

Theoretische Physik

Stochastische Modellierung komplexer Systeme

**Von den theoretischen Grundlagen zur
Simulation atmosphärischer Windfelder**

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
David Kleinhans
aus Münster

– 2008 –

Dieses Dokument ist verzeichnet unter der URN urn:nbn:de:hbz:6-44569467269 .
Digital verfügbar unter <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:6-44569467269> .

Dekan:	Prof. Dr. Johannes Peter Wessels
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Rudolf Friedrich
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Joachim Peinke
Tag der mündlichen Prüfung:	25. Juni 2008
Tag der Promotion:	25. Juni 2008

Die Sorge um die Menschen und ihr Schicksal muss stets das Hauptinteresse allen technischen Strebens bilden, die großen ungelösten Fragen der Organisation von Arbeit und der Güterverteilung, damit die Erzeugnisse unseres Geistes dem Menschengeschlecht zum Segen reichen und nicht zum Fluche. Vergesst dies nie über Euren Zeichnungen und Gleichungen.

ALBERT EINSTEIN, Februar 1931

Abstract

This thesis investigates various methods for the description and modelling of complex systems.

Complex systems can frequently be described by means of the dynamics of a small set of order parameters, that complies with stochastic differential equations. Based on a method for the direct estimation of drift and diffusion functions from measured data by Friedrich and Peinke the focus at first is on the statistical estimation of the dynamics of order parameters. In particular an existing iterative method for data analysis purposes is refined by means of a „Maximum-Likelihood“ approach. Then the connection between stochastic processes „in time“ and „in scale“ is investigated. Moreover the influence of external noise sources on Markov properties is studied. The compliance with Markov properties is essential for the application of efficient data analysis techniques. It turns out, that Markov properties generally are seriously spoiled by the influence of external noise such as measurement noise.

Then „Continuous Time Random Walks“ (CTRWs) are discussed, that form an extension of classic random processes. CTRWs are feasible for the modelling of non-Markov processes exhibiting anomalous diffusion properties in the ensemble sense, that frequently are observed in complex amorphous media. At the first instance Fogedby's continuous description of CTRWs is investigated. Based on Fogedby's approach then an algorithm for the generation of continuous trajectories of CTRWs is developed. Additionally, a physical framework for the microscopic dynamics of so-called „trapping models“ is introduced, that are currently used as models for the glass transition.

The applicability of CTRWs for simulations of turbulent flows has been an open question. For this reason, the use of CTRWs for the generation of turbulent inflow wind fields for wind turbine simulations is discussed. At first an extensive introduction the special needs of such fields is given, that overviews various simple models for the simulation of atmospheric wind fields. Afterwards a CTRW-based model for atmospheric wind fields is presented, that is capable to reproduce some intermittent features of atmospheric turbulence. This thesis closes with first results of tests of the CTRW-based wind model on existing wind turbines.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt verschiedene Wege zur Charakterisierung und Modellierung komplexer Systeme.

In vielen Fällen können komplexe Systeme durch die Dynamik einiger weniger Ordnungsparameter beschrieben werden, die stochastischen Differentialgleichungen genügen. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt deshalb zunächst auf Methoden zur statistischen Analyse der Dynamik solcher Ordnungsparameter. Die Grundlage bildet hierbei ein von Friedrich und Peinke entwickeltes Verfahren zum Schätzen von Drift- und Diffusionsfunktionen aus Messdaten. Es wird gezeigt, dass eine kürzlich vorgestellte Methode zur iterativen Optimierung der Ergebnisse dieser Methode einem Maximum-Likelihood-Ansatz entspricht. Im Anschluss daran werden die Zusammenhänge zwischen stochastischen Prozessen „in der Zeit“ und solchen „in der Skala“ erörtert. Außerdem werden die Auswirkungen von Störungen – wie z.B. Messrauschen – auf die Markov-Eigenschaften, die eine wichtige Voraussetzung für eine effiziente Modellierung bilden, untersucht. Dabei zeigt sich, dass externe Störungen die Markov-Eigenschaften massiv beeinträchtigen.

Im Anschluss daran werden „Continuous Time Random Walks“ (CTRWs) betrachtet, die eine Erweiterung klassischer Zufallsprozesse darstellen und die Modellierung von nicht-Markov-Prozessen, die im Ensemble anomales Diffusionsverhalten zeigen, ermöglichen. Anomale Diffusion wird häufig bei stochastischen Prozessen in komplexen amorphen Medien beobachtet. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Beschreibung solcher Zufallsprozesse durch ein System von stochastischen Differentialgleichungen, das Fogedby in den neunziger Jahren eingeführt hat, im Detail untersucht. Auf diesem Modell beruht dann ein Algorithmus zur Simulation von stetigen Pfaden von CTRWs im Kontinuumlimit. Schließlich wird ein physikalischer Ansatz für die mikroskopische Dynamik sogenannter „Trapping-Modelle“, die zur Modellierung des Glas-Übergangs verwendet werden, vorgestellt.

Eine offene Frage war die Eignung von CTRWs für die Simulation turbulenter Strömungen. Aus diesem Grunde wurde die Nutzung von CTRWs speziell zur Erzeugung turbulenter Windfelder untersucht, die als Eingangsfelder für die Simulation von Windkraftanlagen verwendet werden können. Nach einer umfassenden Einführung in die Anforderungen an solche Felder, die auch einen Überblick über einfache Modelle zur Erzeugung atmosphärischer Windfelder enthält, wird ein auf der Basis von CTRWs entwickeltes Modell für atmosphärische Windfelder vorgestellt, das einige intermittente Eigenschaften der atmosphärischen Turbulenz reproduzieren kann. Die Arbeit schließt mit ersten Ergebnissen von Tests dieses Windfeldmodells an realen Windkraftanlagen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Einführung in die Theorie stochastischer Prozesse	5
2.1	Mittelwerte und bedingte Verteilungen	5
2.1.1	Zufallsvariablen und Mittelwerte	5
2.1.2	Zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	7
2.1.3	Multivariate Wahrscheinlichkeitsverteilungen	7
2.1.4	Bayes'sches Theorem	8
2.2	Grundlagen stochastischer Prozesse	8
2.2.1	Markov-Prozesse	9
2.2.2	Langevin-Gleichungen	10
2.2.3	Interpretation von Stieltjes-Integralen	11
2.2.4	Diskretisierung von Langevin-Gleichungen	13
2.2.5	Fokker-Planck-Gleichung	13
2.2.6	Entwicklung von Übergangswahrscheinlichkeitsverteilungen	15
2.3	Verallgemeinerung des Grenzwertsatzes der Statistik	16
2.3.1	Stabile Wahrscheinlichkeitsverteilungen	16
2.3.2	Lévy-Verteilungen	18
2.3.3	Verallgemeinerter Grenzwertsatz	21
2.3.4	Verallgemeinerte Langevin-Gleichungen	22
3	Drift- und Diffusionsprozesse	25
3.1	Bestimmung von Drift und Diffusion aus Messdaten	25
3.2	Optimiertes Verfahren basierend auf Maximum-Likelihood-Schätzern	28
3.2.1	Untersuchung von Ensembles von Messungen	29
3.2.2	Untersuchung markovscher Zeitreihen	30
3.2.3	Iterative Anwendung für Drift- und Diffusionsprozesse	31
3.2.4	Analytisches Beispiel für Anwendung der iterativen Optimierung	31
3.2.5	Zusammenfassung	34
3.3	Stochastische Prozesse in der Skala: Analytischer Ansatz	35
3.3.1	Analytischer Ansatz für beliebige Skalierungsfunktionen	37
3.3.2	Beispiel: Untersuchung der Korrelation von Inkrementen	38
3.3.3	Stochastische Prozesse in der Skala	39
3.3.4	Zusammenfassung	42
4	Realisierung von Markov-Eigenschaften	43
4.1	Methoden zum Prüfen von Markov-Eigenschaften	44
4.2	Einfluss gestörter Messungen auf die Markov-Eigenschaften	46
4.2.1	Charakterisierung von Messfehlern	46
4.2.2	Markov-Eigenschaften unter dem Einfluss von Störungen	47
4.2.3	Beispiele	48
4.2.4	Zusammenfassung	53

4.3	Analyse von Prozessen in Gegenwart von Messrauschen	54
5	Anomale Diffusion und zeitkontinuierliche Prozesse (CTRWs)	55
5.1	Theorie diskreter zeitkontinuierlicher Prozesse	56
5.1.1	Diskrete „Random-Walks“	56
5.1.2	Continuous Time Random Walks (CTRWs)	57
5.2	Anomales Diffusionsverhalten von CTRWs	60
5.3	Beschreibung turbulenter Strömungen durch CTRWs	63
5.4	Kontinuumsübergang nach Fogedby	65
6	Numerische Simulation zeitkontinuierlicher Prozesse	71
6.1	Lösung der fraktionalen FP-Gleichung mit diskreten CTRWs	73
6.2	Kontinuumsübergang nach Gorenflo u.a.	76
6.3	Num. Simulation von Trajektorien auf der Basis des Fogedby-Modells	77
6.3.1	Algorithmus zur numerischen Simulation von Trajektorien	77
6.3.2	Beispiele	78
6.3.3	Zusammenfassung	81
6.4	Mikroskopisches Modell: Physikalischer Ursprung anomaler Diffusion	82
6.4.1	Dynamik des Prozesses y	85
6.4.2	Wahrscheinlichkeit des Verlassens von A bzw. B	87
6.4.3	Übergang zu Wartezeiten mit Potenzgesetz	89
6.4.4	Zusammenfassung	90
7	Verwendung von CTRWs zur Erzeugung atmosphär. Windfelder	91
7.1	Beschreibung turbulenter Strömungen	92
7.2	Charakterisierung der atmosphärischen Grenzschicht	97
7.3	Windkraftanlagen in der atmosphärischen Grenzschicht	103
7.4	Erzeugung synthetischer Windfelder	107
7.4.1	Einfache stochastische Modelle	109
7.4.2	Spektrale Simulation von Windfeldern	111
7.4.3	Kinematische Simulation turbulenter Strömungen	124
7.4.4	Simulation einer turbulenten Kaskade mit Hilfe von Wavelets	125
7.4.5	Multiplikative Modellierung der Energiekaskade	127
7.4.6	Simulation von stochastischen Prozessen in der Skala	129
7.5	CTRW-Modell für intermittente atmosphärische Windfelder	131
7.6	Nutzung des CTRW-Modells: Simulation und Ergebnisse	141
7.7	Grenzen des CTRW-Modells	151
8	Zusammenfassung	155
A	Erzeugung Lévy-verteilter Zufallszahlen	159
B	Weibull-Verteilung atmosphärischer Windgeschwindigkeiten	161
C	Turbulenzintensität und Turbulenz	167
	Literaturverzeichnis	171
	Lebenslauf	183
	Stichwortregister	189

Abkürzungen und Symbole

$ \boldsymbol{x} $	Betrag der (u.U. komplexen) Variable \boldsymbol{x}
CTRW	Zeitkontinuierlicher Zufallsprozess („Continuous Time Random Walk“)
$\boldsymbol{D}^{(1)}$	Driftfunktion (Vektor)
$\boldsymbol{D}^{(2)}$	Diffusionsfunktion (Matrix)
$\delta(x)$	Dirac'sche Delta-Distribution
$x \stackrel{d}{=} y$	Distributionelle Gleichheit von x und y
$f_{\alpha,\beta}$	Lévy-Verteilung mit charakteristischem Exponent α und Schiefe β im Sinne von Gleichung (2.58)
MFET	Mittlere Zeit bis zum Verlassen eines Intervalls („Mean First Exit Time“)
PDF	Wahrscheinlichkeitsdichte („Probability Density Function“)
RW	Diskreter Zufallsprozess mit äquidistanten Zeitschritten („Random Walk“)
\boldsymbol{x}^T	Transposition des Vektors \boldsymbol{x}

Kapitel 1

Einleitung

Das Maß für die Güte, mit der physikalische Systeme verstanden sind, war über lange Zeit die Vorhersagbarkeit der Dynamik auf der Basis von Differentialgleichungen. Ausgehend von der Formulierung von Newtons „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“, die mit der Verbreitung der Newton’schen Axiome den Beginn der modernen Physik einläutete, konnten viele grundlegende Prozesse beschrieben werden. Weil die Newton’schen Bewegungsgleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen in der Zeit sind, liefern sie eine präzise Vorhersage der zeitlichen Entwicklung der betrachteten Größen. In den folgenden Jahrhunderten zeigte sich, dass sich viele isolierte physikalische Systeme durch ähnliche deterministische Gesetzmäßigkeiten beschreiben lassen. Seit den Arbeiten von Newton sind z.B. die klassische und später dann auch die relativistische Mechanik entwickelt worden, die viele Probleme der Astrophysik akkurat zu beschreiben vermögen. Zusammen mit der Elektrodynamik und der Quantenphysik bilden sie mittlerweile das Grundgerüst der Physik, mit dessen Hilfe sich nun schon seit langer Zeit präzise Vorhersagen über die zeitliche Entwicklung von vielerlei Systemen machen lassen.

In den letzten Jahrzehnten wurden vermehrt nichtlineare Effekte untersucht. Durch den Einfluss von nichtlinearen Termen verhalten sich die Lösungen der Differentialgleichungen nicht mehr additiv. Vielmehr können kleine Veränderungen von Anfangsbedingungen oder Kontrollparametern in der Nähe von Instabilitäten zu qualitativen Unterschieden in der zeitlichen Entwicklung führen. Weil die Abhängigkeit von den gewählten Bedingungen u.U. so sensibel sein kann, dass selbst nicht messbare Variationen zu abweichenden Trajektorien führen, werden solche Systeme häufig dem *deterministischen Chaos* zugeschrieben. Einige einfache Modell-Systeme von (deterministischen) Differentialgleichungen, wie z.B. das Lorenz-System, weisen Bereiche auf, in denen sich ein solches chaotisches Verhalten zeigt. Diese Systeme sind im Rahmen der Chaosforschung intensiv untersucht worden.

Während eine physikalische Beschreibung der Dynamik im atomaren Bereich wie auch auf astrophysikalischen Skalen sehr gut gelingt, bereitet das Verständnis von vielen Ereignissen in der belebten Natur, die auf moderaten Größenskalen zwischen diesen beiden Extremen einzuordnen sind, große Schwierigkeiten [Nicolis & Nicolis 2007]. Viele der in der Natur zu beobachtenden Systeme können selbständig Muster und Strukturen ausbilden. Ohne solch eine sich selbst organisierende Ordnung wären z.B. die Zellbildung und damit schließlich auch jedes menschliche Leben nicht möglich. Selbst wenn die Eigenschaften der einzelnen Bausteine solcher Systeme isoliert gut verstanden sind, gelingt eine Charakterisierung des Gesamtsystems in der natürlichen Umgebung nicht zufriedenstellend. In den letzten Jahrzehnten hat es sich durchgesetzt, solche Systeme, die häufig aus verwandten Disziplinen wie der Biologie und der Chemie kommen und damit klassisch nicht der Physik zugeordnet wurden, „komplex“ zu nennen, wobei diese Bezeichnung – wie wir sehen werden –

eng an die ursprüngliche Bedeutung dieses Adjektivs angelehnt ist [Bertelsmann Fremdwörterlexikon 1974]:

kom'plex <Adj.> *zusammengesetzt, verwickelt, vielfältig und doch einheitlich*

Der Grund für die Ausbildung von Strukturen in komplexen Systemen liegt in den komplizierten, nichtlinearen und zum Teil nur unzureichend bekannten Wechselwirkungen, die sich in makroskopischen Systemen mit einer hohen Anzahl dynamischer Freiheitsgrade einstellen. Der nichtlineare Charakter dieser Wechselwirkungen kann dazu führen, dass sich ein makroskopisches System eben anders verhält, als es von der mikroskopischen Dynamik der Subsysteme her zu erwarten gewesen wäre. Ein komplexes System wird deshalb heutzutage als ein System verstanden, das aus vielen einzelnen Teilen *zusammengesetzt* ist, die mitunter nichtlinear miteinander gekoppelt (*verwickelt*) sind. Solche Systeme können *vielfältige* Eigenschaften aufweisen, die zu beschreiben sehr aufwändig sein kann. Trotzdem wird häufig davon ausgegangen, dass das System als solches homogen und damit *einheitlich* ist. Solche Systeme sind damit im wahrsten Sinne des Wortes „komplex“.

Neben den internen Wechselwirkungen interagieren komplexe Systeme häufig auch noch mit anderen Systemen oder nehmen Energie aus der Umgebung auf. Sie können sich deshalb fernab des thermodynamischen Gleichgewichts befinden. In die Klasse der komplexen Systeme fallen Problemstellungen aus vielen wissenschaftlichen Disziplinen, z.B. aus der Biologie, der Chemie und der Physik, aber auch aus der Soziologie und der Ökonomie. Wie aber lässt sich das Verhalten komplexer Systeme adäquat beschreiben?

Diesbezüglich bedeuteten die Arbeiten von Haken, mit denen er in den frühen siebziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts das interdisziplinäre Arbeitsgebiet der *Synergetik* begründete, große Fortschritte [Haken 2004]. Haken hatte erkannt, dass die Dynamik komplexer Systeme in vielen Fällen auf verschiedenen Zeitskalen abläuft, die sich adiabatisch trennen lassen. Der Zustand der Systeme lässt sich dann durch einige wenige Ordnungsparameter beschreiben, deren zeitliche Entwicklung stochastischen Differentialgleichungen genügt. Die Ordnungsparameter dominieren das makroskopische Verhalten, die Ordnung des Systems, und „versklaven“ die mikroskopische Dynamik. Auf der anderen Seite fließen die vielen mikroskopischen Freiheitsgrade als fluktuierende Kräfte in die Entwicklungsgleichungen der Ordnungsparameter ein. Durch diese Idee, deren Anwendungsgebiet sich von der Lasertheorie mittlerweile über das gesamte Feld der komplexen Systeme erstreckt, reduziert sich die Anzahl der relevanten Freiheitsgrade drastisch. Obwohl die Verwendung stochastischer Differentialgleichungen in der Physik und die Beschreibung der statistischen Eigenschaften solcher Gleichungen schon auf Einstein und Langevin zurückgehen [Einstein 1905; Lemons 2002], ist die breite Anwendung zur Beschreibung makroskopischer komplexer Systeme erst durch die Arbeiten von Haken möglich geworden.

Es konnte gezeigt werden, dass sich die Dynamik der stochastischen Differentialgleichungen mit Hilfe statistischer Methoden direkt aus gemessenen Daten gewinnen lässt und sich Systeme auf diese Art ohne vorherige Kenntnisse über die interne Struktur beschreiben lassen [Siegert u.a. 1998]. Solche Verfahren wurden in den vergangenen Jahren zur Untersuchung verschiedener Probleme, die in das breite Feld der komplexen Systeme fallen, verwendet [vgl. z.B. Friedrich u.a. 2008]. Im Bereich der Physik hat insbesondere die Beschreibung turbulenter Strömungen, die ein komplexes Skalierungsverhalten aufweisen, von der stochastischen Modellierung profitieren können [Friedrich & Peinke 1997a].

Weil die Dynamik der Ordnungsparameter nun explizit durch stochastische Gleichungen beschrieben wird, ist natürlich nicht mehr zu erwarten, dass sich die Entwicklung von komplexen Systemen exakt vorhersagen lässt, wie es für deterministische Systeme noch der Fall war. Als Maß für die Güte der Beschreibung komplexer

Systeme durch stochastische Modelle sind stattdessen vielmehr statistische Vorhersagen über die zeitliche Entwicklung, z.B. auf der Basis von Übergangswahrscheinlichkeiten, zu bewerten.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir den Bogen spannen von den grundlegenden Verfahren zur Modellierung komplexer Systeme bis hin zur Verwendung stochastischer Methoden zur Simulation atmosphärischer Windfelder für Windkraftanlagen. Dabei werden insbesondere sogenannte „Continuous Time Random Walks“ (CTRWs) als Zufallsprozesse, die im Ensemble anomales Diffusionsverhalten zeigen, eine wichtige Rolle spielen.

Die Arbeit beginnt im folgenden Kapitel mit einer Einführung in die mathematischen Grundlagen. Einen wichtigen Stellenwert nehmen dabei insbesondere die Verallgemeinerung von stochastischen Differentialgleichungen auf Rauschen, das asymptotisch einem Potenzgesetz genügt, und die dadurch notwendige Verallgemeinerung des allgemeinen Grenzwertsatzes der Statistik auf α -stabile Lévy-Verteilungen ein. In Kapitel 3 werden die wesentlichen Grundlagen zur Modellierung komplexer Systeme mit Hilfe stochastischer Differentialgleichungen vorgestellt. In Abschnitt 3.2 wird die Äquivalenz eines im Rahmen der Diplomarbeit [Kleinhans 2005] entwickelten Verfahrens zur iterativen Optimierung von Modellen zu sogenannten „Maximum-Likelihood“-Schätzern für Drift- und Diffusionsfunktionen gezeigt. Im Anschluss daran wird in Abschnitt 3.3 das Bild der stochastischen Prozesse „in der Skala“ eingeführt, mit deren Hilfe sich z.B. die Struktur turbulenter Strömungen beschreiben lässt. Auf der Basis der Statistik von Inkrementen auf verschiedenen Skalen können schließlich die Zusammenhänge zwischen stochastischen Prozessen in der Skala und in der Zeit diskutiert werden.

Das darauf folgende Kapitel ist den Markov-Eigenschaften stochastischer Prozesse gewidmet. Für alle bis zu diesem Zeitpunkt vorgestellten Methoden zur Datenanalyse wird typischerweise vorausgesetzt, dass die zugrundeliegenden Prozesse Markov-Eigenschaften genügen und der Zustand des Systems durch einen einzelnen Punkt im Phasenraum somit hinreichend beschrieben ist. Es wird gezeigt, dass schon leichte Störungen der Daten z.B. durch Diskretisierung während der Aufnahme der Messwerte die Markov-Eigenschaften beeinträchtigen. Diese Effekte wirken sich insbesondere auf kleinen Skalen aus, die für die Modellierung auf der Basis von stochastischen Prozessen in der Regel betrachtet werden. Schließlich wird eine Möglichkeit vorgestellt, unter der expliziten Berücksichtigung des nicht-markovschen Charakters eine akkurate Beschreibung einfacher stochastischer Prozesse selbst in Gegenwart von Messrauschen zu erhalten.

In den Kapiteln 5 und 6 wenden wir uns dann einer allgemeineren Klasse von Zufallsprozessen, den sogenannten „Continuous Time Random Walks“ (CTRWs), zu. Durch eine Verallgemeinerung von klassischen Zufallsprozessen auf kontinuierliche Wartezeitverteilungen können mit Hilfe von CTRWs nicht-Markov-Prozesse beschrieben werden. Zunächst wird gezeigt, dass die zeitliche Entwicklung für Wartezeitverteilungen mit divergierenden Mittelwerten vom Einstein'schen Diffusionsverhalten abweicht. Die Dynamik solcher CTRWs wird deshalb häufig als „anomal“ bezeichnet. Im Anschluss daran wird insbesondere ein kontinuierliches Modell für CTRWs, das Fogedby in den neunziger Jahren eingeführt hat, diskutiert. Dieses Modell dient in Kapitel 6 als Ausgangspunkt für ein Verfahren zur Simulation stetiger Trajektorien von CTRWs. Kapitel 6 schließt mit einem Modell für die mikroskopische Dynamik von CTRWs, das das anomale Diffusionsverhalten auf physikalische Ursachen zurückführt und an sogenannte „Trapping-Modelle“ angelehnt ist [Montus & Bouchaud 1996].

Den Rahmen für die vorliegende Arbeit bildete ein Verbundprojekt zur Grundlagenforschung in der Windenergie. Friedrich [2003] konnte zeigen, dass CTRWs eine mögliche Klasse von Prozessen zur Beschreibung der intermittenten und nicht-markovschen Eigenschaften turbulenter Strömungen darstellen. Ziel des hier vorge-

stellten Teilprojektes war deshalb die Entwicklung eines CTRW-basierten Modells zur Simulation atmosphärischer Windfelder. In Kapitel 7 werden zunächst die Anforderungen an Modelle für atmosphärische Windfelder zur Verwendung in der Windenergie ausführlich beschrieben. Im Anschluss daran werden die zu diesem Zweck gebräuchlichen Modelle im Detail vorgestellt und einige interessante Ansätze für zukünftige Entwicklungen diskutiert. Auf der Basis der hier vorgestellten Ergebnisse auf dem Feld der stochastischen Prozesse und der CTRWs wird dann ein neues Modell für atmosphärische Windfelder entwickelt, das ab Abschnitt 7.5 beschrieben ist. Erste Ergebnisse aus von Projektpartnern durchgeführten Tests des Modells sowie die Grenzen einer Modellierung auf der Basis von CTRWs folgen in den Abschnitten 7.6 und 7.7.

Einige Teile der hier vorliegenden Arbeit wurden – z.T. in Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftlern – bereits in Fachjournalen oder im Zusammenhang mit Konferenzbeiträgen veröffentlicht. So sind in Kapitel 3 z.B. die Arbeiten von Böttcher u.a. [2007b, 2006] und Kleinhans & Friedrich [2007b, c] eingeflossen. Kapitel 4 basiert auf einer im Jahr 2007 in Zusammenarbeit mit Projektpartnern von der Universität Oldenburg veröffentlichten Arbeit, [Kleinhans u.a. 2007]. Die Simulation kontinuierlicher Pfade aus CTRWs konnte ebenfalls im Jahr 2007 publiziert werden [Kleinhans & Friedrich 2007a]. Die Arbeiten zur Simulation von Windfeldern wurden in enger Zusammenarbeit mit Projektpartnern von der Fachhochschule Kiel auf zwei Fachkonferenzen vorgestellt [Gontier u.a. 2006, 2007; Kleinhans u.a. 2006]. Andere Teile, wie z.B. die Abschnitte 3.3 und 6.4, sind zur Veröffentlichung vorgesehen und deshalb strukturell ebenfalls bereits in einer weitgehend selbstkonsistenten Art und Weise verfasst.

Kapitel 2

Einführung in die Theorie stochastischer Prozesse

Schon in der Einleitung ist deutlich geworden, dass stochastische Prozesse ein wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung komplexer Systeme sind. Dieses Kapitel widmet sich zunächst grundlegenden Begriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Theorie stochastischer Prozesse, die für das Verständnis der folgenden Kapitel hilfreich sind. Es soll eine mathematische Basis bilden, auf die später zurückgegriffen werden kann.

Die Aufbereitung des Stoffes orientiert sich weitgehend an den Standardwerken von Risken [1989] und Gardiner [2004], die eine problemorientierte Einführung in die Thematik bieten, und stellt eine Überarbeitung eines bereits im Rahmen der im Jahre 2005 angefertigten Diplomarbeit zusammengestellten einführenden Kapitels dar [Kleinhaus 2005]. Erweitert wird der Stoff unter anderem durch die Verallgemeinerung des Grenzwertsatzes auf α -stabile Lévy-Verteilungen in Abschnitt 2.3, die für das Verständnis von „Continuous Time Random Walks“, mit denen wir uns ab Kapitel 5 beschäftigen, benötigt werden. Diese Abschnitte beruhen im Wesentlichen auf der Arbeit von Metzler & Klafter [2000] sowie auf einem Buch von Weiss [1994].

Auf eine maßtheoretische Fundierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wird hier bewusst verzichtet. Diese findet sich zum Beispiel bei Paul & Baschnagel [1999], Dinges & Rost [1982] sowie in einführenden Lehrbüchern der namensgleichen mathematischen Disziplin. Speziellere Ausführungen zu einigen Themen sind den Büchern von Haken [2004] (Grundlagen der Synergetik, Ordnungsparameter), Coffey u.a. [2004] (Langevin-Gleichungen) und Kloeden & Platen [1992] (Numerik stochastischer Differentialgleichungen) zu entnehmen.

2.1 Mittelwerte und bedingte Verteilungen

2.1.1 Zufallsvariablen und Mittelwerte

Ausgangspunkt sei ein Experiment, das ein Ergebnis ξ aus einer Menge Ω von Ergebnissen liefert, dessen Ausgang bei verschiedenen Wiederholungen unterschiedlich sein kann. ξ nennt man dann eine *Zufallsvariable*. Wird das Experiment N -mal durchgeführt, so haben wir eine Reihe von Realisierungen ξ_1, \dots, ξ_N unserer Zufallsvariablen. Die Statistik der Zufallsvariablen lässt sich nun auf der Basis von Mittelwerten von Funktionen dieser Variablen beschreiben.

Der einfachste *Mittelwert* über eine Reihe von N Realisierungen der Zufallsvariable ξ ist

$$\langle \xi \rangle_\xi := \frac{1}{N} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) \quad , \quad (2.1)$$

allgemein gilt für Mittelwerte von Funktionen h von Zufallsvariablen

$$\langle h(\xi) \rangle_\xi := \frac{1}{N} [h(\xi_1) + h(\xi_2) + \dots + h(\xi_N)] \quad . \quad (2.2)$$

Der Index ξ soll hier zeigen, dass die Mittelung über die Zufallsvariable ξ erfolgen soll. Im Folgenden werden die für die Mittelung relevanten Zufallsvariablen nur angegeben, falls die Notation andernfalls nicht eindeutig zu sein scheint.

Sei nun zunächst $\xi \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Heavyside'schen Einheitsfunktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

lässt sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion F definieren:

$$F(x) := \langle \Theta(x - \xi) \rangle \quad . \quad (2.4)$$

Aus (2.3) ergeben sich für F folgende Eigenschaften:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad , \quad F(x \rightarrow -\infty) = 0 \quad \text{sowie} \quad F(x \rightarrow +\infty) = 1 \quad . \quad (2.5)$$

Mit Hilfe der Dirac'schen δ -Distribution [vgl. Bronstein u.a. 2005] als Ableitung der Heavyside'schen Einheitsfunktion kann nun eine Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte (in Analogie zum englischen Ausdruck „probability density function“ im Folgenden häufig kurz „PDF“ oder auch „Verteilung“ genannt) $f(x)$ als Ableitung von F nach x eingeführt werden,

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{\partial}{\partial x} F(x) = \frac{\partial}{\partial x} \langle \Theta(x - \xi) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \Theta(x - \xi) \right\rangle = \langle \delta(x - \xi) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\delta(x - \xi)$ wird in diesem Zusammenhang gelegentlich als *feinkörnige Verteilung* bezeichnet, aus der die Wahrscheinlichkeitsdichte f durch Mittelung berechnet werden kann. Aufgrund der Monotonie von F ist f nicht-negativ, ferner ist die Normierung $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 1$ wegen (2.5) stets erfüllt. Mit Hilfe von f können nun sämtliche Mittelwerte von Funktionen h der Zufallsvariablen ξ berechnet werden,

$$\begin{aligned} \langle h(\xi) \rangle &= \left\langle \int dx h(x) \delta(x - \xi) \right\rangle = \int dx h(x) \langle \delta(x - \xi) \rangle \\ &= \int dx h(x) f(x) \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Es gibt verschiedene Merkmale, mit denen Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben werden können. Hilfreich ist häufig eine Charakterisierung auf Basis von Momenten, zentrierten Momenten oder Kumulanten, weil diese sich in der Fouriertransformierten der Verteilung, der Charakteristischen Funktion, oder anderen erzeugenden Funktionen direkt identifizieren lassen. Charakteristische Funktionen werden in Abschnitt 2.3 eingeführt und verwendet. Als *Moment* n -ter Ordnung bezeichnet man den Mittelwert $M_n := \langle x^n \rangle$. Vor allem im Bereich der Datenanalyse werden zudem gelegentlich auch *zentrierte Momente* verwendet, bei denen zunächst um den Mittelwert korrigiert wird, $M_n^z := \langle (x - \langle x \rangle)^n \rangle$. Die niedrigsten *Kumulanten* K_n einer Verteilung berechnen sich aus den Momenten als

$$K_1 = M_1 \quad (2.8a)$$

$$K_2 = M_2 - M_1^2 \quad (2.8b)$$

$$K_3 = M_3 - 3M_1^2 M_2 + 2M_1^3 \quad . \quad (2.8c)$$

Ein Beispiel für eine Verteilungsfunktion, die im Folgenden häufig Verwendung finden wird, ist die Gauß'sche Normalverteilung, kurz *Normalverteilung*,

$$f_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad (2.9)$$

Sie ergibt sich unter gewissen Voraussetzungen¹ als PDF der Summe sehr vieler, voneinander unabhängiger Zufallsvariablen mit Mittelwert 0. Der Mittelwert (das erste Moment M_1) dieser PDF verschwindet, weil f_σ eine gerade Funktion in x ist. Für das zweite Moment gilt:

$$M_2 = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \sigma^2 \quad . \quad (2.10)$$

Für die Normalverteilung verschwindet folglich K_1 ; für K_2 , das auch als *Varianz* der Verteilung bezeichnet wird, ergibt sich σ^2 .

2.1.2 Zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zufallsvariablen lassen sich auch als Funktion der Zeit betrachten. Weil in diesem Fall in die Bestimmung von Mittelwerten nur zur gleichen Zeit ermittelte Größen einfließen können, sind Mittelwerte dann im Sinne von *Ensemble-Mittelungen* zu verstehen, die auf einer Vielzahl von Messungen an unabhängigen Systemen zur gleichen Zeit basieren. Ensemble-Mittelwerte von Ensembles der Größe N berechnen sich als

$$f_{\xi(t)}(x, t) = \langle \delta(x - \xi(t)) \rangle_{\xi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \quad . \quad (2.11)$$

Ist die Statistik eines Prozesses unabhängig von der Zeit, so nennt man den Prozess *stationär*. Für stationäre Prozesse ist die Bildung von Zeitmitteln gemäß der Ergodenhypothese äquivalent zur Mittelung über ein Ensemble von Prozessen [Monin & Yaglom 1971; Risken 1989]. Für nicht-stationäre Prozesse sind die PDFs hingegen explizit zeitabhängig.

2.1.3 Multivariate Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Zur Beschreibung stochastischer Prozesse ist im Allgemeinen die Betrachtung eines einzelnen Zustandes nicht ausreichend. Zur Charakterisierung räumlicher und/oder zeitlicher Korrelationen sind vielmehr multivariate Verbundwahrscheinlichkeitsdichten, die die Wahrscheinlichkeit für die gleichzeitige Realisierung von Zufallsereignissen an verschiedenen Orten und/oder zu verschiedenen Zeitpunkten angeben, nötig. So bezeichnet

$$f_{\xi(t_N), \dots, \xi(t_0)}^N(x_N, t_N; x_{N-1}, t_{N-1}; \dots; x_0, t_0) dx_N \times \dots \times dx_0 \quad (2.12)$$

mit

$$f_{\xi(t_N), \dots, \xi(t_0)}^N(x_N, t_N; \dots; x_0, t_0) := \langle \delta(x_N - \xi(t_N)) \times \dots \times \delta(x_0 - \xi(t_0)) \rangle$$

und $t_N \geq t_{N-1} \geq \dots \geq t_0$ die Wahrscheinlichkeit für eine Folge von Messungen, bei denen die Zufallsvariable ξ zur Zeit t_i jeweils im Intervall $[x_i, x_i + dx_i]$ liegt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden multivariate PDFs – anders als in (2.12)

¹Grenzwertungen für Summen von Zufallsvariablen werden im Rahmen von Abschnitt 2.3.3 detailliert vorgestellt. In diesem Zusammenhang werden die Voraussetzungen für eine Konvergenz gegen die Normalverteilung deutlich.

geschehen – in der Regel nicht indiziert, solange die Argumente der PDFs hinreichende Rückschlüsse auf die relevanten Zufallsvariablen zulassen.

Durch Integration über einzelne x_i lassen sich Teile solcher Verbundwahrscheinlichkeiten eliminieren, z.B.

$$\int dx_0 f(x_N, t_N; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = f(x_N, t_N; \dots; x_1, t_1) \quad . \quad (2.13)$$

Ebenso wichtig ist die Frage nach der Verteilung von $\xi(t_N), \dots, \xi(t_L)$ unter der Voraussetzung, dass die Variable zu den Zeiten t_{L-1}, \dots, t_0 bekannt ist. Verteilungen, die solche Informationen liefern, werden als *bedingte Verteilungen*, bezeichnet. Die jeweilige Konditionierung wird durch einen vertikalen Strich im Argument gekennzeichnet. Für die bedingte Verteilung p muss in jedem Fall gelten:

$$f(x_N, t_N; \dots; x_0, t_0) = p(x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1}; \dots; x_0, t_0) f(x_{N-1}, t_{N-1}; \dots; x_0, t_0) \quad . \quad (2.14)$$

Allgemein sind bedingte Verteilungen demnach durch

$$p(x_N, t_N; \dots; x_L, t_L | x_{L-1}, t_{L-1}; \dots; x_0, t_0) := \frac{f(x_N, t_N; \dots; x_0, t_0)}{f(x_{L-1}, t_{L-1}; \dots; x_0, t_0)} \quad (2.15)$$

gegeben.

2.1.4 Bayes'sches Theorem

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte zweier Ereignisse x und y lässt sich nach (2.14) schreiben als

$$f(x; y) = p(x|y)f(y) = p(y|x)f(x) \quad . \quad (2.16)$$

Daraus ergibt sich ein Zusammenhang, der weithin als *Bayes'sches Theorem* bezeichnet wird,

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)f(x)}{f(y)} \quad . \quad (2.17)$$

$f(x)dx$ und $p(x|y)dx$ identifiziert man hier als a priori- bzw. a posteriori-Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $x' \in [x, x + dx]$. Nach Vorgabe der stationären Verteilungen von x und y lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(y|x)$ so in $p(x|y)$ überführen. Auf der Anwendung dieses Theorems basieren Maximum-Likelihood-Methoden zur iterativen Anpassung von Parametern von Modellen an gemessene Daten [Hartung u.a. 1995], die in Kapitel 3.2 verwendet werden.

Die bis hierher eingeführten Zusammenhänge gelten ohne Einschränkung in entsprechender Form auch im Falle vektorwertiger Zufallsvariablen.

2.2 Grundlagen stochastischer Prozesse

Ein *stochastischer Prozess* ist die Entwicklung einer Zufallsvariablen $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ mit der Zeit. $\xi(t)$ wird in diesem Zusammenhang auch als *stochastische Variable* bezeichnet.

Die einfachste Realisierung eines stochastischen Prozesses, die vorstellbar ist, besteht aus einer Reihe von Zufallsereignissen ξ zu verschiedenen Zeiten, die *statistisch unabhängig* voneinander sind. Vergangene Messungen haben dann keinen Einfluss auf den Ausgang späterer Messungen. Damit lassen sich sämtliche bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten reduzieren und Verbundwahrscheinlichkeitsdichten zerfallen

schließlich in Produkte einzelner PDFs,

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_N, t_N; \dots; \mathbf{x}_0, t_0) \\ &= p(\mathbf{x}_N, t_N | \mathbf{x}_{N-1}, t_{N-1}; \dots; \mathbf{x}_0, t_0) \times \dots \times p(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{x}_0, t_0) f(\mathbf{x}_0, t_0) \\ &= f(\mathbf{x}_N, t_N) \times \dots \times f(\mathbf{x}_0, t_0) \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ein Maß für die Korrelation von Zufallsvariablen ist die Korrelationsfunktion

$$\text{Kor}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \frac{\langle (\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle)^T (\mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2 \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle |\mathbf{x}_1 - \langle \mathbf{x}_1 \rangle|^2 \rangle \langle |\mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2 \rangle|^2 \rangle}} \quad . \quad (2.19)$$

Aus der Faktorisierung der Verbundwahrscheinlichkeitsdichten folgt unmittelbar das Verschwinden sämtlicher Korrelationen.

Solche Prozesse sind jedoch zur Beschreibung physikalischer Prozesse nur eingeschränkt geeignet, da die Dynamik auf kleinen Längen- und Zeitskalen zumindest stetig verlaufen sollte. Stetigkeit jedoch setzt – schon im streng mathematischen Sinne – eine endliche Korrelation von in kurzem zeitlichen oder räumlichen Abstand realisierten Werten voraus.

2.2.1 Markov-Prozesse

Es wird daher der einfachstmögliche Prozess, der ein gewisses Gedächtnis berücksichtigt, betrachtet. Zerfällt jede Verbundwahrscheinlichkeitsdichte in ein Produkt aus bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten, die von nur einer Bedingung abhängen, so wird ein Prozess als *Markov-Prozess* bezeichnet. In diesem Falle gilt also:

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_N, t_N; \dots; \mathbf{x}_0, t_0) \\ &= p(\mathbf{x}_N, t_N | \mathbf{x}_{N-1}, t_{N-1}; \dots; \mathbf{x}_0, t_0) \times \dots \times p(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{x}_0, t_0) f(\mathbf{x}_0, t_0) \\ &= p(\mathbf{x}_N, t_N | \mathbf{x}_{N-1}, t_{N-1}) p(\mathbf{x}_{N-1}, t_{N-1} | \mathbf{x}_{N-2}, t_{N-2}) \times \dots \\ &\quad \times p(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{x}_0, t_0) f(\mathbf{x}_0, t_0) \quad . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Die Fixierung eines einzelnen Zustandes der Zufallsvariablen in der Vergangenheit genügt also für eine vollständige Charakterisierung der Statistik. Verschiedene Möglichkeiten, gemessene Daten auf Markov-Eigenschaften zu überprüfen, sowie der Einfluss von Störungen, z.B. durch Messrauschen, werden in Kapitel 4 ausgiebig diskutiert.

An dieser Stelle sei auf die Analogie zwischen stochastischen und deterministischen Prozessen hingewiesen. Aus der klassischen Physik ist die Beschreibung von physikalischen Prozessen im Phasenraum bekannt, der von den verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen aufgespannt wird. Im Phasenraum ist die Dynamik durch (deterministische) Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit vollständig beschrieben. Die Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit sind durch einen Zustand (eine Anfangsbedingung) festgelegt. Eine ähnliche Bedeutung hat die Existenz von Markov-Eigenschaften für stochastische Prozesse, auch wenn die zeitliche Entwicklung von einem Punkt im Phasenraum aus aufgrund des Einflusses von Zufallskräften natürlich nicht mehr deterministisch erfolgt und sich Trajektorien verschiedener Prozesse damit schneiden können. Ein direkter Vergleich von deterministischer und stochastischer Realisierung ist z.B. in Abbildung 2.1 zu sehen.

Es ist bekannt, dass jede Differentialgleichung n -ter Ordnung in t äquivalent zu einem System der Dimension n aus Gleichungen erster Ordnung in der Zeit ist. In ähnlicher Weise lassen sich auch stochastische Prozesse durch entsprechende höherdimensionale Einbettung in Systeme mit Markov-Eigenschaften überführen.

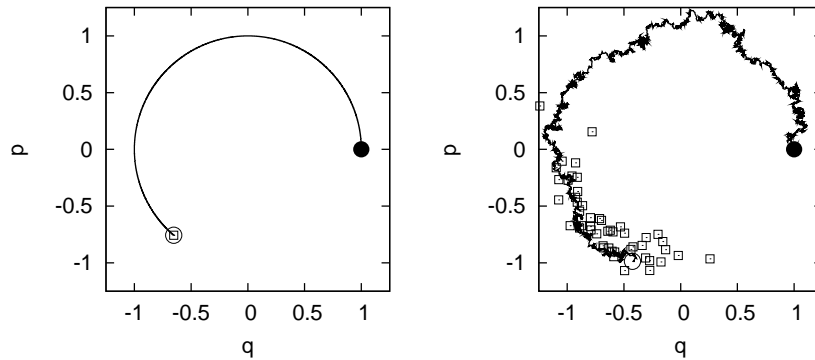


ABBILDUNG 2.1: Vergleich zwischen deterministischen (links) und stochastischen Prozessen (rechts) im stabilen Grenzyklus einer superkritischen Hopf-Bifurkation im Phasenraum. Beide Prozesse starten von $(1, 0)$ (ausgefüllter Punkt). Die Endpunkte der Trajektorien sind durch Punkte, die Ergebnisse 50 weiterer Realisierungen mit denselben Anfangsbedingungen durch kleine Kästchen markiert. Im Falle des stochastischen Prozesses führt das Wirken von Zufallskräften zu einem Auseinanderlaufen der Zustände und ermöglicht Überschneidungen von Trajektorien. Die deterministische, klassische Mechanik stellt – zumindest im Phasenraum – in gewissem Sinne den Spezialfall eines kontinuierlichen Markov-Prozesses ohne Einfluss von dynamischem Rauschen dar.

2.2.2 Langevin-Gleichungen

Viele stochastische Prozesse lassen sich auf der Basis von stochastischen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit, in denen eine stochastische, fluktuierende Kraft auftritt und die als Langevin-Gleichungen bezeichnet werden, beschreiben. Ihre Verwendung geht auf Paul Langevin zurück, der im Jahre 1908 mittels solcher Gleichungen den Diffusionsprozess der *Brown'schen Bewegung* erklären konnte [Lemons 2002]. Für masselose Teilchen gehen sie aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen als Gleichungen für die Geschwindigkeit unter Einwirkung von Stokes'schen Reibungskräften hervor und lassen sich damit auch als Bewegungsgleichungen überdämpfter Teilchen verstehen.

Für eine stochastische Variable ξ lauten die nichtlinearen *Langevin-Gleichungen*

$$\dot{\xi}_i = h_i(\xi, t) + \sum_j g_{ij}(\xi, t) \Gamma_j(t) \quad \forall i \quad . \quad (2.21)$$

$\Gamma(t)$ stellt hier eine normalverteilte, δ -korrelierte Zufallsvariable mit verschwindendem Mittelwert und Varianz 2 dar,² das heißt

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = 2 \delta_{ij} \delta(t - t') \quad . \quad (2.22)$$

In der Natur zeigen viele Prozesse eine endliche Korrelation $\sim \frac{1}{\varepsilon} e^{-|t-t'|/\varepsilon}$. Die δ -Korrelation des Rauschens, die hier als Idealisierung eingeführt worden ist, ist als Grenzfunktion dieser Korrelationsfunktion für $\varepsilon \rightarrow 0$ zu verstehen. Aufgrund einer konstanten spektralen Dichte nennt man Γ in Anlehnung an das Spektrum des

²Die Normierung der Kraft ist Konventionssache und wird in der Literatur unterschiedlich gehandhabt. Gebräuchlich ist z.B. auch eine „Normierung auf 1“. Die hier gewählte Normierung scheint an dieser Stelle sinnvoll, weil die stationäre Verteilung der Variablen sich im Sinne der Thermodynamik mit $k_B = 1$ interpretieren lässt [Risken 1989]. Ferner ist diese Notation konsistent mit der Verallgemeinerung der Langevin-Gleichung auf nicht-stetige Prozesse in Abschnitt 2.3.4.

Lichtes auch *weißes Rauschen*. Im Gegensatz zu externen Rauschquellen wie zum Beispiel dem Messrauschen nimmt das hier betrachtete Rauschen direkten Einfluss auf die weitere Dynamik des Systems und wird daher als *dynamisches Rauschen* bezeichnet. Schon Einstein hat in seiner Arbeit zur Brown'schen Molekularbewegung im Jahr 1905 angemerkt, dass zum Beispiel thermisches Rauschen die Ursache für das dynamische Wirken von Zufallskräften sein kann [Einstein 1905]. Zu beachten ist, dass (2.21) aufgrund der Eigenschaften von $\Gamma(t)$ nicht den üblichen Regeln für Differentialgleichungen gehorcht. In mathematischer Literatur findet sich daher stattdessen häufig die differentielle Form dieser Gleichung,

$$d\xi_i = h_i(\boldsymbol{\xi}, t)dt + \sum_j g_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t)dW_j(t, dt) \quad . \quad (2.23)$$

$dW(t, dt)$ bezeichnet hier die Inkremente eines Wiener-Prozesses, für die gilt:

$$\langle dW_i(t, dt)dW_j(t', dt) \rangle = 2\delta_{ij}\delta(t - t')dt \quad . \quad (2.24)$$

Beispiele für Trajektorien von Wiener-Prozessen sind z.B. in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Vorteile dieser Notation werden im folgenden Abschnitt deutlich. Formal lassen sich die beiden Gleichungen ineinander überführen, falls $dW_j(t, dt)/dt = \Gamma_j(t)$ gilt.

Langevin-Gleichungen beschreiben die Dynamik der stochastischen Variablen $\boldsymbol{\xi}$. Mit Hilfe von Langevin-Gleichungen lassen sich z.B. Teilchenbahnen eines sich unter stochastischen Einflüssen bewegenden Teilchens simulieren. Formal kann (2.21) durch Integration gelöst werden,

$$\xi_i(t) = \xi_i(t_0) + \int_{t_0}^t dt' h_i(\boldsymbol{\xi}, t') + \sum_j \int_{t_0}^t dt' g_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t')\Gamma_j(t') \quad . \quad (2.25)$$

Falls die Matrixelemente g_{ij} konstant sind, bezeichnet man das Rauschen als *additiv*, wenn sie Funktionen von $\boldsymbol{\xi}$ sind, als *multiplikativ*.

Eine Auswertung des zweiten Integrals in (2.25) lässt sich im Riemann'schen Sinne nicht durchführen, weil Wiener-Prozesse an keiner Stelle differenzierbar sind, und bedarf daher einer geeigneten Interpretation. Wir wollen uns daher zunächst mit dem Umgang mit solchen stochastischen Integralen befassen.

2.2.3 Interpretation von Stieltjes-Integralen

Eine eindimensionale Langevin-Gleichung für ξ mit $h \equiv 0$ und $g \equiv 1$ beschreibt die Trajektorie eines überdämpften Teilchens, das nur durch die zufälligen Kräfte getrieben wird. Ein solcher reiner Diffusionsprozess wird als *Wiener-Prozess* bezeichnet und geht auf Bachelier [1900], Einstein [1905] und Langevin [Lemons 2002] zurück, die diese Prozesse als erste identifizieren konnten.

In Abb. 2.2 sind drei Realisierungen von Wiener-Prozessen mit gleichen Anfangsbedingungen skizziert. Das Inkrement $dW(t, dt)$ eines Wiener-Prozesses $W(t)$ ist definiert als $dW(t, dt) := W(t + dt) - W(t)$. Für einen stochastischen Prozess, der durch die Langevin-Gleichung (2.21) beschrieben ist, kann der dritte Summand der Gleichung damit (2.25) durch ein sogenanntes *Stieltjes-Integral* dargestellt werden. Dazu gehen wir von einer Integration über t zur Integration über einen Wiener-Prozess $W_j(t)$ über,

$$\int_{t_0}^t dt' g_{ij}(\boldsymbol{\xi}, t')\Gamma_j(t') = \int_{W(t_0)}^{W(t)} g_{ij}(\boldsymbol{\xi}(t'), t')dW_j(t', dt) \quad . \quad (2.26)$$

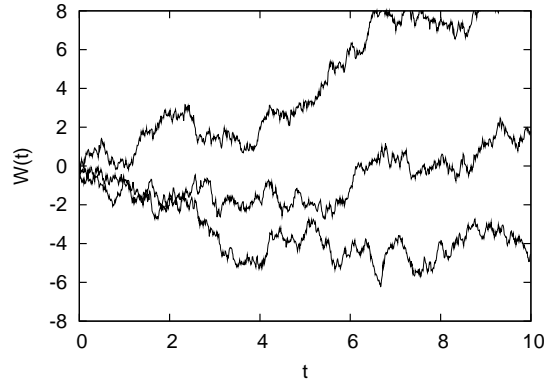


ABBILDUNG 2.2: Drei simulierte Pfade eines Wiener-Prozesses mit gleicher Anfangsbedingung

Wird nun das Intervall $[t_0, t]$ in n Intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ gleicher Größe mit $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ unterteilt, so ist dieses Integral definiert als der Grenzwert der Partialsummen

$$S_n = \sum_{i=1}^n g_{ij}(\boldsymbol{\xi}(\tau_i), \tau_i) [W_j(t_i) - W_j(t_{i-1})] \quad (2.27)$$

für $n \rightarrow \infty$. Die Stellen, an denen die Funktion g_{ij} auszuwerten ist, müssen innerhalb des i -ten Intervalls liegen, es muss also $t_{i-1} \leq \tau_i < t_i$ gelten.

Die Trajektorien von $W_j(t)$ sind nicht differenzierbar, deswegen müssen die Inkremente für kleine Zeitunterschiede dt nicht mit der Ordnung von mindestens dt verschwinden. Das führt dazu, dass der Grenzwert der Partialsummen in diesem Fall maßgeblich von der Lage der Stellen τ_i abhängig ist, falls g_{ij} nicht räumlich und zeitlich konstant ist. Seien die τ_i durch

$$\tau_i = (1 - \alpha)t_{i-1} + \alpha t_i \quad \text{mit} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.28)$$

festgelegt, so gibt es in der statistischen Physik im Wesentlichen zwei übliche Interpretationen für die Partialsummen und damit für die Auswertung von Stieltjes-Integralen:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 & \quad \text{Interpretation nach It\^o,} \\ \alpha = \frac{1}{2} & \quad \text{Interpretation nach Stratonovich.} \end{aligned}$$

Der Unterschied der beiden Interpretationen ist deutlich: It\^o wertet $g_{ij}(\boldsymbol{\xi}(\tau), \tau)$ in den Partialsummen jeweils zu Beginn eines Intervalls, Stratonovich hingegen in der Mitte aus. Prinzipiell lassen sich beide Definitionen verwenden. Maßgeblich für die Entscheidung zur Verwendung einer der beiden ist eine Abwägung von Vor- und Nachteilen.

Im Folgenden wird die Interpretation von It\^o verwendet. Diese hat den Nachteil, dass „neue Regeln für Integration und Differentiation“ [Risken 1989] verwendet werden müssen. Auf der anderen Seite ist der Zusammenhang der h_i und g_{ij} zu den Koeffizienten der Fokker-Planck-Gleichung, die im Abschnitt 2.2.5 eingeführt wird, einfacher. Ferner bietet It\^os Interpretation Vorteile bei der Durchführung mathematischer Beweise und der numerischen Integration der stochastischen Gleichungen. „Neue Regeln“ für die Differentiation werden erforderlich, weil sich der Wiener-Prozess im Ensemble proportional zu \sqrt{t} verhält. Aus diesem Grunde neue Beiträge der Größenordnung dt entstehen, deren Auswirkungen z.B. in *It\^os Lemma* zur Transformation von Funktionen stochastischer Prozesse deutlich werden. Beschränken wir uns auf eine Dimension, also auf Langevin-Prozesse, die durch die

Gleichung

$$d\xi = h(\xi, t)dt + g(\xi, t)dW(t, dt) \quad (2.29)$$

beschrieben werden, so folgt Itô's Lemma für Funktionen $f(\xi)$ der Zufallsvariablen ξ ,

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{d\xi}d\xi + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{d\xi^2}d\xi^2 \\ &= \left(\frac{df}{d\xi}h(\xi) + \frac{d^2f}{d\xi^2}g^2(\xi) \right) dt + \frac{df}{d\xi}g(\xi)dW(t, dt) + O(dt^{3/2}) \quad . \quad (2.30) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Riemannschen Kalkulus, der gewöhnlich verwendet wird, tritt hier der Term $\frac{d^2f}{d\xi^2}g^2(\xi)dt$ auf, der höhere Ordnungen von f berücksichtigt. Weil dt nur infinitesimal ist, können Terme der Ordnung $dt^{3/2}$ und höher vernachlässigt werden. Dieses auf den ersten Blick ungewöhnliche Transformationsverhalten wird z.B. in Abschnitt 6.4 verwendet. Für $\xi \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich eine entsprechende Transformation [vgl. Gardiner 2004; Risken 1989].

2.2.4 Diskretisierung von Langevin-Gleichungen

Langevin-Gleichungen lassen sich prinzipiell zur numerischen Simulation von Zufallsvariablen verwenden. Dazu ist es jedoch notwendig, sie zu diskretisieren und für endliche Zeitinkremente $dt \rightarrow \tau$ zu formulieren.

Wie wir im Rahmen der Diskussion der Übergangswahrscheinlichkeiten des Wiener-Prozesses in Abschnitt 2.2.6 noch sehen werden, lassen sich die Inkremente $dW(t, dt)$ aus unabhängigen, normalverteilten Zufallszahlen $\Gamma(t)$ mit Varianz 2 gewinnen als

$$dW(t, dt) = \sqrt{dt}\Gamma(t) \quad . \quad (2.31)$$

Wird für die Funktion h in Gleichung (2.21), die dem normalen Kalkulus genügt, ein *Euler-Verfahren* zugrunde gelegt, so lautet eine diskretisierte Form von Gleichung (2.21) dann

$$\xi_i(t + \tau) = \xi_i(t) + \tau h_i(\xi(t), t) + \sum_j \sqrt{\tau} g_{ij}(\xi, t) \Gamma_j(t) \quad . \quad (2.32)$$

Diese Gleichung kann zur iterativen, numerischen Integration von Langevin-Gleichungen verwendet werden. In der Regel werden die Zeitschritte für die Integration dabei äquidistant gewählt. Für die numerische Integration ist dann die Erzeugung der Zufallsprozesse $\Gamma_j(t)$ zu diskreten Zeiten $t_i = t_0 + i\tau$ notwendig. Weil die einzelnen Inkremente der Wiener-Prozesse unabhängig sein sollen, besteht Γ , wie schon in Abschnitt 2.2.2 spezifiziert, aus unabhängigen, normalverteilten Zufallszahlen, die für die numerische Simulation erzeugt werden müssen. Hierzu können z.B. die Algorithmen von Box & Muller [1958] sowie Marsaglia & Tsang [2000] verwendet werden. Für Integrations schemata höherer Ordnung sowie eine Diskussion der bei der numerischen Integration der stochastischen Gleichungen entstehenden Fehler sei an dieser Stelle auf ein Buch von Kloeden & Platen [1992] verwiesen.

2.2.5 Fokker-Planck-Gleichung

Einstein ist schon 1905 gelungen, die Brown'sche Molekularbewegung mit Hilfe von statistischen Methoden auf makroskopischer Ebene zu beschreiben [Einstein 1905]. Diese Vorgehensweise ist etwas eleganter als eine explizite Berücksichtigung von Zufallskräften, weil man dem Problem der Interpretation des Wirkens der stochastischen Kräfte, das in Abschnitt 2.2.3 offenbar wurde, so aus dem Wege gehen

kann. Für die Beschreibung der statistischen Eigenschaften der Trajektorien, die eng mit den den Trajektorien zugrunde liegenden Langevin-Gleichungen verknüpft sind, dient die Fokker-Planck-Gleichung, die nun eingeführt wird.

Wichtiger Ausgangspunkt für die Herleitung einer Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte ist die Chapman-Kolmogorov-Gleichung. Ausgehend davon kommt man durch Einführung der sogenannten „Differentiellen Chapman-Kolmogorov-Gleichung“ auf der Ebene von bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung auf die Fokker-Planck-Gleichung, wie dies z.B. Gardiner [2004] beschreibt. Wir folgen stattdessen dem von Risken [1989] beschrittenen Weg.

Risken führt zunächst die bedingten Momente

$$M^{(n)}(\mathbf{x}, t|\tau) := \langle [\boldsymbol{\xi}(t+\tau) - \boldsymbol{\xi}(t)]^n | \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{x} \rangle \quad (2.33a)$$

$$= \int d\mathbf{x}_1 [(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})]^n p(\mathbf{x}_1, t + \tau | \mathbf{x}, t) \quad (2.33b)$$

ein. Die Potenz ist dabei als Tensorprodukt zu verstehen, M^n ist damit ein Tensor n -ter Stufe. Die Konditionierung in (2.33) soll bedeuten, dass für die Berechnung des Mittelwertes nur Wertepaare des Ensembles berücksichtigt werden, für die $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{x}$ erfüllt ist. Mit Hilfe der Momente lassen sich die *Kramers-Moyal-Koeffizienten* $D^{(n)}$ definieren:

$$D^{(n)}(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M^{(n)}(\mathbf{x}, t|\tau) \quad . \quad (2.34)$$

Die Konvergenz der Grenzwerte sei hier zunächst vorausgesetzt. Mit Hilfe der Kramers-Moyal-Koeffizienten kann die zeitliche Entwicklung von PDFs durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit beschrieben werden,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-\nabla)^n D^{(n)}(\mathbf{x}, t) \right\} f(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (2.35)$$

Für Prozesse, die durch Langevin-Gleichungen der Form (2.21) beschrieben werden, lassen sich die Momente und damit die Kramers-Moyal-Koeffizienten bestimmen. Unter Ausnutzung der Markov-Eigenschaften und der Eigenschaften der erzeugenden Wiener-Prozesse gilt:

$$D^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \quad , \quad (2.36a)$$

$$D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \sum_k g_{ik}(\mathbf{x}, t) g_{jk}(\mathbf{x}, t) \quad , \quad (2.36b)$$

$$D^{(i)}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall i > 2 \quad . \quad (2.36c)$$

Wir erhalten in diesem Falle aus der Kramers-Moyal-Entwicklung die *Fokker-Planck-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) = \left(- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right) f(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (2.37)$$

Die Fokker-Planck-Gleichung kann in der gleichen Form auch für bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten formuliert werden,

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') = \left(- \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') \quad . \quad (2.38)$$

Der Koeffizient $\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ wird üblicherweise als *Drift*-, $\mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{x}, t)$ als *Diffusionsfunktion* bezeichnet.

Mit der Fokker-Planck-Gleichung steht uns nun eine Entwicklungsgleichung für PDFs zur Verfügung. Drift- und Diffusionsfunktionen, die in dieser Gleichung als Koeffizienten auftreten, charakterisieren kontinuierliche stochastische Prozesse mit Markov-Eigenschaften und Gauß'schem Rauschen vollständig und stehen in direktem Zusammenhang mit den Koeffizienten der Langevin-Gleichungen.

2.2.6 Entwicklung von Übergangswahrscheinlichkeitsverteilungen

Die Fokker-Planck-Gleichung stellt eine Differentialgleichung für die Entwicklung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte dar. Durch Einführung des Fokker-Planck-Operators

$$\hat{L}_{FP}(\mathbf{x}, t) = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \quad (2.39)$$

lässt sich die Gleichung schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') = \hat{L}_{FP}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') \quad . \quad (2.40)$$

Wir betrachten nun speziell den eindimensionalen Fall mit $x \in \mathbb{R}$. Sind Drift und Diffusion zeitlich konstant und ist $\hat{L}_{FP}(x, t)$ somit nicht explizit zeitabhängig, so ist eine formale Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$p(x, t | x', t') = \exp\left(\hat{L}_{FP}(x)(t - t')\right) \delta(x - x') \quad . \quad (2.41)$$

Dieser Ausdruck lässt sich um $t - t'$ entwickeln. Werden dann nur Glieder bis zur Ordnung $t - t'$ betrachtet, so lassen sich die Argumente von Drift und Diffusion durch x' ersetzen, sodass (2.41) äquivalent ist zu

$$p(x, t | x', t') \approx \exp\left(\left(-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x') + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x')\right)(t - t')\right) \delta(x - x') \quad . \quad (2.42)$$

Unter Verwendung der Fourier-Darstellung der δ -Funktion,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk \exp(ikx) \quad , \quad (2.43)$$

erhält man den Propagator für kleine Zeitinkremente $t - t'$:

$$p(x, t | x', t') \approx \sqrt{\frac{1}{4\pi D^{(2)}(x')(t - t')}} \exp\left(\frac{[x - x' - D^{(1)}(x')(t - t')]^2}{4D^{(2)}(x')(t - t')}\right) \quad . \quad (2.44)$$

Übergangswahrscheinlichkeiten für infinitesimale Zeitinkremente lassen sich für Pfadintegraldarstellungen von stochastischen Prozessen verwenden. Das Ergebnis für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist ähnlich und findet sich zum Beispiel bei Risken [1989].

Für zwei einfache Prozesse lässt sich der Propagator auch für endliche Zeiten exakt angeben, für reine *Diffusionsprozesse* und für den sogenannte *Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse* [Risen 1989].

Diffusionsprozess ($D^{(1)} = 0$ und $D^{(2)}(x) = D = \text{const}$):

$$p(x, t | x', t') = \sqrt{\frac{1}{4\pi D(t - t')}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{4D(t - t')}\right) \quad (2.45a)$$

Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ($D^{(1)}(x) = -\gamma x$ und $D^{(2)}(x) = D = \text{const}$):

$$p(x, t|x', t') = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D (1 - e^{-2\gamma(t-t')})}} \exp\left(-\frac{\gamma (x - e^{-\gamma(t-t')}x')^2}{2D (1 - e^{-2\gamma(t-t')})}\right) \quad (2.45b)$$

Weil diese Propagatoren exakt sind, stellen diese beiden Prozesse beliebige Versuchsobjekte für die Analyse stochastischer Prozesse dar, an denen sich viele Eigenschaften analytisch deduzieren lassen.

2.3 Verallgemeinerung des Grenzwertsatzes der Statistik

Bislang ist dieser Überblick stark am klassischen Stoff der Theorie stochastischer Prozesse orientiert. Durch die Erweiterung des Grenzwertsatzes auf α -stabile Lévy-Verteilungen, die in diesem Abschnitt erfolgen soll, kann nun eine generalisierte Klasse stochastischer Prozesse eingeführt werden, die in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen hat.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen die mathematischen Hintergründe nicht im Detail nachvollzogen werden, weil diese für sich schon ganze Bücher füllen. Eine gut strukturierte Zusammenfassung stellt ein Buch von Gnedenko & Kolmogorov [1954] dar, das als Grundlage für diesen Abschnitt herangezogen wird. Als weiterführende Literatur empfehlen sich ein Übersichtsartikel von Metzler & Klafter [2000], in dessen Anhang die Eigenschaften stabiler Verteilungen zusammengetragen sind, sowie ein Buch von Janicki & Weron [1994].

2.3.1 Stabile Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x)$ wird als *stabil* bezeichnet, falls für alle a_i und b_i mit $a_i \neq 0$ Parameter a und b existieren, sodass

$$\sum_i a_i x_i + b_i \stackrel{d}{=} ax + b \quad (2.46)$$

gilt [Metzler & Klafter 2000]. „ $\stackrel{d}{=}$ “ kennzeichnet hier die *distributionelle Gleichheit* der Summe der gleichverteilten, unabhängigen Zufallsvariablen x_i auf der linken und der Zufallsvariablen x auf der rechten Seite. Distributionelle Gleichheit ist gegeben, falls die beiden Ausdrücke jeweils derselben PDF genügen. Anschaulich bedeutet das, dass eine Verteilung als stabil bezeichnet werden kann, falls sich jede gewichtete Summe von Zufallsvariablen, die dieser Verteilung genügen, statistisch wieder auf Basis der ursprünglichen Verteilung beschreiben lässt, wenn diese durch geeignete Wahl von a und b entsprechend verschoben und skaliert wird.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, die *charakteristische Funktion* $\tilde{f}(k)$ als Fouriertransformierte³ von PDFs einzuführen,

$$\tilde{f}(k) := \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f(x) \quad . \quad (2.47)$$

³Im Rahmen dieser Arbeit werden Fouriertransformierte stets mit einer Tilde $\tilde{\cdot}$ markiert, um die Verwechslung mit Funktionen im Ortsraum zu vermeiden.

Für die charakteristische Funktion \tilde{f}_n einer Summe

$$X(\mathbf{x}|\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b_i \quad (2.48)$$

von n unabhängigen Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion \tilde{f} folgt unmittelbar [Weiss 1994]:

$$\tilde{f}_n(k) = \left\langle e^{ikX(\mathbf{x}|\mathbf{a}, \mathbf{b})} \right\rangle = \left\langle e^{ik \sum_{i=1}^n a_i x_i + b_i} \right\rangle = \prod_{i=1}^n e^{ikb_i} \tilde{f}(a_i k) \quad . \quad (2.49)$$

Falls $b_i = 0$ und für alle Koeffizienten $a_i = 1$ gilt, ergibt sich folgender Ausdruck, der in Abschnitt 5.1.2 zur Beschreibung von zeitkontinuierlichen Prozessen verwendet wird:

$$\tilde{f}_n(k) = \tilde{f}^n(k) \quad . \quad (2.50)$$

Eine wichtige Verteilung, die wir bereits in Abschnitt 2.1.1 kennen gelernt haben, ist die Normalverteilung (2.9) mit der charakteristischen Funktion

$$\tilde{f}_\sigma(k) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}k^2\right) \quad . \quad (2.51)$$

Für die Normalverteilung sieht man unter Nutzung von (2.49), dass

$$a = \frac{\prod_i a_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2}} \quad \text{und} \quad (2.52a)$$

$$b = \sum_i b_i \quad (2.52b)$$

die Bedingung (2.46) für alle Parameter a_i und b_i erfüllen. Die Normalverteilung ist also stabil.

Eine allgemeine Klasse von charakteristischen Funktionen \tilde{f} , die der Bedingung (2.46) genügen und damit stabil sind, ist z.B. gegeben durch:

$$\begin{aligned} \log \tilde{f}_{\alpha, \beta}^{\gamma, c}(k) &= i\gamma k - c|k|^\alpha \left\{ 1 - i\beta \frac{k}{|k|} \omega(k, \alpha) \right\} \quad \text{mit} \quad (2.53) \\ \omega(k, \alpha) &= \begin{cases} \alpha \neq 1 & : \quad \tan \frac{\pi\alpha}{2} \\ \alpha = 1 & : \quad \frac{2}{\pi} \log |k| \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

Die inversen Fouriertransformierten von $\tilde{f}_{\alpha, \beta}^{\gamma, c}(k)$, $f_{\alpha, \beta}^{\gamma, c}(x)$, werden als α -stabile Lévy-Verteilungen⁴ bezeichnet und im nächsten Abschnitt noch genauer charakterisiert. Die Parameter α , β , γ und c lassen sich wie folgt verstehen:

- $\gamma \in \mathbb{R}$ stellt eine Verschiebung der Verteilung f um γ dar.
- $0 < \alpha \leq 2$ beeinflusst das asymptotische Verhalten für $x \gg 1$ und wird daher *charakteristischer Exponent* genannt. Für $\alpha = 2$ enthält diese Parametrisierung die bereits als stabile Verteilung identifizierte Gauß'sche Normalverteilung. Für $\alpha < 2$ führt die asymptotische Proportionalität zu $|x|^{-1-\alpha}$ zu Verteilungen mit verschwindendem zweiten bzw. ersten Moment, die einer gesonderten Diskussion im kommenden Abschnitt bedürfen.

⁴Für die PDFs $f_{\alpha, \beta}^{\gamma, c}(x)$ wird abkürzend auch die Bezeichnung „Lévy-Verteilungen“ verwendet, wie es in Arbeiten zu in der Physik und der Chemie üblich ist.

- $-1 \leq \beta \leq 1$ legt die Schiefe von f fest. Für $\beta = 0$ ist die Verteilung symmetrisch und die ungeraden zentrierten Momente M_{2n+i}^z verschwinden. Für $\beta = 1$ bzw. $\beta = -1$ und $\alpha \neq 2$ ist f vollständig schief und damit (für $\gamma = 0$) auf den negativen bzw. positiven Halbraum der reellen Zahlen beschränkt.
- $c > 0$ stellt schließlich einen Skalierungsfaktor dar.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass für Lévy-Verteilungen in der Literatur viele verschiedene Parametrisierungen existieren. Wir werden uns weitgehend an die Notation von Gnedenko & Kolmogorov [1954] sowie Metzler & Klafter [2000] halten, die in Verbindung mit fraktionalen Prozessen, die ab Kapitel 5 untersucht werden, gebräuchlich ist [vgl. z.B. Barkai 2001]. Weil im Folgenden neben der Normalverteilung im Wesentlichen α -stabile Verteilungen mit $\alpha < 1$ auftreten werden, wurde das Vorzeichen von β in Gleichung (2.53) im Unterschied zu den oben genannten Quellen jedoch umgekehrt. Diese Notation findet sich z.B. auch bei Yanovsky u.a. [2000]. Der Gewinn dieser leichten Modifikation ist, dass die verbleibenden Unterschiede zu den Notationen von Janicki & Weron [1994], Weron [2001] sowie Nolan [2007] hauptsächlich den Skalierungsfaktor c betreffen. An dieser Stelle sei schon erwähnt, dass Nolan unentgeltlich eine Reihe von Softwareprogrammen sowie ein Paket für Mathematica[®] bereitstellt, die sich – nach geeigneter Anpassung der Notation – zur Berechnung obiger Verteilungsfunktionen und einiger statistischer Eigenschaften nutzen lassen [Rimmer & Nolan 2004]. Auf diese Software wurde zur Erzeugung der in diesem Kapitel abgebildeten Grafiken zurückgegriffen.

2.3.2 Lévy-Verteilungen

Parametrisierung

Zur allgemeinen Klassifizierung von Lévy-Verteilungen durch Gleichung (2.53) sind vier Parameter nötig. Während die Parameter α und β die Verteilungsfunktion qualitativ beeinflussen, stellen Skalierung und Verschiebung der Verteilung, die durch γ und c bewirkt werden, vergleichsweise triviale Operationen dar. Zur Vereinfachung der Parametrisierung sollen diese Parameter daher eliminiert werden, wie es z.B. auch in der Arbeit von Metzler & Klafter [2000] geschieht.

Wir setzen $\gamma = 0$ und beschränken uns zunächst auf den Fall $\alpha \neq 1$. Die Gleichung (2.53) lautet dann

$$\log \tilde{f}_{\alpha,\beta}^{0,c}(k) = -c |k|^\alpha \left\{ 1 - i\beta \frac{k}{|k|} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right\} . \quad (2.54)$$

Die Umformung des Exponenten von \tilde{f} in polare Darstellung liefert

$$\log \tilde{f}_{\alpha,\beta}^{0,c}(k) = -c \sqrt{1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} |k|^\alpha \exp \left(-i \frac{k}{|k|} \operatorname{atan} \left(\beta \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right) . \quad (2.55)$$

Wird nun speziell

$$c = 1 / \sqrt{1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (2.56)$$

gewählt, so vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\log \tilde{f}_{\alpha,\beta}(k) = -|k|^\alpha \exp \left(-i \frac{k}{|k|} \operatorname{atan} \left(\beta \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right) . \quad (2.57)$$

Diese Form, die nur noch von den Konstanten α und β abhängt, wird von nun an als Parametrisierung für Lévy-Verteilungen zugrunde gelegt. Aufgrund der Symmetrien

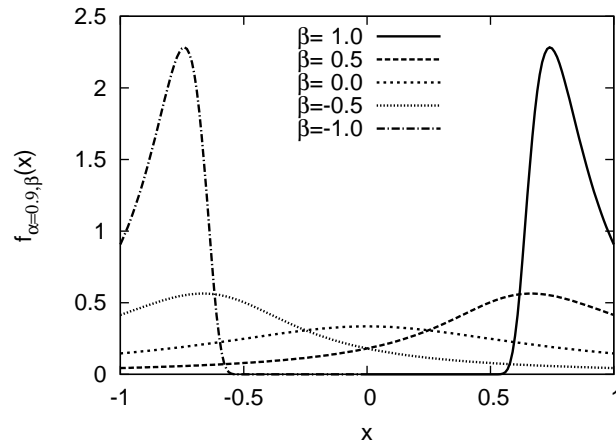


ABBILDUNG 2.3: Beispiele für Lévy-Verteilungen: Einfluss der Schiefe β für den charakteristischen Exponenten $\alpha = 0.9$. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Verteilung für $\beta = 0$ symmetrisch ist. Die Verteilungen mit $\beta = -1$ (ganz links) und $\beta = 1$ (ganz rechts) entsprechen jeweils Verteilungen mit maximaler Schiefe.

von Real- und Imaginärteil des Exponenten vereinfacht sich die inverse Fourier-Transformation. Die Lévy-Verteilungen $f_{\alpha,\beta}$ lassen sich damit explizit berechnen als

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} dk \exp \left[-ikx - |k|^\alpha \exp \left(-i \operatorname{atan} \left(\beta \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right) \right] \right\} . \quad (2.58)$$

Der Koeffizient von $|k|^\alpha$ ist hier eine Konstante, die nur von der Wahl von α und β abhängt. Metzler & Klafter vereinfachen die Form von $\tilde{f}_{\alpha,\beta}$ und $f_{\alpha,\beta}$ durch Einführung von

$$\tilde{\beta} = \frac{2}{\pi} \operatorname{atan} \left(\beta \tan \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \quad \text{mit} \quad -\alpha < \tilde{\beta} < \alpha . \quad (2.59)$$

Um Konsistenz zu den gebräuchlichen Notationen [Gnedenko & Kolmogorov 1954; Janicki & Weron 1994; Nolan 2007; Weron 2001; Yanovsky u.a. 2000] zu wahren wollen wir jedoch bei der ursprünglichen Wahl von β bleiben.

Die Verteilungen $f_{\alpha,\beta}$ in der Form von (2.58) entsprechen den Verteilungen in der Parametrisierung von Rimmer & Nolan [2004], wenn die von ihnen verwendeten Parameter γ und δ wie folgt gewählt werden:

$$\gamma = \left(1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{-\frac{1}{2\alpha}} , \quad (2.60a)$$

$$\delta = 0 . \quad (2.60b)$$

Zur Berechnung von $f_{\alpha,\beta}$ lassen sich damit auch die Softwarepakete von Rimmer & Nolan [2004] verwenden.

Der Parameter β kontrolliert die Schiefe der Verteilung. In Abbildung 2.3 sind für den charakteristischen Exponenten $\alpha = 0.9$ einige Verteilungen für verschiedene β dargestellt. Verteilungen mit $\beta = 0$ sind symmetrisch um $x = 0$. Für $\alpha = 1$ erhält man eine Cauchy- oder auch Lorentz-Verteilung, deren Form sich explizit angeben lässt [Metzler & Klafter 2000].

Für $\beta = 1$ verschwindet f im negativen Halbraum. $f_{\alpha,1}$ wird daher auch *vollständig schiefe Verteilung* genannt. Verteilungen dieser Form spielen zur Konstruktion

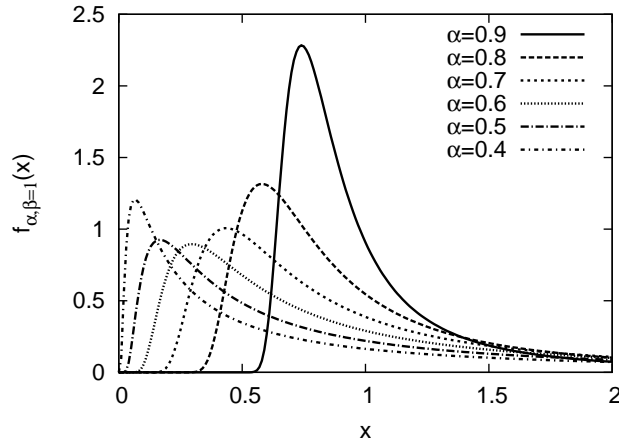


ABBILDUNG 2.4: Beispiel für Lévy-Verteilungen mit maximaler Schiefe: Einfluss des charakteristischen Exponenten auf die Form der Verteilung. Für $\alpha \rightarrow 0$ konvergiert die Verteilung gegen $\delta(x)$, im Grenzfall $\alpha \rightarrow 1$ gegen $\delta(x - 1)$. Der Übergang zwischen den Verteilungen erfolgt kontinuierlich.

von Subordinationsprozessen, wie sie ab Kapitel 5 verwendet werden, eine wichtige Rolle, weil sie umkehrbare stochastische Prozesse erzeugen. Leider werden schiefe Verteilungen in der physikalischen Literatur häufig nur stiefmütterlich behandelt. Aus der Gleichung (2.58) erhält man speziell für $\beta = 1$:

$$f_{\alpha,1}(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} dk \exp \left[-ikx - |k|^\alpha \exp \left(-i \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] \right\} . \quad (2.61)$$

Einige Beispiele für diese Verteilungen mit verschiedenen Werten von α finden sich in Abbildung 2.4. Aufgrund der speziellen Wahl der Skalierung (vgl. Gleichung (2.56)) liegt das Maximum für $0 < \alpha < 1$ immer zwischen 0 und 1. Auf der Basis von Gleichung (2.61) ist $f_{\alpha,1}$ auch für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ definiert. Es ergibt sich

$$f_{0,0}(x) = \delta(x) , \quad (2.62a)$$

$$f_{1,0}(x) = \delta(1 - x) . \quad (2.62b)$$

Dieses Verhalten wird sich später als außerordentlich hilfreich erweisen.

Asymptotische Eigenschaften

Die Momente einer Verteilung lassen sich direkt aus der charakteristischen Funktion \tilde{f} bestimmen als

$$\langle x^n \rangle = (-i)^n \left. \frac{d^n \tilde{f}(k)}{dk^n} \right|_{k=0} . \quad (2.63)$$

Die Anwendung auf (2.57) zeigt sofort, dass für $f_{\alpha,\beta}$ mit $\alpha < 2$ das zweite Moment und für $\alpha < 1$ die ersten beiden Momente der Verteilung divergieren.

Dieses Verhalten ist eng verknüpft mit dem asymptotischen Verhalten für $|x| \gg 1$, das bereits in Abschnitt 2.3.1 erwähnt wurde: Für $\alpha < 2$ zeigen Lévy-Verteilungen asymptotisch einen Abfall gemäß einem Potenzgesetz,

$$f_{\alpha,\beta}(x) \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}} . \quad (2.64)$$

Für $\beta = 1$ ergibt sich z.B. für das n -te Moment dann

$$\langle x^n \rangle \approx C_0(X) + C_1 \int_X^\infty dx \frac{x^n}{x^{1+\alpha}} = C_0(X) + C_1 \int_X^\infty dx x^{n-1-\alpha} \quad . \quad (2.65)$$

$X \gg 1$ soll hier geeignet gewählt sein, $C_0(X)$ und C_1 sind Konstanten. Das Integral divergiert für $1 < \alpha < 2$ offensichtlich für $n > 1$ und für $\alpha \leq 1$ für alle $n > 0$. Aufgrund der von uns gewählten Skalierungsfunktion (2.56) existiert das erste Moment für die hier betrachteten $f_{\alpha,\beta}$ im Sinne von (2.58) auch für $\alpha = 1$.

Für $\alpha < 1$ ergeben sich folglich Lévy-Verteilungen, für die der Mittelwert nicht existiert. In der Praxis existieren Mittelwert und Varianz jedoch auf jeder endlichen Menge von Messungen oder Zufallszahlen. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen und „unphysikalische“ Werte auszuschließen, werden für die Modellierung gemessener Daten gelegentlich *abgeschnittene Lévy-Verteilungen* (im englischen „truncated Lévy-distributions“) $f_{\alpha,\beta}^X$ verwendet, die mit einer geeigneten Normierungskonstanten $\mathcal{N}_{\alpha,\beta}^X$ definiert sind als

$$f_{\alpha,\beta}^X(x) := \mathcal{N}_{\alpha,\beta}^X \begin{cases} |x| \leq X & : f_{\alpha,\beta}(x) \\ |x| > X & : 0 \end{cases} \quad . \quad (2.66)$$

Auf diese Verteilung werden wir im Rahmen der in Kapitel 7 vorgestellten Modellierung zurückgreifen.

