

Eine mikroökonomische Fundierung  
der Prognosefähigkeit des Terminkurses für den erwarteten  
Wechselkurs

I n a u g u r a l d i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors  
der Wirtschaftswissenschaften durch die Wirtschaftswissenschaftliche  
Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von Christian Fehlker  
aus Steinfurt (ehemals Burgsteinfurt)

2003

Erstberichterstatter:	Prof. Dr. Manfred Borchert
Zeitberichterstatter:	Priv. Dozent Matthias Göcke
Dekan	Prof. Dr. Karl Heinz Hartwig
Tag der mündlichen Prüfung:	26.11.2003

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde im Herbst 2003 an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster als Dissertation angenommen.

Ganz selbstverständlich möchte ich zuallererst meinem geschätzten Doktorvater, Prof. Dr. Manfred Borchert, großen Dank aussprechen für die exzellente Betreuung meines Promotionsvorhabens. Diese Betreuung half mir oft zeitweilige Zweifel am erfolgreichem Abschluss dieser Arbeit –wie sie wohl oft unter externen Doktoranden vorkommen – zu überwinden. Weiterhin möchte ich dem zweiten Berichtstatter, Hr. Privat Dozent Matthias Göcke, meinen Dank aussprechen für seine Bereitschaft zur Diskussion einer sehr technischen und ‚trockenen‘ Materie.

Entscheidenden Anteil am Gelingen dieser Arbeit hatte fraglos meine Familie. Hier danke ich zuerst meiner Frau und Lebensgefährtin, Bettina Romeiser, die mir in diesen Jahren eine geduldige ZuhörerIn war. Ohne ihre Geduld wäre diese Arbeit nicht beendet worden. Weiterhin danke ich meinen Eltern und Freunden, die mir in schwierigen Situationen mit Rat zur Seite standen.

„Last not least“ möchte ich der Universität Münster für die finanzielle Unterstützung danken, die im Rahmen eines Stipendiums gewährt wurde.

Ich widme dieses Werk meiner Frau Bettina und meinen Kindern.

Christian Fehlker      Frankfurt am Main, im Juli 2005

# Inhaltsverzeichnis

<b>ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS .....</b>	<b>6</b>
<b>VARIABLENVERZEICHNIS .....</b>	<b>8</b>
I.    ALLGEMEINGÜLTIGE SYMBOLE .....	8
II.   SPEZIELLE SYMBOLE .....	9
<b>EINLEITUNG.....</b>	<b>12</b>
<b>KAPITEL I.  HYPOTHETISCHE ANNAHME – EINE INTUITIV-REFLEXIVE BEGRÜNDUNG DER PROGNOSEFÄHIGKEIT DES TERMINKURSES UND AUSSAGEKRAFT EMPIRISCHER FORSCHUNGLITERATUR.....</b>	<b>23</b>
0.    EINFÜHRUNG .....	23
1.    DIE URSACHEN INTERNATIONALER KAPITALBEWEGUNGEN .....	25
2.    DIE AUSSAGE DER KAUFKRAFTPARITÄT .....	31
3.    DIE AUSSAGE DER GEDECKTEN ZINSPARITÄTENTHEORIE .....	36
4.    DIE UNGEDECKTE ZINSPARITÄT .....	41
4.1. <i>Die Aussage der ungedeckten Zinsparität.....</i>	41
4.2. <i>Die empirische Überprüfung der ungedeckten Zinsparität.....</i>	42
4.2.1    Eine Übersicht über die empirischen Ergebnisse bei Verwendung von Umfragen.....	42
4.2.2    Eine Übersicht über die empirischen Ergebnisse unter der Prämisse risikoneutralen Anlegerverhaltens..	44
4.2.3    Empirisch fundierte Aussagen zur Risikoprämie.....	46
5.    ERSTES ERGEBNIS ZUR HYPOTHETISCHEN ANNAHME UND HINFÜHRUNG ZUR WEITERFÜHRENDEN ÜBERPRÜFUNG .....	53
<b>KAPITEL II.  DIE PROGNOSEFÄHIGKEIT DES TERMINKURSES IN EINEM KOMPARATIV STATISCHEN INTERTEMPORALEN MODELL.....</b>	<b>54</b>
0.    EINFÜHRUNG .....	54
1.    THEORETISCHE GRUNDLAGEN.....	57
1.1. <i>Mögliche Formen einer Nutzenfunktion.....</i>	58
1.1.1.    Eine ökonomisch orientierte Beschreibung risikoaversen Verhaltens .....	59
1.1.2.    Der Einfluss der Nutzenfunktion auf eine Risikoprämie .....	65
1.1.3.    Alternative analytische Darstellungsformen risikoaversen Verhaltens.....	67
1.1.3.1.    Darstellungsformen von Risikoaversion auf Basis der Pratt'schen Definition .....	68
1.1.3.2.    Alternative Beschreibungen risikoaversen Verhaltens .....	76
1.2. <i>Allgemeine Zusammenhänge zwischen Risikoaversion, Preisstochastik und                 Nachfrageänderungen.....</i>	77
1.2.1.    Der Zusammenhang zwischen Risikoaversion und stochastischer Verteilung einer Variablen im Gleichgewicht .....	79
1.2.2.    Der Einfluss einer geänderten Preisstochastik auf die Nachfrage bei risikoaverm Verhalten .....	83
2.    ALLGEMEINE GLEICHGEWICHTSMODELLE AUF BASIS DES LUCAS MODELLS .....	93
2.1. <i>Die Prämissen des Lucas Modells.....</i>	93
2.2. <i>Weiterentwicklungen des Lucas-Modells und ihre Aussage zur Prognosefähigkeit des                 Terminkurses .....</i>	95
3.    EIN INTERTEMPORALES OPTIMIERUNGSMODELL .....	103
3.1. <i>Die Modellbeschreibung .....</i>	104
3.2. <i>Bedingungen für die Gültigkeit der Kaufkraftparität .....</i>	110
3.2.1.    Das ‚law of one price‘ .....	110
3.2.2.    Eine Generalisierung zur Kaufkraftparität .....	115
3.3. <i>Bedingungen für die Gültigkeit der ungedeckten Zinsparität .....</i>	117
3.4. <i>Ein intertemporales Optimum bei risikoneutralem Anlegerverhalten.....</i>	122
3.4.1.    Die analytische Herleitung eines Optimums.....	122
3.4.2.    Die ökonomische Interpretation des allgemeinen Gleichgewichtes.....	130
3.5. <i>Eine Zwei-Länder-Betrachtung der intertemporalen Optimierung.....</i>	138
3.5.1.    Die Darstellung des Siegel-Paradoxons .....	139
3.5.2.    Ausmaß und Ursachen von Erwartungsdivergenzen.....	145

3.6.	<i>Das Verhalten der Arbitrageure bei Risikoaversion</i> .....	153
3.6.1.	Die Herleitung der ungedeckten Zinsparität bei risikoaverm Anlegerverhalten.....	153
3.6.2.	Ökonomische Interpretation der Bedingungen des intertemporalen Optimierungsgleichgewichtes.....	156
3.6.2.1.	Die erste Fallstudie.....	156
3.6.2.2.	Die zweite Fallstudie.....	163
4.	ZWEITES ERGEBNIS MIT RÜCKBEZUG AUF DIE HYPOTHETISCHE ANNAHME.....	171
<b>KAPITEL III. DIE PROGNOSEFÄHIGKEIT DES TERMINKURSES IN EINEM CONTINUOUS-TIME MODELL.....</b>		<b>173</b>
1.	MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN VON CONTINUOUS-TIME MODELLEN.....	177
2.	AUSSAGEN ZUR PROGNOSEFÄHIGKEIT DES TERMINKURSES IM KOMPARATIV-STATISCHEN UND IM CONTINUOUS-TIME CAPM.....	190
2.1.	<i>Die Aussagen des komparativ statischen CAPM und dessen Grenzen</i> .....	190
2.2.	<i>Die empirische Überprüfbarkeit des komparativ statischen CAPM</i> .....	193
2.3.	<i>Aussagen zur Prognosefähigkeit des Terminkurses im Continuous-Time CAPM</i> .....	198
3.	DIE PROGNOSEFÄHIGKEIT DES TERMINKURSES IN EINEM CONTINUOUS-TIME MODELL.....	202
3.1.	<i>Die Modellbeschreibung</i> .....	202
3.1.1.	Die Modellprämissen.....	202
3.1.2.	Der Modellaufbau.....	208
3.1.2.1.	Die Beschreibung der Zielfunktion.....	210
3.1.2.2.	Die Beschreibung der Nebenbedingung.....	211
3.1.2.3.	Die Beschreibung zukünftiger Szenarien.....	214
3.2.	<i>Die Beschreibung des Lösungsansatzes</i> .....	220
3.3.	<i>Die Herleitung einer nutzenmaximierenden Devisennachfragefunktion</i> .....	224
3.4.	<i>Die Herleitung einer nutzenmaximierenden Devisenangebotsfunktion</i> .....	236
3.5.	<i>Die Herleitung eines Devisenmarktgleichgewichtes</i> .....	245
5.	DRITTES ERGEBNIS MIT RÜCKBEZUG AUF DIE HYPOTHETISCHE ANNAHME.....	270
<b>KAPITEL IV. SCHLUSSBEMERKUNGEN, ZUSAMMENFASSENDES ERGEBNIS ZUM ERKENNTNISBEITRAG UND KRITISCHE STELLUNGNAHME.....</b>		<b>272</b>
<b>ANHANG.....</b>		<b>277</b>
APPENDIX 1 DIE GÜLTIGKEIT DER KAUFKRAFTPARITÄT IM MEHRGÜTERFALL.....		277
APPENDIX 2 DAS OPTIMIERungsverhalten DER AUSLÄNDER IM KOMPARATIV STATISCHEN MODELL.....		281
APPENDIX 3 DIE DARSTELLUNG DER INLANDSPERSPEKTIVE BEI RISIKOAVERSEM VERHALTEN IM KOMPARATIV STATISCHEN MODELLRAHMEN.....		287
APPENDIX 4 DIE HERLEITUNG DER GLEICHGEWICHTSBEDINGUNG BEI RISIKOAVERSEM VERHALTEN UND GÜLTIGKEIT DER PPP AUS AUSLANDSPERSPEKTIVE.....		305
APPENDIX 5 FORMALE GRUNDLAGEN.....		315
5.1	<i>Die Darstellung der dynamischen Programmierung</i> .....	315
5.2.	<i>Die Beschreibung wesentlicher stochastischer Prozesse für die Bestimmung des Optimalverhaltens</i> .....	325
APPENDIX 6 EINE DARSTELLUNG DER OPTIMALBEDINGUNG UNTER VERWENDUNG DER NUTZENFUNKTION.....		328
APPENDIX 7 DER EINFLUSS DER LÄNDERPERSPEKTIVE AUF DIE ‚FORWARD PREMIA‘.....		336
<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>		<b>341</b>

## Abkürzungsverzeichnis

CIP	Gedeckte Zinsparität
UIP	Ungedeckte Zinsparität
PPP	Kaufkraftparität
CAPM	Capital Asset Pricing Model
HB	Handelsbilanz
jap.	japanisch
brit.	britisch
franz.	französisch
can.	kanadisch
dän.	dänisch
ital.	italienisch
OECD	Organisation for Economic Co-Operation and Development
EWS	Europäisches Währungssystem
CARA	konstante absolute Risikoaversion
CRRA	konstante relative Risikoaversion
ARA	absolute Risikoaversion
RRA	relative Risikoaversion
HARA	hyperbolische absolute Risikoaversion (-familie)
s.t.	so da (so that)
ARCH	Auto Regressive Conditional Heteroskedastisity
GARCH	Generalised Auto Regressive Conditional Heteroskedastisity
GDP	Bruttoinlandsprodukt (Gross Domestic Product)
USD	US-Dollar
DM	Deutsche Mark
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel
i.i.d.	identical and independently distributed
BW	Brown'sche Bewegung
S.	Seite
f.	folgende

ff.	fortfolgende
et al.	und andere (et alii)
bzw.	beziehungsweise
i.e.	das heißt (id est)
h.M.	höhere Momente
d.h.	das heißt
RSA	Relative Senarioaversion
MOF	marginaler Offenheitsgrad
OF	durchschnittlicher Offenheitsgrad
DN	Devisennachfrage
DA	Devisenangebot
HBD	Handelsbilanzdefizit
OLS	Ordinary Least Square Schätzung
u.a.	unter anderem
CPI	Consumer Price Index
opt.	optimal

## Variablenverzeichnis

### I. Allgemeingültige Symbole

<b>Symbol</b>	<b>Bedeutung</b>
$ARA$	Absolute Risikoaversion
$COV$	Co-Varianz
$CARA$	Konstante Absolute Risikoaversion
$CRRA$	Constante Relative Risikoaversion
$E[\cdot]$	Erwartungswert
$e$	e-Funktion
$H$	harmonisches Mittel
$HARA$	Hyperbolische Konstante Absolut Risikoaversion
$lim$	Grenzwert
$ln$	Natürlicher Logarithmus
$Prob$	Wahrscheinlichkeit
$t$	Zeitindex
$tiefgestellt_{RN}$	Risikoneutralität
$tiefgestellt_{RA}$	Risikoaversität
$tiefgestellt_{t, t=1}$	Indikator für den Zeitpunkt ‚t‘, ‚t+1‘ etc.
$hochgestellt^a$	Variable aus Auslandsperspektive
$tiefgestellt_a$	Auslandsvariable aus Inlandsperspektive
$U$	Direkte Nutzenfunktion
$V$	Indirekte Nutzenfunktion
$W=W^{nominal}$	Nominales Vermögen
$W^{real}$	Reales Vermögen
$\partial$	partielle Ableitung
$\Delta$	Veränderung
$\sigma$	Standardabweichung
$\sigma^2$	Varianz
$\Sigma$	Summationszeichen
$\equiv$	definiert als
$\uparrow$	steigt
$\downarrow$	fällt
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\Leftrightarrow$	äquivalent zu
$\sim$	asymptotisch proportional zu
$\forall$	Allquantor; für alle
$\exists$	Existenzquantor; es gibt
$\%$	Prozent



## II. Spezielle Symbole

<i>Vorkommen</i>	<i>Symbol</i>	<i>Bedeutung</i>
<b>Kapitel I</b>		
I.1	$\Delta s_{t,t+1}$	erwartete zukünftige nominale Wechselkursänderung
I.1	$i$	Nominalzins
I.1	$r$	Realzins
I.1	$s$	nominaler Wechselkurs
I.1	$\pi$	Inflationsrate
I.1	$f$	Terminkurs
I.1	$fp$	Forward premia
I.2	$P$	Allgemeines Preisniveau
I.2	$tr$	Handelshemmnisse (trade restrictions)
I.2	$rx$	Verhältnis der Exportpreise zum allgemeinen Preisniveau (ratio export)
I.6	$E[s_{t+1}]$	zum Zeitpunkt t erwarteter Wechselkurs für den Zeitpunkt t+1
I.8	$u$	,white noise', seriell nicht korrelierter Störterm
I.8	$\alpha, \beta$	Koeffizienten
<b>Kapitel II</b>		
II.1	$z_u$	Unsichere Zahlung
II.7	$D$	Parameter der CARA Nutzenfunktion
II.8 / II.16	$av$	Parameter der CRRA Nutzenfunktion
II.9 / II.13	$\psi, \gamma, \eta, a, b, c$	Parameter der HARA Nutzenfunktion
II.15	$\theta$	intertemporale Substitutionselastizität
II.15	$\beta$	intertemporaler Diskontierungsfaktor
II.15	$\rho$	Höhe der relative Risikoverision
II.16	$\mu$	Sicherheitsäquivalent
II.16	$A$	Parameter zur Beschreibung der ,first order risk aversion'
II.18	$wp$	Ausstattung an Produktionsmitteln (Wertpapier)
II.18	$J(x,y)$	Optimum Value Function
II.18	$M$	Markov-Prozess
II.19	$\lambda$	Lagrange Multiplier
II.24	$w_t$	Variable, die einem Martingal folgt
II.4	$c_t$	Konsum zum Zeitpunkt ,t'
II.26	$sp$	Sparquote
II.26	$r$	stochastischer Ertrag für eine investierte Geldeinheit
II.27	$a$	Parameter in einer quadratischen Nutzenfunktion
II.42	$Q$	Intertemporale Grenzrate der Substitution
II.43	$\Phi$	Variable, der vereinfachten Darstellung dienend
II.43	$h$	Variable, der vereinfachten Darstellung dienend
II.44	$x, y$	Konsumierte Mengen der Güter x bzw. y

II.45	$X$	Produktionsmenge des Gutes ‚X‘
II.45	$b$	Volumen der Inlandsinvestition
II.45	$b_a$	Volumen der Auslandsinvestition
II.71	$\varpi$	Vereinfachungsvariable (Gütermarktgleichgewicht)
II.94	$z$	stochastische Variable
II.107	$\phi^1 \phi^2 \phi^3$	Variablen für den Einfluß der Unsicherheit auf eine Inkonsistenz internationaler Erwartungen
II.117	$\varpi$	Gütermarktgleichgewicht
II.117	$\mathcal{G}$	Kapitalmarktgleichgewicht
II.125	$h$	Differenzierbare Funktion
II.128	$\chi, \psi$	Variablen zur Beschreibung von Unsicherheit wobei:
II.130	$\psi$	Hedgeeffekt
II.131	$\chi$	Strukturkomponente
<b>Kapitel III</b>		
III.1	$k$	Periodenanzahl
III.1	$h$	Periodenlänge
III.1	$X$	Stochastische Variable
III.1	$\varepsilon$	unerwartete Änderung der Ausprägung von X
III.1	$a_k$	unerwartete Änderung der Ausprägung von X
III.1	$p_{i(k)}$	Veränderung der Eintrittswahrscheinlichkeit
III.2	$r_j$	unerwartete Änderung der Variablen X in Abhängigkeit von h
III.2	$q_j$	Ausmaß der unerwarteten Änderung der Variablen X in Abhängigkeit von h
III.5	$Z$	stochastische Variable
III.12	$dz$	standardnormalverteilter Term zur Beschreibung der Stochastik der Güterpreise
III.16	$B_o$	Wertpapier (Bond)
III.18	$\mu_s$	erwarteter Wechselkurs
III.20	$B$	Netto-Vermögensauflösung zu Konsumzwecken
III.20	$B_e$	bequest-Funktion
III.24	$b$	im Inland angelegter Anteil am Nominalvermögen
III.24	$b_a$	im Ausland angelegter Anteil am Nominalvermögen
III.29	$CPI$	Konsumpreisindex
III.37	$J$	Optimal Value Function
III.37	$W^v$	mit dem inl. Preis normiertes Nominalvermögen
III.37	$B^r$	mit dem inl. Preis normierte Netto-Vermögensauflösung zu Konsumzwecken
III.54	$RSA$	Relative Scenario-Aversion
III.57	$OF$	durchschnittlicher Offenheitsgrad
III.57	$MOF$	marginaler Offenheitsgrad
III.76	$DN$	Devisennachfragefunktion
III.77	$DA$	Devisenangebotsfunktion
III.78	$HBD$	Handelsbilanzdefizit
III.79	$\bar{W}$	bestehende Auslandsinvestitionen der Inländer vor der Investitionsentscheidung in ‚t‘

III.96	$\varepsilon_{x,y}$	Elastizität von ,x‘ nach ,y‘
<b>Anhang</b>		
AI.1	B	zu Konsumzwecken verwendetes Budget
AI.1	P	Preisindex
AIII.19	$\zeta$	Quotienten aus Preis und Grenznutzen des Gutes ,y‘
AIII.19	COV[•]	Covarianz zwischen dem abdiskontierten Grenznutzen des Gutes ,x‘ und seinem inversen zukünftigen Preis
AV.1	VAR	Varianz
AV.1	j, k	Parameter für Zeitpunkte
AV.3	p	Eintrittswahrscheinlichkeit
AV.3	$\varepsilon_j(k)$	mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtete unerwartete Änderung
AV.3	m	Anzahl der möglichen Ausprägungen
AV.13	u	control variable
AV.14	$\lambda$	costate variable
AV.14	$H(y,u)$	Hamiltonian
AV.18	$\Gamma$	Stammfunktion
AV.19	$J(\bullet)$	Optimum Value Function
AV.24	$\delta$	Diskontierungsfaktor
AVI.5	$\varepsilon$	Elastizität
AVI.10	$\lambda$	Lagrange-Mulitplikator
AVII.13	$i^c$	Zinssatz in der continuous time form

## Einleitung

Der Wechselkurs, definiert als Preis einer ausländischen Währungseinheit in Inlandswährung, nimmt eine zentrale Stellung in der volkswirtschaftlichen Forschung ein. Die Anzahl der existierenden Modelle und die Vielfalt der empirischen Überprüfungen lassen einen Literaturüberblick als nahezu unmöglich erscheinen.<sup>1</sup> Trotz dieses Einsatzes ist es der Forschung bisher nicht gelungen, eine unwidersprochene, allgemeingültige und umfassende Aussage zu den makroökonomischen Wirkungszusammenhängen zu formulieren, die die Ausprägung des Wechselkurses erklären oder zuverlässig zu prognostizieren helfen. Ein kritischer Beobachter könnte angesichts dieses Aufwandes fragen, ob der Nutzen der Forschung in diesem Bereich den damit verbundenen Aufwand rechtfertigt.

Unabhängig vom Nutzen bzw. des ‚Erfolges‘ im Sinne des Erkenntnisgewinns, der existierenden Literatur sollte der Bedarf an Erkenntnissen im Bereich der Wechselkursentwicklung unstrittig sein. Die Frage nach der zukünftigen Wechselkursentwicklung ist keine rein akademisch-abstrakte Fragestellung, sondern besitzt neben der wirtschaftspolitischen Dimension auch eine Relevanz in 'Alltagsentscheidungen' von Anlegern. Dazu sei folgendes Zitat aus dem Journal of Economic Perspectives wiedergegeben.<sup>2</sup>

*The one person in your family, who ever asks your advice about economics is your uncle, who is in the import-export business. A while back he called you about a foreign exchange issue. "Let's suppose I owe a million German Marks, payable in one month" he said. "We have the money to pay the bill in dollars, so the issue is whether to put the money wherever it would earn the highest rate, but my treasurer, one of those MBA hot shots, tells me that this is irrelevant because if the interest rate is high in Germany that means that the mark is expected to go down. When I ask her what we should do, she says that it doesn't matter. "Flip a coin" she says! Is this what I am paying her so much money for? To flip coins?" You tried to calm your uncle down, and explain the idea of efficient markets to him, but he was unconvinced. "OK," you told him, "if you think you can do better, why don't you run an experiment. You*

---

<sup>1</sup> Die Monografien zur Ökonomie des Wechselkurses von Isard (1995), Pentecost (1993) und Baillie und McMahon (1989) seien stellvertretend für die Übersichtsliteratur auch der strukturellen Modelle genannt.

<sup>2</sup> Vgl. Froot und Thaler (1990), S. 179 f.

*invest some of your money your way, while your treasurer flips coins, and then we see who does better.” He thought this was a great idea, and promised to let you know what happens.”*

In Anlehnung an die Argumentation wie sie im obigen Zitat vorgebracht wird, geht die vorliegende Arbeit von der **hypothetischen Annahme** aus:

**„Der Terminkurs besitzt eine unverzerrte Prognosefähigkeit für den erwarteten Wechselkurs.“**

Diese hypothetische Annahme wird in der wissenschaftlichen empirischen Literatur oft verwendet, in der Regel jedoch verworfen wie die Literaturübersicht in Kapitel I.4 in dieser Arbeit zeigt.

Ausgehend von dieser Hypothese verfolgt sie zwei Ziele und beschränkt sich auf die Analyse von flexiblen Wechselkurssystemen ohne auf wirtschaftspolitische Aspekte einzugehen:

### **Ziel 1**

Der Leser dieser Arbeit wird am Ende nicht nur die Antwort auf den wahrscheinlichen Ausgang des Experiments kennen, sondern ebenfalls den Erfolg/Misserfolg plausibel auf mögliche Ursachen zurückführen können. Es ist das Ziel dieser Arbeit, die Ausprägung des zukünftigen nominalen Wechselkurses relativ zum Terminkurs (Prognosefähigkeit des Terminkurses für den erwarteten Wechselkurs) auf Basis rationalen Anlegerverhaltens und unter Verwendung eines Modells zu bestimmen. Der gedeckten und der ungedeckten Zinsparitätentheorie, wie sie implizit vom MBA-hot-shot angesprochen wurde, kommt hierbei eine zentrale Position zu.

Im wissenschaftlichen Kontext erlaubt die modell-basierte Herleitung in dieser Arbeit die Offenlegung sämtlicher Voraussetzungen (d.h. Voraussetzungen, die durch die Abstraktion im Rahmen der Modellformulierung gesetzt werden und Voraussetzungen, die aus der modellierten Gleichgewichtsbedingung hervorgehen), die erfüllt sein müssen damit eine unverzerrte Prognosefähigkeit des Terminkurses erwartet werden kann. Sie ist in ihrer Aussage

folglich komplementär zur empirischen Literatur, die in den jeweiligen Kapiteln dieser Arbeit aufgeführt werden und die solch eine ‚Nullhypothese‘ testen. Sie ergänzt in Kapitel III die existierende theoretische Literatur indem sie **nicht** von einem exogenen (Devisen)angebot ausgeht, sondern dieses Angebot als Resultat eine Optimierungsentscheidung herleitet.<sup>3</sup> Diese Modellvariante wurde bisher noch nicht in der Literatur vergenommen, erscheint jedoch als eine sinnvolle Erweiterung.

## **Ziel 2**

Darüber hinaus erhält der Leser einen Überblick über die alternativen Verfahren/Modelle, aus denen die eingangs genannte hypothetische Annahme hergeleitet werden kann. Die theoretischen Ansätze zur Wechselkursmodellierung lassen sich nach der gewählten Methode in Partialansätze, allgemeine Gleichgewichtsmodelle sowie Portfoliomodelle unterteilen. Unter Partialansätzen werden in dieser Arbeit die Kaufkraftparität, die den Gütermarkt analysiert, sowie die Zinsparitäten, die den Kapitalmarkt analysieren, verstanden. Allgemeine Gleichgewichtsmodelle führen eine simultane Analyse der Güter- und Kapitalmärkte durch. Diese Arbeit beschränkt sich hinsichtlich allgemeiner Gleichgewichtsmodelle auf die Betrachtung des Lucas-Modells<sup>4</sup> mit den Erweiterungen in der Literatur, die sich auf die Untersuchung der Zinsparitäten konzentrieren. Die Portfoliomodelle, als dritte Kategorie, stellen Risikoaspekte in das Zentrum der Analyse und werden in dieser Arbeit durch die ‚continuous time capital asset pricing‘ Modelle (CAPM) repräsentiert. Diese Aufzählung ist nicht abschließend und angreifbar, da z. B. Portfoliomodelle in der Regel auch Partialmodelle darstellen. Im Rahmen dieser Arbeit wird weiterhin die enge Verbindung zwischen Portfolio- und den allgemeinen Gleichgewichtsmodellen deutlich. Trotz dieser Überschneidungen eignet sich diese Kategorisierung zur Einordnung eines Modells, da sich für allgemeine Gleichgewichtsmodelle und für CAPM-Modelle das jeweilige analytische Vorgehen stark unterscheiden. Eine gegenüberstellende Beurteilung dieser Modelltypen z. B. hinsichtlich ihrer internen Konsistenz bildet eine Zielsetzung dieser Untersuchung.

---

<sup>3</sup> Die Analyse in Kapitel II konzentriert sich auf die Herleitung von Gleichgewichtspreisen im Optimum, ohne Formulierung einer Nachfragefunktion. Sie wurde in dieser Form bisher ebenfalls noch nicht in der Literatur formuliert.

<sup>4</sup> Vgl. Lucas (1982).

In dieser Arbeit konzentriert sich die gegenüberstellende Beurteilung auf die drei genannten Modelltypen, so dass ein Anspruch auf eine vollständige Erfassung sämtlicher Wechselkursmodelle nicht erhoben wird.<sup>5</sup> In den Kapiteln I bis III wird jeweils die Hypothese, dass der Terminkurs den zukünftigen Wechselkurs unverzerrt prognostiziert, unter Verwendung jeweils eines dieser drei Modelltypen hergeleitet. Ziel dieser parallelen Modellentwicklung ist es, die jeweiligen zentralen Aussagen dieser Modelltypen, die unter Verwendung möglichst identischer Prämissen hergeleitet wurden, vergleichend gegenüber zu stellen. Durch dieses Vorgehen lassen sich die jeweiligen zentralen Kritikpunkte der einzelnen Modelltypen (z. B. Konsistenz des Modells bei Wechsel der Betrachtungsperspektive, Interpretierbarkeit der formalen Gleichgewichtsbedingung) darstellen. In der existierenden Übersichtsliteratur ist dieser Vergleich kaum machbar, da sie sich meist auf die Gegenüberstellung der Modellergebnisse beschränkt ohne einer vergleichenden Analyse der jeweiligen Annahmen die gleiche Aufmerksamkeit zu schenken.<sup>6</sup> Die sehr spezifischen Annahmen, die jeweils in den individuellen Modellen getroffen werden, erlauben die Frage nach der Zuverlässigkeit der jeweiligen Schlussfolgerung auf Basis eines ‚Ergebnisvergleichs‘. Diese Arbeit verwendet möglichst gleiche Prämissen in den einzelnen Kapiteln I bis III. Es wird sich zeigen, dass das formale Modell in Kapitel III im Vergleich zum Modell des Kapitel II besser ökonomisch interpretierbar ist, jedoch restriktivere Prämissen verwendet. Eine eindeutige Überlegenheit eines Modelltypen hinsichtlich des gewählten theoretischen Ansatzes ist somit nicht gegeben.

Die Auswahl eines Modelltyps für zukünftige Arbeiten könnte auf Basis empirischer Arbeiten erfolgen, die den Erklärungsgehalt der einzelnen Modelle untersuchen. In diesem Zusammenhang seien einige Anmerkungen zu bereits veröffentlichten empirischen Arbeiten erlaubt: Allgemein kann das empirische Kriterium zur Beurteilung des Erklärungswertes eines Modells entweder absolut oder relativ zu einem alternativen Modell formuliert werden. In der empirischen Wechselkursliteratur dominiert letztgenanntes Vorgehen. Die Wahl des Benchmark, der als Standard für eine Beurteilung der Prognosefähigkeit eines Modells

---

<sup>5</sup> Beispielsweise existieren Portfoliomodelle, die keine CAPM Modelle sind. Auf diese Literatur wird kurz im entsprechenden Kapitel eingegangen.

<sup>6</sup> Laut der existierenden Literatur, die in den einzelnen Kapiteln ausführlich dargestellt wird, kommen diese Modelltypen im Ergebnis zu Aussagen, die generell konsistent miteinander sind. Den unterschiedlichen Definitionsformen der Risikoaversion (in Abhängigkeit des Konsums oder, alternative, des Vermögens) wird in der Regel kaum Beachtung geschenkt.

verwendet wird, geht auf Arbeiten von Meese und Rogoff zurück.<sup>7</sup> In ihren Arbeiten stellen die Autoren fest, dass die ‚random walk‘ Hypothese des Wechselkurses die Aussagen sämtlicher struktureller Wechselkursmodelle in ihrer Prognosefähigkeit übertrifft.<sup>8</sup> Die Beobachtung, dass der simple ‚random walk‘ auch heute noch als Benchmark in empirischen Arbeiten verwendet wird, könnte auf die mangelnde Akzeptanz eines wie auch immer gearteten Modells als Vergleichsstandard schließen lassen.<sup>9</sup>

### **Einschränkung:**

Von der theoretischen Bedeutung des Wechselkurses ist weiterhin dessen wirtschaftspolitische Bedeutung zu unterscheiden, die unterschiedlich eingestuft wird und von der in dieser Arbeit abstrahiert wird.

Einige beobachtbare wirtschaftspolitische Entscheidungen legen die Vermutung nahe, dass die Entscheidungsträger dem Wechselkurs keine Bedeutung zumessen. So wurde zeitweise im Rahmen der wirtschaftspolitischen Entscheidungen in den USA die Wirkung der einzelnen Maßnahmen auf den Wechselkurs vernachlässigt. Dieses Verhalten ist als ‚benign neglect‘ bezeichnet worden. Die weltweite Tendenz hin zu einem System flexibler Wechselkurse als Folge der Finanzkrisen in den 90er Jahren deutet auf den Verzicht der Politik hin, den Wechselkurs ordnungspolitisch zu reglementieren. So wurde in Argentinien und Ecuador gegenwärtig die völlige Aufgabe einer eigenen Währung und die Einführung des US-Dollar als offizielles Zahlungsmittel mit sehr unterschiedlichem Ausgang diskutiert.

Mit der Umsetzung dieser Pläne würde auf den Wechselkurs, genauer den Dollarwechselkurs, als Anpassungsmechanismus verzichtet. Solch eine Währungsstrategie, deren Diskussion in der Literatur auch unter dem Stichwort der optimalen Währungsräume bekannt ist, legt den Verzicht auf eine Beeinflussung des Wechselkurses innerhalb eines solchen Gebietes nahe.

---

<sup>7</sup> Vgl. Meese und Rogoff (1983) und (1989).

<sup>8</sup> Die ‚random walk‘ Hypothese impliziert, dass die heute beobachtbare Wechselkursausprägung die beste unverzerrte Prognose des zukünftigen Wechselkurses darstellt. Auf die theoretische Fundierung dieser Hypothese wird im Verlauf dieser Arbeit näher eingegangen.

<sup>9</sup> Lisi und Medio (1997), S. 256 schreiben von einem andauernden Kampf gegen die ‚random walk‘ Hypothese. Sie favorisieren ein nicht-lineares Modell. Homaifar und Zietz (1995) berücksichtigen Zentralbankinterventionen um die ‚random walk‘ Eigenschaft der Wechselkurse zu widerlegen. Neben der relativen Bewertung der Modelle wird der Grad der Prognosegüte meist an der Mittleren Quadratischen Abweichung gemessen. Cheung und Chinn (1995) verwenden alternative Kriterien zu dieser Methode um Prognosen zu beurteilen. Liu et al. (1994) untersuchen die Relevanz unterschiedlicher ökonometrischer Verfahren auf die Prognosefähigkeit. Eine Kritik des Kointegrationsverfahrens in der empirischen Überprüfung



Damit wird die volkswirtschaftliche Bedeutung des Wechselkurses als Anpassungsmechanismus zur Diskussion gestellt.<sup>10</sup> Es könnte (provozierend) gefolgert werden, dass die wirtschaftspolitische Relevanz des Wechselkurses als Anpassungsmechanismus trotz der ausgefeilten und differenzierten theoretischen Modellierungen als gering einzustufen ist. So gesehen stellt sich eine fundamentale Frage nach der Legitimation des Forschungsaufwandes zum Wechselkurs.

Dieser pessimistischen Einschätzung stehen jedoch Überlegungen zur internationalen Kapital- und Güterallokation gegenüber, in der der Wechselkurs eine zentrale Funktion ausübt. Eine effiziente Kapitalallokation müsste im Gleichgewicht die realen Erträge in allen Ländern einander angleichen. Der gleiche (Arbitrage)Gedanke liegt der gedeckten und ungedeckten Zinsparität zugrunde. Weiterhin müssten ebenfalls die Preise für homogene Güter in allen Ländern gleich sein. Diese Bedingungen formulieren jedoch eine gleichgewichtige Änderung des Wechselkurses, der nicht zwingend mit der ‚random walk‘ Annahme übereinstimmen muss. Vielmehr wird dem Wechselkurs zumeist eine ausgleichende Funktion in den internationalen Wirtschaftsbeziehungen zugestanden. Die in einigen Ländern praktizierte wirtschaftspolitische Vernachlässigung des Wechselkurses als Anpassungsmechanismus ist somit auf ausschließlicher Basis dieser allgemeinen Überlegungen nicht nachzuvollziehen.<sup>11</sup> Über diese volkswirtschaftliche Betrachtung hinaus stellt der Wechselkurs einen wesentlichen Renditeinflussfaktor in der internationalen Anlageentscheidung dar. Aus dieser Perspektive ist und bleibt die Erforschung des Wechselkurses weiterhin interessant.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, eine mikroökonomische Fundierung der Hypothese zu liefern, dass der Terminkurs eine unverzerrte Prognosefähigkeit für den erwarteten Wechselkurs besitzt. Sie ist somit eher am Verhalten des eingangs zitierten Onkels/Geschäftsmannes interessiert, weniger an der Diskussion makroökonomischer Effekte eines Wechselkursregimes oder einer Wechselkursausprägung bzw. -änderung. Die obigen

---

der ungedeckten Zinsparität liefert Zivot (2000).

<sup>10</sup> Diese Diskussion, sowie die Unterscheidung zwischen realwirtschaftlichen und monetären Schocks soll hier nicht aufgegriffen werden. Sie wird meist unter Verwendung des Mundell Fleming Modells geführt und ist in der Literatur ausführlich dokumentiert. Zu optimalen Währungsräumen vgl. Krugmann (1996). S. 624 ff und Dieckheuer (1991). S. 421 ff. sowie Kapitel D zum Mundell Fleming Modell.

Weiterhin wird in der Diskussion um die Ausgestaltung des Wechselkurses auch auf die Glaubwürdigkeit der nationalen Politiken und die Funktion von Spekulationen abgestellt. Dies sei hier nur ergänzend erwähnt.

<sup>11</sup> Natürlich können die Berücksichtigung von Glaubwürdigkeitsaspekten der Wirtschaftspolitik und/oder die

Ausführungen lassen jedoch erkennen, dass solchen makroökonomischen Effekten nicht die Relevanz abgesprochen werden soll. Es findet vielmehr eine bewusste Abgrenzung des Untersuchungsgegenstandes statt. Diese wird legitimiert durch den Schwerpunkt der Untersuchung, der auf der Verhaltensanalyse rationaler Anleger liegt in einem gegebenen Umfeld und nicht deren Wechselwirkung und mögliche Auswirkungen auf ordnungspolitische Maßnahmen in Bezug auf den Wechselkurs.<sup>12</sup>

### **Der Aufbau dieser Arbeit und Gang der Analyse**

Diese Arbeit umfasst 5 Kapitel, die in Abschnitte unterteilt sind. Abschnitte gliedern sich in Schritte, die gegebenenfalls in Steps unterteilt sind.

Kapitel I: Ausgangspunkt ist die Darstellung der Prämissen, Aussagen, Kritik und empirischen Überprüfung der Kaufkraftparität (PPP), der gedeckten Zinsparität (CIP) und der ungedeckten Zinsparität (UIP). Dieser Teil konzentriert sich auf die bekannten Ergebnisse in der Literatur und dient einer intuitiv- reflexiven Darstellung obiger Hypothese und ist Basis für die folgenden Kapitel.<sup>13</sup> Es wird festgehalten, dass die fehlende empirische Verifizierung der PPP in der Literatur die Annahme eines unausgeglichene Gütermarktes, definiert als Existenz von Arbitragemöglichkeiten, als realitätsnah erscheinen lässt. Weiterhin initiiert die in der Literatur empirisch festgestellte mangelnde Fähigkeit des Terminkurses, den zukünftigen Wechselkurs unverzerrt vorauszusagen (Prognosefähigkeit des Terminkurses), eine theoretische Hinterfragung dieser Aussage.

In Kapitel II wird die Prognosefähigkeit des Terminkurses im allgemeinen Gleichgewichtsmodell untersucht. Zunächst werden die theoretischen Grundlagen zur mathematischen Formulierung einer Nutzenfunktion und zur Beschreibung stochastischer Preise beschrieben. Anschließend wird die existierende Literatur zu allgemeinen

---

Bewertung von Spekulation als destabilisierend zu einer Revision dieser allgemeinen Bewertung führen.

<sup>12</sup> Diese Arbeit abstrahiert von der Existenz eines Staates als Einflussfaktor auf den Devisenmarkt. Ein Staat wird nur insofern relevant, als dass Gebiete existieren, in denen eine Währung als Zahlungsmittel und als Recheneinheit verwendet wird.

Schließlich abstrahiert diese Arbeit auch von Wechselwirkungen zwischen Wechselkurs und Wirtschaftswachstum, da letzteres als bekannt und exogen vorgegeben vorausgesetzt wird.

<sup>13</sup> Der Begriff „intuitiv“ ist in dieser Arbeit derart zu verstehen, als dass kein vollständig ausformuliertes Modell verwendet wird, sondern nur aus einigen „plausiblen“ Wenn-dann-Beziehungen eine Aussage formuliert wird, ohne sämtliche Prämissen zu nennen.

Gleichgewichtsmodellen mit Bezug zur Prognosefähigkeit des Terminkurses kurz zusammengefasst.

In der weiteren Analyse des Modells werden die Kaufkraftparität und die ungedeckte Zinsparität bei risikoneutralem Verhalten separat aus dem Modell hergeleitet (Partialbetrachtung) und zur Darstellung eines anschließend hergeleiteten allgemeinen Gleichgewichtes kontrastiert. Damit wird deutlich, welche Prämissen zur theoretischen Fundierung der in Kapitel I dargestellten empirischen Literatur führen. Anschließend wird eine allgemeine Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses bei risikoneutralem Verhalten formuliert.

Des Weiteren wird die Allgemeingültigkeit der obigen Ergebnisse hinterfragt. Die Wirkung des Siegel-Paradoxons wird als Ursache für eine international nicht homogene nominale Wechselkursersparung selbst bei international homogenen risikoneutralen Anlegern identifiziert. Die Länderperspektive ist somit für den theoretisch hergeleiteten erwarteten Wechselkurs relevant.

Das Modell wird um die Einbeziehung risikoaversen Verhaltens erweitert und bezieht das Siegel Paradoxon mit ein. Ergebnis ist die Darstellung eines systematischen Einflusses des Gütermarktes auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses sowohl durch eine Unsicherheitsprämie als auch durch die Risikoprämie.<sup>14</sup> Aufgrund der Komplexität der Wirkungszusammenhänge wird diese Aussage vereinfachend anhand von Fallstudien ökonomisch interpretiert.

Zusammenfassend wird im zweiten Kapitel festgestellt: die theoretische Fundierung der hypothetischen Annahme, dass der Terminkurs eine unverzerrte Prognosefähigkeit für den erwarteten Wechselkurs besitzt, bleibt im komparativ statischen Modell unvollständig. Als Ursache dafür wird angeführt, dass diese Prognosefähigkeit nicht unabhängig von der Länderperspektive bestimmt werden kann und die ökonomische Interpretation der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung schwierig ist.

---

<sup>14</sup> Eine Unsicherheitsprämie beschreibt Einflüsse auf die Erwartungswerte der stochastischen Variablen (den Wechselkurs), während sich eine Risikoprämie auf Basis einer bewerteten Unsicherheit bestimmt. Erstere wirkt somit auch bei risikoneutralem Verhalten, das nur die Erwartungswerte der stochastischen Variablen

Kapitel III: Aufgrund dieser Feststellung wird in Kapitel III unter Verwendung von möglichst gleichen Prämissen ein eigenes Modell<sup>15</sup> im Continuous-Time Rahmen hergeleitet. Das Kapitel besteht aus mehreren Abschnitten. Eingangs werden die mathematischen Grundlagen für eine Continuous-Time Modellierung kurz aufgezeigt. Anschließend wird die Literatur dargestellt, die unter Verwendung von Continuous-Time CAPM Modellen eine Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses formuliert. Anschließend wird das Modell hergeleitet, das der mikroökonomischen Fundierung der Prognosefähigkeit des Terminkurses dient.

Dies geschieht in 5 Schritten. In Schritt 1 werden der Modellaufbau und die verwendeten Prämissen beschrieben. Darauf aufbauend wird in Schritt 2 die Problemstellung und der Lösungsansatz dargelegt. In Anlehnung an die CAPM Literatur wird die ursprüngliche Problemstellung modifiziert, um die Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen zu erleichtern. In Schritt 3 wird aus diesem Modell eine nutzenoptimierende Devisennachfragefunktion hergeleitet und ökonomisch interpretiert. Schritt 4 wendet ein vergleichbares Vorgehen auf eine ausländische Problemstellung an. Anschließend lässt sich das Devisenangebot aus Inlandsperspektive aus der ausländischen Devisennachfrage herleiten. Diese Möglichkeit besteht, da das Devisenangebot den Betrag repräsentiert, den die Ausländer bereit sind, gegen Fremdwährung einzutauschen. Als Ergebnis ist die nutzenoptimierende Devisenangebotsfunktion bestimmbar. Schließlich wird in Schritt 5 unter Verwendung obiger Ergebnisse und der Prämisse eines Devisenmarktgleichgewichtes eine Gleichgewichtsbedingung formuliert, die eine Beurteilung der Prognosefähigkeit des Terminkurses ermöglicht, ohne von der Länderperspektive beeinflusst zu sein. Dieses Ergebnis wird ökonomisch interpretiert und auf Konsistenz zu den Erkenntnissen des Kapitel II überprüft.

Dieses Kapitel begegnet der Aussageninkonsistenz zur Prognosefähigkeit des Terminkurses im Rahmen des internationalen komparativ statischen Modells (siehe Kapitel II), indem sie ein eigenes Gleichgewichtsmodell im Continuous-Time Rahmen entwickelt, das dieser Kritik nicht unterliegt. Das angewandte Vorgehen lehnt sich eng an diejenige zur Entwicklung eines

---

berücksichtigt.

<sup>15</sup> Die hier verwendete Methodik wurde von Merton (1973) im Rahmen der Entwicklung eines intertemporalen Capital Asset Pricing Model (CAPM) erstmals verwendet.

‚capital asset pricing model‘ (CAPM) an. Es ist jedoch im zwei Güter-, zwei nominal risikolose Anlagemöglichkeiten-, zwei Länder- Rahmen entwickelt. Eine Berücksichtigung von Diversifizierungseffekten im üblichen Sinn ist somit nicht möglich. Es besteht jedoch die Möglichkeit, einen ‚Hedge‘ gegen ungünstige Zukunftsszenarien, definiert auf Basis realer Konsummöglichkeiten, durchzuführen. Ein wesentliches Merkmal zur Einordnung des Modells besteht darin, dass parallel zur CAPM Literatur eine gleichgewichtige Devisennachfragefunktion hergeleitet werden kann. Das methodisch ähnliche Vorgehen begründet folglich die gemeinsame Darstellung.

Das in dieser Arbeit entwickelte Modell unterscheidet sich vom existierenden CAPM-Vorgehen, indem nicht von einem exogen vorgegebenem Angebot ausgegangen wird. Vielmehr wird die Tatsache verwendet, dass es auf dem Devisenmarkt kein exogenes Angebot gibt: Das Angebot an Devisen aus der Sicht eines Landes resultiert aus der Devisennachfrage des anderen Landes. Auf ein Beispiel bezogen bedeutet dies konkret, dass die Menge an amerikanischer Währung, die von Deutschen auf dem Devisenmarkt erworben werden kann im Gleichgewicht der Menge entspricht, die die Amerikaner an heimischer Währung aufbringen wollen, um deutsche Währung zu erwerben. Das Gleichgewicht auf dem Devisenmarkt kann durch das Gleichsetzen der in- und ausländischen Devisennachfrage beschrieben werden.

Als zentrales Ergebnis dieser Arbeit kann festgestellt werden: Die Prognosefähigkeit des Terminkurses ist nur unter sehr restriktiven Prämissen als unverzerrt zu charakterisieren. So trägt unter anderem die Risikoaversion der Akteure, die relative Größe der Länder, die Stochastik der Güterpreise, Abweichungen von der Kaufkraftparität sowie das Ausmaß des internationalen Güterhandels zu dieser Verzerrung bei. Es bleibt festzustellen, dass nur im Falle risikoneutralen Verhaltens und nicht stochastischer Güterpreise und ständiger Erfüllung der Kaufkraftparität der Terminkurs eine unverzerrte Prognosefähigkeit besitzt.

Diese Aussage ist grundsätzlich auch im komparativ statischen Modell herleitbar, kann in diesem Modell jedoch nicht problemlos durch Prämissenvariation umfassend bewertet werden. Folglich eignet sich der Continuous-Time Rahmen eher für die Beantwortung der

Frage, ob der Terminkurs eine unverzerrte Prognosefähigkeit besitzt. Die Antwort: „Im allgemeinen: Nein.“ ist in beiden Modellarten herleitbar.

Kapitel IV: Schlussbemerkungen

Zusammenfassendes Ergebnis und kritische Stellungnahme zum Aussagewert der eingangs formulierten hypothetischen Annahme.

# **Kapitel I. Hypothetische Annahme – Eine intuitiv-reflexive Begründung der Prognosefähigkeit des Terminkurses und Aussagekraft empirischer Forschungsliteratur**

## **0. Einführung**

Das eingangs genannte MBA-hot-shot-Gedankenspiel lässt erahnen, dass eine verlässliche Prognose des Wechselkurses nicht nur auf akademisches Interesse stoßen würde. Gleichzeitig wurde suggeriert, dass die Ökonomie bisher die Frage nach dem zukünftigen Wechselkurs nicht zuverlässig beantworten konnte. Dieses Kapitel stellt das Gedankenspiel in einen volkswirtschaftlichen Kontext, indem einerseits die Frage beantwortet wird, warum der Terminkurs überhaupt eine Prognosefähigkeit für den zukünftigen Wechselkurs besitzen sollte.<sup>16</sup> Die zwei impliziten Prämissen des obigen Gedankenspiels, nämlich die freie Anlageentscheidung des Investors, die einen freien internationalen Kapitalverkehr voraussetzt, sowie das Ziel der Ertragsmaximierung als Motiv der Investoren, werden kurz angesprochen. Letztgenanntes lässt sich durch den Terminus „Arbitrage“, also dem Ausnutzen von Preisunterschieden zur Erzielung eines risikolosen Ertrages, repräsentieren, der die Grundlage für die hier dargestellte „Theorie“ darstellt. Neben diesen theoretischen Erörterungen werden außerdem einige als repräsentativ angesehene Arbeiten in ihren Ergebnissen kurz dargestellt, um einen Eindruck davon zu vermitteln, inwieweit die Volkswirtschaft die obige Frage zu beantworten vermochte.

Im Zentrum dieses Kapitels stehen die sogenannte gedeckte Zinsparität (CIP) und die ungedeckte Zinsparität (UIP). Es wird anhand dieser „Theorien“ gezeigt, warum die Erwartung überhaupt besteht, dass der Terminkurs den erwarteten Wechselkurs unverzerrt prognostiziert. Darüber hinaus wird die Kaufkraftparität (PPP) kurz in ihrer Aussage erläutert, und die dazugehörige Literatur auszugsweise dargestellt. Letztere wird zur Begründung obiger hypothetischen Annahme in diesem Kapitel nicht benötigt. Da sie in den folgenden Kapiteln jedoch relevant wird, ist sie hier aufgeführt, um eine umfassende Einführung in die

---

<sup>16</sup> Der Begriff Intuition ist in dieser Arbeit derart zu verstehen, als das kein vollständig ausformuliertes Modell verwendet wird, sondern nur aus einigen 'plausiblen' Wenn-dann-Beziehungen eine Aussage formuliert wird, ohne sämtliche Prämissen zu nennen. In der Wirtschaftsliteratur auch mit 'common sense proposition' umschrieben,- also mit gesundem Menschenverstand – und dieses ins Verhältnis bringen. Vgl. Rothschild und Steglitz,1971.

Entwicklung reflexiv-theoretischer Annahmen zu begründen und ihre empirische Überprüfung zu rechtfertigen.

Das Kapitel I ist in 5 Abschnitte unterteilt und gestaltet sich wie folgt: Abschnitt 1 stellt auf einen Arbitragegedanken ab, der intuitiv nahe legt, dass sich die international erzielbaren realen Erträge bei freiem Kapitalverkehr angleichen sollten. Die Realzinsidentität ermöglicht durch entsprechende Erweiterungen die simultane Darstellung der drei Paritätsbedingungen PPP, CIP und UIP. Abschnitt 1 dient somit als Rahmen für die folgenden Abschnitte, in denen die Paritäten (PPP, CIP und UIP) separat in ihrer Aussage dargestellt, eine Kritik vorgenommen und die Erkenntnisse aus der empirischen Literatur kurz umrissen werden: Abschnitt 2 analysiert die Kaufkraftparität; Abschnitt 3 behandelt die gedeckte Zinsparität und Abschnitt 4 gibt die Literatur zur ungedeckten Zinsparität wieder.

Abschnitt 4 geht jedoch über die separate Analyse der UIP hinaus, indem er die Gleichgewichtsbedingung der CIP mit einbezieht. Durch gleichzeitige Berücksichtigung der UIP und CIP lässt sich eine Beziehung zwischen Terminkurs und erwartetem Wechselkurs formulieren, die die Prognosefähigkeit des Terminkurses zu bewerten hilft. Damit kann die Frage nach dem „Warum“ des eingangs postulierten Zusammenhangs beantwortet werden. Darüber hinaus wird der Begriff der Risikoprämie eingeführt. Da die Ausführungen hier auf einem vor-empirischen, intuitiven Niveau bleiben, wird die Risikoprämie aus einer empirieorientierten Perspektive kurz umrissen. Abschnitt 5 fasst zur eingangs formulierten hypothetischen Annahme die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels zusammen und zeigt, wie die folgenden Ausführungen aus diesen Erkenntnissen motiviert werden.



## 1. Die Ursachen internationaler Kapitalbewegungen

Der internationale Kapitalmarkt verfügt über eine große Zahl von Akteuren sowie über ein Netz von 'on- und off-shore' Zentren, die einen kontinuierlichen (werktäglichen) Handel ermöglichen. Um eine grobe Vorstellung von der Größe dieses Marktes zu bekommen, seien die folgenden Zahlen als Indikator genannt: Das Volumen des internationalen Kapitalverkehrs stieg zwischen 1964-1985 doppelt so stark wie das Güterhandelsvolumen an, während der tägliche Devisenhandel von 430 Mrd. US-Dollar (April 1989) auf 623 Mrd. US-Dollar (April 1992) anstieg.<sup>17</sup> Der tägliche Devisenhandel stieg seitdem auf 1,490 Mrd. US-Dollar im April 1998 und sank auf 1,210 Mrd. US-Dollar im April 2001.<sup>18</sup>

Diese Beobachtung kann unterschiedlich interpretiert werden. Einerseits kann sie als eine zunehmende Integration der internationalen Kapitalmärkte gewertet werden, auf denen Hindernisse, welche einer Arbitrage entgegenstehen, abgebaut werden. Preise, Zinsen und Wechselkurse nähern sich gemäß dieser Interpretation aufgrund des Kapitalverkehrs einer Gleichgewichtskonstellation an.<sup>19</sup> Eine Aussage zu der Dimension und Ursache der ursprünglichen Abweichung ist jedoch nicht ohne weiteres möglich.

Alternativ ist die Beobachtung als steigende Nutzung einer bereits bestehenden potentiellen Kapitalmobilität interpretierbar.<sup>20</sup> Diese gestiegene Nutzung lässt unter Umständen auf größere Profitmöglichkeiten schließen, welche genutzt werden. Preise, Zinsen und Wechselkurse unterliegen somit stärkeren (exogenen) Einflüssen, die eine Abweichung von den Arbitragegleichgewichten verursachen.<sup>21</sup> Diese Aussage steht im Widerspruch zur Schlussfolgerung aus der ersten Interpretation, die eine erhöhte Arbitrage auf eine Verbesserung der potentiellen Mobilität und nicht auf eine größere Nutzung derselben

---

<sup>17</sup>Vgl. Krugman und Obstfeld (1997), S. 654 ff. sowie Isard (1995), S. 12 ff. für eine auch historische Übersicht. Die Zahlen werden von Frankel und Rose (1994) aus einer Studie der FED, der Bank of England und der Bank of Japan zitiert.

<sup>18</sup> Bank for International Settlement (2001)

<sup>19</sup> Für einen Test der Marktintegration anhand der Arbitragebedingungen vgl. Monadjemi (1990). Bayoumi (1998) stellt die Marktintegration zumindest für langfristige Zeithorizonte in Frage. Er verweist auf die hohe Korrelation von Spar- und Investitionsentscheidungen auf den jeweils nationalen Märkten, die bei freier Kapitalallokation eher die Ausnahme bilden sollten. Dieser Gedanke basiert auf Feldstein und Horioka (1980).

<sup>20</sup> Die dritte mögliche Alternative, dass Kapitalströme als Komplement des Güterhandels gesehen werden, wird an dieser Stelle nicht weiter diskutiert.

<sup>21</sup> Eine veränderte Einstellung der Arbitrageure zur Unsicherheit (Risikoneigung) kann ebenfalls zu einer Variation des Ausnutzungsgrades der Marktintegration führen.

zurückführt. Beide Interpretationen schließen jedoch auf eine Annäherung an die Gleichgewichtswerte aufgrund der Arbitragetätigkeit.

Unabhängig von der Frage nach den konkreten Ursachen dieser stark wachsenden Kapitalströme kann allgemein aus beiden Interpretationen festgehalten werden, dass die zugrunde liegenden Anlageentscheidungen grundsätzlich von Renditeüberlegungen motiviert werden. Wird von Ungleichgewichten auf den Märkten und der Existenz von Kapitalverkehrsbeschränkungen abstrahiert, so ist es intuitiv plausibel, dass sämtliche Anlagemöglichkeiten international den gleichen realen Ertrag erzielen müssten.<sup>22</sup> Anderenfalls wäre eine Kapitalreallokation oder ein Arbitragegeschäft vorteilhaft. Diese Forderung gleichgewichtiger internationaler realer Erträge ist aus der Literatur als Realzinsidentität bekannt.

Durch Umkehrschluss lassen sich jedoch Abweichungen von der Realzinsidentität gemäß der ersten Interpretation als mangelnde Integration der internationalen Märkte erklären.<sup>23</sup> Fraglich ist nun, welchen Einfluss die Güter- und Kapitalmärkte auf Abweichungen von der Realzinsidentität besitzen. Dies kann nicht direkt aus der Realzinsparität bestimmt werden, da sie unter anderem keine Aussage über die Höhe des Wechselkurses und des Wechselkursregimes macht. Sie kann jedoch so erweitert werden, dass jeder Teil separat sowohl eine Aussage zu den oben genannten Märkten als auch zur Wechselkursentwicklung zulässt. Diese Darstellung geht auf Frankel und MacArthur zurück.<sup>24</sup> Ausgehend von der Definition des Realzinses als Differenz zwischen Nominalzins und Inflationsrate lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} r - r_a &\equiv (i - \pi_{t,t+1}) - (i_a - \pi_{a,t,t+1}) \\ &= (i - i_a - fp_t) + (fp_t - \Delta s_{t,t+1}) + (\Delta s_{t+1} - \pi_{t,t+1} - \pi_{a,t,t+1}) \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

<sup>22</sup> Alternativ lassen sich internationale Kapitalbewegungen auf international unterschiedliche zeitliche Präferenzen oder auf eine unterschiedliche Altersstruktur der jeweiligen Bevölkerung zurückführen. Von diesen Aspekten wird in dieser Arbeit abstrahiert.

<sup>23</sup> Diese Interpretation wird von Frankel und MacArthur (1988) verwendet, auf deren Arbeit sich die folgenden Ausführungen beziehen. Der gestiegene Kapitalverkehr deutet in dieser Interpretation auf einen Abbau der Kapitalverkehrsbeschränkungen hin. Die Abweichungen von der Realzinsidentität sollten sich folglich im Zeitablauf verringern. Dies ist nicht der Fall. Die zweite Interpretation liefert jedoch ebenfalls keine zufriedenstellende Erklärung der beobachtbaren Realzinsveränderung, da keine stärkeren exogenen Schocks feststellbar sind, die den erhöhten Kapitalverkehr erklären könnten.. Vgl. Moosa und Bhatti (1997). S. 19 ff für eine grafische Darstellung.

<sup>24</sup> Vgl. Frankel und MacArthur (1988). S. 1083 - 1121.

In dieser Gleichung beschreibt die Variable  $r \equiv i - \pi_{t,t+1}$  den Realzins,  $i$  den Nominalzins,  $\pi_{t,t+1} \equiv \frac{\Delta p_{t,t+1}}{p_t}$  (mit  $p$  als Preis(index)<sup>25</sup> und  $\Delta p_{t,t+1}$  als Preisänderung zwischen Zeitpunkt  $t$  und  $t+1$ ) die zukünftige erwartete Inflationsrate,  $fp_t$  die gegenwärtig gültige Forwardprämie (definiert als Terminkurs – Kassakurs jeweils in logs) für den Zeitpunkt  $t+1$  und  $\Delta s_{t,t+1}$  die erwartete zukünftige nominale Wechselkursänderung zwischen den Zeitpunkten  $t$  und  $t+1$ . Ein tiefgestelltes  $a$  kennzeichnet schließlich Auslandswerte in Abgrenzung zu Inlandswerten.

Diese Gleichung beschreibt in den drei Klammertermen die bereits angesprochenen drei Paritätsbedingungen. Da die genannten Paritäten in den folgenden Abschnitten ausführlich diskutiert werden, wird hier keine ausführliche Herleitung aufgezeigt. Die folgenden Behauptungen sind jedoch auch bei flüchtiger Betrachtung nachvollziehbar.<sup>26</sup> Mit Bezug auf obige Gleichung lässt sich die Aussage der gedeckten Zinsparität so charakterisieren, dass im Arbitragegleichgewicht der erste Klammerterm den Wert Null annimmt. Der zweite Klammerterm kann dahingehend interpretiert werden, dass der Terminkurs dem erwarteten zukünftigen Wechselkurs entsprechen muss. Wie noch ausführlich dargestellt wird, ist dies eine Methode, die in der Literatur verwendet wird, um die ungedeckte Zinsparität empirisch zu überprüfen. Somit fordert die ungedeckte Zinsparität, dass im Gleichgewicht der zweite Klammerterm den Wert Null annehmen muss. Schließlich lässt sich die Aussage der (relativen) Kaufkraftparität dahingehend formulieren, dass im Gleichgewicht der letzte Klammerterm den Wert Null annehmen muss.

Die Interpretation der obigen Gleichung gemäß Frankel und MacArthur lautet wie folgt: Wird eine optimale Allokation der Ressourcen unterstellt, so müssen die drei internationalen Bedingungen simultan gelten. Das Fehlen einer Abweichung von der gedeckten Zinsparität ( $i - i_a - fp_t = 0$ ) setzt die Integration der internationalen Kapitalmärkte und des Terminmarktes

<sup>25</sup> Die Variable  $p$  kann sowohl einen Güterpreis repräsentieren als auch einen Preisindex. Diese Alternativen repräsentieren die in der Literatur üblichen Methoden, um auf Arbitragefreiheit auf den Gütermärkten zu testen. Vgl. dazu Abschnitt 2 in dieser Arbeit.

<sup>26</sup> Die grundlegende Kritik, die diese Arbeit äußert, bezieht sich auf die ungenaue Bedeutung der notwendigen Prämissen. Diese Kritik wird in den Kapiteln II und III begründet. Aufgrund dieser allgemeinen Kritik wird im Rahmen dieser kurzen intuitiven Darstellung auf eine Prämissenanalyse verzichtet.

voraus. Frankel und MacArthur argumentieren, dass eine Abweichung dieses Terms von Null den Grad der Integration der Kapitalmärkte über politische Grenzen misst. Sind Transaktionskosten, Informationskosten und Risiken von Kapitalverkehrskontrollen gering, so sind die Märkte integriert und die Abweichung gleich Null.

Der zweite Term beschreibt gemäß Frankel und MacArthur die Prognosefähigkeit der Wechselkursänderung in  $t+1$  durch die Forwardprämie ( $fp_t - \Delta s_{t,t+1} = 0$ ) und setzt eine Integration des Terminmarktes und des Kassadevisenmarktes voraus. Diese Abweichung wird häufig mit der Existenz einer Risikoprämie erklärt.<sup>27</sup> Schließlich beschreibt der dritte Term die Veränderung des realen Wechselkurses, wobei, wie auch bei den Termen 1 und 2, von einem anfänglichen Gleichgewichtszustand ausgegangen wird.<sup>28</sup> Eine fehlende reale Wechselkursänderung ( $\Delta s_{t,t+1} - \pi_{t+1} - \pi_{a,t+1} = 0$ ) setzt gemäß Frankel und MacArthur eine Integration von Güter- und Devisenmarkt voraus.<sup>29</sup> Sie nutzen diese Argumentation um die Integration der internationalen Märkte bzw. das Fehlen von Beschränkungen zu testen. Ein Ausgleich auf den Märkten erfolgt gemäß ihrer Argumentation durch internationale Arbitrage.<sup>30, 31</sup>

---

<sup>27</sup> Die notwendigen Prämissen für die Existenz einer Risikoprämie und alternative Erklärungsansätze für eine Abweichung des obigen Terms von Null werden im Verlauf dieser Arbeit dargestellt. Frankel und MacArthur gehen nicht näher drauf ein.

<sup>28</sup> Möglich ist auch die Untersuchung von Szenarien, in denen ausgehend von einem Gütermarktgleichgewicht eine Annäherung an ein Gleichgewicht erfolgt. In diesem Fall wäre jedoch nicht die Ursache der fehlenden Realzinsidentität zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  (mit gegebenen Erwartungen für  $t+1$ ) der Untersuchungsgegenstand, sondern es stünde die Frage im Zentrum, auf welchen Märkten eine Annäherung an die Realzinsidentität ausgehend von voneinander abweichenden Realzinsen erfolgt.

Als weiteres Szenario kann auch bei gegebener Realzinsidentität eine Änderung des realen Wechselkurses denkbar sein, wenn diese Änderung von den Änderungen der Terme 1 und 2 kompensiert wird. Diese Wechselwirkungen stehen auch im Zentrum des Kapitel III dieser Arbeit.

<sup>29</sup> Der Fall einer realen Wechselkursänderung aufgrund von international unterschiedlichen Produktivitätsänderungen bei Existenz von handelbaren und nicht handelbaren Gütern geht auf Balssa und Samuelson zurück. Vgl. Balassa (1964), S. 584 - 596 und Samuelson (1964), S. 145 - 154. Diese Aspekte werden in dieser Arbeit vernachlässigt, obwohl deren Relevanz anerkannt wird.

<sup>30</sup> Branson (1984), S. 1119 - 1121 bemerkt, dass ein Ausgleich der Realzinsen auch ohne Integration der Kapitalmärkte über einen Ausgleich der Faktorpreise via Gütermarkt erreicht werden kann. Dies entspricht einer Argumentation gemäß Stolper-Samuelson. Für diese Argumentation ist die Definition einer Produktionsfunktion sowie die Annahme der Gütermarktintegration notwendig, welche ihrerseits Angriffsflächen für Kritik bieten. Diese Arbeit folgt insofern Frankel und MacArthur, als dass die internationalen Arbitragebeziehungen ohne Formulierung einer Produktionsfunktion untersucht werden. Dadurch bleibt der Ansatz im Partialmodell. Zum Stolper Samuelson Effekt vgl. Krugman (1997).

<sup>31</sup> Diese genannten Paritäten beziehen sich auf Preisanpassungen. Alternativ kann ebenfalls eine Mengenbetrachtung für die Untersuchung der Integration der internationalen Märkte verwendet werden. Solch ein Vorgehen wurde von Feldstein und Horioka (1980)<sup>31</sup> vorgeschlagen und wird von Frankel und MacArthur als Vergleich zu ihrem Vorgehen herangezogen. Es basiert auf dem Gedanken, dass bei vollständig integrierten

Die Art der Anpassung wird im Modell von Frankel und MacArthur nicht spezifiziert. Unterliegt der Wechselkurs Restriktionen in Form eines Regimes fester Wechselkurse, so gestaltet sich die Erwartungsbildung in Abhängigkeit der Glaubwürdigkeit des Regimes. Die Art des Wechselkursregimes erscheint jedoch insbesondere für die Überprüfung der ungedeckten Zinsparität relevant.<sup>32</sup> Der Rahmen dieser Arbeit wird aufgrund der angenommenen Relevanz des Wechselkursregimes auf die Untersuchung von Ländern mit flexiblen Wechselkursen beschränkt. Diese Restriktion ermöglicht eine Fokussierung auf die drei Paritäten ohne eine explizite Modellierung der Erwartungsbildung und der Kapitalflüsse hinsichtlich der Glaubwürdigkeit eines Regimes. Diese Restriktion beschränkt die Möglichkeiten von empirischen Tests in der Wahl der Länder und des Untersuchungszeitraumes.

Ziel der beschriebenen Unterteilung war die Darstellung der Zusammenhänge zwischen Güter- und Kapitalmärkten. Sämtliche Paritätenbedingungen (PPP, CIP, UIP) lassen sich mit Bezug auf die Realzinsidentität, also eine optimale Kapitalallokation unter Berücksichtigung der Güterpreise, begründen. Weiterhin können die Störungen auf einzelnen Märkten, beispielsweise den Devisenmärkten, simultan mehrere Paritätsbedingungen, also im Beispiel die Kaufkraftparität und die ungedeckte Zinsparität, beeinflussen. Es ist jedoch auch denkbar, dass die Störung auf einem Markt, die die Nicht-Erfüllung einer Parität bewirkt, durch die Abweichung einer anderen Parität ausgeglichen wird mit dem Ziel, die Forderung der Realzinsidentität aufrecht zu erhalten. Beispielsweise ist es denkbar, ohne auf die Ursachen einzugehen, dass eine positive Abweichung von der Kaufkraftparität durch eine negative Abweichung der ungedeckten Zinsparität von ihrer Gleichgewichtsforderung ausgeglichen wird, so dass die Forderung der Realzinsidentität weiterhin erfüllt ist. Diese kurze Ausführung zeigt, dass die einzelnen Paritäten in einem engen Zusammenhang stehen, und sich gegenseitig beeinflussen könnten.

Trotz dieser festgestellten Zusammenhänge, wird in den folgenden Abschnitten dem Vorgehen in einem großen Teil der Literatur gefolgt, und eine separate Darstellung von PPP, CIP und UIP vorgenommen. Diese Darstellung umfasst jeweils eine Übersicht über die

---

Märkten Investitions- und Sparentscheidungen unabhängig voneinander getroffen werden, da benötigtes Kapital im Falle der Konsumententscheidung vom Ausland zur Verfügung gestellt wird.

<sup>32</sup>Für eine Untersuchung der Determinanten einer Währungskrise vgl. Fehlker (1998). Zur Untersuchung der ungedeckten Zinsparität in ‚target zones‘ vgl. Nessen (1997)

Literatur hinsichtlich ihrer Aussage nebst Voraussetzungen sowie einer Kritik und empirischen Überprüfung der jeweiligen Aussagen. Die Erkenntnisse der folgenden Abschnitte dienen weiterhin als Basis dieser Arbeit.

## 2. Die Aussage der Kaufkraftparität<sup>33</sup>

Der Gedanke der Kaufkraftparität findet seinen Ursprung bereits in der spanischen Literatur des 16. Jahrhunderts.<sup>34</sup> Das neuere Interesse geht jedoch auf Cassel zurück.<sup>35</sup> In der Grundversion stellt sie einen Zusammenhang zwischen den Preisen zweier Länder und dem Wechselkurs her.<sup>36</sup> Der Gedanke der Güterarbitrage basiert auf dem ‚law of one price‘ welches besagt, dass im Gleichgewicht homogene und handelbare Güter - bei Abwesenheit von Transaktionskosten - an jedem Ort den gleichen Preis besitzen. Vorausgesetzt werden folgende Rahmenbedingungen:

- Es existieren ein vollkommener Geld-, Devisen- und Kapitalmarkt.
- Es gibt keine Transaktions- und Informationskosten.
- Es wird von Risiken der Güter- und Kapitalverkehrsbeschränkungen abstrahiert.
- Es gibt keine Marktmacht oder Informationsasymmetrien.

Die Aussage des ‚law of one price‘ ist mikroökonomisch fundiert. Der repräsentative Einwohner eines Landes (z. B. des Inlandes) konsumiert zwei beliebige handelbare Güter. Da die Entscheidung zu sparen bzw. zu investieren oder zu konsumieren im Rahmen dieses Gesetzes nicht thematisiert wird, wird implizit vom Konsum nicht-investierbarer und nicht-dauerhafter Güter ausgegangen. Im Optimum gilt, dass die relativen Grenznutzen des Konsums von zwei Gütern ihren relativen Preisen entsprechen müssen. Anderenfalls würde eine Umschichtung des Konsums zu einem relativ preiswerteren Gut zu einem höheren Nutzen führen. Damit muss für den Fall homogener Güter gelten: Der Preis des inländischen Gutes muss dem in Inlandswährung ausgedrückten Preis des ausländischen Gutes im Optimum entsprechen. Dies ist die Aussage der Kaufkraftparität.

Existiert in der Ausgangssituation ein Ungleichgewicht, so kann die Annäherung an ein Gleichgewicht ebenfalls aus dieser mikroökonomischen Überlegung hergeleitet werden. Bei

---

<sup>33</sup> Die Begriffe Kaufkraftparität und das ‚law of one price‘ werden hier vereinfachend als Synonyme verwendet. Die Unterschiede dieser Theorien und die Bedingungen, unter denen das ‚law of one price‘ zur Kaufkraftparität verallgemeinert werden kann, werden im Appendix 1 dargestellt.

<sup>34</sup> Vgl. Einzig (1970), S. 147.

<sup>35</sup> Vgl. Cassel (1916), S. 413 – 415.

einer exogen gegebenen Differenz zwischen heimischem Preis und dem in heimischer Währung umgerechneten Preis im Ausland setzen Arbitragestrome gemäß des Prinzips ‚sell high buy low‘ ein bis die Differenz verschwunden ist. Die sich daraus ergebene Änderung der nachgefragten Mengen bewirkt Preis- und/oder Wechselkursänderungen, die in einer Gleichgewichtskonstellation resultieren. Die Art der Anpassung und konkrete Gleichgewichtswerte werden nicht vorgegeben. Die Anpassung kann alternativ oder simultan über eine Änderung der Preise oder des Wechselkurses erfolgen. Damit ist auch jede Form eines Wechselkursregime (flexibel, fest, Mischform aus den erstgenannten) mit dieser Sicht prinzipiell vereinbar.<sup>37</sup>

Für ein Arbitragegleichgewicht muss neben diesen Preiseffekten ebenfalls ein Mengeneffekt insofern beachtet werden, als dass der Wert der exportierten Gütermenge derjenigen der importierten Gütermenge entsprechen muss. Die Nichtbeachtung dieser Restriktion würde eine dauerhafte und unbegrenzte Anhäufung von Auslandsverbindlichkeiten ohne Rückwirkungen auf Preise und Wechselkurs unterstellen.<sup>38</sup> Für die Überprüfung der Kaufkraftparität sind die Handelsbilanzsalden somit von wesentlicher Bedeutung. In den Arbeiten zur empirischen Überprüfung findet diese Überlegung durch die Wahl der Basisperiode Beachtung. Die Begründung für die Wahl eines Basisjahres wird häufig mit dem Ausgleich der Handelsbilanz in diesem Jahr angegeben. Ein Gleichgewicht wird folglich mit einem Handelsbilanzausgleich gleichgesetzt. Eine temporär unausgeglichene Handelsbilanz ist jedoch ebenfalls mit einem intertemporalem Gleichgewicht vereinbar. Damit ist dieses Kriterium nicht unumstritten. Die Wahl des Basisjahres hat jedoch einen wesentlichen Einfluss auf die empirischen Ergebnisse. Dies macht die Berechnung eines ‚benchmarks‘ zur Feststellung von PPP-Abweichung des Dollar-DM-Wechselkurses unter Verwendung alternativer Indices für das Jahr 1993 deutlich.<sup>39</sup> Die Feststellung einer PPP-Abweichung erfolgt – bei angenommenem Gleichgewicht im Basisjahr – durch einen Vergleich des

---

<sup>36</sup>Der Wechselkurs kann einerseits als Austauschverhältnis zweier nationaler Währungen definiert sein. Andererseits kann in der klassischen Argumentation der ‚Wechselkurs‘ als reales Austauschverhältnis zweier Güter interpretiert werden. Diese Arbeit verwendet die erste Definition.

<sup>37</sup> Unterschiedliche Anpassungsgeschwindigkeiten der Güter- und Kapitalmärkte können realwirtschaftliche Auswirkungen besitzen. Diese werden in Dornbuschs overshooting Modell untersucht. Die Erfahrungen nach dem Zusammenbruch des Systems von Bretton Woods mit der anschließend stark gestiegenen Volatilität des realen Wechselkurses werden als Beleg der ‚sticky price‘ Hypothese gewertet.

<sup>38</sup> Ein temporäres Handelsbilanzungleichgewicht ist im intertemporalen Optimierungsgleichgewicht möglich, wenn unterschiedliche zeitliche Präferenzen oder Altersstrukturen unterstellt werden.

<sup>39</sup> Eine Diskussion der Berechnung von Preisindices findet im Verlauf dieser Arbeit statt. Vgl. auch Turner und Van’tack (1993).



beobachtbaren Wechselkurses im Jahr 1993 mit den jeweiligen Werten in der nachfolgenden Tabelle.

Alternative Indices	Alternative Basis-Perioden		
	1973	1980	1990
<b>Konsumentenpreise</b>	1,66	1,62	1,51
<b>Produzentenpreise</b>	1,88	1,90	1,52
<b>Löhne</b>	2,87	2,35	1,67
<b>Exportpreise</b>	1,80	1,88	1,51

Berechnungsformel für das Jahr 1993:

$$\frac{P_{G,1993} / P_{G,Basisjahr}}{P_{US,1993} / P_{US,Basisjahr}} * Wechselkurs_{Basisjahr}$$

Quelle: Rosenberg (1996), S. 16.

Als Alternative kann die Handelsbilanz direkt in eine Regressionsgleichung zur Überprüfung der Kaufkraftparität einbezogen werden. Dieses Verfahren geht zurück auf Bresciani-Turroni aus dem Jahr 1934, die folgende Analyse vorschlagen:<sup>40, 41</sup>

$$s_t = \frac{HB_t}{HB_t^a} * \frac{1 + tr_t}{1 + tr_t^a} * \frac{rx_t}{rx_t^a} * \frac{p_t}{p_t^a} \quad (I.2)$$

In dieser Gleichung beschreibt die Variable  $s_t$  den nominalen Wechselkurs, die Variable  $tr_t$  (für trade restrictions) die Handelshemmnisse, die Variable  $rx_t$  (für ratio export) das Verhältnis der Exportpreise zum allgemeinen Preisniveau und die Variable  $p_t$  das allgemeine Preisniveau. Ein hochgestelltes  $a$  beschreibt wieder ausländische Variablen.

Die Aussage der PPP ist weiterhin hinsichtlich ihres zeitlichen Bezugs unterschiedlich interpretiert worden. Die bisherige Analyse der PPP wurde für einen beliebigen Zeitpunkt formuliert. Befinden sich die Gütermärkte ständig im Gleichgewicht, so muss unter den hier formulierten Prämissen die Kaufkraftparität immer erfüllt sein. PPP-Abweichung lassen sich alternativ durch Prämissenkritik oder durch Wirkungsverzögerungen in Form von Gütermarktrigiditäten oder institutionell bedingten langfristigen Lieferverträgen erklären.<sup>42</sup>

<sup>40</sup> Gemäß Humphrey (1979), S. 3 – 11 zitiert in Moosa und Bhatti (1996) geht die Einbeziehung der Handelsbilanz zurück auf Bresciani-Turroni (1934), S. 433 - 464

<sup>41</sup> Diese Gleichung wird aus Moosa und Bhatti (1996), S. 32 zitiert.

<sup>42</sup> Hinsichtlich der Handelsbilanz findet diese Kritik in der Formulierung des J-Kurven-Effektes seinen Ausdruck. Vgl. Dieckheuer (1991), S. 132 ff. Die Bedeutung der Handelsbilanz im Rahmen der Bestimmung einer gleichgewichtigen Preis-Wechselkurskonstellation wird ebenfalls betont. Vgl. Dieckheuer (1991), S. 42 f.

Alternativ zu dieser zeitpunktbezogenen Interpretation wird die Kaufkraftparität in der Literatur auch als langfristige Gleichgewichtsbedingung interpretiert.<sup>43</sup> Es wird im Rahmen dieser Alternative erwartet, dass sich Preise und Wechselkurs der Gleichgewichtskonstellation annähern und sie langfristig erreichen. Es gilt somit:

$$E[p_{t+1}] = E[s_{t+1} * p_{t+1}^a], \quad (\text{I.3})$$

Sind die Preise konstant oder nur gering variabel, so können erwartete zukünftige Preise durch ihre heutige Ausprägung approximiert werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} p_t &= E[s_{t+1} * p_t^a] \\ &= E[s_{t+1}] * p_t^a \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Diese Formulierung der Kaufkraftparität wird mit 'ex ante Kaufkraftparität' bezeichnet, während die bisher thematisierte Form sich auf die 'ex post' Formulierung bezog.<sup>44</sup> Mit der 'ex ante' Formulierung wird jedoch eine intertemporale Beziehung zwischen gegenwärtigen Preisen und zukünftigem Wechselkurs postuliert. Im Vergleich zur 'ex post' Formulierung ist sie insofern weniger restriktiv als dass sie sich nur auf Erwartungswerte bezieht. Kurzfristige PPP-Abweichungen aufgrund von Abweichungen vom Erwartungswert sind modellimmanent möglich, und müssen nicht auf Prämissenverletzungen zurückgeführt werden bzw. als mangelnde Bestätigung der PPP interpretiert werden. Nachteilig im Rahmen der 'ex ante' Version ist jedoch, dass die Verwendung von Erwartungswerten eine Theorie der Erwartungsbildung voraussetzt und damit eine Aussage zur Risikoaversion der Individuen. Daraus folgt, dass die zukünftige Ausprägung des Wechselkurses im Rahmen dieser Formulierung grundsätzlich um eine Risikoprämie von dem 'law of one price' abweichen kann. Die Risikoprämie kann sich in Abhängigkeit von intertemporalen Präferenzen und der

---

<sup>43</sup> Diese Sicht wird dahin gehend kritisiert werden, als dass hier ein langfristig erwarteter Preis (=Wechselkurs) unter Verwendung von zeitpunktbezogenen Werten (=Güterpreisen) beschrieben wird Vgl. Yaar (1984), S. 21.

<sup>44</sup> Diese Betrachtung geht zurück auf Roll (1979), S. 133 – 176. Dumas (1988) kritisiert Roll und bezieht sich dabei auf rationale Akteure, die ihre Erträge mit unterschiedlichen Preisen abdiskontieren. Er folgert, dass bei stochastischen relativen Preisänderungen kein Marktgleichgewicht entstehen kann.

stochastischen Verteilung des Wechselkurses bestimmen lassen. Die theoretische Forderung der Kaufkraftparität ist folglich nur für den Fall risikoneutralen Verhaltens erfüllt.<sup>45</sup>

Empirische Überprüfungen der Kaufkraftparität liefern kein eindeutiges Ergebnis hinsichtlich ihrer Gültigkeit. Arbeiten, die kurze Zeitreihen verwenden, verwerfen die PPP in der Regel zugunsten der 'random walk' Hypothese des nominalen Wechselkurses.<sup>46</sup> Untersuchungen über lange Zeitreihen, die teilweise Daten des vorigen Jahrhunderts verwenden, finden häufig eine schwache Bestätigung der Kaufkraftparität. Die Anzahl der empirischen Überprüfungen ist so groß, dass eine vollständige Würdigung hier nicht möglich ist. Es existieren jedoch Beiträge, die eine Übersicht über die Studien und die gewählten ökonometrischen Verfahren liefern.<sup>47</sup> Als Ergebnis kann festgestellt werden, dass eine unwidersprochene Meinung zur langfristigen Gültigkeit der Kaufkraftparität nicht existiert. Kurzfristig wird sie verworfen. Studien, welche sie bestätigen, finden eine Halbwertszeit von 3 bis 5 Jahren. In diesem Zeitraum baut sich die Hälfte der ursprünglichen Störung wieder ab.<sup>48</sup>

Aus diesen empirischen Ergebnissen in der Literatur kann für diese Arbeit gefolgert werden, dass die Kaufkraftparität für einen Planungshorizont von bis zu einem Jahr, für welchen die Zinsarbitrage untersucht wird, allgemein nicht erfüllt ist. Damit wird die Fragestellung des Einflusses von Gleichgewichtsabweichungen auf dem Gütermarkt auf die Zinsarbitrage relevant.

---

<sup>45</sup> Stulz (1984) formuliert die KKP in einem intertemporalem Optimierungsmodell bei risikoaversem Verhalten.

<sup>46</sup> Eine Übersicht über Methoden und Ergebnisse liefert Smith (1997).

<sup>47</sup> Es seien hier für eine Übersicht folgende Beiträge genannt: Taylor (1995), Rosenberg (1996). Moosa und Bhatti (1997) geben eine ausführliche und erschöpfende Diskussion der Kaufkraftparität, ihrer Prämissen, Kritik und ökonometrischer Verfahren und Probleme.

<sup>48</sup> Dies folgert Rogoff (1996). Er präsentiert auch eine ausführliche Diskussion der KKP.

Frankel und Rose (1996) schließen im Rahmen einer Panel Analyse von 150 Ländern auf eine Halbwertszeit der KKP Abweichungen von 4 Jahren. Mac Donald und Moore (1996) stellen die ökonometrischen Methoden zur Überprüfung einer 'long run relationship' im Rahmen ihrer Untersuchung dar. Auch sie sehen die KKP bestätigt.

### 3. Die Aussage der gedeckten Zinsparitätentheorie

Die Aussage der Zinsparitätentheorie wurde erstmals von Keynes<sup>49</sup> formuliert und basiert auf dem Gedanken, dass Kapital dort investiert wird, wo es den höchsten Ertrag erzielt. Als Ausgangssituation sei folgendes Szenario gegeben. Dem Anleger stehen als Alternativen ein in- und ausländischer Kapitalmarkt sowie ein Kassa- und Terminmarkt für die Fremdwährung zur Verfügung. Auf den Kapitalmärkten besteht die Anlagemöglichkeit zu den Zinssätzen  $i$  im Inland und  $i_a$  im Ausland. Die Erträge der Anlagen sind risikolos bzw. von gleichem Risiko.<sup>50</sup> Die Variablen  $s_t$  und  $f_t$  beschreiben die Kassa- und Terminpreise der Auslandswährung in Inlandswährung auf den Devisenmärkten. Es sei angenommen, dass die Preise auf den Märkten exogen vorgegeben sind, so dass von Preisnehmerverhalten auszugehen ist. Der Anleger steht nun vor der Entscheidung im In- und/oder Ausland zu investieren. Handelt er rational mit dem Ziel der Endwertmaximierung, wird er den Ertrag der inländischen Anlage mit dem Ertrag der ausländischen Anlage unter Berücksichtigung des Wechselkurses zu Beginn und Ende des Anlagezeitraumes vergleichen. Bei der Ertragsberechnung der Auslandsanlage muss berücksichtigt werden, dass der Anlagebetrag zu Beginn in die ausländische Währung umgetauscht und dieser samt Zinsertrag am Laufzeitende wieder in die heimische Währung zurückgetauscht wird.<sup>51</sup> Dieser Rücktransfer am Laufzeitende ist notwendig, um die Erträge vergleichbar zu machen. Der Kurs dieses Rücktransfers muss zum Anlagezeitpunkt bereits feststehen, um die gleiche Sicherheit der Erträge wie bei der Inlandsanlage zu gewährleisten. Weiterhin müssen Zinssätze und Rückzahlung des Anlagebetrages gleich sicher sein, um einen Vergleich zu ermöglichen.

Im Gleichgewicht ist ein Anleger indifferent zwischen einer Anlage im In- oder Ausland. Dies bedeutet im Rahmen des Ziels der Endwertmaximierung, dass die jeweiligen Erträge gleich hoch sein müssen. Formal lautet diese Gleichgewichtsforderung:

$$1 + i = (1 + i_a) * \frac{f_t}{s_t} \tag{I.5}$$

---

<sup>49</sup> Keynes (1923). S. 115 - 39 zitiert in Spraos (1953).

<sup>50</sup> Zur Wahl der Zinssätze, insb. zur Verwendung von ‚euro currency rates‘ vgl. Mishkin (1984), S. 283 – 311, und Mark (1985), S. 189 – 208.

Ist der Endwert der Auslandsanlage größer als derjenige der Inlandsanlage, so wird der rationale Investor sein Kapital im Ausland anlegen. Aufgrund dieser Kapitalbewegungen sinkt das Kapitalangebot am inländischen Kapitalmarkt und steigt am ausländischen Markt. Weiterhin steigt am Kassamarkt die Devisennachfrage und am Terminmarkt das Devisenangebot. Diese Mengenänderungen führen bei normal reagierenden Märkten zu Preisanpassungen, die den Endwert der Inlandsanlage dem der Auslandsanlage angleichen. Diese Gleichgewichtsbedingung nennt man die gedeckte Zinsparität.

Die obige Darstellung ist jedoch insofern theoretisch inkonsistent, als dass die Vorteilhaftigkeit der Arbitrage auf Basis der gegenwärtig beobachtbaren Ausprägungen beurteilt wird und gleichzeitig im Rahmen der Anpassungsbewegung eine Änderung der Zinsen und Wechselkurse unterstellt wird. Die Akteure beeinflussen folglich mit ihrer Arbitrage den gegenwärtigen Wechselkurs und den Terminkurs. Konkret: Wird der Akteur am Markt aktiv, so verändert sich die angebotene oder nachgefragte Devisenmenge. Diese Mengenänderung wird vom Markt insofern berücksichtigt, als dass neue ‚Quotes‘ festgesetzt werden.<sup>52</sup> Für den Akteur sind folglich nicht die beobachtbaren Marktpreise, zu denen die letzte Transaktion durchgeführt wurde, entscheidungsrelevant. Er muss vielmehr seine Entscheidung nach der Marktkonstellation ausrichten, wie sie sich unter Einbeziehung seines Handelns realisieren würde.

Unter der hier gesetzten Prämisse rationalen Verhaltens sind sich die Akteure der Preisänderungswirkung ihrer geplanten Transaktionen bewusst, so dass sie in ihren Entscheidungen die von ihnen verursachten Zins- und Wechselkursänderungen berücksichtigen. Folglich unterscheiden sie zwischen der Konstellation vor der Durchführung der Arbitrage und der Konstellation, zu denen sie tatsächlich ein Arbitragegeschäft durchführen könnten. Entscheidungsrelevant ist die letztgenannte Situation. Ein Geschäft kann ex ante vorteilhaft erscheinen, es ex post jedoch nicht sein, da das Arbitragegeschäft nur noch zu Preisen durchführbar wäre, die eine Gleichgewichtskonstellation darstellten. Zins-

---

<sup>51</sup> Payson (1977), S. 40 – 47 argumentiert, dass eine exakte Formulierung nur in einer ‚continuous time‘-Formulierung möglich ist. Dies wird im Verlauf dieser Arbeit noch analysiert.

Wechselkurskonstellationen, die keine Arbitragegeschäfte initiieren, werden jedoch als Gleichgewicht definiert. Folglich sind Abweichungen von der exakten Gleichgewichtskonstellation möglich, die von den Zinsen und den Angebots- und Nachfrageelastizitäten der Zinsen und Wechselkurse begrenzt werden.<sup>53</sup>

Einschränkend ist jedoch anzumerken, dass diese Argumentation vom Mindestumfang eines Arbitragegeschäftes entscheidend beeinflusst wird. Werden nur marginale Preisänderungen verursacht, so konvergiert der Gleichgewichtsbereich zu einer exakten Kombination von Zinsen und Wechselkursen. Die empirische Relevanz kann angesichts der Marktorganisation somit als gering eingeschätzt werden. Trotzdem erscheint dieser Aspekt als theoretische Perspektive interessant.<sup>54</sup>

Die empirische Überprüfung der gedeckten Zinsparität (CIP) erfolgt auf zwei Arten. Einerseits wird die Relevanz der CIP im Rahmen der tatsächlichen Preisbestimmung auf den Devisenmärkten überprüft. Diese Überprüfung findet durch Befragungen von Devisenhändlern statt. Als Ergebnis wurde festgestellt, dass Händler am Terminmarkt anhand der gedeckten Zinsparität den Terminkurs relativ zum Kassakurs bestimmen.<sup>55</sup> Es wurde jedoch weiterhin festgestellt, dass diese 'Forwardprämie' wieder verwendet wurde, um den Zinssatz für Depositen in Auslandswährung relativ zum Inlandszinssatz zu bestimmen. Damit entsteht eine zirkuläre Beziehung.<sup>56</sup> Diese Umfrageergebnisse sind insofern nicht erstaunlich, als dass die gedeckte Zinsparität nur die relative Konstellation der Preise zueinander, jedoch nicht deren absolute Höhe bestimmt. Auf den einzelnen Märkten kann folglich eine eigenständige Preisbildung stattfinden, die eine Anpassung an ein Gleichgewicht bewirkt. Jedoch beeinflussen sich die Märkte gegenseitig. Aus den obigen Beobachtungen kann

---

<sup>52</sup> Wäre dies nicht der Fall, so blieben die Preise unverändert. Damit würde eine Arbitrage aber nicht zu einer Annäherung an eine Gleichgewichtskonstellation führen. Vielmehr wären ständig die Arbitragemöglichkeiten vorhanden, die anfangs vom Akteur festgestellt wurden.

Eine Arbitrage, die eine Gleichgewichtskonstellation herstellt, verändert folglich durch ihre Angebots-/Nachfragemengen die Preise. Sind die Anleger rational, so sind sie sich dessen bewusst, und beziehen es in ihre Entscheidung über eine Vorteilhaftigkeit der Arbitragetransaktion mit ein.

<sup>53</sup> Dieser Gedanke wurde von Frenkel (1973), S. 741 – 747 formuliert. Er zeigt in einem anderen Kontext, dass Zins- und Wechselkurselastizitäten von kleiner als unendlich eine Bandbreite als Gleichgewicht begründen. Als Ursache von solchen Ausprägungen der Elastizitäten nennt er Marktunvollkommenheiten.

<sup>54</sup> Dieser Aspekt wird von Ng und Fausten (1993) aufgegriffen und auf die UIP angewendet. Sie unterscheiden zwischen kleinen und großen Ländern und postulieren, dass für letztere die Angebotskurve für Devisen eine positive Steigung besitzt. Daraus folgern sie, dass die UIP auch bei perfekten Kapitalmärkten und risikoneutralen Verhalten nicht zwingend erfüllt sein muss.

<sup>55</sup> Herring und Marston (1976), sowie Levich (1985). S. 979-1040.

<sup>56</sup> Isard (1995). S. 78 f.

deswegen gefolgert werden, dass Arbitrage sowohl auf dem Terminmarkt als auch dem Depositenmarkt stattfindet.

Die gedeckte Zinsparität kann ebenfalls im Rahmen einer Zeitreihenanalyse überprüft werden. Die Ergebnisse dieser Regressionen hängen von der Erfüllung der Prämissen insbesondere des freien Kapitalverkehrs und vergleichbarer Zinssätze hinsichtlich des Kreditrisikos ab.<sup>57</sup> Allerdings ist die Konstruktion des Datensatzes hinsichtlich der Wahl kombinierter Zeitpunkte des Kassa- und Terminkurses und der gewählten Geld- bzw. Briefkurse aufwendig.<sup>58</sup> Die empirischen Ergebnisse bestätigen in der Regel die Aussage der gedeckten Zinsparität, indem keine profitablen Arbitragemöglichkeiten festgestellt werden.<sup>59</sup> Konkret können die Ergebnisse wie folgt zusammengefasst werden:<sup>60</sup>

- In Zeiten mit starker Volatilität existieren einige profitable Arbitragegelegenheiten.
- Im System flexibler Wechselkurse sind die Arbitragegewinne tendenziell geringer als im Fixkurssystem.
- Je größer der untersuchte Zeithorizont der Arbitrage ist, desto häufiger und größer sind die Arbitragemöglichkeiten.

In der neueren Literatur werden diese empirischen Ergebnisse aufgrund der verwendeten Methodik in Zweifel gezogen.<sup>61</sup> So ist aufgrund der simultanen Endogenität des Wechselkurses und der Zinssätze eine Kleinste-Quadrate-Schätzung nicht zulässig. Konsistente Schätzer liefern ein ‚instrumental variable approach‘ oder eine ‚two-stage-least-square‘-Schätzung. Grundsätzlich wird die Erfüllung der CIP auch von diesen Autoren nicht in Zweifel gezogen.<sup>62</sup>

Diese Arbeit geht von der Erfüllung der CIP aus, da ein freier Kapitalverkehr vorausgesetzt wird. Weiterhin werden annahmegemäß konstante Zinssätze verwendet, die vergleichbaren Kreditrisiken unterliegen. Eine explizite Modellierung des Terminmarktes erfolgt jedoch

---

<sup>57</sup> Marston (1993), S. 518-538, vergleicht die empirischen Ergebnisse unter Berücksichtigung der Realitätsnähe dieser Prämissen.

<sup>58</sup> Taylor (1989), S. 376-391.

<sup>59</sup> Einen Überblick leisten wieder Moosa und Bhatti (1996).

<sup>60</sup> Cuthbertson (1996). S. 270.

<sup>61</sup> Cuthbertson (1996). S. 272 äußert die folgende Kritik.

<sup>62</sup> Gosh (1997) verwendet Zinstermingeschäfte um auf mögliche Profitmöglichkeiten unter Verwendung des CIP Gedankens zu schließen.

nicht.<sup>63</sup> Die Verwendung des Terminkurses erfolgt ausschließlich als Vereinfachung der Formulierung, die genutzt wird, um eine direkte Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses für den erwarteten Wechselkurs zu gewährleisten.

---

<sup>63</sup> Ein Modell mit expliziter Modellierung des Terminmarktes findet sich bei Stockmann (1978).



## 4. Die ungedeckte Zinsparität

### 4.1. Die Aussage der ungedeckten Zinsparität

Die ungedeckte Zinsparität (UIP) geht auf Fisher<sup>64</sup> zurück und besagt, dass der Ertrag einer Investition im Inland der Summe des Anlageertrages in einer *vergleichbaren* Auslandsinvestition plus der erwarteten Wechselkursänderung entsprechen muss. Ist dies nicht der Fall, so entstehen aufgrund von Arbitrage systematische Kapitalflüsse, die dieses Gleichgewicht über eine Anpassung der Zinssätze oder des Kassa- und erwarteten Wechselkurses herstellen. Die geforderte Vergleichbarkeit der Anlagealternativen bestimmt sich in Abhängigkeit ihrer Ausstattung. Darunter ist die Häufigkeit und Höhe der Zinszahlung, Art der Rückzahlung des Anlagebetrages, Laufzeit etc. zu verstehen. Die erwartete Wechselkursänderung hängt von der verwendeten Informationsmenge und der Form der Erwartungsbildung ab. Prinzipiell ist jede Form mit der obigen Formulierung der UIP vereinbar.<sup>65</sup> Das Ergebnis dieser Erwartungsbildung ist jedoch durch die UIP und die beobachtbaren Zinssätze und dem Kassakurs festgelegt. Die angenommene Informationseffizienz der Märkte verlangt weiterhin, dass sämtliche Informationen in den Erwartungswert eingehen. Anderenfalls existieren unter Ausnutzung der unberücksichtigten Informationen Arbitragemöglichkeiten, die mit einem Gleichgewicht unvereinbar sind. Der Erwartungswert ist jedoch nicht beobachtbar, so dass die UIP in dieser allgemeinen Form empirisch wertlos ist. Es ist zusätzlich eine Erwartungsbildungstheorie notwendig. Dadurch wird die empirische Überprüfung der UIP stets zu einem simultanen Test von zwei Hypothesen. Eine eindeutige empirische Falsifizierung der ungedeckten Zinsparität ist damit unmöglich.

Formal unterscheiden sich die Gleichgewichtsbeziehung der gedeckten und ungedeckten Zinsparitätenbeziehung kaum. Ein Vergleich von Formel I.5 und I.6 zeigt, dass nur  $F_t$  durch  $E(t_1)$  ersetzt werden muss, um von der gedeckten Zinsparität zur ungedeckten zu gelangen. Die Gleichung, die die ungedeckte Zinsparität beschreibt, lautet dann:

---

<sup>64</sup> Vgl. Fisher (1907).

<sup>65</sup> Diese Form gilt auch bei risikoaverm Verhalten. Da das Ergebnis der Erwartungsbildung jedoch in einem Wert zusammengefasst wird, muss bei Risikoaversion eine Risikoprämie in den Erwartungswert eingehen (Prinzip des Sicherheitsäquivalents).

$$1 + i = (1 + i_a) * \frac{E[s_{t+1}]}{s_t} \quad (I.6)$$

mit:  $E[s_{t+1}]$  zum Zeitpunkt t erwarteter Wechselkurs für den Zeitpunkt t+1

Inhaltlich unterscheiden sich gedeckte und ungedeckte Zinsparität durch die unterschiedliche Relevanz des Investorenverhaltens. Die gedeckte Zinsparität in ihrer nominalen Formulierung stellt schwache Anforderungen an den Investoren, der ausschließlich aufgrund erhältlicher Informationen zum Anlagezeitpunkt seine Entscheidung fällt, mit dem Ziel der Endwertmaximierung. Dies kommt einer Entscheidung unter Sicherheit gleich. Die Relevanz der Erwartungsbildung bildet dagegen die wesentliche Erweiterung der ungedeckten Zinsparität.

## **4.2. Die empirische Überprüfung der ungedeckten Zinsparität**

Es existiert eine große Zahl an empirischen Studien zur Überprüfung der ungedeckten Zinsparität, die einen Überblick unmöglich erscheinen lässt. Aus diesem Grund wird im folgenden der Schwerpunkt nicht auf eine (unmögliche) vollständige Berücksichtigung dieser Arbeiten gelegt. Vielmehr soll eine strukturierte Darstellung der unterschiedlichen Ansätze erfolgen, die in der Literatur verwendet werden.

Grundsätzlich sind drei Vorgehensweisen bzw. Zielrichtungen zu unterscheiden. Erstens wird die ungedeckte Zinsparität unter Verwendung von Umfragen zu den Wechselkurerwartungen direkt getestet. Zweitens werden gedeckte und ungedeckte Zinsparität gemeinsam getestet. Drittens, diese Arbeiten sind weiter zu unterteilen in solche, die die Prognosefähigkeit des Terminkurses testen, und damit von risikoneutralem Verhalten ausgehen, und solche, die sich auf die Analyse einer Risikoprämie konzentrieren. Gemäß dieser Unterscheidung werden die empirischen Studien nun kurz mit ausschließlichen Bezug auf ihre Ergebnisse dargestellt. Eine Bewertung ihrer Methoden erfolgt nicht, da dies den Rahmen der Arbeit übersteigt.

### **4.2.1 Eine Übersicht über die empirischen Ergebnisse bei Verwendung von Umfragen**

Eine direkte Überprüfung der ungedeckten Zinsparität erfolgt über eine Erhebung von Daten zu den Wechselkurserwartungen der Anleger. Diese Erwartungen werden auf den tatsächlich realisierten Wechselkurs regressiert. Diese Art der Überprüfung unterliegt folgenden Problemen. Zum Einen ist eine vollständige Erhebung der Daten zu den Erwartungen nicht möglich. Damit stellt sich ein Auswahlproblem bei den zu befragenden Personen, wenn die Erwartungen heterogen sind oder ihr ‚choice set‘ divergiert. Diese Befragungen werden meist nicht von den Forschern selbst, sondern von ‚research groups‘ (z. B. Consensus Forecast of London, Currency Forecasters‘ Digest, Money Market Services etc.) durchgeführt. Neben den üblichen Problemen einer Befragung, nämlich der Glaubwürdigkeit der Antwort sowie der Gleichzeitigkeit ihrer Erhebung<sup>66</sup>, ist das Problem heterogener Erwartungen wesentlich. Es wird von diesen Groups meist durch die Verwendung eines Durchschnittswertes bewältigt. Die Wahl der Methode (Mode, Median, harmonisches oder geometrisches oder arithmetisches Mittel) sowie die Wahl der Gewichtungsfaktoren der einzelnen Antworten bieten Anlass zur Kritik.<sup>67</sup> Als korrekter Gewichtungsfaktor wäre das Vermögen des Antwortenden oder der Umfang der auf dieser Erwartung basierenden Transaktion zu verwenden. Diese Daten sind jedoch nicht verfügbar, so dass solch eine Gewichtung nicht stattfindet. Chinois und Frankel (1997) konzentrieren sich auf die Untersuchung dieser Heterogenität. Sie finden einen signifikanten Einfluss heterogener Erwartungen auf das Handelsvolumen und die Wechselkursvolatilität. Dieses Ergebnis betont die Relevanz dieser Problematik. Die Datenqualität kann somit als gering eingestuft werden.

