

WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER

**Bernd Forsmann**

# **Dynamik gekoppelter Microchip-Laser**

**2003**



Experimentelle Physik

# **Dynamik gekoppelter Microchip-Laser**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

**Bernd Forsmann**

aus Lüdinghausen

– 2003 –

---

Dekan:	Prof. Dr. H. Zacharias
Erster Gutachter:	Prof. Dr. W. Lange
Zweiter Gutachter:	HDoz. Dr. T. Ackemann
Tag der mündlichen Prüfung:	1. und 3.12.2003
Tag der Promotion:	3.12.2003

*Meinem Vater Bernhard Forsmann*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Stand der Forschung und Problemstellung</b>	<b>5</b>
<b>2 Experimenteller Aufbau, Meßgrößen und Auswerteverfahren</b>	<b>9</b>
2.1 Laserpräparation . . . . .	12
2.1.1 Pumplaser-Präparation und -Ausrichtung . . . . .	12
2.1.2 Pumpstrahlkontrolle . . . . .	14
2.1.3 Lasermaterial . . . . .	17
2.1.4 Microchip-Laser-Resonator . . . . .	18
2.2 Meß-Aufbau . . . . .	19
2.2.1 Laser-Intensitätszeitreihen . . . . .	19
2.2.2 ‘Nahfeld’ . . . . .	21
2.2.3 ‘Fernfeld’ . . . . .	22
2.2.4 Optisches Spektrum . . . . .	22
2.2.5 Frequenzdifferenzen . . . . .	23
2.3 Analyse-Methoden . . . . .	24
2.3.1 JTFA: Joint Time-Frequency-Analysis . . . . .	24
<b>3 Experimentelle Ergebnisse</b>	<b>29</b>
3.1 Oszillationstypen . . . . .	30
3.1.1 Synchrone Oszillationen und Pulse . . . . .	30
3.1.2 Lokalisierte Oszillationen . . . . .	35
3.1.3 Irreguläre Oszillationsformen . . . . .	40
3.1.4 Übermodulationen . . . . .	40
3.1.5 Optische Phasensynchronisation . . . . .	43
3.2 Statistische Untersuchung . . . . .	44
3.2.1 Grobklassifizierung der Gesamtdynamik . . . . .	49
3.2.2 Feinklassifizierung des SO-Oszillationstyp . . . . .	49
3.2.3 Feinklassifizierung des LO-Oszillationstyp . . . . .	51
3.3 Dynamikszenarios . . . . .	53
3.4 Drei-Lasersystem . . . . .	60
3.5 Zusammenfassung . . . . .	61

---

<b>4</b>	<b>Theorie und Modellsystem</b>	<b>63</b>
4.1	Gleichungen für den Einzellaser . . . . .	63
4.1.1	Klasse-A-Laser . . . . .	66
4.1.2	Klasse-C-Laser . . . . .	66
4.1.3	Klasse-B-Laser . . . . .	66
4.2	Gekoppelte Laser . . . . .	68
4.3	Modell-Dynamik . . . . .	70
4.3.1	Instabilitätsmechanismus . . . . .	71
4.3.2	Resonanz-Entdämpfung der Relaxationsschwingungen . . . . .	71
4.3.3	Modellgleichungssymmetrien . . . . .	72
4.4	Alternative Modellierung des Kopplungskoeffizienten . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Numerische Ergebnisse, Vergleich mit dem Experiment und Diskussion</b>	<b>75</b>
5.1	Numerik-Gleichungen . . . . .	75
5.2	Dynamikszzenarien . . . . .	78
5.3	Typische Zeitreihenformen . . . . .	83
5.3.1	Synchrone Oszillationen und Pulse . . . . .	83
5.3.2	Lokalisierte Oszillationen . . . . .	86
5.3.3	Irreguläre Oszillationsformen . . . . .	90
5.3.4	Übermodulationen . . . . .	90
5.4	Diskussion . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Parameter für den Runge-Kutta-Fehlberg-Algorithmus</b>	<b>97</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>99</b>

# Einleitung

Das Konzept der Kopplung von (nichtlinearen) Oszillatoren stellt heute ein eminent wichtiges Modellierungswerkzeug sowohl für einfache als auch für höchst komplexe Systeme dar. Die erste publizierte Beobachtung der Konsequenz aus der Kopplung zweier Oszillatoren, nämlich die Synchronisation der Pendelausschläge zweier Uhren, die gemeinsam an einem Holzbalken hingen, stammt von Christaan Huygens aus dem Jahre 1665 [Huy65]. Beispiele aus der belebten Natur sind das synchrone Zirpen von Grillen, das gleichzeitige Aufblinken eines Glühwürmchenschwarms u. v. m. ([PRK01] und darin enthaltene Referenzen). Ein akustisch direkt zugänglicher Kopplungseffekt ergibt sich für ein Paar räumlich naher, nur leicht unterschiedlicher, angeregter Orgelpfeifen, die (unabsichtlich) in Einklang schwingen können [Ray45]. Ein für jeden Menschen lebensnotwendiges System gekoppelter nichtlinearer Oszillatoren befindet sich in Form eines Ensembles von Schrittmacherzellen im menschlichen Herz, das im richtig synchronisierten Zustand für einen regelmäßigen Herzschlag sorgt [ST83].

Der Laser ist ein wichtiges Beispiel für einen nichtlinearen Oszillator. Seine große Bedeutung liegt zum einen in der Vielzahl der technischen Anwendungen, die auf ihm beruhen. Als Quelle hochkohärenter Strahlung für spektroskopische Zwecke, in Form von Laserdioden, die die Trägerwellen für Informationsübertragungssysteme erzeugen, als schmalbandiger Strahlungsemitter für frequenzsensitive Therapien in der Medizin, als Hochleistungslaser in der Materialbearbeitung und in vielen anderen Bereichen beweist der Laser seine Allgegenwärtigkeit auch im Alltagsleben. Zum anderen stellt er auf dem Forschungsgebiet der nichtlinearen Dynamik ein interessantes Modellsystem dar. Der Laser als selbsterregter Oszillator, der schon durch wenige Freiheitsgrade beschreibbar ist, kann Dynamik in der Intensität des emittierten elektrischen Feldes zeigen. Dazu gehören z. B. transiente Vorgänge wie ‘Spiking’ und Relaxationsoszillationen bis hin zu deterministisch chaotischem Verhalten spezieller Laser [WKEC85]. Bei vielen Lasern, vor allem im Anwendungsbereich, wird unter normalen Umständen keine Intensitätsinstabilität auftreten. Werden Laser allerdings miteinander gekoppelt, kann man eine große Vielfalt an Dynamiktypen erwarten.

Gekoppelte Lasersysteme stießen schon früh auf das Interesse von Forschern. Eine bekannte Realisierung ist diejenige mit unidirektionaler Kopplung in Form des ‘Injection-Lockings’. Dort wird die Ausgangsleistung eines Lasers mit z. B. hoher Frequenzstabilität in den Resonator eines leistungsstarken, aber nicht ganz so frequenzstabilen Lasers eingekoppelt. Unter entsprechenden Bedingungen kann es zu einer Frequenzsynchronisation kommen, so daß man ein leistungsstarkes, frequenzstabiles Gesamtsystem erhält [Sieg86].

Ein technologisch wichtiges Beispiel für räumlich transversal gekoppelte Laser stellen die Halbleiterlaserarrays dar. Zur Erzielung hoher Leistungen werden viele Halbleiterlaser in monolithischer Bauweise als Laserarrays und -stacks produziert. Aufgrund der großen räumlichen Nähe kann es hier durch Kopplungseffekte zu einer unerwünschten Dynamik in den Laseremissionen kommen. Hierauf wird im Rahmen der Diskussion um den Stand in dem diese Arbeit betreffenden Forschungsbereich im nächsten Kapitel näher eingegangen.

Ein weiteres interessantes Beispiel für gekoppelte Laser ist die Synchronisation chaotisch oszillierender Laser [WiRa90], [OtKa00]. In [RT94] wird ein System zweier räumlich transversal gekoppelter neodymdotierter Yttriumgranat(Nd:YAG)-Laser betrachtet, wobei die Laser durch eine Pumpstrahlmodulation chaotisches Verhalten zeigen. Bei entsprechender Kopplungsstärke kann es zu synchronisierten Chaos kommen, d. h. die beiden Laser zeigen die gleichen deterministisch chaotischen Schwingungen. Dieses aufgrund der bekannten Sensitivität chaotischer Systeme gegenüber Störungen kontraintuitive Verhalten läßt sich als neuartige kryptographische Methode ausnutzen. Das Signal wird als kleine Störung auf den Hintergrund der chaotischen Oszillationen auf eine der Laserintensitäten aufmoduliert und kann im anderen Laser wiedergewonnen werden. Die Sicherheit des Verfahrens ist dadurch gewährleistet, daß man die Laser mit identischen Betriebsparametern betreiben muß.

Konkret wird in der vorliegenden experimentellen Untersuchung ein System zweier räumlich transversal gekoppelter neodymdotierter Yttrium-Orthovanadat(Nd:YVO<sub>4</sub>)-Laser betrachtet. Ein einzelner dieser Festkörperlaser zeigt abgesehen von gedämpften Relaxationsoszillationen keinerlei Intensitätsdynamik. Die Wahl dieses relativ einfachen Systems von nur zwei identisch präparierten Nd:YVO<sub>4</sub>-Laser soll grundsätzliche Einblicke in die reichhaltige Dynamik solcher gekoppelten Lasersysteme ermöglichen. Es ist an einem ähnlichen Aufbau zweier Nd:YAG-Laser angelehnt, allerdings ist der optische Resonator in Form eines Microchip-Resonators realisiert [Koe96]. Experimentelle Untersuchungen des Nd:YAG-Aufbaus in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke und der Verstimmung der Laser zueinander konnten die Existenz einer Intensitätsinstabilität zeigen, die aufgrund einer Resonanzendämpfung der Relaxationsoszillationen auftritt [ThMö97]. Aufgrund von Fluktuationen in dem Systemparameter der Verstimmung waren aber keine Aussagen über Form und Parameterabhängigkeiten dieser Instabilität möglich.

Neuere theoretische Untersuchungen [Ern97] eines solchen Systems identischer präparierter Laser sagen eine interessante Form der Intensitätsinstabilität voraus. In einem solchen System existiert eine Austauschsymmetrie für die beiden Laser, was sich auf mögliche Oszillationsformen in der Weise auswirken sollte, daß die Laser identische Schwingungen zeigen. Die theoretische Behandlung zeigt aber, daß es symmetriebrechende Oszillationstypen geben kann, in denen ein Laser z. B. stark pulst, während der andere Laser nur schwache Schwingungen ausführt. Die von den Autoren gewählte Bezeichnung als lokalisierte Oszillationen wird auch hier verwendet.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, die bei der Intensitätsinstabilität auftretenden Oszillationstypen zu identifizieren und Aussagen über Systemparameterabhängigkeiten machen zu können. Darüberhinaus sollte, falls möglich, der experimentelle Nachweis der lokalisierten Oszillationen erbracht werden.

Das Kapitel 1 stellt den Stand der Forschung im Bereich der räumlich transversal gekoppelten Festkörperlaser vor und erläutert die Aufgabenstellung weitergehend. Im Kapitel 2 wird der experimentelle Aufbau vorgestellt, Kapitel 3 zeigt die experimentell erzielten Resultate. Ein einfacher ‘Coupled-Mode’-Ansatz wird in Kapitel 4 beschrieben und in Kapitel 5 numerisch ausgewertet. Die numerisch erzielten Ergebnisse werden im letztgenannten Kapitel mit den experimentellen verglichen und es findet eine Diskussion der insgesamt erzielten Resultate statt.



# Kapitel 1

## Stand der Forschung und Problemstellung

Räumlich transversal gekoppelte Festkörperlaserarrays sind schon seit einigen Jahren wichtiger Bestandteil der Forschung im Bereich der Laserphysik. Vor allem Halbleiterlaserarrays spielen hier eine gewichtige technologische Rolle. Aufgrund der fehlenden Skalierbarkeit bei Halbleiterlasern ist es hier nötig zu Array-Anordnungen überzugehen, um höhere Laserleistungen zu erzielen [Carl94]. Kann man Kopplungsphänomene vernachlässigen, so hat man es mit einer Anordnung inkohärenter Strahler zu tun. Diese Form von Laserdiodenarrays hat ihren festen Platz im Anwendungsbereich als optische Pumpquelle für Kristall-Laser, wie Nd:YAG-Lasern und frequenzverdoppelten Nd:YVO<sub>4</sub>-Lasern, gefunden.

Eine ursprüngliche Idee beim Aufbau solcher Arrays war es allerdings gerade, durch die Kopplung zwischen den einzelnen Elementen einen optisch phasensynchronisierten Betrieb erreichen zu können und somit die gute raum-zeitliche Kohärenz eines Einzelstrahlers beizubehalten. Insbesondere die Konstellation, bei der alle Einzelelemente in Phase schwingen, würde zu einer hohen Spitzenleistung führen. Es hat sich im Laufe der Zeit aber herausgestellt, daß die Realisierung eines solchen In-Phase-Arrays experimentell sehr schwierig ist. Benachbarte Elemente tendieren eher dazu in Gegenphase (d. h. mit einem Phasenunterschied  $\Delta\phi = \pi$ ) zu oszillieren. Des weiteren waren die Bereiche der Systemparameter, wie Kopplungsstärke und relative Verstimmung der einzelnen Laser zueinander, in denen Synchronisationsphänomene auftraten, relativ klein.

Aussagen zu der zeitlichen Entwicklung der Laseremission der einzelnen Arrayelemente ließen sich erst relativ spät nach den ersten Realisierungen von Laserdiodenarrays machen, bedingt durch die damals zur Verfügung stehende Meßtechnik. Die intrinsischen Zeitkonstanten von Halbleiterlasermaterialien führen dazu, daß sich eine potentielle Dynamik der Laseremission auf einer Zeitskala von Nanosekunden abspielt. Messungen mit Hilfe einer Streak-Kamera Mitte der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts führten zu dem Schluß, daß einzelne Arrayelemente Intensitätsdynamik zeigen konnten, obwohl die Gesamtleistung des Arrays relativ stabil war ([BoS94] und darin enthaltene Referenzen). Entsprechende theoretische Untersuchungen mit Hilfe eines ‘Coupled-Mode’-Modells konnten eine Instabilität reproduzieren [WaW88].

Aufgrund der genannten meßtechnischen Probleme mit Laserdiodenarrays wurden Experimente mit Kristallfestkörpermaterialien, wie Nd:YAG, durchgeführt, wobei in einem Laserkristall durch stark lokalisierte Pumpstrahlen mehrere Laser gleichzeitig erzeugt werden können. Dies hat mehrere Vorteile: zum einen besitzen die Materialien meßtechnisch günstigere Zeitkonstanten, die zu einer Intensitätsdynamik auf der Zeitskala von Mikrosekunden führt. Zum anderen läßt sich die Kopplungsstärke durch einfache Änderung der Abstände der Pumpstrahlen gut variieren im Gegensatz zu den monolithisch gefertigten Halbleiterlaserarrays.

Darüberhinaus erhoffte man sich, daß die Parameterbereiche für Phasensynchronisation in diesen Experimenten relativ groß sein würden. Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß sich Festkörper- und Halbleiterlaser zwar ähnlich sind (beide Arten gehören zu den Klasse-B-Lasern), aber der sogenannte 'Linewidth Enhancement'-Faktor  $\alpha$  bei den Laserdioden sehr große Werte annimmt und letztendlich dafür sorgt, daß die Phasensynchronisation nur schwierig zu erzielen ist.

Neben dieser eher anwendungs- und technologieorientierten Motivation, sich mit gekoppelten Festkörperlaser zu beschäftigen, bildet ein Laserarray eine Anordnung von gekoppelten nichtlinearen Oszillatoren, das ein meßtechnisch gut zugängliches Modellsystem für die nichtlineare Dynamik bilden kann.

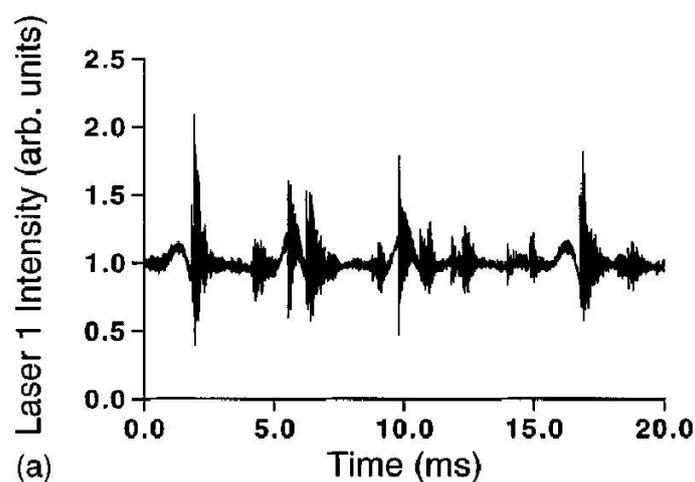
Die ersten experimentellen und theoretischen Untersuchungen mit Festkörperlasern konzentrierten sich auf die Kohärenz und Phasendynamik der gekoppelten Laser [SiFW93], [KoLi95], [XuLC95]. Oka *et al.* konnten in einem System von drei und vier Nd:YAG-Lasern Phasensynchronisation zeigen. Für drei Laser, die in Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet waren, stellte sich eine Phasendifferenz von  $\Delta\phi = 2\pi/3$  benachbarter Elemente ein, für vier Laser im Quadrat eine Differenz von  $\Delta\phi = \pi$  [Ok92].

Ein weiteres Experiment wurde am Georgia Institute of Technology, Atlanta in der Arbeitsgruppe von R. Roy durchgeführt [Fab93]. Die damaligen Arbeiten beschäftigten sich mit einem System aus zwei räumlich transversal gekoppelten Nd:YAG-Lasern, das auf seine Abhängigkeit in Bezug auf den Abstand der beiden Laser, also der Kopplungsstärke untersucht wurde. Es konnte Phasensynchronisation mit einer Phasendifferenz  $\Delta\phi = \pi$  nachgewiesen, sowie eine hohe räumliche Kohärenz der synchronisierten Laser festgestellt werden.

Theoretische Arbeiten, die Systeme räumlich transversal gekoppelter Festkörperlaser und deren Intensitätsdynamik allgemein behandeln, gab es in dieser Form nicht. Allerdings beschreiben Mandel *et al.* [MaRE89] ein Modell für zwei durch bidirektionale Injektion gekoppelte Laser, das als 'Coupled-Mode'-Modell für die transversale Kopplung gedeutet werden kann (u. a. wird dort auf die Betrachtung von Zeitverzögerungseffekte verzichtet). Das System wurde in Abhängigkeit von der gegenseitigen Verstimmung und der Kopplungsstärke untersucht. Unter der Bedingung, daß die beiden Laser identisch sind, d. h. gleiche Betriebsparameter besitzen, zeigt das Modell eine Intensitätsinstabilität, die als Resonanzentdämpfung der Relaxationsoszillationen der Laser verstanden werden kann.

Konkreter Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit waren Untersuchungen, die ebenfalls in Atlanta mit einem modifizierten Aufbau des oben genannten Experiments durchgeführt wurden. Die Modifikation bestand darin, daß der Auskoppelspiegel des Resonators

verkippar war. Dadurch ist es möglich, die Verstimmung zwischen beiden Lasern zu kontrollieren. Es wurde insbesondere das Verhalten der einzelnen Laserintensitäten in Abhängigkeit von der gegenseitigen Verstimmung der Laser und dem Laserabstand untersucht. Die Laser wurden möglichst gleich präpariert, d. h. möglichst gleiche Pump- und Verlustkoeffizienten [ThMö97]. Es konnte eine fundamentale Instabilität in den Laserintensitäten bei entsprechenden Systemparametersätzen nachgewiesen werden. Aufgrund von äußeren Störungen, verursacht insbesondere durch die fehlende ausreichende mechanische Stabilität des Resonatoraufbaus, unterlag der Verstimmungsparameter jedoch relativ starken und schnellen Fluktuationen, was dazu führte, daß sich die Instabilität nur in kurzen, d. h. nur wenige Schwingungen umfassenden Ausbrüchen ('bursts') bemerkbar machte (siehe Abbildung 1.1). Daher konnte nur die Existenz der Instabilität nachgewiesen, nicht aber quantitative Aussagen, wie z. B. über Oszillationsformen oder Parameterabhängigkeiten, getroffen werden.



**Abbildung 1.1:** Zeitspur der bezogen auf die stationäre Intensität normierten Laserintensität des Lasers 1 im Bereich der Instabilität (aus [ThMö97]). Durch Fluktuationen in dem Systemparameter Verstimmung äußert sich die Instabilität nur in Form von kurzen Ausbrüchen in der Laserleistung.

Konkret ergaben sich die Probleme mit der mechanischen Stabilität des Laserresonators wahrscheinlich durch dessen relativ komplizierten Aufbau. Dieser bestand zum einen aus einem 5 mm langen Nd:YAG-Stab, dessen eine Frontfacette für die Laserwellenlänge verspiegelt war, und somit einen der Resonatorspiegel darstellte. Um die Kopplung zwischen den Lasern nicht durch eine undefinierte Polarisation der Laserstrahlung zu komplizieren, war es aufgrund der fehlenden Polarisationsselektivität des Nd:YAG-Materials notwendig, eine Brewsterplatte in den Resonator einzufügen. Desweiteren wurde ein Etalon in dem relativ langen Resonator benötigt, dessen Länge u. a. durch die relativ kleine Verstärkung von Nd:YAG bedingt war, um die gewünschte Einzelmodigkeit der Laser gewährleisten zu

können. Die beiden genannten optischen Elemente können natürlich jeweils in Folge von möglicher fehlender mechanischer Stabilität ihrer Halterungen eine (zusätzliche) Quelle von Fluktuationen in der jeweiligen Frequenz der Laserstrahlung bilden.

Zur Beurteilung der Problematik der Verstimmungsfluktuationen muß man deren Größe in Relation zur Laserrelaxationsfrequenz  $\nu_{\text{rel}}$  setzen, die das Dynamikverhalten des gekoppelten Zweilasersystems entscheidend mitbestimmt. Diese Frequenz besaß einen Wert von um die 100 kHz, der im Vergleich zu den Amplitudenwerten der Verstimmungsfluktuationen von mehreren Megahertz recht klein ist. Die Beseitigung der Probleme des oben beschriebenen Experiments ist ein wichtiges Ziel dieser Arbeit. Es führt zu entsprechenden Konsequenzen bei der Wahl des Lasermaterials und der Parameter des Laserbetriebs, wie dies in Kapitel 2 beschrieben wird.

Die numerische und analytische Untersuchung eines ‘Coupled-Mode’-Modells für ein System identischer Laser mit Parametern, die denen des gerade beschriebenen Experiments relativ nahe kommen, brachten weitere interessante Erkenntnisse: Es wurde eine symmetriebrechende Form der Intensitätsinstabilität gefunden, nämlich die schon in der Einleitung erwähnten lokalisierten Oszillationen [Ern97].

Die konkrete Zielsetzung des hier beschriebenen Experiments ist es, systematische Erkenntnisse zur Intensitätsinstabilität eines Systems zweier identisch präparierter, räumlich transversal gekoppelter Festkörperlaser in Abhängigkeit von den Parametern der gegenseitigen Verstimmung und des Abstandes der beiden Laser zu gewinnen. Insbesondere das Auffinden verschiedener Oszillationsformen und deren Auftreten in Dynamikszenerarien steht hier im Mittelpunkt. Besonderes Interesse gilt außerdem dem möglichen experimentellen Nachweis der Existenz von symmetriebrechenden lokalisierten Oszillationen.

## Kapitel 2

# Experimenteller Aufbau, Meßgrößen und Auswerteverfahren

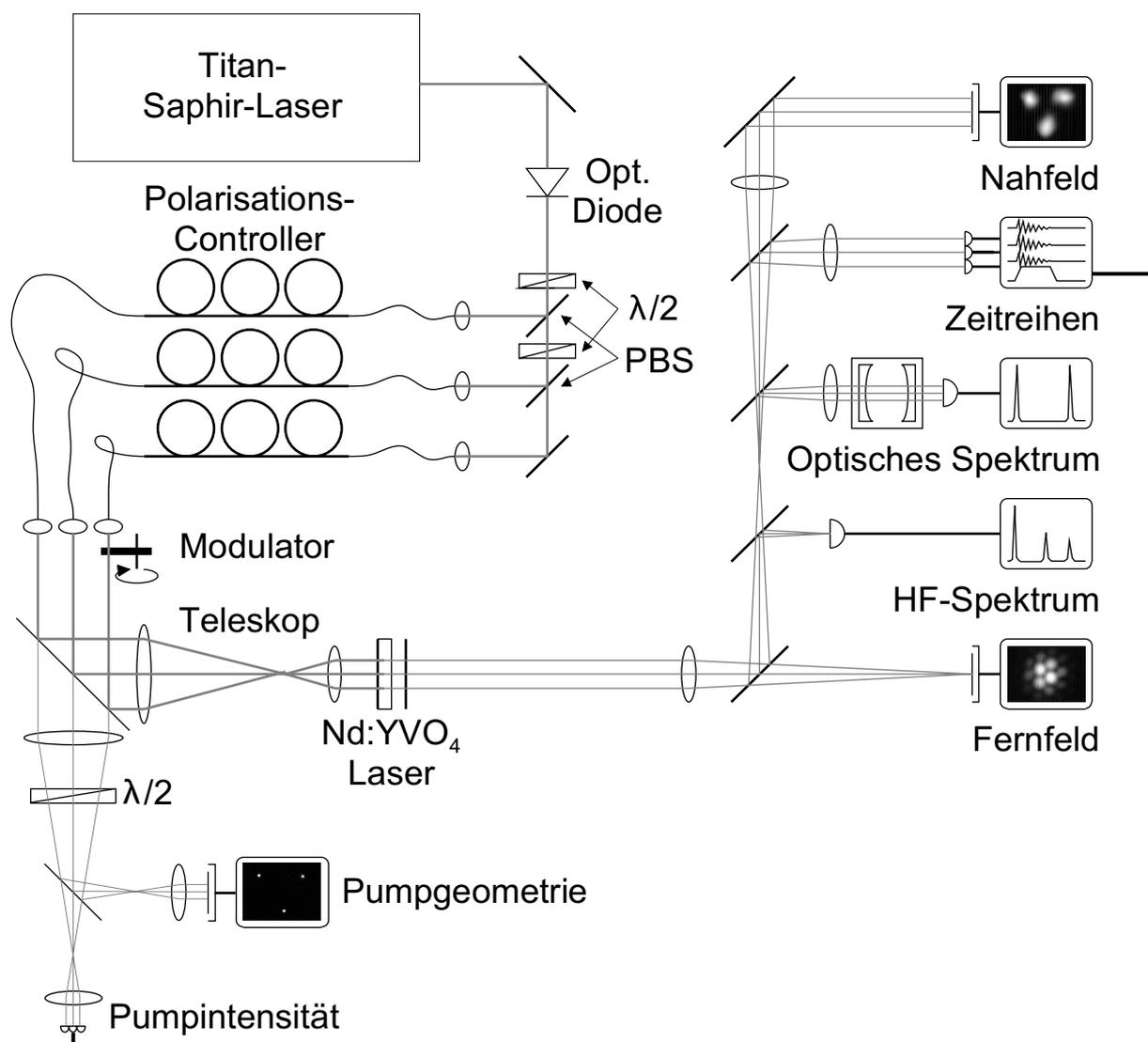
Der hier vorgestellte experimentelle Aufbau hat folgende Bedingungen zu erfüllen: Zum einen soll er die Präparation von bis zu drei räumlich transversal gekoppelten Lasern mit nahezu gleichen Pump- und Verlustparametern ermöglichen. Des weiteren muß eine (möglichst kontinuierliche) Einstellmöglichkeit der entscheidenden Systemparameter Kopplungsstärke und relative Verstimmung der Laser zueinander gegeben sein. Weiterhin ist sicherzustellen, daß es sich bei den generierten Lasern um sowohl longitudinal wie auch transversal monomodige Laser handelt. Diese Bedingungen sollen zu einem möglichst einfachen Experiment führen in dem Sinne, daß es mit einem nicht zu komplexen Modell beschreibbar ist.

Zum anderen müssen alle notwendigen Größen, die zur Interpretation und zum Verständnis der Dynamik der gekoppelten Laser nötig sind, direkt oder indirekt erfaßt werden können. Dazu zählen die zeitliche Entwicklung der einzelnen Laserintensitäten und die relative optische Phase zwischen den Lasern. In diesen Bereich fallen auch Vorrichtungen, um die Systemparameter Kopplungsstärke und Verstimmung quantitativ zu bestimmen.

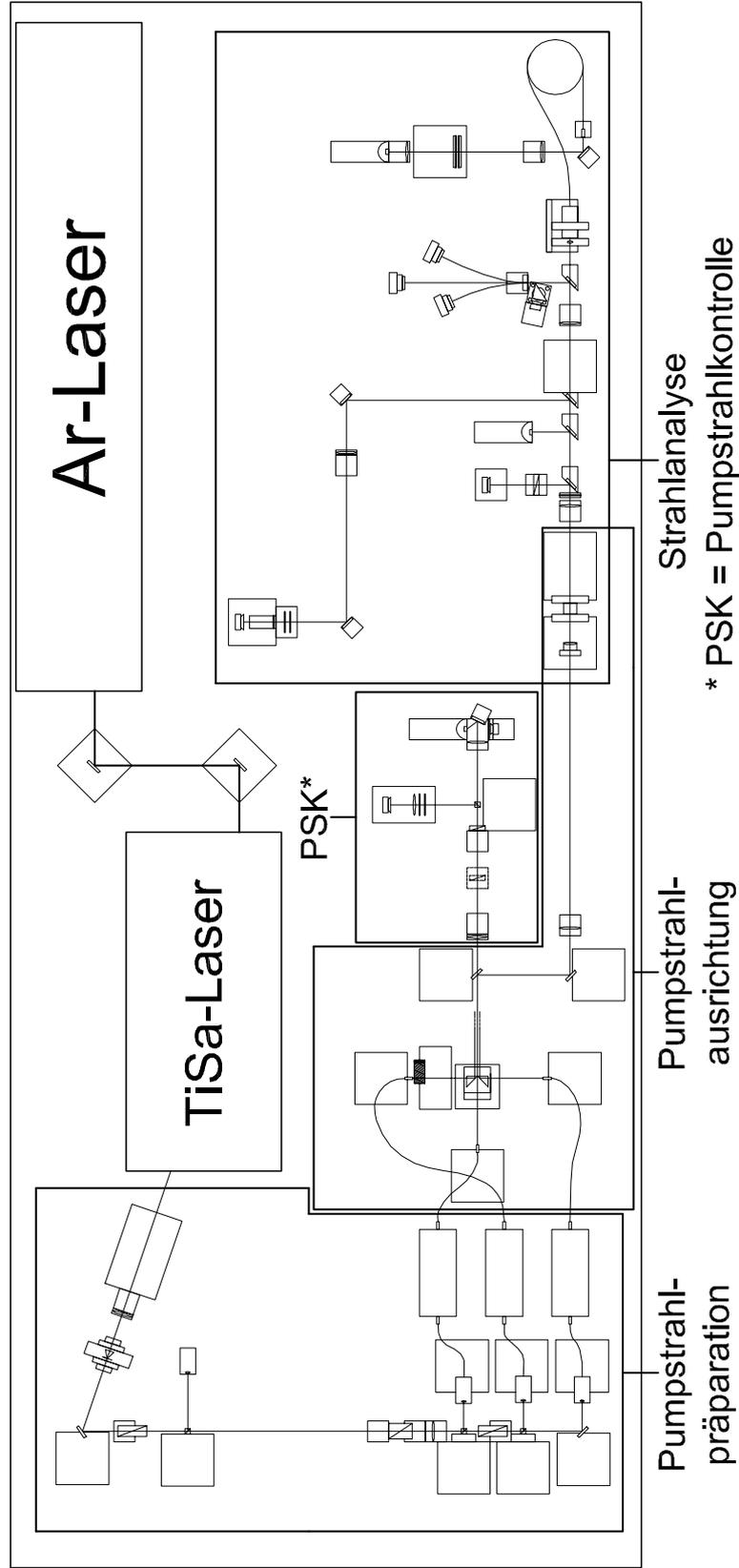
Eine Realisierung des Laseraufbaus in Form eines Nd:YVO<sub>4</sub>-Microchip-Laserkristalls, in dem durch lokalisiertes optisches Pumpen mehrere Laser gleichzeitig erzeugt werden, und eines verkippten Auskoppelspiegels kann die genannten Anforderungen gut erfüllen. Die intrinsischen Zeitkonstanten des Lasermaterials erlauben eine bessere Beobachtbarkeit der relevanten Meßgrößen im Zeitbereich im Vergleich zu Halbleiterlasern. Eine relativ einfache kontinuierliche Veränderung der Kopplungsstärke durch Verschieben der Pumpstrahlen, sowie die Änderung der relativen Verstimmung durch Spiegelverkipfung sind möglich. Dies wäre bei normalerweise monolithisch gefertigten Laserdiodenarrays nicht machbar.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit einem System von zwei Lasern. Daß hier der Aufbau mit drei Lasern beschrieben wird, ist in der Tatsache begründet, daß die Experimente im Drei-Laser-Aufbau durch Nutzung von nur zwei Lasern durchgeführt wurden. Ein Schema des gesamten experimentellen Aufbaus ist in Abbildung 2.1 wiedergegeben. Die Abbildung 2.2 zeigt eine maßstabgetreue Darstellung des tatsächlichen Laufweges der optischen Strahlung durch die verschiedenen Komponenten des Ex-

periments. In dieser Skizze sind Teile des experimentellen Aufbaus zu Funktionseinheiten zusammengefaßt, die im folgenden näher beschrieben werden. Dies sind die Pump Laser, die Pumpstrahl-Präparation und -Ausrichtung, sowie die Kontrollmöglichkeit der Pumpstrahlung. Dazu gehört weiter der eigentliche Microchip-Laser-Resonator und das Lasermaterial. In einem zweiten Teil des Kapitels werden die Meßgrößen und -methoden dargestellt. Der abschließende Teil befaßt sich mit weiterführenden Analyseverfahren, die auf die gewonnenen Meßwerte angewendet werden.



**Abbildung 2.1:** Schema des Gesamtaufbaus des Experiments (ohne Argon-Ionen-Laser).  $\lambda/2$  bezeichnet hier  $\lambda/2$ -Plättchen bzw. Fresnel-Rhomben, PBS steht für polarisierende Strahlteiler ('Polarizing Beam Splitter')



**Abbildung 2.2:** Gesamtaufbau des Experiments. Die eingezeichneten Funktionseinheiten Pumpstrahlpräparation, -ausrichtung und -kontrolle, sowie Strahlanalyse werden in folgenden Abschnitten detaillierter dargestellt.

## 2.1 Laserpräparation

Gemäß der Anforderungen eines einfachen Experiments im oben genannten Sinne sollte die verwendete Pumpstrahlung ein räumliches Profil in Form einer gauß'schen TEM<sub>00</sub>-Mode besitzen. Desweiteren wird verlangt, daß die Pumpmode im Lasermaterial einen deutlich kleineren Strahlradius besitzt als der entsprechend erzeugte Festkörperlaser. Aufgrund der Absorptionseigenschaften des Lasermaterials muß die Pumpstrahlung linear polarisiert sein.

### 2.1.1 Pumplaser-Präparation und -Ausrichtung

Der Teilaufbau des Experiments zur Pumpstrahlpräparation ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Das Pumplicht wird durch einen abstimmbaren Titan-Saphir-Laser des Typs TITAN-CW der Firma SCHWARZ-ELECTRO-OPTICS erzeugt, der seinerseits von einem Argon-Ionen-Laser (SPECTRA-PHYSICS Modell 2020-05) gepumpt wird. Die Ausgangsstrahlung des Titan-Saphir-Lasers ist linear polarisiert; die zur Verfügung stehende Leistung beträgt bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 808,8 \text{ nm}$  etwa 500 mW, begrenzt durch die maximale Leistung des Ar<sup>+</sup>-Lasers von etwa 4 W. Der emittierte Gauß'sche Strahl ist durch eine Strahltaille von  $w_0 = 765 \mu\text{m}$  (Lage: 20 cm vom Auskoppelspiegel innerhalb des Resonators) und einer Strahldivergenz  $\theta = 3,34 \text{ mrad}$  gekennzeichnet.

Zur Vermeidung einer Destabilisierung der Laseremission durch Rückreflexe an Bauelementen im weiteren Strahlengang passiert der Titan-Saphir-Laserstrahl zunächst die optische Diode OD. Ein relativ kleiner Anteil der Laserleistung (weniger als 1 %, gesteuert durch die Ausrichtung des Fresnel-Rhombus FR<sub>1</sub>) wird zur Wellenlängenbestimmung mit Hilfe eines Wavemeters am polarisierenden Strahlteiler ST<sub>1</sub> ausgekoppelt.

Die Leistung des Hauptstrahls wird durch die polarisierenden Strahlteilerwürfel ST<sub>2</sub> und ST<sub>3</sub> in drei Teilstrahlen aufgeteilt und in Einzelmoden-Glasfasern eingekoppelt. Die relative Aufteilung der Leistung läßt sich durch die polarisationsdrehenden Fresnel-Rhomben FR<sub>2</sub> und FR<sub>3</sub> einstellen.

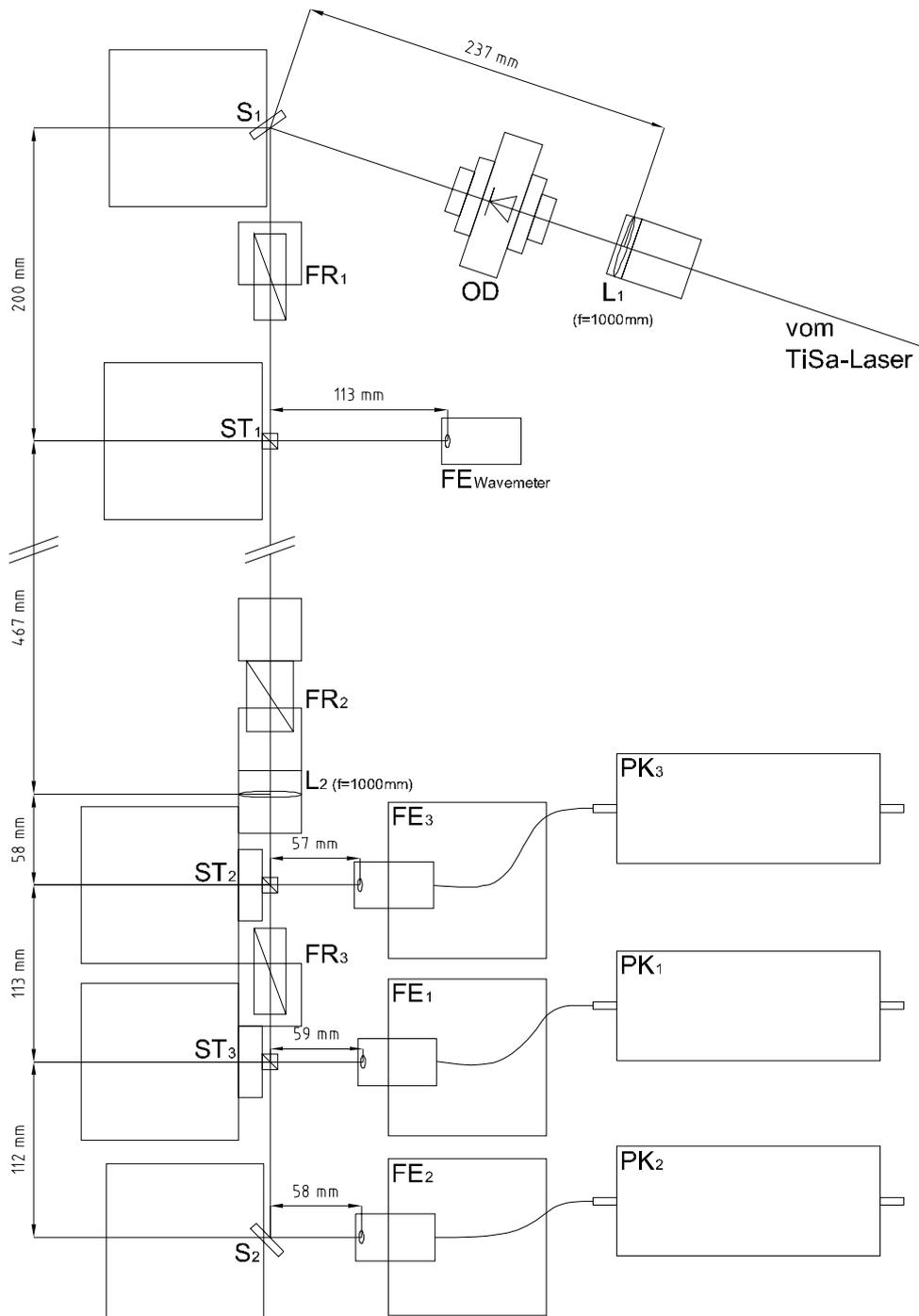
Bei den verwendeten Glasfasern handelt es sich um konfektionierte Faserkabel des Typs 520-FCA der Firma THORLABS. Auf der Einkoppelseite sind die Fasern mit APC<sup>1</sup>-Steckern versehen, die Rückreflexe vermeiden sollen. Auf der Auskoppelseite sitzt in monolithischer Bauweise direkt auf dem Faserende eine Kollimationslinse in Form einer GRIN<sup>2</sup>-Linse. Die in diesen Faserkabel verwendete Glasfaser ist vom Typ FS-SN-4224 der Firma 3M mit einem Strahlradius von  $w = 5,5 \mu\text{m}$  für die geführte Kernmode.