2.3.3 Verallgemeinerter Grenzwertsatz

Auf Seite 7 ist bereits darauf hingewiesen worden, dass sich die Summen unabhängiger Zufallszahlen häufig durch Normalverteilungen beschreiben lassen. Diese Aussage soll nun konkretisiert und das Grenzwertverhalten mit Hilfe der in den vergangenen Abschnitten eingeführten α -stabilen Lévy-Verteilungen verallgemeinert werden.

Es werden unabhängige Zufallszahlen ξ_1, \dots, ξ_n , die derselben PDF f_ξ genügen, betrachtet. Nach Gnedenko & Kolmogorov [1954] wird eine Verteilung f nun als *Grenzverteilung* von f_ξ bezeichnet, wenn für geeignete Konstanten A_n und B_n die Summen ζ_n mit

$$\zeta_n := \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - A_n \quad (2.67)$$

im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ durch die Verteilung f beschrieben werden. Existiert ein solches f , lassen sich – nach geeigneter Skalierung und Verschiebung – Summen von Zufallszahlen also im Grenzwert unendlich vieler Summanden durch die Verteilung f darstellen. Ist f_ξ eine stabile Verteilung, so gilt trivialerweise $f = f_\xi$. Ferner lässt sich zeigen, dass die Gauß'sche Normalverteilung die Grenzverteilung aller Verteilungen f_ξ mit endlicher Varianz ist [Gnedenko & Kolmogorov 1954]. Diese Tatsache, die häufig als *Grenzwertsatz der Statistik* oder – aufgrund der Proportionalität von B_n zu \sqrt{n} und der damit verbundenen verschwindenden relativen Abweichung vom Mittelwert – auch als *Gesetz der großen Zahlen* bezeichnet wird, spielt in der Natur eine große Rolle und ist in der klassischen und angewandten Statistik von zentraler Bedeutung.

Existiert die Varianz von f_ξ nicht, so lässt sich die Verteilung – wie im letzten Abschnitt motiviert – asymptotisch durch ein Potenzgesetz mit dem führenden Exponenten $1 + \tilde{\alpha}$ beschreiben. Es lässt sich zeigen, dass die Grenzverteilung in diesem Fall eine Lévy-Verteilung mit charakteristischem Exponenten $\alpha = \tilde{\alpha}$ ist [Gnedenko & Kolmogorov 1954].

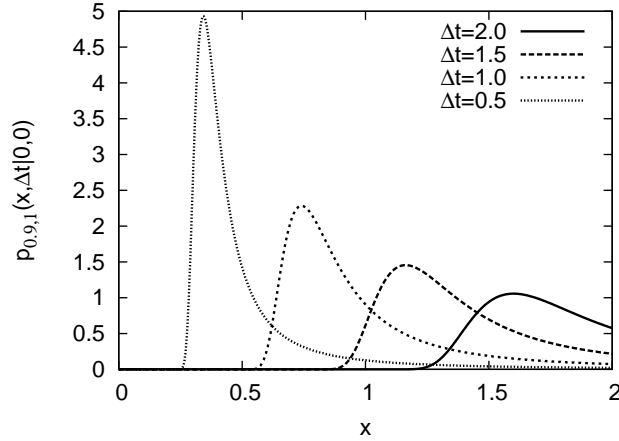


ABBILDUNG 2.5: Beispiele für den Propagator von Lévy-Prozessen, der in Gleichung (2.71) gegeben ist, für $\alpha = 0.9$ und verschiedene Zeitinkremente Δt

Im letzten Abschnitt sind am Rande außerdem noch abgeschnittene Lévy-Verteilungen eingeführt worden. Weil diese Verteilungen für $|x| > X$ verschwinden, existieren alle Momente. Aus diesem Grunde konvergieren Summen von Zufallszahlen dieser Verteilungen gegen eine Normalverteilung. Abhängig von der Wahl des Schwellwertes X kann diese Konvergenz unter Umständen jedoch sehr langsam erfolgen [Gnedenko & Kolmogorov 1954; Koponen 1995].

2.3.4 Verallgemeinerte Langevin-Gleichungen

Stabile Verteilungen haben eine weitere wichtige Eigenschaft, die für die Konstruktion von kontinuierlichen Zufallsprozessen eine entscheidende Rolle spielen; sie sind *teilbar*. Betrachten wir die skalierte Summe

$$a_n \sum_{i=1}^n x_i =: y \quad (2.68)$$

von Zufallszahlen x_i , die der Verteilung f_x mit charakteristischer Funktion \tilde{f}_x bzw. f_y mit charakteristischer Funktion \tilde{f}_y genügen sollen. Aus Abschnitt 2.3.1 wissen wir, dass für die PDFs nach Fourier-Transformation aus obigem Zusammenhang

$$\tilde{f}_x^n(a_n k) = \tilde{f}_y(k) \quad \forall k \quad (2.69)$$

folgt. Sei nun $f_y(y) = f_{\alpha,\beta}(y)$ eine α -stabile Verteilung, so lässt sich diese Forderung durch

$$f_x(x) = f_{\alpha,\beta}(x) \quad \text{und} \quad a_n = n^{-1/\alpha} \quad (2.70)$$

erfüllen. Jede Zufallszahl, die einer stabilen Verteilung genügt, lässt sich folglich als skalierte Summe von unabhängigen Zufallszahlen derselben Verteilung darstellen und ist damit teilbar.

Für die Normalverteilung folgt aus der Skalierung (2.70), dass die Summe von n normalverteilten Zufallszahlen mit \sqrt{n} skaliert. Setzen wir nun $n \sim t/dt$, so folgt unmittelbar die Skalierung von Wiener-Prozessen mit \sqrt{t} , die in Abschnitt 2.2.4 bereits verwendet wurde.

In Abschnitt 2.2.6 sind für zwei einfache stochastische Prozesse Propagatoren für

endliche Zeiten angegeben. Für Prozesse, die dynamisch von Lévy-verteiltem Rauschen getrieben werden, existiert als Verallgemeinerung die Übergangswahrscheinlichkeit für endliche Zeiten ebenfalls in analytischer Form [Friedrich u.a. 2008; Janicki & Weron 1994],

$$p_{\alpha,\beta}(x, t|x', t') = \frac{1}{(t-t')^{1/\alpha}} f_{\alpha,\beta}\left(\frac{x-x'}{(t-t')^{1/\alpha}}\right) . \quad (2.71)$$

Für $\alpha = 2$ erhält man (2.45a) mit $D = 1$.

Neben von normalverteiltem Rauschen können nun natürlich auch von Lévy-Rauschen getriebene stochastische Prozesse betrachtet werden. Wir wollen uns im Rahmen dieser Arbeit auf additives Rauschen beschränken. Eine Verallgemeinerung der Langevin-Gleichung sieht dann wie folgt aus,

$$dx(t) = D^{(1)}(x)dt + DdL_{\alpha,\beta}(t, dt) . \quad (2.72)$$

$dL_{\alpha,\beta}(t, dt)$ stellt hier – analog zum Wiener-Prozess – das Inkrement eines stabilen Lévy-Prozesses,⁵ dessen Propagator durch (2.71) gegeben ist, dar.

In Analogie zu (2.32) lässt sich auch die verallgemeinerte Langevin-Gleichung diskret darstellen. Unter Berücksichtigung der Skalierung der Zufallszahlen lassen sich Lévy-Prozesse dann numerisch erzeugen als

$$x(t + \tau) = x(t) + \tau D^{(1)}(x) + \tau^{1/\alpha} D\Gamma_{\alpha,\beta}(t) . \quad (2.73)$$

$\Gamma_{\alpha,\beta}$ stellen hier unkorrelierte, unabhängige Zufallszahlen dar, die jeweils der Verteilung $f_{\alpha,\beta}$ genügen. Zur Erzeugung geeigneter Zufallszahlen lassen sich unter Verwendung der Parameter (2.60) die von Nolan bereitgestellten Pakete nutzen. Effiziente Verfahren werden außerdem von Janicki & Weron [1994] und Weron [2001] geschildert. Diese Algorithmen sind in Anhang A speziell für vollständig schiefe Lévy-Verteilungen mit $\beta = 1$ an die hier verwendete Parametrisierung (2.61) angepasst.

Der Wiener-Prozess ist mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig aber an keiner Stelle differenzierbar. Die Ursache für das stetige Verhalten liegt in der endlichen Varianz der Normalverteilung, die dazu führt, dass die skalierten Inkremente $\sqrt{\tau}\Gamma(t)$ in (2.32) gegen 0 streben,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left\langle (\sqrt{\tau}\Gamma(t))^2 \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \times 2 = 0 . \quad (2.74)$$

Lévy-Verteilungen weisen aufgrund des asymptotischen Potenzverhaltens eine endliche Wahrscheinlichkeit für extreme Inkremente auf. Die Varianz der infinitesimalen Inkremente muss für $\alpha < 2$ daher nicht zwangsläufig verschwinden,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left\langle \left(\tau^{1/\alpha} \Gamma_{\alpha,\beta}(t) \right)^2 \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{1/\alpha} \times \infty = ? . \quad (2.75)$$

Aus diesem Grund treten bei Lévy-Prozessen mit endlicher Wahrscheinlichkeit Unstetigkeiten auf. Sie unterscheiden sich damit fundamental von Wiener-Prozessen.

⁵In der Mathematik werden alle stationären stochastischen Prozesse, die bei 0 beginnen und rechtsseitig stetig sind, als „Lévy-Prozess“ bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit werden in diesem Sinne nur „streng α -stabile“ Lévy-Prozesse betrachtet [vgl. z.B. Sato 1999, S. 69], die sich dadurch auszeichnen, dass die zugrundeliegenden Verteilungen α -stabil sind und ohne eine Translation (die z.B. in (2.57) für $\gamma \neq 0$ auftreten würde) skalieren. In der Physik ist mit „Lévy-Prozessen“ hingegen i.A. nur die Klasse der streng stabilen Lévy-Prozesse gemeint. An letzterer Nomenklatur werden wir uns im Folgenden orientieren.

Kapitel 3

Drift- und Diffusionsprozesse

Das Ziel bei der Planung klassischer naturwissenschaftlicher Laborexperimente ist es in der Regel, die Anzahl der Freiheitsgrade der zu untersuchenden Systeme im Voraus zu minimieren, um auf möglichst einfachem Wege vollständige und reproduzierbare Beschreibungen der Eigenschaften zu erlangen. Ist eine Reduktion auf eine wenige Freiheitsgrade möglich, so folgt die Dynamik der verbleibenden Freiheitsgrade häufig deterministischen Gesetzen. Eine Ausnahme bilden hier z.B. kernphysikalische Experimente, die auf zufälligen Zerfallsprozessen einzelner Atome beruhen und sich deshalb nicht exakt vorhersagen lassen. Das Verhalten von Ensembles von Zerfallsprozessen lässt sich jedoch deterministisch beschreiben. Ähnlich sieht es für die Gleichgewichtsthermodynamik aus, die eine exakte Beschreibung der Wechselwirkungen von intensiven und extensiven Variablen thermodynamischer Systeme darstellt.

Im Gegensatz dazu weisen viele sogenannte „komplexe Systeme“, die in der Einleitung bereits eingeführt worden sind, eine sehr hohe Anzahl relevanter dynamischer Freiheitsgrade auf. Unter gewissen Umständen sind einige wenige *Ordnungsparameter* ausreichend zur Charakterisierung solcher Systeme und bestimmen die Dynamik der verbleibenden mikroskopischen Freiheitsgrade im statistischen Sinne vollständig. Die Ordnungsparameter selbst genügen dann stochastischen Differentialgleichungen und lassen sich häufig auf der Basis von Drift- und Diffusionsfunktionen charakterisieren.

In diesem Kapitel wird zunächst ein Verfahren zur direkten Schätzung von Drift- und Diffusionsfunktionen aus gemessenen Daten diskutiert, das in den letzten Jahren durch Friedrich und Peinke eingeführt und weiterentwickelt worden ist. Abschnitt 3.2 widmet sich der Maximum-Likelihood-Schätzung von Drift- und Diffusionsfunktionen und führt schließlich auf eine schon im Rahmen der Diplomarbeit entwickelte, iterative Methode, die eine Erweiterung der direkten Schätzungen darstellt. In Abschnitt 3.3 beschäftigen wir uns mit der Charakterisierung von stochastischen Prozessen in der Skala, die sich als hilfreiches Mittel insbesondere zur Beschreibung von komplexen Strukturen in turbulenten Strömungen erwiesen haben und sich mit den gleichen Methoden untersuchen lassen.

3.1 Bestimmung von Drift und Diffusion aus Messdaten

Im Rahmen der Einführung der Fokker-Planck-Gleichung in Abschnitt 2.2.5 haben wir bereits gesehen, dass sich Drift und Diffusion als Kramer-Moyal-Koeffizienten niedrigster Ordnung über bedingte Momente stochastischer Prozesse definieren lassen. Aus (2.33) und (2.34) ergibt sich speziell für die Definitionen von Driftvektor

$D^{(1)}$ und Diffusionsmatrix $D^{(2)}$ eines stochastischen Prozesses $\mathbf{x}(t)$

$$D^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M^{(1)}(\mathbf{x}, t|\tau) \quad \text{und} \quad (3.1a)$$

$$D^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} M^{(2)}(\mathbf{x}, t|\tau) \quad , \quad (3.1b)$$

wobei die bedingten Momente $M^{(n)}$ gegeben sind als

$$M^{(1)}(\mathbf{x}, t|\tau) := \langle [\mathbf{x}(t+\tau) - \mathbf{x}(t)] | \mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \rangle \quad \text{und} \quad (3.2a)$$

$$M^{(2)}(\mathbf{x}, t|\tau) := \left\langle [\mathbf{x}(t+\tau) - \mathbf{x}(t)] [\mathbf{x}(t+\tau) - \mathbf{x}(t)]^T | \mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \right\rangle . \quad (3.2b)$$

Alternativ lassen sich die bedingten Momente auch direkt aus den Übergangswahrscheinlichkeitsdichten $p(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_0, \tau)$ zum Zeitinkrement τ gewinnen als

$$M^{(1)}(\mathbf{x}, t|\tau) := \int d\mathbf{x}_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) p(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_0, \tau) \quad \text{und} \quad (3.3a)$$

$$M^{(2)}(\mathbf{x}, t|\tau) := \int d\mathbf{x}_1 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})^T p(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_0, \tau) . \quad (3.3b)$$

Für praktische Anwendungen stellt natürlich der Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$, der für die Auswertung von (3.1) erforderlich ist, eine Schwierigkeit dar. Siegert, Friedrich und Peinke konnten jedoch zeigen, dass sich diese Ausdrücke sehr wohl zur direkten Schätzung von Drift und Diffusion aus gegebenen Messungen $x(t)$ eignen, wenn die Samplingfrequenz hoch genug ist und die mikroskopischen Fluktuationen von x hinreichend gut abbildet [Siegert 2001; Siegert u.a. 1998]. Dann kann der Limes hoher Samplingfrequenzen in (3.1) durch geeignete Extrapolationsverfahren ausgewertet werden.

Die Anwendung dieses Verfahrens, im Folgenden kurz *direkte Schätzung* genannt, bietet gegenüber parametrischen Schätzverfahren wesentliche Vorteile: Für die Schätzung von Drift- und Diffusionsprozessen werden die Daten zur Auswertung der in den Momenten auftretenden Bedingungen üblicherweise sogenannten *Bins* zugewiesen, also diskretisiert. Für jeden Bin i lässt sich der Wert von Drift und Diffusion an der Stelle x_i dann mit Hilfe von (3.1) einzeln ermitteln, sodass sich der Verlauf von Drift- und Diffusionsfunktionen aus der Auswertung der Ergebnisse für verschiedene i ergibt. Folglich sind a priori keine Annahmen über die funktionalen Formen von Drift und Diffusion nötig. Darüber hinaus ist der numerische Aufwand sehr gering, sodass sich die Schätzung kostengünstig und – falls erforderlich – auch in Echtzeit durchführen lässt. Aus diesem Grunde hat sich in den vergangenen zehn Jahren ein breites Anwendungsspektrum für derartige Analysemethoden aufgetan. Eine kleine Auswahl einiger aktueller Themengebiete und Arbeiten, die zur Beschreibung komplexer Systeme auf die hier beschriebene direkte Schätzung der Koeffizienten zurückgreifen, sei kurz vorgestellt:

- **Medizinische Systeme**

- Dynamik des menschlichen Kortex (Epilepsie)¹
- Schwankungen der Herzfrequenz²

¹Prusseit & Lehnertz [2007]; Siegert [2001]

²Ghasemi u.a. [2006]; Kuusela [2004]

- **Sogenannte „Life Sciences“**
 - Statistik auf Devisen-Märkten³
 - Dynamik des Straßenverkehrs⁴
 - Leistungsabgabe von Windkraftanlagen⁵
- **Physikalische Systeme**
 - Turbulente Strömungen⁶
 - Analyse rauer Oberflächen⁷

Für eine detaillierte Beschreibung der Vorgehensweise zur Durchführung des Schätzverfahrens, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, sei insbesondere auf Kleinhans [2005] und Friedrich u.a. [2008] verwiesen.

Die bedingten Momente lassen sich entweder auf der Basis einer Itô-Taylor-Entwicklung der zugrundeliegenden Langevin-Gleichungen [Sura & Barsugli 2002] oder auf der Basis der Fokker-Planck-Gleichung oder des Propagators (2.44) [Friedrich u.a. 2002; Kleinhans 2005; Kleinhans & Friedrich 2007c] um den Grenzwert $\tau = 0$ entwickeln. Die Berücksichtigung von Termen bis zur zweiten Ordnung in τ liefert für $x \in \mathbb{R}$:

$$M^{(1)} = \tau D^{(1)} + \frac{\tau^2}{2} \left(D^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)} + D^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(1)} \right) \quad (3.4a)$$

$$M^{(2)} = 2\tau D^{(2)} + \tau^2 \left[D^{(1)} D^{(1)} + 2D^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)} + D^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)} + D^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)} \right] . \quad (3.4b)$$

Die Terme $\sim \tau^2$ verschwinden im Grenzübergang $\lim_{\tau \rightarrow 0} M^{(n)}(x, \tau)/\tau$. Eine übliche Vorgehensweise zur Durchführung der Grenzwertbildung in (3.1) ist daher eine Untersuchung der bedingten Momente (3.2) für die kleinsten Werte von τ , die verfügbar sind. Lässt sich der funktionale Verlauf sinnvoll durch eine Polynomfunktion niedriger Ordnung in τ annähern, die für $\tau \rightarrow 0$ verschwindet, so werden für $\lim_{\tau \rightarrow 0} M^{(n)}(x, \tau)/\tau$ die Koeffizienten der linearen Terme verwendet [Siefert u.a. 2003].

Zwei wesentliche Probleme ergeben sich bei der Anwendung der direkten Schätzung von Drift und Diffusion: Zunächst einmal muss sichergestellt werden, dass sich das zugrundeliegende System überhaupt durch Langevin-Gleichungen der Form (2.21) beschreiben lässt, damit eine Schätzung von Drift und Diffusion zweckmäßig ist. Diese Frage ist u.a. eng mit den Markov-Eigenschaften der zugrundeliegenden Daten verknüpft, die in Kapitel 4 im Detail diskutiert werden. Darüber hinaus ist die Durchführung des Grenzübergangs $\tau \rightarrow 0$ ein kritischer Teil der Prozedur. Für das Verständnis der Konvergenz des Grenzwertes lassen sich prinzipiell die Entwicklungen der bedingten Momente heranziehen [Ragwitz & Kantz 2001]. Weil diese höheren Ordnungen jedoch offensichtlich von Ableitungen von Drift- und Diffusionsfunktionen abhängen, ist eine selbstkonsistente, direkte Durchführung einer Schätzung auf Basis der Entwicklungen für kleine τ kaum durchführbar [Friedrich u.a. 2002].

Ist aufgrund unzureichender Samplingfrequenz der zu untersuchenden Daten eine Grenzwertbildung nicht praktikabel, so kann alternativ ein iteratives Verfahren zur

³Friedrich u.a. [2000]; Nawroth [2007]; Nawroth & Peinke [2007]

⁴Kriso u.a. [2002]; Lubashevsky u.a. [2007]

⁵Anahua [2007]; Anahua u.a. [2004]; Böttcher u.a. [2007b]; Gottschall & Peinke [2007, 2008]

⁶Böttcher u.a. [2003]; Lück & Peinke [1999]; Nawroth u.a. [2007]; Renner u.a. [2001a, b]

⁷Jafari u.a. [2003]; Wächter u.a. [2003, 2004b]

Optimierung des Ergebnisses angewendet werden, das bereits im Rahmen der Diplomarbeit vorgestellt wurde [Friedrich u.a. 2005; Kleinhans 2005; Kleinhans & Friedrich 2005; Kleinhans u.a. 2005]. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass diese Methode formal äquivalent zur Schätzung von Drift und Diffusion auf Basis von Maximum-Likelihood-Methoden ist.

3.2 Optimiertes Verfahren basierend auf Maximum-Likelihood-Schätzern

Wir haben uns in diesem Kapitel bislang mit einer Methode zur nicht-parametrischen Schätzung von Drift- und Diffusionsfunktionen aus gemessenen Daten beschäftigt. Häufig besteht aber auch das Problem, ein bestehendes Modell an eine bestimmte Realisierung anzupassen. Hier haben sich Maximum-Likelihood-Methoden etabliert, die den (z.B. unter der durchgeführten Messung) wahrscheinlichsten Satz von Parametern suchen. Sie lassen sich mit Hilfe von Bayes Theorem, das wir in Abschnitt 2.1.4 kennen gelernt haben, verstehen.

Nehmen wir an, wir hätten ein Modell für den Ausgang eines Zufallsexperiments, dessen Ergebnis x von einem Parameter A abhängt und der Verteilung $p(x|A)$ genügt. A tritt in dieser Verteilung als Bedingung auf. Die Wahrscheinlichkeit für die Realisierung einer bestimmten Folge unabhängiger Messungen x_1, \dots, x_n berechnet sich nun als

$$p(x_1, \dots, x_n|A) := p(x_1|A) \times \dots \times p(x_n|A) \quad . \quad (3.5)$$

Gemäß dem Bayes'schen Theorem lässt sich dieser Ausdruck umstellen zu

$$p(A|x_1, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_n|A) \frac{f(A)}{f(x_1, \dots, x_n)} \quad . \quad (3.6)$$

Diese bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte ist nun ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Realisierung von x_1, \dots, x_n durch den Parameter A erzeugt wurde. Wenn a priori keine Präferenz für den Parameter A besteht, so kann man $f(A) \approx \text{const}$ setzen. Weil $f(x_1, \dots, x_n)$ nicht von A abhängt, lässt sich dann vereinfacht

$$p(A|x_1, \dots, x_n) \sim p(x_1, \dots, x_n|A) \quad (3.7)$$

verwenden. Die Maximierung von (3.7) unter Variation von A liefert als Ergebnis nun den wahrscheinlichsten Wert von A unter der gegebenen Realisierung von x_1, \dots, x_n .

Zerfällt die PDF $p(x_1, \dots, x_n|A)$ – wie in dem hier betrachteten Beispiel – in viele Faktoren, so bietet sich häufig die Maximierung des logarithmierten Ausdrucks

$$\log [p(A|x_1, \dots, x_n)] \sim \log [p(x_1, \dots, x_n|A)] = \sum_i \log [p(x_i|a)] \quad (3.8)$$

an.

Timmer hat bereits vor einigen Jahren auf die Möglichkeit hingewiesen, Propagatoren von kontinuierlichen Markov-Prozessen für endliche Zeitinkremente, die z.B. durch die Integration von Fokker-Planck-Gleichungen bestimmt werden können, bezüglich der Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer beobachteten Realisierung eines Prozesses zu optimieren [Timmer 2000]. Wählt man die Parameter so, dass diese Wahrscheinlichkeit maximal wird, so nennt man ein solches Vorgehen *Maximum-Likelihood-Optimierung*.⁸ Timmer geht in seiner Arbeit jedoch nicht genauer auf die Parametrisierung der Drift- und Diffusionsfunktionen ein und bemängelt, dass

⁸Ohne Übersetzung aus dem Englischen übernommen. „Likelihood“ ist hier im Sinne von „Wahrscheinlichkeit“ zu verstehen

die Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten sehr aufwändig ist. Der Ansatz, der nun vorgestellt wird, kann diese beiden Probleme durch Nutzung der Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt bzw. durch Rückführung auf die bereits bestehende iterative Methode auf Basis des Kullback-Leibler-Abstandes lösen. Er ist in ähnlicher Form im Jahre 2007 in den „Physics Letters A“ erschienen [Kleinhans & Friedrich 2007b].

3.2.1 Untersuchung von Ensembles von Messungen

Wir betrachten Zeitserien $\mathbf{x}(t_0), \dots, \mathbf{x}(t_n)$ mit $t_i < t_{i+1}$ von n Messungen einer multivariaten stochastischen Variable und nehmen an, dass der Zeitunterschied zwischen aufeinanderfolgenden Messungen durch τ gegeben ist. Der Übersichtlichkeit halber wird in den folgenden Abschnitten abkürzend $\mathbf{x}_i := \mathbf{x}(t_0 + i\tau)$ verwendet.

Zunächst wird die Schätzung von Drift und Diffusion aus einem Ensemble von N unabhängigen Messungen untersucht. Solche Messungen werden üblicherweise zeitgleich an N gleichen, unabhängigen Systemen durchgeführt, die explizit zeitabhängig sein können. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns hier auf die Untersuchung der ersten beiden aufeinanderfolgenden Messungen an diesem Ensemble, \mathbf{x}_0^k und \mathbf{x}_1^k mit $k \in [1, N]$.

Mit Hilfe der direkten Schätzung von Drift und Diffusion, (3.1), kann eine erste Näherung für die Form von Drift- und Diffusionsfunktionen gewonnen werden. Aus der Entwicklung für endliche Zeiten (3.4) ist bekannt, dass die gesuchten Drift- und Diffusionsfunktionen als Terme niedrigster Ordnung in diesen Schätzungen enthalten sind. Auf Basis dieser Schätzungen werden Drift und Diffusion nun in eine Klasse von Funktionen eingebettet, die von einem Parameter \mathbf{A} abhängen, der iterativ optimiert wird. Siehe dazu auch Kleinhans u.a. [2005].

Die Wahrscheinlichkeit der gegenwärtigen Realisierung für einen speziellen Satz von Parametern, \mathbf{A} , kann mit Hilfe der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte angegeben werden,

$$f(\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_0^1, \mathbf{x}_1^2, \mathbf{x}_0^2, \dots, \mathbf{x}_1^N, \mathbf{x}_0^N | \mathbf{A}) \quad . \quad (3.9)$$

Weil wir angenommen haben, dass die einzelnen Prozesse unabhängig voneinander sind, zerfällt f in ein Produkt aus PDFs, in denen jeweils nur noch Messungen am jeweils gleichen System auftauchen,

$$P(\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_0^1 | \mathbf{A}) P(\mathbf{x}_1^2, \mathbf{x}_0^2 | \mathbf{A}) \times \dots \times P(\mathbf{x}_1^N, \mathbf{x}_0^N | \mathbf{A}) \quad . \quad (3.10)$$

Dieser Ausdruck kann nun vereinfacht werden.

Zunächst betrachten wir den Logarithmus dieser Funktion, üblicherweise „Log-Likelihood-Function“ genannt [Kalbfleisch 1985],

$$\sum_{k=1}^N \log [P(\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_0^k | \mathbf{A})] \quad . \quad (3.11)$$

Unter Verwendung der feinkörnigen Verteilung, die in Abschnitt 2.1.1 zur Einführung des Mittlungsbegriffes genutzt wurde,

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^k) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0^k) \quad , \quad (3.12)$$

kann der Ausdruck (3.11) schließlich mit Hilfe eines Integrals dargestellt werden,

$$\begin{aligned} & \log [P(\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_0^1, \mathbf{x}_1^2, \mathbf{x}_0^2, \dots, \mathbf{x}_1^N, \mathbf{x}_0^N | \mathbf{A})] \\ &= N \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \log [P(\mathbf{x}, \mathbf{x}' | \mathbf{A})] \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Weil der Logarithmus eine monoton steigende Funktion ist, ist die Maximierung der Wahrscheinlichkeit (3.9) äquivalent mit der Maximierung von (3.13). Der Satz von Parametern \mathbf{A} , der diesen Ausdruck maximiert, stellt folglich den wahrscheinlichsten Satz an Parametern unter den gegebenen Messungen dar.

In Kleinhaus u.a. [2005] wurde als iteratives Verfahren für die Analyse stochastischer Prozesse, das auch auf Daten mit moderaten Abtastraten anwendbar ist, die Minimierung des Kullback-Leibler-Abstandes [Kullback 1959; Kullback & Leibler 1951] $\hat{K}[\mathbf{A}]$ der Verbundwahrscheinlichkeitsdichten vorgeschlagen,

$$\hat{K}[\mathbf{A}] = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \log \left[\frac{\hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{P(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\mathbf{A})} \right] \quad (3.14a)$$

$$= \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \log [\hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] \quad (3.14b)$$

$$- \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' \hat{p}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \log [P(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\mathbf{A})] \quad (3.14c)$$

Der Ausdruck (3.14b) ist unabhängig von der jeweiligen Wahl von \mathbf{A} , während (3.14c) – bis auf das Vorzeichen – (3.13) entspricht. Die Minimierung von $\hat{K}[\mathbf{A}]$ ist daher offensichtlich äquivalent zur Maximierung der Wahrscheinlichkeit des Satzes von Parametern \mathbf{A} .

3.2.2 Untersuchung markovscher Zeitreihen

Nun werden einzelne Zeitreihen von Messungen $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$ betrachtet. Dazu wird angenommen, dass τ der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Beobachtungen ist und der Prozess stationär ist und Markov-Eigenschaften aufweist. Verfahren, mit denen sich letztere explizit prüfen lassen, werden in Kapitel 4 vorgestellt.

Wenn der zugrundeliegende Prozess, der untersucht wird, ergodisch ist, können Ensemble-Mittelungen mit Hilfe von Zeitmittelungen durchgeführt werden. Dann kann für die Untersuchung von Zeitreihen – wie im vergangenen Abschnitt – aus der direkten Schätzung für das kleinste verfügbare Zeitinkrement eine Parametrisierung von Drift und Diffusion sowie eine sinnvolle Anfangsbedingung für den Satz von Parametern, \mathbf{A}_0 , gewonnen werden.

Die PDF für das Auftreten der gemessenen Zeitreihe für einen spezifischen Satz von Parametern, \mathbf{A} , ist

$$P(\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_0|\mathbf{A}) \quad (3.15)$$

Weil Markov-Eigenschaften vorausgesetzt wurden, zerfällt diese PDF in ein Produkt aus zweizeitigen, bedingten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten,

$$P(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{A}) \times \dots \times P(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_0, \mathbf{A})P(\mathbf{x}_0|\mathbf{A}) \quad (3.16)$$

Dieser Ausdruck lässt sich wiederum vereinfachen, wenn der Logarithmus der PDF betrachtet wird. Mit Hilfe der Definition

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{i-1}) \quad (3.17)$$

erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} & \log [P(\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_0|\mathbf{A})] \\ &= \log [P(\mathbf{x}_0|\mathbf{A})] + n \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' p(\mathbf{x}, \mathbf{x}'|\tau) \log [P(\mathbf{x}|\mathbf{x}', \mathbf{A})] \quad . \end{aligned}$$

Wenn wir der Argumentation, die Maximum-Likelihood-Verfahren zugrunde liegt, folgen, ist dieser Ausdruck als Funktion von \mathbf{A} zu maximieren. Das entspricht der Minimierung von

$$K'[\mathbf{A}] = -\frac{1}{n} \log [P(\mathbf{x}_0|\mathbf{A})] + \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \log \left[\frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{P(\mathbf{x}|\mathbf{x}', \mathbf{A})} \right]. \quad (3.18)$$

Offensichtlich ist der erste Summand dieses Ausdrucks für $n \gg 1$ zu vernachlässigen. Selbst für kleinere n ist nicht a priori klar, ob der erste Messwert der gleichen Statistik folgt und in die Analyse mit einzuschließen ist, weil er z.B. auch durch die Präparation der Messung entstanden sein kann. Auf der anderen Seite kann die Auswertung dieses ersten Summanden zeitaufwändig sein, weil die stationäre Verteilung des Prozesses benötigt wird. Es wird deshalb vorgeschlagen, diesen Term zu vernachlässigen und die Optimierung von \mathbf{A} durch Minimierung von

$$K[\mathbf{A}] = \int d\mathbf{x} \int d\mathbf{x}' p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \log \left[\frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{x}')}{P(\mathbf{x}|\mathbf{x}', \mathbf{A})} \right] \quad (3.19)$$

durchzuführen.

3.2.3 Iterative Anwendung für Drift- und Diffusionsprozesse

An dieser Stelle soll noch einmal betont werden, dass (3.19) numerisch ausgewertet werden kann. Es ist schon bekannt, dass speziell für Drift- und Diffusionsprozesse die zeitliche Entwicklung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte durch die Fokker-Planck-Gleichung (2.38) beschrieben ist. Diese Gleichung kann numerisch zumindest für $x \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ effektiv mit Hilfe impliziter Algorithmen integriert werden. Darüber hinaus können sogenannte „kernel density estimates“, die auf der numerischen Integration der entsprechenden Langevin-Gleichungen beruhen, verwendet werden. Eine Beschreibung dieser Methoden findet sich z.B. bei Hurn u.a. [2003].

Die Daten, die zu analysieren sind, können durch eine angemessene Diskretisierung des Ortsraumes stark reduziert werden. Üblicherweise sollte diese Diskretisierung mit der Diskretisierung, die zur numerischen Lösung der Fokker-Planck-Gleichung ohnehin benötigt wird, zusammenfallen. Nach der Diskretisierung und numerischer Bestimmung der Ausdrücke $P(\mathbf{x}|\mathbf{x}', \mathbf{A})$ an den Stellen nicht verschwindender Werte von $p(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ kann (3.19) darum als endliche Summe bestimmt werden.

Das Ziel ist es natürlich, den Satz von Parametern \mathbf{A} , unter dem (3.19) minimal wird, zu bestimmen. Das kann durch Gradientenverfahren oder andere Verfahren mit einem besseren Konvergenzverhalten geschehen [vgl. Press u.a. 1992]. Nawroth z.B. berichtet, dass sich der BFBS-Algorithmus gut für die Minimierung eignet. Für weitere Details zur Anwendung dieses Algorithmus sei auf Nawroth u.a. [2007] und Nawroth [2007] verwiesen. Schließlich soll noch betont werden, dass die erste Schätzung für Drift und Diffusionsfunktionen für das kleinste verfügbare Zeitinkrement auf Basis von (3.1) in der Regel schon einen guten Startwert \mathbf{A}_0 liefert. Das ist für jeden Algorithmus, der für die spätere iterative Optimierung angewendet werden soll, essentiell.

3.2.4 Analytisches Beispiel für Anwendung der iterative Optimierung

Bis hierher wurde gezeigt, dass die im Jahre 2005 vorgeschlagene Methode zur iterativen Optimierung auf der Basis des Kullback-Leibler-Abstandes [Kleinhans u.a. 2005] der iterativen Bestimmung der (unter der gewählten Parametrisierung) wahrscheinlichen Realisierung von Drift- und Diffusionsfunktionen entspricht. Dieser Punkt ist für die weitere Anwendung des Verfahrens von entscheidender Bedeutung, weil

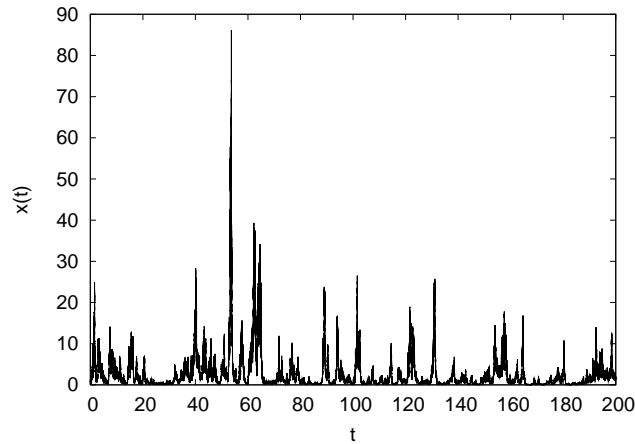


ABBILDUNG 3.1: Ausschnitt aus einer Zeitserie, die für $D = 1.25$ und $\gamma = 0.75$ aus der numerischen Integration eines stochastischen Prozesses mit den in Gleichungen (3.20) gegebenen Drift- und Diffusionsfunktionen gewonnen wurde.

die Interpretation des Ergebnisses des Optimierungsverfahrens nun deutlich ist. In Kleinhans u.a. [2005] ist bereits gezeigt worden, dass numerisch erzeugte Daten mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens reproduziert werden können. Nawroth [2007] und Nawroth u.a. [2007] haben die Methode darüber hinaus zur Optimierung der Analyse von Messungen an einem turbulenten Freistrahler verwendet. Hier soll nun für einen multiplikativen, stochastischen Prozess, der sich analytisch vollständig spezifizieren lässt, der funktionale Verlauf von (3.19) explizit bestimmt und gezeigt werden, dass der minimale Abstand 0 dem gesuchten ursprünglichen Prozess entspricht.

Dazu wird ein Drift-Diffusions-Prozess in einer Dimension mit der Diffusionsfunktion

$$D^{(2)}(x) = Dx^2 \quad (3.20a)$$

betrachtet, der stationär ist. Die stationäre Verteilung soll einer Log-Normal-Verteilung entsprechen,

$$p(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{2\pi \frac{D}{\gamma}}} \exp \left\{ -\frac{\left[\log \left(\frac{x}{x_0} \right) \right]^2}{2 \frac{D}{\gamma}} \right\} . \quad (3.20b)$$

Diese stationäre Verteilung lässt sich durch eine spezielle Wahl der Drift-Funktion, nämlich durch

$$D^{(1)}(x) = x \left(D - \gamma \log \left(\frac{x}{x_0} \right) \right) , \quad (3.20c)$$

erreichen. Es wird folglich ein stochastischer Prozess mit nichtlinearer Drift-Funktion, der von multiplikativem Rauschen getrieben wird, betrachtet. Realisierungen dieses Prozesses lassen sich durch numerische Integration der entsprechenden stochastischen Differentialgleichungen (2.21) erhalten. Ein Beispiel für einen Prozess, der von diesen Gleichungen erzeugt wird, ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Wie in der gesamten Arbeit wird hier Itô's Interpretation der Stieltjes-Integrale verwendet (vgl. Abschnitt 2.2.3).

Für eindimensionale Prozesse mit multiplikativem Rauschen lässt sich die Diffusionsfunktion durch nichtlineare Transformation der Orts- oder auch Prozessvariablen

signifikant vereinfachen: Unter der Transformation

$$y = y(x) = \int_{x_0}^x dx' \sqrt{\frac{D}{D^{(2)}(x')}} \quad (3.21)$$

ergibt sich für Drift- und Diffusionsfunktionen in den neuen Koordinaten [Risken 1989]

$$\tilde{D}^{(1)}(y) = \sqrt{\frac{D}{D^{(2)}(x(y))}} \left[D^{(1)}(x(y)) - \frac{1}{2} \frac{dD^{(2)}(x(y))}{dx} \right] \quad (3.22a)$$

$$\tilde{D}^{(2)}(y) = D \quad . \quad (3.22b)$$

Für den hier untersuchten Prozess (3.20) lautet die entsprechende Transformation:

$$y = \log(x) \quad (3.23a)$$

$$\tilde{D}^{(1)}(y) = -\gamma y \quad (3.23b)$$

$$\tilde{D}^{(2)}(y) = D \quad . \quad (3.23c)$$

Der Prozess x ist folglich äquivalent zu einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess in der transformierten Variablen y . Für y sind die Übergangswahrscheinlichkeitsdichten für endliche Zeiten exakt bekannt, vgl. (2.45b). Diese Übergangswahrscheinlichkeitsdichten lassen sich nun zur Bestimmung von (3.19) verwenden.

Wir betrachten nun die Optimierung der intrinsischen Parameter γ und D aus einer gemessenen Zeitreihe. Stellen wir uns vor, die bedingten PDFs $p(x|x_0, \gamma_0, D_0)$ für ein festes Zeitinkrement τ seien für einen bestimmten Satz von Parametern (γ_0, D_0) , der zur Integration der Langevin-Gleichungen verwendet wurde, aus einer Zeitreihe ermittelt worden. Dieser ursprüngliche Satz von Parametern soll nun anhand des hier beschriebenen Maximum-Likelihood-Verfahrens rekonstruiert werden. Wenn wir der Argumentation am Ende von Abschnitt 3.2.2 folgen, ist zu diesem Zweck die Minimierung von

$$K(\gamma, D) = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dx_0 p(x, x_0 | \gamma_0, D_0) \log \left[\frac{p(x|x_0, \gamma_0, D_0)}{P(x|x_0, \gamma, D)} \right] \quad (3.24)$$

nötig.

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der bekannten Statistik des zugrundeliegenden Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses explizit bestimmt werden,

$$K(\gamma, D) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \tilde{p}(y, y_0 | \gamma_0, D_0) \log \left[\frac{\tilde{p}(y|y_0, \gamma_0, D_0)}{\tilde{P}(y|y_0, \gamma, D)} \right] \quad . \quad (3.25)$$

In einem ersten Schritt wird der Logarithmus für die Übergangswahrscheinlichkeitsdichten des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses, (2.45b), ausgewertet. Es zeigt sich, dass $K(\gamma, D)$ dann einzig durch die Momente zweiter Ordnung von y und y_0 bestimmt ist,

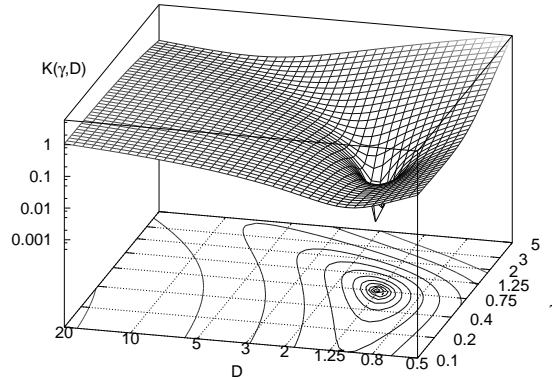


ABBILDUNG 3.2: Kullback-Abstand zwischen den Prozessen $(\gamma_0 = 0.75, D_0 = 1.25)$ und (γ, D) als Funktion von γ und D für $\tau = 0.5$. Es zeigt sich ein deutliches Minimum an der Stelle $(\gamma, D) = (\gamma_0, D_0)$. Die Konturlinien liegen auf den Höhen $z = 2^i$ mit $i = -11, \dots, 0$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist die z-Achse logarithmisch dargestellt.

$$\begin{aligned}
K(\gamma, D) &= \langle y^2 \rangle_{y, y_0} \left(\frac{1}{2\frac{D}{\gamma}(1 - e^{-2\gamma\tau})} - \frac{1}{2\frac{D_0}{\gamma_0}(1 - e^{-2\gamma_0\tau})} \right) \\
&+ \langle y_0^2 \rangle_{y, y_0} \left(\frac{e^{-2\gamma\tau}}{2\frac{D}{\gamma}(1 - e^{-2\gamma\tau})} - \frac{e^{-2\gamma_0\tau}}{2\frac{D_0}{\gamma_0}(1 - e^{-2\gamma_0\tau})} \right) \\
&+ \langle yy_0 \rangle_{y, y_0} \left(-\frac{e^{-\gamma\tau}}{\frac{D}{\gamma}(1 - e^{-2\gamma\tau})} + \frac{e^{-\gamma_0\tau}}{\frac{D_0}{\gamma_0}(1 - e^{-2\gamma_0\tau})} \right) \quad (3.26) \\
&+ \frac{1}{2} \log \left[\frac{\frac{D}{\gamma}(1 - e^{-2\gamma\tau})}{\frac{D_0}{\gamma_0}(1 - e^{-2\gamma_0\tau})} \right].
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Momente des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses erhält man schließlich einen geschlossenen Ausdruck für $K(\gamma, D)$,

$$K(\gamma, D) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{\frac{D}{\gamma}(1 - e^{-2\gamma\tau})}{\frac{D_0}{\gamma_0}(1 - e^{-2\gamma_0\tau})} \right] + \frac{\frac{D_0}{\gamma_0}}{\frac{D}{\gamma}} \frac{1 + e^{2\gamma\tau} - 2e^{(\gamma-\gamma_0)\tau}}{2(e^{2\gamma\tau} - 1)} - \frac{1}{2}.$$

Für die Parameter $(\gamma_0, D_0) = (0.75, 1.25)$ ist diese Funktion in Abbildung 3.2 dargestellt. Es zeigt sich ein deutliches Minimum an der Stelle $(\gamma, D) = (0.75, 1.25)$, das mit den ursprünglichen Parametern übereinstimmt. Im Falle einer Anwendung des Verfahrens für das hier betrachtete System hätte eine Minimierung des Kullback-Abstandes unter Variation der Parameter γ und D in diesem Potential folglich die ursprünglichen Parameter γ_0 und D_0 geliefert.

3.2.5 Zusammenfassung

Zusammenfassend wurden in diesem Abschnitt Wahrscheinlichkeits-Schätzer für stochastische Prozesse für zwei besondere Fälle untersucht: Zunächst wurden Ensembles von Messungen an solchen Prozessen betrachtet. Für diesen Fall liefert das von

Kleinhans u.a. [2005] vorgeschlagene iterative Verfahren die wahrscheinlichste Realisierung des stochastischen Prozesses unter der gewählten Parametrisierung und lässt sich nun physikalisch motivieren.

Im Anschluss daran wurde der „Maximum-Likelihood“-Ansatz an die Analyse von Zeitserien angepasst. Speziell für Markov-Prozesse konnte eine integrale Form des Schätzers hergeleitet werden. Eine vereinfachte Version dieses Schätzers, (3.19), beruht nur auf bedingten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten, die für Drift- und Diffusionsprozesse z.B. durch numerische Integration der Fokker-Planck-Gleichung gewonnen werden können. Die integrale Form ermöglicht die Reduktion großer Datensätze auf diskretisierte Übergangswahrscheinlichkeitsdichten vor Beginn der iterativen Optimierung. Dadurch wird der Aufwand gegenüber der schon von Timmer [2000] diskutierten direkten Anwendung von Maximum-Likelihood-Methoden erheblich reduziert.

Schließlich haben die Parameter, die sich aus der iterativen Optimierung durch die von Kleinhans u.a. [2005] beschriebene Methode ergeben, nun eine anschauliche Bedeutung: Sie bilden die wahrscheinlichsten Parameter für die beobachteten Messungen unter der gewählten Parametrisierung. Folglich kann die iterative Methode nun auch zur Analyse von Daten angewendet werden, die zu wenige Datenpunkte für eine verlässliche Anwendung der direkten Schätzung, (3.1), aufweisen.

3.3 Stochastische Prozesse in der Skala: Analytischer Ansatz

Messungen an turbulenten Strömungen lassen sich aufgrund von räumlichen und zeitlichen Instationaritäten nicht sinnvoll auf Basis der bislang betrachteten Drift und Diffusionsprozesse beschreiben. Dasselbe trifft z.B. auch für Notierungen von Börsenkursen an Finanzmärkten zu. Auf der anderen Seite herrscht natürlich reges Interesse an einer genauen Charakterisierung eben dieser Prozesse.

Für die Untersuchung und Beschreibung von turbulenten Feldern sind insbesondere die (longitudinalen) Geschwindigkeitsinkremente

$$v(r, t) := [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]^T \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \Big|_{|\mathbf{y}|=r} \quad (3.27)$$

interessant. $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ stellt hierbei ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld an der Stelle \mathbf{x} zur Zeit t dar. $v(r, t)$ nennt man longitudinales Geschwindigkeitsinkrement zur Zeit t auf der Skala r . Kolmogorov hat im Jahre 1941 eine spezielle Form der Energiedissipation in turbulenten Feldern postuliert und konnte so mit Hilfe von Dimensionsargumenten die Entwicklung der Momente der Inkremente als Funktion von r , die sogenannten *Strukturfunktionen*, erklären [Kolmogorov 1941]. Im Rahmen von Kapitel 7 wird den Strukturfunktionen etwas mehr Zeit zukommen. Lange Zeit beschränkte sich die Analyse von turbulenten Geschwindigkeitsfeldern auf solche „monovariate“ Kenngrößen, also auf die unabhängige Beschreibung der Phänomene auf verschiedenen Skalen r .

Friedrich & Peinke [1997a] konnten am Beispiel von Messungen an einem Helium-Freistrahler zeigen, dass die gleichzeitige Betrachtung von Inkrementen auf verschiedenen Skalen zu großem Erkenntnisgewinn führen kann. Das wichtigste Ergebnis der Arbeit, das anhand der zur Verfügung stehenden Daten überprüft werden konnte, war, dass die Verbundstatistik der Inkremente auf mehreren Skalen Markov-Eigenschaften genügt. Bei geeigneter Transformation der Skalen⁹ lässt sich die Ent-

⁹Die Beschreibung der Entwicklung der Inkremente auf Basis von Drift und Diffusion erfolgt für eine logarithmische Skalierung der Inkremente. Diese Skalierung kann – wie z.B. bei Renner u.a. [2001b] geschehen – auch in die Definition der bedingten Momente und in die Fokker-Planck-Gleichung mit eingearbeitet werden.

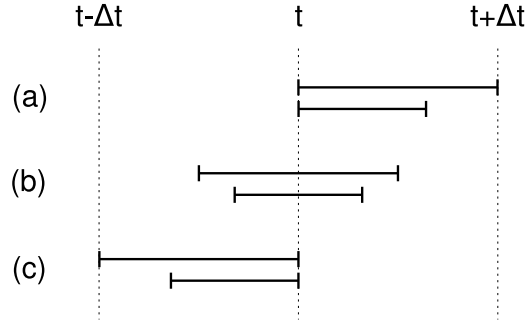


ABBILDUNG 3.3: Schematische Darstellung der Ausrichtung der linksbündigen (a), zentrierten (b) und rechtsbündigen (c) Inkremente gemäß (3.28) auf jeweils zwei unterschiedlichen Skalen. Für links- und rechtsbündige Ausrichtung fällt für Inkremente auf unterschiedlichen Skalen jeweils ein Endpunkt zusammen.

wicklung der Inkremente mit der Skala, die einen stochastischen Prozess im Sinne von Abschnitt 2.2 darstellt, dann als Drift- und Diffusionsprozess verstehen. Die entsprechenden Drift- und Diffusionsfunktionen lassen sich, wie Renner später bestätigen konnte, mit Hilfe der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Methoden gewinnen [Renner u.a. 2001b]. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden solche Prozesse von nun an als *stochastische Prozesse in der Skala* bezeichnet.

Zur Beschreibung turbulenter Strömungen hat sich generell eine Definition von Inkrementen gemäß (3.27) durchgesetzt. Prinzipiell lassen sich Inkremente z.B. für die Analyse eindimensionaler Zeitserien aber auch anders definieren. So stellen z.B.

$$\hat{f}^l(x(t), t, \Delta t) = x(t + \Delta t) - x(t) \quad (3.28a)$$

$$\hat{f}^c(x(t), t, \Delta t) = x(t + \Delta t/2) - x(t - \Delta t/2) \quad (3.28b)$$

$$\hat{f}^r(x(t), t, \Delta t) = x(t) - x(t - \Delta t) \quad (3.28c)$$

mögliche Definitionen dar, die sich in der Art und Weise, wie Inkremente verschiedener Skalen ineinander geschachtelt sind, unterscheiden: Die Inkremente sind jeweils auf die linke Grenze (\hat{f}^l), die rechte Grenze (\hat{f}^r) oder auf das Zentrum (\hat{f}^c) eines Intervalls der Breite Δt ausgerichtet (vgl. Abbildung 3.3). Wächter u.a. [2004a] haben gezeigt, dass die Definition der Inkremente für eine bestimmte Klasse von stochastischen Prozessen einen Einfluss auf die Verbundstatistiken verschiedener Skalen hat. Diese Fragestellung wurde zum Anlass genommen, diesen Einfluss explizit zu bestimmen und die Konsequenzen für die Definition stochastischer Prozesse in der Skala zu diskutieren.

Wir beschränken uns nun auf den Vergleich linksbündiger (3.28a) und zentrierter (3.28b) Inkremente. Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir ein Ensemble stationärer, äquidistant abgetasteter Zeitreihen mit $x_i := x(t_0 + i\tau)$ der Länge n . Die oben allgemein definierten Inkremente lassen sich dann vereinfacht darstellen als

$$f_i^l(\mathbf{x}) = x_i - x_0 \quad (3.29a)$$

$$f_i^c(\mathbf{x}) = x_{(n+i)/2} - x_{(n-i)/2} \quad (3.29b)$$

$f_i^l(\mathbf{x})$ entspricht hier z.B. dem linksbündigen Inkrement der Skala i für die Zeitreihe \mathbf{x} . Wir nehmen im Folgenden an, dass diese Inkremente für jede Wahl von i und n zur Verfügung stehen.¹⁰

¹⁰Gemäß der Definition $x_i := x(t_0 + i\tau)$ existieren Messwerte nur für ganzzahlige i . Definiert

Wächter u.a. haben den Einfluss der Schachtelung der Inkremente für zwei spezielle stochastische Prozesse untersucht: Zunächst für einen Prozess, der aus einer Aneinanderreihung unabhängiger Zufallszahlen besteht und den sie „WNR“ (von „white noise random walk“) nennen. Darüber hinaus haben sie das Integral dieses Prozesses, einen Wiener-Prozess, den sie als „LRW“ (von „Langevin random walk“) bezeichnen, untersucht. Während für den letzteren Prozess die Definition der Inkremente keinen Einfluss zu haben scheint, zeigen sich beim ersten Prozess – je nach Definition der Inkremente – Korrelationen.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Untersuchung stochastischer Prozesse in der Skala mittlerweile große Verbreitung gefunden hat. Übersichten über aktuelle Arbeiten, in denen stochastische Prozesse in der Skala verwendet werden, finden sich z.B. bei Renner u.a. [2001b], Nawroth [2007] und Friedrich u.a. [2008]. Bei diesen Arbeiten werden teilweise linksbündige und teilweise zentrierte Inkremente verwendet. Ein Verfahren zur Rekonstruktion stochastischer Prozesse mit Hilfe der Dynamik in der Skala, das kürzlich von Nawroth & Peinke [2006] vorgestellt wurde, basiert dagegen auf der Verwendung rechtsbündiger Inkremente gemäß (3.28c). Die Frage nach dem Einfluss der verschiedenen Definitionen auf die resultierenden stochastischen Prozesse ist also von großer Bedeutung.

3.3.1 Analytischer Ansatz für beliebige Skalierungsfunktionen

Nehmen wir an, dass die mehrzeitigen Verbundwahrscheinlichkeitsdichten p für die Realisierung eines bestimmten Prozesses eines Ensembles von Messungen,

$$p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) \quad , \quad (3.30)$$

bekannt seien. x_i ist hier die Messung zur Zeit t_i mit $t_i = t_0 + i\tau$. Der Übersichtlichkeit halber wird im Folgenden – soweit eindeutig – die abkürzende Notation

$$p(x_n; x_{n-1}; \dots; x_0) := p(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) \quad (3.31)$$

verwendet. Die jeweiligen Zeiten t_n, \dots, t_0 werden also nicht explizit notiert.

Es hat sich gezeigt, dass die Untersuchung von skalensensitiven Parametern für das genauere Verständnis oder eine gezieltere Beschreibung spezieller Daten sehr hilfreich sein kann. So lassen sich mit Hilfe von Wavelet-Transformationen gewisse Informationen gezielt aus Daten entfernen und der nötige Speicherbedarf so gezielt reduzieren, wie dies z.B. bei der Komprimierung von Bilddateien angewendet wird. Allgemein lassen sich skalensensitive Funktionen durch eine Funktion $f_\alpha(\mathbf{x})$ charakterisieren, die den hochdimensionalen Raum von Messungen auf eine reelle Zahl u_α abbildet,

$$u_\alpha = f_\alpha(\mathbf{x}) \quad . \quad (3.32)$$

α ist hier ein Parameter, der die Skala und die Lokalisierung von f_α beschreibt.

Häufig sind die PDFs von u_α oder deren Momente, die Strukturfunktionen, von Interesse, die mit der Hilfe von feinkörnigen Verteilungen (2.6) aus (3.32) bestimmt werden können,

$$p_\alpha(u_\alpha) := \int dx_0 \dots \int dx_n \delta[u_\alpha - f_\alpha(\mathbf{x})] p(x_n; x_{n-1}; \dots; x_0) \quad . \quad (3.33)$$

Auf dieselbe Art und Weise erhält man auch multivariate Verbundwahrscheinlichkeitsdichten. Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte für das gleichzeitige Auftreten

man die Zeitserie z.B. zum Zeitinkrement $\tilde{\tau} = 2\tau$, so stehen Messwerte auch für halbzahlige i zur Verfügung. Dann ist (3.29b) für jedes (ganzzahlige) n wohldefiniert.

von u_{α_1} und u_{α_2} auf den Skalen α_1 und α_2 lautet z.B.:

$$p_{\alpha_1, \alpha_2}(u_{\alpha_1}; u_{\alpha_2}) := \int dx_0 \dots \int dx_n \delta[u_{\alpha_1} - f_{\alpha_1}(\mathbf{x})] \times \delta[u_{\alpha_2} - f_{\alpha_2}(\mathbf{x})] p(x_n; \dots; x_0) \quad . \quad (3.34)$$

Diese Gleichung lässt sich direkt für analytische Untersuchungen bezüglich der Korrelationen auf verschiedenen Skalen verwenden. Wir wenden uns als Skalierungsfunktionen f_α nun speziell den beiden Definitionen (3.29) von Inkrementen zu und werden mit Hilfe von (3.34) zunächst die bereits von Wächter u.a. [2004a] untersuchten Prozesse WNR und LWR betrachten.

3.3.2 Beispiel: Untersuchung der Korrelation von Inkrementen

Die formellen Ergebnisse des letzten Unterabschnitts sollen nun speziell für die zu Beginn des Abschnittes 3.3 eingeführten Inkremente stochastischer Prozesse (3.29) untersucht werden. Für linksbündige und zentrierte Inkremente können unter Verwendung von (3.33) zunächst die wohlbekannten monovariaten Verteilungen bestimmt werden,

$$p_i^l(u_i) = \int dx p(x + u_i, t_i; x, t_0) \quad , \quad (3.35a)$$

$$p_i^c(u_i) = \int dx p(x + u_i, t_{(n+i)/2}; x, t_{(n-i)/2}) \quad . \quad (3.35b)$$

p_i^l steht hier für die linksbündigen, während p_i^c die Verteilung der zentrierten Inkremente beschreibt. Weil vorausgesetzt wurde, dass die zugrundeliegenden Prozesse stationär sind und die Statistik damit nicht explizit von t abhängt, liefert eine Auswertung der Integrale in beiden Fällen dasselbe Ergebnis. In gleicher Weise können nun die PDFs für das gleichzeitige Auftreten der Inkremente u_i auf der Skala i und u_j auf der Skala $j > i$ bestimmt werden,

$$p_{j,i}^l(u_j; u_i) = \int dx p(x + u_j, t_j; x + u_i, t_i; x, t_0) \quad , \quad (3.36a)$$

$$p_{j,i}^c(u_j; u_i) = \int dx \int dx' p(x + u_j, t_{(n+j)/2}; x' + u_i, t_{(n+i)/2}; x', t_{(n-i)/2}; x, t_{(n-j)/2}) \quad . \quad (3.36b)$$

Wächter u.a. [2004a] haben darauf hingewiesen, dass durch die Definition der geschachtelten Inkremente zusätzliche Korrelationen zwischen verschiedenen Skalen auftreten können. Die Struktur von (3.36) lässt so etwas schon vermuten. Mit Hilfe von (3.36) können die Beispiele, die Wächter u.a. bereits numerisch untersucht haben, nun nachvollzogen werden.

Wir betrachten zunächst Sequenzen x_0, \dots, x_n unabhängiger Zufallszahlen, die derselben PDF genügen sollen. Weil in diesem Falle die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten faktorisieren, vereinfachen sich Gleichungen (3.36) zu

$$p_{j,i}^l(u_j; u_i) = \int dx p(x + u_j) p(x + u_i) p(x) \quad , \quad (3.37a)$$

$$\begin{aligned} p_{j,i}^c(u_j; u_i) &= \int dx p(x + u_j) p(x) \int dx' p(x' + u_i) p(x') \\ &= p_j^c(u_j) p_i^c(u_i) \quad . \end{aligned} \quad (3.37b)$$

Offensichtlich sind die Verteilungen von Inkrementen auf den Skalen i und j im Falle von zentrierten Inkrementen unabhängig voneinander. Für linksbündige Inkremente

ergeben sich jedoch im Allgemeinen Korrelationen zwischen den Skalen. Wird – wie auch in Wächters Arbeit – für die Verteilung der einzelnen x_i eine Normalverteilung mit Varianz σ^2 zugrunde gelegt, so können die Verbundverteilungen explizit berechnet werden. Es ergibt sich

$$p_{j,i}^l(u_j; u_i) = \frac{1}{\sqrt{12}\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{u_i^2 + u_j^2 - u_i u_j}{3\sigma^2}\right], \quad (3.38a)$$

$$p_{j,i}^c(u_j; u_i) = \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{u_i^2 + u_j^2}{4\sigma^2}\right]. \quad (3.38b)$$

Hier wird deutlich, dass die Inkremente u_i und u_j im Falle linksbündiger Inkremente korreliert sind. Wie schon Wächter gezeigt hat, ergibt sich aus (3.38a) $\langle u_i u_j \rangle = \sigma^2$. Für zentrierte Inkremente sind die Inkremente auf verschiedenen Skalen hingegen unkorreliert.

Für den Wiener-Prozess (LRW) gestaltet sich die Situation anders. Wiener-Prozesse sind Markov-Prozesse, für die der Propagator für endliche Zeiten exakt bekannt und durch (2.45a) gegeben ist. Unter Verwendung des Propagators ergeben sich – in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Wächter u.a. – sowohl für linksbündige als auch für zentrierte Ausrichtung der Inkremente identische Verbundwahrscheinlichkeitsdichten für Inkremente auf verschiedenen Skalen,

$$p_{j,i}^{l/c}(u_j; u_i) = \frac{1}{\sqrt{i(j-i)}\tau\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{ju_i^2 + iu_j^2 - 2iu_i u_j}{2i(j-i)\tau\sigma^2}\right]. \quad (3.39)$$

τ steht hier für den zeitlichen Abstand zwischen zwei Messungen, wie er zu Beginn des Abschnitts 3.3 eingeführt worden ist. Das Ergebnis von Wächter u.a. [2004a] kann somit bestätigt werden und es ergibt sich unabhängig von der Schachtelung der Inkremente $\langle u_i u_j \rangle = i\tau\sigma^2$.

3.3.3 Stochastische Prozesse in der Skala

Auf Seite 35 ist bereits erwähnt worden, dass die Beschreibung von stochastischen Prozessen in der Skala in einigen Fällen vorteilhaft ist. Das ist insbesondere der Fall, wenn sich die Entwicklung der Inkremente mit der Skala als Drift- und Diffusionsprozess verstehen lässt. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten wird dann – ähnlich wie auch bei entsprechenden Prozessen in der Zeit – durch eine Fokker-Planck-Gleichung beschrieben. In Anlehnung an die Notation von Renner u.a. [2001b] lautet diese Gleichung¹¹

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} p(u_\alpha, \alpha) = \sum_{k=1}^2 \left(-\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\right)^k \tilde{D}^{(k)}(u_\alpha, \alpha) p(u_\alpha, \alpha). \quad (3.40)$$

Die entsprechenden Drift- und Diffusionsfunktionen können – ähnlich den Prozessen in der Zeit – direkt aus Verbundwahrscheinlichkeitsdichten (3.30) von Ensembles von gemessenen Prozessen bestimmt werden,

$$\tilde{D}^{(k)}(u_\alpha, \alpha) := \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \tilde{M}^{(k)}(u_\alpha, \alpha, \Delta\alpha) \quad \text{mit} \quad (3.41a)$$

$$\tilde{M}^{(k)}(u_\alpha, \alpha; \Delta\alpha) := \frac{\alpha}{k! \Delta\alpha} \int dz (z - u_\alpha)^k p(z, \alpha + \Delta\alpha | u_\alpha, \alpha). \quad (3.41b)$$

¹¹Im Gegensatz zu Renner u.a. wurde die Richtung des stochastischen Prozesses umgekehrt, sodass stochastische Prozesse in der Skala bei uns von großen zu kleinen Skalen verlaufen. Aus der Umkehrung ergibt sich ein Vorzeichenwechsel in der Fokker-Planck-Gleichung im Vergleich zu Renners Notation. Die Analyse von Finanzdaten hat ergeben, dass sich die Entwicklung der Inkremente in diese Richtung ebenfalls durch Drift und Diffusion beschreiben lässt. Die von Renner u.a. abweichende Darstellung wurde zur Vereinfachung der in diesem Abschnitt durchgeführten Rechnungen gewählt.

Zur besseren Unterscheidung von den entsprechenden Funktionen in der Zeit, die bereits in Kapitel 2 eingeführt wurden, werden Funktionen zur Beschreibung der Prozesse in der Skala bis zum Ende dieses Abschnitts jeweils mit einer Tilde gekennzeichnet.

Bislang wurden stochastische Prozesse in der Zeit und in der Skala unabhängig von einander untersucht und dabei lediglich auf die gleichen Werkzeuge zurückgegriffen. Die Ergebnisse der letzten Abschnitte werden nun verwendet um die Zusammenhänge zwischen Drift- und Diffusionsfunktionen in Skala und Zeit zu untersuchen.

Linksbündige Inkremente

Beschäftigen wir uns zunächst mit linksbündigen Inkrementen, (3.29a), mit ganzzahligem i . Das Einsetzen der Ergebnisse aus Abschnitt 3.3.2 in (3.41b) ergibt für $\tilde{M}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(k)}(u_i, i\tau; \Delta i\tau) & \quad (3.42) \\ &= \frac{i}{k!\Delta i} \frac{\int dz (z - u_i)^k \int dx p(x + z, t_{i+\Delta i}; x + u_i, t_i; x, t_0)}{\int dx p(x + u_i, t_i; x, t_0)}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann durch den Erwartungswert

$$\frac{i}{k!\Delta i} \times \left\langle \int dz' (z' - (x + u_i))^k p(z', t_{i+\Delta i} | x + u_i, t_i; x, t_0) \right\rangle_x \quad (3.43)$$

im Bezug auf die Verteilung $p(x + u_i, t_{i+\Delta i}; x, t_0)$ verstanden werden. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass dieser Ausdruck nicht notwendigerweise normiert sein muss, also $\int dx p(x + u_i, t_{i+\Delta i}; x, t_0) \neq 1$ gelten kann.

Die meisten stationären Prozesse werden irgendwann unabhängig von den Anfangsbedingungen. Ein sinnvolles Maß für die Zeitspanne, nach der diese Unabhängigkeit eintritt, stellt die von Lück u.a. [2006] eingeführte Markov-Einstein-Länge l_{mar} dar. Für $i\tau \sim l_{mar}$ ist die bedingte PDF p in Gleichung (3.43) unabhängig vom Startwert (x, t_0) . Dann kann die Funktion $\tilde{M}^{(k)}$ genähert werden durch

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(k)}(u_i, i\tau; \Delta i\tau) & \approx \frac{i}{k!\Delta i} (-1)^k \\ & \times \left\langle \int dz' (z' - (x + u_i))^k p(z', t_{i+\Delta i} | x + u_i, t_i) \right\rangle_x. \end{aligned} \quad (3.44)$$

In Abschnitt 3.1 sind die Ausdrücke zum Schätzen der bedingten Momente $M^{(k)}$ für stochastische Prozesse in der Zeit aus gemessenen Daten angegeben. Der Vergleich mit Gleichung (3.3) zeigt, dass sich (3.44) durch die bedingten Momente in der Zeit, $M^{(k)}$, ausdrücken lässt als

$$\tilde{M}^{(k)}(u_i, i\tau; \Delta i\tau) = i\tau \left\langle M^{(k)}(x + u_i, t_i; \Delta i\tau) \right\rangle_x \quad (3.45a)$$

$$= i\tau \frac{\int dx M^{(k)}(x + u_i, t_i; \Delta i\tau) p(x + u_i, t_i; x, t_0)}{\int dx p(x + u_i, t_i; x, t_0)} \quad (3.45b)$$

Im Grenzwert $\Delta i \rightarrow 0$ (unter Berücksichtigung des ganzzahligen Charakters von i durch geeignete Extrapolation für kleine Δi) erhält man für i in der Größenordnung der Markov-Einstein-Länge dann

$$\tilde{D}^{(k)}(u_i, i\tau) = i\tau \left\langle D^{(k)}(x + u_i, t_i) \right\rangle_x \quad (3.46a)$$

$$= i\tau \frac{\int dx D^{(k)}(x + u_i, t_i) p(x + u_i, t_i; x, t_0)}{\int dx p(x + u_i, t_i; x, t_0)}. \quad (3.46b)$$

Drift- und Diffusionsfunktionen auf großen Skalen können also aus den entsprechenden Funktionen in der Zeit durch Mittelungsverfahren berechnet werden, wenn die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten für große Zeiten $i\tau$ bekannt sind. Das ist nicht weiter verwunderlich, weil speziell stationäre stochastische Prozesse betrachtet werden und damit die Instationaritäten, die eine Beschreibung der Prozesse in der Zeit erschweren, gerade auf großen Skalen nicht mehr relevant sind.

Zentrierte Inkremente

Auf die gleiche Art und Weise lässt sich die Beziehung zwischen Drift- und Diffusionsfunktionen in Skala und Zeit auch für den Fall von zentrierten Inkrementen untersuchen. In diesem Fall müssen Drift und Diffusion getrennt voneinander betrachtet werden. Ähnliche Ergebnisse wie für linksbündige Inkremente ergeben sich nur, wenn die bedingten Momente nicht explizit von der Zeit abhängen. Diese Voraussetzung ist durch einen „Punkt“ (\cdot) an entsprechender Stelle in den Argumenten der bedingten Momente verdeutlicht. Werden ebenfalls nur große Skalen oberhalb der Markov-Einstein-Länge betrachtet, so ergibt sich für zentrierte Inkremente

$$\tilde{D}^{(1)}(u_i, i\tau) = i\tau \left\langle D^{(1)}(x + u_i, \cdot) \right\rangle_x := i\tau \frac{\int dx D^{(1)}(x + u_i, \cdot) p(x + u_i, t_i; x, t_0)}{\int dx p(x + u_i, t_i; x, t_0)}, \quad (3.47a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(2)}(u_i, i\tau) &= i\tau \frac{\int dx D^{(2)}(x + u_i, \cdot) p(x + u_i, t_i; x, t_0)}{\int dx p(x + u_i, t_i; x, t_0)} \\ &\quad + \frac{2}{\int dx p(x + u_i, t_{(n+i)/2}; x, t_{(n-i)/2})} \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{i}{2! \Delta i} \quad (3.47b) \\ &\quad \times \int dx \int dx' \int dz' (z' - u_i - x') (x' - x) \\ &\quad \times p(z', t_{(n+i+\Delta i)/2}; x' + u_i, t_{(n+i)/2}) \\ &\quad \times p(x', t_{(n-i)/2}; x, t_{(n-i-\Delta i)/2}) \quad . \end{aligned}$$

Leider konnte kein geschlossener Ausdruck für das letzte Integral gefunden werden. Es soll jedoch festgehalten werden, dass die Form der Diffusionsfunktion auf der Wahl der Verschachtelung der Inkremente beruht, während diese (zumindest für stationäre Prozesse auf großen Skalen) keinen Einfluss auf den Drift hat.

Konsequenzen für stochastische Prozesse in der Skala

In diesem Abschnitt wurde die Verbindung zwischen stochastischen Prozessen in der Skala $i\tau$ und der Zeit t untersucht, wobei in der Skala zwischen verschiedenen Ausrichtungen der Inkremente unterschieden wurde. Es hat sich gezeigt, dass sich für linksbündige Inkremente die Koeffizienten stochastischer Prozesse in Skala und Zeit auf großen Skalen durch eine einfache Integraltransformation ineinander überführen lassen. Für zentrierte Inkremente nimmt die Diffusionsfunktion eine andere Form an. Eine ähnliche Tatsache ist bereits aus der Definition stochastischer Integrale bekannt. Für deren Auswertung stehen zwei unterschiedliche (aber formal äquivalente) Interpretationen, die üblicherweise Itô bzw. Stratonovich zugeschrieben werden und im Abschnitt 2.2.3 vorgestellt worden sind, zur Wahl. Für stochastische Prozesse in der Skala scheinen unterschiedliche Strategien zur Definition der Schachtelung der Inkremente ebenfalls zu Unterschieden in der resultierenden Diffusionsfunktion zu führen. Auf Basis dieser Analyse lässt sich jedoch a priori keine bestimmte Wahl für die Schachtelung der Inkremente favorisieren. Vielmehr scheint es legitim, dass die Wahl für die Struktur der Inkremente abhängig vom zu untersuchenden Problem erfolgt, wie es auch in der Vergangenheit geschehen ist.

3.3.4 Zusammenfassung

Die Analyse von skalenabhängigen Eigenschaften ist in vielen Anwendungsbereichen von großer Bedeutung. Für die Untersuchung dieser Eigenschaften werden Filter benötigt, die auf die entsprechenden Daten angewendet werden können. In diesem Abschnitt sind die Korrelationen zwischen verschiedenen Ereignissen in einer allgemeinen Form untersucht worden.

In einem ersten Beispiel konnten Ergebnisse einer Arbeit von Wächter u.a. [2004a], die zum Teil auf numerischen Untersuchungen beruhten, bestätigt und die exakten analytischen Ausdrücke nachgeliefert werden. Die allgemeinen Zusammenhänge wurden ferner für eine detaillierte Untersuchung der Analogien zwischen der Beschreibung von Messungen durch Drift- und Diffusionsprozesse in Skala und Zeit verwendet. In diesem Zusammenhang wurde gezeigt, dass Drift- und Diffusionsfunktionen in Skala und Zeit unter gewissen Bedingungen auseinander hervorgehen, siehe z.B. Gleichung (3.46a).

Schließlich zeigt der Vergleich verschiedener Definitionen für die Schachtelung von Inkrementen unterschiedlicher Skalen, dass die Diffusionsfunktionen von der Struktur der verwendeten Inkremente abhängen. Diese Tatsache ist wichtig für zukünftige Arbeiten auf diesem Gebiet von großer Wichtigkeit.

Wir wollen uns nun noch einmal den Markov-Eigenschaften zuwenden, die eine fundamentale Voraussetzung für die Möglichkeit sind, stochastische Prozesse auf der Basis von Drift und Diffusion zu beschreiben.

Kapitel 4

Realisierung von Markov-Eigenschaften

Langevin-Gleichungen sind Gleichungen erster Ordnung in der Zeit, die von unkorreliertem Rauschen getrieben werden. Wie in Abschnitt 2.2.2 diskutiert, weisen Integrale von Langevin-Gleichungen damit notwendigerweise Markov-Eigenschaften auf. Die im letzten Abschnitt beschriebenen Methoden zur direkten Schätzung von Drift und Diffusion bzw. zur iterativen Optimierung der Ergebnisse setzen diese Eigenschaften stillschweigend voraus, weil sie auf der Langevin- bzw. der dieser zugeordneten Fokker-Planck-Gleichung beruhen. Vor einer Anwendung solcher Verfahren muss daher zunächst überprüft werden, ob die zu untersuchenden Daten Markov-Eigenschaften genügen.

Stochastische Trajektorien suspendierter Teilchen, wie z.B. Einstein [1905] sie untersucht hat, können Markov-Eigenschaften nur aufweisen, wenn die stochastischen Kräfte, die auf das Teilchen wirken, hinreichend unkorreliert sind. Auf kleinen Zeit- und Längenskalen muss sich aber die endliche Dauer von Stößen zeigen, die zu Korrelationen der stochastischen Kräfte führt. Markov-Eigenschaften müssen auf kleinen Skalen deshalb aus physikalischen Gründen verletzt sein. Bei der Analyse gemessener Zeitreihen mit hoher zeitlicher Auflösung beobachtet man üblicherweise, dass die Markov-Eigenschaften auf kleinen Zeitskalen nicht erfüllt sind. In Analogie zu den Arbeiten von Einstein haben Lück u.a. die Länge (bzw. den zeitlichen Abstand), unterhalb derer die Markov-Eigenschaften verschwinden, *Markov-Einstein-Kohärenzlänge*, kurz Markov-Einstein-Länge genannt [Lück u.a. 2006].

In Abschnitt 4.2 wird sich jedoch zeigen, dass jegliche Form von Messrauschen die Markov-Eigenschaften ebenfalls stören kann. Messrauschen umfasst dabei neben statistischen Fehlern, die häufig durch eine Normalverteilung der Messwerte um den wahren Zustand des Systems beschrieben werden, z.B. auch Diskretisierungsfehler. Die Konsequenzen dieses Kapitels sind damit leider etwas ernüchternd. Während in Zusammenarbeit mit Böttcher u.a. [2006] gezeigt werden konnte, dass die direkte Schätzung unter gewissen Umständen an das Vorhandensein von Messrauschen angepasst werden kann, erweist sich die Anwendung der iterativen Methode in Gegenwart von Messrauschen jedweder Form als schwierig. Hier ist auf zukünftige Fortschritte zu hoffen.

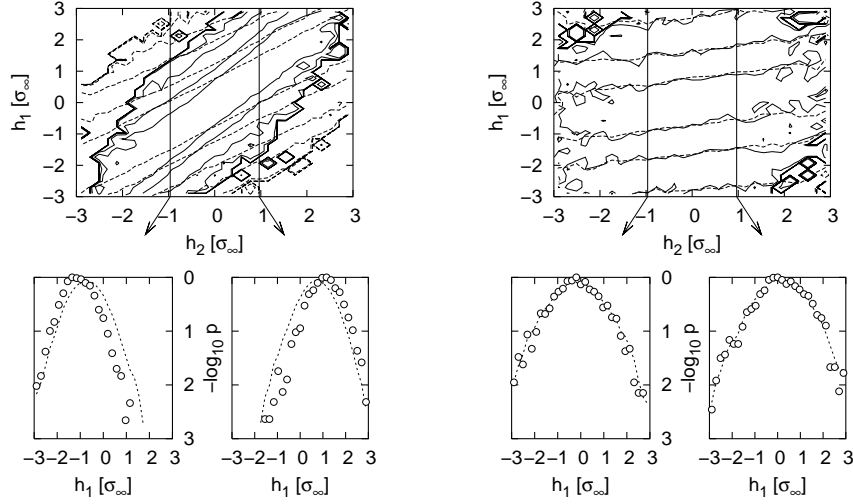


ABBILDUNG 4.1: Beispiel für die Untersuchung von Markov-Eigenschaften mit Hilfe der graphischen Überprüfung der Gültigkeit von (4.1). Untersucht wurden die Markov-Eigenschaften eines Goldfilmes auf zwei unterschiedlichen Skalen, $\Delta r = 14$ nm (links) und 35 nm (rechts), mit $\Delta r = r_3 - r_2 = r_2 - r_1$. In beiden Fällen gilt $r_2 = 169$ nm. Im oberen Bereich ist jeweils ein Konturplot der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $P(h_1, r_1 | h_2, r_2)$ (gestrichelte Linien) und $P(h_1, r_1 | h_2, r_2; h_3=0, r_3)$ (durchgezogene Linien) abgebildet. Die Höhen der Konturlinien unterscheiden sich um den Faktor 10, mit einer zusätzlichen Linie auf der Höhe 0.3. Unter den Konturplots sind jeweils zwei eindimensionale Schnitte bei $h_2 \approx \pm \sigma_\infty$ dargestellt, wobei $P(h_1, r_1 | h_2, r_2)$ gestrichelt und $P(h_1, r_1 | h_2, r_2; h_3=0, r_3)$ durch Punkte markiert ist. Aus den Abweichungen der PDFs für $\Delta r = 14$ nm (links) wird deutlich, dass Gleichung (4.1) hier nicht erfüllt ist. Für $\Delta r = 35$ nm (rechts) scheint die Gleichung dagegen zu gelten. Folglich können Markov-Eigenschaften in diesem Bereich erfüllt sein. (Quelle: Wächter u.a. 2004b)

4.1 Methoden zum Prüfen von Markov-Eigenschaften

Gehen wir nun davon aus, dass eine Zeitserie $x(t)$, die zu äquidistanten Zeiten $t_i = t_0 + i\tau$ aufgenommen wurde, auf Markov-Eigenschaften zu untersuchen sei. Es sollen zunächst einige Methoden vorgestellt werden, die zu diesem Zweck verwendet werden können.

Direkter Vergleich von Wahrscheinlichkeitsdichten

Weisen die Daten Markov-Eigenschaften auf, so muss für Übergangswahrscheinlichkeitsdichten gemäß (2.18) für $t_0 < t_1 < t_2$ trivialerweise gelten:

$$p(x_2, t_2 | x_1, t_1) = p(x_2, t_2 | x_1, t_1; x_0, t_0) \quad . \quad (4.1)$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Hinzunahme einer weiteren Bedingung, die einer zusätzlichen Information über den Prozess in der Vergangenheit entspricht, für Markov-Prozesse keinen Einfluss auf die Dynamik hat, und muss notwendigerweise für alle Kombinationen von x_2 , x_1 und x_0 sowie für jede Wahl der Zeitpunkte t_i , die in der geforderten Art und Weise angeordnet sind, erfüllt sein. In vielen Arbeiten insbesondere zur Analyse stochastischer Prozesse in der Skala wurde die

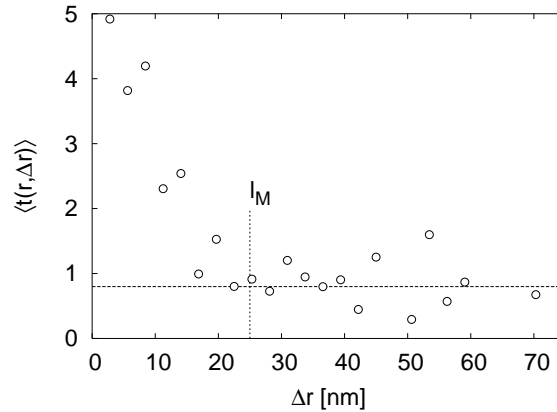


ABBILDUNG 4.2: Beispiel für die Anwendung des Wilcoxon-Tests für die Beschreibung der Markov-Eigenschaften einer Goldoberfläche für $r = 28$ nm. Die gestrichelte, horizontale Linie markiert den theoretischen Grenzwert von $\sqrt{\pi/2}$. Es wird deutlich, dass dieser oberhalb einer Markov-Länge $\Delta r = l_M = 25 \pm 5$ nm erreicht ist. Unterhalb steigt der Abstand der verglichenen Wahrscheinlichkeitsdichten stark an, wie schon in Abbildung 4.1 zu erkennen war. Markov-Eigenschaften sind in diesem Bereich nicht erfüllt. (Quelle: Wächter u.a. 2004b)

Gültigkeit von Gleichung (4.1) zur Verifizierung der Markov-Eigenschaften verwendet. Die Auswertung erfolgte dabei in der Regel grafisch, wie dies z.B. in Abbildung 4.1 dargestellt ist.

