**Henning Frommer**

# Die $p$-adischen lokal analytischen Hauptreihen zerfallend reduktiver Gruppen

**2002**

Fach Reine Mathematik

# Die $p$-adischen lokal analytischen Hauptreihen zerfallend reduktiver Gruppen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

Henning Frommer

aus Kiel

2002

| | |
|---|---|
| Dekan: | Prof. Dr. Frank Natterer |
| Erster Gutachter: | Prof. Dr. Peter Schneider |
| Zweite Gutachterin: | PD Dr. Annette Werner |
| Tag der mündlichen Prüfungen: | 25.11.2002 |
| Tag der Promotion: | 4.12.2002 |

## Einleitung

Die Darstellungstheorie $p$-adischer reduktiver Gruppen über einem $p$-adischen Körper $K$ zerfällt in einander sehr unähnliche Bereiche. Es stehen sich dabei in erster Linie die algebraischen (endlich dimensionalen) und die glatten Darstellungen gegenüber. Während bei ersteren alle Orbitabbildungen durch Polynome gegeben sind, sind diese bei letzteren lokal konstant. Diese unterschiedlichen Welten in einer handhabbaren Kategorie zu vereinigen ist das Ziel einer Reihe von Arbeiten – [ST01a] bis [ST02d] –, die P. Schneider und J. Teitelbaum in jüngster Zeit veröffentlicht haben.

Die Kategorie aller, oder auch nur aller topologischen Darstellungen auf lokal konvexen $K$-Vektorräumen ist dafür zu groß und weist zu viele Pathologien auf. Eine besser fassbare Kategorie erhält man, wenn man sich auf solche Darstellungen beschränkt, welche lokal durch konvergente Potenzreihen beschreibbar sind. Solche Darstellungen nennen wir lokal analytisch. Die Vektorräume, die man in diesem Zusammenhang zu Grunde legt, sind aber im allgemeinen keine Banachräume, denn solche habe funktionalanalytisch ungünstige Eigenschaften, in erster Linie sind sie fast nie reflexiv. Für allgemeinere lokal konvexe Vektorräume ist nun aber zunächst nicht klar, was unter einer konvergenten Potenzreihe überhaupt verstanden werden soll, wenn der betrachtete Vektorraum $V$ nicht schon ein Banachraum ist. C. Féaux behandelt in [Féa99] diese Fragen und gibt in diesem Rahmen die genaue Definition einer lokal analytischen Darstellung.

In [ST02c] werden nun Schritte unternommen, eine geeignete Unterkategorie der lokal analytischen Darstellungen zu algebraisieren. Ausgangspunkt hierfür ist die Algebra der Distributionen $\mathrm{D}(G, K)$ auf einer Liegruppe $G$. Diese ist gegeben als der Dualraum der lokal analytischen Funktionen auf $G$ und wird mit der Struktur einer topologischen $K$-Algebra versehen, welche von der Gruppenmultiplikation auf $G$ induziert wird. Durch Übergang zum Dualraum kann man nun jeder lokal analytischen Darstellung einen topologischen $\mathrm{D}(G, K)$-Modul zuordnen. Beschränkt man sich dabei auf eine spezielle Klasse topologischer Vektorräume mit guten Eigenschaften, so ist dies sogar eine Äquivalenz.

Der in [ST02c] entwickelte Rahmen wird an gleicher Stelle zur Untersuchung einer wichtigen Klasse von Darstellungen herangezogen, der lokal analytischen Hauptreihe der Standard-Iwahorigruppe

$$G = \{g \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{Z}_p) \mid g \text{ ist eine untere Dreiecksmatrix mod } p\}$$

von $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Q}_p)$. Seien $T$, $B$, bzw. $U$ die Menge aller $g \in G$, welche Diagonalmatrizen, obere Dreiecksmatrizen bzw. streng untere Dreiecksmatrizen sind. Sei $\rho$ ein lokal analytischer Charakter von $T$. Dieser kann über die Projektion $B \to T$ zu einem solchen von $B$ ausgedehnt werden. Die zu $\rho$ gehörende Hauptreihendarstellung ist nun der entsprechende von $B$ nach $G$ lokal analytisch induzierte Modul $\mathrm{Ind}_B^G(\rho)$. In [ST02c] wird gezeigt, dass die Hauptreihe generisch aus topologisch irreduziblen Moduln besteht. Tatsächlich lässt sich Genaueres sagen. Es enthält nämlich der zu $\mathrm{Ind}_B^G(\rho)$ duale $\mathrm{D}(G,K)$-Modul $\mathrm{M}(\rho)$ eine Darstellung $\mathfrak{m}(\rho)$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von $G$. Diese entsteht als $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}(\rho')$, indem man also die duale Darstellung $\rho'$ von $\rho$ als Liealgebrendarstellung induziert. Solche Darstellungen heißen Vermamoduln und sind gut untersucht. Der Satz von Bernstein-Gelfand-Gelfand gibt hier explizit Auskunft über Irreduzibilität. Es zeigt sich, dass $\mathrm{M}(\rho)$ als $\mathrm{D}(G,K)$-Modul irreduzibel ist, wenn für $\mathfrak{m}(\rho)$ selbiges als $U(\mathfrak{g})$-Modul der Fall ist. Diese Tatsache ist bemerkenswert und ausschließlich der speziellen Situation geschuldet, denn die Liealgebra ist im nichtarchimedischen im Gegensatz zum reellen oder komplexen Fall weit davon entfernt, die lokal analytische Darstellungstheorie einer Liegruppe zu bestimmen.

In der vorliegenden Arbeit soll eine analoge Aussage in einer allgemeineren Situation gezeigt werden. Wir betrachten eine zerfallende reduktive Gruppe $\mathfrak{G}$ und eine parabolische Untergruppe $\mathfrak{P}$, die wir festhalten. Mit Hilfe des Bruhat-Tits-Gebäudes kann dann eine kompakte Untergruppe $G$ konstruiert werden, welche in dem Fall, dass $\mathfrak{P}$ eine Borelgruppe ist, mit der entsprechenden Iwahoriuntergruppe übereinstimmt. Wir ersetzen ferner den Charakter $\rho$ durch eine endlich dimensionale Darstellung von $P = \mathfrak{P} \cap G$. Erneut ergibt sich, dass der entsprechende Modul $\mathrm{M}(\rho) = \left(\mathrm{Ind}_P^G(\rho)\right)'$ als $\mathrm{D}(G,K)$-Modul irreduzibel ist, wenn der entsprechende verallgemeinerte Vermamodul $\mathfrak{m}(\rho)$ als $U(\mathfrak{g})$-Modul irreduzibel ist.

Wir benutzen für den Beweis indes Methoden, die sich von den in [ST02c] angewandten stark unterscheiden. Die Argumentation in *loc. cit.* basiert wesentlich darauf, dass $G/P = G/B$ in der dort betrachteten Situation isomorph zu $\mathbb{Z}_p$ ist. Daher ist $\mathrm{D}(G/B,K) \cong \mathrm{M}(\rho)$ vermöge der sog. Fouriertransformation isomorph zu $\mathrm{D}(\mathbb{Z}_p,K)$, ein Ring, welcher kommutativ ist und einen Divisorenkalkül zulässt. Beides ist in der allgemeinen Situation nicht mehr der Fall.

Der hier eingeschlagene Weg ist der folgende. Sei $U = G/P$. Es lässt sich $\mathrm{D}(U,K)$ als ein projektiver Limes von Banachalgebren $\mathrm{D}_r(U,K)$ schreiben, auf welchen $\mathfrak{g}$ stetig operiert. Wenn nun die in diesem Zusammenhang auftretenden projektiven Systeme die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllen, kann man sich auf die Betrachtung dieser Banachalgebren zurückziehen. Diese haben die hilfreiche Eigenschaft, dass der Abschluss der universell Einhüllenden $U(\mathfrak{u})$ der Liealgebra $\mathfrak{u}$ von $U$ endlichen Index in jedem der $\mathrm{D}_r(U,K)$ hat. Diese Tatsache ermöglicht es, Fragen über die Irreduzibilität von $\mathrm{M}(\rho)$ als $\mathrm{D}(G,K)$-Modul auf die topologische Irreduzibilität von $\overline{\mathfrak{m}(\rho)}$ als $U(\mathfrak{g})$-Modul zurückzuführen. Da $\overline{\mathfrak{m}(\rho)}$ ein diagonalisierbarer Modul im Sinne von [Féa99] ist, gelingt weiter die Reduktion der Frage auf die nach der abstrakten Irreduzibilität von $\mathfrak{m}(\rho)$ als $U(\mathfrak{g})$-Modul.

Technisch ergibt sich dabei eine Schwierigkeit. In der Form, in welcher wir die $\mathrm{D}_r(U,K)$ einführen, haben diese kein Pendant „$\mathrm{D}_r(G,K)$“. Ein solches ist aber für die Arbeit mit der Mittag-Leffler-Bedingung in den projektiven Systemen erforderlich. Wir behelfen uns damit, eine weitere Klasse von Ringen $\mathrm{D}_H(G,K)$ bzw. $\mathrm{D}_N(U,K)$ einzuführen, wobei $H$ bzw. $N$ geeignet angepasste offene Normalteiler von $G$ bzw. $U$ sind. Es schreibt sich $\mathrm{D}(G,K)$ auch als projektiver Limes über die $\mathrm{D}_H(G,K)$ sowie $\mathrm{D}(U,K)$ als projektiver Limes über die $\mathrm{D}_N(U,K)$ . Es liegen daher die $\mathrm{D}_r(U,K)$ und die $\mathrm{D}_N(U,K)$ kofinal. Die $\mathrm{D}_N(U,K)$ sind zwar als Algebren schwer zu handhaben, ihre natürliche Norm z. B. ist nicht multiplikativ, und $\overline{U(\mathfrak{u})}$ hat unendlichen Index darin, sie ermöglichen aber die bequeme Handhabung der auftretenden projektiven Limiten. Im Zusammenspiel der $\mathrm{D}_r(U,K)$ und der $\mathrm{D}_N(U,K)$ gelingt schließlich die oben angedeutete Reduktion.

Die genannte Schwierigkeit lässt sich vermeiden, wenn man Schneider und Teitelbaum in [ST02a] folgt. In *loc. cit.* werden die Ringe $\mathrm{D}_r(U,K)$ in abgewandelter Form aufgegriffen und verallgemeinert. Mit ihrer Hilfe kann auf die Ringe $\mathrm{D}_H(G,K)$ und $\mathrm{D}_N(U,K)$ weitgehend, wenn auch nicht vollständig, verzichtet werden. Wir benutzen in dieser Arbeit die entsprechende Theorie, skizzieren aber in einem abschließenden Abschnitt, wie sich der Beweis ohne erhebliche Änderungen auch nur unter Verwendung der in dieser Arbeit entwickelten Objekte führen lässt.

Einige Worte des Dankes an diejenigen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Hier ist mein Betreuer Herr Prof. Dr. P. Schneider an erster Stelle zu nennen. Er hat mein Interesse auf das hier behandelte Problem gelenkt, schon das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit war zunächst eine von ihm geäußerte Vermutung. Für seine Unterstützung und den fruchtbaren Gedankenaustausch bin ich ihm zu besonderem Dank verpflichtet.

Ich danke auch meinen Kollegen Dr. E. Große Klönne, Dr. M. Strauch und Dr. M. Kisin für hilfreichen mathematischen Austausch sowie N. Naumann, Dr. S. Gille und Dr. C. Serpé für ihre Hilfe bei der Abfertigung des Manuskripts.

# Inhaltsverzeichnis

**1 Die Moduln $\mathrm{M}(\rho)$ und verschiedene Ringe** **7**
1.1 Lokal analytische Darstellungen . . . 7
1.2 Fouriertransformation . . . 9
1.3 Die Ringe $\mathrm{D}_H(G,K)$ . . . 11
1.4 Projektive Limiten über $\mathrm{D}_H(G,K)$ . . . 17
1.5 Reduktive Gruppen und einige Notationen . . . 19
1.6 Reduktive Gruppen über lokalen Körpern . . . 21
1.7 Verallgemeinerte Verma-Moduln . . . 24
1.8 Die Ringe $\mathrm{D}_r(U,K)$ . . . 27
1.9 Noethersche Eigenschaft . . . 33

**2 Die Irreduzibilität von $\mathrm{M}(\rho)$** **34**
2.1 Die Ringe $\mathrm{D}_r(G,K)$ . . . 34
2.2 Orthogonalbasen . . . 38
2.3 Diagonalisierbarkeit . . . 43
2.4 Gewichtsvektoren in $\mathrm{D}_r(U,K)$ . . . 45
2.5 Hauptsatz . . . 48
2.6 Ein alternativer Beweis . . . 49

Wir stellen an dieser Stelle die in dieser Arbeit geltenden Bezeichnungen und Konventionen zusammen. Es sind

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ | die natürlichen Zahlen (bzw. ohne 0), |
| $\mathbb{Z}$, | die ganzen Zahlen, |
| $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ | die rationalen und die $p$-adischen Zahlen, |
| $\mathbb{C}_p$ | die Vervollständigung des algebraischen Abschlusses von $\mathbb{Q}_p$, |
| $\mathbb{R}$ | die reellen Zahlen, |
| $L$ | eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, |
| $\omega_L$ | die diskrete Bewertung auf $L$, normiert auf $\omega_L(L-\{0\})=\mathbb{Z}$, |
| $\omega_p$ | $\omega_p=\omega_{\mathbb{Q}_p}$, |
| $K$ | eine sphärisch vollständige Erweiterung von $L$, |
| $V$ | ein $K$-Vektorraum, |
| $V^*$ | der abstrakte Dualraum von $V$, |
| $V'$ | der stetige Dualraum von $V$, falls $V$ eine Topologie trägt, |
| $G$ | eine kompakte $L$-analytische Gruppe der Dimension $d$, |
| $U$, $P$ | $L$-analytische Untergruppen von $G$, |
| $\rho$ | eine lokal analytische Darstellung von $P$ auf $V$, |
| $U(\mathfrak{g})$ | die universell Einhüllende einer Liealgebra $\mathfrak{g}$, |
| $r$ | $r>0$ eine positive reelle Zahl, |
| $\mathrm{T}_xF$ | Die Tangentialabbildung einer differenzierbaren Abbildung $f$ an der Stelle $x$, |
| $(g,h)$ | der Kommutator $ghg^{-1}h^{-1}$ zweier Gruppenelemente $g$ und $h$. |

# 1 Die Moduln $\mathrm{M}(\rho)$ und verschiedene Ringe

## 1.1 Lokal analytische Darstellungen

Seien $\mathbb{Q}_p \subseteq L \subseteq K$ Körpererweiterungen, wobei $L/\mathbb{Q}_p$ endlich und $K$ als sphärisch vollständig vorausgesetzt sei. Es seien $\mathfrak{o}_K$ und $\mathfrak{o}_L$ die entsprechenden Ganzheitsringe sowie $p$ die gemeinsame Restklassencharakteristik. Mit $\omega_L : L \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ bezeichnen wir die diskrete Bewertung von $L$, normiert auf $\omega_L(L - \{0\}) = \mathbb{Z}$. Sei $V$ ein lokal konvexer separierter $K$-Vektorraum (zur Theorie der nichtarchimedischen lokal konvexen Vektorräume verweisen wir auf [Sch01]). Desweiteren sei $M$ eine $L$-analytische Mannigfaltigkeit. Als eine solche verstehen wir eine lokal endlich dimensionale $L$-analytische Mannigfaltigkeit im Sinne von [Bou71, *5.1.5*], welche zusätzlich separiert und streng parakompakt ist. Letzteres bedeutet, dass jede offene Überdeckung der Mannigfaltigkeit eine disjunkte Verfeinerung besitzt, wie dies etwa für $L$-analytische Gruppen der Fall ist [Féa99].

Für jede Karte $\mathfrak{o}_L^d \cong U \subseteq M$ bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(U,K)$ die Tatealgebra der auf $U \cong \mathfrak{o}_L^d$ definierten rigiden Funktionen

$$\mathcal{O}(U,K) = \left\{ \sum_{S \in \mathbb{N}^d} a_S X^S \mid a_S \in K \, , \ \left|a_S\right| \to 0 \right\} .$$

Diese nennen wir auch vereinfacht die *auf $U$ definierten analytischen $K$-wertigen Funktionen*, falls keine Missverständnisse über die betrachtete Karte zu befürchten sind.

Eine *lokal analytische $K$-wertige Funktion auf $M$* ist nun eine Funktion auf $M$, für welche eine Überdeckung von $M$ mit Karten $(U_i)_{i \in I}$ existiert, so dass $f_{|U_i} \in \mathcal{O}(U_i,K)$ für alle $i \in I$ gilt. In [Féa99, *2.1.7*] werden in ähnlicher Manier allgemeiner für jeden separierten lokal konvexen $K$-Vektorraum $V$ die Räume $\mathcal{O}(U,V)$ der auf $U$ analytischen $V$-wertigen Funktionen und $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}(M,V)$ der lokal analytischen $V$-wertigen Funktionen definiert sowie letzterer mit einer lokal konvexen Topologie versehen [Féa99, *2.1.10*]. Sei $\mathrm{D}(M,V)$ der Dualraum von $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}(M,V)$, versehen mit der starken Topologie. Falls $V$ endlich dimensional ist, so ist die natürliche Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}(M,K) \otimes V' & \longrightarrow & \mathrm{D}(M,V) \\ \lambda \otimes \mu & \longmapsto & \left( \sum_{i=1}^{k} f_i \otimes v_i \mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda(f_i) \cdot \mu(v_i) \right) \end{array}$$

ein Isomorphismus.

Sei $G$ eine kompakte $L$-analytische Gruppe. Dann trägt $\mathrm{D}(G,K)$ das durch die Gruppenmultiplikation induzierte stetige Faltungsprodukt $*$ gemäß [ST02c, *Abschnitt 2*]. Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ von $G$ operiert auf $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}(G,K)$ vermöge

$$\mathfrak{x} f = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(t\mathfrak{x}) f - f}{t}$$

für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{g}$. Dies definiert eine Einbettung der universell Einhüllenden $U(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$ in $\mathrm{D}(G, K)$ durch

$$\mathfrak{z}(f) = (\dot{\mathfrak{z}}(f))(1)$$

für jedes $\mathfrak{z} \in U(\mathfrak{g})$ und jedes $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}(G, K)$. Hier bezeichnet $\mathfrak{z} \mapsto \dot{\mathfrak{z}}$ den eindeutig bestimmten Antiautomorphismus von $U(\mathfrak{g})$, welcher die Abbildung $\mathfrak{x} \mapsto -\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{g}$ fortsetzt.

Eine *lokal analytische Darstellung von $G$* ist eine Darstellung $\rho$ von $G$, welche auf einem separierten und tonnelierten lokal konvexen $K$-Vektorraum $V$ durch stetige Endomorphismen wirkt, und welche die Eigenschaft hat, dass alle Orbitabbildungen $\rho_v$ für $v \in V$ lokal analytisch sind. Dies entspricht bis auf die Forderung der Tonneliertheit dem Begriff der *schwach analytischen Darstellung* in [Féa99, *3.1.5*] und ist die in [ST02c, *Abschnitt 3*] verwendete Bezeichnungsweise. In dieser Situation ist die Abbildung $(g, v) \mapsto gv$ stetig, ebenso wie die Operation der Liealgebra durch

$$\mathfrak{x}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(t\mathfrak{x}) v_{|t=0} .$$

Es besteht die Antiäquivalenz von Kategorien [ST02c, *3.4*]

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{lokal analytische } G\text{-Darstel-} \\ \text{lungen auf Vektorräumen} \\ \text{vom kompakten Typ mit} \\ \text{stetigen } G\text{-linearen Abbil-} \\ \text{dungen} \end{array} \right\} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{topologische } \mathrm{D}(G,K)\text{-Mo-} \\ \text{duln auf nuklearen Fré-} \\ \text{cheträumen mit stetigen} \\ \mathrm{D}(G,K)\text{-Homomorphismen} \end{array} \right\} \\ V & \longmapsto & V'_b . \end{array}$$

Hier bezeichnet $V'_b$ den Dualraum von $V$, versehen mit der starken Topologie. Insbesondere ist jede lokal analytische Darstellung auf einem Vektorraum vom kompakten Typ vermöge der Einbettung $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{D}(G, K)$ auch eine $\mathfrak{g}$-Darstellung.

Sei nun $P$ eine abgeschlossene $L$-analytische Untergruppe von $G$. Desweiteren sei $\rho : P \to \mathrm{Gl}(V)$ eine lokal analytische Darstellung von $P$ auf $V$. Dann ist

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho) = \left\{ f \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}(G, V) \mid f(gp) = \rho(p^{-1}) f(g) \text{ für alle } g \in G, p \in P \right\}$$

eine $G$-Darstellung vermöge Linkstranslation. Diese ist nach [Féa99, *4.1.5*] schwach analytisch.

**1.1.1 Definition:** *Eine $L$-analytische Untergruppe $U$ von $G$ heißt* komplementär zu $P$, *falls zwei lokal analytische Projektoren $\pi_U$ und $\pi_P$ von $G$ nach $U$ bzw. $P$ mit der Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ gilt*

$$g = \pi_U(g) \cdot \pi_P(g) ,$$

*existieren.*

Sei $U$ komplementär zu $P$. Es gilt $U \cap P = \{1\}$, denn aus $g \in U \cap P$ folgt $g = \pi_U(g) \cdot \pi_P(g) = g^2$ und damit $g = 1$. Es folgt ferner

$$f(g) = \rho(\pi_P(g)^{-1}) f(\pi_U(g))$$

für alle $f \in \mathrm{Ind}_P^G(\rho)$. Außerdem ist auch $U$ abgeschlossen. Falls $V$ ein Banachraum ist, so ist vermöge dieser Formel $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ nach [Féa99, 4.3.1] als topologischer Vektorraum isomorph zu $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}(U, V)$. Dies zeigt auch, dass $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ tonneliert und damit eine lokal analytische Darstellung ist.

Sei $V$ weiterhin ein Banachraum. Wir setzen $\mathrm{M}(\rho) = \mathrm{Ind}_P^G(\rho)'_b$. Es sind sowohl $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ wie auch $\mathrm{M}(\rho)$ topologische $\mathrm{D}(G, K)$-Moduln [ST02c, *Abschnitt 3*]. Die unter der Identifikation $\mathrm{M}(\rho) \cong \mathrm{D}(U, V)$ vermöge obiger Formel gewonnene Operation von $\mathrm{D}(G, K)$ auf $\mathrm{D}(U, V)$ bezeichnen wir mit $*_\rho$. Es ist dabei $\mathrm{M}(\rho)$ als $\mathrm{D}(U, K)$-Modul isomorph zu $\mathrm{D}(U, V)$ mit der gewöhnlichen Linksmultiplikation als Operation.

