigen sich quadratische Muster.

10. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden zwei granulare Problemstellungen – der Fluss entlang der schrägen Ebene und die Musterbildung unter vertikaler Vibration – mithilfe eines Kontinuumsmodells beschrieben und analysiert. Als Grundgerüst wurden die Cauchy-Bewegungsgleichungen in inkompressibler Form gewählt, da bei den vorliegenden Systemen Dichteänderungen als vernachlässigbar angenommen wurden. Zur Berücksichtigung der Bagnold-Skalierung wurde ein dilatanter Ansatz für den Spannungstensor gewählt, der die experimentell beobachteten Skaleneigenschaften im Regime der dichten Systeme wiedergibt. Da granulare Systeme aufgrund der Reynolds' Dilatanz starke plastische Effekte zeigen können, wurde das Modell zusätzlich um eine druckabhängige Grenzspannung erweitert. Das so erhaltene System lässt sich dann in die Klasse der Herschel-Bulkley-Fluide einordnen. Zuletzt erfolgte eine Vereinfachung der zusätzlich eingeführten Druckabhängigkeit, um das System simpel und numerisch behandelbar zu halten.

Es erfolgte nun die Untersuchung der Systemgleichungen auf die erste Fragestellung – den Fluss entlang der schrägen Ebene. Das Modell wurde dafür zunächst um eine zusätzliche Grenzspannung erweitert, die die Berücksichtigung des Hystereseverhaltens ermöglicht. Zur weiteren Analyse konnte das Modell in eine effektiv eindimensionale Form gebracht werden, die einen analytischen Zugang ermöglicht. Es zeigte sich, dass die charakteristische Bagnold-Skalierung der Geschwindigkeit sowie die Winkelabhängigkeit dieser korrekt wiedergegeben werden. Ebenfalls kann die volle Hysterese, bei der ein dynamischer und statischer Grenzwinkel vorhanden sind, reproduziert werden. Die zeitabhängige Analyse des Modells zeigt die Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils. Dabei lässt sich beobachten, dass das Scherprofil den Anfang seiner Ausbildung am Boden hat. Dies geschieht aufgrund der Reibungseffekte mit diesem und das restliche Granulat wird dann zunächst als statischer Block von der untersten Schicht mitgetragen. Im weiteren zeitlichen Verlauf setzt sich dann die Scherung aufgrund der Bagnold-Reibung durch den Block durch und induziert eine komplette Scherung des Systems. Dabei konnte eine klare Propagationsfront beobachtet werden, welche dann nach endlicher Zeit die Oberfläche erreicht. Die funktionale Form dieser Verweildauer in Abhängigkeit des entdimensionalisierten Reibungskoeffizienten konnte durch ein Fit in quantitative Übereinstimmung mit den numerischen Daten gebracht werden. Mit Ausnahme der Höhenabhängigkeit der Reibungswinkel, welche nicht beobachtet werden konnte, stehen die gefundenen Erkenntnisse im Einklang der Beobachtungen in

der Literatur.

Zur Behandlung der Musterbildung unter vertikaler Vibration wurde zunächst das inelastische Bouncing-Ball-Modell eingeführt und beschrieben. Dieses Modell beschreibt die qualitativen Einflüsse der Plattenbewegung auf das granulare System. Darauf aufbauend wurde dann eine Kraftmodellierung für das Modell abgeleitet, die die Einflüsse in einem mitbewegten System vollständig berücksichtigt. Im nächsten Schritt wurde das System im Rahmen der Volume-of-Fluid-Methode um die zweite Phase Luft erweitert. Dies ermöglicht die numerische Behandlung der freien Oberfläche in einem starren Gitter. Darauf folgend wurde das Modell im Kontext der Finite-Volumen-Methode diskretisiert sowie die für die Lösung notwendigen Algorithmen vorgestellt. Die Umsetzung dieser erfolgte dann mit der C++-Bibliothek OpenFoam[®].

Es erfolgte die Untersuchung der Strukturbildung zunächst in einem zweidimensionalen System. Dieses ermöglichte bereits erste qualitative Einblicke in die vorherrschende Dynamik. So zeigte sich, dass eine minimale Vibrationsstärke existiert, bei der sich erst eine geordnete Struktur der Oberfläche zeigt. Erreicht man diese, so bildet das System eine zeitlich oszillierende, räumlich periodische Wellenstruktur aus, die nach einer weiteren Plattenperiode in eine um die halbe Wellenlänge versetzte Struktur übergeht. Diese zeigt dabei ein durch Täler dominiertes Verhalten durch hohe und schmale Hügelbildung. Dies steht im direkten Zusammenhang mit der Anregung der höheren Fouriermoden, die eine Asymmetrie zwischen Tälern und Hügeln induzieren. Aus dem Geschwindigkeitsfeld lässt sich die Form des Materialtransports beobachten. Dabei findet ein Transport von den Tälern in die Hügel statt, der dann zur Ausbildung der Strukturen führt. Bei einem Aufschlag kommt es dann zum schlagartigen Abbremsen des Systems und dann zur Beschleunigung in die umgekehrte Richtung. Dies führt dann zum Abtransport des Materials aus den Hügeln in die Täler und damit zum Anwachsen der versetzten Strukturen. Es zeigt sich dabei, dass das Material keinem globalen Transport unterliegt, also stets zwischen denselben Hügeln und Tälern transportiert wird. Das gesamte zeitliche Verhalten lässt sich als subharmonisch klassifizieren, da zwei sukzessive Aufschläge vonnöten sind, bis das System in seinen Ausgangszustand überführt wird. Eine weitere Erhöhung der Vibrationsstärke führt aufgrund einer Periodenverdopplung in der Flugzeit im inelastischen Bouncing-Ball-Modell zu einer Änderung der Wellenstrukturen. Diese werden nun während der langen Flugzeit zum einen höher als die darauffolgenden versetzten Strukturen und zum anderen bleiben diese länger erhalten. Somit ergibt sich eine Dynamik aus hohen, langlebigen Wellen und kleinen, kurzweiligen Wellen.

Nach diesem ersten Einblick wurde das dreidimensionale System untersucht. Viele Aspekte des zweidimensionalen Systems treffen auch hier wieder zu. Zunächst finden sich keine Muster, sondern es ist notwendig, eine kritische Vibrationsstärke zu erreichen, die im Vergleich zum zweidimensionalen Fall etwas niedriger ist. Dann setzt die Musterbildung in Form von rippelartigen Strukturen ein, welche zeitlich oszillieren.

Ebenfalls bildet sich nach einer Plattenperiode ein um die halbe Wellenlänge versetztes Muster aus, somit ist die zeitliche Dynamik, analog zum zweidimensionalen Fall, subharmonisch. Beide Ausprägungen zeigen dabei eine durch Täler dominierte Struktur. Mit weiterer Erhöhung der Vibrationsstärke setzt – ab der Periodenverdopplung des inelastischen Bouncing-Ball-Modells – die Ausbildung von Loch-/Punktstrukturen in Form von Hexagonen ein. Dabei wechseln sich die hexagonalen Loch- und Punktstrukturen im zeitlichen Verlauf ab, so dass auch in diesem Fall das zeitliche Verhalten subharmonisch ist. Ebenfalls zeigen sowohl bei den Lochstrukturen als auch bei den Punktstrukturen die Täler die stärkere Ausprägung. Das vorliegende Geschwindigkeitsfeld konnte anhand von Strömungslinien untersucht werden und zeigt dabei ein qualitativ ähnliches Verhalten wie das zweidimensionale System. Der Materialtransport findet wiederum zwischen den Tälern und Hügeln statt, welcher ausschlaggebend für die Musterbildung ist. Auch hier führen die Aufschläge zunächst zu einem schlagartigen Abbremsen der Geschwindigkeit und dann zu einer Beschleunigung in die umgekehrte Richtung, die dann das darauffolgende Muster induziert. Zuletzt wurde die Notwendigkeit der druckabhängigen Grenzspannung und der Plattenoszillation untersucht. Es zeigt sich, dass das Vernachlässigen der Plattenoszillation die Strukturbildung für geringere Vibrationsstärken ermöglicht. Diese bilden sich allerdings nur schwach aus und zeigen eine starke Unordnung mit einem leichten Drift. Die fehlende Plattenoszillation zeigt sich im Bereich der hexagonalen Muster durch eine starke Anregung zusätzlicher Moden im Fourierspektrum, die zu einer starken Defektbildung der Strukturen führen. Hier lässt sich also ein stabilisierender Mechanismus der Plattenoszillation auf das Muster feststellen. Das Vernachlässigen der druckabhängigen Grenzspannung führt bei konstanten anderen Parametern zu sehr hohen ungeordneten Strukturen, die dann zu einem Verlust von Granulat führen. Passt man die Viskositätskonstante des Bagnold-Terms an, so findet man quadratische Muster. Diesen fehlen jedoch Eigenschaften, wie der zeitliche Wechsel der Loch-/Punktstrukturen oder die hexagonalen Muster. So lässt sich festhalten, dass das Modell ohne Grenzspannung zur Musterbildung fähig ist, allerdings fehlen charakteristische Eigenschaften.