Um eine bestmögliche Einkoppelungseffizienz für die Pumpstrahlung in die Fasern durch Anpassung der entsprechenden Strahlradien zu gewährleisten, wird der Titan-Saphir-Laserstrahl durch die Linsen L<sub>1</sub> und L<sub>2</sub> vorfokussiert. Die eigentliche Abbildung des Strahls auf die Steckerenden der Glasfaserkabel erfolgt dann durch Linsen mit einer Brennweite von  $f = 4,5 \text{ mm}$ , die Bestandteil der Faser-Einkoppelungen FE<sub>1</sub> bis FE<sub>3</sub> sind.

---

<sup>1</sup>Angled Physical Contact

<sup>2</sup>GRaded INdex



**Abbildung 2.3:** Aufbau der Pumpstrahlpräparation. L bezeichnet Linsen, OD steht für optische Diode, S steht für Spiegel, ST für Strahlteiler, FR für Fresnel-Rhomben, FE für Fasereinkoppelungen und PK für Polarisations-Kontroller.

Die Glasfaser FS-SN-4224 ist nicht polarisationserhaltend. Um die nötige lineare Polarisation beizubehalten, werden die einzelnen Glasfasern in die Polarisationskontroller PK<sub>1</sub> bis PK<sub>3</sub> eingespannt, in denen der Effekt der Spannungsdoppelbrechung in dem Fasermaterial als Einstellmöglichkeit ausgenutzt wird.

Die eigentliche Ausrichtung und Abbildung der aus den Faserauskoppelungen FA<sub>1</sub> bis FA<sub>3</sub> austretenden Pumpstrahlen auf den Laserresonator ist in Abbildung 2.4 gezeigt. Die in der Abbildung gewählte Numerierung der Pumpstrahlen wird im folgenden auch für die dazugehörigen Laser beibehalten. Bei Kamerabildern ergibt sich dann die räumliche Zuordnung Laser 1 links oben, Laser 2 rechts oben, Laser 3 Mitte unten. Bei Zweilaser-Experimenten werden die Laser 1 und 2 verwendet.

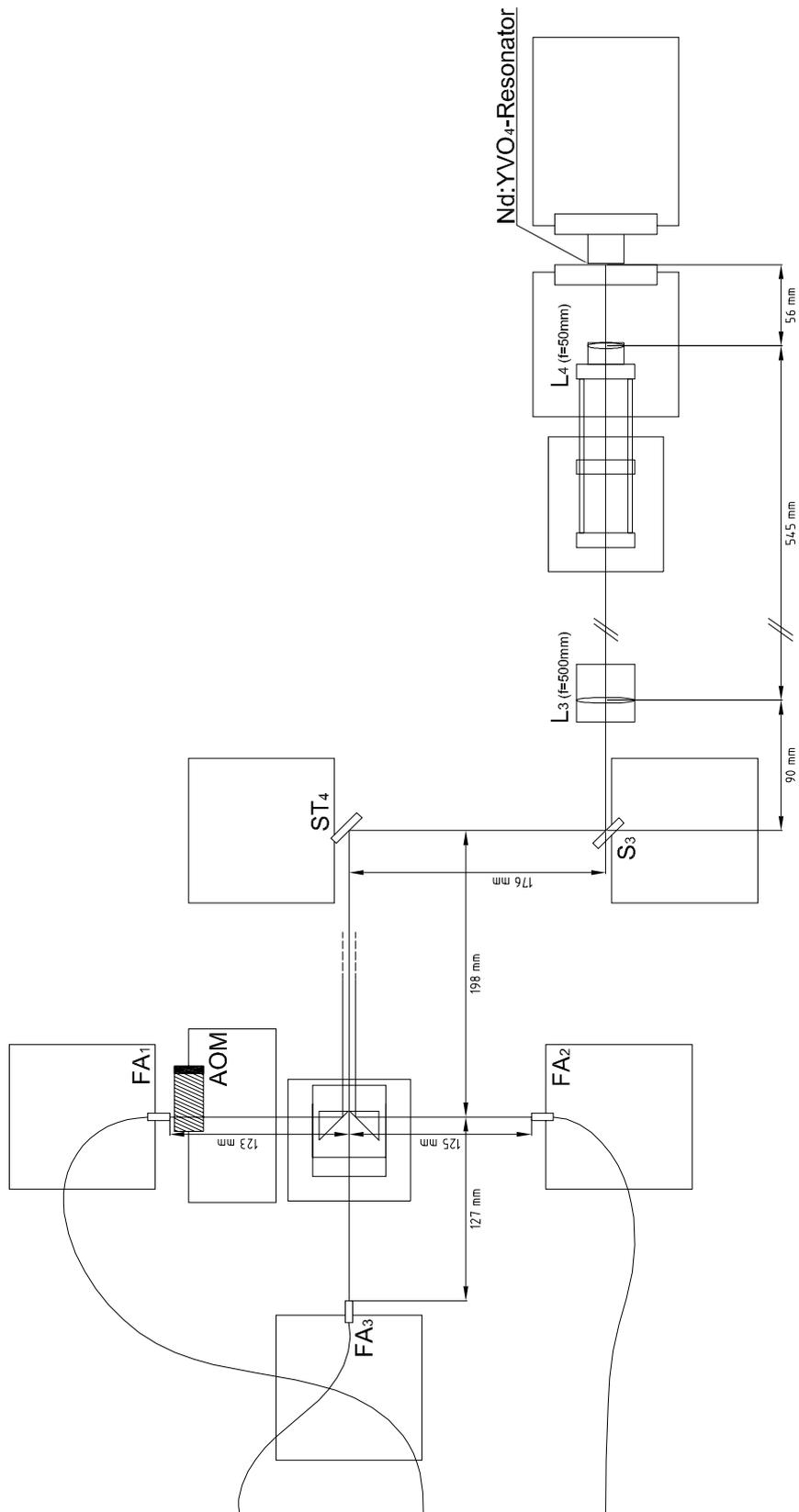
Die Ausrichtung der Pumpstrahlen wird durch horizontales und vertikales Verkippen der Faserauskoppelungen FA<sub>1-3</sub> bewerkstelligt. Aufgrund der Größe der Kollimationslinsen der Glasfasern und der gewünschten Größe der Laserabstände und Pumpstrahlradien ist eine direkte parallele Ausrichtung und Positionierung aller drei Fasern nicht ohne weiteres möglich. Deshalb werden die Pumpstrahlen für die Laser 1 und 2 über Umlenkprismen in die Richtung des dritten Strahls, der durch einen Lücke zwischen des Prismen geht, gelenkt. Um eine entsprechende Ausrichtung der Strahlen 1 und 2 gegenüber 3 in der transversalen Ebenen zu ermöglichen, sind die Auskoppelungen FA<sub>1</sub> vertikal und FA<sub>2</sub> horizontal verschiebbar. Die Auskoppelung FA<sub>3</sub> besitzt wiederum eine vertikale Translationmöglichkeit. Durch Verschieben der Umlenkprismen in Richtung des Strahls 3 läßt sich der Abstand zwischen den Strahlen 1 und 2 verändern.

Die Abbildung der Pumpstrahlen auf den Laserkristall geschieht durch eine Teleskopanordnung der Linsen L<sub>3</sub> und L<sub>4</sub>, die hinter einem Umlenkspiegelpaar bestehend aus den Spiegeln ST<sub>4</sub> und S<sub>3</sub> aufgebaut sind. Das Teleskop besitzt ein Abbildungsverhältnis von 10:1. Die resultierenden Pumpstrahlradien im Laserkristall betragen  $w_p \approx 30 \mu\text{m}$ . Die transversalen Abstände zwischen den Pumpstrahlen, die sich realisieren lassen, liegen in einem Bereich von  $d = 300 - 700 \mu\text{m}$ .

Hinter der Auskoppereinheit FA<sub>1</sub> befindet sich ein akusto-optischer Modulator (AOM) des Typs OD-8813 der Firma NEC, mit dem der Pumpstrahl 1 zeitlich geschaltet werden kann. Die maximale Schwächung der Intensität beträgt  $A = 60\%$  mit einer minimalen Schaltzeit von  $\tau_s = 70 \text{ ns}$ . Bei nicht zu hohen relativen Pumpleistungen reicht dies, um den Laser 1 effektiv aus- bzw. einzuschalten. Somit ist hier eine Möglichkeit gegeben, transiente Dynamik des Systems gekoppelter Laser zu untersuchen.

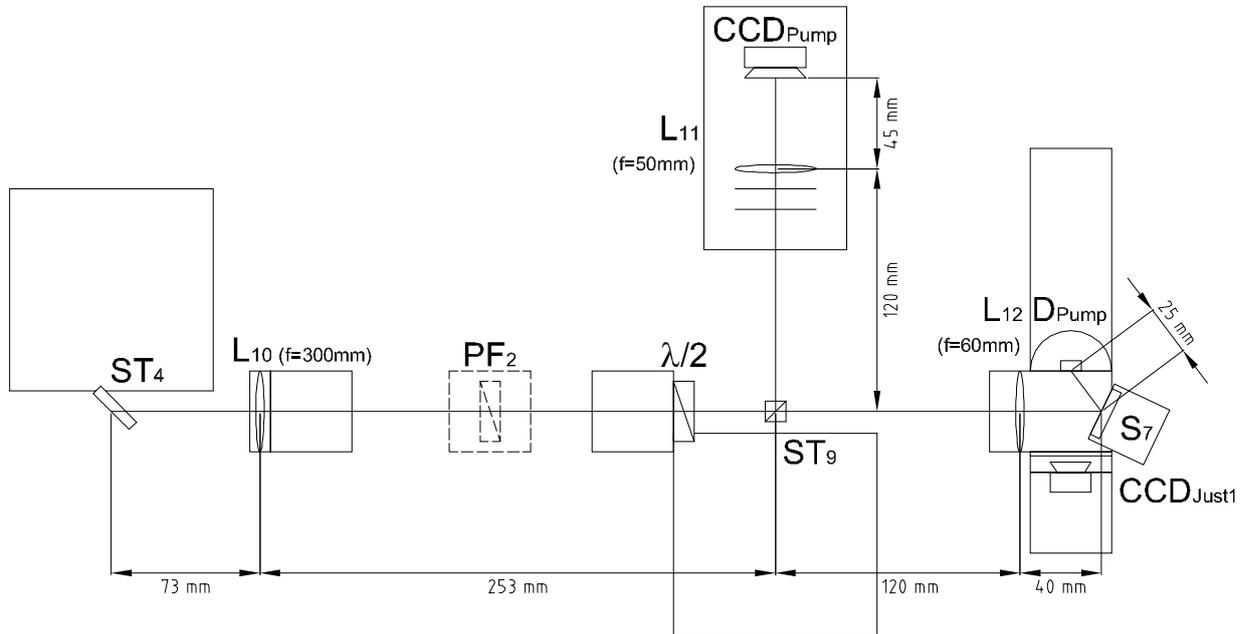
## 2.1.2 Pumpstrahlkontrolle

Um die Voraussetzung der Präparation möglichst gleicher Laser in einer bekannten, gut reproduzierbaren räumlichen Konfiguration zu erfüllen, ist es notwendig die Leistungen der einzelnen Pumplaser und deren räumliche Geometrie zu erfassen. Dazu wird am Strahlteiler ST<sub>4</sub> (siehe Abb. 2.4), der aus einem dielektrischen Spiegel mit der Reflektivität  $R \approx 99\%$  besteht, ein relativ kleiner der Teil der Pumpstrahlung in Transmission ausgekoppelt. Diese Auskoppelungsmethode ist allerdings polarisations- und winkelabhängig, was eine entsprechende Eichmessung für die Pumpintensitätsbestimmung nötig macht. Die Pumpstrahlen



**Abbildung 2.4:** Aufbau der Pumpstrahlrichtung. FA steht für Faserauskopplungen, L für Linsen, AOM für Akustooptischer Modulator, S steht für Spiegel, ST für Strahlteiler.

verlaufen parallel und besitzen eine um den Faktor 10 vergrößerte transversale Geometrie als am Ort des Laserkristalls. Den genauen Aufbau der Pumpstrahlkontrolle zeigt Abbildung 2.5, wobei nur ein Pumpstrahlengang eingezeichnet ist.



**Abbildung 2.5:** Schema der Pumpstrahlkontrolle. S steht für Spiegel, ST für Strahlteiler, L für Linse,  $\lambda/2$  für  $\lambda/2$ -Plättchen, CCD für CCD-Kamera, D für Photodetektor. Der gestrichelt gezeichnete Polarisator  $PF_2$  wird nur bei Justierarbeiten verwendet.

Zur Intensitätsbestimmung der einzelnen Pumpstrahlen wird eine Quadrantendiode des Typs S4349 der Firma HAMAMATSU ( $D_{\text{Pump}}$  in Abb. 2.5) verwendet. Die Gesamtdetektorfläche beträgt  $3 \times 3 \text{ mm}^2$ . Um eine von den Abständen zwischen den Pumplasern bzw. von deren Geometrie unabhängige Messung zu ermöglichen, werden die Strahlen mit einem Teleskop (Linsen  $L_{10}$  und  $L_{12}$ ) im Verhältnis 5:1 auf den Detektor abgebildet. Die CCD-Kamera  $CCD_{\text{Just1}}$  und der Spiegel  $S_7$  ermöglichen es, die Strahlen so auf den Photodetektor zu justieren, daß diese einzeln ohne Übersprechen erfaßt werden. Die verstärkten Signale werden dann parallel von einer A/D-Wandlerkarte des Typs LAB-PC-1200 der Firma NATIONAL INSTRUMENTS aufgenommen und von der Meßsoftware des zentralen Meßrechners weiterverarbeitet. Die Abtastrate beträgt 10 Hz. Eine numerische Glättung der Meßdaten mit der Grenzfrequenz  $f = 1 \text{ Hz}$  schließt sich an. Das Signal des modulierbaren Pumpstrahls 1 (s.o.) steht zusätzlich nochmals separat als Triggersignal für Untersuchungen transienter Dynamikvorgänge zur Verfügung.

Die transversale Anordnung der Pumplaser wird mit Hilfe der Kamera  $CCD_{\text{Pump}}$  (Typ DMM 8003/C der Firma IMAGINGSOURCE) aufgenommen. Dazu wird ein relativ kleiner Anteil der Strahlung nach Auskoppelung durch den Strahlteiler  $ST_9$  mit einem Teleskopaufbau (Linse  $L_{10}$  und  $L_{11}$ ) auf die vergleichsweise empfindliche Kamera abgebildet. Die

**Tabelle 2.1:** Materialeigenschaften von Nd:YVO<sub>4</sub> nach [CASIX] und [PeS95].

<b>Nd:YVO<sub>4</sub></b> (Dotierung 2 Atom-% Neodym, Kristall parallel zur a-Achse geschnitten)	
Wellenlänge der Laserübergänge	1064 nm (sowie 1342 nm)
Verbreiterung der Übergänge	homogen (bei Raumtemperatur)
Brechungsindices $n_a$ $n_c$	1,9721 (808 nm); 1,9573 (1064 nm) 2,1858 (808 nm); 2,1652 (1064 nm)
Therm.-Opt. Koeffizienten $dn_a/dT$ $dn_c/dT$	$8,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ $3,0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Wärmeleitfähigkeit $c_a$ $c_c$	0,0510 W·cm/K 0,0523 W·cm/K
Wirkungsquerschnitt $\sigma$ der stimulierten Emission bei 1064 nm	$25 \cdot 10^{-19} \text{ cm}^2$
Lebensdauer des oberen Laserniveaus $\tau_f$	50 ms
Maximaler Absorptionskoeffizient $\alpha$ (bei $\approx 808 \text{ nm}$ )	$72,4 \text{ cm}^{-1}$
Quantenkonversionskoeffizient $\eta_q$	0,79 bzw. 0,95 (nach [PeS95] u. dort enth. Ref.)
Verstärkungsbandbreite bei 1064 nm	257 GHz
Kristallverluste bei 1064 nm	$0,02 \text{ cm}^{-1}$
Polarisation der emittierten Laserstrahlung	$\pi$ -polarisiert (parallel zur c-Achse)

Bildinformation steht nach Aufnahme durch eine elektronische Meßkarte (im folgenden Fraunhoferkarte genannt) zur weiteren Verarbeitung auf einem PC zur Verfügung. Nach einer entsprechenden Eichmessung lassen sich dann Pump Laserabstände, wie auch Strahlradian bestimmen.

### 2.1.3 Lasermaterial

Neodym-dotiertes Yttrium-Orthovanadat gehört zur Klasse der optisch einachsigen Kristalle. Diese besitzen zwei bevorzugte Ausrichtungsachsen, mit denen unterschiedliche Materialgrößen verbunden sind. Die wichtigsten Materialdaten kann man der Tabelle 2.1 entnehmen. Die Kristallachsen werden hier mit den Buchstaben a und c gekennzeichnet. Der im Experiment verwendete Kristall ist parallel zur a-Achse geschnitten.

Bei der Bestrahlung des Kristalls mit Pumplicht in der beschriebenen Konstellation stark fokussierter Pumpstrahlen konnten Fluoreszenzen im grünen und orangen Spektralbereich festgestellt werden. Dieses Phänomen – das Auftreten von Strahlung, die ener-

giereicher als die Pumpstrahlung ist – wird als ‘Up-conversion’ bezeichnet. Die Intensität nimmt mit höherer Pumpleistung bzw. mit stärkerer Fokussierung der Pumpstrahlen zu. Diese Aussagen haben rein qualitativen Charakter, da die Beobachtungen visuell mit Hilfe eines Gerad-Sicht-Prismas gemacht wurden.

Als Konsequenz dieses Effekts verringert sich die Lebensdauer des oberen Laserniveaus  $\tau_f$  gegenüber dem in der Tabelle 2.1 angegebenen Literaturwert. Ein abgeschätzter Wert von  $\tau_f \approx 10 \mu\text{s}$  ist konsistent mit den beobachteten Werten anderer Größen wie z. B. für die Relaxationsfrequenz  $\nu_{\text{rel}}$ .

Aufgrund der vergleichsweise hohen Absorptions- und Quantenkonversionskoeffizienten eignet sich dieses Material sehr gut zum Aufbau von Einzelmodenlasern in Form der Microchip-Architektur. Weiterhin bewirkt die optische Anisotropie, daß die emittierte Laserstrahlung eine definierte lineare Polarisation besitzt.

Insgesamt gesehen ist Nd:YVO<sub>4</sub> dem sonst weithin eingesetzten Nd:YAG überlegen, was in den letzten Jahren zu einer stärkeren Verbreitung dieses Material führte. Insbesondere der Einsatz von laserdiodegepumpten, frequenzverdoppelten Nd:YVO<sub>4</sub>-Lasern als Ersatz für Argon-Ionen-Laser ist hier zu nennen.

### 2.1.4 Microchip-Laser-Resonator

Die Abbildung 2.6 zeigt den schematischen Aufbau des Resonators. Der Yttrium-Orthovanadat-Kristall besitzt eine Fläche von  $3 \times 3 \text{ mm}^2$  und eine Dicke von 1,2 mm. Die Einkopplfacetten dieses Microchip-Kristalls ist für die Pumpwellenlänge antireflektierend und für die Laserwellenlänge hochreflektierend beschichtet. Auf die zweite Facette ist demgegenüber nur eine Antireflexschicht für die Pumpwellenlänge aufgetragen. Der semimonolithische Aufbau des Resonators wird durch einen planen Spiegel mit einer Reflektivität von  $R = 98 \%$  komplettiert. Dieser kippbare Auskoppelspiegel hat einen Abstand von etwa 0,2 mm zu dem Laserkristall. Die Voraussetzung zum Entstehen von getrennten Resonator-kavitäten für die einzelnen Nd:YVO<sub>4</sub>-Lasern in diesem plan-planen Gesamtresonator liegt in der Ausbildung von thermischen Linsen, die durch das lokalisierte Pumpen im Kristall hervorgerufen wird.

Die emittierte Laserstrahlung der einzelnen Nd:YVO<sub>4</sub>-Lasern ist linear polarisiert. Die Pumpschwellen für den Laserbetrieb sind bei ungefähr  $P_0 = 40 \text{ mW}$ . Im Experiment wurde eine Pumpleistung von  $P = 60 \text{ mW}$  für die einzelnen Laser gewählt. Die resultierenden Strahltaillen liegen in einem Bereich von  $w_0 = 100 \mu\text{m}$  bis  $w_0 = 140 \mu\text{m}$ . Die optische Länge des Resonators beträgt  $l_{\text{Res}} \approx 2,6 \text{ mm}$ . Daraus folgt der freie Spektralbereich  $\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2l_{\text{Res}}} \approx 58 \text{ GHz}$ .

Bei dieser Konstellation besitzt die Laserrelaxationsfrequenz einen Wert von  $\nu_{\text{rel}} = 1,3 \text{ MHz}$ . Dies ist um eine Größenordnung höher als beim Experiment von Roy *et al.*

Der realisierte Aufbau ist erwartungsgemäß nicht vollkommen mechanisch stabil. Auch hier finden sich Fluktuationen in den Laserfrequenzen und damit bei dem gekoppelten Zweilasersystem in der Verstimmung. Diese sind aber relativ zu der Relaxationsfrequenz gesehen deutlich geringer als in der oben genannten Untersuchung, wie die Darstellung der experimentellen Ergebnisse in Kapitel 3 zeigen wird.

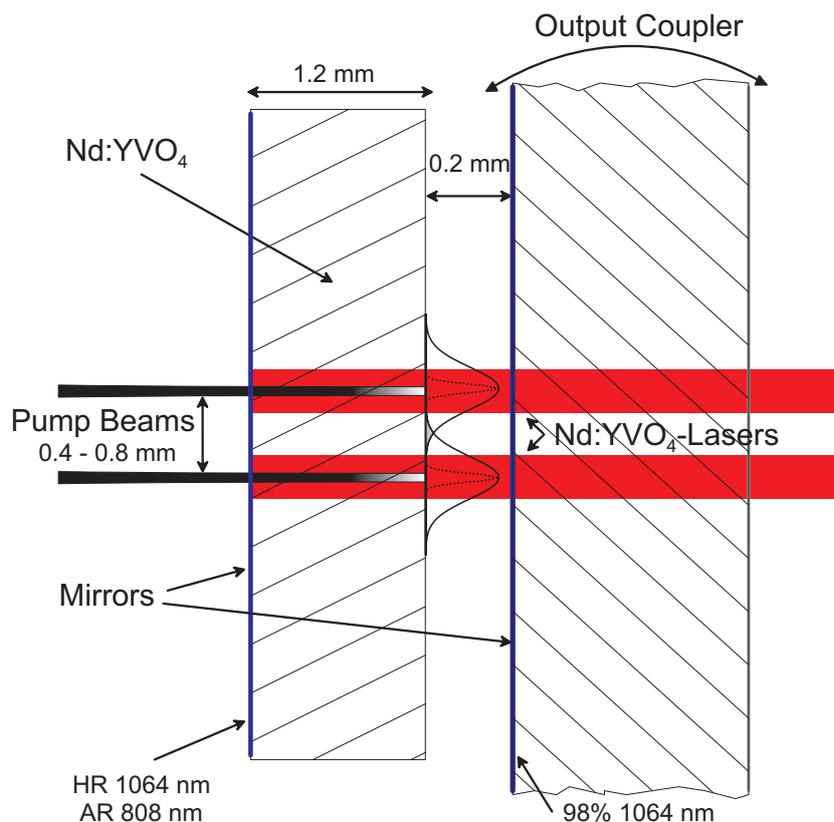


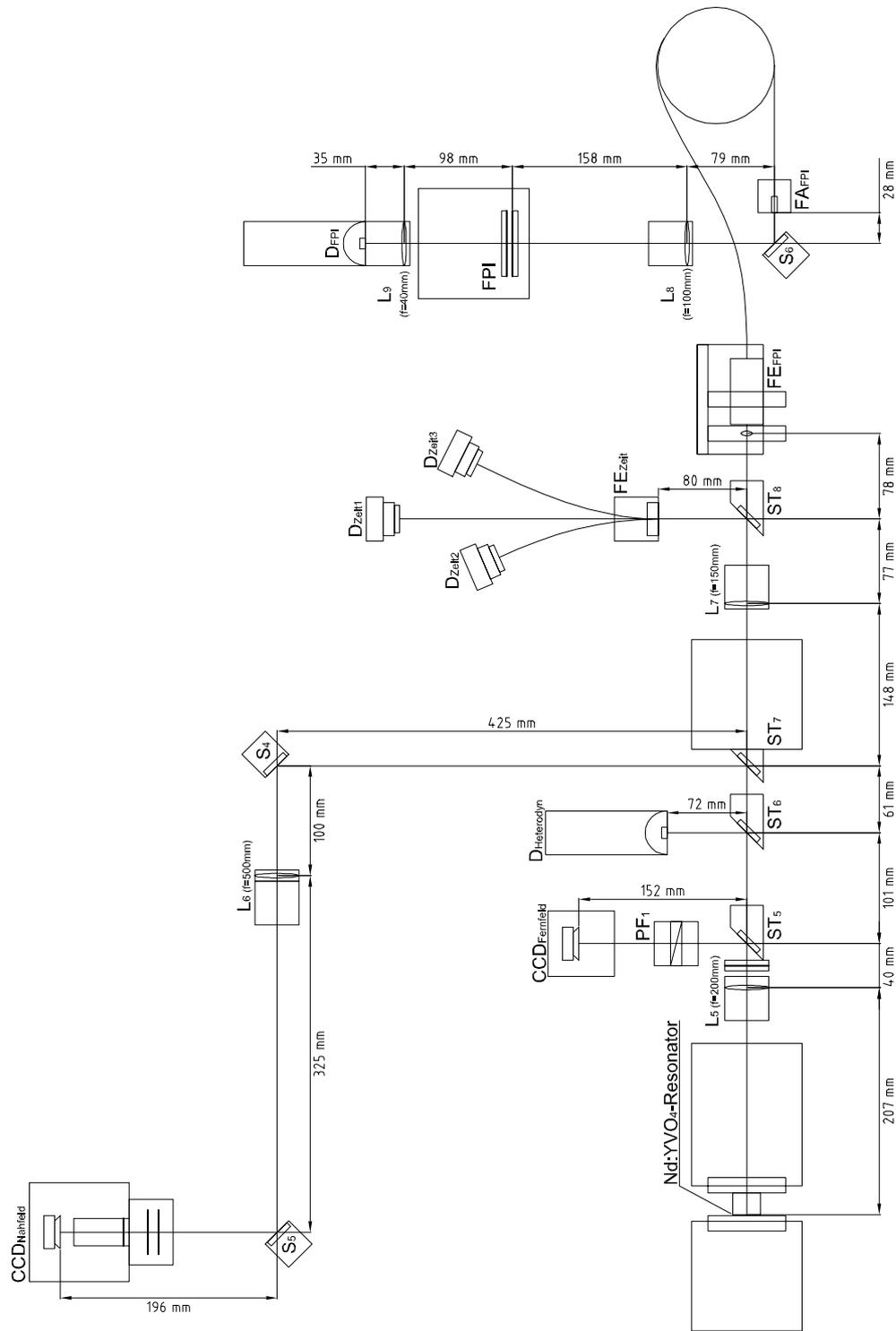
Abbildung 2.6: Schema des Resonatoraufbaus

## 2.2 Meß-Aufbau

Abbildung 2.7 zeigt den Analyseteil des experimentellen Aufbaus. Hier werden zum einen die direkten Dynamikgrößen, die Intensitätszeitreihen der Nd:YVO<sub>4</sub>-Laser, gemessen. Zum anderen wird aus der Aufnahme der ‘Fernfeld’-Verteilung auf relative optische Phasen zwischen den einzelnen Lasern geschlossen. Aus dem ‘Nahfeld’ werden die geometrischen Charakteristika der Laser, wie Strahlradien und gegenseitiger Abstand, ermittelt. Zur Kontrolle der Einmodigkeit der Laser wird das optische Spektrum aufgenommen. Ebenso von Interesse sind die Momentanfrequenzdifferenzen zwischen den Lasern, die sich im Heterodyn-Spektrum zeigen.

### 2.2.1 Laser-Intensitätszeitreihen

Zur Untersuchung der Dynamik des gekoppelten Lasersystems werden die einzelnen Zeitreihen der Laser benötigt. Aufgrund der geometrischen Verhältnisse (Strahlradien  $w \approx 120 \mu\text{m}$ , Abstände in der Größenordnung von einigen  $100 \mu\text{m}$ ) ist eine Messung der einzelnen Laser durch direkte Abbildung der Strahlen auf z. B. eine Quadrantenphotodiode nicht praktika-



**Abbildung 2.7:** Analyse-Zweig des Gesamtexperiments. L bezeichnet Linsen, S steht für Spiegel, ST für Strahlteiler, PF für Polarisator, FE für Fasereinkoppelungen, FA für Faseraus-koppelungen, FA für Faseraus-koppelungen, CCD für CCD-Kameras und FPI für Fabry-Perot-Interferometer.

bel. Stattdessen wird eine Abbildung auf drei Multimodefasern (Kerndurchmesser  $600\ \mu\text{m}$ ), die in Form eines gleichseitigen Dreiecks dicht gepackt in der Halterung  $FE_{\text{Zeit}}$  angeordnet sind, vorgenommen. Die Ausrichtung dieses Dreiecks entspricht der des gedachten Dreiecks, das die drei Laser bilden. Die Abbildung der Strahlen im Resonator auf die Glasfasern geschieht mit Hilfe des Teleskops  $L_5$  und  $L_7$  und der Umlenkung eines Teils der Strahlung durch den Strahlteiler  $ST_8$ . Die Glasfasern führen die Strahlung zu einzelnen InGaAs-Photodetektoren des Typs PDA 255 der Firma THORLABS mit einer Kleinsignalfrequenz von  $f_G = 50\ \text{MHz}$ . Die so gewählte Anordnung zur Intensitätsbestimmung erlaubt Messungen auch bei veränderten Laserabständen ohne Nachjustierung.

Die Signale der Photodetektoren werden von einem 4-Kanal-Oszilloskop (Modell LT 344L der Firma LECROY) aufgenommen. Dies besitzt pro Kanal eine Speichertiefe von  $500\ \text{Megasamples/s}$ . Die aufgenommenen Zeitreihen variieren in ihrer Länge typischerweise im Bereich von  $1\ \text{bis}\ 20\ \text{ms}$ , was eine zeitliche Auflösung von  $2\ \text{bis}\ 40\ \text{ns}$  zur Folge hat.

### 2.2.2 ‘Nahfeld’

Es ist aus mehreren Gründen notwendig, das ‘Nahfeld’ der Laser, also die Feldverteilung der Laser im Resonator, aufzunehmen. Einerseits lassen sich die Laser direkt beobachten und kontrollieren. Insbesondere in Hinblick auf höhere transversale Moden ist dies nötig (siehe Abschnitt 2.2.4). Andererseits können so die Laserradien und -abstände bestimmt werden, aus denen sich die relativen Abstände der Laser und damit ein Maß für die Kopplungsstärke ergeben.

Das Nahfeld wird durch eine Teleskopanordnung der Linsen  $L_5$  und  $L_6$  im Verhältnis 2:5 auf die CCD-Kamera  $CCD_{\text{Nahfeld}}$  abgebildet. Es wird dabei eine Kamera des Typs DMM 8003/C der Firma IMAGINGSOURCE verwendet, deren Auflösung horizontal  $6,5\ \mu\text{m}$  und vertikal  $6,25\ \mu\text{m}$  beträgt. Die Bildinformation steht nach Aufnahme durch eine Framegrabberkarte der Meßsoftware zur Verfügung.

Die Radien und Abstände der Laser werden von einer Video-Auswertungsroutine bestimmt, die eine zweidimensionale Gaußverteilung an das Kamerabild der Laser anpaßt und daraus die gewünschten Parameter errechnet (siehe auch [Jan99]). Dabei wird auch der normierte Abstand  $\tilde{d}_{ij}$  zwischen den Lasern paarweise bestimmt. Der normierte Abstand ist der auf einen mittleren Strahlradius bezogene Abstand der Laser; der mittlere Strahlradius  $\overline{(w_l)}_{ij}$  ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der Strahlradien der beiden Laser:

$$\tilde{d}_{ij} := \frac{d_{ij}}{\overline{(w_l)}_{ij}} \quad \text{mit} \quad \overline{(w_l)}_{ij} := \frac{(w_l)_i + (w_l)_j}{2} \quad (2.1)$$

Weiterhin berechnet die Video-Auswertungsroutine die (zeitlich gemittelten) Leistungen der einzelnen Laser durch Integration der Bildhelligkeit. Die Integrationsgrenzen werden anhand der angepaßten Gaußverteilungen automatisch gewählt.

### 2.2.3 ‘Fernfeld’

Als ‘Fernfeld’ bezeichnet man die Feldverteilung als Funktion des Winkels nach unendlicher Propagation. Da eine unendliche Propagationsstrecke nicht realisierbar ist, werden die Laser in der Brennebene der Linse  $L_5$  mit der CCD-Kamera  $CCD_{\text{Fernfeld}}$  beobachtet. Man erhält als Kamerabild das zeitlich gemittelte Betragsquadrat der optischen Fouriertransformierten des Nahfeldes. Aus der so gewonnenen Verteilung im Ortsraum kann direkt auf die Winkelverteilung geschlossen werden, weshalb sie im folgenden als ‘Bild des Fernfeldes’ oder auch kurz als Fernfeld bezeichnet wird.

Die zeitliche Mittelung ist durch die Aufnahme des Fernfeldes mit einer CCD-Kamera bedingt. Diese Kamera ist vom gleichen Typ wie die Nahfeldkamera. Der CCD-Chip integriert die einfallende Intensität über die Verschlusszeit von 20 ms und gibt die entstandene Verteilung dann als Halbbild aus.

### 2.2.4 Optisches Spektrum

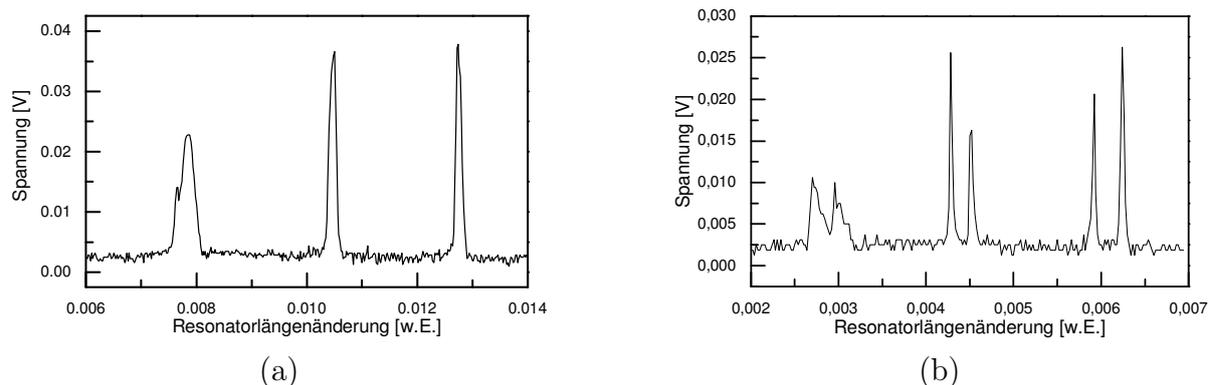
In dem Nd:YVO<sub>4</sub>-Laserresonator können unter Umständen mehrere longitudinale Moden anschwingen, vom Ansatz der ‘Einfachheit’ für das Experiment wird hingegen eine einzelne Mode gefordert. Um die longitudinale Modenstruktur überwachen zu können, wird das optische Spektrum der Laser mit einem Scanning-Fabry-Perot-Interferometer (FPI) aufgenommen.

Der longitudinale Modenabstand der Nd:YVO<sub>4</sub>-Laser beträgt etwa 58 GHz. Um die Modenstruktur auflösen zu können, wird ein Fabry-Perot-Interferometer mit ebenen Spiegeln verwendet, das sehr kleine Spiegelabstände erlaubt. Der freie Spektralbereich des FPI beträgt  $\nu_{FSR} \approx 230$  GHz. Um verschiedene Wellenlängen detektieren zu können, wird der Spiegelabstand durch das Verschieben eines FPI-Spiegels variiert. Die Verschiebung erfolgt durch ein ringförmiges Piezostellelement, das mit einer Dreiecksspannung angesteuert wird.

Um das optische Spektrum aller drei Laser mit dem FPI so aufnehmen zu können, daß Laser mit identischen Frequenzen auch gleichzeitig resonant sind, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Die Strahlen müssen parallel in das FPI gelangen, damit sie dort gleiche Propagationslängen haben.
- Die Strahltaillen müssen gleich groß sein und longitudinal an der gleichen Stelle liegen, um eine Verschiebung der Gouy-Phase zu vermeiden.
- Die Strahlen müssen kollinear sein. Da die FPI-Spiegel nicht beliebig plan sind (Oberflächenrauigkeiten von bestenfalls  $\lambda/50$ ), erhält man bei verschiedenen transversalen Positionen unterschiedliche Resonanzlängen.

Mit einem Freistrahlaufbau gelingt es experimentell praktisch kaum, die drei räumlich getrennten Strahlen so zu transformieren, daß diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden. Statt dessen werden die drei Strahlen bei  $FE_{\text{FPI}}$  in eine Multi-Mode-Faser HEWLETT



**Abbildung 2.8:** FPI-Spektrum von drei Lasern. (a) Laser laufen auf einer longitudinalen Mode, (b) Mindestens ein Laser läuft auf mehreren longitudinalen Moden.

PACKARD HFBR AWS 005 eingekoppelt. Hierbei werden viele Moden angeregt, allerdings kann man annehmen, daß gleichartige Moden etwa gleich stark von allen drei Lasern angeregt werden. Man erhält so eine komplizierte, aber für alle Laser gleiche Modenverteilung. Dies erfüllt die obige Forderung. Die 5 m lange Faser ist mehrfach aufgewickelt, um den Effekt der Modendurchmischung noch zu verstärken.

Die Einkoppellinse sowie die Faserhalterung sind in x- und y-Richtung justierbar, die Faser kann außerdem noch in z-Richtung verschoben werden. Aufgrund des großen Kern-durchmessers der Faser (100  $\mu\text{m}$ ) ist die Justierung problemlos zu bewerkstelligen und es gelangt genügend Leistung zum Detektor. Das unterschiedliche Resonanzverhalten der vielen verschiedenen Moden im FPI bedingt allerdings eine Verschlechterung der spektralen Auflösung des Gesamtsystems aus Faser und FPI.

Die Linse  $L_8$  kollimiert den divergenten Strahl aus der Faser, so daß ein paralleles Bündel in das FPI gelangt. Die transmittierten Moden werden auf die Detektorfläche fokussiert und wieder überlagert. Man erreicht eine effektive Finesse des FPI von  $\tilde{F} \approx 20$ .

Die Darstellung des Detektorsignals erfolgt mit einem Oszilloskop vom Typ HEWLETT PACKARD 54603B. Ein gemessenes FPI-Spektrum mit drei Lasern, die auf einer longitudinalen Mode laufen, zeigt Abbildung 2.8(a). Im Vergleich dazu ist in Abbildung 2.8(b) ein FPI-Spektrum mit zwei longitudinalen Moden dargestellt. Man erkennt in beiden Spektren drei freie Spektralbereiche des FPI, die Laser selbst sind nicht zu unterscheiden. Die unterschiedliche Höhe der Transmissions-Peaks läßt sich dadurch erklären, daß sich das Piezostellelement nicht gleichmäßig ausdehnt und somit einen FPI-Spiegel beim Verschieben leicht verkippt und auf diese Weise die Finesse verschlechtert.

### 2.2.5 Frequenzdifferenzen

Dynamische Phänomene treten dann auf, wenn die Frequenzdifferenz in den Bereich der Relaxationsoszillationsfrequenzen gelangen (s. Abschnitt 4.3.1). Durch die Messung des Heterodyn-Spektrums können die Frequenzdifferenzen der Laser beobachtet werden, wenn

noch keine Dynamik-Effekte auftreten. Außerdem können die Relaxationsoszillationsfrequenzen der Laser bestimmt werden.

Der Heterodyn-Photodetektor  $D_{\text{Heterodyn}}$  befindet sich im Fokus der Linse  $L_5$ , und mißt die Intensität der drei überlagerten Strahlen. Das Ausgangssignal enthält somit einen Gleichanteil  $|E_i|^2$  jedes Lasers sowie Interferenzterme, die mit den Frequenzdifferenz variieren. Das Ausgangssignal wird mit einem Spektrum-Analysator (Typ TR4131 der Firma ADVANTEST) verarbeitet, der Frequenzen bis zu 4 GHz erfassen kann. Dies erlaubt ein schnelles und gezieltes Einstellen der Verstimmung.

Mit dem Einsetzen der Laserdynamik werden allerdings die Frequenzdifferenzen von den Frequenzanteilen der Intensitätsdynamik völlig verdeckt. Zudem unterliegen die Verstimmungen relativ schnellen Fluktuationen, so daß die Messung des Heterodyn-Spektrums in dieser Hinsicht in erster Linie als Justierhilfe dient. Um Aussagen über bestimmte Szenarien der Dynamik treffen zu können, werden aus den Zeitreihen zeitaufgelöste Frequenzspektren berechnet. Dies wird in Abschnitt 2.3.1 näher beschrieben.

