

Thomas Wulf

**Die Stabilität von open-loop-Kontrolle bei
quasi-statischen und zyklischen Armbewegungen**

2015

Sportwissenschaft

Die Stabilität von open-loop-Kontrolle bei
quasi-statischen und zyklischen Armbewegungen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
im Fachbereich Psychologie und Sportwissenschaft
der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster

Vorgelegt von
Thomas Wulf
aus Oelde

– 2015 –

Dekan:	Prof. Dr. Manfred Holodynski
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Heiko Wagner
Zweiter Gutachter:	Dr. Oliver Kamps
Tag der mündlichen Prüfung:	14.09.2015
Tag der Promotion:	14.09.2015

Zusammenfassung

Selbststabilität ist die Eigenschaft eines Systems, zu einem vorgegebenen Systemzustand wie zum Beispiel zu einem Fixpunkt oder einer bestimmten Trajektorie zurückzukehren, ohne auf Abweichungen von diesem Zustand aktiv reagieren zu müssen. Aus diesem Grund kann die Selbststabilität des Muskel-Skelettsystems mit einer stabilen open-loop-Kontrolle von Bewegungen gleichgesetzt werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Bedeutung der Selbststabilität des Muskel-Skelettsystems für die Kontrolle von quasi-statischen und zyklischen Armbewegungen untersucht. Dabei liegt das Augenmerk zunächst darauf, inwieweit eine open-loop-Kontrolle für die untersuchten Bewegungsformen stabil und damit überhaupt möglich ist. Des Weiteren wird geprüft, wie sich eine veränderte Selbststabilität auf die Ansteuerung der Bewegung auswirkt. Dazu wurde die Selbststabilität des Ellbogengelenks anhand eines biomechanischen Modells für beide Bewegungsformen herausgearbeitet. Basierend auf den Ergebnissen der Modellierung ist die Selbststabilität sowohl bei einer einfachen Halteaufgabe (quasi-statische Bewegung) als auch bei einer zyklischen Armbewegung nur für einen eingeschränkten Winkelbereich, dem stabilen Regime, gegeben. Daraus ergeben sich, je nach Winkelstellung, unterschiedliche Anforderungen an die Kontrolle der Bewegung, die im Experiment untersucht wurden. Das Oberflächenelektromyogramm (sEMG) von Bizeps und Brachioradialis wurde bei einer quasi-statischen Halteaufgabe in Abhängigkeit vom Innenarmwinkel aufgenommen. Zur Charakterisierung des sEMGs wurde das Signal als stochastische Prozesse aufgefasst und der erste Kramers-Moyal-Koeffizient (Drift) berechnet. Dabei erwies sich der lineare Anteil der Drift als eine von der Amplitude unabhängige Kenngröße des Signals. Bezogen auf diese neue Kenngröße zeigen sich hoch signifikante Unterschiede zwischen dem stabilen und instabilen Regime des Ellbogengelenkes. Bei der Untersuchung der zyklischen Bewegung wurde zusätzlich zum sEMG von Bizeps, Trizeps und Brachioradialis der Winkelzeitverlauf mittels eines 3D-Bewegungsanalysesystems aufgezeichnet. Um die Stabilität der Bewegung zu quantifizieren, wurde anhand des aufgezeichneten Winkelverlaufs der Phasenraum der zugrundeliegenden Differentialgleichung mittels Driftschätzung rekonstruiert und die entsprechende Stabilität anhand der Floquetmultiplikatoren bewertet. Dabei zeigten sich keine qualitativen Unterschiede bei der Ausführung der Bewegung in den verschiedenen Stabilitätsregimen. In Bezug auf die Struktur der sEMG-Signale, die wiederum durch die Drift quantifiziert wurde, gab es hingegen qualitative Unterschiede zwischen den Stabilitätsregimen. Die vorliegenden Ergebnisse zeigen, dass es für beide Bewegungsformen in Abhängigkeit von der Stabilität der open-loop-Kontrolle zu strukturellen Veränderungen im sEMG-Signal kommt, welche möglicherweise auf eine veränderte Ansteuerung der beteiligten Muskulatur zurückzuführen sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	7
2.1	Stabilitätsanalyse	8
2.1.1	Lineare Stabilität	10
2.1.2	Lyapunovfunktionen	13
2.1.3	Periodische Orbits	14
2.1.4	Kriterien für Existenz von periodischen Lösungen	16
2.1.5	Stabilität geschlossener Orbits	18
2.2	Stochastische Prozesse	22
2.2.1	Grundbegriffe der Stochastik	22
2.2.2	Charakterisierung von Zufallsprozessen	28
2.2.3	Chapman-Kolmogorov-Gleichung	30
2.2.4	Kramers-Moyal-Entwicklung	31
2.2.5	Langevin-Prozess, Drift, Diffusion	33
2.3	Schätzen von Drift und Diffusion aus Datenreihen	36
2.3.1	Kerndichteschätzer	38
2.3.2	Nadaraya-Watson-Schätzer	43
2.3.3	Beispiel zur Schätzung eines zweidimensionalen Driftvektorfeldes	45
3	Quasi-Statische Aufgabe	51
3.1	Modellvorhersage	52
3.1.1	Armmodell	52
3.1.2	Methoden	60
3.1.3	Ergebnisse der Stabilitätsanalyse	63
3.1.4	Diskussion	67
3.2	Einfluss der Selbststabilität auf die Kontrolle	70
3.2.1	Methoden	70
3.2.2	Ergebnisse Driftschätzung	84
3.2.3	Diskussion	86

4 Zyklische Aufgabe	89
4.1 Modellvorhersage	90
4.1.1 Methoden	90
4.1.2 Stabilitätsanalyse	91
4.1.3 Validierung des Modells	93
4.1.4 Modellanpassung	98
4.1.5 Diskussion	100
4.2 Einfluss der Selbststabilität auf die Kontrolle	101
4.2.1 Filterung Driftschätzung	102
4.2.2 Stabilität der zyklischen Armbewegung	117
4.2.3 Koordination der Muskulatur	120
4.2.4 Driftschätzung des sEMGs in Abhängigkeit von der Bewegungsphase	126
5 Zusammenfassung und Diskussion	135
Anhang	139
Gaußverteilung für verschwindende Kumulaten ($n > 2$)	139
Zusammenhang von Korrelation und stochastischer Unabhängigkeit	139
Wurzel der Kovarianzmatrix	141
Normierung des Epanechnikovkerns	142
Fouriertransformierte der Delta-Funktion	144
Euler-Maruyama-Verfahren	144
Jenson-Shannon-Divergenz	145
Literaturverzeichnis	147

Abbildungsverzeichnis

2.1	Stabilitätsbegriff	9
2.2	Phasenportrait um Fixpunkt	12
2.3	Indextheorie	16
2.4	Binning	36
2.5	Kerndichteschätzung in Abhängigkeit von x_0	39
2.6	Naiver Schätzer	40
2.7	Konzept der Kerndichteschätzung	41
2.8	Kerndichteschätzung in Abhängigkeit von der Bandbreite	41
2.9	Verrauschter Oszillator	46
2.10	Realisierung eines verrauschten Grenzyklus	47
2.11	Rekonstruiertes Driftvektorfeld	47
2.12	Vergleich Rekonstruktion mit Originaldaten	48
3.1	Geometrie des Armmodells	55
3.2	Lineare Stabilitätsanalyse $m_z = 1.6 \text{ kg}, f_{tr}^{iso} = 1.0, f_b^{iso} = 1.0$	64
3.3	Lineare Stabilitätsanalyse $m_z = 1.6 \text{ kg}, f_b^{iso} = 0.5$	65
3.4	Lineare Stabilitätsanalyse $m_z = 1.6 \text{ kg}, f_b^{iso} = 1.5$	66
3.5	Nulllinien für Kraftlängenfunktion gemäß Giesl et al. (2004)	66
3.8	Versuchsaufbau statische Messung	71
3.9	Beispiel sEMG-Daten	72
3.10	sEMG Signal mit Netzbrummen	73
3.11	Autokorrelation für sEMG ohne und mit Netzbrummen	73
3.12	Übergangswahrscheinlichkeit sEMG für $\tau = 0.01 \text{ s}$	76
3.13	Übergangswahrscheinlichkeit sEMG für $\tau = 1/f$	77
3.14	Korrelationsmaß $M(\tau)$	78
3.15	Boxplot $M(\tau = 1/f)$	78
3.16	Autokorrelation $a_\tau(2\tau^*)$	79
3.17	Beispiel Driftschätzung sEMG	81
3.18	Lineare Interpolation der Driftschätzung	82
3.19	Korrelationskoeffizient für lineare Regression	82
3.20	Steigung der Drift als Funktion des Winkels (Brachioradialis)	84
3.21	Steigung der Drift als Funktion des Winkels (Biceps Brachii)	85
3.22	Mittlere Steigung der Drift	85

3.23	m_D bei veränderter Oberarmneigung	87
4.1	Aktivierungsmuster und Stabilität eines vorgegebenen zyklischen Winkel-Zeit-Verlaufs (keine Koaktivierung)	92
4.2	Versuchsaufbau zyklische Bewegung	94
4.3	Konfiguration und Position der Markerarrays	95
4.5	Mittleres Aktivierungsmuster der gemessenen Muskulatur bei zyklischer Bewegung	97
4.6	Floquetmultiplikator als Funktion der maximalen Aktivierung und der Amplitude	98
4.7	Stabilität eines vorgegebenen zyklischen Winkel-Zeit-Verlaufs (Koaktivierung)	99
4.8	Van-der-Pol-Oszillator	104
4.9	Van-der-Pol-Oszillator mit Zufallskraft	105
4.10	Driftvektorfeld in Abhängigkeit von Glättung für Van-der-Pol-Oszillator	107
4.11	Vergleich zwischen simulierter Trajektorie und Lösung des Van-der-Pol-Oszillators	108
4.12	Floquetmultiplikatoren in Abhängigkeit von Glättung	109
4.13	Driftvektorfeld in Abhängigkeit von Glättung für verrauschten Van-der-Pol-Oszillator	110
4.14	Vergleich zwischen simulierter Trajektorie und Lösung des verrauschten Van-der-Pol-Oszillators	111
4.15	Floquetmultiplikatoren in Abhängigkeit von Glättung	112
4.16	Ungefilterter, gemessener Winkelzeitverlauf	113
4.17	Ungefilterte Trajektorie im Phasenraum	114
4.18	Driftvektorfeld in Abhängigkeit von der Glättung	115
4.19	Floquetmultiplikatoren und Schwingungsdauer für rekonstruierten periodischen Orbit	116
4.20	Zweidimensionales Driftvektorfeld	118
4.21	Stochastische Abhängigkeit	122
4.22	Jensen-Shannon-Abstand in Abhängigkeit von Versuchsbedingung	123
4.23	Bivariate Wahrscheinlichkeitsdichte des sEMG von Bizeps und Brachioradialis in Abhängigkeit von der Versuchsbedingung	124
4.24	Boxplot des Jensen-Shannon-Abstandes zwischen Wahrscheinlichkeitsdichten $p(q^{bra}, q^{bic})$	125
4.25	Boxplot des Jensen-Shannon-Abstandes zwischen Wahrscheinlichkeitsdichten $p(q^{bra}, q^{tric})$	126
4.26	Dreidimensionales Driftvektorfeld (Brachioradialis)	127
4.27	Auswertung des dreidimensionalen Driftvektorfeldes	128
4.28	Drift sEMG zyklische Bewegung: Brachioradialis	129
4.29	Drift sEMG zyklische Bewegung: Triceps barchii	130
4.30	Drift sEMG zyklische Bewegung: Biceps brachii	131
5.1	Gleichverteilte Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y)$	141

Kapitel 1

Einleitung

Die Biomechanik beschäftigt sich mit der Mechanik lebender Organismen. Der Unterschied zur unbelebten Materie besteht primär darin, dass ein Organismus von sich aus in Wechselwirkung mit der Umwelt treten und eine Bewegung initiieren kann, daher spricht man in diesem Zusammenhang oft von kontrollierter beziehungsweise willentlicher Bewegung (Feldman, 2006). Die Aufgabe der Motorikforschung ist es unter anderem zu erklären, wie Bewegungen und damit die Vielzahl an Gelenken und Muskeln kontrolliert und koordiniert werden (Birklbauer, 2006). Bei der Suche nach Erklärungsansätzen stößt man sehr schnell auf das von Bernstein formulierte *Degrees-of-Freedom-Problem* (Bernstein, 1967).

Betrachtet man zum Beispiel das menschliche Ellbogengelenk, so handelt es sich um ein Scharniergelenk mit nur einem rotatorischen Freiheitsgrad. Beteiligt an Beugung und Streckung im Ellbogengelenk sind insgesamt sechs Muskeln (Turvey et al., 1982). Die kleinsten zu kontrollierenden Einheiten bilden die sogenannten motorischen Einheiten. Eine motorische Einheit umfasst ein Motoneuron und die von ihm innervierten Muskelfasern (Kandel, 2013). Ein Muskel kann durchaus über 1000 motorische Einheiten verfügen. Müsste jede dieser Einheiten aktiv kontrolliert werden, gipfelte, aufgrund der Vielzahl an zu kontrollierender Einheiten und der beteiligten Muskeln, selbst die Bewegung eines Scharniergelenks in einem überbordenden Kontrollaufwand. Darüber hinaus ließe sich ein und dieselbe Bewegung dieses Gelenkes (aufgrund der Anzahl der beteiligten Muskel) durch unendlich viele Aktivierungen (Rekrutierung und Frequenzierung der motorischen Einheiten) der beteiligten Muskulatur realisieren. Betrachtet man nicht nur ein Gelenk, sondern den gesamten Körper als kinematische Kette, so ist es aufgrund der verschiedenen zusammenwirkenden Gelenke möglich, eine Bewegungsaufgabe (zum Beispiel einen Ball mit einem bestimmten Abwurfwinkel zu werfen) auf vielfältigste Art zu lösen. Ohne weitere Auswahlkriterien existieren somit gleichberechtigte Lösungsmöglichkeiten einer Bewegungsaufgabe, die als Redundanz bezeichnet werden. Birklbauer (2006) beschreibt daher Bernsteins *Degrees-of-Freedom-Problem* als die Eigenschaft des Bewegungsapparates, mehr Freiheitsgrade (zum Beispiel mögliche Realisierungen von Muskelaktivitäten und Gelenkstellungen) zu besitzen, als für die Lösung einer Bewegungsaufgabe benötigt werden. Es müssen also Prinzipien existieren, die es trotz der Vielzahl von Freiheitsgraden ermöglichen eine geordnete, kontrollierte Bewegung zu vollziehen. Sinnvolle Lösungsansätze sollten daher auf eine Reduktion der zu kontrollierenden Freiheitsgrade führen.

Die Schwierigkeiten, die bei einer direkten Kontrolle aller Freiheitsgrade entstehen, werden von Turvey et al. (1982) mit einem Auto beschrieben, bei dem jedes der vier Räder separat gelenkt werden müsste. Ein Auto dieser Bauart, also ohne feste Kopplung zwischen den vier Rädern, wäre nicht zu steuern. Daher sind bei einem gängigen Pkw nur zwei über eine Achse verbundene Räder lenkbar. Damit die Lenkbewegung dieser Räder gekoppelt ist, wird bei einer Achsschenkel-Lenkung die Lenkbewegung über die Spurstange an beide Räder übertragen. Es gibt eine Zwangsbedingung (hier die mechanische Kopplung), die dazu führt, dass der Pkw nur über die Kontrolle eines rotatorischen Freiheitsgrades zu steuern ist. Das „Einfrieren“ von Freiheitsgraden ist nach Bernstein (1975) die primitivste Möglichkeit der Vielzahl

an Freiheitsgraden Herr zu werden. Dieses Prinzip werde nur in der Anfangsphase eines Fertigkeitserwerbes genutzt. Später werde die Überwindung der überflüssigen Freiheitsgrade „durch Organisation des Gesamtprozesses abgelöst“ (Bernstein, 1975, S. 150).

Die Möglichkeit zur (Selbst-)Organisation steckt im Kern aller systemdynamischen Modelle (Birklbauer, 2006). Der systemdynamische Ansatz ist in der Sportwissenschaft nicht zuletzt dank dem von Hermann Haken geprägten Begriff der Synergetik etabliert (vergleiche Beek et al., 1995). „Das charakteristische Merkmal der Synergetik ist die Suche nach gemeinsamen, universellen Prinzipien, die der Strukturbildung in den unterschiedlichsten Systemen zugrundeliegen“ (Haken, 1988, S. 163). „Die Synergetik befasst sich [...] mit der Frage, wie Systeme Strukturen bilden, d.h. sich selbst organisieren, ohne dass hierzu spezifische Eingriffe von außen erfolgen“ (Haken, 1988, S. 172). In offenen Systemen kann es, durch die nichtlineare Wechselwirkung einer Vielzahl von Systembestandteilen, zu einem Zustand der Ordnung kommen, der durch wenige Parameter, die sogenannten Ordnungsparameter, bestimmt wird (Haken, 1990). Die immanenten Systemeigenschaften können bei Veränderung eines Kontrollparameters (dies könnten zum Beispiel veränderte Umweltbedingungen, verändertes sensorisches Input etc. sein) zu einem Phasenübergang und damit zu einer Reorganisation führen, ohne dass die neue Dynamik beziehungsweise der Übergang selbst kontrolliert werden müsste. Die Synergetik bildet das theoretische Konstrukt (Haken et al., 1985) für das von Kelso (1984) entdeckte Phänomen bei zyklischen Bewegungen der Zeigefinger von rechter und linker Hand. Wurden Probanden instruiert, ihre Zeigefinger gegenphasig (linker Zeigefinger ist gestreckt, während rechter gebeugt ist) mit vorgegebener Frequenz zu bewegen, so kam es ab einer kritischen Frequenz unwillkürlich zu einem Übergang in eine gleichphasige Bewegung (Beugung und Streckung erfolgen bei beiden Fingern gleichzeitig), analog zum geschwindigkeitsabhängigen Gangartwechsel bei Vierbeinern. Im Beispiel des Fingerexperiments von Kelso übernimmt die Frequenz der Bewegung die Rolle des Kontrollparameters, die Phase zwischen den Fingern die des Ordnungsparameters (Haken et al., 1985). Eine Beschreibung der Kontrolle unter diesem Ansatz würde zu einer erheblichen Reduktion des Kontrollaufwandes führen, da nicht das Systemoutput (jede Bewegungskomponente) selbst kontrolliert werden müsste, sondern der entsprechende Kontrollparameter.

Ein weiterer Ansatz zur Reduktion von Freiheitsgraden verfolgt der ingenieurwissenschaftliche Ansatz. Um das Redundanzproblem zu adressieren, wird zum Beispiel im „ingenieurwissenschaftlich orientierte[n] Ansatz versucht, das von Bernstein formulierte Problem der Freiheitsgrade [bzw. der Redundanz] von Bewegungen [...] durch Minimierung bzw. Optimierung des physikalischen und/oder physiologischen Aufwands zu lösen“ (Birklbauer, 2006, S. 102). Durch die Optimierungsprinzipien wird die Äquivalenz der möglichen Lösungen einer Bewegungsaufgabe aufgebrochen, so dass bestimmte Bewegungen zu bevorzugen sind. Als ein solches Optimierungsprinzip könnte das Konzept der Selbststabilität angesehen werden.

Der Begriff der Stabilität im physikalischen Sinne beschreibt die zeitliche Entwicklung von Störungen eines Systems. Die Notation Selbststabilität ist im Gegensatz da-

zu eng mit Kontrolle von Bewegungen verbunden. „Self-stability represents a measure to explore attractive behaviour of a system without directly sensing deviations from a desired state“ (Blickhan et al., 2007, S. 209). Die Steuerung eines aktiven Systems, bei der keine Informationen des aktuellen Systemzustandes genutzt werden, um die Ansteuerung anzupassen, bezeichnet man als *open-loop-Steuerung* beziehungsweise *open-loop-Kontrolle*. Somit ermöglicht Selbststabilität erst eine *open-loop-Kontrolle* von Bewegungen und spielt daher in der Robotik eine wichtige Rolle: „Exploitation of self-stability is considered to be a crucial factor for biological running and might be the key for success to make bipedal and humanoid robots run in the future“ (Mombaur, 2009, S. 321). Schaal et al. (1996) und Wei et al. (2008) konnten zeigen, dass bei menschlicher Bewegung die Selbststabilität ein wichtiger Faktor für die Auswahl der Bewegung zu sein scheint. So wiesen Probanden bei zyklischen Aufgaben Bewegungen auf, die aufgrund ihres Geschwindigkeitszeitverlaufes robust gegenüber Störung waren, ohne aber auf die jeweilige Störung reagieren zu müssen.

Wagner et al. (2007) untersuchten durch Quick-Release-Experimente die Stabilität des menschlichen Ellbogengelenkes in Gleichgewichtspositionen. Dazu wurde mittels eines Gewichtes ein externes, streckendes Moment am Unterarm appliziert, welches durch die Probanden, bei fixiertem Oberarm, so kompensiert werden musste, dass ein vorgegebener Innenarmwinkel eingenommen wurde. Das Gewicht wurde plötzlich gelöst und die Reaktion auf diese Störung (Kinematik und Oberflächenelektromyogramm) aufgezeichnet. Wagner et al. (2007) sowie Giesl und Wagner (2007) verglichen die gemessenen Winkel- und Winkelgeschwindigkeitszeitverläufe mittels eines biomechanischen Modells des Ellbogengelenkes. Die zentrale Modellannahme war, dass die Aktivitäten der beteiligten Muskulatur nicht zeit- und störungsabhängig und somit konstant sind. Unter der Annahme konstanter Muskelaktivität, muss die Reduktion des zu haltenden Gewichtes auf eine neue Gleichgewichtsposition führen. Giesl und Wagner (2007) schätzten die Größe des stabilen Einzugsbereichs dieser neuen Gleichgewichtspositionen mittels Lyapunovfunktionen und zeigten, dass die Größe des Einzugsbereiches eine Funktion des Innenarmwinkels war. Darüber hinaus wiesen sie nach, dass eine Störung, die innerhalb dieses Einzugsbereiches stattfand, im Experiment zu einer Bewegung führte, die sich durch ein System mit konstanter Aktivierung beschreiben ließ, also durch eine *open-loop-Kontrolle*. Wenn hingegen die Störung außerhalb des Einzugsbereiches appliziert wurde, konnten nur Teile der entstandenen Bewegung durch konstante Aktivierung der Muskulatur erklärt werden. Giesl und Wagner (2007) zufolge ist in diesem Fall eine aktive Bewegungskontrolle nötig, um das System in den Einzugsbereich einer stabilen Gleichgewichtsposition zu führen. „The human thus uses a combination of control actions (reflexes, changing muscle activations) and self-stabilizing properties of the muscle-skeletal system in order to reach a desired position [...]“ (Giesl und Wagner, 2007, S. 463). Die Reaktion auf Störungen muss demnach als Kooperation verschiedener Wirkungsmechanismen, wie Reflexantworten, veränderte Muskelaktivität und Selbststabilität (also einem Zusammenspiel von *closed-loop-* und *open-loop-Kontrolle*), verstanden werden. Der Beitrag eines jeden Mechanismus ist, laut den von Giesl und Wagner (2007) gezeigten Ergebnissen, aber situationsabhängig (in dem speziellen Fall abhängig vom

Innenarmwinkel), was sich auch in den gemessenen Oberflächenelektromyogrammen (sEMG) manifestiert. Die Störungsreaktion im sEMG dauerte umso länger, je größer der Winkel der nach der Störung eingenommenen Gleichgewichtsposition beziehungsweise je kleiner der Einzugsbereich der Gleichgewichtsposition war. Wir vermuten, dass dieses situative Verhalten des Oberflächenelektromyogramms ein Indiz für eine, abhängig vom Innenarmwinkel, veränderte Selbststabilität des Ellbogengelenkes ist, die eine veränderte Kontrolle der Bewegung erfordert. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es also folgende Aussage zu überprüfen:

Eine veränderte Selbststabilität hat Einfluss auf die Struktur der Bewegungskontrolle.

Im Zusammenhang mit dem Experiment von Wagner et al. (2007) und der Analyse von Giesl und Wagner (2007) haben wir von *open-loop-Kontrolle* gesprochen, wenn die gemessene Systemreaktion (Kinematik) durch konstante Muskelaktivität zu erklären ist. Strukturveränderungen in der Kontrolle würden demnach im Modell in der Muskelaktivität abgebildet. Typischerweise wird zur Abschätzung der Aktivität eines Muskels das sEMG rektifiziert, geglättet und anhand der sEMG-Daten bei maximal willkürlicher Kontraktion normiert (Disselhorst-Klug et al., 2009). Wir sind nicht am Aktivitätsniveau der einzelnen Muskeln interessiert, sondern an der Struktur, dem Zeitverhalten der Aktivierung. Da die zur Bestimmung der Aktivierung benutzte Glättung einen großen Einfluss hat, bietet es sich an, das Roh-sEMG zu betrachten, um strukturelle Veränderungen zu identifizieren, die aufgrund einer veränderten Kontrolle entstehen würden.

Das sEMG ist ein hochvariables Signal, welches als stochastischer Prozess aufgefasst werden kann. Die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte eines stochastischen Prozesses kann mittels der Kramers-Moyal-Entwicklung beschrieben werden. Dabei werden die ersten beiden Koeffizienten der Kramers-Moyal-Entwicklung mit Drift und Diffusion bezeichnet. Zur Charakterisierung des Signals kann die von Friedrich und Peinke (1997) eingeführte Schätzung der Kramers-Moyal-Koeffizienten genutzt werden, wobei der stochastische Prozess unter gewissen Umständen vollständig durch Drift und Diffusion bestimmt ist. Die Analyse stochastischer Daten mittels Drift- und Diffusionsschätzung hält immer mehr Einzug in die Biowissenschaften. Die zittrigen Bewegungen von physiologischem, essentiellen Tremor und Parkinson unterschieden sich eindeutig durch die Charakteristik des deterministischen Anteils (der Drift) der Bewegungsdaten (Friedrich et al., 2000). Kuusela (2004) konnte mittels Driftschätzung physiologische von pathologischen Fluktuationen der Herzfrequenz unterscheiden. Auch in der Sportwissenschaft hält die Analyse stochastischer Prozesse langsam Einzug. So untersuchten zum Beispiel Gottschall et al. (2009) die Bewegungen auf einem *balance board*, indem sie die entsprechenden Daten als stochastischen Prozess auffassten und entsprechend Stabilität und Variabilität der Bewegung anhand von Drift und Diffusion charakterisierten. van Mourik et al. (2006) untersuchten den Phasenraum bei zyklischen und gerichteten Bewegungen mittels Drift- und Diffusionsschätzung. Bisher gibt es jedoch keinerlei Studien, die

versuchen, die Eigenschaften des stochastischen Prozesses des sEMGs (und damit die Kontrolle) mit der Stabilität des mechanischen Systems in Verbindung zu setzen.

Die folgende Arbeit ist ein Versuch mittels Driftschätzung (nach Friedrich und Peinke, 1997) zu überprüfen, ob sich die Selbststabilität des mechanischen Systems und damit die Stabilität von *open-loop-Kontrolle* in der Signalstruktur (im deterministischen Anteil) des sEMGs abbildet.

Dazu werden im folgenden Kapitel die theoretischen Grundlagen zur Bestimmung der Selbststabilität und zur Charakterisierung von stochastischen Prozessen eingeführt, um in den weiteren Kapiteln quasi-statische und zyklische Armbewegungen zunächst im Modell auf ihre Selbststabilität hin zu untersuchen. Die Ergebnisse der Modellrechnungen werden genutzt, um Voraussagen über Änderung in der Bewegungskontrolle zu treffen, die anhand experimenteller Daten mittels Driftschätzung überprüft werden.

Kapitel 2

Theorie

Ziel dieses Kapitels ist es die theoretischen Grundlagen zu schaffen, um die Selbststabilität von Bewegungen in Zusammenhang zu den damit einhergehenden Anforderungen an die Kontrolle zu untersuchen. Da im Verlauf der Arbeit die Stabilität von Bewegungen (quasi-statische Bewegungen und zyklische Bewegungen) bemessen wird, soll zunächst der Stabilitätsbegriff im physikalischen Sinne präzisiert werden, um dann die Quantifizierung von Stabilität mittels linearer Stabilitätsanalyse und Floquettheorie darzulegen.

Die Auswirkung der Stabilität auf die Anforderung der Kontrolle wird anhand des Oberflächenelektromyogramms (sEMG) untersucht. Wie beeinflusst die Selbststabilität die Signalstruktur des sEMGs? Da wir zur Beantwortung dieser Frage das sEMG als stochastischen Prozess aufgefasst haben, werden im Anschluss an den Abschnitt zur Stabilitätsuntersuchung grundlegende Begriffe der Stochastik, wie der Wahrscheinlichkeitsbegriff, der Erwartungswert, die Wahrscheinlichkeitsdichte etc., beschrieben. Da man bei stochastischen Prozessen nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über zukünftige Systemzustände treffen kann, wird die Kramers-Moyal-Entwicklung (Evolutionsgleichung der Wahrscheinlichkeitsdichte) hergeleitet. Für eine bestimmte Klasse von Zufallsprozessen (Langevin-Prozesse) kann die zeitliche Veränderung der Wahrscheinlichkeitsdichte und damit die Prozesseigenschaft vollständig durch die Größen Drift und Diffusion beschrieben werden. Im späteren Verlauf der Arbeit werden wir davon ausgehen, dass das sEMG zu dieser Klasse von Prozessen gehört, so dass Drift und Diffusion anhand der gemessenen Datensätze geschätzt werden müssen. Zur Bestimmung dieser Größen ist es notwendig, bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten zu schätzen. Daher werden wir im Anschluss an die Beschreibung stochastischer Prozesse erklären, wie Wahrscheinlichkeitsdichten anhand von Daten geschätzt werden können (z.B. in Form von Histogramm- oder Kerndichteschätzern). Wir werden die dabei beschriebene Methodik dann auf bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten erweitern und anhand eines Beispiels die Bestimmung von Drift und Diffusion erläutern.

Am Ende dieses Kapitels liegt die Technik zur Bewertung sowohl der Stabilität als auch der Signalstruktur vor, so dass diese anhand von Messdaten in Bezug gesetzt werden können.

2.1 Stabilitätsanalyse

Bei der Analyse menschlicher Bewegung ist das Stabilitätsverhalten von großem Interesse. Stabilität ist dabei im physikalischen Sinn zu verstehen. Eine Bewegung ist demnach asymptotisch stabil, wenn eine Störung der Bewegungsausführung mit der Zeit abklingt und die ursprüngliche Trajektorie beziehungsweise das gewünschte Ziel erreicht wird. Es kann aber auch Situationen geben, in denen eine kleine Störung der Bewegung mit der Zeit anwächst und somit ein völlig anderes Bewegungsergebnis entsteht. Diese Bewegungen werden dann als instabil bezeichnet. Wir wollen uns im Folgenden nun mit den beiden einfachsten Formen von Bewegungsausführungen und ihrer Stabilitätsanalyse beschäftigen. Zuerst werden Gleichgewichtslagen be-

handelt. Bei einem System mit einem rotatorischen Freiheitsgrad, wie wir es später betrachten werden, müssen in den Gleichgewichtslagen, den sogenannten Fixpunkten des Systems, die am Gelenk wirkenden Drehmomente in der Summe Null ergeben. Ein Beispiel könnte das Armdrücken zweier gleichstarker Kontrahenten sein, die bei konstanter Muskelaktivierung eine Gleichgewichtsposition eingenommen haben. Die Summe der erzeugten Drehmomente ist gleich Null. Um die Stabilität dieser Gleichgewichtsposition zu ermitteln, müssten wir wissen, wie sich eine zufällige Schwankung in der Gleichgewichtsposition oder im Drehmoment auf das Ergebnis des Wettkampfes auswirkt. Um nicht nur situative und quantitative Aussagen über die Stabilität eines Systems machen zu können, muss das der Bewegung zugrunde liegende Differentialgleichungssystem untersucht werden. Im Folgenden wird anhand von linearer Stabilitätsanalyse und von Lyapunovfunktionen erklärt, wie anhand eines allgemeinen Differentialgleichungssystems Aussagen über lokale beziehungsweise globale Stabilität von Gleichgewichtspositionen getroffen werden können. Des Weiteren wollen wir uns mit zyklischen beziehungsweise periodischen Bewegungen, wie zum Beispiel die Bein- und Armbewegungen beim Schwimmen, beschäftigen. Zuerst stellt sich die Frage: Wann sind solche zyklischen Bewegungen überhaupt mögliche Lösungen des Systems? Um dieser Frage nachzugehen, werden wir gängige Kriterien zur Bewertung des Lösungsraumes beschreiben. Bei der Existenz von zyklischen Lösungen lässt sich auch deren Stabilität untersuchen. Dies werden wir anhand der *Poincaré-Abbildung* und der *Floquet-Theorie* beschreiben.

Um den Begriff der Stabilität im physikalischen Sinne einzuführen, soll nun eine in der Physik gängige Darstellung (siehe Abbildung 2.1) benutzt werden. Beide in Abbildung 2.1 dargestellten Kugeln würden ohne Störung in ihrer Position verharren. Sie sind kräftefrei, das heißt, ihre dargestellte Position ist ein Fixpunkt des jeweiligen Systems. Nehmen wir weiter an, dass es leichte Energieverluste, z.B. aufgrund von Reibung, gäbe. Auch wenn es sich bei beiden Situationen um Fixpunkte handelt, so ist die Reaktion beider Systeme auf eine äußere Störung völlig unterschiedlich. Im linken Fall (Hangabtriebskraft größer als Reibungskraft vorausgesetzt) würde die Kugel in die Richtung, in die sie gestört wird, beschleunigt. Hingegen käme es bei der rechten Kugel zu einer Schwingung um den Fixpunkt, so dass nach einigen Zyklen der ursprüngliche Ausgangspunkt wieder erreicht ist. Daher spricht man im linken Fall von einem instabilen Gleichgewicht (instabiler oder repulsiver Fixpunkt) und im rechten Beispiel von einem stabilen Gleichgewicht (stabiler oder attraktiver Fix-

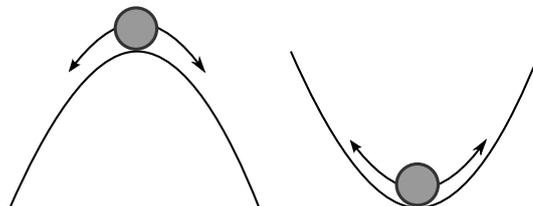


Abbildung 2.1: Bewegung eine Kugel in Potentiallandschaft mit geringer Dämpfung

punkt).

Ein gegebenes System soll nun auf seine Stabilität hin untersucht werden. Dazu gehen wir erst vom einfachen Fall eines linearen Gleichungssystems aus und werden später die Analyse auf nichtlineare Systeme erweitern.

2.1.1 Lineare Stabilität

Im Folgenden werden Matrizen durch einen fett geschriebenen Großbuchstaben gekennzeichnet. Sei ein n -dimensionales, homogenes, nicht explizit zeitabhängiges (autonomes), lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\vec{x} \quad (2.1)$$

gegeben, wobei die Matrix $(a_{ij})_{i,j=1\dots n}$ konstant ist. Ein lineares Differentialgleichungssystem zeichnet sich dadurch aus, dass jede Linearkombination von Lösungen ihrerseits wieder Lösung des Systems ist. Seien $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t) \in \mathbb{R}^n$ Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems. Dann gilt für die Linearkombination $\vec{x}(t) = \mu_1\vec{x}_1(t) + \mu_2\vec{x}_2(t)$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mu_1\vec{x}_1(t) + \mu_2\vec{x}_2(t)) \\ \mu_1\dot{\vec{x}}_1(t) + \mu_2\dot{\vec{x}}_2(t) &= \mu_1 \underbrace{\mathbf{A}\vec{x}_1(t)}_{=\dot{\vec{x}}_1(t)} + \mu_2 \underbrace{\mathbf{A}\vec{x}_2(t)}_{=\dot{\vec{x}}_2(t)} \quad , \end{aligned}$$

womit auch diese wieder Lösung des Differentialgleichungssystems ist, was als Superpositionsprinzip bezeichnet wird. Ein System von n linear unabhängigen Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ wird als Fundamentalsystem von Gleichung (2.1) bezeichnet, wenn sich alle Lösungen von (2.1) als Linearkombination des Fundamentalsystems darstellen lassen. Fixpunkte des Differentialgleichungssystems sind Lösungen des homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$, womit $\vec{x}_s = \vec{0}$ immer ein Fixpunkt ist. Wird der Ansatz $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ in Gleichung (2.1) eingesetzt, so ergibt sich das Eigenwertproblem für die Matrix \mathbf{A}

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad , \quad (2.2)$$

welches nur dann eine nichttriviale Lösung aufweist, wenn die Systemdeterminante

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

verschwindet (Argyris et al., 2010). Das zu lösende charakteristische Polynom liefert zusammen mit Gleichung (2.2) die Eigenwerte λ_i , und die dazugehörigen Eigenvektoren \vec{v}_i . Die Vektoren

$$\vec{x}_i(t) = e^{\lambda_i t}\vec{v}_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

sind dann Lösungen des Differentialgleichungssystems (2.1). Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ergibt sich, bei n linear unabhängigen Eigenvektoren ($\vec{x}_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ sind Fundamentalsystem), als Linearkombination der Einzellösungen

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \vec{v}_i . \quad (2.4)$$

Die Lösungen des Differentialgleichungssystems $\vec{x}(t)$ werden auch als Trajektorien bezeichnet. Über deren Zeitverhalten geben die Eigenwerte der linearen Matrix \mathbf{A} Aufschluss. Zur Klassifizierung der durch verschiedene λ erzeugten Phasenportraits wollen wir wieder vom linearen System (2.1) ausgehen. Führt man nun eine Koordinatentransformation (Argyris et al., 2010)

$$\vec{x} = \mathbf{T}\vec{y} \quad (2.5)$$

durch (wobei \mathbf{T} eine reguläre Matrix ist, die die Eigenvektoren von \mathbf{A} als Spaltenvektoren enthält) und setzt dies in Gleichung (2.1) ein, so erhält man:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}\dot{\vec{y}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \dot{\vec{y}} = \mathbf{D}\vec{y} \quad (2.6)$$

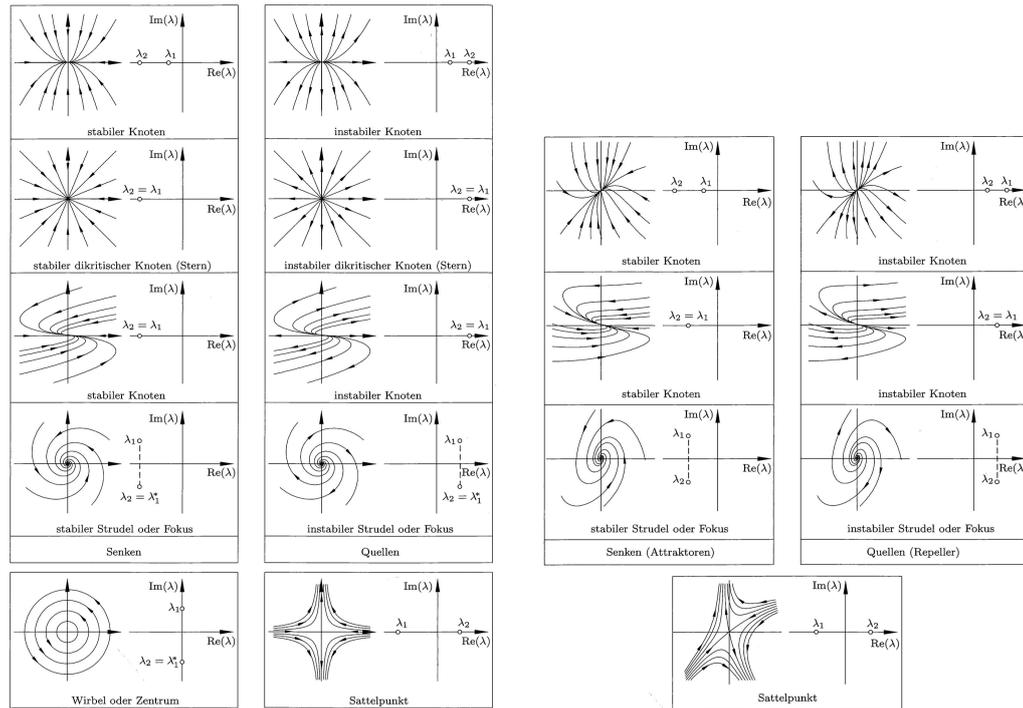
Da $\lambda_i \vec{v}_i = \mathbf{A}\vec{v}_i$ gilt, lässt sich $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ als

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]^{-1} \mathbf{A} [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n] = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]^{-1} [\mathbf{A}\vec{v}_1 \cdots \mathbf{A}\vec{v}_n] \\ &= [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]^{-1} [\lambda_1 \vec{v}_1 \cdots \lambda_n \vec{v}_n] = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2]^{-1} [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2] [\lambda_1 \ \lambda_2] \\ &= [\lambda_1 \ \lambda_2] \end{aligned}$$

und somit als Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptachse darstellen. Damit entkoppeln die einzelnen Komponenten von \vec{y} , und die Lösung des Differentialgleichungssystems im transformierten Koordinatensystem lässt sich direkt angeben.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 & y_1(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \Rightarrow & \vdots & \\ \dot{y}_n &= \lambda_n y_n & y_n(t) &= C_n e^{\lambda_n t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Der Realteil der Eigenwerte λ_i entscheidet darüber, ob der betrachtete Fixpunkt des Systems $\vec{x}_s = \vec{0}$ stabil, instabil oder neutral stabil ist. Sind alle Realteile der Eigenwerte negativ, so ist der Fixpunkt \vec{x}_s stabil und alle Trajektorien führen zum Fixpunkt. Ist der Realteil mindestens eines Eigenwertes größer Null, so lässt sich im Phasenraum stets eine Trajektorie finden, die bei Umkehrung der Zeitrichtung auf den Fixpunkt zuläuft. Es gibt also eine Trajektorie $\vec{x}_u(t)$ mit $\vec{x}_u(t=0) = \vec{x}_r$ für die $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{x}_u(t) = \vec{x}_s$ gilt, womit der betrachtete Fixpunkt, wie in Abbildung 2.2 am Beispiel eines zweidimensionalen Systems zu sehen, instabil ist (Argyris et al., 2010). Sind, im Falle eines zweidimensionalen Systems, die Eigenwerte rein imaginär und damit komplex konjugiert, so ergeben sich um den Fixpunkt geschlossene Trajektorien, die neutral stabil sind (vergleiche Abbildung 2.2a). Nun sind die meisten betrachteten Systeme nichtlinear, so dass ihre Dynamik für $n \geq 2$ zum Beispiel auch



(a) Mögliche Topologien des Phasenraums ($n = 2$) um einen Fixpunkt eines linearen Differentialgleichungssystems (b) Klassifikation nicht-degenerierter Fixpunkte eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems aufgrund des linearisierten Systems

Abbildung 2.2: Charakterisierung des Phasenportraits um einen Fixpunkt, entnommen aus Argyris et al. (2010).

Grenzyklen (isolierte, geschlossene Trajektorien im Phasenraum) enthalten kann. Oft lässt sich jedoch das Verhalten nichtlinearer Systeme, in einer Umgebung U um die Fixpunkte, auf das Verhalten linearer Systeme zurückführen. Nach dem Satz von *Hartmann-Grobman* (Strogatz, 1994) ist die Topologie eines n -dimensionalen Differentialgleichungssystems in einer Umgebung U um einen hyperbolischen Fixpunkt ($Re(\lambda_i) \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$) äquivalent zu der des linearisierten Systems. Es existiert in dieser Umgebung also ein Homeomorphismus, der den Phasenraum des nichtlinearen auf den des linearen Systems abbildet, wobei die Zeitrichtung erhalten bleibt. Liegen nicht-degenerierte (hyperbolische) Fixpunkte vor, so gibt das linearisierte System die Stabilität des nichtlinearen Systems in einer Umgebung um den Fixpunkt wieder. Wir betrachten nun wieder ein autonomes System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{N}(\vec{x}) \quad , \quad (2.8)$$

wobei die rechte Handseite $\vec{N}(\vec{x})$ nun nichtlinear ist. Von besonderem Interesse ist die Stabilität der Gleichgewichtslagen \vec{x}_s , für die $\vec{N}(\vec{x}_s) = \vec{0}$ gilt. Dazu untersucht man,

wie sich kleine Störungen ($|\eta(t)| \ll 1$) der Gleichgewichtslage zeitlich entwickeln. Sei

$$\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{\eta} \quad , \quad (2.9)$$

so ergibt die Taylorentwicklung von $\vec{N}(\vec{x})$ in Gleichung (2.8) um den Fixpunkt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \underbrace{\dot{\vec{x}}_s}_{=0} + \dot{\vec{\eta}} = \vec{N}(\vec{x}_s + \vec{\eta}) \\ \dot{\vec{\eta}} &= \underbrace{\vec{N}(\vec{x}_s + \vec{\eta})}_{=0} \\ &= \underbrace{\vec{N}(\vec{x}_s)}_{=0} + \left. \frac{\partial \vec{N}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_s} (\vec{x}_s + \vec{\eta} - \vec{x}_s) + O(\vec{\eta}^2) \\ \dot{\vec{\eta}} &\approx \left. \frac{\partial \vec{N}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_s} \vec{\eta} \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Im Fall nicht-degenerierter Fixpunkte beschreiben die Eigenwerte (λ_i) der Jakobimatrix, ausgewertet am Fixpunkt ($\mathbf{J} = \left. \frac{\partial \vec{N}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_s}$), die zeitliche Entwicklung einer Störung $\vec{\eta}$ um den Fixpunkt (Argyris et al., 2010). Sind alle Realteile der Eigenwerte negativ, so klingt die Störung mit der Zeit ab und der Fixpunkt ist attraktiv. Ist hingegen ein Realteil größer Null, so ist der Fixpunkt repulsiv (vergleiche Abbildung 2.2). Für degenerierte Fixpunkte ($\exists i$ mit $\text{Re}(\lambda_i) = 0$) sind die Nichtlinearitäten in Gleichung (2.10) nicht zu vernachlässigen. Dies äußert sich auch in dem Begriff der *Strukturstabilität des Phasenportraits* (Strogatz, 1994). Ein Phasenportrait gilt als strukturstabil, wenn sich die Topologie des Phasenraumes durch beliebig kleine Störungen des Vektorfeldes (Zusatzterm in rechter Handseite von Gleichung (2.8)) nicht verändert. So ist das Phasenportrait eines Sattelpunktes strukturstabil, hingegen wird ein Zentrum ($n = 2$ mit $\lambda_1 = i\alpha$ und $\lambda_2 = -i\alpha$), bei beliebig kleiner zusätzlicher Dämpfung, zu einem Strudel bzw. Fokus (Strogatz, 1994). Dieses Beispiel macht deutlich, welchen Einfluss kleine Änderungen oder auch nicht-berücksichtigte Nichtlinearitäten, im Falle degenerierter Fixpunkte, auf die Topologie des Phasenraumes haben können. Daher lässt sich, wie schon erwähnt, die Stabilität des nichtlinearen Systems, nur für die in Abbildung 2.2b dargestellten Kombinationen der Eigenwerte λ_i , anhand der Stabilität des linearen Systems bewerten. Aufgrund der Linearisierung des Systems wird die Stabilität nur für hinreichend kleine Systemstörungen korrekt beschrieben und ist damit auf eine kleine Umgebung um den Fixpunkt beschränkt. Will man globale Aussagen treffen, so hilft die Suche nach geeigneten Lyapunovfunktionen.

2.1.2 Lyapunovfunktionen

Mittels der Lyapunovfunktion kann sowohl die Stabilität von Gleichgewichtspositionen bestimmt als auch der Einzugsbereich des jeweiligen Fixpunktes abgeschätzt werden. Jedoch hängt die Größe des Einzugsbereiches von der zu wählenden Lyapunovfunktion ab, so dass der jeweils bestimmte Einzugsbereich nur eine untere Schranke des real vorliegenden Einzugsbereiches darstellen kann. Es gibt jedoch keine allgemeine Technik zur Bestimmung einer geeigneten Lyapunovfunktion (Argyris et al.,

2010). In der vorliegenden Arbeit genügt es zunächst zu wissen, ob die Gleichgewichtssituationen für kleine Störungen stabil sind, so dass die Stabilität mittels linearer Stabilitätsanalyse bewertet wird. Der Vollständigkeit halber wird jedoch die Idee hinter der Suche geeigneter Lyapunovfunktionen kurz erklärt. Es ist ein System der Form

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad (2.11)$$

gegeben. Des Weiteren sei \vec{x}_s ein Fixpunkt des Systems. Gibt es nun in einer offenen Umgebung U um den Fixpunkt eine stetig differenzierbare Funktion $V(\vec{x})$ mit den Eigenschaften

- $V(\vec{x}_s) = 0$
- $V(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in U \text{ mit } \vec{x} \neq \vec{x}_s$,

so gibt die Lie-Ableitung

$$\dot{V}(\vec{x}(t)) = \text{grad } V \cdot \dot{\vec{x}} = \text{grad } V \cdot \vec{f}(\vec{x}(t))$$

die Stabilität des Fixpunktes wieder (Argyris et al., 2010; Strogatz, 1994). Das skalare Feld $V(\vec{x})$ wird dann als Lyapunovfunktion bezeichnet. Gilt für alle $\vec{x} \in U$ mit $\vec{x} \neq \vec{x}_s$, dass

- $\dot{V}(\vec{x}(t)) \leq 0$, so ist \vec{x}_s stabil
- $\dot{V}(\vec{x}(t)) < 0$, so ist \vec{x}_s asymptotisch stabil
- $\dot{V}(\vec{x}(t)) > 0$, so ist \vec{x}_s instabil.

Ist $\dot{V}(\vec{x}(t)) < 0$, so nimmt V für jede Trajektorie, die in U startet, mit fortlaufender Zeit ab. Da V bei \vec{x}_s ein absolutes Minimum hat, muss die Trajektorie auf den Zustand \vec{x}_s zulaufen. \vec{x}_s ist asymptotisch stabil. Da dies für jedes $\vec{x} \in U$ gilt, kann mit Hilfe dieser Analyse der Einzugsbereich des Fixpunktes in Form der offenen Umgebung U abgeschätzt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Berechnung des Einzugsbereiches stark von der speziellen Wahl der Lyapunovfunktion abhängt.

2.1.3 Periodische Orbits

Da in dieser Arbeit sowohl die Stabilität quasi-statischer als auch zyklischer Bewegungen untersucht und in Zusammenhang mit dem Elektromyogramm der beteiligten Muskulatur gebracht wurde, wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit periodischen Orbits beziehungsweise Grenzyklen beschäftigen. Dazu werden zunächst Orbits und Grenzyklen definiert. Für die Existenz dieser müssen bestimmte Kriterien erfüllt sein, die im Anschluss daran erläutert werden. Zu guter Letzt werden die Poincaré-Abbildung und die Floquet-Theorie zwecks Stabilitätsanalyse periodischer Lösungen eingeführt.

Als periodischen Orbit (geschlossenen Orbit) mit Periode T bezeichnet man Lösungen $\vec{x}(t)$ des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t))$, für die $\vec{x}(t+T) = \vec{x}(t)$

gilt. Sie entsprechen einer geschlossenen Kurve (Trajektorie) im Phasenraum. Bei Grenzzyklen handelt es sich zwar um periodische Lösungen, jedoch sind diese laut Strogatz (1994) isolierte (zum Grenzzyklus benachbarte Trajektorien sind nicht geschlossen), geschlossene Trajektorien im Phasenraum. Bewegen sich benachbarte Trajektorien des Grenzzyklus für $t \rightarrow \infty$ auf den Grenzzyklus zu, so spricht man von einem asymptotisch stabilen Grenzzyklus. Bewegen sich hingegen benachbarte Trajektorien für $t \rightarrow -\infty$ (umgekehrte Zeitrichtung) auf den Grenzzyklus zu, so ist dieser instabil. Darüber hinaus gibt es noch die Bezeichnung halbstabiler Grenzzyklus, bei dem sich Innen- und Außenraum des Grenzzyklus bezüglich der Stabilität unterscheiden.

Periodische Lösungen eines Differentialgleichungssystems sind im Allgemeinen nur für Systeme mit der Dimension $n \geq 2$ möglich, da für ein eindimensionales System $\dot{x} = f(x)$ (sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf Intervall I) auf dem Intervall I immer ein Potential $V(x)$ existiert, mit $-\partial/\partial_x V(x) = f(x)$ (siehe *Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung*). Das System kann somit als Gradientensystem bezeichnet werden, da für das Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ ein Potential $V(\vec{x})$ existiert mit $-\nabla V(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x})$. Gradientensysteme haben keine periodischen Lösungen (Strogatz, 1994), so dass für die Existenz $n \geq 2$ gelten muss. Für die Existenz von Grenzzyklen ist zunächst einmal die Nichtlinearität des zugrunde liegenden Systems notwendig. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, wir hätten in einem linearen System einen Grenzzyklus identifiziert. Sei $\vec{x}_o(t)$ ein Grenzzyklus und damit eine Lösung des linearen Systems, so ist, aufgrund der Linearität des Systems, auch jede Linearkombination und somit auch eine Schwingung mit veränderter Amplitude $\vec{x}(t) = \mu \vec{x}_o(t)$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Lösung (Strogatz, 1994). Tritt eine Störung auf, so wird die Amplitude moduliert, und die Schwingung wird mit der neuen Amplitude fortgesetzt und ergibt wiederum einen geschlossenen Orbit. Der Grenzzyklus ist also nicht isoliert, was einen Widerspruch zur Definition ergibt. Folglich muss das Differentialgleichungssystem nichtlinear sein, um einen Grenzzyklus als Lösung zu ermöglichen. Darüber hinaus muss es sich um dissipative Systeme handeln. Dies wird schnell deutlich, wenn man sich eine geschlossene Kurve (wenn die Kurve eine Lösung des Systems ist, muss sie aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen einfach geschlossen sein) im zweidimensionalen Phasenraum vorstellt. Gehen wir davon aus, dass diese Kurve ein stabiler Grenzzyklus ist, so müssen Trajektorien, die im Inneren der Kurve starten, sich mit steigender Schwingungsamplitude auf den Grenzzyklus zubewegen. Startet hingegen eine Trajektorie außerhalb des von der Kurve eingeschlossenen Gebiets, geht die Annäherung an den Grenzzyklus mit fallender Amplitude einher. Das heißt, im ersten Fall kommt es zu einem Energiezuwachs, im zweiten Fall zu einem Energieverlust. Auf dem Grenzzyklus hingegen halten sich Energiezuwachs und Energieverlust die Waage.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass periodische Orbits nur in Systemen mit der Dimension $n \geq 2$ möglich sind. Grenzzyklen erfordern zusätzlich noch, dass das System nichtlinear und dissipativ ist. Für höherdimensionale Systeme gibt es Möglichkeiten, die Existenz beziehungsweise das Fehlen periodischer Orbits und Grenzzyklen zu zeigen. Mögliche Kriterien sollen im Folgenden kurz vorgestellt werden.

2.1.4 Kriterien für Existenz von periodischen Lösungen

Indextheorie Wir gehen im Folgenden von einem zweidimensionalen Differentialgleichungssystem $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ aus. Sei eine einfach geschlossene glatte Kurve C (keine Schnittpunkte mit sich selbst) gegeben, die keinen Fixpunkt des Systems enthält. Das durch f_1 und f_2 gegebene Vektorfeld sei glatt auf C stetig und der Punkt $p = (x_1, x_2)$ ein Element der Kurve C (Guckenheimer und Holmes, 1986). Durchläuft p die Kurve C nun einmal entgegen des Uhrzeigersinns, so kann für jeden Punkt p der Winkel

$$\phi(p) = \arctan\left(\frac{f_2(p)}{f_1(p)}\right) \quad (2.12)$$

angeben werden und der zu C gehörende Index I_C wird definiert (Guckenheimer und Holmes, 1986) als

$$I_C = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\phi \quad . \quad (2.13)$$

Da das Vektorfeld auf C glatt sein soll, muss I_C immer ein Vielfaches von 2π sein

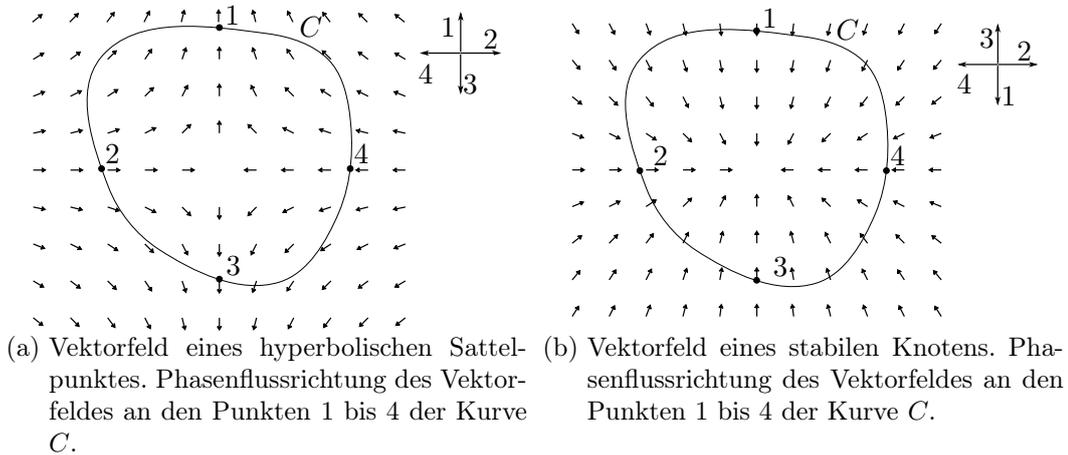


Abbildung 2.3: Bestimmung des Index I_C einer einfach geschlossenen Kurve C

(Strogatz, 1994). Vergleicht man die Richtung des Vektorfeldes von den Punkten 1 bis 4 für beide in Abbildung 2.3 dargestellten Felder, so erkennt man, dass die Änderung im Fall des degenerierten Fixpunktes im Uhrzeigersinn verläuft, hingegen beim stabilen Knoten gegen den Uhrzeigersinn. Dies ergibt für den Sattelpunkt $I_C = -1$ und für den Knoten $I_C = 1$. Der Index einer Kurve hat nach Guckenheimer und Holmes (1986); Strogatz (1994) folgende Eigenschaften:

- Geht C' durch kontinuierliche Deformation aus C hervor ohne einen Fixpunkt zu kreuzen, so ist $I_{C'} = I_C$.
- Wenn C keinen Fixpunkt einschließt, ist der Index $I_C = 0$.

- Wenn C ein Orbit des Systems $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ ist, ist der Index $I_C = +1$.
- Der Index einer Senke, einer Quelle oder eines Zentrums ist $I_C = +1$.
- Der Index eines hyperbolischen Sattelpunktes ist $I_C = -1$.
- Schließt C mehrere Fixpunkte ein, so ist der Index der Kurve die Summe der Indizes der einzelnen Fixpunkte.
- Ein geschlossener Orbit im Phasenraum muss Fixpunkte einschließen, deren Indizes in der Summe +1 ergeben.

Der Index kann daher genutzt werden, um geschlossene Orbits beziehungsweise Grenzyklen in Bereichen des Phasenraums auszuschließen.

Gradientensysteme Kann das Differentialgleichungssystem als $\dot{\vec{x}} = \nabla V(\vec{x})$ geschrieben werden, wobei V eine stetig differenzierbare Potentialfunktion ist, so bezeichnet man dieses System als Gradientensystem. In einem Gradientensystem kann es keine geschlossenen Orbits geben (Strogatz, 1994). Die Beweisidee ist wie folgt: Sei $x_r(t)$ eine periodische Lösung, so folgt dass $V(\vec{x}_r(t)) = V(\vec{x}_r(t+T))$ ist. Integriert man nun aber $\int_t^{t+T} \frac{dV}{dt} dt$, so zeigt sich, dass das Potential V bei einem Durchlauf des periodischen Orbits abnehmen müsste, was einen Widerspruch erzeugt.

Lyapunov Funktionen Existiert für das System $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ mit dem Fixpunkt \vec{x}_s auf dem Gebiet U um \vec{x}_s eine stetig differenzierbare, reelle Funktion $V(\vec{x})$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}_s \quad \wedge \quad V(\vec{x}_s) = 0 \\ \dot{V}(\vec{x}(t)) = \nabla V \dot{\vec{x}} = \nabla V \vec{f}(\vec{x}) < 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}_s \quad , \end{aligned}$$

so bezeichnet man diese Funktion als Lyapunov Funktion. Obige Definition ist gleichbedeutend damit, dass der Punkt \vec{x}_s asymptotisch stabil ist. Alle Trajektorien, die in U starten, bewegen sich auf \vec{x}_s zu. Daher sind in einem solchen System auf U keine periodischen Lösungen möglich (Strogatz, 1994).

Dulacs Kriterium Gibt es eine reelle stetig differenzierbare Funktion $g(\vec{x})$, für die auf einem einfach zusammenhängendem Gebiet G des stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{x} = \vec{f}(\vec{x})$

$$\text{sgn}(\nabla(g\dot{\vec{x}})) = \begin{cases} +1 & \forall \vec{x} \in G \\ \vee & \\ -1 & \forall \vec{x} \in G \end{cases} \quad (2.14)$$

gilt, so kann es auf G keinen geschlossenen Orbit geben (Strogatz, 1994). Für den Beweis wird wieder angenommen, es gäbe auf G einen geschlossenen Orbit C . Des Weiteren sei angenommen, dass sich das Vorzeichen von $\nabla(g\dot{\vec{x}})$ auf G nicht verändert.

Integriert man $\nabla(g\dot{\vec{x}})$ auf der von C eingeschlossenen Fläche, so muss anhand des Gaußschen Satzes in der Ebene

$$\iint_A \nabla(g\dot{\vec{x}})dA = \oint_C g\dot{\vec{x}}\vec{n}ds$$

gelten. Dabei ist \vec{n} der Normalenvektor auf der Kurve C . Entsprechend unserer Annahme muss das linke Integral ungleich Null sein. Da wir aber angenommen hatten, dass C eine Lösung des Systems ist, ist $\dot{\vec{x}}$ an jedem Punkt von C tangential zur Kurve und daher $\dot{\vec{x}}$ auf C senkrecht zu \vec{n} . Das rechte Integral ergibt somit Null und damit einen Widerspruch.

Poincaré-Bendixson-Theorem Das Theorem besagt, dass wenn man auf einem offenen Gebiet G des Phasenraums (welches keine Fixpunkte enthält) eine Trajektorie findet, die in G startet und für alle Zeiten in G verbleibt, so muss in G ein geschlossener Orbit existieren.

2.1.5 Stabilität geschlossener Orbits

Im späteren Verlauf dieser Arbeit werden periodische Armbewegungen aufgenommen und anhand ihrer Stabilität bewertet. Dazu werden Techniken zur Stabilitätsanalyse von periodischen Lösungen benötigt, die im Folgenden kurz beschrieben werden.

