



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Theoretische Physik

Vertikal und horizontal periodisch oszillierte komplexe Fluide

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
MICHAEL GREVENSTETTE
aus Damme

- 2012 -

Dekan:	Prof. Dr. Tilmann Kuhn
Erster Gutachter:	Prof. Dr. Stefan J. Linz
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Gernot Münster
Tag der Mündlichen Prüfung:	06.07.2012
Tag der Promotion:	06.07.2012

Abstract

In this thesis, fluids resting on a flat substrate being subject to a periodic driving motion are investigated theoretically. Considering the fluid as being contained in an annular vibratory conveyor, the liquid sheet can undergo either vertical or horizontal sinusoidal oscillations. Additionally, both types of accelerations may be combined arbitrarily. Neglecting sidewall effects and assuming a quasi one-dimensional geometry of the conveyor, the fluid is modeled as a two-dimensional system whose lateral extension is much greater than the local fluid height. Two different kinds of fluids are described in detail: the first problem considers a viscous Newtonian liquid modeled by the Navier-Stokes equations while the second consists of a viscoelastic fluid which is described by the upper-convected Jeffrey model, the so-called Oldroyd-B model.

Using periodic boundary conditions in the lateral direction and assuming a flat fluid layer with constant fluid height, the problem can be solved analytically if the fluid variables are functions of the vertical coordinate and time only. In the case of vertical sinusoidal driving of the substrate this results in a resting fluid layer with a hydrostatic pressure multiplied by a time dependent gravitational acceleration.

Considering only horizontal movement of the trough, the pressure is hydrostatic and on the one hand, the vertical fluid velocity remains zero for all times. On the other hand, the horizontal velocity is periodic in time and shows a complex dependence on the vertical coordinate. This solution is representable by an infinite sum over spatial basis functions with time-dependent coefficients for the transient and periodic parts of the solution. The latter can also be written as a suitable combination of trigonometric and hyperbolic functions representing the spatial dependence multiplied with time-dependent sine and cosine functions. The solutions for both Newtonian and viscoelastic fluids are compared in detail. Additionally, the evolution equations for the stress tensor variables which depend in a nonlinear way on the horizontal fluid velocity are solved and discussed. If the fluid is subject to a combination of vertical and horizontal periodic driving it can be shown that the entire solution can be written as a superposition of the vertical and horizontal single solutions.

Experiments give rise to harmonic or subharmonic surface wave patterns if the

fluid is subject to a periodic external driving. Therefore, linear stability analyses of the analytical solutions are performed for all types of driving, i.e. vertical, horizontal, and a combination thereof. The obtained linear equation systems are solved numerically and result in generalized eigenvalue problems whose smallest real eigenvalues constitute the neutral stability curve. In the vertical case, the critical driving amplitudes and wavenumbers are discussed for subharmonic and harmonic instabilities and dependencies on all fluid parameters in detail. Considering horizontally oscillated Newtonian fluids, only harmonic instabilities are found and analyzed thoroughly. Using a combination of vertical and horizontal periodic driving, no solutions regarding standing harmonic or subharmonic surface waves could be recovered for Newtonian fluids within our linear model. Additionally, the linear stability problem in the Oldroyd-B model is setup assuming only horizontal vibrations.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen und experimentelle Befunde	5
2.1. Faraday-Instabilität: Experimente und Theorie	6
2.2. Horizontal periodisch vibrierte Fluidschichten	7
2.3. Analytische Lösungen in viskoelastischen Fluidmodellen	9
3. Hydrodynamische Grundgleichungen	11
3.1. Schematischer Aufbau	11
3.2. Grundgleichungen für Newtonsche Fluide	13
3.3. Grundgleichungen für viskoelastische Fluide: Oldroyd-B-Modell . . .	18
4. Analytische Lösungen vertikal periodisch angetriebener Fluide	23
4.1. Analytische Lösung	24
5. Horizontale periodische Antriebe	26
5.1. Horizontal oszillierte Newtonsche Fluide	27
5.1.1. Lösung mittels Basisfunktionen $\sin(w_n y)$	28
5.1.2. Kompakte periodische Lösung	33
5.2. Horizontal vibrierte viskoelastische Fluide	38
5.3. Symmetrie und Entkopplung	40
5.3.1. Separation in Basisfunktionen	42
5.3.2. Dreiecksschwingung im Oldroyd-B-Modell	45
5.3.3. Harmonisch oszillierende Plattenbewegung	52
5.3.4. Periodische Lösung im Oldroyd-B-Modell	56
5.4. Kombiniert horizontal und vertikal bewegte Fluide	73
6. Stabilität vertikal vibrierter Oldroyd-B-Fluide	74
6.1. Stabilitätsalgorithmus im Oldroyd-B-Modell bei vertikalem periodischen Antrieb	76
6.1.1. Herleitung des linearisierten Gleichungssystems	76

6.1.2. Lösung der linearen Feldgleichungen und Aufstellen des Eigenwertproblems	80
6.2. Subharmonische und harmonische Stabilitätsgrenzen	86
7. Stabilitätsanalyse des horizontal oszillierenden Newtonschen Fluids	97
7.1. Horizontaler Stabilitätsalgorithmus des Newtonschen Fluids	99
7.1.1. Herleitung des linearisierten Gleichungssystems	99
7.1.2. Ergebnisse der numerischen Eigenwertberechnungen im horizontalen Fall	107
7.2. Stabilität kombiniert horizontal und vertikal vibrierter Newtonscher Fluide	113
8. Stabilitätsanalyse der horizontalen Lösung im Oldroyd-B-Modell	116
8.1. Horizontaler Stabilitätsalgorithmus von Oldroyd-B-Fluiden	117
8.1.1. Herleitung des linearisierten Gleichungssystems	117
8.1.2. Diskussion des Stabilitätsalgorithmus im Oldroyd-B-Modell .	123
9. Zusammenfassung	125
A. Lösungsfunktionen der homogenen DGL: $v^{(iv)}(y) + R^2 v(y) = 0$	129
B. Inhomogene Lösung im Oldroyd-B-Modell für allgemeine periodische Antriebe	130
C. Jacobi-, Chebyshev- und Auto-orthogonale Polynome	133
C.1. Jacobi-Polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$	133
C.2. Chebyshev-Polynome $T_n(x)$	134
C.3. Auto-orthogonale Basis $\{\psi_n\}$	135
Literaturverzeichnis	137

1. Einleitung

Die alltägliche Beobachtung von Kapillar- und Rippelmustern auf der Oberfläche eines Glas Wassers, welches durch die äußeren Vibrationen des Tisches bzw. des Bodens hervorgerufen werden, ist sicherlich eine der elementarsten Realisierungen eines periodisch oszillierten Fluids. Deutlich spektakulärer ist dagegen die Vibration eines sogenannten Nicht-Newtonschen Fluids z.B. aus Maismehlstärke auf einer Lautsprecherunterlage (siehe z.B. [1] bzw. Videos zu „Cornstarch“ auf öffentlichen Videoplattformen). Diese Art Flüssigkeit hat stark unterschiedliche Eigenschaften hinsichtlich des Schermoduls für unterschiedliche Anregungsfrequenzen, so dass sich durch deren Variation einerseits periodische Muster, andererseits fingerartige Strukturen für höhere Anregungsmoden ausbilden. Dies liegt an der Dilatanz-Eigenschaft, d.h. es wirkt scherverdickend bei steigenden Scherkräften.

Die beiden oberen Beispiele zeigen das Paradigma der Strukturbildung, weil nur dann spontan auftretende Strukturen beobachtet werden, wenn das betrachtete System mittels äußerer Kräfte aus dem Gleichgewichtszustand getrieben wird (siehe z.B. [2]). Für fluide Systeme, die wir in dieser Arbeit beschreiben werden, lässt sich diese Einfuhr von Energie in das System von außen im Wesentlichen durch drei Arten erreichen: Erstens mit Hilfe von thermischer Energie, d.h. durch Heizen oder Abkühlen. Zweitens durch Verwendung von Fluiden unterschiedlicher Konzentration bzw. Anlegung von Konzentrationsgradienten. Und drittens durch mechanische Energie, z.B. durch äußere Drücke oder, den Fall den wir in dieser Arbeit betrachten wollen, durch vertikale, horizontale, oder kombiniert vertikale und horizontale Vibration des Fluidsystems.

Die ersten physikalischen Experimente gehen dabei zurück auf Michael Faraday [3] im Jahr 1831, wobei er neben granularer Materie auf einer flachen, in senkrechter Richtung parallel zur Erdbeschleunigung oszillierten Oberfläche auch Fluide untersuchte. Diese zeigten hauptsächlich oszillierende, quadratische Strukturen, die subharmonisch schwingen, d.h. mit der Hälfte der Anregungsfrequenz des äußeren Antriebs. Matthiessen [4, 5] konnte zudem harmonische Antworten der schwingenden Fluidschicht finden und Lord Rayleigh [6, 7] konnte die Beobachtungen von Faraday hinsichtlich der subharmonischen Oberflächenwellen bestätigen.

Die elementare experimentelle Durchführbarkeit für rein vertikale Vibrationen ist prinzipiell auch für rein horizontale Schwingungen gegeben. Allerdings mit der Einschränkung, dass die lateralen Seitenwände einen großen unerwünschten Einfluss besitzen können (siehe z.B. [8]). Daher waren die ersten Veröffentlichungen zu diesem Thema von Stokes [9] 1851 sowie von Lord Rayleigh [10] 1911 Annäherungen von der theoretischen Seite. Dabei zeigt sich, dass im Fall rein horizontaler Vibration der äußere Antrieb über die horizontale Geschwindigkeit u in das System einkoppelt, während beim rein vertikalen Fall das Fluid ruht und die externe Oszillation über den Druck p eingeht.

Die Berechnung der gerade angesprochenen elementaren Referenzlösungen zeigen den Ansatzpunkt, warum periodisch vibrierte Fluide hinsichtlich theoretischer Untersuchungen sehr interessant sind. Da für Fluide unterschiedlichster Eigenschaften Bilanzgleichungen für Massen-, Impuls- und Energiedichten vorliegen (z.B. die Euler-Gleichungen für reibungsfreie Fluide sowie die Navier-Stokes-Gleichungen für viskose Flüssigkeiten; im Gegensatz zur granularer Materie, die durch Faraday [3] auch untersucht wurde), ist es möglich, unter Ausnutzung möglichst elementarer Symmetrien diese Bilanzgleichungen bei äußeren zeitabhängigen Antrieben zu lösen.

Das Verhalten von granularer Materie für einen kombiniert horizontal und vertikal vibrierten Antrieb wurde schon mit Hilfe eines Schwingförderers untersucht (siehe z.B. [11–13]). Der in diesem Fall verwendete annulare Ring bietet den Vorteil, dass periodische Randbedingungen automatisch erfüllt sind. Dabei können Effekte, welche durch die Krümmung der (im querschnitt gesehen rechteckigen) Rinne hervorgerufen werden, i. Allg. dann vernachlässigt werden, wenn die Breite der Rinne klein gegenüber deren Radius ist. Dadurch lässt sich das System als rechteckiges Gefäß approximieren, wenn sich die annulare Rinne der Länge L durchgeschnitten und auf eine Ebene projiziert gedacht wird. Aufgrund der geringen Breite gegenüber der Länge L des Systems, lässt sich dieses zweidimensionale System als quasi $1d$ -System approximieren, welches nur noch von der horizontalen Länge abhängt. Somit kann effektiv das dreidimensionale Gesamtsystem auf zwei Dimensionen vereinfacht werden.

Für die häufig untersuchten viskosen Newtonschen Fluide sind elementare Lösungen gut bekannt (siehe z.B. [9, 10, 14–18]). Für viskoelastische fluiddynamische Modelle, z.B. das Maxwell-Modell [19] sowie das sogenannte Oldroyd-B-Modell oder „Upper convected Jeffrey model“ [20, 21], wurden elementare Lösungen zu horizontal angetriebenen Fluiden in den vergangenen Jahren berechnet und weiterentwickelt,

z.B. von Hayat et al. [22–25] bzw. Fetecau et al. [26–29].

Das Maxwell'sche Modell beschreibt ein viskoelastisches Fluid, welches auf tangentialen Scherspannungen nicht instantan reagiert wie Newton'sche viskose Flüssigkeiten, sondern über eine sogenannte viskoelastische Relaxationszeit τ die volle Scherrate aufbaut (für eine Einführung siehe z.B. Oswald [30]). Laut Oswald können Newton'sche viskose Flüssigkeiten als Grenzfall Maxwell'scher Fluide betrachtet werden, wobei z.B. $\tau \approx 10^{-12}$ s für Wasser ist. Für reale Maxwell'sche Fluide wie z.B. spezifische Öle ist τ dann im Bereich der Größenordnung einer Sekunde.

Im oben angesprochenen Oldroyd-B-Modell lassen sich z.B. Mischungen deformierbarer Partikel in Newton'schen Fluiden (Polymerketten und nicht mischbare kleine Tropfen in Suspensionen) beschreiben (siehe [30]). Dabei verhält sich das Lösungsmittel wie eine viskose Flüssigkeit mit konstanter Viskosität η_s und die gelösten Partikel erhalten eine Viskosität η_p und Relaxationszeit τ_p entsprechend dem Maxwell'schen Modell. Durch Betrachten der Gleichungen der Spannungs- und Deformationstensoren beider Komponenten lässt sich eine Relation für den daraus folgenden Konformationstensor $\underline{\underline{S}}$ herleiten, der als Spannungstensor beider Komponenten betrachtet werden kann. Die konstituierende Gleichung für $\underline{\underline{S}}$ erhält die Beziehung zum Deformationstensor über drei Konstanten, nämlich die Gesamtviskosität $\eta = \eta_s + \eta_p$, die Relaxationszeit τ_p der Polymere sowie die sogenannte Retardationszeit $\tau_r = \tau_p \eta_s / \eta_0$.

Das Oldroyd-B-Modell hat die Vorzüge, dass damit Polymerlösungen in anderen Fluiden beschrieben werden können. Im Experiment können, beispielsweise durch Zugabe von Polymeren oder anderen Zusätzen wie Lipiden, wichtige Parameter wie die Oberflächenspannung oder die Viskosität gezielt beeinflusst werden. Umgekehrt lassen sich mit Hilfe geeigneter Theorien und damit verbundener Aussagen zu Stabilitätsbereichen, z.B. durch Messungen der Stabilitäten, Rückschlüsse auf Parameter wie z.B. den Oberflächenspannungskoeffizienten schließen. Daher ist die theoretische Untersuchung, zum einen von analytischen Lösungen dieses Modells hinsichtlich periodischer Vibrationen, zum anderen der Stabilität dieser Lösungen, ein wichtiger Beitrag zum Verständnis viskoelastischen Verhaltens. Ein weiterer Aspekt des Oldroyd-B-Modells ist es, dass darin die Maxwell'schen Fluide ($\tau_r = 0$) sowie die Newton'schen viskosen Fluide ($\tau_p = \tau_r = 0$) als Spezialfälle enthalten sind.

Diese Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 geben wir eine Übersicht zum Stand von vertikal und horizontal vibrierten Fluiden auf flachen Oberflächen. Der Hauptteil der beschriebenen Arbeiten besteht dabei aus Beschreibungen Newton'scher Fluide. Im weiteren Verlauf gehen wir auf analytische Lösungen in vis-

koelastischen Fluidmodellen bei kombiniert horizontaler und vertikaler Vibration ein und betrachten im Wesentlichen theoretische Arbeiten dazu. Im folgenden Kapitel 3 wird die theoretische Problemstellung erläutert, wobei wir diese einerseits unter dem Gesichtspunkt der Navier-Stokes-Gleichungen, andererseits für ein viskoelastisches Fluid im Oldroyd-B-Modell vorstellen wollen.

In Kapitel 4 stellen wir die analytische Lösung einer vertikal oszillierenden Oberflächenschicht im Oldroyd-B-Modell vor und im darauffolgenden Kapitel 5 gehen wir detailliert auf die Herleitung der horizontalen analytischen Lösungen ein. Zudem trennen wir dabei zum besseren Verständnis Newtonsche und viskoelastische Gleichungen voneinander. Für die in diesen beiden Kapiteln erhaltenen Lösungen werden wir eine lineare Stabilitätsanalyse in den Kapiteln 6 bis 8 durchführen bzw. die Gleichungssysteme und den numerischen Algorithmus dafür vorstellen. Dabei beginnen wir in Kapitel 6 mit der Faraday-Instabilität bei vertikaler Oszillation für viskoelastische Fluide. In den folgenden Kapiteln 7 und 8 werden wir die Stabilitätsanalyse für den horizontalen Fall separat für Newtonsche und viskoelastische Fluide betrachten und die Resultate einiger Stabilitätsbereiche vorstellen. Daran anschließend folgt eine Zusammenfassung mit den wesentlichen Resultaten dieser Arbeit sowie im Anhang einige Details zu numerischen Verfahren und aufwendigeren Rechnungen, für die die Betrachtung in den einzelnen Kapiteln zu umfangreich geworden wäre.

2. Grundlagen und experimentelle Befunde

Diese Arbeit handelt allgemein von der theoretischen Beschreibung periodisch vibrierter Fluide bzgl. der vertikal nach unten wirkenden Erdbeschleunigung. Dabei kann einerseits zwischen Vibration in horizontaler und vertikaler Richtung unterschieden werden; es lässt sich auch die Überlagerung beider Schwingungsformen realisieren. Andererseits lassen sich zudem die Fluide und deren Eigenschaften beliebig wählen. Dies gilt nicht nur für den experimentellen Aufbau, sondern trifft insbesondere auf die theoretische Beschreibung zu, z.B. bei der Unterscheidung zwischen Modellgleichungen von idealen, viskosen Newtonschen und viskoelastischen Fluiden.

Wir werden daher im ersten Unterkapitel zunächst den im weitesten Sinne unter dem Namen *Faraday-Instabilität bzw. -Wellen* bekannt gewordenen Effekt, bei denen Oberflächenstrukturen aus einer in vertikaler Richtung oszillierten, zunächst flachen Fluidschicht resultieren, sowohl hinsichtlich der Experimente als auch der theoretischen Beschreibung erläutern. Im Vergleich dazu werden wir auf die theoretischen und experimentellen Unterschiede und Gemeinsamkeiten zum Fall der Fluide eingehen, welche in horizontaler Richtung periodisch angetrieben werden. Die theoretische Grundlage zur Beschreibung von Fluiden sind die makroskopischen Bilanzgleichungen für Massen-, Impuls- sowie Energiedichte, wobei zusätzlich materialtypische Gleichungen sowie Rand- und Anfangsbedingungen hinzukommen. Die Lösung dieser i. Allg. gekoppelten, nichtlinearen Gleichungssysteme kann oftmals ausschließlich numerisch erfolgen. Für den Fall von Fluiden auf periodisch bewegten Platten lassen sich analytisch berechenbare Lösungen finden, wobei wir in Unterkapitel 2.3 die bisher bekannten Lösungen insbesondere auf viskose und viskoelastische Fluidmodelle hin vorstellen werden.

2.1. Faraday-Instabilität: Experimente und Theorie

Durch seine Veröffentlichung [3] zu vertikal vibrierter granularer Materie im Jahr 1831, in der er zusätzlich reguläre Strukturen eines Fluids auf einer oszillierten Unterlage beschreibt, wurde Faraday Namensgeber zum Effekt stehender Wellen, die sich an der Oberfläche bei vertikaler Vibration einstellen. Faradays beobachtete Muster schwingen dabei subharmonisch, d.h. mit der Hälfte der Antriebsfrequenz. Dies wurde in Experimenten von Lord Rayleigh [6, 7] im 19. Jahrhundert bestätigt, wobei auch von Matthiessen [4, 5] harmonische Oberflächenwellen gefunden wurden. Eine erste wesentliche theoretische Erkenntnis brachten Benjamin und Ursell [31], indem sie die lineare Stabilität der zunächst flachen Oberfläche auf eine Mathieu-Gleichung (siehe z.B. [32]) zurückführen. Daraus ergeben sich damit sowohl subharmonische als auch harmonische Stabilitätsbereiche, wobei die Schicht schon bei infinitesimalen Antriebsamplituden instabil werden kann. Für viskose Fluide haben Kumar und Tuckerman [33] 1994 sowie Kumar [34] 1996 gezeigt, dass die neutrale Stabilität bei endlichen Werten einer kritischen Amplitude A_c liegt. Zudem konnte dabei theoretisch berechnet werden, dass, falls die Dicke der Grenzschicht vergleichbar mit der Höhe der Fluidschicht ist, sich die Stabilitätsbereiche der harmonischen und subharmonischen Moden verschieben. Daraus folgt, dass in diesem Fall zunächst die flache Oberfläche hin zu harmonischen Oberflächenwellen instabil wird und nicht zu der sonst bevorzugten subharmonischen Antwort des Systems.

In den Achtziger und Neunziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts wurden dabei viele Experimente durchgeführt und theoretische Erklärungen für die beobachteten Effekte und für die regulären Strukturen veröffentlicht. Die experimentell gefundenen Muster sind dabei vielfältig [35–44], z.B. Hexagone, Streifen, Quadrate, Dreieckstrukturen sowie raumzeitlich chaotische Bereiche. Durch Anregung mittels zweier oder mehrerer verschiedener Antriebsfrequenzen können damit auch Gitter- bzw. Quasikristallstrukturen mit acht-, zeh- oder zwölfacher Symmetrie erzeugt werden. Von der theoretischen Seite wurde zum einen über Amplitudengleichungen versucht, die gefundenen Strukturen zu modellieren [45–50]. Dazu gibt es noch weitere theoretische Modelle, z.B. Potentialgleichungen sowie modifizierte Mathieu-Gleichungen für die Grenzfälle starker viskoser Dämpfungen (siehe z.B. [50–53]). Gute Übersichten auf diesem Gebiet sind dabei in den Artikeln von Miles und Henderson [45] von 1990 sowie von Westra, Binks und van de Water [49] aus dem Jahr 2003 zu finden.

Die obigen Experimente und Analysen wurden am Ende der Neunziger Jahre auf viskoelastische Fluide und theoretische Modelle erweitert. Ein experimenteller Ver-

gleich für Nicht-Newton'sche Fluide zum Newton'schen Fall wurden dabei von Reynal et al. [54] hinsichtlich Stabilitätsgrenzen und Dispersionrelationen angestellt. Von Wagner et al. [55] wurde dabei die Dominanz der harmonischen gegenüber den subharmonischen Moden untersucht. Diese ist bestätigt durch die ersten theoretischen Modelle zu viskoelastischen Fluiden, welche von Müller und Zimmermann [56] sowie von S. Kumar und Matar [57, 58] stammen und Maxwell-Fluide behandeln. Diese zeigen auf einer charakteristischen Zeitskala τ elastisches Verhalten und nehmen danach viskose Eigenschaften an, falls eine Scherspannung wirkt (siehe z.B. [19, 30, 59]). Neuere Untersuchungen, sowohl theoretischer als auch experimenteller Natur [60–62], zielen insbesondere auf die Oberflächeneffekte, welche durch Zugabe von sogenannten „Surfactants“ erreicht wird. Dabei wird die Oberflächenspannung gezielt mit Polymerzugaben oder Emulsionen beeinflusst und deren Einfluss auf die Faraday-Instabilität untersucht.

In dieser Arbeit werden wir die Instabilitätsgrenzen eines vertikal periodisch oszillierten, sogenannten Oldroyd-B-Fluids (siehe z.B. [20, 21, 24, 30]) untersuchen (dieses Modell ist auch als „Upper convected Jeffrey-Model“ bekannt). Die Eigenschaften dieses Fluids stellen eine Generalisierung der Maxwell-Fluide dar, wobei dieses fluiddynamische Modell zwei charakteristische Zeitskalen hinsichtlich der Antwort des Fluids auf eine Scherspannung besitzt. Dieses Modell ist hinsichtlich theoretischer Untersuchungen in neuerer Zeit beliebt, siehe dazu auch Kapitel 2.3. Bei den Stabilitätsuntersuchungen orientieren wir uns an den Verfahren von [31, 33, 34, 56–58].

2.2. Horizontal periodisch vibrierte Fluidschichten

Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für ein Fluid, welches sich auf einer ebenen Platte befindet, wenn diese in lateraler Richtung bewegt bzw. oszilliert wird, wird von Schlichting [17] als Stokessches erstes bzw. zweites Problem bezeichnet. Dieser Name ist angelehnt an die Arbeiten von Stokes [9] aus dem Jahre 1851 sowie denen von Lord Rayleigh [10] von 1911 und beide Probleme sind auch in den Lehrbüchern von Lamb [14] sowie Landau und Lifshitz [15] beschrieben. Dabei wird die vertikale Geschwindigkeitskomponente des Fluids zu Null angenommen und die horizontale Komponente hängt nur von der vertikalen Koordinate und der Zeit ab. Daraus folgt für diese eine zeitlich periodisch getriebene Wärmeleitungsgleichung, welche analytisch gelöst werden kann. In diesem Fall wird von einer flachen Fluidschicht ausgegangen, deren Höhe sich zeitlich nicht ändert. Diese Schicht wird als lateral unendlich ausgedehnt angenommen, damit in dieser Richtung keine Rand-

bedingungen erfüllt sein müssen und damit Wechselwirkungen mit diesen Rändern vernachlässigt werden können.

Von der experimentellen Seite ist der Aufbau im Wesentlichen ähnlich wie in den vertikalen Faraday-Experimenten aus dem vorherigen Kapitel 2.1, jedoch mit dem Unterschied, dass in diesem Fall in horizontaler Richtung vibriert wird. Das Problem sind jeweils die seitliche Wände bzw. Begrenzungen, durch die eine zusätzliche ungewollte Dynamik und Wechselwirkung mit der Fluidschicht induziert wird. Die Experimente von González-Viñas und Salán [8] vernachlässigen die Seiteneinflüsse und Meniskuseffekte aufgrund von niedriger Viskosität und geringer Oberflächenspannung und es werden die kritische Amplituden hin zu stehenden Mustern erhalten. Andere experimentelle Untersuchungen [63, 64] konzentrieren sich auf zwei übereinander liegende Fluide und bestimmen die Stabilisierung von Rayleigh-Taylor- sowie Kevin-Helmholtz-Instabilitäten (siehe dazu z.B. [65, 66]). In neuen Experimenten [67–69] werden sogenannte „Frozen-Waves“ untersucht. Diese Oberflächenwellen sind in dem Sinne eingefroren, als dass sie im Referenzsystem statisch erscheinen, d.h. im zeitlichen Mittel unabhängig vom lateralen Antrieb stationär sind. Um Seiteneffekte zu minimieren bzw. auszuschließen, könnte die Versuchsanordnung auf eine annulare Geometrie übertragen werden. Dies wurde schon erfolgreich für granulare Schichten auf vibrierten Oberflächen durchgeführt (siehe z.B. [11–13]). Dabei wurden experimentell viele verschiedene Effekte gefunden, wie z.B. Transport und auch Transportumkehr der granularen Schicht in Abhängigkeit der Antriebsstärke sowie subharmonisch oszillierende Oberflächenwellen und weitere regelmäßige Strukturen.

Hinsichtlich der theoretischen Beschreibung sind die Arbeiten von Yih et al. [70–72] zu nennen, in denen die Orr-Sommerfeld-Gleichungen mit Hilfe einer Entwicklung für große Wellenlängen und damit kleiner Wellenzahlen k approximativ gelöst werden konnten. Dabei wurde unter anderem die Problemstellung von Fluiden auf geneigten Ebenen, die harmonisch oszillieren, diskutiert, wie z.B. auch in den Arbeiten von Lin und Woods [73, 74]. Weitere Arbeiten sind die von Davis und von Kerczek [75, 76] sowie von Smith [77] über den Mechanismus der Instabilität bei großen Wellenlängen.

Ein bedeutender Forschungsgegenstand der theoretischen Arbeiten ist die gegenseitige Scherung zweier nicht-mischbarer Fluide übereinander, welche einer periodischen Bewegung ausgesetzt sind. Die führt zu Scherungen und Instabilitäten an der Grenzfläche beider Fluide (Kevin-Helmholtz-Instabilität und auch Rayleigh-Taylor-Instabilität, für eine Definition siehe z.B. [65, 66]). Zu diesen sind die Arbeiten von

Khenner, Lyubimov, sowie anderen zu nennen [63, 78–83] und insbesondere aus dem Jahr 2007 jene von Talib et al. [69, 84], welche ihre Resultate mit denen von Lyubimov und Cherepanov [79] vergleichen.