Offensichtlich ist eine geeignete Interpretation der graphischen Darstellungen nicht einfach. Prinzipiell lässt sich die Gültigkeit von Gleichung (4.1) natürlich – mit einem geeigneten Maß als Abstandsfunktion – auch numerisch überprüfen. Dabei ist zu beachten, dass die doppelt bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte in der Regel auf wesentlich weniger Ereignissen basiert und damit nur viel schlechter aufgelöst werden kann. Zum Vergleich der Verteilungen hat sich der Wilcoxon-Test bewährt [Mann & Whitney 1947; Wilcoxon 1945], der nur geringe Anforderungen an die zu vergleichenden PDFs stellt. Für eine detaillierte Beschreibung des Wilcoxon-Tests sei hier auf den Anhang von Renner u.a. [2001b] verwiesen. Das Ergebnis des Tests für die in Abbildung 4.1 dargestellten PDFs ist in Abbildung 4.2 zu sehen. Es ist konsistent mit den Ergebnissen der graphischen Auswertung.

Numerische Integration der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Sind Markov-Eigenschaften erfüllt, so folgt außerdem die Gültigkeit der *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*

$$P(x_2, t_2 | x_0, t_0) = \int dx_1 P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1 | x_0, t_0) \quad (4.2)$$

für alle x_2 und x_0 sowie $t_0 < t_1 < t_2$. Nach Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichten P lässt sich die Gültigkeit dieser Gleichung durch numerische Integration prüfen. Für stationäre Zeitreihen bietet es sich an, $t_1 = (t_0 + t_2)/2$ zu wählen, sodass bei der Integration – zumindest für stationäre Prozesse – zweimal dieselben Übergangswahrscheinlichkeitsdichten verwendet werden können.

Nach der Integration steht man prinzipiell vor demselben Problem wie beim direkten Vergleich der PDFs: Die Gültigkeit der Gleichung muss mit geeigneten Mitteln bewertet werden. Wie schon im letzten Beispiel kommt hier eine graphische Auswertung der Gleichung oder auch die Berechnung eines Abstandmaßes – z.B. mit Hilfe

des Wilcoxon-Tests – in Frage. Im Gegensatz zum direkten Vergleich können hier auch viele andere Abstandsmaße angewendet werden, weil die beiden Verteilungen auf ähnlich vielen Daten basieren.

Obwohl die beiden bislang diskutierten Verfahren jeweils nur notwendige Bedingungen darstellen, haben sie sich zur sicheren Überprüfung von gemessenen Daten auf Markov-Eigenschaften bislang bewährt.

Untersuchung des dynamischen Rauschens

Wenn eine Analyse der Daten mit der von Siegert u.a. vorgeschlagenen direkten Schätzung, Gleichung (3.1), erfolgen soll und damit angenommen wird, dass sich die Daten durch Drift- und Diffusionsfunktionen beschreiben lassen, steht noch eine andere Methode zur Verfügung, die gewissermaßen den natürlichsten Zugang darstellt. Sind Drift und Diffusion nach Schätzung auf der Basis von (3.1) bekannt, so lässt sich die diskrete Form der Langevin-Gleichung, (2.32), umstellen und das dynamische Rauschen direkt aus den Daten gewinnen,

$$\Gamma(t) = \frac{x(t + \tau) - x(t) + \tau D^{(1)}(x(t), t)}{D^{(2)}(x(t), t)} \quad . \quad (4.3)$$

Wenn die Modellierung auf der Basis von Drift und Diffusion selbstkonsistent sein soll, muss $\Gamma(t)$ nun die geforderten Eigenschaften (2.22) erfüllen. Insbesondere muss also die Korrelation von $\Gamma(t)$ instantan abfallen. Erfüllt $\Gamma(t)$ diese Eigenschaften, so ist davon auszugehen, dass die zugrundeliegenden Daten Markov-Eigenschaften genügen. Für eine genauere Beschreibung und ein Beispiel sei an dieser Stelle auf Marcq & Naert [2001] verwiesen.

4.2 Einfluss gestörter Messungen auf die Markov-Eigenschaften

Nun soll eine Arbeit vorgestellt werden, die im Rahmen dieser Promotion entstanden und im Jahr 2007 in „Physical Review E“ erschienen ist [Kleinhans u.a. 2007]. In dieser Arbeit sind die Markov-Eigenschaften von Daten untersucht worden, die durch externe Fehlerquellen beeinträchtigt sind und daher nicht die exakte Dynamik des zu analysierenden Systems widerspiegeln.

4.2.1 Charakterisierung von Messfehlern

Betrachtet wird ein stochastischer Prozess $x(t)$. Es sei jedoch angenommen, dass der wahre Prozess $x(t)$ verschränkt ist, weil statt $x(t)$ eine gestörte Variable $y(t)$ gemessen wird, die aus $x(t)$ hervorgeht als

$$y(t) = x(t) + \xi(x(t), t) \quad . \quad (4.4)$$

$\xi(x(t), t)$ ist hier eine Zufallsvariable, die Störungen während der Aufnahme der Messwerte $x(t)$ beschreiben soll. Wenn $x(t)$ ein Markov-Prozess ist, so bezeichnet man das hier betrachtete Modell häufig als *verstecktes* oder *verschränktes Markov-Modell* (im Englischen: „hidden Markov model“) [Rabiner 1989].

Wir gehen davon aus, dass deterministische Beiträge der Störungen identifiziert werden können und sich ξ deshalb zusammensetzt als

$$\xi(x(t), t) = \xi_s(x(t)) + \xi_{ns}(t) \quad . \quad (4.5)$$

$\xi_{ns}(t)$ ist hier eine Zufallsvariable, die so genanntes *Messrauschen*, das durch nicht-systematische Messfehler verursacht wird, beschreibt. Weil Messrauschen – im Gegensatz zum dynamischen Rauschen, das in der Langevin-Gleichung auftritt – keinen

Einfluss auf die weitere Dynamik des Prozesses hat, wird es gelegentlich auch als *externes Rauschen* bezeichnet. Der Einfachheit halber wird hier angenommen, dass die nicht-systematischen Fehler für aufeinanderfolgende Messungen unabhängig voneinander sind und damit gilt:

$$\langle \xi_{ns}(t + \tau) \xi_{ns}(t) \rangle \sim \delta(\tau) \quad . \quad (4.6)$$

Auf der anderen Seite berücksichtigt ξ_s deterministische, systematische Messfehler, die nicht explizit von der Zeit abhängen. Während bei den nicht-systematischen Fehlern angenommen wurde, dass sie unkorreliert sind, zeigt ξ_s aufgrund der Korrelationen der zugrundeliegenden Variable x in der Regel endliche Korrelationen. Systematische Fehler werden häufig vernachlässigt, weil Experimentatoren natürlich versuchen, sie zu vermeiden, und sich diese im Nachhinein schlecht parametrisieren lassen. Eine sehr wichtige Art von Störungen dieser Art, die sich durch ξ_s explizit beschreiben lassen, sind Diskretisierungsfehler, die während der Aufnahme oder Speicherung der Messwerte auftreten. Im Allgemeinen sind solche Fehler an Gleichung (4.5) sogar an mehreren Stellen – nämlich für jede Variable einzeln – zu betrachten, da sie sich nicht assoziativ verhalten. Gerade bei der Nutzung von „alten“ Datensätzen, die noch aus Zeiten stammen, in denen die digitale Speicherung von Daten teuer war und die deshalb so platzsparend wie möglich aufgenommen werden mussten, können Diskretisierungsfehler auf kleinen Zeitskalen eine wichtige Rolle spielen.

4.2.2 Markov-Eigenschaften unter dem Einfluss von Störungen

Es sei nun angenommen, dass der (versteckte) Prozess $x(t)$ Markov-Eigenschaften besitzt und Messungen $y(t)$ an einem Ensemble solcher Prozesse vorliegen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf stationäre, eindimensionale Prozesse. An dieser Stelle werden zu diesem Zweck nur drei nacheinander aufgenommene Messpunkte y_0 , y_1 und y_2 mit $y_i := y(t_i)$ und $t_i := t_0 + i\tau$ untersucht.

Sind die verschiedenen Ursachen der Störungen, die in Abschnitt 4.2.1 diskutiert wurden, charakterisiert, so hängt die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten von y_i einzig von dem (versteckten) Zustand x_i ab und kann durch die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P_\xi(y_i|x_i)$ beschrieben werden. Folglich kann die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P_y(y_2|y_1, y_0)$ für den Prozess $y(t)$ mit Hilfe der Definition als Quotient von Verbundwahrscheinlichkeitsdichten, (2.15), auf Übergangswahrscheinlichkeitsdichten des (Markov-)Prozesses $x(t)$ zurückgeführt werden. Wenn wir diese als P_x bezeichnen und die Markov-Eigenschaften ausnutzen, ergibt sich für die zweifach bedingten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten von y

$$\begin{aligned} P_y(y_2|y_1, y_0) &= \frac{P_y(y_2, y_1, y_0)}{P_y(y_1, y_0)} \\ &= \frac{\int dx_2 \int dx_1 \int dx_0 P_\xi(y_2|x_2) P_\xi(y_1|x_1) P_\xi(y_0|x_0) P_x(x_2|x_1) P_x(x_1|x_0) P_x(x_0)}{\int dx_1 \int dx_0 P_\xi(y_1|x_1) P_\xi(y_0|x_0) P_x(x_1|x_0) P_x(x_0)} \quad . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wenn y Markov-Eigenschaften genügen soll, so müssen diese bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten nach (4.1) den einfach bedingten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten

$$P_y(y_2|y_1) = \frac{P_y(y_2, y_1)}{P_y(y_1)} = \frac{\int dx_2 \int dx_1 P_\xi(y_2|x_2) P_\xi(y_1|x_1) P_x(x_2|x_1) P_x(x_1)}{\int dx_1 P_\xi(y_1|x_1) P_x(x_1)} \quad (4.8)$$

entsprechen. Es zeigt sich, dass das im Allgemeinen nicht der Fall ist. Daraus folgt sofort, dass gestörte Messungen an Markov-Prozessen eben diese Markov-Eigenschaft im Allgemeinen verlieren.

Bezugnehmend auf Abschnitt 2.2.1 heißt das, dass die Kenntnis eines einzelnen Wertes $y(t_n)$ einer gestörten Messung eines Markov-Prozesses für eine Vorhersage der folgenden Messwerte in der Regel nicht ausreicht. Das lässt sich unmittelbar verstehen, weil der zugrundeliegende Zustand $x(t_n)$ – zumindest im Falle starker Störungen – aufgrund der Störungen kaum aus nur einer einzelnen Messung bestimmt werden kann. Vielmehr kann die Berücksichtigung von mehreren Werten, $y(t_0), \dots, y(t_n)$, die Qualität einer Vorhersage für den Wert $y(t_{n+1})$ erhöhen. Schon aus dieser Argumentation wird deutlich, dass y kein Markov-Prozess sein kann.

Zumindest für drei einfache Fälle kann Gleichung (4.8) analytisch ausgewertet werden.

Zunächst einmal besitzt y in dem trivialen Fall $P_\xi(y|x) = \delta(y - x)$, in dem gar keine Störung der Messung vorliegt, Markov-Eigenschaften.

Darüber hinaus kann (4.8) direkt ausgewertet werden, falls $P_x(x_{i+1}|x_i) = P_x(x_{i+1})$ gilt. Das ist der Fall, wenn der verschränkte Prozess x keinerlei Korrelationen aufweist, also dem einfachsten Markov-Prozess (2.18) entspricht, und ist häufig näherungsweise erfüllt, wenn ein stochastischer Prozess stationär ist und die Abstände zwischen aufeinander folgenden Messungen sehr groß sind. Die Integrale in Gleichung (4.8) lassen sich dann voneinander trennen und es ergibt sich $P_y(y_2|y_1, y_0) = P_y(y_2)$. Die gemessene Variable y genügt folglich ebenfalls Markov-Eigenschaften.

Zuletzt können verrauschte Messungen untersucht werden, bei denen die Abtastung wesentlich schneller erfolgt als die interne Dynamik der Variablen x . Dann ist

$$P_x(x_2|x_1) = \delta(x_2 - x_1) \quad (4.9)$$

eine vertretbare Näherung für die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte zwischen direkt aufeinander folgenden Messungen. Darüber hinaus wird nur nicht-systematisches, normalverteiltes Messrauschen der Varianz σ berücksichtigt, also

$$P_\xi(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.10)$$

Gleichung (4.8) kann dann ausgewertet werden und liefert

$$\begin{aligned} P_y(y_2|y_1, y_0) &= \sqrt{\frac{1}{3\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(2y_2 - y_1 - y_0)^2}{12\sigma^2}\right] \\ &\quad \times \frac{\int dx_0 \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2/3}} \exp\left[-\frac{(x_0 - \frac{1}{3}(y_2 + y_1 + y_0))^2}{2\sigma^2/3}\right] P_x(x_0)}{\int dx_0 \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2/2}} \exp\left[-\frac{(x_0 - \frac{1}{2}(y_1 + y_0))^2}{2\sigma^2/2}\right] P_x(x_0)} \quad (4.11) \end{aligned}$$

Im letzten Faktor tauchen in Zähler und Nenner zwei unterschiedliche Faltungen auf: Die stationäre Verteilung wird mit Normalverteilungen mit unterschiedlichen Varianzen, zentriert um die Mittelwerte von y_2, y_1, y_0 bzw. y_1, y_0 , gefaltet. Dieser Ausdruck hängt daher im Allgemeinen von y_0 ab und steht damit im Widerspruch zu Markov-Eigenschaften des Prozesses y . An dieser Stelle soll noch einmal betont werden, dass die Näherung der Persistenz, (4.9), die hier verwendet worden ist, nur für Messungen in sehr kurzem zeitlichen Abstand an verhältnismäßig langsamen Prozessen gültig ist. Dieses Beispiel zeigt für solche Fälle den Verlust von Markov-Eigenschaften durch die externen Störungen.

4.2.3 Beispiele

Diese Ergebnisse sollen nun anhand zweier Beispiele veranschaulicht werden.

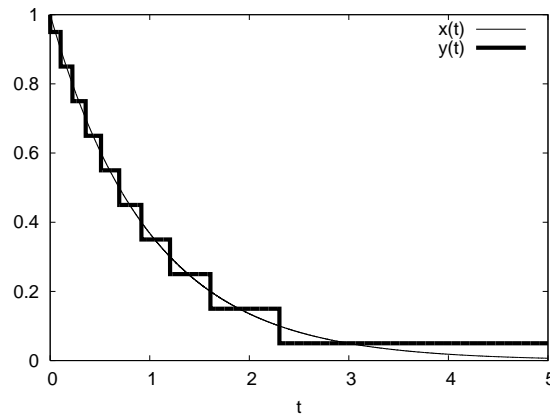


ABBILDUNG 4.3: Beispiel für einen Prozess $x(t)$ gemäß Gleichung (4.12), der starken Diskretisierungsfehlern unterliegt. Die dünne Linie entspricht dem ursprünglichen Prozess x , während die dicke Linie das gemessene y beschreibt, das nur einige diskrete Werte annimmt.

Zunächst wird den Einfluss von Diskretisierungsfehlern auf die Eigenschaften eines einfachen, deterministischen Prozesses gezeigt. Per Konstruktion kann hier eine Verletzung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (4.2) herbeigeführt werden. Danach wird der Einfluss normalverteilter Messrauschens auf die Markov-Eigenschaften eines relativ schnell abgetasteten Markov-Prozesses untersucht. Die Auswirkungen des Messrauschens auf die Markov-Eigenschaften werden beim graphischen Vergleich von mit Hilfe der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (4.2) berechneten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten mit direkt aus den Daten ermittelten PDFs deutlich.

Einfluss von Diskretisierungsfehlern

Wir betrachten den einfachen, deterministischen Prozess

$$x(t_0 + \tau) = x(t_0) \exp[-\gamma\tau] \quad , \quad (4.12)$$

der die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = -\gamma x \quad (4.13)$$

darstellt. Weil die Dynamik von erster Ordnung in der Zeit ist, ist der eindimensionale Prozess $x(t)$ durch eine einzige Anfangsbedingung festgelegt und besitzt daher Markov-Eigenschaften. Weil der Prozess deterministisch ist, kann die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte der Variablen x für das Zeitintervall τ mit Hilfe der δ -Distribution dargestellt werden,

$$P_x(x_1|x_0, \tau) = \delta(x_1 - x_0 e^{-\gamma\tau}) \quad . \quad (4.14)$$

Der Prozess ist offensichtlich nicht stationär, weil γ dissipativ wirkt und keine Energie z.B. in Form von thermischem Rauschen zugeführt wird. Die bedingten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten hängen jedoch nicht explizit von der Zeit ab. Wir untersuchen nun ein Ensemble von solchen Prozessen, deren Anfangsbedingungen $x(t_0)$ der Verteilung $P_x(x)$ gehorchen sollen.

Es wird speziell angenommen, dass der exakte Zustand x der Prozesse aufgrund von Diskretisierungsfehlern, die in einen gedachten Messprozess einfließen, unbekannt ist. Die exakten, kontinuierlichen Variablen x werden daher abgebildet auf

eine endliche Menge von zulässigen Messwerten, $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}$, gemäß der Regel

$$x \rightarrow y = \omega_i \quad \text{so, dass} \quad \omega_i^- \leq x < \omega_i^+ \quad . \quad (4.15)$$

Die einzelnen Intervalle $[\omega_i^-, \omega_i^+]$ und $[\omega_{i+1}^-, \omega_{i+1}^+]$, die den diskreten Werten ω_i bzw. ω_{i+1} zugeordnet werden, sind dabei durch die Bedingung $\omega_i^+ = \omega_{i+1}^-$ and $\omega_i^- < \omega_i^+$ verbunden. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass alle Prozesse $x(t)$ zu jedem Zeitpunkt t im Intervall $[\omega_0^-, \omega_n^+]$ liegen und folglich mit Hilfe dieser Vorschrift aufgelöst werden können. Diese Diskretisierungsfehler können in Übereinstimmung mit dem letzten Unterabschnitt nun mit Hilfe von Übergangswahrscheinlichkeitsdichten ausgedrückt werden,

$$P_\xi(y|x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [y^-, < y^+[\\ 0 & \text{für } x \notin [y^-, < y^+[\end{cases} \quad . \quad (4.16)$$

Der Einfluss von Diskretisierungsfehlern auf die ursprüngliche Variable x ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Weil y nur diskrete Werte $\omega_0, \dots, \omega_n$ annimmt, wird die Normierung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichten durch

$$\sum_{y \in \Omega} P_\xi(y_i|x) = 1 \quad (4.17)$$

gewährleistet.

Nun soll anhand dieses Beispiels gezeigt werden, wie sich die Diskretisierung auf die Markov-Eigenschaften auswirkt. Im Prinzip könnte Gleichung (4.8) hierfür – z.B. numerisch – ausgewertet werden. In diesem einfachen Beispiel lässt sich alternativ dazu aber auch die Chapman-Kolmogorov-Gleichung (4.2), die für Markov-Prozesse notwendigerweise erfüllt sein muss, zum Widerspruch führen. Letzteren Weg wollen wir hier gehen.

Die Auswertung von (4.8) für die jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeitsdichten (4.14) und (4.16) liefert für die einfach bedingten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten des diskretisierten Prozesses y

$$P_y(y_1|y_0, \tau) = \frac{\int_{\max(y_0^-, e^{\gamma\tau} y_1^-)}^{\min(y_0^+, e^{\gamma\tau} y_1^+)} dx_0 P_x(x_0)}{\int_{y_0^-}^{y_0^+} dx_0 P_x(x_0)} \quad . \quad (4.18)$$

Wenn der Prozess $y(t)$ Markov-Eigenschaften genügen würde, so müsste die diskrete Version der Chapman-Kolmogorov-Gleichung,

$$P_y(y_2|y_0, 2\tau) = \sum_{y_1 \in \Omega} P_y(y_2|y_1, \tau) P_y(y_1|y_0, \tau) \quad , \quad (4.19)$$

für jede Wahl von y_2 , y_0 and τ notwendigerweise gelten. Für $y_2 = y_0 = y$ mit $y^- > 0$ und $\tau = \log(y^+/y^-)/(2\gamma)$ ist aber die Verletzung dieser Gleichung offensichtlich, falls $P_x(x) > 0$ für $x \in [y^-, y^+]$ gilt: Die linke Seite von Gleichung (4.19) verschwindet, wohingegen die Summe auf der rechten Seite u.a. den Summanden

$$\left[\frac{\int_{e^{\log(y^+/y^-)/2\gamma} y^-}^{y^+} dx_0 P_x(x_0)}{\int_{y^-}^{y^+} dx_0 P_x(x_0)} \right]^2 > 0 \quad (4.20)$$

enthält. Weil die anderen Summanden alle nicht-negativ sind, ist die Chapman-Kolmogorov-Gleichung in diesem Fall nicht zu erfüllen. Der gestörte Prozess $y(t)$ ist folglich kein Markov-Prozess mehr.

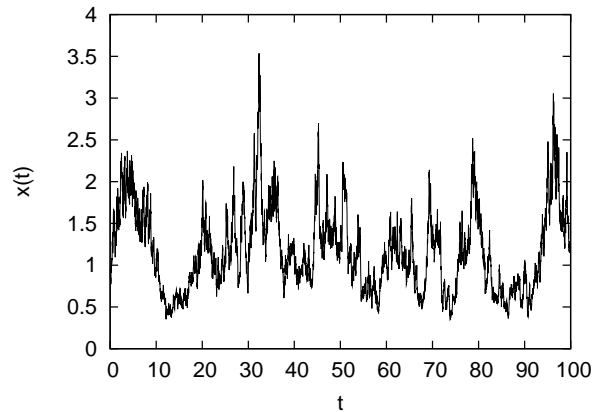


ABBILDUNG 4.4: Ausschnitt einer Realisierung des stochastischen Prozesses (4.21) für die Parameter $(\gamma, D) = (0.75, 0.1)$. Das Auftreten ausgeprägter Spitzen ist charakteristisch für multiplikative stochastische Prozesse.

Einfluss von Messrauschen

Nun wird der Einfluss normalverteilter Messrauschens auf den eindimensionalen stochastischen Prozess mit den Drift- und Diffusionsfunktionen

$$D^{(1)}(x) = x \left(D - \gamma \log \left(\frac{x}{x_0} \right) \right) \quad (4.21a)$$

$$D^{(2)}(x) = Dx^2 \quad (4.21b)$$

untersucht, der bereits in Abschnitt 3.2.4 eingeführt worden ist. Für weitere Details zum Prozess sei deshalb auf diesen Abschnitt verwiesen. Der Prozess lässt sich durch eine Variablentransformation aus einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess gewinnen, für den Übergangswahrscheinlichkeitsdichten für endliche Zeiten bekannt sind, siehe (2.45b). Unter Verwendung dieser Propagatoren können mit Hilfe des folgenden Schemas diskrete Realisierungen des Prozesses gewonnen werden, die bezüglich der numerischen Integration für beliebige Δt exakt sind,

$$x_i = \exp[s_i] \quad (4.22a)$$

$$s_{i+1} = e^{-\gamma \Delta t} s_i + \sqrt{\frac{D}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma \tau})} \Gamma_i \quad (4.22b)$$

Die Gleichung (4.22b) ist hier eine Vorschrift zur Diskretisierung eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses, wobei Γ_i unabhängige, normalverteilte Zufallszahlen mit Varianz 2 sind. Der Startwert s_0 ist geeignet zu wählen. Für die numerischen Beispiele, die hier vorgestellt werden, wurden die Startwerte aus einer Normalverteilung mit Varianz D/γ gezogen, die der stationären Verteilung von s entspricht. Der Prozess x , der durch die Drift- und Diffusionsfunktionen (4.21) beschrieben wird, ergibt sich aus s mit Hilfe der nichtlinearen Transformation (4.22a). Ein Beispiel für eine Realisierung des Prozesses mit den Parametern $(\gamma, D) = (0.75, 0.1)$ ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

Für das aktuelle Beispiel wurde mit Hilfe von (4.22) eine Zeitreihe A, bestehend aus $50 \cdot 10^6$ Punkten, zum Zeitinkrement $\tau = 0.05$ erzeugt. Eine zweite Zeitreihe B wurde aus A durch Addition von unabhängigen, gleichverteilten Zufallszahlen der Varianz $2.25 \cdot 10^{-2}$ gewonnen, die nicht-systematische Messfehler im Sinne von Abschnitt 4.2.1 nachbilden sollen. Ausschnitte aus den Zeitreihen A und B sind in

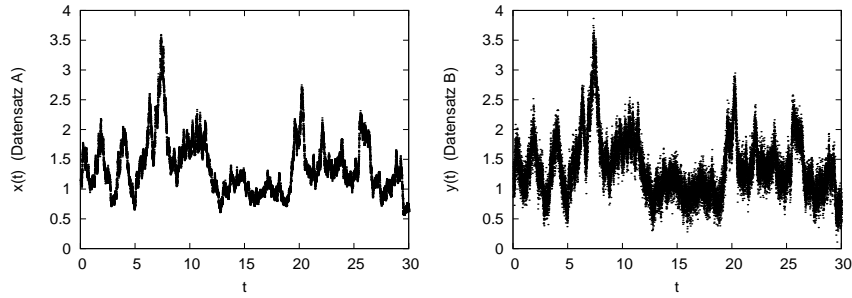


ABBILDUNG 4.5: Ausschnitte aus den Zeitreihen A (links) und B (rechts), die für die in Abbildung 4.6 dargestellte Analyse verwendet wurden. Der Einfluss der gezielten Störung von Datensatz B, der zu einer Verwischung des Graphen führt, ist deutlich zu erkennen. Die Erzeugung der Datensätze ist auf Seite 51 beschrieben.

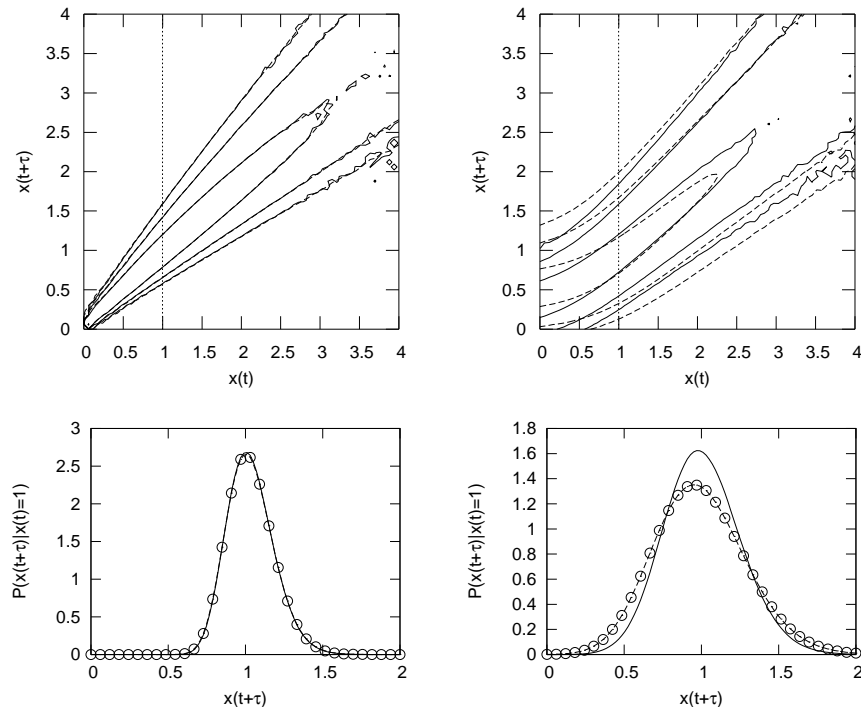


ABBILDUNG 4.6: Test auf Markov-Eigenschaften für simulierte Prozesse A ohne Messrauschen (links) und B mit Messrauschen der Varianz $2.25 \cdot 10^{-2}$ (rechts). Im oberen Teil werden jeweils die bedingten Übergangswahrscheinlichkeitsdichten für $\tau = 0.1$ (durchgezogene Konturlinien) mit solchen verglichen, die für dasselbe Zeitinkrement mit Hilfe der numerischen Integration der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (4.2) angewendet auf Übergangswahrscheinlichkeitsdichten für das Inkrement $\tau/2$ berechnet wurden (gestrichelte Konturlinien). Die einzelnen Konturlinien liegen bei 1, 0.1 und 0.01. Unten ist jeweils ein Schnitt der Übergangswahrscheinlichkeitsdichten an der Stelle $x(t) = 1$ abgebildet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Verteilungen, die aus der numerischen Integration der Chapman-Kolmogorov-Gleichung gewonnen wurden, zusätzlich durch dicke Punkte gekennzeichnet. Für Datensatz A stimmen die jeweiligen PDFs offensichtlich überein, während für Datensatz B systematische Abweichungen auftreten. Die Markov-Eigenschaften sind durch das Messrauschen, das dem Datensatz B hinzugefügt wurde, folglich verlorengegangen.

Abbildung 4.5 dargestellt. Die Zeitreihen A und B wurden nun derselben Analyse unterworfen: Aus den Daten wurden bedingte Übergangswahrscheinlichkeitsdichten für die Zeitinkremente $\tau = 0.1$ und $\tau = 0.05$ gewonnen. Aus den PDFs für das kleinere Inkrement, $\tau = 0.05$, wurden mit Hilfe der Chapman-Kolmogorov-Gleichung ebenfalls Übergangswahrscheinlichkeitsdichten für das Inkrement $\tau = 0.1$ berechnet. Die beiden PDFs wurden – wie in Abschnitt 4.1 beschrieben – verglichen und damit zur Überprüfung der Markov-Eigenschaften der zugrundeliegenden Daten verwendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.6 dargestellt.

Für Markov-Prozesse müssen die beiden Übergangswahrscheinlichkeitsdichten übereinstimmen. Im Falle von Datensatz B treten jedoch systematische Abweichungen auf, die von dem hinzugefügten Messrauschen stammen. Das Messrauschen beeinträchtigt folglich die Markov-Eigenschaften der gestörten Zeitreihe B.

Die Datensätze A und B entsprechen dem ersten und dem dritten Grenzfall von Gleichung (4.8), die in Abschnitt 4.2.2 schon diskutiert worden sind: Im Datensatz A sind keine Störungen vorhanden und die Markov-Eigenschaften somit trivalerweise erfüllt. In Datensatz B wurde normalverteiltes Messrauschen hinzugefügt und der Prozess auf der Skala $\tau = 0.1$, die für die interne Dynamik relativ klein ist, untersucht. Der zweite Fall kann ebenfalls betrachtet werden, wenn der Prozess B auf sehr großen Zeitskalen untersucht wird. Wird τ hinreichend groß gewählt, so sind die Markov-Eigenschaften aufgrund verschwindender Korrelationen des Prozesses x wieder erfüllt.

4.2.4 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt ist der Einfluss von Störungen auf die Markov-Eigenschaften gemessener Daten untersucht worden. Dabei hat sich gezeigt, dass verschiedene Störungen dazu führen können, dass Markov-Eigenschaften verloren gehen. Neben unkorreliertem Messrauschen, das sich aus der Kombination vieler kleiner, unsystematischer Fehler ergeben kann und dessen störender Einfluss weithin bekannt ist, haben wir uns mit sogenannten Diskretisierungsfehlern beschäftigt. Im Grenzübergang hoher Samplingfrequenzen, der für die Anwendung der direkten Schätzung von Drift und Diffusion mit Hilfe von (3.1) untersucht werden muss, treten solche Fehler für digital gemessene oder gespeicherte Messwerte zwangsläufig auf.

Bei der Analyse experimenteller Daten wird im Allgemeinen beobachtet, dass Markov-Eigenschaften auf kleinen Skalen verletzt sind. Lück u.a. [2006] haben dieses Phänomen genauer untersucht und die Länge, unterhalb derer kein Markov-Verhalten mehr beobachtet wird, als Markov-Einstein-Länge l_{mar} bezeichnet. Sie beziehen sich damit auf Einsteins Arbeiten zur Diffusion von Teilchen in Flüssigkeiten [Einstein 1905], in denen Einstein atomare Stoßprozesse als Ursache für die Diffusionsbewegung angeführt hat. Aufgrund der in diesem Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse ist bei der Interpretation der *Markov-Einstein-Länge* nun große Vorsicht geboten: Charakteristisch für die mikroskopische Dynamik kann sie natürlich nur sein, wenn die Ursache für das Verschwinden der Markov-Eigenschaften auf kleinen Skalen nicht in externen Fehlern wie z.B. in der Diskretisierung der Messwerte liegt.

In der Regel liegen Messwerte heutzutage in diskreter Form vor. Der Einfluss dieser Diskretisierung auf die Markov-Einstein-Länge lässt sich zum Beispiel untersuchen, indem die Diskretisierung bewusst geringfügig verstärkt und l_{mar} erneut bestimmt wird. Wenn mikroskopische Effekte die Ursache für das Verschwinden der Markov-Eigenschaften sind, sollte sich l_{mar} gegenüber dieser zusätzlichen Diskretisierung als stabil erweisen.

4.3 Analyse von Prozessen in Gegenwart von Messrauschen

Im letzten Abschnitt konnte gezeigt werden, dass Messrauschen die Markov-Eigenschaften stören kann. Im Allgemeinen sind die bislang vorgestellten Verfahren zur Schätzung von Drift und Diffusion in Gegenwart von Messrauschen daher nicht mehr anwendbar. Auch eine Glättung der Messwerte z.B. durch gleitende Mittelwerte hilft nur bedingt weiter, weil diese die zur Verfügung stehenden Informationen lediglich reduziert und sich ebenfalls negativ auf die Markov-Eigenschaften auswirken kann. Auf der anderen Seite unterliegen natürlich fast alle Messungen gewissen Störungen.

Die Schätzung von Drift und Diffusion in Gegenwart von Messrauschen war in den letzten Jahren Gegenstand mehrerer Arbeiten: Zunächst konnten Siefert u.a. [2003] zeigen, dass die Anwendung des direkten Schätzverfahrens auf Prozesse mit leichtem Messrauschen in einer leicht veränderten Form funktioniert: Anstatt (3.1) im Grenzwert $\tau \rightarrow 0$ auszuwerten, werden die bedingten Momente für kleine τ durch ein Polynom dargestellt. Der Vergleich mit der Itô-Taylor-Entwicklung (3.4) zeigt, dass die gesuchten Werte für Drift und Diffusion den Koeffizienten der linearen Terme entsprechen. Dieses Verfahren erweist sich kleinen Störungen – z.B. durch Messrauschen – gegenüber als relativ stabil und wird daher standardmäßig angewendet, wie schon in Abschnitt 3.1 beschrieben.

In Zusammenarbeit mit Böttcher u.a. ist speziell die Analyse von Daten, die von sehr starkem Rauschen verunreinigt wurden, untersucht worden [Böttcher u.a. 2007b, 2006]. Mit Hilfe eines Bayes'schen Ansatzes können hier die Parameter von stochastischen Prozessen geschätzt werden, wenn die Form von Drift und Diffusion vorab bekannt ist und eine geeignete Parametrisierung für die Funktionen gefunden werden kann. Insbesondere für normalverteiltes Messrauschen folgen dann exakte Zusammenhänge zur Bestimmung der Koeffizienten. Leider konnte die vermutlich vorrangige Ursache für die Störung der direkten Schätzung – das Verschwinden der Markov-Eigenschaften nämlich – im Rahmen dieser früheren Arbeiten nicht identifiziert werden. Es ist vorstellbar, dass sich diese Verfahren mit den hier vorgestellten Ergebnissen deshalb in Zukunft weiter verbessern lassen.

Die Anwendung der iterativen Optimierung schließlich erfordert ebenfalls, dass der zugrundeliegende Prozess ein Markov-Prozess ist. Im Gegensatz zu der letztgenannten Methode ist eine Betrachtung der Daten im Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$ hier nicht nötig, sodass der Einfluss von Störungen wie Diskretisierungsfehlern, die sich auf großen Skalen weniger bemerkbar machen, durch geeignete Wahl des Zeitinkrements vermieden werden kann. In Gegenwart starken Messrauschens führt diese Methode jedoch nicht zu verlässlichen Ergebnissen. Hier sind in Zukunft z.B. durch die Verwendung von Optimierungsverfahren wie sogenannten EM-Algorithmen (von: „expectation maximation“) [Krishnamurthy & Moore 1993], die für die Verbesserung von Signalverarbeitungsprozessen und Spracherkennungsverfahren entwickelt worden sind, noch Fortschritte zu erwarten.

Kapitel 5

Anomale Diffusion und zeitkontinuierliche Prozesse (CTRWs)

Bislang haben wir uns – wenn wir die Störungen des Messprozesses, die im letzten Kapitel untersucht wurden, einmal ausnehmen – ausschließlich mit Prozessen beschäftigt, deren Ensemble-Dynamik sich mit Hilfe von Fokker-Planck-Gleichungen beschreiben lässt und die sich mit Hilfe von Langevin-Gleichungen modellieren lassen. In Kapitel 2 haben wir gesehen, dass diese Prozesse mikroskopisch von einem Wiener-Prozess generiert werden. Charakteristisch für solche Prozesse ist, dass die Relaxation (z.B. in einen stationären Zustand) durch den klassischen Zusammenhang von Debye [Metzler & Klafter 2000],

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp(-t/\tau) \quad , \quad (5.1)$$

mit der Relaxationszeit τ beschrieben werden kann. In komplexen Systemen wie z.B. turbulenten Strömungen oder amorphen Medien werden aber häufig Abweichungen von dieser Gesetzmäßigkeit beobachtet. Einige Systeme können zum Beispiel besser durch sogenannte „stretched exponentials“ nach Kohlrausch, Williams und Watts [Metzler & Klafter 2000],

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp(-(t/\tau)^\alpha) \quad , \quad (5.2)$$

oder durch ein asymptotisches Potenzgesetz,

$$\Phi(t) = \Phi_0 (1 + t/\tau)^{-n} \quad , \quad (5.3)$$

beschrieben werden.

In einer ähnlichen Art und Weise gehorchen auch Diffusionsprozesse in komplexen Systemen in vielen Fällen nicht der Gauß'schen Statistik, weil Ficks Gesetz nur eine schlechte Beschreibung der Dynamik darstellt. Insbesondere treten Abweichungen von der linearen Zeitabhängigkeit der mittleren quadratischen Verschiebung,

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t \quad (5.4)$$

auf, die charakteristisch für die Brown'sche Molekularbewegung und eine direkte Konsequenz des zentralen Grenzwertsatzes und der Markov-Eigenschaften des Prozesses ist. Stattdessen wird in vielen Systemen *anomale Diffusion* beobachtet, die sich insbesondere durch nichtlineares Wachstum der mittleren quadratischen Verschiebung mit der Zeit auszeichnet. Einer der ersten Berichte über die Beobachtung

und erfolgreiche Modellierung solcher Phänomene sind Richardsons Arbeiten über die Dispersion von Lagrange'schen Teilchen in atmosphärischer Turbulenz [Richardson 1926]. An dieser Stelle wollen wir uns auf Prozesse beschränken, bei denen die Entwicklung des zweiten Momentes näherungsweise durch das Potenzgesetz

$$\langle x^2(t) \rangle \sim t^\alpha \quad (5.5)$$

beschrieben werden kann.

Zwei verschiedene Phänomene können zum Zusammenbrechen des klassischen Verhaltens führen: Zunächst einmal haben wir schon in Abschnitt 2.3 gesehen, dass es eine gewisse Klasse von Verteilungen gibt, für die Summen von Zufallsereignissen nicht gegen eine Normalverteilung, sondern im Einklang mit dem verallgemeinerten Grenzwertsatz nach Lévy und Gnedenko gegen eine Lévy-Verteilung konvergieren. Der Propagator und die entsprechende Langevin-Gleichung solcher Prozesse sind in Abschnitt 2.3.4 angegeben. Weil für die Lévy-Verteilung das zweite Moment divergiert, existiert das mittlere Verschiebungsquadrat für diese Prozesse nicht. Darüber hinaus setzen Grenzwertsätze stets voraus, dass die einzelnen Ereignisse, wie z.B. die Inkremente von Prozessen, die sich additiv zusammenfügen, unabhängig voneinander sind. Für stationäre stochastische Prozesse, die ein Relaxationsverhalten wie in Gleichung (5.1) zeigen, ist das nach einer geeigneten Zeitspanne $t \gg \tau$ stets der Fall. Wenn die Prozesse jedoch räumlich oder zeitlich nicht stationär sind, können Korrelationen über große Reichweiten oder lange Zeitspannen auftreten, die dazu führen, dass sich im Mittel ein von (5.1) abweichendes Relaxationsverhalten ergibt und keine charakteristischen Zeiten für die Relaxation mehr existieren. Die einzelnen Zufallsereignisse können dann unter Umständen über lange Zeiten korreliert sein, sodass sich die Grenzwertsätze der Statistik nicht mehr anwenden lassen. Folglich kann sich ein anomales Diffusionsverhalten gemäß (5.5) ausbilden. Mit dem Auftreten langreichweitiger Korrelationen geht natürlich der Verlust von Markov-Eigenschaften einher, die im Widerspruch zu einem solchen ausgeprägten „Gedächtnis“ des Prozesses stehen.

Zur Beschreibung von Prozessen, die anomales Diffusionsverhalten aufweisen, reichen somit viele der bislang verwendeten Hilfsmittel, die auf der Gültigkeit der Markov-Eigenschaften beruhen, nicht aus. Stattdessen werden Prozesse benötigt, die endliche Korrelationen berücksichtigen. Zwei prominente Modelle für solche Prozesse sind die *fraktionale Brownsche Bewegung* sowie *zeitkontinuierliche Zufallsprozesse*, die im Englischen unter dem Begriff „Continuous Time Random Walks“ (CTRWs) zusammengefasst werden. Letztere Prozesse spielen im Folgenden eine wichtige Rolle und werden deswegen nun im Detail vorgestellt.

5.1 Theorie diskreter zeitkontinuierlicher Prozesse

5.1.1 Diskrete „Random-Walks“

Es sind bislang hauptsächlich kontinuierliche Zufallsprozesse mit stetigen Trajektorien betrachtet worden. Zeitkontinuierliche CTRWs wurden in den sechziger Jahren von Montroll & Weiss [1965] zur Erklärung komplexer Abläufe in der Festkörperphysik als Erweiterung klassischer „Random-Walk“-Prozesse (RW-Prozesse) jedoch auf einem Gitter eingeführt. Nach einer gewissen Wartezeit werden Schritte mit endlicher Schrittweite dabei instantan ausgeführt. Die Trajektorien sind daher im Allgemeinen nicht stetig und viele der in Kapitel 2 vorgestellten Methoden damit nicht anwendbar. Eine probabilistische Beschreibung müsste stattdessen auf der Basis von Mastergleichungen erfolgen [Gardiner 2004; Risken 1989].

Beim „klassischen Random-Walk“ wird die physikalische Zeit nicht gesondert betrachtet. Weil die Zeiten zwischen einzelnen Schritten gleich groß sind, erfolgt die

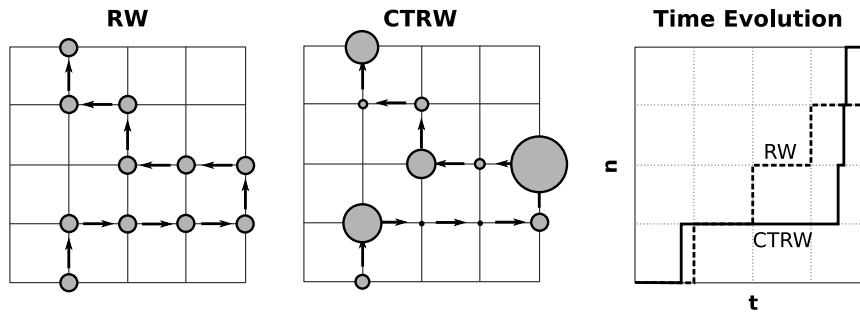


ABBILDUNG 5.1: Verallgemeinerung des klassischen „Random-Walk“-Begriffs am Beispiel eines Zufallsprozesses auf einem Gitter. Die Größe der einzelnen Kreise kennzeichnet die Wartezeit am jeweiligen Ort vor dem nächsten Schritt. Während die Wartezeiten beim klassischen „Random-Walk“ konstant bleiben (links), sind sie bei CTRWs Zufallsvariablen, die vor jedem Schritt neu bestimmt werden (Mitte). Die Bedeutung der Wartezeiten wird aus der Entwicklung der Anzahl der Schritte mit der Zeit (rechts) deutlich. (Basierend auf: Metzler & Klafter 2000)

Notation der diskreten Laufzeit in der Regel durch die Zahl der ausgeführten Sprünge n . Die einzelnen Sprungweiten sind Zufallszahlen. Der Einfachheit halber sei hier vorausgesetzt, dass sich die Verteilung $P_x(\Delta \mathbf{x})$ dieser Zufallszahlen im Verlauf des Prozesses nicht ändert.

Wir gehen nun davon aus, dass der n -dimensionale Zufallsprozess \mathbf{x} an der Stelle $\mathbf{0}$ startet. Die Position nach dem n -ten Schritt ergibt sich dann als Summe der einzelnen Sprünge,

$$\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{x}_i \quad . \quad (5.6)$$

In Abschnitt 2.3 haben wir uns schon mit Summen von Zufallszahlen beschäftigt und gesehen, dass die charakteristische Funktion ein wichtiges Hilfsmittel für die Berechnung der Verteilung von Summen von Zufallsvariablen darstellt, weil Faltungen im Fourierraum in Produkte übergehen. Die Verteilung $P_{x,n}(\mathbf{x}_n)$ eines solchen Zufallsprozesses nach dem n -ten Schritt lässt sich mit Hilfe der charakteristischen Funktion von P_x ,

$$\tilde{P}_x(\mathbf{k}) := \int d\Delta x_1 \dots \int d\Delta x_n e^{i\mathbf{k}\Delta \mathbf{x}} P_x(\Delta \mathbf{x}) \quad , \quad (5.7)$$

nach (2.49) im Fourierraum dann unmittelbar angeben als

$$\tilde{P}_{x,n}(\mathbf{k}_n) := \prod_{i=1}^n \tilde{P}_x(\mathbf{k}_n) = \tilde{P}_x^n(\mathbf{k}_n) \quad . \quad (5.8)$$

Aus Abschnitt 2.3 ist bekannt, dass diese Verteilung als Folge des (verallgemeinerten) Grenzwertsatzes der Statistik für große n gegen eine stabile Verteilung streben wird. Eine detaillierte Beschreibung und Untersuchung verschiedener diskreter Zufallsprozesse findet sich z.B. bei Weiss [1994].

5.1.2 Continuous Time Random Walks (CTRWs)

Beim klassischen RW sind die Zeiten zwischen aufeinanderfolgenden Schritten immer gleich groß. Für den Zeitpunkt des n -ten Schrittes folgt daher $t_n = n\tau$. So

genannte „*Continuous Time Random Walks*“ (CTRWs) stellen eine Verallgemeinerung dieser Zufallsprozesse dar, weil bei ihnen die Wartezeiten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schritten, Δt , ebenfalls Zufallszahlen sind. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass auch die Wartezeitverteilung $P_t(\Delta t)$ für alle Schritte gleich ist. In der Regel wird dabei aus Gründen der Kausalität vorausgesetzt, dass $P_t(\Delta t)$ für $\Delta t < 0$ verschwindet. Für $P_t(\Delta t) = \delta(\Delta t - \tau)$ enthält das erweiterte Modell den klassischen RW mit Schrittweite τ . Ein Vergleich eines klassischen „Random-Walk“-Prozesses mit einem CTRW, aus dem die Bedeutung der stochastischen Wartezeiten deutlich wird, ist in Abbildung 5.1 zu sehen. In der Darstellung der Anzahl der erfolgten Schritte als Funktion der Zeit auf der rechten Seite wird insbesondere deutlich, warum CTRWs auch „zeitkontinuierliche Prozesse“ genannt werden: Die Zeitpunkte, zu denen die einzelnen Sprünge stattfinden, sind keine ganzzahligen Vielfachen einer festen Einheit mehr, sondern vielmehr als kontinuierliche Variable zu betrachten. Durch die Erweiterung auf stochastische Wartezeiten ist der Zeitpunkt des n -ten Schrittes,

$$T_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \quad , \quad (5.9)$$

nun eine Zufallszahl. Für die statistische Beschreibung von CTRWs muss diese Gegebenheit berücksichtigt werden.

Die Statistik von T_n lässt sich nun wieder mit Hilfe der charakteristischen Funktion beschreiben. Weil die Wartezeiten per Definition nicht-negativ sind, wird für die charakteristische Funktion an dieser Stelle statt der Fourier- in der Regel die Laplace-Transformierte

$$\hat{P}_t(z) := \int_0^\infty d\Delta t e^{-z\Delta t} P_t(\Delta t) = \langle e^{-z\Delta t} \rangle_{\Delta t} \quad (5.10)$$

verwendet. Zur Unterscheidung der Transformationen werden Laplace-Transformierte im Rahmen dieser Arbeit mit $\hat{\cdot}$ gekennzeichnet. z bezeichnet allgemein Variablen im Laplace-Raum. Ein wichtiger Grund für die Nutzung der Laplace-Transformation an dieser Stelle ist, dass die folgenden Umformungen im Laplace-Raum eine besonders einfache Form annehmen. Außerdem besitzt die vollständig schiefe Lévy-Verteilung $f_{\alpha,1}$ im Laplace-Raum eine sehr einfache Darstellung,

$$\hat{f}_{\alpha,1}(z) = \int_0^\infty d\Delta t e^{-\Delta t z} f_{\alpha,1}(\Delta t) = e^{-z^\alpha} \quad . \quad (5.11)$$

Für Details bezüglich der Eigenschaften und des asymptotischen Verhaltens von Laplace-Transformationen sei an dieser Stelle auf Doetsch [1976] verwiesen. Es lässt sich leicht verifizieren, dass – analog zu Gleichung (2.49) – für die Laplace-transformierte $\hat{P}_{t,n}$ der Verteilung der Summe von n Zufallszahlen gilt:

$$\hat{P}_{t,n}(z) = \hat{P}_t^n(z) \quad . \quad (5.12)$$

Wir führen jetzt die Funktion

$$\Psi(\Delta t) = \int_{\Delta t}^\infty d\Delta t' P_t(\Delta t') \quad (5.13)$$

ein. $\Psi(\Delta t)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Wartezeit größer als Δt . Als Laplace-Transformierte ergibt sich

$$\hat{\Psi}(z) = \frac{1}{z} \left(\int_0^{\infty} d\Delta t P_t(\Delta t) - \int_0^{\infty} d\Delta t e^{-\Delta t z} P_t(\Delta t) \right) = \frac{1 - \hat{P}_t(z)}{z} . \quad (5.14)$$

Wir haben bislang die Position \mathbf{x}_n und die Zeit des letzten Sprunges, T_n , als Funktion der Anzahl der ausgeführten Schritte betrachtet. Bei der Beobachtung von Prozessen ist n aber häufig nicht relevant. Vielmehr interessiert in der Regel die Entwicklung von \mathbf{x} als Funktion der Zeit t . Eine Beschreibung des Prozesses lässt sich unter Zuhilfenahme von (5.13) vornehmen, wenn alle n , die zu der Realisierung geführt haben können, betrachtet werden. Für den Prozess $\mathbf{x}(t)$ ergibt sich dann die PDF

$$P(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{x,n}(\mathbf{x}) \int_0^t dT P_{t,n}(T) \Psi(t - T) . \quad (5.15)$$

$P_{t,n}(T) \Psi(t - T) dT$ ist hier die Wahrscheinlichkeit, dass der n -te Schritt im Intervall $[T, T + dT]$ liegt und im Intervall $[T + dT, t]$ kein weiterer Schritt erfolgt. Als Anfangsbedingungen lassen sich z.B. $P_{x,0}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ und $P_{t,0}(t) = \delta(t)$ verwenden.

Im Gegensatz zu den bislang untersuchten Zufallsprozessen besitzen CTRWs im Allgemeinen keine Markov-Eigenschaften, weil zur vollständigen Charakterisierung der Dynamik neben dem aktuellen Zustand auch der Zeitpunkt des letzten Schrittes benötigt wird. Eine Ausnahme bilden hier lediglich Fälle, in denen die Wartezeiten einer *Exponentialverteilung* genügen,

$$P_t(\Delta t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\Delta t}{T}\right) . \quad (5.16)$$

Wie wir in Abschnitt 6.4 noch sehen werden, weisen „Exit-Time“-Probleme von Markov-Prozessen in konstanten Potentialen üblicherweise eine solche Form auf. Als direkte Folge der fehlenden Markov-Eigenschaften bedarf die Initialisierung des Prozesses einer etwas genaueren Diskussion. Durch die spezielle Wahl der Anfangsbedingungen betrachten wir hier ein Ensemble von Prozessen, die alle bei $t = 0$ einen Sprung ausgeführt haben. Im Allgemeinen wird sich diese Situation nicht wiederholen, wenn die Wartezeiten der einzelnen Prozesse unabhängig voneinander stochastisch bestimmt werden. Die Statistik des Ensembles ändert sich damit zwangsläufig mit der Zeit, sodass der Prozess instationär ist. Das wird uns im Folgenden nicht stören. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass gelegentlich zwischen der Verteilung der *ersten* und der *folgenden* Wartezeiten unterschieden wird, um einen stationären Prozess beschreiben zu können [Weiss 1994].

Für $P_t(\Delta t) = \delta(\Delta t - \tau)$ erhält man einen diskreten „Random-Walk“ im klassischen Sinne mit konstanter Wartezeit. Auch dieser stellt in der hier betrachteten kontinuierlichen Zeit nun keinen Markov-Prozess mehr dar, weil die zeitliche Entwicklung neben dem Startpunkt vom Zeitpunkt des letzten Schrittes abhängt.

Gleichung (5.15) lässt sich vereinfachen, wenn statt der PDF deren Fourier-Transformation im Ort und deren Laplace-Transformation in der Zeit betrachtet werden. Wenn man an der Stelle \star die unendliche Summe als geometrische Reihe auswertet, erhält man mit Hilfe von (5.14) die nach Montroll und Weiss benannte Formel [Weiss 1994]

$$\hat{\hat{P}}(\mathbf{k}, z) = \frac{1 - \hat{P}_t(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_x^n(\mathbf{k}) \hat{P}_t^n(z) \stackrel{\star}{=} \frac{1 - \hat{P}_t(z)}{z \left[1 - \tilde{P}_x(\mathbf{k}) \hat{P}_t(z) \right]} . \quad (5.17)$$

Eine explizite Rücktransformation von \mathbf{k} und z ist nur in Ausnahmefällen möglich. Im Allgemeinen hat man sich mit der Betrachtung von Grenzfällen, wie zum Beispiel dem Limes großer Zeiten t , zu begnügen.

Ein nicht-Markov-Prozess ist natürlich durch die Spezifizierung einer einzeitigen¹ Wahrscheinlichkeitsdichte, wie sie durch (5.15) und (5.17) gegeben ist, nicht vollständig charakterisiert. Es werden deshalb zumindest zweizeitige PDFs benötigt. Auf diesem Gebiet konnten in den letzten Jahren einige Fortschritte erzielt werden [Baule & Friedrich 2005, 2007a, b]. Diese basieren jedoch auf einer kontinuierlichen Interpretation von CTRWs, die in Abschnitt 5.4 eingeführt wird.

5.2 Anomales Diffusionsverhalten von CTRWs

Schon Leibnitz hat im 17. Jahrhundert angemerkt, dass sich der gewöhnliche Kalkulus prinzipiell so modifizieren lässt, dass auch fraktionale Differentialoperatoren wohldefiniert sind [Metzler & Klafter 2000]. Die Dynamik von Ensembles von CTRWs lässt sich gerade mit Hilfe fraktionaler Differentialoperatoren durch eine verallgemeinerte fraktionale Differentialgleichung beschreiben. Der Argumentation von Metzler & Klafter [2000] folgend wird nun nachvollzogen, wie sich die fraktionalen Eigenschaften direkt aus der Montroll-Weiss'schen Formel (5.17) ergeben. Eine exakte Herleitung dieses Zusammenhangs bieten z.B. Barkai u.a. [2000].

Von der Montroll-Weiss-Gleichung zu fraktionalen Entwicklungsgleichungen

Zunächst werden CTRWs mit exponentieller Wartezeitverteilung gemäß (5.16) und Sprungweiten, deren Verteilung $P(\Delta\mathbf{x})$ in jeder Komponente einer Normalverteilung mit Varianz σ^2 entspricht, betrachtet. Für die Fourier- bzw. Laplace-Transformierten der Verteilungen ergibt sich dann

$$\tilde{P}_x(\mathbf{k}) = \exp\left(-\sigma^2 |\mathbf{k}|^2\right) = 1 - \sigma^2 |\mathbf{k}|^2 + O(|\mathbf{k}|^4) \quad (5.18a)$$

$$\hat{P}_t(z) = \frac{1}{1 + Tz} = 1 - Tz + O(z^2) \quad (5.18b)$$

Wir beschränken uns nun speziell auf die Grenzwerte $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ und $z \rightarrow 0$, die dem Kontinuumlimes der CTRWs entsprechen [vgl. Doetsch 1976]. In niedrigster Ordnung von $|\mathbf{k}|$ und s ergeben sich Ausdrücke dieser Form im Langzeitlimes für alle CTRWs, bei denen die Varianz der Sprungweitenverteilung sowie die mittlere Wartezeit existieren.

Einsetzen der Entwicklungen (5.18) in die Montroll-Weiss-Gleichung (5.17) liefert in diesem Grenzfall

$$\hat{\hat{P}}(\mathbf{k}, z) = \frac{1}{z + \sigma^2/T |\mathbf{k}|^2} \quad (5.19)$$

Dieser Ausdruck lässt sich umgehend zurücktransformieren: Umstellen der Gleichung ergibt

$$\left(z + \sigma^2/T |\mathbf{k}|^2\right) \hat{\hat{P}}(\mathbf{k}, z) = 1 \quad (5.20)$$

¹Die Bezeichnung „einzeitige“ PDF ist an dieser Stelle eigentlich nicht ganz richtig, weil natürlich auch schon der Startwert, der mit Hilfe von δ -Funktionen präpariert wurde, bekannt ist. Streng genommen stellen die PDFs (5.15) und (5.17) damit zweizeitige, bedingte Verteilungen dar, wie sie zum Beispiel auch in der Fokker-Planck-Gleichung (2.38) auftreten. Weil auch diese zur Beschreibung von nicht-Markov-Prozessen natürlich nicht ausreichen, wollen wir uns nun mit „höherzeitigen“ PDFs beschäftigen. Wir bleiben hier bei der in der Literatur gebräuchlichen Nomenklatur und bezeichnen (5.15) und (5.17) weiterhin als „einzeitig“.

Es ist bekannt, dass Ableitungen nach den Argumenten von Fourier- und Laplace-Transformationen sich im Fourier- bzw. Laplace-Raum multiplikativ verhalten. Angewendet auf die δ -Funktion liefern sie jeweils einen konstanten Wert. Obige Gleichung geht unter Anwendung der inversen Transformationen deshalb in die Integralgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{k})\delta(t) + \frac{\sigma^2}{T} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(\mathbf{x}, t) \quad (5.21)$$

über. Die δ -Funktionen repräsentieren hier die Anfangsbedingung der CTRWs, die für die Herleitung von (5.17) verwendet wurden. Wir erhalten im Langzeitlimit also eine gewöhnliche Diffusionsgleichung, die sich mit Hilfe des Fick'schen Gesetzes verstehen lässt. Als Lösung ergibt sich der Propagator des Wiener-Prozesses, (2.45a).

Betrachten wir stattdessen CTRWs mit Wartezeitverteilungen, die gegen ein Potenzgesetz konvergieren, so gestaltet sich die Lage anders. Für vollständig schiefe Lévy-Verteilungen nach (2.61) mit charakteristischem Exponenten ergibt sich z.B.

$$\hat{P}_t(z) = \exp(-(Tz)^\alpha) = 1 - (Tz)^\alpha + O(z^{2\alpha}) \quad . \quad (5.22)$$

Wird wiederum nur der Langzeitlimit betrachtet, so können wir \hat{P}_t wieder durch den Term niedrigster Ordnung annähern, der sich allgemein für Verteilungen ergibt, die gegen ein Potenzgesetz proportional zu $\Delta t^{1/(1+\alpha)}$ streben. Wenn die Verteilung der Sprungweiten unverändert bleibt, erhalten wir im Grenzfall $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ und $z \rightarrow 0$ nun

$$\hat{P}(\mathbf{k}, z) = \frac{1}{z + \sigma^2/T^\alpha |\mathbf{k}|^2 z^{1-\alpha}} \quad . \quad (5.23)$$

Zu lösen ist nun als die Gleichung

$$\left(z + \sigma^2/T^\alpha |\mathbf{k}|^2 z^{1-\alpha} \right) \hat{P}(\mathbf{k}, z) = 1 \quad . \quad (5.24)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, den Riemann-Liouville-Differentialoperator ${}_0D_t^{-p}$ einzuführen, für den allgemein gilt [Metzler & Klafter 2000]:

$$\int_0^\infty dt e^{-tz} {}_0D_t^{-p} f(t) = s^{-p} \hat{f}(z) \quad . \quad (5.25)$$

Das Wirken des Riemann-Liouville-Operators

$${}_0D_t^{n-\alpha} := \frac{\partial^n}{\partial t^n} {}_0D_t^{-\alpha} \quad (5.26)$$

auf eine Testfunktion $f(t)$ ist dabei für $0 < \alpha < 1$ definiert über das Integral

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t dt' \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\alpha}} \quad . \quad (5.27)$$

$\Gamma(\cdot)$ bezeichnet hier die Gamma-Funktion. Die Gültigkeit von (5.25) lässt sich direkt prüfen: (5.27) stellt eine Faltung des positiven Teils der Funktion $f(t)$ mit $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ dar. Die Laplace-Transformation von $t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ lautet [Bronstein u.a. 2005]

$$\int_0^\infty dt e^{-tz} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = s^{-\alpha} \quad . \quad (5.28)$$

Unter Laplace-Transformation geht die Faltung in ein Produkt über, sodass sich (5.25) ergibt.

Formal lässt sich (5.24) mit Hilfe dieses Operators nun auswerten, sodass sich wiederum eine partielle Differentialgleichung für $P(\mathbf{x}, t)$ ergibt,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{k})\delta(t) + \frac{\sigma^2}{T^\alpha} {}_0D_t^{1-\alpha} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} P(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (5.29)$$

Eine wichtige Eigenschaft des Operators ${}_0D_t^{n-\alpha}$ zeigt sich in der Anwendung auf Polynome,

$${}_0D_t^q t^p = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-q)} t^{p-q} \quad . \quad (5.30)$$

${}_0D_t^q$ wird daher häufig auch als *fraktionaler (Integro-) Differentialoperator* bezeichnet. Gleichung (5.29) stellt dann eine fraktionale Differentialgleichung – genau genommen eine fraktionale Diffusionsgleichung – für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte P mit der Zeit dar. $\sigma^2/T^\alpha =: K_\alpha$ wird in diesem Zusammenhang fraktionaler Diffusionskoeffizient genannt. Offensichtlich ist der fraktionale Charakter der Gleichung eine direkte Konsequenz der divergierenden mittleren Verweildauer der zugrundeliegenden CTRWs.

Gelegentlich werden die Integrationsgrenzen beim fraktionalem Differentialoperator auch anders gewählt, wie z.B. durch Weyl [vgl. Metzler & Klafter 2000]. Es existieren auch noch abweichende Definitionen, z.B. nach Caputo-Dzherbashyan oder Riesz-Feller [vgl. Gorenflo & Mainardi 2008], deren Verwendung in gewissen Fällen zweckmäßiger sein kann [Baule & Friedrich 2007a]. Allen fraktionalem Ableitungen gemein ist aber, dass sie – wie z.B. der Definition (5.27) sofort zu entnehmen ist – nicht-lokal wirken: Die Auswertung des Integrals des fraktionalem Operators bewirkt, dass langreichweitige Korrelationen in der Zeit auftreten und der Prozess ein – unter Umständen ausgeprägtes – Gedächtnis besitzt. Folglich weisen die zugrundeliegenden Realisierungen von Prozessen keine Markov-Eigenschaften auf.

Lösung der fraktionalem Fokker-Planck-Gleichung

Häufig wird die fraktionale Diffusions- auf eine *fraktionale Fokker-Planck-Gleichung* erweitert, die eine Generalisierung der klassischen Fokker-Planck-Gleichung darstellt. Analog zu (2.37) lautet diese [Metzler u.a. 1999; Metzler & Klafter 2000]

$$\frac{\partial}{\partial t} P_\alpha(\mathbf{x}, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} \left(\nabla_{\mathbf{x}}^T \frac{V'(\mathbf{x})}{m\eta_\alpha} + K_\alpha \Delta_{\mathbf{x}} \right) P_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (5.31)$$

V' stellt hier eine Ableitung des Driftpotentials dar, in dem die Dynamik stattfindet, und η_α und K_α sind verallgemeinerte, fraktionale Drift- und Diffusionskonstanten. Barkai [2001] konnte zeigen, dass sich mit Hilfe der Integraltransformation

$$P_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty ds A_\alpha(s|t) P_1(\mathbf{x}, s) \quad (5.32)$$

eine Lösung angeben lässt, wobei $P_1(\mathbf{x}, t)$ die Lösung der entsprechenden nicht-fraktionalem Fokker-Planck-Gleichung ist und der Kern $A_\alpha(s|t)$ mit Hilfe vollständig schiefer Lévy-Verteilungen gegeben ist als

$$A_\alpha(s|t) = \frac{1}{\alpha} \frac{t}{s^{1+1/\alpha}} f_{\alpha,1} \left(\frac{t}{s^{1/\alpha}} \right) \quad . \quad (5.33)$$

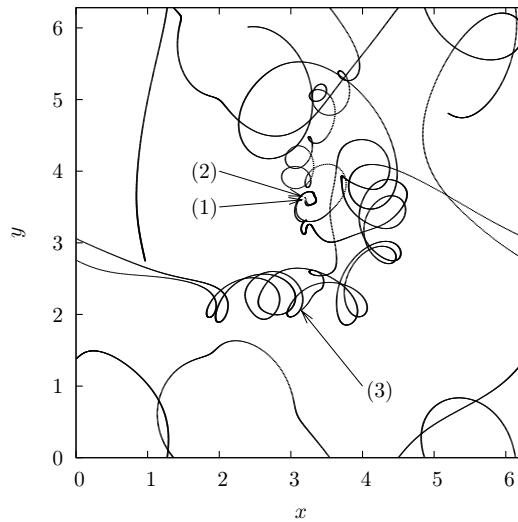


ABBILDUNG 5.2: Beispiel für typische Trajektorien von Lagrange-Teilchen in zerfallender Turbulenz in zwei Dimensionen. Die Pfeile markieren die Anfangspunkte von drei verschiedenen Teilchen. Die Spiralbewegungen werden durch die intrinsischen Wirbel turbulenter Strömungen, in denen Teilchen für einen gewissen Zeitraum festgehalten werden können, verursacht. (Quelle: Wilczek u.a. 2007)

Weil $A_\alpha(s|t)$ sowie die Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung nicht-negativ und normiert sind, sind die Lösungen der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung wohldefiniert. Aus (5.32) ist zu erkennen, dass stationäre Lösungen der integren Fokker-Planck-Gleichung – so sie existieren – stets auch stationäre Lösungen der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung darstellen.

5.3 Beschreibung turbulenter Strömungen durch CTRWs

Es ist seit langem bekannt, dass turbulente Strömungen anomales Diffusionsverhalten zeigen. So hat schon Richardson in den dreißiger Jahren des letzten Jahrhunderts die Statistik der Entwicklung des Abstandes zweier advektierter Partikel mit der Zeit untersucht, die für das Verständnis von Mischungsvorgängen von großer Bedeutung ist [Richardson 1926]. Dabei hat er festgestellt, dass das mittlere Entfernungsquadrat auf Grund von multiplikativen Einflüssen nicht linear mit der Zeit steigt. Seitdem hat es auf dem Gebiet der Turbulenz viele Ansätze gegeben, das komplexe Verhalten turbulenter Strömungen genauer zu charakterisieren, die zu einem wesentlich besseren Verständnis der dort beobachteten Phänomene beigetragen haben. Einige der Meilensteine dieser Entwicklung werden zu Beginn von Kapitel 7 vorgestellt. Die Beschreibung der Eigenschaften von Trajektorien von mit der Strömung transportierten Teilchen, sogenannten Lagrange-Teilchen, steckt jedoch derzeit noch in den Kinderschuhen. Das liegt wohl vorwiegend daran, dass die Bahnen solcher Teilchen erst seit einigen Jahren experimentell ausgemessen und zur Verifizierung von Modellen verwendet werden können [vgl. z.B. La Porta u.a. 2001; Mordant u.a. 2001].

Vor kurzem konnte Friedrich [2003] zeigen, dass sich CTRWs unter gewissen Näherungen für die Beschreibung der Dynamik solcher Teilchen eignen. Friedrichs Argumentation soll an dieser Stelle kurz skizziert werden.

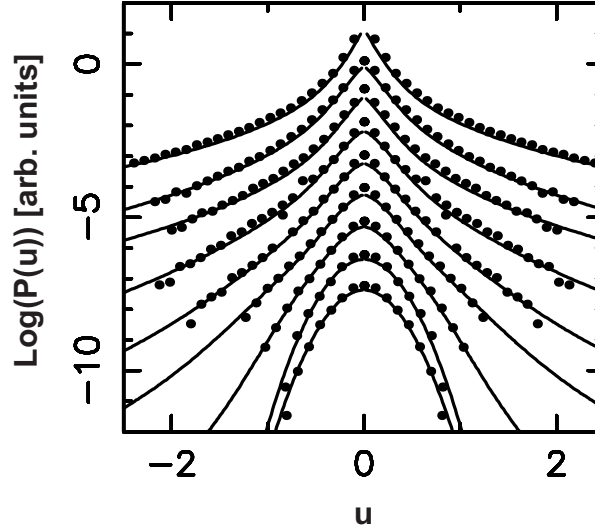


ABBILDUNG 5.3: Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente advektierter Teilchen für verschiedene Zeitinkremente von 0.15 ms (oben) bis 40 ms (unten). Zum besseren Vergleich wurden die Verteilungen jeweils auf die Standardabweichung normiert und vertikal gegeneinander verschoben. Die Punkte stellen Messungen dar, die von Mordant u.a. [2001] durchgeführt wurden. Die durchgezogenen Linien markieren die Modellierung durch Friedrich [2003] auf Basis von CTRWs, (5.35), wobei der charakteristische Exponent der zugrundeliegenden Wartezeitverteilung als Funktion des Inkrementes angepasst wurde. (Quelle: Friedrich 2003)

Lagrange-Teilchen werden durch den Ort \mathbf{y} identifiziert, an dem sie sich zur Zeit $t = 0$ befinden haben. Es wird dann angenommen, dass sie masselos sind, das ortsfeste Euler'sche Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, von dem sie transportiert werden, nicht beeinflussen und nicht miteinander wechselwirken. Die Geschwindigkeit der Lagrange-Teilchen entspricht damit zu jedem Zeitpunkt der des Eulerschen Feldes an dem Punkt, an dem sich die Teilchen befinden. Ort \mathbf{x} und Geschwindigkeit \mathbf{u} von Lagrange-Teilchen lassen sich dann als Funktion von \mathbf{y} und t verstehen. Beispiele für Trajektorien von Lagrange-Teilchen in zerfallender, zweidimensionaler Turbulenz wurden numerisch z.B. von Wilczek u.a. [2007] erzeugt und sind in Abbildung 5.2 dargestellt.

Friedrich hat die Entwicklung der feinkörnigen Verteilungen Lagrange'scher Geschwindigkeitsfelder mit der Zeit untersucht. Vor kurzem konnte er aus den Navier-Stokes-Gleichungen (7.4), die in Abschnitt 7.1 eingeführt werden, eine Entwicklungsgleichung für Wahrscheinlichkeitsdichten herleiten, die nicht geschlossen ist [Friedrich 2002]: Sie enthält Verbundwahrscheinlichkeiten Euler'scher und Lagrange'scher Geschwindigkeitsfelder. Bei Berechnung der Zeitentwicklung dieser Verbundwahrscheinlichkeiten treten Integrale auf, die ein zeitliches Gedächtnis einführen, wie es für fraktionale Prozesse typisch ist. Vereinfachende Annahmen sowie die Verwendung von Dimensionsargumenten führen für den Fall, dass der verallgemeinerte Diffusionskoeffizient asymptotisch einem Potenzgesetz mit Exponenten ν gehorcht, schließlich auf eine Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{u}, t)$ der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{u}, t) = \frac{1}{u^{d-1}} \frac{\partial}{\partial u} u^{d-1-2/3+\nu} Q_0 \frac{\partial}{\partial u} {}_0D_t^{\nu/2-1/3} p(\mathbf{u}, t) \quad . \quad (5.34)$$

Friedrichs Ansatz stellt eine Verallgemeinerung von Obukhovs Vorschlag einer zeitlich unkorrelierten Lagrange'schen Beschleunigung dar [Baule & Friedrich 2006]. Für

$\nu = 2/3$ ist Obukhovs Modell in Friedrichs Beschreibung enthalten [Friedrich 2003]. Für $1/3 < \nu/2 < 4/3$ lässt sich diese Gleichung als Kontinuumslimit eines Ensembles von CTRWs verstehen. Barkai hat zeigen können, dass die Verteilungsfunktion von u sich in diesem Falle analog zur in Abschnitt 5.2 vorgestellten Lösung der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung mit Hilfe der Integraltransformation (5.32) berechnen lässt als

$$p(u, t) = \int_0^{\infty} dt' A_{\frac{\nu}{2} - \frac{1}{3}}(t'|t) p_1(u, t') \quad . \quad (5.35)$$

p_1 ist dabei die Lösung der Gleichung (5.34), die sich für Obukhovs Ansatz ergeben würde. A ist durch Gleichung (5.33) gegeben.

Diese Theorie soll hier nicht weiter vertieft werden. Zusammenfassend ist aber zu konstatieren, dass die Erkenntnis, dass Prozesse mit einem Skalenverhalten wie in Abbildung 5.3 durch CTRWs modelliert werden können, weitreichende Folgen hatte. Ein solches Skalierungsverhalten wird in turbulenten Strömungen für verschiedene Größen beobachtet. Neben einigen Arbeiten zum Verständnis von Lagrange'schen Trajektorien ist aus diesem Ansatz auch die Idee der Modellierung von atmosphärischen Winden, die in Kapitel 7 vorgestellt wird und Ausgangspunkt dieses Projektes war, hervorgegangen.

Es ist schon erwähnt worden, dass die Gleichung (5.34) mit CTRWs im Kontinuumslimit identifiziert werden kann. Unter dem Kontinuumslimit von CTRWs wird in der Regel verstanden, dass der (diskrete) Prozess sehr lange beobachtet wird, bis der relative Beitrag der einzelnen (diskreten) Schritte zur Statistik verschwindet. Im Folgenden wird eine andere Möglichkeit des Kontinuumsübergangs vorgestellt, die in Analogie zu klassischen stochastischen Prozessen erfolgt und später eine Erzeugung stetiger Trajektorien, die diese Eigenschaften schon in endlicher Zeit zeigen, ermöglichen wird.

5.4 Kontinuumsübergang nach Fogedby

Auch wenn das Adjektiv „continuous“ anderes vermuten lässt, sind Pfade von CTRWs in der Regel nicht stetig, weil in einer bestimmten Zeit nur eine endliche Anzahl an Sprüngen mit endlichen Sprungweiten erfolgt. „Continuous“ bezieht sich vielmehr auf die Zeitpunkte der Sprung-Ereignisse, die nicht mehr auf einem diskreten Gitter liegen und damit die Betrachtung der Zeit als kontinuierliche Variable erforderlich machen.

Eine physikalisches Bild für Wiener-Prozesse (2.45a) ist, dass die Zufallskräfte aus vielen verschiedenen kleinen Zufallsereignissen mit verschwindender Amplitude bestehen, sodass gilt [Friedrich u.a. 2008]:

$$\Gamma(t) = \sum_i A_i \delta(t - t_i) \quad . \quad (5.36)$$

Auf der Basis einer solchen Annahme konnte Einstein die statistischen Eigenschaften von Diffusionsprozessen untersuchen [Einstein 1905]. Im Limes sehr vieler Stöße mit kleinen Amplituden erfüllt die Trajektorie eines durch eine solche Kraft getriebenen Teilchens die Anforderungen an Wiener-Prozesse: Sie ist stetig, aber an keiner Stelle differenzierbar. Einen ähnlichen kontinuierlichen Grenzprozess suchen wir nun auch für CTRWs.

Wir gehen dazu von einer diskreten Anzahl an Schritten n zu einer kontinuierlichen Variablen s , die häufig als *Eigenzeit* oder nach Fogedby auch als *Bogenlänge des Prozesses* bezeichnet wird, über. Die Durchführung des Grenzübergangs ist z.B.

bei Gorenflo u.a. [2007] im Detail beschrieben. Wenn die einzelnen Schritte nur infinitesimale Beiträge zur Dynamik leisten, konvergieren die Summen dieser Beiträge – mehr oder weniger schnell – gegen eine stabile Verteilung. Im Limes lassen sich Prozesse dann durch die folgenden (verallgemeinerten) Langevin-Gleichungen beschreiben, die von Fogedby [1994] eingeführt wurden und sich für die physikalische Beschreibung von CTRWs als sehr nützlich erwiesen haben,

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) + \boldsymbol{\eta}(s) \quad (5.37a)$$

$$\frac{dt(u)}{ds} = \tau(s) \quad . \quad (5.37b)$$

Es ist wichtig zu beachten, dass es sich hier um stochastische Differentialgleichungen handelt, die damit nicht dem Riemann'schen Kalkulus gehorchen. Die Prozesse \mathbf{r} und t sind nach der Eigenzeit s parametrisiert, die die Funktion der Schrittweite n der diskreten CTRWs einnimmt. Die Prozesse $\boldsymbol{\eta}(s)$ und $\tau(s)$ stellen – wie schon im Zusammenhang mit der Einführung von Langevin-Gleichungen erläutert – unkorrelierte Zufallszahlen dar, die jeweils einer stabilen Verteilung genügen. Weil $t(s)$ per Definition ein monoton steigender Prozess ist, muss die Verteilung von τ für negative τ verschwinden. Fogedby hat an dieser Stelle angenommen, dass beide Verteilungen im Allgemeinen für große $|\boldsymbol{\eta}|$ bzw. τ Potenzgesetzen folgen sollen. Für die im Rahmen von Kapitel 2 eingeführten Langevin-Gleichungen, die Fogedby zur Modellierung der Dynamik in der Eigenzeit verwendet, wird jedoch vorausgesetzt, dass die erzeugenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $\boldsymbol{\eta}(s)$ und $\tau(s)$ stabil sind. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird nun davon ausgegangen, dass sich diese Verteilungen auf der Basis von (2.58) darstellen und damit durch α und β charakterisieren lassen. Für τ muss hierbei $\beta = 1$ und $\alpha \leq 1$ gelten, um die Monotonie von $t(s)$ zu gewährleisten. Die Verteilung von τ ist also vollständig schief und damit durch (2.61) gegeben. Im Folgenden wollen wir uns auf Fälle beschränken, in denen das Rauschen $\boldsymbol{\eta}(s)$ normalverteilt ist und (5.37a) damit eine Langevin-Gleichung im ursprünglichen Sinne darstellt.

Fogedby hat die beiden Differentialgleichungen (5.37) als „gekoppelt“ durch die Eigenzeit s bezeichnet. Auch wenn diese Bezeichnung missverständlich sein mag, so kann man sich vorstellen, was damit gemeint war: Die Variable s ist verschränkt, weil die Eigenzeit im Allgemeinen eine interne Variable darstellt. Ein Beobachter würde stattdessen den Prozess $\mathbf{r}(t)$ in der physikalischen Zeit t messen. Weil $t(s)$ monoton wachsend mit t ist, lässt es sich prinzipiell umkehren. Probleme bereiten dabei

- Bereiche, in denen $t(s)$ nicht *streng* monoton wächst und die insbesondere für $\alpha \approx 0$ aufgrund der höheren Wahrscheinlichkeit zur Realisierung von Inkrementen $\tau \approx 0$ auftreten können, sowie
- Stellen, an denen $t(s)$ Unstetigkeiten aufweist. An diesen Stellen ist die Umkehrbarkeit zwar gewährleistet, die Umkehrfunktion ist allerdings nicht *bijektiv* und damit nicht für alle t definiert.

