Reine Mathematik

Néron-Modelle algebraischer Tori

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Mathematik und Informatik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Bernhard Brahm
aus Münster
- 2003 -

Dekan:	Prof. Dr. Klaus Hinrichs
1. Gutachter:	Prof. Dr. S. Bosch
2. Gutachter:	Prof. Dr. Chr. Deninger
Tage der mündlichen Prüfungen:	29.01.2004 und 02.02.2004
Tag der Promotion:	04.02.2004.

Inhaltsverzeichnis

Notationen

Wir bezeichnen mit K stets einen lokalen Körper, womit wir einen vollständig, diskret und nicht archimedisch bewerteten Körper meinen. Es sei stets $\mathcal{O}_K$ der zugehörige diskrete Bewertungsring und π_K sei ein uniformisierendes Element aus dessen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$. Wir setzen $j : \operatorname{Spec} K \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ für die kanonische offene Immersion. Schließlich sei $k := \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_K$ und $i : \operatorname{Spec} k \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ die entsprechende abgeschlossene Immersion. Im Fall, dass der Restklassenkörper k nicht perfekt ist, ist dessen Charakteristik $\operatorname{char}(k)$ positiv und sei mit p bezeichnet.

Mit K^{nr} bezeichnen wir die maximale unverzweigte Erweiterung von K in einem festgewählten separablen Abschluss K^{sep} von K. K^{nr} ist wieder ein lokaler Körper und sein diskreter Bewertungsring $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ ist eine strikte Henselisierung von $\mathcal{O}_K$, weshalb wir diesen mit $\mathcal{O}_K^{sh}$ bezeichnen werden.
Wenn wir für abelsche Garben auf dem étalen Situs über $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ die Halme betrachten, verwenden wir die Bezeichnungen $\bar{\eta}$ für einen geometrischen Punkt über $\operatorname{Spec} K$ und $\bar{s}$ für einen geometrischen Punkt über $\operatorname{Spec} k$ und identifizieren den Limes der étalen Umgebungen von $\bar{\eta}$ mit $\operatorname{Spec} K^{sep}$ und den Limes der étalen Umgebungen von $\bar{s}$ mit $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K^{sh}$.

Für eine endliche, separable Erweiterung L/K, welche stets als Teilerweiterung von K^{sep}/K angenommen sei, ist L wieder ein lokaler Körper in obigem Sinn. Die maximale unverzweigte Teilerweiterung von L/K bezeichnen wir mit K_{nr}. Für L betrachten wir das Kompositum L^{nr} von L mit K^{nr}. Dieses Kompositum ist der maximale unverzweigte Abschluss von L in K^{sep}. Die Inertiagruppe (synonym: Trägheitsgruppe) von $\operatorname{Gal}(L/K)$ bezeichnen wir mit $I_{L/K}$. Sie ist der Kern der kanonischen Abbildung $\operatorname{Gal}(L/K) \longrightarrow \operatorname{Aut}_k(l)$. Die Inertiagruppe von $\operatorname{Gal}(K^{sep}/K)$ wird mit I_K bezeichnet. Wenn keine Verwechselungen zu befürchten sind, schreiben für I_K auch nur I.

Für ein Schema S bezeichnen wir die Faser eines S-Schemas T in einem Punkt $s \in S$ mit T_s. Einen Basiswechsel eines Schemas T über einer affinen

Basis Spec R mit einem affinen R-Schema Spec R' schreiben wir aber meist als Tensorprodukt $T \otimes_R R'$. Für ein Spec $\mathcal{O}_K$-Schema $\mathcal{T}$ bezeichnen wir die generische und die spezielle Faser als $\mathcal{T}_K$ resp. $\mathcal{T}_k$. Analog wird ein Basiswechsel von Spec K nach Spec L meist nur mit dem Index $\cdot_L$ angedeutet und wir schreiben für die Weil-Restriktion von Spec R' nach Spec R nur $\mathfrak{R}_{R'/R}(\cdot)$.

Wie üblich bezeichnet $\mathbb{G}_{m,U}$ die multiplikative Gruppe über dem Schema U. Ist U affin, etwa Spec R, so schreiben wir nur $\mathbb{G}_{m,R}$. Für einen algebraischen K-Torus T bezeichnen wir die Charaktergruppe $\mathrm{Hom}_{K^{sep}-Grp}(T_{K^{sep}}, \mathbb{G}_{m,K^{sep}})$ mit $X(T)$. Diese ist ein stetiger Gal (K^{sep}/K)-Modul. Fassen wir die Charaktergruppe als abelsche Garbe auf, so schreiben wir dafür $\underline{X}(T)$. Diese Garbe ist genauer die Garbe der rationalen Charaktere.

Garben sind in dieser Arbeit stets abelsche Garben. Mit dem étalen Situs meinen wir den kleinen étalen Situs wie in [M] II §1 definiert. Der glatte Situs über einem Schema X besteht aus der Kategorie der glatten X-Schemata mit surjektiven Familien von glatten Morphismen als Überdeckungen.

Néron-Modelle werden wir mit kalligraphischen Buchstaben bezeichnen. Ist also S ein Dedekind-Schema und η das Schema der generischen Fasern von S, dann wird das Néron-Modell einer glatten, separierten algebraischen η-Gruppe G_η mit $\mathcal{G}$ bezeichnet. Für einen Punkt $s \in S$ wird die Komponentengruppe des glatten $s = \mathrm{Spec}\, k(s)$-Schemas $\mathcal{G}_s$ mit $\Phi(\mathcal{G}_s)$ bezeichnet.
Wenn G_η sogar kommutativ ist, können wir das Néron-Modell auch als abelsche Garbe auf dem glatten oder étalen Situs über S betrachten. Diese Garbe lässt sich kanonisch mit $j_* G_\eta$ identifizieren, wobei $j : \eta \hookrightarrow S$ die kanonische offene Immersion ist.
Für einen algebraischen K-Torus T werden wir jedoch für die Komponentengruppe $\Phi(\mathcal{T}_k)$ der speziellen Faser des Néron-Modells abkürzend $\Phi(T)$ schreiben. Dies sollte zu keinen Verwirrungen führen können, da ein K-Torus als Schema über K stets zusammenhängend ist.

Einleitung

Sei K ein lokaler Körper, womit wir einen diskret und nicht archimedisch bewerteten vollständigen Körper meinen. [1] In dieser Arbeit werden (lft-)Néron-Modelle von algebraischen K-Tori über $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ untersucht, insbesondere soll deren Komponentengruppe beschrieben werden. Da Komponentengruppen faserweise definiert werden und unter Komplettierung invariant sind, dehnen sich unsere Beschreibungen auch auf globale Néron-Modelle aus, da wir keine Einschränkung an den Restklassenkörper machen.
Unser Interesse an diesem Problem beruht darauf, dass Néron-Modelle von algebraischen Tori zu den Grundbausteinen von Néron-Modellen im Allgemeinen gehören, denn jedes kommutative algebraische K-Gruppenschema lässt sich als sukzessive Extension von Gruppenschemata schreiben, welche abelsche Varietäten, unipotente Gruppenschemata oder Gruppenschemata von multiplikativem Typ sind. Weiterhin tauchen algebraische Tori bei der rigid-analytischen Uniformisierung von abelschen Varietäten auf, weshalb Néron-Modelle von algebraischen Tori auch bei der Beschreibung von Néron-Modellen von abelschen Varietäten hilfreich sein können (s. z.B. [B-X] §5).

Sei also T ein algebraischer K-Torus. Ein Néron-Modell $\mathcal{T}$ von T über $\mathcal{O}_K$ existiert immer und Φ sei die Komponentengruppe der speziellen Faser $\mathcal{T}_k$. Unter der Voraussetzung, dass k perfekt ist, konnte Xavier Xarles in seiner Arbeit [X] eine Beschreibung von Φ angeben. Er zeigte in [X] Thm. 2.1 und [X] Thm. 3.1 natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi,\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{H}^0(I,X)\\
\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi,\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{H}^1(I,X)\\
\Phi &\cong \operatorname{coker}\Big(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(X'^I,\mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^I,\mathbb{Z})\Big) \qquad ,
\end{aligned}$$

[1] In der algebraischen Zahlentheorie und der arithmetrischen Geometrie wird ein lokaler Körper im Allgemeinen restriktiver definiert: Dort wird gefordert, dass der Restklassenkörper k von $\mathcal{O}_K$ perfekt oder sogar endlich ist. Uns interessiert allerdings gerade der Fall, dass k nicht perfekt ist.

wobei X die Charaktergruppe von T ist, I die Inertiagruppe von Gal(K^{sep}/K) und M und X' lassen sich aus einer I-azyklischen und torsionsfreien Auflösung von X bestimmen (s. loc. cit.).
Diese Beschreibung, die Ergebnisse von L. Bégueri ([Be] Thm. 7.2.1 und 7.2.2) verallgemeinert, beweist Xarles mit kohomologischen Methoden. Er fasst das Néron-Modell als Garbe j_*T auf dem étalen und dem glatten Situs über $\mathcal{O}_K$ auf und zeigt, dass $\mathrm{R}^1 j_*T$ als étale Garbe trivial ist und als glatte Garbe im Fall multiplikativer Reduktion trivial ist. Dadurch erhält er aus einer kurzen exakten Sequenz von algebraischen Tori eine kurze exakte Sequenz von deren Néron-Modellen. Auf die Sequenz der Néron-Modelle wendet er den Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ an.
Nun gibt es für $i = 0$ in der étalen Topologie und für $i = 0, 1$ in der glatten Topologie einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}, i_*\mathbb{Z}) \cong \mathrm{R}^i\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}) .$$

So erhält Xarles insgesamt eine lange exakte Sequenz mit den freien Anteilen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$ und den Torsionsanteilen $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$ der Komponentengruppen der betrachteten Tori. Mit solchen Sequenzen kann er seine Beschreibung durch Zurückführung auf den Fall eines Torus T mit multiplikativer Reduktion sowie auf dem Fall $T = \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L})$ beweisen.

Die obige Beschreibung ist für nicht perfekten Restklassenkörper im Allgemeinen nicht mehr gültig. Dies spiegelt sich im Beweisweg von Xarles darin wider, dass für nicht perfekten Restklassenkörper $\mathrm{R}^1 j_*T$ in der étalen Topologie nicht mehr trivial sein muss.
Wir werden in der allgemeinen Situation folgende Aussagen zeigen: Die Beschreibung nach [X] Thm. 3.1 überträgt sich auf algebraische Tori, welche nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfallen. Die Gültigkeit der Beschreibung gemäß [X] Thm. 3.1 ist verträglich mit der Bildung von Weil-Restriktionen bezüglich endlicher separabler Erweiterungen von K. Die Beschreibung des freien Anteils gemäß [X] Thm. 2.1 bleibt gültig für algebraische Tori, welcher nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung zerfallen. Für diese Tori ist die Beschreibung des freien Anteils auch natürlich, sprich mit Homomorphismen verträglich. Der zu p prime Anteil der Komponentengruppe läßt sich allgemein mit [X] Thm. 3.1 beschreiben, d.h. der dort angegebene Isomorphismus gilt in der Kategorie der stetigen $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_K]$-Moduln.
Man kann algebraische Tori konstruieren, die erst nach einer residuell verzweigten Erweiterung zerfallen und Gegenbeispiele zu den Behauptungen von [X] Thm 2.1 liefern. Im Allgemeinen läßt sich der freie Anteil als eine Extension einer endlichen p-Gruppe mit $X(T)^I$ beschreiben. Der Torsionsanteil der Komponentengruppe wird stets von der Ordnung der Trägheitsgruppe einer Zerfällungserweiterung

annulliert. Dieselbe Abschätzung gilt auch für $\mathrm{H}^1(I, X(T))$. Für Norm-Tori bezüglich endlicher, zyklischer galoisscher Erweiterungen wird der Torsionsanteil höchstens kleiner.

Unsere Untersuchungen der Néron-Modelle algebraischer Tori sind wie folgt strukturiert:
Im Kapitel 0 behandeln wir einige Grundlagen. Wir erläutern lokale und globale Néron-Modelle. Wir zeigen, dass man für ein Schema S und ein glattes, kommutatives S-Gruppenschema G die Komponentengruppe einer Faser G_s mit $s \in S$ schon durch die von G und von der Einskomponente G^0 dargestellten Garben auf dem glatten resp. étalen Situs über S bestimmen kann.
Ferner wiederholen wir Definitionen und Eigenschaften von diagonalisierbaren Gruppenschemata und von Gruppenschemata von multiplikativen Typ. Wir betrachten die Cartier-Dualität, mit der wir Weil-Restriktionen von algebraischen Tori auf den Charaktergruppen als Induktion von Galoismoduln beschreiben können. Wir beweisen auch, dass die Cartier-Dualität kurze exakte Sequenzen von torsionsfreien Charaktergruppen in kurze exakte Sequenzen bezüglich der glatten resp. étalen Topologie überführt. Abschließend erläutern wir noch mal ausführlicher den Beweisgang von Xarles [X].
Im Kapitel 1 betrachten wir spezielle algebraische Tori, für die wir die Néron-Modelle ziemlich explizit bestimmen können: Algebraische Tori mit multiplikativer Reduktion lassen sich mit Galois-Descent auf die Konstruktion des Néron-Modells der $\mathbb{G}_{m,K}$ zurückführen. Für Weil-Restriktionen von algebraischen Tori zeigen wir, dass die Weil-Restriktion mit der Bildung der Einskomponente des Néron-Modells verträglich ist, so dass das gleiche für die Komponentengruppe gilt. Schließlich konstruieren wir die spezielle Faser des Néron-Modells eines Norm-Torus bezüglich einer zyklischen, galoisschen Erweiterung von Primzahlgrad. Dies verallgemeinert eine Rechnung aus [L-L] §5 und liefert erste Gegenbeispiele zu einer Verallgemeinerung der Beschreibung aus [X].
Im Kapitel 2 gehen wir zurück in die allgemeine Situation und zeigen, dass die Komponentengruppe eines lokalen Néron-Modells $\mathcal{G}$ einer kommutativen glatten algebraischen K-Gruppe G_K endlich erzeugt ist. Dies beantwortet eine Frage von Lorenzini ([L-L] 1.3). Hierzu zeigen wir, dass wir einer kurzen (in der glatten Topologie über $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$) exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{G}_3 \longrightarrow 0$$

von Néron-Modellen eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Phi} \longrightarrow \Phi((\mathcal{G}_2)_k) \longrightarrow \Phi((\mathcal{G}_3)_k) \longrightarrow 0$$

der Komponentengruppen zuordnen können, wobei $\widetilde{\Phi}$ ein Quotient von $\Phi((\mathcal{G}_1)_k)$ ist. Die Aussage der endlichen Erzeugtheit bekommt man dadurch, dass man die

kurze exakte Sequenz zur Einbettung des maximalen Torus mit multiplikativer Reduktion in G_K betrachtet. Diese induziert eine kurze exakte Sequenz der lft-Néron-Modelle. Mit dem Argument oben ist dann $\Phi(\mathcal{G}_k)$ eine Extension einer endlichen Gruppe mit einer endlich erzeugten torisonsfreien Gruppe, also endlich erzeugt. Mit der Konstruktion des Néron-Modells einer Untergruppe sehen wir, dass in obiger Situation $\widetilde{\Phi}$ ein Quotient nach einer endlichen Untergruppe von $\Phi({(\mathcal{G}_1)}_k)$ sein muss.
In Kapitel 3 befassen wir uns mit integralen Modellen von algebraischen Tori. Dies seien $\mathcal{O}_K$-Modelle von K-Tori, welche flache, separierte $\mathcal{O}_K$-Gruppen sind. Hierunter fällt das ft-Néron-Modell von Chai und Yu ([ChYu]), aber auch das Standard-Modell, welches von Moroz, Voskresenskii, Kunyavskii und Popov betrachtet wird. Um diese Literatur nutzbar zu machen, ordnen wir diese Modelle in die Theorie der Néron-Modelle ein.
Da der Torsionsanteil der Komponentengruppe $\Phi(\mathcal{G}_k)$ der speziellen Faser eines lft- Néron-Modells $\mathcal{G}$ einer kommutativen glatten algebraischen K-Gruppe endlich ist, finden wir eine offene glatte Untergruppe $\mathcal{G}^{ft}$ von endlichem Typ über $\mathcal{O}_K$ in $\mathcal{G}$, welche in der speziellen Faser genau die Zusammenhangskomponenten enthält, die den Torsionsanteil der Komponentengruppe induzieren.
Diese Untergruppe definieren wir als ft-Néron-Modell und zeigen, dass dieses Modell eine Liftungseigenschaft für gewisse étale Punkte besitzt, eine Abbildungseigenschaft ähnlich der Néronschen Abbildungseigenschaft hat und mit étalem Basiswechsel und der Bildung der Weil-Restriktion verträglich ist. Für algebraische Tori stimmt unsere Definition selbstverständlich mit der Definition von Chai und Yu überein.
Das Standard-Modell eines Torus T wird von Voskresenskii et. al. mit dem schematischer Abschluss von T unter der Einbettung

$$T \hookrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \cong \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}^d_{m,L}) \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^d_{m,\mathcal{O}_L})$$

für eine Zerfällungserweiterung L/K von T identifiziert ([V-K-M] §5 Prop. 6). Somit ist dessen Glättung gleich dem ft-Néron-Modell. Mit einer Idee aus [Edi] können wir hieraus ein Kriterium dafür ableiten, wann ein Monomorphismus algebraischer Tori eine abgeschlossene Immersion der Néron-Modelle induziert.
Für einen algebraischen Torus T können wir das ft-Néron-Modell mit der étalen Garbe $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$ identifizieren, wodurch wir ein tieferes Verständnis der Xarlesschen Beschreibung der Tori mit multiplikativer Reduktion erhalten.
Zusammenfassend können wir feststellen, dass die ft-Néron-Modelle schon die Einskomponente und den Torsionsanteil des lft-Néron-Modells beschreiben und somit wegen ihrer prinzipiell leichteren Berechenbarkeit von Nutzen sind.
Nach diesem Exkurs analysieren wir in Kapitel 4 die Garbe R^1j_*T in der étalen und glatten Topologie. Diese Garbe ist stets eine $p = \mathrm{char}(k)$-Torsionsgarbe. Zerfällt T nach einer zahm verzweigten Erweiterung, so gilt $\mathrm{R}^1j_*T = 0$. Als

Ergänzung beschreiben wir die Funktoren j_* und $\mathsf{R}^1 j_*$ für étale Gruppen.
Im Kapitel 5 verallgemeinern wir Ansätze aus [X], [B-X] und [L-L]. Wir zeigen, dass für $i = 0, 1$ in der glatten Topologie

$$\mathsf{R}^i \underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{T}, i_* C) \cong \mathsf{R}^i \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, C)$$

gilt, wenn C eine konstante, torsionsfreie abelsche Garbe ist. In Analogie zu [X] untersuchen wir den torsionsfreien Anteil der Komponentengruppe, den wir nur noch mit einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T)^I \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}) \longrightarrow E(T) \longrightarrow 0$$

beschreiben können, wobei $E(T)$ ein endlich erzeugter p-Torsionsmodul ist, den wir als den Störterm bezeichnen.
Der Störterm lässt sich als Komponentengruppe einer Untergarbe von $\mathsf{R}^1 j_* T'$ für einen geeigneten Torus T' schreiben. Als abelsche Gruppen bleiben $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$ und $X(T)^I$ isomorph, können aber nicht isomorphe Galoismodulstrukturen tragen. Somit sind auch die von Homomorphismen algebraischer Tori induzierten Abbildungen der freien Anteile der Komponentengruppen nur noch über die obigen Sequenzen beschreibbar.
Wir betrachten auch die Möglichkeiten, aus einer exakten Sequenz von Néron-Modellen von algebraischen Tori exakte Sequenzen von Komponentengruppen zu konstruieren. Durch Verfeinerung der Resultate aus dem zweiten Kapitel erhalten wir eine Verallgemeinerung der Beweisidee aus [X] 3.1 und können sowohl die Komponentengruppe von Norm-Tori weiter beschreiben als auch zeigen, dass Störterme für algebraische Tori, welche nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung zerfallen, trivial sind.
Im letzten Kapitel liefern wir soweit möglich eine Beschreibung der Komponentengruppe. Für algebraische Tori T, welche nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfallen, können wir wegen $\mathsf{R}^1 j_* T = 0$ in der glatten Topologie die Resultate aus [X] übertragen. Für algebraische Tori, welche nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung trivialisieren, gilt noch die Beschreibung des freien Anteils. Da in diesem Fall aber das Néron-Modell kein exakter Funktor mehr ist, können wir bislang den endlichen Anteil nur als eine Extension

$$0 \longrightarrow \mathsf{H}^1(I, X(T)) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(\mathsf{R}^1 j_* T'), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

(mit einem geeigneten K-Torus T') schreiben.
Da $\mathsf{R}^1 j_* T$ und $E(T)$ stets p-Torsionsgarben sind, liegt es nahe zu vermuten, dass sich der zu p prime Anteil der Komponentengruppe nicht ändert. Tatsächlich können wir die Beschreibung aus [X] Thm. 3.1 im Allgemeinen in der Kategorie der $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Moduln beweisen, indem wir den Beweis von Xarles mit dem Funktor

$\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$ durchführen.
Allerdings wird in der Kategorie der $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Moduln nicht nur die p-Torsion von Φ annulliert; auch die Isomorphieklassen der Galoisstrukturen werden größer, da nunmehr Isomorphismen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ erlaubt sind.
Mit Hilfe von Norm-Tori geben wir explizite Beispiele von algebraischen Tori an, bei denen der freie Anteil und $X(T)^I$ nicht isomorphe Galoismodulstrukturen tragen.

Für eine vollständige Beschreibung der Komponentengruppe fehlen uns noch Aussagen über den p-Torsionsanteil. Analog zu der Situation bei Néron-Modellen von abelschen Varietäten (s. [ELL] Thm. 1) können wir leider nur zeigen, dass der p-Torsionsanteil von Φ von der p-Ordnung von $I_{L/K}$ für eine Zerfällungserweiterung L/K von T annulliert wird. Dieselbe Abschätzung gilt auch für $\mathrm{H}^1(I, X(T))$. In allen Beispielen, die wir kennen, wird der Torsionsanteil höchstens kleiner.
Dem Autor erscheint folgende Vermutung plausibel: Der Torsionsanteil von Φ wird höchstens kleiner, d.h. er ist isomorph zu $\mathrm{H}^1(I, X(T))/E'$, wobei E' ein p-Torsionsmodul ist. Insbesondere treten Gegenbeispiele zu der Beschreibung aus [X] 3.1 nur bei residueller Verzweigung auf.
Diese Vermutung wäre analog zu Beobachtungen von Dino Lorenzini im Fall von Komponentengruppen von Néron-Modellen von Jakobischen Varietäten.

Abschließend möchte ich mich bei all denen bedanken, durch deren Zutun und Unterstützung diese Arbeit gefördert oder erst möglich wurde. Vor allem gilt mein Dank Herrn Professor Dr. Siegfried Bosch, der meine Arbeit betreute und mir stets aufmunternd und beratend zur Seite stand. Seiner Wertschätzung meiner Arbeit gegenüber verdanke ich es, dass ich meine Arbeit als Angestellter des Sonderforschungsbereiches 478, „Geometrische Strukturen in der Mathematik“ anfertigen konnte. Der deutschen Forschungsgemeinschaft und der Westfälischen Wilhelms-Universität danke ich die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen am Sonderforschungsbereich.
Weiterhin möchte ich mich bei meinem Kollegen und langjährigen Freund, Herrn Dr. Jost Göttker-Schnetmann, für unzählige fachliche Diskussionen bedanken. Auch Herrn Prof. Dr. Dino Lorenzini und Herrn Dr. Sergei Popov möchte ich für anregende fachliche Diskussionen, insbesondere während ihrer Aufenthalte am SFB 478, danken.

Münster, im Dezember 2003

Bernhard Brahm

Kapitel 0

Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige Begriffe und Konstruktionen erläutert, die zur Beschreibung des Néron-Modells eines algebraischen Torus und dessen Komponentengruppe benötigt werden. Wir definieren Néron-Modelle und erläutern die Zusammenhänge zwischen globalen und lokalen Néron-Modellen. Ferner erwähnen wir die wichtigsten Existenzaussagen für Néron-Modelle und lft-Néron-Modelle.
Wir skizzieren die Konstruktion der Komponentengruppe eines glatten Gruppenschemas. Dabei betrachten wir die Komponentengruppe als Schema und, im Fall eines kommutativen Gruppenschemas, auch als glatte und étale Garbe.
Wir definieren Gruppenschemata von multiplikativem Typ, insbesondere also algebraische Tori, und zitieren wichtige Eigenschaften dieser Gruppenschemata. Wir betrachten hier insbesondere die sogenannte Cartier-Dualität: Für ein zusammenhängendes, normales und lokal noethersches Schema S mit einem geometrischen Punkt $\bar{s}$ induziert die Cartier-Dualität eine Antiäquivalenz zwischen der Kategorie der algebraischen S-Tori und den stetigen, endlich erzeugten und torsionsfreien $\pi_1(S, \bar{s})$-Moduln.
Für den Fall, dass die Basis S das Spektrum eines Körpers ist, zeigen wir, dass durch Cartier-Dualität der Funktor der Weil-Restriktion in die Induktion von π_1-Moduln überführt wird. Mit Hilfe der Cartier-Dualität konstruieren wir in der glatten und étalen Topologie exakte Sequenzen von algebraischen Tori, die später bei der Bestimmung der Komponentengruppe benötigt werden.
Abschließend geben wir einen Überblick über die Arbeit [X], in der die Komponentengruppe des Néron-Modells eines algebraischen Torus im Fall eines lokalen Körpers mit perfektem Restklassenkörper beschrieben wird.

0.1 Néron-Modelle

Sei S ein Dedekind-Schema, das heißt, ein noethersches, normales Schema der Dimension ≤ 1. Die lokalen Ringe von S sind Körper oder diskrete Bewertungsringe. Wenn S selbst ein lokales Schema, also das Spektrum eines lokalen Ringes ist, so sprechen wir vom lokalen Fall, ansonsten sprechen wir vom globalen Fall. S zerfällt in endlich viele irreduzible Komponenten S_i, deren generische Punkte mit η_i bezeichnet seien. Wir nennen $\eta := \mathrm{Spec}\,(\oplus k(\eta_i))$ das Schema der generischen Punkte von S. Nach Definition haben wir eine offene Immersion $j : \eta \hookrightarrow S$. Mit diesen Notationen können wir ein lft-Néron-Modell definieren:

0.1.1 Definition. *Sei G_η ein glattes, separiertes η-Schema von endlichem Typ. Ein Néron-Modell von G_η ist ein S-Modell $\mathcal{G}$ von G_η, das glatt, separiert und von endlichem Typ ist und die folgende Eigenschaft, genannt Néronsche Abbildungseigenschaft, erfüllt:*
Für alle glatten S-Schemata Y und jeden η-Morphismus $\phi_\eta : Y_\eta \longrightarrow G_\eta$ gibt es genau einen S-Morphismus $\phi : Y \longrightarrow \mathcal{G}$, welcher ϕ_η fortsetzt.
Ein S-Modell $\mathcal{G}$ von G_η, das die Néronsche Abbildungseigenschaft erfüllt, separiert und glatt (also nur lokal von endlichem Typ) ist, heißt lft-Néron-Modell von G_η.

Ein Néron-Modell im lokalen Fall werden wir auch als lokales Néron-Modell bezeichnen. Analog sprechen wir im globalen Fall von globalen Néron-Modellen. Mit [BLR] Prop. 1.2.4 folgt, dass sich globale Néron-Modelle aus lokalen Néron-Modellen zusammensetzen. Genauer ist für jeden abgeschlossenen Punkt $s \in S$ das $\mathcal{O}_{S,s}$-Schema $\mathcal{G} \times_S \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{S,s}$ ein Néron-Modell seiner generischen Faser. Zum anderen besagt [BLR] Prop. 1.4.1, dass genau dann ein globales Néron-Modell existiert, wenn für ein offenes, dichtes Unterschema $S' \subset S$ ein (globales) Néron-Modell existiert und für die endlich vielen abgeschlossenen Punkte aus $S - S'$ die (lokalen) Néron-Modelle existieren. Durch Verkleben dieser Modelle erhält man dann das Néron-Modell über S.
Im Fall eines η-Gruppenschemas G_η ist wegen der Eindeutigkeit der Liftung das Néron-Modell ein S-Gruppenschema. Ein glattes, kommutatives Gruppenschema G_η lässt sich als Garbe auf dem glatten und dem étalen Situs über η auffassen und dessen Néron-Modell stellt, sofern es existiert, die Garbe j_*G_η auf dem glatten und dem étalen Situs über S dar. Im Fall des glatten Situs ist das Néron-Modell als Schema eindeutig durch diese Garbe bestimmt, da das Néron-Modell als glattes Schema im Situs enthalten ist.
Wir werden uns in dieser Arbeit auf lokale lft-Néron-Modelle beschränken, genauer betrachten wir den Fall, dass $\eta = \mathrm{Spec}\,K$ ist für einen lokalen Körper K

und fassen η als die generische Faser von $S := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ auf. Im lokalen Fall ist bekannt, unter welchen Bedingungen Néron-Modelle existieren.

0.1.2 Theorem. *([BLR] Thm.1.3.1) Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und strikter Henselisierung R^{sh}. Sei K^{nr} der Quotientenkörper von R^{sh}. Sei G_K ein glattes Spec K-Gruppenschema von endlichem Typ. Dann existiert ein Néron-Modell $\mathcal{G}$ von G_K über Spec R genau dann, wenn $G_K(K^{nr})$ beschränkt in G_K ist.*

Somit existieren Néron-Modelle stets für glatte K-Gruppenschemata, die eigentlich sind, also z.B. für abelsche Varietäten. Bei diesem Theorem ist die Einschränkung auf Modelle von endlichem Typ sehr wichtig. Für lft-Néron-Modelle ist eine umfassende Lösung der Existenzfrage bisher nur für kommutative Gruppenschemata gelungen:
Man kann ein lft-Néron-Modell für die multiplikative Gruppe $\mathbb{G}_{m,K}$ explizit konstruieren (vgl. [BLR] Exp. 10.1.5) und zeigen, dass die additive Gruppe $\mathbb{G}_{a,K}$ kein Néron-Modell haben kann ([BLR] Prop. 10.1.8). Mit Descent und einer expliziten Betrachtung von anisotropen Tori und gewundenen unipotenten Gruppen sieht man dann, dass ein glattes, kommutatives K-Gruppenschema G_K von endlichem Typ genau dann ein lft-Néron-Modell über $\mathcal{O}_K$ besitzt, wenn $G_K \otimes_K K^{nr}$ keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$ besitzt ([BLR] Thm. 10.2.2). Dieses lft-Néron-Modell ist von endlichem Typ, also ein Néron-Modell, falls $G_K \otimes_K K^{nr}$ zusätzlich keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{m,K^{nr}}$ besitzt ([BLR] Thm. 10.2.1).
Hierbei ist eine Untergruppe U von G_K stets eine abgeschlossene Untergruppe, denn eine Untergruppe ist als Unterschema ein offener Teil in einem abgeschlossenen Unterschema. Somit ist U auch ein offener Teil in seinem Abschluss $\overline{U}$. Dieser ist wieder eine Untergruppe von G_K. Nun ist aber über einem Körper eine offene Untergruppe schon abgeschlossen, so dass $U = \overline{U}$ folgt.

0.2 Die Einskomponente und die Komponentengruppe eines glatten Schemas

In [SGA 3] Exp. VIa und VIb wird die Einskomponente eines glatten Gruppenschemas definiert. Sei dazu S ein Schema und G ein S-Gruppenschema. Die Einskomponente von G^0 wird mit [SGA 3] Exp. VIb Def. 3.1 als Untergruppenfunktor

$$U/S \quad \rightsquigarrow \quad G^0(U) := \{u \in G(U) | \forall s \in S \; u_s(U_s) \subset G_s^0\}$$

definiert, wobei G_s^0 die Einskomponente von $G_s := G \times_S \operatorname{Spec} k(s)$ als $k(s)$-Gruppenschema ist (vgl. [SGA 3] Exp. VIa §2).

Falls G ein glattes S-Gruppenschema ist, folgt mit [SGA 3] Exp. VIb Thm. 3.10, dass G^0 von einer offenen und glatten Untergruppe dargestellt wird. Diese ist die Vereinigung der Einskomponenten der Fasern und ist von endlichem Typ über S (s. loc. cit. 3.4 - 3.6). Die Einskomponente ist fasernweise geometrisch irreduzibel ([SGA 3] Exp. VIa Prop. 2.4), d.h. alle Fasern G_s^0 sind geometrisch irreduzibel.
Sei nun $s \in S$ ein Punkt. In der Faser über s existiert die Komponentengruppe von G_s, also der Quotient $\Phi(G_s) := G_s/G_s^0$. $\Phi(G_s)$ wird von einem étalen $k(s)$-Schema dargestellt ([SGA 3] Exp. VIa 5.5). Der zugehörige Morphismus $G_s \longrightarrow \Phi(G_s)$ ist flach und surjektiv ([SGA 3] Exp. VIa Thm. 3.2).
Dieser Quotient lässt sich schon in der glatten und der étalen Topologie beschreiben, sofern wir kommutative Gruppenschemata G betrachten:
Ist G kommutativ, so kann man auf dem glatten Situs über S eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow \Phi(G) \longrightarrow 0 \qquad 0.2$$

von abelschen Garben betrachten. Für einen Punkt $i : s \hookrightarrow S$ ist i^* ein exakter Funktor, da im glatten Situs Differenzkerne existieren (vgl. [M] II 1.13 und 2.6). Mit [M] II 3.1 d) werden i^*G^0 und i^*G von G_s^0 resp. G_s dargestellt, da G^0 und G glatte Gruppenschemata sind. Somit erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow G_s^0 \longrightarrow G_s \longrightarrow i^*\Phi(G) \longrightarrow 0\ .$$

In der fpqc-Topologie wird der Quotient G_s/G_s^0 von dem étalen Gruppenschema $\Phi(G_s)$ dargestellt. Die Einschränkung von der fpqc-Topologie auf die glatte Topologie ist linksexakt, so dass $i^*\Phi(G)$ eine Untergarbe von $\Phi(G_s)$ ist. Andererseits ist G_s^0 ein glattes Schema, so dass der Morphismus $G_s \longrightarrow \Phi(G_s)$ in der glatten Topologie surjektiv ist. Damit folgt $\Phi(G_s) \cong i^*\Phi(G)$.
Wir betrachten nun die Sequenz 0.2 über dem étalen Situs. Genau wie im glatten Fall ist i^* exakt. Wir faktorisieren i in $s \xhookrightarrow{i_s} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{S,s} \xhookrightarrow{i_S} S$. Mit [M] II 3.1 d) haben wir eine kanonische Abbildung $i_S^*G \longrightarrow G_{\mathcal{O}_{S,s}}$, die von der Abbildung

$$i_S^p G \longrightarrow G_{\mathcal{O}_{S,s}}$$

$$(f,g) = (f \in G(U), g : U' \to U) \longmapsto fg \in G(U') = G_{\mathcal{O}_{S,s}}(U')$$

induziert wird, wobei $U'/\mathcal{O}_{S,s}$ und U/S endliche étale Morphismen seien.
Für einen Schnitt $f : U' \longrightarrow G_{\mathcal{O}_{S,s}}$ gibt es mit [EGA IV] 8.8.2 (o. [BLR] 1.2.5) eine offene Umgebung $S' \subset S$ von s auf der eine Liftung $\widetilde{f} : \widetilde{U} \longrightarrow G_{S'}$ von f mit $\widetilde{U}/S'$ étale existiert. Umgekehrt muss für ein Paar $(f \in G(U), g : U' \longrightarrow U)$ mit $fg = 0 \in G_{\mathcal{O}_{S,s}}(U')$ schon eine offene Umgebung $S' \subset S$ von s existieren, so dass $f|_{S'} = 0$ gilt. Damit wird i_S^*G von $G_{\mathcal{O}_{S,s}}$ und analog $i_S^*G^0$

von $G^0_{\mathcal{O}_{S,s}}$ dargestellt.
Mit dem kanonischen Morphismus aus [M] II 3.1 d) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & i_s^*G^0_{\mathcal{O}_{S,s}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & i_s^*G_{\mathcal{O}_{S,s}} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & i^*\Phi(G) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G_s^0 \arrow[r] & G_s \arrow[r] & \Phi(G_s) \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Die untere Zeile ist als Einschränkung einer fpqc-exakten Sequenz linksexakt. Die Surjektivität von $G_s \longrightarrow \Phi(G_s)$ kann man auf dem Halm in $\bar{s}$ testen. Für eine Garbe, die von einem $k(s)$-Gruppenschema von endlichem Typ dargestellt wird, entspricht mit [M] II 2.9 d) der Halm in $\bar{s}$ den $k(s)^{sep}$-wertigen Punkten dieses Schemas. Das Bild eines Punktes $x \in \Phi(G_s)(k(s)^{sep})$ in $\Phi(G_s)$ hat ein offenes Urbild U_x in G_s, das nicht leer ist, da $G_s \longrightarrow \Phi(G_s)$ surjektiv ist.
Da U_x glatt über $k(s)$ ist, ist $U_x(k(s)^{sep})$ dicht in U_x ([BLR] 2.2.13) und damit ist $U_x(k^{sep})$ nicht leer. Da wir nach endlichem étalem Basiswechsel annehmen können, dass das Bild von x in G_s geometrisch zusammenhängend ist, muss es in $U_x(k^{sep})$ ein Urbild von x geben.
Mit [M] II Thm. 3.2 gilt für die Halme in $\bar{s}$:

$$G_{\bar{s}} = G(\mathcal{O}^{sh}_{S,s}) = (i_s^*G)_{\bar{s}} \text{ und } G^0_{\bar{s}} = G^0(\mathcal{O}^{sh}_{S,s}) = (i_s^*G^0)_{\bar{s}}\,.$$

Mit [BLR] 2.3.5 sind die Morphismen $G(\mathcal{O}^{sh}_{S,s}) = G_{\mathcal{O}^{sh}_{S,s}}(\mathcal{O}^{sh}_{S,s}) \longrightarrow G_s(k(s)^{sep})$ und $G^0(\mathcal{O}^{sh}_{S,s}) = G^0_{\mathcal{O}^{sh}_{S,s}}(\mathcal{O}^{sh}_{S,s}) \longrightarrow G^0_s(k(s)^{sep})$ surjektiv, womit in obigem Diagramm die Abbildungen α und β surjektiv sind.
Somit existiert eine Abbildung $i^*\Phi(G) \longrightarrow \Phi(G_s)$ und diese ist surjektiv wegen der Surjektivität von β und injektiv wegen der Surjektivität von α. Damit gilt also $\Phi(G_s) \cong i^*\Phi(G)$.
Zusammenfassend erhalten wir den Satz:

0.2.1 Satz. *Sei S ein Dedekind-Schema und G ein kommutatives, glattes S-Gruppenschema. Sei $i : s \hookrightarrow S$ ein Punkt, dann stellt das Gruppenschema $\Phi(G_s)$ der Komponenten von G_s die Garbe $i^*(G/G^0)$ auf dem glatten und dem étalen Situs über $k(s)$ dar und ist durch diese Garben eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Darstellungsaussage haben wir oben gezeigt. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Komponentengruppe durch die Garbe eindeutig bestimmt ist.
In der glatten Topologie ist dies klar, weil $\Phi(G_s)$ im glatten Situs über $k(s)$ enthalten ist. $\Phi(G_s)$ ist im Allgemeinen aber nicht endlich, so dass $\Phi(G_s)$ im

Allgemeinen nicht im étalen Situs über $k(s)$ liegt. Als étales Schema ist $\Phi(G_s)$ aber eineindeutig durch den Gal $(k(s)^{sep}/k(s))$-Modul $\Phi(G_s)(k(s)^{sep})$ bestimmt und dieser ist mit [M] II Thm. 1.9 eineindeutig durch die von $\Phi(G_s)$ dargestellte étale Garbe bestimmt. □

In dieser Arbeit werden wir eine Komponentengruppe zumeist als Galoismodul auffassen. Für unsere Untersuchungen müssen wir die Komponentengruppe in einen Torsionsanteil und einen torsionsfreien Anteil zerlegen. Da wir später sehen werden, dass die Komponentengruppen von Néron-Modellen stets endlich erzeugte Moduln sind, genügen die folgenden Überlegungen:
Sei also Γ eine kompakte, proendliche topologische Gruppe und Φ ein endlich erzeugter Γ-Modul. Wenn man Φ in einen torsionsfreien Anteil und einen Torsionsanteil zerlegen möchte, so muss dies unter Berücksichtigung der Γ-Modulstruktur erfolgen. Dazu kann man wie Xarles den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z})$ benutzen und den torsionsfreien Anteil mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$ und den Torsionsanteil mit $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$ identifizieren. Dabei trägt $\mathbb{Z}$ natürlich die triviale Γ-Modulstruktur und für zwei Γ-Moduln A und B ist auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ die Γ-Modulstruktur durch

$$\sigma \cdot f := \rho_B(\sigma) \circ f \circ \rho_A(\sigma^{-1})$$

erklärt, wobei $\sigma \in \Gamma$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ seien und $\rho_.$ die Γ-Operation als Darstellung $\rho_. : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\cdot)$ bezeichnet.
Die Operation auf $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$ erklärt sich analog, da man Ext über eine injektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ berechnen kann. Da Φ endlich erzeugt ist, sind die so konstruierten Moduln wieder endlich erzeugt und stetig.
Wie Xarles in [X] Lem. 2.17 zeigt, kann man diese Anteile nochmals Dualisieren und findet eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow \Phi \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 .$$

Diese Sequenz kann man auch so verstehen, dass man den Torsionsanteil $\mathrm{Tors}(\Phi)$ von Φ als abelscher Gruppe betrachtet. Dieser ist schon ein Γ-Untermodul, denn die Automorphismen, mit denen Γ operiert, müssen sich zu Automorphismen des Torsionsanteils einschränken. Definiert man den Torsionsanteil so, dann kann man den torsionsfreien Anteil als den Quotienten von Φ nach seinem Torsionsanteil definieren.

0.3 Algebraische Tori

Sei S ein Schema und G ein S-Gruppenfunktor von der Kategorie der Schemata über S in die Kategorie der Mengen. Man betrachte den kontravarianten Funktor

$$\begin{array}{lclcl} D & : & (S - \text{Gruppenfunktoren}) & \rightsquigarrow & (\text{kommutative } S - \text{Gruppenfunktoren}) \\ & & G & \rightsquigarrow & D(G) := \underline{\mathsf{Hom}}_{S-Grp}(G, \mathbb{G}_{m,S}). \end{array}$$

$D(G)$ wird als das Dual (oder Cartier-Dual) von G bezeichnet und für ein S-Schema Y gilt per Definition $D(G)(Y) := \mathsf{Hom}_{Y-Grp}(G_Y, \mathbb{G}_{m,Y})$. Das Dual ist verträglich mit Basiswechsel mit Schemamorphismen $S' \longrightarrow S$.
Für eine beliebige Gruppe M und ein beliebiges S-Schema X sei M_X das konstante X-Gruppenschema zu M. Dieses ist als Schema gleich $\amalg_{m\in M} X_m$ mit Kopien $(X_m)_{m\in M}$ von X. Für ein X-Schema Y ist $\mathsf{Hom}_X(Y, M_X)$ gleich der Menge der lokalkonstanten Abbildungen von Y nach M. Wenn M eine abelsche Gruppe ist, wird der Funktor $D(M_S)$ von einem S-Gruppenschema dargestellt.

0.3.1 Definition ([SGA 3] Exp. VIII Def. 1.1). *Ein S-Gruppenschema G heißt diagonalisierbar, wenn es eine abelsche Gruppe M gibt, so dass G isomorph zu dem Schema $D(M_S) = \underline{\mathsf{Hom}}_{S-Grp}(M_S, \mathbb{G}_{m,S})$ ist.*

Für ein diagonalisierbares Schema berechnen sich die Punkte mit Werten in einem S-Schema Y als

$$\begin{aligned} D(M_S)(Y) &= \mathsf{Hom}_S(Y, D(M_S)) = \mathsf{Hom}_S(Y, \underline{\mathsf{Hom}}_{S-Grp}(M_S, \mathbb{G}_{m,S})) \\ &= \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathsf{Hom}_S(Y, \mathbb{G}_{m,Y})) \ . \end{aligned}$$

0.3.2 Theorem ([SGA 3] Exp. VIII Thm 1.2, Kor. 1.3 und Kor. 1.4).
Sei M eine abelsche Gruppe und S ein Schema.
Der kanonische Morphismus $M_S \longrightarrow D(D(M_S))$ ist ein Isomorphismus und jeder Charakter $\chi : D(M_S) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S}$ entspricht eineindeutig einer lokalkonstanten Abbildung $S \longrightarrow M$.
Ist N eine weitere abelsche Gruppe, dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathit{Hom}_{S-Grp}(D(M_S), D(N_S)) \cong \mathit{Hom}_{S-Grp}(N_S, M_S) \ .$$

Falls N endlich erzeugt ist, dann ist die natürliche Injektion

$$(\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, M))_S \hookrightarrow \underline{\mathit{Hom}}_{S-Grp}(N_S, M_S)$$

ebenfalls ein Isomorphismus und damit gilt

$$(\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, M))_S \cong \underline{\mathit{Hom}}_{S-Grp}(D(N_S), D(M_S)) \ .$$

0.3.3 Satz (vgl. [SGA 3] Exp. VIII Prop. 2.1). *Sei M eine beliebige abelsche Gruppe, dann gelten :*

1. *Das Schema $D(M_S)$ ist stets treuflach und affin über S, genauer gilt $D(M_S) = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_S[M]$.*
2. *$D(M_S)$ ist von endlicher Präsentation $\Leftrightarrow$ $D(M_S)$ ist von endlichem Typ $\Leftrightarrow$ M ist endlich erzeugt.*
3. *$D(M_S)$ ist endlich $\Leftrightarrow$ M ist endlich.*
4. *$M = 0 \Leftrightarrow D(M_S)$ ist die triviale Gruppe.*
5. *$D(M_S)$ ist ein glattes S-Schema $\Leftrightarrow$ M ist endlich erzeugt und alle Charakteristiken der Körper $k(s)$ für Punkte $s \in S$ sind prim zu der Ordnung des Torsionsanteils von M.*

Der Funktor $D(\cdot_S)$ überführt direkte Summen in Faserprodukte über S und es gilt $D(\mathbb{Z}_S) = \mathbb{G}_{m,S}$ sowie $D((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S) = \mu_{n,S}$, also ist jede diagonalisierbare Gruppe von endlicher Präsentation ein Faserprodukt aus Kopien der multiplikativen Gruppe und Kopien von Gruppen von Einheitswurzeln.

0.3.4 Theorem ([SGA 3] Exp. VIII 3.1). *Sei S ein Schema und*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen, dann ist das Dual dieser Sequenz exakt in dem Sinne, dass für die transponierte Sequenz

$$0 \longrightarrow D(M''_S) \xrightarrow{v'} D(M_S) \xrightarrow{u'} D(M'_S) \longrightarrow 0$$

gilt, dass u' treuflach und quasikompakt ist und v' einen Isomorphismus von $D(M''_S)$ mit dem Kern von u' induziert.

Mit Hilfe der Descent-Theorie kann man die Kategorie der diagonalisierbaren Gruppenschemata zu der Kategorie der Gruppenschemata von multiplikativem Typ erweitern. Dies sind die Gruppenschemata, welche durch treuflachen, quasikompakten Descent aus einem diagonalisierbaren Gruppenschema hervorgehen.

0.3.5 Definition (vgl. [SGA 3] Exp. IX 1.1). *Sei S ein Schema und G ein S-Gruppenschema, dann heißt G Gruppenschema von multiplikativem Typ, falls G in der treuflachen, quasikompakten Topologie lokal diagonalisierbar ist, d.h. für jedes $s \in S$ existiert eine offene Umgebung U in S und ein treuflacher, quasikompakter $S-$Morphismus $U' \longrightarrow U$, so dass $G_{U'}$ ein diagonalisierbares*

U'-Schema ist.
G heißt quasi-isotrivial, falls man sogar $U' \longrightarrow U$ étale und surjektiv verlangen kann. Existiert sogar ein étaler, surjektiver und endlicher Morphismus $S' \longrightarrow S$, so dass $G_{S'}$ diagonalisierbar ist, dann heißt G isotrivial von multiplikativem Typ.

0.3.6 Definition (vgl. [SGA 3] Exp. IX 1.3). *Sei S ein Schema. Ein S-Torus T ist ein S-Gruppenschema, das lokal in der treuflachen, quasikompakten Topologie isomorph zu Gruppen der Form $\mathbb{G}_m^r$ mit $r \in \mathbb{N}$ ist.*

Unter einem algebraischen S-Torus T werden wir stets einen isotrivialen (!) Torus von endlichem Typ über der Basis verstehen. Da wir als Basis S nur Körper oder diskrete Bewertungsringe betrachten werden, ist die Isotrivialität keine (echte) Einschränkung:

0.3.7 Satz ([SGA 3] Exp. X 5.16). *Sei S ein normales, lokal noethersches Schema. Dann ist jede Gruppe von multiplikativem Typ und von endlichem Typ über S schon isotrivial.*

Die isotrivialen Gruppenschemata von multiplikativem Typ lassen sich mit der Theorie des Galois-Descent beschreiben. Dazu definieren wir zunächst, was ein galoisscher Morphismus sein soll.

0.3.8 Definition ([M] I §5). *Sei G eine endliche Gruppe und Y und X zusammenhängende Schemata. Es bezeichne G_Y das konstante Y-Gruppenschema zu G. Ein Schemamorphismus $Y \longrightarrow X$ heißt galoissch mit Galoisgruppe G, wenn er endlich und treuflach ist und G auf $Y \longrightarrow X$ mit trivialer Operation auf X operiert und dabei einen Isomorphismus*

$$\psi : G_Y = \amalg_{\sigma \in G} Y_\sigma \longrightarrow Y \times_X Y$$
$$\psi|_{Y_\sigma} = y \longmapsto (y, \sigma y)$$

induziert. Mit anderen Worten ist dann Y ein G-Torsor über X und der Morphismus $Y \longrightarrow X$ ist notwendigerweise étale.

Für ein zusammenhängendes Schema S mit einem geometrischen Punkt $\bar{s} \longrightarrow S$ kann man die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, \bar{s})$ konstruieren. Sie ist eine kompakte topologische Gruppe, die projektiver Limes endlicher diskreter Gruppen ist. Die Fundamentalgruppe lässt sich dadurch charakterisieren, dass sie eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der endlichen, étalen S-Schemata und der Kategorie der endlichen stetigen $\pi_1(S, \bar{s})$-Moduln induziert ([M] I §5, insb Thm. 5.3).

0.3.9 Satz ([SGA 3] Exp. X 1.2). *Sei S ein zusammenhängendes Schema und $\bar{s} \longrightarrow S$ ein geometrischer Punkt von S. Dann ist die Kategorie der isotrivialen S-Gruppenschemata von multiplikativem Typ antiäquivalent zu der Kategorie der stetigen $\pi_1(S, \bar{s})$-Moduln.*

Bei dieser Antiäquivalenz wird einem isotrivialen Gruppenschema vom multiplikativem Typ seine Charaktergruppe zugeordnet:

0.3.10 Definition (Charaktergruppe). *Sei S ein zusammenhängendes Schema und $\bar{s}$ ein geometrischer Punkt von S. Sei T ein isotriviales $S-$Gruppenschema von multiplikativem Typ und von endlichem Typ. Dann heißt der $\pi_1(S,\bar{s})$-Modul $X_{\bar{s}}(T) :=$ Hom$_{\bar{s}-Grp}(T_{\bar{s}}, \mathbb{G}_{m,\bar{s}})$ die Charaktergruppe von T.*
Weiterhin bezeichnet man für einen Schemamorphismus $S' \longrightarrow S$ die Gruppe Hom$_{S'-Grp}(T_{S'}, \mathbb{G}_{m,S'})$ als die S'-rationalen Charaktere von T, sowie $\underline{X}(T) :=$ $\underline{\text{Hom}}_{S-Grp}(T, \mathbb{G}_{m,S})$ als die Garbe der rationalen Charaktere.