Die Besonderheit an den beobachteten Strukturen ist, im Gegensatz zu den im vorherigen Kapitel besprochenen Fall des vertikalen Antriebs mit Faraday-Wellen, dass experimentell keine subharmonischen Antworten des Systems beobachtet werden, sondern nur harmonische. Or [85] hat 1997 gezeigt, dass die Floquet-Analyse der linearen Gleichungen, welche sich bei horizontalen Scherproblemen ergeben, keine subharmonischen Lösungen zulassen. Da das Problem bestimmten Symmetrien („Conjugate-Translation-Symmetry“) genügt, wurde dieses Resultat von Schulze [86] bestätigt, der zeigen konnte, dass subharmonische Lösungen bei dieser Problemstellung nur stark lokalisiert im Parameterraum auftreten können. Ein weiterer interessanter Ansatz ist derjenige von Shklyaev et al. [87], welche eine Dünnschichtapproximation für eine sehr dünne Schicht auf einer horizontal vibrierten Oberfläche entwickelt haben, wobei dann auch Van-der-Waals-Kräfte berücksichtigt werden müssen. Bezugnehmend auf diese Dünnschichtgleichungen haben Benilov und Chuganova [88] im Jahr 2010 gezeigt, dass unter dieser Gleichung periodische und solitäre Wellen maximal metastabil sind.

Wir wollen, anlehnend an den Stabilitätsalgorithmus von Or [85] bzw. Talib et al. [69, 84], diesen für den Fall eines Newtonschen Fluids entwickeln und zeigen, dass dieser sich zudem auf gleichzeitige horizontale und vertikale Vibration verallgemeinern lässt.

2.3. Analytische Lösungen in viskoelastischen Fluidmodellen

Der Ausgangspunkt für die theoretischen Berechnungen der Instabilitäten in den beiden vorherigen Unterkapiteln 2.1 und 2.2 ist die Kenntnis des Zustands, welcher instabil wird. Dieser lässt sich bei vertikaler Vibration auf elementare Weise berechnen zu einem hydrostatischen Druck multipliziert mit einer zeitabhängigen Gravitationsbeschleunigung, in die damit die vertikale Antriebsfunktion eingeht. Bei horizontaler Vibration sind seit den Berechnungen durch Stokes [9] bzw. Lord Rayleigh [10] die periodischen horizontalen Geschwindigkeitslösungen bekannt und deren Stabilität wurde theoretisch und experimentell vielfach untersucht. Dennoch wurde z.B. auf die sich auch ergebende, transiente Lösung bis zur Untersuchung von Erdogan [18] nicht in der Literatur eingegangen. Da es nur wenige elementare, analytisch

lösbar Fälle der Navier-Stokes-Gleichungen gibt (siehe z.B. [17]), lassen sich die Problemstellungen horizontal und vertikal oszillierender Fluide auf andere Fluidsorten mit abweichenden Eigenschaften übertragen, z.B. auf Maxwell-Fluide, welche nicht instantan auf eine Scherspannung reagieren sowie weitere viskoelastische Fluide wie dem sogenannten Jeffrey-Fluid und eine Erweiterung davon: das Oldroyd-B-Fluid [20, 21] (für eine Übersicht siehe z.B. Oswald [30] und Bird et al. [59]).

In den letzten Jahren waren die Untersuchungen zu analytischen Lösungen in unterschiedlichen fluiddynamischen Modellen sehr umfangreich. Die Gruppe um Rajagopal [89–91] hat in den Achtziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts die Stokeschen Probleme auf viskoelastische Fluide erweitert und z.B. im Oldroyd-B-Modell berechnet. Hayat et al. [22–25] haben insbesondere die Geschwindigkeitsfelder für viskoelastische Fluide auf periodisch bzw. konstant bewegten Platten berechnet. Dazu haben diese insbesondere für ein Oldroyd-B-Fluid mit Hilfe von Sinustransformationen die periodische horizontale Geschwindigkeit berechnet. Für verschiedene viskoelastische Fluidmodelle haben auch Fetecau et al. [26–29] z.B. das zweite Stokesche Problem für ein Oldroyd-B-Fluid mit Hilfe einer Sinus-Transformation gelöst. Zudem gehen diese auf den transienten Teil der Lösung ein. Andere Beiträge stammen noch von Waters und King [92] sowie von Anjum et al. [93].

Tan und Masuoka [94] leiten mit Hilfe einer modifizierten Darcy-Gleichung und den Feldgleichungen des Oldroyd-B-Modells die Lösung für das erste Stokesche Problem in einem porösen Halbraum her. Die Lösung wird auch hier durch eine Sinus-Transformation erhalten. Zudem leiten sie einen kritischen Parameter ab, der Bereiche mit stärker ausgeprägten viskosen Eigenschaften von denen vorwiegend viskoelastischer Kennzeichen voneinander trennt. Die Arbeit von Cruz und Pinho [95] leitet das zweite Stokesche Problem für Einströmungen aus bzw. Einsaugungen in die Bodenplatte her, wobei diese Arbeit eine der wenigen ist, in der explizit die Komponenten des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$ berechnet worden sind.

Wir werden in dieser Arbeit das Problem eines Oldroyd-B-Fluids auf einer bewegten Platte analytisch zum einen mit Hilfe einer Reihenentwicklung in Sinus-Funktionen für das gesamte Anfangs- und Randwertproblem lösen. Zum anderen werden wir die rein periodische Lösung als Kombination von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen berechnen.

3. Hydrodynamische Grundgleichungen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Sachverhalte, die für die Problemstellung in dieser Arbeit relevant sein werden, beschrieben. Dazu werden wir zunächst den schematischen Aufbau einer dünnen Fluidschicht auf einer beweglichen Unterlage skizzieren und darauffolgend die Gleichungen erläutern und diskutieren, mit denen die physikalischen Eigenschaften theoretisch beschrieben werden.

Die Navier-Stokes-Gleichungen im Zusammenspiel mit Randbedingungen an festen und freien Oberflächen bilden die Bewegungsgleichungen für ein Newtonsches, viskoses Fluid. Diese werden ausführlich vorgestellt. Im weiteren Verlauf wird dann der Übergang zu viskoelastischen Fluiden hergestellt, wobei wir diese mit Hilfe des sogenannten Oldroyd-B-Modells (siehe auch Kapitel 2) theoretisch modellieren werden.

3.1. Schematischer Aufbau

Der schematische Aufbau ist in Abbildung (3.1) dargestellt. In dieser Graphik ist eine Flüssigkeitsschicht auf einer flachen, festen Unterlage dargestellt, welche sich zeitlich in horizontaler Richtung ($F_x(t)$) oder in vertikaler Richtung ($F_y(t)$) i. Allg. periodisch bewegen kann, wobei diese Bewegung im erdfesten Bezugssystem (gekennzeichnet durch die äußeren Achsen (X, Y)) gemessen wird.

Ein zweites Koordinatensystem, dessen x -Achse durch den oberen Rand der Unterlage gegeben ist und dessen y -Achse sich oberhalb des Bodens erstreckt, bewege sich mit der Fluidschicht. Dieses Bezugssystem wird für die weitere theoretische Modellierung verwendet. Durch den Übergang vom erdfesten in das mitbewegte System gehen die relativen Geschwindigkeiten der Antriebe $F_x(t)$ sowie $F_y(t)$ nicht mehr über die Randbedingungen sondern mittels äußeren Kräften in die Impulsbilanzen ein, wie wir in den folgenden Unterkapiteln sehen werden. Zudem wirke von außen noch die konstante Gravitationsbeschleunigung $\vec{g} = -9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \vec{e}_y$.

Die Flüssigkeitsschicht habe eine laterale Ausdehnung der Länge L , werde unten

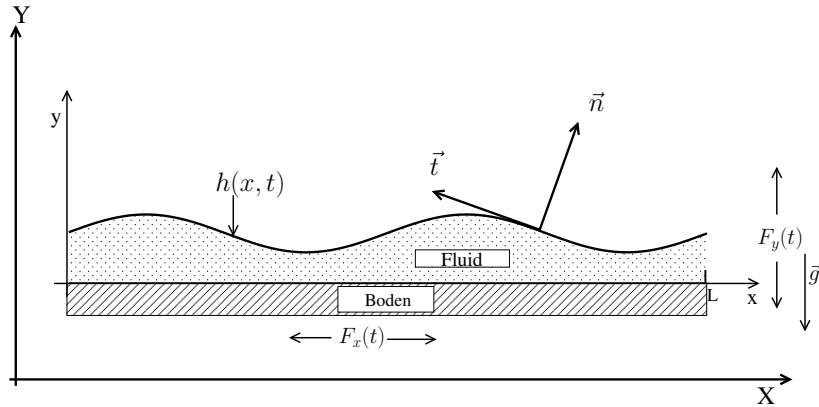


Abbildung 3.1.: Schematische Darstellung des Fluids auf einer bewegten Unterlage. Erdfestes (X, Y) sowie mitbewegtes Koordinatensystem (x, y) , dessen Ursprung sich auf der linken unteren Seite befindet.

durch die Bodenplatte begrenzt und an den Seiten bei $x = 0$ bzw. $x = L$ wollen wir periodische Randbedingungen annehmen. Die obere Begrenzung sei eine freie Oberfläche, welche durch die Funktion $h(x, t)$ charakterisiert werde und bestimmte Regularitätseigenschaften erfülle (z.B.: Differenzierbarkeit, Eindeutigkeit, etc.). Mit Hilfe dieser Voraussetzungen kann zudem eindeutig ein nach außen zeigender Normaleneinheitsvektor \vec{n} und damit ein lokales Koordinatensystem, mit Achsen bestehend aus Normal- und Tangentialeinheitsvektor (\vec{n}, \vec{t}) , an jedem Punkt $(x, h(x, t))$ der Oberfläche definiert werden (siehe Abb. 3.1).

Wie durch die Koordinatensysteme in Abb. 3.1 angedeutet, beschränken wir uns auf ein räumlich zweidimensionales System, d.h. eine dritte Raumkomponente, bzw. Abhängigkeiten davon, werden in dieser Arbeit vernachlässigt. Das bedeutet, dass die fluide Schicht als infinitesimal klein in z -Richtung ausgedehnt angenommen werden kann. Zudem betrachten wir i. Allg. dünne Schichten, d.h. die laterale Ausdehnung (Länge L) wird sehr viel größer als die mittlere Höhe \bar{h}_0 der Flüssigkeitsschicht angenommen, wobei

$$\bar{h}_0 = \int_0^L h(x, t = 0) dx . \quad (3.1)$$

Damit ist das sogenannte Aspekt-Verhältnis ϵ , nämlich der Quotient aus vertikaler und horizontaler Ausdehnung, viel kleiner als Eins:

$$\epsilon := \frac{\bar{h}_0}{L} \ll 1 . \quad (3.2)$$

Des Weiteren wollen wir periodische Randbedingungen für die abhängigen Variablen (Geschwindigkeits-, Druck- und Höhenfelder, siehe folgende Kapitel) annehmen. Dies lässt sich experimentell näherungsweise realisieren, indem sich das Fluid in annularen Rinnen befindet und durch diese in Bewegung versetzt wird (siehe z.B. [11, 12]). Da die Länge der Rinne bzw. deren Innenradius groß gegenüber der Breite des Fluids ist, werden zur einfacheren Beschreibung Krümmungseffekte vernachlässigt und die dünne Fluidschicht wird idealisiert als $2d$ -System angenommen.

3.2. Grundgleichungen für Newtonsche Fluide

In diesem und dem folgenden Unterkapitel werden die grundlegenden hydrodynamischen Gleichungen vorgestellt, die für die von uns zu untersuchenden Problemstellung relevant sein werden. Diese sind die Erhaltungsgleichungen für Massen- sowie Impulsdichten und die Evolutionsgleichungen der freien Oberfläche $h(x, t)$. Für die Lösbarkeit dieser partiellen Differentialgleichungen sind noch Anfangs- bzw. Randbedingungen erforderlich.

Eine umfassende Übersicht zu den hydrodynamischen Gleichungen viskoser Fluide sind diversen Lehrbüchern sowie Standard-Werken zu entnehmen, siehe z.B. [14–16]. Zunächst werden die zwei wichtigsten Bilanzgleichungen viskoser Fluide in der allgemeinen Form vorgestellt, nämlich die Erhaltungsgleichungen für Massen- und Impulsdichte:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \vec{K}, \quad (3.4)$$

mit der Dichte ρ , dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{u} = (u, v)$, dem Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ und dem Vektor \vec{K} , welcher äußere Körperkräfte beinhaltet, wie z.B. die Gravitationskraft und Kräfte durch Bewegungen der Platte (siehe Abb. 3.1 auf Seite 12). Diese Variablen seien generell abhängig von der Zeit (t) und den räumlichen Koordinaten (x, y) . Die partiellen Ableitungen werden durch das ∂ -Symbol mit jeweiligen Subskript bzw. mittels des Nabla-Operators ($\vec{\nabla}$) charakterisiert.

Die Dichte ρ werden wir in der gesamten Arbeit als konstant annehmen, d.h. $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 = \text{const.}$ Damit reduziert sich Gl. (3.3) auf die sogenannte Inkompressibilitätsbedingung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 = \partial_x u + \partial_y v. \quad (3.5)$$

3. Hydrodynamische Grundgleichungen

Es ist zu bemerken, dass obige Gleichung (3.5) auch dann in guter Näherung für kompressible Fluide (Flüssigkeiten mit nicht-konstanter Dichte) erfüllt ist, wenn die im System betrachteten Geschwindigkeiten klein gegen die Schallgeschwindigkeit des Fluides sind („Grenzfall kleiner Mach-Zahlen“). Für eine ausführliche Diskussion siehe z.B. [15].

Die zweite Bilanzgleichung 3.4 beschreibt die zeitliche Evolution des Geschwindigkeitsfeldes. Die gesamten Änderungen in der Geschwindigkeit auf der linken Seite der Gleichung (zeitliche Ableitung und Konvektion) werden getrieben durch die äußere Kraft $\rho \vec{K}$ und die Divergenz des Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$. Dieser kann für inkompressible Fluide in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= -p\mathbb{1} + \mu \underline{\underline{T}} = -p\mathbb{1} + \mu \left(\vec{\nabla} \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \vec{u} \right)^T \right) \\ &= \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & -p \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\partial_x u & \partial_x v + \partial_y u \\ \partial_x v + \partial_y u & 2\partial_y v \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

In obiger Relation (3.6) ist der sogenannte „Vektorgradient“ auf einen Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y)^T$ folgendermaßen definiert:

$$\vec{\nabla} \vec{a} = \vec{\nabla} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \partial_x a_x & \partial_y a_x \\ \partial_x a_y & \partial_y a_y \end{pmatrix}\quad (3.7)$$

In Gl. (3.6) ist $p = p(x, y, t)$ die Druckvariable und der konstante Koeffizient μ wird dynamische Viskosität genannt. Durch Ausschreiben der Gleichung (3.4) zusammen mit dem Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ in Gl. (3.6) erhalten wir die *Navier-Stokes-Gleichungen* für u und v :

$$\partial_t u + (u\partial_x + v\partial_y)u = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu\Delta u + K_x\quad (3.8)$$

$$\partial_t v + (u\partial_x + v\partial_y)v = -\frac{1}{\rho}\partial_y p + \nu\Delta v + K_y,\quad (3.9)$$

wobei der Koeffizient $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die sogenannte *kinematische* Viskosität darstellt und $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

Die Komponenten K_x sowie K_y der äußeren Beschleunigung \vec{K} können über die Bewegungen der Platte (siehe Abb. 3.1 auf Seite 12) in Beziehung gebracht werden. Durch den Übergang ins mitbewegte Bezugssystem gehen die negativen Beschleunigungen der Plattenbewegung als Antriebsterme \vec{K} in die Navier-Stokes-Gleichungen

ein. Zudem wirkt in der y -Komponente die Gravitationsbeschleunigung $\vec{g} = g \vec{e}_y$:

$$K_x = -\ddot{F}_x(t) \quad (3.10)$$

$$K_y = -\ddot{F}_y(t) - g. \quad (3.11)$$

Damit es möglich ist, das obere Gleichungssystem vollständig zu bearbeiten, sind zusätzlich zur Periodizität der Variablen an den seitlichen Rändern bei $x = 0, L$ noch Randbedingungen am Boden (d.h. $y = 0$) sowie an der oberen freien Oberfläche nötig. Dazu ist noch eine Relation erforderlich, welche die Oberflächenauslenkung $h(x, t)$ in Bezug zum Geschwindigkeitsfeld \vec{u} setzt. Mit Hilfe der kinematischen Höhenbedingung folgt für die Evolutionsgleichung der Höhe $h(x, t)$ (siehe dazu z.B. [14], §9):

$$\partial_t h(x, t) + u|_{y=h(x,t)} (\partial_x h(x, t)) = v|_{y=h(x,t)}. \quad (3.12)$$

Obige Formel (3.12) besagt, dass die freie Oberfläche durch das Fluid advektiv transportiert wird und koppelt damit Höhen- und Geschwindigkeitsfelder. Weitere implizite Kopplungen ergeben sich aus den Bedingungen für die tangentialen und normalen Spannungen an der freien Oberfläche:

$$\vec{t} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}) = 0 \quad (3.13)$$

$$\vec{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}) = \bar{\theta} \kappa, \quad (3.14)$$

wobei $\bar{\theta}$ den Oberflächenspannungskoeffizienten darstellt. \vec{n} und \vec{t} sind die Normal- bzw. Tangentialvektoren an der Oberfläche (siehe Abb. 3.1 auf Seite 12) und der Term κ steht für die Krümmung der Oberfläche:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x h)^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x h \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x h)^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\partial_x h \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\kappa = \frac{\partial_x^2 h}{\left(1 + (\partial_x h(x, t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.16)$$

Die Gleichung (3.13) besagt, dass die tangentialen Spannungen an der Oberfläche verschwinden müssen. Aufgrund der Orthonormalität von Normal- und Tangentialvektoren lässt sich zeigen, dass zudem der Druckterm in dieser Gleichung verschwindet. Die Normalrandbedingung (3.14) besagt, dass die Normalkomponente der Spannungen (im Wesentlichen der Druck p an der Oberfläche) durch die Oberflächenspannung gegeben ist. Diese ist proportional zur Krümmung κ (siehe Gl. (3.16)) und zum

3. Hydrodynamische Grundgleichungen

Oberflächenspannungskoeffizienten $\bar{\theta}$.

Zusammen mit der kinematischen Höhenbedingung (3.12) koppeln demnach Höhen- und Geschwindigkeitsvariablen auf komplexe Weise miteinander. Die Randbedingung am festen unteren Rand nimmt eine einfachere Form an. Dort ist die sogenannte *No-Slip*-Randbedingung für viskose Fluide eine gute Approximation:

$$\vec{u}|_{y=0} = \vec{0} \Leftrightarrow u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0. \quad (3.17)$$

Obige Gleichung bedeutet, dass die Geschwindigkeit an einem festen Rand verschwindet. Zusammen mit der Inkompressibilitätseigenschaft (3.5) folgt unmittelbar, dass

$$(\partial_x u)|_{y=0} = 0 \Rightarrow (\partial_y v)|_{y=0} = 0. \quad (3.18)$$

Die Normalableitung an festen Rändern verschwindet ebenso.

Unser gesamtes dynamisches System besteht demnach aus den Evolutionsgleichungen für Höhen-, Druck- und Geschwindigkeitsfeldern (3.5, 3.8, 3.9, 3.12) sowie den Randbedingungen (3.13, 3.14, 3.17, 3.18). Bevor wir das gesamte partielle Differentialgleichungssystem noch einmal detailliert aufschreiben, wird mittels charakteristischer Längen- und Zeitskalen das System in eine dimensionslose Form gebracht. Da in dieser Arbeit i. Allg. das System mit einer flachen Oberfläche der Höhe $h_0 = \text{const.}$ gestartet wird, wird diese Höhe als typische Längenskala verwendet. Da die äußeren horizontalen wie vertikalen Antriebe oft periodische Antriebe mit Frequenz f sind, werden wir als Zeitskala das Inverse der Kreisfrequenz $\omega^{-1} = \frac{1}{2\pi f}$ verwenden. Als Referenzgröße für die Geschwindigkeit dient der Quotient aus Längen- und Zeitskala $V = \omega h_0$. Als Skala für den Druck dient $p_0 = \rho V^2 = \rho h_0^2 \omega^2$. Alle abhängigen wie unabhängigen Variablen gehen damit über in dimensionslose Größen, die nachfolgend durch ein Tilde-Zeichen (\sim) gekennzeichnet sind:

$$x \rightarrow h_0 \tilde{x} \Rightarrow \partial_x \rightarrow \frac{1}{h_0} \partial_{\tilde{x}}; \quad y \rightarrow h_0 \tilde{y} \Rightarrow \partial_y \rightarrow \frac{1}{h_0} \partial_{\tilde{y}}; \quad t \rightarrow \frac{1}{\omega} \tilde{t} \Rightarrow \partial_t \rightarrow \omega \partial_{\tilde{t}} \quad (3.19)$$

$$u \rightarrow \omega h_0 \tilde{u}; \quad v \rightarrow \omega h_0 \tilde{v}; \quad h \rightarrow h_0 \tilde{h}; \quad p \rightarrow \rho h_0^2 \omega^2 \tilde{p}. \quad (3.20)$$

Mit Hilfe der Relationen (3.19, 3.20) können wir die gesamte Problemstellung folgendermaßen formulieren, wobei die kurz zuvor eingeführten Tilden über den Variablen zur Vereinfachung entfernt worden sind. Zu diesen neuen Variablen werden auch Parameter wie die Dichte ρ , die kinematische Viskosität ν , der Oberflächenspannungskoeffizient $\bar{\theta}$ sowie die Gravitationsbeschleunigung g in neue, zusammengesetzte Konstanten und Parameter überführt. Diese werden nach den entdimensiona-

lisierten Gleichungen und Randbedingungen näher erläutert:

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (3.21)$$

$$\partial_t u + (u\partial_x + v\partial_y)u = -\partial_x p + \frac{1}{R}\Delta u - \tilde{g}\Gamma_x \partial_t^2 f_x(t) \quad (3.22)$$

$$\partial_t v + (u\partial_x + v\partial_y)v = -\partial_y p + \frac{1}{R}\Delta v - \tilde{g}(1 + \Gamma_y \partial_t^2 f_y(t)) \quad (3.23)$$

$$\partial_t h + u|_{y=h(x,t)} \partial_x h = v|_{y=h(x,t)} \cdot \quad (3.24)$$

Dazu kommen die Randbedingungen, zunächst am unteren Boden:

$$\vec{u}|_{y=0} = 0 \quad (3.25)$$

$$(\partial_x u)|_{y=0} = 0 \quad (3.26)$$

$$(\partial_y v)|_{y=0} = 0, \quad (3.27)$$

sowie an der freien Oberfläche:

$$\begin{aligned} & 2(\partial_x h)(\partial_x u - \partial_y v)|_{y=h(x,t)} \\ & + \left((\partial_x h)^2 - 1\right)(\partial_x v - \partial_y u)|_{y=h(x,t)} = 0 \quad (3.28) \\ - \left(1 + (\partial_x h)^2\right) p|_{y=h(x,t)} & + 2\left((\partial_x h)^2 - 1\right)(\partial_x u)|_{y=h(x,t)} \\ & - 2(\partial_x h)(\partial_x v + \partial_y u)|_{y=h(x,t)} = \frac{\sigma^* \partial_x^2 h}{\sqrt{(1 + \partial_x h)^2}}. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Die in den Gl. (3.21-3.29) neu auftretenden Parameter sind folgendermaßen definiert:

$$\text{Reynolds-Zahl } R : \quad R = \frac{h_0^2 \omega}{\nu} \quad (3.30)$$

$$\text{dimensionslose Gravitationsbeschleunigung } \tilde{g} : \quad \tilde{g} = \frac{g}{h_0 \omega^2} \quad (3.31)$$

$$\text{dimensionsloser Oberflächenspannungskoeffizient } \sigma^* : \quad \sigma^* = \frac{\bar{\theta}}{\rho h_0^3 \omega^2} \quad (3.32)$$

$$\text{dimensionslose horizontale Antriebsamplitude } \Gamma_x : \quad \Gamma_x = \frac{A_x \omega^2}{g} \quad (3.33)$$

$$\text{dimensionslose vertikale Antriebsamplitude } \Gamma_y : \quad \Gamma_y = \frac{A_y \omega^2}{g}. \quad (3.34)$$

Während die *Reynolds-Zahl* R in der Literatur bzw. Theorie der Hydrodynamik seit langer Zeit (siehe z.B. [14–16]) bekannt ist und als Abschätzung der Größenord-

nungen von Trägheits- zu viskosen Kräften dient, sind die übrigen dimensionslosen Parameter im Wesentlichen durch die Wahl der Skalen (siehe 3.19, 3.20) bestimmt. Die Wahl der Koeffizienten Γ_x und Γ_y ist durch Ähnlichkeitsbetrachtungen zu Arbeiten mit granularer Materie motiviert, bei denen statt einer Fluidschicht eine dünne Lage eines Granulats periodisch angetrieben wird (siehe [11, 12]). Der Parameter Γ_y beschreibt z.B. den Quotienten aus maximaler vertikaler Beschleunigung durch den Antrieb und Gravitationsbeschleunigung g . Falls $\Gamma_y > 1$ ist, können Teile des Granulats die Bodenplatte verlassen und ballistische Bewegungen ausführen.

Die Lösung des in den Gl. (3.21-3.29) zusammengefassten nichtlinearen Problems ist sehr komplex und ohne numerische Hilfsmittel für den allgemeinen Fall nicht möglich. Wir werden uns daher in den folgenden Kapiteln 4 sowie 5 an Problemstellungen versuchen, die bestimmte Symmetrien der Variablen bzw. des äußeren Antriebs erfüllen.

Zunächst werden wir ähnlich zu diesem Unterkapitel im nachfolgenden die Eigenschaften viskoelastischer Fluide vorstellen. Zur theoretischen Beschreibung dieser Art von Fluiden wurden in den vergangenen Jahrzehnten bzw. -hundertern zahlreiche Modelle entworfen bzw. hergeleitet (siehe z.B. [19, 30, 59]). Das 1950 vorgestellte sogenannte *Oldroyd-B-Modell* ([20, 21]) hat in den letzten Jahren einige Aufmerksamkeit erfahren, da es das Modell eines Newtonschen Fluids sowie weitere Modelle zur Beschreibung viskoelastischer Flüssigkeiten (wie z.B. das *Maxwell-* und auch das sogenannte *Jeffrey-Modell*, siehe auch [30]) als Spezialfälle enthält.

3.3. Grundgleichungen für viskoelastische Fluide: Oldroyd-B-Modell

In diesem Unterkapitel wollen wir, anknüpfend an die Vorstellung und Diskussion eines Newtonschen Fluids auf einer bewegten Platte, dieses durch ein viskoelastisches Fluid ersetzen. Laut Maxwell ([19], siehe auch [30, S. 17]) haben alle Flüssigkeiten viskoelastische Eigenschaften. Damit ist gemeint, dass auf (jeweils fluidspezifischen) kurzen Zeitskalen diese sich wie ein elastischer Festkörper verformen, falls äußere Scherspannungen oder Drücke auf diese wirken, aber sich auf jeweils längeren Zeitskalen wie viskose Fluide verhalten. Die Zeitspanne, welche diese beiden Zeitskalen voneinander trennt, wird *viskoelastische Relaxationszeit* genannt und kann für unterschiedliche Fluide um sehr viele Größenordnungen voneinander abweichen (z.B. liegt diese im Pikosekundenbereich für Wasser und im Bereich von Jahrhunderten, wenn z.B. die Ströme im Erdmantel als Fluide betrachtet werden, siehe [30]).

Auf die Rheologie, Eigenschaften und die Herleitung sämtlicher Details von viskoelastischen Fluiden kann in dieser Arbeit nicht eingegangen werden. Dazu sei auf umfassende Einführungen und darin vorgestellte Modelle bzw. Modellgleichungen verwiesen (z.B.: [30, 59]). Wir wollen die im vorherigen Kapitel diskutierten Gleichungen (3.21-3.29) so erweitern, dass diese den bestimmenden Differentialgleichungen eines Oldroyd-B-Fluids genügen. Dazu gehen wir analog zum vorherigen Kapitel 3.2 vor und vergleichen die dort erhaltenen Bedingungen mit denen des Oldroyd-B-Modells:

Die Bilanzgleichung (3.3) für die Massendichte, welche in die Inkompressibilitätsbed. (3.5 bzw. 3.21) übergegangen ist, bleibt auch für das Oldroyd-B-Fluid erhalten. Diese Annahme mag überraschen, jedoch ist die Inkompressibilität eine gute Approximation, falls die betrachteten Geschwindigkeiten im System klein gegen die Schallgeschwindigkeit sind (siehe auch Seite 13f).