## 1.2 Fouriertransformation

Die eingeführten Algebren $\mathrm{D}(G, K)$ lassen sich im Fall $G = \mathbb{Z}_p^d$ und $K \subseteq \mathbb{C}_p$ explizit angeben. Das hier zur Anwendung kommende Mittel ist die *Fouriertransformation*, wie sie in [Ami64] entwickelt ist. Eine detaillierte Darstellung findet sich in [Sch], eine Verallgemeinerung für den Fall $G = \mathfrak{o}_L^d$ in [ST01a].

Wir betrachten die Menge $\hat{\mathbb{Z}}_p^d$ der lokal analytischen $K$-wertigen Charaktere von $\mathbb{Z}_p^d$. Ein jeder solcher hat die Form

$$\xi_z(x) = \prod_{i=1}^{d} (1 + z_i)^{x_i}$$

mit $z \in K^d$ und $|z_i| < 1$. Der Exponent ist hier durch die Mahlerentwicklung

$$(1 + z_i)^{x_i} = \sum_{n \geq 0} \binom{x_i}{n} z_i^n$$

definiert. Diese Reihe konvergiert für alle $x_i \in \mathbb{Z}_p$. Seien nun $\mathcal{X}$ der $K$-rigid analytische offene Einheitsball der Dimension $d$ und $\mathcal{X}_r$ der entsprechende abgeschlossene Ball von Radius $r$. Ihre rationalen Punkte sind

$$\mathcal{X}(K) = \left\{ z \in K^d \mid |z| < 1 \right\}$$

bzw.

$$\mathcal{X}_r(K) = \left\{ z \in K^d \mid |z| \leq r \right\}.$$

Die Charaktere von $\mathbb{Z}_p^d$ werden also durch die $K$-wertigen Punkte auf $\mathcal{X}$ parametrisiert. Es sei

$$\mathcal{O}(\mathcal{X}, K) = \bigcap_{r<1} \mathcal{O}(\mathcal{X}_r, K).$$

Zu jedem $\lambda \in \mathrm{D}(G,K)$ definiere man

$$\begin{array}{rcl} F_\lambda : \hat{\mathbb{Z}}_p^d = \mathcal{X}(K) & \longrightarrow & K \\ z & \longmapsto & \lambda(\xi_z)\,. \end{array}$$

Die *Fouriertransformation* ist nun die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}(G,K) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\mathcal{X},K) \\ \lambda & \longmapsto & F_\lambda\,. \end{array}$$

**1.2.1 Proposition:** *Sei $K \subseteq \mathbb{C}_p$. Die Fouriertransformation ist dann wohldefiniert und ein topologischer Isomorphismus von Ringen.*

Wir wollen diese Aussage hier nicht beweisen, aber für später einige Fakten festhalten, welche im Beweis eine Rolle spielen. Wir tun dies der Einfachheit halber nur im Fall $d = 1$ und halten uns notationell an [Sch]. Es sei $\mathcal{O}_{b,p^{-j}}$ für $j \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}_p/p^j\mathbb{Z}_p$ der Raum der auf der Kreisscheibe vom Radius $p^{-j}$ um $b$ analytischen $K$-wertigen Funktionen. Dann gilt

$$\mathrm{C}^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p,K) = \varinjlim_{j\to\infty} \prod_{b\in\mathbb{Z}_p/p^j\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{b,p^{-j}}\,.$$

Es bezeichne $[r]$ den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl $r$. Es kann nun Der Raum $D_j = \prod_{b\in\mathbb{Z}_p/p^j\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}'_{b,p^{-j}}$ mit dem Banachraum der $K$-wertigen Folgen

$$\left\{ (a_0,a_1,a_2,\dots) \mid \sup_{n\geq 0} \left| a_n \left[\tfrac{n}{p^j}\right]! \right| < \infty \right\}$$

identifiziert werden. Die Abbildung $(a_i) \mapsto \sum a_i Z^i$ identifiziert diese desweiteren mit einer Algebra von Potenzreihen. Für $r < 1$ hinreichend nahe bei 1 gilt unter dieser Identifikation

$$D_j \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{X}_r,K)\,.$$

Dabei liegen die $D_j$ und die $\mathcal{O}(\mathcal{X}_r,K)$ kofinal. Der höher dimensionale Fall ergibt sich aus dem eindimensionalen durch $d$-faches Tensorieren, denn es gilt $\mathrm{D}(\mathbb{Z}_p^d,K) = \hat{\otimes}_{i=1}^d \mathrm{D}(\mathbb{Z}_p,K)$ auf Grund der universellen Eigenschaft des vollständigen Tensorprodukts.

**1.2.2 Bemerkung:** *Es folgt aus dem Vorstehenden, dass für $j \ll j'$ die Abbildung $D_{j'}^{\otimes d} \to D_j^{\otimes d}$ über einen Raum, in welchem $\mathrm{D}(\mathbb{Z}_p^d,K) \cong \mathcal{O}(\mathcal{X},K)$ dicht liegt, faktorisiert. Die Aussage ist zunächst für $K \subseteq \mathbb{C}_p$ richtig. Da aber die auftretenden Räume schon über $\mathbb{Q}_p$ definiert sind, folgt die Behauptung durch Basiswechsel.*

## 1.3 Die Ringe $\mathrm{D}_H(G,K)$

**1.3.1 Definition:** *Sei $H$ eine offene $L$-analytische Untergruppe von $G$ zusammen mit einer Karte $H \cong \mathfrak{o}_L^d$. Wir nennen $H$ zusammen mit dieser Karte* analytisch angepasst*, falls $H$ ein Normalteiler in $G$ ist und die folgende Bedingung erfüllt ist.*

*Für jeden separierten lokal konvexen $K$-Vektorraum $V$ sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(H,V) &\longrightarrow \mathcal{O}(H\times H,V) \\ f &\longmapsto f\circ\mu \end{aligned}$$

*sowie*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(H,V) &\longrightarrow \mathcal{O}(H,V) \\ f &\longmapsto f\circ\iota\,, \\ f &\longmapsto f\circ \mathrm{Ad}_g \end{aligned}$$

*für alle $g\in G$ wohldefiniert und stetig, wobei $\mu : H\times H \to H$ die Multiplikation, $\iota : H\to H$ die Inversion und $\mathrm{Ad}_g : H \to H$ die Konjugation $h\mapsto ghg^{-1}$ bezeichnen.*

In Situationen, in denen für eine Abbildung $f : U \to U'$ die von $f$ induzierte Abbildung $\mathcal{O}(U',V)\to\mathcal{O}(U,V)$ wohldefiniert und stetig ist, sagen wir im Folgenden auch, dass $f$ *konvergente Potenzreihen auf $U'$ respektiert.*

Sei $H$ eine analytisch angepasste Untergruppe von $G$. Wir denken uns also eine entsprechende Karte auf $H$ fixiert. Jede Nebenklasse $gH$ von $H$ ist nun vermittels Linksverschiebung $H\to gH$ mit einer Karte $\varphi_g$ versehen. Der Kartenwechsel zwischen $\varphi_g$ und $\varphi_{g'}$ ist durch Linksmultiplikation mit $g^{-1}g'\in H$ gegeben. Daher stimmt $\mathcal{O}(gH,V)$ mit $\mathcal{O}(g'H,V)$ überein. Dies rechtfertigt die folgende Definition. Sei

$$\mathrm{C}_H^{\mathrm{an}}(G,V) = \left\{ f\in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}(G,V) \mid \begin{array}{l}\text{Die Einschränkung von } f \text{ auf jede der}\\ \text{Mengen } gH \text{ liegt in } \mathcal{O}(gH,V)\,.\end{array}\right\}.$$

Diesen Raum versehen wir mit der Produkttopologie der (endlich vielen) $\mathcal{O}(gH,V)$.

**1.3.2 Lemma:** *Sei $H$ eine $L$-analytisch angepasste Untergruppe von $G$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_H^{\mathrm{an}}(G,V) &\longrightarrow \mathrm{C}_{H\times H}^{\mathrm{an}}(G\times G,V) \\ f &\longmapsto f\circ\mu \end{aligned}$$

*wohldefiniert und stetig.*

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass die endlich vielen Abbildungen auf den Nebenklassen $\mu : g_1H \times g_2H \to g_1g_2H$ konvergente Potenzreihen respektieren. Es gilt $\mu(g_1H \times g_2H) = g_1Hg_2H = g_1g_2H$ . Die Abbildung $\mu$ ist daher bezüglich der Karten $\varphi_{(g_1,g_2)}$ und $\varphi_{g_1g_2}$ gegeben durch

$$(h_1, h_2) \longmapsto \mu(\mathrm{Ad}_{g_2^{-1}} h_1, h_2) .$$

Die Aussage folgt damit direkt aus der analytischen Angepasstheit von $H$ .
□

Sei $H$ weiterhin analytisch angepasst. Man definiere $\mathrm{D}_H(G, K)$ als den Dualraum des Banachraums $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, K)$ , versehen mit der entsprechenden Norm. Es seien $X = (x_1, \ldots, x_d)$ und $x_i$ die Koordinatenfunktionen auf $\mathfrak{o}_L^d$ . Für jedes $I \in \mathbb{N}^d$ liefert dies die Funktion $X^I = x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d} : \mathfrak{o}_L^d \to L$ . Vermittels der fixierten Karte auf $H$ können die $X^I$ auch als Funktionen auf den $gH$ aufgefasst werden. Ebenso definiert man für $I, J \in \mathbb{N}^d$ die $L$-wertige Funktion $X^I Y^J$ auf $(g_1, g_2)H \times H$ . Seien nun $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{D}_H(G, K)$ und $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H\times H}(G \times G, K)$ . Auf $(g_1, g_2)H \times H$ ist $f$ gegeben durch

$$\sum_{I,J\in\mathbb{N}^d} a^{(g_1,g_2)}_{I,J} X^I Y^J$$

mit $\left|a^{(g_1,g_2)}_{I,J}\right| \to 0$ koendlich. Wir schreiben im Folgenden Funktionen $\tilde{f} \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, K)$ in der Form $(\tilde{f}_{|gH})_{g\in G/H}$ , d. h. hier

$$f = \left(\sum_{I,J} a^{(g_1,g_2)}_{I,J} X^I Y^J\right)_{\substack{(g_1,g_2)\in\\ G\times G/H\times H}} .$$

Sei nun also

$$\lambda_1 \times \lambda_2(f) = \sum_{\substack{(g_1,g_2)\in\\ G\times G/H\times H}} \sum_{I,J} a^{(g_1,g_2)}_{I,J} \lambda_1(X^I)\lambda_2(Y^J) .$$

Dann gilt $\lambda_1\times\lambda_2 \in \mathrm{D}_{H\times H}(G\times G, K)$ . Durch $\lambda_1\times\lambda_2(f_1\times f_2) = \lambda_1(f_1)\cdot\lambda_2(f_2)$ ist $\lambda_1 \times \lambda_2$ eindeutig festgelegt, hängt daher nicht von der Wahl der Karte ab. Es sei für $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, K)$

$$\lambda_1 * \lambda_2(f) = \lambda_1 \times \lambda_2(f \circ \mu) .$$

Es definiert $*$ auf $\mathrm{D}_H(G, K)$ die Struktur einer topologischen $K$-Algebra. Für $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, K)$ gilt nun auf Grund der Assoziativität von $G$

$$\begin{aligned} \lambda_1 * (\lambda_2 * \lambda_3)(f) &= \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3(f \circ \mu \circ (\mathrm{id} \times \mu)) \\ &= \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3(f \circ \mu \circ (\mu \times \mathrm{id})) \\ &= (\lambda_1 * \lambda_2) * \lambda_3(f) , \end{aligned}$$

es ist also $\mathrm{D}_H(G, K)$ mit der so definierten Multiplikation $*$ assoziativ.

**1.3.3 Definition:** *Wir sagen, es habe $G$* genügend analytisch angepasste Untergruppen, *falls eine Umgebungsbasis der* 1 *von analytisch angepassten Untergruppen existiert, so dass für alle $H' \subseteq H$ aus dieser Umgebungsbasis die Restriktionsabbildung*

$$\mathcal{O}(H, K) \longrightarrow \mathcal{O}(H', K)$$

*wohldefiniert und stetig ist.*

**1.3.4 Bemerkung:** *Man beachte, dass dies eine echte Bedingung ist, da $H$ und $H'$ mit voneinander unabhängig gewählten Karten versehen sind. Falls $G$ genügend analytisch angepasste Untergruppen hat, so gilt nach* [ST02c, *2.1*]

$$\mathrm{D}(G, K) = \varprojlim_{H} \mathrm{D}_H(G, K)\,.$$

Sei $P$ eine abgeschlossene lokal analytische Untergruppe von $G$ und $U$ eine zu $P$ komplementäre Untergruppe. Es gelte

$$H = (H \cap U) \cdot (H \cap P)\,.$$

Dann gilt für alle $g \in G$ und $u = \pi_U(g)$ sowie $p = \pi_P(g)$

$$gH = upH = uHp = u(H \cap U)p(H \cap P)\,.$$

Die dadurch definierte Abbildung $gH \to u(H \cap U) \times p(H \cap P)$ ist

$$\begin{array}{rcl} \alpha_g : gH & \longrightarrow & u(H \cap U) \times p(H \cap P) \\ uph & \longmapsto & (u \cdot \pi_U(\mathrm{Ad}_p h), p \cdot \mathrm{Ad}_{p^{-1}}(\pi_P(\mathrm{Ad}_p h))\,. \end{array}$$

**1.3.5 Definition:** *Das Paar $(P, U)$ heißt $H$*-angepasst, *falls*

(i)
$$H = (H \cap U) \cdot (H \cap P)$$

*gilt, und*

(ii) *$H \cap U$ und $H \cap P$ unter $H \cong \mathfrak{o}_L^d$ den Teilräumen*

$$\underbrace{\mathfrak{o}_L \times \cdots \times \mathfrak{o}_L}_{\dim(U)\ mal} \times 0 \times \cdots \times 0$$

*beziehungsweise*

$$0 \times \cdots \times 0 \times \underbrace{\mathfrak{o}_L \times \cdots \times \mathfrak{o}_L}_{\dim(P)\ mal}$$

*entsprechen, sowie*

(iii) *für jeden separierten lokal konvexen $K$-Vektorraum $V$ und alle $g \in G$ die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}(u(H \cap U) \times p(H \cap P), V) & \longrightarrow & \mathcal{O}(gH, V) \\ f & \longmapsto & f \circ \alpha_g \end{array}$$

*wohldefiniert und ein topologischer Isomorphismus ist.*

*Falls $(P, U)$ nur die ersten beiden Bedingungen erfüllt, so sprechen wir von einem* fast $H$-angepassten Paar.

**1.3.6 Bemerkung:** *In einem $H$-angepassten Paar sind $H \cap U$ und $H \cap P$ vermöge Teils (ii) der Definition mit globalen Karten versehen. Teil (iii) der Definition ist mit diesen Karten zu verstehen. Zusammen mit diesen sind $H \cap U$ und $H \cap P$ in $U$ bzw. in $P$ analytisch angepasst. Dies folgt aus der Tatsache, dass jedes $f \in \mathcal{O}(H \cap U, V)$ bzw. $\mathcal{O}(H \cap P, V)$ Einschränkung eines $f' \in \mathcal{O}(H, V)$ ist.*

*Sei $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, V)$. Dann gilt $f_{|U} \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H \cap U}(U, V)$ und $f_{|P} \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H \cap P}(P, V)$. Ersteres ist mit Teil (ii) unmittelbar klar, letzteres folgt aus Teil (ii) und (iii), da $f \circ \alpha_p^{-1}{}_{|1 \times p(H \cap P)}$ gerade die Einschränkung von $f$ nach $p(H \cap P)$ in Karten beschreibt.*

*Aus Teil (iii) folgt auch, dass $\pi_U$ und $\pi_P$ konvergente Potenzreihen auf $u(H \cap U)$ bzw. $p(H \cap P)$ respektieren.*

**1.3.7 Definition:** *Sei $(P, U)$ ein $H$-angepasstes Paar. Eine lokal analytische Darstellung $\rho$ von $P$ auf einem endlich dimensionalen $K$-Vektorraum $V$ heißt* $H$-angepasst, *falls für sämtliche $v \in V$ die Orbitabbildungen $\rho_v$ in $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H \cap P}(P, V)$ liegen. Dies ist äquivalent zu $\rho \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H \cap P}(P, \mathrm{End}(V))$.*

Es sei $(P, U)$ ein $H$-angepasstes Paar und $\rho$ eine $H$-angepasste Darstellung von $P$. Es sei

$$ {}^H\mathrm{Ind}_P^G(\rho) = \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, V) \cap \mathrm{Ind}_P^G(\rho)$$

mit der Teilraumtopologie von $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, V)$.

Sei $E : \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, \mathrm{End}(V)) \times \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, V) \to \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, V)$ die durch punktweise vorgenommene Anwendung definierte natürliche Abbildung. Da $V$ endlich dimensional ist, ist $E$ wohldefiniert und stetig. Da $\pi_U$ und $\pi_P$ konvergente Potenzreihen auf den Nebenklassen von $H$ respektieren, ist zudem die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H \cap U}(U, V) & \longrightarrow & \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G, V) \\ f & \longmapsto & \tilde{f} = E(\rho \circ \iota \circ \pi_P, f \circ \pi_U) \end{array}$$

wohldefiniert und stetig. Für jedes $f \in {}^H\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ ist nun gemäß Bemerkung 1.3.6 $f_{|U} \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H \cap U}(U, V)$, umgekehrt ist $\tilde{f}$ für jedes $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H \cap U}(U, V)$ die rechtshomogene Fortsetzung von $f$, also $\tilde{f} \in {}^H\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$, und es definiert die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ einen topologischen Isomorphismus zwischen $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{H\cap U}(U,V)$ und ${}^H\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$.

Sei nun $f \in {}^H\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$. Dann ist $f \circ \mu \in {}^{H\times H}\mathrm{Ind}_{\{1\}\times P}^{G\times G}(1\times\rho)$. Daher hat $f\circ\mu$ eine Darstellung

$$f \circ \mu = \left(\sum_I X^I f_I^{(g)}\right)_{g\in G/H}$$

mit $f_I^{(g)} \in {}^H\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$. Diese ergibt sich, wenn man in der Darstellung

$$f \circ \mu = \left(\sum_{I,J} a_{I,J}^{(g_1,g_2)} X^I Y^J\right)_{\substack{(g_1,g_2)\in\\ G\times G/H\times H}}$$

für jedes $I$ setzt

$$f_I^{(g)} = \left(\sum_J a_{I,J}^{(g,g')} Y^J\right)_{g'\in G/H}.$$

Seien nun $\lambda \in \mathrm{D}_H(G,K)$ und $F \in \mathrm{D}_{H\cap U}(U,V) = ({}^H\mathrm{Ind}_P^G(\rho))'$. Die obige Darstellung erlaubt dann die Definition von

$$\begin{aligned} \lambda *_\rho F(f) &= \lambda \times F(f\circ\mu) \\ &= \sum_{g\in G/H}\sum_I \lambda(X^I)\cdot F(f_I^{(g)}). \end{aligned}$$

Da $\lambda \times F$ auf ${}^{H\times H}\mathrm{Ind}_{\{1\}\times P}^{G\times G}(1\times\rho)$ durch $\lambda\times F(f_1\times f_2) = \lambda(f_1)\cdot F(f_2)$ festgelegt ist, hängt $\lambda *_\rho F$ von keiner Wahl ab. Dadurch erhält $\mathrm{D}_{H\cap U}(U,V)$ die Struktur eines $\mathrm{D}_H(G,K)$-Moduls, welche die $\mathrm{D}(G,K)$-Modulstruktur auf $\mathrm{D}(U,V) \cong \mathrm{M}(\rho)$ fortsetzt. Wir fassen das Gezeigte zusammen.

**1.3.8 Proposition:** *Sei $H$ eine $L$-analytisch angepasste Untergruppe von $G$. Dann ist $\mathrm{D}_H(G,K)$ wohldefiniert und trägt die Struktur einer assoziativen $K$-Banachalgebra, welche das Faltungsprodukt auf $\mathrm{D}(G,K)$ fortsetzt.*

*Sei $(P,U)$ ein $H$-angepasstes Paar und $\rho$ eine $H$-angepasste Darstellung von $P$ auf einem endlich dimensionalen $K$-Vektorraum $V$. Dann ist $\mathrm{D}_{H\cap U}(U,V)$ definiert und es operiert $\mathrm{D}_H(G,K)$ auf $({}^H\mathrm{Ind}_P^G(\rho))'$, welches mit $\mathrm{D}_{H\cap U}(U,V)$ identifiziert werden kann, die Operation von $\mathrm{D}(G,K)$ auf $\mathrm{M}(\rho) \cong \mathrm{D}(U,V)$ fortsetzend.*

Wir wollen nun ein Kriterium geben, unter welchem ein Normalteiler in $G$ analytisch angepasst ist. Wir benötigen dazu das folgende Lemma.

**1.3.9 Lemma:** *Sei* $(r_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge von Radien* $r_0 \geq r_l > 0$ *, desweiteren* $f : \mathrm{B}(r_0) \to \mathrm{B}(r_0)$ *eine Abbildung zwischen Bällen in* $L^d$ *bzw.* $L^{d'}$ *vom Radius* $r_0$ *, welche durch konvergente Potenzreihen gegeben ist. Dies bedeutet, dass für alle* $x \in \mathrm{B}(r_0)$ *gilt*

$$f(x) = \sum_{S\in\mathbb{N}^d} a_S x^S \,,$$

*wobei die* $a_S$ *in* $L^{d'}$ *liegen und die* $\left|a_S\right| \prod_{1\leq j\leq d} r_0^{s_j}$ *koendlich gegen Null konvergieren. Es beschränke sich* $f$ *für jedes* $l \in \mathbb{N}$ *zu einer Abbildung* $f : \mathrm{B}(r_l) \to \mathrm{B}(r_l)$ *. Dann gilt* $\left\|\mathrm{T}_0 f\right\| \leq 1$ *und es existiert ein* $N \in \mathbb{N}$ *, so dass für alle* $l > N$ *und alle separierten lokal konvexen* $K$*-Vektorräume* $V$ *die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\mathrm{B}(r_l), V) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\mathrm{B}(r_l), V) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

*wohldefiniert und stetig ist.*

**Beweis:** Zunächst gilt $f(0) = 0$. Damit gilt für alle $x \in \mathrm{B}(r_0)$, da $f$ differenzierbar ist,

$$f(x) = \mathrm{T}_0 f(x) + R(x)$$

mit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left\|R(x)\right\|}{\left\|x\right\|} = 0\,.$$

Daher gilt für alle $x \neq 0$

$$\frac{\left\|f(x)\right\|}{\left\|x\right\|} = \frac{\left\|\mathrm{T}_0 f(x) + R(x)\right\|}{\left\|x\right\|}\,.$$

und für alle hinreichend kleinen $x$, die $\mathrm{T}_0 f(x) \neq 0$ erfüllen, weiter

$$= \frac{\left\|\mathrm{T}_0 f(x)\right\|}{\left\|x\right\|}\,.$$

Gölte nun $\left\|\mathrm{T}_0 f\right\| > 1$, so gäbe es ein $x \in \mathrm{B}(r_0)$, für welches letzterer Ausdruck $> 1$ wäre. Dann gölte aber für alle hinreichend kleinen $y \in \mathfrak{o}_L x$ auch $\left\|f(y)\right\| > \left\|y\right\|$. Sei $l$ so gewählt, dass alle $y \in \mathfrak{o}_L x \cap \mathrm{B}(r_l)$ diese Eigenschaft haben. Es sei $y \in \mathfrak{o}_L x \cap \mathrm{B}(r_l)$ mit maximaler Norm gewählt. Dann hat $y$ auch maximale Norm in $\mathrm{B}(r_l)$. Es gilt nun $\left\|f(y)\right\| > \left\|y\right\|$ und daher $f(y) \notin \mathrm{B}(r_l)$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $f$ die Bälle $\mathrm{B}(r_l)$ respektiert.