Poincaré-Abbildung Um Unterschiede in der Stabilität von geschlossenen Orbits zu untersuchen, greifen wir auf die Idee der Poincaré-Abbildung zurück. Dabei betrachtet man eine im n -dimensionalen Phasenraum wiederkehrende Trajektorie $\vec{x}(t)$ nur an den Durchstoßpunkten einer $(n-1)$ -dimensionalen Hyperfläche Σ (Argyris et al., 2010). Die kontinuierliche Abbildung im n -dimensionalen Raum wird also reduziert auf eine diskrete Abbildung im $(n-1)$ -dimensionalen Raum, deren Koordinaten im Folgenden mit $\vec{\xi}$ bezeichnet werden. Die Veränderung der Zustandsvariablen ist durch das Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x})$ definiert. Die Hyperfläche Σ sei durch

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0 ,$$

mit dem Normalenvektor

$$\vec{n} = |\text{grad } g|^{-1} \text{grad } g ,$$

definiert. Σ sei so gewählt, dass sie von der Trajektorie nur transversal geschnitten ($\vec{F}^t \vec{n} \neq 0$) wird (Argyris et al., 2010). Betrachtet man nur die Punkte, die einer festgelegten Durchstoßrichtung der Hyperfläche entsprechen, sich somit nach einem vollen Umlauf ergeben, und fasst jeden Punkt $P^{(i+1)}$ als Bild seines Vorgängers auf (gedächtnislose Differenzgleichung), so erhält man die sogenannte bijektive Poincaré-Abbildung (Argyris et al., 2010):

$$P^{(i+1)} = f(P^{(i)}) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(P^{(i+1)}) = P^{(i)} . \quad (2.15)$$

Sei nun $\vec{\xi}_S$ ein Fixpunkt der diskreten Abbildung ($\vec{\xi}_S = f(\vec{\xi}_S)$), so ist von Interesse, wie das System auf kleine Störungen $|\vec{\eta}| \ll 1$ reagiert. Aufgrund der Störung befinde sich das System im Zustand $\vec{\xi}^{(i)} = \vec{\xi}_S + \vec{\eta}^{(i)}$.

$$\begin{aligned} \vec{\xi}^{(i+1)} &= \vec{f}(\vec{\xi}^{(i)}) \\ \vec{\xi}_S + \vec{\eta}^{(i+1)} &= \vec{f}(\vec{\xi}_S + \vec{\eta}^{(i)}) \\ &\stackrel{\text{Taylorentwicklung}}{=} \vec{f}(\vec{\xi}_S + \vec{\eta}^{(i)})|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}_S} + \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\xi}} \right|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}_S} \vec{\eta}^{(i)} + \mathcal{O}(\vec{\eta}^{(i)2}) \\ \vec{\eta}^{(i+1)} &\approx \left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\xi}} \right|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}_S} \vec{\eta}^{(i)} \end{aligned}$$

Damit folgt für kleine Störungen aus der Gleichgewichtslage, dass

$$\underbrace{\vec{f}(\vec{\xi}_S + \vec{\eta}^{(i)}) - \vec{\xi}_S}_{\text{Returnmap}} \approx \underbrace{\left. \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\xi}} \right|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}_S}}_{\text{Jakobimatrix}} \underbrace{\vec{\eta}^{(i)}}_{\text{Störung}} \quad (2.16)$$

ist. Über die lineare Stabilität der diskreten Abbildung geben die Eigenwerte der Jakobimatrix Aufschluss. Damit ein Fixpunkt einer diskreten Abbildung stabil ist, müssen alle Eigenwerte λ_i der Jakobimatrix vom Betrage her kleiner Eins sein. Ist der Betrag eines Eigenwertes größer Eins, so ist der Fixpunkt instabil. Die von Goswami et al. (1996) formulierte Beziehung

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{J}\mathbf{\Upsilon} \quad (2.17)$$

ermöglicht die numerische Bestimmung der Jakobimatrix $\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\xi}} \right)$. $\mathbf{\Upsilon}$ enthält als Diagonaleinträge die Störungen der einzelnen Zustandsvariablen $(\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$. Die j -te Spalte von $\mathbf{\Omega}$ mit

$$\mathbf{\Omega} = (\vec{\omega}_1 \dots \vec{\omega}_{n-1}) \quad \text{mit} \quad \vec{\omega}_j = \vec{f}(\vec{\xi}_S + \eta_j \vec{e}_j) - \vec{\xi}_S$$

beschreibt die Entfernung der Returnmap vom Referenzzustand bei Störung der j -ten Zustandsvariablen. $\mathbf{\Omega}$ und $\mathbf{\Upsilon}$ lassen sich bei gegebener Störung und bekanntem Fixpunkt numerisch ermitteln und damit die Jakobimatrix berechnen. Für die später untersuchten kinematischen Daten ist der Phasenraum zweidimensional, womit sich Gleichung (2.17) auf

$$f(\xi_S + \eta) - \xi_S = \lambda \eta \quad (2.18)$$

reduziert. Soll also die Stabilität eines geschlossenen Orbits bewertet werden, so reicht es aus, die Returnmap $f(\xi_S + \eta)$ bei bekannter Störung η zu bestimmen:

$$\lambda = \frac{f(\xi_S + \eta) - \xi_S}{\eta} \quad (2.19)$$

Für $|\lambda| < 1$ ist der Orbit stabil. Geht ξ_S aus numerischen Berechnungen hervor, so ist klar, dass mit der hier beschriebenen Methode nur stabile Grenzzyklen analysiert

werden können. Die Vorwärtssimulation bei einem instabilen Grenzyklus würde nur dann auf ξ_S führen, wenn die Anfangsbedingungen zufällig so gewählt würden, dass sie bereits auf dem Grenzyklus lägen (Goswami et al., 1996).

Floquet-Multiplikatoren Eine andere Möglichkeit die Stabilität eines periodischen Orbits zu untersuchen, ist die Floquetanalyse, wobei die Stabilität angegeben werden kann, ohne eine explizite Störung simulieren zu müssen. Wie später gezeigt wird, sind beide Methoden miteinander verbunden. Sei $\bar{x}_r(t)$ eine periodische Lösung des autonomen Differentialgleichungssystems $\dot{\bar{x}} = \vec{f}(\bar{x})$, so dass gilt: $\bar{x}_r(t) = \bar{x}_r(t+T)$, wobei T die Periode der Lösung ist. Untersucht man nun die zeitliche Veränderung von Störungen \tilde{x} von der Referenztrajektorie $\bar{x}_r(t)$, so folgt (Argyris et al., 2010):

$$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{\tilde{x}} + \dot{\bar{x}}_r(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{x}} = \vec{f}(\bar{x}_r + \tilde{x}) - \vec{f}(\bar{x}_r) \equiv \tilde{f}(\tilde{x}) \quad (2.20)$$

Entwickelt man nun $\tilde{f}(\tilde{x})$ um $\tilde{x} = \vec{0}$, so ergibt sich:

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\tilde{f}(\vec{0})}_{=\vec{0}} + \underbrace{\left. \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{x}=\vec{0}}}_{\mathbf{D}(t)} \tilde{x} + \mathcal{O}(\tilde{x}^2) \quad (2.21)$$

$\mathbf{D}(t)$ ist die zeitabhängige Jakobimatrix, ausgewertet an der Stelle $\tilde{x} = \vec{0}$. Da \tilde{f} für verschwindende Störung des Systems ausgewertet wird, entspricht (2.21)

$$\mathbf{D}(t) = \left. \frac{\partial \vec{f}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}_r(t)} . \quad (2.22)$$

Da $\vec{f}(\bar{x})$ nicht explizit von der Zeit abhängt und die Referenztrajektorie periodisch in T ist, muss auch $\mathbf{D}(t)$ periodisch in T sein. Im Falle eines nichtautonomen, periodisch fremderregten Systems ($\vec{f}(\bar{x}, t) = \text{vec}f(\bar{x}, t+T)$) gilt (Argyris et al., 2010):

$$\mathbf{D}(t) = \left. \frac{\partial \vec{f}(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}_r(t)} . \quad (2.23)$$

Auch in diesem Fall ist die Jakobimatrix $\mathbf{D}(t)$ periodisch mit der Periodendauer T . Die zeitliche Entwicklung der Störung \tilde{x} und damit die Stabilität der Referenzlösung wird durch die zeitabhängige Matrix $\mathbf{D}(t)$ bestimmt:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \mathbf{D}(t)\tilde{x}(t) . \quad (2.24)$$

Da die Jakobimatrix nun explizit von der Zeit abhängt, lässt sich die zeitliche Entwicklung der Störung nicht mehr, wie bei der linearen Stabilitätsanalyse üblich, anhand der Eigenwerte der Jakobimatrix bewerten. Es zeigt sich jedoch, dass sich das Problem auf die Bestimmung einer konstanten Matrix, der Monodromiematrix, reduzieren lässt.

Mit der Periodizität von \mathbf{D} folgt trivialerweise, dass auch $\tilde{x}(t+T)$ Lösung des linearen Differentialgleichungssystems (2.24) ist. Dies bedeutet hingegen nicht, dass \tilde{x} periodisch sein muss. Jede Lösung eines linearen DGLs lässt sich als Linearkombination des Basissystems ausdrücken. O.B.d.A. wird das Basissystem $\Phi(t)$ (wobei die linear unabhängigen Lösungen in den Spalten von Φ stehen) so gewählt, dass $\Phi(t=0) = \mathbf{I}$ ist. Es gilt:

$$\tilde{x}(t) = \Phi(t)\tilde{c}, \quad (2.25)$$

wobei \tilde{c} ein konstanter Vektor ist und die Anfangsbedingungen enthält. Da $\tilde{x}(t+T)$ auch Lösung von (2.24) ist, muss auch $\tilde{x}(t+T)$ durch das Fundamentalsystem $\Phi(t)$ beschrieben werden können. Daraus folgt, dass

$$\Phi(t+T) = \Phi(t) \cdot \mathbf{C} \quad (2.26)$$

gilt (dies entspricht der Poincaré-Abbildung, vergleiche Argyris et al. (2010)). Das Fundamentalsystem nach einer Periodendauer $\Phi(t+T)$ geht also aus elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen aus $\Phi(t)$ hervor. Für $t=0$ ist

$$\Phi(T) = \Phi(0) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \quad . \quad (2.27)$$

\mathbf{C} wird als Monodromiematrix bezeichnet. Mit Hilfe von Gleichung (2.27) lässt sich also das Problem $\dot{\tilde{x}}(t) = \mathbf{D}(t)\tilde{x}(t)$ mit zeitabhängiger Matrix \mathbf{D} auf die diskrete Gleichung

$$\Rightarrow \tilde{x}(T) = \Phi(T) \cdot \tilde{c} = \Phi(0) \cdot \mathbf{C} \cdot \tilde{c} = \mathbf{C} \cdot \tilde{x}(0) \quad (2.28)$$

mit konstanter Matrix \mathbf{C} reduzieren. Die Eigenwerte von \mathbf{C} , die sogenannten Floquet-Multiplikatoren (Argyris et al., 2010), geben Information über die lineare Stabilität der periodischen Lösung. Da wir angenommen haben, dass $\tilde{x}_r(t)$ Lösung eines autonomen Differentialgleichungssystems ist, ist ein Eigenwert der Monodromiematrix gleich Eins. Dieser Eigenwert entspricht einer Störung der Referenztrajektorie in tangentialer Richtung. Sind nun die Beträge aller anderen Eigenwerte $|\lambda_i|$ größer Eins, so ist der Orbit instabil, sind hingegen alle Beträge der Eigenwerte kleiner Eins, so ist der Orbit stabil. Nach dem Satz von Hartmann-Grobmann kann bei mehreren Eigenwerten mit $|\lambda| = 1$ keine Aussage über die Stabilität des nichtlinearen Systems getroffen werden. Für ein nichtautonomes Differentialgleichungssystem müssen alle Eigenwerte bei der Stabilitätsanalyse in Betracht gezogen werden. Für einen stabilen Orbit muss in diesem Fall für die Eigenwerte der Monodromiematrix $|\lambda_i| < 1, \forall i$ gelten.

Da die Monodromiematrix im Allgemeinen nicht analytisch berechnet werden kann, muss die Bestimmung numerisch erfolgen. Setzt man Gleichung (2.25) in Gleichung (2.24) ein, so erhält man die Beziehung

$$\dot{\Phi}(t) \cdot \tilde{c} = \mathbf{D}(t) \cdot \Phi(t)\tilde{c}$$

und daraus das Anfangswertproblem

$$\Rightarrow \dot{\Phi}(t) = \mathbf{D}(t) \cdot \Phi(t) \quad , \quad \Phi(t=0) = \mathbf{I} \quad , \quad (2.29)$$

mit dessen Hilfe \mathbf{C} numerisch bestimmt werden kann. Das bedeutet, dass man Gleichung (2.29) bis $t = T$ integrieren muss, um $\Phi(T)$ und damit \mathbf{C} zu erhalten. Dafür muss die Jakobimatrix entlang der Referenztrajektorie und die Periode der Referenzlösung bekannt sein, nicht aber das Fundamentalsystem selbst.

Wir haben nun die Basis geschaffen, um die später aufgezeigten Modellrechnungen, und auch die gemessenen Bewegungen auf ihre Stabilität im physikalischen Sinne hin zu untersuchen.

2.2 Stochastische Prozesse

Wie bereits beschrieben, sollen im Zuge dieser Arbeit die Auswirkung der Selbststabilität auf die motorische Kontrolle untersucht werden. Wir haben postuliert, dass sich diese Veränderungen im sEMG abbildet. Da das sEMG ein hochvariables Signal ist, wurde es als stochastischer Prozess beschrieben und Unterschiede in Bezug auf veränderte Selbststabilität anhand von Kenngrößen stochastischer Prozesse untersucht. Im folgenden Kapitel werden daher zunächst Grundbegriffe der Stochastik kurz eingeführt. Im Anschluss daran wird die Klassifizierung stochastischer Prozesse und die Bestimmung der Kenngrößen (Drift und Diffusion) zur Beschreibung des Prozesses vorgestellt. Im letzten Teil dieses Abschnittes werden Methoden zur Bestimmung dieser Kenngrößen anhand von Messdaten dargelegt und anhand eines Beispiels erläutert.

2.2.1 Grundbegriffe der Stochastik

Die Beschreibung der folgenden Begriffe ist stark angelehnt an Haken (1990) und Risken (1984). Als ein anschauliches Beispiel wollen wir im Folgenden die Menge aller Spiele der Fußballweltmeisterschaft und die in diesen Spielen jeweils gefallen Tore als Ergebnisse eines Zufallsexperiments auffassen.

Wahrscheinlichkeitsbegriff

Der Ergebnisraum Ω umfasst laut Behnen und Neuhaus (2003) die Menge der potentiell möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Damit wäre der Ergebnisraum des oben genannten Beispiels

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\} \quad (2.30)$$

diskret und die Elementarereignisse ω_i bezeichnen die einzelnen möglichen Toranzahlen. Der Ergebnisraum könnte, wie beim Münzwurf auch, aus

$$\Omega = \{„Kopf“, „Zahl“\} \quad (2.31)$$

bestehen. In diesem Fall muss man für quantitative Analysen den Ergebnissen ω des Ergebnisraumes reelle Zahlen $X(\omega)$, die sogenannten Zufallsvariablen, zuordnen (Argyris et al., 2010). Dabei können einem Ergebnis auch gleichzeitig mehrere Zufallsvariablen zugeordnet werden, wie es zum Beispiel der Fall wäre, wenn zusätzlich

zu den geschossenen Toren noch die Anzahl der Fouls notiert würden. Jetzt könnte man sich fragen, wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Fußballspiel weniger als vier Tore fallen. Allgemeiner ausgedrückt: Wie wahrscheinlich ist es, dass die Anzahl der geschossenen Tore in einer Untermenge A (auch als Ereignis bezeichnet) des Ergebnisraums ($A \subset \Omega$) liegt? Diese Wahrscheinlichkeit wird mit $P(A)$ bezeichnet (diskrete Wahrscheinlichkeiten werden im Folgenden mit Großbuchstaben bezeichnet, Wahrscheinlichkeitsdichten hingegen mit Kleinbuchstaben). Das Grundgerüst der Wahrscheinlichkeitstheorie liefern die von Kolmogorov (siehe auch Kolmogorov und Natarajan (1998)) aufgestellten Axiome, die die Eigenschaften von $P(A)$ festlegen (Risken (1984)):

1. $A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$: Die Wahrscheinlichkeit einer Teilmenge des Ereignisraums ist nie negativ und ist nach oben beschränkt.
2. Für $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \subset \Omega \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$: Für zwei disjunkte Mengen ergibt sich die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung beider Mengen als Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.
3. $P(\Omega) = 1$: Tritt ein Ereignis mit Sicherheit ein, so ist die Wahrscheinlichkeit gleich Eins.

Wir wollen anhand des eingangs benutzten Beispiels die Bedeutung dieser Axiomatik zeigen. Dazu wird nun die Zufallsvariable, geschossene Tore, als X bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, ein Spiel mit weniger als vier Toren zu sehen, ist demnach

$$P(X < 4) = \sum_{\omega_n < 4} P_n \quad \text{mit } P(X = \omega_n) = P_n \quad (2.32)$$

und ergibt sich direkt aus dem zweiten Axiom. Ferner muss für alle P_n gelten, dass sie nicht negativ sind und dass die Summe über alle Wahrscheinlichkeiten P_n Eins ergibt. Wie die Analyse der in der Bundesliga bis zum Jahr 2006 geschossenen Tore zeigte (Tolan, 2014), kann die Wahrscheinlichkeit in einem Spiel n Tore zu schießen, gut durch eine Poissonverteilung

$$P_n = P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (2.33)$$

mit $\lambda = 3$ beschrieben werden, womit Gleichung (2.32) in diesem speziellen Fall zu

$$P(X < 4) = \sum_{n=0}^3 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \approx 0.65$$

wird. Entsprechend der Verteilung würden im Mittel etwa zwei Drittel aller Spiele mit weniger als vier Toren beendet.

Wahrscheinlichkeitsdichte

Im genannten Beispiel war der Ereignisraum diskret, dieser kann natürlich auch kontinuierlich sein. Dies erfordert, dass die Summe in Gleichung (2.32) durch das Integral ersetzt wird. Dazu wird die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(q)$ eingeführt, wobei q eine kontinuierliche Zufallsvariable sei. Gemäß der Axiomatik muss für die Wahrscheinlichkeitsdichte

1. $\forall q: f(q) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(q) dq = 1$

gelten. Die Wahrscheinlichkeit eine Zufallsvariable q im Intervall $[a, b]$ zu finden, ist durch

$$P(a \leq q \leq b) = \int_a^b f(q) dq \quad (2.34)$$

gegeben. Man könnte auch für den diskreten Fall, mit Hilfe der Delta-Funktion, eine Wahrscheinlichkeitsdichte gemäß

$$f(q) = \sum_n p_n \delta(q - q_n) \quad (2.35)$$

definieren, was, in Gleichung (2.34) eingesetzt, direkt die Beziehung (2.32) liefert.

Erwartungswert

Der Erwartungswert ($E[q]$ bzw. $\langle q \rangle$) einer Zufallsvariable q ist definiert als:

$$E[q] = \langle q \rangle = \int q f(q) dq . \quad (2.36)$$

Setzt man für die Wahrscheinlichkeitsdichte wieder die Beziehung (2.35) ein, so erhält man für diskrete Zufallsvariablen

$$\langle q \rangle = \sum_n q_n P_n . \quad (2.37)$$

Betrachtet man das anfängliche Beispiel und nimmt an, dass die Wahrscheinlichkeit n Tore zu schießen einer Poissonverteilung folgt, wobei die diskrete Zufallsvariable für die Anzahl der Tore mit n bezeichnet sei, so ist der Erwartungswert in diesem Fall

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}}_{e^\lambda} = \lambda .$$

Für eine Funktion $\phi(q)$ der Zufallsvariable q ist der Erwartungswert gemäß

$$\langle \phi(q) \rangle = \int \phi(q) f(q) dq \quad (2.38)$$

definiert. Hängt die Funktion ϕ von mehreren kontinuierlichen Zufallsvariablen (q_1, \dots, q_n) ab, so ergibt sich der Erwartungswert aus dem Mehrfachintegral

$$\langle \phi(q_1, \dots, q_n) \rangle = \int \dots \int \phi(q_1, \dots, q_n) f^{(n)}(q_1, \dots, q_n) dq_1 \dots dq_n \quad , \quad (2.39)$$

wobei $f^{(n)}(q_1, \dots, q_n)$ die n -dimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsdichte ist. Die Verbundwahrscheinlichkeit muss entsprechend des Wahrscheinlichkeitsbegriffs die Normierung

$$\int \dots \int f^{(n)}(q_1, \dots, q_n) dq_1 \dots dq_n = 1 \quad (2.40)$$

erfüllen. Sie lässt sich durch das Integrationsschema

$$f^{(n-1)}(q_1, \dots, q_{n-1}) = \int f^{(n)}(q_1, \dots, q_n) dq_n \quad (2.41)$$

sukzessiv reduzieren. Handelt es sich bei den Zufallsvariablen um stochastisch unabhängige Variablen, so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte faktorisiert. Des Weiteren lässt sich Gleichung (2.39) zu

$$\langle \phi(q_1, \dots, q_n) \rangle = \int \dots \int \phi(q_1, \dots, q_n) f(q_1) \dots f(q_n) dq_1 \dots dq_n \quad (2.42)$$

vereinfachen. Die Korrelation zweier Zufallsvariablen q_1 und q_2 ist definiert als Erwartungswert des Produktes beider Größen und zerfällt bei stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen zu dem Produkt der Erwartungswerte:

$$\begin{aligned} \langle q_1 q_2 \rangle &= \iint q_1 q_2 f(q_1, q_2) dq_1 dq_2 \stackrel{\text{stoch. unabh.}}{=} \iint q_1 q_2 f(q_1) f(q_2) dq_1 dq_2 \\ \langle q_1 q_2 \rangle &= \langle q_1 \rangle \langle q_2 \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Charakteristische Funktion

Als charakteristische Funktion $Z(\alpha)$ bezeichnet man die Fouriertransformierte der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$Z(\alpha) = \langle e^{iq\alpha} \rangle = \int dq e^{iq\alpha} f(q) = \mathcal{F}\{f(q)\} \quad , \quad (2.44)$$

deren Rücktransformation

$$\mathcal{F}\{Z(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{-iq\alpha} Z(\alpha) = f(q) \quad (2.45)$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte liefert. Da für die n -te partielle Ableitung von $Z(\alpha)$ nach α

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} Z(\alpha) \right|_{\alpha=0} = \int dq (iq)^n e^{iq\alpha} f(q) \Big|_{\alpha=0} = \int dq (iq)^n e f(q) = i^n \langle q^n \rangle \quad (2.46)$$

gilt, wird Z auch als momenterzeugende Funktion bezeichnet. Des Weiteren lässt sich $Z(\alpha)$, falls die Ableitungen existieren, als Taylorreihe

$$\begin{aligned} Z(\alpha) &= \underbrace{Z(\alpha)|_{\alpha=0}}_{= \int f(q) dq = 1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} Z(\alpha)|_{\alpha=0}}_{i \langle q \rangle} \alpha + \dots + \underbrace{\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} Z(\alpha)|_{\alpha=0}}_{\frac{1}{n!} i^n \langle q^n \rangle} \alpha^n + \mathcal{O}(\alpha^{n+1}) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} \langle q^n \rangle \end{aligned} \quad (2.47)$$

darstellen und ist damit vollständig durch die Momente beschrieben.

Kumulanten

Weitere Kenngröße einer Zufallsvariablen ist die kumulatenerzeugende Funktion

$$W(\alpha) = \ln(Z(\alpha)) \quad (2.48)$$

mit den Kumulanten

$$K_n = \langle q^n \rangle_c = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^n W(\alpha) \Big|_{\alpha=0} . \quad (2.49)$$

Die 0-te Kumulante verschwindet wegen $K_0 = \ln(Z(0)) = \ln(1) = 0$. Die ersten beiden Kumulanten lassen sich mit Hilfe der Momente wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} W(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{i} \frac{1}{Z(\alpha)} \Big|_{\alpha=0} \frac{\partial}{\partial \alpha} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = \langle q \rangle \\ K_2 &= -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} W(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = - \left[-\frac{1}{Z(\alpha)^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} Z(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} Z(\alpha) + \frac{1}{Z(\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} Z(\alpha) \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle \geq 0 . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Die erste Kumulante ist demnach nichts anderes als der Erwartungswert der Zufallsvariable, und die zweite Kumulante die dazugehörige Varianz. Setzt man die Taylorentwicklung von $W(\alpha)$ um $\alpha = 0$ in die Beziehung $Z(\alpha) = e^{W(\alpha)}$ ein, so erhält man

$$Z(\alpha) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} K_n \right) . \quad (2.51)$$

Sei nun zum Beispiel eine Zufallsvariable q gegeben, für die

$$K_1, K_2 \neq 0, K_n = 0 \quad \forall n > 2$$

gilt, so kann man zeigen (siehe 5), dass die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K_2}} e^{-\frac{(K_1 - q)^2}{2K_2}} \quad (2.52)$$

ist. Es handelt sich also um eine Gaußverteilung zentriert um den Erwartungswert $K_1 = \langle q \rangle$ mit der Varianz $K_2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wir wollen auf das eingangs beschriebene Beispiel zur Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zurückgreifen. Gemäß Risken (1984) kann die Wahrscheinlichkeit, einen Ereignispunkt von A in der Ereignismenge Ω anzutreffen, zum Beispiel dass bei einem Fußballspiel weniger als vier Tore fallen ($A = \{0, 1, 2, 3\}$, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$), als

$$P(A) = \frac{\sum_{\omega \in A} P(\omega)}{\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)} \quad (2.53)$$

angegeben werden. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit, einen Ereignispunkt von A in der Menge S anzutreffen, wobei S und A Untermengen von Ω sind. Dies könnte zum Beispiel die Frage nach der Wahrscheinlichkeit sein, bei einem Spiel mit weniger als vier Toren ($S = \{0, 1, 2, 3\}$) eine ungerade Anzahl von Toren zu erzielen ($A = \{1, 3, \dots\}$).

$$P(A|S) = \frac{\sum_{\omega \in A \cap S} P(\omega)}{\sum_{\omega \in S} P(\omega)} = \frac{\sum_{\omega \in A \cap S} P(\omega) / \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)}{\sum_{\omega \in S} P(\omega) / \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)} = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} \quad (2.54)$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|S)$ erhält man, indem die Verbundwahrscheinlichkeit $P(A \cap S)$, also die Wahrscheinlichkeit, dass A und S eintreten, auf die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von S normiert wird. $P(A|S)$ wird als bedingte Wahrscheinlichkeit von A relativ zu S bezeichnet (Haken, 1990). Nun kann man sich umgekehrt fragen, wie wahrscheinlich ist es, dass S eintritt, wenn A vorausgesetzt wird. Gesucht ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(S|A)$, die sich über den *Satz von Bayes* (Bayes und Price, 1763)

$$P(S|A) = \frac{P(A|S)P(S)}{P(A)} \quad (2.55)$$

berechnen lässt. Sei $P(x, y) = P(X' = x, Y' = y)$ die Verbundwahrscheinlichkeit der diskreten Zufallsvariablen X' und Y' , so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $X' = x$ zu messen, wenn davon ausgegangen wird $Y' = y$ gemessen zu haben, im diskreten Fall durch

$$P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)} = \frac{P(x, y)}{\sum_y P(x, y)} \quad (2.56)$$

gegeben.

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten

Für kontinuierliche Zufallsvariablen ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte in Analogie zu Gleichung (2.56). Nehmen wir an, wir haben die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f(q_1, \dots, q_n)$ für n beliebige Zufallsvariablen q_1, \dots, q_n gegeben.

Die Wahrscheinlichkeit das System im Zustand $q'_i \in [q_i, q_i + dq_i]_{i=1, \dots, n}$ zu finden, kann mit $f(q_1, \dots, q_n) dq_1 \dots dq_n$ angegeben werden. Dies ist aber gleichzeitig

$$f(q_1, \dots, q_n) dq_1 \dots dq_n = p(q_1 | q_2, \dots, q_n) dq_1 \cdot f(q_2, \dots, q_n) dq_2 \dots dq_n \quad , \quad (2.57)$$

womit

$$f(q_1, \dots, q_n) = p(q_1 | q_2, \dots, q_n) f(q_2, \dots, q_n) \quad (2.58)$$

gilt. Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(q_1 | q_2, \dots, q_n)$ hat somit die Form

$$p(q_1 | q_2, \dots, q_n) = \frac{f(q_1, q_2, \dots, q_n)}{f(q_2, \dots, q_n)} = \frac{f(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\int f(q_1, q_2, \dots, q_n) dq_1} \quad . \quad (2.59)$$

Somit lässt sich das *Bayes'sche Theorem* für bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten formulieren als:

$$p(q_2, \dots, q_n | q_1) = \frac{p(q_1 | q_2, \dots, q_n) f(q_1)}{f(q_1, q_2, \dots, q_n)} \quad . \quad (2.60)$$

Bedingter Erwartungswert

Der bedingte Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsvariable q , unter der Voraussetzung, dass Ereignis $p = q'$ eingetreten ist, wird über

$$E(q|p) = \langle q \rangle_{p=q'} = \int qp(q|p=q')dq \quad (2.61)$$

definiert. Der bedingte Erwartungswert wird uns später bei der Bestimmung von Drift und Diffusion einer bestimmten Prozessklasse (den Langevin-Prozessen) wieder begegnen. Zunächst soll jedoch erläutert werden, wie Zufallsprozesse charakterisiert werden können.

2.2.2 Charakterisierung von Zufallsprozessen

Anhand von Gleichung (2.58) lassen sich Zufallsprozesse charakterisieren. Dazu wollen wir zunächst davon ausgehen, dass eine Zufallsvariable $q = q(t)$ zeitabhängig ist. Wir gehen davon aus, dass eine Schar von Realisationen der zeitlichen Entwicklung von $q(t)$ vorliegen und das Ensemblemittel existiert. Die Verbundwahrscheinlichkeit $f(q_1, t_1; \dots; q_n, t_n) dq_1 \dots dq_n$ gibt dann an, wie wahrscheinlich es ist, das System zu den Zeiten t_i in den entsprechenden Intervallen $[q_i, q_i + dq_i]$ vorzufinden. Wir können die n -zeitige Verbundwahrscheinlichkeitsdichte, der zeitabhängigen Zufallsvariablen $q(t)$, über die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(q_1, t_1; \dots; q_n, t_n) = p(q_1, t_1 | q_2, t_2; \dots; q_n, t_n) \cdot f(q_2, t_2; \dots; q_n, t_n) \quad (2.62)$$

analog zu Gleichung (2.58) definieren. Die Klassifikation von Zufallsprozessen erfolgt nun anhand der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte (Risken, 1984).

- **Reiner Zufallsprozess:** $p(q_1, t_1 | q_2, t_2; \dots; q_n, t_n) = f(q_1, t_1)$

$$f(q_1, t_1; \dots; q_n, t_n) = f(q_1, t_1) \cdots f(q_n, t_n)$$

Die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Zustand zu erreichen, hängt nicht von vorherigen Zuständen ab. Dies impliziert aber mögliche Sprünge zwischen Zuständen benachbarter Zeiten. Ist $q(t)$ eine zeitlich kontinuierliche Zufallsvariable, so kann es sich nicht um einen reinen Zufallsprozess handeln, da Zustände zu zwei beliebig nahen Zeiten eine nicht verschwindende Korrelation haben müssen.

- **Markov-Prozess:** $p(q_1, t_1 | q_2, t_2; \dots; q_n, t_n) = p(q_1, t_1 | q_2, t_2)$

$$f(q_1, t_1; \dots; q_n, t_n) = p(q_1, t_1 | q_2, t_2) p(q_2, t_2 | q_3, t_3) \cdots p(q_{n-1}, t_{n-1} | q_n, t_n) f(q_n, t_n)$$

Die Wahrscheinlichkeit einen zukünftigen Zustand q_2 zur Zeit t_2 zu messen, hängt nur vom aktuell gemessenen Wert bei q_1 ab. Der Prozess hat kein „Gedächtnis“ und wird als Markov-Prozess bezeichnet. Wenn der Prozess kein Gedächtnis hat, muss der stochastische Anteil $\Gamma(t)$ zeitlich unkorreliert sein $\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \delta(t - t')$. Im Falle von zweizeitigen Wahrscheinlichkeitsdichten, die uns später bei der Bestimmung von Drift- und Diffusionskoeffizienten wieder begegnen, kann die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte mit Hilfe von Gleichung (2.59) aus

$$p(q_2, t_2 | q_1, t_1) = \frac{f(q_1, t_1; q_2, t_2)}{\int dq_1 f(q_1, t_1; q_2, t_2)}$$

berechnet werden. Da ein beliebiger Markov-Prozess in ein Produkt von Übergangswahrscheinlichkeiten zerfällt, steckt die volle Prozessinformation in der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(q_1, t_1; q_2, t_2)$.

- **Allgemeine Prozesse:** Die Wahrscheinlichkeit einen zukünftigen Wert zu messen wird von mehr als einer Zeit beeinflusst. Der Prozess hat ein Gedächtnis. So sind Differentialgleichungen höherer Ordnung per se keine Markov-Prozesse. Dies kann man sich leicht anhand eines mechanischen Beispiels klarmachen. Wir betrachten einen harmonischen Oszillator. Zur Zeit t_2 befindet sich das System im Nulldurchgang. Wir wollen nun wissen, wo sich das System zur Zeit t_3 befindet. Dies gelingt nur, wenn die Geschwindigkeit zur Zeit t_2 bekannt ist. Dazu muss aber der Ort zur Zeit t_1 bekannt sein. Damit hängt der Zustand in t_3 von t_2 und t_1 ab. Nicht-Markov-Prozesse können durch Einbettung zusätzlicher Variablen wieder in Markov-Prozesse verwandelt werden. Sei ein eindimensionaler Prozess

$$\dot{q} = f(q) + \tilde{\Gamma}(t), \quad \text{mit } \langle \tilde{\Gamma}(t_1), \tilde{\Gamma}(t_2) \rangle = \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma|t_1 - t_2|},$$

gegeben. Für endliche γ ist das Rauschen zeitlich korreliert, der Prozess hat ein Gedächtnis, und damit ist die Markov-Eigenschaft verletzt. Man führt nun

eine zusätzliche Variable

$$\dot{v} = -\gamma v + \Gamma(t), \quad \text{mit } \langle \Gamma(t_1), \Gamma(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2), \quad (2.63)$$

ein. Gleichung (2.63) kann mit Hilfe der Variation der Konstanten integriert werden und somit die Korrelation $\langle v(t_1)v(t_2) \rangle$ zu (Risken, 1984)

$$\langle v(t_1)v(t_2) \rangle = \frac{1}{2\gamma} e^{-\gamma|t_1-t_2|}$$

berechnet werden. Die zeitliche Korrelation von $v(t)$ entspricht also genau der Verteilung von $\tilde{\Gamma}(t)$. Somit kann der vormals eindimensionale Prozess, über Einbettung einer zusätzlichen Zufallsvariable v ,

$$\dot{q} = f(q) + v \quad (2.64)$$

$$\dot{v} = -\gamma v + \Gamma(t) \quad (2.65)$$

in einen zweidimensionalen Markov-Prozess verwandelt werden.

2.2.3 Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Wir haben im vorherigen Kapitel gesehen, dass ein Prozess, in dem der kommende Zustand nur vom jetzigen Zustand abhängt, als Markov-Prozess bezeichnet wird. Wir können somit die Verbundwahrscheinlichkeit

$$f(q_3, t_3; q_2, t_2; q_1, t_1) = p(q_3, t_3 | q_2, t_2) p(q_2, t_2 | q_1, t_1) f(q_1, t_1) \quad (2.66)$$

als Produkt von Übergangswahrscheinlichkeiten darstellen. Weiterhin gilt aufgrund der Integrierbarkeit

$$f(q_3, t_3; q_1, t_1) \stackrel{\text{Markoveigen.}}{=} \int dq_2 f(q_3, t_3; q_2, t_2; q_1, t_1) \int dq_2 p(q_3, t_3 | q_2, t_2) p(q_2, t_2 | q_1, t_1) f(q_1, t_1) \quad (2.67)$$

Unabhängig von der Markov-Eigenschaft ist Gleichung (2.62)

$$f(q_3, t_3; q_1, t_1) = p(q_3, t_3; q_1, t_1) f(q_1, t_1) \quad (2.68)$$

erfüllt. Gleichung (2.67) und (2.68) gleichgesetzt ergibt:

$$p(q_3, t_3; q_1, t_1) f(q_1, t_1) \stackrel{\text{Markoveigen.}}{=} \int dq_2 p(q_3, t_3 | q_2, t_2) p(q_2, t_2 | q_1, t_1) f(q_1, t_1) \quad (2.69)$$

Da Gleichung (2.69) für beliebige Wahrscheinlichkeitsdichten $f(q_1, t_1)$ gelten muss, erhält man die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*:

$$p(q_3, t_3; q_1, t_1) = \int dq_2 p(q_3, t_3 | q_2, t_2) p(q_2, t_2 | q_1, t_1) \quad (2.70)$$

Liegen bei einem Prozess Markov-Eigenschaften vor, so ist die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* (CK-Gleichung) erfüllt. Umgekehrt heißt das aber, ist die CK-Gleichung nicht erfüllt, kann auch kein Markov-Prozess vorliegen. Die CK-Gleichung ist also notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium für Markov-Eigenschaften.

2.2.4 Kramers-Moyal-Entwicklung

Bei rein deterministischen Systemen hat man oft den Zustand eines Systems zu einem Zeitpunkt gegeben und möchte wissen, in welchem Zustand das System zu einem späteren Zeitpunkt ist. Bei stochastischen Prozessen kann nur die Wahrscheinlichkeit, zu einem späteren Zeitpunkt das System in einer bestimmten Konfiguration vorzufinden, angegeben werden. Gesucht ist in diesem Falle die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte $p(q, t|q_0, t_0)$. Im kommenden Kapitel wird die Evolutionsgleichung für Wahrscheinlichkeitsdichten gemäß Risken (1984) hergeleitet, die analog ist zur Suche nach $p(q, t|q_0, t_0)$. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass q eindimensional ist, jedoch lassen sich analoge Formulierungen für vektorwertige Zufallsvariablen $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ finden. Sei die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(q, t)$ des Systems zur Zeit t gegeben. Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(q, t + \tau)$

$$f(q, t + \tau) = \int f(q, t + \tau, q', t) dq' . \quad (2.71)$$

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte lässt sich durch die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte

$$f(q, t + \tau) = \int dq' p(q, t + \tau|q', t) f(q', t) \quad (2.72)$$

ausdrücken. Die Taylorentwicklung von $f(q, t + \tau)$ um den Entwicklungspunkt $\tau = 0$ führt auf

$$f(q, t + \tau) = f(q, t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tau + \mathcal{O}(\tau^2) . \quad (2.73)$$

Wir führen nun die bedingten Momente über

$$M^{(n)}(q, t, \tau) = \langle (q(t + \tau) - q(t))^n \rangle_{q(t)=q} = \int (q' - q)^n p(q', t + \tau|q, t) dq' \quad (2.74)$$

ein. Die charakteristische Funktion (vgl. Gleichung (2.44)) der Übergangswahrscheinlichkeitsdichte $p(q', t + \tau|q, t)$ ist damit

$$Z(\alpha, q, t, \tau) = \int e^{i\alpha(q' - q)} p(q', t + \tau|q, t) dq' , \quad (2.75)$$

so dass die Taylorentwicklung von Z um $\alpha = 0$

$$Z(\alpha) = \underbrace{Z(\alpha = 0)}_{=1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \alpha} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0}}_{i \langle (q(t+\tau) - q(t)) \rangle_{q(t)=q}} \alpha + \dots + \frac{1}{n!} \underbrace{\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0}}_{i^n \langle (q(t+\tau) - q(t))^n \rangle_{q(t)=q}} \alpha^n + \mathcal{O}(\alpha^{n+1}) \quad (2.76)$$

ist und unter Verwendung von (2.74) als

$$Z(\alpha, q, t, \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i\alpha)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{n!} \quad (2.77)$$

geschrieben werden kann. Unter der Annahme, dass die bedingten Momente existieren, kann die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte durch Rücktransformation von Gleichung (2.75) erhalten werden:

$$\begin{aligned}
p(q', t + \tau | q, t) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\alpha(q'-q)} Z(\alpha, q, t, \tau) d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\alpha(q'-q)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i\alpha)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{n!} \right] d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q'} \right)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{n!} \right] e^{-i\alpha(q'-q)} d\alpha \quad (2.78) \\
&= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q'} \right)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{n!} \right] \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int e^{-i\alpha(q'-q)} d\alpha}_{=\delta(q'-q)} .
\end{aligned}$$

Setzt man nun Gleichung (2.78) in Gleichung (2.72) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
f(q, t + \tau) &= \int dq' \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q'} \right)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{n!} \right] \delta(q' - q) f(q', t) \\
f(q, t + \tau) &= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q} \right)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{n!} \right] f(q, t) \\
\Leftrightarrow f(q, t + \tau) - f(q, t) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q} \right)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{n!} \right] f(q, t) . \quad (2.79)
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\tau} (f(q, t + \tau) - f(q, t))}_{\frac{\partial}{\partial t} f(q, t) + \mathcal{O}(\tau)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q} \right)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{\tau \cdot n!} \right] f(q, t) \quad (2.80)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (f(q, t + \tau) - f(q, t)) = \frac{\partial}{\partial t} f(q, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial q} \right)^n \frac{M^{(n)}(q, t, \tau)}{\tau \cdot n!} \right] f(q, t) \quad (2.81)$$

Wir definieren nun die Taylorentwicklung von $M^{(n)}/n!$ am Entwicklungspunkt $\tau = 0$ mit Hilfe der sogenannten *Kramers-Moyal-Koeffizienten* $D^{(n)}(q, t)$

$$M^{(n)}(q, t, \tau)/n! \equiv D^{(n)}(q, t)\tau + \mathcal{O}(\tau^2) . \quad (2.82)$$

Der Term der Ordnung $\mathcal{O}(\tau^0)$ verschwindet, da das bedingte Moment $M^{(n)}(q, t, \tau = 0)$ verschwindet. Somit sind die *Kramers-Moyal-Koeffizienten* über die Gleichung

$$D^{(n)}(q, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{n! \tau} M^{(n)}(q, t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{n! \tau} \langle [q(t + \tau) - q(t)]^n \rangle |_{q(t)=q} \quad (2.83)$$

definiert. Die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(q, t)$ kann somit als

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q, t) = \sum_n \left(-\frac{\partial}{\partial q} \right)^n D^{(n)}(q, t) f(q, t) \quad (2.84)$$

geschrieben werden. Man kann nun zeigen (*Pawula-Theorem*, Pawula (1967)), dass die Summe in Gleichung (2.84) entweder nach dem zweiten Summanden abbricht oder aber unendlich viele Terme enthält. Für eindimensionale Prozesse mit normalverteilter Zufallskraft $\Gamma(t)$ (Langevin-Prozesse) ist die Abbruchbedingung erfüllt. Gleichung (2.84) lässt sich unter der Abbruchbedingung zur *Fokker-Planck-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} f(q, t) = \left[-\frac{\partial}{\partial q} D^{(1)}(q, t) + \frac{\partial^2}{\partial q^2} D^{(2)}(q, t) \right] f(q, t) \quad (2.85)$$

vereinfachen und hat die Form einer Kontinuitätsgleichung $\partial_t \varrho + \nabla \vec{j} = 0$ mit dem Wahrscheinlichkeitsstrom $j = [D^{(1)}(q) - \frac{\partial}{\partial q} D^{(2)}(q)] f(q)$. Stationäre, also nicht explizit zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsdichten, genügen der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial q} \underbrace{\left[-D^{(1)}(q) f(q) + \frac{\partial}{\partial q} D^{(2)}(q) f(q) \right]}_{j=\text{konstant}} = 0 \quad . \quad (2.86)$$

Damit sind auch die Übergangswahrscheinlichkeitsdichten $p(x, t|x', t')$ nicht explizit zeitabhängig und somit eine Funktion des Zeitabstandes $p(x, t|x', t') = f(t - t')$. Wegen der Normierbarkeit der Wahrscheinlichkeitsdichte muss der Wahrscheinlichkeitsstrom j für $q \rightarrow \pm\infty$ verschwinden, folglich ist die Konstante gleich Null. Die stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung lässt sich direkt angeben (Risken, 1984):

$$f(q) = \frac{N}{D^{(2)}(q)} \exp \left(\int^q \frac{D^{(1)}(q')}{D^{(2)}(q')} dq' \right) \quad . \quad (2.87)$$

Hat man nun eine Zeitreihe $q(t)$ gemessen und daraus die bedingten Momente $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ geschätzt (vergleiche Kapitel 2.3), so kann mit Hilfe von Gleichung (2.87) die Selbstkonsistenz überprüft werden. Dazu wird die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(q)$ zum einen aus dem Datensatz geschätzt, zum anderen aus Gleichung (2.87). Der Unterschied zwischen den beiden bestimmten Wahrscheinlichkeitsdichten gibt Aufschluss darüber, wie gut der stochastische Prozess allein durch die beiden bedingten Momente beschrieben werden kann (Gottschall et al., 2009). Wir werden im Folgenden eine Klasse von Prozessen besprechen, die der Abbruchbedingung der Kramers-Moyal-Entwicklung genügen. Die Evolution der Wahrscheinlichkeitsdichte kann vollständig durch $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ beschrieben werden. Im weiteren Verlauf wollen wir die Beziehung zwischen Drift- und Diffusionskoeffizienten und den zugrunde liegenden stochastischen Differentialgleichungen herstellen.

2.2.5 Langevin-Prozess, Drift, Diffusion

Ist die zeitliche Entwicklung einer Zufallsvariable durch die Differentialgleichung

$$\dot{q}(t) = h(q, t) + g(q, t)\Gamma(t) \quad (2.88)$$

gegeben, so bezeichnet man diesen eindimensionalen stochastischen Prozess als Langevin-Prozess (Risken, 1984).

Es handelt sich dabei um eine gewöhnliche Differentialgleichung mit einer Zufallskraft $\Gamma(t)$, die auch als Langevinkraft bezeichnet wird (siehe z.B. Siegert et al., 1998). Wir wollen im Folgenden davon ausgehen, dass für den Rauschterm

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0; \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \delta(t - t') \quad (2.89)$$

gelte. Darüber hinaus sei die Stärke von $\Gamma(t)$ normalverteilt. Bei Langevin-Prozessen dieser Art sind aufgrund der δ -korrelierten Langevinkraft die Markoveigenschaften erfüllt, da $\Gamma(t)$ zusätzlich noch gaußverteilt ist, bricht die Kramers-Moyal-Entwicklung nach dem zweiten Term ab, so dass der Prozess komplett durch Drift $D^{(1)}$ und Diffusion $D^{(2)}$ und damit durch die Fokker-Planck-Gleichung (2.85) beschrieben werden kann. Für $g(q, t) = 0$ würde es sich bei Gleichung (2.88) um eine gewöhnliche deterministische Differentialgleichung handeln. Bei gegebener Anfangsbedingung kann der Zustand zu einer beliebigen Zeit konkret angegeben werden. Daher bezeichnet man $h(q, t)$ auch als deterministischen Anteil und $g(q, t)$ als stochastischen Anteil. Wir werden im Folgenden zeigen, wie h und g mit Drift- und Diffusionskoeffizienten zusammenhängen.

Die Integration von Gleichung (2.88) liefert

$$q(t + \tau) - q(t) = \int_t^{t+\tau} dt' [h(q, t') + g(q, t')\Gamma(t')], \quad \text{mit } q(t) = q \quad . \quad (2.90)$$

Das Integral $\int_t^{t+\tau} dt' h(q, t')$ stellt keine Probleme dar und kann mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung abgeschätzt werden. Das zweite Integral $\int_t^{t+\tau} dt' g(q, t')\Gamma(t')$ ist wegen der Eigenschaften des Rauschterms nicht riemannintegrierbar. Daher wird Gleichung (2.88) oft in differentieller Form

$$dq = h(q, t)dt + g(q, t)dW(t, dt) \quad (2.91)$$

dargestellt, wobei $W(t, dt)$ einen *Wiener-Prozess* beschreibt. Der Wiener-Prozess gehört zur Familie der Markovprozesse. Das Inkrement $dW(t, dt) = W(t + dt) - W(t)$ genügt dem Zusammenhang

$$\langle dW(t, dt)dW(t', dt') \rangle = \delta(t - t')dt \quad , \quad (2.92)$$

womit die Inkremente unkorreliert sind. Gleichung (2.91) und (2.88) können formal durch die Beziehung $dW(t, dt)/dt = \Gamma(t)$ ineinander überführt werden. Somit gilt

$$\int_{t_0}^t dt' g(q, t')\Gamma(t')dt' = \int_{W(t_0)}^{W(t)} g(q, t')dW(t, \tau) \quad , \quad (2.93)$$

was zu einem *Stieltjesintegral* mit Integration über einen Wiener-Prozess führt.

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} g(q, t') dW(t, \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(q(\tau_i), \tau_i) [W(t_i) - W(t_{i-1})], \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n = t \quad (2.94)$$

Da $W(t, dt)$ nicht differenzierbar ist und die Zufallsvariable q und somit auch $g(q(\tau_i), \tau_i)$ vom Rauschterm abhängen, macht es einen Unterschied, wo die Funktion g ausgewertet wird. Hierfür gibt es zwei gängige Definitionen (Risken, 1984):

- Ito-Definition: $\tau_i = t_{i-1}$, g wird am Anfang des Intervalls ausgewertet
- Stratonovich-Definition: $\tau_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i-1})$, g wird in der Mitte des Intervalls ausgewertet

Im Folgenden wird die Definition von *Ito* zur Auswertung der stochastischen Integrale benutzt. Um die Beziehung zwischen den bedingten Momenten ($D^{(n)}(q, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle (q(t+\tau) - q(t))_{q(t)=q} \rangle$) und den Funktionen g, h herzustellen, muss im Prinzip der Erwartungswert von Gleichung (2.90) (und somit die Drift) bzw. der Erwartungswert von dem Quadrat von Gleichung (2.90) (und somit die Diffusion) unter Verwendung der Ito-Definition und der Eigenschaft des Wiener-Prozesses berechnet werden. Wir wollen hier nur das Ergebnis darstellen, für eine ausführliche Beschreibung sei auf Risken (1984) verwiesen. Die Auswertung des Erwartungswertes ergibt:

$$\begin{aligned} D^{(1)}(q, t) &= h(q, t) \\ D^{(2)}(q, t) &= \frac{1}{2}g(q, t)^2 \end{aligned} \quad (2.95)$$

Gleichung (2.88) kann also über Drift- und Diffusionskoeffizienten gemäß Ito-Definition definiert werden:

$$\dot{q}(t) = D^{(1)}(q, t) + \sqrt{2D^{(2)}(q, t)}\Gamma(t) \quad (2.96)$$

Unter den von uns gestellten Bedingungen (gaußverteilt, δ -korreliertes Rauschen) sind Langevingleichung und Fokker-Planck-Gleichung äquivalente Beschreibungen des stochastischen Prozesses. Kann aus einer vorliegenden Datenreihe, die diesen Bedingungen genügt, die Drift bestimmt werden, so kann der zugrundeliegende deterministische Anteil der Differentialgleichung rekonstruiert werden. Zur Rekonstruktion des Phasenraumes ist der stochastische Anteil von großem Nutzen, da so ein größerer Bereich des Phasenraumes „ausgeleuchtet“ wird. Wie Drift und Diffusion aus Messdaten geschätzt werden können, soll uns im folgenden Kapitel beschäftigen. Dabei werden die anhand von Daten geschätzten Größen im weiteren Verlauf mit einem Dach bezeichnet (z.B. $\hat{D}^{(1)}(x)$).

2.3 Schätzen von Drift und Diffusion aus Datenreihen

Sei angenommen, dass Daten aufgenommen wurden, denen ein Langevin-Prozess

$$\dot{x}(t) = D^{(1)}(x) + \sqrt{2D^{(2)}(x)}\Gamma(t)$$

mit

$$\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \delta(t-t'), \quad \langle \Gamma(t) \rangle = 0$$

zugrunde liegt, wobei Γ ein normalverteilter Rauschterm ist. Für Langevin-Prozesse dieser Art verschwinden alle höheren Momente ($n > 2$) der Kramers-Moyal-Entwicklung, und man erhält die Fokker-Planck-Gleichung

$$\dot{p}(x, t) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) \right) p(x, t) \quad ,$$

die die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichte, der stochastischen Variable x durch die Drift $D^{(1)}(x, t)$ und die Diffusion $D^{(2)}(x, t)$ beschreibt. Der Prozess ist also völlig durch Drift und Diffusion beschrieben. Die Kramers-Moyal-Koeffizienten $D^{(1)}(x, t)$ und $D^{(2)}(x, t)$ sind ihrerseits durch den Zusammenhang

$$\begin{aligned} D^{(n)}(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau n!} M_n(x, t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau n!} \langle [x(t+\tau) - x(t)]^n \rangle_{|x(t)=x} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau n!} \int (x' - x)^n p(x', t + \tau | x, t) dx' \end{aligned}$$

definiert. Ließen sich die bedingten Momente $M(x, t, \tau)$ exakt aus den vorliegenden

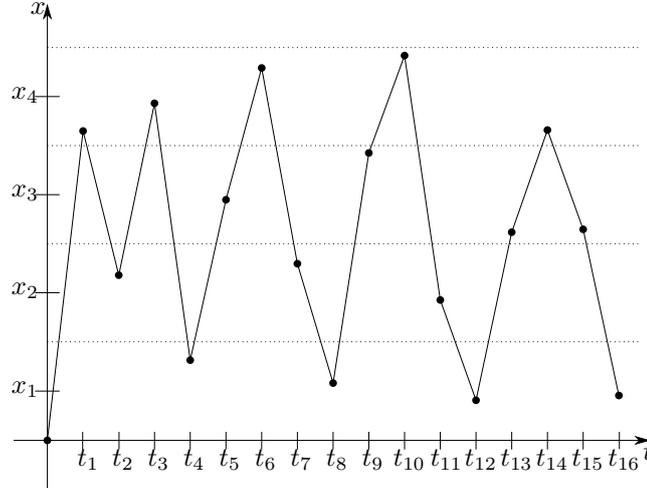


Abbildung 2.4: Exemplarische Datenreihe mit 4 Bins und äquidistanten Messpunkten t_i

Datensätzen bestimmen, so wäre der zugrunde liegende Prozess vollständig beschrieben. Eine exakte Angabe der Momente ist allein aufgrund der endlichen Anzahl an

Messwerten und der endlichen Samplingrate nicht möglich, so dass versucht werden muss, die Momente zu schätzen. Die Suche nach den Momenten ist mit den Fragen verbunden: Welche Entwicklung zeigt sich in einem System, welches sich im Zustand $x(t_i) = x$ mit $i = 1, \dots, N_x$ befindet, im Mittel: $\langle x(t+\tau) - x(t) | x(t) = x \rangle, t \in \{t_1, \dots, t_{N_x}\}$? Wie stark streuen die Veränderungen des Systemzustandes: $\langle (x(t+\tau) - x(t))^2 | x(t) = x \rangle, t \in \{t_1, \dots, t_{N_x}\}$? Handelt es sich bei der stochastischen Variable um einen kontinuierlichen Größe, so ist die Wahrscheinlichkeit exakt $x(t) = x$ zu messen gleich Null, da $\lim_{b \rightarrow a} p(a \leq x \leq b) = \lim_{b \rightarrow a} \int_a^b f(\zeta) d\zeta = 0$ ist. Daher muss für die Analyse der Daten die Frage gestellt werden, wie sich das System im Mittel verhält, wenn es in einer Umgebung um den Punkt x ist. Eine mögliche Abschätzung des mittleren Systemverhaltens bietet die Abschätzung mittels Histogrammen. Dazu muss der vorliegende Datensatz „gebündelt“ werden. Sei eine Zeitreihe, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, an diskreten Messpunkten mit dem Zeitinkrement $\tau = t_{i+1} - t_i$ gegeben, so wird die x -Achse in n Bins der Breite Δx unterteilt, die um die Werte x_i ($i = 1, \dots, n$) zentriert sind. Zur Bestimmung der Momente werden im Datensatz Punkte mit $x(t_i) \in I_{x_i} = [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}]$ und die dazugehörigen Datenpunkte $x(t_i + \tau)$ gesucht. Die Mittlung wird nun für alle Datenpunkte, die in dem entsprechenden Bin sind, vollzogen, so dass

$$\hat{M}^{(n)}(x_i, t, \tau) = \frac{1}{N_{x_i}} \sum_{i \text{ mit } x(t_i) \in I_{x_i}} [x(t_i + \tau) - x(t_i)]^n, \quad N_{x_i} = \sum_{i \text{ mit } x(t_i) \in I_{x_i}} 1 \quad (2.97)$$

und somit

$$\hat{D}^{(n)}(x_i, \tau) = \frac{1}{n! \tau} \frac{1}{N_{x_i}} \sum_{i \text{ mit } x(t_i) \in I_{x_i}} [x(t_i + \tau) - x(t_i)]^n \quad (2.98)$$

gilt, womit man das Moment für das zu x_i gehörende Bin erhält. Im Beispiel von Abbildung 2.4 würde man für die Schätzung des ersten Moments des zweiten Bins

$$\hat{M}^{(1)}(x_2, t, \tau) \approx \frac{1}{3} [(x_4 - x_2) + (x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)]$$

erhalten. Die Idee dabei ist, dass bei hohen Besetzungszahlen der Bins das erste Moment $M^{(1)}$ nur noch den deterministischen Anteil der Dynamik enthält, da der Rauschanteil zeitlich unkorreliert ist. Um statistische Fehler bei der Bestimmung der Drift abzuschätzen, die sich aus der begrenzten Anzahl der Messwerte ergeben, kann man für ein festes x_i die Varianz aller Beiträge zur Mittelwertberechnung (siehe Gleichung (2.97)) bestimmen (Kleinhans, 2005):

$$\begin{aligned} \sigma^2(x_i) &= \left\langle \left[\frac{1}{\tau} \{x(t+\tau) - x(t)\} - \left\langle \frac{1}{\tau} \{x(t+\tau) - x(t)\} \right\rangle \right]^2 \middle| t \in \{t_1, \dots, t_{N_x}\} \right\rangle \\ &= \frac{1}{N_{x_i}} \sum_{j=1}^{N_{x_i}} \left[\frac{1}{\tau} \{x(t_j + \tau) - x(t_j)\} - \hat{D}^{(1)}(x_i, \tau) \right]^2 \\ &= \frac{2}{\tau} \hat{D}^{(2)}(x_i, \tau) - \left[\hat{D}^{(1)}(x_i, \tau) \right]^2 . \end{aligned} \quad (2.99)$$

Die Varianz ergibt sich damit mittels der aus den Daten bestimmten Drift- und Diffusionskoeffizienten. Der Standardfehler des arithmetischen Mittels ist daher:

$$\begin{aligned} Err[\hat{D}^{(1)}(x_i, \tau)] &= \frac{\sigma(x_i)}{\sqrt{N_{x_i}}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\tau} \frac{\hat{D}^{(2)}(x_i, \tau)}{N_{x_i}} - \frac{[\hat{D}^{(1)}(x_i, \tau)]^2}{N_{x_i}}} . \end{aligned} \quad (2.100)$$

Die Besetzungszahl N_{x_i} der einzelnen Bins lässt sich über die Wahrscheinlichkeit einen Messwert im Bin, um den Wert x_i zu finden ($f(x_i)$), und die Binbreite Δx ausdrücken:

$$Err[\hat{D}^{(1)}(x_i, \tau)] = \sqrt{\frac{2}{\tau} \frac{\hat{D}^{(2)}(x_i, \tau)}{N \cdot f(x_i) \cdot \Delta x} - \frac{[\hat{D}^{(1)}(x_i, \tau)]^2}{N \cdot f(x_i) \cdot \Delta x}} . \quad (2.101)$$

Der Standardfehler für den geschätzten Driftkoeffizienten $\hat{D}^{(2)}(x_i, \tau)$ lässt sich analog formulieren:

$$Err[\hat{D}^{(2)}(x_i, \tau)] = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} \frac{\hat{M}^{(4)}(x_i, \tau)}{N \cdot f(x_i) \cdot \Delta x} - \frac{[\hat{D}^{(2)}(x_i, \tau)]^2}{N \cdot f(x_i) \cdot \Delta x}} . \quad (2.102)$$

Die in Gleichung (2.97) durchgeführte Mittlung entspricht der Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeit $P(x', t + \tau | x, t)$ anhand von Histogrammen. Die Schätzung von Wahrscheinlichkeitsdichten mittels Histogrammen weist einige Schwächen auf (Silverman, 1986), daher wurde für diese Arbeit auf die Benutzung von Kerndichteschätzern zurückgegriffen. Dazu wird im Folgenden die Schätzung von Wahrscheinlichkeitsdichten mit Hilfe der Kerndichteschätzung beschrieben, um später auf die Schätzung von bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten mit Hilfe des *Nadaya-Watson-Schätzers* (vergleiche Schuster, 1972) zu sprechen zu kommen.