Ausblick:

Bei der Ableitung des Modells lag der Hauptfokus auf ein möglichst minimales Modell, welches die dargestellten Probleme beschreiben kann. Daher wurden einige Annahmen getroffen, wie beispielsweise die Inkompressibilität oder dass es sich um trockenes Granulat handelt. Diese stellen allerdings nur eine kleine Menge an granularen Fragestellungen dar. So wäre eine mögliche Erweiterung die Klasse der feuchten granularen Systeme, bei denen ein zusätzliches Medium (zumeist Wasser) vorhanden ist. Dieses äußert sich unter anderem durch eine zusätzliche kohäsive Kraft bei hohen Dichten. Der Ursprung dieser sind Wasserbrückenbindungen zwischen einzelnen Konstituenten, die einen zusätzlichen energetischen Aufwand zur Trennung dieser darstellen. Solch eine

Berücksichtigung kann durch die Erweiterung des Grenzspannungsterms mit einer zusätzlichen Kohäsionskonstanten erfolgen. Eine andere, häufig vertretene Klasse sind die Systeme mit relevanten Dichteänderungen. Diese könnten durch eine kompressible Betrachtung beschrieben werden. Dafür wäre es jedoch notwendig, eine Zustandsgleichung für Druck, Temperatur und Dichte, die die granularen Charakteristika beschreibt, und eine entsprechende Energiegleichung anzusetzen. Auch im Falle der inkompressiblen, trockenen Systeme gibt es einige interessante Problemstellungen. So wäre beispielsweise eine Untersuchung der Lawinenbildung oder der rotierenden Trommel durch die Modellgleichungen generell möglich. Zuletzt sei noch der Antrieb bei vertikaler Vibration erwähnt. Hier wäre zunächst ein Vergleich von anderen Aufschlagsfunktionen hilfreich, um den Einfluss von diesen auf die Musterbildung zu untersuchen. Ein weiterer Aspekt wäre die Verkippung der Platte und die damit induzierte räumliche Anisotropie. Insbesondere ließe sich damit auch die Robustheit der auftretenden Muster überprüfen, da experimentelle Realisierungen typischerweise leichte Störungen solcher Art nicht vermeiden können. Zusätzlich führt diese Erweiterung auf eine weitere interessante granulare Problemstellung: die Schwingförderer. So ließe sich auch überprüfen, ob das Modell den Transporteffekt, der bei diesen auftritt, beschreiben kann.

A. Anhang

A.1. Reduktion des granularen Systems auf eine Dimension

Aus den Resultaten $v_y = 0$ (6.7) und $\partial_x v_x = 0$ (6.5) folgen zunächst für den Konvektionsterm

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x &= v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_y &= 0\end{aligned}$$

und für den Schertensor

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \frac{1}{2}(\partial_x v_y + \partial_y v_x) \\ \frac{1}{2}(\partial_x v_y + \partial_y v_x) & \partial_y v_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\partial_y v_x \\ \frac{1}{2}\partial_y v_x & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\partial_y v_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ |\mathbf{D}| &= \frac{1}{2}|\partial_y v_x|.\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Divergenz des Spannungstensors folgt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{t} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \cdot \left[|\partial_y v_x| \partial_y v_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \partial_y \\ \partial_x \end{pmatrix} (|\partial_y v_x| \partial_y v_x) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \partial_y (|\partial_y v_x| \partial_y v_x) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Inkompressibilitätsbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ kann nicht mehr zur Lösung des Drucks p verwendet werden, da sie stets erfüllt ist. Um den Druck p trotzdem zu bestimmen, betrachtet man die Geschwindigkeitsgleichung (6.3) für die vertikale Geschwindigkeit

v_y . Aus dieser ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 &= -\chi \partial_y p + \frac{1}{2} \mu_y \operatorname{sgn}(\partial_y v_x) \chi \underbrace{\partial_x p}_{=0} - \chi g \cos \varphi \\
 &\stackrel{\text{o.E.}}{=} -\partial_y p - g \cos \varphi \\
 \xrightarrow{p|_{y=h}=0} & p = g \cos \varphi (h - y).
 \end{aligned}$$

Der Druck p reduziert sich auf den rein hydrostatischen Anteil. Nun kann man die Resultate in die Geschwindigkeitsgleichung (6.3) für die horizontale Geschwindigkeit v_x und in die Yield-Funktion (6.4) einsetzen und erhält das reduzierte System

$$\begin{aligned}
 \partial_t v_x &= \chi g (\sin \varphi - \mu_y \operatorname{sgn}(\partial_y v_x) \cos \varphi) + \frac{1}{4} \eta \partial_y (|\partial_y v_x| \partial_y v_x) \\
 \chi &= \Theta(|\sin \varphi| - \mu_s |\cos \varphi|) (1 - \Theta(|\partial_y v_x|)) + \Theta(|\partial_y v_x|).
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt schränkt man den Verkippungswinkel φ auf das Intervall $[0^\circ, 90^\circ[$ ein. Winkel größer als 90° sind physikalisch nicht sinnvoll, der negative Winkelbereich $\varphi < 0^\circ$ führt durch die Transformation

$$\begin{aligned}
 \varphi &\rightarrow -\varphi \\
 v_x &\rightarrow -v_x
 \end{aligned}$$

auf dieselben Systemgleichungen. Aus dem Winkelbereich $[0^\circ, 90^\circ[$ folgt nun, dass nur Strömungen in positive x -Richtung entstehen

$$v_x \geq 0$$

und es gilt dann für die Scherrate

$$\partial_y v_x \geq 0.$$

Eingesetzt ergibt sich das gesuchte System

$$\begin{aligned}
 \partial_t v_x &= \chi g (\sin \varphi - \mu_y \cos \varphi) + \frac{1}{4} \eta \partial_y (\partial_y v_x)^2 \\
 \chi &= \Theta(\sin \varphi - \mu_s \cos \varphi) (1 - \Theta(\partial_y v_x)) + \Theta(\partial_y v_x).
 \end{aligned}$$

A.2. Berechnung der Aufschlagszeitpunkte

Die Aufschlagsbedingung (7.4) bestimmt den i -ten Aufschlagszeitpunkt $t_{\text{imp}}^{(i)}$ und muss daher für die Beschreibung des granularen Systems gelöst werden. Da diese Gleichung jedoch transzendent ist, muss dies numerisch geschehen. Hierfür betrachtet man nun

zunächst aus Gleichung (7.4) folgende Abschätzung

$$y_{\text{off}}^{(i)} + v_{\text{off}}^{(i)} \left(t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)} \right) - \frac{1}{2}g \left(t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)} \right)^2 = A \sin \left(2\pi f t_{\text{imp}}^{(i)} \right) \geq -A.$$

Dann führt man die quadratische Ergänzung durch

$$\begin{aligned} y_{\text{off}}^{(i)} + v_{\text{off}}^{(i)} \left(t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)} \right) - \frac{1}{2}g \left(t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)} \right)^2 &\geq -A \\ \Leftrightarrow \left(t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)} - \frac{v_{\text{off}}^{(i)}}{g} \right)^2 &\leq \left(\frac{v_{\text{off}}^{(i)}}{g} \right)^2 + \frac{2}{g} \left(y_{\text{off}}^{(i)} + A \right). \end{aligned}$$