Wenn diese Einschränkungen zunächst außer Acht gelassen werden, so lässt sich über die Umkehrfunktion von (5.37b), $s(t) := t^{-1}(t)$, ein stochastischer Prozess $\mathbf{r}(t)$ formal definieren als

$$\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}(s = s(t)) \quad . \quad (5.38)$$

Der Übergang zu einer kontinuierlichen Beschreibung auf der Basis von (5.37) in Verbindung mit der Konstruktion einer solchen Umkehrfunktion hat in den letzten Jahren eine genauere Beschreibung von CTRWs auf der Basis mehrzeitiger Verbundverteilungsfunktionen ermöglicht [Baule & Friedrich 2005, 2007a, b]. Ein Vergleich

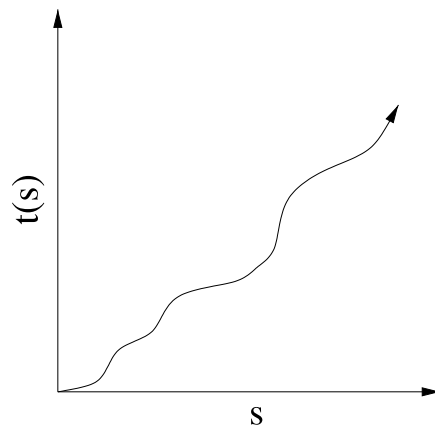


ABBILDUNG 5.4: Schematische Skizze des stochastischen Prozesses $t(s)$, die das monotone Verhalten des Prozesses berücksichtigt. Anhand dieser Skizze wurden in Baule & Friedrich [2005] die statistischen Eigenschaften des Umkehrprozesses $s(t)$ berechnet. Im Vergleich zu einer numerischen Lösung von Gleichung (5.37b), die in Abbildung 5.5 dargestellt ist, werden deutliche Unterschiede sichtbar. (Quelle: Baule & Friedrich 2005)

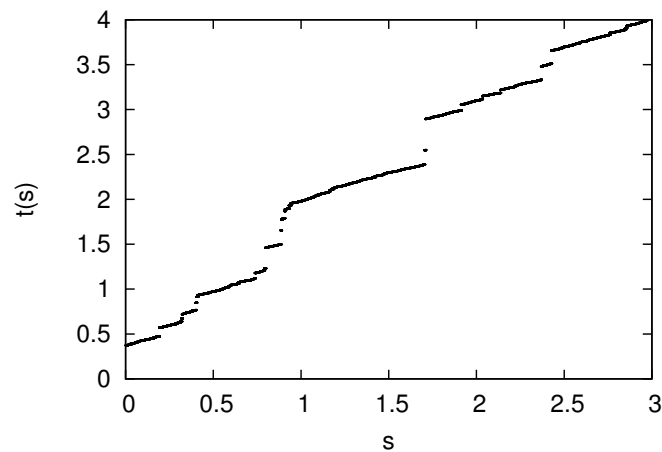


ABBILDUNG 5.5: Beispiel für eine Realisierung des Prozesses $t(s)$, die durch numerische Lösung von Gleichung (5.37b) mit Lévy-verteilten Zufallszahlen mit $\alpha = 0.85$ erzeugt wurde. Im Vergleich mit der schematischen Skizze, die in Abbildung 5.4 dargestellt ist, fallen die Unstetigkeiten deutlich auf. Diese sind bei der Konstruktion der Umkehrfunktion gesondert zu berücksichtigen, wenn diese auf der gesamten reellen Zeitachse definiert sein soll.

zwischen dem schematischen Verlauf von $t(s)$, der Baule & Friedrich [2005] entnommen ist, und einem Beispiel für eine tatsächliche Realisierung für Zufallszahlen mit $(\alpha, \beta) = (0.85, 1)$ in den Abbildungen 5.4 und 5.5 zeigt jedoch deutliche Unterschiede. Die Unstetigkeiten, die in Abbildung 5.5 zu sehen sind, sind eine intrinsische Eigenschaft von Lévy-Prozessen und kein Artefakt der gewählten Diskretisierung, sodass wir uns mit diesen Stellen befassen müssen.

Zunächst einmal führen die Unstetigkeiten dazu, dass $t(s)$ Intervalle nicht auf Intervalle abbildet, weil einige Zwischenwerte nicht angenommen werden. Die Umkehrfunktion $s(t)$ ist somit a priori nicht für alle $t \in [0, \infty[$ definiert. Stattdessen werden hier zusätzliche Spezifikationen benötigt. Gebräuchliche Definitionen sind nach Meerschaert & Scheffler [2004] z.B.

$$s(t) := \inf \{s : t(s) \geq t\} \quad \text{und} \quad (5.39a)$$

$$s(t) := \sup \{s : t(s) \leq t\} \quad . \quad (5.39b)$$

Welche Auswirkungen haben diese Definitionen nun auf den Prozess $\mathbf{r}(t)$? Es lässt sich leicht zeigen, dass $\mathbf{r}(t)$ unabhängig von der Wahl der Definition der Umkehrfunktion an den Unstetigkeitsstellen ist, falls die Trajektorie $\mathbf{r}(s)$ stetig ist. Das ist immer der Fall, wenn $\boldsymbol{\eta}(s)$ einer Normalverteilung genügt. Aus der Stetigkeit von $\mathbf{r}(s)$ folgt dann nämlich

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \mathbf{r}(s - \Delta s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \mathbf{r}(s + \Delta s) = \mathbf{r}(s) \quad . \quad (5.40)$$

Aufgrund der Monotonie von $t(s)$ ist

$$t(s) \leq t(s + \Delta s) \quad \text{für} \quad \Delta s \geq 0 \quad . \quad (5.41)$$

Folglich gilt

$$s \leq s(t') \leq s + \Delta s \quad \text{für} \quad t(s) \leq t' \leq t(s + \Delta s) \quad . \quad (5.42)$$

Für $t(s) \leq t' \leq t(s + \Delta s)$ ergibt sich im Grenzwert $\Delta s \rightarrow 0$ dann

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(s(t')) = \mathbf{r}(s + \Delta s) \quad . \quad (5.43)$$

Für den Prozess $t(s)$ wurde hier nur einseitige Stetigkeit verwendet, die für die hier betrachteten Lévy-Prozesse gegeben ist. Für stetige Prozesse $\mathbf{r}(s)$ spielen die Unstetigkeiten von $t(s)$ also im Kontinuumsübergang keine Rolle. Im Folgenden wollen wir uns auf solche Prozesse beschränken. Im Allgemeinen muss – insbesondere bei der Nutzung von Differentialen von t – der unstetige Charakter jedoch berücksichtigt werden. Insbesondere in Falle von gekoppelten Verteilungen für Wartezeit und Sprungweite, wie sie gelegentlich betrachtet werden, können koinzidente Unstetigkeiten dazu führen, dass die Verwendung von (5.39a) und (5.39b) zu abweichenden Ergebnissen führt.

Im Zusammenhang mit der Einführung diskreter CTRWs im letzten Abschnitt ist bereits darauf hingewiesen worden, dass gelegentlich zwischen den Verteilungen der Wartezeiten für den ersten und alle folgenden Sprünge unterschieden wird, um von Beginn an einen stationären Prozess erzeugen zu können. Auch wenn diese Vermutung bislang nicht mathematisch bewiesen werden konnte, kann davon ausgegangen werden, dass – zumindest im Kontinuumsübergang – eine solche Vorgehensweise in der kontinuierlichen Beschreibung auf Basis von (5.37) nicht notwendig ist, weil die Zeit, die benötigt wird, um in den stationären Zustand zu gelangen, im Grenzübergang $\Delta s \rightarrow 0$ verschwindet.

Zusammenfassend ist eine Definition von CTRWs auf Basis von stochastischen Differentialgleichungen eingeführt worden, die die Dynamik von \mathbf{r} und t in einer

Eigenzeit s beschreiben. Wie auch bei der Brown'schen Bewegung vereint der Kontinuumsübergang eine breite Klasse von individuellen diskreten Prozessen, weil das dynamische Rauschen jeweils Grenzverteilungen einer breiten Klasse von Verteilungen diskreter Sprungweiten bzw. Wartezeiten genügt. Eine kontinuierliche Beschreibung auf Basis von (5.37) stellt damit nicht den allgemeinsten Zugang dar, bietet aber für eine dynamische Charakterisierung Vorteile. Nicht zuletzt können auf Basis von Fogedbys Definition stetige Trajektorien von CTRWs gewonnen werden, die eine genaue Untersuchung der Eigenschaften fraktionaler Prozesse schon für endliche Zeiten ermöglichen.

Kapitel 6

Numerische Simulation zeitkontinuierlicher Prozesse

Wir haben uns nun ausführlich mit den grundlegenden Eigenschaften von CTRWs befasst. In diesem Kapitel werden einige Techniken und Methoden vorgestellt, CTRWs zur numerischen Lösung fraktionaler Differentialgleichungen zu verwenden. Diese Verfahren beruhen auf der Simulation einzelner Trajektorien und werden in ähnlicher Form im Rahmen von Kapitel 7 auch für die Simulation von Windfeldern verwendet. Dieses Kapitel schließt mit einem einfachen physikalischen Modell für die mikroskopische Dynamik von Partikeln, die anomales Diffusionsverhalten zeigen und durch CTRWs beschrieben werden können.

Diskrete CTRWs, wie sie von Montroll & Weiss [1965] eingeführt und in Abschnitt 5.1.2 vorgestellt worden sind, sind einfache Zufallsprozesse, die für jede Kombination aus Verteilungen, Sprungweiten und Wartezeiten definiert sind, solange nur die Wartezeitverteilung für negative Werte verschwindet. Die Zufallsprozesse beruhen einzig auf der Summation von Zufallszahlen, die den jeweiligen Verteilungen genügen, und lassen sich mit sehr geringem Aufwand erzeugen.

In Abbildung 6.1 sind einige Beispiele für diskrete CTRWs gemäß der klassischen Definition aus Abschnitt 5.1.2 dargestellt. Die Sprungweiten der Prozesse sind normalverteilt mit Varianz 1. Auf der Basis derselben Realisierung von $(x_i)_i$ wurden für drei unterschiedliche Wartezeitenverteilungen CTRWs erzeugt,

$$P_x^{(1)}(\Delta t|\sigma) = \begin{cases} \Delta t \geq 0 & : \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\Delta t^2}{2\sigma^2}\right) \\ \Delta t < 0 & : 0 \end{cases}, \quad (6.1a)$$

$$P_x^{(2)}(\Delta t|\alpha, X) = f_{\alpha,1}^X(\Delta t), \quad (6.1b)$$

$$P_x^{(3)}(\Delta t|\alpha) = f_{\alpha,1}(\Delta t). \quad (6.1c)$$

Zufallszahlen gemäß der Verteilung $P_x^{(1)}$ lassen sich leicht gewinnen, weil sie aus normalverteilten Zufallszahlen mit der Varianz σ^2 durch Betragsbildung hervorgehen. Die Verteilung fällt für große Δt mit $\exp(-\Delta t^2)$ ab und besitzt damit endliche Momente beliebiger Ordnung. $P_x^{(2)}$ und $P_x^{(3)}$ entsprechen den in den Gleichungen (2.66) bzw. (2.61) eingeführten Verteilungen. $P_x^{(2)}$ fällt in die Klasse der sogenannten „truncated Lévy“-Verteilungen und verschwindet für $\Delta t > X$, sodass hier ebenfalls alle Momente existieren. $P_x^{(3)}$ schließlich stellt eine vollständig schiefe Lévy-Verteilung mit charakteristischem Exponenten $\alpha < 1$ dar, für die alle Momente divergieren. Für $P_x^{(2)}$ und $P_x^{(3)}$ können Zufallszahlen mit Hilfe des im Anhang A vorgestellten Verfahrens erzeugt werden, wobei Zahlen, die der Bedingung $\leq X$ nicht genügen, im Falle von $P_x^{(2)}$ zu verwerfen sind.

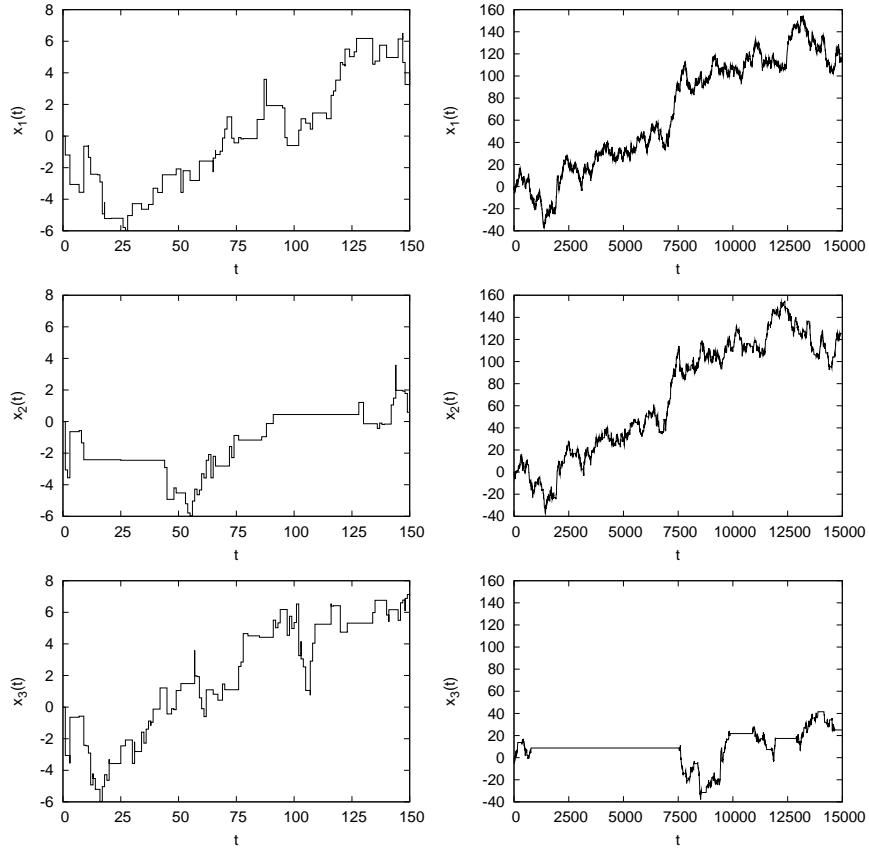


ABBILDUNG 6.1: Beispiele für (diskrete) CTRWs nach Abschnitt 5.1.2. Als Verteilung der Sprungweiten $P_x(\Delta x)$ wurde eine Normalverteilung mit der Varianz 1 verwendet. Für die Pfade x_1 , x_2 und x_3 , die in den jeweiligen Zeilen dargestellt sind, wurden unterschiedliche Wartezeitverteilungen herangezogen, die in (6.1) explizit angegeben sind. Auf der linken Seite befindet sich ein Ausschnitt für kleine Zeiten, während auf der rechten Seite das Langzeitverhalten der Prozesse dargestellt ist.

Für die Erzeugung der abgebildeten Trajektorien wurde $X = 100$ und $\alpha = 0.8$ verwendet. Als Normierung für $P_x^{(2)}$ ergibt sich dann $\mathcal{N}_{0,8,1}^{100} = 1.006$. σ wurde so angepasst, dass

$$\int_0^{\infty} d\Delta t \Delta t P_x^{(1)}(\Delta t) = \int_0^{\infty} d\Delta t \Delta t P_x^{(2)}(\Delta t) \quad (6.2)$$

gilt, die mittleren Wartezeiten für $P_x^{(1)}$ und $P_x^{(2)}$ also identisch sind. Das ist für das hier verwendete $P_x^{(2)}$ für $\sigma = 2.71$ der Fall. Die ersten Kumulanten der drei auf diese Weise parametrisierten Wartezeitverteilungen finden sich in Tabelle 6.1.

Bei der Betrachtung von Abbildung 6.1 werden einige charakteristische Eigenschaften von CTRWs deutlich. Zunächst einmal erkennt man auf der linken Seite für alle drei Fälle den diskreten Charakter der Prozesse. Im Falle von x_2 und x_3 treten längere Wartezeiten mit einer größeren Wahrscheinlichkeit auf, als es für x_1 der Fall ist. Zwischen x_2 und x_3 ist hingegen kein qualitativer Unterschied zu erkennen. Auf der rechten Seite ist die Langzeitentwicklung der Prozesse dargestellt. Die Prozesse x_1 und x_2 zeigen im Langzeitlimites (Anzahl der Schritte ≈ 7000) ein ähnliches Verhalten. Die einzelnen Schritte sind nicht mehr zu erkennen, sodass die Trajekto-

	$\langle \Delta t \rangle$	$\langle (\Delta t - \langle \Delta t \rangle)^2 \rangle$
$P_x^{(1)}(\Delta t \sigma = 2.71)$	2.166	2.677
$P_x^{(2)}(\Delta t \alpha = 0.8, X = 100)$	2.166	39.830
$P_x^{(3)}(\Delta t \alpha = 0.8)$	∞	∞

TABELLE 6.1: Kumulanten der Wartezeitverteilungen (6.1) für die Parameter, die zur Simulation der in Abbildung 6.1 dargestellten Pfade verwendet wurden. Weil es sich bei $P_x^{(3)}$ um eine Lévy-Verteilung handelt, die gegen ein Potenzgesetz mit Exponenten größer als -2 strebt, divergieren Mittelwert und Varianz.

rie relativ zum mittleren Abstand vom Startpunkt 0 kontinuierlich wird. Das liegt daran, dass für x_1 und x_2 die mittlere Wartezeit existiert und diese Prozesse sich daher im Langzeitlimes durch gewöhnliche „Random-Walk“-Prozesse beschreiben lassen. Weil σ so gewählt wurde, dass die mittlere Wartezeit der beiden Prozesse gleich groß ist, sind die Trajektorien einander sehr ähnlich.

Im Falle von x_3 hingegen zeigen sich im Langzeitverhalten ausgeprägte Gebiete, in denen der Prozess „wartet“. Weil der Prozess schließlich von den Gebieten, in denen er ruht, dominiert wird, ist die Dynamik langsamer als eine Diffusionsbewegung und wird deshalb als *subdiffusiv* bezeichnet.

Wir haben bereits gesehen, dass CTRWs im Langzeitlimes das erwartete anomale Diffusionsverhalten zeigen, falls die Wartezeitverteilung gegen ein Potenzgesetz strebt und der Mittelwert deshalb nicht existiert. Nun sollen speziell Möglichkeiten vorgestellt werden, auch schon für kleine Zeitschritte kontinuierliche Trajektorien zu erzeugen, die subdiffusive Eigenschaften zeigen und im Ensemble fraktionalen partiellen Differentialgleichungen wie z.B. (5.29) und (5.31) gehorchen.

6.1 Lösung der fraktionalen FP-Gleichung mit diskreten CTRWs

In Kapitel 2 sind zwei verschiedene Wege zur Beschreibung und Charakterisierung von stochastischen Prozessen diskutiert worden: die Dynamik einzelner Prozesse mit Hilfe von (stochastischen) Trajektorien, z.B. auf der Basis von Langevin-Gleichungen sowie die Zeitentwicklung der Ensemble-Statistik mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen wie z.B. der Fokker-Planck-Gleichung. Beide Zugänge haben ihre Berechtigung und liefern im Ensemble die gleichen Ergebnisse.

Auch für Prozesse, die anomales Diffusionsverhalten zeigen, bieten sich prinzipiell diese beiden Möglichkeiten: Es wurde bereits gezeigt, dass sich die Klasse der CTRWs prinzipiell mit Hilfe fraktionaler partieller Differentialgleichungen wie der fraktionalen Diffusions- (5.29) oder der Fokker-Planck-Gleichung (5.31) beschreiben lässt. Diese Gleichungen können im Fourier-Laplace-Raum formuliert und vielfach auch gelöst werden; eine geschlossene Rücktransformation in Ort und Zeit ist aber nur in Ausnahmefällen möglich und die numerische Berechnung der inversen Laplace-Transformierten ist – auch mit kommerziellen Routinen – in der Regel nicht stabil durchzuführen. Mit Hilfe von Integraltransformationen wie (5.31) lassen sich Lösungen einiger fraktionaler Gleichungen auf Lösungen der entsprechenden integren Differentialgleichungen zurückführen. Kürzlich ist ferner eine Arbeit erschienen, in der eine direkte numerische Auswertung der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung mit Hilfe der Definition der fraktionalen Ableitung nach Caputo beschrieben wird, die nicht auf einer Auswertung der Ausdrücke und anschließender Rücktransformation beruht [Deng 2007].

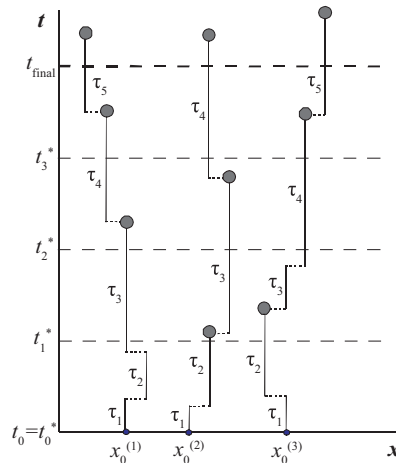


ABBILDUNG 6.2: Schematische Beschreibung der Vorgehensweise zur Simulation fraktionaler Prozesse in einem externen (Drift-) Potential nach Heinsalu u.a. [2006]. Dargestellt ist die zeitliche Entwicklung von drei Prozessen. Wenn die Wartezeit erreicht ist, finden jeweils Sprünge um $\pm\Delta x$ statt. Die Richtung wird stochastisch bestimmt, wobei die Gewichte der Richtungen aus dem Drift-Potential berechnet werden. Zu diskreten Zeiten t_i^* , die hier durch gestrichelte Linien dargestellt sind, werden die Positionen der einzelnen Prozesse dann ausgewertet und zur Berechnung von Ensemble-Mittelwerten herangezogen. Die ausgefüllten Punkte kennzeichnen die Werte, die jeweils zur Berechnung der Ensemble-Statistik verwendet werden. (Quelle: Heinsalu u.a. 2006)

Fraktionale Prozesse sind zunächst über die Montroll-Weiss-Gleichung, die die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte diskreter CTRWs mit der Zeit angibt, eingeführt worden. Dabei ist deutlich geworden, dass CTRWs mikroskopische Generatoren fraktionaler Dynamik sind. Im Gegensatz zu den „klassischen“ Prozessen mit normalem Diffusionsverhalten ist hier jedoch ein wichtiger Punkt zu beachten: Prozesse, die anomales Diffusionsverhalten zeigen, besitzen keine Markov-Eigenschaften. Eine Beschreibung durch eine (fraktionale) Fokker-Planck-Gleichung reicht deswegen – im Gegensatz zu „klassischen“ Zufallsprozessen – nicht aus, weil sie nur die Entwicklung der *einzeitigen* Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt. Zur Charakterisierung von nicht-Markov-Prozessen sind aber vielmehr mehrzeitige Wahrscheinlichkeitsverteilungen nötig.¹ Diese lassen sich aus einzelnen Trajektorien eines Ensembles von Prozessen natürlich ohne weiteres gewinnen. Dieser mikroskopische Ansatz stellt an dieser Stelle damit deshalb den allgemeineren Zugang zu fraktionalen Problemen dar.² Wir wollen uns daher in diesem Kapitel insbesondere mit Trajektorien von CTRWs beschäftigen.

Einen wichtigen Beitrag zur numerischen Lösung der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden stellt die Arbeit von Heinsalu u.a. [2006] dar, die im Jahre 2006 erschienen ist. Heinsalu u.a. verwenden dazu das ursprüngliche diskrete Modell von CTRWs auf dem Gitter.

¹Im Falle von CTRWs ist zur vollständigen Charakterisierung z.B. neben dem aktuellen Zustand auch der Zeitpunkt, zu dem sich dieser zuletzt geändert hat, notwendig. Siehe dazu auch Abschnitt 5.1.2.

²An dieser Stelle sollte nicht unerwähnt bleiben, dass Baule u.a. bei der Untersuchung von CTRWs auf der Basis der kontinuierlichen Gleichungen nach Fogedby in der Zwischenzeit die Erweiterung von fraktionalen Gleichungen auf die Entwicklung mehrzeitiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen gelungen ist. Für einige Prozesse wie z.B. fraktionale Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse konnte die Zeitentwicklung dieser Verteilungen explizit angegeben werden [Baule & Friedrich 2005, 2007a, b].

Heinsalu u.a. führen die fraktionale Fokker-Planck-Gleichung auf einen CTRW mit den Sprungweiten- und Wartezeitverteilungen

$$P_x(\Delta x_i | x_i) = q^-(x_i)\delta(\Delta x_i + \Delta x) + q^+(x_i)\delta(\Delta x_i - \Delta x) \quad (6.3a)$$

$$P_t(\Delta t_i | x_i) \sim \frac{\theta(x_i)^{1/\alpha}}{\Delta t_i^{1+\alpha}} \quad (6.3b)$$

zurück. Die Sprungraten $q^\pm(x_i)$ geben die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines Schrittes um Δx nach links bzw. rechts an. Sie erfüllen dabei $q^-(x_i) + q^+(x_i) = 1$ und berücksichtigen das (ortsabhängige) Driftpotential V in (5.31). Für Details sei an dieser Stelle auf Heinsalu u.a. [2006] verwiesen. Die räumliche Diskretisierung Δx bleibt während der gesamten Berechnung unverändert. Sie ist so zu wählen, dass das Driftpotential gut aufgelöst werden kann und die Veränderung der Raten durch Ausführen eines einzelnen Schrittes gering ist,

$$|q^\pm(x) - q^\pm(x \pm \Delta x)| \ll 1 \quad . \quad (6.4)$$

Für die Wartezeitverteilung wird für $\alpha < 0.8$ die Verwendung einer Pareto-Verteilung empfohlen, die asymptotisch einem Potenzgesetz genügt, weil sich entsprechende Zufallszahlen sehr einfach erzeugen lassen. Für größere α wird stattdessen eine Mittag-Leffler-Verteilung verwendet. Der Parameter $\theta(x_i)$ hängt ebenfalls von den Eigenschaften des Driftpotentials am Punkt x_i ab und sorgt dafür, dass die zeitliche Auflösung an Stellen, an denen das Driftpotential einen großen Gradienten aufweist und die Dynamik damit schnell abläuft, erhöht wird. In dieser Hinsicht wird der Zeitschritt für die numerische Integration adaptiv gewählt.

Aus (6.3) werden nun mit Hilfe der Vorschriften

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \quad (6.5a)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t_i \quad (6.5b)$$

Trajektorien erzeugt, wobei Δx und Δt jeweils Zufallszahlen sind, die (6.3) genügen. x_i bezeichnet hier den Wert des Prozesses nach dem i -ten Schritt. Weil x aufgrund der konstanten Schrittweite nur diskrete Werte annehmen kann, lassen sich die Parameter $q^\pm(x)$ und $\theta(x)$ im Voraus berechnen.

Mit Hilfe eines Ensembles von Trajektorien lässt sich nun die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Zeit nachvollziehen, wie in Abbildung 6.2 schematisch dargestellt. Für die Erzeugung eines Ensembles von n Prozessen zur Zeit t wird jeder einzelne Prozess j bis zum Schritt n_j vorangetrieben, sodass für alle Prozesse j gilt:

$$t_{n_j}^j < t \leq t_{n_j+1}^j \quad . \quad (6.6)$$

Die entsprechenden $x_{n_j}^j$ stellen dann die Positionen der einzelnen Teilchen zur Zeit t dar, sodass sich z.B. die Wahrscheinlichkeitsdichte angeben lässt als

$$P(x, t) = \frac{1}{n} \sum_j \delta(x - x_{n_j}^j) \quad . \quad (6.7)$$

Im Limes $\Delta x \rightarrow 0$ gehen diese PDFs in die Lösungen der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung über. In Abbildung 6.3 ist die Lösung eines einfachen Problems in einem quadratischen Potential abgebildet und mit der analytischen Lösung, die sich mit Hilfe von (5.32) aus der Lösung der gewöhnlichen Fokker-Planck-Gleichung ergibt, verglichen. Es wird deutlich, dass trotz einer nur mäßigen Diskretisierung des Ortes mit $\Delta x = 0.1$ eine gute Übereinstimmung erzielt wird. Das Wirken einer langreichweitigen Wechselwirkung und die daraus resultierende Mischung von Verteilungen von der Anfangsbedingung $\delta(x - x_0)$ bis hin zur Normalverteilung als stationärem Zustand des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ist deutlich zu erkennen.

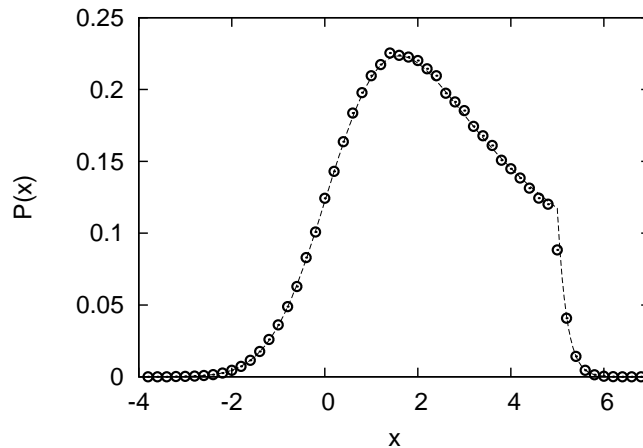


ABBILDUNG 6.3: Anwendung des von Heinsalu u.a. [2006] beschriebenen numerischen Verfahrens für ein quadratisches Driftpotential $V(x) = x^2/2$ und eine fraktionale Ableitung vom Grade $\alpha = 0.5$. Die gestrichelte Linie stellt die numerische Lösung der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung mit Hilfe von (5.32) dar. Die Punkte markieren die Werte, die aus der Simulation eines Ensembles von 10^6 Teilchen für $\Delta x = 0.1$ gewonnen wurden. Für die Erzeugung der Wartezeiten wurde hier eine Pareto-Verteilung zugrunde gelegt. Die Übereinstimmung zwischen beiden Ansätzen zur Lösung der Gleichung ist gut.

6.2 Kontinuumsübergang nach Gorenflo u.a.

In Abbildung 6.1 wird bereits deutlich, dass der diskrete Charakter der Dynamik im Langzeitlimit verschwindet, wenn kontinuierliche Verteilungen für die Sprungweiten in Raum und Zeit verwendet werden. Gorenflo u.a. [2007] haben diese Tatsache genutzt, um ohne genauere Kenntnisse eines Subordinationsprozesses $t(s)$ und ohne die Notwendigkeit zusätzlicher Anforderungen an die Sprungverteilungen durch geeignete Skalierung der stochastischen Variablen einen Kontinuumsübergang herbeizuführen, der dem Diffusionslimit üblicher Zufallsprozesse entspricht.

Gorenflo u.a. betrachten dafür insbesondere CTRWs, bei denen die Sprungweitenverteilung asymptotisch mit einem Potenzgesetz mit Exponenten $-(1+\beta) < -1$ und die Wartezeitverteilung asymptotisch mit dem Exponenten $-2 \leq -(1+\alpha) \leq -1$ abfallen. Aus Abschnitt 2.3 wissen wir, dass die Verteilungen von Summen von Zufallsvariablen dieser Verteilungen dann gegen eine Lévy-Verteilung streben. Für $\beta \geq 2$ geht x_n – wie in Abbildung 6.1 zu sehen – in einen reinen Diffusionsprozess über.

Werden nun x und t so um h bzw. τ skaliert, dass die Beziehung

$$h^\beta \sim \tau^\alpha \quad (6.8)$$

erfüllt ist, erhält man im Grenzübergang $h, \tau \rightarrow 0$ das Diffusionslimit der Prozesse zu endlichen Zeiten t . Die diskreten Prozesse lassen sich dann durch verallgemeinerte Langevin-Gleichungen (5.37) beschreiben.

Gorenflo u.a. [2007] entwickeln einen Algorithmus, der auf einer geeigneten Wahl von h und τ beruht. Der (reskalierte) CTRW wird dann numerisch simuliert, sodass zunächst Paare (x_n, t_n) erzeugt werden. Eine „Verbindung“ dieser Punkte erfolgt dann entsprechend (5.39a) wie beim diskreten CTRW üblich so, dass im Intervall $[t_{n-1} : t_n[$ der Wert x_n angenommen wird. Aufgrund der Reskalierung von x und t sind die resultierenden Trajektorien für $\beta = 2$ im Grenzübergang stetig.

6.3 Numerische Simulation von Trajektorien auf der Basis des Fogedby-Modells

Zeitgleich mit Gorenflo u.a. [2007] ist im Rahmen dieser Promotion ein ähnlicher Weg untersucht worden, durch einen Kontinuumsübergang stetige Pfade von CTRWs zu erzeugen [Kleinhans & Friedrich 2007a]. Dabei wurde ausgenutzt, dass das Kontinuumslimit bereits durch die von Fogedby eingeführten Langevin-Gleichungen (5.37) beschrieben ist, die im Rahmen von Abschnitt 5.4 bereits diskutiert worden sind. Im Gegensatz zu Gorenflös Ansatz setzt die Verwendung dieser Langevin-Gleichungen explizit voraus, dass die Verteilungen von Sprungweiten und Wartezeiten stabil sind. Mit Hilfe von (5.37) lässt sich dann ein einfaches Verfahren zur numerischen Simulation der gewünschten Trajektorien aufstellen. Wie wir sehen werden, können mit Hilfe der auf diese Art und Weise erzeugten CTRWs die Ergebnisse des Algorithmus von Heinsalu u.a. [2006] reproduziert werden. Weil einige wichtige Ergebnisse der Untersuchung des Systems von Langevin-Gleichungen bereits im Abschnitt 5.4 vorgestellt worden sind, können wir nun unmittelbar mit der Beschreibung der Simulation beginnen.

6.3.1 Algorithmus zur numerischen Simulation von Trajektorien

Eine äquivalente Formulierung der Gleichungen (5.37) stellt ein System von Integralgleichungen,

$$x(s) = x(0) + \int_0^s ds' F(x(s')) + \int_0^s dW(s', ds') \quad (6.9a)$$

$$t(s) = t(0) + \int_0^s dL_\alpha(s', ds') \quad , \quad (6.9b)$$

dar. dW und dL_α sind hier die infinitesimalen Inkremente eines Wiener- bzw. eines einseitigen α -stabilen Lévy-Prozesses, die in Kapitel 2 eingeführt wurde. Für eine numerische Simulation ist die Diskretisierung dieser Gleichungen erforderlich. Mit Hilfe des Euler-Schemas kann eine diskrete Version der Gleichungen (6.9) sofort angegeben werden,

$$x(s + \Delta s) = x(s) + \Delta s F(x(s)) + \sqrt{\Delta s} \eta(s) \quad , \quad (6.10a)$$

$$t(s + \Delta s) = t(s) + \Delta s^{1/\alpha} \tau_\alpha(s) \quad . \quad (6.10b)$$

Die $\tau_\alpha(s_i)$ sollen hier der vollständig schiefen Lévy-Verteilung $f_{\alpha,1}$, vgl. (2.61), genügen. Die Gleichung (6.10b) erzeugt dann einen α -stabilen Lévy-Prozess, der für endliche Zeiten durch den Propagator (2.71) charakterisiert ist. Die numerische Integration ist an dieser Stelle exakt. $\eta(s_i)$ sind normalverteilte Zufallszahlen, die (2.22) genügen. Für die Integration von (6.10a) können statt dem Euler-Schema auch aufwändigere Algorithmen herangezogen werden [vgl. Kloeden & Platen 1992]. Zur Erzeugung der benötigten Zufallszahlen η und τ können die auf Seite 13 vorgestellten Verfahren bzw. der in Anhang A beschriebene Algorithmus verwendet werden.

Für die numerische Simulation von Trajektorien $x(t)$ zu diskreten Zeitpunkten $t_j := j\Delta t$, $j = 0, \dots, N$, ist – ähnlich wie bei Gorenflo u.a. [2007] – die Konstruktion eines inversen Prozesses $s(t)$ nicht erforderlich. Stattdessen lässt sich der folgende Algorithmus verwenden, der für die mikroskopische Auflösung die Definition (5.39a) berücksichtigt:

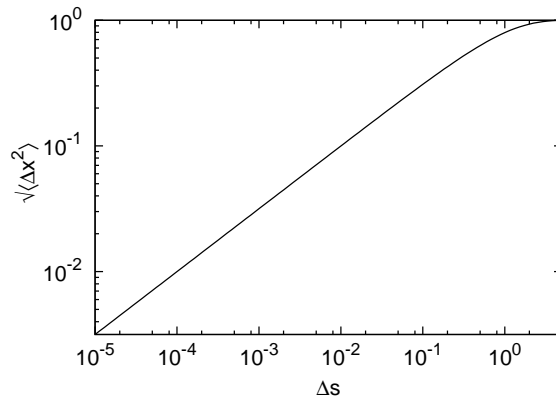


ABBILDUNG 6.4: Bestimmung des intrinsischen Inkrements Δs . Aus der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte von Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen, die in geschlossener Form bekannt ist, (2.45b), wurde die Entwicklung der Wurzel der mittleren quadratischen Inkremente Δx als Funktion von Δs untersucht. Für die gewünschte Genauigkeit scheint die Wahl von $\Delta s = 0.0001$ an dieser Stelle ausreichend.

- Initialisierung von $x(s = 0)$ und $t(s = 0)$, setze $s = 0$
- für alle $j = 0$ bis N :
 1. so lange ($t_s(s) < t_j$):
 - (a) berechne $x(s + \Delta s)$ und $t(s + \Delta s)$ mit Hilfe der Gleichungen (6.10)
 - (b) erhöhe s um Δs
 2. setze $x(s(t_j)) := x(s)$.

Die Diskretisierung von t , Δt , ist durch die gewünschte Abtastrate der erzeugten Daten gegeben. Eine gute Wahl für die Größe der Diskretisierung der internen Variable s , Δs , hängt von den üblichen Größenordnungen der Schrittweiten des Prozesses $x(s)$ und der gewünschten Genauigkeit der erzeugten Daten ab. Zu kleine Werte für Δs können aufgrund von Fehlern bei der Auswertung der numerischen Ausdrücke, (6.10), zu Diskretisierungsfehlern führen und beeinträchtigen die Geschwindigkeit der numerischen Integration. Die Wahl von Δs ist daher stets ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Diskretisierung, der Abbildung des inversen Prozesses $s(t)$, der benötigten Rechenzeit und den zu erwartenden Diskretisierungsfehlern. Für Details sei an dieser Stelle auf Kloeden & Platen [1992] verwiesen.

6.3.2 Beispiele

Zur Verdeutlichung der Prozedur zur numerischen Simulation und einiger charakteristischer Eigenschaften der kontinuierlichen Pfade sollen hier Prozesse mit $F(x) = -x$ betrachtet werden. $x(s)$ stellt dann einen *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*

$$\frac{d}{ds}x(s) = -\gamma x + \sqrt{D}\eta(s) \quad (6.11)$$

mit $D = \gamma = 1$ dar. Zum späteren Vergleich mit Ergebnissen von Baule & Friedrich [2007b] wird als Startwert $x(s = 0) = 1$ verwendet.

Für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess sind die Übergangswahrscheinlichkeitsdichten in geschlossener Form bekannt, (2.45b). Die Statistik der Inkremente $\Delta x := x(s + \Delta s) - x(s)$ kann daher als Funktion des intrinsischen Inkrements Δs untersucht

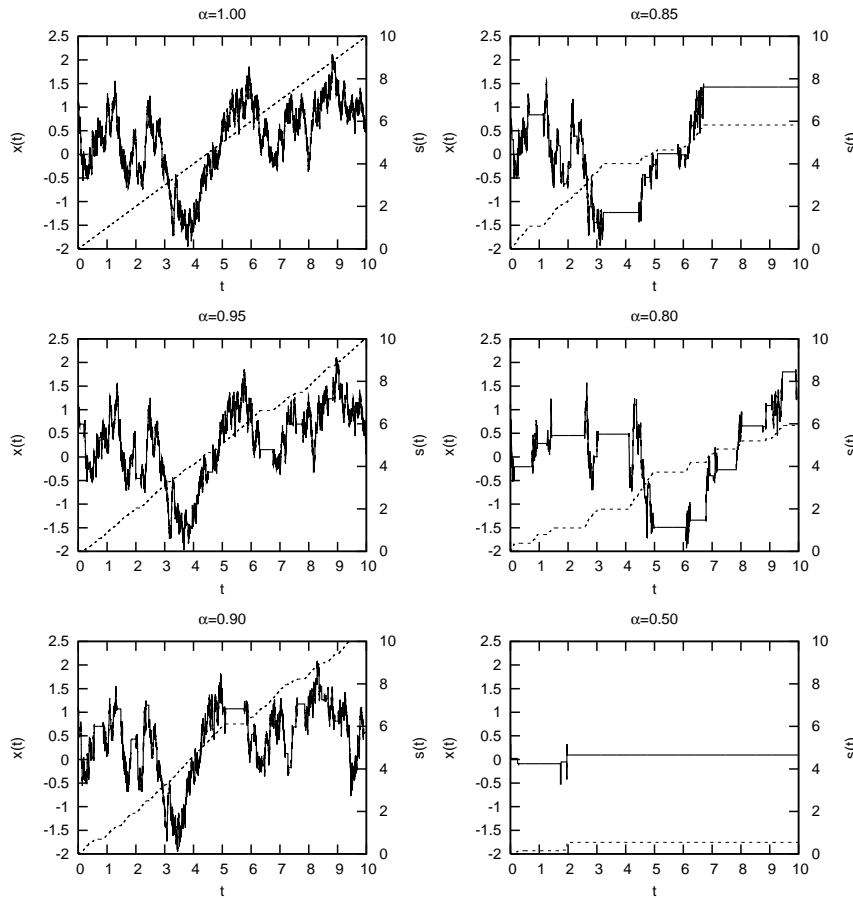


ABBILDUNG 6.5: Simulierte Trajektorien von CTRWs mit linearem $F(x) = -x$ für Wartezeitverteilungen mit verschiedenen charakteristischen Exponenten α . Die durchgezogene Linie stellt die Trajektorie des Prozesses $x(t)$ dar. Die gestrichelte Linie entspricht dem zugehörigen inversen Prozess $s(t)$, durch den die jeweiligen CTRWs erzeugt wurden. Für $\alpha = 1$ entspricht der CTRW einem gewöhnlichen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess. Mit sinkendem Exponenten α wird der Prozess zunehmend durch Warteereignisse mit konstantem x und s dominiert. Ein Vergleich der einzelnen Trajektorien zeigt, dass die Dynamik insgesamt langsamer verläuft. Das ist charakteristisch für CTRWs mit schnell abfallenden Sprungweitenverteilungen und mit Wartezeitverteilungen, die asymptotisch einem Potenzgesetz genügen, und ist ein Grund für den subdiffusiven Charakter der Prozesse.

werden. Die Inkremente Δx sind normalverteilt, wobei die Varianz der Verteilung durch Δs bestimmt ist als

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = (1 - e^{-\Delta s}) \quad . \quad (6.12)$$

Zur Abschätzung eines geeigneten Wertes für Δs wurde die Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung dieser Normalverteilung untersucht. Mit Hilfe der graphischen Auswertung, die in Abbildung 6.4 dargestellt ist, wurde für die folgenden Simulationen $\Delta s = 10^{-4}$ ausgewählt. Die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung zwischen den Definitionen (5.39) beträgt dann etwa $\sim 10^{-2}$, was an dieser Stelle ausreichend sein soll.

Um die Eigenschaften der Trajektorien diskutieren zu können, wurden für verschiedene Wartezeitverteilungen jeweils 10000 Punkte von CTRWs mit dem Zeitin-

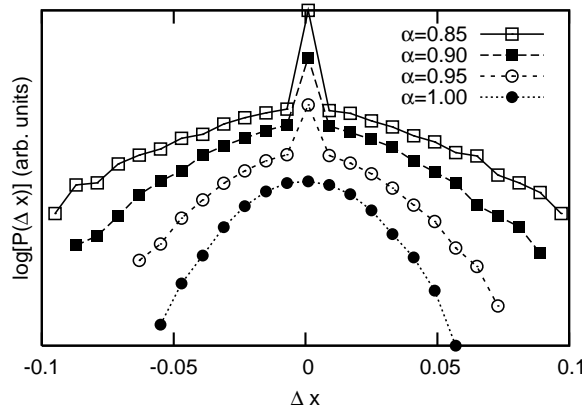


ABBILDUNG 6.6: Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der Inkremente $\Delta x := x(t + \tau) - x(t)$ mit $\tau = 0.001$ für einige der in Abbildung 6.5 dargestellten Prozesse. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden die einzelnen Verteilungen durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor vertikal gegeneinander verschoben. Es wird deutlich, dass sich mit sinkendem charakteristischem Exponenten α ein ausgeprägtes zentrales Maximum ausbildet, das durch die persistenten Stellen, an denen der Prozess „wartet“, erzeugt wird. Auf der anderen Seite werden die Verteilungen breiter und sind damit ein Indiz für das verstärkte Auftreten extremer Inkremente. Extreme Inkremente treten vermehrt auf, weil der Median der Wartezeitverteilungen mit sinkendem charakteristischem Exponenten gegen 0 strebt.

krement $\Delta t = 0.001$ erzeugt. Zum besseren Vergleich der Prozesse wurde jeweils die gleiche Realisierung des Prozesses $x(s)$ verwendet. Die simulierten Trajektorien sind in Abbildung 6.5 dargestellt. Aus den Pfaden wird der Einfluss der Abbildung von der internen Zeit s auf die physikalische Zeit t , die sogenannte *Subordination*, deutlich. Mit sinkendem charakteristischem Exponenten α werden die Prozesse zunehmend von Stellen, an denen die Dynamik „wartet“, dominiert. Diese Entwicklung lässt sich auch Abbildung 6.6 entnehmen, in der die Verteilung der Inkremente für einige CTRWs dargestellt ist. Mit sinkendem α entwickelt sich dort ein ausgeprägtes Maximum an der Stelle 0, das durch persistente Prozesse erzeugt wird.

Vor kurzem wurde von Baule & Friedrich [2007b] die fraktionale Erweiterung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses untersucht. Für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $x(s)$ mit Startwert $x(s = 0) = 1$, der hier betrachtet wurde, konnte für die Korrelationsfunktion unter der Verwendung einiger spezieller Funktionen schließlich eine geeignete inverse Laplace-Transformation gefunden werden. Für $t_2 > t_1$ ergibt sich für die Zweipunkt-Korrelation der hier betrachteten CTRWs nach Ensemble-Mittelung

$$\langle x(t_2)x(t_1) \rangle = \frac{t_1^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t_2^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} {}_2F_1\left(\alpha, -\alpha n, \alpha + 1; \frac{t_1}{t_2}\right) + E_\alpha(-t_2^\alpha) \quad (6.13)$$

Γ bezeichnet hier die Gammafunktion [Bronstein u.a. 2005], E_α die einparametrische Mittag-Leffler-Funktion und ${}_2F_1(a, b, c; z)$ die Gauß'sche hypergeometrische Funktion. Diese Funktionen werden z.B. durch Computer-Algebra-Systeme wie Mathematica[®] bereitgestellt. Für eine genauere Beschreibung dieser Funktionen sei an dieser Stelle auf Baule & Friedrich [2007b] verwiesen.

Auf der anderen Seite lassen sich die Korrelationen natürlich durch Ensemble-Mittelungen aus simulierten Trajektorien $x(t)$ bestimmen. Ein Vergleich der analytischen Ergebnisse von Baule & Friedrich mit einer Korrelationsfunktion, die aus simulierten Trajektorien gewonnen wurde, ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Die Über-

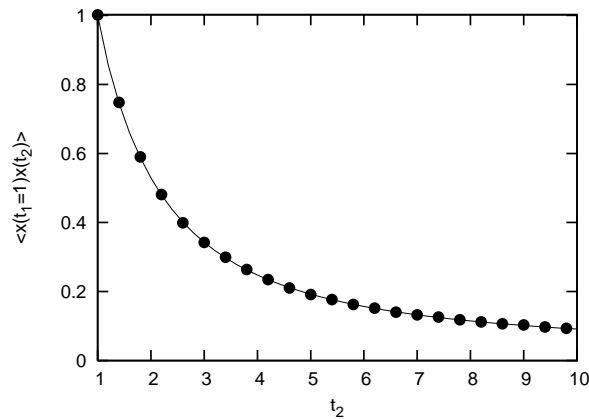


ABBILDUNG 6.7: Korrelationsfunktion des in Abbildung 6.5 dargestellten Prozesses mit $\alpha = 0.8$. Die durchgezogene Linie stellt die analytische Lösung, die durch Gleichung (6.13) gegeben ist, dar, die kürzlich von Baule & Friedrich [2007b] bestimmt werden konnte. Die aufgetragenen Daten wurden von Baule & Friedrich bereitgestellt. Die Punkte markieren die Korrelationsfunktion, die durch die Mittelung über ein Ensemble von 500000 Trajektorien mit Hilfe des hier vorgestellten Verfahrens bestimmt wurde. Es ist eine deutliche Übereinstimmung der Ergebnisse zu erkennen.

einstimmung der beiden Ergebnisse ist deutlich. Diese Auftragsstellung stellt eine der ersten (numerischen) Untersuchungen von mehrzeitigen Verteilungsfunktionen fraktionaler Prozesse dar und zeigt die Flexibilität und die Stärken des hier vorgestellten Simulationsverfahrens.

6.3.3 Zusammenfassung

Basierend auf Fogedby's Gleichungen konnte eine einfache Methode zur numerischen Simulation von CTRWs im Kontinuumslimit beschrieben werden, die auf Vorarbeiten basiert, die insbesondere in den Abschnitten 2.3 und 5.4 schon eingeführt wurden. Die Eigenschaften der resultierenden Trajektorien entsprechen im Wesentlichen denen, die Gorenflo u.a. [2007] – startend von den diskreten Gleichungen – erhalten. Ein weiteres Verfahren zur Simulation der Trajektorien, das dem hier vorgestellten Zugang weitestgehend entspricht, wurde darüber hinaus zeitgleich von Magdziarz u.a. [2007] entwickelt und ebenfalls im Jahre 2007 veröffentlicht. Magdziarz u.a. gehen dabei von den Ergebnissen von Heinsalu u.a. [2006], die in Abschnitt 6.1 vorgestellt worden sind, aus und entwickeln – ähnlich zu Fogedby – die zugrundeliegenden stochastischen Prozesse im Diffusionslimit.

Die vorgestellten Simulationsverfahren zur Erzeugung von Trajektorien von CTRWs stellen sehr hilfreiche Werkzeuge für die genauere Untersuchung fraktionaler Prozesse dar. Zunächst einmal lassen sich damit natürlich die Untersuchungen der einzeitigen Verteilungen, die schon in Abschnitt 6.1 vorgestellt wurden, wiederholen. Abbildung 6.8 zeigt, dass dabei ähnlich gute Ergebnisse wie bei der Simulation nach Heinsalu u.a. erzielt werden. Im Gegensatz zu dem Ansatz von Heinsalu u.a., bei dem die Sprünge auf einem diskreten Gitter immer nur zu nächsten Nachbarn erfolgen, sind mit Hilfe der Ansätze von Magdziarz u.a. [2007], Gorenflo u.a. [2007] sowie mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Ansatz [Kleinhans & Friedrich 2007a] prinzipiell auch Prozesse zu simulieren, bei denen die Sprungweiten sich asymptotisch durch ein Potenzgesetz beschreiben lassen und die damit un stetige Trajektorien liefern. Dabei ist jedoch unter Umständen eine genauere Definition der

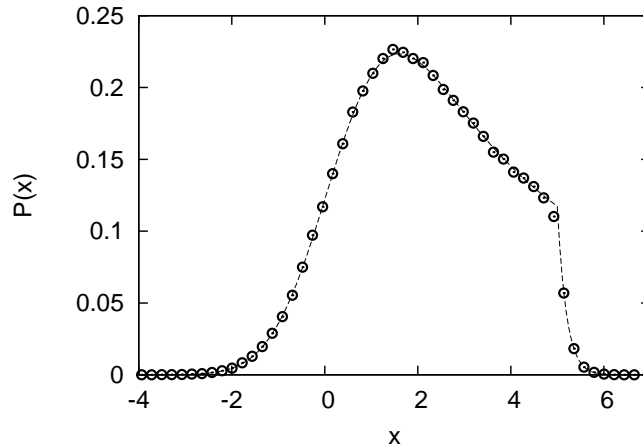


ABBILDUNG 6.8: Lösung der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung für ein quadratisches Drift-Potential. Analog zu Abbildung 6.3 ist die numerische Lösung auf der Basis der Integraltransformation (5.32) als gestrichelte Linie dargestellt. Die Punkte entsprechen der Lösung der Gleichung mit Hilfe der Ensemble-Mittelung über ein Ensemble von Trajektorien, die mit Hilfe des auf Seite 77 vorgestellten Verfahrens erzeugt wurden. Ähnlich wie bei dem von Heinsalu u.a. [2006] beschriebenen Algorithmus liefern diese beiden Zugänge übereinstimmende Lösungen.

Eigenschaften der Position zum Zeitpunkt des Wartens gemäß (5.39) nötig.

Die Tatsache, dass im Jahre 2007 unabhängig voneinander drei sehr ähnliche Verfahren zur Simulation dieser Prozesse veröffentlicht wurden, zeigt das Interesse an solchen Prozesse für die Beschreibung aktueller Probleme auf der Basis stochastischer Prozesse. In Zukunft werden insbesondere mehrzeitige Verteilungsfunktionen wie in Abbildung 6.7, die sich mit Hilfe der hier vorgestellten Verfahren effizient berechnen lassen, von großer Wichtigkeit sein.

6.4 Mikroskopisches Modell: Physikalischer Ursprung anomaler Diffusion

Die Frage, welche physikalischen Effekte die Ursache für die Realisierung von Prozessen mit anomaler Statistik – wie z.B. CTRWs – sein können, ist bislang außer Acht gelassen worden. In diesem Abschnitt wird ein neuer Ansatz zum Verständnis der mikroskopischen Dynamik solcher Prozesse vorgestellt. Zentrales Anliegen ist dabei die Beschreibung von Prozessen mit anomalem Diffusionsverhalten auf Basis von klassischen Langevin-Gleichungen, wie sie in Abschnitt 2.2.2 eingeführt wurden. Die Entwicklung und Charakterisierung dieses Modells ist zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht abgeschlossen.

Es wird speziell ein System von Langevin-Gleichungen untersucht, das durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \quad \text{und} \quad (6.14a)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\xi}{2} \nabla_{\mathbf{y}} V(\mathbf{y}, t) + \sqrt{\xi} \mathbf{\Gamma}(t) \quad (6.14b)$$

gegeben ist. Die Dynamik der Variablen \mathbf{x} wird dabei durch ein dynamisches Rauschen \mathbf{y} beeinflusst, dessen Dynamik wiederum durch eine Langevin-Gleichung beschrieben wird. \mathbf{y} wird durch normalverteiltes, dynamisches und unkorreliertes Rauschen $\mathbf{\Gamma}$ getrieben, das (2.22) genügt. ξ ist hier ein konstanter Parameter, der die

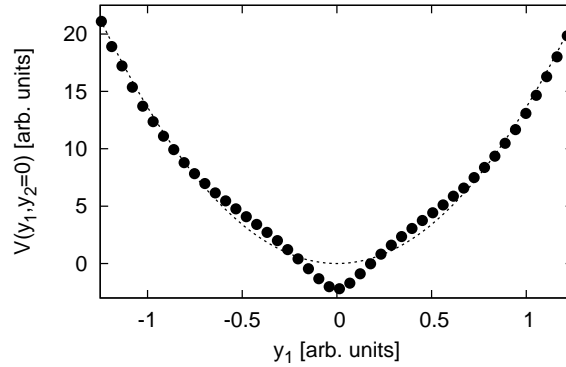


ABBILDUNG 6.9: Driftpotential der Beschleunigung von in einem durch numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen in zwei Dimensionen gewonnenen Geschwindigkeitsfeld transportierten Lagrange-Teilchen. Die gestrichelte Linie markiert den quadratischen Fit des äußeren Bereichs des Potentials. In der Nähe von $y_1 = 0$ ist – ähnlich wie in dem hier verwendeten Potential (6.15), das in den Abbildungen 6.10 und 6.11 dargestellt ist – ein Mulde mit einer erhöhten Steigung des Potentials zu erkennen. (Quelle: Kamps & Friedrich, unveröffentlicht)

intrinsische Zeitskala der Dynamik festlegt. Es ist vorstellbar, dass der Prozess \mathbf{x} beobachtet wird, die Dynamik des Rauschens \mathbf{y} hingegen nicht zugänglich ist. Hier sollen zunächst speziell die Eigenschaften dieses Rauschens und später dann dessen Einfluss auf die Dynamik von \mathbf{x} untersucht werden. Aufgrund der Art der Kopplung der Langevin-Gleichungen weist die Problemstellung große Ähnlichkeiten zum Kramers-Problem auf [Risken 1989]. Wir werden uns an dieser Stelle jedoch insbesondere mit Potentialen $V(\mathbf{y})$ beschäftigen, die ein ausgeprägtes Minimum am Nullpunkt aufweisen.

Zunächst wird speziell für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ das rotationssymmetrische Drift-Potential

$$V(y) = \begin{cases} y > R_0 & : \gamma y^2 \\ y \leq R_0 & : V_0 + (\gamma - V_0/R_0^2) y^2 \end{cases} \quad (6.15)$$

untersucht. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird abkürzend $y := \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ verwendet, wobei y_i die Komponenten von \mathbf{y} sind. Dieses Potential stellt natürlich eine Idealisierung dar, weil jedes tatsächlich realisierte Potential an jeder Stelle differenzierbar sein wird. Es wird sich jedoch zeigen, dass die Idealisierung die mathematische Diskussion der Eigenschaften wesentlich vereinfacht, weswegen wir sie vorerst verwenden wollen. V besteht aus der Kombination zweier harmonischer Potentiale unterschiedlicher Steigungen und wird spezifiziert durch die Steigung des äußeren Potentials γ , den Übergangsradius R_0 und die Tiefe des Potentials an der Stelle $y = 0$, V_0 . In der Regel wird V_0 negativ sein, was einer Mulde des Potentials für $y < R_0$ entspricht. Ein Beispiel für dieses Potential und ein Querschnitt durch die Ebene $y_2 = 0$ sind in den Abbildungen 6.10 und 6.11 dargestellt.

Die Motivation für die Verwendung eines derartigen Potentials war die Beobachtung von Potentialen ähnlicher Form bei der Untersuchung der Beschleunigungen von Lagrange-Partikeln in Navier-Stokes-Turbulenz. Ein Beispiel für das Potential des Drifts der Beschleunigungen von Partikeln in einer zweidimensionalen Strömung, das als vorläufiges Zwischenergebnis einer aktuellen Arbeit von Kamps & Friedrich zur Verfügung gestellt wurde, ist in Abbildung 6.9 dargestellt. Es sind deutliche Ähnlichkeiten zu dem idealisierten Potential (6.15) in den Abbildungen 6.10 und 6.11 zu erkennen.

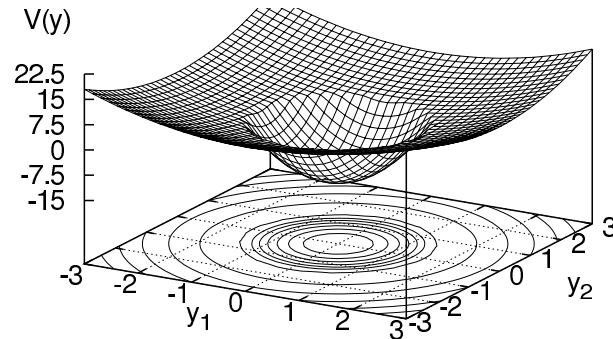


ABBILDUNG 6.10: Beispiel für das Drift-Potential (6.15) für $\gamma = 1$, $R_0 = 1.5$ und $V_0 = -15$. Die Konturlinien, die auf dem Boden dargestellt sind, markieren Orte gleichen Potentials und liegen im Abstand von 2.5. Die Bedeutung der beiden unterschiedlichen Gebiete für $y < R_0$ bzw. $y > R_0$ wird aus dieser Abbildung deutlich. Ein schematischer Schnitt durch die Ebene $y_2 = 0$ findet sich in Abbildung 6.11.

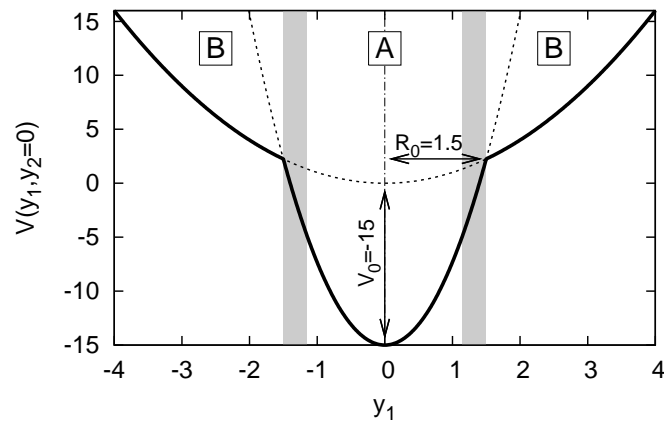


ABBILDUNG 6.11: Schematischer Querschnitt des in Abbildung 6.10 dargestellten Potentials (6.15) an der Stelle $y_2 = 0$. Die durchgezogene Linie markiert das Potential (6.15) für $\gamma = 1$, $V_0 = -15$ und $R_0 = 1.5$. Die grau hinterlegten Bereiche bei $y_2 = \pm R_0$ bilden den Übergang zwischen dem inneren Bereich A und dem äußeren Bereich B für $\varepsilon = 0.35$ und werden in Abschnitt 6.4.2 eingeführt.

Aus (6.14b) lässt sich eine Langevin-Gleichung für \mathbf{y} herleiten. Unter Verwendung der Interpretation nach Itô ergibt sich

$$\dot{\mathbf{y}} = -\alpha(y)\xi\mathbf{y} + \sqrt{\xi}\mathbf{\Gamma}(t) \quad . \quad (6.16)$$

Die Steigung ist dabei durch den Parameter $\alpha(y)$ gegeben, der aus dem Potential (6.15) hervorgeht als

$$\alpha(y) := \begin{cases} y > R_0 & : \quad \gamma \\ y \leq R_0 & : \quad \gamma - V_0/R_0^2 \end{cases} \quad . \quad (6.17)$$

Durch die Verwendung von Itôs Formalismus zur Interpretation der Gleichungen (vgl. Abschnitt 2.2.3) sind die Langevin-Gleichungen auch für nicht-stetige Driftfunktionen $\alpha(y)$ wohldefiniert.

Das Modell soll nun kurz erklärt werden. Es wird hier ein zweidimensionaler Prozess \mathbf{x} betrachtet, der durch einen stochastischen Prozess \mathbf{y} getrieben wird. \mathbf{y} zeigt zwei verschiedene Arten von Dynamik: Für $y > R_0$ bewegt sich \mathbf{y} – getrieben von thermischem Rauschen – im relativ schwachen äußeren Potential mit einer Steigung von $y\gamma$. Im Limes $R_0 \rightarrow 0$ gehorchen die beiden Komponenten einer Normalverteilung mit der Varianz $1/\gamma$ und sind unabhängig voneinander. Die Autokorrelationsfunktion der jeweiligen Komponenten ist proportional zu $\exp(-\xi\gamma\Delta t)$ und fällt für $\xi \gg 1/\gamma$ schnell ab [Risken 1989]. Im Limes $R_0 \rightarrow 0$ und $\xi \rightarrow \infty$ sind x_1 und x_2 daher zwei unabhängige Wiener-Prozesse.

Für endliche R_0 existieren zwei unterschiedliche Bereiche von \mathbf{y} , die wir entsprechend Abbildung 6.11 mit den Buchstaben A (innen) und B (außen) bezeichnen wollen. Innerhalb dieser Bereiche lässt sich die Entwicklung der Prozesse relativ leicht charakterisieren: Für $y \leq R_0$ (A) wird die Dynamik durch die innere Mulde mit der Tiefe $-V_0$ bestimmt. Im Falle von $R_0 \ll 1$ entspricht der Aufenthalt im Bereich A einem Einfrieren des Prozesses \mathbf{x} , weil die Amplituden des treibenden Rauschens nur sehr gering sind, und kann daher mit „Warte-Ereignissen“ von CTRWs in Verbindung gebracht werden. Nach dem Überschreiten der Grenze zum Bereich B vermindert sich die rücktreibende Kraft von y zum Ursprung schlagartig und ermöglicht daher große Amplituden des Rauschens y . \mathbf{x} vollzieht in diesem Fall eine ausgeprägte stochastische Bewegung. Es ist deutlich, dass die Wahrscheinlichkeit, wieder in den Bereich A zurückzufallen, maßgeblich von der Steigung $y\gamma$ des äußeren Potentials sowie vom Radius R_0 abhängt. Interessant für die Beschreibung des Systems ist daher insbesondere die Statistik im in Abbildung 6.11 grau hinterlegten Übergangsbereich zwischen den Gebieten A und B. Eine Beschreibung kann auf der Basis von sogenannten „*exit time*“- oder auch „*hitting time*“-Statistiken erfolgen [Risken 1989].

Diese qualitative Beschreibung des Modells soll nun auf eine solide theoretische Basis gestellt und die Prozesse mit Hilfe von aus Kapitel 2 bekannten Methoden im Detail beschrieben werden.

6.4.1 Dynamik des Prozesses \mathbf{y}

Für ein besseres Verständnis der Dynamik ist eine Transformation von (6.16) in Polarkoordinaten hilfreich. Bei der Transformation müssen die stochastischen Eigenschaften der Langevin-Gleichungen beachtet werden. Wenn die Gleichungen – wie in der gesamten Arbeit – im Sinne von Itô interpretiert werden, kann diese Transformation umgehend durchgeführt werden [Gardiner 2004, S. 107f] und man erhält:

$$\dot{y} = \xi \left(\frac{1}{y} - \alpha(y)y \right) + \sqrt{\xi}\Gamma_y(t) \quad . \quad (6.18)$$

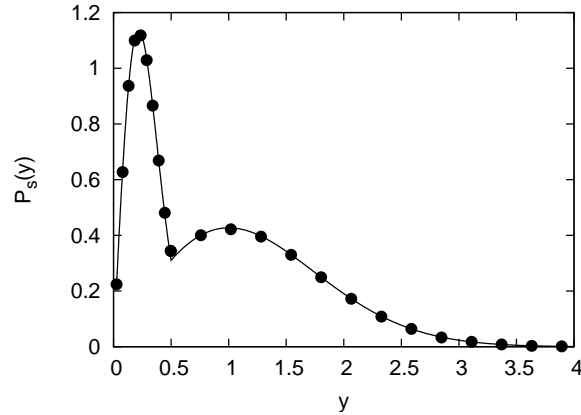


ABBILDUNG 6.12: Beispiel für eine stationäre Verteilung $P_s(y)$ für $\gamma = 1$, $R_0 = 0.5$ und $V_0 = -5$. Die durchgezogene Linie entspricht der durch (6.20) gegebenen stationären Verteilung, wohingegen die Punkte numerische Ergebnisse darstellen, die durch Integration von (6.16) für ein Ensemble von 10^6 Prozessen erhalten wurden. Eine gute Übereinstimmung ist offensichtlich. Ferner sind die beiden Bereiche A und B deutlich zu erkennen. An der Stelle R_0 ist die stationäre Verteilung stetig.

$\Gamma_y(t)$ ist hier ein neuer Zufallsprozess, der wiederum (2.22) genügt und mit den ursprünglichen Zufallszahlen $\Gamma(t)$ in Verbindung gebracht werden kann. Aufgrund der sphärischen Symmetrie des ursprünglichen Problems besitzt der Zufallsprozess y Markov-Eigenschaften. Für Details bezüglich der Transformation in Polarkoordinaten sei auf Gardiner [2004] verwiesen.

Darüber hinaus kann die Dynamik von Ensembles von Prozessen natürlich auch durch die zugeordnete Fokker-Planck-Gleichung beschrieben werden [Risken 1989], die die zeitliche Entwicklung der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte $P(y, t|y_0, t_0)$ angibt,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(y, t|y_0, t_0) = \left\{ -\xi \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} - \alpha(y)y \right) + \xi \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} P(y, t|y_0, t_0) \quad . \quad (6.19)$$

Um den Erhalt der Wahrscheinlichkeitsdichte zu gewährleisten, muss P an der Stelle R_0 stetig sein. An dieser Stelle wird die Bedeutung der Zeitskala ξ deutlich, die durch Einführung der dimensionslosen Zeit $\tau = \xi t$ eliminiert werden kann.

Für $t - t_0 \gg \frac{1}{\xi}$ wird der Zustand des Prozesses unabhängig vom Startwert y_0 und die Statistik damit stationär. P konvergiert dann gegen die stationäre Verteilung P_s ,

$$P_s(y) = \mathcal{N} \beta(y) y \exp \left(-\alpha(y) \frac{y^2}{2} \right) \quad , \quad (6.20)$$

mit

$$\beta(y) := \begin{cases} y > R_0 & : 1 \\ y \leq R_0 & : \exp \left(-\frac{V_0}{2} \right) \end{cases} \quad \text{und} \quad (6.21a)$$

$$\mathcal{N} := \frac{\gamma R_0^2 - V_0}{R_0^2 \exp(-V_0/2) - V_0/\gamma \exp(-\gamma R_0^2/2)} \quad . \quad (6.21b)$$

\mathcal{N} stellt die Normierung von P_s sicher. Ein Beispiel für die stationäre Verteilung und die Validierung durch Daten, die durch die numerische Integration der ursprünglichen Gleichungen (6.16) erhalten wurden, ist in Abbildung 6.12 zu sehen. Aus der

stationären Verteilung kann z.B. die relative Besetzung des Bereiches A durch Integration explizit berechnet werden,

$$\frac{\exp(-V_0/2) - \exp(-\gamma R_0^2/2)}{\exp(-V_0/2) - V_0/(\gamma R_0^2) \exp(-\gamma R_0^2/2)} \quad . \quad (6.22)$$

Die Besetzung von A kann also durch die beiden Parameter V_0 und γR_0^2 beeinflusst werden.

Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit für die Passage der Grenze zwischen A und B bei $y = R_0$ untersuchen.

6.4.2 Wahrscheinlichkeit des Verlassens von A bzw. B

Falls ein Ensemble von Prozessen zu einer Zeit $t_0 = 0$ von $y_0 \in \mathcal{I}$ startet, kann man den Zeitpunkt T , zu dem die einzelnen Prozesse einen bestimmten Bereich \mathcal{I} zum ersten Mal verlassen, als Zufallsvariable betrachten. Für eindimensionale Prozesse mit Markov-Eigenschaften wie (6.18) erhält man die Verteilung von T , $w(T)$, aus der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte (6.19) des stochastischen Prozesses, den die einzelnen Trajektorien beschreiben [Risken 1989],

$$w(T) = - \int_{\mathcal{I}} dy \frac{\partial}{\partial T} P_{\mathcal{I}}(y, T | y_0, 0) \quad , \quad (6.23)$$

wobei \mathcal{I} das jeweilige Intervall darstellt. Es ist wichtig zu beachten, dass die Lösung $P_{\mathcal{I}}$ der Gleichung (6.19) den Randbedingungen von \mathcal{I} zu jedem Zeitpunkt genügen muss [Gardiner 2004].

Wir werden uns nun auf das erste Moment von w , die sogenannte „*mean first exit time*“ (MFET) $\langle T \rangle$, konzentrieren. Weil das Rauschen additiv ist, kann $\langle T \rangle$ direkt aus der stationären Verteilung P_s gewonnen werden.

Per Konstruktion ist die MFET für einen Prozess, der genau von der Grenze startet, 0. Für eine Untersuchung der Übergangs-Statistik zwischen den beiden Intervallen $y < R_0$ (A) und $y > R_0$ (B) führen wir deshalb eine Hysterese ein. Ein Übergang von A nach B wird – wie im Modell vorgesehen – ausgeführt bei einem Überschreiten des Radius R_0 . Der Sprung von Bereich B in den Bereich A wird hingegen verschoben, sodass er erst beim Radius $R_0 - \varepsilon$ stattfindet. Ein Übergangsbereich der Breite $\varepsilon = 0.35$ ist in Abbildung 6.11 schematisch dargestellt. Im Allgemeinen ist ε so zu wählen, dass $\varepsilon/R_0 \ll 1$ gilt. Nun können die MFETs der auf diese Weise modifizierten Bereiche A und B getrennt voneinander untersucht werden.

Man unterscheidet allgemein zwischen *absorbierenden* und *reflektierenden* Grenzen: An absorbierenden Grenzen kann das Intervall \mathcal{I} verlassen werden. Weil uns nur der Zeitpunkt des ersten Erreichens einer solchen Grenze interessiert, werden Prozesse nach dem Erreichen einer solchen Grenze aus dem System entfernt und damit von der Grenze absorbiert. Die Wahrscheinlichkeitsdichte muss an absorbierenden Grenzen deshalb verschwinden. An reflektierenden Grenzen kann das Intervall nicht verlassen werden. Aus Gründen der Erhaltung der Wahrscheinlichkeitsdichte muss die Steigung der Wahrscheinlichkeitsdichte an reflektierenden Grenzen verschwinden.

Der Bereich A ist charakterisiert durch eine reflektierende Grenze an der Stelle $y = 0$ und eine absorbierende Grenze an der Stelle $y = R_0$. Prozesse, die aus dem Bereich B in den Bereich A kommen, starten aufgrund der Hysterese jedoch beim Radius $y_0 = R_0 - \varepsilon$. Bezugnehmend auf Gardiner [2004, S. 136ff] kann die MFET $\langle T_A \rangle$ des Bereichs A dann berechnet werden als

$$\langle T_A \rangle = \frac{1}{\xi} \int_{R_0 - \varepsilon}^{R_0} \frac{dy}{P_s(y)} \int_0^y dz P_s(z) \quad . \quad (6.24)$$

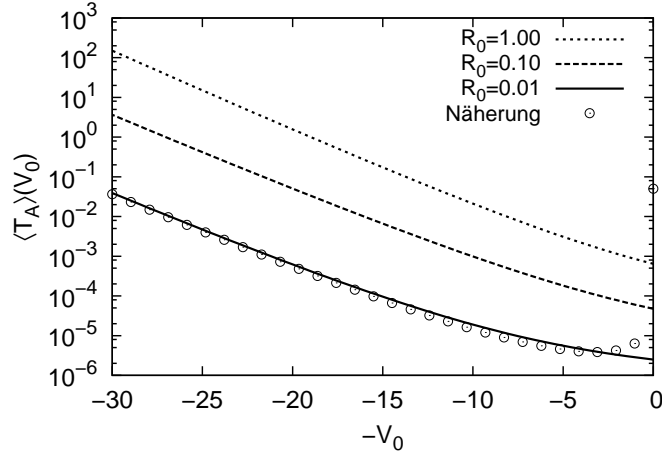


ABBILDUNG 6.13: „Mean first exit times“ (MFETs) aus dem Bereich A. Dargestellt ist die MFET als Funktion der Tiefe V_0 des Potentials für verschiedene Werte von R_0 . Die Kurven ergeben sich durch numerische Auswertung von (6.26) für $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0.01$ und $\xi = 10$. Die als „Näherung“ eingezeichneten Punkte markieren den Verlauf des Ausdrucks (6.28), der eine Näherung für den Fall $R_0 = \varepsilon$ und $-V_0 \gg 1$ darstellt. Ab etwa $V_0 = -5$ sind die relativen Abweichungen von der ursprünglichen Funktion gering.

Bereich B hingegen wird durch eine absorbierende untere Grenze an der Stelle $y = R_0 - \varepsilon$ begrenzt, wohingegen die obere Grenze $y = \infty$ reflektierend ist. Prozesse, die aus dem Bereich A stammen, starten vom Radius $y_0 = R_0$. In nahezu derselben Art und Weise ergibt sich für die MFET des Bereiches B dann

$$\langle T_B \rangle = \frac{1}{\xi} \int_{R_0 - \varepsilon}^{R_0} \frac{dy}{P_s(y)} \int_y^{\infty} dz P_s(z) \quad . \quad (6.25)$$

Für unser spezielles Problem lassen sich die Gleichungen (6.24) und (6.25) in Reihen entwickeln. So ergibt sich für die mittlere Zeit bis zum Verlassen des Bereiches A, $\langle T_A \rangle$, unter Verwendung der stationären Verteilung (6.20)

$$\langle T_A \rangle = \frac{R_0^2}{2(\gamma R_0^2 - V_0)\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma - V_0/R_0^2}{2}\right)^k \left(R_0^{2k} - (R_0 - \varepsilon)^{2k}\right)}{k!k} \quad . \quad (6.26)$$

Für $R_0 = \varepsilon$ und $-V_0 \gg 1$ lässt sich diese Reihe wesentlich vereinfachen. In einem ersten Schritt ergibt eine Umformung

$$\langle T_A \rangle = \frac{R_0^2}{(\gamma R_0^2 - V_0)^2 \xi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma R_0^2 - V_0}{2}\right)^k}{k! - (k-1)!} \quad . \quad (6.27)$$

Für $-V_0 \gg 1$ leisten die niedrigsten Glieder der Reihe nur einen verhältnismäßig geringen Beitrag. Für hohe k wiederum gilt im Nenner $(k-1)! \ll k!$. Unter Vernachlässigung der niedrigsten Glieder und des Summanden im Nenner ergibt sich dann näherungsweise

$$\langle T_A \rangle \approx \frac{R_0^2}{(R_0^2 \gamma - V_0)^2 \xi} \exp\left(\frac{R_0^2 \gamma}{2} - \frac{V_0}{2}\right) \quad . \quad (6.28)$$

Diese Näherung ist in Abbildung 6.13 für $R_0 = \varepsilon = 0.01$ dargestellt. Die Übereinstimmung ist für moderate und hohe Werte von $-V_0$ sehr gut. Die Verweildauern im Bereich A hängen für große $-V_0$ also näherungsweise exponentiell von der Tiefe des inneren Potentials ab.

Die Verweildauern in Bereich B lassen sich maßgeblich durch die Wahl von R_0 und γ beeinflussen. Aufgrund der speziellen Wahl des Übergangsbereichs ist die Auswertung von (6.25) etwas aufwändiger und liefert

$$\begin{aligned} \langle T_B \rangle &= \frac{1}{\gamma - V_0/R_0^2} \ln \left(\frac{R_0}{R_0 - \varepsilon} \right) + \frac{-V_0}{2\gamma(\gamma R_0^2 - V_0)\xi} \exp \left(-\gamma \frac{R_0^2}{2} + \frac{V_0}{2} \right) \\ &\times \left(\ln \left(\frac{R_0}{R_0 + \varepsilon} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma - V_0/R_0^2}{2} \right)^k \left(R_0^2 - (R_0 - \varepsilon)^2 \right)^k}{k!k} \right) . \end{aligned} \quad (6.29)$$

6.4.3 Übergang zu Wartezeiten mit Potenzgesetz

Eine charakteristische Eigenschaft, die CTRWs aufweisen müssen, um im Limes langer Zeiten im Ensemble-Sinne anomales Verhalten zu zeigen, ist die Divergenz der mittleren Wartezeit. Eine konsistente mikroskopische Modellierung für das Auftreten divergenter Wartezeiten und für die zugehörigen Trajektorien von Partikeln war jedoch nicht bekannt.

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass das hier vorgestellte Modell in guter Näherung „Warte-Ereignisse“ mit existierenden Momenten produziert, die für tiefe V_0 (und damit lange Wartezeiten) exponentiell von der Tiefe des zentralen Potentials abhängen. Das Potential wird nun so modifiziert, dass die Tiefe V_0 jedesmal, wenn der Bereich A bei $R_0 - \varepsilon$ von größeren Radien kommend erreicht wird, stochastisch neu bestimmt wird. V_0 hängt damit nun explizit von t (und der jeweiligen Realisierung der Trajektorie $\mathbf{y}(t)$) ab und soll daher von nun an „stochastisches Potential“ genannt werden.

Eine schöne Eigenschaft dieser Erweiterung ist, dass eine mikroskopische physikalische Interpretation möglich ist. Wenn sich der Prozess im Bereich B befindet, vollzieht die Variable \mathbf{x} eine freie Zufallsbewegung. Irgendwann wird die treibende, stochastische Kraft \mathbf{y} aufgrund der rücktreibenden Wirkung von γ in den Bereich A kommen. Die Dynamik von \mathbf{x} ist aufgrund der geringeren Amplituden von \mathbf{y} dann eingeschränkt. Ein physikalisches Bild für die Ursache eines solchen Ereignisses ist der erhöhte Wirkungsquerschnitt für inelastische Streuung an ortsfesten Objekten in Verbindung mit einem Einfang durch diese Objekte an der Position \mathbf{x} bei niedrigen Geschwindigkeiten \mathbf{y} . In erster Näherung kann ein solcher Einfang durch eine Bindung in einem harmonischen Potential verstanden werden. Wenn verschiedene Streuziele vorhanden sind, lässt sich eine stochastische Bestimmung der Tiefe dieses Potentials bei jeder einzelnen Streuung erklären.

Die MFETs des Bereiches A für ein bestimmtes V_0 , die sich aus (6.26) ergeben, werden von nun an als $\langle T_A(V_0) \rangle$ bezeichnet. Die mittlere Verweildauer im Bereich A des stochastischen Potentials, $\langle T \rangle$, ergibt sich dann als

$$\langle T \rangle = \int dV_0 \langle T_A(V_0) \rangle P(V_0) . \quad (6.30)$$

$P(V_0)$ soll hierbei die Verteilung sein, der die stochastisch zugewiesenen V_0 im Ensemble-Sinne genügen. Der Vergleich mit (6.26) zeigt, dass die mittleren Wartezeiten für alle Potentiale, die für $-V_0 \gg 1$ langsamer abfallen als $\exp(V_0/2)$, divergieren. Damit steht eine breite Klasse von Verteilungen zur Verfügung, für die ein erweitertes Modell mit stochastischem Potential divergierende mittlere Wartezeiten erzeugt.

Im Zusammenhang mit der Modellierung der Ausbildung von Gläsern durch starken Anstieg der internen Korrelationszeiten werden solche Überlagerungen verschiedener Modelle mit jeweils exponentialverteilter Sprungraten seit einiger Zeit intensiv diskutiert. Einen guten Überblick über einfache, sogenannte „Trapping-Modelle“, mit denen das hier vorgestellte Modell in Verbindung gebracht werden kann, bieten z.B. Monthus & Bouchaud [1996]. Die Modellierung auf der Basis von (6.14) setzt eine geringe Konzentration von Partikeln im System voraus, weil keine Wechselwirkungen zwischen einzelnen Partikeln betrachtet werden. Auf der anderen Seite ermöglicht sie die Simulation kontinuierlicher Trajektorien der einzelnen Partikel. In Zukunft soll deshalb versucht werden, das hier beschriebene Modell im Kontext von „Trapping-Modellen“ zu interpretieren und die Ansätze zusammenzuführen. Dabei werden insbesondere die expliziten Ausdrücke für die mittlere Verweildauer, (6.26) und (6.29), hilfreich sein.

6.4.4 Zusammenfassung

Das hier vorgestellte Modell für die mikroskopische Dynamik von CTRWs basiert auf gekoppelten Langevin-Gleichungen und weist Ähnlichkeiten zum Kramers-Problem auf [Risken 1989]. Die Form für das Potential des verschränkten Prozesses \mathbf{y} , der den Antrieb des Prozesses \mathbf{y} bildet, führt dazu, dass das System in einem Zustand mit $y \ll 1$ gehalten werden kann. Die mittleren Verweildauern in diesem Zustand hängen in etwa exponentiell von der Tiefe des Potentials ab und existieren in jeder Konfiguration.

Durch Einführung eines stochastischen Potentials analog zu Monthus & Bouchaud [1996] ist es möglich, divergierende mittlere Verweildauern im Bereich mit $y \ll 1$ herbeizuführen. Dann lassen sich mit Hilfe dieses Modell prinzipiell Trajektorien generieren, die im Ensemble anomales Verhalten aufweisen.

Die Arbeiten an dem Modell sind zu diesem Zeitpunkt noch nicht abgeschlossen. Es ist aber zu hoffen, dass dieses Modell in Zukunft verwendet werden kann, um die Dynamik von CTRWs auf kleinen Skalen in einer physikalischeren Art und Weise modellieren zu können, als es die Verwendung von Subordinationsprozessen $t(s)$ erlaubt.