Empirisch kann festgestellt werden, dass Erwartungen signifikant zur Erklärung des Wechselkurses beitragen. Chinn und Frankel (1993) führen einen Teil der fehlenden Prognosefähigkeit des Terminkurses auf Erwartungsänderungen zurück. In einer Folgestudie finden Chinn und Frankel (1994) signifikante, aber von der ex post beobachtbaren Realisation abweichende Erwartungen. Harvey und Quinn (1997) untersuchen kurze Zeithorizonte und erklären kurzfristige Wechselkursänderungen mit Erwartungsänderungen. Allen und Taylor (1989) finden eine abnehmende Prognosegenauigkeit mit steigendem Zeithorizont. Dies bietet insofern Anlass zu Pessimismus, als dass für eine Kurzfristprognose ein charttechnisches Vorgehen dominiert, während bei langfristigen Prognosen tendenziell theoretische Modelle

---

<sup>66</sup> In dieser Hinsicht wird die Art der Befragung relevant. Telefonische Erhebungen lassen auf eine bessere Erfüllung dieses Kriteriums schließen.

<sup>67</sup> Benassy und Raymond (1997) liefern einen hervorragenden Überblick über die in der Literatur verwendeten Quellen sowie deren kritische Würdigung.

eingesetzt werden. DeGrauwe und Dewachter (1993) untersuchen charttechnisches Verhalten in einem nicht-linearen Modell. Frankel und Chinn (1993) untersuchen eine Risikoprämie unter Verwendung von beobachteten Erwartungen und schließen auf ihren signifikanten Einfluss. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass Erwartungsänderungen einen Teil der Wechselkursänderung erklären. Eine vollständige Erklärung leisten sie jedoch nicht. Baillie und Bolerslev (2000) bezweifeln den allgemeinen Pessimismus hinsichtlich der Prognosefähigkeit des Terminkurses und argumentieren, dass diese Fähigkeit im Zeitablauf variiert. Ihre Studie ermöglicht eine stark verbesserte Prognosefähigkeit in der ersten Hälfte der 90iger Jahre.

#### **4.2.2 Eine Übersicht über die empirischen Ergebnisse unter der Prämisse risikoneutralen Anlegerverhaltens**

Ein simultaner Test der gedeckten und ungedeckten Zinsparität wird in zwei Varianten durchgeführt. Einerseits wird die Prognosefähigkeit des Terminkurses für den erwarteten Kassakurs geprüft. Alternativ wird getestet, ob zukünftige Variablen, die zum bekannten Informationsset des Zeitpunktes  $t$  gehören, die Abweichung des tatsächlich realisierten Wechselkurses vom Terminkurs erklären können.<sup>68</sup> Da diese Abweichung eine Ertragsmöglichkeit darstellen würde, wäre aufgrund einer Ausnutzung von bekannten Informationen ein Ertrag zumindest langfristig möglich. Dies widerspricht der Effizienzhypothese und kann als Widerlegung obiger Hypothese interpretiert werden.<sup>69</sup>

Die Regressionsgleichung zur Überprüfung der Prognosefähigkeit des Terminkurses resultiert aus dem Umformen der ungedeckten und gedeckten Zinsparität:

$$\frac{E[s_{t+1}]}{s_t} = \frac{1+i}{1+i_a} = \frac{f_t}{s_t} \quad (I.7)$$

<sup>68</sup> Dieser Test geht zurück auf White (1980). Dieser Test ist bei Heteroskedastizität schwierig zu implementieren. Vgl. dazu Giovannini und Jorion (1987). S. 108.

<sup>69</sup> Vgl. Cuthbertson (1997), S. 275 ff.

Nach dem Logarithmieren erhält man:  $\ln[E(s_{t+1})] - \ln(s_t) = \ln(f_t) - \ln(s_t)$ , als theoretische Gleichgewichtsbedingung.<sup>70</sup> Die Gleichgewichtsbedingung wird durch Regressionsgleichung I.8 in Verbindung mit der Hypothese  $\alpha=0$  und  $\beta=1$  überprüft. Im Rahmen dieses Tests wird wie üblich angenommen, dass die Variable  $u_t$  durch ein ‚white noise‘, d.h. einen seriell nicht korrelierten Störterm und mit einem Erwartungswert von Null beschrieben wird:<sup>71</sup>

$$\ln[E(s_{t+1})] - \ln(s_t) = \alpha + \beta * (\ln(f_t) - \ln(s_t)) + u_{t+1} \quad (I.8)$$

Wird die Hypothese bestätigt, so folgt aus Gleichung I.8, dass der Terminkurs eine unverzerrte Prognosefähigkeit für den erwarteten Wechselkurs besitzt. Dies wird deutlich, wenn  $\alpha=0$  und  $\beta=1$  in die Gleichung eingesetzt werden, und  $\ln(s_t)$  auf beiden Gleichungsseiten gekürzt wird. Es folgt nach diesen Operationen:

$$\ln E(s_{t+1}) = \ln(f_t) + u_{t+1} \quad (I.9)$$

In der Literatur wird übereinstimmend die erstgenannte Hypothese verworfen. Isaard (1995) liefert einen Überblick über die empirischen Arbeiten. Moosa und Bhatti (1997) vervollständigen die Übersicht. Die ökonometrischen Verfahren zur Überprüfung der Prognosefähigkeit des Terminkurses werden ausführlich in Cuthbertson (1996) dargestellt. Angesichts dieser unstrittigen Ergebnisse wird auf eine Darstellung der einzelnen Beiträge verzichtet.

Die zweite Form der Überprüfung testet auf signifikante Einflüsse bekannter Informationen auf  $\alpha$ . Der Koeffizient wird als Risikoprämie interpretiert. Einzelne Studien erkennen jedoch

<sup>70</sup> Diese Form der Gleichung bildet die Grundlage für die Regressionsgleichung (I.8). Nach einem Kürzen von  $\ln(s_t)$  auf beiden Gleichungsseiten wäre eine empirische Überprüfung durch die Regressionsgleichung (I.9) möglich. Diese Regressionsgleichungen sind voneinander abzugrenzen, wie noch gezeigt wird.

<sup>71</sup> Die alternative Testgleichung  $s_{t+1} = \alpha + \beta * f_t + \varepsilon_{t+1}$  ermöglicht keine legitime Überprüfung, da die Varianzen der erklärten und erklärenden Variable praktisch identisch sind. Vgl. Isaard (1995). S. 83 zu diesem Argument.

<sup>72</sup> Hansen und Hodrick (1983) zeigen, dass diese Gleichung nicht theoretisch fundiert ist. Ausgehend von der Optimalbedingung  $E[q_{t+1}(s_{t+1} - f_t)] = 0$  (deren Herleitung im Kapitel II dieser Arbeit ersichtlich wird) und der Annahme log-normalverteilter Variablen zeigen sie: Es gilt  $E[s_{t+1}] = f_t - \frac{1}{2} \text{VAR}[s_{t+1}] - \text{COV}[s_{t+1}, q_{t+1}]$ , wobei die Variablen ihre in dieser Arbeit übliche Bedeutung besitzen und in log-Schreibweise dargestellt sind. Die Variable ‚q‘ beschreibt die intertemporale Grenzrate der Substitution. In nicht log-Schreibweise gilt:  $E[\ln(s_{t+1})] = \ln(f_t) - \frac{1}{2} * \text{VAR}[s_{t+1}] - \text{COV}[s_{t+1}, q_{t+1}]$ . Dies zeigt den Fehler in der Gleichung, da  $\alpha = -\frac{1}{2} * \text{VAR}[s_{t+1}] - \text{COV}[s_{t+1}, q_{t+1}] \neq 0$  sein muss. In diesem Fall wird die Länderperspektive relevant. Vgl. Abschnitt zum Siegel-Paradoxon in dieser Arbeit. Bei Annahme von konstanter relativer Risikoaversion wird aus dieser Gleichung eine testbare Version in der Form:  $\ln[E(s_{t+1})] = \ln(f_t) - \frac{1}{2} * \text{VAR}[s_{t+1}] - \gamma * \text{COV}[s_{t+1}, c_{t+1}]$  mit ‚c‘ als Konsummenge und ‚ $\gamma$ ‘ als Maß der Risikoaversion. Vgl. Engel (1996).

den Einfluss des Jensen-Effektes an.<sup>73</sup> Diese Form des Tests wird im folgenden Kapitel aufgegriffen und wird hier nicht näher beschrieben.

#### **4.2.3. Empirisch fundierte Aussagen zur Risikoprämie**

Die bisher dargestellten empirischen Ansätze haben die Version der ungedeckten Zinsparität, die risikoneutrales Verhalten voraussetzt, getestet.<sup>74</sup> Es sind simultane Tests von Markteffizienz, rationalem Verhalten und Risikoneutralität. Eine mangelnde empirische Bestätigung kann folglich nicht zur eindeutigen Zurückweisung der ungedeckten Zinsparität führen, da die Ursache der Zurückweisung nicht eindeutig identifiziert werden kann.

Fama (1984) wählt einen empirisch fundierten Weg zur Analyse einer Risikoprämie, also von risikoaverm Verhalten. Als Ausgangspunkt seiner Untersuchung formuliert er eine Gleichgewichtsbedingung bei risikoneutralem Verhalten: Er geht davon aus, dass der Terminkurs bei risikoneutralem Verhalten den erwarteten Wechselkurs unverzerrt prognostizieren kann. Gegenstand seiner Untersuchung bilden nun die tatsächlich beobachtbaren Ausprägungen des Wechselkurses und des Terminkurses. Fama stellt fest, dass die zukünftigen Kassakurse von den gegenwärtigen (für die entsprechenden zukünftigen Zeitpunkte geltenden) Terminkursen abweichen. Als mögliche Ursache dieser Abweichung identifiziert er Erwartungsirrtümer oder eine Risikoprämie. Diese Ausführungen beschreiben die Standardaussagen aus der Literatur.

Fama's Beitrag besteht in der Erklärung von Änderungen der Forwardprämie separat durch Änderungen der Risikoprämie und durch Erwartungsirrtümer. Die Zuordnung dieser beobachtbaren Änderungen auf die entsprechenden Ursachen (Erwartungsirrtümer und Risikoprämie) galt bis zur Veröffentlichung seiner Arbeit als kaum möglich, da weder Erwartungen noch die Risikoprämie beobachtbar sind. Fama ermöglichte diese Zuordnung durch eine simultane Analyse zweier Regressionsgleichungen (I.13 und I.14), die identische Informationen beinhalten. Die unterschiedlichen Darstellungen ermöglichen diese Zuordnung.

---

<sup>73</sup> Zum Jensen-Effekt vgl. Kapitel II Abschnitt 3.5 in dieser Arbeit.

<sup>74</sup> Diese Charakterisierung ist aus der zitierten empirischen Literatur übernommen. Ihre Unvollständigkeit hinsichtlich der aufgeführten Prämissen wird in Kapitel II gezeigt.

Im folgenden sei nun kurz das von Fama entwickelte Verfahren dargestellt. Es wird im Verlauf dieser Arbeit nicht wieder aufgegriffen, ist in seiner Intuition jedoch so eindrucksvoll, dass es hier aufgenommen wird. Es stellt weiterhin klar, dass ein theoretisch fundierter Ansatz nicht der alleinige erfolgsversprechende Ansatz ist.

Ist die Prognosefähigkeit des Terminkurses bei risikoneutralem Verhalten unverzerrt, so gilt:

$$f_t = E_n[s_{t+1}] \quad (\text{I.10})$$

Die Variable  $f_t$  beschreibt den Terminkurs im Zeitpunkt  $t$  für den Zeitpunkt  $t+1$ , die Variable  $s_t$  beschreibt den zukünftigen Wechselkurs und  $E_n$  beschreibt den Erwartungswert, wobei das tiefgestellte  $n$  die Risikoneutralität kennzeichnet. Ausgehend von Gleichung I.10 sei die Risikoprämie definiert als:

$$RP_t = f_t - E_{RA}[s_{t+1}] \quad (\text{I.11})$$

Der Operator  $E_{RA}[\cdot]$  beschreibt im Gegensatz zu  $E_{RN}[\cdot]$  die Erwartungsbildung bei risikoavermem Verhalten.<sup>75</sup> Nach Erweiterung mit dem Kassakurs auf beiden Gleichungsseiten erhält man:

$$f_t - s_t = RP_t + E[s_{t+1} - s_t] \quad (\text{I.12})$$

bzw.  $E[s_{t+1} - s_t] = -RP_t + f_t - s_t$

Ausgehend von diesen allgemeinen Vorüberlegungen untersucht Fama die folgenden Regressionsgleichungen, die identische Informationen enthalten:<sup>76</sup>

$$f_t - s_{t+1} = \alpha_1 + \beta_1 * [f_t - s_t] + \varepsilon_{1,t+1} \quad (\text{I.13})$$

$$s_{t+1} - s_t = \alpha_2 + \beta_2 * [f_t - s_t] + \varepsilon_{2,t+1} \quad (\text{I.14})$$

<sup>75</sup> In dieser Arbeit wird vereinfachend das tiefgestellte  $RA$  meist weggelassen. Wird von risikoneutralem Verhalten ausgegangen wird stets explizit darauf hingewiesen.

<sup>76</sup> Diese Aussage wird durch die Ausführungen nach Aufsummierung beider Regressionsgleichungen im folgenden Paragraph belegt.

Die erste Regressionsgleichung I.13 I.14 testet den Einfluss der Forwardprämie,  $f_t - s_t$ , auf die Abweichung des zukünftigen Wechselkurses vom Terminkurs. Letzterer Term, der der linken Gleichungsseite entspricht, lässt sich unterteilen in nicht vorhersehbare Erwartungssirrtümer und die Risikoprämie, da gilt:

$$f_t - s_{t+1} = \underbrace{f_t - E[s_{t+1}]}_{\substack{\text{definiert} \\ \text{als} \\ \text{Risikoprämie}}} + \underbrace{E[s_{t+1}] - s_{t+1}}_{\substack{\text{definiert} \\ \text{als} \\ \text{Erwartungssirrtum} \quad 77}} \quad (\text{I.15})$$

Die zweite Regressionsgleichung basiert auf den eingangs bereits beschriebenen Vorüberlegungen. Es lassen sich nun allgemeine Aussagen zu den Regressionskoeffizienten treffen, wenn man die beiden Regressionsgleichungen addiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} f_t - s_{t+1} + (s_{t+1} - s_t) &= \alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2) * [f_t - s_t] + \varepsilon_{1,t+1} + \varepsilon_{2,t+1} \\ \Leftrightarrow f_t - s_t &= \alpha_1 + \alpha_2 + (\beta_1 + \beta_2) * [f_t - s_t] + \varepsilon_{1,t+1} + \varepsilon_{2,t+1} \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Es wird nun deutlich, dass  $\beta_1 + \beta_2$  nicht unabhängig voneinander sind, sondern in der Summe den Wert eins besitzen müssen, um die Gleichung I.16 zu erfüllen. Weiterhin müssen die Achsenabschnitte ‚ $\alpha$ ‘ und die Fehlerterme ‚ $\varepsilon$ ‘ in der Summe jeweils den Wert Null annehmen. Es genügt somit, die Regressionsergebnisse einer Gleichung (I.13 oder I.14) zu kennen, um auf diejenigen der anderen Gleichung zu schließen. Die beiden Regressionsgleichungen enthalten somit die gleichen Informationen, wie einleitend bereits behauptet wurde.

Führen nun diese beiden Regressionen zu interpretierbaren Ergebnissen, sind also die Störterme ‚white noise‘, so gilt aufgrund der Definition des Regressionskoeffizienten ‚ $\beta$ ‘ für die erste Regressionsgleichung I.13:<sup>78</sup>

<sup>77</sup> Eine stochastische Variable sei gekennzeichnet durch die Vorschaltung des Erwartungswertoperators, z. B.  $E[X_{t+1}]$ , während die konkrete Ausprägung durch die Variable selbst mit tiefgestellten Zeitparameter, also  $X_{t+1}$ , gekennzeichnet sei.

<sup>78</sup> Der Term  $\sigma^2(\dots)$  kennzeichnet die Varianz des nachfolgenden Terms in Klammern und ist kein Produkt dieser Terme. Diese Darstellung lehnt sich an Fama (1984) an.



$$\beta_1 = \frac{COV[f_t - s_{t+1}, f_t - s_t]}{\sigma^2(f_t - s_t)}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = \frac{COV[f_t - s_{t+1}, E[s_{t+1}] + RP_t - s_t]}{\sigma^2(f_t - s_t)}$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 = \frac{\sigma^2(RP_t) + COV[RP_t, E[s_{t+1} - f_t]]}{\sigma^2(RP_t) + \sigma^2(E[s_{t+1} - s_t]) + 2 * COV[RP_t, E[s_{t+1} - s_t]]} \quad (I.17)$$

Für die zweite Regressionsgleichung I.14 gilt entsprechend:

$$\beta_2 = \frac{COV[s_{t+1} - s_t, f_t - s_t]}{\sigma^2(f_t - s_t)}$$

$$\Leftrightarrow \beta_2 = \frac{\sigma^2(E[s_{t+1} - s_t]) + COV[RP_t, E[s_{t+1} - s_t]]}{\sigma^2(RP_t) + \sigma^2(E[s_{t+1} - s_t]) + 2 * COV[RP_t, E[s_{t+1} - s_t]]} \quad (I.18)$$

Aus den Beschreibungen von  $\beta_1$  und  $\beta_2$  lassen sich nun Änderungen in der Forwardprämie auf Änderungen in der Risikoprämie und Erwartungsänderungen zurückführen. Dies sei nun an folgenden Fällen veranschaulicht:

Für den Spezialfall, dass die Risikoprämie und die erwartete Wechselkursänderung nicht korreliert sind, trennen die Regressionskoeffizienten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  die Varianz der Forwardprämie  $f_t - s_t$  in zwei Teile. Es gilt aus Gleichungen I.17 und I.18:

$$\beta_1 = \frac{\sigma^2(RP_t)}{\sigma^2(RP_t) + \sigma^2(E[s_{t+1} - s_t])} \quad (I.19)$$

$$\beta_2 = \frac{\sigma^2(E[s_{t+1} - s_t])}{\sigma^2(RP_t) + \sigma^2(E[s_{t+1} - s_t])} \quad (I.20)$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (I.21)$$

Die Gleichungen lassen sich wie folgt interpretieren: Die erste Gleichung (I.19), die  $\beta_1$  beschreibt, repräsentiert die relative Änderung von Forwardprämie und Risikoprämie. Die zweite Gleichung I.20, die  $\beta_2$  beschreibt, repräsentiert die relative Änderung von Forwardprämie und Erwartungsänderungen. Da die Koeffizienten sich zu Eins summieren (vgl. I.21), wird die Änderung der Forwardprämie vollständig beschrieben. Sind obige Regressionsgleichungen interpretierbar, so ist die Abweichung des Regressors  $\beta_2$  vom Wert eins nach unten ein direktes Maß für die Variation der Risikoprämie.

Im Allgemeinen sind die Risikoprämie und die erwartete Wechselkursänderung jedoch korreliert, so dass obige Trennung der Ursachen von Änderungen der Forwardprämie nicht möglich ist. Es ist jedoch möglich, durch Einsetzen der Regressionskoeffizienten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  in die Gleichung I.21 ( $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ) die Differenz der Varianzen relativ zur Varianz der Forwardprämie zu bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \beta_1 - \beta_2 &= \frac{\sigma^2(RP_t) + COV[RP_t, E[s_{t+1} - s_t]]}{\sigma^2(RP_t) + \sigma^2(E[s_{t+1} - s_t]) + 2 * COV[RP_t, E[s_{t+1} - s_t]]} \\ &\quad - \frac{\sigma^2(E[s_{t+1} - s_t]) + COV[RP_t, E[s_{t+1} - s_t]]}{\sigma^2(RP_t) + \sigma^2(E[s_{t+1} - s_t]) + 2 * COV[RP_t, E[s_{t+1} - s_t]]} \\ &= \frac{\sigma^2(RP_t) - \sigma^2(E[s_{t+1} - s_t])}{\sigma^2(f_t - s_t)} \end{aligned} \tag{I.22}$$

Fama schließt weiter, dass auf Basis der im Jahr 1984 verfügbaren Daten die Varianz der Risikoprämie größer als die Varianz der Erwartungssirrtümer ist. Dieses Ergebnis wurde als starkes Argument für eine zeitvariable Risikoprämie gewertet.

De Koning und Straetmans (1996) greifen dieses Vorgehen auf und untersuchen die Konstanz der Fama-Koeffizienten im Zeitablauf. Die Arbeit bezieht sich auf die Wechselkurse des US-Dollar gegen die DM, jap. Yen, brit. Pound, franz. Franc, can. Dollar und Schweizer Franken von 1976 bis 1995 für einen einmonatigen Prognosehorizont. Abgesehen vom US-Dollar/Yen Kurs weisen die Wechselkurse zeitvariable Koeffizienten auf. Die Autoren können diese Beobachtung jedoch nicht auf eine zeitvariable Risikoprämie, definiert als quadrierte Forwardprämie, zurückführen. Clarida und Taylor (1997) finden jedoch einen signifikanten

Einfluss der Forwardprämie auf die Gewinne einer Terminmarktspekulation. Die Arbeit berücksichtigt die Wechselkurse des US-Dollar gegen den Yen, der DM und des brit. Pound von 1977-1993 für Zeithorizonte bis zu einem Jahr.<sup>79</sup>

Bekaert und Hodrick (1993) testen die Prognosefähigkeit des Terminkurses über einen Zeitraum von 1975 bis 1989 für den US-Dollar gegen die DM und den Yen. Sie führen das Auftreten von zeitvariablen Koeffizienten auf Einflüsse der Geld- und Fiskalpolitik zurück. Die Signifikanz der Geldpolitik für die Wechselkursveränderung wird von Brigden (1997) unterstützt. McCallum (1994) bezweifelt die Prognosefähigkeit des Terminkurses aufgrund von Änderungen in der Politik. Auf Basis der Wechselkurse des US-Dollar zur DM, Yen und brit. Pound von 1978 bis 1990 verwirft er zwar die Prognosefähigkeit des Terminkurses, lehnt jedoch nicht die UIP ab. Christensen (1997) erweitert die Untersuchung von McCallum um eine zeitvariable Risikoprämie und findet die UIP für den DM/dän. Krone Wechselkurs bestätigt. Meredith und Ma (2002) erweitern den Ansatz von McCallum um Korrelationseinflüsse, die auf geldpolitische Maßnahmen zurückgehen. Sie finden eine relativ verbesserte Prognosefähigkeit über längere Zeithorizonte.

In einer weiteren Arbeit testen Bekaert und Hodrick (1992) die Prognosefähigkeit bekannter Variablen auf zukünftige Gewinne der Terminmarktspekulation für die Wechselkurse der USA, Japan, UK und Deutschland. Für den Zeitraum von 1981 bis 1989 besitzt die Forwardprämie einen Einfluss auf die Gewinne der einmonatigen Terminmarktspekulation.<sup>80</sup> Als Ursache halten sie eine zeitvariable Risikoprämie für möglich. Eine vergleichbare Studie liefert Bansal (1997). Er untersucht die Wechselkurse der USA, Japan und Deutschlands von 1981 bis 1995 und findet eine Abhängigkeit der Risikoprämie von der Höhe des Zinssatzes.

Bernhardsen (1997) testet die Prognosefähigkeit des Terminkurses für zehn europäische Währungen gegen die DM über den Zeitraum von 1979-1996 für verschiedene Prognosehorizonte bis zu einem Jahr. Diese Fähigkeit kann nicht bestätigt werden, was auf eine zeitvariable Risikoprämie zurückgeführt wird. In einer Panel-Analyse wird außerdem ein

---

<sup>79</sup> Solche unvereinbaren Resultate bei annähernd gleichem Untersuchungsgegenstand machen Kriterien zu ihrer relativen Wertung notwendig. Eine hierarchische Ordnung der Aussagen von Wechselkursmodellen existiert bisher nicht. Ein möglicher Weg besteht in der Berücksichtigung der Prognosefähigkeit. Dieser Gedanke findet sich bei Harvey et al (1997).

<sup>80</sup> Gosh (1997) liefert eine praxisnahe Untersuchung der realisierbaren Profite von Juni bis August 1995 des franz. Franc/US-Dollar Wechselkurses. Er findet Profitmöglichkeiten von 993 903 US-Dollar durch vollständig

signifikanter Unterschied in Abhängigkeit des Wechselkursregimes festgestellt. Die erste Aussage wird von Coakley und Fuertes (1997) relativiert, die in einer Panel Analyse von 18 OECD Ländern von 1973 bis 1997 eine langfristige Gültigkeit der realen UIP feststellen. Die zweite Aussage wird von Flood und Rose (1997) unterstützt, die für das EWS von 1981 bis 1994 eine signifikant bessere Erfüllung der UIP finden. Zeiträume mit Realignments werden in ihrer Untersuchung ausgeschlossen und mit dem Peso-Problem erklärt.<sup>81</sup>

Eine Untersuchung der UIP unter Verwendung der Bretton Woods Ära liefert Kirchgässner (1990). Er stellt eine Abhängigkeit der Zinsänderung vom Wechselkursregime fest. Diese Aussage lässt ebenfalls eine Relevanz des Wechselkursregimes für eine Untersuchung der UIP vermuten. Flood und Rose (2001) verwenden Hochfrequenzdaten und finden einen ‚verbesserten Aussagegehalt‘ zumindest für Länder mit flexiblen Wechselkurssystem in den 90iger Jahren. Bansal und Dahlquist (2000) führen die unterschiedliche Prognosefähigkeit auch auf die Tiefe der Finanzmärkte zurück. Sie finden eine überlegene Prognosefähigkeit für ‚emerging markets‘, was von Flood und Rose (2001) bestätigt wird.

---

gehedgte Zins- und Wechselkursarbitrage.

<sup>81</sup> Zum Peso Problem vgl. Krasker (1980)

## **5. Erstes Ergebnis zur hypothetischen Annahme und Hinführung zur weiterführenden Überprüfung**

Das Kapitel I erbringt zunächst intuitiv-reflexive Beschreibungen von Gleichgewichtsbeziehungen auf den Güter- und Kapitalmärkten, ohne diese auf ein allgemeines theoretisches Fundament zu stellen. Unter Verwendung der Realzinsidentität als Gleichgewichtshypothese wird veranschaulicht, dass die PPP, CIP und UIP auf den gleichen Gedanken, der Arbitrage, zurückgeführt werden können. Damit werden grundsätzliche Zweifel geweckt, ob eine separate Analyse dieser Paritäten legitim ist bzw. vollständig sein kann. Dieser Gedanke wird in den folgenden Kapiteln wieder aufgegriffen

Die empirische Überprüfung der einzelnen Paritäten in der Literatur lässt weiterhin vermuten, dass Gütermarktungleichgewichte existieren und eine Risikoprämie auf dem Kapitalmarkt gefordert wird, die als Ursache für eine verzerrte Prognosefähigkeit des Terminkurses in Frage kommen kann. Es bleibt weiterhin unklar, inwieweit Erwartungsirrtümer oder Risikoprämien die Prognosefähigkeit des Terminkurses verzerren.<sup>82</sup>

Das Kapitel I hat gezeigt, dass der Terminkurs in der empirischen Überprüfung im allgemeinen keine unverzerrte Prognosefähigkeit für den zukünftigen Wechselkurs besitzt. Die Frage lautet aber, sollte solch eine Prognosefähigkeit generell erwartet werden, bzw. unter welchen Einschränkungen ist die Hypothese theoretisch fundierbar? Ziel ist eine theoriefundierte Aussage darüber, welche Faktoren wie auf die genannte Prognosefähigkeit einwirken.

In den folgenden Kapiteln II und III werden zwei unterschiedliche theoretische Modelle zur Herleitung der Hypothese dieser Arbeit verwendet. Es werden somit die Prämissen offen gelegt, deren Erfüllung solch eine Prognosefähigkeit erwarten lassen. Weiterhin wird auch eine Bewertung von Modellarten hinsichtlich ihrer Eignung zur Beantwortung der vorliegenden Fragestellung ermöglicht. Es wird sich zeigen, dass beide Modelle ihre jeweiligen Stärken und Schwächen haben und kein Modelltyp dem Anderen eindeutig überlegen ist.

## **Kapitel II. Die Prognosefähigkeit des Terminkurses in einem komparativ statischen intertemporalen Modell**

### **0. Einführung**

Das Kapitel I hat intuitiv-reflexiv gezeigt, dass der Terminkurs in der empirischen Überprüfung im allgemeinen keine unverzerrte Prognosefähigkeit für den zukünftigen Wechselkurs besitzt. Die Frage, die nur unvollständig beantwortet wurde, lautet: Sollte solch eine Prognosefähigkeit theoretisch generell erwartet werden?

Diese Frage wird in diesem Kapitel anhand eines komparativ statischen intertemporalen Gleichgewichtsmodells beantwortet. Dieses Modell lässt stochastische Güterpreise, Abweichungen von der PPP sowie risikoaverses Verhalten zu. Diese Prämissen sind als annähernde Beschreibung der tatsächlichen Gegebenheiten auf Basis der bereits dargestellten Literatur gewählt.

Als wesentliches Ergebnis dieses Kapitels wird die gleichgewichtige Ausprägung des erwarteten Wechselkurses unter Verwendung von Terminkurs, Unsicherheitsprämie und Risikoprämie beschrieben. Es wird festgestellt, dass der Terminkurs selbst bei risikoneutralem Verhalten keine unverzerrte Prognose des erwarteten Wechselkurses ermöglicht. Dieses Ergebnis ist aus der theoretisch orientierten Literatur bekannt.

Das Kapitel II formuliert weiterhin den Einfluss von (exogenen) Gütermarktgleichgewichten auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses, und ergänzt damit die existierende Literatur. Es wird festgestellt, dass ein Gütermarktgleichgewicht einen systematischen Einfluss auf die Unsicherheitsprämie und die Risikoprämie besitzt. Eine Vernachlässigung des Gütermarktes, wie es in der bereits beschriebenen empirischen Literatur meist der Fall ist, folglich allein mit Hinweis auf risikoneutrales Verhalten und der ‚vernachlässigbaren‘ Volatilität der Preise nicht statthaft.

---

<sup>82</sup> Die Frage, ob Unvollkommenheiten in den jeweiligen ökonometrischen Methoden die empirischen Ergebnisse beeinflusst haben, wird hier nicht weiter thematisiert. Sie mag jedoch durchaus relevant sein.

Abschließend wird auf die inhärente Inkonsistenz einer komparativ statischen Analyse bei Verwendung von Erwartungswerten hingewiesen. Auch dieses Ergebnis ist aus der Literatur bekannt. Während es dort meist als empirisch insignifikant beschrieben und nicht weiter beachtet wird, zeigt diese Arbeit, dass solch eine Aussage in einem allgemeinen Rahmen intertemporaler Optimierung nicht gültig sein muss.

Das Vorgehen in diesem Kapitel II ist dreigeteilt. Abschnitt 1 beinhaltet eine ausführliche Darstellung der theoretischen Grundlagen, die sich auf die Beschreibung von Präferenzen im Modellkontext konzentriert. Diese Zusammenhänge sind für diese Arbeit relevant, da eine Risikoprämie, die den erwarteten Wechselkurs beeinflussen könnte, aus der Bewertung von Unsicherheit resultiert.

Abschnitt 2 umfasst eine kurze Literaturübersicht der bestehenden Ansätze auf Basis eines allgemeinen komparativ statischen Gleichgewichtmodells (Lucas-Modell), die eine Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses formulieren. Die hier dargestellten Erkenntnisse dienen der Einordnung und Abgrenzung des hier verwendeten Modells von der Literatur.

Abschnitt 3 entwickelt ein Modell, das eine theoretisch fundierte Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses erlaubt. Dieses Modell ist mit der in Abschnitt 2 dargestellten Literatur eingeschränkt vergleichbar und wird deswegen unter dem Terminus ‚Lucas-Typ‘ subsumiert. Es dient darüber hinaus als Bindeglied zwischen der empirisch orientierten Literatur des Kapitel I und der theoretisch orientierten Literatur des Kapitel II in der folgenden Form: Eingangs werden anhand des Modells die Gleichgewichtsforderungen des Kapitel I theoretisch fundiert. Es folgt, dass nun eine abschließende Aufzählung derjenigen Prämissen möglich ist, die eine unverzerrte Prognosefähigkeit des Terminkurses erwarten lassen kann. Anschließend wird eine Gleichgewichtsbedingung hergeleitet, die mit der in Abschnitt 2 aufgeführten Literatur annähernd vergleichbar ist. Die theoretisch und die empirisch orientierte Literatur wird folglich in einem einheitlichen Kontext beschrieben.

Schließlich wird als Erweiterung der bestehenden Ansätze die Relevanz der Länderperspektive auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses sowie die Auswirkungen einer möglichen Abweichung von der Kaufkraftparität bewertet. Die erstgenannte Erweiterung stellt die Existenz eines international einheitlichen erwarteten Wechselkurs in Frage. Dieser

Effekt wird in der Literatur meist vernachlässigt, erscheint jedoch gerade hinsichtlich der Prognosefähigkeit des Terminkurses als hoch relevant.

Die letztgenannte Erweiterung ist in den empirischen Erkenntnissen des Kapitel I zur PPP begründet. Einschränkend gilt, dass diese Abweichung nicht aus den hier verwendeten einfachen Modellprämissen zum Gütermarkt herleitbar ist und insofern exogen eingeführt wird. Es ist jedoch aus der Literatur bekannt, dass PPP-Abweichungen grundsätzlich durch eine differenzierte Modellierung des Gütermarktes im Gleichgewicht möglich sind.<sup>83</sup> Das Ziel dieser Arbeit ist jedoch, eine Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses zu erhalten. Da, wie noch ersichtlich wird, bereits dieses reduzierte Modell nur für vereinfachende Szenarien interpretierbar ist, wird auf eine umfassende Modellierung verzichtet. Es wird vielmehr anhand zweier Fallstudien ökonomisch interpretiert.

Dieses Kapitel schließt mit einem zweiten Zwischenfazit, in dem die Erkenntnisse aus diesem Modell dargestellt werden; dabei wird hervorgehoben, dass die notwendigen Prämissen für eine unverzerrte Prognosefähigkeit des Terminkurses identifiziert wurden. Es wird jedoch auch ersichtlich, dass sich diese Modelle nur unter weiteren einschränkenden Prämissen für eine empirische Überprüfung eignen. Da eine ökonomische Interpretation des allgemeinen Modells kaum möglich ist, erscheint dieses Resultat unbefriedigend.

---

<sup>83</sup> Vgl. dazu das Balassa Samuelson Theorem und das Stolper Samuelson Theorem, beschrieben u.a. in Krugman und Obstfeld (1997). S. 428 ff. und S. 70 f. Die Rückführung von PPP-Abweichungen auf z. B. die Existenz nicht-handelbarer Güter wird jedoch hier nicht vorgenommen, da hier eine interpretierbare Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses formuliert werden soll.



## 1. Theoretische Grundlagen

Um individuelles Optimierungsverhalten im stochastischen Umfeld zu analysieren, werden Annahmen zum Wertesystem des fraglichen Akteurs sowie Rahmenbedingungen, in denen diese Entscheidung gefällt wird, benötigt. Dieser Abschnitt konzentriert sich auf die Darstellung unterschiedlicher Wertesysteme, repräsentiert durch eine Nutzenfunktion und ihre Implikationen, da zumindest in diesem Kapitel keine Verteilungsannahme für die stochastischen Variablen benötigt wird.<sup>84</sup> Insgesamt sind diese Zusammenhänge aus der Literatur bekannt.

Schritt 1 umfasst die wesentlichen Grundlagen für eine Formulierung und Interpretation von mathematischen Nutzenfunktionen. Ausgangspunkt sind verbal formulierte Verhaltensweisen. Es wird gezeigt, dass sie sich durch unterschiedliche mathematisch formulierte Nutzenfunktionen abbilden lassen. Diese mathematisch aufwendigen Formulierungen besitzen jedoch unterschiedliche Fähigkeiten, um spezifische Formen risikoaversen Verhaltens darzustellen. Ziel in diesem Schritt ist es, die Vorteile und Grenzen der Darstellbarkeit von als realitätsnah angesehenem Verhalten durch mathematisch formulierte Nutzenfunktionen aufzuzeigen.

Schritt 2 erläutert kurz die Zusammenhänge zwischen den konkreten Annahmen zur Risikoaversion und ihren Auswirkungen im Gleichgewicht. Es wird ersichtlich, welche Annahmen zur Preisstochastik und zur Risikoaversion konsistent sind. Weiterhin wird gezeigt, wie die nutzenmaximierende Nachfrage auf Änderungen in der Preisstochastik in Abhängigkeit von der Art der Risikoaversion reagiert.

---

<sup>84</sup> Diese Freiheit liegt in der theoretischen Ausrichtung des Kapitel II. Die in Abschnitt 2 zitierte Literatur geht gleichartig vor und verwendet konkrete Verteilungsannahmen erst im Rahmen der empirischen Überprüfung. Ziel in dieser Arbeit ist eine qualitative Darstellung ökonomischer Wirkungszusammenhänge, die auf eine empirische Verifizierung/Quantifizierung verzichtet.

## 1.1. Mögliche Formen einer Nutzenfunktion

Grundsätzlich dienen Nutzenfunktionen der Beschreibung einer Präferenzordnung. Mathematisch formulierte Nutzenfunktionen dienen darüber hinaus der Einbeziehung von individuellen Verhaltensweisen in die formale Analyse einer Entscheidungssituation. Die Wahl der konkreten Formulierung einer Nutzenfunktion ist somit nicht frei wählbar, sondern muss durch ihre Fähigkeit zur Beschreibung der als realitätsnah charakterisierten Verhaltensannahme legitimiert werden.

Diese Ausführungen ermöglichen es, die Annahmen der Modelle von Kapitel II und Kapitel III zu bewerten und von möglichen alternativen Formulierungen abzugrenzen. Sie stellen eine somit wichtige Grundlage zur Bewertung der dort gesetzten Annahmen dar und zeigen Möglichkeiten für Weiterentwicklungen der bestehenden Forschungsansätze dar.

Das Vorgehen dieses Abschnitts gestaltet sich wie folgt:

Der erste Schritt beschreibt verbal mögliche Verhaltensweisen eines Akteurs bei einer Veränderung seines Vermögens sowie angesichts einer Investition mit unsicherem Ertrag. Dieses Verhalten wird in allgemeine Anforderungen an die Eigenschaften einer Nutzenfunktion zusammengefasst. Alternativ kann eine Nutzenfunktion auch in Abhängigkeit vom Konsum formuliert werden.<sup>85</sup> In der Literatur wird die Risikoaversion sowohl in Abhängigkeit vom Vermögen als auch vom Konsum dargestellt.<sup>86</sup> Obwohl die Aussage dieser Definitionen keine Synonyme sind und in der Literatur eine einheitliche Definition nicht beobachtbar ist, stellt die Übersichtsliteratur in der Regel Arbeiten einander gegenüber, ohne auf diesen Unterschied einzugehen. Die Arbeiten selbst gehen in der Regel nicht auf die Implikationen ihrer gewählten Formulierung der Risikoaversionsbeschreibung ein.<sup>87</sup> Diese Arbeit folgt in der Beschreibung der existierenden Literatur der jeweiligen Definition der Risikoaversion, so dass beide Varianten verwendet werden.<sup>88</sup>

---

<sup>85</sup> Der Zusammenhang zwischen direkter und indirekter Nutzenfunktion ist in jedem Lehrbuch der Mikroökonomie nachlesbar. Vgl. Varian (1992)

<sup>86</sup> Vgl. die Literaturübersicht in den Kapiteln II und III.

<sup>87</sup> Eine Ausnahme von dieser Regel wird in Kapitel III aufgegriffen und auf das dort entwickelte Modell angewendet.

<sup>88</sup> Es ist **nicht** das Ziel dieser Arbeit, die existierenden Ansätze in der Literatur durch die Verwendung einer einheitlichen Definition der Nutzenfunktion neu zu formulieren um die Implikationen einheitlicher

Der zweite Schritt formuliert anschließend eine Risikoprämie unter Verwendung solch einer Nutzenfunktion ohne sie in ihrer konkreten mathematischen Form festzulegen. Die eher allgemein-theoretischen Ausführungen von Schritt 2 sind insbesondere für die Fragestellung von Kapitel II relevant.

Der dritte Schritt diskutiert die unterschiedlichen mathematischen Nutzenfunktionen nebst ihren Möglichkeiten und Beschränkungen in der Beschreibung des individuellen Verhaltens. Die explizit ausformulierten Nutzenfunktionen in Schritt 3 werden in Kapitel III verwendet.

### 1.1.1. Eine ökonomisch orientierte Beschreibung risikoaversen Verhaltens

Anforderungen an eine Nutzenfunktion wurden unter anderem von Arrow formuliert.<sup>89</sup> Er beschrieb vier Kriterien, die das Verhalten der Individuen in der Realität beschreiben können. Diese Bedingungen beruhen nicht auf einer allgemeineren theoretischen Fundierung, sondern werden aus der Beobachtung des Verhaltens abgeleitet. Damit können sie in Abhängigkeit der jeweils individuellen Einschätzung in ihrer Realitätsnähe variiert werden und sind Gegenstand einer potentiellen Kritik. Die Bedingungen für die indirekte Nutzenfunktion<sup>90</sup> in Bezug auf das reale Vermögen lauten:

1. Der Grenznutzen des Vermögens ist positiv.
2. Der Grenznutzen des Vermögens verringert sich mit zunehmenden Vermögen.
3. Es sei eine unsichere Situation mit bekannten möglichen (zukünftigen) Auszahlungen gegeben. Die möglichen Auszahlungen seien in ihren *absoluten* Beträgen konstant. In dieser Situation ist ein Akteur mit zunehmenden Vermögen geneigter (indifferent), diese Situation zu tolerieren. Das bedeutet, dass die

---

Formulierungen der Nutzenfunktion (i.e. in Abhängigkeit des Konsums oder des Vermögens) für die jeweiligen formalen Gleichgewichtsbedingungen darzustellen.

<sup>89</sup> Vgl. Arrow (1971), S. 92 f und 94 f.

<sup>90</sup>  $V(p, W^{\text{nominal}}) \equiv V(1, W^{\text{real}})$  mit , $p$ ' als Preis(index) und , $W^{\text{nominal}}$ ' als nominales Vermögen. Die Entscheidungssituation ist folglich durch den Bezug auf das reale Vermögen eindeutig beschreibbar. Alternativ könnte auch auf den realen Konsum (direkte Nutzenfunktion) abgestellt werden. Tsiang (1974) wählte erstgenanntes Vorgehen.

Prämie, welche er zur Vermeidung dieser Situation zu zahlen bereit ist, mit zunehmendem Vermögen abnimmt (gleich bleibt).<sup>91</sup>

4. Es sei eine unsichere Situation mit bekannten möglichen (zukünftigen) Auszahlungen gegeben. Die möglichen Auszahlungen seien in ihren Beträgen *relativ zum Vermögen eines Akteurs* konstant. In dieser Situation ist der Akteur mit zunehmendem Vermögen geneigter (indifferent), diese Situation zu tolerieren. Das bedeutet, dass die Prämie, welche er zur Vermeidung dieser Situation zu zahlen bereit ist, mit zunehmendem Vermögen sinkt (gleich bleibt).<sup>92</sup>

Die Bedingungen 1 beschreibt eine permanente Nicht-Sättigung der Akteure im Vermögen und damit im Konsum (beschrieben durch eine direkte Nutzenfunktion). Die Forderungen der Nicht-Sättigung erscheinen insgesamt als realitätsnah und ist in der hier relevanten Literatur nicht umstritten. Die Erfüllung dieser Bedingung ist weiterhin in einer risikoneutralen Welt - definiert als eine Welt, in der sämtliche Akteure risikoneutral sind - möglich. Risikoneutralität impliziert, dass die Individuen für das Eingehen von Risiken nicht kompensiert werden wollen.<sup>93</sup> Der erwartete Ertrag sämtlicher Anlagen in solch einer Welt entspricht folglich dem risikolosen Zinssatz.<sup>94</sup>

Die Bedingung 2 beinhaltet eine Charakterisierung der Risikoaversion, da sie die Konkavität der Nutzenfunktion beschreibt. Eine Charakterisierung risikoaversen Verhaltens resultiert aus dem Vergleich von unsicheren Zahlungsströmen mit einer sicheren Auszahlung, dem Sicherheitsäquivalent, die beide den gleichen Nutzen stiften. Die Konkavität hat zur Konsequenz, dass der Nutzen (aus dem Konsum in Höhe) des Sicherheitsäquivalents im Vergleich zum Nutzen (aus dem Konsum in Höhe) des mathematischen Erwartungswert der unsicheren Situation geringer ist. Eine Risikoprämie ist definiert als Differenz von

---

<sup>91</sup> Der Fall einer konstanten geforderten Prämie wird als konstante absolute Risikoaversion (CARA) definiert, und wird bei der formalen Beschreibung einer Präferenzordnung (Nutzenfunktion) wieder aufgegriffen.

<sup>92</sup> Der Fall einer konstanten geforderten Prämie wird in diesem Fall als konstante relative Risikoaversion (CRRA) definiert.

<sup>93</sup> Wird von risikoneutralem Verhalten ausgegangen, so ist die indirekte Nutzenfunktion homogen vom Grad Null im nominalen Vermögen ,W' und im Preis(index) ,P'. Zu den Eigenschaften einer Nutzenfunktion von risikoneutralen Akteuren vgl. Stiglitz (1969), S. 660 – 667. Engel (1992), S. 305 – 319 stellt fest, dass im Mehrgüterfall bei Risikoneutralität sämtliche Güter perfekte Substitute sein müssen, da die Nutzenfunktion auch linear im Zwei-Güter-Diagramm verlaufen muss. Für eine Diskussion von unterschiedlichen Nutzenfunktionen und deren Eigenschaften vgl. Stiglitz (1969).

<sup>94</sup> Hull (1997). S. 198. Risiko kann in solch einer Welt existent sein, aber es wird nicht bewertet. Der risikolose Zins sei definiert als Ertrag einer Anlage, welcher für alle möglichen Zukunftsszenarien gleich sei. Vgl. Hakansson, (1977). S. 170.

Sicherheitsäquivalent und Erwartungswert und besitzt bei konkaver Nutzenfunktion einen positiven Wert. Der Akteur ist somit risikoavers. Eine konvexe Nutzenfunktion impliziert dagegen eine negative Risikoprämie und beschreibt somit Risikofreude.

Die Bedingung 3 beschreibt die Beobachtung, dass relativ wohlhabende Akteure eher geneigt sein werden, einen für sie relativ kleinen Teil ihres Vermögens der Unsicherheit zu unterwerfen, als relativ arme Akteure dies für den gleichen Betrag bereit sein werden.<sup>95</sup> Intuitiv erscheint es nachvollziehbar, dass ein relativ armer Akteur stärker zögern wird, beispielsweise sein Lebensmittelbudget der Unsicherheit auszusetzen, als ein reicher Akteur den gleichen Betrag riskieren würde, den er anderenfalls für Luxusgüter verwenden würde. Als Grenzbereiche des intuitiv nachvollziehbaren Handelns wird einerseits Risikoneutralität in Abgrenzung zur Risikofreude und andererseits konstante Risikoaversion in dieser absoluten Form gewählt (CARA).

Der Ausschluss der zunehmenden absoluten Risikoaversion erscheint legitim, da sie dem obigen, intuitiv plausiblen Szenario zuwider laufen würde. Ein relativ wohlhabender Akteur würde bei Annahme zunehmender absoluter Risikoaversion stärker zögern als ein relativ armer Akteur. Solch ein Verhalten ist auf Basis obiger Argumentation nicht nachvollziehbar. Trotzdem sind Szenarien vorstellbar, aus denen solch ein Verhalten resultiert. Dazu ist jedoch die Einführung einer neuen Variablen notwendig. Geht man davon aus, dass das Vermögen mit zunehmendem Alter des Akteurs steigt und gleichfalls seine Risikoaversion positiv vom Alter abhängt und den Vermögenszuwachs überkompensiert, so kann diese Annahme plausibel sein.<sup>96</sup> Da Alterseffekte in dieser Arbeit nicht untersucht werden sollen, wird im weiteren diese Einschränkung aufrecht erhalten.

Die Bedingung 4 beschreibt die Entscheidung der Akteure über Vermögensanteile, die sie der Unsicherheit auszusetzen bereit sind. Im Gegensatz zu Bedingung 3, die eine Aussage zu

---

<sup>95</sup> Die möglichen Ausprägungen dieser unsicheren Situation seien konstant. Damit verringert sich die relative Unsicherheit im Verhältnis zur Vermögenshöhe.

<sup>96</sup> Wird steigende absolute Risikoaversion als zutreffende Beschreibung der Realität angesehen, so müsste das Modell in dieser Arbeit um z. B. Alterseffekte erweitert werden. Modelle, die solche Effekte berücksichtigen, werden oft in der Form von ‚overlapping generations‘ formuliert. In der einfachsten Form wird meist von 2 Perioden ausgegangen, so dass in Periode 1 der Akteur jung und in Periode 2 der Akteur alt sei. Weiterhin werden in jeder Periode neue Akteure ‚geboren‘. Es entsteht somit eine ‚Welt‘, in der in jeder Periode sowohl alte als auch junge Akteure leben. Weiter vereinfachend kann von jeweils einem alten und einem jungen Akteur ausgegangen werden. Diese Art der Risikoaversion wird hier nicht weiter berücksichtigt.

absoluten Kapitalbeträgen formuliert, beschreibt Bedingung 4 eine Entscheidung zur Festlegung der Vermögensstruktur. Steigende relative Risikoaversion, beschrieben durch Bedingung 4, sagt aus, dass bei einer proportionalen Erhöhung des Vermögens und der Unsicherheit, die Bereitschaft der Akteure abnimmt, sich dieser Unsicherheit auszusetzen. Sie fordern eine höhere Risikoprämie. Als Beschränkung der möglichen Ausprägungen von Bedingung 4 wird ebenfalls von risikoneutralen Akteuren ausgegangen, die ihre Entscheidung ausschließlich am Erwartungswert orientieren. Arrow sieht steigende relative Risikoaversion als realitätsnahe an, aber gesteht zu, dass die Annahme steigender relativer Risikoaversion intuitiv schwer zu begründen ist.<sup>97</sup>

Der Spezialfall der konstanten relativen Risikoaversion (CRRA = ‚constant relative risk aversion‘) ist besonders für eine empirische Überprüfung geeignet. Dies liegt darin begründet, dass die Struktur der Vermögensaufteilung hinsichtlich der Unsicherheit für alle Vermögenshöhen konstant bleibt. Damit ist eine Aggregation beispielsweise über ein Land ohne explizite Berücksichtigung von Vermögensdivergenzen möglich.<sup>98</sup> Es kann somit legitimerweise von einem ‚representative agent‘ ausgegangen werden, eine Annahme, die in der theoretischen Literatur weit verbreitet ist. Die Annahme einer CRRA wird ebenfalls durch die beobachtbare Anlageentscheidung gestützt, dass die Akteure festgelegte Anteile ihres Vermögens in ‚sichere‘ Rentenwerte angelegen und festgelegte Anteile in ‚riskante‘ Aktien. Diese Annahme der CRRA scheint somit durch Beobachtungen gestützt zu werden.<sup>99</sup>

Die verbal formulierten Bedingungen lassen sich nun wie folgt in eine formale (d.h. mathematische) Ausdrucksweise übersetzen. Die obige Forderung 1 (eines positiven Grenznutzens des Vermögens) lässt sich durch die erste Ableitung der Nutzenfunktion nach dem Vermögen beschreiben. Bei Erfüllung der Forderung muss sie einen Wert von größer als null annehmen. Gleichfalls lässt sich die obige Forderung 2 (abnehmender Grenznutzen) grundsätzlich problemlos durch die zweite Ableitung der Nutzenfunktion nach dem

---

<sup>97</sup> Vgl. Arrow (1964). S. 25, zitiert nach Tsiang (1974), S. 355. Die ‚boundedness‘ einer Nutzenfunktion als weitere Restriktion einer Nutzenfunktion wird bei Modellen mit unendlichen Zeithorizonten wesentlich, da in diesen Modellen ein optimaler Konsumpfad nicht existieren muss. Vgl. Obstfeld und Rogoff (1996). S. 63 sowie ihre Besprechung der ‚transversality condition‘. Der wesentliche Nachteil beschränkter Nutzenfunktionen liegt in ihrem Widerspruch zu vielen in der Literatur verwendeten Nutzenfunktionen, insb. der Log-Nutzenfunktion.

<sup>98</sup> Diese Aussage wird formal in Obstfeld und Rogoff (1996). S. 292 f. hergeleitet.

<sup>99</sup> In der Literatur wird die Auswirkung ihrer Nicht-Erfüllung untersucht. Vgl. Ballingere und Wilcox (1997) für eine allgemeine Analyse und Elliot und Ito (1998) für eine Anwendung auf dem Devisenmarkt.

Vermögen beschreiben. Bei Erfüllung der Forderung muss sie einen Wert von kleiner als null annehmen.

Die Forderungen 3 und 4 sind nicht ohne weiteres derart in eine formale Beschreibung zu überführen. Zwar ist die Konkavität einer Nutzenfunktion - also deren zweite Ableitung

$\frac{d^2U}{dW^2}$  - grundsätzlich geeignet, um eine Risikoaversion zu messen. Eine Quantifizierung

der Risikoaversion allein auf Basis von  $\frac{d^2U}{dW^2}$  liefert jedoch keine eindeutigen Ergebnisse. Dies liegt darin begründet, dass eine Nutzenfunktion, U, die eine Präferenzordnung beschreibt, nur bis auf eine lineare Transformation von U bestimmt ist. Die Multiplikation einer Nutzenfunktion würde zwar die Präferenzordnung nicht beeinflussen,

wohl aber den Wert von  $\frac{d^2U}{dW^2}$ . Es muss folglich eine Normierung von  $\frac{d^2U}{dW^2}$  gefunden werden, die den Grad der Risikoaversion unabhängig von solch einer monotonen

Transformation von U werden lässt. Die Normierung von  $\frac{d^2U}{dW^2}$  durch Division mit

$\frac{dU}{dW}$  erfüllt diese Bedingung, da die Transformation sowohl im Zähler als auch im Nenner dieses Quotienten erscheint, und somit gekürzt werden kann. Auf Basis dieser Überlegungen normiert die Bedingung 3 die Konkavität der Nutzenfunktion im Vermögen, beschrieben durch deren zweite Ableitung, durch Division mit der ersten Ableitung. Die absolute Risikoaversion ist folglich ein eindeutiges Maß der Risikoaversion.

Die Bedingung 4 stellt auf relative Werte ab, was durch eine Multiplikation der absoluten Risikoaversion mit dem Vermögen erreicht wird. Problematisch ist nun, dass die so beschriebene relative Risikoaversion nicht eindeutig ökonomisch interpretierbar ist. Ursache dafür ist, dass diese Definition der relativen Risikoaversion identisch ist mit der Definition der intertemporalen Substitutionselastizität des Grenznutzens im Vermögen.<sup>100</sup> Es ist ökonomisch wohl kaum zu begründen, warum sich ein Akteur hinsichtlich dieser beiden unabhängigen Szenarien gleich verhalten sollte.

---

<sup>100</sup> Während Arrow (1971). S. 94 auf die Substitutionselastizität des Grenznutzens im Vermögen zu einem gegebenen Zeitpunkt abstellt, zeigen Obstfeld und Rogoff (1996). S. 28 die Anwendung im intertemporalen Kontext.

Zusammenfassend gelten zur Beschreibung realitätsnaher Verhaltensweisen die folgenden Forderungen an eine Nutzenfunktion:<sup>101</sup>

$$(1) \quad \frac{dU}{dW} > 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2U}{dW^2} < 0$$

$$(3) \quad ARA \equiv -\frac{\frac{d^2U}{dW^2}}{\frac{dU}{dW}} \geq 0 \quad \text{mit:} \quad CARA \equiv -\frac{\frac{d^2U}{dW^2}}{\frac{dU}{dW}} = 0$$

$$(4) \quad RRA \equiv -W * \frac{\frac{d^2U}{dW^2}}{\frac{dU}{dW}} \geq 0 \quad \text{mit:} \quad CRRRA \equiv -W * \frac{\frac{d^2U}{dW^2}}{\frac{dU}{dW}} = 0$$

Ökonomisch können die Einflüsse auf eine Risikoprämie nach der Art unterschieden werden. Es sind folgende Ursachen für eine Risikoprämie vorstellbar:

- Diversifikationsrisiko<sup>102</sup>

(Bewertet die Unsicherheit, ob ein Marktgleichgewicht erreicht wird so, dass die gleichgewichtige Nachfrage mit dem Angebot an Vermögenstiteln übereinstimmt und eine gewünschte optimale Diversifizierung durchführbar ist.)

- Inflationsrisiko

(Bewertete Unsicherheit über die Entwicklung des Inflationsdifferentials, falls die Anlage in Nominalwerten ohne Indexierung erfolgt.)

- politisches Risiko

(Bewertete Unsicherheit über die zukünftige Errichtung von Kapitalverkehrsbeschränkungen.)<sup>103</sup>

<sup>101</sup> Vgl. Tsiang (1974), S. 354 - 371.

<sup>102</sup> Dieses Risiko ist empirisch kaum messbar, da Angebots- und Nachfragekurven empirisch kaum modellierbar sind. Ein dynamischer Aspekt des Gleichgewichts bei Portfolioumschichtungen findet sich bei Engel (1992), der eine Liquiditätsprämie für den Terminmarkt berücksichtigt. Das Preisnehmerverhalten, dass bei exogener Preisstochastik implizit angenommen wird, gilt in diesem Fall nicht mehr.

<sup>103</sup> Zur Untersuchung des politischen Risikos vgl. Aliber (1973), S. 1451 – 1459.



In dieser Arbeit wird ausschließlich das Inflationsrisiko in die Analyse einbezogen. Das Diversifikationsrisiko ist nicht relevant, da von Märkten ausgegangen wird, die sich im Gleichgewicht befinden. Das politische Risiko ist hier ebenfalls nicht relevant, da Beschränkungen in der internationalen Kapitalallokation nicht modelliert werden.

Einschränkend ist jedoch festzuhalten, dass sich Märkte sehr wohl im Ungleichgewicht befinden könnten und dass Kapitalverkehrsbeschränkungen eingeführt werden könnten. Die Reaktion Malaysias auf die asiatische Währungskrise sei als anschauliches Beispiel erwähnt. Das Ziel in dieser Arbeit ist jedoch die Darstellung des erwarteten Wechselkurses bei Risikoaversion, die sich vereinfachend auf die Unsicherheit der Wechselkursentwicklung sowie der Gütermarktentwicklung beziehen soll. Um diese Einflüsse zu isolieren, erscheint es angebracht, die obigen Vereinfachungen - insbesondere die Abstraktion von staatlichen Einflüssen - einzuführen, obwohl sie einen signifikanten Einfluss auf den erwarteten Wechselkurs ausüben mögen. Diese Vereinfachungen lassen die Eignung des hier entwickelten Modells für eine empirische Überprüfung als fraglich erscheinen.

### 1.1.2. Der Einfluss der Nutzenfunktion auf eine Risikoprämie

Die oben hergeleiteten Eigenschaften einer Nutzenfunktion können zur Modellierung einer Risikoprämie und ihrer Eigenschaften verwendet werden. Dies wurde erstmals von Pratt<sup>104</sup> vorgenommen, dessen Vorgehen hier kurz dargestellt wird.

Ausgangspunkt sei die folgende Situation. Ein Akteur bezieht seinen Nutzen aus einem Vermögen. Dies sei in Höhe von  $W$  gegeben. Er erhält nun eine Option auf den Erhalt einer unsicheren Zahlung in Höhe von  $z_u$ . Alternativ wird ihm eine sichere Zahlung in Höhe von  $E[z_u] - RP$  angeboten. Eine Risikoprämie  $RP$  ist in ihrer Ausprägung insofern festgelegt, dass der Akteur indifferent zwischen diesen beiden Alternativen sei. Es soll weiterhin gelten, dass  $RP = RP(x, z_u)$ , also die Prämie von der Vermögenshöhe abhängt. Formal bedeutet die beschriebene Indifferenz zwischen der sicheren und der unsicheren Zahlung, dass gilt:

$$E[U(W + z_u)] = U(W + E[z_u] - RP) \quad (\text{II.1})$$

Es wird nun eine unsichere Zahlung mit einem Erwartungswert von Null, also  $E[z_u]=0$ , betrachtet. Diese Einschränkung ist insofern unproblematisch, als dass, wie Pratt zeigt, es möglich ist, durch Variation des Vermögens,  $W$ , die unsichere Zahlung,  $z_u$ , zu normieren und obige Bedingung zu erhalten. Aus Gleichung (II.1) wird dann:

$$E[U(W + z_u)] = U(W - RP) \quad (\text{II.2})$$

Um die lokale Risikoaversion<sup>105</sup> zu messen, wird die Risikoprämie für solch eine Situation mit kleiner Varianz untersucht. Es werden nun beide Seiten von Gleichung II.2 durch eine Taylor Approximation erster Ordnung um,  $W$ , dargestellt. Für die rechte Gleichungsseite von (II.2) erhält man:<sup>106</sup>

$$U(W - RP) = U(W) - RP * \frac{dU(W)}{dW} + O(RP^2) \quad (\text{II.3})$$

während sich die linke Gleichungsseite von (II.2) um,  $W$ , durch eine Taylor-Approximation zweiter Ordnung darstellen lässt:

$$\begin{aligned} E[U(W + z)] &= E \left[ U(W) + z_u * \frac{dU(W)}{dW} + \frac{1}{2} * (z_u)^2 \frac{d^2U(W)}{dW^2} + O(z_u^3) \right] \\ &= U(W) + \frac{1}{2} * \sigma_{z_u}^2 * \frac{d^2U(W)}{dW^2} + o(\sigma_{z_u}^2) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

<sup>104</sup> Pratt (1964), S. 122-136.

<sup>105</sup> Die Restriktion auf eine lokale Risikoaversion folgt aus der Taylor-Approximation, die im folgenden angewendet wird. Sie beschreibt eine unbekannte Funktion an einer bestimmten Stelle.

<sup>106</sup> Die einzelnen Rechenschritte werden hier nicht ausführlich dargestellt, da nur bekannte Ergebnisse reproduziert werden. Die Taylor-Approximation wird in Kapitel III ausführlich beschrieben und verwendet. Dort wird auch auf die relevante Literatur verwiesen.

Der Operator  $O(*)$  und  $o(*)$  wird im mathematischen Grundlagenteil des Kapitel III ausführlich dargestellt. Die

Terme bedeuten im Einzelnen:  $O(RP^2) \equiv \lim_{\sigma_z^2 \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Approximationsresiduum}}{RP^2} \right) = \text{begrenzt}$  und

$o(\sigma_z^2) \equiv \lim_{\sigma_z^2 \rightarrow 0} \left( \frac{\text{Approximationsresiduum}}{\sigma_z^2} \right) = 0$

Sie dienen der Charakterisierung der Approximationsresiduen, insbesondere der Sicherstellung, dass diese die Approximationsgleichung nicht dominieren würden.

Es folgt, dass sich die ursprüngliche Gleichung II.2 approximativ beschreiben lässt durch:<sup>107</sup>

$$U(W) - RP * \frac{dU(W)}{dW} + O(RP^2) = U(W) + \frac{1}{2} * \sigma_{z_u}^2 * \frac{d^2U(W)}{dW^2} + o(\sigma_{z_u}^2) \quad (\text{II.5})$$

Nach Umformung erhält man:

$$RP = \frac{1}{2} * \sigma_{z_u}^2 * \underbrace{(-1) * \frac{\frac{d^2U(W)}{dW^2}}{\frac{dU(W)}{dW}}}_{ARA} + o(\sigma_{z_u}^2) \quad (\text{II.6})$$

Die Risikoprämie hängt somit von der Form der Nutzenfunktion und von der Unsicherheit ab. Dies ist intuitiv plausibel, da durch die Nutzenfunktion eine Bewertung der Unsicherheit stattfindet. Der erste Term der rechten Gleichungsseite beschreibt somit das Ausmaß der

Unsicherheit, während der Term  $\frac{d^2U(W)}{dW^2}$  eine Bewertungskomponente darstellt. Allgemein lässt sich folgern, dass eine konkave Nutzenfunktion mit positiven Grenznutzen aufgrund einer definitionsgemäß immer positiven Ausprägung der Varianz zu einer positiven Risikoprämie führt. Da risikoaverses Verhalten durch eine positive Risikoprämie charakterisiert ist, kann solch ein Verhalten durch eine konkave Nutzenfunktion beschrieben werden. Im weiteren Verlauf des Kapitel II wird diese Charakterisierung wieder aufgegriffen.

### 1.1.3. Alternative analytische Darstellungsformen risikoaversen Verhaltens

Die bisherigen Ausführungen blieben auf einem hohen Abstraktionsniveau. Es mag in einigen Fällen sinnvoll sein, weitere Restriktionen einzuführen, die als realitätsnahe gewertet werden oder eine plausible Interpretation der Ergebnisse erlauben. Nachfolgend werden zunächst diejenigen Sonderfälle einer konstanten absoluten bzw. relativen Risikoaversion aufgeführt,

---

<sup>107</sup> Die Beschränkung der Approximationsresiduen auf  $O(RP^2)$  und  $o(\sigma_z^2)$  beinhalten Einschränkungen hinsichtlich der zugrunde liegenden Verteilung oder der zulässigen Nutzenfunktion. Es wird jedoch nicht explizit eine Normalverteilung oder eine quadratische Nutzenfunktion gefordert, sondern nur, dass höhere Verteilungsmomente in ihrem Einfluss auf die Risikoprämie vernachlässigt werden können. Pratt (1964) geht auf diesen Aspekt nicht näher ein.

die in der Literatur häufig anzutreffen sind und auf der Pratt'schen Formulierung basieren. Anschließend werden Alternativen dargestellt, die keine zweifache Differenzierbarkeit der Nutzenfunktion voraussetzen, und auf ‚beobachtbares‘ Verhalten zurückgeführt werden können.

### 1.1.3.1. Darstellungsformen von Risikoaversion auf Basis der Pratt'schen Definition

Unter Schritt 1 in diesem Abschnitt wurde bereits ausgeführt, dass die Verhaltensweisen einer konstanten absoluten Risikoaversion (CARA) bzw. einer konstanten relativen Risikoaversion (CRRA) von besonderem Interesse sind. Diese Verhaltensweisen lassen sich nun durch die folgenden expliziten Formen der indirekten Nutzenfunktion repräsentieren:

$$U(W_t) = D * (1 - e^{-av * W_t}) \quad \text{CARA Nutzenfunktion} \quad (\text{II.7})$$

$$U(W_t) = \frac{W_t^{1-av}}{1-av} \quad \text{CRRA Nutzenfunktion}^{108} \quad (\text{II.8})$$

Die Parameter ‚av‘ und ‚D‘ sind konstant und so festzulegen, dass das Vermögen einen positiven Nutzen stiftet. So muss für Gleichung (II.8) gelten: ( $av < -1$ ) und für Gleichung (II.7) gelten: ( $av < 0$  bei  $D < 0$ ) bzw. ( $av > 0$  bei  $D > 0$ ). Werden diese Nutzenfunktionen zweifach nach ‚W‘ abgeleitet und der Quotient aus erster und zweiter Ableitung gemäß der Definitionen von CARA für Gleichung (II.7) und CRRA für Gleichung (II.8) gebildet, so wird ersichtlich, dass diese Funktionen die Bedingungen für konstante absolute bzw. relative Risikoaversion erfüllen.

Die bei flüchtiger Betrachtung als kompliziert erscheinende Nutzenfunktion hat, wie die obigen Ausführungen gezeigt haben, eine intuitiv nachvollziehbare Ursache in der Prämissensetzung zum individuellen Verhalten. Die Wahl einer formal aufwendigen Nutzenfunktion der obigen Formen liegt somit in der ökonomischen Prämissensetzung begründet.

---

<sup>108</sup> Nutzenfunktionen können natürlich auch in Abhängigkeit der Konsummengen beschrieben werden. Die allgemeinen Zusammenhänge zwischen direkter und indirekter Nutzenfunktion werden in den meisten Mikroökonomie-Lehrbüchern beschrieben. Vgl. Varian (1992) Chapter 7.

Als alternative Formulierungen zur Prämisse der CRRA und CARA werden häufig eine quadratische Nutzenfunktion bzw. eine polynomiale Nutzenfunktion verwendet. Die quadratische Nutzenfunktion findet insbesondere in der komparativ statischen Betrachtung der Portfoliotheorie ihre Anwendung, wenn keine Normalverteilung der Preise zugrunde gelegt wird.<sup>109</sup> Die polynomiale Nutzenfunktion hat nur eine geringe eigenständige Bedeutung in der Literatur. Da sich jedoch eine Nutzenfunktion von unbekannter Form durch eine Taylor-Approximation für eine bestimmte Ausprägung des Funktionsarguments in solch eine Form bringen lässt, findet man sie häufig in der Literatur.<sup>110</sup> Borch zeigt, dass eine konsistente Ordnung der Präferenzen in Abhängigkeit einer stochastischen Variablen, deren Verteilung durch n-Verteilungsmomente beschrieben wird, nur durch eine polynomiale Nutzenfunktion vom Grade 'n' geleistet werden kann.<sup>111</sup>

Diese Arbeit verwendet in Kapitel III die Annahme einer konstanten relativen Risikoaversion. Vorteilhaft erscheint, dass durch diese Annahme die Betrachtung eines repräsentativen Agenten ohne weitere einschränkende Prämissen möglich wird. Diese Möglichkeit liegt darin begründet, dass sämtliche Akteure unabhängig von ihrem Vermögen strukturell gleich reagieren. Das Pro-Kopf-Vermögen des betrachteten Landes verhält sich wie der repräsentative Akteur, welcher das durchschnittliche Pro-Kopf-Vermögen besitzt.<sup>112</sup> Natürlich könnte die nationale Vermögensaufteilung einen Einfluss auf die Ausprägung des erwarteten Wechselkurses ausüben. Von diesem möglichen Zusammenhang muss in dieser Arbeit abstrahiert werden.

Die vorangehende Analyse beschreibt umfassend die allgemeinen Kriterien zur Beschreibung risikoaversen Verhaltens und deren Umsetzung in eine mathematisch formulierte Nutzenfunktion. Im weiteren wird nun ergänzend auf die Existenz einer allgemeineren

---

Wie noch ausgeführt wird, kommt dieser Unterscheidung in diesem Kapitel eine besondere Bedeutung zu.

<sup>109</sup> Eine gute Lehrbuchdarstellung findet sich in Cuthbertson, (1997). Zur originären Diskussion vgl. Borch (1969) und Feldstein (1969).

<sup>110</sup> In der Regel wird eine Approximation zweiter Ordnung vorgenommen. Dies impliziert, dass Ableitung höherer Ordnung als Zwei vernachlässigt werden können. Dies ist zunächst eine ad hoc Annahme und damit eine potentielle Quelle von Ungenauigkeiten. Weiterhin impliziert solch eine Approximation eine dritte Ableitung mit Wert von Null. Somit muss das obige Approximationsergebnis eine quadratische Funktion sein. Zur Taylor-Approximation vgl. Chiang, (1984). S. 254 ff.

<sup>111</sup> Borch, (1969), S. 1-4. Außerdem vgl. Feldstein, (1969), S. 5 - 12.

<sup>112</sup> Für einen formalen Beweis vgl. Obstfeld und Rogoff (1996). S. 292 - 294. Für eine Abgrenzung zum 'overlapping generations' Ansatz vgl. S. 174 ff.

Funktionsform, der Funktionsfamilie der hyperbolischen absoluten Risikoaversion (HARA), hingewiesen. Diese Ausführungen vertiefen die bereits angesprochenen Verhaltensweisen der CARA und CRRA. Zusätzlich wird im letzten Absatz zwischen intertemporaler Grenzrate der Substitution und der Risikoaversion differenziert, sowie die Umsetzung dieser Unterscheidung in eine mathematische Formulierung dargestellt. Im Verlauf dieser Arbeit werden diese Aspekte nicht wieder aufgegriffen. Sie dienen ausschließlich der Einordnung von Nutzenfunktionen in einen Gesamtkontext.

Eine vergleichsweise allgemeinere Familie der Nutzenfunktionen wird hyperbolische absolute Risikoaversion-Familie (HARA) genannt. Sie besitzt die Form:<sup>113</sup>

$$U(W_t) = \frac{1-\gamma}{\gamma} * \left\{ \frac{\psi * W}{1-\gamma} + \eta \right\}^\gamma \quad \text{HARA} \quad (\text{II.9})$$

Die Parameter  $\psi$ ,  $\gamma$  und  $\eta$  sind zunächst nur insofern in ihrem Wertebereich restringiert, als dass ein Vermögen einen positiven Nutzen stiften muss. Weitere Restriktionen werden im folgenden in Abhängigkeit der angenommenen Risikoaversion ausführlich diskutiert.

*HARA*-Funktionen haben den Vorteil, dass sie sich sowohl zur Darstellung der *CARA* als auch der *CRRA* eignen. Nachteilig ist, dass sich risikoneutrales Verhalten nicht modellieren lässt. Eine lineare Steigung des Nutzens in  $W$ , was risikoneutralem Verhalten entspricht, lässt sich bei Verwendung einer *HARA*-Funktion aufgrund des Exponenten nur durch die Restriktion  $\gamma=1$  erreichen. Diese Spezifizierung lässt die Nutzenfunktion aufgrund des voranstehenden Quotienten für alle Werte von  $W$  gleich Null werden. Während risikoneutrales Verhalten nicht modellierbar ist, erleichtert diese Funktion jedoch die Analyse risikoaversen Verhaltens durch ihre allgemeinere Darstellbarkeit ökonomisch plausiblen Verhaltens. Dies macht sie jedoch ebenfalls aufwendiger, so dass ihre Beschreibung hier nur ergänzend angeführt wird.

Die Eigenschaften der *HARA*-Funktionsform lassen sich vereinfachend beschreiben, indem auf die Definitionen des Abschnitt 1.1.1 in diesem Kapitel Bezug genommen wird. Bei

---

<sup>113</sup> Vgl. Merton (1998), S. 137 f. sowie die dort angegebene Literatur. Die folgenden Ausführungen geben die Merton'schen Ergebnisse wieder.

Verwendung der Definition zur absoluten Risikoaversion ( $ARA$ ), wie sie in Bedingung (3) definiert wird, und der Funktion in Gleichung II.9 kann geschrieben werden:<sup>114</sup>

$$ARA \equiv -\frac{d^2U/dW^2}{dU/dW} \geq 0 \quad (\text{Wiederholung der Bedingung 3})$$

$$ARA(W_t) = \left\{ \frac{W_t}{1-\gamma} + \frac{\eta}{\psi} \right\}^{-1} > 0 \quad (\text{II.10})$$

Als ökonomisch plausibles Verhalten wurde von einer positiven absoluten Risikoaversion ausgegangen. Übersetzt in eine Restriktion der  $HARA$ -Funktionsparameter gilt  $ARA(W_t) > 0$ , wenn  $\psi, \eta > 0$  sowie  $\gamma < 1$ .<sup>115</sup>

Weiterhin wurde eine steigende absolute Risikoaversion als intuitiv nicht plausibel ausgeschlossen. Die Übersetzung dieser Bedingung in eine Parameterrestriktion wird nun dargestellt. Die Veränderung von  $ARA$  als Reaktion auf eine Veränderung des Vermögens kann durch eine Ableitung von  $ARA$  nach dem Vermögen,  $W$  mathematisch beschrieben werden. Für die zulässigen Bereiche der Parameterausprägungen bedeutet dies:

$$\frac{d[ARA(W_t)]}{d[W_t]} = -(1-\gamma)^{-1} * \left\{ \frac{W_t}{1-\gamma} + \frac{\eta}{\psi} \right\}^{-2} \quad (\text{II.11})$$

Die Veränderung der absoluten Risikoaversion in Abhängigkeit der Funktionsparameter lässt sich beschreiben durch

$$\frac{d[ARA(W_t)]}{d[W_t]} < 0 \quad \text{wenn } -\infty < \gamma < 1$$

<sup>114</sup> Vgl. Merton (1998), S. 138. Die Gleichung (II.9) wird zweifach abgeleitet und der Quotient aus zweiter und erster Ableitung gebildet. Nach Multiplikation mit (-1) erhält man einen Ausdruck, der der Definition von  $ARA$  aus Kapitel II Abschnitt 1.1.1 entspricht.

<sup>115</sup> Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so müssen die Variablen in Abhängigkeit voneinander formuliert werden, um mehrere mögliche Konstellationen zu bestimmen, die die Bedingung  $CARA$  gewährleisten. Beispielsweise wäre eine negative Ausprägung von  $\eta$  und  $\beta$  ebenfalls mit  $ARA(W) > 0$  vereinbar

$$\frac{d[ARA(W_t)]}{d[W_t]} > 0 \quad \text{wenn } 1 < \gamma < \infty$$

$$\frac{d[ARA(W_t)]}{d[W_t]} = 0 \quad \text{d.h. CARA} \quad \text{wenn } \gamma = +\infty$$

Der Ausschluss von steigender absoluter Risikoaversion aufgrund ökonomischer Überlegungen restringiert folglich nur den folgenden Parameter auf  $-\infty < \gamma < 1$ . Die Funktion ist weiterhin für  $\gamma = 1$  nicht definiert. Risikoneutrales Verhalten lässt sich in die Bedingung  $\gamma \rightarrow 1$  approximierend übersetzen. Die *HARA*-Funktion erlaubt folglich durch entsprechende Restriktion der Parameter die Darstellung von *CARA*.

Darüber hinaus eignet sich die *HARA*-Funktion ebenfalls zur Darstellung der relativen Risikoaversion *RRA*. Diese ist gemäß ökonomischen Forderungen an eine Präferenzordnung (3) in Verbindung mit Forderung (4)<sup>116</sup> definiert als  $RRA(W_t) = ARA(W_t) * W_t$ . Daraus folgt:

$$\frac{d[RRA(W_t)]}{d[W_t]} = \frac{\eta}{\beta} * \left\{ \frac{W_t}{1-\gamma} + \frac{\eta}{\psi} \right\}^{-2} \quad \text{(II.12)}$$

und es gilt:

$$\frac{d[RRA(W_t)]}{d[W_t]} < 0 \quad \text{wenn } \eta < 0 \text{ und } \gamma \neq 1$$

$$\frac{d[RRA(W_t)]}{d[W_t]} > 0 \quad \text{wenn } \eta > 0 \text{ und } -\infty < \gamma < 1$$

$$\frac{d[RRA(W_t)]}{d[W_t]} = 0 \quad \text{d.h. CRRA} \quad \text{wenn } \eta = 0 \text{ und } \gamma \neq 1$$

Als Fazit kann festgestellt werden, dass sich ökonomisch plausibles Handeln der Akteure in Restriktionen der Parameter einer allgemeinen mathematischen Nutzenfunktion in Form einer *HARA*-Funktion darstellen lässt.

<sup>116</sup> Vgl. Kapitel II Abschnitt 1.1.1. in dieser Arbeit.



Der bereits angesprochene Sonderfall einer quadratischen Nutzenfunktion bzw. die polynomiale Nutzenfunktion lassen sich ebenfalls durch eine *HARA* Funktion darstellen, indem die Parameter festgelegt werden durch  $HARA(\gamma = 2)$  und  $HARA(\gamma > 2)$ . Es bleibt jedoch anzumerken, dass in diesem Fall die Bedingung 1, der positive Grenznutzen des Vermögens, nur eingeschränkt gilt. Dieses Problem ist aus der Literatur bereits bekannt und soll hier kurz dargestellt werden. Für  $HARA(\gamma = 2)$  gilt:

$$\begin{aligned}
 U(W_t) &= \frac{1-2}{2} * \left\{ \frac{\psi * W_t}{1-2} + \eta \right\}^2 \\
 &= -\frac{1}{2} * \{\eta - \psi * W_t\}^2 \\
 &= -\frac{1}{2} * \{\psi^2 * W_t^2 - 2 * \eta * \psi * W_t + \eta^2\} \\
 &= -\frac{1}{2} * \eta^2 + \eta * \psi * W_t - \frac{1}{2} * \psi^2 * W_t^2 \\
 &= a + b * W_t - c * W_t^2
 \end{aligned} \tag{II.13}$$

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{1}{2} \eta^2 \\
 b &= \eta * \psi \\
 \text{mit:}^{117} \quad c &= \frac{1}{2} \psi^2
 \end{aligned}$$

Da der Grenznutzen des zusätzlichen Vermögens positiv sein soll, muss gelten:

$$\frac{d[U(W_t)]}{d[W_t]} = b - 2 * c * W_t > 0 \tag{II.14}$$

Aus dieser Bedingung folgt, dass  $W_t < b/(2*c)$ . Nach dem Einsetzen für ,a' und ,b' lässt sich die Restriktion unter Verwendung der Parameter der *HARA*-Funktion beschreiben:  $W_t < \eta/\beta$ . Allgemein gilt für die Parameterausprägungen von  $\gamma > 1$ , dass ökonomisch plausible

---

<sup>117</sup> Die Variablen ,a', ,b' und ,c' dienen der vereinfachten Darstellung und werden nur in diesem Zusammenhang verwendet. Sie sollten nicht mit den Variablen ,b<sub>t</sub>' und ,a<sub>k</sub>' verwechselt werden, die in Kapitel III eingeführt werden.

Aussagen auf den folgenden Wertebereich für  $W_t$  beschränkt sind:  $0 < W_t < \eta^*(\gamma-1)/\beta$ . Diese notwendige Einschränkung der zulässigen Vermögenshöhe zur Einhaltung der als ökonomisch plausibel genannten Kriterien bildet eine wesentliche Schwäche aller Modelle, die auf einer derartigen Einschränkung basieren. Die Begrenzung der ökonomisch sinnvollen Anwendung auf einen nach oben begrenzten Bereich des Vermögens ist die bekannte Kritik an der Verwendung einer quadratischen Nutzenfunktion auch im Rahmen der Portfoliotheorie.<sup>118</sup>

Eine *CRR*A-Nutzenfunktion unterliegt keinen Einschränkungen hinsichtlich ökonomisch plausibel interpretierbarer Vermögensausprägungen. Sie ist jedoch in ihren Aussagemöglichkeiten begrenzt, da es unmöglich ist, die intertemporale Substitutionselastizität des Vermögens bei einer Änderung des Zinssatzes und die Risikoaversion separat voneinander zu modellieren. Beide werden durch den gleichen Parameter beschrieben. Um diese Eigenschaften getrennt untersuchen zu können, muss die Nutzenfunktion wie folgt formuliert werden.<sup>119</sup>

$$U(W_t) = \frac{\left\{ \left[ W_t^{\frac{\theta-1}{\theta}} + \beta * W_{t+1}^{\frac{\theta-1}{\theta}} \right]^{\frac{\theta}{\theta-1}} \right\}^{1-\rho}}{1-\rho} \quad (\text{II.15})$$

In dieser Gleichung kann  $\theta$  als (konstante) intertemporale Substitutionselastizität,  $\beta$  als intertemporaler Diskontierungsfaktor und  $\rho$  als konstante Höhe der relativen Risikoverversion interpretiert werden. Diese Formulierung hat gravierende Auswirkungen auf ihre Verwendbarkeit im Rahmen der dynamischen Programmierung, die in Kapitel III angewendet wird. Da eine notwendige Prämisse die Zeit-Additivität darstellt, um eine ‚optimum value function‘ zu verwenden, sind obige Nutzenfunktion und das Vorgehen der dynamischen Programmierung nicht problemlos zu kombinieren.<sup>120</sup> Weiterhin ist als zusätzlicher

<sup>118</sup> Risikoaverses Verhalten impliziert weiterhin eine konkave Nutzenfunktion. Damit muss gelten, dass  $d^2U^2[W_t]/d[W_t]^2 = -2 * c < 0$ , woraus  $c > 0$  folgt. Vgl. Arrow (1971). S. 96.

<sup>119</sup> Eine vergleichbare Nutzenfunktion wird von Lewis (1996) verwendet. Eine Lehrbuchdarstellung zu diesem Thema liefern Obstfeld und Rogoff (1996). S. 282 ff.

<sup>120</sup> Obstfeld und Rogoff (1996) Supplement B zeigen die Auswirkungen rekursiver Nutzenfunktionen auf die Bedingungen erster Ordnung im Rahmen des Bellmann-Ansatzes. Sie kennzeichnen diese Form als zeitlich nicht additiv. Bekaert et al. (1997) verwendet eine rekursive Nutzenfunktion im Rahmen eines Lucas Modells. Er postuliert in der Einleitung die Verwendung einer zeitlich separierbaren Funktion. Die Terme ‚zeitlich

Kritikpunkt die zeitliche Konsistenz dieser Nutzenfunktion fraglich.<sup>121</sup> Die Verwendung solch einer Nutzenfunktion führt neben einer Unterscheidung der genannten Termini auch (quasi als Kosten ihrer Anwendung) zu Einschränkungen in ihrer Anwendbarkeit. Alternativ zu der obigen zeitlich nicht additiven rekursiven Nutzenfunktionen wurde in der Literatur die zeitliche Nicht-Trennbarkeit oder ‚habit persistence‘ eingeführt<sup>122</sup>. Als weitere mögliche Nutzenfunktionen wurden die ‚state dependent utility‘ und die ‚money in utility‘ Funktionen entwickelt.<sup>123</sup> Erstgenannte ermöglicht die Berücksichtigung von nicht eingetretenen Szenarien, so dass ein Phänomen des Bedauerns modellierbar ist. Letztgenannte erweitert die Argumente der Nutzenfunktion auf die gehaltenen Zahlungsmittel, da sie Transaktionen vereinfachen und daher einen Nutzen stiften. Abschließend sei angemerkt, dass diese Auflistung nicht abschließend sein kann, sondern nur die geläufigen Grundformen darstellen will.

Dieser kurze Überblick über mögliche Formulierungen von Nutzenfunktionen hat das Ziel, die ökonomisch einfachen Annahmen in eine mathematische Form zu bringen und damit die aufwendige Struktur von Nutzenfunktionen zu legitimieren. Der Nachteil der aufwendigen Funktionen besteht jedoch in ihrer mathematisch umfangreichen Formulierung. Insbesondere die Zahl der Parameter steigt mit dem Grad der Komplexität. Da jedoch die einzelnen Parameter nur schwer beobachtbar sind, ist eine Zuordnung der empirischen Ergebnisse auf die einzelnen Ursachen, z. B. Nutzen oder Budgetrestriktion, mit steigender Parameterzahl schwierig. Aus diesem Grund wird zur Parameterreduzierung häufig mit nicht näher spezifizierten Nutzenfunktionen gearbeitet. Der Trade-off zwischen Einfachheit und Interpretierbarkeit von Nutzenfunktionen und damit die optimale realitätsnahe Formulierung der Nutzenfunktion bleibt jedoch ein ungelöstes Problem.<sup>124</sup>

---

separierbar‘ und ‚zeitlich additiv‘ sind somit streng zu trennen.

<sup>121</sup> Zu diesem Punkt vgl. Obstfeld und Rogoff (1996). S. 73. Insbesondere die von Koopmans (1960) formulierte Nutzenfunktion kann als zeitlich inkonsistent interpretiert werden, wenn die Diskontierungsfaktoren nicht in Abhängigkeit vom jeweiligen Periodenkonsum sondern vom zeitlichen Abstand zur Gegenwart abhängen.

<sup>122</sup> Diese Form geht zurück auf Constantinides (1990). Der Konsum eines Gutes wird annahmegemäß zur Gewohnheit und kann eine vom Grenznutzen nicht gerechtfertigte konsumierte Menge in Folgeperioden bewirken.

<sup>123</sup> Diese Funktionen sind von ‚money metric utility function‘ zu unterscheiden. Zu den direkten und indirekten ‚money metric utility‘ Funktionen vgl. Varian (1992). S. 109 ff. Sie bestimmen die Geldmenge, die notwendig ist um bei gegebenen Preisen einen festgelegten Nutzen zu erreichen. Ist der vorgegebene Nutzen fix, so wird sie zur Ausgabenfunktion, sind die Preise fix, so wird sie zur indirekten Nutzenfunktion. Eine Besprechung der ‚money in utility‘ findet sich in Henderson und Quandt (1980). S. 251 f.

<sup>124</sup> Ein weiteres Problem besteht darin, dass gemäß Dumas (1994) keine bekannte Nutzenfunktion die Ergebnisse des Siegel-Paradoxons theoretisch fundieren kann. Damit wird das Ergebnis des Kapitel II bestätigt und die Arbeiten in Zweifel gezogen, die im komparativ statischen Ansatz eine eindeutige

### 1.1.3.2. Alternative Beschreibungen risikoaversen Verhaltens

Die bisher beschriebenen Nutzenfunktionen eignen sich grundsätzlich, um die Risikoaversion anhand der von Pratt verwendete Definition darzustellen. Dabei gilt, dass die Pratt'sche Definition der Risikoaversion naturgemäß nicht falsch sein kann. Es kann jedoch ihre Fähigkeit, die Realität abzubilden, kritisiert werden, so dass eine alternative Bestimmung vorzuziehen wäre. Diese Alternativen werden nun kurz beschrieben.

Ausgangspunkt der Kritik an obiger Definition der Risikoaversion bildet die Feststellung, dass im Rahmen von Experimenten Situationen konstruiert wurden, in denen das beobachtbare risikoaverse Verhalten nicht mit dem Pratt'schen risikoaversen Verhalten übereinstimmt.<sup>125</sup> In der neueren Literatur wird deswegen die Gewichtung der Ausprägungen stochastischer Variablen thematisiert. Es wurden alternative Formulierungen gewählt, die die als ungünstig empfundenen Ausprägungen höher gewichten.<sup>126</sup> Diese neue Formulierung wird auch als 'first order risk aversion' bezeichnet. Die Nutzenfunktion ist bei 'first order risk aversion' lokal in der Umgebung des Sicherheitsäquivalents nicht differenzierbar. Daraus folgt, dass sich die Akteure bei geringer Unsicherheit nicht annähernd risikoneutral verhalten. Sie sind bereit, auch zur Vermeidung kleiner Risiken eine Prämie zu zahlen.<sup>127</sup> Im Vergleich dazu folgt aus der Definition von Pratt, dass sich die Akteure bei kleiner Varianz annähernd risikoneutral verhalten, da die Risikoprämie sehr klein wird.

---

Gleichgewichtsbeziehung herleiten. Diese Aussage gilt gemäß Dumas auch für 'continuous time CAPM'. Engel (1996) geht explizit auf diesen Aspekt in seinem Modell ein und bestätigt obige Aussage. Insbesondere wird der unzureichende Ausweg der Logarithmierung besprochen. Zu diesem Punkt vgl. Kapitel I dieser Arbeit.

<sup>125</sup> Diese Beobachtungen wurden als Allais- und St. Petersburg Paradoxon bezeichnet. Sie legen eine im Vergleich höhere Berücksichtigung möglicher ungünstiger Szenarien nahe. Eine verbale Beschreibung findet sich bei Sinn (1990).

<sup>126</sup> Eine frühe Kritik der Pratt'schen Risikoaversion findet sich bei Yaari (1969). Machina (1982) konzentriert die Kritik auf das Independence Axiom und erweitert die Portfoliotheorie zur Erklärung obiger Paradoxa. Epstein (1988). Schließlich wendet diese Gedanken auf ein 'Lucas-type' Modell an, um Risikoaversion und intertemporale Grenzzinssätze der Substitution formal zu trennen. Diese letzte Problematik wird im Rahmen der Definition von Arten der Risikoaversion in Kapitel III erläutert.

<sup>127</sup> Vgl. Segal und Spivak (1990) für einen Vergleich dieser Formen der Risikoaversion. Sie folgern, dass die gleichgewichtige Risikoprämie bei 'first order risk aversion' höher ist als ihr fairer Preis, der gemäß Pratt ermittelt wird.

Epstein und Zin (1991) formulieren die folgende Beschreibung einer Präferenzordnung, die Bekaert (1997) auf einen intertemporalen Portfoliozusammenhang anwendet.<sup>128</sup>

$$\frac{\mu(P)^{\alpha\nu}}{\alpha\nu} = \frac{1}{K} * \left\{ \int_{-\infty}^{\mu(p)} \frac{z^{\alpha\nu}}{\alpha\nu} dp(z) + A * \int_{\mu(p)}^{\infty} \frac{z^{\alpha\nu}}{\alpha\nu} dp(z) \right\} \quad (\text{II.16})$$

mit:  $A \leq 1, \alpha\nu < 1$

$$K = A * \text{Prob}(z > \mu) + \text{Prob}(z < \mu)$$

Die Variable  $\mu'$  beschreibt das Sicherheitsäquivalent des unsicheren Preises  $p'$ . Das erste Integral der rechten Gleichungsseite repräsentiert die im Vergleich zu  $\mu'$  als ungünstig empfundenen Ausprägungen. Das zweite Integral repräsentiert entsprechend die günstigen Ausprägungen. Ist  $A < 1$ , so werden die vorteilhaften Ausprägungen weniger stark gewichtet als die ungünstigen. Wenn gilt  $A = 1$ , dann entspricht dieser Ausdruck einer

Erwartungswertmaximierung mit einer Nutzenfunktion von der Form  $U(z) = \frac{z^{\alpha\nu}}{\alpha\nu}$ , also mit einer konstanten relativen Risikoaversion von  $1 - \alpha\nu$ .

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass diese Arbeit eine zeitlich trennbare, additive, und ‚state independent‘ Nutzenfunktion verwendet. Intertemporale Grenzrate der Substitution und Risikoaversion werden vereinfacht durch eine Variable beschrieben. Weiterhin wird von einer *CRRA* des jeweils repräsentativen Akteurs eines Landes auf Basis der Pratt'schen Definitionen ausgegangen.

## 1.2. Allgemeine Zusammenhänge zwischen Risikoaversion, Preisstochastik und Nachfrageänderungen

---

<sup>128</sup> Aizeman (1997) verwendet den gleichen Gedanken zur Erklärung des ‚home bias puzzle‘ in der internationalen Portfoliotheorie. Seine Darstellung verzichtet jedoch auf die Verwendung des Sicherheitsäquivalentes.

Die Beschreibung von Präferenzen anhand einer mathematischen Nutzenfunktion ist problematisch. Die Konzentration auf diesen Sachverhalt allein gibt die Zusammenhänge unvollständig wieder. Wesentlich sind weiterhin die Auswirkung risikoaversen Verhaltens auf die zulässige Stochastik der Variablen im Gleichgewicht sowie auf Nachfragereaktionen. Konkret: In Schritt 1 in diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der ‚random walk‘ einer Variablen nicht mit risikoaversen Verhalten und einem Marktgleichgewicht vereinbar ist.<sup>129</sup>

Schritt 2 in diesem Abschnitt zeigt, dass bei Risikoaversion im Pratt’schen Sinn die steigende Varianz eines Güterpreises keine allgemeine eindeutige Wirkungsrichtung auf die Nachfrage nach diesem Gut ausüben muss. Die Wirkungsrichtung ist vielmehr von der konkreten Ausprägung der Nutzenfunktion abhängig.

---

<sup>129</sup> Es wird anerkannt, dass aufgrund des ‚central limit theorems‘ die Approximation der Stochastik durch solch einen ‚random walk‘ zulässig sein kann. Theoretische Arbeiten, die sich dieser Problematik widmen sind nicht bekannt.

### 1.2.1. Der Zusammenhang zwischen Risikoaversion und stochastischer Verteilung einer Variablen im Gleichgewicht

Es wird nun gezeigt, dass die Annahme zur Risikoaversion des Akteurs implizit das gleichgewichtige, von intertemporalen Präferenzen abhängige Verhalten stochastischer Preise im Zeitablauf festlegt. Diese Aussage wurde von Lucas (1978) erstmals festgestellt, dessen Vorgehen hier reproduziert wird:

Das Ziel sei die Maximierung einer zeitlich additiven, nicht-stochastischen Nutzenfunktion, welche von den konsumierten Mengen abhängt. Der Besitz der Produktionseinheiten sei zu Periodenbeginn durch Aktien  $wp_t$ , die die Produktionsmittel repräsentieren, festgelegt. Der Besitz an Aktien am Periodenende wird von Lucas durch  $wp_{t+1}$  beschrieben. Der mögliche Konsum hängt von der Produktion  $y_t$  ab, die als Dividende der Produktionsmittel interpretiert werden können und einem exogenen stochastischen Markov-Prozess  $M$  gehorchen. Damit lässt sich die Problemstellung komparativ statisch wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t * U(c_t) & \tag{II.17} \\ \text{s.t.} \quad c_t \leq y_t & \\ \text{mit} \quad M(y_{t+1}, y_t) = \text{Prob}\{y_{t+1} \leq y' / y_t = y\} & \end{aligned}$$

Aus dieser Situation leitet Lucas unter der Bedingung von Markträumung die Problemstellung her, dass das Individuum seinen Konsum und Aktienbesitz nutzenoptimal wählt.

$$\begin{aligned} J(wp_t, y_t) = \max_{c, x} \left( U(c) + \beta * \int J(wp_{t+1}, y_{t+1}) dM(y_{t+1}, y_t) \right) & \tag{II.18} \\ \text{s.t.} \quad c + p(y_t) * x_{t+1} \leq wp * x_t + p(y) * wp_t & \end{aligned}$$

$J(x, y)$  wird 'optimum value function' genannt.<sup>130</sup> Die Nebenbedingung fordert, dass die Ressourcen des Individuums, die durch das Eigentum an der laufenden Produktion (der Dividende) und dem Eigentum an den Produktionsmitteln (den Aktien) beschrieben werden,

<sup>130</sup> Die 'optimum value function' und das zugrunde liegende Vorgehen wird Appendix 5 ausführlich

größer sein müssen als der Konsum und die nach der Konsumententscheidung verbleibenden Aktien. Einfacher ausgedrückt: Es kann nicht mehr konsumiert werden, als man besitzt. Nach Maximierung von II.18 nach  $c_t$  und  $wp_t$  gilt<sup>131</sup>:

$$\frac{dU(c_t)}{dc_t} + \lambda = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$\beta * \int \frac{\partial J(wp_{t+1}, y_{t+1})}{\partial wp_{t+1}} dM(y_{t+1}, y_t) + \lambda * p_t(y) = 0 \quad (\text{II.20})$$

Nach Erweiterung der ersten Bedingung mit  $p_t(y)$ , Gleichsetzen und Kürzen von  $\lambda$  gilt:

$$\frac{dU(c_t)}{d(c_t)} * p_t(y) = \beta * \int \frac{\partial J(wp_{t+1}, y_{t+1})}{\partial wp_{t+1}} dM(y_{t+1}, y_t) \quad (\text{II.21})$$

Lucas zeigt weiterhin, dass gilt:

$$\frac{dU(c_{t+1})}{d(c_{t+1})} * [y_{t+1} + p(y_{t+1})] = \frac{\partial J(wp_{t+1}, y_{t+1})}{\partial wp_{t+1}} \quad (\text{II.22})$$

Der Grenznutzen des Konsums multipliziert mit dem zukünftigen Preis (korrigiert um die Dividende bestehend aus zukünftigen Output  $y$ ) entspricht der partiellen Ableitung der ‚optimum value function‘ nach dem zukünftigen Aktienbesitz  $wp$ . Nach dem Einsetzen resultiert folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{dU_t(y_t)}{d(y_t)} * p(y_t) = \beta * \int \frac{dU_t(y_t)}{d(y_t)} * (y_{t+1} + p(y_{t+1})) * dM(y_{t+1}, y_t) \quad (\text{II.23})$$

---

beschrieben.

<sup>131</sup> Die aufzustellende Lagrange-funktion wird hier nicht explizit aufgeführt. Sie ist ‚straight forward‘ unter der Annahme, dass die Nebenbedingung als Gleichung geschrieben werden kann. Diese Einschränkung ist intuitiv plausibel, da der Konsum stets einen positiven Grenznutzen besitzt, so dass Dividenden und Verkaufserlöse aus Aktien vollständig konsumiert werden. Ohne diese Einschränkung kann unter Verwendung der Kuhn Tucker Bedingungen gearbeitet werden.



In diese Formulierung geht die Annahme der Markträumung ein, indem von einem vollständigen Konsum des Outputs ( $c=y$ ) ausgegangen wird. Gleichung II.23 ist eine stochastische Eulergleichung, die aus der intertemporalen Optimierung bekannt ist. Sie besagt, dass der gegenwärtige Grenznutzen des Outputs dem abdiskontierten zukünftigen Grenznutzen entsprechen muss. Es bleibt anzumerken, dass im vorliegenden Modellrahmen die Anpassung nicht über den Output erfolgt, der exogen vorgegeben ist, sondern über den Preis der Aktien.

Ziel dieser Analyse ist es jedoch, eine Aussage zur Preisveränderung zu treffen. Ausgehend von der Optimalbedingung II.23 kann eine Zeitreihe ‚w‘ definiert werden, welche die Martingaleigenschaften besitzt.<sup>132</sup> Die Martingaleigenschaft einer Zeitreihe fordert einen Erwartungswert von  $w_{t+1}-w_t$  von Null und lässt die Varianz unspezifiziert. Die Zeitreihe sei definiert durch:

$$\begin{aligned}
 w_{t+1} - w_t &= \beta * \int \frac{d(U_{t+1}(c_{t+1}))}{d(c_{t+1})} * (y_{t+1} + p_{t+1}) dM(y_{t+1}, y_t) \\
 &\quad - \frac{d(U_t(c_t))}{d(c_t)} * p_t(y_t) \\
 &= \beta * \int \frac{d(U_{t+1}(c_{t+1}))}{d(c_{t+1})} * (p_{t+1}) dM(y_{t+1}, y_t) \\
 &\quad - \frac{d(U_t(c_t))}{d(c_t)} * p_t(y_t) \\
 &\quad + \beta * \int \frac{d(U_{t+1}(c_{t+1}))}{d(c_{t+1})} * (y_{t+1}) dM(y_{t+1}, y_t)
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

Die erste Zeile zeigt, dass die Zeitreihe ‚w‘ diese Eigenschaft besitzt, da die rechte Seite nach Erwartungswertbildung und Einsetzen obiger Gleichung den Wert Null besitzt. Aus dieser Gleichung (II.24) leitet Lucas die Bedingung für die Martingaleigenschaft des Preises ab. Werden keine Dividenden gezahlt ( $y=0$ , so dass der Konsum ausschließlich aus dem Verkauf der Aktien finanziert wird), so folgen die Preise einer Martingalbewegung, wenn die

Grenznutzen konstant sind ( $\frac{dU_{t+1}}{dc} = \frac{dU_t}{dc} = \text{konstant}$ ) und keine Gegenwartspräferenz besteht ( $\beta=1$ ). Aus der ersten Bedingung ( $y=0$ ) folgt, dass der dritte Term der rechten Gleichungsseite den Wert Null erhält. Die Bedingung des konstanten Grenznutzens erlaubt

<sup>132</sup> Ein Martingal ist einem Random Walk vergleichbar, bei dem den zweiten und höheren Momenten keine Restriktionen auferlegt werden. Vgl. Cuthbertson (1997), S. 104 f.

das Vorziehen des Grenznutzens aus dem Integral. Die letzte Bedingung bedarf keiner Erklärung (simples Einsetzen von  $\beta=1$  in II.24). Es folgt somit aus Gleichung II.24:

$$w_{t+1} - w_t = \frac{d(U_{t+1}(c_{t+1}))}{d(c_{t+1})} * \left[ \int (p_{t+1}) - p_t(y_t) dM(y_{t+1}, y_t) \right] \quad (\text{II.25})$$

Die linke Gleichungsseite von II.25 entspricht in ihrem Erwartungswert dem Wert Null, so

dass nach Division mit  $\frac{d(U_{t+1}(c_{t+1}))}{d(c_{t+1})}$  gilt:<sup>133</sup>

$$0 = E[(p_{t+1}) - p_t].$$

Die Annahme risikoneutralen Verhaltens impliziert somit bei fehlender Gegenwartspräferenz die Annahme einer Martingalbewegung der um Dividenden korrigierten Preise.<sup>134</sup>

Wird diese allgemeine Analyse auf den Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit angewendet, so kann der stochastische ‚Güterpreis‘ als Wechselkurs bezeichnet werden. Die obige Gleichgewichtsbeziehung beschrieb somit den Verlauf des Wechselkurses, der nur unter einschränkenden Voraussetzungen einem ‚random walk‘ folgte. Die ‚random walk‘ Hypothese für den Wechselkurs wird jedoch, wie bereits in Kapitel I gezeigt, in der Literatur als Benchmark in vielen empirischen Arbeiten verwendet. Der Erfolg dieses Benchmark erscheint angesichts obiger Erkenntnisse als um so erstaunlicher.