## 2.3 Analyse-Methoden

In diesem Teil sollen Verfahren erläutert werden, die weiterführende Informationen aus den oben dargestellten Meßwerten bestimmen. Dies ist wesentliches das Extrahieren der relativen Verstimmungen der Laser aus deren Intensitätszeitreihen mit Hilfe des Verfahrens der JOINT TIME-FREQUENCY ANALYSE.

### 2.3.1 JTFA: Joint Time-Frequency-Analysis

Es ist notwendig, die zeitliche Entwicklung der Verstimmungsfrequenzen verfolgen zu können, um sich ergebende Dynamik-Szenarien sinnvoll interpretieren zu können. Wie schon in Abschnitt 2.2.5 erwähnt, sind die Frequenzdifferenzen der Laser im gemeinsamen Leistungsspektrum enthalten. Im Falle nur schwach wechselwirkender Laser sind diese identisch mit den Verstimmungsfrequenzen  $\omega_{ij}$ . Durch die Kopplung der Laser wirken sich die Verstimmungen als kleinamplitudige Störungen auch auf die einzelnen Laser aus. Dadurch sind entsprechende Frequenzanteile auch im Spektrum jedes einzelnen Lasers vorhanden.

Außerdem kommen innerhalb einer Zeitreihe mit Dynamik in der Regel viele verschiedene Oszillationsformen vor, die jeweils charakteristische Spektren besitzen.

Aus diesen Gründen werden mit Hilfe eines als JOINT TIME-FREQUENCY ANALYSIS (JTFA) bekannten Verfahrens zeitaufgelöste Leistungsspektren erstellt. Ein häufig verwendeter Algorithmus, der im folgenden näher vorgestellt werden soll, ist die SHORT TIME FOURIER TRANSFORMATION (STFT) [NICo99]. Dabei werden die Zeitreihen in mehrere überlappende Intervalle unterteilt. Von jedem Intervall wird dann mittels Fouriertransformation das Leistungsspektrum erstellt.

### Funktionsweise

Die maximal drei Intensitätszeitreihen werden im ersten Schritt einzeln verarbeitet. Von diesen wird zunächst der jeweilige Durchschnittswert subtrahiert, um im Spektrum den Gleichanteil zu eliminieren und nur die Frequenzen zu erhalten, die durch Intensitätssoszillationen bedingt sind.

Die Zeitreihen werden in (typischerweise 500) überlappende Intervalle aufgeteilt. Über die Länge der Intervalle läßt sich die Frequenzauflösung wählen, wobei eine höhere Frequenzauflösung immer mit einer Verringerung der Zeitauflösung verbunden ist und umgekehrt. In den meisten Fällen werden Intervalle von je 2048 Meßpunkten verwendet. Mit einer Zeitauflösung der Zeitreihen von 20 ns führt dies zu einer Frequenzauflösung in der JTFA von ungefähr 24,4 kHz, wobei Frequenzen bis maximal 25 MHz auflösbar sind. Bei einer typischen Zeitreihe mit 10 ms Länge und 20 ns Zeitauflösung (500.000 Punkte) ergibt eine Aufteilung in 500 Intervalle ein zeitliches Raster mit einer Schrittweite von 20  $\mu$ s; die Zeitauflösung des Verfahrens liegt jedoch für eine Intervallbreite von 2048 Punkten bei 40,96  $\mu$ s.

Von jedem einzelnen Intervall wird ein Leistungsspektrum erstellt, d. h. der Abschnitt wird fouriertransformiert, mit dem eigenen Komplex-Konjugierten multipliziert und anschließend normiert. Zur Vermeidung bzw. Verminderung so genannter 'Leakage-Effekte' können verschiedene Fensterfunktionen auf das Zeitsignal angewendet werden. Gut bewährt hat sich ein Hamming-Fenster, es können aber auch Fenster aus der Blackman-Gruppe und andere Fensterfunktionen (Hanning-, Rechteck-, Dreieck-, Flat-Top-, Cosinus-Fenster) gewählt werden.

### Farbkodierung

Um die JTFA-Spektren der einzelnen Laser so darstellen zu können, daß Gemeinsamkeiten und Unterschiede deutlich sichtbar sind, wird eine Farbkodierung für die Spektren gewählt. Dabei werden die Spektren in verschiedenen Sättigungsstufen je einer Grundfarbe dargestellt; Mischfarben zeigen das gleichzeitige Auftreten einer Frequenzkomponente in mehreren Zeitreihen an.

Für die Farbkodierung von maximal drei Spektren bieten sich vor allem das RGB- sowie das CMY-Modell an. Die RGB-Kodierung beruht auf der additiven Mischung der Grundfarben Rot, Grün und Blau. Dabei wird das Minimum schwarz dargestellt, das Maximum entspricht der maximalen Sättigung in der jeweiligen Grundfarbe. Diese Kodierung ist für die Bildschirmdarstellung optimal. Bei der CMY-Kodierung, die auf der subtraktiven Mischung der Grundfarben Cyan, Magenta und Gelb (Yellow) beruht, wird das Minimum weiß dargestellt. Das Maximum entspricht ebenfalls der maximalen Sättigung in der jeweiligen Grundfarbe. Diese Kodierung ist für eine Druckausgabe besonders geeignet und wird bei den Darstellungen in dieser Arbeit verwendet.

In beiden Fällen empfiehlt sich eine logarithmische Darstellung. Für die Sättigung  $S_i$

**Tabelle 2.2:** Zuordnung der Frequenzspektren der einzelnen Lasern zu den Farben in der JTFA

Farbe	Laser
gelb	1
magenta	2
cyan	3
rot	1 und 2
grün	1 und 3
blau	2 und 3
schwarz	alle

der Fourierkomponente  $A_i$  des Spektrums der  $i$ -ten Zeitreihe gilt dann:

$$S_i = 10 \cdot \log \frac{A_i}{A_{max}} \text{ dB}$$

wobei  $A_{max}$  das globale Maximum aller Spektren ist.

Diese Sättigungswerte werden in sechs Klassen zu je 10 dB eingeteilt. Die größte Sättigung ist im Bereich von  $0 \text{ dB} < S_i < -10 \text{ dB}$ , für  $S_i < -50 \text{ dB}$  gibt es keine Sättigung mehr. Diese Klasseneinteilung ist nötig, weil bei den verwendeten Anzeigeroutinen maximal 256 Farben benutzt werden können. Bei je sechs Sättigungsstufen der drei Grundfarben, erhält man eine Farbtabelle mit  $6^3 = 216$  Farbwerten. Die Sättigung  $S_1$  wird wegen der Zuordnung zur Farbtabelle mit 1 multipliziert,  $S_2$  mit 6 und die  $S_3$  mit 36. Den Zeitreihen werden die Grundfarben der subtraktiven Farbmischung gelb, magenta und cyan zugeordnet (s. Tabelle 2.2). Aus der Summe aller Sättigungen der Farben ( $S = S_1 + S_2 + S_3$ ) ergeben sich die Mischfarben der Farbtabelle.

### Interpretation

Die Vorteile der JTFA werden in der Abbildung 2.9 deutlich. In der oberen Bildhälfte ist eine Zeitreihe von 2 ms Länge dargestellt, in der unteren Hälfte ist die dazugehörige JTFA gezeigt. In der Zeitreihe erkennt man mehrere Bereiche mit unterschiedlicher Dynamik. In der JTFA erhält man für die unterschiedlichen Dynamikbereiche der Zeitreihe sehr detaillierte Spektren.

Die Bereiche ohne nennenswerte Dynamik werden von wenigen, klar definierten Frequenzen dominiert. Diese sind für je zwei Laser gleich und variieren relativ langsam. Hierbei handelt es sich um die Frequenzdifferenzen (bzw. Verstimmungen) zwischen den Lasern. Im Gegensatz zum Heterodyn-Spektrum lassen sich in der JTFA die Verstimmungen den Laserpaaren genau zuordnen und zeitlich verfolgen.

In den Bereichen mit ausgeprägter Intensitätsdynamik enthalten die Spektren eine ganze Reihe von Frequenzen. In den meisten Fällen erkennt man recht deutlich eine Grundfrequenz und deren harmonische Vielfache. Man erkennt weiterhin, daß Bereiche mit stärkeren

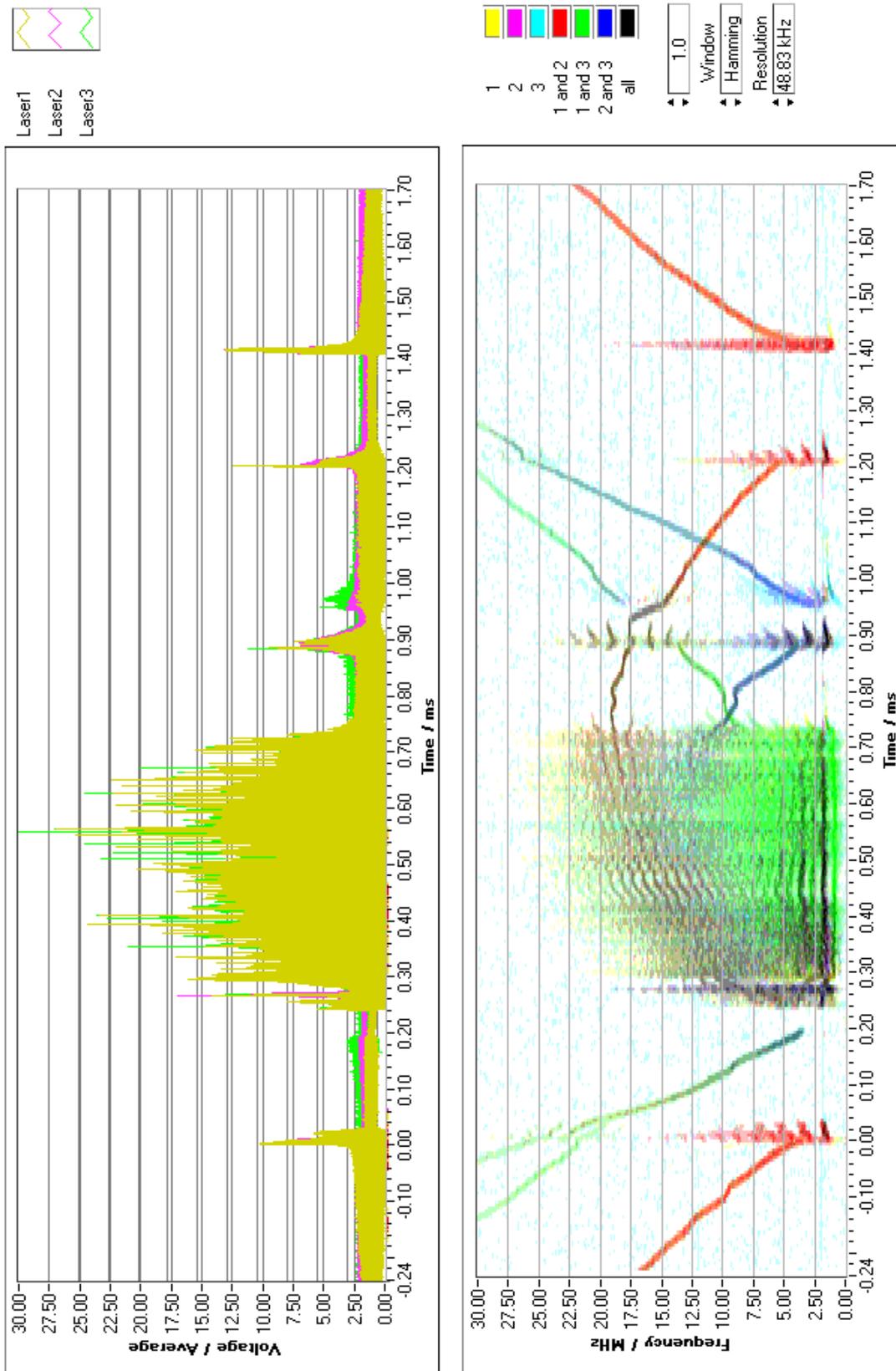


Abbildung 2.9: Eine Zeitreihe (oben), und die dazugehörige JTFA (unten)

Oszillationen stets dann beginnen, wenn eine Verstimmungsfrequenz kleiner als etwa 5 MHz wird. Das zu der entsprechenden Verstimmung gehörige Laserpaar ist dann jeweils an den Oszillationen beteiligt.

Ferner sind Bereiche zu sehen, in denen eine Frequenzdifferenz plötzlich ganz verschwindet (z. B. bei  $t = 0,22$  ms und zwischen  $t = 1,26$  ms und  $t = 1,40$  ms). Die entsprechenden Zeitreihen sind in diesen Intervallen quasi stationär, die Laser sind optisch phasensynchronisiert.

# Kapitel 3

## Experimentelle Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse zur Intensitätsdynamik des gekoppelten Lasersystems in Abhängigkeit von den beiden Systemparametern Verstimmung  $\omega$  und dem (normierten) Abstand  $d$  (und somit der Kopplungsstärke) dargestellt werden. Wie schon im Kapitel 2 bemerkt, ist die Verstimmung nicht direkt meßbar und unterliegt Fluktuationen, so daß eine systematische Untersuchung des gesamten Parameterraums, der von den beiden Streißgrößen aufgespannt wird, nicht möglich ist. Es lassen sich für die Verstimmungswerte im Dynamikbereich aber in vielen Fällen Obergrenzen bzw. interpolierte Werte angeben, die sich aus der JTFA entsprechender Zeitspuren ergeben. Es ist weiterhin zu bemerken, daß das Vorzeichen für die Verstimmung nicht ermittelt werden kann, so daß bei Angaben zu den Verstimmungswerten immer der Betrag der Größe gemeint ist.

In einem ersten Teil dieses Kapitels werden verschiedene generische Oszillationstypen vorgestellt. Es schließt sich eine statistische Untersuchung einer relativ großen Anzahl von Intensitätszeitspuren an, um trotz Fluktuationen in der Verstimmung Aussagen über das Dynamikverhalten machen zu können. In einem dritten Abschnitt sollen typische Intensitätsdynamikszenerarien bei unterschiedlichen normierten Abständen betrachtet werden, die sich bei einer Modulation der Verstimmung ergeben. Aus den dabei beobachteten Bereichen von Phasensynchronisation lassen sich Informationen über die Kopplungsstärke im Zusammenhang mit einer möglichen Modellierung des Zwei-Lasersystems gewinnen, die im Kapitel 4 vorgestellt wird.

In dieser Arbeit steht die Untersuchung des Zwei-Lasersystems im Mittelpunkt. Es wurden aber auch Konfigurationen mit drei Lasern untersucht und entsprechende Ergebnisse publiziert [MFL00],[FoKB02]. Diese Experimente werden in einem abschließenden Abschnitt des Kapitels kurz referiert.

Die im weiteren gezeigten Ausschnitte aus Zeitreihen sind mit folgenden stationären Laserparametern gemessen worden: beide Laser werden jeweils mit einer Leistung von ungefähr  $P_{in} = 60$  mW gepumpt, was einer relativen Pumpleistung von  $P_{in}/P_0 \approx 1,5$  entspricht ( $P_0$  Pumpschwelle). Der maximale Unterschied zwischen den beiden Eingangsleistungen beträgt weniger als  $\Delta P_{in} = 5$  mW. Die Relaxationsschwingungsfrequenz hat einen Wert von  $\nu_{rel} \approx 1,3$  MHz. Die so erzeugten Laserstrahlen besitzen eine fast kreisrunde gaußförmige Intensitätsverteilung mit einem Strahlradius von  $w_0 \approx 120$   $\mu$ m. Die Abweichungen von der

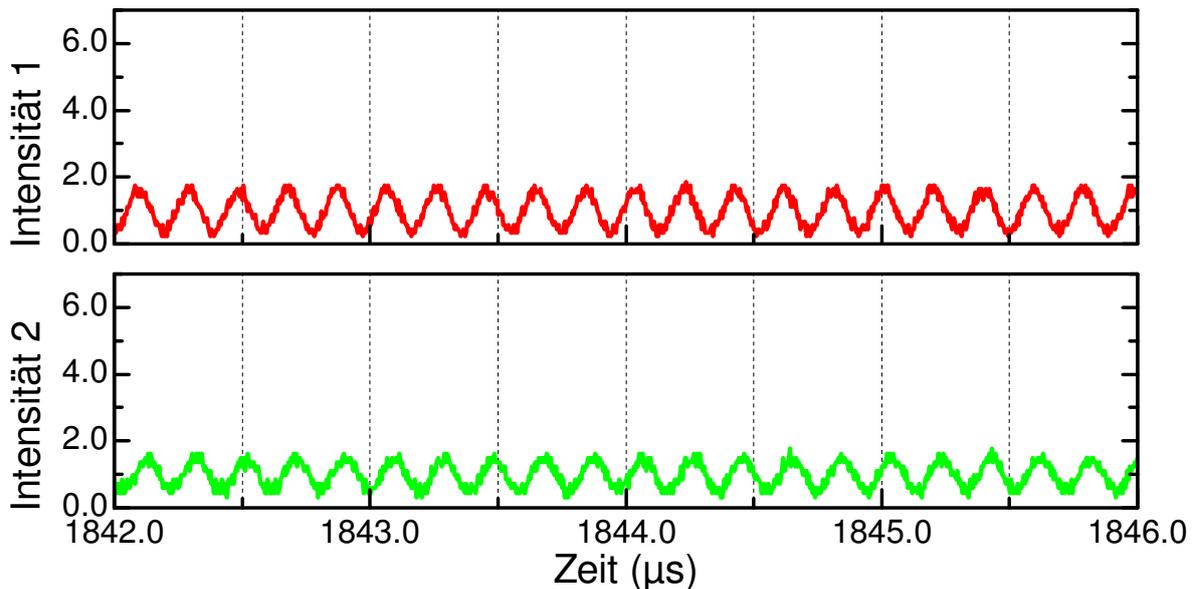
Radialsymmetrie betragen weniger als  $\Delta w_0 \approx 12 \mu\text{m}$  für den Einzelstrahl. Der Unterschied zwischen den (gemittelten) Radien für die beiden Einzelstrahlen ist von der selben Größe.

### 3.1 Oszillationstypen

Im folgenden werden Beispiele für typischen Oszillationsformen im Dynamikbereich für das Zwei-Laser-System gezeigt. Aufgrund der oben genannten Schwierigkeiten, den Wert der Verstimmung zu bestimmen, wird nur der normierte Abstand zwischen den Lasern als einziger Systemparameter angegeben. Die Intensitäten der beiden Laser in den Zeitreihen sind auf die jeweilige stationäre Intensität im Bereich ohne Dynamik normiert.

#### 3.1.1 Synchrone Oszillationen und Pulse

Abbildung 3.1 zeigt kleinamplitudige Oszillationen, die synchron in beiden Lasern vorhanden sind. Die Oszillationsfrequenz ist in diesem Bereich der relativ schwachen Dynamik (vgl. Relaxationsfrequenz  $\nu_{rel} \approx 1,3 \text{ MHz}$ ) identisch mit der Verstimmung. Diese symmetrischen Oszillationen (SO) bilden sich immer aus, für den Fall, daß die Verstimmung von größeren Frequenzen zu kleineren verringert wird und in den Dynamikbereich eintritt.



**Abbildung 3.1:** Kleinamplitudige, harmonische Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 4,6$  und einer Verstimmung  $\omega \approx 5 \text{ MHz}$ . Der Wert für die Verstimmung ließ sich in diesem Fall der relativ schwachen Dynamik aus der JTFA gewinnen.

Bei stärker werdender Wechselwirkung (bezogen auf den Verstimmungsparameter) können sich die Oszillationen immer mehr aufteilen. Es entstehen synchrone Pulszüge mit

relativ kurzen Pulsen in beiden Lasern, wie in Abbildung 3.2 zu sehen ist. Die Dynamik in den Spitzenwerten der Pulse läßt sich durch nichtdeterministische Fluktuationen in der Verstimmung erklären.

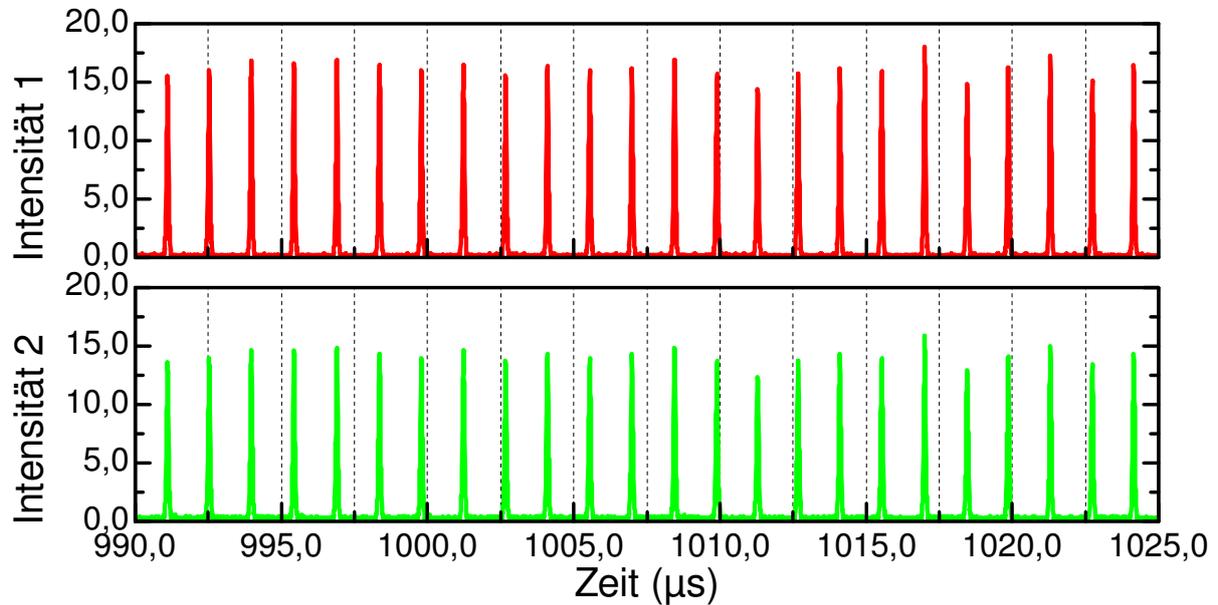
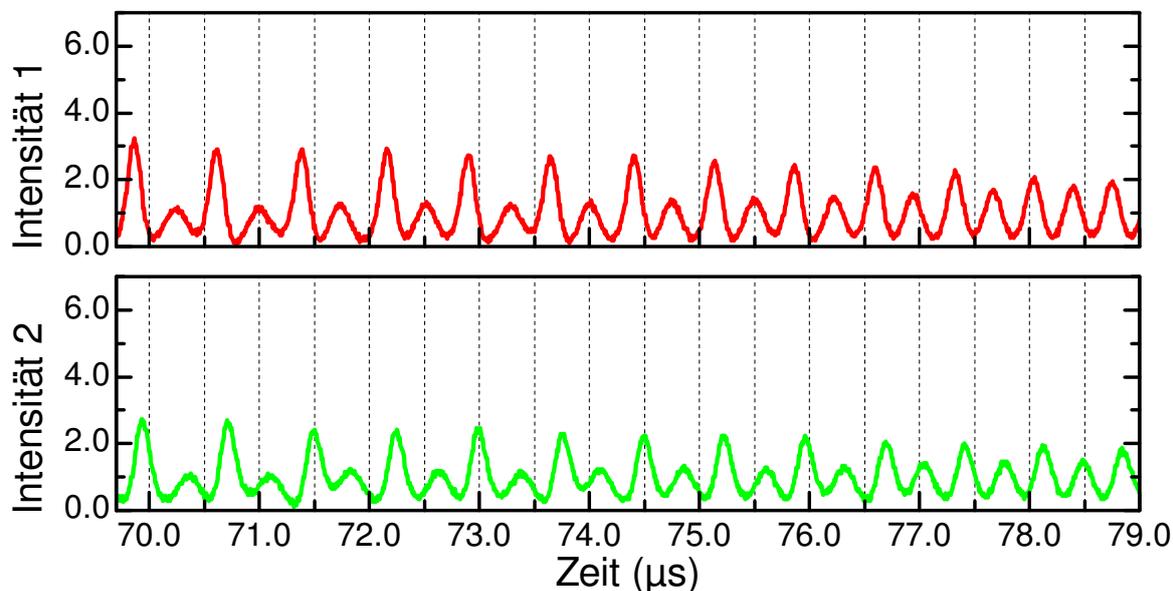


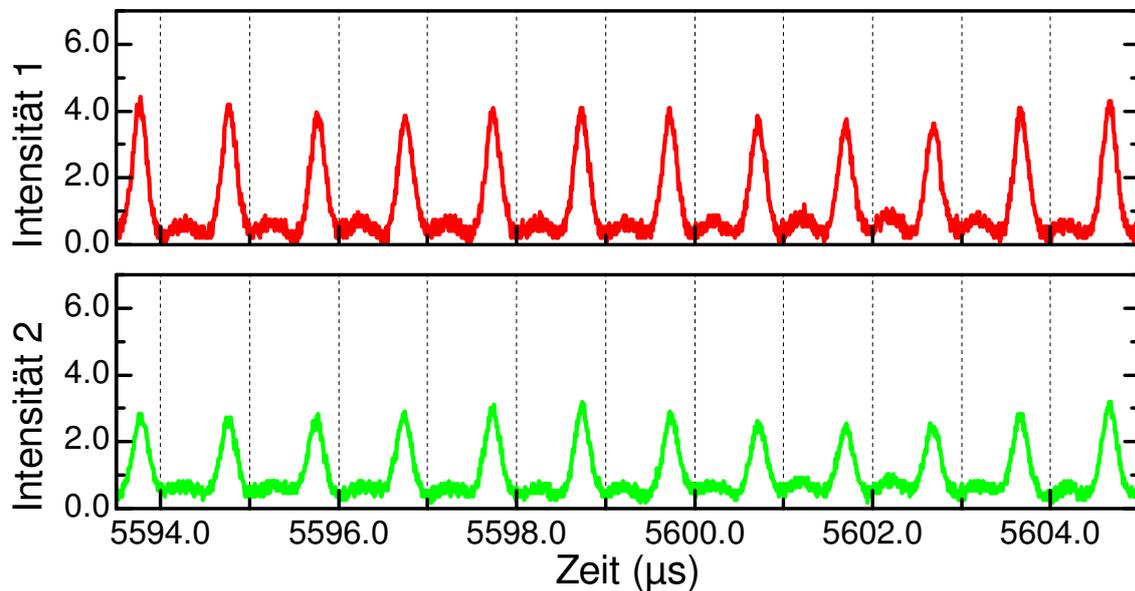
Abbildung 3.2: Synchroner Pulse bei einem normierten Abstand von  $d \approx 4,6$ .

Relativ häufig ist eine Periodenverdopplung bei symmetrischen Oszillationen zu beobachten. Abbildung 3.3 zeigt die zeitliche Entwicklung der Amplituden der Oszillationen aufgrund einer Drift in der Verstimmung. In Abbildung 3.4 ist ein stark ausgeprägtes Beispiel für die Periodenverdopplung zu beobachten.

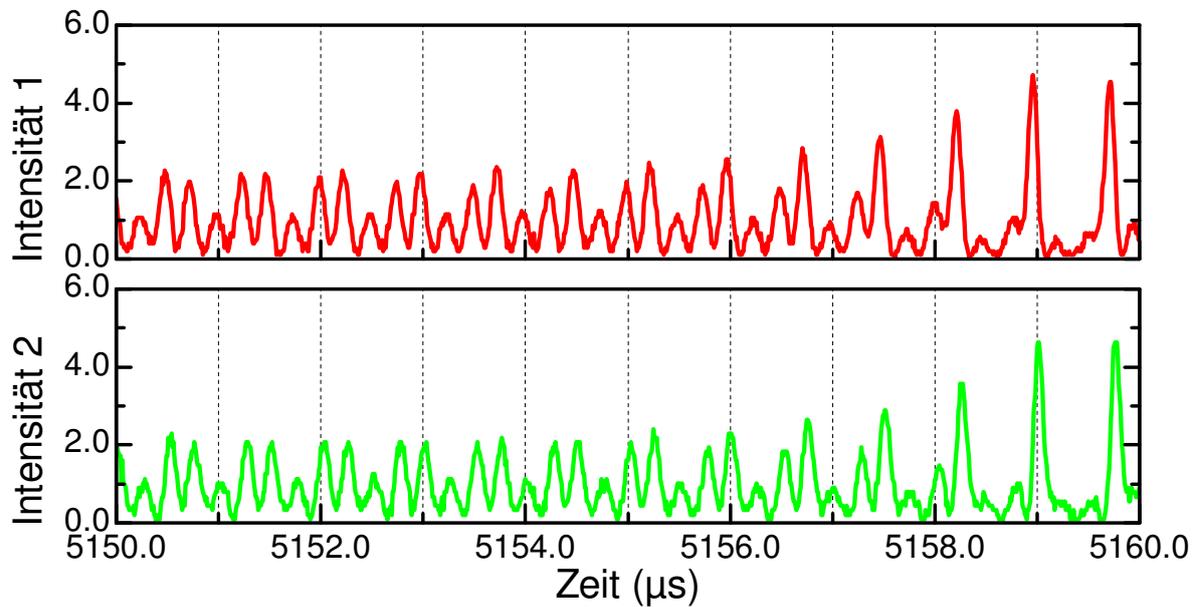
Auch höhere Periodenvervielfachungen können auftreten: ein Beispiel für eine Periodenverdreifung ist in Abbildung 3.5 gegeben; aufgrund der Drift in der Verstimmung sieht man hier die zeitliche Entwicklung der Amplituden. Die Abbildung 3.6 zeigt die Periodenverdreifung in Form eines Pulses mit relativ kleinen Zwischenoszillationen. Eine Periodenverfünffachung ist in Abbildung 3.7 dargestellt.



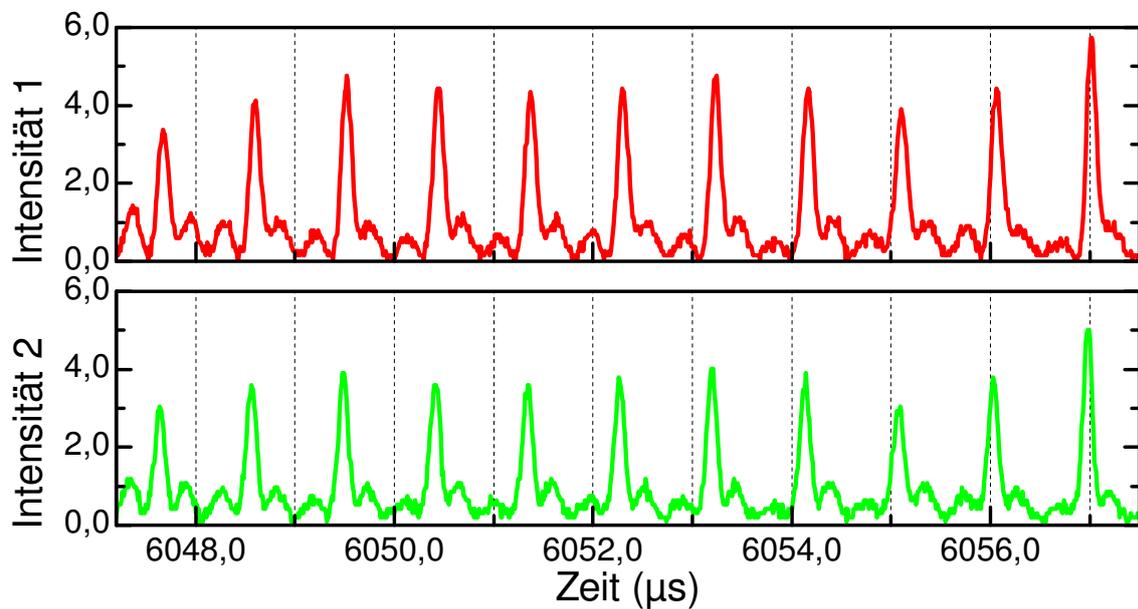
**Abbildung 3.3:** Periodenverdopplung für symmetrische Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 5,6$ . Aufgrund einer Drift in der Verstimmung sieht man hier die zeitliche Entwicklung der Amplituden



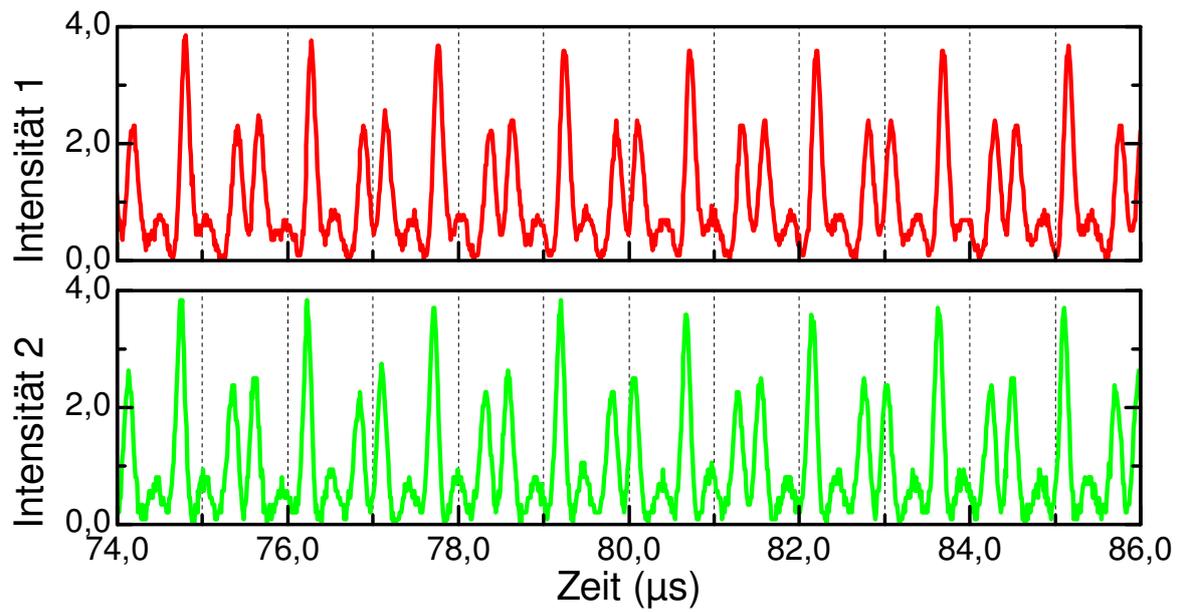
**Abbildung 3.4:** Eine stark ausgeprägte Periodenverdopplung für symmetrische Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 6,1$ .



**Abbildung 3.5:** Periodenverdreifung für symmetrische Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 4,4$ . Aufgrund einer Drift in der Verstimmung sieht man hier die zeitliche Entwicklung der Amplituden.



**Abbildung 3.6:** Periodenverdreifung für symmetrische Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 4,1$ . Im Vergleich zum obigen Bild hat sich hier ein starker Puls mit schwachen Zwischenoszillationen herausgebildet.



**Abbildung 3.7:** Periodenverfünffachung für symmetrische Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 4,6$ .

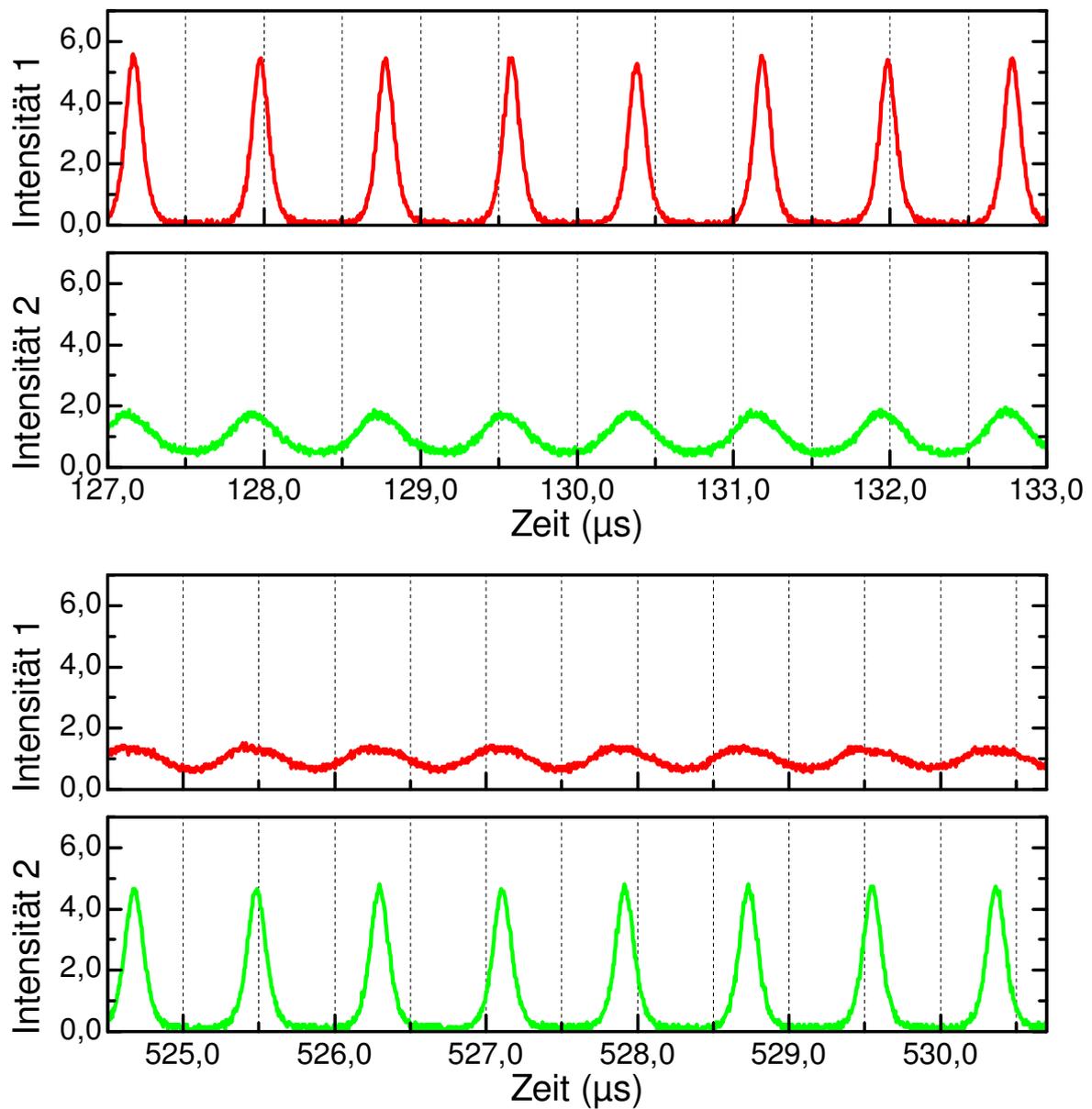
### 3.1.2 Lokalisierte Oszillationen

Dieser Abschnitt zeigt experimentelle Beispiele für einen symmetriebrechenden Oszillationstyp wie er theoretisch in [Ern97] vorhergesagt wurde. Unter Symmetriebrechung wird hier folgender Umstand verstanden: wie schon in vorherigen Kapiteln erwähnt, sollte es mit dem Aufbau dieses Experiments u. a. erreicht werden, möglichst gleich präparierte Laser zu erzeugen, d. h. Laser mit gleichen Pump- und Verlustkoeffizienten. In diesem Sinne existiert zwischen den beiden Laser eine Austauschsymmetrie. Abbildung 3.8 gibt nun zwei Beispiele, in denen ein Laser starke pulsförmige Dynamik zeigt, während der andere nur relativ kleinamplitudig oszilliert. Die Laser können ihre Rollen unter den gleichen Randbedingungen vertauschen, was belegt, daß dieses Phänomen nicht aufgrund von Asymmetrien in der Präparation verursacht wird. Als Bezeichnung für dieses Oszillationstyp wird der Begriff ‘lokalisierte Oszillationen’ (LO) aus der oben zitierten Arbeit verwendet.

Neben dieser einfachen Form der lokalisierten Oszillationen existieren auch Typen mit komplexerer Dynamik. Komplexere Pulsformen sind in den Zeitreihen der Abbildung 3.9 zu entdecken: Laser 1 besitzt Doppelspitzenpulse, die Pulse des Lasers 2 sind asymmetrisch.

In Abbildung 3.10 ist eine stark ausgeprägte Periodenverdopplung im beiden Lasern zu beobachten. Komplexere Pulsformen sind bei Laser 2 in Abbildung 3.11 zu erkennen.

Eine Periodenverdreifachung ist in Abbildung 3.12 zu sehen. Der dominante Laser 1 zeigt hier normale Pulsformen, während die Pulsformen in Laser 2 stärker strukturiert sind. Abbildung 3.13 enthält ein Beispiel für eine Periodenvervierfachung. In Laser 1 ist diese Periodenvervielfachung gut zu erkennen, während Laser 2 eine komplex strukturierte Oszillationsform aufweist. Ein weiteres Beispiel für Periodenvervielfachung mit komplexen Pulsformen gibt die Abbildung 3.14. Laser 1 zeigt eine Periodenverdopplung mit Doppelspitzenpulsen in der einen Hälfte der Periode, Laser 2 dagegen besitzt eine Periodenverdopplung mit Doppelspitzenpulsen in der ganzen Periode.