Die Charaktergruppe eines algebraischen Torus ist ein endlich erzeugter, torsionsfreier und stetiger $\pi_1(S,\bar{s})$-Modul. Da auch die Gruppenstruktur auf T durch Galois-Descent entsteht, gilt $\underline{X}(T)(S') = X_{\bar{s}}(T)^{\pi_1(S',\bar{s}')}$, insbesondere ist also die Garbe der rationalen Charaktere tatsächlich eine Garbe auf dem étalen Situs über S.
Ist T ein isotriviales S-Gruppenschema von multiplikativem Typ, so heißt eine galoissche Erweiterung $S' \longrightarrow S$, nach der T diagonalisierbar ist, eine Zerfällungserweiterung von T.
Wir wollen nun mit Hilfe der Charaktergruppe Sequenzen von algebraischen Tori konstruieren, die als Sequenzen von Garben auf dem étalen resp. glatten Situs exakt sind.

0.3.11 Satz. *Sei S ein zusammenhängendes Schema mit einem geometrischem Punkt $\bar{s}$ und $(T_i)_{i=1,2,3}$ seien isotriviale S-Gruppenschemata von multiplikativem Typ. Wenn eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow X_{\bar{s}}(T_3) \longrightarrow X_{\bar{s}}(T_2) \longrightarrow X_{\bar{s}}(T_1) \longrightarrow 0$$

der Charaktergruppen als $\pi_1(S,\bar{s})$-Moduln existiert und $X_{\bar{s}}(T_3)$ endlich erzeugt und torsionsfrei ist, dann ist die davon induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz abelscher Garben auf dem glatten und auf dem étalen Situs über S.

Beweis. Wegen der Antiäquivalenz induzieren die Abbildungen der Charaktergruppen Gruppenschemahomomorphismen $T_1 \longrightarrow T_2$ und $T_2 \longrightarrow T_3$ und diese induzieren Morphismen der zugehörigen étalen resp. glatten Garben.
Wegen der Isotrivialität gibt es eine endliche, étale und surjektive Abbildung $S' \longrightarrow S$, so dass alle $T_i \times_S S'$ diagonalisierbare Gruppenschemata sind. Ohne Einschränkung sei dabei S' zusammenhängend.

Auch nach dem Basiswechsel werden die Abbildungen $T_i \times_S S' \longrightarrow T_{i+1} \times_S S'$ von den Charaktergruppen (als $\pi_1(S', \bar{s}')$-Moduln mit trivialer Operation) beschrieben. Mit dem Satz [SGA 3] Exp. VIII 3.1 folgt, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow T_1 \times_S S' \longrightarrow T_2 \times_S S' \longrightarrow T_3 \times_S S' \longrightarrow 0$$

exakt in $fpqc$-Topologie über S' ist. Somit ist sie in der glatten und der étalen Topologie zumindest linksexakt. Wegen der Voraussetzungen, dass $X_{\bar{s}}(T_1)$ endlich erzeugt und torsionsfrei ist, ist T_1 ein glattes S'-Schema, weshalb die Abbildung $T_2 \longrightarrow T_3$ in der glatten Topologie surjektiv ist.
In der étalen Topologie rechnen wir die Surjektivität auf den Halmen nach. Sei also $s' \in S'$ ein Punkt und $\bar{s}'$ ein geometrischer Punkt, der über s' faktorisiert. Nun sei $\mathcal{O}_{S',\bar{s}'} = \mathcal{O}^{sh}_{S',s'}$ der Limes aller étalen Umgebungen von $\bar{s}'$. Dann ist die Sequenz der Halme in $\bar{s}'$ mit [M] II 2.9 d) isomorph zu der Sequenz

$$0 \longrightarrow T_1(\mathcal{O}_{S',\bar{s}'}) \longrightarrow T_2(\mathcal{O}_{S',\bar{s}'}) \longrightarrow T_3(\mathcal{O}_{S',\bar{s}'})$$

und diese ist mit Cartier-Dualität isomorph zu der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\bar{s}}(T_1), \mathcal{O}^*_{S',\bar{s}'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\bar{s}}(T_2), \mathcal{O}^*_{S',\bar{s}'}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\bar{s}}(T_3), \mathcal{O}^*_{S',\bar{s}'}) \,.$$

Da die Sequenz der Charaktergruppen exakt war und $X_{\bar{s}'}(T_1)$ torsionsfrei ist, ist $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(X_{\bar{s}'}(T_1), \mathcal{O}^*_{S',\bar{s}'}) = 0$ und damit ist die Sequenz der Halme surjektiv bei $T_3(\mathcal{O}_{S',\bar{s}'})$.
Da $S' \longrightarrow S$ in der étalen und in der glatten Topologie eine Überdeckung ist, ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 0$$

auch auf den entsprechenden Siten über S exakt. □

0.3.12 Satz. *Sei S ein zusammenhängendes Schema mit einem geometrischen Punkt $\bar{s}$. Sei T ein isotrivialer algebraischer S-Torus, dann gilt auf dem étalen Situs über S:*

$$\mathit{Hom}_S(\cdot, T) \cong \underline{\mathit{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,S}) \,,$$

wobei $\underline{X}(T)$ die Garbe der rationalen Charaktere von T ist.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass T nach Erweiterung mit einem galoisschen Morphismus $S' \longrightarrow S$ diagonalisierbar ist. Wir können die Isomorphie lokal nachrechnen, also sei $U = \mathrm{Spec}\, A$ affin und $U \longrightarrow S$ endlich und étale. Ferner sei U' eine Zusammenhangskomponente von $U \times_S S'$. Wir können U' als affin ($U' = \mathrm{Spec}\, B$) und galoissch über U annehmen.
Nun ist T über U' diagonalisierbar, so dass $T_{U'} = \mathrm{Spec}\, B[X_{\bar{s}}(T)]$ gilt und T_U geht

aus $T_{U'}$ durch Galois-Descent bezüglich der endlichen Gruppe Gal (U'/U) hervor. Genauer operiert Gal (U'/U) auf der Algebra $B[X_{\bar{s}}(T)]$ mit der kanonischen Operation auf B und der induzierten Operation auf $X_{\bar{s}}(T)$. Dazu beachte man, dass Gal (U'/U) ein Quotient von Gal (S'/S) ist.
Somit gilt

$$\begin{aligned} T(U) = T_U(U) &= T_{U'}(U')^{\mathsf{Gal}\,(U'/U)} \\ &= \mathsf{Hom}_B\,(B[X_{\bar{s}}(T)], B)^{\mathsf{Gal}\,(U'/U)} = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X_{\bar{s}}(T), B^*)^{\mathsf{Gal}\,(U'/U)}\ . \end{aligned}$$

Umgekehrt gilt $\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,S})(U') = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X_{\bar{s}}(T), B^*)$, da für jede Garbe $\mathcal{F}$ die Identität $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{Z}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ gilt, wobei $\mathbb{Z}$ für die konstante Garbe $\mathbb{Z}$ stehe. Da $U' \longrightarrow U$ eine galoissche Überdeckung ist, folgt aus der Garbenbedingung, also der Exaktheit der Sequenz

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,S})(U) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,S})(U') \rightrightarrows \underline{\mathsf{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,S})(U' \times_U U'),$$

die Isomorphie $\underline{\mathsf{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,S})(U) \cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X_{\bar{s}}(T), B^*)^{\mathsf{Gal}\,(U'/U)}$.
Nach Definition der diagonalisierbaren Gruppenschemata sind diese Isomorphismen funktoriell in U' und demnach auch funktoriell in U. □

Die umgekehrte Dualität gilt übrigens nicht: Man betrachte dazu einen perfekten lokalen Körper K der Charakteristik p. Nun wird mit [M] III 1.7 c) die Garbe $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathbb{G}_{m,K}, \mathbb{G}_{m,K})$ auf dem étalen Situs über K von dem Modul

$$M := \bigcup_H \mathsf{Hom}_H\,(K^{sep*}, K^{sep*})$$

dargestellt, wobei H alle offenen Normalteiler von Gal (K^{sep}/K) durchläuft. Würde die umgekehrte Dualität gelten, so müsste $M = \mathbb{Z}$ folgen. Wegen der Perfektheit von K und der Charakteristik von K, gibt es zu jedem $x \in K^{sep*}$ genau eine p-te Wurzel und die Abbildung $x \longmapsto x^{1/p}$ ist ein Isomorphismus. Somit haben wir für alle offenen Normalteiler $H \subset$ Gal (K^{sep}/K)

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[p^{-1}] &\hookrightarrow \mathsf{Hom}_H\,(K^{sep*}, K^{sep*}) \\ \frac{n}{p^r} &\longmapsto (x \longmapsto x^{\frac{n}{p^r}}) \end{aligned}$$

und damit ist $\mathbb{Z}[p^{-1}] \subset M$.

0.4 Weil-Restriktionen von algebraischen Tori

Als nächstes wollen wir die Weil-Restriktion von algebraischen Tori beschreiben. Zur Vereinfachung beschränken wir uns auf Tori über lokalen Körpern. Da wir

mit einem festgewählten separablen Abschluss von K arbeiten, verzichten wir bei der Fundamentalgruppe auf die explizite Angabe eines geometrischen Punktes $\bar{s}$, da dieser über den Morphismus $\mathrm{Spec}\, K^{sep} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, K$ faktorsieren muss. Für einen Körper K ist $\pi_1(\mathrm{Spec}\, K) = \mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K)$ (s. [M] I 5.2 a)).
Wir erinnern kurz an die Definition der Weil-Restriktion eines Schemas:

0.4.1 Definition. *Sei $S' \longrightarrow S$ ein Morphismus von Schemata und*

$$X' : (Schemata/S') \longrightarrow (Mengen)$$

ein kontravarianter Funktor. Dann heißt der kontravariante Funktor

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{S'/S}(X) : (Schemata/S) &\longrightarrow (Mengen) \\ Y &\longmapsto X'(Y \times_S S') \end{aligned}$$

die Weil-Restriktion von X' bezüglich $S' \longrightarrow S$.

Ist X' ein darstellbarer Funktor, so bezeichnen wir das darstellende S'-Schema ebenfalls mit X'. Falls $S' \longrightarrow S$ ein endlicher, lokalfreier und treuflacher Morphismus ist, so ist die Weil-Restriktion eines darstellbaren Funktors wieder darstellbar ([BLR] Thm 7.6.4). In diesem Fall bezeichnet $\mathfrak{R}_{S'/S}(X')$ auch das darstellende S-Schema. Für weitere Eigenschaften der Weil-Restriktion sei auf [BLR] 7.6 verwiesen.
Für die Beschreibung der Charaktergruppe der Weil-Restriktion eines Torus benötigen wir den Begriff der Induktion.

0.4.2 Definition. *Sei G ein Gruppe und H ein Untergruppe. Sei weiter M ein H-Modul. Dann heißt der G-Modul $\mathit{Ind}_G^H M := M \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \mathbb{Z}[G]$ die Induktion von M bezüglich $G \supset H$. Ein Modul der Form $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} M$ heißt ein induzierter G-Modul.*
Der G-Modul $\mathit{Coind}_G^H M := \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], M)$ heißt die Coinduktion von M bezüglich $G \supset H$. Ein Modul der Form $\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], M)$ heißt ein coinduzierter Modul.

Shapiros Lemma (z.B. [Br] III Prop 6.2) besagt, dass $\mathrm{H}^n(G, \mathrm{Coind}_G^H M) = \mathrm{H}^n(H, M)$ und $\mathrm{H}_n(G, \mathrm{Ind}_G^H M) = \mathrm{H}_n(H, M)$ gelten. Falls $[G : H]$ endlich ist, so sind Induktion und Coinduktion isomorph zueinander (z.B. [S] VII §1 S. 110). Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist ein induzierter G-Modul auch ein induzierter H-Modul. Ist G eine endliche Gruppe, dann ist ein induzierter G-Modul M kohomologisch trivial, in dem Sinne, dass alle Tate-Kohomologiegruppe $\check{\mathrm{H}}^k(H, M)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und H Untergruppe von G verschwinden.

0.4.3 Satz. *Sei L/K eine endliche separable Erweiterung lokaler Körper vom Grad $n = [L : K]$ und T_L ein Torus über L. Es seien $G_K := \mathit{Gal}(K^{sep}/K)$ und $G_L := \mathit{Gal}(K^{sep}/L)$.*
Dann ist die Weil-Restriktion $\mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$ ein Torus über K mit der Charaktergruppe: $X(\mathfrak{R}_{L/K}(T_L)) = \mathit{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L)$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung, indem wir für den Torus zu der angegeben Charaktergruppe die definierende Eigenschaft der Weil-Restriktion nachrechnen: Sei also M/L eine endliche, galoissche Erweiterung, so dass T_L über M zerfällt. Somit gilt $T_L \otimes_L M \cong \operatorname{Spec} M[X(T_L)]$ und mit Galois-Descent folgt $T_L \cong \operatorname{Spec} M[X(T_L)]^{\mathrm{Gal}\,(M/L)}$. Für ein affines K-Schema $Y = \operatorname{Spec} B$ gilt

$$\begin{aligned} T_L(Y \otimes_K L) &= \mathrm{Hom}_L(Y \otimes_K L, T_L) = \mathrm{Hom}_M(Y \otimes_K L \otimes_L M)^{\mathrm{Gal}\,(M/L)} \\ &= \mathrm{Hom}_{M-Alg}(M[X(T_L)], B \otimes_K L \otimes_L M)^{\mathrm{Gal}\,(M/L)} \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T_L), (B \otimes_K M)^*)^{\mathrm{Gal}\,(M/L)} . \end{aligned}$$

Es sei d der Rang von $X(T_L)$ und $e_1, .., e_d$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $X(T_L)$. Die Elemente aus $\mathrm{Gal}\,(M/L)$ seien mit $(\tau_k)_{k=1,..,m}$ bezeichnet, wobei $m := [M : L]$ sei. Die Operation von τ_k auf $X(T_L)$ sei durch die Matrix $(t(k)_{i,j}) \in GL(d, \mathbb{Z})$ beschrieben.
Dann entspricht ein Element aus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T_L), (B \otimes_K M)^*)^{\mathrm{Gal}\,(M/L)}$ der Vorgabe von Elementen $b_j \in (B \otimes_K M)^*$ für $j = 1, .., d$, so dass die Relationen

$$\tau_k(b_j) = \prod_{i=1}^{d} b_i^{t(k)_{i,j}}$$

gelten, wobei τ_k auf $B \otimes_K M$ durch die kanonische Operation auf dem Faktor M operiert.
Auch M/K ist eine endliche, galoissche Erweiterung und per Definition zerfällt der Torus R zu der Charaktergruppe $\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L)$ über M. Insbesondere können wir G_L als $\mathrm{Gal}\,(M/L)$ und G_K als $\mathrm{Gal}\,(M/K)$ neu definieren, ohne dass sich die $\mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K)$-Operation auf $\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L)$ ändert.
Es seien $\sigma_1, .., \sigma_n \in \mathrm{Gal}\,(M/K)$ Repräsentanten für die G_L-Nebenklassen in G_K. Damit haben wir für $\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis $(e_{j,l})$ mit $j = 1, .., d$ und $l = 1, .., n$.
Ein Element $\xi \in G_K$ permutiert die G_L-Nebenklassen, d.h. es gibt eine Permutation ψ_ξ von $\{1, .., n\}$, derart dass $\xi \sigma_l G_L = \sigma_{\psi_\xi(l)} G_L$ gilt. Ferner gibt es zu ξ und jedem Index l jeweils einen Index $k(\xi, l) \in \{1, .., m\}$, so dass

$$\xi\, \sigma_l = \sigma_{\psi_\xi(l)}\, \tau_{k(\xi,l)}$$

gilt mit $\tau_{k(\xi,l)} \in G_L$ wie oben. Damit können wir die G_K-Operation auf der Basis $e_{j,l}$ durch

$$\xi e_{j,l} = \tau_{k(\xi,l)}\, e_{j,\psi_\xi(l)} = \sum_{i=1}^{d} t(k(\xi,l))_{i,j}\, e_{i,\psi_\xi(l)}$$

definieren mit den $t(\cdot)_{i,j}$ wie oben.
Nun gilt $R \cong \mathsf{Spec}\, M[\mathsf{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L)]^{\mathsf{Gal}\,(M/K)}$ und für ein affines K-Schema $Y = \mathsf{Spec}\, B$ gilt mit Galois-Descent

$$\begin{aligned}
\mathsf{Hom}_K(Y,R) &= \mathsf{Hom}_M(Y \otimes_K M, R \otimes_K M)^{\mathsf{Gal}\,(M/K)} \\
&= \mathsf{Hom}_M(Y \otimes_K M, \mathsf{Spec}\, M[\mathsf{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L)])^{\mathsf{Gal}\,(M/K)} \\
&= \mathsf{Hom}_{M-Alg}(M[\mathsf{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L)], B \otimes_K M)^{\mathsf{Gal}\,(M/K)} \\
&= \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L), (B \otimes_K M)^*)^{\mathsf{Gal}\,(M/K)} .
\end{aligned}$$

Ein Morphismus $\beta \in \mathsf{Hom}_K(Y,R)$ entspricht also der Vorgabe von Elementen $b_{j,l} \in (B \otimes_K M)^*$, derart dass für alle $\xi \in G_K$ die Relationen

$$\xi(b_{j,l}) = \prod_{i=1}^{d} (b_{i,\psi_\xi(l)})^{t(k(\xi,l))_{i,j}} \tag{0.4.3.1}$$

gelten.
Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass der Repräsentant σ_1 das Einselement von G_K ist. Damit folgt

$$\tau_k(b_{j,1}) = \prod_{i=1}^{d} (b_{i,1})^{t(k)_{i,j}} \ ,$$

also liefert ein Morphismus β ein Element aus $T_L(Y \otimes_K L)$ repräsentiert durch die Vorgabe der Elemente $(b_{j,1})_{j=1,..,d}$ aus $(B \otimes_K M)^*$. Diese Zuordnung ist offenbar funktoriell in Y und mit dem Gruppengesetz auf R und auf T_L verträglich.
Umgekehrt setzen wir einem Punkt $(b_{j,1}) \in T_L(Y \otimes_K L)$ durch $b_{j,l} := \sigma_l(b_{j,1})$ fort. Seien nun $j \in \{1,..,d\}$, $\xi \in G_K$ und $l \in \{1,..,n\}$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}
\xi(b_{j,l}) &= \xi\sigma_l(b_{j,1}) = \sigma_{\psi_\xi(l)}\tau_{k(\xi,l)}(b_{j,1}) \\
&= \sigma_{\psi_\xi(l)}\Big(\prod_{i=1}^{d} (b_{i,1})^{t(k(\xi,j))_{i,j}}\Big) = \prod_{i=1}^{d} (b_{i,\psi_\xi(l)})^{t(k(\xi,l))_{i,j}} .
\end{aligned}$$

Also gelten alle Relationen der Form 0.4.3.1. Insgesamt haben wir einen Isomorphismus $R(Y) \cong T_L(Y \otimes_K L)$ für affine K-Schemata Y. Nach Konstruktion ist dieser Isomorphismus aber funktoriell in Y, so dass $R = \mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$ folgen muss. □

Mit Hilfe dieser expliziten Beschreibung der Charaktergruppe einer Weil-Restriktion können wir interessante Aussagen erhalten.

0.4.4 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Sei ferner L/K eine endliche, separable Erweiterung. Dann gibt es in der glatten und in der étalen Topologie eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

von algebraischen K-Tori.

Beweis. Es sei d der Rang von $X(T)$ und $X(T)$ habe als $\mathbb{Z}$-Modul eine Basis $(e_j)_{j=1,..,d}$. Es sei M/L eine endliche, galoissche Erweiterung vom Grad $m := [M : L]$, so dass T über M trivialisiert und $\sigma_1,..,\sigma_m \in \mathsf{Gal}(M/K)$ seien Repräsentanten der $G_L := \mathsf{Gal}(M/L)$-Nebenklassen von $G_K := \mathsf{Gal}(M/K)$. Schließlich seien die Elemente von G_L wieder in eindeutiger Weise mit $\tau_1,..,\tau_m$ bezeichnet.
Wir definieren nun eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : X(T) &\longrightarrow \mathsf{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L) = \oplus_{i=1}^m \sigma_i X(T_L) \\ v &\longmapsto \left(\sigma_1^{-1}(v),..,\sigma_l^{-1}(v),..,\sigma_m^{-1}(v)\right) . \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offenbar injektiv. Sie ist auch mit der Operation von G_K verträglich, denn seien wie oben $\psi_\xi(l)$ und $k(\xi,l)$ durch die Gleichungen $\xi\,\sigma_l = \sigma_{\psi_\xi(l)}\,\tau_{k(\xi,l)}$ in G_K gegeben, dann haben wir für beliebiges $v \in X(T)$

$$\sigma_{\psi_\xi(l)}{}^{-1}\,\xi\, v = \tau_{k(\xi,l)}\,\sigma_l^{-1}\, v .$$

Sei nun $\phi_\xi := \psi_\xi^{-1}$ die Umkehrfunktion, dann folgt:

$$\begin{aligned} \iota(\xi v) &= \left(\sigma_1^{-1}(\xi v),..,\sigma_l^{-1}(\xi v),..,\sigma_m^{-1}(\xi v)\right) \\ &= \left(\tau_{k(\xi,\phi_\xi(1))}\sigma_{\phi_\xi(1)}^{-1}(v),..,\tau_{k(\xi,\phi_\xi(l))}\sigma_{\phi_\xi(1)}^{-1}(\xi v),..,\tau_{k(\xi,\phi_\xi(m))}\sigma_{\phi_\xi(1)}^{-1}(\xi v)\right) . \end{aligned}$$

Dies ist nun aber nichts anderes als $\xi\iota(v)$, denn die $l = \psi_\xi(\phi_\xi(l))$-te Komponente von $\xi\iota(v)$ ist $\tau_{k(\xi,\phi_\xi(l))}$ angewandt auf die $\phi_\xi(l)$-te Komponente von $\iota(v)$.
Das Bild von ι ist saturiert in $\mathbb{Z}^d[\mathsf{Gal}(L/K)]$, denn wenn man ein $r \in \mathbb{N}$ und Gleichungen

$$rv_i = \sigma_i^{-1}(v)$$

für $i = 1,..,n$ mit $v \in X(T)$ und $v_i \in \mathbb{Z}^d$ hat, dann muss v schon in $rX(T)$ liegen, weil die σ_i Isomorphismen sind.
Somit haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow \mathbb{Z}^d[\mathsf{Gal}(L/K)] \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

mit stetigen, torsionsfreien $\mathsf{Gal}(L/K)$-Moduln, so dass mit dem Satz 0.3.11 die Behauptung folgt. $\square$

Wegen der universellen Eigenschaft der Weil-Restriktion existiert auch eine Abbildung $T \longrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$, die von der Identität auf T_L induziert wird. Diese Abbildung ist eine abgeschlossene Immersion, da T separiert ist und ein Gruppenschemahomomorphismus. Mit den Notationen wie oben entspricht dieser auf den Charaktergruppen der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} X(T_L) &\longrightarrow X(T) \\ (v_1, .., v_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(v_i) \; . \end{aligned}$$

0.4.5 Satz. *Sei L/K eine endliche, galoissche Erweiterung lokaler Körper mit Galoisgruppe G. Dann besitzt ein torsionsfreier und endlich erzeugter G-Modul X eine G-azyklische Auflösung*

$$X \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow \cdots$$

mit torsionsfreien, endlich erzeugten G-Moduln.

Beweis. Es sei d der Rang von X und wir betrachten zu X die Einbettung $\iota : X \longrightarrow \mathbb{Z}^d[G]$, wie sie im Beweis zu 0.4.4 konstruiert wurde. Da die Gruppe G endlich ist, ist der induzierte G-Modul $\mathbb{Z}^d[G]$ auch coinduziert, also (kohomologisch) G-azyklisch. Also setze man $M := \mathbb{Z}^d[G]$ mit der Einbettung $\iota : X \longrightarrow M$.
Der Quotient $M/\iota(X)$ ist, wie oben gezeigt, torsionsfrei und endlich erzeugt als Quotient eines endlich erzeugten Moduls. Also können wir mit der gleichen Konstruktion den Quotienten in einen torsionsfreien, endlich erzeugten G-azyklischen Modul M' einbetten. Eine induktive Fortsetzung dieser Konstruktion liefert die Behauptung. □

Wir wollen nun die sogenannten Norm-Tori definieren.

0.4.6 Definition. *Es sei L/K eine endliche separable Erweiterung lokaler Körper. Dann heißt der Torus T_N aus der exakten Sequenz*

$$0 \longrightarrow T_N \longrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L}) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K} \longrightarrow 0 \; ,$$

die wie in 0.4.4 zu $T := \mathbb{G}_{m,K}$ konstruiert sei, der Norm-Torus zu der Erweiterung L/K.

Mit dem Satz 0.4.4 ist die Existenz klar und wir sehen, dass

$$X(T_N) = \text{ coker } \left(\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} \mathbb{Z}\right)$$

ist, wobei die Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} \mathbb{Z}$ der Diagonaleinbettung $k \longmapsto (k, .., k)$ entspricht.
Der Name Norm-Torus rechtfertigt sich durch die folgende Beobachtung.

0.4.7 Satz. *Sei $Y = Spec\, B$ affin und L/K eine endliche, separable Erweiterung lokaler Körper. Es sei ferner $G := Hom_K(L, K^{sep})$, dann entspricht die Abbildung*

$$\mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L})(Y) \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K}(Y)$$

aus der Definition des Norm-Torus der Norm-Abbildung

$$\begin{aligned} (B \otimes_K L)^* &\longrightarrow B^* \\ x &\longmapsto \prod_{\sigma \in G} (id \otimes \sigma)(x) \in (B \otimes_K L)^G \cong B\,. \end{aligned}$$

Beweis. Sei M/L eine endliche galoissche Erweiterung und $n := [L : K]$. Es seien ferner $\sigma_1, .., \sigma_n$ Repräsentanten der $G_L :=$ Gal(M/L)-Nebenklassen von $G_K :=$ Gal(M/K). Ein Element $\beta \in \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L})$ entspricht der Vorgabe von Elementen $(b_j)_{j=1,..,n}$ aus $B \otimes_K M$, derart dass für alle $\xi \in$ Gal(M/K) die Relationen

$$\xi(b_j) = \tau_{k(\xi,j)}(b_{\psi_\xi(j)})$$

gelten, wobei die Elemente durch die Gleichung $\xi\sigma_j = \sigma_{\psi_\xi(j)}\tau_{k(\xi,j)}$ mit $\tau_{k(\xi,j)} \in G_L$ eindeutig bestimmt sind.
Die Relationen implizieren, dass G_L auf den b_j trivial operiert, also stammen die b_j schon aus $B \otimes_K L$. Ferner gilt $b_j = \sigma_j(b_1)$, wenn man ohne Einschränkung $\sigma_1 = e$ annimmt. Die Abbildung der Charaktergruppen ist die Diagonaleinbettung, so dass der Punkt zu (b_j) auf das Produkt $\prod_{j=1}^n b_j \in B^*$ abgebildet wird. □

0.5 Néron-Modelle algebraischer Tori

Sei S ein Dedekind-Schema und η das Schema der generischen Fasern von S. In [BLR] 10.1.6 wird gezeigt, dass jeder algebraische η-Torus ein lft-Néron-Modell über S besitzt. Der Satz [BLR] 1.2.4 überträgt sich sinngemäß auch auf lft-Néron-Modelle, d.h. ein globales lft-Néron-Modell setzt sich aus lokalen lft-Néron-Modellen zusammen. Da man die Komponentengruppe nur faserweise definiert, reicht es, die Komponentengruppe im lokalen Fall zu untersuchen. Algebraische Tori sind zusammenhängend, so dass man sich trivialer Weise nur für die Komponentengruppe der speziellen Faser interessiert. Da Néron-Modelle mit Komplettierung vertäglich sind und eine Komplettierung ein Isomorphismus auf der speziellen Faser ist, reicht es, den Fall eines lokalen Körpers zu betrachten.

Von nun an betrachten wir nur noch algebraische Tori über einem lokalen Körper K. Das lft-Néron-Modell $\mathcal{G}$ der $\mathbb{G}_{m,K}$ lässt sich explizit konstruieren (s.

[BLR] 10.1.5) und lässt sich durch eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow i_*\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

beschreiben (vgl. auch [SGA 7] Exp VIII §6).
Eine endliche, unverzweigte, galoissche Erweiterung L/K lokaler Körper induziert eine étale, treuflache und sogar galoissche Erweiterung der zugehörigen diskreten Bewertungsringe. Also lässt sich das Néron-Modell eines algebraischen K-Torus T, welcher über L zerfällt, durch Galois-Descent aus dem Néron-Modell von $T_L \cong \mathbb{G}_{m,L}^d$ konstruieren.
Solche Tori heißen algebraische Tori mit multiplikativer Reduktion und haben die folgenden Eigenschaften:

0.5.1 Definition. *([N-X] 1.2) Sei K ein lokaler Körper. Ein algebraischer K-Torus T hat multiplikative Reduktion, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

1. *$X(T)^I = X(T)$, d.h. die Inertiagruppe operiert trivial auf der Charaktergruppe $X(T)$.*
2. *T zerfällt nach einer unverzweigten Erweiterung von K*
3. *Es gibt einen Torus $\mathcal{T}^0$ über $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, derart dass $\mathcal{T}^0_K = T$ gilt.*
4. *Die Einskomponente des Néron-Modells von T ist ein Torus über $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.*
5. *Die Reduktion $\mathcal{T}^0_k$ der Einskomponente des Néron-Modells ist ein $\operatorname{Spec} k$-Torus.*

Wir nutzen nun den Satz 0.3.11, um spezielle exakte Sequenzen von K-Tori zu definieren.

0.5.2 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Dann gibt es in kanonischer Weise einen maximalen Quotienten T^I von T, der ein Torus mit multiplikative Reduktion ist. Wir haben in der glatten und in der étalen Topologie eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow T^I \longrightarrow 0$$

von algebraischen K-Tori. Ist $\phi : T_1 \longrightarrow T_2$ ein Homomorphismus von K-Tori, so induziert dieser ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{T_1} \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & T_1^I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{T_2} \arrow[r] & T_2 \arrow[r] & T_2^I \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es sei $X(T)$ die Charaktergruppe von T. Ein Quotient T^I von T, der ein Torus ist, entspricht eineindeutig einem Gal (K^{sep}/K)-Untermodul von $X(T)$. Mit der Definition 0.5.1 gibt es einen maximalen Quotienten mit multiplikativer Reduktion und der entspricht dem Torus zu der Charaktergruppe $X(T)^I$. Dieser Untermodul ist saturiert, d.h. der Quotient $X(T)/X(T)^I$ ist ein torsionsfreier, stetiger Gal (K^{sep}/K)-Modul $\widetilde{X}(T)$. Damit haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T)^I \longrightarrow X(T) \longrightarrow \widetilde{X}(T) \longrightarrow 0$$

von stetigen, torsionsfreien Gal (K^{sep}/K)-Moduln. Ein Morphismus $\phi : T_1 \longrightarrow T_2$ entspricht einem Galoismodulhomomorphismus $D(\phi) : X(T_2) \longrightarrow X(T_1)$, der offenbar ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X(T_2)^I \arrow[r] \arrow[d, "D(\phi)|_{X(T_2)^I}"'] & X(T_2) \arrow[r] \arrow[d, "D(\phi)"'] & \widetilde{X}(T_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X(T_1)^I \arrow[r] & X(T_1) \arrow[r] & \widetilde{X}(T_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induziert. Mit dem Satz 0.3.11 folgt damit die Behauptung. □

0.5.3 Satz (vgl. [X] 2.13). *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Dann gibt es in der glatten und in der étalen Topologie eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

von algebraischen K-Tori, so dass M ein Torus mit multiplikativer Reduktion ist und für den Torus R gilt $H^1(I, X(R)) = 0$, wobei I die Inertiagruppe von Gal(K^{sep}/K) sei.

Beweis. Es reicht, eine entsprechende Sequenz von Charaktergruppen zu konstruieren. Dazu beginnen wir mit der im vorherigen Satz konstruierten Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow \mathbb{Z}^d[\mathrm{Gal}\,(L/K)] \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

und betrachten das Urbild X_R von $(X')^I$ in $\mathbb{Z}^d[\mathrm{Gal}\,(L/K)]$. X_R ist ein torsionsfreier, saturierter Gal (L/K)-Untermodul und wir haben eine Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow X_R \longrightarrow (X')^I \longrightarrow 0\,.$$

Nach Definition ist diese Sequenz exakt bis auf (möglicherweise) die Stelle bei X_R. Es ist nur noch zu zeigen, dass jedes Element aus dem Kern der Abbildung

$X_R \longrightarrow (X')^I$ schon ein Urbild in $X(T)$ hat. Dies ist aber klar, da die Ausgangssequenz exakt war.
Nach Definition haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X_R \longrightarrow \mathbb{Z}^d[\mathsf{Gal}\,(L/K)] \longrightarrow X' \big/ (X')^I \longrightarrow 0\,. \qquad 0.5$$

Da die Galoisoperation auf X_R über $\mathsf{Gal}\,(L/K)$ faktorisiert und X_R torsionsfrei ist, gilt $\mathsf{H}^1(G_L, X_R) = 0$. Mit [S] VII §6 Prop. 5 und der Exaktheit des direkten Limes folgt also

$$\mathsf{H}^1(I, X_R) = \mathsf{H}^1(I_{L/K}, X_R)\,,$$

wobei $I_{L/K}$ die Inertiagruppe der Erweiterung L/K sei.
Da $\mathsf{H}^0(I_{L/K}, X'/(X')^I) = 0$ und $\mathsf{H}^1(I_{L/K}, \mathbb{Z}^d[\mathsf{Gal}\,(L/K)]) = 0$ gelten, folgt aus der langen exakten $I_{L/K}$-Kohomologiesequenz zu der Sequenz 0.5

$$\mathsf{H}^1(I_{L/K}, X_R) = 0\,.$$

□

Nun können wir die Beschreibung der Komponentengruppe des Néron-Modells eines algebraischen Torus, welche Xavier Xarles in dem Artikel [X] gegeben hat, erläutern. Diese Beschreibung setzt voraus, dass der Restklassenkörper perfekt ist.
Es sei also K ein lokaler Körper mit perfektem Restklassenkörper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Es sei $\mathcal{T}$ das Néron-Modell von T über $\mathsf{Spec}\,\mathcal{O}_K$ und $\Phi := \Phi(\mathcal{T}_s)$ sei die Komponentengruppe der speziellen Faser des Néron-Modells. Diese wird stets als $G_k := \mathsf{Gal}\,(k^{sep}/k)$-Modul aufgefasst. Schließlich sei $I := \mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr})$ die Inertiagruppe von $\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K)$.
Wie wir im Satz 0.2.1 gesehen haben, kann man die Komponentengruppe der speziellen Faser des Néron-Modells eines algebraischen Torus T in der étalen Topologie bestimmen. Diesen Ansatz macht Xarles auch. Das Theorem [X] 1.1 besagt, dass $\Phi \cong \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), \mathbb{Z})$ gilt, falls T multiplikative Reduktion hat. Xarles beweist dies durch eine explizite Bestimmung der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^0 \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow i_*\Phi \longrightarrow 0\,.$$

Im Theorem [X] 2.1 zeigt Xarles, dass es für einen beliebigen K-Torus T natürliche Isomorphismen

$$\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}) \cong X(T)^I = \mathsf{H}^0(I, X(T)) \qquad (0.5.3.1)$$
$$\mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}) \cong \mathsf{H}^1(I, X(T)) \qquad (0.5.3.2)$$

gibt. Für den Beweis dieser beiden Aussagen benötigt Xarles zwei grundlegende Hilfsmittel. Zum einen benutzt er, dass in der étalen Topologie die Bildung des

Néron-Modells für algebraische Tori exakt ist, also $\mathsf{R}^1 j_* T = 0$ gilt ([X] Lem. 2.3). Damit erhält Xarles aus kurzen exakten Sequenzen algebraischer Tori kurze exakte Sequenzen von deren Néron-Modellen.
Zum anderen identifiziert Xarles die Garben

$$\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{T}, i_*\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathsf{Hom}}(i_*\Phi, i_*\mathbb{Z}) \cong i_*\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$$

in der glatten und der étalen Topologie sowie in der glatten Topologie die Garben

$$\underline{\mathsf{Ext}}^1(\mathcal{T}, i_*\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathsf{Ext}}^1(i_*\Phi, i_*\mathbb{Z}) \cong i_*\mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}) \ .$$

Diese Identifikationen werden in [X] Lem. 2.2, Lem. 2.12 sowie im Beweis von Prop. 2.14 hergestellt. Mit diesen Hilfsmitteln erhält er die Aussage 0.5.3.1 aus der Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow T^I \longrightarrow 0$$

durch Anwenden der Funktoren j_* und $\underline{\mathsf{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ in der étalen Topologie.
Die Aussage 0.5.3.2 erhält er aus der Sequenz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

durch Anwenden der Funktoren j_* und $\underline{\mathsf{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ in der glatten Topologie. Dafür benötigt er die Hilfsresultate, dass $\mathsf{R}^1 j_* T$ in der glatten Topologie für Tori mit multiplikativer Reduktion verschwindet ([X] Lem. 2.11) und dass algebraische Tori T mit $\mathsf{H}^1(I, X(T)) = 0$ eine torsionsfreie Komponentengruppe haben ([X] Prop. 2.7), so dass $\underline{\mathsf{Ext}}^1(j_*R, i_*\mathbb{Z}) = 0$ folgt. Die Aussage [X] Prop. 2.7 basiert im Wesentlichen auf Eigenschaften der Weil-Restriktion ([X] Lem. 2.6).
Das Hauptresultat von Xarles ist [X] Thm. 3.1. Hier wählt Xarles eine I-azyklische Auflösung

$$X(T) \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow \cdots$$

der Charaktergruppe mit $\mathbb{Z}$-freien stetigen $\mathsf{Gal}(K^{sep}/K)$-Moduln. Er definiert $X' := \mathsf{ker}\Big(M' \longrightarrow M''\Big)$. Damit erhält er die Aussage

0.5.4 Theorem ([X] Thm. 3.1). *Es gibt eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(X'^I, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(M^I, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Phi \longrightarrow 0$$

von G_k-Moduln.

Dieses Resultat beweist Xarles, indem er aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow M \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

mit Cartier-Dualität eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow T_M \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

von algebraischen Tori bildet und zeigt, dass die zugehörige kurze exakte Sequenz von Néron-Modellen eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\Phi')^{\vee\vee} \longrightarrow \Phi_M \longrightarrow \Phi \longrightarrow 0$$

von Komponentengruppen induziert. Dabei steht $\cdot^{\vee}$ für das Dual $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z})$.

Zum Verständnis der Beweise aus [X] sind einige Anmerkungen notwendig: Xarles benutzt, dass die Isomorphie $\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), \mathbb{Z})$ aus [X] 1.1 mit Homomorphismen von algebraischen Tori verträglich ist, ohne dies explizit zu zeigen. Diese Verträglichkeit impliziert, dass auch die Isomorphismen aus [X] 2.1 natürlich sind, also mit Homomorphismen verträglich sind. Dies wird implizit auch bei der Berechnung von Φ im Theorem [X] 3.1 benötigt.
Weiterhin formuliert Xarles seine Resultate, ohne eine endliche Zerfällungserweiterung von T vorzugeben. Dies führt bei dem Theorem 3.1 zu einem Problem: Der I-azyklische Modul M kann nicht endlich erzeugt sein ([Br] VI Thm. 8.7(v)), da I eine unendliche proendliche Gruppe ist, und damit ist das Cartier-Dual von M kein algebraischer Torus.
Um dieses Problem zu umgehen, bietet es sich an, die Beschreibungen relativ zu einer endlichen, galoisschen Zerfällungserweiterung L/K von T zu formulieren. Dazu präzisieren wir unsere Notationen: I_K sei die Inertiagruppe von $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$, I_L sei die Inertiagruppe von $\mathrm{Gal}(K^{sep}/L)$ und $I_{L/K}$ sei die Inertiagruppe von $\mathrm{Gal}(L/K)$. Da L/K galoissch ist, ist I_L ein Normalteiler in I_K und es gilt $I_{L/K} \cong I_K/I_L$. Da die Operation von $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K)$ über den Quotienten $\mathrm{Gal}(L/K)$ faktorisiert, folgt $X(T)^{I_K} = X(T)^{I_{L/K}}$. Mit der kanonischen exakten Sequenz zu Restriktion und Inflation ([S] VII §6 Prop. 5) und der Exaktheit des direkten Limes erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(I_{L/K}, X(T)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(I_K, X(T)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(I_L, X(T)) \; .$$

Da I_L proendlich ist und trivial auf der torsionsfreien Gruppe $X(T)$ operiert, muss $\mathrm{H}^1(I_L, X(T)) = 0$ gelten. Somit können wir auch H^1 relativ berechnen. Insbesondere ist auch die durch $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(l/k)$ induzierte Galoisstruktur auf den $\mathrm{H}^i(I_{L/K}, X(T))$ gleich der kanonischen Galoisstruktur auf den $\mathrm{H}^i(I_K, X(T))$ (für $i = 0, 1$).

Analog ist auch eine I-azyklische Auflösung als $I_{L/K}$-azyklische Auflösung mit stetigen Gal(L/K)-Moduln zu verstehen. Diese werden wieder durch die Projektion Gal$(K^{sep}/K) \twoheadrightarrow$ Gal(L/K) zu stetigen Gal(K^{sep}/K)-Moduln.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, lassen sich die Resultate [X] 2.1 und 3.1 nicht auf beliebige lokale Körper übertragen. Der Grund dafür ist, dass die Bildung des Néron-Modells im Allgemeinen nicht mehr exakt ist, da die Brauergruppe von K^{nr} nicht mehr trivial ist, wenn k nicht mehr perfekt ist.
Aus der allgemeineren Perspektive ergeben sich auch neue Interpretationen der Beweismittel aus [X]: Die von Xarles im Beweis von [X] Thm 1.1 benutzte Sequenz ist für beliebige Tori definierbar und hat dann die Form

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^{ft} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow i_*\mathrm{H}^0(I, X(T)) \longrightarrow \cdots ,$$

wobei $\mathcal{T}^{ft}$ das in Theorem 3.1.3 definierte ft-Néron-Modell von T ist.
Die Überlegungen aus dem Beweis von [X] 3.1 lassen sich allgemeiner führen. Man kann zu einer beliebigen kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathcal{N}_2 \longrightarrow \mathcal{N}_3 \longrightarrow 0$$

von Néron-Modellen eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Phi}(\mathcal{N}_1) \longrightarrow \Phi(\mathcal{N}_2) \longrightarrow \Phi(\mathcal{N}_3) \longrightarrow 0$$

der Komponentengruppen definieren, wobei $\widetilde{\Phi}(\mathcal{N}_1)$ ein Quotient von $\Phi(\mathcal{N}_1)$ nach einer geeigneten Torsionsuntergruppe ist. Mit diesem Ergebnis kann man [X] 3.1 aus der Beschreibung 0.5.3.1 mit Hilfe von [X] Prop. 2.7 herleiten. Die Beschreibung 0.5.3.2 folgt dann als Korollar zu [X] Thm. 3.1. Diesen Beweisweg werden wir z.B. im Theorem 6.1.1 gehen.

Kapitel 1

Néron-Modelle spezieller algebraischer Tori

Es sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Das lft-Néron-Modell $\mathcal{T}$ von T existiert und wir bezeichnen - wie in den Notationen definiert - mit $\Phi(T) := \Phi(\mathcal{T}_k)$ die Komponentengruppe der speziellen Faser des Néron-Modells. Da wir algebraische Tori betrachten, sind in diesem Kapitel Néron-Modell stets als lft-Néron-Modelle zu verstehen.
Als erstes betrachten wir einen algebraischen Torus T mit multiplikativer Reduktion. Ausgehend von der expliziten Konstruktion des Néron-Modells der $\mathbb{G}_{m,K}$ können wir $\mathcal{T}$ in diesem Fall durch Galois-Descent beschreiben. Dabei können wir die Einskomponente $\mathcal{T}^0$ mit dem $\mathcal{O}_K$-Torus $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$ identifizieren. Damit erhalten wir einen Isomorphismus $\Phi(T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), \mathbb{Z})$, welcher mit Homomorphismen von Tori mit multiplikativer Reduktion verträglich ist.
Als nächstes betrachten wir den Fall, dass $T = \mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$ gilt, wobei L/K eine endliche separable Erweiterung lokaler Körper und T_L ein L-Torus ist. Es sei $\mathcal{T}$ das Néron-Modell von T_L. Somit ist $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{T})$ das Néron-Modell von T und wir zeigen, dass dessen Einskomponente gleich $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{T}^0)$ ist. Wegen der Exaktheit der Weil-Restriktion in der étalen Topologie folgt dann $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(i_*\Phi(T_L)) = i_*\Phi(T)$.
Umgekehrt entspricht die Weil-Restriktion auf den Charaktergruppen der Induktion von Galoismoduln. Somit gilt [X] Thm 3.1 für $\Phi(T)$ genau dann, wenn dies für $\Phi(T_L)$ gilt.
Nach diesen erfolgreichen Übertragungen wollen wir eine erste Familie von Gegenbeispielen angeben. Dazu verallgemeinern wir die Berechnung der Reduktion des Néron-Modells für Norm-Tori bezüglich einer zyklischen, rein verzweigten Erweiterung L/K vom Grad $p = \mathrm{char}(k)$ aus [L-L] §5.
Für diese Tori würde [X] Thm. 3.1 eine Komponentengruppe der Form $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ voraussagen. Falls L/K eine triviale Erweiterung der Restklassenkörper indu-

ziert, bleibt dies auch im Allgemeinen gültig. Unsere Berechnungen zeigen aber Gegenbeispiele, sofern residuelle Verzweigung vorliegt. Konkret ergibt sich dann, dass die Komponentengruppe trivial ist.
Diese Beispiele liefern auch ein Gegenbeispiel zu einer Verallgemeinerung des Satzes [N-X] Prop. 3.2, da wir im Fall residueller Verzweigung als Reduktion der Einskomponente eine gewundene unipotente Gruppe anstatt von $\mathbb{G}_{a,k}^{p-1}$ finden.

1.1 Néron-Modelle von algebraischen Tori mit multiplikativer Reduktion

Es sei T ein algebraischer K-Torus mit multiplikativer Reduktion und $\mathcal{T}$ das Néron-Modell von T. Dann existiert eine endliche, unverzweigte und galoissche Erweiterung L von K, so dass der Torus T über L trivialisiert, d.h. es gilt $T_L \cong \mathbb{G}_{m,L}^d \cong \operatorname{Spec} L[X(T)]$, wobei $d = \dim(T)$ sei. Da die Bildung von Néron-Modellen mit étalem Basiswechsel verträglich ist ([BLR] 10.1.3), kann man das Néron-Modell $\mathcal{T}$ mit Galois-Descent aus dem Néron-Modell der $\mathbb{G}_{m,L}^d$ über $\mathcal{O}_L$ konstruieren.
Das Néron-Modell $\mathcal{G}_{\mathcal{O}_L}^d$ der $\mathbb{G}_{m,L}^d$ über $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L$ lässt sich durch Verkleben von Kopien $\pi_L^{\nu_1}\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L} \times_{\mathcal{O}_L} \pi_L^{\nu_2}\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L} \times_{\mathcal{O}_L} .. \times_{\mathcal{O}_L} \pi_L^{\nu_d}\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L} \cong \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}^d$ mit $\nu_1, .., \nu_d \in \mathbb{Z}$ entlang der generischen Faser konstruieren.
Auf der generischen Faser liefert die Trivialisierung $\mathbb{G}_{m,L}^d \cong \operatorname{Spec} L[X(T)]$ ein effektives Descent-Datum in Gestalt einer Operation der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/K)$ auf $\operatorname{Spec} L[X(T)]$: Diese Operation ist auf der Algebra $L[X(T)]$ definiert durch die simultane Operation auf den Charakteren (als $\operatorname{Gal}(L/K)$-Modul, da nach Voraussetzung $\operatorname{Gal}(K^{sep}/L)$ auf $X(T)$ trivial operiert) und der kanonischen Operation auf den Skalaren aus L. Die Effektivität ist klar, da die operierende Gruppe endlich ist.
Wegen der Néronschen Abbildungseigenschaft dehnt sich die Operation zu einer Operation auf dem Néron-Modell $\mathcal{G}_{\mathcal{O}_L}^d$ aus und liefert ebenfalls ein effektives Descent-Datum.
Der Isomophismus $\mathbb{G}_{m,L}^d \cong \operatorname{Spec} L[X(T)]$ setzt sich zu einem Isomorphismus

$$(\mathcal{G}_{\mathcal{O}_L}^d)^0 \cong \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}^d \cong \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L[X(T)]$$

fort. Die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L/K)$ operiert auf $L[X(T)]$ mit K-Automorphismen und diese schränken sich offenbar zu $\mathcal{O}_K$-Automorphismen von $\mathcal{O}_L[X(T)]$ ein. Damit ist die Einskomponente von $\mathcal{G}_{\mathcal{O}_L}^d$ stabil unter dem Descent-Datum und geht in den $\mathcal{O}_K$-Torus $T_{\mathcal{O}} := \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L[X(T)]^{\operatorname{Gal}(\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K)}$ (definiert durch $X(T)$ als $\operatorname{Gal}(\mathcal{O}_K^{sh}/\mathcal{O}_K)$-Modul) über. Also gilt $\mathcal{T}^0 = T_{\mathcal{O}}$.

Wir wollen nun die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^0 \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow i_*\Phi(T) \longrightarrow 0$$

bestimmen. Wir benutzen dabei wiederholt den Zerlegungssatz (s. [M] II Exp 3.12), der besagt, dass es eine Kategorienäquivalenz zwischen den abelschen Garbe auf dem étalen Situs über Spec $\mathcal{O}_K$ und der Kategorie von Tripeln (M_K, N_k, ϕ) gibt, wobei M_K ein stetiger Gal (K^{sep}/K)-Modul, N_k ein stetiger Gal (k^{sep}/k)-Modul ist und $\phi : N_k \longrightarrow M^I$ ein Gal (k^{sep}/k)-Modulhomomorphismus ist. Für eine étale Garbe $\mathcal{F}$ ist unter der Äquivalenz M_K der darstellende Modul von $j^*\mathcal{F}$ auf dem étalen Situs über Spec K, N_k der darstellende Modul von $i^*\mathcal{F}$ auf dem étalen Situs über Spec k und ϕ entspricht dem Morphismus $i^*\mathcal{F} \longrightarrow i^*j_*j^*\mathcal{F}$. Morphismen von Garben entsprechen dabei Paaren von stetigen Homomorphismen der Galoismoduln, welche mit den Abbildungen ϕ kommutieren.