---

<sup>133</sup> Es sei daran erinnert, dass der Erwartungswert wie folgt definiert ist:

$$E[x] = \int x dx$$

<sup>134</sup> Dieses Ergebnis entspricht denjenigen von LeRoy (1973) und Samuelson und Merton (1977). Diese Aussagen waren lange Zeit empirisch nicht zu verifizieren. Das Aufkommen des Optionshandels schaffte jedoch eine Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen stochastischer Wechselkurse aus Währungsoptionspreisen herzuleiten. Vgl. zu diesem Verfahren Malz (1997) und Martinez (1998).

### 1.2.2. Der Einfluss einer geänderten Preisstochastik auf die Nachfrage bei risikoavermem Verhalten

Es wird nun das Vorgehen in Rothschild und Stiglitz (1971) reproduziert.<sup>135</sup> Die Autoren untersuchen die Auswirkung eines höheren Risikos, gemessen an der gestiegenen Varianz, auf die Nachfrage nach dieser Anlage. Dabei identifizieren sie Bedingungen, unter denen ein erhöhtes Risiko zu einer verringerten Nachfrage nach dieser Anlage führen kann. Diese Verhaltensweise werten sie als intuitiv einsichtige Verhaltensweise.<sup>136</sup>

Weiterhin stellen sie jedoch fest, dass unter bestimmten Bedingungen ein erhöhtes Risiko auch zu einer erhöhten Nachfrage führen kann. Dieses Verhalten würde einer Varianzminimierung entgegenstehen. Als die Ursache von derartigen Nachfrageänderungen identifizieren Rothschild und Stiglitz das Zusammenspiel zwischen Nutzenfunktion und der Verteilungsänderung einer stochastischen Variablen. Die Ergebnisse werden nun kurz dargestellt.

Ausgangspunkt der Analyse von Rothschild und Stiglitz (1971) stellt eine zeit-additive state-unabhängige Nutzenfunktion dar. Ein Akteur kann sein Budget zwischen gegenwärtigem Konsum und Sparen aufteilen. Die gesparten Beträge werden verzinst und werden für zukünftigen Konsum (vollständig) verwendet. Weiterhin hat der Akteur eine Gegenwartspräferenz im Konsum. Die ökonomischen Forderungen 1 und 2 an eine plausible Präferenzordnung seien annahmegemäß erfüllt.<sup>137</sup> Der nicht gesparte Teil des Vermögens wird zum Konsum verwendet,  $c_t \equiv (1 - sp) * W_t$ , während in Periode 2 kein Einkommen zur Verfügung steht, so dass nur die verzinsten Erträge zum Konsum verwendet werden können. Es gilt:

$$\begin{aligned} U(c) &= E[U(c_t) + \beta * U(c_{t+1})] \\ &= U(\{1 - sp\} * W_t) + E[\beta * U(sp * W_t * r)] \end{aligned} \tag{II.26}$$

---

<sup>135</sup> Rothschild und Stiglitz (1970) stellen fest, dass zwischen Varianzminimierung und Erwartungsnutzenmaximierung zu unterscheiden ist. Diese allgemeine Feststellung hat konkrete Auswirkungen auf die Nachfragereaktionen auf eine geänderte Varianz eines stochastischen Anlagetitels. Dieser Zusammenhang wird von Rothschild und Stiglitz (1971) dargestellt.

<sup>136</sup> Sie nennen es 'common sense proposition'. Vgl. Rothschild und Stiglitz (1971). S. 70.

In Gleichung II.26 sei ‚ $sp$ ‘ die Sparquote, ‚ $\beta$ ‘ der zeitliche Diskontierungsfaktor und ‚ $r$ ‘ sei der stochastische Ertrag für eine investierte Geldeinheit. Da das Einkommen bekanntermaßen entweder konsumiert oder gespart werden kann, gilt:  $c=I-sp$ . Die optimale Sparquote kann durch die Ableitung der Nutzenfunktion nach ‚ $r$ ‘ ermittelt werden. Setzt man sie gleich Null so erhält man durch Umformung die Bedingung für eine optimale Sparentscheidung in II.27. Diese Gleichung bildet die Basis der weiteren Ausführungen.

$$\frac{d[U(\{1-sp\} * W_t)]}{d[sp]} = \beta * E \left[ \frac{d[U(sp * W_t * r)]}{d[sp]} * r \right] \quad (\text{II.27})$$

Zunächst sei die optimale Reaktion der Sparquote auf eine gestiegene Varianz für den Fall einer quadratischen Nutzenfunktion der Form  $U(x) = a * x - \frac{1}{2} * b * x^2$  mit den Parametern  $a > 0$  und  $b < 0$  und  $\frac{d(U(x))}{d(x)} = a - b * x$  und  $x \equiv sp * W_t * r$  dargestellt. Unter Verwendung dieser Nutzenfunktion wird aus Gleichung II.27:

$$\frac{d[U(\{1-sp\} * W_t)]}{d[sp]} = \beta * W_t * \{a * E[r] - b * sp * W_t * E[r^2]\} \quad (\text{II.28})$$

Die linke Gleichungsseite beschreibt den Grenznutzen des Sparens. Anhand der rechten Seite kann die Wirkung einer größeren Unsicherheit bei konstantem Erwartungswert abgeschätzt werden. Ist letzterer nämlich konstant, so kann eine größere Varianz durch  $E[r^2]$  beschrieben werden.<sup>137</sup>

---

<sup>137</sup> Die Forderungen wurden ausführlich in Kapitel II Abschnitt 1.1.1. besprochen.

<sup>138</sup> Die Varianz ist auch definiert durch:  $Var[x] = E[x^2] - (E[x])^2$  vgl. Greene (1997). S. 65. Da der Erwartungswert konstant angenommen wird, kann die Varianz eindeutig durch  $E[r^2]$  beschrieben werden. Anders ausgedrückt: Eine geänderte Varianz  $Var[x]$  beispielsweise von  $Var_1[x]$  nach  $Var_2[x]$  kann vollständig durch  $E[r^2]$  beschrieben werden, da

In der Gleichung (II.28) wirkt diese Einschränkung wie folgt: Der Erwartungswert  $E[r]$  ändere sich annahmegemäß nicht, so dass als alleinige Ursache für eine Änderung des Grenznutzens des Sparens die Varianz in Frage kommt. Dieser Wert,  $E[r^2]$ , steige nun an, was mit einer gestiegenen Varianz gleichgesetzt werden kann, ohne dass sich das Konsum- und Sparverhalten sofort ändert. Es folgt, dass, bei angenommenem ursprünglichen Gleichgewicht, nun die Gleichgewichtsbeziehung nicht mehr erfüllt ist. Der ursprüngliche gleichgewichtige Grenznutzen des Sparens ist für ein neues Gleichgewicht zu groß, da sich der Wert der rechten Gleichungsseite reduziert hat.

Diese Störung der ursprünglichen Gleichgewichtsbeziehung kann durch eine niedrigere Sparquote ausgeglichen werden. Der Wert der rechten Gleichungsseite steigt dadurch, da der zweite Term der Differenz bei sinkendem ‚ $sp$ ‘ kleiner wird. Der Wert der linken Gleichungsseite in II.28 sinkt, da das Argument des Grenznutzens,  $(1-sp)*W$ , bei sinkendem ‚ $sp$ ‘ steigt. Die Verringerung wirkt aufgrund der ökonomischen Bedingung 2 (abnehmender Grenznutzen). Für eine quadratische Nutzenfunktion kann somit eindeutig festgestellt werden, dass eine gestiegene Varianz der Anlageerträge zu einer reduzierten Sparquote führt.

Diese Schlussfolgerung lässt sich jedoch nicht auf sämtliche Nutzenfunktionen übertragen. Rothschild und Stiglitz formulieren allgemeine Bedingungen, die die Reaktion der Sparquote, d.h. der Nachfrage nach Anlagetiteln, auf eine gestiegene Varianz der Anlagerendite beschreiben. Die Änderungsrichtung der Nachfrage hängt davon ab, ob die relative Risikoaversion des Akteurs steigt und ob sie größer als eins ist. Bei Verwendung einer *CRRRA*-Funktion, wie sie in diesem Kapitel verwendet wird, reduziert sich die Nachfrage bei steigender Varianz der stochastischen Variablen, wenn gilt:  $CRRRA < 1$ .

Diese Ausführungen sind in dieser Arbeit relevant, da sie deutlich machen, dass Änderungen der Varianz in der Continuous-Time Portfoliotheorie zu Reaktionen führen können, die im komparativ statischen Rahmen oft nicht darstellbar sind. Weiterhin ist auch im Continuous-

---


$$\begin{aligned}
 \Delta\{Var[x]\} &\equiv Var_1[x] - Var_2[x] \\
 &= E_1[x^2] - (E_1[x])^2 - \{E_2[x^2] - (E_2[x])^2\} \\
 &= E_1[x^2] - E_2[x^2] \\
 &\equiv \Delta\{E[x^2]\}
 \end{aligned}$$

Time Rahmen, der meist keine Restriktionen zur Nutzenfunktion verlangt, die Parameterspezifizierung z. B. einer *CRR*A-Funktion wesentlich für die resultierenden Nachfragerreaktionen. In der empirischen Literatur der ARCH-Modellierung<sup>139</sup> wird dieses Ergebnis meist nicht beachtet.

Rothschild und Stiglitz stellen fest, dass die Änderungsrichtung der Sparquote als Reaktion auf eine größere Varianz davon abhängt, ob

$$\frac{dU[c]}{d[c]} * r \equiv U_c * r$$

konvex oder konkav in ‚r‘ ist. Sie liefern jedoch weder eine mathematische Herleitung dieser Bedingung, noch legitimieren sie dieses Kriterium durch eine ökonomische Interpretation. Damit ist die These und sämtliche auf ihr basierenden Aussagen so nicht nachvollziehbar. Trotz dieser Kritik wird sie hier dargestellt, da Rothschild und Stiglitz für eine spezielle Nutzenfunktion, eine *CRR*A-Funktion, nachweisen, dass eine Aussage auf Basis dieses Kriteriums zu korrekten Ergebnissen führt.<sup>140</sup>

<sup>139</sup> Eine ARCH Modellierung (auto regressive conditional heteroskedastisity) berücksichtigt explizit eine veränderliche Varianz in ihrer Analyse. Die Wechselwirkungen von Nutzenfunktion und ARCH Modellierungen wurden meist nicht thematisiert.

<sup>140</sup> Die mathematische Herleitung in ihrem Beispiel ist komplex und würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Zum Vorgehen sei angemerkt, dass sie zwischen Sparentscheidung und einer Anlage in einem Wertpapier mit unsicherem Ertrag unterscheiden. Ziel ist die Optimierung des abdiskontierten Gegenwartsnutzens, V, nach der

Anlage in das Wertpapier mit unsicherem Ertrag,  $\alpha$ . Allgemein gilt:  $0 = \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial sp} * \frac{\partial sp}{\partial \alpha}$  und

$sp = sp(\alpha)$ . Es wird gezeigt, dass der erste Term, der nach der Sparquote abgeleitete, abdiskontierte Gegenwartsnutzen nicht den Wert Null annehmen kann. Die weitere Analyse erfolgt unter Wahrung dieser optimalen Entscheidung. Aus diesem Grund muss gelten, dass  $\frac{\partial sp}{\partial \alpha} = 0$  um obige Optimalbedingung zu erfüllen. Eine Änderung der Anlageentscheidung  $\alpha$  hat somit im Optimum keinen Einfluss auf die Sparquote. Diese Bedingung ist bei *CRR*A und identisch und unabhängig verteilten Erträgen erfüllt. Anschließend wird Wechselwirkung von Anlageentscheidung, -erträgen und der Risikoaversion im Rahmen der Optimalbedingung  $\frac{\partial sp}{\partial \alpha} = 0$  untersucht. Die letztgenannte Bedingung,  $\frac{\partial sp}{\partial \alpha} = 0$ , ist jedoch nicht eindeutig lösbar, sondern nur erfüllt, wenn eine Funktion, deren Parameter der Anlageertrag,  $\alpha$  und der *CRR*A-Faktor sind, ebenfalls den Wert Null annimmt. Diese Funktion entspricht dem Produkt aus Grenznutzen und Ertrag, also der Bedingung, die als Ausgangspunkt im Text genannt wird.

Rothschild und Stiglitz stellen fest, dass der Effekt einer gesteigerten Varianz nur dann eindeutig ist, wenn diese letztgenannte Funktion konvex oder konkav im Ertrag ist. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn *CRR*A < 1, so dass eine gestiegene Varianz zur Nachfragerreduzierung nach der unsicheren Anlage führt. Für *CRR*A > 1 ist keine eindeutige Aussage zur Konvexität möglich.

Auf Basis des obigen Kriteriums lassen sich zunächst allgemeine Bedingungen an eine Nutzenfunktion stellen, deren Erfüllung eine eindeutige Aussage zur Nachfrageänderung nach einer Anlage mit unsicherem Ertrag als Reaktion auf eine gestiegene Varianz ihres Ertrages ermöglichen. Anschließend werden diese Kriterien unter Verwendung der Termini *CRR*A und *CARA* beschrieben.

Im folgenden wird nun die Herleitung allgemeiner Bedingungen auf Basis obiger Prämisse kurz dargestellt. Es gilt für die erste Ableitung von  $V_w * r$  mit  $V$  als indirekter Nutzenfunktion und dem Vermögen  $W=W(sp,r)$ :<sup>141</sup>

$$\frac{d[V_w * r]}{d[r]} = V_w + V_{ww} * W_r * r \quad (\text{II.29})$$

Die zweite Ableitung sei (da das Vermögen  $W$  linear in  $r$  ist so dass gilt:  $W_{rr}=0$ ):

$$\frac{d^2[V_w * r]}{d[r]^2} = V_{ww} * W_r + V_{ww} * W_r + V_{www} * W_r * W_r * r \quad (\text{II.30})$$

Die zweite Ableitung des Grenznutzens wird nun gleich Null gesetzt, d.h., dass keine

Krümmung des Grenznutzens vorliegt. 
$$\frac{d^2 \left[ \frac{dV(W)}{dW} * r \right]}{d(r)^2} = 0$$
 Nach Kürzen von  $W_r$  folgt:

$$0 = 2 * V_{ww} + V_{www} * W_r * r \quad (\text{II.31})$$

Weiterhin wird angenommen, dass Konsumgüter der Periode 1 gelagert werden können. Diese nicht verbrauchten Güter erwirtschaften keinen Ertrag, stehen aber in der Periode 2 für Konsumzwecke zur Verfügung.<sup>142</sup> Es gilt in Periode 2:  $W_T = 1 + sp * W_0 * r$ , da es kein

<sup>141</sup> Es wird die Terminologie von Rothschild und Stiglitz hier zur Vereinfachung übernommen. Eine tiefgestellte Variable charakterisiert die Ableitung der Funktion nach ihr.  $V_w$  beschreibt somit die Ableitung von  $V$  nach  $W$ .

<sup>142</sup> Durch die Möglichkeit der Lagerung von Konsumgüter wird eine größere Allgemeingültigkeit erreicht, da eine Lagerung auch als Anlage zu einem sicheren Zinssatz (von hier 0%) interpretiert werden kann. Es wurde hier diese Prämisse gewählt, um eine Unterscheidung zwischen Anlageentscheidung und Sparentscheidung zu vermeiden. In ihrem Beitrag treffen Rothschild und Stiglitz auch diese Unterscheidung. Für die Zielsetzung

„endowment“ in Periode 2 gibt, so dass das Vermögen aus Anlagebetrag und –ertrag besteht. Der Betrag „1“ ist auf die in Periode 1 nicht verbrauchte Konsumgüter zurückzuführen, die zum Vermögen gezählt werden.

In der nachfolgenden Analyse sei vereinfachend von einem vollständigem Konsum ausgegangen. Aus obiger Definition von  $W_T = 1 + sp * W_0 * r$  folgt, dass  $\partial W_T / \partial r = W_T = sp * W_0$  und folglich  $W_r * r = sp * W_0 * r = W_T$  entspricht. Die letzte Gleichgewichtsbeziehung gilt nur unter der Prämisse des vollständigen Konsums der Güter in Periode 1. Nach Einsetzen in II.31 folgt:

$$0 = 2 * V_{WW} + V_{WWW} * W \tag{II.32}$$

Diese Bedingung identifiziert einen Wendepunkt in der grafischen Beschreibung des Grenznutzens im Konsum multipliziert mit dem unsicheren Ertrag  $V_W * r$  bei einer marginalen Änderung des Ertrages „r“. Rothschild und Stiglitz, Gleichung (7) und (8), zeigen, dass bei steigender Varianz und gleichbleibendem Erwartungswert von „r“ gilt:

$$2 * V_{WW} + V_{WWW} * W > 0 \Rightarrow V_W * r \text{ konvex in } r \Rightarrow \text{„sp“ steigt mit steigendem Risiko}$$

$$2 * V_{WW} + V_{WWW} * W < 0 \Rightarrow V_W * r \text{ konkav in } r \Rightarrow \text{„sp“ sinkt mit steigendem Risiko}$$

anderenfalls ist keine Aussage möglich.

Eine Akteur mit varianz-averser quadratischer Nutzenfunktion erfüllt eindeutig die zweite Bedingung, da  $V_{WWW} = 0$  und  $V_{WW} < 0$  und reduziert seine Sparquote bei steigender Varianz von „r“. Seine Nachfrage nach einer unsicheren Anlage wird folglich bei einer steigenden Varianz dieser Anlage niemals steigen, was bereits als intuitive Verhaltensweise beschrieben wurde.

Es gilt nun die Frage zu beantworten, welche Kriterien die in dieser Arbeit verwendete Nutzenfunktion erfüllen muss, dass sicher von der obigen intuitiven Verhaltensweise ausgegangen werden kann. Zu diesem Zweck sei die Bedingung alternativ unter Verwendung

---

dieser Ausführungen ist diese Differenzierung jedoch nicht relevant.



der Termini ‚absolute Risikoaversion‘ und ‚relativer Risikoaversion‘ beschrieben. Ausgangspunkt sei die Gleichung II.30, die hier wiederholt sei:

$$\frac{d^2[V_W * r]}{d[r]^2} = V_{WW} * W_r + V_{WW} * W_r + V_{WWW} * W_r * W_r * r \quad (\text{II.33})$$

Da das Vermögen in Periode 2, ( $W_T$ ), aus nicht konsumierten, vereinfachend auf den Wert Eins normierten, Gütern der Periode 1 und den Anlageerträgen besteht, gilt  $W_T = 1 + s * r * W_0$ . Daraus folgt für die Ableitung von ‚ $W_T$ ‘ nach ‚ $r$ ‘:  $W_T = s * W_0$ . Folglich kann die Gleichung II.33 auch geschrieben werden durch:

$$\frac{d^2[V_W * r]}{d[r]^2} = (2 * V_{WW} + V_{WWW} * s * W_0 * r) * s * W_0 \quad (\text{II.34})$$

Erweitert man die Klammer auf der rechten Seite von II.34 um die folgenden Terme:

$$+ \frac{[V_{WW}]^2 * W_T}{V_W} - \frac{[V_{WW}]^2 * W_T}{V_W} = 0 \quad (\text{II.35})$$

$$+ \frac{[V_{WW}]^2 * W_0}{V_W} - \frac{[V_{WW}]^2 * W_0}{V_W} = 0 \quad (\text{II.36})$$

und berücksichtigt man weiterhin, dass das Endvermögen aus nicht konsumierten Gütern und den Anlagetiteln samt Erträgen besteht, also  $W_T = (1 + r * s)W_0$ , so gilt:

$$r * s * W_0 = W_T - W_0 \quad (\text{II.37})$$

Nach dem Einsetzen der Erweiterungen und der Ersetzung von  $r*s*W_0$  in Gleichung II.24 erhält man:

$$\frac{d^2[V_W * r]}{d[r]^2} = \left( \begin{array}{l} 2 * V_{WW} + V_{WWW} (W_T - W_0) \\ + \frac{[V_{WW}]^2 * W_0}{V_W} - \frac{[V_{WW}]^2 * W_0}{V_W} \\ + \frac{[V_{WW}]^2 * W_T}{V_W} + \frac{[V_{WW}]^2 * W_T}{V_W} \end{array} \right) * S * W_0 \quad (\text{II.38})$$

Diese Gleichung kann nun abermals erweitert werden, indem die jeweiligen linken Seiten der nachfolgenden Umformungen durch die rechten Gleichungsseiten in Gleichung II.38 ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \frac{[V_{WW}]^2 * W_0}{V_W} - V_{WWW} * W_0 &= W_0 * V_W * \frac{[V_{WW}]^2 - V_{WWW} * V_W}{[V_W]^2} \\ - \frac{[V_{WW}]^2 * W_0}{V_W} + V_{WW} + V_{WWW} * W_T &= -V_W * \frac{[V_{WW}]^2 * W_T - V_{WW} * V_W - V_{WWW} * V_W * W_T}{[V_W]^2} \end{aligned}$$

Diese augenscheinlich komplizierenden Umformungen erlauben es, die Ausgangsgleichung II.33 unter Verwendung von *ARA* und *RRA* darzustellen. Die Quotienten der linken Gleichungsseiten beschreiben nämlich die Steigungen von *ARA* und *RRA* im Vermögen. Dies soll nun kurz gezeigt werden.

Aufgrund der Definitionsgleichung für absolute Risikoaversion (*ARA*) und relative Risikoaversion (*RRA*) gilt für deren erste Ableitung nach dem Vermögen:

$$ARA = - \frac{V_{WW}}{V_W} \quad (\text{II.39})$$

$$RRA = - \frac{W_T * V_{WW}}{V_W} \quad (\text{II.40})$$

Die Ableitungen dieser Definitionsgleichungen lassen sich durch Anwendung der Quotientenregel einfach bestimmen:

$$ARA' = \frac{d[ARA]}{d[W]} = -\frac{[V_{WW}]^2 - V_{WWW} * V_W}{[V_W]^2}$$

$$RRA' = \frac{d[RRA]}{d[W]} = -\frac{[V_{WW}]^2 * W_T - V_W V_{WW} - V_{WWW} * V_W * W_T}{[V_W]^2}$$

Nach Einsetzen von  $ARA$ ,  $RRA$ ,  $ARA'$  und  $RRA'$  in die Gleichung für II.33 erhält man folgende Gleichung, die der nicht nummerierten Gleichung in Rothschild und Stiglitz S. 71 entspricht:

$$\frac{d^2[V_W * r]}{d[r]^2} = ((1 - RRA + W_0 * ARA) * V_{WW} + (W_0 * ARA' - RRA') V_W) * s * W_0 \quad (II.41)$$

Anhand dieser Gleichung ist, wie nun erläutert wird, erkennbar, dass eine CRRA Funktion mit einem Aversionsparameter kleiner Eins eindeutig konkav in  $r$  ist und somit eine gesteigerte Varianz eindeutig zu einer reduzierten Nachfrage nach der Anlage mit unsicherem Ertrag führt. Die Konkavität wird bekanntermaßen durch das Vorzeichen der zweiten Ableitung beschrieben. Es wirken die einzelnen Einflussfaktoren mit dem folgenden Vorzeichen:

Gemäß Definitionsgleichung von  $RRA$  und  $ARA$  sind diese Kennzahlen positiv, da die zweite Ableitung der Nutzenfunktion annahmegemäß negativ ist, und die Definition ein negatives Vorzeichen beinhaltet, die sich gegenseitig aufheben. Da  $RRA$  weiterhin kleiner als Eins sei, besitzt die erste Klammer eindeutig ein positives Vorzeichen. Wie bereits erwähnt, ist annahmegemäß  $V_{WW} < 0$ , so dass der erste Term eindeutig ein negatives Vorzeichen besitzt.

Im zweiten Term ist  $RRA'$  annahmegemäß gleich Null, da von konstanter  $RRA$  ausgegangen wird. Da  $ARA = RRA * W$  gilt, muss bei konstanter  $RRA$  und zunehmenden Vermögen  $ARA$  abnehmen.  $ARA'$  besitzt somit ein negatives Vorzeichen. Da Vermögen, Sparquote und Grenznutzen annahmegemäß ein positives Vorzeichen besitzen, besitzt der zweite Term ebenfalls eindeutig ein negatives Vorzeichen.

$$\frac{d^2[V_W * r]}{d[r]^2}$$

Die zweite Ableitung  $\frac{d^2[V_W * r]}{d[r]^2}$  besitzt somit eindeutig ein negatives Vorzeichen und damit ist  $V_W$  folglich konkav in  $r$ . Bei gegebener Nutzenspezifizierung führt eine gestiegene Varianz der Anlage zu einer reduzierten Nachfrage nach ihr. Es sind jedoch alternative Ausprägungen z. B. des Risikoaversionsparameters einer *CRRA*-Funktion denkbar, die den ersten Term größer Null werden lassen, was dann nicht vom zweiten Term kompensiert werden könnte. In diesem Fall ist keine eindeutige Aussage möglich.

Ökonomisch lassen sich diese Ergebnisse folgendermaßen interpretieren. Eine steigende Varianz kann zwei gegenläufige Motive hervorrufen. Ein risikoaverser Akteur wird bei steigender Varianz einer Anlage weniger in diese Anlage investieren, da er positive und negative Abweichungen vom Erwartungswert asymmetrisch gewichtet. Da er negative Überraschungen stärker gewichtet, ist ihm die Sicherheit heute mehr wert als der mögliche höhere Ertrag. Anders ausgedrückt: Das Sicherheitsäquivalent der Anlage sinkt. Die zweite Bestrebung kann in der Sicherung eines Mindestertrages liegen. Steigt die Unsicherheit des Ertrages, so wird der Akteur mehr in die unsichere Anlage investieren, um die Wahrscheinlichkeit der Erreichung von diesem Mindestertrag konstant zu halten. Der Akteur steigert somit das Investitionsvolumen in die Anlage mit steigender Varianz.

## **2. Allgemeine Gleichgewichtsmodelle auf Basis des Lucas Modells**

Die Prognosefähigkeit des Terminkurses wurde nicht nur in der empirisch ausgerichteten Literatur untersucht, sondern ist auch Gegenstand von theoretischen Arbeiten. Es werden nun in diesem Abschnitt einige Ergebnisse aus der Literatur dargestellt, die auf dem von Lucas formulierten allgemeinen Gleichgewichtsmodell im komparativ statischen Rahmen aufbauen.<sup>143</sup>

Dieser Überblick soll in keiner Weise abschließend sein, sondern einige grundlegende Aussagen zur Prognosefähigkeit des Terminkurses wiedergeben und die festgestellten Ursachen für eine verzerrte Prognosefähigkeit offen legen.

Es wird deutlich, dass sämtliche Arbeiten von einer Erfüllung der Kaufkraftparität ausgehen. Diese Gleichgewichtsbedingung, die aus der bereits beschriebenen vereinfachten Modellierung des Gütermarktes zwangsläufig folgt, ist jedoch zumindest empirisch angreifbar. Konkret: Die Modellprämissen zum Gütermarkt, die von sämtlichen hier dargestellten Modellen formuliert werden, sind mit Bezug auf ihre Realitätsnähe angreifbar. Folglich wäre es angesichts der empirischen Evidenz zur Kaufkraftparität interessant zu wissen, welche Auswirkung eine Nicht-Erfüllung der Kaufkraftparität auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses besitzt. Diese Fragestellung wird im nachfolgenden Abschnitt untersucht.

### **2.1. Die Prämissen des Lucas Modells**

Das Lucas-Modell ist ein allgemeines komparativ statisches Gleichgewichtsmodell. Es bezieht sich auf zwei gleich große Länder mit jeweils einem repräsentativen Einwohner, die international identische Präferenzen besitzen. Es existieren zwei handelbare Güter, von denen die jeweiligen Länder in der Ausgangssituation das ausschließliche Eigentum am jeweils ‚heimischen‘ Gut besitzen. Es handelt sich um eine ‚endowment economy‘, so dass keine

---

<sup>143</sup> Diese Modelle bilden nur einen kleinen Teil der existierenden Literatur. Insbesondere existieren Ansätze, die sich auf die Modellierung der Angebots- (Frankel (1986)) bzw. Nachfrageseite (CAPM-Literatur) beschränken. Weiterhin wird bei der Bestimmung der Risikoprämie die Unterscheidung der Anlagemöglichkeiten nach Inside und Outside Assets getroffen (Frankel (1979)), sowie die Abhängigkeit der Risikoprämie von

Produktionsfunktion spezifiziert wird, sondern die verfügbare Menge einem exogenen stochastischen Markov Prozess folgt. Ansprüche auf dieses ‚endowment‘ können gehandelt werden.<sup>144</sup> Das Geldangebot folgt ebenfalls einem exogenen Markov Prozess. Die Analyse ist komparativ statisch und verwendet implizit die rationale Erwartungsbildungshypothese.<sup>145</sup>

Das Modell weist trotz seiner allgemeinen Formulierung einige Besonderheiten auf, die für die Interpretation der Ergebnisse wesentlich sind. Die spezifizierte Abfolge von Handel auf den Geld-, Güter-, Wertpapier- und Devisenmärkten bewirkt, dass Geld ausschließlich für Transaktionszwecke gehalten wird.<sup>146</sup> Diese Besonderheit verwehrt dem Geld den Vermögenscharakter, der ihm in Asset-Modellen der Wechselkursbestimmung zugestanden wird. Damit fehlt dem Geld jede ‚vorwärts-schauende Perspektive‘. Das bedeutet, der Geldnutzen kann nicht als Summe sämtlicher abdiskontierter zukünftiger Nutzen interpretiert werden.<sup>147</sup> Außerdem impliziert diese Prämisse eine Gültigkeit der Kaufkraftparität in ihrer ex post Formulierung. Dazu wird von handelbaren Gütern ausgegangen und von Transaktionskosten abstrahiert. Zinssätze werden in diesem Modell anhand des heutigen Preises einer zukünftig verfügbaren Geldeinheit berechnet. Die Prämisse gleich großer Länder mit gleichartigen Akteuren bewirkt, dass die Unsicherheit und damit das globale Gesamtrisiko genau gleich zwischen den Ländern geteilt wird. Daraus folgt, dass die Akteure ihre Wertpapierbestände, die Ansprüche auf zukünftiges ‚endowment‘, genau gleichmäßig zwischen dem In- und Ausland aufteilen. Obwohl Teile dieses Ergebnisses ganz offensichtlich dem real beobachtbaren Verhalten der Akteure widersprechen, hat es in der Literatur in vielen Bereichen als Basis für Weiterentwicklungen gedient. Die für diese Arbeit relevanten Arbeiten werden nun kurz vorgestellt.

---

Handelsbilanzsalden modelliert (Solnik (1974)).

<sup>144</sup> Es ist folgende Interpretation möglich. Durch diese Annahme wird quasi vom Arbeitslohn in der Produktion abstrahiert, und das ‚endowment‘ wird als Dividende des Kapitals in Form von Aktien verteilt.

<sup>145</sup> Es wird in Form von Integralen über die Dichtefunktionen der stochastischen Variablen argumentiert. Dieses Vorgehen liegt jedoch auch der rationalen Erwartungshypothese zugrunde.

<sup>146</sup> Die Abfolge ist wie folgt: Anfangs besteht eine vollständige sichere Kenntnis über die Situation am Periodenanfang hinsichtlich Geld- und Gütermenge. Damit ist der mögliche Konsum in dieser Periode sicher. Auf Basis dieser Informationen werden Geld und Wertpapiere gehandelt. Anschließend wird auf den Güter- und Devisenmärkten gehandelt. Da Geld im Gegensatz zu Wertpapieren keinen Zinsertrag abwirft, wird Agent genau so viel Geld halten, wie er zum Erwerb der sicheren heimischen und ausländischen Gütermengen benötigt.

<sup>147</sup> Dieser Aspekt wird insbesondere in der Bubble Theorie verwendet. Vgl. dazu Isaard (1995). S. 84 ff.

## 2.2. Weiterentwicklungen des Lucas-Modells und ihre Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses

Hodrick und Srivastava (1984)<sup>148</sup> erweitern dieses Modell um einen Terminmarkt. Dieser wird nicht aus dem Optimalverhalten der Nutzenmaximierung unter Einhaltung der Budgetrestriktion hergeleitet, sondern im Verlauf der Analyse aufgrund des Arbitragegedankens in der bekannten Weise formuliert. Aus dem Lucas-Modell resultiert folgende Gleichgewichtsforderung.

$$\frac{E_t[s_{t+1}] - f_t}{s_t} = E_t \left[ \frac{Q_{t+1}^a}{Q_{t+1}} \right] - \frac{E_t[Q_{t+1}^a]}{E_t[Q_{t+1}]} \quad (\text{II.42})$$

mit:

$$Q_{t+1} = \frac{\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * p_{x,t+1}}{\frac{\partial U_t}{\partial x_t} * p_{x,t}}$$

$$Q_{t+1}^a = \frac{\beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * p_{y,t+1}^a}{\frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} * p_t^a}$$

In diesem Modell beschreibt die linke Gleichungsseite von II.42 die Differenz zwischen erwartetem zukünftigem Wechselkurs  $E[s_{t+1}]$  und dem Terminkurs  $f_t$  dividiert durch den gegenwärtigen Wechselkurs  $s_t$ . Besitzt der Terminkurs eine unverzerrte Prognosefähigkeit des zukünftigen Wechselkurses, so nimmt dieser Term den Wert Null an. Die rechte Gleichungsseite beschreibt die Verhältnisse der mit den Preisen des jeweils im jeweiligen Land produzierten Gutes gewichteten in- und ausländischen intertemporalen Grenzzraten der Substitution  $Q_{t+1}$  und  $Q_{t+1}^a$ .<sup>149</sup> Vereinfachend könnte diese Gleichungsseite als Grad der Unsicherheit der Präferenzen, beschrieben durch die Varianz dieser intertemporalen Grenzzraten der Substitution gesehen werden, obwohl dies mathematisch nicht ganz korrekt ist und von den Autoren auch nicht gemacht wird. Aus der Gleichgewichtsbedingung II.42 wird ersichtlich, dass im Falle nicht-stochastischer Preise und Grenzzraten der Substitution, die

<sup>148</sup> Hodrick und Srivastava (1984), S. 5-29.

<sup>149</sup> Es wird davon ausgegangen, dass das Gut ,x‘ im ausschließlich im Inland und das Gut ,y‘ ausschließlich im Ausland produziert wird.

Erwartungswerte auf der rechten Gleichungsseite ihren tatsächlichen Ausprägungen entsprechen und diese Seite den Wert Null annimmt. Folglich besitzt in diesem Fall der Terminkurs eine unverzerrte Prognosefähigkeit für den zukünftigen Wechselkurs. Es bleibt festzuhalten, dass die Prämisse risikoneutralen Verhaltens keine notwendige Voraussetzung für dieses Ergebnis ist.<sup>150</sup>

Die Autoren, Hodrick und Srivastava, differenzieren nicht zwischen einer Risiko- und einer Unsicherheitsprämie als Ursache einer [erwarteten] Abweichung des Termin- vom zukünftigen Wechselkurs, sondern benutzen die Gleichung II.42 zur Interpretation einer zeitvariablen Risikoprämie, definiert als Abweichung des erwarteten Wechselkurses vom Terminkurs. Dazu wird aus obiger, theoretisch fundierter Gleichgewichtsbedingung, unter Verwendung zusätzlicher Prämissen, eine empirisch testbare Gleichung hergeleitet. Der empirische Teil ihrer Arbeit bestimmt die Höhe der Risikoprämie auf Basis von Gleichung II.42 anhand eines CAPM. Aus diesem Vorgehen heraus bestimmen sie Ursachen, die für die mangelnde empirische Bestätigung des CAPM verantwortlich sein können. Sie identifizieren die im CAPM angenommene Konstanz des zeitlichen Diskontierungsfaktors  $\beta$  als mögliche Ursache. Das gewählte Vorgehen von Hodrick und Srivastava erscheint problematisch, da ‚nachträgliche‘ Einführung von zusätzlichen Prämissen, die einen empirischen Test erst ermöglichen, nicht auf Konsistenz mit dem Grundmodell überprüft werden. Es erscheint sehr fraglich, ob die Annahmen, die zur Formulierung des CAPM führen, mit den Annahmen des Lucas-Modells konsistent sind und ob die theoretisch fundierte Gleichgewichtsbedingung zur Analyse der empirischen Ergebnisse herangezogen werden kann.<sup>151</sup> Als wesentliches Problem erscheint, dass im Lucas-Modell kein risikoloser Zinssatz existiert, während ein solcher im empirischen Test verwendet wird. Der aus dem Bondpreis abgeleitete Zins enthält eine

---

<sup>150</sup> Dieser Aspekt wird im Kapitel III und besonders in der ersten Fallstudie in Abschnitt 3.6.2.1 ausführlich beschrieben.

<sup>151</sup> Ihr Vorgehen basiert auf der Transformation einer stochastischen Variablen, nämlich der erwarteten intertemporalen Grenzrate der Substitution einer Geldeinheit, durch den risikolosen Zinssatz. Vgl. Hansen und Hodrick (1983). S. 123 f in Verbindung mit ihrer Formel (3). Problematisch ist jedoch dass dieser Artikel u.a. auf der Arbeit von Breeden (1979), eine ‚CAPM-Arbeit‘, aufbaut, während Hodrick und Srivastava (1984) sich explizit auf das Lucas Modell stützen. Diese Modelle sind jedoch nicht ineinander überführbar, was in dieser Arbeit noch ausführlich dargestellt wird. Damit werden Schlussfolgerungen aus nicht eindeutig festgelegten Prämissen gezogen, die das Vorgehen angreifbar machen. Insbesondere gilt dies für die Prämisse der Existenz eines nicht-stochastischen nominalen Zinssatzes. Im Lucas Modell (Lucas (1982). S. 346 Formel (3.17 und 3.18)) findet sich eine Herleitung des nominalen Zinssatzes. Lucas folgert, dass selbst bei nicht-stochastischer Geldmenge der Nominalzinssatz stochastisch ist. Als Ursache werden reale Schocks aufgeführt, die international divergieren können. Die Verwendung eines nicht-stochastischen international vergleichbaren Zinssatzes auf Basis der Ergebnisse von Hansen und Hodrick (1983) ist fragwürdig. Dies geschieht in Hodrick und Srivastava (1984) Gleichung (9).



Inflationsprämie, was die Vergleichbarkeit erschwert.<sup>152</sup> Der Ansatz von Hodrick und Srivastava unterliegt somit der Kritik.<sup>153</sup>

Der Vorteil des Lucas-Modells liegt in der intuitiven ökonomischen Interpretation der Modellergebnisse. Dieser Vorteil ist in der obigen Gleichgewichtsbedingung nicht gegeben. Aus diesem Grund definieren Hodrick und Srivastava (1986) in einer erweiterten Darstellung

die Variablen für eine relative Wechselkursänderung  $s_{t+1} = \frac{s_{t+1} - s_t}{s_t}$  und eine Risikoprämie  $RP = \frac{f_t - E_t[s_{t+1}]}{s_t}$ .

Unter Verwendung einer Taylor-Approximation zweiter Ordnung um den Erwartungswert erhält man eine Formulierung, die eine Beschreibung der relativen Bewegung des Wechselkurses und der Risikoprämie erlaubt. Ändert sich die erwartete ausländische intertemporale reale Grenzrate der Substitution, die Varianz der inländischen intertemporalen realen Grenzrate der Substitution oder deren Kovarianz, so bewegen sich Wechselkurs und Risikoprämie in entgegengesetzter Richtung. Diese theoretisch fundierte Aussage unterstützt die von Fama (1984) rein empirisch ermittelte Aussage zur Risikoprämie. Weiterhin formulieren Hodrick und Srivastava eine Gleichgewichtsbeziehung unter der Annahme risikoneutralen Verhaltens. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass der Terminkurs kein unverzerrter Prediktor des erwarteten Wechselkurses ist, wenn die Preise stochastisch sind. Trotz dieses Ergebnisses definieren sie im empirischen Teil die Risikoprämie als Abweichung des Wechselkurses vom Terminkurs. Ursache für diese Definition ist die Betrachtung von Profiten der Spekulation am Terminmarkt, die von ihnen als Prämie für das Übernehmen von Risiko interpretiert werden. Es muss jedoch beachtet werden, dass diese Risikodefinition nicht mit der in der theoretischen Literatur üblichen Definition übereinstimmt.

Eine alternative Definition der Risikoprämie liefert Engel, der ebenfalls auf dem Lucas-Modell aufbaut aber im Unterschied zu den Arbeiten von Hodrick und Srivastava die mögliche Existenz einer Unsicherheitsprämie berücksichtigt.<sup>154</sup> Konkret wird die

<sup>152</sup> Dies wird in Lucas (1982), S.346 besprochen. Hodrick und Srivastava nehmen keine Trennung dieser Komponenten vor. Die Annahme eines real sicheren Zinssatzes und damit die Abstraktion von einer Inflation ist möglich und würde zu einer Vereinfachung von Q führen, wird jedoch nicht gemacht.

<sup>153</sup> Ein Vergleich der Ergebnisse des oft getesteten CAPM und des schwer testbaren Lucas-Modells eröffnet interessante Perspektiven. Diese Instrumente wurden bisher jedoch auf unterschiedliche Fragestellungen angewendet.

<sup>154</sup> Vgl. Engel (1992), S. 305-319.

Risikoprämie aus den Gleichgewichtsbedingungen bei risikoneutralem und risikoaverssem Verhalten bestimmt, nämlich als Differenz des erwarteten Wechselkurses für die Fälle von risikoaverssem und risikoneutralem Verhalten. Ein weiterer Unterschied zu den genannten Arbeiten besteht darin, dass dieses Vorgehen zwar explizit den Einfluss stochastischer Preise berücksichtigt, jedoch nicht zwischen in- und ausländischem Preis und Herstellungsort unterscheidet. Diese Vereinfachung kann mit der ständigen Erfüllung der Kaufkraftparität gerechtfertigt werden, die solch eine Unterscheidung überflüssig macht und die das allgemeine stochastische Preisniveau  $P_t$  bzw.  $P_{t+1}$  beschreibt. Die Risikoprämie bestimmt sich in Engel's Beitrag durch<sup>155</sup>

$$\begin{aligned}
 RP_t &= \frac{\Phi_t - \hat{h}_t}{\hat{h}_t} \\
 &= \frac{\frac{COV_t[\partial U_{t+1}/\partial p_{t+1}, 1/p_{t+1}]}{E_t[\partial U_{t+1}/\partial p_{t+1}] * E_t[1/p_{t+1}]} - \frac{COV_t[\partial U_{t+1}/\partial p_{t+1}, s_{t+1}/p_{t+1}]}{E_t[\partial U_{t+1}/\partial p_{t+1}] * E_t[s_{t+1}/p_{t+1}]}}{\frac{COV_t[\partial U_{t+1}/\partial p_{t+1}, s_{t+1}/p_{t+1}]}{E_t[\partial U_{t+1}/\partial p_{t+1}] * E_t[s_{t+1}/p_{t+1}]}} \quad (II.43)
 \end{aligned}$$

mit:

$$\Phi_t = \frac{E_t\left[\frac{s_{t+1}}{p_{t+1}}\right]}{E_t\left[\frac{1}{p_{t+1}}\right]} \quad \text{und} \quad \hat{h}_t = \frac{E_t\left[\frac{\partial U_{t+1}}{\partial p_{t+1}} * \frac{s_{t+1}}{p_{t+1}}\right]}{E_t\left[\frac{\partial U_{t+1}}{\partial p_{t+1}} * \frac{1}{p_{t+1}}\right]}$$

Die erste Gleichungszeile von II.43 fasst die von der Risikoaversion unabhängigen Bestandteile der Risikoprämie in der Variablen  $\Phi_t$  und die übrigen Bestandteile in der Variablen  $\hat{h}_t$  zusammen.<sup>156</sup> Auf eine weitere Kommentierung dieser Gleichung wird hier verzichtet, da im Kapitel III, Abschnitt 3.6.2.1, explizit auf obige Formel Bezug genommen wird, und deren Herleitung im dortigen Kontext klar wird. Diese Formulierung besitzt den erheblichen Nachteil, dass sie in dieser allgemeinen Form kaum interpretierbar ist und keine direkte Bestimmung der Höhe der Risikoprämie ermöglicht, da der zukünftige erwartete

<sup>155</sup> Engel (1992). S. 312.

<sup>156</sup> Durch mathematische Rechenschritte erhält man ohne Verwendung zusätzlicher Prämissen die zweite Gleichungszeile.

Grenznutzen nicht beobachtbar ist. Weiterhin ist einzuschränken, dass die zweite Gleichungszeile für risikoneutrales Verhalten nicht definiert ist, da in diesem Fall die Kovarianz aufgrund des linearen Grenznutzens den Wert Null annimmt und eine Division durch Null erforderlich wäre. Diese Einschränkung gilt jedoch nicht für die erste Gleichungszeile, da der bei risikoneutralem Verhalten der konstante Grenznutzen aus beiden Erwartungswerten in  $\hat{h}$  vorgezogen und gekürzt werden könnte, so dass gilt:

$$RP_t = \frac{\Phi_t - \hat{h}_t}{\hat{h}_t} = 0$$

Engel benutzt diese Beschreibung der Risikoprämie, um die Höhe für alternative Szenarien relativ zueinander zu bestimmen. Er folgert, dass die Risikoprämie niedriger ist, je stärker sich der Wechselkurs mit dem Grenznutzen gleichgerichtet bewegt. Formal bedeutet dies eine größere Kovarianz des zweiten Terms der Differenz in Gleichung II.43. Außerdem wird der Term im Zähler der obigen Gleichung größer. Beide Änderungen bewirken die Verringerung der Risikoprämie.

Ökonomisch lässt sich dieses Szenario wie folgt interpretieren: Ein steigender erwarteter Wechselkurs erhöht den Ertrag der Auslandsanlage. Ein daraus folgender höherer Grenznutzen impliziert einen geringeren Konsum und damit eine geringere absolute Nutzenhöhe.<sup>157</sup> Ist der Ertrag einer Anlage höher, wenn der erwartete Grenznutzen höher ist, so ist die Anlage weniger riskant. Sie beinhaltet eine Hedgelfunktion gegen ungünstige Konsumszenarien. Im Rahmen des allgemeinen Gleichgewichtmodells folgert Engel, dass die Risikoprämie verschwindet, wenn monetäre und reale Schocks unkorreliert sind.

Aus der Analyse von Engel wird deutlich, dass eine Risikoprämie auch unter der vereinfachten Prämisse von stochastischen Preisen und Wechselkursen hergeleitet werden kann.<sup>158</sup> Dieser Gedanke liegt auch dem Modell von Stockmann (1978) zugrunde, der eine Gleichgewichtsbedingung unter expliziter Berücksichtigung eines Terminmarktes modelliert. In diesem Modell geht die Geldmenge zwar in die Budgetrestriktion und die Nutzenfunktion ein, wird jedoch zur Herleitung eines gleichgewichtigen erwarteten Wechselkurses nicht benötigt. Die Kaufkraftparität in Verbindung mit einem Teil der Bedingungen erster Ordnung

<sup>157</sup> Voraussetzung ist die Bedingung eines abnehmenden Grenznutzens mit steigendem Konsum.

<sup>158</sup> Dieser Ansatz kann auch als Partialmodell charakterisiert werden, da reale und monetäre Variablen und Schocks nicht separat voneinander modellierbar sind. Dies ist im Lucas-Modell möglich.

genügt für diese Herleitung. Erst im späteren Verlauf werden die Preise als Funktion des Geldmarktes formuliert. Diese Gleichgewichtsbedingung bestätigt die wesentlichen Aussagen der bisher aufgeführten Arbeiten. Der Terminkurs kann ein verzerrter Prediktor des erwarteten Wechselkurses selbst bei risikoneutralem Verhalten sein.<sup>159</sup>

Weiterhin geht Stockmann explizit auf die Bedeutung der Jensen'schen Ungleichung ein, die auch im Verlauf dieses Kapitels (vgl. Abschnitt 3.5.1.) verwendet wird. Diese Arbeit nähert sich aufgrund ihrer Themenstellung dem Vorgehen von Stockmann an. Die implizite Formulierung des Geldmarktes durch die Stochastik der Preise wird im folgenden Abschnitt übernommen.<sup>160</sup> Als zentraler Unterschied von Stockmann (1978) zu dieser Arbeit sind die Annahmen zum Gütermarktgleichgewicht zu sehen. Während Stockman explizit von der Kaufkraftparität ausgeht, werden in dieser Arbeit die Auswirkungen von Gütermarktungleichgewichten auf den erwarteten Wechselkurs untersucht.<sup>161</sup> Weiterhin wird ein Terminmarkt in dieser Arbeit nicht in die Budgetrestriktion einbezogen. Die Annahme der gedeckten Zinsparität erlaubt eine vereinfachte Schreibweise der Gleichgewichtsbedingung unter Verwendung des Terminkurses.

Die bisherige Ausführungen haben einen groben Überblick über die theoretischen Ansätze verschafft, die auf Basis des Lucas-Modells entwickelt wurden. Sämtliche Modelle unterliegen jedoch der Kritik, dass sie sich in ihrer allgemeinen Form nicht für eine empirische Überprüfung eignen, da der Nutzen des Konsums sowie die Gleichgewichtskonstellationen bei risikoneutralem Verhalten nicht direkt beobachtbar sind. Letztgenanntes kann insbesondere für die Bestimmung einer Risikoprämie notwendig werden. Weiterhin kann die Ausprägung einer theoretisch fundierten Risikoprämie von der Perspektive abhängen, wie bereits angedeutet und in Abschnitt 3.5.1 ausführlich erläutert wird. Für eine empirische Überprüfung bedeutet diese Inkonsistenz der theoretischen Aussage ein erhebliches Problem, falls der Unterschied nicht insignifikant klein ist. In den

---

<sup>159</sup> Es wurden bereits stochastische Güterpreise und stochastische Diskontierungsfaktoren als mögliche Ursachen für solch eine Verzerrung genannt.

<sup>160</sup> Frankel (1979) verwendet ebenfalls ein vereinfachtes Modell ohne explizite Modellierung des Geldmarktes. Sein Ziel ist die Analyse der Bedeutung von ‚outside und inside assets‘ auf die Risikoprämie. Der Einfluss des Siegel-Paradoxons wird zumindest in der Theorie anerkannt. In einer weiteren Arbeit untersucht Frankel (1986) den Einfluss von Angebotsänderungen auf die Risikoprämie.

<sup>161</sup> Bekaert et al. (1997). S. 11 bemerken, dass ihnen kein Lucas-Modell bekannt ist, das nicht die Erfüllung der Kaufkraftparität impliziert. Sie erkennen diese Schwäche des Modells angesichts der zumindest kurzfristigen KKP Abweichungen an, bieten jedoch keine Alternative an.

theoretischen Arbeiten tritt diese Frage nicht auf, da die Länderperspektive nicht thematisiert wird und aus der Perspektive eines Landes argumentiert wird. Die Risikoprämie wird somit der Auslandswährung zugerechnet, da die Inlandswährung quasi die Norm bildet. Frankel (1988 S. 122) stellt jedoch diese Frage der Zurechnung, und beantwortet sie unter Bezug auf Angebotsänderungen an Anlagetiteln.<sup>162</sup>

In der Literatur sind für eine empirische Überprüfung zusätzliche Annahmen zur Form der Nutzenfunktion sowie der exogenen Prozesse der Geldmengen und Volkseinkommensveränderung getroffen worden. In frühen Arbeiten laufen diese Annahmen dem Untersuchungsziel oft entgegen, wie z. B. die Annahme einer Cobb-Douglas Nutzenfunktion zur Bestimmung einer Risikoprämie. Diese Nutzenfunktion impliziert jedoch ein risikoneutrales Verhalten, da sie linear im Vermögen ist. Domowitz und Hakkio (1985) unterliegen dieser Kritik.<sup>163</sup> Weiterhin gehen diese Studien von einer konstanten Varianz aus. Frankel (1988) liefert einen Überblick über frühe Arbeiten, die diese Annahme aufheben. Als alternatives Vorgehen liefert Frankel (1986) ein Modell, das von konstanter Varianz ausgeht und den Einfluss von Angebotsänderungen an Anlagetiteln auf die Risikoprämie modelliert.<sup>164</sup> Frankel (1988) schließt insgesamt auf einen begrenzten Erklärungswert der beobachtbaren Wechselkursänderungen durch die bestehenden Modelle. Canova und Marrinon (1993) gehen von einer CRRA Nutzenfunktion sowie AR(1) Prozessen aus und unterliegen damit nicht der obigen Kritik einer Fehlspezifikation.<sup>165</sup> Sie versuchen, die beobachtbaren statistischen Eigenschaften der Gewinne einer Terminmarktspekulation zu replizieren. Ihre Simulation bestätigt eine gleichgewichtige Abweichung des Terminkurses vom erwarteten Wechselkurs, die nicht auf eine Risikoprämie zurückzuführen ist. Das Ausmaß dieser Abweichung in ihrer Simulation stimmt mit den beobachtbaren Werten jedoch nicht überein.

---

<sup>162</sup> Die hier vorliegende Arbeit vernachlässigt Angebotsaspekte und analysiert die Frage nach der Relevanz der Perspektive unter Verwendung des Siegel Paradoxons.

<sup>163</sup> Die empirischen Resultate von Hodrick und Srivastava (1984, 1986) sowie eine Überprüfung von Hodrick (1989) werden hier nicht wiedergegeben, da die zusätzlichen Prämissen für die empirischen Tests keine Interpretation dieser Resultate erlauben. Diese Bewertung folgt Engel (1992). Die theoretischen Erkenntnisse von Hodrick und Srivastava (1984 und 1986) bleiben jedoch gültig.

<sup>164</sup> Giovannini und Jorion (1987) stellen eine steigende Standardabweichung des Wechselkurses mit steigender Beobachtungsfrequenz fest. Die monatlich berechnete Standardabweichung bei täglicher Beobachtungsfrequenz beträgt beim DM/US-Dollar Wechselkurs zwischen 2,7% bis zu 49,8%.

<sup>165</sup> CRRA bedeutet ‚constant relative risk aversion‘, AR(1) bedeutet ‚first order autoregression‘. Die Implikationen dieser Nutzenfunktion werden in Kapitel III ausführlich dargestellt. Die postulierten Prozesse beruhen auf einer angenommenen bedingten lognormalen Verteilung der stochastischen Variablen.

Modjtahedi (1991) testet ebenfalls eine Version des Lucas-Modells unter Verwendung einer CRRA Nutzenfunktion. Er stellt fest, dass der Grad der Risikoaversion von der Berücksichtigung langlebiger Güter abhängt. Im Vergleich zur risikoneutralen Formulierung ist die CRRA Version überlegen. Damit werden die Ergebnisse von Hodrick und Srivastava (1986) bestätigt. Weiterhin deutet Modjtahedi diese empirischen Resultate als Bestätigung eines konsumbasierten CAPM. Diese Aussage zeigt die Nähe des Lucas-Modells und des CAPM zumindest in der empirischen Überprüfung.<sup>166</sup> Kaminsky und Peruga berücksichtigen Heteroskedastizität in ihrer Untersuchung unter Annahme einer CRRA Nutzenfunktion und einer log-normalen Verteilung des Konsums, Preise und Wechselkurse. Sie finden eine signifikante Risikoprämie, verwerfen jedoch das ‚intertemporale asset pricing model‘.<sup>167</sup> Cumby et al. (1994) nutzen eine ARCH Modellierung, um unterschiedliche Länderperspektiven (USA und Japan) zu untersuchen. Sie finden signifikante Unterschiede in Abhängigkeit der jeweiligen Perspektive. Die Verbesserung der Erklärung des Anlageertrages war in beiden Fällen jedoch begrenzt. Ihre Arbeit bestätigt jedoch indirekt die Bedeutung der Länderperspektive in der empirischen Untersuchung.

Diese Ausführungen können als Beleg gewertet werden, dass eine unverzerrte Prognosefähigkeit des Terminkurses nur unter sehr einschränkenden und möglicherweise realitätsfernen Voraussetzung erwartet werden kann. Die mangelnde empirische Bestätigung dieser Hypothese ist insofern nicht überraschend. Fraglich ist jedoch, ob diese Modelle selbst auf realitätsnahen Prämissen beruhen. Dies kann mit Bezug auf die Erkenntnisse des Kapitel I bezweifelt werden.

---

<sup>166</sup> Giovannini und Jorion (1987). S. 115 nennen das Modell von Hodrick und Srivastava (1986) sogar ein ‚dynamic asset pricing model‘. Diese Charakterisierung wenden sie ebenfalls auf die Arbeit von Breeden (1979) an. Die damit implizierte Gleichsetzung erscheint jedoch theoretisch sehr fraglich.

<sup>167</sup> Sie nennen ihr Modell zwar Asset Pricing Model, jedoch ist es (S. 52 und insb. S. 54) in der Tradition der hier beschriebenen allgemeinen Gleichgewichtsmodelle formuliert.

### 3. Ein intertemporales Optimierungsmodell

In diesem Abschnitt wird ein eigenes Modell in der Tradition der im Abschnitt 2 dargestellten Modelle entwickelt. In diesem Modell wird unter anderem die in Kapitel I (Gleichung I.6 und I.7) verwendete Gleichgewichtsbeziehung herausgearbeitet. Somit wird die reflexiv-intuitive Begründung des Kapitel 1 durch ein theoretisches Modell hergeleitet und sämtliche Prämissen offen gelegt. Anschließend wird die Grenze dieses Modells hinsichtlich seiner Konsistenz und seiner Interpretierbarkeit gezeigt. Es werden im Rahmen der ökonomischen Interpretation zusätzliche Einschränkungen eingeführt (Einschränkungen/Annahmen zur Variablenausprägungen), die hier als realitätsnah bewertet werden.

Der Aufbau dieses Abschnitts erfolgt in 6 Schritten: Es wird eingangs in Schritt 1 der Modellaufbau nebst Optimierungsproblem beschrieben, sowie die notwendigen Bedingungen für ein Optimum dargestellt. Im Rahmen von Schritt 2 werden zunächst die Kaufkraftparität und in Schritt 3 die ungedeckte Zinsparität separat unter Verwendung eines Teils der Optimalbedingungen hergeleitet. Anschließend wird in Schritt 4 eine allgemeine Gleichgewichtsbedingung bei simultaner Verwendung sämtlicher Optimalbedingungen bei risikoneutralem Verhalten formuliert. Diese Schritte dienen hauptsächlich einer Replizierung der Gleichgewichtsbedingungen des Kapitel I und identifizieren die notwendigen Prämissen, die für die Herleitung aus dem eingangs beschriebenem Modell erfüllt sein müssen.

Komparativ statische internationale Modelle, die Erwartungswerte verwenden, unterliegen jedoch einer weiteren grundsätzlichen Kritik: Die Schritte 5 und 6 zeigen, dass die Aussagen auf Basis dieses komparativ statischen Modells in sich nicht konsistent sind, sondern die Ausprägung des erwarteten Wechselkurses von der Länderperspektive beeinflusst wird. Ausgangspunkt ist die Feststellung, dass das hier verwendete Modell die Existenz eines Auslands zwingend vorschreibt, da anderenfalls ein Wechselkurs nicht definierbar wäre. Ein allgemeines Gleichgewicht muss sich jedoch ebenfalls auf dieses ‚Ausland‘ erstrecken. Die Nicht-Trivialität dieser Frage wird in Schritt 5 anhand des Siegel-Paradoxons dargestellt. Anschließend wird die intertemporale Gleichgewichtsbedingung aus ausländischer Sicht hergeleitet und mit der Bedingung aus Inlandssicht verglichen. Es wird deutlich, dass auch bei international homogenen Anlegern der erwartete Wechselkurs international nicht identisch und vor allem nicht konsistent ist.

Im letzten Schritt 6 wird die Annahme risikoneutralen Verhaltens aufgehoben und die Prognosefähigkeit des Terminkurses bei risikoaverssem Verhalten beurteilt. Aufgrund der Komplexität der Zusammenhänge wird diese Gleichgewichtsbedingung anhand vereinfachter Fallstudien beschrieben.

### 3.1. Die Modellbeschreibung

Dieser erste Schritt dient der Beschreibung des Modellaufbaus, die sowohl die notwendigen Prämissen zur Herleitung der Gleichgewichtsbedingung des Kapitel I identifiziert, als auch die Ergebnisse der theoretisch fundierten Literatur des Abschnitt 2 repliziert. Anschließend werden aus diesem Modellaufbau heraus die Optimierungssituation charakterisiert und die notwendigen Optimalbedingungen erster Ordnung hergeleitet.

Allgemein ist dieses Modell als komparativ statisches Optimierungsmodell unter Einhaltung einer Nebenbedingung charakterisierbar. Es lehnt sich in seinem Vorgehen an das bereits beschriebene Lucas-Modell an, kommt jedoch aufgrund der Vereinfachungen einem simplen Lagrange-Ansatz gleich.

Der Modellaufbau ist wie folgt: Es sei eine zeitlich additive und separierbare Zielfunktion (Nutzenfunktion) gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \max_{x,y}(U) \\ \text{mit: } & U = U_t(x_t, y_t) + \beta * U_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}) \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Ziel eines Akteurs sei somit gemäß dieser Problemstellung die Nutzenmaximierung. Der Nutzen, beschrieben durch die Variable ,U‘ hängt von den konsumierten Gütermengen des x-Gutes, beschrieben durch die Variable ,x‘, und des y-Gutes, beschrieben durch die Variable ,y‘ ab. Die tiefgestellten Indices charakterisieren den Zeitpunkt des Konsums. Es ist aus der obigen Formulierung ersichtlich, dass dieses Modell sich auf die Analyse von zwei Zeitpunkten ,t‘ und ,t+1‘ beschränkt. Es sei nun weiter angenommen, dass zwei Länder existieren, das Inland und das Ausland. Im Rahmen dieser Analyse sind sämtliche Variablen



aus der Perspektive des Inlands beschrieben, wenn die Perspektive nicht ausdrücklich genannt wird. Allgemein wird die Auslandsperspektive durch eine hochgestelltes ‚a‘ charakterisiert, während eine Auslandsvariable aus Inlandsperspektive durch ein tiefgestelltes ‚a‘ gekennzeichnet wird. Die Variable  $U_t^a$  charakterisiert somit den Nutzen des Ausländers zum Zeitpunkt ‚t‘, während die Variable  $i_a$  den Auslandszins aus Inlandsperspektive beschreibt.

Neben der Zielfunktion sei ebenfalls eine Budgetrestriktion vorgegeben, die der jeweilige Akteur im Rahmen seiner Nutzenmaximierung einzuhalten hat. Diese Restriktion ist aus der Literatur allgemein bekannt und fordert lediglich, dass ein Akteur nur die Güter konsumieren kann, auf die er einen Anspruch geltend machen kann.

Als Anspruchsgrundlage sei eine Produktionsmenge exogen vorgegeben. Es sei angenommen, dass das x-Gut ausschließlich im Inland produziert werde, und somit ausschließlich der Inländer einen Anspruch auf die produzierte Menge, beschrieben durch die Variable ‚X‘, geltend machen kann. Das y-Gut sei annahmegemäß ausschließlich im Ausland produziert, und somit im Besitz des Ausländers. Es wird durch die Variable ‚Y‘ repräsentiert. Weiterhin besitze jedes Land eine Währung, in der die Güterpreise beschrieben sind. Diese Preise seien annahmegemäß stochastisch, so dass die Produktionsmenge zwar konstant sei, der nominale Produktionswert es jedoch nicht ist. Um den Akteuren jedoch den Konsum beider Güter zu erlauben, sei von ihrer Handelbarkeit ausgegangen. Dazu sei ein Wechselkurs definiert als Preis einer ausländischen Währungseinheit in Inlandswährung. Dieser Wechselkurs sei weiterhin stochastisch, so dass grundsätzlich von einem System flexibler Wechselkurse ausgegangen wird. Schließlich seien die Güter in ihrer Nutzenstiftung homogen, so dass eine Aussage zur Kaufkraftparität möglich ist.<sup>168</sup>

Auf der Verwendungsseite stehen den Akteuren folgende Alternativen zur Auswahl: Ein Akteur kann entweder das x-Gut oder das y-Gut in den Zeitpunkten ‚t‘ oder ‚t+1‘

---

<sup>168</sup> Aus dieser Prämisse folgt, dass Güter aufgrund von Preisdivergenzen international gehandelt werden können, aber kein Zwang zum Handel besteht. Der Vorteil solch einer Annahme liegt in Weiteren darin begründet, dass Handelsbilanzdefizite als Reaktion auf Kapitalströme anzusehen sind, anstatt dass die Investitionsentscheidung und damit der Wechselkurs auf Gütermarktentwicklungen reagiert.

konsumieren. Alternativ sei ein Investieren möglich, das dem Ziel dient, das Anlagekapital und die Erträge zum späteren Zeitpunkt zu konsumieren.<sup>169</sup>

Die Anlagemöglichkeiten bedürfen der näheren Erläuterung. Es sei grundsätzlich eine alternative Anlage im Inland, beschrieben durch die Variable  $b$ , oder im Ausland, gekennzeichnet durch ein tiefgestelltes  $a$  an die Variable  $b$ , für die jeweiligen Akteure möglich. Die Variable  $b_{a,t}^a$  beschreibt folglich die Auslandsinvestition eines Ausländers aus Auslandsperspektive zum Zeitpunkt  $t$ . Die Anlageerträge beinhalten jedoch keinen Anspruch auf die jeweils ausländische Produktionsmenge, sondern realisieren sich in der jeweiligen Währung des Landes, in dem investiert wird (Investitionsland). Diese Form der Anlage kann grundsätzlich mit Fremdkapital im Produktionsprozess gleichgesetzt werden. Einschränkend gilt jedoch, dass die Anlageerträge in der jeweiligen Landeswährung nominal risikolos sind. Ein Konkursrisiko besteht somit nicht. Diese Restriktion erscheint angesichts der Annahme von nicht stochastischen und exogen vorgegebenen zukünftigen Produktionsmengen als nicht sehr einschränkend. Einschränkend wirkt jedoch, dass aufgrund der exogen vorgegebenen Produktionsmenge keine Wachstumseffekte berücksichtigt werden können.

Weiterhin wird davon ausgegangen, dass zum Zeitpunkt  $t$  kein anfängliches Anlagevermögen existiert, so dass nur die in  $t$  produzierte Gütermenge zur Disposition steht. Ein Anlagevermögen am Ende des Zeitpunktes  $t+1$  stiftet weiterhin keinen Nutzen, so dass ein rationaler Akteur den gesamten in  $t+1$  erhaltenen Anlagebetrag für Konsumzwecke verwenden wird.

Dieses Modell enthält folgende Einschränkungen, die es vom Lucas-Modell unterscheidet. Im Gegensatz zum Lucas-Modell wird hier der Geldmarkt nicht modelliert. Weiterhin wird von einer nicht stochastischen Produktionsmenge ausgegangen, an der die Ausländer erst nach Abschluss der Produktion ein Eigentum erwerben können. Lucas geht jedoch von einer stochastischen Produktionsmenge aus und charakterisiert eine Investition als Partizipation an den jeweiligen Produktionsmitteln. Diese Modifikationen dienen der Konzentration auf den hier wesentlichen Aspekt, nämlich der Bewertung der Prognosefähigkeit des Terminkurses. Schließlich erlaubt dieses Modell als wesentliche Unterscheidung zum Lucas-Modell eine

---

<sup>169</sup> Die Termini ‚Anlage‘ und ‚Investition‘ werden in dieser Arbeit als Synonyme verwendet.

Abweichung von der Kaufkraftparität. Diese Abweichung wird nicht aus dem Modell heraus fundiert. Es wird vielmehr zunächst das Ergebnis von Lucas bestätigt, dass unter den obigen Prämissen die Kaufkraftparität im Gleichgewicht erfüllt sein muss. Es ist jedoch denkbar, dass Modifikationen des Gütermarktes hinsichtlich der Handelbarkeit von Gütern oder aufgrund von international unterschiedlicher Nutzenfunktionen diese Bedingung nicht erfüllt ist. Ohne eine Ursachenforschung durch eine explizite Modellerweiterung vorzunehmen, postuliert diese Arbeit ad hoc eine mögliche Abweichung von der Kaufkraftparität. Dieses Vorgehen macht das Modell angreifbar, weil inkonsistent, erscheint aber angesichts der empirischen Evidenz zur Kaufkraftparität (vgl. Kapitel I) und den theoretischen Arbeiten als wünschenswerte und wenig problematische Erweiterung.<sup>170</sup>

Dieses Vorgehen wird in einer Schlussbetrachtung durch folgende Gründe zumindest teilweise legitimiert: Die resultierende Gleichgewichtsbedingung ist so komplex, dass schon unter den hier getroffenen sehr simplifizierenden Prämissen eine ökonomisch sinnvolle Interpretation kaum möglich ist. Die Fokussierung auf die Konsequenzen solch einer Abweichung statt einer Ursachenforschung kann vor dem Hintergrund der Zielsetzung dieser Arbeit, nämlich eine Identifizierung und Bewertung von Ursachen, die die Prognosefähigkeit des Terminkurses verzerren, als legitim angesehen werden. Insgesamt eignet sich das hier hergeleitete Modell jedoch für die eingangs genannte Zielsetzung, die Anforderungen an die jeweiligen Gleichgewichtsbedingungen, wie sie in der empirisch orientierten Literatur (vgl. Kapitel I) verwendet und intuitiv hergeleitet werden, theoretisch zu fundieren.

Nach diesen grundsätzlichen Anmerkungen zum Modellaufbau und der verbalen Beschreibung der Budgetrestriktion, sei letztere nun formal dargestellt. Die Budgetrestriktion sei zunächst für die Zeitpunkte  $t$  und  $t+1$  separat dargestellt. Es gilt gemäß der obigen Darstellung:

Zeitpunkt  $t$ :

---

<sup>170</sup> Es sei daran erinnert, dass sich diese Arbeit auf eine Untersuchung des Kapitalmarktes konzentriert, genauer, auf die Frage, unter welchen Umständen ein renditemaximierendes Anlegerverhalten mit einer verzerrten Prognosefähigkeit des Terminkurses konsistent ist.

$$\underbrace{p_{x,t} * X_t}_{\text{Pr oduktion}} = \underbrace{p_{x,t} * x_t}_{\text{Konsum Gut'x'}} + \underbrace{p_{a,y,t} * s_t * y_t}_{\text{Konsum Gut'y'}} + \underbrace{b_t}_{\text{Anlage im Inland}} + \underbrace{b_{a,t}}_{\text{Anlage im Ausland}} \quad (\text{in } \_ \text{Inlandswährung } \_ \text{ gemessen}) \quad (\text{II.45})$$

Zeitpunkt t+1:

$$\underbrace{p_{x,t+1} * X_{t+1}}_{\text{Pr oduktion}} + \underbrace{(1+i)*b_t}_{\text{Anlagevermögen aus Inland sin vestition}} + \underbrace{\frac{(1+i_a)*s_{t+1}}{s_t} b_{a,t}}_{\text{Anlagevermögen aus Ausland sin vestition}} = \underbrace{p_{x,t+1} * x_{t+1}}_{\text{Konsum Gut'x'}} + \underbrace{p_{a,y,t+1} * s_{t+1} * y_{t+1}}_{\text{Konsum Gut'y'}} \quad (\text{II.46})$$

Die Gleichungen II.45 und II.46 beschreiben auf ihrer linken Seite jeweils die Entstehung des Vermögens, während auf der rechten Seite deren Verwendung beschrieben wird. Es wird ersichtlich, dass das Vermögen in ‚t+1‘ sowohl aus der Produktion als auch aus dem Anlagebetrag und –ertrag im Zeitpunkt ‚t‘ resultiert. Ebenfalls wird deutlich, dass eine Investition in ‚t+1‘ vorgenommen wird, da auf der Verwendungsseite die Variable  $b_{t+1}$  bzw.  $b_{a,t+1}$  nicht erscheint. Grundsätzlich sind die Wahlparameter der Akteure die Konsum-Anlageentscheidung.

Aus der bisher beschriebenen Darstellung resultiert ein Optimierungsproblem unter Einhaltung von Nebenbedingungen, welches sich durch einen Lagrangeansatz lösen lässt. In dieser Arbeit wird jedoch ein anderes Verfahren gewählt. Alternativ werden hier die Nebenbedingungen addiert, nach ‚ $x_{t+1}$ ‘ umgeformt und in die Nutzengleichung eingesetzt werden. Durch dieses Vorgehen reduziert sich die Anzahl der Wahlparameter um einen, nämlich ‚ $x_{t+1}$ ‘.

Durch Addition der Gleichungen II.45 und II.46 und nach Umformung nach ‚ $x_{t+1}$ ‘ resultiert:

$$\begin{aligned}
x_{t+1} = & \underbrace{\frac{p_{x,t+1} * X_{t+1} + p_{x,t} * X_t}{p_{x,t+1}}}_{\text{Produktionseffekt}} \\
& + \underbrace{\frac{(1+i) * b_t - b_t + \frac{1+i_a}{s_t} * s_{t+1} * b_{t,a} - b_{t,a}}{p_{x,t+1}}}_{\text{Anlageeffekt}} \\
& - \underbrace{\frac{p_{x,t} * x_t + p_{y,a,t} * y_t + p_{y,a,t+1} * y_{t+1}}{p_{x,t+1}}}_{\text{Konsumeffekt}}
\end{aligned} \tag{II.47}$$

Nach diesen Vorüberlegungen lässt sich nun die Problemstellung beschreiben. Ein Individuum maximiert seinen Güterkonsum im Zeitablauf, wobei er eine Gegenwartspräferenz zeigt. Formal gilt:

$$\begin{aligned}
\max U &= U_t(x_t, y_t) + \beta * U_{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}) \tag{II.48} \\
\text{mit: } x_{t+1} &= f(b_t, b_{a,t}, y_{t+1}, x_t, y_t)^{171}
\end{aligned}$$

Diese Maximierung erfolgt unter Einhaltung der Budgetrestriktion II.47. Aus dieser in ihrer Art bekannten Problemstellung lassen sich nun durch partielle Ableitung die fünf notwendigen Bedingungen für ein Optimum formulieren: (im Weiteren: die fünf Optimalbedingungen):

$$(1) \quad E \left[ \frac{\partial U}{\partial x_t} \right] = E \left[ \frac{\partial U_t}{\partial x_t} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right] = 0$$

$$(2) \quad E \left[ \frac{\partial U}{\partial y_t} \right] = E \left[ \frac{\partial U_t}{\partial y_t} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{p_{x,t+1}} \right] = 0$$

$$(3) \quad E \left[ \frac{\partial U}{\partial y_{t+1}} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial y_{t+1}} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] = 0$$

$$(4) \quad E \left[ \frac{\partial U}{\partial b_t} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{i}{p_{x,t+1}} \right] = 0$$

<sup>171</sup> Der Wechselkurs resultiert direkt aus der Konsum- und Investitionsentscheidung und ist somit endogen. Er erscheint aus diesem Grund nicht separat in der Funktion.

$$(5) \quad E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{(1+i_a) * s_{t+1} - 1}{p_{x,t+1} s_t} \right] = 0$$

Diese Optimalbedingungen bilden die Basis für die weitere Analyse. Es wird nun separat unter Verwendung der Bedingungen (1), (2) und (3) das Gleichgewicht auf dem Gütermarkt beschrieben. Anschließend wird unter Verwendung von Bedingung (4) und (5) das Gleichgewicht auf dem Kapitalmarkt dargestellt. Dieses Vorgehen dient der theoretischen Fundierung der in Kapitel I intuitiv begründeten Gleichgewichtsbeziehungen.

### 3.2. Bedingungen für die Gültigkeit der Kaufkraftparität

In diesem Schritt 2 wird die synonyme Verwendung der Begriffe ‚law of one price‘ und Kaufkraftparität aufgehoben. Zunächst wird mit Bezug auf erstere Bedingung in Step 1 (d.h. Gliederungsabschnitt Kapitel III 3.2.1) gezeigt, dass sich die in Kapitel I intuitiv begründete Forderung auch formal unter Verwendung obigen Modells begründen lässt. Anschließend wird kurz in Step 2 (d.h. Gliederungsabschnitt Kapitel III 3.2.2) ausgeführt, welche zusätzlichen Prämissen benötigt werden, so dass die Verwendung von Preisindices zu vergleichbaren Resultaten führt.

#### 3.2.1. Das ‚law of one price‘

In Kapitel I wurde das ‚law of one price‘ intuitiv begründet. Es kann jedoch gezeigt werden, dass diese Forderung auch aus einem intertemporalen Optimierungsverhalten, dargestellt durch die fünf Optimalbedingungen, hergeleitet werden kann. In Kapitel I wurde bereits zwischen einer ex-ante und einer ex-post Formulierung des ‚law of one price‘ unterschieden. Diese Unterscheidung soll hier aufrecht erhalten werden und sowohl für die Gegenwart (Zeitpunkt ‚t‘) als auch die Zukunft (Zeitpunkt ‚t+1‘) hergeleitet werden.

Zunächst sei das ‚law of one price‘ in der ex-ante Formulierung theoretisch fundiert. Aus der Optimalbedingung (3) lässt sich erkennen, dass unter obigen Prämissen bei einem Ausgleich der Grenznutzen des Konsums von Gut ‚x‘ und Gut ‚y‘ in der zweiten Periode die

Kaufkraftparität in dieser Periode erfüllt sein muss. Dazu wird die mathematische Definition der Kovarianz verwendet, die im weiteren eine zentrale Position einnimmt. Es sei definiert:<sup>172</sup>

$$COV[x, y] \equiv E[x * y] - E[x] * E[y] \quad (\text{II.49})$$

Diese Definition kann wie folgt umgeformt werden, so dass der Erwartungswert zweier stochastischer Variablen als Produkt der individuellen Erwartungswerte beschrieben werden kann, zu dem ihre Kovarianz addiert wird. Es gilt:

$$E[x * y] = E[x] * E[y] + COV[x, y] \quad (\text{II.50})$$

Unter Verwendung dieser Schreibweise der Definition lässt sich der Erwartungswert in Optimalbedingung (3) wie folgt trennen:

$$(3) \quad E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y_{t+1}}\right] = E\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial y_{t+1}} - \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right] = 0 \quad (\text{II.51})$$

$$E\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial y_{t+1}}\right] = E\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\right] * E\left[\frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right] + COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right]$$

⇔

Sind die Akteure risikoneutral, so ist der Grenznutzen des Güterkonsums konstant und die Kovarianz nimmt in obiger Gleichung den Wert Null an.<sup>173</sup> In diesem Fall kann der Erwartungswert des abdiskontierten Grenznutzens durch seine nicht stochastische Ausprägung ersetzt werden. Damit lässt sich die Gleichung II.51 schreiben als:

<sup>172</sup> Vgl. Milton und Arnold (1990). S. 155

<sup>173</sup> In diesem Abschnitt wird die Risikoaversion/neutralität unter Verwendung des Konsums anstatt des Vermögens verwendet (direkte Nutzenfunktion). Die Ursache für diese Abweichung von der im Kapitel II Abschnitt 1.1.1 gewählten Darstellungsform liegt in der Möglichkeit, einer KKP-Abweichung bei homogenen Gütern, die bei Verwendung der indirekten Nutzenfunktion keine eindeutigen Ergebnisse erlauben würde. Es sei jedoch daran erinnert, dass sich diese beiden Darstellungsformen ineinander überführen lassen und auch parallel in der Literatur Anwendung finden.

$$\frac{\beta^* \frac{\partial U_{t+1}}{\partial y_{t+1}}}{\beta^* \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}} = E \left[ \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] \quad (\text{II.52})$$

Diese Gleichung beschreibt ein Optimum, das bei homogenen Gütern und bei risikoneutralem Verhalten die Gültigkeit der Kaufkraftparität in ‚t+1‘ fordert. Es gilt: Im Optimum muss das Verhältnis der abdiskontierten Grenznutzen dem erwarteten Verhältnis der relativen Preise entsprechen. Sind die Güter weiterhin homogen, so muss ihr Grenznutzen im Optimum gleich sein, da anderenfalls durch eine Revision der Konsumentenentscheidung eine Nutzenerhöhung möglich ist. Dieser Zusammenhang gehört zu den Grundlagen der Mikroökonomie. Für die rechte Gleichungsseite in II.52 folgt damit zwangsläufig, dass im Optimum erwartet wird, dass die Bedingung der Kaufkraftparität erfüllt sei.<sup>174</sup> Wesentlich ist jedoch, dass für die Herleitung dieses Ergebnisses die Annahme eines risikoneutralen Verhaltens notwendig war. Auf diesen Aspekt wird im weiteren Verlauf noch ausführlich eingegangen.<sup>175</sup>

Neben der bisher beschriebenen ‚ex ante‘ Version, lässt sich das ‚law of one price‘ auch in seiner ex-post Version theoretisch begründen. Dies wird nun anhand des bereits vorgestellten Modells durch Gleichsetzen der Optimalbedingungen (1) und (2) hergeleitet. Es gilt gemäß Bedingung (1):

$$E \left[ \frac{\partial U_t}{\partial x_t} - \beta^* \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right] = 0 \quad (\text{II.53})$$

Durch ein Vorziehen der nicht stochastischen (weil gegenwärtig bekannten) Variablen lässt sich schreiben:

<sup>174</sup> In Kapitel I wurde ausgeführt, dass diese Erwartung einer erfüllten Kaufkraftparität als ihre ex-ante Version charakterisiert werden kann. Damit ist die in Kapitel I intuitiv begründete ex-ante Version theoretisch fundiert worden.

<sup>175</sup> Vorab sei angemerkt, dass risikoaverses Verhalten bei gleichen Grenznutzen der (homogenen) Güter eine Erwartungsbildung zur zukünftigen Kaufkraftparität impliziert, die von der bekannten Gleichgewichtsbedingung (um eine Risikoprämie) abweicht. Wesentlich in diesem Zusammenhang ist nicht die tatsächliche Abweichung in ‚t+1‘, sondern die Möglichkeit einer Abweichung (Stochastik der Preise).



$$\frac{\partial U_t}{\partial x_t} * \frac{1}{p_{x,t}} - E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] = 0 \quad (\text{II.54})$$

$$\Leftrightarrow E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] = \frac{\partial U_t}{\partial x_t} * \frac{1}{p_{x,t}}$$

Das gleiche Verfahren lässt sich auf die Optimalbedingung (2) anwenden. Sie lautet:

$$0 = E \left[ \frac{\partial U_t}{\partial y_t} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{p_{x,t+1}} \right] \quad (\text{II.55})$$

Nach den bereits beschriebenen Umformungen folgt aus Gleichung II.55:

$$E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] = \frac{\partial U_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} \quad (\text{II.56})$$

Es ist ersichtlich, dass die linken Seiten der umgeformten Optimalbedingungen (1) und (2) identisch sind (Gleichungen II.54 und II.56). Sie lassen sich somit gleichsetzen. Es folgt nach dem Gleichsetzen von II.54 und II.56:

$$\frac{\partial U_t}{\partial y_t} = \frac{\partial U_t}{\partial x_t} * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{p_{x,t}} \quad (\text{II.57})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial U_t / \partial y_t}{\partial U_t / \partial x_t} = \frac{s_t * p_{y,a,t}}{p_{x,t}}$$

Diese resultierende Gleichung II.57 fordert, dass im Optimum das in ,t‘ beobachtbare Verhältnis der Grenznutzen dem beobachtbaren Verhältnis der Güterpreise entsprechen muss. Wird nun wieder die Annahme berücksichtigt, dass die Güter homogen sind, so folgt, dass die linke Gleichungsseite wieder den Wert eins annimmt. Damit resultiert zwangsläufig, dass das auf der rechten Gleichungsseite beschriebene ,law of one price‘ in seiner ex-post Version im

Optimum zum Zeitpunkt ,t‘ erfüllt sein muss. Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Risikoneigung der Akteure.

Zusammenfassend kann folgendes festgehalten werden: Das ,law of one price‘ ist mit einem intertemporalen Optimierungsverhalten grundsätzlich vereinbar. Es gilt jedoch einschränkend, dass die ex-post Version im Gleichgewicht nur für den gegenwärtigen Zeitpunkt erfüllt sein muss. Auf zukünftige Zeitpunkte bezogen kann aus diesem Modell nur bei risikoneutralem Verhalten die ex-ante Version hergeleitet werden. Die angenommene Stochastik der Preise erlaubt jedoch grundsätzlich eine Abweichung der Erwartungen für deren Gültigkeit in der Zukunft um eine Risikoprämie. Daraus folgt: Eine Prämisse, die die Kaufkraftparität in ihrer ex-post Version zu jedem Zeitpunkt als sicher erfüllt annimmt, erscheint aufgrund obiger Ausführungen auch auf der Basis von theoretischen Überlegungen als sehr restriktiv.

### 3.2.2. Eine Generalisierung zur Kaufkraftparität

Wird die Annahme eines national produzierten Konsumgutes aufgegeben und von der Produktion eines Güterbündels ausgegangen, so ist der zu untersuchende Preis nicht mehr problemlos feststellbar. Es ist eine Untersuchung von Preisen verschiedener Güter möglich. Es gilt jedoch weiterhin, dass die Bedingung des ‚law of one price‘ im Gleichgewicht für jedes Gut gelten muss.

Alternativ kann jedoch das national produzierte Güterbündel als Gegenstand der Arbitrage gesehen werden. Der für den Vergleich zu wählende Preis ist in diesem Fall ein Preisindex, welcher den Preis des Güterbündels unverzerrt repräsentiert. Das ‚law of one price‘ wird in diesem Fall zur Kaufkraftparitätentheorie, die aussagt, dass im Arbitragegleichgewicht der Preisindex des Inlandes gleich dem ausländischem Preisindex multipliziert mit dem nominalen Wechselkurs sein muss.

Die Kaufkraftparität bezieht sich also in ihrer Aussage im Gegensatz zum ‚law of one price‘ auf Güterpreisindices anstatt auf Güterpreise. Fraglich ist jedoch, unter welchen Prämissen ein Index die unverzerrte Abbildung von Güterpreisen ermöglicht. Sind weitere als die im Rahmen des ‚law of one price‘ bereits identifizierten Prämissen für ihre Herleitung notwendig, so sind ihre Aussagen nicht als Synonyme zu verstehen. Konkret bedeutet dies, dass Abweichungen von der Gleichgewichtsbedingung der Kaufkraftparität nicht notwendigerweise auf eine Prämissenverletzung zu den Gütermärkten oder eine Falsifizierung der postulierten Gleichgewichtsbedingung zurückzuführen sind. Es ist weiterhin möglich, dass solch eine Abweichung in der konkreten Berechnung des Preisindex begründet ist.

Adler und Dumas<sup>176</sup> haben gezeigt, dass die Gleichgewichtsbedingung der Kaufkraftparität in einem intertemporalen Optimierungsverhalten nur dann mit der Aussage des ‚law of one price‘ identisch ist, wenn die Akteure ihr Verhalten gemäß einer linear homogenen Nutzenfunktion ausrichten.<sup>177</sup> Ist diese Prämisse erfüllt, so folgern sie, dass eine korrekte Formulierung eines Indexes folgenden Zusammenhang erzwingt: Die Elastizität des

---

<sup>176</sup> Vgl. Adler und Dumas (1984) Appendix. Ihre Ausführungen werden kurz in Appendix 1 dieser Arbeit wiedergegeben.

<sup>177</sup> Da jede Nutzenfunktion nur bis auf eine streng monotone Transformation bestimmt ist, gilt diese Aussage für alle homothetische Nutzenfunktionen.

Preisindexe nach den Güterpreisänderungen muss der Summe der gewichteten Güterpreisänderungen entsprechen. Als Gewichtungsfaktor dienen die jeweiligen Anteile der Konsumausgaben für die jeweiligen Güter am Gesamtbudget.

Es lässt sich somit allgemein feststellen, dass das ‚law of one price‘ nur unter Einschränkungen als Synonym für die Kaufkraftparität gelten kann. Konkret gilt: Es lässt sich ein Preisindex, der die Güterpreisveränderung unverzerrt beschreibt, für Akteure ermitteln, die ihr Verhalten an einer im Einkommen linear homogenen Nutzenfunktion ausrichten.

Die Problematik der korrekten Wahl eines Preisindex zur empirischen Überprüfung der Kaufkraftparitätentheorie ist in der Literatur ebenfalls erkennbar. So wurden in der Literatur für eine empirische Überprüfung der Kaufkraftparität unterschiedliche Preisindizes verwendet. Es sind unter anderem der ‚wholesale index‘, der ‚consumer price index‘, der ‚GDP deflator‘ und die Löhne als mögliche Preise bei der empirischen Überprüfung mit divergierenden Resultaten verwendet worden.<sup>178</sup>

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird angenommen, dass sich die in einem Land produzierten Güter durch einen Index, inländisch produziertes Gut genannt, beschreiben lassen. Die relative Preisstruktur der jeweils heimisch produzierten Güter soll folglich konstant sein. Dies geschieht zur Vereinfachung. Da die Kaufkraftparität im Zentrum der Untersuchung steht, werden die inländisch und ausländisch produzierten Güter nicht zu einem allgemeinen Preisindex zusammengefasst. Damit ist es möglich, den Einfluss einer Abweichung von der Kaufkraftparität auf die internationale Zinsarbitrage zu zeigen. Im Rahmen einer empirischen Überprüfung wäre der ‚GDP-Deflator‘ als Proxy für die inländisch produzierten Güter heranzuziehen.

---

<sup>178</sup> Zur Wahl des Preisindexe in Abhängigkeit des Untersuchungsgegenstandes vgl. Mishkin (1984), S. 1345 – 1357.

### 3.3. Bedingungen für die Gültigkeit der ungedeckten Zinsparität

In diesem Schritt 3 wird nun die Aussage der ungedeckten Zinsparität, wie sie in Kapitel I formuliert wurde, aus einer intertemporalen Optimierungsstrategie hergeleitet und die dafür notwendigen Prämissen aufgezeigt. Die ungedeckte Zinsparität fordert, dass sich die erwarteten nominalen Erträge der Investitionsalternativen bei risikoneutralem Verhalten im Optimum gleichen müssen.

Das hier angewendete allgemeine Vorgehen gleicht in seiner Intuition dem bereits bekannten Verfahren aus Schritt 2: Die Grenznutzen einer in- und ausländischen Anlage, beschrieben durch die Optimalbedingungen (4) und (5), werden in einer Gleichung zusammengefasst, und anschließend wird durch Umformung eine Aussage zur ungedeckten Zinsparität ermöglicht. Das Vorgehen ist jedoch mit demjenigen in Schritt 2 nicht identisch, da unter den Annahmen eines stets positiven Grenznutzens diese Bedingungen nicht den Wert Null annehmen können. Aus diesem Grund wird als Proxy für ein Kapitalmarktgleichgewicht von einem Ausgleich der Grenznutzen ausgegangen. Es werden folglich die Grenznutzen einer Anlage im In- und Ausland gleichgesetzt. Die resultierende Gleichung wird schließlich so umgeformt, dass eine Aussage zur ungedeckten Zinsparität möglich ist.

Es sei nun das obige Verfahren an der Optimalbedingung (4) ausgeführt. Vorab ist jedoch angemerkt, dass Randlösungen in Form eines Grenznutzens mit der Ausprägung Null nicht berücksichtigt werden. Diese Einschränkung wurde bereits im Rahmen des Abschnitts 1 zu den ökonomischen Annahmen einer Nutzenänderung diskutiert. Aus der Optimalbedingung (4) ist erkennbar, dass der Grenznutzen einer zusätzlichen Anlage einer Geldeinheit im Inland nur den Wert Null annimmt, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$(4) \quad E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_t} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{i}{p_{x,t+1}} \right] = 0 \quad (\text{II.58})$$

wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

$$\beta = 0$$

$$E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right] = 0$$

$$i = 0$$

Es ist ersichtlich, dass bei Nicht-Sättigung des Konsums und einer Wertschätzung zukünftigen Konsums die Erfüllung der Optimalbedingung für den Fall einer Verzinsung in Höhe von Null möglich ist. Dieser Fall wird ausgeschlossen.

Eine gleichartige Schlussfolgerung kann bezüglich der Optimalbedingung (5) gezogen werden. Der Grenznutzen einer im Ausland angelegten Geldeinheit nimmt nur dann den Wert Null an, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

$$(5) \quad E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{(1+i_a)^* \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] = 0 \quad (\text{II.59})$$

wenn gilt  $\beta = 0$

$$E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right] = 0$$

$$E \left[ \frac{(1+i_a)^* \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{s_t} \right] = 0$$

Aus der letzten Bedingung folgt, dass wiederum bei Gegenwartspräferenz und Wertschätzung des zukünftigen Konsums die Optimalbedingung nur dann erfüllt sein kann, wenn der in Inlandswährung gemessene Ertrag einer Auslandsinvestition einen Erwartungswert von Null annimmt. Dieser Fall sei hier ebenfalls ausgeschlossen.

Wie bereits erläutert, wird eine Gleichgewichtskonstellation auf dem Kapitalmarkt definiert als die Situation, in dem die Grenznutzen der Anlagealternativen gleich sind. Damit gilt für die Investitionsentscheidung:

$$E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_t} \right] = E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}} \right] \quad (\text{II.60})$$

Nach dem Einsetzen für die beiden Terme in II.60 unter Verwendung der Optimalbedingungen (4) und (5) (bzw. Gleichungen II.58 und II.59) gilt:

$$E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{i}{p_{x,t+1}} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] \quad (\text{II.61})$$

Es wird nun die aus dem Kapitel I bekannte Einschränkung verwendet, dass die Aussage der ungedeckten Zinsparität nur bei risikoneutralem Verhalten erfüllt ist. Aus dieser Einschränkung folgt, dass der abdiskontierte Grenznutzen konstant ist. Er ist somit nicht stochastisch und kann aus den Erwartungswerten vorgezogen und anschließend gekürzt werden. Es gilt nach der Durchführung dieser Operationen für Gleichung II.61:

$$\begin{aligned} \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * E \left[ \frac{i}{p_{x,t+1}} \right] &= \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * E \left[ \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] \\ \Leftrightarrow E \left[ \frac{i}{p_{x,t+1}} \right] &= E \left[ \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

Weiterhin sind der gegenwärtige Wechselkurs beobachtbar und damit bekannt, und die Zinssätze als nicht stochastisch vorausgesetzt. Zunächst werden im folgenden die beiden stochastischen Variablen im Erwartungswert der rechten Gleichungsseite auf bekannte Art getrennt werden. Anschließend werden die nicht stochastischen Variablen aus dem Erwartungswert vorgezogen und durch den Erwartungswert des inversen inländischen Preises des Gutes ‚x‘ dividiert. Es gilt folglich für Gleichung II.62:

$$\begin{aligned} i * E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] &= E \left[ (1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1 \right] * E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] + COV \left[ (1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] \\ i &= E \left[ (1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1 \right] + \frac{COV \left[ (1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+i) = (1+i_a) * \frac{E[S_{t+1}]}{s_t} + \frac{COV \left[ (1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \quad (\text{II.63})$$

Diese letzte Gleichung erlaubt eine Aussage zur Gültigkeit der ungedeckten Zinsparität in der Version, wie sie in Kapitel I beschrieben wurde. Es ist ersichtlich, dass die Gleichung II.63 die ungedeckte Zinsparität und einen zusätzlichen Term, den letzten Quotienten der rechten Gleichungsseite beinhaltet. Daraus folgt, dass die Aussage der ungedeckten Zinsparität nur dann mit einem intertemporalen Optimierungsverhalten und einem Gleichgewicht vereinbar ist, wenn dieser letzte Term den Wert Null annimmt. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Kovarianz den Wert Null annimmt, was wiederum impliziert, dass der Wechselkurs und der inverse Preis des Gutes ,x‘ nicht korreliert sind.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Aussage der ungedeckten Zinsparität nur dann mit einem intertemporalen Optimierungsverhalten konsistent ist, wenn die Preise und der Wechselkurs nicht korreliert sind. Somit ist auch fraglich, ob diese Prämisse realitätsnahe ist.

Einschränkend ist jedoch hinzuzufügen, dass für kurze Betrachtungshorizonte von weniger als einem Jahr die Preise als annähernd konstant angesehen werden könnten. Diese vereinfachende Annahme erscheint insbesondere angesichts der relativen stochastischen Veränderungen als nicht sehr einschränkend.<sup>179</sup>

Abschließend sei angemerkt, dass in der vorangehenden Analyse nur die Preisstochastik berücksichtigt wurde. Fraglich bleibt, welchen Einfluss eine Abweichung von der Kaufkraftparität bzw. dem ‚law of one price‘ auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses besitzt. Angesichts der empirisch feststellbaren stark volatilen Abweichungen von dieser Gleichgewichtsbedingung, kann, bei einer noch festzustellenden theoretisch fundierten

<sup>179</sup> In der Literatur zur internationalen Portfoliotheorie wird häufig von annähernd konstanten Preisen ausgegangen. Als Begründung wird die geringe Inflation in den Industriestaaten genannt. Vgl. Solnik (1974) und die darauf aufbauende Literatur. Kritisch ist anzumerken, dass eine Variation der Zinssätze zur Preisstabilisierung genutzt wird. Damit wird jedoch ein intertemporales Modell (z. B. nach Merton (1973)) notwendig, da der ‚risikolose Zins‘ im Zeitablauf variiert. Das Solnik-Modell ist jedoch nur einperiodig. Eine Verbindung dieser Ansätze ist bisher nicht vorgenommen worden.



Wechselwirkung zwischen Güter- und Kapitalmarkt, nicht mehr mit dem obigen Argument einer geringen Güterpreisvarianz von Gütermarkteinflüssen abstrahiert werden.

In Schritt 4 werden zur Klärung dieser Frage die möglichen Interdependenzen zwischen Güter- und Kapitalmärkten untersucht, wobei insbesondere eine Abweichung von der Kaufkraftparität zugelassen wird. Insbesondere der letzte Aspekt ist bisher in der Literatur wohl aufgrund der Bedenken hinsichtlich der Modellkonsistenz nicht mit Blick auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses berücksichtigt worden.

### 3.4. Ein intertemporales Optimum bei risikoneutralem Anlegerverhalten

#### 3.4.1. Die analytische Herleitung eines Optimums

Die bisherige Analyse hat parallel zum Vorgehen in Kapitel I den Güter- und Kapitalmarkt separat untersucht. Ein Anleger, der einer Budgetrestriktion unterliegt, muss die Opportunitätskosten einer Investition in Form eines geringeren Gegenwartskonsums berücksichtigen. Die Entscheidung für eine zusätzliche Anlage führt zu einer Verringerung des Konsums zum Zeitpunkt ,t' und somit zur Nutzenverringern in ,t'. Diesen Kosten steht ein höherer Konsum, und damit ein höherer Nutzen, zum Zeitpunkt ,t+1' gegenüber. Im Optimum müssen die marginalen Kosten der marginalen abdiskontierten zukünftigen Nutzenänderung entsprechen. Güter- und Kapitalmarkt können somit nicht getrennt analysiert werden. Eine allgemeine Optimalbedingung, die eine Beurteilung der Prognosefähigkeit des Terminkurses ermöglicht, wird nun ermittelt.

Um eine allgemeine Optimalbedingung bei risikoneutralem Verhalten zu ermitteln, werden zunächst die Grenznutzen der in- und ausländischen Investition unter Berücksichtigung ihrer

Opportunitätskosten ermittelt. Dazu wird die Optimalbedingung (1) nach  $\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$  umgeformt. Es sei erinnert, dass dieser Grenznutzen bei risikoneutralem Verhalten nicht stochastisch ist. Es gilt:

$$(1) \quad E \left[ \frac{\partial U}{\partial x_t} \right] = E \left[ \frac{\partial U_t}{\partial x_t} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{\partial U_t}{\partial x_t} * \frac{1}{p_{x,t}} * \frac{1}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \quad (\text{II.64})$$

Anschließend wird die Optimalbedingung (4) umgeformt, so dass ein Einsetzen von

$\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$  möglich ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(4) \quad E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_t}\right] &= E\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{i}{p_{x,t+1}}\right] = 0 \\
\Leftrightarrow E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_t}\right] &= \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * E\left[\frac{i}{p_{x,t+1}}\right]
\end{aligned} \tag{II.65}$$

Es kann nun die umgeformte Bedingung (1) (Gleichung II.64) in die umgeformte Bedingung (4) (Gleichung II.65) eingesetzt werden. Es folgt:

$$E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_t}\right] = \frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial x_t} * \frac{1}{p_{x,t}} * \frac{1}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} * E\left[\frac{i}{p_{x,t+1}}\right] \tag{II.66}$$

Gleichung II.66 beschreibt den Grenznutzen einer Investition unter Berücksichtigung der Opportunitätskosten in Form eines gegenwärtigen entgangenen Güterkonsums.

Das gleiche Vorgehen kann nun auf die Optimalbedingungen (2) und (5) angewendet werden, um den Grenznutzen einer Auslandsinvestition ebenfalls unter Berücksichtigung der Opportunitätskosten zu bestimmen. Zunächst wird die Optimalbedingung (2) umgeformt:

$$\begin{aligned}
(2) \quad E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y_t}\right] &= E\left[\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} - \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{p_{x,t+1}}\right] = 0 \\
\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} &= \frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} * \frac{1}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
\Leftrightarrow
\end{aligned} \tag{II.67}$$

Anschließend wird in Optimalbedingung (5) der konstante Term  $\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$  aus dem Erwartungswert vorgezogen. Es gilt:

$$(5) \quad E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{(1+i_a)^* \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{t,a}} \right] = \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * E \left[ \frac{(1+i_a)^* \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] \quad (\text{II.68})$$

Schließlich wird die umgeformte Bedingung (2) (d.h. Gleichung II.67) in die Bedingung (5) (d.h. Gleichung II.68) eingesetzt. Es folgt:

$$E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{t,a}} \right] = \frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,t}} * \frac{1}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} * E \left[ \frac{(1+i_a)^* \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] \quad (\text{II.69})$$

Es wurden hiermit die Grenznutzen der in- und ausländischen Anlage unter Berücksichtigung der Opportunitätskosten beschrieben. Die Opportunitätskosten der Inlandsinvestition wurden dabei durch den entgangenen Konsum des Gutes ‚x‘ beschrieben, während die Opportunitätskosten der Auslandsinvestition durch den entgangenen Konsum des Gutes ‚y‘ beschrieben wurde.

Dieses Verfahren führt jedoch zu einer eingeschränkten Interpretierbarkeit der Ergebnisse, wenn Abweichungen von der Kaufkraftparität zugelassen werden. Diese Einschränkung liegt darin begründet, dass die Opportunitätskosten für eine Inlandsanlage mit Bezug auf den Güterpreis des inländisch produzierten Gutes beschrieben werden, während die Auslandsinvestition den Preis des ausländisch produzierten Gutes verwendet, um die Opportunitätskosten zu berücksichtigen. Diese Unterscheidung ist gegenstandslos, wenn die Kaufkraftparität erfüllt ist. In dieser Arbeit wird jedoch der Einfluss von PPP-Abweichungen explizit in die Analyse einbezogen. Damit ist die Bestimmung der Opportunitätskosten problematisch.

Es sind grundsätzlich zwei Verfahren denkbar, mit denen dem obigen Problem begegnet werden kann. Einerseits könnte ein Preisindex bestimmt werden, der die individuelle Inflation beschreiben kann. Dieser Index könnte zur Bestimmung der Opportunitätskosten verwendet werden. Nachteilig an diesem Verfahren wäre, dass eine Indexbeschreibung die Wahl der zulässigen Nutzenfunktionen beschränkt. Dies ist in Abschnitt zur Kaufkraftparität bereits ausführlich dargestellt worden. Weiterhin müssten die Budgetanteile der inländisch und ausländisch produzierten Güter bestimmt werden. Insgesamt resultiert dieses Verfahren in einer umfassenden Gütermarktanalyse, die in diesem Modell durch die Prämissenwahl gerade vermieden werden sollte.

Alternativ kann davon ausgegangen werden, dass im Ausland investiertes Kapital auch zum Kauf ausländisch produzierter Güter verwendet wird. Als Konsequenz wäre der Preis des im jeweiligen Investitionsland (das Land, in dem investiert wird) produzierten Gutes angemessen, um die Opportunitätskosten zu ermitteln. Das obige Verfahren führte somit zu interpretierbaren Ergebnissen.