Die Gleichungen (3.4, 3.6, 3.8, 3.9) werden im Oldroyd-B-Modell so modifiziert, dass der Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ durch den sogenannten Konformations- bzw. Polymer Spannungstensor $\underline{\underline{S}}$ ersetzt wird. Das bedeutet, dass

$$\underline{\underline{\sigma}}^{\text{OB}} = -p\mathbb{1} + \underline{\underline{S}}. \quad (3.35)$$

Mit Hilfe von Überlegungen auf mikroskopischer Ebene und Annahmen spezieller Eigenschaften polymerer Teilchen lassen sich die Komponenten des Spannungstensors $\underline{\underline{T}}$ und des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$ durch eine konstitutive Gleichung miteinander in Relation setzen:

$$\underline{\underline{S}} + \lambda \frac{\text{D}}{\text{D}t} \underline{\underline{S}} = \mu \left[1 + \lambda_r \frac{\text{D}}{\text{D}t} \right] \underline{\underline{T}} = \mu \left[1 + \lambda_r \frac{\text{D}}{\text{D}t} \right] \left(\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T \right). \quad (3.36)$$

In obiger Gleichung ist μ wie vorher die dynamische Viskosität und die Parameter λ sowie λ_r sind als Relaxations- bzw. Retardationszeiten bekannt. Dabei beschränken wir uns auf die Annahme, dass $\lambda \geq \lambda_r \geq 0$. Der Operator $\text{D}/\text{D}t$ beschreibt die sogenannte konvektive Zeitableitung („upper convected time derivative“) und wirkt auf beliebige Tensoren, z.B. $\underline{\underline{A}}$, folgendermaßen:

$$\frac{\text{D}}{\text{D}t} \underline{\underline{A}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{A}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} (\vec{\nabla} \vec{u}) - (\vec{\nabla} \vec{u})^T \underline{\underline{A}}. \quad (3.37)$$

Die in den Gleichungen (3.36, 3.37) eingeführten Größen des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$ erhöhen nicht nur die Anzahl der abhängigen Variablen des gesamten Problems. Sondern durch die zusätzliche zeitliche Ableitung in der konstitutiven Gleichung

3. Hydrodynamische Grundgleichungen

(3.36) ändert sich zudem der Grad des partiellen DGL-Systems, so dass zusätzliche Rand- und Anfangsbedingungen notwendig werden. Es sind noch zwei Spezialfälle zu bemerken:

Falls $\lambda = \lambda_r = 0$ sind, so gilt in diesem Fall für den Konformationstensor $\underline{\underline{S}} = \mu \underline{\underline{T}}$ und somit spiegelt diese spezielle Parameterwahl den Fall des Newtonschen Fluids wider, der im vorherigen Kapitel 3.2 ausführlich beschrieben worden ist. Im Hinblick auf die in den nächsten beiden Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Lösungen dieses Systems ist jedoch in der Hinsicht Vorsicht angebracht, als dass Lösungen im Oldroyd-B-Modell bei der Wahl $\lambda, \lambda_r \rightarrow 0$ nicht unbedingt in die Lösungen des Newtonschen Modells übergehen, sondern auch divergieren können, da sich durch die spezielle Parameterwahl der Grad des partiellen DGL-Systems ändert. Dies kann analog zum Übergang von Newtonschen Fluiden zu idealen Fluiden (kinematische Viskosität $\nu \rightarrow 0$) betrachtet werden. Hierbei sind z.B. die Randbedingungen an festen Wänden nicht miteinander verträglich („no-slip“-RB: $\vec{u} = 0$, gegenüber „free-slip“-RB: $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = 0$. Für eine Diskussion siehe z.B. [16, S. 148f]).

Ein zweiter Spezialfall ist die Wahl $\lambda_r = 0$. Hierbei gehen die Bestimmungsgleichungen über in diejenigen eines sogenannten *Maxwell*-Fluids. Dabei gibt es in dieser Sorte Flüssigkeiten nur eine charakteristische Zeitskala λ , welche beschreibt, mit welcher Geschwindigkeit die elastischen Eigenschaften in die Eigenschaften des rein viskosen Regimes relaxieren (siehe auch [19, 30]). Beispiele für Maxwellsche Fluide sind demnach Silikon-Öle und auch einige Polykristalle bei sehr hohen Temperaturen.

Um analog zum vorherigen Kapitel zu den Bestimmungsgleichungen des gesamten Systems zu gelangen (siehe Gln. (3.21)-(3.29) auf Seite 17), wird der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ durch den neuen Extraspannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}^{\text{OB}}$ ersetzt. Dieses geschieht in den Navier-Stokes-Gleichungen (3.8, 3.9) bzw. den Randbedingungen an der freien Oberfläche (3.13, 3.14). Die kinematische Höhenbedingung (3.12) und die Bedingungen an die Geschwindigkeiten am unteren festen Rand (3.17 sowie 3.18) ändern sich nicht. Da die Einheiten der dimensionsbehafteten Größen des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$ denjenigen des Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ entsprechen, können wir auf gleiche Weise dimensionslose Variablen einführen wie schon in Kapitel 3.2, siehe Formeln (3.19) und (3.20) auf Seite 16.

Damit erhalten wir analog zu den bestimmenden Gleichungen eines Newtonschen

Fluids (3.21-3.34) diejenigen, welche das Oldroyd-B-Modell charakterisieren:

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (3.38)$$

$$\partial_t u + (u\partial_x + v\partial_y) u = -\partial_x p + \partial_x S_{xx} + \partial_y S_{xy} - \tilde{g} \Gamma_x \partial_t^2 f_x(t) \quad (3.39)$$

$$\partial_t v + (u\partial_x + v\partial_y) v = -\partial_y p + \partial_x S_{yx} + \partial_y S_{yy} - \tilde{g} (1 + \Gamma_y \partial_t^2 f_y(t)) \quad (3.40)$$

$$\partial_t h + u|_{y=h(x,t)} \partial_x h = v|_{y=h(x,t)}. \quad (3.41)$$

Dabei sind in den Gleichungen (3.39) und (3.40) S_{xx}, \dots, S_{yy} die vier Komponenten des (nun entdimensionalisierten) Tensors $\underline{\underline{S}}$. Die Randbedingungen am Boden sind identisch zum Newtonschen Fall:

$$\vec{u}|_{y=0} = 0 \quad (3.42)$$

$$(\partial_x u)|_{y=0} = 0 \quad (3.43)$$

$$(\partial_y v)|_{y=0} = 0. \quad (3.44)$$

Für die Randbedingungen an der freien Oberfläche gibt sich unter Berücksichtigung des Extraspannungstensors $\underline{\underline{S}}$:

$$\begin{aligned} & (\partial_x h) (S_{xx} - S_{yy})|_{y=h(x,t)} \\ & - S_{xy}|_{y=h(x,t)} + \left((\partial_x h)^2 \right) S_{yx}|_{y=h(x,t)} = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & - \left(1 + (\partial_x h)^2 \right) p|_{y=h(x,t)} + \left((\partial_x h)^2 \right) S_{xx}|_{y=h(x,t)} \\ & (\partial_x h) (S_{xy} + S_{yx})|_{y=h(x,t)} + S_{yy}|_{y=h(x,t)} = \frac{\sigma^* \partial_x^2 h}{\sqrt{(1 + \partial_x h)^2}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dazu kommen für den Fall des Oldroyd-B-Fluids noch die vier Gleichungen, welche die Komponenten des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$ in Beziehung zu den Geschwindigkeiten u und v setzen, und zwar in der entdimensionalisierten Form:

$$\underline{\underline{S}} + \bar{\lambda} \frac{D}{Dt} \underline{\underline{S}} = \frac{1}{R} \left[1 + \bar{\lambda}_r \frac{D}{Dt} \right] \left(\vec{\nabla} \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \vec{u} \right)^T \right). \quad (3.47)$$

Zusätzlich zu den dimensionslosen Parametern aus dem Newtonschen Modell (siehe Gln. (3.30)-(3.34) auf Seite 17) kommen noch die dimensionslosen Versionen der

3. Hydrodynamische Grundgleichungen

Relaxationszeit $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ und der Retardationszeit $\lambda_r \rightarrow \bar{\lambda}_r$ hinzu:

$$\text{dimensionslose Relaxationszeit } \bar{\lambda} : \quad \bar{\lambda} = \lambda \omega \quad (3.48)$$

$$\text{dimensionslose Retardationszeit } \bar{\lambda}_r : \quad \bar{\lambda}_r = \lambda_r \omega . \quad (3.49)$$

Somit bestimmen die Gleichungen 3.38 bis 3.47 zusammen mit den Werten der Parameter (3.48, 3.49 sowie 3.30-3.34) das Problem vollständig bis auf eine Eigenschaft, auf die wir bisher nicht eingegangen sind: Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$.

Im folgenden Kapitel wollen wir Lösungen für beiden Sorten Fluide betrachten (Newtonsche und viskoelastische), wobei wir i. Allg. speziell den periodischen Anteil davon diskutieren werden. Falls dabei auch der transiente Teil betrachtet wird, wollen wir, wenn nichts anderes angemerkt ist, zu Beginn ruhende Fluidschichten betrachten, d.h.:

$$\vec{u}(x, y)|_{t=0} = 0 . \quad (3.50)$$

Im Oldroyd-B-Modell (siehe Diskussion auf Seite 20) ist noch eine zweite Anfangsbedingung notwendig, wobei auch die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwinden soll:

$$(\partial_t \vec{u}(x, y))|_{t=0} = 0 . \quad (3.51)$$

In diesem Kapitel haben wir die Gleichungssysteme beschrieben, welche eine (periodisch) angetriebene Fluidschicht auf einer festen Platte innerhalb zweier Modelle beschreiben. Zum einen für ein Newtonsches Fluid mit konstanter Viskosität, zum anderen für ein viskoelastisches Fluid, welches im sogenannten Oldroyd-B-Modell behandelt wird. Im nächsten Kapitel werden wir Lösungen dieser Feldgleichungen, welche sich mit elementaren und analytischen Mitteln bestimmen lassen sowie ausgewählten Symmetrien genügen, diskutieren.

4. Analytische Lösungen vertikal periodisch angetriebener Fluide

Nachdem wir im vorherigen Kapitel allgemein die theoretische Problemstellung innerhalb zweier Modelle (Newton- und viskoelastisches Fluid) erörtert haben, werden wir in diesem Kapitel auf die spezielle Lösungen dieser Gleichungen eingehen, die sich durch rein vertikale und rein horizontale externe Antriebe ergeben. Diese werden wir vorstellen und insbesondere auf die Unterschiede aber auch Gemeinsamkeiten der hydrodynamischen Modelle eingehen.

Den Versuch, die in den Untersuchungen von Michael Faraday zu vertikal vibrierenden Fluiden ([3]) im Jahre 1831 von ihm beobachteten Oberflächenwellen theoretisch zu modellieren, unternahm zunächst Benjamin und Ursell 1954 ([31]) für ideale Fluide, dann K. Kumar und viele andere für viskose Fluide (siehe z.B. [33, 34, 41, 45, 52, 96]) sowie S. Kumar für viskoelastische Fluide ([53, 57, 58]). In deren Analysen wird i. Allg. von einer flachen, statischen Schicht ausgegangen, wobei der vertikale Antriebsterm zusammen mit der konstanten Gravitationsbeschleunigung nur über den Druck p eingeht, so dass sich ein lineares Druckfeld mit zeitabhängigem Vorfaktor einstellt („hydrostatischer Druck mit zeitabhängigem Gravitationsterm“). Dieses Feld kann dann instabil gegen subharmonische und harmonische Oberflächenwellen werden. Da wir die Stabilitätsuntersuchung für den Fall eines Oldroyd-B-Fluides in Kapitel 6 untersuchen wollen, werden wir die Referenzlösung im folgenden Kapitel 4.1 noch einmal kurz skizzieren.

Die als Stokes' erstes und zweites Problem („Stokes' first and second problems“) bekannten hydrodynamischen Fragestellungen, wobei ein Fluid mittels einer unendlich ausgedehnten flachen Platte spontan in Bewegung versetzt wird, ist seit 1851 von Stokes ([9]) über Rayleigh ([10]) und Schlichting ([17]) und vielen weiteren Forschern gut untersucht. Unter anderem für sowohl viskose Newtonsche als auch viskoelastische Fluide. Dabei sind in den letzten 15 Jahren neben den transienten Lösungen ([18]) im Newtonschen Fall auch insbesondere die exakten Lösungen für ein Oldroyd-B-Fluid ein aktueller Gegenstand der Forschung ([26, 93, 94]).

Wir werden als neuem Beitrag dazu die exakten Lösungen auf zwei Wegen bestim-

men: Zum einen mittels Separation der horizontalen Geschwindigkeit u in räumliche Basisfunktionen, welche die Randbedingungen erfüllen, und einer zeitlichen Funktion, um sowohl die periodischen als auch die transienten Teile der Lösung bei beliebigem Antrieb zu bestimmen. Zum anderen gibt es für den Fall harmonischer Antriebe (d.h. sinus- bzw. kosinusartig) eine Lösungsmöglichkeit, die bisher in der Literatur unseres Wissens nach nicht beschrieben worden ist. Im Fall des Oldroyd-B-Fluids ergeben sich zusätzlich zu lösende Differentialgleichungen für die Elemente des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$ (siehe Gl. (3.47) auf Seite 21). Da diese Terme nichtlinear von den Geschwindigkeiten abhängen, werden die Resultate dieser Terme in der bisherigen Literatur bisher wenig aufgeführt. Um die Stabilitätsanalyse in Kapitel 8 durchführen zu können, werden wir diese im Kapitel 5.2 detailliert diskutieren.

4.1. Analytische Lösung

Wir konzentrieren uns auf die Bestimmungsgleichungen (3.38-3.47, Seite 21f) im Oldroyd-B-Modell. Der Lösungsweg für das Newtonsche Fluid verläuft analog und wird hier nicht gesondert diskutiert. Als vertikaler Antrieb kann eine allgemein beliebige Funktion $f_y(t)$ in Gleichung (3.40) gewählt werden, was an der folgenden Rechnung kaum etwas ändert. Wir beschränken uns auf eine harmonischen Vibration, d.h. $f_y(t) = \sin(t + \phi_v)$ und $f_x(t) = 0$, wobei ϕ_v ein beliebig wählbarer Phasenwinkel ist.

Wir setzen das Geschwindigkeitsprofil als stationär sowie die Höhe als flach an und der Druck soll nur von der Zeit und der vertikalen Koordinate y abhängen. Das bedeutet:

$$h = 1; \quad u = v = 0; \quad p = p(y, t) . \quad (4.1)$$

Durch obige Gleichung sind die Gleichungen (3.38) und (3.41) sowie die unteren Randbedingungen (3.42-3.44) automatisch erfüllt. Die konstitutive Gleichung des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$ (3.47) reduziert sich damit zu:

$$\underline{\underline{S}} + \bar{\lambda} \partial_t \underline{\underline{S}} = 0 . \quad (4.2)$$

Mit der Einschränkung, dass die einzelne Elemente $(\underline{\underline{S}})_{i,j}$ mit $i, j = 1, 2$ nicht weiter von x und y (genauso wie die Geschwindigkeiten u und v) abhängen sollen, ergibt sich als allg. Lösung von Gl. (4.2):

$$\underline{\underline{S}}(t) = \underline{\underline{S}}^0 \exp^{-\frac{t}{\bar{\lambda}}} . \quad (4.3)$$

Mit der Anfangsbedingung $\underline{\underline{S}}^0 = 0$ (siehe z.B. [93]) folgt, dass $\underline{\underline{S}} = 0$ für alle Zeiten t . Somit sind Gl. (3.47) und zusätzlich (3.39) erfüllt. Bei den Randbedingungen (3.45, 3.46) bleibt mit den Normal- und Tangentialvektoren $\vec{n} = (0, 1)$ sowie $\vec{t} = (-1, 0)$ nur die Normalenrandbedingung übrig, so dass noch folgendes DGL-System gelöst werden muss:

$$-\partial_y p(y, t) + \tilde{g}(-1 + \Gamma_y \sin(t + \phi_v)) = 0 \quad (4.4)$$

$$p|_{y=1} = 0. \quad (4.5)$$

Dieses System wird gelöst durch die vertikale Referenzlösung für den Druck p_v^0 :

$$p_v^0(y, t) = \tilde{g}(1 - \Gamma_y \sin(t + \phi_v))(1 - y) = G(t)(1 - y). \quad (4.6)$$

Aus der obigen Gleichung ist zu erkennen, dass die Referenzlösung derjenigen eines hydrostatischen Drucks entspricht, wobei die Gravitationskonstante g bzw. \tilde{g} in eine zeitabhängige Gravitationsbeschleunigung $G(t)$ übergeht. Für einen verschwindenden vertikalen Antrieb ergibt sich der gewohnte, in der vertikalen Koordinate lineare hydrostatische Druck.

Wir bemerken noch, dass eine konstante horizontale Geschwindigkeit $u = c = \text{const.}$ die Feldgleichungen (3.38-3.46) erfüllt, bis auf die Randbedingung am Boden (3.42). Diese sorgt dafür, dass das Fluid unter den elementaren Annahmen auf der Platte ruht. Abschließend für dieses Kapitel wollen wir noch einmal die Referenzlösungen aller Variablen für den rein vertikalen Antrieb aufführen, um damit in Kapitel 6 deren Stabilität gegen subharmonische und harmonische Oberflächenstrukturen zu untersuchen. Diese Referenzlösung wird jeweils mit oberem Index 0 und unterem Index v gekennzeichnet:

$$u_v^0 = v_v^0 = 0 \quad ; \quad h_v^0 = 1$$

$$p_v^0(y, t) = \tilde{g}(1 - \Gamma_y \sin(t + \phi_v))(1 - y) \quad (4.7)$$

$$\underline{\underline{S}}_v^0 = \begin{pmatrix} S_{v,xx}^0 & S_{v,xy}^0 \\ S_{v,xy}^0 & S_{v,yy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Horizontale periodische Antriebe

Nachdem wir im vorherigen Kapitel die elementare Lösung bei einem rein vertikalen Antrieb vorgestellt haben, werden wir im Folgenden den Fall für horizontale Antriebe detailliert diskutieren. Der Beginn der theoretischen Untersuchungen zu diesem Thema geht mindestens zurück bis ins 19. Jahrhundert und eine der ersten Beschreibungen wird Stokes im Jahr 1851 zugeschrieben ([9]), daher auch die Bezeichnung „Stokes' first problem“. Über die Arbeiten von Lord Rayleigh 1911 ([10]) und denen von Schlichting ([17]) wurde im 20. Jahrhundert insbesondere die Stabilität der periodischen Lösungen hin zu harmonischen Oberflächwellen untersucht, z.B. von Yih ([71, 72]), Or ([85], Talib und Juel ([84]) und einigen weiteren. In diesen Arbeiten wurden i. Allg. die vollständig eingeschwungenen Lösungen des periodischen harmonischen Antriebs betrachtet, wobei im Jahr 2000 Erdogan auch die Eigenschaften des transienten Anteils untersucht hat ([18]).

Die Grundlage der oben genannten Untersuchungen waren i. Allg. die Navier-Stokes-Gleichungen der viskosen Fluide. Für viskoelastische Fluide und deren verschiedenen konstitutiven Gleichungen wurden auch viele Lösungen in den letzten beiden Jahrzehnten veröffentlicht, z.B. von Fetecau ([26, 29]), Hayat ([24]) sowie Tan und Masuoka ([94]) und vielen anderen. In diesen Veröffentlichungen geht es insbesondere um die exakten analytischen Lösungen mittels der konstitutiven Gleichungen des Oldroyd-B-Fluids unter harmonischer Plattenbewegung und dem daraus resultierenden Geschwindigkeitsfeld.

Wir wollen in diesem Kapitel folgendermaßen vorgehen: Beginnend bei den Newtonschen Fluiden mit den Bestimmungsgleichungen (3.21-3.29, siehe Seite 17f) werden wir das bekannte Problem auf zwei Arten lösen: Zum einen mittels Entwicklung in räumliche Eigenfunktionen, die den Randbedingungen genügen, so dass sich die horizontale Geschwindigkeit als unendliche Summe dieser Basisfunktionen mit zeitabhängigen Koeffizienten darstellen lässt. Durch diese Vorgehensweise können wir auch die transienten Anteile der Lösung erfassen und werden deren interessante Eigenschaften näher erläutern. Zum anderen kann bei harmonischen Antrieben ein zweiter Lösungsweg gewählt werden, der direkt analytisch herleitbar ist und für den periodischen Teil äquivalent zur Lösung des ersten Teils ist.

Darauf aufbauend werden wir in Unterkapitel 5.2 beide Ansätze so modifizieren, dass diese auch für die komplizierten Gleichungen des Oldroyd-B-Modells die Lösungen liefern und dabei auch auf andere als harmonische Antriebe eingehen. Zudem werden wir die Lösungen zu den Hilfsgrößen des Tensors $\underline{\underline{S}}$ (siehe beispielsweise Gl. (3.47) auf Seite 21) diskutieren, da diese einerseits für die Stabilitätsanalyse in Kapitel 8 benötigt werden, andererseits in der bisherigen Literatur kaum beachtet wurden.

5.1. Horizontal oszillierte Newtonsche Fluide

Analog zum Vorgehen in Kapitel 4.1 auf Seite 24 suchen wir nach möglichst elementaren Lösungen für einen harmonischen horizontalen Antrieb $f_x(t) = \sin(t + \phi_h)$ in x -Richtung sowie $f_y(t) = 0$, wobei ϕ_h ähnlich wie ϕ_v einen konstanten Phasenwinkel darstellt (siehe Kapitel 4.1 auf Seite 24). Die weiteren Annahmen zur Lösung des Gesamtgleichungssystems (3.21-3.29, Seite 17f) seien:

$$\begin{aligned} u &= u(y, t) & (5.1) \\ v &= 0 \\ h &= 1 \\ p &= p(y) . \end{aligned}$$

Mit den obigen Annahmen (5.1) und ohne vertikalen Antrieb, d.h. $\Gamma_y = 0$, können wir das Ergebnis für $p_v^0(y, t)$ (siehe Gl. 4.7, Seite 25) übernehmen, so dass sich der allgemein bekannte hydrostatische Druck ausbildet. Die restlichen Bedingungen, die sich aus den Annahmen (5.1) ergeben, sofern diese nicht automatisch erfüllt sind, erhalten wir zu:

$$\partial_t u(y, t) - \frac{1}{R} \partial_y^2 u(y, t) = \tilde{g} \Gamma_x \sin(t + \phi_h) \quad (5.2a)$$

$$u|_{y=0} = 0 \quad (5.2b)$$

$$(\partial_y u)|_{y=1} = 0 . \quad (5.2c)$$

Damit reduziert sich das Problem auf die Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung (5.2) für die horizontale Geschwindigkeit u . Im Folgenden werden wir zwei Lösungswege skizzieren:

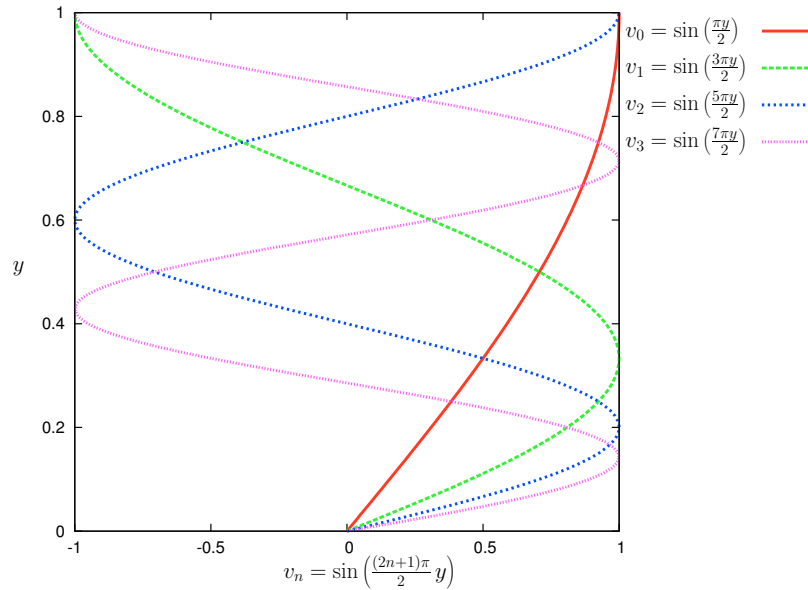


Abbildung 5.1.: Basisfunktionen $v_n = \sin(w_n y)$ als Funktion der Variable y , welche auf der senkrechten Achse aufgetragen ist. Dargestellt sind $n = 0$ (rot), $n = 1$ (grün), $n = 2$ (blau) sowie $n = 3$ (lila).

5.1.1. Lösung mittels Basisfunktionen $\sin(w_n y)$

Um das DGL-System (5.2) zu lösen, benutzen wir den klassischen Separationsansatz für die unabhängigen Variablen y und t , d.h. wir setzen die Lösung in der Form $u(y, t) = v(y) \cdot g(t)$ an. Damit erhalten wir:

$$R \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = \frac{v''(y)}{v(y)} = -K^2, \quad (5.3)$$

wobei K konstant sein muss. Die räumliche DGL wird gelöst durch $v_s(y) = \sin(y)$ bzw. $v_s(y) = \cos(y)$. Mit Hilfe der Randbedingungen (5.2b) und (5.2c) lässt sich zeigen, dass nur die Sinus-Lösungen bestehen bleiben und zusätzlich gelten muss:

$$K = \frac{(2n+1)\pi}{2} =: w_n, \quad (5.4)$$

wobei $n = 0, 1, 2, \dots$. Diese Funktionen $v_n(y) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}y\right)$ haben die Eigenschaft, dass sie für unterschiedliche n zueinander orthogonal sind (mit dem üblichen integralen Skalarprodukt für Funktionen) und das sich beliebige (quadrat-integrale)

Funktionen im offenen Intervall $(0, 1)$ danach entwickeln lassen:

$$(v_m, v_n) = \int_0^1 dy \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}y\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}y\right) = \frac{1}{2} \delta_{m,n} \quad (5.5a)$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{w_n} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}y\right), \quad y \in (0, 1). \quad (5.5b)$$

Die ersten vier Basisfunktionen $v_n(y)$ sind in Abb. 5.1 gezeigt. Jede dieser Basisfunktionen v_n hat neben der Nullstelle bei $y = 0$ jeweils noch n weitere Nullstellen im Inneren des Intervalls, und zwar an den Stellen $y_m^n = \frac{2m}{2n+1}$, $m = 1, \dots, n$.

Mit Hilfe der so gewonnenen Lösung des räumlichen Teils können wir den zeitlichen Anteil $g(t)$ aus Gl (5.3) bestimmen zu:

$$g_n(t) = \exp\left(-\frac{w_n^2}{R}t\right) =: \exp(-\gamma_n t). \quad (5.6)$$

Die Lösung des homogenen Teils von Gl. (5.2a) können wir durch Superposition aller Funktionen $v_n(y) \cdot g_n(t)$ darstellen. Die spezielle Lösung $g_n^{sp}(t)$ bekommen wir aus den Relationen (5.5) in Verbindung mit Gl.(5.2a):

$$\partial_t g_n^{sp}(t) + \gamma_n g_n^{sp}(t) = \frac{2}{w_n} \tilde{g}\Gamma_x \sin(t + \phi_h), \quad (5.7)$$

und somit deren Lösung:

$$\boxed{g_n^{sp}(t) = \frac{2}{w_n(\gamma_n^2 + 1)} \tilde{g}\Gamma_x (\gamma_n \sin(t + \phi_h) - \cos(t + \phi_h))}. \quad (5.8)$$

Mit Hilfe der obigen speziellen Lösung (5.8) ergibt sich für die allgemeine Lösung der horizontalen Geschwindigkeit u aus DGL-System (5.2) zusammen mit der Anfangsbedingung einer stationären Fluidschicht (siehe (3.50) auf Seite 22):

$$u_h^0(y, t) = \tilde{g}\Gamma_x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \sin(w_n y)}{w_n(\gamma_n^2 + 1)} \left\{ (-\gamma_n \sin \phi_h + \cos \phi_h) \exp(-\gamma_n t) + \gamma_n \sin(t + \phi_h) - \cos(t + \phi_h) \right\}. \quad (5.9)$$

Die Referenzlösung $u_h^0(y, t)$ besteht aus einem transienten Anteil (erste Zeile von Gl.