Kapitel 7

Verwendung von CTRWs zur Erzeugung atmosphärischer Windfelder

Bislang haben wir uns mit der Beschreibung und Simulation stochastischer Prozesse beschäftigt, die sicherlich schon für sich allein genommen interessant sind. Letztendlich benötigt werden solche Prozesse aber zur Modellierung von Phänomenen, die in der belebten Natur auftreten. In diesem Kapitel werden die Möglichkeiten der Verwendung von CTRWs zur Simulation atmosphärischer Windfelder auf den Größen- und Zeitskalen heutiger Windkraftanlagen untersucht und ein Modell für diese Windfelder auf der Basis von CTRWs beschrieben.

Deutschland hat weltweit seit langer Zeit eine Vorreiterstellung in der Produktion von elektrischer Energie mit Hilfe von Windkraftanlagen. Das liegt unter anderem daran, dass sich insbesondere der Norden auszeichnet für die Nutzung dieser Energiequelle eignet. Darüber hinaus haben Forschungsprojekte, Firmen und Kunden im Bereich der erneuerbaren Energien seit den neunziger Jahren von Seiten der Politik auf gezielte Förderungen zurückgreifen können. In Abbildung 7.1 ist die Entwicklung der installierten Windenergieleistung in Deutschland für die letzten Jahre dargestellt. Mit der Realisierung von Offshore-Projekten in der Nord- und Ostsee wird der Anstieg noch weiter anhalten.

Diese Arbeit ist im Rahmen des Verbundprojekts „Windturbulenzen und deren Bedeutung für die Windenergie“ entstanden, das vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert wurde und im Jahre 2008 ausläuft. Gemeinsam mit Partnern aus Oldenburg, Kiel, Göttingen und Dresden wurden die Einflüsse turbulenter Strömungen auf Windkraftanlagen intensiv untersucht. Der Schwerpunkt des im Folgenden vorgestellten Teilprojekts lag dabei auf der Modellierung atmosphärischer Windfelder. Dabei hat sich die Vermutung bestätigt, dass derzeit gebräuchliche Modelle intermittente und kohärente Effekte, wie sie z.B. bei Windböen auftreten, nicht ausreichend berücksichtigen.

Wir wollen diesem Kapitel zunächst ein wenig ausschweifen und verschiedene Verfahren zur Simulation atmosphärischer Windfelder im Allgemeinen und Methoden für effiziente und realistische Simulationen von Windfeldern für Windkraftanlagen im Speziellen diskutieren. Neben den derzeit gebräuchlichen spektralen Simulationen solcher Felder werden auch einige neue Ansätze, die derzeit verfolgt werden, vorgestellt.

Nachdem in Abschnitt 7.2 Ähnlichkeiten zwischen der Inkrementstatistik atmosphärischer Turbulenz und den Inkrementen von CTRWs deutlich werden, wird in Abschnitt 7.5 ein Windfeldmodell vorgestellt, das auf CTRWs beruht und im Rahmen

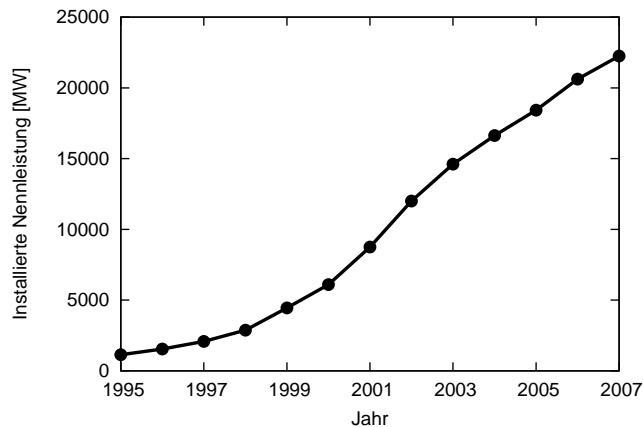


ABBILDUNG 7.1: Entwicklung der Gesamtleistung der in der Bundesrepublik Deutschland installierten Windkraftanlagen seit 1995. (Quelle der Daten: Bundesverband WindEnergie e.V.)

des aktuellen Projektes entwickelt wurde. Die Auswirkungen von mit Hilfe dieses Modells erzeugten Feldern auf die Ermüdungslasten von Windkraftanlagen sind von Projektpartnern an der Fachhochschule Kiel untersucht worden und werden in Abschnitt 7.6 vorgestellt.

7.1 Beschreibung turbulenter Strömungen

Die Beschreibung turbulenter Strömungen fasziniert Naturwissenschaftler schon seit langer Zeit. In Anlehnung an Bücher von Monin & Yaglom [1971] und Davidson [2004] sollen hier kurz einige Meilensteine der Entwicklung vorgestellt werden. Obwohl die ersten Schilderungen und Charakterisierungen der Struktur turbulenter Strömungen, z.B. durch Leonardo da Vinci, schon viel weiter zurückliegen [vgl. Frisch 1996], beginnen wir hier mit deren analytischer Beschreibung mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen.

Navier-Stokes- und Wirbeltransportgleichungen

Zu beschreiben sei die Dynamik einer turbulenten Strömung mit dem Druck $p(\mathbf{x}, t)$, der Dichte $\varrho(\mathbf{x}, t)$ sowie dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Es wird also die zeitliche Entwicklung von fünf Funktionen, die jeweils von vier Variablen abhängen, betrachtet.

Weil die Masse der Flüssigkeit mit der Zeit erhalten bleiben soll, muss zunächst einmal die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u}) = 0 \quad (7.1a)$$

gelten. Darüber hinaus soll gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz auch der Impuls erhalten sein. Analog zur bereits eingeführten Kontinuitätsgleichung wird die Erhaltung des Impulses gewährleistet durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) = -\nabla p + \text{Reibungskräfte} + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (7.1b)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (7.1a) lässt sich die linke Seite dieser Gleichung schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{u} \mathbf{u}^T) = \varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \varrho \frac{d}{dt} \mathbf{u} \quad . \quad (7.2)$$

Dabei tritt die sogenannte totale oder auch *substantielle Ableitung* des Impulsfeldes nach der Zeit auf, die die zeitliche Änderung des Impulses eines advektierten Testvolumens beschreibt. \mathbf{f}_{ext} in Gleichung (7.1b) stellt ein Feld von externen Kräften dar, die auf die Strömung wirken. Übliche Ursachen für diese Kräfte sind Gravitations- oder Lorentzkräfte sowie auch Scheinkräfte wie Corioliskräfte, die in rotierenden Bezugssystemen auftreten. Die Reibungskräfte in (7.1b) beschreiben die internen Scherungskräfte der Strömung, die eine nicht-verschwindende Rotation aufweisen und sich daher nicht durch das Potential p beschreiben lassen. Die Art und Weise der analytischen Modellierung dieser Kräfte richtet sich nach den physikalischen Eigenschaften des Mediums, das betrachtet wird.

Die Gleichungen (7.1) stellen ein System von vier Gleichungen dar, die für die Beschreibung der Dynamik der fünf Größen \mathbf{u} , ϱ und p , die hier betrachtet werden, nicht ausreichen. In vielen praktisch relevanten Fällen zeigt sich aber, dass die Dichte räumlich und zeitlich konstant ist. Das gilt z.B. für viele Flüssigkeiten. Auch in Gasen ändert sich die Dichte kaum, wenn der Betrag der Geschwindigkeit, $|\mathbf{u}|$, klein gegen die Schallgeschwindigkeit ist. Für alle Probleme, die uns hier interessieren, ist das der Fall. Ist ϱ konstant, so nennt man die zugrundeliegende Strömung auch *inkompressibel*.

Beschränken wir uns weiterhin auf Newton'sche Fluide, für die die Reibung durch die Viskosität μ charakterisiert werden kann, so vereinfachen sich Gleichungen (7.1) zu

$$\varrho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (7.3a)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad . \quad (7.3b)$$

(7.3a) geht dabei direkt aus der Kontinuitätsgleichung (7.1a) hervor und bedeutet, dass die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes bei inkompressiblen Flüssigkeiten verschwinden muss. Häufig wird (7.3b) noch durch ϱ geteilt. Mit der Definition $\nu := \mu/\varrho$ als kinematische Viskosität und $\mathbf{a}_{\text{ext}} := \mathbf{f}_{\text{ext}}/\varrho$ als Feld der externen Beschleunigungen ergibt sich dann schließlich

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad (7.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{a}_{\text{ext}} \quad . \quad (7.4b)$$

Diese Gleichungen werden üblicherweise als (inkompressible) *Navier-Stokes-Gleichungen* bezeichnet und stellen eine vollständige Beschreibung viskoser inkompressibler Newton'scher Fluide und Gase dar [Monin & Yaglom 1971].

Es ist leicht zu sehen, dass sich der Druck aus Gleichung (7.4b) eliminieren lässt, wenn statt des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{u} die Rotation $\boldsymbol{\omega}$ dieses Feldes betrachtet wird. Die Dynamik von $\boldsymbol{\omega}$ wird dann durch sogenannte *Wirbeltransportgleichungen* beschrieben, die in Abwesenheit eines externen Beschleunigungsfeldes \mathbf{a}_{ext}

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (7.5)$$

lauten. Das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} geht aus $\boldsymbol{\omega}$ mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes hervor. Den Druck erhält man schließlich als Lösung der Poission-Gleichung

$$\Delta p = -\varrho [\nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla)] \cdot \mathbf{u} \quad (7.6)$$

durch Auswertung des Integrals

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} [\nabla_{\mathbf{x}'} (\mathbf{u}(\mathbf{x}') \cdot \nabla_{\mathbf{x}'})] \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') \quad . \quad (7.7)$$

Mit den Navier-Stokes-Gleichungen steht prinzipiell ein Gerüst zur Beschreibung komplexer Probleme zur Verfügung, weil sie unter den Näherungen, die eingeführt wurden, Strömungen in Flüssigkeiten und Gasen vollständig charakterisieren. Der Beweis der Existenz eindeutiger Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen ist jedoch bis heute nicht erbracht und wird von einigen Wissenschaftlern als eines der wichtigsten ungelösten Probleme unserer Zeit betrachtet.¹ Was macht diese Gleichungen so schwierig?

Im Wesentlichen erschweren zwei Terme die Lösung der Gleichung: Zunächst einmal tritt nach dem Auswerten der substantiellen Ableitung der Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ auf, der nichtlinear in \mathbf{u} ist. Die Lösung nichtlinearer Gleichungen ist – analytisch wie auch numerisch – sehr anspruchsvoll, weil das *Superpositionsprinzip*, das bei linearen Problemen gilt, in diesem Fall nicht verwendet werden kann. Stattdessen gilt in Gegenwart von Nichtlinearitäten der Aristoteles zugeschriebene Ausspruch: „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.“ In turbulenten Strömungen wird das Auftreten und die Entwicklung von unterschiedlichen Strukturen beobachtet. Solche Strukturen sind charakteristisch für Systeme, die durch nichtlineare Entwicklungsgleichungen beschrieben werden.

Darüber hinaus bereitet das nichtlokale Wirken des Geschwindigkeitsfeldes auf den Druck Probleme bei der Beschreibung. So wirken sich z.B. die Randbedingungen auf den Druck als integrale Größe aus und wechselwirken über diesen auch in großen Entfernungen zum Rand noch mit dem Geschwindigkeitsfeld.

Phänomenologischer Zugang

Weil turbulente Strömungen sich prinzipiell durch die Navier-Stokes-Gleichungen (7.4) beschreiben lassen, kann man der Ansicht sein, dass es sich um ein deterministisches Problem handelt. Aufgrund des nichtlinearen Charakters können sich jedoch Strukturen bilden, von denen die weitere Entwicklung des Systems sehr empfindlich abhängt. Systeme, die ein solches Verhalten aufweisen, bezeichnet man häufig als *deterministisch chaotisch*. Statt der Diskussion der Entwicklung von Lösungen auf Basis der Navier-Stokes-Gleichungen beschränken sich viele Wissenschaftler daher auf

- die phänomenologische Beschreibung qualitativer Phänomene und
- statistische Aussagen zur quantitativen Charakterisierung von turbulenten Strömungen.

Die Beschreibung qualitativer Phänomene geht zurück auf Reynolds, der Ende des 19. Jahrhunderts die Unterscheidung zwischen laminaren und turbulenten Strömungen einführte. Als wichtige Größe für die Unterscheidung zwischen diesen beiden Regimen hat er die später nach ihm benannte *Reynoldszahl* Re ,

$$Re := \frac{UL}{\nu} \quad , \quad (7.8)$$

verwendet, die Trägheitskräfte und viskose Kräfte miteinander ins Verhältnis setzt. U und L sind dabei jeweils charakteristische Größen für die Geschwindigkeit und

¹Die Erzielung von „substantiellen Fortschritten in Richtung einer mathematischen Theorie, die die Geheimnisse, die in den Navier-Stokes-Gleichungen versteckt sind, zugänglich macht“ ist eines der sogenannten „Millennium Probleme“. Auf die Lösung dieser Probleme sind vom amerikanischen „Clay Mathematics Institute“ jeweils mit einer Million Dollar dotierte Preise ausgeschrieben. Siehe auch: <http://www.claymath.org/millennium>.

die Größenskala des betrachteten Problems. Je nach Definition dieser charakteristischen Größen hat Reynolds festgestellt, dass sich Strömungen oberhalb einer gewissen, kritischen Reynoldszahl stets turbulent verhalten. Die Reynoldszahl ist deshalb ein wichtiges Instrument für maßstabsgetreue Analysen turbulenter Strömungen mit Hilfe von Ähnlichkeitshypothesen, die die Navier-Stokes-Gleichungen in dimensionslose Gleichungen überführen.

Ähnlich wichtig waren die Erkenntnisse von Richardson, der in den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts das Bild einer *Energiekaskade* eingeführt hat: Turbulente Strömungen wird Energie auf großen Skalen zugeführt, die dann nach und nach auf kleinere Wirbel übertragen wird. Im molekularen Bereich schließlich werden die Reynoldszahlen dann so klein, dass die Strömung laminar wird und molekulare Dissipation einsetzt. Mit Hilfe dieses phänomenologischen Ansatzes konnte Richardson die Diffusion von Partikelwolken in turbulenten Strömungen allgemein beschreiben.

Statistische Beschreibung von Turbulenz

Für die Ableitung von statistischen Aussagen über turbulente Strömungen spielte Ende der vierziger Jahre des letzten Jahrhunderts der Ansatz von Taylor, als Idealisierung zunächst speziell homogene und isotrope Turbulenz zu betrachten, eine wichtige Rolle. Diese Idee wurde später von Kolmogorov weiterentwickelt, der die von Richardson beschriebene Kaskade dahingehend erweiterte, dass aufgrund des chaotischen Charakters eine mögliche Vorzugsrichtung beim Übergang von großen zu kleinen Wirbelstrukturen zunehmend verloren geht. Aus diesem Grund lässt sich die kleinskalige Turbulenz von Strömungen mit hoher Reynoldszahl in guter Näherung als homogen und isotrop annehmen. Aufbauend auf dieser Erkenntnis formulierte Kolmogorov im Rahmen der mittlerweile als „*K41*“ bezeichneten Theorie zwei Hypothesen. Zunächst einmal nahm er an, dass das Verhalten turbulenter Strömungen auf kleinen Skalen universell ist und einzig durch die kinematische Viskosität ν und die mittlere Energiedissipationsrate ϵ bestimmt wird. Mit Hilfe von Dimensionsargumenten konnte er so die sogenannte *Kolmogorov'sche Mikroskala* $\eta := (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ einführen, unterhalb derer dissipative Effekte die Dynamik dominieren. Darüber hinaus nahm er an, dass es zwischen der Größenskala L des gesamten Flusses und der Mikroskala einen *Inertialbereich* gibt, in dem die Wirkung der Viskosität verschwindet. Im Inertialbereich ist die turbulente Strömung damit einzig durch die Energiedissipationsrate ϵ bestimmt.

Eine wichtige Konsequenz, die sich im Inertialbereich mit Hilfe von Dimensionsargumenten aus den Hypothesen ergibt, ist die Skalierung der Momente der Geschwindigkeitsfluktuationen (3.27), die in der Regel als *Strukturfunktionen* der Ordnung n bezeichnet werden,

$$\left\langle \left([\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})]^T \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \right)^n \middle| |\mathbf{y}| = r \right\rangle = \beta_n (\epsilon r)^{n/3} \quad . \quad (7.9)$$

β_n ist jeweils eine Konstante. Speziell für $n = 2$ erhält man das bekannte 2/3-Gesetz, wobei β_2 eine universelle Konstante ist [Monin & Yaglom 1971, S. 15]. Für das Energiespektrum, das in Abschnitt 7.4.2 eingeführt wird und das in der Praxis von großer Bedeutung ist, ergibt sich daraus im Inertialbereich

$$E(k) = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad . \quad (7.10)$$

Dieser Zusammenhang wird gelegentlich auch als *Kolmogorov'sches 5/3-Gesetz* bezeichnet und ist bei Strömungen in der Natur mit großen Reynoldszahlen in der Regel gut erfüllt. Die Verifizierung im Windkanal erwies sich jedoch lange Zeit als schwierig, weil die dort verfügbaren Reynoldszahlen in der Regel zu gering sind, um einen ausgeprägten Inertialbereich zu zeigen.

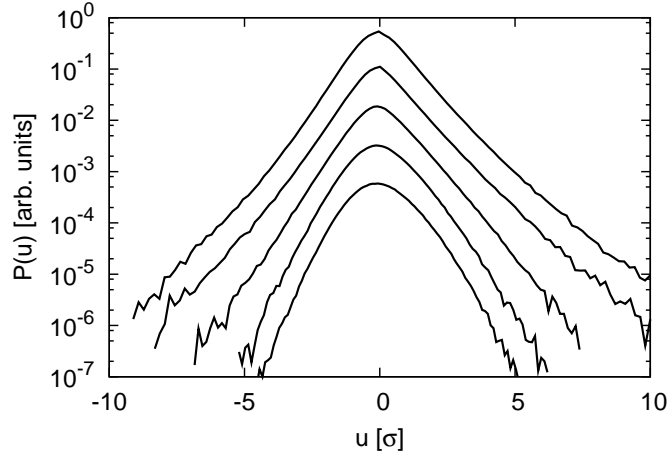


ABBILDUNG 7.2: Verteilungsfunktionen der longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente von Hitzdrahtmessungen an einem turbulenten Freistrahle mit der Reynoldszahl $2.7 \cdot 10^4$. Die Daten wurden von Renner u.a. zur Verfügung gestellt und sind in [Renner u.a. 2001b] detailliert beschrieben. Aufgetragen sind die PDFs der Geschwindigkeitsinkremente für die Inkremente $r = 0.04 L, 0.13 L, 0.38 L, 1.13 L$ und $3.39 L$ (von oben nach unten) als Funktion der Standardabweichung σ , wobei $L = 6.7$ cm der von Renner u.a. ermittelten integralen Länge entspricht. Der Übersichtlichkeit halber wurden die einzelnen Funktionen jeweils durch einen Faktor gegeneinander verschoben. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Form der Verteilung als Funktion von r ändert. Während die Flanken auf kleinen Skalen langsamer als exponentiell abfallen, lassen sich die Verteilungsfunktionen für große Zeitinkremente näherungsweise durch eine Normalverteilung beschreiben. Diese Formveränderung der Verteilung kann durch Kolmogorovs K41-Theorie nicht beschrieben werden.

Eine direkte Konsequenz von (7.9) ist, dass ortsabhängige Messungen der Geschwindigkeit turbulenter Strömungen selbstähnlich in der Skala sind. Das ist wie folgt zu sehen: Aus (2.63) folgt unmittelbar, dass sich die charakteristische Funktion $\tilde{f}(k)$ einer PDF in einer Potenzreihe entwickeln lässt, in der die Koeffizienten aus den Momenten der Verteilung bestimmt werden,

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle x^n \rangle k^n \quad . \quad (7.11)$$

Mit (7.9) gilt nun speziell für die charakteristische Funktion $\tilde{f}(k|r)$ der Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente $v(r)$ auf Skala r (siehe (3.27))

$$\tilde{f}(k|r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \beta_n \left(\epsilon r^{1/3} k \right)^n \quad . \quad (7.12)$$

Folglich gilt für eine Skala αr

$$\tilde{f}(k|\alpha r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \beta_n \left(\epsilon r^{1/3} \alpha^{1/3} k \right)^n = \tilde{f}(\alpha^{1/3} k|r) \quad . \quad (7.13)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $f(v|r)$ bedeutet das, dass sich die Verteilungen unter Variation der Skala transformieren gemäß

$$f(v|\alpha r) = \frac{1}{\alpha^{1/3}} f(v/\alpha^{1/3}|r) \quad . \quad (7.14)$$

Die Statistik hängt also qualitativ nicht von der Skala, die untersucht wird, ab. Die zugrundeliegenden Strukturen sind damit selbstähnlich.

Nach Kolmogorovs Theorie von 1941 sollte dieses Verhalten im gesamten Inertialbereich gelten. Genaue Betrachtung von Abbildung 7.2 zeigt aber, dass die Wahrscheinlichkeitsdichten der Messung einer Strömung in einem turbulenten Freistrahle die Form im Inertialbereich sehr wohl verändern: Auf kleinen Skalen weichen die PDFs stark von der Normalverteilung ab. Insbesondere die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten extremer Ereignisse ist im Vergleich zur Normalverteilung gleicher Varianz stark überhöht. Dieses Phänomen wird häufig als *Intermittenz* bezeichnet. Aus großen Skalen hingegen lässt sich die Inkrementverteilung näherungsweise durch eine Normalverteilung beschreiben. Die Statistik auf großen Skalen ist direkt mit der Verteilung der Geschwindigkeiten u verknüpft, wie wir im folgenden Abschnitt noch sehen werden. Der Übergang zwischen diesen Verteilungen findet – wie in der Abbildung zu sehen – stetig statt und beginnt schon innerhalb des Inertialbereichs. Damit steht er im Widerspruch zur Theorie von Kolmogorov.

Kolmogorov hat diese Abweichungen erkannt und im Jahre 1962 – fast zeitgleich mit Oboukov – eine Erweiterung seiner Theorie vorgestellt, in der er die Energiedissipationsrate ϵ als fluktuierende Größe betrachtet. Diese Theorie wird weithin als „K62“ bezeichnet. Durch die Energiekaskade pflanzt sich die Energiedissipationsrate multiplikativ fort, sodass sich auf kleinen Skalen schließlich eine Log-Normalverteilung für ϵ ergibt. Die Skalierungsexponenten in (7.9) werden durch die Erweiterung zu nicht-linearen Funktionen von r und beschreiben die sogenannte *multifraktale Skalierung* der Momente mit r ,

$$\langle [u_x(\mathbf{x} + r\hat{\mathbf{e}}_x) - u_x(\mathbf{x})]^n \rangle = \beta_n (\langle \epsilon \rangle r)^{\zeta_n} \quad \text{mit} \quad \zeta_n = \frac{n}{3} - \frac{\mu}{18} n(n-3) \quad . \quad (7.15)$$

μ wird dabei als „Intermittenz-Parameter“ bezeichnet. Die Arbeiten von Kolmogorov und Oboukov waren bahnbrechend und haben die Turbulenzforschung in den letzten Jahrzehnten maßgeblich beeinflusst. Für neuere Entwicklungen sei an dieser Stelle auf ein Buch von Davidson [2004] sowie auf Lumley & Yaglom [2001] und Yaglom [2001] verwiesen.

Eine relativ neue Methode zur direkten Modellierung der Hierarchie der turbulenten Kaskade stellt die Beschreibung turbulenter Strömungen mit Hilfe stochastischer Prozesse in der Skala dar, die in Abschnitt 3.3 bereits vorgegestellt worden sind. Diese Methode wurde vor einigen Jahren von Friedrich & Peinke [1997a] eingeführt und in den folgenden Jahren unter anderem in Zusammenarbeit mit Renner weiterentwickelt [Renner u.a. 2001a]. Durch die Zurückführung auf stochastische Prozesse in der Skala lassen sich turbulente Strömungen prinzipiell durch Markov-Prozesse beschreiben, die – zurücktransformiert in den Ortsraum – das beobachtete Skalierungsverhalten turbulenter Strömungen reproduzieren. Vor kurzem konnten Nawroth & Peinke [2006] zeigen, dass sich dieser Zugang prinzipiell auch zur (numerischen) Simulation turbulenter Strömungen eignet. Diese Arbeit ist Gegenstand von Abschnitt 7.4.6.

Den Entwicklungen der letzten Jahre nach zu urteilen bietet die Beschreibung turbulenter Strömungen auf Basis dieses Zugangs noch viel Potential und kann für zukünftige Fortschritte auf diesem Gebiet eine wichtige Rolle spielen.

7.2 Charakterisierung der atmosphärischen Grenzschicht

Wir wollen uns nun etwas genauer Gegebenheiten in der Atmosphäre und atmosphärischen Grenzschicht zuwenden. Dabei wird insbesondere die statistische Beschreibung der Zusammenhänge im Mittelpunkt stehen.

Statistische Beschreibung der Atmosphäre

Die Dynamik von turbulenten Strukturen auf großen Skalen, die auf der Erde als Wetterphänomene wahrgenommen werden, wird maßgeblich durch die Erdrotation verursacht, die im rotierten Bezugssystem eines ortsfesten Beobachters Scheinkräfte erzeugt. Die Dynamik der Atmosphäre wird angetrieben durch unterschiedliche Temperaturen, die durch direkte Sonneneinstrahlung oder durch Meeresströme hervorgerufen werden und lokale Variationen des Luftdrucks zur Folge haben. Die sich dadurch ergebenden globalen Luftströmungen, die die Unterschiede im Luftdruck auszugleichen versuchen, werden von Corioliskräften abgelenkt, sodass sich die charakteristischen Wirbelströmungen ergeben, die z.B. von Wetterkarten bekannt sind. Sie lassen sich prinzipiell mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben, wenn die Auswirkungen der Corioliskräfte als externe Einflüsse mit berücksichtigt werden. Einfache Modelle können unter Voraussetzung der Gültigkeit der Boussinesq-Näherung² das Auftreten von dynamischen Instationaritäten in der Erdatmosphäre erklären [Busse 1994].

Unser Ziel ist die Beschreibung von Windfeldern für eine genauere Charakterisierung von Windkraftanlagen, die von atmosphärischen Winden angetrieben werden. Deshalb wird im Folgenden natürlich insbesondere der Bereich der Atmosphäre eine wichtige Rolle spielen, in der diese Anlagen arbeiten. Während sich die Dynamik von Wettersystemen, die z.B. auf Satellitenaufnahmen zu erkennen ist, aufgrund der verhältnismäßig geringen Ausdehnung senkrecht zur Erdoberfläche näherungsweise auf zwei Dimensionen reduzieren lässt, müssen für die Beschreibung der Dynamik in direkter Nähe zur Erdoberfläche dreidimensionale Strömungen betrachtet werden. Der Bereich, in dem die Strömung durch Impulsausgleich die Erdoberfläche direkt spürt und in der sich aufgrund des daraus resultierenden Geschwindigkeitsgradienten ausgeprägte Turbulenz ausbildet, wird als *atmosphärische Grenzschicht* bezeichnet, dessen Höhe – je nach Wetterlage – bis zu 150 m betragen kann. Die turbulenten Strömungen in der Erdatmosphäre sind – im Gegensatz zur homogenen, isotropen Turbulenz – räumlich und zeitlich nicht stationär, weil sie auf großen Skalen von der Dynamik der Erdatmosphäre getrieben werden. Eine statistische Beschreibung der Grenzschicht ist deshalb ungleich schwieriger als die Charakterisierung von Turbulenz, wie sie im Labor erzeugt und gemessen werden kann.

Die einfachste Beschreibung der Windgeschwindigkeiten in der Atmosphäre erfolgt auf Basis von Messungen von Windrichtung und -geschwindigkeit an einem ortsfesten Punkt. Während für wissenschaftliche Messungen meistens Ultraschallmessgeräte verwendet werden, die alle drei räumlichen Komponenten der Windgeschwindigkeit simultan erfassen und mit hohen Raten abtasten können, werden von Ingenieuren noch verbreitet Kombinationen aus Schalenkreuz-Anemometern und Windfahnen eingesetzt (vgl. Anhang B). Aus diesem Grunde werden der Betrag der Geschwindigkeit, der von Schalenkreuz-Anemometern gemessen wird, und die Windrichtung, die mit Hilfe von Windfahnen ermittelt wird, häufig getrennt voneinander betrachtet.

Die Verteilung der Windrichtung hängt stark vom Ort der Messung ab. An vielen Stellen gibt es aufgrund von geographischen Besonderheiten oder typischen meteorologischen Konstellationen Vorzugsrichtungen für atmosphärische Winde, die sich in der Form der Windrichtungsverteilung äußern. Für die effiziente Nutzung von atmosphärischen Winden z.B. durch Kombination mehrerer Windkraftanlagen ist die Kenntnis einer Vorzugswindrichtung natürlich sehr wichtig.

Die Verteilung des Betrages der Windgeschwindigkeit, u , lässt sich vielfach durch

²Die Boussinesq-Näherung setzt voraus, dass lokale Dichteunterschiede ausschließlich eine lokale Variation der Wirkung der Gravitationskräfte zur Folge haben, den Impulsausgleich aber nicht beeinflussen. Messungen zeigen, dass diese Näherung bei Strömungen in Ozeanen und der Erdatmosphäre weitgehend erfüllt sind.

eine *Weibull-Verteilung*³

$$P_W(u) = \frac{k}{c} \left(\frac{u}{c}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{u}{c}\right)^k\right] \quad (7.16)$$

beschreiben, die durch die Parameter c und k angepasst werden kann. Typische Werte liegen für den Formparameter k zwischen 1.5 und 2.5 und für den Skalierungsparameter c zwischen 3 und 6 m/s. Im Gegensatz dazu ist die Geschwindigkeit bei Windkanalmessungen an vollentwickelter Turbulenz zum Beispiel mit Hilfe von Hitzdrahtanemometern in der Regel näherungsweise normalverteilt um die mittlere Geschwindigkeit $\langle u \rangle$. Die Unterschiede zwischen den Verteilungen von Messungen im Labor und in der Erdatmosphäre lassen sich mit Hilfe eines einfachen Modells verstehen, das in Anhang B im Detail beschrieben ist.

Die zeitliche Entwicklung der Windgeschwindigkeit kann – z.B. auf der Basis von Stundenmittelwerten – aus Rechnungen von Wettermodellen, die für die Wettervorhersage verwendet werden, gewonnen werden. Für die Modellierung auf kleinen Zeitskalen sind stochastische Modelle vorgeschlagen worden, die auf den im Rahmen dieser Arbeit ausgiebig diskutierten stochastischen Differentialgleichungen beruhen. Während Sura u.a. sich intensiv mit einer Modellbildung auf der Basis von gemessenen Winddaten und der im Rahmen dieser Arbeit ausführlich diskutierten Methode zur Modellbildung auf der Basis einer Schätzung von Drift- und Diffusionsfunktionen beschäftigen [Sura & Gille 2003; Sura 2003; Sura u.a. 2005], kann Monahan ein ähnliches Modell durch Näherungen aus den dynamischen Gleichungen der atmosphärischen Grenzschicht gewinnen [Monahan 2004, 2006]. Unseres Wissens nach ist die Verwendung dieser Modelle noch nicht weit verbreitet, obwohl sie z.B. für angewandte Problemstellungen in den Ingenieurwissenschaften und der Windenergienutzung sowie für das sogenannte „statistische Downscaling“ meteorologischer Vorhersagemodelle sicherlich interessant wären.

Die Statistik atmosphärischer Turbulenz lässt sich auch auf Basis der Verteilungen von Veränderungen von Windgeschwindigkeiten charakterisieren. Diese Herangehensweise stellt in gewisser Weise einen natürlichen Zugang zum Problem dar, weil Geschwindigkeitsinkremente turbulenter Strömungen schon seit Langem diskutiert werden. Auf der anderen Seite lässt sich z.B. die Statistik von Windböen, die in vielen angewandten Fragestellungen wie auch in der Windenergie von großer Bedeutung ist, auf Basis von Windgeschwindigkeitsinkrementen diskutieren. Insbesondere von Peinke, Böttcher und Barth ist die Statistik dieser Inkremente im Detail untersucht worden. Böttcher u.a. haben in mehreren Arbeiten die Statistiken atmosphärischer mit denen von Labormessungen an turbulenten Strömungen verglichen und fundamentale Unterschiede festgestellt [Böttcher u.a. 2003; Böttcher 2005; Böttcher u.a. 2007a]. Ein Beispiel für die Inkremente von atmosphärischen Windmessungen, das Böttcher u.a. [2007a] entnommen wurde, ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Böttcher u.a. haben sich intensiv mit der Struktur der Inkremente beschäftigt und untersucht, warum die Inkremente auf großen Zeitskalen, die den unteren Graphen in Abbildung 7.3 entsprechen, nicht gemäß des zentralen Grenzwertsatzes gegen eine Normalverteilung konvergieren, wie sie es erwartet hätten. Zur Beschreibung dieses Verhaltens haben sie vorgeschlagen, die instationäre Dynamik der Atmosphäre, die sich von der Situation im Labor unterscheidet, für die Statistik der Inkremente zu berücksichtigen und die Verteilung $P(v|\tau)$ der Inkremente als Überlagerung der Statistik verschiedener atmosphärischer Situationen, die jeweils durch eine mittlere

³Die Weibull-Verteilung stammt ursprünglich aus der Extremwerttheorie, hat sich aber in der Windenergiebranche zur Charakterisierung der zur erwartenden Windenergieausbeute von Standorten durchgesetzt.

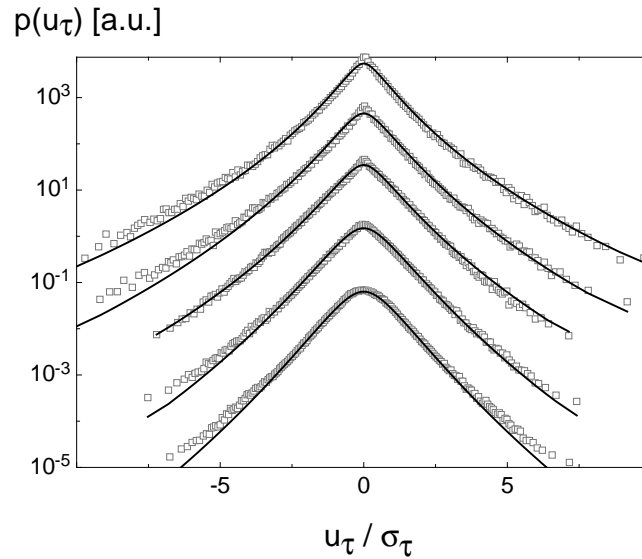


ABBILDUNG 7.3: Inkrementstatistik einer Messung der atmosphärischen Windgeschwindigkeit, die 1997 in der Nähe von Emden in einer Höhe von etwa 20 m mit Hilfe eines Ultraschallanemometers aufgenommen wurde. Aufgetragen sind als Quadrate die Inkremente des Betrages der Windgeschwindigkeit über die Zeitintervalle 0.5 s, 2.5 s, 25 s, 250 s und 4000 s (von oben nach unten) in logarithmischer Darstellung, die der Übersichtlichkeit halber jeweils um einen Faktor gegeneinander verschoben wurden. Insbesondere auf großen Skalen sind qualitative Unterschiede zur entsprechenden Analyse von im Labor realisierten turbulenten Strömungen, die in Abbildung 7.2 zu sehen ist, offensichtlich. Die durchgezogenen Linien stellen eine Modellierung der Inkremente auf Basis von (7.17) dar, die gute Ergebnisse liefert. (Quelle: Böttcher u.a. 2007a)

Windgeschwindigkeit \bar{u} charakterisiert sind, zu berechnen als

$$P(v|\tau) = \int_0^{\infty} d\bar{u} P(v|\bar{u}, \tau) P_W(\bar{u}) \quad . \quad (7.17)$$

Für die Verteilung der mittleren Windgeschwindigkeit haben Böttcher u.a. eine Weibull-Verteilung (7.16) zugrunde gelegt. Für $P(v|\bar{u}, \tau)$ wurde auf eine Modellierung der Inkremente, die in den neunziger Jahren von Castaing eingeführt wurde, zurückgegriffen [Castaing u.a. 1990],

$$P(v|\bar{u}, \tau) = \frac{1}{2\pi\lambda(\bar{u}, \tau)} \int d\sigma \frac{1}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{\ln^2(\sigma/\sigma_0(\bar{u}, \tau))}{2\lambda^2(\bar{u}, \tau)}\right] \quad . \quad (7.18)$$

$\lambda(\bar{u}, \tau)$ und $\sigma_0(\bar{u}, \tau)$ sind hier Formparameter, deren Abhängigkeit insbesondere von \bar{u} von Böttcher u.a. diskutiert wird. In Abbildung 7.3 sind die Verteilungen der Inkremente auf verschiedenen Skalen, die sich mit Hilfe dieses Modells nach Anpassung der freien Parameter ergeben, als durchgezogene Linien, die in guter Übereinstimmung mit den gemessenen Werten sind. Der Ansatz, die Dynamik von Systemen, die intermittentes Verhalten zeigen, auf Instationaritäten auf großen Zeitskalen zurückzuführen, entspricht im Wesentlichen dem Gedanken hinter der *Superstatistik*, die Beck u.a. in den vergangenen Jahren eingeführt und schon auf viele Probleme angewendet haben [vgl. z.B. Beck & Cohen 2003]. Verschiedene Untersuchungen von Beck u.a. bestätigen die Vermutung von Böttcher u.a., dass sich auch turbulente Strömungen auf diese Art und Weise beschreiben lassen [Beck u.a. 2005; Beck 2004].

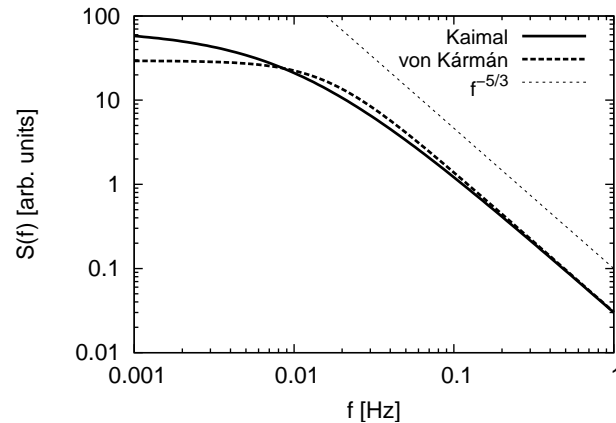


ABBILDUNG 7.4: Vergleich der spektralen Modelle von Kaimal und von Kármán, die in (7.21) und (7.20) gegeben sind, für die Geschwindigkeitskomponente in Hauptwindrichtung für Höhen oberhalb von 30 m oberhalb des Erdbodens. Für kleine Frequenzen zeigen sich deutliche Abweichungen, während für hohe Frequenzen beide Modelle gut übereinstimmen und mit dem Exponenten $-5/3$ abfallen.

Die Intermittenz der Inkrementverteilungen auf großen Zeitskalen hingegen lässt sich auch einfacher verstehen. Die Verletzung des allgemeinen Grenzwertsatzes beruht hier vielmehr auf der Existenz einer stationären Verteilung für den Betrag der Windgeschwindigkeit u , die dazu führt, dass aufeinander folgende Inkremente auch für große Zeitunterschiede nicht unabhängig voneinander sein können. Geht man davon aus, dass der Betrag der Windgeschwindigkeit endliche Korrelationen aufweist, dann gehen die Inkremente auf großen Zeitskalen aus der stationären Verteilung $P(v)$ der Geschwindigkeit hervor. Mit Hilfe der in Kapitel 2 eingeführten feinkörnigen Verteilung ergibt sich für Inkrementverteilungen zum Inkrement $\tau \gg 1$

$$P(v|\tau \gg 1) = \int du \int du' \delta(v - (u - u')) P(u)P(u') = \int du P(u)P(u - v) \quad . \quad (7.19)$$

Die Inkrementverteilung auf großen Skalen ergibt sich also durch Faltung aus der stationären Verteilung. In diesem Bereich sind die Unterschiede zwischen Messungen im Labor und in der Atmosphäre also vor allem auf Unterschiede in den stationären Verteilungen, die im Rahmen von Anhang B im Detail diskutiert werden, zurückzuführen. Die Tatsache, dass die Inkrementverteilungen atmosphärischer Turbulenz sich bei einigen Messungen über einen breiten Skalenbereich als formstabil erweisen, liegt also zum einen in der Dynamik turbulenter Strömungen auf kleinen Skalen und zum anderen in der speziellen Form der stationären Verteilung des Betrages der Windgeschwindigkeit begründet. Betrachtet man statt des Betrages z.B. eine Komponente der Geschwindigkeit, so verschwindet die Intermittenz auf großen Skalen weitgehend (vgl. Anhang B). Darüber hinaus ist eine physikalische Interpretation der Inkremente des Betrages der Windgeschwindigkeit insbesondere für $\tau \gg 1$ ohnehin schwierig.

Spektrale Beschreibung der atmosphärischen Grenzschicht

Üblich ist ferner eine spektrale Beschreibung atmosphärischer Turbulenz, auf die im Rahmen von Abschnitt 7.4.2 noch genauer eingegangen wird. An dieser Stelle sei aber schon einmal erwähnt, dass sich das Energiespektrum – die Fouriertrans-

formierte der Autokorrelationsfunktion der Strömungsgeschwindigkeit – als außerordentlich stabil erweist und deshalb charakteristisch für atmosphärische Turbulenz ist. Im Gegensatz zur Realisierung im Labor ist die Reynoldszahl in der Atmosphäre typischerweise sehr hoch, sodass das von Kolmogorov vorhergesagte Skalierungsverhalten, das gemäß dem 5/3-Gesetz im Inertialbereich einem Abfall des Energiespektrums mit dem Exponenten $-5/3$ entspricht, über einen weiten Skalenbereich beobachtet wird. Verschiedene Wissenschaftler haben versucht, die Form des Energiespektrums über den Inertialbereich hinaus zu parametrisieren, und Modelle für den Verlauf der Funktion erstellt. Eine umfassende Übersicht der Ergebnisse dieser Messungen und die daraus entwickelten spektralen Modelle bieten Solari & Piccardo [2001]. Für die Charakterisierung von Windkraftanlagen finden häufig die Modelle von Kaimal und von Kármán Anwendung, die in Abbildung 7.4 für eine Windgeschwindigkeit von 10 m/s miteinander verglichen sind. Die analytischen Ausdrücke der parametrisierten Zusammenhänge lauten als Funktion der Frequenz f

$$\text{Kaimal} \quad S_u(f) = \sigma_u^2 \frac{4\tilde{L}_u/\bar{u}}{\left(1 + 6f\tilde{L}_u/\bar{u}\right)^{5/3}} \quad , \quad (7.20)$$

$$\text{von Kármán} \quad S_u(f) = \sigma_u^2 \frac{4L_u/\bar{u}}{\left(1 + 70.8(fL_u/\bar{u})^2\right)^{5/6}} \quad . \quad (7.21)$$

\bar{u} bezeichnet dabei die mittlere Windgeschwindigkeit, L_u und \tilde{L}_u sind Längenskalen, die jeweils anzupassen sind [Burton u.a. 2001].

Aus Abbildung 7.4 wird deutlich, dass die Abweichungen der einzelnen Modelle insbesondere für kleine Frequenzen beachtlich sind. Das liegt daran, dass die Statistik der Instationaritäten auf großen Skalen maßgeblich von den Verhältnissen an dem Ort abhängt, an dem die Messungen zur Validierung des Modells vorgenommen wurden. Für hohe Frequenzen zeigen jedoch alle Modelle das Kolmogorov'sche Verhalten, wie z.B. (7.20) und (7.21) zu entnehmen ist. Ein Vorteil der spektralen Modelle ist, dass sie sich – wie wir in Abschnitt 7.4 sehen werden – verhältnismäßig einfach auf ganze *Felder* ausdehnen lassen, wenn statt der Auto- die Kreuzkorrelationen betrachtet und geeignet modelliert werden (vgl. Abschnitt 7.4.2).

Windfelder in der atmosphärischen Grenzschicht

Wir haben uns bislang weitgehend auf die Statistik der Windgeschwindigkeit an einem einzelnen Messpunkt beschränkt. Für Windkraftanlagen ist darüber hinaus aber natürlich die Änderung der Geschwindigkeit mit der Höhe der Messung interessant, weil die Blätter der Anlagen während eines Vollkreises einen großen Höhenbereich überstreifen. Für die Verteilung der Windgeschwindigkeit in der Atmosphäre ist die Schichtung der Temperaturen maßgeblich: Bei neutraler Schichtung, bei der die Unterschiede in der potentiellen Temperatur⁴ aufgrund ausgeprägter turbulenter Mischung gering sind, wird in etwa ein logarithmisches Höhenprofil, das auf von Kármán und Prandtl zurückgeht [Landau & Lifschitz 1966], realisiert. Diese Situation wird bei Starkwind häufig angetroffen. Bei stabiler Schichtung, bei der die potentielle Temperatur in Bodennähe mit steigender Höhe zunimmt, ist hingegen ein wesentlich höherer Gradient der Windgeschwindigkeiten möglich, der zu anderen Profilen führen kann [vgl. z.B. van den Berg 2004]. Im Moment ist insbesondere das Profil von Wind über dem Meer, das für die Planung und Auslegung von Windkraftanlagen im Offshore-Bereich eine wichtige Rolle spielt, noch nicht

⁴Als „potentielle Temperatur“ bezeichnet man die Temperatur, die in einem Volumenelement einer Strömung nach adiabatischer Kompression oder Expansion auf einen Referenzdruck herrschen würde.

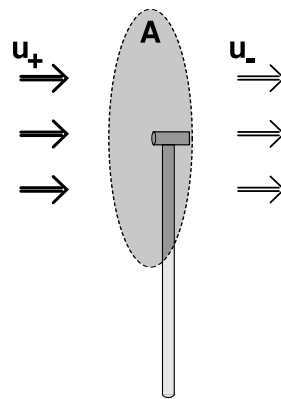


ABBILDUNG 7.5: Skizze für Abschätzung der maximal erzielbaren Energieausbeute bei der Nutzung von Windenergie (Betz'sches Gesetz). Die Fläche, die vom Rotor überstrichen wird, sei als A bezeichnet. Durch die Leistungsentnahme wird die Windgeschwindigkeit von u_+ auf u_- abgesenkt.

ausreichend bekannt, weil entsprechende Messungen sehr aufwändig und teuer sind. Die laufenden Projekte FINO I bis III sollen hier Abhilfe schaffen und zu einem besseren Verständnis der atmosphärischen Grenzschicht über der Meeresoberfläche beitragen [FINO].

7.3 Windkraftanlagen in der atmosphärischen Grenzschicht

Windkraftanlagen arbeiten in der atmosphärischen Grenzschicht mit dem Ziel, die Energie der atmosphärischen Winde möglichst kostengünstig und ressourcenschonend in elektrische Energie umzuwandeln. Während bei Windmühlen und -pumpen früher ein möglichst großes Drehmoment im Vordergrund stand, werden Windkraftanlagen in der Regel so konstruiert, dass die Leistung, die dem Wind entzogen wird, maximal wird.

Leistungsabgabe von Windkraftanlagen

Betz hat im Jahre 1926 auf Basis eines vereinfachten Modells von Windkraftanlagen mit Hilfe eines Variationsverfahrens ein theoretisches Maximum der relativen Leistungsentnahme herleiten können [Betz 1926], das bis heute unter dem Namen *Betz'sches Gesetz* weitgehend noch als Optimum angesehen wird [Burton u.a. 2001]. Betz ging davon aus, dass die Anlage von (konstantem) Wind der Geschwindigkeit u_+ angeströmt wird, der aufgrund der Leistungsentnahme durch die Anlage die Geschwindigkeit des Windes auf der überstrichenen Fläche A auf die Geschwindigkeit u_- abgesenkt wird (siehe dazu auch Abbildung 7.5). Weil sich die kinetische Energie der Luft vor und hinter der Anlage bestimmen lässt, kann man nun die Leistung,

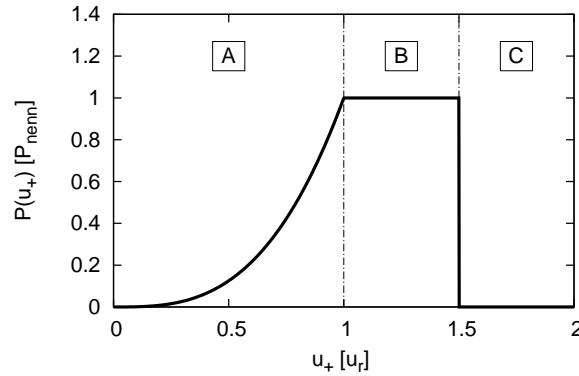


ABBILDUNG 7.6: Schematische Form der Leistungskurve von Windkraftanlagen. Im Bereich A ist die relative Leistungsausbeute konstant, sodass die aufgenommene Leistung proportional zu u_+^3 ist. Nach Erreichen der Regelleistung wird die Leistungsaufnahme auf P_{nenn} begrenzt, sodass sich ein Plateau in der Leistungsabgabe ausbildet (Bereich B). Oberhalb einer Windgeschwindigkeit u_l wird die Anlage aus Sicherheitsgründen abgebremst und vom Netz genommen (C).

die die Anlage aus dem Wind schöpft, berechnen als

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{dE}{dt} = \frac{1}{dt} \frac{1}{2} dm(u_+^2 - u_-^2) = \frac{1}{dt} \frac{1}{2} \rho A u' dt (u_+^2 - u_-^2) \\
 &\stackrel{\star}{\approx} \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{u_+ + u_-}{2} \right) (u_+^2 - u_-^2) \\
 &= \frac{1}{2} \rho A \frac{1}{2} u_+^3 \left(- \left(\frac{u_-}{u_+} \right)^3 - \left(\frac{u_-}{u_+} \right)^2 + \left(\frac{u_-}{u_+} \right) + 1 \right) \quad . \quad (7.22)
 \end{aligned}$$

An der Stelle \star wurde dabei für die Geschwindigkeit u' auf Höhe der Anlage der Mittelwert aus u_+ und u_- verwendet.⁵ Die Variation von u_-/u_+ in (7.22) zeigt, dass die Leistungsentnahme für $u_-/u_+ = 1/3$ maximal wird. Die relativ zur Leistung des einfallenden Windes entnommene Leistung ist dann

$$P_{\text{Betz}}/P_{\text{in}} = \frac{\frac{1}{2} \rho A \frac{1}{2} u_+^3 \frac{32}{27}}{\frac{1}{2} \rho A u_+^3} = \frac{16}{27} \approx 59 \% \quad . \quad (7.23)$$

Die Effizienz von Windkraftanlagen wird häufig anhand eines Leistungskoeffizienten C_P spezifiziert, der die entnommene Leistung – wie in (7.23) – relativ zur Leistung des einfallenden Windes der Geschwindigkeit u_+ angibt. Weil die Leistung des einfallenden Windes proportional zu u_+^3 zunimmt, ergibt sich die Leistung von Anlagen idealisiert dann als

$$P(u_+) = \frac{1}{2} \rho A C_P u_+^3 \quad . \quad (7.24)$$

Leistungskoeffizienten von Anlagen, die dem aktuellen Stand der Technik entsprechen, liegen nach Angaben der Hersteller unter optimalen Bedingungen etwa bei 0.5.

Ein schematischer Verlauf der Leistungsabgabe, der in Abbildung 7.6 skizziert ist, berücksichtigt zusätzlich die Regelung von Windkraftanlagen, die die Leistungsaufnahme der Anlagen begrenzt, sobald die *Nennleistung* erreicht ist. Das ist für

⁵Unter der Annahme, dass nur mechanische Kräfte wirken und das Problem damit konservativ ist, kann Betz die Geschwindigkeit u' als Mittelwert aus u_+ und u_- aus der Erhaltung der Energie herleiten [Betz 1926].

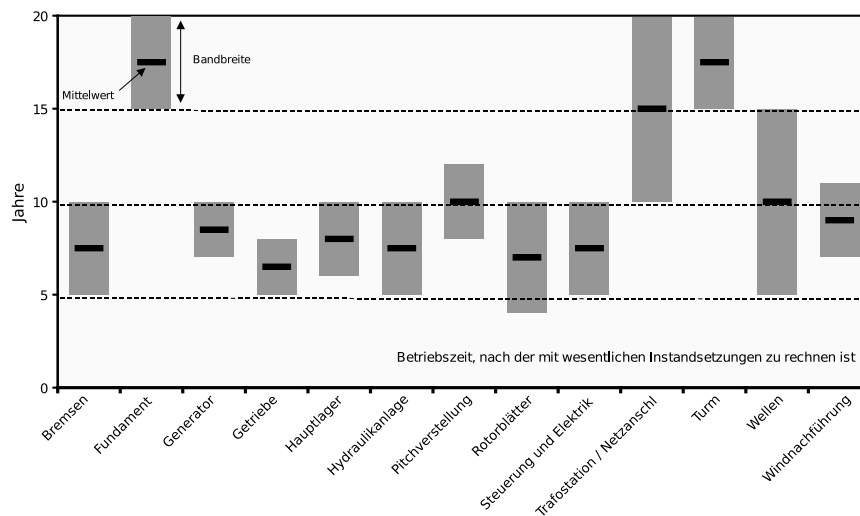


ABBILDUNG 7.7: Untersuchung der Ausfallgründe von 1500 Windkraftanlagen in den Jahren 1999-2002. (Quelle: Bundesverband WindEnergie e.V., Studie durchgeführt vom Deutschen Windenergie Institut GmbH (DEWI))

Windkraftanlagen der neuesten Generation, die für die Nutzung in Norddeutschland ausgelegt worden sind, ungefähr ab einer Windgeschwindigkeit von $u_R \approx 12$ m/s der Fall. Oberhalb einer Windgeschwindigkeit von u_l werden die Anlagen aus Sicherheitsgründen abgeschaltet. Die in Abbildung 7.6 dargestellte Funktion wird als *Leistungskurve* (engl. „Power curve“) einer Windkraftanlage bezeichnet. Weil in die Dynamik der Leistungsabgabe aufgrund der Komplexität des einfallenden Windes und der Windkraftanlagen viele weitere Faktoren einfließen, ist eine deterministische Beschreibung auf der Basis einer (wie auch immer definierten) skalaren Windgeschwindigkeit u_+ , wie sie hier durchgeführt worden ist, natürlich streng genommen nicht möglich. Anahua, Böttcher, Gottschall, Peinke u.a. haben deswegen die im ersten Teil dieser Arbeit vorgestellten Methoden zur Beschreibung komplexer Systeme auf Basis von Drift und Diffusion für eine genauere Charakterisierung der Leistungsabgabe von Windkraftanlagen untersucht und ein Verfahren entwickelt, auf dessen Basis sich die Leistungsabgabe der Anlagen statistisch modellieren lässt. Außerdem eignen sich die Methoden, um die interne Steuerung von Anlagen zu analysieren und zu optimieren. Für Details zu diesen Methoden sei an dieser Stelle auf Anahua u.a. [2004], Anahua [2007], Böttcher u.a. [2007b] und Gottschall & Peinke [2007, 2008] verwiesen.

Mechanische Belastung von Windkraftanlagen

Neben Energie, die Windkraftanlagen erzeugen und die die Betreiber solcher Anlagen verkaufen können, verursacht der Betrieb der Anlagen natürlich laufende Kosten. Nach einer Analyse, die der Bundesverband WindEnergie e.V.⁶ im Jahr 2002 beim Deutschen Windenergie Institut GmbH⁷ in Auftrag gegeben hat, machen die Kosten für Wartung und Instandhaltung etwa 25 % der laufenden Kosten aus. Nicht mit eingerechnet sind dabei die Einnahmeverluste, die durch den Stillstand der Anlagen bis zum Abschluss der Reparaturarbeiten auftreten. Im Rahmen des Berichts, der auf der Beobachtung von 1500 Windkraftanlagen beruht, wurden statistisch auch

⁶Siehe auch <http://www.wind-energie.de>

⁷Siehe auch <http://www.dewi.de>

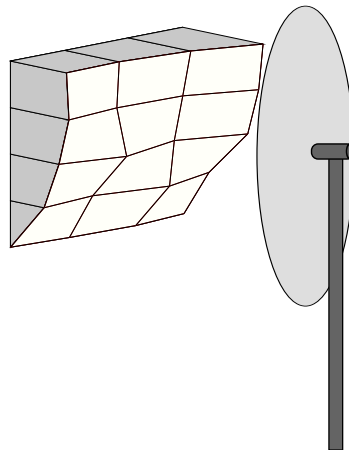


ABBILDUNG 7.8: Beispiel für ein komplexes Windfeld in der Rotorebene einer Windkraftanlage. Neben der Scherung des Windes in Bodennähe ist auch der stochastische Charakter des Feldes zu erkennen.

die Komponenten, die Gegenstand der Wartungs- oder Reparaturarbeiten waren, bewertet. Obwohl die Anlagen auf eine Laufzeit von zwanzig Jahren ausgelegt sein sollten, zeigt Abbildung 7.7, dass viele wichtige Komponenten schon in einem frühen Stadium einer umfangreichen Wartung oder eines Austausches bedürfen. Trotz langjähriger Erfahrung mit dem Bau der einzelnen Komponenten wie Getrieben und Generatoren z.B. für den Einsatz in Wasserkraftwerken scheint eine geeignete Dimensionierung der Bauteile für den Einsatz in Windkraftanlagen noch nicht zu gelingen. Die Ursache dafür liegt vermutlich in der Energiequelle, dem atmosphärischen Wind, selbst, der nur schwierig zu charakterisieren ist und dessen Eigenschaften bei der Auslegung der Anlagen bislang nur unzureichend berücksichtigt werden.

Im Bezug auf die Leistungsabgabe der Anlagen ist bereits angeklungen, dass Windkraftanlagen sehr komplex sind. Das gilt natürlich insbesondere für die Dynamik der Anlagen unter der Einwirkung der Windkräfte. Die einzelnen Bauteile der Anlagen müssen die Kräfte aufnehmen, weiterleiten und an den Generator und das Fundament abführen. Neben fluktuierenden Lasten, die durch die wechselnde Intensität des einfallenden Windes verursacht werden, treten dabei auch verschiedene periodische Lasten, die z.B. durch die Rotation der Blätter verursacht werden, sowie Beiträge von Schwingungsmoden von Anlagenteilen auf. Zur Abschätzung all dieser Effekte schon während der Planung von Windkraftanlagen werden von allen Herstellern Programmpakete eingesetzt, die das Zusammenspiel der einzelnen Komponenten simulieren sowie die zu erwartende Energieausbeute und die entstehenden Lasten berechnen können. Eine Übersicht über die verschiedenen Werkzeuge, die für die Berechnung der Anlagen Verwendung finden, und eine Beschreibung des jeweiligen Leistungsumfangs findet sich zum Beispiel bei Molenaar & Dijkstra [1999]. Das „National Renewable Energy Laboratory“ (NREL) der Vereinigten Staaten stellt eine Auswahl an Codes bereit, die aktiv gepflegt werden und zu wissenschaftlichen Zwecken genutzt werden können.⁸ Die Durchführung von Simulationen ist Voraussetzung für die Zulassung von Windkraftanlagen nach den Richtlinien des Germanischen Lloyds, die auf den Normen der „International Electrotechnical Commission“ (IEC) aufbauen.

Abbildung ?? zeigt das Angreifen eines Windfeldes auf eine Windkraftanlage. Für eine Simulation von Windkraftanlagen während der Planungsphase werden Windda-

⁸Siehe dazu <http://wind.nrel.gov/designcodes/>

ten benötigt, die den zu erwartenden Windmustern in der atmosphärischen Grenzschicht soweit möglich entsprechen. Während wir uns bislang häufig auf den Betrag der Windgeschwindigkeit an einem bestimmten Punkt beschränken konnten, sind für das genauere Verständnis der Anlagen multivariate, dreidimensionale *Windfelder* notwendig, deren räumliche und zeitliche Korrelationen die Gegebenheiten in der Atmosphäre widerspiegeln. Eine genauere Untersuchung der Auswirkungen eben dieser turbulenten Windfelder war das Ziel des Projektes „Windturbulenzen und deren Bedeutung für die Windenergie“, in dessen Rahmen die vorliegende Arbeit entstanden ist. Dabei wurden insbesondere die Möglichkeiten zur numerischen Erzeugung solcher Felder mit Hilfe von CTRWs untersucht. Die Ergebnisse werden in den folgenden Abschnitten im Detail vorgestellt.

An dieser Stelle sei noch einmal kurz zusammengefasst, welche Eigenschaften von Windfeldern in Bezug auf die auftretenden Lasten von besonderer Bedeutung sind. Zunächst einmal muss man die Veränderung der atmosphärischer Windfelder auf den Größen- und Zeitskalen von Windkraftanlagen betrachten.

Bezüglich der Zeitskalen können wir uns ohne Einschränkung z.B. auf zeitliche Veränderungen innerhalb einer Minute beschränken, weil die Anlagen Änderungen des einfallenden Windes auf größeren Zeitskalen aufgrund der aktiven Nachführung adiabatisch folgen. Auch in den Ingenieurwissenschaften geht – nachdem die Dynamik atmosphärischer Winde unterhalb einer Zeitspanne von 10 min jahrzehntelang außer Acht gelassen wurde – der Trend mittlerweile sinnvollerweise hin zur vermehrten Untersuchung der Dynamik auf kurzen Zeitskalen.

Bezüglich des Auftretens von extremen Lasten, die über längere Zeit dann zu Ermüdungsbrüchen von Komponenten der Anlagen führen können, sind insbesondere räumlich und/oder zeitlich kohärente Strukturen interessant, die sich z.B. durch Windböen äußern, die einen großen Teil der Rotorfläche beinahe zeitgleich erreichen können. Diese Effekte haben ihren Ursprung in der Instationarität und der lokalen Homogenität atmosphärischer Turbulenz, die Böttcher u.a. [2007a] mit Hilfe der statistischen Modellierung der Inkrementstatistik identifizieren konnten.

7.4 Erzeugung synthetischer Windfelder⁹

Es ist deutlich geworden, dass die Verwendung möglichst realer Windfelder für eine bessere Dimensionierung von Anlagen essentiell ist.

Eine naheliegende Lösung wäre es natürlich, Windfelder in der Atmosphäre auszumessen. Einzelne Windmessungen in Höhen bis zu 100 m werden auch vorgenommen. Das Vermessen ganzer Windfelder auf der Größe eines Rotordurchmessers von Anlagen ist jedoch sehr aufwändig und teuer, weil dazu mehrere Messmasten erforderlich sind und über einen sehr langen Zeitraum gemessen werden muss. Seit kurzem stehen innerhalb des laufenden Projektes Messdaten zur Verfügung, die im Rahmen des ebenfalls vom BMBF geförderten „GROWIAN“-Projektes in den achtziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts auf einem ähnlich zu Abbildung ?? dimensionierten Gitter aufgenommen und in der Zwischenzeit aufwändig aufbereitet wurden [Günther & Hennemuth 1998]. Die Auswirkungen dieser Felder auf Windkraftanlagen sollen in Zukunft im Detail untersucht werden. Ähnliche Felder werden sich zukünftig vielleicht mit Hilfe von laser-basierten Messungen vom Boden aus wesentlich günstiger und schneller messen lassen. Für Windkraftanlagenhersteller ist die Nut-

⁹Der Abschnitt 7.4 beinhaltet eine umfassende Beschreibung verschiedener Methoden, die derzeit zur Erzeugung atmosphärischer Windfelder eingesetzt werden oder in absehbarer Zukunft zu diesem Zweck verwendet werden können. Im diesem Zusammenhang werden die Unzulänglichkeiten der bestehenden Modelle für atmosphärische Windfelder deutlich. Für das Verständnis des CTRW-basierten Modells, mit dem wir uns ab Abschnitt 7.5 beschäftigen werden, ist die Kenntnis der in diesem Abschnitt aufgeführten Beispiele jedoch nicht zwingend erforderlich, sodass er von ungeduldigen Lesern ggf. übersprungen werden kann.

zung gemessener Daten von Windfeldern aufgrund des Kosten- und Zeitaufwandes sowie der eingeschränkten Verfügbarkeit zum jetzigen Zeitpunkt allerdings keine Option.

Mit der numerischen Simulation von turbulenten Strömungen beschäftigen sich viele Wissenschaftler seit langem. Mit der steten Weiterentwicklung der Rechenleistung von Computern ist prinzipiell die Möglichkeit, einfache Probleme durch numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen untersuchen zu können, in Reichweite gerückt. Der Rechenaufwand dieser üblicherweise als *direkte numerische Simulationen* (DNS) bezeichneten Rechnungen steigt jedoch als Funktion der Reynoldszahl Re etwa mit der dritten Potenz, der Speicherbedarf mit $Re^{9/4}$. Zum jetzigen Zeitpunkt lassen sich unter großem Aufwand Strömungen mit Reynoldszahlen $\sim 10^4$ mit Hilfe direkter numerischer Simulationen berechnen, während die Reynoldszahlen atmosphärischer Strömungen an Windkraftanlagen typischerweise um mindestens zwei Größenordnungen darüber liegen. Aus diesem Grund wird die Nutzung von DNS zur Simulation von turbulenten Strömungen in der atmosphärischen Grenzschicht auch in naher Zukunft nicht wirtschaftlich durchführbar sein, wenn sie überhaupt einmal möglich werden sollte.

Zur Simulation turbulenter Strömungen existiert eine Vielzahl von Verfahren, die den Rechenaufwand massiv vermindern können, indem sie die Navier-Stokes-Gleichungen in gewissen Bereichen nähern und – insbesondere die kleinen Skalen, bei denen häufig davon ausgegangen wird, dass sie universelles Verhalten zeigen – nur statistisch erfassen. Die wichtigsten Ansätze sollen an dieser Stelle kurz vorgestellt werden, weil sie sich prinzipiell zur Berechnung von Windfeldern für Windkraftanlagen verwenden lassen.

RANS Die älteste Näherung der Navier-Stokes-Gleichungen geht auf Reynolds zurück, der Ende des 19. Jahrhunderts mit Hilfe von geeigneten zeitlichen Mittelwerten turbulente Strömungen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in eine mittlere Strömung $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ und Fluktuationen $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ zerlegte. Weil die Fluktuationen im Mittel verschwinden, ergibt sich aus (7.4b) für inkompressible Strömungen nach Mittelung dann

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \bar{\mathbf{a}}_{\text{ext}} + \nabla \left(\nu \nabla^T \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'^T} \right) \quad , \quad (7.25)$$

wobei \bar{p} und $\bar{\mathbf{a}}_{\text{ext}}$ den mittleren Druck bzw. die mittlere externe Beschleunigung darstellen. Diese Gleichungen werden als *Reynolds-Gleichungen* oder auch als „*Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*“ (RANS) bezeichnet. Aufgrund der Nichtlinearität können die Gleichungen für $\bar{\mathbf{u}}$ und \mathbf{u}' nicht entkoppelt werden. Stattdessen enthält die Gleichung für $\bar{\mathbf{u}}$ den Term $\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'^T}$, der die Korrelationen der Fluktuationen umfasst und häufig als *Reynolds-Stress* bezeichnet wird. Weil Entwicklungsgleichungen für Mittelwerte zweiter Ordnung wiederum von der Statistik dritter Ordnung abhängen und sich dieses Verhalten für Entwicklungsgleichungen höherer Ordnung fortsetzt, bezeichnet man die Beschreibung von turbulenten Strömungen auf Basis von verallgemeinerten Momenten als *nicht geschlossen*.

Die Reynolds-Gleichungen (7.25) stellen eine wesentliche Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen dar. Sie eignen sich damit wesentlich besser für eine numerische Lösung, falls ein geeignetes Modell für den Reynolds-Stress verwendet und das *Schießungsproblem* somit aufgelöst wird. Auf diese Weise lassen sich – unter der Voraussetzung, dass die Modellierung des Reynolds-Stresses hinreichend gut ist – mit im Vergleich zur direkten Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen sehr geringem Aufwand gute Vorhersagen über die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten gewinnen.

LES Wesentlich mehr Details der turbulenten Strömung lassen sich mit Hilfe von „*large eddy simulations*“ (LES) berechnen, die eine Lösung einer gefilterten Version der Navier-Stokes-Gleichungen darstellen, in der die kleinen Strukturen unterdrückt werden. Weil die kleinen Strukturen sich näherungsweise durch Kolmogorovs K41-Theorie beschreiben lassen und damit nach (7.14) universelle Eigenschaften haben und nicht von der spezifischen Problemstellung abhängen, wird der Einfluss der kleinen Strukturen stattdessen durch geeignete Modelle angenähert. Weil die zeitliche Entwicklung der groben Strukturen und Wirbel explizit simuliert wird, lassen sich – im Gegensatz zur Simulation mit Hilfe von RANS – instantane Realisierungen der turbulenten Strömung erzeugen. Eine genaue Lösung von Problemen mit Hilfe von LES erfordert jedoch eine relativ feine Auflösung, sodass der Aufwand und die Kosten im Vergleich zu RANS wesentlich höher liegen. Abhilfe können hier sogenannte „*detached eddy simulations*“ (DES) verschaffen, die eine Kombination aus RANS- und LES-Lösungen verwenden und dadurch den Rechenaufwand senken.

Numerische Lösung der Wirbeltransportgleichung Prinzipiell lässt sich statt den Navier-Stokes-Gleichungen auch die Wirbeltransportgleichung (7.5) simulieren. Die Lösung dieser Gleichung bietet sich insbesondere für die Berechnung von Turbulenz in zwei Dimensionen an, weil der sogenannte Wirbelstreckungsterm $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ dann verschwindet und die Wirbelstärke eine skalare Größe bildet. Solange keine Randbedingungen berücksichtigt werden müssen, lässt sich diese Gleichung dann numerisch sehr gut implementieren und bietet eine günstige Möglichkeit zur Simulation turbulenter Systeme. Für die Beschreibung komplexerer Probleme wie z.B. der atmosphärischen Turbulenz eignet sich die Simulation dieser Gleichung hingegen kaum.

Wir haben gesehen, dass es verschiedene Möglichkeiten zur numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung gibt. Außer einer Simulation auf Basis von RANS sind die existierenden Methoden aber zu aufwändig und zu teuer zur Simulation der Verhältnisse in der Atmosphäre, zumal eine realistische Formulierung der Randbedingungen und treibenden Kräfte dort sehr schwierig ist. RANS hingegen liefert nur mittlere Strömungsgeschwindigkeiten und ist deshalb für die Simulation der turbulenten Effekte in der atmosphärischen Grenzschicht nicht geeignet.

Für die Verwendung als Eingangsdaten für Programme zur Simulation von Windkraftanlagen haben sich deshalb Verfahren durchgesetzt, die stochastische Methoden zur Berechnung der Felder verwenden. Die auf diese Art erzeugten Windfelder sollen den Bedingungen in der Atmosphäre natürlich in möglichst vielen Eigenschaften entsprechen.

7.4.1 Einfache stochastische Modelle

Kaminsky u.a. stellen in einer Arbeit, die 1990 auf einer Konferenz präsentiert wurde, sechs einfache Ansätze zur Simulation von Windzeitreihen vor [Kaminsky u.a. 1990]. Auch wenn sich einige dieser Ansätze offensichtlich nicht für eine Simulation von Windzeitserien eignen, bietet die Arbeit einen guten Einstieg in die Problematik.

Kaminsky u.a. verwenden als Referenz eine Messung der atmosphärischen Windgeschwindigkeit mit einer Abtastrate von 3.5 Hz, die über eine Dauer von 8 h aufgenommen wurde. Folgende Verfahren zur stochastischen Erzeugung von Daten werden dann – soweit möglich – an die Eigenschaften dieser Referenzmessung angepasst:

1. Verwendung von unabhängigen Zufallszahlen, die der stationären Verteilung der Referenzmessung genügen,

Modell	PDF	AK	LS
1	++	--	--
2	+	-	-
3	+	-	-
4	+	-	-
5	+	+	+
6	+	++	++

TABELLE 7.1: Ergebnisse der Untersuchung von Kaminsky u.a. [1990]. Für die Modelle 1 bis 6, die auf Seite 109 vorgestellt werden, wurde jeweils die Übereinstimmung der stationären Verteilung (PDF), der Autokorrelationsfunktion (AK) und des Leistungsspektrums (LS) mit der Referenzmessung untersucht. Der Übersichtlichkeit halber sind die Ergebnisse von Kaminsky u.a. hier in Form einer Bewertung der Übereinstimmung von „--“ (sehr schlecht) bis hin zu „++“ (sehr gut) wiedergegeben.

2. Simulation als Markov-Kette (Übergangswahrscheinlichkeit wird aus der Referenz gewonnen),
3. Simulation von zwei aufeinanderfolgenden Messungen als (eingebettete) Markov-Kette (Übergangswahrscheinlichkeiten werden aus der Referenz gewonnen),
4. Simulation eines *Autoregressive Moving Average* (ARMA) Prozesses der Ordnung (2,1), der durch

$$u_j = -q_1 u_{j-1} - q_2 u_{j-2} + p_0 Z_j + p_1 Z_{j-1} \quad (7.26)$$

gegeben ist. Z_j stellen unabhängige Zufallszahlen dar, die Parameter q_i und p_i wurden über das Leistungsspektrum an die Referenzmessung angepasst,

5. spektrale Simulation mit der Berücksichtigung von 512 Frequenzen (vgl. Abschnitt 7.4.2), Anpassung an die Referenz über das Leistungsspektrum,
6. getrennte Simulation der mittleren Windgeschwindigkeit (Mittelung über 2 s) und der Fluktuationen auf unterschiedlichen Zeitskalen jeweils auf Basis von Markov-Ketten. Nach der Simulation wurden die Ergebnisse addiert.

Nach der Simulation von Zeitreihen mit den verschiedenen Verfahren wurden die Ergebnisse mit der Referenz verglichen. Dafür wurden jeweils die stationäre Verteilung (PDF), die Autokorrelationsfunktion (AK) und das Leistungsspektrum (LS) untersucht. Die Ergebnisse sind in Tabelle 7.1 zusammengestellt.

Zunächst einmal ist zu erkennen, dass die stationäre Verteilung von allen Modellen nahezu gleich gut reproduziert wird. Das liegt wohl vor allem daran, dass die Referenzmessungen – im Gegensatz zu den häufig beobachteten Weibull-artigen Verteilungen (vgl. Abschnitt 7.2 und Anhang B) – nahezu normalverteilt sind. Zumindest die Modelle 4 und 5 liefern im Ensemble stets normalverteilte Daten, sodass bei Wahl einer anderen Referenz größere Abweichungen zu erwarten gewesen wären. Weil das Leistungsspektrum als Fouriertransformierte aus der Autokorrelationsfunktion hervorgeht, ist es nicht verwunderlich, dass sich die Güte, mit der diese beiden Eigenschaften von den jeweiligen Modellen reproduziert werden, nicht unterscheidet. Es ist zu erkennen, dass die Modelle 1 bis 4 nicht zur Simulation von Winddaten geeignet sind, weil sie jeweils nur sehr kurzreichweitige, im Falle von Modell 1 sogar gar keine Korrelationen berücksichtigen. Eine nur langsam abfallende Autokorrelationsfunktion ist aber charakteristisch für atmosphärische Turbulenz. Methode 5, die

auf einer spektralen Simulation beruht und auf die im kommenden Abschnitt genauer eingegangen wird, zeigt keine überzeugende Reproduktion des Spektrums, weil sich Kaminsky u.a. auf die Berücksichtigung von 512 Moden beschränkt haben und die Zeitserie im Gegensatz zur Referenz deshalb eine Periodizität aufweist. Kaminsky u.a. schließen aus ihrem Vergleich, dass für eine gute Reproduktion der Referenz insbesondere die Berücksichtigung der langreichweitigen Korrelationen wichtig ist und das hybride Modell 6 aus diesem Grund die besten Ergebnisse liefert.

Weil seit den Arbeiten von Kaminsky u.a. die zur Verfügung stehende Rechenleistung und Speicherkapazität stark gestiegen ist, stellt die Berücksichtigung einer höheren Anzahl von Fourier-Moden mittlerweile keinen Aufwand mehr dar. Mit steigender Zahl der berücksichtigten Moden steigt die Qualität der von Modell 5 erzeugten Ergebnisse. Weil sich diese Methode im Bereich der Windenergie in der Zwischenzeit durchgesetzt hat, wird sie im kommenden Abschnitt im Detail vorgestellt.

7.4.2 Spektrale Simulation von Windfeldern

In den ersten Kapiteln haben wir uns ausschließlich mit stochastischen Prozessen in Raum und Zeit befasst. Monin & Yaglom [1975] führen im Rahmen einer mathematischen Beschreibung turbulenter Strömungen in die Beschreibung stochastischer Felder im Fourierraum ein.

Bevor wir uns mit der Nutzung dieser spektralen Methoden zur Simulation turbulenter Windfelder befassen, sollen anhand eines eindimensionalen Beispiels die Grundlagen spektraler Simulationen eingeführt werden.

Stochastische Prozesse im Fourierraum

Wir betrachten eine Zeitreihe $u(t)$, die gegeben ist als

$$u(t) = \sum_{k=1}^m Z_k e^{i\omega_k t} \quad , \quad (7.27)$$

wobei Z_k unabhängige komplexe Zufallszahlen sind, die im Mittel verschwinden. $u(t)$ ist nur dann für alle t reell, falls m eine gerade Zahl ist und die $m = 2n$ Summanden Paare aus komplex konjugierten Zahlen ($Z_k e^{i\omega_k t}$, $Z_k^* e^{-i\omega_k t}$) bilden. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, lässt sich (7.27) schreiben als

$$u(t) = \sum_{k=1}^n \left(Z_k^{(1)} \cos \omega_k t + Z_k^{(2)} \sin \omega_k t \right) = \sum_{k=1}^n W_k \cos(\omega_k - \varphi_k) \quad . \quad (7.28)$$

Die neuen Koeffizienten $Z_k^{(i)}$, W_k und φ_k gehen dabei aus den Z_k hervor als

$$Z_k^{(1)} = Z_k + Z_k^* \quad , \quad (7.29)$$

$$Z_k^{(2)} = i(Z_k - Z_k^*) \quad , \quad (7.30)$$

$$W_k = 2|Z_k| \quad , \quad (7.31)$$

$$\varphi_k = \arctan \left(Z_k^{(2)} / Z_k^{(1)} \right) \quad . \quad (7.32)$$

$u(t)$ ist also eine Superposition von Moden der Frequenzen ω_k mit Amplituden $W_k/2$ und zufälligen Phasen, die bei unabhängiger Wahl der Z_k gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ liegen. Für die Autokorrelationsfunktion $B(\tau)$ von u ergibt sich daher

$$B(\tau) = \langle u(t)u(t+\tau) \rangle_t = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \langle W_k \rangle \cos(\omega_k(t_2 - t_1)) \quad . \quad (7.33)$$

Für $\tau = 0$ liefert die Autokorrelationsfunktion den Wert $B(\tau = 0) = \langle u^2 \rangle$. Weil die mittlere Energie einer turbulenten Strömung proportional zum mittleren Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit ist, stellt

$$B(0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \langle W_k \rangle =: \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} E_k \quad (7.34)$$

ein Maß für die Energie der Strömung dar. Hier sind die Beiträge $E_k := \langle W_k \rangle$ der einzelnen Schwingungen zur Gesamtenergie eingeführt worden, die eine einfache, diskrete Form des Energiespektrums bilden, das in der Beschreibung turbulenter Strömungen – spätestens seit den Arbeiten von Kolmogorov (vgl. Abschnitt 7.1) – stets eine wichtige Rolle spielt.

Es lässt sich zeigen, dass sich jeder beliebige Zufallsprozess mit Hilfe von (7.27) darstellen lässt, wenn die Anzahl der zulässigen Moden m nicht beschränkt ist und die Frequenzen ω_k beliebig dicht liegen können. Eine sehr elegante Form der theoretischen Beschreibung der allgemeinen Form bietet die Formulierung mit Hilfe von Stieltjes-Integralen, die bereits in Abschnitt 2.2.2 als Verallgemeinerung des Riemann'schen Integralbegriffs eingeführt worden sind. Der Übergang zu einer kontinuierlichen Variablen ω lässt sich wie folgt verstehen: Einen geeigneten Startpunkt stellt wiederum (7.27) dar. Anstelle der diskreten Z_i betrachten wir aber nun die Summe über diese Zufallszahlen als Funktion von ω ,

$$Z(\omega) := \sum_{\omega_i < \omega} Z_i \quad . \quad (7.35)$$

Für die Korrelation der Inkremente $dZ(\omega, d\omega) := Z(\omega + d\omega) - Z(\omega)$ dieses Zufallsprozesses ergibt sich aus der Forderung, dass die einzelnen Z_i unabhängig voneinander sein sollen,

$$\langle dZ^*(\omega, d\omega) dZ(\omega', d\omega) \rangle = 0 \quad \text{für } \omega \neq \omega' \quad . \quad (7.36)$$

Im Limes $n \rightarrow \infty$ lässt sich (7.27) dann auswerten als

$$u(t) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\omega_{k+1} - \omega_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (Z(\omega_{k+1}) - Z(\omega_k)) e^{i\omega'_k t} \right\} \quad , \quad (7.37)$$

wobei $-\Omega = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_n = \Omega$ und $\omega_k \leq \omega'_k \leq \omega_{k+1}$ gelten soll. Mit Hilfe des Zufallsprozesses $Z(\omega)$ lässt sich $u(t)$ dann als Stieltjes-Integral

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dZ(\omega, d\omega) e^{i\omega t} \quad (7.38)$$

darstellen. $u(t)$ stellt also formal die Fourier-Transformation der Ableitung des Zufallsprozesses $Z(\omega)$ dar.

Für die Autokorrelation des auf Basis von (7.38) definierten $u(t)$ gilt

$$B(\tau) = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dZ^*(\omega, d\omega) e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dZ(\omega', d\omega) \delta(\omega - \omega') e^{i\omega(t-\tau)} \right\rangle_t \quad . \quad (7.39)$$

Diese lässt sich durch Einführung des Energiespektrums $E(\omega)$ mit

$$\frac{1}{2} \delta(\omega - \omega') E(\omega) d\omega = \langle dZ(\omega, d\omega) dZ(\omega', d\omega) \rangle \quad (7.40)$$

analog zu (7.38) vereinfacht darstellen als

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} d\omega \cos(\omega\tau) E(\omega) \quad . \quad (7.41)$$

Mit Hilfe einer inversen Cosinus-Fourier-Transformation ergibt sich das Energiespektrum nun als

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau) B(\tau) \quad . \quad (7.42)$$

Die Auswertung von (7.41) für $\tau = 0$ zeigt, dass $E(\omega)d\omega$ ein Maß für den Beitrag der Moden im Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$ zur Gesamtenergie des turbulenten Feldes darstellt, falls $u(t)$ eine Strömungsgeschwindigkeit zur Zeit t ist. Die diskreten E_k , die in (7.28) eingeführt wurden, lassen sich aus $E(\omega)$ berechnen als¹⁰

$$E_k := \int_{\omega_k - \Delta\omega/2}^{\omega_k + \Delta\omega/2} d\omega E(\omega) \quad . \quad (7.43)$$

Monin & Yaglom [1975, vgl. S. 5] zeigen darüber hinaus, dass sich der Zufallsprozess $Z(\omega)$ mit Hilfe einer inversen Fourier-Transformation aus gemessenen Daten gewinnen lässt und auf die Art und Weise unmittelbar untersucht werden kann.