Nun folgen zunächst die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)} &\leq \frac{v_{\text{off}}^{(i)}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{\text{off}}^{(i)}}{g} \right)^2 + \frac{2}{g} \left(y_{\text{off}}^{(i)} + A \right)} \\ t_{\text{imp}}^{(i)} - t_{\text{off}}^{(i)} &\geq \frac{v_{\text{off}}^{(i)}}{g} - \sqrt{\left(\frac{v_{\text{off}}^{(i)}}{g} \right)^2 + \frac{2}{g} \left(y_{\text{off}}^{(i)} + A \right)}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der zweiten Lösung ist stets kleiner gleich null, aber es gilt $t_{\text{imp}}^{(i)} \geq t_{\text{off}}^{(i)}$. Aus diesem Grund ist die zweite Lösung stets erfüllt und kann vernachlässigt werden. Dann folgt die obere Schranke für die Aufschlagszeit

$$t_{\text{imp}}^{(i)} \leq t_{\text{fl,max}}^{(i)} := t_{\text{off}}^{(i)} + \frac{v_{\text{off}}^{(i)}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{\text{off}}^{(i)}}{g} \right)^2 + \frac{2}{g} \left(y_{\text{off}}^{(i)} + A \right)}.$$

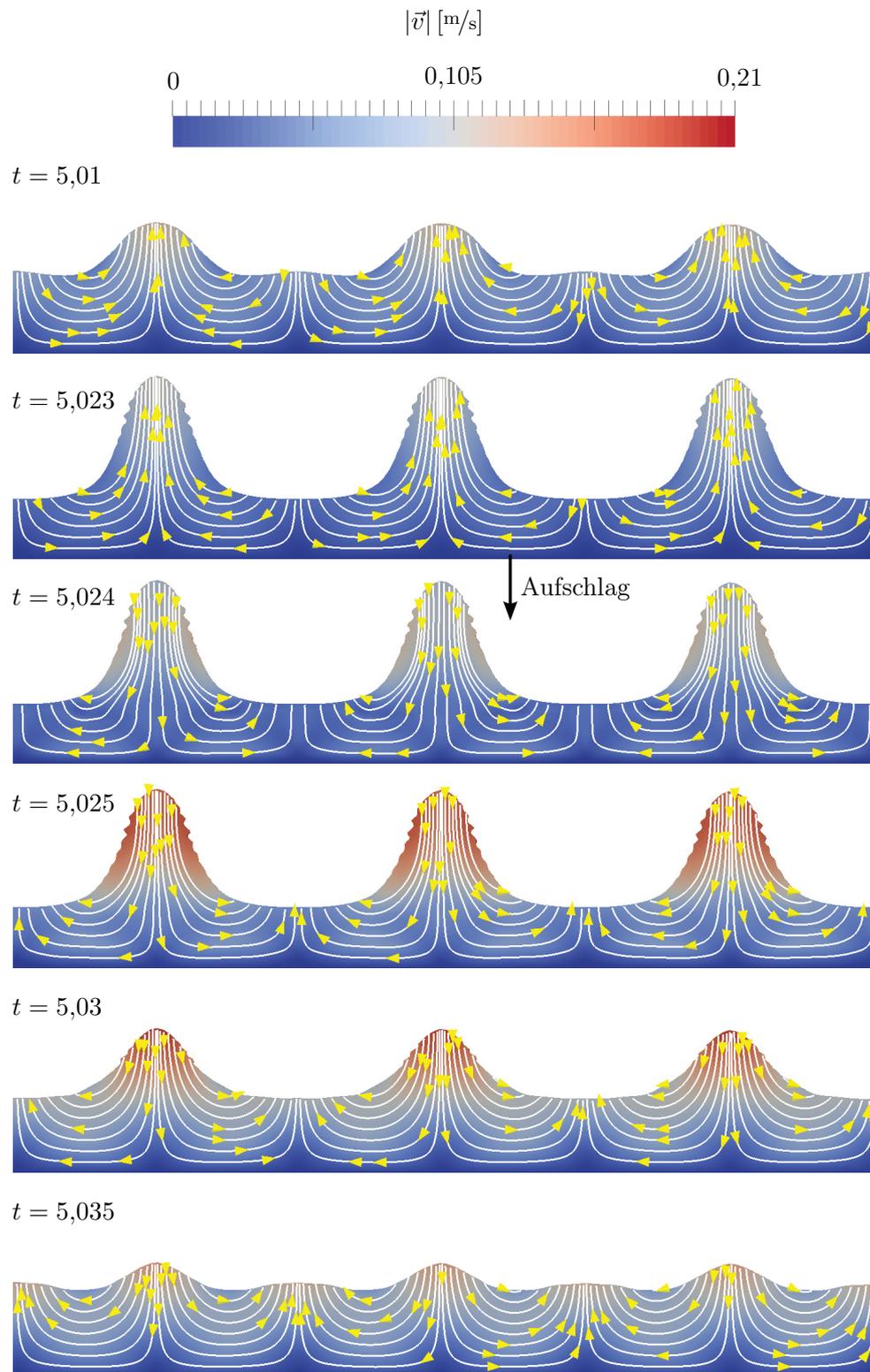
Aus der Einschränkung $\Gamma > 1$ folgt nun, dass die gesuchte Lösung $t_{\text{imp}}^{(i)}$ im Intervall

$$t_{\text{imp}}^{(i)} \in]0, t_{\text{fl,max}}^{(i)}]$$

zu finden ist. Mit diesem Intervall und der Aufschlagsbedingung (7.4) wurde die Lösung mithilfe des Bisektionsverfahrens numerisch berechnet.

A.3. Simulation des zweidimensionalen Systems für eine Vibrationsstärke von $\Gamma = 3,0$

In diesem Teil wird das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} mit Strömungslinien (weiß in Richtung gelber Spitzen) im zeitlichen Verlauf t für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 3,0$ gezeigt. Siehe dafür die Abbildung A.1.