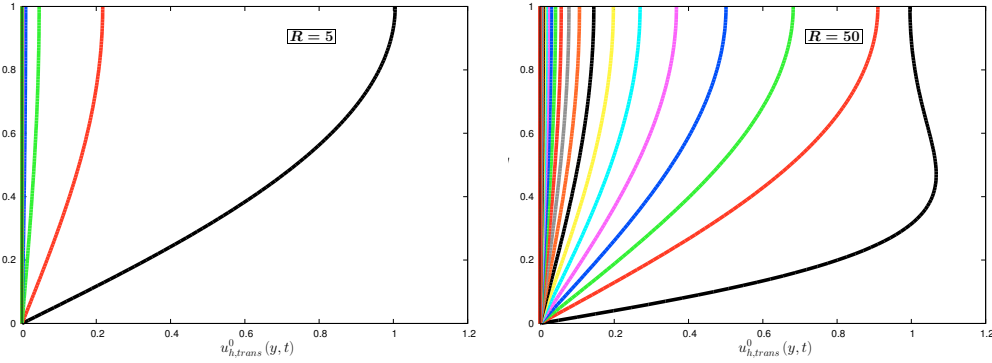


Abbildung 5.2.: Diagramm der Geschwindigkeit $u_{h,trans}^0$ für $R = 5$ (links) bzw. $R = 50$ (rechts) zu zunehmenden Zeiten t in Abhängigkeit der vertikalen Achse y . Die schwarze Linie stellt jeweils die Situation bei $t = 0$ dar. Nach links hin mit unterschiedlichen Farben sind die transienten Geschwindigkeiten zu weiteren Zeitpunkten $t = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ gezeichnet. Weitere Parameter: $\tilde{g}\Gamma_x = 1$, $\phi_h = 0$.

(5.9)) sowie dem periodischen Anteil (zweite Zeile). Neben der konstanten multiplikativen Amplitude $\tilde{g}\Gamma_x$ hängt diese bei konstantem Winkel ϕ_h über die $\gamma_n = \frac{w_n^2}{R}$ nur noch von der Reynoldszahl R ab. Wir werden zunächst den transienten Teil $u_{h,trans}^0$ diskutieren, der die obere Zeile von Gl. (5.9) ausfüllt. Dieser Teil der Lösung ist für die Reynoldszahlen $R = 5$ sowie $R = 50$ im linken bzw. rechten Teil des Diagramms 5.2 skizziert, und zwar zu anwachsenden Zeitpunkten t , wobei die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Graphen jeweils $\Delta t = \pi$ beträgt. Es ist zu erkennen, dass diese Lösungen vom Start weg (gekennzeichnet durch die schwarzen Linien) kontinuierliche abnehmen, wobei dieser Vorgang bei kleineren Werten von R deutlich schneller vonstatten geht. Dabei ist weiterhin zu erkennen, dass hin zu größeren Werten von R ab einer bestimmten Schwelle die transiente Geschwindigkeit im Innern ein Maximum ausbildet und sich am oberen Rand ($y \rightarrow 1$) auf einen Wert von 1 konzentriert, was in diesem Fall genau $\tilde{g}\Gamma_x$ entspricht.

Ein interessanter Aspekt dieser transienten Geschwindigkeitskomponente ist, dass durch sie eine Nettogeschwindigkeit in eine Richtung induziert wird, obwohl der Antrieb insgesamt periodisch wirkt. Dies wollen wir im Folgenden erläutern, indem wir zunächst die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} einführen:

$$\bar{u}(t) := \int_0^1 dy u_h^0(y, t) . \quad (5.10)$$

Mit Definition (5.10) ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}_h^0(t)$ der horizontalen Referenzlösung (durch Ausnutzen von: $\int_0^1 dy \sin(w_n y) = \frac{2}{w_n}$):

$$\bar{u}_h^0(t) = \tilde{g}\Gamma_x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{w_n^2(\gamma_n^2 + 1)} \left\{ (-\gamma_n \sin \phi_h + \cos \phi_h) \exp(-\gamma_n t) + \gamma_n \sin(t + \phi_h) - \cos(t + \phi_h) \right\}. \quad (5.11)$$

In obiger Gleichung für die y -Durchschnittsgeschwindigkeit wurden Integral- und Summenbildung vertauscht. Im Vergleich zu $u_h^0(y, t)$ geht die y -Abhängigkeit über in die Änderung des Vorfaktors in der Summe, wobei jeweils die zeitliche Abhängigkeiten innerhalb der Summe erhalten bleiben. Falls wir noch die Mittelung dieser durchschnittlichen Geschwindigkeiten innerhalb einer Antriebsperiode betrachten, so heben sich die periodischen Anteile heraus:

$$\langle \bar{u} \rangle(\tau) := \frac{1}{2\pi} \int_{\tau-2\pi}^{\tau} d\tau \bar{u}(t). \quad (5.12)$$

Damit ergibt die gerade definierte „Nettogeschwindigkeit“ für die berechnete durchschnittliche Geschwindigkeit aus Gl. (5.11):

$$\langle \bar{u}_h^0 \rangle(\tau) = \frac{\tilde{g}\Gamma_x}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-\gamma_n \sin \phi_h + \cos \phi_h)}{w_n^2 \gamma_n (\gamma_n^2 + 1)} \left(\exp(-\gamma_n(\tau - 2\pi)) - \exp(-\gamma_n \tau) \right). \quad (5.13)$$

Obige Gleichung (5.13) beschreibt demnach die Drift der gesamten Fluidschicht in horizontaler Richtung zu einem Zeitpunkt τ , wobei zeitlich über eine Antriebsperiode (Periodendauer $T = 2\pi$) gemittelt wird. Die Resultate dieser Gleichung sind in den beiden Diagrammen von Abbildung 5.3 gezeigt. In diesen sind jeweils die Nettogeschwindigkeiten $\langle \bar{u}_h^0 \rangle(\tau)$ aufgetragen. Im linken Diagramm ist zu erkennen, dass für kleine Reynoldszahlen R die Nettogeschwindigkeit sehr schnell auf Null abfällt, während für zunehmende R diese Abnahme deutlich langsamer ist.

Im rechten Diagramm von Abb. 5.3 ist die Geschwindigkeit $\langle \bar{u}_h^0 \rangle$ auf einer logarithmischen Skala aufgetragen, wobei der Zeitbereich der Variable τ auf der Abszisse gegenüber dem linken Diagramm fünfmal größer ist. Es ist zu erkennen, dass sich für die drei exemplarischen Werte von R eine lineare Abnahme andeutet, d.h. für große

5. Horizontale periodische Antriebe

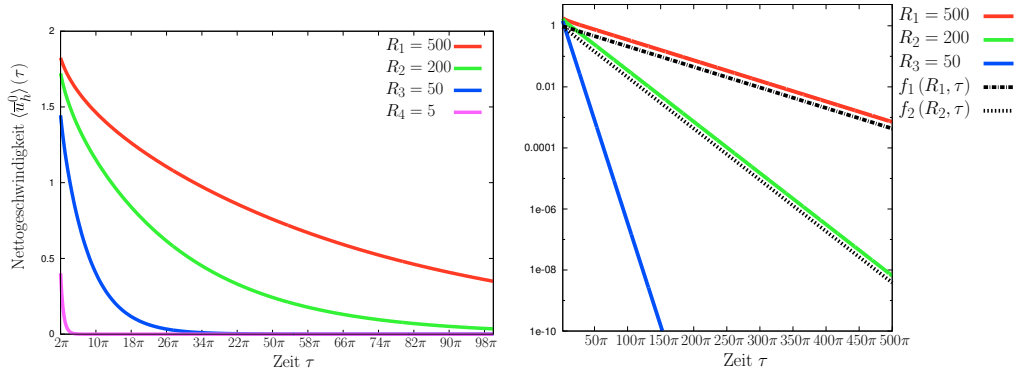


Abbildung 5.3.: Diagramme der Nettogeschwindigkeit $\langle \bar{u}_h^0 \rangle(\tau)$ in Abhängigkeit von der Zeit τ für verschiedene Werte von R (siehe jeweiliges Diagramm). Im rechten Bild ist die vertikale Achse logarithmisch aufgetragen. Die schwarz gestrichelten Plots verdeutlichen das asymptotische Verhalten der Nettogeschwindigkeiten mit $f_i(R_i, \tau) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{4R_i} \tau\right)$ mit $i = 1, 2$. Weitere Parameter: $\bar{g}\Gamma_x = 1$, $\phi_h = 0$.

Zeiten τ scheinen sich die Nettogeschwindigkeiten $\langle \bar{u}_h^0 \rangle \propto \exp(-\beta \tau)$ zu verhalten, wobei β eine Konstante ist. Diese Abhängigkeit kann folgendermaßen mit Hilfe von Gl. (5.13) begründet werden:

Für hinreichend große Zeiten τ gegenüber der Reynoldszahl R , d.h. $\frac{\pi^2 \tau}{4R} \approx 1$, spielt der äußere rechte Term in der Summe von Gl. (5.13) die entscheidende Rolle und verhält sich proportional zu $\exp(-\gamma_n \tau)$, weil der linke Bruchterm nur monoton mit wachsendem n proportional zu n^{-k} abnimmt, wobei k eine positive natürliche Zahl ist. Durch Betrachten der niedrigsten Ordnungen von n hinsichtlich des Exponentialterms ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 n = 0 : \quad e^{-\gamma_0 \tau} &= e^{-\frac{\pi^2 \tau}{4R}} \\
 n = 1 : \quad e^{-\gamma_1 \tau} &= e^{-\frac{9\pi^2 \tau}{4R}} = \left(e^{-\frac{\pi^2 \tau}{4R}}\right)^9 \\
 n = 2 : \quad e^{-\gamma_2 \tau} &= e^{-\frac{25\pi^2 \tau}{4R}} = \left(e^{-\frac{\pi^2 \tau}{4R}}\right)^{25}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Aus obiger Tabelle (5.14) ergibt sich, dass der Exponentialterm der ersten Ordnung ($n = 1$) schon um die neunte Potenz gegenüber der führenden nullten Ordnung abgenommen hat, falls die Zeit τ hinreichend groß ist. Analog ist die Argumentation bei $n = 2$. Daher ist für die asymptotische Entwicklung der Nettogeschwindigkeit nur

die nullte Ordnung $\langle \bar{u}_h^0 \rangle$ entscheidend und es ergibt sich $\beta = \frac{\pi^2}{4R}$. Die asymptotische Entwicklung mit dem Exponenten β ist im rechten Diagramm von Abb. 5.3 für zwei Werte von R skizziert und die gute asymptotische Übereinstimmung mit den jeweiligen Nettogeschwindigkeiten ist zu erkennen.

Nachdem wir den transienten Teil von Gl. (5.9) diskutiert haben, werden wir uns dem zeitlich periodischen Teil zuwenden. Dieser Teil der Lösung ist in den acht Diagrammen von Abbildung 5.4 für vier verschiedene Werte der Reynoldszahl R skizziert. Dabei ist die periodischen Lösung über die zeitliche Periode $T = 2\pi$ in jeweils Abstände $\Delta t = \frac{\pi}{4}$ unterteilt, beginnend links oben bei $t = 0$. Die weitere Reihenfolge ist dann jeweils links nach rechts sowie oben nach unten.

Es ist zu erkennen, dass für die niedrigste skizzierte Reynoldszahl $R_1 = 0.5$ die maximale Amplitude deutlich geringer ist als für die größeren R , deren Maximalauslenkung um $u_{h,per}^0 \approx 1$ liegt, bei der speziellen Wahl der Amplitude $\tilde{g}\Gamma_x = 1$ und dem Phasenwinkel $\phi_h = 0$. Für große Werte von R bildet sich zudem mindestens ein Maximum aus, welches mit zunehmenden R weiter gegen $y = 0$ verschoben ist. Da die unmittelbaren Eigenschaften des periodischen Teils von $u_h^0(y, t)$ nicht unbedingt aus der unendlichen Summe ersichtlich wird (siehe Gl. (5.9) auf Seite 29), werden wir im nächsten Unterkapitel versuchen, diese Summe aufzulösen und die Lösung in eine kompaktere Form zu bringen.

5.1.2. Kompakte periodische Lösung

Das Betrachten des periodischen Teils der Summe in Gl. (5.9) auf Seite 29 suggeriert für den periodischen Teil der Lösung von Gl. (5.2a) (siehe Seite 27) einen Ansatz der Form:

$$u_h^0(y, t) = v(y) \sin(t) + w(y) \cos(t) . \quad (5.15)$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die partielle DGL (5.2a) und durch Ausnutzen der Orthogonalität von Sinus- und Kosinusfunktionen erhalten wir das gekoppelte DGL-System:

$$v(y) - \frac{1}{R}w''(y) = \tilde{g}\Gamma_x \sin(\phi_h) \quad (5.16a)$$

$$-\frac{1}{R}v''(y) - w(y) = \tilde{g}\Gamma_x \cos(\phi_h) . \quad (5.16b)$$

5. Horizontale periodische Antriebe

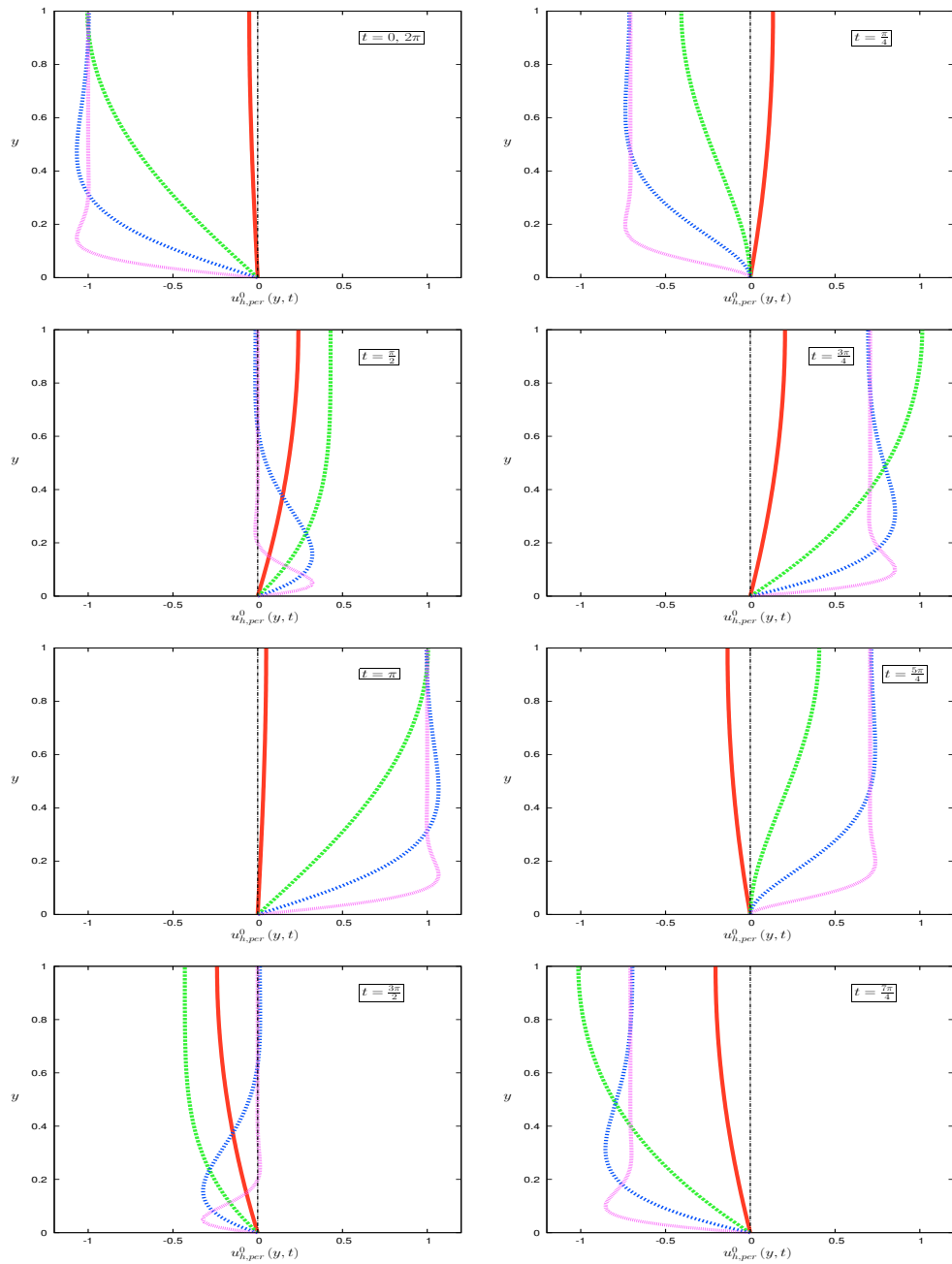


Abbildung 5.4.: Periodischer Anteil $u_{h,per}^0(y, t)$ der horizontalen Geschwindigkeit $u_h^0(y, t)$ zu acht verschiedenen Zeiten t während einer Zeitperiode $T = 2\pi$ (jeweils von links nach rechts und dann von oben nach unten). Dargestellt sind die Lösungen für vier Reynoldszahlen (sowie $\phi_h = 0$): rot: $R = 0.5$; blau: $R = 5$; grün: $R = 50$; lila: $R = 500$. Die schwarze Strichpunktlinie kennzeichnet $u(y) = 0$.

Das obige DGL-System (5.16) lässt sich entkoppeln und wir erhalten die Bestimmungsgleichung der Variable v :

$$\frac{1}{R^2} v^{(iv)}(y) + v(y) = \tilde{g}\Gamma_x \sin(\phi_h), \quad (5.17)$$

wobei $v^{(iv)}(y)$ die vierte Ableitung von v nach y bedeutet. Diese DGL lässt sich mit Hilfe eines Exponentialansatzes lösen, woraufhin die einzelnen linear unabhängigen Funktionen komplexe Exponenten haben. Durch die Verwendung von Kombinationen aus Sinus-, Kosinus und den entsprechenden Hyperbelfunktionen lässt sich ein reelles Fundamentalsystem der homogenen DGL finden. Dazu sei insbesondere auf Anhang A auf Seite 129 verwiesen. Die Linearkombination der dort definierten Funktionen $v_1(y) - v_4(y)$ bildet die homogene Lösung der Gleichung (5.17) für $v(y)$. Die spezielle Lösung des inhomogenen Teils lässt sich leicht bestimmen und mit Hilfe der Relationen (A.2) bzw. (A.3) auf Seite 129 des Anhang zudem die entsprechende Lösung für $w(y)$ als Kombination der v_1, \dots, v_4 . Insgesamt können wir dies in folgender Form aufschreiben:

$$\begin{pmatrix} v(y) \\ w(y) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} v_4 \\ v_1 \end{pmatrix} + \tilde{g}\Gamma_x \begin{pmatrix} \sin \phi_h \\ -\cos \phi_h \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Die Koeffizienten c_1, \dots, c_4 können mit Hilfe der Randbedingungen (5.2b) sowie (5.2c) auf Seite 27 bestimmt werden, da die Funktionen $v(y)$ und $w(y)$ diese räumlichen Randbedingungen genau wie $u(y)$ erfüllen müssen. Damit bleiben vier Bestimmungsgleichungen für die vier Unbekannten c_1 bis c_4 und wir erhalten insgesamt:

$$c_1 = -\tilde{g}\Gamma_x \cos \phi_h \quad (5.19a)$$

$$c_2 = \tilde{g}\Gamma_x \frac{\cos(\phi_h) \sin(A) \cos(A) + \sin(\phi_h) \sinh(A) \cosh(A)}{\cosh^2(A) - \sin^2(A)} \quad (5.19b)$$

$$c_3 = \tilde{g}\Gamma_x \frac{\cos(\phi_h) \sinh(A) \cosh(A) - \sin(\phi_h) \sin(A) \cos(A)}{\cosh^2(A) - \sin^2(A)} \quad (5.19c)$$

$$c_4 = -\tilde{g}\Gamma_x \sin \phi_h, \quad (5.19d)$$

wobei $A = \sqrt{\frac{R}{2}}$ ist. Damit haben wir die periodische Lösung $u_{h,per}^0(y, t)$ in etwas kompakterer Form als eine unendliche Summe berechnet (vgl. Gl. (5.9), Seite 29). Mit Hilfe sehr länglicher Mathematik und Formeln für unendliche Reihen sowie symbolischer Computeralgebrasysteme (z.B. MAPLE [97]) kann gezeigt werden, dass beide Formulierungen äquivalent sind. Um die Analyse zu vereinfachen und den Umfang

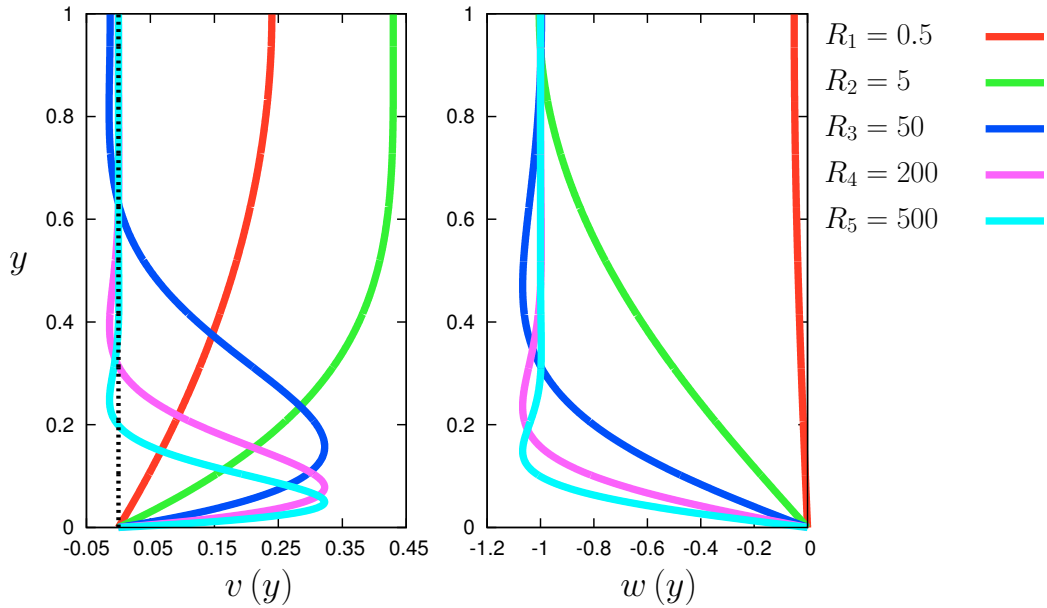


Abbildung 5.5.: Darstellung der Funktionen $v(y)$ und $w(y)$ aus Gl. (5.20b) bzw. (5.20c) für verschiedene Werte von R (siehe Farbzordnung rechts). Dabei sind die Koordinate y auf der vertikalen Achse und die Funktionswerte auf der horizontalen Achse aufgetragen. Im Diagramm links ist zur besseren Lesbarkeit die Linie $v = 0$ gestrichelt in schwarz dargestellt.

der Lösungsterme zu begrenzen, wählen wie schon in den vorherigen Abbildungen (z.B. Diagramm 5.4) die Parameter $\tilde{g}\Gamma_x = 1$ sowie $\phi_h = 0$ (rein sinusförmiger horizontaler Antrieb). Damit können wir die periodische Lösung mit Hilfe der Relationen (5.18) sowie (5.19) folgendermaßen aufschreiben:

$$u_h^0(y, t) = v(y) \sin(t) + w(y) \cos(t) \quad (5.20a)$$

$$v(y) = -\sinh(Ay) \sin(Ay) + c_2^A \sinh(Ay) \cos(Ay) + c_3^A \cosh(Ay) \sin(Ay) \quad (5.20b)$$

$$w(y) = \cosh(Ay) \cos(Ay) + c_2^A \cosh(Ay) \sin(Ay) - c_3^A \sinh(Ay) \cos(Ay) - 1, \quad (5.20c)$$

wobei $c_2^A = \frac{\sin(A) \cos(A)}{\cosh^2(A) - \sin^2(A)}$ und $c_3^A = \frac{\sinh(A) \cosh(A)}{\cosh^2(A) - \sin^2(A)}$ die konstanten Koeffizienten aus Gl. (5.19b) und (5.19c) sind und $A = \sqrt{\frac{R}{2}}$. Für große Werte der

Reynoldszahl R und damit der Variablen A streben die Variablen c_2^A gegen Null bzw. c_3^A gegen Eins. Dennoch können auch in diesem Fall die Terme mit dem c_2^A -Koeffizienten in der Funktion nicht vernachlässigt werden, da diese im Zusammenspiel mit den anderen Termen einen endlichen Wert ergeben. Die Funktionen $v(y)$ und $w(y)$ sind in der Abbildung 5.5 auf der linken bzw. rechten Seite dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass $v(y)$ für kleine R und dann ansteigend zunächst eine monotone Funktion der Variablen y ist, während die Kurven für größere Werte von R scheinbar nach unten „gestaucht“ werden, so dass sich die maximale Auslenkung in der Nähe des Bodens ausbildet und sich hin zur freien Oberfläche bei $y = 1$ die Geschwindigkeit um $v = 0$ einpendelt. Qualitativ ähnlich sieht es bei der Betrachtung der Funktion $w(y)$ aus, wobei sich hier, nach ansteigender Maximalamplitude für kleine Werte von R , die Funktionen nach Erreichen des minimalen Wertes bei $w_{min}(y) < -1$ für $y \rightarrow 1$ um $w(y) \approx -1$ einpendelt. Bei genauerer Analyse von z.B. $v(y)$ lässt sich zeigen, dass sich für zunehmende Reynoldszahlen R Minima und Maxima um die $v = 0$ -Achse konzentrieren. Dabei tritt jeweils ein neues Extremum im Graph von $v(y)$ auf, falls R Werte von $R_{ext} = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ überschreitet.

Der Bereich am Boden bei $y = 0$ ist derjenige mit den größten Änderungen in der Dynamik. Der obere Bereich bis hin zur freien Oberfläche hingegen bewegt sich für große Reynoldszahlen R phasenverschoben zur Antriebsschwingung, d.h. bei vorliegendem sinusförmigen Antrieb ist $v(y = 1) \approx 0$ und $w(y = 1) \approx -1$. Damit ist die Geschwindigkeit u in der Nähe der Oberfläche ungefähr kosinusförmig. Dies kann dadurch untermauert werden, dass die Funktionen v und w nur vom Parameter $A = \sqrt{R/2}$ abhängen. Nach Schlichting [17] ist die Dicke δ der Grenzschicht auf einer mit Frequenz ω bewegten Platte proportional zu:

$$\delta \propto \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} = \sqrt{\frac{\nu h_0^2}{\omega h_0^2}} = \frac{h_0}{\sqrt{R}} \Rightarrow A \propto \sqrt{R} \propto \frac{h_0}{\delta} . \quad (5.21)$$

Durch die Beziehung der Grenzschichtdicke δ mit der Reynoldszahl R können wir argumentieren, dass für kleine Reynoldszahlen die Schichtdicke h_0 des Fluids in der gleichen Größenordnung wie die Grenzschichtdicke δ ist, d.h. die bewegte Schicht entspricht demnach der Grenzschicht. Für steigende Reynoldszahlen wird die Breite der Grenzschicht relativ zur Fluidhöhe h_0 kleiner, so dass nur noch der Bereich in der Nähe der Bodenplatte aus der Grenzschicht besteht. Dagegen besteht der obere Bereich im Wesentlichen aus einem nahezu räumlich homogenen Geschwindigkeitsprofil.

Damit werden wir die Diskussion der horizontalen Geschwindigkeitslösung ab-

schließen und im Folgenden die Relationen herleiten, die sich für horizontal angetriebene viskoelastische Fluide mit den konstitutiven Gleichungen des Oldroyd-B-Modells ergeben.