Ökonomisch bedeutet solch eine Restriktion, dass die Entscheidung über den zukünftigen Konsum bereits durch die Investitionsentscheidung festgelegt wird. Es wäre somit nicht möglich, die erzielten Investitionserträge in der Zukunft in eine andere Währung zu tauschen, um anschließend das Gut eines anderen Landes als des Investitionslandes zu konsumieren. Dieses letztgenannte Vorgehen wird in dieser Arbeit gewählt, obwohl es eine sehr restriktive Prämisse darstellt.<sup>180</sup>

Die grundsätzliche ökonomische Interpretation ist jedoch relativ unproblematisch: Aufgrund von Abweichungen von der Kaufkraftparität ist die für den in- bzw. ausländischen Investor relevante Inflationsrate unterschiedlich. Damit ändert sich naturgegeben auch die Kovarianz zwischen Güterpreis und Wechselkurs, die in dieser Arbeit als Unsicherheitsprämie bezeichnet wird, in Abhängigkeit der Perspektive. Die Darstellung in dieser Arbeit verzichtet auf die Einführung eines Preisindex (der natürlich ebenfalls eine sehr restriktive Annahme

---

<sup>180</sup> Diese Prämisse könnte in ein theoretisches Modell implementiert werden, indem eine Auslandsinvestition als Partizipation an der zukünftigen ausländischen Produktion angesehen wird, die aufgrund hoher Transaktionskosten nur unter Inkaufnahme hoher Verluste in andere Güter tauschbar wäre. De facto würde damit die Investitionsentscheidung die zukünftige Konsumentenscheidung präjudizieren. Problematisch an diesem Ansatz wäre jedoch, dass solch eine Interpretation der Auslandsinvestition zu einer stochastischen Verzinsung führen würde (stochastischer nominaler Output), was der Prämisse der risikolosen Verzinsung

zum Konsumverhalten enthalten müsste, um eine Abweichung vom Gütermarktgleichgewicht zu erlauben) und erlaubt damit eine ‚saubere‘ Trennung des gegenwärtigen Gütermarktgleichgewichtes von der Änderung des (heimisch produzierten) Güterpreises im Zeitablauf.<sup>181</sup>

Es sei anerkannt, dass diese Prämisse nicht als realitätsnah angesehen werden kann, und sie damit den Nutzen dieses Modells zur Beschreibung der Realität stark entwertet. Eine bedingte Zulässigkeit solchen Vorgehens kann jedoch mit Verweis auf die theoretischen Literatur verdeutlicht werden. Lucas (1982), dessen Modell die Grundlage der theoretischen Literatur bildet, setzt ebenfalls sehr restriktive Prämissen zur zeitlichen Abfolge der Entscheidungen.<sup>182</sup> Diese Prämissen beziehen sich im wesentlichen auf eine strikte Trennung von Produktion und Handel, die hier aufgrund der ursprünglich gesetzten vereinfachenden Prämissen nicht notwendig sind. Sie führen unter anderem dazu, dass das Vorsichtskassenmotiv der Geldhaltung im Lucas-Modell nicht in Erscheinung tritt. Abschließend sei festgestellt, dass keine optimale Alternative für die hier gewählte Zielsetzung existiert. Es wurde unter Berücksichtigung der obigen Probleme das letztgenannte Vorgehen gewählt. Im nachfolgenden Abschnitt wird hervorgehoben, wie diese Wahl sich auf die Interpretierbarkeit der Gleichgewichtsbedingung auswirkt.

Diese Ausführungen veranschaulichten, dass die obigen Gleichungen den Grenznutzen der in- und ausländischen Anlage unter Berücksichtigung der jeweiligen Opportunitätskosten nur eingeschränkt beschreiben. Trotz dieser Bedenken wird dieses Vorgehen weiter verfolgt.

Es sei nun wie in den Schritten 2 und 3 von einem Kapitalmarktgleichgewicht ausgegangen, so dass im Gleichgewicht die erwarteten Grenznutzen der In- und Auslandsanlage gleich sind (vgl. Gleichung II.60). Dividiert man die genannten Gleichungen II.66 und II.69, so erhält man folgende Gleichgewichtsbedingung für ein Kapitalmarktgleichgewicht:

---

zuwider laufen würde.

<sup>181</sup> Implizit ist natürlich aus diesen Annahmen auch eine Annahme zur Änderung der KKP-Abweichung im Zeitablauf enthalten und kann auch aus den Optimierungsbedingungen (1), (2) und (5) des hier verwendeten Modells abgeleitet werden.

<sup>182</sup> Vgl. Lucas (1982). S. 342.

$$1 = \frac{\partial U_t / \partial y_t}{\partial U_t / \partial x_t} * \frac{p_{x,t}}{s_t * p_{y,t}} * \frac{1}{i} * \frac{1}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} * E\left[\frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}}\right] \quad (\text{II.70})$$

Diese Gleichung dient als Basis für eine Bewertung der Prognosefähigkeit des Terminkurses. Dazu ist jedoch wiederum die Formulierung der ungedeckten Zinsparität, wie sie in Kapitel I formuliert wurde, in obiger Gleichung zu isolieren. Um dies zu erreichen, wird zunächst der letzte Quotient auf der rechten Gleichungsseite nach bekanntem Verfahren getrennt. Weiterhin ist ersichtlich, dass die ersten beiden Terme der rechten Seite die Forderung der Kaufkraftparität in ihrer ex-post Version repräsentieren. Diese Terme werden zur Vereinfachung durch die Variable ‚ $\varpi$ ‘ repräsentiert. Nach diesen Schritten erhält man aus Gleichung II.70:

$$1 = \frac{1}{i * \varpi} * \frac{1}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} * \left\{ E\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1\right] * E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right] + COV\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] \right\} \quad (\text{II.71})$$

mit 
$$\frac{1}{\varpi} = \frac{\partial U_t / \partial y_t}{\partial U_t / \partial x_t} * \frac{p_{x,t}}{s_t * p_{y,t}}$$

Diese Gleichung kann vereinfacht werden. Dazu werden zunächst beide Gleichungsseiten mit ‚ $i$ ‘ multipliziert, und anschließend die geschweifte Klammer aufgelöst und gekürzt. Aus der Gleichung II.71 wird dann:

$$i * \varpi = E\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1\right] + \frac{COV\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \quad (\text{II.72})$$

Zunächst erweitert man nun die linke Gleichungsseite mit ‚+i-i‘ und fasst die Terme ‚-i‘ und ‚i\* $\varpi$ ‘ zusammen. Anschließend wird der erste Term der rechten Gleichungsseite von beiden Seiten subtrahiert. Nach diesen Umformungen folgt aus Gleichung II.72:

$$i + i * (\varpi - 1) - E \left[ (1 + i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1 \right] = \frac{COV \left[ (1 + i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \quad (\text{II.73})$$

Es wird nun auf der linken Gleichungsseite der erste Term ‚i‘ in den Erwartungswert hineingezogen, und anschließend von beiden Seiten der Term ‚i\*( $\varpi$ -1)‘ subtrahiert. Nach diesen Umformungen folgt aus Gleichung II.73:

$$E \left[ (1 + i) - (1 + i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} \right] = -i * (\varpi - 1) + \frac{COV \left[ (1 + i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \quad (\text{II.74})$$

Die linke Gleichungsseite beschreibt die Aussage der ungedeckten Zinsparität, wie sie in Kapitel I formuliert wurde (vgl. Gleichung I.6). Ist die Forderung der ungedeckten Zinsparität erfüllt, so nimmt diese Gleichungsseite den Wert Null an. Aus einer vorläufigen Betrachtung der rechten Gleichungsseite wird ersichtlich, dass diese Forderung bei intertemporaler Optimierung im Allgemeinen nicht erfüllt sein muss. Vielmehr lässt sich die ungedeckte Zinsparität aus dem hier verwendeten intertemporalen Optimierungsmodell nur dann herleiten, wenn sowohl der zukünftige Wechselkurs und der zukünftige Preis des Gutes ‚x‘ unkorreliert sind (COV=0), als auch der Gütermarkt sich im Gleichgewicht befindet (d.h. die Kaufkraftparität erfüllt ist und somit gilt:  $\varpi = 0$ ). Beide Einflussfaktoren wirken bei risikoneutralem Anlegerverhalten. Die Kovarianz beeinflusst den Erwartungswert der realen Erträge und verursacht damit eine Abweichung von der rein nominalen Betrachtung (im Kapitel I als Textbuchversion bezeichnet) der ungedeckten Zinsparität. Der Einfluss des Gütermarktes resultiert aus der (sehr einschränkenden) Prämisse zum Entscheidungszeitpunkt über den Güterkonsum.<sup>183</sup>

<sup>183</sup> Es sei angemerkt, dass das Lucas Modell ebenfalls sehr einschränkende Prämissen zum Ablauf von



Es soll nun abschließend die Gleichung II.74 unter Einbeziehung des Terminkurses beschrieben werden. Dazu werden die nicht stochastischen Terme aus dem Erwartungswert der linken Gleichungsseite vorgezogen. Anschließend wird von beiden Seiten der Term  $\frac{s_t}{1+i_a}$  subtrahiert und beide Seiten mit  $\frac{s_t}{1+i_a}$  multipliziert. Es gilt dann:

$$E[s_{t+1}] = \frac{(1+i)}{(1+i_a)} * s_t + \frac{i * (\varpi - 1)}{(1+i_a)} * s_t - \frac{COV \left[ (1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] * \frac{s_t}{(1+i_a)}}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \quad (\text{II.75})$$

Es sei nun der Terminkurs gemäß der gedeckten Zinsparität (vgl. Gleichung I.5) bestimmt durch:

$$f_t \equiv \frac{(1+i)}{(1+i_a)} * s_t \quad (\text{II.76})$$

Nach dem Einsetzen von Gleichung II.76 in Gleichung II.75 und Kürzen im letzten Term der rechten Seite gilt:

$$E[s_{t+1}] = f_t + \underbrace{\frac{i * (\varpi - 1) * s_t}{(1+i_a)}}_{\text{KKP-Abweichung}} - \underbrace{\frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}}_{\text{Pr eisstochastik}} \quad (\text{II.77})$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass der Terminkurs grundsätzlich bei Risikoneutralität und intertemporalem Optimierungsverhalten der Anleger, nicht-stochastischen Zinssätzen und

---

Entscheidungen beinhaltet.

<sup>184</sup> Diese Darstellung ist direkt mit Engel (1984) Formel (4) vergleichbar. Engel geht jedoch von der Kaufkraftparität aus, so dass der zweite Term der rechten Gleichungsseite in seiner Formel den Wert Null annimmt.

stochastischer Preise und Wechselkurs nicht dem erwarteten Wechselkurs entspricht.<sup>185</sup> Die Divergenz hängt von der Abweichung von der Kaufkraftparität in der Ausgangssituation sowie von der Stochastik der Preise und Wechselkurse ab.

Es kann somit festgestellt werden, dass die separate Untersuchung von Güter- und Kapitalmarkt zu nicht allgemeingültigen Ergebnissen führt, wenn intertemporal optimierendes Verhalten als realitätsnah angesehen wird. Die Aussagefähigkeit der in Kapitel I dargestellten empirischen Literatur ist somit begrenzt. Die bisherige Analyse war jedoch stark formal orientiert, ohne die Wirkungszusammenhänge offen zu legen, die die Abhängigkeit der Prognosefähigkeit des Terminkurses ökonomisch erklären. Diese ökonomische Interpretation sei im folgenden Step nachgeholt.

### **3.4.2. Die ökonomische Interpretation des allgemeinen Gleichgewichtes**

Es folgt nun eine ökonomische Analyse der Abweichungsursachen des erwarteten Wechselkurses vom Terminkurs. Um eine intuitiv zugängliche Interpretation zu liefern, wird die Gleichgewichtsbedingung II.77 im Vergleich zur Forderung der ungedeckten Zinsparität aus Kapitel I (Gleichung I.6) beschrieben.

Diese ‚benchmark‘ Forderung ist ebenfalls aus obiger Gleichgewichtsbedingung herleitbar. Im Rahmen eines intertemporalen Optimierungsgleichgewichts gilt die Gleichgewichtsbedingung:

$$E[s_{t+1}] = f_t \tag{II.78}$$

wenn sich die Akteure rational und risikoneutral verhalten, die Güterpreise nicht-stochastisch sind, und die Kaufkraftparität in der ex-post Version erfüllt ist. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so gleicht der erwartete Wechselkurs dem Terminkurs. Daraus folgt, dass die Zinsen und der Kassakurs in ihrer Ausprägung relativ zueinander festgelegt sind. Im Gleichgewicht ist es nicht möglich, dass Gewinne durch eine Kreditaufnahme in einem Land bei

---

<sup>185</sup> In der Literatur wird jedoch häufig diese Hypothese getestet. Vgl. MacDonald und Taylor (1989), S. 255 – 274.

gleichzeitiger Investition des Kreditbetrages im anderen Land unter Berücksichtigung der obigen Ausprägung des erwarteten Wechselkurses erwartet werden. Diese Zusammenhänge bilden hier den Vergleichsmaßstab.

Ziel ist es nun, den Einfluss von stochastischen Güterpreisen auf die Gleichgewichtsbedingung und damit auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses aufzuzeigen. Aus diesem Grund müssen sämtliche im Rahmen des ‚benchmark‘ formulierten Annahmen aufrechterhalten werden mit der einzigen Ausnahme, dass die Preise stochastisch seien. Durch dieses Vorgehen wird die Einflussrichtung der Preisstochastik isoliert.

Aus der Gleichgewichtsbedingung des hier in Abschnitt 3 hergeleiteten Modells (Gleichung II.63)

$$(1+i) = (1+i_a) * \frac{E[s_{t+1}]}{s_t} + \frac{COV\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \quad \text{II.63}$$

und unter Verwendung des Terminkurses (vgl. Gleichung II.76) folgt nach Kürzen und Umformung:<sup>186</sup>

$$E[s_{t+1}] = f_t - \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \quad \text{(II.79)}$$

wenn sich die Akteure rational und risikoneutral verhalten, die Güterpreise stochastisch sind und die Kaufkraftparität in der ex-post Version erfüllt ist. Es sei daran erinnert, dass die Erfüllung der Kaufkraftparität weitere Ausführungen zur Bestimmung der Opportunitätskosten, wie sie im vorangegangenen Schritt aufgezeigt wurden, erübrigt.

<sup>186</sup> Aufgrund des Gütermarktgleichgewichtes und der Gültigkeit der Kaufkraftparität erübrigt sich die Unterscheidung zwischen den Güterpreisen.

Ein Vergleich dieser Bedingungen lässt darauf schließen, dass aufgrund der Preisstochastik eine Zins/Wechselkurskonstellation ein Gleichgewicht darstellen kann, obwohl eine ausschließliche Berücksichtigung der Nominalerträge auf Arbitragegewinne schließen ließe. Diese Feststellung ist an sich unerwartet, da aufgrund der Risikoneutralität der Akteure ein Absicherungsmotiv als Ursache ausgeschlossen ist.

Trotz dieser ‚Bedenken‘ stellt solch eine Konstellation ein Gleichgewicht dar, wie nun an einem konkreten Beispiel gezeigt wird. Es sei angenommen, dass bei gegebenen konstanten Zinsen und Kassakurs für die relative Preisbewegung gelte:<sup>187</sup>  $dp_x \uparrow \uparrow = ds \uparrow * dp_y \uparrow$ . Daraus folgt:  $COV[p_{x,t+1}, s_{t+1}] < 0$ , so dass der erwartete Wechselkurs gemäß obiger Gleichgewichtsbedingung hinter dem Terminkurs zurückbleibt. Diese Ausprägung der Kovarianz impliziert, dass sich Wechselkurs und Preis des Gutes ‚x‘ gleichgerichtet bewegen, da die Invertierung der Preisbewegung die Bewegungsrichtung umkehrt:

$$p_x \uparrow \Rightarrow \frac{1}{p_x} \downarrow$$

Ein Akteur, der mit dieser Entscheidungssituation konfrontiert wird, könnte folgern, dass eine Anlage im Inland vorteilhaft wäre. Diese Entscheidung würde jedoch auf Basis von nominalen Werten begründet sein. Allgemein ist jedoch bei rationalem Verhalten festzustellen, dass die Allokationsentscheidung unter Berücksichtigung realer Variablen gefällt wird. Folglich ist der Opportunitätsgedanke, also die Berücksichtigung von entgangenem gegenwärtigen und ermöglichten zukünftigen Konsum, in die Entscheidungsfindung einzubeziehen.<sup>188</sup>

Ein Akteur, der seine Entscheidung auf Nominalwerten basiert hat, und im Inland investierte, steht nun folgender Situation gegenüber: Steigen nun annahmegemäß die Güterpreise, so reduziert sich der reale Ertrag der Anlage, da sich die Konsummöglichkeiten, die der

---

<sup>187</sup> Diese Annahme könnte vereinfachend als Erfüllung der relativen Kaufkraftparität angesehen werden.

<sup>188</sup> Konkret bedeuten Opportunitätskosten, dass jede Geldeinheit, die zu Investitionszwecken verwendet wird, nicht mehr für den Gegenwartskonsum zur Verfügung steht. Daraus folgt, dass der Nutzen aus dem gegenwärtigen Konsum sinkt.

Es ist weiterhin klar, dass sich die Konsummöglichkeiten durch die Investition steigern. Diese Entscheidung ist in der Literatur unter dem Namen ‚intertemporale Optimierung des Konsums‘ bekannt.

Investitionsbetrag ermöglicht, aufgrund höherer nominaler Aufwendungen pro konsumierter Mengeneinheit reduzieren. Daraus folgt, dass er die Konsummöglichkeiten, die aus der Investition resultieren könnten, überschätzt hat.

Für die Auslandsinvestition gilt bei steigenden Preisen und konstanten nominalen Zinsen, dass sich bei einer Betrachtung in Auslandswährung, ebenfalls die Konsummöglichkeiten reduziert haben. Die Recheneinheit des Inländers ist jedoch die Inlandswährung, in der somit ein Vergleich der Investitionserträge vorgenommen wird. Der Einfluss der Wechselkursänderung ist somit zu berücksichtigen. Im Fall steigender Güterpreise ist der nachteilige Preiseffekt auf den realen Investitionsertrag der Auslandsinvestition relativ geringer als auf die Inlandsinvestition. Steigen nämlich die Güterpreise, so steigt ebenfalls der nominale Ertrag der Auslandsinvestition aufgrund des Wechselkurseinflusses. Der gestiegene zukünftige Wechselkurs ermöglicht einen Umtausch in Inlandswährung des nominal fixen Anlageertrages in Auslandswährung zu einem Kurs, der zumindest einen Teil der Kaufkraft sichert. Dieser Zusammenhang wird durch die negative Kovarianz repräsentiert. Der reale Ertrag der Auslandsinvestition im Vergleich zur Inlandsinvestition ist somit höher, als die nominalen Erträge vermuten lassen. Es existierten somit keine Arbitragemöglichkeiten, die zu einem gesteigerten realen Konsum führen.

Daraus folgt im Umkehrschluss, dass der eingangs bestimmte erwartete nominale Wechselkurs  $E[s_{t+1}] = f_t$  auf Basis der Nominalwerte nicht mit einem Gleichgewicht bei rationalem Verhalten und stochastischen Preisen vereinbar ist. Die Berücksichtigung der Opportunitätskosten erlaubt es dem nominalen erwarteten Wechselkurs vielmehr, hinter dem eingangs bestimmten Wert zurückzubleiben. Dieser Zusammenhang geht durch die Kovarianz in die Gleichgewichtsbeziehung ein, die unter Berücksichtigung der Opportunitätskosten formuliert wurde.

Die obige Argumentation sei nochmals anhand der Formel für die Lehrbuchversion der ungedeckten Zinsparität dargestellt. Es gilt:

$$1 + i = 1 + i_a * \frac{E[s_{t+1}]}{s_t} \tag{II.80}$$

Für Anleger, die der Geldillusion nicht unterliegen, sind im Rahmen der ungedeckten Zinsparität die realen Zinsen entscheidungsrelevant. Sie bestimmen ihre Anlageentscheidung gemäß:

$$\frac{1+i}{dp_x} = \frac{1+i_a}{dp_y} * \frac{E[s_{t+1}]}{s_t} \quad (\text{II.81})$$

Für den Fall konstanter, auf Eins normierter Preise wird diese Gleichung II.81 zur bekannten ungedeckten Zinsparität in Lehrbuchformulierung (Gleichung I.6). Im bisher analysierten Beispiel wirken die stochastischen Preise wie folgt: Ein stark ansteigender Preis des Gutes ‚x‘ senkt die reale Verzinsung der Inlandsanlage stark. Der mit dem Auslandspreis berechnete Realzins der Auslandsanlage sinkt weniger stark, da nur ein Teil der exogenen Änderung durch diese Preisänderung ausgeglichen wird. Als Konsequenz muss der erwartete Wechselkurs im Vergleich zum Terminkurs aufgrund der fehlenden Geldillusion niedriger liegen.

$$\frac{1+i}{p_x} \downarrow \downarrow = \frac{1+i_a}{p_y} \downarrow * \frac{E[s_{t+1}]}{s_t} \downarrow \quad (\text{II.82})$$

Das Ausmaß dieses Unterschiedes hängt von der Höhe der Kovarianz ab. Je höher der Teil der exogenen Änderung ist, der durch eine Wechselkursänderung ausgeglichen wird, desto größer ist die Kovarianz und desto mehr bleibt der erwartete Wechselkurs hinter dem Terminkurs zurück. Diese Aussage entspricht der Gleichgewichtsbedingung. Die formal hergeleitete Gleichgewichtsbedingung ist für den Fall stochastischer Preise und eines ausgeglichenen Gütermarktes ökonomisch sinnvoll interpretierbar.

Eine weitere Ursache für eine Abweichung des erwarteten Wechselkurses vom Terminkurs könnte im Gütermarktgleichgewicht in der Ausgangssituation begründet sein. Dieser Einfluss sei nun ökonomisch interpretiert.

Um die Analyse zu vereinfachen, seien die folgenden Prämissen gesetzt: Die Gütermarktstörung sei im Zeitablauf konstant, so dass diese Störung unabhängig von der

relativen Preisveränderung, beschrieben durch die Kovarianzen, untersucht werden kann.<sup>189</sup> Ausgehend von der Definition von  $\varpi$  sei weiterhin vereinfachend angenommen, dass die gegebene Konsumaufteilung einen Ausgleich der Grenznutzen bewirkt. Daraus folgt, dass  $\frac{\partial U_t / \partial x_t}{\partial U_t / \partial y_t} = 1$  und sich somit die Gütermarktstörung vollständig durch die Berücksichtigung der Preise beschreiben lässt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varpi &= \frac{\partial U_t / \partial x_t}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{s_t * p_{y,t}}{p_{x,t}} \\ &= \frac{s_t * p_{y,t}}{p_{x,t}} \\ &= RS\end{aligned}\tag{II.83}$$

mit:  $RS = \text{realer Wechselkurs}$  und  $RS \equiv \frac{s_t * p_{y,t}}{p_{x,t}}$

Ausgehend von der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung gilt somit:

$$E[s_{t+1}] = f_t + \frac{i * (RS - 1) * s_t}{(1 + i_a)} - \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}\tag{II.84}$$

Die obige Gleichgewichtsbedingung fordert, dass für den Fall eines Gütermarktgleichgewichtes in der Form, dass das ausländisch produzierte Gut relativ überbewertet ist, der erwartete Wechselkurs über dem Terminkurs liegen muss. Da der Terminkurs unter den eingangs genannten Bedingungen jedoch eine unverzerrte Prognosefähigkeit besitzt, ist festzustellen, dass Gütermarktgleichgewichte auf diese Fähigkeit selbst bei risikoneutralem Verhalten Einfluss nehmen.

---

<sup>189</sup> Dies entspricht der Gültigkeit der relativen Form der Kaufkraftparität. Nähert sich im Gegensatz dazu der Gütermarkt im Zeitablauf seinem Gleichgewicht an, so besitzt dies unmittelbare Auswirkungen auf die Kovarianzen, die die relativen Preisbewegungen im Zeitablauf beschreiben. Damit ist eine Trennung der Wirkungsursachen anhand der einzelnen Summanden nicht mehr möglich. Auf diese Interdependenzen wird hier nicht weiter eingegangen.

Diese Feststellung sei nun ökonomisch auf Basis von Gleichung II.84 interpretiert. Ein hoher realer Wechselkurs ( $RS > 1$ ) bedeutet, dass bei Annahme homogener Güter die Preise des ausländisch produzierten Gutes ‚y‘ überhöht sind. Befindet sich der Gütermarkt nicht im Gleichgewicht, so wird die Bestimmung der Opportunitätskosten problematisch. Wie bereits angemerkt, werden in dieser Arbeit die Produzentenpreise des Landes, in dem investiert wird, für eine Bestimmung der Opportunitätskosten zugrunde gelegt. Ist der Preis des Gutes ‚y‘ überhöht, so ist eine Auslandsinvestition, die annahmegemäß zum Konsum des Gutes ‚y‘ verwendet wird, in ihrem Ertrag geringer als eine Inlandsinvestition. Diese Ertragsminderung liegt in der Entscheidung begründet, ein überteuertes Gut zu kaufen.

Befindet sich der Kapitalmarkt jedoch im Gleichgewicht, so ist solch ein freiwilliger Ertragsverzicht, der zu geringeren Konsummöglichkeiten führt, nicht mit einem Gleichgewicht vereinbar. Die Akteure könnten durch ein Umschichten ihrer Anlage ihre Konsummöglichkeiten zumindest in einem Gut steigern, ohne den Konsum des anderen Gutes einzuschränken.<sup>190</sup> Es folgt somit für die gleichgewichtigen Anlageerträge, dass die Auslandsanlage, die zum Erwerb eines überteuerten Gutes verwendet wird, einen höheren Ertrag erzielen muss, als dies bei einem Gütermarktgleichgewicht notwendig wäre. Dieser Überschussertrag dient zum Ausgleich dieser Überteuerung. Folglich muss der ‚kapitalmarktgleichgewichtige‘ erwartete Wechselkurs über der Ausprägung liegen, der bei Gütermarktgleichgewicht erwartet werden würde. Dies ist die Aussage obiger Gleichgewichtsbedingung.

Dieser Zusammenhang kann ebenfalls anhand der Lehrbuchversion der ungedeckten Zinsparität dargestellt werden. Ökonomisch kann der Effekt parallel zum obigen Vorgehen interpretiert werden. Es gilt  $dp_x = dp_{Inland} < dp_y = dp_{Ausland}$ . Sind die Anleger rational, und besteht ein Kapitalmarktgleichgewicht, so basieren die Anlageentscheidungen auf den realen Erträgen. Daraus folgt, dass die Erträge der Auslandsinvestition geringer als diejenigen der

Inlandsinvestition sind. Es gilt:  $\frac{1+i_a}{dp_{Ausland}} < \frac{1+i}{dp_{Inland}}$ . Ausgehend vom erwarteten Wechselkurs gemäß der Lehrbuchdarstellung wirkt ein Gütermarktungleichgewicht wie folgt:<sup>191</sup>

<sup>190</sup> Die ursprüngliche Anlageentscheidung wäre somit nicht pareto-optimal.

<sup>191</sup> Diese Gleichung verwendet im Gegensatz zur Gleichung II.81 jeweils einen Preisindex für das in- und ausländische Preisniveau. Sie sind in ihrer Aussage identisch, falls die Kaufkraftparität erfüllt ist.



$$\frac{1+i}{P_{Inland}} \uparrow \uparrow = \frac{1+i_a}{P_{Ausland}} \uparrow * \frac{E[s_{t+1}]}{s_t} \uparrow \quad (\text{II.85})$$

Der Realzins der Inlandsanlage, beschrieben durch den Quotient aus Nominalzins und Inlandspreis, ist aufgrund der Gütermarktverzerrung größer als der entsprechend beschriebene ausländische Realzins. Geht man davon aus, dass unter den eingangs genannten Bedingungen gilt:  $E[s_{t+1}] = f_t$ , so wird einsichtig, dass der gleichgewichtige erwartete Wechselkurs bei überhöhtem Preis des Gutes ‚y‘ über diesem Wert liegen muss. Das obige Ergebnis ist somit bestätigt.

Zusammenfassend ist festzustellen: Der erwartete Wechselkurs ist bei rationalem risikoneutralem Anlegerverhalten systematisch von der Preisstochastik und der Entwicklung der (Un)Gleichgewichte auf dem Gütermarkt beeinflusst. Die konkrete Einflussrichtung und das Ausmaß müssen im Einzelfall in Abhängigkeit der relativen Preisbewegungen bestimmt werden.

Einschränkend ist zu bemerken, dass sich die bisherige Analyse auf die Perspektive eines Landes konzentriert hat. Ein Gleichgewicht muss jedoch für sämtliche beteiligten Anleger, also auch die ausländischen gelten. Es wird nun untersucht, ob solch ein Gleichgewicht bei international homogenen Anlegern mit konsistenten Wechselkurserwartungen vereinbar ist.

### **3.5. Eine Zwei-Länder-Betrachtung der intertemporalen Optimierung**

Die bisherige Analyse konzentrierte sich auf die Herleitung von Bedingungen, die im Arbitrageoptimum für Preise und Wechselkurse aus der Sicht eines beliebigen Landes gelten müssen. Eine Arbitrage auf dem internationalen Kapitalmarkt setzt die Existenz von mindestens zwei Ländern voraus. Da die Wahl der Perspektive nicht zwingend restringiert ist, müssen die Optimalbedingungen prinzipiell für jedes der beiden Länder gelten. Es soll nun der Einfluss der Wahl der Perspektive auf die Variablen dargestellt werden. Dies geschieht in Step 1 in einer allgemeinen Form unter Verwendung der Aussage der ungedeckten Zinsparität, wie sie in Kapitel I formuliert wurde. In Step 2 werden diese nachfolgenden Überlegungen auf die Ergebnisse des Schritt 4 angewendet. Es wird versucht, die jeweiligen Abweichungen der von den In- und Ausländern erwarteten Wechselkurse zu quantifizieren. Grundsätzlich ist jedoch festzuhalten, dass allein die Existenz dieser Perspektivenabhängigkeit den Aussagewert solch eines komparativ statischen internationalen Modells reduziert.

### 3.5.1. Die Darstellung des Siegel-Paradoxons

Die Aussage, dass die Perspektive der Betrachtung für die Ausprägung der Erwartungswerte zukünftiger Wechselkurse relevant ist, geht auf Siegel (Siegel-Paradoxon) zurück und wird hier an der Lehrbuchdarstellung der UIP kurz dargestellt.<sup>192</sup> Die ungedeckte Zinsparität (vgl. Gleichung I.6) fordert:

$$E[s_{t+1}] = \frac{1+i}{1+i_a} * s_t \quad (\text{II.86})$$

Diese Bedingung muss im Gleichgewicht für beide Länder erfüllt sein. Deshalb sei Gleichung II.86 aufgrund der Variabeldefinitionen (aus Inlandssicht) die Beschreibung der UIP aus Inlandssicht. Für ein Ausland muss die UIP ebenfalls gelten:

$$E^a[s_{t+1}^a] = \frac{1+i^a}{1+i_a^a} * s_t^a \quad (\text{II.87})$$

Der hochgestellte Index ‚a‘ zeigt die Auslandsperspektive, ein tiefgestellter Index ‚a‘ eine aus der jeweiligen Sicht ausländische Variable an. Diese beiden Perspektiven sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Beide Akteure investieren in nominal risikolose Wertpapiere in beiden Ländern. Die Auslandsperspektive lässt sich somit unter Verwendung der Variablen aus Inlandssicht beschreiben. Der ausländische Zinssatz aus Auslandsperspektive entspricht dem Inlandszinssatz aus Inlandsperspektive, der Inlandszinssatz aus Auslandsperspektive dem Auslandszinssatz aus Inlandsperspektive, und der Wechselkurs aus Auslandsperspektive sei aufgrund der Definitionsgleichung gleich dem Kehrwert des Wechselkurses aus Inlandsperspektive. Formal gilt somit:

$$1+i_a^a = 1+i \quad (\text{II.88})$$

$$1+i^a = 1+i_a \quad (\text{II.89})$$

$$\begin{aligned} s_t^a &= \text{Inlandswährung}^{\text{Auslandsperspektive}} / \text{Auslandswährung}^{\text{Auslandsperspektive}} \\ &= \text{Auslandswährung} / \text{Inlandswährung} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s_t} \tag{II.90}$$

$$s_{t+1}^a = \frac{1}{s_{t+1}} \tag{II.91}$$

Damit lässt sich die Arbitragegleichung aus Auslandssicht (Gleichung II.87) anhand von Variablen ausdrücken, die in Inlandsperspektive formuliert sind:

$$\begin{aligned} E^a[s_{t+1}^a] &= \frac{1+i^a}{1+i_a^a} * s_t^a \\ \Leftrightarrow E^a\left[\frac{1}{s_{t+1}}\right] &= \frac{1+i_a}{(1+i)^*} s_t \\ \Leftrightarrow \frac{1}{E^a\left[\frac{1}{s_{t+1}}\right]} &= \frac{1+i}{1+i_a} * s_t \end{aligned} \tag{II.92}$$

Durch diese Umformungen ist es möglich, den erwarteten Wechselkurs aus inländischer Sicht und den Wechselkurs in Inlandsnotierung aus ausländischer Sicht relativ zueinander zu formulieren. Durch Einsetzen von Gleichung II.92 in die Arbitragegleichung des Inlandes (Gleichung II.86) resultiert:

$$\begin{aligned} E[s_{t+1}] &= \frac{1+i}{1+i_a} * s_t \\ &= \frac{1}{E^a\left[\frac{1}{s_{t+1}}\right]} \end{aligned} \tag{II.93}$$

Diese Identität ist jedoch nicht einfach zu interpretieren. Ursache dafür ist die Jensen'sche Ungleichung.<sup>193</sup> Sie besagt: Ist eine Variable ‚z‘ stochastisch und die Funktion f(z) streng konkav, dann gilt:

---

<sup>192</sup>Die folgenden Ausführungen lehnen sich an Siegel (1972). S. 302 f. an.

<sup>193</sup> Vgl. Varian (1992). S.182 für einen Beweis. Die Taylor-Approximation erster Ordnung um den Erwartungswert mit anschließender Erwartungswertbildung beider Gleichungsseiten ergibt die Jensen'sche Ungleichung. In diesem Beweis wird die Restgröße der Approximation nicht analysiert, so dass der Beweis streng genommen unvollständig ist. Varian behauptet, dass die Ungleichung für alle Formen der Funktion f(z) gilt. Bei konvexen Funktionen ändert sich jedoch die Richtung der Ungleichung. Für nicht-differenzierbare Funktionen ist der Beweis in oben beschriebener Form nicht durchführbar. Dieser Aspekt soll hier nicht vertieft

$$E[f(z)] < f(E[z]) \quad (\text{II.94})$$

Somit gilt für den stochastischen erwarteten zukünftigen Kassakurs:

$$\begin{aligned} E[s_{t+1}] &> \frac{1}{E^a\left[\frac{1}{s_{t+1}}\right]} \\ \Leftrightarrow E^a\left[\frac{1}{s_{t+1}}\right] &> \frac{1}{E[s_{t+1}]} \end{aligned} \quad (\text{II.95})$$

Sei nun  $s_{t+1}$  diese stochastische Variable, und sei  $\phi$  definiert als eine konstante Zahl die für eine gegebene Verteilung von  $s_{t+1}$  die folgende Gleichung erfüllt:

$$E^a\left[\frac{1}{s_{t+1}}\right] = \phi * \frac{1}{E^a[s_{t+1}]} \quad (\text{II.96})$$

mit:  $\phi > 1$

Es lässt sich dann aus Gleichung II.93 in Verbindung mit Gleichung II.96 folgern, dass der erwartete Wechselkurs in Abhängigkeit der Perspektive um  $(1/\phi < 1)$  divergiert. Ausländische Erwartungen unterschätzen den zukünftigen Wechselkurs systematisch, wenn die Erwartungen der Inländer als Maßstab gewählt werden. Konkret lässt sich durch Einsetzen von Gleichung II.96 in Gleichung II.93 folgender Zusammenhang zwischen den erwarteten Wechselkursen feststellen:

---

werden.

$$\begin{aligned}
E[s_{t+1}] &= \frac{1+i}{1+i_a} * s_t \\
&= \frac{1}{E^a \left[ \frac{1}{s_{t+1}} \right]} \\
&= \frac{1}{\phi * \frac{1}{E^a [s_{t+1}]}} \\
&= \frac{1}{\phi} * E^a [s_{t+1}]
\end{aligned}
\tag{II.97}$$

Die Gleichung II.97 kann nur erfüllt sein, wenn  $\phi=1$  oder wenn die in- und ausländischen Erwartungen bezüglich des zukünftigen Wechselkurses in Inlandsnotierung nicht übereinstimmen. Aufgrund der Jensen'schen Ungleichung kann die erste Bedingung nicht erfüllt sein, wenn der zukünftige Wechselkurs stochastisch ist. Ausländische Anleger erwarten somit einen niedrigeren zukünftigen Wechselkurs, ausgedrückt in inländischen Variablen, als Inländer. Es resultiert folglich kein Gleichgewicht, sondern die Wahl der Perspektive ist somit auch bei international gleichen Nutzenfunktionen wesentlich für den Wert des erwarteten zukünftigen Wechselkurses. Ursache für diese Divergenz ist die Existenz der Unsicherheit mit der damit verbundenen Varianz der Variablen. Ein gleichgewichtiger eindeutig erwarteter zukünftiger Wechselkurs existiert somit unter diesen Voraussetzungen nicht.<sup>194</sup>

Sinn<sup>195</sup> liefert ein anschauliches Beispiel für risikoneutrale Anleger. Sei der gegenwärtige Wechselkurs 1 DM/USD und für den Zeitpunkt t+1 die beiden Szenarien für den zukünftigen Wechselkurs 2 DM/USD und 1/2 DM/USD mit den Wahrscheinlichkeiten von jeweils 1/2 erwartet, so beträgt der erwartete Profit aus dem Kauf der Auslandswährung:

$$\begin{aligned}
\text{Profit} &= \frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{4} \\
&> 0
\end{aligned}
\tag{II.98}$$

<sup>194</sup> Diese Kritik trifft sowohl ‚continuous time CAPM‘ als auch komparativ statische Modelle, die dem hier entwickelten Modell ähnlich sind. Dumas (1994) und Engel (1996) führen diese Kritik weiter aus.

<sup>195</sup> Vgl. Sinn (1989), S. 257 - 268.

Fraglich ist nun, wie die Ausländer solch eine Situation aus ihrer Perspektive einschätzen. Sinn stellt paradoxerweise fest, dass diese Situation auch aus ausländischer Perspektive vorteilhaft ist.

Um diese Feststellung zu belegen, seien zunächst die möglichen Ausprägungen des stochastischen Profits aus ausländischer Perspektive beschrieben. Es gilt

$$2 \frac{DM}{USD} = \frac{1}{2} \frac{USD}{DM} \quad \text{und} \quad (\text{II.99})$$

$$\frac{1}{2} \frac{DM}{USD} = 2 \frac{USD}{DM} \quad (\text{II.100})$$

Die möglichen Ausprägungen sind folglich für In- und Ausländer gleich. Daraus folgt zwingend, dass die Situation gleich eingeschätzt wird, wenn die Akteure gemäß einer identischen Nutzenfunktion entscheiden. Allgemein ist festzuhalten: Der erwartete Profit des ausländischen Anlegers beträgt somit ebenfalls  $\frac{1}{4}$ .

Aus dieser Feststellung folgt, dass es für beide Anleger vorteilhaft ist, die jeweils ausländische Währung nachzufragen. Ex post gilt natürlich, dass nur ein Anleger einen Gewinn macht, während der andere einen Verlust realisiert. Als wesentliche Voraussetzung für diese Betrachtungsweise dient die Unterscheidung der Anleger nach ihrer Nationalität. Als ökonomische Begründung für dieses Kriterium kann die Funktion der Rechnungseinheit der heimischen Währung dienen. Alternativ kann von einem ausschließlichen Konsum heimisch produzierter Güter ausgegangen werden, welche mit inländischem Zahlungsmittel gekauft werden.

Wird diese Annahme aufgehoben, so dass ein Anleger die Währung, in der seine Anlageentscheidung bewertet wird, frei wählen kann, so bleibt die systematische Aussage der Bereichslösung erhalten. Roper<sup>196</sup> entwickelte einen Ansatz, in dem risikoneutrale Anleger die Rechnungswährung frei wählen können. Diese Wahlfreiheit wurde mit der Existenz von multinationalen Unternehmungen begründet, für welche kein eindeutig definiertes Heimatland bestimmt werden kann. Als Resultat stellt Roper fest, dass sich die Bandbreite für

---

<sup>196</sup> Vgl. Roper (1972), S. 157 - 170.

den zukünftigen Wechselkurs verringert. Als Bereichsgrenzen dient nun das harmonische Mittel, welches kleiner als der jeweilige Erwartungswert ist.<sup>197</sup> Sinn (1989) erweitert die Analyse auf risikoaverse in nationaler Währung rechnende Anleger bei Annahme eines stationären stochastischen Prozesses für den Wechselkurs. Anleger mit einer relativen Risikoaversion von kleiner als eins bevorzugen die Anlage ihres gesamten Vermögens im jeweiligen Ausland. Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Grad der Information des Anlegers und der Investitionshäufigkeit.<sup>198</sup> Es gilt jedoch nur bei der Analyse der mathematischen Erwartungswerte. Orientieren sich die Anleger z. B. am Median, so tritt dieses Phänomen nicht auf.<sup>199</sup>

Diese Ergebnisse der Nicht-Existenz eines Gleichgewichtes waren Gegenstand einer breiten Diskussion. Konsens scheint gegeben bei der Anerkennung dieser Resultate in der theoretischen Formulierung, jedoch mit der Einschränkung, dass die empirische Dimension dieses Ungleichgewichtes gering ist. McCulloch<sup>200</sup> unternimmt eine empirische Schätzung des Siegel-Paradoxons. Empirische Datenbasis sind die US-Dollar und brit. Pound Wechselkurse von Jan. 1921 bis Dez. 1936. Durch Taylor-Approximation der relativen erwarteten Abweichung des zukünftigen Wechselkurses vom Terminkurs resultiert:

$$E\left[\frac{s_{t+1} - f_t}{f_t}\right] = VAR\left[\frac{s_{t+1}}{f_t}\right] = \sigma^2 \quad (\text{II.101})$$

McCulloch bestimmt die Anzahl der notwendigen Beobachtungen, um ein 95% Konfidenzintervall um den Schätzer des Mittels von  $E[(s_{t+1} - f_t) / f_t]$  festzulegen, das den Wert Null nicht enthält. Aus der Abweichung der Intervallgrenze vom Mittel in Höhe von  $1,96 * \sigma^2 / n$  muss gelten:

$$H = \frac{N}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

---

<sup>197</sup> Das harmonische Mittel berechnet sich gemäß

<sup>198</sup> Diese Aussage wird von Aboudi und Thon (1993) für unterschiedliche Grade der Risikoaversion generalisiert.

<sup>199</sup> Hall (1988) untersucht den Einfluss alternativer Formen der Erwartungsbildung auf das Siegel-Paradoxon.

<sup>200</sup> Vgl. McCulloch J. (1972), S. 170 - 172.



$$\sigma^2 - 1,96 * \sigma^2 / n > 0$$

$$n > 3,92 / \sigma^2$$

Aus der beobachteten Varianz schließt McCulloch auf eine notwendige Beobachtungsdauer von 340 Jahren, bis das Siegel-Paradox empirisch beobachtbar wird. Diesem Ergebnis stimmte Siegel zu.<sup>201</sup>

Es kann resümiert werden, dass in der Literatur keine einheitliche Sichtweise zur Relevanz des Siegel-Paradoxons existiert. Zweifel an der Irrelevanz werden insbesondere im Rahmen der Analyse risikoaversen Verhaltens geäußert. Trotz dieser Diskussion bleibt dieses Problem in der komparativ statischen Untersuchung allgemeiner Gleichgewichtsmodelle unberücksichtigt. Im Gegensatz dazu existiert eine umfangreiche Literatur in der ‚continuous time‘ Modellierung der Finanzmarkttheorie, die das Siegel-Paradox explizit berücksichtigt und erklärt.<sup>202</sup> Die folgende Analyse zeigt, unter welchen Prämissen welche Erwartungen international homogen sein können. Die Aufhebung dieser notwendigen Prämissen stellt die Allgemeingültigkeit der nachfolgenden Aussagen in Frage. Dies wird insbesondere für den erwarteten nominalen Wechselkurs gezeigt.

### **3.5.2. Ausmaß und Ursachen von Erwartungsdivergenzen**

Es wird nun auf das Ergebnis der bisherigen Untersuchung aufbauend der Einfluss der Perspektive auf den erwarteten Wechselkurs untersucht. Für das Ausland erfolgt die Herleitung parallel zum bereits beschriebenen Vorgehen. Die Budgetrestriktion lautet:

---

<sup>201</sup> Vgl. Siegel (1972), S. 173 - 175.

<sup>202</sup> Vgl. Bardhan (1995), S. 446. Er zeigt die Konsistenz eines objektiv gültigen bekannten stochastischen Prozesses der Wechselkursveränderung mit divergierenden Erwartungen. Das gleiche Vorgehen findet in Kapitel III dieser Arbeit Verwendung.

$$\begin{aligned}
y_{t+1}^a &= \frac{p_{y,t+1}^a * Y_{t+1} + p_{y,t}^a * Y_t}{p_{y,t+1}^a} \\
&+ \frac{(1+i^a) * b_t^a - b_t^a + \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} * b_{t,a}^a - b_{t,a}^a}{p_{y,t+1}^a} \\
&- \frac{p_{y,t}^a * y_t^a + p_{x,a,t+1}^a * s_{t+1}^a * x_{t+1}^a + p_{x,a,t}^a * s_t^a * x_t^a}{p_{y,t+1}^a}
\end{aligned} \tag{II.102}$$

Durch die Optimierung einer Nutzenfunktion mit vergleichbaren Eigenschaften erhält man die Formulierung der ungedeckten Zinsparität aus ausländischer Perspektive. Es gilt:<sup>203</sup>

$$E^a \left[ \frac{1}{s_{t+1}} \right] = \frac{1 + \varpi^a * i_a}{s_t * (1+i)} - \frac{COV \left[ \frac{1}{s_{t+1}}, \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]} \tag{II.103}$$

Die Inlandsperspektive sei hier, leicht modifiziert, wiederholt:<sup>204</sup>

$$E[s_{t+1}] = \frac{s_t * (1+i * \varpi)}{(1+i_a)} - \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \tag{II.104}$$

Diese beiden Gleichungen (II.103 und II.104) beschreiben die Optimalbedingungen für internationale Konsum- und Anlageentscheidungen aus Inlands- und Auslandsperspektive. Wie aus der Formulierung ersichtlich ist, wurden sämtliche Variablen aus der Inlandsperspektive formuliert. Es wurde weiterhin für beide Anleger ein gleiches ‚choice set‘ und eine gleiche Präferenzordnung angenommen, so dass Divergenzen ausschließlich aus der unterschiedlichen Perspektive entstehen können.

<sup>203</sup> Die Herleitung dieser Bedingung erfolgt in Appendix 2.

<sup>204</sup> Die ersten beiden Terme der rechten Gleichungsseite wurden zusammengefasst und vereinfacht.

Zunächst ist allgemein festzustellen, dass gemäß der Definition eines Arbitragegleichgewichts keine sicheren Gewinnmöglichkeiten existieren können. Dies ist die grundlegende Aussage der Zinsparität. Im Rahmen der Besprechung des Siegel-Paradoxons wurde die Möglichkeit von Arbitragemöglichkeiten im Gleichgewicht eingeräumt, selbst wenn Anleger rational gemäß der Forderungen der Zinsparität handeln.

Diese Folgerung lässt sich nun auf die in Schritt 4 und die in Appendix 2 hergeleitete Gleichgewichtsbedingungen anwenden. Im Rahmen des hier entwickelten Modells lässt sich das Ausmaß der Erwartungsunterschiede feststellen. Dazu werden die Gleichgewichtsbedingungen aus Inlands- und Auslandssicht (Gleichungen II.103 und II.104) miteinander multipliziert. Man erhält:

$$E^a \left[ \frac{1}{s_{t+1}} \right] * E[s_{t+1}] = \left\{ \frac{1 + \varpi^a * i_a}{s_t * (1 + i)} - \frac{COV \left[ \frac{1}{s_{t+1}}, \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]} \right\} * \left\{ \frac{s_t * (1 + \varpi * i)}{1 + i_a} - \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \right\} \quad (\text{II.105})$$

Verwendet man die bereits in Step 1 hergeleitete Gleichung II.96:

$$E[s_{t+1}] = \frac{1}{\phi} * E^a[s_{t+1}] \quad (\text{II.97})$$

so lässt sich die linke Seite der von Gleichung II.105 schreiben durch:

$$E^a \left[ \frac{1}{s_{t+1}} \right] * E[s_{t+1}] = \phi * \frac{1}{E[s_{t+1}]} * E[s_{t+1}] = \phi \quad (\text{II.106})$$

Die linke Gleichungsseite repräsentiert folglich die Divergenz der Erwartungen, die sich auf die divergierende Länderperspektive zurückführen lässt. Die rechte Gleichungsseite liefert eine Beschreibung der Erwartungsdivergenz unter Verwendung der Modellvariablen. Damit lässt sich die Divergenz zumindest qualitativ beschreiben.

Diese nähere Beschreibung soll nun vorgenommen werden. Die rechte Gleichungsseite von II.105 repräsentiert das Produkt zweier Summen und lässt sich folglich allgemein unter Verwendung von drei Termen beschreiben. Der erste Term repräsentiert das Produkt der jeweils ersten Klammerterme und wird beschrieben durch  $\phi^1$ , während das Produkt der jeweils letzten Terme der Klammern beschrieben wird durch  $\phi^2$ . Schließlich lässt sich die Summe der Kreuzprodukte repräsentieren durch  $\phi^3$ . Für diese drei Terme gilt:

$$\phi = \phi^1 + \phi^2 + \phi^3. \quad (\text{II.107})$$

Sie werden nun separat beschrieben.

Die erste Komponente in II.107 ist ausschließlich von der Ausgangssituation abhängig. Man erhält sie unter Annahme vollständiger Sicherheit, so dass die Kovarianz gleich Null ist, aus Gleichung II.105. Es gilt:

$$\phi^1 = \left\{ \frac{1 + \varpi^a * i_a}{s_t * (1 + i)} + 0 \right\} * \left\{ \frac{s_t * (1 + \varpi * i)}{1 + i_a} + 0 \right\} \quad (\text{II.108})$$

Allgemein ist festzustellen, dass die linke Seite bei internationaler Konsistenz der ‚sicheren Erwartungen‘ den Wert eins besitzt. Die rechte Seite in Gleichung II.108 beschreibt nun die Ursachen der Inkonsistenz. Es gilt:

$$\phi^1 = \frac{1 + \varpi^a * i_a}{1 + i} * \frac{1 + \varpi * i}{1 + i_a} \quad (\text{II.109})$$

Befinden sich sowohl der inländische als auch der ausländische Gütermarkt im Gleichgewicht, so dass  $\varpi = \varpi^a = 1$  gilt, so reduziert sich diese Gleichung auf die Bedingung

$\phi^1 = 1$ . Das Siegel-Paradoxon wird nicht wirksam, und es ist ein Gleichgewicht möglich. Dieses Ergebnis ist mit der Darstellung im obigen Abschnitt konform, da dort ausschließlich eine positive Varianz vorausgesetzt wurde, um eine Divergenz der Perspektiven herzuleiten. Die Ausprägung eines beobachtbaren Preises war dagegen nicht relevant.

Die zweite Komponente in Gleichung II.107 sei als  $\phi^2$  definiert, und beschreibt den Einfluss der Unsicherheit auf eine Inkonsistenz internationaler Erwartungen.<sup>205</sup>  $\phi^2$  besitzt nicht den Wert Null, wenn Preise und Wechselkurs stochastisch und korreliert sind. Es wird klar, dass das Ausmaß der Divergenz nicht aus einer separaten Analyse des anfänglichen Ungleichgewichtes und der Unsicherheit bestimmt werden kann.  $\phi^1$  und  $\phi^2$  sind beide vom Gleichgewicht in der Ausgangssituation abhängig, so dass eine Unsicherheit mit dem Ausgangsungleichgewicht als Gewichtungsfaktor in die Divergenz eingeht.

Die dritte Komponente  $\phi^3$  in Gleichung II.107 hängt ausschließlich vom Ausmaß der Unsicherheit ab und errechnet sich aus dem Produkt der Kovarianzbeziehungen (die jeweils zweiten Terme der beiden Klammern).

Als Fazit lässt sich folgendes feststellen. Eine Abweichung des erwarteten Wechselkurses von der Gleichgewichtsbedingung der UIP ist prinzipiell mit einem Optimierungsverhalten der Anleger vereinbar. Unter den hier gemachten Prämissen beträgt sie  $(\phi = \phi^1 + \phi^2 + \phi^3)$ . Außerdem ist eine Erfüllung der Gleichgewichtsforderung nicht gleichbedeutend mit einem Arbitrageoptimum. Abweichungen von der Kaufkraftparität in der Ausgangssituation und die Unsicherheit der Preise können sich gegenseitig kompensieren und somit die Zinsparität erfüllt erscheinen lassen ( $\phi = 1 = \phi^1 + \phi^2 + \phi^3$ , mit  $\phi^1 \neq 1$  und  $\phi^2, \phi^3 \neq 0$ ).

Während die bisherige Analyse auf die Ursachen von Erwartungsdivergenzen abstellte, lassen sich Voraussetzungen identifizieren, unter denen sich international konsistente Erwartungsbildung formulieren lässt. Es gilt:

---

<sup>205</sup> Sie berechnet sich aus der Ursprungsgleichung aus der Summe des Produktes des ersten Terms der ersten Klammer mit dem zweiten Term der zweiten Klammer und des zweiten Terms der ersten Klammer mit dem ersten Term der zweiten Klammer.

Sind die Güterpreise international stochastisch und die Kaufkraftparität in ihrer ex-post Version immer erfüllt, so sind die **internationalen Erwartungen konsistent**, wenn die Akteure gemäß einer identischen Präferenzordnung agieren und risikoneutral sind.

Die Richtigkeit dieser Aussage wird nun nachgewiesen, indem auf Basis der eingangs in diesem Step genannten Gleichgewichtsbedingungen jeweils separat eine Gleichgewichtsbeziehung unter Verwendung der genannten Voraussetzungen formuliert wird. Anschließend werden diese Gleichgewichtsbedingungen miteinander verglichen.

Zunächst sei die Auslandsperspektive analysiert. Aus der Ursprungsgleichung für die ausländische Perspektive (Gleichung II.103) folgt bei ausgeglichenem Gütermarkt ( $\varpi^a=1$ ) und

unter Verwendung des Terminkurses  $f_t^a = \frac{1+i^a}{1+i_a^a} s_t^a$  nach Multiplikation mit  $E^a \left[ \frac{1}{P_{y,t+1}^a} \right]$ :

$$E^a \left[ s_{t+1}^a \right] E^a \left[ \frac{1}{P_{y,t+1}^a} \right] = E^a \left[ \frac{1}{P_{y,t+1}^a} \right] f_t^a - COV \left[ s_{t+1}^a, \frac{1}{P_{y,t+1}^a} \right] \quad (\text{II.110})$$

Nach Addition der Kovarianz von beiden Seiten und unter Verwendung der Definitionsgleichung der Kovarianz (Gleichung II.50) folgt aus Gleichung II.110:

$$E^a \left[ \frac{s_{t+1}^a}{P_{y,t+1}^a} \right] = E^a \left[ \frac{f_t^a}{P_{y,t+1}^a} \right] \quad (\text{II.111})$$

Die Variablen werden nun in Inlandsperspektive transformiert. Ist die Kaufkraftparität erfüllt,

so gilt  $P_{y,t+1}^a = \frac{P_{x,t+1}}{s_{t+1}}$ . Weiterhin gilt  $s_{t+1}^a = \frac{1}{s_{t+1}}$  und  $f_t^a = \frac{1}{f_t}$ .

Nach dem Einsetzen dieser Bedingungen in Gleichung II.111 gilt:

$$E^a \left[ \frac{1/s_{t+1}}{p_{x,t+1}/s_{t+1}} \right] = E^a \left[ \frac{1/f_t}{p_{x,t+1}/s_{t+1}} \right] \quad (\text{II.112})$$

Nach Kürzen von ‚ $s_{t+1}$ ‘ und unter Verwendung der Nicht-Stochastik des Terminkurses folgt:

$$E^a \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] = 1/f_t E^a \left[ \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] \quad (\text{II.113})$$

Nach Multiplikation mit dem Terminkurs folgt:

$$E^a \left[ \frac{f_t}{p_{x,t+1}} \right] = E^a \left[ \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] \quad (\text{II.114})$$

Diese Erwartung kann mit der Erwartung der Inländer verglichen werden.

Um einen Vergleich zu ermöglichen, wird nun von der eingangs in diesem Step genannten Gleichgewichtsbedingung (Gleichung II.104) unter den gleichen Voraussetzungen ebenfalls eine neue Gleichgewichtsbeziehung formuliert. Ausgehend von der Formulierung der Inlandsperspektive gilt bei Verwendung der Kaufkraftparität:

$$\begin{aligned} E[s_{t+1}] &= \frac{s_t * (1+i^* \varpi)}{(1+i_a)} - \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\ &= f_t - \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \end{aligned} \quad (\text{II.115})$$

Nach Multiplikation mit dem erwarteten inversen zukünftigen Preis des Gutes x und unter Verwendung der Definition der Kovarianz gilt:

$$E \left[ \frac{S_{t+1}}{P_{x,t+1}} \right] = E \left[ \frac{f_t}{P_{x,t+1}} \right] \quad (\text{II.116})$$

Ein Vergleich der Gleichungen II.116 und II.114 zeigt, dass die Erwartungen der in- und ausländischen Anleger hinsichtlich des normierten erwarteten Wechselkurses identisch sind. Dieses Ergebnis wurde in der Literatur als Argument gegen die Relevanz des Siegel-Paradoxons angeführt.<sup>206</sup>

Die so formulierte Konsistenzbehauptung bezieht sich jedoch nicht auf den erwarteten nominalen Wechselkurs. Folglich bleibt das Siegel-Paradoxon für die Untersuchung der Prognosefähigkeit des Terminkurses relevant.

Weiterhin ist einschränkend festzustellen, dass diese konsistente Erwartungsbildung nur unter sehr einschränkenden Bedingungen gilt. So wurde einerseits die Erfüllung der Kaufkraftparität vorausgesetzt. Ihre Nichterfüllung hat gemäß der hier durchgeführten Analyse einen systematischen Einfluss auf die Divergenz des erwarteten nominalen zukünftigen Wechselkurses in Abhängigkeit der Perspektive.

Schließlich wurde in der obigen Argumentation von risikoneutralem Verhalten ausgegangen. Diese Prämisse wird im folgenden Abschnitt aufgehoben und der Einfluss risikoaversen Verhaltens auf diese Erwartungsdivergenz modelliert. Besondere Berücksichtigung finden dabei die Auswirkungen von risikoaversen Verhalten auf die Divergenz der Erwartungen und damit auf den Aussagewert dieser internationalen komparativ statischen Modelle.

---

<sup>206</sup> Vgl. Adler und Dumas (1984).



### **3.6. Das Verhalten der Arbitrageure bei Risikoaversion**

#### **3.6.1. Die Herleitung der ungedeckten Zinsparität bei risikoaverser Anlegerverhalten**

Die bisherige Analyse ging von risikoneutralem Verhalten aus, das als konstanter Grenznutzen des Konsums einging, also eine direkte Nutzenfunktion verwendete um Abweichungen von der Kaufkraftparität sinnvoll abbilden zu können. Die Untersuchung der Auswirkungen von Gütermarktgleichgewichten auf eine Risikoprämie verlangt die Berücksichtigung risikoaversen Verhaltens. Das analytische Vorgehen des vorigen Abschnittes bleibt erhalten, aber der Rechenaufwand wird größer und die Interpretation der resultierenden Gleichgewichtsbedingung komplexer. Aus diesem Grund wird für die Herleitung der Inlandsperspektive auf Appendix 3 und für die Auslandsperspektive auf Appendix 4 verwiesen.

Ausgangspunkt waren wieder die Optimalbedingungen (1) bis (5) des vorangehenden Kapitels.<sup>207</sup> Da nun von Risikoaversion ausgegangen wird, was einer konkaven Nutzenfunktion entspricht, sind die Grenznutzen des Güterkonsums nicht konstant. Ziel war eine geeignete Umformung der Optimalbedingungen, so dass eine Relation zwischen erwartetem Wechselkurs und Terminkurs hergeleitet werden kann.

Die resultierende Gleichgewichtsrelation bei risikoaverser Anlegerverhalten lautet:

---

<sup>207</sup> Alternativ zu diesem Arbitrageansatz leiten Modelle in der Tradition von Lucas (1982), S. 335 – 360 eine Risikoprämie aus einem allgemeinen Gleichgewichtsmodell her.

$$\begin{aligned}
E[s_{t+1}] = & f_t - \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} + \frac{\vartheta * (\varpi - 1) * i * s_t}{1 + i_a} \\
& 1 - \frac{s_t * p_{y,a,t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}} \\
& + \frac{f_t * \frac{s_t * p_{y,a,t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}}}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}}} \\
& - \frac{\frac{s_t * p_{y,a,t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right]}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}}}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}}}
\end{aligned} \tag{II.117}$$

In dieser Gleichung beschreibt die Variable ‚ $\varpi$ ‘ wieder das Gütermarktgleichgewicht, während die Variable ‚ $\vartheta$ ‘ das Kapitalmarktgleichgewicht repräsentiert. Wie im Appendix bereits ausgeführt wurde, beschreibt ‚ $\vartheta$ ‘ den Quotienten der Grenznutzen einer inländischen zu einer ausländischen Investition.

Die erste Zeile dieser Gleichung beschreibt, bei konstantem Grenznutzen, die bekannte Gleichgewichtsbedingung bei risikoneutralem Verhalten. Die Zeilen 2 und 3 sind folglich eindeutig auf die Risikoaversion des Akteurs zurückführbar und beschreiben Teile der Risikoprämie. Der letzte Term in Zeile 1 obiger Gleichung repräsentiert Abweichungen des Terminkurses von erwarteten Wechselkurs, die sowohl auf den Gütermarkt als auch auf die Risikoaversion zurückzuführen sind. Daraus folgt, dass die Risikoprämie aus obiger Formel nicht direkt identifizierbar ist.

Als weiteres Teilergebnis ist erkennbar, dass sich Auswirkungen von Gütermarkt- und Kapitalmarktungleichgewichten im Optimierungsmodell nicht trennen lassen. Der Effekt einer Gütermarktstörung hängt im obigen Modell immer vom Ausmaß der Kapitalmarktstörung, der Höhe der inländischen und ausländischen Zinsen, dem Grad der Unsicherheit und der Risikoneigung ab. Der Wirkung einer Kapitalmarktstörung auf die

Divergenz von Termin- und erwartetem Wechselkurs hängt immer von der Höhe der Gütermarktstörung, den in- und ausländischen Zinsen und dem Wechselkurs in der Ausgangssituation ab. Die in der Einleitung formulierte Trennung von Gütermarkt- und Kapitalmarktstörungen sowie die dort vorgenommene Interpretation von Abweichungen der einzelnen Paritätenforderungen ist im intertemporalen Optimierungsmodell nicht möglich.

Schließlich ist es prinzipiell denkbar, dass die rechte Gleichungsseite konstant bleibt, jedoch Güter- und Kapitalmarkt nicht im Gleichgewicht sind, so dass sich die Störungen gegenseitig aufheben. Eine konstante Abweichung des Terminkurses vom erwarteten Wechselkurs lässt keine zwingenden Rückschlüsse auf die Güter- und Kapitalmärkte zu. Eine Interpretation der internationalen Paritäten (Kaufkraftparität, gedeckte und ungedeckte Zinsparität) ist somit nur simultan und nicht isoliert möglich. Diese Feststellung stimmt mit den in Kapitel I Abschnitt 1 gemachten Ausführungen überein.

Grundsätzlich bleibt festzustellen, dass obige Gleichung kaum sinnvoll zu interpretieren ist. Werden die gesetzten Prämissen jedoch als realitätsnah charakterisiert, so ist diese Gleichung für eine empirische Überprüfung heranzuziehen. Die einfacher interpretierbaren Gleichgewichtsbeziehungen, die in der Literaturübersicht des Abschnitts 2 (im Kapitel II) dargestellt wurden, müssen somit verzerrte empirische Resultate liefern. Es erscheint fraglich, ob solche Modelle einen nachhaltigen Beitrag zur Erklärung der Prognosefähigkeit des Terminkurses liefern können. Diese Kritik wird in Kapitel III aufgegriffen.

Im folgenden wird gezeigt, dass sich durch das Setzen von vereinfachenden Annahmen die Gleichung II.117 auf die aus der Literatur bekannten Ergebnisse reduzieren lässt. Sie ist folglich in dieser Hinsicht konsistent. Weiterhin wird durch alternative Prämissensetzung die Interpretierbarkeit obiger Gleichung unter Verwendung der Ergebnisse des Abschnitts 2 (im Kapitel II) erleichtert.

### 3.6.2. Ökonomische Interpretation der Bedingungen des intertemporalen Optimierungsgleichgewichtes

Im folgenden werden 2 Fallstudien zur Analyse der Prognosefähigkeit des Terminkurses dargestellt.

In der ersten Fallstudie wird die Konsistenz dieser neuen Gleichgewichtsbedingung mit den vorangehenden Ergebnissen gezeigt. Darauf aufbauend wird die Veränderung des erwarteten Wechselkurses bei Erfüllung der Kaufkraftparität abgeleitet, die auf die Risikoaversion zurückgeht. Die Risikoprämie wird in diesem Rahmen unter Berücksichtigung der Existenz einer Unsicherheitsprämie bestimmt. Als zusätzliche Einschränkung wird die Risikoprämie bei konstanten Preisen und Gültigkeit der Kaufkraftparität dargestellt. Es wird ersichtlich, dass auch in diesem Fall  $RP \neq 0$  gilt. Schließlich wird der Einfluss von Gütermarktgleichgewichten auf die Risikoprämie gezeigt.

Die zweite Fallstudie beschäftigt sich mit der ökonomischen Interpretation der Risikoaversion. Diese ist in der ersten Fallstudie kaum zu leisten, da sie in der Kovarianz des abdiskontierten Grenznutzens mit den stochastischen Variablen zum Ausdruck kommt. Wird von ausgeglichenen Gütermärkten ausgegangen, so kann durch geeignete Umformungen die Risikoaversion sinnvoll interpretiert werden.

#### 3.6.2.1. Die erste Fallstudie

Befinden sich weiterhin sämtliche Märkte im Gleichgewicht,  $\vartheta * (\varpi - 1) = 0$ , und sind die Akteure risikoneutral (sämtliche Kovarianzen nehmen aufgrund des konstanten Grenznutzens den Wert Null an), so entspricht der erwartete Kassakurs bei Gültigkeit der gedeckten Zinsparität dem Terminkurs und einer Unsicherheitsprämie.<sup>208</sup> Damit wird aus Gleichung II.117 die bekannte Gleichgewichtsbedingung für den risikoneutralen Anleger:<sup>209</sup>

---

<sup>208</sup> Es sei daran erinnert, dass die Unsicherheitsprämie den Einfluss der Kovarianz von Güterpreisen und Wechselkurs auf den Erwartungswert des zukünftigen Wechselkurses abbildet. Folglich tritt dieser Effekt, der die Prognosefähigkeit des Terminkurses beeinflusst, auch bei risikoneutralem Verhalten auf und ist von einer Risikoprämie zu trennen.

<sup>209</sup> Aufgrund der KKP Bedingung erübrigt sich eine Unterscheidung der Preise von Gut ‚x‘ und ‚y‘. Gleichung II.79 enthält diese Unterscheidung (aus Gründen der Konsistenz). Die Aussage beider Gleichungen ist jedoch

$$E[s_{t+1}] = f_t - \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{t+1}}\right]} \quad (\text{II.118})$$

Die Variable ‚p‘ beschreibt hier einen Preisindex, der entweder dem Preis des inländischen Gutes oder des in Inlandswährung umgerechneten Preises des ausländischen Gutes entspricht. Die Erfüllung der PPP in ihrer ex-post Formulierung erlaubt diese Vereinfachung.

In der empirischen Literatur wird eine Risikoprämie meist als Abweichung des tatsächlich realisierten Wechselkurses vom Terminkurs, der sich auf den entsprechenden Zeitpunkt bezieht, definiert. Soll nun eine theoretisch fundierte Risikoprämie mit der üblichen Definition aus der empirischen Literatur übereinstimmen, so müsste der zweite Term der obigen Gleichung (die Unsicherheitsprämie) gleich Null werden. Dies ist möglich, wenn Wechselkurs und inverses Preisniveau nicht korreliert sind. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn eine der beiden Variablen nicht stochastisch ist. Da ein nicht stochastischer Wechselkurs dem Ziel dieser Arbeit den Sinn nehmen würde, wird der Fall der nicht stochastischen Preise untersucht.

Diese Prämisse der unkorrelierten Preise mit dem Wechselkurses (hier vereinfachend mit konstanten Preisen übersetzt) macht den Terminkurs zum unverzerrten Prediktor des erwarteten Wechselkurses bei Risikoneutralität. Sie beeinflusst jedoch ebenfalls die Höhe der Risikoprämie, so dass die Relevanz der meisten empirischen Arbeiten für eine allgemeine Aussage zur Risikoprämie fraglich ist.

Die Beeinflussung der Risikoprämie durch die Prämisse konstanter Inlandspreise sowie gleichgewichtiger Märkte soll nun dargestellt werden. Eine theoretisch fundierte Risikoprämie bestimmt sich wie folgt:  $RP = E_{RA}[s_{t+1}] - E_{RN}[s_{t+1}]$ .<sup>210</sup> Unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingung bei risikoneutralen Verhalten (Gleichung II.79) folgt für die

---

identisch.

<sup>210</sup> Durch den Index ‚RA‘ bzw. ‚RN‘ wird eine Unterscheidung der Erwartungsbildung bei risikoaverssem Verhalten von derjenigen bei risikoneutralem Verhalten unterschieden.

Risikoprämie unter Verwendung von Gleichung II.117 und der in dieser Fallstudie genannten Annahmen:

$$RP = \frac{f_t * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{t+1}} \right]}{1 - COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{t+1}} \right]} - \frac{COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{t+1}} \right]}{1 - COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{t+1}} \right]} \quad (\text{II.119})$$

Diese Risikoprämie sei nun ökonomisch interpretiert: Dazu wird wieder das bekannte Verfahren angewendet, dass einen Vergleich mit der einfachsten Situation vornimmt, in der von risikoneutralem Verhalten, ausgeglichenen Märkten und konstanten Preisen ausgegangen wird. Kurz: Benchmark sei die unverzerrte Prognosefähigkeit des Terminkurses.

Für einen Vergleich wird nun von den gleichen Prämissen ausgegangen, jedoch mit Ausnahme der hier getroffenen Annahme von risikoaversen Verhalten. Die Prämisse der konstanten Inlandspreise impliziert, dass, aufgrund der Kaufkraftparität, eine Wechselkursänderung exakt von einer Preisänderung des ausländischen Gutes in Auslandswährung ausgeglichen wird. Damit gelten folgende drei Konsequenzen: Erstens ist der Realzins der Inlandsanlage aufgrund der konstanten Inlandspreise nicht stochastisch. Außerdem ist der Preis des Auslandsgutes in Inlandswährung aufgrund der Kaufkraftparität in Verbindung mit dem konstanten Preis des Inlandsgutes nicht stochastisch. Daraus folgt drittens, dass die einzige Quelle von realer Unsicherheit, die für einen rational handelnden Akteur relevant ist, durch eine Anlage im Ausland entsteht, die in Nominalwerten getätigt wird. So hängt der Ertrag der Auslandsanlage vom Wechselkurs, jedoch nicht vom ausländischen Preisniveau ab.

In der obigen Formel wirkt diese Annahme wie folgt. Die Kovarianz des abdiskontierten Grenznutzens des Gutes ‚x‘ mit dem inversen zukünftigen Preisniveau verschwindet, da letzteres konstant ist. Damit erhält der Nenner den Wert Eins und der zweite Term der rechten Gleichungsseite wird Null. Außerdem lässt sich der Preis aus der Kovarianz des Zählers des ersten Terms vorziehen. Damit berechnet sich die Risikoprämie wie folgt:

$$RP = - \frac{COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, s_{t+1} \right]}{P_{t+1}} \quad (\text{II.120})$$

Dieser Term kann als Risikoprämie für eine Unsicherheit in den realen Konsummöglichkeiten interpretiert werden, die eine Wechselkursänderung aufgrund der Auslandsinvestition bewirkt.

Zunächst sei ein (ungünstiges) Szenario charakterisiert: Es gilt aufgrund der Annahme des abnehmenden Grenznutzens, dass ein gestiegener Grenznutzen auf eine geringere konsumierte Gütermenge schließen lässt. Da der Grenznutzen annahmegemäß immer positiv ist, ist eine reduzierte Konsummenge als ungünstiges Szenario zu charakterisieren. Diese Einschätzung gilt insbesondere im vorliegenden Fall der erfüllten Kaufkraftparität, da die Grenznutzen des jeweiligen Güterkonsums gleich sind. Eine separate Analyse der Grenznutzen von Gut ‚x‘ und Gut ‚y‘ ist somit obsolet. Für die obige Gleichung folgt aus diesen Überlegungen, dass ein negatives Szenario notwendigerweise mit einem gestiegenen (abdiskontierten) Grenznutzen einhergehen muss.

Weiterhin sei nun die Wechselkursveränderung hinsichtlich ihrer Vorteilhaftigkeit charakterisiert: Es wurden eingangs die Prämisse der Kaufkraftparität sowie der konstanten Inlandspreise gesetzt, um zu obiger vereinfachter Beschreibung der Risikoprämie zu gelangen. Wie bereits festgestellt, folgt aus diesen Prämissen, dass die Inlandsinvestition real sicher ist. Die Auslandsinvestition ist es jedoch nicht. Eine Ausprägung des zukünftigen Wechselkurses unter seinem Erwartungswert reduziert vielmehr das nominale Budget in Inlandswährung und, aufgrund der konstanten Inlandspreise, auch das reale Budget und damit die Konsummöglichkeiten. Aus diesen Überlegungen folgt, dass in obiger Beschreibung der Risikoprämie für die Kovarianz gilt

$$COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, s_{t+1} \right] < 0$$

Da die Preise nur für positive Werte definiert sind, gilt aufgrund der Beschreibung der Risikoprämie, dass der gleichgewichtige erwartete Wechselkurs den Terminkurs übersteigt.

Wird wieder der Vergleich mit dem Gleichgewicht bei konstanten Preisen, risikoneutralem Verhalten und ausgeglichenem Gütermarkt gezogen, so ist festzustellen, dass aufgrund der Risikoaversion eine positive Abweichung des erwarteten Wechselkurses vom Terminkurs im Gleichgewicht gilt. Diese Abweichung liegt darin begründet, dass im Gegensatz zur Inlandsanlage, die Auslandsanlage mit einer realen Unsicherheit verbunden ist. Für diese reale Unsicherheit verlangen risikoaverse Akteure einen zusätzlichen Ertrag, die Risikoprämie. Es ist somit festzustellen, dass die allgemeine Gleichgewichtsbedingung sowohl mit den übrigen Ergebnissen des Abschnitts 2 als auch mit den Erkenntnissen aus der Literatur konsistent ist.

Ändert sich der Wechselkurs, so beeinflusst diese Änderung die Konsummenge zum Zeitpunkt  $t+1$ . Diese Mengenänderung bewirkt eine Änderung des abdiskontierten Grenznutzens aufgrund der ursprünglich erläuterten Prämisse des abnehmenden Grenznutzens, also einer konkaven Nutzenfunktion. Eine Risikoprämie, die von rationalen und an realen Variablen orientierten Akteuren verlangt wird, berücksichtigt eine reale Änderung auf die Konsummenge. Da die Wechselkursänderung in nominalen Einheiten ausgedrückt ist, muss innerhalb dieser Kovarianz der Wechselkurs in eine reale Größe durch Division mit dem zukünftigen Preisniveau umgerechnet werden. Da dieser annahmegemäß konstant ist, kann er aus der Kovarianz vorgezogen werden. Die Risikoprämie ist somit vollständig erklärt.

In den Schritten 4 und 5 wurde gezeigt, dass in einigen Fällen die Aussagen von internationalen komparativ statischen Modellen von der gewählten Perspektive abhängen, und damit inkonsistent mit Bezug auf die Gleichgewichtsdefinition sind. Aufgrund dieser Feststellungen wird nun gezeigt, wie unter den genannten Prämissen die Risikoaversion auf die Inkonsistenz der Gleichgewichtsbedingungen wirkt. Dazu wird diese aus Inlandssicht bestimmte Risikoprämie mit der Risikoprämie aus Auslandsperspektive verglichen, die aus dem gleichen Szenario resultiert. Für die ausländische Risikoprämie gilt allgemein:<sup>211</sup>

---

<sup>211</sup> Vgl. Appendix 4.



$$RP^a = \frac{\frac{1}{f_t} COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{t+1}^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{s_{t+1} * p_{t+1}^a} \right]}{1 - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{t+1}^a} \right]} \quad (\text{II.121})$$

Werden nun unter Verwendung der Kaufkraftparität die Preise in Inlandspreisen beschrieben, so resultiert aus Gleichung II.121:

$$RP^a = \frac{\frac{1}{f_t} COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}}{p_{t+1}} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{t+1}} \right]}{1 - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}}{p_{t+1}} \right]} \quad (\text{II.122})$$

Diese Gleichung wird nun unter Verwendung der bereits beschriebenen Prämissen vereinfacht. Da die PPP gelten soll und der Inlandspreis des Inlandes annahmegemäß konstant

ist  $\bar{p} = p_{x,t} = p_{x,t+1} = s_{t+1} * p_{t+1}^a$ , besitzt die zweite Kovarianz der rechten Gleichungsseite den

Wert Null. Weiterhin kann das Auslandspreisniveau ersetzt werden durch:  $p_{t+1}^a = \frac{p_{t+1}}{s_{t+1}}$ . Es folgt somit bei Konstanz des Inlandspreises:

$$\begin{aligned} RP^a &= -\frac{1}{f_t} \frac{COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}}{p_{t+1}} \right]}{1 + COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}}{p_{t+1}} \right]} \\ &= -\frac{1}{f_t} \frac{\frac{1}{p_{t+1}} COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, s_{t+1} \right]}{1 + \frac{1}{p_{t+1}} COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, s_{t+1} \right]} \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

Sind die internationalen Anleger nicht nur in ihrer Nutzenfunktion, sondern auch in ihrer Vermögenshöhe und der Konsumaufteilung gleich,<sup>212</sup> so kann zumindest annähernd von der

<sup>212</sup> Diese Annahme wird im Lucas Modell getroffen. Lucas schließt daraus auf eine gleichmäßige Aufteilung der Unsicherheit auf beide Länder. Hier wird deutlich, dass der Preis für dieses Risiko jedoch nicht identisch ist. Die

Identität  $\beta \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}}$  ausgegangen werden. Nach dem Einsetzen in obige Gleichung ist folgendes festzustellen:

$$RP^a = -\frac{1}{f_t} \frac{\frac{1}{p_{t+1}} COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, s_{t+1} \right]}{1 + \frac{1}{p_{t+1}} COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, s_{t+1} \right]} \quad (\text{II.124})$$

Der Vergleich von inländischer und ausländischer gleichgewichtiger Risikoprämie zeigt, dass das intertemporale Modell zwar das intuitiv plausibel entgegengesetzte Vorzeichen der Risikoprämie aufzeigt, jedoch nicht die gleiche Größe. Bei risikoaversen Verhalten ist eine international konsistente Gleichgewichtsbedingung folglich nicht möglich.

Weiterhin lassen sich bezogen auf diese Fallstudie die Risikoprämien beschreiben durch:

$$RP^a = -\frac{1}{f_t} \frac{RP}{1 + RP} \quad (\text{II.125})$$

Es ist anhand dieser Gleichung möglich, auf Basis einer bekannten Risikoprämie unter Verwendung des Terminkurses, die Risikoprämie aus der jeweils anderen Perspektive zu bestimmen. Dadurch wird eine Einschätzung des Ausmaßes der Inkonsistenz zumindest in diesem einfachen Fall möglich.

---

Ursache liegt in der hier fehlenden Möglichkeit des Erwerbs von Ansprüchen auf den zukünftigen ausländischen Output, der im Lucas Modell möglich ist.

### 3.6.2.2. Die zweite Fallstudie

Ausgangspunkt sei wiederum die ursprüngliche allgemeine Gleichgewichtsbeschreibung. In ihr wird der Grad der Risikoaversion durch die Kovarianz des abdiskontierten Grenznutzens mit den zukünftigen Ausprägungen der stochastischen Variablen beschrieben. Eine ökonomische Interpretation dieser Beschreibung ist jedoch schwierig.

Ziel dieser Fallstudie ist es, die ökonomische Interpretation der Risikoprämie zu vereinfachen. Dazu wird vereinfachend von einem Gütermarktgleichgewicht ausgegangen. Als Konsequenz verschwindet der letzte Term der ersten Zeile der rechten Gleichungsseite in der oben genannten Bedingung. Auf die ursprüngliche Gleichgewichtsforderung II.117 wird nun Stein's Lemma angewendet, das besagt:

$$COV[p, h(x)] = E[h'(x)] * COV[p, x] \text{ } ^{213}$$

Dieses Lemma wird nun wie folgt angewendet: Die Funktion ,h' sei der abdiskontierte Grenznutzen, ,p' sei der zukünftige Güterpreis und ,x' sei die zukünftige Konsummenge des Gutes. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung II.117 wird nach den entsprechenden Umformungen zu:

---

<sup>213</sup> Vgl. zu Stein's Lemma Ingersoll (1987), S. 13.

$$\begin{aligned}
E[s_{t+1}] = & f_t - \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} + \\
& + \frac{f_t * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial x_t} * \beta * E\left[\frac{\partial^2 U_{t+1}}{\partial [x_{t+1}]^2}\right] * COV\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial x_t} * \beta * E\left[\frac{\partial^2 U_{t+1}}{\partial [x_{t+1}]^2}\right] * COV\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
& - \frac{\frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial x_t} * E[\beta * \frac{\partial^2 U_{t+1}}{\partial [x_{t+1}]^2}] * COV\left[x_{t+1}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial x_t} * \beta * E\left[\frac{\partial^2 U_{t+1}}{\partial [x_{t+1}]^2}\right] * COV\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}
\end{aligned} \tag{II.126}$$

Es sei nun die absolute Risikoaversion definiert als Quotient der zweiten durch die erste Ableitung der Nutzenfunktion, wie bereits im Abschnitt 1 ausgeführt wurde. Es gilt<sup>214</sup>

$$\begin{aligned}
ARA = & -\beta * \frac{\partial^2 U_{t+1} / \partial^2 x_{t+1}}{\partial U_{t+1} / \partial x_t} \\
= & -\frac{\partial^2 U_t / \partial^2 x_t}{\partial U_t / \partial x_t}
\end{aligned} \tag{II.127}$$

Durch Vorziehen von  $s_t * p_{y,a,t} * COV\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]$  im Nenner und Kürzen mit dem Zähler ist eine weitere Vereinfachung möglich. Damit wird Gleichung II.126 zu folgender Forderung.

<sup>214</sup> Die Definition der absoluten Risikoaversion (ARA) wurde in ihren grundsätzlichen Eigenschaften ausführlich in Abschnitt 1.1.1 besprochen. Dort wurde, vereinfachend, eine indirekte Nutzenfunktion verwendet, während in diesem Zusammenhang eine direkte Nutzenfunktion notwendig wurde, um Abweichungen von der Kaufkraftparität eindeutig abbilden zu können. Die absolute Risikoaversion wurde in der Literatur in beiden Formulierungen verwendet, vgl. Merton (1973) und Adler und Dumas (1984). Im folgenden Kapitel wird auf

$$\begin{aligned}
E[s_{t+1}] &= f_t - \underbrace{\frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}}_{\text{Unsicherheitsprämie}} - \underbrace{f_t * \frac{E[ARA]}{\psi + E[ARA]}}_{\text{Hedgeeffekt}} + \underbrace{\chi * \frac{E[ARA]}{\psi + E[ARA]}}_{\text{Struktureffekt}} \\
&= \underbrace{f_t}_{\text{Termin kurs}} - \underbrace{\frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}}_{\text{Unsicherheitsprämie}} + \underbrace{\frac{(\chi - f_t) * E[ARA]}{\psi + E[ARA]}}_{\text{Risikoprämie}}
\end{aligned} \tag{II.128}$$

$$\text{mit: } \psi \equiv \frac{1}{s_t * p_{y,a,t} * COV\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} = \frac{1}{COV\left[x_{t+1}, \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}}\right]}$$

$$\chi = \frac{COV\left[x_{t+1}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right]}{COV\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} = \frac{COV\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{y,a,t+1}}\right]}{COV\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}$$

$E[ARA] > 0$

Diese Gleichgewichtsbedingung lässt sich wie folgt interpretieren: Allgemein wird die bereits bekannte Erkenntnis reproduziert, dass der Terminkurs vom erwarteten Wechselkurs um eine Unsicherheitsprämie und eine Risikoprämie abweicht. Weiterhin ist ersichtlich, dass bei risikoneutralem Verhalten, ( $ARA=0$ ), die Risikoprämie den Wert Null annimmt. Wesentlich ist nun, dass diese Risikoprämie ökonomisch interpretierbar ist. Zunächst ist festzustellen, dass eine Risikoprämie durch die Bewertung von Unsicherheit begründet wird. Im Rahmen der obigen Formulierung wird die Unsicherheit durch die Variablen  $\chi$  und  $\psi$  beschrieben, während die Bewertung durch die absolute Risikoaversion des Akteurs, also den Term ‚ARA‘, zum Ausdruck gebracht wird.

Zunächst sei der Einfluss der Risikoaversion erläutert. Dieser lässt sich, gemäß obiger Definitionen, in einen Hedgeeffekt und einen Struktureffekt unterteilen. Auf die Terminologie soll vorerst nicht eingegangen werden. Die Wirkungsrichtung des Hedgeeffektes lässt sich wie folgt bestimmen: Aufgrund der Definition von ‚ARA‘ gilt in Verbindung mit der

---

diese Unterscheidung noch ausführlich eingegangen werden.

Prämisse einer konkaven Nutzenfunktion:  $ARA > 0$ . Im Rahmen der Herleitung obiger Gleichung wurde die Plausibilitätsrestriktion eingeführt, dass gelte:  $1 > \psi + E[ARA] > 0$ . Aus diesen Restriktionen folgt, dass der Hedgeeffekt negativ ist.

$$\text{Hedgeeffekt} = f_t * \frac{-E[ARA]}{\psi + E[ARA]} \quad (\text{II.129})$$

mit:  $E[ARA] > 0$

$$1 > \psi + E[ARA] > 0$$

Der Hedgeeffekt beschreibt den Einfluss der inländischen Preisstochastik auf den erwarteten Wechselkurs. Dieser Einfluss wirkt direkt auf die inländischen realen Anlageerträge, da sich mit steigenden Preisen die Konsummöglichkeiten bei bekanntem Nominalvermögen verringern. Es besteht jedoch die Möglichkeit, durch eine Auslandsinvestition diesen direkten Effekt unter Umständen zu vermeiden. Da die Akteure annahmegemäß risikoavers sind, sind sie bereit, für diese Möglichkeit auf einen Teil ihres Ertrages in der Anlagemöglichkeit zu verzichten, der dieser Unsicherheit unterliegt. Im vorliegenden Fall bewirkt diese Bereitschaft, dass der Ertrag der Inlandsanlage, auf den dieser Effekt direkt wirkt, relativ zur Gleichgewichtskonstellation bei risikoneutralem Verhalten geringer ist. Formal kommt dieser Effekt durch das negative Vorzeichen des Hedgeeffektes zum Ausdruck. Der erwartete Wechselkurs, und damit, ceteris paribus, der Ertrag der Auslandsanlage, kann im Gleichgewicht hinter dem geforderten Ertrag bei Risikoneutralität zurückbleiben.

Der zweite Term der Risikoprämie, der als Struktureffekt bezeichnet wird, ist in seiner Wirkungsrichtung vom Vorzeichen der Variablen  $\chi$  abhängig und somit zunächst unbestimmt. Gilt  $\chi > 0$ , so ist der Effekt positiv, und damit in seiner Wirkungsrichtung dem Hedgeeffekt entgegengesetzt. Die Analyse dieses Effektes wird später im Rahmen der Untersuchung der Wirkungsrichtung von Unsicherheit fortgesetzt.

Es sei nun die Wirkung der Unsicherheit, beschrieben durch  $\chi$  und  $\psi$ , auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses untersucht. Ausgangspunkt seien die Erkenntnisse, die im Rahmen der ökonomischen Interpretation der Gleichgewichtsbedingung bei risikoneutralem Verhalten bereits festgestellt wurden. Es wurde gezeigt, dass auch bei Erfüllung der Kaufkraftparität der Gütermarkt bei stochastischen Preisen die

Prognosefähigkeit des Terminkurses verzerrt. Als Ursache wurde der Einfluss des Gütermarktes auf die zukünftige Ausprägung des Wechselkurses identifiziert, die ihrerseits die realen Anlageerträge beeinflusst.

Ist diese Unsicherheit gegeben, so verlangt ein risikoaverser Anleger eine Risikoprämie für das Übernehmen dieser Unsicherheit. Diese Risikoprämie lässt sich in eine Komponente zerlegen, die die allgemeine Preisstochastik beschreibt, den Hedgeeffekt und eine weitere, den Struktureffekt.

Der Hedgeeffekt beschreibt die Wirkung der Preise auf die realen Erträge. Er ist beschrieben durch:

$$\psi = \frac{1}{COV \left[ x_{t+1}, \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right]} \quad (\text{II.130})$$

Ein ungünstiges Szenario, definiert als eine nachteilige Ausprägung der Unsicherheit, lässt sich beispielsweise beschreiben durch eine Preissteigerung, die zu einem verringerten

Konsum führt.<sup>215</sup> Mit Bezug auf die obige Kovarianz  $COV \left[ x_{t+1}, \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right]$  ist ersichtlich, dass der erste Term, der die Konsummenge des Gutes ‚x‘ beschreibt, sinkt. Der zweite Term sinkt ebenfalls, da ein steigender Preis den Nenner des Quotienten bei konstantem Zähler steigen lässt, was zwangsläufig den Quotienten in seinem Wert reduziert. Die Kovarianz besitzt somit im ungünstigen Szenario einen positiven Wert, und es gilt:

<sup>215</sup> Ob eine Preissteigerung im Inland zu einem reduzierten Konsum führt, hängt davon ab, wie sich diese Änderung gemäß der Kaufkraftparität auf den Auslandspreis in Auslandswährung und auf den Wechselkurs aufteilt:

Wird die Inlandspreissteigerung nicht vollständig durch den Wechselkurs kompensiert, so ist der reale Ertrag einer Auslandsanlage geringer als sein Ertrag bei konstanten Preisen. (Der Preiseinfluss wird nicht vollständig von der Wechselkurskomponente ausgeglichen.) Da der reale Ertrag einer Inlandsinvestition bei gegebener Preissteigerung zwingend geringer als der nominale Ertrag ist, reduziert eine inländische Preissteigerung die Konsummöglichkeiten und das Szenario wird als ungünstig bewertet.

$$\psi > 0$$

Diese Restriktion war bereits aus den Ausführungen zur Risikoaversion zu vermuten, da die technische Restriktion  $1 > \psi + E[ARA] > 0$  eingeführt wurde.

Zusätzlich existiert eine weitere Prämie, der Struktureffekt. Dieser Effekt quantifiziert den Zusammenhang zwischen Gütermarkt und Kapitalmarkt, der durch den Wechselkurs gegeben ist, und ermöglicht es, die Hedgelfunktion einer Auslandsanlage gegen inländische Preisänderungen zu bewerten. Konkret bedeutet dies: Der Einfluss des Wechselkurses wird einerseits über die Kaufkraftparität, also den Gütermarkt beeinflusst, wirkt jedoch ebenfalls über den Einfluss auf den Ertrag der Auslandsinvestition auf den Kapitalmarkt. Anhand der (erfüllten) Kaufkraftparität kann festgestellt werden, in welchem Umfang eine inländische Preissteigerung durch den Wechselkurs kompensiert wird.<sup>216</sup>

Sind die Anlageerträge nominal sicher, so verringern sich die realen Erträge bei steigenden Inlandspreisen. Diese Ertragsminderung kann jedoch durch eine Auslandsanlage in dem Umfang reduziert werden, in dem der Wechselkurs die Inlandspreisänderung kompensiert. Folglich ist die Struktur, in der eine Inlandspreisänderung in den Auslandspreisen oder in einer Wechselkursänderung zum Ausdruck kommt, wesentlich für die Hedgelfunktion der Auslandsanlage. Es seien hier zwei mögliche Kombinationen dargestellt:

$$p_{Inland}(\uparrow\uparrow) = p_{Ausland}(\uparrow) * Wechselkurs(\uparrow) \quad \text{bzw.} \quad p_{Inland}(\uparrow\uparrow) = p_{Ausland}(0) * Wechselkurs(\uparrow\uparrow)$$

Dieser Zusammenhang wird in dieser Arbeit ‚Struktureffekt‘ genannt. Er wird formal durch die Variable ‚ $\chi$ ‘ beschrieben

Die formale Beschreibung dieses Effekts zeigt, dass er zweigeteilt ist, in eine allgemeine Risikokomponente und eine Strukturkomponente:

---

<sup>216</sup> Der verbleibende Teil der inländischen Preisänderung muss, da die Kaufkraftparität zu jedem Zeitpunkt erfüllt sei, durch eine Änderung des ausländischen Preises in Auslandswährung kompensiert werden.



$$\text{Struktureffekt} = \underbrace{\chi}_{\text{Strukturkomponente}} * \underbrace{\frac{E[ARA]}{\psi + E[ARA]}}_{\text{allgemeine Komponente}} \quad (\text{II.131})$$

$$\chi = \frac{\text{COV}\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{y,a,t+1}}\right]}{\text{COV}\left[x_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}$$

mit

Die allgemeine Risikokomponente wurde bereits im Rahmen des Hedgoeffektes ausführlich in ihrer Wirkungsrichtung beschrieben. Die Wirkungsrichtung des gesamten Terms hängt jedoch vom Vorzeichen der Strukturkomponente ab. Diese beschreibt das Verhältnis der Kovarianzen des Güterkonsums mit dem in- und ausländischen Preisen. Damit wird jedoch implizit der Anteil der Konsumänderung beschrieben, der auf Wechselkursänderungen zurückzuführen ist, da aufgrund Gültigkeit der Kaufkraftparität zwei der drei relevanten Variablen ausreichen, um die dritte Variable eindeutig in ihrer Bewegungsrichtung festzulegen.

Ökonomisch ist die Strukturkomponente wie folgt zu interpretieren: Der Zähler beschreibt das Ausmaß der Unsicherheit unter Verwendung der Änderung in den Konsummöglichkeiten. Dies wurde bereits dargelegt. Der Zähler beschreibt nun, wie viel von dieser Unsicherheit strukturell durch die Änderung der Auslandspreise in Auslandswährung beschrieben werden kann. Diese erstgenannte Unsicherheit ist jedoch durch eine Auslandsinvestition teilweise vermeidbar. Es ist der Teil vermeidbar, der nicht auf eine Änderung der Auslandspreise zurückgeht, da dieser Teil durch eine Auslandsinvestition vermieden werden kann. Von der Intuition her ist die Wechselkursänderung als unsystematische Unsicherheit und die ausländische Preisänderung als systematische Unsicherheit charakterisierbar. Für die unsystematische Unsicherheit ist am Markt jedoch keine Risikoprämie durchsetzbar.

Als Fazit bleibt festzuhalten: Aufgrund des allgemeinen Risikos einer Preisänderung fordern die Akteure eine Risikoprämie, die durch den Hedgoeffekt beschrieben wird, und die die Prognosefähigkeit des Terminkurses verzerrt. Diese Verzerrung wird in dem Ausmaß reduziert, in dem eine Auslandsinvestition dieses Risiko verringern kann. Dieser Effekt geht durch den Struktureffekt in die Gleichgewichtsbedingung ein.



#### 4. Zweites Ergebnis mit Rückbezug auf die hypothetische Annahme

Das zweite Kapitel hat die Prognosefähigkeit des Terminkurses für den erwarteten Wechselkurs im komparativ statisch bestimmten Gleichgewicht bewertet und eventuelle gleichgewichtige Abweichungen des Terminkurses vom erwarteten Wechselkurs theoretisch begründet. Diese Erkenntnisse ziehen jedoch die Allgemeingültigkeit der in Kapitel I aufgeführten empirischen Arbeiten in Zweifel.

Als eine wesentliche Erkenntnis des Kapitel II kann festgehalten werden, dass die Gleichgewichtsbedingung, die aus einer Partialanalyse des Kapitel I resultiert, nur unter sehr einschränkenden Prämissen mit einem allgemeinen Optimierungsverhalten der Akteure konsistent ist. Diese einschränkenden Bedingungen, die für eine Konsistenz notwendig sind, sind insbesondere die permanente Gültigkeit der Kaufkraftparität sowie die Annahme konstanter Güterpreise.<sup>217</sup> Darüber hinaus müssen sich die Akteure risikoneutral verhalten.

Die Berücksichtigung der empirischen Ergebnisse in der Prämissenwahl hat darüber hinaus die Grenzen der genannten theoretischen Modelle aufgezeigt: Die existierenden theoretischen Arbeiten auf Basis des Lucas-Modells gehen implizit von der Gültigkeit der Kaufkraftparität aus, obwohl die empirische Literatur die Realitätsnähe dieser Annahme stark in Zweifel zieht. Es liegt folglich nahe, dass eine stärkere gegenseitige Berücksichtigung der Arbeitsergebnisse einen zusätzlichen Erkenntnisgewinn beinhalten könnte.

Dieser Weg wurde hier eingeschlagen, indem das Modell unter Einbeziehung der empirischen Befunde, insbesondere der festgestellten Abweichungen von der Kaufkraftparität, weiterentwickelt wurde. Die Ergebnisse bleiben jedoch insofern unbefriedigend, als dass eine Gütermarktverzerrung aufgrund der hohen Komplexität der resultierenden Gleichgewichtsbeziehung nicht allgemein in ihrem Ausmaß auf die Höhe des erwarteten gleichgewichtigen Wechselkurses abgeschätzt werden kann.

---

<sup>217</sup> Es sei nochmals auf den Zirkelschluss hingewiesen: Sind die Güterpreise konstant und die PPP immer erfüllt, so kann der Wechselkurs weder stochastisch noch variabel sein, sondern muss zwangsläufig konstant sein. Nur unter Annahme der PPP in der ex ante Version kann der Wechselkurs stochastisch sein. Er würde in diesem Fall einem ‚random walk‘ folgen. Diese Annahme würde jedoch bei international divergierenden Zinssätzen und gemäß einer Argumentation im Partialmodell Arbitragemöglichkeiten und damit ein Ungleichgewicht implizieren. Vgl. dazu die Einleitung zu dieser Arbeit.

Weiterhin bleibt unbefriedigend, dass die formulierte Gleichgewichtsbedingung von der gewählten Länderperspektive abhängt. Diese Kritik wird besonders in den Fällen relevant, in denen risikoaverses Verhalten und Abweichungen von der Kaufkraftparität berücksichtigt werden. Werden diese Möglichkeiten nicht zugelassen, so ist grundsätzlich eine international konsistente Erwartungsbildung insofern möglich, als dass die abdiskontierten mit den Güterpreisen normierten erwarteten Wechselkurse international konsistent sind. Die Prognosefähigkeit des nominalen Terminkurses ist jedoch auch in diesem Fall nicht international konsistent beurteilbar. Allgemein ist festzuhalten: Die Annahme gleicher Erwartungen hinsichtlich des zukünftigen Wechselkurses aus in- und ausländischer Sicht und eines Devisenmarktgleichgewichtes ist somit inkonsistent mit der theoretischen Modellierung im internationalen komparativ statischen Modell.

### **Kapitel III. Die Prognosefähigkeit des Terminkurses in einem Continuous-Time Modell**

Kapitel III begegnet den Kritikpunkten des Kapitel II und leitet im Continuous-Time Rahmen ökonomisch interpretierbare Aussagen her, die darüber hinaus international konsistent sind. Eine Analyse im Continuous-Time Rahmen besitzt den weiteren Vorteil, dass das Problem einer komparativ statischen Analyse, nämlich die Festlegung der Periodenlänge, explizit definiert wird. Dieser Sachverhalt sei im folgenden kurz dargestellt:

Es kann grundsätzlich zwischen Planungs-, Entscheidungs-, und Anlagehorizont der Akteure unterschieden werden, die für die Akteure nicht identisch sein müssen. Diese potentiellen Unterschiede schränken jedoch die Möglichkeiten zur ökonomisch sinnvollen Prämissensetzung im komparativ statischen Rahmen ein.<sup>218</sup> Stimmen Planungs- und Anlagehorizont beispielsweise nicht überein, so entsteht eine Unsicherheit hinsichtlich des Wiederanlageertrages selbst bei einer Anlagemöglichkeit zu einem sicheren Zinssatz über den Anlagehorizont. Es ist somit aufgrund dieser divergierenden Horizonte auch bei Existenz von kurzlaufenden sicheren Zinssätzen im komparativ statischen Modell von stochastischen Zinsen auszugehen.<sup>219</sup> Die Existenz eines sicheren Zinssatzes allein legitimiert folglich nicht die Verwendung der Prämisse einer sicheren Verzinsung im komparativ statischen Modell.

Weiterhin besitzt die Wahl der Periodenlänge im komparativ statischen Rahmen einen Einfluss auf die zur Beschreibung der Stochastik notwendige Verteilungsannahme. So ist die Annahme von normalverteilten Periodenrenditen nicht auf sämtliche Beobachtungshorizonte anwendbar, da die Gesamtrendite über mehrere Zeitperioden durch Multiplikation der Periodenrenditen bestimmt wird. Das Ergebnis zweier normalverteilter Variablen ist selbst jedoch nicht normalverteilt. Ist somit die (stochastische) Rendite über eine bestimmten

---

<sup>218</sup> Merton (1975) geht ausführlich auf die Vorteile einer ‚continuous time‘ Formulierung im Vergleich zur komparativen Statik hinsichtlich der unterschiedlichen Zeithorizonte ein.

<sup>219</sup> Eine Möglichkeit, von konstanten Zinsen bei divergierenden Zeithorizonten auszugehen, bestünde darin, auf Anlagemöglichkeiten abzustellen, die auf Zinsänderungen gleich reagieren. Da die Duration einer Anlage, auch definiert als mittlere Rückzahlungsdauer, solch eine Reaktion beschreibt, wäre die Zinssatzbestimmung anhand von Anlagen mit gleicher Duration legitimierbar. Grundsätzlich besitzen Anlagen mit gleicher Duration nur in Ausnahmefällen, nämlich Zerobonds, die gleiche Restlaufzeit. Als Fazit bleibt festzuhalten, dass die empirische Überprüfung der Prognosefähigkeit des Terminkurses auch mit Zinssätzen unterschiedlicher Restlaufzeiten ökonomisch legitimierbar wäre.

Eine einfache Darstellung der Durationsmethode liefern Jüttner und Hawtrey (1997). Vgl. Maloney und Yawitz (1986) für eine Analyse im Rahmen der Portfoliotheorie.

Zeitraum normalverteilt, so ist die Prämisse der Renditennormalverteilung, die sich auf einen divergierenden (Untersuchungs-)zeitraum bezieht, nicht realitätsnah.<sup>220</sup> Aus diesen Ausführungen wird ersichtlich, dass Annahmen zur stochastischen Eigenschaften einer Variablen ebenfalls von der festgelegten Periodenlänge abhängig sind. Im Continuous-Time Rahmen wird diesem Sachverhalt insofern entsprochen, als dass explizit von einer jederzeitigen Revision der Entscheidungen ausgegangen wird. Die Periodenlänge wird somit explizit durch eine Marginalbetrachtung festgelegt.

Das Kapitel III ist in 4 Abschnitte unterteilt und geht wie folgt vor: Abschnitt 1 stellt die mathematischen Grundlagen dar, begründet die Notwendigkeit ihrer Anwendung und zeigt ihre Konsistenz mit den bekannten Regeln. Diese Einführung ist notwendig, da die hier verwendete Methode unter anderem dadurch charakterisiert ist, dass die üblichen Regeln der Differenzialrechnung nicht anwendbar sind.