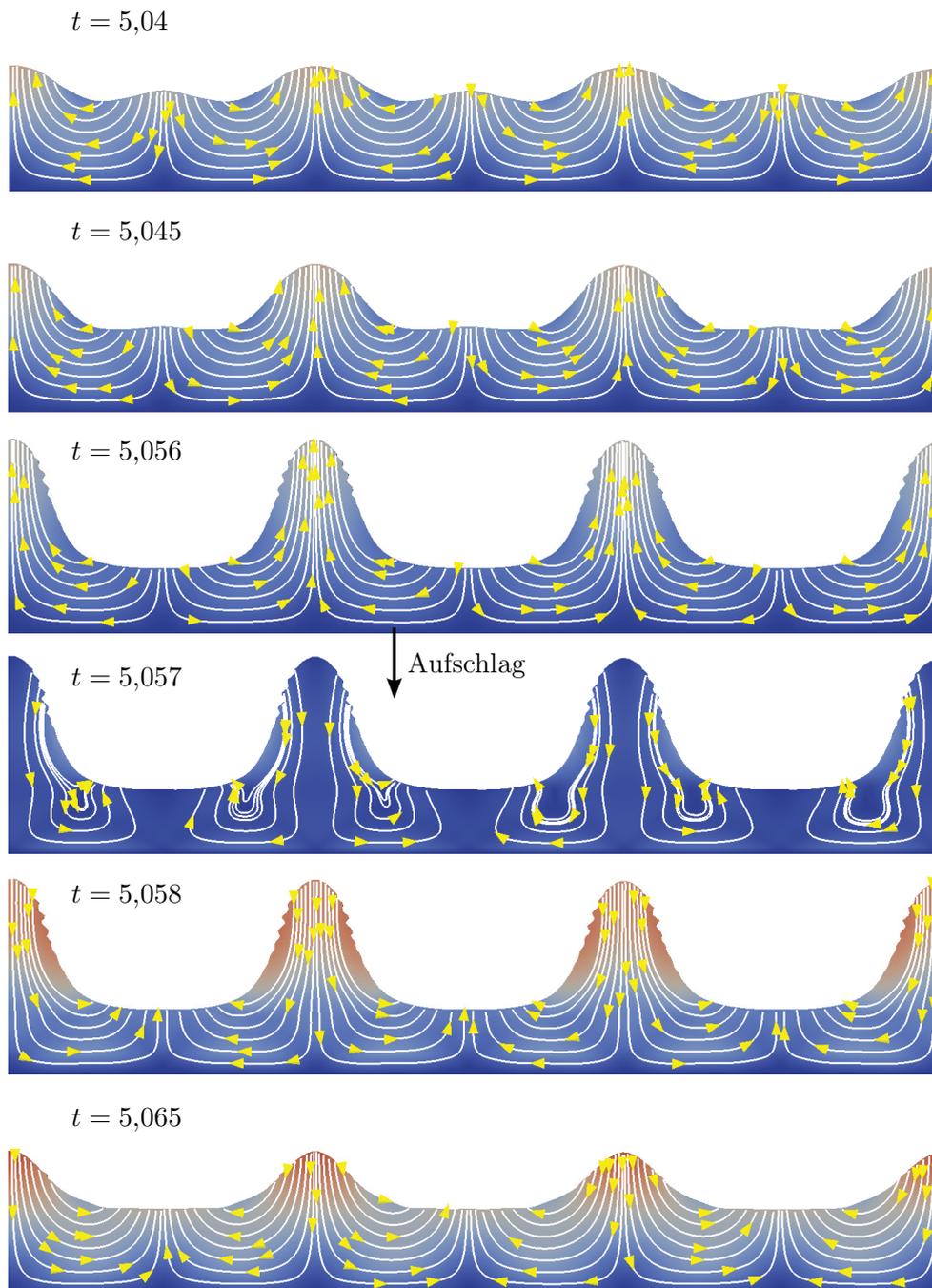


Abbildung A.1.: Betrag des Geschwindigkeitsfeldes $|\vec{v}|$ für verschiedene Zeitpunkte t (Ausschnitt aus dem gesamten Feld). Die weißen Linien zeigen die Strömungslinien in Richtung der gelben Spitzen. Das System zeigt einen Transport von Granulat von den Tälern in die Spitzen. Beim Aufschlag kommt es zu einer Änderung des Geschwindigkeitsfeldes, welches den Transport umkehrt und die um die halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ versetzte Struktur induziert.

Es zeigt sich ein Verhalten ähnlich zur Vibrationsstärke $\Gamma = 4,1$. Es findet ein Materialtransport von den Tälern zu den Hügeln statt, der dann durch einen Aufschlag umgekehrt wird. Dabei wird das System zunächst massiv abgebremst, um dann anschließend in die umgekehrte Richtung beschleunigt zu werden. Dies führt zum Abflachen der Hügel und anschließend zum Anwachsen der Täler zu neuen Hügeln. Im Gegensatz zum System mit einer Vibrationsstärke $\Gamma = 4,1$ fehlt hier die Periodenverdopplung des Antriebs, so dass sich nach einer Plattenperiode T stets eine sehr ähnliche um die halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ versetzte Struktur ergibt.

Ein qualitativ ähnliches Verhalten ergibt sich für die mittlere granulare kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$, die Rauheit w und die Schiefe s in Abhängigkeit der Zeit t . Dies zeigt die Abbildung A.2. Die mittlere granulare kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$ zeigt das starke

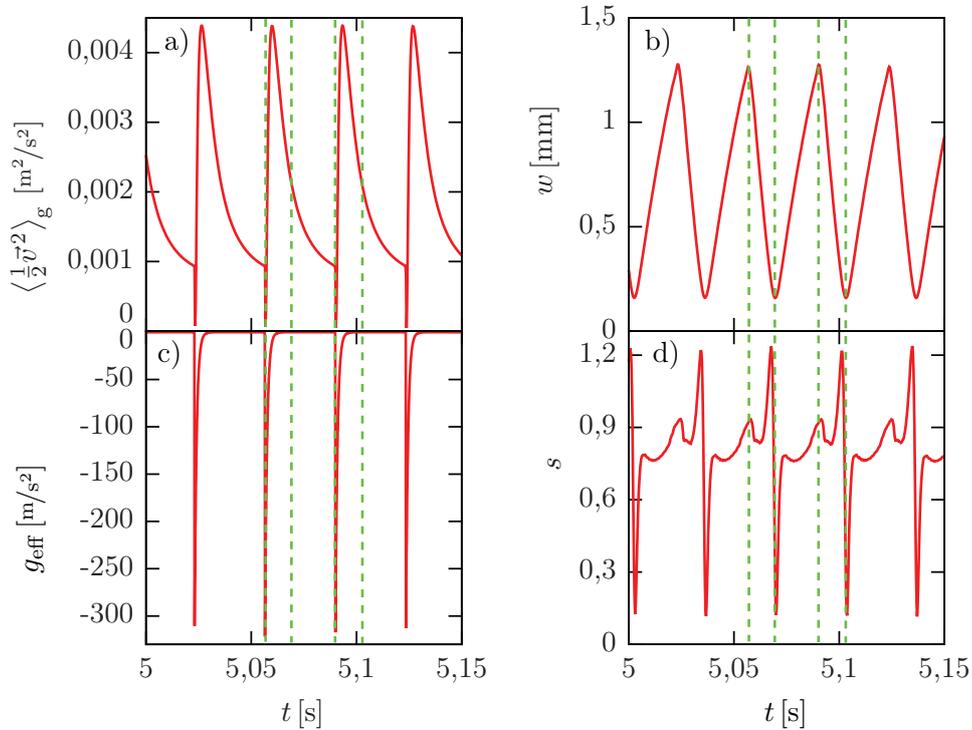


Abbildung A.2.: a) Mittlere granulare kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$, b) Rauheit w , c) effektive Beschleunigung g_{eff} , d) Schiefe s je in Abhängigkeit der Zeit t . Die grün gestrichelten Linien markieren charakteristische Zeitpunkte während der Dynamik.

Anwachsen und dann exponentielle Abklingen dieser. Ein Aufschlag induziert einen massiven Verlust, um dann zur Beschleunigung und starken Erhöhung der Energie zu führen. Die Rauheit w zeigt ein An- und Absteigen im zeitlichen Verlauf. Dabei lässt sich klar der Einfluss eines Aufschlages sehen, der vom vorherigen Ansteigen in ein Absteigen der Rauheit führt. Bei der Schiefe s lässt sich zunächst feststellen, dass sie bei den voll ausgeprägten Strukturen einen deutlich positiven Wert zeigt, der

auch hier auf die durch Täler dominierte Struktur hinweist. Ebenfalls zeigt sie den charakteristischen Sprung vom Übergang der abflachenden zur ausbildenden Struktur. Alles in allem lässt sich festhalten, dass – bis auf die zu erwartende Effekte durch die fehlende Periodenverdopplung des Antriebs – das Verhalten qualitativ gleich zur Vibrationsstärke $\Gamma = 4,1$ ist.

A.4. Simulation des dreidimensionalen Systems für eine Vibrationsstärke von $\Gamma = 3,0$

In diesem Teil wird einmal die Lösung des dreidimensionalen Systems für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 3,0$ genauer vorgestellt. Dafür werden die Strömungslinien aus einem Ausschnitt (siehe Abbildung A.3, grün gestrichelter Kreis) untersucht. Diese zeigt dann

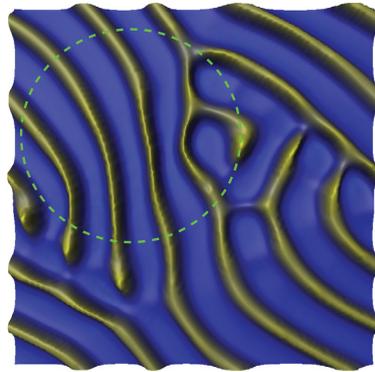


Abbildung A.3.: Ausschnitt (grün gestrichelte Linie) aus dem Gesamtfeld für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 3,0$. Dies ist der Bereich, dessen Strömungslinien in der nachfolgenden Abbildung betrachtet werden.

die Abbildung A.4. Man sieht zunächst das Anwachsen der Struktur zu den Rippel. Dann erfolgt zum Zeitpunkt $t = 5,057$ s der Aufschlag, der zum deutlichen Abbremsen des Geschwindigkeitsfeldes \vec{v} führt. Im weiteren Verlauf wird das System dann in die umgekehrte Richtung beschleunigt, die dann zum Abflachen der Struktur führt und dem darauffolgenden Anwachsen der versetzten Rippel. Diese prägen sich dann wiederum aus, bis eine weiterer Aufschlag folgt und das System abflacht und wieder in die ursprüngliche Form zurückläuft. Somit ergibt sich das zu erwartende subharmonische Verhalten. Des Weiteren sieht man an den Strömungslinien, dass – analog zur Vibrationsstärke $\Gamma = 4,0$ – nur ein lokaler Transport von Granulat stattfindet, Material also stets zwischen Rippeln und den benachbarten Täler transportiert wird.