5.2. Horizontal vibrierte viskoelastische Fluide

Nachdem wir im letzten Kapitel eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet haben, die bei periodischen Antrieben nur von der vertikalen Koordinate y und der Zeit t abhängt, werden wir dieses Prinzip auch für viskoelastische Fluide im Oldroyd-B-Modell anwenden. Dazu werden wir zunächst die Gleichungen herleiten, die sich unter diesen elementaren Überlegungen und Annahmen aus dem komplexen Gleichungssystem (3.38) bis (3.47) auf Seite 21f ergeben. Die Lösungsstrategie wird ähnlich wie in den vorherigen Kapiteln 4.1 und 5.1 aussehen, wobei wir insbesondere die Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei horizontaler Vibration herausarbeiten. Die vertikale Referenzlösung haben wir bereits in Kapitel 4.1 ab Seite 24 diskutiert. Es zeigte sich, dass in der vertikalen Komponente der Geschwindigkeitsgleichung der hydrostatische Druck p die externe Gravitationsbeschleunigung kompensiert, da sich aufgrund der Anfangsbedingungen die S_{yy} -Komponente zu Null ergibt. Damit reduziert sich die Randbedingung der Normalspannungen an der Oberfläche auf die bekannte Form von Gl. (4.5) auf Seite 25. Dadurch entkoppelt der Druck wie vorher von der restlichen Berechnung und nimmt die Form von Gl. (4.6) mit $\Gamma_y = 0$ an, demnach:

$$p_v^0(y, t) = \tilde{g}(1 - y) . \quad (5.22)$$

Analog zur Berechnung der exakten Lösung im Fall des Newtonschen Fluides werden wir eine spezielle, vereinfachte Abhängigkeit einzelner Variablen annehmen (siehe dazu auch die Gln. (4.1) auf Seite 24 sowie Gln. (5.1) auf Seite 27). In diesem Modell gehen wir wie vorher von einer ebenen Fluidschicht mit konstanter Höhe $h_0 = 1$ aus, wobei die vertikale Geschwindigkeit v überall den Wert Null annimmt. Die weiteren abhängigen Variablen seien nur Veränderliche der vertikalen Koordinate y sowie der Zeit t , so dass die für alle Variablen angenommenen periodischen Randbedingungen in horizontaler x -Richtung automatisch erfüllt sind. Damit sind

die nachfolgenden Relationen Grundlage der Berechnungen:

$$\begin{aligned}
 u &= u(y, t) \\
 v &= 0 \\
 p &= \tilde{g}(1 - y) \\
 h &= 1 \\
 (\underline{S})_{i,j} &= (\underline{S})_{i,j}(y, t) .
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Durch die obigen Annahmen vereinfachen sich die Bestimmungsgleichungen aus dem gesamten DGL-System (3.38)-(3.47), insbesondere die obere konvektive Ableitung (siehe Def. (3.37) auf S. 19) nimmt damit folgende Gestalt an, wenn diese auf einen beliebigen Tensor $\underline{A}(y, t)$ wirkt:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \partial_y u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad - \begin{pmatrix} 0 & \partial_y u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Die Inkompressibilitätsbedingung (3.38) und auch die Höhengleichung (3.41) sind direkt erfüllt und damit ergibt sich das zu lösende partielle DGL-System zu:

$$\partial_t u(y, t) = \partial_y S_{xy}(y, t) + \tilde{g}\Gamma_x f_x(t) . \tag{5.25}$$

mit den konstitutiven Gleichungen der S_{ij} -Variablen:

$$(1 + \bar{\lambda}\partial_t) S_{xx} - \bar{\lambda}(S_{xy} + S_{yx})(\partial_y u) = -2\frac{\bar{\lambda}_r}{R}(\partial_y u)^2 \tag{5.26a}$$

$$(1 + \bar{\lambda}\partial_t) S_{xy} - \bar{\lambda}S_{yy}(\partial_y u) = \frac{1}{R}(1 + \bar{\lambda}_r\partial_t)(\partial_y u) \tag{5.26b}$$

$$(1 + \bar{\lambda}\partial_t) S_{yx} - \bar{\lambda}S_{yy}(\partial_y u) = \frac{1}{R}(1 + \bar{\lambda}_r\partial_t)(\partial_y u) \tag{5.26c}$$

$$(1 + \bar{\lambda}\partial_t) S_{yy} = 0 . \tag{5.26d}$$

Zu den Evolutionsgleichungen (5.25) und (5.26) werden noch Rand- bzw. Anfangsbedingungen der Felder benötigt. Die geschwindigkeitsbezogene Randbedingung am Boden (siehe Gl. (5.2b) auf Seite 27) ist identisch zum Fall des viskosen Fluids, während sich die Relation der Tangentialspannung leicht verändert hat. Insgesamt

erhalten wir:

$$u|_{y=0} = 0 \quad (5.27a)$$

$$S_{xy}|_{y=1} = 0. \quad (5.27b)$$

Neben den obigen räumlichen Randbedingungen werden dadurch, dass mit den konstitutiven Gleichungen (5.26) eine höhere zeitliche Ableitung in das Gesamtsystem im Vergleich zum Newtonschen Fall eingeführt wird, weitere Anfangsbedingungen notwendig. Wie im Kapitel 3.3 auf Seite 22f beschrieben, benutzen wir dazu die Anfangsbedingungen (3.50) bzw. (3.51) für die horizontale Geschwindigkeit u sowie für den Tensor $\underline{\underline{S}}|_{t=0} = 0$, wie es auf Seite 24 erläutert worden ist.

5.3. Symmetrie und Entkopplung

Die bestimmenden Gleichungen (5.25) sowie (5.26) sind nichtlinear in ihren abhängigen Variablen gekoppelt. Dadurch wird eine Lösung deutlich komplexer als im Newtonschen Fall, in dem die Variable u entkoppelt war (vgl. Gl. (5.2a) auf Seite 27) und insgesamt lediglich ein lineares DGL-System zu lösen war. Indem wir schrittweise die Gleichungen analysieren und die einzelnen Abhängigkeiten der Variablen reduzieren, resultiert daraus schließlich eine lineare partielle DGL für die horizontale Geschwindigkeit u .

Wir bemerken zunächst, dass Gl. (5.26d) direkt gelöst wird durch:

$$\begin{aligned} S_{yy}(y, t) &= S_{yy}^0 \exp\left(-\frac{1}{\lambda} t\right) \quad ; \quad S_{yy}|_{t=0} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow S_{yy}(y, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Obiges, für den vertikalen Fall bereits diskutiertes Resultat (in Kapitel 4.1 auf Seite 24) führt die nichtlinear gekoppelten partiellen DGLn (5.26b) sowie (5.26c) über in lineare. Zudem sind beide Gleichungen ähnlich und mit Hilfe der Bestimmungsgleichung (3.36) für $\underline{\underline{S}}$ auf Seite 19 lässt sich dessen Symmetrie zeigen, d.h.:

$$S_{xy} = S_{yx}, \quad (5.29)$$

so dass Gleichungen (5.26b) und (5.26c) äquivalent und die Variablen gleich sind. Mit Hilfe dieser Ergebnisse kann damit eine entkoppelte partielle DGL für u gefunden werden. Dazu differenzieren wir Gleichung (5.26b) partiell nach y und durch das Einsetzen von Gl. (5.25) erhalten wir die bestimmende Relation für die horizontale

Geschwindigkeit u :

$$\boxed{(1 + \bar{\lambda}\partial_t) (\partial_t u) - \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r\partial_t) (\partial_y^2 u) = \tilde{g}\Gamma_x (1 + \bar{\lambda}\partial_t) f_x(t) .} \quad (5.30)$$

Diese Gleichung (5.30) ist die Bewegungsgleichung für u im Oldroyd-B-Modell analog zu Gleichung (5.2a) des Newtonfluids auf Seite 27. Die Form der räumlichen Ableitungen ist identisch, allerdings kommen noch die zusätzlichen zeitlichen Ableitungen und Koeffizienten $\bar{\lambda}$ bzw. $\bar{\lambda}_r$ in Spiel, so dass sich der Grad der partiellen DGL erhöht. Für den Spezialfall $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 0$ gehen beide Gleichungen ineinander über.

Falls die Lösung obiger Gleichung für u gelingt, kann daraufhin diese in Gleichung (5.26b) eingesetzt werden und die Hilfsgröße S_{xy} aus dieser linearen partiellen DGL bestimmt werden. Das Verfahren für die letzte Unbekannte S_{xx} aus Relation (5.26a) ist dann das gleiche wie zuvor, außer dass in diesem Fall die in den Variablen u und S_{xy} nichtlineare partielle DGL gelöst werden muss.

In der bisherigen Literatur zur Untersuchung von exakten Lösungen von periodisch bewegten viskoelastischen Fluiden werden die Lösungen der Hilfsgrößen des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$ kaum angegeben bzw. explizit ausgerechnet (siehe z.B. [26, 29, 91, 93]). Wir werden im Rahmen dieser Arbeit zunächst ebenso die Lösung für u herausarbeiten und diese detailliert diskutieren. Allerdings wollen wir auch explizit die einzelnen Felder von $\underline{\underline{S}}$ berechnen, d.h. die Gleichungen (5.26a) und (5.26b) explizit lösen. Dies ist notwendig, damit in Kapitel 8 die Stabilitätsanalyse der gesamten Referenzlösung eines horizontal vibrierten viskoelastischen Fluids hergeleitet werden kann.

Um die Bestimmungsgleichung (5.30) allgemein lösen zu können, wird noch eine zweite räumliche Randbedingung an u außer Gleichung (5.27a) benötigt. Aus der Tangentialbedingung (5.27b) und Gleichung (5.26b) versuchen wir zu argumentieren, welche weitere Randbedingung für u sinnvoll ist. Durch Betrachten letzterer Gleichung (5.26b) an der Oberfläche (d.h. bei $y = 1$) erhalten wir:

$$S_{xy}|_{y=1} + (\bar{\lambda}\partial_t S_{xy})|_{y=1} = \frac{1}{R} (\partial_y u)|_{y=1} + \left(\frac{\bar{\lambda}_r}{R} \partial_t (\partial_y u) \right) \Big|_{y=1} . \quad (5.31)$$

Der erste Term auf der linken Seite von Gleichung (5.31) ist mit der Randbedingung (5.27b) für alle Orte x und alle Zeiten t an der Oberfläche Null. Damit wird auch die zeitliche Änderung der Variable S_{xy} an der Oberfläche verschwinden, so dass damit

für den zweiten Term auf der linken Seite folgt:

$$(\partial_t S_{xy})|_{y=1} = 0, \quad (5.32)$$

so dass die linke Seite von Gl. (5.31) zu Null resultiert. Die analoge Argumentation gilt dann für die rechte Seite der Gleichung, wobei in diesem Fall die vertikale Ableitung der horizontalen Geschwindigkeit $\partial_y u$ die Rolle der Veränderlichen S_{xy} einnimmt. Somit bleibt schließlich die Annahme:

$$(\partial_y u)|_{y=1} = 0. \quad (5.33)$$

Damit sind die Randbedingungen an die horizontale Geschwindigkeit u im Newtonschen Modell mit denen des Oldroyd-B-Fluids identisch.

Zur Lösung der Gleichung (5.30) werden wir damit analog zum Kapitel 5.1 vorgehen, indem wir zum einen die Entwicklung nach räumlichen Eigenfunktionen des Systems betrachten und zum anderen die speziellen periodischen Lösungen für sinus- und kosinusartige Antriebe entwickeln.

5.3.1. Separation in Basisfunktionen

Zur Lösung der horizontalen Impulsbilanzgleichung (5.30) auf Seite 41 nutzen wir die in Kapitel 5.1.1 ab Seite 28 erarbeiteten Resultate, da wir identische räumliche Randbedingungen an u im Oldroyd-B-Modell benutzen wie im Newtonschen Fall. Damit setzen wir die Lösungen analog zum Newtonschen Fluid als Produkte von zeitlichen Funktionen $g_n(t)$ und den räumlichen Basisfunktionen $v_n(y) = \sin(w_n y)$ an und summieren dann über alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$u_n^0(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) \sin(w_n y) \quad (5.34a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_n^{\text{hom}}(t) + g_n^{\text{sp}}(t) \right) \sin(w_n y), \quad (5.34b)$$

wobei jeweils $g_n^{\text{hom}}(t)$ bzw. $g_n^{\text{sp}}(t)$ die homogene bzw. spezielle Lösung des zeitlichen Teils darstellen. Durch Einsetzen des Ansatzes (5.34a) in Gl. (5.30) erhalten wir als DGL für den zeitveränderlichen Teil:

$$\bar{\lambda} \ddot{g}_n + (1 + \bar{\lambda}_r \gamma_n) \dot{g}_n + \gamma_n g_n = \frac{2}{w_n} (1 + \bar{\lambda} \partial_t) f_x(t), \quad (5.35)$$

mit $w_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ und $\gamma_n = \frac{w_n^2}{R}$ wie im vorherigen Kapitel 5.1.1 auch. Die Punkte über den Variablen g_n stellen zeitliche Ableitungen dar. Damit haben wir eine inhomogene DGL zweiter Ordnung in t hergeleitet. Im Folgenden werden wir zunächst die Lösung des homogenen Teils erläutern, um danach mittels Variation der Konstanten die Lösung des inhomogenen Teils zu berechnen und damit auf die gesamte Lösung zu schließen. Zur Lösung des homogenen Teils der DGL (5.35) setzen wir $g_n^{\text{hom}} = \exp(\beta t)$ an, so dass daraus folgende Bestimmungsgleichung für β resultiert:

$$\beta^2 + \frac{1}{\lambda} (1 + \gamma_n \bar{\lambda}_r) \beta + \frac{\gamma_n}{\lambda} = 0 \quad (5.36a)$$

$$\Rightarrow \beta_{1,2} = -\frac{1}{2\lambda} (1 + \gamma_n \bar{\lambda}_r) \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(1 + \gamma_n \bar{\lambda}_r)^2}{4\lambda^2} - \frac{\gamma_n}{\lambda}}_{=: D_i}} \quad (5.36b)$$

$$= -\beta_n^0 \pm \sqrt{(\beta_n^0)^2 - \frac{\gamma_n}{\lambda}}. \quad (5.36c)$$

Durch die obigen Lösungen für $\beta_{1,2}$ in Gl. (5.36b) haben wir zwei linear unabhängige Lösungen $g_n^1(t) = \exp(\beta_1 t)$ sowie $g_n^2(t) = \exp(\beta_2 t)$, die, sofern die Diskriminante D_i positiv ist, reelle Lösungen sind. Für $D_i < 0$ sind die Lösungen imaginär und treten in komplex konjugierten Paaren auf. Im Spezialfall $D_i = 0$ existiert nur eine Lösung, so dass noch eine zweite linear unabhängige Lösung gefunden werden muss. Diese ergibt sich zu $g_{n,D_i=0}^{\text{hom}} = t \exp(\beta_n^0 t)$. Insgesamt ist das Problem ähnlich dem eines gedämpften harmonischen Oszillators. Daher können wir die Fallunterscheidungen zusammenfassend schreiben:

$$\text{Fall } a: \quad D_i > 0: \quad g_n^a(t) = c_{n,1}^a e^{(-\beta_n^0 + d_n)t} + c_{n,2}^a e^{(-\beta_n^0 - d_n)t} \quad (5.37a)$$

$$\text{Fall } b: \quad D_i = 0: \quad g_n^b(t) = c_{n,1}^b e^{-\beta_n^0 t} + c_{n,2}^b t e^{-\beta_n^0 t} \quad (5.37b)$$

$$\text{Fall } c: \quad D_i < 0: \quad g_n^c(t) = c_{n,1}^c e^{-\beta_n^0 t} \sin(\alpha_n t) + c_{n,2}^c e^{-\beta_n^0 t} \cos(\alpha_n t) \quad (5.37c)$$

Dabei ist in obiger Gleichung $d_n = \sqrt{D_i}$, falls D_i positiv ist sowie $\alpha_n = \sqrt{-D_i} = \sqrt{\gamma_n - (\beta_n^0)^2}$ bei negativem D_i . Die Koeffizienten $c_{n,i}^j$ (mit $j = a, b, c$ und $i = 1, 2$) sind noch zu bestimmende Konstanten, die sich aus den Anfangsbedingungen für u ergeben, z.B. aus den Gleichungen (3.50) sowie (3.51) auf Seite 22. Wir bemerken noch, dass beide Exponenten in Formel (5.37a) negativ sind, d.h. mit Hilfe von Gleichung (5.36b) lässt sich direkt zeigen, dass $\sqrt{D_i}$ immer betragsmäßig kleiner als

5. Horizontale periodische Antriebe

β_n^0 ist. Die gesamte homogene Lösung g_n^{hom} ergibt sich damit zu:

$$g_n^{\text{hom}} = \begin{cases} g_n^a(t) & \text{falls } (\beta_n^0)^2 > \gamma_n \\ g_n^b(t) & \text{falls } (\beta_n^0)^2 = \gamma_n \\ g_n^c(t) & \text{falls } (\beta_n^0)^2 < \gamma_n \end{cases} \quad (5.38)$$

Mit den jeweils zwei linear unabhängigen Lösungen kann damit eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (5.35) gefunden werden. Dazu eignen sich Lösungswege mittels Greenscher Funktionen oder das in vielen Textbüchern beschriebene Verfahren der Variation der Konstanten (siehe z.B. [98, 99]). Dabei sind in der folgenden Relation die Funktionen $p_n^i(t)$ und $q_n^i(t)$ die jeweils linke bzw. rechte Funktion aus den Formeln (5.37) für die Fälle $i = a, b, c$. Damit ergibt mit der gleichen Fallunterscheidung wie in Gleichung (5.38) für die inhomogenen Lösungen:

$$g_n^{\text{inh}}(t) = \frac{2}{\bar{\lambda} w_n} \int_{t_0}^t \frac{p_n^i(s) q_n^i(t) - q_n^i(s) p_n^i(t)}{p_n^i(s) \dot{q}_n^i(s) - q_n^i(s) \dot{p}_n^i(s)} \left(f_x(s) + \bar{\lambda} \dot{f}_x(s) \right) ds. \quad (5.39)$$

In obiger Formel (5.39) stellt der Punkt über den Variablen jeweils die Ableitung nach der Integrationsvariablen s dar. Mit dieser Relation lässt sich die inhomogene Lösung für beliebige horizontale Antriebsfunktionen $f_x(t)$ berechnen. Die Berechnung dieser Integrale ist z.B. mit numerischen Computeralgebrasystem wie z.B. MAPLE [97] möglich. Die Berechnungen werden aber oftmals sehr lang und die Ausdrücke können sehr kompliziert werden. Falls die Lösung mit Hilfe der Relation (5.39) berechnet wird, so müssen die Koeffizienten des homogenen Teils (siehe Gl. (5.37)) nicht mehr bestimmt werden, da die inhomogene Lösung $g_n^{\text{inh}}(t)$ automatisch die Anfangsbedingungen erfüllt, so dass die einzelnen Koeffizienten $c_{n,i}^j$ (Gln. (5.37)) zu Null verschwinden.

Bevor wir die Lösungen für einige Antriebsfunktionen skizzieren, wollen wir noch bemerken, dass die obigen Lösungen für $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 0$ nicht direkt in die Gleichungen des Newtonschen Fluids aus den vorherigen Kapiteln übergehen. Das liegt insbesondere daran, dass durch die Grenzwertbildung $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ aus einer DGL zweiter Ordnung für die zeitlichen Funktionen $g_n(t)$ eine erster Ordnung wird. Dabei geht der Parameter $\bar{\lambda}$ im Nenner der Bestimmungsgleichungen für den Exponenten β ein (siehe Gl. (5.36)), so dass diese bei der Grenzwertbetrachtung divergieren. Es ist zudem zu bemerken, dass zur Bestimmung der inhomogenen Lösung zu einem Zeitpunkt t die Antriebsfunktion $f_x(t)$ und deren Ableitung mit der homogenen Lösung von Startzeitpunkt t_0 bis t integriert werden muss (siehe Gl. (5.39)). D.h., für große Zeiten t

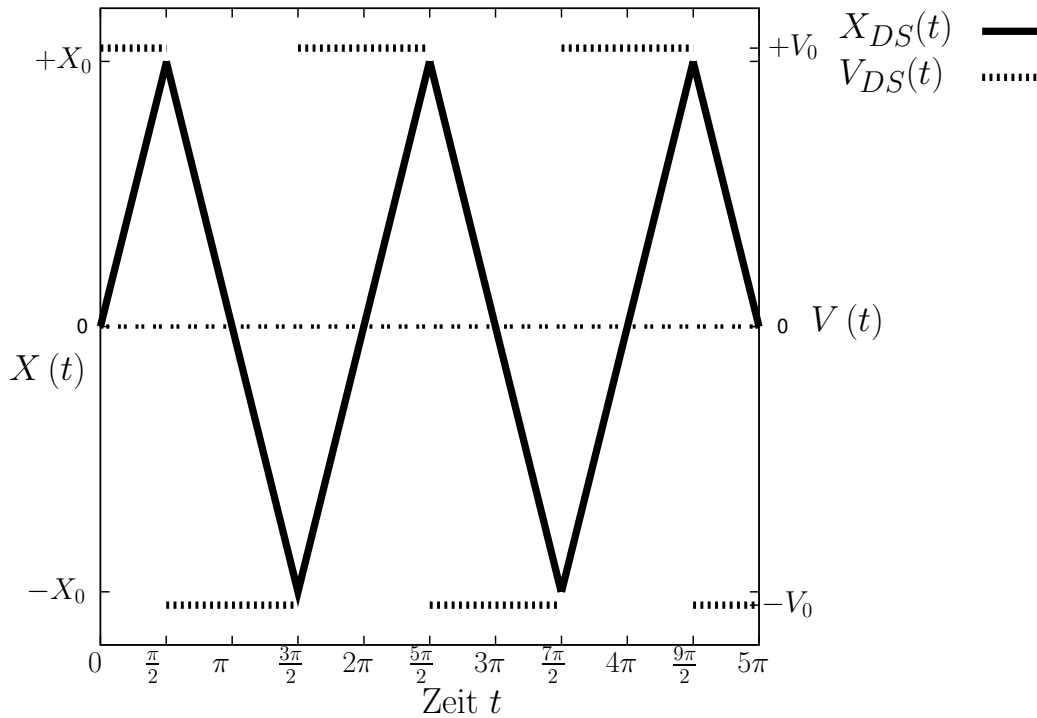


Abbildung 5.6.: Darstellung der horizontalen Antriebsbewegung einer Dreiecksschwingung im ortsfesten Koordinatensystem X . Schwarze durchgezogene Linie: Position $X_{DS}(t)$ des Plattenursprungs; Schwarze gestrichelte Linien: Geschwindigkeit $V_{DS}(t)$ der Platte; Schwarz gepunktet: Ursprungslinie.

wird die Berechnung dann länger, falls diese numerisch bestimmt werden muss. Es sei denn, die Antriebsfunktion ist periodisch mit einer Periodendauer T (durch die Normierung i. Allg. $T = 2\pi$). Dann müssen die obigen Integrale aus Relation (5.39) nur noch innerhalb einer Periode T ausgewertet werden, so dass sich die allgemeine zeitliche inhomogene Lösung in einen sich periodisch wiederholenden Anteil und einen transienten, exponentiell mit t zerfallenden Anteil umformulieren lässt. Die näheren Details und die gesamte Rechnung dazu sind im Anhang B ab Seite 130 erläutert.

5.3.2. Dreiecksschwingung im Oldroyd-B-Modell

Mit Hilfe der Relationen aus dem Anhang B wollen wir die Fluidbewegung auf einer im ortsfesten System zwischen zwei Punkten konstant bewegten Platte studieren. Die Position und die Geschwindigkeit im ruhenden Bezugssystem sind dazu in Ab-

bildung 5.6 gezeigt. Die Platte bewegt dabei zwischen den Endpunkten $-X_0$ und X_0 mit der Geschwindigkeit V_0 , wobei jeweils genau die Zeitdauer $\frac{T}{2} = \pi$ vergeht. Sobald die Platte an einem der Umkehrpunkte bei $\pm X_0$ angekommen ist, wechselt diese instantan die Richtung und die Geschwindigkeit „springt“ betragsmäßig um $|\Delta V| = 2V_0$. Ansonsten bewegt sich der Boden unter dem Fluid mit einer konstanten Geschwindigkeit. Die Platte vollzieht demnach die Bewegung einer periodischen Dreiecksschwingung im Laborsystem. Bei der Transformation ins mitbewegte Bezugssystem und damit in die Gleichungen des Oldroyd-B-Modells geht die Beschleunigung der antreibenden Platte ein (siehe z.B. Gleichung (3.10) auf Seite 15). Aufgrund der Sprünge der Geschwindigkeit $V_{DS}(t)$ an den Umkehrpunkten ist die Ableitung dort nicht definiert. Um dennoch diese Art des Antriebs modellieren zu können, benutzen wir die Diracsche Delta-Distribution an diesen Sprungstellen. Denn für die Bestimmung der inhomogenen Lösung (5.39) werden die zeitlichen Integrale über die Delta-Distribution gebildet, welche wiederum wohldefiniert sind. Durch die zeitliche Integration ergeben sich dennoch Sprungstellen in der Lösung für die Geschwindigkeit u .

Den periodischen Antrieb einer Dreiecksschwingung transformiert ins mitbewegte Bezugssystem setzen wir folgendermaßen an:

$$f_x(t) = v_x \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(t - \frac{(4n+1)\pi}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{(4n+3)\pi}{2}\right). \quad (5.40)$$

Dabei ist $\delta(t-a)$ die sogenannte Diracsche Delta-„Funktion“, welche nur an der Stelle $t = a$ einen Beitrag liefert (für weitere Erläuterungen und Rechenregeln siehe z.B. [100]). Obige Antriebsfunktion $f_x(t)$ ist ab dem Startzeitpunkt $t = 0$ eine zeitlich periodische Funktion mit Periodendauer $T = 2\pi$. Das bedeutet, dass die Relationen hinsichtlich periodischer Funktionen, die in Anhang B ab Seite 130 eingängig beschrieben sind, auf diese Problemstellung anwendbar sind. Dazu definieren wir die in Gl. (5.40) beschriebene Antriebsfunktion $f_x(t)$ auf das Intervall $[0, 2\pi]$ um und die Inhomogenität aus Gleichung (5.35) auf Seite 42 lässt sich beschreiben durch:

$$F^{\text{DS}}(t) = \frac{2v_x}{w_n} (1 + \bar{\lambda}\partial_t) \left(\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \right) = \frac{2v_x}{w_n} \bar{F}^{\text{DS}}(t). \quad (5.41)$$

Die vier im Anhang B auf Seite 132 in den Formeln B.5 beschriebenen Integralfunktionen können wir mit obiger Funktion $\bar{F}^{\text{DS}}(t)$ auswerten, wobei auch Ableitungen

der Delta-Funktionen eingehen. Insgesamt ergibt sich:

$$I_{DS}(\beta, t) := \int_0^t e^{\beta s} \overline{F}^{DS}(s) ds = (1 - \bar{\lambda}\beta) \left\{ \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}\beta} - \Theta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) e^{\frac{3\pi}{2}\beta} \right\} \quad (5.42a)$$

$$I_{DS}^s(\beta, t) := \int_0^t s e^{\beta s} \overline{F}^{DS}(s) ds = e^{\frac{\pi}{2}\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \bar{\lambda} \left(1 + \frac{\pi}{2}\beta\right) \right) \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - e^{\frac{3\pi}{2}\beta} \left(\frac{3\pi}{2} - \bar{\lambda} \left(1 + \frac{3\pi}{2}\beta\right) \right) \Theta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \quad (5.42b)$$

$$I_{DS}^{\cos}(\beta, \alpha, t) := \int_0^t \cos(\alpha s) e^{\beta s} \overline{F}^{DS}(s) ds \quad (5.42c)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}\beta} \left\{ (1 - \bar{\lambda}\beta) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \bar{\lambda}\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right\} \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - e^{\frac{3\pi}{2}\beta} \left\{ (1 - \bar{\lambda}\beta) \cos\left(\frac{3\pi\alpha}{2}\right) + \bar{\lambda}\alpha \sin\left(\frac{3\pi\alpha}{2}\right) \right\} \Theta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$I_{DS}^{\sin}(\beta, \alpha, t) := \int_0^t \sin(\alpha s) e^{\beta s} \overline{F}^{DS}(s) ds \quad (5.42d)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}\beta} \left\{ (1 - \bar{\lambda}\beta) \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - \bar{\lambda}\alpha \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right\} \Theta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - e^{\frac{3\pi}{2}\beta} \left\{ (1 - \bar{\lambda}\beta) \sin\left(\frac{3\pi\alpha}{2}\right) - \bar{\lambda}\alpha \cos\left(\frac{3\pi\alpha}{2}\right) \right\} \Theta\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) .$$

Dabei ist die Funktion $\Theta(\dots)$ die sogenannte Heaviside Sprungfunktion, welche für negative Argumente Null und für positive Argumente Eins ergibt. Durch Einsetzen der Integralfunktionen können die periodischen Lösungen $g_n^a(t')$ bis $g_n^c(t')$ (siehe Anhang B auf Seite 130, Gleichungen (B.6) bis (B.8)) der zeitlichen Differentialgleichung bestimmt werden. Die Summe der Produkte aus diesen zeitlichen Lösungen mit den räumlichen Basisfunktionen ergibt damit die horizontale Geschwindigkeit $u_{\text{per}}^{\text{DS}}(y, t)$ eines periodischen Dreiecksantriebs. Die vollständige längliche Formel für die gesamte Summe wollen wir hier nicht angeben. Es ist jedoch zu erwarten, dass durch die in den Integralfunktionen auftretenden Θ -Funktionen an den Umkehrpunkten $t_+ = \frac{\pi}{2}$ sowie $t_- = \frac{3\pi}{2}$ Unstetigkeiten in der Geschwindigkeitslösung auf-

treten werden.