1.1.1 Satz. *Sei T ein algebraischer K-Torus mit multiplikativer Reduktion und $\mathcal{T}$ sein Néron-Modell über $\mathcal{O}_K$. Dann gibt es in der étalen Topologie ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}^0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\cong"'] \\ \underline{Hom}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \arrow[r, hook] & \underline{Hom}(j_*\underline{X}(T), j_*\mathbb{G}_{m,K}) \end{tikzcd} ,$$

wobei die Inklusion in der oberen Zeile von der kanonischen offenen Immersion der Einskomponente und in der der unteren Zeile von der Inklusion ι : $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K} \hookrightarrow \mathcal{G}_K$ aus der kurzen exakten Sequenz zum Néron-Modell der $\mathbb{G}_{m,K}$ induziert wird.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Isomorphismen. Wegen der Cartier-Dualität gilt $T \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,K})$. Damit folgt

$$\mathcal{T} = j_*T = j_*\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,K}) = \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), j_*\mathbb{G}_{m,K}) ,$$

weil $\underline{X}(T) \cong j^*j_*\underline{X}(T)$ gilt.
Wegen der multiplikativen Reduktion kann man $\underline{X}(T)$ als Garbe über $\mathcal{O}_K$ auffassen, indem man $\underline{X}(T)$ mit dem Tripel $(X(T), X(T), id) = j_*\underline{X}(T)$ identifiziert. Mit Cartier-Dualität folgt dann $\mathcal{T}^0 = T_{\mathcal{O}} = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$.
Um die Kommutativität zu testen, reicht es, sich auf Testschemata der Form U = Spec L' für eine endliche, separable Körpererweiterung L'/K sowie der Form $U =$ Spec $\mathcal{O}_{L'}$ für eine endliche, unverzweigte Körpererweiterung L'/K zu

beschränken. Im ersten Fall gilt in der oberen Zeile $\mathcal{T}^0(\mathrm{Spec}\, L') = T(L')$ sowie $\mathcal{T}(\mathrm{Spec}\, L') = T(L')$ und die Inklusion $\mathcal{T}^0 \hookrightarrow \mathcal{T}$ ist auf der generischen Faser die Abbildung $id : T \longrightarrow T$. Für die untere Zeile finden wir

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})(U) &= \mathrm{Hom}_U\,(\underline{X}(T)|_U, \mathbb{G}_{m,U}) \quad \text{und} \\ \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), j_*\mathbb{G}_{m,K})(U) &= \mathrm{Hom}_U\,(\underline{X}(T)|_U, j_*\mathbb{G}_{m,K}|_U)\ .\end{aligned}$$

Da beim Übergang auf den Situs über U aus $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K} \hookrightarrow j_*\mathbb{G}_{m,K}$ die Identität auf $\mathbb{G}_{m,U}$ wird, sind mit Cartier-Dualität beide Zeilen isomorph.
Wir betrachten nun Testschemata U der Form $U = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{L'}$ für eine endliche, unverzweigte Erweiterung L'/K. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass die Zerfällungserweiterung L so groß gewählt war, dass $L \supset L'$ gilt.
In der oberen Zeile können wir die $U = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{L'}$-wertigen Punkte als die $\mathrm{Gal}\,(L/L')$-invarianten $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L$-wertigen Punkte bestimmen, wobei sich die Galoisoperation aus der Trivialisierung herleitet:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^0(U) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}\,(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L, \mathbb{G}^d_{m,\mathcal{O}_L})^{\mathrm{Gal}\,(L/L')} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), \mathcal{O}_L^*)^{\mathrm{Gal}\,(L/L')} \\ \mathcal{T}(U) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}\,(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L, \mathcal{G}^d_{\mathcal{O}_L})^{\mathrm{Gal}\,(L/L')} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), L^*)^{\mathrm{Gal}\,(L/L')}\ .\end{aligned}$$

Nun induziert die Trivialisierung auf $T_L = \mathrm{Spec}\, L[X(T)]$ die Trivialisierung auf $T_{\mathcal{O}_L} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L[X(T)]$. Also muss die Inklusion $\mathcal{O}_L^* \hookrightarrow L^*$ auch die Abbildung

$$\mathcal{T}^0(U) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), \mathcal{O}_L^*)^{\mathrm{Gal}\,(L/L')} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), L^*)^{\mathrm{Gal}\,(L/L')} = \mathcal{T}(U)$$

induzieren. Betrachten wir also nun die untere Zeile :
Ein $\psi \in \mathrm{Hom}_U\,(j_*\underline{X}(T)|_U, \mathbb{G}_{m,U}) = \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})(U)$ entspricht nach dem Zerlegungsatz einem Paar (ψ_η, ψ_s) mit einem $\mathrm{Gal}\,(K^{sep}/L')-$ Modulhomomorphismus $\psi_\eta : X(T) \longrightarrow K^{sep*}$ und einem $\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/L')$- Modulhomomorphismus $\psi_s : X(T) \longrightarrow \mathcal{O}_K^{sh^*}$ sowie einer Verträglichkeitsbedingung, nämlich dass ψ_η auf den I-Invarianten mit ψ_s übereinstimmt. Da $X(T)^I = X(T)$ gilt, müssen damit ψ_η und ψ_s schon gleich sein. Damit ist ψ also schon eineindeutig durch ψ_s bestimmt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_U\,(j_*\underline{X}(T)|_U, \mathbb{G}_{m,U}) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/L')}\,(X(T), \mathcal{O}_K^{sh^*}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), \mathcal{O}_K^{sh^*})^{\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/L')}\end{aligned}$$

und analog wegen $(j_*\mathbb{G}_{m,K})_{\bar{s}} = K^{nr*}$

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), j_*\mathbb{G}_{m,K})(U) &= \mathrm{Hom}_U\,(j_*\underline{X}(T)|_U, j_*\mathbb{G}_{m,K}|_U) \\ = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/L')}\,(X(T), K^{nr*}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), K^{nr*})^{\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/L')}\ .\end{aligned}$$

Da T über L trivialisiert, können wir in diesen Beschreibungen stets $\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/L')$ durch $\mathrm{Gal}\,(L/L')$ ersetzen. Auf den Halmen über $\bar{s}$ entspricht die Abbildung $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K} \hookrightarrow j_*\mathbb{G}_{m,K}$ der kanonischen Inklusion $\mathcal{O}_K^{sh^*} \hookrightarrow K^{nr*}$, womit die Kommutativität gezeigt ist. □

Damit erhalten wir zwei wichtige Resultate:

1.1.2 Theorem (vgl. [X] 1.1). *Sei K ein lokaler Körper und T ein K-Torus mit multiplikativer Reduktion. Sei $X(T)$ die Charaktergruppe von T. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \underline{Hom}(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G}) \longrightarrow \underline{Hom}(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 ,$$

die durch Anwenden von $\underline{Hom}(j_*\underline{X}(T), \cdot)$ auf die kurze exakte Sequenz zum Néron-Modell der $\mathbb{G}_{m,K}$ entsteht, exakt und isomorph zu der Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*T^0 \longrightarrow j_*T \longrightarrow i_*\Phi(T) \longrightarrow 0 ,$$

insbesondere gilt $\Phi(T) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(X(T), \mathbb{Z})$ für die Komponentengruppe als $Gal(k^{sep}/k)-$Modul.

Beweis. Mit dem Satz 1.1.1 ist die Isomorphie der Sequenzen gezeigt, falls die erste Sequenz exakt ist, wofür wir $\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) = 0$ zeigen.
Da T multiplikative Reduktion hat, gibt es eine endliche, unverzweigte und galoissche Erweiterung L/K, so dass T über L trivialisiert. Damit ist $j_*\underline{X}(T)|_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L}$ gleich der konstanten Garbe $\mathbb{Z}^d$, wobei $d = \dim T$ gelte.
Für einen étalen Morphismus $U \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_L$ gilt also

$$\mathrm{Ext}^1_U(j_*\underline{X}(T)|_U, \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}|_U) = \mathrm{H}^1(U, \mathbb{G}_{m,U})^d .$$

Da diese Kohomologiegruppen lokal verschwinden, muss $\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,O})$ als Garbifizierung der Prägarbe $V \mapsto \mathrm{Ext}^1_V(j_*\underline{X}(T)|_V, \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}|_V)$ verschwinden.
Schließlich ist die Garbe $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z})$ eine Wolkenkratzergarbe und deren Urbild im étalen Situs über $\mathrm{Spec}\,k$ wird von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), \mathbb{Z})$ (als $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$-Modul) dargestellt (vgl. [M] III Ex. 1.7 c)). □

Zweitens ist diese Beschreibung sogar „funktoriell“, womit genauer folgendes gemeint ist:

1.1.3 Theorem. *Sei $\phi : T_1 \longrightarrow T_2$ ein Morphismus zweier algebraischer K-Tori mit multiplikativer Reduktion und $D(\phi) : X(T_2) \longrightarrow X(T_1)$ die zugehörige Abbildung der Charaktergruppen.*
Dann induziert die Abbildung $j_*\phi : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ der Néron-Modelle eine Abbildung $\Phi(T_1) \longrightarrow \Phi(T_2)$ der Komponentengruppen, die mit obiger Identifikation gleich der dualen Abbildung $D(\phi)^\vee : Hom_{\mathbb{Z}}(X(T_2), \mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(X(T_1), \mathbb{Z})$ ist.

Beweis. $D(\phi)$ induziert einen Garbenhomomorphismus $j_*\underline{X}(T_2) \longrightarrow j_*\underline{X}(T_1)$ und somit einen Morphismus $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_1), \cdot) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_2), \cdot)$ von Funktoren. Dieser Morphismus von Funktoren induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_1), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\psi^0"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_1), \mathcal{G}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\psi"'] & \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_1), i_*\mathbb{Z}) \arrow[d, "\bar{\psi}"'] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_2), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \arrow[r, hook] & \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_2), \mathcal{G}) \arrow[r, two heads] & \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_2), i_*\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

étaler Garben, und wir behaupten, dass dieses Diagramm isomorph zu dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (j_*T_1)^0 \arrow[r] \arrow[d, "j_*\phi^0"'] & j_*T_1 \arrow[r] \arrow[d, "j_*\phi"'] & i_*\Phi(T_1) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\phi}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (j_*T_2)^0 \arrow[r] & j_*T_2 \arrow[r] & i_*\Phi(T_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ist. Dabei beachte man, dass das die Einskomponente $\mathcal{T}_1^0$ unter dem Gruppenhomomorphismus $j_*\phi$ in die Einskomponente $\mathcal{T}_2^0$ abgebildet wird, womit dieses Diagramm wohldefiniert ist.
Es reicht offenbar, die Gleichheit der ersten beiden vertikalen Abbildungen zu zeigen: Mit der Argumentation aus dem Satz 1.1.1 sieht man, dass die Abbildungen ψ und ψ^0 bereits durch ihre „generischen Fasern" ψ_η resp. ψ_η^0 eindeutig bestimmt sind. Diese entsprechen aber mit Cartier-Dualität über K dem Morphismus $\phi : T_1 \longrightarrow T_2$.
Umgekrt sind auch die Morphismen $j_*\phi$ und $j_*\phi^0$ wegen der Néronschen Abbildungseigenschaft bzw. wegen der Cartier-Dualität eindeutig durch ihre generischen Fasern bestimmt. □

1.2 Néron-Modelle von Weil-Restriktionen

1.2.1 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper, T ein algebraischer K-Torus, und L/K eine endliche, separable Erweiterung. Es sei ferner angenommen, dass es einen L-Torus T_L gibt, derart dass $T \cong \mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$ gilt.*
Dann gilt die Beschreibung aus [X] Thm. 3.1 für $\Phi(T_L)$ genau dann, wenn [X] Thm. 3.1 für $\Phi(T)$ gilt.

Bevor wir dieses Theorem zeigen, beweisen wir noch zwei Lemmata. Zunächst verallgemeinern wir [N-X] Prop. 2.4:

1.2.2 Lemma. *Sei L/K eine endliche, separable Erweiterung lokaler Körper und $\mathcal{T}$ ein affines, glattes Spec $\mathcal{O}_L$-Gruppenschema mit zusammenhängenden Fasern, d.h. $T_L := \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ und $T_l := \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_L} l$ sind zusammenhängend. Dann hat auch $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{T})$ zusammenhängende Fasern.*

Beweis. In der generischen Faser erhalten wir

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{T}) \otimes_{\mathcal{O}_K} K \cong \mathfrak{R}_{L/K}(\mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_L} L) = \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \ ,$$

so dass zu zeigen ist, dass eine Weil-Restriktion eines affinen, glatten und zusammenhängenden Gruppenschemas über einem Körper bezüglich einer separablen Erweiterung wieder zusammenhängend ist. Es sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K und $G_{L/K} := \mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})$ sei die Gruppe der K-Einbettungen von L in diesen Abschluss. Nach Tensorieren mit $\overline{K}$ ergibt sich :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \otimes_K \overline{K} &\cong \mathfrak{R}_{L \otimes_K \overline{K}/\overline{K}}(T_L \otimes_L L \otimes_K \overline{K}) \\
&\cong \mathfrak{R}_{\prod_{G_{L/K}} \overline{K}/\overline{K}}(\coprod_{G_{L/K}} T_{\overline{K}}) \cong \mathop{\times}_{G_{L/K}} \mathfrak{R}_{\overline{K}/\overline{K}}(T_{\overline{K}}) \\
&\cong \mathop{\times}_{G_{L/K}} T_{\overline{K}} \, .
\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\mathop{\times}_{G_{L/K}} T_{\overline{K}}$ ein Faserprodukt über $\overline{K}$ von Kopien von $T_{\overline{K}}$, die mit den Elementen aus $G_{L/K}$ indiziert seien.
Mit [SGA 3] Exp. VIa Lem 2.1.2 folgt, dass $T_{\overline{K}}$ und damit auch $\mathop{\times}_{G_{L/K}} T_{\overline{K}}$ zusammenhängend sind. Damit ist die generische Faser geometrisch zusammenhängend, also a fortiori zusammenhängend.
Da $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{T}) \otimes_{\mathcal{O}_K} k \cong \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k/k}(\mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k)$ gilt, ist zunächst $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ zu bestimmen. Wegen der Verträglichkeit der Weil-Restriktion mit Teilerweiterungen reicht es, die Spezialfälle L/K unverzweigt und L/K rein verzweigt zu betrachten.
Im ersten Fall gilt $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k \cong l$ und l/k ist eine separable Körpererweiterung. Dies entspricht der Situation in der generischen Faser. Sei also L/K rein verzweigt, dann ist $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k \cong l[X]/(X^e)$ eine radizielle Erweiterung von k. Mit [SGA 3] Exp. VIa Lem 2.1.2 ist

$$\mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_L} (\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k) \cong \mathcal{T}_l \otimes_l l[X]/(X^e)$$

ein glattes, affines und zusammenhängendes k-Gruppenschema. Mit [SGA 3] Exp. XVII App. III Prop 5.1 folgt, dass die Weil-Restriktion hiervon zusammenhängend ist, da $l[X]/(X^e)$ eine radizielle Erweiterung von k ist. $\square$

1.2.3 Lemma. *Sei L/K eine endliche, separable Erweiterung lokaler Körper und $\tilde{L}/L$ eine endliche, galoissche Erweiterung. Sei $X(T_L)$ ein endlich erzeugter, stetiger Gal(K^{sep}/L)-Modul, auf dem Gal$(K^{sep}/\tilde{L})$ trivial operiert. Sei weiterhin I_L die Inertiagruppe von $G_L :=$ Gal$(\tilde{L}/L)$ und analog I_K die Inertiagruppe von Gal$(\tilde{L}/K)$. Nun sei*

$$0 \longrightarrow X(T_L) \longrightarrow M_L^0 \longrightarrow M_L^1 \longrightarrow M_L^2 \longrightarrow \cdots$$

eine Auflösung von $X(T_L)$ mit endlich erzeugten, stetigen Gal(K^{sep}/L)-Moduln, welche torsionsfrei und I_L-azyklisch sind. Ferner sei $X'_L :=$ ker $M_L^1 \longrightarrow M_L^2$ und man setze (wie in [X] Thm. 3.1)

$$\Phi_L := \mathit{coker}(\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}({X'_L}^{I_L}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}({M_L^0}^{I_L}, \mathbb{Z}))$$

Dann ist für $X :=$ Ind$_{G_K}^{G_L} X(T_L)$ und $M^i :=$ Ind$_{G_K}^{G_L} M_L^i$ mit $G_K :=$ Gal$(\tilde{L}/K)$

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow M^2 \longrightarrow \cdots$$

eine Auflösung von X mit endlich erzeugten stetigen Gal(K^{sep}/K)- Moduln, auf denen Gal$(K^{sep}/\tilde{L})$ trivial operiert. Ferner sind die M^i torsionsfrei, I_K-azyklisch und es gilt

$$\Phi := \mathit{coker}(\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}({X'}^{I_K}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}({M^0}^{I_K}, \mathbb{Z})) \cong \mathit{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} \Phi_L ,$$

wobei analoger Weise $X' :=$ ker $M^1 \longrightarrow M^2$ sei und K_{nr} für den unverzweigten Abschluss von K in L steht.

Beweis. Dass die M^i torsionsfrei sind, ist klar. Da L/K eine endliche Erweiterung ist, sind Induktion und Coinduktion bezüglich der Inklusion $G_L \subset G_K$ isomorph. Wir können nun die Körpererweiterung L/K in eine Kette $L \supset K_{nr} \supset K$ zerlegen, wobei K_{nr} der unverzweigte Abschluss von K in L sei. Für einen endlich erzeugten, stetigen G_L-Modul N gilt dann

$$\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} N \cong \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} \mathrm{Ind}_{G_{K_{nr}}}^{G_L} N ,$$

wobei natürlich $G_{K_{nr}} :=$ Gal$(\tilde{L}/K_{nr})$ sei.
Offensichtlich ist I_L in I_K eine Untergruppe von endlichem Index und die Induktion Ind$_{G_{K_{nr}}}^{G_L} N$ ist nach Einschränkung auf die Kategorie der I_K-Moduln isomorph zur Induktion Ind$_{I_K}^{I_L} N$. Daraus folgt für $j \in \mathbb{N}$ (als I_K-Moduln):

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^j(I_K, \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} N) &= \mathrm{H}^j(I_K, \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} \mathrm{Ind}_{G_{K_{nr}}}^{G_L} N) \\ &\cong \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} \mathrm{H}^j(I_K, \mathrm{Ind}_{I_K}^{I_L} N) = \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} \mathrm{H}^j(I_L, N) , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt das Lemma von Shapiro angewandt wurde. Damit ist klar, dass die M^i wieder I_K-azyklisch sind.
Da die Induktion ein exakter Funktor ist, ergibt sich

$$X' = \ker\,(\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} M_L^1 \longrightarrow \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} M_L^2) = \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_L} X'_L$$

und damit folgt nach Zerlegung der Induktion und Anwenden des Lemmas von Shapiro ${X'}^{I_K} = \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} {X'_L}^{I_L}$ und ${M^0}^{I_K} = \mathrm{Ind}_{G_{K_{nr}}}^{G_K} {M_L^0}^{I_L}$. Nun gilt für einen beliebigen, endlich erzeugten stetigen $G_{K_{nr}}$-Modul N der Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} N, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z}).$$

Da die Induktion ein exakter Funktor ist, folgt damit insgesamt $\Phi \cong \mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{K_{nr}}} \Phi_L$. □

Beweis des Theorems. Die Bildung von Néron-Modellen ist verträglich mit der Weil-Restriktion: wenn also $\mathcal{T}_L$ das Néron-Modell von T_L über $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L$ ist, dann ist $\mathcal{T} := \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{T}_L)$ das Néron-Modell von T. Weiterhin ist die Weil-Restriktion bezüglich eines endlichen Morphismus ein exakter Funktor auf dem étalen Situs. Damit erhalten wir aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_L^0 \longrightarrow \mathcal{T}_L \longrightarrow i_*\Phi(T_L) \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{T}_L^0) \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(i_*\Phi(T_L)) \longrightarrow 0\,.$$

Wir definieren $\mathcal{T}^0 := \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{T}_L^0)$ und zeigen, dass dies tatsächlich die Einskomponente von $\mathcal{T}$ ist. Die Einskomponente $\mathcal{T}_L^0$ ist eine glatte, affine und offene Untergruppe des Néron-Modells $\mathcal{T}_L$. Da die Weil-Restriktion eines Gruppenschemas wieder ein Gruppenschema ist und die Weil-Restriktion auch mit offenen Immersionen verträglich ist (z.B. [BLR] 7.6), ist $\mathcal{T}^0$ eine glatte und offene Untergruppe des Néron-Modells $\mathcal{T}$.
Mit [SGA 3] Exp. VIb Lem 3.10.1 muss also die Einskomponente von $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}^0$ enthalten sein und gleich der Einskomponente dieses Gruppenschemas sein. Da mit dem Lemma oben $\mathcal{T}^0$ zusammenhängende Fasern hat, ist $\mathcal{T}^0$ bereits die Einskomponente von $\mathcal{T}$.
Insgesamt muss damit $\Phi := \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(i_*\Phi(T_L))$ die Komponentengruppe von $\mathcal{T}$ sein. Da man die Weil-Restriktion sukzessive über Teilerweiterungen berechnen kann, zerlegen wir zunächst die Erweiterung L/K in eine Kette $L \supset K_{nr} \supset K$, wobei L/K_{nr} rein verzweigt und K_{nr}/K unverzweigt sei. Die rein verzweigte Erweiterung ist auflösbar, sie lässt sich demnach in Teilerweiterungen zerlegen, welche entweder rein verzweigt mit trivialer Erweiterung der Restklassenkörper

oder rein residuell verzweigt sind. Da wir die Weil-Restriktion nur als étale Garbe bestimmen müssen, reicht es, den $\mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k)$- Modul

$$\Phi(k^{sep}) = \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}\,(i_*\Phi(T_L))(k^{sep}) = \Phi(T_L)(k^{sep} \otimes_k (\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k))$$

zu bestimmen. Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass L/K eine unverzweigte Erweiterung ist, also eine separable Erweiterung l/k der Restklassenkörper induziert. Wir definieren $G_{l/k} := \mathrm{Hom}_k\,(l, k^{sep})$. Damit sieht man, dass

$$k^{sep} \otimes_k (\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k) = k^{sep} \otimes_k l \cong \prod_{G_{l/k}} k^{sep}$$

als l-Algebra gilt.
Wir betrachten nun, welche Abbildung ein Morphismus $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k) = \mathrm{Aut}_k(k^{sep})$ auf $\Phi(k^{sep})$ induziert. Dazu sei $x \in l$ ein primitives Element für l/k und man schreibe $l = k[X]/f(X)$ mit dem Minimalpolynom $f(X)$ von x. Dann gilt $k^{sep} \otimes_k l \cong k^{sep}[X]/f(X)$ und über k^{sep} zerlegt sich $f(X) = \prod(X - \tau_j(x))$ für geeignete Repräsentanten $\tau_j \in \mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k)$ von $G_{l/k}$.
Ein Galoismorphismus $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k)$ induziert nun eine Permutation der Nullstellen $\tau_j(x)$, genauer wird also die Komponente einer Nullstelle $\tau_j(x)$ auf die Komponenten der Nullstelle $\sigma(\tau_j(x)) =: \tau_{j'}(x)$ abgebildet unter Festlassen von l, also mit dem l-Morphismus $\tau_{j'}^{-1} \circ \sigma \circ \tau_j$. Damit ergibt sich

$$\Phi(k^{sep}) \cong \prod_{G_{l/k}} \Phi(T_L)(k^{sep}) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k)}^{\mathrm{Gal}\,(k^{sep}/l)} \Phi(T_L)(k^{sep}).$$

Der Fall, dass L/K rein verzweigt mit trivialer Erweiterung der Restklassenkörper ist, wird in [X] 2.6 behandelt. In diesem Fall gilt als Galoismoduln $\Phi \cong \Phi(T_L)$. Falls L/K rein verzweigt ist und eine rein inseparable Erweiterung l/k der Restklassenkörper induziert, haben wir zum einen einen Isomorphismus $\mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k) \cong \mathrm{Gal}\,(l^{sep}/l)$, da $l^{sep} \cong k^{sep} \otimes_k l$ gilt. Desweiteren sei ohne Einschränkung $[L : K] = [l : k]$, so dass $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} k \cong l$ gilt. Damit folgt $\Phi(k^{sep}) \cong \Phi(T_L)(l^{sep})$.
Somit folgt insgesamt für eine beliebige, endliche und separable Erweiterung L/K lokaler Körper

$$\Phi \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/K)}^{\mathrm{Gal}\,(L^{nr}/L)} \Phi(T_L)\ .$$

Nun haben wir einen Isomorphismus $\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/K_{nr}) \cong \mathrm{Gal}\,(L^{nr}/L)$, so dass mit dem Lemma 1.2.3 die Äquivalenz der Gültigkeit von [X] Thm. 3.1 für die beiden Komponentengruppen folgt. □

1.3 Der Norm-Torus einer zyklischen Erweiterung von Primzahlgrad

In dem Artikel [L-L] wird für einen lokalen Körper K mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper der Norm-Torus bezüglich einer zyklischen, rein verzweigten galoisschen Erweiterung L/K vom Grad $p =$char(k) betrachtet. Analog zu Liu und Lorenzini setzen wir also in diesem Abschnitt $k = k^{sep}$ und $p > 0$ voraus. In loc.cit. 5.5 und 5.6 wird die Reduktion des Néron-Modells eines solchen Norm-Torus explizit beschrieben. Wir zeigen, dass diese Beschreibung auch für nicht perfekten Restklassenkörper gilt, sofern keine residuelle Verzweigung vorliegt.

1.3.1 Satz. *Sei L/K eine rein verzweigte galoissche Erweiterung lokaler Körper vom Grad $p =$char(k) und die induzierte Restklassenkörpererweiterung sei separabel, also notwendiger Weise trivial.*
Dann hat der Norm-Torus T_N zu L/K ein Néron-Modell, das isomorph zu

$$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K[X_0, .., X_{p-1}]/(G(X_0, .., X_{p-1}))$$

ist mit einem Polynom $G(X_0, .., X_{p-1}) \in \mathcal{O}_K[X_0, .., X_{p-1}]$, welches modulo π kongruent zu $X_m^p - uX_m$ ist mit geeigneten $u \in \mathcal{O}_K^*$ und $m \in \{0, 1, .., p-1\}$.

Beweis. Der Beweis in [L-L] erstreckt sich über die Lemmata 5.3 und 5.4, sowie die Sätze 5.5. und 5.6. Hierbei werden folgende Aussagen über die Erweiterung L/K vorausgesetzt (s. [L-L] 5.2):

1. Die Erweiterung ist vom Eisensteintyp, d.h. sie hat die Form

   $$L = K[t]/(t^p - s_1 t^{p-1} + ... + (-1)^p s_p),$$

   wobei die s_i Elemente aus $\pi_K \mathcal{O}_K$ sind und s_p die Bewertung $\nu_K(s_p) = 1$ hat. Ferner ist die Restklasse von t ein uniformisierendes Element in $\mathcal{O}_L$.

2. Die Restklassen von $1, t, .., t^{p-1}$ bilden eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_L$ über $\mathcal{O}_K$.

3. Die Differente berechnet sich als

   $$\nu_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \min_{0 \le i \le p-1} \{p\nu_K(s_i) + p - 1 - i\} = (p-1)\nu_L(\sigma(t) - t)\ ,$$

   wobei $s_0 := p$ sei und σ ein beliebiger, aber fest gewählter Erzeuger von Gal$\,(L/K)$ ist.

Im Fall eines nicht perfekten Restklassenkörpers folgt aus L/K rein verzweigt und l/k trivial immer noch, dass die Erweiterung vom Eisensteintyp ist, s. [S] I Prop. 18. Als Eisensteinerweiterung ist damit klar, dass $(1, t, .., t^{p-1})$ eine Ganzheitsbasis ist.
Mit [S] III Kor. 2 zu Prop. 11 folgt, dass sich für jede monogene Erweiterung $B = A[X]/f(X)$ eines vollständigen diskreten Bewertungsringes A die Differente als $\nu_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \nu(f'(x))$ berechnet mit x gleich der Restklasse von X in B.
Die Restklasse von t bleibt weiterhin ein uniformisierendes Element und es gilt $\nu_L(x) = p\nu_K(x)$ für alle $x \in K$. Damit folgt in dieser Situation, dass

$$\begin{aligned}\nu_L(\mathcal{D}_{L/K}) &= \min_{1\leq i\leq p-1}\{\nu_L(pt^{p-1}), \nu_L((p-i)s_{p-i}t^{p-1-i})\}\\ &= \min_{0\leq i\leq p-1}\{p\nu_K(s_{p-i}) + p - 1 - i\}\end{aligned}$$

gilt (mit $s_0 := p$.). Damit folgt die erste Formel für die Differente. Die zweite Formel folgt aus demselben Korollar, wenn man beachtet, dass

$$f(X) = \prod_{\sigma\in \mathsf{Gal}\,(L/K)} X - \sigma(t) \quad \text{also } f'(t) = \prod_{\tau\in \mathsf{Gal}\,(L/K)\setminus\{id\}} \tau(t) - t$$

gilt und ausnutzt, dass die Ordnung $[L : K]$ prim ist, weshalb $\nu_L(\tau(t) - t) = \nu_L(\sigma(t) - t)$ für alle $\tau \neq id$ gilt.
Somit kann im Beweis die Voraussetzung eines algebraisch abgeschlossenen Restklassenkörpers durch die Voraussetzung einer trivialen Restklassenkörpererweiterung (bei separabel abgeschlossenem Restklassenkörper) ersetzt werden und der weitere Beweisgang bleibt ohne Änderungen gültig. □

Im Fall einer rein verzweigten Erweiterung L/K mit nichttrivialer inseparabler Restklassenkörpererweiterung kann man auf ähnliche Weise wie in [L-L] vorgehen. Sei also L/K eine galoissche Erweiterung lokaler Körper vom Grad p, welche eine rein inseparable Erweiterung vom Grad p auf den Restklassenkörpern induziert. Es gilt

$$L = K[t]/(t^p - s_1t^{p-1} + s_2t^{p-2} + .. + (-1)^p s_p)$$

mit $s_i \in K$ geeignet. Da die zugehörige Erweiterung der diskreten Bewertungsringe monogen ist, kann ohne Einschränkung

$$\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[t]/(t^p - s_1t^{p-1} + s_2t^{p-2} + .. + (-1)^p s_p),$$

also $s_i \in \mathcal{O}_K$ angenommen werden. Die Erweiterung der Restklassenkörper muss die Form $l = k[t]/(t^p - \overline{s_p})$ haben, das heißt, es gilt $s_p \in \mathcal{O}_K^*$ aber $s_i \in \pi_K\mathcal{O}_K$ für $i = 1, .., p-1$.
Die Erweiterung hat Verzweigungsindex Eins, d.h. es gilt $\nu_L(x) = \nu_K(x)$ für alle

$x \in K$. Im Weiteren identifizieren wir t mit seinem Bild in L. Im Gegensatz zu oben ist t nun ein Element aus $\mathcal{O}_L^*$. Aufgrund der Gestalt der Erweiterung kann man analog zu oben die Differente über das Minimalpolynom f von t bestimmen:

$$\nu_L(\mathcal{D}_{L/K}) = \nu_L(f'(t)) = \nu(\sum_{i=0}^{p-1}(p-i)t^{p-1-i}s_i) = \min_{i=1,..,p-1}\{\nu(p), \nu_K(s_i)\} \; .$$

Hierbei beachte man, dass die Restklassen der t^i eine Basis von l/k bilden, so dass eine beliebige Summe $\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_i t^i$ mit $\alpha_i \in \mathcal{O}_K^* \cup \{0\}$ in $\mathcal{O}_L^*$ liegt, sofern mindestens ein $\alpha_i \neq 0$ ist. Deshalb kann $\nu_L(\mathcal{D}_{L/K})$ nicht kleiner als das Minimum der $\nu_L(\alpha_i)$ sein.
$\nu_L(\mathcal{D}_{L/K})$ muss auch wieder gleich $(p-1)(\nu_L(\sigma(t)-t))$ sein. Wir setzen also $\nu_m := \nu_L(\mathcal{D}_{L/K})$ und $r := \frac{\nu_m}{p-1}$. Offenbar gilt stets $r \geq 1$.

1.3.2 Satz. *Sei L/K eine rein verzweigte, galoissche Erweiterung lokaler Körper vom Grad p mit nichttrivialer, rein inseparabler Erweiterung der Restklassenkörper. Dann hat das Néron-Modell von T_N die Gestalt*

$$\mathit{Spec}\, \mathcal{O}_K[X_0,..,X_{p-1}]/(G(X_0,..,X_{p-1}))$$

mit einem Polynom $G(X_0,..,X_{p-1}) \in \mathcal{O}_K[X_0,..,X_{p-1}]$, welches modulo π_K kongruent zu

$$\sum_{i=0}^{p-1} s_p^i X_i^p + \sum_{\{j\,|\,j\geq 0,\, \nu(s_j)=\nu_m\}} \frac{\mathit{Sp}_{L/K}(t^j)}{\pi^{\nu_m}} X_j$$

ist, wobei hier $s_0 := p$ gelte.

Beweis. Wie in der Situation in [L-L] gilt das

1.3.3 Lemma ([L-L] 5.3). *Sei $A = \mathbb{Z}[s_1,..,s_p,y_0,..,y_{p-1}]$ ein Polynomring in $2p$ Variablen. Sei $B = A[u]/(u^p - s_1u^{p-i} + .. + (-1)^p s_p)$. Sei t das Bild von u in B und $N := N_{B/A}(y_0 + y_1 t + .. + y_{p-1}t^{p-1})$. Dann gelten:*

1. *N ist homogen vom Grad p in den Variablen $y_0, y_1, .., y_{p-1}$.*

2. *Sei $0 \leq j \leq p-1$. Dann ist der Koeffizient von y_j^p in N gleich ${s_p}^j$ und für $j \neq 0$ ist der Koeffizient von $y_0^{p-1}y_j$ gleich $\mathit{Sp}_{B/A}(t^j)$.*

3. *Die Koeffizienten von $y_0^{\lambda_0}..y_{p-1}^{\lambda_{p-1}}$ in N liegen in dem Ideal $(ps_p, s_1, .., s_{p-1})$, sofern $\lambda_0 \leq p-2$ ist.*

Wir zeigen zunächst das

1.3.4 Lemma (Analogon zu [L-L] 5.4). *Sei*

$$b = (1 + a_0) + a_1 t + .. + a_{p-1} t^{p-1} \in L$$

mit $a_i \in K$ *und* $\mathsf{N}_{L/K}(b) = 1$. *Dann gilt für* $0 \leq i \leq p-1$

$$\nu(a_i) \geq r.$$

Beweis. Da die Norm von b in $\mathcal{O}_K$ liegt, gilt $b \in \mathcal{O}_L$. Da die Potenzen von t eine Ganzheitsbasis bilden, liegen alle a_i in $\mathcal{O}_K$. Somit gilt mit Lemma 1.3.3

$$1 = \mathsf{N}_{L/K}(b) = (1 + a_0)^p + s_p a_1^p + .. + s_p^{p-1} a_{p-1}{}^p + \text{ Term aus } IJ$$

mit den Idealen $I := (p, s_1, .., s_{p-1})$ und $J := (a_1, .., a_{p-1})$. Also folgt

$$\nu((1+a_0)^p - 1 + s_p a_1^p + .. + s_p^{p-1} a_{p-1}^p) \geq \min_{1 \leq i \leq p-1} \{\nu(s_i), \nu(p)\} + \min_{1 \leq j \leq p-1} \{\nu(a_j)\} \; .$$

Nach Definition ist das erste Minimum gleich ν_m und es sei $1 \leq j_0 \leq p-1$ gewählt, so dass das zweite Minimum gleich $\nu(a_{j_0})$ ist. Nun gilt

$$p\nu(a_{j_0}) \geq \nu((1 + a_0)^p - 1 + s_p a_1^p + .. + s_p^{p-1} a_{p-1}^p) \geq \nu_m + \nu(a_{j_0}) \, ,$$

denn die Restklassen von $1, s_p, .., s_p^{p-1}$ bilden eine k-Basis von l. Damit gilt $\nu(a_{j_0}) \geq \frac{\nu_m}{p-1} = r$. Daher gilt für $1 \leq j \leq p-1$ allgemein:

$$p\nu(a_j) \geq \nu((1 + a_0)^p - 1 + s_p a_1^p + .. + s_p^{p-1} a_{p-1}^p) \geq \nu_m + \nu(a_{j_0}) \geq \nu_m + r \, .$$

Also ergibt sich $\nu(a_j) \geq \frac{\nu_m + r}{p} = \frac{(p-1)r + r}{p} = r$.
Es bleibt noch $\nu(a_0)$ zu betrachten. Sei dazu $e' := \frac{\nu(p)}{p-1}$. Es gilt nach Definition von ν_m, dass $e' \geq r = \frac{\nu_m}{p-1}$ gilt. Somit ist im Fall $\nu(a_0) \geq e'$ nichts zu zeigen. Sonst ist aber $(p-1)\nu(a_0) < \nu(p)$ und wegen $p | \binom{p}{k}$ für $1 \leq k \leq p-1$ folgt:

$$\nu(a_0^p) = p\nu(a_0) < \nu(\binom{p}{k} a_0^k) = \nu(p) + k\nu(a_0) \; .$$

Damit gilt $\nu((1 + a_0)^p - 1) = \nu(a_0^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a_0^k) = p\nu(a_0)$. Somit folgt analog zu oben

$$p\nu(a_0) \geq \nu((1 + a_0)^p - 1 + s_p a_1^p + .. + s_p^{p-1} a_{p-1}^p) \geq \nu_m + r$$

und damit auch $\nu(a_0) \geq r$. □

In der Darstellung $T_N = \mathsf{Spec}\, K[x_0,..,x_{p-1}]/(\mathsf{N}_{L/K}(1+\sum_{i=0}^{p-1} t^i x_i)-1)$ substituieren wir nun $x_j := \pi^r X_j$ und betrachten also

$$F(X_0,..,X_{p-1}) = \mathsf{N}_{L/K}(1+\sum_{j=0}^{p-1} \pi^r t^j X_j) - 1\,.$$

Mit 1.3.3 folgt unter Einsetzen von $y_0 := 1 + x_0 = 1 + \pi^r X_0$ sowie $y_i := x_i = \pi^r X_i$, dass

$$\begin{aligned} F(X_0,..,X_{p-1}) =& 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \pi^{kr} X_0^k \ + \pi^{pr} X_0^p - 1 + \sum_{i=1}^{p-1} s_p^i \pi^{pr} X_i^p \\ & + \sum_{i=1}^{p-1} \mathsf{Sp}_{L/K}(t^i)(1+\pi^r X_0)^{p-1} \pi^r X_i \\ & + \sum a_{\lambda_0,..,\lambda_{p-1}} (1+\pi^r X_0)^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{p-1} \pi^{r\lambda_i} X_i^{\lambda_i} \end{aligned}$$

gilt, wobei in der letzten Summe die Indizes $\lambda_i \geq 0$ die Bedingungen $\lambda_0 \leq p-2$ und $\sum_{i=0,..,p-1} \lambda_i = p$ erfüllen und die $a_{\lambda_0,..,\lambda_{p-1}}$ geeignet gewählt seien. Bei genauerer Betrachtung sieht man, dass die Koeffizienten der Monome von F stets eine Bewertung von mindestens pr haben:
Da $\nu(s_p) = 0$ gilt, ist $\nu(s_p^i \pi^{pr}) = pr$ und somit haben alle Monome der Form X_i^p einen Koeffizienten mit Bewertung pr.
Es gilt $\nu(p) \geq \nu_m = (p-1)r$, weshalb $\nu(\binom{p}{k}\pi^{kr}) \geq pr + (k-1)r$ folgt. Deshalb haben die mittleren Terme in der ersten Zeile eine Bewertung größer als pr, mit Ausnahme von $p\pi^r X_0$ im Fall, dass $\nu(p) = \nu_m$ ist.
Es gilt für $1 \leq j \leq p-1$ (s. Beweis zu [L-L] 5.5) die Identität

$$\mathsf{Sp}_{L/K}(t^j) + (-1)^j j s_j = \sum_{1 \leq l \leq j-1} (-1)^{l+1} s_l\, \mathsf{Sp}_{L/K}(t^{j-l})\,.$$

Damit sieht man, dass stets $\nu(\mathsf{Sp}_{L/K}(t^i)) \geq \nu_m$ gilt. Genauer gilt die Gleichheit genau dann, wenn $\nu(s_i) = \nu_m$ gilt. Dies gilt auch im Fall $i = 0$, wenn man $s_0 := p = \mathsf{Sp}_{L/K}(1)$ setzt.
Nach Ausmultiplizieren erhält man in der dritten Zeile Terme der Form

$$\binom{p-1}{k} \mathsf{Sp}_{L/K}(t^i) \pi^{r+kr} X_0^k X_i\,.$$

Die Koeffizienten dieser Terme haben also minimale Bewertung für $k = 0$ und $\nu(s_i) = \nu_m$ und diese Bewertung ist $\nu_m + r = pr$.
Die Terme in der letzten Zeile haben Koeffizienten

$$a_{\lambda_0,..,\lambda_{p-1}} \binom{\lambda_0}{k} \pi^{kr} \pi^{r \sum_{1 \leq i \leq p-1} \lambda_i}\,,$$

wobei $0 \leq k \leq \lambda_0$ gilt und $\sum_{1 \leq i \leq p-1} \lambda_i$ mindestens 2 ist. Ferner stammen nach 1.3.3 die Faktoren $a_{\lambda_0,..,\lambda_{p-1}}$ aus dem Ideal $(p, s_1, .., s_{p-1})$, haben also mindestens Bewertung ν_m. Daher gibt es hier nur Koeffizienten mit Bewertung größergleich $\nu_m + 2r = pr + r > pr$.
Damit ist $G(X_0, .., X_{p-1}) := \pi^{-pr} F(X_0, .., X_{p-1}) \in \mathcal{O}_K[X_0, .., X_{p-1}]$ modulo π kongruent zu

$$\sum_{i=0}^{p-1} s_p^i X_i^p \quad + \sum_{\{j | \nu(s_j) = \nu_m\}} \frac{\mathsf{Sp}_{L/K}(t^j)}{\pi^{\nu_m}} X_j \ ,$$

wobei hier $s_0 = p$ definiert wird.

Diese Substitution lässt sich wie folgt interpretieren: Wenn wir von T_N zu dem $\mathcal{O}_K-$Modell

$$\mathcal{T} := \mathsf{Spec}\, \mathcal{O}_K[x_0, .., x_{p-1}]/(\mathsf{N}_{L/K}(1 + x_0 + tx_1 + .. + t^{p-1}x_{p-1}) - 1)$$

übergehen und dieses r-mal im Einsschnitt $(x_0 = 1, x_1 = .. = x_{p-1} = 0)$ der speziellen Faser aufblasen, dann erhalten wir als Dilatation das Schema

$$\mathcal{T}^{sm} := \mathsf{Spec}\, \mathcal{O}_K[X_0, .., X_{p-1}]/(G(X_0, .., X_{p-1}))\ .$$

Hierbei beachte man, dass $\mathcal{T}$ ein $\mathcal{O}_K-$Gruppenschema ist, denn auf T_N erhält man die Multiplikationsabbildung, indem man im Polynomring

$$L[X_0^{(2)}, .., X_{p-1}^{(2)}] \otimes_L L[X_0^{(3)}, .., X_{p-1}^{(3)}]$$

das Produkt

$$M := (X_0^{(2)} + tX_1^{(2)} + .. + t^{p-1}X_{p-1}^{(2)})(X_0^{(3)} + tX_1^{(2)} + ... + t^{p-1}X_{p-1}^{(3)})$$

bestimmt und in der Form

$$M = \sum_{i=0}^{p-1} f_i(X_0^{(2)}, .., X_{p-1}^{(2)}, X_0^{(3)}, .., X_{p-1}^{(3)})t^i$$

mit Polynomen f_i aus $K[X_0^{(2)}, .., X_{p-1}^{(2)}, X_0^{(3)}, .., X_{p-1}^{(3)}]$ schreibt. Dann ist die Multiplikation

$$\begin{array}{c} K[X_0^{(1)}, .., X_{p-1}^{(1)}]/(N(X_0^{(1)}, .., X_{p-1}^{(1)})) \\ \Big\downarrow \mu \\ K[X_0^{(2)}, .., X_{p-1}^{(2)}]/(N(X_0^{(2)}, .., X_{p-1}^{(2)})) \otimes_K K[X_0^{(3)}, .., X_{p-1}^{(3)}]/(N(X_0^{(3)}, .., X_{p-1}^{(3)})) \end{array}$$

durch $X_i^{(1)} \mapsto f_i(X_0^{(2)},..,X_{p-1}^{(2)},X_0^{(3)},..,X_{p-1}^{(3)})$ gegeben. Da das Minimalpolynom von t nur Koeffizienten aus $\mathcal{O}_K$ hat, haben die Polynome f_i nur Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$ und somit lässt sich das Gruppengesetz auf T_N zu einem Gruppengesetz auf $\mathcal{T}$ ausdehnen. Analog lassen sich auch der Einsschnitt und das Inversenbilden auf $\mathcal{T}$ ausdehnen, da diese über $\mathcal{O}_K$ definiert sind; für letzteres beachte man

$$(X_0 + tX_1 + .. + t^{p-1}X_{p-1})^{-1} = \prod_{\tau \in \mathrm{Gal}\,(L/K)\setminus\{id\}} \tau(X_0 + tX_1 + .. + t^{p-1}X_{p-1}).$$

Also ist wegen [BLR] 3.2.2d $\mathcal{T}^{sm} := \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K[X_0,..,X_{p-1}]/(G(X_0,..,X_{p-1}))$ wieder ein Gruppenschema. Es ist ein integrales Modell von T_N, da es separiert und flach ist. Letzteres gilt, weil π kein Teiler von $G(X_0,..,X_{p-1})$ ist.
Mit 1.3.4 sieht man, dass wegen der Vorausetzung $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K^{sh}$ die kanonische Abbildung $\mathcal{T}^{sm}(\mathcal{O}_K^{sh}) \longrightarrow T_N(K^{nr})$ surjektiv ist. Mit [BLR] 7.1.1 folgt, dass $\mathcal{T}^{sm}$ das Néron-Modell von T_N ist, sofern es glatt ist. Dies folgt mit dem Jacobi-Kriterium, weil

$$dG = \sum_{\{j|\nu(s_j)=\nu_m\}} \frac{\mathrm{Sp}_{L/K}(t^j)}{\pi^{\nu_m}} dX_j$$

mit $\frac{\mathrm{Sp}_{L/K}(t^j)}{\pi^{\nu_m}} \in \mathcal{O}_K^*$ für alle j mit $\nu(s_j) = \nu_m$ gilt. □

Mit Hilfe dieser Darstellung zeigt sich folgendes

1.3.5 Korollar. *Sei L/K eine zyklische, rein verzweigte Erweiterung lokaler Körper vom Grad p =char(k). Die Erweiterung der Restklassenkörper sei rein inseparabel vom Grad p und T_N der Norm-Torus bezüglich L/K.*
Dann ist die Komponentengruppe des Néron-Modells von T_N trivial und die Reduktion der Einskomponente ist eine gewundene unipotente Gruppe.

Beweis. Die spezielle Faser des Néron-Modells hat die Gestalt

$$\mathcal{T}_k^{sm} = \mathrm{Spec}\,k[X_0,..,X_{p-1}]/(\overline{G}(X_0,..,X_{p-1}))\ ,$$

wobei $\overline{G} = \sum_{i=0}^{p-1} \overline{s_p^i} X_i^p + \sum_{\substack{i=0 \\ \nu(s_i)=\nu_m}}^{p-1} \overline{\frac{\mathrm{Sp}_{L/K}(t^i)}{\pi^{\nu_m}}} X_i^{p^0}$ offenbar ein p-Polynom ist.
Das Gruppengesetz über $\mathcal{O}_K$ ergibt sich (nach der Aufblasung) aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
&(1 + \pi^r X_0^{(2)} + t\pi^r X_1^{(2)} + .. + t^{p-1}\pi^r X_{p-1}^{(2)}) \quad \otimes \\
&(1 + \pi^r X_0^{(3)} + t\pi^r X_1^{(3)} + .. + t^{p-1}\pi^r X_{p-1}^{(3)}) \\
&= 1 + \pi^r \sum_{i=0}^{p-1} t^i (1 \otimes X_i^{(3)} + X_i^{(2)} \otimes 1) + \pi^{2r}\Gamma(X_0^{(2)},..,X_{p-1}^{(3)})
\end{aligned}$$

mit geeignetem $\Gamma(X_0^{(2)},..,X_{p-1}^{(3)}) \in \mathcal{O}_K[X_0^{(2)},..,X_{p-1}^{(2)}] \otimes \mathcal{O}_K[X_0^{(3)},..,X_{p-1}^{(3)}]$ Nach Aufspalten nach Potenzen von t und Kürzen mit π^r ergibt sich also modulo π das Gesetz $X_i^{(2)} \mapsto 1 \otimes X_i^{(3)} + X_i^{(2)} \otimes 1$ für $0 \leq i \leq p-1$.
Also ist die spezielle Faser eine Untergruppe der $\mathbb{G}_{a,k}^p$.
Der Hauptteil von G hat keine nichttriviale rationale Nullstelle: Nach Wahl der Erweiterung L/K gilt $s_p = t^p$ in l.
Eine Nullstelle des Hauptteils entspricht nun einer Gleichung

$$s_p^0 a_0^p + .. + s_p^{p-1} a_{p-1}^p = 0 \text{ mit } a_i \in k$$

Diese Gleichung lässt sich auch in l lesen als

$$(t^0 a_0)^p + .. + (t^{p-1} a_{p-1})^p = (t^0 a_0 + .. + t^{p-1} a_{p-1})^p = 0\ .$$

Da l ein Körper ist, bedeutet dies schon $a_0 t^0 + .. + a_{p-1} t^{p-1} = 0$ und damit müssen alle $a_i = 0$ sein, denn die Potenzen von t sind eine Basis von l/k. Also existiert nur die triviale rationale Nullstelle.
Damit folgt die Behauptung aus dem Satz A.1, sofern für ein $i_0 \in \{0,..,n\}$ der lineare Term zu X_{i_0} trivial ist. Sei also $L = K[t]$ mit $\nu(p) = \nu(s_1) = .. = \nu(s_{p-1})$, so dass alle linearen Terme auftauchen. Insbesondere ist also char$(K) = 0$. Da aber T_N nicht von der speziellen Wahl von $t \in L$ abhängt, können wir t durch das ebenfalls erzeugende Element $t' := t - \frac{s_1}{p}$ ersetzen. Hierbei beachte man, dass $\frac{s_1}{p} \in \mathcal{O}_K^*$ gilt, also t' ganz ist. Wenn nun $\chi(X) = X^p - s_1 X^{p-1} + .. + (-1)^p s_p$ das Minimalpolynom von t ist, dann ist das Minimalpolynom von $t - \frac{s_1}{p}$ gleich

$$\begin{aligned} \chi(X + \frac{s_1}{p}) &= (X + \frac{s_1}{p})^p - s_1(X + \frac{s_1}{p})^{p-1} + .. + (-1)^p s_p \\ &= X^p + X^{p-1}(p\frac{s_1}{p} - s_1) + \text{ weitere Terme }. \end{aligned}$$

Führt man also die Konstruktion mit t' aus, so ergibt sich ein Polynom G', das keinen linearen Term mit X_1 enthält. □

Abschließend skizzieren wir den (wohlbekannten) zahm verzweigten Fall: Es sei L/K eine endliche, rein und zahm verzweigte Erweiterung lokaler Körper vom Grad q. Die Erweiterung ist ebenfalls eine Eisensteinerweiterung $L = K[t]/\sum_{i=0}^q s_i t^i$ mit $s_q = 1$, $s_0,..,s_{q-1} \in (\pi_K)$ und $\nu_K(s_0) = 1$. Da $k = k^{sep}$ vorausgesetzt wurde, können wir wegen des Henselschen Lemmas annehmen, dass es ein uniformisierendes Element $\pi_L \in \mathcal{O}_L$ gibt, so dass $\pi_L^q \in \mathcal{O}_K$ gilt. Damit können wir die Eisensteingleichung ohne Einschränkung von der Form $t^q - \pi_K$ voraussetzen.

Damit gilt für $a_0, .., a_{q-1} \in \mathcal{O}_K$ die Gleichung

$$N_{L/K}(\sum_{i=0}^{q-1} a_i t^i) \equiv a_0^q \text{ mod } (\pi_K)$$

und wir finden für T_N das glatte $\mathcal{O}_K$-Modell

$$\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[X_0, .., X_{q-1}]/(N_{L/K}(\sum_{i=0}^{q-1} X_i t^i) - 1)$$

mit spezieller Faser $\operatorname{Spec} k[X_0, .., X_{q-1}]/(X_0^q - 1)$. Somit ist die Komponentengruppe gleich $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

Kapitel 2

Komponentengruppen von Néron-Modellen

In diesem Kapitel werden wir die Komponentengruppe der speziellen Faser eines (lokalen) lft-Néron-Modells einer kommutativen glatten algebraischen K-Gruppe untersuchen. Unser erstes Hauptresultat ist, dass die Komponentengruppe ein endlich erzeugter Modul (Thm. 2.3.2) ist. Dies beantwortet eine Frage von Lorenzini [L-L] Rem. 1.3.
Dafür zeigen wir, dass es zu einer kommutativen glatten algebraischen K-Gruppe G_K eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_I \longrightarrow G_K \longrightarrow G' \longrightarrow 0$$

von kommutativen glatten algebraischen K-Gruppen gibt, so dass T_I ein Torus mit multiplikativer Reduktion ist und $G' \otimes_K K^{nr}$ keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{m,K^{nr}}$ enthält. Ferner enthält $G_K \otimes_K K^{nr}$ genau dann keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$, wenn dies auch für $G' \otimes_K K^{nr}$ gilt. Wenn nun G_K ein lft-Néron-Modell besitzt, erhalten wir damit in der glatten Topologie eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_I \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}' \longrightarrow 0$$

der zugehörigen lft-Néron-Modelle. Nun definieren wir wie in [B-X] §4 den Funktor der Einskomponente auf den glatten Garben über Spec $\mathcal{O}_K$. Genauer stellt dieser Funktor nach Einschränkung auf die spezielle Faser die Einskomponente dort dar. Dieser Funktor ist wie in der formellen Situation rechtsexakt, so dass wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Phi} \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}_k) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}'_k) \longrightarrow 0$$

der Komponentengruppen erhalten, wobei $\widetilde{\Phi}$ für einen geeigneten Quotienten von $\Phi((\mathcal{T}_I)_k)$ steht. Dies liefert dann mit unserer Beschreibung der Néron-Modelle von algebraischen Tori mit multiplikativer Reduktion und dem Theorem [BLR] 10.2.1 das erste Hauptresultat.