2.3.1 Kerndichteschätzer

Um die Benutzung von Kerndichteschätzern möglichst einfach einzuführen, werden wir diese gemäß Silverman (1986) anhand von einem Beispiel kurz beschreiben. Zur Veranschaulichung benutzen wir die von jedem Achtelfinalteilnehmer der Fußballweltmeisterschaft 2014 im Mittel pro Spiel zurückgelegte Strecke (FIFA Statistics World Cup, 2014). Wir haben somit $n = 16$ Datenpunkte. Dies sind natürlich zu wenig Datenpunkte, um die Wahrscheinlichkeitsdichte sinnvoll zu schätzen, dient hier aber der Darstellbarkeit. Die einzelnen Messpunkte seien mit x_i bezeichnet. Die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ kann zuallererst mittels Histogramm geschätzt werden. Dabei handelt es sich um eine nichtparametrische Schätzung, da keine Informationen über die zugrunde liegende Dichte a priori benötigt werden. Die

Systematik ist die folgende: Die Datenreihe wird in äquidistante (nicht zwingend notwendig) Intervalle der Breite h eingeteilt

$$I_n = [x_0 + n \cdot h, x_0 + (n+1) \cdot h[, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

wobei x_0 ein beliebiger Startwert ist. Diese Intervalle werden als Bins bezeichnet. Als Abschätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\hat{f}(x)$ dient die relative Häufigkeit eines Ereignisses im i -ten Bin, geteilt durch die Binbreite (Silverman, 1986)

$$\hat{f}_h(x) = \frac{\text{Anzahl der } x_i \text{ im gleichen Bin wie } x}{n \cdot h} . \quad (2.103)$$

Damit wird für jedes neue Ereignis in einem Bin die Fläche unter $\hat{f}(x)$ im jeweiligen Bin um $\frac{1}{n \cdot h}$ erweitert. Die geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte $\hat{f}(x)$ ist per Definition nicht stetig, da sie auf den Intervallen/Bins konstant ist und zwischen den Intervallen springt. Das Histogramm ist für eine Binbreite von $h = 5$ km und zwei verschiedene Werte x_0 in Abbildung 2.5 dargestellt. Die Struktur des Histogramms,

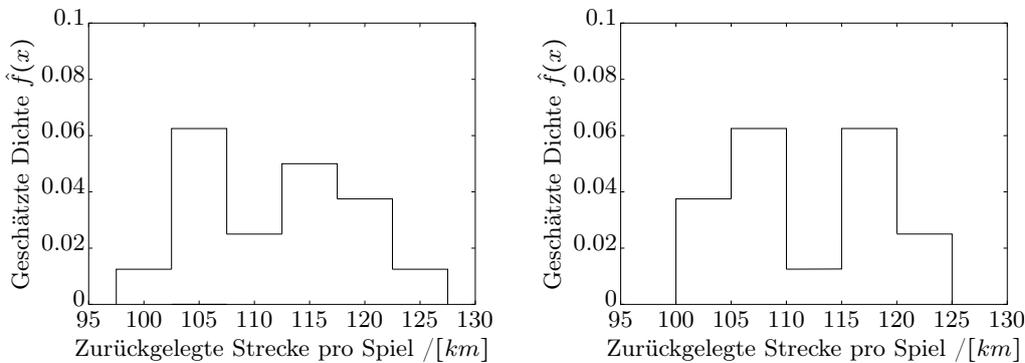


Abbildung 2.5: $\hat{f}(x)$ der zurückgelegten Strecke für $x_0 = 97.5$ km (links) und $x_0 = 100$ km (rechts), bei einer Binbreite von $h = 5$ km.

bei gleichbleibender Binbreite, ist in diesem Falle stark abhängig von der Wahl des Anfangspunktes x_0 . Der Einfluss sinkt zwar mit steigenden Besetzungszahlen bei kleinerer Binbreite, bleibt aber prinzipiell ein Problem von Histogrammschätzern. Um diese Abhängigkeit zu umgehen, kann man zentriert um jede Beobachtung x_i eine Box mit der Fläche $\frac{1}{n \cdot h}$ erzeugen und diese dann zur Funktion $\hat{f}(x)$ aufsummieren. Die Breite h der Funktion (hier Stufenfunktion) wird im Folgenden als Bandbreite bezeichnet. Führt man die Stufenfunktion (Gewichtsfunktion) (Silverman, 1986) $w(x)$

$$w(x) = \begin{cases} 1; & \text{wenn } |x| < \frac{1}{2} \\ 0; & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.104)$$

ein, so lässt sich das beschriebene Verfahren zusammenfassen als

$$\hat{f}_h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \cdot h} w\left(\frac{x - x_i}{h}\right) , \quad (2.105)$$

was nichts anderes ist als die Summe der Stufenfunktionen, zentriert um die Beobachtungen x_i , mit Breite h und Höhe $1/(nh)$. Dies erfüllt per Definition die Normierung $\int \hat{f}(x)dx = 1$. Dieser Schätzer wird auch als *naiver Schätzer* bezeichnet (Wegman, 1972). Wie sich diese Art, die Wahrscheinlichkeitsdichte zu schätzen, auf den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichte auswirkt, ist bei gleichbleibender Binbreite h (im Vergleich zu Abbildung 2.5) in Abbildung 2.6 zu sehen. Die zugrundeliegende

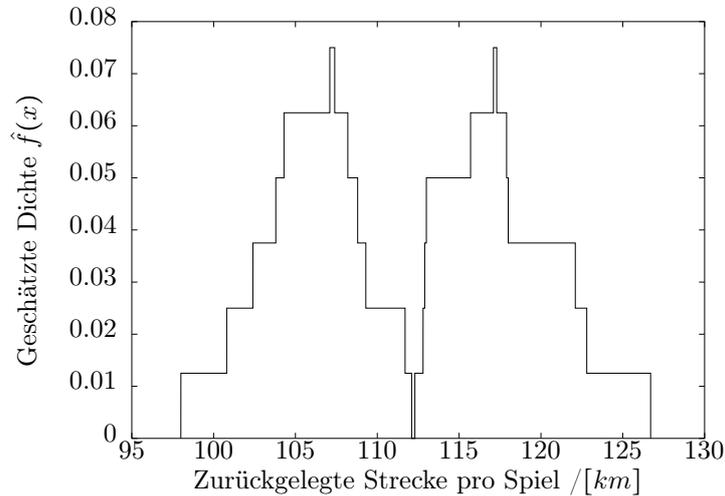


Abbildung 2.6: Naiver Schätzer der Wahrscheinlichkeitsdichte $\hat{f}(x)$ für $h = 5\text{km}$

Wahrscheinlichkeitsdichte scheint bimodal zu sein, was vermutlich der Einordnung in eher defensive oder eher offensive Mannschaften gleichzusetzen ist. Die Auflösung der Dichte scheint, trotz im Vergleich zu Abbildung 2.5 unveränderter Bandbreite h , besser zu sein. Was bleibt, sind die Unstetigkeiten an den Stellen $x_i \pm h/2$. Dies liegt aber daran, dass die Gewichtsfunktion $w(x)$ nicht stetig ist. Um eine stetige Abschätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte zu erhalten, sollte eine stetige Funktion gewählt werden, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Kernfunktion bezeichnet wird. Da die Summe aus stetigen Funktionen (Forster, 2011) wieder eine stetige Funktion ist, führt die Definition von Gleichung (2.105), mit stetiger Kernfunktion $K(x)$, zu einer stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte $\hat{f}(x)$. Die Kernfunktion $K(x)$ muss aufgrund der Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1 \quad (2.106)$$

erfüllen. Die Kerndichteschätzung lässt sich schreiben als

$$\hat{f}_h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n \cdot h} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - x_i), \quad (2.107)$$

wobei $K(x)$ obige Eigenschaften erfüllt. Wir wollen nun für obiges Beispiel die Dichte exemplarisch mit einem Gaußkern

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (2.108)$$

schätzen. Die Kerndichteschätzung mit stetigem Kern hat im Vergleich zur Histo-

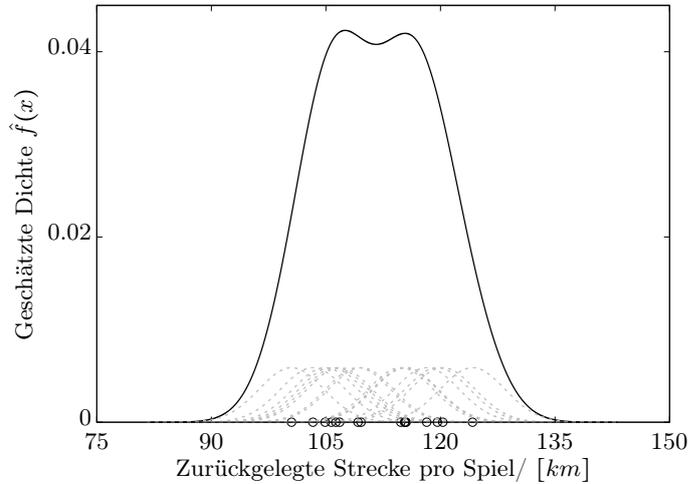


Abbildung 2.7: Um die Beobachtungen (\circ) zentrierte Gaußkerne $K_h(\cdot)$ mit Bandbreite $h = 4.3$. Die Summe über alle $\sum K_h(x-x_i)$ ergibt die geschätzte Wahrscheinlichkeitsdichte $\hat{f}(x)$ (—)

grammschätzung den Vorteil, dass sie stetige Funktionen liefert und nicht abhängig von der Wahl des Ursprungs der Bins ist. Hingegen bleibt die Abhängigkeit von der Bandbreite h . Die Bandbreite entspricht einem Glättungsfaktor. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir $\hat{f}_h(x)$ für zwei zusätzliche Bandbreiten ($h = 1\text{ km}$ und $h = 7\text{ km}$): Anhand der in Abbildung 2.8 dargestellten Schätzungen erkennt man den

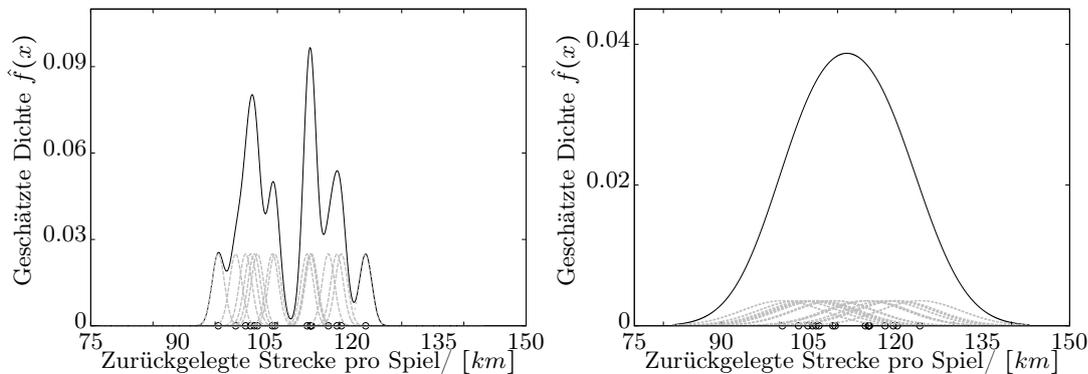


Abbildung 2.8: Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte in Abhängigkeit von der Bandbreite h (links: $h = 1\text{ km}$, rechts: $h = 7\text{ km}$) der um Beobachtungen (\circ) zentrierten Gaußkerne.

glättenden Einfluss der Bandbreite sehr gut. Die Kunst ist es also, die Bandbreite so zu wählen, dass der Abstand zwischen der realen Verteilung $f(x)$ und der Abschätzung $\hat{f}(x)$ möglichst klein ist. Das bedeutet, dass der Erwartungswert des Abstandes zwischen Schätzer und realer Verteilung $\langle \hat{f}_h(x) - f(x) \rangle$, auch als *Bias* bezeichnet,

und die Varianz der Schätzung $Var\{\hat{f}_h(x)\}$ gleichzeitig minimiert werden müssen. Dies führt auf die Minimierung des *mean squared error* (MSE) (Härdle, 2004):

$$MSE\{\hat{f}_h(x)\} = \langle (\hat{f}_h(x) - f(x))^2 \rangle = Var\{\hat{f}_h(x)\} + Bias\{\hat{f}_h(x)\}^2. \quad (2.109)$$

Wenn der $MSE\{\hat{f}_h(x)\}$ gegen Null geht, so konvergiert die geschätzte Funktion an der Stelle x gegen die reale Funktion. Bei Gleichung (2.109) handelt es sich um eine punktweise Definition. Will man hingegen ein globales Maß für die Abweichung der Schätzung von der realen Verteilung, so ist der *mean integrated squared error* (MISE)

$$MISE(\hat{f}_h) = \int \langle [\hat{f}_h(x) - f(x)]^2 \rangle dx \quad (2.110)$$

das Maß der Dinge (Härdle, 2004; Hall et al., 1991). Die Bandbreite h sollte also so gewählt werden, dass der MISE minimiert wird. Im Folgenden wird die Bandbreite, die $MISE(\hat{f}_h)$ minimiert, als h_0 bezeichnet. Weicht die zu schätzende Verteilungsfunktion nicht zu stark von der Familie der Normalverteilungen ab, so ist für symmetrische Kernfunktionen

$$h_0 \approx 1.364\delta_0\sigma N^{-\frac{1}{5}}, \quad \text{mit} \quad \delta_0 = \left(\frac{\|K\|_2^2}{\mu_2^2(K)} \right)^{1/5} \quad (2.111)$$

und

$$\|K\|_2^2 = \int K(x)^2 dx, \quad \mu_2(K) = \int x^2 K(x) \quad (2.112)$$

eine gute Abschätzung für die optimale Bandbreite. Diese Abschätzung wird auch als *Silverman's rule of thumb* (Härdle, 2004) bezeichnet. Mit σ ist die Standardabweichung der gemessenen Stichprobe gemeint, und N beschreibt die Anzahl der gemessenen Datenpunkte. Die Eigenschaften des jeweiligen Kerns sind in δ_0 enthalten. So wäre für einen Gaußkern $\delta_0 = (\frac{1}{4\pi})^{1/5}$, so dass $h_0 \approx 1.06 \cdot \sigma N^{-1/5}$ ist. Die in Abbildung 2.7 benutzte Bandbreite wurde gemäß Gleichung (2.111) gewählt. Wir sind bei der vorangegangenen Betrachtung stillschweigend davon ausgegangen, dass die betrachtete Zufallsvariable eindimensional ist. Man kann die vorgestellte Systematik aber auch auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern, also auf das Schätzen von Verbundwahrscheinlichkeitsdichten $f(x_1, \dots, x_n)$. Multivariate Kernfunktionen lassen sich entweder als Produkt von univariaten Kernfunktionen $K_H(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n K_{h_i}(x_i)$ oder als multivariaten sphärischen Kern $K(\vec{x}) = c_{K,d} K(\vec{x}^T \vec{x})$ beschreiben (Wand, 1992). Wir werden für spätere Berechnungen auf einen sphärischen Kern (d Zufallsvariablen, Stichprobengröße N) zurückgreifen, der gemäß Wand und Jones (1993) als

$$\hat{f}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_H(\vec{x} - \vec{x}_i), \quad (2.113)$$

mit

$$K_H(\vec{x}) = \frac{1}{\det(\mathbf{H})} K(\mathbf{H}^{-1}\vec{x}) \quad (2.114)$$

definiert ist. Bei multivariaten Kernfunktionen muss die Bandbreitenmatrix \mathbf{H} so gewählt werden, dass $\hat{f}(\vec{x})$ eine möglichst gute Approximation der realen Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Um dies sicherzustellen, wurde für alle in dieser Arbeit benutzten Schätzungen multivariater Wahrscheinlichkeitsdichten die Daumenregel gemäß Härdle (2004)

$$\mathbf{H} = N^{-\frac{1}{d+4}} \hat{\Sigma}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{mit} \quad \hat{\Sigma}_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle, \quad (2.115)$$

benutzt, wobei $\hat{\Sigma}$ die Kovarianzmatrix ist. Zur Berechnung von $\hat{\Sigma}^{1/2}$ sei auf den Anhang 5 verwiesen. Der bisher benutzte Gaußkern ist für höherdimensionale Verbundwahrscheinlichkeitsdichten numerisch aufwendig. Da die Gaußfunktion auf dem ganzen Definitionsbereich ungleich Null ist, müsste jede der Kernfunktionen $K_{\mathbf{H}}(\vec{x} - \vec{x}_i)$ mit $i=1, \dots, N$, bei m Stützstellen pro Raumrichtung, an m^d Punkten ausgewertet werden. Daher werden wir für alle in der Arbeit geschätzten Wahrscheinlichkeitsdichten eine Kernfunktion mit begrenzter Reichweite benutzen, und zwar den radialsymmetrischen Epanechnikovkern (Epanechnikov, 1969)

$$K(\vec{x}) = \begin{cases} N(c - \vec{x}^2), & \forall \vec{x} \text{ mit } (\vec{x}^2 < c) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.116)$$

Die Konstanten c und N werden über die Normierungen

$$\int K(\vec{x}) d\vec{x} = 1 \quad \text{und} \quad \int x_i x_j K(\vec{x}) d\vec{x} = \delta_{ij} \quad (2.117)$$

bestimmt (vergleiche Anhang 5). Diese Reichweite lässt sich abschätzen und somit der numerische Aufwand unter Verwendung des Epanechnikovkernes erheblich reduzieren.

2.3.2 Nadaraya-Watson-Schätzer

Wir haben nun das Rüstzeug, um die Wahrscheinlichkeitsdichte eines stochastischen Merkmals mittels Kerndichteschätzung zu bestimmen. Zur Bestimmung von Drift- und Diffusionskoeffizienten müssen aber die bedingten Momente und damit Übergangswahrscheinlichkeitsdichten geschätzt werden. Dazu werden wir nun auf den Nadaraya-Watson-Schätzer zu sprechen kommen. Liegt eine bivariate stochastische Variable (X, Y) vor, so kann man das bedingte Moment $m(x)$ mittels Gleichung (2.56) als

$$m(x) = \langle Y | X = x \rangle = \int y f(y|x) dy = \int y \frac{f(x, y)}{f(x)} dy = \frac{1}{f(x)} \int y f(x, y) dy$$

schreiben. Um das bedingte Moment zu schätzen, müssen die Wahrscheinlichkeitsdichten $f(x, y)$ und $f(x)$ geschätzt werden:

$$\hat{m}(x) = \frac{1}{\hat{f}(x)} \int y \hat{f}(x, y) dy \quad . \quad (2.118)$$

Die Randwertverteilung $\hat{f}(x)$ ist durch

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (2.119)$$

gegeben. Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte wird mittels Produktkern geschätzt:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \frac{1}{g} K\left(\frac{y - Y_i}{g}\right) \quad (2.120)$$

Gleichungen (2.119) und (2.120) in Gleichung (2.118) eingesetzt liefert:

$$\hat{m}(x) = \frac{\frac{1}{N} \int y \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \frac{1}{g} K\left(\frac{y - Y_i}{g}\right) dy}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)} \quad (2.121)$$

Der Zähler in Gleichung (2.121) lässt sich wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \int y \hat{f}(x, y) dy &= \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \int y \frac{1}{g} K\left(\frac{y - Y_i}{g}\right) dy \quad \text{mit } s_i = \frac{y - Y_i}{g} \\ &= \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \underbrace{\int (gs_i + Y_i) K(s_i) ds_i}_{=Y_i, \text{ da } \int K(s_i) ds_i = 1 \wedge \int s_i K(s_i) ds_i = 0} \\ &= \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) Y_i \quad . \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Schätzung $\hat{m}(x)$ zu dem sogenannten *Nadaraya-Watson-Schätzer* (Schuster, 1972) zusammenfassen:

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i \cdot K_h(x - X_i)}{\sum_{i=1}^N K_h(x - X_i)} \quad (2.122)$$

Entsprechend gilt für das n -te Moment:

$$\hat{m}^{(n)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i^n \cdot K_h(x - X_i)}{\sum_{i=1}^n K_h(x - X_i)} \quad (2.123)$$

Für die Schätzung von Drift und Diffusion mittels Nadaraya-Watson-Schätzer folgt

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(k)}(x, t) &= \frac{1}{k! \tau} \langle [x(t + \tau) - x(t)]^k | x(t) = x \rangle \\ &= \frac{1}{k! \tau} \frac{\sum_{i=1}^N K_h(x - X_i) (X_{i+1} - X_i)^k}{\sum_{i=1}^N K_h(x - X_i)} \quad (2.124) \end{aligned}$$

Die Definition für mehrdimensionale Zufallsgrößen erfolgt mit Hilfe von (2.113) völlig analog:

$$\begin{aligned}\hat{D}^{(k)}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{k!\tau} \langle [\vec{x}(t+\tau) - \vec{x}(t)]^k | \vec{x}(t) = \vec{x} \rangle \\ &= \frac{1}{k!\tau} \frac{\sum_{i=1}^N K_{\mathbf{H}}(\vec{x} - \vec{X}_i) (\vec{X}_{i+1} - \vec{X}_i)^k}{\sum_{i=1}^N K_{\mathbf{H}}(\vec{x} - \vec{X}_i)}.\end{aligned}\quad (2.125)$$

Für $k = 1$ erhält man das Driftvektorfeld $\hat{D}^{(1)}(\vec{x})$ entsprechend der Dimension d von $\vec{x}(t)$. Bei $k > 1$ ist zu beachten, dass $[\vec{x}(t+\tau) - \vec{x}(t)]^k$ ein Tensorprodukt ist. Für $k = 2$ erhält man $\underbrace{[\vec{x}(t+\tau) - \vec{x}(t)]^2}_{=: \vec{y}} = \vec{y} \cdot \vec{y}^T := \vec{y} \otimes \vec{y}$ und somit das dyadische Produkt

$$\vec{y} \otimes \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} (y_1 \cdots y_d) = \begin{pmatrix} y_1 y_1 & \cdots & y_1 y_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_d y_1 & \cdots & y_d y_d \end{pmatrix}, \quad (2.126)$$

so dass $D^{(2)}(\vec{x})$ für jedes \vec{x} eine $d \times d$ -Matrix ist. Analog zur Berechnung der Standardfehler bei der Benutzung der Histogrammschätzer, kann man auch für die Benutzung von Kerndichteschätzern ein Maß für die statistische Unsicherheit der Bestimmung der Momente definieren (Honisch und Friedrich, 2011; Honisch et al., 2012):

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)}(x_i) &= \sqrt{\frac{\|K\|_2 \hat{M}_\tau^{(2)}(x_i) - [\hat{M}_\tau^{(1)}(x_i)]^2}{h \sum_{j=1}^N \frac{1}{h} K\left(\frac{x_i - X_j}{h}\right)}} \\ \sigma^{(2)}(x_i) &= \sqrt{\frac{\|K\|_2 \hat{M}_\tau^{(4)}(x_i) - [\hat{M}_\tau^{(2)}(x_i)]^2}{h \sum_{j=1}^N \frac{1}{h} K\left(\frac{x_i - X_j}{h}\right)}},\end{aligned}\quad (2.127)$$

wobei $\|K\|_2$ die L_2 -Norm des benutzten Kerns $K(x)$ ist. Je mehr Messdaten in einer Umgebung von x_i liegen, umso mehr nennenswerte Beiträge hat die Summe $f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{h} K\left(\frac{x_i - X_j}{h}\right)$, und da $K(x) > 0, \forall x$ wird $f(\vec{x})$ dementsprechend größer und $\sigma^{(1)}$ entsprechend kleiner. Wir werden uns bei der späteren Auswertung auf die Bereiche der Schätzung beschränken, die ausreichend durch Daten besetzt sind.

2.3.3 Beispiel zur Schätzung eines zweidimensionalen Driftvektorfeldes

Die Rekonstruktion des deterministischen Anteils des Phasenraumes soll anhand eines Beispiels dargestellt werden. Es sei ein Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x [\mu - (x^2 + y^2)] - y \\ \dot{y} &= y [\mu - (x^2 + y^2)] + x\end{aligned}\quad (2.128)$$

gegeben. Dieses System weist eine superkritische Hopf-Bifurkation auf (Strogatz, 1994). Die Lösung des Differentialgleichungssystems ist für $\mu > 0$: $(x(t), y(t)) = \sqrt{\mu}(\cos(t), \sin(t))$, also ein Kreis mit Radius $\sqrt{\mu}$. Die Schwingungsdauer T beträgt 2π . Diese Lösung des Systems ist ein Grenzyklus. Im Folgenden wählen wir $\mu = 1$, so dass ein stabiler Grenzyklus mit Radius $r = 1$ vorliegt. Betrachtet man nun das gleiche System mit zusätzlichem additivem Rauschen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x[\mu - (x^2 + y^2)] - y + \Gamma_1(t) \\ \dot{y} &= y[\mu - (x^2 + y^2)] + x + \Gamma_2(t), \quad \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(t') \rangle = M_i\delta(t-t')\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.129)$$

und integriert das System aus Gleichung (2.129) mittels Euler-Maruyama-Verfahren 5 ($dt = 0.01$ $N = 10^6$), so erhält man zum Beispiel als eine Realisierung des stochastischen Prozesses die in Abbildung 2.9 dargestellte Ortszeitverläufe der x - und y -Komponente. Das Systemoutput unterscheidet sich stark von einer regulären Schwin-

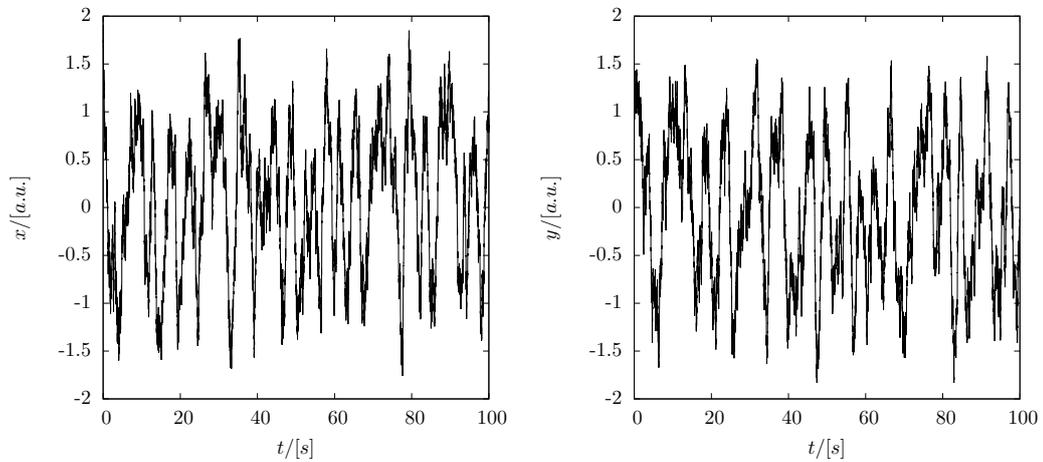
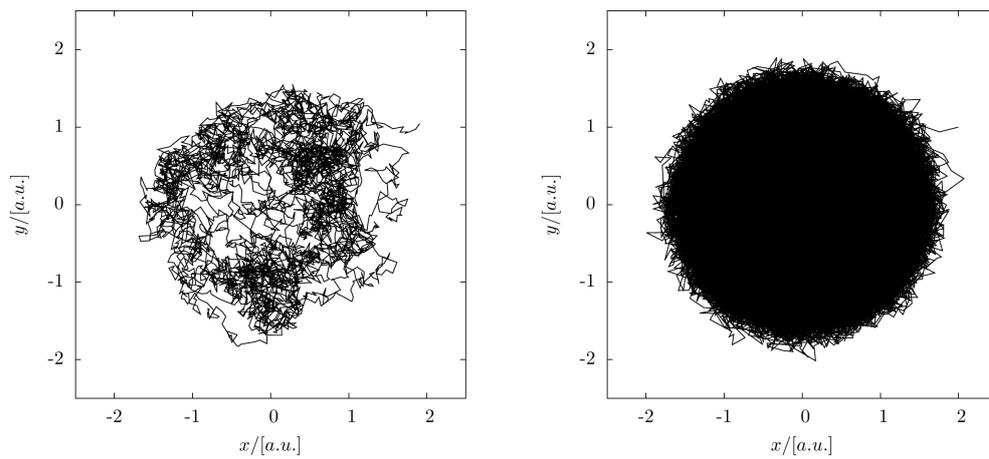


Abbildung 2.9: Realisierung der Komponenten des verrauschten Oszillators aus Gleichung (2.129) ($M_i = M = 0.5$, $dt = 0.01s$)

gung. Betrachtet man die Trajektorie in dem von x und y aufgespannten Raum (2.10), so ist nicht mehr abzuleiten, dass das ungestörte System einen Grenzyklus aufweist. Für lange Simulationszeiten wird ein beschränkter Bereich des Phasenraumes fast vollständig ausgefüllt (siehe Abbildung 2.10b). Für den in Abbildung 2.9 dargestellten Verlauf wurde mittels Nadaraya-Watson-Schätzer auf einem diskreten Gitter, entsprechend Gleichung (2.124), das zweidimensionale Driftvektorfeld $D^{(1)}(x, y)$ geschätzt, welches der rechten Handseite von Gleichung (2.128) entsprechen sollte. Das rekonstruierte Driftvektorfeld ist in Abbildung 2.11 zu sehen. Der zugrundeliegende Charakter des Systems wird gut wiedergegeben (trotz endlichem Zeitschritt). Das System spiralt aus dem instabilen Fixpunkt bei $(x, y) = (0, 0)$ heraus zum Außenbereich. Punkte im äußeren Bereich des Vektorfeldes werden nach



(a) Trajektorie im Phasenraum gemäß Gleichung (2.129) für $N = 5 \cdot 10^3$ Datenpunkte
 (b) Trajektorie im Phasenraum gemäß Gleichung (2.129) für $N = 10^6$ Datenpunkte

Abbildung 2.10: Realisierung eines verrauschten Grenzyklus

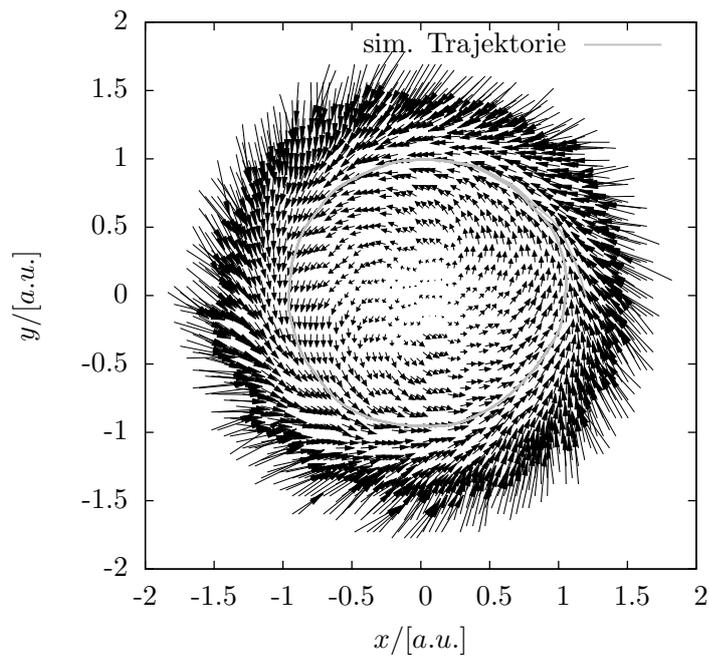


Abbildung 2.11: Rekonstruiertes Driftvektorfeld

innen gelenkt. Dies bedeutet laut Poincaré-Bendixon-Theorem, dass im Phasenraum ein geschlossener Orbit vorliegen muss, und zwar der Grenzzyklus des Systems (Gleichung (2.128)). Wir haben also nichts anderes gemacht, als aus einer zweidimensionalen Zeitreihe die rechte Handseite eines Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ zu schätzen. Das Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x})$ ist uns nun, auf dem zur Driftbestimmung benutzten Gitter, bekannt und kann somit genutzt werden, um die entsprechende Differentialgleichung numerisch zu integrieren. Man kann nun die Anfangsbedingungen wählen (das geschätzte Vektorfeld muss dort bekannt sein) und die zeitliche Entwicklung des Zustandes in dem zugrundeliegenden System berechnen. Das entsprechende Ergebnis ist als graue Trajektorie in Abbildung 2.11 dargestellt. Die Trajektorie strebt gegen den Grenzzyklus des Systems und ergibt einen Kreis mit Radius $r = 1$, den ein System ohne stochastischen Anteil aufweisen würde. Dass auch die Frequenz des rekonstruierten Signals gut mit dem theoretisch zu erwartenden Wert von $f = 1/(2\pi)$ übereinstimmt, sieht man, wenn die Zeitreihen für x - und y -Komponente der Trajektorie einzeln aufgetragen werden (siehe Abbildung 2.12). Um einzelne Trajektorien

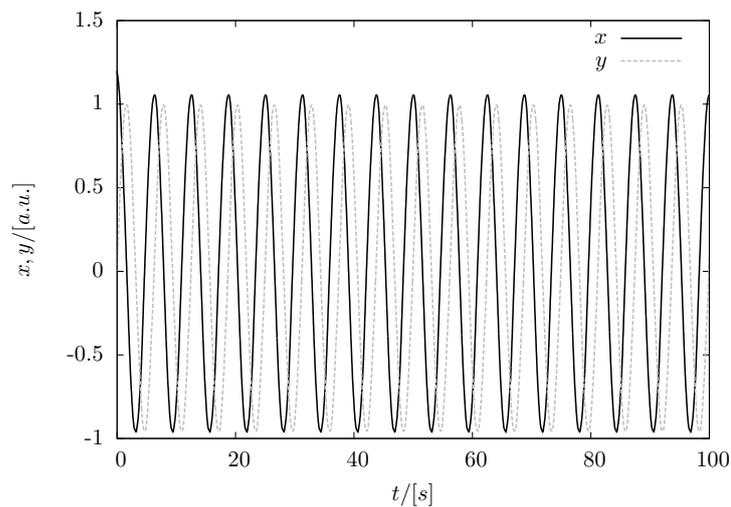


Abbildung 2.12: Ortszeitverläufe der Koordinaten der rekonstruierten Trajektorie

zu simulieren, kann man sich die Stetigkeit der Kerndichteschätzung zu Nutze machen. Das Driftvektorfeld muss dann nicht auf einem Gitter ausgewertet werden, sondern kann iterativ an den Stützstellen der Trajektorie berechnet werden. Dies führt zu wesentlich glatteren Verläufen der rekonstruierten Trajektorien. Dazu wird das Driftvektorfeld $\hat{D}(\vec{x}_i)$ punktweise für jeden Iterationsschritt der Trajektorie mittels Kerndichteschätzung neu ausgewertet. Dies kann natürlich auch analog z.B. für

das *Runge-Kutta-Verfahren* vierter Ordnung formuliert werden:

$$\begin{aligned}
 \vec{k}_1 &= dt \cdot \vec{D}^{(1)}(\vec{x}_i) \\
 \vec{k}_2 &= dt \cdot \vec{D}^{(1)}\left(\vec{x}_i + \frac{1}{2}\vec{k}_1\right) \\
 \vec{k}_3 &= dt \cdot \vec{D}^{(1)}\left(\vec{x}_i + \frac{1}{2}\vec{k}_2\right) \\
 \vec{k}_4 &= dt \cdot \vec{D}^{(1)}(\vec{x}_i + \vec{k}_3) \\
 \vec{x}(t_{i+1}) &= \vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + 2 \cdot \vec{k}_2 + 2 \cdot \vec{k}_3 + \vec{k}_4)
 \end{aligned} \tag{2.130}$$

Wiederum wird das Driftvektorfeld für die einzelnen Iterationsschritte entlang der Trajektorie, entsprechend der Kerndichteschätzung (2.125), bestimmt.

Kapitel 3

Quasi-Statische Aufgabe

3.1 Modellvorhersage

Der vorangehende Abschnitt diente dazu, das Rüstzeug für die im weiteren Verlauf dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen bereitzustellen. Wir hatten postuliert, dass eine veränderte Selbststabilität des Muskel-Skelettsystems zu einer Veränderung der Signalstruktur führt. Dem zugrunde liegt die Vermutung, dass fehlende Selbststabilität durch einen erhöhten Kontrollaufwand kompensiert wird. Dies würde aber dazu führen, dass sich das Systemoutput, nämlich die Bewegung, im Falle fehlender und existierender Selbststabilität nicht qualitativ unterscheiden muss. Da darüber hinaus die tatsächliche Kontrolle immer eine Mischung aus *open-loop-* und *closed-loop-Steuerung* ist, kann allein anhand der Ausführung einer Bewegung (Kinematik) nicht auf die Selbststabilität des Muskelskelettsystems geschlossen werden, so dass zur Untersuchung die Entwicklung eines mechanischen Modells nötig war. Das Modell ermöglichte es, das Muskelskelettsystem mit einer reinen *open-loop-Steuerung* zu untersuchen und damit die Selbststabilität des Systems. Da wir uns bei der Fragestellung auf die Ergebnisse von Giesl und Wagner (2007); Wagner et al. (2007) berufen haben, lag es nahe, ebenfalls das Ellbogengelenk zu untersuchen. Dabei stützten wir uns auf das von Giesl et al. (2004) benutzte biomechanische Modell und untersuchten zunächst die Stabilität für konstante Aktivierung der Muskulatur (die einfachste Form der *open-loop-Steuerung*). Die Ergebnisse dieser Untersuchung nutzten wir, um ein Experiment zu konzipieren, bei dem der Einfluss der Selbststabilität auf die Kontrolle untersucht werden konnte. Dafür betrachteten wir das sEMG von 17 Probanden bei einer quasi-statischen Halteaufgabe und verglichen die Ergebnisse mit den Informationen, die wir anhand des Modells bezüglich der Selbststabilität des Systems hatten. Im Folgenden wird zunächst das für konstante Muskelaktivität genutzte biomechanische Modell beschrieben und die daraus folgenden Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse vorgestellt.

3.1.1 Armmodell

Wie von Giesl und Wagner (2007) gezeigt, unterscheiden sich die Bewegungen des Ellbogengelenkes, die man bei Störung von Gleichgewichtspunkten gemessen hat, qualitativ in Abhängigkeit vom Winkel der untersuchten Gleichgewichtslage. Für kleine Innenarmwinkel ($\varphi \hat{=}$ Winkel zwischen Humerus und Ulna) ließen sich die Bewegungen des Unterarms im Phasenraum ($\varphi(t)$, $\omega(t)$) sehr gut durch ein Modell mit konstanter Aktivierung (*open-loop Steuerung*), also ohne zusätzlichen Regelkreise beschreiben. Die Kinematik schien für kleine Winkel von der Selbststabilität des Systems geprägt. Für große Innenarmwinkel hingegen war zumindest ein Großteil der Bewegung nicht mit Hilfe konstanter Aktivierungen zu erklären. Das System verhielt sich nicht wie ein System mit *open-loop-Steuerung*. Um näher zu untersuchen, ob dieser Wechsel von *open-loop-* zu *closed-loop-Steuerung* durch einen Übergang von einem selbststabilen zu einem instabilen System induziert wird, wurde das in Giesl et al. (2004) benutzte Modell in leicht modifizierter Form auf seine lineare Stabilität hin untersucht.

Die Betrachtung eines biomechanischen Modells ist die einzige nichtinvasive Möglichkeit, die Reaktion auf Störungen eines Muskel-Skelettsystems mit reiner *open-loop-Steuerung* zu untersuchen. Mit jeder Modellbildung ist eine Abstraktion der tatsächlichen Systemzusammenhänge verbunden. Das Abstraktionsniveau hängt dabei stark vom Modellzweck ab. Man unterscheidet bei der Modellbildung zwischen verhaltens- und strukturbeschreibenden Modellen (Bossel, 2004). Der Zweck eines verhaltensbeschreibenden Modells ist es, bekannte Reaktionen eines Systems abzubilden, hingegen wird bei einem strukturbeschreibenden Modell versucht, die Struktur des Systems abzubilden. Das strukturbeschreibende Modell bietet somit die Möglichkeit, die Systemreaktionen auch für unbekannte Störungen vorherzusagen. In der Regel sind die meisten Modelle eine Mischung beider Ansätze. Will man zum Beispiel die Flugbahn eines geworfenen Balles voraussagen, so ist es in den meisten Fällen (für die meisten Wurfgeschwindigkeiten) sinnvoll, den Strömungswiderstand über eine proportional zum Geschwindigkeitsbetrag steigende Widerstandskraft und damit verhaltensbeschreibend zu implementieren. Für steigende Abwurfgeschwindigkeiten wird die Strömung um den Ball zunehmend turbulent und die Proportionalität zum Geschwindigkeitsquadrat wird verletzt. Daher hat ein Modell mit verhaltensbeschreibenden Anteilen immer nur einen bestimmten Gültigkeitsbereich. Dass das benutzte Modell nicht nur verhaltensbeschreibenden Charakter hat, konnten Giesl und Wagner (2007) durch die Vorhersage der Bewegungstrajektorie bei kleinen Innenarmwinkeln zeigen. Dass der Gültigkeitsbereich des Modells zur Beschreibung der Bewegung für große Innenarmwinkel verletzt scheint, ist Teil der in dieser Arbeit untersuchten Forschungsfrage. Unserer Meinung nach ist die Gültigkeit deshalb verletzt, da in diesem Bereich des Modells die Selbststabilität des Systems nicht gegeben ist und daher konstante Aktivität nicht zur Lösung der Bewegungsaufgabe (halten einer Gleichgewichtsposition) führt.

Der Zweck unseres Modells war es daher, generelle Veränderungen in der Selbststabilität des Ellbogens in Abhängigkeit vom Innenarmwinkel zu untersuchen. Für diesen Zweck ist es zum Beispiel nicht nötig, die Kraftentwicklung auf der Ebene einzelner Muskelfasern oder den überlappenden Aktin- und Myosinfilamenten zu simulieren. Da es sich beim Ellbogengelenk um ein Scharniergelenk handelt, kann die Dynamik des Systems anhand der am Gelenk wirkenden Drehmomente M_i , siehe Gleichung (3.1), beschrieben werden. Mithilfe der linearen Stabilitätsanalyse wird untersucht, wie sich die am Ellbogengelenk wirkenden Drehmomente bei einer Störung im Winkel oder in der Winkelgeschwindigkeit verhalten, so dass das Modell möglichst alle Abhängigkeiten der Drehmomente vom Winkel und der Winkelgeschwindigkeit abbilden sollte. Da sich das Drehmoment aus dem Produkt von Hebelarm (in unserem Fall bezüglich des Ellbogengelenkes) und der Muskelkraft beziehungsweise externer Kraft zusammensetzt, müssen für diese die Abhängigkeiten von φ und ω geprüft werden. Der Hebelarm ist nur abhängig von der Geometrie des Muskelskelettsystems und somit in unserem Fall vom Winkel. Die Muskelkraft hingegen ist, wie wir später zeigen werden, sowohl eine Funktion der Muskellänge als auch der Kontraktionsgeschwindigkeit des Muskels und daher sowohl von φ als auch ω abhängig.

Zur Beschreibung des Modells gehen wir gemäß Giesl et al. (2004) von einem System mit nur einem rotatorischen Freiheitsgrad (Ellbogengelenk als Scharniergelenk) aus, darüber hinaus sei das Schultergelenk und damit der Oberarm fixiert, so dass Gleichung (3.1) die Dynamik des Unterarmes beschreibt.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n M_i \cdot\end{aligned}\quad (3.1)$$

Die am Gelenk wirkenden Drehmomente werden mit M_i bezeichnet, dazu zählen die durch die Muskulatur aufgebrauchten Drehmomente und, je nach Aufbau und Geometrie, auch externe Drehmomente, wie z.B. durch die Gravitation oder durch externe Störungen erzeugt. Die Trägheit des Systems wird durch das Massenträgheitsmoment J des Unterarmes bezüglich des Ellbogengelenkes determiniert.

Im Folgenden werden wir die einzelnen Modellbestandteile genauer betrachten und fangen zunächst mit den Größen an, die durch die Geometrie des Modells festgelegt sind, wie z.B. das Massenträgheitsmoment und die Muskelansatzpunkte.

Massenträgheitsmoment

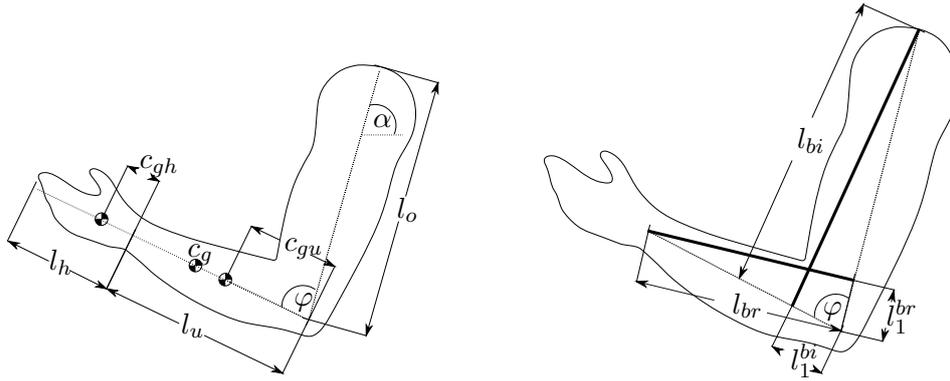
Das Massenträgheitsmoment des Modellarmes sollte, auf dem verwendeten Abstraktionsniveau, dem eines menschlichen Armes gleichen. Dazu wurden die Massen, Massenverteilungen und Schwerpunkte der Teilkörper gemäß Saziorski et al. (1984) bestimmt. Demzufolge liegt der Teilkörperschwerpunkt der Hand c_{gh} in etwa bei 37% der Distanz vom Griffelfortsatz zu den Handspitzen l_h (proximal nach distal). Beim Unterarm liegt der Teilkörperschwerpunkt c_{gu} bei knapp 43% der Gesamtlänge des Unterarmes (was im Folgenden mit der Länge der Ulna l_u gleichgesetzt wird) vom Ellbogengelenk aus gesehen. Die Regressionsgleichungen für die Teilkörpermassen von Hand und Unterarm abhängig von Körpergewicht (m_{ges}) und Körpergröße (l_{ges}) sehen wie folgt aus (Saziorski et al., 1984):

$$m_h = -0.1165\text{kg} + 0.0036 \cdot m_{\text{ges}} + 0.00175 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot l_{\text{ges}} + m_z \quad (3.2)$$

$$m_u = 0.3185\text{kg} + 0.01445 \cdot m_{\text{ges}} - 0.00114 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot l_{\text{ges}} \quad (3.3)$$

Um in den für diese Arbeit durchgeführten und später vorgestellten Versuchen ein nennenswertes EMG-Signal zu erhalten, mussten die Probanden ein Zusatzgewicht halten. Diesem Zusatzgewicht wurde im Modell mit dem Gewicht m_z Rechnung getragen. Das Handgelenk sei so orientiert, dass c_{gh} , c_{gu} und der Gesamtkörperschwerpunkt von Hand plus Unterarm (c_g) auf der Längsachse des Unterarmes liegen, womit sich die Distanz des Gesamtkörperschwerpunktes vom Drehgelenk gemäß des Schwerpunktsatzes $x_s = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i x_i$ als

$$c_g = \frac{1}{m_h + m_u} (m_h \cdot (c_{gh} + l_u) + m_u \cdot c_{gu}) \quad (3.4)$$



(a) Lage von Teilkörperschwerpunkt (c_{gh} , c_{gu}) und Gesamtkörperschwerpunkt (c_g), Länge der Ulna l_u und des Humerus l_o , Innenarmwinkel φ und der Neigung des Oberarmes α

(b) Ansatzpunkte (l_1^{bi} , l_1^{br}) und Muskelängen (l_{bi} , l_{br}) der Ersatzmuskeln für Bizeps respektive Brachioradialis

Abbildung 3.1: Geometrie des Armmodells für die Lage der Körperschwerpunkte und die Ansatzpunkte der Muskulatur

ergibt. Für die Trägheitsmomente der Teilkörper bzgl. einer durch den Teilkörperschwerpunkt und senkrecht zur in Abbildung 3.1a dargestellten Bildebene verlaufende Drehachse gilt (Saziorski et al., 1984) abhängig von anthropometrischen Daten folgender Zusammenhang:

$$J_h = (-13.68\text{kgm}^2 + 0.088\text{m}^2 \cdot m_{\text{ges}} + 0.092\text{kgm} \cdot l_{\text{ges}}) \cdot 10^{-4} \quad (3.5)$$

$$J_u = (-67.90\text{kgm}^2 + 0.855\text{m}^2 \cdot m_{\text{ges}} + 0.376\text{kgm} \cdot l_{\text{ges}}) \cdot 10^{-4} \quad (3.6)$$

Das Gesamtträgheitsmoment des Unterarms plus Hand ergibt sich aus den Trägheitsmomenten von Hand und Unterarm und durch Parallelverschiebung der Drehachsen (vergl. Tipler, 2000, S.239):

$$J = J_h + m_h \cdot (c_{gh} + l_u)^2 + J_u + m_u \cdot c_{gu}^2 \quad (3.7)$$

Muskelansatzpunkte

Im Modell wurden die Muskelmomente durch zwei Beuger (Flexoren) und einen Strecker (Extensor) erzeugt. Diese sollten die Muskeln biceps brachii, brachioradialis und den Musculus triceps brachii repräsentieren. Die Ansatzpunkte der Muskeln galten, in Anlehnung an das von Giesl et al. (2004) benutzte Armmodell, als punktförmig. Des Weiteren wurden die mehrköpfigen Muskeln (biceps brachii, triceps brachii) durch einen Ersatzmuskel mit entsprechend angepasster isometrischer Kraft ersetzt. Im Folgenden werden die zu einem Muskel gehörenden Größen durch die Indizes „bi“ (Bizeps), „br“ (Brachioradialis) und „tr“ (Trizeps) gekennzeichnet. Die Muskelansätze wurden gemäß Wank (1996) gewählt. Die Ansätze des Bizeps waren, vom

Drehzentrum aus gesehen (vergl. Abbildung 3.1b), bei

$$l_1^{bi} = 0.186 \cdot l_u \quad \text{und} \quad l_2^{bi} = l_o \quad . \quad (3.8)$$

Beim Brachioradialis lagen die Ansätze bei

$$l_1^{br} = 0.104 \cdot l_o \quad \text{und} \quad l_2^{br} = l_u \quad . \quad (3.9)$$

Muskellänge

Anhand der Muskelansätze kann die Muskellänge definiert werden. Dabei haben wir, wie später bei der Kraft-Längen-Funktion, die Wirkung der Sehnen und somit des passiven elastischen Anteils nicht weiter betrachtet. Der Einfachheit halber wird daher die Muskellänge als der Abstand zwischen den Ansatzpunkten definiert. Die Muskellängen in dem Modell ergeben sich damit für die Ersatzmuskeln Bizeps und Brachioradialis aus dem Cosinussatz zu:

$$l_{bi}(\varphi) = \sqrt{l_1^{bi^2} + l_2^{bi^2} - 2l_1^{bi}l_2^{bi} \cos(\varphi)}, \quad l_{br} = \sqrt{l_1^{br^2} + l_2^{br^2} - 2l_1^{br}l_2^{br} \cos(\varphi)} \quad . \quad (3.10)$$

Da für den Strecker die Muskellänge nicht direkt über geometrische Beziehungen angegeben werden kann, wird die Länge des Trizeps relativ zur Länge bei maximaler Beugung bemessen. Die Längenänderung l_{tr} bezüglich eines willkürlichen Winkels φ_0 des Trizeps kann über den Hebelarm $h_{tr}(\varphi)$ gemäß Gleichung (3.13)

$$l'_{tr}(\varphi) = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} h_{tr}(\varphi') d\varphi' \quad (3.11)$$

beschrieben werden. Aus pragmatischen Gründen wollen wir im Folgenden $\varphi_0 = 0$ setzen. l'_{tr} beschreibt also die Länge des Trizeps bei gegebenem Winkel φ minus der Länge des Trizeps bei voll gebeugtem Arm ($l'_{tr} = l_{tr}(\varphi) - l_{tr}(0)$).

Hebelarme

Die Hebel von Bizeps und Brachioradialis ergeben sich direkt aus geometrischen Überlegungen (anhand der Muskelansätze) mit Hilfe des Sinussatzes:

$$h_{bi}(\varphi) = \frac{l_1^{bi} \cdot l_2^{bi}}{l_{bi}} \cdot \sin(\varphi), \quad h_{br} = \frac{l_1^{br} \cdot l_2^{br}}{l_{br}} \cdot \sin(\varphi) \quad (3.12)$$

Für den Hebel des Trizeps wird die Regressionsgleichung gemäß Gerbeaux et al. (1996) benutzt:

$$h_{tr}(\varphi) = l_u \cdot (0.0993 + 0.0371(\pi - \varphi) - 0.0524(\pi - \varphi)^2 + 0.0147(\pi - \varphi)^3) \quad (3.13)$$

Das Muskelmoment ergibt sich, wie bereits erwähnt, aus dem Hebel und der vom Muskel (m) erbrachten Kraft: $M_m = h_m \cdot F_m$. Die Muskelkraft hingegen ist abhängig von der Aktivität des Muskels (A_m), sprich der Rekrutierung und Frequenzierung

der Motoneuronen (die innerhalb des Modells nicht genauer betrachtet werden), der Länge des Muskels (F_m^l) und der Kontraktionsgeschwindigkeit (F_m^v). Die Aktivität sei im Intervall $[0, 1]$ und, wie von Giesl und Wagner (2007) benutzt, konstant, also nicht störungsabhängig (*open-loop-Steuerung*):

$$M_m = h_m(\varphi) \cdot A_m \cdot F_m^l(\varphi) \cdot F_m^v(\varphi, \omega) \quad (3.14)$$

Wie die Längen- und Geschwindigkeitsabhängigkeit der vom Muskel erzeugten Kraft als Funktion von φ und ω simuliert wurden, wird im Folgenden beschrieben.

Kraft-Längen-Funktion

Die Kraft, die ein Muskel erbringen kann, hängt vom Überlapp der Aktin- und Myosinfilamente des Muskels ab und damit von der Länge des Muskels. Es gibt eine Länge, bei der der Überlapp und damit die Krafterzeugung maximal ist. Diese wird mit l_{opt} bezeichnet. Ist die Muskellänge kleiner oder größer als die optimale Länge, so fällt die Kraft-Längen-Funktion ab. Dies gilt aber nur für aktive Krafterzeugung. Bei starker Muskeldehnung (großer Muskellänge) kommt noch die Wirkung der passiven, elastischen Strukturen (wie z.B. Sehnen) hinzu, so dass die Kraft-Längen-Funktion für große Muskellängen wieder ansteigt. Da die Simulationen in einem Winkelbereich durchgeführt wurden, auf dem, aufgrund des Arbeitsbereiches der beteiligten Muskulatur, die Bedeutung des passiven Anteils der Kraft-Längen-Funktion nicht allzu groß ist, haben wir die Wirkung der passiven Strukturen vernachlässigt. Der Arbeitsbereich und die Längenabhängigkeit verschiedener Muskeln unterscheidet sich mitunter stark. Murray et al. (2000) untersuchten die Kraftlängenabhängigkeit der Muskeln der oberen Extremitäten von 10 Leichen. Diese Ergebnisse wurden genutzt, um die Kraftlängenabhängigkeit der simulierten Ersatzmuskeln physiologisch sinnvoll zu implementieren. Wie später gezeigt wird, hängt die Trennung von stabilem und instabilem Bereich unter anderem von der Kraft-Längen-Funktion und ihrer Ableitung ab. Daher haben wir für die Kraft-Längen-Funktion zwei gängige Ansätze benutzt. Zunächst verwendeten wir die von Giesl et al. (2004) aufgezeigte Funktion:

$$\begin{aligned} z(l_m) &= c_1 l_m + c_2 = \frac{l_m}{l_{opt}} \\ F_m^l(z) &= \frac{1.1}{\pi} \operatorname{atan} \left[80(z - 1.14)^9 + 7(z - 0.57) \right] + 0.55 \quad , \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei z die auf die optimale Länge l_{opt} (Länge bei der F_m^l maximal ist) normierte Länge des Muskels ist. Die Konstanten c_1 und c_2 wurden entsprechend der von Murray et al. (2000) gefundenen Ergebnisse berechnet. Da sowohl der $\operatorname{atan}(z)$ als auch das Argument $80(z - 1.14)^9 + 7(z - 0.57)$ streng monoton steigen, macht diese Definition nur Sinn für Muskeln, die sich auf dem aufsteigenden Ast der Kraft-Längen-Funktion befinden. Die zweite Variante der Kraft-Längen-Funktion, die in verschiedenen Abwandlungen in der Literatur häufig anzutreffen ist, ist eine an der Abszisse gespiegelte Parabel, die im Folgenden gemäß Woittiez et al. (1984) und

Gordon et al. (1966) in der Form

$$F_m^l(\varphi) = \begin{cases} 1 - k \cdot (l_m(\varphi) - l_m^{opt})^2 & , \text{für } (l_m - l_m^{opt})^2 < k \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (3.16)$$

genutzt wird. Je größer k ist, um so flacher ist die Parabel und umso geringer ist der Kraftabfall bei Abweichung von der optimalen Muskellänge l_m^{opt} . Um k und l_m^{opt} entsprechend der im Modell enthaltenen Muskeln zu wählen, wurden die Parameter entsprechend der von Murray et al. (2000) angegebenen Informationen berechnet. Laut Murray et al. (2000) ist die optimale Länge $l_{bi}^{opt}, l_{br}^{opt}$ von Bizeps und Brachioradialis beim Innenarmwinkel $\varphi = \frac{8}{9}\pi$ erreicht. Folglich wurde für die Kraft-Längen-Funktion dieser beiden Muskeln die optimale Länge als $l^{opt} = l(\frac{8}{9}\pi)$ festgelegt. Des Weiteren sinkt die normalisierte Kraft für die beiden Köpfe des Bizeps bei einem Innenarmwinkel von $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ auf 0.03 respektive 0.24. Da die beiden Köpfe des Bizeps im Modell durch einen Ersatzmuskel beschrieben wurden, wird k_{bi} der Mittelwert dieser beiden Angaben herangezogen.

$$0.135 = 1 - k_{bi}(l_{bi}(1/3\pi) - l_{bi}(8/9\pi))^2$$

Für den Brachioradialis fällt die Kraft-Längen-Funktion beim Winkel von $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ auf 0.06, folglich ergibt sich k_{br} aus:

$$0.06 = 1 - k_{br}(l_{br}(1/2\pi) - l_{br}(8/9\pi))^2$$

Die Längenabhängigkeit des Triceps ist gemäß Murray et al. (2000) im Mittel über alle untersuchten Gliedmaßen sehr klein, daher haben wir die Kraft-Längen-Funktion auf Eins gesetzt.

Kraft-Geschwindigkeits-Funktion

Die von Hill (1938) gefundene Kraft-Geschwindigkeitsrelation der Muskeln wird gemäß Sust et al. (1997) als

$$F_m^v(v, \varphi) = \frac{c}{-v(\varphi)+b} - a \quad , \forall v \leq 0 \quad (3.17)$$

$$F_m^v(v, \varphi) = \frac{C}{-v(\varphi)-B} + A \quad , \forall v > 0 \quad (3.18)$$

definiert. Die Parameter a , b und c können über physiologische Größen, wie maximale Kontraktionsgeschwindigkeit v_{max} , maximale Leistung p_{max} , die der Muskel erbringen kann, und die isometrische Kraft f_{iso} , definiert werden (siehe Siebert et al., 2003).

$$f_{iso} = \frac{c}{b} - a = F_m^v(v = 0) \quad (3.19)$$

$$v_{max} = \frac{c}{a} - b \quad (3.20)$$

$$p_{max} = a \cdot b + c - 2\sqrt{a \cdot b \cdot c} \quad (3.21)$$

Die Parameter der im Modell beschriebenen Muskeln wurden Giesel et al. (2004) entnommen und sind in Tabelle 3.1 aufgetragen. So ergeben sich zum Beispiel für die isometrische Kraft von Beuger und Strecker Werte von $f_b^{iso} \approx 1300$ N respektive $f_{tr}^{iso} \approx 1655$ N. Die Eigenschaften der Kraft-Geschwindigkeits-Funktion beider simulierten Beuger wurde identisch gewählt.

Tabelle 3.1: Parameter der Kraft-Geschwindigkeits-Funktion der im Modell benutzten Muskeln gemäß Giesel et al. (2004)

	Brachioradialis	Biceps	Triceps
a/N	21.4177	21.4177	403.7752
$b/\frac{m}{s^2}$	0.0233	0.0233	0.244
c/W	30.7825	30.7825	502.3032

Die Konstanten A , B und C ergeben sich aus Stetigkeitsbedingungen der Kraft-Geschwindigkeits-Funktion und der Angabe der exzentrischen Kraftüberhöhung

$$\lim_{v \downarrow 0} F_m^v(v, \varphi) = \lim_{v \uparrow 0} F_m^v(v, \varphi) \quad (3.22)$$

$$\lim_{v \downarrow 0} \frac{\partial F_m^v}{\partial v} = \lim_{v \uparrow 0} \frac{\partial F_m^v}{\partial v} \quad (3.23)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} F_m^v = 1.5 \cdot f_{iso} . \quad (3.24)$$

Um die Gleichungen (3.17) und (3.18) zusammen mit Gleichung (3.1) benutzen zu können, muss die Kontraktionsgeschwindigkeit als Funktion der Systemparameter φ und ω ausgedrückt werden. Die Variable v ist die Längenänderung des Muskels pro Zeit $\frac{dl(\varphi)}{dt} = \frac{\partial l}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Für die Muskelgeschwindigkeit der Beuger gilt mit Gleichung (3.10) und (3.12) für die totale Ableitung der Muskellänge nach der Zeit t

$$\begin{aligned} v_{beu} &= \frac{d}{dt} l(\varphi(t)) = \frac{d}{dt} (\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\varphi)}) \\ &= \frac{l_1 l_2 \sin(\varphi)}{l} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = h_{beu}(\varphi) \cdot \omega . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Eine äquivalente Beziehung lässt sich auch für den Strecker herleiten. Mit Gleichung (3.11) ergibt sich die Muskelgeschwindigkeit v_{tr} als:

$$v_{tr} = \frac{dl_{tr}(\varphi(t))}{dt} = \frac{\partial l(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -h_{tr}(\varphi) \cdot \omega \quad (3.26)$$

Damit ist die Kraft-Geschwindigkeits-Funktion von Beuger und Strecker in Abhängigkeit von Winkel und Winkelgeschwindigkeit in der Form

$$F_{beu}^v(\omega, \varphi) = \frac{c}{-\omega h(\varphi) + b} - a , \quad \forall \omega \leq 0 \quad (3.27)$$

$$F_{beu}^v(\omega, \varphi) = \frac{C}{-\omega h(\varphi) - B} + A , \quad \forall \omega > 0 \quad (3.28)$$

und

$$F_{str}^v(\omega, \varphi) = \frac{c}{\omega h(\varphi) + b} - a \quad , \forall \omega > 0 \quad (3.29)$$

$$F_{str}^v(\omega, \varphi) = \frac{C}{\omega h(\varphi) - B} + A \quad , \forall \omega \leq 0 \quad (3.30)$$

gegeben.

Externe Drehmomente

Wir haben angenommen, dass außer der Gravitation keine weiteren externen Kräfte auf den Modellarm wirken. Mit dem aus Kapitel 3.1.1 bestimmten Gesamtkörperschwerpunkt ergibt sich das wirkende externe Moment in Abhängigkeit von der Stellung α des Oberarms als

$$M_{ext} = \underbrace{c_g \cdot \cos(\pi - \varphi - \alpha)}_{h_g} \cdot \underbrace{(m_u + m_h)}_{F_g} g \quad , \quad (3.31)$$

wobei $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung ist. In Analogie zum Versuchsaufbau von Wagner et al. (2007) limitieren wir den Winkelbereich so, dass das externe Moment (erzeugt durch die Gewichtskraft) ein streckendes ist. Infolgedessen muss $\varphi > \pi/2 - \alpha$ und $\alpha \leq \pi/2$ gelten. Wir haben somit alle im Modell wirkenden Drehmomente M_i als Funktion von φ und ω dargestellt, so dass wir die Stabilität des Gesamtmodells betrachten können.

3.1.2 Methoden

Vor der eigentlichen Stabilitätsanalyse werden wir noch, entsprechend Giesel et al. (2004), eine Vereinfachung des Modells vornehmen. Die Aktivierung der Beuger wird als identisch betrachtet und mit A_b bezeichnet. Das Gesamtmodell ergibt sich somit zu:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega & &= f_1(\varphi, \omega) \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \left(-A_b h_{bi} F_{bi}^l(\varphi) F_{bi}^v(\varphi, \omega) - A_b h_{br} F_{br}^l(\varphi) F_{br}^v(\varphi, \omega) + \right. & &= f_2(\varphi, \omega) \\ & & & \left. A_{tr} h_{tr} F_{tr}^l(\varphi) F_{tr}^v(\varphi, \omega) + h_g(\varphi) F_g \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Da untersucht werden sollte, wie sich die Stabilität in Abhängigkeit von φ verändert, haben wir Winkel φ^* vorgegeben und für diese Winkel die möglichen Aktivitäten A_b und A_{tr} berechnet. Damit φ^* Fixpunkt des Systems sein kann, muss

$$\begin{aligned} 0 &= -A_b h_{bi} F_{bi}^l(\varphi^*) f_{bi}^{iso} - A_b h_{br} F_{br}^l(\varphi^*) f_{br}^{iso} + A_{tr} h_{tr} F_{tr}^l(\varphi^*) f_{tr}^{iso} + h_g(\varphi^*) F_g \\ \Leftrightarrow A_{tr}(\varphi^*) &= \frac{A_b [h_{bi} f_{bi}^l(\varphi^*) f_{bi}^{iso} + h_{br} F_{br}^l(\varphi^*) f_{br}^{iso}] - h_g(\varphi^*) F_g}{h_{tr} F_{tr}^l(\varphi^*) f_{tr}^{iso}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

gelten. Lösungen von (3.33), für die $A_b \notin [0, 1] \vee A_{tr} \notin [0, 1]$ gilt, werden im Folgenden nicht weiter betrachtet. Negative Aktivierungen würden zu negativen und damit

unphysiologischen Muskelkräften führen. Eine Aktivierung von Eins beschreibt die maximale für eine bestimmte Muskellänge und Kontraktionsgeschwindigkeit mögliche Krafterzeugung, so dass Werte größer Eins abwegig sind. Die lineare Stabilität des Modells wurde für verschiedene Winkel untersucht. Dazu wurden die Winkel φ_i^* auf einem Gitter im Intervall $I_\varphi = [\phi_{min}, \phi_{max}]$ als Fixpunkte vorgegeben.

$$\begin{aligned}\varphi_i^* &= \varphi_{min} + i \cdot \Delta\varphi, \quad i = 0, \dots, n \\ \Delta\varphi &= (\phi_{max} - \phi_{min})/n\end{aligned}\tag{3.34}$$

Für jeden Winkel φ_i^* existierte eine Schar von Aktivierungen (A_b, A_{tr}) , die Lösungen der Fixpunktgleichung sind. Diese Schar entspricht allen möglichen Koaktivierungen von Beuger und Strecker, die durch Gleichung (3.33) definiert sind. Daher wurde A_b an n Stützstellen entsprechend

$$A_{b_j} = j \cdot \Delta A, \quad j = 0, \dots, n\tag{3.35}$$

mit $\Delta A = 1/n$ vorgegeben und die entsprechende Streckeraktivierung mit Hilfe von Gleichung (3.33) ermittelt. Für die verbleibenden $(A_b \in [0, 1] \wedge A_{tr} \in [0, 1])$ Aktivierungsverhältnisse wurde die lineare Stabilität berechnet. Dazu werden die Eigenwerte der Jakobimatrix, ausgewertet am Fixpunkt, bestimmt. Für jeden Fixpunkt φ_i^* gibt es eine Schar von möglichen Aktivierungspaaren A_{tr_j} und A_{b_j} .