**Abbildung 3.8:** Lokalisierte Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 6,2$ . Beide Ausschnitte stammen aus der derselben Zeitreihe und dokumentieren den möglichen spontanen Austausch der Rollen zwischen Laser 1 und 2.

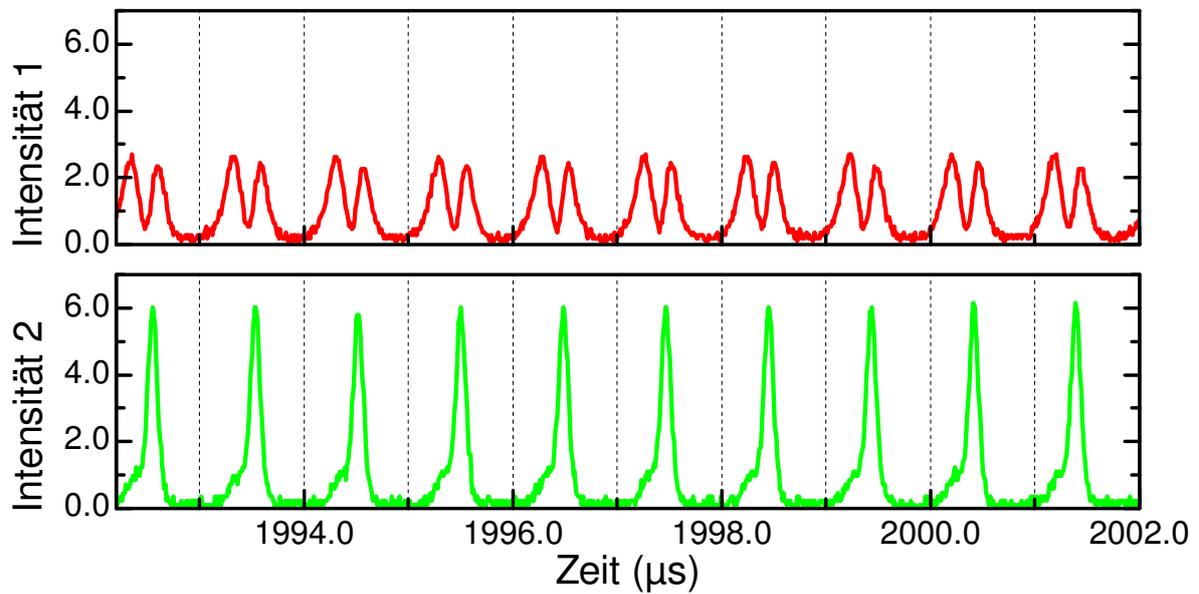


Abbildung 3.9: Lokalisierte Oszillationen mit komplexeren Pulsformen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 5,0$ .

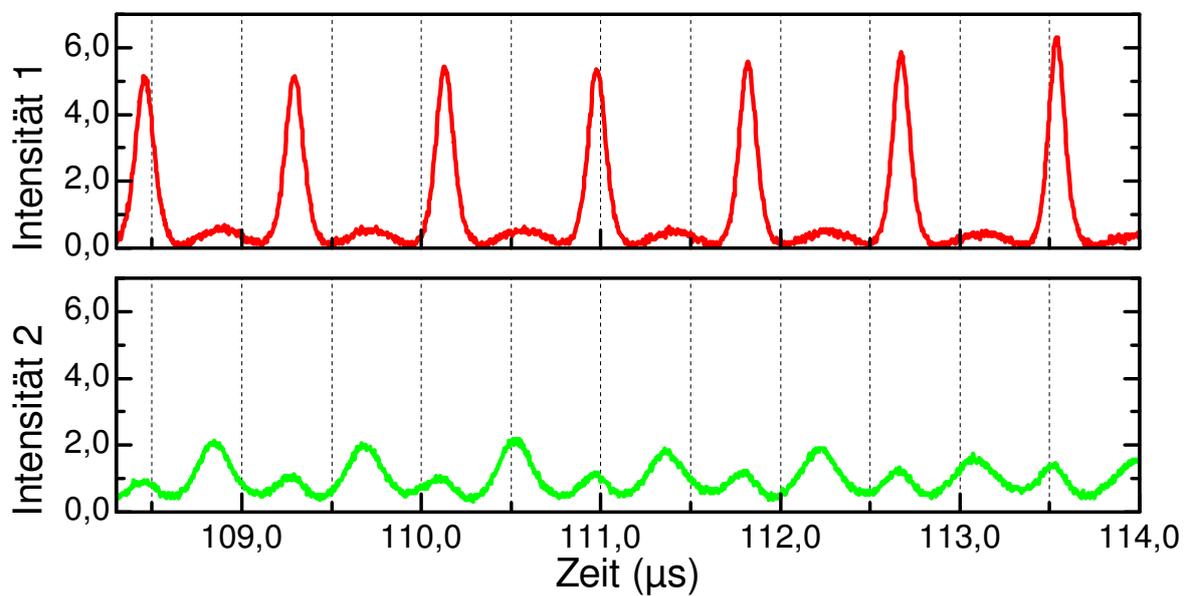
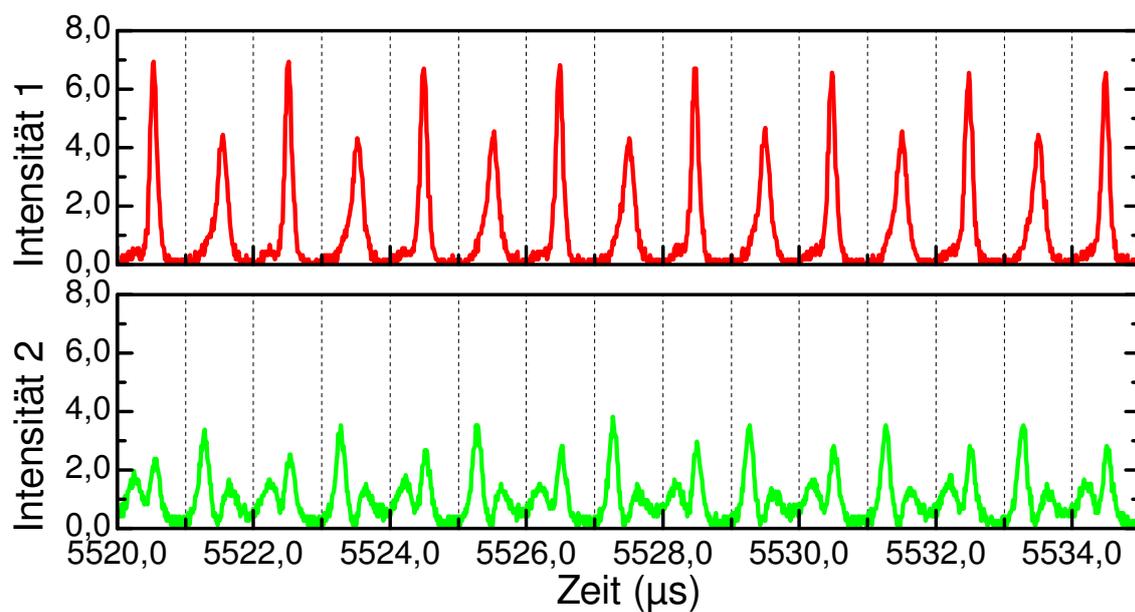
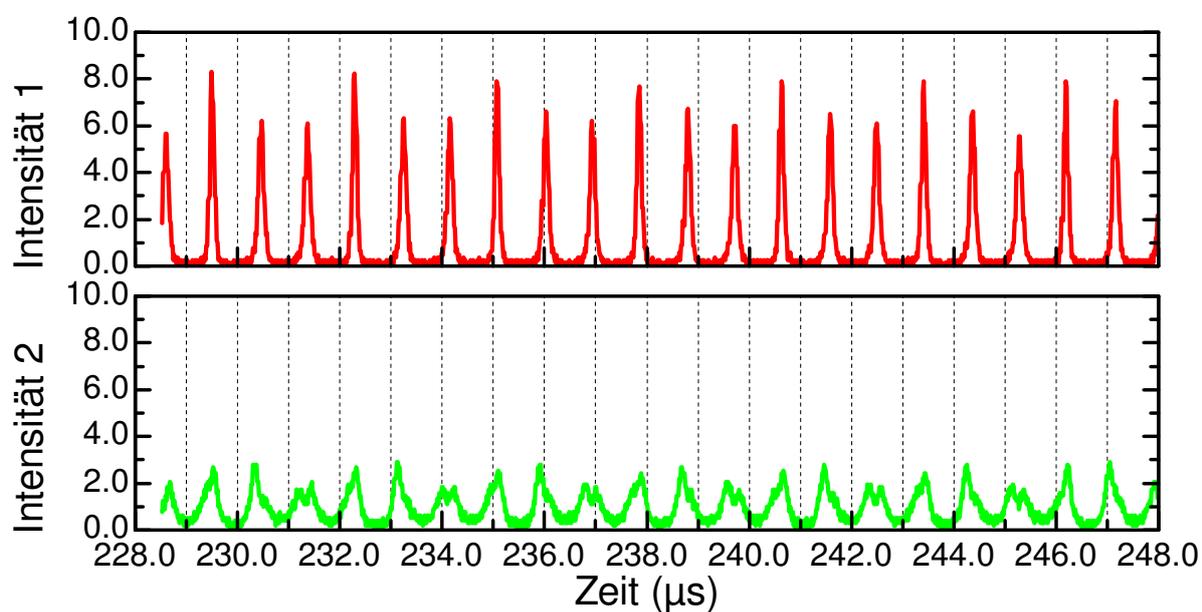


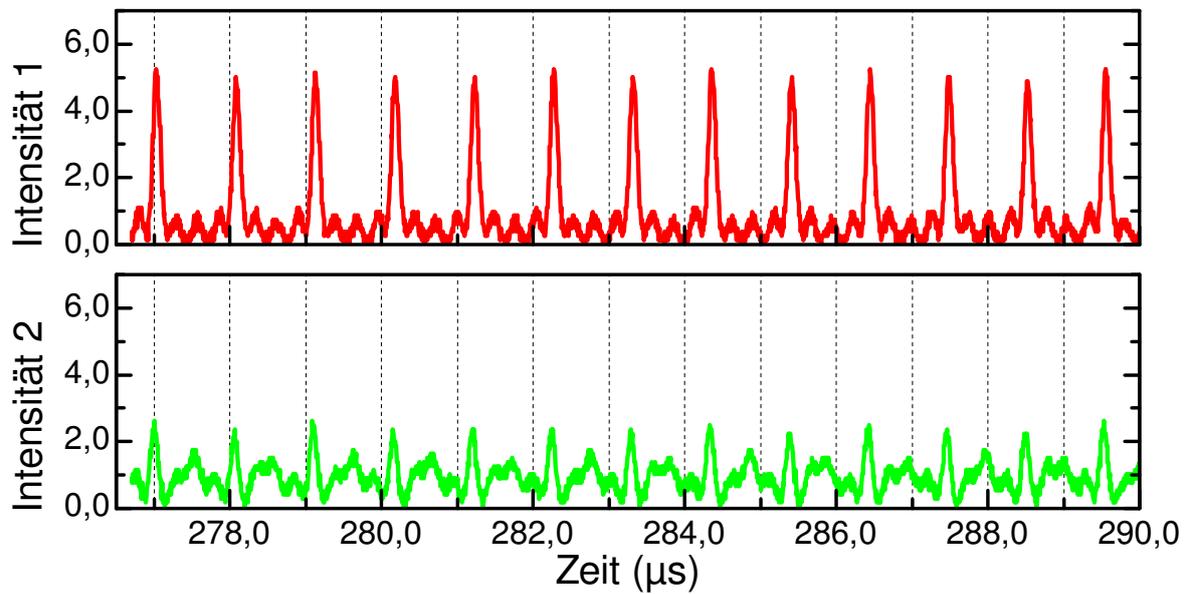
Abbildung 3.10: Lokalisierte Oszillationen mit Periodenverdopplung bei einem normierten Abstand von  $d \approx 7,1$ .



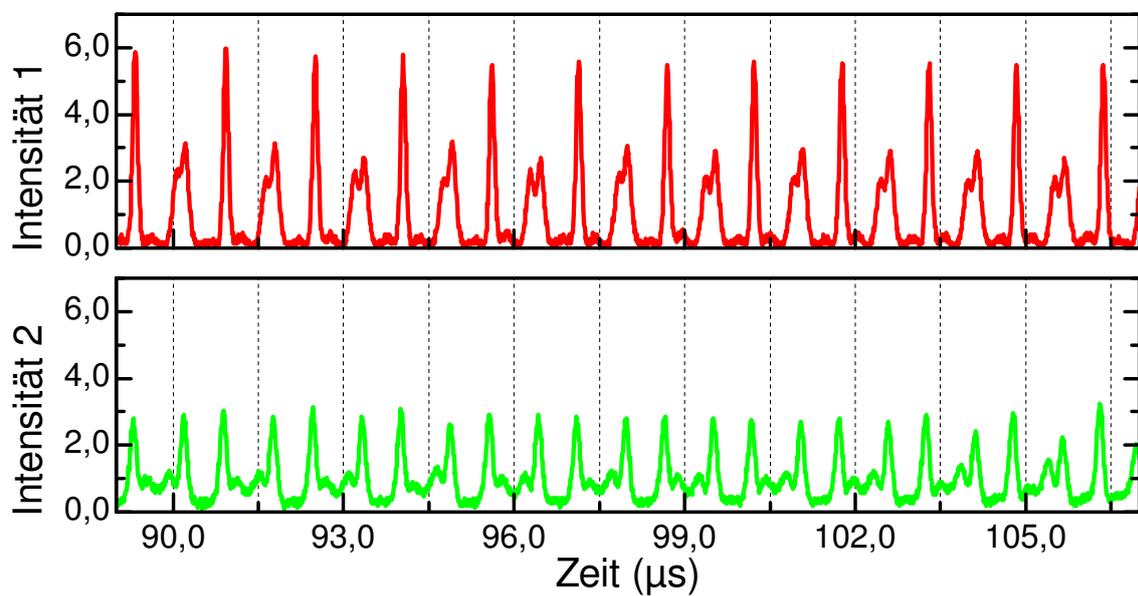
**Abbildung 3.11:** Lokalisierte Oszillationen mit Periodenverdopplung und komplexeren Pulsformen in dem schwächeren Laser bei einem normierten Abstand von  $d \approx 5,5$ .



**Abbildung 3.12:** Lokalisierte Oszillationen mit Periodenverdreifachung und komplexeren Pulsformen in Laser 2 bei einem normierten Abstand von  $d \approx 6,6$ .



**Abbildung 3.13:** Lokalisierte Oszillationen mit Periodenverfünffachung in Laser 1 und komplexeren Pulsformen in Laser 2 bei einem normierten Abstand von  $d \approx 4,7$ .



**Abbildung 3.14:** Lokalisierte Oszillationen mit Periodenverdopplung und komplexeren Pulsformen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 6,9$ .

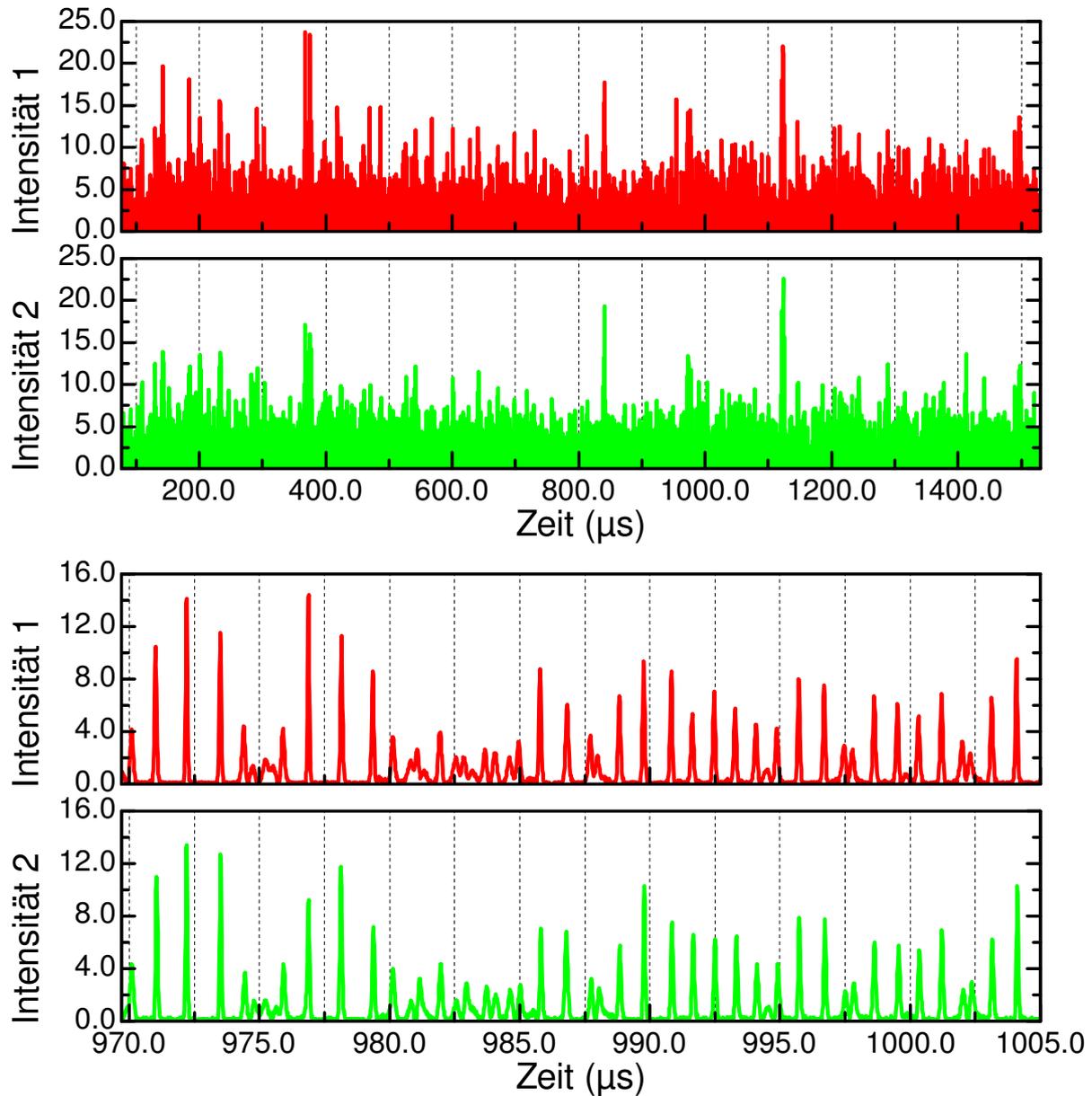
### 3.1.3 Irreguläre Oszillationsformen

Intensitätszeitreihenabschnitte mit sich schnell ändernden Pulsamplituden auf relativ kurzer Zeitskala stellen eine weiteren ziemlich häufigen Oszillationstyp im System zweier gekoppelter Laser dar. Diese sogenannten ‘irregulären’ Oszillationen sind in dem Zeitreihenabschnitt der Abbildung 3.15 bzw. in einem Ausschnitt des selben Abschnitts zu sehen. Dabei ist zu beachten, daß sich die Irregularität nur in den Pulsamplituden bemerkbar macht. Die Oszillationsphase bleibt konstant, d. h. das Auftreten der Pulse ist in beiden Lasern synchron.

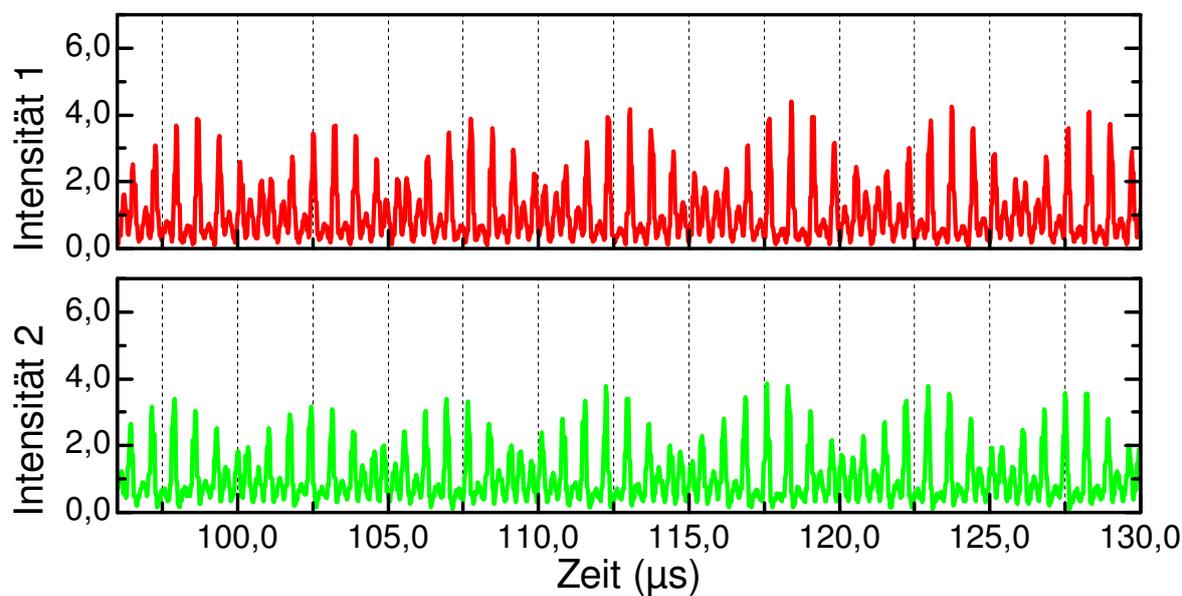
### 3.1.4 Übermodulationen

Beispiele für Übermodulationen in der Dynamik der gekoppelten Laser sind ebenfalls zu beobachten. Mit Übermodulation ist hier das Vorhandensein einer weiteren Frequenz, neben der eigentlichen Oszillationsfrequenz, gemeint, was sich in Form einer Modulation der Amplituden der Schwingung bemerkbar macht.

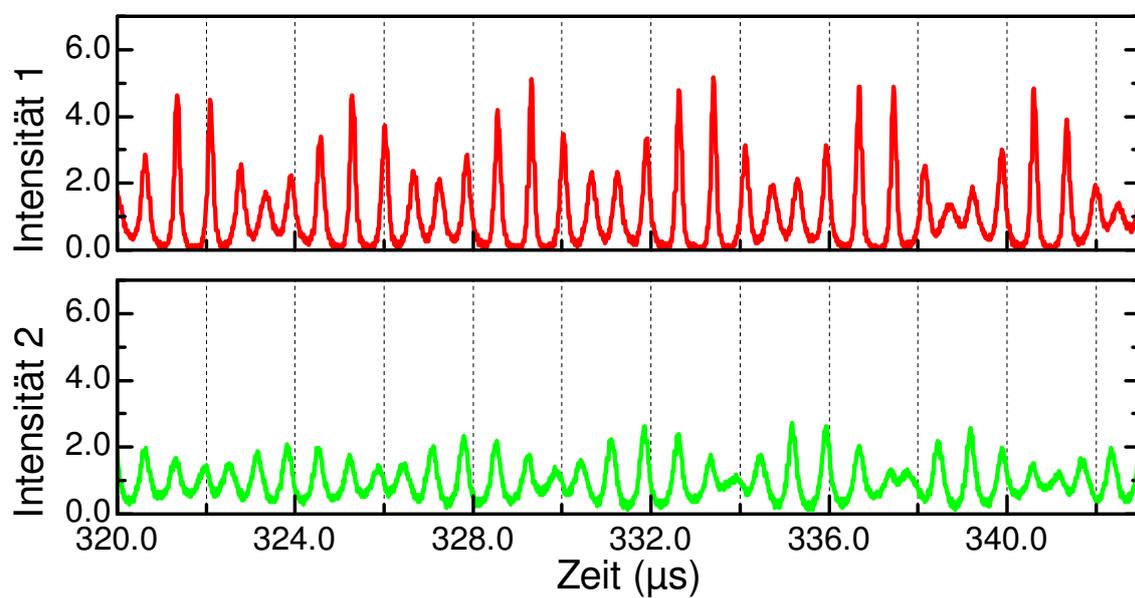
Dieses Phänomen betrifft sowohl den Oszillationstyp der SO, wie auch der LO. In Abbildung 3.16 sind synchrone Pulse mit stark ausgeprägter Periodenverdopplung zu sehen, wobei die Pulsamplituden anscheinend harmonisch moduliert sind. Abbildung 3.17 zeigt eine harmonische Modulation der Amplituden bei einer einfachen lokalisierten Oszillation.



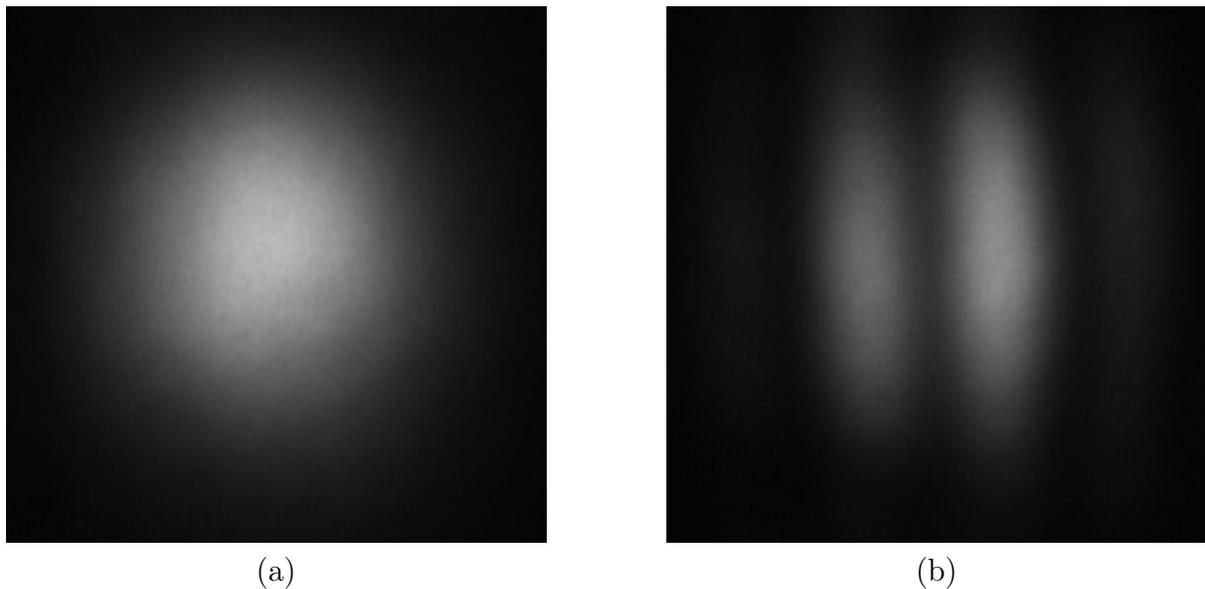
**Abbildung 3.15:** Irreguläre Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 4,4$ . Die obere Abbildung zeigt einen längeren Zeitreihenabschnitt, die untere einen Ausschnitt daraus.



**Abbildung 3.16:** Übermodulierte symmetrische Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 7,2$ .



**Abbildung 3.17:** Übermodulierte lokalisierte Oszillationen bei einem normierten Abstand von  $d \approx 5,7$ .



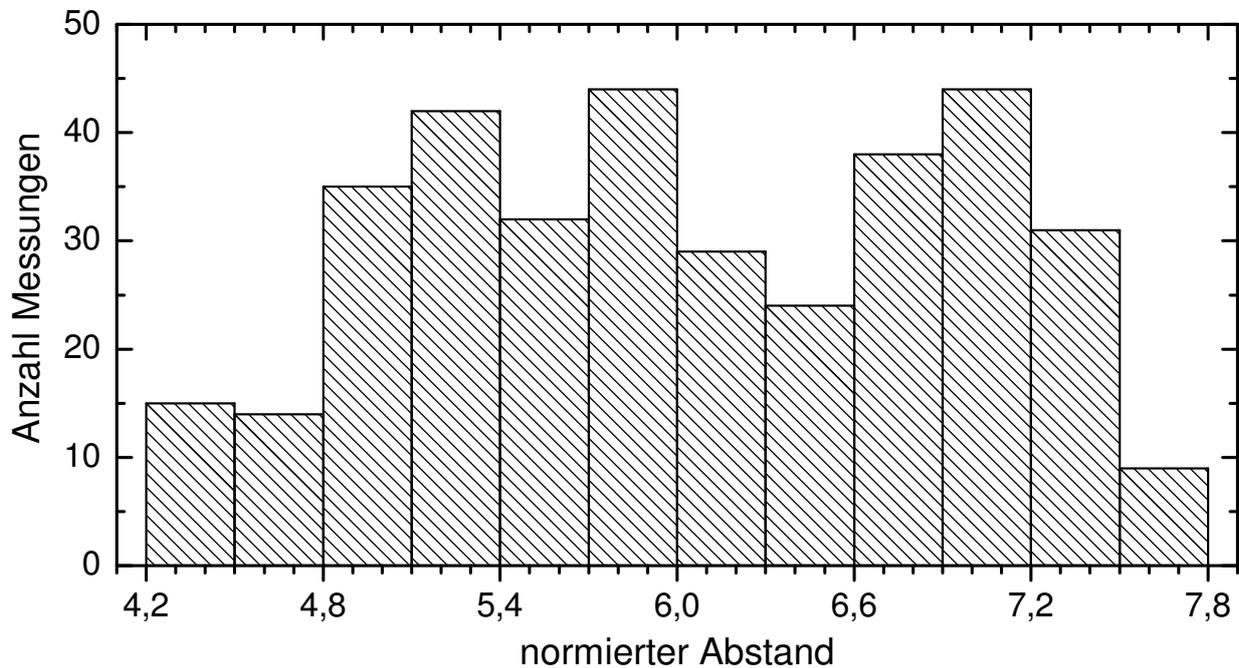
**Abbildung 3.18:** Fernfeldbilder der zwei Laser bei festem Abstand, aber unterschiedlichen Verstimmungen. (a) Relativ große Verstimmung: das Fernfeld ist unstrukturiert, die beiden Laser zeigen keine Wechselwirkung. (b) Relativ kleine Verstimmung: das Fernfeld besitzt eine Knotenlinie, die Laser sind phasensynchronisiert, die Phasendifferenz beträgt  $\Delta\phi = \pi$ .

### 3.1.5 Optische Phasensynchronisation

Abgesehen von dem Bereich der Intensitätsdynamik ist noch das Phänomen der optischen Phasensynchronisation bemerkenswert. Erniedrigt man bei gegebenem normierten Abstand  $d$  die Verstimmung zwischen den beiden Lasern, so ergibt sich nach dem Auftreten von Intensitätsdynamik ein Bereich, in dem die Laser konstante Intensitäten aufweisen. In diesem Bereich hat sich die Struktur des Fernfeldes vom unstrukturierten Gaußprofil zu einem Profil mit Knotenlinie geändert (siehe Abbildung 3.18). Dies weist auf eine optische Phasensynchronisation zwischen den Lasern hin, und zwar schwingen die elektrischen Laserfelder in Gegenphase. Der Verstimmungsgrenzbetrag, ab dem diese Phasensynchronisation auftritt ist abhängig von dem normierten Zustand  $d$ . Dieser Zusammenhang wird weiter unten im Abschnitt 3.3 bei der Untersuchung von Dynamikszenerarien betrachtet.

## 3.2 Statistische Untersuchung

Die schon oben genannten Fluktuationen in der Verstimmung lassen eine direkte systematische Untersuchung der Dynamik des gekoppelten Lasersystems in Abhängigkeit von beiden Streßparametern nicht zu. Allerdings ist es möglich, eine statistische Verteilung der Oszillationstypen in Abhängigkeit vom normierten Abstand  $d$  zu gewinnen, wobei hier die Verstimmungsfluktuationen die Rolle einer ‘Mittlungsfunktion’ spielen. Dazu wurde die relativ große Anzahl von 360 Intensitätszeitspuren aufgenommen und mit einem weiter unten vorgestellten Algorithmus ausgewertet. Bei den eingestellten normierten Abständen wurde auf eine möglichst gleichmäßige Verteilung in dem Gesamtintervall geachtet, wie in Abbildung 3.19 zu erkennen ist.



**Abbildung 3.19:** Histogramm der Verteilung des normierten Abstands  $d$  (Einteilung in Klassen mit Intervallbreite  $\Delta d = 0,3$ )

### Auswertungsalgorithmus

Der Algorithmus klassifiziert die gemessenen Zeitreihen in zwei Schritten: zunächst wird anhand einer Einhüllenden über die Intensitätsverläufe eine Grobklassifizierung vorgenommen. Im zweiten Schritt wird diese Einteilung mit spezifischen Methoden weiter differenziert. Alle Angaben zu Amplituden bzw. Intensitäten sind dabei auf die stationäre Intensität normiert.

Bei der groben Einteilung sollen zunächst reguläre und irreguläre Oszillationen unterschieden sowie Bereiche ohne Intensitätsdynamik erkannt werden. Die irregulären Oszilla-

tionen zeichnen sich durch schnell wechselnde Amplitudenverhältnisse zwischen den Lasern aus. Bei den regulären Oszillationen (SO und LO) bleibt das Amplitudenverhältnis über längere Zeit konstant oder zumindest qualitativ gleich.

Zur Berechnung der Einhüllenden wird jede Zeitreihe in Intervalle der festen Länge  $t_{env} = f_{env}^{-1}$  unterteilt und jeweils das absolute Maximum der Intensität  $I_{max}(i)$  bestimmt. Der Index  $i$  unterscheidet dabei die Laser 1 und 2. Die Größe  $t_{env}$  bzw.  $f_{env}$  wird so gewählt, daß in jedem Intervall mindestens zwei Pulse liegen. Dadurch wird vermieden, daß Phänomene wie Periodenverdopplungen sich bereits in der Einhüllenden niederschlagen.

Jeder Punkt der Einhüllenden, d.h. jedes der zuvor definierten Intervalle wird daraufhin einer von fünf Klassen zugeordnet. Die entsprechenden Kriterien werden in der unten stehenden Reihenfolge geprüft, die Zuordnung erfolgt bei der ersten Übereinstimmung ('first match'-Prinzip). Damit ist die Eindeutigkeit in jedem Fall gewährleistet. Die Angabe von Grenzen für die quantitativen Parameter erfolgt an dieser Stelle nur nach logischen Gesichtspunkten, die genaue Wahl der Zahlenwerte wird weiter unten diskutiert (s. Tabelle 3.2).

**NoD** *Keine erkennbare Dynamik (no dynamics)*: Im stationären Fall, der hier geprüft wird, ist die Intensität für beide Laser theoretisch gleich eins. Läßt man geringe Fluktuationen zu, ergibt sich das Kriterium

$$[I_{max}(1) < I_{NoD}] \wedge [I_{max}(2) < I_{NoD}] \quad (3.1)$$

mit  $1 < I_{NoD} < 2$ .

**SmA** *Oszillationen kleiner Amplitude (small amplitude)*: In diese Klasse sollen die (fast) harmonischen Oszillationen fallen; damit dürfen die  $I_{max}$  nicht wesentlich größer als 2 sein. Es gilt

$$[I_{max}(1) < I_{SmA}] \wedge [I_{max}(2) < I_{SmA}] \quad (3.2)$$

mit  $I_{NoD} < I_{SmA} < 2 + x$ ;  $x \ll 1$ .

**SO** *Symmetrische Oszillationen*: Die Symmetrie wird anhand einer Obergrenze der relativen Amplitudendifferenz geprüft:

$$\frac{|I_{max}(1) - I_{max}(2)|}{\min_i(I_{max}(i))} \leq R_{max.SO} \quad (3.3)$$

**LO** *Lokalisierte Oszillationen*: Hier handelt es sich genaugenommen um zwei Klassen  $LO1$  und  $LO2$ , abhängig davon, welcher der beiden Laser dominant ist. Ist das Symmetriekriterium (3.3) nicht erfüllt, handelt es sich eigentlich schon um lokalisierte Oszillationen. Der Algorithmus prüft allerdings zusätzlich, ob der dominante Laser mindestens die Amplitude  $I_{min.dom.}$  besitzt:

$$\max_i(I_{max}(i)) \geq I_{min.dom.} \quad (3.4)$$

mit  $I_{min.dom.} > I_{SmA}$ .

**IRR** *Irreguläre Oszillationen:* Punkte der Einhüllenden, die die Kriterien (3.1 - 3.4) nicht erfüllen, werden als irregulär eingestuft. Dies betrifft zunächst nur asymmetrische Oszillationen mit kleiner Amplitude.

Wie oben geschildert, liegt ein wesentliches Merkmal regulärer Oszillationen in der zeitlichen Konstanz des Amplitudenverhältnisses. Daher wird gefordert, daß mindestens  $N_{env}$  aufeinander folgende Punkte der Einhüllenden in dieselbe Klasse eingeordnet werden müssen, um als regulär zu gelten. Ist dies nicht der Fall, werden die betreffenden Punkte nachträglich als irregulär eingestuft, d. h. der Klasse IRR zugeordnet.

Bei den als SO eingestuften Bereichen muß aus dem gleichen Grund zuvor noch überprüft werden, ob bei einer vorhandenen leichten Asymmetrie das Vorzeichen von  $I_{max}(1) - I_{max}(2)$  zeitlich konstant bleibt. Punkte, an denen das Vorzeichen wechselt, werden als IRR einsortiert. Um bei einer sehr kleinen Asymmetrie eine durch Rauschen bedingte falsche Einordnung zu verhindern, werden Vorzeichenwechsel toleriert, falls gilt:

$$|I_{max}(1) - I_{max}(2)| < I_{NoD} - 1 \quad (3.5)$$

Aufgrund der schon zu Beginn der Einteilung vorgenommenen Datenreduktion arbeitet dieser Teil des Algorithmus sehr schnell. Insbesondere die zeitintensive Suche nach lokalen Maxima kann an dieser Stelle entfallen und im folgenden auf Bereiche beschränkt werden, in denen Zeitpunkte und Amplituden einzelner Pulse als Klassifikationskriterien nötig sind. Bei der weiteren Differenzierung ist dies nur für die Klassen SO und LO realisiert.

Zur Bestimmung der Pulsmaxima in den Bereichen SO und LO werden die entsprechenden Zeitreihenabschnitte zunächst mit einem laufenden Mittel über  $t_{rm}$  geglättet. Es kommen für die Suche nach Maxima verschiedene Methoden in Frage. Verwendet wird hier eine 5-Punkt-Methode mit Schwellenbedingung. Dabei ist  $x(n)$  ein lokales Maximum, wenn

$$\begin{aligned} & x(n-2) \leq x(n-1) \leq x(n) > x(n+1) > x(n+2) \\ \wedge & x(n+k) \geq x_{th}; \quad \forall k \in \{-1, 0, +1\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit dem Schwellwert  $x_{th}$ .

Bei der weiteren Auswertung wird ähnlich wie bei der groben Einteilung jedes Maximum zunächst aufgrund lokaler Kriterien einer Gruppe zugeordnet. Dazu werden jeweils Dreiergruppen der gefundenen Maxima betrachtet:  $t_M$  und  $a_M$  bezeichnen im folgenden Zeitpunkt und Amplitude des zu klassifizierenden Maximums,  $t_L$  und  $a_L$  die entsprechenden Größen des vorhergehenden sowie  $t_R$  und  $a_R$  die des nachfolgenden Maximums in der Zeitreihe des gleichen Lasers. Zusätzlich werden folgende Größen definiert:

$$(\Delta t)_L := |t_M - t_L| \quad (3.7a)$$

$$(\Delta t)_R := |t_M - t_R| \quad (3.7b)$$

$$(\Delta a)_L := |a_M - a_L| \quad (3.7c)$$

$$(\Delta a)_R := |a_M - a_R| \quad (3.7d)$$

$$(\Delta a)_{LR} := |a_L - a_R| \quad (3.7e)$$

Die Einordnung geschieht dann zunächst für jeden Laser einzeln in die folgenden drei Unterklassen:

**Simple** *Einfache Oszillationen:* Als ‘einfach’ sollen Oszillationen gelten, wenn weder die Abstände noch die Amplituden der Maxima größeren Schwankungen unterliegen. Die Parameter  $R_t$  und  $R_a$  geben vor, welche relativen Schwankungen toleriert werden. Das Kriterium für den Zeitbereich lautet

$$\frac{|(\Delta t)_L - (\Delta t)_R|}{(\Delta t)_L + (\Delta t)_R} \leq R_t \quad (3.8)$$

Analog muß für die Amplituden gelten

$$\frac{|(\Delta a)_L - (\Delta a)_R|}{(\Delta a)_L + (\Delta a)_R} \leq R_a \quad (3.9)$$

**PD** *Periodenverdopplung (period doubling):* Auch hier muß die Regelmäßigkeit im Zeitbereich nach Kriterium 3.8 erfüllt sein. Die eigentliche Periodenverdopplung wird mit der Bedingung

$$(\Delta a)_L > (\Delta a)_{LR} \quad \wedge \quad (\Delta a)_R > (\Delta a)_{LR} \quad (3.10)$$

erkannt. Dies ist in Abschnitten mit (bis auf die Periodenverdopplung) etwa gleichbleibenden Amplituden äquivalent zu einer Prüfung auf wechselnde Vorzeichen der Amplitudendifferenz, ist aber weniger fehleranfällig bei kurzfristigen Änderungen der mittleren Maximalamplitude.