Unser zweites Hauptresultat ist, dass ein Homomorphismus $G_1 \longrightarrow G_2$ kommutativer glatter algebraischer K-Gruppenschemata, welcher eine abgeschlossene Immersion ist, auf den Komponentengruppen der lft-Néron-Modelle (sofern diese Modelle existieren) einen Homomorphismus $\Phi((\mathcal{G}_1)_k) \longrightarrow \Phi((\mathcal{G}_2)_k)$ mit einem endlichen Kern induziert.
Dies beruht darauf, dass der induzierte Homomorphismus $\mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ der lft-Néron-Modelle quasikompakt ist, weil eine Dilatation ein quasikompakter Morphismus ist. Mit der Endlichkeit des Kerns werden wir später die exakte Sequenz der Komponentengruppen im Fall von lft-Néron-Modellen von algebraischen Tori konkreter beschreiben.

2.1 Maximale Untertori mit multiplikativer Reduktion

Es sei S ein Schema und G ein algebraisches S-Gruppenschema. Dann können wir einen maximalen (Unter-)Torus von G wie folgt definieren:

2.1.1 Definition ([SGA 3] Exp. XII Def. 1.3). *Sei S ein Schema und G ein S-Gruppenschema von endlichem Typ. Ein Untergruppenschema T von G heißt ein maximaler Torus von G , wenn die folgenden Eigenschaften gelten:*

1. *T ist ein Torus.*
2. *Für jeden Punkt $s \in S$ bezeichne $\bar{s}$ das Spektrum eines algebraischen Abschlusses von $k(s)$ und es ist $T_{\bar{s}}$ ein maximaler Torus von $G_{\bar{s}}$, also eine algebraische Untergruppe, welche ein Torus ist und maximal bezüglich dieser Eigenschaft ist.*

Maximale Tori existieren für glatte algebraische Gruppen über einem Körper:

2.1.2 Theorem ([SGA 3] Exp. XIV Thm. 1.1). *Sei K ein Körper und G eine glatte algebraische K-Gruppe. Dann hat G einen maximalen Torus T und damit eine Cartan'sche Untergruppe $C = \mathrm{Zentr}_G(T)$.*

[SGA 3] Exp. XII Cor. 1.15 besagt, dass ein kommutatives Gruppenschema höchstens einen maximalen Torus haben kann.

2.1.3 Lemma. *Sei K ein lokaler Körper und T ein K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Dann existiert in T ein maximaler Untertorus $T_I \hookrightarrow T$ mit multiplikativer Reduktion. Die Bildung von T_I ist mit unverzweigten Erweiterungen verträglich.*

Beweis. Sei L/K eine endliche, galoissche Erweiterung, so dass T über L zerfällt. Sei $I_{L/K}$ die Inertiagruppe zu L/K. Wir suchen nun einen maximalen torsionsfreien Quotienten von $X(T)$ mit trivialer $I_{L/K}$-Operation. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\mathsf{Sp}_I : X(T) \longrightarrow X(T)^I = X(T)^{I_{L/K}} \quad x \longmapsto \sum_{\tau \in I_{L/K}} \tau x \ .$$

Die Wohldefiniertheit ist klar und da $I_{L/K}$ ein Normalteiler in $\mathsf{Gal}\,(L/K)$ ist, ist diese Abbildung ein $\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K)$-Modulhomomorphismus. Wir erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathsf{ker}(\mathsf{Sp}_I) \longrightarrow X(T) \longrightarrow \mathsf{im}(\mathsf{Sp}_I) =: X(T_I) \longrightarrow 0$$

von stetigen, endlich erzeugten $\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K)$-Moduln. Als Untermoduln von torsionsfreien Moduln sind $\mathsf{ker}(\mathsf{Sp}_I)$ und $\mathsf{im}(\mathsf{Sp}_I)$ torsionsfrei. Nach Definition operiert $I_{L/K}$ trivial auf $X(T_I)$. Wir zeigen nun, das $X(T_I)$ maximal mit dieser Eigenschaft ist.
Sei $\psi : X(T) \twoheadrightarrow X'$ ein $\mathsf{Gal}\,(L/K)$-Modulhomomorphismus und X' sei torsionsfrei mit trivialer $I_{L/K}$-Operation. Dann gilt $\psi(\mathsf{Sp}_I(x)) = n\psi(x)$, wobei n die Mächtigkeit von $I_{L/K}$ sei. Also gilt $\mathsf{ker}(\mathsf{Sp}_I) \subset \mathsf{ker}(\psi)$ wegen der Torsionsfreiheit von X' und wir haben einen Homomorphismus $X(T_I) \twoheadrightarrow X'$.
$X(T) \twoheadrightarrow X(T_I)$ entspricht mit [SGA 3] Exp. VIII Prop. 3.2 und [SGA 1] Exp VIII Cor. 5.5 einem Homomorphismus $T_I \hookrightarrow T$ algebraischer Tori, der eine abgeschlossene Immersion ist.
Da eine unverzweigte Erweiterung die Operation der Inertiagruppe nicht ändert, ist klar, dass die Bildung von T_I mit solchen Erweiterungen verträglich ist. □

2.1.4 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und G_K ein kommutatives glattes algebraisches K-Gruppenschema. Dann besitzt G_K einen maximalen Torus T_I mit multiplikativer Reduktion und der Quotient $G' := G_K/T_I$ existiert und ist eine kommutative glatte algebraische K-Gruppe.*
Ferner hat $G' \otimes_K K^{nr}$ keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{m,K^{nr}}$. $G' \otimes_K K^{nr}$ hat genau dann eine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$, wenn $G_K \otimes_K K^{nr}$ eine solche Untergruppe hat.

Beweis. G_K hat einen eindeutigen maximalen Torus T. Dieser ist ein Unterschema, so dass der Homomorphismus $T \longrightarrow G_K$ eine abgeschlossene Immersion sein muss. Mit dem Lemma oben haben wir einen maximalen Untertorus T_I von T mit multiplikativer Reduktion und dieser ist ein Untertorus von G_K.
Mit dem Theorem aus [SGA 3] Exp. VIa §5.4 bilden die kommutativen algebraischen K-Gruppenschemata eine abelsche Kategorie, d.h. wir haben eine (fpqc)-exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_I \longrightarrow G_K \longrightarrow G' \longrightarrow 0 \ .$$

T_I ist glatt und treuflach über K und nach Basiswechsel mit T_I sind G_K und G' isomorph. Also ist mit Descent auch G' glatt über K.
Wir betrachten nun diese Sequenz nach Basiswechsel mit K^{nr}. Das Urbild einer abgeschlossenen Untergruppe U von $G' \otimes_K K^{nr}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $G_K \otimes_K K^{nr}$ und auch eine Extension von U mit $T_I \otimes_K K^{nr} \cong \mathbb{G}^r_{m,K^{nr}}$.
Angenommen, $G' \otimes_K K^{nr}$ habe eine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{m,K^{nr}}$. Dann hat $G_K \otimes_K K^{nr}$ eine Untergruppe , die eine Extension von $\mathbb{G}_{m,K^{nr}}$ mit $\mathbb{G}^r_{m,K^{nr}}$ ist. Mit [SGA 3] Exp XVII Prop 7.1.1 ist diese Extension ein Gruppenschema von multiplikativem Typ. Die Extension entspricht also mit Cartier-Dualität einer Extension von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}^r$ als $I = \mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr})$-Moduln. Da $\mathrm{Ext}^1_I(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^1(I, \mathbb{Z})^r = 0$ gilt, ist diese Extension trivial. Also hat $G_K \otimes_K K^{nr}$ eine Untergruppe der Form $\mathbb{G}^{r+1}_{m,K^{nr}}$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass T_I der maximale Untertorus mit multiplikativer Reduktion von T ist.
Wenn $G_K \otimes_K K^{nr}$ eine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$ hat, dann gilt dies auch für $G' \otimes_K K^{nr}$, weil alle Homomorphismen von $\mathbb{G}_{m,K^{nr}}$ nach $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$ trivial sind, so dass die Quotientenabbildung auf einer solchen Untergruppe ein Isomorphismus ist.
Habe umgekehrt $G' \otimes_K K^{nr}$ eine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$. Dann hat $G_K \otimes_K K^{nr}$ eine Untergruppe, die eine Extension von $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$ mit $\mathbb{G}^r_{m,K^{nr}}$ ist. Mit [SGA 3] Exp XVII Thm 6.1.1 A (ii) ist eine solche Extension aber trivial und wir finden eine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$ in $G_K \otimes_K K^{nr}$. □

2.2 Die Einskomponente einer glatten Garbe

Analog zu [B-X] 4.7 definieren wir für abelsche Garben auf dem glatten Situs über dem Spektrum eines henselschen diskreten Bewertungsringes R eine Untergarbe, die wir in gewisser Weise als „Einskomponente" auffassen können. Diese Definition macht übrigens nur in der glatten Topologie Sinn, da eine analog definierte étale Garbe in der speziellen Faser trivial wäre.
In diesem Abschnitt sei K der Quotientenkörper von R und k der Restklassenkörper von R.

2.2.1 Definition. *Sei $S = \mathrm{Spec}\, R$ das Spektrum eines henselschen diskreten Bewertungsringes und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf dem glatten Situs über S. Dann sei $\mathcal{F}^0$ die Untergarbe, die jedem glatten S-Schema T die Schnitte $f \in \mathcal{F}(T)$ zuordnet, für die gilt: Für jeden étalen Punkt $u : \mathrm{Spec}\, A \longrightarrow T$ gibt es*

1. *einen Bewertungsring R', der étale über A (also auch étale über R) ist,*

2. *ein fasernweise geometrisch zusammenhängendes glattes S-Schema T' mit einem Schnitt $g \in \mathcal{F}(T')$ und*

3. *R'-wertige Punkte u_0', u_1' : Spec $R' \longrightarrow T'$, derart dass $g|_{u_0'} = 0$ gilt und $g|_{u_1'}$ durch $f|_u$ faktorisiert.*

2.2.2 Satz. *Für eine glatte Garbe $\mathcal{F}$ über einem henselschen diskreten Bewertungsring R ist $\mathcal{F}^0$ tatsächlich eine Untergarbe. Es gilt $j^*\mathcal{F} = j^*\mathcal{F}^0$, wobei j : Spec K = Spec $Q(R) \hookrightarrow$ Spec R die kanonische offene Immersion ist.*
Falls $\mathcal{F}$ von einem glatten R-Gruppenschema F dargestellt wird, gilt für die abgeschlossene Immersion i : Spec $k \longrightarrow$ Spec R der speziellen Faser

$$i^*\mathcal{F}^0 = i^*(F^0) ,$$

falls F sogar eine zusammenhängende generische Faser hat, gilt

$$\mathcal{F}^0 = F^0 .$$

Beweis. Sei T ein glattes R-Schema. Falls $T = T_K$ gilt, so hat T keine étalen Punkte, so dass $\mathcal{F}^0(T) = \mathcal{F}(T)$ gilt. Damit gilt $j^*\mathcal{F} = j^*\mathcal{F}^0$. Sei nun T allgemein. Wir bezeichnen für einen Morphismus $\psi : U \longrightarrow T$ den Restriktionsmorphismus der Garbe $\mathcal{F}$ mit ρ_ψ.
Es gilt $0 \in \mathcal{F}^0(T)$, denn für einen étalen Punkt u : Spec $A \longrightarrow T$ ist $\rho_u(0) = 0$ und dies ist gleich $\rho_{u'}(0)$ für u' : Spec $A \longrightarrow$ Spec R. Da R geometrisch zusammenhängend ist, sind also die Bedingungen der Definition erfüllt.
Ist nun $\tau : T_1 \longrightarrow T_2$ ein Morphismus in der Kategorie der glatten R-Schemata. Dann induziert jeder étale Punkt von T_1 einen étalen Punkt von T_2 und damit gilt $\rho_\tau\mathcal{F}^0(T_2) \subset \mathcal{F}^0(T_1)$.
Somit ist $\mathcal{F}^0$ eine Unterprägarbe von Mengen. Seien nun $f, g \in \mathcal{F}^0(T)$. Dann sieht man, wie in [B-X] nach der Def. 4.7 ausgeführt, dass auch $f - g \in \mathcal{F}^0(T)$ gilt. Damit ist $\mathcal{F}^0$ eine Untergarbe.
Sei nun $\mathcal{F}$ eine Garbe, die von einem glatten Gruppenschema dargestellt wird. Wir zeigen, dass ein Schnitt $f \in \mathcal{F}^0(T)$ genau einem Morphismus $T \longrightarrow F$ entspricht, so dass in der speziellen Faser eine Faktorisierung $T_k \longrightarrow F_k^0 \longrightarrow F_k$ existiert.
Ein Schnitt $f \in \mathcal{F}^0(T)$ entspricht einem Morphismus $f : T \longrightarrow F$ und für jeden étalen Punkt u : Spec $A \longrightarrow T$ gibt es ein geometrisch zusammenhängendes glattes Schema T', einen Morphismus $g : T' \longrightarrow G$ und étale Punkte u_0', u_1' : Spec $R' \longrightarrow T'$, so dass $g \circ u_0'$ über den Einssschnitt von G faktorisiert und $f \circ u \circ$ (Spec $R' \longrightarrow$ Spec A) gleich $g \circ u_1'$ ist. Damit faktorisiert $f \circ u$ über F^0. Da die étalen Punkte ein dichtes Bild in der speziellen Faser von T haben, muss demnach schon $f_k : T_k \longrightarrow F_k$ über F_k^0 faktorisieren.
Für einen Schnitt $f : T \longrightarrow F$ mit Faktorisierung $f_k : T_k \longrightarrow F_k^0$ und einen étalen Punkt u : Spec $A \longrightarrow T$ nehme man das geometrisch zusammenhängende Schema $T' := F^0 \otimes_R A$ und als étale Punkte den Einsschnitt u_0' : Spec $A \longrightarrow T'$

sowie den von u induzierten Punkt $u_1' : \mathrm{Spec}\, A \longrightarrow T'$, womit nach Definition $f \in \mathcal{F}^0$ gilt.
Wenn die generische Faser von F zusammenhängend ist, ist die Existenz einer Faktorisierung $T_k \longrightarrow F_k^0$ äquivalent zu einer Faktorisierung $T \longrightarrow F^0$. Also gilt dann $\mathcal{F}^0 = F^0$.
Im Allgemeinen haben wir eine Inklusion $i^*F^0 = i^*(F^0)^0 \longrightarrow i^*\mathcal{F}^0$. Dabei meint $(F^0)^0$ die Garbe der Einskomponente (wie oben definiert) von der Garbe, die von F^0 dargestellt wird. Umgekehrt können wir alle Schnitte aus $i^*\mathcal{F}^0$ aus Schnitten $T \longrightarrow F$ konstruieren, für die T keine Zusammenhangskomponente ohne étalen Punkt hat. Somit können wir i^* auf der Untergarbe F^0 berechnen und $i^*F^0 \longrightarrow i^*\mathcal{F}^0$ ist somit surjektiv. □

Also können wir mit dieser Untergarbe die Einskomponente eines Néron-Modells in der speziellen Faser untersuchen. Für algebraische Tori stellt diese Garbe auch über $\mathcal{O}_k$ die Einskomponente des Néron-Modells dar. Wir untersuchen nun, wie sich diese Untergarbe mit Morphismen glatter Garben verträgt.

2.2.3 Satz. *Sei $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus abelscher Garben auf dem glatten Situs über $S = \mathrm{Spec}\, R$ für einen henselschen diskreten Bewertungsring R. Dann induziert dieser Morphismus einen Morphismus $\psi^0 = \psi|_{\mathcal{F}^0} : \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{G}^0$ und einen Morphismus $\overline{\psi} : \Phi(\mathcal{F}) := \mathcal{F}/\mathcal{F}^0 \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}) := \mathcal{G}/\mathcal{G}^0$.*

Beweis. Die erste Aussage ist klar, da ψ ein Morphismus von Funktoren in die Kategorie der abelschen Gruppen ist, so dass für einen Schnitt $f \in \mathcal{F}^0(T)$ mit einem fasernweise geometrisch zusammenhängenden Schema T' und étalen Punkten u, u_0', u_1' wie in der Definition gefordert das Bild unter ψ wieder den Bedingungen der Definition entspricht.
Damit induziert ψ eine Abbildung $\mathcal{F}/\mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{G}^0$ (als Prägarben). Da die Garbifizierung ein (exakter) Funktor von der Kategorie der Prägarben in die Kategorie der Garben ist, folgt die zweite Behauptung. □

Für diesen Funktor $\mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}^0$ gilt:

2.2.4 Satz ([B-X]4.8). *Sei $\phi : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ ein Epimorphismus abelscher Garben auf dem glatten Situs über S. Dann ist der induzierte Morphismus $(\mathcal{F}')^0 \longrightarrow \mathcal{F}^0$ ebenfalls ein Epimorphismus.*

Beweis. Der Beweis von [B-X] 4.8 überträgt sich wörtlich auf unsere Situation, da nur auf der speziellen Faser etwas zu zeigen ist. □

2.3 Die Sequenz der Komponentengruppen

Sei $h : G_1 \longrightarrow G_2$ ein Homomorphismus glatter Gruppenschemata über einem beliebigen Basisschema S. Dieser induziert einen Homomorphismus $h^0 : G_1^0 \longrightarrow G_2^0$ der Einskomponenten. Deswegen induziert h auch einen Homomorphismus der Komponentengruppen. Diesen können wir global als Morphismus $\overline{h} : \Phi(G_1) \longrightarrow \Phi(G_2)$ von glatten oder étalen Garben verstehen oder lokal für $s \in S$ als Homomorphismus $\overline{h}_s : \Phi((G_1)_s) \longrightarrow \Phi((G_2)_s)$ von étalen $k(s)$-Gruppen. Wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Abbildung mit kurzen exakten Sequenzen verträgt.

2.3.1 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und*

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kommutativen glatten algebraischen K-Gruppen, deren lft-Néron-Modelle $\mathcal{G}_i$ über Spec $\mathcal{O}_K$ existieren. Sei ferner die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{G}_2 \longrightarrow \mathcal{G}_3 \longrightarrow 0$$

der Néron-Modelle exakt in der glatten Topologie. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_1/\iota^{-1}(\mathcal{G}_2^0) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}_2) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}_3) \longrightarrow 0$$

von Garbenquotienten $\Phi(\mathcal{G}_i) := \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_i^0$, wobei hier $\mathcal{G}_i^0$ für die Untergarbe aus Def. 2.2.1 steht.
Ferner gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Phi} \longrightarrow \Phi((\mathcal{G}_2)_k) \longrightarrow \Phi((\mathcal{G}_3)_k) \longrightarrow 0$$

von stetigen Gal(k^{sep}/k)-Moduln, wobei die $\Phi((\mathcal{G}_i)_k)$ die Komponentengruppen der k-Gruppen $(\mathcal{G}_i)_k$ sind und $\widetilde{\Phi}$ ein Quotient des Moduls $\Phi((\mathcal{G}_1)_k)$ ist .

Beweis. Wir erhalten (in der glatten Topologie) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \iota^{-1}(\mathcal{G}_2^0) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}_2^0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}_3^0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}_1 \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{G}_2 \arrow[r] & \mathcal{G}_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Genauer folgt die Kommutativität aus dem Satz 2.2.3. Dabei ist die erste Zeile bei $\iota^{-1}(\mathcal{G}_2^0)$ exakt, weil das Urbild einer Untergarbe schon eine Untergarbe ist (vgl. [M] II 2.12 c)). Wegen des Satzes 2.2.4 ist die erste Zeile bei $\mathcal{G}_3^0$ exakt. Die Exaktheit in der Mitte folgt daraus, dass die zweite Zeile eine exakte Sequenz ist. Somit liefert das Schlangenlemma eine kurze exakte Sequenz der Cokerne, welche der behaupteten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_1/\iota^{-1}(\mathcal{G}_2^0) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}_2) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}_3) \longrightarrow 0$$

entspricht.
Die Einschränkung i^* dieser Sequenz auf den glatten Situs über $s := \operatorname{Spec} k$ ist exakt. Insbesondere werden die Quotienten Φ in die (echten) Komponentengruppen überführt, da $i^*\mathcal{G}_i^0$ von $(\mathcal{G}_i^0)_k$ dargestellt wird.
Die Einschränkung auf den étalen Situs über $\operatorname{Spec} k$ ist exakt ([M] III Prop. 3.3). Mit dem Satz 0.2.1 entspricht diese Einschränkung einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Phi} \longrightarrow \Phi((\mathcal{G}_2)_k) \longrightarrow \Phi((\mathcal{G}_3)_k) \longrightarrow 0$$

von stetigen $\operatorname{Gal}(k^{sep}/k)$-Moduln. Wegen der Exaktheit der Einschränkung ist $\widetilde{\Phi}$ ein Quotient von $\Phi((\mathcal{G}_1)_k)$. □

2.3.2 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper, und $\mathcal{G}$ sei ein kommutatives glattes und separiertes $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$-Gruppenschema, das ein lft-Néron-Modell seiner generischen Faser G_K ist. Insbesondere ist also G_K eine kommutative glatte algebraische K-Gruppe.*
Dann ist die Komponentengruppe $\Phi(\mathcal{G}_k)$ der speziellen Faser von $\mathcal{G}$ (als Galoismodul) endlich erzeugt.

Beweis. Mit dem Satz 2.1.4 und [BLR] Thm 10.2.2 haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_I \longrightarrow G_K \longrightarrow G' \longrightarrow 0$$

von kommutativen glatten algebraischen K-Gruppen, so dass T_I ein Torus mit multiplikativer Reduktion ist und $G' \otimes_K K^{nr}$ keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{m,K^{nr}}$ oder $\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$ enthält. Mit [X] Lem 2.11 ist $\mathrm{R}^1 j_* T_I = 0$, so dass wir den Satz 2.3.1 anwenden können und eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Phi} \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}_k) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}'_k) \longrightarrow 0$$

erhalten, wobei $\widetilde{\Phi}$ ein Quotient der Garbe $\Phi(\mathcal{T}_I)$ ist. Mit [BLR] Thm. 10.2.1 ist das Néron-Modell von G' quasikompakt, so dass $\Phi(\mathcal{G}'_k)$ von einem endlichen $\operatorname{Gal}(k^{sep}/k)$-Modul dargestellt wird. Mit dem Thm. 1.1.2 wird $\widetilde{\Phi}$ von einem endlich erzeugten $\operatorname{Gal}(k^{sep}/k)$-Modul dargestellt. Damit wird auch $\Phi(\mathcal{G}_k)$ von einem endlich erzeugten $\operatorname{Gal}(k^{sep}/k)$-Modul dargestellt. □

Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ von Schemata heißt quasikompakt, wenn es eine offene affine Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von Y gibt, so dass die Urbilder $f^{-1}(V_i)$ in X quasikompakt sind.

2.3.3 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und G_2 eine glatte algebraische K-Gruppe mit einem lft-Néron-Modell $\mathcal{G}_2$ über Spec $\mathcal{O}_K$. Sei G_1 eine glatte Untergruppe von G_2.*
Dann existiert das lft-Néron-Modell $\mathcal{G}_1$ von G_1 und die Abbildung $\mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$, die von der Inklusion auf der generischen Faser induziert wird, ist quasikompakt.

Beweis. Mit [BLR] Prop. 10.1.4 existiert das lft-Néron-Modell von G_1 und kann als Gruppenglättung des schematischen Abschlusses von G_1 in $\mathcal{G}_2$ konstruiert werden. Wir haben also eine Abbildung

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}^{(n)} \xrightarrow{\delta^{(n)}} \cdots \longrightarrow \mathcal{G}^{(1)} \xrightarrow{\delta^{(1)}} \overline{G_1} \hookrightarrow \mathcal{G}_2 \; ,$$

bei der die $\delta^{(i)}$ Dilatationen geeigneter abgeschlossener Untergruppen der speziellen Faser sind. Dies folgt mit [BLR] Lem. 7.1.4, da es (nach evt. étalem Basiswechsel) reicht, die Gruppenglättung auf $\overline{G_1} \cap \mathcal{G}_2^0$ zu konstruieren.
Nach [BLR] §3.2 kann eine Dilatation eines Schemas lokal konstruiert werden und die Dilatation eines affinen Schemas ist affin. Damit ist eine Dilatation quasikompakt. Eine endliche Verknüpfung quasikompakter Morphismen ist ebenfalls quasikompakt.
Nach Konstruktion haben wir damit eine quasikompakte Abbildung $\mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$, die auf der generischen Faser der Inklusion $G_1 \subset G_2$ entspricht, also folgt die Behauptung mit der Néronschen Abbildungseigenschaft. □

Wir können nun zeigen, dass in der Situation von Satz 2.3.1 der Quotient $\Phi((\mathcal{G}_1)_k) \twoheadrightarrow \widetilde{\Phi}$ einen endlichen Kern besitzt.

2.3.4 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und G_2 eine glatte algebraische K-Gruppe mit lft-Néron-Modell $\mathcal{G}_2$ über Spec $\mathcal{O}_K$. Sei G_1 ein glatte (abgeschlossene) Untergruppe von G_2.*
Dann induziert die zugehörige Abbildung der Néron-Modelle eine Abbildung

$$\Phi((\mathcal{G}_1)_k) \longrightarrow \Phi((\mathcal{G}_1)_k)$$

der Komponentengruppen (als Gal(k^{sep}/k)-Moduln), deren Kern ein endlicher Untermodul ist.

Beweis. Mit $\mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$ ist auch $\iota : (\mathcal{G}_1)_k \longrightarrow (\mathcal{G}_2)_k$ ein quasikompakter Morphismus. Da die Einskomponente $(\mathcal{G}_2^0)_k$ von endlichem Typ über k ist, ist sie quasikompakt und damit ist ihr Urbild quasikompakt. Somit können wir $\iota^{-1}((\mathcal{G}_2^0)_k)$ mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten von $(\mathcal{G}_1)_k$ überdecken. Da jede Zusammenhangskomponente über k^{sep} in endlich viele Translate von $(\mathcal{G}_1^0)_k$ zerfällt, können nur endlich viele Elemente von $\Phi((\mathcal{G}_1)_k)$ im Kern liegen. □

Kapitel 3

Integrale Modelle

In diesem Kapitel betrachten wir Fortsetzungen eines glatten, kommutativen K-Gruppenschemas G_K von endlichem Typ zu einem integralen Modell, sprich einem separierten, flachen $\mathcal{O}_K$-Gruppenschema. Dies ist dadurch motiviert, dass in der Literatur integrale Modelle algebraischer Tori betrachtet werden, die keine Néron-Modelle sind. In [ChYu] §4 wird für algebraische Tori T ein sogenanntes ft-Néron-Modell definiert, welches ein glattes integrales Modell $\mathcal{T}^{ft}$ ist, für das $\mathcal{T}^{ft}(\mathcal{O}_K^{sh})$ der maximalen beschränkten Untergruppe von $T(K^{nr})$ entspricht. Voskresenskii et. al. (s. [V-K-M], [P],[PV]) definieren ein Standard-Modell, das ein integrales Modell mit ähnlichen Eigenschaften wie das ft-Néron-Modell ist.
Wir zeigen, dass es im lft-Néron-Modell eine eindeutig bestimmte offene Untergruppe gibt, die den Torsionsanteil der Komponentengruppe induziert. Diese Untergruppe werden wir als ft-Néron-Modell definieren.
Wir zeigen für glatte kommutative K-Gruppenschemata G_K von endlichem Typ, dass genau dann eine maximale beschränkte Untergruppe von $G_K(K^{nr})$ existiert, wenn G_K keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K}$ enthält, also ein lft-Néron-Modell $\mathcal{G}$ besitzt. Dabei identifizieren wir die maximale beschränkte Untergruppe mit dem Bild der Punkte aus $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K^{sh})$, welche in der Komponentengruppe auf Torsionselemente abgebildet werden.
Somit ist unsere Definition für algebraische Tori äquivalent zu der von Chai und Yu und ein ft-Néron-Modell existiert genau dann, wenn ein lft-Néron-Modell existiert. Wir zeigen, dass das ft-Néron-Modell durch die Liftungseigenschaft für die étalen Punkte aus der maximalen beschränkten Untergruppe der K^{nr}-wertigen Punkte ausgezeichnet ist und auch eine Fortsetzungseigenschaft, analog zur Néronschen-Abbildungseigenschaft, besitzt.
Wir zeigen, dass auch ft-Néron-Modelle mit étalem Basiswechsel und Weil-Restriktion verträglich sind. Der Nutzen des ft-Néron-Modells liegt in seiner einfacheren Berechenbarkeit. Für einen algebraischen Torus T ist es affin und kann als Gruppenglättung des schematischen Abschlusses von T in $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$

bestimmt werden, wobei $n = \mathrm{Dim}(T)$ sei und L eine Zerfällungserweiterung von T sei.
Dieser schematische Abschluss, welcher selbst ein integrales Modell von T ist, entspricht dem Standard-Modell von Voskresenskii et. al. Mit einer Idee aus [Edi] können wir ein Kriterium dafür angeben, wann ein Monomorphismus algebraischer K-Tori eine abgeschlossene Immersion der Néron-Modelle induziert.
Wir zeigen, dass auf dem étalen und dem glatten Situs das ft-Néron-Modell ein linksexakter Funktor ist. Wir definieren einen Betrag auf den K^{nr}-wertigen Punkten eines Torus und identifizieren die Punkte mit Abbildungen der Charaktergruppe in die Einheiten einer Zerfällungserweiterung L/K^{nr} von $T_{K^{nr}}$. Ein Punkt gehört genau dann zu der maximalen beschränkten Untergruppe von $T(K^{nr})$, wenn er als Abbildung nur Werte in $\mathcal{O}_L^*$ hat. Dies ist schon der Fall, falls er eingeschränkt auf $X(T)^I$ nur Werte aus $\mathcal{O}_L^*$ hat. Deshalb gilt als étale Garbe $\mathcal{T}^{ft} = \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$.
Damit ist die von Xarles im Beweis zu [X] Thm. 1.1 konstruierte Sequenz ein Spezialfall der kanonischen Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}^{ft} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z}) \; .$$

Im Anhang B befassen wir uns mit der Rechtsexaktheit des ft-Néron-Modells.

3.1 Integrale Modelle und Néron-Modelle

Es sei K ein lokaler Körper und G_K ein glattes K-Gruppenschema von endlichem Typ. Unter einem integralen Modell von G_K verstehen wir ein flaches, separiertes $\mathcal{O}_K$-Gruppenschema G, dessen generische Faser als Gruppenschema isomorph zu G_K ist.
Die wohl fruchtbarste Art von integralen Modellen sind die lft-Néron-Modelle: Für algebraische Tori existiert in unserer Situation stets das Néron-Modell, man kann sogar eine explizite Konstruktion angeben (vgl. [BLR] Prop. 10.1.4): Ist nämlich T ein algebraischer K-Torus, so existiert eine endliche, galoissche Erweiterung L/K, so dass $T \otimes_K L \cong \mathbb{G}_{m,L}^n$ gilt. Damit gibt es eine abgeschlossene Immersion $T \hookrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L}^n)$, durch die T zu einer Untergruppe von $\mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L}^n)$ wird. Nun existiert das lft-Néron-Modell der $\mathbb{G}_{m,L}$ und somit auch ein lft-Néron-Modell $\mathcal{R}$ von $\mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L}^n)$. Dann ist die Gruppenglättung des schematischen Abschlusses von T in $\mathcal{R}$ ein lft-Néron-Modell von T.
Bei dieser Konstruktion ist wichtig, dass der schematische Abschluss ein integrales Modell von T ist, wozu wir folgendes Resultat zitieren möchten:

3.1.1 Lemma ([SGA 3] Exp. VIII 7.1). *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und $S := \mathrm{Spec}\, R$. Ist G ein S-Schema und H ein abgeschlossenes Unterschema von G_K (so dass also H ein Unterschema von G ist),*

dann existiert der schematische Abschluss $\overline{H}$ von H in G. Dieser ist ein flaches S-Schema mit generischer Faser $\overline{H}_K = H$ und ist das einzige abgeschlossene Unterschema von G mit diesen beiden Eigenschaften.
Diese Konstruktion ist funktoriell bezüglich solcher Paare (H, G) und vertauscht mit Faserprodukten, insb. ist $\overline{H}$ eine S-Untergruppe von G, falls G ein S-Gruppenschema ist und H eine Spec K-Untergruppe von G_K ist.

Da das Schema $\mathcal{R}$ nicht mehr quasikompakt ist und auch das lft-Néron-Modell eines Torus T im Allgemeinen weder affin noch quasikompakt ist, ist diese Konstruktion für explizite Berechnungen eher unhandlich. Deshalb betrachten z.B. Ching-Li Chai und Jui-Kang Yu in [ChYu] §3 ein sogenanntes ft-Néron-Modell. Sie definieren dieses als ein glattes integrales Modell $\mathcal{T}^{ft}$ von T, welches $\mathcal{T}^{ft}(\mathcal{O}_K^{sh}) = T(K^{nr})^{bd}$ erfüllt. Dabei bezeichnen sie mit $T(K^{nr})^{bd}$ die maximale beschränkte Untergruppe von $T(K^{nr})$. Sie geben an, dass sich dieses Modell als Gruppenglättung des schematischen Abschlusses von T unter der Einbettung

$$T \hookrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \cong \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L}^n) \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}^n)$$

konstruieren lässt. Diese Konstruktion entspricht der Konstruktion des lft-Néron-Modells, bis auf den Umstand, dass das Néron-Modell $\mathcal{R}$ durch seine Einskomponente $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L}^n)$ ersetzt wird (vgl. [N-X] 2.4).

Wir wollen das ft-Néron-Modell allgemein definieren, seine Eigenschaften bestimmen und es mit dem lft-Néron-Modell vergleichen. Natürlicherweise wollen wir in dem Fall, dass ein Néron-Modell von endlichem Typ existiert, dieses auch als ft-Néron-Modell verstehen. Somit untersuchen wir, in Analogie zu den Betrachtungen aus [BLR] 10.2, den Fall von kommutativen, glatten K-Gruppenschemata von endlichem Typ.

3.1.2 Satz. *Sei G_K ein kommutatives, glattes K-Gruppenschema von endlichem Typ. Es gibt genau dann eine maximale beschränkte Untergruppe von $G_K(K^{nr})$, wenn G_K keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K}$ besitzt.*
Eine maximale beschränkte Untergruppe $G_K(K^{nr})^{bd}$ existiert also genau dann, wenn ein lft-Néron-Modell $\mathcal{G}$ von G_K existiert. Sie entspricht dem Urbild des Torsionsanteils der Komponentengruppe $\Phi(\mathcal{G}_k)$ des Néron-Modells $\mathcal{G}$ unter der kanonischen Surjektion

$$G_K(K^{nr}) = \mathcal{G}(\mathcal{O}_K^{sh}) \longrightarrow \mathcal{G}_k(k^{sep}) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}_k)(k^{sep})$$

und für jede beschränkte Untergruppe C von $G_K(K^{nr})$ gilt $C \subset G_K(K^{nr})^{bd}$.

Beweis. Es sei ohne Einschränkung $K = K^{nr}$, denn G_K hat genau dann keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K}$, wenn $G_K \otimes_K K^{nr}$ keine Untergruppe der Form

$\mathbb{G}_{a,K^{nr}}$ hat. Wir nehmen an, dass eine maximale beschränkte Untergruppe $B \subset G_K(K)$ existiert. Angenommen es gäbe eine Untergruppe $U_K \hookrightarrow G_K$ der Form $\mathbb{G}_{a,K}$. Da wir K-Gruppenschemata betrachten, ist U_K eine abgeschlossene Untergruppe. Damit ist $B \cap U_K(K)$ eine beschränkte Untergruppe von $U_K(K) = K$:
Wegen der Beschränktheit von B gibt es nämlich eine endliche Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von G_K mit offenen affinen Unterschemata, abgeschlossene Immersionen $V_i \hookrightarrow \mathbb{A}_K^{n_i}$ und eine Zerlegung $B = \bigcup_{i\in I} B_i$, so dass $B_i \subset V_i(K)$ gilt und die B_i beschränkten Teilmengen von $\mathbb{A}_K^{n_i}(K)$ entsprechen. Damit ist $(U_K \cap V_i)_{i\in I}$ eine offene, affine Überdeckung von U_K, welche zeigt, dass $B \cap U_K(K)$ beschränkt in U_K ist.
Die Multiplikation μ auf G_K induziert durch Einschränkung einen Gruppenhomomorphismus $U_K \times_K G_K \longrightarrow G_K$. Alle Untergruppen $\pi^l\mathcal{O}_K \subset K = U_K(K)$ mit $l \in \mathbb{Z}$ sind beschränkt, $U_K(K)$ selbst ist aber unbeschränkt. Also gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$, so dass $\pi^l\mathcal{O}_K$ echt größer als $B \bigcap U_K(K)$ ist. Nun ist aber $\pi^l\mathcal{O}_K \times B$ eine beschränkte Untergruppe von $U_K \times_K G_K$, so dass mit [BLR](1.1.4) das Bild hiervon unter μ eine beschränkte Untergruppe von $G_K(K^{nr})$ sein muss, im Widerspruch zur Maximalität von B.
Sei nun angenommen, dass G_K keine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K}$ besitzt. Damit existiert ein lft-Néron-Modell $\mathcal{G}$ von G_K. Dieses hat eine als abelsche Gruppe endlich erzeugte Komponentengruppe $\Phi(\mathcal{G}_k)$. Deren Torsionsanteil ist demnach eine endliche Untergruppe. Da $\mathcal{G}$ glatt ist und $\mathcal{O}_K$ henselsch ist, ist die Abbildung

$$G_K(K^{nr}) = \mathcal{G}(\mathcal{O}_K^{sh}) \longrightarrow \mathcal{G}_k(k^{sep}) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}_k)(k^{sep})$$

ein Epimorphismus abelscher Gruppen. Betrachte in $G_K(K)$ das Urbild B des Torsionsanteils von $\Phi(\mathcal{G}_k)$. Dieses Urbild ist gleich den $\mathcal{O}_K$-wertigen Punkten des Unterschemas $\mathcal{G}^{ft}$ von $\mathcal{G}$, welches aus der generischen Faser und allen Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}_k$ besteht, welche auf ein Torsionselement von $\Phi(\mathcal{G}_k)$ abgebildet werden. Da $\Phi(\mathcal{G}_k)$ nach einer endlichen separablen Erweiterung von k konstant wird, gibt es eine endliche galoissche Erweiterung $\mathcal{O}_L \longrightarrow \mathcal{O}_K$, so dass $\mathcal{G}^{ft} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ eine Vereinigung aus der generischen Faser und endlich vielen Translaten der Einskomponente von $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ ist. Da die Einskomponente ein quasikompaktes, offenes Unterschema ist, muss demnach auch schon $\mathcal{G}^{ft}$ ein offenes, quasikompaktes Unterschema von $\mathcal{G}$ sein. Insbesondere ist $\mathcal{G}^{ft}$ also von endlichem Typ. Mit [BLR] 1.1.7 muss daher B eine beschränkte Untergruppe von $G_K(K)$ sein.
Angenommen C ist eine beschränkte Untergruppe von $G_K(K)$. Mit [BLR] 1.17 und 3.1.4 gibt es ein glattes $\mathcal{O}_K$-Schema H von endlichem Typ mit generischer Faser G_K, so dass $C \subset \mathrm{im}(H(\mathcal{O}_K) \longrightarrow H_K(K))$ gilt. Mit der Néronschen-Abbildungseigenschaft erhalten wir einen Morphismus $H \longrightarrow \mathcal{G}$ und eine Identifikation von C mit einer Teilmenge der $\mathcal{O}_K-$wertigen Punkten des Bildes von

H. Das Bild von H in $\mathcal{G}_k$ ist aber quasikompakt und deshalb lässt es sich von endlich vielen Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}_k$ überdecken. Da jede Zusammenhangskomponente über $\mathcal{O}_K^{sh}$ in endlich viele Translate der Einskomponente zerfällt, ist das Bild von C in $\Phi(\mathcal{G}_s)(k^{sep})$ endlich. Nach Voraussetzung ist es aber auch eine Untergruppe. Somit muss $C \subset B$ gelten, weshalb B die maximale beschränkte Untergruppe von $G_K(K)$ ist. □

Als nächstes identifizieren wir das ft-Néron-Modell mit einer offenen Untergruppe des lft-Néron-Modells und zeigen, dass sich ein ft-Néron-Modell über eine Liftungseigenschaft für gewisse étale Punkte charakterisieren lässt und eine Abbildungseigenschaft, analog zur Néronschen Abbildungseigenschaft, besitzt.

3.1.3 Theorem. *Sei G_K ein kommutatives, glattes K-Gruppenschema von endlichem Typ und es enthalte G_K keine Untergruppe vom Typ $\mathbb{G}_{a,K}$. Sei weiter $\mathcal{G}$ das lft-Néron-Modell von G_K und $\Phi(\mathcal{G}_k)$ die Komponentengruppe von $\mathcal{G}_k$. Für ein glattes, integrales Modell G^{ft} von G_K von endlichem Typ sind äquivalent*

1. *Es gilt $G^{ft}(\mathcal{O}_K^{sh}) = G_K(K^{nr})^{bd}$, wobei $G_K(K^{nr})^{bd}$ die maximale beschränkte Untergruppe von $G_K(K^{nr})$ sei.*

2. *Sei Z ein glattes $\mathcal{O}_K$-Schema und $u_K : Z_K \longrightarrow G_K$ und K-Morphismus, der eine Abbildung $Z_K(K^{nr}) \longrightarrow G_K(K^{nr})^{bd}$ induziert, dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $u : Z \longrightarrow G^{ft}$ zu einem $\mathcal{O}_K$-Schemamorphismus.*

3. *G^{ft} ist isomorph zu der offenen Untergruppe $\mathcal{G}^{ft}$ von $\mathcal{G}$ mit generischer Faser G_K und der speziellen Faser bestehend aus den Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{G}_k$, deren Bild unter $\mathcal{G}_k \twoheadrightarrow \Phi(\mathcal{G}_k)$ im Torsionsanteil liegen.*

Ein solches integrales Modell heiße ft-Néron-Modell von G_K. Es existiert unter den Voraussetzungen des Theorems immer und ohne die Voraussetzungen wäre keine der angegebenen Beschreibungen sinnvoll.

Beweis. Anhand der Beschreibung (3) zeigen wir zunächst den Zusatz. Mit [BLR] Thm. 10.2.2 existiert unter den Vorsaussetzungen stets ein lft-Néron-Modell von G_K, und seine Komponentengruppe $\Phi(\mathcal{G}_k)$ ist als abelsche Gruppe endlich erzeugt, weshalb der Torsionsanteil von $\Phi(\mathcal{G}_k)$ endlich ist. Wie wir im Beweis zum Satz 3.1.2 gesehen haben, ist die oben definierte Teilmenge $\mathcal{G}^{ft}$ von $\mathcal{G}$ tatsächlich ein offenes Unterschema von endlichem Typ. Der Einsschnitt faktorisiert trivialerweise durch $\mathcal{G}$. Das Inversenbilden auf $\mathcal{G}$ muss ein Isomorphismus von $\mathcal{G}^{ft}$ sein, da der Torsionsanteil von $\Phi(\mathcal{G}_k)$ ein Untergruppenschema von $\Phi(\mathcal{G}_k)$ ist. In analoger Weise muss auch die Multiplikation über $\mathcal{G}^{ft}$ faktorisieren. Falls umgekehrt G_K eine Untergruppe der Form $\mathbb{G}_{a,K}$ besitzt, so gibt es weder ein

lft-Néron-Modell noch eine maximale beschränkte Untergruppe von $G_K(K^{nr})$.
Wir zeigen nun die Äquivalenz der drei Beschreibungen:
$(1) \Rightarrow (2)$: Dies folgt mit der Beweisidee zu [BLR] 3.5.3. Sei also Z ein glattes $\mathcal{O}_K$-Schema und $u_k : Z_K \longrightarrow G_K^{ft}$ ein K-Morphismus mit $Z_K(K^{nr}) \subset G_K^{ft}(K^{nr})^{bd}$. Ohne Einschränkung sei Z von endlichem Typ. Sei nun Γ der schematische Abschluss des Graphen von u_K in $Z \times G^{ft}$. Es sei ferner $p : \Gamma \subset Z \times G^{ft} \longrightarrow Z$ die Projektion auf Z.
Da Z und G^{ft} von endlichem Typ sind und $\mathcal{O}_K$ noethersch ist, ist Γ von endlicher Präsentation. Mit Chevalleys Theorem folgt, dass das Bild von $p_k : \Gamma_k \longrightarrow Z_k$ konstruierbar ist. Wegen (1) enthält das Bild die dichte Teilmenge aller Punkte $z_k \in Z_k(k^{sep})$, welche zu einem Punkt $z \in Z(\mathcal{O}_K^{sh})$ liften. Also muss für jede irreduzible Komponente von Z_k auch deren generischer Punkt im Bild von p liegen. Damit hat ein solcher generischer Punkt η ein Urbild $\xi \in \Gamma$ und der lokale Ring $\mathcal{O}_{\Gamma,\xi}$ dominiert den diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_{Z,\eta}$. Da p auf der generischen Faser ein Isomorphismus ist und Γ flach ist, müssen die zugehörigen Lokalisierungen nach π_K isomorph sein, und es gilt schon $\mathcal{O}_{\Gamma,\xi} \cong \mathcal{O}_{Z,\eta}$. Damit ist p in einer offenen Umgebung von η ein Isomorphismus, so dass wir insgesamt eine $\mathcal{O}_K$-rationale Abbildung $Z \dashrightarrow G^{ft}$ erhalten.
Da G^{ft} ein glattes, separiertes Gruppenschema ist, folgt mit dem Weilschen Ausdehnungssatz ([BLR] Thm.4.4.1) die Existenz eines $\mathcal{O}_K$-Morphismus $u : Z \longrightarrow G^{ft}$, welcher u_K fortsetzt. Dieser ist eindeutig, weil er auf der dichten Teilmenge der Punkte $z_k \in Z_k(k)$, welche zu Punkten $z \in Z(\mathcal{O}_K)$ liften, schon bestimmt ist ([EGA IV] 11.10).
$(2) \Rightarrow (3)$: Mit der universellen Eigenschaft des lft-Néron-Modells $\mathcal{G}$ existiert eine Abbildung $G^{ft} \longrightarrow \mathcal{G}$, welche die Identität auf G_K fortsetzt. Da G^{ft} quasikompakt ist, ist auch das Bild von G^{ft} quasikompakt und lässt sich also mit endlich vielen Translaten der Einskomponente überdecken. Da diese Abbildung wegen der Néronschen Abbildungseigenschaft sogar ein Gruppenschemamorphismus sein muss, faktorisiert sie über $\mathcal{G}^{ft} \hookrightarrow \mathcal{G}$.
Mit dem Satz 3.1.2 sind die $\mathcal{O}_K^{sh}$-wertigen Punkte von $\mathcal{G}^{ft}$ gleich der maximalen beschränkten Untergruppe von G_K. Damit liftet wegen (2) die Identität auf G_K zu einer Abbildung $\mathcal{G}^{ft} \longrightarrow G^{ft}$. Wegen der Eindeutigkeit dieser Abbildungen muss $G^{ft} \cong \mathcal{G}^{ft}$ gelten.
$(3) \Rightarrow (1)$: Diese Implikation ist klar mit dem Satz 3.1.2. $\square$

Um das ft-Néron-Modell für algebraische Tori zu untersuchen, bietet es sich an, zunächst die maximale beschränkte Untergruppe der $K^{nr}-$wertigen Punkte zu beschreiben. Dazu wollen wir in geeigneter Weise einen Betrag definieren.
Sei also T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$ und L sei eine endliche, separable Erweiterung von K^{nr}, über der T zerfällt. Dann gilt wegen

Cartier-Dualität

$$T(L) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), K^{sep*})^{\mathrm{Gal}(K^{sep}/L)} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^*)$$
$$T(K^{nr}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), K^{sep*})^{\mathrm{Gal}(K^{sep}/K^{nr})} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(L/K^{nr})}(X(T), L^*)$$

Da T über L zerfällt, existiert eine Trivialisierung $T_L \cong \mathbb{G}_{m,L}^n \cong \mathrm{Spec}\, L[X(T)]$. Mit einer $\mathbb{Z}$-Basis $(\chi_1, .., \chi_n)$ von $X(T)$ können wir

$$L[X(T)] = L[X_1, .., X_n, Z]/(X_1 \cdot ... \cdot X_n \cdot Z - 1)$$

mit Variablen X_i für jedes χ_i schreiben. Dadurch wird ein Punkt $x \in T(L) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^*)$ mit einem Morphismus

$$x : L[X(T)] \longrightarrow L \quad X_i \mapsto x(\chi_i) \in L^*$$

identifiziert.
Um den Betrag eines Punktes $x \in T(K^{nr})$ zu bestimmen, reicht es mit [BLR] Prop. 1.1.5, den Betrag von x als Punkt aus $T_L(L)$ zu kennen. Bei dieser Identifizierung wird ein $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^*)^{\mathrm{Gal}(L/K^{nr})}$ mit der x zugrunde liegenden Abbildung $X(T) \longrightarrow L^*$ von abelschen Gruppen identifiziert. Gemäß der Definition [BLR] 1.1.2 betrachten wir die abgeschlossene Immersion

$$T_L \hookrightarrow \mathbb{A}_L^{n+1} \quad L[X_1, .., X_n, Z] \twoheadrightarrow L[X_1, .., X_n, Z]/(X_1 \cdot ... \cdot X_n \cdot Z - 1)$$

und können x den Betrag

$$\|x\| := \max\{|x(\chi_1)|,\ ..,\ |x(\chi_n)|,\ |\frac{1}{\prod_{i=1,..,n} x(\chi_i)}|\}$$

zuordnen. Wir schreiben das Gruppengesetz auf einem Torus multiplikativ. Nach der Trivialisierung wird die Multipliktion auf T zu der komponentenweisen Multiplikation der $\mathbb{G}_{m,L}^n$. Damit sieht man, dass für $l \in \mathbb{N}$ und $x, y \in T(L)$ die Beziehungen

$$\|x^l\| = \|x\|^l$$
$$\|x^{-1}\|^{-1} = \min\{|x(\chi_1)|\ ,..,\ |x(\chi_n)|,\ |\frac{1}{\prod_{i=1,..,n} x(\chi_i)}|\}$$
$$\|xy\| \leq \|x\|\ \|y\|$$

gelten. Also ist die von einem Element x erzeugte Untergruppe genau dann beschränkt, wenn alle $x(\chi_i)$ den Betrag Eins haben. Wegen der komponentenweisen Multiplikation erzeugen zwei solche Elemente wieder eine beschränkte Untergruppe. Somit gilt

$$T(K^{nr})^{bd} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), \mathcal{O}_L^*)^{\mathrm{Gal}(L/K^{nr})}. \tag{3.1.3.1}$$

Anhand der ersten Beschreibung aus dem Theorem 3.1.3 sieht man, dass man das ft-Néron-Modell analog zum normalen Néron-Modell als Gruppenglättung eines integralen Modells konstruieren kann, welches $T(K^{nr})^{bd}$ liftet. Im Fall von algebraischen Tori kann man ein solches integrales Modell explizit angeben.