Dazu ist in Abbildung 5.7 der periodische Teil der Geschwindigkeitslösung $u_{\text{per}}^{\text{DS}}(y, t)$ zu ausgewählten Zeitpunkten t aufgetragen, wobei die zeitliche Abfolge beginnend oben links zeilenweise von links nach rechts und dann abwärts verläuft. Jedes Einzeldiagramm der Abbildung enthält vier Graphen, die sich jeweils hinsichtlich des Koeffizienten $\bar{\lambda}_r$ unterscheiden. Die weitere Parameter, nämlich die Reynoldszahl $R = 20$ und die Koeffizienten $v_x = 1$ sowie $\bar{\lambda} = 3$ bleiben jeweils konstant. Das linke obere Diagramm zeigt die Situation sehr kurz vor einem Impuls, welcher sich zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2}$ ereignet (siehe Antriebsfunktion (5.40)). Da die einzelnen Graphen die eingeschwungenen periodischen Geschwindigkeiten zeigen (d.h. die transienten Anteile sind nicht erfasst), sind diese auch ungleich Null. Es ist erkennbar, dass mit abnehmendem Koeffizienten $\bar{\lambda}_r$ (rot über grün dann blau zu lila) diese Graphen eine prägnantere Form aufweisen, wobei bei $\bar{\lambda}_r = 0.01$ die Kurve mehrere Extrema hat und aufgrund der gepulsten Antriebsfunktion kantenähnliche Eigenschaften ausbildet. Die anderen Graphen mit größerem $\bar{\lambda}_r$ weisen eine Halbperiode nach dem letzten Antriebspuls deutlich glattere Eigenschaften auf.

In der rechten oberen Abbildung ist der Verlauf der Geschwindigkeiten dann sehr kurz nach dem Antriebspuls gezeigt. Es fällt auf, dass die Form der Graphen gegenüber dem Zeitpunkt kurz vor dem Delta-Impuls nahezu erhalten bleibt und die Geschwindigkeitskurven insgesamt jeweils um den Betrag Eins nach rechts verschoben sind, jedoch mit Ausnahme eines sehr schmalen Grenzbereichs bei $y = 0$, da dort die Geschwindigkeit durch die Randbedingung verschwinden muss. Durch Betrachtung der Integralfunktionen (5.42) sowie den damit verbundenen Lösungsfunktionen (B.6) - (B.8)) des zeitlichen Anteils zu einem Zeitpunkt einmal kurz vor und nach einem Puls lässt sich zeigen, dass diese sich jeweils um den Summanden $\frac{2}{w_n} v_x$ unterscheiden. Die Addition dieser Summanden mit den räumlichen Funktionen (siehe Formel (5.5b) auf Seite 29) ergibt gerade v_x , was in diesem Fall zu Eins gewählt wurde. Durch den zeitlich unstetigen Antriebspuls wird damit zudem der räumliche Teil im Grenzbereich bei $y = 0$ unstetig. Damit erfährt die horizontale Geschwindigkeit mit Ausnahme des Bodenpunktes einen Sprung um v_x .

In den Diagrammen der zweiten oberen Reihe von Abbildung 5.7 ist der Zustand der horizontalen Geschwindigkeit jeweils im zeitlichen Abstand $\frac{\pi}{8}$ nach den vorherigen dargestellt. Die einzelnen Graphen relaxieren kontinuierlich zu Null in der Nähe des Bodens und bilden dort wieder stetige Kurven in den Ursprung, wobei die Relaxation für größere Werte von $\bar{\lambda}_r$ schneller vonstattengeht. Die Form dieser Kurven ähnelt denjenigen aus den vergangenen Zeitpunkten, wobei jedoch die maximale

Amplitude ein wenig abnimmt und das Feld sich in Richtung freier Oberfläche, d.h. $y = 1$, zu verschieben scheint.

Die Plots in der dritten Reihe von Abb. 5.7 geben die Situation jeweils im Abstand von einem Achtel der Gesamtperiode zu den vorherigen Diagrammen wider. Es ist festzustellen, dass, insbesondere bei den Kurven mit niedrigem $\bar{\lambda}_r$, die Bereiche mit vormals geringer Geschwindigkeit durch die darunter liegenden Bereiche auf höhere Geschwindigkeiten gebracht werden. Durch Betrachtung der Geschwindigkeitsfelder mit deutlich mehr Zeitschritten als Filmsequenz wirkt es, als ob sich die horizontale Geschwindigkeit schlängelnd und abhängig vom Parameterwert $\bar{\lambda}_r$ mehr oder weniger stark oszillierend nach oben bewegt. Dabei werden mit größerem Verhältnis von $\bar{\lambda}/\bar{\lambda}_r$ die Geschwindigkeitsprofile deutlich markanter.

Die untere Reihe des Gesamtdiagramms 5.7 zeigt analog zum Vorgang in der oberen Reihe die Situation kurz vor (Diagramm links) bzw. nach (rechts) dem zweiten Antriebspuls in der Periode. Es ist zu sehen, dass sich die Geschwindigkeitsfelder nach dem ersten Impuls für alle Parameterwerte $\bar{\lambda}_r$ so entwickelt haben, dass diese der invertierten Situation kurz vor dem ersten Impuls gleicht. D.h.:

$$u_{\text{per}}^{\text{DS}} \left(y, t = \frac{\pi}{2} - \epsilon \right) = -u_{\text{per}}^{\text{DS}} \left(y, t = \frac{3\pi}{2} - \epsilon \right) . \quad (5.43)$$

Das obige Argument gilt entsprechend für die Situation nach dem zweiten Impuls. Durch diesen werden die Geschwindigkeitsfelder um $-v_x = -1$ verschoben, so dass obige Relation (5.43) auch jeweils nach dem Antriebspuls gilt. Insgesamt gilt infolge der Symmetrie der Felder und des Antriebs insgesamt:

$$u_{\text{per}}^{\text{DS}} (y, t) = -u_{\text{per}}^{\text{DS}} (y, t + \pi) . \quad (5.44)$$

Nach dem zweiten Puls beginnt die entsprechende Entwicklung wie nach dem ersten Impuls, nur mit dem umgekehrten Vorzeichen der Geschwindigkeiten. Daher haben wir uns hier auf die Darstellung einer Halbperiode beschränkt.

Falls die Reynoldszahl R erhöht wird, wobei die weiteren Parameter so gewählt werden wie in Abbildung 5.7, so zeigt sich, dass es mit zunehmendem R mehr Extremstellen in den Geschwindigkeitslösungen gibt. Dies ist in Abbildung 5.8 zu sehen. Diese ist qualitativ die gleiche wie Abb. 5.7 und zeigt die stroboskopischen Aufnahmen in einer Halbperiode bei einer mit einem Dreieckssignal schwingenden Platte. Dazu fällt mit größerer Reynoldszahl auf, dass hin zur freien Oberfläche die Geschwindigkeit in der Nähe von ± 0.5 oszilliert.

5. Horizontale periodische Antriebe

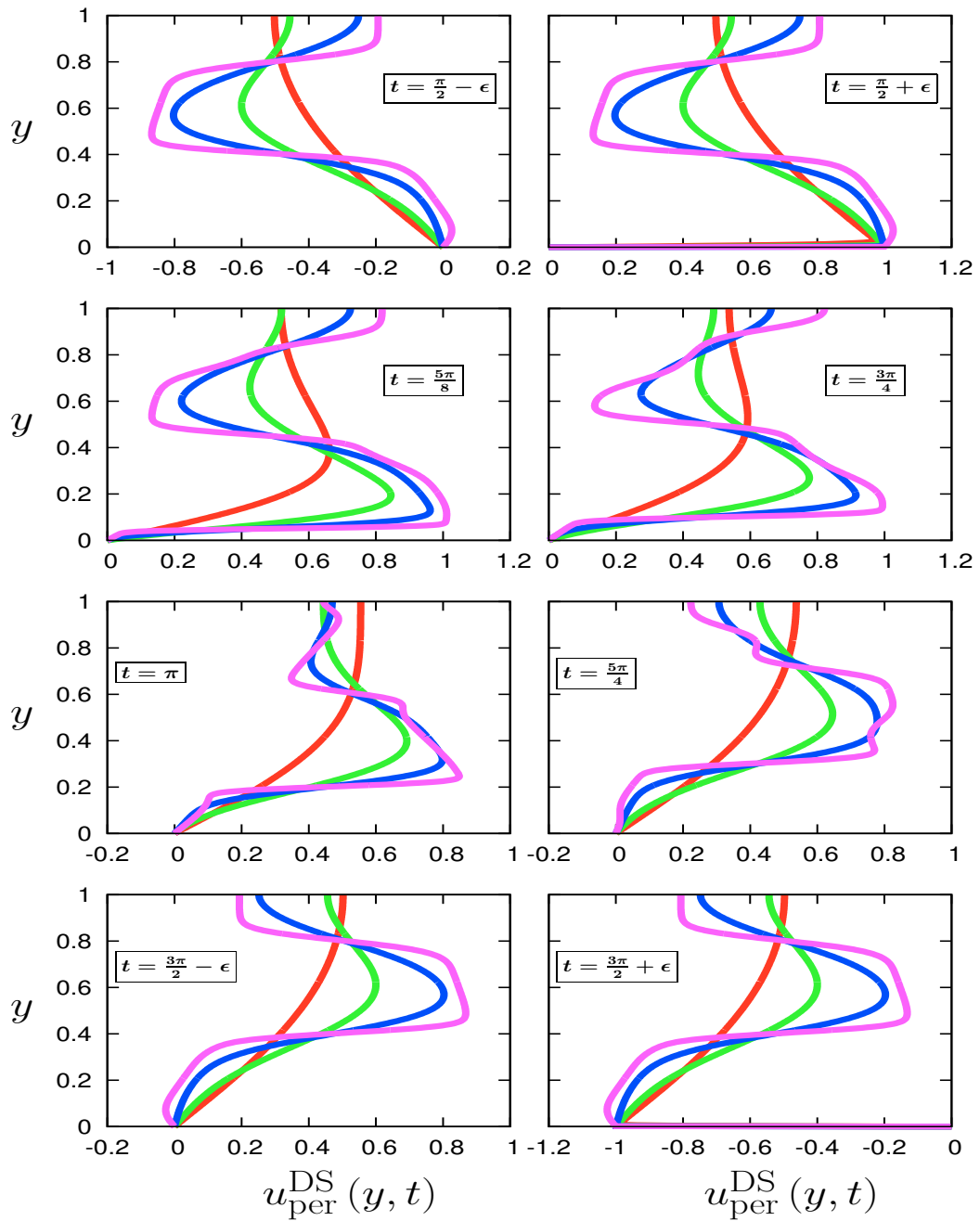


Abbildung 5.7.: Darstellung der periodischen Lösung $u_{\text{per}}^{\text{DS}}(y, t)$ zu zunehmenden Zeitpunkten t (siehe Inlet) aus dem Intervall $[\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{3\pi}{2} + \epsilon]$ (von links oben zeilenweise nach rechts unten) für verschiedene Werte von $\bar{\lambda}_r$ mit $\epsilon \ll 1$. Die Koeffizienten $R = 20$, $v_x = 1$ sowie $\bar{\lambda} = 3$ bleiben konstant. Rot: $\bar{\lambda}_r = 3$; Grün: $\bar{\lambda}_r = 0.5$; Blau: $\bar{\lambda}_r = 0.1$; Lila: $\bar{\lambda}_r = 0.01$.

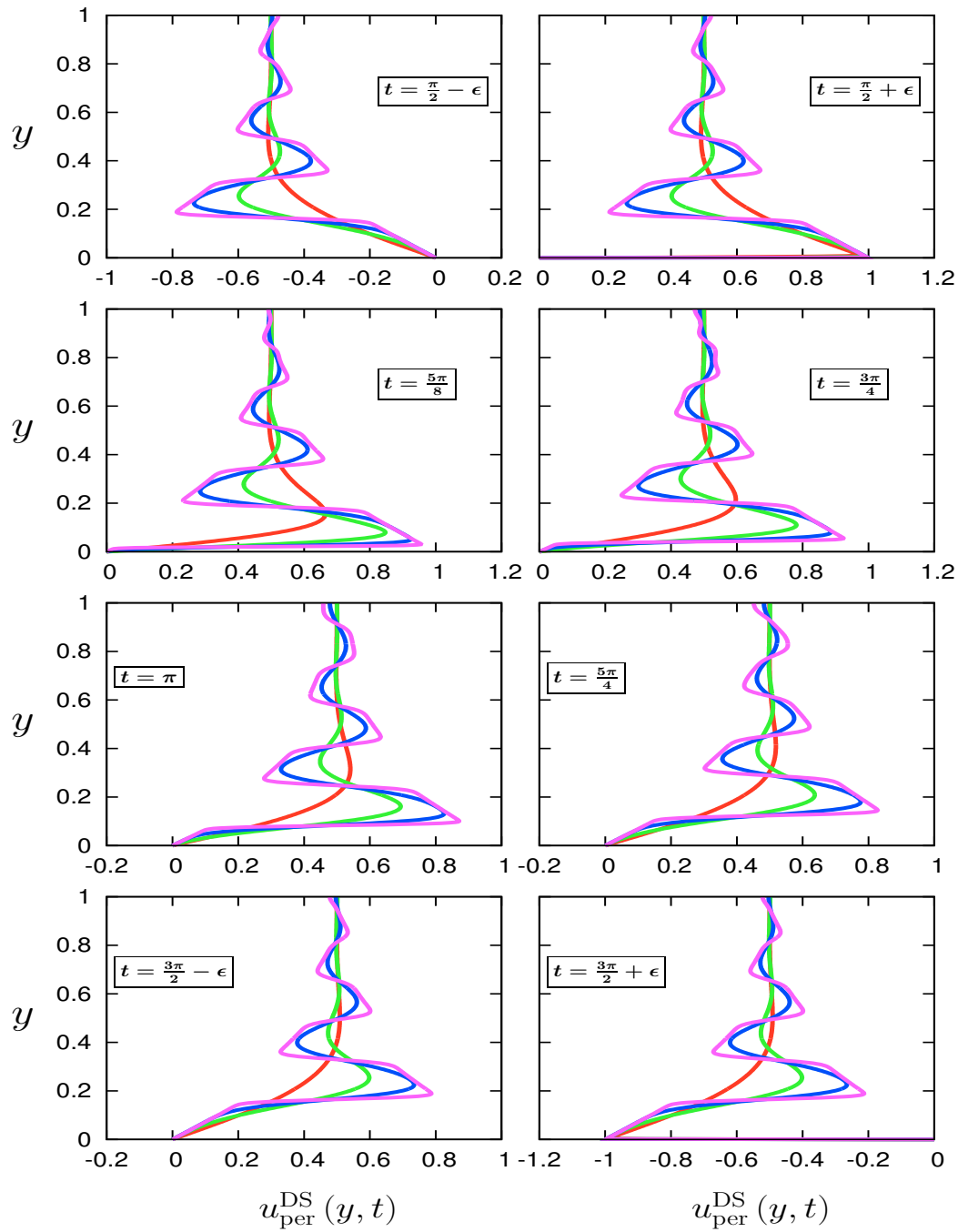


Abbildung 5.8.: Darstellung der periodischen Lösung $u_{\text{per}}^{\text{DS}}(y, t)$ zu zunehmenden Zeitpunkten t (siehe Inlet) aus dem Intervall $[\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{3\pi}{2} + \epsilon]$ (von links oben zeilenweise nach rechts unten) für verschiedene Werte von $\bar{\lambda}_r$ mit $\epsilon \ll 1$. Die Koeffizienten $R = 120$, $v_x = 1$ sowie $\bar{\lambda} = 3$ bleiben konstant. Rot: $\bar{\lambda}_r = 3$; Grün: $\bar{\lambda}_r = 0.5$; Blau: $\bar{\lambda}_r = 0.1$; Lila: $\bar{\lambda}_r = 0.01$.

5.3.3. Harmonisch oszillierende Plattenbewegung

Für periodische sinusförmige Antriebe kann Gleichung (5.35) auf Seite 42 direkt gelöst werden, da die Differentialgleichung in diejenige eines harmonischen gedämpften Oszillators mit äußerem periodischen Antrieb übergeht (siehe z.B. einführende Textbücher [101]). Da die DGL linear ist, kann diese für die auf der rechten Seite von Gl. (5.35) auftauchenden Antriebsterme separat gelöst und die Lösungen dann superponiert werden. Für den auch schon im Kapitel der Newtonschen Fluide gewählten harmonischen horizontalen Antrieb $f_x(t) = \sin(t + \phi_h)$ (siehe Seite 27) ergibt die aus der Gleichung (5.35) zu bestimmende inhomogene Lösung:

$$g_n^{\text{inh}}(t) = \overbrace{\frac{2}{w_n} \frac{\tilde{g} \Gamma_x}{(1 + \bar{\lambda}_r \gamma_n)^2 + (\gamma_n - \bar{\lambda})^2}}{=:K_n} \left\{ \begin{aligned} & [\cos \phi_h - \bar{\lambda} \sin \phi_h] \{ (\gamma_n - \bar{\lambda}) \sin t - (1 + \bar{\lambda}_r \gamma_n) \cos t \} \\ & + [\sin \phi_h + \bar{\lambda} \cos \phi_h] \{ (1 + \bar{\lambda}_r \gamma_n) \sin t + (\gamma_n - \bar{\lambda}) \cos t \} \end{aligned} \right\}. \quad (5.45)$$

Die obige inhomogene Lösung $g_n^{\text{inh}}(t)$ beschreibt den periodischen Anteil der zeitlichen Lösung im Oldroyd-B-Modell. Im Unterschied zu den homogenen zeitlichen Lösungen (5.37) auf Seite 43 ist hierbei keine Fallunterscheidung nötig und im Grenzfall $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 0$ geht die Lösung in die spezielle zeitliche Lösung beim Newtonschen Fluid über (vergleiche dazu Formel (5.8) auf Seite 29). Die vollständige Lösung des zeitlichen Problems erfordert noch die Bestimmung der Integrationskonstanten $c_{n,1}^a$ bis $c_{n,2}^c$ aus den homogenen Lösungen (5.37) auf Seite 43 für alle drei zu unterscheidenden Fälle. Diese ergeben sich aus der Annahme eines zu Beginn ruhenden und unbeschleunigten Fluids. Das bedeutet, wir nehmen analog zum Newtonschen Fluid als Anfangsbedingungen für die gesamte zeitliche Funktion $g_n^{\text{allg}}(t)$ an:

$$g_n^{\text{allg}}(t=0) = g_n^{\text{hom}}(t=0) + g_n^{\text{inh}}(t=0) = 0 \quad (5.46a)$$

$$\dot{g}_n^{\text{allg}}(t=0) = \dot{g}_n^{\text{hom}}(t=0) + \dot{g}_n^{\text{inh}}(t=0) = 0. \quad (5.46b)$$

Damit lassen sich die jeweiligen Koeffizienten allgemein bestimmen. Wir werden diese für den Fall $\phi_h = 0$ angeben, da dieser in der nachfolgenden Diskussion näher untersucht wird. Der Fall eines beliebigen, aber konstanten Winkels ϕ_h ergibt sich analog. Somit erhalten wir mit der Abkürzung des Vorfaktors K_n aus Gleichung

(5.45) die Koeffizienten aller drei zu unterscheidenden Fälle:

$$c_{n,1}^a = -\frac{K_n}{2d_n} \left\{ (\beta_n^0 + dn) \left[\gamma_n (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) - (1 + \bar{\lambda}^2) \right] + \gamma_n (1 + \bar{\lambda} \bar{\lambda}_r) \right\} \quad (5.47a)$$

$$c_{n,2}^a = \frac{K_n}{2d_n} \left\{ (\beta_n^0 - dn) \left[\gamma_n (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) - (1 + \bar{\lambda}^2) \right] + \gamma_n (1 + \bar{\lambda} \bar{\lambda}_r) \right\} \quad (5.47b)$$

$$c_{n,1}^b = -K_n \left\{ \gamma_n (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) - (1 + \bar{\lambda}^2) \right\} \quad (5.47c)$$

$$c_{n,2}^b = -K_n \left\{ \gamma_n (1 + \bar{\lambda} \bar{\lambda}_r) + \beta_n^0 \left[\gamma_n (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) - (1 + \bar{\lambda}^2) \right] \right\} \quad (5.47d)$$

$$c_{n,1}^c = -\frac{K_n}{\alpha_n} \left\{ \gamma_n (1 + \bar{\lambda} \bar{\lambda}_r) + \beta_n^0 \left[\gamma_n (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) - (1 + \bar{\lambda}^2) \right] \right\} \quad (5.47e)$$

$$c_{n,2}^c = -K_n \left\{ \gamma_n (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) - (1 + \bar{\lambda}^2) \right\} . \quad (5.47f)$$

Mit Hilfe der obigen Koeffizienten lässt sich einerseits die gesamte horizontale Geschwindigkeitsentwicklung ab dem Zeitpunkt $t = 0$ diskutieren. Andererseits kann zudem separat der transiente Teil der Lösung betrachtet werden, um die Unterschiede zum Newtonschen Fall (siehe Seiten 30ff) herauszuarbeiten. Dazu ist in Abbildung 5.9 analog zu Abb. 5.2 die zeitliche gedämpfte homogene horizontale Geschwindigkeitslösung für fünf verschiedene Werte des Koeffizienten $\bar{\lambda}_r$ in sechs Einzeldiagrammen zu zunehmenden Zeitpunkten t dargestellt.

Es ist im linken oberen Diagramm zum Zeitpunkt $t = 0$ zu erkennen, dass sich für niedrige Werte von $\bar{\lambda}_r$ die Kurven einen oszillatorischen Verlauf nehmen, während bei zunehmenden Werten von $\bar{\lambda}_r$ in Richtung des Koeffizienten $\bar{\lambda}$ bis hin zur Gleichheit die Graphen deutlich glatter sind. Zu späteren Zeitpunkten relaxieren die transienten Geschwindigkeiten hin zur stationären Lösung $u_0 = 0$. Dieses Verhalten deutet sich in den darauffolgenden Einzeldiagrammen zu späteren Zeitpunkten an. Dabei ist es jedoch interessant festzustellen, dass das Verhältnis der Koeffizienten $\bar{\lambda}_r$ und $\bar{\lambda}$ bestimmt, auf welche Weise die Relaxation vonstatten geht. Falls $\bar{\lambda}_r$ klein gegenüber $\bar{\lambda}$ ist, so kann die transiente Geschwindigkeit $u_{\text{trans}}^0(y, t)$ stärker oszillieren. Dabei relaxieren die Geschwindigkeiten am Boden in der Nähe von $y = 0$ schneller zu Null, während der oszillierende Anteil mit abnehmender Amplitude in Richtung freie Oberfläche verschoben wird.

Falls $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$ ungefähr von einer Größenordnung sind, so ist das oszillierende Verhalten deutlich schwächer ausgeprägt. Bei dem in lila markierten Graph ($\bar{\lambda}_r/\bar{\lambda} = 0.5$) ist die Oszillation schon sehr schwach ausgeprägt, während bei Gleichheit beider Koeffizienten die Abnahme monoton wie beim Newtonschen Fall erfolgt.

Durch Untersuchung der homogenen Lösung (5.37) von Seite 43 zusammen mit den Koeffizienten in den Gleichungen (5.47) lässt sich berechnen, dass, falls beide Koeffizienten identisch sind ($\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r \neq 0$), bei der Fallunterscheidung nur der Fall 'a' relevant wird und die Lösung in diejenige des Newtonschen Fluids übergeht (vergleiche dazu die erste Zeile von Gleichung (5.9) auf Seite 29). Falls das Fluid z.B. als verdünnte Polymerlösung betrachtet wird, so heben sich bei Gleichheit der Koeffizienten $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$ die viskoelastischen Eigenschaften beider Konstituenten gegenseitig auf, so dass nur das viskose Verhalten eines rein Newtonschen Fluids übrig bleibt.

Falls der Relaxationskoeff. $\bar{\lambda}$ viel größer als der Retardationskoeff. $\bar{\lambda}_r$ ist, so dominiert in der Fallunterscheidung i. Allg. Fall 'c' für niedrige bis mittlere Ordnungen von n (siehe Gl. (5.36b) auf Seite 43). Nur falls $\bar{\lambda}_r = 0$ ist, so geht im Grenzfalle großer Werte von n die Fallunterscheidung nicht auf Fall 'a' über. Damit ist nur noch der Exponent $-\beta_n^0 = -\frac{1}{2\lambda}$ für die Dämpfung der Geschwindigkeitslösung verantwortlich. Das bedeutet, dass die Relaxation der horizontalen Geschwindigkeit $u_{\text{trans}}^0(y, t)$ unabhängig von den viskosen Eigenschaften des Fluids ist, welche durch die Reynoldszahl R repräsentiert werden. Zudem geben die homogenen Funktionen des Falls 'c', welche Kombinationen aus Exponential- und Sinus- bzw. Kosinusfunktionen sind (siehe Gl. (5.37c) auf Seite 43), einen Anhaltspunkt, warum die transienten Lösungen für kleine Werte von $\bar{\lambda}_r$ stärker oszillieren als diejenigen, bei denen die Koeffizienten ungefähr die gleiche Größenordnung besitzen.

Analog zum Vorgehen bei den Newtonschen Fluiden in Kapitel 5.1.1 ließe sich auch im Oldroyd-B-Modell eine mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}(t)$ und eine „Nettogeschwindigkeit“ $\langle \bar{u} \rangle(\tau)$ (siehe Diskussion ab Seite 30ff) definieren und diese diskutieren. Wir werden diese Geschwindigkeiten nicht eingehend diskutieren, da sich wie im Newtonschen Fall eine exponentielle Abnahme ergibt. Da im Fall eines Oldroyd-B-Fluids zusätzlich zur unendlichen Summe über alle n noch die Fallunterscheidung erforderlich ist, wollen wir hier nur die wesentlichen Resultate ansprechen. Einerseits gelten, bei identischen Parametern $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$, die Ergebnisse vom Newtonschen Fall, wie es oben angesprochen wurde. Damit lassen sich in diesem Spezialfall die Formeln (5.10) für die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} sowie (5.12) für die Nettogeschwindigkeit $\langle \bar{u} \rangle$ uneingeschränkt anwenden. Andererseits relaxieren diese gemittelten Geschwindigkeiten für große Zeiten $t \propto \exp(-\beta_n^0 t)$, falls der Retardationskoeff. $\bar{\lambda}_r = 0$ ist und das Fluid den Eigenschaften eines Maxwell-Fluids entspricht. Für beliebige Kombinationen der beiden Koeffizienten $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$ und auch der Reynoldszahl R ergeben sich durch die vorzunehmende Fallunterscheidung andere Raten der exponentiellen Abnahme.