**Complex** *komplexere Oszillationsformen:* In diese Klasse fallen alle Maxima, die den Kriterien 3.8 - 3.10 nicht genügen. Dies ist nicht zu verwechseln mit der Oberklasse IRR, da in ‘Complex’-Bereichen die Bedingungen für SO bzw. LO durchaus erfüllt sind.

Die Prüfung der Kriterien erfolgt in der Reihenfolge PD - Simple - Complex nach dem ‘first match’-Prinzip. Damit ist insbesondere das Kriterium für ‘PD’ stärker als das für ‘Simple’; wenn also ein Maximum beiden Kriterien genügt, wird es als periodenverdoppelt klassifiziert.

Eine weitere Bedingung ist wieder eine Mindestlänge der Oszillationsszenarien: mindestens  $N_{WF}$  aufeinander folgende Pulse müssen dasselbe Kriterium erfüllen, um der entsprechenden Klasse zugeordnet zu werden. Einzelne Pulse, die als ‘Complex’ klassifiziert wurden, werden als Ausreißer behandelt, falls unmittelbar vorher und nachher identische Oszillationsformen (jeweils mit der Mindestlänge) erkannt werden. In diesem Fall wird ein solcher Ausreißer der umgebenden Klasse zugeordnet.

Anhand der gefundenen Unterklassen für die einzelnen Laser wird nun die Einordnung des gesamten Zeitreihenabschnittes vorgenommen. Da das Verhalten in beiden Lasern nicht zwangsläufig gleich sein muß, werden die Merkmale beider Laser nach Tabelle 3.1 miteinander verknüpft.

**Tabelle 3.1:** Zuordnung der Zeitreihenabschnitte in Abhängigkeit von der Klassifizierung der einzelnen Laser (SO)

	Simple	PD	Complex
Simple	SSO	PSO	CSO
PD	PSO	PSO	CSO
Complex	CSO	CSO	CSO

In der Tabelle sind exemplarisch die Kürzel für die zuvor als SO erkannten Bereiche aufgeführt, die Zuordnung für die LO1 / LO2 erfolgt analog. Die Kürzel lauten dann  $SLn$ ,  $PLn$ ,  $CLn$  mit  $n = 1,2$  als Index für den dominanten Laser.

### Wahl der Parameter

Bei der Wahl der Zahlenwerte für die oben eingeführten Parameter sind im wesentlichen zwei Gruppen zu unterscheiden. So definieren die in Tabelle 3.2 aufgeführten Parameter mit Ausnahme von  $f_{env}$  und  $N_{env}$  die eigentlichen Oszillationstypen. Bei Veränderungen kann der Algorithmus in einigen Bereichen relativ empfindlich reagieren.

Bei den restlichen Parametern zeigt sich der Algorithmus den Anforderungen entsprechend relativ robust. Kleine Änderungen der Vorgaben wirken sich nur in Ausnahmefällen auf das Ergebnis aus. Die Wahl der Parameterwerte, die sich als zweckmäßig bewährt hat, ist in den Tabellen 3.2 und 3.3 zusammengefaßt.

**Tabelle 3.2:** Gewählte Parameter bei der Grobklassifizierung

Parameter	Wert
$f_{env}$	= 300 kHz
$N_{env}$	= 5
$I_{NoD}$	= 1.50
$I_{SmA}$	= 2.00
$R_{max.SO}$	= 0.30
$I_{min.dom.}$	= 3.00

**Tabelle 3.3:** Gewählte Parameter bei der Feinklassifizierung

Parameter	Wert
$t_{rm}$	= 100 ns
$x_{th}$	= 0.50
$R_t$	= 15 %
$R_a$	= 15 %
$N_{WF}$	= 10

Die Auswertungsergebnisse des Algorithmus wurden stichprobenhaft durch manuellen Vergleich mit den ausgewerteten Zeitreihen überprüft. Dazu wurden rund 50 zufällig ausgewählte Messungen herangezogen. Es hat sich gezeigt, daß mit den gewählten Werten der Algorithmus die Oszillationsformen mit großer Sicherheit richtig erkennt (Es gab nur wenige Fehlzusordnungen, die auch nur kurze Zeitabschnitte umfaßte).

### Auswertungsergebnisse

Es folgen hier die gewonnenen statistischen Ergebnisse zur Dynamik des Zweilaser-Systems in Abhängigkeit vom normierten Abstand  $d$ . Insbesondere wird das Verhältnis zwischen

lokalisierten und symmetrischen Oszillationen (LO zu SO) untersucht. Die Unterscheidung zwischen den Typen LO1 und LO2 ist nicht nötig, da eine relativ gute Gleichverteilung zwischen diesen beiden Oszillationstypen gegeben ist. Darüberhinaus werden Feinklassifizierungen der SO- und LO-Dynamiktypen vorgenommen.

Die aus den Zeitreihen gewonnenen Daten zeigen eine relativ starke Streuung in Abhängigkeit vom normierten Abstand  $d$ . Um eine übersichtliche Darstellung zu erhalten, wird deshalb eine Mittelung über eine feste Anzahl  $N_k$  von aufeinanderfolgenden Messungen bezüglich  $d$  vorgenommen; dies ist eine von Art von Klassenmittelung mit variabler Klassenbreite aber festem Klassenvolumen  $N_k$ .

### 3.2.1 Grobklassifizierung der Gesamtdynamik

Einen Überblick über die Verteilung der Anteile der verschiedenen Oszillationstypen an der Gesamtdynamik gibt die Abbildung 3.20. Mit Gesamtdynamik sind hier alle Teile der untersuchten Zeitreihen gemeint, die nicht in den Bereich *NoD* fallen. Abbildung 3.21 stellt die relativen Anteile der SO- und LO-Oszillationstypen gegenüber. Die eingezeichneten Regressionsgeraden deuten hier Tendenzen in der Verteilung der beiden Dynamiktypen in Abhängigkeit vom normierten Abstand  $d$  an.

Aus den beiden Abbildungen lassen sich folgenden Beobachtungen machen: der Anteil der kleinamplitudigen Oszillationen (SmA) bleibt über den ganzen untersuchten Bereich des normierten Abstands  $d$  in einem Intervall zwischen 10 und 20 % und zeigt keine bevorzugte Änderungstendenz. Gleiches gilt für den Typ der irregulären Oszillationen (Irr), mit einem Anteil zwischen 30 und 40 %.

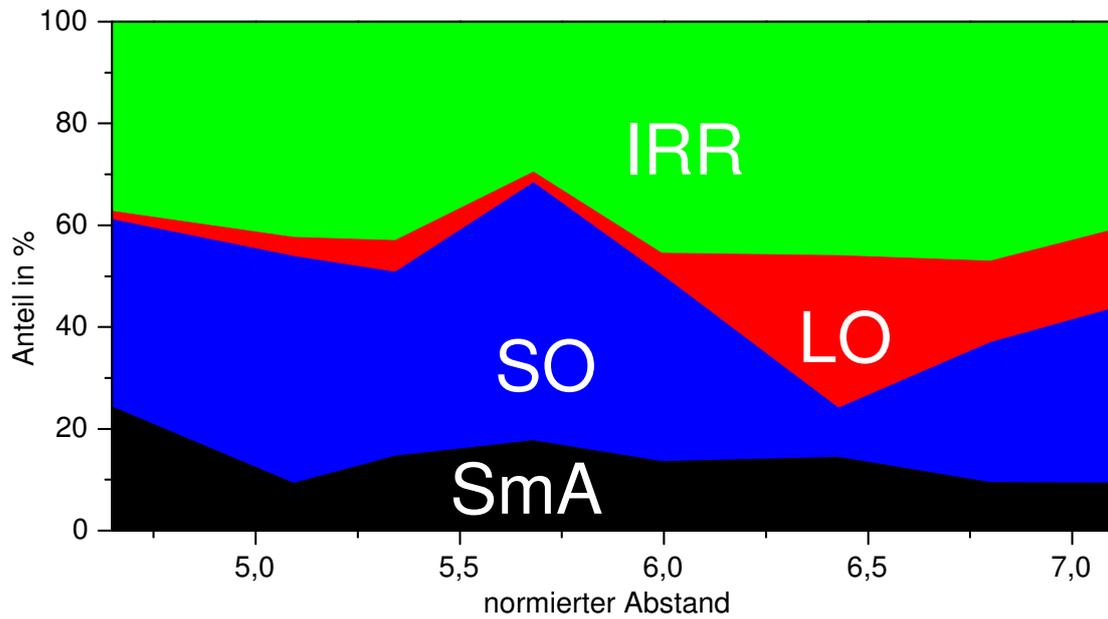
Der relative Anteil der symmetrischen Oszillationen (SO) schwankt im Abstandsbereich von 4,5 bis 6 zwischen 35 und 55 %. Ab dem normierten Abstandswert von 6 bis zu einem Wert von 7 nimmt dieser Anteil relativ stark auf 10 % ab. Mit weiter zunehmenden Abstand  $d$  liegt der relative Anteil des SO-Typs zwischen 25 und 35 %.

Der LO-Oszillationstyp ist für einen Abstandswert von weniger als 6 nur sehr selten zu finden; der relative Anteil liegt bei wenigen Prozent. Korrespondierend zu der starken Abnahme des SO-Typs nimmt der Anteil der LO im Abstandsbereich zwischen 6 und 7 stark zu auf einen Wert von 30 %. Mit weiter zunehmenden Abstand liegt er zwischen 10 und 20 %.

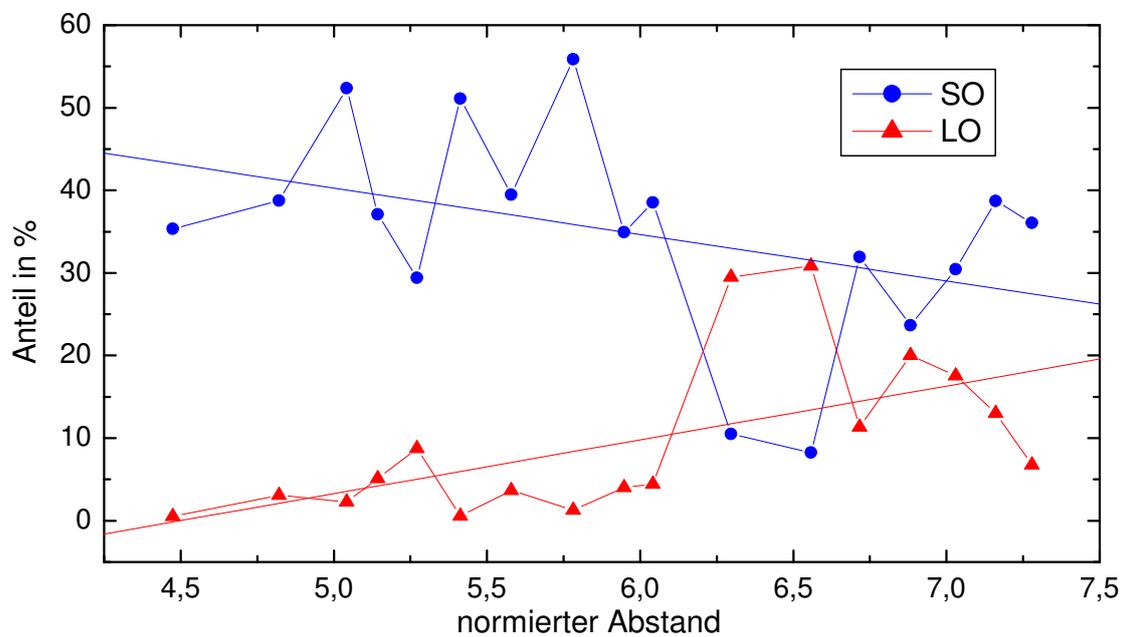
### 3.2.2 Feinklassifizierung des SO-Oszillationstyp

Die relativen Anteile an der Dynamik vom SO-Typ für die ausdifferenzierten Typen der einfachen (SSO), periodenverdoppelten (PSO) sowie der komplexen (CSO) symmetrischen Oszillationen zeigt die Abbildung 3.22.

Man kann erkennen, daß die einfachen Oszillationen mit zunehmenden Abstand zum dominierenden Oszillationstyp werden. Korrespondierend dazu ist der komplex symmetrische Typ bei den relativ kleinen normierten Abständen vorherrschend. Insbesondere bei Abstandswerten größer 6,6 werden fast nur noch einfache Oszillationen gefunden. Peri-



**Abbildung 3.20:** Grobklassifizierung der Zeitreihendynamik mit einer Klassenvolumen von  $N_k = 40$ .



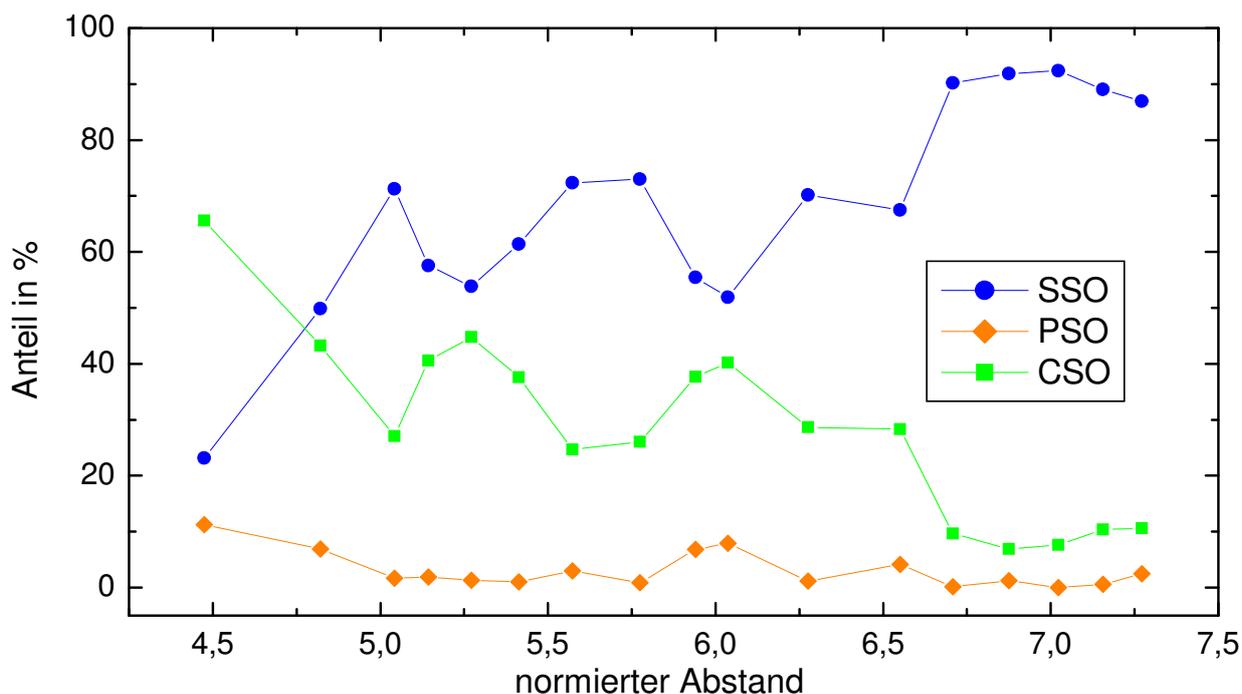
**Abbildung 3.21:** Relative Anteile an der Gesamtdynamik von LO- und SO-Typen mit Klassenvolumen  $N_k = 20$ .

odenverdoppelte symmetrische Oszillationen spielen kaum eine Rolle, außer im Bereich der kleinsten Abstandswerte, wo sie einen relativen Anteil von 10 % erreichen.

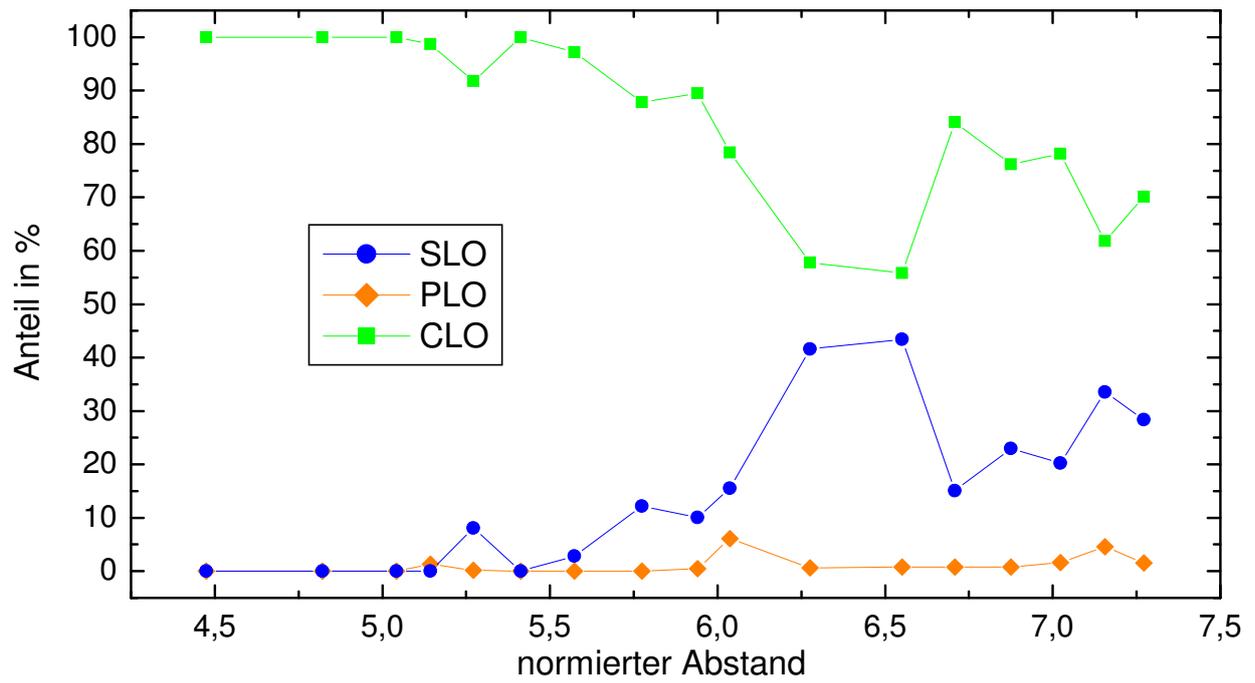
### 3.2.3 Feinklassifizierung des LO-Oszillationstyp

In der Abbildung 3.23 sind die relativen Anteile an der Dynamik vom SO-Typ für die ausdifferenzierten Typen der einfachen (SLO), periodenverdoppelten (PLO) sowie der komplexen (CLO) lokalisierten Oszillationen zu sehen.

Auffällig ist hier, daß im Abstandsbereich von 4,4 bis 6 fast nur komplexe lokalisierte Oszillationen gefunden werden. Erst ab einem Wert von ungefähr 6 für den normierten Abstand nimmt der relative Anteil der einfachen lokalisierten Oszillationen auf 40 % zu, was einhergeht mit dem Abfall des CLO-Typs auf 60 %. Für normierte Abstandswerte größer 6,6 schwankt der Anteil des SLO-Typs zwischen 10 % und 35 %, korrespondierend mit einer spiegelbildlichen Entwicklung beim CLO-Typ. Ähnlich wie bei der Betrachtung der symmetrischen Oszillationen spielen periodenverdoppelte Oszillationen hier fast gar keine Rolle. Nur um den Abstandswert von 6 erreicht deren relativer Anteil wenige Prozentpunkte.



**Abbildung 3.22:** Feinklassifizierung der symmetrischen Oszillationen mit Klassenvolumen  $N_k = 20$



**Abbildung 3.23:** Feinklassifizierung der lokalisierten Oszillationen mit Klassenvolumen  $N_k = 20$

### 3.3 Dynamiksszenarien

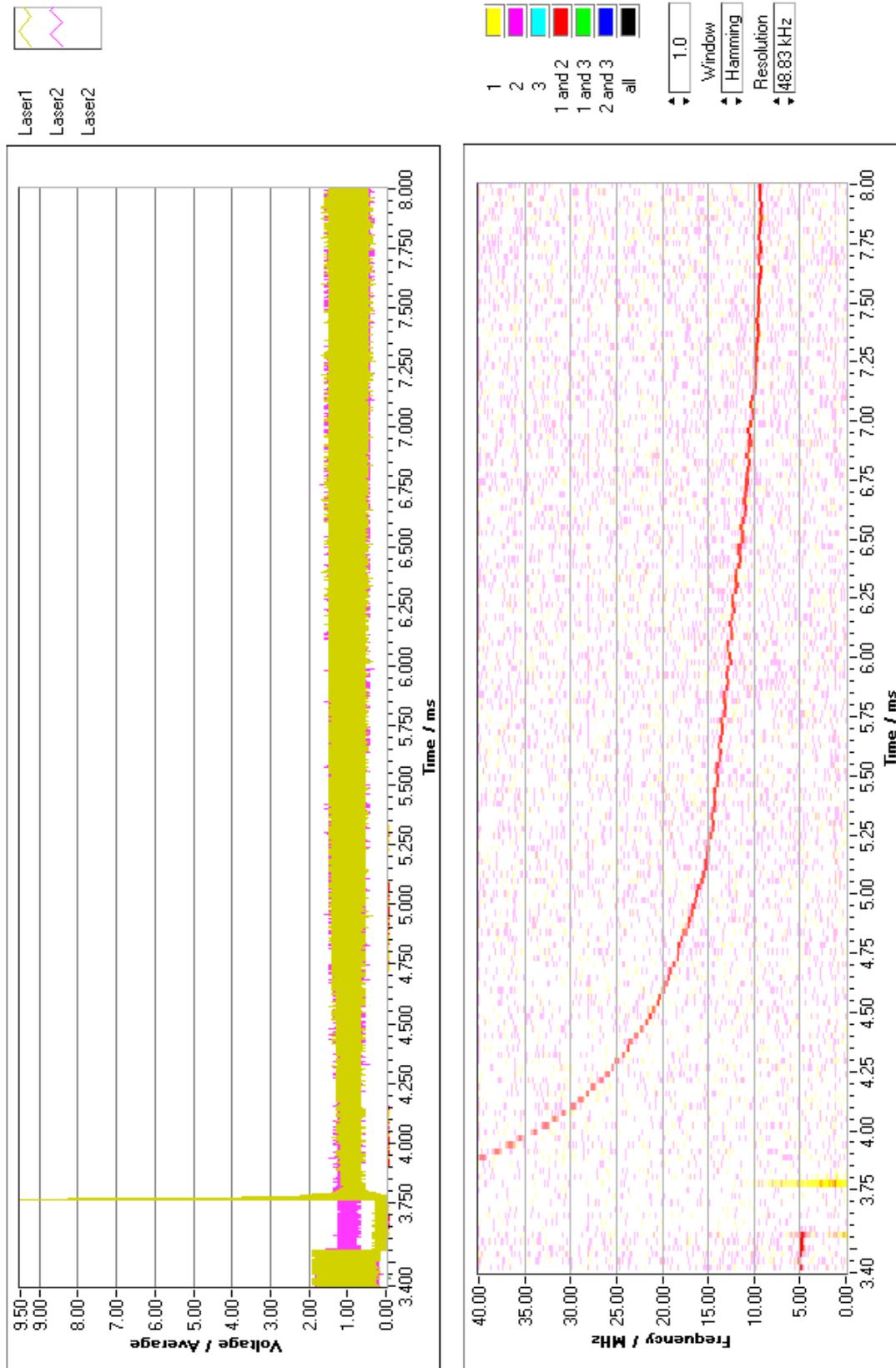
Um Dynamiksszenarien in Abhängigkeit vom Verstimmungsparameter beobachten zu können, ist es natürlich nötig, diesen Parameter möglichst stetig und glatt durchzustimmen. Eine Möglichkeit der Realisierung ist es, die Verkippung des Auskoppelspiegels des Laserresonators kontinuierlich zu verändern (siehe Abschnitt 2.1.4). Experimentelle Untersuchungen haben aber gezeigt, daß dieser Eingriff in den mechanischen Aufbau des Resonators keine glatte Variation der Verstimmung zuläßt, da die Fluktuationen in diesem Systemparameter dann stark zunehmen. Dies scheint die schon im Kapitel 2 geäußerte Vermutung zu bestätigen, daß die Hauptursache dieser Fluktuationen im nicht absolut stabilen Aufbau des Laserresonators zu suchen ist.

Eine weitere Möglichkeit zur Verstimmungsvariation stellt die Pumpstrahlmodulation eines Lasers dar. Ein kurzes Ausschalten eines der beiden Pumplaser läßt die Verstimmung zwar sehr schnell, aber auch glatt driften. Eine typische Ausschaltdauer von 200  $\mu\text{s}$  verursacht dabei eine Drift um rund 50 MHz. Abbildung 3.24 zeigt eine Messung mit einer Ausschaltdauer von 200  $\mu\text{s}$ . In der Darstellung der JTFA (unterer Teil der Abbildung) ist deutlich zu erkennen, daß die Verstimmung während der Ausschaltdauer des Pumplasers rasch wächst, und sich nach dem Einschalten asymptotisch wieder dem ursprünglichen Wert nähert.

Diese Verstimmungsdrift ist auf ein transientes thermisches Ungleichgewicht zurückzuführen. Im Falle stationärer Pumpintensität herrscht ein Gleichgewicht zwischen der stark lokalisierten Wärmezufuhr durch die Pumplaser und der Wärmeabfuhr über die Kristallränder. Beim (relativ kurzen) Ausschalten des Pumplasers wird dieses Gleichgewicht gestört und nach dem Wiedereinschalten vergleichsweise langsam wieder erreicht. Aufgrund der Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex (vgl. Tabelle 2.1) verändert sich hierbei die optische Länge der Laserkavität für den Laser und damit die Resonanzfrequenz für die Lasermode. Bei einer Änderung der optischen Länge um den halben Wert der Laserwellenlänge verschiebt sich die Resonanzfrequenz um den Betrag des freien Spektralbereichs. Mit den Parametern für den Laserresonator aus Abschnitt 2.1.4 ergibt sich bei einer Temperaturänderung von  $\Delta T = 1 \text{ K}$  eine Frequenzverschiebung von ungefähr 2,4 GHz. Simulationen zu der Temperaturverteilung, die in [Sch02] gemacht wurden, können den beobachteten zeitlichen Temperaturverlauf und damit auch die Verstimmungsentwicklung gut reproduzieren.

Auf diese Weise wurden etwa 120 Messungen bei vier verschiedenen Laserabständen durchgeführt. Dabei wurde die Verstimmung *vor* dem Ausschalten systematisch variiert. Dadurch ergeben sich verschiedene Driftraten in der Nähe des Nulldurchgangs der Verstimmung. Die Ausschaltdauer des Pumplasers beträgt jeweils 200  $\mu\text{s}$ .

Es stellt sich heraus, daß bei gleichem Laserabstand gut reproduzierbare, (bezogen auf die Einhüllende) qualitativ gleiche Oszillationsszenarien auftreten. Die Driftrate beeinflußt dabei lediglich die Zeitskalen, mit der diese Szenarien ablaufen. Lediglich bei sehr langsamen Driftraten ( $< 4 \text{ MHz/ms}$ ) weichen die Szenarien voneinander ab, was auf nach wie vor vorhandene Fluktuationen der Verstimmung mit relativ kleiner Amplitude zurückzuführen ist. Die Abbildungen 3.25 - 3.27 zeigen exemplarisch die typischen Szenarien für die ver-



**Abbildung 3.24:** Drift der Verstimmung bei kurzem Ausschalten eines Pumplasers. Oben: Zeitreihen in farbkodierter Darstellung (Laser 1 gelb, Laser 2 magenta, Pumplaser für Laser 1 cyan); Unten: JTFA

schiedenen Laserabstände. Die im Text vorkommenden Zeitangaben beziehen sich jeweils auf die Beschriftung der Zeitachse in der zugehörigen Abbildung.

Einige Phänomene lassen sich bei allen Kopplungsstärken beobachten. Direkt nach dem Einschalten zeigt der geschaltete Laser (Laser 1, gelb) das auch vom Einzellaser bekannte Spiking, welches innerhalb von rund  $10\ \mu\text{s}$  abklingt. Es folgen fast immer harmonische, synchrone Oszillationen beider Laser, deren Amplitude mit abnehmender Verstimmung langsam zunimmt. Sobald die Verstimmung einen kritischen Betrag unterschreitet, setzen die weiter unten beschriebenen Szenarien ein. Wird die Verstimmung noch kleiner, kann die Intensitätsdynamik fast völlig aussetzen (bis auf Relaxationsoszillationen mit relativ kleiner Amplitude). Sie beginnt erst wieder, sobald die Verstimmung nach dem Nulldurchgang einen gewissen Betrag erneut überschreitet. Dieser Bereich ohne Dynamik läßt sich im Zusammenhang mit den Fernfeldbildern (kurzzeitige Strukturierung des Fernfeldes, siehe Abschnitt 3.1.5) als optische Phasensynchronisation der beiden Laser interpretieren.

Der Betrag der Verstimmung, bei dem die Phasensynchronisation einsetzt bzw. bei der dieser Bereich wieder verlassen wird, hängt mit dem normierten Abstand der beiden Laser zusammen. Diese Werte lassen sich leider nur recht ungenau aus den JTFA-Berechnungen für die Szenarienzeitreihen interpolieren. Mit ihnen bzw. mit den auf die Relaxationsfrequenz bezogenen Werte können aber im Rahmen einer theoretischen Modellierung Aussagen über Kopplungsstärken gewonnen werden, wie dies in Abschnitt 4.3.1 getan wird.

### Starke Kopplung ( $d \approx 4,1$ )

Abbildung 3.25 zeigt das typische Szenario bei starker Kopplung. Nach dem oben beschriebenen Anwachsen der Amplitude symmetrischer Oszillationen kommt es bei  $5,8\ \text{ms}$  und einer Verstimmung von ungefähr  $4\ \text{MHz}$  zum Ausbruch symmetrischer periodenverdreifachter Pulse mit relativ kleinem Spitzenwert (siehe Abbildung 3.6). Im Anschluß folgt ein Bereich irregulären Pulsens mit einer maximalen Überhöhung von 15, wie dies auch an Hand des kontinuierlichen Spektrums der JTFA abzulesen ist. Die Phasensynchronisation ( $7,0 \dots 10,5\ \text{ms}$ ) stellt sich bei einem Verstimmungsbetrag von  $2,5\ \text{MHz} < |\Delta| < 3\ \text{MHz}$  ein. Beim Wiedereinsetzen der Dynamik werden zunächst symmetrische Pulse beobachtet (beachte diskretes Spektrum). Es schließt sich ein längerer Bereich mit irregulären Oszillationen an, die dann in symmetrische Pulse übergehen. Dieser Übergang (um  $11\ \text{ms}$ ) ist in der JTFA wiederum gut an der Ausbildung diskreter Frequenzanteile zu erkennen. Mit wachsendem Betrag der Verstimmung nimmt die Amplitude der Pulse ab, bis die Dynamik nur noch aus kleinamplitudigen Oszillationen besteht.

### Mittlere Kopplung ( $d \approx 5,5$ )

Eine typische Zeitreihe bei mittlerer Kopplung zeigt Abbildung 3.26. Interessante Dynamik setzt bei  $4,7\ \text{ms}$  bei einem Verstimmungsbetrag von ungefähr  $3\ \text{MHz}$  mit der Ausbildung periodenverdoppelter symmetrischer Oszillationen ein. Diese gehen relativ schnell in symmetrische Pulse über, die sich immer weiter aufteilen bis zu einer maximalen Überhöhung von 23. Die Phasensynchronisation ( $5,0 \dots 5,3\ \text{ms}$ ) stellt sich bei einem Verstimmungsbe-

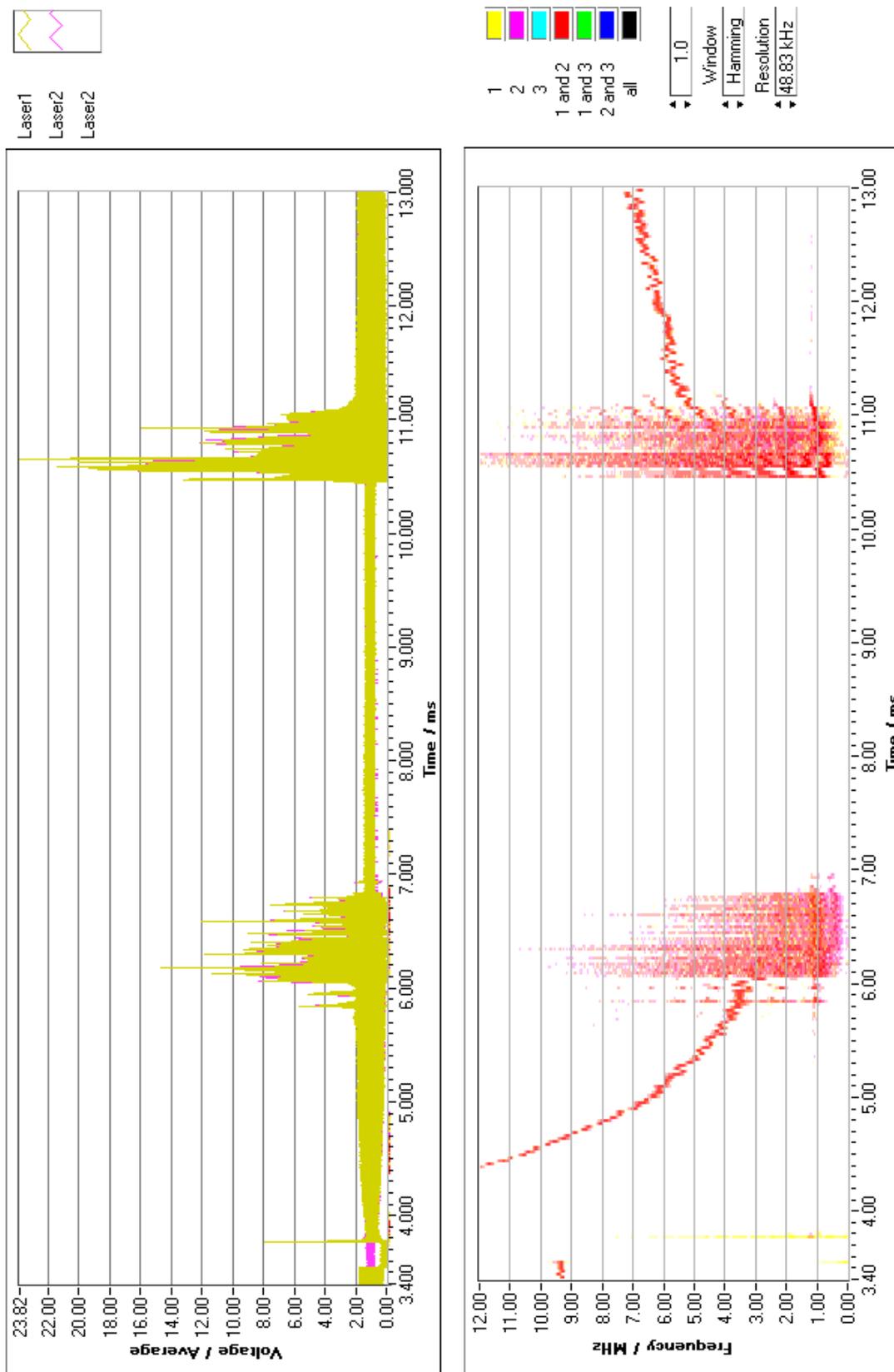


Abbildung 3.25: Transientes Verhalten: sehr starke Kopplung ( $d \approx 4,1$ ). Zeitreihe (oben) und JTFA (unten)

trag von  $|\Delta| \approx 1$  MHz ein. Anschließend oszillieren und pulsen die Laser irregulär, bis bei 5,5 ms lokalisierte Oszillationen mit Periodenverdopplung und komplexen Pulsformen entstehen, wie sie aus Abbildung 3.11 bekannt sind. Ab 5,56 ms besteht die Dynamik aus kurzen Abschnitten von symmetrischen und lokalisierten Oszillationen mit meist komplexen Pulsformen, die dann wieder mit steigendem Verstimmungsbetrag in kleinamplitudige symmetrische Oszillationen übergehen.

### **Schwache Kopplung ( $d \approx 6,4$ )**

Bei schwacher Kopplung zeigen sich größere Unterschiede zu den bisherigen Szenarien. Zunächst (ab 4,8 ms bei einer Verstimmungsbetrag von ungefähr 3 MHz) werden symmetrische Pulse beobachtet mit maximaler Überhöhung von 18, deren Einhüllende die Form einer Doppelresonanzkurve besitzt. Die Phasensynchronisation tritt bei einem Verstimmungsbetrag auf, dessen Größenordnung bei wenigen 100 kHz oder kleiner liegt. Im Anschluß an die Phasensynchronisation entstehen lokalisierte bzw. symmetrischen Oszillationen mit maximalen Überhöhungen von 8. Ein Bereich deutlich ausgeprägter lokalisierter Oszillationen, die denen der Abbildung 3.9 entsprechen, ist ab 5,75 ms zu beobachten.

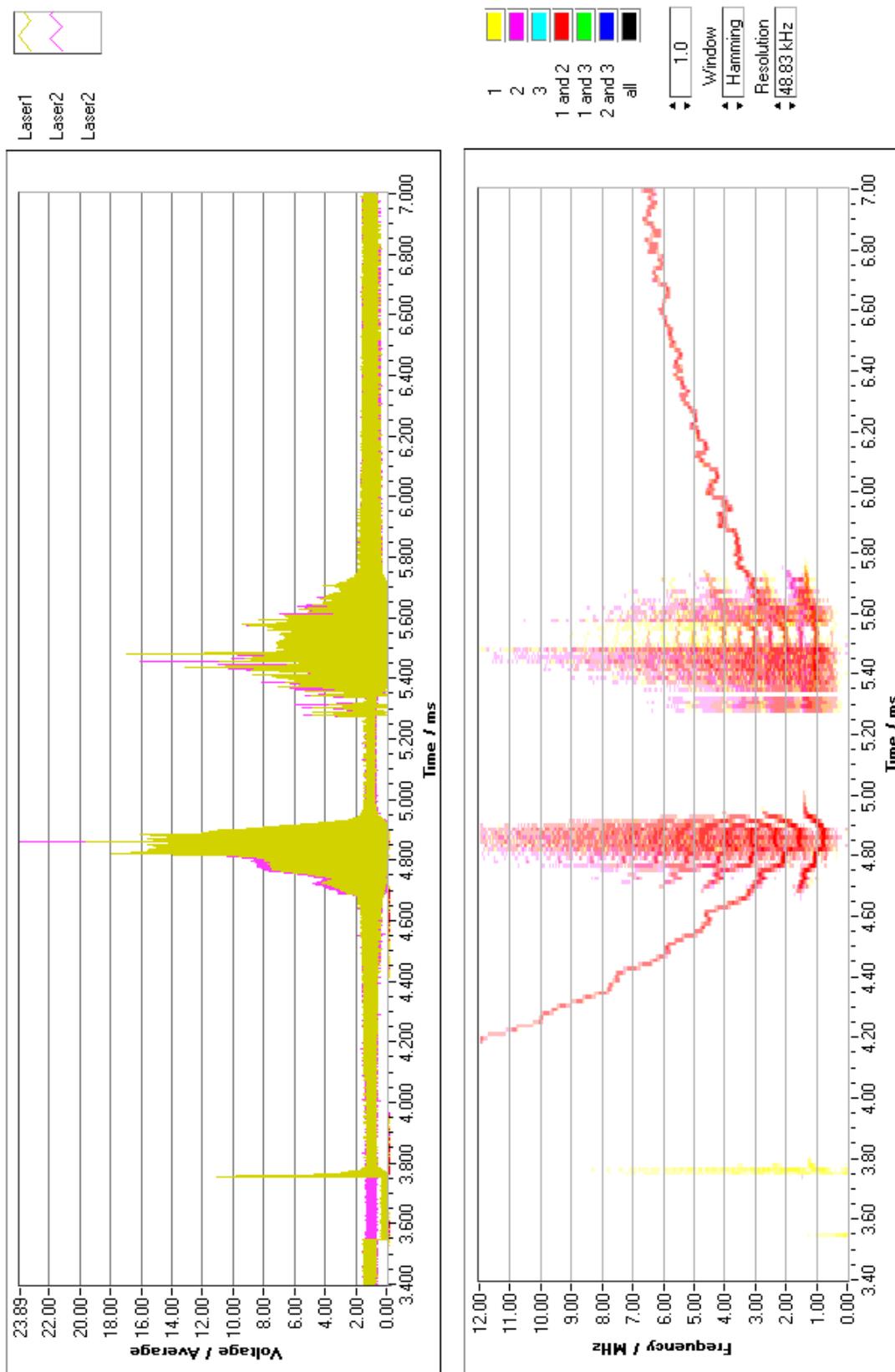


Abbildung 3.26: Transientes Verhalten: mittlere Kopplung ( $d \approx 5,5$ ). Zeitreihe (oben), JTFA (unten).