3.1.4 Satz. *Das ft-Néron-Modell der $\mathbb{G}_{m,K}$ ist $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}$. Ist L/K eine endliche, separable Erweiterung lokaler Körper und G_L ein kommutative glatte algebraische L-Gruppe mit ft-Néron-Modell $\mathcal{G}^{ft}$, dann hat auch $\mathfrak{R}_{L/K}(G_L)$ ein ft-Néron-Modell und dies ist isomorph zu $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^{ft})$. Das ft-Néron-Modell ist verträglich mit étalem Basiswechsel.*

Beweis. Nach der Konstruktion des lft-Néron-Modells der $\mathbb{G}_{m,K}$ ist klar, dass das ft-Néron-Modell der $\mathbb{G}_{m,K}$ gleich $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}$ ist.
Sei nun G_L wie behauptet. Das lft-Néron-Modell $\mathcal{G}$ existiert und enthält $\mathcal{G}^{ft}$ als eine offene, quasikompakte Untergruppe. Die Weil-Restriktion ist mit offenen Immersionen verträglich und respektiert Gruppenschemastrukturen. Somit ist $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^{ft})$ eine offene Untergruppe des lft-Néron-Modells $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G})$ von $\mathfrak{R}_{L/K}(G_L)$. Die Weil-Restriktion ist, da $\mathcal{O}_K$ noethersch ist, auch mit Quasikompaktheit verträglich, so dass diese Untergruppe auch von endlichem Typ ist. Schließlich ist $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^{ft})$ trivialerweise glatt.
Nun haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{ft} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow i_*\Phi(\mathcal{G}_s)^{\vee\vee} \longrightarrow 0$$

auf dem étalen Situs über $\mathcal{O}_L$. Wegen der Exaktheit der Weil-Restriktion impliziert dies eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^{ft}) \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(i_*\Phi(\mathcal{G}_s)^{\vee\vee}) \longrightarrow 0$$

über $\mathcal{O}_K$. Nun ist $\Phi(\mathcal{G}_s)^{\vee\vee}$ torsionsfrei und die Weil-Restriktion hiervon ist eine Induktion von $\Phi(\mathcal{G}_s)^{\vee\vee}$ wie wir im Beweis des Theorems 1.2.1 gesehen hatten. Somit ist diese wieder torsionsfrei, so dass das Bild von $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^{ft})(\mathcal{O}_K^{sh})$ in der Komponentengruppe von $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G})\otimes_{\mathcal{O}_K} k$ den Torsionsanteil enthält. Das Bild kann wegen der Quasikompaktheit aber nicht größer als der Torsionsanteil sein, womit wir insgesamt

$$\mathfrak{R}_{L/K}(G_L)(K^{nr})^{bd} = \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^{ft})(\mathcal{O}_K^{sh})$$

gezeigt haben. Nun folgt die Behauptung aus dem Theorem 3.1.3.
Da Beschränkheit mit endlichem, separablem Basiswechsel verträglich ist, kann man die Argumentation von [BLR] 1.2.2 c) auch auf ft-Néron-Modelle anwenden; diese sind also mit étalem Basiswechsel verträglich. □

3.1.5 Satz. *Sei T ein algebraischer K-Torus mit einer endlichen, galoisschen Zerfällungserweiterung L. Betrachte die Kette*

$$T \hookrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \cong \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}^n_{m,L}) \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$$

von Inklusionen. Es sei $\overline{T}$ der schematische Abschluss von T in $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$. $\overline{T}$ ist ein affines integrales Modell von T und unabhängig von der speziellen Wahl von L. Bezüglich der Wahl von T ist es verträglich mit étalem Basiswechsel. Ferner gilt $\overline{T}(\mathcal{O}_K^{sh}) = T(K^{nr})^{bd}$.

Beweis. Die abgeschlossene Immersion $T \hookrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$ ist ein Homomorphismus von Gruppenschemata, so dass $T(K^{nr})^{bd}$ in $\mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}^n_{m,L})(K^{nr})^{bd}$ abgebildet wird. Diese Punkte liften zu $\mathcal{O}_K^{sh}$-wertigen Punkten von $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$. Damit liften alle Punkte aus $T(K^{nr})^{bd}$ zu $\mathcal{O}_K^{sh}-$wertigen Punkten von $\overline{T}$. Nach Konstruktion ist dieser Abschluss ein affines Schema von endlichem Typ, denn $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$ und T sind affine Schemata. Mit [SGA 3] Exp. VIII Lem 7.1 ist klar, dass $\overline{T}$ ein integrales Modell von T ist. Damit können keine anderen Punkte aus $T(K^{nr})$ zu $\mathcal{O}_K^{sh}$-wertigen Punkten von $\overline{T}$ liften, denn diese Punkte würden unbeschränkte Untergruppen induzieren.
Für die Unabhängigkeit von der Wahl von L betrachte man eine endliche Erweiterung M/L. Dann faktorisiert die Einbettung $T \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_M/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_M})$ über die abgeschlossene Immersion $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L}) \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_M/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_M})$ induziert von der abgeschlossenen Immersion $\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L} \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_M/\mathcal{O}_L}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_M})$. Sei schließlich K'/K eine unverzweigte Erweiterung. Da der schematische Abschluss mit flachem Basiswechsel verträglich ist, ist $\overline{T} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}$ der schematische Abschluss von $T_{K'}$ in $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'} = \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}/\mathcal{O}_{K'}}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_L} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'})$.
Da K'/K unverzweigt ist, gilt $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'} \cong \prod_{[L \cap K':K]} \mathcal{O}_{L'}$, wobei L' das Kompositum von K' mit L sei. Analog gilt (vgl [N-X] Prop. 2.2)

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'} = \underset{[L \cap K':K]}{\times} \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_{L'}/\mathcal{O}_{K'}}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_{L'}})$$

und die Einbettung von $T_{K'}$ hierin faktorisiert über die Diagonaleinbettung

$$\Delta : \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_{L'}/\mathcal{O}_{K'}}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_{L'}}) \hookrightarrow \underset{[L \cap K':K]}{\times} \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_{L'}/\mathcal{O}_{K'}}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_{L'}}).$$

Da die betrachteten Schemata separiert sind, ist die Diagonaleinbettung eine abgeschlossene Immersion, womit auch der schematische Abschluss über Δ faktorisiert. $\square$

3.2 Néron-Modelle und abgeschlossene Immersionen

3.2.1 Satz. *Das ft-Néron-Modell eines algebraischen K-Torus T ist gleich der Gruppenglättung des schematischen Abschlusses $\overline{T}$ von T unter der Immersion $T \hookrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \cong \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}^n_{m,L}) \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$.*
Es sind äquivalent:

1. *$\overline{T}$ ist glatt.*
2. *Die kanonische Abbildung $\mathcal{T}^{ft} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$ ist eine abgeschlossene Immersion.*
3. *Die kanonische Abbildung $\mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^n_{\mathcal{O}_L})$ ist eine abgeschlossene Immersion. Dabei sei $\mathcal{G}^n_{\mathcal{O}_L}$ das lft-Néron-Modell von $\mathbb{G}^n_{m,L}$ über $\mathcal{O}_L$.*

Beweis. $(1) \Rightarrow (2)$: Da $\overline{T}$ ein integrales Modell von endlichem Typ ist, ist klar, dass die Gruppenglättung $\mathcal{T}^{ft}$ von $\overline{T}$ existiert. Mit dem Satz oben ist $\mathcal{T}^{ft}$ ein ft-Néron-Modell von T. Ist $\overline{T}$ schon glatt, dann ist keine Glättung mehr nötig und die kanonische Abbildung $\mathcal{T}^{ft} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$ entspricht der abgeschlossenen Immersion $\overline{T} \hookrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$.
$(2) \Rightarrow (3)$: Analogerweise ist $\mathcal{T}$ die Gruppenglättung des schematischen Abschlusses von T in $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^n_{\mathcal{O}_L})$. Da dieser schematische Abschluss ein $\mathcal{O}_K$-Gruppenschema ist, ist er bereits glatt, wenn er in einer Umgebung der Eins glatt ist. Dies kann man schon auf der offenen Untergruppe $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$ testen. Wegen der Eindeutigkeitsaussage aus [SGA 3] Exp. VIII Lem 7.1 ist mit (2) der schematische Abschluss in einer Umgebung der Eins gleich der kanonischen Abbildung $\mathcal{T}^{ft} \longrightarrow \mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^n_{m,\mathcal{O}_L})$, also glatt. Damit war keine Glättung nötig und der kanonische Morphismus ist eine abgeschlossene Immersion.
$(3) \Rightarrow (1)$ Wieder mit [SGA 3] Exp VIII Lem 7.1 ist der schematische Abschluss von T in $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathcal{G}^n_{\mathcal{O}_L})$ glatt. Da der schematische Abschluss lokal bestimmbar ist, ist $\overline{T}$ ein offenes Unterschema von diesem schematischen Abschluss, also insbesondere glatt. □

In [V-K-M] §5 Prop. 6 wird der eben betrachtete schematische Abschluss $\overline{T}$ mit dem sogenannten Standard-Modell (s. loc. cit, [PV], [P]) identifiziert. Mit dem Beweis der letzten beiden Sätze ist klar, dass die Gruppenglättung dieses Abschlusses dem ft-Néron-Modell entspricht (vgl. [P] §10 Prop. 8 und [V-K-M] §5 Prop. 7). Edixhoven definiert in [Edi] Const. 2.3 und 2.4 für eine endliche galoissche Erweiterung $S' \longrightarrow S$ und ein S-Schema X eine Operation von $G := \mathrm{Gal}(S'/S)$ auf $X' := \mathfrak{R}_{S'/S}(X \times_S S')$. Er betrachtet nun den Funktor der G-invarianten Punkte (s. [Edi] §3) von X' und zeigt, dass dieser für ein

separiertes X von einem abgeschlossenen Unterschema dargestellt wird. Aus der expliziten Konstruktion erkennt man, dass die kanonische abgeschlossene Immersion $X \hookrightarrow \mathfrak{R}_{S'/S}(X \times_S S')$ mit der Immersion $X'^G \hookrightarrow X'$ des darstellenden Schemas der G-invarianten Punkte übereinstimmt.
Ist nun T ein algebraischer K-Torus mit einer endlichen, galoisschen Zerfällungserweiterung L, dann haben wir auf $\mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \cong \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}^d_{m,L})$ eine äquivariante $G := \mathrm{Gal}(L/K)$-Operation, so dass T dem Unterschema der G-invarianten Punkte entspricht. Diese Operation setzt sich wegen der Äquivarianz kanonisch fort zu einer Operation auf $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^d_{m,\mathcal{O}_L})$.
Das abgeschlossene Unterschema der G-invarianten Punkte von $\mathfrak{R}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}(\mathbb{G}^d_{m,\mathcal{O}_L})$ ist ein $\mathcal{O}_K$-Modell von T und mit [Edi] Prop.3.4 sieht man, dass dieses Modell glatt ist, falls L/K zahm verzweigt ist. Mit [SGA 3] Exp. VIII Lem. 7.1 muss dies Modell schon der schematische Abschluss von T sein. Insbesondere ist dann das Standard-Modell gleich dem ft-Néron-Modell.
Wir erhalten als Anwendung den folgenden Satz:

3.2.2 Satz (vgl. [BLR] Thm 7.5.4, [Edi] Thm. 6.1). *Sei $\iota : T_1 \longrightarrow T_2$ ein Monomorphismus algebraischer K-Tori und T_1 zerfalle nach einer zahm verzweigten Erweiterung von K.*
Dann ist die induzierte Abbildung $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ der Néron-Modelle eine abgeschlossene Immersion.

Beweis. Sei L/K eine gemeinsame Zerfällungserweiterung von T_1 und T_2. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, hook] & T_2 \arrow[d, hook] \\ \mathfrak{R}_{L/K}((T_1)_L) \arrow[r, hook] & \mathfrak{R}_{L/K}((T_2)_L) \end{tikzcd},$$

in dem alle Abbildungen abgeschlossene Immersionen sind: Für ι nutze man, dass Monomorphismen von diagonalisierbaren Gruppenschemata immer abgeschlossene Immersionen sind. Abgeschlossene Immersionen sind aber mit Descent verträglich. Die vertikalen Abbildungen sind die kanonischen Einbettungen, die wegen der Separiertheit der Tori T_i abgeschlossene Immersionen sind. In der unteren Zeile nutze man die Verträglichkeit der Weil-Restriktion mit abgeschlossenen Immersionen.
Es sei $\mathcal{R}$ das Néron-Modell von $\mathfrak{R}_{L/K}((T_2)_L)$. Nach Voraussetzung ist der schematische Abschluss von T_1 in $\mathcal{R}$ glatt und gleich dem Néron-Modell von T_1.

Diese Einbettung faktorisiert nun über die von ι induzierte Abbildung $j_*\iota$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_1 \arrow[r, "j_*\iota"] \arrow[d, hook] & \mathcal{T}_2 \arrow[dl] \\ \mathcal{R} & \end{tikzcd}$$

der Néron-Modelle. Damit muss $j_*\iota$ eine abgeschlossene Immersion sein, da $\mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{R}$ separiert ist ([H] II Ex 4.8 u. Cor 4.6 e). □

3.3 Das ft-Néron-Modell eines algebraischen Torus als Garbe

Die Bildung des Néron-Modells entspricht auf dem étalen und dem glatten Situs über Spec K dem linksexakten Funktor j_*. In diesem Sinn induziert eine kurze exakte Sequenz von kommutativen K-Gruppenschema eine linksexakte Sequenz von Néron-Modellen auf dem entsprechenden Situs über Spec $\mathcal{O}_K$. Wir zeigen, dass dies auch für die ft-Néron-Modelle gilt.

3.3.1 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und*

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz kommutativer glatter algebraischer K-Gruppen von endlichem Typ, für die lft-Néron-Modelle existieren. Dann induziert diese auf dem étalen und dem glatten Situs über $\mathcal{O}_K$ eine linksexakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_1^{ft} \longrightarrow \mathcal{G}_2^{ft} \longrightarrow \mathcal{G}_3^{ft}$$

der ft-Néron-Modelle, wobei die Abbildungen der Garben von den Gruppenschemamorphismen induziert werden, welche mit der universellen Eigenschaft des $ft-$Néron-Modells von den $K-$Gruppenschemamorphismen auf der generischen Faser induziert worden sind.

Beweis. Aus der kanonischen Inklusion der ft-Néron-Modelle in die lft-Néron-Modelle erhalten wir eine Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_1^{ft} \longrightarrow \mathcal{G}_2^{ft} \longrightarrow \mathcal{G}_3^{ft},$$

von étalen Garben, denn für ein glattes $\mathcal{O}_K$-Schema Z und einen $\mathcal{O}_K$-Morphismus $u^{ft} : Z \longrightarrow \mathcal{G}_i^{ft}$ ist die Liftung der Abbildung $u_K : Z_K \longrightarrow G_i$ zu einem Morphismus $u : Z \longrightarrow \mathcal{G}_i$ genau die Verknüpfung von u^{ft} mit der Inklusion $\mathcal{G}_i^{ft} \hookrightarrow \mathcal{G}$. Ferner induziert ein Morphismus $u_K : Z_K \longrightarrow G_i$ mit einer Liftung $Z \longrightarrow \mathcal{G}_i^{ft}$ einen K-Morphismus $Z_K \longrightarrow G_{i+1}$ mit einer Liftung $Z \longrightarrow \mathcal{G}_{i+1}^{ft}$, denn das Bild einer beschränkten Teilmenge ist wieder beschränkt und der Morphismus $G_i \longrightarrow G_{i+1}$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
Um die Exaktheit dieser Sequenz im Étalen zu untersuchen, reicht es die Halme zu betrachten; der Halm in der generischen Faser ist nach Voraussetzung exakt und der Halm in der speziellen Faser entspricht der Sequenz

$$0 \longrightarrow G_1(K^{nr})^{bd} \xrightarrow{\alpha} G_2(K^{nr})^{bd} \xrightarrow{\beta} G_3(K^{nr})^{bd}$$

mit den kanonischen Abbildungen. Dass die Sequenz bei $G_1(K^{nr})^{bd}$ exakt ist, ist klar. Für die Exaktheit bei $G_2(K^{nr})^{bd}$ ist nur noch im $\alpha \supset$ ker β zu zeigen. Wegen der Linksexaktheit der Sequenz der lft-Néron-Modelle hat ein $x \in$ ker β ein Urbild $z \in G_1(K^{nr})$. Da aber $\{x^l | l \in \mathbb{Z}\} \subset G_2(K^{nr})$ nach Voraussetzung beschränkt ist und $G_1 \longrightarrow G_2$ eine abgeschlossene Immersion ist, muss auch dessen Urbild $\{z^l | l \in \mathbb{Z}\}$ beschränkt in G_1 sein und damit gilt $z \in G_1(K^{nr})^{bd}$.
Im Glatten ist ebenfalls nur noch im $\alpha \supset$ ker β zu zeigen. Sei also Z ein glattes $\mathcal{O}_K$-Schema und $f_2 : Z \longrightarrow \mathcal{G}_2^{ft}$ ein Morphismus, der verknüpft mit $\mathcal{G}_2^{ft} \longrightarrow \mathcal{G}_3^{ft}$ trivial ist. Wegen der Linksexaktheit der Sequenz der lft-Néron-Modelle faktorisiert f_2 als Schnitt von $\mathcal{G}_2$ glatt-lokal über $\mathcal{G}_1$. Das Bild dieser Faktorisierungen kann aber nur Komponenten von $(\mathcal{G}_1)_k$ treffen, die im Torsionsanteil von $\Phi((\mathcal{G}_1)_k)$ liegen, denn genau diese Komponenten gehen unter dem quasikompakten Gruppenhomomorphismus $(\mathcal{G}_1)_k \longrightarrow (\mathcal{G}_2)_k$ in den Torsionsanteil von $\Phi((G_2)_k)$. □

Im Anhang B werden wir uns mit der Frage der Rechtsexaktheit (im Fall algebraischer K-Tori) befassen.

Wir wollen nun für einen algebraischer K-Torus T die étale Garbe dargestellt von ft-Néron-Modell näher untersuchen. Bis hierhin haben wir die Beschränktheit einer Menge von Punkten aus $T(K^{nr})$ auf der gesamten Charaktergruppe getestet. Die Beschreibung des freien Anteils nach Xarles zeigt aber, dass (zumindest für perfekten Restklassenkörper) die Beschränktheit schon auf $X(T)^I = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$ zu testen sein müsste. Tatsächlich gilt:

3.3.2 Satz. *Sei T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Sei L/K^{nr} eine endliche, galoissche Zerfällungerweiterung von $T \otimes_K K^{nr}$ mit Galoisgruppe $I = Gal(L/K^{nr})$. Dann gilt*

$$T(K^{nr})^{bd} = \{f \in \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^*)^I \mid f(x) \in \mathcal{O}_K^{sh^*} \text{ für } x \in X(T)^I\} ,$$

d.h. die maximale beschränkte Untergruppe besteht aus genau den Punkten, welche unter der kanonischen Abbildung $T \longrightarrow T^I$ auf einen Punkt gehen, der in $T^I(K^{nr})$ eine beschränkte Untergruppe erzeugt.

Beweis. Betrachte zu $X(T)$ die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T)^I \longrightarrow X(T) \longrightarrow X/X(T)^I =: X'(T) \longrightarrow 0$$

von stetigen, torsionsfreien Galoismoduln. Diese induziert mit Cartier-Dualität eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow T \longrightarrow T^I \longrightarrow 0$$

von algebraischen K-Tori. Die $K^{nr}-$wertigen Punkte dieser Gruppenschemata bilden eine linksexakte Sequenz, welche mit Cartier-Dualität die Form

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_I(X'(T), L^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_I(X(T), L^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T)^I, (K^{nr})^*)$$

hat. Da $X(T)^I$ ein saturierter Untermodul von $X(T)$ ist, gibt es eine $\mathbb{Z}$-Basis $(\chi_1, .., \chi_n)$ von $X(T)$, so dass $(\chi_1, .., \chi_d)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $X(T)^I$ bildet. Ein Punkt $x \in T(K^{nr}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^*)^I$ gehört genau dann zur maximalen beschränkten Untergruppe von $T(K^{nr})$, wenn alle $x(\chi_i)$ in $\mathcal{O}_L^*$ liegen. Somit ist zu zeigen, dass für einen Punkt x mit $x(\chi_1), .., x(\chi_d) \in \mathcal{O}_L^*$ schon $x(\chi_{d+1}), .., x(\chi_n) \in \mathcal{O}_L^*$ folgt.
Wegen der Verträglichkeit des Betrages mit Potenzierung reicht es, dies für $x' := x^r$ zu zeigen, wobei $r = [L : K^{nr}]$ gleich der Mächtigkeit von I sei. x' entspricht der Abbildung, die von der Zuordnung $\chi_i \mapsto x_i^r$ induziert wird. Weiterhin folgt $x_1, .., x_d \in \mathcal{O}_K^{sh*}$, da x ein I-Morphismus ist und die $\chi_1, .., \chi_d$ I-invariant sind.
Man betrachte die Abbildung $y \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^*) = T(L)$, die von der Zuordnung

$$\chi_1 \mapsto x_1,\ ..,\ \chi_d \mapsto x_d,\ \chi_{d+1} \mapsto 1,\ ..,\ \chi_n \mapsto 1$$

induziert wird. Die Abbildung $y' := \prod_{\sigma \in I} \sigma \circ y$ ist invariant unter der Operation von I, d.h. $y' \in T(K^{nr})$. Für die I-invarianten Charaktere $(\chi_i)_{i=1,..,d}$ gilt $\sigma \circ y(\chi_i) = \sigma(y(\sigma^{-1}(\chi_i))) = \sigma(y(\chi_i))$. Insgesamt gilt also $y'(\chi_i) = N_{L/K^{nr}}(x_i)$ für $i = 1, .., d$. Da aber $x_i \in \mathcal{O}_K^{sh*}$ gilt, gilt sogar $y'(\chi_i) = x_i^r$ für $i = 1, .., d$. Die übrigen Charaktere $(\chi_j)_{j=d+1,..,n}$ werden offenbar auf Produkte von Potenzen von Elementen der Form $\sigma(x_i)$ mit $\sigma \in I$ und $i = 1, .., d$ abgebildet. Da die x_i in $\mathcal{O}_K^{sh*}$ liegen, müssen auch diese Charaktere Bilder in $\mathcal{O}_K^{sh*}$ haben.
Die Abbildung $T(K^{nr}) \longrightarrow T^I(K^{nr})$ ist die Einschränkung auf $X(T)^I$, so dass x'/y' im Kern dieser Abbildung liegt. Wegen der Linksexaktheit der Schnitte über K^{nr} muss demnach x'/y' im Bild von $T'(K^{nr})$ liegen.

Nun ist $T' \otimes_K K^{nr}$ ein anisotroper Torus, so dass mit [BLR] Thm. 10.2.1 $T'(K^{nr}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T)/X(T)^I, L^*)^I$ beschränkt ist. Damit müssen alle Abbildungen aus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T)/X(T)^I, L^*)^I$ von Zuordnungen

$$\chi_{d+1} \mapsto x_{d+1}, \; .., \; \chi_n \mapsto x_n$$

mit Werten $x_{d+1}, .., x_n \in \mathcal{O}_L^*$ induziert werden.
Die Abbildung $T'(K^{nr}) \longrightarrow T(K^{nr})$ entspricht der Fortsetzung durch die Zuordnung $\chi_1, .., \chi_d \mapsto 1$. Für $i = d+1, .., n$ folgt insgesamt:

$$x_i^r = x'(\chi_i) = y'(\chi_i) \cdot (x'(\chi_i)/y'(\chi_i)) \in \mathcal{O}_L^*$$

womit $x_i \in \mathcal{O}_L^*$ gewesen sein muss. □

Damit können wir das ft-Néron-Modell als étale Garbe beschreiben.

3.3.3 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Dann wird $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$ als Garbe auf dem étalen Situs über $\mathcal{O}_K$ von dem ft-Néron-Modell von T dargestellt.*

Beweis. Es reicht, die Aussage für zusammenhängende, étale $\mathcal{O}_K$-Schemata U zu prüfen. Falls $U = \mathrm{Spec}\, K'$ für eine endliche, separable Körpererweiterung K' von K ist, gibt es wegen der Cartier-Dualität einen natürlichen Isomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})(U) = \mathrm{Hom}_{K'}(\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,K'}) \cong T(K').$$

Das ft-Néron-Modell $\mathcal{T}^{ft}$ hat als generische Faser den Torus T selbst, also gilt die Behauptung auf der generischen Faser.
Falls $U = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{K'}$ für eine endliche, unverzweigte Erweiterung K'/K ist, dann ist

$$\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{K'}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_{K'}}).$$

Wir untersuchen mit Hilfe des Zerlegungssatzes ([M] II Thm. 3.10) die rechte Seite dieser Gleichung: Ein Morphismus ψ von $j_*\underline{X}(T)$ nach $\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_{K'}}$ entspricht einem Paar

$$\begin{pmatrix} \psi_{\bar\eta} : X(T) & \longrightarrow & K^{sep*} \\ \psi_{\bar s} : X(T)^I & \longrightarrow & \mathcal{O}_{K'}^{sh\,*} \end{pmatrix}$$

von Morphismen, wobei $\psi_{\bar\eta}$ ein $G_{K'} = \mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K')$-Morphismus ist und $\psi_{\bar s}$ ein $G_{k'} = \mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k')$ Morphismus ist. Außerdem muss das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X(T)^I \arrow[r, "\psi_{\bar s}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_{K'}^{sh\,*} \arrow[d, hook] \\ X(T)^I \arrow[r, "\psi_{\bar\eta}"] & ((K^{sep})^*)^I = K^{nr*} \end{tikzcd}$$

kommutieren. Dies besagt aber, dass $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_{K'}})(U)$ genau aus Paaren $(\psi_{\bar{\eta}}, \psi_{\bar{\eta}}|_{X(T)^I})$ besteht, für die gilt, dass $\psi_{\bar{\eta}}|_{X(T)^I}$ Werte aus ${\mathcal{O}_{K'}^{sh}}^*$ annimmt. Die Einschränkung eines Morphismus $\psi_{\bar{\eta}}$ muss man dabei als das Bild unter dem Morphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), K^{sep*})^{G_{K'}} \longrightarrow\ & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T)^I, K^{sep*})^{G_{K'}} \\ =\ & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T)^I, K^{nr*})^{G_{K'}} \end{aligned}$$

induziert von der Inklusion $X(T)^I \longrightarrow X(T)$ verstehen.
Also entsprechen die Elemente von $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_{K'}})(U)$ genau den Punkten aus $T(K') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), K^{sep*})^{G_{K'}}$, die auf Charakteren aus $X(T)^I$ nur Werte aus ${\mathcal{O}_{K'}^{sh}}^*$ annehmen. Dies sind aber genau die Punkte der maximalen beschränkten Untergruppe von $T(K')$, also gleich $\mathcal{T}^{ft}(U)$. Mit der Cartier-Dualität auf der generischen Faser sieht man, dass diese Identifikation natürlich ist, also einen Garbenisomorphismus induziert. $\square$

Kapitel 4

Exaktheitseigenschaften des Néron-Modells

Untersucht man das Néron-Modell eines algebraischen Torus T mit kohomologischen Methoden, wie es etwa Xavier Xarles in seiner Arbeit [X] macht, so ist es wichtig zu wissen, unter welchen Bedingungen die Bildung des Néron-Modells ein exakter Funktor ist, m.a.W. wann $\mathrm{R}^1 j_* T = 0$ gilt.
Wir betrachten dieses Problem zunächst in der étalen Topologie. Da j_* auf der generischen Faser die Identität ist, ist $\mathrm{R}^1 j_* T$ eine Wolkenkratzergarbe, so dass man die Trivialität von $\mathrm{R}^1 j_* T$ in dem Halm in $\bar{s}$ testen kann. Mit Hilfe eines Basiswechselsatzes und Hilbert 90 sehen wir, dass sich dieser Halm relativ zu einer Zerfällungserweiterung L/K^{nr} von $T_{K^{nr}}$ als $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}\,(L/K^{nr}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), L^*))$ bestimmen lässt. Als Kohomologiegruppe bezüglich einer endlichen Gruppe ist $(\mathrm{R}^1 j_* T)_{\bar{s}}$ eine Torsionsgruppe.
Im Fall eines perfekten Restklassenkörpers oder im Fall, dass L/K^{nr} zahm verzweigt ist, ist die Normrestgruppe von L/K^{nr} trivial, so dass L^* ein kohomologisch trivialer $\mathrm{Gal}\,(L/K^{nr})$-Modul ist. Da $X(T)$ torsionsfrei ist, gilt dann das gleiche für $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), L^*)$, weshalb $\mathrm{R}^1 j_* T = 0$ folgt. Mit einem Spektralsequenzargument folgt, dass sich die Eigenschaft $\mathrm{R}^1 j_* T = 0$ auch auf Weil-Restriktionen von T überträgt.
Für beliebige Tori können wir die Zerfällungserweiterung L/K^{nr} in einen Anteil von p-Ordnung und einen zahm verzweigten Anteil zerlegen. Damit sehen wir, dass sowohl die Normrestgruppe einer endlichen, separablen Erweiterung von K^{nr} als auch $(\mathrm{R}^1 j_* T)_{\bar{s}}$ p-Torsionsgruppen sind.
Abschließend zeigen wir, dass $(\mathrm{R}^1 j_* T_N)_{\bar{s}}$ für einen Norm-Torus T_N einer Erweiterung L/K^{nr} gleich der Normrestgruppe dieser Erweiterung ist. Wir zeigen anhand von Beispielen, dass Normrestgruppen im Allgemeinen unendlich sind und auch bei nicht residueller Verzweigung nichttrivial sein können.
Als nächstes befassen wir uns mit $\mathrm{R}^1 j_* T$ in der glatten Topologie. Dies ist nö-

tig, da man den Torsionsanteil der Komponentengruppe mit den Methoden von Xarles nur in der glatten Topologie bestimmen kann. Auch die Existenz einer kurzen exakten Sequenz der Komponentengruppen in der étalen Topologie benötigt das Verschwinden einer gewissen glatten Garbe $\mathsf{R}^1 j_* T_1$.
Wir zeigen, dass $\mathsf{R}^1 j_*$ für die multiplikative Gruppe und für Weil-Restriktionen der multiplikativen Gruppe verschwindet. Dabei benutzen wir im ersten Fall die Definition von $\mathsf{R}^1 j_* \mathbb{G}_{m,K}$ als Garbifizierung gewisser Kohomologiegruppen, welche wir als Picardgruppen auffassen können. Den zweiten Fall führen wir mit einem Spektralsequenzargument auf den ersten zurück. Mit der Hochschild-Serre-Spektralsequenz können wir $\mathsf{R}^1 j_* T$ für beliebige Tori T mit $\mathsf{R}^1 j_* \mathbb{G}_{m,K}$ in Beziehung setzen und zeigen, dass $\mathsf{R}^1 j_* T$ eine $[L : K^{nr}]$-Torsionsgarbe ist, falls L eine Zerfällungserweiterung von $T_{K^{nr}}$ ist.
Um zu sehen, dass $\mathsf{R}^1 j_* T$ sogar eine p-Torsionsgarbe ist, zeigen wir, dass die glatte Garbe $\mathsf{R}^1 j_* T$ eingeschränkt auf den étalen Situs gleich der étalen Garbe $\mathsf{R}^1 j_* T$ ist, da diese Einschränkung exakt ist und wir $\mathsf{R}^1 j_*$ stets als den Cokern eines Homomorphismus von Néron-Modellen schreiben können. Da die Einskomponente eines glatten Gruppenschemas eine l-divisible Garbe für jedes $l \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid l$ ist, müsste ein nicht p-Torsionsanteil von $\mathsf{R}^1 j_* T$ über die Komponentengruppen faktorisieren und demnach étale zu berechnen sein. Somit ist $\mathsf{R}^1 j_* T$, wie im Étalen, eine p-Torsionsgarbe.
Dies impliziert auch $\mathsf{R}^1 j_* T = 0$, falls T nach einer zahm verzweigten Erweiterung trivialisiert. Ferner sehen wir, dass in der glatten Topologie $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathsf{R}^1 j_* T, i_* \mathbb{Z}) = 0$ und $\underline{\mathsf{Ext}}^1(\mathsf{R}^1 j_* T, i_* \mathbb{Z}[p^{-1}]) = 0$ gelten.
Wir geben ein explizites Bespiel dafür, dass $\mathsf{R}^1 j_* T \neq 0$ sein kann, selbst wenn der Restklassenkörper perfekt ist, aber T erst nach einer wild verzweigten Erweiterung trivialisiert. Als Ergänzung geben wir im letzten Abschnitt eine kurze Beschreibung der Funktoren j_* und $\mathsf{R}^1 j_*$ angewandt auf étale Gruppenschemata an.

4.1 $\mathsf{R}^1 j_* T$ als étale Garbe

4.1.1 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Sei ferner L/K^{nr} eine endliche, galoissche Erweiterung, derart dass T_L zerfällt, und es sei $I := \mathit{Gal}(L/K^{nr})$.*
Dann ist in der étalen Topologie $R^1 j_* T$ eine Wolkenkratzergarbe und es gilt $(R^1 j_* T)_{\bar{s}} = H^1(I, \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^*))$.

Beweis. Dass $\mathsf{R}^1 j_* T$ eine Wolkenkratzergarbe ist, ist klar. Den Halm in der speziellen Faser kann man mit [M] III Thm. 1.15 bestimmen. Man erhält

$$(\mathsf{R}^1 j_* T)_{\bar{s}} = \mathsf{H}^1(\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr}), T(K^{sep})).$$

Sei also L/K^{nr} eine endliche, galoissche Erweiterung mit $I := \mathsf{Gal}(L/K^{nr})$, so dass T über L zerfällt. Dann liefert die kanonische Inflations-Restriktions-Sequenz wegen der Exaktheit des direkten Limes eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathsf{H}^1(I, T(K^{sep})^{G_L}) \longrightarrow \mathsf{H}^1(G_{K^{nr}}, T(K^{sep})) \longrightarrow \mathsf{H}^1(G_L, T(K^{sep})) ,$$

wobei $G_L := \mathsf{Gal}(K^{sep}/L)$ und $G_{K^{nr}} := \mathsf{Gal}(K^{sep}/K^{nr})$ seien. Mit Cartier-Dualität folgt $T(K^{sep}) = \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), K^{sep*})$. Da G_L trivial auf $X(T)$ operiert, gilt

$$\mathsf{H}^1(G_L, T(K^{sep})) = \mathsf{H}^1(G_L, K^{sep*})^d = 0$$

mit Hilbert 90, wobei d der Rang von $X(T)$ sei. □

Wir erhalten sofort einige interessante Korollare

4.1.2 Korollar. *In der étalen Topologie ist $(\mathsf{R}^1 j_* T)_{\bar{s}}$ mit étalem Basiswechsel verträglich. Für Produkte algebraischer Tori gilt*

$$(\mathsf{R}^1 j_*\, T_1 \times_K T_2)_{\bar{s}} = (\mathsf{R}^1 j_* T_1)_{\bar{s}} \oplus (\mathsf{R}^1 j_* T_2)_{\bar{s}}$$

Beweis. Da ein étaler Basiswechsel die $\mathsf{Gal}(K^{sep}/K^{nr})$-Modulstruktur auf der Charaktergruppe nicht verändert, ist die erste Behauptung ist klar. Die zweite Behauptung folgt daraus, dass $X(T_1 \times_K T_2) = X(T_1) \oplus X(T_2)$ (in der Kategorie der Galoismoduln) gilt und sowohl $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, L^*)$ als auch $\mathsf{H}^1(I, \cdot)$ mit endlichen Summen verträglich sind. □

4.1.3 Korollar. *In der étalen Topologie ist $\mathsf{R}^1 j_* T$ eine Torsionsgarbe. Insbesondere gilt $\underline{Hom}(\mathsf{R}^1 j_* T, i_* \mathbb{Z}) = 0$*

Beweis. Da $(\mathsf{R}^1 j_* T)_{\bar{s}}$ eine Kohomologiegruppe bezüglich einer endlichen Gruppe I ist, muss die Multiplikation mit der Mächtigkeit von I jedes Element aus $(\mathsf{R}^1 j_* T)_{\bar{s}}$ annullieren. Dies gilt dann auch für jeden Schnitt der Wolkenkratzergarbe $\mathsf{R}^1 j_* T$. □

Mit [S] IX §5 Thm. 9 gilt für eine endliche Gruppe G und zwei G-Moduln A und B, dass $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ ein kohomologisch trivialer G-Modul ist, falls A oder B ein kohomologisch trivialer G-Modul ist und $\mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ gilt. Da die Charaktergruppe eines algebraischen Torus torsionsfrei ist, gilt $\mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(X(T), L^*) = 0$. Damit sieht man, dass für beliebige algebraische Tori T über einem lokalen Körper mit perfektem Restklassenkörper $\mathsf{R}^1 j_* T = 0$ gilt, denn für jede endliche, separable Erweiterung L/K^{nr} ist L^* kohomologisch trivial als $\mathsf{Gal}(L/K^{nr})$-Modul. Dies folgt daraus, dass die absolute Brauergruppe von K^{nr} trivial ist. Bei einem beliebigen Restklassenkörper gilt dies nicht mehr, man erhält aber noch:

4.1.4 Lemma. *Sei L/K eine endliche, zahm verzweigte und galoissche Erweiterung eines diskret und nicht archimedisch bewerteten, strikt henselschen Körpers. Dann ist die Normrestgruppe $K^*/N_{L/K}L^*$ trivial. Insbesondere ist also L^* ein kohomologisch trivialer Gal(L/K)-Modul.*

Beweis. Für die Norm-Abbildung haben wir ein kommutatives Diagramm :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_L^* \arrow[r] \arrow[d, "N_{L/K}"] & L^* \arrow[r, "\nu_L"] \arrow[d, "N_{L/K}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "N_{L/K}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_K^* \arrow[r] & K^* \arrow[r, "\nu_K"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Aufgrund der reinen und zahmen Verzweigung ist $N_{L/K}(\pi_L)$ ein uniformisierendes Element in $\mathcal{O}_K$. Damit ist die Norm-Abbildung auf den Wertegruppen bijektiv und das Schlangenlemma liefert eine Isomorphie

$$K^*/N_{L/K}L^* \;\cong\; \mathcal{O}_K^*/N_{L/K}\mathcal{O}_L^*.$$

Somit reicht es zu zeigen, dass die Norm auf den Einheiten der ganzen Zahlen surjektiv ist. Eingeschränkt auf Elemente aus $\mathcal{O}_K$ ist die Normabbildung die Potenzierung mit $e := [L : K]$. Nach Voraussetzung gilt $p \nmid e$, so dass für beliebiges $x \in \mathcal{O}_K^*$ das Polynom $X^e - x$ ein primitives und separables Polynom ist. Modulo π_K zerfällt diese Polynom in Linearfaktoren, weil nach Voraussetzung k separabel abgeschlossen ist und $\bar{x} \neq 0$ gilt. Mit dem Henselschen Lemma muss dann $X^e - x$ schon in $\mathcal{O}_K$ in Linearfaktoren zerfallen. Damit gibt es zu x sogar in $\mathcal{O}_K$ ein Urbild unter der Normabbildung.
Somit ist für L^* die nullte (Tate-)Kohomologiegruppe bezüglich Gal(L/K) trivial, weshalb L^* mit Hilbert 90 und [S] IX §5 Thm. 8 kohomologisch trivial ist. ☐

4.1.5 Korollar. *Sei L/K eine endliche, separable und zahm verzweigte Erweiterung lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus, der über L zerfällt. Dann gilt $\mathrm{R}^1 j_* T = 0$ in der étalen Topologie.*

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $K = K^{nr}$ und damit ist L/K sogar galoissch. Mit [S] IX §5 Thm. 9 und der Erläuterung oben, reicht es zu sehen, dass L^* ein kohomologisch trivialer $I :=$ Gal(L/K)-Modul ist. Dies ist aber die Aussage des Lemmas oben. ☐

Die Eigenschaft, dass $\mathrm{R}^1 j_* T = 0$ gilt, ist verträglich mit Weil-Restriktionen bezüglich endlicher, separabler Erweiterungen von lokalen Körpern. Dies zeigen wir mit einer Idee aus dem Beweis von [B-X] 4.2:

4.1.6 Satz. *Sei L/K eine endliche, separable und zahm verzweigte Erweiterung lokaler Körper und T_L ein algebraischer L-Torus, so dass $R^1 j_* T_L = 0$ in der étalen Topologie über $\mathcal{O}_L$ gilt.*
Dann gilt $R^1 j_* \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) = 0$ in der étalen Topologie über $\mathcal{O}_K$.

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} L \arrow[r, hook, "j_L"] \arrow[d, "\rho_K"'] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \arrow[d, "\rho"'] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r, hook, "j"] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \end{tikzcd}$$

und fassen $\mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$ als die étale Garbe $(\rho_K)_* T_L$ auf. Wegen des Diagramms gilt auf den étalen Siten $\rho_* \circ (j_L)_* = j_* \circ (\rho_K)_*$. Weiterhin sind welke Garben azyklisch für direkte Bilder und das direkte Bild einer welken Garbe ist wieder welk ([M] III 1.14,1.19). Somit könnnen wir Leray-Spektralsequenzen ([M] III Thm. 1.18) betrachten:
Mit [M] II Prop. 3.6 ist die Weil-Restriktion als Funktor h_* für einen endlichen Schemamorphismus h exakt in der étalen Topologie. Insbesondere sind also ρ_* und $(\rho_K)_*$ exakte Funktoren.
Also erhalten wir aus der Leray-Spektralsequenz zu $\rho_* \circ (j_L)_*$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mathsf{R}^1 \rho_*)(j_L)_* T_L \longrightarrow \mathsf{R}^1(\rho_* \circ (j_L)_*) T_L \longrightarrow \rho_* \mathsf{R}^1 (j_L)_* T_L$$

der Anfangsterme. Da ρ_* exakt ist, verschwindet der erste Term dieser Sequenz. Nach der Voraussetzung an T_L muss auch der dritte Term verschwinden. Insgesamt gilt also

$$\mathsf{R}^1(j_* \circ (\rho_K)_*) T_L = \mathsf{R}^1(\rho_* \circ (j_L)_*) T_L = 0 \,.$$

Aus der Leray-Spektralsequenz zu $j_* \circ (\rho_K)_*$ ergibt sich die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mathsf{R}^1 j_*)(\rho_K)_* T_L \longrightarrow \mathsf{R}^1(j_* \circ (\rho_K)_*) T_L = 0$$

der Anfangsterme, womit die Behauptung gezeigt ist. $\square$

Um weitergehende Resultate zu bekommen, untersuchen wir, wie sich Erweiterungen lokaler Körper zerlegen lassen.

4.1.7 Satz. *Sei L/K eine endliche, galoissche Erweiterung lokaler Körper. Dann findet man nach eventueller endlicher, separabler Erweiterung von L eine Körperkette $K \subset K_{nr} \subset K_{ins} \subset K_{(p)} \subset L$, derart dass*

- *alle Erweiterungen endlich und separabel sind*
- K_{nr}/K *unverzweigt (und galoissch) ist*
- *das uniformisierende Element in* K *auch uniformisierend in* K_{ins} *ist und die Erweiterung* K_{ins}/K_{nr} *rein verzweigt mit rein inseparabler Restklassenkörpererweiterung ist (also residuell verzweigt ist)*
- $K_{(p)}/K_{ins}$ *rein verzweigt von* p*-Ordnung ist mit trivialer Erweiterung der Restklassenkörper*
- $L/K_{(p)}$ *rein und zahm verzweigt ist.*

Bei der Zerlegung ist eine Erweiterung von L *höchstens dann nötig, wenn die Erweiterung der Restklassenkörper einen inseparablen Anteil hat.*

Beweis. Allgemein bekannt ist die Existenz der Erweiterung $K \subset K_{nr}$. Mit dem Kor. 2 aus dem Anhang von [A-S] folgt, dass man eine endliche Erweiterung K_{ins} von K_{nr} findet, so dass die zugehörige Erweiterung der Restklassenkörper rein inseparabel ist und dass ein uniformisierendes Element aus K_{nr} auch uniformisierend in K_{ins} ist. Allerdings ist K_{ins} a priori nur Unterkörper einer endlichen separablen Erweiterung L' von L, jedoch ist die Erweiterung $K_{ins} \subset L'$ nicht residuell verzweigt.
Nun ersetzen wir L durch die normale Hülle von L'. Die Erweiterung $K_{ins} \subset L$ induziert auf den Restklassenkörpern höchstens eine separable Erweiterung. Durch entsprechendes Vergrößern von K_{nr} und K_{ins} ist dann $K_{ins} \subset L$ rein verzweigt und galoissch mit trivialer Erweiterung der Restklassenköper.
Mit [S] IV §2 Kor 4 existiert in $G := \mathrm{Gal}\,(L/K_{ins})$ eine zyklische Untergruppe Z von Ordnung prim zu $p = \mathrm{char}(k)$ sowie ein Normalteiler N von p-Ordnung, derart dass $G = N \rtimes Z$ gilt. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass es einen Zwischenkörper $K_{ins} \subset L^Z \subset L$ gibt, so dass $\mathrm{Gal}\,(L/L^Z)$ gleich Z ist, also rein aber zahm verzweigt ist und $K_{ins} \subset L^Z$ ist rein und wild verzweigt von p-Ordnung, jedoch im Allgemeinen nur separabel. Setzt man $K_{(p)} := L^Z$, so folgt die Behauptung. □

4.1.8 Korollar. *Sei* K *ein strikt henselscher lokaler Körper und* L *eine endliche, galoissche Erweiterung. Dann ist die Normrestgruppe* $K^*/N_{L/K}L^*$ *eine* p*-Gruppe.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir L soweit vergrößern, dass es eine Zerlegung von L/K wie im Satz 4.1.7 gibt, denn durch so eine Erweiterung wird die Normrestgruppe höchstens größer.
Die Normrestgruppe der zahm verzweigten Erweiterung $K_{(p)} \subset L$ ist trivial und damit gilt $K^*/N_{L/K}(L^*) \subset K^*/N_{K_{(p)}/K}(K^*_{(p)})$. Da $K = K^{nr}$ gilt, ist dies

eine Erweiterung von p-Ordnung und die Normrestgruppe muss eine p-Gruppe sein. $\square$

4.1.9 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Sei $p = char(k)$. Dann ist $R^1 j_* T$ in der étalen Topologie über $\mathcal{O}_K$ eine p-Torsionsgarbe, genauer gibt es eine Potenz p^r mit $r \in \mathbb{N}$, so dass auf $R^1 j_* T$ die Multiplikation mit p^r die Nullabbildung ist.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $K = K^{nr}$ angenommen. Sei L/K eine endliche, galoissche Zerfällungserweiterung von T. Mit obigem Satz über die Struktur von Erweiterungen von lokalen Körpern sei $K_{(p)}$ ein Zwischenkörper, so dass $K_{(p)}/K$ eine Erweiterung von p-Grad ist und $L/K_{(p)}$ zahm verzweigt ist. Wir setzen $G := \mathsf{Gal}\,(L/K)$, $H := \mathsf{Gal}\,(L/K_{(p)})$ und $M := \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), L^*)$.
Nun gelten $(\mathsf{R}^1 j_* T)_{\bar{s}} = \mathsf{H}^1(G, M)$ und $\mathsf{H}^1(H, M) = 0$, denn L^* ist ein kohomologisch trivialer H-Modul. Ferner ist die Verknüpfung

$$\mathsf{H}^1(G, M) \xrightarrow{res} \mathsf{H}^1(H, M) \xrightarrow{cor} \mathsf{H}^1(G, M)$$

von Restriktion und Corestriktrion gleich der Multiplikation mit $(G : H) = p^r := [K_{(p)} : K]$ (s. [S] VII §7 Prop. 6). Da aber die Kohomologiegruppe bezüglich H trivial war, muss diese Abbildung die Nullabbildung sein. $\square$

4.1.10 Korollar. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Es sei L/K^{nr} eine endliche, galoissche Zerfällungserweiterung von $T_{K^{nr}}$. Sei $I := Gal(L/K^{nr})$ und I_p die p-Sylow-Gruppe von I. Dann gilt $R^1 j_* T_{\bar{s}} = H^1(I_p, Hom_{\mathbb{Z}}\,(X(T), L^*))^{I/I_p}$.*

Beweis. I_p ist ein Normalteiler in I (vgl. [S] IV §2 Kor. 4) und der Quotient $H := I/I_p$ hat eine Ordnung prim zu p. Sei $M := \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(X(T), L^*)$. Nun existiert eine exakte Sequenz (vgl. [S] VII §6 Remark am Ende)

$$0 \longrightarrow \mathsf{H}^1(H, M^{I_p}) \xrightarrow{\alpha} \mathsf{H}^1(I, M) \xrightarrow{\beta} (\mathsf{H}^1(I_p, M))^H \xrightarrow{\gamma} \mathsf{H}^2(H, M^{I_p})\ .$$

$\mathsf{H}^1(H, M^{I_p})$ und $\mathsf{H}^2(H, M^{I_p})$ sind Torsionsgruppen, welche von der Ordnung h von H annulliert werden. Umgekehrt sind $(\mathsf{R}^1 j_* T)_{\bar{s}} = \mathsf{H}^1(I, M)$ und $(\mathsf{H}^1(I_p, M))^H$ Torsionsgruppen, welche von einer Potenz von p annulliert werden. Wegen der Teilerfremdheit von p und h müssen die Morphismen α und γ die Nullabbildung sein, d.h wir haben einen Isomorphismus $\mathsf{H}^1(I, M) \cong (\mathsf{H}^1(I_p, M))^{I/I_p}$. $\square$

Wir betrachten nun $\mathsf{R}^1 j_* T$ am Beispiel von Norm-Tori.

4.1.11 Satz. *Sei L/K eine endliche, galoissche Erweiterung lokaler Körper. Sei T ein K-Torus, der über L zerfällt. Dann induziert die kanonische kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}\,(T_L) \longrightarrow T' \longrightarrow 0$$

einen Isomorphismus

$$(R^1 j_*T)_{\bar{s}} \cong \mathit{coker}\Big(\mathfrak{R}_{L/K}(T_L))(K^{nr}) \longrightarrow T'(K^{nr})\Big) .$$

Beweis. Da T_L zerfällt, gilt $\mathsf{R}^1 j_*\mathfrak{R}_{L/K}(T_L) = 0$. Damit liefert die lange exakte Sequenz der Néron-Modelle zu obiger Sequenz den Isomorphismus

$$\mathsf{R}^1 j_*T \cong \mathsf{coker}(j_*\mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow j_*T').$$

Da die Halmbildung exakt ist, folgt daraus die Behauptung, denn mit der Néronschen Abbildungseigenschaft gilt $(j_*T')_{\bar{s}} = j_*T'(\mathcal{O}_K^{sh}) = T'(K^{nr})$ und analog $(j_*\mathfrak{R}_{L/K}(T_L))_{\bar{s}} = \mathfrak{R}_{L/K}(T_L)(K^{nr})$. □

Mit diesem Satz sieht man sofort, dass $(\mathsf{R}^1 j_*T_N)_{\bar{s}}$ für den Norm-Torus T_N einer endlichen, galoisschen Erweiterung L/K gleich der Normrestgruppe dieser Erweiterung ist. Jede Erweiterung lokaler Körper mit einer nichttrivialen inseparablen Erweiterung der Restklassenkörper ergibt also ein Beispiel für einen Torus mit nichttrivialem $\mathsf{R}^1 j_*T$. Wenn L/K rein verzweigt ist, dann sei $e_{L/K}$ der Verzweigungsindex, d.h. die eindeutig bestimmte natürliche Zahl $e_{L/K}$, derart dass $\pi_L^{e_{L/K}} \equiv \pi_K \bmod \pi_L$ gilt, und $\delta := \frac{[L:K]}{e_{L/K}}$.
Nun gilt als abelsche Gruppen

$$K^*/N_{L/K}L^* = \mathcal{O}_K^*/N_{L/K}\mathcal{O}_L^* \oplus \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z} ,$$

da die Einheiten eines lokalen Körpers die direkte Summe aus den Einheiten des zugehörigen Bewertungsringes und dem Schnitt $\pi^{\mathbb{Z}}$ der Wertegruppe sind.

Mit Hilfe von Norm-Tori können wir aber auch Beispiele für $\mathsf{R}^1 j_*T_N \neq 0$ finden, bei denen keine inseparable Erweiterung der Restklassenkörper auftritt.