Abschnitt 2 stellt die für diese Arbeit relevanten Portfoliomodelle aus der Literatur vor und ermöglicht somit die Einordnung des hier entwickelten Modells. Dieser Literaturüberblick erstreckt sich auf die Entstehung und Aussage des komparativ statischen CAPM und dessen Aussagefähigkeit sowie auf diejenigen Weiterentwicklungen des Merton'schen intertemporalen Continuous-Time CAPM, die dazu dienen, eine Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses zu treffen.<sup>221</sup> Die Methodik, die von diesen beschriebenen Weiterentwicklungen verwendet wird, wird auch teilweise zur Herleitung des in diesem Kapitel entwickelten Modells verwendet.

In Abschnitt 3 wird ein eigenständiges Modell entwickelt, um die Prognosefähigkeit des Terminkurses zu bewerten. Es lehnt sich insofern an die Continuous-Time CAPM-Literatur an, als dass eine Vermögensrestriktion formuliert wird, die als Nebenbedingung in einer Strategie der Nutzenmaximierung fungiert. Aus dieser Problemstellung wird unter

---

<sup>220</sup> Hakasson (1977) beschreibt diesen Sachverhalt analytisch. Er geht von einer normalverteilten Ertragsrate bezüglich einer bestimmten Beobachtungsfrequenz aus. Anschließend beschreibt er die Verteilungsparameter einer kleineren Beobachtungsfrequenz unter Beibehaltung der ursprünglichen Annahme der Normalverteilung. Er folgert, dass eine ursprüngliche Skewness mit Wert Null (Normalverteilung) nicht auf eine fehlende Skewness für die neue Frequenz schließen lässt. Die Renditen bei kleineren Beobachtungsfrequenzen sind somit nicht normalverteilt.

<sup>221</sup> In dieser Arbeit wird die englische Terminologie ‚Continuous Time‘ beibehalten, da sie sich in der Literatur durchgesetzt hat und für eine konkrete Form der formalen Modellierung steht. Ein deutscher Terminus könnte unter Umständen verwirrend sein.

Verwendung des Bellmann Ansatzes in Schritt 1 eine Nachfragefunktion nach Anlagetiteln mit unsicherem Ertrag hergeleitet. Diese Nachfragefunktion ist in ihrer Form mit den aus der Literatur bekannten Funktionen vergleichbar.

Sie unterscheidet sich in ihrer ökonomischen Aussage insofern von der Literatur, als dass eine Diversifizierung im üblichen Sinn nicht beobachtet werden kann. Dies liegt in der Prämissensetzung begründet (zwei Länder (In- und Ausland), zwei nominal risikolose Anlagemöglichkeiten). Es ist jedoch, wie im intertemporalem CAPM, eine Hedgeprämie für ungünstige zukünftige Szenarien und der Einfluss stochastischer Güterpreise beobachtbar. Insofern werden die Ergebnisse aus der Literatur bestätigt.

Das weitere Vorgehen unterscheidet sich insofern von der CAPM-Literatur, als dass kein exogenes Angebot an Anlagemöglichkeiten spezifiziert und kein Marktportfolio definiert wird. Dieses Modell verwendet statt dessen die Tatsache, dass auf dem Devisenmarkt kein exogenes Angebot existiert. Das Devisenangebot resultiert vielmehr aus der Devisennachfrage der Ausländer, da es den ausländischen Währungsbetrag darstellt, den die Ausländer zum Kauf von Devisen, also inländischer Währung aufzubringen bereit sind. Das Devisenangebot (aus Inlandsperspektive) wird folglich in Schritt 2 auf Basis der Devisennachfrage der Ausländer, d.h. deren Nachfrage nach inländischer Währung, bestimmt, da diese ihre (ausländische) Währung im Gegenzug anbieten. Die Vermögensrestriktion der Ausländer, die grundsätzlich unter Verwendung der ausländischen Perspektive definiert ist, wird in Step 1 unter Verwendung von Variablen beschrieben, die aus inländischer Sicht definiert sind. Anschließend wird in Step 2 das Devisenangebot in Abhängigkeit von Variablen hergeleitet, die aus Inlandsperspektive definiert sind. Durch dieses Vorgehen wird erreicht, dass die jeweilige Erwartungsbildung der In- und Ausländer konsistent ist.<sup>222</sup> Die Kritik der international inkonsistenten Gleichgewichtsbedingungen trifft folglich nicht auf dieses Modell zu.

In Schritt 3 wird angenommen, dass der Devisenmarkt ausgeglichen sei. Daraus folgt, dass das Devisenangebot der –nachfrage entsprechen muss. Durch Gleichsetzen und Umformen

---

<sup>222</sup> Dieses Vorgehen ist so in Kapitel II nicht möglich, da im Continuous-Time der Erwartungswert und die Varianz perspektivenunabhängig sind. Es wird in diesem Kapitel gezeigt, dass das Siegel-Paradoxon im Continuous Time nicht auftritt. Dies ist in der komparativ statischen Analyse nicht gegeben. Folglich besteht im Unterschied zu Kapitel II keine international divergierende Einschätzung hinsichtlich der stochastischen

erhält man schließlich eine Gleichgewichtsbedingung. Diese kann so formuliert werden, dass die Einflussfaktoren der Abweichung des erwarteten Wechselkurses vom Terminkurs identifiziert werden können. Es werden als Einflussfaktoren die relative Größe der Länder, die Stochastik der Güterpreise, die Risikoaversion und die relative Güterpreisbewegung, also die durch den realen Wechselkurs beschriebenen Abweichungen von der PPP, identifiziert.

Abschnitt 4 beinhaltet ein drittes Fazit, das hervorhebt, inwieweit die Ergebnisse des Kapitel III, im Gegensatz zu denjenigen des Kapitel II, ohne weitere Einschränkungen ökonomisch sinnvoll interpretierbar sind.



## 1. Mathematische Grundlagen von Continuous-Time Modellen

Dieser Abschnitt dient unter anderem dem Ziel, den Zusammenhang zwischen Prämissen und sich daraus zwingend ergebenden Restriktionen hinsichtlich der verwendeten stochastischen Prozesse zu veranschaulichen. Diese Darstellung erscheint wünschenswert, da im allgemeinen ein konkreter stochastischer Prozess (z. B. Brown'sche Bewegung) als exogen vorgegeben spezifiziert wird, ohne die diesem Prozess zugrunde liegenden Prämissen darzustellen. Somit ist es oft schwierig zu unterscheiden, welche Prämissen sich zwingend aus dem allgemeinen Vorgehen ergeben und welche Prämissen zusätzlich eingeführt wurden.<sup>223</sup> Diese Einschätzung ist jedoch wünschenswert.

Es wird ersichtlich, dass stochastische Prozesse im Continuous Time, wie beispielsweise der Wiener Prozess, auf einer Reihe von einfach nachzuvollziehenden Prämissen aufbauen. Es genügt, von einer Stochastik auszugehen, die für sämtliche infinitesimal kurze Zeiträume erhalten bleibt ohne unendlich große Werte anzunehmen. Weiterhin wird angenommen, dass die Größe der Abweichung dieser Variablen von ihrem Erwartungswert und auch die Wahrscheinlichkeit für solch eine Abweichung sich proportional zur betrachteten Periodenlänge verhält. Aus diesen simplen Prämissen lässt sich ein stochastischer Prozess herleiten, der in der Literatur als Wiener Prozess bezeichnet wird und die stochastische Änderung einer Variablen in einem infinitesimal kurzen Zeitraum beschreibt. Problematisch ist allerdings, dass dieser Prozess nicht differenzierbar ist und sich folglich per se nicht für eine Optimierungsanalyse eignet, die Ableitungen und Integralbildung verwendet. Die Ursache für die mangelnde Differenzierbarkeit bzw. Integrierbarkeit liegt in der fehlenden Konvergenz der Zeitreihe über einen unendlich kurzen Zeitraum, die in der Prämisse begründet liegt, dass die Stochastik der Variablen nie, also auch nicht über sehr kleine Zeiträume hinweg, ganz verschwindet. Dieses Problem der mangelnden Integrierbarkeit von solchen stochastischen Prozessen kann durch Verwendung von Ito's Lemma überwunden werden, der eine Approximation des Grenzwertes darstellt. Ito hat gezeigt, dass der Fehler, der bei solch einer Approximation gegeben ist, die stark an eine Taylor-Approximation erinnert, im Continuous-Time vernachlässigbar ist.

---

<sup>223</sup> Letztgenannte dienen oft dem Ziel, den notwendigen Rechenaufwand zu begrenzen und können grundsätzlich aufgehoben werden.

Weiterhin werden die Konsequenzen dargestellt, die die Eigenschaften der stochastischen Prozesse auf die Modellierung ausüben. In der Literatur wird meist allgemein festgestellt, dass diese stochastischen Prozesse nicht differenzierbar sind, ohne dass weitere Erklärungen hinzugefügt werden. Dieser Abschnitt zeigt, worauf sich diese Tatsache begründet, und dient somit als allgemeine Einführung in die mathematischen Grundlagen, die Modellen im Continuous-Time Rahmen zugrunde liegen. In Teil 1 werden, ausgehend von intuitiv leicht verständlichen Prämissen, die Eigenschaften stochastischer Prozesse hergeleitet. Als ein Ergebnis wird die nicht erfüllte Differenzierbarkeit dieser Prozesse begründet. Da sowohl in der Literatur als auch in dieser Arbeit zur Formulierung einer Gleichgewichtsbeziehung eine Differenzierung dieser Prozesse notwendig ist, werden die allgemeinen Regeln (Ito's Lemma), die eine Differenzierung mittels einer Approximation ermöglichen, dargestellt. Schließlich wird, um die Verbindung zur bekannten Differenzialrechnung herzustellen, gezeigt, dass die Regeln des stochastischen Differenzierens diejenigen Regeln für nicht-stochastisches Differenzieren als Sonderfall beinhalten. Durch diesen Vergleich wird die Isolierung des auf die Stochastik zurückführbaren Teils einer Ableitung möglich. Dieser Teil repräsentiert den Unterschied von Continuous-Time Modellen zur komparativen Statik im diskretionären Rahmen und wird dargestellt.

Neben den allgemeinen Rechenregeln der stochastischen Differenzierung verwendet die Continuous-Time CAPM-Literatur weiterhin das Verfahren der dynamischen Programmierung und insbesondere den Bellmann Ansatz. Der Bellmann Ansatz ist charakterisiert durch eine Taylor-Expansion der 'optimal value function' für Werte von  $t+dt$  um die Werte in  $t$ . Dieses Verfahren und seine Einordnung in den Kontext der dynamischen Programmierung wird ausführlich im Anhang beschrieben, um den Umfang dieses Abschnitts zu begrenzen.

Ein stochastischer Prozess beschreibt grundsätzlich den funktionalen Zusammenhang zwischen gegenwärtiger und zukünftiger Ausprägung einer stochastischen Variablen. Er kann zunächst hinsichtlich seiner Stetigkeit und seiner Pfadabhängigkeit charakterisiert werden.<sup>224</sup>

---

<sup>224</sup> Ist ein Prozess pfad-unabhängig, so ist der zukünftige Wert einer Variablen, die diesem Prozess folgt, ausschließlich von der zukünftigen Ausprägung der Parameter, die diesen Prozess beschreiben, abhängig. Im weiteren werden nur pfad-unabhängige Prozesse besprochen. Ergänzend sei angemerkt, dass pfad-abhängige Prozesse insbesondere in der Optionspreistheorie zur Anwendung kommen, da die Ausübung einer 'amerikanischen Option' vor Fälligkeitsdatum einen neuen Pfad kreiert, der ihren Wert beeinflusst. Vgl. dazu Merton (1992), S. 446 f.

In dieser Arbeit kommen nur pfad-unabhängige Prozesse zur Anwendung, die durch einen Wiener Prozess beschrieben werden. Es wird also nicht zwischen unterschiedlichen zukünftigen Szenarien unterschieden, wie beispielsweise im Merton CAPM.

Die weiteren Ausführungen zur systematischen Einordnung und Abgrenzung von stochastischen Prozessen hinsichtlich ihrer Stetigkeit folgen Merton (1992). Ziel dieser Ausführungen ist es zu zeigen, dass sich die Varianz solcher stetigen Prozesse proportional zur Quadratwurzel der Periodenlänge verhält, dass sich die Funktionen stetiger Prozesse in einen erwarteten und einen unerwarteten Teil trennen lassen, die additiv verknüpft sind und schließlich dass solche Funktionen nicht differenzierbar sind.

Als Ausgangspunkt sei eine stochastische Variable ‚X‘ gegeben, die über einen diskreten Zeitraum  $[t, T = t + k * h]$  untersucht wird, der in  $k = 1, \dots, n$  Perioden unterteilt sei. Der Bezug zum Continuous-Time Modell sei durch eine Grenzwertbetrachtung der Periodenlänge ‚h‘ mit  $h \rightarrow 0$  hergestellt. Weiterhin seien die folgenden Variablen definiert:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &\equiv X(k) - E_{k-1}\{X(k)\} \\ &= X(k) - E_{k-1}\{X(k-1)\} - E_{k-1}\{X(k) - X(k-1)\} \\ &= X(k) - X(k-1) - E_{k-1}\{X(k) - X(k-1)\} \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

$$\text{mit: } E_{k-1}[\varepsilon(k)] = 0$$

$$\sigma_k^2 \equiv E_0[\varepsilon^2(k)] \quad \text{mit: } \sigma_k^2 \text{ als Varianz von } \varepsilon(k)$$

$$p_j(k) \equiv \text{Pr ob}\{\varepsilon(k) = \varepsilon_j(k)\} \text{Informationen zum Zeitpunkt } t=0 \}$$

mit:  $\varepsilon_j(k) \equiv$  mögliche endliche Werte von  $\varepsilon(k)$

$$a_k \equiv \frac{E_{t-1}[X(k) - X(k-1)]}{h}$$

untersuchter Zeitraum  $[t, T = t + k * h]$

Die Variable ‚ $\varepsilon$ ‘ ist folglich definiert als unerwartete Änderung der Ausprägung von ‚X‘ zwischen den Perioden ‚k-1‘ und ‚k‘ mit der Varianz  $\sigma_k^2$ .

---

Grundsätzlich können pfad-abhängige in pfad-unabhängige Prozesse überführt werden, indem jedem möglichen Pfad einer Variablen eine neue eigenständige Variable zugeordnet wird. Dieses Vorgehen entspricht in seiner Intuition der Verwendung von ‚Arrow Debreu Securities‘. Zur allgemeinen Vorgehensweise, um Nicht-

Unter Verwendung obiger Definitionen werden vier Prämissen gesetzt. Erstens, auch bei sehr kleinen Zeitintervallen bleibt die Stochastik der Variablen erhalten, zweitens, die Varianz der Variablen wird nicht unendlich groß, und drittens, die Stochastik bezieht sich auf sämtliche Perioden.<sup>225</sup> Während die ersten beiden Prämissen intuitiv einsichtig sind, lässt sich die letztgenannte Prämisse wie folgt illustrieren: Ein stochastischer Prozess, der eine Lotterie beschreibt, erfüllt beispielsweise die dritte Prämisse nicht, da seine Stochastik ausschließlich auf dem Zeitpunkt der Ziehung basiert, während vorangehende Perioden eine Varianz von Null aufweisen. Als letzte Prämisse beschränkt Merton die möglichen Ausprägungen von  $\varepsilon_j(k)$  und  $p_j(k)$  in Abhängigkeit der Periodenlänge auf die funktionale Form  $\varepsilon_j(k) \sim h^{q_j}$  und  $p_j(k) \sim h^{r_j}$ .<sup>226</sup> Ausmaß und Wahrscheinlichkeit einer unerwarteten Änderung der Variablen ‚X‘ sind folglich auf eine Proportionalitätsbeziehung zur Periodenlänge ‚h‘ beschränkt, die jeweils durch  $q_j$  und  $r_j$  konkretisiert werden.

Merton zeigt in Schritt 1, dass aufgrund der ersten drei Prämissen gelten muss, dass  $\sigma_k^2$  asymptotisch positiv proportional zur Periodenlänge ‚h‘ ist:  $\sigma_k^2 \sim h$ . Dies entspricht aufgrund der Definitionen:

$$O(\lambda(h)) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma_k^2}{\lambda(h)} = \text{begrenzt}$$

und

$$o(\lambda(h)) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma_k^2}{\lambda(h)} = 0$$

---

Markow-Prozesse in Markow-Prozesse zu überführen vgl. Cox und Miller (1968), S. 262.

<sup>225</sup> In formal verkürzter Schreibweise lassen sich die Prämissen unter Verwendung der auf der vorangehenden Seite eingeführten Definitionen wie folgt schreiben: Es gilt für ein Intervall  $[0, T]$ :

$$\begin{aligned} \forall n \exists A_1 > 0 \text{ so dass } \sigma_{S_n}^2 > A_1 \\ \forall n \exists A_2 < \infty \text{ so dass } \sigma_{S_n}^2 < A_2 \\ \forall n \exists 1 \geq A_3 > 0 \text{ so dass } \frac{\sigma_k^2}{\sigma^2} \geq A_3 \end{aligned}$$

<sup>226</sup> Es bleibt anzumerken, dass sich die Untersuchung auf kleine Periodenlängen ‚h‘ bezieht  $0 < h \ll 1$ . Daraus folgt, dass bei höheren Werten von ‚r‘ sich der Betrag von  $h^r$  verringert. Eine kürzere Periodenlänge verringert

Sowie der Bedingung: es sei  $\sigma_k^2 = O(\lambda(h))$  und  $\sigma_k^2 \neq o(\lambda(h))$  dann sei  $\sigma_k^2 \sim h$ , mit ‚ $\sim$ ‘ als ‚asymptotisch proportional zu‘ der Forderung, dass gelte:

$$\sigma_k^2 = O(h) \text{ und } \sigma_k^2 \neq o(h).^{227}$$

Aus den Prämissen Eins und Zwei obiger Bedingung folgt somit, dass die Varianz der Variablen ‚ $X$ ‘ proportional abhängig von der Periodenlänge ‚ $h$ ‘ sein muss. Weiterhin ist intuitiv einsichtig, dass die Funktionsparameter  $q_j$  und  $r_j$  nicht frei wählbar sind ( $r, q = \infty$  ist beispielsweise nicht möglich), wenn die Varianz  $\sigma_k^2$  beschränkt ist. Merton formuliert die folgende Querrestriktion, die er für eine Klassifizierung von stochastischen Prozessen und die Bestimmung ihrer Eigenschaften verwendet.

$$q_j + 2r_j = 1 \tag{III.2}$$

Schritt 2 beschränkt und interpretiert die Wertebereiche dieser Variablen  $q_j$  und  $r_j$  für kleine Periodenlängen ‚ $h$ ‘. Im Gegensatz zum Schritt 1, der sich auf das gesamte Zeitintervall  $[0, T]$  bezog, bezieht sich die Analyse in Schritt 2 auf nur eine Unterperiode mit Länge ‚ $h$ ‘ wobei gilt:  $k \cdot h = T$  mit ‚ $k$ ‘ = Anzahl der Perioden.<sup>228</sup>

Die formulierte Querrestriktion III.2 ist die Basis, um die notwendige und hinreichende Bedingung für einen stetigen Pfadverlauf zu bestimmen. Eingangs werden unter Verwendung der Ausprägungen von  $q_j$  und  $r_j$  und ihres Wertebereichs von  $0 < r_j < 1/2$  und  $0 < q_j < 1$  zunächst drei Typen von Veränderungen definiert.<sup>229</sup> Für Typ I gilt die extreme Ausprägung von  $r_j = 1/2$ , was zwingend aufgrund Gleichung III.2 die Ausprägung  $q_j = 0$  impliziert. Für Typ II gilt  $0 < r_j$

somit das Ausmaß der möglichen unerwarteten Abweichung in einer Periode.

<sup>227</sup> Vgl. Merton (1998). S. 60-63.

<sup>228</sup> Vgl. Merton (1998). S. 64-65.

<sup>229</sup> Die formale Bestimmung der Wertebereiche für ‚ $q$ ‘ und ‚ $r$ ‘ lautet wie folgt:

Da gilt für  $p \sim h^q$  gilt und für die Wahrscheinlichkeit ‚ $p$ ‘ begrenzt ist auf  $0 \leq p \leq 1$ , so kann ‚ $q$ ‘ nicht negativ sein. Aufgrund einer gleichartigen Überlegung und da ‚ $\varepsilon$ ‘ auf endliche Ausprägungen begrenzt ist, kann auch ‚ $r$ ‘ nicht negativ sein. Gemäß obiger Gleichung begrenzt ‚ $q=0$ ‘ die Variable ‚ $r$ ‘ auf maximal  $1/2$ . Die Ausprägung ‚ $r=0$ ‘ begrenzt wiederum die Ausprägung von ‚ $q$ ‘ auf den Wert Eins. Somit gilt für die Wertebereiche  $0 < r < 1/2$  und

$< 1/2$  und damit  $0 < q_j < 1$ . Für Typ III gilt  $r_j = 0$  und damit zwingend aufgrund Gleichung III.2  $q_j = 1$ .

Wesentlich für diese Unterscheidung ist das Vorkommen von sogenannten ‚rare events‘ oder ‚Sprüngen‘, also selten vorkommenden unerwarteten Änderungen mit großen Änderungswerten. Es kann gezeigt werden, dass nur Typ I keine ‚rare events‘ beinhaltet, da sich das Ausmaß der unerwarteten Änderungen proportional zur Quadratwurzel der Periodenlänge verhält  $\varepsilon_j \sim h^{1/2}$ .<sup>230</sup> Diese letzte Erkenntnis ist zentral für das weitere Vorgehen.

In Schritt 3 wird nun die Stetigkeit dieser drei Typen von unerwarteten Änderungen untersucht. Es kann gezeigt werden, dass ein stetiger Pfadverlauf nicht gewährleistet ist, wenn Änderungen vom Typ III vorkommen. Sind jedoch nur Änderungen des Typs I möglich, so ist der Pfadverlauf stetig. Letzteres gilt ebenfalls für Änderungen des Typs II.<sup>231</sup> Dieser Fall wird nicht weiter verfolgt, da diese Änderungen keinen signifikanten Einfluss auf die Verteilung von ‚X‘ ausüben und damit die Ergebnisse dieser Arbeit nicht beeinflussen.

Als erstes Fazit ist somit festzuhalten, dass unerwartete Änderungen vom Typ I, deren Ausmaß sich folglich proportional zur Quadratwurzel der Periodenlänge verhalten, einen stetigen Pfadverlauf gewährleisten.

Ist ein Pfadverlauf stetig, so stellt sich fast zwangsläufig die Frage, ob er auch differenzierbar ist. Im vorliegenden Fall ist eine Differenzierbarkeit nicht gegeben. Dies kann wie folgt gezeigt werden: Ausgangspunkt seien die in Gleichung III.1 genannten Definitionen:

$$\varepsilon(k) \equiv X(k) - X(k-1) - E_{k-1}\{X(k) - X(k-1)\}$$

---

$0 < q < 1$ .

<sup>230</sup> Die Definition von ‚rare events‘ und die Begrenzung ihres Vorkommens auf Änderungen der Typen II und III wird aus der folgenden Beschreibung der Typ I Eigenschaften ersichtlich:

Aus  $q_j = 0$  folgt, dass  $p_j \sim h^0 = 1$  sein muss. Es gilt folglich, dass fast die gesamte Masse der Wahrscheinlichkeiten den möglichen Ausprägungen vom Typ I zugeordnet sein muss. Daraus schließt Merton, dass die Ausprägungen der Typen II und III, die nur eine geringe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen, als ‚rare events‘ bezeichnet werden können. Die Änderungen vom Typ I sind in ihrem Ausmaß weiterhin begrenzt. Dies

folgt aus der Tatsache, dass gilt  $r=1/2$  und somit  $\varepsilon_j \sim h^{1/2}$ . Für  $h \rightarrow 0$ , also dem Continuous-Time Fall, reduzieren sich die unerwarteten Änderungen in ihrem Ausmaß. Die unerwarteten Änderungen erreichen den Wert Null jedoch nicht, da dadurch die Stochastik eliminiert werden würde, was gemäß Prämisse 1 ausgeschlossen ist.

<sup>231</sup> Vgl. Merton (1998) für einen formalen Beweis.

$$a_k \equiv \frac{E_{t-1}[X(k) - X(k-1)]}{h}$$

Nach Division durch ,h‘, Einsetzen von , $\alpha^k$ ‘ und Umformung erhält man:

$$\frac{X(k) - X(k-1)}{h} = a_k + \frac{\varepsilon(k)}{h}$$

bzw.

$$X(k) - X(k-1) = a_k h + \varepsilon(k) \tag{III.3}$$

Es wurde außerdem bereits gezeigt, dass für Typ I Änderungen gilt  $\varepsilon_j^2 \sim O(h)$  und damit  $\varepsilon_j \sim h^{1/2}$ . Es sei nun die unerwartete Änderung  $\varepsilon(k)$  durch die mögliche Änderung  $\varepsilon_j$  realisiert:  $\varepsilon(k) = \varepsilon_j$ . In einer Grenzwertbetrachtung, gilt dann:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{X(k) - X(k-1)}{h} \right\} = a_k + \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon(k)}{h} \right\} \sim h^{-1/2}$$

Die linke Gleichungsseite beschreibt das Riemann Integral von ,X‘ von ,k-1‘ bis ,k‘. Auf der rechten Gleichungsseite ist  $a_k$  nicht von h abhängig und somit konstant. Da, aufgrund der angenommenen Änderungen vom Typ I gilt  $\varepsilon_j \sim h^{1/2}$ , gilt für den stochastischen Teil, (also dem

zweite Term der rechten Seite), dass  $\varepsilon_j/h \sim h^{-1/2}$ .  $\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\varepsilon(k)}{h} \right\}$ , so dass keine Riemann Integration möglich ist.

Als zweites Fazit lässt sich feststellen, dass ein stochastischer Prozess, der ausschließlich Änderungen vom Typ I enthält, ist zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Die Standardregeln für Differenzialgleichungen sind somit nicht anwendbar.

Nachdem die grundsätzlichen Eigenschaften des in dieser Arbeit verwendeten stochastischen Prozesses beschrieben wurden, soll nun kurz gezeigt werden, dass diese Ergebnisse auch in eine Schreibweise überführt werden können, wie sie in der Literatur üblicherweise anzutreffen ist. Ausgangspunkt sei die bereits beschriebene Gleichung III.3. Merton zeigt, dass sich diese Gleichung auch schreiben lässt als:

$$X(k) - X(k-1) = a_k * h + \sigma_k u(k) h^{1/2} \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad (\text{III.4})$$

mit:

$$\sigma_k^2 \equiv \frac{E_{k-1}[\varepsilon^2(k)]}{h} \quad \text{als bedingte Varianz der unerwarteten Änderung mit}$$

$$E_{k-1}[(X(k) - X(k-1))^2] = \sigma_k^2 * h + o(h)^{232}$$

$$u(k) \equiv \frac{\varepsilon(k)}{(\sigma_k^2 * h)^{1/2}} \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

Es ist nun ein letzter Schritt notwendig, um zu zeigen, dass obige Gleichung der in der Literatur üblichen Darstellung stochastischer Prozesse (i.e. Wiener Prozess oder Markov Prozess) entspricht.

Dazu sei zunächst eine Variable ‚Z‘ definiert, deren bedingte erwartete Änderung von ‚Z‘ in einem Intervall dem Wert Null und deren bedingte Varianz dem Wert Eins entspricht. Die Verteilung von ‚Z‘ kann nun unter Verwendung einer weiteren Einschränkung approximiert werden. Merton<sup>233</sup> stellt fest, dass die Verteilung von ‚Z‘ beinahe beliebig sein kann, und trotzdem, aufgrund des Central Limit Theorem, die Verteilung von Z für alle endlichen ‚T‘ durch eine Gauss’sche Verteilung approximiert werden kann, wenn u(k) i.i.d. verteilt ist.<sup>234</sup> Ein Prozess, der diese Eigenschaft besitzt, wird Markov-Prozess genannt.

Ein Markov Prozess besitzt weiterhin die Eigenschaft, dass die zukünftigen Ausprägungen in ‚t+dt‘ einer Variablen, deren Verlauf durch solch einen Prozess beschrieben wird,

<sup>232</sup> Vgl. Merton (1998). S. 67 für einen Beweis.

<sup>233</sup> Vgl. Merton (1998). S. 77 f.

<sup>234</sup> Die Kurzform ‚i.i.d.‘ repräsentiert ‚identical and independently distributed‘ und ist in der Literatur häufig anzutreffen.



ausschließlich von der Ausprägung dieser Variablen zum Zeitpunkt ,t‘ bedingt wird. Die Variable ,Z‘ kann folglich beschrieben werden durch:

$$dZ(t) = u(t)(dt)^{1/2} \quad \text{(III.5)}$$

Dieser Prozess wird allgemein Brown’sche Bewegung oder Wiener Prozess genannt und kommt in der Finanzliteratur häufig zur Anwendung.<sup>235</sup>

Geht man davon aus, dass die in Gleichung III.1 beschriebene Variable ,X‘ ebenfalls i.i.d. ist, also in ihrer Veränderung einem Markov Prozess folgt, dann gilt nach Einsetzen von ,Z‘ in die Gleichung III.4 und unter Berücksichtigung von ,h=dt‘.<sup>236</sup>

$$d(X) = a_k(X, t) dt + \sigma_k(X, t) dZ(t) \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad \text{(III.6)}$$

Diese Gleichung repräsentiert die in der Literatur übliche Darstellungsform stochastischer Prozesse. Es sei angemerkt, dass diese letzte Einschränkung dem Ziel dient, die Verteilung von ,X‘ zu bestimmen. Sie stellt keine notwendige Prämisse für das Arbeiten mit stochastischen Prozessen dar. Sind  $\alpha$  und  $\sigma$  annahmegemäß konstant, so ist die Änderung der Variablen ,X‘ normalverteilt und die Variable ,X‘ selbst ist log-normalverteilt.

Nachdem die stochastischen Prozesse ausführlich beschrieben wurden, ist einsichtig, dass aufgrund ihrer fehlenden Differenzierbarkeit besondere Rechenregeln erforderlich sind, wenn sie im Rahmen eines Optimierungskalküls verwendet werden. Im Zentrum dieser Regeln steht Ito’s Lemma. Die Herleitung dieses Lemmas ist komplex und auch in einer intuitiven Form sehr aufwendig.<sup>237</sup> Es wird aus diesem Grund hier nur das allgemeine Vorgehen beschrieben:

---

<sup>235</sup> Unterliegt eine stochastische Variable einem Wiener Prozess, so ist sie i.i.d.(0,1). Dieser Ausdruck bedeutet: eine identische und unabhängige standard normalverteilte Variante. Brown’sche Bewegungen (BW) können in solche mit symmetrischer Verteilung (arithmetische BW) und asymmetrische (geometrische BW) als Sonderfälle der ,constant elasticity of variance‘ Diffusion unterschieden werden. Eine symmetrische Verteilung ohne Drift geht zurück auf Bachelier (1964). Cox und Ross (1976) wählten die allgemeinere Darstellungsform, die auch hier verwendet wird. Sie gehen ebenfalls auf die mangelhafte Darstellbarkeit von ,limited liability assets‘ durch diese Form ein. Diese Kritik trifft auf die in dieser Arbeit gewählte geometrische BW nicht zu, da sie einer Log-Normalverteilung folgt.

<sup>236</sup> Da der Prozess ein Markov Prozess ist, sind sowohl  $\alpha$  als auch  $\sigma$  Funktionen, die ausschließlich von der Ausprägung von ,X‘ zum Zeitpunkt ,t‘ abhängen.

<sup>237</sup> Merton (1998). S. 67 – 80 liefert eine mathematische, jedoch intuitiv nachvollziehbare Darstellung. Weiterhin liefert Duffie (1996) ein Herleitung auf hohem Abstraktionsniveau. Eine eher deskriptive Darstellung,

Ausgangspunkt ist eine stochastische Variable ,X‘, die dem in Gleichung III.6 stochastischen Prozess folgt. Weiterhin sei eine Funktion F(X) definiert, die zweifach differenzierbar sei. Jede Ausprägung von F(X) zum Zeitpunkt ,k+1‘ kann durch eine Taylor Approximation um den Wert von ,X‘ zum Zeitpunkt ,k+1‘ beschrieben werden.<sup>238</sup> Ito zeigt, dass der Approximationsfehler bei einer Approximation zweiter Ordnung vernachlässigt werden kann. Konkret: Er zeigt, dass der kumulative Approximationsfehler für sehr kleine Zeithorizonte ,h=dt‘ mit einer Wahrscheinlichkeit von ,1‘ gegen den Wert ,0‘ geht.

Es sei nun ein Ito Prozess unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse definiert. Es gilt: Die stochastische Variable folgt einem Ito Prozess, wenn sich ihr Verlauf beschreiben lässt durch:<sup>239</sup>

$$X(T) - X(0) = \int_0^T a[X(t), t] dt + \int_0^T \sigma[X(t), t] dZ(t) \quad (\text{III.7})$$

mit: 
$$\int_0^T \alpha[X(t), t] dt \equiv \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d.h.}} \sum_{k=1}^n \alpha_k * h$$

$$T = k * h$$

$$\int_0^T \sigma_k [X(t), t] dZ(t) \equiv \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d.h.}} \sum_{k=1}^n \sigma_k [X(t), t] \mu(k) h^{1/2}$$

---

die einen intuitiven Zugang ermöglicht, befindet sich in Hull (1997). S. 209-223.

<sup>238</sup> Konkret gilt für die Taylor Approximation zweiter Ordnung von F(x) um F(x<sub>0</sub>):

$$F(x) = f(x_0) + f_x(x_0) * (x - x_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0) * (x - x_0)^2 + R$$

Es sei nun  $x = x_0 + \Delta x$ , so dass nach Einsetzen gilt:

$$F(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f_x(x_0) * (\Delta x) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0) * (\Delta x)^2 + R$$

Es sei definiert  $dF \equiv F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$  und daran erinnert dass  $F(x_0) \equiv f(x_0)$  sowie für  $n \rightarrow \infty$  gilt  $R \rightarrow 0$ . Es folgt für obige Gleichung (vgl. Ito's Lemma):

$$dF = f_x(x_0) * (\Delta x) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0) * (\Delta x)^2$$

Dieses Vorgehen beschreibt auf einfachem Niveau die Herleitung von Ito's Lemma.

<sup>239</sup> Ein Ito-Prozess ist eine spezielle Form eines ,strong diffusion process‘ und eine allgemeinere Form eines Wiener-Prozesses. Sind ,a‘ und ,σ‘ konstant, so wird der Ito- zum Wiener-Prozess. Vgl. Hull (1997). S. 212-215.

Ist solch ein Prozess gegeben, so ist Ito's Lemma anwendbar, das besagt: Es sei  $f(X,t)$  eine zweifach differenzierbare Funktion. Nimmt man das stochastische Integral definiert durch obige Forderung, dann ist die zeitabhängige stochastische Variable  $F(t) \equiv f(X,t)$  ein stochastisches Integral und sein stochastisches Differential lautet<sup>240</sup>

$$dF = \frac{\partial f(X,t)}{\partial X} dX + \frac{\partial f(X,t)}{\partial t} dt + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f(X,t)}{\partial [X]^2} [dX]^2 \quad (\text{III.8})$$

Es ist unter Anwendung von Ito's Lemma möglich, die zeitliche marginale Änderung einer stochastischen Variablen, die nicht differenzierbar ist, zu approximieren. Im Continuous-Time Rahmen bewegt sich der Approximationsfehler gegen Null. Weiterhin wird aus den Definitionsgleichungen deutlich, dass die folgenden Regeln anwendbar sind:  $(dZ)^2 = dt$ ,  $dZ * dt = 0$  und  $(dt)^2 = 0$ .<sup>241</sup> Dies sei kurz begründet: Gemäß  $dZ(t) \equiv u(t) * (dt)^{1/2}$  folgt  $(dZ)^2 = u(t)^2 * dt$  und  $dZ * dt = u(t) * (dt)^{3/2}$ . Terme, die die Eigenschaft  $o(dt)$  besitzen, werden jedoch ignoriert, da sie, wie aus der Definition von  $o(dt)$  ersichtlich ist, in der Continuous-Time Betrachtung gegen Null gehen. Die Terme  $(dt)^{3/2}$  und  $(dt)^2$  erfüllen diese Bedingung. Da annahmegemäß  $u(t)$  begrenzt ist, gilt  $o(dt)$  auch für  $(dZ)^2 = u(t)^2 * dt$  und  $dZ * dt = u(t) * (dt)^{3/2}$ . Diese Terme können folglich ignoriert werden. Die Regeln  $dZ * dt = 0$  und  $(dt)^2 = 0$  sind also durch die allgemeinen Eigenschaften des stochastischen Prozesses begründet. Gleiches Vorgehen kann zur Erläuterung der Regel  $(dZ)^2 = dt$  verwendet werden. Aus  $dZ(t) \equiv u(t) * (dt)^{1/2}$  folgt, dass  $(dZ(t))^2 = u(t)^2 * (dt)$  gilt, so dass  $(dZ)^2 \neq o(dt)$ . Dieser Term kann folglich in einer Continuous-Time Betrachtung nicht vernachlässigt werden. Abschließend sei noch die folgende Regel ohne explizite Begründung genannt: Werden zwei unterschiedliche Prozesse multipliziert, so gilt  $dZ_i * dZ_j = \kappa_{ij} * dt$  mit  $\kappa$  als Kovarianz und  $\kappa_{ii} = 1$ .<sup>242</sup>

Die hier vorgestellten Regeln und ihre Zurückführung auf die ihnen zugrunde liegenden Prämissen bilden die Grundlage für eine Modellierung im Continuous-Time Rahmen.

<sup>240</sup> Diese Gleichung gilt für den Spezialfall, dass nur eine Variable  $X$  existiert. Eine allgemeinere Formel für den Fall von mehreren Variablen, neben der Zeitvariablen natürlich, findet sich in Kamien und Schwartz (1981). S. 244.

<sup>241</sup> Die folgenden Ausführungen lehnen sich an Obstfeld (1992), S. 28-29 an.

<sup>242</sup> Vgl. Kamien und Schwartz (1981). S. 245.

Abschließend wird nun gezeigt, dass sich die bekannten Regeln der Differenzialrechnung als Sonderfall der obigen Ausführungen bei Verwendung nicht stochastischer Variablen resultieren.<sup>243</sup> Es sei  $F(t) \equiv f(X)$  die Funktion des stochastischen Prozesses ‚X‘. Gemäß Ito’s Lemma folgt für  $F(t)$ :

$$dF = \frac{\partial F(X)}{\partial X} dX + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 F(X)}{\partial [X]^2} (d[X])^2 \quad (\text{III.9})$$

Es sei nun alternativ angenommen, dass  $F(t)$  eine Variable sei mit  $F(t) \equiv f(X(t))$ . Die Variable ‚X‘ sei nun nicht stochastisch. Im folgenden werde  $F(t)$  nun nach ‚t‘ differenziert, so dass unter Anwendung der Kettenregel gilt:

$$dF_t = \frac{\partial F(X)}{\partial X} dX \quad (\text{III.10})$$

Ein direkter Vergleich veranschaulicht, dass der Einfluss der Stochastik im letzten Term der

ersten Gleichung  $\frac{1}{2} * \frac{\partial^2 F(X)}{\partial [X]^2} (d[X])^2$  zum Ausdruck kommt. Diese Divergenz kann wie folgt intuitiv begründet werden. Zunächst sei der nicht stochastische Fall angesprochen: Es ist einleuchtend, dass für kleine Änderungen von ‚X‘ die quadrierten Änderungen  $d(X)^2$  im Vergleich zu  $d(X)$  einen vernachlässigbaren Einfluss ausüben. Zur Betrachtung von marginalen Änderungen von ‚X‘ ist dieser Term somit vernachlässigbar, wie es üblicherweise in der nicht stochastischen Differenzialrechnung praktiziert wird.

Diese Argumentation ist auf den stochastischen Fall nicht anwendbar. Wird vereinfachend angenommen, dass der Erwartungswert von ‚X‘ den Wert Null besitzt, so gilt für die erwarteten quadrierten Abweichungen vom Erwartungswert, also für die Varianz von ‚X‘:

$$Var[X] = E[(\Delta X)^2] > 0$$

---

<sup>243</sup> Die folgenden Ausführungen lehnen sich an Neftci (1996). An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, New York, S. 128 ff. an.

Anders ausgedrückt: Im Durchschnitt ist die Änderung von  $\Delta X^2 \neq 0$ , so dass dieser Term nicht ignoriert werden kann. Diese Feststellung kann auf die Eigenschaft der Stochastik von ‚X‘ zurückgeführt werden. Ist nämlich die Variable ‚X‘ nicht stochastisch, so erhält die Varianz den Wert Null. Daraus folgt, dass die erwartete quadrierte Änderung von ‚X‘, bei weiterhin angenommenem Erwartungswert von Null, ebenfalls den Wert Null erhält. Die erwartete Änderung von ‚X‘, die im nicht stochastischen Fall der tatsächlichen Änderung

entspricht, wird von Term  $\frac{1}{2} * \frac{\partial^2 F(X)}{\partial [X]^2} (d[X])^2$  folglich nicht beeinflusst, so dass die Anwendung der Regeln für stochastisches Differenzieren auf nicht stochastische Variablen zu den bekannten Ergebnissen führen.

Abschließend ist festzustellen, dass die Herleitung von stochastischen Prämissen, die den Modellen im Continuous-Time Rahmen zugrunde liegen, auf intuitiv einsichtige Prämissen zurückgeführt werden können. Die Verwendung dieser Prozesse erfordert jedoch besondere Rechenregeln, da sie nicht differenzierbar sind und die Ableitungen/Integrale unter Verwendung von Ito's Lemma approximiert werden. Diese Regeln sind jedoch konsistent mit den üblichen Regeln zur Differenzialrechnung im nicht stochastischen Umfeld.

## **2. Aussagen zur Prognosefähigkeit des Terminkurses im komparativ-statischen und im Continuous-Time CAPM**

In der Literatur wurde die Prognosefähigkeit des Terminkurses im Rahmen eines Capital Asset Pricing Model (CAPM) mit unterschiedlicher Schwerpunktsetzung bereits theoretisch fundiert. Die Entstehung und Weiterentwicklung des CAPM nebst der hier relevanten Literatur wird in diesem Abschnitt 2 kurz beschrieben. Dazu werden in Schritt 1 die Versionen des CAPM im komparativ statischen Rahmen dargestellt. In Schritt 2 werden allgemeine Probleme der empirischen Überprüfung eines CAPM angesprochen. Schließlich wird in Schritt 3 die Continuous-Time CAPM Literatur ausgewählt, die weitestgehend mit dem Vorgehen und der Zielsetzung dieses Kapitels vergleichbar ist. Ziel des Abschnitts 2 ist es, die Gleichgewichtsbedingung des in Abschnitt 3 entwickelten Modells - das eine Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses erlaubt - und die in der Modellentwicklung verwendete Methodik in die Literatur einzuordnen.

### **2.1. Die Aussagen des komparativ statischen CAPM und dessen Grenzen**

Das Capital Asset Pricing Model (CAPM) wurde von Sharpe (1964), Lintner (1965) und Mossin (1966) entwickelt. Ihr komparativ statisches Modell formuliert eine gleichgewichtige relative Ertragsstruktur von unsicheren Anlagetiteln bei risikoaversen Verhalten. Sie stellten anhand des CAPM fest, dass nicht die gesamte Unsicherheit der jeweiligen Anlage auf ihren gleichgewichtigen Ertrag einwirkt: Diversifizierung, definiert als simultanes Halten verschiedener unsicherer und nicht vollständig korrelierter Anlagetitel, reduziert die relevante Unsicherheit des Titels auf seine nicht eliminierbare Unsicherheit. Diese bewertete nicht eliminierbare Unsicherheit wird systematisches Risiko genannt.<sup>244</sup> Als zentrales Ergebnis werden effiziente Ertrags-Unsicherheits-Kombinationen ermittelt, die nicht von Präferenzen der Anleger abhängen, sondern aus den objektiv feststellbaren Charakteristika der Anlagetitel ermittelt werden.

---

<sup>244</sup> Diese Formulierung ist irreführend, da Risiko definiert ist als bewertete Unsicherheit, hier jedoch individuelle Präferenzen nicht relevant sind.

Ausgehend von diesen effizienten Portfolios werden im nächsten Schritt die individuellen Anlagestrukturen ermittelt, die von den Anlegerpräferenzen abhängig sind. Es wird die Aufteilung zwischen einer risikolosen Anlage und dem Marktportfolio bestimmt. Damit einhergehend lässt sich die individuelle Nachfrage nach den unsicheren Anlagetiteln und deren gleichgewichtiger Ertrag relativ zum sicheren Ertrag bestimmen.<sup>245</sup> Die Risikoprämie ist im CAPM definiert als der über den risikolosen Ertrag hinausgehende gleichgewichtige Ertrag einer unsicheren Anlage.<sup>246</sup>

Alternativ zum CAPM existiert ein ‚mean variance optimizing model‘, das auch als Tobins Risikoaversions-Modell bezeichnet wird, und auf der Theorie des Erwartungsnutzens aufbaut.<sup>247</sup> Dadurch unterscheidet es sich vom originären Sharpe-Lintner-Mossin-CAPM. Im Tobin-Modell werden Nachfragefunktionen aus einer Nutzenoptimierung unter Berücksichtigung von Erwartungswert und Varianz der unsicheren Anlage formuliert.<sup>248</sup> Anschließend wird ein Marktgleichgewicht bestimmt, indem die Nachfragefunktion einem exogenem Angebot gleichgesetzt wird. Als Ergebnis wird wie im originären CAPM eine gleichgewichtige Ertragsstruktur von unsicheren Anlagemöglichkeiten bestimmt.

Die resultierende Gleichgewichtsbedingung aus Tobins Modell gleicht formal der CAPM Forderung, unterscheidet sich jedoch in der Interpretation des Risikokoeffizienten. Während Tobins Risikoaversions-Modell das Risiko auf die Krümmung der Nutzenfunktion zurückführt, konzentriert sich das CAPM auf eine Risikobeschreibung, die in Abhängigkeit vom jeweiligen Erwartungswert, Varianz und Kovarianz bestimmt wird. Diese Unterscheidung zwischen dem Tobin’schen Modell und dem CAPM wird hier nicht aufrechterhalten, da die Arbeiten von Merton erstgenanntes Vorgehen der Nutzenmaximierung wählen, jedoch den Namen CAPM führen.<sup>249</sup>

---

<sup>245</sup> Existiert keine risikolose Anlage, so kann sie durch ein Portfolio ersetzt werden, das mit dem Marktportfolio nicht korreliert ist. Diese Form des CAPM wird ‚zero beta CAPM‘ genannt.

<sup>246</sup> Cuthbertson (1997) liefert eine Beschreibung des komparativ statischen CAPM mit seinen Implikationen. (Kap. 2 bis Kap. 3.2.) Die im Text genannte Risikoprämie definiert Cuthbertson (1997), S. 41.

<sup>247</sup> Dieser Ansatz geht auf Tobin (1958) zurück. Cuthbertson (1997), S. 54 und S. 391-395 grenzt diese Modelle voneinander ab. Berk (1997) zeigt, dass die Präferenzen über  $\mu$ - $\sigma$  (also die Prämisse des Tobin Modells) notwendig für ein CAPM sind (Corollary 3.2). Er liefert weiterhin Bedingungen unter denen ein Asset mit nicht-normaler Verteilung und in ‚zero net supply‘ die Aussage des CAPM nicht verändert: Es muss durch eine Linearkombination der übrigen Assets replizierbar sein. Die wesentliche Restriktion des einperiodigen CAPM, nämlich diejenige der quadratischen Nutzenfunktion oder der normalverteilten ‚asset returns‘, werden bestätigt.

<sup>248</sup> Zur Form dieser Nachfragefunktionen bei alternativen Nutzenfunktionen vgl. Courakis (1989).

Trotz seiner großen Verbreitung in der Literatur unterliegt die Aussage des CAPM sehr einschränkenden Prämissen, die Ansatzpunkte für eine Kritik bieten.<sup>250</sup> In diesem Kapitel sind die folgenden zwei Kritikpunkte relevant, da sie zwar im komparativ statischen Rahmen zutreffen, nicht aber im Continuous-Time Rahmen:

Zunächst ist die Verwendung eines Risikomaßes, das ausschließlich auf der Anlagevarianz aufbaut, nur bedingt mit alternativen Kriterien, beispielsweise der Erwartungsnutzenmaximierung, vereinbar.<sup>251</sup> Weiterhin ist das CAPM sehr restriktiv formuliert, da es von einer normalverteilten Dichtefunktion oder alternativ von einer quadratischen Nutzenfunktion ausgeht.<sup>252</sup> Diese notwendigen Prämissen stimmen jedoch entweder mit empirischen Beobachtungen nicht überein (Normalverteilung) oder implizieren intuitiv uneinsichtige Verhaltensweisen (möglicher negativer Grenznutzen des Vermögens bei quadratischer Nutzenfunktion). Diese Einschränkungen reduzieren folglich den Aussagewert des CAPM.<sup>253</sup>

Die Weiterentwicklungen, insbesondere die ‚continuous time‘ Versionen, mildern einige dieser Kritikpunkte, ohne sie jedoch sämtlich zu entkräften.<sup>254</sup> Wünschenswert wäre ein allgemeines Gleichgewichtsmodell, das unter anderem die stochastische Bewegung der Preise endogenisiert. Cox et al. (1985) versuchen die Ansätze von Lucas und Merton zu integrieren. Merton (1998, Chapter 16) entwickelt ebenfalls ein allgemeines Gleichgewichtsmodell im Continuous-Time Rahmen, das mit dem CAPM vereinbar ist. Die Modelle sind ihrer Formulierung jedoch sehr aufwendig. Weiterhin folgert Merton, dass die Einbeziehung nicht handelbarer Güter wünschenswert sei. Da eine Weiterentwicklung in dieser Hinsicht nicht dem Ziel dieser Arbeit dient, werden diese Ansätze nicht näher beschrieben.

---

<sup>249</sup> Cuthbertson (1997). S. 391-395 liefert einen Vergleich dieser Modelle.

<sup>250</sup> Eine formale Analyse der notwendigen Prämissen liefert Berk (1997). Die wesentlichen Resultate wurden bereits aufgeführt und entsprechen den hier beschriebenen Restriktionen.

<sup>251</sup> Vgl. Rothschild und Stiglitz (1970).

<sup>252</sup> Serita (1991) testet ein internationales CAPM im komparativ statischen Rahmen unter der Prämisse, der Erwartungswert/Varianz-Optimierung. Diese Annahme legt eine quadratische Nutzenfunktion zugrunde. Sie schließen auf national divergierende Portfolios aufgrund von unterschiedlichen Investitionsmöglichkeiten. Diese Unterschiede führen sie auf das Wechselkursrisiko zurück.

<sup>253</sup> Elton und Gruber (1974) formulieren ein Portfoliomodell im komparativ-statischen Rahmen unter Annahme von log-normal-verteilten Preisen. Sie zeigen, dass in diesem Rahmen die Nutzenfunktion konvex ist.

<sup>254</sup> Merton (1975) geht auf die Vorteile ein. Er wertet besonders die mögliche Prämisse der log-normalen Verteilung der Erträge als realitätsnäher. Eine Übersicht von CAPM-Weiterentwicklungen liefern Elton und Gruber (1984). Jagannathan und Wang (1993) unterstreichen die Relevanz des CAPM, während Thomas und



Abschließend sei zur Vervollständigung die Arbeit von Rubinstein (1977) genannt. Er liefert eine umfassende Systematisierung der möglichen Ansätze. Er charakterisiert CAPM-Modelle durch ihre Einschränkungen bezüglich der erwarteten Preisentwicklung und stellt ein alternatives Vorgehen zur Diskussion. Diese Alternative lässt die Güterpreisveränderung unspezifiziert und beschränkt die möglichen Ausprägungen der verwendeten Nutzenfunktion. Seine Analyse schließt auf eine theoretische Überlegenheit der zweiten Alternative, die jedoch schwer empirisch testbar sei.<sup>255</sup>

## **2.2. Die empirische Überprüfbarkeit des komparativ statischen CAPM**

Dieser Abschnitt liefert einen Literaturüberblick über die vorhandenen empirischen Ansätze zur Überprüfung eines CAPM und ihrer Aussagen. Das CAPM kann grundsätzlich auf zwei Arten empirisch überprüft werden: hinsichtlich seines Erklärungswertes der beobachtbaren relativen Renditen oder hinsichtlich der beobachtbaren Portfoliostruktur der Anleger. Beide Verfahren benötigen jedoch umfangreiche Daten, die nicht im notwendigen Umfang zur Verfügung stehen. Aus diesem Grund ist die empirische Überprüfung eines CAPM nur durch Einführung von weiteren sehr restriktiven Prämissen möglich.

In diesem Abschnitt werden zunächst die Datenanforderungen an einen empirischen Test kurz angesprochen. Insbesondere die Definition des Marktportfolios für die Empirie stellt ein gesondertes Problem dar. Dieses Problem findet sich in der Literatur unter dem Begriff ‚Rolls critique‘. Anschließend werden kurz empirische Ansätze der Überprüfung mit ihren unterschiedlichen Schwerpunkten vorgestellt.

Die empirische Überprüfung des CAPM unterliegt wesentlichen Einschränkungen in der Datenverfügbarkeit. Da Erwartungswerte und Varianzen grundsätzlich nicht beobachtbar sind, eignet sich das CAPM nur dann zur Prognose erwarteter Erträge unsicherer Anlagen, wenn die durchschnittlichen ex post beobachtbaren Erträge den erwarteten zukünftigen Ertrag approximieren.<sup>256</sup> Wird Heteroskedastizität in der Untersuchung berücksichtigt, so muss ein

---

Wickens (1989) eine Ursachenanalyse für das internationale CAPM durchführen.

<sup>255</sup> Die Arbeit beinhaltet gleichzeitig eine umfassende Prämissenkritik der Portfoliotheorie und erleichtert somit die Bewertung solcher Modelle.

<sup>256</sup> Cuthbertson (1997), S. 24.

autoregressiver Prozess für die Varianz spezifiziert werden, dessen Parameter wiederum nicht beobachtbar sind. Letztgenannte Prozesse werden beispielsweise durch Einführung von ARCH, GARCH oder EGARCH Modellen in der empirischen Literatur berücksichtigt.<sup>257</sup> Alternativ verwendet die neuere Literatur Optionspreise, um die Dichtefunktionsparameter einer Anlage ex ante zu bestimmen.<sup>258</sup> Einschränkend ist jedoch festzustellen, dass nicht für sämtliche Anlagemöglichkeiten Optionen existieren und die Bestimmung der Dichtefunktion ebenfalls Prämissen zur Form der Verteilung beinhaltet. der die zukünftige unsichere Ertragsrate aus Optionspreisen mit diesem Anlagetitel als ‚underlying asset‘ herleiten.

Eine weitere wesentliche Kritik bezieht sich auf die Definition des Marktportfolios für die empirische Überprüfung und wird ‚Rolls’s critique‘ genannt.<sup>259</sup> Roll zeigt, dass jedes ex post effiziente Portfolio eine lineare Beziehung zwischen seinem Ertrag und seinem Beta im Datensample impliziert.<sup>260</sup> Er folgert daraus, dass sich ein Test des CAPM nur auf die Markteffizienz beziehen kann. Umgekehrt ist eine empirische Widerlegung des CAPM unter Umständen auf eine fehlerhafte (weil unvollständige) Spezifikation des Marktportfolios zurückzuführen. Eine fehlende empirische Bestätigung der CAPM-Gleichgewichtsbedingungen kann somit vielfältige Ursachen haben und ist mit Vorsicht zu interpretieren.

In der Literatur werden aufgrund der Datenverfügbarkeit meist ausschließlich Finanzmarkttitle in das Marktportfolio einbezogen.<sup>261</sup> Baxter und Jermann (1997) thematisieren die Konsequenzen einer Berücksichtigung der ‚Roll critique‘. Sie folgern, dass die Verwendung eines vollständigeren Marktportfolios unter Einbeziehung von Humankapital den Erklärungswert des CAPM weiter verringern würde. Eine angenommene positive

---

<sup>257</sup> Das CAPM setzt keine Prämissen hinsichtlich des stochastischen Verhaltens im Zeitablauf. Cuthbertson (1997). S. 43. In Kapitel 7 liefert er eine kurze Beschreibung dieser ökonometrischen Verfahren. Eine formale Beschreibung liefert Greene (1997) Chapter 18.5.

<sup>258</sup> Bates (1997) beschreibt die Auswirkung von alternativen stochastischen Prozessen, denen eine stochastische Variable folgt, auf seine Dichtefunktionen. Dieses Verfahren ermöglicht ebenfalls eine Aussage zur Asymmetrie der Dichtefunktion. Es werden jeweils die Preise einer Put und Call Option, deren ‚strike price‘ im gleichen Abstand vom Marktpreis des ‚underlying asset‘ untersucht. Ist deren Preis identisch, so kann von einer symmetrischen Verteilung ausgegangen werden. Bodurtha und Courtadon (1987) folgern eine asymmetrische Verteilung der US-Dollar Wechselkurse. Lyons (1988) wendet diese Methode auf die Untersuchung einer Risikoprämie im Rahmen der UIP ohne Erfolg an.

<sup>259</sup> Vgl. Roll (1977).

<sup>260</sup> Das Beta eines Wertpapiers repräsentiert, graphisch gesehen, die Steigung der Wertpapierlinie, und ökonomisch die erwartete Änderung im erwarteten Ertrag eines Wertpapiers dividiert durch die einhergehende Änderung im Ertrag des Marktportfolios. Es kennzeichnet die Höhe des nicht diversifizierbaren, also des systematischen, Risikos eines Wertpapiers.

Korrelation zwischen Arbeits- und Kapitalertrag würde eine ‚short position‘ inländischer Anlagentitel als Hedgestrategie fordern. Insgesamt folgt, dass Datenprobleme einen empirischen Test unmöglich erscheinen lassen.

Über diese grundsätzlichen Einschränkungen zur Datenverfügbarkeit und Datenverwendung zur Bestimmung des Marktportfolios hinaus unterliegen die konkreten empirischen Verfahren einer weitergehenden Verfahrenskritik. Die Aussagen des CAPM können prinzipiell auf zwei Arten erfolgen.

Einerseits kann die theoretisch bestimmte Portfoliostruktur mit der tatsächlich beobachtbaren Struktur übereinstimmen, wenn das CAPM einen Erklärwert der Realität besitzt. In Schritt 1 bestimmt das CAPM eine gleichgewichtige Portfoliostruktur des Marktportfolios. Befinden sich die Märkte im Gleichgewicht, so müssen die beobachtbaren Marktkapitalisierungen der Anlagemöglichkeiten dieser theoretisch bestimmten Portfoliostruktur entsprechen. Diese Tests schlagen in der Literatur meist fehl, da eine real größere heimische Investition beobachtet werden kann als dies theoretisch zu rechtfertigen wäre.<sup>262</sup> Eine Erklärung dafür verweist auf Informationsasymmetrien.<sup>263</sup> Angesichts der einheitlichen Ergebnisse in der Literatur wird dieses Verfahren nicht weiter dargestellt.

Als weitere Testmöglichkeit kann der Erklärungswert des CAPM hinsichtlich der beobachtbaren relativen Renditen überprüft werden. Dazu wird zunächst die theoretisch formulierte Gleichgewichtsbeziehung zwischen der Rendite einer unsicheren Anlage und dem Marktportfolio, einem nicht beobachtbaren ‚benchmark‘ Portfolio, festgestellt. Um diese Forderung empirisch testbar zu machen, werden weitere Annahmen zum Marktportfolio gesetzt. So wird oft eine lineare Beziehung zwischen dem ‚benchmark‘ Portfolio und sogenannten ‚instrumental variables‘ postuliert, die beobachtbar sind.<sup>264</sup> Durch diese

---

<sup>261</sup> Dieser Kritikpunkt wird von Dumas und Solnik (1992) aufgegriffen.

<sup>262</sup> Baxter und Jermann (1997) vergleichen theoretisch fundierte Portfolioaufteilungen mit den tatsächlich beobachtbaren Werten. Dumas (1994) schließt bei (in jeweils nationaler Währung beschriebener) nicht stochastischer Inflation auf ‚home currency preference‘ jedoch nicht auf ‚home equity preference‘. Dieses Vorgehen lehnt sich an Solnik (1974) an und unterliegt auch der Kritik an dem Modell.

<sup>263</sup> Vgl. Ahearne et al (2000).

<sup>264</sup> Dumas (1994) geht auf die Wahl der ‚instrumental variables‘ ein und vergleicht die empirischen Ergebnisse des klassischen CAPM (ohne Wechselkursrisiko) mit denjenigen des internationalen CAPM. Sie schließen auf eine signifikante Risikoprämie des Wechselkurses, wenn Finanzmarktvariable als ‚latent variables‘ verwendet werden. Bei Wahl von realwirtschaftlichen Variablen werden beide CAPM Arten verworfen. Vgl. Dumas (1994b).

Formulierung wird die Roll critique umgangen, da das Marktportfolio nicht spezifiziert werden muss. Nachteilig ist jedoch, dass die Wahl der ‚instrumental variables‘ nicht theoretisch fundiert ist und somit Ansatzpunkte für eine Kritik bietet.<sup>265</sup> Weiterhin werden meist die zweiten und höheren Momente der Verteilung als konstant angenommen.<sup>266</sup>

Eine Erweiterung dieses Ansatzes besteht im ‚latent variable approach‘, der keine Spezifizierung der Ursachen eines Risikos verlangt. Harvey et al. (1994) verwenden diese Methode und schließen auf die Notwendigkeit von zwei Faktoren zur Erklärung einer Risikoprämie. Diese Faktoren werden als Weltmarktportfolio und Bondportfolio charakterisiert und ihnen ein 83%iger Erklärungswert zuerkannt. Fraglich ist jedoch die Realitätsnähe der für diese Tests notwendigen Annahmen. Harvey (1991) schließt auf international unterschiedliche Preise des Risikos, was der CAPM Aussage widerspricht. Alternativ kann die Heteroskedastizität der Anlageerträge in die empirischen Tests einbezogen werden, wenn von einem konstanten Marktpreis des Risikos ausgegangen wird.<sup>267</sup> Arbeiten, die sich auf diesen Aspekt konzentrieren, verwenden einen ARCH- oder GARCH-Ansatz. Ziobrowki und Ziobrowski (1995) komplettieren die Breite der Untersuchungen um eine praxisnahe Ausrichtung, indem sie Allokationshinweise bezüglich Anlageformen und Länderstreuung formulieren. Sie folgern, dass US-Anleger über den Zeitraum 1973-1991 eher nicht von einer internationalen Diversifizierung profitierten und sprechen sich allgemein für eine internationale Anlage in Aktien aufgrund der niedrigen Korrelation mit dem Wechselkurs aus.

Komplementär zu dieser Form der empirischen Überprüfung kann der Einfluss von Angebotsänderungen auf die relative Ertragsstruktur untersucht werden. Diese Arbeiten basieren auf Arbeiten von Frankel (1979), der ebenfalls die Relevanz von ‚inside/outside assets‘ thematisiert. Dieser Gedanke wurde in Frankel (1986) auf die Portfoliotheorie

---

<sup>265</sup> Eine kurze Darstellung dieses Verfahrens, die auch die Transformation des Lucas Modells in eine CAPM vergleichbare Aussage darstellt, findet sich bei Giovannini und Jorion (1987), S. 117. Ihre Definition der risikolosen Ertragsrate (Gleichung 19) ist jedoch fragwürdig, da eine stochastische Variable in eine nicht-stochastische transformiert wird. Die Problematik ist dem Zusammenhang zwischen Erwartungswert und Sicherheitsäquivalent vergleichbar. Dumas (1994) geht auf Erweiterungen des Lucas Modells ein, die KKP Abweichungen möglich machen. Während er CAPM Modelle für testbar hält, folgert er für allgemeine Gleichgewichtsmodelle, dass ‚[they] are at the most calibrated‘ (S. 930).

<sup>266</sup> Vgl. Dumas und Solnik (1993) für eine verbale Darstellung der Prämissen dieser Tests.

<sup>267</sup> Vgl. Dumas und Solnik (1993).

angewendet und von Engel und Rodriguez (1988) empirisch überprüft. Der Erklärungsgehalt ist den übrigen bisher beschriebenen Formulierungen nicht überlegen.

Sämtliche bisher beschriebenen Test gehen insofern von einem statischen CAPM aus, als dass eine Änderung des Anlage/Konsumszenarios nicht in die Analyse einbezogen wird. In der bedingten dynamischen Form des CAPM ist die Spezifizierung von ‚state variables‘ notwendig. Diese sind von der Theorie nicht vorgegeben. Die Formulierung eines internationalen dynamischen CAPM wird von Dumas und Solnik (1993) als zur Zeit nicht berechenbar bezeichnet.<sup>268</sup> Aufgrund der hohen Anzahl von Vermögengstiteln, die zu einer Überidentifizierung notwendig sind, halten sie einen Test für schwer durchführbar.

Neben den allgemeinen empirischen Überprüfungen des CAPM wurde es auch speziell zur empirischen Überprüfung der ungedeckten Zinsparität verwendet. Diese Ergebnisse seien nun kurz dargestellt: Ein Test der ungedeckten Zinsparität (UIP) im Rahmen des CAPM wird von Engel und Rodriguez (1989) durchgeführt. Sie testen das CAPM unter Verwendung von Bonds in Landeswährung für die US-Dollar Wechselkurse des ital. Lire, franz Franc, Yen, DM, brit. Pound über den Zeitraum von 1973-1984. Bei konstanter Varianz ermitteln sie in ihrer empirischen Untersuchung eine relative Risikoaversion von -19,3. Bei angenommener Abhängigkeit der Varianz von der US-Geldmenge M1 bzw. vom Ölpreis resultiert eine empirische Risikoaversion von -23,9. McCurdy und Morgan (1991) berücksichtigen den Einfluss von Heteroskedastizität bei der Bestimmung der Risikoprämie über den Zeitraum 1980-1988. Sie finden eine signifikante zeitvariable Risikoprämie in der Überprüfung der UIP. Cumby (1988) versucht die ex ante Gewinne der Terminmarktspekulation anhand eines konsumbasierten CAPM zu erklären. Einen angemessenen Erklärungsgehalt findet er nicht.

Zusammenfassend kann gefolgert werden, dass die bekannten Formulierungen des CAPM keinen zufriedenstellenden Erklärungsgehalt für die Preisänderungen an den Finanzmärkten liefern. Diese Folgerung gilt auch für Weiterentwicklungen.<sup>269</sup> Neuere Forschungsbeiträge beschäftigen sich mit den Konsequenzen von Transaktionskosten auf die Aussage des CAPM.

---

<sup>268</sup> Sie erkennen an, dass das statische internationale CAPM inkonsistent ist, da Erwartungen auf verfügbaren Informationen basieren, deren Änderung jedoch nicht in die Erwartungsbildung mit eingeht (S. 4).

<sup>269</sup> Elton und Gruber (1984) beschreiben Varianten des CAPM.

Diese Wirkungen sind besonders im ‚continuous time‘ Rahmen nicht trivial.<sup>270</sup> Ihr empirischer Erklärungsgehalt kann noch nicht beurteilt werden.<sup>271</sup>

### **2.3 Aussagen zur Prognosefähigkeit des Terminkurses im Continuous-Time CAPM**

In der Literatur existieren unterschiedliche Modelle, die sich für eine Überprüfung der ungedeckten Zinsparität eignen und, wie in dieser Arbeit, keine Gültigkeit der Kaufkraftparität unterstellen. Dies sind die Modelle von Solnik (1974), Adler und Dumas (1984) und Stulz (1981). Sie werden ergänzt durch Arbeiten von Heckerman (1972), Senbet (1979), Sercu (1980) und Grauer et al. (1976). Diese Modelle basieren auf dem Vorgehen von Merton (1973) und sind damit Variationen eines intertemporalen CAPM im ‚continuous time‘ Rahmen.<sup>272</sup> Es werden im folgenden die zentralen Prämissen und Ergebnisse der Modelle von Solnik, Adler und Dumas, und Breeden wiedergegeben, die als Grundformen für die unterschiedlichen Ausrichtungen angesehen werden können.

Das Modell von Merton (1973) ist das erste CAPM, das im Continuous Time Rahmen formuliert wurde. Es lässt realitätsnähere Prämissen zu, indem keine quadratische Nutzenfunktion bzw. (alternativ) normalverteilte Preise voraussetzt. Die Annahme log-normalverteilter Preise, die mit den Realitäten des Kapitalmarktes eher übereinstimmt, wird jedoch benötigt. Trotz des neuen Ansatzes werden jedoch die Ergebnisse der theoretisch orientierten komparativ statisch formulierten CAPM-Literatur grundsätzlich bestätigt: Der gleichgewichtige Ertrag einer unsicheren Anlage kann als Summe des sicheren Zinssatzes und einer Risikoprämie dargestellt werden. Letztere berücksichtigt ausschließlich das systematische Risiko.

Mertons Arbeit erlaubt darüber hinaus ein verbessertes Verständnis der Portfoliotheorie, da sein Modell den Einfluss unterschiedlicher Zukunftsszenarien auf die Ertragsstruktur der

---

<sup>270</sup> Dumas und Luciano (1990) sowie Delgado und Dumas (1994) liefern Simulationsergebnisse. Ihr Modell verwendet die Annahme einer stetigen Veränderung der Preise.

<sup>271</sup> Elton und Gruber (1991) wählen eine praxisorientierte Untersuchung. Sie schließen auf eine signifikante Reduzierung des Risikos durch internationale Diversifizierung und bestätigen damit ein wesentliches Ziel der Diversifizierung. Ihre Analyse wird aus Schweizer Sicht durchgeführt und basiert auf einem sehr einfachen CAPM Modell. Adjoute und Tuchschnid (1996) argumentieren ebenfalls im Rahmen eines CAPM aus Schweizer Sicht und empfehlen ein unvollständiges Hedging gegen Währungsrisiken.

<sup>272</sup> Das Model von Merton wird im Appendix ausführlich dargestellt.

Anlagemöglichkeiten theoretisch darstellt, die bis dato nicht thematisiert wurden. Er folgert, dass die Hedgeeigenschaft gegenüber als ungünstig empfundenen Zukunftsszenarien die erwarteten gleichgewichtigen Erträge beeinflusst. Konkret kann ein gleichgewichtiger unsicherer Ertrag um so geringer sein, je höher die obige Hedgefähigkeit ist, wobei das komparativ statische ein-beta CAPM als Benchmark dient. Dieser Einfluss kann, wie Merton zeigt, in Form einer zweiten Risikoprämie in die Ertragsgleichung additiv integriert werden.

Das Modell von Breeden (1979) baut auf Merton (1973) auf und bezieht sich auf ein Land mit einer unsicheren Zukunft und der Möglichkeit des Konsums unterschiedlicher Güter. Er formuliert Nachfragefunktionen zunächst nach unsicheren Anlagetiteln sowie, darauf aufbauend, von Gleichgewichtsbeziehungen zwischen der Rendite unsicherer Vermögenstitel und einer risikolosen Verzinsung. Breeden bestätigt die Merton'schen Erkenntnisse in seiner Arbeit. Anschließend fasst er die zwei Risikoprämien des Merton'schen Modell in eine einzige Prämie zusammen. Dies ist möglich, da der Nutzen des Investors, der seine Anlageentscheidung beeinflusst, allein vom realen Konsum abhängt. Merton unterschied jedoch zwischen den Einflüssen von Preisunsicherheit und Zukunftsszenarien auf die Konsummenge. Breeden zeigt in seiner Arbeit formal, dass diese Einflüsse durch eine Prämie repräsentiert werden können, die den Einfluss der Zukunftsszenarien auf den realen Konsum abbildet.

Ein Vorgehen von Breeden, das in dieser Arbeit aufgegriffen wird, besteht darin, Zukunftsszenarien durch Änderungen der relativen Preise zu charakterisieren.<sup>273</sup> Er leitet damit eine Gleichgewichtsbeziehung zwischen sicheren und unsicheren Erträgen her, die im folgenden Abschnitt 3 aufgegriffen wird. Sowohl Merton als auch Breeden bleiben in der Ein-Land Betrachtung, so dass grundsätzlich keine Aussagen zu Wechselkursen und deren Risiken möglich sind.

Solnik (1974) wendet das Merton'sche Vorgehen auf einen internationalen Kontext an und geht von inhomogenen Investoren aus. Als Trennkriterium dient der jeweilige Preisindex, mit dem nominale Größen deflationiert werden. Diese Unterscheidung ist nur insofern sinnvoll, als dass Solnik weiterhin Abweichungen von der PPP zulässt. Ursache für solche Abweichungen sind annahmegemäß international divergierende Konsumpräferenzen. Solnik

---

<sup>273</sup> Breeden (1979) Kapitel 7.

schränkt die zulässigen Preisbewegungen jedoch ein, indem er in seiner Arbeit von einem konstanten inländischen Preisniveau ausgeht. Solnik folgert aus seinem Modell, dass im Gleichgewicht die ungedeckte Zinsparität in der Lehrbuchversion nicht erfüllt sein muss, sondern die Wechselkurskovarianzen solch eine Abweichung im Gleichgewicht verursachen können.

Solnik interpretiert diese Abweichung wie folgt: Importiert ein Land Kapital, so sind die ausländischen Investoren einem Wechselkursrisiko ausgesetzt, das sie hedgen möchten. Dies tun sie, indem sie sich in der Inlandswährung des Kapitalimporteurs verschulden. Diese zusätzliche Kapitalnachfrage treibt den fraglichen Zinssatz jedoch über den Gleichgewichtswert, der sich bei ausgeglichener Kapitalbilanz einstellen würde. Dieser Einfluss wäre nur in dem Fall irrelevant für die gleichgewichtigen Erträge, wenn keine Nettoauslandsinvestitionen stattfinden, die einen zusätzlichen Einfluss auf die Zinssätze ausüben. Anderenfalls zahlen die ausländischen Investoren einen Preis (in Form des höheren Schuldzinssatzes im Inland), um ihre Investition im Inland gegen Währungsrisiken abzusichern.

In einer weiteren Arbeit äußert sich der Autor pessimistisch zur empirischen Validierbarkeit seines Modells.<sup>274</sup> Er begründet seine Einschätzung mit der Abhängigkeit der optimalen Gewichte von sicheren festverzinslichen Papieren von der Nettoauslandsinvestition und von der relativen Risikoaversion in den unterschiedlichen Ländern. Er folgert, dass das optimale Portfolio kaum bestimmbar sei und auch keine Fortschritte in der empirischen Methodologie dieses Manko heilen würden. Trotz dieser Vorbehalte testet der Autor sein Modell, indem er die internationale Marktstruktur von Aktienmärkten testet.<sup>275</sup> Es schließt auf eine höhere Fähigkeit des internationalen CAPM, die beobachtbaren Aktienkursänderungen zu erklären. Theoretisch fundierte Abweichungen des Terminkurses vom erwarteten Wechselkurs, die Solnik unter Kapitel III c) explizit aufführt, werden im empirischen Teil nicht aufgegriffen.

Adler und Dumas (1984) entwickeln ein internationales CAPM mit möglichen Abweichungen von der Kaufkraftparität. Sie gehen von der Existenz eines Preisindex aus, der einem Ito Prozess folge, und für den jeweils nationalen Anleger relevant sei. Folglich sind die Anleger

---

<sup>274</sup> Solnik (1977), S. 508.

<sup>275</sup> Solnik (1974). Er verwendet 299 Aktien des US und europäischen Aktienmarktes über einen Zeitraum von 1966 bis 1971.



in diesem Modell inhomogen, da sie national unterschiedliche Inflationsraten zur Abdiskontierung der nominalen Anlageerträge verwenden. Adler und Dumas beschreiben in ihrem Modell den gleichgewichtigen Ertrag einer unsicheren Anlage in Abhängigkeit des risikolosen Zinssatzes und seines systematischen Risikos wie es aus der komparativ statischen CAPM-Literatur bekannt ist. Zusätzlich zu diesen Faktoren führen sie einen zusätzlichen Einflussfaktor ein: Ertrag ist in ihrem Modell abhängig von der Hedgelfunktion der Anlage gegen die individuell relevante Inflation.

Die Autoren verwenden ihr Modell in einem separaten Kapitel, um die Prognosefähigkeit des Terminkurses theoretisch zu hinterfragen. Sie folgern, dass im Gleichgewicht auch bei risikoneutralem Verhalten die Prognosefähigkeit verzerrt ist. Als Ursache identifizieren sie eine Unsicherheitsprämie, die auf die Güterpreisstochastik zurückgeführt wird. Damit wird ein Ergebnis der komparativ statischen Literatur (vgl. Kapitel II) repliziert. Die Autoren stellen jedoch fest, dass sich ihre Gleichgewichtsbeziehung nicht ohne weiteres für eine empirische Überprüfung eignet. Dies begründen sie mit Datenproblemen, da weder die individuelle Portfolioaufteilung von Investoren noch (alternativ) die Korrelation zwischen individueller Inflationsrate und Anlageerträgen bekannt sei.<sup>276</sup>

---

<sup>276</sup> Adler und Dumas (1984), S. 949. Dumas und Solnik (1992) liefern einen Überblick über empirische Studien zum internationalen CAPM. Die Ergebnisse charakterisieren sie als „inconclusive“. Gleichwohl stellen sie die wesentliche Bedeutung des Wechselkursrisikos zur Erklärung internationaler Anlageerträge fest (Statement #8).

### **3. Die Prognosefähigkeit des Terminkurses in einem Continuous-Time Modell**

In diesem Abschnitt wird ein eigenständiges Modell zur mikroökonomischen Fundierung der Prognosefähigkeit des Terminkurses im Continuous-Time Rahmen entwickelt. Die Analyse beschränkt sich auf die Betrachtung von 2 Länder (In- und Ausland), 2 Güter und 2 nominal risikolose Anlagemöglichkeiten und unterscheidet sich damit grundlegend von den in Abschnitt 2 beschriebenen Portfoliomodellen.

Die Modellierung findet in 3 Schritten statt: In Schritt 1 wird eine Devisennachfragefunktion des Inlands hergeleitet. Dieses Verfahren gleicht demjenigen, das im Continuous-Time CAPM verwendet wird, und wird deswegen als diesen Modellen verwandt angesehen. In Schritt 2 wird die Devisenangebotsfunktion aus inländischer Sicht aus einem Optimierungskalkül der Ausländer hergeleitet. Diese Vorgehensweise nutzt die Tatsache, dass auf dem Devisenmarkt die Prämisse eines exogenen Angebots eine unnötige und realitätsferne Einschränkung darstellt. Durch die Wahl diesen Vorgehens unterscheidet sich die Methodik in dieser Arbeit von demjenigen der Continuous-Time CAPM. In Schritt 3 wird ein Devisenmarktgleichgewicht postuliert. Daraus folgt, dass das Angebot der Nachfrage nach Devisen entspricht, und die hergeleiteten Funktionen gleichgesetzt werden können. Anschließend wird durch Umformung eine ökonomisch interpretierbare und international konsistente Gleichgewichtsbeziehung formuliert, die eine Beurteilung der Prognosefähigkeit des Terminkurses im Gleichgewicht zulässt.

#### **3.1. Die Modellbeschreibung**

##### **3.1.1. Die Modellprämissen**

Die folgende Untersuchung bleibt auf den Zwei-Länder-Fall beschränkt. Diese Prämisse ist insofern stark einschränkend, als dass im Mehrländer Fall dem Devisenangebot eines Landes eine Nachfrage aus sämtlichen anderen Ländern gegenüber steht. Dieses Modell überzeichnet somit tendenziell die Bedeutung der Devisennachfrage, da nur von einem Nachfrager ausgegangen wird. Weiterhin wird von der Möglichkeit abstrahiert, dass ein Devisenangebot

auch von den Ländern ausgehen kann, die die in Frage stehende Währung nicht als nationales Zahlungsmittel verwenden. Angesichts der dominierenden Stellung weniger Währungen im internationalen Güterverkehr erscheint diese Prämisse stark einschränkend. Trotz dieser Einschränkungen erscheint die Prämisse legitim, da sie eine vereinfachte Darstellung der Wirkungszusammenhänge ermöglicht. Weiterentwicklungen können anschließend auf Basis des hier formulierten Modells vorgenommen werden.

Es wird nun von folgenden zusätzlichen Prämissen ausgegangen:

Gütermarkt:

Die Güter ‚x‘ und ‚y‘ seien homogen und international handelbar, wobei Gut ‚x‘ ausschließlich vom Inland und Gut ‚y‘ ausschließlich vom Ausland produziert werde. Weiterhin seien die Güter verderblich, d.h. nicht lagerbar. Eine Produktionsfunktion sei nicht spezifiziert. Diese Prämissen gleichen denjenigen des Kapitel II. Abweichend von der Modellierung in Kapitel II, wird dieses Modell im Continuous-Time Rahmen formuliert. Die Güterpreise seien stochastisch und können durch die folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$$\frac{dp_x}{p_x} = \mu_x dt + \sigma_x dz_x \quad \text{für Gut x} \quad \text{(III.11)}$$

und

$$\frac{dp_y^a}{p_y^a} = \mu_y dt + \sigma_y dz_y \quad \text{für Gut y} \quad \text{(III.12)}$$

und

$$\frac{ds}{s} = \mu_s dt + \sigma_s dz_s \quad \text{für den Wechselkurs} \quad \text{(III.13)}$$

Die so beschriebene Änderung der Güterpreise im Zeitablauf folgt dem im Abschnitt 1 hergeleiteten stochastischen Prozess. Die Variable  $\mu$  kann als nicht-stochastischer Erwartungswert interpretiert werden, während die Standardabweichung durch die nicht-

stochastische Variable  $\sigma$  beschrieben wird. Die Stochastik der Güterpreise wird durch den stochastischen Term  $dz$  hervorgerufen, der einer Standardnormalverteilung unterliegt.

Die Homogenitätsannahme dient ausschließlich der Vereinfachung, da sie erlaubt, das Gütermarktgleichgewicht mit der Erfüllung der Kaufkraftparität gleichzusetzen. Mögliche Zukunftsszenarien können somit mit einer PPP-Abweichung gleichgesetzt werden, was im folgenden durch die Abweichung des realen Wechselkurses vom Wert Eins beschrieben wird. Die Ausprägung des zukünftigen realen Wechselkurses beschreibt somit den zukünftigen Zustand der Welt (state variable). Es ist intuitiv ersichtlich, dass eine positive Abweichung des inländisch produzierten Gutes vom gleichgewichtigen Preis ein günstiges Szenario für das Inland darstellt, da es die Konsummöglichkeiten steigert.

Die Prämisse der internationalen Handelbarkeit der Güter ist notwendig, da nur in diesem Fall der Wechselkurs realwirtschaftliche Auswirkungen besitzt. Diese Konsequenz ist nicht unmittelbar einsichtig und sei kurz erläutert: Wären die Güter nicht handelbar, so wären die Konsummöglichkeiten der Akteure auf die inländische Güterproduktion beschränkt. Eine Anlage im Ausland würde somit nur das nominale Vermögen verändern, was bei Anlageerfolg ausschließlich zur Gütermarktinflation führte, da einer konstanten Gütermenge eine gestiegene Geldmenge gegenüber stünde. (Es sei daran erinnert, dass keine Produktionsfunktion spezifiziert wurde, so dass die Anlageeffekte auf Produktion und Wachstum nicht modellierbar sind.)

Die Prämisse der Verderblichkeit der Güter ist notwendig, da von der Möglichkeit abstrahiert werden soll, Güter für den zukünftigen Konsum aufzubewahren. Diese Möglichkeit wäre als real sichere Anlage zu einem realen Zinssatz von Null interpretierbar, da in sämtlichen möglichen Zukunftsszenarien der Konsum des aufbewahrten Gutes in einer gegenwärtig bekannten Menge möglich wäre. Die letztgenannte Ausführung entspricht jedoch der Definition eines sicheren Ertrages. In dieser Arbeit werden jedoch ausschließlich nominal sichere Anlagemöglichkeiten auf dem Kapitalmarkt berücksichtigt. Die Prämisse der Güterverderblichkeit verhindert somit, simultan die Sparmöglichkeiten auf dem Güter- und Kapitalmarkt zu untersuchen.

Abschließend sei noch auf folgende Verwendung in der Notation hingewiesen. Es sei  $P_{y,t}^a$  der Preis einer (im Ausland) produzierten Einheit des Gutes ‚y‘ in Auslandswährung, der zum Zeitpunkt ‚t‘ beobachtet werden kann. Gleichfalls beschreibt  $P_{x,t}$  den Preis einer Einheit des Gutes ‚x‘ in Inlandswährung zum Zeitpunkt ‚t‘. Weiterhin wird zwischen dem Güterpreis eines Gutes (z. B. des Gutes ‚y‘) in Auslandswährung, und seinem Preis in Inlandswährung wie folgt unterschieden:

$P_{y,t}^a$  Preis des Gutes ‚y‘ in Auslandswährung (zum Zeitpunkt ‚t‘)

$P_{y,t}$  Preis des Gutes ‚y‘ in Inlandswährung (zum Zeitpunkt ‚t‘)

Ein hochgestellter Index ‚a‘ kennzeichnet folglich die (Auslands-)Perspektive während ein tiefgestellter Index ‚a‘ das (Aus-) Land bezeichnet.

Schließlich gilt, dass der inländische Preis aus Inlandssicht einer im Ausland produzierten Gütereinheit dem Produkt aus ausländischem Güterpreis in Auslandswährung und dem Wechselkurs entspricht. Dies ist nicht mit der Kaufkraftparität zu verwechseln, sondern ein eher simpler Rechenschritt, der den Preis des ausländisch produzierten Gutes ‚y‘ in Inlandswährung beschreibt.<sup>277</sup> In Anwendung auf die hier festgelegte Definition der Variablen bedeutet dies, dass aus der Perspektive des Inlandes der Preis des ausländisch produzierten Gutes ‚y‘ zu jedem Zeitpunkt beschrieben wird durch:

$$P_{y,t} = P_{y,t}^a * S_t \tag{III.14}$$

Abschließend bleibt noch darauf hinzuweisen, dass aufgrund der Annahme zur Stochastik der Güterpreise und des Continuous-Time Rahmens diese Gleichung nicht differenzierbar ist. Unter Verwendung von Ito’s Lemma lautet die Approximation einer Differenzierung der obigen Gleichung:<sup>278</sup>

---

<sup>277</sup> Dieser Zusammenhang ist von der Kaufkraftparität zu unterscheiden, die lautet  $P_{x,t} = P_{y,t}^a * S_t$ .

<sup>278</sup> Es sei daran erinnert, dass die stochastischen Prozesse nicht differenzierbar sind, so dass die Verwendung von Ito’s Lemma erforderlich ist.

$$\frac{dp_y}{p_y} = \frac{dp_y^a}{p_y^a} - \frac{ds_t}{s_t} - \frac{dp_y^a}{p_y^a} \frac{ds_t}{s_t} \quad (\text{III.15})$$

In dieser Form gleicht die Ableitung dem bekannten totalen Differential und der Zweifel an der Sinnhaftigkeit des Vorgehens könnte entstehen. Die Besonderheiten dieser Modellierung werden jedoch im Verlauf der Arbeit klar werden.

### Kapitalmarkt:

Es wird von der Existenz zweier festverzinslicher Wertpapiere ausgegangen, die keinem Kredit-, Wiederanlage- oder Kursänderungsrisiko unterliegen.<sup>279</sup> Ein Wertpapier  $Bo^a$  (für bond) sei ein ausländisches Wertpapier, das in Auslandswährung nominiert sei und ein zweites Wertpapier  $Bo$  ein inländisches Wertpapier, das in Inlandswährung notiert sei. Der Nominalwert des ausländischen Wertpapiers kann jederzeit aus inländischer Perspektive durch Multiplikation mit dem zum jeweiligen Zeitpunkt gültigen Kassakurs in Inlandswährung umgerechnet werden. Die gewählte Beschreibung dieser risikolosen Anlageform entspricht einem Zerobond mit marginaler Restlaufzeit.<sup>280</sup> Formal lässt sich die Wertentwicklung der risikolosen Anlage, vergleichbar mit dem Gütermarkt, durch einen Prozess im Continuous-Time beschreiben. Da der Ertrag der Anlage konstant und nicht stochastisch ist (formal:  $\mu_{Bo} = i$  mit  $i = \text{konstant}$  und  $dz_{Bo} = 0$  sowie  $\mu_{Bo^a} = i^a$  mit  $i^a = \text{konstant}$  und  $dz_{Bo^a} = 0$ ), fällt im Vergleich zu den Bewegungsgleichungen für die Güterpreise der zweite Summand weg. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dBo}{Bo} &= \mu_{Bo} * dt + \sigma_{Bo} * dz_{Bo} \\ &= i * dt \end{aligned} \quad \text{für die inländische Anlageform} \quad (\text{III.16})$$

<sup>279</sup> Einen Überblick der unterschiedlichen Zinssätze liefern Jüttner und Hawtrey (1997) Table 21.1 sowie ihre anschließende verbale Beschreibung. Das Kreditrisiko kann durch ihr Rating beschrieben werden. Eine Beschreibung der Standard & Poor's Rating Kategorien sowie eine Beschreibung ihrer Länderanalyse findet sich in Jüttner und Hawtrey (1997) Table 22.2 und S. 584.

<sup>280</sup> Diese Annahme ist nicht notwendig, sondern soll eine (fehlerhafte) Verwendung von jährlichen Kuponzinssätzen vermeiden. Da dieses Modell im ‚continuous time‘ formuliert ist, ist der Zinssatz ‚i‘ als Zins mit kontinuierlicher Ausschüttung zu verstehen. Diese Zinssätze sind ineinander überführbar. Vgl. Hull (1997). S. 46 ff.

$$\begin{aligned}\frac{dBo_a^a}{Bo_a^a} &= \mu_{Bo_a^a} dt + \sigma_{Bo_a^a} dz_{Bo_a^a} \\ &= i^a * dt\end{aligned}$$

für die ausländische Anlageform (III.17)

Die Prämisse eines konstanten, nicht-stochastischen Nominalzinssatzes lässt weiterhin die Duration der Anlage irrelevant werden. Eine mögliche Erweiterung des Modells, die hier nicht verfolgt wird, könnte den Einfluss von stochastischen Nominalzinsen untersuchen. Diese würden einen systematischen Einfluss auf die Modellformulierung ausüben, da ein eigenständiger stochastischer Prozess definiert werden müsste nebst Covarianzen zu Güterpreisen und Wechselkurs. Diese Erweiterung wird hier nicht weiter berücksichtigt.<sup>281</sup> Es folgt für die Beschreibung des ausländischen Bonds aus Inlandsperspektive unter Verwendung von Gleichung III.14<sup>282</sup>:

$$\begin{aligned}\frac{dBo_a}{Bo_a} &= i_a dt + \frac{ds}{s} \\ &= i_a dt + (\mu_s dt + \sigma_s dz_s)\end{aligned}$$

(III.18)

### Beschreibung der Zukunftsszenarien

Wie noch beschrieben wird, geht dieses Modell von einem rationalen Akteur aus, der bestrebt ist, seinen Konsum zu maximieren. Ein in diesem Modell aussagefähiges Zukunftsszenario muss deshalb solche zukünftigen Konsummöglichkeiten eindeutig abbilden. Wie bereits angemerkt seien die Zukunftsszenarien durch den realen Wechselkurs (RS) beschrieben und sei definiert gemäß:

$$RS_t = \frac{p_{y,t}^a * s_t}{p_{x,t}}$$

(III.19)

Aus dieser Gleichung wird ersichtlich, dass die Zukunft unsicher ist, da sich die Ausprägung des zukünftigen Szenarios aus den stochastischen Güterpreisbewegungen bestimmt. Diese

---

<sup>281</sup> Diese Erweiterung macht die Verwendung von Ornstein-Uhlenbeck Prozessen erforderlich. Vgl. dazu Bates (1997). S. 59 f. Dieser Prozess beinhaltet eine stochastische Komponente im ‚dt-Teil‘.

Unsicherheit wird durch zwei Faktoren bestimmt: Erstens, der Unsicherheit im realen Ertrag einer Anlage, die nur nominal sicher ist. Zweitens, die Unsicherheit über die Entwicklung von RS und somit des Wertes des inländisch produzierten Gutes in Einheiten des ausländisch produzierten Gutes (vgl. auch terms of trade), der die zukünftigen Konsummöglichkeiten beeinflusst.<sup>283 284</sup>

### 3.1.2. Der Modellaufbau

Es wird von zwei Akteuren ausgegangen, dem Inländer und dem Ausländer, die Preisnehmer sind, also deren Entscheidungen nicht die Preise bzw. deren Stochastik beeinflussen. Diese Akteure haben Anspruch auf eine nicht stochastische Menge des jeweils in ihrem Heimatland produzierten Gutes, besitzen somit ein real sicheres und nominal aufgrund der Güterpreisstochastik unsicheres Einkommen. Bei der Verwendung ihres Einkommens können die Akteure sich zwischen einem sofortigen Konsum und einer Anlage (Sparen) entscheiden, die entweder im Inland (Kauf eines nominal risikolosen Bonds, der in Inlandswährung notiert wird) oder im Ausland (Kauf eines in Auslandswährung notierten und in dieser Währung nominal risikolosen Bonds) getätigt wird.<sup>285</sup> Diese Akteure haben das Ziel, ihr reales Vermögen, das ihre Konsummöglichkeiten repräsentiert, zu maximieren. Dieses reale Vermögen wird im Modell als Änderungsgleichung formuliert, da im Rahmen der Optimierung die Vermögensänderung in die Analyse eingeht. Die Relevanz der realen Vermögensänderung ist intuitiv plausibel, wenn berücksichtigt wird, dass durch solch eine Änderung die zukünftigen Konsummöglichkeiten abgebildet werden.

---

<sup>282</sup> Diese Beschreibung lehnt sich an Stulz (1981) an.

<sup>283</sup> Es bleibt anzumerken, dass die Vermögensverteilung innerhalb eines Landes nicht Gegenstand der Untersuchung ist. Eine Erweiterung des Modells in dieser Hinsicht würde, bei vermögensabhängigen Konsumentscheidungen der Akteure, reale Effekte der Preis- und Wechselkursstochastik auch bei Gültigkeit der KKP nach sich ziehen.

<sup>284</sup> Alternativ kann von zwei inhomogenen handelbaren Gütern ausgegangen werden. Sind die Präferenzen in den Ländern verschieden, so unterscheiden sich die relativen Preise der Güter. Dies führt ebenfalls zu Abweichungen von der Kaufkraftparität. Dieser Ansatz findet sich bei Solnik (1974) und ist theoretisch eleganter, da die Annahme rationaler Erwartungen und friktionsloser Märkte strenger eingehalten werden als in dieser Arbeit. Fraglich ist jedoch ihre Realitätsnähe. In dieser Arbeit sollen lediglich die Auswirkungen von Abweichungen der Kaufkraftparität auf die ungedeckte Zinsparität untersucht werden, ohne eine Ursachenanalyse einzuschließen.

<sup>285</sup> Ein Bond repräsentiert folglich keine Eigentumsrechte an der Produktion des Landes in dessen Währung er notiert wird.



Es stellt sich in dieser Modellierung jedoch das folgende Problem: Aufgrund möglicher Abweichungen von der Kaufkraftparität kann das reale Vermögen nicht ohne weiteres bestimmt werden. Insbesondere muss die Konsumaufteilung berücksichtigt werden, da sie im Fall einer Abweichung von der Kaufkraftparität das für den Akteur relevante Preisniveau bzw. die relevante Inflation bestimmt.<sup>286</sup> In diesem Modell wird vereinfachend von einer gleichbleibenden Aufteilung des Gesamtkonsums auf in- und ausländisch produzierte Güter ausgegangen. Diese Prämisse hat zur Konsequenz, dass dem Akteur als Hedge gegen unvorteilhafte (d.h. den realen Konsum mindernd) Abweichungen von der Kaufkraftparität nur eine Investition im Ausland zur Verfügung steht, um sich zumindest gegen die Wechselkurseinflüsse dieser Abweichung abzusichern.<sup>287</sup>

Aus diesem Modellaufbau folgt, dass sich die Einflussfaktoren des realen Konsums durch die Änderung des nominalen Vermögens, der Änderung eines Güterpreises sowie der Änderung beider Güterpreise relativ zueinander beschreiben lassen. Konkret wird das ‚reale Vermögen‘ definiert als das mit dem Preis des inländisch produzierten Gutes normierte nominale Vermögen während das zukünftige Szenario, charakterisiert durch den realen Wechselkurs, die relative Preisänderung beschreibt. Entscheidungsparameter im Rahmen des Optimierungskalküls sind die Entscheidung über die Höhe der Konsumausgaben ‚B‘, und die Entscheidung über die Anlage in in- und ausländische Bonds, wobei  $b_a$  den Anteil am Nominalvermögen beschreibt, der im Ausland angelegt ist und  $b$  den Anteil am Nominalvermögen beschreibt, der im Inland angelegt ist. Da nur zwei Alternativen zur Verfügung stehen gilt:  $b_a + b = 1$ . Der Vorteil dieser Modellierung liegt in der Vergleichbarkeit dieses Modells mit den Ergebnissen in Kapitel II. Die Trennung der Güterpreisstochastik, die im Modell des Kapitel II eine Unsicherheitsprämie resultierte vom zukünftigen Szenario, das sowohl vorteilhaft als auch nachteilig für die zukünftigen

---

<sup>286</sup> Wie bereits in Kapitel II wird die Modellierung eines Gütermarktgleichgewichtes hier vernachlässigt. Es wird wie im Modell des Kapitel II von einem möglichen Ungleichgewicht ausgegangen, ohne dessen Ursache zu modellieren. Diese Schwäche in der Modellierung erscheint aufgrund der Natur der hier verwendeten Methodik (Partialmodell) sowie des bereits erreichten Komplexitätsgrades sinnvoll, um interpretierbare Resultate zu erhalten. Zur Klarstellung: Ziel ist die Modellierung eines Gütermarktgleichgewichtes auf die Anlageentscheidung eines konsummaximierenden Akteurs und in diesem Rahmen auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses.

<sup>287</sup> Indirekt erfolgt auch ein Hedge gegen Preisänderungen des ausländisch produzierten Gutes, da von einer konstanten Kovarianz von diesem Preis mit dem Wechselkurs ausgegangen wird.

Konsummöglichkeiten sein kann, vereinfacht sowohl die Vergleichbarkeit der Modelle in Kapitel II und III als auch die Interpretation der Ergebnisse dieses Modells.<sup>288</sup>

### 3.1.2.1. Die Beschreibung der Zielfunktion

Das Ziel des Akteurs besteht annahmegemäß in der Nutzenmaximierung, was, bei positivem Grenznutzen des Güterkonsums einer Maximierung des Güterkonsums gleichkommt. In Anlehnung an Adler und Dumas (1984) wird die indirekte Nutzenfunktion gewählt um das nominale Vermögen  $W$  und einen Preisvektor  $P(RS)$ , der eine relative Preisänderung beschreibt, in die Untersuchung einzubeziehen.

Ausgangspunkt sei eine indirekte Nutzenfunktion der folgenden Form:

$$\max_{b, b_a, B} \left\{ E_0 \left[ \int_{t_0}^{t_1} V(B, p_x, p_y^a * s, t) dt + Be[W(t_1), t_1] \right] \right\} \quad (\text{III.20})$$

Der Akteur maximiert seinen Nutzen, beschrieben durch die indirekte Nutzenfunktion  $V$  über den Zeitraum  $[t_0, t_1]$ . Die ‚bequest‘-Funktion  $Be$  beschreibt das Vermögen zum Zeitpunkt  $t_1$  und repräsentiert nicht in Anspruch genommene Konsummöglichkeiten.<sup>289</sup> Die indirekte Nutzenfunktion hängt wiederum von den Preisen der im In- und Ausland produzierten Gütern  $x$  und  $y$  ab, die in Inlandswährung beschrieben sind  $(p_x, p_y^a * s_t)$ . Da das Vermögen entweder Konsumzwecken dient, oder in der ‚bequest‘-Funktion zum Zeitpunkt  $t_1$  berücksichtigt wird, wird die Vermögensbildung in dieser Problemstellung vollständig berücksichtigt. Der Akteur optimiert seinen Nutzen/Konsum durch seine Entscheidung über die absolute Konsumhöhe  $B$  und seine Anlageentscheidung  $(b, b_a)$ . Die Variable  $B$  repräsentiert jedoch nicht die in Geldeinheiten ausgedrückten gesamten Konsumausgaben, sondern nur den Teil der Konsumausgaben, der nicht durch das laufende

<sup>288</sup> Alternativ könnte auch mit einer direkten Nutzenfunktion modelliert werden, was einen expliziten Bezug auf die konsumierten Mengen der Güter  $x$  und  $y$  implizierte, der hier vermieden werden soll, als auch eine möglich Formulierung eines Preisindexe. Letzterer würde jedoch die Trennung von Inflation und Kaufkraftparitätsabweichung nicht direkt zulassen.

<sup>289</sup> Würde dieser Term vernachlässigt, so wäre es nutzenoptimal, im Zeitpunkt  $t_1$  kein Vermögen zu halten, da nur der Konsum in die Nutzenfunktion eingeht. Vgl. Appendix 5.1 für weitere Ausführungen zu diesem Thema.

Einkommen gedeckt ist und somit durch Auflösung von Investitionen finanziert werden muss. Diese Definition erfolgt zur Vereinfachung, da auf eine explizite Einbeziehung des Einkommens (i.e. durch Arbeit) verzichtet werden kann.

Die indirekte Nutzenfunktion  $V$  sei homogen vom Grad Null. Daraus folgt, dass sämtliche Argumente mit einem konstanten Faktor multipliziert werden können ohne den Funktionswert zu verändern. Diese Eigenschaft wird ausgenutzt, indem sämtliche Argumente mit  $\frac{1}{p_x}$ , also dem inversen Preis des inländisch produzierten Gutes  $x$ , multipliziert werden. Gleichung III.20 kann folglich auch beschrieben werden durch:

$$\max_{b, b_a, B} \left\{ E_0 \left[ \int_{t_0}^{t_1} V\left(\frac{B}{p_x}, 1, RS, t\right) dt + Be[W(t_1), t_1] \right] \right\} \quad (\text{III.21})$$

Durch folgende Umformung kann die Zahl der Argumente der indirekten Nutzenfunktion reduziert werden.

$$V(B^r, RS, t) = V\left(\frac{B}{p_x}, RS, t\right) \equiv V\left(\frac{B}{p_x}, 1, RS, t\right) \quad (\text{III.22})$$

Die indirekte Nutzenfunktion  $V$  ist nun abhängig von der normierten Nettovermögensauflösung zu Konsumzwecken ( $B$ ), die mit dem Preis des inländisch produzierten Gutes als Normierungsfaktor. Im Weiteren wird von folgendem Maximierungsproblem ausgegangen:

$$\max_{b, b_a, B^r} \left\{ E_0 \left[ \int_{t_0}^{t_1} V(B^r, RS, t) dt + Be[W(t_1), t_1] \right] \right\} \quad (\text{III.23})$$

### 3.1.2.2. Die Beschreibung der Nebenbedingung

Im Rahmen dieser Analyse sind nur solche individuellen Entscheidungen relevant, die in einer durch Kaufkraft bzw. Vermögen gedeckten Nachfrage am Markt zum Ausdruck kommen. Der Akteur ist folglich durch seine Budgetrestriktion in seinem Güterkonsum eingeschränkt, die besagt, dass jeder Konsum entweder durch die Auflösung von bestehendem Vermögen oder durch gegenwärtiges Einkommen gedeckt, sprich bezahlt, werden muss. Daraus folgt, dass Problemstellungen wie Verschuldung, Konkurs oder auch sogenannte ‚Ponzi Games‘, die ein im Zeitablauf nicht einlösbares Versprechen (z. B. der Rückzahlung von Schulden) beinhaltet, mit diesem Modell nicht abbildbar sind.<sup>290</sup> Eine formale Beschreibung der nominalen Vermögensänderung im Zeitablauf folgt Merton (1971).<sup>291</sup>

$$\begin{aligned}
 dW &= (b_a * [(i_a + \mu_S) * dt + \sigma_S dz_S] + b * [i * dt]) * W(t) - B * dt \\
 &= \{(b_a (i_a + \mu_S - i) + i) * W - B\} dt + b_a W \sigma_S dz_S
 \end{aligned}
 \tag{III.24}$$

mit:  $b_a + b = 1$

In Gleichung III.24 beschreibt die linke Gleichungsseite die Änderung des Nominalvermögens über einen infinitesimal kurzen Zeitraum (Continuous-Time Modellierung). Auf der rechten Gleichungsseite beschreibt der erste Term in der ersten Zeile  $(b_a * [(i_a + \mu_S) * dt + \sigma_S dz_S]) * W(t)$  den Ertrag (in Inlandswährung) des im Ausland angelegten Vermögens.<sup>292</sup> Der Teil  $(b * [i * dt]) * W(t)$  beschreibt den Ertrag einer Inlandsinvestition während ‚B\*dt‘ die Konsumausgaben beschreiben, die über das Einkommen hinausgehen und somit durch bestehendes Vermögen finanziert werden. Zusammenfassend resultiert eine Änderung des Nominalvermögens aus den Erträgen der (unsicheren) Auslandsinvestition und der sicheren Inlandsinvestition, von denen die das

<sup>290</sup> Charles Ponzi hat 1920 Investoren betrogen, indem er hohe Renditen versprach, die er nur über einen kurzen Zeitraum durch das Geld neuer Investoren und nicht durch erwirtschaftete Erträge bezahlen konnte. Formal wird die Ponz Bedingung als Konsistenzbedingung in intertemporale Optimierungsmodelle verwendet, die gleichgewichtige Bubble-Bildung ausschließt. Sie besagt, dass der Gegenwartswert einer Investition nicht der Summe seiner abdiskontierten Erträge übersteigen kann. (Wäre dies der Fall, so könnte man seine Konsummöglichkeiten steigern, indem man die Investition leer verkauft und nie zurückzahlt, sondern nur die Rendite auszahlt).