Zuletzt werden die charakteristischen Größen mittlere granulare kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$, Rauheit w und Schiefe s sowie die effektive Beschleunigung g_{eff} betrachtet. Dies zeigt die Abbildung A.5.

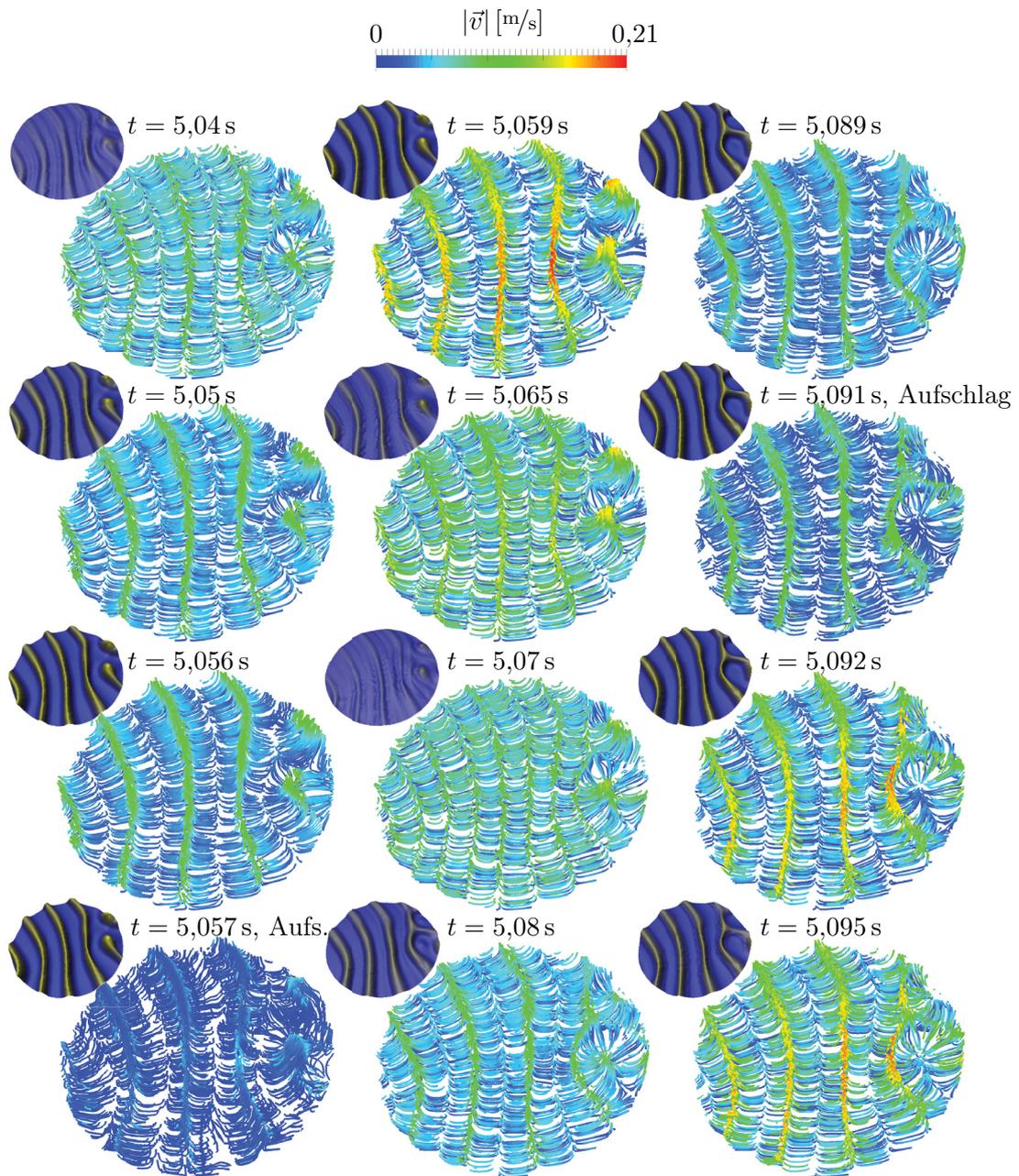


Abbildung A.4.: Ausschnitt aus dem Gesamtfeld der Strömungslinien \vec{r}_{sl} für verschiedene Zeiten t für einen Gesamtzeitraum von zwei Plattenperioden $2T$ für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 3,0$. In der oberen linken Ecke liegt der entsprechende Musterausschnitt (siehe Abbildung A.3, grün gestrichelte Linie). Die Farbcodierung entspricht dem Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$.

An der mittleren granularen kinetischen Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$ sieht man – analog zu den vorherigen Ergebnissen – die charakteristische Erhöhung der Energie durch einen Aufschlag und dann das exponentielle Abflachen dieser. Aufgrund der zeitlichen Abtastung der numerischen Ergebnisse ist in diesem Fall nur bei jedem zweiten Aufschlag der schlagartige Verlust der kinetischen Energie sichtbar. Die Rauheit w zeigt das typische Anwachsen und Abflachen der durch die Aufschläge induzierten Übergänge. An der Schiefe s sieht man, dass das System wiederum durch Täler dominierte Strukturen zeigt, welche sich bei voller Ausprägung in lokalen Maxima zeigt. Ebenfalls ist das starke Ansteigen der Schiefe s und dann das schlagartige Abfallen dieser bei den Übergängen der abflachenden zu neu anwachsenden Strukturen sichtbar. Es lässt sich festhalten, dass das qualitative Verhalten dem Verhalten des Systems für eine Vibrationsstärke $\Gamma = 4,0$ entspricht, wenn man von den Einflüssen der Periodenverdopplung absieht.

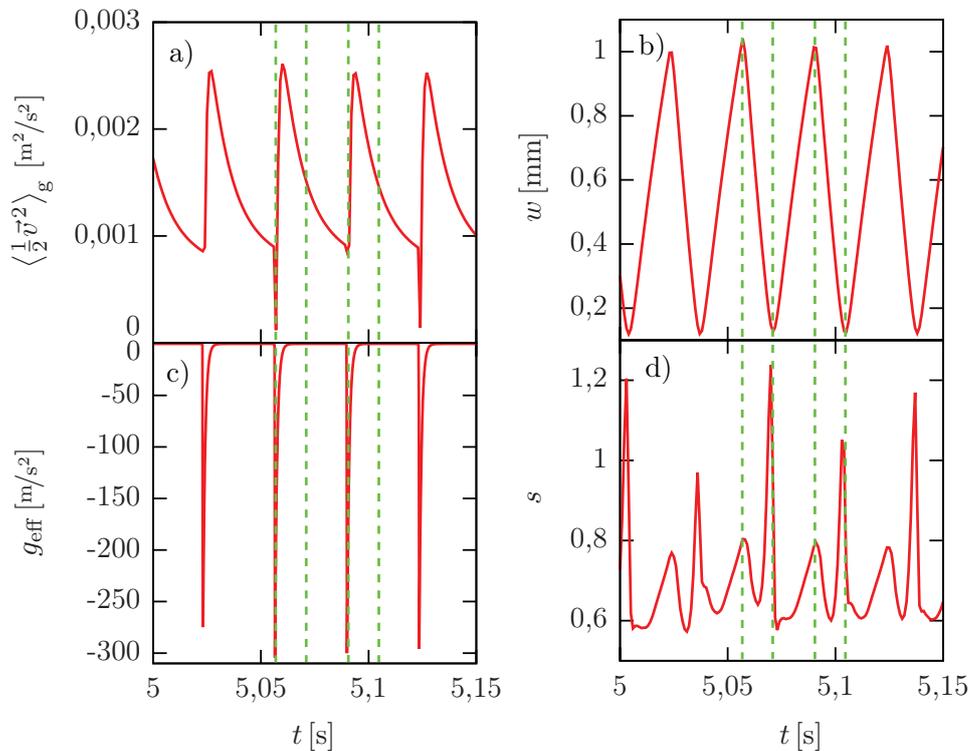


Abbildung A.5.: a) Mittlere granuläre kinetische Energie $\langle \frac{1}{2} \vec{v}^2 \rangle_g$, b) Rauheit w , c) effektive Beschleunigung g_{eff} , d) Schiefe s je in Abhängigkeit der Zeit t . Die grün gestrichelten Linien markieren charakteristische Zeitpunkte während der Dynamik.