4.1.12 Lemma. *Sei K ein strikt henselscher lokaler Körper und L/K eine endliche, separable Erweiterung, welche eine triviale Erweiterung der Restklassenkörper induziert. Sei k der Restklassenkörper, und p^r die höchste Potenz von p, welche den Grad $[L : K]$ teilt. Dann gibt es eine Surjektion*

$$K^*/N_{L/K}L^* \twoheadrightarrow k^*/(k^{p^r})^* .$$

Beweis. Da die Normabbildung auf den Wertegruppen nach Voraussetzung surjektiv ist, muss die Normrestgruppe gleich der Normrestgruppe der Erweiterung der Bewertungsringe sein. Wir schreiben $U^1_\cdot$ für die Einseinheiten. Dann folgt die Behauptung mit dem Schlangenlemma aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U_L^1 \arrow[r] \arrow[d, "N_{L/K}"] & \mathcal{O}_L^* \arrow[r] \arrow[d, "N_{L/K}"] & k^* \arrow[r] \arrow[d, "N_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U_K^1 \arrow[r] & \mathcal{O}_K^* \arrow[r] & k^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

unter Beachtung der Tatsache, dass die Normabbildung auf dem Restklassenkörper die Potenzierung mit $[L:K]$ induziert. Wegen der separablen Abgeschlossenheit von k ist der Cokern der Potenzierung mit $[L:K]$ gleich dem Cokern der Potenzierung mit p^r. □

Ist nun k kein perfekter Körper, so ist $k \supset k^{p^r}$ eine nichtriviale Körpererweiterung, also ist auch der Quotient $k^*/(k^{p^r})^*$ nicht trivial. Damit ist die Normrestgruppe eine unendliche Gruppe, weil das Urbild von $k^* - (k^{p^r})^*$ unter der kanonischen Projektion $\mathcal{O}_K \twoheadrightarrow k$ nicht in $N_{L/K}(L^*)$ liegen kann:
Mit [S] II §4 Prop 5 kann man alle Elemente aus $\mathcal{O}_K$ eineindeutig als Potenzreihen $\sum_{i=0}^{\infty} s_i \pi_k^i$ schreiben, wobei die s_i aus einem Repräsentantensystem für k in $\mathcal{O}_K$ stammen. Damit können alle Potenzreihen, für die s_0 nach Reduktion in $k^* - k^{p^r*}$ liegt, nicht im Bild der Norm liegen.
Am Beispiel solcher Norm-Tori sieht man leicht, dass $\mathrm{R}^1 j_* T$ i. Allg. keine konstante Garbe ist. Denn sei T_N ein Norm-Torus bezüglich einer rein verzweigten Erweiterung L/K vom Grad $p = 2 = \mathrm{char}(k)$ mit $e_{L/K} = [L:K]$.
Wir nehmen an, dass der Restklassenkörper k weder perfekt noch separabel abgeschlossen sei. Genauer es gebe ein Element $\overline{T} \in k$, derart dass $\sqrt{\overline{T}} \notin k^{sep}$ gilt und dass es irreduzibles und separables Polynom $Y^2 + \overline{a}Y + \overline{X}$ in $k[Y]$ gebe. Es sei T ein Urbild zu $\overline{T}$ in K^{nr}. Dann gilt $T \notin N_{L/K}(L^{nr})^*$. Sei nun $\tilde{T}$ eine Nullstelle des Polynoms $Y^2 + aY + T$, wobei $a \in \mathcal{O}_K^*$ ein Urbild von $\overline{a}$ sei. Dieses Polynom induziert eine unverzweigte Erweiterung, d.h. $\tilde{T} \in K^{nr}$. Ist nun σ ein Element aus $\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/K)$, welches $\tilde{T}$ nicht fest lässt, dann gilt $\frac{\sigma(\tilde{T})}{\tilde{T}} = \frac{T}{\tilde{T}^2}$.
Da auf K^{nr} die Normabbildung zu L/K Quadrieren ist, folgt $\frac{\sigma(\tilde{T})}{\tilde{T}} \notin N_{L/K}(L^{nr*})$, d.h. die Bilder von $\tilde{T}$ und $\sigma(\tilde{T})$ in der Normrestgruppe sind nicht gleich.
Später werden wir allerdings sehen, dass für die Struktur des Néron-Modells nur die Komponentengruppe von $\mathrm{R}^1 j_* T$ wirklich relevant ist. Diese entspricht bei einem Norm-Torus dem Quotienten der Wertegruppen, so dass die Galoisgruppe trivial operiert.

4.2 $\mathrm{R}^1 j_* T$ als glatte Garbe

Zunächst zeigen wir ein schon bekanntes (z.B. [X] 2.14) Resultat. Wir geben trotzdem einen Beweis an, da wir einige Überlegungen aus dem Beweis für spätere Beweise benötigen werden.

4.2.1 Satz. *Sei K ein lokaler Körper. Dann gilt $\mathrm{R}^1 j_* \mathbb{G}_{m,K} = 0$ in der glatten Topologie über $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $\mathrm{R}^1 j_* \mathbb{G}_{m,K}(Y) = 0$ für alle glatten $\mathcal{O}_K$-Schemata Y gilt. Da $\mathrm{R}^1 j_* \mathbb{G}_{m,K}$ die glatte Garbe assoziiert zu der Prägarbe $V \mapsto \mathrm{Pic}(V_K)$

ist, reicht es zu zeigen, dass die étale Garbe assoziiert zu $V \mapsto \mathrm{Pic}(V_K)$ auf dem étalen Situs über Y verschwindet. Dies wiederum gilt, sofern diese Garbe „Zariski-lokal" verschwindet. Wir zeigen also: ist $Y \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ ein glatter Morphismus und $y \in Y$ ein Punkt sowie $Y' := \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{Y,y}$, dann ist $\mathrm{Pic}(Y'_K) = 0$. Dazu zeigen wir, dass der affine Ring zu Y'_K, also $\mathcal{O}_{Y,y}[\pi^{-1}]$, integer und faktoriell ist. Wegen integer folgt dann, dass $\mathrm{Pic}(Y'_K)$ gleich der Divisorenklassengruppe von Y'_K ist. Letztere ist dann aber trivial, weil $\mathcal{O}_{Y,y}[\pi^{-1}]$ faktoriell ist.
Da $\mathcal{O}_K$ als diskreter Bewertungsring regulär ist, ist Y' als Schema eines lokalen Ringes eines glatten $\mathcal{O}_K-$Schemas wieder regulär. Ein regulärer lokaler Ring ist integer und faktoriell, also ist auch $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_K} K = \mathcal{O}_{Y,y}[\pi^{-1}]$ ein Integritätsring. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{Y,y}$. Wenn π nicht in $\mathfrak{m}$ liegt, so ist $\mathcal{O}_{Y,y}[\pi^{-1}] = \mathcal{O}_{Y,y}$ und die Behauptung ist klar. Sei also $\pi \in \mathfrak{m}$. Da das Schema Y glatt ist, liegt π nicht in $\mathfrak{m}^2$. Damit ist aber $\mathcal{O}_{Y,y}[\pi^{-1}]$ faktoriell (vgl. [BIV] Beweis zu Satz 14.33), womit insgesamt $\mathrm{Pic}(Y'_K) = 0$ folgt. □

4.2.2 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und L eine endliche, separable Erweiterung von K, dann gilt in der glatten Topologie $\mathsf{R}^1 j_* \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L}) = 0$.*

Beweis. Der Beweis vom Satz 4.1.6 überträgt sich wörtlich mit $T_L := \mathbb{G}_{m,L}$, sobald klar ist, dass die Weil-Restriktion bezüglich eines endlichen Schemamorphismus ein exakter Funktor in der glatten Topologie ist.
Sei also $h : X' \longrightarrow X$ ein endlicher Morphismus von Schemata. Es bezeichne f_* resp. f'_* die Einschränkung von dem glatten Situs $(sm)/X$ (resp. $(sm)/X'$) auf den étalen Situs $(ét)/X$ (resp. $(ét)/X'$). Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} (sm)/X' \arrow[r, "h_*^{sm}"] \arrow[d, "f'_*"'] & (sm)/X \arrow[d, "f_*"'] \\ (ét)/X' \arrow[r, "h_*^{ét}"] & (ét)/X \end{tikzcd}$$

von Morphismen von Siten. Es sei $\mathcal{F}$ eine glatte Garbe über X'. Mit der Leray-Spektralsequenz ([M] III Thm 1.18) und der Exaktheit von f_* ([M] III Prop. 3.3) ergibt sich für die Sequenzen der Anfangsterme zum einen:

$$0 \longrightarrow \mathsf{R}^1 h_*^{ét}(f'_*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathsf{R}^1(h_*^{ét} \circ f'_*)\mathcal{F} \longrightarrow h_*^{ét}\mathsf{R}^1 f'_*\mathcal{F}\ .$$

Da nun $h_*^{ét}$ ein exakter Funktor auf den étalen Siten ist, folgt daraus:

$$\mathsf{R}^1(f_* \circ h_*^{sm})\mathcal{F} = \mathsf{R}^1(h_*^{ét} \circ f'_*)\mathcal{F} = 0\ .$$

Damit liefert die andere Sequenz der Anfangsterme:

$$0 = \mathsf{R}^1(f_* \circ h_*^{sm})\mathcal{F} \longrightarrow f_* \mathsf{R}^1 h_*^{sm} \mathcal{F} \longrightarrow \mathsf{R}^2 f_*(h_*^{sm}\mathcal{F}) = 0 \ .$$

Also verschwindet die Einschränkung von $\mathsf{R}^1 h_*^{sm}$ auf den étalen Situs über X. Sei nun $\pi : U \longrightarrow X$ ein glatter Morphismus. Dann ist die Einschränkung $\pi^* : (sm)/X \longrightarrow (sm)/U$ ein exakter Funktor, der welke Garben auf welke Garben abbildet. Analog können wir auch die Einschränkung zu dem Morphismus $\pi' : U' := U \times_X X' \longrightarrow X'$ betrachten. Auch $(\pi')^*$ ist exakt und bildet welke Garben auf welke Garben ab.
Betrachtet man analog zu oben das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (sm)/X' \arrow[r, "(\pi')^*"] \arrow[d, "h_*"'] & (sm)/U' \arrow[d, "(h_U)_*"'] \\ (sm)/X \arrow[r, "\pi^*"] & (sm)/U \end{tikzcd} ,$$

so erhält man $\pi^* \mathsf{R}^1 h_* \ \mathcal{F} = (\mathsf{R}^1(h_U)_*) \ (\pi')^* \mathcal{F}$.
Damit folgt aber $\mathsf{R}^1 h_* \mathcal{F}(U) = 0$, indem man oben $h : X' \longrightarrow X$ durch den Morphismus $h_U : U' \longrightarrow U$ ersetzt. Also gilt $\mathsf{R}^1 h_* \mathcal{F} = 0$. □

Dieses Resultat gibt uns die Möglichkeit, die glatte Garbe $\mathsf{R}^1 j_* T$ mit der étalen Garbe $\mathsf{R}^1 j_* T$ zu vergleichen.

4.2.3 Satz. *Sei $f : (sm)/\mathcal{O}_K \longrightarrow (\acute{e}t)/\mathcal{O}_K$ die Restriktion vom glatten auf den étalen Situs. Dann gilt für jeden algebraischen K-Torus T*

$$f_* R^1 j_* T = R^1 j_* T \ .$$

Beweis. Mit [M] III 3.3 ist f_* ein exakter Funktor. Man bette T in die Sequenz

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow T' \longrightarrow 0$$

von glatten Garben ein. Diese induziert eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_* T \longrightarrow j_* \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow j_* T' \longrightarrow \mathsf{R}^1 j_* T \longrightarrow 0 \ .$$

Anwenden von f_* ergibt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow f_* j_* T \longrightarrow f_* j_* \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow f_* j_* T' \longrightarrow f_* \mathsf{R}^1 j_* T \longrightarrow 0$$

von étalen Garben. Da die Néron-Modelle darstellbare Garben sind, ist diese Sequenz isomorph zu der Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*T \longrightarrow j_*\mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow j_*T' \longrightarrow f_*\mathsf{R}^1 j_*T \longrightarrow 0\,.$$

Nun ist aber der (étale) Cokern der Abbildung $j_*\mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow j_*T'$ gleich dem étalen $\mathsf{R}^1 j_*T$. □

Somit ist das étale $\mathsf{R}^1 j_*T$ trivial, falls das glatte $\mathsf{R}^1 j_*T$ trivial war. Wie das Beispiel am Ende dieses Abschnittes zeigt, kann das étale $\mathsf{R}^1 j_*T$ trivial sein, ohne dass das glatte $\mathsf{R}^1 j_*T$ trivial wäre.

4.2.4 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Sei weiterhin L/K eine endliche, galoissche Zerfällungserweiterung und $e := [L : K_{nr}]$ der Verzweigungsgrad von L/K. Dann ist $R^1 j_*T$ eine e-Torsionsgarbe.*

Beweis. Da $\mathsf{R}^1 j_*T$ eine Garbe ist und $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K_{nr}} \longrightarrow \mathcal{O}_K$ eine étale Überdeckung ist, reicht es die e-Torsion auf dem glatten Situs über $\mathcal{O}_{K_{nr}}$ nachzuprüfen. Weil außerdem die Bildung des Néron-Modells mit étalem Basiswechsel verträglich ist, können wir L/K als rein verzweigt annehmen und es sei $G := \operatorname{Gal}(L/K)$. Sei weiter $U \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ ein glatter Morphismus. Dann ist der Morphismus

$$\rho : U_L := U \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_L} L = U \otimes_{\mathcal{O}_K} K \otimes_K L \longrightarrow U \otimes_{\mathcal{O}_K} K =: U_K$$

galoissch, da L/K galoissch ist.
Deshalb liefert die Hochschild-Serre-Spektralsequenz ([M] III Thm 2.20) eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathsf{H}^1(G, \mathsf{H}^0(U_L, T)) \longrightarrow \mathsf{H}^1(U_K, T) \longrightarrow (\mathsf{H}^1(U_L, T))^G.$$

$\mathsf{R}^1 j_*T$ ist die Garbe assoziiert zu der glatten Prägarbe $U \mapsto \mathsf{H}^1(U_K, T)$. Für ein glattes $V \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ und einen Schnitt $s \in \mathsf{R}^1 j_*T(V)$ lässt sich also eine glatte Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von V finden, derart dass s die Verklebung von Schnitten $a(s_i)$ ist, wobei a die Garbifizierungsabbildung ist und die $s_i \in \mathsf{H}^1((U_i)_K, T)$ sind. Der Schnitt s ist ein e-Torsionselement, falls alle s_i e-Torsionselemente sind. Betrachte also zu U_i die exakte Sequenz induziert von der Hochschild-Serre-Spektralsequenz. Da die Gruppenordnung e alle Elemente aus $\mathsf{H}^1(G, T((U_i)_L))$ annulliert, reicht es zu zeigen, dass die s_i in $\mathsf{H}^1((U_i)_L, T)$ Null sind.
T zerfällt über L , so dass $\mathsf{H}^1((U_i)_L, T) = \operatorname{Pic}((U_i)_L)^d$ gilt, wobei d die Dimension von T sei. Sei $y \in U_i$ ein Punkt und $\mathcal{O}_{U_i,y}$ sein lokaler Ring. Dann ist $\mathcal{O}_{U_i,y} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ eine endliche Ringerweiterung. Da endliche Algebren über einem henselschen lokalen Ring in ein Produkt von lokalen Ringen zerfallen, zerfällt

auch $\mathcal{O}_{U_i,y} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ nach étaler Erweiterung von U_i in ein Produkt von lokalen Ringen. Da Pic mit endlichen Produkten vertauscht, können wir $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$ als regulären, lokalen Ring annehmen. Wie wir im Beweis zu $\mathrm{R}^1 j_* \mathbb{G}_{m,K} = 0$ gesehen haben, gilt dann aber $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L[\pi^{-1}]) = 0$. Insgesamt können wir also nach entsprechender Verfeinerung annehmen, dass $s_i = 0$ in $\mathrm{H}^1((U_i)_L, T)$ gilt, womit die Behauptung folgt. □

Andererseits ist auch das glatte $\mathrm{R}^1 j_* T$ eine p-Torsionsgarbe:

4.2.5 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Dann ist die glatte Garbe $\mathrm{R}^1 j_* T$ eine p-Torsionsgarbe.*

Beweis. Sei L/K eine endliche Zerfällungserweiterung. Wir betrachten zu T die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_* T \longrightarrow j_* \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow j_* T' \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_* T \longrightarrow 0$$

glatter Garben. Da $\mathrm{R}^1 j_* T$ eine abelsche Garbe ist, lässt sich diese Garbe eindeutig in eine Summe

$$\mathrm{R}^1 j_* T = R_p \oplus R'$$

aus einem p-Torsionsanteil R_p und einem prim-zu-p-Torsionsanteil R' zerlegen. Wir betten das Néron-Modell $j_* T'$ in die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_* T'^0 \longrightarrow j_* T' \longrightarrow i_* \phi' \longrightarrow 0$$

zu Einskomponente und Komponentengruppe ein und zeigen, dass der Morphismus

$$\delta : j_* T' \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_* T \longrightarrow R'$$

über $i_* \phi'$ faktorisiert, mit anderen Worten, dass $j_* T'^0 \longrightarrow R'$ die Nullabbildung ist:

Mit dem Satz (4.2.4) gibt es ein $l \in \mathbb{N}$ relativ prim zu p, so dass die Multiplikation mit l die Nullabbildung auf R' ist. Da $j_* T'^0$ ein glattes, zusammenhängendes abelsches Gruppenschema ist, ist die Multiplikation mit l étale und surjektiv.

Sei also $U \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ ein glatter Morphismus und $s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(U, j_* T'^0)$ ein Schnitt. Nach Voraussetzung ist die Multiplikation mit l eine (étale) Überdeckung $j_* T'^0 \longrightarrow j_* T'^0$, also haben wir ein kartesisches Diagramm

$$\begin{tikzcd} U' := U \times_{j_* T'^0} j_* T'^0 \arrow[r, "s_l"] \arrow[d, "p_U"'] & j_* T'^0 \arrow[d, "\cdot l"] \\ U \arrow[r, "s"'] & j_* T'^0 \end{tikzcd}$$

mit einer (étalen) Überdeckung $p_U : U' \longrightarrow U$. Nach Definition gilt

$$\mathrm{res}_{U',U}(s) = s \circ p_U = l \cdot s_l$$

das heißt, die Einschränkung von s auf U' ist die l-fache Summe des Schnittes $s_l \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(U', j_* T'^0)$. Somit erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
j_* T'^0(U') \arrow[rrr, "\delta"] & & & R'(U') \\
& l \cdot s_l \arrow[r, mapsto] & l \cdot \delta(s_l) = 0 & \\
& s \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \delta(s) \arrow[u, mapsto] & \\
j_* T'^0(U) \arrow[uuu, "res"] \arrow[rrr, "\delta"] & & & R'(U) \arrow[uuu, "res"']
\end{tikzcd} .$$

Da nun $U' \longrightarrow U$ eine Überdeckung ist, ist die zugehörige Restriktion injektiv, weshalb bereits $\delta(s) = 0$ folgt.
Um die Behauptung dieses Satzes zu zeigen, reicht es nun, für einen beliebigen glatten Morphismus $U \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ zu zeigen, dass $R'(U) = 0$ gilt.
Sei also ein Schnitt $s \in R'(U)$ gegeben. Wegen der Surjektivität gibt es eine glatte Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U und Schnitte $s_i \in j_* T'(U_i)$, so dass $\delta(s_i) = s|_{U_i}$ gilt.
Wie oben gesehen sind die $\overline{s_i} \in i_* \Phi'(U_i) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(U_i, i_* \Phi')$ Urbilder der $s|_{U_i}$ unter der Faktorisierung $i_* \Phi' \longrightarrow R'$. Nun ist $\overline{s_i} : U_i \longrightarrow i_* \Phi'$ ein Morphismus in der Kategorie der glatten $\mathcal{O}_K$-Schemata und für die zugehörige Restriktionsabbildung gilt

$$res_{\overline{s_i}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(i_* \Phi', i_* \Phi') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(U_i, i_* \Phi') \quad f \mapsto f \circ \overline{s_i} \,.$$

Damit gilt für die entsprechende Restriktionsabbildung auf $\mathrm{R}^1 j_* T$ die Beziehung $res_{\overline{s_i}}(\delta(Id_\Phi)) = \delta(s_i)$. Da aber $i_* \Phi'$ ein étales $\mathcal{O}_K$-Schema ist und die Einschränkung des glatten $\mathrm{R}^1 j_* T$ gleich dem étalen $\mathrm{R}^1 j_* T$ ist, ist $\delta(Id_\Phi)$ ein p-Torsionselement. Somit muss $R'(U) = 0$ gelten. □

Damit finden wir sofort die Korollare:

4.2.6 Korollar. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus, welcher nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfällt. Dann gilt $\mathrm{R}^1 j_* T = 0$ in der glatten Topologie.*

Beweis. Dies ist klar mit den beiden vorangehenden Sätzen, denn eine abelsche Gruppe, welche Torsion bezüglich zweier teilerfrender Zahlen ist, muss schon trivial sein. □

4.2.7 Korollar. *Sei K ein lokaler Körper und T ein K-Torus und $\mathcal{K}$ eine Untergarbe der glatten Garbe $R^1 j_* T$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \underline{Hom}(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}) &= 0 \\ p^r \cdot \underline{Ext}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}) &= 0 \\ \underline{Ext}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) &= 0 \end{aligned}$$

in der glatten Topologie über $\mathcal{O}_K$ mit einem geeigneten $r \in \mathbb{N}$ und für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die erste Aussage ist klar, da $\mathrm{R}^1 j_* T$ eine Torsionsgarbe ist. Wenn r gleich der p-Ordnung des Grades von L/K_{nr} für eine Zerfällungserweiterung L von T ist, so ist die Multiplikation mit p^r die Nullabbildung auf $\mathrm{R}^1 j_* T$ und damit auch auf $\mathcal{K}$. Nun ist $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z})$ ein Quotient einer Untergarbe von $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ für eine geeignete injektive Garbe $\mathcal{I}$ und die Multiplikation mit p^r auf $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ induziert die Multiplikation mit p^r auf $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z})$. Sei U ein glattes $\mathcal{O}_K$-Schema. Dann ist $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{K}, \mathcal{I})(U) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{K}|_U, \mathcal{I}|_U)$ und ein Element f hieraus ist eine Familie $f_V : \mathcal{K}(V) \longrightarrow \mathcal{I}(V)$ von Homomorphismen von abelschen Gruppen für alle glatten U-Schemata V. Für ein $x \in \mathcal{K}(V)$ ist also $(p^r \cdot f)(x) = p^r f(x) = f(p^r x) = f(0) = 0$.
Für die dritte Gleichung beachte man, dass die Multiplikation mit p^r einen Isomorphismus $\mathbb{Z}[p^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[p^{-1}]$ induziert. Damit induziert sie einen Isomorphismus $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$. Da man $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$ mit einer injektiven Auflösung bestimmen kann und Morphismen von solchen Auflösungen bis auf Homotopie eindeutig sind, induziert die Multiplikation mit p^r ohne Einschränkung auf der gewählten injektiven Auflösung die Multiplikation mit p^r, wodurch auch auf den $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$ die Multiplikation mit p^r induziert wird. Da die Argumentation für die zweite Gleichung auch für $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$ gültig ist, muss die Multiplikation mit p^r aber die Nullabbildung sein. □

Anhand eines Beispiels zeigen wir, dass $\mathrm{R}^1 j_* T \neq 0$ gelten kann, auch wenn der Restklassenkörper perfekt ist. Sei K ein strikt henselscher lokaler Körper mit perfektem Restklassenkörper k. Sei L/K eine endliche galoissche Erweiterung und T_N der Norm-Torus zu dieser Erweiterung. Betrachte in der glatten Topologie die zugehörige lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_* T_N \longrightarrow j_* \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L}) \longrightarrow j_* \mathbb{G}_{m,K} \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_* T_N$$

Sei $U := \mathbb{A}^1_{\mathcal{O}_K} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K[T]$ die affine Gerade über $\mathcal{O}_K$. Dann ist die Einschränkung der obigen Sequenz zu einer Sequenz in der étalen Topologie über

U wieder exakt (vgl. [M] III Thm 3.3). Betrachte die Halme dieser Sequenz in einem geometrischen Punkt zu dem generischen Punkt η_k der speziellen Faser U_k. Der generische Punkt entspricht dem Ring $\mathcal{O}_K[T]_{(\pi)}$, ist also eine Erweiterung von $\mathcal{O}_K$ vom Verzweigungsindex Eins, jedoch ist dieser Ring nicht mehr vollständig. Der Restklassenkörper ist $k(T)$, also nicht mehr perfekt.
Somit ergibt sich für $T = \mathbb{G}_{m,K}$ resp. $T = \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L})$:

$$(j_*T)|_{(\acute{e}t)/U}(\mathcal{O}^{sh}_{U,\eta}) = (j_*T \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{U,\eta})(\mathcal{O}^{sh}_{U,\eta}) \ .$$

Da Néron-Modelle mit Basiswechsel vom Verzweigungsindex Eins verträglich sind, gilt also

$$(j_*T) \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{U,\eta}(\mathcal{O}^{sh}_{U,\eta}) = j_*(T \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{U,\eta})(\mathcal{O}^{sh}_{U,\eta}) \ .$$

Für $T = \mathbb{G}_{m,K}$ ist dies gleich $(K(T)^{nr})^*$, für $T = \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L})$ ist dies gleich $(L(T)^{nr})^*$. Somit bekommen wir in den Halmen die exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow (L(T)^{nr})^* \xrightarrow{N_{L/K}} (K(T)^{nr})^* \longrightarrow (\mathsf{R}^1 j_* T_N|_{(\acute{e}t)/U})_{\bar{\eta}} \longrightarrow 0 \ .$$

Sind nun aber $[L : K]$ und p:=char(k) nicht teilerfremd, so zeigt das letzte Beispiel aus dem vorangehenden Abschnitt, dass die Normrestgruppe nicht mehr trivial sein kann. Also kann $\mathsf{R}^1 j_* T_N$ als glatte Garbe nicht trivial gewesen sein.

4.3 j_* und $\mathsf{R}^1 j_*$ für étale Gruppen

Das Néron-Modell einer étalen K-Gruppe F ist eine étale $\mathcal{O}_K$-Gruppe. Damit reicht es, das Néron-Modell in der étalen Topologie zu bestimmen. Die étale Garbe dargestellt von F entspricht dem stetigen Gal(K^{sep}/K)-Modul $M_F := F(K^{sep})$.
Mit dem Zerlegungssatz ist j_*F gleich dem Tripel $(M_F, M_F^I, M_F^I \longrightarrow M_F^I)$ bestehend aus dem Modul selbst, seinen I-Invarianten und der Identität auf den Invarianten.
Dies lässt sich folgendermaßen verstehen: Als Schema ist F eine disjunkte Vereinigung von Schemata $U_i :=$ Spec K_i, wobei die K_i endliche, separable Erweiterungen von K sind. Nun ist die Bildung des Néron-Modells (als Schema) verträglich mit disjunkten Vereinigungen. Ein U_i, für das K_i/K eine unverzweigte Erweiterung ist, hat das Néron-Modell $j_*U_i =$ Spec $\mathcal{O}_{K_i}$. Ein U_i, welches von einer nicht unverzweigten Erweiterung kommt, hat keine K^{nr}-wertigen Punkte, so dass es selbst sein Néron-Modell ist.
Mit dem Zerlegungssatz ist klar, dass das Néron-Modell einer konstanten Gruppe wieder die gleiche konstante Gruppe (nur über $\mathcal{O}_K$) ist. Für die Gruppen der

Einheitswurzeln gilt $j_*\mu_{q,K} = \mu_{q,\mathcal{O}_K}$, falls q relativ prim zur $p = \mathrm{char}(k)$ ist.
Falls q relativ prim zur Charakteristik von K ist, aber nicht prim zu p ist, muss man den absoluten Verzweigungsindex von K betrachten. Ist dieser Eins, so liegen die p-ten Einheitswurzeln nicht in $\mathcal{O}_K^{sh}$ und dann ist z.B. $j_*\mu_{p,K}$ gleich $\mu_{p,K}$ verklebt mit $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ längs des Einsschnittes $\mathrm{Spec}\,K \hookrightarrow \mu_{p,K}$. Falls der absolute Verzweigungsindex größer ist, wird $\mu_{p,K}$ nach étalem Basiswechsel isomorph zu der konstanten Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $j_*\mu_{p,K}$ ist eine Form der konstanten Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Um $(\mathsf{R}^1j_*F)_{\bar{s}} = \mathsf{H}^1(\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr}), F(K^{sep}))$ zu betrachten, müssen wir $\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr})$ verstehen. Wir definieren $\hat{\mathbb{Z}}_{(p)} := \varprojlim_{n\in(\mathbb{N}-p\mathbb{N})} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Jede zahm verzweigte Erweiterung L/K^{nr} lässt sich auf die Form $L = K^{nr}[X]/(X^e - \pi_K)$ normieren und diese Normierungen sind verträglich, da K^{nr} für jedes $x \in \mathcal{O}_K^{sh^*}$ auch die e-ten Wurzeln von x mit $e \in \mathbb{N} - p\mathbb{N}$ enthält. Damit ist die maximale zahm verzweigte Erweiterung von K^{nr} in K^{sep} galoissch mit Galoisgruppe $\hat{\mathbb{Z}}_{(p)}$. Damit erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr}) \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}_{(p)} \longrightarrow 0$$

mit einem abgeschlossenen Normalteiler N, dessen endliche Quotienten nur p-Gruppen sind. Falls nun M_F ein endlich erzeugter, stetiger $\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr})$-Modul mit trivialer Operation ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{H}^1(\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr}), M_F) &= \mathsf{Hom}_{stetig}(\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr}), M_F) \\ &= \mathsf{Tors}_{(p^{-1})}(M_F) + p - \mathsf{Torsion} \end{aligned}$$

wobei $\mathsf{Tors}_{(p^{-1})}(M_F)$ den zu p primen Torsionsanteil von M_F bezeichnet.
Wenn M_F kein trivialer Modul ist, gibt es eine endliche, galoissche Erweiterung L/K^{nr}, so dass $\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/L)$ trivial auf M_F operiert. Mit der exakten Sequenz zu Inflation und Restriktion erhalten wir die exakte Sequenz

$$\mathsf{H}^1(\mathsf{Gal}\,(L/K^{nr}), M_F) \hookrightarrow \mathsf{H}^1(\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/K^{nr}), M_F) \longrightarrow \mathsf{H}^1(\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/L), M_F)\ ,$$

so dass wir den Halm von R^1j_*F in $\bar{s}$ als eine Extension einer Untergruppe von $\mathsf{Hom}_{stetig}(\mathsf{Gal}\,(K^{sep}/L), M_F)$ mit $\mathsf{H}^1(\mathsf{Gal}\,(L/K^{nr}), M_F)$ beschreiben können.
Als Beispiel sei die $\mu_{q,K}$ mit q relativ prim zur Charakteristik von K betrachtet: Die kurze exakte Kummersequenz

$$0 \longrightarrow \mu_{q,K} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K} \xrightarrow{(\cdot)^q} \mathbb{G}_{m,K} \longrightarrow 0$$

induziert eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mu_{q,\mathcal{O}_K} \longrightarrow j_*\mathbb{G}_{m,K} \longrightarrow j_*\mathbb{G}_{m,K} \longrightarrow \mathsf{R}^1j_*\mu_{q,K} \longrightarrow 0\ .$$

Diese induziert auf den Komponentengruppen die Sequenz

$$i_*\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \xrightarrow{0-\mathsf{Abb}} i_*\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot q} i_*\mathbb{Z} \longrightarrow \Phi(\mathsf{R}^1 j_*\mu_{q,K}) \longrightarrow 0 .$$

Im Fall, dass q relativ prim zu der Charakteristik von k ist, entspricht die Sequenz der Einskomponenten der exakten Kummersequenz

$$0 \longrightarrow \mu_{q,\mathcal{O}_K} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K} \xrightarrow{(\cdot)^q} \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K} \longrightarrow 0$$

über $\mathcal{O}_K$. Mit einer analogen Argumentation wie im Beweis von Thm. 5.3.4 ist damit die Sequenz der Komponentengruppen exakt, so dass $\mathsf{R}^1 j_*\mu_{q,K} = i_*\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ folgt. Falls q nicht prim zu $\mathsf{char}(k)$ ist, muss $\mathsf{R}^1 j_*\mu_{q,K}$ den Cokern der $p^{\nu_p(q)}$-Potenzierung auf $\mathcal{O}_K^{sh*}$ enthalten. Dieser ist genau dann nichttrivial, wenn der Restklassenkörper nicht perfekt ist und in diesem Fall eine unendliche p-Torsionsgruppe. Falls der Restklassenkörper perfekt ist, ist die Kummersequenz über $\mathcal{O}_K$ exakt (denn $\mathcal{O}_K^{sh}$ ist ein vollständiger diskreter Bewertungsring, weshalb $\mathcal{O}_K^{sh}$ ein multiplikatives Repräsentantensystem von k^{sep} enthält), so dass wir $\mathsf{R}^1 j_*\mu_{q,K} = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ erhalten.

Zusammenfassend können wir sagen:

4.3.1 Satz. *Sei F ein étales K-Gruppenschema und L/K^{nr} eine endliche, galoissche Erweiterung, so dass Gal(K^{sep}/L) trivial auf $F(K^{sep})$ operiert. Es sei $I :=$ Gal(L/K^{nr}). Ferner sei $F(K^{sep})$ als abelsche Gruppe endlich erzeugt. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^1(I, F(K^{sep})) \longrightarrow (R^1 j_*F)_{\bar{s}} \longrightarrow E(F) \longrightarrow 0.$$

$E(F)$ ist Null, falls $F(K^{sep})$ torsionsfrei ist.
Falls $L = K^{nr}$, also $H^1(I, F(K^{sep})) = 0$ gilt, ist $(R^1 j_*F)_{\bar{s}} = E(F)$ eine Extension einer p-Gruppe mit dem zu p primen Torsionsanteil von $F(K^{sep})$.

Falls der Restklassenkörper perfekt ist und die Charakteristik von K gleich der von k ist, kann man mit Hilfe der Strukturtheorie vollständiger, diskreter Bewertungsringe sehen, dass Gal$(K^{sep}/K^{nr}) = \hat{\mathbb{Z}}$ gilt (vgl [S] II §4 Excercise). Für eine étale K-Gruppe F mit trivialer Gal(K^{sep}/K^{nr})-Operation und endlich erzeugtem M_F gilt dann $(\mathsf{R}^1 j_*F)_{\bar{s}} = \mathsf{Tors}(F(K^{sep}))$.

Kapitel 5

Kohomologische Methoden zur Bestimmung der Komponentengruppe

In diesem Kapitel untersuchen wir Methoden zur Bestimmung der Komponentengruppe des Néron-Modells eines algebraischen K-Torus T. Zunächst betrachten wir einen Ansatz aus [X]. Dieser Ansatz von Xarles besteht darin, von kurzen exakten Sequenzen von algebraischen K-Tori zu den (in seinem Fall kurzen) exakten Sequenzen der Néron-Modelle überzugehen und von diesen die lange exakte Sequenz zum Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ zu betrachten.
Um damit Aussagen über die Komponentengruppen zu gewinnen, muss man dies in der glatten Topologie machen und dort ausnutzen, dass es für $i = 0, 1$ eine kanonische Identifikation

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}(j_*T, i_*\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Phi(T), i_*\mathbb{Z}) \\ \cong i_*\mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) &\cong i_*\mathrm{R}^i\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

gibt. Dabei sind in den ersten drei Termen die glatten Garben über $\mathcal{O}_K$ resp. k gemeint. Im letzten Term sind hingegen Φ und $\mathbb{Z}$ die $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$-Moduln, die zu den entsprechenden étalen Garben gehören. Wir beweisen diese Identifikation in allgemeinerer Fassung, so dass wir später anstatt von $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ auch den Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$ betrachten können.
Mit dem Ansatz von Xarles können wir dann den freien Anteil der Komponentengruppe durch eine Extension

$$0 \longrightarrow X(T)^I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}) \longrightarrow E(T) \longrightarrow 0$$

beschreiben, wobei $E(T)$ ein endlich erzeugter p-Torsionsmodul ist und als Störterm bezeichnet wird. Die Existenz eines solchen Störtermes ist eine direkte

Konsequenz der Nichtexaktheit des Néron-Modells.
Danach beschreiben wir die Abbildung, die ein Homomorphismus von algebraischen Tori auf dem freien Anteil der Komponentengruppen induziert. Diese können wir, unter Ausnutzung der Resultate für Tori mit multiplikativer Reduktion, durch ein kommutatives Diagramm beschreiben.
Wir analysieren auch noch den Fall einer kurzen exakten Sequenz von algebraischen Tori. In diesem Fall können wir ein kommutatives Diagramm aufstellen, das allerdings nicht mehr exakt ist und in dem im Allgemeinen nicht mehr alle Torsionsanteile der betrachteten Komponentengruppen auftauchen.
Als zweiten Ansatz greifen wir die Idee aus dem Satz 2.3.1 wieder auf und verallgemeinern damit [L-L] Prop. 4.2 a):
Wir betrachten den Fall einer Sequenz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

von algebraischen Tori, derart dass die Torsionsanteile von $\Phi(T')$ und $\Phi(R)$ teilerfremde Ordnungen haben. Falls in der glatten Topologie $\mathrm{R}^1 j_* T' = 0$ gilt, erhalten wir daraus eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Phi(T')^{\vee\vee} \longrightarrow \Phi(R) \longrightarrow \Phi(T) \longrightarrow 0 \, .$$

Ansonsten definieren wir $\mathcal{K} := \ker\Big(\mathrm{R}^1 j_* T' \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_* R\Big)$ und erhalten eine Sequenz

$$0 \longrightarrow \Phi(T')^{\vee\vee} \longrightarrow \Phi(R) \longrightarrow \Phi(T) \longrightarrow \Phi(\mathcal{K}) \longrightarrow 0 \, ,$$

die bis auf die Stelle bei $\Phi(R)$ exakt ist.
Wir geben Bedingungen für die Exaktheit dort an und beschreiben den Morphismus $\Phi(T')^{\vee\vee} \longrightarrow \Phi(R)$. Dieser lässt sich über die Abbildung der freien Anteile beschreiben.
Abschließend nutzen wir dies und die kanonische Surjektion

$$T(K^{nr}) = j_* T(\mathcal{O}_K^{sh}) \twoheadrightarrow i_* \Phi(T)(\mathcal{O}_K^{sh}) \, ,$$

um gewisse Komponentengruppen auszurechnen. Da wir die Störterme als Komponentengruppen auffassen können, erhalten wir eine Abschätzung für deren Größe. Diese Abschätzung zeigt, dass die Störterme für Tori, welche nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung zerfallen, trivial sind.

5.1 Der freie Anteil der Komponentengruppe

Wir betrachten zunächst die Funktoren $\underline{\mathrm{Hom}}$ und $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ auf dem glatten resp. étalen Situs über $\mathcal{O}_K$. Zur Unterscheidung kennzeichnen wir mit den Indizes sm resp. $\acute{e}t$, auf welchem Situs wir den Funktor betrachten.

5.1.1 Satz (vgl. [X], 2.2 + 2.12). *Sei $\mathcal{T}$ ein glattes Spec $\mathcal{O}_K$-Gruppenschema mit zusammenhängenden Fasern und C eine konstante, torsionsfreie abelsche Garbe auf dem étalen resp. glatten Situs über Spec k. In der étalen Situation enthalte C zusätzlich für ein $l \in \mathbb{N}$ relativ prim zu $p := \mathrm{char}(k)$ keinen l-divisiblen Anteil* [1]*. Dann gelten*

$$\underline{Hom}_{\acute{e}t}(\mathcal{T}, i_*C) = 0 \qquad \underline{Hom}_{sm}(\mathcal{T}, i_*C) = 0$$
$$\underline{Ext}^1_{sm}(\mathcal{T}, i_*C) = 0\ ,$$

wohingegen im Allgemeinen $\underline{Ext}^1_{\acute{e}t}(\mathcal{T}, i_*C) \neq 0$ gilt.

Beweis. Wir beginnen mit den Aussagen in der étalen Topologie. Da

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}, i_*C) \cong i^*\underline{\mathrm{Hom}}(i^*\mathcal{T}, C)$$

gilt, reicht es $\underline{\mathrm{Hom}}(i^*\mathcal{T}, C) = 0$ zu zeigen. Nun ist der étale Situs über Spec k äquivalent zur Kategorie der stetigen Gal(k^{sep}/k)-Moduln und dabei entspricht $i^*\mathcal{T}$ dem Galoismodul $\mathcal{T}(\mathcal{O}_K^{sh})$ und C dem trivialen Galoismodul C.
Man betrachte nun das vorgegebene $l \in \mathbb{N}$. Da l relativ prim zur Charakteristik von k ist, ist nach [BLR] 7.3.2 die l-Multiplikation auf $\mathcal{T}$ étale. Damit ist (vgl. [M] II 2.19) der Halm $\mathcal{T}_{\bar{s}} = \mathcal{T}(\mathcal{O}_K^{sh})$ eine l-divisible Gruppe. Da ein zusammenhängendes, étales k-Schema U das Spektrum einer endlichen, separablen Erweiterung k' von k ist und

$$\mathrm{Hom}_U(i^*\mathcal{T}|_U, C|_U) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{T}(\mathcal{O}_K^{sh}), C)^{\mathrm{Gal}(k^{sep}/k')}$$

gilt, muss also $\underline{\mathrm{Hom}}(i^*\mathcal{T}, C) = 0$ gelten, denn ein Homomorphismus von einer l-divisiblen Gruppe nach C muss trivial sein.
Als Beispiel für den Zusatz über die étale $\underline{\mathrm{Ext}}^1$-Gruppe betrachte man die Garbe $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z})$, welche nach dem Satz 5.1.2 im Allgemeinen nicht verschwindet.
Seien nun die glatten Garben betrachtet. Sei U ein beliebiges Schema und G_1 und G_2 zwei glatte U-Gruppenschemata. Mit einem Yoneda-Argument sieht man ein, dass

$$\mathrm{Hom}_{U-Grp}(G_1, G_2) \cong \mathrm{Hom}_{(sm)/U}(G_1, G_2)$$

gilt, mit anderen Worten: die Homomorphismen der glatten Garben über U, dargestellt von den G_i sind genau die U-Gruppenschemamorphismen von G_1 nach G_2.
Es gilt nun $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}, i_*C) \cong i^*\underline{\mathrm{Hom}}(i^*\mathcal{T}, C)$ und auf dem glatten Situs über k wird die Garbe $i^*\mathcal{T}$ von $\mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ dargestellt, weil $\mathcal{T}$ glatt ist. Nun ist für jedes

[1] Das heißt: $\forall c \in C \backslash \{0\}\ \exists r \in \mathbb{N}\ \forall x \in C :\ l^r x \neq c$.

zusammenhängende, glatte k-Schema U das Gruppenschema $\mathcal{T}_k \times_k U$ wieder zusammenhängend. Jeder Gruppenhomomorphismus von einem zusammenhängendem k-Gruppenschema in ein étales k-Gruppenschema faktorisiert über die Einskomponente, ist also trivial. Damit ist $\mathrm{Hom}_U(\mathcal{T}_k|_U, C|_U) = 0$ und somit auch $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_k, C) = 0$.
Mit [SGA 7]VIII 5.7 wird i_*C von einem étalen $\mathcal{O}_K$-Gruppenschema $Z := C_{\mathcal{O}_K,k}$ dargestellt, welches durch Verkleben von Kopien S_i von $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ für jedes $i \in C$ entlang der generischen Faser $\eta = \mathrm{Spec}\,K$ entsteht. Man beachte, dass diese Konstruktion mit Basiswechsel verträglich ist.
Für ein glattes $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$-Schema U ist eine Extension von $\mathcal{T}$ mit Z als abelsche fppf-Garben über U eine Extension von U-Gruppen im Sinne von [SGA 7] VIII. Eine solche Extension trivialisiert (als $\mathcal{T}_{Z_U}$-Torseur) aber bereits über einer glatten Überdeckung, weil $\mathcal{T}$ glatt über $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ ist. Deshalb ist die Gruppe der Isomorphieklassen solcher Extensionen gleich der Gruppe der Isomorphieklassen von Extensionen als glatte, abelsche Garben über U.
Mit [SGA 7] VIII 5.9 entsprechen die Extensionen von $\mathcal{T}_U$ mit Z_U den Extensionen von $\mathcal{T}_{U_k}$ mit C_{U_k} als U_k-Gruppen in der fppf-Topologie, also, wie oben gesehen, den Extensionen von glatten abelschen Garben über U_k. Es sei angenommen, dass U_k irreduzibel sei und der generische Punkt von U_k sei η genannt. Da U_k ein glattes k-Schema ist, ist es geometrisch einzweigig. Somit entsprechen mit [SGA 7] VIII 5.2 die Extensionen von $\mathcal{T}_{U_k}$ mit C_{U_k} den Extensionen von $\mathcal{T}_\eta$ mit C_η. Dies sind nun aber Extensionen von Gruppen über dem Körper $k(\eta)$ und mit [SGA 7] VIII 5.5 sind diese Extensionen alle trivial, denn $\mathcal{T}_\eta$ ist zusammenhängend. Damit folgt insgesamt $\mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{T}_U, i_*C_U) = 0$.
Nun ist $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{T}, i_*C)$ die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \mathrm{Ext}^1_U(\mathcal{T}_U, Z_U)$, womit die Behauptung folgt. □

5.1.2 Satz. *Sei K ein lokaler Körper mit perfektem Restklassenkörper. In der étalen Topologie über $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ gilt: $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z}) \neq 0$*

Beweis. Nach Definition ist $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z})$ die Garbifizierung der Prägarbe $U \mapsto \mathrm{Ext}^1_U(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_U}, i_*\mathbb{Z}|_U)$. Da $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z}) = 0$ gilt, reicht es wegen der lokal-global-Spektralsequenz für Ext ([M] III Thm. 1.22) $\mathrm{Ext}^1_U(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_U}, i_*\mathbb{Z}|_U) \neq 0$ für ein geeignetes U zu zeigen.
Sei nun $n \in \mathbb{N}$ relativ prim zu $p = \mathrm{char}(k)$ und $U = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{K'}$ für eine unverzweigte Erweiterung K'/K, welche die n-ten Einheitswurzeln enthält. Der Restklassenkörper von K' sei mit k' bezeichnet. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

von konstanten Garben auf dem étalen Situs über $\mathcal{O}_K$ erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_U(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_U}, i_*\mathbb{Q}|_U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_U(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_U}, i_*\mathbb{Q}/\mathbb{Z}|_U) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_U(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_U}, i_*\mathbb{Z}|_U)\ .$$

Nun gilt

$$\mathrm{Hom}_U(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_U}, i_*\mathbb{Q}/\mathbb{Z}|_U) = \mathrm{Hom}_{G_{k'}}(\mathcal{O}_K^{sh^*}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((\mathcal{O}_K^{sh^*})_{G_{k'}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) ,$$

wobei $G_{k'} := \mathrm{Gal}(k^{sep}/k')$ sei und $(\cdot)_{G_{k'}}$ für die $G_{k'}$-Coinvarianten stehe.
Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ divisibel, also $\mathbb{Z}$-injektiv ist, lassen sich Abbildungen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mu_n(\mathcal{O}_K^{sh})$ nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu Abbildungen $(\mathcal{O}_K^{sh^*})_{G_{k'}} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ausdehnen. Nun gibt es genau n verschiedene Abbildungen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und deren Ausdehnungen können nur dann eine Einschränkung einer Abbildung $(\mathcal{O}_K^{sh^*})_{G_{k'}} \longrightarrow \mathbb{Q}$ sein, wenn sie die triviale Abbildung auf $\mu_n(\mathcal{O}_K^{sh})$ induzieren.
Daher muss wegen der langen exakten Sequenz $\mathrm{Ext}^1_U(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_U}, i_*\mathbb{Z}|_U)$ eine Untergruppe der Form $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ besitzen. □

Ist nun K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus, dann induziert die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (j_*T)^0 \longrightarrow j_*T \longrightarrow i_*\Phi(T) \longrightarrow 0$$

zu Einskomponente und Komponentengruppe in der glatten wie in der étalen Topologie einen Isomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}(j_*T, i_*\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Phi, i_*\mathbb{Z}). \tag{5.1.2.1}$$

In der glatten Topologie gilt sogar

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*T, i_*\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1(i_*\Phi, i_*\mathbb{Z}). \tag{5.1.2.2}$$

Wir wollen dies weiter vereinfachen. Dazu bestimmen wir zunächst die Funktoren $\underline{\mathrm{Hom}}$ und $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ auf dem étalen Situs in Termen von Galoismoduln. Da die Komponentengruppe Φ ein étales Gruppenschema ist und der zugehörige Galoismodul $\Phi(k^{sep})$ endlich erzeugt ist, können wir den folgenden Satz verwenden.

5.1.3 Satz. *Sei F eine Garbe auf dem étalen Situs über Spec k, so dass der stetige Gal(k^{sep}/k)-Modul M_F zu dieser Garbe endlich erzeugt ist. Dann induziert die Kategorienäquivalenz zwischen den étalen Garben über Spec k und den stetigen Gal$(k^{sep}/k)-$ Moduln eine Isomorphie*

$$R^i\,\underline{Hom}(F, G) \leftrightsquigarrow R^i\,Hom_{\mathbb{Z}}(M_F, M_G)$$

von δ-Funktoren (im zweiten Argument).

Beweis. Mit [M] III Beispiel 1.7 gilt unter diesen Voraussetzungen an F, dass unter der Kategorienäquivalenz $\underline{\mathrm{Hom}}(F, G)$ auf den Modul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_F, M_G)$ abgebildet wird. Unter der Kategorienäquivalenz von étalen Garben und stetigen Galoismoduln entsprechen injektive Garben den injektiven Galoismoduln.

$\mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}(F,\cdot)$ wird mit injektiven Auflösungen bestimmt und zu jedem stetigen Galoismodul gibt es eine injektive Auflösung mit Galoismoduln, die auch als abelsche Gruppen injektiv sind. Da der Vergissfunktor exakt ist, erhalten wir daraus eine injektive Auflösung abelscher Gruppen, womit die Behauptung klar ist. □

5.1.4 Satz. *Sei k ein Körper und Φ ein kommutatives étales und C ein kommutatives konstantes k-Gruppenschema. Weiterhin sei $\Phi(k^{sep})$ als abelsche Gruppe endlich erzeugt.*
Dann gibt es ein étales k-Gruppenschema $\underline{Hom}(\Phi, C)$, das $\underline{Hom}(\Phi, C)$ als glatte und étale Garbe darstellt. Ferner gibt es ein étales k-Gruppenschema $\underline{Ext}^1(\Phi,\mathbb{Z})$, das $\underline{Ext}^1(\Phi,\mathbb{Z})$ als glatte und étale Garbe darstellt.

Beweis. Allgemein bekannt ist, dass es in der Situation des Satzes ein k-Gruppenschema $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi, C)$ gibt, das den Gruppenfunktor $T \mapsto \mathrm{Hom}_{T-Grp}(\Phi_T, C_T)$ darstellt. Dieses Schema muss dann auch $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi, C)$ in der glatten und der étalen Topologie darstellen.
Da Φ étale ist und $\Phi(k^{sep})$ endlich erzeugt ist, ist Φ nach étalem Basiswechsel isomorph zu einem konstanten Gruppenschema. Für konstante Gruppenschemata C_1, C_2 entspricht der Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(C_1, C_2)$ dem konstanten Gruppenschema zu der Gruppe $\mathrm{Hom}_{Grp}(C_1, C_2)$. Damit wird $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi, C)$ nach étalem (und, da die Basis ein Körper ist, surjektivem) Basiswechsel étale, ist also schon étale. Für die Garbe $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Phi,\mathbb{Z})$ betrachte man die lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi,\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi,\mathbb{Q}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\,. \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\Phi,\mathbb{Z})$$

Mit dem Satz 5.1.3 sieht man, dass $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Phi,\mathbb{Q}) = 0$ in der étalen Topologie gilt. Da die $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi,\cdot)$-Garben von étalen Gruppenschemata dargestellt werden, wird die Abbildung $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi,\mathbb{Q}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ von einem Gruppenschemamorphismus dargestellt. Wegen der Kommutativität ist das Bild dieses Morphismus ein Normalteiler in dem Gruppenschema $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ und auch abgeschlossen, denn die Topologie auf $\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ist diskret. Damit existiert der Cokern dieses Homomorphismus als étales Gruppenschema. Dieser Cokern stellt dann die Garbe $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Phi,\mathbb{Z})$ dar. Offenbar gilt dies auch in der glatten Topologie.

□

Damit sieht man, dass sich die Galoismoduln $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi,\mathbb{Z})$ und $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi,\mathbb{Z})$ über die glatten Garben $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*T, i_*\mathbb{Z})$ bzw. $\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*T, i_*\mathbb{Z})$ bestimmen lassen. Dies gilt allerdings nicht mehr für die höheren Ext'e, wie folgendes Beispiel zeigt:

5.1.5 Satz. *In der glatten Topologie über Spec $\mathcal{O}_K$ gilt $\underline{Ext}^2(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z}) \neq 0$.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ relativ prim zu p. Dann induziert die Kummersequenz eine lange exakte Sequenz für den Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$:

$$\cdots \longrightarrow 0 = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mu_n, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^2(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z})$$

Wie wir gesehen haben, kann man für das étale Gruppenschema μ_n das glatte $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ schon étale berechnen und dies entspricht (im Halm über der speziellen Faser) dem nichttrivialen Galoismodul $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. □

Nach diesen Vorarbeiten wollen wir den freien Anteil der Komponentengruppe analysieren.