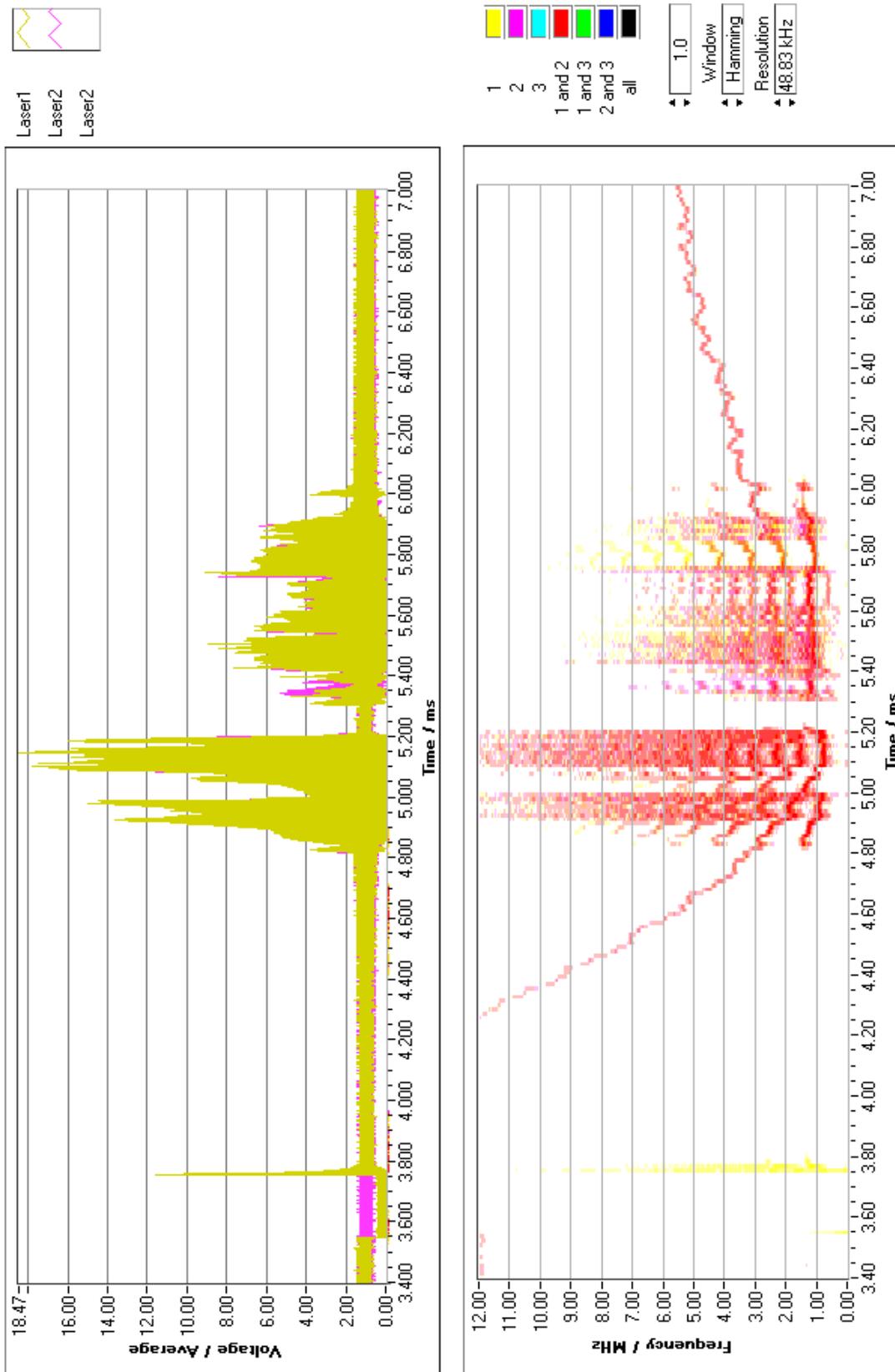


Abbildung 3.27: Transientes Verhalten: schwache Kopplung ( $d \approx 6,4$ ). Zeitreihe (oben) und JTFA (unten)

### 3.4 Drei-Lasersystem

Der im Kapitel 2 beschriebene experimentelle Aufbau ist für den Betrieb von drei Nd:YVO<sub>4</sub>-Lasern ausgelegt. Da sich die vorliegende Arbeit auf das Zwei-Lasersystem konzentriert, sollen die erzielten Ergebnisse für das Drei-Lasersystem (in [MFL00], [FoKB02] veröffentlicht) im folgenden kurz referiert werden.

Die Betriebsparameter (wie die Pumpleistung) für das Drei-Laserarrangement sind die gleichen wie sie am Anfang des Kapitels für zwei Laser angegeben wurden. Das Drei-Lasersystems besitzt grundsätzliche Unterschiede im Vergleich zu zwei Lasern was die Systemparameter Verstimmungen und Kopplungsstärken angeht: es gibt zwei unabhängige Verstimmungs- und drei unabhängige Kopplungsparameter. Dies führt dazu, daß die im Abschnitt 3.1.2 erwähnte Austauschsymmetrie nicht mehr vorhanden ist und somit echte symmetriebrechende Oszillationen nicht mehr auftreten können. Diese Aussage bleibt auch dann bestehen, wenn man die Kopplung symmetrisiert, indem die Laser in Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet werden.

In den durchgeführten Experimenten wurden im wesentlichen zwei geometrische Konfigurationen für die Laser untersucht: zum einen die schon erwähnte symmetrische Anordnung in Form eines gleichseitigen Dreiecks, zum anderen die fast lineare Konfiguration, die man als stark gestauchtes gleichschenkliges Dreieck ansehen kann.

In der symmetrischen Anordnung konnten für die optische Phasendynamik mehrere Zustände gefunden werden. Verschieden ausgerichtete Streifenstrukturen (jeweils eine zu einem bestimmten Zeitpunkt) im Fernfeld deuten auf eine Phasensynchronisation zwischen Paaren von Lasern hin, wiederum in Gegenphase wie dies schon vom Zwei-Lasersystem her bekannt ist. Eine vollständige Phasensynchronisation *aller* drei Laser macht sich in Form einer hexagonalen Struktur des Fernfeldes bemerkbar. Dies läßt auf eine Phasendifferenz von  $\Delta\phi = 2\pi/3$  zwischen den einzelnen Lasern schließen (vgl. [Ok92]).

Für die Intensitätsdynamik wurden folgende Beobachtungen gemacht. Stellt man eine der beiden unabhängigen Verstimmungen relativ groß ein und die andere klein, so hat man ein Paar von Lasern mit relativ starker Wechselwirkung und zwei Paare mit relativ schwacher. Es wird ein Verhalten beobachtet, daß einem Zwei-Lasersystems entspricht, d. h. ein Laser von den dreien zeigt kaum oder gar keine Dynamik. Bei anderen Verstimmungsverhältnissen läßt sich Dynamik in allen drei Laser finden, wie z. B. symmetrische Oszillationen oder Pulse. Auch zeitgleiches irreguläres Verhalten konnte bei den drei Lasern beobachtet werden. Bei ähnlichen Systemparametern lassen sich Oszillationstypen finden, die lokalisierten Oszillationen entsprechen, wobei aber die oben gemachte Einschränkung zur Symmetriebrechung beachtet werden muß. Es finden sich Beispiele für einen stark pulsierenden Laser, während die beiden anderen symmetrische Oszillationen ausführen. Es können aber auch zwei Laser stark pulsieren, während der dritte mit relativ kleiner Amplitude oszilliert.

Bei der fast linearen Anordnung sind die Abstände zwischen den Lasern so gewählt, daß die Kopplung der beiden äußeren Laser sehr klein und zu vernachlässigen ist. Bei der beobachteten Phasensynchronisation besitzt das Fernfeld eine Streifenstruktur, die auf eine optische Phasendifferenz von  $\Delta\phi = \pi$  zwischen den jeweiligen äußeren und mittleren Laser hindeutet.

In der Intensitätsdynamik dieses Arrangements konnte u. a. eine Situation gefunden werden, wo symmetrische Oszillationen in den beiden (kaum miteinander wechselwirkenden) äußeren Laser auftraten, der mittlere Laser dagegen eine fast stationäre Leistung emittierte.

### 3.5 Zusammenfassung

Im Experiment konnte für das System zweier räumlich transversal gekoppelter Laser in Abhängigkeit von der gegenseitigen Verstimmung und des räumlichen Abstandes eine Intensitätsinstabilität gefunden werden. Diese trat in Form von symmetrischen Oszillationen und Pulse, symmetriebrechenden lokalisierten Oszillationen, Übermodulationen und irregulären Oszillationen auf. Bei den symmetrischen und lokalisierten Oszillationen konnten Periodenverdopplungen und höhere Periodenvervielfachungen, sowie komplexe Puls- und Oszillationsformen beobachtet werden.

Es existieren ebenfalls Systemparameterbereiche, in denen optische Phasensynchronisation vorliegt. Die elektrischen Laserfelder schwingen hier in Gegenphase.

Fluktuationen im Systemparameter der Verstimmung machten die Zuordnung der beobachteten Phänomene zu einem Systemparametersatz, bestehend aus dem Abstand der Laser und der Verstimmung, schwierig. Mit Hilfe einer statistischen Untersuchung einer relativ großen Anzahl von Zeitreihen konnten aber Aussagen über die Häufigkeit des Auftretens verschiedener Oszillationsformen in Abhängigkeit von dem Laserabstand gemacht werden.

Unter Ausnutzung thermischer Effekte bei dem kurzzeitigen Ausschalten eines Pumpstrahls konnte eine monotone, relativ glatte Verstimmungsdrift produziert werden. Mit ihrer Hilfe ließen sich für verschiedene Laserabstände typische Dynamikszenerien beobachten.



# Kapitel 4

## Theorie und Modellsystem

Der im folgenden vorgestellte Modellierungsansatz für ein System räumlich transversal gekoppelter Laser ist bewußt möglichst einfach gehalten bzw. gewählt worden, da grundsätzliche Einsichten in das Verhalten gekoppelter Laser gewonnen werden sollen. Dazu gehört die Forderung, daß es sich bei den untersuchten Lasern um Einzelmoden-Lasern handeln soll. Weiterhin soll die bewirkte Kopplung zwischen den einzelnen Lasern relativ schwach sein; d. h. der einzelne Laser bleibt als separate Entität beschreibbar, die nur eine relativ leichte äußere Störung erfährt. Darüberhinaus ist eine identische Präparation aller Laser angestrebt, was sich in gleichen Werten für Größen wie Pumpleistungen, Resonatorverluste und -umlaufzeiten der Laser niederschlägt.

Zunächst wird als Grundlage für die Modellierung des gekoppelten Systems eine kurze Herleitung für die Beschreibung eines Einmoden-Lasers gegeben. Die sich ergebenden, allgemeinen Maxwell-Bloch-Gleichungen lassen sich dann für die experimentell erzeugten Laser zu den ‘Klasse-B-Gleichungen’ vereinfachen. Diese Klasse-B-Gleichungen bilden den Grundbaustein für das Modell gekoppelter Oszillatoren. Die Herleitung lehnt sich an die Behandlung eines Einmoden-Lasers aus [MaWo95] an, die dort wesentlich detaillierter ausgeführt ist.

### 4.1 Gleichungen für den Einzellaser

Hier soll die Herleitung für die Beschreibungsgleichungen eines einmodigen Lasers skizziert werden. Ausgangspunkt ist die klassische Wellengleichung für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \sigma \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} = \mu_0 \ddot{\mathbf{P}} \quad (4.1)$$

mit der Polarisation  $\mathbf{P}$ , der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$ , der elektrischen Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_0$ , der magnetischen Influenzkonstante  $\mu_0$ , sowie der Lichtgeschwindigkeit  $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$ .

Die Randbedingungen eines Laserresonators in Form von (teiltransmittierenden) Spiegeln mit bestimmter Krümmung bewirken, daß in ihm nur bestimmte elektrische Feldverteilungen (Moden), die definierte Frequenzen  $\omega_c$  besitzen, schwingen können. Da sich

die Betrachtung auf einen einmodigen Laser beschränkt, wird angenommen, daß nur eine Feldverteilung angeregt ist. Der Einfachheit halber soll diese Feldverteilung die Form einer ebenen Wellen haben (alternativ könnte man u. a. eine Verteilung in Form eines Gaußstrahls betrachten). Dies macht den folgenden Ansatz für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und die Polarisation  $\mathbf{P}$  in einem Resonator, der sich in  $z$ -Richtung erstreckt, sinnvoll:

$$E(z,t) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}(z,t) \cdot e^{i(k_0 z - \omega_c t)} + c.c.) \quad (4.2)$$

$$P(z,t) = \rho \cdot \frac{i}{2} (\mathcal{P}(z,t) \cdot e^{i(k_0 z - \omega_c t)} - c.c.) \quad (4.3)$$

mit dem Wellenvektor  $k_0 = c/\omega_c$  und der Teilchendichte  $\rho$  des aktiven Mediums im Resonator. Die Größen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{P}$  stellen die nur langsam gegenüber der Periode der optischen Schwingungen variierenden komplexen Einhüllenden dar. Im weiteren wird davon ausgegangen, daß sich die Einhüllenden nur relativ wenig in  $z$ -Richtung ändern, so daß entsprechende Abhängigkeiten der dynamischen Größen hiervon vernachlässigt werden können.

Wie die makroskopische Größe  $P$  mit den mikroskopischen Größen des aktiven Lasermediums verknüpft ist, und wie diese mit dem elektrischen Feld  $E$  wechselwirken, ergibt sich aus quantenmechanischen Überlegungen, die hier nicht näher dargelegt werden. Es wird hierzu von einem atomaren Zwei-Niveau-System ausgegangen. Der Laserübergang, mit einer energetischen Differenz  $\hbar\omega_a$ , soll homogen verbreitert sein. Mit Hilfe der Schrödingergleichung für ein solches Zwei-Niveau-System und der Ansätze für  $P$  und  $E$  ((4.2), (4.3)) ergibt sich eine Evolutionsgleichung für die Einhüllende der Polarisation zu

$$\dot{\mathcal{P}} = -i(\omega_a - \omega_c) \mathcal{P} - 2 \frac{|\mu|^2}{\hbar} \mathcal{D} E e^{i\omega_c t} \quad (4.4)$$

mit der atomaren Resonanzfrequenz  $\omega_a$  und dem elektrischen Dipolmatrixelement  $\mu$ , das die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Atomen und der elektrischen Feldstärke angibt.

Es erscheint in dem Ausdruck für  $\dot{\mathcal{P}}$  die Größe der normierten Inversion  $\mathcal{D}$ , die ein Maß für den Besetzungsunterschied zwischen den beiden atomaren Niveaus darstellt. Für sie ergibt sich ebenfalls mit Hilfe der Schrödingergleichung die Bewegungsgleichung

$$\dot{\mathcal{D}} = \frac{1}{\hbar} (\mathcal{P}^* e^{-i\omega_c t} + \mathcal{P} e^{i\omega_c t}) E \quad (4.5)$$

Für eine realitätsnahe Beschreibung für  $\dot{\mathcal{P}}$  und  $\dot{\mathcal{D}}$  fehlt es noch an den phänomenologischen Dämpfungstermen  $-\gamma_{\perp} \mathcal{P}$  und  $-\gamma_{\parallel} \mathcal{D}$ . Bei der Gleichung für die Inversion kommt noch ein Term  $\gamma_{\parallel} \mathcal{D}_0$  hinzu, der den Aufbau von Inversion durch äußere Pumpprozesse berücksichtigt. Nach Einsetzen des Ansatzes für das elektrische Feld  $E$  (Gleichung (4.2)) können die Evolutionsgleichungen durch die ‘Rotating Wave Approximation’ weiter vereinfacht werden. Bei dieser Näherung wird eine zeitliche Transformation auf einen mit  $\omega$  oszillierenden Bezugsrahmen vorgenommen; resultierende schnell oszillierende Terme mit Frequenzen von ungefähr  $2\omega$  können dann (zeitgemittelt gesehen) vernachlässigt werden.

Die Gleichungen besitzen dann die Form

$$\dot{\mathcal{P}} = -\gamma_{\perp}\mathcal{P} - i(\omega_a - \omega_c)\mathcal{P} - \frac{|\mu|^2}{\hbar}\mathcal{D}\mathcal{E} \quad (4.6)$$

$$\dot{\mathcal{D}} = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \mathcal{D}_0) + \frac{1}{2\hbar}(\mathcal{P}^*\mathcal{E} + \mathcal{P}\mathcal{E}^*) \quad (4.7)$$

Die Wellengleichung kann mit Hilfe der Ansätze für das elektrische Feld (Gleichung (4.2)), für die Polarisation (Gleichung (4.3)) und der Näherung der ‘Slowly Varying Envelope Approximation’, bei der davon ausgegangen wird, daß sich die Einhüllende des elektrischen Feldes bezogen auf die Zeitskala der optischen Frequenz nur sehr langsam ändert ( $|\dot{\mathcal{E}}| \ll \omega|\mathcal{E}|$ ,  $|\dot{\mathcal{E}}| \ll \omega^2|\mathcal{E}|$ ), vereinfacht werden zu

$$\dot{\mathcal{E}} = -k\mathcal{E} - \frac{\rho\omega_c}{2\varepsilon_0}\mathcal{P} \quad (4.8)$$

mit dem Dämpfungsterm  $k\mathcal{E}$ . Dieser setzt sich aus mehreren Anteilen, wie Streuverluste, Auskoppel- und Beugungsverluste des Feldes an den teilweise transmittierenden Resonatorspiegeln, sowie Verluste durch die Leitfähigkeit des Lasermaterials zusammen. Im konkreten Fall von Kristallmaterialien, wie Nd:YVO<sub>4</sub>, kann der letzte Anteil vernachlässigt werden.

Im weiteren soll die Verbreiterung des homogenen Laserübergangs sehr viel größer als die Verstimmung  $\omega_a - \omega_c$  sein. In diesem Fall kann dann  $\omega_a = \omega_c$  angenommen werden; es liegt Resonanz vor.

Zusammengefaßt erhält man also drei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung für die zwei komplexen Größen  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{P}$  und für die reellen Größe  $\mathcal{D}$ :

$$\dot{\mathcal{E}} = -k\mathcal{E} - \frac{\rho\omega_c}{2\varepsilon_0}\mathcal{P} \quad (4.9)$$

$$\dot{\mathcal{P}} = -\gamma_{\perp}\mathcal{P} - \frac{|\mu|^2}{\hbar}\mathcal{E}\mathcal{D} \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathcal{D}} = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \mathcal{D}_0) + \frac{1}{2\hbar}(\mathcal{E}\mathcal{P}^* + \mathcal{E}^*\mathcal{P}) \quad (4.11)$$

Diese letzten Ausdrücke sind *eine* Möglichkeit der Formulierung des Maxwell-Bloch-Gleichungssystems. Es stellt das einfachste Modell zur allgemeinen Beschreibung eines einmodigen Lasers durch die drei physikalischen Größen der Einhüllenden des elektrischen Feldes  $\mathcal{E}$  und der Polarisation  $\mathcal{P}$ , sowie der Besetzungsinversion  $\mathcal{D}$  dar.

Es sei erwähnt, daß die Maxwell-Bloch-Gleichungen formal gleichwertig mit den sogenannten Haken-Lorenz-Gleichungen sind, die unter bestimmten Parameterbedingungen chaotisches Verhalten als Lösungen besitzen.

Die Größe der Zeitskalen, auf denen sich die Dämpfungskonstanten  $\gamma_{\perp}$ ,  $\gamma_{\parallel}$  und  $k$  bewegen, bestimmt nun das zeitliche Verhalten eines Lasers. Aufbauend auf den Größenrelationen der Dämpfungszeitkonstanten läßt sich ein Klassifizierungssystem für Laser finden, das im folgenden vorgestellt wird.

### 4.1.1 Klasse-A-Laser

Hier gelten die Relationen  $\gamma_{\perp} \approx \gamma_{\parallel} \gg k$ . Polarisation und Inversion besitzen also große Dämpfungskonstanten im Vergleich zum elektrischen Feld. Sie folgen dem Feld fast instantan. Ihre Werte werden nur durch den Momentanwert der Feldstärke bestimmt und besitzen in diesem Sinne keine Eigendynamik mehr. Formal führt dies darauf, daß die zeitlichen Ableitungen dieser Größen gleich null gesetzt werden können. Diese ‘adiabatische Elimination’ läßt nur *eine* zeitliche Evolutionsgleichung für das elektrische Feld übrig. Für das dynamische Verhalten des Lasers folgt daraus, daß die Intensität einen konstanten Wert annimmt. Ein solches System kann nur einen Fixpunkt als Attraktor des eindimensionalen Phasenraums besitzen.

Vertreter dieser Klasse sind die meisten Gas-Laser, wie der Argon-Ionen-Laser oder der Helium-Neon-Laser, sowie Farbstofflaser.

### 4.1.2 Klasse-C-Laser

Hier besitzen die Dämpfungskonstanten ungefähr die gleichen Größenordnungen:  $\gamma_{\perp} \approx \gamma_{\parallel} \approx k$ . Keine der Gleichungen kann eliminiert werden. In diesem Fall kann es unter Erfüllung bestimmter Bedingungen zu chaotischem Verhalten kommen. Diese Bedingungen bei einem Laser zu verwirklichen, ist praktisch nur schwer möglich, gelang aber bei einem Ammoniak-Laser, der auf einer Wellenlänge von 81,5  $\mu\text{m}$  schwing [WKEC85].

### 4.1.3 Klasse-B-Laser

Hier gilt  $\gamma_{\perp} \gg k > \gamma_{\parallel}$ . In diesem Fall kann nur die Polarisation adiabatisch eliminiert werden. Es ergeben sich zwei Gleichungen für das elektrische Feld und die Inversion. Laser, die dieser Klasse angehören, emittieren normalerweise eine konstante Leistung. Transiente Intensitätsdynamik in Form von Relaxationsoszillationen wird häufig beobachtet und weiter unten genauer betrachtet. Die Beschreibungsgleichungen lauten:

$$\dot{\mathcal{E}} = \left( -k + \frac{\rho\omega_c|\mu|^2}{2\varepsilon_0\hbar\gamma_{\perp}} \mathcal{D} \right) \mathcal{E} \quad (4.12)$$

$$\dot{\mathcal{D}} = -\gamma_{\parallel}(\mathcal{D} - \mathcal{D}_0) + \frac{|\mu|^2}{\hbar^2\gamma_{\perp}} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{D} \quad (4.13)$$

Um die Gleichungen (4.12) und (4.13) in eine numerisch besser behandelbare Form zu bringen, werden einige Transformationen durchgeführt. Dazu sollen im folgenden die Verluste und Gewinne für das elektrische Feld pro Resonatorumlauf betrachtet werden. Zunächst separiert man die Resonatorumlaufzeit  $\tau_c$  aus der rechten Seite der Gleichung (4.12):

$$\dot{\mathcal{E}} = \tau_c^{-1} (-\alpha + G) \mathcal{E} \quad (4.14)$$

mit dem Verlustkoeffizienten pro Umlauf  $\alpha = k/\tau_c$  und der Verstärkung

$$G = \tau_c \frac{\rho\omega_c|\mu|^2}{2\varepsilon_0\hbar\gamma_{\perp}} \mathcal{D} = a\mathcal{D}$$

Ersetzen von  $\mathcal{D}$  durch  $G$  in (4.13) ergibt (unter Nutzung des Zusammenhangs  $\tau_f^{-1} = \gamma_{\parallel}$  für die Lebensdauer des oberen Laserniveaus):

$$\dot{G} = \tau_f^{-1} \left( p - G - \frac{|\mathcal{E}|^2}{|\mathcal{E}_0|^2} G \right) \quad (4.15)$$

mit dem Pumpkoeffizienten  $p = a\mathcal{D}_0$ . In dieser Gleichung wurde eine Normierungskonstante  $\mathcal{E}_0$  für die elektrische Feldstärke eingefügt, die den Ausdruck vereinfachen soll. Dazu wird folgende Überlegung angestellt: die Inversion besitzt zwei Verlustmechanismen, nämlich

1. Spontane Emission aus dem oberen Laserniveau mit der Rate  $\gamma_{\parallel}$ .
2. Induzierte Emission mit der Rate  $\frac{|\mu|^2}{\hbar^2 \gamma_{\perp}} |\mathcal{E}|^2$ .

Der Betrag der Normierungsfeldstärke bestimmt sich nun aus der Forderung, daß bei ihr die Verlustraten gleich groß sein sollen, zu:

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\gamma_{\parallel} \hbar^2 \gamma_{\perp}}{|\mu|^2}} \quad (4.16)$$

Hiermit folgt:

$$\dot{G} = \tau_f^{-1} (p - G - G|E'|^2) \quad (4.17)$$

mit der normierten Feldstärke  $E' = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ .

In der weiter unten folgenden Diskussion für gekoppelte Laser wird es sich als nützlich erweisen, die Feldstärke zu transformieren mit:

$$E = E' \cdot e^{i(\omega_c - \omega_0)t} = E' \cdot e^{i\omega t} \quad (4.18)$$

$\omega$  stellt die Verstimmung der Lasermodenfrequenz zu einer willkürlich gewählten Frequenz  $\omega_0$  dar (Die Willkür wird dadurch eingeschränkt, daß auch  $E'$  eine nur langsam variierende Amplitude sein muß). Dies macht den Vergleich von Frequenzdifferenzen bei mehreren Lasern, die auf unterschiedlichen Frequenzen  $\omega_c$  schwingen, mit Hilfe einer solchen Referenzfrequenz einfacher. Die Gleichung für  $E$  lautet dann:

$$\dot{E} = \tau_c^{-1} (G - \alpha) E + i\omega E \quad (4.19)$$

Die Ausdrücke für die zeitliche Entwicklung von  $E$  und  $G$  werden im folgenden als Klasse-B-Lasergleichungen bezeichnet.

Zur Klasse B gehören neben den Halbleiterlasern, viele Festkörperlaser (wie Nd:YAG- und Nd:YVO<sub>4</sub>-Laser) und der Titan-Saphir-Laser. Diese Laser zeigen im kontinuierlichen Betrieb eine transiente Instabilität gegenüber Fluktuationen in der Pumpleistung oder gegenüber mechanischen Störungen. Dies wird im folgenden Unterabschnitt untersucht.

## Relaxationsschwingungen

Eine lineare Stabilitätsanalyse der Klasse-B-Gleichungen (oder auch der Ratengleichungen) liefert folgende Erkenntnisse: die elektrische Feldamplitude und demnach die Intensität führt nach Störungen des Systems Schwingungen mit einem exponentiellen Abfall um den Gleichgewichtswert aus. Es treten die sogenannten Relaxationsschwingungen auf. Für die Relaxationskreisfrequenz  $\omega_{\text{rel}}$  ergibt sich nach [Sieg86]:

$$\omega_{\text{rel}} = 2\pi\nu_{\text{rel}} = \sqrt{\left(\frac{P_{\text{in}}}{P_0} - 1\right) \cdot \frac{2\alpha}{\tau_f\tau_c}} \quad (4.20)$$

Das Symbol  $P_{\text{in}}$  steht für die Pumpleistung,  $P_0$  für die Schwellpumpleistung des Festkörperlaser. Obige Formel gilt unter der Voraussetzung, daß  $\tau_f$  sehr viel größer als  $\alpha/\tau_c$  ist.

Die Relaxationsfrequenz  $\omega_{\text{rel}}$  wird noch wichtig sein, um das Zustandekommen und den Mechanismus der beobachteten Intensitätsinstabilität gekoppelter Laser zu verstehen.

## 4.2 Gekoppelte Laser

Basierend auf den Klasse-B-Gleichungen soll hier ein Beschreibungsmodell für zwei gekoppelte Laser angegeben werden. Anschaulich kann man folgende Situation betrachten: Die gekoppelten Laser haben eine gaußförmige Feldverteilung mit Radius  $w$  und Abstand  $d$ . Sie werden optisch gepumpt von Gaußstrahlen mit Radius  $w'$ . Die Kopplung soll einzig in einem räumlichen Überlappen der Laserfelder bestehen. Die angestrebte Experimentalsituation wird durch die Abbildung 4.1 veranschaulicht. Sie zeigt schematisch die durch Pumpstrahlen erzeugte Verstärkungsverteilung und die daraus resultierenden Laserfelder der beiden Laser im aktiven Medium.

Allein durch das Überschneiden der elektro-magnetischen Laserfelder soll eine Kopplung der beiden Laser zustandekommen. Es soll *keine* Überlappung der Inversionen beziehungsweise Verstärkungsgebiete vorliegen. Dies bedingt eine entsprechend kleine Wahl der Radien der Pumpstrahlen. Die beiden Laser werden weiterhin durch jeweils zwei Gleichungen für das elektrische Feld und die Verstärkung beschrieben. Durch die Kopplung sind nun aber die Klasse-B-Gleichungen für die elektrischen Felder  $E'_i$  der einzelnen Laser um einen Term  $\kappa E'_j$  mit dem Kopplungskoeffizienten  $\kappa$  zu ergänzen in Analogie zu dem 'Injection-Locking':

$$\dot{E}'_1 = \tau_c^{-1} [(G_1 - \alpha_1)E'_1 - \kappa E'_2] + i\omega_1 E'_1 \quad (4.21a)$$

$$\dot{G}_1 = \tau_f^{-1} (p_1 - G_1 - G_1|E'_1|^2) \quad (4.21b)$$

$$\dot{E}'_2 = \tau_c^{-1} [(G_2 - \alpha_2)E'_2 - \kappa E'_1] + i\omega_2 E'_2 \quad (4.21c)$$

$$\dot{G}_2 = \tau_f^{-1} (p_2 - G_2 - G_2|E'_2|^2) \quad (4.21d)$$

Die Indizierung der Koeffizienten berücksichtigt die mögliche Verschiedenheit der Laser. Im weiteren werden allerdings nur gleich präparierte Laser betrachtet, d. h.  $p_1 = p_2 = p$ ,

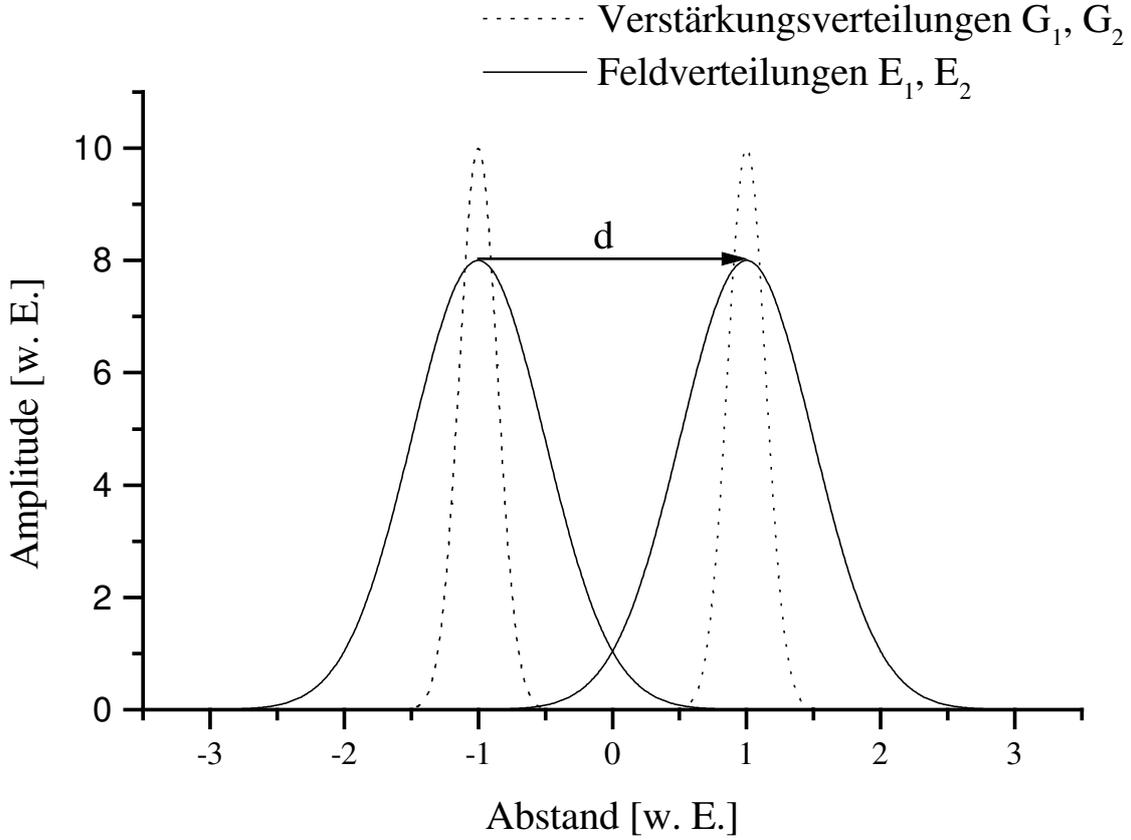


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Verstärkungs- und Feldverteilungen.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Die Größen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bezeichnen die Verstimmung der einzelnen Laser zu einer willkürlich gewählten Bezugsfrequenz.

Als ein *mögliches* Maß für die Stärke der Kopplung bietet sich das Integral des Skalarprodukts der elektrischen Felder über die zur Ausbreitungsrichtung transversale Ebene an. Wesentliche Beiträge zum Integral wird nur der Überlappbereich erbringen. Der transversale Teil der Laserfelder sei durch ein Gaußsches Strahlprofil mit konstanter Phasenfront beschreibbar:

$$\mathbf{E}'_i(x,y,t) = \frac{E'_i(t)}{\pi w} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad i = 1,2 \quad (4.22)$$

mit der Größe  $w$  als Strahlradius. Das Integral des Produkts der durch den Abstand  $d$  getrennten Gaußverteilungen über die transversale Ebene ergibt dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}'_1(x+d,y,t) \cdot \mathbf{E}'_2^*(x,y,t) dx dy = \frac{E'_1(t)E'_2{}^*(t)}{2\pi w} \exp\left(-\frac{d^2}{2w^2}\right) \quad (4.23)$$

Diese Größe muß nun noch normiert werden, um den Kopplungskoeffizienten  $\kappa$  zu ergeben. Dazu wird gefordert, daß  $\kappa$  den Betrag 1 besitzt bei einem Abstand von  $d = 0$ , also bei einer vollständigen Überlagerung der Strahlen. Somit folgt für den Betrag des Koeffizienten:

$$|\kappa| = \exp\left(-\frac{d^2}{2w^2}\right) \quad (4.24)$$

Ausgedrückt im Zusammenhang mit den normierten Abstand  $\tilde{d}$ , der in Abschnitt 2.2.2 eingefügt wurde, ergibt sich:

$$|\kappa| = \exp\left(-\frac{\tilde{d}^2}{2}\right) \quad (4.25)$$

Die Frage, wie das Vorzeichen zu wählen ist, kann mit dieser Vorgehensweise nicht geklärt werden. Das Vorzeichen ist den experimentellen Resultaten so anzupassen, daß das Modell mit dem Experiment konsistente Ergebnisse liefert (Aus solchen experimentellen Ergebnissen folgt, daß  $\kappa$  mit einem positives Vorzeichen versehen werden muß). Ebenso stellt sich die Frage, ob die Größe  $\kappa$  nicht auch einen imaginären Anteil besitzen kann. Diese Frage wird weiter unten behandelt.

### 4.3 Modell-Dynamik

Um einen Einblick in die mögliche Dynamik zu bekommen, die ein System aus gekoppelten Lasern zeigen könnte, ist es vorteilhaft die Gleichungen weiter zu transformieren. Dazu werden die komplexen Feldamplituden umgeschrieben zu  $E'_i = E_i \times \exp i\varphi_i$  mit der reellen Amplitude  $E_i$  und der optischen Phase  $\varphi_i$ . Für zwei Laser führt dies zu:

$$\dot{E}_1 = \frac{1}{\tau_c} [(G_1 - \alpha) E_1 - \kappa E_2 \cos \phi] \quad (4.26a)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{1}{\tau_c} [(G_2 - \alpha) E_2 - \kappa E_1 \cos \phi] \quad (4.26b)$$

$$\dot{G}_1 = \frac{1}{\tau_f} (p - G_1 - G_1 |E_1|^2) \quad (4.26c)$$

$$\dot{G}_2 = \frac{1}{\tau_f} (p - G_2 - G_2 |E_2|^2) \quad (4.26d)$$

$$\dot{\phi} = \Delta + \frac{\kappa}{\tau_c} \left( \frac{E_1}{E_2} + \frac{E_2}{E_1} \right) \sin \phi \quad (4.26e)$$

mit der optische Phasendifferenz  $\phi = \varphi_2 - \varphi_1$  und der optischen Frequenzdifferenz  $\Delta = \omega_2 - \omega_1$ .

### 4.3.1 Instabilitätsmechanismus

Ausgehend von den Gleichungen 4.26 erkennt man, daß eine mögliche Dynamik in der Intensität im wesentlichen durch die Phasendifferenz  $\phi$  getrieben wird. Die Form der Gleichung 4.26e soll im folgenden in einer vereinfachten Form, nämlich der Adlergleichung, diskutiert werden.

#### Optische Phasendynamik und Adlergleichung

Unter der Annahme, daß die elektrischen Feldgrößen  $E_i$  für alle Zeiten  $t$  identisch sind, ergibt sich für die Gleichung 4.26e folgende Form:

$$\dot{\phi} = \Delta + 2\kappa/\tau_c \times \sin \phi \quad (4.27)$$

Dieser Typ von Evolutionsgleichung ist in der Literatur als Adlergleichung bekannt. Sie wurde in den 40er Jahren des letzten Jahrhunderts im Zusammenhang mit gekoppelten elektrischen Schwingkreisen behandelt. Vom Standpunkt der Dynamik aus gesehen, sind zwei Arten der Lösung für diese Gleichung zu unterscheiden: Für den Fall  $\Delta \leq 2\kappa/\tau_c$  ergibt sich eine stationäre Lösung  $\phi_{\text{stat}}$  für die Phasendifferenz; es liegt Phasensynchronisation vor. Die genauere Betrachtung liefert:

$$\phi_{\text{stat}} = \arcsin(-\Delta/(2\kappa/\tau_c)) \quad (4.28)$$

Aufgrund der Eigenschaften der arcsin-Funktion existieren zwei Lösungszweige, nämlich der eine zentriert um  $\phi_{\text{stat}} = 0$  für  $\Delta = 0$ , der andere um  $\phi_{\text{stat}} = \pi$  für  $\Delta = 0$ . Die Stabilität der Lösungszweige (im Sinne eines Attraktors für die Gleichung) hängt vom Vorzeichen von  $\kappa$  ab, im betrachteten Fall ist der  $\pi$ -Zweig der stabile.

Der entsprechende Fall  $\Delta > 2\kappa/\tau_c$  führt zu einer stetig mit der Zeit anwachsenden Phasendifferenz. Für  $\Delta \gg 2\kappa/\tau_c$  ergibt sich der einfache Zusammenhang  $\phi = \Delta t$ . Die genaue Lösung ergibt sich nach [Bron] zu:

$$\phi(t) = 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{\Delta^2 - \kappa^2}}{\Delta} \tan \frac{\sqrt{\Delta^2 - \kappa^2}}{2} t - \frac{\kappa}{\Delta} \right), \text{ für } \Delta > 2\kappa/\tau_c \quad (4.29)$$

### 4.3.2 Resonanz-Entdämpfung der Relaxationsschwingungen

Der eigentliche Destabilisierungsmechanismus besteht in einer Resonanz-Entdämpfung der Relaxationsschwingungen der einzelnen Laser. Besitzt der Betrag der Verstimmung ungefähr die Größe der Relaxationsfrequenz so können die Treiberterme der Gleichungen 4.26a, 4.26b ( $E_i \cos \phi$  mit  $\phi = \Delta t$  für den Fall, daß man relativ weit entfernt von der Phasensynchronisationsschwelle der Adlergleichung ist) Schwingungen entfachen. Ebenso kann man bei Verstimmungen, die Vielfachen bzw. einfachen Bruchteilen der Relaxationsfrequenz entsprechen, ebenfalls (superharmonische bzw. subharmonische) Resonanz erwarten.

### 4.3.3 Modellgleichungssymmetrien

Aus mathematischen Symmetrien der Modell-Gleichungen lassen sich Aussagen über die mögliche Lösungen und deren Eigenschaften treffen.

Das Zwei-Laser-Modellgleichungssystem ist symmetrisch bezüglich der Vertauschung  $E_i \rightarrow E_j, G_i \rightarrow G_j, \phi_i \rightarrow \phi_j$ . Die beiden Laser sind demnach vertauschbar. Die Eigenschaften der möglichen Lösungen sollten diese Symmetrie widerspiegeln, d. h. die entsprechenden dynamischen Variablen der Laser zeigen die identische bzw. ähnliche zeitliche Entwicklung. Existieren andersartige Lösungen, so liegt eine ‘Symmetriebrechung’ vor (vgl. hierzu auch den Abschnitt zu den Lokalisierten Oszillationen 3.1.2).

Das Austauschen des Vorzeichens der Verstimmung läßt die Gleichungen ebenfalls invariant. Nur der Betrag der Verstimmung beeinflußt die Dynamik des Modells.

## 4.4 Alternative Modellierung des Kopplungskoeffizienten

Aus den Daten ihres Experiments, das in [Bou00] beschrieben wird und ebenfalls ein System zweier transversal gekoppelter Microchip-Laser betrachtet, folgern die Autoren, daß zur Modellierung ein komplexer Kopplungskoeffizient benötigt wird.