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1(\varphi, \omega)}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_2(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2(\varphi, \omega)}{\partial \omega} \end{pmatrix} \Bigg|_{(\varphi, \omega) = (\varphi^*, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f_2(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2(\varphi, \omega)}{\partial \omega} \end{pmatrix} \Bigg|_{(\varphi, \omega) = (\varphi^*, 0)}\tag{3.36}$$

Somit wurde für jeden Fixpunkt und die dazugehörige Schar an Aktivitäten das charakteristische Polynom

$$|\mathbf{J} - \lambda \mathbf{E}| = 0\tag{3.37}$$

gelöst. Die sich daraus ergebenden Eigenwerte sind ein Maß für die Reaktion des Systems auf kleine Störungen um den Gleichgewichtspunkt. Nach dem Satz von Hartmann-Grobmann (vergleiche Argyris et al., 2010) ist bei nichtdegenerierten Fixpunkten (nicht-verschwindender Realteil der Eigenwerte) die Topologie des Phasenraums des nichtlinearen Systems um den Fixpunkt gleich der Topologie des linearisierten Systems. Negative Realteile beider Eigenwerte signalisieren, dass das System aufgrund seiner Struktur nach einer Relaxationszeit wieder zum ursprünglichen Gleichgewichtspunkt zurückkehrt. Hingegen bedeutet ein positiver Eigenwert, dass eine kleine Störung um den Fixpunkt nicht abklingt. Die Lösungen des charakteristische Polynoms

$$\lambda^2 - \frac{\partial f_2}{\partial \omega}(\varphi^*, 0)\lambda - \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}(\varphi^*, 0) \stackrel{!}{=} 0\tag{3.38}$$

sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial \omega} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega} \right)^2 + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}}.\tag{3.39}$$

Da nur die Kraft-Geschwindigkeits-Funktion von ω abhängt, kann man zeigen, dass $\frac{\partial f_2}{\partial \omega}$ immer negativ ist. $\frac{\partial f_2}{\partial \omega}$ lässt sich somit ausdrücken als:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \omega} \Big|_{(\varphi^*, 0)} = \frac{1}{J} \left[-g_{bi}(\varphi) \frac{\partial F_{bi}^v(\varphi, \omega)}{\partial \omega} - g_{br}(\varphi) \frac{\partial F_{br}^v(\varphi, \omega)}{\partial \omega} + g_{tr}(\varphi) \frac{\partial F_{tr}^v(\varphi, \omega)}{\partial \omega} \right] \Big|_{(\varphi^*, 0)}, \quad (3.40)$$

wobei die Funktionen g_m die jeweilige Kraft-Längen-Funktion, den Hebelarm und die entsprechende Aktivität enthalten. Da die Kraft-Längen-Funktion, der Hebelarm und die Aktivität per Definition für alle φ größer Null sind, entscheidet die Ableitung der Kraft-Geschwindigkeits-Funktion über das Vorzeichen. Unter Verwendung von Gleichung (3.27)-(3.30) folgt, dass

$$\frac{\partial F_{Beuger}^v}{\partial \omega} \Big|_{(\varphi^*, 0)} = \frac{c h(\varphi^*)}{b^2} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial F_{Strecker}^v}{\partial \omega} \Big|_{(\varphi^*, 0)} = \frac{-c h(\varphi^*)}{b^2} < 0 \quad (3.41)$$

ist und $\frac{\partial f_2}{\partial \omega} \Big|_{(\varphi^*, 0)} < 0, \forall \varphi^*$ gilt. Daher entscheidet der Term $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \Big|_{(\varphi^*, 0)}$ darüber, ob beide Realteile der Eigenwerte negativ sind. Da die Versuche von Wagner et al. (2007) gezeigt haben, dass die Reaktion auf Störungen winkelabhängig sind, sollte das Modell auf winkelabhängige Veränderungen der Stabilität untersucht werden. Anders ausgedrückt: gibt es abhängig vom Winkel und von der eingestellten Koaktivierung einen Vorzeichenwechsel im Realteil der Eigenwerte. Dies würde den Übergang von einem stabilen Regime zu einem instabilen beschreiben. Da die Muskelparameter von Person zu Person stark variieren, soll diese Untersuchung nicht nur für den speziellen Parametersatz aus Tabelle 3.1 Aussagen über die Stabilität liefern, sondern möglichst viele Konfigurationen abdecken. Daher wollen wir nun den Einfluss der Muskelparameter ($f_{iso}, v_{max}, p_{max}$) auf den Vorzeichenwechsel im Eigenwert betrachten. Nutzen wir anhand von Gleichungen (3.27)-(3.30) aus, dass $\frac{\partial F_m^v(\varphi, \omega)}{\partial \varphi} \Big|_{(\varphi^*, 0)} = 0$ ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \Big|_{(\varphi^*, 0)} = & \frac{1}{J} \left(-A_b \left[\frac{\partial h_{bi}(\varphi^*)}{\partial \varphi} F_{bi}^l(\varphi^*) f_b^{iso} + h_{bi} \frac{\partial F_{bi}^l(\varphi^*)}{\partial \varphi} f_b^{iso} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial h_{br}(\varphi^*)}{\partial \varphi} F_{br}^l(\varphi^*) f_b^{iso} + h_{br} \frac{\partial F_{br}^l(\varphi^*)}{\partial \varphi} f_b^{iso} \right] \right. \\ & \left. + A_{tr} \left[\frac{\partial h_{tr}(\varphi^*)}{\partial \varphi} F_{tr}^l(\varphi^*) f_{tr}^{iso} + h_{tr} \frac{\partial F_{tr}^l(\varphi^*)}{\partial \varphi} f_{tr}^{iso} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial h_{ext}(\varphi^*)}{\partial \varphi} F_{ext} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Von den Parametern, die zur Beschreibung der Kraftgeschwindigkeitsfunktionen benötigt werden, haben nur die isometrischen Kräfte f_b^{iso} und f_{tr}^{iso} einen Einfluss auf die Lage des Vorzeichenwechsels. Da wir aber die Aktivität des Streckers in Abhängigkeit des Beugers ausgedrückt haben (siehe Gleichung (3.33)), bleibt effektiv nur der Einfluss von f_b^{iso} übrig. Darüber hinaus spielen noch Geometriefaktoren, die sich

in den Hebelarmen $h_m(\varphi)$, $h_{ext}(\varphi)$ widerspiegeln, und die Kraft-Längen-Funktion und ihre Ableitung nach φ ein Rolle. Den Einfluss der isometrischen Kraft und der Kraft-Längen-Funktion auf Stabilität von Gleichgewichtspositionen werden wir im folgenden Kapitel beleuchten. Die lineare Stabilität des Systems (3.32) wurde zu diesem Zweck auf dem Winkelintervall $\varphi^* \in [65^\circ, 135^\circ]$ mit einem Zusatzgewicht von $m_z = 1.6$ kg untersucht. Für den Oberarm wurde eine Neigung von $\alpha = 45^\circ$ angenommen, siehe Gleichung (3.31). Dazu wurde das Maximum des Realteils der Eigenwerte auf dem durch die Beugeraktivitäten A_{b_j} (3.35) und die Winkel φ_i^* (3.34) gegebenem $(n \times n)$ -Gitter ($n = 101$) in Abhängigkeit von der Kraft-Längen-Funktion und der isometrischen Kraft f_b^{iso} bestimmt. Zunächst untersuchen wir die Selbststabilität des Systems für die von Giesel et al. (2004) benutzte Kraft-Längen-Funktion (Gleichung (3.15)).

3.1.3 Ergebnisse der Stabilitätsanalyse

Die folgenden Abbildungen zeigen die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse. Dargestellt ist das Maximum der Realteile $\text{Re}(\lambda_1)$ und $\text{Re}(\lambda_2)$ aus Gleichung (3.39) in Abhängigkeit vom Innenarmwinkel φ und der Aktivität der Beuger A_b . Gibt man im Modell die Beugeraktivierung vor, so ist für die Gleichgewichtsposition die Streckereaktivierung determiniert, siehe Gleichung (3.33). Eine größere Beugeraktivierung erfordert gleichzeitig eine entsprechend größere Streckeraktivierung. Eine Steigerung von A_b kann somit als verstärkte Koaktivierung zwischen Beugern und Strecker aufgefasst werden. Wir werden daher im Folgenden für A_b synonym auch den Begriff Koaktivierung benutzen. Ist A_b und damit das von den Beugern erzeugte Drehmoment zu klein, um das externe Moment zu kompensieren, müsste $A_{tr} < 0$ gelten, um das Gleichgewicht einzustellen. Hingegen kann im Modell für ein Gleichgewicht bei großen A_b eine Streckeraktivität $A_{tr} > 1$ gefordert sein. Beide Fälle erzeugen einen Widerspruch zur Definition der Aktivierung und werden im Folgenden von der Betrachtung ausgeschlossen, was in den Abbildungen 3.2-3.4 durch die weißen Bereiche gekennzeichnet ist. Demnach entspricht die kleinste für einen Winkel φ gültige Beugeraktivierung A_b einer Streckeraktivierung von $A_{tr} = 0$. Für alle gültigen Aktivierungskombinationen wird der Wert des maximalen Realteils durch einen entsprechenden Farbwert codiert (siehe Skala in Abbildung 3.2-3.4). Die Grenze zwischen dem stabilen Bereich ($\max[\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2)] < 0$) und dem instabilen Bereich ($[\max(\text{Re}(\lambda_1), \text{Re}(\lambda_2))] > 0$) wird durch die schwarze Linie gekennzeichnet, die im Folgenden als Nulllinie bezeichnet wird. Für die Muskelparameter aus Tabelle 3.1 mit der Kraft-Längen-Funktion (3.15) ergibt sich der in Abbildung 3.2 dargestellte Zusammenhang. Im linken Rand des farbcodierten Bereiches, also in der minimal möglichen Beugeraktivität, spiegeln sich das externe Moment $M_{ext}(\varphi)$ und die Kraft-Längen-Funktion wider. Für einen Innenarmwinkel von 65° müssen die Beuger in etwa 20 % der für diesen Winkel möglichen isometrischen Kraft erzeugen, um das externe Moment zu kompensieren. Bei $\varphi = 90^\circ$ sind es in etwa 10 %. Für hohe Innenarmwinkel steigt die minimal nötige Kraft der Beuger wieder an. Dieser Verlauf ist durch den geringen Wert der Kraftlängenfunktion der Beuger bei kleinen Innenarm-

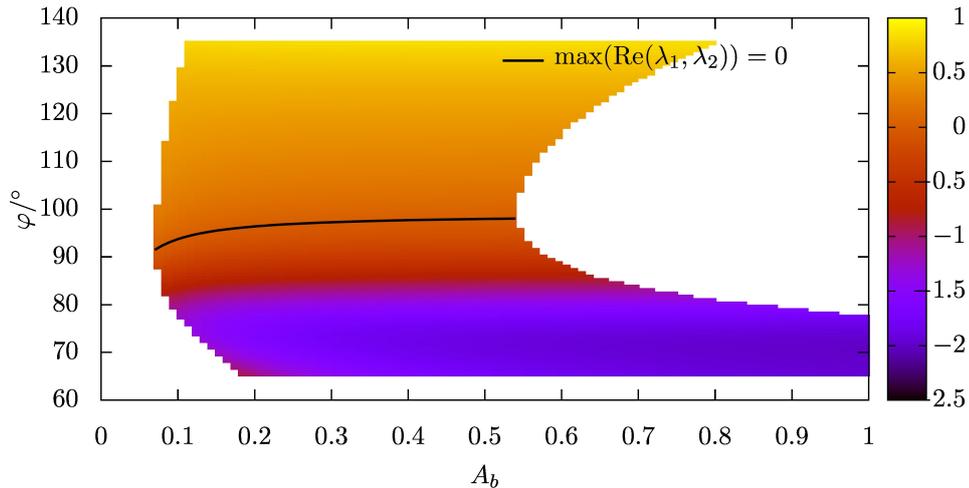


Abbildung 3.2: Lineare Stabilitätsanalyse, Systemparameter entsprechend Giesl et al. (2004), $m_z = 1.6 \text{ kg}$, $f_{tr}^{iso} = 1.0$, $f_b^{iso} = 1.0$. Das Maximum des Realteils beider Eigenwerte ist farbcodiert dargestellt. Das durch die Farbcodierung dargestellte Intervall entspricht dem Wertebereich.

winkeln und durch das mit dem Winkel φ steigende externe Moment zu erklären. Die Nulllinie ist konkav und steigt streng monoton mit steigender Koaktivierung von Beugern und Strecker. Für kleine Koaktivierungen ($A_b \approx 0.1$) liegt der Übergang zwischen stabilem und instabilem Regime in etwa bei einem Winkel von 90° . Bei höheren Koaktivierungen ($A_b \approx 0.55$) liegt die Grenze zwischen dem stabilen und instabilen Bereich in etwa bei 100° , so dass durch zunehmende Koaktivierung eine Erweiterung des stabilen Winkelbereiches um ungefähr 10° erreicht werden kann. Da die Nulllinie konkav und streng monoton wachsend ist, ist der größte Zuwachs des stabilen Bereiches bei kleinen Koaktivierungen zu erkennen. Große Koaktivierungen ($A_b \approx 1$) sind nur für Winkel kleiner 80° möglich. Für größere Winkel müsste die Aktivierung des Streckers größer Eins sein und ist damit ungültig. Dies gilt für den gesamten in Abbildung 3.2 am rechten Bildrand dargestellten weißen Bereich. Für den großen Bereich ungültiger Aktivierungspaare gibt es mehrere Erklärungsansätze. Zunächst einmal sind an der Erzeugung des Drehmomentes im Ellbogengelenk nicht nur die drei im Modell betrachteten Muskeln beteiligt. Es könnte also sein, dass bei einer entsprechenden Anpassung des Modells der mögliche Arbeitsbereich (die gültigen Aktivitätsniveaus) der Muskel erweitert wird. Es ist jedoch auch möglich, dass die im Modell angesetzte isometrische Kraft des Trizeps im Vergleich zu den Beugern (vergleiche Tabelle 3.1) zu klein ist. Wie wir bereits bei der Berechnung der Eigenwerte gesehen haben, hat die isometrische Kraft des Streckers keinen Einfluss auf den Vorzeichenwechsel von Gleichung (3.42). Damit ist die Lage der Nulllinie unabhängig von f_{tr}^{iso} . Eine Veränderung von f_{tr}^{iso} führt lediglich zu einer Variation des gültigen Wertebereichs von A_b . Daher werden wir im Folgenden f_{tr}^{iso} so dimensionieren, dass der Wertebereich von A_b maximiert wird. Reduziert man die isometrische

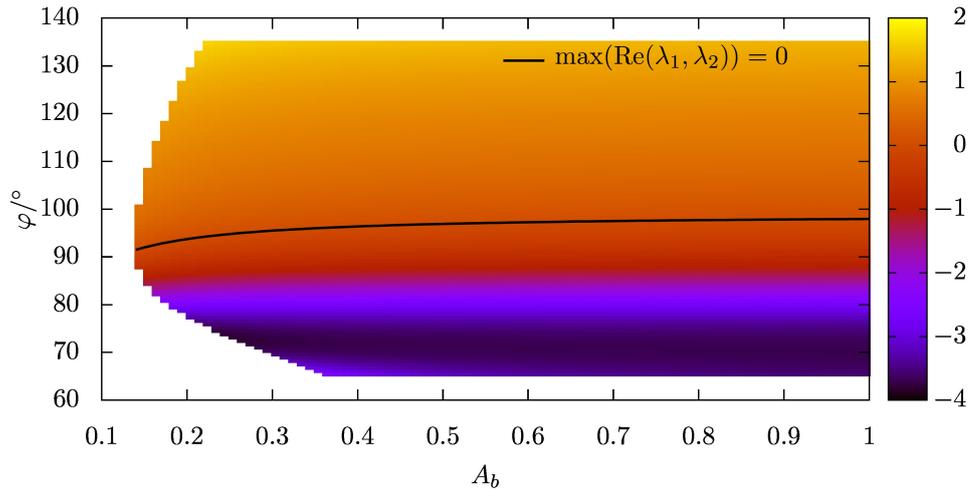


Abbildung 3.3: Lineare Stabilitätsanalyse, Systemparameter entsprechend Giesel et al. (2004) $m_z = 1.6 \text{ kg}$, $f_b^{iso} = 0.5$. Das Maximum des Realteils beider Eigenwerte ist farbcodiert dargestellt. Das durch die Farbcodierung dargestellte Intervall entspricht dem Wertebereich.

Kraft der Beuger auf 50 % des durch Tabelle 3.1 angegebenen Wertes (im Folgenden mit $f_b^{iso} = 0.5$ bezeichnet), sind die minimal möglichen Aktivitäten bei einem Zusatzgewicht von 1.6 kg mit einem Maximalwert von $A_b \approx 0.35$ bei $\varphi = 65^\circ$ sehr hoch (Abbildung 3.3). Die Beuger müssten, um das Gewicht in der Position zu halten, 35 % ihrer in der Position zur Verfügung stehenden Kraft erzeugen. Die Nulllinie zeigt aufgrund der Veränderung der isometrischen Kraft eine geringe Verlagerung, was erst durch isolierte Darstellung der Nulllinien in Abbildung 3.5 deutlich wird. Betrachtet man das Stabilitätsdiagramm für $f_b^{iso} = 1.5$ (Abbildung 3.4), so fällt wiederum eine leichte Veränderung der Nulllinie auf, vergleiche Abbildung 3.5. Des Weiteren ist besonders für kleine Innenarmwinkel φ zu erkennen, dass bei gleichbleibendem Winkel eine Vergrößerung der Koaktivität zu einem dem Betrage nach größerem Realteil des Eigenwertes führt und damit zu einer größeren Stabilität. Vergleicht man die sich zu den verschiedenen isometrischen Kräften ergebenden Stabilitätsdiagramme (Abbildung 3.2-3.4), so fällt auf, dass der sich ergebende Wertebereich der Eigenwerte kleiner wird, je größer die isometrische Kraft der Beuger dimensioniert ist. Die Abhängigkeit der Nulllinien von der Wahl der isometrischen Kraft ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Der Verlauf der Nulllinien zeigt bei steigender isometrischer Kraft nur eine geringe Verschiebung in Richtung größerer Winkel, wobei die Qualität des Verlaufes erhalten bleibt. Bei steigender Koaktivierung vergrößert sich der stabile Bereich, wobei der Zuwachs nur für kleine Koaktivierungen (A_b) relevant ist.

Die Lage der Nulllinien ist durch Gleichung (3.42) bestimmt. Da diese nicht nur von der isometrischen Kraft, sondern auch von der Kraft-Längen-Funktion und ihrer Ableitung nach φ^* abhängt, haben wir ebenso die Nulllinien für die Kraft-Längen-Funktion gemäß Gleichung (3.16) berechnet. Dabei haben wir wiederum die isome-

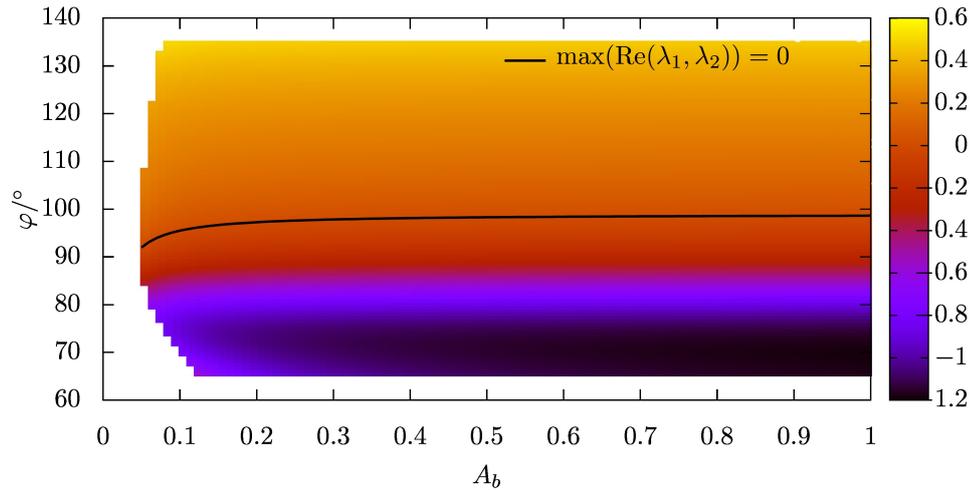


Abbildung 3.4: Lineare Stabilitätsanalyse, Systemparameter entsprechend Giesl et al. (2004) $m_z = 1.6 \text{ kg}$, $f_b^{iso} = 1.5$. Das Maximum des Realteils beider Eigenwerte ist farbcodiert dargestellt. Das durch die Farbcodierung dargestellte Intervall entspricht dem Wertebereich.

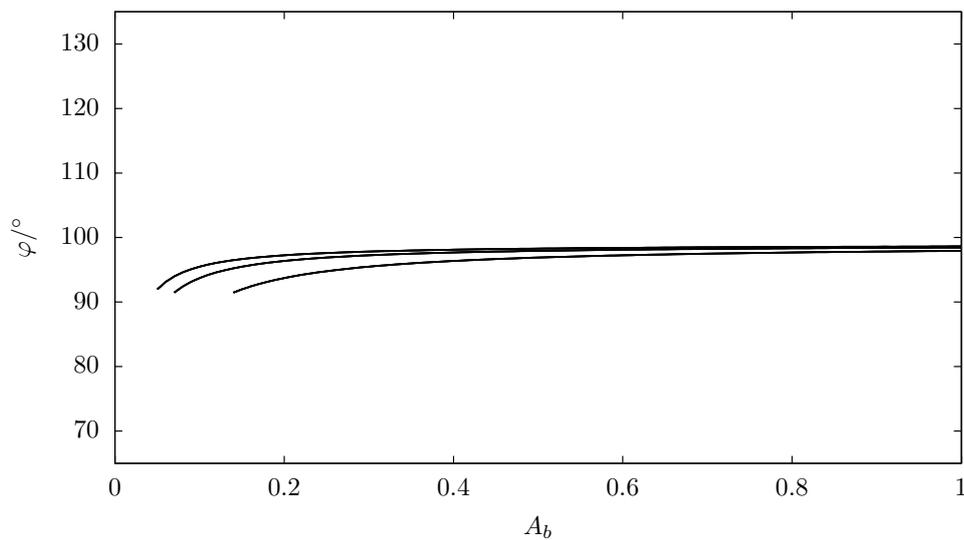


Abbildung 3.5: Nulllinien für Kraftlängenfunktion (—) gemäß Gleichung 3.15 für die Werte von $f_b^{iso} = [0.5, 1.0, 1.5]$ in Abhängigkeit von der Beugeraktivität A_b (Koaktivierung) und dem Innenarmwinkel φ . Jede Linie entspricht einem Wert der isometrischen Kraft.

trische Kraft der Beuger verändert und die Auswirkung auf die Lage der Nulllinie untersucht (Abbildung 3.6). Die Nulllinien zeigen bei steigender isometrischer Kraft wiederum eine Verschiebung zu größeren Winkeln. Die stärkere Krümmung der Nulllinien im Vergleich zu Abbildung 3.6 zeigt eine höhere Abhängigkeit der Eigenwerte

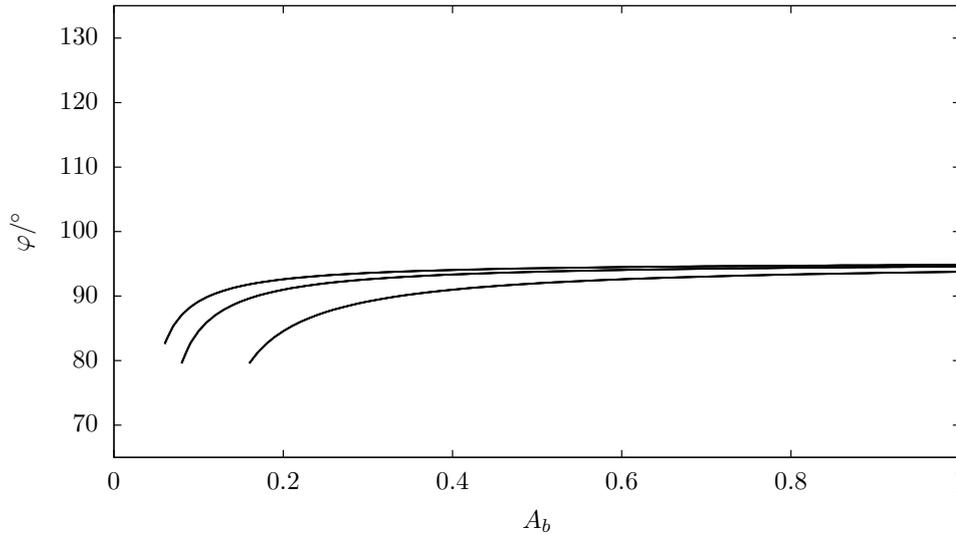


Abbildung 3.6: Nulllinien für Kraft-Längen-Funktion (—) gemäß Gleichung (3.16) für die Werte von $f_b^{iso} = [0.5, 1.0, 1.5]$ in Abhängigkeit von der Beugeraktivität A_b (Koaktivierung) und dem Innenarmwinkel φ . Jede Linie entspricht einem Wert der isometrischen Kraft.

von der Koaktivierung zwischen Beuger und Strecker. Der stabile Bereich kann durch Koaktivierung um circa 15° erweitert werden, wobei wiederum der größte Zuwachs bei kleinen Aktivitäten A_b zu sehen ist.

3.1.4 Diskussion

Da die Nulllinien für alle hier untersuchten Konfigurationen (Wahl der Kraftlängenfunktion, isometrische Kraft der Beuger) streng monoton steigend sind (vergleiche Abbildung 3.7), gibt es keine Bistabilitäten. Es zeigt sich, dass bei aller Variation der Systemparameter (Winkel-)Bereiche existieren, in denen das Modellsystem mit konstanter Muskelaktivierung grundsätzlich linear stabil beziehungsweise instabil ist. Wir konnten anhand der minimal möglichen Aktivität A_b zeigen, dass die in Tabelle 3.1 dargestellten Parameter die isometrische Kraft der Beuger tendenziell eher unter- als überschätzen, so dass wir uns im Weiteren auf die Nulllinien mit $f_b^{iso} \geq 1.0$ konzentrieren. In diesem Fall kann der Übergang zwischen stabilem und instabilem Bereich, zwischen 90° und 100° verortet werden. Der Winkel φ^* kann im Modell für $\varphi^* < 90^\circ$ mit einer *open-loop-Steuerung* stabil gehalten werden. Sind die Aktivierungen A_b und A_{tr} in diesem Winkelbereich so eingestellt, dass φ^* ein Gleichgewichtspunkt ist, so wird dieser automatisch eingenommen. Diese Art der Kontrolle entspricht dem α -Modell nach Bizzi et al. (1976). Hingegen ist dieser Kontrollmechanismus für $\varphi^* > 100^\circ$ nicht möglich. Dies heißt natürlich nicht, dass es im menschlichen Arm für hohe Innenarmwinkel keine stabile Gleichgewichtspositionen gibt. Die Simulationsergebnisse sagen nur etwas über die Stabilität der *open-loop-*

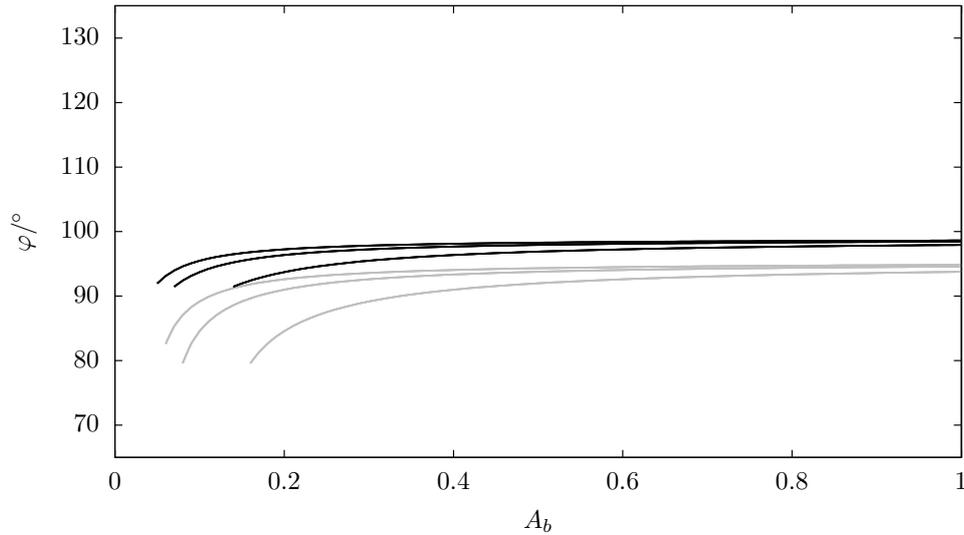


Abbildung 3.7: Nulllinien für Kraft-Längen-Funktion gemäß Gleichung (3.15) (—) und (3.16) (—) für die Werte von $f_b^{iso} = [0.5, 1.0, 1.5]$ in Abhängigkeit von der Beugeraktivität A_b (Koaktivierung) und dem Innenarmwinkel φ . Jede Linie entspricht einem Wert der isometrischen Kraft.

Steuerung aus. Regelkreise, die in Form von Reflexschleifen (z.B. Dehnungsreflex) im menschlichen Körper existieren, könnten auch in den Bereichen, in denen das hier untersuchte Modell Instabilitäten vorhersagt, zu einem stabilen Bewegungsoutput führen. Um dies im Modell zu implementieren, könnten zum Beispiel die Aktivierungen abhängig vom Abstand zwischen aktueller Position $\varphi(t)$ und gewünschter Position φ^*

$$\dot{A}(t) = f(\varphi(t) - \varphi^*) \quad . \quad (3.43)$$

sein. Eine Implementierung dieser Art wäre vergleichbar mit dem λ -Modell nach Feldmann (Feldman, 1986). Streng genommen müsste die störungsabhängige Muskelaktivierung, aufgrund der endlichen Nervenleitgeschwindigkeit, einer retardierten Differentialgleichung gehorchen:

$$\dot{A}(t) = f(\varphi(t - \tau) - \varphi^*) \quad . \quad (3.44)$$

Die Störungsreaktion aufgrund der mechanischen Eigenschaften des Muskelskelettsystems (Selbststabilität) weisen dagegen keine zeitliche Verzögerung auf, so dass die Selbststabilität vor allem bei der Regulation schneller Fluktuationen von Bedeutung ist.

Wir haben mit Hilfe des Modells gezeigt, dass Selbststabilität im Ellbogengelenk und damit die Möglichkeit zur *open-loop-Steuerung* nur für einen Teil der möglichen Winkel φ vorliegt. Darüber hinaus konnten wir zeigen, dass der Bereich, für den Stabilität vorliegt, nur wenig von der Wahl der Muskelparameter, der Koaktivierung und der speziellen Wahl der Kraft-Längen-Funktion abhängt. Zwar handelt es

sich bei dem Modell um eine starke Vereinfachung des menschlichen Arms (gleiche Aktivierung und Muskeleigenschaften für beide Beuger, punktförmige Ansatzpunkte der Muskulatur, Anzahl der im Modell betrachteten Muskeln), jedoch zeigte dieses Modell für kleine Innenarmwinkel in den Analysen von Giesl und Wagner (2007) eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden, so dass die Validität des Modells zumindest für kleine Innenarmwinkel gegeben ist. Dass die Validität für große Innenarmwinkel nicht gegeben ist, ist kein Widerspruch zu der in dieser Arbeit aufgestellten Hypothese. Für große Innenarmwinkel kann das Modell die reaktive Bewegung auf Störungen nicht beschreiben, da die Gleichgewichtslagen bei hohen Innenarmwinkeln nicht stabil sind. Aufgrund der fehlenden Selbststabilität postulieren wir gerade eine veränderte Ansteuerung und damit eine Abweichung von dem von uns benutzten Modell. Wie Giesl und Wagner (2007) bereits zeigten, verringert sich der Einzugsbereich der stabilen Gleichgewichtspositionen bei steigendem Innenarmwinkel, so dass die Bedeutung anderer Kontrollmechanismen mit steigendem Realteil der von uns ausgewerteten Eigenwerte wächst. Wir hatten gefordert, dass die durch das Modell gezeigte Veränderung im Stabilitätsverhalten sich in einer veränderten Kontrolle (veränderte Anteile von *open-loop*- und *closed-loop-Steuerung*) und damit in der Signalstruktur des sEMG abbilden müsste. Um dies zu prüfen, wurde das nachfolgende Experiment durchgeführt.

3.2 Einfluss der Selbststabilität auf die Kontrolle

Wir haben das sEMG von Bizeps und Brachioradialis, in Anlehnung an das vorangestellte Modell (Kapitel 3.1.1), bei einer quasi-statischen Halteaufgabe für verschiedene Winkel $\varphi \in [65^\circ, 135^\circ]$ des Ellbogengelenks gemessen. Wir haben untersucht, wie sich die vom Modell vorausgesagte Veränderung der Selbststabilität auf die Aktivierung der Muskulatur und damit auf die Signalstruktur des sEMGs auswirkt. Um die Signalstruktur zu analysieren, haben wir das sEMG-Signal als zeitdiskreten stochastischen Prozess aufgefasst. Ließe sich das sEMG als ein Langevin-Prozess mit δ -korreliertem Rauschterm (siehe Gleichung (2.88) und (2.89)) beschreiben, so wäre der Prozess durch die Bestimmung von Drift ($D^{(1)}(x)$) und Diffusion ($D^{(2)}(x)$) vollständig charakterisiert, siehe Gleichung (2.85). Drift und Diffusion könnten zur Beschreibung der Signalstruktur herangezogen werden. Da der Rauschterm dafür δ -korreliert sein muss, also kein Gedächtnis aufweisen darf, muss der stochastische Prozess Markoveigenschaften aufweisen. Daher haben wir als erstes die aufgenommenen sEMG-Daten auf Markoveigenschaften hin untersucht. Wie wir später zeigen werden, sind die Markoveigenschaften nicht erfüllt, jedoch lässt sich selbst bei Verletzung der Markoveigenschaften der deterministische Anteil zuverlässig anhand der Drift bestimmen (Siefert und Peinke, 2004). Daher haben wir uns im weiteren Verlauf der Analyse auf die Drift beschränkt. Für jedes gemessene sEMG-Signal wurde die Drift mittels Nadaraya-Watson-Schätzer bestimmt und die Steigung der Drift als Kennzahl des Prozesses herangezogen, so dass wir schließlich die Steigung der Drift in den Winkelbereichen, in denen das Modell aus Kapitel 3.1.1 Stabilität beziehungsweise Instabilität voraussagt, verglichen haben.

Zunächst wollen wir den für die Aufnahme der sEMG-Signale verwendeten Versuchsaufbau und die Versuchsdurchführung genauer beschreiben. Dann kommen wir auf die Datenverarbeitung und den darauf folgenden Test auf Markoveigenschaften zu sprechen. Schließlich werden wir die Bestimmung der Drift beziehungsweise der Steigung der Drift darstellen, bevor wir die Ergebnisse in Abhängigkeit vom Innenarmwinkel φ vorstellen.

3.2.1 Methoden

Versuchsteilnehmer

An folgendem Experiment nahmen insgesamt 17 Freiwillige (11 männlich, 6 weiblich) im Alter von 25.2 ± 4.2 Jahren teil. Sie wurden vor der Durchführung über die Vorbereitung, den Versuchsablauf und die Datenspeicherung in Kenntnis gesetzt und gaben daraufhin ihre Einverständniserklärung. Die aufgenommenen Daten wurden pseudonymisiert und die Kodierliste nach Auswertung der Daten vernichtet.

Versuchsaufbau

Die Aufgabe der Probanden bestand darin, mit einem Gewicht an der Hand, bei verschiedenen Winkelstellungen (Innenarmwinkel φ), den Unterarm möglichst stabil

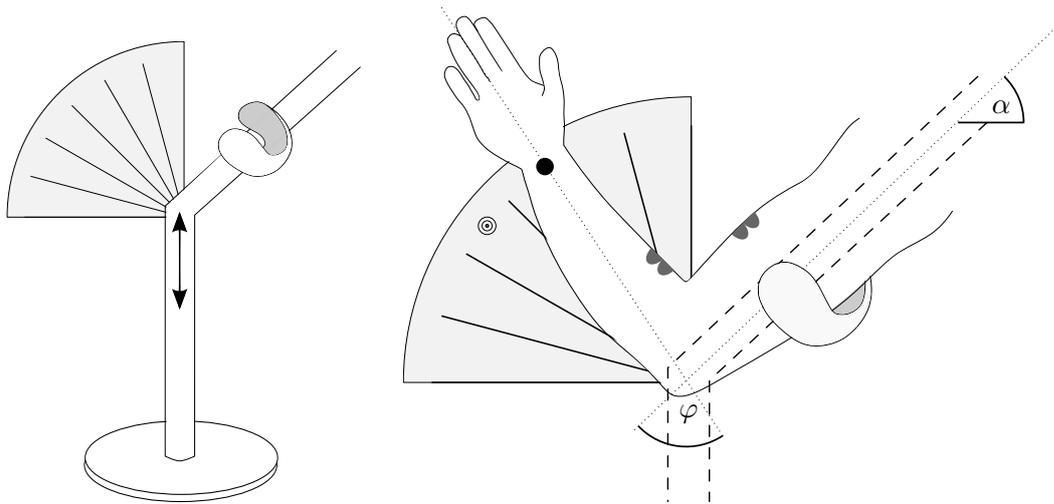


Abbildung 3.8: Höhenverstellbare Halterung des Oberarmes beim Halteversuch (links). Der Schenkel der Halterung ist parallel zur Längsachse des Oberarmes (rechts). Die Gelenkachse des Ellbogengelenkes geht durch den Ursprung der Winkelanzeige. Die Markierung am Unterarm (●) musste in Deckung mit der Zielmarkierung (⊙) gebracht werden, um einen vorgegebenen Winkel φ einzustellen. Der Oberarm war im Winkel α gegen den Boden geneigt. Es wurde das sEMG von Biceps brachii und Brachioradialis gemessen.

zu halten. Um eine freie Bewegung im Ellbogengelenk zu ermöglichen, ohne dabei eine nennenswerte Rotation im Schultergelenk zu erhalten, wurde der Oberarm der Probanden so abgestützt, dass er einen Winkel α zum Horizont einnahm. Damit der Winkel α unabhängig von der Größe des jeweiligen Probanden eingestellt werden konnte, wurde eine höhenverstellbare Halterung konstruiert (siehe Abbildung 3.8). Um die Anzahl der beteiligten Muskeln zu reduzieren, wurde der Versuch so konzipiert, dass das externe Moment, erzeugt durch die Gewichtskraft des Unterarmes, immer ein streckendes Drehmoment ist. Um dies zu erreichen und gleichzeitig einen möglichst großen Bereich des Innenarmwinkels φ messen zu können, wurde die Halterung des Oberarmes um den Winkel $\alpha = 45^\circ$ geneigt (vergleiche Abbildung 3.8). In Vorversuchen zeigte sich, dass die sEMG-Amplitude der Streckermuskulatur (zum Beispiel des Musculus triceps brachii) unter diesen Bedingungen um Größenordnungen kleiner war als die der Beuger. Daher wurden im Versuch nur die sEMG-Signale von Bizeps und Brachioradialis aufgenommen und weiter untersucht. Das sEMG von Biceps brachii und vom Brachioradialis wurde während des Versuchs mit einer Frequenz von $f = 4000$ Hz mittels bipolarer Oberflächen Elektroden (Interelektrodenabstand von 2,5 cm) abgetastet. Die Elektroden für Brachioradialis und Biceps wurden gemäß Criswell und Cram (2011) platziert. Die Referenzelektrode wurde an der Handwurzel angebracht. Das Signal wurde mit der Tom-Messbox (GJB Datentechnik GmbH, Langwiesen) aufgenommen, digitalisiert ($V_{max} = \pm 5V$, 24 Bit, $f_{max} = 4096 \frac{1}{s}$ pro Kanal) und als Datei gespeichert.

Versuchsdurchführung

Die Probanden standen aufrecht und legten ihren rechten Oberarm in der Halterung ab. Diese wurde dann in der Höhe so eingestellt und die Position in der Halterung so angepasst, dass der Schenkel der Halterung mit der Längsachse des Oberarms übereinstimmte und das Ellbogengelenk deckungsgleich war mit dem Ursprung des an der Halterung angebrachten Winkelmessers. Der Unterarm war so zu rotieren, dass der Normalenvektor der Handinnenfläche aus der Zeichenebene in Abbildung 3.8 herauschaut. An der Hand der Probanden wurde ein Zusatzgewicht in Form einer Gewichtsmanschette mit dem Gesamtgewicht von $m_z = 1,6$ kg angebracht, um bei der Halteaufgabe ein nennenswertes EMG-Signal zu erhalten. Auf der Längsachse des Unterarmes wurde eine Markierung (●) befestigt, die vor Beginn eines jeden Versuchsdurchgangs mit der jeweiligen Zielmarkierung (⊙) auf dem Winkelmesser in Deckung gebracht werden musste. Der Winkel φ wurde im Intervall von $\varphi \in [65^\circ, 135^\circ]$ in Inkrementen von $\Delta\varphi = 5^\circ$ variiert. Dabei wurde die Abfolge der sich ergebenden 15 Winkel randomisiert. Der einzustellende Innenarmwinkel wurde über die Position der Zielmarkierung für jeden Versuchsdurchgang neu gesetzt. Die Probanden mussten für einen Durchgang die vorgegebene Position über einen Zeitraum von $T = 20$ s möglichst ruhig halten. Nach jedem Durchgang gab es eine kurze Pause, um Ermüdungen vorzubeugen.

Datenverarbeitung

Die aufgenommenen sEMG-Daten $q^{(m)}(t)$ der Muskeln m wurden einer visuellen Kontrolle unterzogen. Dabei zeigten sich Auffälligkeiten in einem geringen Teil der Datensätze. Abbildung 3.9 zeigt die typische Gestalt eines später als gültig bezeichneten Datensatzes. Auf kleiner Zeitskala ($t \in [0\text{s}, 2.5\text{s}]$) erkennt man den stochastischen

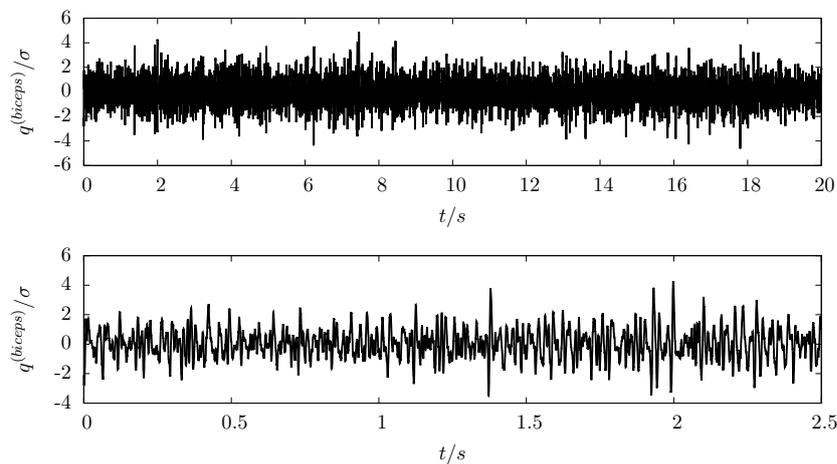


Abbildung 3.9: Auf Standardabweichung σ normiertes sEMG des Musculus biceps brachii (Proband *NB*, erster Versuchsdurchgang) auf unterschiedlichen Zeitskalen.

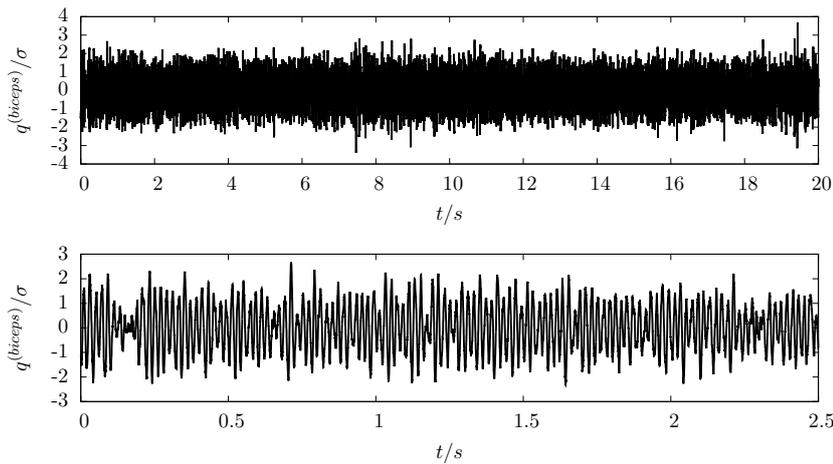


Abbildung 3.10: Auf Standardabweichung σ normiertes sEMG des Musculus biceps brachii (Proband *JS*, erster Versuchsdurchgang) auf unterschiedlichen Zeitskalen dargestellt.

Charakter des Signals. Betrachtet man dagegen die in Abbildung 3.10 dargestellte Messreihe, so fällt eine gleichmäßige Schwingung auf. Um den periodischen Anteil im Signal zu identifizieren, haben wir die normierte Autokorrelationsfunktion $\bar{a}(\tau)$ bestimmt:

$$\bar{a}(\tau) = \frac{\langle [q^{(m)}(t) - \langle q^{(m)}(t) \rangle][q^{(m)}(t + \tau) - \langle q^{(m)}(t + \tau) \rangle] \rangle}{\langle [q^{(m)}(t) - \langle q^{(m)}(t) \rangle]^2 \rangle} . \quad (3.45)$$

Wie in Abbildung 3.11 dargestellt, fällt die Autokorrelation eines gültigen Signals innerhalb von $t = 0.02$ s auf ungefähr Null ab. Hingegen zeigen die auffälligen Datensätze eine Periodizität mit $T = 0.02$ s. Dies entspricht den 50 Hz der Netzspannung, so dass es sich bei Großteilen des in Abbildung 3.10 dargestellten Signals vermutlich um das sogenannte Netzbrummen handelt. Da für alle Probanden dieselben Messin-

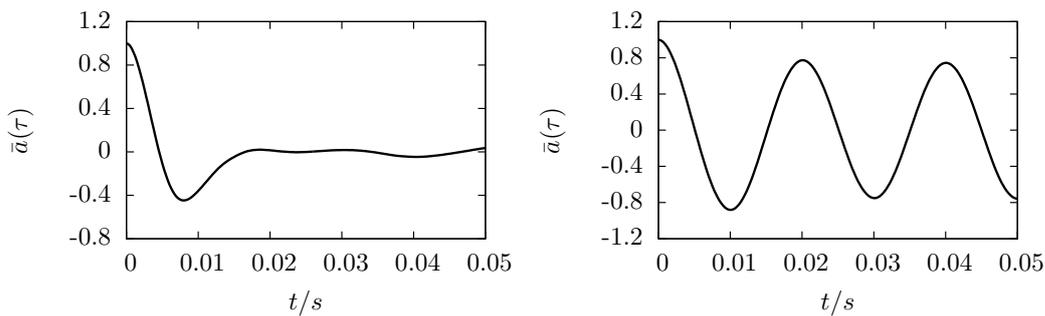


Abbildung 3.11: Autokorrelationsfunktion $\bar{a}(\tau)$ für die von Proband NB (links) und Proband JS (rechts) dargestellten Zeitreihen

strumente verwendet wurden und nur in einem geringen Anteil der Datensätze dieses Phänomen auftrat, kann der Grund dafür nicht in fehlerhaftem Equipment liegen. Eine mögliche Erklärung wäre, dass das Brummen durch unzureichende Erdung anderer elektronischer Geräte im Messraum entstanden ist. Nichtsdestotrotz haben wir alle Datensätze, in denen Netzbrummen auftrat, als ungültig erklärt. Die Messdaten der Probanden, in denen mindestens ein Datensatz dieses Phänomen zeigte, wurden von der weiteren Auswertung ausgeschlossen. Daher blieben von den ursprünglichen 17 noch 13 Probanden mit auswertbaren Datensätzen übrig.

Die sEMG-Daten ($q^{(bic)}(t)$, $q^{(bra)}(t)$) der verbleibenden Datensätze wurden mitelwertsbereinigt und auf Varianz $\sigma^2 = 1$ normiert:

$$q^{(m)}(t) = \frac{q^{(m)}(t) - \langle q^{(m)}(t) \rangle}{\sqrt{\langle q^{(m)}(t)^2 \rangle - \langle q^{(m)}(t) \rangle^2}} . \quad (3.46)$$

Markoveigenschaften/ Markovzeit

Um das sEMG-Signal in unterschiedlichen Versuchssituationen miteinander vergleichen zu können, haben wir angenommen, dass es sich als Langevin-Prozess mit gaußverteilter und δ -korrelierter Zufallskraft beschreiben lässt. Wenn dem so wäre, könnte der Prozess allein durch Drift und Diffusion charakterisiert und diese für die weitere Analyse genutzt werden. Daher haben wir zunächst geprüft, ob Markoveigenschaften bestehen beziehungsweise ab welchem Zeitinkrement zwischen zwei Datenpunkten die Markoveigenschaften erfüllt sind. Diese Zeit wird als Markovzeit bezeichnet. Auf der durch das entsprechende Zeitinkrement vorgegebenen Zeitskala könnte das sEMG als der angenommene Langevinprozess beschrieben werden. Wir betrachten das sEMG als Prozess in der Zeit und suchen im Folgenden nach dem Zeitinkrement τ , für das der stochastische Prozess (die sEMG-Daten), beschrieben durch

$$p(x_n, t + n\tau | x_{n-1}, t + (n-1)\tau; \dots; x_0, t) ,$$

den Markoveigenschaften genügt. Der zugrundeliegende Prozess wurde als stationär aufgefasst. Die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte ist daher nicht mehr explizit von der Zeit abhängig, sondern nur noch eine Funktion des Zeitabstandes. Im Fall der sEMG-Daten wäre die Stationarität zum Beispiel verletzt, wenn es innerhalb des Versuchs zu Ermüdungserscheinungen kommen würde. Daher haben wir versucht durch relativ kurze Versuchsdurchgänge und entsprechende Ruhephasen zwischen den Versuchsdurchgängen Ermüdungserscheinungen zu vermeiden. Hat ein Prozess Markoveigenschaften, so gilt für die $(N+1)$ -zeitige Wahrscheinlichkeitsdichte mit $q_i = q(t_i)$, $t_i = i \cdot \tau$

$$f(q_N, t_N; \dots; q_0, t_0) = p_\tau(q_N | q_{N-1}) \cdots p_\tau(q_1 | q_0) f(q_0)$$

mit $p_\tau = p_\tau(q_i | q_{i-1}) \stackrel{\text{stat. Prozess}}{=} p_\tau(q_j | q_{j-1}) \forall i, j \quad .$

Liegen Markoveigenschaften vor, so gilt die Chapman-Kolmogorovgleichung:

$$p_{2\tau} = p_{2\tau}(q_i|q_{i-2}) = \underbrace{\int p_\tau(q_i|q_{i-1})p_\tau(q_{i-1}|q_{i-2})dq_{i-1}}_{p_{ck}(q_i|q_{i-2})} . \quad (3.47)$$

Dafür muss die für das Zeitinkrement $\delta t = 2\tau$ direkt aus den Daten bestimmte Wahrscheinlichkeitsdichte $p_{2\tau}(q_i|q_{i-2})$ mit der aus Gleichung (3.47) bestimmten Dichte $p_{ck}(q_i|q_{i-2})$ übereinstimmen. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten wurden auf einem äquidistanten ($n \times n$)-Gitter ($n = 300$) in Abhängigkeit von τ ausgewertet. Der Zeitschritt τ war ein ganzzahliges Vielfaches der reziproken Samplingrate ($\tau = m \cdot 1/f$, $m \in \mathbb{N}$). Zunächst wurden die Übergangswahrscheinlichkeitsdichten $p_{2\tau}$ und p_τ direkt aus den Messdaten geschätzt. Dazu wurden zunächst die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten $f_{2\tau}(q_i, q_{i-2})$ und $f_\tau(q_i, q_{i-1})$ in Abhängigkeit von τ mittels Kerndichteschätzung (2.113) mit Epanechnikovkern (2.116) bestimmt. Durch Integration der Verbundwahrscheinlichkeitsdichten gemäß (2.41) wurden die Randwertverteilung $f(q_{i-2})$ und $f(q_{i-1})$ und anschließend mit Gleichung (2.59) die bedingten Verteilungen $p_{2\tau}$ und p_τ berechnet. Um die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte p_{ck} zu berechnen, musste die aus den Daten bestimmte Wahrscheinlichkeitsdichte p_τ entsprechend der rechten Handseite der Chapman-Kolmogorovgleichung integriert werden. Da wir den stochastischen Prozess als stationär angenommen haben, entspricht die rechte Handseite von Gleichung (3.47) einer Matrixmultiplikation von p_τ mit sich selbst. So erhält man für jedes τ zwei Übergangswahrscheinlichkeitsdichten $p_{2\tau}$ und p_{ck} .

Die in Abbildung 3.12 dargestellten Verläufe zeigen die Konturdiagramme der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $p_{2\tau}$ und p_{ck} , mit $\tau = 0.01$ s, für einen sEMG-Datensatz des Musculus biceps brachii, aufgenommen während der Halteaufgabe. Um die Gültigkeit der *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* zu überprüfen, muss quantifiziert werden, inwiefern die beiden skalaren Felder $p(q_i|q_{i-2})$ und $p_{ck}(q_i|q_{i-2})$ sich ähneln. Dazu wurden die auf identischem Gitter geschätzten zweidimensionalen skalaren Felder mittels Korrelationsmaß $M(\tau)$ (Kamps und Wilczek, 2011) für verschiedene τ miteinander verglichen. Da die Güte der Schätzung der Übergangswahrscheinlichkeiten von der Anzahl der beobachteten Übergänge abhängt, beschränken wir uns bei der Berechnung des Ähnlichkeitsmaßes auf den Kernbereich von $[-2\sigma, 2\sigma]$. Für jeden Gitterpunkt q_{i-2} wird ein vertikaler Schnitt der Übergangswahrscheinlichkeitsdichten erzeugt (siehe Abbildung 3.12 unten) und für jeden Schnitt die Korrelation

$$\widetilde{M}(q_{i-2}, \tau) = \frac{\int dq_i p(q_i|q_{i-2}) p_{ck}(q_i|q_{i-2})}{\sqrt{\int dq_i p(q_i|q_{i-2})^2} \sqrt{\int dq_i p_{ck}(q_i|q_{i-2})^2}} \quad (3.48)$$

berechnet. Der Mittelwert über alle Korrelationen $\widetilde{M}(q_{i-2}, \tau)$ der einzelnen Schnitte entspricht dem Ähnlichkeitsmaß

$$M(\tau) = \frac{1}{N} \int dq_{i-2} \widetilde{M}(q_{i-2}, \tau), \quad N = \max(q_{i-2}) - \min(q_{i-2}) \quad , \quad (3.49)$$

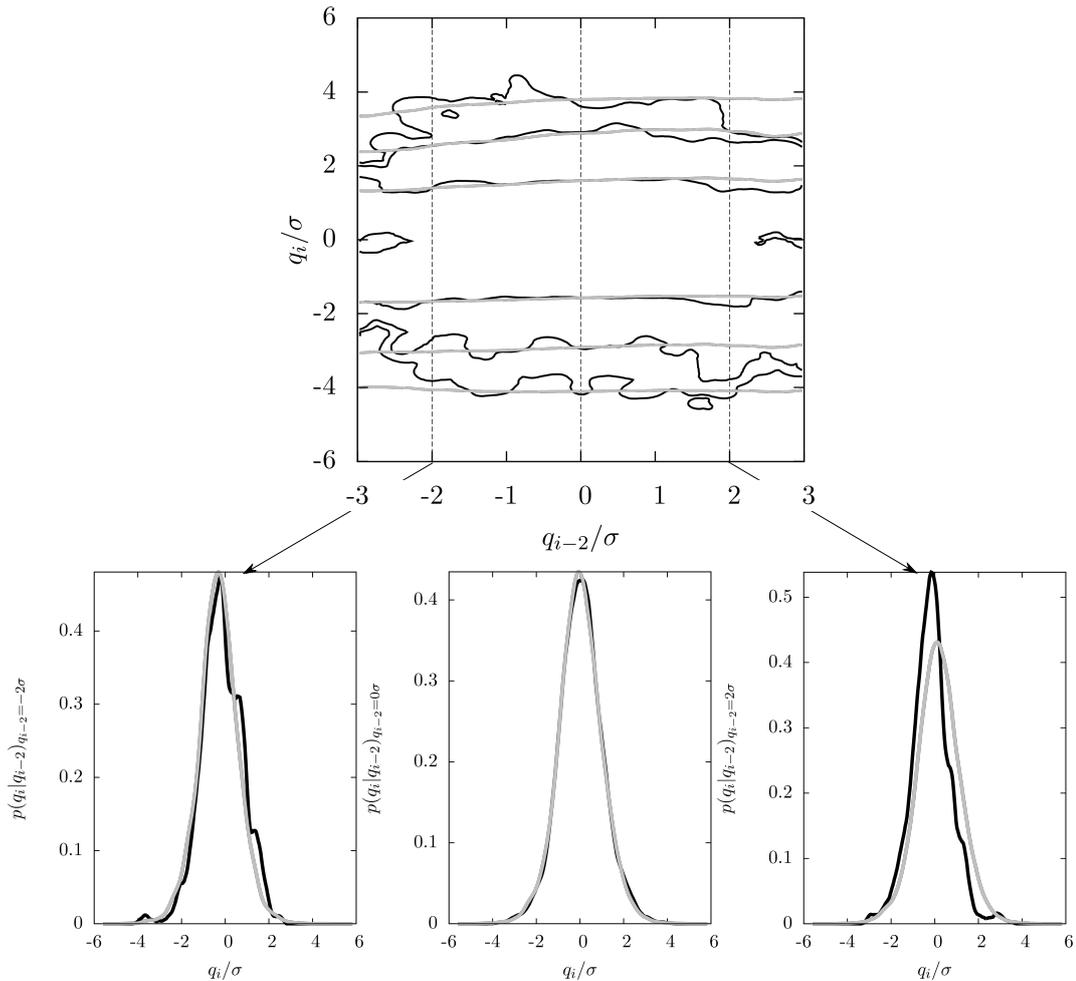


Abbildung 3.12: Übergangswahrscheinlichkeit für sEMG-Datensatz (Musculus biceps brachii, Proband *NB*, erster Versuchsdurchgang) mit $\tau = 0.01\text{s}$. Übergangswahrscheinlichkeit $p_{2\tau}(q_i|q_{i-2})$ direkt aus Datensatz (—) und anhand von Gleichung (3.47) $p_{ck}(q_i|q_{i-2})$ (—) geschätzt. Oben: Isarithmen gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte für $p_{2\tau}$ und p_{ck} ; unten: vertikale Schnitte bei $q_{i-2} = -2\sigma, 0, 2\sigma$ durch Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{2\tau}$ und p_{ck} .

welches nur noch vom Zeitinkrement τ abhängt. Im Grenzfall identischer Verteilungen konvergiert $M(\tau)$ gegen Eins. Daher wurde $M(\tau)$ zur Bestimmung der Markovzeit herangezogen. Im Folgenden wird die Gültigkeit der Chapman-Kolmogorovgleichung angenommen, wenn $M(\tau) \geq 0.99$ gilt. Der Verlauf für das Korrelationsmaß M in Abhängigkeit vom Zeitinkrement τ ist in Abbildung 3.14 für alle Datensätze eines Probanden dargestellt. Alle Versuchsdurchgänge zeigen einen ähnlichen Verlauf. Es ergibt sich ein hohes Maß an Korrelation bei sehr kleinen τ und dann erneut ab etwa $\tau = 40/f$. Für $\tau = 1/f = 0.00025\text{s}$ ist das Korrelationsmaß

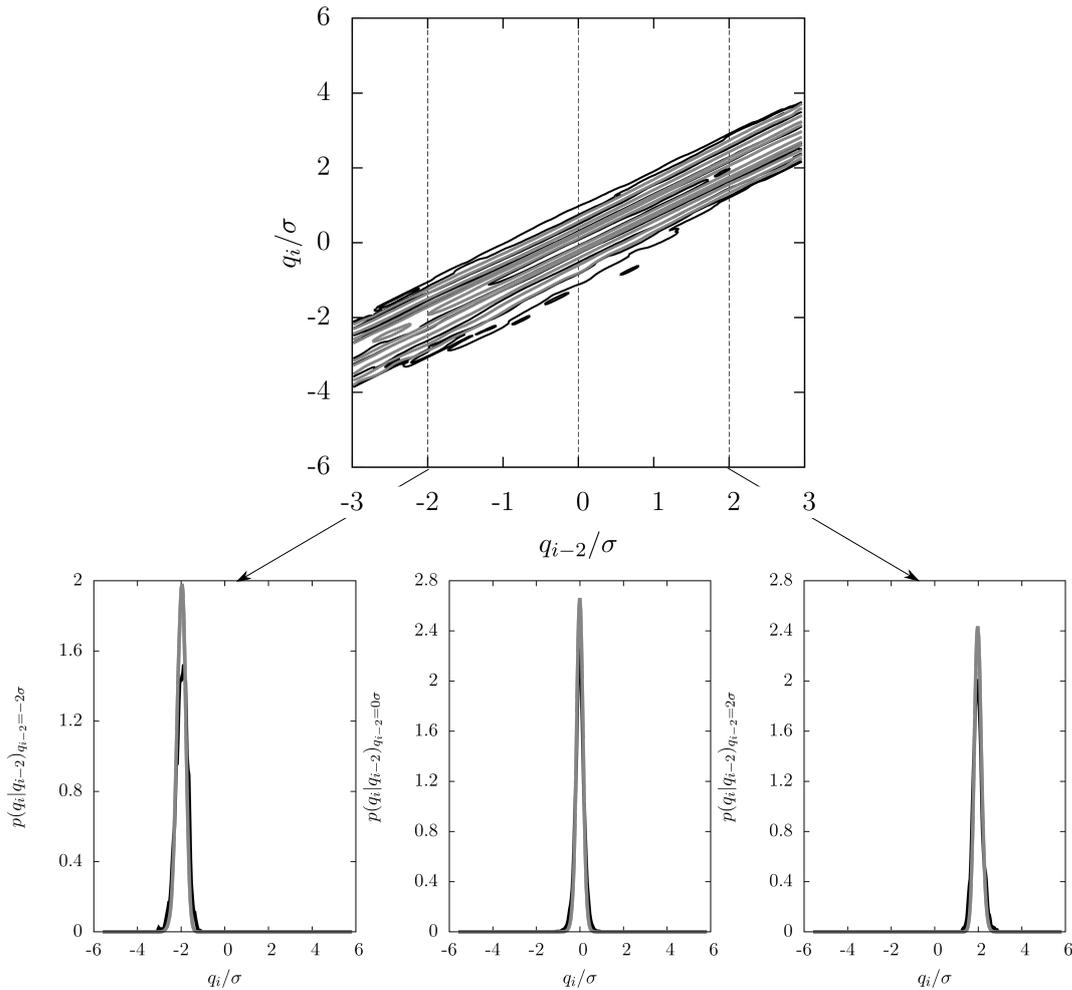


Abbildung 3.13: Übergangswahrscheinlichkeit für sEMG-Datensatz (Musculus biceps brachii, Proband *NB*, erster Versuchsdurchgang) mit $\tau = 0.00025\text{s} = 1/f$. Übergangswahrscheinlichkeit $p_{2\tau}(q_i|q_{i-2})$ direkt aus Datensatz (—) und anhand von Gleichung (3.47) $p_{ck}(q_i|q_{i-2})$ (---) geschätzt. Oben: Isarithmen gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte für $p_{2\tau}$ und p_{ck} ; unten: vertikale Schnitte bei $q_{i-2} = -2\sigma, 0, 2\sigma$ durch Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{2\tau}$ und p_{ck} .