Seien $f_i = \sum_S a_{i,S} X^S$ die Komponentenabbildungen von $f$. In der Notation von [Féa99, *Kapitel 2*] und nach [Féa99, *2.1.5*] gilt die Behauptung, falls für alle $1 \leq i \leq d'$ und hinreichend große $l$ gilt

$$\max_S \left|a_{i,S}\right| r_l^S := \max_S \left|a_{i,S}\right| \prod_{1\leq j\leq d} r_l^{s_j} = \left\|f_i\right\|_{0,r_l} \leq r_l$$

(beachte $f(0)=0$). Für hinreichend große $l$, d. h. hinreichend kleine $r_l$, ist die Ungleichung $\left|a_{i,S}\right| r_l^S \leq r_l$ für alle nichtlinearen Terme erfüllt. Die linearen Terme definieren aber gerade $\mathrm{T}_0 f$, daher gilt die Ungleichung auch für die linearen Terme. □

Sei nun $\cdots \subseteq G_1 \subseteq G_0 \subseteq G$ eine Umgebungsbasis der Eins, bestehend aus offenen kompakten Normalteilern derart, dass eine Karte $G_0 \cong \mathfrak{o}_L^d$ existiert, so dass für alle $l \in \mathbb{N}^*$ gilt $G_l = \pi^l \mathfrak{o}_L^d$, wobei $\pi$ ein uniformisierendes Element von $L$ ist.

**1.3.10 Lemma:** *Für hinreichend großes $l$ ist $G_l$ eine $L$-analytisch angepasste Untergruppe von $G$.*

**Beweis:** Aus Lemma 1.3.9 folgt sofort, dass ein $\tilde{l}$ existiert, so dass für alle $l \geq \tilde{l}$ die Multiplikation $\mu$ konvergente Potenzreihen auf $G_l$ respektiert. Für die zweite Bedingung der Definition analytischer Angepasstheit folgt aus Lemma 1.3.9 zunächst, weil die $G_l$ Normalteiler sind, dass es für jedes $g \in G$ ein $l(g) \geq \tilde{l}$ gibt, so dass $\mathrm{Ad}_g$ konvergente Potenzreihen auf $G_l$ für alle $l \geq l(g)$ respektiert. Dann werden diese konvergenten Potenzreihen auf Grund des ersten Teils aber auch von $\mathrm{Ad}_{g'}$ für alle $g' \in gG_l$, einer offenen Umgebung von $g$ respektiert. Aus der Kompaktheit von $G$ folgt dann die Behauptung. □

**1.3.11 Lemma:** *Sei $(P,U)$ ein fast $G_l$-angepasstes Paar für alle $l$. Dann ist $(P,U)$ sogar $G_l$-angepasst für alle hinreichend großen $l$.*

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass auf die $\alpha_g$ und ihre Inversen das Lemma 1.3.9 anwendbar ist, da diese aus Multiplikationen und Konjugationen sowie den Projektionen komponiert sind, sowie einem Kompaktheitsargument, ähnlich dem im Beweis des vorstehenden Lemmas.

□

## 1.4 Projektive Limiten über $\mathrm{D}_H(G,K)$

*Es gelten die Bezeichnungen aus Abschnitt 1.3. Es habe $G$ genügend analytisch angepasste Untergruppen. Wir bezeichnen mit $H \subseteq G$ eine analytisch angepasste Untergruppe, mit $(P,U)$ ein $H$-angepasstes Paar und mit $\rho$ eine $H$-angepasste Darstellung von $P$ auf dem endlich dimensionalen $K$-Vektorraum $V$. Es sei $N = H \cap U$.*

Sei $F \in \mathrm{D}(U,V)$. Die Multiplikationsabbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_H(G,K) & \longrightarrow & \mathrm{D}_N(U,V) \\ \lambda & \longmapsto & \lambda *_\rho F \end{array}$$

sei als surjektiv vorausgesetzt. Sei $v'_1, \ldots, v'_k$ eine Basis von $V'$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathrm{D}_H(G,K)$ mit $\lambda_i *_\rho F = 1 \otimes v'_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Sei die Abbildung $\varphi_H$ definiert durch

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_N(U,V) = \mathrm{D}_N(U,K) \otimes V' & \longrightarrow & \mathrm{D}_H(G,K) \\ u = \sum_i u_i \otimes v'_i & \longmapsto & \sum_i u_i * \lambda_i \,. \end{array}$$

Es ist $\varphi_H$ stetig und es gilt

$$\varphi_H(u) *_\rho F = \sum_i u_i * \lambda_i *_\rho F = \sum_i u_i \otimes v'_i = u\,,$$

da $\mathrm{D}_N(U,K) \subseteq \mathrm{D}_H(G,K)$ auf $\mathrm{D}_N(U,V)$ vermöge Linkstranslation operiert. Damit ist $\varphi_H$ ein stetiger Schnitt der Abbildung $*_\rho F$, entsprechend existiert eine stetige Projektion $\psi_H$ auf den Annullator $\mathrm{Ann}_H(F)$ von $F$ in $\mathrm{D}_H(G,K)$.

Es erfülle nun $H' \subseteq H$ ebenfalls die an $H$ gestellten Bedingungen. Konstruiert man dann $\varphi_{H'}$ mit Hilfe derselben $\lambda_i \in \mathrm{D}_{H'}(G,K) \subseteq \mathrm{D}_H(G,K)$, so sind die Abbildungen $\psi_H$ und $\psi_{H'}$ kompatibel.

**1.4.1 Lemma:** *Sei $L = \mathbb{Q}_p$. Sei $P$ eine analytische Untergruppe von $G$ und $U$ komplementär zu $P$. Es existiere eine Umgebungsbasis der Eins von Untergruppen $H$ von $G$ wie in Definition 1.3.3, so dass $(P,U)$ und $\rho$ je $H$-angepasst sind, und für welche die Multiplikationsabbildung $*_\rho F : \mathrm{D}_H(G,K) \to \mathrm{D}_N(U,V)$ surjektiv ist. Dann erfüllt das projektive System $(\mathrm{Ann}_H(F))$ die Mittag-Leffler-Bedingung aus* [GD63, *0.13.2.4*]

**Beweis:** Es gilt $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(G,K) \cong \oplus_{G/H} \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_H(H,K)$. Aus dieser Tatsache folgt $\mathrm{D}_H(G,K) \cong \oplus_{G/H} \mathrm{D}_H(H,K)$ weil $G/H$ endlich ist. Entsprechend ist

$$\mathrm{D}_{H'}(G,K) \cong \oplus_{G/H} \mathrm{D}_{H'}(H,K)\,.$$

Nach Bemerkung 1.2.2 faktorisiert nun allerdings für hinreichend kleine $H'$ die natürliche Abbildung $i^H_{H'} : \mathrm{D}_{H'}(H,K) \to \mathrm{D}_H(H,K)$ über einen Raum, in welchem $\mathrm{D}(H,K)$ dicht liegt. Für die Summe über $G/H$ folgt daraus, dass für hinreichend kleine $H'$ auch das Bild der natürlichen Abbildung $i^H_{H'} : \mathrm{D}_{H'}(G,K) \to \mathrm{D}_H(G,K)$ die Menge $\mathrm{D}(G,K)$ als dichte Teilmenge enthält. Man wähle eine abzählbare absteigende kofinale Folge von $H_n$ so aus, dass $H_n$ und $H_{n+1}$ miteinander je diese Eigenschaft haben (und damit auch $H_n$ und $H_m$ für alle $m \geq n+1$).

Man betrachte nun kompatible Projektionen $\psi_n$, $\psi_{n+1}$ und $\psi_m$ mit $m \geq n+1$, so wie oben konstruiert (in Indizes wird im Folgenden stets $n$ anstelle von $H_n$ geschrieben). Nach Konstruktion liegt dann

$$i^n_m\left(\mathrm{Ann}_m(F)\right) = i^n_m\left(\psi_m\left(\mathrm{D}_m(G,K)\right)\right)$$

dicht in

$$i^n_{n+1}\left(\mathrm{Ann}_{n+1}(F)\right) = i^n_{n+1}\left(\psi_{n+1}(\mathrm{D}_{n+1}(G,K))\right)\,,$$

denn beide enthalten $\psi_n(\mathrm{D}(G,K))$ als dichte Teilmenge. Dies ist aber genau die geforderte Mittag-Leffler-Bedingung. □

Aus diesem Lemma folgt mit [GD63, *0.13.2.4*], dass der projektive Limes über das projektive System exakter Sequenzen

$$0 \to \mathrm{Ann}_H(F) \to \mathrm{D}_H(G,K) \to \mathrm{D}_N(U,V) \to 0$$

ebenfalls exakt, d. h. die Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ann}(F) \to \mathrm{D}(G,K) \to \mathrm{D}(U,V) \to 0$$

exakt ist. Dies ist gleichbedeutend mit

**1.4.2 Proposition:** *Es mögen die Voraussetzungen aus Lemma 1.4.1 gelten. Dann ist* $*_\rho F : \mathrm{D}(G,K) \to \mathrm{D}(U,V)$ *surjektiv.*

## 1.5 Reduktive Gruppen und einige Notationen

*In diesem Abschnitt ist $L$ ein beliebiger Körper.*

Wir rufen an dieser Stelle wesentliche Fakten aus der Theorie der zerfallenden reduktiven Gruppen in Erinnerung, welche im weiteren Verlauf benötigt werden, und legen dabei die erforderliche Notation fest. Die Details dieser Theorie sind etwa in [Bor91] dargestellt.

Sei $\mathfrak{M}_L$ bzw. $\mathfrak{A}_L$ die *multiplikative* bzw. *additive Gruppe über* $L$, definiert durch $\mathfrak{A}_L(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ bzw. $\mathfrak{M}_L(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^*$ für alle $L$-Schemata $S$. Sei $\mathfrak{G}$ eine zusammenhängende reduktive Gruppe über $L$ der Dimension $d$. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ werde als *split* oder *zerfallend* vorausgesetzt, d. h. es existiere ein maximaler $L$-Torus $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{G}$, welcher seinerseits zerfällt, welcher also über $L$ zu $\mathfrak{M}_L^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ isomorph ist. Dies trifft etwa auf die *allgemeine* bzw. *spezielle lineare Gruppe über* $L$, bezeichnet durch $\mathfrak{Gl}_{n,L}$ bzw. $\mathfrak{Sl}_{n,L}$, zu.

Wir fixieren einen solchen zerfallenden maximalen Torus $\mathfrak{T}$ und setzen $\mathbf{G} = \mathfrak{G}(L)$ und $\mathbf{T} = \mathfrak{T}(L)$. Ferner seien $\mathfrak{C}$ das Zentrum von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ sowie $\mathfrak{DG}$ die Kommutatoruntergruppe von $\mathfrak{G}$. Beide Gruppen sind zerfallend halbeinfach mit maximalem Torus $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}/\mathfrak{C}$ bzw. $(\mathfrak{DG} \cap \mathfrak{T})^\circ$, der Einskomponente von $(\mathfrak{DG} \cap \mathfrak{T})$. Seien $\mathbf{C} = \mathfrak{C}(L)$, $\mathbf{G}' = \mathfrak{G}'(L)$, $\mathbf{T}' = \mathfrak{T}'(L)$ sowie $\mathbf{DG} = \mathfrak{DG}(L)$. Sei $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{t}$ die Liealgebra von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{T}$. Die Konjugation definiert eine Operation von $\mathfrak{G}$ auf sich selbst, welche ihrerseits eine Operation von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{g}$ induziert.

Sei $\mathrm{X}^*(\mathfrak{T})$ die Menge der algebraischen Charaktere von $\mathfrak{T}$. Weil $\mathfrak{T}$ zerfällt, sind alle $\alpha \in \mathrm{X}^*(\mathfrak{T})$ über $L$ definiert und jede algebraische Operation von $\mathfrak{T}$ auf einem endlich dimensionalen $L$-Vektorraum ist diagonalisierbar. Seien

$$\Phi = \{0 \neq \alpha \in \mathrm{X}^*(\mathfrak{T}) \mid \exists\, 0 \neq \mathfrak{x} \in \mathfrak{g}\, \forall t \in \mathbf{T} : t\mathfrak{x} = \alpha(t)\mathfrak{x}\}$$

und für alle $\alpha \in \Phi$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{\mathfrak{x} \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbf{T} : t\mathfrak{x} = \alpha(t)\mathfrak{x}\} \ .$$

Es zerlegt sich dann $\mathfrak{g}$ als

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \times \prod_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \, .$$

Die $\alpha \in \Phi$ heißen die *Wurzeln* von $\mathfrak{G}$ bezüglich $\mathfrak{T}$, die $\mathfrak{g}_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$ die *Wurzelräume*. Für jedes $\alpha \in \Phi$ gilt $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$. Desweiteren gibt es zu jedem $\alpha \in \Phi$ eine eindeutig bestimmte abgeschlossene und über $L$ definierte $\mathfrak{T}$-invariante zusammenhängende Untergruppe $\mathfrak{U}_\alpha$ von $\mathfrak{G}$ mit Liealgebra $\mathfrak{g}_\alpha$. Diese heißt die *zu $\alpha$ gehörige Wurzelgruppe*. Sei $\mathbf{U}_\alpha = \mathfrak{U}_\alpha(L)$. Da $\mathfrak{G}$ zusammenhängend ist, wird $\mathfrak{G}$ von den $\mathfrak{U}_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$ und $\mathfrak{T}$ erzeugt. Für jedes $\alpha \in \Phi$ ist $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ eindimensional und es existiert genau ein $H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ mit $\alpha(H_\alpha) = 2$.

Es seien $\mathfrak{N}$ der Normalisator von $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{G}$ und $\mathbf{N} = \mathfrak{N}(L)$. Es gilt $\mathfrak{T} = \mathfrak{N}^\circ$, ferner ist $\mathfrak{W} = \mathfrak{N}/\mathfrak{T}$ das konstante Gruppenschema zur endlichen abstrakten Gruppe $\mathbf{W} = \mathbf{N}/\mathbf{T}$. Diese heißt die *Weylgruppe* von $(\mathfrak{G}, \mathfrak{T})$. Die Operation von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{g}$ respektiert die Wurzelräume und damit die Wurzelgruppen. Dies definiert eine Operation von $\mathbf{W}$ auf $\Phi$. In dem von $\Phi \subseteq \mathrm{X}^*(\mathfrak{T}) \otimes \mathbb{R}$ erzeugten Untervektorraum ist $\Phi$ ein reduziertes Wurzelsystem mit Weylgruppe $\mathbf{W}$ im Sinne von [Bou68]. Es haben $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$ die gleichen Wurzelräume und die gleiche Weylgruppe wie $\mathfrak{G}$.

Es sei $\Delta$ eine Basis von $\Phi$. Diese definiert eine Partition von $\Phi$ in positive und negative Wurzeln $\Phi = \Phi^+ \dot\cup \Phi^-$. Eine Teilmenge $\Psi$ von $\Phi$ heißt *abgeschlossen*, falls für alle $\alpha, \beta \in \Psi$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$ auch $\alpha + \beta \in \Psi$ gilt. Sei $\Psi$ positiv (d. h. $\Psi \subseteq \Phi^+$) und abgeschlossen (i. e. *special* i. S. v. [Bor91, *14.5*]). Dann spannen die $\mathfrak{U}_\alpha$ mit $\alpha \in \Psi$ in beliebiger Reihenfolge eine $\mathfrak{T}$-invariante nilpotente algebraische Untergruppe $\mathfrak{U}_\Psi$ von $\mathfrak{G}$ auf, deren Liealgebra $\mathfrak{u}_\Psi = \prod_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$ ist. Sei $\mathbf{U}_\Psi = \mathfrak{U}_\Psi(L)$.

Sei $\Upsilon$ eine Teilmenge von $\Delta$ und

$$\mathfrak{T}_\Upsilon = \left( \bigcap_{\alpha \in \Upsilon} \ker \alpha \right)^\circ \ .$$

Sei ferner $[\Upsilon]$ die Menge der $\alpha \in \Phi$, welche ganzzahlige Linearkombination von Elementen in $\Upsilon$ sind. Sei $\mathfrak{Z}_\Upsilon$ der Zentralisator von $\mathfrak{T}_\Upsilon$ in $\mathfrak{G}$. Dies ist eine zerfallende reduktive Gruppe mit maximalem Torus $\mathfrak{T}$ und Wurzelsystem $[\Upsilon]$, deren Weylgruppe $\mathbf{W}_\Upsilon$ durch die Reflexionen $(r_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon} \subseteq \mathbf{W}$ erzeugt wird. Es ist $\mathfrak{T}_\Upsilon$ die Einskomponente des Zentrums von $\mathfrak{Z}_\Upsilon$. Sei $\mathfrak{R}_\Upsilon$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{Z}_\Upsilon$. Diese ist halbeinfach und erzeugt zusammen mit $\mathfrak{T}_\Upsilon$ die algebraische Gruppe $\mathfrak{Z}_\Upsilon$. Sei $\Phi(\Upsilon)^+$ die Menge der Wurzeln $\alpha \in \Phi^+$, welche eine Darstellung

$$\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} c_\beta \beta$$

mit $c_\beta > 0$ für ein $\beta \notin \Upsilon$ haben. Es gilt $\Phi^+ = \Phi(\Upsilon)^+ \dot\cup (\Phi^+ \cap [\Upsilon])$ und $\Phi(\Upsilon)^+$ ist abgeschlossen. Sei $\Phi(\Upsilon)^- = -\Phi(\Upsilon)^+$. Es normalisiert $\mathfrak{Z}_\Upsilon$ die Gruppen $\mathfrak{U}_\Upsilon = \mathfrak{U}_{\Phi(\Upsilon)^-}$ und $\mathfrak{U}_\Upsilon^+ = \mathfrak{U}_{\Phi(\Upsilon)^+}$, die von $\mathfrak{Z}_\Upsilon$ und $\mathfrak{U}_{\Phi(\Upsilon)^+}$ aufgespannte Gruppe $\mathfrak{P}_\Upsilon$ ist eine parabolische Untergruppe vom Typ $\Upsilon$. Seien $\mathbf{P}_\Upsilon = \mathfrak{P}_\Upsilon(L)$, $\mathbf{Z}_\Upsilon = \mathfrak{Z}_\Upsilon(L)$, $\mathbf{R}_\Upsilon = \mathfrak{R}_\Upsilon(L)$, $\mathbf{T}_\Upsilon = \mathfrak{T}_\Upsilon(L)$, $\mathbf{U}_\Upsilon^+ = \mathfrak{U}_\Upsilon^+(L)$ und $\mathbf{U}_\Upsilon = \mathfrak{U}_\Upsilon(L)$ sowie $\mathfrak{p}_\Upsilon$, $\mathfrak{z}_\Upsilon$, $\mathfrak{r}_\Upsilon$, $\mathfrak{t}_\Upsilon$, $\mathfrak{u}_\Upsilon^+$ und $\mathfrak{u}_\Upsilon$ die entsprechenden Liealgebren. Es seien $\delta^\Upsilon = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in[\Upsilon]^+}\alpha$ und $\delta_\Upsilon = \delta^\Delta - \delta^\Upsilon$. Es gilt $\mathfrak{p}_\Upsilon = \mathfrak{r}_\Upsilon \oplus \mathfrak{t}_\Upsilon \oplus \mathfrak{u}_\Upsilon^+$.

Sei für den Rest des Abschnittes $\mathfrak{G}$ halbeinfach. Es existiert dann für jedes $\alpha \in \Phi$ ein Isomorphismus algebraischer Gruppen $x_\alpha : \mathfrak{U}_\alpha \to \mathfrak{A}_L$ mit $x_\alpha(tut^{-1}) = \alpha(t)x_\alpha(u)$ für alle $t \in \mathbf{T}$ und $u \in \mathbf{U}_\alpha$. Die Wahl eines solchen Isomorphismus' entspricht der Wahl eines $0 \neq \mathfrak{x}_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. Diese Wahlen können so getroffen werden, dass

(i) für jedes $\alpha \in \Phi$ ein Epimorphismus $\zeta_\alpha$ von $\mathfrak{Sl}_{2,L}$ auf die von $\mathfrak{U}_\alpha$ und $\mathfrak{U}_{-\alpha}$ erzeugte algebraische Gruppe existiert, der

$$u = \zeta_\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & x_\alpha(u) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

für alle $u \in \mathbf{U}_\alpha$ und

$$u = \zeta_\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_{-\alpha}(u) & 1 \end{pmatrix}\right)$$

für alle $u \in \mathbf{U}_{-\alpha}$ erfüllt, und

(ii) für alle $\alpha, \beta \in \Phi$ mit $\alpha \neq -\beta$ und $u \in \mathbf{U}_\alpha$ sowie $v \in \mathbf{U}_\beta$

$$(u,v) = \prod_{\substack{c\alpha+d\beta\in\Phi \\ c,d\in\mathbb{N}^*}} w_{c\alpha+d\beta}$$

mit $w_{c\alpha+d\beta} \in \mathbf{U}_{c\alpha+d\beta}$ und

$$x_{c\alpha+d\beta}(w_{c\alpha+d\beta}) = C_{\alpha,\beta;c,d}\, x_\alpha(u)^c x_\beta(v)^d$$

gilt, wobei die Koeffizienten $C_{\alpha,\beta;c,d}$ ganze Zahlen sind und das Produkt in beliebiger festgelegter Reihenfolge zu verstehen ist.

Für die Existenz eines solchen Systems, das auch als *Chevalleybasis* oder *épinglage* bezeichnet wird, vgl. [BT72, *6.1.3 b)*].

## 1.6 Reduktive Gruppen über lokalen Körpern

*In diesem Abschnitt sind $L$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und $\mathfrak{G}$ eine zusammenhängende zerfallende reduktive Gruppe über $L$.*

Die Gruppen $\mathbf{G}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_\Upsilon$, $\mathbf{U}_\Upsilon$, $\mathbf{U}_\Upsilon^+$, $\mathbf{Z}_\Upsilon$, $\mathbf{R}_\Upsilon$, und $\mathbf{P}_\Upsilon$ sind je die $L$-rationalen Punkte glatter Varietäten und tragen als solche je die Struktur einer $L$-analytischen Mannigfaltigkeit.