Wichtige Unterschiede zu dem in dieser Arbeit beschriebenen Experiment bestehen in folgenden Konstellationen: Die Laser werden fast modenangepaßt gepumpt. Die Pumpstrahltaillen betragen  $w_0^P \approx 30 \mu\text{m}$ , die resultierenden Microchip-Laserstrahltaillen haben einen Wert von  $w_0^L \approx 43 \mu\text{m}$ . Die beiden Pumpleistungen liegen weit über der Schwelle und sind sehr unterschiedlich (relative Pumpleistungen  $A_1 = P/P_0 = 2,47, A_2 = 3,53$ ). Weiterhin wurden die Untersuchungen in einem Wertebereich für den Betrag des Kopplungskoeffizienten von einigen  $10^{-2}$  bis  $10^{-4}$  vorgenommen, was im Zusammenhang mit dieser Arbeit als eine sehr starke Kopplung angesehen wird .

Das Zustandekommen eines Imaginärteils für die Kopplung könnte im Entstehen von Wellenleiterstrukturen sein, die durch die Veränderung des Brechungsindex durch das Verstärkungsprofil der Pumpstrahlen bedingt sind. Ein anderer Faktor ist das Gaußprofil der Laserstrahlen selbst mit der dazugehörigen Phasenfrontkrümmung. Diese wurde bei der Herleitung des Modells hier vernachlässigt. Die Begründung dafür liegt in der Größenordnung der Rayleighlänge  $l_r = 2w_0^2/\lambda$ , die die Bezugsgröße für eine wesentliche Änderung der Krümmung darstellt. Sie besitzt bei einer Strahltaille von  $w_0 = 120 \mu\text{m}$  einen Wert von  $l_r = 5,6 \text{ cm}$ . Im Vergleich zur optischen Resonatorlänge von ungefähr 3 mm kann dieser Faktor hier vernachlässigt werden. Angesichts der oben erwähnten Unterschiede, sollte ein imaginärer Anteil der Kopplungsstärke so klein sein, daß er in dieser Arbeit keine Rolle spielt.

Die Konsequenz eines imaginären Anteils im Kopplungskoeffizienten wäre eine Aufhebung der Symmetrie des Modellsystem bezüglich des Vertauschens des Vorzeichens der Verstimmung. Der experimentelle Aufbau in [Bou00] läßt eine Bestimmung des Vorzeichens

zu, und es ließen sich tatsächlich unterschiedliche Dynamikphänomene in Abhängigkeit dieses Vorzeichens finden.

Im scheinbaren Widerspruch zur Behauptung, daß für das hier untersuchte System die Kopplungskonstante als rein reell angesehen werden kann, steht die Beobachtung, daß die im Abschnitt 3.3 vorgestellten Dynamikszenerarien auch unterschiedliche Dynamiktypen bei betragsgleichen Verstimmungswerten zeigen. Dieser Widerspruch läßt sich aber im Zusammenhang mit der numerischen Untersuchung des Modellsystems in Kapitel 5 auflösen, indem man die Phänomene als einen Hysterese-Effekt eines multistabilen Systems deuten kann.



# Kapitel 5

## Numerische Ergebnisse, Vergleich mit dem Experiment und Diskussion

Das im Kapitel 4 vorgestellte Modell für ein System zweier räumlich gekoppelter Laser soll nun einer numerischen Untersuchung unterzogen werden. Die hier gewonnenen Ergebnisse zur Modelldynamik werden mit den experimentellen Daten verglichen. Eine Diskussion der insgesamt erzielten Resultate schließt sich an. Einleitend findet eine Vorstellung des numerisch untersuchten Gleichungssystems und verwendeter Parameter statt.

### 5.1 Numerik-Gleichungen

Das Modellgleichungssystem 4.26 ist zwar relativ anschaulich und bietet direkten Zugriff auf die relevanten physikalischen Größen wie die Intensität  $I_i = |E_i|^2$  oder die Phasendifferenz  $\phi$ , läßt jedoch wegen Gleichung 4.26e keine natürlichen Anfangsbedingungen wie  $E_i = 0$  zu und erweist sich in bestimmten Fällen als numerisch instabil. Desweiteren bedeuten trigonometrische Funktionen einen relativ hohen numerischen Aufwand. Aus diesen Gründen wurden die Gleichungen 4.21 für die folgenden Simulationen in ihrer Form mit komplexer elektrischer Feldamplitude  $E'_i$  und Verstärkung  $G'_i$  als Ausgangsbasis genommen. Die für die praktische Implementierung nötigen Umformungen werden im weiteren beschrieben.

Die folgenden Normierungen und Umdefinitionen dienen in erster Linie der Vereinfachung der Gleichungen (im numerischen Sinn). Mit  $t = \frac{\alpha}{\tau_c} t'$  (und damit  $\frac{d}{dt} = \frac{\tau_c}{\alpha} \frac{d}{dt'}$ ) wird eine auf die Resonator-Dämpfungszeit  $\tau_c/\alpha$  normierte Zeit  $t$  eingeführt. Weiterhin werden die Umdefinitionen

$$G_i := \frac{G'_i}{\alpha}, \quad (5.1a)$$

$$A_i := \frac{p_i}{\alpha}, \quad (5.1b)$$

$$\beta := \frac{\kappa}{\alpha}, \quad (5.1c)$$

$$\omega := \frac{\tau_c}{\alpha} (\omega_2 - \omega_1) , \quad (5.1d)$$

$$\gamma := \frac{\tau_c}{\alpha} \cdot \frac{1}{\tau_f} \quad (5.1e)$$

vorgenommen.

Der in der Simulation benutzte Runge-Kutta-Fehlberg-Algorithmus verlangt reelle Variablen, so daß die komplexe Feldamplitude  $E'_i$  in ihren Realteil  $R_i = \Re(E'_i)$  und ihren Imaginärteil  $Q_i = \Im(E'_i)$  zerlegt werden. Insgesamt ergibt sich damit folgendes Gleichungssystem:

$$\dot{R}_1 = (G_1 - 1) R_1 - \frac{\omega}{2} Q_1 - \beta R_2 \quad (5.2a)$$

$$\dot{Q}_1 = (G_1 - 1) Q_1 + \frac{\omega}{2} R_1 - \beta Q_2 \quad (5.2b)$$

$$\dot{G}_1 = \gamma (A_1 - G_1 - G_1 (R_1^2 + Q_1^2)) \quad (5.2c)$$

$$\dot{R}_2 = (G_2 - 1) R_2 + \frac{\omega}{2} Q_2 - \beta R_1 \quad (5.2d)$$

$$\dot{Q}_2 = (G_2 - 1) Q_2 - \frac{\omega}{2} R_2 - \beta Q_1 \quad (5.2e)$$

$$\dot{G}_2 = \gamma (A_2 - G_2 - G_2 (R_2^2 + Q_2^2)) \quad (5.2f)$$

Der zur numerischen Lösung des obigen Gleichungssystems herangezogene Runge-Kutta-Fehlberg-Algorithmus ist in [NumRec] beschrieben und dort in FORTRAN 77 mit Zeitschrittweitensteuerung implementiert. Diese Implementation dient als Grundlage für die ausgeführten Simulationen und wurde einzig um die Eigenschaft erweitert, daß ein Zeitschritt einen bestimmten maximalen Wert nicht überschreiten kann. Die gewählten Werte für die Algorithmus-Parameter sind im Anhang A einzusehen. Zur Erstellung von Dynamikszenerarien und Systemparameterraum-Scans wurden Steuerprogramme geschrieben, die das obige Programm zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Modellgleichungen für die verschiedenen Systemparametersätze ( $\kappa, \omega_i$ ) aufrufen.

Betrachtet man einen einzelnen ungekoppelten Laser (d. h.  $\beta = 0$ ), so ergeben sich für die Intensität  $I_i = R_i^2 + Q_i^2$  und die Verstärkung  $G$  im stationären Zustand folgende Werte:

$$I_i^{\text{stat}} = A_i - 1 \quad (5.3a)$$

$$G_i^{\text{stat}} = 1 \quad (5.3b)$$

Die Relaxationsfrequenz berechnet sich in der renormierten Zeit zu:

$$\omega_{\text{rel}} = \sqrt{2 * (A_i - 1) \times \gamma} \quad (5.4)$$

Die in den später gezeigten Zeitreihen auftretende Zeit ist die durch Rücktransformation gewonnene 'reale' Zeit. Auftretende Intensitäten sind auf die jeweiligen stationären Intensitätswerte normiert. Angaben zu Verstimmungsfrequenzen beziehen sich immer auf

die Relaxationsfrequenz  $\omega_{\text{rel}}$ ; bei verschiedenen Pumpkoeffizienten  $A_i$  wird die Relaxationsfrequenz des Lasers 1 als Bezugsfrequenz gewählt.

Die Materialgrößen bzw. Laserkonstanten sind durch folgende Beträge gekennzeichnet:

$$\tau_c = 20 \text{ ps} \quad (5.5a)$$

$$\tau_f = 10 \text{ } \mu\text{s} \quad (5.5b)$$

$$\alpha = 1,5 \times 10^{-2} \quad (5.5c)$$

$$A_1 = 1,500 \quad (5.5d)$$

$$A_2 = 1,501 \quad (5.5e)$$

Es wird also eine relativ kleine Asymmetrie in den Pumpparametern angenommen. Diese Werte ergeben dann für die Relaxationsfrequenz einen Wert von  $\nu_{\text{rel}} = 1,378 \text{ MHz}$ .

Als Anfangsbedingungen für die Berechnung der Zeitreihen wurden folgende, willkürlich gewählten Werte (falls nicht anders ausdrücklich vermerkt) verwendet:

$$\begin{aligned} R_1^{AB} &= 1,100, \quad Q_1^{AB} = 0,000, \quad G_1^{AB} = 1,108, \\ R_2^{AB} &= 1,010, \quad Q_2^{AB} = 0,010, \quad G_2^{AB} = 0,997 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Vorgehensweise zur Simulation des Experiments ist durch folgende Überlegungen gekennzeichnet: analog zum Einstellen eines festen Abstands zwischen den beiden Lasern wird eine feste Größe für die Kopplungsstärke  $\kappa$  bzw.  $\beta$  gewählt; für eine bestimmte Größe der Verstimmung  $\omega$  läßt sich dann eine Zeitreihe des Gleichungssystems berechnen. Die Länge dieser Zeitreihe ist so groß gewählt, daß sich immer ein ausrelaxierter Zustand des dynamischen Systems einstellen kann. Entsprechend zur experimentellen Situation bei der Erfassung von Dynamikszenerarien (siehe Abschnitt 3.3) kann die Verstimmung durchgestimmt werden; dieses Durchstimmen erfolgt linear. Eine weitere Eigenschaft des Durchstimmens ist durch die Art des Übergangs von dem Systemparametersatz  $(\kappa, \omega_i)$  zu  $(\kappa, \omega_j)$  gegeben: er kann ‘adiabatisch’ erfolgen, d. h. die Anfangsbedingungen der simulierten Zeitreihe sind die Endwerte der dynamischen Variablen der vorherigen, ausrelaxierten Zeitreihe. Bei ausgeführten Simulationen hat sich herausgestellt, daß diese Art des Vorgehens einen bestimmten Typ des dynamischen Verhalten des Modells bevorzugt, nämlich den Typ, der den symmetrischen Oszillationen des Experiments entspricht. Führt man ein nichtadiabatisches Durchstimmen durch, indem man z. B. alle Zeitreihen mit den gleichen Anfangsbedingungen berechnet, so läßt sich eine größere Vielfalt an Dynamiktypen entdecken. Einen Vergleich zwischen adiabatischem und nichtadiabatischem Durchstimmen für die Kopplungsstärke  $\kappa = 5 \times 10^{-6}$  zeigt die Abbildung 5.1. Die Diagramme zeigen die Intensitätsmaxima der Zeitreihen der Laser 1 und Laser 2 in Abhängigkeit von der Verstimmung.

Die Richtung des adiabatischen Durchstimmens (oberer Teil der Abbildung 5.1) ist von negativen Verstimmungen hin zu positiven. Man erkennt, daß sich eine superharmonische Resonanz bei dem Zweifachen der Relaxationsfrequenz einstellt, gefolgt von der Resonanz bei der eigentlichen Relaxationsfrequenz. Eine schwache Dynamik bei der ersten Subharmonischen schließt sich an. Nach dem Nulldurchgang für die Verstimmung ergeben sich

ebenfalls Resonanzen bei entsprechend betragsgleichen Frequenzen. Allerdings unterscheidet sich die Dynamik in der Form der Resonanzkurven und den erreichten Überhöhungen der Intensitätspulse. Aufgrund der Symmetrie der Modellgleichungen bezüglich des Vorzeichens der Verstimmung (siehe Abschnitt 4.3.3) erlaubt dies den Schluß, daß das Modellsystem für gewisse Systemparametersätze  $(\kappa, \omega)$  multistabil ist. Genauer gesagt, läßt sich aus diesem einen Diagramm nur auf die Bistabilität des Systems schließen. Die bei dem Durchstimmen gefundenen Oszillationstypen entsprechen alle der Form der symmetrischen Oszillationen bzw. Pulse.

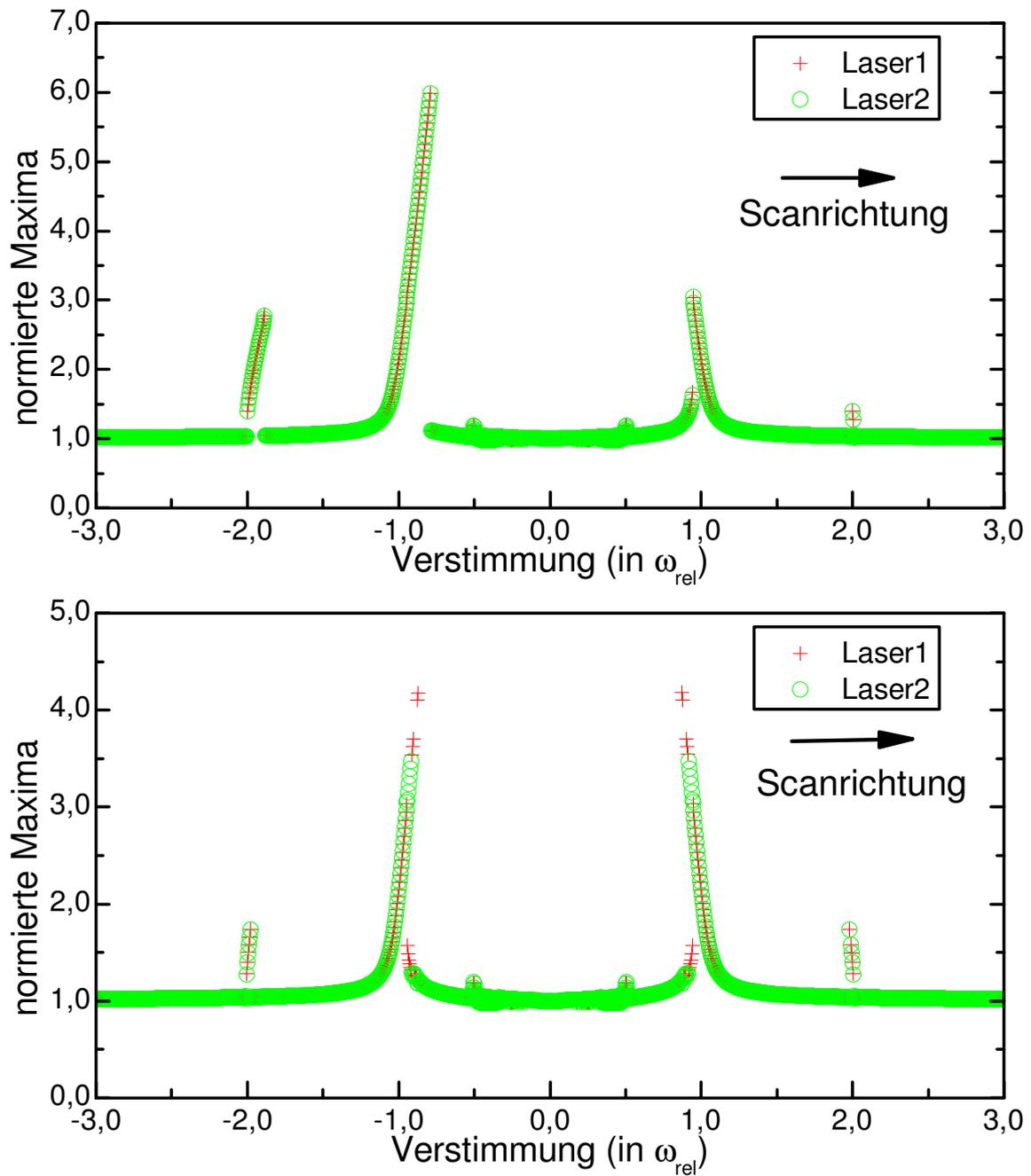
Das nichtadiabatische Durchstimmen (unterer Teil der Abbildung 5.1) wird durchgeführt, in dem die Zeitreihen für die jeweiligen Systemparametersätze  $(\kappa, \omega)$  immer die gleichen Anfangsbedingungen besitzen. Das Maxima-Diagramm ist spiegelsymmetrisch bezüglich der Verstimmung, was aufgrund der Unabhängigkeit der Lösungen des Modells vom Vorzeichen der Verstimmung zu erwarten ist. Es ergeben sich Resonanzen bei den gleichen Verstimmungsbeträgen wie bei dem adiabatischen Durchstimmen. Die erreichten Werte für die Maxima der Intensität sind allerdings um einen Faktor  $2/3$  kleiner. Ein sehr wichtiger Unterschied ist weiterhin das Erscheinen anderer Oszillationsformen als die des symmetrischen Typs. Bei der Resonanz um die Relaxationsfrequenz herum lassen sich Lösungen erkennen, die stark unterschiedliche Maxima-Werte für Laser 1 und Laser 2 besitzen. Die berechneten Zeitreihen haben die Form lokalisierter Oszillationen.

## 5.2 Dynamikszenerien

Hier sollen verschiedene Dynamikszenerien des Modells in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke  $\kappa$  betrachtet und mit den experimentellen Szenarien, die in Abschnitt 3.3 präsentiert wurden, in Beziehung gesetzt werden.

Zunächst folgt ein Vergleich zwischen den Bereichen der Kopplungsstärke, in denen das Experiment bzw. das Modellsystem Intensitätsdynamik zeigen. Das Experiment besitzt interessante Dynamik bei normierten Abständen bis zu einem Bereich von  $d \approx 7,5$ . Übersetzt man dies mit Hilfe der Formel 4.25 in eine Kopplungsstärke, so ergibt sich ein Wert von  $\kappa \approx 6 \times 10^{-13}$ . Das Modellsystem dagegen zeigt erst ab einem Wert von  $\kappa \approx 1 \times 10^{-6}$  nennenswerte Dynamik. Offensichtlich ist die Modellierung für das Maß der Kopplung in Abschnitt 4.2, die einen einfachen exponentiellen Abfall der Kopplung mit zunehmenden normierten Abstand  $d$  vorhersagt, nicht richtig. Als anderes Maß der Kopplungsstärke für die experimentellen Ergebnisse wird deshalb die relative Breite der Phasensynchronisationsbereiche in den Dynamikszenerien herangezogen. Die Kopplungsstärken werden in der Simulation so gewählt, daß die Beträge der Verstimmung, unterhalb derer Phasensynchronisation auftritt, reproduziert werden.

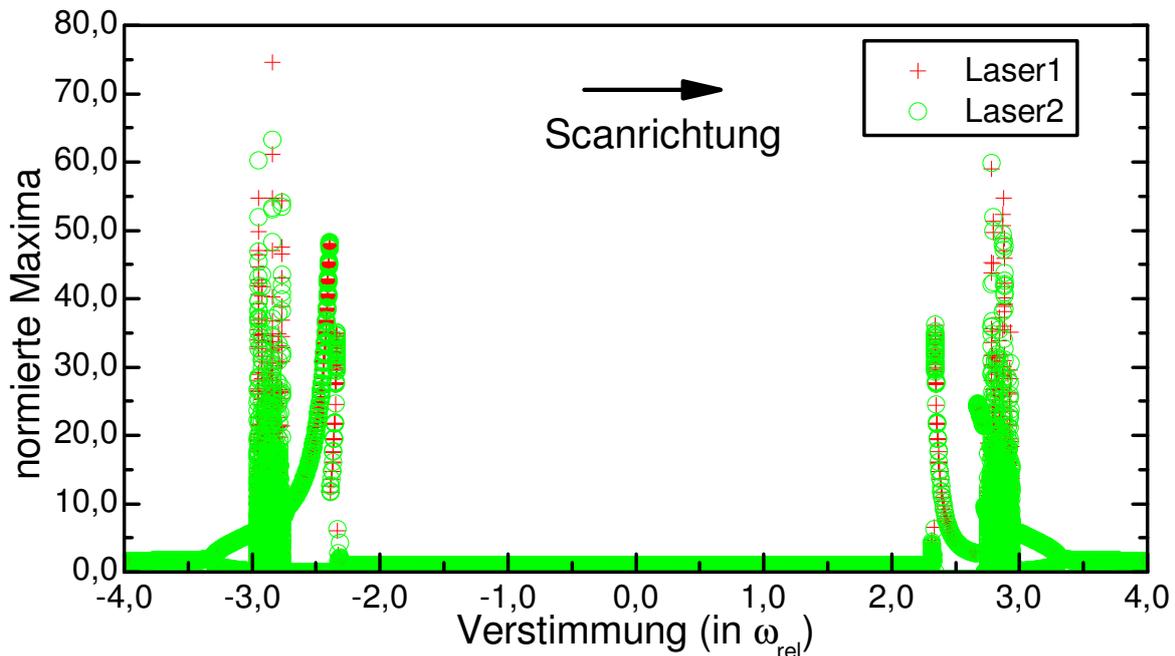
Im Abschnitt 4.3.1 wurde die Adler-Gleichung im Zusammenhang mit Phasensynchronisation diskutiert. Diese ist nur eine vereinfachte Form der Gleichung 4.26e, die die Phasendynamik des Modells bestimmt. Allerdings wurde bei den numerischen Simulationen keine Konstellation gefunden, die der Bedingung für das Auftreten von Phasensynchronisation aus der vereinfachten Adlergleichung widersprochen hätte.



**Abbildung 5.1:** Vergleich adiabatisches und nichtadiabatisches Durchstimmen der Verstimmung bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 5 \times 10^{-6}$ . Die obere Abbildung zeigt einen adiabatischen Scan, die untere einen nichtadiabatischen.

### Starke Kopplung

Die Phasensynchronisation setzt im Experiment bei relativ starker Kopplung (Abbildung 3.25) unterhalb des ungefähr zwei- oder zweieinhalbfachen Werts der Relaxationsfrequenz ein. Der normierte Abstand  $d = 4,1$  würde nach Formel 4.25 zu einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 2,2 \times 10^{-4}$  führen. Ein simuliertes adiabatisches Durchstimmen für  $\kappa = 2 \times 10^{-4}$  zeigt die Abbildung 5.2. Der Phasensynchronisationsbereich beginnt hier ab einer Verstimmung  $\omega < 2,25 \times \omega_{\text{rel}}$ . In diesem Fall ergibt sich also eine gute Übereinstimmung zwischen ‘geometrisch’ berechneter und aus der Phasendynamik extrahierter Kopplungsstärke.



**Abbildung 5.2:** Adiabatisches Durchstimmen der Verstimmung bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 2 \times 10^{-4}$ .

Die Dynamik setzt bei einem Wert von  $\omega \approx -3,5 \times \omega_{\text{rel}}$  in Form periodenverdoppelter symmetrischer Oszillationen bzw. Pulse ein. Bei  $\omega \approx -3,0 \times \omega_{\text{rel}}$  kommt es zur Ausbildung irregulärer Pulse, die dann wieder in symmetrische Pulse übergehen ( $\omega \approx -2,7 \times \omega_{\text{rel}}$ ). Ab  $\omega \approx -2,4 \times \omega_{\text{rel}}$  zeigt sich kurz eine neue Lösungszweig symmetrischer Pulse mit etwas kleineren Maxima. Kurz vor dem Einsetzen der Phasensynchronisation sind noch irreguläre Oszillationen kleiner Amplitude zu beobachten. Auf der positiven Seite der Verstimmung zeigt sich ein spiegelbildliches Verhalten der Dynamik, mit dem Unterschied, daß die auftretenden Maxima etwas kleiner sind.

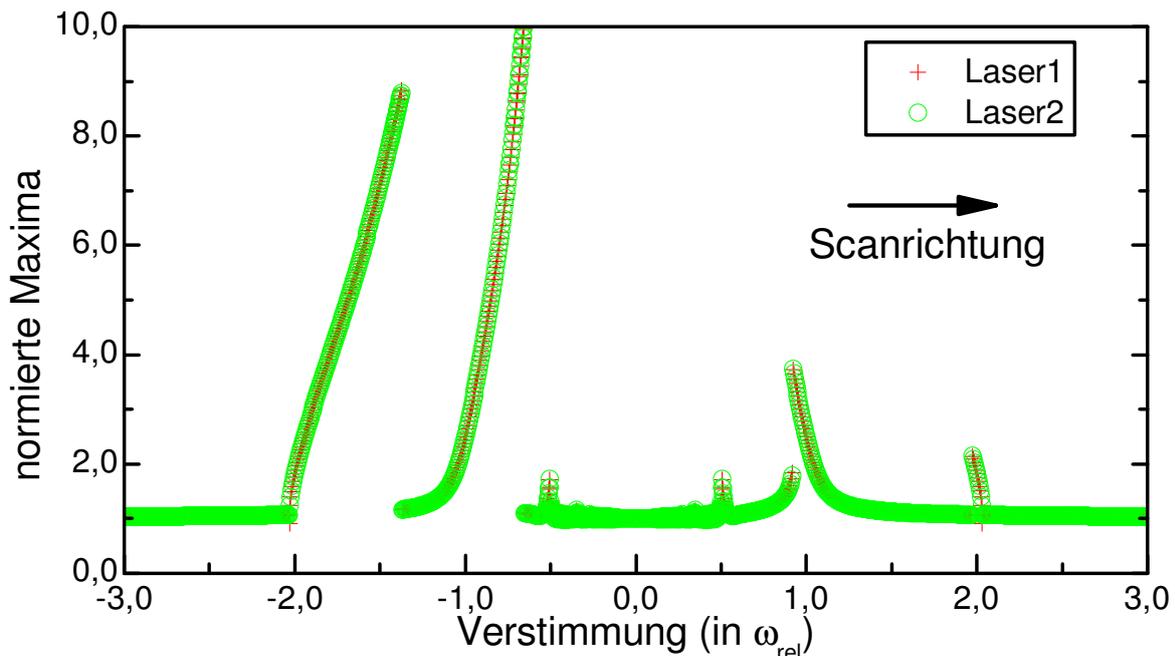
Der auffälligste Unterschied zu den experimentellen Daten ist die erreichte Überhöhung in den Pulsen; mit einer Überhöhung von 80 liegt sie deutlich über der von 24 des Experiments. Weiterhin ist das experimentelle Szenario asymmetrisch bzgl. des Vorzeichens der



Im Vergleich zum Experiment sind hier die maximalen Überhöhungen um den Faktor 2 größer. Das Einsetzen von periodenverdoppelten Oszillationen und das folgende stetige Ansteigen der Pulsamplituden wird gut reproduziert. Die in der Simulation auftretenden irregulären Oszillationen und der zweite Zweig symmetrischer Pulse wurden in dem entsprechenden Teil des experimentellen Szenarios nicht beobachtet. Weiterhin dominieren im Experiment nach Austreten aus der Phasensynchronisation die irregulären Oszillationen. Die auch beobachteten lokalisierten Oszillationen lassen sich bei einem adiabatischen Scan nicht finden.

### Schwache Kopplung

Als Beispiel für schwache Kopplung wurde im Experiment ein Szenario bei einem normierten Abstand von  $d = 6,4$  gewählt (siehe Abbildung 3.27). Die Phasensynchronisationsgrenzfrequenz lag in der Größenordnung von  $1/10$  der Relaxationsfrequenz. Eine solche Grenzfrequenz reproduziert das adiabatische Durchstimmen für  $\kappa = 9 \times 10^{-6}$  in Abbildung 5.4. (Die errechnete Kopplungsstärke beträgt  $\kappa \approx 1,3 \times 10^{-9}$ ).



**Abbildung 5.4:** Adiabatisches Durchstimmen der Verstimmung bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 9 \times 10^{-6}$ .

Die eine Hälfte des simulierten Szenarios zeigt eine Resonanzkurvenform mit ausgeprägter zweifacher Resonanz, die aus symmetrischen Oszillationen und Pulsen gebildet wird. Die Resonanzen treten für den zwei- und einfachen Wert der Relaxationsfrequenz auf. Dieser Teil der Simulation gibt den entsprechenden Teil des experimentellen Geschehens hinsichtlich der Einhüllenden und der beobachteten Maxima fast quantitativ wieder.

Nach dem Verlassen des Phasensynchronisationsbereichs erhält man bei den zu den gerade genannten betragsgleichen Frequenzen ebenfalls Resonanzen, allerdings mit deutlich kleineren Amplituden. Als einzige Oszillationsform treten symmetrische Pulse auf. Dies steht im Widerspruch zu dem experimentell beobachteten Gemisch aus verschiedenen Typen der Dynamik.

### Zusammenfassung

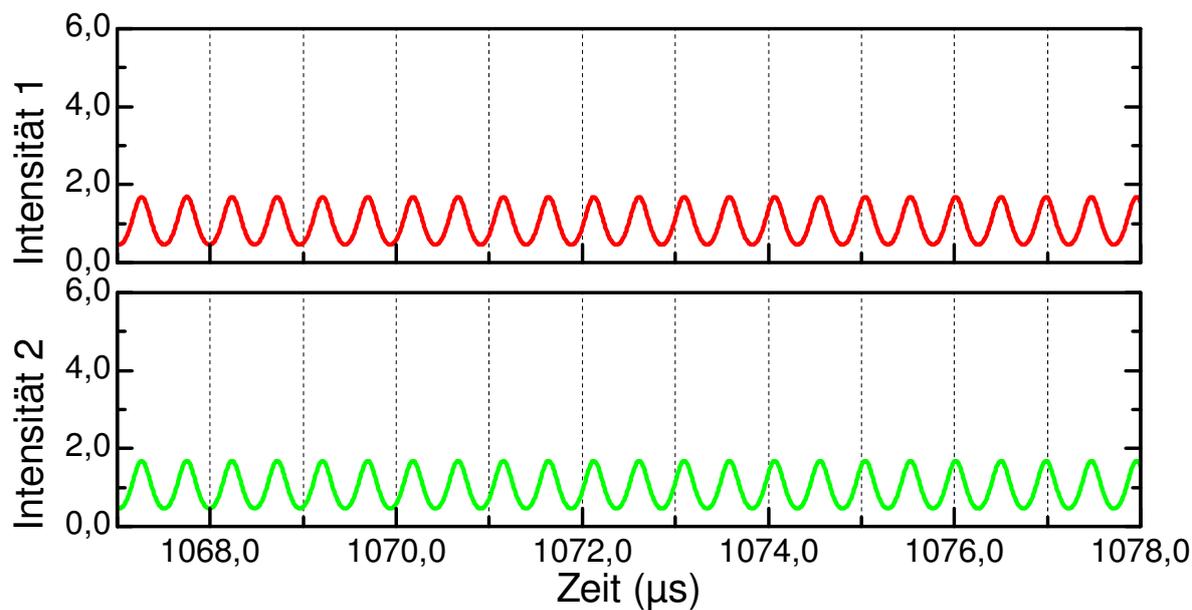
Insgesamt gesehen kann folgendes festgehalten werden: das Modell kann die experimentellen Dynamikszenerien in dem Sinne reproduzieren, daß beobachtete Resonanzen in Beziehung zur Relaxationsfrequenz gesetzt werden können. Der Instabilitätsmechanismus wird durch das Modell erklärbar. Schwächen liegen beim Vergleich der simulierten und beobachteten Pulsüberhöhungen. Weiterhin werden bei dem adiabatischen Durchstimmen im wesentlichen nur zwei Oszillationstypen gefunden: die irregulären und symmetrischen Oszillationen bzw. Pulse. Daß das Modell auch weitere Dynamiktypen als Lösungen beinhaltet, zeigt der folgende Abschnitt.

## 5.3 Typische Zeitreihenformen

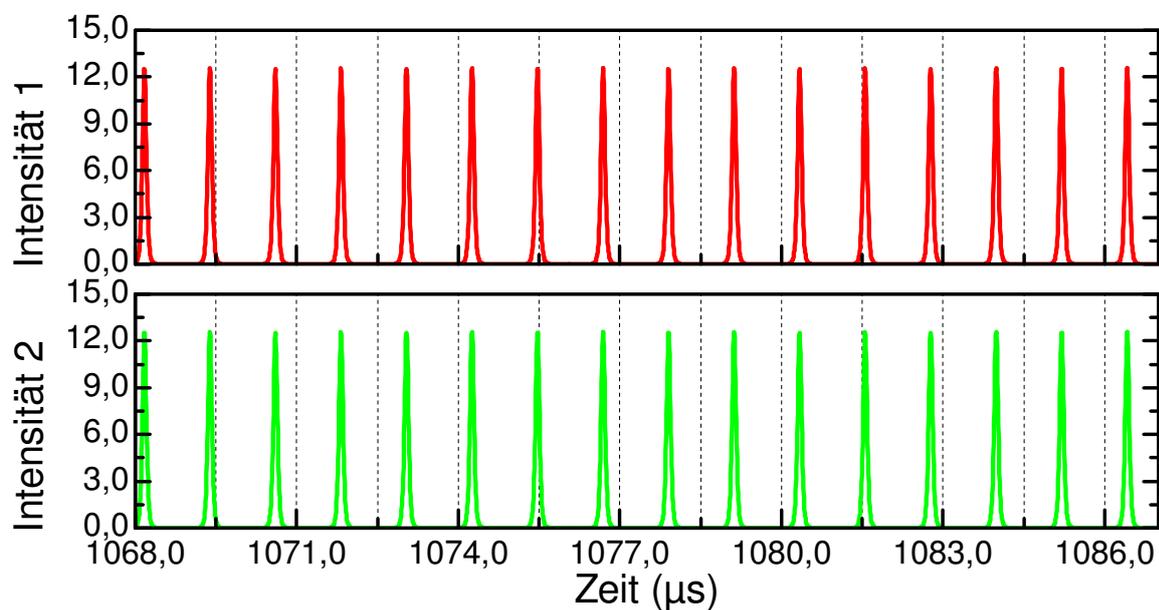
In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß das numerische Modell 5.2 fast alle Oszillationstypen, die in Abschnitt 3.1 vorgestellt wurden, reproduzieren kann. Die Anordnung folgt der der experimentellen Zeitreihen.

### 5.3.1 Synchrone Oszillationen und Pulse

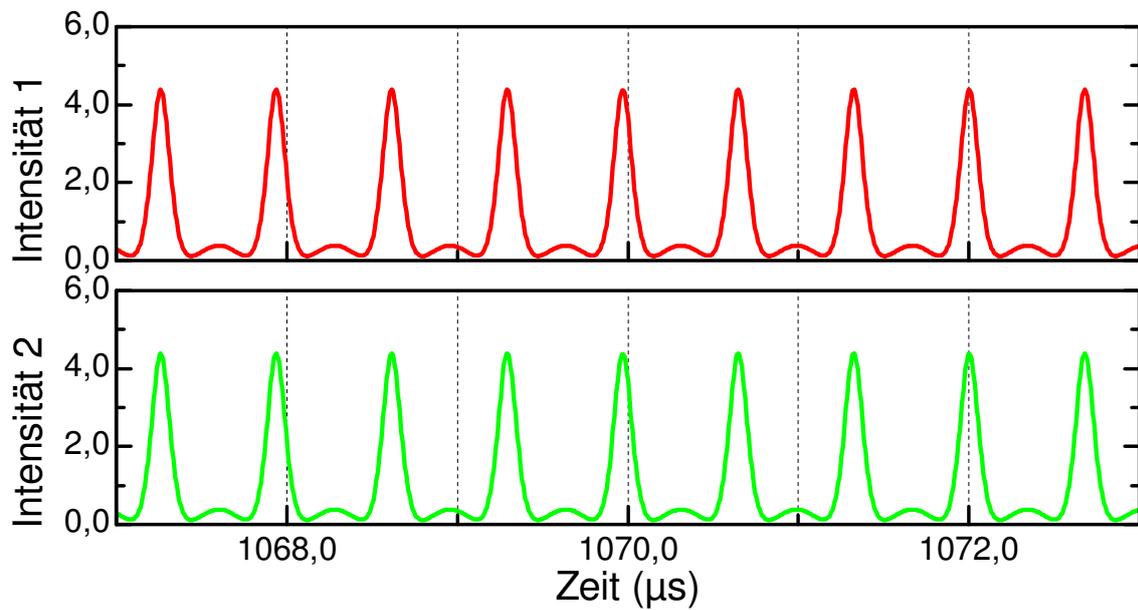
Relativ häufig sind im ganzen Dynamikbereich symmetrische Oszillationen (Abbildung 5.5) und Pulse (Abbildung 5.6) zu finden. Eine relativ stark ausgeprägte Periodenverdoppelung symmetrischer Pulse zeigt die Abbildung 5.7. Die Reproduktion der im Experiment beobachteten Form der Periodenverdreifachung ist im Diagramm 5.8 zu sehen. Die im Experiment aufgezeichnete Periodenverfünffachung konnte nicht gefunden werden.



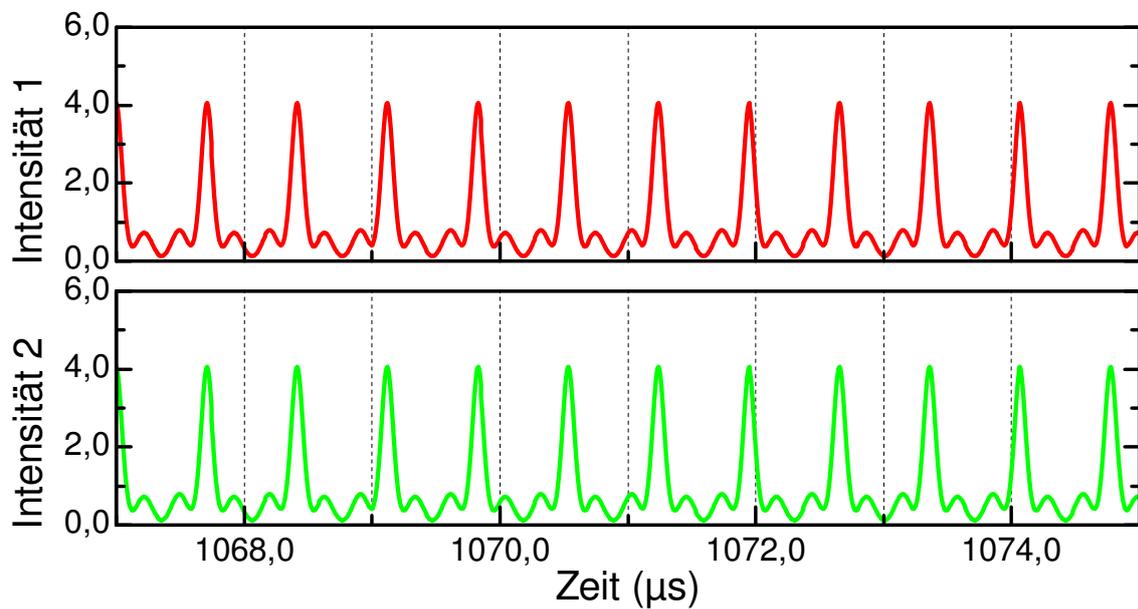
**Abbildung 5.5:** Kleinamplitudige, harmonische Oszillationen bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 5 \times 10^{-5}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 1,6 \times \omega_{\text{rel}}$ .



**Abbildung 5.6:** Synchroner Pulse bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 5 \times 10^{-5}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 0,83 \times \omega_{\text{rel}}$ .



**Abbildung 5.7:** Periodenverdopplung für symmetrische Oszillationen bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 2 \times 10^{-4}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 3,15 \times \omega_{\text{rel}}$ .



**Abbildung 5.8:** Periodenverdreifachung für symmetrische Oszillationen bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 2 \times 10^{-4}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 3,85 \times \omega_{\text{rel}}$ .