$M(\tau)$ über alle auswertbaren Versuchsdurchgänge und gemessenen Muskeln in Abbildung 3.15 aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die Korrelation für alle gemessenen Datensätze bei $\tau = 1/f$ hoch ist. Bis auf wenige Ausreißer befinden sich sowohl für den Bizeps als auch für den Brachioradialis alle Werte im Intervall von $[0.98, 1.0]$. Man könnte somit annehmen, dass in den Bereichen kleiner Zeitinkremente τ die Datensätze die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* erfüllen und somit der Prozess in guter Näherung als Markovprozess angesehen werden kann. Jedoch ist dabei zu beachten, dass die Breite der Übergangswahrscheinlichkeiten (in den Schnittebenen)

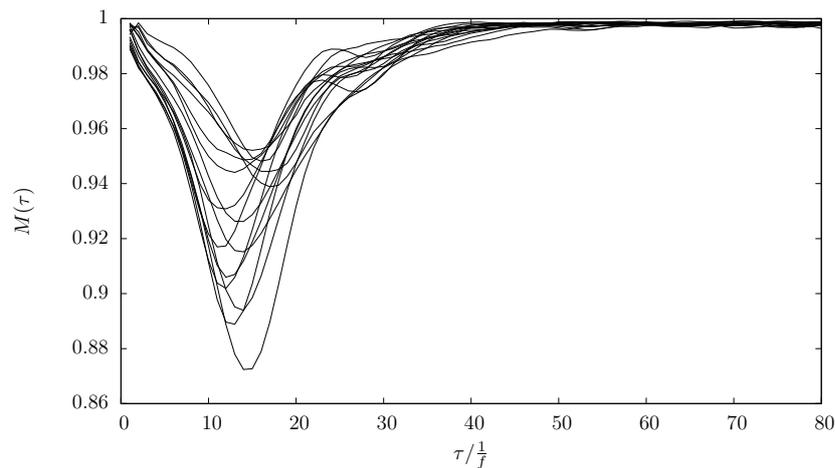


Abbildung 3.14: Korrelationsmaß $M(\tau)$ für alle 15 Versuchsdurchgänge eines Probanden (sEMG des Musculus biceps Brachii).

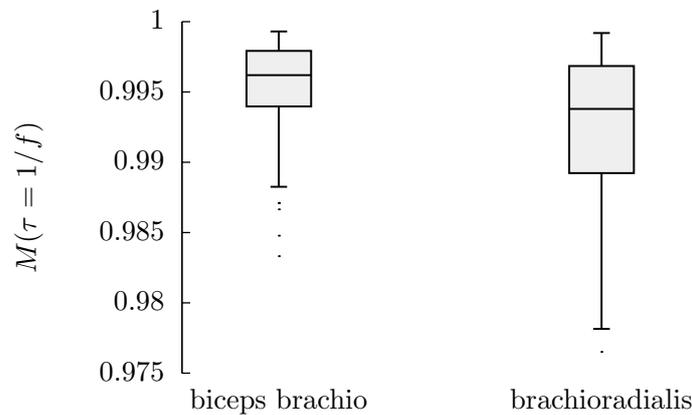


Abbildung 3.15: Boxplot des Korrelationsmaßes $M(\tau = 1/f)$ für das sEMG von den Muskeln *biceps brachii* und *brachioradialis* ($n = 195$, 13 Probanden à 15 Versuchsdurchgänge).

stark vom gewählten τ abhängt. So ist die bei $\tau = 1/f = 0.00025$ s berechnete Übergangswahrscheinlichkeitsdichte sehr schmal. Da die Korrelation für alle τ auf dem gleichen Gitter ausgewertet wurde, kann eine mögliche geringe Verkippung der Isarithmen (Isolinien) gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte von p_{ck} und $p_{2\tau}$ aufgrund der beschränkten Auflösung nicht ausgeschlossen werden. Daher ist das hohe Korrelationsmaß bei kleinen τ vermutlich auf die Art der Berechnung zurückzuführen, womit für $\tau = 1/f$ eine Verletzung der Markoveigenschaften nicht ausgeschlossen werden kann. Bei $\tau \gtrsim 40/f$ erfüllen die Daten wiederum näherungsweise die Chapman-Kolmogorov-Gleichung und somit die notwendige Bedingung für die Existenz von

Markoveigenschaften des stochastischen Prozesses. Dabei unterscheiden sich die für die verschiedenen Bereiche von τ berechneten bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten erheblich. Abbildung 3.12 zeigt, wie vorher beschrieben, die Konturdiagramme von $p_{2\tau}$ und p_{ck} für $\tau = 0.01 = 40/f$ und somit für den Bereich erhöhter Korrelation $M(\tau)$. Die Isarithmen sind im Kernbereich nahezu waagrecht, was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit den Zustand q_i zu messen, kaum vom Zustand q_{i-2} abhängt. Wären die Isarithmen perfekt waagrecht, wären die Variablen q_i und q_{i-2} stochastisch unabhängig. Für stochastisch unabhängige Variablen ist die Korrelation gleich Null, der Umkehrschluss gilt übrigens nicht, siehe Anhang 5. Die waagerechte Lage der Isarithmen gleicher Wahrscheinlichkeit bildet sich daher auch in der Autokorrelation des dazugehörigen Signals ab, siehe Abbildung 3.10. Für $\tau = 0.01s$ beträgt der Zeitunterschied zwischen q_i und q_{i-2} $0.02s$. Die Autokorrelation $\bar{a}(0.02s)$ ist in etwa Null. Für die Markovzeit besteht in diesem Fall also kaum noch ein Zusammenhang zwischen q_i und q_{i-2} . Bestimmt man für alle Datensätze das kleinste τ^* (die Markovzeit), für das $\tau^* > 10 \wedge M(\tau^*) > 0.99$ gilt, und berechnet für das entsprechende τ^* die Autokorrelation $\bar{a}(2\tau^*)$, so erhält man die in Abbildung 3.16 dargestellte Verteilung. Der Median der Autokorrelation über alle auswertbaren Datensätze ist

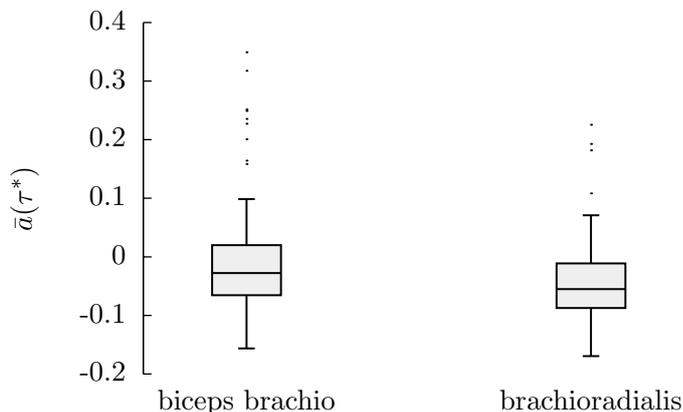


Abbildung 3.16: Autokorrelation für $2\tau^*$ über alle auswertbaren Datensätze ($n = 195$, 13 Probanden à 15 Versuchsdurchgänge).

$\bar{a}_{0.5}^{(bic)} = -0.028$ bzw. $\bar{a}_{0.5}^{(bra)} = -0.055$ mit den Quartilen [$\bar{a}_{0.25}^{(bic)} = -0.066$, $\bar{a}_{0.75}^{(bic)} = 0.02$] respektive [$\bar{a}_{0.25}^{(bra)} = -0.011$, $\bar{a}_{0.75}^{(bra)} = -0.087$]. Die Autokorrelation des Signals für $2\tau^*$ und damit die Korrelation zwischen q_i und q_{i-2} ist also im Median sehr gering. Würden wir ein sEMG-Signal (statische Aufgabe) mit einem Zeitinkrement von $\Delta t = 2\tau^*$ abtasten, so wäre das dabei entstehende Signal quasi unkorreliertes Rauschen und damit per Definition schon ein Markovprozess, wodurch der hohe Wert für M bei τ^* zu erklären ist. Korrelationszeit und Markovzeit des Signals unterscheiden sich nicht. Wir können den Prozess daher für kein Zeitinkrement eindeutig als Markov-Prozess auffassen und damit theoretisch auch nicht anhand von Drift und Diffusion auf den deterministischen beziehungsweise stochastischen Anteil des Signals schließen. Wie

jedoch Siefert und Peinke (2004) gezeigt haben, können die deterministischen Anteile eines Signals selbst dann noch zuverlässig anhand der Drift bestimmt werden, wenn die Markov-Eigenschaften verletzt sind. Daher werden wir uns bei der folgenden Auswertung auf die Bestimmung des deterministischen Anteils (Drift) konzentrieren und den stochastischen Anteil aufgrund der fehlenden Markoveigenschaften nicht weiter betrachten.

Bestimmung der Drift

In diesem Kapitel wird die Driftschätzung der sEMG-Daten und der zum Vergleich in den verschiedenen Versuchssituationen (Winkeln) genutzte Parameter m_D vorgestellt. Da die Drift über den Grenzwert $\lim_{\tau \rightarrow 0}$ (vergleiche (2.83)) definiert ist, wurde im Folgenden die Drift der renormierten sEMG-Daten für die reziproke Samplingrate $\tau = 1/f = 0.00025$ s und damit endliches τ mittels

$$\hat{D}^{(1)}(x) = \frac{1}{\tau} \langle q(t + \tau) - q(t) \rangle |_{q(t)=x}$$

geschätzt. Alle geschätzten Größen werden im Folgenden wieder durch ein Dach gekennzeichnet. Die Drift $\hat{D}^{(1)}(x)$ der Daten $q^{(m)}(t)$ eines jeden Muskels m wurde für jeden Versuchsdurchgang (jeden Winkel) auf einem äquidistanten Gitter $x_i(q)$ mit $n = 200$ Stützstellen ausgewertet. Die Gitterkonstante $\Delta x(q)$ wurde für jeden Durchgang und Muskel entsprechend

$$\Delta x(q) = \frac{[\max(q) - \min(q)] \cdot 1.1}{n - 1}$$

bestimmt. Das Gitter ergibt sich somit zu

$$x_i(q) = \min(q) \cdot 1.1 + (i - 1) \cdot \Delta x(q), \quad i = 1, \dots, n.$$

Würde man zum Beispiel die Wahrscheinlichkeitsdichte einer eindimensionalen Zufallsvariable nur bis zu den Extrema des Datensatzes schätzen, so würde zumindest die Kernfunktion zentriert um die Extrema nur zur Hälfte beitragen, vergleiche zum Beispiel Abbildung 2.7. Die Wahrscheinlichkeitsdichte wäre dann nicht mehr auf Eins normiert. Der Fehler würde noch größer, wenn die Randbereiche stark besetzt wären. Daher haben wir das Gitter, auf dem die Drift ausgewertet wird, über den eigentlichen Wertebereich von q hinaus definiert.

Da der statistische Fehler bei der Schätzung der Drift an einem Gitterpunkt stark von der Anzahl der Beobachtungen, die zur Berechnung an diesem Punkt beitragen, abhängt (Gleichung (2.100)), wurde die Drift nur an den Gitterpunkten geschätzt, die $x^{(m)} \in [-2\sigma, 2\sigma]$ genügen. Die Drift wurde mittels Nadaraya-Watson-Schätzer (2.124) mit Epanechnikovkern (2.116) für das Zeitinkrement von $\tau=1/f$ bestimmt. Abbildung 3.17 zeigt einen typischen Verlauf des geschätzten Driftkoeffizienten $\hat{D}^{(1)}(x)$ und das lokale Fehlermaß $\sigma^{(1)}(x)$ zentriert um den jeweiligen Wert des Driftkoeffizienten. Dabei handelt es sich um die Rekonstruktion des deterministischen Anteils anhand eines sEMG-Datensatzes, also eines Versuchsdurchgangs. Man sieht einen

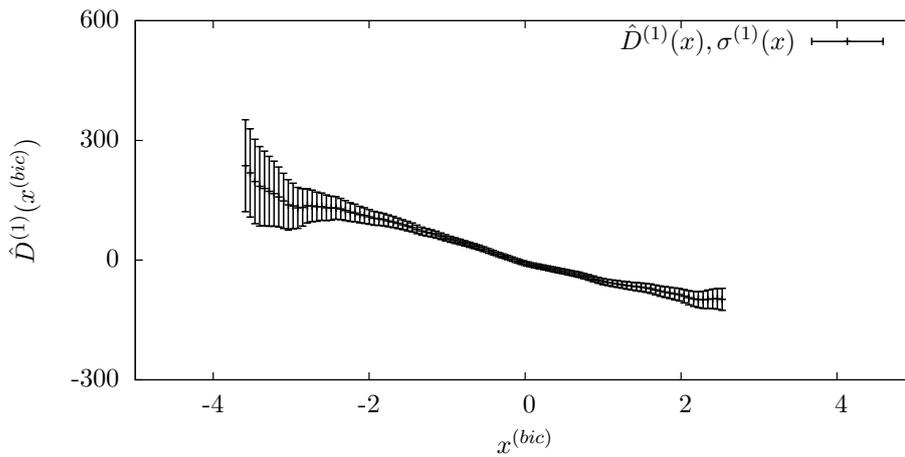


Abbildung 3.17: Anhand eines Datensatzes auf dem Gitter $(x_i, i = 1, \dots, n)$ geschätzter Driftkoeffizient $\hat{D}^{(1)}(x)$ mit Fehlermaß $\sigma^{(1)}(x)$.

klaren Zusammenhang zwischen der Amplitude des Signals x und der geschätzten Drift $\hat{D}^{(1)}(x)$. Vor allem im Kernbereich der Daten ($|x| \leq 2$), der im Folgenden analysiert wird, scheint es einen linearen Zusammenhang zu geben. Das Fehlermaß $\sigma^{(1)}$ steigt am Rand des in Abbildung 3.17 dargestellten Wertebereichs durch die geringen Besetzungszahlen bei hohen Signalamplituden $q^{(m)}$. Für die geschätzte Driftfunktion eines jeden Datensatzes wurde im Bereich $x \in [-2, 2]$ ein linearer Ansatz

$$\hat{D}^{(1)}(x) = m_D \cdot x + b \quad (3.50)$$

mit der Steigung m_D gewählt und die Daten, wie in Abbildung 3.18 dargestellt, linear interpoliert. Die lineare Interpolation wurde mittels des in *Gnuplot 4.6*¹ implementierten *nonlinear least-squares (NLLS) Marquardt-Levenberg-Algorithmus* durchgeführt, dabei wurde $\sigma^{(1)}(x)$ als Gewichtsfunktion für die einzelnen Messwerte benutzt. Die lineare Korrelation zwischen den geschätzten Messwerten $\hat{D}^{(1)}(x_i)$ und der linearen Regression $\hat{f}(x_i)$ wurde mittels Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{\langle [\hat{D}^{(1)}(x) - \langle \hat{D}^{(1)}(x) \rangle][\hat{f}(x) - \langle \hat{f}(x) \rangle] \rangle}{\sqrt{\langle [\hat{D}^{(1)}(x) - \langle \hat{D}^{(1)}(x) \rangle]^2 \rangle} \sqrt{\langle [\hat{f}(x) - \langle \hat{f}(x) \rangle]^2 \rangle}} \quad (3.51)$$

bestimmt und als Maß für die Gültigkeit des linearen Ansatz herangezogen. Die in Abbildung 3.19 dargestellten Korrelationskoeffizienten beider aufgezeichneten Muskeln zeigen für alle auswertbaren sEMG-Daten mit $r > 0.95$ einen nahezu perfekten linearen Zusammenhang zwischen Drift und Signalamplitude. Das lineare Modell (3.50) beschreibt den Kernbereich der bestimmten Driftkoeffizienten für alle Datensätze damit sehr gut. Alle untersuchten Datensätze weisen eine negative Korrelation auf, womit auch m_D für alle Datensätze negativ sein muss.

¹ <http://www.gnuplot.info/>

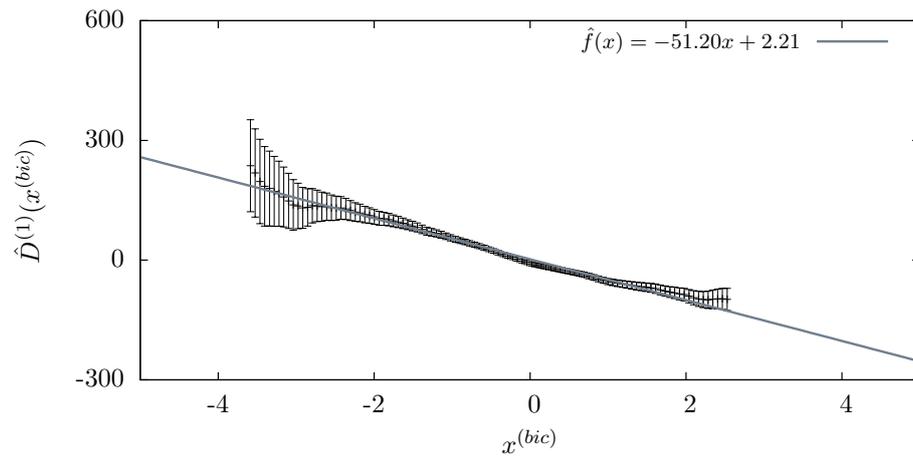


Abbildung 3.18: Kernbereich ($x \in [-2, 2]$) der Driftschätzung mit Fehlermaß $\sigma^{(1)}(x)$ als Gewichtungsfunktion linear interpoliert.

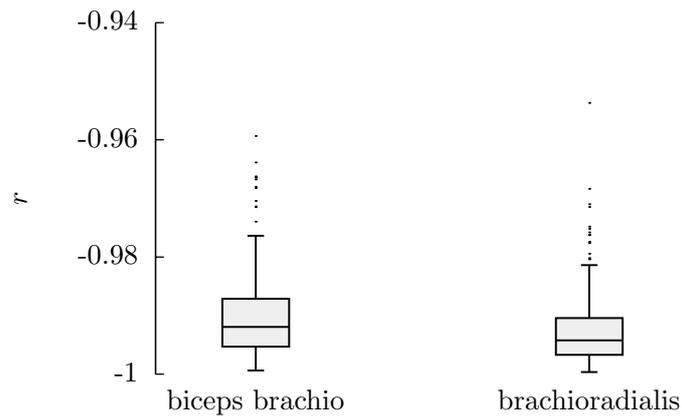


Abbildung 3.19: Korrelationskoeffizient zwischen geschätztem Driftkoeffizient $D^{(1)}(x)$ und der linearen Regression $\hat{f}(x)$ über alle auswertbaren Datensätze ($n = 195$, 13 Probanden à 15 Versuchsdurchgänge).

Wir wollen nun untersuchen, welchen Einfluss unterschiedliche Normierungen des Datensatzes auf die Parameter m_D und b aus Gleichung (3.50) haben würden. Wie bereits gezeigt, ist die Drift im Kernbereich der sEMG-Signale linear. Daher sei eine Zeitreihe $x(t)$ gegeben, deren Drift mittels $D^{(1)}(x) = m_D \cdot x + b$ dargestellt werden kann. Wir betrachten nun eine um den Faktor k modifizierte Zeitreihe $y(t) = k \cdot x(t)$

und berechnen die Drift von $y(t)$:

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}(y) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle y(t+\tau) - y(t) | y(t) = y \rangle \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle k \cdot x(t+\tau) - k \cdot x(t) | k \cdot x(t) = y \rangle \\
 &= k \cdot \underbrace{\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle x(t+\tau) - x(t) | x(t) = y/k \rangle}_{D^{(1)}(x=y/k)} \quad . \\
 &= k \cdot \left(m_D \cdot \frac{y}{k} + b \right) = m_D \cdot y + k \cdot b
 \end{aligned}$$

Die Steigung der Drift ist für die Zeitreihen $x(t)$ und $y(t)$ identisch, hingegen skaliert der y -Achsenabschnitt b mit der Normierung. Unter der Annahme, dass die Drift linear ist, hat eine Normierung der Daten also keinen Einfluss auf die Steigung m_D . Daher scheint die Steigung der Drift gerade für die Bewertung von sEMG-Daten sinnvoll zu sein, da die Berechnung dieser unabhängig von der absoluten Signalamplitude ist.

Was sagt die Steigung der Drift nun über den Prozess (das sEMG-Signal) aus? Wir sind davon ausgegangen, dass das sEMG als stochastischer Prozess der Form

$$\dot{x}(t) = h(x) + g(x)\Gamma(t)$$

dargestellt werden kann, wobei wir für $\Gamma(t)$ aufgrund der fehlenden Markoveigenschaften der sEMG-Signale nicht von zeitlich unkorreliertem Rauschen ausgehen können. Die Bestimmung des deterministischen Anteils mittels Driftschätzung ist robust gegenüber Verletzung der Markoveigenschaften, so dass wir $h(x)$ über die Drift gemäß Ito-Definition (siehe Abschnitt 2.2.5) ausdrücken können. Betrachten wir nur den deterministischen Anteil der Differentialgleichung, so ergibt sich daraus:

$$\dot{x}(t) = D^{(1)}(x) = m_D \cdot x + b \quad .$$

Die Lösung der Differentialgleichung lässt sich direkt angeben:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{m_D \cdot t} - \frac{b}{m_D} \quad . \quad (3.52)$$

Damit hängt die zeitliche Dynamik des deterministischen Anteils nur von der Steigung m_D der Drift ab. Da der Korrelationskoeffizient r für alle Versuche negativ ist, entspricht $1/m_D$ einer Relaxationszeit. Eine Störung von x klingt schneller ab, je größer $|m_D|$ ist.

Statistik

Unser ursprünglicher Plan war es, die Signaleigenschaften des sEMG als Funktion des Winkels zu betrachten. Da die zeitliche Dynamik des deterministischen Signalanteils

durch m_D abgebildet wird und m_D darüber hinaus (da die Drift linear ist) unabhängig von der genutzten Normierung der Daten ist, wurde die Steigung der Drift als Kennzahl des Signals festgelegt. Mittels m_D haben wir die Unterschiedshypothese zwischen den Bereichen kleiner und großer Innenarmwinkel untersucht. Es wurde somit für jeden Versuchsdurchgang und jeden Muskel eines Probanden zuerst die Drift und dann die Steigung der Drift bestimmt, womit pro Proband und pro gemessenem Muskel 15 Werte für m_D in Abhängigkeit vom Innenarmwinkel φ vorlagen. Anhand der Werte von m_D wurden der Bereich kleiner Innenarmwinkel $\varphi \in I_1 = [65^\circ, 95^\circ]$ und der Bereich großer Innenarmwinkel $\varphi \in I_2 = [105^\circ, 135^\circ]$ mittels nichtparametrischem Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test auf signifikante Unterschiede hin überprüft. Dazu wurden die Steigungen m_D eines Probanden für alle Winkel im Intervall I_1 respektive I_2 gemittelt, so dass für jedes Winkelregime (I_1, I_2) 13 gemittelte Steigungen der Drift \bar{m}_D zur statistischen Auswertung vorlagen.

3.2.2 Ergebnisse Driftschätzung

Die Steigung der Drift m_D des sEMGs von Brachioradialis und Bizeps ist in Abhängigkeit des Innenarmwinkels in Abbildung 3.20 und 3.21 für alle Probanden dargestellt. Jeder Kurvenverlauf entspricht den Daten eines Probanden. Für die Muskeln

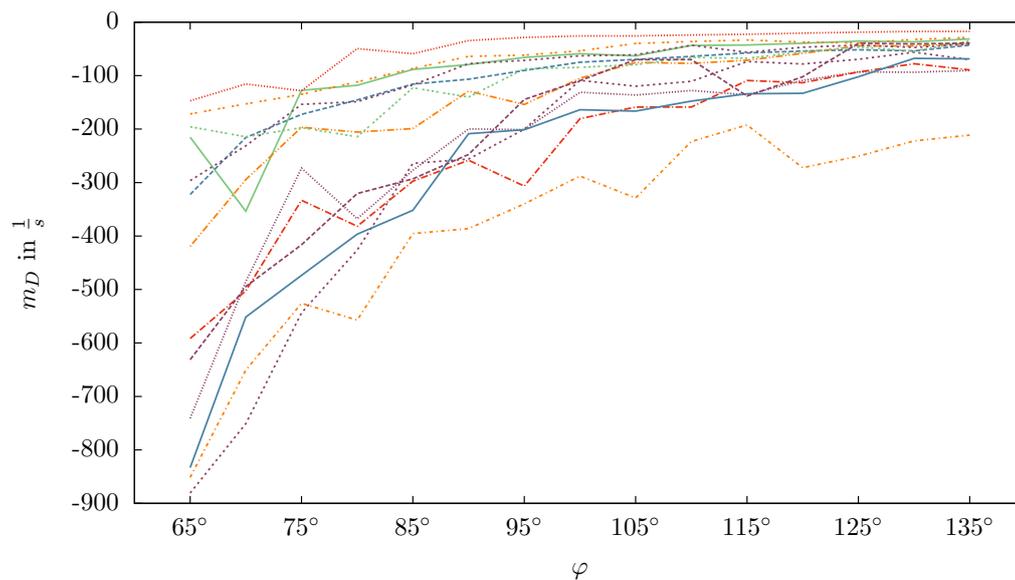


Abbildung 3.20: Steigung m_D des Driftkoeffizienten $\hat{D}^{(1)}(x)=m_D \cdot x+b$ für das sEMG des Musculus brachioradialis in Abhängigkeit vom Innenarmwinkel φ . Dabei stellt jeder Kurvenverlauf den Datensatz eines Probanden dar.

Bizeps und Brachioradialis ist für alle Probanden ein klarer Trend in m_D zu erkennen. Je größer der Innenarmwinkel, umso größer wird m_D beziehungsweise umso kleiner wird der Betrag $|m_D|$. Alle Kurven zeigen ein Sättigungsverhalten für große

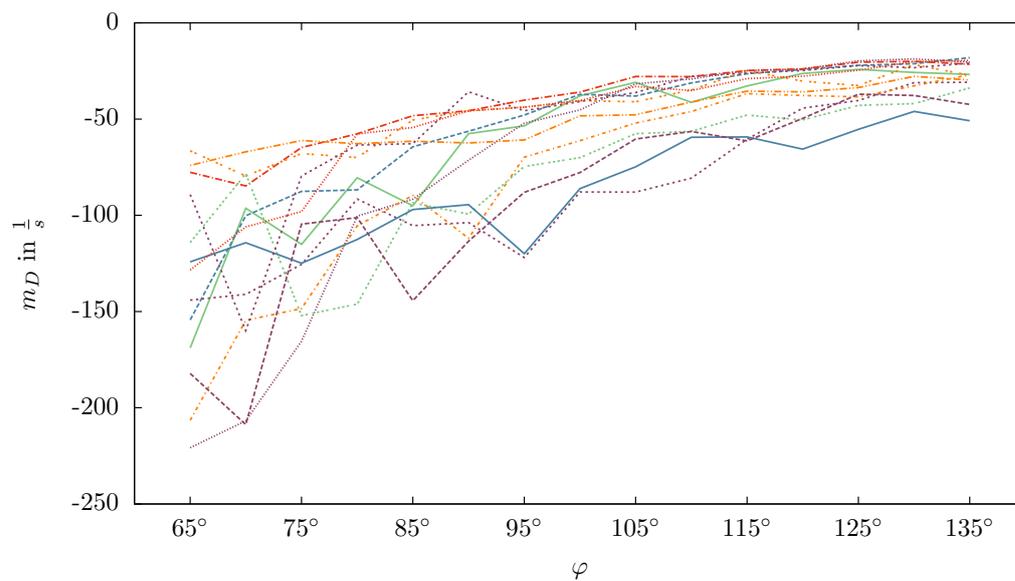


Abbildung 3.21: Steigung m_D des Driftkoeffizienten $\hat{D}^{(1)}(x)=m_D \cdot x+b$ für das sEMG des Musculus biceps brachii in Abhängigkeit vom Innenarmwinkel φ . Dabei stellt jeder Kurvenverlauf den Datensatz eines Probanden dar.

Innenarmwinkel. Die interindividuellen Unterschiede in m_D sind für kleine Innenarmwinkel größer als für große Winkel. Betrachtet man die Absolutwerte, so sind die für den Bizeps bestimmten Werte für $\varphi \in [65^\circ, 135^\circ]$ wesentlich größer als beim Brachioradialis. Die Veränderung von m_D von kleinen zu großen Innenarmwinkeln ist beim Brachioradialis stärker ausgeprägt als beim Bizeps. Vergleicht man die

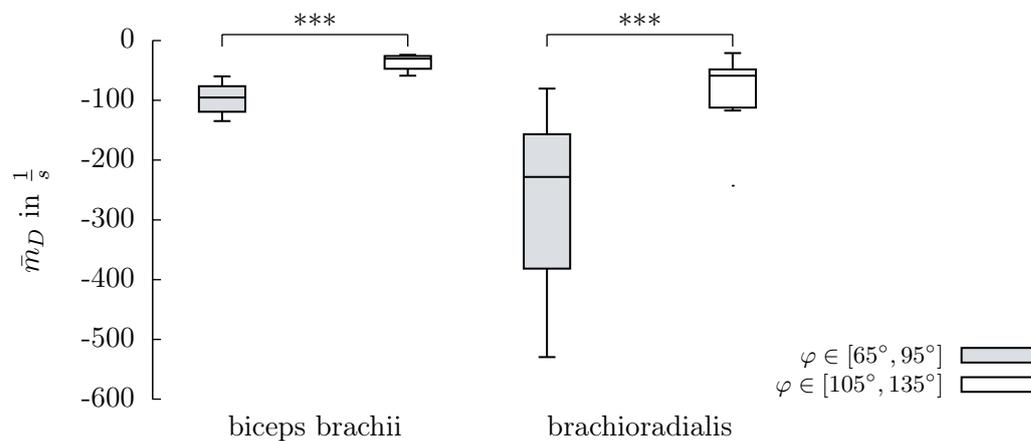


Abbildung 3.22: Die gemittelte Steigung \bar{m}_D für Musculus biceps brachii und Musculus brachioradialis in den Winkelintervallen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$.

in den Intervallen $[65^\circ, 95^\circ]$ und $[105^\circ, 135^\circ]$ gemittelten Steigungen \bar{m}_D , so erhält man die in Abbildung 3.22 dargestellte Verteilung. Der Median für $\varphi \in I_1$ beträgt beim Bizeps $\bar{m}_{D,0.5}^{(bic)} = -95.3\frac{1}{s}$ und beim Brachioradialis $\bar{m}_{D,0.5}^{(bra)} = -228.2\frac{1}{s}$. Für $\varphi \in I_2$ betragen die Mediane $\bar{m}_{D,0.5}^{(bic)} = -30.4\frac{1}{s}$ und $\bar{m}_{D,0.5}^{(bra)} = -58.7\frac{1}{s}$. Es ist also für beide Muskeln ein deutlicher Zuwachs vom Intervall kleiner Innenarmwinkel (I_1) zu großen Innenarmwinkeln (I_2) zu erkennen. Darüber hinaus erkennt man am in Abbildung (3.22) dargestellten Interquartilsabstand, dass es für $\varphi \in I_1$ und $\varphi \in I_2$ beim Brachioradialis größere interindividuelle Unterschiede gibt als beim Bizeps. Testet man mittels Wilcoxon-Vorzeichen-Rang-Test auf Unterschiede in den Winkelregimen, so zeigt sich bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ für beide Muskeln ein hochsignifikanter ($p < 0.001$) Unterschied des Parameters \bar{m}_D in den Winkelregimen I_1 und I_2 .

3.2.3 Diskussion

Ziel dieser Untersuchung war es, die Ansteuerung der Armmuskulatur in den Winkelbereichen zu untersuchen, in denen die Modellrechnung unterschiedliche Stabilität von *open-loop-Kontrolle* voraussagte. Laut unserer Hypothese sind Unterschiede in der Ansteuerung in den Winkelintervallen $\varphi \in [65^\circ, 105^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ zu erwarten. Da für die Überprüfung dieser Aussage der Winkel nicht exakt bestimmt werden muss, haben wir den Winkel über eine Zielmarkierung (siehe Abbildung 3.8) eingestellt, jedoch nicht separat gemessen. Daher ist zu erwarten, dass der in Abbildung 3.20 und 3.21 aufgetragene Winkel nicht exakt dem im Versuch vom Probanden eingenommenen Winkel entspricht. Die dadurch erzeugte Messunsicherheit sollte wenige Grad nicht überschreiten und somit die Kernaussage der Messdaten nicht verändern. Darüber hinaus könnte die Messunsicherheit im Winkel erklären, warum die Werte von m_D nicht monoton zunehmen.

Wie bereits erwähnt, zeigt die Steigung der Drift m_D für beide Muskeln und alle Probanden ein Sättigungsverhalten. Der benutzte Versuchsaufbau war so konzipiert, dass das externe Moment M_{ext} mit steigendem Innenarmwinkel φ monoton steigt. Für $\varphi = 135^\circ$ ist M_{ext} aufgrund des Messaufbaus maximal. Es könnte also sein, dass die in Abbildung 3.20 und 3.21 dargestellten Verläufe von m_D nur ein Abbild des externen Momentes und damit der von den Muskeln aufzubringenden Kraft sind. Um dies zu überprüfen, haben wir für einen Probanden die Neigung α des Oberarmes (siehe Abbildung 3.8) auf 70° verändert und wiederum für $\varphi \in [65^\circ, 135^\circ]$ die Steigung der Drift geschätzt (vergleiche Methodik aus Abschnitt 3.2.1). Wenn der Verlauf von m_D nur ein Abbild des externen Momentes wäre, so würde man für diesen Versuchsaufbau das Maximum von m_D bei $\varphi \approx 110$ erwarten. Für größere Winkel ($\varphi > 110^\circ$) sollte m_D dann wieder abnehmen. Wie in 3.23 zu sehen, ist für große Innenarmwinkel $\varphi > 110^\circ$ keine Reduktion in m_D zu erkennen. Man erkennt ein deutliches Minimum im Bereich von $\varphi = 80^\circ$, welches keiner der in Abbildung 3.20 dargestellten Datensätze in der Ausprägung aufweist. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass bei $\alpha = 70^\circ$ auch die Auflage für den Oberarm um 70° geneigt

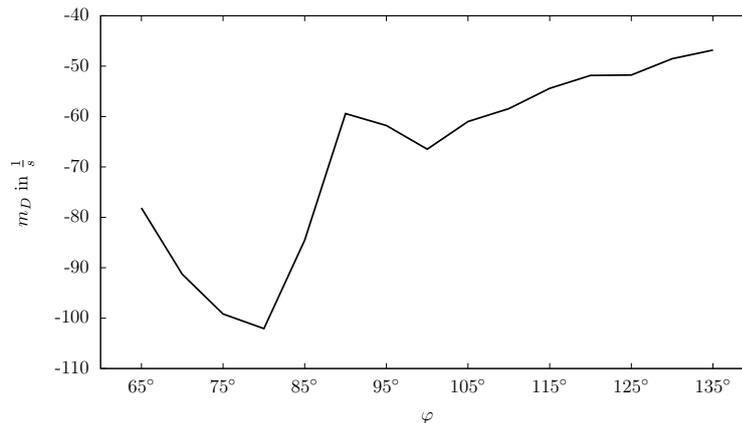


Abbildung 3.23: Steigung m_D des Driftkoeffizienten $\hat{D}^{(1)}(x)=m_D \cdot x+b$ für das sEMG des Musculus brachioradialis. Im Vergleich zu den vorherigen Versuchen wurde die Neigung des Oberarmes auf $\alpha = 70^\circ$ geändert. Für Winkel $\varphi > 110^\circ$ ist kein Rückgang in m_D zu erkennen.

ist und somit die Bewegung des Unterarmes nicht mehr ausschließlich auf die am Ellbogengelenk wirksamen Drehmomente zurückzuführen ist. Aufgrund der geringen Unterstützung des Oberarmes müsste die Bewegung des Schultergelenkes bei der Berechnung der Selbststabilität mit in Betracht gezogen werden, so dass das Minimum in Abbildung 3.23 eventuell die durch die Neigung α veränderte Bewegungsaufgabe repräsentiert. Ein weiteres Indiz dafür, dass der Verlauf von m_D nicht einfach das externe Moment widerspiegelt, zeigt sich darin, dass das Plateau in m_D abhängig vom jeweiligen Probanden unterschiedlich früh erreicht wird, siehe Abbildung 3.20. Der Verlauf des externen Momentes ist jedoch bei allen Probanden gleich.

Wie Abbildung 3.19 zeigt, ist das sEMG im untersuchten Kernbereich linear, womit der Parameter m_D unabhängig von der Normierung der Daten und somit auch von der absoluten Signalamplitude ist.

Moritani und Muro (1987) zeigten, dass sich das Frequenzspektrum von sEMG-Daten bei erhöhter Krafterzeugung (Ermüdung ausgeschlossen) hin zu höheren Frequenzen verschiebt. Nun kann man mit relativ großer Sicherheit ausschließen, dass der deterministische Anteil des Signals einfach nur die Verschiebung im Frequenzbereich abbildet. Wenn m_D sich aufgrund der Frequenzanteile im Signal verändern würde, müsste m_D bei $\alpha = 70^\circ$ für Winkel $\varphi > 110^\circ$ abnehmen, was es nicht tut. Darüber hinaus ist die Relaxationszeit $t_r = 1/|m_D|$ des deterministischen Anteils für kleine Innenarmwinkel geringer als für große Innenarmwinkel. Je kleiner t_r , umso mehr tragen hohe Frequenzen zum deterministischen Anteil des sEMG-Signals bei, womit die von Moritani und Muro (1987) gefundene Kraft-Frequenzabhängigkeit des sEMG-Signals nicht die Winkelabhängigkeit von m_D erklären sollte.

Man kann also festhalten, dass es eine winkelabhängige Veränderung im deterministischen Anteil des sEMG-Signals gibt, die weder auf die reine Signalamplitude, auf das aufzubringende Moment noch auf eine Veränderung im Frequenzspektrum

zurückzuführen ist. Wir hatten eine Veränderung der Ansteuerung aufgrund der in den Winkelbereichen differierenden Selbststabilität des Systems (Stabilität von *open-loop-Kontrolle*) prognostiziert. Wenn der Verlauf von m_D diese veränderte Ansteuerung wiedergibt, so ist die Veränderung nicht sprunghaft, sondern stetig. Dies wäre auch in der Form zu erwarten gewesen, da alleinige *open-loop-Kontrolle* nicht existiert und die Stabilität der *open-loop-Steuerung* anhand der Modellrechnung mit steigendem Winkel stetig abnimmt, bis sie schließlich instabil wird, was das Sättigungsverhalten im Verlauf von m_D erklären würde. Auch die unterschiedliche starke Ausprägung für Bizeps und Brachioradialis ließen sich im Hinblick auf die Kontrolle erklären. Der Bizeps ist im Gegensatz zum Brachioradialis zweigelenkig, so dass er bei der in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten Halteaufgabe nicht nur der Stabilisierung des Ellbogengelenkes dient, sondern gleichzeitig zur Stabilisierung im Schultergelenk beiträgt. Daher wäre zu erwarten, dass die veränderte Selbststabilität im Ellbogengelenk auf den Brachioradialis eine größere Auswirkung hat.

Damit m_D sinnvollerweise die in den Winkelbereichen differierende Selbststabilität des Systems wiedergibt, müsste man zeigen, dass die Stabilität gemessener Bewegungen nicht mit steigendem Innenarmwinkel abnimmt. Auf die Analyse der Bewegungsdaten wurde in der vorliegenden Arbeit aufgrund der geringen Bewegungsamplitude im quasi-statischen Versuch verzichtet. Das Augenmerk lag dabei nur auf dem sEMG und darauf, ob dieses abhängig vom Winkel Unterschiede in seiner Signalstruktur aufweist, die auf eine veränderte Kontrolle der Bewegung hindeuten könnten. Da dies der Fall ist, werden im folgenden Abschnitt sowohl das sEMG als auch die dabei erzeugte Bewegung untersucht.

Kapitel 4

Zyklische Aufgabe

Im vorangegangenen Kapitel haben wir anhand von Modellrechnungen zeigen können, dass eine *open-loop-Steuerung* die Position des Unterarmes nur für kleine Innenarmwinkel $\varphi < 100^\circ$ stabil halten kann. Für größere Winkel müsste sich die Kontrolle für eine stabile Bewegungsausführung verändern. Um dies zu überprüfen, haben wir das sEMG-Signal für verschiedene Winkel untersucht. Anhand der Steigung der Drift (m_D) haben wir die Signale charakterisiert und abhängig vom Winkel Unterschiede gefunden, die sich durch die veränderte Selbststabilität des Muskel-Skelett-Systems erklären lassen.

Wir wollen die Analyse nun auf Bewegungen ausweiten, die dem alltäglichen Bewegungsspektrum näher kommen als reine Halteaufgaben. Dazu haben wir zyklische Bewegungen des Unterarmes untersucht. Analog zur statischen Aufgabe wurde anhand von Modellrechnungen die Selbststabilität des Muskel-Skelett-Systems bei zyklischer Aktivierung in unterschiedlichen Winkelbereichen untersucht. Anhand der dabei gewonnenen Erkenntnisse haben wir einen höheren Anteil an *closed-loop-Kontrolle* für Schwingungen um hohe Innenarmwinkel gefordert und mittels der im Experiment aufgenommenen Daten zunächst geprüft, ob sich die Stabilität der Bewegung in den unterschiedlichen Winkelbereichen unterscheidet. Des Weiteren haben wir das sEMG über die Drift charakterisiert, um Unterschiede im sEMG und damit in der Kontrolle in Abhängigkeit vom Winkel zu ermitteln, um damit die Modellvorhersage zu überprüfen.

4.1 Modellvorhersage

Wie im vorherigen Kapitel, wollen wir die Modellrechnung nutzen, um die Selbststabilität des Muskel-Skelett-Systems zu untersuchen und damit Aussagen über die nötige Kontrolle zu treffen. Wir fragen uns also: Ist es möglich, stabile zyklische Bewegungen mit *open-loop-Steuerung* durchzuführen? Wir wollen nun im Modell die Selbststabilität der zyklischen Bewegung auf den Winkelintervallen $I_1 = [65^\circ, 95^\circ]$ und $I_2 = [105^\circ, 135^\circ]$ untersuchen, also in Bereichen, in denen das Modell mit konstanter Aktivierung Stabilität respektive Instabilität von *open-loop-Kontrolle* aufwies. Wir werden dafür auf das in Abschnitt 3.1.1 vorgestellte Modell zurückgreifen. Die einzige Anpassung ist, dass im Folgenden nicht mehr konstante Aktivierungen, sondern zyklische Aktivierungen gefordert werden.

4.1.1 Methoden

Wir wollen nun zunächst die Stabilität des in 3.1.1 beschriebenen Modells (Neigung des Oberarmes $\alpha = 45^\circ$) mit zyklischer Aktivierung anhand einer vorgegebenen Bewegung untersuchen. Wir geben dazu eine Referenztrajektorie

$$\varphi_r(t) = \varphi_{max} + \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 1 \right) \quad (4.1)$$

vor (Eriten und Dankowicz, 2009). Dabei handelt es sich um eine harmonische Schwingung mit maximalem Winkel φ_{max} und einer Peak-to-Peak-Amplitude

von $\Delta\varphi$. Die Schwingungsdauer wird durch T gekennzeichnet. Da wir die *open-loop-Kontrolle* der Bewegung $\varphi_r(t)$ untersuchen wollen, müssen zunächst die Aktivierungs-Zeit-Verläufe $A_b(t)$ und $A_s(t)$ gefunden werden, die eingesetzt in Gleichung (3.32) eine entsprechende Bewegung erzeugen. Bei vorgegebener Referenztrajektorie muss für die Aktivitäten $A_b(t), A_s(t)$ zu jedem gegebenen Zeitpunkt t die Gleichung

$$\ddot{\varphi}_r = \frac{1}{J} [M_b(\varphi_r, \dot{\varphi}_r, A_b(t)) + M_s(\varphi_r, \dot{\varphi}_r, A_s(t)) + M_{ext}(\varphi_r)] \quad (4.2)$$

gelten. Da Gleichung (4.2) aufgrund der möglichen Koaktivierung von Beugern und Strecker nicht eindeutig lösbar ist, wollen wir für die Aktivitäten und damit für die Koordination der Muskeln den einfachst denkbaren Ansatz wählen, indem wir Koaktivierung von Beugern und Streckern ausschließen (vergleiche Eriten und Dankowicz (2009)):

$$(A_b(t), A_s(t)) = \begin{cases} (0, A_s(t)) & \text{wenn } \ddot{\varphi}_r(t) > \frac{1}{J} M_{ext}(\varphi_r) \\ (A_b(t), 0) & \text{wenn } \ddot{\varphi}_r(t) \leq \frac{1}{J} M_{ext}(\varphi_r) \end{cases} . \quad (4.3)$$

Der Strecker wird also nur dann aktiv, wenn das streckende Moment, erzeugt durch die Gewichtskraft, für die vorgegebene Bewegung (φ_r) nicht ausreicht. Dadurch werden die am Gelenk wirkenden Drehmomente reduziert. Mit dem Ansatz (4.3) ist Gleichung (4.2) eindeutig lösbar. Man bestimmt anhand von $\varphi_r(t)$ den Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Verlauf $\dot{\varphi}_r(t)$ und die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_r(t)$, setzt diese in Gleichung (4.2) ein und kann so zu jedem Zeitpunkt der Bewegung die notwendigen Muskelaktivitäten A_b und A_s berechnen. Im Folgenden wollen wir Bewegungen mit einer Schwingungsamplitude von $\Delta\varphi = 30^\circ$ und Schwingungsdauer von $T = 1s$ betrachten. Dabei werden die Bewegungen mit $\varphi_{max} = 95^\circ$ und $\varphi_{max} = 135^\circ$ und die entsprechenden Aktivitäten unterschieden.

Wir untersuchen nun die Stabilität der jeweiligen *open-loop-Steuerung* definiert durch $(A_b(t), A_s(t))$. Dazu wurde die Stabilität des jeweiligen Orbits ($\varphi_r(t)$) numerisch mittels Floquetmultiplikatoren quantifiziert. Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 3.1.1 untersuchten System ist Gleichung (4.2) eine nichtautonome Differentialgleichung, so dass für die Bewertung der Stabilität beide Floquetmultiplikatoren von Relevanz sind.

4.1.2 Stabilitätsanalyse

In Abbildung 4.1 (oben) sind die Referenztrajektorien im Phasenraum für die Schwingungen mit $\varphi_{max} = 95^\circ$ und $\varphi_{max} = 135^\circ$ in grau dargestellt. Die Beugeraktivität $A_b(t)$ und $A_s(t)$ wurde für $\varphi_{max} = 95^\circ$ und $\varphi_{max} = 135^\circ$ entsprechend Gleichung (4.2) unter der Annahme fehlender Koaktivierung berechnet. Die sich jeweils ergebenden Aktivitäts-Zeit-Verläufe sind in Abbildung 4.1 (unten) für einen Bewegungszyklus dargestellt. Bei einer Bewegung des Modellarmes mit einer Frequenz von $f = 1Hz$ reicht die Beugermuskulatur des Systems im Zusammenspiel mit der Gravitation aus, um die vorgegebene Bewegung $\varphi_r(t)$ zu erzeugen ($A_b(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$). Die

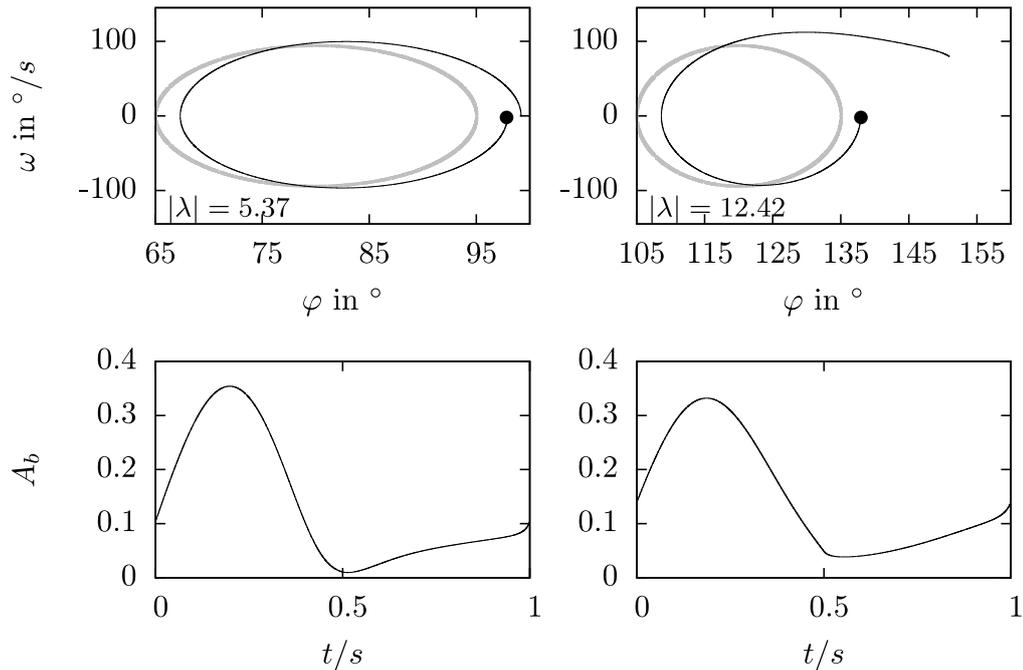


Abbildung 4.1: (Oben) Mit denen aus Gleichung (4.2) und (4.3) berechneten Muskelaktivitäten simulierte Trajektorie (—) im Phasenraum für die Maximalwinkel $\varphi_{max} = 95^\circ$ (links) und $\varphi_{max} = 135^\circ$ (rechts). Die Anfangsbedingung (•) weicht um ca. $2,5^\circ$ von der Referenztrajektorie (—) ab. Der dem Betrag nach größte Eigenwert $|\lambda|$ der Monodromiematrix ist für die Schwingung sowohl um kleinen als auch großen Innenarmwinkel größer Eins. (Unten) Die zur jeweiligen Referenztrajektorie gehörende Beugeraktivität eines Bewegungszyklus. Bei $t = 0$ s ist der maximale Winkel φ_{max} erreicht.

Streckeraktivität ist daher für den gesamten Bewegungszyklus gleich Null. Das Aktivitätsmuster ist für beide Bedingungen (beide φ_{max}) nahezu identisch. Die Analyse mittels Floquetmultiplikatoren zeigt, dass die zyklische Bewegung in beiden Fällen nicht stabil ist ($|\lambda| = 5,37$ und $|\lambda| = 12,42$). Eine Störung in φ oder ω führt demnach zu einer Dissonanz mit dem fortgeführten Aktivitätsmuster, so dass sich der Abstand zur Referenztrajektorie vergrößert. Um das Stabilitätsverhalten und damit das Zeitverhalten einer Störung von der Referenzbewegung zu veranschaulichen, haben wir die Anfangsbedingung bei gleichbleibendem Aktivitätsmuster variiert ($\varphi(t = 0) \approx \varphi_{max} + 2,5^\circ$) und die Trajektorie entsprechend Gleichung (4.2) mittels Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung mit Zeitinkrement von $dt = 0,001$ s simuliert. Die Variation der Anfangsbedingung kann als Störung aufgefasst werden. Wäre die *open-loop-Steuerung* stabil, so sollte die sich ergebende Bewegung nach einer gewissen Einschwingzeit hinreichend nahe an der Referenzbewegung $\varphi_r(t)$ liegen. Wie in Abbildung 4.1 zu sehen ist, entfernen sich die simulierten Trajektorien mit der Zeit immer weiter von der Referenztrajektorie. Dieser Vorgang dauert entsprechend

der Floquetmultiplikatoren für $\varphi_{max} = 95^\circ$ wesentlich länger als für $\varphi_{max} = 135^\circ$. Eine *open-loop-Steuerung* kann für die einfache Modellannahme aus Gleichung (4.3) in keinem der beiden Winkelbereiche eine stabile zyklische Bewegung erzeugen.

4.1.3 Validierung des Modells

Wie eingangs der vorliegenden Arbeit beschrieben, stellt sich bei der Untersuchung von motorischer Kontrolle immer die Frage, wie die Vielzahl an Freiheitsgraden kontrolliert wird. Das sogenannte *Degree-of-Freedom-Problem* begegnet uns auch bei der im vorangegangenen Abschnitt durchgeführten Analyse. Wir haben aus der Vielzahl an möglichen Lösungen (Aktivierungs-Zeit-Verläufen) der Bewegungsaufgabe ($\varphi_r(t)$) nur eine herausgreifen können, indem wir den Lösungsraum mit der Bedingung aus Gleichung (4.3) stark eingeschränkt haben. Wir wollen im Folgenden unsere Modellannahmen, dazu zählt die Annahme einer harmonischen Schwingung sowie der angenommene Aktivierungs-Zeit-Verlauf, anhand von Messdaten überprüfen. Dazu haben wir den Winkel-Zeit-Verlauf $\varphi(t)$ und das sEMG der Muskeln Biceps brachii, Brachioradialis und Triceps brachii während der Ausführung einer zyklischen Bewegung des Unterarmes mit einer Frequenz von einem Hertz für $\varphi_{max} = 95^\circ$ und $\varphi_{max} = 135^\circ$ mit $\Delta\varphi = 30^\circ$ gemessen.

Datenaufnahme

Wir haben die zyklische Bewegung des Unterarms in den Winkelbereichen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ und die dazugehörigen Muskelaktivitäten an vier Probanden (zwei Männer, zwei Frauen) im Alter von 29 ± 2.1 Jahren untersucht. Alle Probanden nahmen freiwillig an der Studie teil und konnten jederzeit ohne Angabe von Gründen die weitere Partizipation verweigern. Die Teilnehmer wurden vor der Durchführung über die Datenspeicherung, den Verlauf des Experiments und die einzelnen Arbeitsschritte aufgeklärt und erteilten daraufhin ihre Einwilligung. Die Daten wurden mittels Zufallszeichenkette pseudonymisiert und die entsprechende Kodierliste nach Auswertung der Datensätze vernichtet.

Versuchsaufbau

Für die Analyse der zyklischen Armbewegung wurde der Aufbau im Vergleich zur quasi-statischen Aufgabe leicht modifiziert. Anstatt einer Halteaufgabe sollte nun eine zyklische Bewegung in einem Bereich mit kleinem Innenarmwinkel $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und in einem Bereich mit großem Innenarmwinkel $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ (blaue und rote Linie in Abbildung 4.2) durchgeführt werden. Die Neigung $\alpha = 45^\circ$ und Positionierung des Oberarms blieb im Vergleich zum quasi-statischen Versuch unverändert. Die Frequenz der Bewegung sollte eine Schwingung pro Sekunde ($f = 1$ Hz) betragen und wurde per Metronom vorgegeben. Die Frequenz des Metronoms lag dabei bei zwei Hertz, so dass sich der am Unterarm angebrachte Marker (●) gleichzeitig mit dem akustischen Signal an einem der Extrempunkte (⊙) befinden sollte. Um den Winkel-

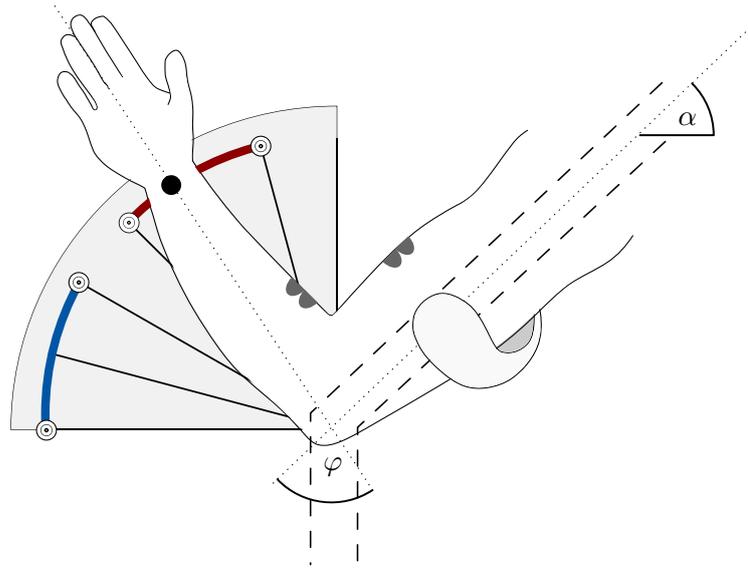


Abbildung 4.2: Versuchsaufbau für zyklische Bewegung mit Frequenz von $f = 1\text{Hz}$ in zwei verschiedenen Bewegungsintervallen: $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ (—) und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ (—). Die Neigung α betrug für beide Versuchsbedingungen 45° . Das sEMG der Musculi biceps brachii, brachioradialis und triceps brachii wurde während der Versuchsdurchführung aufgezeichnet

Zeit-Verlauf des Innenarmwinkels zu analysieren, benutzten wir das Oqus 3d Bewegungsanalysesystem (Qualisys, Göteborg, Schweden) mit drei Infrarotkameras, die die zyklische Bewegung von insgesamt sieben an Ober- und Unterarm angebrachten retroreflektierenden Markern mit einer Frequenz von $f = 400\text{Hz}$ aufzeichneten. Zur Bestimmung des Innenarmwinkels wurde jeweils an Ober- und Unterarm ein Markerarray (siehe Abbildung 4.3) befestigt. Das Array bestand aus einer an die Form des Ober- bzw. Unterarms angepassten Kunststoffschale, auf der je vier respektive drei Marker angebracht waren (Abbildung 4.3). Das Array am Unterarm wurde knapp unterhalb des Handgelenks befestigt und zwar so, dass die Längsachse der Kunststoffschale parallel zur der des Unterarms war. Die zweite Schale wurde entsprechend parallel zur Segmentachse des Oberarms angebracht. Im Gegensatz zur statischen Halteaufgabe war der Anteil der Extensoren bei diesem Typ von Bewegung nicht zu vernachlässigen. Daher wurde zusätzlich zum Caput breve des Musculus biceps brachii und Brachioradialis das Elektromyogramm des Caput laterale des Musculus triceps brachii des rechten Arms mittels bipolarer Oberflächen Elektroden (5–700 Hz, Biovision, Wehrheim, Deutschland) (angebracht gemäß Criswell und Cram, 2011) mit Zwischenelektrodenabstand von 2.5 cm aufgezeichnet. Die Elektrodenpositionen von Bizeps und Brachioradialis blieben im Vergleich zum quasi-statischen Versuch unverändert. Die Referenzelektrode befand sich an der Handgelenkswurzel. Das sEMG wurde mit einer Frequenz von $f = 2000\text{Hz}$ aufgenommen und digitalisiert. Um möglichst große Unterschiede in der Signalamplitude zwischen Aktivierung und Ruhe

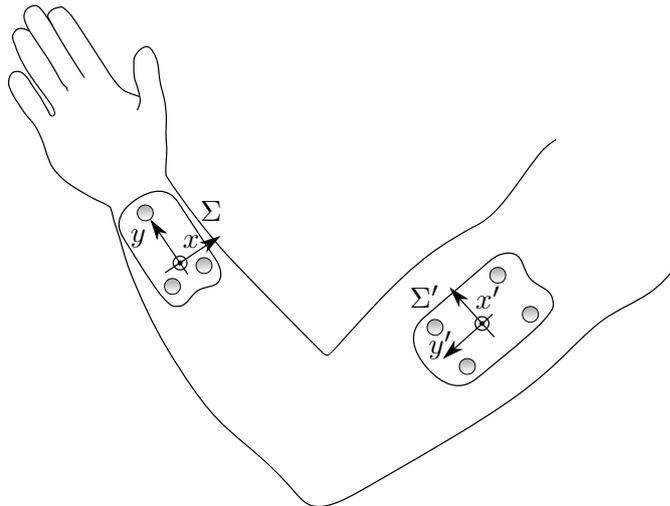


Abbildung 4.3: Platzierung der Marker-Arrays zur Definition der starren Körper für Unter- und Oberarm. Am Unterarm sind drei, am Oberarm vier Marker (\odot) auf einer an Unter- bzw. Oberarm angepassten Kunststoffschale angebracht. Der Ursprung der körperfesten Koordinatensysteme (Σ, Σ') wurde in den durch die Koordinaten der Marker definierten geometrischen Schwerpunkt gelegt. Die z - und z' -Achse der Koordinatensysteme zeigt aus der Zeichenebene heraus.

sEMG zu erhalten, wurde den Probanden wiederum eine Gewichtsmanschette mit einem Gesamtgewicht von 1,6 kg an der Hand befestigt. sEMG- und Bewegungsanalyse-System wurden mittels *TTL*-Signal synchronisiert. Um Ermüdungserscheinungen auszuschließen und gleichzeitig die für die Driftanalyse notwendige Datenanzahl zu erhalten, beschränkten wir uns auf zwei Durchläufe à 100 Sekunden pro Winkelbereich. Die Probanden hatten vor jedem Durchlauf etwa 15 Sekunden Zeit, den Rhythmus des Metronoms mit der eigenen Bewegung zu synchronisieren, erst danach wurde die jeweilige Messung gestartet. Nach jedem Durchlauf gab es eine Pause von mindestens zwei Minuten, in der das Zusatzgewicht abgelegt und der Arm entspannt werden konnte, bevor der nächste Durchlauf gestartet wurde. Die Abfolge der Versuchsbedingungen (Winkelbereiche) wurde randomisiert.