5.1.6 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Sei L/K eine endliche, galoissche Zerfällungserweiterung für T mit Inertiagruppe $I := \mathrm{Gal}(L/K_{nr})$.*
Dann ist der freie Anteil $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})$ der Komponentengruppe Φ des Néron-Modells von T eine Extension von einer $p = \mathrm{char}(k)$-Torsiongruppe mit $X(T)^I$.
Genauer existiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T)^I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}) \longrightarrow E(T) \longrightarrow 0$$

von $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$-Moduln und $E(T)$ stellt die Einschränkung der glatten Garbe $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\ker(R^1 j_*\widetilde{T} \longrightarrow R^1 j_*T), \mathbb{Z})$ auf den étalen Situs über $\mathrm{Spec}\, k$ dar, wobei der Torus $\widetilde{T}$ mit Cartier-Dualität zu dem Modul $X(T)/X(T)^I$ gehört.
Wir nennen $E(T)$ den Störterm zu T.

Beweis. Aus der kanonischen kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow T^I \longrightarrow 0$$

erhalten wir nach Bildung des Néron-Modells in der glatten Topologie die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*\widetilde{T} \longrightarrow j_*T \longrightarrow j_*T^I \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

mit $\mathcal{K} := \ker(\mathrm{R}^1 j_*\widetilde{T} \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_*T)$. Diese Sequenz können wir in zwei kurze exakte Sequenzen spalten, und zwar:

$$0 \longrightarrow j_*\widetilde{T} \longrightarrow j_*T \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow j_*T^I \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0.$$

Anwenden von $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ induziert die exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\widetilde{T}, i_*\mathbb{Z}) = 0$$

$$0 = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T^I, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow E$$

mit $E := \underline{\mathrm{Ext}}^1(\ker(\mathrm{R}^1 j_*\widetilde{T} \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_*T), i_*\mathbb{Z})$. In der ersten Sequenz wurde ausgenutzt, dass das Néron-Modell von $\widetilde{T}$ von endlichem Typ ist, also eine endliche Komponentengruppe hat. Für die zweite Sequenz wurde benutzt, das $\mathrm{R}^1 j_*\widetilde{T}$ eine Torsionsgarbe ist und dass j_*T^I eine torsionsfreie Komponentengruppe hat, so dass in der glatten Topologie $\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*T^I, i_*\mathbb{Z}) = 0$ gilt.
Durch Einsetzen der Isomorphie aus der ersten Sequenz erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T^I, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Die Einschränkung dieser Sequenz auf den étalen Situs über $\operatorname{Spec} k$ bleibt exakt und mit E ist auch die Einschränkung von E eine p-Torsionsgarbe. Die étale Sequenz liefert dann mit dem Satz (5.1.3) und der Beschreibung der Komponentengruppe im Fall multiplikativer Reduktion die gewünschte exakte Sequenz von Galoismoduln. □

Mit diesem Theorem lassen sich weitere Aussagen über die Übertragbarkeit der Aussagen von Xarles auf die Situation eines beliebigen Restklassenkörpers machen:

5.1.7 Korollar. *Sei T wie oben ein algebraischer K-Torus. Wenn T nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfällt, gilt für die Komponentengruppe $\Phi(T)$ des Néron-Modells: $Hom_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) = X(T)^I$.*

Beweis. Man betrachte wie im Theorem oben die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow T^I \longrightarrow 0.$$

Da die Charaktergruppe von $\widetilde{T}$ ein Quotient von $X(T)$ ist, zerfällt auch $\widetilde{T}$ nach einer zahm verzweigten Erweiterung. Damit ist $\mathrm{R}^1 j_*\widetilde{T}$ trivial, so dass in der Notation des Beweises oben $\mathcal{K} = 0$ und damit $E = 0$ folgt. Damit folgt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T^I), \mathbb{Z}) \cong X(T)^I$. □

5.2 Die induzierte Abbildung auf den freien Anteilen

Um die bisher erzielten Resultate für eine weitergehende Bestimmung der Komponentengruppe einzusetzen, muss man die Frage stellen, welche Abbildung der Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\cdot, i_*\mathbb{Z})$ einem Homomorphismus von algebraischen Tori zuordnet.

5.2.1 Satz. *Sei $\psi : T_1 \longrightarrow T_2$ ein Homomorphismus algebraischer K-Tori und $D(\psi) : X(T_2) \longrightarrow X(T_1)$ der zugehörige Homomorphismus der Charaktergruppen. Dann induzieren die Beschreibungen aus Thm. 5.1.6 und Thm. 1.1.3 ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
X(T_2)^I \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "D(\psi)^I"'] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2^I), \mathbb{Z}) \arrow[r, hook] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2), \mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\bar{\psi}"'] & E(T_2) \\
X(T_1)^I \arrow[r, "\cong"] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_1^I), \mathbb{Z}) \arrow[r, hook] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_1), \mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] & E(T_1),
\end{tikzcd}$$

wobei $\bar{\psi} := i_* \underline{Hom}(j_*\psi, i_*\mathbb{Z})$ (auf $i^* \underline{Hom}(j_*T_2, i_*\mathbb{Z}) \cong \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2), \mathbb{Z})$) ist.

Beweis. Da $D(\psi)$ ein Galoismodulhomomorphismus ist, haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X(T_2)^I \arrow[r] \arrow[d, "D(\psi)^I"'] & X(T_2) \arrow[r] \arrow[d, "D(\psi)"'] & X(\widetilde{T}_2) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X(T_1)^I \arrow[r] & X(T_1) \arrow[r] & X(\widetilde{T}_1) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Mit Cartier-Dualität erhält man daraus ein kommutatives Diagramm algebraischer Tori mit exakten Zeilen. Da j_* und $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ Funktoren sind, erhält man mit der Technik aus dem Beweis zum Thm. 5.1.6 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2^I), \mathbb{Z}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2), \mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\bar{\psi}"'] & E(T_2) \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_1^I), \mathbb{Z}) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_1), \mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] & E(T_1) .
\end{tikzcd}$$

Mit Thm. 1.1.3 lässt sich dann der Morphismus in der ersten Zeile mit den Charaktergruppen beschreiben. □

Für spätere Anwendungen müssen wir noch $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\cdot, i_*\mathbb{Z})$ angewandt auf eine kurze exakte Sequenz algebraischer Tori beschreiben.

5.2.2 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper und*

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz algebraischer K-Tori. Dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
E(T_3) & E(T_2) & E(T_1) & \\
\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_3),\mathbb{Z}) \arrow[r, hook] \arrow[u, two heads] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_1),\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \cdots \\
X(T_3)^I \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & X(T_2)^I \arrow[r] \arrow[u, hook] & X(T_1)^I \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook] & M
\end{tikzcd}
$$

von Gal(k^{sep}/k)-Moduln mit exakten Spalten, wobei wir folgende Bezeichnungen verwenden:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} &:= \mathit{ker}(R^1 j_* T_1 \to R^1 j_* T_2) \\
\mathcal{N} &:= \mathit{ker}(\mathcal{T}_3 \longrightarrow \mathcal{K}) \\
M &:= \mathit{ker}(H^1(I, X(T_3)) \longrightarrow H^1(I, X(T_2))) \\
\cdots &:= \underline{\mathit{Ext}}^1(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z})|_{(\acute{e}t)/k} \longrightarrow \mathit{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2),\mathbb{Z})\ .
\end{aligned}
$$

Damit ist die untere Zeile exakt und die mittlere Zeile ist eine Sequenz und exakt bis auf die Stelle bei $\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2),\mathbb{Z})$.
Falls $\underline{\mathit{Ext}}^1(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}) = 0$ gilt, ist die mittlere Zeile insgesamt exakt. In diesem Fall haben wir eine Inklusion $\underline{\mathit{Ext}}^1(\Phi(T_3), i_*\mathbb{Z}) \hookrightarrow \underline{\mathit{Ext}}^1(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z})|_{(\acute{e}t)/k}$.
Falls zusätzlich $\underline{\mathit{Ext}}^2(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}) = 0$ gilt, ist dies sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Die kurze exakte Sequenz der Tori entspricht einer kurzen exakten Sequenz von Charaktergruppen und diese induziert mit obiger Wahl von M ein kommutatives und exaktes Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & X(\widetilde{T}_3) & X(\widetilde{T}_2) & X(\widetilde{T}_1) & & \\
0 \arrow[r] & X(T_3) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & X(T_2) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & X(T_1) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & 0 & \\
0 \arrow[r] & X(T_3)^I \arrow[r] \arrow[u, hook] & X(T_2)^I \arrow[r] \arrow[u, hook] & X(T_1)^I \arrow[r] \arrow[u, hook] & M \arrow[r] & 0\ .
\end{tikzcd}
$$

Mit Cartier-Dualität erhalten wir daraus ein kommutatives, exaktes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{T}_1 \arrow[d, hook] & \widetilde{T}_2 \arrow[d, hook] & \widetilde{T}_3 \arrow[d, hook] & \\
 & 0 \arrow[r] & T_1 \arrow[r] \arrow[d] & T_2 \arrow[r] \arrow[d] & T_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & D(M) \arrow[r] & T_1^I \arrow[r] & T_2^I \arrow[r] & T_3^I \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Wir wenden hierauf in der glatten Topologie die Funktoren j_* und $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ an. Setzt man $\mathcal{T}_i := j_*T_i$ so liefert j_* in der mittleren Zeile

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{T}_3 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

mit $\mathcal{K} := \ker(\mathrm{R}^1 j_* T_1 \to \mathrm{R}^1 j_* T_2)$. Zum Anwenden von $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ spalten wir diese Sequenz in die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0 \qquad (5.2.2.1)$$

und die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{T}_3 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0. \qquad (5.2.2.2)$$

Dabei setzen wir $\mathcal{N} := \ker(\mathcal{T}_3 \to \mathcal{K})$. Aus der langen exakten Sequenz zu (5.2.2.1) ergibt sich die Sequenz

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_3, i_*\mathbb{Z}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_2, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_1, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{T}_2, i_*\mathbb{Z}),$$

wenn man die Inklusion $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_3, i_*\mathbb{Z}) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z})$ aus der langen exakten Sequenz zu (5.2.2.2) einsetzt. Nach Konstruktion ist die abgeänderte Sequenz eine Sequenz und exakt bis auf die Stelle bei $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_2, i_*\mathbb{Z})$.
Nach Einschränken auf den étalen Situs über k und Übergang zu den darstellenden Galoismoduln (mit (5.1.2.2) und (5.1.2.1)) erhalten wir die mittlere Zeile aus dem Diagramm in der Behauptung. Mit dem Satz (5.2.1) kann man diese

Zeile zu einem kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
E(T_3) & E(T_2) & E(T_1) & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_3),\mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2),\mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_1),\mathbb{Z}) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
X(T_3)^I \arrow[u, hook] \arrow[r] & X(T_2)^I \arrow[u, hook] \arrow[r] & X(T_1)^I \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

ergänzen, wobei $\cdots$ für $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z})|_{(\acute{e}t)/k} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2),\mathbb{Z})$ (als Morphismus der darstellenden Galoismoduln) steht.
Mit dem Satz (5.2.1) entsprechen die Abbildungen in der unteren Zeile den kanonischen Abbildungen der I-Invarianten der Charaktergruppen. Deshalb muss die untere Zeile exakt sein und $X(T_3)^I \longrightarrow X(T_2)^I$ ist eine Inklusion. Außerdem muss $M = \mathrm{coker}\big(X(T_2)^I \longrightarrow X(T_1)^I\big)$ gelten.
Die lange exakte Sequenz zu der Sequenz (5.2.2.2) liefert (in der glatten Topologie) die behaupteten Beziehungen zwischen $\mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z})$ und

$$\mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}_3, i_*\mathbb{Z}) \cong \mathrm{R}^i\underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Phi(T_3), i_*\mathbb{Z}) \cong i_*\underline{\mathrm{Hom}}(\Phi(T_3),\mathbb{Z}).$$

$\square$

5.2.3 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper und*

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von K-Tori. Ferner gelte, dass die Tori T_i nach einer endlichen, galoisschen und zahm verzweigten Erweiterung L/K zerfallen oder dass der Restklassenkörper perfekt sei.
Dann ist die Beschreibung des freien Anteils funktoriell, insb. erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_3),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_2),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_1),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathit{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T_3),\mathbb{Z}) \\
0 \arrow[r] & X(T_3)^I \arrow[u, "\|"] \arrow[r] & X(T_2)^I \arrow[u, "\|"] \arrow[r] & X(T_1)^I \arrow[u, "\|"] &
\end{tikzcd}$$

von Gal(k^{sep}/k)-Moduln mit exakten Zeilen, wobei die Abbildung in der oberen Zeile von den Abbildungen auf den Néron-Modellen induziert werden, wohingegen die Abbildungen in der unteren Zeile von den Abbildungen der Charaktergruppen induziert werden.

Beweis. Wenn der Restklassenkörper perfekt ist oder die Tori nach zahmer Verzweigung zerfallen, sind alle Störterme trivial. Dann liefert das Theorem oben eine Isomorphismus der beiden unteren Zeilen. Insbesondere muss dann die Sequenz der freien Anteile exakt sein. Da unter den Voraussetzungen auch $\mathrm{R}^1 j_* T_1 = 0$ gilt, muss $\mathcal{K} = 0$ folgen, so dass $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{T}_3, i_*\mathbb{Z})$ gilt. □

5.3 Exakte Sequenzen von Komponentengruppen von Tori

Wir greifen nun die Idee aus dem Satz 2.3.1 wieder auf und betrachten den Fall exakter Sequenzen algebraischer Tori. Dies ergibt eine zweite Möglichkeit, Informationen über die Komponentengruppe des Néron-Modells zu gewinnen.
In diesem Abschnitt werden wir den Torsionsanteil einer Komponentengruppe $\Phi(T)$ als Untermodul $\mathrm{Tors}(\Phi(T))$ verstehen und dementsprechend den torsionsfreien Anteil als

$$\Phi(T)^{\vee\vee} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \Phi(T)/\mathrm{Tors}(\Phi(T))$$

definieren.

5.3.1 Satz (vgl.[L-L] 4.3 a)). *Sei K ein lokaler Körper und*

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von algebraischen K-Tori mit $R^1 j_* T_1 = 0$ in der glatten Topologie, dann induziert die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*T_1 \xrightarrow{\iota} j_*T_2 \longrightarrow j_*T_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*T_1/\iota^{-1}(j_*T_2^0)|_{(\acute{e}t)/k} \longrightarrow \Phi(T_2) \longrightarrow \Phi(T_3) \longrightarrow 0$$

von Komponentengruppen.
Dabei gilt stets $j_*T_1^0 \subset \iota^{-1}(j_*T_2^0) \subset (j_*T_1)^{ft}$. Insbesondere gilt

$$j_*T_1/\iota^{-1}(j_*T_2^0) = \Phi(T_1)^{\vee\vee},$$

falls die Torsionsanteile von $\Phi(T_1)$ und von $\Phi(T_2)$ teilerfremde Ordnungen haben.

Beweis. Mit dem Satz 2.3.1 bleiben nur noch die Zusätze zu zeigen. Die Abschätzung $j_*T_1^0 \subset \iota^{-1}(j_*T_2^0) \subset (j_*T_1)^{ft}$ ist klar, da $\Phi(T_1) \longrightarrow \Phi(T_2)$ einen endlichen Kern hat (2.3.4) und das ft-Néron-Modell genau dem Torsionsanteil der Komponentengruppe entspricht, welcher die größte endliche Untergruppe der Komponentengruppe ist.
In der étalen Topologie können wir die Garbenhomomorphismen mit den entsprechenden Gal (k^{sep}/k)-Modulhomomorphismus identifizieren. Falls die Ordnungen der Torsionsanteile von $\Phi(T_1)(k^{sep})$ und $\Phi(T_2)(k^{sep})$ teilerfremd sind, muss das Bild des Torsionsanteils von $\Phi(T_1)(k^{sep})$ trivial sein, so dass mit der Abschätzung oben die Abbildung $\Phi(T_1) \longrightarrow \Phi(T_2)$ injektiv über den Quotienten $\Phi(T_1)^{\vee\vee}$ faktorisiert. □

Im Allgemeinen ist nicht zu erwarten, dass die Sequenz der Néron-Modelle rechtsexakt ist. Deshalb wollen wir die „Komponentengruppe“ $\Phi(\mathsf{R}^1 j_*T)$ betrachten. Diese sei nichts anderes als der (Garben-) Quotient von $\mathsf{R}^1 j_*T$ nach $\mathsf{R}^1 j_*T^0$ gemäß obiger Definition.

5.3.2 Satz. *Sei $\mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ ein Epimorphismus von Garben auf dem glatten Situs über Spec $\mathcal{O}_K$, wobei $\mathcal{G}$ von einem glatten Gruppenschema dargestellt wird. Dann gelten*

$$\underline{\mathit{Hom}}(\mathcal{F}^0, i_*\mathbb{Z}) = 0$$
$$\underline{\mathit{Ext}}^1(\mathcal{F}, i_*\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathit{Ext}}^1(\Phi(\mathcal{F}), i_*\mathbb{Z}) \; .$$

Beweis. Mit 2.2.4 gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \kappa \longrightarrow \mathcal{G}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow 0 \; .$$

Mit $\underline{\mathrm{Hom}}(G^0, i_*\mathbb{Z}) = 0$ folgt die erste Behauptung. Nun ist $\mathcal{G}^0$ eine l-divisible Garbe für jede natürliche Zahl l, die nicht von $p = \mathrm{char}(k)$ geteilt wird. Damit ist der Kern κ ebenfalls eine l-divisible Garbe, so dass $\underline{\mathrm{Hom}}(\kappa, i_*\mathbb{Z}) = 0$ gelten muss, denn jeder Homomorphismus von einer l-divisiblen Gruppe nach $\mathbb{Z}$ ist trivial.
Damit liefert die lange exakte Sequenz zum Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ in der glatten Topologie

$$0 = \underline{\mathrm{Hom}}(\kappa, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{F}^0, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{G}^0, i_*\mathbb{Z}) = 0.$$

Deshalb folgt aus der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \Phi(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

ein Isomorphismus $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Phi(\mathcal{F}), i_*\mathbb{Z}) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{F}, i_*\mathbb{Z})$ □

5.3.3 Satz. *Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf dem glatten Situs über Spec$\mathcal{O}_K$ und ψ : $G_1 \longrightarrow G_2$ ein Morphismus zwei kommutativer glatter $\mathcal{O}_K$-Gruppenschemata. Gilt $\mathcal{F} \cong$ coker($G_1 \longrightarrow G_2$) als glatte Garben, so wird $\Phi(F)$ von einem étalen Gruppenschema dargestellt.*
Gilt zusätzlich, dass die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf den étalen Situs trivial ist, so muss $\Phi(\mathcal{F})$ trivial sein.

Beweis. Offenbar gilt als $\Phi(\mathcal{F}) \cong \mathrm{coker}(\Phi(G_1) \longrightarrow \Phi(G_2))$ als glatte Garben und mit einem Yoneda-Argument sieht man, dass der Morphismus der Komponentengruppen von einem Homomorphismus der étalen Gruppenschemata induziert wird. Das Bild von $\Phi(G_1)$ unter diesem Homomorphismus muss ein abgeschlossener Normalteiler sein, weil die Gruppen abelsch sind und die Topologie auf den étalen Gruppen diskret ist. Somit existiert der Cokern als Gruppenschema, ist étale und stellt a fortiori den Cokern als glatte Garbe dar.
Der Epimorphismus $\mathcal{F} \longrightarrow \Phi(\mathcal{F})$ ist auch nach Einschränkung auf den étalen Situs surjektiv, so dass $\Phi(\mathcal{F}) = 0$ als étale Garbe gilt. Da $\Phi(\mathcal{F})$ ein étales Schema ist, folgt aber aus $\Phi(k^{sep}) = 0$ schon $\Phi = 0$. □

5.3.4 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper und*

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz algebraischer K-Tori und es gelte, dass die Torsionsanteile der Komponentengruppen $\Phi(R)$ und $\Phi(T')$ teilerfremde Ordnungen haben. Dann induziert die zugehörige lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

der Néron-Modelle (mit $\mathcal{K} :=$ ker($R^1 j_* T' \longrightarrow R^1 j_* R$)) eine Sequenz

$$0 \longrightarrow \Phi(T')^{\vee\vee} \longrightarrow \Phi(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi(T) \longrightarrow \Phi(\mathcal{K}) \longrightarrow 0\,,$$

die bis auf die Stelle bei $\Phi(\mathcal{R})$ exakt ist.
Falls die Sequenz $\mathcal{R}^0 \longrightarrow \mathcal{T}^0 \longrightarrow \mathcal{K}^0$ exakt ist, ist sie auch dort exakt.

Beweis. Wir erhalten in der glatten Topologie ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \iota^{-1}(\mathcal{R}^0) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{R}^0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{T}^0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{K}^0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{T}' \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{R} \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit einer exakten unteren Zeile und einer bis auf die Stellen bei $\mathcal{R}^0$ und $\mathcal{T}^0$ exakten oberen Zeile.
Wir schränken dieses Diagramm auf den étalen Situs über $\operatorname{Spec} k$ ein. Dabei bleibt die Exaktheit erhalten. Insbesondere fassen wir die Garben nunmehr (ohne eine Unterscheidung in der Notation!) als stetige $\mathrm{Gal}\,(k^{sep}/k)$-Modul auf.
Das Diagramm induziert also eine Sequenz

$$0 \longrightarrow \Phi(T')^{\vee\vee} \longrightarrow \Phi(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi(T) \longrightarrow \Phi(\mathcal{K}) \longrightarrow 0\,,$$

der Komponentengruppen, die trivialerweise bei $\Phi(\mathcal{K})$ exakt ist. Wegen 2.2.4 ist sie exakt bei $\Phi(T)$. Die Exaktheit bei $\Phi(T')^{\vee\vee}$ ist klar wegen der Voraussetzung an die Ordnungen der Torsionsanteile.
Sei also die Exaktheit der Einskomponenten bei j_*T^0 gegeben. Es bleibt also noch zu zeigen, dass die Sequenz bei $\Phi(\mathcal{R})$ exakt ist.
Dazu muss nur noch gezeigt werden, dass ein Element $\bar{x} \in \Phi(\mathcal{R})$ welches in $\Phi(T)$ auf Null abgebildet wird, schon ein Urbild in $\Phi(T')^{\vee\vee}$ besitzt. Sei dazu ein Urbild $x \in i^*\mathcal{R}$ gewählt: dessen Bild z unter $i^*\mathcal{R} \longrightarrow i^*\mathcal{T}$ liegt offenbar schon in $i^*\mathcal{T}^0$. Das Bild von z in $i^*\mathcal{K}$ ist Null, so dass wir mit der Exaktheit der Sequenz $i^*\mathcal{R}^0 \longrightarrow i^*\mathcal{T}^0 \longrightarrow i^*\mathrm{R}^1 j_*{T'}^0$ schon ein Urbild $x_0 \in i^*\mathcal{R}^0$ zu z finden. Insgesamt erhalten wir einen Schnitt $x - x_0 \in i^*\mathcal{R}$, der ein Urbild zu $\bar{x}$ ist und ein Urbild in $i^*\mathcal{T}'$ hat. Dessen Bild in der Komponentengruppe $\Phi(T')$ muss offenbar ein Urbild zu $\bar{x}$ sein. □

5.3.5 Satz. *In der Situation des Theorems 5.3.4 haben wir ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Phi(T')^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha"'] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T')^I, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\beta"'] & E(T')^{pd} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Phi(R) \arrow[r] & \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(R)^I, \mathbb{Z}) \arrow[r] & E(R)^{pd} \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

wobei der Morphismus β von der Abbildung der Néron-Modelle induziert wird und der Morphismus α gleich der dualen Abbildung zu der gegebenen Abbildung $X(R) \twoheadrightarrow X(T')$ der Charaktergruppen eingeschränkt auf die I-Invarianten ist. Schließlich bezeichnet $(\cdot)^{pd}$ das Pontryagin-Dual.

Beweis. Die Behauptung entspricht der Behauptung des Satzes (5.2.1) angewandt auf den Morphismus $T' \hookrightarrow R$ und dualisiert mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z})$. Da die Störterme als abelsche Gruppen endliche Torsionsgruppen sind, entspricht dort der Funktor $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(, \mathbb{Z})$ dem Pontryagin-Dual. □

Wir nutzen nun die hergeleiteten Sequenzen, um gewisse Komponentengruppen zu berechnen.

5.3.6 Satz. *Sei L/K eine endliche, separable Erweiterung lokaler Körper, welche nach Komposition mit K^{nr} eine galoissche Erweiterung induziert und T_N der zugehörige Norm-Torus. Dann ist (als abelsche Gruppe)*

$$\Phi(\mathsf{R}^1 j_* T_N) = (\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})^{[K_{nr}:K]} ,$$

wobei $p^s := \frac{e_{L/K}}{\nu_L(\pi_K)} = [l:k]^{ins}$ gleich dem inseparablen Grad der Erweiterung der Restklassenkörper ist.

Beweis. Wir schreiben L^{nr} für das Kompositum von L mit K^{nr}. Nach Basiswechsel zu K^{nr} hat die Sequenz der Charaktergruppen, welche T_N definiert die Form

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{[K_{nr}:K]} \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(K^{sep}/K^{nr})}^{\mathrm{Gal}(K^{sep}/L^{nr})} \mathbb{Z} \longrightarrow X(T_N) \longrightarrow 0 .$$

Da α die Diagonaleinbettung ist, ist $X(T_N)$ als Cokern ebenfalls eine Summe und jeder Summand ist isomorph zu der Charaktergruppe des Norm-Torus zu der Erweiterung L^{nr}/K^{nr}. Damit reicht es, den Fall $K = K^{nr}$ und $L = L^{nr}$ zu betrachten:
Aus der definierenden Sequenz des Norm-Torus erhalten wir mit dem obigen Satz eine exakte Sequenz

$$\Phi(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi(\mathcal{G}) \longrightarrow \Phi(\mathsf{R}^1 j_* T_N) \longrightarrow 0 ,$$

wobei $\mathcal{R} := j_* \mathfrak{R}_{L/K}(\mathbb{G}_{m,L})$ und $\mathcal{G} := j_* \mathbb{G}_{m,K}$ seien. Da die Komponentengruppen étale Gruppen sind, können wir diese Sequenz o.E. in der étalen Topologie betrachten und die Terme der Sequenz als Galoismoduln auffassen. Wir erhalten

$$\begin{tikzcd}
L^* = \mathcal{R}(\mathcal{O}_K) \arrow[r, "N_{L/K}"] \arrow[d, "\nu_L"'] & \mathcal{G}(\mathcal{O}_K) = K^* \arrow[d, "\nu_K"'] & & \\
L^*/\mathcal{O}_L^* = \Phi(\mathcal{R}) \arrow[r] & \Phi(\mathcal{G}) = K^*/\mathcal{O}_K^* \arrow[r] & \Phi(\mathsf{R}^1 j_* T_N) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Somit induziert die Abbildung der Néron-Modelle auf den Komponentengruppen die Abbildung $1 = \nu_L(\pi_L) \longmapsto \nu_K(N_{L/K}(\pi_L)) = \nu_K(\pi_K^{p^s}) = p^s$. ☐

Die obigen Überlegungen liefern uns eine weitergehende Interpretation des Störterm, den wir bei der Untersuchung des freien Anteils gefunden haben. Es ergibt sich auch eine einfache Abschätzungsmöglichkeit.

5.3.7 Lemma. *Sei T ein algebraischer K-Torus. Sei die kanonische Sequenz*

$$0 \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow T^I \longrightarrow 0$$

betrachtet. Sei $\mathcal{K} := \ker\,(R^1 j_*\widetilde{T} \longrightarrow R^1 j_* T)$. Dann bestimmt sich der Störterm als $E(T) = \underline{\mathit{Ext}}^1(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z})|_{(\acute{e}t)/k} = \underline{\mathit{Ext}}^1(\Phi(\mathcal{K}), \mathbb{Z})$, wobei sich die Komponentengruppe aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T(K^{nr}) \arrow[r] \arrow[d] & T^I(K^{nr}) = (K^{nr*})^{d_I} \arrow[d, "\nu"'] & & \\
\Phi(T) \arrow[r] & \Phi(T^I) = \mathbb{Z}^{d_I} \arrow[r] & \Phi(\mathcal{K}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

bestimmen lässt.

Beweis. Die Beschreibung der $\underline{\mathrm{Ext}}^1$-Terme haben wir schon oben hergeleitet. Mit der Beweisidee zum Thm. 5.3.4 liefert die Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*\widetilde{T} \longrightarrow j_*T \longrightarrow j_*T^I \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz

$$\Phi(T) \longrightarrow \Phi(T^I) \longrightarrow \Phi(\mathcal{K}) \longrightarrow 0\,,$$

die man offensichtlich in der étale Topologie bestimmen kann. Das Diagramm in der Behauptung entsteht durch Übergang von den étalen Garben zu den darstellenden Galoismoduln (in der speziellen Faser) und aus der expliziten Beschreibung der Néron-Modelle von algebraischen Tori mit multiplikativer Reduktion. □

Damit erhalten wir einen wichtigen Satz:

5.3.8 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus, der nach einer endlichen, galoisschen Erweiterung L/K zerfällt. Sei weiter $d :=$ Rang$(X(T)^I)$, wobei $I = Gal(L/K_{nr})$ die Inertiagruppe von $Gal(L/K)$ sei. Dann ist der Störterm $E(T)$ ein Quotient von $\left(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}\right)^d$, wobei p^s der Inseparabilitätsgrad der Erweiterung der Restklassenkörper ist. Insbesondere ist der Störterm trivial, falls T nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung zerfällt.*

Beweis. Mit dem Lemma oben reicht es, den Cokern der kanonischen Abbildung $T(K^{nr}) \longrightarrow \Phi(T^I)$ abzuschätzen. Es gilt $\Phi(T^I) = \mathbb{Z}^d$ und zu einem Element $\vec{a} = (a_1, ., , a_d) \in \Phi(T^I)$ kann man in $T^I(K^{nr})$ ein Urbild $\vec{\alpha} = (\alpha_1, .., \alpha_{d_I})$ mit Elementen $\alpha_i \in K^{nr*}$ mit $\nu_K(\alpha_i) = a_i$ konstruieren.
Nach Wahl einer Trivialisierung kann man $T^I(K^{nr}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T^I), K^{nr*})$ schreiben, so dass man nach Wahl einer $\mathbb{Z}$-Basis $(\chi_i)_{i=1,..,d_I}$ von $X(T^I)$ den Punkt $\vec{\alpha}$ mit der Abbildung induziert von $\chi_i \longmapsto \alpha_i$ identifizieren kann.
Es sei nun L^{nr} das Kompositum von L mit K^{nr}. Dann gilt für ein uniformisierendes Element $\pi_{L^{nr}}$ in $\mathcal{O}_{L^{nr}}$

$$\nu_K(N_{L^{nr}/K^{nr}}(\pi_{L^{nr}})) = p^r \ .$$

Nun gilt $T(K^{nr}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^{nr*})^{\mathrm{Gal}\,(L^{nr}/K^{nr})}$ und wir können die Basis (χ_i) von $X(T)^I$ durch Elemente (ξ_j) zu einer $\mathbb{Z}$-Basis von $X(T)$ ergänzen. Für ein $\vec{b} = (b_1, .., b_d) \in \mathbb{Z}^d$ sei nun der Homomorphismus $\vec{\beta}$ aus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), L^{nr*})$ betrachtet, welcher von der Zuordnung $\chi_i \longmapsto \pi_{L^{nr}}^{b_i}$ $\xi_j \longmapsto 1$ induziert wird. Die Norm $\vec{\beta}' := \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}\,(L^{nr}/K^{nr})} \tau(\vec{\beta})$ definiert ein Element aus $T(K^{nr})$. Dieses Element bildet offenbar die χ_i auf $\beta_i' := N_{L^{nr}/K^{nr}}(\pi_{L^{nr}}^{b_i})$ ab. Das Bild dieses Elementes in $T^I(K^{nr})$ ist also ein Urbild von $p^s \cdot \vec{b}$, da $\nu_K(N_{L^{nr}/K^{nr}}(\beta_i')) = p^s b_i$ gilt.
Somit finden wir mit obiger Konstruktion in $\Phi(T^I) = \mathbb{Z}^d$ Urbilder zu $p^s\mathbb{Z}^d$, so dass $E(T)$ ein Quotient von $\mathbb{Z}^d/p^s\mathbb{Z}^d$ sein muss. Im Fall einer nicht residuell verzweigten Zerfällungserweiterung ist $p^s = 1$, womit $E(T)$ trivial sein muss. □

Kapitel 6

Hauptresultate

Im letzten Kapitel fassen wir zusammen, was wir über die Komponentengruppe in der allgemeinen Situation aussagen können. Als erstes übertragen wir die Beschreibung aus [X] Thm. 3.1 auf algebraische Tori, welche nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfallen. Da für diese Tori auch die Störterme trivial sind, ist die Beschreibung sogar verträglich mit Homomorphismen. Aus der Übertragung für diese Tori folgt sofort, dass die Resultate von Xarles auch für Weil-Restriktionen von solchen Tori gelten, dann allerdings nicht mehr verträglich mit Homomorphismen sein brauchen.
Als nächstes betrachten wir algebraische Tori T, welche nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung zerfallen. Für diese können wir zeigen, dass die Beschreibung des freien Anteils gültig bleibt. Den Torsionsanteil können wir nur als eine Extension der Komponentengruppe $\Phi(\mathrm{R}^1 j_* T')$ (für einen geeigneten Torus T') mit $\mathrm{H}^1(I, X(T))$ schreiben.
Da die Störterme und $\mathrm{R}^1 j_* T$ immer p-Torsionsgarben sind, geben wir eine Beschreibung der Komponentengruppe als $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]-$Modul. In dieser Situation gelingt eine Übertragung der Beschreibung von Xarles in die allgemeine Situation. Die Beschreibung als $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Moduln erfasst allerdings bei dem Torsionsanteil nur den prim-zu-p-Anteil und die Isomorphieklassen der Moduln werden größer.

Danach bestimmen wir die Komponentengruppe des Néron-Modells von Norm-Tori T_N bezüglich zyklischer, galoischer und rein verzweigter Erweiterungen L/K von lokalen Körpern. Für diese ist der Torsionsanteil der Komponentengruppe immer ein Quotient aus $\mathrm{H}^1(I, X(T_N))$ und $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ wobei p^s der Inseparabilitätsgrad der Restklassenkörpererweiterung zu L/K ist. Aus einem solchen Gegenbeispiel konstruieren wir einen Torus T, für den der freie Anteil der Komponentengruppe nicht isomorph zu $X(T)^I$ ist.

Abschließend gehen wir auf den p-Torsionsanteil ein: Wir zeigen, dass der

p-Torsionsanteil von der Multiplikation mit p^s annulliert wird, wenn es ein Zerfällungserweiterung gibt, so dass p^s die höchste p-Potenz in der Ordnung der Inertiagruppe dieser Erweiterung ist. Eine allgemeine Beschreibung des p-Anteils ist noch nicht gelungen, wir vermuten aber, dass der p-Anteil höchstens kleiner wird. Diese Vermutung würde implizieren, dass sich die Resultate aus Xarles auf algebraische Tori übertragen, welche nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung zerfallen.

6.1 Néron-Modelle und zahme Verzweigung

Nun wollen wir die Resultate von Xarles auf algebraische K-Tori übertragen, welche nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfallen. Dass sich das Resultat für den freien Anteil auf algebraische Tori, welche nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfallen, überträgt, hatten wir schon oben gesehen.

6.1.1 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$, welcher nach einer endlichen, galoisschen und zahm verzweigten Erweiterung L/K zerfällt. Es sei ferner $G_K :=$ Gal(L/K) und I die Inertiagruppe von G_K. Ist nun*

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots$$

eine Auflösung von $X(T)$ mit torsionsfreien, I-azyklischen G_K-Moduln, dann gilt für die Komponentengruppe des Néron-Modells von T

$$\Phi(T) \cong \mathit{coker}\left(\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}((X')^I, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_0^I, \mathbb{Z})\right)$$

als $G_k := G_K/I$-Moduln, wobei $X' :=$ ker $(M_1 \longrightarrow M_2)$ sei .

Beweis. Wir betrachten wie Xarles die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

von algebraischen K-Tori, welche mit Cartier-Dualität aus der Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow M_0 \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

entsteht. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass M_0 ein induzierter Gal(L/K)-Modul ist, also der Torus R eine Weil-Restriktion eines Produktes von multiplikativen Gruppen ist. Damit ist die Komponentengruppe des Néron-Modells von R torsionsfrei. Da ferner mit dieser Wahl mit T auch die Tori R und

T' nach der zahm verzweigten Erweiterung L zerfallen, erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

der Néron-Modelle. Diese induziert mit den Sätzen 5.3.1 und 5.3.5, da die Störterme wegen der zahmen Verzweigung trivial sind, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Phi(T')^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d, "||"'] & \Phi(R) \arrow[r] \arrow[d, "||"'] & \Phi(T) \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((X')^I, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_0^I, \mathbb{Z}) \ , & &
\end{tikzcd}$$

wobei α das Dual zur Einschränkung des Morphismus $M_0 \longrightarrow X'$ auf die I-Invarianten ist. Da die obere Zeile exakt ist, folgt schon die Behauptung. □

6.1.2 Korollar. *Sei wie oben T ein algebraischer K-Torus, welcher nach einer zahm verzweigten Erweiterung L/K zerfällt. Sei $X(T)$ die Charaktergruppe von T. Dann gilt als $G_k = G_K/I$-Moduln $\mathrm{H}^1(I, X(T)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z})$.*

Beweis. Mit dem Theorem 6.1.1 haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((X')^I, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_0^I, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Phi(T) \longrightarrow 0$$

Durch Anwenden von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z})$ erhalten wir die exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow M_0^I \longrightarrow (X')^I \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Hierbei wurde benutzt, dass X' und M_0 torsionsfrei sind. Nun gilt wegen der Linksexaktheit des Invariantenfunktors, dass $(X')^I = \ker(M_1^I \longrightarrow M_2^I)$ gilt. Somit gilt $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{coker}\left(M_0^I \longrightarrow \ker(M_1^I \longrightarrow M_2^I)\right)$. Da die M_i aber eine $I-$azyklische Auflösung von $X(T)$ bildeten, muss dies schon $\mathrm{H}^1(I, X(T))$ sein. □

Mit dem Thm 1.2.1 erhalten wir außerdem sofort den Satz:

6.1.3 Satz. *Sei L/K eine endliche, separable Erweiterung lokaler Körper und T_L ein algebraischer L-Torus, welcher nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfällt. Dann gilt für die Komponentengruppe des Néron-Modells des Torus $T := \mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$ die Beschreibung aus [X] Thm. 3.1*

6.2 Néron-Modelle und nicht residuelle Verzweigung

Aus dem Satz 5.3.8 folgt mit Thm 5.1.6 sofort der Satz:

6.2.1 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus, welcher nach einer endlichen, galoisschen, nicht residuell verzweigten Erweiterung L/K zerfällt. Dann gilt* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T),\mathbb{Z}) \cong X(T)^I$ *als* $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$*−Moduln.*

Da wir in diesem Fall allerdings die Komponentengruppe von $\mathrm{R}^1 j_* T$ noch nicht beschreiben können, lässt sich der Torsionsanteil der Komponentengruppe nur als Extension angeben:

6.2.2 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$, der nach einer endlichen, galoisschen, nicht residuell verzweigten Erweiterung L/K zerfällt. Es sei I die Inertiagruppe von $G_K := \mathrm{Gal}(L/K)$. Dann existiert eine Extension*

$$0 \longrightarrow H^1(I, X(T)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(R^1 j_* T'),\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

von $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$*-Moduln, wobei T' ein geeigneter Torus ist.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\mathrm{H}^1(I, X(T)) = 0$ gilt. Dann induziert die kanonische Sequenz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow R := \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

mit dem Theorem 5.2.2 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T),\mathbb{Z}) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(R),\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T'),\mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] & \underline{\mathrm{Ext}}^1(N, i_*\mathbb{Z})|_{(ét)/k} \\
X(T)^I \arrow[u, "\parallel"] \arrow[r, hook] & X(R)^I \arrow[u, "\parallel"] \arrow[r] & X(T')^I \arrow[u, "\parallel"] \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

wobei entsprechend den Notationen des Theorems $\mathcal{N} = \ker(\mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_* T')$ gelte. Die letzte Abbildung in der oberen Zeile ist surjektiv, da $\Phi(\mathcal{R})$ torsionsfrei ist. Da mit dem Satz 5.3.8 die Störterme verschwinden, haben wir vertikal Isomorphismen. Wegen der Exaktheit der unteren Zeile muss auch die obere Zeile bei $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{R}, i_*\mathbb{Z})$ exakt sein. Damit ist in der langen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}, i_*\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(K, i_*\mathbb{Z})$$

$$\longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{T}, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z})$$

der Morphismus α nach Einschränkung auf den étalen Situs über k ein Isomorphismus. Aus dem Diagramm liest man ab, dass $\underline{\mathsf{Ext}}^1(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z})|_{(\acute{e}t)/k} = 0$ gelten muss. Damit ergibt sich

$$\mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(\mathsf{R}^1 j_* T'), \mathbb{Z}) \cong \mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}),$$

was in diesem Fall zu zeigen war.
Sei nun T ein beliebiger Torus, der nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung L/K zerfällt. Mit [X] 2.13 existiert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

von algebraischen K-Tori, die über L zerfallen, so dass M multiplikative Reduktion hat und $\mathsf{H}^1(I, X(R)) = 0$ gilt. Damit liefert wiederum das Theorem 5.2.2 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \arrow[r, hook] & \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(R), \mathbb{Z}) \arrow[r] & \underline{\mathsf{Hom}}(\Phi(M), \mathbb{Z}) \arrow[r] & \cdots \\
X(T)^I \arrow[u, "\|"] \arrow[r, hook] & X(R)^I \arrow[u, "\|"] \arrow[r] & X(M) \arrow[u, "\|"] \arrow[r, two heads] & \mathsf{H}^1(I, X(T))
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen, wobei $\cdots$ für $\mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(R), \mathbb{Z})$ steht. Wegen der Exaktheit und der Kommutativität folgt sofort die Existenz einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathsf{H}^1(I, X(T)) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Ext}}^1(\Phi(R), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0\,.$$

Da wir oben $\mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(R), \mathbb{Z}) = \mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(\mathsf{R}^1 j_* T'), \mathbb{Z})$ gesehen hatten, folgt die Behauptung. □

6.3 Der zu p prime Anteil

Im Weiteren meint der Zusatz $[p^{-1}]$ stets die Lokalisierung nach dem multiplikativen System $\{1, p, p^2, ..\}$. Mit G_k wird die absolute Galoisgruppe $\mathsf{Gal}\,(k^{sep}/k)$ des Restklassenkörpers bezeichnet.
Wir wollen nun die Komponentengruppe als $\mathbb{Z}[p^{-1}][\mathsf{Gal}\,(k^{sep}/k)]$-Modul auffassen, indem wir Φ durch die Lokalisierung $\Phi[p^{-1}] \cong \Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]$ ersetzen. Dabei sei die Operation der Galoisgruppe die kanonische induzierte Operation. Durch die Lokalisierung wird beim Torsionsanteil der p-Torsionsanteil annulliert. Es verändern sich aber auch die Isomorphieklassen, da nunmehr Galoismodulhomomorphismen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ anstatt nur aus $\mathbb{Z}$ zugelassen sind. Wie

wir zeigen werden, lassen sich in dieser gröberen Sichtweise die Resultate aus [X] in die allgemeine Situation übertragen.
Wir untersuchen zunächst, wie sich die Lokalisierung mit den Ableitungen des Funktors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z})$ verträgt.

6.3.1 Lemma. *Sei Φ ein endlich erzeugter, stetiger G_k-Modul. Dann gilt als $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Moduln*

$$\begin{aligned} \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}[p^{-1}]}(\Phi[p^{-1}], \mathbb{Z}[p^{-1}]) &\cong \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})[p^{-1}] \\ \mathit{Ext}^1_{\mathbb{Z}[p^{-1}]}(\Phi[p^{-1}], \mathbb{Z}[p^{-1}]) &\cong \mathit{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong \mathit{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})[p^{-1}] \;. \end{aligned}$$

Beweis. In [Wei] (Prop 3.3.10 und Lem. 3.3.8) wird gezeigt, dass $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ und $\mathrm{Ext}^n_R(A, B)$ für einen noetherschen Ring R und einen endlich erzeugten R-Modul A mit Lokalisierung verträglich sind.
Damit folgt, dass in der Behauptung jeweils der erste und der dritte Term der beiden Zeilen als abelsche Gruppen isomorph sind. Diese Isomorphismen sind mit der Operation von G_k verträglich, da die Operation auf kanonische Weise von der Operation auf Φ (bei trivialer Operation auf $\mathbb{Z}$ resp. $\mathbb{Z}[p^{-1}]$) induziert wird. Der Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})[p^{-1}]$ ist klar. Für den Isomorphismus $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})[p^{-1}]$ benutze man, dass für $\mathbb{Z}$ die $\mathbb{Z}$-injektive Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

durch Tensorieren mit dem flachen $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ eine $\mathbb{Z}$-injektive Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[p^{-1}] \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \longrightarrow 0$$

induziert, denn Quotienten von divisiblen abelschen Gruppen sind wieder divisibel.
Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z})[p^{-1}] &= \Big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})/\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Q})\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \Big/ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]) \Big/ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]) \\ &= \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}[p^{-1}]) \;. \end{aligned}$$

□

Somit können wir Φ mit den Funktoren $\mathrm{R}^i\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, \mathbb{Z}[p^{-1}])$ (für $i = 0, 1$) als $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Modul bestimmen. Es sei nun T ein algebraischer K-Torus. Mit dem Satz 5.1.1 sieht man, dass die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*T^0 \longrightarrow j_*T \longrightarrow i_*\Phi(T) \longrightarrow 0$$

in der glatten wie in der étalen Topologie einen Isomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}(j_*T, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Phi(T), i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$$

und in der glatten Topologie auch noch einen Isomorphismus

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*T, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1(i_*\Phi(T), i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$$

induziert. Mit den Sätzen 5.1.3 und 5.1.4 folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Phi(T), i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) &= i_*\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}[p^{-1}]) \\ \underline{\mathrm{Ext}}^1(i_*\Phi(T), i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) &= i_*\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}[p^{-1}]) \ , \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite jeweils die abelschen Garben dargestellt von dem étalen Gruppenschema zu dem jeweiligen Galoismodul gemeint sind.
Für einen endlich erzeugten, stetigen G_k-Modul Φ hat man eine kanonische kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \hookrightarrow \Phi \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \ ,$$

welche der Zerlegung von Φ in einen Torsionsanteil (als Untermodul) und einen freien Anteil (als Quotient nach dem Torsionsanteil) entspricht. Wie oben gesehen, wird diese Sequenz nach Tensorieren mit $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ isomorph zur Sequenz

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}[p^{-1}]), \mathbb{Z}[p^{-1}]) \hookrightarrow \Phi[p^{-1}] \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}[p^{-1}]), \mathbb{Z}[p^{-1}])$$

und diese entspricht offenbar der Zerlegung von $\Phi[p^{-1}]$ in einen Torsionsanteil und einen freien Anteil in der Kategorie der $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Moduln.

6.3.2 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Sei L/K eine endliche, galoissche Zerfällungserweiterung für T und I die Inertiagruppe von Gal(L/K). Dann gilt für die Komponentengruppe $\Phi(T)$*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong X(T)^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]$$

in der Kategorie der stetigen $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Moduln. Diese Beschreibung ist verträglich mit Homomorphismen algebraischer Tori.

Beweis. Wir betrachten zu T die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow T^I \longrightarrow 0$$

Diese induziert eine lange exakte Sequenz der Néron-Modelle, aus der wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*\widetilde{T} \longrightarrow j_*T \longrightarrow j_*T^I \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

mit $\mathcal{K} := \ker(\mathrm{R}^1 j_* \widetilde{T} \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_* T)$ bilden. Wenn wir diese wie in 5.1.6 in zwei kurze exakte Sequenzen zerlegen und darauf den Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$ anwenden, so erhalten wir analog

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$$

$$\longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\widetilde{T}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) = 0$$

und

$$0 = \underline{\mathrm{Hom}}(K, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T^I, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{N}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$$

$$\longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]).$$

Mit dem Satz 4.2.7 folgt $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) = 0$. Damit folgt insgesamt

$$\underline{\mathrm{Hom}}(j_*T^I, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) = \underline{\mathrm{Hom}}(i_*\Phi(T), i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \ .$$

Betrachtet man dies in der étalen Topologie über k, so induziert dies einen Isomorphismus $X(T)^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}[p^{-1}])$ der darstellenden Galoismoduln.

Sei nun $\psi : T_1 \longrightarrow T_2$ ein Homomorphismus algebraischer Tori. Dieser entspricht einem Homomorphismus $D(\psi) : X(T_2) \longrightarrow X(T_1)$ der Charaktergruppen. Nun existiert ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{T_1} \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & T_1^I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{T_2} \arrow[r] & T_2 \arrow[r] & T_2^I \arrow[r] & 0 \ .
\end{tikzcd}$$

Daraus erhalten wir auf gleiche Weise wie oben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(j_*T_1^I, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \arrow[r, "\cong"] & \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T_1, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \\
\underline{\mathrm{Hom}}(j_*T_2^I, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u] & \underline{\mathrm{Hom}}(j_*T_2, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

und mit der Beschreibung der Komponentengruppe im Fall multiplikativer Reduktion sehen wir, dass die senkrechten Abbildungen, nach Einschränken auf den étalen Situs über k und Übergang zu den darstellenden Galoismoduln, genau dem Morphismus $D(\psi)^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] : \ X(T_2)^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \longrightarrow X(T_1)^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]$ entspricht. $\square$

Wir zeigen nun, dass auch die Beschreibung des Torsionsanteils in der Kategorie der stetigen $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Moduln gültig bleibt:

6.3.3 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Sei L/K eine endliche, galoissche Zerfällungserweiterung für T und I die Inertiagruppe von Gal(L/K). Dann gilt für die Komponentengruppe $\Phi(T)$*

$$\mathit{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}[p^{-1}]) \cong \mathit{H}^1(I, X(T)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]$$

in der Kategorie der stetigen $\mathbb{Z}[p^{-1}][G_k]$-Moduln.

Beweis. Wir betten den Torus in die kanonische exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow R := \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

ein, wobei L/K eine endliche, galoissche Zerfällungerweiterung für T sei. Aus dieser Sequenz erhalten wir durch Übergang zu den Néron-Modellen eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_* T' \longrightarrow 0\,.$$

Wenn wir diese in zwei kurze exakte Sequenzen spalten und $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}])$ darauf anwenden, erhalten wir (vgl. Beweis zu Thm. 5.2.2) durch Einsetzen eine exakte Sequenz

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{R}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{T}', i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) \twoheadrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{T}, i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]),$$

weil mit Kor. 4.2.7 $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathrm{R}^1 j_* T', i_*\mathbb{Z}[p^{-1}]) = 0$ für $i = 1, 2$ gilt.
Wenn wir diese Sequenz auf den étalen Situs über k einschränken und von den Néron-Modellen zu deren Komponentengruppen übergehen, so ergibt sich mit dem Satz 6.3.2 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}[p^{-1}]) \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(R), \mathbb{Z}[p^{-1}]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T'), \mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] & E \\
X(T)^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \arrow[u, "\|"] \arrow[r, hook] & X(R)^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \arrow[u, "\|"] \arrow[r] & X(T')^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \arrow[u, "\|"] \arrow[r, two heads] & H
\end{tikzcd}$$

von Gal(k^{sep}/k)-Moduln mit exakten Zeilen, wobei E für $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}[p^{-1}])$ und H für $\mathrm{H}^1(I, X(T)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]$ steht. Aus diesem Diagramm folgt unmittelbar die Behauptung. □

Wir zeigen nun die entsprechende Verallgemeinerung von [X] 3.1.