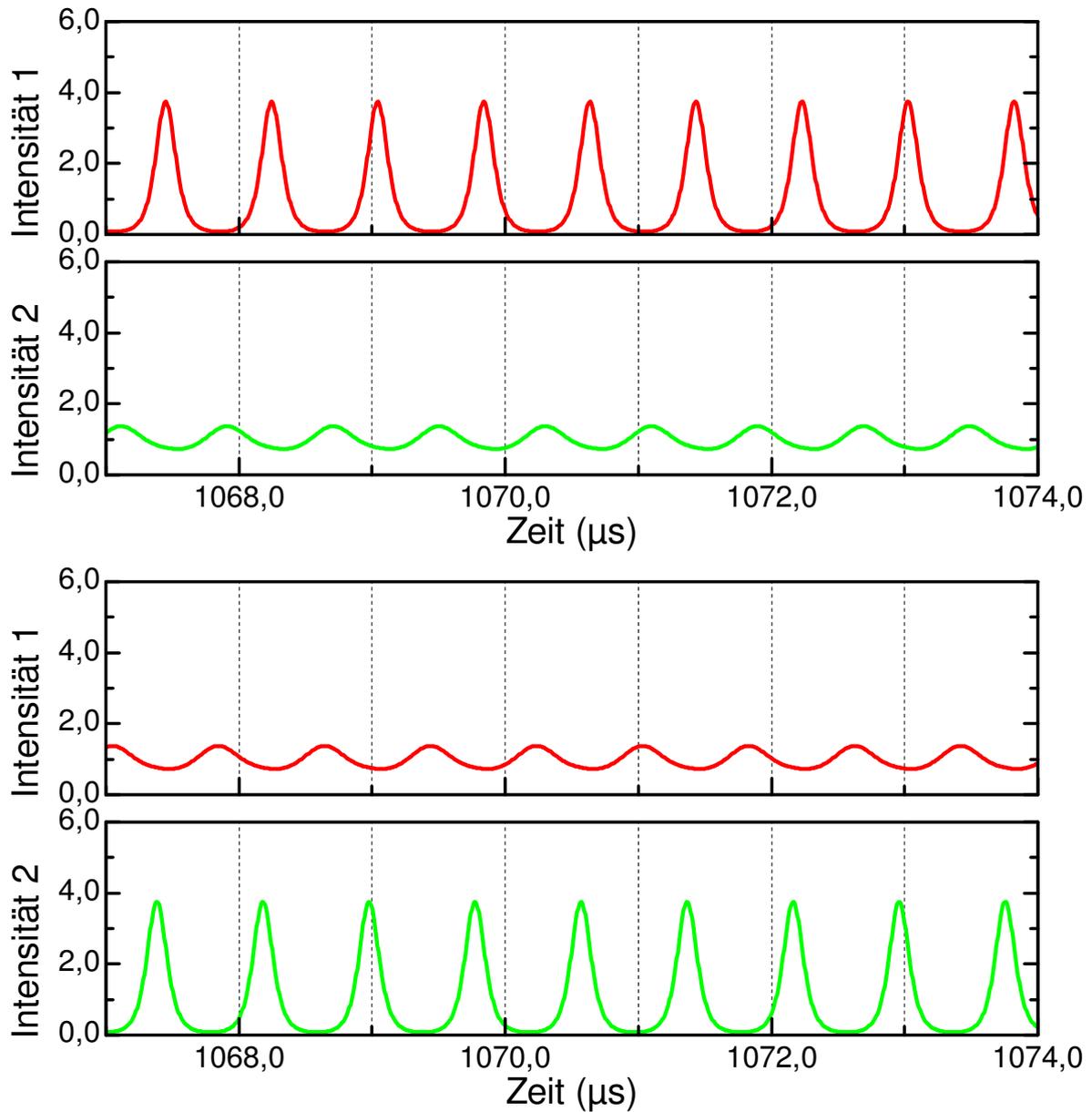
### 5.3.2 Lokalisierte Oszillationen

Fast alle experimentell vorgestellten Arten der lokalisierten Oszillationen können numerisch berechnet werden. Die Doppelabbildung 5.9 zeigt einfache lokalisierte Oszillationen. Wie auch beim Experiment läßt sich eine Multistabilität feststellen. Es existieren zwei spiegelbildliche Lösungen, in dem Sinne, daß sich die Rollen der beiden Laser austauschen lassen (vgl. oberer und unterer Teil der Abbildung).

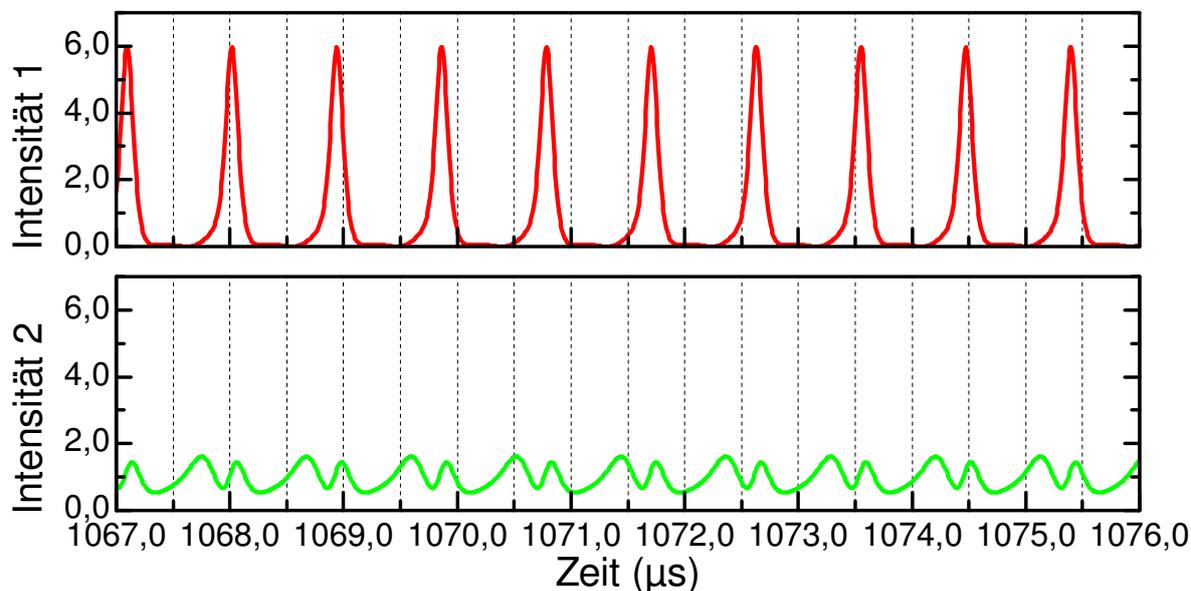
Die Form der lokalisierten Oszillation mit Doppelspitze in dem schwächeren Laser ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Sie ist oberflächlich gesehen, fast identisch mit der periodenverdoppelten lokalisierten Oszillation der Abbildung 5.11. Allerdings kann man feststellen, daß die Maxima im schwächeren Laser im periodenverdoppelten Fall äquidistant sind, im anderen Fall nicht.

Die Typen mit Periodenverdopplung bzw. -verdreifachung im stärkeren Laser und komplexeren Pulsstrukturen im schwächeren sind in Abbildungen 5.12 bzw. 5.13 gezeigt.

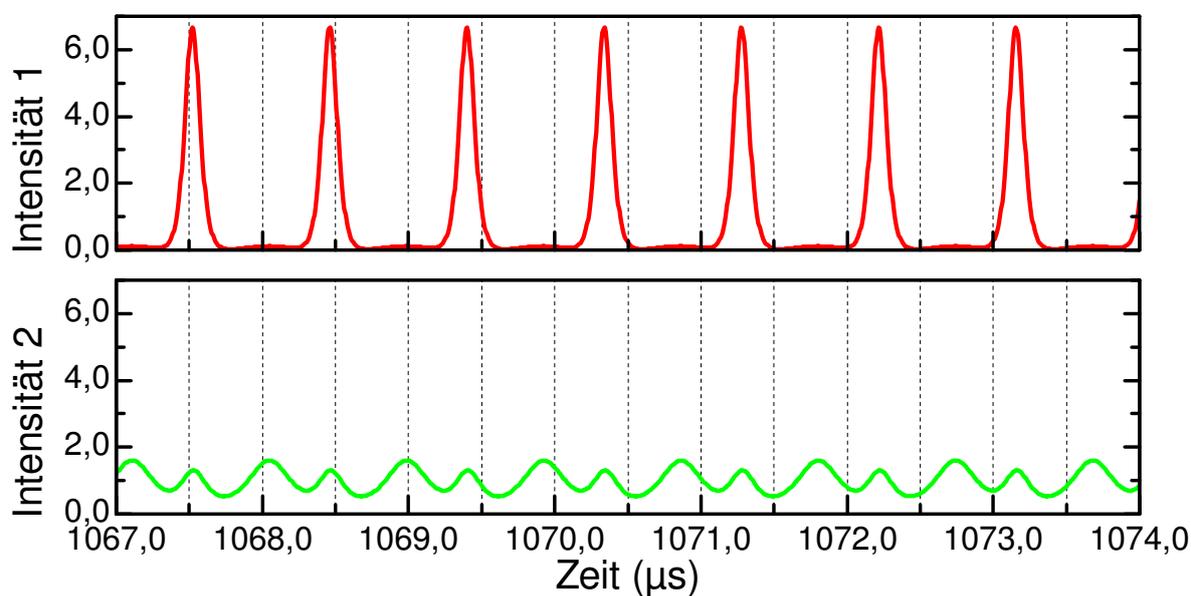
Die in Diagramm 3.13 abgebildete Periodenvervierfachung konnte in dieser Form nicht simuliert werden.



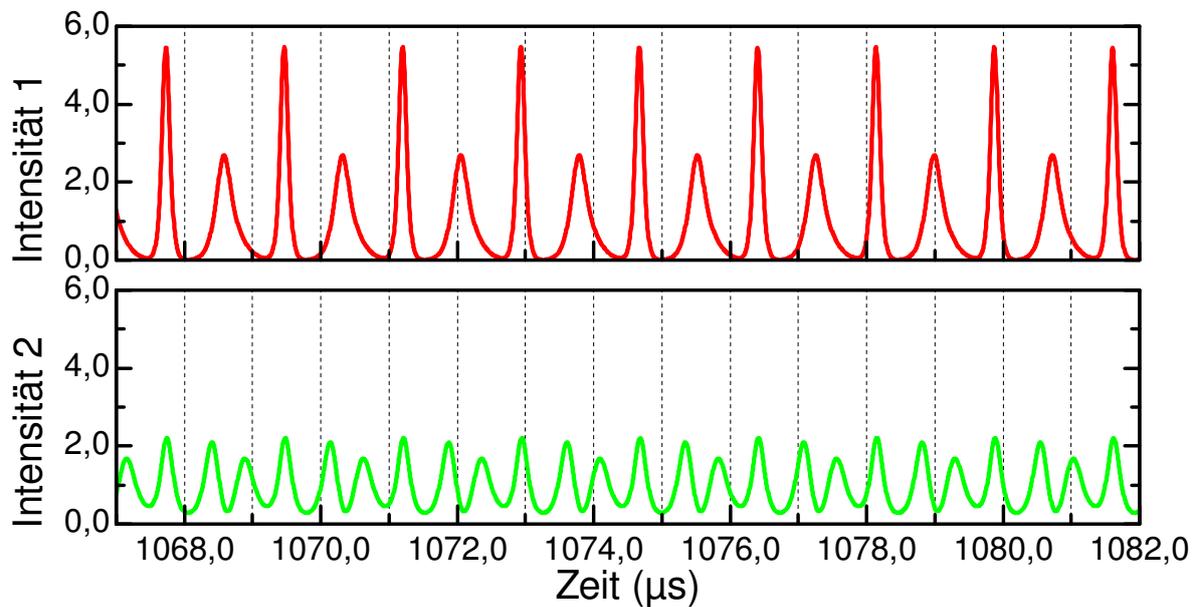
**Abbildung 5.9:** Lokalisierte Oszillationen bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 4 \times 10^{-6}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 0,90 \times \omega_{\text{rel}}$ . Beide Zeitreihen besitzen denselben Systemparametersatz  $(\kappa, \omega)$ , unterscheiden sich aber in einer Anfangsbedingung (die Berechnung der unteren Zeitreihe startet mit  $R_1^{AB} = 0,0$  als Anfangsbedingung).



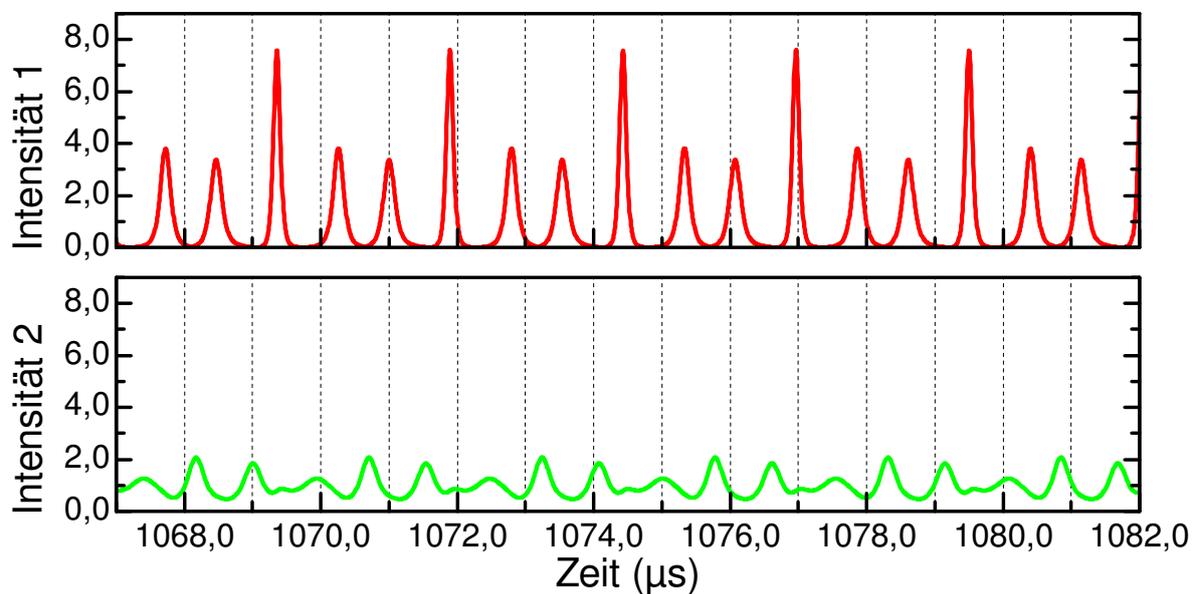
**Abbildung 5.10:** Lokalisierte Oszillationen mit komplexeren Pulsformen bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 5 \times 10^{-5}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 2,41 \times \omega_{\text{rel}}$ .



**Abbildung 5.11:** Lokalisierte Oszillationen mit stark ausgeprägter Periodenverdopplung bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 9 \times 10^{-5}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 1,82 \times \omega_{\text{rel}}$ .



**Abbildung 5.12:** Lokalisierte Oszillationen mit Periodenverdopplung und komplexeren Pulsformen in dem schwächeren Laser bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 5 \times 10^{-5}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 1,4 \times \omega_{\text{rel}}$ .



**Abbildung 5.13:** Lokalisierte Oszillationen mit Periodenverdreifung und komplexeren Pulsformen bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 2,5 \times 10^{-5}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 0,76 \times \omega_{\text{rel}}$ .

### 5.3.3 Irreguläre Oszillationsformen

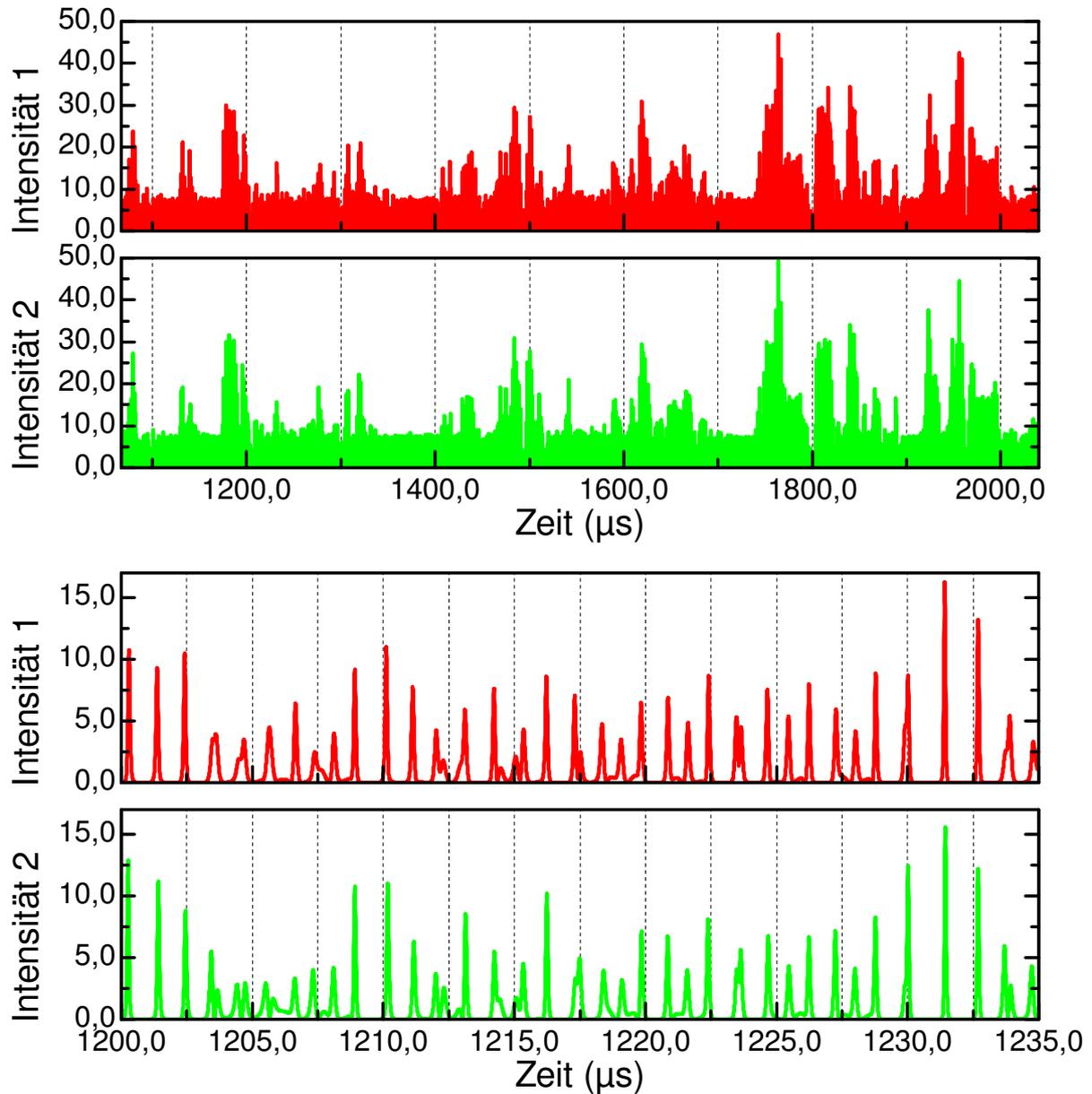
Irreguläre Oszillationen bzw. Pulse sind in einem zeitlich längeren Ausschnitt im oberen Teil der Abbildung 5.14 simuliert, der untere Teil zeigt Details.

### 5.3.4 Übermodulationen

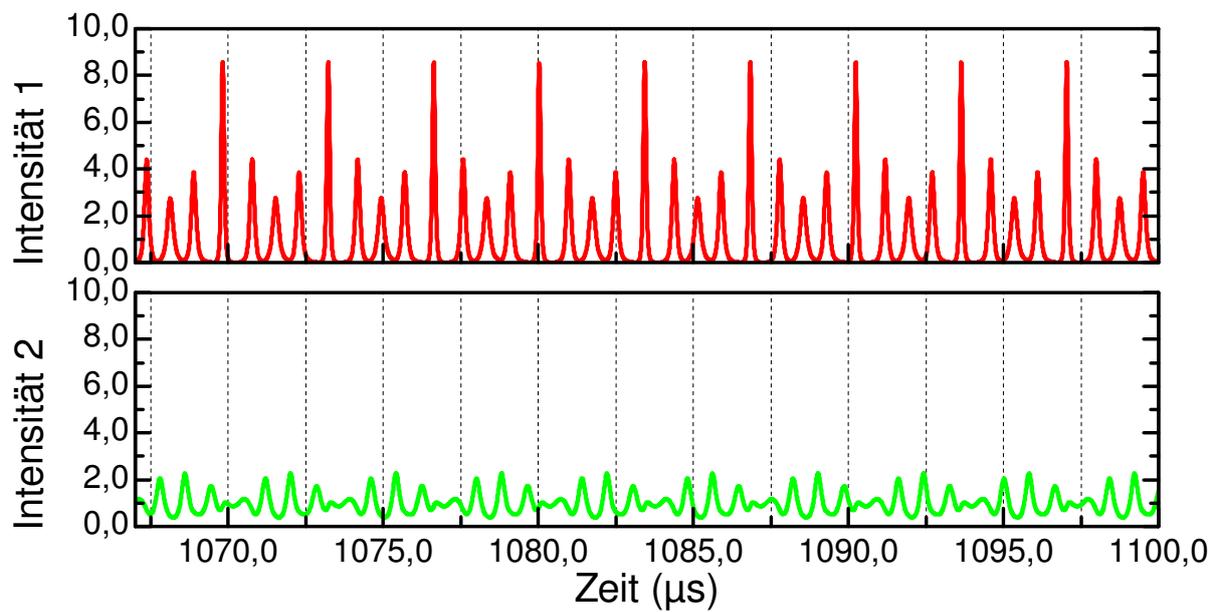
In der Simulation sind nur Beispiele für Übermodulationen lokalisierter Oszillationen gefunden worden. Ein Beispiel ist in Abbildung 5.15 aufgeführt.

#### Zusammenfassung

Das Modell kann fast alle experimentell beobachteten Oszillationsformen reproduzieren. Dies gilt sowohl für den qualitativen Aspekt, als auch für den quantitativen, was Amplitudengrößen und Wertebereiche der Verstimmung, in denen die Phänomene auftreten, angeht. Insbesondere existieren auch numerisch die lokalisierten Oszillationen, die bei der Untersuchung von adiabatischen Verstimmungsszenarien nicht gefunden wurden. Weiterhin konnte auch relativ komplexes Oszillationsverhalten, wie irreguläre und übermodulierte Schwingungstypen, gefunden werden.



**Abbildung 5.14:** Irreguläre Oszillationen bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 9 \times 10^{-5}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 2,68 \times \omega_{\text{rel}}$ . Der obere Graph zeigt eine längere Zeitreihe, der untere einen Ausschnitt daraus.



**Abbildung 5.15:** Übermodulierte lokalisierte Oszillationen bei einer Kopplungsstärke von  $\kappa = 2 \times 10^{-5}$  und einer Verstimmung von  $|\omega| = 0,79 \times \omega_{\text{rel}}$ .

## 5.4 Diskussion

Das hier vorgestellte einfache ‘Coupled-Mode’-Modell ist in der Lage, die beobachteten Dynamikszenerarien und Oszillationstypen qualitativ zu erklären bzw. nachzubilden. Insbesondere kann der Instabilitätsmechanismus als Resonanzentdämpfung der Relaxationsschwingungen der Laser verstanden werden, wenn die Verstimmung in den Bereich der Relaxationsfrequenz bzw. Vielfache oder (einfache) Bruchteile der selben kommt. Schwächen ergeben sich bei den quantitativen Vergleichen, was z. B. Spitzenamplituden angeht.

Unbefriedigend ist dagegen die Modellierung der Kopplungskonstanten. Gravierende quantitative Unterschiede zwischen Experiment und Numerik, sowie die grundsätzliche Frage des Vorzeichens der Konstanten müssen geklärt werden. Ein Weg dahin, ist es, die explizite räumliche Struktur der Verstärkungsverteilungen und der Lasermoden in die Modellierung mit einzubeziehen. Solche Untersuchungen wurden in [LO98] vorgenommen. Eine Anwendung des dortigen Vorgehens, das ganze Modell als räumlich ausgedehntes, strukturiertes System anzusetzen und numerisch zu untersuchen, liegt aber außerhalb des Rahmens dieser Arbeit.

Schwerpunkt dieser Arbeit war die experimentelle Untersuchung einer Intensitätsinstabilität zweier räumlich transversal gekoppelter Microchip-Laser. Bisherige Experimente konnten die Existenz einer solchen Instabilität nachweisen, aber keine Aussagen über die auftretenden Oszillationsformen machen. Der hier vorgestellte, neukonzipierte Aufbau ist mechanisch bedeutend stabiler als der vorheriger Experimente, so daß es möglich war, erstmals verschiedene Oszillationsformen für diese Instabilität zu identifizieren. Es treten sowohl einfache symmetrischen Oszillationen, als auch solche mit Periodenverdopplungen und höheren Periodenvervielfachungen, sowie mit komplexen Puls- und Oszillationsformen auf.

Weiterhin wurden die theoretisch vorhergesagten lokalisierten Oszillationen, die einen Bruch der Austauschsymmetrie der identisch präparierten Laser darstellen, zum ersten Mal experimentell nachgewiesen. Neben der einfachen Form dieser Oszillationen werden auch hier Periodenvervielfachungen und Schwingungen mit komplexen Pulsformen beobachtet.

Darüberhinaus kann die Instabilität auch in Form von irregulären Oszillationen und Pulsen, sowie übermodulierten symmetrischen und lokalisierten Oszillationen auftreten.

Unter Ausnutzung thermischer Effekte bei dem kurzzeitigen Ausschalten eines Lasers, konnte eine monotone, relativ glatte Verstimmungsdrift produziert werden. Mit ihrer Hilfe ließen sich typische Dynamikszenerarien für verschiedene Laserabstände identifizieren. Im Zusammenhang mit der theoretischen Modellierung des Experiments läßt sich auf eine Multistabilität des Zwei-Lasersystems schließen, die sich im Auftreten von Hysterese-Effekten in diesen Szenarien bemerkbar macht.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein System zweier identisch präparierter, räumlich transversal gekoppelter Nd:YVO<sub>4</sub>-Laser in Abhängigkeit von den Systemparametern der gegenseitigen Verstimmung und des Abstandes der beiden Laser experimentell untersucht. Dabei stand die Beobachtung der Intensitätsdynamik der Laser im Vordergrund.

Die Verwendung von Nd:YVO<sub>4</sub> als Lasermaterial an Stelle des bei einem früheren Experiment benutzten Nd:YAG erlaubte einen einfacheren Resonatoraufbau, der mit verbesserter Stabilität realisiert werden konnte. Die Fluktuationen der Verstimmung der beiden Laser gegeneinander wurden dadurch um mindestens eine Größenordnung reduziert. Darüberhinaus ist aufgrund der Materialkonstanten des Laserkristalls der Wert für die Laserrelaxationsfrequenz, zu denen die Fluktuationen in Beziehung zu setzen sind, um eine Größenordnung höher als in der erwähnten früheren Untersuchung, was die experimentelle Ausgangssituation ebenfalls verbessert. Eine weitere Neuerung stellt die indirekte Bestimmung der Größe der Verstimmung durch Anwendung der Joint-Time-Frequency-Analyse auf die aufgenommenen Intensitätszeitreihen dar.

Das neukonzipierte System aus zwei Nd:YVO<sub>4</sub>-Lasern zeigt bei entsprechenden Systemparameterwerten eine Intensitätsinstabilität, die auch von dem Aufbau mit Nd:YAG-Lasern her bekannt ist. In dem neuen Experiment konnten erstmals für diese Instabilität verschiedene Oszillationstypen beobachtet werden. Dazu gehören einfache harmonische symmetrische Oszillationen in beiden Lasern, symmetrische Pulse mit hohen Spitzenwerten von bis zu 30 bezogen auf die stationäre Intensität der Laser, sowie Oszillationen und Pulse mit komplexen Pulsformen. Darüberhinaus wurden Periodenverdopplungen, Periodenverdrei- und -verfünffachungen in symmetrischen Oszillationen gefunden. Ebenfalls traten Übermodulationen bei symmetrischen Schwingungen auf. Weiterhin konnten die beiden Laser auch stark irregulär schwingen, wobei die Irregularität in den Pulsamplituden zu finden ist; die Oszillationsphase blieb konstant, d. h. die Pulse traten synchron in beiden Lasern auf.

Erstmals wurde eine theoretisch vorhergesagte Symmetriebrechung in Form von sogenannten 'lokalisierten Oszillationen' beobachtet. Neben den ursprünglich vorhergesagten einfachen lokalisierten Oszillationen konnten auch Schwingungen mit komplexer Struktur, sowie Periodenverdopplungen, Periodenverdrei- und -verfünffachungen erkannt werden. Ebenso finden sich übermodulierte lokalisierte Oszillationen.

Das Zwei-Nd:YVO<sub>4</sub>-Laser-System besitzt auch einen optisch phasensynchronisierten Zustand mit stationären Intensitäten. Die Laserfelder schwingen dabei auf ihren optischen Frequenzen in Gegenphase, d. h. mit einer Phasendifferenz von  $\Delta\phi = \pi$ , wie dies schon aus vielen anderen gekoppelten Zwei-Laser-Systemen bekannt ist.

Da Fluktuationen in der Verstimmung die systematische Untersuchung des Systemparameter-raums erschwerten, wurden statistische Aussagen über die Häufigkeit der verschiedenen Oszillationstypen gewonnen, indem eine größere Anzahl von Zeitreihen bei verschiedenen Laserabständen einer entsprechenden Auswertung unterzogen wurden.

Unter Ausnutzung thermischer Effekte, die beim kurzzeitigen Ausschalten eines der beiden Laser auftreten, konnte eine monotone, relativ glatte Verstimmungsvariation erzeugt werden. Es ließen sich für verschiedene Laserabstände typische Dynamikszenerarien identifizieren. Aufgrund des Auftretens von Hysterese-Effekten in diesen Szenarien kann man auf eine Multistabilität des Zwei-Lasersystems schließen.

Ein recht einfaches ‘Coupled-Mode’-Modell macht den Instabilitätsmechanismus als Resonanzentdämpfung der Relaxationsschwingungen der Laser, wenn die Verstimmung in den Bereich der Relaxationsfrequenz bzw. Vielfache oder (einfache) Bruchteile der selben kommt, plausibel. Das theoretische Modell reproduziert fast alle beobachteten Oszillationstypen numerisch und besitzt multistabile Zustände, die sich bei Betrachtung von Dynamikszenerarien durch Hysterese-Effekte bemerkbar machen. Quantitative Vergleiche lassen aber Schwächen des Modells erkennen, die u. a. in der zu einfachen Modellierung der Kopplungskonstanten begründet sein könnten.

Insgesamt betrachtet zeigt das hier untersuchte System zweier gekoppelter nichtlinearer Oszillatoren eine interessante, reichhaltige Dynamik. Von einfachen harmonischen Oszillationen über regelmäßige Pulse, sowie komplex strukturierte Schwingungen bis hin zu übermodulierten Oszillationen und stark irregulärem Pulsverhalten reicht die Palette verschiedener Dynamiktypen, die für dieses System räumlich transversal gekoppelter, identisch präparierter Festkörperlaser zum ersten Mal beobachtet werden konnten. Phänomene der nichtlinearen Dynamik, wie die bekannte Periodenverdopplung, aber auch Periodenverdrei- und -verfünffachungen ließen sich nachweisen. Die Beobachtung einer besonderen Art der Intensitätsinstabilität in Form symmetriebrechender lokalisierter Oszillationen bestätigt nicht nur erstmalig entsprechende theoretische Voraussagen, sondern es werden neben dem einfachen lokalisierten Oszillationstyp auch solche mit komplexer Pulsform und Periodenvervielfachungen gefunden.

# Anhang A

## Parameter für den Runge-Kutta-Fehlberg-Algorithmus

Der zur numerischen Lösung des Gleichungssystems 5.2 herangezogene Runge-Kutta-Fehlberg-Algorithmus mit Zeitschrittweitensteuerung ist in [NumRec] beschrieben. Die Implementierung in FORTRAN 77 besteht im wesentlichen aus den drei Subroutinen `odeint`, `rkqs` und `rkck`. Diese Subroutinen wurden durch Verwendung fortschrittlicherer Sprachelemente von FORTRAN 90 modifiziert, die aber den eigentlichen Algorithmus nicht verändern.

Weiterhin wurde eine maximale Zeitschrittweite bei der Speicherung der Zeitreihenwerte eingeführt. Die berechneten und gespeicherten Zeitreihen besitzen daher äquidistante Zeitpunkte mit einer Differenz von  $\Delta t' = 5$  in der normierten, und  $\Delta t = 4/3 \text{ ns}$  in der realen Zeit. Dies ist bezogen auf die Zeitskala der Intensitätsdynamik, die sich im Mikrosekundenbereich befindet, ausreichend, um auch feinste Details der Oszillationsstrukturen entdecken zu können. Die Länge der simulierten Zeitreihen betrug zwischen 1000 und 2000  $\mu\text{s}$ . In dieser Zeitspanne konnte sich immer ein ausrelaxierter dynamischer Zustand des Systems einstellen. Zur Auswertung wurden in der Regel die letzten 100 bis 200  $\mu\text{s}$  der Zeitreihe herangezogen.

Der einzige Parameter, den man benötigt, um die vorgestellten numerischen Simulationen nachvollziehen zu können, ist der der relativen Genauigkeit `eps`. Dessen Wert betrug hier  $1 \times 10^{-6}$ .



# Literaturverzeichnis

- [ArEK90] D. G. Aronson: *Amplitude Response Of Coupled Lasers*, Physica D **41**, 403, (1990)
- [Bou00] G. Bouwmans, B. Segard, D. Dangoise, P. Glorieux: *Modeling coupled microchip lasers requires complex coupling coefficients*, J. Opt. Soc. Am. B. Vol **17**, No. 5, 781, (2000)
- [BrKW95] Y. Braiman, T. A. W. Kennedy, K. Wiesenfeld, A. Khibnik: *Entrainment of solid-state laser arrays*, Phys. Rev. A Vol. **52**, No. 2, 1500, (1995)
- [Carl94] N. W. Carlson: *Monolithic Diode-Laser Arrays*, Springer Series in Electronics and Photonics No. **33**, Springer Verlag, (1994)
- [BoS94] D. Botez, D.R.Scifres: *Laser Diode Arrays*, Kapitel 5: H. G. Winful, R. K. De-Frez: *Dynamics of coherent semiconductor laser arrays*, Cambridge Studies In Modern Optics No. **14**, Cambridge University Press, (1994)
- [Bron] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, 25. Auflage, Verlag Harri Deutsch, (1991)
- [CASIX] CASIX Inc.: *Laser crystals: Nd:YVO<sub>4</sub>*, Internetadresse: [http://www.casix.com/product/Laser\\_Crystal\\_NdYVO4.htm](http://www.casix.com/product/Laser_Crystal_NdYVO4.htm)
- [Ern97] T. Erneux, R. Kuske: *Localized synchronization of two coupled solid state lasers*, Optics Communications **139**, 125, (1997)
- [Fab93] L. Fabini, P. Colet, R. Roy, D. Lenstra: *Coherence and phase dynamics of spatially coupled solid-state-lasers*, Phys. Rev. A Vol. **47**, No. 5, 4287, (1993)
- [FoKB02] B. Forsmann, A. Kornfeld, N. Benkert, J. Schüttler, M. Schülke, M. Möller: *Dynamics Of Coupled Nd:YVO<sub>4</sub> Microchip Lasers*, AIP Conference Proceedings 622: *Experimental Chaos*, 6th Experimental Chaos Conference, Potsdam, Germany, 2001, Editors: S. Boccaletti, B. J. Gluckman, J. Kurths, L. M. Pecora, M. L. Spano

- [For97] B. Forsmann: *Aufbau und Untersuchungen eines Systems zweier gekoppelter Festkörperlaser*, Diplomarbeit, Institut für Angewandte Physik, Münster, (1997)
- [Huy65] Ch. Huygens: *Œvres Complètes Vol 15*, Swets & Zeilinger B. V., Amsterdam, (1967)
- [Jan99] M. Jansen: *Untersuchungen eines Systems von drei gekoppelten Microchip-Lasern*, Diplomarbeit, Institut für Angewandte Physik, Münster, (1999)
- [Koe96] W. Koechner: *Solid-State Laser Engineering*, 4th Edition, Springer Series in Optical Sciences, Springer Verlag, Berlin, (1996)
- [KoLi95] S. Yu. Khoutchatov, V. V. Likhanskii, A. P. Napartovich, F. T. Arecchi, A. Lapucci: *Theory of phase locking of globally coupled laser arrays*, Phys. Rev. A **52**, 4089, (1995)
- [LiNa90] V. V. Likhanskii, A. P. Napartovich: *Radiation emitted by optically coupled lasers*, Sov. Phy. Usp. **33**, No. 3, 228, (1990)
- [LO98] H. Laabs, B. Ozygus: *The influence of transverse structures on the coupling of solid state lasers*, Optics & Laser Technology Vol **29**, No. 7, 401, (1998)
- [Lef80] H.C. Lefevre: *Single-mode fiber fractional wave device and polarisation controllers*, Electronic Letters **20**, 16, (1980)
- [MaRE89] P. Mandel, L. Ruo-Ding, T. Erneux: *Pulsation self-coupled lasers*, Phy. Rev. A Vol. **39**, No. 5, 2502, (1989)
- [MaWo95] L. Mandel, E. Wolf: *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, (1995)
- [MFL98] M. Möller, B. Forsmann and W. Lange: *Instabilities in coupled Nd:YVO<sub>4</sub> microchip lasers*, Quantum Semiclass. Opt. **10**, 839, (1998)
- [MFL00] M. Möller, B. Forsmann and W. Lange: *Dynamics of three coupled Nd:YVO<sub>4</sub> microchip lasers*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **2**, 371, (2000)
- [NICo99] *Signal Processing Toolset Reference Manual, Part I: Joint Time-Frequency Analysis Toolkit*, National Instruments Corporation, (1999)
- [NumRec] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: *Numerical Recipes in FORTRAN, 2nd Ed.*, Cambridge University Press, (1992)
- [PRK01] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths: *Synchronisation – A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge Nonlinear Science Series 12, Cambridge University Press, (2001)

- [Ok92] M. Oka, H. Masuda, Y. Kaneda, S. Kubota: *Laser-Diode-Pumped Phase-Locked Nd:YAG Laser Arrays*, IEEE J. of Quantum Electronics **28**, No. 4, 1142, (1992)
- [OtKa00] K. Otsuka, R. Kawai, S.-L. Hwong, J.-Y. Ko, J.-L. Chern: *Synchronization of Mutually Coupled Self-Mixing Modulated Lasers*, Phys. Rev. Lett. **84**, No. 14, 3049, (2000)
- [PeS95] P. Peuser, N.P. Schmitt: *Diodengepumpte Festkörperlaser*, Springer Verlag, Berlin, (1995)
- [Ray45] J. Rayleigh: *The Theory of Sound*, Dover Publishers, New York, (1945)
- [RT94] R. Roy, K. S. Thornburg, Jr.: *Experimental Synchronisation of chaotic lasers*, Phys. Rev. Lett. **72**, No. 13, 2009, (1994)
- [Sch02] J. Schüttler: *Experimentelle Untersuchungen zur Dynamik gekoppelter Festkörperlaser*, Diplomarbeit, Institut für Angewandte Physik, Münster, (2002)
- [ST83] R. F. Schmidt, G. Thews: *Human Physiology*, Springer Books, New York, (1983)
- [Sieg86] A.E. Siegmann: *Lasers*, University Science Books, (1986)
- [SiFW93] M. Silber, L. Fabiny, K. Wiesenfeld: *Stability results for in-phase and splay-phase states of solid-state laser arrays*, J. Opt. Soc. Am. B. Vol **10**, No. 6, 1121, (1993)
- [ThMö97] K. S. Thornburg, Jr., M. Möller, R. Roy, T. W. Carr, R. D. Li, T. Erneux: *Chaos and coherence in coupled lasers*, Phys. Rev. E Vol. **55**, No. 4, 3865, (1997)
- [WaW88] S. S. Wang, H. G. Winful: *Dynamics of phase-locked semiconductor laser array*, Appl. Phys. Lett. **55**, No. 21, 1774, (1988)
- [WiAR93] H. G. Winful, S. Allen, L. Rahman: *Validity of the coupled-oscillator model for laser-array dynamics*, Optics Letters Vol. **18**, No. 21, 1810, (1993)
- [WiRa90] H. G. Winful, L. Rahman: *Synchronized Chaos and Spatiotemporal Chaos in Arrays of Coupled Lasers*, Phys. Rev. Lett. **65**, No. 13, 1575, (1990)
- [WKEC85] C. O. Weiss, W. Klische, P. S. Ering, M. Cooper, *Instabilities and chaos of a single mode NH<sub>3</sub> ring laser* Optics Communications **52**, 405, (1985)
- [XuLC95] J. Xu, K. K. Lee, Y. C. Chen: *Phase locking in a two-element laser array with detuning*, Optics Communications **117**, 198, (1995)



# Danksagung

Mein Dank gilt zuerst Prof. Dr. Wulfhard Lange und Dr. Michael Möller, die mir die Möglichkeit und Anregung gaben, mich mit dieser Arbeit zu beschäftigen.

Den Diplomanden Martin Jansen, Thorsten Geuking, Andreas Kornfeld, Nils Benkert, Mark Schülke und Jens Schüttler, die im Laufe der Zeit wichtige Ergebnisse und Erkenntnisse zur Thematik der Dissertation gewonnen haben, möchte ich für eine sehr gute und freundschaftliche Zusammenarbeit danken.

Für die äußerst gute und sehr angenehme Arbeitsatmosphäre gilt mein Dank allen ehemaligen und jetzigen Arbeitsgruppenmitgliedern, die mir immer wieder in Gesprächen Anregungen und Ideen geben konnten. Hierbei möchte ich besonders Hochschuldozent Dr. Thorsten Ackemann erwähnen.

Den Mitarbeitern der feinmechanischen und elektrotechnischen Werkstätten bin ich durch ihre wichtigen praktischen Beiträge zu dieser Arbeit sehr zu Dank verpflichtet. Bei allen weiteren Mitgliedern des Instituts für Angewandte Physik bedanke ich mich für die freundliche Atmosphäre und Hilfsbereitschaft,

Nicht zuletzt möchte ich den Menschen sehr danken, die das Lebensumfeld bilden, auf dem diese Arbeit überhaupt möglich war: meiner Frau Anke für ihre große Geduld und Unterstützung, meinen Eltern, die mir das Studium ermöglichten, sowie meinem Bruder Andre für die Durchsicht der Arbeit.