Simulation stochastischer Prozesse im Fourierraum

Zufallsprozesse, wie sie im Rahmen von Kapitel 2 eingeführt worden sind, lassen sich also auch im Fourierraum definieren und erzeugen im Ortsraum auf Basis von (7.27), (7.28) oder (7.38) Zufallsprozesse, deren spektrale Eigenschaften und deren Autokorrelationsfunktion in natürlicher Weise durch die Statistik der ursprünglichen Zufallsvariablen bestimmt ist. Diese Tatsache wird seit langem für die Erzeugung von Windfeldern für die Nutzung in der Windenergie ausgenutzt.

Die Überlegungen der numerischen Erzeugung von Zufallsprozessen im Fourierraum und der anschließenden Rücktransformation in den Ortsraum basieren im Wesentlichen auf der Arbeit von Shinozuka & Jan [1972], die – ausgehend von der diskreten Darstellung gemäß (7.28) – gezeigt haben, dass sich der Prozess $u(t)$ bei gegebenem Energiespektrum $E(\omega)$ numerisch simulieren lässt als

$$u(t) = \sum_{k=1}^N \sqrt{E(\omega_k)} \Delta\omega \cos(\omega'_k t + \varphi_k) \quad . \quad (7.44)$$

Weil das Energiespektrum stets nicht-negativ ist, ist dieser Ausdruck wohldefiniert. Die φ_k sind dabei Zufallsphasen, die unabhängig voneinander zu wählen sind und gleichmäßig auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ liegen sollen. Die Frequenzen ω'_k sollen zufällig im Intervall $[\omega_k - \Delta\omega, \omega_k + \Delta\omega]$ verteilt liegen und dafür sorgen, dass die verschiedenen Realisierungen des Prozesses von unterschiedlichen Moden erzeugt werden. Shinozuka & Jan zeigen, dass das Spektrum der auf diese Weise erzeugten Prozesse im Fall $N \rightarrow \infty$ im Ensemble-Sinne gegen das gewünschte Spektrum $E(\omega)$ konvergiert [Shinozuka & Jan 1972].

In einem zweiten Schritt erweitern Shinozuka & Jan dieses Verfahren auf die Simulation von Zufallsvektoren u_i , deren Komponenten gewisse Korrelationen aufweisen. Anstatt des eindimensionalen Spektrums, das auf der Autokorrelation beruht, müssen dann Kreuzspektren E_{ij} , die sich als Fourier-Transformation von Kreuzkorrelationen B_{ij} ergeben, verwendet werden,

$$B_{ij}(\tau) = \langle u_i(t) u_j(t + \tau) \rangle \quad (7.45)$$

$$E_{ij}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \cos(\omega\tau) B_{ij}(\tau) \quad . \quad (7.46)$$

¹⁰In den Algorithmen von Veers [1988] und Mann [1998], die im Folgenden noch vorgestellt werden, wird (7.43) in der Regel genähert durch $E_k \approx \Delta\omega E(\omega)$.

Eine formale Erweiterung von (7.44) stellt

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^N \sum_j A_{ij}(\omega_k) \Delta\omega \cos(\omega'_k t + \varphi_{k,j}) \quad (7.47)$$

dar, wobei für die Matrizen A jeweils die Gleichung $A^T(\omega_k)A(\omega_k) = E(\omega_k)$ gelten soll. Weil $E(\omega_k)$ symmetrisch und positiv definit ist, lässt sich diese Bedingung stets erfüllen und die jeweilige Matrix A z.B. mit Hilfe einer Cholesky-Zerlegung berechnen (vgl. z.B. S. 115 sowie Press u.a. [1992]). Die resultierenden Zufallsvektoren $\mathbf{u}(t)$ genügen für $N \rightarrow \infty$ dann wiederum den gewünschten spektralen Eigenschaften. Shinozuka & Jan weisen darauf hin, dass „der Prozess aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes einer Gauß’schen Verteilung genügt“ [Shinozuka & Jan 1972, S. 115]. Das gilt in gleicher Weise für jede Statistik von Inkrementen dieser Prozesse. Die auf diese Art und Weise simulierten Prozesse $u(t)$ lassen sich deshalb auch als *Spektrale Surrogate* oder Prozesse mit *Zufallsphasen* bezeichnen und aus beliebigen Daten durch Verwerfen der Phaseninformation direkt erzeugen [vgl. Kaminsky u.a. 1990]. Ferner lässt sich anmerken, dass der Zusammenhang zwischen den Amplituden der Moden und dem Energiespektrum, wie er in (7.34) und (7.40) eingeführt worden ist, streng genommen nur statistisch zu gelten braucht. Es wurde deshalb auch vorgeschlagen, auch die Amplituden stochastisch zu wählen. Grigoriu [1993] hat den Unterschied dieses Ansatzes im Vergleich zur Beschränkung auf Zufallsphasen im Detail diskutiert und ist zu dem Ergebnis gekommen, dass beide Ansätze Vorteile bieten können. Nicht zuletzt sei an dieser Stelle auf eine spätere Arbeit von Shinozuka & Deodatis [1991] hingewiesen, in der sie die Erzeugung eines eindimensionalen Zufallsprozesses insbesondere im Hinblick auf die Nutzung der FFT im Detail diskutieren und dabei auf eine elegantere Beschreibung auf der Basis von Stieljes-Integralen, die mit der Gleichung (7.38) eingeführt worden ist, zurückgreifen.

Spektrale Simulation von Windfeldern nach Veers

Die Beschreibung atmosphärischer Turbulenz ist – wie wir in Abschnitt 7.2 gesehen haben – aufgrund der Komplexität und der Anzahl relevanter Freiheitsgrade sehr aufwändig. Die Spektren der atmosphärischen Winde wurden jedoch intensiv untersucht und haben sich als recht stabil erwiesen. Insbesondere gehorchen sie über viele Größenordnungen dem Kolmogorov’schen 5/3-Gesetz. Zur genaueren Charakterisierung sind deshalb mehrere Modelle entwickelt worden, die jeweils eine analytische Form der Spektren, Kohärenzfunktionen und/oder Kreuzspektren angeben [vgl. z.B. Burton u.a. 2001; Mann 1998; Solari & Piccardo 2001].

Veers hat die Methoden zur Simulation von Zufallsprozessen in der Zeit, die im letzten Abschnitt vorgestellt worden sind, verwendet, um mit Hilfe der spektralen Modelle *Windfelder* für die Simulation von Windkraftanlagen zu erzeugen. Dabei wurde im Wesentlichen auf die Spektren von Kaimal sowie eine exponentiell abfallende Kohärenz nach Frost/Davenport zurückgegriffen, die in [Veers 1988] angegeben sind. Veers hat an den Sandia National Laboratories gearbeitet und seinen Ansatz daher „*Sandia-Methode*“ genannt.

Zur Simulation von Windfeldern betrachtet Veers den Windvektor $\mathbf{u}_i(t)$, der die Windmessungen der Komponente i in einer Ebene senkrecht zur mittleren Windrichtung an den Stellen (\mathbf{y}, \mathbf{z}) beschreibt. Die drei Komponenten u (in Richtung der mittleren Windes), v (senkrecht zur mittleren Windrichtung, horizontal) und w (vertikal) werden später unabhängig voneinander erzeugt.¹¹ Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Indizes der Komponenten nun nicht weiter notiert. Veers

¹¹Weil die Komponenten unabhängig voneinander betrachtet werden, können mit Hilfe dieser Methode keine inkompressiblen Felder erzeugt werden (vgl. Abschnitt 7.1).

setzt das Geschwindigkeitsfeld aus der mittleren Windgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{u}}$ und der Fluktuationen \mathbf{u}' zusammen,

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'(t) \quad , \quad (7.48)$$

und beschränkt sich dann auf die Simulation von $\mathbf{u}'(t)$.

Es wird nun eine diskrete Anzahl an Frequenzen f_m betrachtet, die äquidistant im Abstand Δf liegen. Die Diagonalelemente des diskreten Kreuzspektrums $S_{ii}(f_m)$ gehen aus den Diagonalelementen des Kreuzspektrums $E_{ii}(\omega)$ oder den Einpunkt-Spektra $E(\omega)$ (vgl. Gleichungen (7.42) und (7.46)) an den Stellen (y_i, z_i) hervor als¹²

$$S_{ii}(f_m) = \frac{1}{2} \Delta f E_{ii}(2\pi f_m) \quad . \quad (7.49)$$

Um die Struktur der Kreuzspektren zu vereinfachen, werden die Nebendiagonalelemente üblicherweise mit Hilfe einer Kohärenzfunktion $\text{Coh}(f_m, \Delta r_{ij}, \bar{u})$, die eine Funktion der Frequenz, des Abstandes $\Delta r_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ der beiden Punkte im Raum und der mittleren Windgeschwindigkeit \bar{u} ist, angegeben als

$$S_{ij}(f_m) := \text{Coh}(f_m, \Delta r_{ij}, \bar{u}) \sqrt{S_{ii}(f_m) S_{jj}(f_m)} \quad \text{für } i \neq j \quad . \quad (7.50)$$

Die Kohärenzfunktion $\text{Coh}(f_m, \Delta r_{ij}, \bar{u})$ beschreibt die Korrelationen zwischen Moden gleicher Frequenz an verschiedenen Orten. Sie nimmt mit steigender Frequenz sowie mit steigendem Abstand der Gitterpunkte i und j ab. Veers empfiehlt die Verwendung einer exponentiellen Kohärenzfunktion, die auf Frost und Davenport zurückgeht [Veers 1988],

$$\text{Coh}(f_m, \Delta r_{ij}, \bar{u}) = \exp\left(-\frac{C \Delta r_{ij} f_m}{\bar{u}}\right) \quad . \quad (7.51)$$

Die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} , die hier auftaucht, ergibt sich dabei als Mittelung über das gesamte Windfeld. Weil die Kohärenz exponentiell abfällt, ist die Matrix \mathbf{S} nicht-negativ definit. Weil sie darüber hinaus symmetrisch ist, existiert eine Zerlegung in ein Produkt aus Matrizen \mathbf{H} , sodass gilt

$$\mathbf{S}(f_m) = \mathbf{H}^*(f_m) \mathbf{H}^T(f_m) \quad . \quad (7.52)$$

Eine reellwertige Matrix $\mathbf{H}(f_m)$, die dieser Gleichung genügt, lässt sich mit Hilfe der *Cholesky-Zerlegung* iterativ berechnen,

$$H_{11}(f_m) = \sqrt{S_{11}(f_m)} \quad (7.53a)$$

$$H_{ij}(f_m) = \frac{S_{ij}(f_m) - \sum_{k=1}^{j-1} H_{ik}(f_m) H_{jk}(f_m)}{H_{jj}(f_m)} \quad \text{für } j < i \quad (7.53b)$$

$$H_{ij}(f_m) = \sqrt{S_{ij}(f_m) - \sum_{k=1}^{j-1} H_{ik}(f_m) H_{jk}(f_m)} \quad \text{für } j = i \quad . \quad (7.53c)$$

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass sich durch Berücksichtigung zufälliger Phasen stochastische Prozesse erzeugen lassen, die die gewünschten spektralen Eigenschaften haben. Für jedes m werden nun unabhängige Vektoren unabhängiger Zufallsphasen φ_{im} , die gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ liegen sollen, eingeführt und aus diesen der Vektor $\mathbf{x}(f_m)$ mit

$$x_i(f_m) := e^{i\varphi_i(f_m)} \quad (7.54)$$

¹²Die Notwendigkeit zur Verwendung des Vorfaktors „1/2“ hängt von der Art der FFT-Routine, die später zur Rücktransformation verwendet wird, ab. Für asymmetrische FFTs kann er ggf. wegfallen.

gebildet. Das Produkt $\mathbf{H}(f_m)\mathbf{x}(f_m)$ erfüllt dann im Ensemble-Sinne ebenfalls (7.52), wenn das Vektorprodukt als dyadisches Produkt berechnet wird und damit gilt:

$$\langle \mathbf{S}(f_m) \rangle = \mathbf{H}(f_m) \langle \mathbf{x}^*(f_m)\mathbf{x}^T(f_m) \rangle \mathbf{H}^T(f_m) = \mathbf{H}(f_m)\mathbf{H}^T(f_m) \quad . \quad (7.55)$$

Als inverse Fourier-Transformation, die sich mit Hilfe einer FFT berechnen lässt, ergibt sich für jede Realisierung der Zufallsphasen $\varphi(f_m)$ dann eine Zeitreihe

$$\mathbf{u}'(t) = \text{FFT}^{-1}(\mathbf{H}(f_1)\mathbf{x}(f_1), \dots, \mathbf{H}(f_m)\mathbf{x}(f_m)) \quad (7.56)$$

zu diskreten Zeitpunkten t_m , die das Kreuzspektrum \mathbf{S} aufweist und damit den gewünschten spektralen Eigenschaften genügt. Die einzelnen Komponenten der simulierten Geschwindigkeiten lassen sich dann über das Gitter (\mathbf{y}, \mathbf{z}) den einzelnen Punkten in der Ebene senkrecht zur Hauptwindrichtung zuordnen und ergeben nach Addition der jeweiligen mittleren Windgeschwindigkeiten $\bar{\mathbf{u}}$ gemäß (7.48) die Windgeschwindigkeiten $u_i(t)$ an den Stellen (y_i, z_i) für alle i .

Die für die numerische Implementierung des Algorithmus erforderlichen Schritte lassen sich aufteilen in eine Initialisierungs- und eine Simulationsphase:

- **Initialisierung:**

1. Initialisierung eines Gitters (\mathbf{y}, \mathbf{z}) , Berechnung der mittleren Windgeschwindigkeiten $\bar{\mathbf{u}}$ aus dem jeweiligen Höhenprofil,
2. Auswahl geeigneter Frequenzen f_1, \dots, f_N im Abstand Δf ,
3. für $m \in \{1, \dots, N\}$: Berechnung der Kreuzspektren $\mathbf{S}(f_m)$ nach (7.49) und (7.50),
4. für $m \in \{1, \dots, N\}$: Berechnung von $\mathbf{H}(f_m)$ gemäß (7.53).

- **Simulation:**

1. Für $m \in \{1, \dots, N\}$: Erzeugung von Zufallsphasen $\varphi(f_m)$,
2. Berechnung von $\mathbf{u}'(t)$ zu diskreten t_m mittels FFT nach (7.56),
3. für $m \in \{1, \dots, N\}$: Berechnung der Windgeschwindigkeiten $\mathbf{u}(t_m)$ nach (7.48).

Weil für die Berechnung der inversen FFT alle Matrizen $\mathbf{H}(f_m)$ vorgehalten werden müssen, war die Auflösung dieser Methode lange Zeit durch den zur Verfügung stehenden Speicher begrenzt. Dieses Problem hat sich jedoch durch die Verfügbarkeit großer Speichermengen weitgehend erübrigt, sodass der Algorithmus nun auch für die Simulation umfangreicher Datensätze verwendet und auf handelsüblichen Rechnern ausgeführt werden kann. Ein auf diesem Algorithmus aufbauendes Verfahren ist in der aktuellen Fassung der IEC-Normen als Generator für Windfelder, an denen Windkraftanlagen vor der Zulassung getestet werden müssen, vorgesehen. Der Algorithmus ist daher – in verschiedener Form – in einige Programmsysteme implementiert, die sich zu diesem Zweck nutzen lassen. Besonders hervorgehoben werden soll an dieser Stelle das Programm „TurbSim“, das von NREL entwickelt wird und für wissenschaftliche Zwecke als Quelle zur Verfügung gestellt wird [TurbSim 2007]. Beispiele für ein mit Hilfe dieses Programms erzeugtes Windfeld und Ausschnitte aus simulierten Zeitreihen finden sich in den Abbildungen 7.9 bis 7.12.

Enden soll dieser Unterabschnitt mit einem Zitat aus einer frühen Arbeit von Veers, in der er sich mit den Möglichkeiten, die die „Sandia-Methode“ bietet, kritisch auseinandersetzt [Veers 1984, S. 6]:

„The main difference between this turbulence simulation and other methods [...] is that in this simulation the turbulence is based solely on

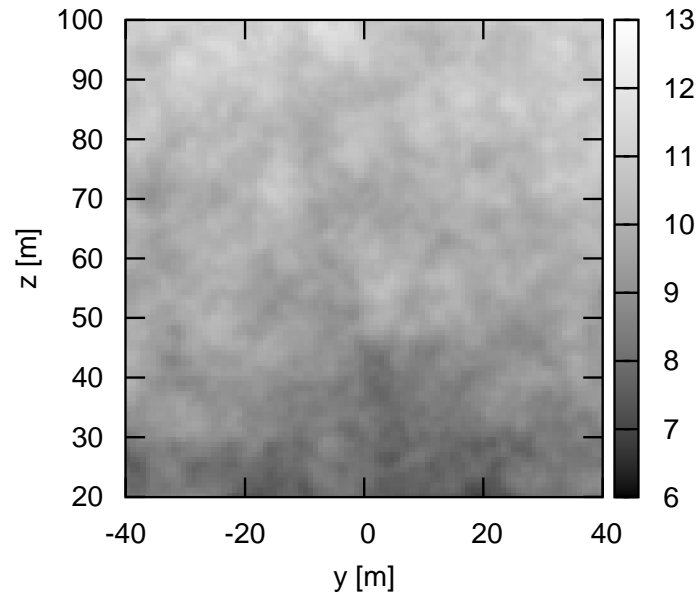


ABBILDUNG 7.9: Schnitt durch eine y - z -Ebene eines auf Basis der „Sandia-Methode“ generierten turbulenten Geschwindigkeitsfeldes. Aufgetragen ist der Betrag der Windgeschwindigkeit. Zunächst einmal ist die Zunahme des Windes aufgrund des Höhenprofils, das in Grenzschichten beobachtet wird, zu erkennen. Weiterhin sieht man, dass sich auf großen Skalen aufgrund der für diese Moden nur langsam abfallenden Kohärenzfunktion (7.51) räumliche Strukturen ausbilden können. Das Feld wurde mit Hilfe von TurbSim [2007] erzeugt. Dabei wurden eine Turbulenzintensität von 10 % bei einer mittleren Windgeschwindigkeit von 10 m/s in einer Höhe von 60 m (Nabenhöhe), normale Turbulenzbedingung nach IEC und das Kaimal-Modell für atmosphärische Turbulenz zugrunde gelegt.

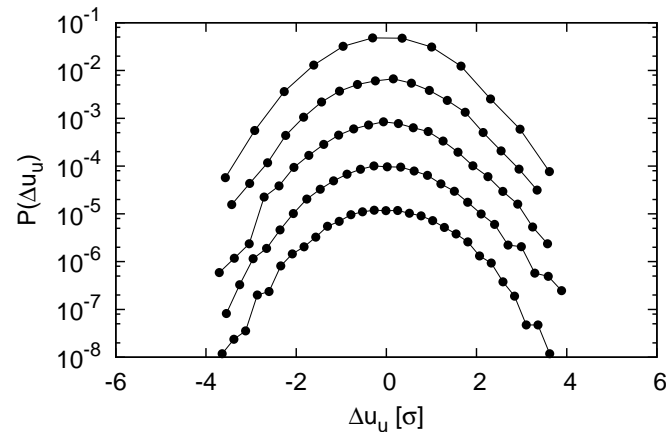


ABBILDUNG 7.10: Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente der u -Komponente des in Abbildung 7.9 dargestellten und beschriebenen Windfeldes für einen Gitterpunkt auf Nabenhöhe für die Zeitinkremente $\Delta t = 1, 5, 10, 30$ und 60 s (von oben nach unten). Der Übersichtlichkeit halber sind die einzelnen Verteilungen gegeneinander verschoben dargestellt. Im Gegensatz zu den Geschwindigkeitsinkrementen von Messungen in der Atmosphäre, die z.B. in Abbildung 7.3 zu sehen sind, sind die Inkremente spektraler Simulationen auf allen Zeitskalen normalverteilt.

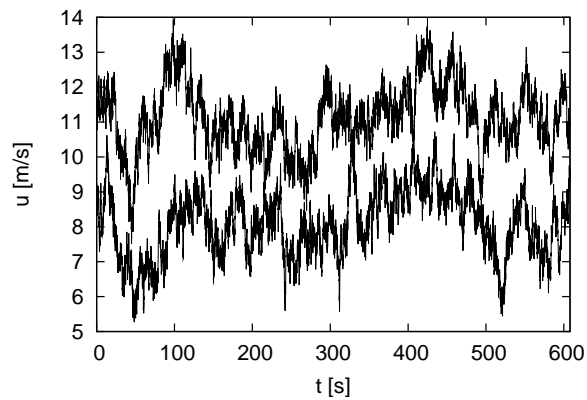


ABBILDUNG 7.11: Zeitentwicklung des in Abbildung 7.9 dargestellten Windfeldes an zwei Messpunkten in den Höhen 100 m (oben) und 20 m (unten). Es ist deutlich, dass die groben Strukturen, die in den Moden niedriger Frequenz stecken, stark korreliert sind. Für die schnellen Fluktuationen gilt das offensichtlich nicht. Im Gegensatz zu Messungen in der Atmosphäre sind die Statistiken jedoch ausnahmslos Gauß'sch, weil die Korrelationen höherer Ordnung durch das Modell nicht richtig wiedergegeben werden (vgl. Zitat aus der Arbeit von Veers auf Seite 116). Für Details bezüglich der Erzeugung der Zeitreihen sei auf die Beschreibung von Abbildung 7.9 verwiesen.

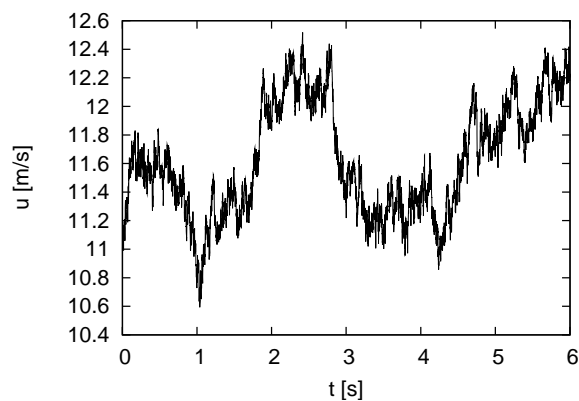


ABBILDUNG 7.12: Ausschnitt aus der in Abbildung 7.11 gezeigten Zeitreihe der Windgeschwindigkeit an einem Punkt in 100 m Höhe. Dissipative Effekte, die zu einer Glättung der Zeitreihe führen würden, sind erst unterhalb von Zeitintervallen der Größenordnung von ms zu erwarten und deshalb auf den hier abgebildeten Zeitskalen nicht zu erkennen. Für Details bezüglich der Erzeugung der Zeitreihen sei auf die Beschreibung von Abbildung 7.9 verwiesen.

its first and second moments without any reference to the fluid dynamics of the wind. There is no guarantee, that this simulated flow field will be continuous, compatible or physically realizable. However, by matching its first two statistical moments, the turbulence properties which have the most significant impact on the blade loads and therefore the structural response of the wind turbine are accurately represented. The risk of misinterpreting physical flow properties is balanced by the statistical accuracy and simplicity of this approach.“¹³

Veers wägt also Stärken und Schwächen des Ansatzes explizit ab und empfiehlt eine kritische Nutzung der Simulationsergebnisse. In späteren Arbeiten tauchen derartige Hinweise leider nicht mehr auf [vgl. z.B. Veers 1988]. Aus diesem Grund sind sich viele Anwender spektraler Simulationsmethoden der Unzulänglichkeiten der simulierten Windfelder insbesondere im Bezug auf Extremereignisse und kohärente Effekte leider nicht bewusst.

Erweiterung der spektralen Simulationsmethoden durch Mann

Nachdem die „Sandia-Methode“ weite Verbreitung gefunden hatte, erweiterte Mann die spektrale Simulation im Jahr 1998 [Mann 1998]. Indem er statt der Kreuzspektra den spektralen Tensor für die Simulation verwendet, können alle drei Geschwindigkeitskomponenten gleichzeitig simuliert werden. Damit ist es prinzipiell möglich, Windfelder mit verschwindender Divergenz zu erzeugen. Mann betont, dass die von ihm abgeleitete Methode deshalb physikalischer sei und sich außerdem leichter und schneller implementieren lasse als die „Sandia-Methode“. Gegen letzteres Argument spricht, dass es bislang keinen frei verfügbaren Code gibt, der diese Methode stabil umsetzt. Trotzdem hat sie sich mittlerweile zum Standard in der Windenergiebranche entwickelt.

Auch Mann betrachtet nur die turbulenten Fluktuationen \mathbf{u}' des atmosphärischen Windes, die nach der Simulation gemäß (7.48) noch mit der mittleren Windgeschwindigkeit zusammengeführt werden müssen. Während bei der „Sandia-Methode“ die drei Geschwindigkeitskomponenten einzeln als Funktion der Zeit simuliert werden, basiert Manns Verfahren auf der räumlich ausgedehnten Simulation der Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ zu einem festen Zeitpunkt. Im Gegensatz zu Veers soll $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$ nun die drei Komponenten der Windgeschwindigkeit am Ort \mathbf{x} beschreiben. Unter Anwendung der Taylor-Hypothese der (zeitlich) eingefrorenen Turbulenz¹⁴ wird das simulierte Windfeld dann später mit einer Geschwindigkeit \bar{u} , die man durch Mittelung aus dem Höhenprofil gewinnt, in eine Zeitreihe des Windes in einer Ebene senkrecht zur mittleren Windrichtung umgerechnet.

Die Statistik von \mathbf{u} wird bis zur zweiten Ordnung vollständig beschrieben durch den

¹³Sinngemäß ins Deutsche übertragen: „Der Hauptunterschied zwischen dieser Turbulenzsimulation und anderen Methoden [...] ist es, dass in dieser Simulation die Turbulenz allein auf den ersten und zweiten Momenten basiert und keinen Bezug zur Strömungsdynamik des Windes hat. Es ist nicht sichergestellt, dass die simulierten Felder stetig und physikalisch verträglich und realisierbar sind. Durch Reproduktion der ersten beiden statistischen Momente werden jedoch die Eigenschaften der Turbulenz, die den wichtigsten Einfluss auf die Blattlasten und die Struktur der Windkraftanlage haben, richtig wiedergegeben. Das Risiko der Fehlinterpretation der physikalischen Eigenschaften der Strömung wird durch die statistische Genauigkeit und Einfachheit dieses Ansatzes ausgeglichen.“

¹⁴Die Anwendung von Taylor’s Hypothese in der atmosphärischen Turbulenz bedeutet neben der Tatsache, dass die Dynamik des Feldes eingefroren wird, auch, dass das gesamte Feld mit einer festen, mittleren Geschwindigkeit über einen festen Punkt hinwegtransportiert wird. Insbesondere die letzte Annahme ist dabei aufgrund der Schichtung der Strömung in der Grenzschicht als kritisch zu betrachten. Für eine Diskussion der Zulässigkeit diese Annahme mit dem Ergebnis, dass im Moment kein besseres Modell zur Verfügung steht, sei an dieser Stelle auf Kaimal & Finnigan [1994, S. 61f] verwiesen.

Kovarianztensor

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad . \quad (7.57)$$

Bei der Formulierung der entsprechenden Korrelationen in der Zeit, vgl. (7.45), wurde stets Stationarität vorausgesetzt und deshalb keine explizite Abhängigkeit von t zugelassen. In ähnlicher Weise setzt Mann für den Kovarianztensor nun Homogenität voraus und nimmt an, dass dieser keine explizite Abhängigkeit von \mathbf{x} aufweist. Auch wenn die Annahme an dieser Stelle nicht widerlegt werden kann, sei darauf hingewiesen, dass sie u.U. wesentlich schwerer wiegt als die Annahme von Stationarität durch Veers [1988], weil die Symmetrie in der Atmosphäre gebrochen ist und eine Abhängigkeit des Kovarianztensors insbesondere von der Höhe deshalb zu vermuten ist. In einigen spektralen Modellen hängen die Spektren aus diesem Grunde explizit von der Höhe ab [vgl. z.B. Kaimal & Finnigan 1994, S. 41ff].

Die Fourier-Transformation des Kovarianztensors,

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d\mathbf{r} R_{ij}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}^T \mathbf{r}}, \quad (7.58)$$

wird als *spektraler Tensor* bezeichnet. Aus dem spektralen Tensor ergeben sich die Kreuzkorrelationen (7.45) im Ort mit Hilfe einer Fourier-Rücktransformation bezüglich der Komponenten k_2 und k_3 [Mann 1998]. Für die multivariate Formulierung der Funktionen in Abhängigkeit von \mathbf{x} und \mathbf{k} lässt sich für die Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ analog zu (7.38) eine Darstellung als Stieltjes-Integral wählen,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{Z}(\mathbf{k}, d\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}} \quad , \quad (7.59)$$

wobei die Statistik des Prozesses $\mathbf{Z}(\mathbf{k})$ nun durch den spektralen Tensor festgelegt wird als

$$\langle dZ_i^*(\mathbf{k}, d\mathbf{k})dZ_j(\mathbf{k}', d\mathbf{k}') \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Phi_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad . \quad (7.60)$$

Veers konnte auf verschiedene Modelle für atmosphärische Spektren zurückgreifen. Weil solche Modelle für den spektralen Tensor nicht verfügbar waren, hat Mann für die gescherte Turbulenz, die man in der Atmosphäre aufgrund der Reibung am Erdboden erwartet, ein Modell für einen anisotropen Tensor entwickelt. Mann hat sein Modell an verschiedenen Modellen für Kreuzspektren in atmosphärischer Turbulenz und mit Hilfe von Messungen validiert und gezeigt, dass sich die Parameter entsprechend anpassen lassen.

Die Simulation von Windfeldern erfolgt dann auf Basis von (7.59). Nach Diskretisierung des Integrals ergibt sich

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_j e^{i\mathbf{k}^T \mathbf{x}} C_{ij}(\mathbf{k}) \eta_j(\mathbf{k}) \quad . \quad (7.61)$$

$\eta_j(\mathbf{k})$ sind unabhängige, komplexe Zufallszahlen, deren Real- und Imaginärteil jeweils einer Normalverteilung mit Varianz 1 genügt. In diesem Punkt unterscheidet sich der vorgeschlagene Algorithmus von Veers, der die Normierung der komplexen Zufallszahlen auf den Betrag 1 vorsieht. Die Vor- und Nachteile der jeweiligen Ansätze wurden von Grigoriu [1993] ausgiebig diskutiert.

Im Limes feiner Auflösungen Δk_i sind die Matrizen $C_{ij}(\mathbf{k})$ analog zu (7.52) definiert als

$$\frac{(2\pi)^3}{V(B)} \Phi(\mathbf{k}) = \mathbf{C}(\mathbf{k})^* \mathbf{C}(\mathbf{k})^T \quad (7.62)$$

und lassen sich in ähnlicher Form für jedes \mathbf{k} mit Hilfe einer Cholesky-Zerlegung (7.53) aus dem spektralen Tensor gewinnen. $(2\pi)^3/V(B)$ ist hierbei das durch die

Diskretisierung von \mathbf{k} aufgespannte Integrationsvolumen im Fourierraum. Nach geeigneter Wahl einer Diskretisierung [vgl. Mann 1998] lässt sich (7.61) dann mit Hilfe von FFT-Routinen effizient auswerten. Nach der Simulation von $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ erhält man die Felder in der Rotorebene ($x = 0$) an der Stelle (y, z) zur Zeit t mit Hilfe der Taylor-Hypothese dann als

$$\mathbf{u}(y, z, t) = \bar{\mathbf{u}}(y, z) + \mathbf{u}'(\bar{u}t, y, z) \quad . \quad (7.63)$$

Manns Algorithmus ist eine interessante Alternative zur ursprünglichen Methode von Veers, weil die simultane Simulation aller drei Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes Korrelationen zwischen den drei Komponenten ermöglicht, die in atmosphärischen Messungen stets beobachtet werden. Die Annahme der räumlichen Homogenität, die als Vereinfachung vorausgesetzt wird, stellt jedoch einen Wermutstropfen dar. Eine solche Annahme ist in Veers' Modellierung nicht notwendig.

Erweiterungen der spektralen Modelle

Seit dem Erscheinen von Manns Arbeit [1998] sind einige Vorschläge gemacht worden, das Ergebnis der spektralen Simulationen weiter zu verbessern. Diese Vorschläge betreffen zum Teil technische Details der Algorithmen, die Anpassung an atmosphärische Messungen und die Berücksichtigung nicht-Gauß'scher stationärer Verteilungen. Hier werden exemplarisch einige Arbeiten herausgegriffen und vorgestellt.

Frehlich u.a. [2001] beschäftigen sich mit den Problemen der Diskretisierung der kontinuierlichen Darstellung der Zufallsprozesse nach Mann [1998], die im letzten Abschnitt vorgestellt wurden und die durch (7.59) gegeben sind. Die Diskretisierung des Spektrums stellt einen kritischen Punkt in sämtlichen spektralen Simulationen dar, weil die simulierten Felder dadurch bandpass-gefiltert werden: Frequenzen oberhalb der Nyquist-Frequenz¹⁵ können nicht wiedergegeben werden. In der Atmosphäre findet eine solche Dämpfung aber erst auf den Größenskalen der Kolmogorov-Länge statt, die in der Größenordnung von cm liegt und in spektralen Simulationen in der Regel nicht aufgelöst wird. Das Abschneiden der hohen Frequenzen verursacht eine Abweichung von den spektralen Eigenschaften atmosphärischer Turbulenz. Bei niedrigen Frequenzen führt die Diskretisierung dazu, dass die Regularisierung der spektralen Modelle bei niedrigen Frequenzen auf den integralen Längenskalen mitunter nicht richtig aufgelöst wird.

Frehlich u.a. schlagen deshalb vor, die Wichte für die Amplituden $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ nicht über den spektralen Tensor (vgl. (7.62)) zu definieren, sondern über die (diskrete) Fouriertransformierte des Kovarianztensors $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ zu berechnen. Auch wenn diese beiden Ansätze im Kontinuuumlimit äquivalent sind, berichten Frehlich u.a. für das diskretisierte Problem von besseren Simulationsergebnissen.

Eine andere sehr interessante Methode, die sich insbesondere auf die Simulation nach Veers [1988] anwenden lässt, haben Bierbooms u.a. [2004; 2007] vorgestellt. Sie haben sich mit der Frage beschäftigt, wie vorhandene Messergebnisse in die Simulation mit eingearbeitet werden können, sodass das simulierte Feld an einigen Gitterpunkten exakt den gemessenen Werten entspricht. Die anderen Punkte des Gitters werden mit Hilfe der spektralen Simulation „aufgefüllt“ und genügen dann der Statistik zweiter Ordnung, die durch Turbulenzmodelle beschrieben wird. Bierbooms u.a. haben sich die spezielle Struktur der Matrix $\mathbf{H}(f_m)$ zunütze gemacht, die gemäß der Cholesky-Zerlegung (7.53) aus der Matrix $\mathbf{S}(f_m)$ hervorgeht: $\mathbf{H}(f_m)$

¹⁵Die Nyquist-Frequenz ist die höchste Frequenz, die bei äquidistanter Abtastung eines Signals mit der Abtastfrequenz f aufgelöst werden kann, und beträgt $f/2$. Die Tatsache, dass eine zu niedrige Wahl von f zu fehlerhaften Ergebnissen führen kann, spielt an dieser Stelle keine Rolle, weil hier nur die Simulation von Zufallsprozessen betrachtet wird.

ist stets eine linke untere Dreiecksmatrix,

$$\mathbf{H}(f_m) = \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ X & \cdots & \cdots & X \end{pmatrix}. \quad (7.64)$$

Wenn das Feld auf einem Gitter von n Punkten simuliert werden soll, hat $\mathbf{H}(f_m)$ die Dimension $n \times n$. Zu jeder Frequenz f_m müssen dann n Zufallsphasen $\varphi_i(f_m)$ gewählt werden. Bierbooms u.a. legen ohne Einschränkung der Allgemeinheit das Gitter (\mathbf{y}, \mathbf{z}) so, dass die n^* Gitterpunkte, an denen gemessene Werte reproduziert werden sollen, die ersten n^* Komponenten belegen. Das Produkt $\mathbf{H}(f_m)\mathbf{x}(f_m)$ liefert die Fourier-Komponenten des zu simulierenden Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{u}(t)$ zur Frequenz f_m . Aufgrund der Diagonalstruktur von \mathbf{H} können die ersten n^* Komponenten der Zufallsvektoren \mathbf{x} nun iterativ so gewählt werden, dass die ersten n^* Komponenten von $\mathbf{H}(f_m)\mathbf{x}(f_m)$ denen der Fourier-Transformationen der gemessenen Zeitreihen entsprechen.¹⁶ Für die übrigen $n - n^*$ Komponenten der Zufallsvektoren \mathbf{x} werden – wie bereits beschrieben – Zufallsphasen verwendet. Nach Anwendung der inversen FFT hat das resultierende Geschwindigkeitsfeld dann die gewünschten Eigenschaften. Eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens und einige Beispiele finden sich bei Bierbooms [2004].

Während Bierbooms u.a. das Anwendungsfeld einer solchen Methode in der Simulation (und Extrapolation) von Windfeldern sehen, ist sie aus unserer Sicht insbesondere für die (stochastische) Interpolation von diskretisierten Feldern unter Berücksichtigung der Zweipunktkorrelationen von allgemeinem Interesse. Eine solche Interpolation wird z.B. bei der Berechnung von Lasten an Windkraftanlagen stets benötigt, um die simulierten Windfelder an bestimmten Stellen feiner aufzulösen, als es die ursprüngliche Simulation vorsieht. Üblicherweise werden dafür Interpolationen der umliegenden Gitterstellen mit Polynomen verwendet, die aber stets zu einer Glättung der Felder führen. Ähnliche Problemstellungen sind in der Meteorologie („Downscaling“) sowie z.B. bei der Integration der Trajektorien Lagrange’scher Teilchen in direkten numerischen Simulationen der Navier-Stokes-Gleichungen (7.4) anzutreffen. Auch hier ist prinzipiell an einen Einsatz der von Bierbooms u.a. [2004; 2007] vorgestellten Methode zu denken.

Es ist schon mehrfach erwähnt worden, dass die mit Hilfe der hier vorgestellten Methoden zur spektralen Simulation generierten Daten aufgrund der stochastischen und unabhängigen Wahl der Phasen und/oder Amplituden Gauß’schen Statistiken genügen und damit insbesondere die stationäre Verteilung eine Normalverteilung ist. Viele Messungen zeigen jedoch – z.B. aufgrund des in Anhang B beschriebenen Auftretens der Weibull-Verteilung für den Betrag der Geschwindigkeit – eine Abweichung und genügen stattdessen der stationären Verteilung f' . Es sind daher verschiedene Verfahren entwickelt worden, die Methoden zur spektralen Simulation so zu modifizieren oder zu erweitern, dass auch solche Zeitreihen mit den gewünschten spektralen Eigenschaften erzeugt werden können.

Die meisten Ansätze setzen als Ausgangspunkt simulierte Daten \mathbf{x} auf Basis der üblichen spektralen Verfahren voraus, die dann einer (nichtlinearen) Transformation \mathcal{T} unterzogen werden, sodass

$$u_i := \mathcal{T}(x_i) \quad (7.65)$$

¹⁶Formal lässt sich zur Berechnung der n^* Zufallszahlen auch das Inverse von \mathbf{H} , \mathbf{H}^T , verwenden.

der gewünschten stationären Verteilung genügt. Wenn

$$F_\sigma(x) := \int_{-\infty}^x dx' \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x'^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{und} \quad F'(x) := \int_{-\infty}^x dx' f'(x') \quad (7.66)$$

die Verteilungsfunktionen (2.4) der Normal- sowie der Zielverteilung f' sind, so lässt sich die Transformation \mathcal{T} z.B. mit Hilfe der Umkehrfunktion von F, F^{-1} , ausführen als

$$\mathcal{T}(x_i) := F' [F^{-1}(x_i)] \quad . \quad (7.67)$$

Die gemäß (7.65) gewonnenen Daten \mathbf{u} genügen nun der gewünschten stationären Verteilung. Mit der Transformation ist aber das Spektrum verändert worden, so dass die gewünschten spektralen Eigenschaften nicht mehr erfüllt sind. Diese Unzulänglichkeit, die häufig auch „*correlation distortion*“ genannt wird, lässt sich z.B. iterativ beheben, indem die spektralen Eigenschaften von \mathbf{x} vor der Anwendung der Transformation (7.65) gezielt verändert werden, sodass die transformierte Zeitreihe die gewünschten spektralen Eigenschaften besitzt. Einen guten Überblick über verschiedene Verfahren dieser iterativen Optimierung bieten Masters & Gurley [2003]. Speziell für Anwendungen zur Simulation von Windfeldern ist die Anwendung der Verfahren durch Gurley u.a. [1997] sowie Nielsen u.a. [2004] beschrieben. Einen insbesondere bei der Initialisierung der iterativen Optimierung etwas anderen Ansatz, der aber zum gleichen Ergebnis führen sollte, stellt die als „iterative amplitude adjusted fourier transform“ (IAFFT) bezeichnete Methode vor, die in der Meteorologie Anwendung findet und von Venema u.a. [2006] beschrieben wird.

Insgesamt ist zu bemerken, dass sich die Bemühungen, nicht-Gauß'sches, intermittentes Verhalten modellieren zu können, im Wesentlichen auf die stationäre Verteilung beschränken. In Abschnitt 7.2 haben wir jedoch gesehen, dass neben der stationären auch alle Inkrementverteilungen nicht-Gauß'schen Charakter haben. Während eine exakte Modellierung einer stationären Verteilung z.B. für die Abschätzung des Energieertrags von Windkraftanlagen wichtig sein wird, dürften die dynamischen Auswirkungen der intermittenten Inkrementverteilungen wesentlich größer sein als die Einflüsse der modifizierten stationären Verteilung. Außer von Nielsen u.a. [2004, S. 21 ff] wird die Statistik der Inkremente jedoch nicht untersucht.

Gurley u.a. [1997] weisen ferner darauf hin, dass sich über die Berücksichtigung von Phasenkorrelationen bei der Erzeugung von spektralen Surrogaten gezielt Daten erzeugen lassen, die z.B. eine erhöhte Wahrscheinlichkeit von Extremereignissen aufweisen. Es sind aber bislang keine Versuche bekannt, diese Tatsache für die Simulation von Windfeldern ernsthaft auszunutzen. Das liegt vermutlich daran, dass die Phasen-Statistik atmosphärischer Turbulenz noch nicht ausreichend untersucht, verstanden und modelliert wurde.

Darüber hinaus hat es einige Versuche gegeben, lokale Instationaritäten, die durch größere Wetterphänomene verursacht werden und auf kleinen Skalen zu nicht-Gauß'scher Statistik führen können, nachträglich in die Simulationen auf Basis spektraler Modelle einzuführen.

So schlagen z.B. Nielsen u.a. [2007] vor, mit Hilfe spektraler Simulationsmethoden Simulationen für verschiedene Bedingungen durchzuführen und diese im Nachhinein zu kombinieren. Auf diese Art und Weise soll sich z.B. der plötzliche Durchzug einer Wetterfront, der mit einer kohärenten Erhöhung der Windgeschwindigkeit in sehr kurzer Zeit einhergeht, mit Hilfe einer gewichteten Kombination aus den jeweiligen Wettersituationen ergeben. Ein direkter Nutzen solcher Windfelder ist aber nur schwer zu erkennen, weil zur Berücksichtigung solcher Effekte für Simulationen eine statistische Charakterisierung der zugrundeliegenden Ereignisse nötig wäre. Außerdem treten Ereignisse in der Form, wie Nielsen u.a. sie untersucht haben, nur sehr

selten auf. Windenergieanlagen überstehen solche Stürme in der Regel ohne Schaden. Es ist daher fragwürdig, ob der Durchzug solcher Fronten für die Berechnung von (Ermüdungs-) Lasten wirklich relevant ist.

Einen noch einfacheren Ansatz verfolgen Xu & Chen [2004] und Chen u.a. [2007]. Sie modifizieren (7.48) dahingehend, dass sie eine zeitabhängige mittlere Windgeschwindigkeit, $\bar{\mathbf{u}}(t)$, einführen. Den Verlauf der mittleren Windgeschwindigkeit simulieren sie auf Basis von Eigenmoden, die sie aus gemessenen Windgeschwindigkeiten gewinnen. An dieser Stelle wäre natürlich auch eine stochastische Entwicklung der mittleren Windgeschwindigkeit denkbar [Monahan 2004, 2006; Sura & Gille 2003; Sura 2003]. Dieses einfache Modell ist jedoch nicht in der Lage, den multiplikativen Zusammenhang zwischen der Amplitude der Fluktuationen und der mittleren Windgeschwindigkeit zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 7.7).

Wichtig ist noch der Hinweis von Chen u.a. [2007] auf die Auswirkungen von Instationaritäten auf die Turbulenzintensität, die sich bei den langen Mittelungsperioden von 10 min bis 1 h, die von Ingenieuren üblicherweise verwendet werden, ergeben. Dieses Problem wird im Rahmen von Anhang C noch einmal aufgegriffen.

7.4.3 Kinematische Simulation turbulenter Strömungen

Fung u.a. [1992] haben in den neunziger Jahren speziell die Simulation turbulenter Strömungen mit Hilfe von Zufallsprozessen im Fourierraum weiterentwickelt und für die in diesem Rahmen entstandene Simulationsmethode den Begriff *Kinematische Simulation* (engl.: „Kinematic Simulation“ (KS)) geprägt. Ziel ihrer Arbeiten war es, einen vom Rechenaufwand her im Verhältnis zu den zu Beginn des Abschnittes 7.4 vorgestellten direkten Methoden günstigen Algorithmus zu entwickeln, der in der Lage ist, insbesondere im Hinblick auf die Dynamik von advektierten Teilchen die wesentlichen Charakteristika turbulenter Strömungen wiederzugeben.

Sie verwenden deshalb einen hybriden Ansatz und gehen – ähnlich wie z.B. in den Arbeiten von Veers [1984, 1988] und Mann [1998] geschildert – von einem mit Hilfe spektraler Surrogate erzeugten Zufallsfeld aus, das den gewünschten Zweipunktkorrelationen genügt. Im Vergleich zu den bislang vorgestellten Methoden ist der Aufwand dabei etwas höher, weil die Felder $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ bei Fung u.a. durch eine stochastische Verschiebung der einzelnen Moden als Funktion der Zeit explizit zeitabhängig sind. Zentraler Punkt bei der Kinematischen Simulation ist, dass das Geschwindigkeitsfeld in zwei Felder aufgeteilt wird,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_l(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) \quad , \quad (7.68)$$

wobei \mathbf{u}_l die großen Moden und \mathbf{u}_s die kleinen Moden mit der schnellen Dynamik aufnehmen soll. Weil in atmosphärischer Turbulenz keine klare Trennung zwischen großen und kleinen Moden möglich ist, bestehen bei der Wahl einer geeigneten Trennwellenzahl k_c gewisse Freiheiten. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass die Dynamik der großen Moden weitgehend Markov-Eigenschaften genügt und die zeitlichen Korrelationen der Phasenverschiebung daher unabhängig sind und exponentiell abfallen [Fung u.a. 1992]. Die Dynamik von \mathbf{u}_l kann alternativ zu spektralen Simulationen z.B. auch aus LES-Rechnungen gewonnen werden.

Fung u.a. führen dann zwei verschiedene Modelle ein, von denen an dieser Stelle insbesondere das „Sweeping Model“ (KSSM) interessant ist. Dafür gehen sie davon aus, dass das Feld \mathbf{u}_s homogene und isotrope Turbulenz auf kleinen Skalen darstellt, die durch das Feld \mathbf{u}_l transportiert wird. Ausgehend von einem korrekt initialisierten Feld $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t = 0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ soll die zeitliche Dynamik von \mathbf{u}_s dann mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen (7.4) ohne den Einfluss externer Kräfte und ohne Berücksichtigung von Reibungstermen simuliert werden,

$$\frac{\partial (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_s)}{\partial t} = -((\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_s) \cdot \nabla) (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_s) - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad . \quad (7.69)$$

Weil \mathbf{u}_s in Raum und Zeit sehr schnell veränderlich ist, lassen sich alle Terme vernachlässigen, die keine Ableitungen von \mathbf{u}_s enthalten. Darüber hinaus liefert $(\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s$ aufgrund der verhältnismäßig kleinen Amplituden von \mathbf{u}_s keinen entscheidenden Beitrag, sodass es ebenfalls vernachlässigt werden kann. Man erhält schließlich eine Advektionsgleichung für die zeitliche Entwicklung von \mathbf{u}_s ,

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \approx (\mathbf{u}_l \cdot \nabla) \mathbf{u}_s \quad , \quad (7.70)$$

die gelöst wird durch

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_s(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t = 0) \quad . \quad (7.71)$$

Die Trajektorie $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ ergibt sich dabei als integrierter Pfad aus dem durch die großen Moden erzeugten Feld als

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \int_0^t dt' \mathbf{u}_l(\mathbf{X}(t'), t') \quad . \quad (7.72)$$

Die Turbulenz auf kleinen Skalen wird also – wie Lagrange-Partikel in turbulenten Strömungen – von den großen Skalen transportiert. Zusätzlich sehen Fung u.a. eine Variation des Feldes $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$ mit der Zeit vor. Die genaue Umsetzung der Methode geht aus der uns zur Verfügung stehenden Literatur jedoch leider nicht im Detail hervor.

Die Berechnung von Feldern mit derartigen Verfahren ist sicherlich aufwändiger als die Beschränkung auf die spektralen Simulationen. Es ist jedoch vorstellbar, dass mit dem von Fung u.a. vorgeschlagenen Verfahren eine Verbesserung der Felder zu erzielen ist. Versuche der Anwendung dieses Verfahrens im Bereich der Windenergie sind bislang nicht bekannt.

Nun sollen kurz noch einige Modelle vorgestellt werden, die bislang nur für die Simulation eindimensionaler Zeitreihen verwendet wurden, sich jedoch prinzipiell auch zur Berechnung mehrdimensionaler Probleme eignen.

7.4.4 Simulation einer turbulenten Kaskade mit Hilfe von Wavelets

Neben der Beschreibung der spektralen Eigenschaften von Zeitreihen hat sich – zumindest in der Datenanalyse und -verarbeitung – inzwischen auch eine Beschreibung auf der Basis von *Wavelets* durchgesetzt. Im Gegensatz zur Darstellung des Signals als Superposition von Fourier-Moden bieten Wavelets den Vorteil, dass sie sowohl im Orts- als auch im Frequenzraum lokalisiert sind. „Wavelet“ ist dabei der Oberbegriff für eine breite Klasse von Basisfunktionen $\Psi(x)$. Eine notwendige Bedingung für Basisfunktionen von Wavelets ist, dass der Mittelwert verschwindet. Zur Auflösung lokalisierter Strukturen verschiedener Größe werden die Basisfunktionen geeignet verschoben und skaliert. Für die Verschiebung a ergibt sich das Wavelet auf der Skala b dann als

$$\Psi_{a,b}(x) = \frac{1}{b} \Psi \left(\frac{x-a}{b} \right) \quad . \quad (7.73)$$

Ein Beispiel für einen Satz von Wavelet-Basis-Funktionen, der in analytischer Form angegeben werden kann, ist der sogenannte „*Mexican Hat*“, der in Abbildung 7.13 zu sehen ist, mit der Basisfunktion

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1-x^2) \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) \quad . \quad (7.74)$$

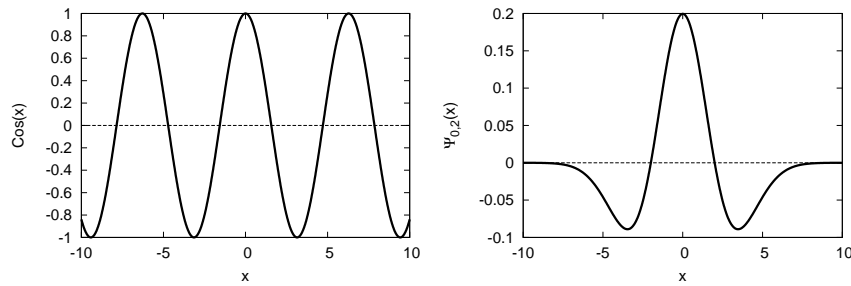


ABBILDUNG 7.13: Basisfunktionen für die Transformation von Signalen zur Analyse, Charakterisierung und Verarbeitung. Bei Fourier-Transformationen wird das Signal durch Überlagerung ebener Wellen beschrieben, die nicht lokal sind (links). Im Frequenzraum hingegen kann eine sehr gute Auflösung erreicht werden. Basisfunktionen, die für Wavelet-Transformationen verwendet werden, wie z.B. der hier abgebildete „Mexican Hat“ (vgl. (7.73) und (7.74)), sind in Orts- und Frequenzraum lokalisiert und eignen sich deshalb insbesondere für die Auflösung kohärenter Strukturen.

Der Wavelet-Koeffizient $H(a, b)$ einer Messung $h(x)$ zur Position a und Skala b berechnet sich dann durch Projektion auf $\Psi_{a,b}$ als

$$H(a, b) := \int dx h(x) \Psi_{a,b}(x) \quad . \quad (7.75)$$

Für praktische Anwendung von großer Bedeutung ist, dass es für orthonormale Wavelets ähnlich zur FFT einen schnellen Algorithmus zur Anwendung auf diskrete Messungen gibt, die sogenannte „fast wavelet transform“ (FWT), deren Rechenaufwand nur linear mit der Länge des zu transformierenden Datensatzes steigt. Die Anwendung dieses Algorithmus ist damit sogar schneller als das Durchführen von FFTs.

In turbulenten Strömungen spielen kohärente, d.h. räumlich und/oder zeitlich lokalisierte Phänomene eine wichtige Rolle. Eine Beschreibung auf Basis von Wavelets eignet sich gut zur Identifizierung solcher Effekte und wurde z.B. von Yamada & Ohkitani [1991] für die Analyse atmosphärischer Turbulenz verwendet. Angelini u.a. [2005] konnten später zeigen, dass sich die Wavelet-Transformationen von atmosphärischen Messungen und von mit Hilfe spektraler Simulationsmethoden erzeugter Turbulenz signifikant unterscheiden, weil bei letzterer Extremereignisse sehr selten und – vor allem – statistisch über die verschiedenen Skalen verteilt auftreten. Bei der Analyse von Messungen wird hingegen das simultane Auftreten von Extremereignissen auf vielen verschiedenen Skalen beobachtet. Eine detaillierte Beschreibung der Grundlagen zur Nutzung von Wavelets zur Beschreibung von Turbulenz findet sich z.B. bei Farge [1992].

Neben der Analyse lassen sich Wavelet-Transformationen auch zur Modellierung turbulenter Strukturen verwenden. So beschreiben Farge u.a. [1999, S. 171 ff] die Verwendung von Wavelet-Transformationen zur direkten Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (7.4). Weil die meisten Waveletkoeffizienten in guter Näherung verschwinden, reduziert sich die Anzahl der relevanten Koeffizienten drastisch. Ein Vernachlässigen der Koeffizienten kleiner Amplitude entspricht einer Kompression der zu verarbeitenden Datenmenge und führt damit zu beschleunigten Algorithmen zur Lösung der Gleichungen für die betrachteten Koeffizienten. Außerdem wurden Wavelet-Zerlegungen zur Erzeugung von Surrogaten von an turbulenten Strömungen gemessenen Zeitreihen vorgeschlagen [Angelini u.a. 2005; Gurley u.a. 1997]. Eine Anwendung solcher Verfahren ist der Erzeugung spektraler Surrogate prinzipiell

ähnlich. In der Regel lassen sich so das Energiespektrum, die stationäre Verteilung sowie einige weiterführende statistische Eigenschaften wie z.B. ein gewisser Grad an Intermittenz sehr gut reproduzieren.

Kitagawa & Nomura [2003] nutzen Wavelets zur Erzeugung von Geschwindigkeitszeitreihen turbulenter Strömungen. Auch wenn sie sich dabei auf eindimensionale Zeitreihen beschränken, ist dieser Ansatz sehr vielversprechend, weil sie versuchen, die Energiekaskade, die sich über viele Skalen erstreckt und zu intermittenten Effekten auf kleinen Skalen führt, nachzubilden. In Wavelet-Analysen von Zeitreihen kann man eine solche Kaskade erahnen, weil intermittente Strukturen häufig lokal sind, sich aber über viele Skalen erstrecken. Kitagawa & Nomura machen sich zu Nutze, dass sich für Wavelet-Koeffizienten ebenfalls ein Energiespektrum definieren lässt, das die Verteilung der Gesamtenergie auf die verschiedenen Skalen angibt. Die Übereinstimmung zwischen Wavelet- und Fourier-Spektren, die sich experimentell testen lässt, ist für Messungen an turbulenten Strömungen in der Regel sehr groß. Ähnlich wie bei der spektralen Simulation lässt sich über das Energiespektrum die Varianz der Wavelet-Koeffizienten einer bestimmten Skala festlegen.

Experimentell haben Kitagawa & Nomura festgestellt, dass die Wavelet-Koeffizienten auf großen Skalen weitgehend unabhängig voneinander und normalverteilt sind. Auf kleinen Skalen weichen die Verteilungen jedoch wesentlich von der Normalverteilung ab und es zeigen sich extreme Amplituden, die sich über alle Skalen ausbreiten. Auf der Basis dieser Erkenntnis haben Kitagawa & Nomura ausgehend von den großen Skalen, deren Statistik relativ einfach zu simulieren ist, die Übertragung von Energie durch die Kaskade simuliert und die Wavelet-Koeffizienten auf kleinen Skalen unter Wahrung der durch das Energiespektrum gegebenen Varianz iterativ, multiplikativ und stochastisch aus den Koeffizienten der jeweils größeren Skalen erzeugt. Die anschließende Anwendung einer inversen Wavelet-Transformation liefert als Ergebnis dann eine Zeitreihe, die viele Eigenschaften der Messungen an turbulenten Strömungen reproduzieren kann.

Dieser Ansatz ist prinzipiell sehr interessant, auch wenn die Ausdehnung auf mehrdimensionale Felder sehr rechenintensiv zu sein scheint. Ein Hauptproblem, dass es zu untersuchen gilt, ist jedoch die Wahrung der Kausalität: Aufgrund einer iterativen Fortpflanzung der intermittenten Strukturen hin zu kleinen Skalen kann es vorkommen, dass die intermittenten Fluktuationen auf kleinen Skalen beginnen, bevor sie sich auf großen Skalen bemerkbar machen. Ein solches Verhalten wird in der Atmosphäre nicht beobachtet.

7.4.5 Multiplikative Modellierung der Energiekaskade

Einen anderen Ansatz zur Modellierung der Energiekaskade verfolgen Cleve u.a. [2005] und Schmiegel u.a. [2005]. Sie beschreiben den Energiefluss mit Hilfe eines „*random multiplicative cascade*“-Modells [vgl. auch Frisch 1996], bei dem die räumlich sowie zeitlich fluktuierende Energiedissipationsrate dargestellt wird als

$$\epsilon(x, t) = \exp \left(\int dt' \int dx' f(x - x', t - t') \gamma(x', t') \right) . \quad (7.76)$$

$\gamma(x, t)$ ist dabei ein Feld unabhängiger Zufallszahlen, das $\langle \exp(\gamma) \rangle = 1$ erfüllen muss. Schmiegel u.a. [2005] verwenden hier Lévy-stabile Zufallszahlen geeigneter Skalierung. $f(x - x', t - t')$ ist definiert als

$$f(x - x', t - t') = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq t - t' \leq T, -g(t - t') \leq x - x' \leq g(t - t') \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.77)$$

und legt den Bereich von Zufallszahlen fest, der für die Energiedissipationsrate am Ort x zur Zeit t relevant ist. Ein Beispiel für einen solchen „Kegel“ ist in Abbildung 7.14 zu sehen. Für diese Form von f lässt sich das Bild der Energiekaskade

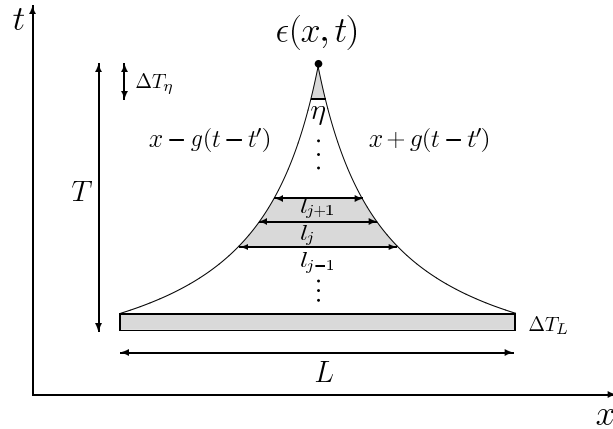


ABBILDUNG 7.14: Beispiel für einen raum-zeitlichen Kegel, der gemäß (7.77) in die Integration (7.76) der Energiedissipationsrate am Ort x und zur Zeit t eingeht. (Quelle: Schmiegel u.a. 2005)

sehr gut verstehen, wenn man sich die Energiedissipationsrate multiplikativ aus den Beiträgen $q(l_j, x, t)$ der verschiedenen Skalen l_j zusammengesetzt denkt,

$$\epsilon(x, t) = \prod_j q(l_j, x, t) \quad . \quad (7.78)$$

Für $q(l_j, x, t)$ muss dann gelten:

$$q(l_j, x, t) = \exp \left(\int_{t-t_{j-1}}^{t-t_j} dt' \int_{x-g(t-t')}^{x+g(t-t')} dx' \gamma(x', t') \right) \quad . \quad (7.79)$$

f verschwindet für $t' < t$ und steht somit – im Gegensatz zur im letzten Abschnitt vorgestellten eindimensionalen Modellierung auf Basis von Wavelets – nicht im Widerspruch zur Kausalität.

Der zentrale Punkt an diesem Modell ist, dass sich die Korrelationen der Energiedissipationsrate geometrisch verstehen lassen, weil sie durch den Grad der Überschneidung der jeweiligen Integrationskegel (7.77) bestimmt werden. Liegen die Integrationskegel für die Energiedissipationsraten bei (x, t) und (\tilde{x}, \tilde{t}) disjunkt, so sind sie unkorreliert, weil das erzeugende Zufallsfeld γ keinerlei Korrelationen aufweist. Das ist nach (7.77) z.B. der Fall, falls $t - \tilde{t} > T$ gilt. T stellt deshalb eine Art integrale Skala dar. Die Korrelationen, die sich bei Überlappung der Kegel ergeben, lassen sich explizit berechnen [Schmiegel u.a. 2005]. Für die in Abbildung 7.14 dargestellte Form des Integrationskegels ergeben sich Korrelationen von ϵ , die in der Zeit gemäß einem Potenzgesetz abfallen. Für die räumlichen Korrelationen erhält man zusammengesetzte Funktionen mit exponentiellen und potenzartigen Faktoren. Aufgrund der Konstruktion des Prozesses verschwinden Korrelationen höherer Ordnung in der Regel nicht.

Zur Validierung des Modells haben Schmiegel u.a. die freien Parameter des Modells an die Zweipunktkorrelationen der Energiedissipationsrate gemessener Daten angepasst. Es hat sich gezeigt, dass die mit diesen Parametern ermittelten Dreipunktkorrelationen des Modells die in den Daten realisierten Dreipunktkorrelationen exakt reproduzieren. Die betrachteten Prozesse könnten deshalb geeignet für die Modellierung der Energiedissipationsrate sein.

In der Praxis sind natürlich – wie in den bislang vorgestellten Simulationverfahren – die resultierenden Strömungsgeschwindigkeiten interessant. Cleve & Greiner [2007] schlagen vor, die Windgeschwindigkeit mit Hilfe der stochastischen Differentialgleichung

$$du(t) = \sqrt{\epsilon(t)} dB_f(t, dt) \quad (7.80)$$

zu simulieren, wobei dB_f für die Inkremente eines fraktionalen Brown'schen Bewegung steht.

Einen wesentlich fundierteren Ansatz liefern Barndorff-Nielsen & Schmiegel [2008]. Sie definieren eine Geschwindigkeitszeitserie an einem festen Punkt im Raum über die Integralgleichung

$$u(t) = \bar{u} + \beta \int_{-\infty}^t ds g(t-s)\epsilon(s) + \int_{-\infty}^t dW(s, ds) g(t-s)\sqrt{\epsilon(s)} \quad . \quad (7.81)$$

g ist hier ein Integralkern, der quadratintegabel ist und für den $g(0) = 1$ gilt. Der Parameter β und die Statistik von ϵ bestimmen die Schiefe der Inkrementverteilungen. Speziell für den Fall $\beta = 0$ konnten Barndorff-Nielsen & Schmiegel zeigen, dass (7.81) die Entwicklung der intermittenten Inkrementverteilungen korrekt beschreiben kann und – bei geeigneter Definition der lokalen Energiedissipationsrate als quadratische Variation – in Einklang mit der K62-Theorie von Kolmogorov ist, die im Falle sehr hoher Reynoldszahlen eine universelle Form der Geschwindigkeitsinkremente (im Raum) bei geeigneter Skalierung durch die lokale Energiedissipationsrate vorhersagt [Barndorff-Nielsen & Schmiegel 2008].

Barndorff-Nielsen & Schmiegel geben eine Möglichkeit zur Erweiterung von (7.81) auf höhere Dimensionen an. Eine numerische Auswertung wird – insbesondere für höherdimensionale Probleme und eine Simulation der lokalen Energiedissipation nach Schmiegel u.a. [2005] – jedoch numerisch sehr aufwändig und damit teuer sein.

7.4.6 Simulation von stochastischen Prozessen in der Skala

Nicht zuletzt sei an dieser Stelle noch auf eine neue Methode hingewiesen, die auf Nawroth & Peinke [2006] zurückgeht und die in den ersten Kapiteln eingeführten Drift- und Diffusionsprozesse – insbesondere die in Abschnitt 3.3 vorgestellte Beschreibung turbulenter Zeitreihen durch stochastische Prozesse in der Skala – zur Erzeugung von Zeitreihen verwendet. Nawroth & Peinke haben am Beispiel von an einem Freistrahlgemessenen Daten gezeigt, dass sich das Verfahren prinzipiell zur Erzeugung von Daten turbulenter Strömungen mit der gewünschten Statistik eignet.

Die Beschreibung von Messungen an turbulenten Strömungen ist so anspruchsvoll, weil solche Prozesse üblicherweise keine Markov-Eigenschaften in der Zeit aufweisen. Verbundwahrscheinlichkeitsdichten $P(x_n, \dots, x_0)$ mehrerer aufeinander folgender Messungen x_0, \dots, x_n zu den Zeiten $t_0 < \dots < t_n$ zerfallen daher i.A. nicht in Produkte wesentlich einfacherer, bedingter Zweipunktverteilungen. Für Prozesse in der Skala hat sich jedoch gezeigt, dass sich solche Verbundwahrscheinlichkeiten vereinfachen, weil die Markov-Eigenschaften erfüllt sind [Friedrich & Peinke 1997a]. Das heißt, dass für die Inkremente v_0, \dots, v_n auf den Skalen τ_0, \dots, τ_n gilt:

$$P_{\tau}(v_n, \dots, v_0) = P_{\tau_n}(v_n|v_{n-1}) \times \dots \times P_{\tau_1}(v_1|v_0) \times P_{\tau_0}(v_0) \quad . \quad (7.82)$$

Für die statistische Beschreibung und stochastische Modellierung geht die Faktorisierung mit einer eklatanten Vereinfachung einher, weil nunmehr die Kenntnis der einfachen Übergangswahrscheinlichkeiten, auch wenn sie – wie hier – noch eine Funktion der jeweiligen Skala sind, zur Beschreibung aller Verbundwahrscheinlichkeiten

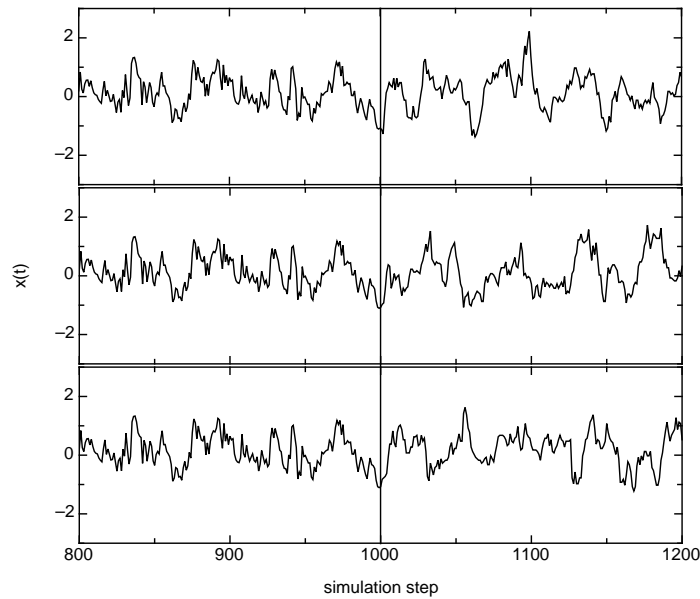


ABBILDUNG 7.15: Beispiel für die Anwendung des von Nawroth & Peinke [2006] vorgeschlagenen Verfahrens zur Rekonstruktion von Zeitreihen, das auf der iterativen Erzeugung von Zufallszahlen gemäß der Verteilungsdichte (7.85) beruht. In der linken Hälfte ist jeweils die gleiche Sequenz abgebildet, die zur Initialisierung des Algorithmus verwendet wurde. Auf der rechten Seite sind drei mit Hilfe dieses Verfahrens erzeugte Fortsetzungen des Verfahrens abgebildet, die den Anforderungen an die Realisierung des Prozesses in der Skala im statistischen Sinne genügen. (Quelle: Nawroth & Peinke 2006)

ausreicht. Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichten P_τ mit der Skala τ kann – bei geeigneter Definition der Skala [vgl. Friedrich & Peinke 1997b] – durch eine Fokker-Planck-Gleichung beschrieben werden, sodass die Anzahl der freien Parameter des Systems im Gegensatz zu einer Beschreibung auf Basis von Verbundwahrscheinlichkeitsdichten drastisch abnimmt und schon ein Datensatz endlicher Länge zur Anpassung des Modells an die jeweilige Problemstellung ausreicht.

Wir haben schon verschiedene Definitionen der geschachtelten Inkremente kennen gelernt (vgl. (3.28) und Abbildung 3.3) und gesehen, dass die Koeffizienten des Prozesses in der Skala von der Definition dieser Inkremente abhängen kann (vgl. Abschnitt 3.3.3). Nawroth & Peinke verwenden rechtsausgerichtete Inkremente (3.28c). Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten in der Skala, (7.82), lassen sich dann – analog zu Abschnitt 3.3.3 – mit den Verbundwahrscheinlichkeitsdichten in der Zeit in Verbindung bringen,

$$\begin{aligned}
 P(u_n, \dots, u_0 | u_{n+1}) &= \int dv_n \cdots \int dv_0 \delta(u_{n+1} - u_n - v_0) \times \dots \\
 &\quad \times \delta(u_{n+1} - u_0 - v_n) P_\tau(v_n, \dots, v_0) \quad (7.83) \\
 &= P_\tau(u_{n+1} - u_0, \dots, u_{n+1} - u_n) \quad (7.84)
 \end{aligned}$$

Weil rechtsbündige Inkremente verwendet wurden, lässt sich auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Werte u_0, \dots, u_n als Funktion des (darauf folgenden) Wertes u_{n+1} angeben. Mit Hilfe des Bayes'schen Theorems (2.17) lässt sich dieser Ausdruck so umstellen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte für u_{n+1} an-

gegeben werden kann,

$$P(u_{n+1}|u_n, \dots, u_0) = \frac{P_{\tau}(u_{n+1} - u_0, \dots, u_{n+1} - u_n)P(u_{n+1})}{\int du_{n+1} P_{\tau}(u_{n+1} - u_0, \dots, u_{n+1} - u_n)P(u_{n+1})} \quad (7.85)$$

$P(u_{n+1})$ ist dabei die stationäre Wahrscheinlichkeitsdichte, von der angenommen wird, dass sie existiert, ausgewertet für u_{n+1} .

Nawroth & Peinke [2006] schlagen nun vor, stochastische Prozesse in der Skala unter Verwendung rechtsbündig ausgerichteter Inkremente rekursiv zur Erzeugung synthetischer Zeitreihen zu verwenden. Dazu wird der stochastische Prozess in der Skala für das gewünschte System zunächst modelliert, sodass die Verteilungen P_{τ} für das entsprechende System zur Verfügung stehen, und die stationäre Verteilung der Daten bestimmt. Nach der Wahl einer geeigneten Einbettung¹⁷ n und entsprechenden τ_i lässt sich (7.85) dann für jeden zu erzeugenden Wert u_{n+1} numerisch berechnen und stochastisch ein Wert aus dieser Verteilung ziehen. Dieser Schritt lässt sich dann iterativ wiederholen und so z.B. zur synthetischen Fortsetzung von Zeitreihen verwenden. Falls eine stationäre Verteilung für den Ausgangsprozess nicht existiert, so lässt sich zu diesem Zweck $P(u_{n+1}) \sim const$ annehmen und der folgende Schritt – nach geeigneter Normierung – direkt aus $P_{\tau}(u_{n+1} - u_0, \dots, u_{n+1} - u_n)$ gewinnen.

Ein Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens ist in Abbildung 7.15 zu sehen. Die Grundlage für die dort abgebildete Simulation bildet eine aus Messungen an einem Freistrahlgemessene Hierarchie von Inkrementen. Die statistischen Eigenschaften der auf diese Art und Weise erzeugten Fortsetzungen entsprechen denen der zugrundeliegenden turbulenten Strömung. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Ähnlichkeit der stochastisch simulierten Zeitreihen, die am Anfang noch besteht, schnell verschwindet. Das ist typisch für Systeme fernab des Gleichgewichts, die dynamisch instabil sind, und wird – aufgrund der empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen – häufig auch dem deterministischen Chaos zugeschrieben.

7.5 CTRW-Modell für intermittente atmosphärische Windfelder

Nachdem wir uns hinreichend mit verschiedenen Verfahren zur Simulation atmosphärischer Winddaten befasst haben, wird nun eine Anpassung der in den Kapiteln 5 und 6 eingeführten „Continuous Time Random Walks“ (CTRWs) an die Simulation von Windfeldern vorgestellt. Bei der Umsetzung des Modells stand das Ziel im Vordergrund, ein schnelles Verfahren für die Simulation zu entwickeln, bei dem sich die Intermittenz der Inkrementverteilungen sensibel einstellen lässt. Auf diese Art und Weise sollten insbesondere die Einflüsse der intermittenten Fluktuationen auf Windkraftanlagen untersucht werden. Ergebnisse, die sich aus der Anwendung der CTRW-basierten Felder als Eingangsfelder für die numerische Modellierung von Windkraftanlagen ergeben und die von Projektpartnern der Fachhochschule Kiel erzielt wurden, sind in Abschnitt 7.6 zusammengestellt.

Ursprünglich war mit der Simulation eindimensionaler Windgeschwindigkeitszeitreihen an einem festen Referenzpunkt begonnen und die Möglichkeit untersucht worden, solche Messungen durch CTRWs darzustellen. Weil das Ziel aber die Verwendung der Felder in Verbindung mit dem Programmpaket FLEX5, das an der Fachhochschule Kiel eingesetzt wird, war, musste das Modell an den Anforderungen dieses Programms an die Eingangsdaten ausgerichtet werden. FLEX5 benötigt

¹⁷Nawroth & Peinke schlagen die Verwendung einer logarithmischen Skalierung der τ_i vor. Für Details sei an dieser Stelle auf Nawroth & Peinke [2006] verwiesen.

- die zeitliche Entwicklung eines Windfeldes an festen Punkten eines rotations-symmetrischen Gitters in der Ebene senkrecht zur mittleren Windrichtung,
- an jedem Gitterpunkt drei Geschwindigkeitskomponenten u (Hauptwindrichtung), v (Horizontalkomponente) und w (Vertikalkomponente).

Aus diesem Grund ist auf der Basis von CTRWs ein phänomenologisches Modell für atmosphärische Windfelder entstanden, das in diesem Abschnitt vorgestellt wird. Die Beschreibung von notwendigen Anpassungen zur Umsetzung des Modells sowie Ergebnisse, die mit Hilfe des Computerprogramms FLEX5 im Rahmen von Testläufen mit Windkraftanlagen erzielt worden sind, folgen im kommenden Abschnitt.

Die Methode beruht auf der Simulation eines dreidimensionalen Windfeldes an einem festen Ort im Raum als Funktion einer Eigenzeit s . Analog zu Abschnitt 5.4 kann der Prozess mit Hilfe eines stochastischen Prozesses $s(t) = t^{-1}(t)$ dann später in eine Simulation der Windgeschwindigkeit als Funktion der Zeit transformiert werden und besitzt – bei geeigneter Definition des stochastischen Prozesses $t(s)$ – die Eigenschaften von CTRWs. Der Einfachheit halber wird zunächst angenommen, dass $t(s)$ keine Funktion des Ortes in der Rotorebene ist, die Dynamik an allen Punkten also gleichzeitig stattfindet.

Für die Simulation in der Rotorebene wird zunächst eine Referenzgeschwindigkeit $u_r(s)$ eingeführt, die die kohärenten Fluktuationen der Windgeschwindigkeit mit der Zeit beschreibt. Ursache für solche in der Regel langsamen Fluktuationen können z.B. großskalige atmosphärische Wetterphänomene sein. Die Referenzgeschwindigkeit u_r lässt sich z.B. als der Betrag der mittleren Windgeschwindigkeit auf einer Referenzhöhe (z.B. der Rotorhöhe) verstehen, der zeitlich variieren kann.

Die Felder der drei Geschwindigkeitskomponenten u , v und w werden dann, ähnlich wie auch bei Veers [1988], unabhängig voneinander simuliert. Weil sie alle von der Referenzgeschwindigkeit $u_r(s)$ abhängen, weisen sie jedoch eine endliche Korrelation auf. Es ist zu beachten, dass die auf diese Weise erzeugten Felder eine nicht-verschwindende Divergenz zeigen und damit nicht inkompressibel sind (vgl. Abschnitt 7.1).

Schließlich wird durch die Transformation der Zeitskala Intermittenz eingeführt, die sich aufgrund der vereinfachten Annahmen der Gleichzeitigkeit in der Rotorebene jedoch nur in der zeitlichen Entwicklung der Statistik zeigt. Räumliche Inkremente sowie die stationäre Verteilung des Prozesses bleiben unberührt.

Die einzelnen Elemente des Modells sollen nun vorgestellt werden.

Referenzgeschwindigkeit $u_r(s)$

Für Windkraftanlagen werden üblicherweise zehnmütige Mittelwerte zur Charakterisierung der Bedingungen – mittlere Windgeschwindigkeit, Turbulenzintensität, Schichtung der Atmosphäre etc. – verwendet. Weil die Bedingungen in der Atmosphäre sich aber ständig ändern, ist die Verwendung der zehnmütigen Mittelwerte mit großer Vorsicht zu genießen (vgl. z.B. Chen u.a. [2007] sowie Anhang C). In den Abbildungen 7.16 und 7.17 ist z.B. die Auswertung von Messungen der Forschungsplattform „FINO I“ zu sehen. Für Bereiche mit einer auf 10 min-Intervalle bezogenen mittleren Windgeschwindigkeit von etwa 10 m/s wurde die Entwicklung der Windgeschwindigkeit durch eine Gerade angenähert und die Steigung ausgewertet. Dabei zeigen sich z.T. extreme Steigungen der Geraden, die durch externe Änderung der Bedingungen verursacht werden. Diese extremen Änderungen zeigen sich zeitgleich auf Anemometern auf verschiedenen Höhen.

Zur Modellierung solcher kohärenter Instationaritäten ist die Geschwindigkeit $u_r(s)$ vorgesehen, die die zeitliche Veränderung einer Referenzgeschwindigkeit darstellt und das gesamte Feld instantan beeinflusst. Prinzipiell lassen sich hier Daten aus Wettermodellen oder z.B. auch aus einer stochastischen Modellierung nach Monahan

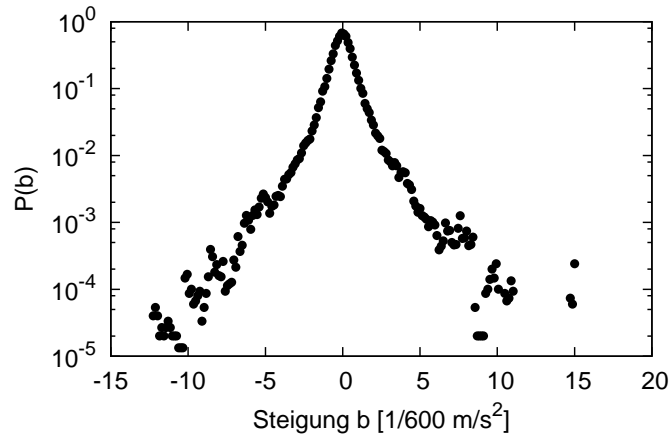


ABBILDUNG 7.16: Verteilung des Trends der Windgeschwindigkeit bei Mittelung über 10 min. Ausgewertet wurde die Messung des Betrages der Windgeschwindigkeit mit einem Schalenkreuzanemometer und einer Abtastrate von 1 Hz in einer Höhe von 60 m über der Wasseroberfläche, gemessen auf der Messplattform „FINO I“ in der Nordsee [FINO]. Als Datenbasis dienen 200 aufeinanderfolgende Tage, beginnend mit dem 1. Februar 2006. Die gemessene Zeitreihe wurde in Ausschnitte von 10 Minuten unterteilt. Für die Ausschnitte mit einer mittleren Windgeschwindigkeit zwischen 9.5 m/s und 10.5 m/s wurden die hochfrequenten Messungen durch die Gerade $a + bx$ angenähert. Aufgetragen ist die Verteilung der Steigung b dieser Geraden in logarithmischer Darstellung. Die Verteilung ist offensichtlich intermittiert. Die extremen Steigungen werden durch Situationen hervorgerufen, in denen sich die Windgeschwindigkeit in kurzer Zeit sehr schnell ändert. In Abbildung 7.17 ist ein Ausschnitt der Zeitserie, in dem die extreme Steigung von $15/600 \text{ m/s}^2$ auftritt, zu sehen.