Datenverarbeitung

Die in Abbildung 4.3 dargestellten Marker-Arrays dienten dazu, den Innenarmwinkel φ zu bestimmen. Dazu wurden anhand der Marker-Arrays starre Körper und deren körperfeste Koordinatensysteme (Σ, Σ') definiert. Die körperfesten Koordinatensysteme wurden gemäß Abbildung 4.3 durch die jeweilige Markerpositionen festgelegt. Dabei wurde die y -Achse des jeweiligen Koordinatensystems so definiert, dass sie parallel zur Längsachse des entsprechenden Armsegments war. Anhand der Eulerwinkel, die eine Transformation (Drehung) des Koordinatensystems Σ zu Σ' beschreiben, wurde der Innenarmwinkel berechnet. Danach wurden sowohl $\varphi(t)$ als auch die Roh-

sEMG-Daten der drei Muskeln mittelwertsbereinigt. Beide Durchgänge einer jeden Versuchsbedingung ($\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$) wurden zusammengeführt, so dass für jede Versuchsbedingung und jeden Probanden 200 Bewegungszyklen und daher 400000 sEMG-Samples und 80000 Winkel zur Verfügung standen.

Um das mittlere Aktivierungsmuster der Muskeln zu bestimmen, haben wir das mittelwertsbereinigte Roh-sEMG-Signal $q^{(m)}(t)$ eines jeden Muskels rektifiziert ($|q^{(m)}(t)|$) und mit einem Moving-Average-Filter mit einer Fensterbreite von zehn Samples geglättet. Anhand der Maxima des Winkel-Zeit-Verlaufs haben wir die geglätteten sEMG-Daten zurechtgeschnitten, so dass für jeden Muskel die sEMG-Daten von 200 einzelnen Bewegungszyklen vorlagen. Der Zeitvektor eines jeden Zyklus wurde auf die jeweilige Zykluslänge normiert und die geglätteten sEMG-Daten über alle 200 Zyklen gemittelt, um die mittlere Aktivierung zu erhalten.

Ergebnisse

Vergleichen wir zunächst die im Experiment aufgenommene Schwingung des Arms mit dem Ansatz (4.1) der vorangegangenen Modellrechnung. Abbildung 4.4 zeigt die gemessenen kinematischen Daten eines Probanden (+) und die im Modell angenommene Trajektorie $\varphi_r(t)$ (—) im Phasenraum. Die Form der Referenztrajektorie

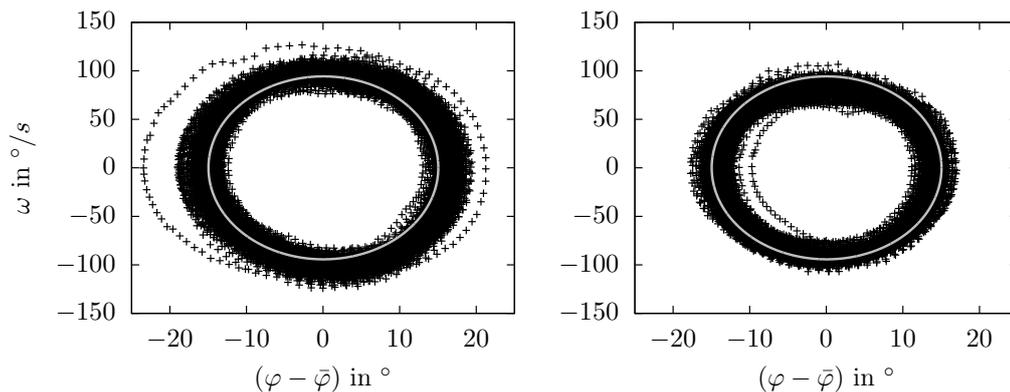


Abbildung 4.4: Vergleich zwischen Referenztrajektorie $\varphi_r(t)$ (—) und Messdaten eines Probanden (+) für $\varphi_{max} = 95^\circ$ (links) und $\varphi_{max} = 135^\circ$ (rechts).

stimmt im Mittel sehr gut mit dem experimentell bestimmten Verlauf überein. Es handelt sich bei der aufgenommenen Bewegung also in guter Näherung um eine harmonische Schwingung.

Wir wollen nun anhand der aufgenommenen Daten Aussagen über das Aktivierungsmuster von Bizeps, Trizeps und Brachioradialis treffen und diese mit der im Modell getroffenen Annahme fehlender Koaktivierung (4.3) vergleichen. Die mittleren Aktivitätsmuster der drei gemessenen Muskeln sind in Abbildung 4.5 für die Versuchsbedingungen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ dargestellt. Es ist eine klare Diskrepanz zwischen den gemessenen und den aus Gleichung (4.3) berechneten Aktivitätsverläufen (Abbildung 4.1 unten) zu erkennen. Die im Modell berechneten

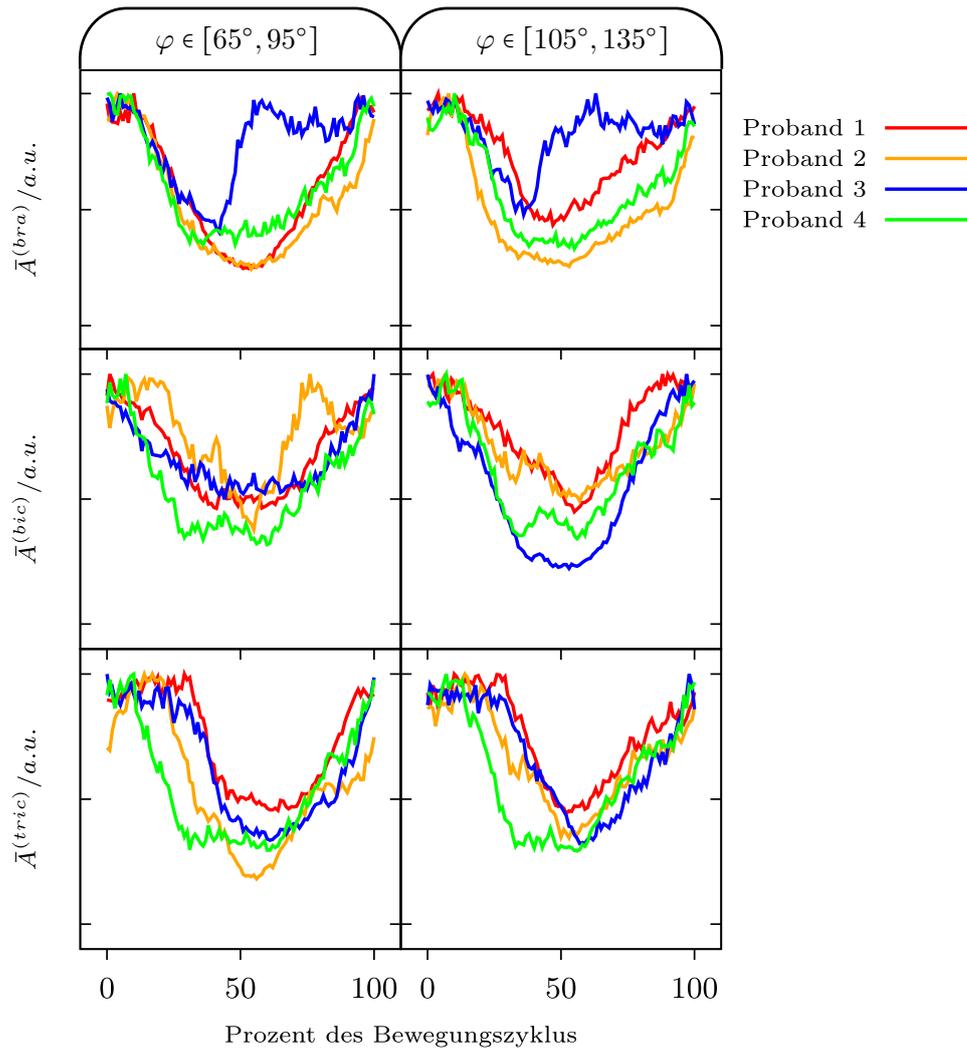


Abbildung 4.5: Mittleres Aktivierungsmuster für Musculus brachioradialis, biceps brachii und triceps brachii in Abhängigkeit von der Phase des Bewegungszyklus. Die mittleren Aktivitäten wurden auf das jeweilige Maximum normiert. Bei $t = 0$ s ist der maximale Winkel φ_{max} erreicht.

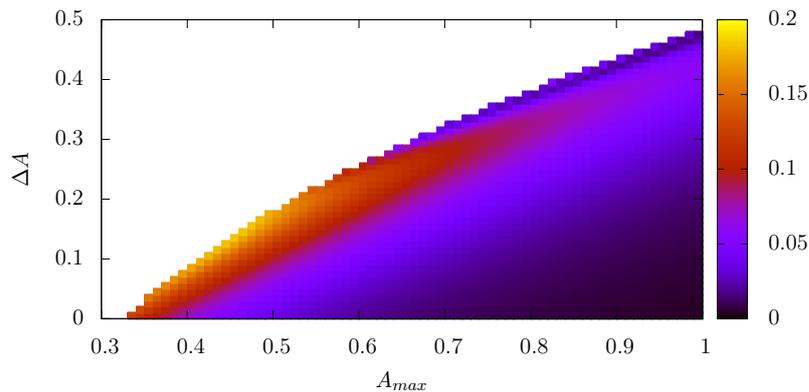
Beugeraktivitäten haben ihr Maximum in etwa bei einem Viertel des Bewegungszyklus. Die anhand der Messdaten bestimmten Aktivitätsverläufe von Bizeps und Brachioradialis sind zu Anfang und Ende des Bewegungszyklus maximal und weisen ein ausgeprägtes Minimum zur Mitte des Zyklus auf. Der Aktivitätsverlauf des Trizeps lässt darauf schließen, dass vor allem im Bereich des maximalen Winkels ($t \approx 0$ s) Koaktivierung von Beugern und Strecker vorliegt. Die in Abbildung 4.5 gezeigten Aktivierungsmuster zeigen zwischen den beiden Winkelbereichen keine gravierenden Unterschiede. Die eingangs des Abschnittes 4.1 benutzte Annahme fehlender Koak-

tivierung ist daher für keinen der beiden Winkelbereiche realistisch.

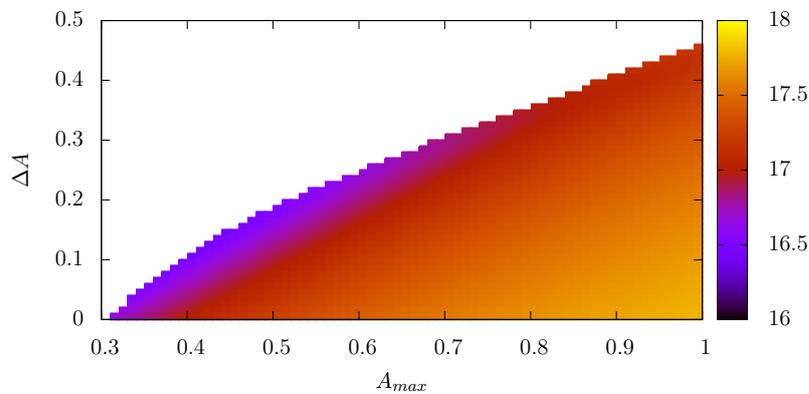
4.1.4 Modellanpassung

Um eine bessere Übereinstimmung des Modells mit den Messergebnissen zu erreichen, wählen wir für die Aktivität der Beuger eine Kosinusschwingung, so dass $A_b(t)$, entsprechend Abbildung 4.5, für $t = 0$ bzw. $t = T$ maximal und für $t = T/2$ minimal ist:

$$A_b(t) = A_{max} + \frac{\Delta A}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - 1 \right) . \quad (4.4)$$



(a) $\varphi_{max} = 95^\circ$



(b) $\varphi_{max} = 135^\circ$

Abbildung 4.6: Der Betrag der Floquetmultiplikatoren $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ ist als Funktion der maximalen Aktivierung A_{max} und der Amplitude ΔA farbcodiert dargestellt. Weiße Bereiche bedeuten, dass die Aktivierung $A_s(t)$ für diese Parameterkonstellation nicht im Intervall $[0, 1]$ liegt. $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ ist bei $\varphi_{max} = 95^\circ$ für alle Paare von $(A_{max}, \Delta A)$ kleiner Eins. Für $\varphi_{max} = 135^\circ$ hingegen ist $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ durchweg größer Eins.

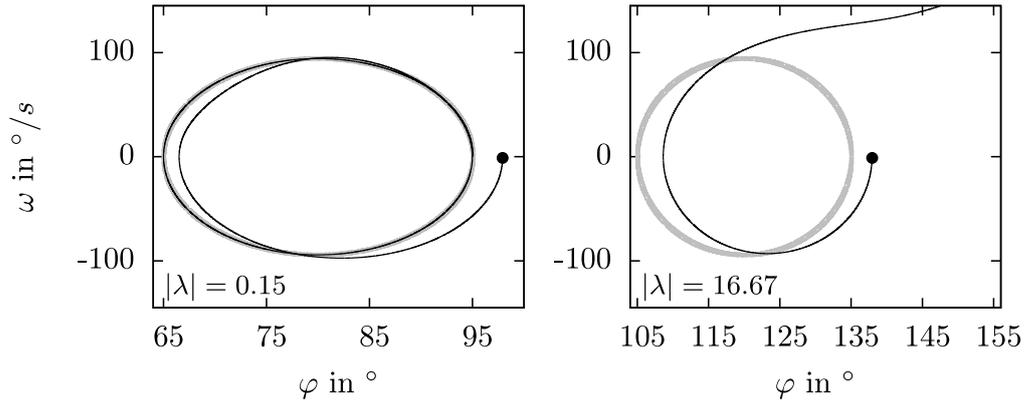


Abbildung 4.7: Mit denen aus Gleichung (4.2) und (4.4) berechneten Muskelaktivitäten ($A_{max} = 0.5, \Delta A = 0.1$) simulierte Trajektorie (—) im Phasenraum für die Maximalwinkel $\varphi_{max} = 95^\circ$ (links) und $\varphi_{max} = 135^\circ$ (rechts). Die Anfangsbedingung (●) weicht um ca. 2.5° von der Referenztrajektorie (—) ab. Der dem Betrag nach größte Eigenwert $|\lambda|$ der Monodromiematrix ist für die Schwingung um kleinen Innenarmwinkel kleiner Eins, hingegen für Schwingung um großen Innenarmwinkel größer Eins.

Die entsprechende Streckeraktivität wurde mit Hilfe von Gleichung (4.2) für die Referenztrajektorien ($\varphi_{max} = 95^\circ$ und $\varphi_{max} = 135^\circ$) berechnet. Die so bestimmten Aktivitäten $A_b(t)$, $A_s(t)$ und dazugehörigen Referenztrajektorien wurden auf ihre Stabilität hin untersucht. Dazu haben wir die Floquetmultiplikatoren der Referenztrajektorien in Abhängigkeit vom Maximalwert der Aktivität A_{max} und der Amplitude ΔA berechnet. Wir betrachten nur die Parameterpaare $(A_{max}, \Delta A)$, für die beide Aktivitäten $A_b(t)$ und $A_s(t)$ im Intervall $[0, 1]$ sind. Abbildung 4.6 zeigt das Ergebnis der Stabilitätsanalyse mittels Floquetmultiplikatoren. Die Farbcodierung zeigt den vom Betrag nach größten Eigenwert der Monodromiematrix ($\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$). Damit der periodische Orbit stabil ist, müssen beide Eigenwerte vom Betrag kleiner Eins sein. Ist einer der Eigenwerte dem Betrag nach größer Eins, so ist der Orbit instabil. Für die Schwingung des Unterarms im Intervall $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ (Abbildung 4.6a) ist $\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ für alle zulässigen Parameterkonstellationen $(A_{max}, \Delta A)$ kleiner Eins. Simuliert man die Bewegung des Unterarms im Winkelintervall $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$, so ergeben sich unabhängig von der Parameterwahl $(A_{max}, \Delta A)$ Eigenwerte, die vom Betrag her wesentlich größer als Eins sind. Damit ist eine harmonische Schwingung in diesem Winkelintervall unter dem vorgegebenen Aktivierungs-Zeit-Verlauf instabil. Wir wollen das Stabilitätsverhalten in den beiden Winkelbereichen anhand einer Parameterkonstellation veranschaulichen. Dazu haben wir bei vorgegebenem Aktivierungszeitverlauf ($A_{max} = 0.5, \Delta A = 0.1$) entsprechend Gleichung (4.4) für jeden Winkelbereich eine Trajektorie mit Anfangsbedingung ($\varphi(t=0) = \varphi_{max} + 2.5^\circ, \omega(t=0) = 0$) simuliert, vergleiche Abbildung 4.7. Das System ist bei der Schwingung um kleine Innenarmwinkel stabil ($|\lambda| = 0.15$), für die Schwingung um große Innenarm-

winkel hingegen instabil ($|\lambda| = 16.44$). Während bei $\varphi_{max} = 95^\circ$ die Störung von der Referenztrajektorie nach weniger als einem Bewegungszyklus nahezu vollständig relaxiert, führt der gleiche Abstand von der Referenztrajektorie bei der Schwingung mit $\varphi_{max} = 135^\circ$ nach einem Bewegungszyklus schon zu nichtphysiologischen Bewegungswinkeln.

4.1.5 Diskussion

Wir wollten in den vorangegangenen Abschnitten zyklische Bewegungen in den Winkelbereichen untersuchen, in denen das Modell zur Untersuchung der quasi-statischen Aufgabe Stabilität respektive Instabilität von *open-loop-Steuerung* voraussagt. Dazu haben wir zunächst die Stabilität von *open-loop-Steuerung* unter der Annahme fehlender Koaktivierung mittels Modell in den Winkelbereichen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ untersucht. Bei der Analyse der Floquetmultiplikatoren ergab sich, dass unter dieser Annahme in keinem der beiden Winkelbereiche eine stabile harmonische Schwingung möglich ist. Wir haben daraufhin die im Modell benutzten Aktivierungszeitverläufe an experimentell bestimmte Aktivierungen angepasst und die Stabilitätsanalyse erneut durchgeführt. In diesem Fall war *open-loop-Steuerung* für $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ stabil und für $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ instabil und zwar unabhängig von der Parameterwahl ($A_{max}, \Delta A$). Es zeigt sich bei der zyklischen Bewegung eine ähnliche Abhängigkeit der Selbststabilität (Stabilität von *open-loop-Steuerung*) vom Innenarmwinkel wie schon bei der statischen Untersuchung im Abschnitt 3.1.3.

Der anhand der Messdaten angepasste Aktivierungszeitverlauf aus Gleichung (4.4) stellt zwar nur eine sehr grobe Näherung der mittleren Aktivierungsmuster (Abbildung 4.5) dar, jedoch ist zu beachten, dass die Datenverarbeitung (zum Beispiel Glättung) des sEMG-Signals Einfluss auf die explizite Form des Aktivierungsmusters hat. Darüber hinaus sind auch die Amplituden bei der Bestimmung der Aktivierungszeitverläufe, selbst bei entsprechender Normierung auf die Signalamplitude bei *maximum voluntary contraction* (MVC), nur bedingt aussagekräftig. So führt zum Beispiel Muskelermüdung zu einer größeren Signalamplitude, ohne dass die vom Muskel erzeugte Kraft eine Änderung erfahren muss. Auch können die im Experiment bei einer dynamischen Bewegung gemessenen Signalamplituden die üblicherweise bei isometrischen Bedingungen ermittelten MVC-Amplituden übersteigen. Die gemessenen sEMG-Daten können also allenfalls genutzt werden, um das qualitative Zeitverhalten der Muskelaktivierungen abzubilden, wie anhand von Gleichung (4.4) durchgeführt.

Mögliche Auswirkungen

Die Messdaten zeigen, dass zur Lösung der zyklischen Bewegungsaufgabe nicht jenes Aktivierungsmuster aus Gleichung (4.3) benutzt wird, welches mit einer Minimierung der am Gelenk wirkenden Drehmomente einhergeht, sondern eine Lösung, die zumindest im Intervall $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ Selbststabilität aufweist und somit den Kontrollaufwand der Bewegung minimiert. Diese Eigenschaften bleiben auch bei Variation

von A_{max} und ΔA in Gleichung (4.4) erhalten. Man könnte daher Gleichung (4.4) für das vereinfachte Modell als eine Art Basisfunktion der Bewegung auffassen, da es beim Auswahlprozess zur Lösung dieser zyklischen Bewegungsaufgabe ausreicht, auf eine Variante dieser Funktion zurückzugreifen. Boström et al. (2013) erklären die Speicherung solcher elementarer Bewegungsmuster mit Hilfe eines rekurrenten neuronalen Netzes. Dabei wird die gelernte Bewegung in den synaptischen Gewichten des Netzes gespeichert. Der Abruf einer Bewegung ist in dem von Boström et al. (2013) benutzten *open-loop-Modell* durch einen für das Bewegungsmuster spezifischen, niedrigdimensionalen, konstanten Input möglich. Das kann jedoch nur dann zu einer stabilen Bewegungsausführung führen, wenn die erzeugte Bewegung selbststabil ist. Mit dem rekurrenten neuronalen Netz wird das von Bernstein formulierte *Degrees-of-Freedom-Problem* im Sinne eines systemdynamischen Ansatzes adressiert. Was jedoch bleibt, ist das Redundanzproblem, das sich dadurch ergibt, dass eine Vielzahl von Muskelaktivierungen zum gleichen Bewegungsziel führt (in unserem Fall zu einer harmonischen Schwingung). Welche Bewegungsmuster werden gelernt, wieder abgerufen und damit ausgeführt? Hierbei könnte die Selbststabilität der von uns untersuchten Bewegung zumindest im Winkelintervall $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ ein Auswahlkriterium sein.

Für größere Innenarmwinkel kann die Selbststabilität nicht mehr als Grund für das benutzte Aktivierungsmuster herangezogen werden. Hier führt das Aktivierungsmuster aus Gleichung (4.4) zu keinen stabilen zyklischen Bewegungen. Es gibt im Prinzip zwei mögliche Szenarien. Es könnte erstens sein, dass das benutzte Aktivierungsmuster für Schwingungen im Intervall $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ eine geringere Stabilität der dadurch erzeugten Bewegung hervorruft. Dann sollte dies anhand der gemessenen Bewegungsdaten zu erkennen sein. Zweitens könnte es sein, dass in diesem Winkelbereich Regelkreise und damit *closed-loop-Steuerung* genutzt werden, um stabile zyklische Bewegungen zu erzeugen. Der Anteil von *open-loop-* zu *closed-loop-Steuerung* sollte sich dann aufgrund unserer Modellvorhersage in den beiden Winkelbereichen unterscheiden. Wir wollen beide Szenarien im Folgenden untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst die Kinematik, um die Stabilität der Bewegung in den beiden Winkelbereichen zu vergleichen. Um eine veränderte Kontrolle zu untersuchen, analysieren wir die Signalstruktur des sEMGs.

4.2 Einfluss der Selbststabilität auf die Kontrolle

Die Untersuchungen im vorangegangenen Abschnitt legen nahe, dass es aufgrund der veränderten Selbststabilität (Stabilität von *open-loop-Kontrolle*) in den Winkelbereichen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ zu einer veränderten Kontrolle/Koordination der zyklischen Bewegung kommen muss. Wir erwarten, dass sich dieser Unterschied entweder in der Bewegung selbst oder in den Eigenschaften des sEMG-Signals der an der Bewegung beteiligten Muskulatur abbildet.

Im Abschnitt 3.2.2 haben wir anhand einer quasi-statischen Halteaufgabe gezeigt, dass sich der deterministische Anteil des sEMG-Signals von Bizeps und Brachiora-

dialis im Bereich kleiner Innenarmwinkel $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und großer Innenarmwinkel $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ signifikant unterscheidet. Wir haben dabei nur das sEMG betrachtet, die Bewegung im Ellbogengelenk jedoch außer Acht gelassen. In den folgenden Abschnitten wollen wir sowohl das sEMG als auch die Bewegung selbst betrachten. Dazu greifen wir auf die in Abschnitt 4.1.3 zur Modellvalidierung aufgenommenen Roh-sEMG-Daten und die gemessenen Winkel-Zeit-Verläufe $\varphi(t)$ zurück. Bevor wir aber das sEMG untersuchen, um Rückschlüsse auf die Kontrolle zu ziehen, wollen wir prüfen, ob sich die vom Modell vorausgesagte winkelabhängige Stabilität von *open-loop-Kontrolle* auf die im Experiment durchgeführte Bewegung auswirkt.

Wir untersuchen also zunächst die Stabilität der im Experiment aufgenommenen zyklischen Bewegung in den Winkelintervallen $\varphi(t) \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi(t) \in [105^\circ, 135^\circ]$. Um die Stabilität der Bewegung zu quantifizieren, wurde das zweidimensionale Driftvektorfeld geschätzt. Anhand des Driftvektorfeldes kann der zugrundeliegende Grenzzyklus bestimmt (vergleiche Abschnitt 2.3.3) und dessen Stabilität mittels Floquetanalyse quantifiziert werden. Um das Driftvektorfeld bestimmen zu können, muss anhand der aufgenommenen Winkel-Zeit-Verläufe $\varphi(t)$ die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ bestimmt werden. Wie jede andere Messgröße, ist auch $\varphi(t)$ überlagert von Messrauschen, das sich bei der Bestimmung von ω unweigerlich verstärkt. Dies führt zu Fehlern bei der Driftschätzung. Wir werden daher $\varphi(t)$ vor der Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit glätten.

Mit den Auswirkungen der Glättung auf die Driftschätzung werden wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen, um im Anschluss an diesen Abschnitt eine geeignete Wahl der Glättung vorzunehmen und die Stabilitätsanalyse durchzuführen.

4.2.1 Filterung bei Rekonstruktion von Driftvektorfeldern

Um die zugrundeliegende Dynamik (den deterministischen Anteil) des Systems zu analysieren und die Stabilität der Bewegung zu quantifizieren, wurde das zweidimensionale Driftvektorfeld der zweidimensionalen Zeitreihe $(\varphi(t), \omega(t))$ geschätzt. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$ wurde anhand der gemessenen Zeitreihe $\varphi(t)$ bestimmt. Die einfachste Methode ist es, ω durch den Differenzenquotienten $\omega(t_i) = \frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{\Delta t}$ zu nähern. Eine andere Möglichkeit bietet die Fouriertransformation. Da $\mathcal{F}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\}$ gilt, kann die Differentiation durch Multiplikation mit $i\omega$ im Frequenzraum und anschließender Rücktransformation durchgeführt werden. Da $\varphi(t)$ als Messgröße jedoch mit Messrauschen überlagert ist, wird durch die Bestimmung der Ableitung dieses Messrauschen verstärkt. Damit kann eine direkte Bestimmung der Drift über das bedingte Moment einer verrauschten Zeitreihe $x(t)$

$$D^{(1)}(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} M^{(1)}(x, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle x(t + \tau) - x(t) \rangle_{|x(t)=x}$$

fehlerbehaftet sein. Für kleine Rauschamplituden ist die direkte Bestimmung der Drift noch unproblematisch (Siefert et al., 2003). Das ändert sich jedoch für große Rauschamplituden, wie sie durch die Differentiation von φ entstehen. In diesem Fall ist $\lim_{\tau \rightarrow 0} M^{(1)}(x, \tau) \neq 0$, so dass die Drift beim Grenzübergang zu kleinen τ divergiert.

Es gibt zwar Methoden (Optimierungsalgorithmen) (Böttcher et al., 2006), mit denen man die Drift des zugrundeliegenden Prozesses auch bei starkem Messrauschen bestimmen kann, jedoch müssen dafür Annahmen über den zugrundeliegenden Prozess gemacht werden. Die Schätzung der Drift ist damit nicht mehr parameterfrei. van Mourik et al. (2006) adressieren bei ihrer Untersuchung zyklischer Bewegungen dieses Problem, indem sie vor der Bestimmung von $\omega(t)$ den Winkel-Zeit-Verlauf $\varphi(t)$ mit einem Savitzky-Golay-Filter (siehe zum Beispiel Press, 2007) glätten.

Wir werden im folgenden Kapitel untersuchen, welchen Einfluss die Stärke (im Folgenden mit w bezeichnet) der Glättung auf die Rekonstruktion des Driftvektorfeldes hat. Das Ziel ist es, die Glättung w für die weitere Auswertung (Driftschätzung) in dieser Arbeit so zu wählen, dass die zugrundeliegende Charakteristik des Systems möglichst genau wiedergegeben wird. Dazu werden wir zunächst synthetisch erzeugte Daten eines Van-der-Pol-Oszillators mit Zufallskraft (dynamisches Rauschen) untersuchen. Dabei werden wir das Driftvektorfeld für verschiedene w schätzen und mit dem deterministischen Anteil des Van-der-Pol-Oszillators vergleichen. In einem zweiten Schritt werden wir die synthetischen Daten mit Messrauschen überlagern und wiederum die Auswirkungen der Glättung auf die Bestimmung des Driftvektorfeldes beobachten. In einem letzten Unterabschnitt werden wir das Driftvektorfeld für unterschiedliche Glättungen der zur Validierung des Modells aufgenommenen Daten (Abschnitt 4.1.3) untersuchen. Die Stabilitätsanalyse der zyklischen Bewegung des Unterarms wird anhand der in diesem Kapitel erzeugten Ergebnisse mit entsprechendem w durchgeführt.

Wie wir später zeigen werden, weisen die gemessenen Winkel-Zeit-Verläufe der zyklischen Bewegung im Ellbogengelenk eine gewisse Variabilität auf. Dieser Variabilität wollen wir zunächst durch eine gaußverteilte, unkorrelierte Zufallskraft $Q\Gamma(t)$ Rechnung tragen. Die Differentialgleichungen zur Beschreibung der Dynamik im Ellbogengelenk lassen sich dann in der Form

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= f(\varphi, \omega) + Q\Gamma(t)\end{aligned}\tag{4.5}$$

darstellen. Die Berechnung des Driftvektorfeldes anhand einer gemessenen Zeitreihe $(\varphi(t), \omega(t))$ entspricht der Bestimmung des deterministischen Anteils von Gleichung (4.5).

Synthetische Daten ohne Messrauschen

Zunächst einmal wollen wir den Einfluss der Glättung w auf ein System ohne Messrauschen analysieren, dazu greifen wir auf synthetisch erzeugte Daten zurück. Zu diesem Zweck wird im Folgenden ein Van-der-Pol-Oszillator

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(x^2 - 1)y + Q\Gamma(t)\end{aligned}\quad \text{mit} \quad \begin{aligned}\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle &= \delta(t - t') \\ \langle \Gamma(t) \rangle &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

mit additiver Zufallskraft $\Gamma(t)$ betrachtet. Gleichung (4.6) weist eine ähnliche Struktur auf wie das später von uns untersuchte System (4.5). Wir haben die Parameter

des Van-der-Pol-Oszillators so gewählt, dass der ungestörte Oszillator einen Grenzyklus aufweist und die damit verbundene Schwingung nahezu harmonisch ist ($\varepsilon = 0.1$). Eine Realisation des in in Gleichung (4.6) dargestellten Systems wurde für 800000 Datenpunkte simuliert, um möglichst viele Daten für die Schätzung der zweidimensionalen Drift zur Verfügung zu haben. Dazu wurden mittels Box-Muller-Verfahrens (Box und Muller, 1958) normalverteilte Zufallszahlen generiert, die als Zufallskraft $\Gamma(t)$ dienten. Die Integration von (4.6) erfolgte mittels Euler-Maruyama-Verfahren

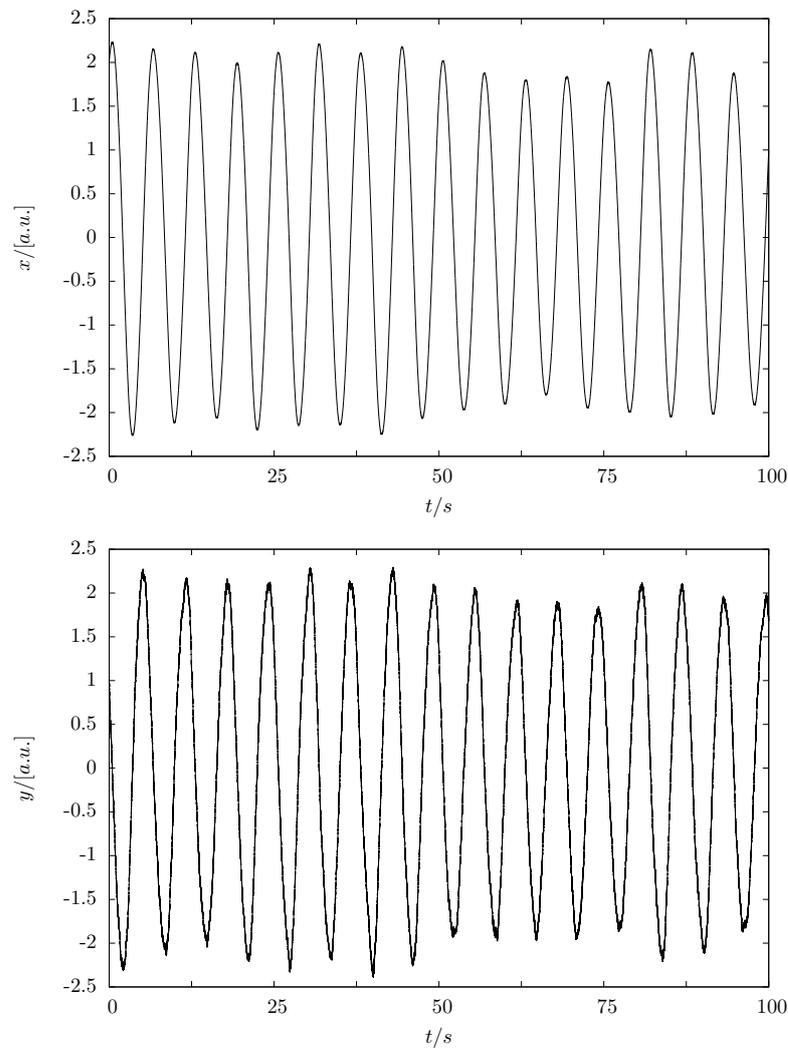


Abbildung 4.8: Auszug der x - und y -Komponente eines *Van-der-Pol-Oszillators* mit Zufallskraft für $Q = 0.005$ und $\varepsilon = 0.1$.

(Anhang 5) mit einer Schrittweite von $dt = 1/400s$. Um in Übereinstimmung mit den später untersuchten Winkel-Zeit-Verläufen φ nur eine geringe Variation in der Schwingungsamplitude von x zu erhalten, wurde $Q = 0.005$ gewählt. Abbildung 4.8

zeigt einen Ausschnitt der simulierten Zeitreihen $x(t)$ und $y(t)$. Der Kurvenverlauf von x erscheint sehr glatt. Die Wirkung der stochastischen Kraft erkennt man an der von Zyklus zu Zyklus fluktuierenden Amplitude. Für y erkennt man vor allem im Bereich der Extrema den Einfluss der stochastischen Komponente. Trägt man die x - und y -Koordinate gegeneinander auf, so erhält man den in Abbildung 4.9 dargestellten Verlauf, an dem man immer noch den zyklischen Charakter erkennt, jedoch liegen die Trajektorien im Phasenraum in einer gewissen Breite um den zugrundeliegenden Grenzzyklus des *Van-der-Pol-Oszillators* sehr dicht. Die Breite dieses Bereichs spiegelt die Variabilität des Signals wider. Wir haben im Folgenden die mittels Euler-

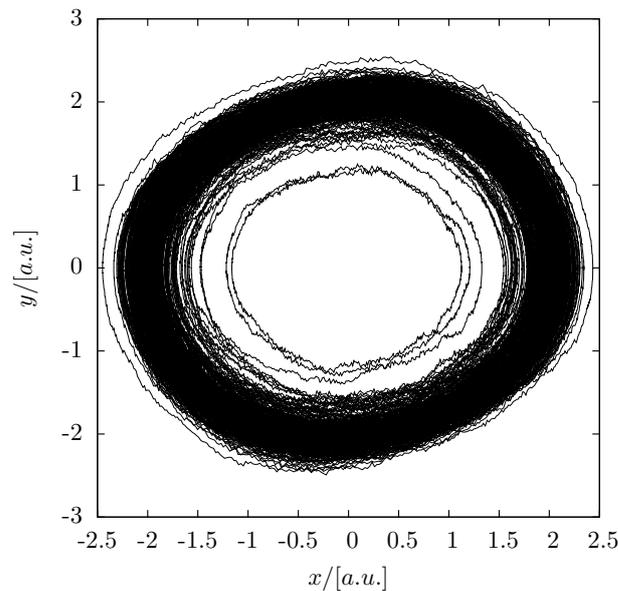


Abbildung 4.9: Realisation eines *Van-der-Pol-Oszillators* mit Zufallskraft.

Maruyama-Verfahrens erzeugte Zeitreihe $y(t)$ ignoriert. Um zu untersuchen, welchen Einfluss die Glättung auf die Driftbestimmung hat, wurde $y(t)$ durch numerische Differentiation anhand von $x(t)$ erzeugt. Hierbei haben wir die Zeitreihe $x(t)$ vor der Bestimmung von $y(t)$ unterschiedlich stark geglättet. Zur Glättung benutzen wir den Savitzky-Golay-Filter (Press, 2007) fünfter Ordnung mit der Fensterbreite w . Dabei bedeutete $w=0$ im Folgenden, dass die Daten vor der Differentiation nicht geglättet wurden. Zur Differentiation benutzen wir den Differenzenquotient, so dass $y_{(w=0)}(t)$ identisch war mit der mittels Euler-Maruyama-Verfahrens erzeugten Zeitreihe $y(t)$. Für jedes Paar $\bar{z}(t) = (\varphi(t), \omega_{(w)}(t))$ wurde das zweidimensionale Driftvektorfeld mittels Nadaraya-Watson-Schätzer (2.125) mit radialsymmetrischem Epanechnikovkern (2.116) berechnet. Zu jedem zweidimensionalen Datensatz wurden

je zwei Trajektorien mit Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung gemäß

$$\begin{aligned}
 \vec{k}_1 &= dt \cdot \vec{D}^{(1)}(\vec{z}_i) \\
 \vec{k}_2 &= dt \cdot \vec{D}^{(1)}\left(\vec{z}_i + \frac{1}{2}\vec{k}_1\right) \\
 \vec{k}_3 &= dt \cdot \vec{D}^{(1)}\left(\vec{z}_i + \frac{1}{2}\vec{k}_2\right) \\
 \vec{k}_4 &= dt \cdot \vec{D}^{(1)}(\vec{z}_i + \vec{k}_3) \\
 \vec{z}(t_{i+1}) &= \vec{z}_{i+1} = \vec{z}_i + \frac{1}{6}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

simuliert. Die Anfangsbedingungen der Trajektorien wurden dabei so gewählt, dass sowohl eine Trajektorie innerhalb als auch außerhalb des zugrundeliegenden Grenzzyklus startet. Würde man für die Erzeugung der Trajektorien das Driftvektorfeld auf einem Gitter bestimmen, müsste man einer Position im Phasenraum einen Gitterpunkt zuordnen. Ist die Bewegung langsam und der Gitterabstand zu groß, kann es sein, dass für mehrere Iterationsschritte der gleiche Gitterpunkt herangezogen wird, was zu Unstetigkeiten im Signal führt. Um dies zu verhindern, haben wir ausgenutzt, dass die Kerndichteschätzung kontinuierliche Werte liefert (siehe Gleichung (4.7)). Ist also die Anfangsbedingung einer Trajektorie gegeben, so wird das Driftvektorfeld an diesem Punkt im Phasenraum bestimmt. Mit Hilfe des Driftvektorfeldes an diesem Punkt kann die Position zum nächsten Iterationsschritt berechnet werden. Für diese neue Position wird wiederum das Driftvektorfeld bestimmt, woraus sich die nächste Position ergibt. Man wertet also das Driftvektorfeld entlang der Trajektorie aus. Dies führt zu einem wesentlich glatteren Trajektorienverlauf, dies ist einer der Gründe, warum wir die Kerndichteschätzung gegenüber der Histogrammschätzung bevorzugt haben. Nach abgeschlossenem Einschwingvorgang lagen die so erzeugten Trajektorien hinreichend nah an dem Grenzzyklus des rekonstruierten deterministischen Systems. Die sich ergebenden Grenzzyklen wurden optisch mit der Lösung des Van-der-Pol-Oszillators ohne stochastische Kraft verglichen. Darüber hinaus wurde die Stabilität der periodischen Orbits nach dem Einschwingvorgang mittels Floquet-Multiplikatoren (siehe Kapitel 2.1) in Abhängigkeit von der Glättung untersucht. Abbildung 4.10 zeigt den mittels Driftschätzung rekonstruierten deterministischen Anteil der rechten Handseite von Gleichung (4.6) für verschieden starke Glättungen, die gekennzeichnet sind durch die Fensterbreite w . Darüber hinaus ist in rot und blau jeweils eine Trajektorie mit den Anfangsbedingungen $(x_0, y_0) = (0, 1.65)$ respektive $(x_0, y_0) = (0, 2.25)$ dargestellt, die mittels des geschätzten Driftvektorfeldes entsprechend Gleichung (4.7) simuliert wurden und von innen beziehungsweise außen auf den Grenzzyklus des rekonstruierten Systems spiraltten. Um etwaige Unterschiede zu der Lösung des ungestörten Van-der-Pol-Oszillators sichtbar zu machen, wurde dessen Grenzzyklus zusätzlich in grün in Abbildung 4.10 abgebildet. Man kann deutlich erkennen, dass der Einschwingvorgang der Trajektorien länger dauert, je stärker die benutzte Glättung ist. Dort, wo die blaue und die rote Trajektorie sich nahezu berühren, ist der Grenzzyklus des rekonstruierten deterministischen Anteils zu verorten.

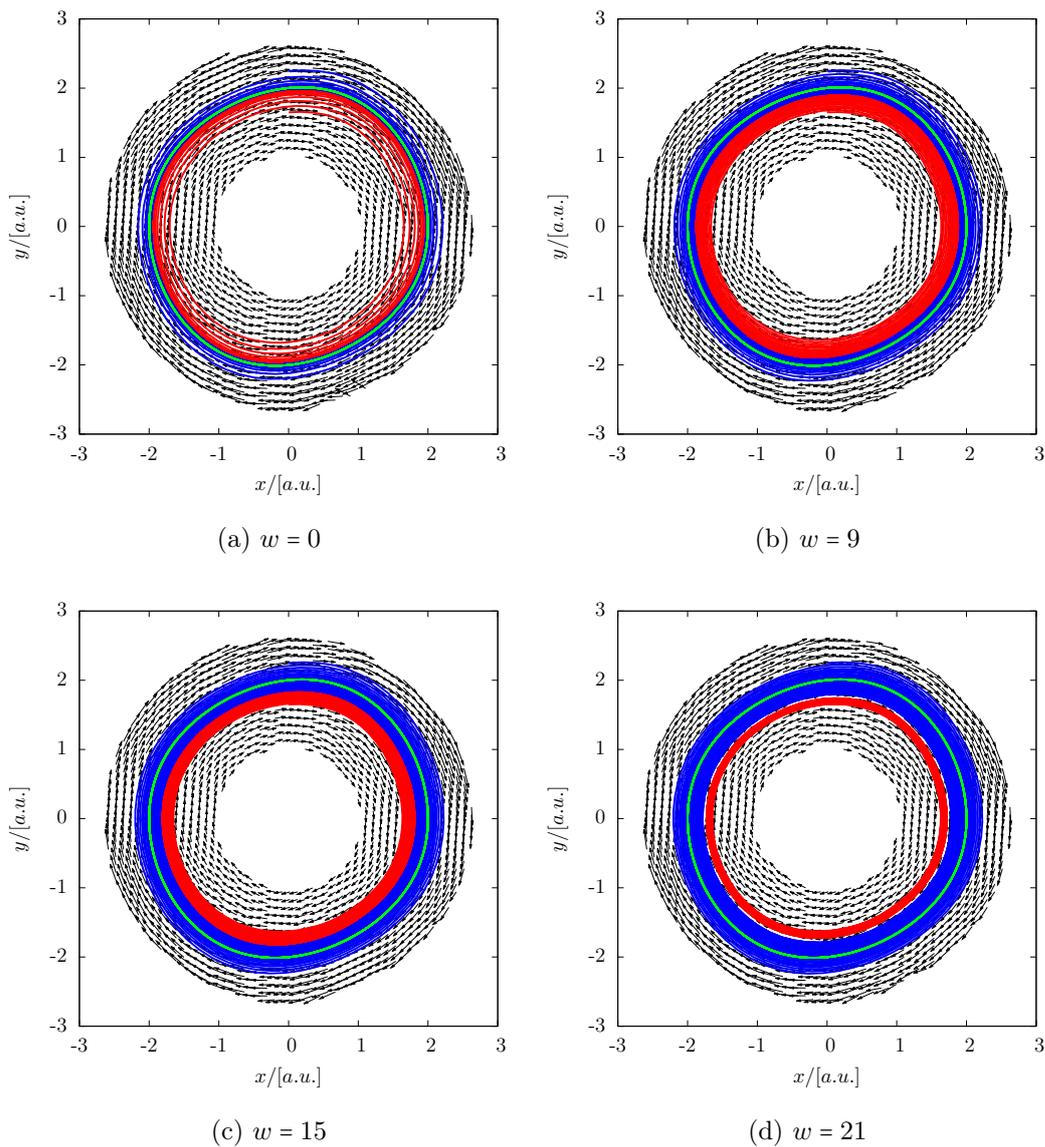


Abbildung 4.10: Rekonstruiertes Driftvektorfeld für verschiedene Glättungen w . Anhand des Driftvektorfeldes simulierte Trajektorien für $(x_0, y_0) = (0, 1.65)$ (—) und $(x_0, y_0) = (0, 2.25)$ (—) und Lösung des Van-der-Pol-Oszillators (—) mit $\varepsilon = 0.1$ (ohne Messrauschen).

Liegt dieser bei der Benutzung der Rohdaten fast deckungsgleich auf der Lösung des ungestörten Oszillators (grün), entfernen sich die Lösungen für steigende Glättung immer mehr voneinander. Die anhand des Driftvektorfeldes berechnete Lösung hat eine kleinere Amplitude als der Grenzzyklus des Van-der-Pol-Oszillators. Mit steigender Glättung verändert sich nicht nur die Amplitude, sondern auch die Periodendauer

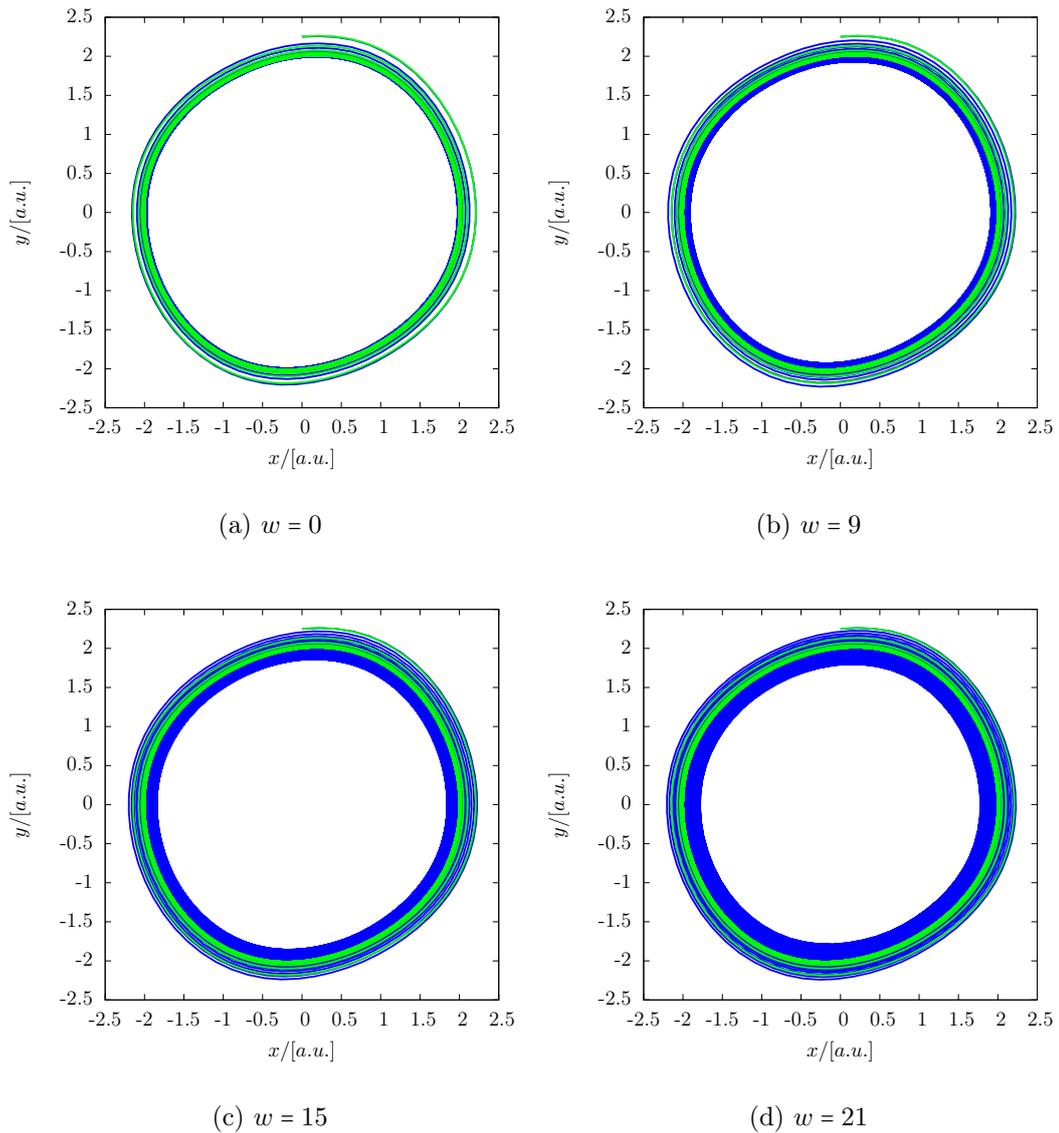


Abbildung 4.11: Vergleich zwischen simulierten Trajektorien $((x_0, y_0) = (0, 2.25))$ im Phasenraum für den ungestörten Van-der-Pol-Oszillator (—) und das geschätzte Driftvektorfeld (—).

des Orbits, was man daran erkennt, dass sich die Länge der Vektoren zur Mitte des Phasenraums kaum verändert. Damit bleiben auch die Änderungsraten unverändert, was bei geringerem Weg im Phasenraum eine kürzere Periodendauer bedeutet. Der Grenzyklus des rekonstruierten Systems weicht also mit steigender Glättung stärker von der exakten Lösung ab. Demnach wäre es zu empfehlen, keine Glättung zu benutzen. Es bleibt aber zu überprüfen, inwiefern die Stabilität der periodischen

Orbits des rekonstruierten Systems mit der des Originalsystems übereinstimmt.

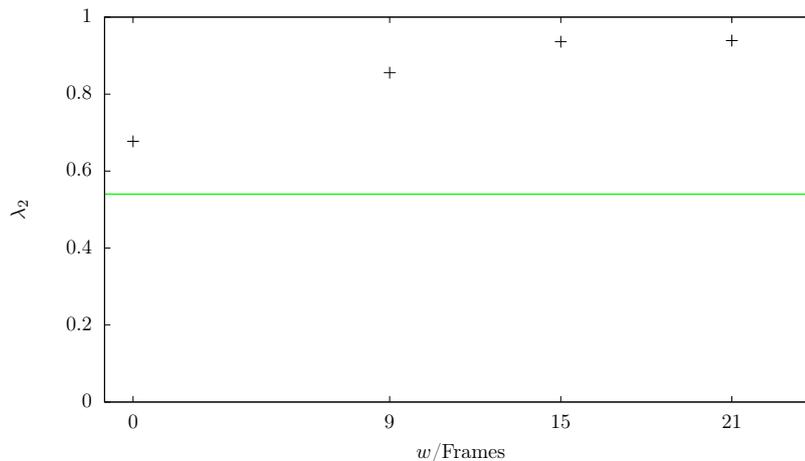


Abbildung 4.12: Der von Eins verschiedene Eigenwert λ_2 der Mondoromiematrix in Abhängigkeit von der verwendeten Glättung w . Der Floquetmultiplikator des ungestörten Van-der-Pol-Oszillators ($\varepsilon = 0.1$) liegt bei $\lambda_2 = 0.54$ (—).

Dazu lässt sich in einem ersten Schritt das qualitative Zeitverhalten der simulierten Trajektorien mit der des ungestörten Systems vergleichen. Eine quantitative Beschreibung des Unterschieds erfolgt über die Berechnung der Floquetexponenten. Berechnet man die Trajektorie mit der Anfangsbedingung $[(x_0, y_0) = (0, 2.25)]$ sowohl für das aus den Daten bestimmte Driftfeld als auch für den ungestörten Van-der-Pol-Oszillator, so erhält man die in Abbildung 4.11 dargestellten Verläufe in Abhängigkeit von der Stärke der Glättung. Auch hier ist zu erkennen, dass das Zeitverhalten der rekonstruierten Lösung (blau) bei $w = 0$ die geringste Abweichung von dem ungestörten Originalsystem (grün) aufweist. Dieses Ergebnis spiegelt sich auch in der Floquetanalyse wider (vergleiche Abbildung 4.12). Der von Eins verschiedene Floquetmultiplikator des ungestörten Systems liegt bei $\lambda_2 = 0.54$. Der geringste Unterschied zwischen den Floquetmultiplikatoren des periodischen Orbits vom ungestörten Van-der-Pol-Oszillator und dem rekonstruierten Driftfeld ist bei $w = 0$ und somit beim Datensatz ohne Glättung zu entdecken. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für Daten, die keinem Messrauschen unterliegen und einem Langevin-Prozess entstammen, die Filterung der Daten vor Berechnung der Ableitung zur Bestimmung des Driftvektorfeldes nachteilig ist. Sowohl das Stabilitätsverhalten als auch die Lösung des periodischen Orbits werden stark verändert und weichen umso stärker von der exakten Lösung ab, je stärker die Glättung ist.

Synthetische Daten mit Messrauschen

Wir haben bisher synthetische Daten betrachtet. Bei realen Messungen muss hingegen immer mit einem geringen Messfehler gerechnet werden, der eine Variabilität

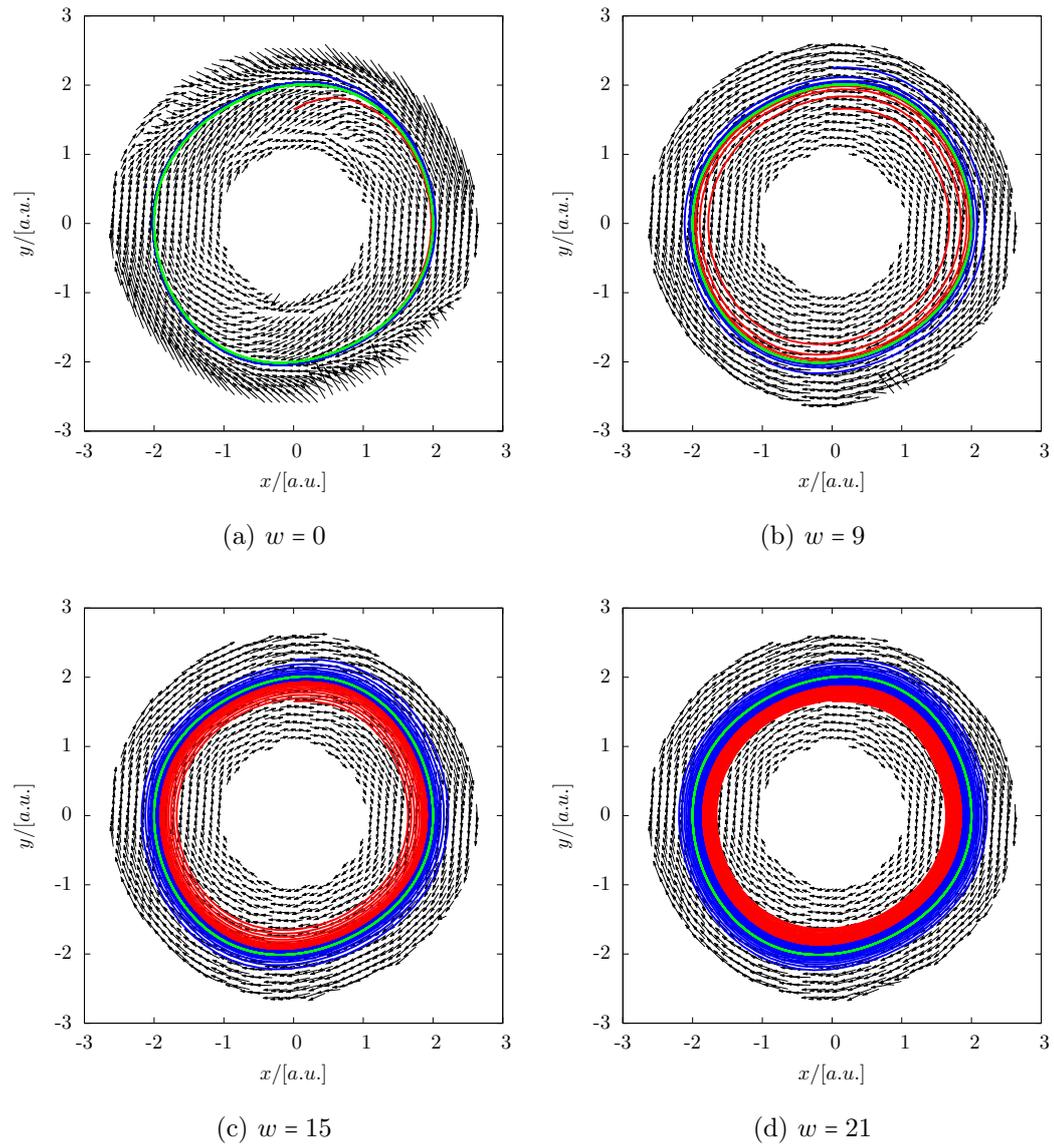


Abbildung 4.13: Rekonstruiertes Driftvektorfeld für verschiedene Glättung w . Anhand des Driftvektorfeldes simulierte Trajektorien für $(x_0, y_0) = (0, 1.65)$ (—) und $(x_0, y_0) = (0, 2.25)$ (—) und Lösung des Van-der-Pol-Oszillators (—) mit $\varepsilon = 0.1$ (mit Messrauschen).

der Daten hervorruft, die ihren Ursprung nicht in der Zufallskraft des Prozesses hat. Wir hatten bereits erklärt, dass es im Zusammenhang mit starkem Messrauschen von Vorteil sein kann, die Daten vor der numerischen Differentiation zu glätten, um den Fehler bei der Driftschätzung zu minimieren. Um zu untersuchen, wie stark die Glättung dabei sein kann, haben wir der Koordinate $x(t)$ nach der Simulation

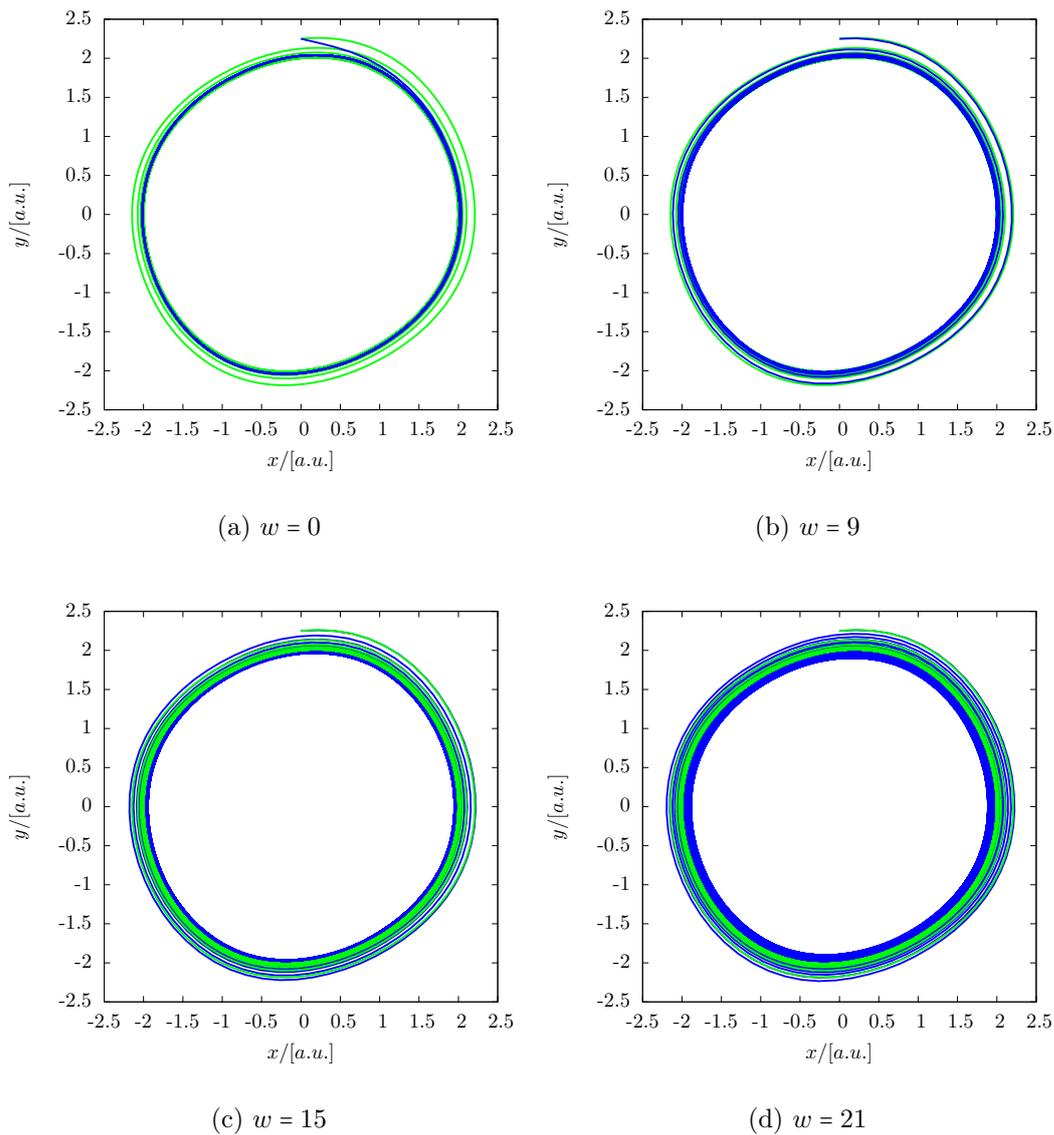


Abbildung 4.14: Vergleich zwischen simulierten Trajektorien ($(x_0, y_0) = (0, 2.25)$) im Phasenraum für den ungestörten Van-der-Pol-Oszillator (—) und das geschätzte Driftvektorfeld (—) (mit Messrauschen).