B. Literaturverzeichnis

- [1] R. Artoni, A. Santomaso, und P. Canu, *Simulation of dense granular flows: Dynamics of wall stress in silos*, Chem. Eng. Sci. **64**, 4040 (2009).
- [2] J. U. Böhrnsen, H. Antes, M. Ostendorf, und J. Schwedes, *Silo Discharge: Measurement and Simulation of Dynamic Behavior in Bulk Solids*, Chem. Eng. Technol. **27**, 71 (2004).
- [3] M. Grevenstette und S. J. Linz, *Model for pattern formation of granular matter on vibratory conveyors*, Chaos Solitons Fract. **39**, 1896 (2009).
- [4] H. El Hor und S. J. Linz, *Model for transport of granular matter on an annular vibratory conveyor*, J. Stat. Mech. Theor. Exp. **2005**, L02005 (2005).
- [5] H. Jaeger, S. Nagel, und R. Behringer, *Granular solids, liquids, and gases*, Rev. Mod. Phys. **68**, 1259 (1996).
- [6] GDR MiDi, *On dense granular flows*, Euro. Phys. J. E **14**, 341 (2004).
- [7] R. Cabecinhas und A. Cunha, *Düne mit aufgesetzten Rippeln in Marokko*, https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Morocco_Africa_Flickr_Rosino_December_2005_84514010_edited_by_Buchling.jpg.
- [8] C. Pagenkopf, *Geröllablagerungen aus Feuerstein an der Ostseeküste*, https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Feuerstein_Geröll.jpg.
- [9] I. Aranson, D. Blair, V. Kalatsky, G. Crabtree, W.-K. Kwok, V. Vinokur, und U. Welp, *Electrostatically Driven Granular Media: Phase Transitions and Coarsening*, Phys. Rev. Lett. **84**, 3306 (2000).
- [10] J. Li, Y. Cao, C. Xia, B. Kou, X. Xiao, K. Fezzaa, und Y. Wang, *Similarity of wet granular packing to gels*, Nat. Commun. **5** (2014).
- [11] N. Mitarai und F. Nori, *Wet granular materials*, Adv. Phys. **55**, 1 (2006).
- [12] S. Strauch und S. Herminghaus, *Wet Granular Matter: A Truly Complex Fluid*, World Scientific, Series in Soft Condensed Matter: Volume 6, 2012.
- [13] R. M. Iverson, *The physics of debris flows*, Rev. Geophys. **35**, 245 (1997).

- [14] S. Utili, T. Zhao, und G. Houlsby, *3D DEM investigation of granular column collapse: Evaluation of debris motion and its destructive power*, Eng. Geol. **186**, 3 (2015).
- [15] O. Reynolds, *On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, with experimental illustrations*, Phil. Mag. **20**, 469 (1885).
- [16] M. Faraday, *On a Peculiar Class of Acoustical Figures; and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces*, Philos. T. Roy. Soc. Lond. **121**, 299 (1831).
- [17] J. Miles, *On Faraday waves*, J. Fluid Mech. **248**, 671 (1993).
- [18] P. Chen und J. Viñals, *Amplitude equation and pattern selection in Faraday waves*, Phys. Rev. E **60**, 559 (1999).
- [19] A. C. Skeldon und G. Guidoboni, *Pattern Selection for Faraday Waves in an Incompressible Viscous Fluid*, SIAM J. Appl. Math. **67**, 1064 (2007).
- [20] M. G.Kleinhans, H. Markies, S. J. de Vet, A. C. in 't Veld, und F. N. Postema, *Static and dynamic angles of repose in loose granular materials under reduced gravity*, J. Geophys. Res. - Planet. **116** (2011).
- [21] S. Wegner, R. Stannarius, A. Boese, G. Rose, B. Szabo, E. Somfai, und T. Borzsonyi, *Effects of grain shape on packing and dilatancy of sheared granular materials*, Soft Matter **10**, 5157 (2014).
- [22] J. Duran, *Sands, Powders, and Grains - An Introduction to the Physics of Granular Materials*, Springer, 2000.
- [23] R. A. Bagnold, *Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear*, Proc. R. Soc. Lon. Ser.-A **225**, 49 (1954).
- [24] R. A. Bagnold, *The Shearing and Dilatation of Dry Sand and the 'Singing' Mechanism*, Proc. R. Soc. Lon. Ser.-A **295**, 219 (1966).
- [25] D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, D. Levine, und L. E. Silbert, *Gravity-driven dense granular flows*, Europhys. Lett. **56**, 214 (2001).
- [26] P. Jop, Y. Forterre, und O. Pouliquen, *A constitutive law for dense granular flows*, Nature **441**, 727 (2006).
- [27] R. Artoni, A. C. Santomaso, M. Go', und P. Canu, *Scaling Laws for the Slip Velocity in Dense Granular Flows*, Phys. Rev. Lett. **108**, 238002 (2012).
- [28] C. Bizon, M. D. Shattuck, J. B. Swift, W. D. McCormick, und H. L. Swinney, *Patterns in 3D vertically oscillated granular layers: Simulation and experiment*, Phys. Rev. Lett. **80**, 57 (1998).

- [29] F. Melo, P. B. Umbanhowar, und H. L. Swinney, *Hexagons, Kinks, and Disorder in Oscillated Granular Layers*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3838 (1995).
- [30] P. B. Umbanhowar und H. L. Swinney, *Wavelength scaling and square/stripe and grain mobility transitions in vertically oscillated granular layers*, Physica A **288**, 344 (2000).
- [31] P. B. Umbanhowar, F. Melo, und H. L. Swinney, *Localized excitations in a vertically vibrated granular layer*, Nature **382**, 793 (1996).
- [32] V. R. Gopala und B. G. M. van Wachem, *Volume of fluid methods for immiscible-fluid and free-surface flows*, Chem. Eng. J. **141**, 204 (2008).
- [33] C. W. Hirt und B. D. Nichols, *Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries*, J. Comput. Phys. **39**, 201 (1981).
- [34] R. Issa, *Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting*, J. Comput. Phys. **62**, 40 (1986).
- [35] S. M. Damián, *An Extended Mixture Model for the Simultaneous Treatment of Short and Long Scale Interfaces*, Dissertation, Universidad Nacional del Litoral (2013).
- [36] OpenFOAM Foundation, *Free Open Source CFD*, <http://www.openfoam.org/>.
- [37] N. Gravish und D. I. Goldman, *Effect of volume fraction on granular avalanche dynamics*, Phys. Rev. E **90**, 032202 (2014).
- [38] J. J. Brey, M. J. Ruiz-Montero, und F. Moreno, *Instability and spatial correlations in a dilute granular gas*, Phys. Fluids **10**, 2976 (1998).
- [39] J. J. Brey, N. Khalil, und M. J. Ruiz-Montero, *The Fourier state of a dilute granular gas described by the inelastic Boltzmann equation*, J. Stat. Mech. Theor. Exp. **2009**, P08019 (2009).
- [40] H. A. Janssen, *Versuche über Getreidedruck in Silozellen*, Zeitschr. d. Vereines deutscher Ingenieure **39**, 1045 (1895).
- [41] E. Fatemeh, T. Azizpour, und H. Maleki, *Janssen effect and the stability of quasi-two-dimensional sandpiles*, Phys. Rev. E **82**, 031302 (2010).
- [42] N. Mitarai und H. Nakanishi, *Bagnold Scaling, Density Plateau, and Kinetic Theory Analysis of Dense Granular Flow*, Phys. Rev. Lett. **94**, 128001 (2005).
- [43] C. S. Campbell, *Rapid Granular Flows*, Annu. Rev. Fluid Mech. **22**, 57 (1990).