[2006] verwenden. Weil die Felder bei der Bestimmung der Lasten jedoch mit denen von anderen Turbulenzgeneratoren verglichen werden sollen, muss sichergestellt werden, dass auf der Referenzhöhe gemittelt über 10 min die gewünschte mittlere Windgeschwindigkeit u_0 gilt. Aus Gründen der Einfachheit wird an dieser Stelle zunächst einen um u_0 verschobenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess angesetzt,

$$\frac{d}{ds} u_r(s) = -\gamma_r (u_r(s) - u_0) + \sqrt{D_r} \Gamma_r(s) \quad . \quad (7.86)$$

Simulation des Windfeldes in Abhängigkeit von $u_r(s)$

Abhängig von $u_r(s)$ soll nun ein Feld in der Rotorebene erzeugt werden. Weil diese Simulation für alle drei Geschwindigkeitskomponenten unabhängig voneinander erfolgt, werden alle relevanten Größen mit dem oberen Index (κ) indiziert. Zur späteren Simulation ist κ dann jeweils durch u , v und w zu ersetzen. Die unteren Indizes i bezeichnen weiterhin die Komponenten von Vektoren.

Wie schon bei Veers [1988] werden die Windgeschwindigkeiten in κ -Richtung in einem Vektor $\mathbf{u}^{(\kappa)}(s)$ angeordnet, der den simulierten Messungen an den Orten (\mathbf{y}, \mathbf{z}) entspricht. Die beiden Vektoren \mathbf{y} und \mathbf{z} entsprechen dabei y - und z -Komponenten der Gitterpunkte in der Simulationsebene. Aufgrund des Höhenprofils in der Grenzschicht, das in Abschnitt 7.2 eingeführt wurde, ändert sich die mittlere Windgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe z . Außerdem soll die Referenzgeschwindigkeit $u_r(s)$ das Profil mit beeinflussen. Die sich aus dem Höhenprofil ergebende mittlere Windgeschwindigkeit für $\mathbf{u}^{(\kappa)}(s)$ sei durch $\Xi^{(\kappa)}(s)$ gegeben. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, dass $\Xi^{(\kappa)}$ linear von $u_r(s)$ abhängt und sich ergibt

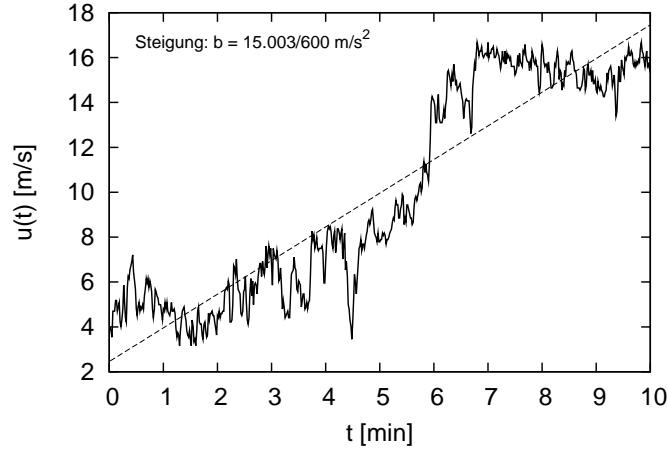


ABBILDUNG 7.17: Ausschnitt aus einer Messung des Betrages der Windgeschwindigkeit über der offenen See in einer Höhe von 60 m vom 26. Februar 2006. Für eine detaillierte Beschreibung der Auswertung und Auswahl der Daten sei auf die Bildunterschrift von Abbildung 7.16 verwiesen. Im abgebildeten Ausschnitt ändert sich die Windgeschwindigkeit innerhalb weniger Minuten sehr stark. Die durchgezogene Linie gibt die mit einer Rate von 1 Hz abgetasteten Messungen wieder. Die gestrichelte Linie ist eine lineare Regression der Messdaten und hat eine Steigung von etwa $15/600 \text{ m/s}^2$. Sie entspricht damit dem extremen Ausreißer der Verteilung in Abbildung 7.16. Zur Modellierung solcher Ereignisse muss der instationäre Charakter atmosphärischer Turbulenz explizit berücksichtigt werden.

als

$$\Xi^{(\kappa)}(s) = \xi^{(\kappa)}(z)u_r(s) \quad . \quad (7.87)$$

Die Windgeschwindigkeiten auf dem Gitter wollen wir als einen stochastischen Prozess in der Eigenzeit s betrachten. Die Windgeschwindigkeit an einem Gitterpunkt soll dabei abhängen von

- den Geschwindigkeiten der umliegenden Gitterpunkte und
- der nach (7.87) zu erwartenden Windgeschwindigkeit.

Es wurde der einfachstmögliche Ansatz gewählt, der diese Bedingungen erfüllt. Die einzelnen Komponenten von $\mathbf{u}^{(\kappa)}$, $u_i^{(\kappa)}$, wurden modelliert als

$$\frac{d}{ds}u_i^{(\kappa)}(s) = -\gamma^{(\kappa)} \left(u_i^{(\kappa)}(s) - \xi_i^{(\kappa)}u_r(s) \right) + \sum_j H_{ij}^{(\kappa)}\Gamma_j^{(\kappa)}(s) \quad \forall i \quad . \quad (7.88)$$

Die $\Gamma_j^{(\kappa)}(s)$ stellen hier unabhängige, δ -korrelierte Zufallszahlen dar, die (2.22) genügen und den stochastischen Prozess treiben. Durch die Auswirkungen der ersten Summanden proportional zu $\gamma^{(\kappa)}$ werden die $u_i^{(\kappa)}$ jeweils auf $\xi_i^{(\kappa)}$ zurückgetrieben.

Die Matrix $\mathbf{H}^{(\kappa)}$ stellt sicher, dass die Fluktuationen an verschiedenen Simulationspunkten korreliert sind. Es wurde hier angenommen, dass diese räumlichen Korrelationen in der Rotorebene exponentiell mit $r^{(\kappa)}$ abklingen, und für die $\mathbf{H}^{(\kappa)}$ jeweils eine linke, untere Dreiecksmatrix¹⁸ mit den Elementen

$$H_{ij}^{(\kappa)} := \begin{cases} i \geq j & : \zeta_i^{(\kappa)} \exp\left(-\frac{\sqrt{(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}{r^{(\kappa)}}\right) \\ i < j & : 0 \end{cases} \quad . \quad (7.89)$$

¹⁸Die Funktion von $\mathbf{H}^{(\kappa)}$ entspricht im Wesentlichen der durch Veers [1988] eingeführten Matrix \mathbf{H} (vgl. (7.52)), die durch Cholesky-Zerlegung aus der spektralen Matrix hervorgegangen ist.

angesetzt. $r^{(\kappa)}$ bestimmt das Ausmaß der räumlichen Korrelationen des Rauschens. Die Koeffizienten $\zeta_i^{(\kappa)}$ sind dabei gegeben durch

$$\zeta_i^{(\kappa)} := \sqrt{D_{ii}^{(\kappa)}} \left/ \sqrt{\sum_{j=1}^i \exp\left(-2 \frac{\sqrt{(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}{r^{(\kappa)}}\right)} \right. . \quad (7.90)$$

Weil die Zufallszahlen $\Gamma_i^{(\kappa)}$ normalverteilt, deltakorreliert und unabhängig voneinander sind, gilt dann

$$\left\langle \left(H^{(\kappa)} \Gamma^{(\kappa)}(s) \right)_i \left(H^{(\kappa')} \Gamma^{(\kappa')}(s') \right)_i \right\rangle = \delta_{\kappa\kappa'} \delta(s - s') D_{ii}^{(\kappa)} . \quad (7.91)$$

Die Koeffizienten D_{ii} beschreiben also die Varianz des mikroskopischen Rauschens, das in die Dynamik von $u_i^{(\kappa)}$ einwirkt. Wir werden später sehen, dass sie die Diagonale der Diffusionsmatrix bilden und sich mit der Turbulenzintensität der resultierenden Geschwindigkeitszeitreihe in Verbindung bringen lassen.

Transformation der internen Zeit

Zu guter Letzt muss die interne Zeit s in die physikalische Zeit transformiert werden. Das geschieht – wie von Fogedby vorgeschlagen – durch eine verallgemeinerte Langevin-Gleichung gemäß (2.72), die den α -stabilen Levý-Prozess

$$\frac{d}{ds} t(s) = \tau_\alpha(s) \quad (7.92)$$

beschreibt. Die Inkremente dieses Prozesses sind proportional zu den Beiträgen des Rauschens $\tau_\alpha(s)$, das unkorreliert sein und einer vollständig schiefen, α -stabilen Levý-Verteilung mit Stabilitätsindex α gemäß (2.61) genügen soll. Die Erzeugung der entsprechenden Zufallszahlen wird in Anhang A vorgestellt. Wir haben bereits im Rahmen von Abschnitt 5.4 diskutiert, dass (7.92) ein monoton steigender Prozess ist, der sich unter Verwendung einer geeigneten Definition (5.39) umkehren lässt. In Abschnitt 6.3 haben wir schließlich gesehen, dass eine solche Umkehrung im Kontinuumsübergang eindeutig ist. Deshalb lässt sich mit Hilfe von (7.86), (7.88) und (7.92) für jede Komponente κ ein Windfeld an den Gitterpunkten (\mathbf{y}, \mathbf{z}) als Funktion der (physikalischen) Zeit t simulieren.

Mit diesen drei Bausteinen ist unser Modell vollständig. Es wurden bis zu dieser Stelle einige Parameter eingeführt, mit denen der Charakter der resultierenden Felder eingestellt werden kann. Alle relevanten Parameter sind in Tabelle 7.2 zusammengestellt. Zusätzlich müssen natürlich noch das Gitter (\mathbf{y}, \mathbf{z}) , auf dem die zu simulierenden Werte liegen sollen, festgelegt sowie die Vektoren $\boldsymbol{\xi}^{(\kappa)}(\mathbf{z})$, die die mittlere Windgeschwindigkeit relativ zur Referenzgeschwindigkeit angeben und i.A. Funktion von \mathbf{z} sein werden, spezifiziert werden.

Die stationären Eigenschaften des Modells lassen sich mit Hilfe einer Fokker-Planck-Gleichung berechnen. Außerdem lässt sich der Verlauf des Energiespektrums als Funktion der Parameter abschätzen. Diese beiden Punkte sollen nun noch diskutiert werden, bevor wir uns im folgenden Abschnitt mit der Diskretisierung und Anwendung des Modells befassen.

Stationäre Eigenschaften des Modells

Für die spätere Anpassung des Modells ist es hilfreich, zunächst einmal die Statistik in der Eigenzeit s zu untersuchen.

Zunächst wird eine Fokker-Planck-Gleichung für die Entwicklung von u_r , $\mathbf{u}^{(u)}$, $\mathbf{u}^{(v)}$ und $\mathbf{u}^{(w)}$ abgeleitet. Dazu werden (7.86) und (7.88) zu einer Gleichung für

Referenzprozess	
u_0	mittlere Windgeschwindigkeit auf Nabenhöhe
γ_r	Dämpfung
D_r	Diffusion
Windfeld	
$\gamma^{(\kappa)}$	Dämpfung Komponente κ
$D_{ii}^{(\kappa)}$	Diffusion Komponente κ an der Position i
$r^{(\kappa)}$	räumliche Korrelation der Fluktuationen
Zeittransformation	
α	Stabilitätsindex des Lévy-Prozesses

TABELLE 7.2: Übersicht über die Parameter zur Charakterisierung des durch die Gleichungen (7.86), (7.88) und (7.92) definierten Windfeldmodells. Nähere Hinweise zur Anpassung der Parameter finden sich in Abschnitt 7.6.

diese Variablen in vektorwertiger Form zusammengefasst, wobei zu diesem Zweck

$$\mathbf{X}(s) := \begin{pmatrix} u_r(s) \\ \mathbf{u}^{(u)}(s) \\ \mathbf{u}^{(v)}(s) \\ \mathbf{u}^{(w)}(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}(s) := \begin{pmatrix} \Gamma_r(s) \\ \mathbf{\Gamma}^{(u)}(s) \\ \mathbf{\Gamma}^{(v)}(s) \\ \mathbf{\Gamma}^{(w)}(s) \end{pmatrix} \quad (7.93)$$

und abkürzend $d\mathbf{X} := du_r \prod_{\kappa,i} du_i^{(\kappa)}$ verwendet wird. Die Langevin-Gleichung für \mathbf{X} lautet dann

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X}(s) = \mathbf{h}(\mathbf{X}(s)) + \mathbf{g}\mathbf{\Gamma}(s) \quad (7.94)$$

Dabei wurde die vektorwertige Funktion \mathbf{h}

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} -\gamma_r(u_r - u_0) \\ -\gamma^{(u)}(\mathbf{u}^{(u)} - \boldsymbol{\xi}^{(u)}u_r) \\ -\gamma^{(v)}(\mathbf{u}^{(v)} - \boldsymbol{\xi}^{(v)}u_r) \\ -\gamma^{(w)}(\mathbf{u}^{(w)} - \boldsymbol{\xi}^{(w)}u_r) \end{pmatrix} \quad (7.95)$$

und die Matrix \mathbf{g}

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \sqrt{D_r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}^{(u)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathbf{H}^{(v)} & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{H}^{(w)} \end{pmatrix} \quad (7.96)$$

eingeführt. Die Gleichung (7.94) lässt sich mit Hilfe der in Kapitel 2 beschriebenen Definitionen der Drift- und Diffusionskoeffizienten nun in eine Fokker-Planck-Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte P überführen [Risken 1989, S. 54f]. Aufgrund der einfachen Struktur von \mathbf{g} , die das Wirken der Diffusion auf die einzelnen Unterräume beschränkt, lässt sich die Form der Fokker-

Planck-Gleichung vereinfachen, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} P(\mathbf{X}, s) &= \left\{ \gamma_r \frac{\partial}{\partial u_r} (u_r - u_0) + D_r \frac{\partial^2}{\partial u_r^2} \right. \\ &\quad + \sum_{\kappa} \gamma^{(\kappa)} \nabla_{\mathbf{u}^{(\kappa)}}^T \left(\mathbf{u}^{(\kappa)} - \boldsymbol{\xi}^{(\kappa)} u_r \right) \\ &\quad \left. + \sum_{\kappa} \nabla_{\mathbf{u}^{(\kappa)}}^T \mathbf{D}^{(\kappa)} \nabla_{\mathbf{u}^{(\kappa)}} \right\} P(\mathbf{X}, s) \quad . \end{aligned} \quad (7.97)$$

Die Diffusionsmatrizen $\mathbf{D}^{(\kappa)}$ ergeben sich aus $\mathbf{H}^{(\kappa)}$ dabei als

$$\mathbf{D}^{(\kappa)} = \mathbf{H}^{(\kappa)} \mathbf{H}^{(\kappa)T} \quad . \quad (7.98)$$

Aufgrund von (7.90) entsprechen die Diagonalelemente von $\mathbf{D}^{(\kappa)}$ den bereits eingeführten $D_{ii}^{(\kappa)}$. Die Nebendiagonalelemente gehen aus $D_{ii}^{(\kappa)}$, \mathbf{y} , \mathbf{z} und $r^{(\kappa)}$ hervor als

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(\kappa)} &= \frac{\sum_{k=1}^{\min(i,j)} \exp\left(-\frac{\sqrt{(y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}}{r^{(\kappa)}}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{(y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2}}{r^{(\kappa)}}\right)}{\sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k'=1}}^{i,j} \exp\left(-2\frac{\sqrt{(y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}}{r^{(\kappa)}}\right) \exp\left(-2\frac{\sqrt{(y_j - y_{k'})^2 + (z_j - z_{k'})^2}}{r^{(\kappa)}}\right)}} \\ &\quad \times \sqrt{D_{ii}^{(\kappa)} D_{jj}^{(\kappa)}} \quad . \end{aligned} \quad (7.99)$$

Weil die ursprünglichen Prozesse (7.86) und (7.88) für $\gamma_r > 0$ und $\gamma^{(\kappa)} > 0$ eine stationäre Verteilung haben, geht auch die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte P in einen stationären Zustand über, der sich dadurch auszeichnet, dass P nicht mehr von s abhängt und die partielle Ableitung nach s in (7.97) deshalb verschwindet. (7.97) lässt sich dann verwenden, um einige Momente der stationären Verteilung zu bestimmen. Es soll explizit gezeigt werden, wie sich der Mittelwert $\langle u_r \rangle$ der stationären Verteilung berechnen lässt. Einige weitere Momente werden dann angeben. Im stationären Zustand verschwindet die linke Seite von (7.97). Die Multiplikation der Gleichung von links mit u_r und Mittelung über alle u_r und $\mathbf{u}^{(\kappa)}$ liefert dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int d\mathbf{X} u_r \left(\gamma_r \frac{\partial}{\partial u_r} (u_r - u_0) + D_r \frac{\partial^2}{\partial u_r^2} \right) P(\mathbf{X}) \\ &\quad + \sum_{\kappa} \int d\mathbf{X} u_r \nabla_{\mathbf{u}^{(\kappa)}}^T \left(\gamma^{(\kappa)} \left(\mathbf{u}^{(\kappa)} - \boldsymbol{\xi}^{(\kappa)} u_r \right) + \mathbf{D}^{(\kappa)} \nabla_{\mathbf{u}^{(\kappa)}} \right) P(\mathbf{X}) \quad . \end{aligned} \quad (7.100)$$

Weil P für $|\mathbf{X}| \rightarrow \infty$ verschwindet, fallen nach partieller Integration sämtliche Randterme weg. Man erhält aus (7.101) deshalb

$$0 = - \int d\mathbf{X} \left(\gamma_r (u_r - u_0) + D_r \frac{\partial}{\partial u_r} \right) P(\mathbf{X}) \quad (7.101)$$

$$= \gamma_r (\langle u_r \rangle - u_0) \quad . \quad (7.102)$$

Schließlich ergibt sich also – wie es aus (7.86) auch nicht anders zu erwarten war –

$$\langle u_r \rangle = u_0 \quad . \quad (7.103)$$

Die mittlere Geschwindigkeit auf Referenzhöhe ist also u_0 , wenn der Prozess stationär geworden ist und damit nicht mehr von seiner Anfangskonfiguration abhängt.

Momente der stationären Verteilung	
$\langle u_r \rangle$	$= u_0$
$\langle u_r^2 \rangle$	$= u_0^2 + \frac{D_r}{\gamma_r}$
$\langle u_i^{(\kappa)} \rangle$	$= \xi_i^{(\kappa)} u_0$
$\langle (u_i^{(\kappa)})^2 \rangle$	$= \frac{D_{ii}^{(\kappa)}}{\gamma^{(\kappa)}} + \left(\xi_i^{(\kappa)} \right)^2 \left(u_0^2 + \frac{\gamma^{(\kappa)}}{\gamma^{(\kappa)} + \gamma_r} \frac{D_r}{\gamma_r} \right)$
$\langle u_r u_i^{(\kappa)} \rangle$	$= \xi_i^{(\kappa)} u_0^2 + \xi_i^{(\kappa)} \frac{\gamma^{(\kappa)}}{\gamma^{(\kappa)} + \gamma_r} \frac{D_r}{\gamma_r}$
$\langle u_i^{(\kappa)} u_j^{(\kappa')} \rangle$	$= \delta_{\kappa\kappa'} \frac{D_{ij}^{(\kappa)}}{\gamma^{(\kappa)}} + \xi_i^{(\kappa)} \xi_j^{(\kappa')} \left(u_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^{(\kappa)}}{\gamma^{(\kappa)} + \gamma_r} + \frac{\gamma^{(\kappa')}}{\gamma^{(\kappa')} + \gamma_r} \right) \frac{D_r}{\gamma_r} \right)$

TABELLE 7.3: Aus der Fokker-Planck-Gleichung (7.97), die die Entwicklung der Dynamik in der Eigenzeit s beschreibt, lassen sich die Momente der stationären Verteilung gewinnen. Die Momente zweiter Ordnung sind hier aufgeführt. Weil die Statistik Gauß'sch ist, ist die stationäre Verteilung über diese Momente vollständig bestimmt. Diese Momente lassen sich später zum Anpassen der Parameter zur Beschreibung des Modells verwenden.

Auf ähnliche Weise lassen sich andere Momente des Prozesses berechnen. Alle Momente bis zur zweiten Ordnung sind in Tabelle 7.3 zusammengestellt.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich mit Hilfe der Integraltransformation (5.32) prinzipiell auch eine Lösung für die Fokker-Planck-Gleichung in der physikalischen Zeit t angeben lässt. Aufgrund der Eigenschaften der α -stabilen Lévy-Prozesse wird für einen Stabilitätsindex $\alpha < 1$ (7.92) die stationäre Verteilung jedoch nicht in endlicher Zeit angenommen.

Berechnung des Energiespektrums in s

Wie Veers [1984] in dem auf Seite 116 bereits wiedergegebenen Ausschnitt anmerkt, beruht die spektrale Beschreibung stochastischer Prozesse auf den zweiten Momenten dieser Prozesse. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass sich die zweiten Momente der stationären Verteilung aus der Fokker-Planck-Gleichung (7.97) bestimmen lassen. Diese Ergebnisse sollen nun genutzt werden, um in der internen Zeit s außerdem die Autokorrelationsfunktion sowie später das Spektrum einer simulierten Windgeschwindigkeit $u_i^{(\kappa)}$ im stationären Zustand zu bestimmen. Der Einfachheit halber werden die oberen und unteren Indizes (κ) und i während der Rechnung nicht mitgeführt und tauchen erst in den Gleichungen (7.111) und (7.112) wieder auf.

Gehen wir davon aus, dass sich ein Ensemble von Systemen zum Zeitpunkt s_0 im stationären Zustand befindet und daher durch die in Tabelle 7.3 angegebenen Momente beschrieben ist. Die Korrelation zweier Werte von u im Zeitunterschied $\Delta s \geq 0$ lässt sich berechnen als

$$K_u(\Delta s) := \langle u(s_0 + \Delta s)u(s_0) \rangle = \int d\mathbf{X} uP(\mathbf{X}) \int d\mathbf{X}' u'P(\mathbf{X}'|\mathbf{X}, \Delta s) \quad . \quad (7.104)$$

$P(\mathbf{X}'|\mathbf{X}, \Delta s)$ ist dabei die bedingte Übergangswahrscheinlichkeitsdichte vom Zustand \mathbf{X} zur Zeit s_0 zum Zustand \mathbf{X}' zur Zeit $s_0 + \Delta s$. Weil die zeitliche Entwicklung von u nicht explizit von den Geschwindigkeiten an den anderen Gitterpunkten

abhängt, vereinfacht sich der Ausdruck durch Ausführen einiger Integrale zu

$$\begin{aligned} K_u(\Delta s) &= \int du \int du_r u P(u, u_r) \int du' u' P(u'|u, u_r, \Delta s) \\ &=: \int du \int du_r u P(u, u_r) \langle u'|u, u_r, \Delta s \rangle \quad . \end{aligned} \quad (7.105)$$

Hier wurde der bedingte Mittelwert $\langle u'|u, u_r, \Delta s \rangle$ als Funktion der Startwerte u und u_r sowie des Zeitinkrements Δs eingeführt, den wir nun mit Hilfe der Fokker-Planck-Gleichung berechnen wollen. Zur Bestimmung der stationären Korrelationsfunktion ist dieser gemäß (7.105) später noch mit $uP(u, u_r)$ zu gewichten.

Im Folgenden wird die zeitliche Entwicklung des Erwartungswertes $\langle u_r(s) \rangle$ benötigt. Diese ergibt sich analog zur Berechnung der stationären Verteilung im letzten Abschnitt aus (7.97) als

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle u_r(s) \rangle = -\gamma_r \langle u_r(s) \rangle + \gamma_r u_0 \quad . \quad (7.106)$$

Eine allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\langle u_r(s_0 + \Delta s) \rangle = (\langle u_r(s_0) \rangle - u_0) e^{-\gamma_r \Delta s} + u_0 \quad . \quad (7.107)$$

Für die zeitliche Entwicklung von $\langle u(s) \rangle$ ergibt sich analog

$$\frac{\partial}{\partial s} \langle u(s) \rangle = -\gamma \langle u(s) \rangle + \xi \gamma \langle u_r(s) \rangle \quad . \quad (7.108)$$

Unter Verwendung von (7.107) erhält man als allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \langle u(s_0 + \Delta s) \rangle &= \langle u(s_0) \rangle e^{-\gamma \Delta s} + \langle u_r(s_0) \rangle \xi \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} (e^{-\gamma_r \Delta s} - e^{-\gamma \Delta s}) \\ &+ u_0 \xi \left(1 + \frac{\gamma_r}{\gamma - \gamma_r} e^{-\gamma \Delta s} - \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} e^{-\gamma_r \Delta s} \right) \quad . \end{aligned} \quad (7.109)$$

Weil die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte für $\Delta s \rightarrow 0$ in ein Produkt aus δ -Funktionen übergeht, können wir den bedingten Mittelwert, der in (7.105) eingeführt wurde, durch $\langle u(s_0 + \Delta s) \rangle$ ausdrücken. Wir setzen dazu $\langle u(s_0) \rangle = u$ und $\langle u_r(s_0) \rangle = u_r$ und erhalten

$$\begin{aligned} \langle u'|u, u_r, \Delta s \rangle &= u e^{-\gamma \Delta s} + u_r \xi \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} (e^{-\gamma_r \Delta s} - e^{-\gamma \Delta s}) \\ &+ u_0 \xi \left(1 + \frac{\gamma_r}{\gamma - \gamma_r} e^{-\gamma \Delta s} - \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} e^{-\gamma_r \Delta s} \right) \quad . \end{aligned} \quad (7.110)$$

Das Einsetzen in (7.105) liefert dann die Korrelationsfunktion in Abhängigkeit der in Tabelle 7.3 aufgeführten Momente der stationären Verteilung. Wenn die im Verlauf der Rechnung unterdrückten oberen und unteren Indizes von u wieder hinzugenommen wird, so ergibt sich allgemein

$$\begin{aligned} K_{u_i^{(\kappa)}}(\Delta s) &= \left\langle \left(u_i^{(\kappa)} \right)^2 \right\rangle e^{-\gamma \Delta s} + \left\langle u_r u_i^{(\kappa)} \right\rangle \xi \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} (e^{-\gamma_r \Delta s} - e^{-\gamma \Delta s}) \\ &+ \left\langle u_i^{(\kappa)} \right\rangle u_0 \xi \left(1 + \frac{\gamma_r}{\gamma - \gamma_r} e^{-\gamma \Delta s} - \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} e^{-\gamma_r \Delta s} \right) \quad . \end{aligned} \quad (7.111)$$

Das Energiespektrum $E_{u_i^{(\kappa)}}(\omega)$ ergibt sich als Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion $K_{u_i^{(\kappa)}}(|\Delta s|)$ bezüglich Δs . Unter Verwendung von (7.111) erhält

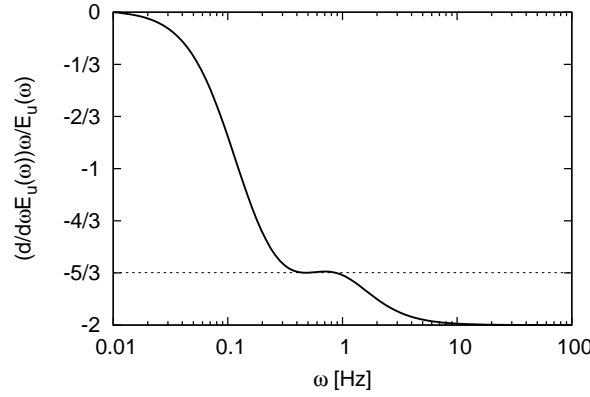


ABBILDUNG 7.18: Logarithmische Ableitung des Energiespektrums des CTRW-Modells für eine Geschwindigkeitskomponente. Die Parameter des Prozesses wurden so gewählt, dass die logarithmische Ableitung ein Plateau bei $\omega = -5/3$ ausbildet: $u_0 = 10$, $\xi_i^{(\kappa)} = 0.5$, $\gamma_r = 0.12$, $\gamma^{(\kappa)} = 1$ und $D_r/D_{ii}^{(\kappa)} = 2.15$. Neben dem Plateau ist das asymptotische Verhalten für $\omega \ll 1$ und $\omega \gg 1$ gut zu erkennen.

man so

$$\begin{aligned}
 E_{u_r^{(\kappa)}}(\omega) &= 2 \left(\left\langle \left(u_i^{(\kappa)} \right)^2 \right\rangle + \left\langle u_i^{(\kappa)} \right\rangle u_0 \xi \frac{\gamma_r}{\gamma - \gamma_r} - \left\langle u_r u_i^{(\kappa)} \right\rangle \xi \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} \right) \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2} \\
 &+ 2 \left(\left\langle u_r u_i^{(\kappa)} \right\rangle \xi \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} - \left\langle u_i^{(\kappa)} \right\rangle u_0 \xi \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_r} \right) \frac{\gamma_r}{\gamma_r^2 + \omega^2} \\
 &+ 2\pi \left\langle u_i^{(\kappa)} \right\rangle u_0 \xi \delta(\omega) \quad . \quad (7.112)
 \end{aligned}$$

Es ist unmittelbar zu erkennen, dass das Spektrum (7.112) für $\omega \gg 1$ proportional zu ω^{-2} abfällt. Für das Energiespektrum turbulenter Strömungen ist im Inertialbereich nach Kolmogorov jedoch ein Abfall gemäß dem Potenzgesetz $\omega^{-5/3}$ zu erwarten (vgl. Abschnitt 7.1). Unter der Annahme, dass

$$\frac{d}{dx} a(\exp(x)) \approx 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} b(\exp(x)) \approx 0 \quad (7.113)$$

gilt, a und b sich also nur langsam verändern, lässt sich der Exponent $b(x)$ einer Funktion

$$f(x) = a(x) + x^{b(x)} \quad (7.114)$$

an der Stelle x berechnen als

$$b(x) = \frac{x \frac{d}{dx} f(x)}{f(x)} \quad . \quad (7.115)$$

$b(x)$ wird hier als *logarithmische Ableitung* bezeichnet.

Die numerische Auswertung der logarithmischen Ableitung des Spektrums (7.112) zeigt, dass sich durch eine geeignete Wahl der Parameter das Spektrum so einstellen lässt, dass der Skalierungsexponent b ein Plateau bei $-5/3$ bildet. Ein Beispiel für ein solches Plateau ist in Abbildung 7.18 zu sehen. Für dieselben Parameter wurden numerisch Daten simuliert und daraus das Spektrum bestimmt. Das resultierende Spektrum, das in 7.19 abgebildet ist, zeigt gute Übereinstimmung mit dem analytischen Verlauf von (7.112). Über den Plateaubereich der logarithmischen Ableitung hinaus zeigt es in guter Näherung einen Abfall gemäß einem Potenzgesetz

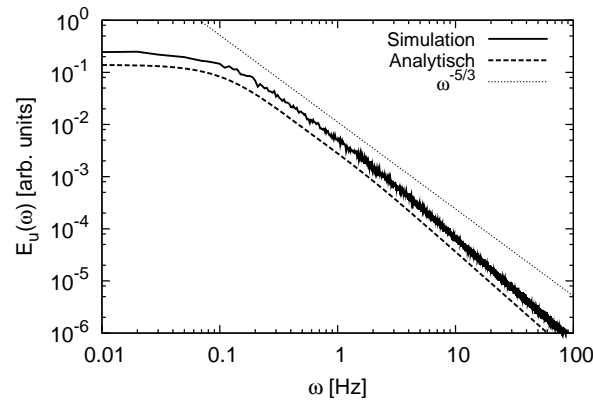


ABBILDUNG 7.19: Spektrum einer Geschwindigkeitskomponente für die in der Beschriftung von Abbildung 7.18 angegebenen Parameter. Die durchgezogene Linie wurde aus der Simulation einer Zeitreihe mit $1.3 \cdot 10^6$ Punkte im Abstand von 0.01 gewonnen. Die gestrichelte Linie zeigt das analytische Ergebnis, Gleichung (7.112), das in guter Übereinstimmung mit dem aus der Simulation ermittelten Spektrum steht. Zur Verbesserung der Unterscheidbarkeit wurden die beiden Spektren vertikal geringfügig gegeneinander verschoben. In der Gegend des Plateaus der logarithmischen Ableitung, das in Abbildung 7.18 dargestellt ist, lässt sich der Verlauf gut durch ein Potenzgesetz mit dem Exponenten $-5/3$ beschreiben.

mit Exponenten $-5/3$. Asymptotisch fällt es dann allerdings proportional zu ω^{-2} ab.

Um das Spektrum in der physikalischen Zeit t zu erhalten, lässt sich prinzipiell wieder eine Integraltransformation wie z.B. (5.32) auf die Korrelationsfunktion (7.111) anwenden. Aufgrund des nicht verschwindenden Gedächtnisses des Anfangszustandes wird der Prozess jedoch nicht in endlicher Zeit stationär. Deshalb dürfen Korrelationen mit dem Anfangszustand, die aufgrund der Annahme, dass u und u_r in (7.105) der stationären Verteilung genügen, nicht betrachtet werden, dann nicht vernachlässigt werden.

7.6 Nutzung des CTRW-Modells: Simulation und Ergebnisse

Das CTRW-Modell, das im letzten Abschnitt vorgestellt wurde, ist in Zusammenarbeit mit den Projektpartnern Schaffarczyk und Gontier von der Fachhochschule Kiel verwendet worden, um die Einflüsse von intermittenten Fluktuationen auf die Lasten von Windkraftanlagen abzuschätzen [Gontier u.a. 2006, 2007]. Die Arbeiten wurden im Jahre 2006 durchgeführt. Erst nach dem Abschluss der Auswertung konnten in das Modell jedoch noch einige grundlegende Verbesserungen einfließen, die insbesondere zu einer vereinfachten Anpassung der Diffusionsmatrizen $D^{(\kappa)}$ führen. Eine ähnliche Abschätzung der Einflüsse intermittenter Windfelder auf die Dynamik von Windkraftanlagen ist auch Gegenstand einer Arbeit, die von den Oldenburger Projektpartnern Peinke und Mücke begonnen wurde. Für diese Arbeit soll u.a. das CTRW-Modell in der hier vorgestellten Form verwendet werden.

In Tabelle 7.2 sind die Parameter zusammengestellt, die zur Beschreibung des im letzten Abschnitt vorgestellten kontinuierlichen Modells benötigt werden. Um die freien Parameter des Modells zu reduzieren, werden zunächst folgende vereinfachende Annahmen gemacht:

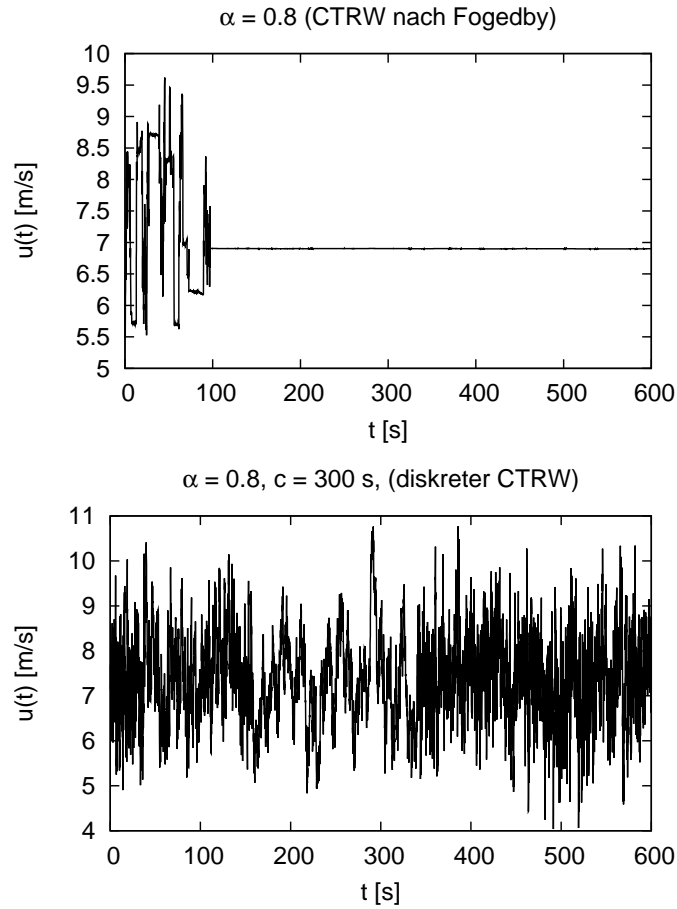


ABBILDUNG 7.20: Vergleich zweier simulierter Zeitreihen für den charakteristischen Exponenten $\alpha = 0.8$. Das obere Bild entspricht den Ergebnissen, die für CTRWs im Kontinuumsfall schon in Kapitel 6 vorgestellt worden sind. Im unteren Bild wurde die maximale Wartezeit durch die Einführung eines Cutoffs bei $c = 300$ s begrenzt. Außerdem wurde ein endliches $\Delta s_t = 100$ s gewählt. Dadurch lassen sich die ausgeprägten Warteereignisse von CTRWs mit divergenter mittlerer Wartezeit, die in atmosphärischen Messungen nicht beobachtet werden, vermeiden. Ein Ausschnitt der ersten Sekunden dieser Simulation ist in Abbildung 7.21 dargestellt.

$\xi^{(v)} = \xi^{(w)} = \mathbf{0}$: In v - und w -Richtung verschwindet die mittlere Windgeschwindigkeit. Weil $\mathbf{u}^{(v)}$ und $\mathbf{u}^{(w)}$ damit nicht mehr von der Referenzgeschwindigkeit u_r abhängen, sind die drei Geschwindigkeitskomponenten nun unabhängig voneinander. Ein Vergleich mit Tabelle 7.3 zeigt, dass $\langle u_i^{(\kappa)} u_j^{(\kappa')} \rangle$ für $\kappa \neq \kappa'$ nun verschwindet.

$\gamma^{(\kappa)} = \gamma$, $r^{(\kappa)} = r$: Für alle Geschwindigkeitskomponenten wird dieselbe rücktreibende Kraft γ , die den Abfall der zeitlichen Korrelationsfunktion bestimmt, verwendet. Die charakteristischen Längen der räumlichen Korrelationen r werden ebenfalls gleichgesetzt.

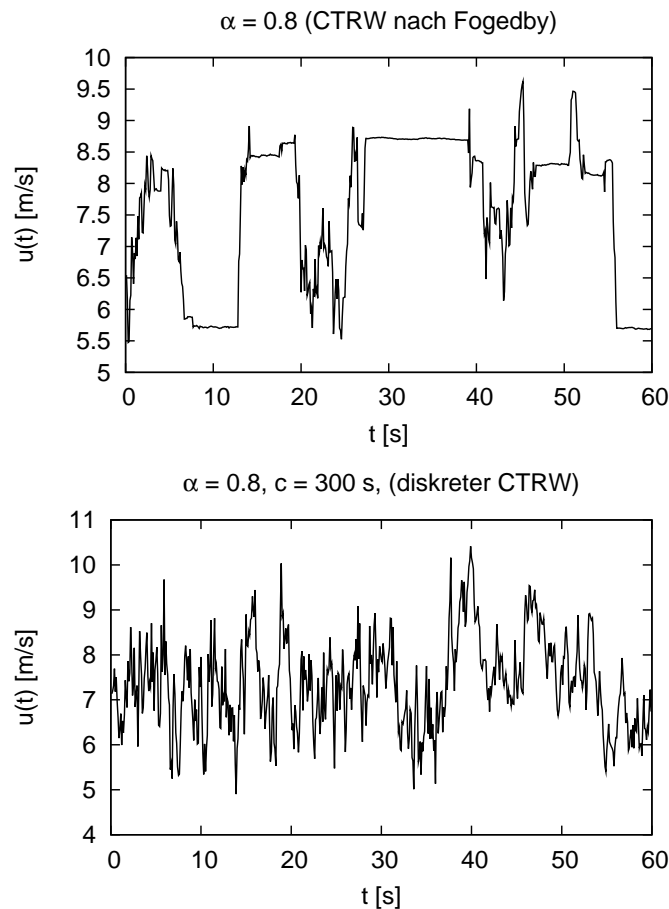


ABBILDUNG 7.21: Ausschnitte aus den in Abbildung 7.20 dargestellten Zeitreihen, in denen die mikroskopischen Auswirkungen der Begrenzung der maximalen Wartezeit, die für die untere Zeitreihe verwendet wurde, deutlich werden.

Numerische Integration des CTRW-Modells

In der Gleichung (7.92) ist für die Transformation der Eigen- in physikalische Zeit zunächst die Verwendung eines (kontinuierlichen) α -stabilen Lévy-Prozesses $t(s)$ vorgesehen, weil die Arbeit von Friedrich [2003] auf diesen Prozessen basiert und sie sich analytisch besser beschreiben lassen als diskrete Transformationen. In Abbildung 6.5 sind einige Beispiele für Prozesse, die sich aus der Verwendung solcher Transformationen ergeben, dargestellt. Die ausgeprägten Regionen, in denen der Prozess „wartet“ und sich – in dem hier betrachteten Fall – die Windgeschwindigkeit über einen längeren Zeitraum nicht ändern, werden in der Atmosphäre jedoch nicht beobachtet. Für die Wartezeiten werden deswegen stattdessen Zufallszahlen $\tau_\alpha^c(s)$, die Verteilungen (2.66) gehorchen und deren Wahrscheinlichkeitsdichte damit oberhalb von c verschwindet, verwendet.¹⁹ In den Abbildungen 7.20 und 7.21 sind die Ergebnisse einer Simulation nach Fogedby und einer diskreten Simulation un-

¹⁹Die Verwendung von Zufallszahlen, die abgeschnittenen Lévy-Verteilungen genügen, ist auf der Basis eines kontinuierlichen Modells leider nicht möglich, weil diese Verteilungen nicht in die Klasse der stabilen Verteilungen fallen (vgl. Abschnitt 5.4). Stattdessen wird für die Zeittransformation deshalb ein diskretes Modell verwendet, das im Folgenden beschrieben ist (vgl. z.B. Gleichung (7.116d) und Abbildung 7.22).

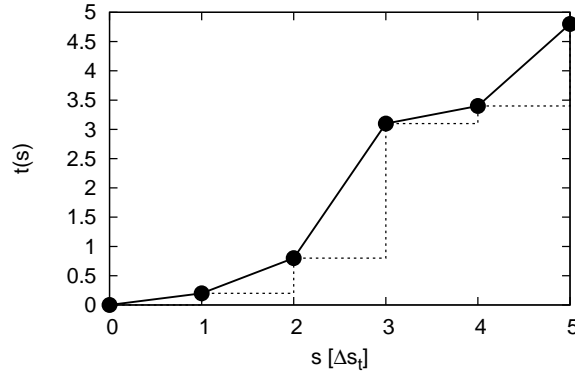


ABBILDUNG 7.22: Schematische Darstellung der Implementierung von (7.116d). Mit Hilfe der diskretisierten Gleichung wird $t(s)$ zunächst nur an einigen Stellen, die hier durch Punkte markiert sind, erzeugt. Ein kontinuierlicher Prozess $t(s)$ kann nun auf verschiedene Weisen erzeugt werden. Während der Prozess in der Mathematik zwischen zwei Sprüngen in der Regel als ruhend angenommen wird (hier durch eine gestrichelte Linie dargestellt, vgl. (5.39)), wird hier eine lineare Interpolation verwendet (durchgezogene Linie). Während diese beiden Ansätze, wie in Abschnitt 5.4 gezeigt worden ist, für Gauß'sche Prozesse $u(s)$ im Kontinuumlimes nach Fogedby ineinander übergehen, ergeben sich in der diskreten Darstellung, die hier gewählt wird, deutliche Unterschiede.

ter Verwendung abgeschnittener Lévy-Verteilungen miteinander verglichen. Es wird deutlich, dass sich die für CTRWs mit divergierenden mittleren Wartezeiten charakteristischen Bereiche, in denen sich die Windgeschwindigkeiten über einen längeren Zeitraum nicht ändern, durch Abschneiden der Verteilungen unterdrücken lassen. Zur numerischen Simulation müssen die Gleichungen (7.86), (7.88) und (7.92) diskretisiert werden. Die einfachste Form der Diskretisierung der Langevin-Gleichungen stellt das Euler-Verfahren dar [vgl. Kloeden & Platen 1992], dessen Genauigkeit für unsere Zwecke ausreichend ist. Unter Berücksichtigung der Vereinfachungen für $\xi^{(v/w)}$, γ und r lauten die diskretisierten Gleichungen (7.86), (7.88) und (7.92), die zur Simulation verwendet werden können, dann

$$u_r(s + \Delta s_u) = u_r(s) - \Delta s_u \gamma_r (u_r(s) - u_0) + \sqrt{\Delta s_u D_r} \Gamma_r(s), \quad (7.116a)$$

$$u_i^{(u)}(s + \Delta s_u) = u_i^{(u)}(s) - \Delta s_u \gamma^{(u)} \left(u_i^{(u)}(s) - \xi_i^{(u)} u_r(s) \right) + \sqrt{\Delta s_u} \sum_j H_{ij}^{(u)} \Gamma_j^{(u)}(s) \quad \forall i, \quad (7.116b)$$

$$u_i^{(v,w)}(s + \Delta s_u) = u_i^{(v,w)}(s) - \Delta s_u \gamma^{(v,w)} u_i^{(v,w)}(s) + \sqrt{\Delta s_u} \sum_j H_{ij}^{(v,w)} \Gamma_j^{(v,w)}(s) \quad \forall i, \quad (7.116c)$$

$$t(s + \Delta s_t) = t(s) + C(\alpha, c, \Delta s_t) \tau_\alpha^c(s). \quad (7.116d)$$

In (7.116a-c) und (7.116d) werden hier unterschiedliche Diskretisierungen Δs_u bzw. Δs_t vorgesehen. Weil τ_α^c für $c < \infty$ keiner stabilen Verteilung genügt, hängt resultierende Prozess $t(s)$ von der gewählten Diskretisierung Δs_t ab. Für $c < \infty$ existieren alle Momente der Verteilungen von τ_α^c . Die Konstante C , die eingeführt wurde, kann deshalb so angepasst werden, dass die mittlere Steigung von $t(s)$ 1 beträgt,

$$C(\alpha, c, \Delta s_t) := \Delta s_t \int_0^c dx f_{\alpha,1}(x) \Big/ \int_0^c dx' x' f_{\alpha,1}(x'). \quad (7.117)$$

Die Einführung einer solchen Normierung scheint aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit von Simulationen mit verschiedenen Stabilitätsparametern α zweckmäßig.

Schließlich muss noch festgelegt werden, wie die Umkehrung des (diskreten) Prozesses $t(s)$ erfolgen soll. In dem Wissen, dass diese Herangehensweise mikroskopisch nicht den üblichen Eigenschaften von CTRWs entspricht, wird der Prozess $t(s)$ zu diesem Zweck linear interpoliert. Ein schematisches Beispiel dafür ist in Abbildung 7.22 dargestellt. Mit Hilfe dieser Interpretation lässt sich die Zeittransformation $s(t)$ im Sinne der *Superstatistik* von Beck & Cohen [2003] verstehen: Das erzeugte Geschwindigkeitsfeld besteht in der Zeit aus verschiedenen Bereichen, in denen die Dynamik jeweils unterschiedlich ist.²⁰ Durch die Transformation der Zeitachse wird insbesondere die zeitliche Korrelation des Prozesses variiert. Innerhalb der einzelnen Bereiche ist die Dynamik jedoch homogen.

Für die Integration der Gleichungen (7.86) und (7.88), die in (7.116a-c) durchgeführt wird, sind die Inkremente Δs_u vorgesehen, die klein genug gewählt werden müssen, um die Stabilität des Euler-Verfahrens zu gewährleisten [Kloeden & Platen 1992]. Für die Simulation des Geschwindigkeitsfeldes zum Zeitpunkt t muss die Integration in s dann bis zum Punkt $s(t)$ vorangetrieben werden.

Die wichtigsten Parameter für die Charakterisierung atmosphärischer Turbulenz sind in den Ingenieurwissenschaften die Windgeschwindigkeit und die Turbulenzintensität jeweils im Zehnminutenmittel (vgl. Anhang C). Ende des letzten Abschnittes hatten wir die stationären Eigenschaften des Modells untersucht. Die in Tabelle 7.3 gegebenen Momente sollen nun genutzt werden, um einige der freien Parameter des Modells anzupassen. Dabei wird vom dänischen Standard ausgegangen, nach dem die Turbulenzintensitäten in v - und w -Richtung relativ zur Turbulenzintensität in u -Richtung 0.8 bzw. 0.5 betragen [vgl. Burton u.a. 2001, S. 21]. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die Korrelation der Fluktuationen in Referenz- und Windgeschwindigkeiten so gering gewählt ist, dass die Statistik innerhalb von 10 min in guter Näherung stationär wird.

Anpassung des Modells an die Anforderungen von Windfeldgeneratoren

Die relevante *Turbulenzintensität* wird in der Windenergiebranche auf Nabenhöhe einer Windkraftanlage definiert. Sei j ein Gitterpunkt, für den z_j der Nabenhöhe entspricht. Die Turbulenzintensitäten $\text{TI}^{(\kappa)}$ in den Komponenten $\kappa = u, v, w$ sind dann [Burton u.a. 2001]

$$\text{TI}^{(\kappa)} = \frac{\sigma_j^{(\kappa)}}{\langle u_j^{(u)} \rangle} \quad \text{mit} \quad \sigma_j^{(\kappa)} := \sqrt{\langle (u_j^{(\kappa)})^2 \rangle - (\langle u_j^{(\kappa)} \rangle)^2} . \quad (7.118)$$

Häufig wird angenommen, dass $\sigma_i^{(\kappa)}$ nicht von der Position (und damit auch nicht von der Höhe) i des Gitterpunktes abhängt [Burton u.a. 2001]. Die Turbulenzintensität steigt dann durch die Proportionalität zu $\langle u_j^{(u)} \rangle$ für geringe Höhen an. Eine Verwendung dieser Näherung ergibt dann allgemein

$$\text{TI}^{(\kappa)} \langle u_j^{(u)} \rangle = \sqrt{\langle (u_i^{(\kappa)})^2 \rangle - (\langle u_i^{(\kappa)} \rangle)^2} . \quad (7.119)$$

Wir haben an dieser Stelle noch die Freiheit, die genaue Bedeutung der Referenzgeschwindigkeit festzulegen. Wenn wir sie als die Entwicklung der Windgeschwindigkeit auf Nabenhöhe verstehen, gilt $\xi_j^{(u)} = 1$. (7.119) kann dann verwendet werden,

²⁰Ein gutes Bild für die Zeittransformation für den linear interpolierten und gemäß (7.117) normierten Prozess $t(s)$ ist die Streckung und Stauchung der ursprünglichen Prozesse $u_i^{(\kappa)}$ in Abhängigkeit von der Steigung von $t(s)$.

Referenzprozess (Nabenhöhe)	
u_0	mittlere Windgeschwindigkeit auf Nabenhöhe
γ_r	Dämpfung
D_r	Diffusion
Windfeld	
γ	Dämpfung der schnellen Fluktuationen
TI	Turbulenzintensität der u -Komponente auf Nabenhöhe
r	räumliche Korrelationslänge der Fluktuationen
Zeittransformation	
α	Stabilitätsindex des Lévy-Prozesses
c	„Cutoff“ der Lévy-Verteilung
Δs_u	Inkrement für die Integration von (7.116d)

TABELLE 7.4: Übersicht über die Parameter der diskreten Version des Windmodells (7.116) unter Einbezug der diskutierten Vereinfachungen sowie der mittleren Windgeschwindigkeit und Turbulenzintensität.

um das Rauschen an den verschiedenen Gitterpunkten jeweils so anzupassen, dass die resultierenden Felder der gewünschten Turbulenzintensität genügen. Unter Verwendung der in Tabelle 7.3 aufgeführten Momente der stationären Verteilung ergibt sich so

$$D_{ii}^{(\kappa)} = \gamma u_0^2 k^{(\kappa)} \text{TI}^2 + \xi_i^{(\kappa)} \frac{\gamma^2}{\gamma + \gamma_r} \frac{D_r}{\gamma_r} \quad , \quad (7.120)$$

wobei gemäß dem dänischen Standard $k^{(u)} = 1$, $k^{(v)} = 0.8^2$ und $k^{(w)} = 0.5^2$ zu wählen sind.

Nun ist das im letzten Abschnitt vorgestellte Modell so angepasst, dass es sich zum einen numerisch umsetzen und zum anderen auch ein Stück weit an die von Ingenieuren geforderten Parameter anpassen lässt. Die freien Parameter dieses vereinfachten diskreten Modells sind in Tabelle 7.4 aufgeführt. Es wird deutlich, dass sich z.B. die Turbulenzintensität und die mittlere Windgeschwindigkeit leicht in Vorgaben, die seitens der Ingenieure gestellt werden, wiederfinden lassen. Die Wahl der anderen Parameter lässt sich prinzipiell z.B. mit Hilfe der in Tabelle 7.3 aufgeführten Korrelationen, der spektralen Eigenschaften und weiterführender Überlegungen diskutieren. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, sprechen aber einige Eigenschaften von CTRWs prinzipiell gegen die Eignung des hier vorgestellten Modells als ein allgemeines und exklusives Modell für atmosphärische Windfelder. Die Anpassung dieses Modells an atmosphärische Windfelder wurde deshalb nicht weiter vorangetrieben. Stattdessen kann es als flexible Möglichkeit genutzt werden, andersartige, intermittente Windfelder zur Verwendung mit den bewährten Programmen zur Berechnung von Windkraftanlagen zu erzeugen. Die Intermittenz der Zeitserien beruht dabei im Wesentlichen auf der Realisierung verschiedener Steigungen der Funktion $t(s)$ und lässt sich daher über die Parameter α , c und Δs_t einstellen. Unter Berücksichtigung der in (7.116d) eingeführten Skalierung C führt eine Erhöhung von c bzw. eine Verminderung von α zu einer Verstärkung der intermittenten Eigenschaften der zeitlichen Geschwindigkeitsinkremente.

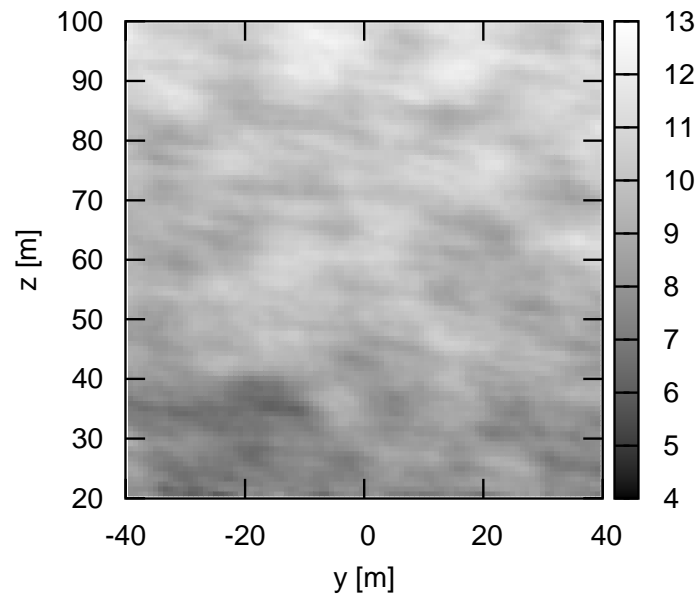


ABBILDUNG 7.23: Schnitt durch eine y - z -Ebene eines auf der Basis des diskretisierten „CTRW-Modells“ (7.116) generierten turbulenten Geschwindigkeitsfeldes zum Vergleich mit dem entsprechenden durch spektrale Simulation gewonnenen Feld (siehe Abbildung 7.9 auf S. 117). Aufgetragen ist wiederum der Betrag der Windgeschwindigkeit. Die genauen Parameter für die Simulation sind auf Seite 147 aufgeführt.

Beispiele simulierter Windfelder

In den Abbildungen 7.23 bis 7.25 sind einige Eigenschaften eines mit Hilfe des hier vorgestellten Modells simulierten Windfeldes dargestellt, das für folgende Parameter erzeugt wurde: Nabenhöhe 60 m, Windgeschwindigkeit auf Nabenhöhe $u_0 = 10$ m/s, $r = 3.5$ m, Turbulenzintensität $TI = 10$ %, Dämpfung (mikroskopisch) $\gamma = 0.9$ m, Dämpfung (Referenz) $\gamma_r = 0.2$ m, Diffusion (Referenz) $D_r = 0.1$ m, charakteristischer Exponent $\alpha = 0.8$, Cutoff $c = 300$ s und Zeitinkrement $\Delta s_t = 100$ s. Die Windgeschwindigkeiten wurden auf einem kartesischen Gitter berechnet. Für die Berechnung der relativen Windgeschwindigkeiten ξ_i auf den verschiedenen Höhen wurde ein logarithmisches Höhenprofil zugrunde gelegt.

Abschätzung von Lasten an Windkraftanlagen

Zur Verwendung der auf diese Art und Weise erzeugten Windfelder in FLEX5 durch die Projektpartner in Kiel musste das Gitter angepasst werden. Weil FLEX5 ausschließlich mit polaren Gittern arbeitet und eine gewisse radiale Verteilung der Gitterpunkte voraussetzt, wurde statt eines kartesischen das in Abbildung 7.26 skizzierte polare Gitter verwendet.

Zum Vergleich mit den spektralen Modellen haben die Projektpartner dann für verschiedene atmosphärische Bedingungen jeweils 100 Windfelder mit einer Länge von 10 min erzeugt. Zur Verarbeitung der Daten in FLEX5 stand ihnen das Modell einer aktuellen Windkraftanlage eines deutschen Herstellers zur Verfügung. FLEX5 berechnet für die Anlage dann für jedes der Eingangswindfelder die zeitliche Entwicklung verschiedener Momente. Für den Vergleich wurden insbesondere Momente betrachtet, die an der Blattwurzel der Windkraftanlagen angreifen, weil dieser Ort als kritische Stelle bekannt ist.

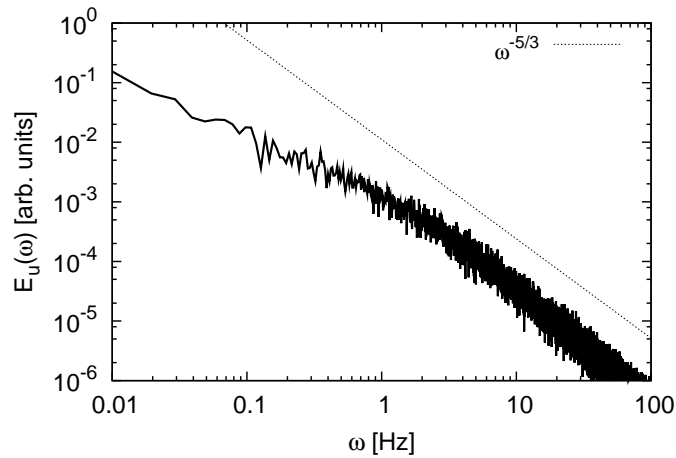


ABBILDUNG 7.24: Spektrum der u -Komponente des simulierten Windfeldes auf Nabenhöhe. Über etwa eine Größenordnung kann das Spektrum durch ein Potenzgesetz mit dem Exponenten $-5/3$ angenähert werden. Ein ausgeprägter Inertialbereich zeigt sich also nicht.

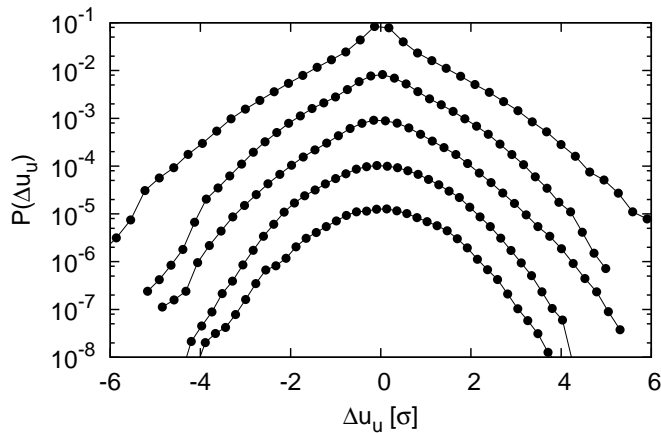


ABBILDUNG 7.25: Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente der u -Komponente eines Gitterpunktes auf Nabenhöhe für $\Delta t = 1, 5, 10, 30$ und 60 s (von oben nach unten). Die einzelnen Verteilungen sind der Übersichtlichkeit halber gegen einander verschoben. Im Gegensatz zu den Inkrementverteilungen, die sich für CTRWs im Kontinuumsübergang ergeben (vgl. Abbildung 6.6), kann durch Integration des Zeitprozesses auf Basis von (7.116d) für endliche Δs_t in Verbindung mit der linearen Interpolation, die an Abbildung 7.22 dargestellt ist, eine Ausdehnung des zentralen Peaks bewirkt werden. Der diskrete Prozess wird also im Gegensatz zu Fogedbys CTRWs nicht mehr von persistentem Verhalten dominiert. Für große Zeitinkremente wird die Statistik aufgrund einer endlichen mittleren Wartezeit normal. Es wird deutlich, dass der untersuchte Datensatz die Gegebenheiten in der Atmosphäre, die in Abbildung 7.3 dargestellt sind, schon wesentlich besser wiedergibt als spektrale Simulationen es können (vgl. Abbildung 7.10).

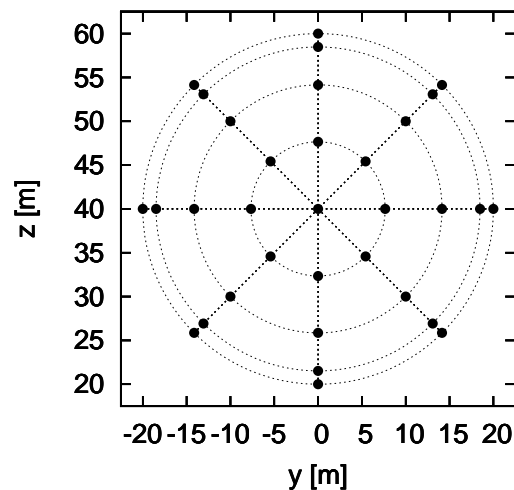


ABBILDUNG 7.26: Schematische Darstellung des polaren Gitters, das für die Erzeugung von Windfeldern zur Verwendung mit FLEX5 verwendet wurde. Die weitere Verarbeitung des Feldes sowie die Interpolation an den relevanten Stellen wurde von FLEX5 übernommen.

Aufgrund der Rotation der Flügel sowie der Schwankungen des einfallenden Windes zeigen die Momente zyklische und stochastische Fluktuationen wechselnder Amplituden. Diese einzelnen Lasten wurden mit Hilfe eines „Rainflow-Counting-Algorithmus“, dessen Anwendung zu diesem Zweck verbreitet ist, in äquivalente Ermüdungslasten umgerechnet. Für jedes zehnmündige Windfeld ergibt sich so ein einziger Wert, der ein Maß für die Belastung der Anlage im Bereich der Blattwurzel ist.

Die resultierenden Ermüdungslasten an der Blattwurzel wurden – auf der Grundlage von 100 Simulationen – dann statistisch ausgewertet. Dieses Procedere ist neben für auf der „Sandia-Methode“ mit spektralen Modellen nach Kaimal und von Kármán basierenden Feldern auch für mit Hilfe des CTRW-Modells²¹ erzeugte, intermittente Windfelder durchgeführt worden. Auf Basis von Ensembles der Größe 100 wurden dann jeweils die mittleren sowie die maximalen Lasten im Verhältnis zur Simulation mit Hilfe der „Sandia-Methode“ unter Verwendung des Kaimal-Modells für atmosphärische Turbulenz verglichen. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 7.27 und 7.28 zu sehen.

Zunächst einmal fällt auf, dass insbesondere die Abweichungen bei den maximalen Lastäquivalenten sehr groß sind. Das gilt auch schon für den Vergleich zwischen den beiden verschiedenen spektralen Modellen. Allgemein scheinen die Lasten auf der Basis des Kaimal-Modells geringer zu sein als die der spektralen Simulation auf der Basis des von Kármán-Modells sowie der Windfelder auf der Basis des CTRW-Modells. Die Tatsache, dass das CTRW-Modell beim Vergleich der Extremwerte die größten Abweichungen zeigt, ist ein Hinweis darauf, dass die Verteilung der Lasten intermittenter ist als bei den spektralen Modellen. Insbesondere im Bezug auf die Klassifizierung von Extremlasten ist aber nicht sicher, welche Signifikanz dieses Ergebnis bei einer Berücksichtigung von nur 100 Ereignissen hat.

Bei der Betrachtung der mittleren Lasten zeigt das CTRW-Modell den entgegen-

²¹In dem frühen Projektstadium, in dem diese Analyse durchgeführt wurde, wurde die Anpassung der mikroskopischen Diffusion D_{ii} noch nicht – wie in (7.120) – auf Basis der gewünschten Turbulenzintensität durchgeführt. Die gewünschte Turbulenzintensität konnte deshalb nur durch nachträgliche Skalierung der simulierten Windfelder erreicht werden.

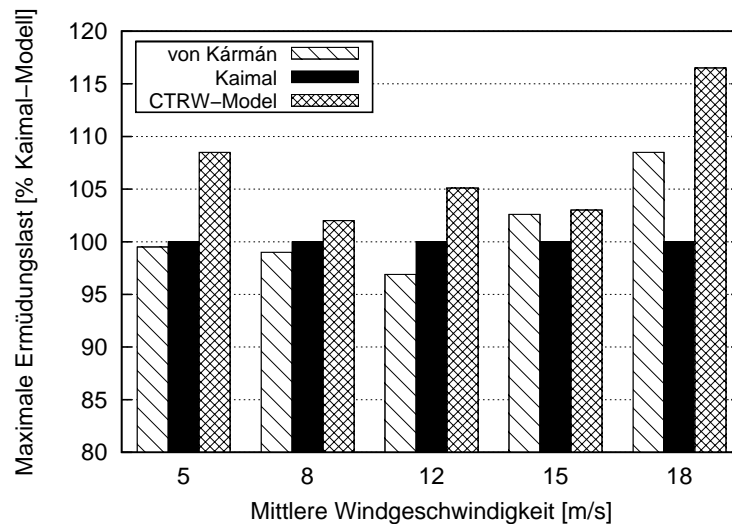


ABBILDUNG 7.27: Auswertung der maximal auftretenden Ermüdungslasten für Ensembles von 100 verschiedenen Simulationen in Abhängigkeit von der mittleren Windgeschwindigkeit im Simulationszeitraum. Die Berechnungen wurden jeweils mit simulierten Windfeldern der „Sandia-Methode“ für die spektralen Modelle von Kaimal und von Kármán sowie mit dem im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten CTRW-Modell ausgeführt. Die aus einer Zeitreihe mit 600 s Länge resultierenden Ermüdungslasten sind jeweils im Verhältnis zum Ergebnis auf der Basis des Kaimal-Modells wiedergegeben. Es fällt auf, dass die Maximallasten große Unterschiede aufweisen. Die Lasten durch Windfelder, die mit dem CTRW-Modell erzeugt wurden, liegen immer oberhalb derer der entsprechenden Simulation nach dem Kaimal-Modell. Dieses Verhalten scheint sich für große Windgeschwindigkeiten zu verstärken. (Quelle: Gontier u.a. 2006)

gesetzten Trend: Mit steigender mittlerer Windgeschwindigkeit nimmt die mittlere Belastung ab. Leider liegen keine Informationen über andere statistische Eigenschaften wie z.B. den Median oder andere Quantile vor. Eine Verminderung der mittleren Lasten steht aber nicht prinzipiell im Widerspruch zu einer intermittenten Verteilung der Lasten. Betrachtet man die Verteilungen der zeitlichen Inkremente der Windgeschwindigkeit für CTRWs, so findet sich im Ursprung stets eine Überhöhung, die aus den persistenten Warteereignissen herrührt. Auch wenn dieser Peak durch die Diskretisierung der Differentialgleichungen etwas verbreitert werden konnte (vgl. Abbildungen 6.6 und 7.25), können ausgeprägte Warteereignisse zu relativ geringen Fluktuationen der Windgeschwindigkeiten führen. Weil die im Vergleich zum Kaimal-Modell relativ geringen Lasten aber einhergehen mit im Verhältnis großen maximalen Lasten, ist zu erwarten, dass die Abweichungen z.B. beim Median noch größer gewesen wären.

Letztendlich ließe sich noch untersuchen, wie sich die hier erhaltenen Ergebnisse verhalten würden, wenn die Längen der Simulation erhöht (z.B. verdoppelt) würden. Je nach Charakteristik des Materials, das in die Analyse durch eine materialspezifische Modellierung der Lebenszyklen als Funktion der Amplitude der zyklisch wirkenden Momente einbezogen wird, verhalten sich die einzelnen Lasten nicht additiv. Es ist deshalb vorstellbar, dass sich der statistische Einfluss der maximal auftretenden Lastäquivalente bei längeren Simulationen anders auf die mittleren Lasten auswirkt.

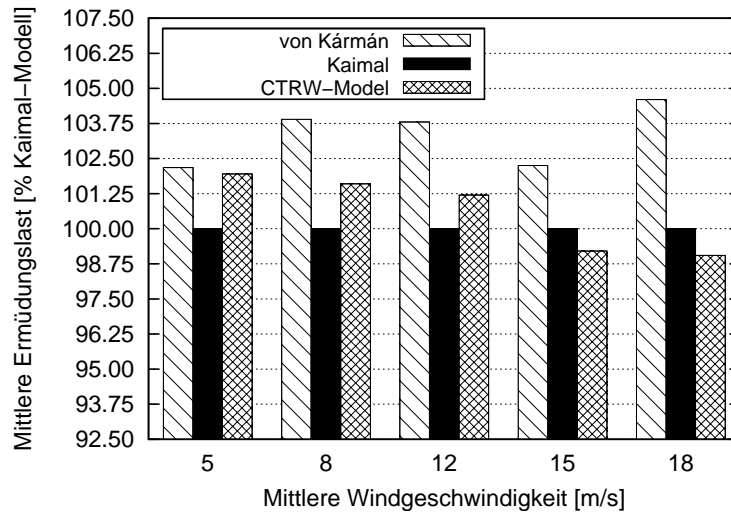


ABBILDUNG 7.28: Auswertung der maximal auftretenden Ermüdungslasten für Ensembles von 100 verschiedenen Simulationen in Abhängigkeit von der mittleren Windgeschwindigkeit im Simulationszeitraum. Für eine genaue Beschreibung der Auswertung sei auf die Bildunterschrift von Abbildung 7.27 verwiesen. Die mittleren Lasten durch von dem CTRW-Modell erzeugte Windfelder nehmen mit steigender Windgeschwindigkeit relativ zum Kaimal-Modell ab und unterschreiten diese für Windgeschwindigkeiten von 15 m/s und 18 m/s. Die Lasten, die sich auf der Basis des von Kármán-Modells ergeben, liegen hingegen stets über denen des Kaimal-Modells. (Quelle: Gontier u.a. 2006)

7.7 Grenzen des CTRW-Modells

In diesem Kapitel sind zunächst viele verschiedene Methoden zur Simulation von Windfeldern, die in den letzten Jahrzehnten entwickelt worden sind, und dann ein Modell auf der Basis von CTRWs, das im Rahmen dieser Arbeit entstanden ist, vorgestellt worden. Die Möglichkeiten und Grenzen des CTRW-Modells im Verhältnis zu den anderen Ansätzen werden nun kritisch diskutiert.

In Kapitel 5 haben wir gesehen, dass CTRWs im Ensemble-Sinne fraktionale Eigenschaften haben, wenn die Wartezeitverteilungen einem Potenzgesetz mit charakteristischem Exponenten größer als -2 genügen und somit keine mittlere Wartezeit existiert. Die Dynamik von Ensembles ist dann subdiffusiv und geht durch einen Gedächtniskern aus der Dynamik der entsprechenden integren Differentialgleichung hervor, (5.32). Der Ansatz besitzt damit eine gewisse Ähnlichkeit mit der Modellierung durch Barndorff-Nielsen & Schmiegel [2008], die einen Gedächtnisterm in die Simulation der einzelnen Prozesse einführen.

Die Inkrementverteilungen von CTRWs zeigen üblicherweise einen ausgeprägten Peak an der Stelle 0 (vgl. Abbildung 6.6), weil CTRWs von Stellen, an denen der Prozess „wartet“ und sich in unserem Falle z.B. die Windgeschwindigkeiten nicht ändern, dominiert werden. Solche Bereiche werden in der atmosphärischen Turbulenz aber nicht beobachtet, weil sich der Zustand der Atmosphäre durch einen dauerhaften Energiefluss stets ändert. Zur Begrenzung der Auswirkungen dieses Peaks wurde für die Zeittransformation des Prozesses speziell ein linear interpolierter, diskreter Zufallsprozess mit Inkrementen, deren Momente allesamt existieren, zugrunde gelegt. Durch die Verwendung eines solchen Prozesses konnten der Einfluss der langen Wartezeiten auf die Dynamik etwas vermindert und die Form der Inkrementverteilungen den in turbulenten Strömungen beobachteten angenähert werden (vgl.

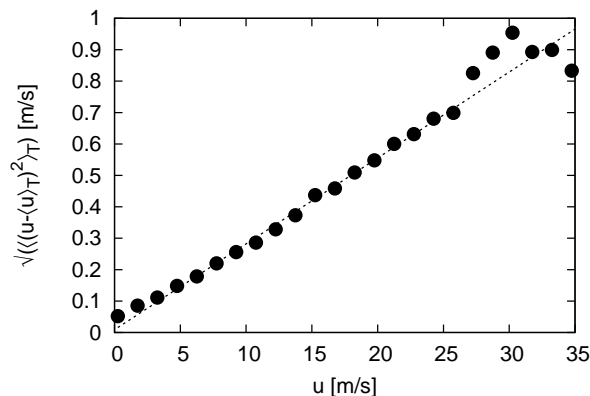


ABBILDUNG 7.29: Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung als Funktion der Windgeschwindigkeit für auf der FINO-Plattform in einer Höhe von 33 m mit Hilfe eines Schalenkreuzanemometers gemessene Beträge der Windgeschwindigkeit [FINO]. Die Messungen wurden mit 1 Hz durchgeführt. Für diese Auswertung wurden die Varianz nicht – wie üblich – auf zehnmünütige Beobachtung, sondern nur auf einen Zeitraum von $T = 3$ s bezogen und kann daher als „instantane Varianz“ bezeichnet werden. Es wird deutlich, dass die Varianz quadratisch von der instantanen Windgeschwindigkeit abhängt.

Abbildung 7.25 mit den Abbildungen 7.2 und 7.3). Eine Reproduktion der gesamten Kaskade, wie sie in Abbildung 5.3 zu sehen ist, scheint auf der Basis der hier betrachteten CTRWs jedoch prinzipiell nicht möglich, weil für die Anpassung der Verteilungsfunktionen an die Daten auf verschiedenen Zeitskalen verschiedene Werte für den charakteristischen Exponenten α zugrundegelegt wurden.²² Solche Effekte ließen sich evtl. erzielen, wenn eine andere Zeittransformation mit nicht-markovischem Charakter eingeführt würde. Dann würde man sich von dem ursprünglichen Modell der CTRWs jedoch noch weiter entfernen.

Durch die Einführung einer „Referenzgeschwindigkeit“ auf Nabenhöhe wurde neben den mikroskopischen Fluktuationen eine zweite Zeitskala eingeführt, die es ermöglicht, die Instationarität atmosphärischer Turbulenz in gewissen Grenzen zu berücksichtigen. Außerdem lässt sich das Energiespektrum so in einem bestimmten Bereich stabilisieren. Es ist gelungen, die Parameter der Prozesse so festzulegen, dass die Turbulenzintensität der zu simulierenden Daten zuverlässig reproduziert werden kann. Diese Tatsache ist für die spätere Anwendung von großer Wichtigkeit. In Übereinstimmung mit dem in Anhang C vorgestellten Modell ist zu erkennen, dass die gewünschte Turbulenzintensität bei einer Beschränkung auf zehnmünütige Mittelwerte alternativ durch langsame Fluktuationen oder Trends, die Instationaritäten auf kleinen Skalen zur Folge haben, oder auch durch schnelle Fluktuationen erzeugt werden kann. Die Auswirkungen auf die Belastung von Windkraftanlagen dürften jedoch sehr unterschiedlich sein. Diese Tatsache wird in vielen anderen Modellen nur unzureichend berücksichtigt.

Im „CTRW-Modell“ werden intermittente Strukturen ausschließlich in der Zeit und ausschließlich durch die Zeittransformation erzeugt. Es ist nicht verwunderlich,

²²Ein anderer Grund für die gute Übereinstimmung der Inkremente von CTRWs mit gemessenen Daten in Abbildung 5.3 ist die Verwendung von „Truncated Lévy“-Verteilungen bei der Auswertung von (5.33) durch Friedrich [2003], die zu einer Unterdrückung des persistenten Peaks der Inkrementverteilungen an der Stelle 0 führt. Die Konsequenzen dieser Anpassung in der Ensemble-Beschreibung für die Realisierungen der mikroskopischen Prozesse sind jedoch nicht geklärt. Insbesondere ist zu untersuchen, inwieweit sich die entsprechenden mikroskopischen Prozesse dann noch durch CTRWs realisieren lassen.

dass die Prozesse in der Atmosphäre ungleich komplexer sind und – je nach Umgebung und Wettersituation – natürlich auch räumlich intermittente Effekte auftreten. Ein anderer wichtiger Aspekt ist aber der multiplikative Charakter von atmosphärischer Turbulenz, der in Abbildung 7.29 zu erkennen ist: Die lokale Varianz ist eine Funktion der instantanen Windgeschwindigkeit. Solche Effekte lassen sich mit dem CTRW-Modell prinzipiell nicht reproduzieren bzw. machen die Durchführung einer Zeittransformation überflüssig, weil die multiplikativen Effekte in Verbindung mit instationärem Verhalten schon zu einer Überlagerung verschiedener (Gauß'scher) Statistiken und somit zu intermittenten Inkrementverteilungen führen können [Kholmyansky u.a. 2007]. Zu diesem Zweck wurde ein einfaches, multiplikatives Modell getestet, das die Entwicklung einer eindimensionalen Variablen u durch einen die Instationarität beschreibenden, langsam veränderlichen Anteil \bar{u} und einen schnell fluktuierenden Anteil u' modelliert als

$$u(t) = \bar{u}(t) + (\alpha + \beta\bar{u}(t)) u'(t) \quad . \quad (7.121)$$

Als fluktuierende Variablen lassen sich prinzipiell mit Hilfe der spektralen Verfahren simulierte Felder verwenden, die die gewünschten spektralen Eigenschaften besitzen. Für eine stochastische Simulation von \bar{u} könnte z.B. auf die Arbeiten von Monahan [2004, 2006] zurückgegriffen werden. Dieses Modell stellt ebenfalls einen sehr einfachen und vielversprechenden Ansatz dar und wird derzeit von Projektpartnern in Dresden intensiv weiterentwickelt.

Welche Relevanz hat nun also das hier vorgestellte CTRW-Modell? Es ist sicherlich kein Modell, das die Dynamik der Atmosphäre vollständig oder gar „richtig“ abbildet. Auf der anderen Seite hat die intensive Nutzung der Methoden der spektralen Simulationen von Windfeldern, die ebenfalls nur sehr eingeschränkt Übereinstimmungen mit tatsächlich realisierten Windfeldern aufweisen, gezeigt, dass für die Verwendung im Zusammenhang mit der Konstruktion von Windkraftanlagen insbesondere ein geringer numerischer Aufwand wichtig ist. In diesem Punkt unterscheiden sich die verschiedenen Modelle, die vorgestellt wurden, deutlich: Während die Ansätze von Barndorff-Nielsen & Schmiegel [2008] sowie Nawroth & Peinke [2006] sehr vielversprechend sind und davon auszugehen ist, dass sie in der Lage sind, die statistischen Eigenschaften atmosphärischer Turbulenz akkurat zu reproduzieren, ist die Anwendung zur Nutzung in der Auslegung von Windkraftanlagen im Moment noch nicht vorstellbar, weil die Modelle zu rechenintensiv sind. In diesem Sinne besitzt das CTRW-Modell seine Berechtigung, weil es die effiziente Erzeugung von intermittenten Feldern mit der gewünschten Turbulenzintensität ermöglicht, während sich die Eigenschaften der Prozesse vielen Anforderungen anpassen lassen. Aufgrund der Vielzahl an freien Parametern dürfte die Bedeutung im jetzigen Entwicklungsstand jedoch vorrangig akademischer Natur sein. Für einen industrienahen Einsatz müsste die Anpassung der Parameter intensiv vorangetrieben werden.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Aspekten der Modellierung komplexer Systeme.

Zunächst ist ein vor einiger Zeit vorgeschlagenes Verfahren zur Bestimmung von gemessenen Daten zugrundeliegenden stochastischen Differentialgleichungen untersucht worden. Es wurde gezeigt, dass eine Methode zur iterativen Optimierung der Ergebnisse dieses Verfahrens, die im Jahre 2005 entwickelt worden ist [Kleinhans u.a. 2005], im Wesentlichen einer „Maximum-Likelihood“-Optimierung entspricht. Damit lässt sich die iterative Optimierung nun auch zur Analyse von Systemen anwenden, für die nur wenige Messdaten vorliegen.

Im Rahmen einer genauen Untersuchung von stochastischen Prozesse in der Skala, wie sie z.B. zur Beschreibung turbulenter Strömungen Verwendung finden, wurden die Zusammenhänge zwischen der Beschreibung von Prozessen in der Skala und in der Zeit analysiert. So konnte z.B. Gleichung (3.46a) angegeben werden, die die Drift- und Diffusionsfunktionen in der Skala mit denen der entsprechenden Prozesse in der Zeit in Verbindung setzt.

Ein ganzes Kapitel ist den Markov-Eigenschaften stochastischer Prozesse gewidmet, die häufig Voraussetzung für eine effiziente Durchführung stochastischer Analyseverfahren sind. Auf der anderen Seite sind Markov-Eigenschaften auf kleinen Zeit- und Längenskalen typischerweise verletzt. Schon Einstein [1905] hat darauf hingewiesen, dass eine solche Verletzung der Markov-Eigenschaften aufgrund der endlichen Korrelationen physikalischer Kräfte auf mikroskopischen Skalen zu erwarten ist. Es konnte jedoch gezeigt werden, dass auch viele Formen von externen Fehlerquellen wie z.B. Messrauschen und Diskretisierungsfehler die Markov-Eigenschaften beeinträchtigen und – insbesondere auf kleinen Skalen – die dominierende Ursache für das Verschwinden dieser Eigenschaften sein können. Lück u.a. [2006] haben die „Markov-Einstein-Kohärenzlänge“ eingeführt, die das Einsetzen von mikroskopischen Kräften im Sinne von Einstein beschreibt. An dieser Stelle soll noch einmal betont werden, dass aufgrund der Auswirkungen von externen Störungen in jedem Fall zu untersuchen ist, ob diese Größe tatsächlich durch intrinsische, physikalische Eigenschaften des Systems oder vielmehr durch externe Störungen determiniert ist.