(entsprechend (4.6)) einen additiven normalverteilten Rauschterm hinzugefügt und wiederum $y(t)$ mittels Differenzenquotient für verschiedene starke Glättungen w berechnet. Das Driftvektorfeld und die simulierten Trajektorien sind in Abhängigkeit von w in Abbildung 4.13 zu sehen. Man erkennt wiederum, dass für steigende Glättungen der Abstand zwischen dem Grenzzyklus des Ursprungssystems (grün) und dem Grenzzyklus, der sich durch Rekonstruktion des deterministischen Anteils ergibt

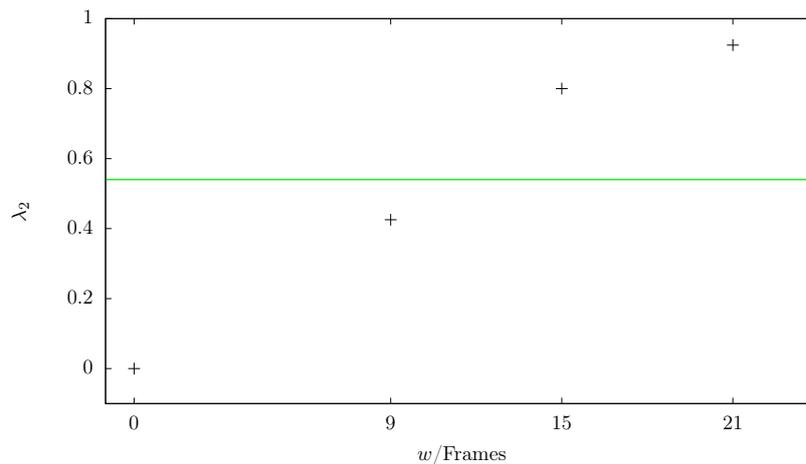


Abbildung 4.15: Der von Eins verschiedene Eigenwert λ_2 der Mondoromiematrix in Abhängigkeit von der verwendeten Glättung w . Der Floquetmultiplikator des ungestörten Van-der-Pol-Oszillators ($\varepsilon = 0.1$) liegt bei $\lambda_2 = 0.54$ (—) (mit Messrauschen).

(da wo sich sich die rote und blaue Trajektorie anschmiegen), wächst. Vor allem das in Abbildung 4.13a dargestellte Driftvektorfeld zeigt klare Veränderungen zu dem in Abbildung 4.11a, und zwar eine viel stärkere Neigung des Vektorfeldes zum Grenzzyklus hin. Dieser Sachverhalt zeigt sich auch in den schnell zum Grenzzyklus relaxierenden Trajektorien (rot, blau). Zwar ist der Unterschied der in Abbildung 4.13a dargestellten Trajektorien für $t \gg 1$ zu der Lösung des ungestörten Oszillators (grün) minimal, jedoch unterscheidet sich das Zeitverhalten der Trajektorie erheblich, was besser in Abbildung 4.14a zu sehen ist. Die Trajektorie für den Van-der-Pol-Oszillator ohne Zufallskraft (grün) braucht viel länger, um auf den Grenzzyklus zu spiralen, als die Trajektorie, die mittels Driftschätzung berechnet wurde. Die Stabilität des Systems würde in diesem Fall durch die Driftschätzung viel stärker bewertet, als sie es in Wirklichkeit ist. Betrachtet man nun die Ergebnisse der gefilterten Datensätze in den Abbildungen 4.13 und 4.14, so fällt auf, dass die Veränderungen, in Abhängigkeit von der Filterung, im Zeitverhalten wie auch in den Unterschieden der Grenzzyklen gegenüber der exakten Lösung weniger stark ausgeprägt sind, als es beim Datensatz ohne Messrauschen der Fall war. Im Gegensatz zu dem vorher gezeigten Beispiel, ist hierbei die größte Übereinstimmung des Grenzzyklus und seiner Stabilität mit dem Ursprungssystem bei einer Filterung von $w = 9$ Frames zu erkennen. Die von Eins verschiedenen Eigenwerte λ_2 der Floquetanalyse (Abbildung 4.15) unterstreichen den Eindruck, dass bei Berechnung der Drift ohne Filterung eine viel zu große Stabilität des Orbits suggeriert wird ($\lambda_2 \ll 0.54$). Für größere Glättungen wird die Stabilität des Orbits unterschätzt, da $\lambda_2 > 0.54$ ist. Für den von uns untersuchten Van-der-Pol-Oszillator mit Zufallskraft und Messrauschen führt also eine geringe Glättung der Zeitreihe $x(t)$ vor Bestimmung der Ableitung $y(t)$ zu einer besseren Schätzung der Drift.

Gemessener Winkel-Zeit-Verlauf

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir uns mit synthetischen Daten beschäftigt, die es uns ermöglichten, das geschätzte Driftvektorfeld mit der exakten Lösung zu vergleichen und somit eine geeignete Glättung des Datensatzes vorzunehmen. Die Wahl der zu verwendenden Glättung hängt aber im Einzelfall von vielen Faktoren ab (Stärke des Messrauschens, Systemkonfiguration, etc.) und muss daher von Fall zu Fall angepasst werden. Wir werden im Folgenden, mit Hilfe der im vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Informationen, versuchen, die Wahl einer geeigneten Glättung für die im Zuge dieser Arbeit aufgenommenen Winkel-Zeit-Verläufe vorzunehmen. Dazu wollen wir die Auswirkung der Filterung bei der Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit auf die Schätzung des Driftvektorfeldes untersuchen. Die Stabilität des sich ergebenden Grenzyklus wird anhand der Floquet-Multiplikatoren bewertet. Dabei könnten im Hinblick auf das vorangegangene Kapitel sehr kleine Eigenwerte λ_2 bei Auswertung der Rohdaten darauf hindeuten, dass die Daten im Vorfeld geglättet werden müssen. Große Werte für λ_2 bei großer Glättung hingegen würden auf eine Unterschätzung der Stabilität der Orbits hindeuten. Wir untersuchen diesen Zusammenhang an einem für die Modellvalidierung aufgenommenen Datensatz. Dabei handelt es sich um einen Winkelzeitverlauf $\varphi(t)$ eines Probanden mit 80000 Datenpunkten, der mit einer Frequenz von $f = 400$ Hz aufgenommen wurde. Die Aufgabe des Probanden war es, eine zyklische Armbewegung bei vorgegebener Winkelamplitude von 30° mit einer Frequenz von $f_\varphi = 1$ Hz möglichst genau durchzuführen. Abbildung 4.16 zeigt einen Auszug des gemessenen Innenarmwinkels $\varphi(t)$ auf unterschiedlichen Zeitskalen. Man sieht, dass die Amplitude des Winkelzeitverlaufs, ähnlich wie die Amplitude der x -Komponente in Abbildung 4.8, nur wenig schwankt. Auf den ersten Blick wirkt $\varphi(t)$ sehr glatt, nur bei näherer Betrachtung fallen vor allem an den Extrema kleine Schwankungen auf, die vermutlich Messrauschen darstellen. Berechnet man nun die Winkelgeschwindigkeit ohne vorherige Filterung des Winkel-Zeit-Verlaufs, so ergibt sich ein stark verrauschter Winkelgeschwindigkeits-

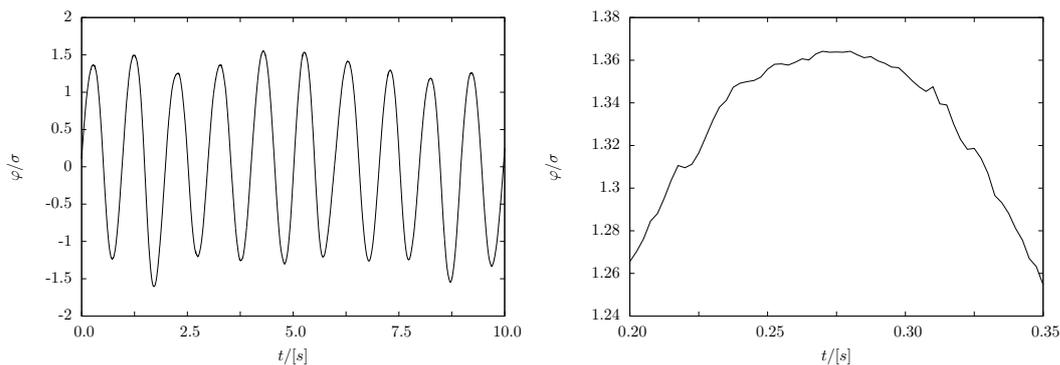


Abbildung 4.16: Ungefilterte gemessener Winkelzeitverlauf $\varphi(t)$ einer zyklischen Bewegung normiert auf die Standardabweichung σ auf unterschiedlichen Zeitskalen.

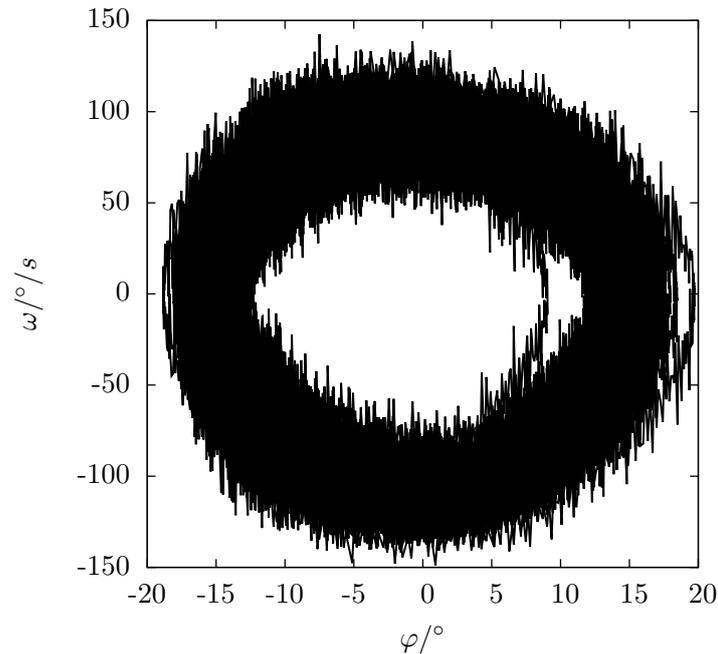


Abbildung 4.17: Ungefilterte Trajektorie einer gemessenen zyklischen Bewegung im Phasenraum (φ, ω) . Der Winkel $\varphi(t)$ wurde mittelwertsbereinigt.

Zeit-Verlauf $\omega(t)$, und man erhält die in Abbildung 4.17 dargestellte Trajektorie im Phasenraum. Die Driftvektorfelder lassen sich, wie zuvor am Van-der-Pol-Oszillator gezeigt, in Abhängigkeit von der Stärke der benutzten Glättung w zur Bestimmung des Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Verlaufs darstellen (siehe Abbildung 4.18). Wir haben wiederum anhand des geschätzten Driftvektorfelds zwei Trajektorien simuliert, um den zugrundeliegenden Grenzyklus untersuchen zu können. Die Anfangsbedingungen der Trajektorien wurden dabei so gewählt, dass die Trajektorien sich von innen (rot) respektive von außen (blau) dem Grenzyklus nähern. Der Grenzyklus des rekonstruierten Systems liegt zwischen der roten und blauen Trajektorie in Abbildung 4.18. Für geringe Filterung ($w = 9$) zeigt das bestimmte Driftvektorfeld eine starke Neigung zum Grenzyklus hin. Die Abweichung vom Grenzyklus relaxiert daher für die in rot und blau dargestellten Trajektorien sehr schnell. Die Zeit, die die Trajektorien benötigen, um sich dem Grenzyklus zu nähern, nimmt mit steigender Glättung zu, wie es auch beim Van-der-Pol-Oszillator zu sehen war. Des Weiteren nimmt der Radius des Grenzyklus mit steigender Glättung ab, was bei relativ konstanter Vektorlänge zu einer Verkürzung der Schwingungsdauer führt. Da die Lösung des zugrundeliegenden Systems in diesem Fall natürlich nicht bekannt ist, fällt die geeignete Wahl der Glättung schwerer. Aufgrund der vorher gesammelten Erfahrungen scheint es bei der in dieser Arbeit genutzten Methode zur Driftschätzung,

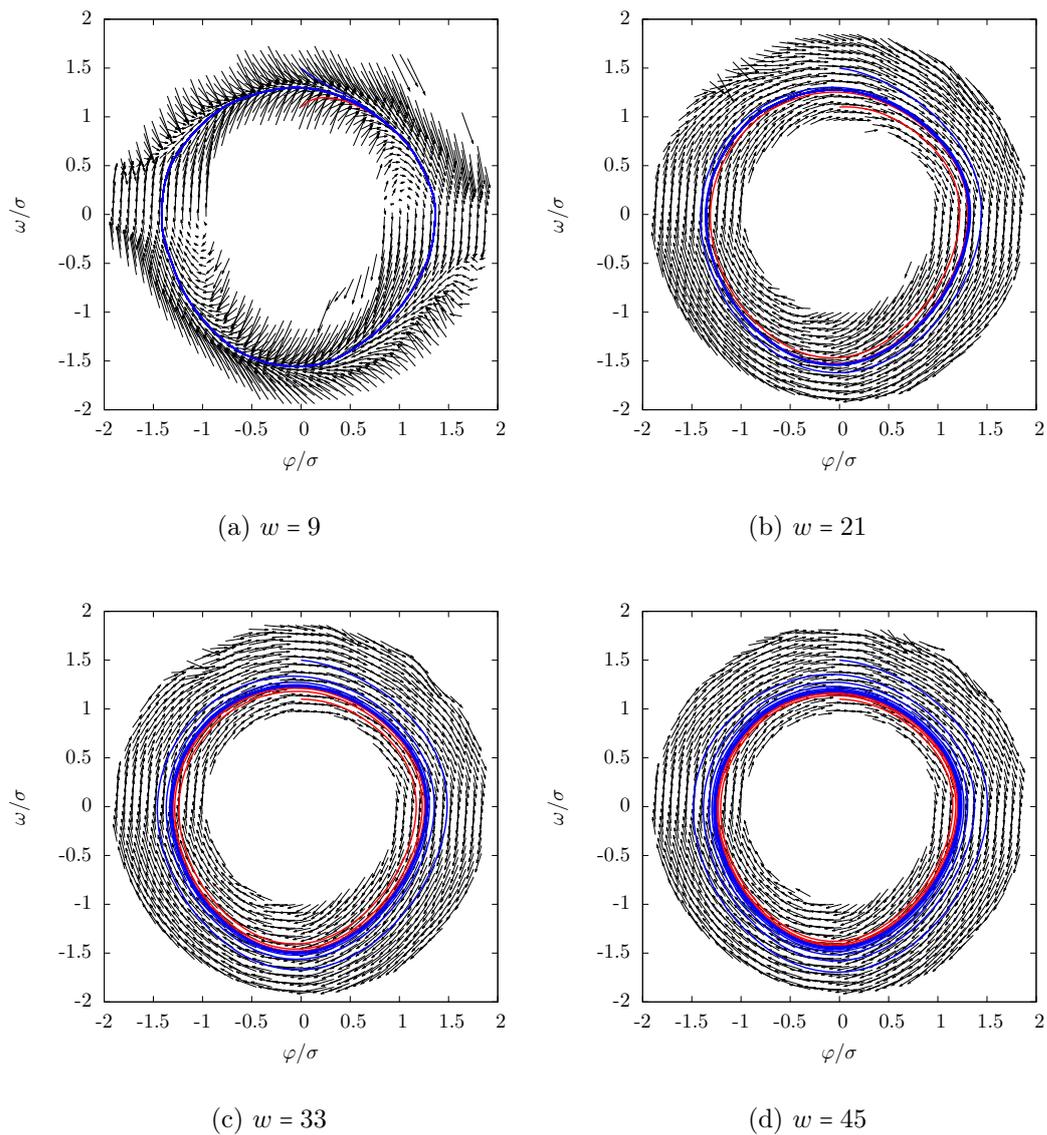


Abbildung 4.18: Rekonstruiertes Driftvektorfeld für verschiedene Glättung w . Anhand des Driftvektorfeldes simulierte Trajektorien, die von außen (—) und von innen (—) auf den Grenzyklus spiralen.

empfehlenswert eine Glättung zu benutzen, da, wie beim Van-der-Pol-Oszillator mit Messrauschen, die Stabilität des Systems sonst überschätzt erscheint. Selbst für starke Glättung ($w = 45$) scheinen die in Abbildung 4.18 dargestellten Trajektorien ein plausibles Zeitverhalten zu haben. Dies spiegelt sich auch in moderaten Floquetmultiplikatoren ($\lambda_2 \approx 0.5$) wider, die sich in etwa in der Größenordnung des im vorangegangenen Kapitel untersuchten Van-der-Pol-Oszillators bewegen ($\lambda_2 = 0.54$).

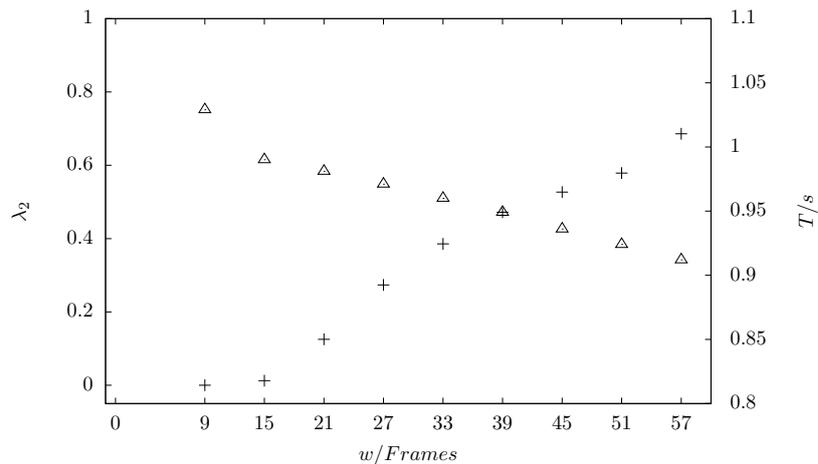


Abbildung 4.19: Der von Eins verschiedene Eigenwert λ_2 der Monodromiematrix (+) und die Schwingungsdauer T des entsprechenden periodischen Orbits (Δ) in Abhängigkeit von der verwendeten Glättung w .

Die Schwingungsdauer der simulierten Lösung kann zur Eingrenzung des Glättungsparameters w genutzt werden. Die aufgenommenen Messdaten zeigten im Mittel eine sehr gute Übereinstimmung mit der im Versuch geforderten Frequenz von einem Hertz, so dass wir von den Ergebnissen der Simulation eine geringe Abweichung von dieser Schwingungsdauer fordern können. Abbildung 4.19 zeigt den von Eins verschiedenen Eigenwert der Monodromiematrix und die jeweils zugehörige Schwingungsdauer des Orbits in Abhängigkeit von der benutzten Glättung. Es ist klar zu erkennen, dass auch in diesem Fall die Stabilität des Orbits, der sich aus der Driftschätzung ergibt, mit steigender Glättung abnimmt (steigender Betrag des Eigenwerts der Monodromiematrix). Gleichzeitig nimmt auch die Schwingungsdauer mit steigender Glättung ab. Bei einer Fensterbreite von $w = 57$ beträgt die Abweichung von der im Experiment geforderten Frequenz f_φ fast zehn Prozent. Für kleine Filterung wird die Stabilität des zugrundeliegenden Orbits vermutlich überschätzt, für große Filterungen die Schwingungsdauer auf dem Orbit unterschätzt. Damit scheint bei dieser Messreihe eine Filterung mit einer Fensterbreite w im mittleren Bereich (in etwa zwischen 21 und 39 Frames) sinnvoll. van Mourik et al. (2006) nutzten für die Driftbestimmung bei Messdaten zyklischer Armbewegungen mit einer Messfrequenz von 500 Hz eine Fensterbreite von 35 Frames. Um eine Glättung auf demselben Zeitfenster bei einer reduzierten Messfrequenz von 400 Hz, zu erhalten, muss die Fensterbreite in etwa bei $w = 29$ Frames liegen. Wir werden im Folgenden also bei der Auswertung eine Glättung mit dem Savitzky-Golay-Filter fünfter Ordnung und eine Fensterbreite von $w = 29$ Frames benutzen.

4.2.2 Stabilität der zyklischen Armbewegung

Die Modellrechnung in Abschnitt 4.1.4 hat ergeben, dass die *open-loop-Steuerung* einer zyklischen Armbewegung für $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ stabil ist, für $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ hingegen nicht. Im Folgenden Abschnitt werden wir untersuchen, ob die im Experiment (Abschnitt 4.1.3) gemessene Bewegungsausführung $\varphi(t)$ Unterschiede in den Winkelintervallen aufweist. Dazu wird die Stabilität der Bewegung quantifiziert. Um dies zu ermöglichen, wird der deterministische Anteil der zweidimensionalen Zeitreihe $\varphi(t), \omega(t)$ geschätzt und anhand dieses Driftvektorfelds die Stabilität des Systems mittels Floquet-Analyse bestimmt.

Methoden

Die zyklische Bewegung des Unterarms wurde für die vier Probanden aus Abschnitt 4.1.3 auf ihre Stabilität hin untersucht. Dafür wurde zunächst für jeden Datensatz die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ mittels Differenzenquotient aus $\varphi(t)$ berechnet (Savitzky-Golay-Filter fünfter Ordnung mit Fensterbreite $w = 29$). Anhand der zweidimensionalen Zeitreihe $(\varphi(t), \omega(t))$, bestehend aus dem nicht-geglätteten Winkel-Zeit-Verlauf und der Winkelgeschwindigkeit, wurde das Driftvektorfeld geschätzt. Dazu wurde das zweidimensionale Driftvektorfeld $\hat{D}(\varphi, \omega)$ mittels Nadaraya-Watson-Schätzer (2.125) für das Zeitinkrement von $\tau = 1/400$ s bestimmt. Für den so rekonstruierten deterministischen Anteil des stochastischen Prozesses wurde eine Referenztrajektorie mit Hilfe von Gleichung (2.130) simuliert und somit die Lage des zugrundeliegenden Grenzyklus ermittelt. Dieser Grenzyklus wurde als Referenztrajektorie zur Bestimmung der Monodromiematrix und ihrer Eigenwerte, den Floquetmultiplikatoren, benutzt. Ist der Betrag der Floquetmultiplikatoren kleiner Eins, so ist der untersuchte Orbit stabil, hingegen für Werte größer Eins instabil. Diese Multiplikatoren wurden dann für die verschiedenen Versuchsbedingungen verglichen, um eventuelle Stabilitätsunterschiede in der Bewegungsausführung zu detektieren. Das geschätzte Driftvektorfeld für die kinematischen Daten lässt damit Rückschlüsse zu, ob die Bewegungsausführung in den verschiedenen Winkelregimen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ per se unterschiedliche Stabilität aufweist.

Ergebnisse

In Abbildung 4.20 sind die mittels Nadaraya-Watson-Schätzer bestimmten Driftvektorfelder für alle Probanden und die beiden Versuchsbedingungen aufgetragen. Dabei entsprechen die in der linken Spalte aufgetragenen Vektorfelder einer Bewegung im Intervall $\varphi \in [65, 95]$. Die Darstellungen in der rechten Spalte spiegeln somit das Driftvektorfeld für die zyklische Bewegung im Intervall $\varphi \in [105, 135]$ wider. Jede Zeile hingegen entspricht den Ergebnissen eines Probanden. Die Bewegungen der Probanden weisen unterschiedlich starke Variabilität auf. Diese ist an der Breite des vom Driftvektorfeld gefüllten Bereichs zu erkennen. Darüber hinaus sind für jeden Probanden und jede Versuchsbedingung zwei simulierte Trajektorien zu sehen, die sich dem Grenzyklus des Systems von innen beziehungsweise von außen anschmiegen.

Eine Veränderung der Gestalt des Grenzzyklus in Abhängigkeit von der Versuchs-

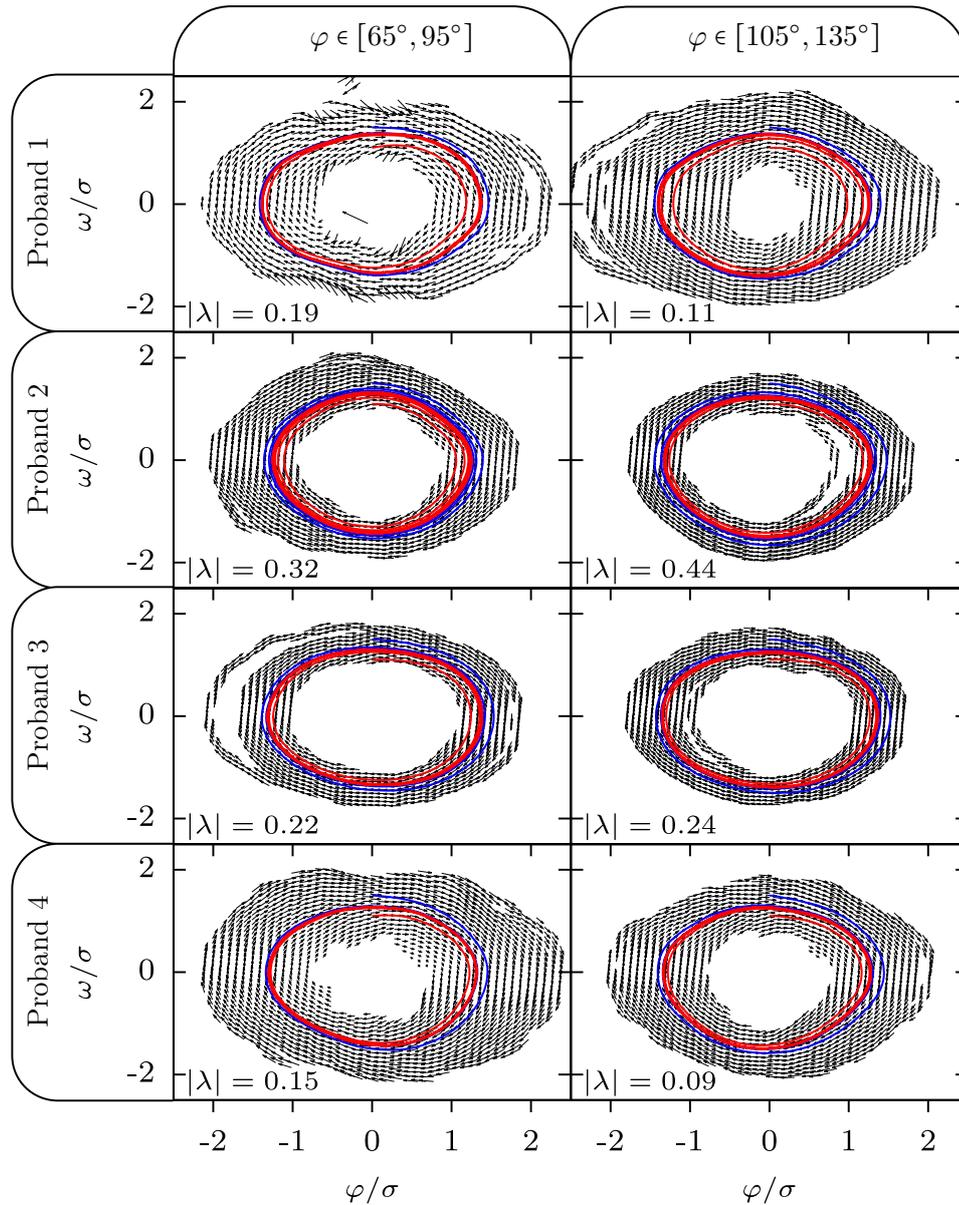


Abbildung 4.20: Mit Nadaraya-Watson-Schätzer bestimmtes Driftvektorfeld $\hat{D}(\varphi, \omega)$ aller Probanden (Zeile) für die Schwingung um kleinen (linke Spalte) und großen Innenarmwinkel (rechte Spalte). Negative Werte von φ entsprechen Bereichen mit großer Beugung des Arms. Anhand des Driftvektorfelds wurden Trajektorien mit Anfangsbedingungen $(\varphi_0, \omega_0) = (0, 1.1)$ (—) und $(\varphi_0, \omega_0) = (0, 1.5)$ (—) simuliert. Für jede Versuchsbedingung ist der Betrag des von Eins verschiedenen Floquet-Multiplikators $|\lambda|$ angegeben.

bedingung ist nicht zu erkennen. Der Betrag des von Eins verschiedenen Eigenwerts der Monodromiematrix (λ) ist jeweils in der Abbildung eingetragen und gilt als Maß für die Stabilität des dazugehörigen Orbits. Die simulierten Trajektorien wurden nach dem Einschwingvorgang als Referenztrajektorie zur Bestimmung der Floquetmultiplikatoren λ_i genutzt. Für alle Probanden und Versuchsbedingungen sind die Floquetmultiplikatoren dem Betrag nach kleiner Eins. Damit sind für alle acht Fälle die geschlossenen Orbits stabil. Je kleiner $|\lambda|$, umso schneller relaxieren gestörte Zustände (kleine Störungen vorausgesetzt) hin zum Orbit. Zunächst fällt bei Proband 1 und Proband 4 auf, dass eine hohe Variabilität in der Bewegungsausführung nicht zwangsweise mit einer geringeren Stabilität des geschlossenen Orbits einhergehen muss. Darüber hinaus gibt es keine klare Korrelation zwischen Versuchsbedingung und Stabilität des Orbits.

Diskussion

Zunächst mag die relativ hohe Variabilität der Bewegung verwundern, jedoch handelt es sich bei der untersuchten Bewegung um eine freie Bewegung. Weder Oberarm, und somit das Schultergelenk, noch das Ellbogengelenk waren in ihrer Position komplett fixiert. Der Oberarm wurde lediglich durch eine Auflage unterstützt. Aufgrund der zweigelenkigen Funktion des Musculus biceps brachii führt eine Kontraktion des Muskels zur Anteversion des Oberarms. Betrachtet man den Versuchsaufbau aus Abbildung 4.2, so würde eine Bewegung zwischen den beiden Zielmarkierungen bei festem Winkel $\alpha = 45^\circ$ eine Bewegung mit Schwingungsamplitude $\Delta\varphi = 30^\circ$ erzeugen. Wird die Bewegung zwischen den Zielpunkten trotz Anteversion des Oberarms korrekt durchgeführt, muss die Schwingungsamplitude von den vorgegebenen 30° abweichen. Da wir den Winkel zwischen Ober- und Unterarm gemessen haben, ist diese Abweichung in den Daten zu erkennen. Ein Teil der Variabilität der gemessenen zyklischen Bewegung ist somit zwangsweise auf die Kontraktion der mehrgelenkigen Muskeln und damit auf eine Bewegung im Schultergelenk zurückzuführen. Darüber hinaus wurden die Zielmarkierungen während der Versuchsausführung nicht immer exakt mit der am Handgelenk angebrachten Markierung getroffen. Da die Bewegung möglichst natürlich und damit möglichst frei erfolgen sollte, ist diese Variabilität nicht komplett auszuschließen und war vielmehr sogar erwünscht. Um durch die Driftschätzung ein möglichst vollständiges Bild des deterministischen Systems zu bekommen, muss ein möglichst großer Bereich des Phasenraums *erkundet* werden. Nur für den abgetasteten Bereich des Phasenraums kann die Drift geschätzt und damit Information über das zugrunde liegende System erzeugt werden.

Betrachtet man die Stabilität $|\lambda|$ in Abhängigkeit von der Variabilität der Bewegung, so ist es auf den ersten Blick kontraintuitiv, dass eine Bewegungsausführung mit größerer Variabilität (Breite des Driftfeldes in Abbildung 4.20) mit einer höheren Systemstabilität (kleineres $|\lambda|$) einhergeht. Jedoch gibt es einige Beispiele der menschlichen Bewegung, die eine ähnliche Abhängigkeit zeigen. So konnten Dingwell und Marin (2006) durch Vergleich der Lyapunov-Exponenten bei unterschiedlichen Ganggeschwindigkeiten zeigen, dass langsames im Vergleich zu schnellem Gehen grö-

ßere Variabilität im Bewegungsmuster erzeugt, jedoch langsames Gehen eine höhere Stabilität aufweist. Auch Wei et al. (2008) zeigten bei einer zyklischen Bewegung, dass Stabilität und Variabilität der Bewegung anti-korrelieren. Die von Gottschall et al. (2009) untersuchten Gleichgewichtsdaten zeigen, dass sich die Bewegungsvariabilität aufgabenspezifisch verändert. Dies sei auf eine Veränderung des dynamischen Rauschens (der Diffusion) zurückzuführen und nicht etwa auf einen Unterschied im deterministischen Anteil (Drift) und damit auf die Stabilität des deterministischen Systems.

Die Form der Grenzyklen ist bei allen Probanden und beiden Bedingungen nahezu elliptisch, wobei die Halbachsen der Ellipse parallel zur φ - und ω -Achse liegen. Somit wären die Beuge- und Streckbewegung ohne Rauschterm quasi symmetrisch, was sich mit den Ergebnissen von van Mourik et al. (2006) bei zyklischer Bewegung des Unterarms deckt. Diese Symmetrie würde wahrscheinlich mit einem höheren Zusatzgewicht gebrochen werden, jedoch haben wir darauf verzichtet, da wir Ermüdungserscheinungen vermeiden und somit sicherstellen wollten, dass der untersuchte stochastische Prozess stationär ist.

Des Weiteren ist zu erkennen, dass der Zwischensubjekteinfluss auf den Floquetmultiplikator größer ist als die Innersubjektvariabilität. Zwar ist die Stichprobe mit $n = 4$ zu klein für eine quantitative Untersuchung, jedoch zeigen die Daten, abhängig vom Winkelintervall, keinerlei Veränderung in der Struktur des Orbits beziehungsweise keine Tendenz in der Veränderung der Stabilität. Es ist daher nicht zu erwarten, dass eine größere Stichprobe qualitativ andere Ergebnisse liefern würde. Somit bleibt festzuhalten, dass der Winkelbereich keinen nennenswerten Einfluss auf die Kinematik der Bewegung und damit auf die Stabilität der Bewegung zu haben scheint. Daher sind Unterschiede, die aufgrund der Selbststabilität des Muskelskelettsystems zu erwarten waren, nicht im Systemoutput, also der Bewegung, zu erkennen, sondern sollten durch eine veränderte Aktivierung beziehungsweise Koordination der Muskulatur kompensiert werden, was wir in den folgenden Abschnitten anhand des aufgezeichneten sEMGs genauer untersuchen werden.

4.2.3 Koordination der Muskulatur

Die unterschiedliche Stabilität zyklischer Armbewegungen bei *open-loop-Steuerung* in den Winkelintervallen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ zeigt sich laut den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts nicht in einer veränderten Bewegungsausführung. Eine mögliche Erklärung könnte sein, dass die fehlende Selbststabilität des Muskelskelettsystems durch eine stärkere wechselseitige Kopplung der Muskelaktivitäten und damit durch eine stärkere Abweichung von *open-loop-Kontrolle* kompensiert wird.

Um dies zu überprüfen, untersuchen wir, inwieweit der Winkelbereich (die Selbststabilität) einen Einfluss auf die intermuskuläre Koordination hat. Um die intermuskuläre Koordination auf der Ebene des sEMG-Signals untersuchen zu können, betrachten wir das sEMG, wie schon in Abschnitt 3.2, als stochastischen Prozess. Als Maß für die Koordination zwischen den Muskeln wird die stochastische Abhängigkeit

zwischen den sEMG-Signalen genutzt.

Methoden

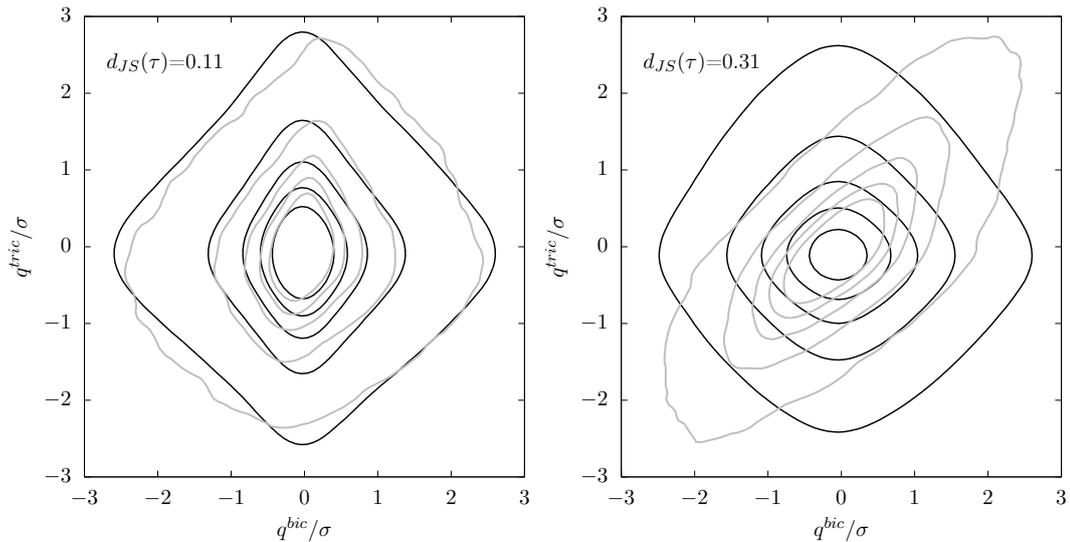
Für die weitere Untersuchung wurden die im Experiment (Abschnitt 4.1.3) für die Winkelintervalle $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ aufgenommenen sEMG-Daten von Bizeps, Barchioradialis und Trizeps mittelwertsbereinigt und auf Varianz $\sigma^2 = 1$ normiert. Die normierten sEMG-Daten werden mit q^m bezeichnet, wobei m für den jeweiligen Muskel steht.

Um Unterschiede in der intermuskulären Koordination in den Versuchsbedingungen zu beleuchten, wurden die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten von (q^{bic}, q^{bra}) und (q^{bra}, q^{tric}) mittels Kerndichteschätzung mit Epanechnikovkern (2.116) berechnet. Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen lässt sich faktorisieren. Wären zum Beispiel die sEMG-Signale von Bizeps und Brachioradialis stochastisch unabhängig, so müsste

$$p(q^{bic}, q^{bra}) \stackrel{\text{stoch.}=\text{unab.}}{=} p(q^{bic}) \cdot p(q^{bra}) \quad (4.8)$$

gelten. Berechnet man anhand des Datensatzes zusätzlich die Wahrscheinlichkeitsdichten $p(q^{(bic)})$ und $p(q^{(bra)})$, so kann die Gültigkeit von Gleichung (4.8) überprüft werden. Der Unterschied zwischen $p(q^{(bic)}, q^{(bra)})$ und $p(q^{(bic)}) \cdot p(q^{(bra)})$ gibt Aufschluss über die stochastische Abhängigkeit der Signale. Je größer die Ähnlichkeit zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten, umso geringer ist die stochastische Abhängigkeit der Signale. Als Maß für die Ähnlichkeit der Wahrscheinlichkeitsdichten dient im Folgenden die Jensen-Shannon-Divergenz (JSD) beziehungsweise der Jensen-Shannon-Abstand (d_{JS}), siehe Anhang (5). Da aufgrund der endlichen Laufzeit der Reflexe eine zeitliche Retardierung zwischen den Signalen verschiedener Muskeln möglich ist, wurde die stochastische Abhängigkeit für die Zeitreihen $q^{m_i}(t)$ und $q^{m_j}(t+\tau)$ in Abhängigkeit von τ untersucht. Als Ergebnis diente das Maximum über alle τ des Jensen-Shannon-Abstandes.

Bei dem von uns genutzten Setting (Elektrodenanzahl, Elektrodenabstand und Elektrodengröße) zur Messung der sEMG-Signale, tragen immer auch motorische Einheiten anderer Muskeln zum gemessenen Signal bei (vergleiche Lowery et al., 2003), was als Crosstalk (Winter et al., 1994) bezeichnet wird. Der Beitrag eines Muskels zum sEMG-Signal eines anderen Muskels (Crosstalk) nimmt mit steigender Entfernung zur Ableitstelle ab. Um nicht aufgrund von Crosstalk eine erhöhte stochastische Abhängigkeit und damit eine falsche Einschätzung der intermuskulären Koordination zu erhalten, wurde die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $p(q^{(bic)}, q^{(tric)})$ aufgrund des relativ geringen Abstands der Elektroden zueinander bewusst außer Acht gelassen. Dass dieses Vorgehen durchaus begründet erscheint, zeigt die Abbildung 4.21, in der die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten $p(q^{bic}, q^{tric})$ (—) und $p(q^{bic}) \cdot p(q^{bra})$ (—) zweier Probanden dargestellt sind. Eine starke Abweichung zwischen grauen und schwarzen Konturlinien bedeutet eine hohe stochastische Abhängigkeit von q^{bic} und q^{tric} . Proband 3 zeigt mit $d_{JS}(\tau) = 0.11$ eine geringe, Proband 2 hingegen mit $d_{JS}(\tau) = 0.31$ eine relative hohe Abhängigkeit zwischen q^{bic} und



(a) Proband 3: Geringe statistische Abhängigkeit zwischen den sEMG-Signalen von Bizeps und Trizeps ($d_{JS} = 0.11$). (b) Proband 2: Hohe statistische Abhängigkeit zwischen den sEMG-Signalen von Bizeps und Trizeps ($d_{JS} = 0.31$).

Abbildung 4.21: Konturdiagramm der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $p(q^{bic}, q^{tric})$ zwischen Musculus biceps brachii und triceps brachii für direkte Schätzung (—) und unter der Annahme, dass q^{bic} und q^{tric} stochastisch unabhängig sind (—). Die Konturlinien entsprechen dabei den Wahrscheinlichkeitsdichten 0.01, 0.05, 0.1, 0.15 und 0.2 (Abfolge von außen nach innen). Der Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten wird über den Jensen-Shannon-Abstand $d_{JS}(\tau)$ quantifiziert. Je größer d_{JS} , desto größer ist in diesem Fall die statistische Abhängigkeit zwischen q^{bic} und q^{tric} .

q^{tric} . Die Ergebnisse von Proband 3 sprechen also für eine relativ unabhängige Aktivierung von Bizeps und Trizeps, hingegen kann bei Proband 2 aufgrund möglichen Crosstalks eine Überbewertung der stochastischen Abhängigkeit nicht ausgeschlossen werden. Die maximalen Werte für d_{JS} wurden darüber hinaus immer für das Paar Bizeps/Trizeps gemessen, was ein weiteres Indiz für Crosstalk ist.

Ergebnisse

Um einen Aspekt der Kontrolle, nämlich die intermuskuläre Koordination, in den Winkelintervallen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ zu untersuchen, wurde die stochastische Abhängigkeit der sEMG-Signale mittels Jensen-Shannon-Abstandes d_{JS} in den Winkelintervallen verglichen. Je größer d_{JS} , umso größer ist der Zusammenhang zwischen den jeweiligen sEMG-Signalen und umso stärker sollte die intermuskuläre Koordination sein.

Abbildung 4.22 zeigt das Maximum von $d_{JS}(\tau)$ in den beiden Versuchsbedingungen für die Muskelpaare Brachioradialis/Bizeps und Brachioradialis/Trizeps aller vier

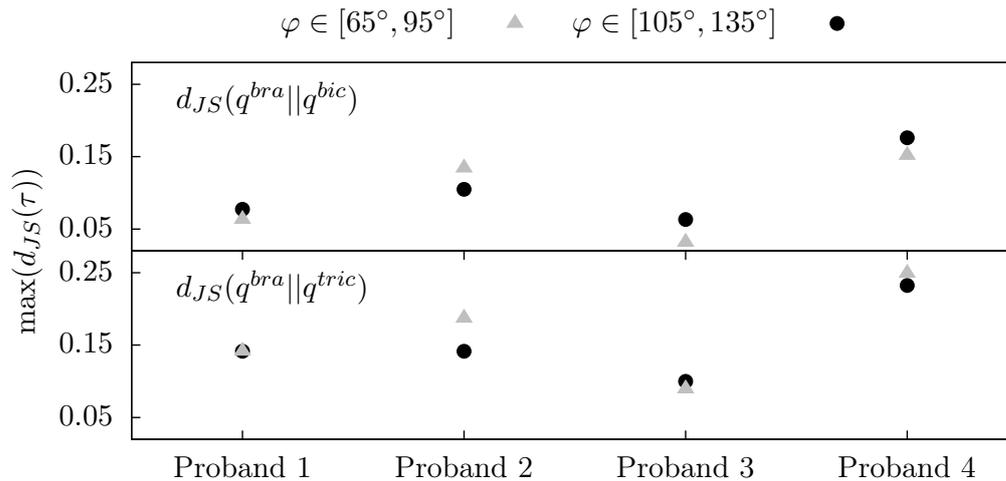


Abbildung 4.22: Statistische Abhängigkeit der mittelwertsbereinigten und varianznormierten sEMG-Signale q^{bra} , q^{bic} und q^{tric} für alle Versuchspersonen und beide Versuchsbedingungen ausgedrückt durch das jeweilige Maximum des Jensen-Shannon-Abstandes d_{JS} . Je größer d_{JS} , umso größer ist die statistische Abhängigkeit zwischen den untersuchten Signalen. Auf die Darstellung von $d_{JS}(q^{bic}||q^{tric})$ wurde wegen des möglichen *Crosstalks* verzichtet.

Probanden. Die stochastischen Abhängigkeiten $d_{JS}(q^{bra}||q^{tric})$ und $d_{JS}(q^{bra}||q^{bic})$ sind individuell sehr verschieden. So existiert für Proband 1 mit $d_{SD} \approx 0.05$ im Muskelpaar Brachioradialis/Trizeps nur eine geringe stochastische Abhängigkeit zwischen den sEMG-Signalen der beiden Muskeln. Bei Proband 4 fällt die stochastische Abhängigkeit der Signale mit $d_{SD} \approx 0.15$ wesentlich größer aus. Die stochastische Abhängigkeit (d_{JS}) ist für alle Probanden und beide Winkelintervalle zwischen den sEMGs von Brachioradialis und Trizeps (Abbildung 4.22 unten) größer als zwischen Brachioradialis und Bizeps (Abbildung 4.22 oben). Betrachtet man den Unterschied von d_{JS} in den Winkelintervallen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ (Abstand zwischen ▲ und ● in Abbildung 4.22), so ist dieser im Mittel für $d_{JS}(q^{bra}||q^{bic})$ größer als für $d_{JS}(q^{bra}||q^{tric})$, jedoch zeigt d_{JS} für beide Muskelpaare (*bra/bic*, *bra/tric*) keine eindeutige Abhängigkeit vom Winkelintervall, in dem die Bewegung durchgeführt wurde.

Diskussion

Bremner et al. (1991) untersuchten die Synchronisierung der Entladung motorischer Einheiten bei einer isometrischen Kontraktion der Fingermuskulatur. „Our results show that the discharges of motor units recorded from separate finger muscles co-active during simple finger movements are also significantly synchronized“ (Bremner et al., 1991). Lowery et al. (2003) konnten in Simulationen zeigen, dass durch die Synchronisierung motorischer Einheiten eine nennenswerte Korrelation und damit auch stochastische Abhängigkeit (der Umkehrschluss gilt im Übrigen nicht, siehe

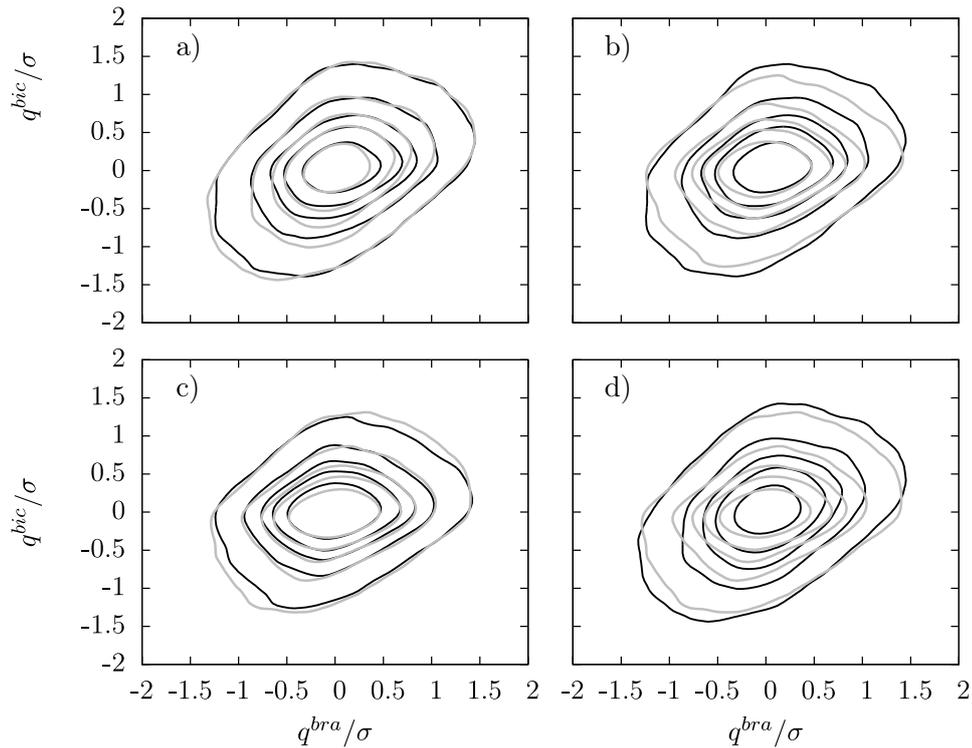


Abbildung 4.23: In a) sind die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten eines Probanden für die Versuchsdurchgänge mit $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und in c) die mit $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ abgebildet. In b) und d) werden paarweise Vergleiche zwischen den Verbundwahrscheinlichkeitsdichten aus Versuchsdurchgängen verschiedener Winkelbereiche dargestellt. Die Wahrscheinlichkeitsdichten gleichen Winkelbereichs ähneln sich stärker als die verschiedener Winkelbereiche.

Anhang 5) zwischen den jeweiligen sEMG-Signalen erzeugt wird. Die von uns gefundene stärkere stochastische Abhängigkeit zwischen Brachioradialis und Trizeps im Vergleich zu Brachioradialis und Bizeps könnte also auf eine stärkere Synchronisierung der motorischen Einheiten zurückzuführen sein, wobei diese ihren Ursprung in der für eine stabile zyklische Bewegung notwendigen Koaktivierung von Beugern und Streckern haben könnte. Es gibt, was die stochastische Abhängigkeit zwischen den sEMG-Signalen und damit den Parameter d_{JS} angeht, keine systematischen Unterschiede zwischen den Winkelintervallen, so dass für die vorliegende Stichprobe ($n = 4$) nicht auf eine veränderte intermuskuläre Koordination geschlossen werden kann. Es ist am ehesten vorstellbar, dass sich bei einer größeren Stichprobe $d_{JS}(q^{bra}||q^{bic})$ signifikante Unterschiede zwischen den Winkelintervallen zeigen würden. Jedoch ist es aufgrund der relativ hohen individuellen Streuung von d_{JS} und dem dagegen geringen Unterschied zwischen den Versuchsbedingungen fraglich, ob dieser Unterschied eine funktionelle Änderung der Kontrolle widerspiegeln würde. Anhand der vorliegenden Daten ist nicht davon auszugehen, dass die fehlende Selbststabilität im

Winkelintervall $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ durch eine stärkere wechselseitige Kopplung der Muskelaktivitäten kompensiert wird. Es kann dennoch sein, dass sich die Aktivierungen und damit die sEMG-Signale der einzelnen Muskeln in den beiden Winkelintervallen unterscheiden. Ein erstes Indiz dafür liefern die in diesem Abschnitt berechneten Verbundwahrscheinlichkeitsdichten. Vergleicht man die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten für die Versuchsdurchgänge, die im gleichen Winkelintervall durchgeführt wurden (a) und (c) in Abbildung 4.23), so erkennt man eine ziemlich große Übereinstimmung zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten. Stellt man in verschiedenen Winkelintervallen aufgenommene Datensätze gegenüber (b) und (d) in Abbildung 4.23), so zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen den Konturlinien.

Die Unterschiede zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten können mittels Jensen-Shannon-Abstand d_{JS} quantifiziert werden. Je größer d_{JS} , umso größer ist der Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten. Abbildungen 4.24 und 4.25 zeigen die Ähnlichkeit (d_{JS}) der Verbundwahrscheinlichkeitsdichten $p(q^{bra}, q^{bic})$ und $p(q^{bra}, q^{tric})$ aller vier Probanden für Datensätze des gleichen Winkelintervalls und zwischen Versuchsdurchgängen verschiedener Winkelintervalle. Die Untersuchung mittels Wilcoxon-Rangsummentest zeigt, dass die Ähnlichkeit der Wahrscheinlichkeitsdichten zwischen Versuchsdurchgängen gleichen Winkelintervalls signifikant ($p < 0.002$ für $p(q^{bra}, q^{tric})$, $p < 0.015$ für $p(q^{bra}, q^{bic})$) größer sind (kleineres d_{JS}) als zwischen Datensätzen unterschiedlicher Winkelintervalle. Dieses Ergebnis

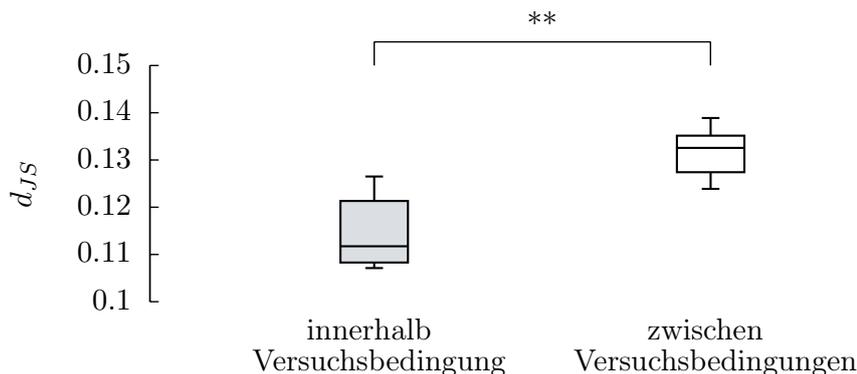


Abbildung 4.24: Ähnlichkeit zwischen den Verbundwahrscheinlichkeitsdichten von Brachioradialis und Bizeps $p(q^{bra}, q^{bic})$ für paarweise Vergleiche (innerhalb einer Versuchsperson) zwischen Datensätzen gleicher und unterschiedlicher Versuchsbedingungen (Winkelintervalle).

zeigt zum einen, dass die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten für Messwiederholungen in einem Winkelintervall gut reproduzierbar sind, zum anderen, dass sich die Verbundwahrscheinlichkeitsdichten in den beiden Winkelintervallen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ unterscheiden. Da dies nicht auf eine stärkere stochastische Abhängigkeit zurückzuführen ist, sollte der Unterschied in den Marginalverteilungen $p(q^{bra}) = \int p(q^{bra}, q^{bic}) dq^{bic}$ und $p(q^{bic}) = \int p(q^{bra}, q^{bic}) dq^{bra}$ und damit in den sEMG-Daten der einzelnen Muskeln zu finden sein.

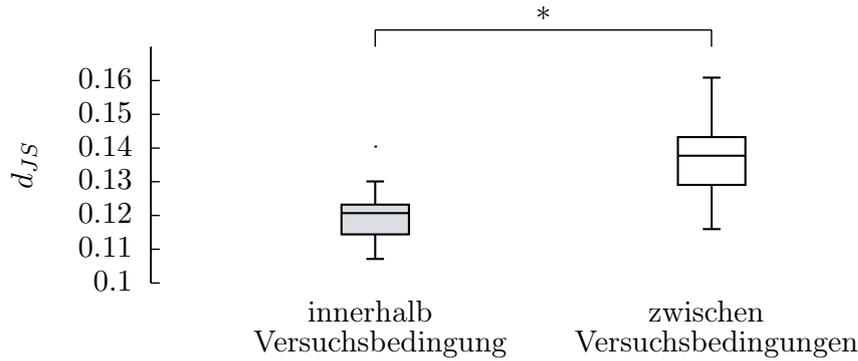


Abbildung 4.25: Ähnlichkeit zwischen den Verbundwahrscheinlichkeitsdichten von Brachioradialis und Trizeps $p(q^{bra}, q^{tric})$ für paarweise Vergleiche (innerhalb einer Versuchsperson) zwischen Datensätzen gleicher und unterschiedlicher Versuchsbedingungen (Winkelintervalle).

4.2.4 Driftschätzung des sEMGs in Abhängigkeit von der Bewegungsphase

Aufgrund der im vorangegangenen Abschnitt gezeigten Ergebnisse ist zu erwarten, dass sich die Signalstruktur der im Experiment (siehe Abschnitt 4.1.3) aufgenommenen sEMG-Daten einzelner Muskeln in den beiden Winkelintervallen unterscheidet. Dies könnte ein Indiz dafür sein, dass sich die Kontrolle der Bewegung aufgrund der unterschiedlichen Selbststabilität (Stabilität von *open-loop-Kontrolle*) in den beiden Winkelbereichen verändert.

Im nachfolgenden Teil werden wir den deterministischen Anteil des sEMG nutzen, um das Signal für die Bewegung in den Winkelbereichen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ zu charakterisieren. Dazu bestimmen wir die Drift der mittelwertbereinigten und varianznormierten sEMG-Signale ($q^m(t)$) von Bizeps, Brachioradialis und Trizeps. Die Bestimmung der Drift, wie wir sie bisher benutzt haben, setzt voraus, dass der zugrundeliegende Prozess stationär ist. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichten (z.B. $p(q^{bra})$) zeitlich konstant sind. Diese Voraussetzung ist aber für eine zyklische Bewegung mit Sicherheit verletzt, da die Signalamplitude natürlich eine Funktion der Zeit ist, wie man auch anhand von Abbildung 4.5 erkennen kann. Daher werden wir die Drift des sEMGs in Abhängigkeit von der Bewegungsphase schätzen. Wir werden sehen, dass die Drift des sEMGs in guter Näherung linear ist, so dass wir als Parameter des deterministischen Anteils, wie schon in Abschnitt 3.2 benutzt, die Steigung m_D der Drift für die Untersuchungsuntersuchung heranziehen werden.

Methoden

Um zu untersuchen, inwiefern sich die Signalstruktur beziehungsweise die stochastischen Eigenschaften des sEMGs während einer dynamischen Aufgabe in den un-

terschiedlichen Stabilitätsregimen verändert, wurde jeweils die Kombination aus der Kinematik und dem sEMG eines Muskels $(\varphi(t), \omega(t), q^{(m)}(t))$ als dreidimensionaler Langevinprozess angenommen und das dreidimensionale Driftvektorfeld $\hat{D}(\varphi, \omega, q^{(m)})$ (siehe Abbildung 4.26) mittels Nadaraya-Watson-Schätzer mit einem dreidimensionalen, radialsymmetrischen Epanechnikovkern (siehe 5) auf einem $(32 \times 32 \times 32)$ -Gitter geschätzt. Da EMG- und Kinematikdaten in unterschiedlichen Messfrequenzen vorlagen, wurden die Kinematikdaten stückweise kubisch interpoliert und somit auf eine Frequenz von $f = 2000\text{Hz}$ resampelt. Die Komponenten φ, ω des so rekonstruierten Vektorfeldes wurden schließlich nur genutzt, um die Drift des sEMGs in Abhängigkeit von der Bewegungsphase zu untersuchen. Es wurde nur die q -Komponente der Drift, im Folgenden mit $\hat{D}^{(1)}(q^{(m)})$ bezeichnet, als Funktion der Phase betrachtet (vergleiche Abbildung 4.27).

Für jedes Paar φ_i, ω_j wurde die Drift des sEMGs mittels Korrelationskoeffizient r_{ij} auf einen linearen Zusammenhang hin untersucht. Der über den Phasenraum (also über alle Kombinationen φ_i, ω_j) gemittelte Korrelationskoeffizient

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i,j} r_{ij}, \quad N = \sum_{i,j} 1, \quad \forall i, j : \text{für die } \hat{D}(q^{(m)}) \text{ existiert}, \quad (4.9)$$

diente als Maß für die Gültigkeit des linearen Ansatzes. Bei Gültigkeit von $\bar{r} > 0.9$ haben wir für jedes Paar (φ_i, ω_j) die q -Komponente der Drift linear interpoliert $f(x) = m_D \cdot x + b$ (vergleiche Abbildung 4.27b). Analog zur quasi-statischen Halteaufgabe, haben wir uns im weiteren Verlauf auf den amplitudenunabhängigen Parameter m_D beschränkt und diesen als Funktion von φ und ω in den beiden Versuchsbedingungen (Winkelintervallen) verglichen.