- [44] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.-N. Roux, und F. Chevoir, *Rheophysics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows*, Phys. Rev. E **72**, 021309 (2005).
- [45] O. Pouliquen, C. Cassar, P. Jop, Y. Forterre, und M. Nicolas, *Flow of dense granular material: towards simple constitutive laws*, J. Fluid Mech. **2006**, P07020 (2006).
- [46] S. B. Savage und K. Hutter, *The motion of a finite mass of granular material down a rough incline*, J. Fluid Mech. **199**, 177 (1989).
- [47] C. Ancey, P. Coussot, und P. Evesque, *A theoretical framework for granular suspensions in a steady simple shear flow*, J. Rheol. **43**, 1673 (1999).
- [48] R. Artoni, A. Santomaso, und P. Canu, *Hysteresis in a hydrodynamic model of dense granular flows*, Phys. Rev. E **83**, 051304 (2011).
- [49] K. Hutter und K. Jöhnk, *Continuum Methods of Physical Modeling: Continuum Mechanics, Dimensional Analysis, Turbulence*, Springer, 2004.
- [50] E. C. Bingham, *An investigation of the laws of plastic flow*, Bulletin of the Bureau of Standards **13**, 309 (1916).
- [51] T. C. Papanastasiou und A. G. Boudouvis, *Flows of viscoplastic materials: Models and computations*, Comput. Struct. **64**, 677 (1997).
- [52] A. N. Alexandrou, P. L. Menn, G. Georgiou, und V. Entov, *Flow instabilities of Herschel-Bulkley fluids*, J. Non-Newton. Fluid **116**, 19 (2003).
- [53] V. H. Nguyen, S. Rémond, J. L. Gallias, J. P. Bigas, und P. Muller, *Flow of Herschel-Bulkley fluids through the Marsh cone*, J. Non-Newton. Fluid **139**, 128 (2006).
- [54] P. Jop, Y. Forterre, und O. Pouliquen, *Crucial role of sidewalls in granular surface flows: consequences for the rheology*, J. Fluid Mech. **541**, 167 (2005).
- [55] Y. Forterre und O. Pouliquen, *Long-surface-wave instability in dense granular flows*, J. Fluid Mech. **486**, 21 (2003).
- [56] I. S. Aranson und L. S. Tsimring, *Granular Patterns*, Oxford, 2009.
- [57] G. D. Cody, D. J. Goldfarb, G. V. S. Jr, und A. N. Norris, *Particle granular temperature in gas fluidized beds*, Powder Technol. **87**, 211 (1996).
- [58] C. C. Pain, S. Mansoorzadeh, und C. R. E. de Oliveira, *A study of bubbling and slugging fluidised beds using the two-fluid granular temperature model*, Int. J. Multiphas. Flow **27**, 527 (2001).

- [59] S. Henkes, C. S. O'Hern, und B. Chakraborty, *Entropy and Temperature of a Static Granular Assembly: An Ab Initio Approach*, Phys. Rev. Lett. **99**, 038002 (2007).
- [60] H. Hinrichsen und D. E. W. (Editoren), *The Physics of Granular Media*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
- [61] M. A. Hopkins und M. Y. Louge, *Inelastic microstructure in rapid granular flows of smooth disks*, Phys. Fluids A **3**, 47 (1991).
- [62] I. Goldhirsch und G. Zanetti, *Clustering instability in dissipative gases*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1619 (1993).
- [63] J. Eggers, *Sand as Maxwell's Demon*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5322 (1999).
- [64] C. Mounfield und S. Edwards, *The statistical mechanics of granular systems composed of elongated grains*, Physica A **210**, 279 (1994).
- [65] S. McNamara, P. Richard, S. K. de Richter, G. L. Caër, und R. Delannay, *Measurement of granular entropy*, Phys. Rev. E **80**, 031301 (2009).
- [66] T. Pöschel, *Granular material flowing down an inclined chute: a molecular dynamics simulation*, J. Phys. II France **3**, 27 (1993).
- [67] O. Pouliquen, *Scaling laws in granular flows down rough inclined planes*, Phys. Fluids **11**, 542 (1999).
- [68] J. Rajchenbach, *Dense, Rapid Flows of Inelastic Grains under Gravity*, Phys. Rev. Lett. **90**, 144302 (2003).
- [69] L. E. Silbert, D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, D. Levine, und S. J. Plimpton, *Granular flow down an inclined plane: Bagnold scaling and rheology*, Phys. Rev. E **64**, 051302 (2001).
- [70] B. Domnik, S. P. Pudasaini, R. Katzenbach, und S. A. Miller, *Coupling of full two-dimensional and depth-averaged models for granular flows*, J. Non-Newton. Fluid **201**, 56 (2013).
- [71] D. Ertas und T. C. Halsey, *Granular gravitational collapse and chute flow*, Europhys. Lett. **60**, 931 (2002).
- [72] L. Staron, *Correlated motion in the bulk of dense granular flows*, Phys. Rev. E **77**, 051304 (2008).
- [73] F. Chevoir, J.-N. Roux, F. da Cruz, P. G. Rognon, und G. K. Jr., *Friction law in dense granular flows*, Powder Technol. **190**, 264 (2009).

- [74] O. Baran, D. Ertas, T. C. Halsey, G. S. Grest, und J. B. Lechman, *Velocity correlations in dense gravity-driven granular chute flow*, Phys. Rev. E **74**, 051302 (2006).
- [75] S. J. Linz und P. Hänggi, *Effect of periodic shear on avalanches in granular systems*, Physica D **97**, 577 (1996).
- [76] S. J. Linz und P. Hänggi, *Minimal model for avalanches in granular systems*, Phys. Rev. E **51**, 2538 (1995).
- [77] S. J. Linz und P. Hänggi, *Effect of vertical vibrations on avalanches in granular systems*, Phys. Rev. E **50**, 3464 (1994).
- [78] S. J. Linz, *Macromechanics of granular chute flow*, in: *Friction, Arching and Contact Dynamics*, (Herausgegeben von D. E. Wolf und P. Grassberger), World Scientific, Singapore, 1997.
- [79] S. J. Linz, *Dynamics of Granular Systems: Macromechanical Models*, Habilitation, Augsburg (1997).
- [80] W. Hager, S. J. Linz, und P. Hänggi, *Surface flow in rotated granular systems and the impact of macromechanical stochastics*, in: *Friction, Arching and Contact Dynamics*, (Herausgegeben von D. E. Wolf und P. Grassberger), World Scientific, Singapore, 1997.
- [81] E. F. F. Chladni, *Neue Beytraege zur Akustik*, Philipps-Universiät Marburg, 2010, <http://archiv.ub.uni-marburg.de/eb/2010/0272>.
- [82] J. P. D. Clewett, K. Roeller, R. M. Bowley, S. Herminghaus, und M. R. Swift, *Emergent Surface Tension in Vibrated, Noncohesive Granular Media*, Phys. Rev. Lett. **109**, 228002 (2012).
- [83] J. Rajchenbach, *Dynamics of Grain Avalanches*, Phys. Rev. Lett. **88**, 014301 (2001).
- [84] S. R. Waitukaitis, L. K. Roth, V. Vitelli, und H. M. Jaeger, *Dynamic jamming fronts*, Europhys. Lett. **102**, 44001 (2013).
- [85] L. R. Gómez, A. M. Turner, und V. Vitelli, *Uniform shock waves in disordered granular matter*, Phys. Rev. E **86**, 041302 (2012).
- [86] I. S. Aranson, L. S. Tsimring, und V. M. Vinokur, *Hexagons and interfaces in a vibrated granular layer*, Phys. Rev. E **59**, R1327 (1999).
- [87] I. S. Aranson und L. S. Tsimring, *Formation of periodic and localized patterns in an oscillating granular layer*, Physica A **249**, 103 (1998).