Man fixiere für $\mathfrak{G}'$ eine Chevalleybasis und definiere für alle $u \in \mathbf{U}_\alpha$

$$|u| = |x_\alpha(u)| \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi_\alpha(u) = \omega_L(x_\alpha(u))\,.$$

Die Funktion $|\cdot|$ definiert dieselbe Topologie auf $\mathbf{U}_\alpha$ wie diejenige, die durch die Struktur als $L$-analytische Mannigfaltigkeit auf $\mathbf{U}_\alpha$ bereits vorliegt. Die $(\varphi_\alpha)$ bilden ihrerseits eine *Bewertung* der Wurzelgruppen (*donnée radicielle valuée* in [BT72]), wie dies in [BT72, *6.2.3 b)*] ausgeführt ist.

Seien nun

$$T = \{t \in \mathbf{T} \mid \omega_L(\chi(t)) = 0 \text{ für alle } \chi \in \mathrm{X}^*(\mathfrak{T})\}$$

und

$$H = \{t \in \mathbf{T}' \mid \omega_L(\alpha(t)) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \Phi\}$$

sowie für $l \in \mathbb{N}^*$

$$T_{(l)} = \{t \in T \mid \omega_L(\chi(t) - 1) \geq l \text{ für alle } \chi \in \mathrm{X}^*(\mathfrak{T})\}\ ,$$

$$H_{(l)} = \{t \in H \mid \omega_L(\alpha(t) - 1) \geq l \text{ für alle } \alpha \in \Phi\}$$

und $H_{(0)} = H$ sowie $T_{(0)} = T$ [BT72, *6.4.16 b)*]. Sei für alle $h \in H$ bzw. $t \in T$

$$\varphi_0(h) = \max\{l \in \mathbb{N} \mid h \in H_{(l)}\}$$

bzw.

$$\overline{\varphi}_0(t) = \max\{l \in \mathbb{N} \mid h \in T_{(l)}\}\,.$$

Die $(\varphi_\alpha)$ für $\alpha \in \Phi \cup \{0\}$ bilden eine *Erweiterung der Bewertung (prolongement de la valuation)* $(\varphi_\alpha)$ gemäß [BT72, *6.4.38*].

Weiterhin sei für jedes $l \in \mathbb{Z}$ und jedes $\alpha \in \Phi$

$$U_{\alpha,l} = \{u \in \mathbf{U}_\alpha \mid \varphi_\alpha(u) \geq l\}\ .$$

Eine Funktion $f : \Phi \to \mathbb{R}$ (bzw. $f : \Phi \cup \{0\} \to \mathbb{R}$) heißt *konkav* [BT72, *6.4.3*], falls für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Phi$ (bzw. $\Phi \cup \{0\}$), für welche $\sum_i \alpha_i \in \Phi$ (bzw. $\Phi \cup \{0\}$) gilt, immer $f\left(\sum \alpha_i\right) \leq \sum f(\alpha_i)$ erfüllt ist. Sei $f$ eine konkave Funktion. Dann bezeichnen $U_f$ die von den $U_{\alpha,f(\alpha)}$ (bzw. $U_{\alpha,f(\alpha)}$ und $T_{(f(0))}$) erzeugte Untergruppe von $\mathbf{G}$ und $T_f = U_f \cap T$. Entsprechend bezeichnen $U'_f$ die von den $U_{\alpha,f(\alpha)}$ (bzw. $U_{\alpha,f(\alpha)}$ und $H_{(f(0))}$) erzeugte Untergruppe von $\mathbf{G}'$ und $H_f = U'_f \cap H$.

**1.6.1 Proposition:** *Sei $f : \Phi \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ eine konkave Funktion. Es gelte $f(0) > 0$. Dann ist die Produktabbildung*

$$H_{(f(0))} \times \prod_{\alpha \in \Phi} U_{\alpha,f(\alpha)} \longrightarrow U'_f$$

*in jeder Reihenfolge bijektiv.*

**Beweis:** Es enthält dann nach [BT72, *6.4.42*] $H_{(f(0))}$ die Gruppe $H_{f|\Phi}$. Nun normalisiert $H$ alle $U_{\alpha,l}$ für $l \in \mathbb{Z}$. Es ist daher $H_f = H_{f|\Phi} \cdot H_{(f(0))} = H_{(f(0))}$. Ferner ist gemäß [BT72, *6.4.9 (i)*] in der dort benutzten Notation $U_{\alpha,f(\alpha)} = U_{f,\alpha}$. Dies zeigt, dass alle Voraussetzungen von [BT72, *6.4.48*] erfüllt sind, wenn man dort $g = f$ setzt. $\square$

**1.6.2 Korollar:** *Sei $f : \Phi \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ eine konkave Funktion mit $f(0) > 0$. Dann ist die Produktabbildung*

$$T_{(f(0))} \times \prod_{\alpha\in\Phi} U_{\alpha,f(\alpha)} \longrightarrow U_f$$

*in jeder Reihenfolge bijektiv.*

**Beweis:** Es sei $\pi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$ die Projektion. Seien $t \in T_{(f(0))}$ und $u_\alpha \in U_{\alpha,f(\alpha)}$ mit $t \cdot \prod u_\alpha = 1$. Dann ist $1 = \pi(t) \cdot \prod \pi(u_\alpha)$, also $\pi(u_\alpha) = \pi(t) = 1$ für alle $\alpha \in \Phi$ nach obiger Proposition, daher $u_\alpha = 1$ für alle $\alpha$ und damit auch $t = 1$. Dies zeigt die Injektivität.

Für die Surjektivität genügt es zu zeigen, dass die linke Seite eine Gruppe ist. Dazu betrachte man die Komposition $\mathfrak{D}\mathfrak{G} \hookrightarrow \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$ mit endlichem Kern. Man kann annehmen, dass die Chevalleybasis auf $\mathfrak{G}'$ von einer solchen auf $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$ induziert wird. Seien $DH_{(l)}$ die den $H_{(l)}$ entsprechenden Untergruppen von $\mathbf{DG}$. Es wird $T_{(l)}$ von $DH_{(l)}$ und $T_{(l)} \cap \mathbf{C}$ erzeugt [Bor91, *14.2*]. Es gilt nun $U_{\alpha,f(\alpha)} \subseteq \mathbf{DG}$ und $DH_{(f(0))} \subseteq \mathbf{DG}$. Da die Aussage für das halbeinfache $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$ bereits gezeigt ist, und $T_{(f(0))} \cap \mathbf{C}$ zentral ist, ist die linke Seite in der Tat eine Gruppe. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Seien speziell $f_l$ für $l \in \mathbb{N}^*$ definiert durch $f(\alpha) = l$ für alle $\alpha \in \Phi \cup \{0\}$ und $G_l = U_{f_l}$.

Sei desweiteren $f_\Upsilon : \Phi \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_\Upsilon(\alpha) = 1$ falls $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^+$ und $f_\Upsilon(\alpha) = 0$ sonst. Sei $G_\Upsilon = U_{f_\Upsilon}$. Die $G_\Upsilon$ heißen die *Standard-Parahorigruppen*, speziell $G_\phi$ heißt die *Standard-Iwahorigruppe.*

**1.6.3 Proposition:** *Die $G_l$ für $l \in \mathbb{N}^*$ sind Normalteiler in $G_\Upsilon$.*

**Beweis:** [BT72, *6.4.43*] $\square$

Es seien $T_\Upsilon = \mathbf{T}_\Upsilon \cap G_\Upsilon$, $U_\Upsilon = \mathbf{U}_\Upsilon \cap G_\Upsilon$, $U^+_\Upsilon = \mathbf{U}^+_\Upsilon \cap G_\Upsilon$, $Z_\Upsilon = \mathbf{Z}_\Upsilon \cap G_\Upsilon$, $R_\Upsilon = \mathbf{R}_\Upsilon \cap G_\Upsilon$, sowie $P_\Upsilon = \mathbf{P}_\Upsilon \cap G_\Upsilon$.

**1.6.4 Proposition:** *Es existieren eindeutig bestimmte lokal analytische Projektoren $\pi_{U_\Upsilon} : G_\Upsilon \to U_\Upsilon$ und $\pi_{P_\Upsilon} : G_\Upsilon \to P_\Upsilon$ mit $g = \pi_{U_\Upsilon}(g) \cdot \pi_{P_\Upsilon}(g)$ für alle $g \in G_\Upsilon$. Diese schränken sich zu Projektoren von $G_l$ nach $G_l \cap U_\Upsilon$ bzw. $G_l \cap P_\Upsilon$ ein.*

**Beweis:** Es gilt $U_\Upsilon \cap P_\Upsilon = \{0\}$, es genügt also für die erste Behauptung zu zeigen, dass $U_\Upsilon \cdot P_\Upsilon$ eine Gruppe ist. Hierzu genügt es, zu zeigen, dass es von Links invariant unter $H$ und $U_{\alpha,f_\Upsilon(\alpha)}$ für alle $\alpha \in \Phi$ ist. Dies ist für $H$ und $U_{\alpha,f_\Upsilon(\alpha)}$ mit $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-$ trivial. Desweiteren wird $\mathfrak{U}_\Upsilon$ von $\mathfrak{Z}_\Upsilon$ normalisiert, daher auch $U_\Upsilon$ von den $U_{\alpha,f(\alpha)}$ mit $\alpha \in [\Upsilon]$. Zu zeigen bleibt die $U_{\Phi(\Upsilon)^+}$-Invarianz. Es gilt aber $f(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^+$. Sei $g(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-$ und $g(\alpha) = 1$ sonst. Die von den $U_{\alpha,f(\alpha)}$ für $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^+ \cup \Phi(\Upsilon)^-$ erzeugte Gruppe liegt dann in $U_g$, auf welche 1.6.2 anwendbar ist. Die letzte Behauptung folgt ebenfalls aus Korollar 1.6.2. □

Wir fixieren ein $\Upsilon$ und unterdrücken im Folgenden dessen Notation, schreiben also beispielsweise $G$ anstelle von $G_\Upsilon$, bei den Gruppen $G_\Upsilon$, $U_\Upsilon$, $U_\Upsilon^+$, $R_\Upsilon$, $P_\Upsilon$ und $Z_\Upsilon$ sowie deren Liealgebren, falls keine Verwechslungen zu befürchten sind. Man beachte, dass allerdings $T$ und $T_\Upsilon$ sowie $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_\Upsilon$ je Unterschiedliches bezeichnen. Zuletzt setzen wir $U_\alpha = \mathbf{U}_\alpha \cap G = U_{\alpha,f_\Upsilon(\alpha)}$.

**1.6.5 Korollar:** *Für hinreichend großes $l$ ist $G_l$ eine $L$-analytisch angepasste Untergruppe von $G$, für welche $(P,U)$ ein $G_l$-angepasstes Paar ist.*

**Beweis:** Zunächst zeigt Lemma 1.3.10, dass $G_l$ für hinreichend große $l$ analytisch angepasst ist. Ferner zeigt Proposition 1.6.4 in Verbindung mit Lemma 1.6.2, dass $(P,U)$ ein fast $G_l$-angepasstes Paar ist. Damit folgt die Behauptung schließlich aus Lemma 1.3.11. □

## 1.7 Verallgemeinerte Verma-Moduln

Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist *zerfallend reduktiv* mit *Cartanalgebra* $\mathfrak{t}$ [Dix74, *1.10.1*] und es ist $\mathfrak{p}$ eine parabolische Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ vom Typ $\Upsilon$, welche $\mathfrak{t}$ enthält. Es gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{u}^+$ und $\mathfrak{z} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{t}_\Upsilon$. Seien $\sigma$ eine Darstellung von $\mathfrak{r}$ und $\lambda \in \mathfrak{t}_\Upsilon^*$. Man erweitere die Definition von $\sigma$ auf $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{x}v = \lambda(\mathfrak{x})v$ und $\mathfrak{u}^+v = 0$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{t}_\Upsilon$ und $v$ aus dem $\sigma$ zu Grunde liegenden Darstellungsraum $V$. Dann definiert man den *verallgemeinerten Vermamodul zu $\sigma$ und $\lambda$* (*Generalized Verma Module* oder *GVM*) als

$$\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\lambda,\sigma) = \mathrm{Ind}_\mathfrak{p}^\mathfrak{g}\sigma = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \sigma\,.$$

Für diese Begriffsbildung und wesentliche Eigenschaften verweisen wir auf [Maz00]. Wir bemerken zunächst, dass GVMs Höchstgewichtsmoduln sind [Maz00, *3.2.1*]. Für unsere Zwecke wird sich die Frage als bedeutsam herausstellen, ob ein GVM $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\lambda,\sigma)$ einfach ist, wenn $\sigma$ eine einfache $\mathfrak{p}$-Darstellung ist. Diese Frage ist im allgemeinen zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht umfassend geklärt.

Zunächst betrachten wir den Fall, in welchem $\Upsilon = \phi$ die leere Menge ist. In diesem Fall gilt $\mathfrak{r} = 0$, so dass $\sigma$ nur ein eindimensionaler Vektorraum ist.

Wir schreiben hier $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_\phi}(\lambda)$ anstelle von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_\phi}(\lambda,\sigma)$. Es ist $\mathfrak{p}_\phi$ eine *Borelalgebra von* $\mathfrak{g}$ [Dix74, *1.10.14*] und man spricht von einem *Vermamodul* schlechthin. Es gilt

**1.7.1 Proposition:** (Bernstein-Gelfand-Gelfand)
*Es ist* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_\phi}(\lambda)$ *genau dann einfach, wenn* $(\lambda+\delta_\phi)(H_\alpha) \notin \mathbb{N}^*$ *für alle* $\alpha \in \Phi^+$ *gilt.*

Die Theorie der Vermamoduln ist ausführlich in [Dix74, *ch. 7*] dargestellt, insbesondere ist obige Proposition gerade [Dix74, *7.6.24*]. Man beachte, dass dort eine durch $\delta_\phi$ normalisierte Induktion verwendet wird.

Wenden wir uns dem allgemeinen Fall zu. Sei $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\lambda,\sigma)$ ein GVM mit einer einfachen Darstellung $\sigma$. Es hat $\sigma$ einen zentralen Charakter $\chi_\sigma$ als $\mathfrak{r}$-Modul. Sei $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_\phi \cap \mathfrak{r}$. Dies ist eine Borelalgebra von $\mathfrak{r}$. Nach [Dix74, *7.4.8*] existiert ein $\mu \in (\mathfrak{t}\cap\mathfrak{r})^*$ derart, dass der Vermamodul $\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}(\mu-\delta^\Upsilon)$ von $\mathfrak{r}$ denselben zentralen Charakter $\chi_\sigma$ hat. Unter diesen existiert ein $\mu$ in der antidominanten Weylkammer bezüglich $[\Upsilon]^+$ [Dix74, *ch. 7*], für welchen damit $\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}(\mu-\delta^\Upsilon)$ einfach ist. Sei $\mathfrak{f}(\lambda,\sigma) = \mathfrak{m}_{\mathfrak{p}_\phi}(\lambda\oplus\mu-\delta_\phi)$.

**1.7.2 Proposition:** *Falls* $\mathfrak{f}(\lambda,\sigma)$ *einfach ist, so ist auch* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\lambda-\delta_\Upsilon,\sigma)$ *einfach.*

Diese Aussage wird von Khomenko und Mazorchuk zunächst vermutet [KM99, *conj. 1*]. In der späteren Arbeit [KM01] weisen die Autoren auf eine Bemerkung von Soergel hin, nach welcher [KM99, *conj. 1*] schon aus [KM99, *thm. 1*] folgt. Der Beweis liegt uns jedoch nicht vor. Man beachte auch hier, dass an den angegebenen Orten eine normierte Induktion verwendet wird. Es sei zudem betont, dass die Proposition lediglich ein hinreichendes Kriterium gibt.

In dem Fall, dass $\sigma$ ein $\mathfrak{r}$-Höchstgewichtsmodul mit Höchstgewicht $\lambda' \in (\mathfrak{t}\cap\mathfrak{r})^*$ ist, kann man $\mu$ konkret angeben. Es existiert nämlich nach [Dix74, *7.1.8*] ein nichttrivialer Homomorphismus von $U(\mathfrak{r})$-Moduln $\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}(\lambda') \to \sigma$. Dies zeigt, dass die zentralen Charaktere von $\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}(\lambda')$ und $\sigma$ übereinstimmen. Es ist dann also $\mu = w\lambda'$ für dasjenige $w \in \mathbf{W}_\Upsilon$, für welches $w\lambda'$ in der antidominanten Weylkammer liegt.

Da für alle $\alpha \in [\Upsilon]^+$ gilt

$$(\lambda \oplus w\lambda')(H_\alpha) = w\lambda'(H_\alpha) \notin \mathbb{N}^*,$$

folgt aus den beiden vorstehenden Propositionen

**1.7.3 Proposition:** *Es seien* $\lambda \in \mathfrak{t}_\Upsilon^*$ *und* $\sigma$ *ein* $\mathfrak{r}$*-Höchstgewichtsmodul mit Höchstgewicht* $\lambda' \in (\mathfrak{t}\cap\mathfrak{r})^*$. *Es sei* $w \in \mathbf{W}_\Upsilon$ *dasjenige Element, für welches* $w\lambda'$ *in der antidominanten* $[\Upsilon]^+$*-Weylkammer liegt. Falls* $(\lambda\oplus w\lambda')(H_\alpha) \notin \mathbb{N}^*$ *für alle* $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^+$ *gilt, so ist der GVM* $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}(\lambda-\delta_\Upsilon,\sigma)$ *einfach.*

Interessiert man sich nur für endlich dimensionale Darstellungen $\sigma$, so ergibt sich eine weitere Vereinfachung daraus, dass einfache endlich dimensionale $\mathfrak{r}$-Moduln nach [Dix74, *7.2.2*] bereits durch ihr Höchstgewicht $\lambda'$ bestimmt sind. Zudem ist $\lambda' \in (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{r})^*$ immer ganzzahlig dominant, d. h. es erfüllt $\lambda'(H_\alpha) \in \mathbb{N}$ für alle $\alpha \in [\Upsilon]^+$. Sei nun

$$\mathcal{P}_\Upsilon^+ = \left\{\lambda \in \mathfrak{t}^* \mid \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N} \text{ für alle } \alpha \in [\Upsilon]^+\right\} .$$

Dann parametrisiert die Menge $\mathcal{P}_\Upsilon^+$ solche GVMs, welche von einer einfachen endlich dimensionalen Darstellung $\sigma$ herrühren. In diesem Fall ist $w$ leicht auszumachen: Es ist das Element größter Länge in $\mathbf{W}_\Upsilon$ bezüglich $\Upsilon$ und in diesem Fall ist $w\lambda'$ das niedrigste Gewicht von $\sigma$, durch welches $\sigma$ ebenfalls bestimmt ist.

Sei weiterhin $V$ endlich dimensional und $\rho$ eine lokal analytische Darstellung von $P$ auf $V$, versehen mit seiner eindeutigen lokal konvexen Hausdorfftopologie. Es operiere $T_\Upsilon \subset P$ über einen Charakter, die Operation des unipotenten Radikals $U^+$ sei die triviale. Die Gesamtheit der so entstehenden Darstellungen nennen wir die *lokal analytische Hauptreihe von $G$ vom Typ $\Upsilon$*. Sei $\rho'$ die zu $\rho$ gehörige duale Darstellung von $P$, d. h. die Darstellung auf dem Dualraum $V'$ von $V$, welche durch

$$(\rho'(p)\lambda)(v) = \lambda(\rho(p^{-1})v)$$

gegeben ist. Da $V$ lokal analytisch ist, ist $V'$ auch ein $U(\mathfrak{p})$-Modul, welchen wir ebenfalls mit $\rho'$ bezeichnen. Sei $\sigma$ bzw. $\lambda$ die auf $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{t}_\Upsilon$ eingeschränkte Darstellung $\rho'$. Es sei

$$\mathfrak{m}(\rho) = \mathfrak{m}_\mathfrak{p}(\lambda, \sigma) = \mathrm{Ind}_\mathfrak{p}^\mathfrak{g} \rho' .$$

Es gilt $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}(M, V) = \mathrm{C}^{\mathrm{an}}(M, K) \otimes V$ für jede $L$-analytische Mannigfaltigkeit $M$, denn $V$ ist endlich dimensional. Damit gilt auch $\mathrm{D}(M, V) = \mathrm{D}(M, K) \otimes V'$, d. h. die natürliche Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \iota_M^V : \mathrm{D}(M, K) \otimes V' & \longrightarrow & \mathrm{D}(M, V) \\ F \otimes \lambda & \longmapsto & (f \otimes v \mapsto F(f) \cdot \lambda(v)) \end{array}$$

ist ein topologischer Isomorphismus. Betrachte desweiteren die Sequenz

$$\mathrm{Ind}_P^G(\rho) \longrightarrow \mathrm{C}^{\mathrm{an}}(G, V) \longrightarrow \mathrm{C}^{\mathrm{an}}(U, V) \longrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\rho) ,$$

welche durch Einbettung, Restriktion und $P$-äquivariante Ausdehnung gegeben ist (vgl. hierzu die Ausführungen nach Definition 1.1.1). Die Komposition aller drei Abbildungen ist die Identität, es hat also die Inklusion $\mathrm{Ind}_P^G(\rho) \subseteq \mathrm{C}^{\mathrm{an}}(G, V)$ einen stetigen Schnitt, weswegen die von ihr induzierte Abbildung $\kappa_\rho : \mathrm{D}(G, V) \to \mathrm{M}(\rho)$ surjektiv ist. Die Komposition

$$\kappa_\rho \circ \iota_G^V : \mathrm{D}(G, K) \times V' \longrightarrow \mathrm{M}(\rho)$$

ist nun $\mathrm{D}(P,K)$-balanciert, wenn man $\mathrm{D}(P,K)$ auf $\mathrm{D}(G,K)$ durch Rechtsmultiplikation wirken lässt. Dies induziert seinerseits eine surjektive Abbildung

$$\mathrm{D}(G,K) \otimes_{\mathrm{D}(P,K)} V' \to \mathrm{M}(\rho)\,.$$

Die Inklusionen $U(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{D}(G,K)$, $U(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{D}(P,K)$ und $U(\mathfrak{u}) \subseteq \mathrm{D}(U,K)$ induzieren zusammen mit dieser eine Abbildung

$$\mathfrak{m}(\rho) \longrightarrow \mathrm{M}(\rho)\,,$$

von $U(\mathfrak{g})$-Moduln. Tatsächlich ist diese injektiv, da $\mathfrak{m}(\rho)$ als Vektorraum isomorph zu $U(\mathfrak{u}) \otimes_K V'$ und $\mathrm{M}(\rho)$ isomorph zu $\mathrm{D}(U,V) = \mathrm{D}(U,K) \otimes V'$ ist.