<sup>291</sup> Eine vergleichbare Formulierung findet sich bei Merton (1969), S. 247-257. Wird in die Merton'sche Gleichung die Bewegungsgleichung für die in- und ausländische Investition eingesetzt, so erhält man die nachfolgende Gleichung.

<sup>292</sup> Der Teil  $([(i_a + \mu_S) * dt + \sigma_S dz_S])$  wurde bereits im Rahmen der Kapitalmarktbeschreibung genannt.

Einkommen übersteigenden Konsumausgaben abzuziehen sind. Die zweite Gleichungszeile trennt lediglich die sicheren von den stochastischen Einflüssen.

Die bisherige Analyse ermöglichte die Beschreibung der nominalen Vermögensänderung im Zeitablauf. Diese Variable ‚W‘ eignet sich für den weiteren Verlauf jedoch nicht optimal, da von rational handelnden Akteuren ausgegangen wird, die keiner Geldillusion unterliegen. Solche Akteure orientieren ihre Entscheidungen vielmehr an der realen Vermögensänderung und nicht an nominalen Erträgen. Aus diesem Grund soll ein normiertes Vermögen definiert werden, das auch in der weiteren Analyse zugrunde gelegt wird. Der Normierungsfaktor sei der Preis des inländisch produzierten Gutes ‚x‘. Wie bereits ausgeführt, entspricht das so normierte Vermögen nicht dem realen Vermögen, da Abweichungen von der Kaufkraftparität zugelassen werden. Zur Vereinfachung werden diese Begriffe jedoch im Weiteren als Synonyme verwendet, was auch damit zu rechtfertigen ist, dass Abweichungen von der Kaufkraftparität als zukünftige Szenarien betrachtet und analysiert werden. Die in Inlandswährung beschriebene ausländische Preisänderung sei aus diesem Grund aufgeteilt in eine Komponente, die der inländischen Inflation entspricht, und einem Residuum, das einer Änderung in der Kaufkraftparität entspricht.<sup>293</sup>

Es sei nun die Veränderung des realen Vermögens  $d\left[\frac{W^r}{p_x}\right]$  im Zeitablauf unter Berücksichtigung der obigen Ausführungen formal beschrieben. Das reale Vermögen ist wiederum eine Funktion zweier stochastischer Prozesse, der nominalen Vermögen und dem Preis des Gutes ‚x‘, so dass Ito’s Lemma in seiner multivariaten Form zur Anwendung kommt. Es gilt allgemein:

$$\begin{aligned}
 d\left[\frac{W}{p_x}\right] &= \frac{\partial W^r}{\partial W} dW + \frac{\partial W^r}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial^2 W^r}{[\partial W]^2} [dW]^2 + \frac{\partial^2 W^r}{[\partial p_x]^2} [dp_x]^2 + \frac{\partial^2 W^r}{\partial W \partial p_x} dW dp_x \\
 &= \frac{1}{p_x} dW - \frac{W}{p_x^2} dp_x + 0 + \frac{W}{p_x^3} [dp_x]^2 - \frac{1}{p_x^2} dW dp_x \\
 &= \frac{W}{p_x} \left( \frac{dW}{W} - \frac{dp_x}{p_x} + \frac{[dp_x]^2}{p_x^2} - \frac{dW dp_x}{W p_x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{III.25}$$

Da die stochastischen Prozesse für die zeitliche Veränderung von ‚W‘ und ‚p<sub>x</sub>‘ bereits in Gleichungen III.24 und III.12 spezifiziert wurden, erhält man durch Einsetzen von

$$\frac{dW}{W} = \left\{ \left( b_a (i_a + \mu_s - i) + i \right) - \frac{B}{W} \right\} dt + b_a \sigma_s dz_s \quad (\text{III.26})$$

$$\frac{dp_x}{p_x} = \mu_x dt + \sigma_x dz_x \quad (\text{III.27})$$

in die Gleichung für die zeitliche Änderung des realen Vermögens:

$$\begin{aligned} d\left[\frac{W}{p_x}\right] &= \frac{W}{p_x} \left( \frac{dW}{W} - \frac{dp_x}{p_x} + \frac{[dp_x]^2}{p_x^2} - \frac{dW}{W} \frac{dp_x}{p_x} \right) \\ &= \frac{W}{p_x} \left( \left( b_a (i_a + \mu_s - i) + i - \frac{B}{W} \right) dt + b_a \sigma_s dz_s \right. \\ &\quad \left. - (\mu_x dt + \sigma_x dz_x) + \sigma_x^2 dt - b_a \sigma_{sx} dt \right) \\ &= \frac{W}{p_x} \left\{ \left( b_a (i_a + \mu_s - i) + i - \frac{B}{W} - \mu_x + \sigma_x^2 - b_a \sigma_{sx} \right) dt + b_a \sigma_s dz_s - \sigma_x dz_x \right\} \quad (\text{III.28}) \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt im weiteren die Nebenbedingung (Vermögensrestriktion) dar, unter deren Einhaltung die Maximierung der Zielfunktion, sprich die Devisennachfrage der Akteure, untersucht wird.

### 3.1.2.3. Die Beschreibung zukünftiger Szenarien

Die Modellanalyse in diesem Kapitel gleicht insofern dem Vorgehen der dynamischen, also intertemporalen, CAPM, als dass die Absicherungsfunktion der Anlagealternativen gegen ungünstige zukünftige Szenarien explizit in der Anlageentscheidung berücksichtigt wird. In den Erläuterungen zur Inflationsbeschreibung wurde ausgeführt, dass die ausländischen Güterpreisveränderungen in Inlandswährung aufgeteilt werden in eine Komponente, die der Preisänderung des heimisch produzierten Gutes entspricht, und einer weiteren Komponente, die ihre residuale Änderung relativ zur Preisänderung des heimisch produzierten Gutes beschreibt. Dieses Vorgehen dient der Modellierbarkeit, die sich am dynamischen CAPM orientiert.

---

<sup>293</sup> Dies wird in Abschnitt 3.1.2.3. noch ausführlich beschrieben.

Die letztgenannte Komponente der Aufspaltung entspricht jedoch der Definition des realen Wechselkurses. Dies sei kurz dargestellt: Der Preisindex (CPI), der für einen Akteur relevant ist, sei definiert als die mit den Konsumanteilen gewichtete Summe der Einzelpreisänderungen in Inlandswährung. Somit gilt:

$$CPI(t) = p_{x,t} * x_t + p_{y,t} * y_t \quad (III.29)$$

mit:  $p_{y,t} = p_{y,t}^a * s_t$  vgl. Prämissenbeschreibung zum Gütermarkt

Nach Einsetzen und erweiteren des zweiten Summanden mit  $\frac{p_{x,t}}{p_{x,t}} = 1$  folgt:

$$\begin{aligned} CPI(t) &= p_{x,t} * x_t + \frac{p_{x,t}}{p_{x,t}} * p_{y,t}^a * s_t * y_t \\ &= p_{x,t} * x_t + p_{x,t} * RS_t * y_t \end{aligned} \quad (III.30)$$

Die Variablen ,x‘ und ,y‘ beschreiben die Konsummengen der jeweiligen Güter während  $p_{x,t}, p_{y,t}^a$  die Preise der Güter zum Zeitpunkt ,t‘ in der Währung ihres Produktionslandes beschreiben. Die Variable  $s_t$  bezeichnet den nominalen Wechselkurs und die Variable  $RS_t$  den realen Wechselkurs. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass sich der Gütermarkt durch den realen Wechselkurs und dem Preis des inländisch produzierten Gutes ,x‘ vollständig beschreiben lässt. Während der Preis des Gutes ,x‘ die allgemeine Stochastik der Güterpreise, also die Inflation, beschreibt, repräsentiert der reale Wechselkurs die relative Preisänderung von Gut ,y‘ relativ zu Gut ,x‘. Es sei daran erinnert, dass in diesem Modell Abweichungen von der Kaufkraftparität möglich sind, obwohl die Güter homogen sind.<sup>294</sup>

Ökonomisch ist dieser Zusammenhang wie folgt zu interpretieren: Der inländische Akteur orientiert sich an realen Variablen. Er verwendet zur Normierung den Preis des von ihm produzierten Gutes ,x‘. Ein nominal sicherer Ertrag wird somit in Einheiten des Gutes ,x‘

<sup>294</sup> Die Änderung des realen Wechselkurses kann in diesem Modell nicht begründet werden. Dies ist eine Schwäche des Modells. Es sind jedoch vergleichbare Prämissen in der CAPM Literatur bereits gesetzt worden. Breeden (1979) geht beispielsweise von veränderbaren relativen Preisen aus. Adler und Dumas (1984) spezifizieren einen Preisindex. Aus den Erläuterungen ihres Appendix geht hervor, dass nur bei jeweils mengenmäßigem hälftigem Konsum von ,x‘ und ,y‘ der Preisindex in beiden Ländern gleich auf die Güterpreise

bewertet und wird bei stochastischem Güterpreis als real unsicher bewertet. Der Akteur konsumiert jedoch ebenfalls das ausländisch produzierte Gut ,y'. Seine Konsummöglichkeiten hängen somit auch von der Ausprägung des realen Wechselkurses ab. Eine (exogene) Änderung von ,RS' wird jedoch nicht in die allgemeine Beschreibung der Güterpreise einbezogen, sondern als separate Einflussgröße bewertet, die hier als Zukunftsszenario beschrieben wird. Das Zukunftsszenario, beschrieben durch die Ausprägung des realen Wechselkurses, ist gemäß seiner Definition unter anderem von der stochastischen nominalen Wechselkursänderung abhängig. Dieser beeinflusst jedoch auch den Ertrag der Auslandsanlage, so dass eine Anlage im Ausland unter bestimmten Bedingungen eine Absicherung gegen ungünstige Zukunftsszenarien beinhalten könnte.

Nachdem die Beschreibung des Zukunftsszenarios durch den realen Wechselkurs (RS, im weiteren auch ,state variable' genannt) begründet wurde, soll nun dessen formale Darstellung beschrieben werden, die im Rahmen der Modellierung verwendet wird. Es muss im wesentlichen die zeitliche Veränderung der ,state variable' in Abhängigkeit der exogenen Prozesse beschrieben werden. Gemäss Definition des realen Wechselkurses und der Prämissensetzung (vgl. III.12 und III.13) gilt:

$$RS_t = \frac{p_{y,t}^a * s_t}{p_{x,t}} \quad \text{(III.31)}$$

mit  $\frac{dp_x}{p_x} = \mu_x(p_x, t)dt + \sigma_x dz_x$

$$\frac{dp_y^a}{p_y^a} = \mu_y(p_y^a, t)dt + \sigma_y dz_y$$

$$\frac{ds}{s} = \mu_s(s, t)dt + \sigma_s * dz_s$$

Diese Darstellung wirft wieder das Problem auf, dass ,RS' eine Funktion von nicht differenzierbaren stochastischen Prozessen ist, so dass eine Approximation unter Verwendung von Ito's Lemma vorgenommen werden muss. Es gilt allgemein aufgrund der Definition von ,RS' und gemäß Ito's Lemma:

---

reagiert. Solnik (1974) begründet Abweichungen von der Kaufkraftparität mit exogen gegebenen Präferenzen.



$$\begin{aligned}
dRS &= \frac{\partial RS}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial RS}{\partial s} ds + \frac{\partial RS}{\partial p_y^a} dp_y^a \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 RS}{[\partial p_x]^2} [dp_x]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 RS}{[\partial s]^2} [ds]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 RS}{[\partial p_y^a]^2} [dp_y^a]^2 \\
&+ \frac{\partial^2 RS}{\partial p_x \partial s} dP ds + \frac{\partial^2 RS}{\partial p_x \partial p_y^a} dp_x dp_y^a + \frac{\partial^2 RS}{\partial s \partial p_y^a} ds dp_y^a
\end{aligned} \tag{III.32}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit}^{295} \quad \frac{\partial RS}{\partial p_x} &= \frac{s}{p_y^a} & \frac{\partial RS}{\partial s} &= \frac{p_x}{p_y^a} & \frac{\partial RS}{\partial p_y^a} &= -\frac{p_x * s}{[p_y^a]^2} \\
\frac{\partial^2 RS}{[\partial p_x]^2} &= 0 & \frac{\partial^2 RS}{[\partial s]^2} &= 0 & \frac{\partial^2 RS}{[\partial p_y^a]^2} &= 2 \frac{p_x * s}{[p_y^a]^3} \\
\frac{\partial^2 RS}{\partial p_x \partial s} &= \frac{1}{p_y^a} & \frac{\partial^2 RS}{\partial p_x \partial p_y^a} &= -\frac{s}{[p_y^a]^2} & \frac{\partial^2 RS}{\partial p_y^a \partial s} &= -\frac{p_x}{[p_y^a]^2}
\end{aligned}$$

Diese Bewegungsgleichung für ,  $dRS$  ' wird nun durch ,  $RS$  ' dividiert um eine Konsistenz mit der üblichen Darstellungsweise stochastischer Prozesse zu bewahren. Um die Rechnung nachvollziehbarer zu machen, wird als Hilfsschritt diese Division zunächst separat an den oben dargestellten nicht stochastischen partiellen Ableitungen durchgeführt:

$$\begin{aligned}
\text{mit} \quad \frac{\partial RS}{\partial p_x * RS} &= \frac{1}{p_x} & \frac{\partial RS}{\partial s * RS} &= \frac{1}{s} & \frac{\partial RS}{\partial p_y^a * RS} &= -\frac{1}{p_y^a} \\
\frac{\partial^2 RS}{[\partial p_x]^2 * RS} &= 0 & \frac{\partial^2 RS}{[\partial s]^2 * RS} &= 0 & \frac{\partial^2 RS}{[\partial p_y^a]^2 * RS} &= \frac{2}{[p_y^a]^2} \\
\frac{\partial^2 RS}{\partial p_x \partial s * RS} &= \frac{1}{p_x * s} & \frac{\partial^2 RS}{\partial p_x \partial p_y^a * RS} &= -\frac{p_x}{p_y^a} & \frac{\partial^2 RS}{\partial p_y^a \partial s * RS} &= -\frac{s}{p_y^a}
\end{aligned}$$

Nach der Division der Bewegungsgleichung III.32 durch ,  $RS$  ' und Einsetzen der obigen neun vereinfachenden Ableitungen resultiert aus Gleichung III.32:

<sup>295</sup> Diese partiellen Ableitungen folgen den bekannten Regeln der Differenzialrechnung, da sie sich auf den gegenwärtigen Zeitpunkt beziehen und deswegen als nicht stochastisch angesehen werden können.

$$\begin{aligned}
\frac{dRS}{RS} &= \frac{dp_x}{p_x} + \frac{ds}{s} - \frac{dp_y^a}{p_y^a} \\
&+ \frac{1}{2} * 0 * [dp_x]^2 + \frac{1}{2} * 0 * [ds]^2 + \frac{[dp_y^a]^2}{[p_y^a]^2} \\
&+ \frac{dp_x}{p_x} \frac{ds}{s} - \frac{p_x}{p_y^a} dp_x dp_y^a - \frac{s}{p_y^a} ds dp_y^a \\
&= \frac{dp_x}{p_x} + \frac{ds}{s} - \frac{dp_y^a}{p_y^a} + \frac{[dp_y^a]^2}{[p_y^a]^2} + \frac{dp_x}{p_x} \frac{ds}{s} - \frac{1}{[p_y^a]^2} \frac{dp_x}{p_x} \frac{dp_y^a}{p_y^a} - s^2 \frac{ds}{s} \frac{dp_y^a}{p_y^a}
\end{aligned} \tag{III.33}$$

Durch Gleichung III.33 wird das zukünftige Szenario (die Änderung des realen Wechselkurses) in Abhängigkeit der exogen spezifizierten Bewegungsgleichungen (Gleichungen III.11 bis III.13) beschrieben. Durch das Einsetzen der Gleichungen III.11 bis III.13 können die Einflüsse der erwarteten und unerwarteten Änderungen der Güterpreise und des Wechselkurses (jeweils beschrieben durch die Variablen , $\mu$ ' und , $\sigma$ ' ) auf das zukünftige Szenario identifiziert werden. Aus Gleichung III.33 folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{dRS}{RS} &= \frac{dp_x}{p_x} + \frac{ds}{s} - \frac{dp_y^a}{p_y^a} + \frac{[dp_y^a]^2}{[p_y^a]^2} + \frac{dp_x}{p_x} \frac{ds}{s} - \frac{1}{[p_y^a]^2} \frac{dp_x}{p_x} \frac{dp_y^a}{p_y^a} - s^2 \frac{ds}{s} \frac{dp_y^a}{p_y^a} \\
&= \mu_x dt + \sigma_x dz_x + \mu_s dt + \sigma_s dz_s - \mu_y dt - \sigma_y dz_y \\
&+ (\mu_y dt + \sigma_y dz_y)^2 + (\mu_x dt + \sigma_x dz_x)(\mu_s dt + \sigma_s dz_s) \\
&- \frac{(\mu_x dt + \sigma_x dz_x)(\mu_y dt + \sigma_y dz_y)}{(p_y^a)^2} - (s)^2 (\mu_s dt + \sigma_s dz_s)(\mu_y dt + \sigma_y dz_y)
\end{aligned} \tag{III.34}$$

Aufgrund der bereits beschriebenen stochastischen Rechenregeln lässt sich diese Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\frac{dRS}{RS} &= \mu_x dt + \sigma_x dz_x + \mu_s dt + \sigma_s dz_s - \mu_y dt - \sigma_y dz_y \\
&+ \sigma_y^2 dt + \sigma_{xs} dt \\
&- \frac{\sigma_{xy} dt}{(p_y^a)^2} - (s_t)^2 \sigma_{sy} dt
\end{aligned} \tag{III.35}$$

bzw.

$$\frac{dRS}{RS} = \mu_{RS} dt + \sigma_{RS} dz_{RS} \quad (\text{III.36})$$

mit  $\sigma_{RS} dz_{RS} = \sigma_x dz_x + \sigma_s dz_s - \sigma_y dz_y$

$$\mu_{RS} = \mu_x + \mu_s - \mu_y + \sigma_y^2 + \sigma_{xs} - \frac{\sigma_{xy}}{(p_y^a)^2} - (S_t)^2 \sigma_{Sy}$$

$\sigma_{xs}$  beschreib die Kovarianz der Variablen  $p_x$  und  $s$

Diese stochastische Bewegungsgleichung beschreibt vollständig die zukünftigen Szenarien, die sich aus der gegenwärtigen Ausprägung des realen Wechselkurses, einer sicheren und einer unsicheren Komponente, bestimmt. Unter Verwendung der stochastischen Verteilungen der Güterpreise und des Wechselkurses kann ein Erwartungswert,  $\mu_{RS}$ , sowie eine stochastische Komponente,  $\sigma_{RS}$ , der zukünftigen Veränderung des realen Wechselkurses,  $RS$ , bestimmt werden, folglich ein erwartetes Zukunftsszenario bestimmt werden, sowie die stochastische Verteilung seiner Ausprägung. Damit unterscheidet sich dieser Ansatz von Merton (1973), der eine exogen festgelegte Anzahl von Szenarien definiert. Der hier verwendete Ansatz ist jedoch allgemeiner formulierbar, indem unterschiedliche mögliche Pfade der Preise exogen spezifiziert werden. Eine Modellierung unterschiedlicher möglicher erwarteter Wechselkursänderungen wäre eine wünschenswerte Erweiterung in diesem Kontext. Es soll hier jedoch nur auf die rudimentären Zusammenhänge eingegangen werden, um den intuitiven Zugang nicht unnötig zu erschweren. Deswegen bleibt diese Erweiterung hier unberücksichtigt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das Modell durch die Beschreibung der Zielfunktion, der Nebenbedingung sowie der zukünftigen Szenarien vollständig beschrieben ist.

Maximierungsproblem:

$$\max_{b, b_a, B^r} \left\{ E_0 \left[ \int_{t_0}^{t_1} V(B^r, RS, t) dt + Be[W(t_1), t_1] \right] \right\} \quad (\text{III.23})$$

Nebenbedingung:

$$d \left[ \frac{W}{p_x} \right] = \frac{W}{p_x} \left\{ \left( b_a (i_a + \mu_s - i) + i - \frac{B}{W} - \mu_x + \sigma_x^2 - b_a \sigma_{sx} \right) dt + b_a \sigma_s dz_s - \sigma_x dz_x \right\} \quad (\text{III.28})$$

Szenariobeschreibung:

$$\frac{dRS}{RS} = \mu_{RS} dt + \sigma_{RS} dz_{RS} \quad (\text{III.36})$$

Es sei daran erinnert, dass das Ziel dieses Optimierungsproblems die Bestimmung der nutzenoptimalen Devisennachfragefunktion des Inländers ,b<sub>a</sub>' ist.

### 3.2. Die Beschreibung des Lösungsansatzes

Die Problemstellung einer intertemporalen Optimierung, wie sie in den Gleichungen III.23, III.28 und III.36 beschrieben wurde, wird in dieser Arbeit und in Anlehnung an das Merton'sche Verfahren zur Modellierung des ,consumption-based CAPM' unter Verwendung der dynamischen Programmierung bearbeitet.<sup>296</sup> Dieses Verfahren zeichnet sich durch zwei Unterschiede zur ,optimal control theory' aus. Er ist allgemeiner formuliert und rückt die zu optimierende Funktion in das Zentrum der Betrachtung anstatt der Konzentration auf ,state-' oder ,control variable'. Die größere Allgemeingültigkeit wird durch die freie Wahl des Anfangszeitpunktes erreicht. Dadurch resultieren in Abhängigkeit des gewählten Anfangszeitpunktes unterschiedliche Pfade für die ,state-' oder ,control variable'. Der zweite Unterschied besteht in der Formulierung einer ,optimal value function' ,J', welche der zu integrierenden Funktion bei dem unterschiedlichen Anfangsszenarien jeweils einen Optimalwert zuordnet. Anhand dieser neuen Funktion wird die Lösung charakterisiert. Es entsteht ein systematischer iterativer Prozess zur Lösung des ursprünglichen Problems. Fängt man mit der (einfachen) Entscheidung in der letzten Periode an, so lässt sich der Pfad der ,control variable' zur Erreichung einer ,optimal value function' rekursiv ermitteln.

Im folgenden wird zunächst die ,optimum value function' (J) definiert. Da ihre Funktionsform nicht bekannt ist, wird sie anschließend durch eine Taylor Approximation annäherungsweise bestimmt. Als Zwischenergebnis erhält man ein Maximierungsproblem, in dem die exogen spezifizierten Variablen von der Funktion ,J', die einen nutzenfunktionsähnlichen Charakter besitzt, getrennt aufgeführt sind. Es ist somit möglich, durch partielles Ableiten die notwendigen Optimalbedingungen erster Ordnung für ein

---

<sup>296</sup> Vgl. Appendix 5.4 für eine ausführliche Beschreibung und Abgrenzung zu anderen Methoden.

Gleichgewicht zu bestimmen. Die Ableitung des neu (unter Verwendung von „J“) formulierten Maximierungsproblems nach der Nachfrage des Inländers nach ausländischer Währung zu Investitionszwecken ‚b<sub>a</sub>‘, erlaubt eine Beschreibung der Devisennachfrage in Abhängigkeit der exogen spezifizierten Prozesse (Gleichungen III.11 bis III.13).

In Schritt 1 sei nun die ‚optimum value function‘ J(W<sup>r</sup>,RS,t) definiert. Sie lautet:

$$J(W^r, RS, t_0) = \max_{b, b_a, B^r} \left\{ E_{t_0} \left[ \int_{t_0}^{t_1} V(B^r, RS, t) dt + J(W_{t_1}^r, RS_{t_1}, t_1) \right] \right\} \quad (\text{III.37})$$

In dieser Gleichung beschreiben die Variablen ‚W<sup>r</sup>‘ und ‚B<sup>r</sup>‘ das mit dem inländischem Preis des Gutes ‚x‘ normierte nominale Vermögen bzw. die Auflösung des Vermögens für Konsumzwecke (Konsumausgaben – Einkommen). Da das Bellman Prinzip bereits ausführlich dargestellt wurde, wird hier die Formulierung mit getrenntem Integral und Substitution von J<sub>t+1</sub>(•) genannt.

Zur Lösung des Optimierungsproblems, wie es in der rechten Gleichungsseite beschrieben wird, wird parallel zum Merton’schen Vorgehen, eine Taylor Approximation zweiter Ordnung der Funktion ‚J‘ um die Stelle (W<sup>r</sup><sub>t<sub>0</sub></sub>, RS<sub>t<sub>0</sub></sub>, t<sub>0</sub>) vorgenommen.<sup>297</sup> Es gilt:

$$J(W^r, RS, t_0) = \max_{b, b_a, B^r} \left\{ E_{t_0} \left[ \int_{t_0}^{t_1} V(B^r, RS, s) ds + J(W^r, RS, t_0) + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial t} dt + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS} dRS + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r} dW^r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial RS]^2} [dRS]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} [dW^r]^2 + \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r} dRS dW^r \right] \right\} \quad (\text{III.38})$$

<sup>297</sup> Da im ‚continuous time‘ die beiden ersten Momente zur Beschreibung der Stochastik einer Variablen mit stetigem Verlauf ausreichen, ist die Wahl der zweiten Ordnung legitim dafür höhere Momente (h.M.) gilt: h.M.=0(t).

Der zweite Term der rechten Gleichungsseite,  $J(W^r, RS, t_0)$ , hängt ausschließlich von im gegenwärtigen Zeitpunkt bekannten Variablenausprägungen ab, und ist somit nicht stochastisch. Da er weiterhin nicht Gegenstand der Wahlparameter ist, die der Nutzenmaximierung dienen, kann er aus beiden Klammern vorgezogen werden.

Es wird nun, gemäß dem üblichen Vorgehen in der CAPM Literatur, J auf beiden Gleichungsseiten gekürzt und der Erwartungswert auf jeden Summanden bezogen. Da die Ableitungen von J sich auf die bekannten Werte in  $t_0$  beziehen (Approximation um  $t_0$ ), sind die Ableitungen nicht stochastisch. Sie können somit ohne weiteres aus dem Erwartungswert vorgezogen werden. Dadurch folgt aus III.38:

$$0 = \max_{b, b_a, B^r} \left\{ \begin{aligned} & E_{t_0} \left[ \int_{t_0}^{t_1} V(B^r, RS, s) ds \right] + E_{t_0} \left[ \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial t} dt \right] \\ & + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS} E_{t_0} [dRS] + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r} E_{t_0} [dW^r] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial RS]^2} E_{t_0} [(dRS)^2] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} E_{t_0} [(dW^r)^2] \\ & + \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r} E_{t_0} [dRS dW^r] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.39})$$

Die Erwartungswerte in diesem Optimierungsproblem können unter Verwendung der bereits hergeleiteten stochastischen Prozesse für ‚RS‘ und ‚W<sup>r</sup>‘ ersetzt werden. Ziel dieses Ersetzens ist die Beschreibung des Problems in Abhängigkeit der als exogen spezifizierten Prozesse. Die Gleichungen seien hier kurz genannt:<sup>298</sup>

$$E_{t_0} [dRS] = RS \left( \mu_x + \mu_S - \mu_y + \sigma_y^2 + \sigma_{xS} - \frac{\sigma_{xy}}{(p_{y,t}^a)^2} - (s_t)^2 \sigma_{Sy} \right) dt \quad (\text{III.40})$$

$$E_{t_0} [(dRS)^2] = (RS)^2 (\sigma_x^2 + \sigma_S^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xS} - 2\sigma_{xy} - 2\sigma_{Sy}) dt \quad (\text{III.41})$$

$$E_{t_0} [dW^r] = W^r \left( b_a (i_a + \mu_S - i) + i - \frac{B^r}{W^r} - \mu_x + \sigma_x^2 - b_a \sigma_{Sx} \right) dt \quad (\text{III.42})$$

$$E_{t_0} \left[ (dW^r)^2 \right] = (W^r)^2 (b_a^2 \sigma_s^2 - 2b_a \sigma_{sx} + \sigma_x^2) dt \quad (\text{III.43})$$

$$E_{t_0} [dW^r dRS] = W^r RS \left( b_a (\sigma_s^2 + \sigma_{sx} - \sigma_{sy}) - \sigma_{sx} - \sigma_x^2 + \sigma_{xy} \right) dt \quad (\text{III.44})$$

Die Problemstellung in III.39 ist die in ihrer Form aus der Literatur bekannte Optimierungsbedingung und ist charakterisierbar als Maximierungsproblem hinsichtlich einer stochastischen partiellen Differentialgleichung in ‚J‘ zweiter Ordnung. Die Lösung dieser Problemstellung ist nicht trivial. Merton (1971) schlägt folgendes Vorgehen vor: Zunächst seien die Optimalbedingungen für die Variablen ‚b‘, ‚b<sub>a</sub>‘ und ‚B<sup>r</sup>‘ (‚Kontrollvariablen‘) in Abhängigkeit von ‚J‘ zu bestimmen. Dies geschieht, wie aus nicht stochastischen Problemstellungen bekannt, durch Gleichsetzen der ersten Ableitungen mit Null und Umformen. Anschließend werden die Kontrollvariablen, die die Optimalbedingung erfüllen, in obige Gleichung eingesetzt. Durch dieses Einsetzen erhält man eine stochastische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und die ‚boundary condition‘:  $J(W, t_1) = B(W, t_1)$ .<sup>299</sup> Diese kann grundsätzlich durch Addition ihrer allgemeinen und spezifischen Lösung und der Parameterbestimmung anhand der ‚boundary condition‘ gelöst werden.<sup>300</sup>

Merton (1971) wendet obiges Vorgehen auf eine ähnliche Problemstellung an. Es wird ersichtlich, dass eine Lösung ohne weitere einschränkende Prämissen kaum möglich ist. Er verwendet die folgenden Einschränkungen: a) eine risikolose Anlage existiert, b) die Preise der Anlagegüter sind log-normal verteilt und c) die Nutzenfunktion ist als HARA Nutzenfunktion beschreibbar. Er zeigt, dass die Ergebnisse der Tobin-Markowitz Analyse unter Verwendung von a) und b) replizierbar sind: Die Anlageentscheidung lässt sich auf eine Anlage in das Marktportfolio und der risikolosen Anlage reduzieren, wobei die Zusammensetzung des Marktportfolio unabhängig von der Risikoneigung des Akteurs ist. Die Annahme c) erlaubt eine explizite Beschreibung von ‚J‘. Es folgt, dass sowohl die Konsumnachfrage als auch die Investitionsnachfrage linear im Vermögen sind, und vollständig durch die exogenen Parameter beschrieben werden können.

---

<sup>298</sup> Vgl. Appendix 5.2 für eine Herleitung.

<sup>299</sup> Diese Bedingung folgt aus der Definitionsgleichung von ‚J‘, da das Integral über die Nutzenfunktion in ‚t<sub>1</sub>‘ den Wert Null besitzt und in diesem Zeitpunkt sämtliche Variablen bekannt sind. Der Erwartungswert einer bekannten Variablen ist dessen Ausprägung, wie aus der Definition des Erwartungswertes hervorgeht.

<sup>300</sup> Merton (1969) geht ausführlicher auf das Lösungsverfahren für den Fall einer konstanten relativen Risikoaversion der Akteure ein. Er verwendet eine ‚Versuchsfunktion‘ für ‚J‘ und analysiert, unter welchen Bedingungen sie die Differentialgleichung erfüllt.

In dieser Arbeit wird ein alternatives Verfahren angewendet. Es nutzt die Tatsache, dass die Funktion ‚J‘ nicht explizit spezifiziert werden muss. Dazu wird die Optimalbedingung, die man durch das Ableiten nach ‚b<sub>a</sub>‘ und gleich Null setzen erhält, nach ‚b<sub>a</sub>‘ umgeformt. Als Zwischenergebnis erhält man eine Beschreibung der Devisennachfrage in Abhängigkeit der in seiner Form unbekanntem Funktion ‚J‘. Es kann in einem nächsten Schritt nun einerseits, wie in Adler und Dumas (1984) die Risikoaversion unter Verwendung von ‚J‘ beschrieben werden. Andererseits kann ‚J‘, bzw. dessen Ableitungen, unter Verwendung der Optimalbedingung, die man durch Ableiten nach den Konsumausgaben erhält, in Abhängigkeit von der Nutzenfunktion beschrieben werden. Dieses Verfahren wird in dieser Arbeit angewendet.

Das Optimierungsproblem lässt sich nach Einsetzen der Gleichungen III.40 bis III.44 in die bekannte Problemstellung III.39 wie folgt beschreiben:<sup>301</sup>

$$0 = \max_{b, b_a, B^r} \left\{ \begin{aligned} & E_{t_0} \left[ \int_{t_0}^{t_1} V(B^r, RS, s) ds \right] + E_{t_0} \left[ \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial t} dt \right] \\ & + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS} RS \left( \mu_x + \mu_S - \mu_y + \sigma_y^2 + \sigma_{xS} - \frac{\sigma_{xy}}{(P_{y,t}^a)^2} - (S_t)^2 \sigma_{yS} \right) dt \\ & + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r} W^r \left( b_a (i_a + \mu_S - i) + i - \frac{B^r}{W^r} - \mu_x + \sigma_x^2 - b_a \sigma_{xS} \right) dt \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial RS]^2} (RS)^2 (\sigma_x^2 + \sigma_S^2 + \sigma_y^2 + 2(\sigma_{xS} - \sigma_{yx} - \sigma_{yS})) dt \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} (W^r)^2 (b_a^2 \sigma_S^2 - 2b_a \sigma_{xS}) dt \\ & + \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r} RS * W^r (b_a (\sigma_S^2 + \sigma_{xS} - \sigma_{yS}) - \sigma_{xS} - \sigma_x^2 + \sigma_{yS}) dt \end{aligned} \right. \quad (III.45)$$

### 3.3. Die Herleitung einer nutzenmaximierenden Devisennachfragefunktion

<sup>301</sup> Die partiellen Ableitungen beschreiben die Steigung zum Zeitpunkt t<sub>0</sub>, der als bekannt vorausgesetzt wird. Diese Gleichung ist bedingt auf die beobachtbaren Ausprägungen aller Variablen zum Zeitpunkt sowie auf μ und σ. Vgl. auch Merton (1998). S. 70 f.



Aus der Problemstellung III.45 wird nun die Devisennachfragefunktion in Abhängigkeit von ‚J‘ hergeleitet. Dazu werden im ersten Schritt die notwendigen Bedingungen für eine Extremlösung obiger Problemstellung bestimmt. Anschließend wird unter Verwendung der hinreichenden Bedingung nachgewiesen, dass es sich um ein Nutzenmaximum handelt. Schließlich wird durch Umformung einer notwendigen Bedingung die nutzenmaximierende Devisennachfragefunktion des Inländers bestimmt.

Nach einer Division von III.45 durch ‚dt‘ und einer Ableitung nach ‚b<sub>a</sub>‘ erhält man folgende notwendige Bedingung für die optimale Devisennachfrage (b<sub>a</sub>) der Inländer zu Investitionszwecken.<sup>302</sup>

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r} W^r (i_a + \mu_s - i - \sigma_{xs}) + \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} (W^r)^2 (b_a \sigma_s^2 - \sigma_{xs}) \\
 &+ \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r} RS * W^r (\sigma_s^2 + \sigma_{xs} - \sigma_{ys}) \\
 &= \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r} (i_a + \mu_s - i - \sigma_{xs}) + \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} W^r (b_a \sigma_s^2 - \sigma_{xs}) \\
 &+ \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r} RS (\sigma_s^2 + \sigma_{xs} - \sigma_{ys})
 \end{aligned} \tag{III.46}$$

Diese Bedingung beschreibt eine notwendige Bedingung für ein Extremum. Es ist nun eine weitere hinreichende Bedingung notwendig, um dieses Extremum als Optimum zu charakterisieren. Aus der allgemeinen Optimierungstheorie ist bekannt, dass eine negative zweite Ableitung hinreichend für die Existenz eines Optimums im Sinne der Nutzenmaximierung ist. Es gilt für die zweite Ableitung von III.45 nach der Devisennachfrage:

$$\frac{\partial^2 \bullet}{[\partial b_a]^2} = \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} W^r \sigma_s^2 \tag{III.47}$$

<sup>302</sup> Es sei noch einmal angemerkt, dass das Ziel die Herleitung einer Devisennachfragefunktion ist. Devisen werden von Inländern für den Kauf ausländisch produzierter Güter sowie für die Auslandsinvestition benötigt. Die obige Optimierungsforderung erlaubt die Herleitung einer Devisennachfragefunktion zu Investitionszwecken.

Der Term  $\frac{\partial^2 \bullet}{[\partial b_a]^2}$  repräsentiert eine vereinfachte Darstellung des Maximierungsproblems in III.45, das zweifach nach ‚b<sup>a</sup>‘ abgeleitet wird.<sup>303</sup> Aus der rechten Seite der Gleichung III.47 kann nun die Erfüllung der hinreichenden Bedingung für eine nutzenmaximierende Devisennachfragefunktion bestimmt werden: Da das reale Vermögen sowie die Varianz des Wechselkurses immer positiv sein müssen, beschreibt die Devisennachfrage, die aus der notwendigen Bedingung hergeleitet werden soll, nur dann ein Optimierungsverhalten, wenn die zweite Ableitung von ‚J‘ nach dem realen Vermögen einen negativen Wert besitzt, also gilt:

$$\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} < 0$$

Problematisch ist nun, dass das Verhalten (Steigung, Konvexität) von ‚J‘ nicht bekannt ist, da nur Annahmen zum Verhalten der Nutzenfunktion getroffen wurden. Es lässt sich jedoch wie folgt bestimmen: Das Vorzeichen dieser zweiten Ableitung von ‚J‘ lässt sich aus der Problemstellung in III.45 und der Prämisse einer konkaven Nutzenfunktion bestimmen indem von den bekannten Eigenschaften der Nutzenfunktion Rückschlüsse auf diejenigen der ‚optimal value function‘ gezogen werden. Dazu sei im ersten Schritt die zweite notwendige Bedingung, die Ableitung nach dem realen Konsum, aus III.45 bestimmt:

$$0 = \frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r} - \frac{\partial J(W_{t_0}^r, RS_{t_0}, t_0)}{\partial W^r} \quad (\text{III.48})$$

Die notwendige Optimalbedingung III.48 spezifiziert formal das Verhältnis des Grenznutzens der realen Konsumaufwendungen und der ersten Ableitung von ‚J‘ nach dem realen Vermögen. Gleichung III.48 kann nun, wie in Merton (1971) und Breeden (1979) wiederum nach dem realen Vermögen abgeleitet werden.<sup>304</sup>

<sup>303</sup> Diese Schreibweise wird ebenfalls von Merton (1973) verwendet.

<sup>304</sup> Es wird hierbei unterstellt, dass der reale Konsum vom realen Vermögen abhängt. Dies ist insoweit einsichtig, als dass ein höheres Vermögen zu irgendeinem Zeitpunkt zu einem erhöhten Konsum führen muss, wenn das Endvermögen unverändert bleibt.

$$\frac{\partial^2 V(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} \frac{\partial B^r}{\partial W^r} = \frac{\partial^2 J(W_{t_0}^r, RS_{t_0}, t_0)}{[\partial W^r]^2} \quad (\text{III.49})$$

In Gleichung III.49 erscheint nun auf der rechten Gleichungsseite derjenige Term, dessen Vorzeichen in Gleichung III.47 fraglich war. Dieser Term wird weiterhin in Abhängigkeit der Nutzenfunktion beschrieben, dessen Verhalten bekannt ist. Folglich ist aus dieser Bedingung ersichtlich, dass, bei positiver Reaktion des realen Konsums auf eine Steigerung des realen Vermögens, und unter Verwendung der Prämisse des abnehmenden Grenznutzens im Konsum ein negatives Vorzeichen der zweiten Ableitung von ‚J‘ nach dem realen Vermögen erzwingt. Damit besitzt die rechte Gleichungsseite von III.47 ein negatives Vorzeichen und die notwendige Bedingung für ein Extremum (Gleichung III.46) beschreibt ein Optimum.

#### EXKURS:

Die Optimalbedingung III.46 ermöglicht bereits eine Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses ohne dass die Herleitung einer Devisenangebotsfunktion notwendig wäre. Nachteilig an der resultierenden Gleichgewichtsbedingung wäre jedoch, dass die Nachfrage der Inländer nach Devisen ‚b<sub>a</sub>‘ weiterhin ein Bestandteil der Gleichung ist. In der Literatur sind unter anderem die folgenden Vorgehensweisen zu finden.

In Teilen der CAPM-Literatur, beispielsweise Merton (1973), wird dieses ‚Problemstellung‘ insofern angegangen, als dass ein quasi exogenes Angebot spezifiziert wird. Im vorliegenden Sachverhalt wäre eine exogene Festlegung des Devisenangebots notwendig. Alternativ wird von Adler und Dumas (1984) die Nachfrage als Variable in der Gleichgewichtsbedingung weiter aufgeführt. Diese Arbeit ist insofern besonders relevant, als dass ihre Gleichungen (19) und (20), explizit eine Aussage zur Prognosefähigkeit des Terminkurses formulieren. Das Modell unterscheidet sich jedoch von dieser Arbeit, da es kein dynamisches intertemporales Modell formuliert.

Ausgehend von der hier formulierten Optimalbedingung bietet sich die Isolierung von erwarteter Wechselkursänderung und der ‚Forwardprämie‘ auf der linken Gleichungsseite an. Aus den Ausführungen des Kapitel I wurde deutlich, dass im Fall der unverzerrten Prognosefähigkeit des Terminkurses für den erwarteten Wechselkurs die linke

Gleichungsseite den Wert Null erhalte. Die Verwendung dieser Hypothese als ‚benchmark‘ ist ebenfalls aus dem Kapitel II bekannt. Die rechte Gleichungsseite beschreibt somit die gleichgewichtige und erwartete Abweichung des erwarteten Wechselkurses vom Terminkurs. Durch Umformen von III.46 lässt sich die Prognosefähigkeit des Terminkurses wie folgt beschreiben:

$$i_a + \mu_S - i = \sigma_{xS} - \frac{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2}}{\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} W^r (b_a \sigma_S^2 - \sigma_{xS}) - \frac{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r}}{\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} RS (\sigma_S^2 + \sigma_{xS} - \sigma_{yS}) \quad (\text{III.50})$$

Definiert man die Risikoneigung in Abhängigkeit der ‚optimum value function‘, wie es von Adler und Dumas (1984, Formel (7)) definiert wurde, so lässt sich diese Gleichung schreiben als:

$$\begin{aligned} i_a + \mu_S - i &= \sigma_{xS} + RRA(b_a \sigma_S^2 - \sigma_{xS}) - \frac{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r}}{\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} RS (\sigma_S^2 + \sigma_{xS} - \sigma_{yS}) \\ &= (1 - RRA) \sigma_{xS} + RRA(b_a \sigma_S^2) - \frac{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r}}{\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} RS (\sigma_S^2 + \sigma_{xS} - \sigma_{yS}) \\ RRA &= - \frac{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2}}{\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} W^r \end{aligned}$$

mit: (III.51)

Diese Formulierung der ungedeckten Zinsparität ist mit der Gleichung (19) in Adler und Dumas (1984) vergleichbar. Die wesentliche Erkenntnis sowohl in dieser Arbeit als auch in der genannten Arbeit lautet: Die Hypothese der unverzerrten Prognosefähigkeit des Terminkurses bei risikoneutralen rationalem Verhalten ( $RRA=0$ ), die, wie in Kapitel I dargestellt, in der üblichen Lehrbuchformulierung meist postuliert wird, ist nicht durch ein CAPM fundiert.

Die obige Modellierung unterscheidet sich jedoch von derjenigen in Adler und Dumas (1984) in den folgenden Bereichen: Die genannte Arbeit untersucht eine Anlageentscheidung

zwischen Anlagemöglichkeiten mit unsicherem Ertrag, deren Unsicherheit nicht auf den Wechselkurs zurückführbar ist. Die hier formulierte Gleichung ist insofern eine relativ vereinfachte Version, da solchen Unsicherheiten im Anlagebereich abstrahiert wird. Die obige Gleichung geht jedoch in ihrer Aussagefähigkeit über die Modellierung von Adler und Dumas hinaus, indem eine dynamische Betrachtung eingeführt wird, die zukünftige Abweichungen von der Kaufkraftparität in die Analyse einbezieht.

Obwohl das hier beschriebene Vorgehen mit der Literatur konsistent ist, und eine dahingehende Abgrenzung der Ergebnisse erlaubt, wird dieses Vorgehen nicht weiter verfolgt. Alternativ wird das Angebot explizit modelliert. Durch diese Erweiterung, zu der es in der Literatur kein Pendant gibt, ist zum einen eine weniger restriktive Prämissensetzung möglich. Andererseits wird es vermieden, eine perspektivenabhängige Gleichgewichtsbeziehung zu formulieren. Dies wird erreicht, indem die ausländische Perspektive explizit durch die Angebotsmodellierung in die Gleichgewichtsbeziehung einbezogen wird.

EXKURS ENDE

Wie bereits mehrfach erwähnt, besteht das Ziel dieses Schrittes in der Formulierung einer Devisennachfragefunktion. Die Optimalbedingung kann nun durch Umformung nach  $b_{a,t} * W$  als die gesuchte Devisennachfragefunktion interpretiert werden. Es sei in Erinnerung gerufen, dass die Variable  $b_{a,t}$  den Vermögensanteil in Inlandswährung beschreibt, der für eine Investition im Ausland verwendet wird. Eine Multiplikation mit dem Nominalvermögen,  $W$ , transformiert diesen Ausdruck ( $b_{a,t} * W$ ) in absolute Geldeinheiten. Es gilt nach Umformung der Optimalbedingung III.46 nach  $b_{a,t}$  und Erweiterung mit  $W$ :

$$b_a W = \frac{\left(1 - \frac{1}{RRA}\right) \sigma_{xS}}{\sigma_S^2} W + \frac{W}{RRA} \frac{(i_a + \mu_S - i)}{\sigma_S^2} - \frac{\frac{\partial J^2(W, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r}}{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{(\partial W^r)^2}} \left(\frac{W}{W^r} * RS\right) \frac{(\sigma_S^2 + \sigma_{xS} - \sigma_{yS})}{\sigma_S^2} \quad (\text{III.52})$$

bzw.

$$b_a W = \frac{W}{RRA * \sigma_s^2} (i_a + \mu_s - i) + \left\{ \left( 1 - \frac{1}{RRA} \right) \frac{\sigma_{x,S}}{\sigma_s^2} \right\} W - \frac{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r}}{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{(\partial W^r)^2}} \left( \frac{W}{W^r} * RS \right) \frac{\sigma_{S,RS}}{\sigma_s^2} \quad (\text{III.53})$$

Die Nachfragefunktion der Inländer nach Devisen lässt sich vereinfachend beschreiben durch:

$$b_a W = \frac{W}{RRA * \sigma_s^2} (i_a + \mu_s - i) + \left\{ \left( 1 - \frac{1}{RRA} \right) \frac{\sigma_{x,S}}{\sigma_s^2} \right\} W + \frac{RSA}{RRA} \frac{\sigma_{S,RS}}{\sigma_s^2} W$$

$$RSA = \frac{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r}}{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} RS$$

mit:  $\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}$  und

$$RRA = - \frac{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2}}{\frac{\partial J^2(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} W^r \quad (\text{III.54})$$

Die linke Gleichungsseite beschreibt die inländische Devisennachfrage, die aus dem Produkt des inländischen Nominalvermögens,  $W^r$  mit dem Anteil am inländischen Nominalvermögen, der im Nutzenoptimum von Inländern für Investitionszwecke in Auslandswährung gehalten wird, besteht. Die Variable ‚RRA‘ beschreibt die bereits ausführlich erläuterte relative Risikoaversion des inländischen Akteurs, die die Besonderheit besitzt, dass sie nicht unter Verwendung der Nutzenfunktion, sondern der ‚optimal value function‘ (J) formuliert wird. Die Variable ‚RSA‘ beschreibt in vergleichbarer Weise die Risikoaversion des Akteurs gegen die Möglichkeit eines als ungünstig empfundenen zukünftigen Szenarios.<sup>305</sup>

Diese gleichgewichtige Nachfragefunktion sei nun ökonomisch interpretiert. Dazu ist jedoch einschränkend anzumerken, dass sich diese Devisennachfragefunktion in obiger Form nicht zur Beschreibung der Devisennachfrage der Inländer eignet die auf dem Devisenmarkt zum Ausdruck kommt. Sie muss vielmehr dahingehend modifiziert werden, dass Gütermarkteinflüsse (also die Handelsbilanz) und die in der Vergangenheit bereits getätigten

<sup>305</sup> Die Variablen ‚RRA‘ und ‚RSA‘ unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dass erstere ein zweite Ableitung von ‚J‘ nach dem Vermögen enthält, während ‚RSA‘ anstelle dessen eine Ableitung nach dem Vermögen und dann nach dem Szenario (d.h. dem realen Wechselkurs) enthält. Formal gesehen kommt also in ‚RSA‘ das Krümmungsverhalten in ‚W‘ und ‚RS‘ zum Ausdruck.

Auslandsinvestitionen berücksichtigt werden. Weiterhin eignet sich diese Beschreibung nicht zur Darstellung risikoneutralen Verhaltens, beschrieben durch  $RRA=0$ , da der letzte Term in Gleichung III.54 eine Division durch ‚Null‘ erforderlich machen würde. Die Gleichung in Adler und Dumas unterliegt der gleichen Kritik.

Aus der Struktur der Nachfragefunktion ist zunächst ersichtlich, dass sie von drei separaten Einflussgrößen abhängt. Erstens hängt die Nachfrage von der relativen Vorteilhaftigkeit der ausländischen im Vergleich zur inländischen Anlage ab. Dieser Einfluss wird durch die erste Komponente beschrieben und bezieht sich auf nominale Werte. Es wird deutlich, dass die Nachfrage vom erwarteten Mehrertrag positiv und vom Anlagerisiko negativ abhängt. Das Anlagerisiko, also die bewertete Unsicherheit des Ertrages, ist beschrieben durch das Produkt der Unsicherheit, beschrieben durch die Wechselkursvarianz, mit einem Bewertungsfaktor, beschrieben durch die relative Risikoaversion.<sup>306</sup> Steigt also der erwartete Wechselkurs  $\mu_s$ , so steigt der erwartete Ertrag der Auslandsanlage und ebenfalls die Devisennachfrage. Bedingung dafür ist, dass die Anleger risikoavers sind ( $RRA > 0$ ). Steigt die Risikoaversion der Anleger ( $RRA$ ) oder die Unsicherheit der Auslandsanlage ( $\sigma_s$ ), so sinkt die Nachfrage. Dieses theoretisch bestimmte Verhalten ist auch ökonomisch plausibel.

Der zweite Teil beschreibt den Einfluss der realen Unsicherheit, also der Preisänderung des heimisch produzierten Gutes ‚x‘, auf die Devisennachfragehöhe. Dieser Einfluss ist in der Annahme begründet, dass die Anleger ihrer Entscheidung die reale Vorteilhaftigkeit zugrunde legen. Die Wirkungsrichtung lässt sich wie folgt begründen:

Die reale Unsicherheit der Auslandsanlage hängt davon ab, wie sich deren nominale Unsicherheit relativ zur Preisänderung des heimisch produzierten Gutes verhält. Verhalten sich Wechselkurs- und die Preisänderung des Gutes ‚x‘ gleich, so ist die Auslandsanlage real, also in Einheiten des Gutes ‚x‘, sicherer, als eine ausschließliche Berücksichtigung der Nominalwerte erkennen lässt. Eine Preissteigerung des Gutes ‚x‘ die sich negativ auf den realen Ertrag der nominal sicheren Inlandsanlage auswirkt, steigert durch die Wechselkursänderung den nominalen Ertrag der Auslandsanlage. Der negative Effekt wird

---

<sup>306</sup> Da von Anlagen ohne Kreditrisiko ausgegangen wird, reduziert sich die berücksichtigte Unsicherheit auf die Unsicherheit der Wechselkursveränderung.

dadurch abgeschwächt, so dass der Ertrag real sicherer wird. Diese Wirkungszusammenhänge wurden in Kapitel II Abschnitt 3 bereits ausführlich beschrieben.

Es sei nun der Einfluss der Risikoaversion näher beschrieben: Es wird aus obiger Nachfragefunktion ersichtlich, dass die Einflussrichtung der realen Unsicherheit,  $\sigma_{sx}$ , von der Ausprägung der relativen Risikoaversion relativ zum Wert eins abhängt. Ökonomisch lässt sich diese Abhängigkeit insofern erklären, als dass von zwei gegenläufigen Motivationen der Anlageentscheidung ausgegangen wird. Die erste Motivation entspricht dem Bestreben, Unsicherheiten zu vermeiden.<sup>307</sup> Als zweite Motivation mit entgegengesetzter Wirkungsrichtung wirkt die Neigung, einen festgesetzten Lebensstandard zu sichern. Eine erhöhte Unsicherheit erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass der dazu nötige Ertrag der Anlage bei konstantem Erwartungswert unterschritten wird. Diese Bestrebung erhöht die Nachfrage bei erhöhter Unsicherheit. Die Nachfragereaktion auf eine gestiegene Unsicherheit ist somit von der konkreten Ausprägung der Risikoaversion abhängig.<sup>308</sup>

Grundsätzlich ist dieser Wirkungszusammenhang mit den Erkenntnissen in der Literatur konsistent. So wurde im theoretischen Grundlagenteil des Kapitel II allgemein dargestellt, dass bei Verwendung der RRA zur Beschreibung der Risikoaversion der Akteure die Nachfrage bei einer Ausprägung  $RRA < 1$  von der ersten Motivation und bei  $RRA > 1$  von der zweiten Motivation in ihrer Reaktion auf eine veränderte Unsicherheit bestimmt wird. Dieses Ergebnis wird hier im konkreten Fall bestätigt.

Schließlich sei noch angemerkt, dass der gesamte zweite Teil einen Wert von Null besitzt, wenn  $RRA = 1$  gilt. Ökonomisch bedeutet dies, dass die Anlageentscheidung nicht vom Gütermarkt, d.h. den Güterpreisänderungen beeinflusst wird. Erklärend sei angemerkt, dass diese Risikoneigung durch eine logarithmische Nutzenfunktion beschrieben wird. Unter Berücksichtigung dieser Sachverhalte bestätigt die obige Nachfragefunktion das aus der Literatur bekannte Ergebnis, dass die Akteure ihre Konsum- und Investitionsentscheidungen unabhängig voneinander treffen, wenn ihre Risikoneigung durch solch eine Nutzenfunktion

---

<sup>307</sup> Rothschild und Stiglitz (1971) nennen dieses Motiv intuitiv einleuchtend. Dieses Motiv liegt der Standardaussage der komparativ statischen Portfoliotheorie (z. B. CAPM) zugrunde.

<sup>308</sup> Diese Zusammenhänge werden ausführlich im Rahmen der Analyse des Devisenmarktgleichgewichtes ausgeführt.



beschrieben werden kann. Gütermarktpreise beeinflussen somit nicht die Investitionsentscheidung, so dass dieser zweite Term den Wert Null annehmen muss.

Der dritte und letzte Teil der rechten Gleichungsseite beschreibt die Devisennachfrage in Abhängigkeit der Schutzfunktion einer Auslandsanlage gegen ungünstige zukünftige Szenarien. Allgemein sind diese ungünstige Szenarien definiert als geringere zukünftige Konsummöglichkeiten bei gegebenem realem zukünftigen Vermögen, deren Einfluss ist auf die dynamische Formulierung des Modells zurückführbar ist. Analog zur Bestimmung der Risikoprämie im zweiten Term, bestimmt sie sich wieder durch eine Bewertung der Unsicherheit.

Die Unsicherheit wird repräsentiert durch die Kovarianz des nominalen Anlageertrages der Auslandsinvestition mit der Ausprägung des zukünftigen Szenarios:<sup>309</sup>

$$\frac{(\sigma_{xS} + \sigma_S^2 - \sigma_{yS})}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_{(x+S-y),S}}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \quad (\text{III.55})$$

Es wird ersichtlich, dass die Einflussrichtung in ihrem Vorzeichen sowohl von der Kovarianz der Ausprägung des zukünftigen Szenarios, beschrieben durch RS, als auch dem stochastischen Ertrag der Auslandsanlage, determiniert durch den Wechselkurs, bestimmt wird. Sie kann sowohl eine positive als auch negative Ausprägung annehmen. Ein ungünstiges zukünftiges Szenario wird durch einen gestiegenen realen Wechselkurs beschrieben, da in diesem Fall das ausländisch produzierte Gut trotz seiner Homogenität mit dem inländisch produzierten Gut relativ teurer ist und trotzdem konsumiert wird. Der Gesamtkonsum reduziert sich somit bei gegebenem realen Vermögen. Besitzt die Kovarianz einen positiven Wert, so steigt der Ertrag der Auslandsinvestition bei Eintritt dieses ungünstigen Szenarios aufgrund des gestiegenen Wechselkurses. Die Auslandsinvestition schützt den Akteur somit vor geringeren zukünftigen Konsummöglichkeiten und wird in dieser Hinsicht als günstig bewertet. Ist die Kovarianz negativ, so besitzt die Auslandsanlage keine Hedgefunktion.<sup>310</sup>

<sup>309</sup> Eine explizite Schreibweise der Kovarianzen gemäß ihrer Definition lässt die Gültigkeit obiger Umformung sofort einsichtig werden.

<sup>310</sup> Von der Möglichkeit einer Kreditaufnahme wird hier abstrahiert, um eine ausführlichere Diskussion um Ponzi-Games und die Transversalitätsbedingung zu vermeiden. Solch eine Erweiterung ist jedoch ohne weiteres

Die Bewertung des zukünftigen Szenarios geht über die Ableitungen der ‚optimum value

function‘ durch den Term  $\frac{RSA}{RRA}$  in die Nachfragefunktion III.54 ein. Da die Form von ‚J‘ nicht näher spezifiziert wurde, kann ad hoc nichts über das Vorzeichen von RSA gesagt werden. Es ist jedoch möglich, RSA unter Verwendung der Optimalbedingung erster Ordnung in Abhängigkeit der Nutzenfunktion zu beschreiben.<sup>311</sup> Die Variable ‚RRA‘ sei unproblematisch, da sie, wie im Appendix gezeigt, bei risikoaversen Verhalten einen Wert größer Null annimmt und in der Literatur zur Definition der Risikoaversion verwendet wurde. Der Nenner von ‚RSA‘ sei ebenfalls vernachlässigt, da an genanntem Ort ebenfalls gezeigt

wurde, dass er immer positiv sei. Das Vorzeichen des Terms  $\frac{RSA}{RRA}$  hängt somit von folgendem Ausdruck ab.<sup>312</sup>

$$\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r \partial RS} = \frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} * \frac{\partial B^r}{\partial RS} + \frac{\partial V^2(B^r, RS)}{\partial B^r \partial RS} \quad (III.56)$$

Der erste Term der rechten Gleichungsseite beschreibt das Produkt aus zweiter Ableitung der indirekten Nutzenfunktion ‚V‘ nach Konsumausgaben ‚B<sup>r</sup>‘ und der Ableitung dieser Ausgaben nach dem realen Wechselkurs. Dieses Produkt ist positiv. Das ist daraus ersichtlich, dass die Nutzenfunktion annahmegemäß konkav ist, so dass deren zweite Ableitung somit negativ ist. Der reale Konsum sinkt ceteris paribus bei gestiegenem realen Wechselkurs, da das ausländisch produzierte Gut überteuert ist und folglich, bei konstanter Konsummenge von diesem Gut, die mögliche Konsummenge des anderen Gutes bei gegebenem Budget sinkt.

Der zweite Term der rechten Gleichungsseite ist ebenfalls positiv. Dies lässt sich aus der folgenden Gleichung ersehen:<sup>313</sup>

$$RSA = -RRA^V \varepsilon_{B^r RS} + RRA^V OF - MOF \quad (III.57)$$

---

möglich.

<sup>311</sup> Eine formale Analyse findet sich in Appendix 6.

<sup>312</sup> Breeden (1979). S. 286 kommt zu einem ähnlichen Ergebnis. Vgl. auch Gleichung III.48.

Der erste Term beschreibt das Produkt aus relativer Risikoaversion und der realen Budgetelastizität im realen Wechselkurs. Das hochgestellte ‚v‘ kennzeichnet die Definition der relativen Risikoaversion unter Verwendung der indirekten Nutzenfunktion (im Gegensatz zur Definition von ‚RRA‘ unter Verwendung der ‚optimum value function‘). Sie ist immer positiv. Weiterhin ist die Budgetelastizität negativ, wie aus den obigen Ausführungen ersichtlich wurde. Damit ist das erste Produkt der rechten Gleichungsseite in seinem Wert größer als Null.

Die Variablen ‚OF‘ und ‚MOF‘ im zweiten und dritten Term der rechten Gleichungsseite beschreiben den durchschnittlichen und den marginalen Offenheitsgrad des Inländers, definiert als den Anteil der ausländisch produzierten Güter am Gesamtkonsum. Der Einfluss der Absicherungswirkung einer Auslandsinvestition ist somit abhängig von der Relevanz der Absicherung für den Güterkonsum. Je stärker der Konsum der Wechselkursunsicherheit unterliegt, also je mehr ausländisch produzierte Güter konsumiert werden, desto größer ist die Nachfrage nach Devisen zu Investitionszwecken. Da die Variable ‚OF‘ aufgrund ihrer Definition immer positiv ist, ist der zweite Term der rechten Gleichungsseite ebenfalls positiv. Die Variable ‚MOF‘ als dritte Einflussgröße reduziert den Einfluss des zweiten Terms in dem Ausmaß, in dem der Offenheitsgrad aufgrund der realen Wechselkursänderung sinkt. Dieser Term muss in seiner Einflussgröße hinter dem zweiten Term zurückbleiben, da als maximale Anpassung des Güterkonsums der vollständige Verzicht auf ausländisch produzierte Güter möglich ist. In welchem Ausmaß diese Nachfrageanpassung erfolgt, ist jedoch aus dem Modell nicht herleitbar. Dies ist die Konsequenz einer vereinfachten Gütermarktdarstellung, in dem eine Abweichung von der Kaufkraftparität als möglich angenommen wird, ohne die Abweichungsursache zu spezifizieren. Es kann jedoch festgestellt werden, dass aufgrund der obigen Ausführungen immer gilt ‚RSA>0‘ und somit in

$\frac{RSA}{RRA}$

der Summe die Einflussrichtung von ‚ $\frac{RSA}{RRA}$ ‘ bei risikoavermem Verhalten immer positiv ist.

Zusammenfassend ist bezüglich des dritten Terms in der nutzenoptimierenden Devisennachfragefunktion festzustellen, dass für den Fall, dass die Auslandsinvestition eine Hedgelfunktion gegen ungünstige Zukunftsszenarien besitzt, also ‚ $\sigma_{RS,S} > 0$ ‘, die Nachfrage

---

<sup>313</sup> Vgl. Appendix 6 für eine formale Herleitung.

nach Devisen zu Investitionszwecken steigt. Die Nachfragefunktion ist somit vollständig beschrieben.

Abschließend seien die wesentlichen Zusammenhänge bezüglich der nutzenoptimierenden Devisennachfrage festgehalten. Es gilt, dass die Devisennachfragefunktion positiv vom Ertrag der Auslandsanlage, ihrer Absicherungsfunktion gegenüber ungünstigen Zukunftsszenarien und dem Nominalvermögen des Inländers abhängt, während sie von seiner Risikoaversion und der nominellen Unsicherheit der Auslandsanlage negativ beeinflusst wird. Über die Wirkungsrichtung der Güterpreisstochastik ist keine eindeutige Aussage möglich, da sie vom Grad der Risikoaversion abhängt und damit von unterschiedlichen Motiven (Vermeidung von Unsicherheit; Bewahrung eines Mindesteinkommens) dominiert werden kann.

### **3.4. Die Herleitung einer nutzenmaximierenden Devisenangebotsfunktion**

Allgemein gilt, dass auf dem Devisenmarkt grundsätzlich nur die Menge an Devisen zu kaufen ist (vom Inland), die die Einwohner des Landes (Ausland), das die Währung emittiert, zu verkaufen bereit sind.<sup>314</sup> Die Verkaufsbereitschaft an Landeswährung des Auslands ist jedoch nur in dem Umfang gegeben, in dem die Käufer etwas anbieten können, das von den genannten Einwohnern nachgefragt wird. Daraus folgt, dass die Verkaufsbereitschaft an Devisen seitens der Ausländer von ihrer Nachfrage nach dem vom Inland als Gegenleistung angebotene Gut, die heimische Währung der Inländer, bestimmt wird. Das Devisenangebot ist somit abhängig von der ausländischen Nachfrage nach im Inland produzierten Gütern sowie der ausländischen Investitionsnachfrage in Inland. Diese Überlegung wird nun zur Bestimmung des Devisenangebotes verwendet, das der ausländischen Devisennachfrage aus Auslandssicht, also der inländischen Währung, entspricht.

Ein Ausländer sei als ein Akteur bezeichnet, der in ausländischen Währungseinheiten rechnet, und dessen produzierte Güter auch in dieser Währung bewertet und verkauft werden. Die Währung besitzt für den Ausländer somit eine Transaktions- und Rechenfunktion. Es sei nun angenommen, dass ein Ausländer mit der gleichen Entscheidung wie ein Inländer konfrontiert ist. Da annahmegemäß die Güter ‚x‘ und ‚y‘ handelbar sind und weiterhin von

---

<sup>314</sup> Leerverkäufe werden nicht berücksichtigt.

Kapitalverkehrsbeschränkungen abstrahiert wird, ist mit dieser Prämisse keine zusätzliche Einschränkung verbunden. Als wesentlicher Unterschied zwischen den Akteuren bleibt jedoch die unterschiedliche Rechnungseinheit feststellbar.

Es ist nun das Ziel, das Optimierungsproblem, wie es für den Inländer in den Gleichungen III.39 und den Nebenbedingungen III.40 bis III.44 beschrieben wurde, parallel für den Ausländer zu formulieren. Anschließend wird die Devisennachfragefunktion der Ausländer aus Auslandssicht (also die Devisenangebotsfunktion aus Inlandssicht) hergeleitet. Da das Verfahren fast identisch ist mit dem in Abschnitt 3.2 und 3.3 dargestellten Vorgehen, werden die folgenden Ausführungen auf das Wesentliche reduziert.

Es sind nun zwei Wege zur Darstellung der ausländischen Entscheidungssituation möglich. Einerseits kann das Optimalverhalten des Ausländers parallel zur Herleitung der inländischen Devisennachfragefunktion bestimmt werden. Dieses Vorgehen würde implizieren, dass sämtliche Variablen aus ausländischer Perspektive beschrieben werden würden. Grundsätzlich ist solch eine Beschreibung nicht problematisch. Es entstünde jedoch im weiteren Verlauf der Analyse eine hohe Komplexität.<sup>315</sup> Alternativ kann die ausländische Devisennachfragefunktion aus Auslandsperspektive, also das Devisenangebot aus inländischer Perspektive, direkt unter Verwendung von Variablen aus Inlandsperspektive dargestellt werden. Dieser Weg erscheint auf den ersten Blick als aufwendiger, beinhaltet jedoch den Vorteil, dass das Devisenmarktgleichgewicht einfacher interpretierbar ist. Aus diesem Grund wird das zweite Vorgehen hier gewählt.

Das systematische Vorgehen ist mit dem vorherigen Abschnitt identisch. In Schritt 1 wird die Veränderung des mit dem Preis des Gutes ‚x‘ normierten Nominalvermögens der Ausländer, im Zeitablauf unter Verwendung der als exogen vorgegebenen stochastischen Prozesse, aus Inlandssicht beschrieben. Anschließend wird in Schritt 2 die zu maximierende Problemstellung formuliert. Schließlich wird in Schritt 3 die Devisennachfragefunktion der Ausländer hergeleitet. Diese Nachfragefunktion entspricht im Devisenmarktgleichgewicht der

---

<sup>315</sup> Im Devisenmarktgleichgewicht werden Angebot und Nachfrage gleichgesetzt. Aus dieser resultierenden Gleichung wird dann die Prognosefähigkeit des Terminkurses analysiert. Es ist intuitiv plausibel, dass die Verwendung zweier Kategorien von Variablen (in- und ausländische Perspektive) diese Gleichung sehr umfangreich werden ließe.

Devisenangebotsfunktion aus Inlandsperspektive und wird zur Beschreibung dieses Devisenmarktgleichgewichtes benötigt.

Ausgangspunkt für Schritt 1 sei das ausländische Nominalvermögen, das sich unter Verwendung von Variablen aus Auslandsperspektive analog zur Gleichung III.24 wie folgt beschreiben lässt:

$$d(W_a^a) = \left\{ \left( b_a^a (i_a^a + \mu_{S^a}^a - i^a) + i^a \right) W_a^a - B_a^a \right\} dt + b_a^a W_a^a \sigma_{S^a}^a dz_{S^a} \quad (\text{III.58})$$

Diese Gleichung entspricht in ihrer Struktur der bereits bekannten Beschreibung des Inlandsvermögens im Zeitablauf, die allgemeingültig hergeleitet wurde. Die ausländische Perspektive wurde durch ein hochgestelltes ‚a‘ kenntlich gemacht. Ausgedrückt in Variablen aus Inlandsperspektive (vgl. Gleichungen II.88 bis II.91 zur Beschreibung dieser Transformation) gilt für das ausländische Vermögen in Auslandswährung:<sup>316</sup>

$$\begin{aligned} d(W_a^a) &= \left\{ \left( b_a^a (i - \mu_S + \sigma_S^2 - i_a) + i_a \right) W_a^a - B_a^a \right\} dt - b_a^a W_a^a \sigma_S dz_S \\ &= -W_a^a \left( \left\{ \left( b_a^a (i_a + \mu_S - i - \sigma_S^2) - i_a \right) + \frac{B_a^a}{W_a^a} \right\} dt + b_a^a \sigma_S dz_S \right) \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

Es sei daran erinnert, dass ein Ausländer in Auslandswährung rechnet und somit die Gleichung III.59 die Änderung des Auslandsvermögens in Auslandswährung unter Verwendung von Variablen beschreibt, die aus Inlandsperspektive definiert sind. Die ausländische Vermögensänderung in Auslandswährung wird nun in Inlandswährung durch Multiplikation von  $W_a^a$  mit dem Wechselkurs beschrieben. Da diese Änderung eine Funktion stochastischer Prozesse ist, die nicht differenzierbar sind, erfolgt eine Approximation unter Verwendung von Ito's Lemma. Es gilt:

<sup>316</sup> Eine einfache Anwendung von Ito's Lemma auf die Bewegungsgleichung für den nominalen Wechselkurs (vgl. Gleichung III.13) aus Auslandsperspektive macht deutlich, dass für eine Transformation der Perspektive

gilt  $\mu_S = -\mu_{S^a}^a$  und  $-\sigma_S = \sigma_{S^a}^a$

$$\begin{aligned}
d(s * W_a^a) &= \frac{\partial(s * W_a^a)}{\partial s} ds + \frac{\partial(s * W_a^a)}{\partial W_a^a} dW_a^a \\
&+ \frac{\partial^2(s * W_a^a)}{(\partial s)^2} (ds)^2 + \frac{\partial^2(s * W_a^a)}{(\partial W_a^a)^2} (dW_a^a)^2 + \frac{\partial^2(s * W_a^a)}{\partial s \partial W_a^a} ds dW_a^a
\end{aligned} \tag{III.60}$$

Die stochastischen Prozesse für ‚s‘ und  $W_a^a$  wurden bereits explizit spezifiziert. Durch Einsetzen erhält man:

$$\begin{aligned}
d(s * W_a^a) &= W_a^a ds + s dW_a^a + 0 + 0 + ds dW_a^a \\
&= W_a^a (\mu_s s dt + \sigma_s s dz_s) - s \left\{ (b_a^a (i_a + \mu_s - i - \sigma_s^2) - i_a) W_a^a + B_a^a \right\} dt - s W_a^a b_a^a \sigma_s dz_s \\
&+ (\mu_s s dt + \sigma_s s dz_s) (-1) \left\{ (b_a^a (i_a + \mu_s - i - \sigma_s^2) - i_a) W_a^a + B_a^a \right\} dt + b_a^a \sigma_s dz_s \left\{ \right. \\
&= W_a^a s \left\{ \mu_s - (b_a^a (i_a + \mu_s - i - \sigma_s^2) - i_a) - \frac{B_a^a}{W_a^a} - b_a^a \sigma_s^2 \right\} dt + W_a^a s (1 - b_a^a) \sigma_s dz_s \\
&= W_a^a s \left\{ \left( (1 - b_a^a) (i_a + \mu_s - i) + i \right) - \frac{B_a^a}{W_a^a} \right\} dt + (1 - b_a^a) \sigma_s dz_s \left. \right\}
\end{aligned} \tag{III.61}$$

Es ist nun intuitiv einsichtig, dass aufgrund der Definition des Wechselkurses und des Vermögens zu jedem Zeitpunkt gilt, dass das Auslandsvermögen in ausländischer Währung multipliziert mit dem Wechselkurs aus Inlandsperspektive dem Auslandsvermögen in Inlandswährung entspricht  $W_a^a * s = W_a$ . Es folgt aus Gleichung III.61:

$$d(W_a) = \left\{ \left( (1 - b_a^a) (i_a + \mu_s - i) + i \right) W_a - B_a \right\} dt + (1 - b_a^a) W_a \sigma_s dz_s \tag{III.62}$$

Ein Vergleich zur Inlandsperspektive (Gleichung III.24) macht deutlich, dass das Siegel Paradoxon im Continuous-Time Rahmen nicht wirksam wird. Dies ist ersichtlich, da die Unsicherheit in beiden Fällen durch die Variable ‚ $\sigma_s$ ‘ beschrieben wird. Die Ursache für diese Tatsache liegt in der Beschreibung des stochastischen Prozesses für den Wechselkurs. Diese Feststellung kann formal bewiesen werden, indem die Veränderung des Wechselkurses aus Auslandssicht unter Verwendung von Ito's Lemma approximiert wird, und anschließend unter Verwendung von Variablen, die aus Inlandsperspektive definiert sind, beschrieben wird. Auf die Darstellung dieses Belegs soll hier verzichtet werden, obwohl sie vom Autor durchgeführt wurde.

Ausgangspunkt für das weitere Vorgehen sei die Beschreibung des ausländischen Nominalvermögens. Es wird nun, parallel zum bereits bekannten Vorgehen, das nominale Vermögen mit dem Preis des Gutes ‚x‘ normiert. Die Veränderung des normierten ausländischen Vermögens im Zeitablauf lässt sich wieder unter Verwendung von Ito's Lemma approximieren:

$$\begin{aligned}
d(W_a^r) &= d\left(\frac{W_a}{p_x}\right) \\
&= \frac{\partial\left(\frac{W_a}{p_x}\right)}{\partial W_a} dW_a + \frac{\partial\left(\frac{W_a}{p_x}\right)}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial^2\left(\frac{W_a}{p_x}\right)}{(\partial W_a)^2} (dW_a)^2 + \frac{\partial^2\left(\frac{W_a}{p_x}\right)}{(\partial p_x)^2} (dp_x)^2 \\
&\quad + \frac{\partial^2\left(\frac{W_a}{p_x}\right)}{\partial W_a \partial p_x} dW_a dp_x \\
&= \frac{1}{p_x} dW_a - \frac{W_a}{(p_x)^2} dp_x + \frac{W_a}{(p_x)^3} (dp_x)^2 - \frac{1}{(p_x)^2} dW_a dp_x
\end{aligned} \tag{III.63}$$

Nach dem Einsetzen für die stochastischen Prozesse III.63 und III.11 in III.63 folgt:

$$\begin{aligned}
d(W_a^r) &= \frac{1}{p_x} \left\{ \left( (1-b_a^a)(i_a + \mu_S - i) + i \right) W_a - B_a \right\} dt + \frac{1}{p_x} W_a (1-b_a^a) \sigma_S dz_S \\
&\quad - \frac{W_a}{(p_x)^2} p_x (\mu_x dt + \sigma_x dz_x) + \frac{W_a}{(p_x)^3} (p_x)^2 \sigma_x^2 dt \\
&\quad - \frac{1}{(p_x)^2} p_x (\mu_x dt + \sigma_x dz_x) \left\{ \left( (1-b_a^a)(i_a + \mu_S - i) + i \right) W_a - B_a \right\} dt + W_a (1-b_a^a) \sigma_S dz_S \}
\end{aligned} \tag{III.64}$$

bzw.

$$d(W_a^r) = W_a^r \left\{ \left\{ \left( (1-b_a^a)(i_a + \mu_S - i) + i \right) - \frac{B_a^r}{W_a^r} - \mu_x + \sigma_x^2 - (1-b_a^a) \sigma_{Sx} \right\} dt \right. \\
\left. + (1-b_a^a) \sigma_S dz_S - \sigma_x dz_x \right\} \tag{III.65}$$



Die Bewegungsgleichung für den realen Wechselkurs bleibt unverändert, da die Variablen in Inlandsperspektive beschrieben werden.<sup>317</sup>

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich nun in Schritt 2 das Optimierungsproblem für ausländische Anleger unter Verwendung von Restriktionen in Inlandsvariablen darstellen. Da das Vorgehen bereits vollständig bekannt ist, wird hier nur das Zwischenergebnis genannt. Bei Anwendung des Bellmann Ansatzes und nach Taylor Approximation zweiter Ordnung von ‚J‘ um die gegenwärtig beobachtbare Ausprägungen der Funktion, folgt parallel zur Gleichung III.39:<sup>318</sup>

$$0 = \max_{b^a, b_a^a, B_a^a} \left\{ \begin{aligned} & E_{t_0} \left[ \int_{t_0}^{t_1} V^a(B_a^r, RS, s) ds \right] + E_{t_0} \left[ \frac{\partial J^a(W_a^r, RS, t_0)}{\partial \alpha} dt \right] \\ & + \frac{\partial J^a(W_a^r, RS, t_0)}{\partial RS} E_{t_0} [dRS] + \frac{\partial J^a(W_a^r, RS, t_0)}{\partial W_a^r} E_{t_0} [dW_a^r] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J^a(W_a^r, RS, t_0)}{[\partial RS]^2} E_{t_0} [(dRS)^2] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J^a(W_a^r, RS, t_0)}{[\partial W_a^r]^2} E_{t_0} [(dW_a^r)^2] \\ & + \frac{\partial^2 J^a(W_a^r, RS, t_0)}{\partial W_a^r \partial RS} E_{t_0} [dRS dW_a^r] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.66})$$

Die Erwartungswerte in obiger Gleichung lassen sich wie folgt beschreiben, wobei Gleichungen III.67 und III.68 bereits bekannt sind (vgl. III.40 und III.41), Gleichung III.69 den Erwartungswert der Gleichung III.65 beschreibt und Gleichungen III.70 und III.71 das Ergebnis des bereits ausführlich beschriebenen Verfahrens (vgl. III.32 bis III.35) sind:

$$E_{t_0} [dRS] = RS \left( \mu_x + \mu_S - \mu_y + \sigma_y^2 + \sigma_{xS} - \frac{\sigma_{xy}}{(p_{y,t}^a)^2} - (s_t)^2 \sigma_{Sy} \right) dt \quad (\text{III.67})$$

$$E_{t_0} [(dRS)^2] = (RS)^2 (\sigma_x^2 + \sigma_S^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xS} - 2\sigma_{xy} - 2\sigma_{Sy}) dt \quad (\text{III.68})$$

<sup>317</sup> Alternativ kann der reale Wechselkurs aus Auslandsperspektive formuliert werden und anschließend in Inlandsperspektive transformiert werden. Erwartungsgemäß führt dieses Vorgehen zum gleichen Ergebnis. Die Rechenschritte werden hier nicht dargestellt.

<sup>318</sup> Da die Herleitung von III.39 grundsätzlich für einen nutzenmaximierenden Anleger in jedem Land gilt und die Wahlmöglichkeiten für In- und Ausländer als identisch angenommen wurde, genügt es zur Darstellung des Optimierungsproblems des Ausländers, Gleichung III.39 unter Verwendung von Variablen aus Auslandssicht darzustellen. Anschließend werden die Variablen in Inlandssicht transformiert.

$$E_{t_0} [d(W_a^r)] = W_a^r \left\{ \left( (1-b_a^a)(i_a + \mu_S - i) + i \right) - \frac{B_a^r}{W_a^r} - \mu_x + \sigma_x^2 - (1-b_a^a)\sigma_{Sx} \right\} dt \quad (\text{III.69})$$

$$E_{t_0} \left[ (d(W_a^r))^2 \right] = (W_a^r)^2 \left\{ (1-b_a^a)^2 \sigma_S^2 - 2(1-b_a^a)\sigma_{Sx} + \sigma_x^2 \right\} dt \quad (\text{III.70})$$

$$E_{t_0} [d(W_a^r)d(RS)] = RS * W_a^r \left\{ (1-b_a^a)\sigma_{RS,S} - \sigma_{RS,x} \right\} dt \quad (\text{III.71})$$

Diese Problemstellung findet in Gleichungen III.39 und den dort aufgeführten Nebenbedingungen III.40 bis III.44 ihr Pendant.

In Schritt 3 wird nun die ausländische Devisennachfragefunktion hergeleitet. Dies geschieht wiederum durch Ableitung von Gleichung III.67 nach  $b_a^a$ , die im Extremum dem Wert Null entsprechen muss. Diese Ableitung lässt sich unter Verwendung der Gleichungen III.68 bis III.71 beschreiben durch:

$$\begin{aligned} 0 &= - \frac{\partial J^a(W_a^r, RS, t_0)}{\partial W_a^r} W_a^r (i_a + \mu_S - i - \sigma_{Sx}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial J^{a^2}(W_a^r, RS, t_0)}{[\partial W_a^r]^2} (W_a^r)^2 (2(1-b_a^a)\sigma_S^2 + 2\sigma_{Sx}) \\ &\quad - \frac{\partial J^{a^2}(W_a^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W_a^r} W_a^r RS \sigma_{RS,S} \\ &= - \frac{\partial J^a(W_a^r, RS, t_0)}{\partial W_a^r} (i_a + \mu_S - i - \sigma_{Sx}) \\ &\quad - \frac{\partial J^{a^2}(W_a^r, RS, t_0)}{[\partial W_a^r]^2} W_a^r ((1-b_a^a)\sigma_S^2 - \sigma_{Sx}) \\ &\quad - \frac{\partial J^{a^2}(W_a^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W_a^r} RS \sigma_{RS,S} \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Diese Optimalbedingung kann nach den Auslandsinvestitionen aus Auslandssicht  $b_a^a$  umgeformt werden, das die Nachfrage nach inländischer Währung (aus Inlandssicht) durch die Ausländer relativ zu ihrem Gesamtvermögen beschreibt. Um diese nachgefragte Menge an inländischer Währung zu erhalten, sind die Ausländer bereit, ihre eigene Währung anzubieten. Die Devisennachfrage aus ausländischer Sicht entspricht somit im

Devisenmarktgleichgewicht dem Devisenangebot aus Inlandssicht. Aus der Optimalbedingung III.72 folgt nach Umformung nach  $1 - b_a^a$ :

$$(1 - b_a^a) = \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} + \frac{1}{RRA^a \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i - \sigma_{Sx}) - \frac{\frac{\partial J^{a^2}(W_a^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W_a^r} \frac{RS}{W_a^r} \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2}}{[\partial W_a^r]^2} \quad (\text{III.73})$$

Wird nun von beiden Seiten der Wert Eins subtrahiert, und werden beide Seiten mit dem in Inlandswährung umgerechneten ausländischen Nominalvermögen multipliziert, so erhält man den Betrag in Inlandswährung, den die Ausländer zu Investitionszwecken zu halten wünschen, also nachfragen. Die Variable  $b_a^a$  beschreibt den Anteil des ausländischen Vermögens, der aus ausländischer Sicht im Ausland angelegt werden soll. Multipliziert man diesen Anteil mit dem in Inlandswährung umgerechneten ausländischen Nominalvermögen  $W_a^a$ , so erhält man die Menge an inländischer Währung, die die Ausländer nachfragen. Die linke Gleichungsseite beschreibt somit den Betrag in Inlandswährung, den die Ausländer im Gleichgewicht im Inland anlegen wollen. Die rechte Gleichungsseite beschreibt die Einflussfaktoren dieser optimalen Nachfrage nach der Währung des Inlandes.

$$b_a^a W_a^a = W_a^a - \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} W_a^a - \frac{W_a^a}{RRA^a \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i - \sigma_{Sx}) - \frac{RSA^a}{RRA^a} W_a^a \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \quad (\text{III.74})$$

$$\frac{RSA^a}{RRA^a} = - \frac{\frac{\partial J^{a^2}(W_{a,t_0}^r, RS_{t_0}, t_0)}{\partial RS \partial W_a^r}}{\frac{\partial J^{a^2}(W_{a,t_0}^r, RS_{t_0}, t_0)}{[\partial W_a^r]^2}} p_{y,S}$$

mit:

Diese Gleichung wird nun derart umgeformt, so dass sie in ihrer Struktur mit der Inlandsnachfragefunktion vergleichbar ist. Es gilt:

$$b_a^a W_a^a = W_a^a - \left\{ \frac{W_a^a}{RRA^a * \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) + \left( 1 - \frac{1}{RRA^a} \right) \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} W_a^a + \frac{RSA^a}{RRA^a} W_a^a \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \right\} \quad (\text{III.75})$$

Diese Nachfrage der Ausländer nach Inlandswährung resultiert aus einer zweistufigen Entscheidung. In der ersten Phase wird das gesamte Nominalvermögen der Ausländer in Inlandswährung getauscht. Dies wird durch den ersten Term der rechten Gleichungsseite,  $W_a$ , beschrieben. In der zweiten Phase findet ein Rücktausch in die ausländische Währung statt um sich gegen Währungsrisiken zu schützen.<sup>319</sup> Diese Trennung ist rein gedanklich. Zur Bestimmung der Gleichgewichtswerte sind die Nettoangebote und –nachfragen und nicht die einzelnen Schritte relevant.

Dieses umständlich anmutende Verfahren besitzt folgenden Vorteil: Die weitere Analyse wird vereinfacht, da nach dem anfänglichen Tausch die Ausländer mit einer Entscheidungssituation konfrontiert werden, die in der Inlandswährung des Inlandes getroffen wird. Sie rechnen in Inlandswährung und schätzen deswegen die stochastischen Eigenschaften der Variablen und ihre Hedgefähigkeit gleich ein. Folglich werden die Ausländer im zweiten Schritt mit der gleichen Problematik wie die Inländer konfrontiert und berücksichtigen die gleichen Einflussfaktoren. Der zweite Term der rechten Gleichungsseite ist somit mit der Nachfragefunktion der Inländer strukturell identisch.<sup>320</sup> Es wird somit der entscheidende Vorteil dieser Modellformulierung deutlicher. Die Entscheidung der Ausländer lässt sich in eine individuelle Komponente, dem ersten Term, und eine zweite Komponente trennen, die der Entscheidungsstruktur der Inländer folgt.

Diese Formulierung der ausländischen Entscheidungssituation in Inlandsvariablen hat einen weiteren Vorteil. Die Nachfrage nach Inlandswährung durch die Ausländer ist direkt mit dem Betrag ( $b_aW$ ) vergleichbar, den die Inländer für eine Auslandsinvestition aufwenden wollen.  $b_aW$  beschreibt die Geldmenge in Inlandswährung, mit der die Inländer am Devisenmarkt aktiv werden (anbieten), um ausländische Währung für Investitionszwecke nachzufragen.

---

<sup>319</sup> Alternativ kann die Devisennachfrage in Auslandswährung unter Verwendung der unsicheren Situation aus Auslandsperspektive beschrieben werden. Als Einflussfaktoren gingen dann der reale Wechselkurs aus Auslandsperspektive und die Kovarianz des Wechselkurses aus Auslandsperspektive mit dem Auslandspreis des Gutes  $y$  ein. Diese Formulierung besitzt den Vorteil, dass die Nachfragefunktion in ihrer Form einfacher wird. Es geht jedoch die Trennung der Komponenten verloren, die einen Vergleich der Struktur mit dem inländischen Devisenangebot ermöglicht. Weiterhin ist die Formulierung des Devisenkassamarktes aufwendiger, da die ausländische Devisennachfragefunktion in Auslandswährung formuliert wäre und im Weiteren in Inlandswährung umgerechnet werden müsste. Die Vorteile der in dieser Arbeit gewählten Formulierung wird im Rahmen der weiteren Untersuchung deutlich.

<sup>320</sup> Er unterscheidet sich nur in der Berücksichtigung des ausländischen Vermögens und Konsumausgaben.

$b_a^a W_a$  beschreibt die Geldmenge in Inlandswährung, den die Ausländer zu Investitionszwecke im Inland nachfragen.

### 3.5. Die Herleitung eines Devisenmarktgleichgewichtes

Allgemein soll gelten, dass bei ausgeglichenem Devisenmarkt die nachgefragte Menge an Devisen der jeweils angebotenen Menge entspricht. Um dieses Gleichgewicht zu bestimmen, seien eingangs die möglichen Ursprünge des Angebots bzw. der Nachfrage identifiziert. Anschließend wird gezeigt, inwieweit die Restriktion einer Zwei-Länder-Betrachtung diese möglichen Ursprünge einschränkt.

Das Devisenangebot kann im allgemeinen nur in dem Land seinen Ursprung haben, das die jeweilige Währung als Zahlungsmittel emittiert. Somit besteht ein Devisenangebot grundsätzlich aus der Menge an Zahlungsmitteln eines Landes, das die jeweilige Zentralbank (bzw. die Einwohner des fraglichen Landes) zu verkaufen bereit ist. Darüber hinaus ist jedoch ein zusätzliches Angebot denkbar, wenn vergangene Devisentransaktionen berücksichtigt werden: Es ist möglich, dass in früheren Zeiträumen Akteure aus anderen Ländern die fragliche Währung zu Investitionszwecken erworben haben. Sofern die Investition nicht zum Totalverlust führte, kann sich die fragliche Währung auch in den Händen von Nicht-Inländern befinden, die sie ihrerseits auf dem Devisenmarkt anbieten können.

Die Devisennachfrage kann grundsätzlich in allen Ländern ihren Ursprung haben. Sie kann einerseits von denjenigen nicht-inländischen Akteuren stammen, die im fraglichen Land entweder investieren, oder die dort produzierten Güter konsumieren wollen. Die Einwohner des Landes, das die Währung als Zahlungsmittel nutzt, können ihr nationales Zahlungsmittel nachfragen, wenn sie vormalige Auslandsinvestitionen repatriieren möchten.

Diese allgemeine Beschreibung des Devisenmarktes wird im hier untersuchten Zwei-Länder-Fall stark vereinfacht, und auf zwei Akteure, den Inländer und den Ausländer, beschränkt. Durch diese Einschränkung ist eine Berücksichtigung der Tatsache nicht möglich, dass die inländischen Akteure für ihre angebotene heimische Währung in der Regel ein Portfolio an

fremden Währungen erwerben. Diese Tatsache findet in der Vielzahl der Wechselkurse eines Landes mit dem Rest der Welt seinen Ausdruck.

Es könnte vermutet werden, dass diese Vereinfachung entweder das Angebot oder die Nachfrage systematisch verzerren könnte. Die möglichen Ursachen werden nun kurz dargestellt: Ein Devisenangebot setze sich aus den bereits beschriebenen Komponenten zusammen. Wird das Angebot an eigener Landeswährung als dominierender Bestandteil des Devisenangebotes gewertet, so berücksichtigt die Zwei-Länder Darstellung die wesentliche Komponente des tatsächlichen Devisenangebotes. Im theoretischen Zwei-Länder-Modell kommt als zusätzlicher Anbieter nur der Ausländer in Frage, so dass modellimmanent keine Verzerrung feststellbar ist.

Einschränkend gilt jedoch, dass in der Realität eine Vielzahl von Ländern existieren. Eine Verzerrung der Realität durch das Modell findet folglich in dem Ausmaß statt, in dem die nicht berücksichtigten Länder ihre Bestände an der fraglichen Währung verändern. Da das dominierende Angebot aus dem fraglichen Land selbst stammen dürfte, kann vermutet werden, dass diese Verzerrung nachrangig sein könnte.

Die Devisennachfrage könnte als durch das obige Modell korrekt beschrieben angesehen werden. Zur Begründung könnte auf die Definition des Wechselkurses als bilaterales Austauschverhältnis zweier Währungen abgestellt werden. Somit könnte vermutet werden, dass an einem Wechselkurs nur die Akteure zweier Länder beteiligt sind. Dem steht auch nicht entgegen, dass in der Realität die Akteure aus vielen Ländern die eine Währung nachfragen, da sie zum Tausch dafür jeweils ihre heimische Landeswährung anbieten, so dass ein separater Wechselkurs entsteht.<sup>321</sup>

Es ist somit festzuhalten, dass aus der Prämisse des Devisenmarktgleichgewichtes in Verbindung mit einem Zwei-Länder Modell ad hoc keine systematischen Verzerrungen zu erwarten sind, die dieses Modell grundsätzlich in seiner Aussagefähigkeit entwerten würden. Unbestritten sei, dass Portfolioeffekte den Wechselkurs beeinflussen können. Dieser Effekt

---

<sup>321</sup> Die Einflüsse einer Kapitalumschichtung von Akteuren aus dritten Staaten von der Inlandswährung in die Auslandswährung wird hier vernachlässigt. Es sei anerkannt, dass solche Kapitalreallokationen einen signifikanten Einfluss auf den Wechselkurs ausüben können. Dieser ist jedoch nur kurzfristig wirksam, und sei hier vernachlässigt.

würde jedoch nicht durch die Vernachlässigung eines Nachfragers oder Anbieters direkt wirken, sondern indirekt die jeweiligen Mengen beeinflussen. Damit bezieht sich dieser Kritikpunkt auf die Wahl der Prämissen und nicht auf das Modell per se.

Die folgende Analyse baut auf den bisherigen Ausführungen in den Schritten 3 und 4 auf, in denen die Angebots- und Nachfragefunktionen für ausländische Währung beschrieben wurde, die auf Investitionsabsichten zurückführbar ist. Diese Nachfragen repräsentieren jedoch nur einen Teil der gesamten Devisennachfrage bzw. des Devisenangebotes. Es sind nun zwei Korrekturen vorzunehmen:

Erstens:

Die hergeleitete Devisennachfrage (bzw. das –angebot) überzeichnen die tatsächlich beobachtbaren Mengen auf dem Devisenmarkt. Diese Verzerrung liegt im Modellaufbau begründet, das den Anteil am Gesamtvermögen bestimmt, der in jeweils ausländischer Währung gehalten werden soll. Dieser Anteil entspricht jedoch nur dann der Devisennachfrage (bzw. des –angebots), wenn in der Vergangenheit keine Fremdwährungsbestände aufgebaut wurden. Wurden solche Bestände jedoch in früheren Perioden bereits aufgebaut, so bestimmt sich die Devisennachfrage (bzw. das –angebot) aus einem Vergleich der gewünschten mit den tatsächlichen Fremdwährungsbeständen: Sind die gewünschten Bestände größer, so werden Devisen nachgefragt. Sind sie kleiner, so werden Auslandsinvestitionen zurückgefahren und somit Auslandswährung von Inländern angeboten. Es werden auf dem Devisenmarkt somit nur die Salden zwischen tatsächlich gehaltener ausländischer Währung und dem gewünschten optimalen Betrag gehandelt, um eine optimale Investitionsentscheidung zu treffen.

Dieser Sachverhalt kann in das obige Modell auf zwei Arten einbezogen werden: Einerseits ist das gegenwärtig von den Akteuren gehaltene Auslandsvermögen grundsätzlich beobachtbar. Es ist somit in der Informationsmenge zum gegenwärtigen Zeitpunkt enthalten, und könnte als eigenständige Variable  $\bar{W}$  bzw.  $\bar{W}_a$  in die Gleichgewichtsbedingung eingehen. Alternativ könnte jedoch durch eine rekursive Anwendung der entsprechenden Angebots und Nachfragefunktionen der optimale ausländisch investierte Vermögensanteil ermittelt werden. Wird dieser mit dem nominalen Ertrag der Auslandsanlage und der

tatsächlichen Wechselkursänderung multipliziert, so erhält man den gegenwärtigen Vermögensanteil, der in Auslandswährung gehalten wird.

Als wesentlicher Vorteil des letztgenannten Verfahrens ist die simultane Berücksichtigung der vergangenen erwarteten Wechselkursänderung und der vergangenen tatsächlichen Wechselkursänderung in eine Gleichgewichtsbedingung zu sehen. Folglich sind vergangene Erwartungsirrtümer mit ihren Auswirkungen auf den heutigen erwarteten zukünftigen Wechselkurs modellierbar. Nachteilig ist jedoch, dass die Gleichung sehr aufwendig wird. In dieser Arbeit wird vereinfachend die erste Alternative gewählt.

### Zweitens:

Die Devisennachfrage, die auf den Güterkonsum zurückgeht, muss ebenfalls in das Devisenmarktgleichgewicht eingehen. Güter werden grundsätzlich mit der Währung des Landes gekauft, in dem sie produziert werden (legal tender, Zahlungsmittelfunktion des Geldes). Daraus folgt, dass die Inländer für die ausländisch produzierten Güter, die sie konsumieren möchten, Devisen benötigen. Simultan erhalten sie Devisen für die Güter, die sie produzieren und an Ausländer verkaufen. Ist die Handelsbilanz ausgeglichen, so sind die Werte der importierten und exportierten Güter gleich und es entsteht keine Nettonachfrage nach Devisen. Der Gütermarkt kann folglich in der Analyse vernachlässigt werden. Ist die Handelsbilanz jedoch unausgeglichen, so beeinflusst der Saldo den gleichgewichtigen Wechselkurs.

In dieser Arbeit wird keine theoretische Fundierung der Handelsbilanz aus einer intertemporalen Optimierungsentscheidung geleistet. Es wird lediglich ihr Einfluss auf den erwarteten Wechselkurs über eine Änderung der Devisennachfrage bzw. -angebot beschrieben. Diese Vereinfachung geht auf den grundsätzlichen Verzicht zurück, den Gütermarkt hier explizit zu modellieren. Diese Einschränkung findet seine Parallele im Kapitel II dieser Arbeit sowie in der genannten CAPM-Literatur, die ebenfalls im Partialmodell verbleibt.



Der Einfluss des Gütermarktes lässt sich wie folgt beschreiben: Allgemein gilt, dass die Inländer Devisen zum Erwerb der ausländisch produzierten Güter nachfragen. Damit lautet die Devisennachfragefunktion des Güterkonsums aus inländischer Sicht:

$$DN = p_y^a * s * y \quad (\text{III.76})$$

Die Variable ‚DN‘ beschreibt die Menge an inländischen Zahlungsmitteln, die die Inländer für den Konsum von ausländisch produzierten Gütern aufwenden, und deshalb auf dem Devisenmarkt anbieten. Die inländischen Zahlungsmittel werden von den ausländischen Konsumenten nachgefragt, die das heimisch produzierte Gut ‚x‘ importieren. Da sie es in Inlandswährung bezahlen müssen, fragen sie Inlandswährung nach. Die Menge an inländischen Zahlungsmitteln, die die Ausländer für die Inlandsgütermenge zu bezahlen bereit sind, bildet das Devisenangebot.

$$DA = p_x * (X - x) \quad (\text{III.77})$$

Als Nettoangebot an inländischer Währung auf dem Devisenmarkt gilt DN-DA mit:<sup>322</sup>

$$\begin{aligned} DN - DA &= p_y^a * s * y - p_x * (X - x) \\ &= \text{Handelsbilanzdefizit} \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

Das Devisenmarktgleichgewicht kann nun auf Basis der obigen Überlegungen bestimmt werden. Sämtliche Variablen sind aus Inlandssicht definiert, wenn es nicht explizit gekennzeichnet wird. Das Angebot an ausländischer Währung, das aufgrund der Investitionsentscheidungen auf dem Devisenmarkt zur Verfügung steht, entstehe aufgrund der Entscheidung zu Auslandsinvestition der Ausländer aus Auslandssicht. Die Devisennachfrage setzt sich aus der heimischen Auslandsinvestitionsnachfrage und dem Handelsbilanzdefizit zusammen. Die Gleichgewichtsbedingung für den Devisenmarkt lautet somit:

$$b_a W - \overline{W} + HBD = b_a^a W_a - \overline{W}_a \quad (\text{III.79})$$

---

<sup>322</sup> Da die Güter annahmegemäß verderblich sind, ist kein Kauf auf Vorrat möglich. Intertemporale Aspekte des Güterhandels sind somit nicht existent.

Diese Aussage ist aus der Zahlungsbilanztheorie bekannt, die fordert, dass ein Leistungsbilanzdefizit bei gleichbleibenden Währungsreserven der Zentralbank mit einem Kapitalimport einhergehen muss.<sup>323</sup>

Es können nun die jeweiligen Nachfragefunktionen (Gleichungen III.54 Und III.75) in diese Beschreibung des Devisenmarktgleichgewichtes (Gleichung III.79) eingesetzt werden. Es ist offensichtlich, dass die erwartete Änderung des nominalen Wechselkurses ‚ $\mu_S$ ‘ und auch die internationale Zinsdivergenz als Determinanten in dieser Gleichung erscheint. Durch Umformung kann anschließend die Prognosefähigkeit des Terminkurses im Gleichgewicht bei nutzenmaximierendem Verhalten beurteilt werden.<sup>324</sup>

Es gilt nach Einsetzen der Devisenangebots- und der Devisennachfragefunktionen (Gleichungen III.75 und III.54) in die Bedingung für ein Devisenmarktgleichgewicht (Gleichung III.79):

$$HBD - \bar{W} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{RRA \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) \\ + \left(1 - \frac{1}{RRA}\right) \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} W \\ + \frac{RSA}{RRA} W \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \end{array} \right\} = -\bar{W}_a + \left\{ \begin{array}{l} (W_a) - \frac{W_a}{RRA^a \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) \\ - \left(1 - \frac{1}{RRA^a}\right) \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} W_a \\ - \frac{RSA^a}{RRA^a} W_a \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \end{array} \right\} \quad (III.80)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{RRA^* \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) \\ + \frac{W_a}{RRA^a * \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (W_a - \bar{W}_a + \bar{W} - HBD) \\ - \left(1 - \frac{1}{RRA^a}\right) \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} W_a - \left(1 - \frac{1}{RRA}\right) \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} W \\ - \frac{RSA^a}{RRA^a} W_a \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} - \frac{RSA}{RRA} W \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \end{array} \right\} \quad (III.81)$$

<sup>323</sup> Da in diesem Modell die Zinszahlungen nicht der Leistungsbilanz sondern dem Kapitalverkehr zugeordnet werden, müsste diese Aussage korrekterweise auf die Handelsbilanz abstellen. Dieser Aspekt wird hier nicht vertieft.

<sup>324</sup> Vereinfachend wird von homogenen Anlegern in In- und Ausland ausgegangen, so dass  $RRA=RRA_a$  gelten soll.