- [88] L. S. Tsimring und I. S. Aranson, *Localized and Cellular Patterns in a Vibrated Granular Layer*, Phys. Rev. Lett. **79**, 213 (1997).
- [89] S. B. Savage und K. Hutter, *The dynamics of avalanches of granular materials from initiation to runout. Part I: Analysis*, Acta Mech. **86**, 201 (1991).
- [90] J. Eggers und H. Riecke, *Continuum description of vibrated sand*, Phys. Rev. E **59**, 4476 (1999).
- [91] A. Hoffmann und S. J. Linz, *Granular surface flow via successive destabilization: A continuum approach*, Physica D **239**, 2025 (2010).
- [92] M. O. C. Malki und O. A. Elkebir, *Green's functions and closing in pressure in partially nonhomogeneous turbulence.*, Electron. J. Differential Equations **2004**, 95 (2004).
- [93] C. Diddens, *Kontinuumsmodellierung der Redeposition bei der selbstorganisierten Nanostrukturierung von Oberflächen durch Ionenstrahlerosion*, Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2014).
- [94] M. Osthues, *Kuramoto-Sivashinsky-Gleichung mit linearer und quadratischer Dämpfung*, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster (2012).
- [95] J. A. Sánchez-García, L. Vázquez, R. Gago, A. Redondo-Cubero, J. M. Albella, und Z. Czigány, *Tuning the surface morphology in self-organized ion beam nanopatterning of Si(001) via metal incorporation: from holes to dots*, Nanotechnology **19**, 355306 (2008).
- [96] F. Durst, *Fluid Mechanics: An Introduction to the Theory of Fluid Flows*, Springer, 2008.
- [97] H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos: An Introduction*, Cambridge Univ. Press, 2007.
- [98] M. Cristina Vargas, D. A. Huerta, und V. Sosa, *Chaos control: The problem of a bouncing ball revisited*, Am. J. Phys. **77**, 857 (2009).
- [99] L.-U. Hansen, W. Christensen, und E. Mosekilde, *Deterministic analysis of the probability machine*, Phys. Scripta **51**, 35 (1995).
- [100] M. Rouijaa, C. Krülle, I. Rehberg, R. Grochowski, und P. Walzel, *Transportverhalten und Strukturbildung granularer Materie auf Schwingförderern*, Chem.-Ing.-Tech- **76**, 62 (2004).
- [101] R. Grochowski, P. Walzel, M. Rouijaa, C. A. Kruelle, und I. Rehberg, *Reversing granular flow on a vibratory conveyor*, Appl. Phys. Lett. **84**, 1019 (2004).

- [102] S. Osher und J. A. Sethian, *Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys. **79**, 12 (1988).
- [103] D. D. Joseph und Y. Renardy, *Fundamentals of Two-Fluid Dynamics - Part I: Mathematical Theory and Applications*, Springer, 1993.
- [104] J. H. Ferziger und M. Perić, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 2001, 3. Auflage.
- [105] N. P. Waterson und H. Deconinck, *Design principles for bounded higher-order convection schemes - a unified approach*, J. Comput. Phys. **224**, 182 (2007).
- [106] B. van Leer, *Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme*, J. Comput. Phys. **14**, 361 (1974).
- [107] S. Muzaferija und D. Gosman, *Finite-Volume CFD Procedure and Adaptive Error Control Strategy for Grids of Arbitrary Topology*, J. Comput. Phys. **138**, 766 (1997).
- [108] R. Courant, K. Friedrichs, und H. Lewy, *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann. **100**, 32 (1928).
- [109] M. R. Hestenes und E. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, J. Research Nat. Bur. Standards **49**, 409 (1952).
- [110] H. G. Weller, *Derivation, modelling and solution of the conditionally averaged two-phase flow equations*, Technischer Bericht, TR/HGW/02, Nabla Ltd. (2002).
- [111] H. Rusche, *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions*, Dissertation, University of London (2002).
- [112] R. Sawko, *Mathematical and Computational Methods of non-Newtonian, Multi-phase Flows*, Dissertation, Cranfield University (2011/2012).
- [113] J. P. Boris und D. L. Book, *Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works*, J. Comput. Phys. **11**, 38 (1973).
- [114] S. T. Zalesak, *Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids*, J. Comput. Phys. **31**, 335 (1979).
- [115] D. Kuzmin und Y. Gorb, *A flux-corrected transport algorithm for handling the close-packing limit in dense suspensions*, J. Comput. Appl. Math. **236**, 4944 (2012).

- [116] P. B. Umbanhowar, *Wave Patterns in Vibrated Granular Layers*, Dissertation, University of Texas at Austin (1996).
- [117] A. J. Kabla und T. J. Senden, *Dilatancy in Slow Granular Flows*, Phys. Rev. Lett. **102**, 228301 (2009).
- [118] H. Jasak, A. Jemcov, und Ž. Tuković, *OpenFOAM: A C++ Library for Complex Physics Simulations*, in: *International Workshop on Coupled Methods in Numerical Dynamics, IUC*, 1–20, 2007.
- [119] Y. Forterre und O. Pouliquen, *Flows of dense granular media*, Annu. Rev. Fluid Mech. **40**, 1 (2008).
- [120] H. Marschall, *Towards the Numerical Simulation of Multi-Scale Two-Phase Flows*, Dissertation, Technische Universität München (2011).
- [121] E. Berberović, N. P. van Hinsberg, S. Jakirlić, I. V. Roisman, und C. Tropea, *Drop impact onto a liquid layer of finite thickness: Dynamics of the cavity evolution*, Phys. Rev. E **79**, 036306 (2009).
- [122] A. Breu, H.-M. Ensner, C. Kruelle, und I. Rehberg, *Reversing the Brazil-Nut Effect: Competition between Percolation and Condensation*, Phys. Rev. Lett. **90**, 014302 (2003).
- [123] E. Cerda, F. Melo, und S. Rica, *Model for Subharmonic Waves in Granular Materials*, Phys. Rev. Lett. **79**, 4570 (1997).
- [124] C. A. de Coulomb, *Mémoires de mathématiques et de physique présentés à l'Académie royale des sciences par divers savants, et lus sans ses assemblées*, Impr. Royale, Paris (1773).
- [125] T. G. Drake, *Structural features in granular flows*, J. Geophys. Res. **95**, 8681 (1990).
- [126] C. W. Hirt und B. D. Nichols, *Adding limited compressibility to incompressible hydrocodes*, J. Comput. Phys. **34**, 390 (1980).
- [127] K. Hutter und K. R. Rajagopal, *On flows of granular materials*, Continuum Mech. Therm. **6**, 81 (1994).
- [128] H. M. Jaeger und S. R. Nagel, *Physics of the Granular State*, Science **255**, 1523 (1992).
- [129] T. Pöschel und V. Buchholtz, *Static Friction Phenomena in Granular Materials: Coulomb Law vs. Particle Geometry*, Phys. Rev. Lett. **71**, 3963 (1993).

- [130] H. Pak, E. Van Doorn, und R. Behringer, *Effects of Ambient Gases on Granular Materials under Vertical Vibration*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4643 (1995).
- [131] M. Sapozhnikov, Y. Tolmachev, I. Aranson, und W.-K. Kwok, *Dynamic Self-Assembly and Patterns in Electrostatically Driven Granular Media*, Phys. Rev. Lett. **90**, 114301 (2003).
- [132] S. B. Savage und K. Hutter, *The motion of a finite mass of granular material down a rough incline*, J. Fluid Mech. **199**, 177 (1989).
- [133] P. A. Thompson und G. S. Grest, *Granular flow: Friction and the dilatancy transition*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1751 (1991).
- [134] P. B. Umbanhowar, F. Melo, und H. L. Swinney, *Periodic, aperiodic, and transient patterns in vibrated granular layers*, Physica A **249**, 1 (1998).

Danksagung

Abschließend möchte ich allen danken, die mir direkt oder indirekt geholfen haben, diese Arbeit zu ermöglichen. Als erstes meinem Doktorvater Herrn Prof. Stefan J. Linz für die sehr interessante Themenstellung und der intensiven Betreuung sowie Herrn Prof. Ulrich Hansen für die bereitwillige Übernahme des Zweitgutachtens. Besonderen Dank möchte ich meinem Lektor Dr. Christian Diddens im Form eines Zitates aussprechen: "Lobgepriesen sei der Dr. Christian Diddens, der sich den ganzen Schmarren durchlesen musste, der als Admin-Vorgänger und technischer Verantwortlicher unentbehrliche Frondienste erbrachte, der mich zur OpenGL-Rumnerderei inspirierte, aus dessen Feder das Nerd- und Mensaskript entsprungen ist, ...".

Dann meiner Familie, allen voran, meiner Frau Regina und meiner Tochter Victoria für die tatkräftige Unterstützung. Einen Dank auch an Dr. Svetlana Gurevich für die Beantwortung zahlreicher sinnvoller und wenig sinnvoller numerischer Fragen. Dann möchte ich meinen Bürokollegen Marc Osthues, Christoph Kabelitz und Steffen Finger für die entspannte und illustre Atmosphäre danken. Zuletzt noch ein Danke an meinen Admin-Leidensgenossen Florian König für die zahlreichen Stunden im Serverraum und in Kneipen.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe, und dass ich alle von den anderen Autoren wörtlich übernommenen Stellen wie auch die sich an die Gedankengänge anderer Autoren eng anlegenden Ausführungen meiner Arbeit besonders gekennzeichnet und die Quellen zitiert habe.

Münster, den 29. Februar 2016

(Unterschrift)