## 1.8 Die Ringe $\mathrm{D}_r(U,K)$

*In diesem Abschnitt sind $L = \mathbb{Q}_p$ und $K \subseteq \mathbb{C}_p$ .*

Sei $\kappa : \Phi(\Upsilon)^- \to \mathbb{N}^*$ so gewählt, dass

$$\kappa(\alpha+\beta) > \kappa(\alpha) + \kappa(\beta) \qquad \text{falls } \alpha+\beta \in \Phi(\Upsilon)^-\,.$$

Es sei ein für alle mal eine Totalordnung auf $\Phi(\Upsilon)^-$ fixiert, für welche $\kappa$ ordnungserhaltend ist. In dieser Ordnung gilt also $\alpha+\beta > \max\{\alpha,\beta\}$ , sobald $\alpha+\beta$ in $\Phi(\Upsilon)^-$ liegt. Es ist, wie in Abschnitt 1.5 erwähnt, die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \mu : & \prod\limits_{\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-} U_\alpha & \longrightarrow & U \\ & (u_\alpha) & \longmapsto & \prod_\alpha u_\alpha\,, \end{array}$$

wobei hier das Produkt in aufsteigender Reihenfolge zu verstehen ist, ein Isomorphismus von lokal analytischen Mannigfaltigkeiten. Die getroffene Wahl einer Chevalleybasis definiert desweiteren einen Isomorphismus von Gruppen

$$\begin{array}{rccc} x : & \prod\limits_{\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-} U_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p^{\Phi(\Upsilon)^-} \\ & (u_\alpha) & \longmapsto & (x_\alpha(u_\alpha))\,. \end{array}$$

Unter Koordinaten wird im Folgenden der Isomorphismus $x \circ \mu^{-1}$ zwischen $U$ und $\mathbb{Z}_p^{\Phi(\Upsilon)^-}$ verstanden. Eingeschränkt auf die $U_\alpha$ stimmt er mit den $x_\alpha$ überein. Wir setzen daher für alle $u \in U$ auch $x_\alpha(u)$ als die Projektion von $x \circ \mu^{-1}(u)$ auf die $\alpha$-Komponente.

**1.8.1 Definition:** *Ein $K$-*wertiger Pseudocharakter auf $U$ bezüglich der fixierten Ordnung *ist eine $K$-wertige lokal analytische Funktion $f$ auf $U$ , für welche $f \circ \mu \circ x^{-1}$ ein Charakter, d. h. ein lokal analytischer Homomorphismus von $\mathbb{Z}_p^{\Phi(\Upsilon)^-}$ nach $K^*$ , ist.*

Jeder Pseudocharakter $f$ hat die Form

$$\xi_c(u) = \prod_\alpha (1 + c_\alpha)^{x_\alpha(u)}$$

mit $c \in K^{\Phi(\Upsilon)^-}$ und $|c_\alpha| < 1$ für alle $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-$.

Sei $\mathcal{X}$ der offene $\dim(U)$-dimensionale offene Einheitsball in $K$. Die Fouriertransformation aus Abschnitt 1.2 liefert vermöge der Koordinaten einen Isomorphismus

$$\mathrm{D}(U, K) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{X}) .$$

Im Folgenden wird, falls daraus kein Missverständnis zu befürchten ist, diese Identifikation durchgängig vorgenommen.

Sei $u \in U_\alpha$ und $\delta_u$ die entsprechende Dirac-Distribution. Dann gilt (Notation wie in Abschnitt 1.2)

$$F_{\delta_u}(Z) = (1 + z_\alpha)^{x_\alpha(u)} .$$

Sei ferner $\mathfrak{x}_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ das Element der Liealgebra von $U_\alpha$, das unter $x_\alpha$ der 1 in der Liealgebra von $\mathbb{Z}_p$ entspricht. Dann gilt

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{x}_\alpha}(Z) &= -\mathfrak{x}_\alpha \left((1 + z_\alpha)^{x_\alpha}\right)_{|u=0} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\exp(-t\mathfrak{x}_\alpha)(1 + z_\alpha)^{x_\alpha} - (1 + z_\alpha)^{x_\alpha}}{t}_{|u=0} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(1 + z_\alpha)^t - 1}{t} \\ &= \log(1 + z_\alpha) . \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit vgl. [Rob00, *4.3, Proposition*].

Jedes $F \in \mathrm{D}(U, K)$ hat in Koordinaten eine Darstellung der Form

$$F(Z) = \sum_S f_S Z^S$$

mit $S = (s_\alpha) \in \mathbb{N}^{\Phi(\Upsilon)^-}$ und $Z = (z_\alpha)$ sowie $f_S \in K$. Sei $\kappa(S) = \sum_\alpha s_\alpha \kappa(\alpha)$. Für jedes $r > 0$ sei im Folgenden

$$r^S = r^{\kappa(S)} .$$

Für $0 < r < 1$ sei ferner

$$\mathrm{D}_r(U, K) = \left\{ \sum_S f_S Z^S \mid \lim_S |f_S| r^S = 0 \right\} .$$

Es ist $\mathrm{D}_r(U, K)$ mit der Norm

$$\left\| \textstyle\sum_S f_S Z^S \right\|_r = \max_S |f_S| r^S$$

ein $K$-Banachraum und es gilt

$$\mathrm{D}(U,K) = \bigcap_{r<1} \mathrm{D}_r(U,K)\,.$$

Wir wollen zeigen, dass das Faltungsprodukt $*$ auch bezüglich $\left\|\cdot\right\|_r$ stetig ist. In diesem Fall induziert es, weil $\mathrm{D}(U,K)$ in $\mathrm{D}_r(U,K)$ dicht liegt, ein stetiges Produkt, welches wir ebenfalls mit $*$ bezeichnen. Es ist dann $\mathrm{D}_r(U,K)$ zusammen mit diesem Produkt eine topologische $K$-Algebra. Die geforderte Stetigkeit wird dabei durch Vergleich mit der gewöhnlichen kommutativen Multiplikation $\cdot$ auf $\mathrm{D}_r(U,K)$, für welche $\left\|\cdot\right\|_r$ multiplikativ ist, gezeigt, genauer gilt das folgende

**1.8.2 Lemma:** *Für alle $F,G \in \mathrm{D}(U,K)$ gilt*

$$\left\|F*G - F\cdot G\right\|_r \leq r\cdot \left\|F\right\|_r \cdot \left\|G\right\|_r$$

*sowie*

$$\left\|F*G\right\|_r = \left\|F\right\|_r \cdot \left\|G\right\|_r\,.$$

Für den Beweis müssen zunächst einige Hilfsmittel bereitgestellt werden. Seien

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} &= \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \mid n\in\mathbb{N}, \alpha_i \in \Phi(\Upsilon)^-\}\ , \\
l_i : \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{M} \qquad \text{für } i\in\mathbb{N} \text{ definiert durch}
\end{aligned}$$

$$l_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \begin{cases} (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) & i\geq n \text{ oder } \alpha_i \leq \alpha_{i+1} \\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\beta_1,\ldots,\beta_k,\alpha_{i+1},\alpha_i,\alpha_{i+2},\ldots,\alpha_n) & \\ & i<n, \alpha_i > \alpha_{i+1}\,. \end{cases}$$

Hier durchläuft $\beta_j$ alle $c\alpha_i + d\alpha_{i+1}$, welche in $\Phi(\Upsilon)^-$ liegen, in aufsteigender Reihenfolge, jedes $c\alpha_i + d\alpha_{i+1}$ genau $C_{\alpha_i,\alpha_{i+1},c,d}$ mal hintereinander. Sei $L$ der von den $l_i$ erzeugte Monoid von Abbildungen. Für $\alpha = (\alpha_j) \in \mathfrak{M}$ sei

$$\min\alpha = \min_j \alpha_j$$

bezüglich der fixierten Ordnung auf $\Phi(\Upsilon)^-$. Es heiße $\alpha$ **geordnet**, falls für alle $1\leq j<n$ gilt $\alpha_j \leq \alpha_{j+1}$ .

**1.8.3 Lemma:** *Für alle $\alpha\in\mathfrak{M}$ existiert ein $l\in L$, für welches $l\alpha$ geordnet ist.*

**Beweis:** Die Behauptung ist trivial für $\min\alpha = \max\Phi(\Upsilon)^-$. Sei sie gezeigt für alle $\alpha$ mit $\min\alpha \geq \alpha_0$. Falls $\alpha_0 = \min\Phi(\Upsilon)^-$, so ist bereits das Lemma gezeigt. Es habe also $\alpha_0$ einen Vorgänger $\beta$. Seien $\alpha\in\mathfrak{M}$ mit $\min\alpha = \beta$ und

$$M(\alpha) = \#\{j\in\mathbb{N} \mid \alpha_j = \beta\}\,.$$

Falls $M(\alpha) > 1$, so existiert ein Anfangsstück $\alpha'$ von $\alpha$ mit $\min(\alpha') = \min(\alpha)$ und $M(\alpha') = 1$. Per Induktion über $M(\alpha)$ existiert dann also ein $l \in L$ mit geordnetem $l\alpha'$, insbesondere $\alpha'_1 = \beta$ und die Induktionsvoraussetzung ist nun auf $\alpha'' = (\alpha'_2, \alpha'_3 \dots)$ anwendbar. Es existiert daher ein $l' \in L$ mit geordnetem $l'\alpha''$. Nach einer geeigneten Indexverschiebung erhält man ein $l'' \in L$, für welches $l''\alpha$ geordnet ist. Es kann also $M(\alpha) = 1$ angenommen werden. Sei $\gamma(\alpha)$ der zweitkleinste Eintrag von $\alpha$. Falls ein solcher nicht existiert, so ist $\alpha$ konstant und damit geordnet. Sei die Behauptung für alle $\alpha$ mit $\gamma(\alpha) \geq \gamma_0$ gezeigt.

Sei $j(\alpha)$ dasjenige $j$ mit $\alpha_j = \beta$. Falls $j(\alpha) = 1$, so ist die Induktionsvoraussetzung auf das Teilstück $\alpha' = (\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n)$ anwendbar, denn es gilt $\min \alpha' > \min \alpha$. Dies zeigt die Behauptung in diesem Fall. Sei also $j(\alpha) > 1$ und sei

$$\alpha' = l_{j(\alpha)-1}(\alpha)\,.$$

Sei $\alpha''$ das Teilstück $(\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_{j(\alpha)})$ von $\alpha'$. Auf $\alpha''$ ist wegen $\gamma(\alpha'') \geq \beta_{c\alpha_i + d\alpha_{i+1}} > \alpha_{j(\alpha)-1} \geq \gamma(\alpha)$ die Induktionsvoraussetzung anwendbar. Es existiert also ein $l \in L$, für welches $l\alpha''$ geordnet ist. Durch geeignete Indexverschiebung erhält man daraus ein $l' \in L$ mit $j(l'(\alpha)) < j(\alpha)$. Dies macht die Induktionsvoraussetzung anwendbar und zeigt die Behauptung. $\square$

**1.8.4 Definition:** *Für $\alpha \in \mathfrak{M}$ sei*

$$\lambda\alpha = \min_k \{\exists i_1, \dots, i_k \mid l_{i_1} \circ \cdots \circ l_{i_k}\alpha \textit{ ist geordnet}\}\,.$$

*Zu jedem $\alpha$ seien solche $i_1, \dots, i_k$ fixiert. Damit seien*

$$\begin{aligned} L\alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_{i_k+1}, \alpha_{i_k}, \dots, \alpha_n)\,, \\ l\alpha &= l_{i_k}\alpha\,. \end{aligned}$$

**1.8.5 Lemma:** *Sei $\lambda\alpha \neq 0$. Dann gilt*

(i) $\lambda(l\alpha) < \lambda\alpha$

(ii) $\lambda(L\alpha) < \lambda\alpha$

(iii) $\lambda(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n) \leq \lambda\alpha$

**Beweis:** (i) ist evident, (ii) folgt aus (i) und (iii). Teil (iii) wird per Induktion über $\lambda\alpha$ bewiesen. Die Aussage ist auch für $\lambda\alpha = 0$ sinnvoll und in diesem Fall trivial. Sei $\alpha' = l\alpha$. Es gilt $\lambda\alpha' < \lambda\alpha$. Ferner geht $l_i(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n)$ für ein geeignetes $i \in \mathbb{N}$ aus $\alpha'$ durch Auslassen eines oder mehrerer Elemente hervor (ggf. auch $i > n$, d. h. $l_i = \mathrm{id}$). Daher gilt nach Induktionsvoraussetzung für $\alpha'$

$$\lambda(l_i(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_n)) \leq \lambda\alpha' < \lambda\alpha\,.$$

Dies impliziert aber wegen $\lambda(l_i\beta) \geq \lambda\beta - 1$ für alle $\beta \in \mathfrak{M}$ die Behauptung.
□

Die Wahl der Chevalleybasis liefert Elemente $u_\alpha \in U_\alpha$ für alle $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-$ mit

$$x_\beta(u_\alpha) = \delta_{\alpha,\beta}$$

und es gilt

$$x_\gamma((u_\alpha, u_\beta)) = \begin{cases} 0 & \gamma \neq c\alpha + d\beta \\ C_{\alpha,\beta;c,d} & \gamma = c\alpha + d\beta \end{cases} .$$

Für jedes $u \in U$ sei $\delta_u \in \mathrm{D}(U,K)$ die entsprechende Dirac-Distribution. Es gilt für alle $u \in U$

$$F_{\delta_u} = \mathop{*}_{\alpha} (1 + z_\alpha)^{x_\alpha(u)} ,$$

wenn man das Produkt in aufsteigender Reihenfolge auffasst. Man setze

$$Z_{\alpha,\beta} = \mathop{*}_{\substack{c\alpha+d\beta \\ \in\Phi(\Upsilon)^-}} (1 + z_{c\alpha+d\beta})^{C_{\alpha,\beta;c,d}} - 1 .$$

Dann folgt für $\alpha, \beta \in \Phi(\Upsilon)^-$

$$z_\alpha * z_\beta - z_\beta * z_\alpha = Z_{\alpha,\beta} * (1 + z_\beta) * (1 + z_\alpha) .$$

Sei

$$\begin{array}{rccl} \mu : & \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathrm{D}_r(U,K) \\ & \alpha & \longmapsto & \mathop{*}\limits_{j=1}^{n} z_{\alpha_j} . \end{array}$$

**1.8.6 Lemma:** *Für alle $\alpha \in \mathfrak{M}$ gilt*

$$\left\| \mu\alpha - \prod_{j=1}^{n} z_{\alpha_j} \right\|_r \leq r \left\| \prod_{j=1}^{n} z_{\alpha_j} \right\|_r$$

*und*

$$\left\| \mu\alpha \right\|_r = \prod_{j=1}^{n} \left\| z_{\alpha_j} \right\|_r .$$

**Beweis:** Die zweite Aussage folgt wegen $r < 1$ aus der ersten auf Grund der starken Dreiecksungleichung. Die erste Aussage wird per Induktion über $\lambda\alpha$ gezeigt. Falls $\lambda\alpha = 0$, so ist $\alpha$ geordnet, also $\mu\alpha = \prod_{j=1}^{n} z_{\alpha_j}$. Sei also $\lambda\alpha > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu\alpha - \mu L\alpha &= \mathop{*}_{j=1}^{k-1} z_{\alpha_j} * \left( z_{\alpha_k} * z_{\alpha_{k+1}} - z_{\alpha_{k+1}} * z_{\alpha_k} \right) * \mathop{*}_{j=k+2}^{n} z_{\alpha_j} \\ &= \mathop{*}_{j=1}^{k-1} z_{\alpha_j} * Z_{\alpha_k,\alpha_{k+1}} * (1 + z_{\alpha_{k+1}}) * (1 + z_{\alpha_k}) * \mathop{*}_{j=k+2}^{n} z_{\alpha_j} . \end{aligned}$$

Man betrachte nun die Monome, die man erhält, wenn man den letzten Ausdruck ausmultipliziert. Der Vergleich mit der Definition von $l\alpha$ zeigt, dass diese von der Form $\mu\beta$ sind, wobei $\beta$ aus $l\alpha$ durch eine ggf. vorzunehmende Streichung von Einträgen hervorgeht. Nach 1.8.5 ist daher die Induktionsvoraussetzung auf diese Summanden anwendbar. Falls $Z_{\alpha_k,\alpha_{k+1}} = 0$ gilt, falls also $z_{\alpha_k}$ und $z_{\alpha_{k+1}}$ vertauschen, gilt $\mu\alpha = \mu L\alpha$. Ansonsten enthält jedes Monom mindesten einen Faktor $z_{c\alpha_k+d\alpha_{k+1}}$, so dass gilt

$$\begin{aligned}\left\|\mu\alpha - \mu L\alpha\right\|_r &\leq \prod_{\substack{j<k\\ j>k+1}} \left\|z_{\alpha_j}\right\|_r \cdot \max_{\substack{c\alpha_k+d\alpha_{k+1}\\ \in\Phi(\Upsilon)^-}} \left\|z_{c\alpha_k+d\alpha_{k+1}}\right\|_r \\ &\leq \prod_{\substack{j<k\\ j>k+1}} \left\|z_{\alpha_j}\right\|_r \cdot r \cdot \left\|z_{\alpha_k}\right\|_r \cdot \left\|z_{\alpha_{k+1}}\right\|_r ,\end{aligned}$$

letzteres auf Grund der Ungleichung $\kappa(\alpha+\beta) > \kappa(\alpha)+\kappa(\beta)$ für alle $\alpha,\beta \in \Phi(\Upsilon)^-$ und

$$\left\|z_{c\alpha_k+d\alpha_{k+1}}\right\|_r = r^{\kappa(c\alpha_k+d\alpha_{k+1})} \leq r \cdot r^{\kappa(\alpha_k)} \cdot r^{\kappa(\alpha_{k+1})} .$$

Da ebenfalls wegen 1.8.5 die Induktionsvoraussetzung auch auf $L\alpha$ anwendbar ist, folgt

$$\begin{aligned}\left\|\mu\alpha - \prod_{j=1}^n z_{\alpha_j}\right\|_r &\leq \max\left\{\left\|\mu\alpha - \mu L\alpha\right\|_r, \left\|\mu L\alpha - \prod_{j=1}^n z_{\alpha_j}\right\|_r\right\} \\ &\leq r\prod_{j=1}^n \left\|z_{\alpha_j}\right\|_r \\ &= r\left\|\prod_{j=1}^n z_{\alpha_j}\right\|_r .\end{aligned}$$

□

**Beweis:** (von Lemma 1.8.2) Seien $0 \neq F = \sum_S f_S Z^S$ und $0 \neq G = \sum_S g_S Z^S$ gegeben. Es gilt

$$\left\|F * G\right\|_r = \left\|\sum f_S g_{S'} Z^S * Z^{S'}\right\|_r ,$$

daher auf Grund des vorstehenden Lemmas

$$\begin{aligned}\left\|F * G - F\cdot G\right\|_r &\leq \max_{S,S'} \left|f_S g_{S'}\right| \left\|Z^S * Z^{S'} - Z^S \cdot Z^{S'}\right\|_r \\ &\leq \max_{S,S'} \left|f_S g_{S'}\right| \cdot r \cdot \left\|Z^S \cdot Z^{S'}\right\|_r \\ &= r\cdot\left\|F\cdot G\right\|_r = r\cdot\left\|F\right\|_r\cdot\left\|G\right\|_r .\end{aligned}$$

Vermöge der starken Dreiecksungleichung folgt hieraus auch $\left\|F * G\right\|_r = \left\|F\cdot G\right\|_r = \left\|F\right\|_r \cdot \left\|G\right\|_r$. □

**1.8.7 Korollar:** $(\mathrm{D}_r(U,K),*)^* = (\mathrm{D}_r(U,K),\cdot)^*$, *d. h. die Einheiten bezüglich* $*$ *stimmen mit denen bezüglich* $\cdot$ *überein. Ferner sind alle Links- bzw. Rechtseinheiten bezüglich* $*$ *zweiseitige Einheiten. Selbiges gilt für* $\mathrm{D}(U,K)$ *anstelle von* $\mathrm{D}_r(U,K)$.

**Beweis:** Sei $F \cdot G = 1$. Dann gilt $\left\|F * G - 1\right\|_r = \left\|F * G - F \cdot G\right\|_r \leq r\left\|F \cdot G\right\|_r = r < 1$. Damit ist $F * G$ eine Einheit bezüglich $*$ und wegen $G \cdot F = 1$ ebenso $G * F$ und daher auch $G$ und $F$. Ist umgekehrt $F * G = 1$, so sieht man auf analoge Weise ein, dass $F \cdot G = G \cdot F$ eine Einheit bzgl. $\cdot$ ist. Daher sind dies auch $F$ und $G$. Erneute Anwendung der ersten Richtung ergibt dann, dass auch $G * F$ eine Einheit bezüglich $*$ ist, und daher sind $F$ und $G$ auch Einheiten bezüglich $*$. Die Aussage für $\mathrm{D}(U,K)$ folgt aus dem bereits Bewiesenen. □

## 1.9 Noethersche Eigenschaft

Es seien in diesem Abschnitt $r_i > 0$ (nicht aber notwendig $r_i < 1$) für $i = 1, \ldots, k$ gewählt. Sei $Z = (z_i)_{i=1,\ldots,k}$ und

$$A = \left\{ \sum_{S \in \mathbb{N}^k} a_S Z^S \mid \lim_{\rightarrow} \left|a_S\right| \prod_{i=1}^{k} r_i^{s_i} = 0 \right\}.$$

Auf $A$ ist die natürliche Norm $\left\|\sum a_S Z^S\right\| = \max \left|a_S\right| \prod_{i=1}^{k} r_i^{s_i}$ definiert. Es liegt $\left\|A - \{0\}\right\|$ in der von $\left|K^*\right|$ sowie den $r_i$ erzeugten Untergruppe von $\mathbb{R}^*$. Falls $K$ eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ ist und $r_i \in \left|\overline{K}^*\right|$ für alle $i$ gilt, so ist diese in einer Gruppe der Form $C^{\mathbb{Z}}$ für ein $C \in \left|\overline{K}^*\right|$ enthalten. Es sei auf $A$ neben der gewöhnlichen kommutativen Multiplikation, welche mit $\cdot$ bezeichnet sei, noch eine weitere, mit $*$ bezeichnete, assoziative, nicht aber notwendig kommutative Ringstruktur definiert. Es gebe ein $C < 1$, so dass für alle $F, G \in A$ ein $\xi \in A$ mit

$$F * G = F \cdot G + \xi$$

und $\left\|\xi\right\| \leq C \cdot \left\|F\right\| \cdot \left\|G\right\|$ existiert. Falls $K/\mathbb{Q}_p$ endlich ist, lässt sich $C$ so wählen, dass $\left\|A - \{0\}\right\| \subseteq C^{\mathbb{Z}}$ gilt. Betrachte die durch

$$A_l = \left\{F \mid \left\|F\right\| \leq C^l\right\}$$

für $l \in \mathbb{Z}$ definierte Filtrierung auf $A$. Die $A_l$ mit $l \geq 0$ sind Ideale in $A_0$ bezüglich $\cdot$ und $*$, ferner ist der zugehörige graduierte Ring $\mathrm{grad}(A)$ in beiden Fällen gleich, insbesondere kommutativ.