6.3.4 Theorem. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Es sei L/K eine endliche, galoissche Erweiterung, so dass T über L zerfällt. Es sei ferner I die Inertiagruppe von $G_K := \mathit{Gal}(L/K)$ und*

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots$$

eine Auflösung von $X(T)$ mit torsionsfreien, I-azyklischen G_K-Moduln. Dann gilt für die Komponentengruppe des Néron-Modells von T

$$\Phi(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \cong \mathit{coker}\left(\mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}((X')^I, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathit{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_0^I, \mathbb{Z})\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]$$

wobei $X' := \mathit{ker}\,(M_1 \longrightarrow M_2)$ sei.

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

von algebraischen K-Tori, welche mit Cartier-Dualität aus der Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow M_0 \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

entsteht. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass M_0 ein induzierter $\mathrm{Gal}\,(L/K)$-Modul ist, also der Torus R eine Weil-Restriktion eines Produktes von multiplikativen Gruppen ist. Damit ist die Komponentengruppe des Néron-Modells von R torsionsfrei und wir haben $\mathrm{R}^1 j_* R = 0$. Wir erhalten also eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow \mathrm{R}^1 j_* T' \longrightarrow 0\,.$$

Diese induziert mit dem Theorem 5.3.4 eine Sequenz

$$0 \longrightarrow \Phi(T')^{\vee\vee} \longrightarrow \Phi(R) \longrightarrow \Phi(T) \longrightarrow \Phi(\mathrm{R}^1 j_* T') \longrightarrow 0$$

von Komponentengruppen, die bei $\Phi(T)$ exakt ist. Nach Tensorieren mit dem flachen $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[p^{-1}]$ ist $\mathrm{R}^1 j_* T' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] = 0$ und wir erhalten mit Satz 5.3.5 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Phi(T')^{\vee\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\|"] & \Phi(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, "\|"] & \Phi(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T')^I, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(R)^I, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}].
\end{tikzcd}$$

Da die Störterme als p-Torsionsgruppen nach der Lokalisierung trivial werden, werden die vertikalen Abbildungen aus dem Satz 5.3.5 hier zu Isomorphismen. Da die obere Sequenz a priori bei $\Phi(R) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]$ nicht exakt sein braucht, betrachten wir den Isomorphismus

$$\begin{aligned}\Phi(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] &\cong \Phi(R)/\ker(\beta) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] \\ &\cong \Big(\Phi(R)/\mathrm{im}(\alpha) \Big/ \ker(\beta)/\mathrm{im}(\alpha)\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] .\end{aligned}$$

Aus Ranggründen kann $\ker(\beta)/\mathrm{im}(\alpha)$ nur eine Torsionsgruppe sein. Nun sind aber die Torsionsanteile von $\Phi(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}]$ und von $\Phi(R)/\mathrm{im}(\alpha)$ nach Konstruktion von α mit dem Satz 6.3.3 isomorph. Da die Torsionsanteile endlich erzeugt, also endlich sind, muss demnach $\Big(\ker(\beta)/\mathrm{im}(\alpha)\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[p^{-1}] = 0$ sein und damit folgt die Behauptung. □

6.4 Die Komponentengruppe für Norm-Tori

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Komponentengruppe der speziellen Faser des Néron-Modells eines Norm-Torus mittels exakter Sequenzen der Komponentengruppen.

6.4.1 Satz. *Sei T_N ein Norm-Torus bezüglich einer endlichen, separablen Erweiterung L/K von lokalen Körpern, welche nach Kompositum mit K^{nr} eine zyklische galoissche Erweiterung induziert. Sei $e_{L/K} := \nu_L(\pi_K)$ der Verzweigungsindex von L/K, $I := \mathrm{Gal}(L/K)$ die Inertiagruppe und $f := [K_{nr} : K]$ der Separabilitätsgrad der Erweiterung der Restklassenkörper. Außerdem sei p^s der Inseparabilitätsgrad der Erweiterung der Restklassenkörper, so dass $[L^{nr} : K^{nr}] = p^s e_{L/K}$ gilt.*
Dann gelten $\Phi(T_N) = \Big(\mathbb{Z}/e_{L/K}\mathbb{Z}\Big)^f$ und $H^1(I, X(T_N)) = \Big(\mathbb{Z}/p^s e_{L/K}\mathbb{Z}\Big)^f$. Als abelsche Gruppen haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Phi(T_N) \longrightarrow H^1(I, X(T_N)) \longrightarrow \Phi(R^1 j_* T_N) \longrightarrow 0 .$$

Beweis. Wie im Satz 5.3.6 gesehen, wird T_N nach Basiswechsel mit K^{nr} isomorph zu dem f-fachen Produkt des Norm-Torus T_N^{nr} zu L^{nr}/K^{nr}. Da Komponentengruppen und Kohomologie mit Faserprodukten resp. Summen verträglich sind, reicht es den Fall $K = K^{nr}$ zu betrachten. Da die Erweiterung L^{nr}/K^{nr} zyklisch ist, ist mit [L-L] Lem 4.1 der Norm-Torus T_N isomorph zum Torus S mit der Charaktergruppe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T_N), \mathbb{Z})$ und damit können wir ihn in die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,K^{nr}} \longrightarrow \mathfrak{R}_{L^{nr}/K^{nr}}(\mathbb{G}_{m,L^{nr}}) \longrightarrow T_N \longrightarrow 0$$

einbetten. Diese liefert eine exakte Sequenz von Néron-Modellen, welche wiederum mit dem Satz 5.3.1 eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \phi(\mathbb{G}_{m,K^{nr}}) \longrightarrow \phi(\mathfrak{R}_{L^{nr}/K^{nr}}(\mathbb{G}_{m,L^{nr}})) \longrightarrow \phi(T_N) \longrightarrow 0$$

der zugehörigen Komponentengruppen induziert, welche isomorph zu

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \Phi(T_N) \longrightarrow 0$$

ist. Die Abbildung $\mathbb{G}_{m,K^{nr}} \longrightarrow \mathfrak{R}_{L^{nr}/K^{nr}}(\mathbb{G}_{m,L^{nr}})$ induziert auf den $K^{nr}-$wertigen Punkten die Inklusion $K^{nr*} \hookrightarrow L^{nr*}$. Wie aber gesehen, werden die Komponentengruppen von $\Phi(\mathbb{G}_{m,K^{nr}})$ und $\Phi(\mathfrak{R}_{L^{nr}/K^{nr}}(\mathbb{G}_{m,L^{nr}}))$ von den Bildern der uniformisierenden Elemente erzeugt, so dass $\Phi(T_N) = \mathbb{Z}/e_{L/K}\mathbb{Z}$ gelten muss.
Die betrachtete exakte Sequenz algebraischer Tori entspricht der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow X(T_N) \longrightarrow \mathbb{Z}[I] \xrightarrow{\mathsf{Aug}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

von Charaktergruppen, das heißt T_N hat als Charaktergruppe den Kern der Augmentationsabbildung. Die zugehörige lange exakte Sequenz der I-Kohomologie ergibt die exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[I]^I \xrightarrow{\mathsf{Aug}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{H}^1(I, X(T_N)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(I, \mathbb{Z}[I]) = 0.$$

Nun sind die I-invarianten Elemente von $\mathbb{Z}[I]$ von der Form $\sum_{\sigma\in I} k e_\sigma$ mit $k \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{H}^1(I, X(T_N)) = \mathbb{Z}/p^s e_{L/K}\mathbb{Z}$ folgt.
Nun gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & j_*T_N \arrow[d, hook] & & \\
0 \arrow[r] & j_*\mathbb{G}_{m,K^{nr}} \arrow[r] \arrow[d, "||"'] & j_*\mathfrak{R}_{L^{nr}/K^{nr}}(\mathbb{G}_{m,L^{nr}}) \arrow[r] \arrow[d] & j_*T_N \arrow[r] & 0 \\
 & \mathbb{G}_{m,K^{nr}} \arrow[r, "(\cdot)^{p^s e_{L/K}}"] & \mathbb{G}_{m,K^{nr}} \arrow[d] & & \\
 & & \mathrm{R}^1 j_*T_N\ . & &
\end{tikzcd}$$

Dabei entspricht die lange Spalte der langen exakten Sequenz der Néron-Modelle zu der kanonischen Sequenz des Norm-Torus. Die obere Zeile ist die Sequenz der Néron-Modelle zu der hierzu dualen Sequenz. Da die Norm-Abbildung auf K^{nr*} der Potenzierung mit $p^s e_{L/K}$ entspricht, ist das Diagramm kommutativ. Nach Übergang zu den Komponentengruppen erhalten wir damit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot e_{L/K}"] \arrow[d, "||"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot p^s"'] & \Phi(T_N) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^s e_{L/K}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p^s e_{L/K}\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
 & & \Phi(\mathsf{R}^1 j_* T_N) & &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Die gestrichelte Abbildung existiert wegen der Kommutativität und dem Isomorphismus in der linken Spalte. Mit dem Schlangenlemma folgt nun die Behauptung, wenn man beachtet, dass die Abbildung

$$\Phi(T_N) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^s e_{L/K}\mathbb{Z} \cong \mathsf{H}^1(I, X(T_N))$$

injektiv sein muss. □

Im Allgemeinen besteht aber keine Beziehung zwischen $\mathsf{H}^1(I, X(T))$ und $\Phi(\mathsf{R}^1 j_* T)$. Dazu betrachten wir den Körper $K := \mathbb{F}_3(X)((\pi))^{nr}$ und die Erweiterung $L = K[Y]/(Y^3 + 2\pi Y + X)$. Diese Erweiterung ist offenbar separabel und induziert eine inseparable Erweiterung der Restklassenkörper. Wenn $\overline{y}_0 \in L$ eine Lösung der Gleichung ist, dann sind auch $\overline{y}_1 := \overline{y}_0 + \sqrt{\pi}$ und $\overline{y}_2 := \overline{y}_0 + 2\sqrt{\pi}$ Lösungen, da $\sqrt{\pi}\pi + 2\pi\sqrt{\pi} = 3\sqrt{\pi}\pi = 0$ gilt. Somit ist die Erweiterung nicht galoissch und die normale Hülle L^{nor} entsteht durch Adjunktion einer Wurzel aus dem unifomisierenden Element. Insbesondere ist L^{nor}/K rein verzweigt. Da ein Vertauschen der beiden Wurzeln von π auch ein Vertauschen der Nullstellen von $Y^3 + 2\pi Y - X$ induziert, muss $\mathrm{Gal}\,(L^{nor}/K) = \mathbb{S}_3$ gelten. Mit [L-L] Prop. 4.17. c) folgt, dass $\mathsf{H}^1(\mathbb{S}_3, X(T_N)) = 0$ für den Norm-Torus T_N der Erweiterung L/K gilt. Andererseits folgt mit dem Satz 5.3.6, dass $\Phi(\mathsf{R}^1 j_* T_N) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gilt. Somit kann die Komponentengruppe von $\mathsf{R}^1 j_* T_N$ nichttrivial sein, selbst wenn $\mathsf{H}^1(I, X(T_N)) = 0$ gilt.

6.5 Ein Beispiel für den freien Anteil

Wir konstruieren nun aus unseren Berechnung für Norm-Tori bezüglich galoisscher, rein verzweigter Erweiterungen vom Grad p eine Familie von Beispielen dafür, dass im Allgemeinen der freie Anteil nicht mehr isomorph zu $X(T)^I$ ist.
Es sei also $p = \mathrm{char}(k)$ eine Primzahl und wir betrachten einen $p+1$-dimensionalen Torus T, welcher nach einer Erweiterung L/K mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(L/K) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ zerfällt. Genauer bezeichne σ einen Erzeuger des ersten Faktors und τ einen Erzeuger des zweiten Faktors. Ohne Einschränkung sei von der Erweiterung L/K vorausgesetzt, dass der zweite Faktor $< \tau >$ der Inertiagruppe von L/K entspricht.
Wir lassen nun $\mathrm{Gal}\,(L/K)$ auf $X(T) = \mathbb{Z}^{p+1}$ mit den Matrizen

$$M_\sigma := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & E_p & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M_\tau := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Z & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

operieren, wobei E_p die $p \times p$-Einheitsmatrix ist und Z die $p \times p$-Matrix zum zyklischen Vertauschen der Basisvektoren $e_1, .., e_p$ ist. Man rechnet nach, dass M_τ^p und M_σ^2 jeweils die Einheitsmatrix ist und dass $M_\tau M_\sigma = M_\sigma M_\tau$ gilt. Also ist so eine Operation der Galoisgruppe auf $X(T)$ definiert. Man betrachte nun die Sequenz

$$0 \longrightarrow (\tau - Id)X(T) \longrightarrow X(T) \xrightarrow{p} X(T)_I \longrightarrow 0\,. \tag{6.5}$$

Das Bild von $\tau - Id$ ist ein Untermodul, weil τ und σ kommutieren. Dieser Untermodul hat den Rang $p-1$, was man aus der expliziten Gestalt der zugehörigen Matrix leicht abliest. Wir definieren die lineare Abbildung

$$\psi : X(T) \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \quad (a_1, .., a_p, a_{p+1})^t \longmapsto (\sum_{i=1}^{p} a_i, a_{p+1})^t\,.$$

Da τ nur die ersten p-Komponenten permutiert, gilt $\psi \circ \tau = \psi$, also $(\tau - Id)(X(T)) \subset \ker(\psi)$ gilt. Umgekehrt sei ein $\vec{a} := (a_1, .., a_{p+1})^t \in \ker(\psi)$ gegeben. Somit muss $a_{p+1} = 0$ und $\sum_{i=1}^p a_i = 0$ gelten. Für den Vektor

$$\vec{b} = (b_1, .., b_{p+1})^t := (-\sum_{i=1}^{1} a_1,\ -\sum_{i=1}^{2} a_i\,, .., \ -\sum_{i=1}^{p-1} a_i,\ -\sum_{i=1}^{p} a_i,\ 0)^t$$

gilt $\tau(\vec{b}) - \vec{b} = (b_p - b_1, b_1 - b_2, .., b_{p-1} - b_p, 0) = (a_1, .., a_{p-1}, a_p, 0)^t = \vec{a}$. Damit entspricht ψ der Projektion $X(T) \longrightarrow X(T)_I$. Die Operation von σ auf $X(T)$

induziert die Operation auf $X(T)_I$, so dass gilt

$$\begin{tikzcd}
(a_1, a_2, .., a_p, a_{p+1})^t \arrow[r, mapsto, "\sigma_{X(T)}"] \arrow[d, mapsto, "\psi"'] & (a_1, a_2, .., a_p, \sum_{i=1}^{p} a_i - a_{p+1})^t \arrow[d, mapsto, "\psi"'] \\
(\sum_{i=1}^{p} a_i, a_{p+1})^t \arrow[r, mapsto, "\sigma_{X(T)_I}"] & (\sum_{i=1}^{p} a_i, \sum_{i=1}^{p} a_i - a_{p+1})^t
\end{tikzcd}$$

Die τ-Invarianten von $X(T)$ sind ebenfalls isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ und entsprechen dem Spann $< (1, .., 1, 0)^t, (0, .., 0, 1)^t >$. Wir nehmen diese Vektoren als Basis. Die Operation von σ auf $X(T)$ induziert auf $X(T)^I$ die Operation

$$\begin{aligned}
(a, b)^t &= a(1, .., 1, 0)^t + b(0, .., 0, 1)^t \\
&\longmapsto a(1, .., 1, 0)^t + (pa - b)(0, .., 0, 1)^t = (a, pa - b)^t \ .
\end{aligned}$$

Im Einklang damit ist die lange exakte I-Kohomologiesequenz zu obiger Sequenz (6.5) gleich

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X(T)^I \xrightarrow{\psi^I} X(T)_I \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

und ψ^I ist in den eben gewählten Koordinaten die Abbildung

$$(a, b)^t \longmapsto \psi((a, .., a, b)^t) = (pa, b).$$

Nun entsprechen die Operationen von σ den Matrizen

$$M_{\sigma_{X(T)^I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix} \quad M_{\sigma(X(T)_I)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und diese Matrizen sind über $\mathbb{GL}_2(\mathbb{Z})$ nicht konjugiert, da eine konjugierende Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & p(a+c) \end{pmatrix}$$

haben müsste, also eine in $\mathbb{Z}$ nicht invertierbare Determinante hat. Damit sind $X(T)^I$ und $X(T)_I$ als $\mathbb{Z}[< \sigma >]$-Moduln nicht isomorph.
Wir betrachten nun die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_I \longrightarrow T \longrightarrow T' \longrightarrow 0$$

von algebraischen Tori, die mit Cartier-Dualität der Sequenz (6.5) entspricht. Mit dem Thm 5.3.1 liefert diese eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T)_I, \mathbb{Z}) \longrightarrow \Phi(T) \longrightarrow \Phi(T') \longrightarrow 0.$$

Der Torus T' ist nach Basiswechsel mit K_{nr} isomorph zum Norm-Torus der Erweiterung L/K_{nr}, was man an den Charaktergruppen ablesen kann: Der Norm-Torus einer zyklischen Erweiterung vom Grad p hat die Charaktergruppe $X(T_N) = \mathbb{Z}^p/\mathbb{Z}(\delta_1 + .. + \delta_p)$, wobei $\delta_1, .., \delta_p$ eine Basis von $\mathbb{Z}^p$ sei. Die Galoisgruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} =< \tau >$ operiert durch $\tau(\delta_i) = \delta_{i+1}$ für $1 \leq i \leq p-1$ und $\tau(\delta_p) = \delta_1$ auf der Basis von $\mathbb{Z}^p$ und diese Operation induziert die Operation auf $X(T_N)$.
Nun haben wir für $(\tau - Id)(X(T)) \subset X(T) = \mathbb{Z}^{p+1}$ eine Basis $(\tilde{e}_i)_{i=1,..,p-1}$ mit $\tilde{e}_i := e_i - e_p$. Die Zuordung

$$\begin{aligned}
\delta_1 &\longmapsto \tilde{e}_1 \\
\delta_2 = \tau(\delta_1) &\longmapsto \tau(\tilde{e}_1) = \tau(e_1 - e_p) = e_2 - e_1 = \tilde{e}_2 - \tilde{e}_1 \\
\delta_3 = \tau(\delta_2) &\longmapsto \tau(\tilde{e}_2 - \tilde{e}_1) = \tilde{e}_3 - \tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + \tilde{e}_1 = \tilde{e}_3 - \tilde{e}_2 \\
&\vdots \\
\delta_{p-1} = \tau(\delta_{p-2}) &\longmapsto \tilde{e}_{p-1} - \tilde{e}_{p-2} \\
\delta_p = \tau(\delta_{p-1}) &\longmapsto \tau(e_{p-1} - e_p - e_{p-2} + e_p) = e_p - e_{p-1} = -\tilde{e}_{p-1}
\end{aligned}$$

induziert eine lineare Abbildung $\mathbb{Z}^p \longrightarrow (\tau - Id)(X(T))$, die surjektiv ist, was man an der darstellenden Matrix ablesen kann. Weiterhin wird ein Vektor $\sum_{i=1}^p a_i\delta_i$ genau dann auf Null abgebildet, wenn alle a_i gleich sind. Nach Konstruktion ist diese Abbildung verträglich mit der Operation von Gal(L/K_{nr}), so dass wir insgesamt einen Galoismodulisomorphismus

$$X(T_N) \cong (\tau - Id)(X(T)) = X(T')$$

erhalten.
Wie wir aber bei der expliziten Berechnung des Néron-Modells von Norm-Tori bezüglich galoisscher, rein verzweigter Erweiterungen vom Grad p gesehen haben, hat T' eine triviale Komponentengruppe, falls L/K_{nr} eine rein inseparable Erweiterung der Restklassenkörper vom Grad p induziert. In diesem Fall muss Hom$_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \cong X(T)_I$ sein und ist damit nicht isomorph zu $X(T^I)$.

6.6 Der p-Torsionsanteil und offene Fragen

Mit den bisherigen Ergebnissen ist leider noch keine umfassende Beschreibung der Komponentengruppe des Néron-Modells in der allgemeinen Situation möglich, da wir noch zu wenig über den p-Torsionsanteil wissen. Wir können allerdings die Ordnung der Elemente des p-Anteils abschätzen.

Wenn sich die Komponentengruppe $\Phi(T)$ eines algebraischen Torus T mit den Resultaten von Xarles beschreiben lässt, dann gilt $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi, \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^1(I, X(T))$ für die Inertiagruppe I einer Zerfällungserweiterung von T. Damit wird jedes Element des Torsionsanteils von $\Phi(T)$ von der Multiplikation mit der Ordnung von I annulliert ([S] VIII §2 Cor. 2). Der p-Torsionsanteil wird insbesondere von der höchsten p-Potenz, welche die Ordnung von I teilt, annulliert. Diese Abschätzung können wir auch unabhängig von der Gültigkeit der Beschreibung aus [X] zeigen:

6.6.1 Satz. *Sei T ein algebraischer K-Torus und L/K^{nr} eine endliche, galoissche Zerfällungserweiterung von $T_{K^{nr}}$. Sei n die Ordnung von $I :=$ Gal(L/K^{nr}). Dann wird der Torsionsanteil von $\Phi(T)$ von n annulliert. Insbesondere wird der der p-Torsionsanteil von der Ordnung des p-Anteils von I annulliert.*

Beweis. Es reicht den Torus $T_{K^{nr}}$ zu betrachten. Es sei also $K = K^{nr}$. Wir definieren $R := \mathfrak{R}_{L/K}(T_L)$ und betrachten die kanonische Immersion $T \hookrightarrow R$. Wir setzen $G :=$ Gal(K^{sep}/K) und $G_L :=$ Gal(K^{sep}/L) und bezeichnen mit $\sigma_1, .., \sigma_n$ ein Repräsentantensystem für die G_L-Nebenklassen von G.
Die Abbildung $T \hookrightarrow R$ hat auf den Charaktergruppen die Form

$$\mathrm{Ind}_G^{G_L} X(T_L) \longrightarrow X(T) \quad (x_1, .., x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(x) \ .$$

Umgekehrt können wir eine kanonische Abbildung $R \longrightarrow T$ definieren, die auf den Charaktergruppen die Form (Satz 0.4.4)

$$X(T) \longrightarrow \mathrm{Ind}_G^{G_L} X(T_L) \quad x \longmapsto (\sigma_1^{-1}(x), .., \sigma_n^{-1}(x))$$

hat. Die Verknüpfung $T \hookrightarrow R \longrightarrow T$ induziert also auf den Charaktergruppen die Multiplikation mit n, so dass die zugehörige Abbildung der Tori ebenfalls die n-Multiplikation (bei additiver Schreibweise des Gruppengesetzes auf T) ist.
Mit der Néronschen Abbildungseigenschaft erhalten wir Morphismen der Néron-Modelle und diese induzieren Morphismen

$$\Phi(T) \longrightarrow \Phi(R) \longrightarrow \Phi(T)$$

der Komponentengruppen. Nun entnimmt man dem Beweis zum Theorem 1.2.1, dass $\Phi(R) = \mathrm{Ind}_G^{G_L} \Phi(T_L)$ gilt. Da T_L zerfällt, kann $\Phi(T_L)$ keine Torsion haben. Also hat auch $\Phi(R)$ keine Torsion.
Damit liegt der Torsionsanteil von $\Phi(T)$ a fortiori im Kern der Abbildung

$$\Phi(T) \longrightarrow \Phi(R) \longrightarrow \Phi(T)$$

und diese ist die Multiplikation mit n.
Die Aussage über den p-Torsionsanteil ist elementar. $\square$

Diese Resultat ist ein Analogon von [ELL] Thm. 1, welches nach unserem Wissen das einzige allgemeine Resultat zum p-Torsionsanteil von Komponentengruppen von Néron-Modellen von abelschen Varietäten ist.

Abschließend möchten noch zu einigen naheliegenden offenen Fragen die von uns vermuteten Lösungen als Hypothesen formulieren und Querbeziehungen und Konsequenzen dieser Vermutungen aufzeigen.
Das erste wichtige ungelöste Problem ist die Frage, ob der Torsionsanteil der Komponentengruppe, so wie es in den Beispielen mit den Norm-Tori der Fall ist, immer höchstens kleiner wird. Einen Ansatz, dies zu prüfen, liefert folgende Vermutung:

6.6.2 Vermutung (Verallgemeinerung von [X] 2.7). *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus, für dessen Charaktergruppe $\mathrm{H}^1(I, X(T)) = 0$ gelte. Dann ist $\Phi(T)$ torsionsfrei.*

Diese Vermutung würde eine Beschreibung des Torsionsanteiles der Komponentengruppe wie in [X] 2.14 ermöglichen:

6.6.3 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Sei ferner angenommen, dass die Vermutung (6.6.2) richtig ist. Dann lässt sich der Torsionsanteil der Komponentengruppe des Néron-Modells von T als Quotient*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^1(I, X(T))/E$$

schreiben, wobei E eine geeignete p-Gruppe ist. Ferner ist E trivial, falls T nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung zerfällt.

Beweis. Mit [X] 2.13 können wir den Torus T in eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

einbetten, wobei M ein Torus mit multiplikativer Reduktion ist und R ein Torus ist, für den $\mathrm{H}^1(I, X(R)) = 0$ gilt. Wegen $\mathrm{R}^1 j_* M = 0$ ergibt sich mit Thm. 5.2.2 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & E(T) & E(R) & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi(R), \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, two heads] & \underline{\mathrm{Hom}}(\Phi(M), \mathbb{Z}) \arrow[r, two heads] \arrow[u, two heads] & \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) \\
0 \arrow[r] & X(T)^I \arrow[r] \arrow[u, hook] & X(R)^I \arrow[r] \arrow[u, hook] & X(T_1)^I \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook, "\cong"] & \mathrm{H}^1(I, X(M))
\end{tikzcd}$$

von G_k-Moduln. Dabei folgt die Surjektivität am Ende der mittleren Zeile aus der Vermutung. Die Surjektivität am Ende der untere Zeile folgt aus $\mathsf{H}^1(I, X(R)) = 0$. Wegen der Kommutativität lässt sich das Diagramm offenbar kommutativ mit einer Abbildung $E(R) \longrightarrow 0$ in der ersten Zeile ergänzen.
Man wende nun das Schlangenlemma auf die beiden mittleren Spalten an. Damit erhält man eine exakte Sequenz

$$E(R) \longrightarrow \mathsf{H}^1(I, X(T)) \longrightarrow \underline{\mathsf{Ext}}^1(\Phi(T), i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 .$$

Da $E(R)$ als Störterm zu R eine p-Gruppe ist, folgt die Aussage. Der Zusatz ist klar, da in diesem Fall auch R nach einer nicht residuell verzweigten Erweiterung zerfällt, wodurch $E(R) = 0$ folgt. □

Ein Gegenbeispiel zu der Vermutung (6.6.2) liefert natürlich auch ein Gegenbeispiel zu der Folgerung aus diesem Satz. Eventuell könnte man eine Antwort auf diese Vermutung durch weiteres Studium der expliziten Konstruktion von Néron-Modellen finden.

Aus der Vermutung oben lässt sich leicht die folgende schwächere Vermutung ableiten:

6.6.4 Vermutung. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus, welcher nach einer endlichen, galoisschen, nicht residuell verzweigten Erweiterung L/K zerfällt. Dann ist $\mathsf{R}^1 j_* T$ zusammenhängend.*

Die Gültigkeit dieser Vermutung würde implizieren, dass Abweichungen von der Beschreibung von Xarles nur auftreten können, wenn der betrachtete Torus erst nach einer residuell verzweigten Körpererweiterung zerfällt.

6.6.5 Satz. *Sei angenommen, dass die Vermutung (6.6.4) gilt. Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus, welcher nach einer endlichen, galoisschen, nicht residuell verzweigten Erweiterung L/K zerfällt. Dann gelten für T die Resultate von Xarles.*

Beweis. In dem Satz 6.2.1 wurde bereits $\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) = X(T)^I$ gezeigt. Mit der Vermutung folgt aus dem Satz (6.2.2), dass $\mathsf{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\Phi(T), \mathbb{Z}) = \mathsf{H}^1(I, X(T))$ gilt, also die Beschreibung des Torsionsanteils gültig bleibt. Für die Übertragung von [X] Thm. 3.1 betrachten wir zu T die Sequenz

$$0 \longrightarrow T' \longrightarrow \mathcal{R} := \mathfrak{R}_{L/K}(T_L) \longrightarrow T \longrightarrow 0 ,$$

die aus der Auflösung $X(T) \longrightarrow \mathsf{Ind}_{\mathsf{Gal}\,L/K}\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$ entsteht. Es entsteht mit dem Theorem (5.3.4) und dem Satz (5.3.5) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Phi(T')^{\vee\vee} \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "\parallel"'] & \Phi(\mathcal{R}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\parallel"'] & \Phi(T) \arrow[r] & \Phi(\mathsf{R}^1 j_* T') = 0 \\
\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T')^I, \mathbb{Z}) \arrow[r, hook] & \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(\mathcal{R})^I, \mathbb{Z}). & &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind wegen des Verschwindens der Störterme die vertikalen Abbildungen Isomorphismen. A priori ist die obere Zeile exakt bis auf die Stelle bei $\Phi(\mathcal{R})$, d.h. wir haben nur einen Isomorphismus

$$\Phi(T) \cong \Phi(\mathcal{R})/\mathsf{ker}(\beta) \cong [\Phi(\mathcal{R})/\mathsf{im}(\alpha)]/[\mathsf{ker}(\beta)/\mathsf{im}(\alpha)]\ .$$

Nun stimmen aber, wie oben gesehen, der freie und der endliche Anteil von $\Phi(T)$ mit dem freien und dem endlichen Anteil von $\Phi(\mathcal{R})/\mathsf{im}(\alpha)$ überein. AusRanggründen muss also $\mathsf{ker}(\beta)/\mathsf{im}(\alpha)$ eine Torsionsgruppe sein. Da alle betrachteten Gruppen endlich erzeugt sind, müssen die Torsionsanteile endlich sein und wegen der Gleichheit der Torsionsanteile als abelsche Gruppen muss der Quotient $\mathsf{ker}(\beta)/\mathsf{im}(\alpha)$ schon trivial gewesen sein. Damit haben wir einen Isomorphismus

$$\Phi(T) \cong \mathsf{coker}\ (\mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T')^I, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(\mathcal{R})^I, \mathbb{Z}))$$

wie in der Darstellung aus [X] Thm. 3.1 □

Anhang

A Gewundene unipotente Gruppen

Es sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann nennen wir eine zusammenhängende, unipotente K-Gruppe G eine gewundene unipotente Gruppe, wenn jeder Homomorphismus $\mathbb{G}_{a,K} \longrightarrow G$ trivial ist.
In dem Fall, dass G zusätzlich kommutativ und glatt ist und die Multiplikation mit $p = \mathrm{char}(K)$ die Nullabbildung ist, kann man G als eine abgeschlossene Untergruppe der $\mathbb{G}_{a,K}^{n+1}$ mit $n = \dim(G)$ auffassen (s. [BLR] Prop. 10.2.10 und [T] III §3). Genauer hat G die Form $\operatorname{Spec} K[T_0,..,T_n]/(F(T_0,...,T_n))$ mit $F(T_0,...,T_n) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_i} c_{i,j}T^{p^j}$ und der Hauptteil $\sum_{i=0}^{n} c_{i,m_i}T^{p^{m_i}}$ hat keine nichttriviale K-rationale Nullstelle. Hierbei ist die speziele Gestalt von F notwendig, damit F mit dem Gruppengesetz der $\mathbb{G}_{a,K}^{n+1}$ verträglich ist.

Wir benötigen die Umkehrung dieser Aussage:

A.1 Satz. *(vgl. [T] III 3.3.6) Sei $G := K[T_0,..,T_n]/(F(T_0,..,T_n))$ eine Untergruppe der $\mathbb{G}_{a,k}^{n+1}$, wobei $F = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_i} c_{i,j}T^{p^j}$ ein p-Polynom ist.*
G ist glatt, falls $c_{i_0,0} \neq 0$ für ein $i_0 \in \{0,..,n\}$ gilt. G ist zusammenhängend, falls für ein $i_0 \in \{1,..,n\}$ genau eines der $c_{i_0,j} \neq 0$ ist. In diesem Fall ist G gewunden, falls der Hauptteil von F keine nichttriviale rationale Nullstelle in $\mathbb{A}_k^{n+1}$ hat.

Beweis. Nach Definition ist klar, dass G als Untergruppe einer unipotenten Gruppe unipotent ist. Wir zeigen die Glattheit mit dem Jacobi-Kriterium (s. [BLR] Prop. 2.2.7): G wird als abgeschlossenes Unterschema des glatten Schemas $\mathbb{G}_{a,K}^{n+1}$ überall von der Idealgarbe (F) erzeugt und es gilt $dF = \sum_{i=0}^{n} c_{i,0}\, dT_i$. Sei $x \in G$ ein Punkt und $z \in \mathbb{G}_{a,K}^{n+1}$ sein Bild. Der Halm von $\Omega^1_{\mathbb{G}_{a,K}^{n+1}/K}$ in z hat die Basis $(dT_i)_{i=0,..,n}$. Wenn es ein $i_0 \in \{1,..,n\}$ mit $c_{i_0,0} \neq 0$ gibt, dann ist auch $\left((dT_i)_{i=0,..,\widehat{i_0},..,n}, dF\right)$ eine Basis.
Sei nun für ein $i_0 \in \{1,..,n\}$ genau ein $c_{i_0,j} \neq 0$ und $f \in K[T_0,..,T_n]/(F)$ ein idempotentes Element. Wir zeigen, dass G zusammenhängt, also f schon 0 oder

1 sein muss. Wir fassen f als Restklasse eines Polynoms $\tilde{f} \in K[T_0,..,T_n]$ auf. Wegen der Idempotenz gilt $\tilde{f}^{p^j} \equiv \tilde{f} \bmod F$. Nun können wir f^{p^j} als Element des Unterringes $K[T_0,..,T_{i_0}^{p^j},..,T_n]/(F) \subset K[T_0,..,T_n]/(F)$ auffassen. Dieser Unterring ist aber wegen der Voraussetzung an F isomorph zu $K[T_0,..,\widehat{T_{i_0}},..,T_n]$, enthält also nur 0 und 1 als Idempotente. Also muss f auch schon 0 oder 1 gewesen sein.
Angenommen, es gibt eine nichtkonstante Abbildung $\mathbb{G}_{a,k} \longrightarrow G$. Dies entspricht einem Algebrenhomomorphismus

$$k[T_0,..,T_n]/(F) \longrightarrow k[T] \quad T_i \longmapsto \phi_i(T) := a_{i,s_i}T^{s_i} + ... + a_{i,0} \in k[T]$$

wobei mindestens eines der Polynome ϕ_i nichttrivial sein muss. Aufgrund der Wohldefiniertheit muss

$$F(\phi_0(T),..,\phi_n(T)) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_i} c_{i,j}\phi_i(T)^{p^j} = 0 \in k[T]$$

gelten. Sei $N := \max_{i=0,..,n} s_i p^{m_i}$. Dies ist offenbar die höchste Potenz von T, die in $F(\phi_0(T),..,\phi_n(T))$ auftaucht. Setze $b_i = a_{i,s_i}$ falls $s_i p^{m_i} = N$ gilt und Null sonst. Damit ist der Koeffizient von T^N gleich

$$\sum_{i=0}^{n} b_i^{p^{n_i}} c_{i,m_i}$$

Dies ist aber der Hauptteil von F, ausgewertet an der Stelle $(T_i = b_i)_{i=0,..,n}$. Da der Hauptteil aber nur die triviale k-rationale Nullstelle hat, müssten alle b_i Null sein, im Widerspruch zu ihrer Wahl. □

B Zur Rechtsexaktheit des ft-Néron-Modelles

In diesem Abschnitt steht $\mathcal{G}$ für das lft-Néron-Modell der $\mathbb{G}_{m,K}$. Aus der Definition des ft-Néron-Modells und unserer Beschreibung der zugehörigen étalen Garbe erhält man für einen algebraischen K-Torus T eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z})$$

$$\longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots,$$

deren Anfang sich kanonisch mit der Sequenz

$$0 \longrightarrow (j_*T)^{ft} \longrightarrow j_*T$$

identifiziert, so dass man eine Inklusion

$$\mathrm{coker}\big((j_*T)^{ft} \longrightarrow j_*T\big) = i_*\Phi(T)^{\vee\vee} \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{X}(T)^I, i_*\mathbb{Z}) \cong i_*\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T)^I, \mathbb{Z})$$

erhält. Wir wollen nun die oben auftretenden $\underline{\mathrm{Ext}}^1$-Terme näher untersuchen. $j_*\underline{X}(T)$ wird von einem étalen Gruppenschema dargestellt. Mit dem Satz 5.1.3 folgt

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z}) = i_*\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(X(T)^I, \mathbb{Z}) = 0\ ,$$

denn $X(T)^I$ ist torsionsfrei. Als nächstes wollen wir $\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G})$ untersuchen.

B.1 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus. Dann gilt in der étalen Topologie $\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G}) \cong R^1 j_*T$.*

Beweis. Da der Torus T nach einer endlichen, galoisschen Erweiterung L/K zerfällt, ist $\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G})$ eine Wolkenkratzergarbe, denn für alle étalen Morphismen $U \longrightarrow \mathrm{Spec}\, L$ gilt

$$\mathrm{Ext}^1_U(j_*\underline{X}(T)|_U, \mathcal{G}|_U) = \mathrm{Ext}^1_U(\mathbb{Z}^d, \mathbb{G}_{m,U}) = \mathrm{H}^1(U, \mathbb{G}_{m,U})^d = 0\ ,$$

wobei d die Dimension von T ist.
Sei $U = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{K'} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ ein étaler Morphismus, wobei K'/K eine endliche unverzweigte Erweiterung sei. Dann entspricht $\mathrm{Ext}^1_U(j_*\underline{X}(T)|_U, \mathcal{G}|_U)$ der Gruppe der Isomorphieklassen von Extensionen

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}|_U \longrightarrow E \longrightarrow j_*\underline{X}(T)|_U \longrightarrow 0$$

von Garben auf dem étalen Situs über U. Diese können wir mit [M] II Exp. 3.12 als Extension

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} K^{nr*} \\ K^{sep*} \\ K^{nr*} \overset{id}{\to} K^{nr*} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_{\bar{s}} \\ E_{\bar{\eta}} \\ \psi : E_{\bar{s}} \to E^I_{\bar{\eta}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X(T)^I \\ X(T) \\ X(T)^I \overset{id}{\to} X(T)^I \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

von Tripel schreiben. Dies bedeutet, dass die obere und die mittlere Zeile exakte Sequenzen von stetigen $\mathrm{Gal}\,(K^{nr}/K')$-Moduln bzw. $\mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K')$-Moduln sind und dass die obere Zeile mit der Sequenz der I-Invarianten der mittleren Zeile ein kommutatives Diagramm (mit den Morphismen aus der unteren Zeile) bildet. Mit der lokal-global-Spektralsequenz für $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ auf dem étalen Situs über $U_K := \mathrm{Spec}\, K'$ erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(U_K, \underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T)|_{U_K}, \mathcal{G}|_{U_K}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{U_K}(j_*\underline{X}(T)|_{U_K}, \mathcal{G})|_{U_K})$$

$$\longrightarrow \mathrm{H}^0(U_K, \underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T)|_{U_K}, \mathcal{G}|_{U_K}))\ .$$

Wie oben gesehen, muss der letzte Term trivial sein, so dass wir mit Cartier-Dualität einen funktoriellen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^1(U_K, T) = \mathrm{Ext}^1_{U_K}(j_*\underline{X}(T)|_{U_K}, \mathcal{G})|_{U_K}) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K')}(X(T), K^{sep*})$$

erhalten.
Mit [M] III 1.13 ist die Garbifizierung der Prägarbe $U \longmapsto \mathrm{H}^1(U_K, T)$ gleich $\mathrm{R}^1 j_* T$ und die Garbifizierung der Prägarbe $U \longmapsto \mathrm{Ext}^1_U(j_*\underline{X}(T)|_U, \mathcal{G}|_U)$ ist gleich $\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G})$. Also müssen wir zeigen, dass in funktorieller Weise

$$E_U := \mathrm{Ext}^1_U(j_*\underline{X}(T)|_U, \mathcal{G}|_U) = \mathrm{Ext}^1_{U_K}(j_*\underline{X}(T)|_{U_K}, \mathcal{G})|_{U_K}) =: E_{U_K}$$

gilt, also die Isomorphieklassen von Extensionen von Tripeln den Isomorphieklassen von Extensionen von $X(T)$ mit K^{sep*} als $\mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K')$-Moduln entsprechen.
Wir definieren hierzu eine Abbildung F, die eine Extension von Tripeln auf deren mittlere Zeile als Extension von $X(T)$ mit K^{sep*} abbildet. Diese Zuordnung ist offenbar verträglich mit Isomorphismen, so dass wir eine Abbildung $F : E_U \longrightarrow E_{U_K}$ auf den Ext-Gruppen erhalten.
Eine Extension von $X(T)$ mit K^{sep*} (als $\mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K')$-Moduln) induziert mit Hilbert 90 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K^{nr*} \arrow[r] \arrow[d, hook] & E^I_{\bar\eta} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X(T)^I \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & K^{sep*} \arrow[r] & E_{\bar\eta} \arrow[r] & X(T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Damit erhalten wir eine Abbildung $G : E_{U_K} \longrightarrow E_U$, da die Konstuktion mit Isomorphismen von Extensionen verträglich ist.
Man sieht sofort, dass $F \circ G = id$ gilt. Umgekehrt ist eine Extension E von Tripeln eindeutig durch die mittlere Zeile und den Isomorphismus $E_{\bar s} \cong E^I_{\bar\eta}$ bestimmt und dieser Isomorphismus induziert einen Isomorphismus zwischen der Extension E und deren Bild unter $G \circ F$.
Ein étaler und surjektiver $\mathcal{O}_K$-Morphismus $U' \longrightarrow U$ mit zusammenhängendem U' entspricht einer unverzweigten Körpererweiterung $K' \subset K''$, so dass $U' \cong \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{K''}$ gilt.
Die Restriktion einer Garbe bezüglich $U' \longrightarrow U$ entspricht auf der Ebene der Galoismoduln der Restriktion zur Inklusion $\mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K'') \hookrightarrow \mathrm{Gal}\,(K^{sep}/K')$, so dass $E_U \cong E_{U_K}$ funktoriell in U ist. □

B.2 Lemma. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$.*
Dann gilt $\mathrm{coker}\Big(\underline{Hom}(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G}) \longrightarrow \underline{Hom}(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z})\Big) \cong E(T)^{pd}$, *wobei genauer $E(T)^{pd}$ die vom Pontryagin-Dual des Störterms induzierte étale Garbe meint.*

Beweis. Wir betrachten zu dem Torus T in der glatten Topologie die kanonische exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow T^I \longrightarrow 0\ .$$

Diese induziert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*\widetilde{T} \longrightarrow j_*T \longrightarrow j_*T^I \longrightarrow \mathcal{K}$$

Mit dem Satz 3.3.1 können wir diese Sequenz mit den entsprechenden ft-Néron-Modellen zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & j_*\widetilde{T} \arrow[r] \arrow[d, hook] & j_*T^{ft} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, hook] & \mathbb{G}^d_{m,\mathcal{O}_K} \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & j_*\widetilde{T} \arrow[r] \arrow[d] & j_*T \arrow[r] \arrow[d] & j_*T^I \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathcal{K} \\
 & 0 & \Phi(T)^{\vee\vee} \arrow[r, dotted, "\alpha"] & \underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T)^I, i_*\mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und Spalten ergänzen. Hierbei sei d gleich dem Rang von $X(T)^I$. Wegen der Kommutativität erhalten wir eine Abbildung

$$\alpha : \Phi^{\vee\vee} \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T)^I, i_*\mathbb{Z})\ .$$

Dies ist eine Abbildung von Garben, welche von étalen Gruppenschemata dargestellt werden. Somit können wir α nach Einschränkung auf die étale Topologie bestimmen: Dort haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
j_*T = \underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & j_*T^I = \underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T^I)), \mathcal{G}) \arrow[d] \\
\underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] & \underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T^I), i_*\mathbb{Z})\ ,
\end{tikzcd}$$

da die Inklusion $\underline{X}(T^I) = \underline{X}(T)^I \hookrightarrow \underline{X}(T)$ nach Anwenden von $i^* \circ j_*$ zu einem Isomorphismus wird. Also entspricht α der Inklusion

$$\mathsf{im}\Big(\underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T), \mathcal{G}) \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z})\Big) \hookrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}(j_*\underline{X}(T), i_*\mathbb{Z})\ .$$

Mit dem Schlangenlemma erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{coker}(\beta) \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{coker}(\alpha) \longrightarrow 0\,.$$

Wenden wir hierauf in der glatten Topologie den Funktor $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, i_*\mathbb{Z})$ an, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{coker}(\beta), i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{coker}(\alpha), i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{coker}(\beta), i_*\mathbb{Z})$$

Nun sind $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z})$, $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}, i_*\mathbb{Z})$ und $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*T^{ft}, i_*\mathbb{Z})$ trivial, so dass $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{coker}(\beta), i_*\mathbb{Z}) = 0$ und $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{coker}(\beta), i_*\mathbb{Z}) = 0$ folgen. Nach Definition wird die Einschränkung von $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{K}, i_*\mathbb{Z})$ auf den étalen Situs vom Störterm $E(T)$ dargestellt. Somit folgt durch Einschränken auf den étalen Situs und nochmaliges Dualisieren mit dem Satz 5.1.3 die Behautung, denn $\mathrm{coker}(\alpha)$ wird von einem étalen Gruppenschema dargestellt. □

Damit erhalten wir sofort den Satz

B.3 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und T ein algebraischer K-Torus mit Charaktergruppe $X(T)$. Dann gibt es eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow E(T) \longrightarrow \underline{Ext}^1(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \longrightarrow R^1 j_*T \longrightarrow 0\,,$$

insbesondere ist $\underline{Ext}^1(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$ trivial, falls der Restklassenkörper perfekt ist oder T nach einer zahm verzweigten Erweiterung zerfällt. Im Allgemeinen ist diese Garbe eine p-Torsionsgarbe.

Mit diesen Überlegungen sieht man, dass man den freien Anteil prinzipiell auch über die Inklusion $j_*T^{ft} \hookrightarrow j_*T$ bestimmen könnte. Dann würde man den Störterm als $E(T) := \ker\Big(\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \twoheadrightarrow \mathrm{R}^1 j_*T\Big)$ definieren. Diese Definition ist jedoch schwieriger zu berechnen als unsere Definition.
Ausgehend von einer exakten Sequenz von Charaktergruppen erhält man durch Anwenden des Funktors $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\cdot, \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$ zwar die zugehörige Sequenz der ft-Néron-Modelle, allerdings ist im Allgemeinen nur schwer zu beschreiben, womit man diese Sequenz hinter dem letzten ft-Néron-Modell fortsetzen muss. Falls j_* auf den Charaktergruppen exakt ist, ergibt sich eine einfache Lösung.

B.4 Satz. *Sei K ein lokaler Körper und*

$$0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow T_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von K-Tori.
Falls für die zugehörigen Charaktergruppen

$$\ker\Big(H^1(I, X(T_3)) \longrightarrow H^1(I, X(T_2))\Big) = 0$$

gilt, dann ist die lange exakte Sequenz der ft-Néron-Modelle isomorph zu der Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\mathit{Hom}}(j_*\underline{X}(T_1), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \underline{\mathit{Hom}}(j_*\underline{X}(T_2), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$$

$$\longrightarrow \underline{\mathit{Hom}}(j_*\underline{X}(T_3), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \underline{\mathit{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T_1), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \cdots .$$

Beweis. Die zugehörige kurze exakte Sequenz der Charaktergruppen induziert unter den Voraussetzungen eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow j_*\underline{X}(T_3) \longrightarrow j_*\underline{X}(T_2) \longrightarrow j_*\underline{X}(T_1) \longrightarrow 0 .$$

Durch Anwenden des Funktors $\underline{\mathrm{Hom}}(\cdot, \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$ ergibt sich hieraus eine lange exakte Sequenz, deren Anfang genau der Sequenz der ft-Néron-Modelle entspricht. Genauer sind mit Satz 3.3.3 die $\underline{\mathrm{Hom}}(j_*\underline{X}(T_i), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})$-Terme isomorph zu den entsprechenden ft-Néron-Modellen und ein Homomorphismus zwischen diesen als Garbe ist bereits auf die generische Faser eindeutig bestimmt. Dort ist die Isomorphie nach Definition der Sequenzen klar. □

Mit den Notationen wie in dem letzten Satz gilt also: Für eine exakte Sequenz von algebraischen K-Tori mit $\ker\Big(\mathrm{H}^1(I, X(T_3)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(I, X(T_2))\Big) = 0$ ist die Sequenz der ft-Néron-Modelle genau dann exakt, wenn

$$\mathcal{E} := \ker\Big(\underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T_1), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1(j_*\underline{X}(T_2), \mathbb{G}_{m,\mathcal{O}_K})\Big)) = 0$$

gilt. Falls zusätzlich $\Phi(T_2)$ keine p-Torsion hat und $\mathrm{H}^1(I, X(T_3)) = 0$ gilt, dann gilt $\Phi(T_3) = \Phi(\mathcal{E})$. Dies kann man als Verallgemeinerung des Satzes 6.2.2 im Fall $\mathrm{H}^1(I, X(T)) = 0$ ansehen.

Literaturverzeichnis

[A-S] A. Abbes, T. Saito, *Ramification of local fields with imperfect residue field I*, Preprint, Univ. Paris XIII Sud (2000)

[Be] L. Bégueri, *Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos*, Mem. Soc. Math. Fr. *108*, fasc. 4 (1980)

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, *Néron-Modells*, Ergebnisse der Math., 3. Folge, Bd. *21* Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1990)

[Bo] S. Bosch, *Algebra*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1993)

[B-X] S. Bosch. X. Xarles, *Component groups of Néron models via rigid uniformization*, Math. Ann. *306* , 459-486 (1996)

[Br] K.S. Brown, *Cohomology of groups*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York (1994)

[BIV] R. Brüske, F. Ischebeck, F. Vogel, *Kommutative Algebra*, BI-Wissenschaftlicher Verlag (1989)

[ChYu] C.-L. Chai, J.-K. Yu, *Congurences of Néron models for tori and the Artin conductor*, Annals of Math., Vol. *154*, 347-382 (2001)

[Edi] B. Edixhoven, *Néron models and tame ramification*, Composition Mathematica *81*, 291-306 (1992)

[ELL] B. Edixhoven, Q. Liu, D. Lorenzini, *The p-part of the group of components of a Néron model*, J. Algebraic Geometry *5*, 801-813 (1996)

[EGA IV] A. Grothendieck et al., *Etude local des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math IHES, *20, 24, 28, 32*, Paris (1964-1967)

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in mathematics *52*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1993)

[L-L] Qing Liu, Dino Lorenzini, *Special fibres of Néron models and wild ramification*, Journal f. reine u. angewandte Mathematik *532*, 179-222 (2001)

[M] J.S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press (1980)

[V-K-M] V. E. Voskresenskiĭ, B. È. Kunyavskiĭ, B. Z. Moroz, *On integral models of algebraic tori*, St. Petersburg Math. J. Vol. *14*, No. 1, 35-52 (2002)

[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1992)

[N-X] E. Nart, X. Xarles, *Additive Reduction of Algebraic Tori*, Arch. Math. *57*, 460-466 (1991)

[P] S. Yu. Popov, *Standard integral models and Néron Models*, Preprint SFB 478 Geometrische Strukturen in der Mathematik, Münster (2003)

[PV] S. Yu. Popov, V.E. Voskresenskii, *Galois Lattices and reductions of algebraic tori*, Communications in Algebra *N29(9)* (2001)

[S] J.-P. Serre, *Local fields*, Springer, New York, Heidelberg-Berlin (1979)

[SGA 1] A. Grothendieck et al., *Revêtements etales et groupe fondamental*, Lect. Notes Math. *224*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1971)

[SGA 3] M. Demazure, A. Grothendieck et. al., *Schema en Groupe I,II,III* , Lect. Notes Math. *151,152,153*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1970)

[SGA 7] A. Grothendieck, *Groupes de Monodromie en Geometrie Algebrique*, Lect. Notes Math. *288,340*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1972-1973)

[T] J. Tits, *Lectures on algebraic groups*, Yale University, New Haven (1967)

[Wei] C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambride studies in advanced mathmatics 38, Cambridge University Press (1994)

[X] X. Xarles, *The scheme of connected components of the Néron model of an algebraic torus*, Journal f. reine u. angewandte Mathematik *437*, 167-179 (1993)