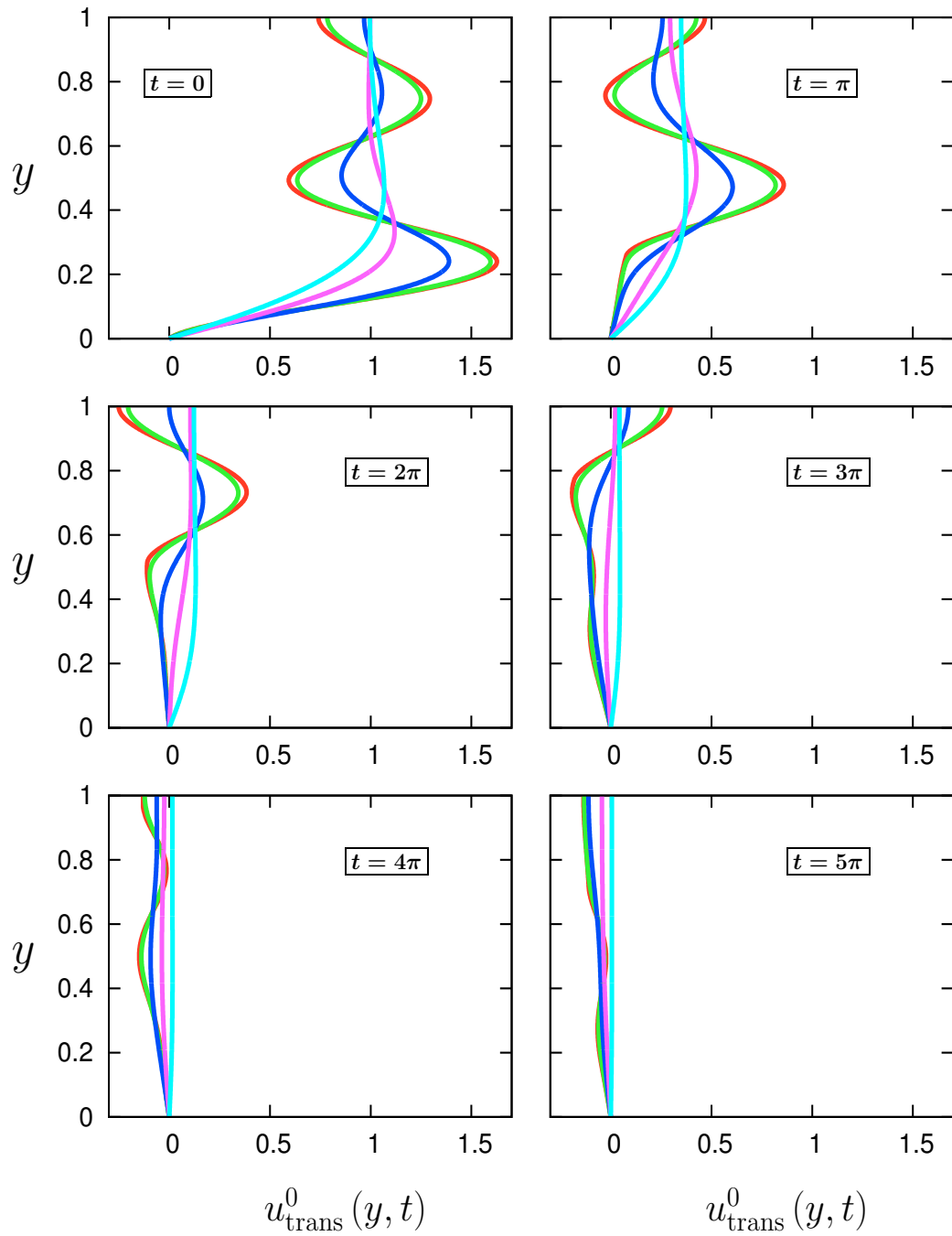


Abbildung 5.9.: Darstellung der transienten Geschwindigkeitslösung $u_{\text{trans}}^0(y, t)$ zu zunehmenden Zeitpunkten t (siehe Inlet) aus dem Intervall $[0, 5\pi]$ (von links oben zeilenweise nach rechts unten) für verschiedene Werte von $\bar{\lambda}_r$. Die Koeffizienten $R = 20$, $\tilde{g} \Gamma_x = 1$ sowie $\bar{\lambda} = 3$ bleiben konstant. Rot: $\bar{\lambda}_r = 0$; Grün: $\bar{\lambda}_r = 0.03$; Blau: $\bar{\lambda}_r = 0.3$; Lila: $\bar{\lambda}_r = 1.5$; Cyan: $\bar{\lambda}_r = 3$.

5.3.4. Periodische Lösung im Oldroyd-B-Modell

Bevor wir die Eigenschaften der periodischen Lösung diskutieren, werden wir analog zum Newtonschen Fluid eine äquivalente, kompakte Form herleiten. Dazu werden wir die periodische Lösung von Gleichung (5.30) auf Seite 41 mit einem sinusförmigen Antrieb herleiten, so dass sich zusammen mit den räumlichen Randbedingungen folgendes Gesamtproblem ergibt:

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) (\partial_t u) - \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) (\partial_y^2 u) = \tilde{g} \Gamma_x (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \sin(t + \phi_h) \quad (5.48a)$$

$$u|_{y=0} = 0 \quad (5.48b)$$

$$(\partial_y u)|_{y=1} = 0. \quad (5.48c)$$

Analog zur Vorgehensweise im Newtonschen Fall lässt sich folgender Ansatz für die periodische Lösung $u_{\text{OB}}^0(y, t)$ wählen:

$$u_{\text{OB}}^0(y, t) = v(y) \sin(t) + w(y) \cos(t). \quad (5.49)$$

Eine inhomogene Lösung $u_{\text{OB}}^{\text{inh}}$ kann durch eine rein zeitabhängige Funktion gefunden werden. Damit bleibt als Forderung an die inhomogene Funktion $u_{\text{OB}}^{\text{inh}}(t)$ bei genauerer Betrachtung der DGL (5.48a):

$$\partial_t u_{\text{OB}}^{\text{inh}}(t) = \tilde{g} \Gamma_x \sin(t + \phi_h) \quad (5.50)$$

$$\Rightarrow u_{\text{OB}}^{\text{inh}}(t) = -\tilde{g} \Gamma_x \cos(t + \phi_h) = \tilde{g} \Gamma_x (\sin \phi_h \sin t - \cos \phi_h \cos t). \quad (5.51)$$

Durch Einsetzen von Gl. (5.49) und mit Hilfe der Funktionen und den Relationen aus dem Anhang A auf Seite 129 kann der homogene Teil der DGL (5.48a) gelöst werden. Dadurch erhalten wir wiederum eine Kombination aus den vier Funktionen $v_1(y)$ bis $v_4(y)$ jeweils für $v(y)$ sowie $w(y)$, so dass zur Lösung des Gesamtproblems noch die Integrationskonstanten c_1 bis c_4 aus den Randbedingungen (5.48b) sowie (5.48c) bestimmt werden müssen:

$$\begin{pmatrix} v(y) \\ w(y) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} v_4 \\ v_1 \end{pmatrix} + \tilde{g} \Gamma_x \begin{pmatrix} \sin \phi_h \\ -\cos \phi_h \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Die obigen Koeffizienten ergeben sich damit aus dem Verschwinden zum einen der horizontalen Geschwindigkeit $u_{\text{OB}}^{\text{inh}}$ am Boden bei $y = 0$ sowie deren räumlicher Ableitung an der Oberfläche bei $y = 1$. Somit erhalten die obigen Konstanten die

Form:

$$c_1 = -\tilde{g}\Gamma_x \cos \phi_h \quad (5.53a)$$

$$c_2 = \tilde{g}\Gamma_x \frac{\cos(\phi_h) \sin(B) \cos(B) + \sin(\phi_h) \sinh(A) \cosh(A)}{\cosh^2(A) - \sin^2(B)} \quad (5.53b)$$

$$c_3 = \tilde{g}\Gamma_x \frac{\cos(\phi_h) \sinh(A) \cosh(A) - \sin(\phi_h) \sin(B) \cos(B)}{\cosh^2(A) - \sin^2(A)} \quad (5.53c)$$

$$c_4 = -\tilde{g}\Gamma_x \sin \phi_h, \quad (5.53d)$$

wobei die Konstanten A und B wie folgt aussehen:

$$A = \sqrt{\frac{R}{2} \frac{1}{1 + \bar{\lambda}_r^2}} \frac{1 + \bar{\lambda} \bar{\lambda}_r}{\left((\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) + \sqrt{(1 + \bar{\lambda}^2)(1 + \bar{\lambda}_r^2)} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.54a)$$

$$B = \sqrt{\frac{R}{2} \frac{1}{1 + \bar{\lambda}_r^2}} \left((\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) + \sqrt{(1 + \bar{\lambda}^2)(1 + \bar{\lambda}_r^2)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.54b)$$

Mit den Koeffizienten c_1 bis c_4 sowie den Parametern A und B ist die Problemstellung (5.48) gelöst, zumindest für den periodischen, nicht-transienten Teil. Wie schon in Kapitel 5.1.2 werden wir i. Allg. eine rein sinusförmige Antriebsfunktion betrachten, d.h. $\phi_h = 0$ wählen, sowie zur Vereinfachung die Antriebsamplitude $\tilde{g}\Gamma_x = 1$. Für diese speziellen Annahmen resultiert damit die gesamte Lösung für $u_{\text{OB}}^0(y, t)$ analog zur Lösung im Newtonschen Fall (siehe Gl. (5.20) auf Seite 36):

$$u_{\text{OB}}^0(y, t) = v^{\text{OB}}(y) \sin(t) + w^{\text{OB}}(y) \cos(t) \quad (5.55a)$$

$$v^{\text{OB}}(y) = -\sinh(Ay) \sin(By) + c_2^{\text{OB}} \sinh(Ay) \cos(By) + c_3^{\text{OB}} \cosh(Ay) \sin(By) \quad (5.55b)$$

$$w^{\text{OB}}(y) = +\cosh(Ay) \cos(By) + c_2^{\text{OB}} \cosh(Ay) \sin(By) - c_3^{\text{OB}} \sinh(Ay) \cos(By) - 1, \quad (5.55c)$$

wobei $c_2^{\text{OB}} = \frac{\sin(B) \cos(B)}{\cosh^2(A) - \sin^2(B)}$ und $c_3^{\text{OB}} = \frac{\sinh(A) \cosh(A)}{\cosh^2(A) - \sin^2(B)}$ die konstanten Koeffizienten aus Gl. (5.53b) und (5.53c) sind und A sowie B aus den beiden Gleichungen (5.54) zu entnehmen sind. Es kann, wie schon im Kapitel der Newtonschen Fluide angesprochen worden ist, gezeigt werden, dass diese Lösung mit derjenigen aus Gleichung (5.45) auf Seite 52 übereinstimmt, wobei letztere natürlich noch mit

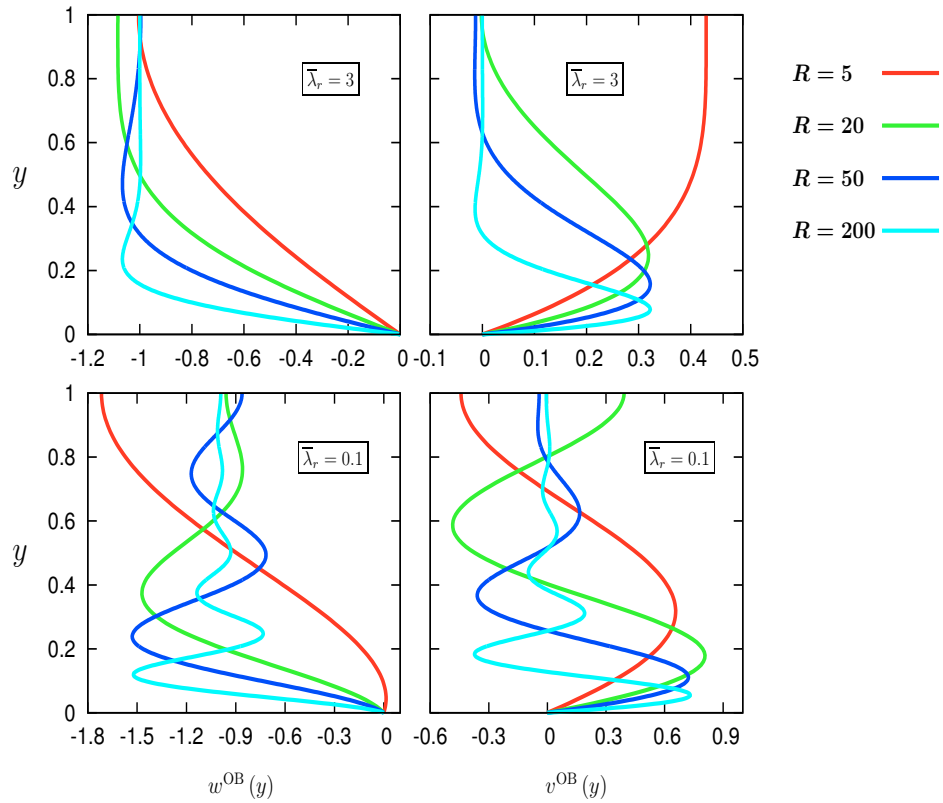


Abbildung 5.10.: Darstellung der Funktionen $w^{\text{OB}}(y)$ (Diagramme links) und $v^{\text{OB}}(y)$ (rechts) als Funktion der vertikalen Koordinate y . Dabei ist $\bar{\lambda} = 3$ konstant für alle Graphen. Die Koeffizienten R und $\bar{\lambda}_r$ variieren je nach Kurve bzw. Graphik.

den entsprechenden räumlichen Funktionen multipliziert und dann aufsummiert werden muss.

In Abbildung 5.10 sind die von der vertikalen Koordinate y abhängenden räumlichen Teilgrößen $w^{\text{OB}}(y)$ und $v^{\text{OB}}(y)$ aus den Gleichungen (5.55) für verschiedene Parameterkombinationen skizziert. Der Relaxationskoeffizient $\bar{\lambda} = 3$ gilt für alle Einzelgraphiken. Die Diagramme auf der linken Seite stellen jeweils $w^{\text{OB}}(y)$ für verschiedene Reynoldszahlen R dar, wobei im oberen Bild $\bar{\lambda}_r = 3 = \bar{\lambda}$ ist und im unteren gilt $\bar{\lambda}_r = 0.1$. Dementsprechend ist die Situation die gleiche für $v^{\text{OB}}(y)$ auf den rechten Einzelabbildungen. Die oberen beiden Diagramme bei Gleichheit von Relaxationskoeff. $\bar{\lambda}$ und Retardationskoeff. $\bar{\lambda}_r$ repräsentieren die uns bekannte Situation aus dem Newtonschen Fall, welche schon im vorherigen Kapitel 5.1.2 in

Abbildung 5.5 auf Seite 36 gezeichnet wurde. Für übereinstimmende Werte von R sind entsprechende Kurven identisch. Wie vorhin bei der Diskussion der transienten Lösung schon diskutiert, geht auch in diesem Fall bei gleichen Koeffizienten $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r$ die Lösung in diejenige des Newtonschen Fluids über. Das bedeutet explizit, dass die Konstanten A und B aus Gl. (5.54) in diesem Fall identisch sind und für die horizontalen Geschwindigkeiten gilt weiter:

$$u_{\text{OB}}^0(y, t) = u_h^0(y, t) . \quad (5.56)$$

In den beiden unteren Diagrammen von Abb. 5.10 ist der Retardationskoeff. $\bar{\lambda}_r = 0.1$ und damit deutlich kleiner als der Relaxationskoeff. $\bar{\lambda} = 3$. Im Vergleich zu den oberen Skizzen ist zu erkennen, dass hier die maximalen Amplituden deutlich größer sind und das oszillatorische Verhalten wesentlich stärker ausgeprägt ist. Für hohe Reynoldszahlen R oszillieren die beiden Geschwindigkeitsfunktionen w^{OB} und v^{OB} jeweils in Richtung der freien Oberfläche ($y \rightarrow 1$) mit kleineren Amplituden um die Werte $w_1 = -1$ bzw. $v_1 = 0$. Für mittlere Reynoldszahlen R , z.B. $R = 20$ (grüne Kurve) bzw. $R = 50$ (blau), sind die Schwankungen um diese Positionen und die dazugehörigen Amplituden deutlich größer.

Eine ausführliche Diskussion der Eigenschaften von w^{OB} und v^{OB} erfordert das grundlegende Verständnis der zusammengesetzten trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen in den Gleichungen (5.55). Zudem sind im Vergleich zur Lösung für Newtonsche Fluide die Parameter A und B aus Gl. (5.54), welche die Generalisierung des Parameters $A^{\text{NF}} = \sqrt{R/2}$ bei den Newtonschen Fluiden darstellen (siehe Seite 36), deutlich komplexer. Um diese Koeffizienten eingehender zu untersuchen, sind in Abbildung 5.11 in zwei Diagrammen die Koeffizienten A und B dargestellt, und zwar in Abhängigkeit von $\bar{\lambda}$ bei jeweils fest gehaltenem Verhältnis $c = \bar{\lambda}_r/\bar{\lambda}$. Daher sind sowohl die Funktionen $A(\bar{\lambda}, c\bar{\lambda})$ als auch $B(\bar{\lambda}, c\bar{\lambda})$ in diesen Diagrammen aufgetragen. Da jeweils das Verhältnis zum ursprünglichen Parameter $A^{\text{NF}} = \sqrt{R/2}$ untersucht werden soll, legen wir die Reynoldszahl $R = 2$ fest, da damit der Vorfaktor $\sqrt{R/2} = 1$ ergibt.

Im oberen Diagramm von Abb. 5.11 ist zu erkennen, dass für kleine Werte von $\bar{\lambda}$ die Funktion $A(\bar{\lambda})$ zunächst beim Wert $A = 1$ beginnt und dann, falls $c \neq 1$ ist, abnimmt. Je größer der Wert von c ist, desto kleiner sind die Werte von $\bar{\lambda}$, bei denen die Funktion den Wert $A = 1$ überschreitet. Für hohe Werte von $\bar{\lambda}$ ist, sofern $c \neq 0$ bzw. $c \neq 1$, größer als 1 und asymptotisch nähern sich die Funktionen der Kurve

$$A_\infty(\bar{\lambda}, c) = \frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{2c-1}{2c^2} \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \quad (5.57)$$

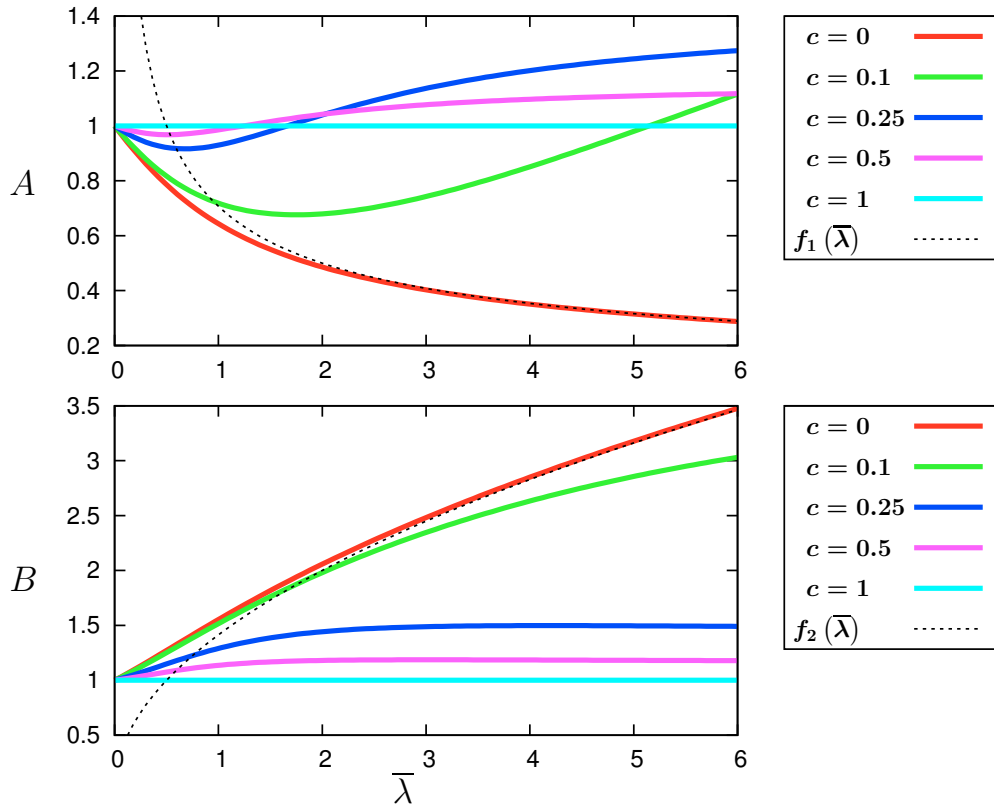


Abbildung 5.11.: Darstellung der Koeffizienten A und B aus Relation (5.54) in Abhängigkeit von $\bar{\lambda}$ für verschiedene Verhältnisse $c = \bar{\lambda}_r/\bar{\lambda}$ für $R = 2$.

Oberes Diagramm: $A(\bar{\lambda})$ mit Hilfsfunktion $f_1(\bar{\lambda}) = \sqrt{\frac{1}{2\bar{\lambda}}}$.

Unteres Diagramm: $B(\bar{\lambda})$ mit Hilfsfunktion $f_2(\bar{\lambda}) = \sqrt{2\bar{\lambda}}$.

an. Obige Funktion ist im Diagramm nicht eingezeichnet, da sich diese nur für sehr große Werte von $\bar{\lambda}$ der Funktion $A(\bar{\lambda})$ asymptotisch nähert. Der Spezialfall $c = 1$ (entspricht $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r$) wurde weiter oben schon diskutiert und ergibt sowohl für den Parameter A als auch für B jeweils 1 bzw. $\sqrt{R/2}$ im allgemeinen Fall. Wird der andere Grenzfall, nämlich $c = 0$, gewählt (siehe rote Kurven in Abb. 5.11), so nimmt A stetig ab und nähert sich asymptotisch dem schwarz gestrichelten Graphen von $f_1(\bar{\lambda}) = \sqrt{\frac{1}{2\bar{\lambda}}}$. In diesem Fall, welcher dem eines Maxwell-Fluids entspricht, lässt sich zeigen, dass sich die Koeffizienten A und B invers zueinander verhalten, d.h. es gilt dann:

$$A(\bar{\lambda}, c = 0) \cdot B(\bar{\lambda}, c = 0) = \frac{R}{2} . \quad (5.58)$$

Da mit obiger Relation im Gegenzug B bei $c = 0$ monoton steigt und B jeweils in den trigonometrischen Funktionen vorkommt, bedeutet dies, dass dadurch das oszillatorische Verhalten der Funktionen w^{OB} und v^{OB} erklärt werden kann. Wie im unteren Diagramm der Abb. 5.11 zu erkennen ist, wächst für $c = 0$ der Koeffizient B am stärksten und zwar asymptotisch wie die Funktion $f_2(\bar{\lambda}) = \sqrt{2\bar{\lambda}}$. Für zunehmende Werte von c wächst B mit steigender Variable $\bar{\lambda}$ für kleine Werte am schnellsten und scheint dann für höhere Werte von $\bar{\lambda}$ ein Plateau zu erreichen. Es lässt sich analog zur Formel (5.57) für A_∞ das Langzeitverhalten von B bestimmen zu:

$$B_\infty(\bar{\lambda}, c) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left(1 + \frac{1-c}{c} \frac{1}{\bar{\lambda}} \right). \quad (5.59)$$

Im Grenzfall $c \rightarrow 1$ wird das Plateau schon für kleinere Werte von $\bar{\lambda}$ erreicht und das oszillatorische Verhalten ist nicht so ausgeprägt wie für kleinere c . Bei $c = 1$ ist, wie vorher schon angesprochen, der Limes des Newtonschen Fluids erfüllt. Für das Verhalten der Funktionen w^{OB} und v^{OB} ist festzuhalten, dass es wesentlich durch das Verhältnis $c = \bar{\lambda}_r/\bar{\lambda}$ und durch die Größe der Reynoldszahl R bestimmt wird.

Im Folgenden wollen wir uns noch die Dynamik der gesamten horizontalen Geschwindigkeit $u_{\text{OB}}^0(y, t)$ als Kombination der Funktionen w^{OB} und v^{OB} über eine volle Periode $T = 2\pi$ in Abständen $\Delta t = \frac{\pi}{2}$ ansehen (siehe Gl. (5.55a) auf Seite 57), die dazu in acht Einzeldiagrammen in Abbildung 5.12 aufgetragen ist. Die Parameter und die unterschiedlichen Reynoldszahlen R der Graphen entsprechen exakt denen der beiden unteren Diagramme aus Abbildung 5.10 auf Seite 58. Die Dynamik, die in diesen Einzelbildern gezeichnet ist, erscheint deutlich komplexer und vielfältiger als jene, die in Newtonschen Fluiden auftritt (vgl. dazu die entsprechende Abb. 5.4 auf Seite 34). Es ist im Wesentlichen in den einzelnen Bildern zu erkennen, dass die Form der Graphen über die volle zeitliche Periode in groben Zügen erhalten bleibt, wobei die größten Änderungen in der Nähe des Boden bei $y = 0$ passieren. Dabei ist das Fluidfeld $u_{\text{OB}}^0(y, t)$ bei $t = \pi$ aufgrund der Symmetrien gerade das an der y -Achse gespiegelte Feld zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die deutlich ausgeprägten gegenläufigen Bewegungen (besonders bei $R = 500$, lila Kurven) sind dadurch erklärbar, dass das gesamte Fluid in begrenzten Schichten einteilbar ist, die sich lokal, jeweils relativ gesehen, entgegengesetzt zu den beiden Schichten über bzw. unter ihr bewegen. Dieser Effekt war schon bei den Newtonschen Fluiden zu erkennen, jedoch weniger stark ausgeprägt, da die horizontalen Geschwindigkeitsunterschiede Scherspannungen durch die Viskosität antiproportional zur Reynoldszahl R hervorrufen, so dass die gegenläufigen Bewegungen schneller gedämpft werden. Bei den viskoelastischen Fluiden setzt diese Scherspannung

verzögert ein, weil der Relaxationskoeff. $\bar{\lambda}$ beschreibt, wie lange es dauert, bis die volle Scherspannung (diejenige des Newtonschen Grenzfalls) aufgebaut ist. Für große Parameter $\bar{\lambda}$ ist diese Zeitspanne größer und die Oszillationen damit von viel höherer Amplitude als beim Newtonschen Fluid. Der Retardationskoeff. $\bar{\lambda}_r$ wirkt dagegen dämpfend auf das Oszillieren, denn dieser Parameter beschreibt beispielsweise die Wirkung der elastischen Partikel, die im Gesamtfluid gelöst sind und damit zusätzliche Scherkräfte hinzufügen. Die Anzahl der sich gegeneinander bewegende Schichten wird durch die Reynoldszahl R bestimmt. Dabei scheint im Gegensatz zum Newtonschen Fluid die Einteilung, zum einen in eine Grenzschichtzone in der Nähe des Bodens und zum anderen in eine nahezu periodisch schwingenden Schicht darüber, nicht mehr sinnvoll, da für mittlere Reynoldszahlen die relativen Amplituden der Schichten nicht sehr viel kleiner sind als die maximale Geschwindigkeit in der Nähe des Bodens.

Zusammenfassend für die durch die in kompakter Form beschriebene horizontale Geschwindigkeit $u_{OB}^0(y, t)$ ist festzuhalten, dass durch das Hinzunehmen der viskoelastischen Eigenschaften, ausdrückbar mittels der Koeff. $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$, sowohl die Komplexität der Lösung als auch die Vielfalt der Resultate gegenüber dem Modell des Newtonschen Fluids deutlich zugenommen hat.

Am Ende dieses Unterkapitels wollen wir noch bemerken, dass die DGL (5.48a) auf Seite 56 auch für allgemeine periodische Antriebe

$$F^{\text{per}}(t) = F^{\text{per}}(t + 2\pi) \quad (5.60a)$$

$$\Rightarrow F^{\text{per}}(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nt) + s_n \sin(nt) . \quad (5.60b)$$

lösbar ist. Denn diese DGL ist linear und die periodische Antriebsfunktion F^{per} kann in eine Fourierreihe entwickelt werden, so dass diese Funktion zunächst in eine beliebige Anzahl an Fouriermoden entwickelt werden kann. Die DGL (5.48a) kann dann separat für alle Moden gelöst und die Lösung am Schluss mittels Superpositionsprinzip zusammengesetzt werden. Die zu bestimmenden Parameter A und B

(vgl. Gln. (5.54)) verallgemeinern sich dann zu:

$$A_n = \sqrt{\frac{nR}{2} \frac{1}{1+n^2\bar{\lambda}_r^2}} \frac{1+n^2\bar{\lambda}\bar{\lambda}_r}{\left(n(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_r) + \sqrt{(1+n^2\bar{\lambda}^2)(1+n^2\bar{\lambda}_r^2)}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.61a)$$

$$B_n = \sqrt{\frac{nR}{2} \frac{1}{1+n^2\bar{\lambda}_r^2}} \left(n(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_r) + \sqrt{(1+n^2\bar{\lambda}^2)(1+n^2\bar{\lambda}_r^2)}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.61b)$$

Die Integrationskonstanten c_1 bis c_4 aus den Relationen (5.53) können durch Wahl des Winkels ϕ_h den Sinus- bzw. Kosinusfunktionen aus den Antriebsfunktionen der einzelnen Summanden aus Gl. (5.60b) angepasst werden ($\phi_h = \frac{\pi}{2}$: Kosinus-Terme, $\phi_h = 0$: Sinus-Terme), wobei zusätzlich damit A durch A_n sowie B durch B_n ersetzt wird. Somit gibt es noch eine weitere Möglichkeit, eine Lösung für eine allgemeine periodische Antriebsfunktion zu bestimmen, ergänzend zu derjenigen, die im Anhang B ab Seite 130 beschrieben wird.