**1.9.1 Lemma:** *Es sei* $K/\mathbb{Q}_p$ *endlich und es gelte* $r_i \in \left|\overline{K}^*\right|$ *für alle* $i$ *sowie* $\left\|A - \{0\}\right\| \subseteq C^{\mathbb{Z}}$. *Dann ist* $\mathrm{grad}(A)$ *noethersch.*

**Beweis:** Sei $\tilde{K}$ der Restklassenkörper von $K$. Dann wird $\mathrm{grad}(A)$ als $\tilde{K}$-Vektorraum von den Monomen $\tilde{a}_S Z^S$ erzeugt. Hier ist $\tilde{a}_S Z^S \in A_l/A_{l+1}$ mit $\left\|a_S Z^S\right\| = C^l$ zu verstehen. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{grad}(K) \otimes_{\tilde{K}} \tilde{K}[T] & \longrightarrow & \mathrm{grad}(A) \\ \tilde{a}_S \otimes T^S & \longmapsto & \tilde{a}_S Z^S \end{array}$$

ist daher ein Isomorphismus von Vektorräumen. Da aber die von $*$ auf $\mathrm{grad}(A)$ induzierte Multiplikation mit der von $\cdot$ induzierten übereinstimmt, ist sie sogar ein Isomorphismus von Ringen. Es ist aber $\mathrm{grad}(K)$ isomorph zur Algebra der Laurentpolynome über $\tilde{K}$, also noethersch, und damit ist auch $\mathrm{grad}(A)$ noethersch. □

**1.9.2 Proposition:** *Falls $K/\mathbb{Q}_p$ endlich ist und $r_i \in \left|\overline{K}^*\right|$ für alle $i$ gilt, so ist $(A, *)$ ein noetherscher Ring.*

**Beweis:** Man wähle $C$ wie in 1.9.1. Es ist $A$ bezüglich der Filtrierung $(A_l)$ vollständig und die Filtrierung ist ausschöpfend. Ferner ist $\mathrm{grad}(A)$ noethersch. Die Behauptung folgt daher aus [Bou89, *III.2.9, Korollar 1 zu Proposition 12*]. □

**1.9.3 Korollar:** *Seien $L = \mathbb{Q}_p$, $K/\mathbb{Q}_p$ endlich und $r \in \left|\overline{K}^*\right|$. Dann ist $\mathrm{D}_r(U,K)$ ein noetherscher Ring.*

# 2 Die Irreduzibilität von $\mathrm{M}(\rho)$

*Es sind in diesem Kapitel $L = \mathbb{Q}_p$ und $K/\mathbb{Q}_p$ endlich. Es ist $G$ eine kompakte lokal analytische Gruppe mit komplementären Untergruppen $U$ und $P$ sowie einer lokal analytischen Darstellung $\rho$ von $P$ auf dem endlich dimensionalen $K$-Vektorraum $V$. Es ist $0 < r < 1$ eine reelle Zahl mit $r \in \left|\overline{K}^*\right|$.*

## 2.1 Die Ringe $\mathrm{D}_r(G,K)$

Die im ersten Kapitel bereitgestellten Objekte $\mathrm{D}_r(U,K)$, $\mathrm{D}_H(G,K)$ und $\mathrm{D}_N(U,K)$ sind ausreichend, um das Hauptresultat dieser Arbeit zu zeigen. Dabei machen sich allerdings technische Schwierigkeiten bemerkbar, welche im Wesentlichen darauf beruhen, dass „$\mathrm{D}_r(G,K)$“ als Pendant zu $\mathrm{D}_r(U,K)$ in diesem Rahmen nicht definiert wurde. Das hat zur Folge, dass Aussagen, welche analog zu denen in Abschnitt 1.4 wären, für $\mathrm{D}_r(U,K)$ nicht vorhanden sind. Dies erfordert die Einführung der Ringe $\mathrm{D}_H(G,K)$, welche allerdings recht schwierig zu handhaben sind, u. a. die unangenehme Eigenschaft haben, dass $\mathrm{D}(G,K)$ nicht dicht in ihnen liegt. Wünschenswert ist also die

Einführung eines Ringes $\mathrm{D}_r(G,K)$, welcher auf $\mathrm{D}_r(U,K)$ operiert, für welchen $\mathrm{D}(G,K) = \cap_r \mathrm{D}_r(G,K)$ gilt und der die Eigenschaften aus Abschnitt 1.4 hat.

Tatsächlich lässt sich dieses Programm durchführen. In [ST02a] greifen Schneider und Teitelbaum die $\mathrm{D}_r(U,K)$ in abgewandelter Form auf und verallgemeinern ihre Definition auf beliebige kompakte lokal analytische Gruppen $G$. Diese Theorie soll hier in ihren Ergebnissen, soweit sie für diese Arbeit relevant sind, kurz referiert werden. Sie sind den Aussagen des ersten Kapitels dieser Arbeit weitgehend verwandt. Innerhalb dieses Rahmens gestaltet sich der Beweis letztendlich übersichtlicher, wenn auch nicht grundsätzlich anders. Die Ringe $\mathrm{D}_H(G,K)$ bleiben aber für Teile des Beweises von Bedeutung. Da sich bestimmte Rechnungen in ihnen bequem vornehmen lassen, wird von ihnen im Abschnitt über Gewichtsvektoren (2.4) weiterhin Gebrauch gemacht.

Seien zunächst $H$ und $G$ beliebige kompakte lokal $\mathbb{Q}_p$-analytische Gruppen. Eine *$p$-Bewertung von $H$* ist eine Abbildung $\omega : H - \{1\} \to (\frac{1}{p-1}, \infty)$ mit den Eigenschaften

(i) $\omega(gh^{-1}) \geq \min(\omega(g), \omega(h))$

(ii) $\omega((g,h)) \geq \omega(g) + \omega(h)$

(iii) $\omega(g^p) = \omega(g) + 1$

für alle $g, h \in H$. Eine *geordnete Basis von* $(H, \omega)$ ist ein Tupel $(h_1, \ldots, h_d)$ mit $h_i \in H$ für alle $i$ derart, dass

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{Z}_p^d & \longrightarrow & H \\ (x_1, \ldots, x_d) & \longmapsto & h_1^{x_1} \cdots h_d^{x_d} \end{array}$$

eine globale Karte für $H$ ist, welche

$$\omega(h_1^{x_1} \cdots h_d^{x_d}) = \min_i(\omega(h_i) + \omega_p(x_i))$$

erfüllt. Es besitze $H$ eine $p$-Bewertung mit einer geordneten Basis, welche man fixiere.

Wie im ersten Kapitel erhält man vermöge Fouriertransformation eine Identifikation

$$\mathrm{D}(H,K) \cong \mathrm{D}(\mathbb{Z}_p^d, K) \cong \mathcal{O}(\mathcal{X}),$$

wobei hier $\mathcal{X}$ den $d$-dimensionalen offenen Einheitsball in $K$ bezeichnet. Für $S \in \mathbb{N}^d$ definiere man

$$\kappa(S) = \sum_{i=1}^{d} s_i \omega(h_i)$$

und setze für jedes $0 < r < 1$

$$\mathrm{D}_r(H,K) = \left\{ \sum_S f_S Z^S \mid |f_S| r^{\kappa(S)} \to 0 \right\}.$$

Auf $\mathrm{D}_r(H,K)$ existiert die natürliche Norm

$$\left\|\sum f_S Z^S\right\|_r = \max_S \left\{ |f_S| r^{\kappa(S)} \right\} .$$

Es erfülle die $p$-Bewertung zusätzlich die folgende Bedingung.

(HYP)

(i) $\omega(h_i)+\omega(h_j) > \frac{p}{p-1}$ für alle $1 \le i < j \le d$,

(ii) $(H,\omega)$ ist $p$-saturiert, d. h. $\omega(g) > \frac{p}{p-1}$ impliziert, dass $g$ eine $p$-Potenz ist.

Es gilt nun die folgende Proposition aus [ST02a]

**2.1.1 Proposition:** *Sei* $\frac{1}{p} < r < 1$. *Dann ist das Faltungsprodukt* $*$ *von* $\mathrm{D}(H,K)$ *stetig bezüglich* $\|\cdot\|_r$. *Mit dem vermöge Stetigkeit fortgesetzten Produkt* $*$ *ist* $\mathrm{D}_r(H,K)$ *eine noethersche Banachalgebra,* $\|\cdot\|_r$ *ist multiplikativ.*

Sei nun $H$ ein kompakter offener Normalteiler von $G$, welcher $p$-bewertet ist und eine geordnete Basis hat, welche (HYP) erfüllt. Sei $g_1,\ldots,g_k$ ein vollständiges System von Nebenklassenrepräsentanten für $H$. Es ist dann $\mathrm{D}(G,K)$ frei von endlichem Rang über $\mathrm{D}(H,K)$, und zwar gilt

$$\mathrm{D}(G,K) = \sum_{i=1}^{k} \delta_{g_i} * \mathrm{D}(H,K) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{D}(H,K) * \delta_{g_i} .$$

Dies ermöglicht für $\mathrm{D}(G,K) \ni F = \sum \delta_{g_i} * F_i$ die Definition

$$\|F\|_r = \max_i \|F_i\|_r .$$

Diese Norm ist ihrerseits multiplikativ. Sei $\mathrm{D}_r(G,K)$ die Vervollständigung von $\mathrm{D}(G,K)$ bezüglich dieser Norm. Dies ist ebenfalls eine noethersche Banachalgebra (vgl. [ST02a]). Wie in Abschnitt 1.9 sieht man, dass ein $C_r < 1$ mit $\|\mathrm{D}_r(G,K) - \{0\}\|_r \subseteq {C_r}^{\mathbb{Z}}$ existiert.

Wir kommen nun auf die Bezeichnungsweise des ersten Kapitels zurück, es seien also $G,P,U$ etc. wie in Abschnitt 1.6 definiert. Für $l \in \mathbb{N}^*$ hat $G_l$ gerade die geforderte Eigenschaft, denn nach 1.6.3 sind diese in der Tat Normalteiler, für welche die Produktabbildung nach 1.6.2

$$T_{(l)} \times \prod_{\alpha\in\Phi} U_{\alpha,l} \longrightarrow G_l$$

in jeder Reihenfolge eine globale Karte definiert. Wir wollen nun auf $G_2$ die folgende $p$-Bewertung einführen:

$$\omega(g) = \min_l \{g \in G_l\} .$$

Zu zeigen sind die Eigenschaften einer $p$-Bewertung. Die erste ist trivialerweise erfüllt. Die zweite Eigenschaft folgt aus [BT72, *6.4.44*]. Zur dritten

Eigenschaft. Sei $\omega(g) = l$. Für $g \in U_{\alpha,l}$ und $g \in T_{(l)}$ ist die Behauptung klar, da es sich hierbei um die übliche Bewertung von $\mathbb{Z}_p$ bzw. den Kongruenzuntergruppen in $\mathbb{Q}_p^*$ handelt. Sei $g = h_1 \cdots h_d$. Dann gilt $g^p = h_1^p \cdots h_d^p \cdot g'$, wobei $g'$ ein Produkt aus Kommutatoren von Elementen aus $G_l$ ist. Diese liegen nach [BT72, *6.4.44*] sogar in $G_{2l}$. Da die $h_i^p$ alle in $G_{l+1}$ liegen folgt wegen $2l > l+1$ insgesamt $\omega(g^p) = \omega(g) + 1$.

Sei nun $l \geq 2$ fixiert. Man wähle zu jedem $U_{\alpha,l}$ einen topologischen Erzeuger, dazu $\dim(T)$ viele Elemente, die eine topologische Basis von $T_{(l)}$ sind. Diese Elemente bilden dann in jeder Reihenfolge eine geordnete Basis für $G_l$.

Betrachte nun die Einschränkung von $\omega$ auf ein $G_l$. Setzt man $\omega_l = \omega - (l-1)$ für $p \neq 2$ und $\omega_l = \omega - (l-2)$ für $p = 2$, so ist auch $\omega_l$ eine $p$-Bewertung von $G_l$, welche zusätzlich die Elemente der geordneten Basis mit 1 (bzw. 2 für $p = 2$) bewertet. Es ist damit zunächst der erste Teil von (HYP) für $\omega_l$ erfüllt. Für die Saturiertheit betrachte man die $p$-Potenzierung $G \to G$. Ihre Tangentialabbildung an der Stelle 1 ist die Multiplikation mit $p$. Da dies ein Isomorphismus ist, ist die $p$-Potenzierung lokal umkehrbar, d. h. für hinreichend großes $l$ ist jedes $g \in G_l$ eine $p$-te Potenz. Dies zeigt dass für solche $l$ die $p$-Bewertung $\omega_l$ auch saturiert ist. Ein solches $l$ halte man fest.

Man wähle nun die Reihenfolge bei der Multiplikation der $U_{\alpha,l}$ und der $T_{(l)}$ so, dass links zuerst alle $U_{\alpha,l}$ mit $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-$ stehen. Mit diesen Festlegungen definiere man nun die Ringe $\mathrm{D}_r(G,K), \mathrm{D}_r(P,K)$ sowie $\mathrm{D}_r(U,K)$ gemäß des oben angegebenen Verfahrens. Man beachte, dass diese Definition von $\mathrm{D}_r(U,K)$ nicht mit der im ersten Kapitel gegebenen übereinstimmt. Tatsächlich kann aber die dortige Definition von $\mathrm{D}_r(U,K)$ der hiesigen subsumiert werden, indem man nämlich feststellt, dass

$$\tilde{\omega}(u) = \min_{\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-} \kappa(\alpha) + \omega_p(x_\alpha(u))$$

(hier auch $\kappa$ wie in Abschnitt 1.8) eine $p$-Bewertung ist. Dieses sieht man ähnlich wie oben, benutzt aber $\kappa(\alpha+\beta) > \kappa(\alpha) + \kappa(\beta)$ zusätzlich zu [BT72, *6.4.44*]. Es lässt sich allerdings $\tilde{\omega}$ nicht auf $G$ fortsetzen.

**2.1.2 Proposition:** *Seien $G, U, P$ etc. wie in Abschnitt 1.6 definiert. Sei $\rho$ eine lokal analytische Darstellung von $P$ auf einem endlich dimensionalen $K$-Vektorraum $V$. Die stetige Operation von $\mathrm{D}(G,K)$ auf $\mathrm{D}(U,K) \otimes V' \cong \mathrm{M}(\rho)$ dehnt sich für $r$ hinreichend nahe bei 1 zu einer solchen von $\mathrm{D}_r(G,K)$ auf $\mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$ aus.*

**Beweis:** Seien $U_l = G_l \cap U$ und $P_l = G_l \cap P$. Es operiert $\mathrm{D}(P,K)$ stetig auf $V'$ und auf Grund der Endlichdimensionalität von $V'$ dehnt sich diese zu einer solchen von $\mathrm{D}_r(P,K)$ für $r$ hinreichend nahe bei 1 aus. Man betrachte die natürliche Abbildung

$$\mathrm{D}_r(U,K) \otimes V' \longrightarrow \mathrm{D}_r(G,K) \otimes_{\mathrm{D}_r(P,K)} V',$$

welche die Potenzreihen über $U_l$ in diejenigen über $G_l$ einbettet. Zunächst sieht man leicht ein, dass diese Abbildung bijektiv ist. Man versehe nun $\mathrm{D}_r(G,K) \otimes_{\mathrm{D}_r(P,K)} V'$ mit der kanonischen Topologie gemäß [ST02a, *2.1*]. Dies ist z. B. die Quotiententopologie bezüglich einer beliebigen Surjektion

$$\mathrm{D}_r(G,K)^m \to \mathrm{D}_r(G,K) \otimes_{\mathrm{D}_r(P,K)} V'$$

von $\mathrm{D}_r(G,K)$-Moduln. Man sieht damit, dass die oben genannte Abbildung auch stetig, und also auf Grund des Satzes von der offenen Abbildung ein Homöomorphismus ist. Diese Abbildung erlaubt es, auf $\mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$ die Struktur eines $\mathrm{D}_r(G,K)$-Banachmoduls zu definieren. □

**2.1.3 Proposition:** *Es seien $G, U, P$ wie in Abschnitt 1.6 definiert. Es sei zu jedem $0 \neq F \in \mathrm{D}(U,V)$ und eine kofinale Familie von $r$ die Multiplikationsabbildung $*_\rho F : \mathrm{D}_r(G,K) \to \mathrm{D}_r(U,V)$ surjektiv. Dann ist auch $*_\rho F : \mathrm{D}(G,K) \to \mathrm{D}(U,V)$ surjektiv.*

**Beweis:** Der Beweis kann wie in 1.4.2 geführt werden und ist in diesem Fall sogar einfacher. Die Aussage folgt aber auch aus Theorem A in [ST02a]. □

## 2.2 Orthogonalbasen

*Es ist in diesem Abschnitt $H \subseteq G$ ein offener Normalteiler mit p-Bewertung $\omega$ und geordneter Basis $h_1, \ldots, h_d$, welche (HYP) erfüllt. Es ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$ ihre gemeinsame Liealgebra.*

Sei $V$ ein normierter $K$-Vektorraum. Ein System $(v_i)_{i \in I}$ heißt *orthogonal*, falls es den Nullvektor nicht enthält und für jedes System $(c_i)_{i \in I}$ mit $c_i \in K$ derart, dass

$$v = \sum_{i \in I} c_i v_i$$

summierbar ist, gilt

$$\|v\| = \max_{i \in I} |c_i| \, \|v_i\| \,.$$

In diesem Fall sind die $c_i$ eindeutig bestimmt. Wenn $V$ ein Banachraum ist, so heißt das System $(v_i)_{i \in I}$ eine *Orthogonalbasis*, falls es orthogonal ist und es zu jedem $v \in V$ eine Familie $(c_i)_{i \in I}$ mit $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$ gibt.

Die Ringe $\mathrm{D}_r(H,K)$ mit der Norm $\|\cdot\|_r$ haben eine natürliche Orthogonalbasis, nämlich

$$(Z^S)_{S \in \mathbb{N}^d}$$

mit $Z = (z_a)_{1 \leq a \leq d}$. Im Folgenden sollen weitere Orthogonalbasen für die Norm $\|\cdot\|_r$ aufgezeigt werden.

**2.2.1 Lemma:** *Sei* $0 \notin \mathcal{F} \subseteq \mathrm{D}_r(H,K)$ *und sei zu jedem* $F = \sum f_S Z^S \in \mathcal{F}$ *ein* $S_F \in \mathbb{N}^d$ *so gewählt, dass* $\|F\|_r = |f_{S_F}| r^{S_F}$ *gilt. Es existiere ferner für alle paarweise verschiedenen*

$$\mathcal{F} \ni F_i = \sum f_{i,S} Z^S$$

*mit* $i = 1, \ldots, m$ *stets ein* $1 \leq k \leq m$ *, so dass für alle* $i \neq k$ *gilt* ($S_k = S_{F_k}$)

$$|f_{i,S_k}| r^{S_k} < \|F_i\|_r \,.$$

*Dann ist* $\mathcal{F}$ *orthogonal.*

**Beweis:** Sei $F = \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i$ . Zu zeigen ist $\|F\|_r = \max_i |\lambda_i| \, \|F_i\|_r$ . Der Fall $m = 1$ ist trivial. Seien $m > 1$ und $k$ wie oben. Falls $|\lambda_k| \, \|F_k\|_r < \max_{i \neq k} |\lambda_i| \, \|F_i\|_r$ , so gilt

$$\|F\|_r = \left\|\textstyle\sum_{i \neq k} \lambda_i F_i\right\|_r = \max_i |\lambda_i| \, \|F_i\|_r$$

nach Induktionsvoraussetzung und auf Grund der strengen Dreiecksungleichung. Falls $|\lambda_k| \, \|F_k\|_r > \max_{i \neq k} |\lambda_i| \, \|F_i\|_r$ , so gilt, ebenfalls wegen der strengen Dreiecksungleichung,

$$\|F\|_r = |\lambda_k| \, \|F_k\|_r = \max_i |\lambda_i| \, \|F_i\|_r \,.$$

Sei also $|\lambda_k| \, \|F_k\|_r = \max_{i \neq k} |\lambda_i| \, \|F_i\|_r$ . Es gilt

$$F = \sum_S \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i,S} Z^S$$

und für alle $i \neq k$ nach Voraussetzung

$$|\lambda_i f_{i,S_k}| r^{S_k} < |\lambda_i| \, \|F_i\|_r \leq |\lambda_k| \, \|F_k\|_r = |\lambda_k f_{k,S_k}| r^{S_k} \,.$$

Damit folgt erneut wegen der starken Dreiecksungleichung

$$\|F\|_r \geq \left|\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i f_{i,S_k}\right| r^{S_k} = |\lambda_k f_{k,S_k}| r^{S_k} = |\lambda_k| \, \|F_k\|_r = \max_i |\lambda_i| \, \|F_i\|_r \,.$$

Die Ungleichung $\|F\|_r \leq \max_i |\lambda_i| \, \|F_i\|_r$ ist trivial. Dies zeigt die Behauptung. □

Man ordne nun $\mathbb{N}^d$ auf eine solche Weise total an, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N}^d & \to & \mathbb{N} \\ (s_i) & \mapsto & \sum s_i \end{array}$$

ordnungserhaltend ist. In einer solchen Ordnung gibt es zu jedem $S$ nur endlich viele $S'$ mit $S' < S$ .