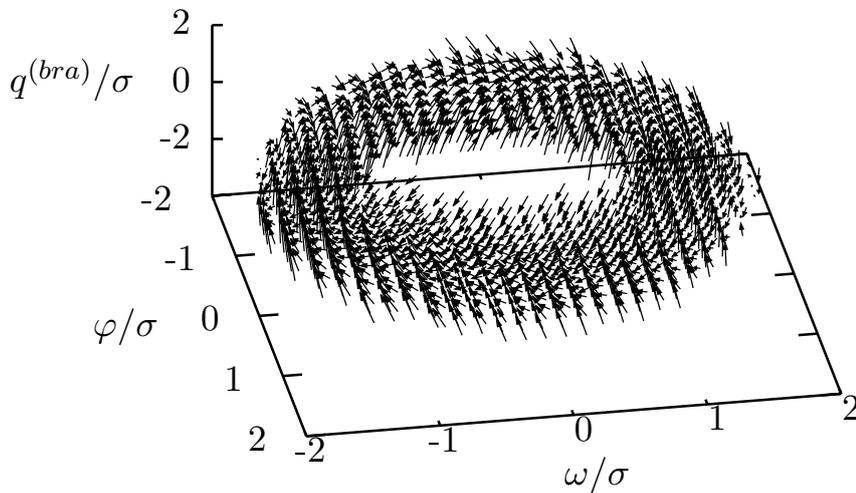


Abbildung 4.26: Geschätztes dreidimensionales Driftvektorfeld für das sEMG des Brachioradialis $\hat{D}(\varphi, \omega, q^{(bra)})$ eines Probanden für die zyklische Bewegung im Intervall $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$

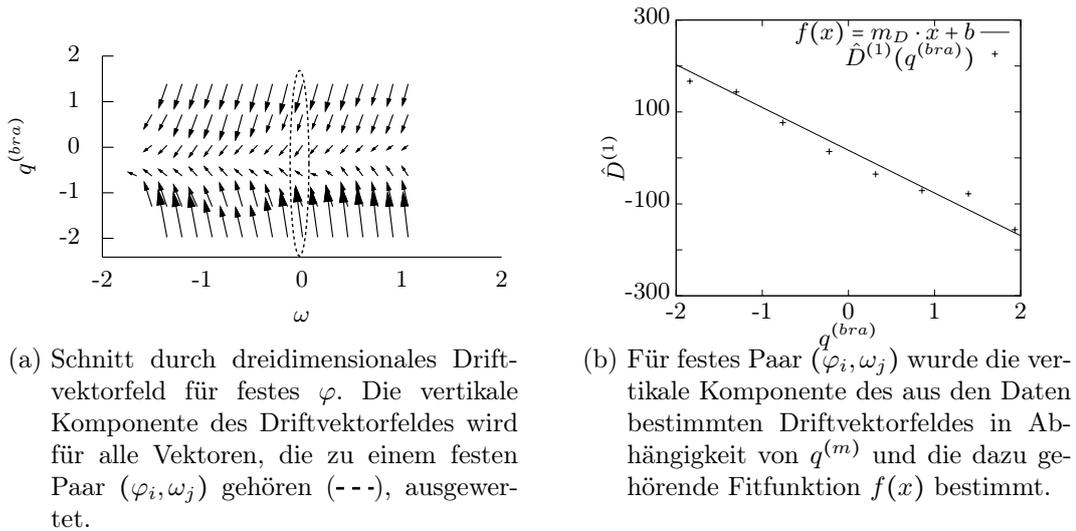


Abbildung 4.27: Auswertung des dreidimensionalen Driftvektorfeldes,

Ergebnisse

Die Drift der auf Varianz $\sigma^2 = 1$ normierten sEMG-Signale wurde mittels Kerndichteschätzung in Abhängigkeit von der Bewegungsphase entsprechend Abbildung 4.27 für jedes Dreiertupel $(\varphi_i, \omega_j, q^{(m)})$ ausgewertet. Der Median $\bar{r}_{0.5}$ des Korrelationskoeffizienten, entsprechend Gleichung (4.9) berechnet, beträgt über beide Versuchsbedingungen, alle Muskeln und alle Probanden ($2 \times 3 \times 4 = 24$) $\bar{r}_{0.5} = 0.977$, $[\bar{r}_{0.25} = 0.973, \bar{r}_{0.75} = 0.983]$, so dass ein linearer Zusammenhang der q -Komponente der Drift in allen untersuchten Datenreihen als sehr wahrscheinlich angenommen werden kann. Die Steigung der linearen Interpolation m_D an jedem Gitterpunkt (φ_i, ω_j) , also in Abhängigkeit von der Bewegungsphase, ist in Abbildung 4.28-4.30 farbcodiert zu sehen. Für jeden der vier Probanden ist das Ergebnis der Driftschätzung für die Schwingung des Unterarms um kleinen und großen Innenarmwinkel φ dargestellt. Die Farbskalierung von m_D eines jeden Probanden ist in beiden Versuchsbedingungen identisch. Die Farbe Rot entspricht dabei dem minimal für beide Versuchsbedingungen auftretenden Wert von m_D . Weiß entspricht in allen Fällen einer Steigung von $m_D = 0 \frac{1}{s}$ beziehungsweise Bereichen im Phasenraum, für die keine Daten vorlagen und somit keine Drift geschätzt werden konnte. Betrachten wir nun zunächst die dargestellten Daten des Brachioradialis und des lateralen Kopfes des triceps brachii. Der Wertebereich von m_D ist beim Musculus brachioradialis (Abbildung 4.28) über die vier Probanden nahezu identisch. Nur die Daten von Proband 4 weichen beim Minimalwert um etwa 20 Prozent vom Mittel der übrigen Probanden ab. Hingegen ist die Bandbreite der Ergebnisse bei den beiden anderen sEMG-Signalen (Abbildung 4.29 und 4.30) deutlich höher. Betrachtet man die Werte von m_D in Abhängigkeit von der Phase der Bewegung (φ, ω) , so fällt eine klare Zweiteilung der Ergebnisse auf. Die sEMG-Signale, die auf die Funktion von eingelenkigen Muskeln

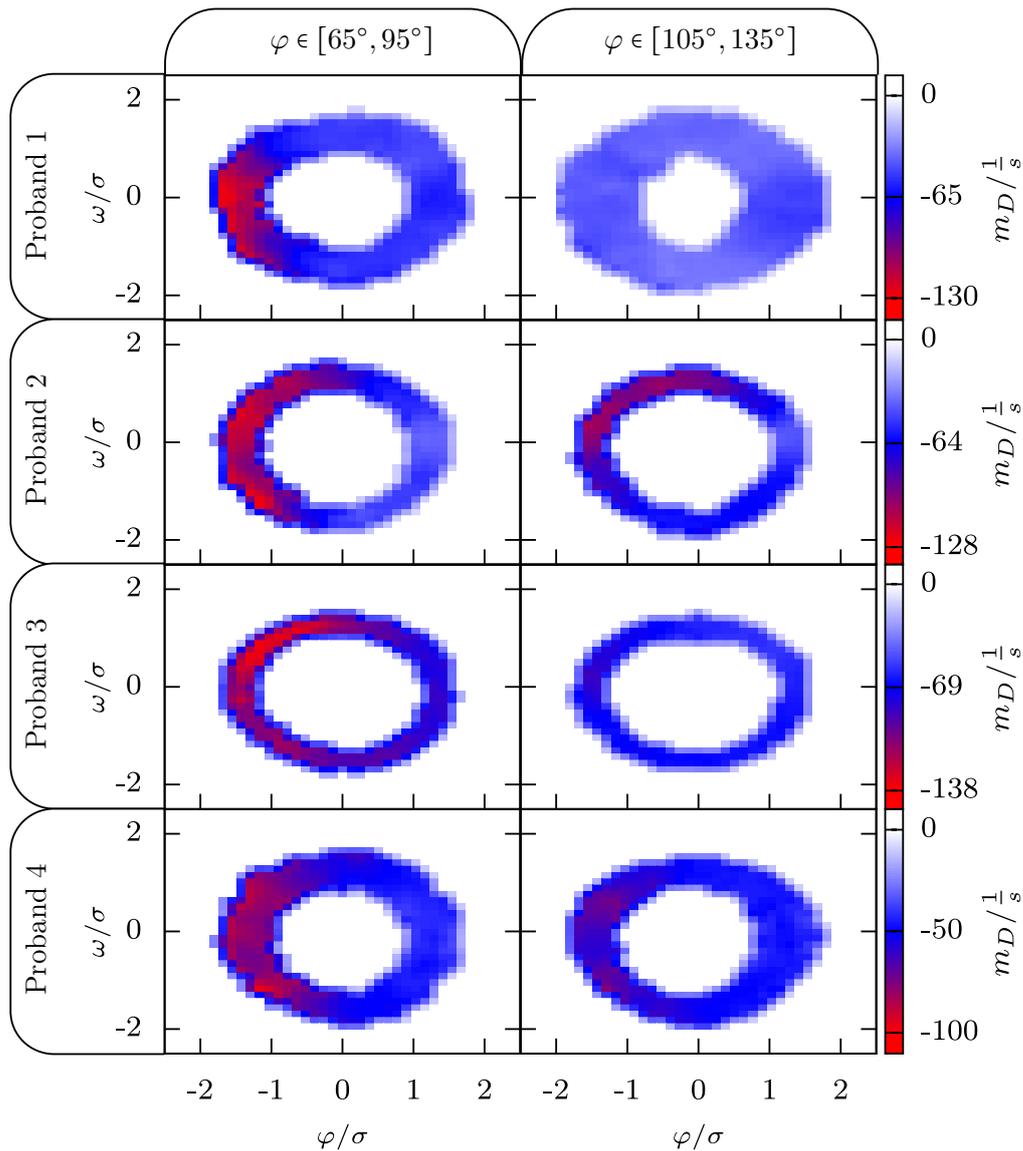


Abbildung 4.28: Die Steigung der Drift $m_D(\varphi, \omega)$ für das sEMG des Musculus brachioradialis in Abhängigkeit von der Phase der Bewegung für alle vier Probanden und beide Versuchsbedingungen.

zurückzuführen sind, nämlich die des Brachioradialis und des lateralen Kopfes des Trizeps, zeigen über alle Probanden und beide Versuchsbedingungen eine klare Tendenz bei der Lage der Minimalwerte von m_D (durch roten Bereich gekennzeichnet). Beim Brachioradialis liegt der rote Bereich meist symmetrisch um den Umkehrpunkt der Bewegung bei minimalem Innenarmwinkel. Beim lateralen Kopf des Triceps brachii sind die minimalen Werte im Beginn der Streckbewegung zu verorten. Prüft man hingegen die Lage der roten Bereiche beim Biceps brachii, so kann weder über die

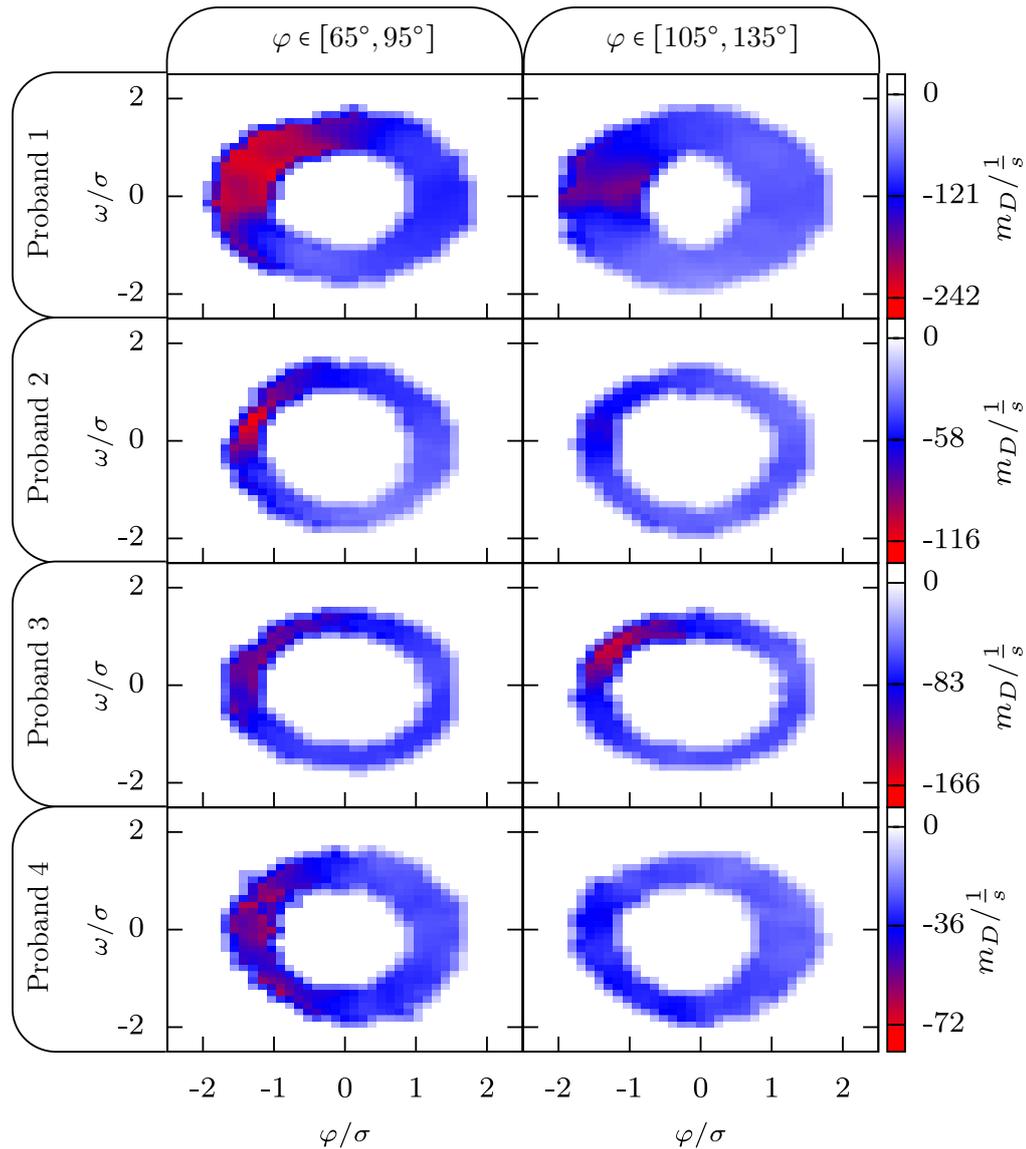


Abbildung 4.29: Die Steigung der Drift $m_D(\varphi, \omega)$ für das sEMG des Caput laterale des musculus triceps brachii in Abhängigkeit von der Phase der Bewegung für alle vier Probanden und beide Versuchsbedingungen.

vier Probanden noch über die Versuchsbedingungen ein einheitliches Bild bezüglich der Lage dieser Bereiche getroffen werden. Vergleicht man nun die beiden Versuchsbedingungen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ bezüglich ihrer Wertebereiche, so zeigen sich deutliche Unterschiede. Sowohl beim Brachioradialis als auch beim lateralen Kopf des Trizeps sind geringere Werte von m_D für die Schwingung im Bereich kleiner Innenarmwinkel zu sehen als für die Schwingung mit gleicher Amplitude im Bereich großer Innenarmwinkel. Die einzige Ausnahme bilden dabei die Daten des

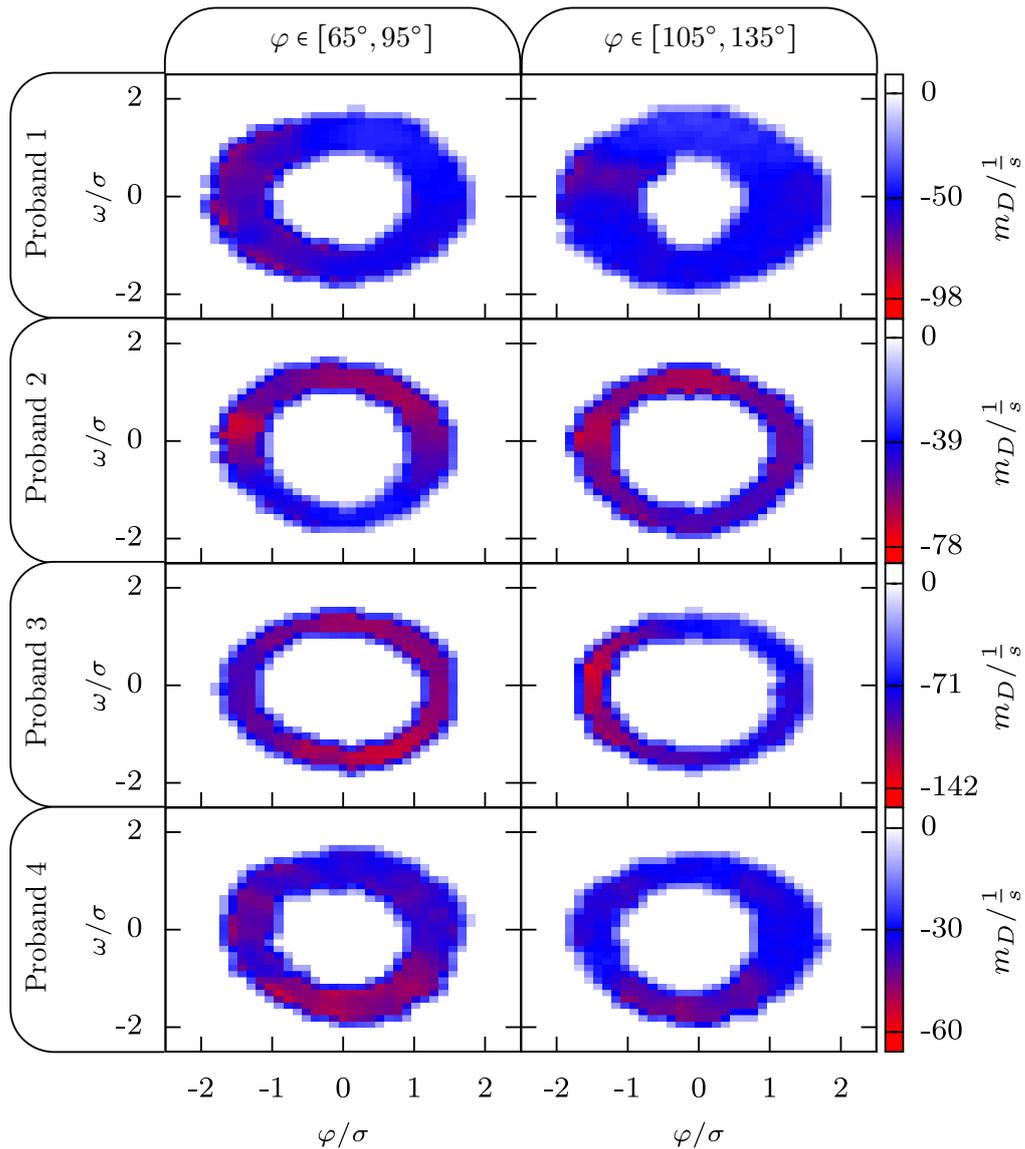


Abbildung 4.30: Die Steigung der Drift $m_D(\varphi, \omega)$ für das sEMG des des Caput breve des musculus biceps brachii in Abhängigkeit von der Phase der Bewegung für alle vier Probanden und beide Versuchsbedingungen.

Probanden 3 (siehe Abbildung 4.29). Beim Bizeps lässt sich die Abhängigkeit von der Versuchsbedingung nicht feststellen. Es bleibt festzuhalten, dass es bei den ein-
 gelenkigen Muskeln eine klare Tendenz bezüglich der Lage der Minimalwerte von m_D
 auch über die Versuchsbedingung hinaus gibt, beim zweigelenkigen Bizeps jedoch
 nicht. Ebenso liegen bei Brachioradials und Trizeps geringere Werte von m_D bei der
 Schwingung mit $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ vor als im Intervall $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$. Die Driftschät-
 zung beim Bizeps ergibt keine systematischen Unterschiede für m_D zwischen den

beiden Versuchsbedingungen.

Diskussion

Zunächst einmal muss man festhalten, dass mögliche signifikante Unterschiede im Signal des Bizeps bezüglich der Versuchsbedingungen aufgrund der geringen Stichprobengröße nicht völlig auszuschließen sind. Wir hatten anhand der Stabilitätsanalyse aus Abschnitt 4.1 gesehen, dass eine *open-loop-Steuerung* in den beiden Winkelbereichen bei dem betrachteten Aktivierungsmuster unterschiedlich auf kleine Störungen reagiert. Daraus folgte die Annahme, dass eine reale Bewegung in den Winkelbereichen entweder unterschiedliche Stabilität aufweist oder aber unterschiedlichen Kontrollaufwand erfordert. Wir haben bei der Analyse der Messdaten aufgrund der Driftschätzung der Kinematik gesehen, dass es keine systematischen Unterschiede der zugrundeliegenden Systemdynamik gibt. Auch bei der Stabilität der zur jeweiligen Bewegung gehörenden Grenzyklen gab es keine gerichteten Unterschiede zwischen den Versuchsbedingungen. Da die veränderte Selbststabilität keine Auswirkung auf die Stabilität der gemessenen Bewegung hat, sollte sich die Kontrolle verändern. Wir konnten in den aufgenommenen sEMG-Daten der eingelenkigen Muskeln einen Unterschied in der Signalstruktur zwischen den Winkelbereichen anhand des deterministischen Anteils des Signals verifizieren. Es existieren also Unterschiede zwischen den Winkelregimen, jedoch könnten diese Unterschiede auch messtechnischer Natur sein. Mögliche Einflussfaktoren wären zum Beispiel veränderte Elektrodenabstände bei verschiedenen Winkelpositionen, eine unterschiedliche Lage der Elektroden zum Muskelbauch und Bewegungsartefakte im sEMG. Die Elektrodenabstände sollten sich für den Trizeps bei der Beugung vergrößern, beim Brachioradialis verkleinern. Das Minimum für m_D ist aber bei beiden Muskeln bei maximaler Beugung. Zudem zeigt der Bizeps trotz starker Muskelbewegung keine klare Winkelabhängigkeit, so dass der Unterschied in m_D vermutlich nicht auf einen veränderten Elektrodenabstand zurückzuführen ist. Mit der gleichen Argumentation kann man auch die Lage der Elektroden zum Muskelbauch als bestimmenden Faktor ausschließen. Bewegungsartefakte sind sicher nicht auszuschließen. Jedoch war die Bewegung mit einer Frequenz von einem Hertz nicht hochgradig dynamisch und darüber hinaus in beiden Winkelbereichen sehr ähnlich. Daher sind für die Signale in beiden Winkelbereichen Artefakte in ähnlicher Größenordnung zu erwarten, womit die Bewegungsartefakte für die gemessenen Unterschiede in den Winkelintervallen keine Rolle spielen sollten.

Natürlich kann es auch physiologische Gründe für eine Veränderung der Signalstruktur geben, die nichts mit der Selbststabilität zu tun haben. So zeigten zum Beispiel Moritani und Muro (1987), dass sich das Frequenzspektrum des sEMGs bei steigender Kraft, die der Muskel aufbringt, zu größeren Frequenzen hin verschiebt. Der Parameter $|1/m_D|$ entspricht der Relaxationszeit des deterministischen Anteils des Prozesses. Wir haben die kleinsten Werte für $|1/m_D|$ und damit die höchsten Frequenzen im deterministischen Anteil des Signals bei kleinen Innenarmwinkeln gefunden, also dort, wo das zu überwindende externe Moment am geringsten ist. Daher erscheint es unplausibel, dass m_D ein Abbild des Frequenzspektrums ist. Darüber

hinaus haben wir schon beim quasi-statischen Versuch Hinweise gefunden, dass der Wert von m_D nicht einfach das externe Moment abbildet, die Veränderung in den Winkelintervallen also nicht auf die vom Muskel zu erzeugende Kraft zurückzuführen ist. Dies wird auch durch die gemessenen mittleren Aktivitäten $\bar{A}^{(m)}$ von Bizeps, Brachioradialis und Trizeps unterstützt (siehe Abbildung 4.5). Alle in Abbildung 4.5 dargestellten Aktivierungsmuster weisen im Bereich des kleinsten Beugewinkels ein Minimum auf. Damit sind die kleinsten Werte für m_D bei Brachioradialis und Trizeps zwar dort anzutreffen, wo das Aktivierungsmuster und damit auch die Krafterzeugung ein Minimum hat. Allerdings weisen auch die Aktivitätsmuster des Biceps brachii dieses stark ausgeprägte Minimum für kleine Beugewinkel auf. Jedoch ist für den Parameter m_D beim Bizeps kein systematischer Unterschied in m_D zwischen den Winkelintervallen zu erkennen, so dass kleine Werte von m_D nicht mit geringerer Aktivierung beziehungsweise Kraftentwicklung des Muskels gleichzusetzen sind.

Es ist also höchst wahrscheinlich, dass die Unterschiede, die anhand der Driftschätzung in den Signalen des sEMGs von Brachioradialis und Trizeps zwischen den beiden Versuchsbedingungen gefunden wurden, nicht messtechnischer Natur sind, sondern durch eine wirkliche Änderung der Signalstruktur hervorgerufen werden. Diese Veränderung der Signalstruktur ist gemäß unserer vorangehenden Untersuchung aufgrund der Selbststabilität des Muskelskelettsystems aber zwingend notwendig, um ein stabiles Systemoutput, also eine stabiles Bewegungsmuster, zu erzeugen.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Diskussion

Die Analyse der Selbststabilität ist äquivalent zur Untersuchung der Stabilität von *open-loop-Kontrolle*. Im Zuge der vorliegenden Arbeit wurde die Selbststabilität des Muskelskelettsystems bei quasi-statischen und zyklischen Bewegungen des Unterarms im Modell mittels linearer Stabilitätsanalyse respektive Floquetanalyse untersucht. Wir konnten im Modell für den quasi-statischen Fall zeigen, dass mit zunehmendem Innenarmwinkel φ die Selbststabilität abnimmt, bis das System schließlich bei konstanter Aktivierung der Muskulatur instabil ist. Demzufolge wäre anhand des Modells bei großen Innenarmwinkeln die einfachste Form der *open-loop-Kontrolle*, nämlich die mit konstanter Aktivierung, instabil. Im Falle der zyklischen Armbewegungen ist, entsprechend der Modellrechnung, eine *open-loop-Steuerung* ohne Koaktivierung für Schwingungen in den Intervallen $\varphi \in [65^\circ, 95^\circ]$ und $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ instabil. Ein Vergleich mit gemessenen Muskelaktivierungen bei zyklischen Armbewegungen zeigte, dass die Koordination der Muskulatur nicht entsprechend dieser einfachen Annahme erfolgt. Eine Anpassung der Aktivierungszeitverläufe an die gemessenen Muskelaktivierungen führte für das Intervall $[65^\circ, 95^\circ]$ zu einer Stabilisierung, hingegen blieb für große Innenarmwinkel $\varphi \in [105^\circ, 135^\circ]$ die *open-loop-Steuerung* in der angepassten Form weiterhin instabil. Beide Bewegungsformen sind im Modell somit bei großen Innenarmwinkeln nicht mit *open-loop-Steuerung* stabilisierbar, womit zur Stabilisierung großer Innenarmwinkel andere Kontrollmechanismen (Regelkreise) wirksam werden müssten.

Um die Auswirkung der Selbststabilität auf die Kontrolle zu untersuchen, wurde das sEMG im Experiment bei der quasi-statischen und zyklischen Aufgabe in Abhängigkeit vom Innenarmwinkel, der für die Selbststabilität des Systems ausschlaggebend ist, betrachtet. Aufgrund der Schwierigkeiten bei der Bestimmung und Bewertung von Aktivierungszeitverläufen anhand von sEMG-Daten wurde versucht, anhand der Rohdaten des sEMGs Informationen über eine veränderte Kontrolle zu erlangen. Da auch die Amplitude des sEMG-Signals von vielen Einflussfaktoren (Abstand der Elektroden zum Signalursprung, Leitwiderstand der Haut, Dicke der subkutanen Fettschicht, etc.) abhängt, war es notwendig, bei der Bewertung der Signalstruktur auf einen Parameter zurückzugreifen, der nicht von der absoluten Signalamplitude abhängt. Im Zuge der Analyse der sEMG-Daten wurde das Signal als stochastischer Prozess aufgefasst und die Drift dieses Prozesses mittels Kerndichteschätzung approximiert. Die Drift spiegelt den deterministischen Anteil des Signals wider. Dabei erwies sich die Steigung m_D der Drift, die das Zeitverhalten des deterministischen Anteils abbildet, gerade als der gewünschte amplitudenunabhängige Parameter. Aufgrund der Verletzung der Markov-Eigenschaften (zumindest auf der untersuchten Zeitskala) konnte der stochastische Anteil des Signals nicht anhand der Diffusion bestimmt werden, so dass das Signal nur anhand der Drift $D^{(1)}(\tau)$ charakterisiert wurde. Darüber hinaus wurde mittels Driftschätzung und anschließender Floquetanalyse die Stabilität der im Experiment aufgenommenen zyklischen Bewegung analysiert.

Betrachtet man die aufgenommenen Bewegungsdaten (φ, ω) bei der zyklischen Aufgabe, so konnte trotz der unterschiedlichen Selbststabilität in den untersuchten Winkelintervallen keine veränderte Stabilität der gemessenen Bewegung nachgewiesen werden. Dieses Ergebnis lässt den Schluss zu, dass die fehlende Selbststabilität

des Systems durch andere Wirkungsmechanismen, wie zum Beispiel Reflexschleifen, kompensiert werden. Die Auswertung der sEMG-Daten zeigte sowohl für die quasi-statische als auch die zyklische Armbewegung, dass sich gleichzeitig mit der Stabilität der *open-loop-Kontrolle* auch der deterministische Anteil der im Experiment aufgenommenen sEMG-Signale (m_D) ändert. Als Grund für die Veränderung der Signalstruktur konnten messtechnische Faktoren weitestgehend ausgeschlossen werden, so dass zu vermuten ist, dass die Ursache physiologischer Natur ist. Es zeigte sich, dass der Parameter m_D , der das Zeitverhalten des deterministischen Anteils des Signals abbildet, in den Winkelbereichen, in denen das Muskelskelettsystem selbststabil ist, kleiner ist als für die Winkelbereiche, in denen keine Selbststabilität vorliegt. Da m_D für alle Datensätze negativ war, relaxieren Störungen im Signal schneller, wenn das System selbststabil ist. Dieses Ergebnis könnte durch die instantane Reaktion eines selbststabilen Systems auf äußere Störungen erklärt werden. Hingegen muss bei einer mittels Regelkreisen kontrollierten Bewegung aufgrund der Laufzeit des Informationsflusses eine zeitliche Retardierung zwischen der Störung und der entsprechenden Reaktion vorliegen, so dass eine Steigerung des Wertes m_D durchaus auf eine verstärkte *closed-loop-Steuerung* zurückzuführen wäre. Darüber hinaus scheint auch die stetige Veränderung von m_D im quasi-statischen Experiment von kleinen zu großen Innenarmwinkeln plausibel. Eine sprunghafte Veränderung würde entsprechend der bisherigen Argumentationslinie bedeuten, dass es zu einer plötzlichen Veränderung der Kontrollstruktur kommt, also einem plötzlichen Übergang von *open-loop-* zu *closed-loop-Steuerung*. Die in Abschnitt 4.1.3 bestimmten Aktivierungszeitverläufe stellen ein mittleres Aktivierungsverhalten dar, jedoch unterscheiden sich die Aktivierungsverläufe von Zyklus zu Zyklus, was bei einer reinen *open-loop-Steuerung* nicht passieren würde. Darüber hinaus sagt die von uns benutzte lineare Stabilitätsanalyse nur etwas über die Stabilität des Muskelskelettsystems bezüglich kleiner Störungen aus. Wenn jedoch Störungen mit großer Amplitude vorliegen oder aber die charakteristische Relaxationszeit des Systems nicht wesentlich kleiner ist als der mittlere zeitliche Abstand zwischen den Störungen (in diesem Falle würden die Störungsamplituden anwachsen), so kann ein selbststabiles System ohne zusätzliche Kontrollmechanismen instabil werden. Somit ist es unwahrscheinlich, dass *open-loop-* und *closed-loop-Steuerung* getrennt ablaufen. Vielmehr ist zu erwarten, dass sich die Gewichtung beider Mechanismen zur Bewegungssteuerung entsprechend der Selbststabilität des Bewegungssystems verändert, womit sich die stetige Zunahme in m_D bei steigendem Innenarmwinkel erklären ließe. Auf einen ähnlichen Zusammenhang deuten die Ergebnisse von Wagner et al. (2007) hin, bei denen der Anteil der Bewegung, der durch die Selbststabilität des Systems erklärt werden konnte, mit größer werdendem Einzugsbereich der Gleichgewichtsposition stieg.

Im Zuge der vorliegenden Arbeit konnte mit Hilfe der Driftschätzung gezeigt werden, dass sich die Struktur des sEMG-Signals (der deterministische Anteil des Signals) zusammen mit der Selbststabilität des Systems verändert. Da die gemessenen Signalveränderungen bei der quasi-statischen Aufgabe über alle Probanden eine große Ähnlichkeit aufweisen, ist davon auszugehen, dass es einen systematischen Zu-

sammenhang zwischen dem Innenarmwinkel φ und der Signalstruktur (durch m_D charakterisiert) gibt, womit auch die Selbststabilität mit dem Wert von m_D korreliert. Streng genommen besteht dadurch noch lange kein kausaler Zusammenhang zwischen der Selbststabilität des Systems und der Signalstruktur der sEMG-Daten. Die in der vorliegenden Arbeit gezeigten Ergebnisse legen jedoch nahe, dass der Unterschied in der Signalstruktur bedingt ist durch die veränderte Selbststabilität des Systems. Das Ziel weiterer Studien sollte es daher zunächst sein, den vermuteten Zusammenhang zwischen der Selbststabilität und dem deterministischen Anteil des Signals näher zu beleuchten. Wäre es zum Beispiel möglich, einen Versuch zu konzipieren, bei dem der Innenarmwinkel variiert werden könnte, ohne jedoch die Selbststabilität zu variieren, so müsste der Parameter m_D zur Bestätigung der Annahme nahezu unverändert bleiben. Liefße sich der Zusammenhang zwischen Stabilität und Signalstruktur bestätigen, so wären die hier gezeigten Daten ein starkes Indiz für eine veränderte Kontrolle aufgrund der Stabilität des Muskelskelettsystems. Darüber hinaus könnte unter diesen Umständen über das sEMG die Selbststabilität des Muskelskelettsystems bewertet werden. Vorstellbar wäre es zum Beispiel, die Auswirkung von explizitem Muskeltraining auf die Selbststabilität zu untersuchen, um damit zum Beispiel einen Therapieerfolg zu dokumentieren.

Die in dieser Arbeit genutzte Schätzung der Kramers-Moyal-Koeffizienten ist eine in der Physik etablierte Methode zur Charakterisierung stochastischer Prozesse. Neu hingegen ist die Schätzung des Driftvektorfeldes mit anschließender Floquetanalyse zur Quantifizierung der Stabilität von Bewegungen und die Anwendung auf sEMG-Daten. Wieso bietet sich diese Datenanalyse gerade für die Sportwissenschaft an? Der menschliche Körper ist durch seine Vielzahl an Freiheitsgraden und interagierenden Systembestandteilen ein hochdimensionales und hochkomplexes System. Dennoch sind geordnete Bewegungen der Gliedmaßen möglich. Im Sinne der Synergetik kann das makroskopische Systemverhalten (also die Bewegung) durch wenige Ordnungsparameter beschrieben werden, die ihrerseits die mikroskopische Dynamik versklaven. Der Einfluss der vielen mikroskopischen Freiheitsgrade auf die Dynamik der Ordnungsparameter geht über schnell fluktuierende Kräfte in die Entwicklungsgleichung der Ordnungsparameter ein (Kleinhaus, 2008). Damit ist die zeitliche Entwicklung der Ordnungsparameter als stochastischer Prozess darzustellen. Der systemdynamische Ansatz zur Beschreibung von Bewegungskontrolle im Sinne der Synergetik führt demnach auf eine Beschreibung mittels stochastischer Differentialgleichungen. Somit erscheint die Analyse von Bewegungen beziehungsweise Bewegungskontrolle anhand der Eigenschaften dieser stochastischen Prozesse sinnvoll. Darüber hinaus handelt es sich bei der Bestimmung der Kramers-Moyal-Koeffizienten (vergleiche Siegert et al., 1998), wie sie in der vorliegenden Arbeit durchgeführt wurde, um eine parameterfreie Schätzung. Der Zugewinn dieser Art von Schätzungen für die Analyse von Koordination liegt, wie von van Mourik (2006) in ihrer Dissertation herausgestellt, darin, dass keine a-priori-Informationen über das zugrundeliegende System benötigt werden. Daher bietet sich die Analyse gerade in solchen Situationen an, in denen wenig über die funktionalen Zusammenhänge bekannt ist.

Anhang

Gaußverteilung für verschwindende Kumulaten ($n > 2$)

Es ist eine Zufallsvariable q gegeben, deren Kumulanten K_n für $n > 2$ verschwinden. Daher können wir die Funktion

$$W(\alpha) \stackrel{\text{Taylorentw.}}{=} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} W(\alpha) \right|_{\alpha=0} \alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} W(\alpha) \right|_{\alpha=0} \alpha^2 \quad (5.1)$$

und damit die charakteristische Funktion $Z(\alpha)$ mit Hilfe von Gleichung (2.51) als

$$Z(\alpha) = e^{i\alpha K_1 - \frac{\alpha^2}{2} K_2} = \int dq f(q) e^{iq\alpha} \quad (5.2)$$

explizit angeben. Die Rücktransformation von Gleichung (5.2) liefert die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(q) = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{i\alpha K_1 - \frac{\alpha^2}{2} K_2} \cdot e^{-i\alpha q} = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{i(K_1 - q)\alpha - \frac{\alpha^2}{2} K_2} \quad (5.3)$$

wobei das Integral analytisch lösbar ist. Dazu wird der Exponent quadratisch ergänzt, was

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{2\pi} \int d\alpha e^{-\frac{1}{2} K_2 [(\alpha - \frac{i(K_1 - q)}{K_2})^2 - (\frac{i(K_1 - q)}{K_2})^2]} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(K_1 - q)^2}{2K_2}} \int d\alpha e^{-\frac{1}{2} K_2 (\alpha - \frac{i(K_1 - q)}{K_2})^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ergibt. Nimmt man nun die Substitution

$$y = \sqrt{\frac{K_2}{2}} \left(\alpha - \frac{i(K_1 - q)}{K_2} \right), \quad \text{mit} \quad \frac{d}{d\alpha} y = \sqrt{\frac{K_2}{2}} \quad (5.5)$$

vor, so erhält man

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-(K_1 - q)^2}{2K_2}} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{K_2}} \int dy e^{-y^2}}_{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi K_2}} e^{\frac{-(K_1 - q)^2}{2K_2}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Zusammenhang von Korrelation und stochastischer Unabhängigkeit

Die Korrelation zwischen zwei reellen Zufallsvariablen x und y ist durch

$$r = \frac{E[(x - E[x])(y - E[y])]}{\sqrt{E[(x - E[x])^2]E[(y - E[y])^2]}} \quad (5.7)$$

gegeben. Der Zähler lässt sich durch Anwendung der Regeln zur Berechnung des Erwartungswertes ausdrücken als:

$$E[(x - E[x])(y - E[y])] = E[xy] - E[x]E[y] . \quad (5.8)$$

Nun gilt für Zufallsvariablen, die stochastisch unabhängig sind, dass sich die Verbundwahrscheinlichkeit $f(x, y)$ als Produkt der Marginalverteilungen $f(x)$ und $f(y)$ darstellen lässt

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y) \quad , \quad (5.9)$$

womit für den Erwartungswert einer Funktion $g_1(x)g_2(y)$ gilt:

$$\begin{aligned} E[g_1(x)g_2(y)] &= \int g_1(x)g_2(y)f(x, y)dx dy \\ &= \int g_1(x)f(x)dx \int g_2(y)f(y)dy = E[g_1(x)]E[g_2(y)] \quad . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hieraus folgt direkt, dass der Zähler der Korrelation und damit auch die Korrelation selbst Null sein muss. Somit sind statistisch unabhängige Variablen automatisch unkorreliert, der Umkehrschluss gilt allerdings nicht. Als Beispiel sei nun folgende Verbundwahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \forall x, y \text{ mit } |y| \leq 1 - |x| \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.11)$$

gegeben. $f(x, y)$ ist auf dem in Abbildung 5.1 grau dargestellten Bereich gleichverteilt und darüber hinaus Null. Nun gilt für die Marginalverteilung $f(x) = \int f(x, y)dy$ und somit $f(x = 0) = \int_{-1}^1 f(x, y)dy = 1$ und $f(|x| = 1) = 0$. Da $\int f(x, y)dy$ von $x = 0$ bis $x = 1$ linear zunimmt, hat $f(x)$ die Form

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \forall |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (5.12)$$

Die gleiche Argumentation gilt für $f(y)$:

$$f(y) = \begin{cases} 1 - |y| & \forall |y| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (5.13)$$

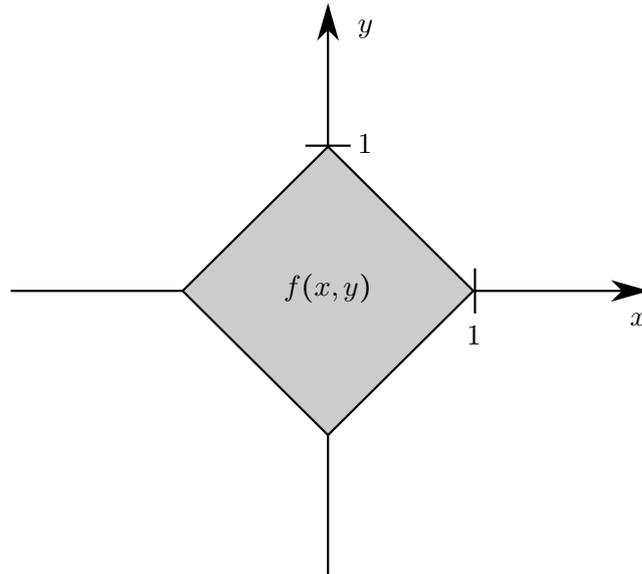


Abbildung 5.1: Gleichverteilte Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y)$ auf dem grau dargestellten Bereich.

Man erkennt sofort, dass das Produkt $f(x) \cdot f(y)$ nicht auf die gleichverteilte Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y)$ führen kann, da für $(x, y) = (0, 0)$ beide Verteilungen maximal sind und somit auch $f(x) \cdot f(y)$ dort das globale Maximum hat. Damit sind x und y stochastisch abhängig. Um zu prüfen, ob x und y unkorreliert sind, müssen wir prüfen, ob

$$E[xy] - E[x]E[y] = 0 \quad (5.14)$$

erfüllt ist. Der Erwartungswert von x ist:

$$E[x] = \int_{-1}^1 xf(x)dx = \int_{-1}^1 (1 - |x|)dx = \int_{-1}^0 (1 + x)dx + \int_0^1 (1 - x)dx = 0 \quad (5.15)$$

Der Erwartungswert $E[xy]$ lässt sich ganz einfach berechnen, indem man eine Koordinatentransformation (x', y') vornimmt, so dass x' und y' die Koordinaten in einem um $\pi/4$ gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Koordinatensystem sind:

$$E[xy] = \int_{-1/2\sqrt{2}}^{-1/2\sqrt{2}} \int_{-1/2\sqrt{2}}^{-1/2\sqrt{2}} x'y'f(x', y')dx'dy' = \frac{1}{2} \int_{-1/2\sqrt{2}}^{-1/2\sqrt{2}} x'dx' \int_{-1/2\sqrt{2}}^{-1/2\sqrt{2}} y'dy' = 0 \quad (5.16)$$

Somit ist zwar die Korrelation zwischen x und y gleich Null, jedoch sind die Variablen mitnichten stochastisch unabhängig. Dies kann man auch anhand von Abbildung 5.1 erkennen. Sei zum Beispiel $x = 1$ gemessen worden, so ist der einzige mögliche Wert für y Null. Durch die Kenntnis von x kann y abgeschätzt werden.

Wurzel der Kovarianzmatrix

Sei eine diagonalisierbare $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} gegeben, so dass eine invertierbare Matrix \mathbf{T} existiert mit:

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{D} \quad . \quad (5.17)$$

Die Eigenwerte λ_i von \mathbf{A} stehen auf der Hauptdiagonalen von \mathbf{D} . Die Matrix $\mathbf{A}^{1/2}$ ist die Matrix, die mit sich selbst multipliziert \mathbf{A} ergibt. Somit lässt sich die Wurzel von \mathbf{D}

$$\mathbf{D}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

direkt angeben. Daher gilt für $\mathbf{A}^{1/2}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{T} = \mathbf{D} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{T} = \mathbf{D} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{T} = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{D}^{1/2} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}^{1/2} \mathbf{T} = \mathbf{D}^{1/2} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{T} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{T}^{-1} \quad . \end{aligned}$$

Um die Wurzel der Kovarianzmatrix zu berechnen, müssen zunächst die Eigenwerte und die Transformationsmatrix \mathbf{T} berechnet werden, um daraus $\mathbf{D}^{1/2}$ zu berechnen. Die Rücktransformation von $\mathbf{D}^{1/2}$ liefert dann $\mathbf{\Sigma}^{1/2}$.

Normierung des Epanechnikovkerns

Die zur Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte benutzte Kernfunktion muss die Eigenschaften

$$\int K(\vec{x}) d\vec{x} = 1 \quad \text{und} \quad \int x_i x_j K(\vec{x}) d\vec{x} = \delta_{ij} \quad (5.19)$$

erfüllen. Wir wollen die Konstanten N und c des Epanechnikovkerns

$$K(\vec{x}) = \begin{cases} N(c - \vec{x}^2), & \forall \vec{x} \text{ mit } (\vec{x}^2 < c) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.20)$$

mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ für $d = 2$ und $d = 3$ bestimmen, so dass sie die Gleichung (5.19) erfüllen. Da es sich bei der Kernfunktion des Epanechnikovkerns um einen radialsymmetrischen Kern handelt, bietet es sich an, d -dimensionale Kugelkoordinaten zu benutzen, um die Integrale aus Gleichung (5.19) in Abhängigkeit von den Normierungskonstanten zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{d-2} \\ x_2 &= r \sin \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{d-2} \\ x_3 &= r \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{d-2} \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= r \cos \vartheta_{d-3} \sin \vartheta_{d-2} \\ x_d &= r \cos \vartheta_{d-2} \quad . \end{aligned} \quad (5.21)$$

Die Funktionaldeterminante für diese Koordinatentransformation lautet:

$$\det \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{d-2})} \right| = r^{d-1} \sin \vartheta_1 (\sin \vartheta_2)^2 \dots (\sin \vartheta_{d-2})^{d-2} . \quad (5.22)$$

Weiterhin gilt

$$\vec{x}^2 = r^2 . \quad (5.23)$$

Wir betrachten im Folgenden nur Terme der Form $\int x_i x_j K(\vec{x}) d\vec{x} = \delta_{ij}$ mit $i = j$, da für $i \neq j$ immer ein Teilintegral $\int_0^\pi \cos \vartheta_k (\sin \vartheta_k)^m d\vartheta_k = 0$ mit $k \in \mathbb{N}$ existiert. Somit lassen sich die Integrale aus Gleichung (5.19) berechnen. Dabei ist zu beachten, dass die Kernfunktion laut Definition nur für einen Radius $r < \sqrt{c}$ ungleich Null ist:

$$\begin{aligned} & \int N(c - \vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int N(c - r^2) r^{d-1} \sin \vartheta_1 (\sin \vartheta_2)^2 \dots (\sin \vartheta_{d-2})^{d-2} d\varphi dr d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{d-2} \\ &= N \left[\frac{c}{d} r^d - \frac{1}{n+2} r^{n+2} \right]_0^{\sqrt{c}} \cdot 2\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \sin \vartheta_1 \dots (\sin \vartheta_{d-2})^{d-2} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{d-2} \quad (5.24) \\ &= N \frac{4\pi}{d(d+2)} c^{\frac{d+2}{2}} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \sin \vartheta_1 \dots (\sin \vartheta_{d-2})^{d-2} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{d-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int x_1 x_1 N(c - \vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int N(c - r^2) r^{n+1} (\cos \varphi)^2 (\sin \vartheta_1)^3 (\sin \vartheta_2)^4 \dots (\sin \vartheta_{d-2})^d d\varphi dr d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{d-2} . \quad (5.25) \\ &= N \frac{2\pi}{(d+2)(d+4)} c^{\frac{d+4}{2}} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi (\sin \vartheta_1)^3 \dots (\sin \vartheta_{d-2})^d d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{d-2} \end{aligned}$$

Bei der Auswertung von Gleichung (5.25) wurde das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} (\cos x)^2 dx = \pi$ benutzt.

Zweidimensionaler Epanechnikovkern ($d = 2$)

Für $d = 2$ entfallen in Gleichung (5.24) und (5.25) alle Terme der Form $\sin \vartheta_i$, womit sich

$$1 \stackrel{!}{=} N \frac{\pi}{2} c^2 \quad \wedge \quad 1 \stackrel{!}{=} N \frac{\pi}{12} c^3 \quad (5.26)$$

ergibt. Daher sind für $d = 2$ die Normierungskonstanten

$$c = 6 \quad \wedge \quad N = \frac{1}{18\pi} \quad (5.27)$$

zu wählen.

Dreidimensionaler Epanechnikovkern ($d = 3$)

Für die folgenden Berechnungen benutzen wir den Zusammenhang:

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^m dx = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \dots \frac{m-1}{m} & \text{falls } m \text{ ungerade} \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{m-1}{m} & \text{falls } m \text{ gerade} \end{cases} . \quad (5.28)$$

Für $d = 3$ ergibt sich somit für Gleichung (5.24)

$$1 \stackrel{!}{=} N \frac{8\pi}{15} c^{5/2} \int \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 = N \frac{8\pi}{15} c^{5/2} \quad (5.29)$$

und Gleichung (5.25)

$$1 \stackrel{!}{=} N \frac{4\pi}{35} c^{7/2} \int_0^{\pi} (\sin \vartheta_1)^3 d\vartheta_1 = N \frac{8\pi}{105} c^{7/2} . \quad (5.30)$$

Daraus ergibt sich für $d = 3$, dass die Normierungskonstanten

$$c = 7 \quad \wedge \quad N = \frac{15}{8\pi 7^{5/2}} \quad (5.31)$$

zu wählen sind.

Fouriertransformierte der δ -Funktion

Sei die δ -Distribution $f(q') = \delta(q' - q)$ gegeben, so ist ihre Fouriertransformation durch

$$\mathcal{F}\{f(q')\} = \int e^{iq'\alpha} \delta(q' - q) dq' = e^{iq\alpha} \quad (5.32)$$

gegeben. Die Rücktransformation liefert

$$\begin{aligned} f(q') &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iq'\alpha} \mathcal{F}\{f(q')\} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-iq'\alpha} e^{iq\alpha} d\alpha \\ \delta(q' - q) = f(q') &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(q'-q)\alpha} d\alpha \end{aligned} . \quad (5.33)$$

Euler-Maruyama-Verfahren

Das Euler-Maruyama-Verfahren ist ein einschrittiges Verfahren zur Integration von stochastischen Differentialgleichungen. Ist eine Langevin-Gleichung mit unkorreliertem, gaußverteilterm Rauschen $\Gamma(t)$ der Form

$$\dot{q}(t) = D^{(1)}(q(t)) + \sqrt{2D^{(2)}(q(t))} \Gamma(t) \quad (5.34)$$

gegeben, so kann eine Realisation des so beschriebenen Prozesses mittels Euler-Maruyama-Verfahren simuliert werden:

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \Delta t D^{(1)}(q(t)) + \sqrt{\Delta t 2D^{(2)}(q(t))} \Gamma(t) \quad . \quad (5.35)$$

Jenson-Shannon-Divergenz

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Vergleiche zwischen Wahrscheinlichkeitsdichten wurde die Jenson-Shannon-Divergenz herangezogen. Dabei handelt es sich um eine symmetrische Form der Kullback-Leibler-Divergenz $D(P||Q)$. Im Gegensatz zur Kullback-Leibler-Divergenz erfüllt die Quadratwurzel der Jensen-Shannon-Divergenz $d_{JS}(P||Q) = \sqrt{JSD(P||Q)}$ die Dreiecksungleichung. Zudem ist d_{JS} symmetrisch, positiv definit und daher eine Metrik (vergleiche z.B. Lamberti et al., 2008). Sind zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(\vec{x})$ und $Q(\vec{x})$ gegeben, so ist die JSD :

$$JSD(P||Q) = \frac{1}{2}D(P||M) + \frac{1}{2}D(Q||M) \quad , \quad (5.36)$$

mit $M(\vec{x}) = \frac{1}{2}(P(\vec{x}) + Q(\vec{x}))$ und $D(P||Q) = \sum_{\vec{x} \in \vec{X}} \ln\left(\frac{P(\vec{x})}{Q(\vec{x})}\right)P(\vec{x})$. Liegen die Wahrscheinlichkeitsdichten $p(\vec{x}), q(\vec{x})$ vor, so berechnet sich die Kullback-Leibler-Divergenz und damit die Jensen-Shannon-Divergenz dementsprechend als:

$$D(p||q) = \int_{\vec{x} \in \vec{X}} \ln\left(\frac{p(\vec{x})}{q(\vec{x})}\right)p(\vec{x})d\vec{x} \quad . \quad (5.37)$$

Nach Lin (1991) gilt unter Verwendung des natürlichen Logarithmus in (5.36)

$$0 \leq JSD(P||Q) \leq \ln(2) \quad (5.38)$$

und somit

$$0 \leq d_{JS}(P||Q) \leq \sqrt{\ln(2)} \approx 0.83 \quad . \quad (5.39)$$

Der Jensen-Shannon-Abstand d_{JS} ist nebst seiner Eigenschaft als Metrik auch beschränkt.

Literaturverzeichnis

- Argyris, J. H., Faust, G., Haase, M. und Friedrich, R. (2010). *Die Erforschung des Chaos: Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme*. Springer.
- Bayes, M. und Price, M. (1763). An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S. *Philosophical Transactions (1683-1775)*, 53(1):370–418.
- Beek, P. J., Peper, C. E. und Stegeman, D. F. (1995). Dynamical models of movement coordination. *Human Movement Science*, 14(4–5):573–608.
- Behnen, K. und Neuhaus, G. (2003). *Grundkurs Stochastik*. PD-Verl, Heidenau, 4. neu bearb. und erw. Auflage.
- Bernstein, N. A. (1967). *The co-ordination and regulation of movements*. Pergamon Pr., Oxford [u.a.], 1. Engl. ed.
- Bernstein, N. A. (1975). *Bewegungsphysiologie*. Sportmedizinische Schriftenreihe der Deutschen Hochschule für Körperkultur Leipzig und des Forschungsinstituts für Körperkultur und Sport Leipzig. Barth, Leipzig.
- Birklbauer, J. (2006). *Modelle der Motorik*. Meyer & Meyer, Aachen [u.a.].
- Bizzi, E., Morasso, P. und Polit, A. (1976). Mechanisms underlying achievement of final head position. *Journal of neurophysiology*, 39(2):435–44.
- Blickhan, R., Seyfarth, A., Geyer, H., Grimmer, S., Wagner, H. und Günther, M. (2007). Intelligence by mechanics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1850):199–220.
- Bossel, H. (2004). *Systeme, Dynamik, Simulation: Modellbildung, Analyse und Simulation komplexer Systeme*. Books on Demand, Norderstedt, 1. Auflage.
- Boström, K. J., Wagner, H., Prieske, M. und de Lussanet, M. (2013). Model for a flexible motor memory based on a self-active recurrent neural network. *Human Movement Science*, 32(5):880–898.

- Box, G. E. P. und Muller, M. E. (1958). A note on the Generation of Random Normal Deviates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 29(2):610–611.
- Bremner, F. D., Baker, J. R. und Stephens, J. A. (1991). Correlation between the discharges of motor units recorded from the same and from different finger muscles in man. *The Journal of Physiology*, 432:355–380.
- Böttcher, F., Peinke, J., Kleinhans, D., Friedrich, R., Lind, P. G. und Haase, M. (2006). Reconstruction of complex dynamical systems affected by strong measurement noise. *Physical Review Letters*, 97(9):090603.
- Criswell, E. und Cram, J. R. (2011). *Cram's introduction to surface electromyography*. Jones & Bartlett, Sudbury, Massachusetts [u.a.], 2. ed.
- Dingwell, J. B. und Marin, L. C. (2006). Kinematic variability and local dynamic stability of upper body motions when walking at different speeds. *Journal of Biomechanics*, 39(3):444–452.
- Disselhorst-Klug, C., Schmitz-Rode, T. und Rau, G. (2009). Surface electromyography and muscle force: limits in semg-force relationship and new approaches for applications. *Clinical biomechanics*, 24(3):225–235.
- Epanechnikov, V. (1969). Non-Parametric Estimation of a Multivariate Probability Density. *Theory of Probability & Its Applications*, 14(1):153–158.
- Eriten, M. und Dankowicz, H. (2009). A rigorous dynamical-systems-based analysis of the self-stabilizing influence of muscles. *Journal of biomechanical engineering*, 131(1):011011.
- Feldman, A. G. (1986). Once more on the Equilibrium-Point Hypothesis (λ Model) for Motor Control. *Journal of Motor Behavior*, 18(1):17–54.
- Feldman, A. G. (2006). The Nature of Voluntary Control of Motor Actions. In Latash, M. L. und Lestienne, F., (Eds.), *Motor Control and Learning*, pages 3–8. Springer US.
- FIFA Statistics World Cup (2014). Zugriff am 07.07.2014 unter <http://www.fifa.com/worldcup/statistics/index.html>.
- Forster, O. (2011). *Analysis 1*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.
- Friedrich, R. und Peinke, J. (1997). Description of a Turbulent Cascade by a Fokker-Planck Equation. *Physical Review Letters*, 78(5):863–866.
- Friedrich, R., Siegert, S., Peinke, J., Lück, S., Siefert, M., Lindemann, M., Raethjen, J., Deuschl, G. und Pfister, G. (2000). Extracting model equations from experimental data. *Physics Letters A*, 271(3):217–222.

- Gerbeaux, M., Turpin, E. und Linsel-Corbeil, G. (1996). Musculo-articular modelling of the triceps brachii. *Journal of Biomechanics*, 29(2):171–180.
- Giesl, P., Meisel, D., Scheurle, J. und Wagner, H. (2004). Stability analysis of the elbow with a load. *Journal of Theoretical Biology*, 228(1):115–125.
- Giesl, P. und Wagner, H. (2007). Lyapunov function and the basin of attraction for a single-joint muscle-skeletal model. *Journal of Mathematical Biology*, 54(4):453–464.
- Gordon, A. M., Huxley, A. F. und Julian, F. J. (1966). The variation in isometric tension with sarcomere length in vertebrate muscle fibres. *The Journal of Physiology*, 184(1):170–192.
- Goswami, A., Espiau, B. und Keramane, A. (1996). Limit cycles and their stability in a passive bipedal gait. In *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1996*, volume 1, pages 246–251.
- Gottschall, J., Peinke, J., Lippens, V. und Nagel, V. (2009). Exploring the dynamics of balance data — movement variability in terms of drift and diffusion. *Physics Letters A*, 373(8–9):811–816.
- Guckenheimer, J. und Holmes, P. (1986). *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, New York [u.a.], 2. print., rev. and corr.
- Haken, H. (1988). Entwicklungslinien der Synergetik, I. *Naturwissenschaften*, 75(4):163–172.
- Haken, H. (1990). *Synergetik*. Springer, Berlin [u.a.], 3., erw. Auflage.
- Haken, H., Kelso, J. a. S. und Bunz, H. (1985). A theoretical model of phase transitions in human hand movements. *Biological Cybernetics*, 51(5):347–356.
- Hall, P., Sheather, S. J., Jones, M. C. und Marron, J. S. (1991). On optimal data-based bandwidth selection in kernel density estimation. *Biometrika*, 78(2):263–269.
- Hill, A. V. (1938). The Heat of Shortening and the Dynamic Constants of Muscle. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B - Biological Sciences*, 126(843):136–195.
- Honisch, C. und Friedrich, R. (2011). Estimation of kramers-moyal coefficients at low sampling rates. *Physical Review E*, 83(6):066701.
- Honisch, C., Friedrich, R., Hörner, F. und Denz, C. (2012). Extended kramers-moyal analysis applied to optical trapping. *Physical Review E*, 86(2):026702.
- Härdle, W. (2004). *Nonparametric and semiparametric models*. Springer, Berlin [u.a.].

- Kamps, O. und Wilczek, M. (2011). Long time memory of lagrangian acceleration statistics in 2d and 3d turbulence. *Journal of Physics: Conference Series*, 318(5):052033.
- Kandel, E. R. H. (2013). *Principles of neural science*. McGraw-Hill Medical, New York [u.a.], 5. ed.
- Kelso, J. A. (1984). Phase transitions and critical behavior in human bimanual coordination. *American journal of physiology*, 246(6):R1000–R1004.
- Kleinhans, D. (2005). *Analyse stochastischer Prozesse - eine iterative Methode zur Bestimmung von Drift und Diffusion*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.
- Kleinhans, D. (2008). *Stochastische Modellierung komplexer Systeme - Von den theoretischen Grundlagen zur Simulation atmosphärischer Windfelder*. Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.
- Kolmogorov, A. und Natarajan, S. (1998). The theory of probability. *Resonance*, 3(4):103–112.
- Kuusela, T. (2004). Stochastic heart-rate model can reveal pathologic cardiac dynamics. *Physical Review E*, 69(3):031916.
- Lamberti, P. W., Majtey, A. P., Borrás, A., Casas, M. und Plastino, A. (2008). Metric character of the quantum Jensen-Shannon divergence. *Physical Review A*, 77(5):052311.
- Lin, J. (1991). Divergence measures based on the Shannon entropy. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(1):145–151.
- Lowery, M. M., Stoykov, N. S. und Kuiken, T. A. (2003). A simulation study to examine the use of cross-correlation as an estimate of surface EMG cross talk. *Journal of Applied Physiology*, 94(4):1324–1334.
- Mombaur, K. (2009). Using optimization to create self-stable human-like running. *Robotica*, 27(03):321–330.
- Moritani, T. und Muro, M. (1987). Motor unit activity and surface electromyogram power spectrum during increasing force of contraction. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*, 56(3):260–265.
- Murray, W. M., Buchanan, T. S. und Delp, S. L. (2000). The isometric functional capacity of muscles that cross the elbow. *Journal of Biomechanics*, 33(8):943–952.
- Pawula, R. F. (1967). Approximation of the Linear Boltzmann Equation by the Fokker-Planck Equation. *Physical Review*, 162(1):186–188.

- Press, W. H. (2007). *Numerical recipes*. Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.], 3. ed.
- Risken, H. (1984). *The Fokker Planck equation*. Springer, Berlin [u.a.].
- Saziorski, W., Aruin, A. und Selujanow, W. (1984). *Biomechanik des menschlichen Bewegungsapparates*. Sportverl. Berlin.
- Schaal, S., Atkeson, C. G. und Sternad, D. (1996). One-handed juggling: A dynamical approach to a rhythmic movement task. *Journal of Motor Behavior*, 28(2):165–183.
- Schuster, E. F. (1972). Joint Asymptotic Distribution of the Estimated Regression Function at a Finite Number of Distinct Points. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43(1):84–88.
- Siebert, T., Wagner, H. und Blickhan, R. (2003). Not all oscillations are rubbish: Forward simulation of quick-release experiments. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 3(1):107–122.
- Siefert, M., Kittel, A., Friedrich, R. und Peinke, J. (2003). On a quantitative method to analyze dynamical and measurement noise. *EPL (Europhysics Letters)*, 61(4):466.
- Siefert, M. und Peinke, J. (2004). Reconstruction of the Deterministic Dynamics of Stochastic Systems. *International Journal of Bifurcation & Chaos in Applied Sciences & Engineering*, 14(6):2005–2010.
- Siebert, S., Friedrich, R. und Peinke, J. (1998). Analysis of data sets of stochastic systems. *Physics Letters A*, 243(5–6):275–280.
- Silverman, B. W. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman and Hall, London [u.a.].
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press.
- Sust, M., Schmalz, T. und Linnenbecker, S. (1997). Relationship between distribution of muscle fibres and invariables of motion. *Human Movement Science*, 16(4):533–546.
- Tipler, P. A. (2000). *Physik. 3. korrigierter Nachdruck der 1. Auflage*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg.
- Tolan, M. (2014). Deutschland wird Weltmeister!? *forschung - Mitteilungen der DFG*, 39(1):10–15.
- Turvey, M., Fitch, H. L. und Tuller, B. (1982). The Bernstein perspective: I. The problems of degrees of freedom and context-conditioned variability. *Human motor behavior: An introduction*, pages 239–252.

- van Mourik, A. M. (2006). *Structure from randomness - a window into coordination*. Dissertation, VU Amsterdam.
- van Mourik, A. M., Daffertshofer, A. und Beek, P. J. (2006). Deterministic and stochastic features of rhythmic human movement. *Biological Cybernetics*, 94(3):233–244.
- Wagner, H., Giesl, P. und Blickhan, R. (2007). Musculoskeletal Stabilization of the Elbow — Complex or Real. *Journal of Mechanics in Medicine & Biology*, 7(3):275–296.
- Wand, M. P. (1992). Error analysis for general multivariate kernel estimators. *Journal of Nonparametric Statistics*, 2(1):1–15.
- Wand, M. P. und Jones, M. C. (1993). Comparison of Smoothing Parameterizations in Bivariate Kernel Density Estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 88(422):520–528.
- Wank, V. (1996). *Modellierung und Simulation von Muskelkontraktionen für die Diagnose von Kraftfähigkeiten*. Sport u. Buch Strauß, Ed. Sport.
- Wegman, E. J. (1972). Nonparametric Probability Density Estimation: I. A Summary of Available Methods. *Technometrics*, 14(3):533–546.
- Wei, K., Dijkstra, T. M. H. und Sternad, D. (2008). Stability and Variability: Indicators for Passive Stability and Active Control in a Rhythmic Task. *Journal of Neurophysiology*, 99(6):3027–3041.
- Winter, D. A., Fuglevand, A. J. und Archer, S. E. (1994). Crosstalk in surface electromyography: Theoretical and practical estimates. *Journal of Electromyography and Kinesiology*, 4(1):15–26.
- Woittiez, R. D., Huijing, P. A., Boom, H. B. K. und Rozendal, R. H. (1984). A three-dimensional muscle model: A quantified relation between form and function of skeletal muscles. *Journal of Morphology*, 182(1):95–113.