Wir haben uns dann „Continuous Time Random Walks“ (CTRWs) zugewendet. Diese stochastischen Prozesse stellen eine Verallgemeinerung von klassischen „Random Walks“ dar und zeigen im Ensemble-Sinne anomales Diffusionsverhalten. Aus diesem Grunde haben sie in den letzten Jahren in viele Bereiche der Naturwissenschaften, in denen ein solches Diffusionsverhalten beobachtet wird, Einzug gehalten. Während die Ensemble-Statistik solcher Prozesse im Langzeitlimit z.B. durch Arbeiten von Metzler & Klafter [2000], Barkai u.a. [2000] und Barkai [2001] weitgehend untersucht war, erwiesen sich die Erkenntnisse über die Statistik der Trajektorien zu endlichen Zeiten im Jahre 2005 noch als relativ rudimentär. Eine elegante For-

mulierung von stochastischen Differentialgleichungen für die Trajektorien solcher Prozesse durch Fogedby [1994], die gewissermaßen das Kontinuumlimit von CTRWs beschreibt und schon für einige Arbeiten zur Berechnung von Ensemble-Statistiken herangezogen worden war, war damals noch nicht im Detail verstanden (vgl. Abschnitt 5.4).

Im Rahmen dieser Arbeit wurde Fogedbys Ansatz detailliert untersucht. In diesem Zusammenhang ist es gelungen, die Eigenschaften der Zeittransformation, die die Ursache für das Verschwinden der Markov-Eigenschaften darstellt, genauer zu erfassen, als es in der Vergangenheit geschehen ist. Darauf aufbauend konnte die Simulation stetiger Trajektorien von CTRWs auf der Basis von Fogedbys Modellierung selbstkonsistent durchgeführt werden (vgl. Abschnitt 6.3). Eine Anwendung hat das in diesem Rahmen vorgestellte Simulationsverfahren bereits in einer gemeinsamen Arbeit mit Eule u.a. [2007] gefunden.

Nicht zuletzt unterstreicht die Tatsache, dass im vergangenen Jahr drei Gruppen von Wissenschaftlern dieses Problem unabhängig von einander angegangen und in ähnlicher Weise gelöst haben, die Relevanz solcher Simulationen für die numerische Lösung fraktionaler Gleichungen [vgl. Gorenflo u.a. 2007; Kleinhans & Friedrich 2007a; Magdziarz u.a. 2007]. Durch die Verwendung von Fogedbys Modell konnte im Rahmen dieser Arbeit ein besonders einfacher und schneller Algorithmus zur Simulation stetiger Trajektorien formuliert werden.

Im Anschluss daran haben wir uns mit den mikroskopische Ursachen anomaler Diffusion befasst. In diesem Zusammenhang ist ein Modell vorgestellt worden, das – nach der Einführung eines stochastischen Potentials – in der Lage ist, ausgehend von physikalischen Argumenten die mikroskopischen Eigenschaften subdiffusiver Prozesse wiederzugeben. Diese Arbeit soll in Zukunft noch weiter vorangetrieben werden.

Friedrich [2003] hatte berichtet, dass CTRWs prinzipiell die Kaskade von intermittenten Geschwindigkeitsinkrementen turbulenter Strömungen reproduzieren können. Außerdem bestand die Vermutung, dass die fehlende Möglichkeit, eben diese intermittenten Fluktuationen zu modellieren, ein Grund für die Probleme waren, Windkraftanlagen, die in der turbulenten atmosphärischen Grenzschicht betrieben werden, während des Produktionsprozesses an die Gegebenheiten atmosphärischer Turbulenz anzupassen und deren Haltbarkeit so zu erhöhen. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit war es deshalb schließlich, im Rahmen eines vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten Verbundprojektes ein Modell zur Simulation atmosphärischer Windfelder, das auf den Eigenschaften von CTRWs basiert, zu entwickeln.

In Kapitel 7 wurde zunächst ausführlich in die Problematik der Simulation turbulenter Strömungen im Allgemeinen und atmosphärischer Turbulenz im Speziellen eingeführt. Dort findet sich in Abschnitt 7.4 eine umfangreiche Übersicht über verschiedene Modelle, die derzeit zur Simulation atmosphärischer Turbulenz verwendet oder für zukünftige Anwendung in Betracht gezogen werden. Weil diese Zusammenstellung den Rahmen dieser Arbeit zwischenzeitlich zu sprengen scheint, soll noch einmal betont werden, dass die (numerische) Simulation der Grenzschicht mit Hilfe einfacher Modelle in der Literatur häufig ein Nischendasein fristet. Während der Laufzeit des Projektes ist aber deutlich geworden, welche zentrale Bedeutung dieser Modellierung bei der Anwendung von numerischen Modellen für Windkraftanlagen zukommt und wie groß das Interesse von verschiedenen Seiten an der Funktionsweise solcher Modelle ist. Es ist deshalb zu hoffen, dass mit dem umfassenden Überblick ein Beitrag zur Weiterentwicklung der Modelle geleistet werden konnte.

Es hat sich gezeigt, dass in der Industrie bislang ausschließlich Windfelder zum Einsatz kommen, die spektrale Simulationsmethoden verwenden und Extremereignisse wie z.B. Windböen nicht korrekt wiedergeben können. In der zweiten Hälfte des Kapitels 7 ist deshalb ein Windfeldmodell entwickelt worden, das auf CTRW-Prozessen basiert. Dafür wurde ein System von gekoppelten Drift- und Diffusions-

prozessen einer Zeittransformation unterzogen, die zu intermittenten Inkrementen der Windgeschwindigkeit in der Zeit führt. Das Modell ist in Zusammenarbeit mit Projektpartnern in Kiel an Modellen für reale Windkraftanlagen getestet und auf Unterschiede der Belastung im Verhältnis zu spektralen Windfeldern hin untersucht worden. Im Vergleich zu den gebräuchlichen spektralen Simulationsmodellen ergibt sich unter Einwirkung von Windfeldern des CTRW-Modells eine erhöhte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Extremlasten, während die mittlere Belastung zu sinken scheint. Die Ergebnisse sind in Abschnitt 7.6 zusammengestellt und diskutiert.

Während die Anpassung der Inkrementverteilungen von CTRWs an die gemessenen Daten auf der Basis der Ensemble-Statistik, wie Friedrich [2003] sie durchgeführt hat, gute Ergebnisse zeigt, gestaltet sich eine Verbesserung der Inkrementverteilungen von mit Hilfe des CTRW-Modells erzeugten Windfeldern als sehr schwierig. Der Grund dafür ist, dass für die in Abbildung 5.3 (Seite 64) dargestellten Fits auf verschiedenen Zeitskalen jeweils unterschiedliche charakteristische Exponenten der Wartezeitverteilung zugrundegelegt wurden. Ferner wurde der unstetige Charakter der Zeittransformation $t(s)$, der zu der Überhöhung der 0 in sämtlichen Inkrementverteilungen führt (vgl. Abbildung 6.6 auf Seite 80), unterdrückt. Aus diesem Grunde ist es leider nicht zu erwarten, dass mit einem CTRW-basierten Modell eine derart gute Übereinstimmung zu erzielen ist.

Trotzdem hat das CTRW-Modell seine Berechtigung, weil es eine schnelle Erzeugung von Daten mit der gewünschten Turbulenzintensität und mittleren Windgeschwindigkeit unter Verwendung zweier verschiedener Zeitskalen ermöglicht. Aus diesem Grunde wird es im Rahmen eines Anschlussprojektes an der Universität Oldenburg von Mücke und Peinke weiter Verwendung finden. Darüber hinaus hat sich gezeigt, dass das Ziel des Verbundprojektes, Grundlagenforschung und Industrie näher zusammenzuführen, einige positive Früchte trägt: Insbesondere seit jeher industriennahe Forschungseinrichtungen sind mittlerweile auf den Zug aufgesprungen und arbeiten intensiv an einer besseren Charakterisierung und Modellierung atmosphärischer Turbulenz.

Zusammenfassend enthält diese Arbeit wissenschaftliche Ergebnisse in einem breiten Feld – angefangen von der Theorie zur Schätzung stochastischer Prozesse und der Modellierung fraktionaler Prozesse bis hin zur Einführung eines sehr industriennahen und damit angewandten Modells zur stochastischen Simulation von Windfeldern – und gibt damit einen umfassenden Einblick in die vielfältigen Problemstellungen bei der Analyse, Beschreibung und Modellierung komplexer Systeme.

Anhang A

Erzeugung Lévy-verteilter Zufallszahlen

Janicki & Weron [1994] sowie Weron [2001] haben einen Algorithmus vorgeschlagen, mit Hilfe dessen sich unabhängige Zufallszahlen, die α -stabilen Lévy-Verteilungen genügen, sehr effizient erzeugen lassen. Dieser Algorithmus wurde speziell für die Simulation von Zufallszahlen der vollständig schiefen Lévy-Verteilung $f_{\alpha,1}$, (2.61), mit $\alpha \leq 1$ angepasst. Das hier vorgestellte Verfahren findet sich in ähnlicher Form bereits im Anhang von Kleinhans & Friedrich [2007a].

Zur Erzeugung unabhängiger Zufallszahlen $\Gamma_{\alpha \leq 1,1}$, die der Verteilung $f_{\alpha,1}$ genügen und zur numerischen Integration von Lévy-Prozessen auf Basis von (2.73) benötigt werden, ist wie folgt vorzugehen:

- Erzeugung unabhängiger Zufallszahlen V und W , wobei V gleichmäßig auf $]-\pi/2, \pi/2[$ verteilt ist und W einer Exponentialverteilung mit Mittelwert 1 genügt. Verschiedene optimierte Zufallszahlengeneratoren bieten Routinen zur Erzeugung dieser Zufallszahlen [z.B. Press u.a. 1992]. Im Zweifelsfall können V und W aus zwei unabhängigen Zufallszahlen u_1 und u_2 , die gleichverteilt auf $]0, 1[$ sind und üblicherweise in jeder Programmierumgebung zur Verfügung stehen, berechnet werden als

$$V = \pi \left(u_1 - \frac{1}{2} \right) , \quad (\text{A.1a})$$

$$W = -\log(u_2) . \quad (\text{A.1b})$$

- Eine Zufallszahl $\Gamma_{\alpha,1}$, die der gewünschten Verteilung $f_{\alpha,1}$ genügt, geht dann aus V und W hervor als

$$\Gamma_{\alpha,1} = \frac{\sin \left[\alpha \left(V + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{[\cos(V)]^{(1/\alpha)}} \left\{ \frac{\cos \left[V - \alpha \left(V + \frac{\pi}{2} \right) \right]}{W} \right\}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} . \quad (\text{A.1c})$$

Für $\alpha = 1$ geht $f_{\alpha,1}$ in eine δ -Verteilung über. Diesem Verhalten wird durch die hier beschriebene Simulation auf Basis von V und W Rechnung getragen, weil für $\alpha = 1$ stets $\Gamma_{1,1} = 1$ folgt. Die erzeugten Zufallszahlen $\Gamma_{\alpha,1}$ sind bei Verwendung geeigneter Verfahren zur Erzeugung der Zufallszahlen V und W bzw. u_1 und u_2 unabhängig voneinander. Abbildung A.1 zeigt anhand einer Stichprobe von 10^7 Zufallszahlen für $\alpha = 0.8$, dass die Verteilung (2.61) in allen Bereichen sehr gut reproduziert wird. Der hier vorgestellte Algorithmus eignet sich damit zur numerischen Integration von Gleichungen wie (2.73).

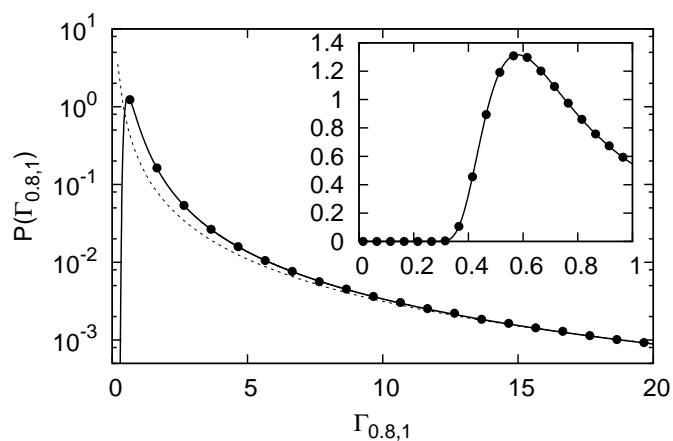


ABBILDUNG A.1: Überprüfung der Genauigkeit der Erzeugung von Lévy-verteilten Zufallszahlen mit Hilfe des hier vorgestellten angepassten Algorithmus nach Janicki & Weron [1994] und Weron [2001]. Die durchgezogene Linie stellt die numerische Lösung von (2.61) für $\alpha = 0.8$ dar. Für $\Gamma_{0.8,1} \gg 1$ fällt die Verteilung gemäß einem Potenzgesetz mit Exponenten $1 + 0.8$ ab, das durch die gestrichelte Linie dargestellt ist. Die Punkte zeigen die Verteilung von 10^7 Zufallszahlen, die ebenfalls für $\alpha = 0.8$ mit Hilfe des hier vorgestellten Verfahrens erzeugt wurden. Die analytische Verteilungsfunktion wird durch die Zufallszahlen offensichtlich in allen Bereichen gut reproduziert.

Anhang B

Weibull-Verteilung atmosphärischer Windgeschwindigkeiten

Für Messungen an turbulenten Strömungen in Windkanälen bzw. in der Atmosphäre werden in der Regel Hitzdraht- bzw. Schalenkreuzanemometer eingesetzt, die in Abbildung B.1 schematisch dargestellt sind. In gewisser Weise verhalten sich diese beiden Instrumente sehr ähnlich: Beide Geräte messen den Betrag der Geschwindigkeit der passierenden Luft an einem bestimmten Ort.

Hitzdrahtanemometer bestehen aus einem kleinen Stück Draht, der von der zu messenden turbulenten Luft umströmt und über einen regelbaren Strom auf konstanter Temperatur gehalten wird. Lassen wir Störungen durch schräge Anströmung außer Acht, so lässt sich der Betrag der Luftgeschwindigkeit, die aufgrund der transportierten Wärme eine Kühlung des Drahtes bewirkt, später aus dem benötigten Heizstrom ermitteln. Hitzdrahtmessungen lassen sich im Kilohertzbereich abtasten. Aufgrund der Empfindlichkeit der dünnen Drähte eignen sich Hitzdrahtanemometer nicht für längere Messungen in atmosphärischen Luftströmungen, weil sie schon von kleinsten advektierten Partikeln beschädigt werden.

Schalenkreuzanemometer werden hauptsächlich bei atmosphärischen Messungen eingesetzt und bieten den großen Vorteil, sehr stabil zu sein und unabhängig von der Dichte der Luft, die je nach Wittersituation variieren kann, messen zu können. Üblicherweise werden sie in Kombination mit Windfahnen eingesetzt, die zusätzlich die Einfallsrichtung des Windes messen. Schalenkreuzanemometer messen – von Störungen durch schräge Anströmung, wie z.B. in [Papadopoulos u.a. 2001] diskutiert, einmal abgesehen – den Betrag der Windgeschwindigkeit in der Ebene senkrecht zur Rotationsachse.

Messungen an turbulenten Strömungen sollen nun anhand eines Modells untersucht werden, das in ähnlicher Form schon von Monahan [2006] diskutiert wurde. Dazu gehen wir davon aus, dass der Vektor der Windgeschwindigkeiten in der Messebene xy des jeweiligen Anemometers durch die PDF P_{xy} mit

$$P_{xy}(x, y|x_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + y^2}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{B.1})$$

beschrieben sei. Die beiden Komponenten x und y , sind hier unabhängig voneinander und genügen einer Normalverteilung. Die Verteilung von x wird dabei um x_0 in positive x -Richtung verschoben, sodass die mittlere Windgeschwindigkeit in x -Richtung bei x_0 liegt.

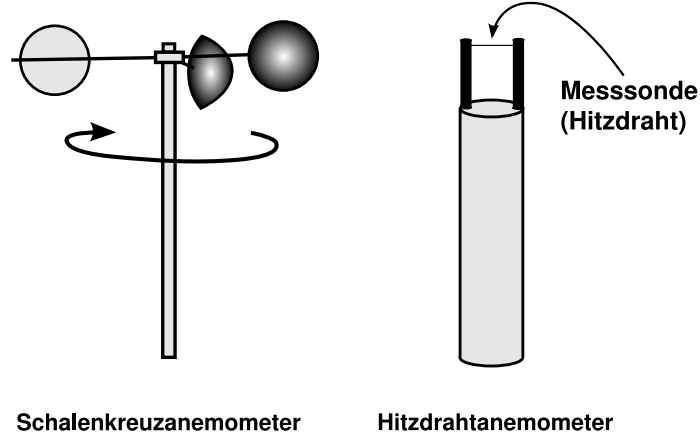


ABBILDUNG B.1: Skizze eines Schalenkreuz- und eines Hitzdrahtanemometers. Das Schalenkreuzanemometer ist für meteorologische Messungen weit verbreitet und bestimmt den Betrag der Windgeschwindigkeit in der Ebene senkrecht zur Rotationsachse. Beim Hitzdrahtanemometer wird ein kleiner Draht von nur wenigen mm Länge und μm Durchmesser einer turbulenten Strömung ausgesetzt und die Kühlung des Drahtes durch die Strömung, die maßgeblich vom Betrag der Strömungsgeschwindigkeit in der Ebene senkrecht zum Hitzdraht abhängt, gemessen.

Beide Anemometer messen allerdings nur den Betrag $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Windgeschwindigkeit. Die Verteilung von x lässt sich mit Hilfe der in Kapitel 2 vorgestellten Werkzeuge nun aus der kartesischen PDF (B.1) berechnen,

$$P_r(r|x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(r - \sqrt{x^2 + y^2}) P_{xy}(x, y|x_0) \quad (\text{B.2a})$$

$$= \int_{-r}^r dx \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \left[P_{xy}(x, \sqrt{r^2 - x^2}|x_0) + P_{xy}(x, -\sqrt{r^2 - x^2}|x_0) \right]$$

$$= 2 \int_{-r}^r dx \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} P_{xy}(x, \sqrt{r^2 - x^2}|x_0) \quad (\text{B.2b})$$

Im letzten Schritt wurde dabei die Symmetrie von $P_{xy}(x, y|x_0)$ im Bezug auf die Komponente y verwendet.

Falls $x_0 = 0$ gilt, lässt sich dieser Ausdruck umgehend auswerten und liefert [Bronstein u.a. 2005]

$$P_r(r|x_0 = 0) = 2 \int_{-r}^r dx \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2 + (r^2 - x^2)}{2\sigma^2}\right] \quad (\text{B.3a})$$

$$= \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \int_{-r}^r dx \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \quad (\text{B.3b})$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} r \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \quad (\text{B.3c})$$

Die PDF $P_r(r|x_0 = 0)$, die wir hier erhalten, ist eine *Rayleigh-Verteilung* und entspricht der Weibull-Verteilung (7.16) speziell für die Parameter $k = 2$ und $c = \sqrt{2}\sigma$.

x_0	0.0	1.5	3.0	10.0	Gauß
Mittelwert	1.2533	1.8749	3.1726	10.0501	x_0
Varianz	0.4292	0.7346	0.9348	0.9949	1
Skewness	0.6311	0.3548	0.0595	0.0010	0
Kurtosis	3.2451	2.8429	2.9270	2.9997	3

TABELLE B.1: Eigenschaften der in Abbildung B.2 betrachteten PDFs. Aus Gründen der Vollständigkeit wurden noch die Eigenschaften der PDF $P_r(r|x_0)$ für $x_0 = 10$ hinzugefügt. Im Vergleich mit den Eigenschaften der Normalverteilung, die in der rechten Spalte dargestellt sind, zeigt sich die Konvergenz von $P_r(r|x_0)$ gegen die Normalverteilung mit steigendem x_0 .

Auf diesen Zusammenhang wurde schon von Tuller & Brett [1984] hingewiesen, auch wenn eine Erweiterung auf $k \neq 2$, die in der gleichen Arbeit diskutiert wird, nicht korrekt ist. Die Situation $x_0 \approx 0$ ist für atmosphärische Turbulenz häufig erfüllt, weil bei längerer Betrachtung die mittlere Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten aufgrund der Beiträge der verschiedenen Windrichtungen im Verhältnis zur Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung vom Mittelwert, σ , sehr klein ist.

Für nicht verschwindende x_0 ist die allgemeine Lösung von (B.2b)

$$P_r(r|x_0) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2 + x_0^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left[\frac{rx_0}{\sigma^2}\right] . \quad (\text{B.4})$$

I_0 ist hier die modifizierte Besselfunktion vom Typ I der Ordnung 0, die durch die Taylor-Entwicklung

$$I_0[x] := \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^i}{i!} \right]^2 . \quad (\text{B.5})$$

definiert werden kann.

Die PDF P_{xy} und die jeweilige Verteilung des Betrages r , P_r , sind in Abbildung B.2 für verschiedene Werte von x_0 dargestellt. Es wird deutlich, dass die Form der Verteilung P_r stark von der Verschiebung x_0 abhängt.

Falls $x_0 \gg \sigma$ gilt, ist der Einfallswinkel des Windes auf das Anemometer nahezu konstant. Die Verteilung $P_r(r|x_0)$ ähnelt dann einer Normalverteilung mit Varianz σ und Mittelwert x_0 . Die Konvergenz gegen diese Normalverteilung wird aus Abbildung B.2 sowie den Eigenschaften der Verteilungen für verschiedene x_0 , die in Tabelle B.1 gegeben sind, deutlich. Die Bedingung $x_0 \gg \sigma$ ist in Windkanälen üblicherweise erfüllt, weil die mittlere Windgeschwindigkeit x_0 dort konstant gewählt werden kann. Die Turbulenzintensität (7.118), die das Verhältnis der Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung zum Mittelwert angibt, liegt dort typischerweise weit unter 1 %.

Es ist häufig beobachtet worden, dass sich die stationären Verteilungen von Messungen an turbulenten Strömungen im Windkanal auf der einen und in der Atmosphäre auf der anderen Seite wesentlich unterscheiden [vgl. z.B. Böttcher u.a. 2007a]. Diese Unterschiede äußern sich aufgrund von (7.19) auch in den Inkrementen der Windgeschwindigkeit auf großen Skalen. In diesem Abschnitt wurde ein einfaches Modell untersucht, das diese Unterschiede erklären kann, wenn nur der Betrag der Strömungsgeschwindigkeit betrachtet wird. Eben dieser steht aber nach Messungen mit Schalenkreuz- und Hitzdrahtanemometern in der Regel nur zur Verfügung.

Eine wichtige Konsequenz des hier vorgestellten Beispiels sollte sein, dass allein aus dem statistischen Unterschied der Inkremente der Geschwindigkeitsbeträge nicht auf qualitative Unterschiede der zugrunde liegenden Strömungen geschlossen werden

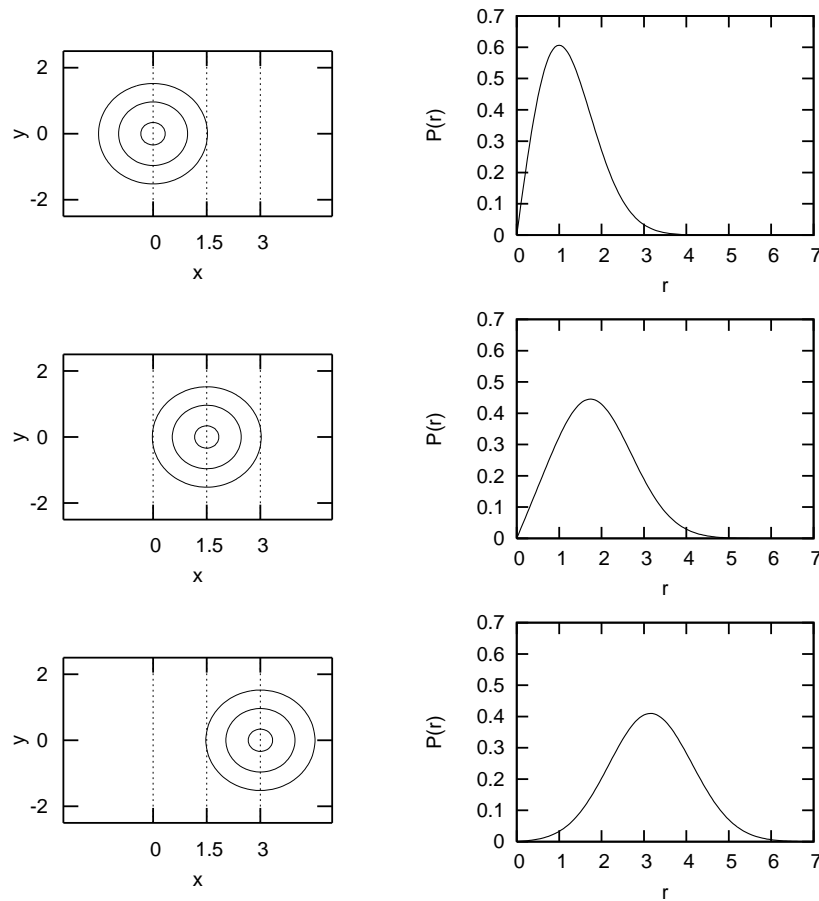


ABBILDUNG B.2: Visualisierung von Gleichung (B.4) für $\sigma = 1$. Auf der linken Seite sind die Konturen der PDF $P_{xy}(x, y|x_0)$ in kartesischen Koordinaten dargestellt für $x_0 = 0, x_0 = 1.5$ und $x_0 = 3$. Auf der rechten Seite sind die jeweils entsprechenden Verteilungen des Betrages r abgebildet. Für $x_0 = 0$ ist $p(r|x_0)$ eine Rayleigh-Verteilung, die einen Spezialfall der Weibull-Verteilung (7.16) für $k = 2$ darstellt und starke Asymmetrie aufweist. Mit wachsendem x_0 kann P_r dann durch eine Normalverteilung angenähert werden. Diese Situation ist bei Labormessungen an turbulenten Strömungen, bei denen eine mittlere Strömung eingestellt wird, in der Regel erfüllt.

darf, wenn nur der Betrag der Geschwindigkeit in einer Ebene gemessen wird. Vielmehr können Unterschiede in der Statistik der Inkremente auch in unterschiedlichen mittleren Geschwindigkeiten x_0 der Strömungen (oder auch der Messsonden) begründet liegen. Für die statistische Auswertung solcher Messungen sollten vielmehr zusätzlich die Informationen von Windfahnen oder Messungen mit Ultraschallanemometern verwendet werden, um die statistischen Eigenschaften unabhängig von einer – relativ zum Messinstrument gesehen – mittleren Windgeschwindigkeit erfassen zu können.

Anhang C

Turbulenzintensität und Turbulenz

In den Abschnitten 7.1 und 7.2 sind turbulente Strömungen im Allgemeinen und die Turbulenz in der atmosphärischen Grenzschicht im Speziellen vom wissenschaftlichen Standpunkt her vorgestellt worden. Dabei ist deutlich geworden, dass solche Strömungen hochgradig komplex sind und ein genaueres Verständnis der Strukturen und der Dynamik noch immer ein wichtiges Ziel der Naturwissenschaften darstellt. Das besondere Interesse an einem besseren Verständnis turbulenter Strömungen liegt in der Praxisrelevanz, weil turbulente Strömungen in vielen Prozessen des täglichen Lebens eine wichtige Rolle spielen. Ein Beispiel dafür ist der Bau und die Nutzung von Windkraftanlagen. Für industrielle Anwendungen liegt das Hauptaugenmerk nicht auf einer exakten, sondern vielmehr einer zweckmäßigen Berücksichtigung der zugrundeliegenden physikalischen Eigenschaften. Die Kriterien, die eine „zweckmäßige“ Modellierung ausmachen, können sich mit der Zeit durch neue Erkenntnisse oder Weiterentwicklung der technischen Möglichkeiten natürlich verändern.

Für den Bereich der Windkraftanlagen spielt insbesondere die erdnahe, atmosphärische Grenzschicht eine wichtige Rolle. Die Art und Weise, wie diese bei der Auslegung von Anlagen zu berücksichtigen ist, ist in verschiedenen Normen festgeschrieben. Die bedeutendsten sind in den Regelungen IEC 61400-12 der „International Electrotechnical Commission“ aus dem Jahre 1998, in der die Vorgehensweise zum Testen von Windkraftanlagen beschrieben sind und die die Grundlage für viele weitere Regelungen bildet, zusammengefasst. Eine detaillierte Beschreibung der Struktur der atmosphärischen Grenzschicht speziell für die Auslegung von Windkraftanlagen findet sich z.B. bei Burton u.a. [2001]. Hier sollen nur einige Punkte herausgegriffen werden, die für das Verständnis dieser Arbeit, insbesondere natürlich der Abschnitte 7.4 bis 7.7, von Bedeutung sind.

Zunächst einmal ist es wichtig, dass in vielen Normen von der Existenz einer sogenannten *spektralen Lücke* („spectral gap“) ausgegangen wird, die bei einigen Messungen im Leistungsspektrum auf Zeitskalen zwischen etwa 10 min und 2 h auftritt. Diese Bandlücke ermöglicht eine Trennung der Dynamik der Atmosphäre in Strukturen, die sich mit Wetterphänomenen oder dem Wechsel von Tag und Nacht in Verbindung bringen lassen, auf der einen und Fluktuationen mit einer Periode von weniger als 10 min auf der anderen Seite. Diese hochfrequenten Fluktuationen werden üblicherweise als „Turbulenz“ bezeichnet. Atmosphärische Windgeschwindigkeiten lassen sich mit Hilfe der Taylor-Hypothese dann darstellen als

$$u(t) = \bar{u}(t) + u'(t) \quad , \quad (\text{C.1})$$

wobei \bar{u} die mittlere Windgeschwindigkeit über einen Beobachtungszeitraum repräsentiert und u' die turbulenten Fluktuationen wiedergibt, die im Mittel verschwinden. Zur „Beseitigung“ der turbulenten Effekte basieren die meisten statistischen Aussagen über Windgeschwindigkeiten, Turbulenz, Fluktuationen und Lasten – wie z.B. auch in dem in Abschnitt 7.6 vorgestellten Vergleich verschiedener Windfelder durch Projektpartner in Kiel – auf Mittelwerten über Beobachtungszeiträume von 10 Minuten. Es werden in der Regel nur die Momente niedrigster Ordnung, d.h. Mittelwert und Varianz der Verteilung der Windgeschwindigkeiten in diesem Zeitraum – betrachtet. Projektpartner in Oldenburg haben in den letzten Jahren zeigen können, dass eine saubere Definition von Leistungskurven von Windkraftanlagen, die sich gemäß (7.22) proportional zur dritten Potenz der Windgeschwindigkeit verhalten, auf der Basis solcher Mittelwerte prinzipiell nicht möglich ist [vgl. z.B. Anahua u.a. 2004; Gottschall & Peinke 2008].

Die Einflüsse der Turbulenz auf Windkraftanlagen werden in der Regel über die *Turbulenzintensität* TI berücksichtigt, die definiert ist als (vgl. (7.118))

$$\text{TI} := \frac{\sqrt{\langle u'^2 \rangle}}{\bar{u}} . \quad (\text{C.2})$$

Die Mittelung ist dabei in der Regel als Zeitmittel über 10 min zu verstehen. Für Windfelder, die auf Windkraftanlagen wirken, ist die Messung der Windgeschwindigkeit auf Nabenhöhe vorzunehmen. Anhand eines kurzen Rechenbeispiels soll hier gezeigt werden, warum sich die Turbulenzintensität zur Charakterisierung der Turbulenz in der Atmosphäre nur unzureichend eignet.

Dazu betrachten wir eine (konstruierte) Windgeschwindigkeitsmessung, die sich in einem Beobachtungszeitraum durch

$$u(t) = u_0 + bt + \Gamma(t) \quad (\text{C.3})$$

beschreiben lässt, wobei Γ normalverteiltes Rauschen mit der Varianz σ^2 darstellen soll. Im Sinne von (C.1) würde $\bar{u} = u_0$ und $u'(t) = bt + \Gamma(t)$ gelten. Die Turbulenzintensität einer solchen Messung ergibt sich nach Mittelung über die Zeit T dann als

$$\text{TI} = \frac{\sqrt{b^2 \frac{T^2}{12} + \sigma^2}}{u_0} . \quad (\text{C.4})$$

Die resultierende Turbulenzintensität hängt für $b \neq 0$ also von der Länge T der Mittelung ab.

In Abbildung C.1 sind Beispiele für Realisierungen von (C.3) für zwei verschiedene Steigungen b dargestellt, die nach (C.4) die gleiche Turbulenzintensität aufweisen. Es wird deutlich, dass der Charakter der Zeitreihen dieser Beispiele sehr unterschiedlich ist, weil für $b = 3.1/600 \text{ m/s}^2$ der wesentliche Beitrag zur Turbulenzintensität durch die lineare Steigung geleistet wird. Langsame Veränderungen auf Zeitskalen oberhalb von Minuten spielen aber zumindest für die Belastung von Windkraftanlagen in der Praxis keine Rolle, weil die Anlagen diesen Änderungen adiabatisch folgen. In den Abbildungen 7.16 und 7.17 sind atmosphärische Messungen bezüglich linearer Steigungen untersucht. Dabei wird deutlich, dass in der Atmosphäre in Zeiträumen von 10 min teils erhebliche Trends auftreten können, die nach (C.4) zu einer beachtlichen Überschätzung der realisierten Fluktuationen führen können.

Ziel dieses ergänzenden und abschließenden Abschnitts war es, die Unzulänglichkeiten der Beschreibung atmosphärischer Bedingungen auf der Basis von Statistiken niedriger Ordnung bei relativ langen Beobachtungszeiträumen anhand eines einfachen Beispiels zu zeigen. Wesentlich genauer ist in dieser Hinsicht vor allem die Untersuchung von gemessenen Daten mit höheren Auflösungen, die gemäß (C.4) z.B. die Auswirkungen linearer Trends vermindert.

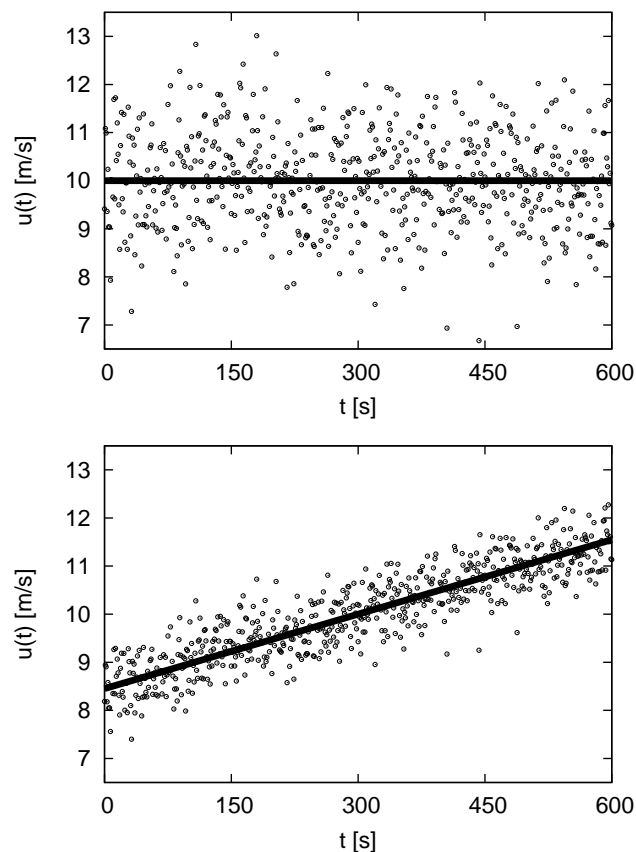


ABBILDUNG C.1: Beispiele für Realisierungen von (C.3) für $u_0 = 10$ m/s und $b = 0$ (oben) bzw. $b = 3.1/600$ m/s² (unten). Die Punkte entsprechen den mit Hilfe der Zufallszahlen Γ simulierten Geschwindigkeiten, die durchgezogene Linie markiert den mittleren Verlauf durch den linearen Term. Beide Beispiele besitzen eine Turbulenzintensität von 10 %. Es ist jedoch deutlich, dass die „turbulenten Fluktuationen“ im unteren Beispiel wesentlich geringer sind, die Turbulenz aufgrund der linearen Steigung also überschätzt wird.

Literaturverzeichnis

- Anahua 2007** ANAHUA, Edgar: *Stochastic Analysis of Wind Turbine Power Curves*, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Dissertation, 2007
- Anahua u.a. 2004** ANAHUA, Edgar ; BÖTTCHER, Frank ; BARTH, Stephan ; PEINKE, Joachim ; LANGE, Matthias: Stochastic Analysis of the Power Output for a Wind Turbine. In: *Proceedings of the European Wind Energy Conference (EWEC), London, UK* (2004)
- Angelini u.a. 2005** ANGELINI, Claudia ; CAVA, Daniela ; KATUL, Gabriel ; VIDAKOVIC, Brani: Resampling hierarchical processes in the wavelet domain: A case study using atmospheric turbulence. In: *Physica D* 207 (2005), Nr. 1-2, S. 24–40
- Bachelier 1900** BACHELIER, Louis: Théorie de la spéculation. In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 17 (1900), Nr. 3, S. 21–86
- Barkai 2001** BARKAI, Eli: Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application. In: *Physical Review E* 63 (2001), S. 046118
- Barkai u.a. 2000** BARKAI, Eli ; METZLER, Ralf ; KLAFTER, Joseph: From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation. In: *Physical Review E* 61 (2000), Nr. 1, S. 132–138
- Barndorff-Nielsen & Schmiegel 2008** BARNDORFF-NIELSEN, Ole E. ; SCHMIEGEL, Jürgen: A stochastic differential equation framework for the timewise dynamics of turbulent velocities. In: *Theory of Probability and its Applications* (2008). – To be published. Preprint available: Research report 04/2005, Thiele Center, Aarhus, Denmark.
- Baule & Friedrich 2005** BAULE, Adrian ; FRIEDRICH, Rudolf: Joint probability distributions for a class of non-Markovian processes. In: *Physical Review E* 71 (2005), S. 26101
- Baule & Friedrich 2006** BAULE, Adrian ; FRIEDRICH, Rudolf: Investigation of a generalized Obukhov model for turbulence. In: *Physics Letters A* 350 (2006), Nr. 3-4, S. 167–173
- Baule & Friedrich 2007a** BAULE, Adrian ; FRIEDRICH, Rudolf: A fractional diffusion equation for two-point probability distributions of a continuous-time random walk. In: *Europhysics Letters* 77 (2007), S. 10002
- Baule & Friedrich 2007b** BAULE, Adrian ; FRIEDRICH, Rudolf: Two-point correlation function of the fractional Ornstein-Uhlenbeck process. In: *arXiv:0705.4473v1 [cond-mat.stat-mech]* (2007)
- Beck & Cohen 2003** BECK, C. ; COHEN, E. G. D.: Superstatistics. In: *Physica A* 322 (2003), S. 267

- Beck u.a. 2005** BECK, C. ; COHEN, E. G. D. ; RIZZO, S.: Atmospheric turbulence and superstatistics. In: *Europhysics News* 36 (2005), Nr. 6, S. 189–191
- Beck 2004** BECK, Christian: Superstatistics in hydrodynamic turbulence. In: *Physica D* 193 (2004), S. 195–207
- Bertelsmann Fremdwörterlexikon 1974** WAHRIG, Hans-Peter: *Fremdwörterlexikon*. Gütersloh, Berlin, München, Wien : Bertelsmann Lexikon-Verlag, 1974
- Betz 1926** BETZ, Albert: *Wind-Energie und ihre Ausnutzung durch Windmühlen*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1926. – Unveränderter Nachdruck der Originalausgabe von 1926: Ökobuch Verlag, Staufen 1994
- Bierbooms 2004** BIERBOOMS, Wim: Simulation of stochastic wind fields which encompass measured wind speed series – enabling time domain comparison of simulated and measured wind turbine loads. In: *European Wind Energy Conference Proceedings*, 2004
- Bierbooms & Veldkamp 2007** BIERBOOMS, Wim ; VELDKAMP, Dick: Time domain comparison of simulated and measured wind turbine loads using constrained wind fields. In: PEINKE, Joachim (Hrsg.) ; SCHAUMANN, Peter (Hrsg.) ; BARTH, Stephan (Hrsg.): *Wind Energy: Proceedings of the Euromech Colloquium*, Springer Berlin Heidelberg, 2007, S. 15–20
- Böttcher u.a. 2003** BÖTTCHER, F. ; RENNER, C. ; WALDL, H.-P. ; PEINKE, J.: On the Statistics of Wind Gusts. In: *Bound.-Layer Meteorology* 108 (2003), S. 163–173
- Böttcher 2005** BÖTTCHER, Frank: *Statistische Analyse der atmosphärischen Turbulenz und allgemeiner stochastischer Prozesse*, Carl von Ossietzky Universität, Oldenburg, Dissertation, 2005
- Böttcher u.a. 2007a** BÖTTCHER, Frank ; BARTH, Stephan ; PEINKE, Joachim: Small and large scale fluctuations in atmospheric wind speeds. In: *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment (SERRA)* 21 (2007), Nr. 3, S. 299–308
- Böttcher u.a. 2007b** BÖTTCHER, Frank ; PEINKE, Joachim ; KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf: Handling Systems Driven by Measurement Noise Sources: Implications for Power Curve Estimations. In: PEINKE, Joachim (Hrsg.) ; SCHAUMANN, Peter (Hrsg.) ; BARTH, Stephan (Hrsg.): *Wind Energy: Proceedings of the Euromech Colloquium*, Springer Berlin Heidelberg, 2007, S. 179–182
- Böttcher u.a. 2006** BÖTTCHER, Frank ; PEINKE, Joachim ; KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf ; LIND, Pedro G. ; HAASE, Maria: Reconstruction of Complex Dynamical Systems Affected by Strong Measurement Noise. In: *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006), S. 090603. – URL <http://arxiv.org/abs/nlin/0607002>
- Box & Muller 1958** BOX, G. E. P. ; MULLER, Mervin E.: A Note on the Generation of Random Normal Deviates. In: *Ann. Math. Statist.* 29 (1958), Nr. 2, S. 610–611
- Bronstein u.a. 2005** BRONSTEIN, Ilja N. ; SEMENDJAJEW, Konstantin A. ; MUSIOL, Gerhard: *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch (Harri), 2005. – ISBN 3817120060
- Burton u.a. 2001** BURTON, Tony ; SHARPE, David ; JENKINS, Nick ; BOSSANYI, Ervin: *Wind Energy Handbook*. John Wiley and Sons Ltd, 2001. – ISBN 0471489972

- Busse 1994** BUSSE, F. H.: Convection driven zonal flows and vortices in the major planets. In: *Chaos* 4 (1994), Nr. 2, S. 123–134
- Castaing u.a. 1990** CASTAING, B. ; GAGNE, Y. ; HOPFINGER, E. J.: Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence. In: *Physica D* 46 (1990), Nr. 2, S. 177–200
- Chen u.a. 2007** CHEN, Jun ; HUI, Michael C. H. ; XU, Y. L.: A comparative study of stationary and non-stationary wind models using field measurements. In: *Boundary Layer Meteorology* 122 (2007), S. 105–121
- Cleve u.a. 2005** CLEVE, Jochen ; DZIEKAN, Thomas ; SCHMIEGEL, Jürgen ; BARNDORFF-NIELSEN, Ole E. ; PEARSON, Bruce R. ; SREENIVASAN, Katepalli R. ; GREINER, Martin: Finite-size scaling of two-point statistics and the turbulent energy cascade generators. In: *Physical Review E* 71 (2005), Nr. 026309
- Cleve & Greiner 2007** CLEVE, Jochen ; GREINER, Martin: Stochastic small-scale modelling of turbulent wind time series. In: PEINKE, Joachim (Hrsg.) ; SCHAUMANN, Peter (Hrsg.) ; BARTH, Stephan (Hrsg.): *Wind Energy: Proceedings of the Euromech Colloquium*, Springer Berlin Heidelberg, 2007, S. 123–127
- Coffey u.a. 2004** COFFEY, W. T. ; KALMYKOV, Yu. P. ; WALDRON, J. T.: *World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics*. Bd. 14: *The Langevin equation*. Second. River Edge, NJ : World Scientific Publishing Co. Inc., 2004. – xxiv+678 S. – With applications to stochastic problems in physics, chemistry and electrical engineering. – ISBN 981-238-462-6
- Davidson 2004** DAVIDSON, P.A.: *Turbulence*. Oxford, UK : Oxford University Press, 2004
- Deng 2007** DENG, Weihua: Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation. In: *Journal of Computational Physics* 227 (2007), S. 1510–1522
- Dinges & Rost 1982** DINGES, Hermann ; ROST, Hermann: *Prinzipien der Stochastik*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1982
- Doetsch 1976** DOETSCH, Gustav: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Birkhäuser, Basel, 1976
- Einstein 1905** EINSTEIN, Albert: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: *Annalen der Physik* 17 (1905), S. 549–560. – Reprinted in: Einstein's Annalen Papers, WILEY-VCH Verlag, 2005
- Eule u.a. 2007** EULE, Stephan ; FRIEDRICH, Rudolf ; JENKO, Frank ; KLEINHANS, David: Langevin Approach to Fractional Diffusion Equations Including Inertial Effects. In: *Journal of Physical Chemistry B* 111 (2007), Nr. 39, S. 11474–11477
- Farge u.a. 1999** FARGE, M. ; KEVLAHAN, N. K.-R. ; PERRIER, V. ; SCHNEIDER, K.: *Turbulence analysis, modelling and computing using wavelets*. S. 117–+. In: VAN DEN BERG, J. C. (Hrsg.): *Wavelets in Physics*, 1999
- Farge 1992** FARGE, Marie: Wavelet transforms and their application to turbulence. In: *Annual Review Fluid Mechanics* 24 (1992), S. 395–457

- FINO** *FINO – Forschungsplattformen in der Nord- und Ostsee.* – Informationen zur Forschungsplattform FINO I finden sich unter <http://www.fino-offshore.de>. Daten stehen zu wissenschaftlichen Zwecken kostenfrei zur Verfügung. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Daten verwendet, die im Zeitraum von Februar bis November 2006 gemessen wurden.
- Fogedby 1994** FOGEDBY, Hans C.: Langevin equations for continuous time Lévy flights. In: *Physical Review E* 50 (1994), S. 1657–1660
- Frehlich u.a. 2001** FREHLICH, Rod ; CORNMAN, Larry ; SHARMAN, Robert: Simulation of Three-Dimensional Turbulent Velocity Fields. In: *Journal of Applied Meteorology* 40 (2001), S. 246–258
- Friedrich 2003** FRIEDRICH, R.: Statistics of Lagrangian Velocities in Turbulent Flows. In: *Physical Review Letters* 90 (2003), Nr. 8, S. 084501. – URL <http://link.aps.org/abstract/PRL/v90/e084501>
- Friedrich & Peinke 1997a** FRIEDRICH, R. ; PEINKE, J.: Description of a Turbulent Cascade by a Fokker-Planck Equation. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), S. 863
- Friedrich u.a. 2000** FRIEDRICH, R. ; PEINKE, J. ; RENNER, Ch.: How to Quantify Deterministic and Random Influences on the Statistics of the Foreign Exchange Market. In: *Phys. Rev. Lett* 84 (2000), S. 5224
- Friedrich 2002** FRIEDRICH, Rudolf: Lagrangian Probability Distributions of Turbulent Flows. In: *arXiv preprint* (2002)
- Friedrich u.a. 2005** FRIEDRICH, Rudolf ; KLEINHANS, David ; PEINKE, Joachim: Disentangling Noise and Fluctuations in Data Sets of Complex Systems. In: KRAMER, Bernhard (Hrsg.): *Advances in Solid State Physics* Bd. 45. Springer Berlin / Heidelberg, 2005, S. 83–94
- Friedrich & Peinke 1997b** FRIEDRICH, Rudolf ; PEINKE, Joachim: Statistical properties of a turbulent cascade. In: *Physica D* 102 (1997), S. 147–155
- Friedrich u.a. 2008** FRIEDRICH, Rudolf ; PEINKE, Joachim ; REZA RAHIMI TABAR, M.: *Encyclopedia of Complexity in Science*. Kap. Complexity in the View of Stochastic Processes. Heidelberg, Berlin : Springer, 2008. – (in press)
- Friedrich u.a. 2002** FRIEDRICH, Rudolf ; RENNER, Ch. ; SIEFERT, M. ; PEINKE, Joachim: Comment on 'Indispensable Finite Time Corrections for Fokker-Planck Equations from Time Series Data'. In: *Physical Review Letters* 89 (2002), Nr. 14, S. 149401
- Frisch 1996** FRISCH, Uriel: *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996
- Fung u.a. 1992** FUNG, J. C. H. ; HUNT, J. C. R. ; MALIK, N. A. ; PERKINS, R. J.: Kinematic simulation of homogeneous turbulence by unsteady random Fourier modes. In: *Journal of Fluid Mechanics* 236 (1992), S. 281–318
- Gardiner 2004** GARDINER, C. W.: *Springer Series in Synergetics*. Bd. 13: *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*. Third. Berlin : Springer-Verlag, 2004. – xviii+415 S. – ISBN 3-540-20882-8
- Ghasemi u.a. 2006** GHASEMI, F. ; SAHIMI, Muhammad ; PEINKE, J. ; RAHIMI TABAR, M. R.: Analysis of Non-stationary Data for Heart-rate Fluctuations in Terms of Drift and Diffusion Coefficients. In: *Journal of Biological Physics* 32 (2006), Nr. 2, S. 117–128

- Gnedenko & Kolmogorov 1954** GNEDENKO, B. V. ; KOLMOGOROV, A. N.: *Limit distributions for sums of independent random variables*. Cambridge : Addison-Wesley, 1954
- Gontier u.a. 2006** GONTIER, Herve ; SCHAFFARCZYK, Alois P. ; KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf: Comparison of aerodynamic loads from new turbulence models deduced by statistical fluid mechanics with those used in standard guidelines. In: *Proceedings of DEWEK 2006*, 2006
- Gontier u.a. 2007** GONTIER, Herve ; SCHAFFARCZYK, Alois P. ; KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf: A comparison of fatigue loads of wind turbine resulting from a non-Gaussian turbulence model vs. standard ones. In: *Journal of Physics: Conference Series 75* (2007), Nr. 012070
- Gorenflo & Mainardi 2008** GORENFLO, Rudolf ; MAINARDI, Francesco: Some recent advances in theory and simulation of fractional diffusion processes. In: *arXiv Preprint arXiv:0801.0146* (2008)
- Gorenflo u.a. 2007** GORENFLO, Rudolf ; MAINARDI, Francesco ; VIVOLI, Alessandro: Continuous-time random walk and parametric subordination in fractional diffusion. In: *Chaos, Solitons and Fractals 34* (2007), S. 87–103
- Gottschall & Peinke 2007** GOTTSCHALL, Julia ; PEINKE, Joachim: Stochastic modelling of a wind turbine's power output with special respect to turbulent dynamics. In: *Journal of Physics: Conference Series 75* (2007), Nr. 012045
- Gottschall & Peinke 2008** GOTTSCHALL, Julia ; PEINKE, Joachim: How to improve the estimation of power curves for wind turbines. In: *Environmental Research Letters 3* (2008), Nr. 0115005
- Grigoriu 1993** GRIGORIU, Mircea: On the spectral representation method in simulation. In: *Probabilistic Engineering Mechanics 8* (1993), S. 75–90
- Günther & Hennemuth 1998** GÜNTHER, Horst ; HENNEMUTH, Barbara: Erste Aufbereitung von flächenhaften Windmessdaten aus Höhen bis 150 m über Grund für ein späteres Archiv „Windmessdaten aus Sondermessungen“ und für weitere wissenschaftlich-technische Auswertungen / Deutscher Wetterdienst, Hamburg. 1998. – Forschungsbericht
- Gurley u.a. 1997** GURLEY, K. R. ; TOGNARELLI, M. A. ; KAREEM, A.: Analysis and Simulation Tools For Wind Engineering. In: *Probabilistic Engineering Mechanics 12* (1997), S. 9–31
- Haken 2004** HAKEN, Hermann: *Synergetics*. Berlin : Springer-Verlag, 2004 (Springer Series in Synergetics). – xvi+763 S. – Introduction and advanced topics, Reprint of the third (1983) edition [*Synergetics*] and the first (1983) edition [*Advanced synergetics*]. – ISBN 3-540-40824-X
- Hartung u.a. 1995** HARTUNG, Joachim ; ELPELT, Bärbel ; KLÖSENER, Karl-Heinz: *Statistik*. R. Oldenbourg Verlag, München/Wien, 1995. – Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik
- Heinsalu u.a. 2006** HEINSALU, E ; PATRIARCA, M. ; GOYCHUK, I. ; SCHMID, G. ; HÄNGGI, P.: Fractional Fokker-Planck dynamics: Numerical algorithm and simulations. In: *Phys Rev E 73* (2006), S. 046133

- Hurn u.a. 2003** HURN, A. S. ; LINDSAY, K. A. ; MARTIN, V. L.: On the efficacy of simulated maximum likelihood for estimating the parameters of stochastic differential Equations. In: *Journal of Time Series Analysis* 24 (2003), 01, Nr. 1, S. 45–63
- Jafari u.a. 2003** JAFARI, G. R. ; FAZELI, S. M. ; GHASEMI, F. ; ALLAEI, S. M. V. ; TABAR, M. R. R. ; ZAD, A. I. ; KAVEI, G.: Stochastic Analysis and Regeneration of Rough Surfaces. In: *Physical Review Letters* 91 (2003), Nr. 22, S. 226101
- Janicki & Weron 1994** JANICKI, Aleksander ; WERON, Aleksander: *Simulation and chaotic behavior of α -stable stochastic processes*. 270 Madison Avenue, New York, New York : Marcel Dekker, Inc., 1994
- Kaimal & Finnigan 1994** KAIMAL, Jagadish C. ; FINNIGAN, John J.: *Atmospheric Boundary Layer Flows; Their Structure and Measurement*. Oxford University Press Inc, USA, 1994
- Kalbfleisch 1985** KALBFLEISCH, John D.: *Probability and Statistical Inference II. Statistical Inference*. Springer, Berlin, 1985. – ISBN 3540961836
- Kaminsky u.a. 1990** KAMINSKY, F. C. ; KIRCHHOFF, R. H. ; SYU, C. Y. ; MANWELL, J. F.: A comparison of alternative approaches for the synthetic simulation of a wind speed time series. In: BERG, D. E. (Hrsg.) ; SANDIA NATIONAL LABORATORIES (Hrsg.): *Ninth ASME Wind Energy Symposium* Bd. 9, The American Society of Mechanical Engineers, 1990
- Kholmyansky u.a. 2007** KHOLMYANSKY, M. ; MORICONI, L. ; TSINOBER, A.: Large-Scale Intermittency in the Atmospheric Boundary Layer. In: *Physical Review E* 76 (2007), Nr. 026307
- Kitagawa & Nomura 2003** KITAGAWA, T. ; NOMURA, T.: A wavelet based method to generate artificial wind fluctuation data. In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 9 (2003), S. 943–964
- Kleinhans 2005** KLEINHANS, David: *Analyse stochastischer Prozesse – Eine iterative Methode zur Bestimmung von Drift und Diffusion*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2005
- Kleinhans & Friedrich 2005** KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf: Estimation of Measurement Noise and Dynamical Parameters from Time Series Data. In: *Proceedings of ENOC 2005*, 2005
- Kleinhans & Friedrich 2007a** KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf: Continuous time random walks: Simulation of continuous trajectories. In: *Physical Review E* 76 (2007), S. 061102. – URL <http://arxiv.org/abs/0707.3221>
- Kleinhans & Friedrich 2007b** KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf: Maximum Likelihood Estimation of Drift and Diffusion Functions. In: *Physics Letters A* 368 (2007), S. 194–198. – URL <http://arxiv.org/abs/physics/0611102>
- Kleinhans & Friedrich 2007c** KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf: Quantitative Estimation of Drift and Diffusion Functions from Time Series Data. In: PEINKE, Joachim (Hrsg.) ; SCHAUMANN, Peter (Hrsg.) ; BARTH, Stephan (Hrsg.): *Wind Energy: Proceedings of the Euromech Colloquium*, Springer Berlin Heidelberg, 2007, S. 129–133

- Kleinhans u.a. 2006** KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf ; GONTIER, Herve ; SCHAFFARCZYK, Alois P.: Simulation of intermittent wind fields: A new approach. In: *Proceedings of DEWEK 2006*, 2006
- Kleinhans u.a. 2005** KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf ; NAWROTH, Andreas ; PEINKE, Joachim: An iterative procedure for the estimation of drift and diffusion coefficients of Langevin processes. In: *Phys Lett A* 346 (2005), S. 42–46. – URL <http://arxiv.org/abs/physics/0502152>
- Kleinhans u.a. 2007** KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf ; WÄCHTER, Matthias ; PEINKE, Joachim: Markov properties in presence of measurement noise. In: *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)* 76 (2007), Nr. 4, S. 041109. – URL <http://arxiv.org/abs/0705.1222>
- Kloeden & Platen 1992** KLOEDEN, Peter E. ; PLATEN, Eckhard: *Applications of Mathematics (New York)*. Bd. 23: *Numerical solution of stochastic differential equations*. Berlin : Springer-Verlag, 1992. – xxxvi+632 S. – ISBN 3-540-54062-8
- Kolmogorov 1941** KOLMOGOROV, A. N.: On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. In: *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 31 (1941), S. 538–41
- Koponen 1995** KOPONEN, Ismo: Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process. In: *Physical Review E* 52 (1995), Nr. 1, S. 1197–1199
- Krishnamurthy & Moore 1993** KRISHNAMURTHY, Vikram ; MOORE, John B.: On-Line Estimation of Hidden Markov Model Parameters Based on the Kullback-Leibler Information Measure. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 41 (1993), S. 2557–2573
- Kriso u.a. 2002** KRISO, S. ; FRIEDRICH, R. ; PEINKE, J. ; WAGNER, P.: Reconstruction of dynamical equations for traffic flow. In: *Physics Letters A* 299 (2002), S. 287
- Kullback 1959** KULLBACK, Solomon ; SHEWHART, Walter A. (Hrsg.) ; WILKS, Samuel S. (Hrsg.): *Information Theory and Statistics*. Wiley Publications in Statistics, 1959
- Kullback & Leibler 1951** KULLBACK, Solomon ; LEIBLER, Richard: On information and sufficiency. In: *Annals of Mathematical Statistics* 22 (1951), Nr. 1, S. 76–89
- Kuusela 2004** KUUSELA, Tom: Stochastic heart-rate model can reveal pathologic cardiac dynamics. In: *Physical Review E* 69 (2004), S. 031916
- La Porta u.a. 2001** LA PORTA, A. ; VOTH, Greg A. ; CRAWFORD, Alice M. ; ALEXANDER, Jim ; BODENSCHATZ, Eberhard: Fluid particle accelerations in fully developed turbulence. In: *Nature* 409 (2001), S. 1017–1019
- Landau & Lifschitz 1966** LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1966 (Lehrbuch der Theoretischen Physik)
- Lemons 2002** LEMONS, Don S.: *An introduction to stochastic processes in physics*. Baltimore, MD : Johns Hopkins University Press, 2002. – xiv+110 S. – Containing “On the theory of Brownian motion” by Paul Langevin, translated by Anthony Gythiel. – ISBN 0-8018-6866-1; 0-8018-6867-X

- Lubashevsky u.a. 2007** LUBASHEVSKY, Ihor ; GARNISOV, Cyril ; MAHNKE, Reinhard ; LIFSHITS, Boris ; PECHERSKY, Mikhail: *Traffic and Granular Flow'05*. Bd. IV: *Traffic Flow: Empirical Results and Applications*. Kap. States of Traffic Flow in the Deep Lefortovo Tunnel (Moscow): Empirical Data, Springer Berlin Heidelberg, 2007
- Lück u.a. 2006** LÜCK, S. ; RENNER, C. ; PEINKE, J. ; FRIEDRICH, R.: The Markov–Einstein coherence length—a new meaning for the Taylor length in turbulence. In: *Physics Letters A* 359 (2006), Nr. 5, S. 335–338
- Lück & Peinke 1999** LÜCK, Stephan ; PEINKE, Joachim: Uniform Statistical Description of the Transition between Near and Far Field Turbulence in a Wake Flow. In: *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), Nr. 26, S. 5495–5498
- Lumley & Yaglom 2001** LUMLEY, John L. ; YAGLOM, Akiva M.: A Century of Turbulence. In: *Flow, Turbulence and Combustion* 66 (2001), Nr. 3, S. 241–286
- Magdziarz u.a. 2007** MAGDZIARZ, Marcin ; WERON, Aleksander ; WERON, Karina: Fractional Fokker-Planck dynamics: Stochastic representation and computer simulation. In: *Physical Review E* 75 (2007), S. 015708
- Mann & Whitney 1947** MANN, H. B. ; WHITNEY, D. R.: On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 18 (1947), Nr. 1, S. 50–60
- Mann 1998** MANN, J.: Wind field simulation. In: *Probab. eng. mech.* 13 (1998), Nr. 4, S. 269–282
- Marcq & Naert 2001** MARCQ, Philippe ; NAERT, Antoine: A Langevin equation for turbulent velocity increments. In: *Physics of Fluids* 13 (2001), Nr. 9, S. 2590–2595
- Marsaglia & Tsang 2000** MARSAGLIA, George ; TSANG, Wai W.: The ziggurat method for generating random variables. In: *Journal of Statistical Software* 5 (2000), Nr. 8
- Masters & Gurley 2003** MASTERS, Forrest ; GURLEY, Kurtis R.: Non-Gaussian Simulation: Cumulative Distribution Function, Map-Based Spectral Correction. In: *Journal of Engineering Mechanics* 129 (2003), Nr. 12, S. 1418–1428
- Meerschaert & Scheffler 2004** MEERSCHAERT, Mark M. ; SCHEFFLER, Hans-Peter: Limit theorems for Continuous-Time Random Walks with infinite mean waiting times. In: *J. Appl. Prob.* 41 (2004), S. 623–638
- Metzler u.a. 1999** METZLER, Ralf ; BARKAI, Eli ; KLAFTER, Joseph: Anomalous Diffusion and Relaxation Close to Thermal Equilibrium: A Fractional Fokker-Planck Equation Approach. In: *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999), May, Nr. 18, S. 3563–3567
- Metzler & Klafter 2000** METZLER, Ralph ; KLAFTER, Joseph: The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. In: *Physics Reports* 339 (2000), S. 1–77
- Molenaar & Dijkstra 1999** MOLENAAR, David-P. ; DIJKSTRA, Sjoerd: State-of-the-art of wind turbine design codes: main features overview for cost-effective generation. In: *Wind Engineering* 5 (1999), S. 295–311

- Monahan 2004** MONAHAN, Adam H.: A Simple Model for the Skewness of Global Sea Surface Winds. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 61 (2004), Nr. 16, S. 2037–2049
- Monahan 2006** MONAHAN, Adam H.: The Probability Distribution of Sea Surface Wind Speeds. Part I: Theory and SeaWinds Observations. In: *Journal of Climate* 19 (2006), Nr. 4, S. 497–520
- Monin & Yaglom 1971** MONIN, A.S. ; YAGLOM, A.M.: *Statistical fluid mechanic: Mechanics of turbulence, Vol. 1.* Cambridge, U.S.A. : MIT Press, 1971
- Monin & Yaglom 1975** MONIN, A.S. ; YAGLOM, A.M.: *Statistical fluid mechanic: Mechanics of turbulence, Vol. 2.* Cambridge, U.S.A. : MIT Press, 1975
- Monthus & Bouchaud 1996** MONTHUS, Cécile ; BOUCHAUD, Jean-Philippe: Models of traps and glass phenomenology. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 29 (1996), Nr. 14, S. 3847–3869
- Montroll & Weiss 1965** MONTROLL, Elliott W. ; WEISS, George H.: Random Walks on Lattices. II. In: *Journal of Mathematical Physics* 6 (1965), Nr. 2, S. 167–181
- Mordant u.a. 2001** MORDANT, N. ; METZ, P. ; MICHEL, O. ; PINTON, J.-F.: Measurement of Lagrangian Velocity in Fully Developed Turbulence. In: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), Nov, Nr. 21, S. 214501
- Nawroth 2007** NAWROTH, Andreas: *Stochastische Analyse und Modellierung von Finanz- und Turbulenzzeitreihen*, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Dissertation, 2007
- Nawroth & Peinke 2006** NAWROTH, Andreas ; PEINKE, Joachim: *Multiscale reconstruction of time series.* 2006
- Nawroth u.a. 2007** NAWROTH, Andreas ; PEINKE, Joachim ; KLEINHANS, David ; FRIEDRICH, Rudolf: Improved estimation of Fokker-Planck equations through optimisation. In: *Physical Review E* 76 (2007), S. 056102. – URL <http://arxiv.org/abs/0705.1292>
- Nawroth & Peinke 2007** NAWROTH, Andreas P. ; PEINKE, Joachim: Medium and small-scale analysis of financial data. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 382 (2007), Nr. 1, S. 193–198
- Nicolis & Nicolis 2007** NICOLIS, Gregoire ; NICOLIS, Catherine: *Foundations of Complex Systems: Nonlinear Dynamics, Statistical Physics, Information and Prediction.* World Scientific Publishing, 2007. – ISBN 9812700439
- Nielsen u.a. 2004** NIELSEN, M. ; LARSEN, G. C. ; MANN, J. ; OTT, S. ; HANSEN, K. S. ; PEDERSEN, B. J.: Wind Simulation for Extreme and Fatigue Loads / Risø National Laboratory, Roskilde, Denmark. 2004. – Forschungsbericht
- Nielsen u.a. 2007** NIELSEN, M. ; LARSEN, G. C. ; S., Hansen K.: Simulation of inhomogenous, non-stationary and non-Gaussian turbulent fields. In: *Journal of Physics: Conference Series* 75 (2007), Nr. 012060
- Nolan 2007** NOLAN, J. P.: *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data.* Boston : Birkhäuser, 2007. – In progress, Chapter 1 online at academic2.american.edu/~jpnolan

- Papadopoulos u.a. 2001** PAPADOPOULOS, K.H. ; STEFANTOS, N.C. ; PAULSEN, U.S. ; MORFIADAKIS, E.: Effects of Turbulence and Flow Inclination on the Performance of Cup Anemometers in the Field. In: *Boundary-Layer Meteorology* 101 (2001), Nr. 1, S. 77–107
- Paul & Baschnagel 1999** PAUL, Wolfgang ; BASCHNAGEL, Jörg: *Stochastic processes*. Berlin : Springer-Verlag, 1999. – xiv+231 S. – From physics to finance. – ISBN 3-540-66560-9
- Press u.a. 1992** PRESS, William H. ; TEUKOLSKY, Saul A. ; FLANNERY, Brian P. ; VETTERLING, William T.: *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*. New York, NY, USA : Cambridge University Press, 1992. – ISBN 0521437199
- Prusseit & Lehnertz 2007** PRUSSEIT, Jens ; LEHNERTZ, Klaus: Stochastic qualifiers for Epileptic brain dynamics. In: *Physical Review Letters* 98 (2007), S. 138103
- Rabiner 1989** RABINER, Lawrence R.: A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition. In: *Proceedings of the IEEE* 77 (1989), Nr. 2, S. 257–286
- Ragwitz & Kantz 2001** RAGWITZ, Mario ; KANTZ, Holger: Indispensable Finite Time Corrections for Fokker-Planck Equations from Time Series Data. In: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), S. 254501
- Renner u.a. 2001a** RENNER, Christoph ; PEINKE, Joachim ; FRIEDRICH, Rudolf: Evidence of Markov properties of high frequency exchange rate data. In: *Physica A* 298 (2001), Nr. 3-4, S. 499–520
- Renner u.a. 2001b** RENNER, Christoph ; PEINKE, Joachim ; FRIEDRICH, Rudolf: Experimental indications for Markov properties on small scales. In: *J. Fluid Mech.* 433 (2001), S. 383–409
- Richardson 1926** RICHARDSON, Lewis F.: Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph. In: *Proceeding of the Royal Society A* 110 (1926), Nr. 756, S. 709–737
- Rimmer & Nolan 2004** RIMMER, Robert H. ; NOLAN, John: *StableDistribution Package for Mathematica*®. April 2004
- Risken 1989** RISKEN, H.: *Springer Series in Synergetics*. Bd. 18: *The Fokker-Planck equation*. Second. Berlin : Springer-Verlag, 1989. – xiv+472 S. – Methods of solution and applications. – ISBN 3-540-50498-2
- Sato 1999** SATO, Ken-iti: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999 (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). – ISBN 0521553024
- Schmiegel u.a. 2005** SCHMIEGEL, Jürgen ; CLEVE, Jochen ; EGGERS, Hans C. ; PEARSON, Bruce R. ; GREINER, Martin: Stochastic energy-cascade model for $(1+1)$ -dimensional fully developed turbulence. In: *Physics Letters A* 320 (2005), S. 247–253
- Shinozuka & Deodatis 1991** SHINOZUKA, Masanobu ; DEODATIS, George: Simulation of stochastic processes by spectral representation. In: *Applied Mechanical Review* 44 (1991), Nr. 4, S. 191–203

- Shinozuka & Jan 1972** SHINOZUKA, Masanobua ; JAN, C.-M.: Digital simulation of random processes and its applications. In: *Journal of Sound and Vibration* 25 (1972), Nr. 1, S. 111–128
- Siefert u.a. 2003** SIEFERT, Malte ; KITTEL, Achim ; FRIEDRICH, Rudolf ; PEINKE, Joachim: On a quantitative method to analyze dynamical and measurement noise. In: *Europhys. Lett.* 61 (2003), S. 466–472
- Siebert 2001** SIEBERT, Silke: *Entwicklung eines Verfahren zum Schätzen deterministischer und stochastischer dynamischer Strukturen*, Universität Stuttgart, Dissertation, 2001
- Siebert u.a. 1998** SIEBERT, Silke ; FRIEDRICH, Rudolf ; PEINKE, Joachim: Analysis of datasets of stochastic systems. In: *Physics Letters A* 243 (1998), S. 275–280
- Solari & Piccardo 2001** SOLARI, G. ; PICCARDO, G.: Probabilistic 3-D turbulence modeling for gust buffeting of structures. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 16 (2001), S. 73–86
- Sura & Barsugli 2002** SURA, P. ; BARSUGLI, J.: A note on estimating drift and diffusion parameters from timeseries. In: *Physics Letters A* 305 (2002), S. 304–311
- Sura & Gille 2003** SURA, P. ; GILLE, S. T.: Interpreting wind-driven Southern Ocean variability in a stochastic framework. In: *Journal of Marine Research* 61 (2003), S. 313
- Sura 2003** SURA, Philip: Stochastic Analysis of Southern and Pacific Ocean Sea Surface Winds. In: *Journal of Atmospheric Sciences* 60 (2003), Nr. 4, S. 654–666
- Sura u.a. 2005** SURA, Philip ; NEWMAN, Matthew ; PENLAND, Cécile ; SARDESHMUKH, Prashant: Multiplicative Noise and Non-Gaussianity: A Paradigm for Atmospheric Regimes? In: *Journal of Atmospheric Sciences* 63 (2005), Nr. 5, S. 1391–1409
- Timmer 2000** TIMMER, Jens: Parameter estimation in nonlinear stochastic differential equations. In: *Chaos, Solitons & Fractals* 11 (2000), Nr. 15, S. 2571–2578
- Tuller & Brett 1984** TULLER, Stanton E. ; BRETT, Arthur C.: The Characteristics of Wind Velocity that Favor the Fitting of a Weibull Distribution in Wind Speed Analysis. In: *Journal of Applied Meteorology* 23 (1984), Nr. 1, S. 124–134
- TurbSim 2007** *NWTC Design Codes (TurbSim by Neil Kelley, Bonnie Jonkman)*. 2007. – URL <http://wind.nrel.gov/designcodes>. – Version 1.10 vom 10. April 2006
- van den Berg 2004** VAN DEN BERG, G. P.: Effects of the wind profile at night on wind turbine sound. In: *Journal of Sound and Vibration* 277 (2004), Nr. 4-5, S. 955–970
- Veers 1984** VEERS, Paul S.: Modeling Stochastic Wind Loads on Vertical Axis Wind Turbines / Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA). 1984. – Forschungsbericht
- Veers 1988** VEERS, Paul S.: Three dimensional wind field simulation / Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA). 1988. – Forschungsbericht
- Venema u.a. 2006** VENEMA, Victor ; AMENT, Felix ; SIMMER, Clemens: A Stochastic Iterative Amplitude Adjusted Fourier Transform algorithm with improved accuracy. In: *Nonlinear Processes in Geophysics* 13 (2006), Nr. 3, S. 321–28

- Wächter u.a. 2004a** WÄCHTER, M. ; KOUZMITCHEV, A. ; PEINKE, J.: Increment definitions for scale-dependent analysis of stochastic data. In: *Physical Review E* 70 (2004), Nr. 5
- Wächter u.a. 2003** WÄCHTER, M. ; RIESS, F. ; KANTZ, H. ; PEINKE, J.: Stochastic analysis of different rough surfaces. In: *Europhys. Lett.* 64 (2003), S. 579
- Wächter u.a. 2004b** WÄCHTER, M. ; RIESS, F. ; SCHIMMEL, T. ; WENDT, U. ; PEINKE, J.: Stochastic analysis of different rough surfaces. In: *The European Physical Journal B* 41 (2004), S. 259–277
- Weiss 1994** WEISS, George H. ; STANLEY, H. E. (Hrsg.) ; GUYON, Etienne (Hrsg.): *Aspects and Applications of the Random Walk*. 1000 AE Amsterdam, The Netherlands : North Holland, Elsevier Science B.V., 1994 (Random Material and Processes)
- Weron 2001** WERON, Rafal: Levy-stable distributions revisited: tail index > 2 does not exclude the levy-stable regime. In: *International Journal of Modern Physics C* 12 (2001), Nr. 3, S. 209–223
- Wilcoxon 1945** WILCOXON, Frank: Individual Comparisons by Ranking Methods. In: *Biometrics Bulletin* 1 (1945), Nr. 6, S. 80–83
- Wilczek u.a. 2007** WILCZEK, Michael ; KAMPS, Oliver ; FRIEDRICH, Rudolf: Lagrangian Investigation of Two-Dimensional Decaying Turbulence. In: *arXiv preprint arXiv:0705.3132* (2007)
- Xu & Chen 2004** XU, Y. L. ; CHEN, J.: Characterizing nonstationary wind speed using empirical mode decomposition. In: *Journal of Structural Engineering* 130 (2004), Nr. 6, S. 912–920
- Yaglom 2001** YAGLOM, Akiva M.: *New trends in turbulence Turbulence: nouveaux aspects*. Bd. 74. Kap. The Century of Turbulence Theory: The Main Achievements and Unsolved Problems, S. 1–52, Springer Berlin / Heidelberg, 2001
- Yamada & Ohkitani 1991** YAMADA, Michio ; OHKITANI, Koji: Orthonormal wavelet analysis of turbulence. In: *Fluid Dynamics Research* 8 (1991), S. 101–115
- Yanovsky u.a. 2000** YANOVSKY, V. V. ; CHECHKIN, A. V. ; SCHERTZER, D. ; TUR, A. V.: Levy anomalous diffusion and fractional Fokker-Planck equation. In: *Physica A Statistical Mechanics and its Applications* 282 (2000), Juli, S. 13–34

Lebenslauf

Der Lebenslauf ist in der digital publizierten Version dieser Arbeit nicht enthalten.

Danksagung

An dieser Stelle bedanke ich mich zunächst bei Prof. Dr. Rudolf Friedrich, der mich in den vergangenen Jahren freundlich betreut und stets gefördert hat. Die interessante Themenstellung sowie die gute Zusammenarbeit mit Prof. Dr. Rudolf Friedrich haben dazu beigetragen, dass ich während dieser Zeit viel lernen konnte und meine Motivation für das Anfertigen dieser Arbeit stets aufrecht erhalten blieb.

Außerdem danke ich Prof. Dr. Joachim Peinke für viele hilfreiche Vorschläge im Bezug auf diese Arbeit und insbesondere für die Möglichkeit, regelmäßig die Räumlichkeiten und die Infrastruktur der Universität Oldenburg nutzen zu können.

Ich danke Sebastian Busch, Bernhard Stoevesandt, Dr. Matthias Wächter, Michael Wilczek sowie meinen Eltern Angelika und Ludger, die die vorliegende Arbeit korrekturgelesen haben und deren konstruktive Kritik wesentlich zur Verbesserung der Arbeit beigetragen hat.

Ferner möchte ich mich bei den Arbeitsgruppen von Prof. Dr. Rudolf Friedrich und Prof. Dr. Joachim Peinke an den Universitäten Münster bzw. Oldenburg bedanken. Das angenehme Arbeitsklima und den intensiven wissenschaftlichen Austausch hätte ich nicht missen wollen. Sehr geschätzt habe ich darüber hinaus interessante Diskussionen mit Hervé Gontier, Prof. Dr. Andreas Heuer, Oliver Kamps, Dr. Andreas Nawroth sowie Prof. Dr. Alois P. Schaffarczyk.

Für das Anfertigen der vorliegenden Arbeit wurde fast ausschließlich auf Software zurückgegriffen, die von den Entwicklern kostenlos zur Verfügung gestellt wurde und die kommerziellen Produkten vielfach um nichts nachsteht. Auf diesem Wege sei allen, die sich an der Entwicklung freier Software beteiligen, ein herzlicher Dank ausgesprochen.

Mein besonderer Dank gilt meiner Freundin und zukünftigen Frau Elke, ohne deren Unterstützung die vorliegende Arbeit nicht hätte entstehen können.

Stichwortregister

- A**
anomale Diffusion 3, 55, 63, 73, 82
ARMA-Prozess 110
atmosphär. Grenzschicht .. 98, 103, 167
- B**
Bayes'sches Theorem 8, 28, 130
Bin 26
Boussinesq-Näherung 98
Brown'sche Bewegung 10, 55, 69
 fraktional 56, 129
- C**
Chapman-Kolmogorov-Gl. 14, 45, 50, 52
charakteristische Funktion 6, 16
Cholesky-Zerlegung 114, 115, 121
correlation distortion 123
CTRW 3, 56, 58, 60, 65, 71, 131
 Bogenlänge 65
 Eigenzeit 65, 66, 132
 Fogedby 65, 66, 77, 156
 Montroll-Weiss-Gleichung ... 59, 74
 Subordination 20, 80, 90
- D**
DES 109
deterministisches Chaos 1, 94, 131
Diffusionsfunktion 15
Diffusionsprozess 10, 15, 55, 76
dir. Schätzung stochast. Prozesse 26, 29,
 30, 43, 53, 54
distributionelle Gleichheit 16
DNS 108
„downscaling“ 99, 122
Driftfunktion 15
- E**
EM-Algorithmus 54
Energiekaskade 95, 127
Ergodizität 30
Euler-Verfahren 13, 77, 144
„Exit-Time“-Problem 59, 85
- F**
Fick'sches Gesetz 55, 61
- Fokker-Planck-Gleichung 12, 14, 28, 55,
 73, 136
 fraktional 62, 74
frakt. Brown'sche Bewegung ... 56, 129
fraktionaler Differentialoperator 62
Freiheitsgrad 2, 114
- G**
Grenzwertsatz der Statistik 21
- I**
Inertialbereich 95, 102
Intermittenz 97, 101, 141
Itô's Lemma 12, 85
- K**
Kinematische Simulation 124
Kolmogorov
 5/3-Gesetz 95, 102, 114, 140
 K41 95, 109
 K62 97
 Mikroskala 95
komplexes System . 1, 5, 25, 26, 55, 155
Kramers-Moyal
 Entwicklung 14
 Koeffizienten 14, 25
- L**
Langevin-Gleichung .. 10, 13, 23, 43, 46,
 90
Laplace-Transformation 58
LES 108
Lévy-Prozess 56
Lévy-Verteilung 17, 56, 58, 76, 159
 Charakteristischer Exponent ... 17
 Truncated 21, 71
logarithmische Ableitung 140
logarithmisches Höhenprofil ... 102, 133
- M**
Markov-Einstein-Länge . 40, 43, 53, 155
Markov-Kette 110
Markov-Prozess 9, 27, 48, 53, 54
 versteckt 46
Mastergleichung 56

- Maximum-Likelihood-Optimierung ... 8, 28
 Mean First Exit Time 87
 Messrauschen 11, 46, 51
 Mittelwert 5, 108, 132, 163, 168
 Ensemblemittel .. 7, 29, 47, 59, 138
 Zeitmittel 7
 multifraktale Skalierung 97
- N**
 Navier-Stokes-Gleichung . 64, 92, 93, 94, 108, 124, 126
- O**
 Ordnungsparameter 2, 25
 Ornstein-Uhlenbeck-Prozess . 15, 51, 78, 133
- R**
 Rainflow-Counting-Algorithmus 149
 Randbedingung 87, 94, 109
 absorbierend 87
 reflektierend 87
 „random multiplicative cascade“-Modell 127
 RANS 108
 Rauschen
 additiv 11
 dynamisch 11, 46
 extern 47
 multiplikativ 11, 32
 thermisch 11
 weiß 11
 Reynolds
 Gleichungen 108
 -stress 108
 -zahl 94, 95, 129
- S**
 Sandia-Methode 114, 116, 149
 Schließungsproblem 64, 108
 selbstähnlich 97
 spektrale Lücke 167
 spektraler Tensor 120
 spektrales Surrogat 91, 114
 Stieltjes-Integral 11, 112
 stoch. Prozess in der Skala 3, 36, 41, 44, 97, 129
 Stochastischer Prozess 8
 diskret 56
 stationär 7
 zeitkontinuierlich 56
 Strukturfunktion 35, 95
 subdiffusive Dynamik 73, 151
 substantielle Ableitung 93
 Superpositionsprinzip 94
 Superstatistik 100, 145
 Synergetik 2
- T**
 Taylor-Hypothese 119, 121, 167
 Turbulenz
 inkompressibel 93, 132
 Turbulenzintensität . 124, 132, 145, 146, 163, 168
- V**
 Varianz 7, 21, 97, 153, 168
 Versklavungsprinzip 2
- W**
 Wahrscheinlichkeitsverteilung
 α -stabil 17
 bedingt 8
 Cauchy 19
 Exponentialverteilung 59, 159
 feinkörnig 6, 29
 Gauß 7
 Grenzverteilung 21
 Kumulant 6
 Lévy 17, 56, 58, 71, 76, 159
 Lorentz 19
 Mittag-Leffler 75
 Moment 6, 20
 Normalverteilung 7
 Pareto 75
 Rayleigh 162
 stabil 16, 17, 66
 teilbar 22
 Truncated Lévy ... 21, 71, 143, 152
 vollständig schief 19
 Weibull 99, 100, 162
 zentriertes Moment 6
 Wavelet 37, 125, 126, 127
 FWT 126
 „Mexican Hat“ 125
 Wiener-Prozess 11
 Windkraftanlage
 Betz'sches Gesetz 103
 Leistungskurve 105
 Nennleistung 104
 Wirbeltransportgleichung 93
- Z**
 Zufallsphase 114
 Zufallsvariable 5