**2.2.2 Lemma:** *Seien $\mathcal{F}$ und $(S_F)_{F\in\mathcal{F}}$ wie in (2.2.1). Für jedes $F \in \mathcal{F}$ gelte*

$$S_F = \max_S \left\{ \left\|F\right\|_r = \left|f_S\right| r^S \right\} .$$

*Ferner gebe es zu jedem $S \in \mathbb{N}^d$ ein $F \in \mathcal{F}$ mit $S = S_F$ . Dann ist $\mathcal{F}$ eine Orthogonalbasis.*

**Beweis:** Sei $0 \neq Q = \sum_S q_S Z^S$ . Zu zeigen ist nur, dass $Q$ im Abschluss des von $\mathcal{F}$ aufgespannten Vektorraumes liegt. Seien

$$S' = \max_S \left\{ \left\|Q\right\|_r = \left|q_S\right| r^S \right\}$$

und $F \in \mathcal{F}$ mit $S_F = S'$ , etwa $F = \sum f_S Z^S$ . Seien

$$Q' = Q - \frac{q_{S'}}{f_{S'}} F = \sum q'_S Z^S$$

und $S'' = \max_S \left\{ \left\|Q'\right\|_r = \left|q'_S\right| r^S \right\}$ . Es gilt $\left\|Q'\right\|_r \leq \left\|Q\right\|_r$ , denn $\left\|\frac{q_{S'}}{f_{S'}} F\right\|_r = \left\|Q\right\|_r$ . Falls $\left\|Q'\right\|_r = \left\|Q\right\|_r$ , so gilt aber $S'' < S'$ , denn $\left|q'_S\right| r^S < \left|q_{S'}\right| r^{S'}$ für $S > S'$ und $q'_{S'} = 0$ . Daher gelangt man in endlich vielen Schritten zu einem Element $Q'$ mit $\left\|Q'\right\|_r < \left\|Q\right\|_r$ und damit auch

$$\left\|Q'\right\|_r \leq C_r \left\|G\right\|_r ,$$

vergleiche hierzu die Ausführungen nach Proposition 2.1.1. Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens zeigt dann, dass $Q$ tatsächlich im Abschluss des von $\mathcal{F}$ aufgespannten Vektorraumes liegt. $\square$

Die beiden vorstehenden Lemmata sollen nun auf konkrete Elemente von $\mathrm{D}_r(H, K)$ angewandt werden. Sei hierzu für jedes $1 \leq a \leq d$

$$F_a = \log\left(1 + z_a\right) = \sum_{l\in\mathbb{N}} a_l z_a^l .$$

Diese Elemente sind von besonderem Interesse, da sie unter der Fouriertransformation einer Basis von $\mathfrak{h}$ entsprechen und also $U(\mathfrak{h})$ erzeugen (vgl. Abschnitt 1.8). Es seien

$$l_a = \max_l \left\{ \left\|F_a\right\|_r = \left|a_l\right| r^{l\omega(h_a)} \right\}$$

und mit diesen Bezeichnungen

$$\mathcal{F} = \left\{ Z^J * \mathop{*}_{a=1}^{d} F_a^{m_a} \mid M, J \in \mathbb{N}^d ; 0 \leq j_a < l_a \right\} .$$

Hier ist, wie schon zuvor, das Produkt in aufsteigender Reihenfolge zu verstehen. Desweiteren definiere man $S_F = (m_a l_a + j_a)$ . Nach Konstruktion ist die Abbildung $F \mapsto S_F$ injektiv.

**2.2.3 Lemma:** *Es erfüllt $\mathcal{F}$ die Bedingungen von Lemma 2.2.1 und 2.2.2.*

**Beweis:** Zunächst gilt $l_a \neq 0$ für alle $a$, da der Logarithmus keinen konstanten Term hat. Sei $F = \sum f_S Z^S \in \mathcal{F}$ mit $F = Z^J * *_{a=1}^d F_a^{m_a}$. Sei

$$F_a^{m_a} = \sum_l b_{a,l} z_a^l \,.$$

Es gilt $F = \prod_a z_a^{j_a} \cdot F_a^{m_a} + \xi$ mit $\|\xi\|_r < \|F\|_r$ [ST02a, *4.2 und 4.3*]. Auf Grund der Multiplikativität der Norm ist nun zunächst die erste Bedingung erfüllt, nämlich

$$\|F\|_r = |f_{S_F}| r^{S_F} \,.$$

Weiterhin ist

$$F = \sum_{\substack{S \\ s_a \geq j_a}} \left( \prod_a b_{a, s_a - j_a} \right) Z^S + \xi \,,$$

also

$$\|F\|_r = \prod_a |b_{a, m_a l_a}| r^{S_F} \,.$$

Für alle $S$, für welche ein $1 \leq \tilde{a} \leq d$ existiert mit $s_{\tilde{a}} > m_{\tilde{a}} l_{\tilde{a}} + j_{\tilde{a}}$ gilt

$$\prod_a |b_{a, s_a - j_a}| r^S < |b_{\tilde{a}, m_{\tilde{a}} l_{\tilde{a}}}| \prod_{a \neq \tilde{a}} |b_{a, s_a - j_a}| r^{\tilde{S}} \leq \|F\|_r$$

und damit $|f_S| r^S < \|F\|_r$. Daher gilt für alle $S'$ mit $\|F\|_r = |f_{S'}| r^{S'}$ notwendigerweise $s'_a \leq m_a l_a + j_a$ für alle $a$, und daher $S' = S_F$ oder $S' < S_F$.

Sei nun $S = (m_a l_a + j_a)$ mit $0 \leq j_a < l_a$ vorgegeben. Dann gilt für $F = Z^J * *_{a=1}^d F_a^{m_a}$ gerade $S_F = S$. Dies zeigt, dass die Bedingungen aus Lemma 2.2.2 erfüllt sind.

Seien nun paarweise verschiedene $F_i = \sum f_{i,S} Z^S$ für $1 \leq i \leq m$ gegeben. Falls nun ein $1 \leq k \leq m$ existiert, so dass für jedes $i \neq k$ ein $\tilde{a}$ existiert mit

$$s_{k,\tilde{a}} = m_{k,\tilde{a}} l_{k,\tilde{a}} + j_{k,\tilde{a}} > m_{i,\tilde{a}} l_{i,\tilde{a}} + j_{i,\tilde{a}} = s_{i,\tilde{a}}$$

(Doppelindices hier in der naheliegenden Bedeutung), so liefert obiges, angewandt auf $S = S_k = S_{F_k}$ und $F = F_i$ wegen $S_k = (m_{k,a} l_{k,a} + j_{k,a})_{1 \leq a \leq d}$ gerade

$$|f_{i,S_k}| r^{S_k} < \|F_i\|_r \,.$$

Zu zeigen ist also die Existenz eines solchen $k$. Hierzu beginne man mit $W = \{1, \ldots, m\}$. Seien zunächst $a = 1$ und

$$W' = \left\{ i \in W \mid s_{i,a} = \max_{i' \in W} s_{i',a} \right\} \,.$$

Falls $W'$ nur aus einem Element besteht, so ist dies das gesuchte $k$, ansonsten wiederhole man das Verfahren mit $a + 1$ und $W'$ anstelle von $a$ und $W$. Da die $S_i$ paarweise verschieden sind, erhält man nach endlich vielen Schritten eine einelementige Menge, deren Element das gesuchte $k$ ist. $\square$

**2.2.4 Korollar:** *Sei $F = (F_a)_{1\le a\le d}$. Dann gilt für den topologischen Abschluss von $U(\mathfrak{h})$ in $\mathrm{D}_r(H,K)$*

$$\overline{U(\mathfrak{h})} = \left\{ \sum a_M F^M \mid |a_M| \left\|F^M\right\|_r \to 0 \right\} .$$

*Dieses ist ein abgeschlossener Unterring von $\mathrm{D}_r(H,K)$. Hierbei sind die Monome $F^M$ bezüglich $*$ in aufsteigender Reihenfolge zu bilden.*

**Beweis:** Die $F^M$ sind (unter der Fouriertransformation) eine Basis von $U(\mathfrak{h})$ und nach Obigem orthogonal. Dies zeigt die Formel für den Abschluss. Da die Multiplikation stetig ist und $U(\mathfrak{h})$ ein Unterring ist, gilt dies dann auch für den Abschluss. □

**2.2.5 Bemerkung:** *Das Lemma 2.2.3 gilt ebenso für*

$$\mathcal{F}' = \left\{ \mathop{*}_{a} F_a^{m_a} * Z^J \mid \dots \right\} ,$$

*der Beweis hierzu ist nahezu wörtlich derselbe.*

**2.2.6 Korollar:** $\mathrm{D}_r(G,K)$ *ist als Rechts- und als Linksmodul endlich und frei über* $\overline{U(\mathfrak{h})}$.

**Beweis:** Da $\mathrm{D}_r(G,K)$ endlich frei über $\mathrm{D}_r(H,K)$ ist, kann $G = H$ angenommen werden. Sei also $Q \in \mathrm{D}_r(H,K)$. Dann hat $Q$ eine eindeutige Darstellung

$$Q = \sum_{J,M} a_{J,M} F^M * Z^J = \sum_J \left( \sum_M a_{J,M} F^M \right) * Z^J$$

mit $\left|a_{J,M}\right| \left\|F^M * Z^J\right\|_r \to 0$ koendlich. Damit konvergieren für jedes $J$ die $\sum_M a_{J,M} F^M \in \overline{U(\mathfrak{h})}$ und es ist

$$\left\{ Z^J \mid 0 \le j_a < l_a \right\}$$

ein freies Erzeugendensystem von links, ebenso sieht man, dass es auch eines von rechts ist. □

**2.2.7 Korollar:** *Es ist $\overline{U(\mathfrak{h})}$ noethersch.*

**Beweis:** Es ist $\mathrm{D}_r(H,K)$ eine treuflache noethersche $\overline{U(\mathfrak{h})}$-Algebra. □

**2.2.8 Korollar:** *Jedes* $0 \neq Q \in \mathrm{D}_r(G,K)$ *erfüllt eine Gleichung*

$$\sum_{i=0}^{m} a_i Q^i = 0\,,$$

*in welcher* $a_i \in \overline{U(\mathfrak{g})}$ *und* $a_0 \neq 0$ *gelten.*

**Beweis:** Falls $Q$ überhaupt eine nichttriviale Gleichung erfüllt, so erfüllt es auch eine mit $a_0 \neq 0$, da $\mathrm{D}_r(G,K)$ ein Integritätsbereich ist. Gäbe es nun keine nichttriviale Gleichung für $Q$, so wäre $(Q^i)_{i\in\mathbb{N}}$ Basis eines freien $\overline{U(\mathfrak{g})}$-Moduls $L$ von unendlichem Rang, enthalten in $L' = \mathrm{D}_r(G,K)$, einem freien Modul von endlichem Rang. Dies widerspricht der Tatsache, dass $\overline{U(\mathfrak{g})}$ ein noetherscher Ring ist. □

**2.2.9 Korollar:** *Jedes nichttriviale Links- oder Rechtsideal* $I$ *von* $\mathrm{D}_r(G,K)$ *hat einen nichttrivialen Schnitt mit* $\overline{U(\mathfrak{g})}$.

**Beweis:** Sei $0 \neq Q \in I \subseteq \mathrm{D}_r(G,K)$. Dann gilt in der vorangegangenen Notation

$$0 \neq a_0 = -\sum_{i=1}^{m} a_i Q^i \in I \cap \overline{U(\mathfrak{g})}\,.$$

Dies zeigt die Behauptung für Linksideale, die für Rechtsideale zeigt sich ebenso. □

## 2.3 Diagonalisierbarkeit

*In diesem Abschnitt sind* $G, P, U$ *etc. wie in Abschnitt 1.6 definiert.*

Für $r$ nahe bei 1 operiert, wie wir in Proposition 2.1.2 gesehen haben, $U(\mathfrak{t})$ durch Einschränkung der Operation von $\mathrm{D}_r(G,K)$ stetig auf $\mathfrak{m}(\rho) = U(\mathfrak{u}) \otimes V'$ und damit auch auf dessen Abschluss in $\mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$.

Für $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ sei

$$\overline{\mathfrak{m}(\rho)}_\lambda = \left\{ v \in \overline{\mathfrak{m}(\rho)} \mid \mathfrak{x}v = \lambda(\mathfrak{x})v \text{ für alle } \mathfrak{x} \in \mathfrak{t} \right\}$$

der *Gewichtsraum zu* $\lambda$. Es gilt

**2.3.1 Lemma:** *Alle* $\overline{\mathfrak{m}(\rho)}_\lambda$ *sind endlich dimensional.*

**Beweis:** Wir haben gesehen, dass die $F^M$ für $M \in \mathbb{N}^{\Phi(\Upsilon)^-}$ eine Orthogonalbasis von $\overline{U(\mathfrak{u})}$ bilden. Sei $v'_1, \ldots, v'_k$ nun eine Orthogonalbasis von $V'$. Dann bilden die $F^M \otimes v'_i$ eine Orthogonalbasis von $\mathfrak{m}(\rho)$. Seien die $v'_i$ zudem als Gewichtsvektoren für $\mathfrak{t}$ gewählt. Eine solche Basis existiert nach [Dix74, *7.2.1*]. Dann sind die $F^M \otimes v'_i$ zusätzlich Gewichtsvektoren [Dix74, *7.1.6* *(iii)*]. Es ist also jedes $v \in \overline{\mathfrak{m}(\rho)}$ in eindeutiger Weise als Summe von Gewichtsvektoren darstellbar, welche Teil einer Orthogonalbasis sind. Daher gilt $\overline{\mathfrak{m}(\rho)}_\lambda = \overline{(\mathfrak{m}(\rho)_\lambda)}$ für alle $\lambda$. Die Räume $\mathfrak{m}(\rho)_\lambda$ sind allerdings sämtlich endlich dimensional, da GVMs als Höchstgewichtsmoduln immer diese Eigenschaft haben [Maz00, *3.2.1 und 2.2.1*]. □

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass ein abgeschlossener $U(\mathfrak{t})$-Modul $0 \neq N \subseteq \overline{\mathfrak{m}(\rho)}$ immer einen nichttrivialen Schnitt mit $\mathfrak{m}(\rho)$ hat. Hierzu wird die Theorie der $U(\mathfrak{t})$-diagonalisierbaren Moduln nach [Féa99] herangezogen. Diese ist in *loc. cit.* in großer Allgemeinheit dargestellt, was eine Reihe technischer Schwierigkeiten aufwirft, welche zu betrachten sich in der hier vorliegenden Situation erübrigt. Es sollen daher die entscheidenden Resultate in vereinfachter Weise referiert werden.

Wir verlassen dafür die sonstige Notation und bezeichnen mit $V$ einen beliebigen $K$-Banachraum. Sei $\mathcal{H}$ eine endlich erzeugte kommutative $K$-Algebra stetiger Endomorphismen von $V$ und $\Lambda$ eine Menge von Gewichten, d. h. eine Teilmenge der Menge der $K$-Algebrenhomomorphismen $\mathcal{H} \to K^*$. Ein Vektor $v \in V$ heißt ein Gewichtsvektor zum Gewicht $\lambda \in \Lambda$, falls $h(v) = \lambda(h)v$ für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt. Mit $V_\lambda$ bezeichnen wir den Raum der Gewichtsvektoren zum Gewicht $\lambda$.

Es erfüllt $V$ die *Basisbedingung bzgl.* $\Lambda$ [Féa99, *1.3.10*], falls jedes $v \in V$ eine Darstellung $\sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$ mit summierbaren $v_\lambda \in V_\lambda$ hat. Es erfüllt $V$ die *Zerlegungsbedingung bzgl.* $\Lambda$ [Féa99, *S. 10*], falls für jedes $h \in \mathcal{H}$ die (auf Grund der Stetigkeit der Operation beschränkte) Menge $\Lambda(h) \subset K$ von endlich vielen Nebenklassen einer kompakten additiven Untergruppe $C$ von $K$ überdeckt wird. Dies ist in unserer Situation allerdings immer erfüllt, da $K$ lokal kompakt ist. Es erfüllt nun $V$ die *Projektionsbedingung bzgl.* $\Lambda$ [Féa99, *S. 13*], falls

- endlich viele $h_1, \ldots, h_k \in \mathcal{H}$ existieren, so dass für alle $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ aus $\lambda(h_i) = \lambda'(h_i)$ für alle $i$ schon $\lambda = \lambda'$ folgt, und dass
- eine kompakte additive Untergruppe $C \subseteq K$ existiert, so dass die Menge $(\Lambda(h_1), \ldots, \Lambda(h_k)) \subseteq K^k$ in einer einzelnen Nebenklasse von $C^k$ enthalten ist.

Die Projektionsbedingung ist in unserer Situation ebenfalls immer erfüllt; in ihrem ersten Teil, da $\mathcal{H}$ endlich erzeugt ist, in ihrem zweiten Teil, wie schon zuvor, da $K$ lokal kompakt ist.

**2.3.2 Proposition:** [Féa99, *1.3.12*] *Sei $V$ ein $K$-Banachraum und $\mathcal{H}$ eine endlich erzeugte Algebra stetiger Endomorphismen von $V$. Sei $\Lambda$ eine Menge von Gewichten und es erfülle $V$ die Basisbedingung bezüglich $\Lambda$. Dann gilt*

- *Die Darstellung als Reihe von Gewichtsvektoren ist eindeutig, die Projektion $P_\lambda$ auf die $\lambda$-Komponente für jedes $\lambda \in \Lambda$ ein stetiger $\mathcal{H}$-Modulhomomorphismus.*

- *$\mathcal{H}$ hat außer den Gewichten in $\Lambda$ keine weiteren.*
- *Jeder $\mathcal{H}$-invariante abgeschlossene Untervektorraum enthält auch alle Gewichtskomponenten seiner Elemente.*
- *Es sei $c_o(V_{\lambda\in\Lambda})$ der Raum der Abbildungen $\Lambda \to V$ mit $\|v_\lambda\| \to 0$ koendlich. Dann sind die Abbildungen $(v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum v_\lambda$ und und $v \mapsto (P_\lambda(v))_{\lambda\in\Lambda}$ zueinander inverse Isomorphismen zwischen $c_0(V_{\lambda\in\Lambda})$ und $V$ . Das Bild eines abgeschlossenen $\mathcal{H}$-Untermoduls $U \subset V$ ist dabei $c_0(U_{\lambda\in\Lambda})$ .*

*Es seien zusätzlich alle $V_\lambda$ endlich dimensional. Sei $V_G$ der von allen Gewichtsvektoren aufgespannte abstrakte Untervektorraum von $V$ . Dann besteht eine Inklusionen erhaltende Bijektion*

$$\left\{\begin{matrix}\textit{Abgeschlossene } \mathcal{H}\textit{-invariante} \\ \textit{Unterräume von } V\end{matrix}\right\} \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix}\textit{Abstrakte } \mathcal{H}\textit{-invariante Un-} \\ \textit{terräume von } V_G\end{matrix}\right\}$$
$$\begin{matrix} U & & U \cap V_G \\ \overline{W} & \leftrightarrows & W \end{matrix}$$

Da jedes $F \in \overline{\mathfrak{m}(\rho)}$ als Reihe von Gewichtsvektoren für $U(\mathfrak{t})$ darstellbar ist, $\overline{\mathfrak{m}(\rho)}$ also die Basisbedingung erfüllt, liefert die vorstehende Proposition, angewandt auf $\mathcal{H} = U(\mathfrak{t})$, in dieser Situation:

**2.3.3 Korollar:** *Sei $0 \neq N \subseteq \overline{\mathfrak{m}(\rho)}$ ein abgeschlossener $U(\mathfrak{t})$-invarianter Vektorraum. Dann gilt $N \cap \mathfrak{m}(\rho) \neq 0$ .*

## 2.4 Gewichtsvektoren in $\mathrm{D}_r(U, K)$

*In diesem Abschnitt sind $G, U, P$ etc. wie in Abschnitt 1.6 definiert. Es operiert $T_\Upsilon$ auf $V$ durch $\rho$ über einen Charakter.*

Sei $v'_1, \ldots, v'_k$ eine Basis von Gewichtsvektoren von $V'$ für die Operation von $\mathfrak{t}$. In Abschnitt 2.3 haben wir gesehen, dass mit der Bezeichnungsweise von Korollar 2.2.4 die Monome $F^M \otimes v'_i$ in $U(\mathfrak{u}) \otimes V'$ Gewichtsvektoren für die Operation von $\mathfrak{t}$ sind und eine Orthogonalbasis von $\overline{U(\mathfrak{u})} \otimes V'$ bilden. Sie sind allerdings auch im Wesentlichen die einzigen Gewichtsvektoren überhaupt. Dies soll in diesem Abschnitt gezeigt werden.

Sei $l \in \mathbb{N}^*$ . Dann normalisiert $T_{(l)}$ die Gruppe $U$ . Da die Produktabbildung auf $\mathfrak{U}$ sogar algebraisch eine Karte ist, ist sie auch für $U$ eine globale Karte. Daher ist die Gruppe $UT_{(l)}$ als Varietät isomorph zu $\mathbb{Z}_p^e$ für $e = \dim(UT_{(l)})$ . Wir wollen für hinreichend große $l$ die Definition des Ringes $\mathrm{D}_{UT_{(l)}}(UT_{(l)}, K)$ rechtfertigen, müssen also die analytische Angepasstheit nachweisen. Zunächst entnimmt man Abschnitt 1.5, dass bezüglich der Chevalleybasis die Multiplikation auf $U$ durch Polynome mit ganzen Koeffizienten gegeben ist. Für hinreichend große $l$ respektiert zudem die Multiplikation auf $T_{(l)}$ nach Lemma 1.3.10 konvergente Potenzreihen auf $T_{(l)}$ , ebenso wie die Konjugation mit Elementen in $T_{(l)}$ konvergente Potenzreihen auf $UT_{(l)}$. Dies zeigt die erste Bedingung von Definition 1.3.1 (mit $G = H = UT_{(l)}$ in der dortigen Notation). Da $UT_{(l)}$ nur eine Nebenklasse hat, ist die zweite Bedingung trivial.

Es operiert $T$ auf $U$ durch Konjugation, und damit $\mathrm{D}(T,K)$ auf $\mathrm{D}(U,K)$ (dies entspricht der Induktion des trivialen Charakters von $T$ nach $TU$). Es existieren nun lokal analytische Projektoren $\pi_U$ und $\pi_{T_{(l)}}$ von $UT_{(l)}$ nach $U$ bzw. $T_{(l)}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $g \in UT_{(l)}$ gilt

$$g = \pi_U(g) \cdot \pi_{T_{(l)}}(g)\,.$$

Da die beiden Projektoren $\pi_U$ und $\pi_{T_{(l)}}$ offensichtlich konvergente Potenzreihen respektieren, ebenso wie Multiplikationen mit Elementen aus $UT_{(l)}$, ist $(T_{(l)}, U)$ ein $UT_{(l)}$-angepasstes Paar. Desweiteren ist die triviale Darstellung trivialerweise ebenfalls $UT_{(l)}$-angepasst, wodurch gesichert ist, dass $\mathrm{D}_{UT_{(l)}}(UT_{(l)}, K)$ auf $\mathrm{D}_U(U,K)$ operiert.