Unter Verwendung der Prämisse international homogener Akteure gilt:

$$\begin{aligned} \frac{W + W_a}{RRA * \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) &= (W_a - \overline{W}_a + \overline{W} - HBD) \\ &\quad - \left(1 - \frac{1}{RRA}\right) \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} (W_a + W) \\ &\quad - \left(\frac{RSA_a}{RRA} W_a + \frac{RSA}{RRA} W\right) \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \end{aligned} \quad (III.82)$$

Nach Multiplikation mit  $\frac{RRA * \sigma_S^2}{W + W_a}$  auf beiden Gleichungsseiten gilt:

$$\begin{aligned} i_a + \mu_S - i &= \frac{W_a - \overline{W}_a + \overline{W} - HBD}{W + W_a} RRA \sigma_S^2 - \left(1 - \frac{1}{RRA}\right) RRA \sigma_{Sx} \\ &\quad - \left(\frac{RSA_a}{RRA} W_a + \frac{RSA}{RRA} W\right) \frac{RRA}{W + W_a} \sigma_{RS,S} \end{aligned}$$

Nach Zusammenfassung gilt:

$$i_a + \mu_S - i = \left( \frac{W_a - \overline{W}_a + \overline{W} - HBD}{W + W_a} RRA \right) \sigma_S^2 + (1 - RRA) \sigma_{Sx} - \left( \frac{RSA_a * W_a + RSA * W}{W_a + W} \right) \sigma_{RS,S}$$

Verwendet man schließlich die Aussage der gedeckten Zinsparität, so kann die Prognosefähigkeit des Terminkurses für den erwarteten Wechselkurs überprüft werden. Angesichts der in Kapitel I dargestellten empirischen Erkenntnisse zur gedeckten Zinsparität erscheint dieses Vorgehen als unproblematisch. Wird die ‚forward premia‘ definiert als  $fp = i - i_a$ , so wird aus Gleichung III.84:

$$i_a - fp = \left( \frac{W_a - \overline{W}_a + \overline{W} - HBD}{W + W_a} RRA \right) \sigma_S^2 + (1 - RRA) \sigma_{Sx} - \left( \frac{RSA_a * W_a + RSA * W}{W_a + W} \right) \sigma_{RS,S} \quad (III.85)$$

Es seien hier zur vereinfachten Interpretation die Variablen mit ihrer Definition wiederholt:

Auf der linken Gleichungsseite beschreibt die Variable  $\mu_S = E \left[ \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} \right]$ , die erwartete

relative Änderung des Wechselkurses, und die Variable  $f_p = i - i_a$  'die ,forward premia' im Continuous-Time.<sup>325</sup> Auf der rechten Gleichungsseite beschreibt die Variable  $\sigma_s^2$  die Wechselkursvarianz, die Variable  $\sigma_{sx}$  die Kovarianz von nominalem Wechselkurs und Preis des Gutes  $x$  sowie die Variable  $\sigma_{s,RS}$  die Kovarianz von nominalem und realem Wechselkurs. Diese Variablen sind exogen vorgegeben. Die Risikoaversion sowohl der in- und ausländischen Akteure wird durch  $RRA$  beschrieben. Weiterhin gehen das in Inlandswährung beschriebene Nominalvermögen des Inländers,  $W$ , und sowie sein in Auslandswährung gehaltenes aber in Inlandswährung ausgedrücktes Nominalvermögen,  $\overline{W}$ , in die Gleichung ein. Die Variablen  $W_a$  und  $\overline{W}_a$  beschreiben das ausländische Nominalvermögen in Inlandswährung, sowie das in Inlandswährung beschriebene Vermögen, das die Ausländer aus ihrer Sicht im Ausland halten. Kurz:  $W_a - \overline{W}_a$  beschreibt (aus inländischer Sicht in Inlandswährung) die Vermögenshöhe der Ausländer, die diese in ihrem eigenem Land investieren möchten. Die Variable  $HBD$  beschreibt das Handelsbilanzdefizit aus Inlandssicht. Schließlich sind die Variablen  $RSA$  und  $RSA_a$  zu charakterisieren: Sie beschreiben die Bewertung der erwarteten zukünftigen Szenarios, also der erwarteten Änderung des realen Wechselkurses, anhand der jeweiligen Ableitungen der ,optimal value function'.

Die obige Gleichgewichtsbedingung lässt eine Beurteilung der Prognosefähigkeit des Terminkurses zu. Sie erklärt, unter welchen Bedingungen diese Prognosefähigkeit unverzerrt ist und wann eine gleichgewichtige Abweichung der ,forward premia' von der erwarteten Wechselkursänderung zu erwarten ist.

Das obige Modell liefert damit eine ökonomisch interpretierbare und theoretisch fundierte mögliche Erklärung für die in Kapitel I festgestellte verzerrte empirische Prognosefähigkeit des Terminkurses. Werden die hier verwendeten Prämissen als vereinfachende Beschreibung der Realität akzeptiert, so kann eine Aussage zu den Umständen getroffen werden, unter denen die in Kapitel I beschriebenen Untersuchungen fehlspezifiziert wären.<sup>326</sup> Es sei darauf

<sup>325</sup> Diese Variable wird in Appendix 7 auch in Abgrenzung zur komparativ statischen Analyse diskutiert. Es wird gezeigt, dass die Länderperspektive für diese Variable im Continuous Time irrelevant ist.

<sup>326</sup> Die Fehlspezifikation bestünde darin, dass nicht sämtliche erklärende Variablen verwendet wurden. Damit

hingewiesen, dass dieser Erklärungsansatz auf Prämissen beruht, deren Realitätsnähe kontrovers diskutiert werden kann. Insbesondere die Vernachlässigung derjenigen Einflüsse auf den erwarteten Wechselkurs, die auf Zinsänderungserwartungen zurückgehen oder vom jeweils nationalem Wirtschaftswachstum ausgehen, könnten kritisiert werden. Aus diesem Grund ist nicht davon auszugehen, dass eine vollständige Erklärung des Wechselkurses bzw. dessen Prognose gemäß der obigen Gleichgewichtsbedingung geleistet werden kann. Trotz dieser Einschränkung erlaubt dieses Modell eine kritische Hinterfragung der empirischen Literatur und stellt eine Ergänzung der theoretischen komparativ statischen Literatur dar.

Bevor im Folgenden die Abweichungsursachen und deren Wirkungsrichtung diskutiert werden, sei zunächst klargestellt, unter welchen Bedingungen der Terminkurs eine unverzerrte Prognosefähigkeit besitzt. Damit sind diejenigen Situationen bestimmbar, für die eine Überprüfung der Lehrbuchversion gemäß des in Kapitel I beschriebenen Vorgehens auch theoretisch fundiert ist.

Es gilt:

1. Sind die als exogen vorgegebenen stochastischen Prozesse eine korrekte Beschreibung der tatsächlichen Preisbewegung und werden die übrigen Prämissen akzeptiert, und
2. sind die Anleger rational, so dass gilt  $E[\mu_s] = \mu_s + \varepsilon_{t+1}$ , sowie risikoneutral, so dass gilt  $RRA=0$ , und
3. sind die Gütermärkte ständig ausgeglichen, so dass die Kaufkraftparität (ex post) ständig erfüllt und der reale Wechselkurs konstant ist ( $RS=1$  bzw.  $\sigma_{RS,S}=0$ ) und
4. sind die Preise nicht mit dem Wechselkurs korreliert sind, so dass gilt  $\sigma_{x,S}=0$

dann prognostiziert die ‚forward premia‘ die relative Wechselkursänderung unverzerrt. Diese Aussage bestätigt die Erkenntnisse aus Kapitel II.

---

würden jedoch die empirisch bestimmten OLS Schätzer verzerrt. Vgl. Greene (1997). S. 402 f.

Ausgehend von dieser Erkenntnis (Benchmark) werden im Folgenden die Abweichungsursachen analysiert.<sup>327</sup> Die drei Summanden der rechten Gleichungsseite (im folgenden ‚Terme‘ genannt) werden nun separat gemäß ihres Einflusses und der Wirkungszusammenhänge dargestellt.

### Die Interpretation des Term 1

Der erste Term beinhaltet ausschließlich nicht stochastische Terme, die im jeweils gegenwärtigem Zeitpunkt bekannt sind, und lautet:

$$\left( \frac{W_a - \overline{W}_a + \overline{W} - HBD}{W + W_a} RRA \right) \sigma_s^2$$

Die grundsätzliche Relevanz der nominalen Wechselkursschwankung erscheint auf den ersten Blick als überraschend, da rationale, an realen Erträgen interessierte Anleger nominalen Unsicherheiten doch keine Beachtung schenken sollten. Dieser Term kann darüber hinaus unabhängig von möglichen PPP-Abweichungen relevant sein, so dass ein Hinweis auf reale Unsicherheiten hier ausscheidet. Es sei nun erklärt, wann und warum die nominale Wechselkursvolatilität relevant sein kann.

Zunächst ist festzustellen, dass dieser Term den Wert Null annimmt, wenn entweder der Wechselkurs nicht stochastisch ist, oder die Akteure risikoneutral sind, oder wenn gilt:  $W_a - \overline{W}_a + \overline{W} - HBD = 0$ . Ein nicht stochastischer Wechselkurs, der im übrigen die komplette rechte Gleichungsseite den Wert Null annehmen ließe, würde die gesamte vorgenommene Analyse ad absurdum führen, und wird nicht weiter diskutiert.

Die zweite Möglichkeit, risikoneutrales Verhalten, wurde bereits ausführlich diskutiert: Unsichere nominale Variablen gehen ausschließlich mit ihrem Erwartungswert in die Entscheidungsfindung ein. Die Wechselkursvarianz an sich würde somit nicht zu einer

---

<sup>327</sup> Die Struktur der obigen Gleichung, nämlich die Trennung der Einflussfaktoren auf der rechten Gleichungsseite gemäß ihrer Abhängigkeit von den Varianzen bzw. Covarianzen, wurde gewählt, da diese (Co)Varianzen durch den Modellaufbau exogen vorgegeben waren. Sie sind somit durch die Entscheidungen der Akteure nicht beeinflussbar.

gleichgewichtigen Unsicherheitsprämie führen, solange der Erwartungswert unverändert bliebe.<sup>328</sup> Die allgemeine Vermutung, dass bei risikoneutralem Verhalten die nominale (und auch reale) Unsicherheit unberücksichtigt bleiben kann, wird somit bestätigt.<sup>329</sup>

Die dritte Möglichkeit,  $W_a - \overline{W}_a + \overline{W} - HBD = 0$ , wird nun in das Zentrum der Interpretation gestellt. Zunächst sei auf den Ursprung der Variablen hingewiesen: Der Term  $W_a$  ist technisch bedingt und repräsentiert eine Unsicherheit, die nur die Ausländer betrifft, da ihre Entscheidung in zwei Schritten abläuft, während die Inländer im Allgemeinen nur einen Schritt benötigen. Diese zwei Schritte bestehen erstens in einem gedanklichen Umtausch ihres in Auslandswährung gegebenen Vermögens in Inlandswährung, während sie in einem zweiten Schritt ihre Anlage- und Konsumentscheidung treffen. Der Vorteil dieser Zweiteilung besteht darin, dass nun in Schritt 2 die Anlage- und Konsummöglichkeiten hinsichtlich ihrer Stochastik und ihrer Vorteilhaftigkeit von In- und Ausländern gleich eingeschätzt werden. Die Inländer benötigen im Gegensatz dazu nur den zweiten Schritt, da sie bereits in Inlandswährung rechnen.

Die Ausländer tauschen jedoch nicht zwingend ihr gesamtes Vermögen in Inlandswährung, wie dies in Schritt 1 vorgesehen ist, da sie diese bereits halten könnten. Die Nachfrage nach Inlandswährung ist somit um den Vermögensteil der Ausländer zu reduzieren, den sie in den vergangenen Zeiträumen bereits im Inland angelegt haben, und folglich bereits in Inlandswährung halten. Dieser Vermögensteil wird durch die Variable  $\overline{W}_a$  beschrieben. Die Differenz  $W_a - \overline{W}_a$  repräsentiert folglich den Anteil des ausländischen Vermögens der in Schritt 1 in Inlandswährung getauscht wird.

Inländer können in Vorperioden ebenfalls im Ausland investiert haben, und somit einer Währungsunsicherheit unterliegen. In diesem Fall ist gedanklich das obige zweistufige Verfahren anzuwenden, und zunächst das in Auslandswährung gehaltene Vermögen in Inlandswährung umzutauschen. Dieser Betrag umfasst die kumulierten

---

<sup>328</sup> Die Unsicherheitsprämie, die auf die Kovarianz im zweiten Term zurückgeht, ist auf ihren Einfluss auf die realen Erträge zurückzuführen. Damit ändert sich der Erwartungswert des realen Ertrages der Auslandsinvestition, die sehr wohl einen Einfluss auf die Entscheidung ausübt. Dieser Zusammenhang wurde bereits mehrfach beschrieben.

<sup>329</sup> Es sei darauf hingewiesen, dass ein Einfluss von Unsicherheit auf die erwarteten Erträge auch bei

Nettoauslandsinvestitionen der Inländer, die durch die Variable  $\bar{W}$  beschrieben werden. Die Wirkungsrichtung von  $W_a - \bar{W}_a$  ist mit der Wirkungsrichtung von  $\bar{W}$  identisch.

Die Variablen  $W_a - \bar{W}_a$  und  $\bar{W}$  repräsentieren also vergangene Anlageentscheidungen. Es ist nun fraglich, warum sie die gleichgewichtigen zukünftigen Erträge beeinflussen. Dieser Einfluss geht auf die Ursachen des Devisenangebots bzw. -nachfrage auf dem Kassamarkt zurück. Die Devisennachfrage hängt von den Eigenschaften und den unterschiedlichen Anlagealternativen ab. Dazu gehört u. a. deren zukünftige erwarteten Erträge. Das Devisenangebot hängt jedoch wesentlich von vergangenen Entscheidungen ab.<sup>330</sup> Diese Abhängigkeit geht auf das zweistufige gedankliche Vorgehen zurück, in dem in Schritt 1 sämtliche vorhandene Fremdwährung auf dem Devisenmarkt angeboten wird.

Der Einfluss vergangener Entscheidungen wird deutlich, wenn der Einfluss einer vergleichsweise höheren vergangenen Auslandsinvestition ceteris paribus dargestellt wird: Diese höhere vergangene Investition steigert aufgrund des gewünschten Umtausches (Schritt 1) das heutige Devisenangebot. Ein Devisenmarktgleichgewicht wird jedoch nur dann wieder erreicht, wenn sich die Determinanten der Devisennachfrage verändern, so dass die Devisennachfrage ebenfalls gesteigert wird. Dies kann u.a. durch relativ höhere erwartete Erträge der Auslandsinvestitionen geschehen, die sich in einem höheren erwarteten Wechselkurs niederschlagen.

Es mag auffallen, dass der Term 1 in seiner Wirkungsrichtung grundsätzlich eine positive Abweichung von  $\mu_s$  über  $fp$  hinaus bewirkt, da die Handelsbilanz wohl kaum die gehaltenen ausländischen Vermögen kompensieren kann. Konkret würde solch ein Ausgleich bedeuten, dass das Inland Waren (netto) importiert, die die Anlagebestände der In- und Ausländer im Ausland vollständig aufzehren würden. Abstrahiert man weiter von vergangenen

---

Risikoneutralität berücksichtigt werden muss.

<sup>330</sup> Die Güterproduktion im Ausland bestimmt ebenfalls die Höhe des Devisenangebots. Dieser Einfluss wirkt über eine Veränderung des ausländischen nominalen Vermögens nach Produktion und Konsumententscheidung, das in Schritt 1 in Inlandswährung getauscht wird. Da in diesem Modell diese Zusammenhänge nicht explizit dargestellt werden, und darüber hinaus die Funktion der Geldpolitik nicht berücksichtigt wird, wird dieser Einfluss nicht weiter berücksichtigt.



Anlageentscheidungen,  $\overline{W} = \overline{W}_a = 0$ , so müssten Waren in Höhe des gesamten ausländischen Nominalvermögens netto vom Inland importiert werden. Dies erscheint unrealistisch.

Es stellt sich somit die Frage, warum die Ausprägung des Term 1 grundsätzlich positiv sein dürfte, also, warum ein stochastischer Wechselkurs die erwartete Wechselkursänderung über die forward premia hinausgehen lässt. Diese Frage lässt sich unter Hinweis auf die Konstruktion des Modells beantworten. Die Ausländer rechnen annahmegemäß in Inlandswährung, so dass sie die Wechselkursstochastik bei Risikoaversion als negativ empfinden. Die Ansichten der In- und Ausländer sind gleichgerichtet, was auch Ziel des Modellaufbaus war. Anhand der Beschreibung des Devisenmarktgleichgewichts können die Zusammenhänge dargestellt werden. Das allgemeine Gleichgewicht sei hier wiederholt:

$$HBD - \overline{W} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{W}{RRA\sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) \\ + \left(1 - \frac{1}{RRA}\right) \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} W \\ + \frac{RSA}{RRA} W \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \end{array} \right\} = -\overline{W}_a + \left\{ \begin{array}{l} (W_a) - \frac{W_a}{RRA^a\sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) \\ - \left(1 - \frac{1}{RRA^a}\right) \frac{\sigma_{Sx}}{\sigma_S^2} W_a \\ - \frac{RSA^a}{RRA^a} W_a \frac{\sigma_{RS,S}}{\sigma_S^2} \end{array} \right\} \quad (\text{III.80})$$

Wird von vergangenen Anlageentscheidungen abstrahiert, Güterpreise konstant gleich eins gesetzt, einer ausgeglichenen Handelsbilanz und von der Gültigkeit der PPP ausgegangen, so reduziert sich diese Bedingung auf:

$$\underbrace{\left\{ \frac{W}{RRA\sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) \right\}}_{\text{Angebot an inländischer Währung durch die Inländer}} = \underbrace{\left\{ (W_a) - \frac{W_a}{RRA^a\sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) \right\}}_{\text{Nachfrage nach inländischer Währung durch die Ausländer}} \quad (\text{III.86})$$

## EXKURS

Es ist aus obiger Formulierung nicht direkt einsichtig, bei welcher Ertragskonstellation die Ausländer aufhören, Inlandswährung (aus Inlandssicht) nachzufragen. Dies ist jedoch darstellbar, indem die rechte Gleichungsseite in III.86 gleich Null gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
0 &= (W_a) - \frac{W_a}{RRA^a \sigma_s^2} (i_a + \mu_s - i) \\
\Leftrightarrow (W_a) &= \frac{W_a}{RRA^a \sigma_s^2} (i_a + \mu_s - i) \\
\Leftrightarrow RRA^a \sigma_s^2 &= (i_a + \mu_s - i)
\end{aligned}$$

(III.87)

Die Ausländer fragen keine Inlandswährung zu Investitionszwecken nach, wenn die Ertragsdifferenz aus der mit der Risikoaversion gewichteten Wechselkursvarianz besteht. Die linke Gleichungsseite entspricht jedoch beinahe exakt der Risikopremie, die von Lucas hergeleitet wurde.<sup>331</sup>

Lucas bestimmte die Risikopremie als  $RP = \frac{1}{2} RRA^a \sigma_s^2$ . Die Unterscheidung dieser Premien (Faktor  $\frac{1}{2}$ ) resultiert aus der Tatsache, dass in diesem Modell die Approximation des realen Vermögens (Grad 2) von der Anlageentscheidung abhängt. Diese geht somit quadriert in die Formulierung des Maximierungsproblems ein, so dass eine Ableitung nach der Anlageentscheidung den Faktor  $\frac{1}{2}$  ‚neutralisiert‘. Lucas berücksichtigte nur ein sehr rudimentäres Modell, in dem eine nachgefragte Menge nicht modelliert wurde.

Es wird jedoch weiterhin klar, dass die obige Konstellation von erwarteten Wechselkursänderungen und Zinssätzen kein Devisenmarktgleichgewicht darstellt. Die Inländer möchten bei dieser Konstellation (Erträge der Auslandsanlage übersteigen den risikolosen inländischen Zinssatz um  $RRA^a \sigma_s^2$ ) weiterhin Auslandswährung erwerben. Dies lässt sich analytisch nachweisen:

Inländer fragen keine Auslandswährung zu Investitionszwecken nach, wenn die rechte obige Gleichungsseite den Wert null annimmt. Dies ist der Fall, wenn gilt:

$$DN = \frac{W}{RRA^a \sigma_s^2} (i_a + \mu_s - i) = 0 \quad \text{(III.88)}$$

<sup>331</sup> Vgl. Kapitel II Abschnitt 1.1.3. in dieser Arbeit.

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn entweder der Wechselkurs nicht stochastisch ist, sich die Anleger risikoneutral verhalten, oder wenn der Ertrag der Auslandsanlage in Inlandswährung dem risikolosen inländischem Zinssatz entspricht. Die ersten beiden Möglichkeiten sind in diesem Kontext offensichtlich auszuschließen. Die Ertragskonstellation wurde jedoch bereits bestimmt: die Auslandsanlage ist relativ ertragreicher. Daraus folgt, dass die inländische Devisennachfrage positiv ist ( $DN > 0$ ), obwohl kein Devisenangebot existiert. Der Devisenmarkt ist somit nicht ausgeglichen.

Ein Devisenmarktgleichgewicht besteht vielmehr unter Verwendung obiger Prämissen bei folgender Konstellation:

$$\begin{aligned} \frac{W}{RRA\sigma_S^2}(i_a + \mu_S - i) &= (W_a) - \frac{W_a}{RRA^a\sigma_S^2}(i_a + \mu_S - i) \\ \Leftrightarrow \frac{W_a + W}{RRA\sigma_S^2}(i_a + \mu_S - i) &= (W_a) \\ \Leftrightarrow (i_a + \mu_S - i) &= \frac{W_a}{W_a + W} RRA\sigma_S^2 \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

Die Risikoprämie hängt folglich von der relativen Größe, d.h. Vermögen der Länder ab. Dies könnte man als Marktmacht charakterisieren: Ist ein Land sehr groß, so wird sein Devisenmarktangebot/-nachfrage stark die Preissetzung beeinflussen. Es setzt somit tendenziell seine geforderte Risikoprämie durch. Im Devisenmarktgleichgewicht ist die jeweilige Abweichung vom länderspezifischen Optimum derart, dass jedes Land die ‚Abweichungskosten‘ proportional zu seiner Größe trägt.

Weiterhin wird ersichtlich, dass in dem Fall gleichgroßer Länder der Faktor  $\frac{1}{2}$  beträgt: Die Länder tragen die Abweichungskosten jeweils zur Hälfte. Damit wird die oben erwähnte Risikoprämie, wie sie Lucas bestimmt hat, exakt repliziert.

Dieser Exkurs zeigt, dass die Analyse von nur einem Land zwangsläufig unvollständig bleibt und fragwürdige Gleichgewichtsbeziehungen liefert. Die Erkenntnisse aus der Literatur zur Höhe der Risikoprämie wurden jedoch bestätigt.

## EXKURS ENDE

Die Formulierung eines Devisenmarktgleichgewichtes lässt nun Handelsbilanzsalden sowie bestehende Auslandsinvestitionen der jeweiligen Akteure zu. Dies sind die Faktoren, die den Term 1 begründen. Als Benchmark der folgenden Untersuchung dienen die Erkenntnisse des Exkurses. Das Devisenmarktgleichgewicht lässt sich unter Verwendung von Gleichung III.80 und obiger Prämissen (d.h. konstanter, auf Eins normierter Güterpreise) wie folgt beschreiben:

$$HBD - \bar{W} + \left\{ \frac{W}{RRA^a \sigma_s^2} (i_a + \mu_s - i) \right\} = -\bar{W}_a + \left\{ (W_a) - \frac{W_a}{RRA^a \sigma_s^2} (i_a + \mu_s - i) \right\} \quad (\text{III.90})$$

Ein inländisches Handelsbilanzdefizit erhöht nun die inländische Devisennachfrage, ohne das Devisenangebot zu verändern. Befand sich der Markt ursprünglich im Gleichgewicht, so besteht nun ein Nachfrageüberschuss. Dieser muss nun durch eine Änderung der relativen Erträge einer in- bzw. ausländischen Investition abgebaut werden. Reduzieren sich die erwarteten Erträge einer Auslandsinvestition,  $i_a + \mu_s$ , so wird einerseits die inländische Devisennachfrage reduziert. Darüber hinaus wird ebenfalls das Devisenangebot erhöht, da es nun auch für die Ausländer vorteilhafter geworden ist, ihr Geld im Inland anzulegen. Diese Anpassung bewirkt schließlich ein Gleichgewicht.

Es ist aus der Prämissensetzung klar, dass bei sicheren und konstanten Zinssätzen eine Anpassung der relativen Erträge nur über eine Änderung der erwarteten Wechselkursänderung erfolgen kann. Konkret bedeutet dies: Ein erhöhtes inländisches Handelsbilanzdefizit lässt die erwartete Wechselkursänderung hinter die forward premia zurückfallen, d.h.  $\mu_s < fp$ .

Es wird nun die Auswirkung von bestehenden Auslandsinvestitionen der Inländer,  $\bar{W}$ , auf ein Devisenmarktgleichgewicht untersucht. Diese Investitionen stellen Devisenbestände dar, die die Inländer bereits halten. Aus der bisherigen Analyse ging jedoch hervor, dass die Devisennachfragefunktion den Vermögensanteil bestimmt, der im Gleichgewicht in

Auslandswährung angelegt sein sollte. Auf dem Devisenmarkt wird jedoch nur eine Nachfrage in der Höhle am Markt wirksam, in der sich die gewünschten Devisenbestande von den tatsächlich gehaltenen Beständen unterscheiden.

Existieren nun Devisenguthaben, die von Inländern bereits gehalten werden, so reduziert sich ceteris paribus die am Markt wirksame Devisennachfrage. Das Devisenangebot bleibt davon unbeeinflusst. Wenn nun ohne diesen Einfluss ein Devisenmarktgleichgewicht bestünde, so herrscht nun ein Angebotsüberschuss. Dieser muss zur Herstellung eines Marktgleichgewichts abgebaut werden, was grundsätzlich über eine Änderung von HBD oder der relativen Anlageerträge möglich ist. Die erste Alternative sei hier nicht untersucht, da der Gütermarkt nicht ausführlich modelliert wurde.

Steigen nun die ausländischen Anlageerträge relativ zum gegebenen Inlandszins, so steigt einerseits die Devisennachfrage, da eine Auslandsinvestition für die Inländer lukrativer wird. Darüber hinaus sinkt das Devisenangebot, da gleiches auch für Ausländer gilt, und sie deswegen stärker in ihrem eigenen Land investieren. Der Devisenmarkt wird durch diese Anpassung wieder ausgeglichen. Es folgt jedoch, dass die erwartete Wechselkursänderung über der forward premia liegt:  $\mu_s > fp$

Schließlich gilt ein ähnlicher Anpassungsprozess für den Fall, dass Devisenbestande bei den Ausländern gehalten werden. Im Vergleich zur Ausgangssituation reduziert sich das Devisenangebot, was über eine relativ niedrigere Wechselkursänderung wieder gesteigert werden muss. Diese Änderung erhöhet ebenfalls die inländische Devisennachfrage und führt somit zum Gleichgewicht. Als Konsequenz gilt:  $\mu_s < fp$

Diese Wirkungszusammenhänge wurden anhand einer Gleichung erläutert, die das Devisenmarktgleichgewicht beschreibt. Die Einflüsse von Handelsbilanzsalden und Devisenbestanden in in- und ausländischem Besitz sind jedoch auch an der daraus abgeleiteten Gleichung erkennbar, die die Prognosefähigkeit des Terminkurses bewertet. Als Gleichgewichtsbedingung bei konstanten Güterpreisen und erfüllter PPP gilt:

$$\mu_s - fp = \left( \frac{W_a - \overline{W}_a + \overline{W} - HBD}{W + W_a} RRA \right) \sigma_s^2 \quad (\text{III.91})$$

Bei risikoaversen Verhalten lässt ein Handelsbilanzdefizit sowie vorhandene Bestände an Inlandswährung in ausländischem Besitz den Terminkurs hinter den erwarteten Wechselkurs zurückbleiben. Bestände an Auslandswährung in inländischen Besitz lassen den Terminkurs über den erwarteten Wechselkurs hinausschießen.

### Interpretation des Term 2

Die zweite Ursache für eine verzerrte Prognosefähigkeit des Terminkurses ist beschrieben durch:

$$(1 - RRA)\sigma_{sx} = \sigma_{sx} - RRA\sigma_{sx}$$

mit:  $RRA > 0$  (III.92)

Sie geht somit auf die Kovarianz des Wechselkurses mit dem Preis des Gutes ‚x‘ zurück und dem Bewertungsfaktor, der Risikoaversion, zurück. Dieser Term ist aus dem Kapitel II bereits bekannt, und ausführlich beschrieben worden. Die ökonomische Interpretation sei hier kurz wiederholt.

Löst man die Klammer auf, so repräsentiert der erste Term die bereits bekannte Unsicherheitsprämie, die auch bei risikoneutralem Verhalten und stochastischen Güterpreisen eine verzerrte Prognosefähigkeit verursacht. Eine positive Kovarianz von Wechselkurs und Preis des Gutes ‚x‘ bedeutet, dass eine Auslandsanlage die erwarteten realen Erträge steigen lässt: Höhere Preise gehen mit höheren Erträgen einher, die die Konsummöglichkeiten in dem Ausmaß steigern, in dem die Kovarianz steigt. Damit besitzt die Kovarianz einen Einfluss auf die realen Erträge, so dass sich die Erwartungswerte der realen Erträge ändern. Folglich ist dieser Effekt auch im Fall eines risikoneutralen Verhaltens wirksam, also einer ausschließlichen Orientierung der Entscheidungen an den Erwartungswerten und einer Vernachlässigung der Varianz der stochastischen Variablen.

Der zweite Term beschreibt die bewertete Unsicherheit. Sind die Akteure risikoavers, so dass gilt:  $RRA > 0$ , so repräsentiert der zweite Term den Preis, den die Akteure im Gleichgewicht für diese Hedgefunktion zu zahlen bereit sind. Diese Risikoprämie basiert wiederum auf der Bewertung einer Unsicherheit. Es gilt bei Vernachlässigung der anderen Terme:

$$\mu_S = f^p + \sigma_{Sx} - RRA\sigma_{Sx} \quad (\text{III.93})$$

Der gleichgewichtige erwartete Wechselkurs kann somit in dem Ausmaß über dem Terminkurs liegen, in dem die Kovarianz die realen Erträge einer Auslandsinvestition von den nominalen Erträgen abweichen lässt. Dieses Ergebnis ist konsistent mit der Gleichgewichtsbedingung in Kapitel II Abschnitt 3. Es mag auffallen, dass in Kapitel II die Unsicherheitsprämie vom Terminkurs abgezogen wird, während sie hier addiert wird. Dies ist keine Inkonsistenz, da in Kapitel II die Unsicherheitsprämie durch die Kovarianz des Wechselkurses mit dem inversen Preis des Gutes ‚x‘ beschrieben wird. Im obigen Fall wird die genannte Prämie jedoch durch die Kovarianz des Wechselkurses mit dem Preis des Gutes ‚x‘ beschrieben. Es ist somit einleuchtend, dass die Wirkungsrichtung umgekehrt sein muss, da eine Invertierung des Preises das Vorzeichen der Kovarianz ceteris paribus ändert.

Der erwartete Wechselkurs kann weiterhin aufgrund der Risikoprämie hinter dem Terminkurs zurückbleiben. Diese Risikoprämie findet ihr Pendant in Kapitel II in der Hedgeprämie. Als wesentlicher Unterschied ist anzumerken, dass im Gegensatz zu Kapitel II die Risikoprämie hier absolut additiv erscheint. Es sei daran erinnert, dass in Kapitel II die Hedgekomponente den Terminkurs als Gewichtungsfaktor beinhaltet. Diese Prämien sind folglich nicht direkt vergleichbar. Da die Wirkungsrichtung jedoch übereinstimmt, und die Zusammenhänge bisher nur qualitativ beschrieben wurden, ist die ökonomische Interpretation jedoch gleich.

Abschließend sei zur Interpretation dieses zweiten Terms angemerkt, dass diese Gleichgewichtsbedingung insofern mit der Literatur konsistent ist, als dass bei konstanter Risikoaversion der Einfluss der Unsicherheit auf die Devisennachfrage und den erwarteten Wechselkurs davon abhängt, ob die Risikoaversion einen Wert von größer oder kleiner als Eins annimmt. Diese Aussage geht auf Arbeiten von Rothschild und Stiglitz (1971) zurück, und wurde in Kapitel II Abschnitt 1 repliziert. Die Autoren stellen fest, dass für den Fall einer Risikoaversion von größer als Eins eine erhöhte Unsicherheit zu einer erhöhten Nachfrage

nach dem unsicheren ‚Gut‘ führt. Die obige Gleichgewichtsbedingung zeigt weiterhin die Einflussrichtung einer erhöhten Unsicherheit auf die Ausprägung des erwarteten Wechselkurses. Es gilt: Ist die relative Risikoaversion größer als Eins, so führt ceteris paribus eine erhöhte Unsicherheit zu einem geringeren erwarteten Wechselkurs. Ist die relative Risikoaversion jedoch kleiner als Eins, so ist der gleichgewichtige erwartete Wechselkurs im gleichen Szenario im Vergleich zur Ausgangssituation relativ höher.

Diese Aussage sei nun im Rahmen obiger Gleichgewichtsbeziehung beispielhaft gezeigt. Es könnte in obigem Kontext eine erhöhte reale Unsicherheit des nominalen Anlageertrages ceteris paribus daraus folgen, dass bei konstanter stochastischer Verteilung des Wechselkurses die Varianz des Preises von Gut ‚x‘ steigt. Bleibt weiterhin die relative Veränderung von Preis und Wechselkurs strukturkonstant, so ist die erhöhte Preisvarianz gleichbedeutend mit einer gestiegenen Kovarianz von Wechselkurs und Preis des Gutes ‚x‘. Wird der letzte Term, die Hedgeprämie gegen ungünstige Zukunftsszenarien, vernachlässigt, so folgt aus obiger Gleichgewichtsbedingung, dass bei gesteigener Unsicherheit der erwartete Wechselkurs relativ zum Terminkurs sinkt.

$$\underbrace{\mu_S - f\bar{p}}_{\downarrow} = \underbrace{(1 - RRA)}_{\substack{<0 \\ \text{da: } RRA > 1}} * \underbrace{\sigma_{x,S}}_{\uparrow} \quad (III.94)$$

Ökonomisch lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt interpretieren: Ausgangspunkt sei die inländische Devisennachfragefunktion III.54, die den Anteil am inländischen Vermögen beschreibt, der im Optimum im Ausland investiert wird. Davon sind naturgegeben die Bestände an Auslandsinvestitionen abzuziehen ( $\bar{W}$ ), um die auf dem Devisenmarkt wirksame Nachfrage der Inländer zu bestimmen. Für die inländische Devisennachfrage zu Investitionszwecken, die auf dem Devisenmarkt relevant ist, gilt (vgl. Gleichungen III.54 und III.79):

$$b_a W - \bar{W} = \frac{W}{RRA * \sigma_S^2} (i_a + \mu_S - i) + \left\{ \left( 1 - \frac{1}{RRA} \right) \frac{\sigma_{x,S}}{\sigma_S^2} \right\} W + \frac{RSA}{RRA} \frac{\sigma_{S,RS}}{\sigma_S^2} W \quad (III.95)$$



Steigt die Unsicherheit,  $\sigma_{xs} \uparrow$ , so steigt ebenfalls die Devisennachfrage bei  $RRA > 1$ , wie aus der Nachfragefunktion ersichtlich ist. Ursache dieser Nachfragesteigerung ist das Ziel des Akteurs, einen bestimmten Mindeststandard an Konsummöglichkeiten mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit aufrecht zu erhalten. Steigt die Unsicherheit, so steigt ebenfalls die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Mindeststandard unterschritten wird. Um jedoch das Überschreiten des Schwellenwertes zur vorgegebenen Wahrscheinlichkeit zu sichern, steigert der Akteur die Auslandsinvestition und damit seine Devisennachfrage. Somit ist die Aussage von Rothschild und Stiglitz bestätigt.

Um den Einfluss auf den erwarteten Wechselkurs zu erklären sei angemerkt, dass das Devisenangebot in diesem Szenario konstant ist. Diese Feststellung folgt aus der ausländischen Devisennachfragefunktion, die gleichzeitig die Devisenangebotsfunktion aus Inlandssicht repräsentiert. Ihre Struktur ist derart, dass der ausländische Akteur zunächst sein gesamtes Vermögen in Inlandswährung (aus Inlandssicht) eintauscht. Anschließend gleicht seine Entscheidungssituation derjenigen des Inländers, so dass auch er aufgrund der gestiegenen Unsicherheit vermehrt Devisen aus Inlandssicht (also seine eigene heimische Währung) nachfragt. Für die Angebots- und Nachfragemengen kann somit gefolgert werden, dass eine erhöhte Unsicherheit zu einer erhöhten Devisennachfrage bei konstantem Devisenangebot führt.

Um nun die Auswirkung auf den erwarteten Wechselkurs zu beurteilen, ist die Prämisse hinzuzuziehen, dass auf dem Devisenmarkt ein Gleichgewicht herrscht. Daraus folgt, dass, ausgehend von einem Gleichgewicht, aufgrund gestiegener Unsicherheit und bei konstantem Angebot die Gesamtnachfrage nicht steigen kann. Der veränderte Einfluss auf die Devisennachfrage aufgrund der gestiegenen Unsicherheit ist jedoch gegeben. Es muss somit der Einfluss eines anderen Faktors geringer werden. Wird nun der Hedgeeffekt gegen ungünstige Zukunftsszenarien vernachlässigt, so verbleibt die relative Anlagerendite als verbleibender Faktor, der die Devisennachfrage wieder auf das Gleichgewichtsniveau reduzieren kann. Diese Reduktion kann durch eine relativ zur Ausgangssituation niedrigere Rendite der Auslandsinvestition herbeigeführt werden. Da die Nominalzinsen annahmegemäß konstant sind, muss der erwartete Wechselkurs im neuen Gleichgewicht aufgrund der erhöhten Unsicherheit unter dem ursprünglichen Gleichgewichtswert liegen. Damit ist der

Wirkungszusammenhang in obiger Gleichgewichtsbeziehung zwischen Unsicherheit und erwartetem Wechselkurs bei einer Risikoaversion von größer Eins ökonomisch erklärt.

Die bisherige Interpretation beschränkte sich auf die Inlandsperspektive. Es sei abschließend angemerkt, dass eine Betrachtung aus ausländischer Perspektive zum gleichen Ergebnis führt. Diese Feststellung resultiert aus der Darstellungsweise der Auslandssicht, da hypothetisch angenommen wurde, dass zunächst von den Ausländern ihr gesamtes Vermögen in Inlandswährung getauscht wird. Dieser Tausch beeinflusst im Rahmen des ersten Terms den erwarteten Wechselkurs. Anschließend ist die Optimierungsentscheidung der Ausländer und der Inländer gleich, so dass die Untersuchung auf ein Land reduziert werden kann.

### Die Interpretation des dritten Terms

Die dritte Abweichungsursache geht auf die Kovarianz des nominalen und realen Wechselkurses zurück. Sie wird beschrieben durch:

$$-\left(\frac{RSA_a * W_a + RSA * W}{W_a + W}\right) \sigma_{RS,S}$$

Im Rahmen der ökonomischen Analyse der Devisennachfragefunktion wurde bereits gezeigt, dass gilt:  $RSA > 0$ . Weiterhin wurde gezeigt, dass eine Hedgelfunktion der Auslandsinvestition durch  $\sigma_{RS,S} > 0$  beschrieben werden kann. Daraus folgt, dass bei risikoaverssem Verhalten eine Hedgelfunktion der Auslandsanlage es erlaubt, dass der erwartete Wechselkurs hinter dem Terminkurs zurückbleibt. Mit anderen Worten: Die Anleger sind bereit, auf einen Teil der erwarteten Erträge zu verzichten, wenn sie sich gegen ungünstige Szenarien absichern können. Dieses Verhalten ist intuitiv plausibel.

Eine vergleichende Analyse von alternativen Situationen ist gemäß des bereits mehrfach beschriebenen Vorgehens möglich. Es wird wiederum klar, dass das Devisenangebot konstant ist, so dass eine gesteigerte inländische nutzenoptimierende Devisennachfrage durch eine relativ geringere Bedeutung der anderen Motive für eine Devisennachfrage kompensiert werden müsste um ein Gleichgewicht zu bewahren. Diese Kompensation muss aufgrund der

ceteris paribus Annahme über eine Ertragsänderung, sprich: geringere Wechselkursänderung, erfolgen. Da eine Darstellung dieser Zusammenhänge das bereits bekannte Vorgehen wiederholt, sei an dieser Stelle darauf verzichtet.

Abschließend sei die der dritte Term in Abhängigkeit der indirekten Nutzenfunktion beschrieben, um die ökonomische Interpretation einsichtiger zu machen. Das Vorgehen wurde bereits beschreiben und ist formal in Appendix 6 aufgeführt. Problematisch ist die Interpretation der Variablen ‚RRA‘ und ‚RSA‘, da sie unter Verwendung von der ‚optimum value function‘ beschrieben wurden. Es ist jedoch möglich, sie in Abhängigkeit der indirekten Nutzenfunktion zu beschreiben. Es gelten folgende Beziehungen für die Transformation:

$$RRA = RRA^V \varepsilon_{B^r, W^r} \quad (\text{III.96})$$

und

$$\begin{aligned} RSA &= -RRA^V \varepsilon_{B^r, RS} + RRA^V \frac{y}{B^r} RS - \frac{\partial y}{\partial B^r} RS \\ &= -RRA^V \varepsilon_{B^r, RS} + RRA^V OF - MOF \end{aligned} \quad (\text{III.97})$$

Nach Einsetzen resultiert folgende Gleichung. Die zweite Zeile resultiert aus der vereinfachenden Annahme, dass die normierte Budgetelastizität des realen Wechselkurses in beiden Ländern gleich ist. Diese Annahme geht über die Homogenitätsannahme bezüglich der Anleger hinaus, als dass sie fordert, dass diese Elastizität unabhängig von der individuellen Vermögenssituation gleich ist. Eine Lockerung dieser Prämisse bringt keine neuen strukturellen Erkenntnisse, sondern erweitert den mit dem Nominalvermögen gewichteten Durchschnitt auf diese Elastizität.

$$\mu_S - fp = \left( \frac{W_a - HBD}{W + W_a} RRA^V \varepsilon_{B^r W^r} \right) \sigma_S^2 + (1 - RRA^V \varepsilon_{B^r W^r}) \sigma_{Sx}$$

$$- \left[ \frac{\left( -RRA^{a,V} \varepsilon_{B^r RS} + RRA^{a,V} OF_a - MOF_a \right) W_a}{W_a + W} + \frac{\left( -RRA^V \varepsilon_{B^r RS} + RRA^V OF - MOF \right) W}{W_a + W} \right] \sigma_{RS,S} \quad (III.98)$$

$$= \left( \frac{W_a - HBD}{W + W_a} RRA^V \varepsilon_{B^r W^r} \right) \sigma_S^2 + (1 - RRA^V \varepsilon_{B^r W^r}) \sigma_{Sx}$$

$$+ \left( RRA^V \varepsilon_{B^r RS} - RRA^V \frac{(OF * W + OF_a * W_a)}{W_a + W} + \frac{(MOF * W + MOF_a * W_a)}{W_a + W} \right) \sigma_{RS,S}$$

Wird nun weiterhin die Annahme getroffen, dass auf kurze Frist keine Mengenanpassung des Güterkonsums als Reaktion auf eine Änderung des realen Wechselkurses stattfindet, also  $MOF=MOF_a=0$ , so gilt

$$\mu_S - fp = \left( \frac{W_a - HBD}{W + W_a} RRA^V \varepsilon_{B^r W^r} \right) \sigma_S^2 + (1 - RRA^V \varepsilon_{B^r W^r}) \sigma_{Sx}$$

$$+ \left( RRA^V \varepsilon_{B^r RS} - RRA^V \frac{(OF * W + OF_a * W_a)}{W_a + W} \right) \sigma_{RS,S} \quad (III.99)$$

Die Gewichtung der Kovarianz des nominalen mit dem realen Wechselkurs hängt vom Offenheitsgrad (OF) der Volkswirtschaften negativ ab. Dies ist intuitiv plausibel, da das Hedgebedürfnis gegen ungünstige Gütermarktszenarien mit steigender Exponiertheit des Konsums steigt. Je stärker dieses Bedürfnis ist, einen desto geringeren Ertrag auf die Auslandsanlage wird akzeptiert. Da dieses Motiv in der ‚forward premia‘ nicht berücksichtigt wird, ist diese relativ zum erwarteten Wechselkurs höher. Der erste Term beschreibt die Elastizität der normierten Konsumausgaben auf eine Änderung des realen Wechselkurses. In ihm kommen die bereits getätigten Auslandsinvestitionen zum Ausdruck. Eine reale Wechselkursänderung kann über eine Vermögensänderung einen positiven Effekt auf den Konsum ausüben. Übersteigt der Umfang der getätigten Auslandsinvestitionen die Offenheit der Volkswirtschaft, so kann eine Steigerung des realen Wechselkurses positiv für den Inländer sein. In diesem Fall übersteigt der Anlagegewinn aufgrund der Steigerung des nominalen Wechselkurses den nachteiligen Gütermarkteffekt. Die Steigerung des realen Wechselkurses hat somit vorteilhafte Effekte und die Hedgeprämie, die auf die Rendite der

Auslandsinvestition angerechnet wird, kehrt sich in ihrer Wirkungsrichtung um. In diesem Fall liegt der erwartete Wechselkurs über dem Terminkurs.

## 5. Drittes Ergebnis mit Rückbezug auf die hypothetische Annahme

Dieses Kapitel diente dem Ziel, die Prognosefähigkeit des Terminkurses in einem Modell, das konsistente Erwartungen zulässt, zu formulieren. Dieses Ziel wurde dadurch erreicht, dass im Rahmen der Continuous-Time Modellierung ein konkreter stochastischer Prozess für die relative Wechselkursänderung vorausgesetzt wurde.

Weiterhin sollte erreicht werden, dass die Gleichgewichtsbeziehung ökonomisch sinnvoll interpretierbar ist, ohne dass weitere einschränkende Prämissen notwendig sind. Dieses Ziel wurde dadurch erreicht, dass die Entscheidungssituation des ausländischen Akteurs unter Verwendung von Variablen, die aus Inlandsperspektive formuliert wurden, beschrieben wurde. Durch dieses Vorgehen wurde der Komplexitätsgrad der Gleichgewichtsbedingung erheblich reduziert und damit interpretierbar gemacht.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass dieses Kapitel ein ökonomisch interpretierbares und international konsistentes Modell erbringt, das die Prognosefähigkeit des Terminkurses theoretisch fundiert und die notwendigen Voraussetzungen aufzeigt, unter denen die in Kapitel I zitierten empirischen Untersuchungen aussagefähige Ergebnisse produzieren. Diese mikroökonomische Fundierung ermöglicht somit eine Bewertung der empirischen Literatur hinsichtlich der implizit gesetzten Prämissen. Einschränkend ist jedoch anzumerken, dass angesichts der sehr restriktiven Prämissen, auf denen auch dieses Modell basiert, sein Wert eher qualitativ denn in der empirischen Überprüfbarkeit zu sehen ist.

Der Terminkurs erlaubt nur unter sehr restriktiven Voraussetzungen eine unverzerrte Prognose des zukünftigen erwarteten Wechselkurses. Als wesentliche Voraussetzung ist risikoneutrales Verhalten der Akteure, mit dem Wechselkurs unkorrelierte Güterpreise sowie ein unkorrelierter nominaler und realer Wechselkurs zu nennen. Diese Erkenntnis ist nicht neu, sondern stimmt mit der existierenden Literatur überein. Eine wesentliche neue Erkenntnis besteht jedoch in der Aussage, wie die Nicht-Erfüllung einer der obigen Prämissen auf die Prognosefähigkeit des Terminkurses wirkt. Insbesondere die Relevanz von Handelsbilanzsalden, vergangene Anlageentscheidungen, Abweichungen von der Kaufkraftparität sowie das Ausmaß, in dem ein Land in den internationalen Güteraustausch einbezogen ist, lassen sich in einem einheitlichen Modellrahmen analysieren.

Einschränkend ist jedoch anzumerken, dass die Prämissen dieses Modells sehr restriktiv sind. Insbesondere eine ausführlichere Modellierung des realen Sektors erscheint wünschenswert, um Abweichungen von der Kaufkraftparität, Handelsbilanzsalden zu erklären. Darüber hinaus sollte der Einfluss des Staates, insbesondere seine Geldpolitik sowie Devisenmarktinterventionen, in eine umfassende Analyse einbezogen werden. Mit solchen Erweiterungen steigt jedoch die Komplexität des Modells. Es muss also zwischen einer realitätsnahen Modellierung und dem Ziel eines einfach interpretierbaren Ergebnisses abgewogen werden.

Eine weitere Einschränkung liegt in der Modellart (Parzialmodell) begründet. Es wird von einem repräsentativen Agenten ausgegangen, der ein Einkommen erzielt und dem eine einzige Sparform zum risikolosen Zinssatz zur Verfügung steht. Der Fokus liegt somit auf der Rolle des Agenten als Sparer und Konsument. Die Produktion im jeweiligen Land, die in der Regel auch das Einkommen bestimmt, sowie die Investitionsentscheidungen werden nicht modelliert. Damit bleibt im Modell unbeachtet, dass ein ‚risikoloser Zinssatz‘ erwirtschaftet werden muss, dass Investitionen in der Regel mit einer Unsicherheit verbunden sind und die Nachfrage nach Sparkapital zu Investitionszwecken den Zinssatz beeinflussen dürfte. Implizit bedeutet dies, dass im Modell jeder Ersparnis eine entsprechendes Angebot zum risikolosen Zinssatz gegenüber steht. Diese realitätsferne Modellierung dient der Fokussierung der Analyse auf die zentrale Variable (den Wechselkurs) sowie dem Ziel, das Modell und damit die Gleichgewichtsbedingung einfach und interpretierbar zu halten. Eine Erweiterung um alternative und risikobehaftete Anlageformen sowie eine Einbeziehung von Produktions- und Wachstumseffekte ist für eine Verwendung des Modells in einer empirischen Analyse sicherlich wünschenswert ist.

Trotz dieser Einschränkungen hat das Modell in diesem Kapitel jedoch gezeigt, dass die in Kapitel I aufgeführten Arbeiten, trotz ihrer oft ausgefeilten ökonometrischen Methodik, zum Scheitern verurteilt sein könnten, da die getestete Gleichung nicht das Verhalten von rationalen Akteuren beschreibt. Die stärkere gegenseitige Berücksichtigung von theoretischen und empirischen Erkenntnissen erscheint wünschenswert.

## **Kapitel IV. Schlussbemerkungen, zusammenfassendes Ergebnis zum Erkenntnisbeitrag und kritische Stellungnahme**

Diese Arbeit hat ausführlich die Frage des eingangs zitierten Geschäftsmannes beantwortet, ob erwartet werden sollte, dass die nominalen Anlageerträge international identisch sind. Die Antwort lautet: „Nein, in den meisten Fällen nicht.“ Die Antwort geht jedoch über diese Verneinung hinaus und begründet, unter welchen Voraussetzungen ein rationaler Geschäftsmann diese Erwartung nicht hegen sollte.

Abweichungen von den Erträgen können, wie im Kapitel I intuitiv einsichtig gezeigt, entweder im Kapitalmarkt oder im Gütermarkt ihre Ursache haben. Die konkrete Frage nach den relativen nominalen Erträgen, die durch die ungedeckte Zinsparität beschrieben wird, wurde ausführlichst in den Kapiteln II und III beantwortet. Es ist fraglich, ob der in der Einleitung genannte Onkel/Geschäftsmann es nach dieser Lektüre noch erwartet, dass die nominalen Anlageerträge international identisch seien, da die unterschiedlichen Abweichungsursachen beschrieben und ihre Wirkungsrichtung gezeigt wurde.

Diese Arbeit konnte jedoch nicht die dem Problem zugrunde liegende Frage beantworten, in welchem Land und in welcher Anlageform dieser Onkel/Geschäftsmann sein Geld anlegen sollte. Das war auch nicht das Ziel. Sehr wohl wurden jedoch die Einflussfaktoren aufgezeigt, die über den Wechselkurs den Ertrag der Auslandsinvestition beeinflussen. Insofern kann diese Arbeit vielleicht eine Hilfestellung bieten und ihre Existenz in der Forschungsrichtung ‚Wechselkursprognose‘ legitimieren. Angesichts der offenen Fragen in diesem Bereich und der Relevanz dieses Themas erscheint eine weitere Erforschung des Wechselkurses wünschenswert. Der Erkenntnisbeitrag aus dieser Arbeit sei nun abschließend noch einmal zusammengefasst:

Die wesentliche Aussage dieser Arbeit bezieht sich auf das Verhalten eines Akteurs, der ein im Zeitablauf bekanntes Realvermögen im Sinne einer nicht stochastischen Güterproduktion besitzt. Dieser Akteur kann annahmegemäß zwischen dem Konsum eines inländisch produzierten Gutes und eines ausländisch produzierten Gutes wählen. Darüber hinaus kann er seinen Konsum im Zeitablauf frei wählen, also intertemporal optimieren. Dazu steht ihm die Möglichkeit offen, entweder im Inland oder im Ausland zum jeweils in Landeswährung



sicheren nominalen Zinssatz zu investieren. Diese Konsumallokation eines Gutes im Zeitablauf sei rational im Sinne von nutzenoptimal. Es wurde jedoch die Möglichkeit eingeräumt, dass sich die Preise der homogenen in- und ausländisch produzierten Konsumgüter, ausgedrückt in einer gemeinsamen Währung, nicht gleichen müssen. Die Abweichungsursachen wurden nicht näher untersucht, sondern, auf Basis der empirischen Literatur zu diesem Thema, diese Möglichkeit als realitätsnahe zugelassen.

Unter Verwendung der obigen Entscheidungssituation wurde eine Aussage zum individuellen Verhalten formuliert. Diese Aussage wurde in Form einer Gleichgewichtsbedingung dargestellt, die die relativen Ausprägungen von Anlageerträgen und relativen Preisänderungen beschrieb. Weiterhin wurde, ebenfalls auf Basis der in Kapitel I dargestellten Erkenntnisse der empirischen Literatur, die gedeckte Zinsparität als erfüllt angesehen. Dadurch wurde es möglich, den erwarteten Wechselkurs relativ zum Terminkurs zu beschreiben.

Das Kapitel II wählte zur Darstellung einen komparativ statischen Modellrahmen im internationalen Kontext. Diese Darstellungsform erlaubte eine sukzessive Isolierung der notwendigen Prämissen, die eine unverzerrte Prognosefähigkeit des Terminkurses modelltheoretisch fundieren. Anschließend erlaubte dieses Modell, durch die Aufhebung der eingangs isolierten Prämissen, eine Darstellung ihrer Einflussrichtung auf die eingangs formulierte Prognosefähigkeit des Terminkurses. Einschränkend ist jedoch anzumerken, dass ein internationales komparativ statisches Modell keine international konsistente und einfach interpretierbare Aussage erlaubt. Diese Inkonsistenz ist auf die Perspektivenabhängigkeit der Erwartungen selbst bei international identischer Präferenzordnung zurückführbar. Als Konsequenz kann der erwartete Wechselkurs nicht eindeutig bestimmt werden, so dass auch eine Bestimmung seiner Abweichung vom Terminkurs sowie der Risikoprämie von dieser Perspektive abhängig ist.

Das Kapitel III formuliert ein eigenes Modell, das dieser Kritik nicht unterliegt. Als notwendige zusätzliche Einschränkung wurde jedoch die konkrete Formulierung der stochastischen Veränderung des Wechselkurses im Zeitablauf notwendig. Insbesondere die Trennung der Wechselkursänderung in eine Summe aus erwarteter und stochastischer

Komponente ist als zusätzliche Restriktion zu nennen. Diese Restriktion erlaubt jedoch, die folgenden einfach interpretierbaren Aussagen zu formulieren:

Es wurde festgestellt, dass die Abweichung des erwarteten gleichgewichtigen Wechselkurses vom Terminkurs von drei Einflussfaktoren abhängt, die exogen vorgegeben sind: Die Varianz des Wechselkurses, die Kovarianz des Wechselkurses mit dem Preis des inländisch produzierten Gutes sowie die Kovarianz des Wechselkurses mit der erwarteten zukünftigen Szenario, beschrieben durch den realen Wechselkurs. Weiterhin wurde festgestellt, dass der erste Term in der Regel zu einer positiven Abweichung des gleichgewichtigen Wechselkurses führt, während, bei gegebener Hedgefunktion der Auslandsanlage gegen ungünstige Zukunftsszenarien, der letzte Term die entgegengesetzte Wirkung entfaltet. Über die Wirkungsrichtung der Güterpreisstochastik war keine eindeutige Aussage möglich, da sie vom Grad der Risikoaversion abhängt und damit von unterschiedlichen Motiven (Vermeidung von Unsicherheit; Bewahrung eines Mindesteinkommens) dominiert werden kann.

Abschließend wurde darauf hingewiesen, dass die Aussagen, die im Rahmen des Modells in Kapitel III möglich sind, keine abschließende Erklärung des Wechselkurses bzw. seiner Prognose liefern können und wollen. So sei zunächst das vollständige Fehlen staatlichen Handelns als Einschränkung der Aussagefähigkeit obigen Modells genannt dies insbesondere, angesichts der zeitweisen Diskussion um Stützungskäufe der Zentralbanken zugunsten des EURO und die Haltung der US Regierung zur Dollarkursentwicklung, erscheint die Realitätsnähe dieser Einschränkung als fraglich.

Als weitere Effekte, die nicht modelliert wurden, sind unter anderem Wachstumseffekte, die nationale Geldpolitik und ihr Einfluss auf die Zinsen und Portfolioeffekte zu nennen. Bezüglich der Wachstumseffekte ist zu bemerken, dass die reale Produktion exogen vorgegeben wurde. Somit bleiben die produktionssteigernden Effekte einer Investition unberücksichtigt. Diese Einschränkung könnte als realitätsfern und weiterhin signifikant eingeschätzt werden, so das ex ante dem Modell eine reduzierte Beschreibungsfähigkeit der Realität zuerkannt werden könnte. Weiterhin wurden die möglichen Investitionsalternativen auf nominal risikolose Formen beschränkt. Diese Einschränkung steht im Gegensatz zur beobachtbaren Realität. Es erscheint auch fraglich, ob eine Investition ohne Kreditrisiko

überhaupt möglich ist. Es sei also zugestanden, dass, ohne eine empirische Überprüfung durchgeführt zu haben, dieses Modell wahrscheinlich nur einen unvollständigen Erklärungswert besitzen wird.

Ein weiterer Kritikpunkt knüpft an die Ausführungen des Abschnitt 1 in Kapitel II an, in dem unterschiedliche Nutzenfunktionen beschrieben wurden. Es wurde ersichtlich, dass die Bestimmung einer Risikoprämie wesentlich von den Annahmen zur Präferenzordnung der Akteure abhängt. Weiterhin wurde deutlich, dass die Pratt'sche Beschreibung von risikoaversen Verhaltens sich nicht zur Darstellung von sämtlichen Verhaltensweisen eignet, die als realitätsnahe Charakterisierung des individuellen Verhaltens angesehen werden könnten. Allgemein sei angemerkt, dass die Risikoaversion allgemein als nicht beobachtbar gelten kann, so dass sie in einer empirischen Überprüfung obiger Gleichgewichtsbedingung als endogen gelten kann. Da jedoch, wie bereits ausgeführt, das genannte Modell nur eine unvollständige Beschreibung der Realität liefern kann, bleibt fraglich, inwieweit reale, aber im Modell nicht berücksichtigte Effekte ungerechtfertigt der Risikoaversion zugeordnet werden.

Hinsichtlich der empirischen Überprüfbarkeit der Gleichgewichtsbedingung aus Kapitel III sei angemerkt, dass die Erwartungen bezüglich des Wechselkurses nicht allgemein beobachtbar sind. Damit ist die Gleichung nur unter zusätzlichen Prämissen testbar. In der Literatur wird, wie in Kapitel I beschrieben, die Prämisse einer rationalen Erwartungsbildung dahingehend interpretiert, dass die tatsächliche Ausprägung des Wechselkurses der Summe aus seinem Erwartungswert und einem Störterm entspreche, der weiterhin annahmegemäß i.i.d. verteilt sei. Die Realitätsnähe dieser Prämisse ist diskutabel. Alternativ wäre die explizite Modellierung von gruppenspezifischen Effekten, sowie „Lernverhalten,“ in der Praxis durch den Begriff ‚Herdenverhalten‘ umschrieben, denkbar.

Diese Arbeit hat eine konsistente theoretische Grundlage zur Beurteilung der Prognosefähigkeit des Terminkurses zu formuliert. Als wesentliche Erkenntnis bleibt, dass die zunächst intuitiv einsichtige Aussage, dass der Terminkurs bei risikoneutralem Verhalten eine unverzerrte Prognose des erwarteten Wechselkurses ermöglicht, bei nutzenoptimierendem Verhalten zumindest nicht allgemeingültig ist. Die in der empirischen Literatur formulierte Aussage zur Risikoprämie erscheint vor dem Hintergrund dieser Arbeit reformbedürftig.

Die Arbeit ermöglicht auch eine Aussage zur Modellwahl von zukünftigen Forschungsarbeiten aufgrund der parallelen Darstellung von komparativ statischen Modellen (Kapitel II) und continuous-time Modellen (Kapitel III) bei möglichst gleicher Prämissensetzung und gleichem Untersuchungsgegenstand. Die Konsistenz des Modells in Kapitel III und dessen allgemeine Interpretierbarkeit lassen diese Forschungsrichtung als erfolgversprechender erscheinen. Allgemein bleibt jedoch festzustellen, dass ein kohärentes System von Modellen nicht existiert. Unterschiede in den Definitionen von Risikoaversion (z. B. in Abhängigkeit von Konsum oder Vermögen) und Prämissensetzung (z. B. zur Preisstochastik) erschweren den Vergleich einzelner Forschungsarbeiten und lassen das Gesamtbild nur unscharf erkennen. Insbesondere eine Überführung unterschiedlicher Definitionen zur Risikoaversion und eine Analyse ihres Einflusses auf die Ergebnisse, ist bisher nicht erfolgt.

## Anhang

### Appendix 1 Die Gültigkeit der Kaufkraftparität im Mehrgüterfall

Die Kaufkraftparität bezieht sich in ihrer Aussage im Gegensatz zum ‚law of one price‘ auf Güterpreisindices anstatt auf Güterpreise. Fraglich ist jedoch, unter welchen Prämissen ein Index die unverzerrte Abbildung von Güterpreisen ermöglicht. Sind weitere als die im Rahmen des ‚law of one price‘ bereits identifizierten Prämissen notwendig, so sind ihre Aussagen nicht als Synonyme zu verstehen. Konkret bedeutet dies, dass Abweichungen von der Gleichgewichtsbedingung der Kaufkraftparität nicht notwendigerweise auf eine Prämissenverletzung zu den Gütermärkten oder eine Falsifizierung der postulierten Gleichgewichtsbedingung des ‚law of one price‘ zurückzuführen sind. Es ist weiterhin möglich, dass solch eine Abweichung in der konkreten Berechnung des Preisindex begründet ist.<sup>332</sup>

Es wird nun gezeigt, dass die Gleichgewichtsbedingung der Kaufkraftparität in einem intertemporalen Optimierungsverhalten nur mit dann mit der Aussage des ‚law of one price‘ identisch ist, wenn die Akteure ihr Verhalten an einer homothetischen Nutzenfunktion im Budget ausrichten. Folglich ist die Restriktion der Akteure auf ein Handeln gemäß solch einer Nutzenfunktion eine notwendige Voraussetzung für eine unverzerrte Darstellung eines Preisszenarios durch einen Index. Das Ausmaß dieser Restriktion ist vor dem Hintergrund der Diskussion in Kapitel II Abschnitt 1 abschätzbar.

Ausgangspunkt sei die Definition eines Preisindex, der allgemein definiert ist als dem Verhältnis der minimalen Kosten von zwei Preissituationen bei gegebenen Nutzenniveau.<sup>333</sup> Anforderungen an einen Index wurden erstmals von Fischer formuliert.<sup>334</sup> So sollte der

---

<sup>332</sup> Eine eher praxisorientierte Analyse der Indexberechnung und ihrer Unvollkommenheiten liefert Fixler (1993). Er identifiziert die Anzahl der existierenden Produkte, das daraus resultierende Aggregationsproblem, individuelle Preissetzung der Händler, Substitutionseffekte sowie saisonale Einflüsse und Qualitätsänderungen als wesentliche Probleme der praktischen Messung. Außerdem liefert er eine Übersicht über verschiedene geläufige Indices. Wynne (1994) liefert eine gute Zusammenstellung von theoretischem Unterbau und praktischen Problemen der Messung am Beispiel des Consumer Price Index (CPI).

<sup>333</sup> Obstfeld und Rogoff (1996), S. 226 ff. nennen diesen Index ‚consumption based price index‘. Ihr Vorgehen liefert eine ökonomische Fundierung zur Berechnungsart eines Indexes.

<sup>334</sup> Fischer (1922), S. 297 - 406 bewies, dass im Mehrgüterfall und bei beliebigen Preis-Mengen Kombinationen kein Index die Fischer-Bedingungen erfüllt. Werden diesen Kombinationen durch eine optimierende Nachfragefunktion Restriktionen auferlegt, so sind die Fischer’schen Bedingungen für einen Index der

Preisindex invariant bezüglich Numeraire und Basiszeitpunkt und homogen vom Grad Eins in den Preisen sein.<sup>335</sup>

Vereinfachend soll nun die Möglichkeit untersucht werden einen Preisindex im Ein-Land-Zwei-Güter-Fall zu konstruieren, der die reale Entwicklung unverzerrt wiedergibt. Dieses Vorgehen, und damit die weiteren Ausführungen, lehnen sich an Adler und Dumas (1984) Appendix an. Die Invarianzbedingung bezüglich Numeraire und Basiszeitpunkt wird vernachlässigt da diese Arbeit keine Restriktionen hinsichtlich des Basiszeitpunktes formuliert und die Problematik des Numeraire im Rahmen des Siegel-Paradoxons ausführlich besprochen wird.<sup>336</sup> Es sei das ‚y-Gut‘ (x-Gut) wieder das ausschließlich im Ausland (Inland) produzierte und vom Inland (Ausland) importierte Gut sein. Somit stellt ‚ $P_y^a$ ‘ den Preis des y-Gutes in Auslandswährung dar. Er wird durch Multiplikation mit dem Wechselkurs ‚s‘ in Inlandswährung ‚ $P_y$ ‘ umgerechnet. Weiterhin gelte folgende Definition für die indirekte Nutzenfunktion:

$$V(B, P) = \max U(x, y) \tag{AI.1}$$

$$\text{s.t.} \quad x * p_x + y * p_y^a * s = B$$

In dieser Gleichung repräsentiert die Variable ‚B‘ das Budget, das für Konsumzwecke verwendet wird. P sei ein Preisindex, der auf den Güterpreisen basiert. U(x,y) sei die direkte Nutzenfunktion, die von den Konsummengen vom y-Gut, beschrieben durch die Variable ‚y‘ und des x-Gutes, beschrieben durch die Variable ‚x‘, abhängt.

Gemäß Roy’s Identität gilt, dass die Marshall’sche Nachfragefunktion dem negativen Quotienten aus der Ableitung der indirekten Nutzenfunktion nach dem Preis und nach der Budgetrestriktion entspricht.<sup>337</sup> Es gilt:

Lebenshaltungskosten nur erfüllt, wenn die Einkommenselastizität Eins entspricht. Vgl. Samuelson und Swamy (1974).

<sup>335</sup> Vgl. Samuelson und Swamy (1974). S. 566 – 593, sowie Obstfeld und Rogoff (1996)

<sup>336</sup> Als weiterführende Lektüre zur Wahl des Numeraire sei Flemming, Turnowsky und Kemp (1976) empfohlen. Sie zeigen, dass die Verwendung eines geometrischen Mittels als Index (im Gegensatz zum arithmetischen Mittel) den Index invariant gegenüber dem Numeraire macht. Diese Wahl beeinflusst jedoch die gemessene Risikoaversion als dass eine CARA mit Bezug auf den geometrisch bestimmten Index einer CRRA mit Bezug auf einen arithmetisch bestimmten Index entspricht (S. 582).

<sup>337</sup> Vgl. Varian (1992). S. 105 ff für theoretische Ausführungen zur Roy’s Identität und den Darstellungsformen

$$x(P_x, B) = - \frac{\partial V / \partial P_x}{\partial V / \partial B} \quad (\text{AI.2})$$

$$y(P_y, B) = - \frac{\partial V / \partial P_y}{\partial V / \partial B} \quad (\text{AI.3})$$

Durch Umformung erhält man jeweils:

$$-x * \partial V / \partial B = \partial V / \partial P_x \quad (\text{AI.4})$$

$$-y * \partial V / \partial B = \partial V / \partial P_y \quad (\text{AI.5})$$

Die obigen Gleichungen fordern, dass im Gleichgewicht die Vektorgrenznutzen der Preise ( $\partial V / \partial P_x$ ,  $\partial V / \partial P_y$ ) dem negativen Produkt des Konsumvektors (x,y) mit dem Grenznutzen des Gesamtkonsums  $\partial V / \partial B$  entsprechen müssen.

Gemäß Adler und Dumas (1984) sei ein Preisindex wie folgt definiert: Die Preise lassen sich durch ein Skalar ausdrücken, wenn gilt

$$V(B, P) = V(B * 1, P) = B^1 * V(1, P) \quad (\text{AI.6})$$

Diese Gleichung besagt, dass die indirekte Nutzenfunktion linear homogen in ‚B‘ sein muss, wenn der Preisvektor sich durch ein Skalar beschreiben lassen soll. Für die direkte Nutzenfunktion  $U(x,y)$  folgern Adler und Dumas, dass sie homogen vom Grad Eins im Konsumvektor (x,y) sein muss. Aus obiger Gleichung wird weiterhin deutlich, dass  $V(1,P) = 1/P$  entspricht,<sup>338</sup> wobei ‚P‘ dem Skalar entspricht, durch das sich  $(P_x P_y)$  ausdrücken lassen. Das Skalar ‚P‘ kann somit als Preisindex betrachtet werden.

---

einer Nachfragefunktion.

<sup>338</sup>Gemäß der Definition  $B = P * C'$  mit P und C' als Vektoren, gilt durch Umformung

$$B(p,C) * C^{-1} = P$$

B sei die Ausgabenfunktion, welche definiert ist als die Inverse der indirekten Nutzenfunktion. Durch die lineare Homogenität von V und damit von B gilt  $P = B(p,1)$  bzw. da P annahmegemäß als Skalar darstellbar ist  $1/P =$

Aus der obigen Definition eines Preisindex leiten Adler und Dumas weiterhin die Indexreaktion auf eine Preisänderung her. Diese Herleitung wird hier kurz dargestellt: Roy's Identität lässt sich unter Verwendung der Definition  $V(B,P) = B \cdot V(1,P)$  mit dessen Ableitungen  $\partial V(B,P)/\partial P = B \cdot \partial V(1,P)/\partial P$  und  $\partial V(B,P)/\partial B = V(1,P)$  schreiben als

$$-x \cdot V(1,P) = B \cdot \frac{\partial V(1,P)}{\partial P_x} \quad (\text{AI.7})$$

$$-y \cdot V(1,P) = B \cdot \frac{\partial V(1,P)}{\partial P_y} \quad (\text{AI.8})$$

Durch Erweiterung mit  $P_x$  und Umformung erhält man:

$$\frac{\frac{P_x}{V(1,P)}}{\frac{\partial V(1,P)}{\partial P_x}} = \frac{x \cdot P_x}{B} \quad (\text{AI.9})$$

$$\frac{\frac{P_y}{V(1,P)}}{\frac{\partial V(1,P)}{\partial P_y}} = \frac{y \cdot P_y}{B} \quad (\text{AI.10})$$

Die linke Gleichungsseite beschreibt die Elastizität des Preisindex nach den Preisen. Dieser entspricht dem Anteil der Ausgaben für das Gut  $(x,y)$  am Gesamtbudget  $B$ . Ändert sich ein Preis, so lässt sich durch die linke Gleichungsseite die Reaktion des Preisindex erkennen. Es lässt sich somit ein Preisindex für eine im Einkommen linear homogene Nutzenfunktion ermitteln.

---

$1/B = V$ . Zum Preisindex vgl. Obstfeld Rogoff (1996), S. 227 sowie zur Ausgabenfunktion vgl. Varian (1992), S. 103 f.



## Appendix 2 Das Optimierungsverhalten der Ausländer im komparativ statischen Modell

Ziel in diesem Anhang sei es, das Optimierungsverhalten eines risikoneutralen Ausländers zu beschreiben, der mit der gleichen Situation konfrontiert wird, die zur Gleichgewichtsbedingung aus inländischer Sicht führt. Es werden somit strukturell die gleichen Transformationen durchgeführt, wie sie ausführlich in Kapitel II Abschnitt 3 Schritt 4 beschrieben wurden. Eine ausführliche Darstellung der Methodik erübrigt sich somit.

Während das ‚technische Vorgehen‘ hier nicht diskutiert werden soll, sind einige Anmerkungen zur Vergleichbarkeit der Entscheidungsszenarien angebracht. Die Darstellung einer Situation aus ausländischer Sicht, die der Entscheidungssituation der Inländer vergleichbar ist, ist überhaupt möglich, da annahmegemäß die Güter handelbar sind und keine Kapitalverkehrsbeschränkungen existieren. Das ‚choice set‘ der Akteure ist somit identisch. Weiter wird von identischer Präferenzordnung der Akteure, beschrieben durch die jeweilige Nutzenfunktion, ausgegangen. Aus diesen Annahmen folgt schließlich, dass die resultierenden Gleichgewichtsbedingungen vergleichbar sind.

Im folgenden wird nun die Gleichgewichtskonstellation aus Auslandsperspektive hergeleitet. Allgemein formuliert, optimieren die Ausländer ebenfalls eine Nutzenfunktion unter Einhaltung ihrer Budgetrestriktion. Es werden ebenfalls die Güter ‚x‘ und ‚y‘ konsumiert und es wird in beiden Ländern investiert. Ein hochgestelltes ‚a‘ kennzeichnet die Perspektive des Auslands. Die Budgetrestriktion, die nach bereits bekanntem Vorgehen hergeleitet wird, lautet:

$$\begin{aligned}
 y_{t+1}^a = & \frac{p_{y,t+1}^a * Y_{t+1} + p_{y,t}^a * Y_t}{p_{y,t+1}^a} \\
 & + \frac{(1+i^a) * b_t^a - b_t^a + \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} * b_{t,a}^a - b_{t,a}^a}{p_{y,t+1}^a} \\
 & - \frac{p_{y,t}^a * y_t^a + p_{x,a,t+1}^a * s_{t+1}^a * x_{t+1}^a + p_{x,a,t}^a * s_t^a * x_t^a}{p_{y,t+1}^a}
 \end{aligned} \tag{AII.1}$$

Durch die Optimierung einer Nutzenfunktion mit vergleichbaren Eigenschaften erhält man die Optimalbedingungen. Es wird hier vereinfachend von homogenen Anlegern auch im internationalen Vergleich ausgegangen um die Darstellung einfach zu halten. Die Aufhebung dieser Prämisse verschafft keine grundlegend neuen Erkenntnisse. Die Optimalbedingungen lauten folglich:

$$(1^a) \quad E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial x_{t,a}} \right] = E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial x_{t,a}} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{s_t^a * p_{x,a,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right] = 0$$

$$(2^a) \quad E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial y_t} \right] = E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right] = 0$$

$$(3^a) \quad E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial x_{t+1,a}} \right] = E^a \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial x_{t+1}^a} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{s_{t+1}^a * p_{x,t+1}^a}{p_{y,t+1}^a} \right] = 0$$

$$(4^a) \quad E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial b_t^a} \right] = E^a \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{1+i^a-1}{p_{y,t+1}^a} \right] = 0$$

$$(5^a) \quad E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial b_{t,a}^a} \right] = E^a \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a p_{y,t+1}^a} \right] = 0$$

Es wird nun zunächst der Grenznutzen einer Inlands- und einer Auslandsanlage aus Auslandssicht unter Berücksichtigung der Opportunitätskosten beschrieben. Die folgenden Schritte beinhalten eine Wiederholung der in Kapitel II bereits ausführlich beschriebenen Schritte. Parallel zu dem genannten Vorgehen werden nun die Bedingungen (1) und (2) nach  $\beta^a * \partial U_{t+1}^a / \partial y_{t+1}^a$  umgeformt und in die Bedingungen (4) und (5) eingesetzt. Es sei daran erinnert, dass von risikoneutralem Verhalten ausgegangen wird, was einen konstanten Grenznutzen impliziert. Man erhält aus (1) und (2):

$$(1^a) \quad \beta^a * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} = \frac{\partial U_t^a}{\partial x_{t,a}} * \frac{1}{E^a \left[ \frac{s_t^a * p_{x,a,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} \quad (\text{AII.2})$$

$$(2^a) \quad \beta^* \frac{\mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} = \frac{\mathcal{U}_t^a}{\partial y_{t,a}^a} * \frac{1}{E^a \left[ \frac{p_{y,a,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} \quad (\text{AII.3})$$

Die Bedingungen (4) und (5) werden wie folgt umgeformt:

$$(4^a) \quad E^a \left[ \frac{\mathcal{U}^a}{\partial b_t^a} \right] = \beta^* \frac{\mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * E^a \left[ \frac{1+i^a-1}{p_{y,t+1}^a} \right] \quad (\text{AII.4})$$

$$(5^a) \quad E^a \left[ \frac{\mathcal{U}^a}{\partial b_{t,a}^a} \right] = \beta^* \frac{\mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] \quad (\text{AII.5})$$

Nach dem Einsetzen resultiert der folgende Ausdruck:

$$(4^a) \quad E^a \left[ \frac{\mathcal{U}^a}{\partial b_t^a} \right] = \frac{\mathcal{U}_t^a}{\partial y_t^a} * \frac{E^a \left[ \frac{1+i^a-1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E \left[ \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} = \frac{\mathcal{U}_t^a}{\partial y_t^a} * \frac{i^a}{p_{y,t}^a} \quad (\text{AII.6})$$

Das Vorziehen aus dem Erwartungswert ist möglich, da sowohl Zinssatz als auch der Preis des Inlandsgutes aus Auslandsperspektive (Gut y) bekannt sind. Für die Auslandsanlage aus ausländischer Sicht gilt unter Berücksichtigung der Opportunitätskosten folgende Gleichung. Die Vereinfachung besteht in der Trennung des stochastischen und nicht-stochastischen Terms des Nenners. Dadurch enthält der Nenner nur noch den Erwartungswert des inversen zukünftigen Preises des Gutes ‚y‘. Weiterhin werden die stochastischen Terme im Zähler getrennt, so dass ein Kürzen mit dem Term im Nenner teilweise möglich ist. Daraus resultiert:

$$\begin{aligned}
E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}^a}{\partial b_{t,a}^a} \right] &= \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_t^a} * \frac{E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right]}{E^a \left[ \frac{s_t^a * p_{x,a,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
&= \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_t^a} * \frac{1}{s_t^a * p_{x,a,t}^a} \\
&\quad * \frac{E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right] * E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] + COV \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}
\end{aligned} \tag{AII.7}$$

Nach dem Kürzen, erhält man folgende vereinfachte Gleichung (AII.8):

$$E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}^a}{\partial b_{t,a}^a} \right] = \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_t^a} * \frac{1}{s_t^a * p_{x,a,t}^a} * \left\{ E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right] + \frac{COV \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \right\}$$

Die obige Gleichung und die Gleichung (4<sup>a</sup>) beschreiben den Grenznutzen der in- und ausländischen Anlage aus Auslandsperspektive.

Es wird nun von einem Kapitalmarktgleichgewicht, also einem Ausgleich der Grenznutzen, ausgegangen. Durch Division der erwarteten Grenznutzen der inländischen und ausländischen Anlage aus Auslandsperspektive, erhält man folgende Gleichung:

$$1 = \frac{\frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_{t,a}^a} * \frac{1}{s_t^a * p_{x,a,t}^a}}{\frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial y_t^a} * \frac{i^a}{p_{y,t}^a}} * \left\{ E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right] + \frac{COV \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \right\} \tag{AII.9}$$



Bis zu diesem Schritt wurden ausschließlich die Rechnungen aus dem Kapitel II Abschnitt 3 Schritt 4 nachvollzogen.

Die Variablen können nun in Inlandsperspektive dargestellt werden. Die Regeln wurden bereits im vorigen Abschnitt erläutert. Weiterhin gilt, dass der Preis des Inlandsgutes aus ausländischer Perspektive (Gut  $y$ ) gleich dem Preis des ausländischen Gutes in Auslandswährung aus Inlandsperspektive ist. Formal bedeutet dies  $p_{y,t+1}^a = p_{y,a,t+1}$ . Es gilt:

$$(1+i_a) - s_t * (1+i) * E^a \left[ \frac{1}{s_{t+1}} \right] + (\varpi^a - 1) * i_a = s_t * (1+i) * \frac{COV \left[ \frac{1}{s_{t+1}}, \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]} \quad (\text{AII.13})$$

Diese Gleichung wird nun nach dem erwarteten Wechselkurs aus Auslandsperspektive umgeformt.

$$\begin{aligned} -E^a \left[ \frac{1}{s_{t+1}} \right] &= -\frac{1+i_a}{(1+i)*s_t} - \frac{(\varpi^a - 1)*i_a}{s_t * (1+i)} + \frac{s_t * (1+i)}{s_t * (1+i)} * \frac{COV \left[ \frac{1}{s_{t+1}}, \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]} \\ \Leftrightarrow E^a \left[ \frac{1}{s_{t+1}} \right] &= \frac{1 + \varpi^a * i_a}{s_t * (1+i)} - \frac{COV \left[ \frac{1}{s_{t+1}}, \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,a,t+1}} \right]} \quad (\text{AII.14}) \end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung ist mit den Erwartungen der Inländer bei risikoneutralem Verhalten zu vergleichen. Sie wird in Kapitel II Abschnitt 3 Schritt 5 Step 2 verwendet.

### Appendix 3 Die Darstellung der Inlandsperspektive bei risikoavermem Verhalten im komparativ statischen Modellrahmen

Das folgende Vorgehen lehnt sich eng an die Darstellung im Kapitel II Abschnitt 4 an. Wesentlicher Unterschied ist jedoch, dass der Grenznutzen bei risikoavermem Verhalten nicht konstant ist. Er ist somit nicht aus dem Erwartungswert vorzuziehen. Diese Eigenschaft macht die Umformungen aufwendiger, ohne das Vorgehen in seinem Prinzip zu beeinflussen. Aus diesem Grund werden die einzelnen Schritte nur kurz erlauert.

Ausgangspunkt bilden, wie bereits im Kapitel II Abschnitt 3 zum risikoneutralen Anlegerverhalten, die fünf aus einer intertemporalen Optimierungsstrategie geforderten Optimalbedingungen. Sie werden hier wiederholt und mit der im erwähnten Kapitel vergebenen Nummerierung gekennzeichnet. Ziel ist es zunächst, die Grenznutzen der in- und ausländischen Kapitalanlage unter Beruckichtigung der Opportunitätskosten zu beschreiben. Dazu werden die Bedingungen (1) und (2) derart umgeformt, dass ein Einsetzen in die (ihrerseits umgeformten) Bedingungen (4) und (5) möglich ist.

Eine Umformung von (1) nach  $E[\beta^* \partial U_{t+1} / \partial x_{t+1}]$  ergibt nun:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_t} \right] &= E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial x_t} - \beta^* \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \cdot \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right] = 0 \\
 \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial x_t} &= E \left[ \beta^* \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right] \cdot E \left[ \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right] + COV \left[ \beta^* \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right] \\
 E \left[ \beta^* \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right] &= \frac{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial x_t} - COV \left[ \beta^* \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{p_{x,t}}{p_{x,t+1}} \right]} \\
 \Leftrightarrow \quad E \left[ \beta^* \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right] &= \frac{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial x_t} \cdot \frac{1}{p_{x,t}} - COV \left[ \beta^* \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \tag{AIII.1}
 \end{aligned}$$

Eine Umformung von (2) resultiert in der Forderung für  $E[\beta * \partial U_{t+1} / \partial x_{t+1}]$ :

$$\begin{aligned}
 (2) \quad E\left[\frac{\partial U}{\partial y_t}\right] &= E\left[\frac{\partial U_t}{\partial y_t} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{p_{x,t+1}}\right] = 0 \\
 \Leftrightarrow \quad \frac{\partial U_t}{\partial y_t} &= E\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\right] * E\left[\frac{s_t * p_{x,t}}{p_{x,t+1}}\right] + COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_t * p_{x,t}}{p_{x,t+1}}\right] \\
 E\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\right] &= \frac{\frac{\partial U_t}{\partial y_t} - COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_t * p_{y,a,t}}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{s_t * p_{y,a,t}}{p_{x,t+1}}\right]} \\
 \Leftrightarrow \quad E\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\right] &= \frac{\frac{\partial U_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} - COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}
 \end{aligned} \tag{AIII.2}$$

Die Umformungen der Optimalbedingungen (1) und (2) implizieren, dass ein intertemporales Optimum hinsichtlich des Gutes ‚x‘ und ‚y‘ verwirklicht wird, da die Bedingung  $E[\partial U / \partial y_t] = E[\partial U / \partial x_t] = 0$  ausgenutzt wird. Der Grenznutzen einer intertemporalen Umschichtung ist also Null. Ökonomisch bedeutet dies, dass sich die Akteure insofern rational verhalten, als dass die Entscheidung zwischen dem heutigen Konsum und dem zukünftigen Konsum eines Gutes nutzenoptimierend getroffen wird.

Diese Annahme impliziert jedoch nicht, dass ein Ausgleich der Grenznutzen zwischen Gut ‚x‘ und Gut ‚y‘ verwirklicht wird. Es wird im Gegenteil ausdrücklich die Möglichkeit zugelassen

dass gilt:  $E\left[\frac{\partial U_t}{\partial y_t}\right] \neq E\left[\frac{\partial U_t}{\partial x_t}\right]$ . Durch diese Einschränkung wird eine Abweichung von der Kaufkraftparität möglich. Ursachen für eine Abweichung von der Kaufkraftparität können nicht aus dem Modell erklärt werden, wie bereits ausführlich dargestellt wurde.



## EXKURS: GÜTERMARKT

In Kapitel II wird der Gütermarkt durch die Variable ‚ $\varpi$ ‘ repräsentiert, die besagt, dass die gegenwärtige Erfüllung der Kaufkraftparität, beschrieben durch  $\varpi=1$ , ein Gütermarktgleichgewicht gegeben ist. Fraglich ist jedoch, unter welchen Bedingungen die Ausprägung  $\varpi=1$  in diesem intertemporalen Modell realisiert werden kann. Diese formalen Zusammenhänge werden hier kurz dargestellt, ohne dass in dieser Arbeit darauf zurückgegriffen wird. Sie sind somit als ergänzende Hinweise zu einer möglichen Ausformulierung des Modells zu verstehen. Die Hinweise in dieser Arbeit auf Gütermarktrestriktionen im intertemporalen Kontext sind jedoch in dem hier dargestellten Rahmen zu interpretieren.

Ausgangspunkt sei die Optimalbedingung (3), die den Gütermarkt in ‚ $t+1$ ‘ beschreibt:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad E \left[ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y_{t+1}} \right] &= E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial y_{t+1}} - \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] = 0 \\
 E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \right] &= E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] \\
 &= E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right] * E \left[ \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] \\
 &\quad + COV \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] \\
 \Leftrightarrow \quad \frac{E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \right]}{E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right]} &= E \left[ \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] + \frac{COV \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{p_{y,a,t+1} * s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right]} \quad (AIII.3)
 \end{aligned}$$

Ein Ausgleich der erwarteten Grenznutzen würde der linken Gleichungsseite den Wert Eins zuweisen. Diese Annahme impliziert jedoch nicht die erwartete Gültigkeit der Kaufkraftparität, was dem ersten Term der rechten Gleichungsseite den Wert Eins zuweisen würde. Die Differenz wird von der Risikoaversion der Anleger hervorgerufen. Sie sind bereit, für die Vermeidung der Unsicherheit eine Prämie zu zahlen. Da ein ‚fair gamble‘ die

Kaufkraftparität impliziert, wie für den Fall risikoneutralen Verhaltens bereits nachgewiesen wurde, weicht die hier geforderte Gleichgewichtsbedingung davon ab. Dadurch wird der Anschein erweckt, dass bei Ausgleich der erwarteten Grenznutzen und bei  $COV < 0$  das Inlandsgut überbewertet ist. Diese Beobachtung ist jedoch nicht auf Gütermarktstörungen zurückzuführen, sondern auf die Risikoaversion. Die mögliche Abweichung von der Kaufkraftparität ruft das gleiche Verhalten hervor wie eine stärkere Präferenz für das Inlandsgut relativ zum Auslandsgut.

EXKURS ENDE

Nachdem die Bedingungen (1) und (2) nach  $E[\beta * \partial U_{t+1} / \partial x_{t+1}]$  umgeformt wurden, werden nun die Optimalbedingungen (4) und (5) derart modifiziert, so dass ein Einsetzen von  $E[\beta * \partial U_{t+1} / \partial x_{t+1}]$  aus den ersteren Bedingungen möglich wird:

$$(4) \quad E \left[ \frac{\partial U}{\partial b_t} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{i}{p_{x,t+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow E \left[ \frac{\partial U}{\partial b_t} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right] * E \left[ \frac{i}{p_{x,t+1}} \right] + COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{i}{p_{x,t+1}} \right] \quad (AIII.4)$$

$$(5) \quad E \left[ \frac{\partial U}{\partial b_{a,t}} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} * \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow E \left[ \frac{\partial U}{\partial b_{a,t}} \right] = E \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \right] * E \left[ \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] + COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}} \right] \quad (AIII.5)$$

Es wird nun die umgeformte Bedingung (1) in die umgeformte Bedingung (4) eingesetzt, um den Grenznutzen der Anlage im Inland unter Berücksichtigung der intertemporalen

Optimierung auf dem Markt des heimisch produzierten Gutes zu beschreiben. Wie bereits angemerkt, führt dieses Vorgehen zu einer eingeschränkten Interpretierbarkeit der Ergebnisse, wenn die Bedingung der Kaufkraftparität nicht erfüllt sein muss. Dies ist dadurch bedingt, dass die Inlandsinvestition die Opportunitätskosten unter Verwendung des Preises des Inlandsgutes ‚x‘ bestimmt, während die Auslandsinvestition unter Verwendung der Preises von Gut ‚y‘ die Opportunitätskosten bestimmt. Ist die Kaufkraftparität nicht erfüllt, so entspricht der Inlandspreis des Gutes ‚x‘ nicht dem in Inlandswährung umgerechneten ausländischen Preis des Gutes ‚y‘. Die Opportunitätskosten sind somit nicht identisch.

Es gilt nach dem Einsetzen für den Grenznutzen der Inlandsinvestition:

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{\partial U}{\partial b_t}\right] &= \frac{\frac{\partial U_t}{\partial x_t} * \frac{1}{p_{x,t}} - COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} * E\left[\frac{i}{p_{x,t+1}}\right] \\
 &\quad + COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{i}{p_{x,t+1}}\right] \\
 \Leftrightarrow E\left[\frac{\partial U}{\partial b_t}\right] &= \frac{\partial U_t}{\partial x_t} * \frac{i}{p_{x,t}} - i * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] + COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{i}{p_{x,t+1}}\right] \\
 \Leftrightarrow E\left[\frac{\partial U}{\partial b_t}\right] &= \frac{\partial U_t}{\partial x_t} * \frac{i}{p_{x,t}} \tag{AIII.6}
 \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen von (2) in (5) kann nun der Grenznutzen einer Anlage von einer heimischen Geldeinheit im Ausland unter Berücksichtigung der intertemporalen Optimierung auf dem Markt des ausländisch produzierten Gutes beschrieben werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}}\right] &= \frac{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} - COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} * E\left[\frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}}\right] \\
&\quad + COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}}\right]
\end{aligned} \tag{AIII.7}$$

Der Erwartungswert des zweiten Terms des Produktes der linken Gleichungsseite beinhaltet zwei stochastische Variablen,  $s_{t+1}$  und  $\frac{1}{p_{x,t+1}}$ , und kann wie folgt getrennt werden, um ein Kürzen mit dem Nenner des Quotienten zu ermöglichen:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}}\right] &= \frac{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} - COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
&\quad * \left\{ E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right] * E\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1\right] + COV\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] \right\} \\
&\quad + COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}}\right]
\end{aligned} \tag{AIII.8}$$

Anschließend werden die Klammern aufgelöst:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}}\right] &= \left\{ \frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} - COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] \right\} * E\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1\right] \\
&+ \frac{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} - COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} * COV\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] \\
&+ COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}}\right]
\end{aligned} \tag{AIII.9}$$

Die geschweifte Klammer wird nun aufgelöst:

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}}\right] &= \frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} E\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1\right] \\
&- COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] * E\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1\right] \\
&+ \frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} * \frac{COV\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
&- COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] * \frac{COV\left[(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
&+ COV\left[\beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{(1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1}{p_{x,t+1}}\right]
\end{aligned} \tag{AIII.10}$$

↔

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{\partial U}{\partial b_{a,t}}\right] &= \frac{\partial U_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} \\
&* \left\{ E\left[\left(1+i_a\right) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1\right] \right. \\
&- \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] * E[s_{t+1}] \\
&+ \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] \\
&+ \frac{(1+i_a)}{s_t} * \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
&- \left. \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] * \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \right. \\
&+ \left. \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right] \right\} \\
&- \left. \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right] \right\}
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad \text{(AIII.11)}$$

Wie bereits für den Fall risikoneutralen Verhaltens erläutert, wird nun der Grenznutzen der Auslandsanlage durch den Grenznutzen der Inlandsanlage dividiert. Ziel ist es, eine möglichst allgemeingültige Aussage über die Einflussfaktoren der Konsum- und Anlageentscheidung zu erhalten. Anschließend wird diese allgemeine Gleichung derart umgeformt, um die Prognosefähigkeit des Terminkurses und die Wirkungsrichtung der möglichen Einflüsse beurteilen zu können.

Nach Division des Grenznutzens der Auslandsanlage durch den Grenznutzen der Inlandsanlage gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}}\right]}{E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_t}\right]} &= \frac{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}} * \frac{1}{i}}{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial x_t} * \frac{1}{p_{x,t}}} \\
&* \left\{ E\left[ (1+i_a) * \frac{s_{t+1}}{s_t} - 1 \right] \right. \\
&- \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t}} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV\left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] * E[s_{t+1}] \\
&+ \frac{(1+i_a)}{s_t} * \frac{COV\left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E\left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
&- \left. \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t}} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV\left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] * \frac{COV\left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E\left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \right. \\
&+ \left. \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t}} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV\left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] \right\} \quad (\text{AIII.12})
\end{aligned}$$

Es werden nun die folgenden Variablen definiert:

$$\begin{aligned}
\vartheta &= \frac{E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_{a,t}}\right]}{E\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial b_t}\right]} \\
\varpi &= \frac{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial y_t} * \frac{1}{s_t * p_{y,a,t}}}{\frac{\partial \mathcal{U}_t}{\partial x_t} * \frac{1}{p_{x,t}}}
\end{aligned}$$

Die Variable ‚ $\vartheta$ ‘ beschreibt den Kapitalmarkt. Nimmt sie den Wert Eins an, so entsprechen sich die beiden genannten Grenznutzen der Anlagen und der Kapitalmarkt befindet sich im Gleichgewicht. Die Variable ‚ $\varpi$ ‘ beschreibt den Gütermarkt. Sie wurde bereits beschrieben

und ihre Implikationen im Exkurs des Appendix 2 dargestellt. Charakterisiert man den Gütermarkt und den Kapitalmarkt in dieser Weise und multipliziert man beide Seiten in obiger Gleichung mit  $\varpi^*i$ , so erhält man nach Kürzen folgende Bedingung.

$$\begin{aligned}
1 + \vartheta^* \varpi^* i &= \frac{(1+i_a)}{s_t} E[s_{t+1}] \\
&- \frac{s_t^* p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] * E[s_{t+1}] \\
&+ \frac{(1+i_a)}{s_t} * \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
&- \frac{s_t^* p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] * \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
&+ \frac{s_t^* p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right] \tag{AIII.13}
\end{aligned}$$

Es werden nun die Terme, die den erwarteten Wechselkurs enthalten zusammengefasst, und anschließend werden die Terme in den Zeilen 2 bis 4 auf beiden Gleichungsseiten addiert. Man erhält nach diesen Schritten:



$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] \right\} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * E[s_{t+1}] = \\
& 1 + \vartheta * \varpi * i \\
& - \frac{(1+i_a)}{s_t} * \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
& + \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] * \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
& - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * \frac{(1+i_a)}{s_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right]
\end{aligned} \tag{AIII.14}$$

Nach dem Vorziehen der gemeinsamen Kovarianz der Zeilen 3 und 4 in obiger Gleichung erhält man:

$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] \right\} * E[s_{t+1}] = \\
& \frac{(1 + \vartheta * \varpi * i) * s_t}{1 + i_a} \\
& - \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} * \left\{ 1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right] \right\} \\
& - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right]
\end{aligned} \tag{AIII.15}$$

Anschließend werden beide Gleichungsseiten durch den Term in der geschweiften Klammer der linken Gleichungsseite dividiert:

$$\begin{aligned}
E[s_{t+1}] = & \frac{(1+i+\vartheta^*(\varpi-1)*i)*s_t}{1+i_a} \\
& \frac{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
& \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
& \frac{\frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}
\end{aligned} \tag{AIII.16}$$

Diese Gleichung ist annähernd interpretierbar. So beinhaltet der erste Term der rechten Gleichungsseite den Termkurs als eine Komponente.

$$\begin{aligned}
\frac{(1+i+\vartheta^*(\varpi-1)*i)*s_t}{1+i_a} &= \frac{f_t}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
&+ \frac{\frac{(1+i+\vartheta^*(\varpi-1)*i)*s_t}{1+i_a}}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}
\end{aligned} \tag{AIII.17}$$

Dieser Term ist mit der Gleichgewichtsbedingung für den Fall risikoneutralen Verhaltens konsistent: Wird risikoneutrales Verhalten unterstellt, so ist der Grenznutzen konstant, und die Kovarianzen nehmen den Wert Null an. Daraus folgt, dass die Nenner den Wert Eins annehmen, und für die rechte Gleichungsseite gilt:

$$f_t + \frac{(\vartheta^*(\varpi-1)*i)*s_t}{1+i_a}$$

Dieser Term ist aus der Gleichgewichtsbedingung für risikoneutrales Verhalten bekannt.

$$\frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{P_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{P_{x,t+1}}\right]}$$

Weiterhin ist die Unsicherheitsprämie, , sowohl in der Gleichgewichtsbedingung für risikoneutrales als auch für risikoaverses Verhalten enthalten.

Es muss angemerkt werden, dass unter Berücksichtigung der obigen Hinweise eine Plausibilitätsrestriktion eingeführt werden muss: Sind die Komponenten obiger Gleichung gemäß der hier dargestellten Ausführungen interpretierbar, so muss die folgende Einschränkung gelten:

$$\frac{\frac{(1+i+\vartheta*(\varpi-1)*i)*s_t}{1+i_a}}{1-\frac{s_t * p_{y,a,t}}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{P_{x,t+1}}\right]} > 0 \quad (\text{AIII.18})$$

Diese Einschränkung ist wie folgt zu erklären: Befinden sich die Märkte im Gleichgewicht, so repräsentiert der Zähler den Terminkurs bei Erfüllung der gedeckten Zinsparität. Dieser Term muss positiv sein. Weiterhin gilt, dass der erwartete Wechselkurs aufgrund seiner Definition ebenfalls positiv sein muss. Daraus resultiert jedoch zwingend, dass der Nenner positiv sei. Diese Folgerung wird unterstützt durch die Feststellung, dass der letzte Term der rechten Gleichungsseite der Risikoprämie zuzuordnen ist, da er im Falle risikoneutralen Verhaltens den Wert Null annimmt. Aufgrund der Definition der Risikoprämie als Preisdivergenz zwischen risikoaversen und risikoneutralen Verhaltens ist diese Zuordnung zwingend.

Diese Ausführungen werden im Rahmen der Fallstudien des Kapitel III wieder aufgegriffen. Wendet man Stein's Lemma auf den Nenner an, und werden die Definitionen des Kapitel III Abschnitt 1 zur absoluten Risikoaversion verwendet, so resultiert aus der Restriktion, dass der Nenner positiv sei, sowie aus der Annahme von risikoaversen Verhalten, dass gelte:

$$1 > \psi + E[ARA] > 0$$

In Kapitel III Abschnitt 3 Fallstudie 2 wird diese Restriktion als Plausibilitätsrestriktion charakterisiert. Diese Aussage wurde hier begründet.

Trotz der obigen Hinweise auf die grundsätzliche Konsistenz dieser Gleichung mit den bekannten Ergebnissen des Kapitel II bleibt problematisch, dass der Terminkurs nicht isoliert in obiger Bedingung präsent ist, so dass die Unsicherheits- und die Risikoprämie additiv dargestellt werden können.

Im folgenden werden nun Umformungen vorgenommen, die den erwarteten Wechselkurs durch eine additive Verknüpfung des Terminkurses und weiterer Terme beschreiben. Ziel ist es die Prognosefähigkeit des Terminkurses anhand einer Summe von Faktoren zu charakterisieren.

Um einen Vergleich des erwarteten zukünftigen Wechselkurses mit dem Terminkurs zu ermöglichen, wird die obige Gleichung mit  $0 = f_t - f_t$  erweitert. Der letzte Term,  $f_t$ , wird weiterhin erweitert zu:

$$\begin{aligned} f_t &= f_t * \frac{1 - \zeta * COV[\bullet]}{1 - \zeta * COV[\bullet]} \\ &= \frac{f_t}{1 - \zeta * COV[\bullet]} - \frac{f_t * \zeta * COV[\bullet]}{1 - \zeta * COV[\bullet]} \end{aligned} \tag{AIII.19}$$

Die Variable,  $\zeta$ , sowie der Platzhalter,  $\bullet$ , seien noch zu spezifizieren. Allgemein werde die obige Gleichung erweitert mit:

$$0 = f_t - \frac{f_t}{1 - \zeta * COV[\bullet]} + \frac{f_t * \zeta * COV[\bullet]}{1 - \zeta * COV[\bullet]} \tag{AIII.20}$$

Die Variable,  $\zeta$ , kennzeichne nun den Quotienten aus dem heutigen in Inlandswährung ausgedrückten Preis des Gutes,  $y$ , und dessen Grenznutzen. Der Platzhalter  $COV[\bullet]$

bezeichne die Kovarianz zwischen dem abdiskontierten Grenznutzen des Gutes ‚x‘ und seinem inversen zukünftigen Preis. Explizit lautet die Erweiterung:

$$\begin{aligned}
 0 = f_t & - \frac{f_t}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
 & + f_t * \frac{\frac{s_t * p_{y,a,t}}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\frac{\partial U_t}{\partial y_t}} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}
 \end{aligned}
 \tag{AIII.21}$$

Eingesetzt in die obige Gleichung erhält man eine Beschreibung des erwarteten Wechselkurses durch eine Summe, deren einer Summand der Termkurs ist:

$$\begin{aligned}
E[s_{t+1}] = & f_t - \frac{f_t}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
& + \frac{f_t * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
& + \frac{(1 + i + \vartheta * (\varpi - 1) * i) * s_t}{1 + i_a} \\
& + \frac{\frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
& - \frac{COV \left[ s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}{E \left[ \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]} \\
& - \frac{\frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}} \right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}} \right]}
\end{aligned} \tag{AIII.22}$$

Diese Gleichung wird nun umgestellt, um ihre Anordnung mit der bereits bekannten Gleichgewichtsbedingung bei risikoneutralem Verhalten vergleichbar zu gestalten:

$$\begin{aligned}
E[s_{t+1}] = & f_t - \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
& + \frac{\frac{(1+i+\vartheta*(\varpi-1)*i)*s_t}{1+i_a} - f_t}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
& + \frac{f_t * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
& - \frac{\frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}
\end{aligned} \tag{AIII.23}$$

Nach Vereinfachung des zweiten Summanden gilt:

$$\begin{aligned}
E[s_{t+1}] = & f_t - \frac{COV\left[s_{t+1}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{E\left[\frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} + \frac{g * (\varpi - 1) * i * s_t}{1 + i_a} \\
& \frac{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
& + \frac{f_t * \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]} \\
& - \frac{\frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{s_{t+1}}{p_{x,t+1}}\right]}{1 - \frac{s_t * p_{y,a,t}}{\partial U_t / \partial y_t} * COV\left[\beta * \frac{\partial U_{t+1}}{\partial x_{t+1}}, \frac{1}{p_{x,t+1}}\right]}
\end{aligned} \tag{AIII.24}$$

Diese letzte Gleichung beschreibt die Optimalbedingung bei risikoaverssem Verhalten und wird in Kapitel II Abschnitt 3 repliziert.



## Appendix 4 Die Herleitung der Gleichgewichtsbedingung bei risikoavermem Verhalten und Gültigkeit der PPP aus Auslandsperspektive

Es werden in diesem Appendix die Schritte des Appendix 3 wiederholt, wobei die Perspektive wechselt: Es wird die Auslandsperspektive gewählt und entspricht somit derjenigen, die in Appendix 2 verwendet wurde. Insofern enthält dieser Appendix weder neue Rechenschritte, noch neue Sichtweisen, sondern stellt eine reine Anwendung der Methodik von Appendix 3 auf die Perspektive in Appendix 2 dar. Aus diesem Grund werden die Ausführungen hier sehr kurz gehalten. Es sei noch erwähnt, dass diese Rechnung die Prämisse ausgeglichener Güter- und Kapitalmärkte verwendet, da nur für diese Fälle in Kapitel III ein Vergleich der Perspektiven vorgenommen wird. Eine erweiterte Untersuchung ist jedoch problemlos möglich.

Es gelten folgende Optimalbedingungen.

$$(1^a) \quad E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial x_{t,a}} \right] = E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial x_{t,a}^a} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{s_t^a * P_{x,a,t}^a}{P_{y,t+1}^a} \right] = 0 \quad (\text{AIV.1})$$

$$(2^a) \quad E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial y_t} \right] = E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} - \beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{P_{y,t}^a}{P_{y,t+1}^a} \right] = 0 \quad (\text{AIV.2})$$

Durch Umformung erhält man aus Gleichung (1<sup>a</sup>)

$$(1^a) \quad \begin{aligned} 0 &= E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] - E^a \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \frac{s_t^a * P_{x,a,t}^a}{P_{y,t+1}^a} \right] \\ &= E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] - E^a \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right] E^a \left[ \frac{s_t^a * P_{x,a,t}^a}{P_{y,t+1}^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_t^a * P_{x,a,t}^a}{P_{y,t+1}^a} \right] \end{aligned} \quad (\text{AIV.3})$$

Nach Auflösung nach  $E^a \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right]$  gilt:

$$E^a \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right] = \frac{E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_t^a * p_{x,a,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{s_t^a * p_{x,a,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} \quad (\text{AIV.4})$$

Gleichfalls kann Bedingung (4<sup>a</sup>) umgeformt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= E^a \left[ \beta * \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{1+i^a-1}{p_{y,t+1}^a} \right] \\ &= E^a \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right] E^a \left[ \frac{1+i^a-1}{p_{y,t+1}^a} \right] + COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1+i^a-1}{p_{y,t+1}^a} \right] \\ &= E^a \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right] E^a \left[ \frac{i^a}{p_{y,t+1}^a} \right] + COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{i^a}{p_{y,t+1}^a} \right] \end{aligned} \quad (\text{AIV.5})$$

Nach Einsetzen von  $E^a \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right]$  gilt:

$$\begin{aligned}
E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}^a}{\partial b_t^a} \right] &= E^a \left[ \frac{i^a}{p_{y,t+1}^a} \right] \frac{E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_t^a * p_{x,a,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{s_t^a * p_{x,a,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} + COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{i^a}{p_{y,t+1}^a} \right] \\
&= E^a \left[ \frac{i^a}{p_{y,t+1}^a} \right] \frac{E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] \frac{1}{s_t^a * p_{x,a,t}^a} - COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} + COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{i^a}{p_{y,t+1}^a} \right] \\
&= E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] \frac{i^a}{s_t^a * p_{x,a,t}^a} - i^a COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] + COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{i^a}{p_{y,t+1}^a} \right] \\
&= E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] * \frac{i^a}{s_t^a * p_{x,a,t}^a}
\end{aligned} \tag{AIV.6}$$

Das gleiche Prozedere wird nun unter Verwendung der Gleichungen (2<sup>a</sup>) und (5<sup>a</sup>) wiederholt.

Gleichung (2<sup>a</sup>) wird nach  $E^a \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right]$  umgeformt:

$$\begin{aligned}
0 &= E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial y_t^a} \right] - E^a \left[ \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right] E^a \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right] \\
E^a \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right] &= \frac{E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial y_t^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}
\end{aligned} \tag{AIV.7}$$

⇔

Die Bedingung (5<sup>a</sup>) wird gleichfalls umgeformt:

$$\begin{aligned}
E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}^a}{\partial b_{a,t}^a} \right] &= E^a \left[ \beta * \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} * \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right] \\
&= E^a \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right] E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right] + COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right] \\
&\hspace{15em} (AIV.8)
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen von  $E^a \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a} \right]$  gilt:

$$\begin{aligned}
E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}^a}{\partial b_{a,t}^a} \right] &= \frac{E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial y_t^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right] \\
&\quad + COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a - 1}{s_t^a} \right] \\
&\hspace{15em} (AIV.9)
\end{aligned}$$

Nach Trennung der zwei stochastischen Variablen im Erwartungswert des ersten Terms der rechten Gleichungsseite kann wie folgt gekürzt werden:

$$\begin{aligned}
E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial b_{a,t}^a} \right] &= \frac{E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
&\quad * \left\{ E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1 \right] + COV \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] \right\} \\
&\quad + COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{\frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1}{p_{y,t+1}^a} \right] \\
&= \left\{ E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} \right] \frac{1}{p_{y,t}^a} - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] \right\} E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1 \right] \\
&\quad + \frac{E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} \right] - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} COV \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] \\
&\quad + COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{\frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1}{p_{y,t+1}^a} \right]
\end{aligned} \tag{AIV.10}$$

Nach dem Trennen der ersten Klammer sowie des Quotienten des zweiten Terms gilt:

$$\begin{aligned}
E^a \left[ \frac{\partial U^a}{\partial b_{a,t}^a} \right] &= E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} \right] \frac{1}{p_{y,t}^a} E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1 \right] \\
&\quad - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1 \right] \\
&\quad + \frac{E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} \right] \frac{1}{p_{y,t}^a}}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} COV \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] \\
&\quad - \frac{COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right] COV \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{p_{y,t}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
&\quad + COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{\frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1}{p_{y,t+1}^a} \right]
\end{aligned} \tag{AIV.11}$$

Nach Division durch  $E^a \left[ \frac{\partial U_t^a}{\partial y_t^a} \right] \frac{1}{p_{y,t}^a}$  und Vereinfachung gilt:

$$\begin{aligned}
E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}^a}{\partial b_{a,t}^a} \right] * \frac{1}{E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial y_t^a} \right] \frac{1}{p_{y,t}^a}} &= E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1 \right] \\
&- \frac{(1+i_a^a)}{s_t^a} \frac{COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] E^a [s_{t+1}^a]}{E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial y_t^a} \right] \frac{1}{p_{y,t}^a}} \\
&+ \frac{(1+i_a^a)}{s_t^a} \frac{COV \left[ s_{t+1}^a, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
&- \frac{(1+i_a^a)}{s_t^a} \frac{COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] COV \left[ s_{t+1}^a, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
&+ \frac{(1+i_a^a)}{s_t^a} COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]
\end{aligned} \tag{AIV.12}$$

Das Ergebnis der ersten Gleichsetzung  $E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}^a}{\partial b_t^a} \right] = E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] * \frac{i^a}{s_t^a * p_{x,a,t}^a}$  kann umgeformt

$$\frac{1}{E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}^a}{\partial b_t^a} \right]} E^a \left[ \frac{\partial \mathcal{U}_t^a}{\partial x_{t,a}^a} \right] \frac{1}{s_t^a * p_{x,a,t}^a} i^a = 1$$

werden zu . Es sei nun von ausgeglichenen Kapital- und Gütermärkten ausgegangen. Nach Multiplikation mit den jeweiligen Seiten obiger Gleichung gilt:

$$\begin{aligned}
i^a &= E^a \left[ \frac{(1+i_a^a) * s_{t+1}^a}{s_t^a} - 1 \right] \\
&\quad - \frac{(1+i_a^a)}{s_t^a} COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] E^a [s_{t+1}^a] \\
&\quad + \frac{(1+i_a^a)}{s_t^a} \frac{COV \left[ s_{t+1}^a, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
&\quad - \frac{(1+i_a^a)}{s_t^a} \frac{COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] COV \left[ s_{t+1}^a, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
&\quad + \frac{(1+i_a^a)}{s_t^a} COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]
\end{aligned} \tag{AIV.13}$$

Nach Addition von Eins auf beiden Seiten und Multiplikation mit  $\frac{s_t^a}{1+i_a^a}$  entsteht:

$$\begin{aligned}
f_t^a &= \left\{ 1 - COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] \right\} E^a [s_{t+1}^a] \\
&\quad + \left\{ 1 - COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] \right\} \frac{COV \left[ s_{t+1}^a, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
&\quad + COV \left[ \beta \frac{\partial \mathcal{U}_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]
\end{aligned} \tag{AIV.14}$$

Es wird nun nach dem erwarteten Wechselkurs umgeformt und mit dem Terminkurs erweitert. Dieses Vorgehen ist ebenfalls bereits dargestellt worden. Es folgt:



$$\begin{aligned}
E^a [s_{t+1}^a] = & \frac{f_t^a}{1 - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
& - \frac{COV \left[ s_{t+1}^a, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
& - \frac{COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}{1 - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}
\end{aligned} \tag{AIV.15}$$

bzw. nach der entsprechenden Erweiterung:

$$\begin{aligned}
E^a [s_{t+1}^a] = & f_t^a + \frac{COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right] f_t^a}{1 - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
& - \frac{COV \left[ s_{t+1}^a, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}{E^a \left[ \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]} \\
& - \frac{COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}^a}{p_{y,t+1}^a} \right]}{1 - COV \left[ \beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a} \right]}
\end{aligned} \tag{AIV.16}$$

Aus dieser Gleichgewichtsbedingung lässt sich die Risikoprämie aus Auslandsperspektive bestimmen. Sie ist die Differenz der gleichgewichtigen Preiskonstellation bei risikoneutralem und risikoaverssem Verhalten. Damit gilt:

$$RP^a = \frac{COV\left[\beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a}\right] f_t^a}{1 - COV\left[\beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a}\right]} - \frac{COV\left[\beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{s_{t+1}^a}{p_{y,t+1}^a}\right]}{1 - COV\left[\beta \frac{\partial U_{t+1}^a}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{y,t+1}^a}\right]} \quad (\text{AIV.17})$$

Da im Rahmen dieser Herleitung von der PPP ausgegangen wird, kann der Preis des im Ausland konsumierten Gutes ‚y‘ mit dem Auslandspreisindex aus Inlandsperspektive ‚ $p_{t+1}^a$ ‘ gleichgesetzt werden für den gilt:  $p_{t+1} = s_{t+1} * p_{t+1}^a$ . Weiterhin gilt für den Wechselkurs:

$s_{t+1}^a = \frac{1}{s_{t+1}}$  und den Terminkurs:  $f_t^a = \frac{1}{f_t}$ . Sind die Anleger international homogen, so gilt

schließlich:  $U_{t+1}^a = U_{t+1}$ . Nach Einsetzen resultiert:

$$RP^a = \frac{\frac{1}{f_t} COV\left[\beta \frac{\partial U_{t+1}}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{t+1}^a}\right] - COV\left[\beta \frac{\partial U_{t+1}}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{s_{t+1} * p_{t+1}^a}\right]}{1 - COV\left[\beta \frac{\partial U_{t+1}}{\partial y_{t+1}^a}, \frac{1}{p_{t+1}^a}\right]} \quad (\text{AIV.18})$$

Diese Gleichung beschreibt die Risikoprämie aus ausländischer Sicht unter Verwendung von Variablen, die aus inländischer Perspektive definiert sind. Es sei abschließend daran erinnert, dass von ausgeglichenen Kapital- und Gütermärkten ausgegangen wurde.

## Appendix 5 Formale Grundlagen

### 5.1 Die Darstellung der dynamischen Programmierung

Die dynamische Programmierung ist eines von drei Ansätzen zur Lösung von Problemen der dynamischen Optimierung. Sie wurde von Richard Bellmann<sup>339</sup> entwickelt. Die alternativen Methoden sind die ‘calculus of variation’ sowie die ‘optimal control theory’. Diese unterschiedlichen Methoden werden im folgenden beschrieben und voneinander abgegrenzt.

Die älteste Methode, die ‘calculus of variation’, geht auf Issac Newton<sup>340</sup> zurück und diente der Oberflächenminimierung einer geometrischen Figur. Eine zu maximierende Funktion, welche nicht von der Zeit abhängt, besitzt als Argument den Pfad der Ausprägung einer Variablen im Zeitablauf. Ändern sich die Ausprägungen der Variablen im Zeitablauf, so verändert sich der Funktionswert, obwohl dieser Funktionswert selber nicht von der Zeit abhängt. Das Problem lässt sich durch das Integral einer Funktion darstellen. Das Argument der Funktion wird die ‘state variable’ genannt, dessen Anfangs- und Endwerte, und somit auch die Funktionswerte, festgelegt sind. Das Problem kann im Continuous-Time wie folgt formuliert werden:<sup>341</sup>

$$V[y] = \int_0^T F[t, y(t), dy/dt] dt \quad (\text{AV.1})$$

s.t.  $y(0) = A$       Anfangsausprägung von ,y‘  
 $y(T) = Z$       Endausprägung von ,y‘  
mit: A, T, Z als bekannt vorausgesetzt

Die zu maximierende Funktion lautet  $V[y]$ . Der Verlauf der Variablen ,y‘ in der Zeit kann eindeutig durch den Zeitpunkt ,t‘, die Ausprägung der Variablen ,y‘ zu diesem Zeitpunkt sowie dessen Änderung ,dy/dt‘ beschrieben werden. Der untersuchte Zeithorizont erstreckt sich in diesem Fall über  $[0, T]$ .

---

<sup>339</sup> Bellman, (1957).

<sup>340</sup> Newton, (1687).

<sup>341</sup> Diese Darstellung orientiert sich an Chiang (1992), S. 12 ff.

Der wesentliche Unterschied zur üblichen Integralrechnung besteht darin, dass die zu maximierende Funktion nicht nur von der Ausprägung der ‚state variable‘ zum jeweiligen Zeitpunkt abhängt, sondern ebenfalls von ihrer Änderung. Diese geht als erste Ableitung der Funktion der ‚state variable‘ nach der Zeit in die zu optimierende Funktion ein. Die Funktion des Integrals besitzt somit drei Argumente.

Die Optimalbedingung für obige Problemstellung liefert allgemein die Euler-Gleichung.<sup>342</sup>

$$F_{y'y'} * y''(t) + F_{yy'} * y'(t) + F_{ty'} - F_y = 0 \quad (\text{AV.2})$$

Es ist ‚F‘ die zu maximierende Funktion, in diesem Fall also ‚V‘. Die tiefgestellten Variablen kennzeichnen die Ableitung der Funktion ‚F‘. So beschreibt die zweite Ableitung der Funktion ‚F‘ nach y‘, wobei gelte:  $y' = dy/dt$ . Erfüllt ‚y‘ die obige Euler-Gleichung, so maximiert diese Variable die Funktion  $V[y]$ . Die Anfangs- und Endbedingung sind für die Herleitung der bestimmten Lösung aus der allgemeinen Lösung notwendig, da die Euler-Gleichung nur  $y''(t)$  bestimmt.<sup>343</sup>

Die ‚optimal control theory‘ erweitert obigen Ansatz, indem nun drei Variablenarten betrachtet werden. Neben der Zeit und der ‚state‘ Variablen wird nun eine ‚control variable‘ eingeführt. Diese ‚control variable‘ bestimmt den Verlauf der ‚state variable‘ bei gegebenen Anfangsszenario. Es existiert folglich eine funktionale Beziehung zwischen diesen Variablen, welche ‚equation of motion‘ genannt wird. Im Vergleich zur Problemstellung des ‚calculus of variation‘ besitzt die ‚optimal control theory‘ eine zusätzliche Nebenbedingung, die ‚equation of motion‘. Der wesentliche Vorteil dieser Formulierung besteht darin, dass Begrenzungen der ‚control variable‘ einfacher zu modellieren sind als in der reduzierten Darstellung unter ausschließlicher Verwendung der ‚state variable‘.

---

<sup>342</sup> Die Intuition der Euler-Gleichung lautet wie folgt. Gibt es ein optimales  $y^{\text{opt}}$ , so können nicht-optimale Ausprägungen als Summe aus diesem Optimalwert und einen Störterm dargestellt werden. Somit kann das Maximierungsproblem, relativ zum Optimalwert  $y^{\text{opt}}$ , in Abhängigkeit von diesem Störterm dargestellt werden, wobei im Optimum  $dV/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$  mit  $\varepsilon = \text{Störterm}$  gilt. Aus der Ableitung von V nach  $\varepsilon$  und Umformung resultiert die Euler-Gleichung.

<sup>343</sup> Es ist nur die zweite Ableitung von y nach der Zeit bekannt. Bei der Bestimmung von y werden somit zwei Integrationskonstanten eingefügt. Zur Bestimmung der Werte dieser Konstanten sind die Bedingungen notwendig.

Die formale Darstellung lautet wie folgt.<sup>344</sup>

$$\begin{aligned}
 V[u] &= \int_0^T F[t, y, u] dt && \text{(AV.3)} \\
 \text{s.t.} \quad & y(0) = A \\
 & y(T) = \text{frei} \\
 & dy/dt = f(t, y, u) \\
 \text{mit} \quad & A, T \text{ bekannt vorausgesetzt}
 \end{aligned}$$

Die Änderung von ‚y‘ im Zeitablauf erscheint nicht mehr als eigenständiges Argument in der Funktion ‚F‘. Sie ist ersetzt worden durch eine ‚control variable‘, ‚u‘, welche sowohl ‚y‘ als auch ‚dy/dt‘ beeinflusst. Der Wert von ‚F=V‘ hängt von der Entscheidung (z. B. des Akteurs) hinsichtlich ‚u‘ ab, die den Wert der ‚state variable‘ festlegt. Gesucht wird das ‚u‘, welches ‚V‘ maximiert.

Es bleibt allgemein festzuhalten, dass gilt: Entspricht die ‚control variable‘ der ‚state variable‘ so entspricht die ‚optimal control theory‘ dem ‚calculus of variation‘.

Die Lösung dieses Optimierungsproblems erfolgt in der Regel unter Verwendung der Hamiltonian, welche definiert ist als

$$H[y, t, u, \lambda(t)] = F(t, z, u) + \lambda(t) * f(t, y, u) \quad \text{(AV.4)}$$

Die Variable ‚ $\lambda(t)$ ‘ wird ‚costate variable‘ genannt, und ist dem Lagrange Multiplikator vergleichbar. Die Lösung beinhaltet zwei Differentialgleichungen erster Ordnung in der ‚state variable‘ und der ‚costate variable‘ sowie die Maximierung der Hamiltonian nach der ‚control variable‘.

Die Intuition dieses Vorgehens lautet wie folgt. Ist die ‚equation of motion‘ zu jedem Zeitpunkt erfüllt, so kann sie gemäß des ‚Lagrange Vorgehens‘ nach Multiplikation mit der ‚costate variable ‚ $\lambda(t)$ ‘, zur Zielfunktion addiert werden. Die Zielfunktion wird nicht

---

<sup>344</sup> Zur Darstellung vgl. Chiang (1992), S. 165 ff.

verändert, da der addierte Term zu jedem Zeitpunkt den Wert Null besitzt, und solange  $dy/dt = \delta H/\delta \lambda$ . Dies ist die erste Differentialgleichung.

Im folgenden wird das bereits beschriebene Verfahren des ‚calculus of variation‘ angewendet. Nicht-optimale Pfade von ‚u‘ werden als Summe des optimalen Pfades und eines Störterms beschrieben. Diese Störung hat in diesem Fall jedoch eine Auswirkung auf die ‚state variable‘, welche ebenfalls in Abhängigkeit des Störterms formuliert werden kann. Durch Einsetzen in die Zielfunktion kann die zu maximierende Funktion ‚V‘ in Abhängigkeit des Störterms beschrieben werden. Die Maximierung erfolgt durch die Bedingung  $dV/d(\text{Störterm}) = 0$ . Als Resultat erhält man die zweite Differentialgleichung  $d\lambda(t)/dt = \delta H/\delta y$ . Als weitere Bedingung muss gelten, dass  $\lambda(T) = 0$ . Dies ist die Transversalitätsbedingung, welche besagt, dass der Schattenpreis der ‚state variable‘ im Optimum zum Endzeitpunkt Null betragen muss.<sup>345</sup>

Der Ansatz der dynamischen Programmierung<sup>346</sup> zeichnet sich durch zwei Unterschiede zur ‚optimal control theory‘ aus. Er ist allgemeiner formuliert und rückt die zu optimierende Funktion in das Zentrum der Betrachtung anstatt der bisherigen Konzentration auf ‚state-‘ oder ‚control variable‘. Die größere Allgemeingültigkeit wird durch die freie Wahl des Anfangszeitpunktes erreicht. Dadurch resultieren in Abhängigkeit des gewählten Anfangszeitpunktes unterschiedliche Pfade für die ‚state-‘ oder ‚control variable‘.

Der zweite Unterschied besteht in der Formulierung einer ‚optimal value function‘, welche der zu integrierenden Funktion bei dem unterschiedlichen Anfangsszenarien jeweils einen Optimalwert zuordnet. Anhand dieser neuen Funktion wird die Lösung charakterisiert. Es entsteht ein systematischer iterativer Prozess zur Lösung des ursprünglichen Problems, welcher sich verbal wie folgt beschreiben lässt:

Wird das Entscheidungsszenarium in der ersten Periode vernachlässigt, so müssen für ein Erreichen des Optimums die folgenden Entscheidungen in sich ebenfalls optimal sein. Dies lässt sich für die Folgeperioden parallel durchführen. Fängt man mit der (einfachen)

---

<sup>345</sup> Dieses Vorgehen hat eine breite Verwendung in der Volkswirtschaftslehre gefunden. Beispiele finden sich in Chiang (1992) sowie in Kamien und Schwartz (1981). Eine ökonomische Interpretation dieses Vorgehens für den Fall der Investitionsentscheidung einer Firma findet sich in Dorfman Robert (1969), S. 817 – 831.

<sup>346</sup> Die Darstellung des Bellman Prinzips orientiert sich an Kamien und Schwartz, (1981).

Entscheidung in der letzten Periode an, so lässt sich der Pfad der 'control variable' zur Erreichung einer 'optimal value function' rekursiv ermitteln.

Diese verbale Beschreibung des Bellman Prinzips soll nun mathematisch veranschaulicht werden. Die Problematik der zu maximierenden Funktion ,V', auf welche die Beschreibung der 'optimal control theory' basiert sei hier wiederholt:

$$\begin{aligned}
 V[u] &= \int_0^T F[t, y, u] dt && \text{(AV.5)} \\
 \text{s.t.} \quad & y(0) = A \\
 & y(T) = \text{frei} \\
 & dy/dt = f(t, y, u) \\
 \text{mit} \quad & A, T \text{ bekannt vorausgesetzt} \\
 & u(t) \in \mathfrak{U}
 \end{aligned}$$

Es sei nun eine 'maximum value function' wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 J(t_0, y_0) &= \max_u V[u] = \max_u \int_{t_0}^T F[t, y, u] dt && \text{(AV.6)} \\
 &= \int_{t_0}^T F[t_{opt.}, y_{opt.}, u_{opt.}] dt \\
 \text{s.t.} \quad & y(t_0) = y_0 \\
 & dy/dt = f(t, y, u)
 \end{aligned}$$

Das Integral über  $[t_0, T]$  lässt sich aufspalten in zwei Integrale über die Teilperioden  $[t_0, t_0 + dt]$  und  $[t_0 + dt, T]$ . Gemäß des Prinzips der Optimalität, muss die 'control variable' über den Zeitraum  $[t_0 + dt, T]$  optimal sein, unabhängig von ihren Ausprägungen im Zeitraum  $[t_0, t_0 + dt]$ . Die 'state variable' hängt wiederum von ihrem Wert in , $t_0$ ' sowie von der Wahl der 'control variable' über den Zeitraum  $[t_0, t_0 + dt]$  ab. Aufgrund dieser Überlegungen gilt:

$$J(t_0, u_0) = \max_u \int_{t_0}^T F[t, y, u] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \max_u \left( \int_{t_0}^{t_0+dt} F[t, y, u] dt + \int_{t_0+dt}^T F[t, y, u] dt \right) \\
&= \max_{t_0 \leq t \leq t_0+dt} \left( \int_{t_0}^{t_0+dt} F[t, y, u] dt + \max_{t_0+dt \leq t \leq T} \int_{t_0+dt}^T F[t, y, u] dt \right) \tag{AV.7} \\
&\text{s.t.} \quad dy/dt = f(t, y, u) \\
&\quad \quad y(t_0 + dt) = y_0 + dy \\
&\quad \quad dy = f(t, y, u)
\end{aligned}$$

Der zweite Maximierungsterm entspricht jedoch  $J(t_0+dt, y_0+dy)$ , so dass gilt:

$$J(t_0, y_0) = \max_u \left( \int_{t_0}^{t_0+dt} F[t, y, u] dt + J(t_0 + dt, y_0 + dy) \right) \tag{AV.8}$$

Diese Gleichung kann vereinfacht werden. Dies geschieht durch Approximation der beiden Terme der rechten Gleichungsseite.<sup>347</sup> Der erste Term kann durch das ‚mean value theorem‘ approximiert werden.<sup>348</sup> Das Theorem besagt, dass die Differenz zwischen den Werten einer Funktion an zwei unterschiedlichen Punkten als Produkt der Differenz dieser Werte mit der Ableitung der Funktion an einer Stelle, welche zwischen diesen Punkten liegt, ausgedrückt werden kann. Für das obige Integral folgt daraus, wobei ‚ $\Gamma$ ‘ die Stammfunktion von ‚ $F$ ‘ sei:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+dt} F(t, y, u) dt &= \Gamma(t_0, y, u) - \Gamma(t_0+dt, y, u) \\
&= F(t_1, y, u) * (t_0 - (t_0 + dt)) \\
&= F(t_1, y, u) * dt \tag{AV.9}
\end{aligned}$$

<sup>347</sup> Eine elegantere Lösung für dieses Problem bietet Obstfeld (1992). Da das hier beschriebene Verfahren weiter verwendet wird, soll das Alternativverfahren hier nur kurz erwähnt werden. Im Gegensatz zum hier beschriebenen Ansatz bezieht Obstfeld, eine zeitliche Abdiskontierung explizit mit ein, arbeitete anfänglich komparativ statisch und beschreibt ein Problem mit unendlichem Zeithorizont. Damit sind die Verfahren nicht unmittelbar vergleichbar. Der erweiterte Zeithorizont erlaubt es, die ‚maximum value function‘ unabhängig vom Zeitpunkt  $t_0$  zu formulieren (vgl. hierzu Kamien und Schwartz (1984), S. 241 f.) Obstfeld erweitert den Abdiskontierungsfaktor in eine ‚power series‘, subtrahiert die ‚optimal value function von beiden Gleichungsseiten und ersetzt die ‚control variable‘ in  $t_0+dt$  anhand der Nebenbedingung. Schließlich dividiert er durch die Periodenlänge, um eine ‚continuous time‘ Beschreibung zu erhalten. Das Ergebnis entspricht der hier beschriebenen partiellen Differentialgleichung.

<sup>348</sup> Zum ‚mean value theorem‘ vgl. Chiang A., (1984), S. 261 f. Eine Anwendung in einem vergleichbaren Kontext findet sich in Merton (1998), S. 102.



mit:  $t_0 < t_1 < t_0 + dt$

Für kleine Zeitvariationen, ,dt‘ wird von einer konstanten ,control variable‘ ausgegangen so dass die ,state variable‘ ebenfalls konstant sei. Die einzige verbleibende Variable ist in diesem Fall ,t‘, so dass das obige Verfahren der Integration über die Zeit unter Annahme der Konstanz der übrigen Variablen legitim ist.

Der zweite Term,  $J(t_0 + dt, y_0 + dy)$  kann für kleine ,dt‘ durch eine Taylor Approximation um die Stelle  $(t_0, y_0)$  beschrieben werden. Durch eine Taylor Approximation kann eine Funktion von unbekannter Form an einer bestimmten Stelle durch eine Polynominalfunktion beschrieben werden. Der Grad des Polynoms und damit die Höhe des Residualterms stellen ein Werturteil dar.

In diesem Fall wird von einer linearen Approximation ausgegangen.<sup>349</sup> Implizit werden Komponenten höherer Ordnung vernachlässigt.<sup>350</sup> Die Taylor Approximation erster Ordnung für obige Funktion um die Stelle  $(t_0, y_0)$  lautet:

$$J(t_0+dt, y_0+dy) = J(t_0, y_0) + J_t(t_0, y_0) * dt + J_y(t_0, y_0) * dy + o(dt) \quad (AV.10)$$

Die tiefgestellten Buchstaben ,t‘ und ,y‘ kennzeichnen die ersten partiellen Ableitungen von  $J(\bullet)$ . Die Komponente  $o(dt)$  ist ein asymptotisches Ordnungssymbol und bedeutet,<sup>351</sup> dass

$$o(dt) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T.h.O}{dt} = 0 \quad \text{wobei T.h.O Terme höherer Ordnung bedeutet bzw.}$$

$$T.h.O = J_{tt}(t_0, y_0) * (dt)^2 + J_{yy}(t_0, y_0) * (dy)^2 + J_{ty}(t_0, y_0) * dy * dt + \dots\dots(AV.11)$$

Aus diesen Überlegungen folgt, dass als Approximation gilt:

---

<sup>349</sup> Dieses Vorgehen erfolgt in Anlehnung an Kamien und Schwartz (1981), S. 239, da sich die Darstellung der dynamischen Programmierung an ihr Vorgehen anlehnt. Es wird im Weiteren eine alternative Darstellung gezeigt. Im Rahmen des CAPM wird in der Regel eine Approximation zweiten Grades vorgenommen.

<sup>350</sup> Merton (1982) begründet, dass im Continuous-Time Rahmen eine Approximation zweiter Ordnung legitim ist. Diese Darstellung reduziert sich auf eine Approximation erster Ordnung, da nur das Vorgehen dargestellt werden soll.

<sup>351</sup> Vgl. Merton (1982), S. 63 ff.

$$J(t_0, y_0) = \max_u \left( \int_{t_0}^{t_0+dt} F[t, y, u] dt + J(t_0 + dt, y_0 + dy) \right)$$

$$= F(t_1, y, u) * dt + J(t_0, y_0) + J_t(t_0, y_0) * dt + J_y(t_0, y_0) * dy + o(dt) \quad (\text{AV.12})$$

Nach Subtraktion von  $J(t_0, y_0)$  auf beiden Gleichungsseiten und Division durch ‚dt‘ erhält man:

$$0 = F(t_1, y, u) + J_t(t_0, y_0) + J_y(t_0, y_0) * dy \quad (\text{AV.13})$$

Da aus der ursprünglichen Aufgabenstellung bekannt ist, dass  $dy/dt = f(t, y, u)$ , lautet die zu maximierende Funktion:

$$0 = \max_u [F(t_1, y, u) + J_t(t_0, y_0) + J_y(t_0, y_0) * f(t, y, u)] \quad (\text{AV.14})$$

Diese partielle Differentialgleichung beschreibt die ‚optimal value function‘ bei optimaler Wahl der ‚control variable‘. Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, die Ableitung nach ‚u‘ in obige Funktion einzusetzen, um die Differentialgleichung mit Hilfe ihrer ‚boundary conditions‘ zu lösen.<sup>352</sup>

Alternativ kann diese partielle Differentialgleichung auch mit Hilfe der Hamiltonian in bereits beschriebener Weise gelöst werden. Dies soll nun für den Fall mit unendlichen Zeithorizont beschrieben werden. Die wesentliche Vereinfachung besteht in der Unabhängigkeit der ‚optimal value function‘ vom Anfangszeitpunkt ‚t<sub>0</sub>‘. Dadurch gilt:  $J_t(t_0, y_0) = 0$ . Weiterhin kann für kleine ‚dt‘ vereinfachend von einer konstanten Funktion  $F(t_1, y, u)$  ausgegangen werden, so dass  $F(t_1, y, u) = F(t, y, u)$ . Aus der obigen partiellen Differentialgleichung wird somit:

$$0 = \max_u [F(y, u) + J_y(y) * f(y, u) + \delta * J(y)]^{353}$$

<sup>352</sup> Dieses Lösungsverfahren wird im Rahmen der CAPM Literatur angewendet.

<sup>353</sup> Der Term  $\delta * J(y_0)$  resultiert aus der Berücksichtigung der zeitlichen Diskontierung mit  $\delta$  als Diskontierungsfaktor.

$$= F(y, u_{\text{opt.}}) + J_y(y) * f(y, u_{\text{opt.}}) + \delta * J(y)^{354} \quad (\text{AV.15})$$

Maximiert man die erste Zeile obiger Gleichung, so erhält man:

$$0 = F_u(y, u) + J_y(y) * f_u(y, u) \quad (\text{AV.16})$$

Die zweite Zeile beschreibt das Optimalverhalten der ‚control variable‘ die in einem funktionalen Zusammenhang zur ‚state variable‘ steht. Formuliert man diesen Zusammenhang als  $u = u(y)$  und setzt ihn in die zweite Zeile ein, so erhält man:

$$0 = F(y, u(y)) + J_y(y) * f(y, u(y)) - \delta * J(y) \quad (\text{AV.17})$$

Nach Differenzierung nach der ‚state variable‘ gilt:

$$\begin{aligned} 0 = & F_y(y, u(y)) + F_u(y, u(y)) * u_y(y) \\ & + J_{yy}(y) * f(y, u(y)) + J_y(y) * f_y(y, u(y)) + J_y(y) * f_u(y, u(y)) * u_y(y) \\ & + \delta * J_y(y) \end{aligned} \quad (\text{AV.18})$$

$$\begin{aligned} 0 = & [F_u(y, u(y)) + J_y(y) * f_u(y, u(y))] * u_y(y) + F_y(y, u(y)) \\ & + [f_y(y, u(y)) - \delta] * J_y(y) + J_{yy}(y) * f(y, u(y)) \end{aligned} \quad (\text{AV.19})$$

Diese Gleichung lässt sich wesentlich vereinfachen. Aufgrund der Ableitung der ersten Zeile obiger Gleichung nach der ‚control variable‘ gilt:  $F_u(y, u(y)) + J_y(y) * f_u(y, u(y)) = 0$ , so dass der erste Summand Null entspricht. Es gilt somit:

$$0 = F_y(y, u(y)) + [f_y(y, u(y)) - \delta] * J_y(y) + J_{yy}(y) * f(y, u(y)) \quad (\text{AV.20})$$

Definiert man nun  $\lambda = J_y(y)$ , und berücksichtigt weiterhin, dass gemäß anfangs genannter Nebenbedingung gilt:  $dy/dt = f(y, u(y))$ , so folgt:

---

<sup>354</sup> Definiert man die Hamiltonian als  $h(y, u) = F(y, u) + J_y(y) * f(y, u)$  so gilt  $h(y, u_{\text{opt}}) = \max [h(y, u)] = \delta * J(y)$

$$\begin{aligned}
J_{yy}(y) * f(y, u(y)) &= \frac{dJ_y(y)}{dy} * \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{d\lambda}{dy} * \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{d\lambda}{dt}
\end{aligned}
\tag{AV.21}$$

Durch Einsetzen und Umformung nach  $\delta$  resultiert:

$$= \frac{F_y + \lambda * f_y + \frac{d\lambda}{dt}}{\lambda}
\tag{AV.22}$$

Sind die Funktionen  $F$  und  $f$  bekannt, so lassen sich gemäß obiger Gleichungen sowohl der Pfad der ‚optimal control variable‘ und ‚state variable‘ bestimmen. Ein Beispiel dafür gibt Obstfeld (1982)<sup>355</sup>. Die ökonomische Interpretation hängt von der konkreten Problemstellung ab, so dass die obigen Gleichungen nicht allgemein intuitiv interpretiert werden können. Im Beispiel von Obstfeld ist die Funktion  $F$  eine Nutzenfunktion, die ‚state variable‘ das Vermögen und die ‚control variable‘ die Konsumententscheidung. Obige Gleichung fordert, dass im Optimum die zeitliche Diskontierung der Dividende und den Kapitalerträgen des Vermögens entsprechen muss. Die ersten beiden Summanden beschreibt Obstfeld als die ‚Dividende‘ des Vermögens.

Der erste Summand ist der Quotient des Grenznutzens des Vermögens mit seinem Schattenpreis. Diese Division ist notwendig, um beide Summanden in ihren Einheiten vergleichbar zu machen.

Der zweite Summand entspricht dem Effekt der Änderung der Vermögenshöhe auf dessen Änderungsrate. Dieser Term ist die Ursache für die dynamische Problemstellung, da die Nutzenfunktion als Argument die Änderungsrate des Vermögens besitzt.<sup>356</sup>

---

<sup>355</sup> Obstfeld (1992). S. 6 ff.

<sup>356</sup> Es sei daran erinnert, dass der zeitliche Pfad der ‚state variable‘ als Argument in die zeit-unabhängige Zielfunktion  $V[y]$  eingeht. Hierin liegt der Unterschied der dynamischen Optimierung im Vergleich zur üblichen

Der dritte Summand wird von Obstfeld als Kapitalgewinn bezeichnet und drückt die relative Änderung der Vermögenshöhe aus.

Dieser Appendix hat eine allgemeine Einführung in die dynamische Programmierung zum Ziel, die im Rahmen der Herleitung des intertemporalen CAPM von Merton, das in Appendix 6 beschrieben wird, erstmals angewendet wurde.

## 5.2. Die Beschreibung wesentlicher stochastischer Prozesse für die Bestimmung des Optimalverhaltens

In diesem Zwischenschritt werden die Erwartungswerte der Änderung sowie der quadrierten Änderung sowohl des realen Vermögens als auch des realen Wechselkurses sowie des Produktes dieser beiden Variablen unter Verwendung der eingangs formulierten exogenen stochastischen Prozesse beschrieben. Das Vorgehen gleicht demjenigen, das auch bisher angewendet wurde (u.a. Ito's Lemma) und beinhaltet auch in dieser Hinsicht keine wesentliche Erkenntnis.

Ausgangspunkt sei die bereits hergeleitete Bewegungsgleichung:

$$d\left[\frac{W}{P_x}\right] = \frac{W}{P_x} \left\{ \left( b_a (i_a + \mu_S - i) + i - \frac{B}{W} - \mu_x + \sigma_x^2 - b_a \sigma_{Sx} \right) dt + b_a \sigma_S dz_S - \sigma_x dz_x \right\} \quad (\text{III.28})$$

Der Erwartungswert der realen Vermögensänderung lässt sich relativ einfach auf dieser Gleichung bestimmen. Der Erwartungswert bezüglich beider Gleichungsseiten gebildet. Anschließend wird der Erwartungswert separat auf die einzelnen Komponenten der rechten Gleichungsseite bezogen. Da die erwartete Änderung der stochastischen Komponenten des Güterpreises für Gut ‚x‘ sowie für den Wechselkurs konstruktionsbedingt dem Wert Null entsprechen, gilt:

$$E_{t_0}[dW^r] = W^r \left( b_a (i_a + \mu_S - i) + i - \frac{B}{W} - \mu_x + \sigma_x^2 - b_a \sigma_{Sx} \right) dt \quad (\text{AV.23})$$

Die Bestimmung des Erwartungswertes der quadrierten Änderung des realen Vermögens gestaltet sich in der Vorgehensweise nur geringfügig aufwendiger, als dass dem bereits beschriebenen Verfahren ein Schritt vorgeschaltet werden muss. So wird zunächst die rechte Gleichungsseite für  $(dW^r)^2$  ausmultipliziert. Dabei ist zu beachten, dass Terme, die mit  $(dt)^2$  oder mit  $dt dz$  multipliziert werden, im weiteren vernachlässigt werden können, da ihr Grenzwert für  $h \rightarrow 0$  den Wert Null besitzt. Dies wurde im mathematischen Grundlagenteil ausführlich beschrieben. Anschließend wird das obige Vorgehen angewendet. Man erhält die folgende Beschreibung für  $E_{t_0}[(dW^r)^2]$ :

$$\begin{aligned}
 E_{t_0}[(dW^r)^2] &= E_{t_0} \left[ \left\{ \frac{W}{P_x} (\mu_{W^r} dt + b_a \sigma_S dz_S - \sigma_x dz_x) \right\}^2 \right] \\
 &= E_{t_0} \left[ \left\{ \frac{W}{P_x} (b_a \sigma_S dz_S - \sigma_x dz_x) \right\}^2 \right] \\
 &= 2 * \left( \frac{W}{P_x} \right)^2 (b_a^2 \sigma_S^2 - 2b_a \sigma_{Sx} + \sigma_x^2) dt
 \end{aligned} \tag{AV.24}$$

Weiterhin ist das gleiche Vorgehen auf die Bewegungsgleichung für den realen Wechselkurs anwendbar, um dessen Erwartungswert und den Erwartungswert bezüglich dessen quadrierter Änderung zu beschreiben. Da die folgenden Schritte sich ausschließlich auf die Durchführung bereits bekannter Umformungen beziehen, werden sie nicht explizit genannt, sondern nur die Ergebnisse präsentiert.

Der Erwartungswert der Änderung des realen Wechselkurses lässt sich beschreiben durch:

$$E_{t_0} \left[ \frac{dRS}{RS} \right] = \left( \mu_x + \mu_S - \mu_y + \sigma_y^2 + \sigma_{xS} - \frac{\sigma_{xy}}{(P_{y,t}^a)^2} - (S_t)^2 \sigma_{Sy} \right) dt \tag{AV.25}$$

Der Erwartungswert der quadrierten Änderung des realen Wechselkurses lässt sich beschreiben durch:

$$\begin{aligned}
E_{t_0} \left[ \left( \frac{dRS}{RS} \right)^2 \right] &= E_{t_0} \left[ (\sigma_{RS} dz_{RS})^2 \right] \\
&= E_{t_0} \left[ (\sigma_x dz_x + \sigma_S dz_S - \sigma_y dz_y)^2 \right] \\
&= E_{t_0} \left[ \sigma_x^2 dt + \sigma_S^2 dt + \sigma_y^2 dt + 2\sigma_{xS} dt - 2\sigma_{xy} dt - 2\sigma_{Sy} dt \right] \\
&= (\sigma_x^2 + \sigma_S^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_{xS} - 2\sigma_{xy} - 2\sigma_{Sy}) dt
\end{aligned} \tag{AV.26}$$

Schließlich wird im Rahmen des nächsten Abschnitts eine Gleichung, die den Ausdruck

$E_{t_0} \left[ \frac{dRS}{RS} \frac{dW}{W} \right]$  unter Verwendung der exogenen stochastischen Prozesse beschreibt, benötigt.

Das Vorgehen gleicht demjenigen zur Bestimmung der erwarteten quadrierten Änderungen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
d[W^r] &= \frac{W}{P_x} \left\{ \left( b_a (i_a + \mu_S - i) + i - \frac{B}{W} - \mu_x + \sigma_x^2 - b_a \sigma_{Sx} \right) dt + b_a \sigma_S dz_S - \sigma_x dz_x \right\} \\
&= \frac{W}{P_x} \left\{ \mu_{W^r} dt + b_a \sigma_S dz_S - \sigma_x dz_x \right\}
\end{aligned} \tag{AV.27}$$

$$d[RS] = RS \left\{ \mu_{RS} dt + \sigma_x dz_x + \sigma_S dz_S - \sigma_y dz_y \right\} \tag{AV.28}$$

Nach Einsetzen folgt:

$$\begin{aligned}
E_{t_0} [dW^r dRS] &= E_{t_0} \left[ W^r RS (\mu_{W^r} dt + b_a \sigma_S dz_S - \sigma_x dz_x) (\mu_{RS} dt + \sigma_S dz_S + \sigma_x dz_x - \sigma_y dz_y) \right] \\
&= E_{t_0} \left[ W^r RS (b_a \sigma_S dz_S - \sigma_x dz_x) (\sigma_S dz_S + \sigma_x dz_x - \sigma_y dz_y) \right] \\
&= E_{t_0} \left[ W^r RS (b_a \sigma_S^2 + b_a \sigma_{Sx} - b_a \sigma_{Sy} - \sigma_{Sx} - \sigma_x^2 + \sigma_{xy}) dt \right] \\
&= W^r RS (b_a (\sigma_S^2 + \sigma_{Sx} - \sigma_{Sy}) - \sigma_{Sx} - \sigma_x^2 + \sigma_{xy}) dt
\end{aligned} \tag{AV.29}$$

## Appendix 6 Eine Darstellung der Optimalbedingung unter Verwendung der Nutzenfunktion

Um die Risikoaversion in Abhängigkeit der Nutzenfunktion zu beschreiben, wird nun gemäß der Weiterentwicklung von Breeden für die Existenz von mehreren Gütern beschrieben. Die Ableitung der Optimalbedingung nach B erlaubt die Formulierung eines Zusammenhangs zwischen J und V. Es folgt aus

$$0 = \max_{b, b_a, B^r} \left\{ \begin{aligned} & E_{t_0} \left[ \int_{t_0}^{t_1} V(B^r, RS, s) ds \right] + E_{t_0} \left[ \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial \alpha} dt \right] \\ & + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS} RS \left( \mu_x + \mu_S - \mu_y + \sigma_y^2 + \sigma_{xS} - \frac{\sigma_{xy}}{(P_{y,t}^a)^2} - (S_t)^2 \sigma_{yS} \right) dt \\ & + \frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r} W^r \left( b_a (i_a + \mu_S - i) + i - \frac{B^r}{W^r} - \mu_x + \sigma_x^2 - b_a \sigma_{xS} \right) dt \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial RS]^2} (RS)^2 \left( \sigma_x^2 + \sigma_S^2 + \sigma_y^2 + 2(\sigma_{xS} - \sigma_{yx} - \sigma_{yS}) \right) dt \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} (W^r)^2 (b_a^2 \sigma_S^2 - 2b_a \sigma_{xS}) \\ & + \frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial RS \partial W^r} RS W^r \left( b_a (\sigma_S^2 + \sigma_{xS} - \sigma_{yS}) - \sigma_{xS} - \sigma_x^2 + \sigma_{yS} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{AVI.1})$$

Wird dieses bekannte Maximierungsproblem nach dem mit den Preis des Gutes x normierten Konsumausgaben  $B^r$  abgeleitet, so erhält man

$$0 = \frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r} - \frac{\partial J(W_{t_0}^r, RS_{t_0}, t_0)}{\partial W^r} \quad (\text{AVI.2})$$

Gemäß dem Theorem der impliziten Funktionen folgt<sup>357</sup>

<sup>357</sup> Dieses Ergebnis folgt direkt aus dem Vorgehen von Breeden. Da das Verfahren dort ausführlich dargestellt wurde, wird hier nur das Ergebnis genannt. Zum Theorem der impliziten Funktionen vgl. Chiang (1984). S. 204 ff. Für die Analyse der Ableitungen impliziter Funktionen die hier verwendet wird vgl. insb. S. 207 f.



$$\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} = \frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} * \frac{\partial B^r}{\partial W^r} \quad (\text{AVI.3})$$

und

$$\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r \partial RS} = \frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} * \frac{\partial B^r}{\partial RS} + \frac{\partial V^2(B^r, RS)}{\partial B^r \partial RS} \quad (\text{AVI.4})$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage für die Analyse der Variablen RRA, RSA und RSA/RRA. Zunächst wird RRA in Abhängigkeit der indirekten Nutzenfunktion beschrieben. Aus der ersten Gleichung zusammen mit der Bedingung erster Ordnung folgt:

$$\begin{aligned} RRA &= - \frac{\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2} W^r}{\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} \\ &= - \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} \frac{\partial B^r}{\partial W^r} W^r}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} \\ &= RRA^V \frac{\partial B^r}{\partial W^r} \frac{W^r}{B^r} \\ &= RRA^V \varepsilon_{B^r, W^r} \end{aligned} \quad (\text{AVI.5})$$

$$RRA^V = - \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} B^r$$

mit

$$\varepsilon_{B^r, W^r} = \frac{\partial B^r}{\partial W^r} \frac{W^r}{B^r}$$

Die Variable  $\varepsilon_{B^r, W^r}$  beschreibt die Elastizität der mit dem Preis des Gutes x normierten Konsumausgaben nach dem in gleicher Weise normierten Vermögen. Die Annahme homogener Präferenzen unter Verwendung der ‚optimum value function‘ ist nur dann in eine

Nutzenformulierung mit gleichen Annahmen überführbar, wenn diese Elastizität international gleich ist.

Die Variable RSA kann ebenfalls unter Verwendung der indirekten Nutzenfunktion dargestellt werden. Ausgangspunkt ist die Definitionsgleichung

$$RSA = \frac{\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r \partial RS}}{\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} RS \quad (AVI.6)$$

Unter Verwendung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r \partial RS} = \frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} * \frac{\partial B^r}{\partial RS} + \frac{\partial V^2(B^r, RS)}{\partial B^r \partial RS} \quad (AVI.7)$$

gilt nach Division mit der Optimalbedingung erster Ordnung

$$\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r} = \frac{\partial V(B^r, RS, t_0)}{\partial B^r} \quad \text{und anschließender Multiplikation beider Seiten mit RS.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r \partial RS}}{\frac{\partial J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r}} RS &= \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} \frac{\partial B^r}{\partial RS} RS + \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{\partial B^r \partial RS}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} RS \\ &= \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} B^r \frac{\partial B^r}{\partial RS} \frac{RS}{B^r} + \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{\partial B^r \partial RS}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} RS \\ &= -RRA^V \varepsilon_{B^r RS} + \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{\partial B^r \partial RS}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} RS \end{aligned} \quad (AVI.8)$$

$$RRA^V = - \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} B^r$$

mit

Der zweite Term der rechten Gleichungsseite lässt sich unter Verwendung der Definition der indirekten Nutzenfunktion weiter vereinfachen. Die indirekte Nutzenfunktion ist definiert gemäß

$$V(B^r, RS) \equiv \max_{B^r = x + y * RS} [U(x, y, t)] = \max_{x, y} [U(x, y, t) + \lambda(B^r - (x + y * RS))] \quad (\text{AVI.9})$$

Für eine Ableitung der indirekten Nutzenfunktion nach dem realen Wechselkurs RS gilt

$$\frac{\partial V}{\partial RS} = -\lambda y \quad (\text{AVI.10})$$

Da der Lagrange-Multiplikator den Schattenpreis des Budgets, also der Konsumausgaben B, im Gleichgewicht beschreibt, gilt  $\lambda = \partial V / \partial B$ . Durch Einsetzen gilt

$$\frac{\partial V}{\partial RS} = - \frac{\partial V}{\partial B^r} y \quad (\text{AVI.11})$$

Diese Gleichung wird nun nach B<sup>r</sup> abgeleitet. Die konsumierte Menge des ausländisch produzierten Gutes y hängt von den Konsumausgaben ab. Es resultiert

$$\frac{\partial^2 V}{\partial RS \partial B^r} = - \left\{ \frac{\partial^2 V}{[\partial B^r]^2} y + \frac{\partial V}{\partial B^r} \frac{\partial y}{\partial B^r} \right\} \quad (\text{AVI.12})$$

$$RSA = -RRA^V \varepsilon_{B^r RS} + \frac{\frac{\partial^2 V(B^r, RS)}{\partial B^r \partial RS}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} RS$$

Der gesuchte Term in der Gleichung beschreiben. Es gilt

lässt sich nun

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial RS \partial B^r}}{\frac{\partial V}{\partial B^r}} RS &= - \frac{\left\{ \frac{\partial^2 V}{[\partial B^r]^2} y + \frac{\partial V}{\partial B^r} \frac{\partial y}{\partial B^r} \right\}}{\frac{\partial V}{\partial B^r}} RS \\ &= - \frac{\frac{\partial^2 V}{[\partial B^r]^2} B^r}{\frac{\partial V}{\partial B^r}} \frac{y}{B^r} RS - \frac{\partial y}{\partial B^r} RS \\ &= RRA^V \frac{y}{B^r} RS - \frac{\partial y}{\partial B^r} RS \end{aligned} \quad (\text{AVI.13})$$

Eingesetzt in die ursprüngliche Gleichung resultiert:

$$\begin{aligned} RSA &= -RRA^V \varepsilon_{B^r RS} + \frac{\frac{\partial^2 V(B^r, RS)}{\partial B^r \partial RS}}{\frac{\partial V(B^r, RS)}{\partial B^r}} RS \\ &= -RRA^V \varepsilon_{B^r RS} + RRA^V \frac{y}{B^r} RS - \frac{\partial y}{\partial B^r} RS \end{aligned} \quad (\text{AVI.14})$$

Der Term  $\frac{y}{B^r} RS$  beschreibt den Anteil am normierten Konsum, der auf ausländisch produzierte Güter entfällt. Die folgende Umformung veranschaulicht dies.

$$\begin{aligned} \frac{y}{B^r} RS &= \frac{y}{B/P_x} \frac{P_y^a S}{P_x} \\ &= \frac{y P_y^a S}{B} \end{aligned} \quad (\text{AVI.15})$$

Der Zähler beschreibt die Konsummenge des Gutes  $y$  multipliziert mit seinem in Inlandswährung ausgedrückten Preis. Der Nenner beschreibt die nominalen Konsumausgaben in Inlandswährung. Damit beschreibt der Quotient den Offenheitsgrad (OF) des Inlandes. Der letzte Term dieser Gleichung beschreibt den Anteil einer zusätzlichen normierten Steigerung der Konsumausgaben, die auf den Konsum des Gutes  $y$  entfällt. Der reale Wechselkurs dient der Umrechnung einer Einheit des Gutes  $y$  in Einheiten des Gutes  $x$ , um einen Vergleich mit den normierten Budgetausgaben zu ermöglichen. Dieser Term wird (MOF) genannt. Die obige Gleichung lässt sich nun beschreiben durch

$$\begin{aligned}
 RSA &= -RRA^V \varepsilon_{B^r RS} + RRA^V \frac{y}{B^r} RS - \frac{\hat{\Delta}y}{\partial B^r} RS \\
 &= -RRA^V \varepsilon_{B^r RS} + RRA^V OF - MOF
 \end{aligned}
 \tag{AVI.16}$$

Diese Formulierung lehnt sich eng an das Vorgehen von Breeden an,<sup>358</sup> der ebenfalls die ‚state variable‘ in drei Terme gliedert. Der Unterschied zur Breeden’schen Formulierung entsteht durch eine unterschiedliche Formulierung der Ausgangsgleichung. Breeden konzentriert sich auf eine Nachfragefunktion, so dass der Nenner aus der zweiten Ableitung der Nutzenfunktion und der partiellen Ableitung der Konsumausgaben nach dem Vermögen besteht. In der Formulierung dieser Arbeit kann durch Kürzen erreicht werden, dass der Nenner aus der ersten Ableitung der Nutzenfunktion nach den normierten Konsumausgaben besteht.

Schließlich lässt sich der Term  $RSA/RRA$  wie folgt beschreiben:

$$\frac{RSA}{RRA} = - \frac{\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r \partial RS}}{\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{[\partial W^r]^2}} P_y S
 \tag{AVI.17}$$

Es gilt unter Verwendung obiger Ergebnisse zur Ableitung der ‚optimum value function‘ gilt

<sup>358</sup> Vgl. Breeden (1979). S. 287 und Appendix 3.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r \partial RS}}{[\partial W^r]^2} P_y S &= \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} \frac{\partial B^r}{\partial RS}}{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} \frac{\partial B^r}{\partial RS}} P_y S + \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{\partial W^r}}{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} \frac{\partial B^r}{\partial RS}} P_y S \\
&= \frac{\frac{\partial B^r}{\partial W^r} P_y S}{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} \frac{\partial B^r}{\partial RS}} + \frac{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{\partial W^r}}{\frac{\partial V^2(B^r, RS)}{[\partial B^r]^2} \frac{\partial B^r}{\partial RS}} P_y S
\end{aligned} \tag{AVI.18}$$

Die Beschreibung der Nutzenfunktion lässt folgendes Ergebnis zu.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial RS \partial B^r}}{\frac{\partial^2 V}{\partial W^r} \frac{\partial W^r}}{[\partial B^r]^2 \frac{\partial RS}} P_y S}{\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial W^r} \frac{\partial W^r}}{[\partial B^r]^2 \frac{\partial RS}} P_y S} &= - \frac{\left\{ \frac{\partial^2 V}{[\partial B^r]^2} y + \frac{\partial V}{\partial B^r} \frac{\partial y}{\partial B^r} \right\}}{\frac{\partial^2 V}{\partial W^r} \frac{\partial W^r}}{[\partial B^r]^2 \frac{\partial RS}} P_y S \\
&= - \frac{y^* P_y S}{\frac{\partial W^r}{\partial RS}} - \frac{\frac{\partial V}{\partial B^r}}{\frac{\partial^2 V}{\partial W^r}} \frac{\frac{\partial y}{\partial B^r}}{\frac{\partial RS}} P_y S
\end{aligned} \tag{AVI.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{RSA}{RRA} &= - \frac{\frac{\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r \partial RS}}{[\partial W^r]^2 \frac{\partial RS}} P_y S}{\frac{\frac{\partial^2 J(W^r, RS, t_0)}{\partial W^r} \frac{\partial W^r}}{[\partial W^r]^2 \frac{\partial RS}} P_y S} \\
&= \frac{\frac{\partial B^r}{\partial W^r} P_y S}{\frac{\partial RS}} + \frac{y P_y S}{\frac{\partial W^r}} + \frac{B}{RRA} \frac{\frac{\partial y}{\partial B^r}}{\frac{\partial W^r}} P_y S
\end{aligned} \tag{AVI.20}$$

Die partielle Ableitung  $\frac{\partial B^r}{\partial W^r}$  beschreibt die Änderung der normierten Konsumausgaben bei einer Änderung des normierten Vermögens. Da der Konsum mit steigendem Vermögen in der Regel zunimmt, ist diese Ableitung positiv. Das gleiche gilt für die Steigerung der

Konsummenge des Gutes  $y$  bei steigenden normierten Konsumausgaben  $\frac{\partial y}{\partial B^r}$ . Die

$$\frac{\partial W^r}{\partial RS}$$

Beschreibung von  $\frac{\partial W^r}{\partial RS}$  ist aufwendiger, aber ebenfalls intuitiv einsichtig. Eine Beschreibung kann intuitiv durch eine Trennung von RS in seine Faktoren geschehen. Der Preis des Gutes y hat keine Auswirkungen. Der Wechselkurs wirkt über die Auslandsanlage positiv auf das Vermögen. Der Preis des Gutes x, der in beiden Fällen zur Normierung verwendet wird hat somit die gleiche Wirkungsrichtung. Daraus folgt, dass die partiellen Ableitungen in der Regel positiv sind und gilt  $RSA/RRA > 0$ . Dies wurde in der Arbeit postuliert.

## Appendix 7 Der Einfluss der Länderperspektive auf die ‚forward premia‘

Die Einführung der ‚forward premia‘ und die Überprüfung ihrer Prognosefähigkeit für die erwartete relative Wechselkursänderung wirft die Frage nach einer perspektivenunabhängigen Definition auf. Diese Problematik wurde von Payson analysiert. Payson<sup>359</sup> kritisiert die Formulierung der gedeckten Zinsparität in komparativ statischer Form als Ursache für eine Inkonsistenz bei einem Wechsel des Numeraire (Perspektive). Er geht von einer alternativen Darstellung der gedeckten Zinsparität aus. Sie wird beschrieben durch

$$\frac{i - i_a}{1 + i_a} = \frac{f_t - s_t}{s_t} \quad (\text{AVII.1})$$

Diese Darstellung ist nicht invariant bezüglich des Numeraires. Durch Darstellung in Auslandsnotation erhält man

$$\frac{i^a - i_a^a}{1 + i_a^a} = \frac{f_t^a - s_t^a}{s_t^a} \quad (\text{AVII.2})$$

Wie bereits ausführlich beschrieben lassen sich die Variablen in Inlandsperspektive transformieren. Daraus folgt

$$\frac{i_a - i}{1 + i} = \frac{\frac{1}{f_t} - \frac{1}{s_t}}{\frac{1}{s_t}} \quad (\text{AVII.3})$$

Der Vergleich des Zinsdifferentials in dieser Gleichung mit der Beschreibung der Inlandsperspektive zeigt, dass die Darstellung inkonsistent ist, wenn die internationalen Zinssätze nicht gleich sind. Es gilt

$$\frac{i - i_a}{1 + i_a} \neq - \frac{i_a - i}{1 + i} \quad (\text{AVII.4})$$

---

<sup>359</sup> Die folgende Analyse lehnt sich an Payson H. (1977), S. 40 - 47.



Die Divergenz wurde in dieser Arbeit bereits im Abschnitt zur Analyse des Näherungsfehlers der gedeckten Zinsparität dargestellt. Weiterhin gilt diese Inkonsistenz ebenfalls für die rechten Gleichungsseiten.

$$\frac{f_t - s_t}{s_t} \neq \frac{\frac{1}{f_t} - \frac{1}{s_t}}{\frac{1}{s_t}} \quad (\text{AVII.5})$$

Payson löst dieses Invarianzproblem durch eine Darstellung im ‘continuous time’ Ansatz. Ausgangspunkt ist die Taylor-Approximation der Funktion  $\ln(1 + x)$  and der Stelle ( $t = 1$ ) durch

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots\dots\dots \quad (\text{AVII.6})$$

Es sei  $x = (f_t - s_t)/s_t$ , so dass  $(1 + x) = 1 + f_t/s_t - 1 = f_t/s_t$  ist. Durch die Approximation gilt dann

$$\ln\left(\frac{f_t}{s_t}\right) = \frac{f_t - s_t}{s_t} - \frac{\left(\frac{f_t - s_t}{s_t}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{f_t - s_t}{s_t}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{f_t - s_t}{s_t}\right)^4}{4} \dots\dots\dots \quad (\text{AVII.7})$$

Vernachlässigt man  $[-x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \dots\dots\dots]$ , was einer Approximation zweiter Ordnung gleichkommt, so gilt

$$\frac{\ln(f_t) - \ln(s_t)}{1} = \ln\left(\frac{f_t}{s_t}\right) = \frac{f_t - s_t}{s_t} \quad (\text{AVII.8})$$

Auf die linke Gleichungsseite kann gleiches Vorgehen angewendet werden. Es sei  $x = (i - i_a) / (1 + i_a)$ . Unter Verwendung der Taylor Approximation gilt wieder

$$\ln\left(1 + \frac{i - i_a}{1 + i_a}\right) = \frac{i - i_a}{1 + i_a} - \frac{\left(\frac{i - i_a}{1 + i_a}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{i - i_a}{1 + i_a}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{i - i_a}{1 + i_a}\right)^4}{4} \dots\dots\dots \quad (\text{AVII.9})$$

Der Term  $(i-i_a)/(1+i_a)$  kann umgeformt werden zu  $[(1+i)-(1+i_a)]/(1+i_a) = (1+i)/(1+i_a)-1$ , so dass die linke Gleichungsseite beschrieben werden kann durch

$$\ln\left(1 + \frac{i-i_a}{1+i_a}\right) = \ln\left(\frac{1+i}{1+i_a}\right) = \ln(1+i) - \ln(1+i_a) \quad (\text{AVII.10})$$

Bei Vernachlässigung von  $[-x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \dots\dots]$  resultiert somit

$$\frac{\ln(f_t) - \ln(s_t)}{1} = \ln(1+i) - \ln(1+i_a) \quad (\text{AVII.11})$$

Es sei der Zinssatz  $i^c$  in der ‚continuous time form‘ definiert. Dies bedeutet, dass Zinszahlungen kontinuierlich geleistet werden, so dass jederzeit Zinszahlungen ihrerseits verzinst werden. Die Umrechnung erfolgt gemäß der Beziehung

$$(1+i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( P_n \left( 1 + \frac{i}{m} \right)^m \right) = P_n e^i \quad (\text{AVII.12})$$

mit  $P_n$  als Kurs der Anlage,  $i$  als nominalen Zinssatz und  $m$  als Anzahl der Zinsausschüttungen pro Jahr. Bezieht man sämtliche Variablen auf ein Jahr und wählt eine Anlage mit einem Kurswert von 100%, so lautet die Beziehung<sup>360</sup>

$$(1+i) = e^i = i^c \quad (\text{AVII.13})$$

Für den Auslandszins gilt:

$$(1+i_a) = e^{i_a} = i_a^c \quad (\text{AVII.14})$$

---

<sup>360</sup> Da von konstanter Nominalverzinsung ausgegangen wird, ist die Duration der Anlage nicht entscheidungsrelevant. Es ist jedoch wesentlich, dass bei angenommenen stochastischen Nominalzinsen die Duration eine Hedgemöglichkeit eröffnet. In Abhängigkeit des Kurs- und Wiederanlagerisikos ist die Wirkungsrichtung einer einprozentigen Zinsänderung in der unmittelbaren Zukunft (bei anschließend konstanter Verzinsung) unterschiedlich. Dieser Aspekt bleibt hier unberücksichtigt. Zur Duration vgl. Jüttner D. und

Weiterhin beschreibt die Taylor Approximation die relative Forwardprämie an der Stelle ( $t = 1$ ). Durch Einsetzen der Definitionen sowie von  $(1 = t)$  in obige Gleichung gilt

$$\frac{\ln(f_t) - \ln(s_t)}{t} = i^c - i_a^c \quad (\text{AVII.15})$$

Durch Multiplikation mit  $t$  und dem Schreiben beider Gleichungsseiten als e-Funktion

$$\frac{f_t}{s_t} = e^{i^c - i_a^c} \quad (\text{AVII.16})$$

$$\frac{f_t}{s_t} e^{i_a^c} = e^{i^c} \quad (\text{AVII.17})$$

Dieser Ausdruck beschreibt die gedeckte Zinsparität in ihrer ‘instantaneous’ Form. Die Zinssätze gelten in obiger Form unter der Annahme kontinuierlicher Zinszahlungen. Wesentlich ist jedoch, dass in dieser Schreibweise die Invarianz der gedeckten Zinsparität hinsichtlich der Wahl des Numeraire aufgehoben ist. Die Beschreibung der Zinsparität in der ‘instantaneous’ Form (3) verdeutlicht, dass für eine Änderung des Numeraire für die linke Gleichungsseite gilt

$$\begin{aligned} \frac{\ln\left(\frac{1}{f_t}\right) - \ln\left(\frac{1}{s_t}\right)}{t} &= \frac{\ln\left((f_t)^{-1}\right) - \ln\left((s_t)^{-1}\right)}{t} \\ &= \frac{-\ln(f_t) + \ln(s_t)}{t} \\ &= -\frac{\ln(f_t) - \ln(s_t)}{t} \end{aligned} \quad (\text{AVII.18})$$

Für die rechte Gleichungsseite gilt nach dem Wechsel des Numeraire aus Auslandsperspektive:

$$\begin{aligned}i_a^c - i_a^{a,c} &= i_a^c - i^c \\ &= \ln(1 + i_a) - \ln(1 + i) \\ &= -(\ln(1 + i) - \ln(1 + i_a))\end{aligned}\tag{AVII.19}$$

Die gedeckte Zinsparität ist somit im ‚continuous time‘ konsistent formuliert. Ursache für die Inkonsistenz in der komparativ statischen Schreibweise ist die Ungenauigkeit durch die Taylor Approximation. Dies wird häufig nicht berücksichtigt.<sup>361</sup>

---

<sup>361</sup> Vgl. die Darstellung der komparativ statischen Modelle in dieser Arbeit.

## Literaturverzeichnis

- Aboudi, R. und Thon, D. (1993) Expected Utility and the Siegel Paradox: A Generalization, in *Journal of Economics*, 57, S. 69 - 93.
- Adjouté, K. und Tuchschnid, N. S. (1996) Exchange Rate Dynamics, Currency Risk and International Portfolio Strategies, in *Finanzmarkt und Portfoliomanagement*, 10, S. 445 - 462.
- Adler, M. und Dumas, B. (1984) International Portfolio Choice and Corporation Finance: A Synthesis, in *Journal of Finance*, 39, S. 925 – 984.
- Ahearne, A.G. Grier, W.L. und Warnock, F.E. (2000) Information costs and home bias: An analysis of US holdings of foreign equities. In Board of Governors of the Federal Reserve System International Discussion Paper, No. 691, Dezember.
- Aizeman, J. (1997) International Portfolio Diversification with Generalized Expected Utility Preferences, in NBER Working Papers No. 5965.
- Aliber, R. (1973) The Interest Rate Parity Theorem: A Reinterpretation, in *Journal of Political Economy*, 81, S. 1451 – 1459.
- Allen, H. und Taylor, M. P. (1989) Charts, Noise und Fundamentals: A Study of the London Foreign Exchange Market, in *The Economic Journal*, 100, S. 49-59.
- Arrow, K. J. (1971) *Essays in the Theory of Risk Bearing*, New York.
- Bachelier, L. (1964) Theory of Speculation, in Cootner, Paul (ed.) *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge.
- Balassa, B. (1964) The Purchasing Power Parity Doctrine: A Reappraisal, in *Journal of Political Economy*, 72, S. 584 – 596.

- Ballinger, T. P. und Wilcox, N. T. (1997) Decisions, Error and Heterogeneity, in *The Economic Journal*, 107, S. 1090 - 1105.
- Baillie, R.T., und Bollerslev, T. (2000), The forward premium anomaly is not as bad as you think, in *Journal of International Money and Finance*, 19, S. 471-488.
- Baillie, R. und McMahon, P.C. (1989) *The Foreign Exchange Market, Theory and Econometric Evidence*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bank for International Settlement (2001), Why has global FX turnover declined? Explaining the 2001 triennial survey, *BIS Quarterly Review*, December.
- Bansal, R. (1997) An Exploration of the Forward Premium Puzzle in Currency Markets, in *The Review of Financial Studies*, 10, S. 369 - 403.
- Bansal, R und Dahlquist, M. (2000), The Forward Premium Puzzle: Different Tales from Developed and Emerging Economies, in *Journal of International Economics*, No. 51(1), S. 115-144.
- Bardhan, P. (1995) Exchange Rate Shocks, Currency Options and the Siegel Paradox, in *Journal of International Money and Finance*, 14, S. 441 - 458.
- Bates, D. S. (1997) The Skewness Premium: Option Pricing under Asymmetric Processes, in *Advances in Futures and Options Research*, 9, S. 51 - 82.
- Baxter, M. und Jermann, U. (1997) The International Diversification Puzzle is Worse Than You Think, in *American Economic Review*, 87, S. 170 - 180.
- Bayoumi, T. (1998) Is There a World Capital Market, Working Paper held at the Kiel Week Conference 'Globalization and Labor' June 24-25 1998, Kiel Institute of World Economics, Kiel.

- Bekaert, G., Hodrick, R. S. und Marshall, D. A. (1997) The Implications of First-Order Risk Aversion for Asset Market Risk Premiums, in *Journal of Monetary Economics*, 40, S. 3 - 39.
- Bekaert, G. und Hodrick, R. S. (1992) Characterizing Predictable Components in Excess Returns on Equity and Foreign Exchange Markets, in *The Journal of Finance*, 47, S. 467 - 509.
- Bekaert, G. und Hodrick, R. S. (1993) On Biases in the Measurement of Foreign Exchange Risk Premiums, in *Journal of International Money and Finance*, 12, S. 115 -138.
- Bellman, R. (1957) *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton.
- Benassy-Quere, A. und Raymend, H. (1997) Les Anticipations de Change d'après les Données d'enquêtes , un Bilan de la Litterature, in *Revue de Economique Politique*, 4, S. 422 - 456.
- Berk, J. (1997) Necessary Conditions for the CAPM, in *Journal of Economic Theory*, 73, S. 245 - 257.
- Bernhardsen, T. (1997) A Test of Uncovered Interest Parity for Ten European Countries Basen on Bootstrapping and Panel Data Models, Working Paper 1997,9, Research Department, Norges Bank.
- Bodurtha, J. und Courtadon, G. (1987) Test of an American Option Pricing Model on the Foreign Exchange Market, in *Journal of Financial and Quantitative Economics*, 22, S. 153 - 167.
- Borch, K. (1969) A Note on Uncertainty and Indifference Curve, in *Review of Economic Studies*, 36, S. 1 - 4.
- Branson, W. (1984) Comments, in *European Economic Review*, 32, S. 1119 – 1121.

- Breeden, D. (1979) An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption Opportunities, in *Journal of Financial Economics*, 7, S. 265 - 296.
- Breeden, D., Gibbons, M. und Litzenberger, R. (1989), Empirical Tests of the Consumption-Oriented CAPM, in *The Journal of Finance*, 44, S. 231 - 262.
- Bresciani-Turroni (1934) The Purchasing Power Parity Doctrine, in *L'Egypte Contemporaine*, 25, S. 433 - 464
- Brigden, A., Martin, B. und Salmon, C. (1997) Decomposing Exchange Rate Movements According to the Uncovered Interest Rate Parity Condition, in *Bank of England Quarterly Bulletin*, 37, S. 377 - 390.
- Canova, F. und Marrinan, J. (1993) Profits, Risk and Uncertainty in Foreign Exchange Markets, in *Journal of Monetary Economics*, 32, S. 259 - 286.
- Cassel, G. (1916) The Present Situation of the Foreign Exchange, in *Economic Journal*, 28, S. 413 – 415.
- Cheung, Y-W. und Chinn, M. (1995) Integration, Cointegration and the Forecast Consistency of Structural Exchange Rate Models, Working Paper 314, University of California, Santa Cruz.
- Chiang, A.C. (1984) *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Mac Graw Hill, Singapore.
- Chiang, A.C. (1992) *Elements of Dynamic Optimization*, Mac Graw Hill, New York.
- Chinn, M. und Frankel, J.A. (1994) More Survey Data on Exchange Rate Expectations: More Currencies, More Horizons, More Tests, Working Paper 312, University of California, Santa Cruz.



- Chionis, D. und MacDonald, R. (1997) Some Tests of Market Microstructure Hypothesis in the Foreign Exchange Market, in *Journal of Multinational Financial Management*, 7, S. 203 - 229.
- Christensen, M. (1997) Uncovered Interest Rate Parity and Time Varying Risk Premia – The Case of Denmark, Working Paper D 97-4, The Aarhus School of Business, Dänemark.
- Clarida, R. H. und Taylor, M. P. (1997) The Term Structure of Forward Exchange Premiums and the Forecastability of Spot Exchange Rates: Correcting the Errors, in *The Review of Economics and Statistics*, 79, S. 353 - 361.
- Clostermann, J. (1996) Der Einfluss des Wechselkurses auf die Deutsche Handelsbilanz, Diskussionspapier 7/96, Deutsche Bundesbank, Frankfurt/Main.
- Coakley, J. H. und Fuerts, G. (1997) New Tests of the Exchange Rate Interest Rate Differential Relation in an OECD Panel, Working Paper, Birkbeck College, London.
- Constantinides, G. M. (1990) Habit Formation: A Resolution of the Equity Puzzle, in *Journal of Political Economy*, 98, S. 519 - 543.
- Courakis, A. (1989) Does Constant Relative Risk Aversion Imply Asset Demands that are Linear in Expected Returns? In *Oxford Economic Papers*, 41, S. 553 -566.
- Cox, D. und Miller, H. (1968) *The Theory of Stochastic Processes*, Wiley, New York.
- Cox, J. C. und Ross, A. (1978) The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, in *Journal of Financial Economics*, 3, S. 145 - 166.
- Cox, J.C., Ingersoll, J. und Ross, A. (1985) An Intertemporal Equilibrium Model of Asset Prices, in *Econometrica*, 53, S. 363 - 384.

- Cumby, R. (1988) Is It Risk? Explaining Deviations from Uncovered Interest Parity, in *Journal of Monetary Economics*, 22, S. 279- 299.
- Cumby, R., Figlewski, S. und Hsabruck, J. (1994) International Asset Allocation with Time Varying Risk: An Analysis and Implementation, in *Japan and the World Economy*, 6, S. 1 - 25.
- Cuthbertson, K. (1997) *Quantitative Financial Economics*, Wiley, New York.
- DeGrauwe, P. und Dewachter, H. (1993) A Chaotic Model of the Exchange Rate: The Role of Fundamentalists and Chartists, In: *Open-economy Macroeconomics: Proceedings of a Conference held in Vienna by the International Economic Association / Frisch, Helmut*.
- De Koning, C. und Straetmanns, S. (1997) Variation in the Slope Coefficient of the Fama Regression for Testing Uncovered Interest Rate parity: Evidence from Fixed and Time-Varying Coefficient Approaches, Discussion Paper 97,14, Tinbergen Institute.
- Delgado, F. und Dumas, B. (1994) How Far Can Two Riskless Interest Rates Be?, Working Paper 94,18, Rodney L. White Center for Financial Research.
- Dieckheuer, G. (1991) *Internationale Wirtschaftsbeziehungen*, 2. Auflage, Oldenbourg, München.
- Domowitz, I. und Hakkio, C. (1985) Conditional Variance and the Risk Premium in the Foreign Exchange Market, in *Journal of International Economics*, 19, S. 47 -66.
- Dorfman, R. (1969) An Economic Interpretation of Optimal Control Theory, in *American Economic Review*, 59, S. 817 – 831.
- Duffie, D. (1996) *Dynamic Asset Pricing*, 2. Auflage, Princeton, Princeton.
- Dumas, B. (1977) Discussion, in *The Journal of Finance*, 32, S. 512 - 515.

- Dumas, B. (1988) Pricing Physical Assets Internationally, NBER Working Paper 2569, Cambridge.
- Dumas, B. (1993) Partial vs. General Equilibrium Models of the International Capital Market, in Ploeg van der, Rick (ed.) Handbook of International Macroeconomics, Basil Blackwell, London.
- Dumas, B. (1994) Some Models of the International Capital Markets, in European Economic Review, 38, S. 923-931.
- Dumas, B. (1994b) A Test of the International CAPM using Business Cycles Indicators as Instrumental Variables, NBER Working Paper 4657, Cambridge.
- Dumas, B. und Luciano, E. (1990) An Exact Solution to the Portfolio Choice Problem under Transaction Costs, Working Paper CR 350/1990, Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris, Paris.
- Dumas, B. und Solnik, B. (1993) The World Price of Exchange Rate Risk, Working Paper, HEC School of Management, Jouy-en-Josas Cedex.
- Einzig, P. (1970) The History of Foreign Exchange, 2. Auflage, London.
- Elliot, G. und Ito, T. (1998) Heterogeneous Expectations and Tests of Efficiency in the Yen/Dollar Forward Exchange Rate Market, Working Paper, Department of Economics, San Diego.
- Elton, E. J. und Gruber, M. S. (1984) Non-Standard CAPM's and the Market Portfolio, in The Journal of Finance, 39, S. 911 - 924.
- Elton, E.J. und Gruber, M.S. (1974) Portfolio Theory when Investment Relatives are Lognormally Distributed, in The Journal of Finance, 29, S. 1265 - 1273.

- Elton, E.J. und Gruber, M.S. (1991) International Diversification from a Swiss Perspective, in *Finanzmarkt und Portfolio Management*, 5, S. 120 - 129.
- Engel, C. (1984) Testing for the Absence of Expected Real Profits from Forward Market Speculation, in *Journal of International Economics*, 17, S. 299 - 308.
- Engel, C. und Rodrigues, A. P. (1989) Tests of International CAPM with Time-Varying Covariances, in *Journal of Applied Econometrics*, 4, S. 119 - 138.
- Engel, C. (1992) The Risk Premium and the Liquidity Premium in Foreign Exchange Markets, in *International Economic Review*, 33, S. 871 -879.
- Engel, C. (1992) On the Foreign Exchange Risk Premium in a General Equilibrium Model, in *Journal of International Economics*, 32, S. 305 – 319
- Engel, C. (1996) A Model of Foreign Exchange Rate Indetermination, NBER Working Paper 5766, Cambridge.
- Epstein, L. G. (1988) Risk Aversion and Asset Prices, in *Journal of Monetary Economics*, 22, S. 179 - 182.
- Epstein, L.G. und Zin, S. E. (1990) ‚First Order‘ Risk Aversion and the Equity Puzzle, in *Journal of Monetary Economics*, 26, S. 387 - 407.
- Fama, E. (1984) Forward and Spot Exchange Rates, in *Journal of Monetary Economics*, 14, S. 319 - 338.
- Fehlker, C. (1998) Policy Matters, Research Monograph, Chulalongkorn University, Thailand.
- Feldstein, M. und Horioka, C. (1980) Domestic Savings and International Capital Flows, in *Economic Journal*, 90 , S. 314 – 329.

- Feldstein, M. (1969) Mean-Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection, in *Review of Economic Studies*, 36, S. 5 - 12.
- Feller, W. (1966) *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2, New York.
- Fischer (1922) *The Making of Index Numbers*, Cambridge.
- Fisher (1907) *The Rate of Interest*, MacMillan, New York.
- Fixler, D. (1993) The Consumer Price Index: Underlying Concepts and Caveats, in *Monthly Labor Review*, 12, S. 3-12.
- Flemming und Turnowsky, S und Kemp (1976) On the Choice of Numeraire and Certainty Price in General Equilibrium Models of Price Uncertainty, in *Review of Economic Studies*, 43, S. 573 - 583.
- Flood, R. P. und Rose, A. K. (1996) Fixes: Of the Forward Discount Puzzle, in *The Review of Economics and Statistics*, 78, S. 748 - 752.
- Flood, R. P. und Rose, A. K. (2001) Uncovered Interest Rate Parity in Crisis: The Interest Rate Defense in the 1990s, IMF Working Paper, WP/01/207.
- Frankel, J. A. (1979) The Diversifiability of Exchange Risk, in *Journal of International Economics*, 9, S. 379 - 393.
- Frankel, J. A. (1986) The Implications of Mean Variance Optimization for Four Questions in Interantional Macroeconomics, in *Journal of International Money and Finance*, 5, S. 53 - 75

- Frankel, J. A. (1988) Recent Estimates of Time Variation in the Conditional Variance and in the Exchange Risk Premium, in *Journal of International Money and Finance*, 7, S. 115 - 125.
- Frankel, J. A. und MacArthur, A. T. (1988) Political vs. Currency Premia in International Real Interest Differentials, in *European Economic Review*, 32, S. 1083 - 1121.
- Frankel, J. A. und Chinn, M. (1993) Exchange Rate Expectations and the Risk Premium: Tests for a Cross Section of 17 Currencies, in *Review of International Economics*, 1, S. 136 –144.
- Frankel, J. A. und Rose, A. (1996) A Panel Project on Purchasing Power Parity: Mean Reversion within and Between Countries, in *Journal of International Economics*, 40, S. 209 - 224.
- Frenkel, J. A. (1973) Elasticities and the Interest Parity Condition, in *Journal of Political Economy*, 81, S. 741 – 747.
- Frisch, R. (1930) Necessary and Sufficient Conditions Regarding the Form of an Index Number which shall Meet Certain of Fischer's Tests, in *Journal of Statistician Society*, 25, S. 297 - 406
- Froot, K. A. und Thaler, R. H. (1990) Anomalies: Foreign Exchange, *Journal of Economic Perspectives*, 4, S. 179 – 192.
- Ghosh, A. (1997) Risk-Free Profits with Forward Contracts in Exchanges Rates and Interest Rates, in *Journal of Multinational Financial Management*, 7, S. 253-264.
- Giovannini, A. und Jorion, P. (1987) Interest Rates and Risk Premia in the Stock Market and in the Foreign Exchange Market, in *Journal of International Money and Finance*, 6, S. 107 - 123.

- Grauer, F., Litzenberger, R. und Stehle, R. (1976) Sharing Rules and Equilibrium in an Interantional Capital Market under Uncertainty, in *Journal of Financial Economics*, 3, S. 233 - 256.
- Greene, W. (2000) *Econometric Analysis*, Prentice Hall, London.
- Hakansson, N. H. (1977) The Superfund: Efficient Paths towards Efficient Capital Markets in Large and Small Countries, in Levy and Sarnat eds, *Financial Decision Making under Uncertainty*.
- Hall, P. (1988) Rationality and Siegel's Paradox, the Importance of Coherency in Expectations, in *Applied Economics*, 20, S. 1533 - 1540.
- Hansen, L. P. und Hodrick, R. J. (1983) Risk Averse Speculation in the Forward Foreign Exchange Market: An Econometric Analysis of Linear Models, in Frenkel, Jacob (ed.) *Exchange Rates and International Macroeconomics*, University of Chicago Press, Chicago.
- Harvey, J. T. (1991) The World Price of Covariance Risk, in *The Journal of Finance*, 46, S. 111 - 157.
- Harvey, J. T., Solnik, B. und Zhou, G. (1994) What Determines Expected Interantional Asset Returns?, Working Paper, Les cahiers de recherche : Groupe HEC ; 506, Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris.
- Harvey, J. T. und Quinn, S. (1997) Expectations and Rational Expectations in the Foreign Exchange Market, in *Journal of Economic Issues*, 31, S. 615 - 622.
- Heckerman, D. G. (1972), Portfolio Selection and the Structure of Capital Asset Prices when Relative Prices of Consumption Goods may Change, in *The Journal of Finance*, 47, S. 47 - 60.

- Henderson, J. M. und Quandt, R. E. (1980) *Microeconomic Theory, A Mathematical Approach*, McGraw-Hill, London.
- Herring, R. J. und Marston, C. (1976) *The Forward Market and Interest Rates in Eurocurrency and National Money Markets*, in Stem, Carl und Makin, John und Logue Dennis (eds.) *Eurocurrencies and the International Money Markets*.
- Hodrick, R. J. und Srivastava, S. (1984) *An Investigation of Risk and Return in Forward Foreign Exchange*, in *Journal of International Money and Finance*, 3, S. 5 -29.
- Hodrick, R. J. und Srivastava, S. (1986) *The Covariation of Risk Premiums and Expected Future Spot Exchange Rates*, in *Journal of International Money and Finance*, 5, S. 5 - 21.
- Homaifar, G. (1995) *Official Intervention in the Foreign Exchange Market and the Random Walk Behaviour of Exchange Rates*, in *Economia Internazionale*, 48, S. 359 - 373.
- Hull, J. C. (1997) *Options, Futures and Other Derivatives*, 3. Auflage, Prentice Hall, London.
- Humphrey, T. M. (1979) *The Purchasing Power Parity Doctrine*, in *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Review*, , S. 3 – 11
- Ingersoll, E. (1987) *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, London.
- Isard, P. (1995) *Exchange Rate Economics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Jagannathan, R. und Wang, Z. (1993) *The CAPM is Alive and Well*, Working Paper, Federal Reserve Bank of Minneapolis, presented at the Fourth Annual Conference on Financial Economics and Accounting, Washington University, St. Louis.
- Jüttner, D. J. und Hawtrey, K.M. (1997), *Financial Markets, Money and Risk*, 4. Auflage, Addison Wesley, South Melbourne.



- Kamien, M. I. und Schwartz, N. L. (1981) *Dynamic Optimization*, North Holland, New York.
- Kaminsky, G. und Peruga, R. (1990) Can a Time-Varying Risk Premia Explain Excess Returns in the Forward Market for Foreign Exchange?, in *Journal of International Economics*, 28, S. 47 - 70.
- Keynes, J. M. (1923) *A Tract on Monetary Reform*, Macmillan, London.
- Kirchgässner, G. und Wolters, J. (1990) Uncovered Interest Parity, Interest Linkage, or Independence?, in *Jahrbuch für Sozialwissenschaften*, 41, S. 289 - 309.
- Kirchgässner, G. und Wolters, J. (1993) Uncovered Interest Parity Condition Between the United States and Europe Under Different Exchange Rate Regimes, in Frowen, (ed.) *Monetary Theory and Monetary Policy: New Tracks for the 1990s*, MacMillan, London.
- Koopmans, T. C. (1960) Stationary Ordinal Utility and Impatience, in *Econometrica*, 28, S. 287 - 309.
- Krasker, W. (1980) The Peso Problem in Testing the Efficiency of Forward Exchange Markets, in *Journal of Monetary Economics*, 6, S. 269 - 276.
- Krugman, P. R. und Obstfeld, M. (1997) *International Economics*, 4. Auflage, New York.
- LeRoy, S. F. (1973) Risk Aversion and the Martingale Property of Stock Prices, in *International Economic Review*, 14, S. 436 - 446.
- Levich, R. M. (1985) Empirical Studies of Exchange Rates: Price Behaviour, Rate Determination and Market Efficiency, in Jones and Grossman (eds.). *Handbook of International Economics*, North Holland, Amsterdam.
- Lewis, K. K. (1996) What can Explain the Apparent Lack of International Consumption Risk Sharing?, in: *Journal of Political Economy*, 104, S. 267 - 297.

- Lintner, J. (1965) Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification, in *The Journal of Finance*, 20, S. 587 - 615.
- Lisi, F. und Medio, A. (1997) Is a Random Walk the Best Exchange Rate Predictor?, in *International Journal of Forecasting*, 13, S. 255 - 267.
- Liu, T. R., Gerlow, M. E. und Irwin, S. H. (1994) The Performance of Alternative VAR Models in Forecasting Exchange Rates, in *International Journal of Forecasting*, 10, S. 419 - 433.
- Lucas, R. (1972) Expectations and the Neutrality of Money, in *Journal of Economic Theory*, 6, S. 103 - 124.
- Lucas, R. (1978) Asset Prices in an Exchange Economy, in *Econometrica*, 46, S. 1429 -1445.
- Lucas, R. (1982) Interest Rates and Currency Prices in a Two-Country World, in *Journal of Monetary Economics*, 10, S. 335 – 360.
- Lyons, R. (1988) Test of the Foreign Exchange Risk Premium Using the Expected Second Moments Implied by Option Pricing, in *Journal of International Money and Finance*, 7, S. 91- 108.
- MacDonald, R. und Taylor, M. P. (1989) Interest Rate Parity: Some Evidence, in *Bulletin of Economic Research*, 41, S. 255 – 274.
- MacDonald, R. und Moore, M. J. (1996) Long Run Purchasing Power Parity and Structural Change, in *Economie Appliquee*, 44, S. 11 - 48.
- Machina, M. J. (1982) ‚Expected Utility’ Analysis without the Independence Axiom, in *Econometrica*, 50, S. 277-323.

- Maloney, K. und Yawitz, J. (1986), Interest Rate Risk, Immunization, and Duration, in The Journal of Portfolio Management, S. 41 - 48.
- Malz, A (1997) Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices, in The Journal of Derivatives, 4, S. 18 - 36.
- Mark, N. C. (1985) Some Evidence on the International Equality of Real Interest Rates, in Journal of International Money and Finance, 4, S. 189 – 208.
- Marston, R. (1993) Interest Differentials Under Bretton Woods and the Post Bretton Woods Float: The Effects of Capital Controls and Exchange Risk, in Bordo und Eichengreen (eds.) A Retrospective on the Bretton Woods System : Lessons for International Monetary Reform, Chicago University Press, Chicago.
- Martinez, G. A. (1998) Extracting Market Views from the Price of Options on Futures, in The Journal of Futures Markets, 18, S. 1 - 34.
- McCallum, T. B. (1994) A Reconsideration of the Uncovered Interest Parity Relationship, Journal of Monetary Economics, 33, S. 105 - 132.
- McCulloch, H. (1972) The Role for Expected Value Analysis for Speculative Decisions in the Forward Market, in Quarterly Journal of Economics, 86, S. 170 - 172.
- McCurdy, T. und Morgan, I. (1991) Tests for a Systematic Risk Component in Deviations from Uncovered Interest Parity, in Review of Economic Studies, 58, S. 587 -602.
- Meredith, G. und Ma, Y. (2002), The Forward Premium Puzzle Revisited, in: IMF Working Paper, WP/02/28.
- Merton, C. (1969) Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous Time Case in Review of Economics and Statistics, 51, S. 247 - 257.

- Merton, R. C. (1971) Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model, in *Journal of Economic Theory*, 3, S. 373 - 413.
- Merton, R. C. (1972) An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier, in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7, S. 1851 - 1872.
- Merton, R. C. (1973) An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, in *Econometrica*, 41, S. 867 - 887.
- Merton, R. C. (1975) Theory of Finance from the Perspective of Continuous Time, in *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 10, S. 659 - 674.
- Merton, R. C. (1982) On the Mathematics and Economics Assumptions of Continuous Time Models, in Sharpe W.F and Cootner C.M. (eds.) *Essays in Honor of Paul Cootner*, Prentice Hall, Englewoods Cliffs.
- Merton, R. C. (1998) *Continuous Time Finance*, Blackwell, Oxford.
- Merton, R. C. und Samuelson, P. A. (1974) Fallacy of the Log-Normal Approximation to Optimal Portfolio Decision-Making over Many Periods, in *Journal of Financial Economics*, 1, S. 67 – 94.
- Milton, J. S. und Arnold, H. H. (1990) *Introduction to Probability and Statistics*, McGraw Hills, Singapore.
- Mishkin, F. S. (1984) Are Real Interest Rates Equal across Countries? An Empirical Investigation of International Parity Conditions, in *Journal of Finance*, 39, S. 1345 – 1357.
- Mishkin, F. S. (1984) The Real Interest Rate: A Multi-Country Empirical Study, in *Canadian Journal of Economics*, 17, S. 283 – 311.

- Monadjemi, M. S. (1990) Testing the Degree of Capital Mobility, in Australian Economic Papers, 29, S. 29 – 39.
- Mojtahedi, H. (1991) Multiple Maturities and Time-Varying Risk Premia in Forward Exchange Markets, in Journal of International Economics, 30, S. 69 - 86.
- Moosa, I. A. und Bhatti, R. (1997) International Parity Conditions, Theory, Econometric Testing and Empirical Evidence, MacMillan Press, London.
- Mossin, J. (1966) Equilibrium in a Capital Asset Market, in Econometrica, 35, S. 768 - 783.
- Muth, J. F. (1961) Rational Expectations and the Theory of Price Movements in: Econometrica, 29, S. 315 - 335.
- Nelson, C. M. und Plosser, C. I. (1982) Trend and Random Walks in Macroeconomic Time Series, in Journal of Monetary Economics, 10, S. 139 - 162.
- Nelson, C. M. und Plosser, C. I. (1982) Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series, in Journal of Monetary Economics, 10, S. 139 - 162.
- Nelson, C. M. und Plosser, C. I. (1982) Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series, in Journal of Monetary Economics, 10, S. 139 - 162.
- Nelson, C. M. und Plosser, C. I. (1982) Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series, in Journal of Monetary Economics, 10, S. 139 - 162.
- Nelson, C. M. und Plosser, C. I. (1982) Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series, in Journal of Monetary Economics, 10, S. 139 - 162.
- Nelson, C. M. und Plosser, C. I. (1982) Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series, in Journal of Monetary Economics, 10, S. 139 - 162.
- Nessen, M. (1997) Exchange Rate Expectations, the Forward Exchange Rate Bias and the Risk Premia in Target Zones, in Open Economies Review, 8, S. 99 - 136.
- Ng, Y. K. und Faust, K. (1993) Interest Rate Parity and Divergence of Views on Exchange-Rate Changes: An Upward-Sloping Supply Curve of Funds even for a Small Country, in Australian Economic Papers, 32, S. 272 - 283.
- Obstfeld, M. (1992) Dynamic Optimization in Continuous Time Economic Models, Working Paper.
- Obstfeld, M. und Rogoff, K. (1996) Foundations in International Macroeconomics, MIT Press, London.
- Payson, I. H. (1977) The Interest Parity Theorem, Invariance, and the Instantaneous Forward Premium, in Weltwirtschaftliches Archiv, 113, S. 40 – 47.

- Pentecost, E. J. (1993) *Exchange Rate Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Pratt, J. W. (1964) Risk Aversion in the Small and in the Large, in *Econometrica*, 32, S. 122 - 136.
- Rogoff, K. (1996) The Purchasing Power Parity Puzzle, in *Journal of Economic Literature*, 34, S. 647 - 668.
- Roll, R. (1977) A Critique of Asset Pricing Theory's Tests, in *Journal of Financial Economics*, 4, S. 1073 - 1103.
- Roll, R. (1979) Violations of Purchasing Power Parity and Their Implications for Efficient International Commodity Markets, in Sarnat und Szego (eds.) *International Finance and Trade*, Ballinger, Cambridge.
- Roper, D. E. (1972) The Role for Expected Value Analysis for Speculative Decisions in the Forward Market, in *Quarterly Journal of Economics*, 86, S. 157 - 170.
- Rosenberg, M. R. (1996) *Currency Forecasting, a Guide to Fundamental and Technical Models of Exchange Rate Determination*, Irwin, Chicago.
- Rothschild, M. und Stiglitz, J. E. (1970) Increasing Risk I: A Definition, in *Journal of Economic Theory*, 2, S. 225 - 243.
- Rothschild, M. und Stiglitz, J. E. (1971) Increasing Risk II: Ist Economic Consequences, in *Journal of Economic Theory*, 3, S. 66 - 84.
- Rubinstein, L. O. (1977) The Strong Case for the Generalized Logarithmic Utility Model as the Premier Model of Financial Markets, in Levy und Sarnat (eds.) *Financial Decision Making under Uncertainty*.
- Samuelson, P. A. (1964) Theoretical Notes on Trade Problems, in *Review of Economics and Statistics*, 46, S. 145 - 154.

- Samuelson, P. A. (1974) Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly, in Bicksler und Samuleson (eds.), Investment Portfolio Decision Making, London.
- Samuelson, P. A. und Swamy, S. (1974) Invariant Economic Index Numbers and Canonical Duality: Survey and Synthesis, in American Economic Review, 64, S. 566 – 593.
- Sargent, T. J. (1987), Macroeconomic Theory, Academic Press, NewYork.
- Segal, U. und Spivak, A. (1990) First Order versus Second Order Risk Aversion, in Journal of Economic Theory, 51, S. 111 - 125.
- Senbet, L. (1979) International Capital Market Equilibrium and the Multinational Firm Financing and Investment Policies, in Journal of Financial and Quantitative Analysis, 14, S. 455 - 477.
- Sercu, P. (1980) A Generalisation of the International Asset Pricing Model, Onderzoeksrapport Nr. 8002, University Leuven.
- Serita, T. (1991) Risk Premiums and International Asset Pricing, in The Economic Studies Quarterly, 42, S. 27- 70.
- Sharpe, W. F. (1964) Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, in The Journal of Finance, 19, S. 425 - 442
- Siegel, J. J. (1972) Risk, Interest Rates and the Forward Exchange, in: Quarterly Journal of Economics, 86, S. 303 - 309.
- Siegel, D. (1972) The Role for Expected Value Analysis for Speculative Decisions in the Forward Market, in Quarterly Journal of Economics, 86, S. 173 - 175.
- Sinn, G. (1989) Expected Utility and the Siegel Paradox, in Journal of Economics Zeitschrift für Nationalökonomie, 3, S. 257 - 268.

- Sinn, G. (1990) Paradoxa in der Volkswirtschaftslehre, Festvortrag anlässlich der akademischen Feier des sechzigsten Geburtstages von Hans H. Nachtkamp, 22. November 1990, in Jahrbuch für Sozialwissenschaften, 42, S. 263-277.
- Smith, D. (1997) International Parity Relationships: A Summary of the Recent Evidence, Working Paper, Discussion papers in economics, finance and international competitiveness ; 43, Queensland University of Technology.
- Solnik, B. H.(1974) The International Pricing of Risk: An Empirical Investigation of the World Capital market Structure, in Journal of Finance, 29, S. 365 – 378.
- Solnik, B. H. (1974), An Equilibrium Model of the International Capital Market, in Journal of Economic Theory, 8, S. 500 - 524.
- Solnik, B. H. (1977) Testing International Asset Pricing: Some Pessimistic Views, in The Journal of Finance, 32, S. 503 - 517.
- Solnik, B. H. (1979) International Parity Conditions and Exchange Risk, in Sarnat, Marschall und Szegö, Giorgio (eds.) International Finance and Trade, Volume 1, S. 83 - 97.
- Spraos, J. (1953) The Theory of Forward Exchange and Recent Practice in The Manchester School of Economic and Social Studies, 21 S. 87 – 117.
- Stiglitz, J. E. (1969) Behaviour Towards Risk with Many Commodities, in Econometrica, 37, S. 660 – 667.
- Stockman, J. (1978) Risk, Information and Forward Exchange Rates, in Frenkel, J. A., Jacob, A. und Johnson, H. G. (eds.) The Economics of Exchange Rates, Addison Wesley, London.
- Stulz, M. (1981) A Model of International Asset Pricing, in Journal of Financial Economics , 9, S. 383 - 406.



- Stulz, M. (1984) Currency Preferences, Purchasing Power Risks and the Determination of Exchange Rates in an Optimizing Model, in *Journal of Money Credit and Banking*, 16, S. 302 - 316.
- Taylor, M. P. (1989) Covered Interest Arbitrage and Market Turbulence, in *Economic Journal*, 99, S. 376 - 391.
- Thomas, S. und Wickens, M. (1989) International CAPM: Why has it Failed?, Discussion Paper No. 354, CEPR, London.
- Tobin, J. (1958) Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, in *Review of Economic Studies*, 25, S. 65 - 86.
- Tsiang, S. C. (1974) The Rationality of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference and the Demand for Money, in *American Economic Review*, 64, S. 354 - 371.
- Turner, P. und Van't dack, J. (1993) Measuring International Price and Cost Competitiveness, in *BIS Economic Papers*, 39, Basel.
- Valentine, L. M. und Mennis, E. (1971) *Quantitative Techniques for Financial Analysis*, Irwin Dorsey, Ontario.
- Varian, H. (1992) *Microeconomic Analysis*, 3. Auflage, Norton, New York.
- Wynne, M. A. und Sigalla, D. (1994) The Consumer Price Index, *Economic Review*, 2, Federal Reserve Bank of Dallas.
- Yaar, D. (1984) Die Wiederbelebung der Kaufkraftparitätentheorie: Eine Bestandsaufnahme der Theorie und Empirie, Dissertation, Köln.

Yaari, M. (1969) Some Remarks on Measures of Risk Aversion and on their Uses, in *Journal of Economic Theory*, 1, S. 315 - 329.

Ziobrowski, B. J. und Ziobrowski, A. J. (1995) Exchange Rate Risk and Internationally Diversified Portfolios, in *Journal of International Money and Finance*, 14, S. 65 - 81.

Zivot, E. (2000) Cointegration and Forward and Spot Exchange Rate Regressions, in *Journal of International Money and Finance*, 19, S. 785 - 812.

## Lebenslauf

*Geburtstag* 27.03.1968  
*Geburtsort* Steinfurt, ehemals Burgsteinfurt, NRW  
*Eltern* Franz Fehlker, Rentner  
Klara Fehlker, Rentnerin  
*Staatsangehörigkeit* Deutsch

### **Schulbildung** (in Reihenfolge der Startzeitpunkte)

06/1974 – 08/1978 *Grundschule/Wettringen*  
08/1978 – 06/1988 *Arnold Janssen Gymnasium*  
09/1985 – 06/1986 *Satellite High School/Satellite Beach/USA*  
10/1991 – 11/1996 *Westfälische Wilhelms-Universität/Münster (10 Semester)*  
07/1993 – 08/1993 *University of Bordeaux/France*  
(*Summer University: Sprachkurs*)  
08/1993 – 07/1994 *University Sorbonne/Paris/France*  
(*Gasthoerer im Fach Wirtschaft,*  
*Cours de Civilisation Francaise de la Sorbonne*)  
12/1996 – 11/2003 *Westfälische Wilhelms-Universität/Münster*  
(*externer Doktorand am Lehrstuhl für Geld und Währung*)  
08/1997 – 06/1998 *Institute of World Economics/Kiel*  
(*Teilnahme am Advanced Studies Program*)