**2.4.1 Proposition:** *Für hinreichend große $r$ liegt jeder $U(\mathfrak{t})$-Gewichtsvektor $Q$ von $\mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$ in $U(\mathfrak{u}) \otimes V'$.*

**Beweis:** Man kann annehmen, dass $Q$ sogar ein $T_{(l)}$-Gewichtsvektor ist, indem man die Taylorentwicklung der Operation betrachtet und ggf. $l$ vergrößert. Ebenso kann angenommen werden, dass $V$ für $T_{(l)}$ diagonalisierbar ist, denn $V$ ist $T_\Upsilon$-diagonalisierbar nach Voraussetzung und $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{r}$-diagonalisierbar, weil $V$ ein endlich dimensionaler $\mathfrak{r}$-Modul ist. Daher kann angenommen werden, dass $V$ eindimensional, mithin $\rho$ ein Charakter ist. Die Aussage ist nun von $\rho$ nicht abhängig, so dass weiterhin $\rho = 1$ angenommen werden kann. Es operiert dann also $\mathrm{D}_r(T_{(l)}, K)$ auf $\mathrm{D}_r(U,K)$ vermöge Konjugation. Es sei $r$ so groß gewählt, dass $\mathrm{D}_r(G,K)$ nach $\mathrm{D}_{G_l}(G,K)$ einbettet. Dies ist auf Grund der Kofinalität der $\mathrm{D}_{G_l}(G,K)$ und der Injektivität der Abbildungen $\mathrm{D}_r(G,K) \to \mathrm{D}_{r'}(G,K)$ möglich. Wir betrachten desweiteren die Abbildung von $\mathrm{D}_{G_l \cap U}(U,K)$ nach $\mathrm{D}_U(U,K)$. Diese ist injektiv, da $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}_U(U,K)$ dicht in $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}_{G_l \cap U}(U,K)$ liegt. Nach dem oben Gesagten operiert $\mathrm{D}_{UT_{(l)}}(UT_{(l)}, K)$ auf $\mathrm{D}_U(U,K)$. Alle betrachteten Abbildungen sind $T_{(l)}$-äquivariant, es genügt daher zu zeigen, dass $\mathrm{D}_U(U,K)$ außer den genannten keine weiteren $T_{(l)}$-Gewichtsvektoren hat.

Die Operation von $T_{(l)}$ hat in dieser Situation jedoch eine einfache Gestalt. Wir verwenden nicht die Fouriertransformation, sondern betrachten die Operation auf $\mathrm{C}^{\mathrm{an}}_U(U,K)$ direkt. Sei $f \in \mathrm{C}^{\mathrm{an}}_U(U,K)$ mit $f = \sum_S a_S X^S$ für $S \in \mathbb{N}^{\Phi(\Upsilon)^-}$ und $|a_s| \to 0$. Sei $t \in T_{(l)}$. Dann gilt

$$tf(X) = \sum_S a_S \prod_\alpha \alpha(t^{-1})^{s_\alpha} X^S\,.$$

Wir führen die Bezeichnung $\mathcal{A}(S,t) = \prod_\alpha \alpha(t)^{s_\alpha}$ ein. Sei $F \in \mathrm{D}_U(U,K)$ ein Gewichtsvektor, etwa zum Gewicht $\lambda$. Es hat $F$ die Form $F = \sum_S b_S Z^S$

mit beschränkten Koeffizienten $b_S$ und $Z_S(X^{S'}) = \delta_{S,S'}$. Seien nun $S, S'$ mit $\mathcal{A}(S,\cdot) \neq \mathcal{A}(S',\cdot)$ und $b_S, b_{S'} \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} b_S - b'_S &= F(X^S - X^{S'}) \\ &= \lambda(t)^{-1}(F(\mathcal{A}(S,t)X^S - \mathcal{A}(S',t)X^{S'})) \\ &= \lambda(t)^{-1}(b_S\mathcal{A}(S,t) - b_{S'}\mathcal{A}(S',t)) \end{aligned}$$

für alle $t$, also

$$b_S - b'_S = b_S\lambda(t)^{-1}\mathcal{A}(S,t) - b_{S'}\lambda(t)^{-1}\mathcal{A}(S',t)$$

Es folgt, falls $b_S - b_{S'} = 0$ gilt, wegen der linearen Unabhängigkeit von Charakteren schon $b_S = b_{S'} = 0$ im Widerspruch zur Annahme, und falls $b_S - b_{S'} \neq 0$ nach Division der Gleichung durch $b_S - b_{S'}$ aus gleichem Grund $\lambda^{-1} \cdot \mathcal{A}(S,\cdot) = 1$ oder $\lambda^{-1} \cdot \mathcal{A}(S',\cdot) = 1$. Sei etwa letzteres der Fall. Dies bedingt dann

$$b_S = b_S\lambda^{-1} \cdot A(S,\cdot)$$

und dies wegen $b_S \neq 0$ ebenfalls $\lambda^{-1} \cdot \mathcal{A}(S,\cdot) = 1$, erneut im Widerspruch zur Annahme.

Es existieren aber zu gegebenem $S$ nur endlich viele $S'$ mit $\mathcal{A}(S,\cdot) = \mathcal{A}(S',\cdot)$. Es bezeichne nämlich $l(\alpha)$ die Länge einer Wurzel $\alpha$ bezüglich $\Delta$. Dann folgt in dieser Situation

$$\sum_\alpha s_\alpha l(\alpha) = \sum_\alpha s'_\alpha l(\alpha)\,,$$

da $\Delta$ eine freie Gruppe von vollem Rang in $\mathrm{X}^*(\mathfrak{T})$ erzeugt. Diese Bedingung lässt aber nur endliche viele $s_\alpha$ zu. Damit ist gezeigt, dass

$$F = \sum_{\mathcal{A}(S',\cdot)=\mathcal{A}(S,\cdot)} b_{S'}Z^{S'}$$

für ein $S$ gilt. Dies ist aber genau die Behauptung. □

**2.4.2 Proposition:** *Für* $r$ *hinreichend nahe bei* 1 *hat jeder nichttriviale* $U(\mathfrak{t})$*-invariante* $\mathrm{D}_r(U,K)$*-Untermodul (und damit jeder* $\mathrm{D}_r(TU,K)$*-Untermodul) von* $\mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$ *einen nichttrivialen Schnitt mit* $\overline{U(\mathfrak{u})} \otimes V'$.

**Beweis:** Sei $v'_1, \ldots, v'_k$ eine Basis aus Gewichtsvektoren für $U(\mathfrak{t})$. Jeder der Räume $\mathrm{D}_r(U,K) \otimes v'_i$ ist ein $U(\mathfrak{t})$-invarianter $\mathrm{D}_r(U,K)$-Untermodul und die Projektionen

$$\mathrm{pr}_i : \mathrm{D}_r(U,K) \otimes V' \longrightarrow \mathrm{D}_r(U,K) \otimes v'_i$$

sind $U(\mathfrak{t})$- und $\mathrm{D}_r(U,K)$-Modulhomomorphismen. Sei $0 \neq M \subseteq \mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$. Setze $M_i = \mathrm{pr}_i(M)$. Falls $M_i \neq 0$ für ein $1 \leq i \leq k$ gilt, so folgt aus Korollar 2.2.9 zunächst $M_i \cap (\overline{U(\mathfrak{u})} \otimes v_i') \neq 0$ und nach Korollar 2.3.3 sogar $M_i \cap (U(\mathfrak{u}) \otimes v_i') \neq 0$. Damit enthält $M_i$ einen von Null verschiedenen Gewichtsvektor in $U(\mathfrak{u}) \otimes V'$.

Man setze

$$M^{(i)} = \bigcap_{k<i} \ker(\mathrm{pr}_i) \cap M$$

und betrachte die Filtrierung $0 = M^{(k+1)} \subseteq \cdots \subseteq M = M^{(1)}$. Sei $1 \leq i \leq k$ so gewählt, dass $0 = M^{(i+1)} \subseteq M^{(i)} \neq 0$ gilt. Es gibt dann also ein $F \in M^{(i)}$ derart, dass $\mathrm{pr}_i(F) \neq 0$ ein Gewichtsvektor in $U(\mathfrak{u}) \otimes v_i'$ ist, etwa $\lambda *_\rho \mathrm{pr}_i(F) = C_\lambda \mathrm{pr}_i(F)$ für alle $\lambda \in U(\mathfrak{t})$. Gölte nun $\mathrm{pr}_j(F) \notin \overline{U(\mathfrak{u})} \otimes v_j'$ für ein $i < j \leq k$, so gäbe es nach Proposition 2.4.1 ein $\lambda \in U(\mathfrak{t})$, für welches $\lambda *_\rho \mathrm{pr}_j(F)$ kein skalares Vielfaches von $\mathrm{pr}_j(F)$ ist. Dann gilt aber $0 \neq (\lambda - C_\lambda) *_\rho F \in M^{(i+1)} = 0$, ein Widerspruch. □

## 2.5 Hauptsatz

*In diesem Abschnitt sind $G, U, P$ etc. wie in Abschnitt 1.6 definiert. Für die endlich dimensionale Darstellung $\rho$ von $P$ gilt, dass $T_\Upsilon$ über einen Charakter und $U^+$ trivial operiert.*

Unter den gemachten Voraussetzungen sind $\mathrm{M}(\rho)$ ein $\mathrm{D}(G,K)$-Modul (Abschnitt 1.1), $\mathfrak{m}(\rho) \subseteq \mathrm{M}(\rho)$ ein $U(\mathfrak{g})$-Modul (Abschnitt 1.7) und diese sind mit der Einbettung $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{D}(G,K)$ verträglich. Es gilt nun

**2.5.1 Lemma:** *Es sei $\mathfrak{m}(\rho)$ ein einfacher $U(\mathfrak{g})$-Modul. Dann ist für $r$ hinreichend nahe bei 1 der $\mathrm{D}_r(G,K)$-Modul $\mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$ einfach.*

**Beweis:** Sei $0 \neq M_r \subseteq \mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$ ein (automatisch abgeschlossener) $\mathrm{D}_r(G,K)$-Modul. Nach Proposition 2.4.2 gilt dann $M_r \cap (\overline{U(\mathfrak{u})} \otimes V') \neq 0$ und nach 2.3.3 weiter $M_r \cap (U(\mathfrak{u}) \otimes V') \neq 0$. Da $\mathfrak{m}(\rho)$ einfach ist, folgt $\mathfrak{m}(\rho) \subseteq M_r$. Linksmultiplikation mit $\mathrm{D}_r(U,K)$ liefert $M_r = \mathrm{D}_r(U,K) \otimes V'$.
□

Damit und mit Proposition 2.1.3 folgt nun sofort der folgende

**2.5.2 Satz:** *Es sei $\mathfrak{m}(\rho)$ ein einfacher $U(\mathfrak{g})$-Modul. Dann ist $\mathrm{M}(\rho)$ ein einfacher $\mathrm{D}(G,K)$-Modul.*

Die Bedingung, dass $\mathfrak{m}(\rho)$ einfach ist, ist nun in der Tat generisch erfüllt, man vergleiche hierzu die Propositionen 1.7.1 bzw. 1.7.3.

## 2.6 Ein alternativer Beweis

In diesem Abschnitt soll, wie oben angedeutet, skizziert werden, wie der Beweis des Hauptsatzes auch nur unter Verwendung der in der vorliegenden Arbeit eingeführten Mittel geführt werden kann, also ohne Verwendung der Ringe $\mathrm{D}_r(G,K)$. Wir kehren dafür auch zu der in Abschnitt 1.8 gegebenen Definition von $\mathrm{D}_r(U,K)$ zurück.

Der Abschnitt über Orthogonalbasen (2.2) bleibt unverändert mit der Ausnahme, dass die allgemeinen Gruppen $G$ bzw. $H$ durch die spezielle Gruppe $U$ ersetzt werden muss.

Der Abschnitt über Diagonalisierbarkeit kann ebenfalls erhalten bleiben, wenn man zeigt, dass die Operation von $\mathfrak{t}$ auf $\mathfrak{u}\otimes V'$ stetig ist. Dies soll unten geschehen. Man beachte nun, dass für den Beweis von Lemma 2.4.1 ohnehin nach dem ersten Schritt auf $\mathrm{D}_r(T,K)$ bzw. $\mathrm{D}_r(G,K)$ verzichtet wird.

Damit sind die Vorbereitungen abgeschlossen. Der Hauptsatz beweist sich dann folgendermaßen.

**Beweis:** Sei $0 \neq F \in \mathrm{M}(\rho)$. Für ein geeignetes $r$ hinreichend nahe bei 1 bettet $\mathrm{D}_r(U,K)\otimes V'$ nach $\mathrm{D}_N(U,K)\otimes V'$ ein, auf dem $\mathrm{D}_H(G,K)$ operiert. Sei $M_r$ der von $F$ erzeugte $U(\mathfrak{t})$-invariante $\mathrm{D}_r(U,K)$-Untermodul von $\mathrm{D}_r(U,K)\otimes V'$. Als Untermodul eines endlich erzeugten Moduls über einer noetherschen Banachalgebra ist dieser abgeschlossen. Es gilt daher

$$M_r \cap \overline{U(\mathfrak{u})} \otimes V' \neq 0\,.$$

Wie zuvor gilt auch hier wegen der $\mathfrak{t}$-Diagonalisierbarkeit

$$M_r \cap (U(\mathfrak{u}) \otimes V') \neq 0\,.$$

Damit folgt, weil $\mathfrak{m}(\rho)$ als $U(\mathfrak{g})$-Modul einfach ist, dass der von $F$ erzeugte $\mathrm{D}_H(G,K)$-Untermodul von $\mathrm{D}_N(U,K)\otimes V'$ schon $\mathfrak{m}(\rho)$ enthält und daher mit $\mathrm{D}_N(U,K)\otimes V'$ übereinstimmt. Für $H\to 0$ kann nun Proposition 1.4.2 zur Anwendung kommen. Damit ist dann der Beweis vollständig geführt. $\square$

Es bleibt die Stetigkeit der Operation von $\mathfrak{t}$ auf $U(\mathfrak{u})\otimes V' \subseteq \mathrm{D}_r(U,K)\otimes V'$ unabhängig von der Existenz von $\mathrm{D}_r(G,K)$ zu zeigen.

Sei $l \in \mathbb{N}^*$. Es gilt $G_l \cong \mathbb{Z}_p^d$ vermöge einer Karte, welche die Wurzeluntergruppen und $T_{(l)}$ respektiert. Sei $\Phi'$ eine Menge mit $\dim(T)$ vielen Elementen. Es seien $\mathfrak{x}_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$ für $\alpha \in \Phi$ bzw. $x_\alpha \in \mathfrak{t}$ für $\alpha \in \Phi'$ diejenigen Elemente, welche unter der Karte der 1 der Liealgebra von $\mathbb{Z}_p$ entsprechen.

Falls $\alpha \in \Phi(\Upsilon)^-$ gilt, so entspricht unter der Fouriertransformation $\mathfrak{x}_\alpha$ gerade $F_\alpha$. Für alle $l < l' \in \mathbb{N}^*$ lässt sich auf die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G_l \times G_{l'} &\longrightarrow G_{l'} \\ (g,h) &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

das Lemma 1.3.9 anwenden. Insbesondere gilt

$$\big\|[\cdot,\cdot]\big\| = \big\|\mathrm{T}_1\mathrm{Ad}\big\| \leq 1\,.$$

**2.6.1 Lemma:** *Sei $r$ hinreichend nahe bei $1$ und*

$$L = \max\left\{ \max_{\alpha\in\Phi(\Upsilon)^-} \left\{ \left\|F_\alpha\right\|_r \right\}, \max_{\alpha\in\Phi(\Upsilon)^+\cup\Phi'} \left\{ \left\|\rho'(\mathfrak{x}_\alpha)\right\| \right\} \right\}.$$

*Dann gilt für alle $\alpha$ und alle $G \in \mathfrak{m}(\rho)$*

$$\left\|\mathfrak{x}_\alpha *_\rho G\right\|_r \leq L\left\|G\right\|_r$$

*Insbesondere ist die Operation $*_\rho$ von $U(\mathfrak{g})$ auf $\mathfrak{m}(\rho)$ stetig bezüglich $\left\|\cdot\right\|_r$ und dehnt sich daher zu einer solchen auf $\overline{\mathfrak{m}(\rho)}$ aus.*

**Beweis:** Es genügt, die Behauptung für Monome $F^M \otimes v' \in U(\mathfrak{u}) \otimes_K V'$ zu zeigen. Falls $M = 0$, so gilt

$$\mathfrak{x}_\alpha *_\rho (F^M \otimes v') = \begin{cases} F_\alpha \otimes v' & \text{falls } \alpha \in \Phi(\Upsilon)^- \\ 1 \otimes \rho'(\mathfrak{x}_\alpha)v' & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dies zeigt die Behauptung in diesem Fall. Sei also $F^M = F_\beta * F^{M'}$ und die Behauptung für $F^{M'} \otimes v'$ gezeigt. Dann gilt

$$\mathfrak{x}_\alpha *_\rho (F^M \otimes v') = ([\mathfrak{x}_\alpha, F_\beta] + F_\beta * \mathfrak{x}_\alpha) *_\rho F^{M'} \otimes v'.$$

Es gilt nach Obigem

$$[\mathfrak{x}_\alpha, F_\beta] = [\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{x}_\beta] = \begin{cases} a \cdot \mathfrak{x}_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha+\beta \in \Phi(\Upsilon) \\ \sum\limits_{\alpha\in\Phi'} a_\alpha \mathfrak{x}_\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a, a_\alpha \in K$ und $\left|a\right|, \left|a_\alpha\right| \leq 1$. Es folgt vermöge Induktionsvoraussetzung und der Multiplikativität von $*$

$$\begin{aligned} \left\|\mathfrak{x}_\alpha *_\rho (F^M \otimes v')\right\|_r &= \left\|[\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{x}_\beta] *_\rho F^{M'} \otimes v' + F_\beta * \mathfrak{x}_\alpha *_\rho F^{M'} \otimes v'\right\|_r \\ &\leq \max\left\{L\left\|F^{M'} \otimes v'\right\|_r, L\left\|F_\beta *_\rho F^{M'} \otimes v'\right\|_r\right\} \\ &\leq L\left\|F^M \otimes v'\right\|_r, \end{aligned}$$

letzteres, wenn man $r$ mit $r^{\kappa(\beta)p} \geq \left|p\right| = \frac{1}{p}$ wählt, da dann $\left\|F_\beta\right\|_r \geq 1$ gilt. $\square$

## Literatur

[Ami64] AMICE, Yvette: Interpolation $p$-adique. In: *Bull. soc. math. France* 92 (1964), S. 117–180

[Bor91] BOREL, Armand: *Linear Algebraic Groups.* 2. Aufl. Heidelberg : Springer, 1991

[Bou68] BOURBAKI, Nicolas: *Éléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie IV, V et VI.* Paris : Hermann, 1968

[Bou71] BOURBAKI, Nicolas: *Éléments de Mathématique, Variétés Différentielles et Analytiques.* Faiscicule de résultats. Paris : Hermann, 1971

[Bou89] BOURBAKI, Nicolas: *Elements of Mathematics, Commutative Algebra 1-7.* Heidelberg : Springer, 1989

[BT72] BRUHAT, François ; TITS, Jaques: Groupes réductifs sur un corps local I. In: *Publ. Math. IHES* (1972), Nr. 41

[Dix74] DIXMIER, Jaques: *Algèbres Enveloppantes.* Paris : Gauthier-Villars, 1974 (Cahiers Scientifiques XXXVII)

[Féa99] FÉAUX DE LACROIX, Christian T.: Einige Resultate über die topologischen Darstellungen $p$-adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem $p$-adischen Körper. In: *Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster* 3 (1999), Januar, Nr. 23

[GD63] GROTHENDIECK, Alexandre ; DIEUDONNÉ, Jean (Mitarb.): Éléments de Géométrie Algébrique III. In: *Publ. Math. IHES* (1961–63), Nr. 11, 17

[KM99] KHOMENKO, Alexandre ; MAZORCHUK, Volodymyr: A Note on Simplicity of Generalized Verma Modules. In: *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli* 2 (1999), Nr. 48, S. 145–148

[KM01] KHOMENKO, Alexandre ; MAZORCHUK, Volodymyr: Generalized Verma modules induced from $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ and associated Verma modules. In: *Journal of Algebra* 242 (2001), Nr. 2, S. 561–576

[Maz00] MAZORCHUK, Volodymyr: *Generalized Verma Modules.* L'viv : VNTL Publishers, 2000 (Mathematical Studies Monograph Series 8)

[Rob00] ROBERT, Alain: *A course in $p$-adic Analysis.* New York – Berlin – Heidelberg : Springer, 2000 (Graduate Texts in Mathematics)

[Sch] SCHNEIDER, Peter. *p-adic representation theory,* the 1999 Britton Lectures at McMaster University, abrufbar unter www.uni-muenster.de/math/u/schneider

[Sch01] SCHNEIDER, Peter: *Nonarchimedean Functional Analysis.* New York – Berlin – Heidelberg : Springer, 2001 (Monographs in Mathematics)

[ST01a] SCHNEIDER, Peter ; TEITELBAUM, Jeremy: $p$-adic Fourier theory. In: *Documenta Math.* 6 (2001), S. 447–481

[ST01b] SCHNEIDER, Peter ; TEITELBAUM, Jeremy: $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations. In: *Representation Theory* 5 (2001), S. 111–128

[ST02a] SCHNEIDER, Peter ; TEITELBAUM, Jeremy: Algebras of $p$-adic distributions and admissible representations. In: *Preprintreihe SFB 478 Münster* 214 (2002), Juni

[ST02b] SCHNEIDER, Peter ; TEITELBAUM, Jeremy: Banach space representations and Iwasawa theory. In: *Israel J. Math.* 127 (2002), S. 359–380

[ST02c] SCHNEIDER, Peter ; TEITELBAUM, Jeremy: Locally analytic distributions and $p$-adic representation theory, with applications to $\mathrm{Gl}_2$ . In: *J. AMS* 15 (2002), S. 443–468

[ST02d] SCHNEIDER, Peter ; TEITELBAUM, Jeremy: $p$-adic boundary values. In: BERTHELOT, FONTAINE, ILLUSIE, KATO und RAPOPORT (Hrsg.): *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques.* Astérisque 278, 2002, S. 51–125

## Lebenslauf

Henning Frommer,
geboren am 1.6.1974 in Kiel, ledig,

Sohn der Ärztin Dr. Helga Frommer, geb. Zschoch
und des Offiziers der Bundeswehr Klaus Frommer

| | |
|---|---|
| **Schulbildung:** | Grundschule von 1980 bis 1984 in Vallendar<br>Gymnasium von 1984 bis 1993 in Lahnstein |
| **Hochschulreife:** | am 17.6.1993 in Lahnstein |
| **Grundwehrdienst:** | 1993 bis 1994 in Köln und Heidelberg |
| **Studium:** | Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität zu Köln vom WS 1994/95 bis zum SS 1999 |
| **Promotionsstudiengang:** | Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom WS 1999/2000 bis zum SS 2002 |
| **Prüfungen:** | Diplom im Fach Mathematik am 28.9.1999 an der Universität zu Köln |
| **Tätigkeiten:** | 1996 bis 1999 Studentische Hilfskraft am Institut für Informatik an der Universität zu Köln sowie<br>1999 bis 2002 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Sonderforschungsbereich 478 „Geometrische Strukturen in der Mathematik“ an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster |
| **Beginn der Dissertation:** | Dezember 1999 am SFB 478, betreut durch Herrn Prof. Dr. Peter Schneider |