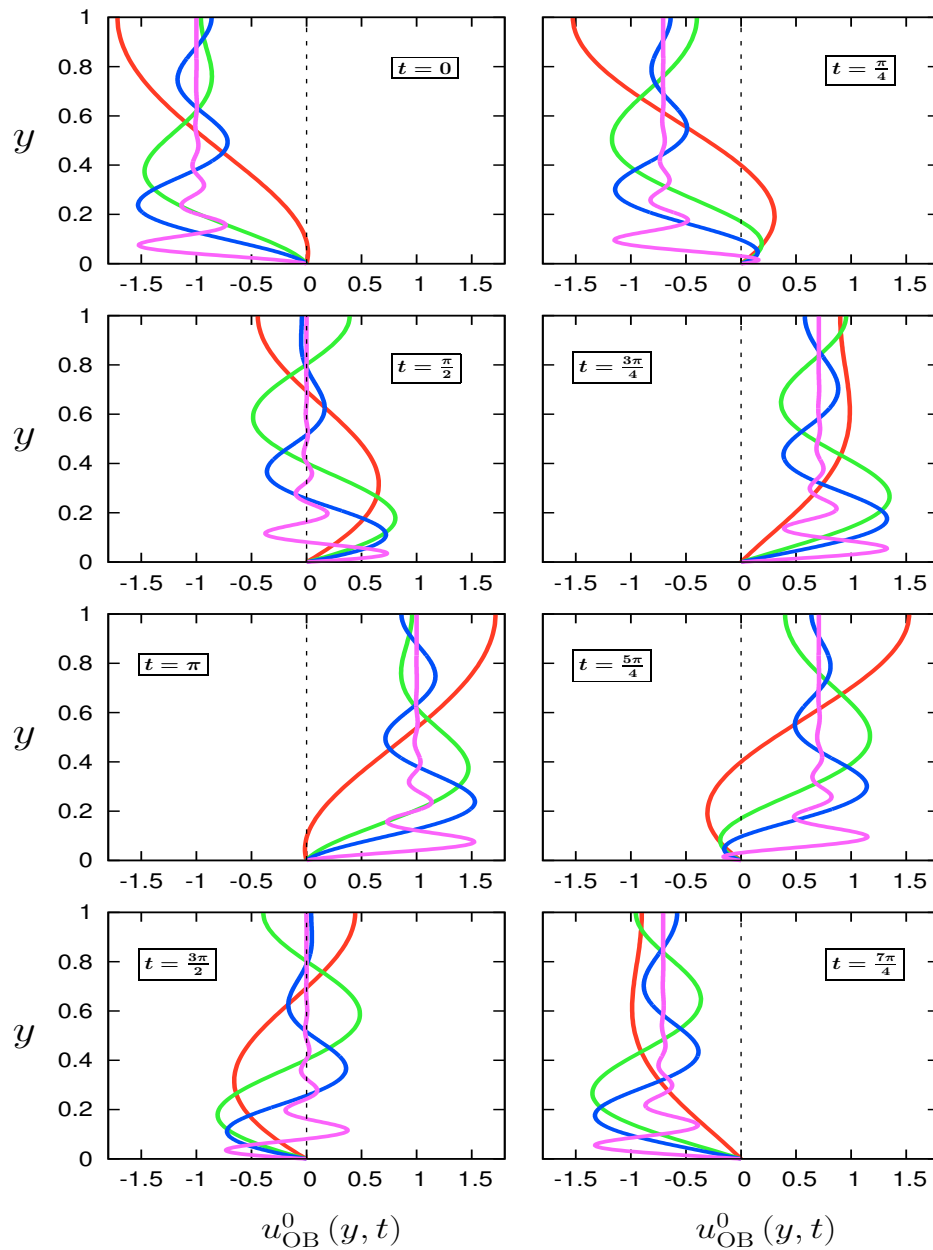


Abbildung 5.12.: Darstellung der Funktionen $u_{\text{OB}}^0(y, t)$ an zunehmenden Zeitpunkten t (siehe Inlet) aus dem Intervall $[0, 2\pi]$ (von links oben zeilenweise nach rechts unten) für verschiedene Werte von R . Die Koeffizienten $\bar{\lambda}_r = 0.1$, $\tilde{g}\Gamma_x = 1$ sowie $\bar{\lambda} = 3$ bleiben konstant.
 Rot: $R = 5$; Grün: $R = 20$; Blau: $R = 50$; Lila: $R = 500$.

Periodische Lösung für Variablen des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$

Für die gesamte Lösung des periodischen horizontalen Problems fehlen noch die abhängigen Variablen des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$, welche durch die DGLn (5.26) auf Seite 39 beschrieben werden. In der Literatur zu elementaren periodisch getriebenen Lösungen wird im Wesentlichen die horizontale Geschwindigkeit $u(y, t)$ beschrieben, die von den Variablen des Konformationstensors entkoppelt werden kann (siehe dazu auch Gl (5.30) auf Seite 41), so dass die Lösung der physikalisch nicht direkt messbaren Variablen von $\underline{\underline{S}}$ vernachlässigt wird. Wir werden im Rahmen dieser Arbeit die Evolutionsgleichungen (5.26) lösen, da diese in Kapitel 8 für die lineare Stabilitätsanalyse der horizontalen Geschwindigkeit erforderlich ist.

Beginnend mit Gleichung (5.26d) für S_{yy} , deren Lösung bereits auf Seite 40 in den Relationen (5.28) diskutiert worden ist, folgt mit der Symmetriebedingung $S_{xy} = S_{yx}$ (vgl. (5.29)) der Nebendiagonalelemente für die Evolutionsgleichung (5.26b):

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) S_{xy}(y, t) = \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) (\partial_y u_{\text{OB}}^0(y, t)) , \quad (5.62)$$

wobei die räumliche Ableitung von S_{xy} an der Oberfläche verschwinden muss, d.h.

$$S_{xy}|_{y=1} = 0 . \quad (5.63)$$

Wir schreiben die horizontale Geschwindigkeit $u_{\text{OB}}^0(y, t)$ in einer ähnlichen Form wie in Gl. (5.55a) auf Seite 57, wobei wir die Vorfaktoren $\tilde{g}\Gamma_x$ aus den Funktionen v^{OB} und w^{OB} herausziehen:

$$u_{\text{OB}}^0(y, t) = v^{\text{OB}}(y) \sin(t) + w^{\text{OB}}(y) \cos(t) \quad (5.64a)$$

$$=: \tilde{g}\Gamma_x \{u_s^0 \sin(t) + u_c^0 \cos(t)\} . \quad (5.64b)$$

Damit setzen wir für die Lösung von Gl. (5.62) an:

$$S_{xy}(y, t) =: B^0(y, t) \quad (5.65a)$$

$$B^0(y, t) = \tilde{g}\Gamma_x \{u_s^{0'}(y) f_s(\sin t, \cos t) + u_c^{0'}(y) f_c(\sin t, \cos t)\} \quad (5.65b)$$

$$\stackrel{!}{=} \tilde{g}\Gamma_x \{B_s^0(y) \sin t + B_c^0(y) \cos t\} . \quad (5.65c)$$

Durch direktes Einsetzen von $B^0(y, t)$ und $u_{\text{OB}}^0(y, t)$ in Gleichung (5.62) können damit die gesuchten Funktionen B_s^0 sowie B_c^0 durch Ordnen der Terme gefunden werden. Die Randbedingung (5.63) ist damit automatisch erfüllt, da die räumliche Ableitung der Funktionen u_s^0 sowie u_c^0 am Rand bei $y = 1$ verschwindet. Wir erhalten

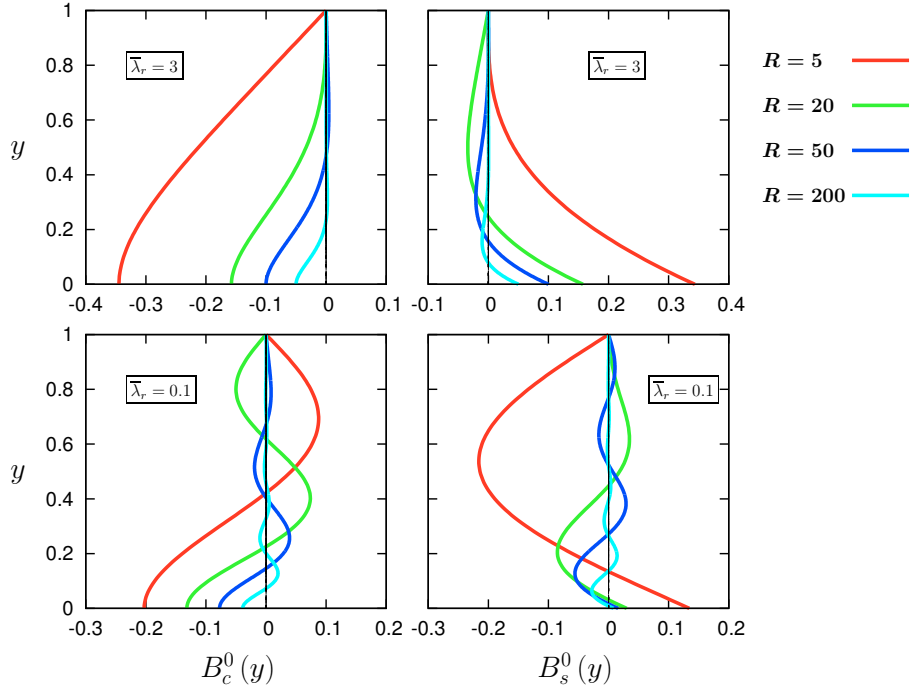


Abbildung 5.13.: Darstellung der Funktionen $B_c^0(y)$ (Diagramme links) und $B_s^0(y)$ (rechts) als Funktion der vertikalen Koordinate y . Dabei ist $\bar{\lambda} = 3$ konstant für alle Graphen. Die Koeffizienten R und $\bar{\lambda}_r$ variieren je nach Kurve bzw. Graphik.

somit:

$$B_s^0(y) = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \bar{\lambda}^2} \left\{ (1 + \bar{\lambda} \bar{\lambda}_r) u_s^{0'}(y) + (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) u_c^{0'}(y) \right\} \quad (5.66a)$$

$$B_c^0(y) = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \bar{\lambda}^2} \left\{ -(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r) u_s^{0'}(y) + (1 + \bar{\lambda} \bar{\lambda}_r) u_c^{0'}(y) \right\}. \quad (5.66b)$$

In diesen beiden Formeln stellen die Striche von $u_c^{0'}(y)$ sowie $u_s^{0'}(y)$ die Ableitung nach der Variablen y dar. Durch die obigen beiden räumlichen Funktionen und die dazugehörige Kombination mit den zeitlichen trigonometrischen Funktionen ist die Lösung für die Nebendiagonalvariablen S_{xy} gefunden. Es bleibt damit noch die DGL (5.26a) von Seite 39 für die Variable S_{xx} zu lösen:

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) S_{xx} = 2\bar{\lambda} B^0(y, t) (\partial_y u_{\text{OB}}^0(y, t)) - 2 \frac{\bar{\lambda}_r}{R} (\partial_y u_{\text{OB}}^0(y, t))^2. \quad (5.67)$$

Wie in obiger DGL (5.67) zu sehen ist, wird die zeitliche Entwicklung von S_{xx} einerseits vom Produkt aus B^0 und der räumlichen Ableitung von u_{OB}^0 sowie andererseits vom Quadrat dieser Ableitung getrieben. Durch Einsetzen der Funktionen B^0 (Gln. (5.65c), (5.66)) sowie u_{OB}^0 (Gl. (5.64b)) in die DGL (5.67) erhalten wir auf der rechten Seite Produkte der Form $\sin^2(t)$, $\cos^2(t)$ sowie $\sin t \cos t$ zusammen mit den räumlichen Funktionen $u_c^{0'}(y)$ sowie $u_s^{0'}(y)$. Die Produkte der trigonometrischen Funktionen lassen sich aufteilen zum einen in eine konstante Komponente, zum anderen in Anteile, die zeitlich doppelt so schnell oszillieren, also mit der dimensionslosen Kreisfrequenz 2. Damit setzen wir für die Lösung von Gleichung (5.67) an:

$$S_{xx}(y, t) =: A^0(y, t) = (\tilde{g}\Gamma_x)^2 \left[A_k^0(y) + A_c^0(y) \cos(2t) + A_s^0(y) \sin(2t) \right]. \quad (5.68)$$

Durch Ausmultiplizieren aller Terme und weiteren Vereinfachungen kann damit die Lösung der einzelnen Funktionen A_i erhalten werden. Daraus ergibt sich nach etwas längerer Rechnung:

$$A_k^0(y) = \frac{1}{R} \frac{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r}{1 + \bar{\lambda}^2} \left[(u_s^{0'})^2 + (u_c^{0'})^2 \right] \quad (5.69a)$$

$$A_c^0(y) = \frac{1}{R} \frac{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r}{1 + \bar{\lambda}^2} \frac{1}{1 + 4\bar{\lambda}^2} \left[(1 - 2\bar{\lambda}^2) \left\{ (u_c^{0'})^2 - (u_s^{0'})^2 \right\} - 6\bar{\lambda} (u_c^{0'}) \cdot (u_s^{0'}) \right] \quad (5.69b)$$

$$A_s^0(y) = \frac{1}{R} \frac{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_r}{1 + \bar{\lambda}^2} \frac{1}{1 + 4\bar{\lambda}^2} \left[3\bar{\lambda} \left\{ (u_c^{0'})^2 - (u_s^{0'})^2 \right\} + 2(1 - 2\bar{\lambda}^2) (u_c^{0'}) \cdot (u_s^{0'}) \right]. \quad (5.69c)$$

Dadurch lassen sich die Komponenten des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$, ausgedrückt durch $A^0(y, t)$ sowie $B^0(y, t)$ als Funktionen der horizontalen Geschwindigkeitsanteile $u_c^{0'}$ sowie $u_s^{0'}$, aufschreiben. Zur Verdeutlichung sind die räumlichen Komponenten von $B^0(y, t)$ in Abbildung 5.13 aufgetragen. Im oberen linken Diagramm ist zu erkennen, dass die Kurven $B_c^0(y)$ bei gleichen Koeffizienten $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 3$ (Grenzfall des Newtonschen Fluids) als glatt erscheinen, wobei für zunehmende Reynoldszahlen R die maximalen Auslenkung bei $y = 0$ abnimmt. Da die Größe B^0 mit dem Inversen der Reynoldszahl R skaliert, ist die Abnahme insgesamt nicht verwunderlich,

da die in B_c^0 enthalten Ableitungen der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten $u_c^{0'}$ sowie $u_s^{0'}$ mit der Wurzel der Reynoldszahl zunehmen, so dass die Amplituden insgesamt mit dem $R^{-\frac{1}{2}}$ skalieren. Für die Graphen der Variablen $B_s^0(y)$ in rechten oberen Diagramm von Abb. 5.13 gelten im Wesentlichen die gleichen Aussagen wie für die entsprechenden Kurven von B_c^0 , außer dass hier die Ableitungen bei $y = 0$ nicht verschwinden, wie es bei $B_c^0(y = 0)$ der Fall ist.

In den unteren Diagrammen der Abb. 5.13 ist die Situation mit Werten der Koeffizienten von $\bar{\lambda} = 3$ sowie $\bar{\lambda}_r = 0.1$ dargestellt. Im Vergleich zu den darüber liegenden Skizzen ist einmal mehr das stärker ausgeprägte oszillatorische Verhalten zu erkennen. Diese Eigenschaft nimmt mit ansteigender Reynoldszahl R zu. Da die Graphen beider Variablen B_c^0 und auch B_s^0 jeweils um Null oszillieren, untermauert dies die in den Geschwindigkeitsdiagrammen (vgl. die Abb. 5.10 und 5.12 auf den Seiten 58 bzw. 64) auftretenden Min- und Maxima. Alle Graphen verschwinden an der Oberfläche zu Null, wie es die Randbedingung (5.63) vorgibt.

Die zeitliche periodische Dynamik von $B^0(y, t)$ während einer vollen Periode $T = 2\pi$ ist in Abbildung 5.15 auf Seite 71 zu sehen. Im Unterschied zu den stroboskopischen Aufnahmen der Geschwindigkeitslösung $u_{OB}^0(y, t)$ in Abb. 5.12 auf Seite 64 scheinen die Rollen von Boden und freier Oberfläche vertauscht, d.h. in diesem Fall bleiben die Graphen bei $y = 1$ fest und verschieben sich mit immer größer werdenden Amplituden nach unten, so dass die maximale Auslenkung bei $y = 0$ erreicht wird.

Demgegenüber steht die zeitliche Entwicklung der Größe $A^0(y, t)$, welche während einer vollen Periode $T = \pi$ in Einzelbildern der Abb. 5.16 auf Seite 72 dargestellt ist, und zwar mit Werten von $\bar{\lambda} = 3$ sowie $\bar{\lambda}_r = 1$ für vier verschiedene Reynoldszahlen R . Die Graphen sind ähnlich denen der Variablen $B^0(y, t)$ bei $y = 1$ auf den Wert Null festgelegt und oszillieren dann zeitlich für niedrigere Werte von y . Dies allerdings nicht um den Wert Null, sondern um die räumliche Funktion $A_k^0(y)$, die für diese Parameterwerte im unteren rechten Diagramm von Abb. 5.14 auf Seite 70 aufgetragen ist. Dabei ist zu erkennen, dass es für niedrige Reynoldszahlen R wenige, dafür aber stark ausgeprägte Extrema gibt, während für steigende R die Anzahl der Extrema zunimmt, deren Amplitude jedoch nachlässt. Für große Werte von R erscheint die Kurve sehr geglättet. Am Boden erreichen die Funktionen $A^0(y)$ Werte in der gleichen Größenordnung, was dadurch erklärt werden kann, dass $A^0(y)$ von den Quadraten von $u_c^{0'}$ sowie $u_s^{0'}$ abhängt. Diese Funktionen verhalten sich, wie wir vorher schon angesprochen haben, proportional zu \sqrt{R} , wodurch sich insgesamt die R -Abhängigkeit in Formel (5.69a) auf Seite 67 heraushebt.

Die räumlichen Funktionen $A_c^0(y)$ und $A_s^0(y)$, welche oben rechts bzw. darunter in Abb. 5.14 zu sehen sind, oszillieren im Gegensatz $A_k^0(y)$ deutlich stärker. Diese Oszillationen nehmen, ausgehend von der Oberfläche bei $y = 1$ in Richtung Boden deutlich zu, wobei die Amplituden der Oszillationen jeweils kleiner sind als die maximale Auslenkung von $A_k^0(y)$. Die Anzahl der Oszillationen nimmt wiederum mit der Reynoldszahl R zu. Wir wollen noch anmerken, dass das Auftreten von $A^0(y, t)$ allein aus den viskoelastischen Eigenschaften des Fluids resultiert. Denn sobald die Koeffizienten $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r$ gleich sind, verschwindet die Lösung für A_c^0 , A_s^0 sowie A_k^0 , was durch Betrachten der Formeln (5.69) ersichtlich wird. Denn bei den Newtonschen Fluiden verschwindet die linke obere Komponente des Spannungstensors A_{xx} , während bei viskoelastischen Fluiden diese bei den vorliegenden Symmetrien vom Quadrat der Ortsableitung der Geschwindigkeit abhängt. Durch Vergleich der jeweiligen Einzeldiagramme in Abb. 5.14 für die verschiedenen Werte von $\bar{\lambda} = 1$ auf der linken und $\bar{\lambda}_r = 0.1$ auf der rechten Seite ist zu erkennen: je größer der Unterschied zwischen $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$, desto ausgeprägter ist zudem der oszillatorische Charakter der jeweiligen Funktionen. Das bedeutet, im Grenzfall des Maxwell'schen Fluids ($\bar{\lambda}_r = 0$) tritt dieser Effekt am stärksten auf, während hin zu den Eigenschaften des Newtonschen Fluids ($\bar{\lambda}_r \rightarrow \bar{\lambda}$) diese Eigenschaft verschwindet.

Zum Ende dieses Unterkapitels wollen wir noch bemerken, dass die Antriebsamplitude Γ_x in der Größe $A^0(y, t)$ quadratisch eingeht (vgl. Gln. (5.68) und (5.69)), und zudem, dass $A^0(y, t)$ zeitlich doppelt so schnell schwingt wie der äußere Antrieb sowie die Geschwindigkeit $u_{OB}^0(y, t)$. Beide Details werden in Kapitel 8 von Bedeutung sein, da dort die lineare Stabilitätsanalyse der in diesem Kapitel gefundenen Lösung hergeleitet wird.

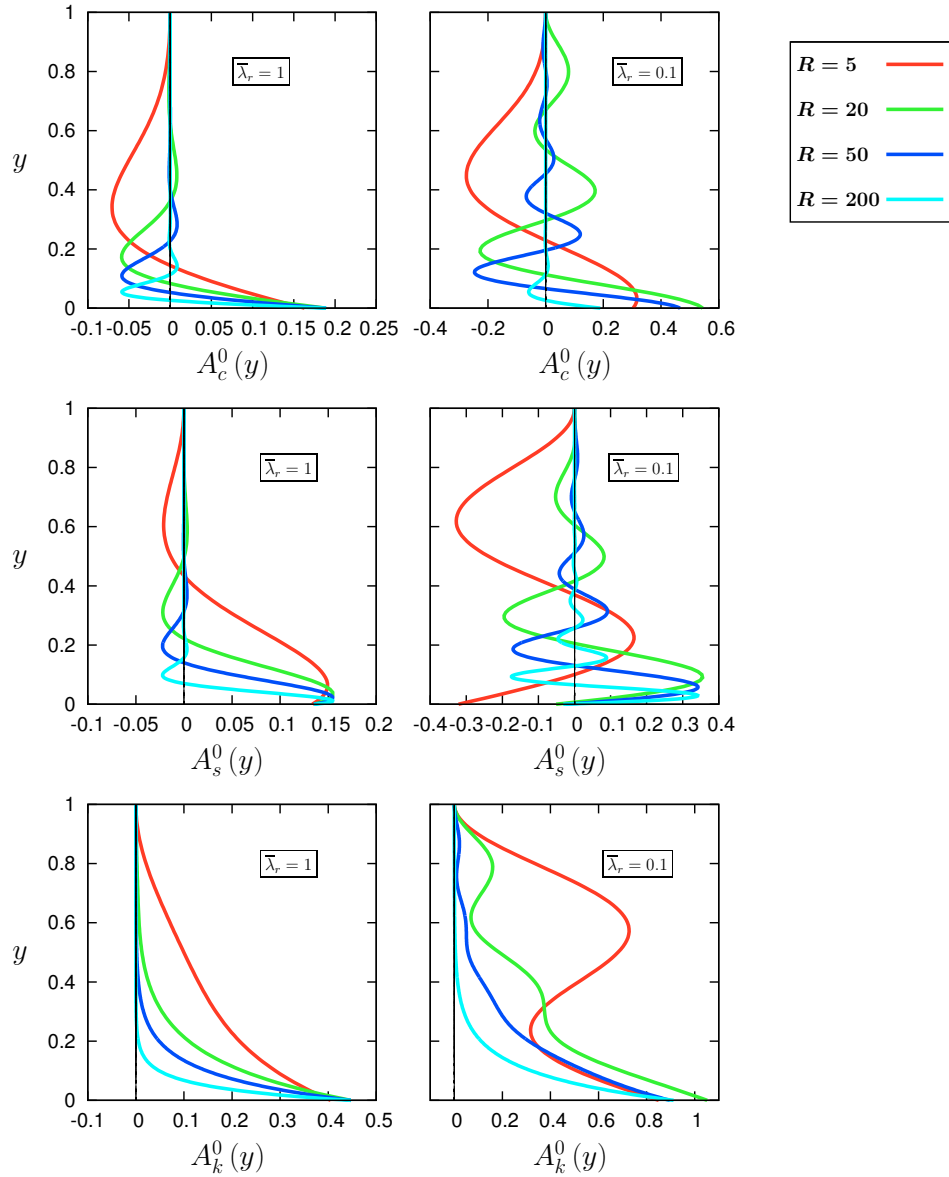


Abbildung 5.14.: Darstellung der Funktionen $A_c^0(y)$ (Diagramme oben), $A_s^0(y)$ (Mitte) und $A_k^0(y)$ (unten) als Funktion der vertikalen Koordinate y . Dabei ist $\bar{\lambda} = 3$ konstant für alle Graphen. Die Parameter R und $\bar{\lambda}_r$ variieren je nach Kurve bzw. Graphik (siehe Inlet).

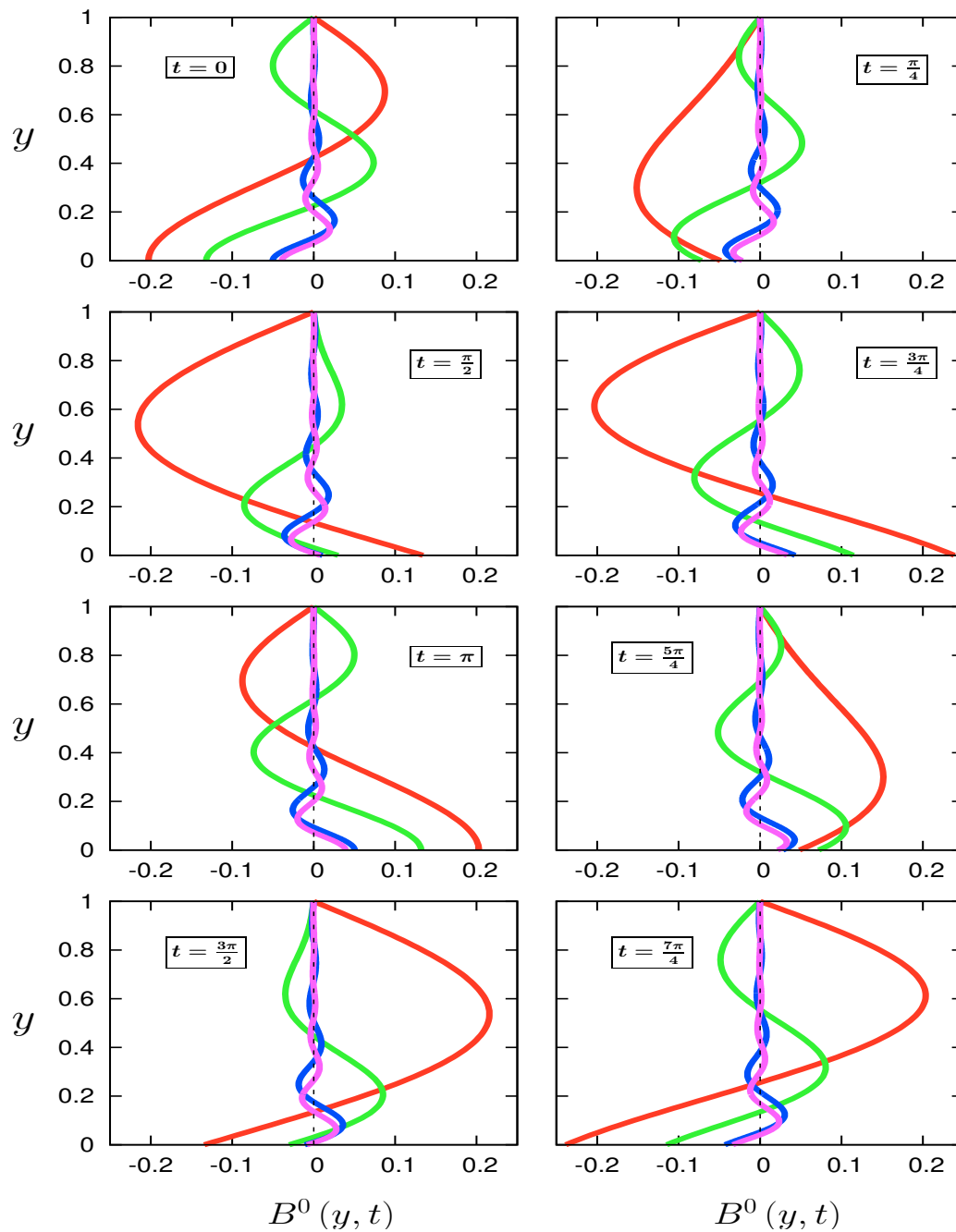


Abbildung 5.15.: Darstellung der Funktionen $B^0(y, t)$ an zunehmenden Zeitpunkten t (siehe Inlet) aus dem Intervall $[0, 2\pi]$ (von links oben zeilenweise nach rechts unten) für verschiedene Werte von R . Die Koeffizienten $\bar{\lambda}_r = 0.1$, $\tilde{g}\Gamma_x = 1$ sowie $\bar{\lambda} = 3$ bleiben konstant.
 Rot: $R = 5$; Grün: $R = 20$; Blau: $R = 120$; Lila: $R = 200$.

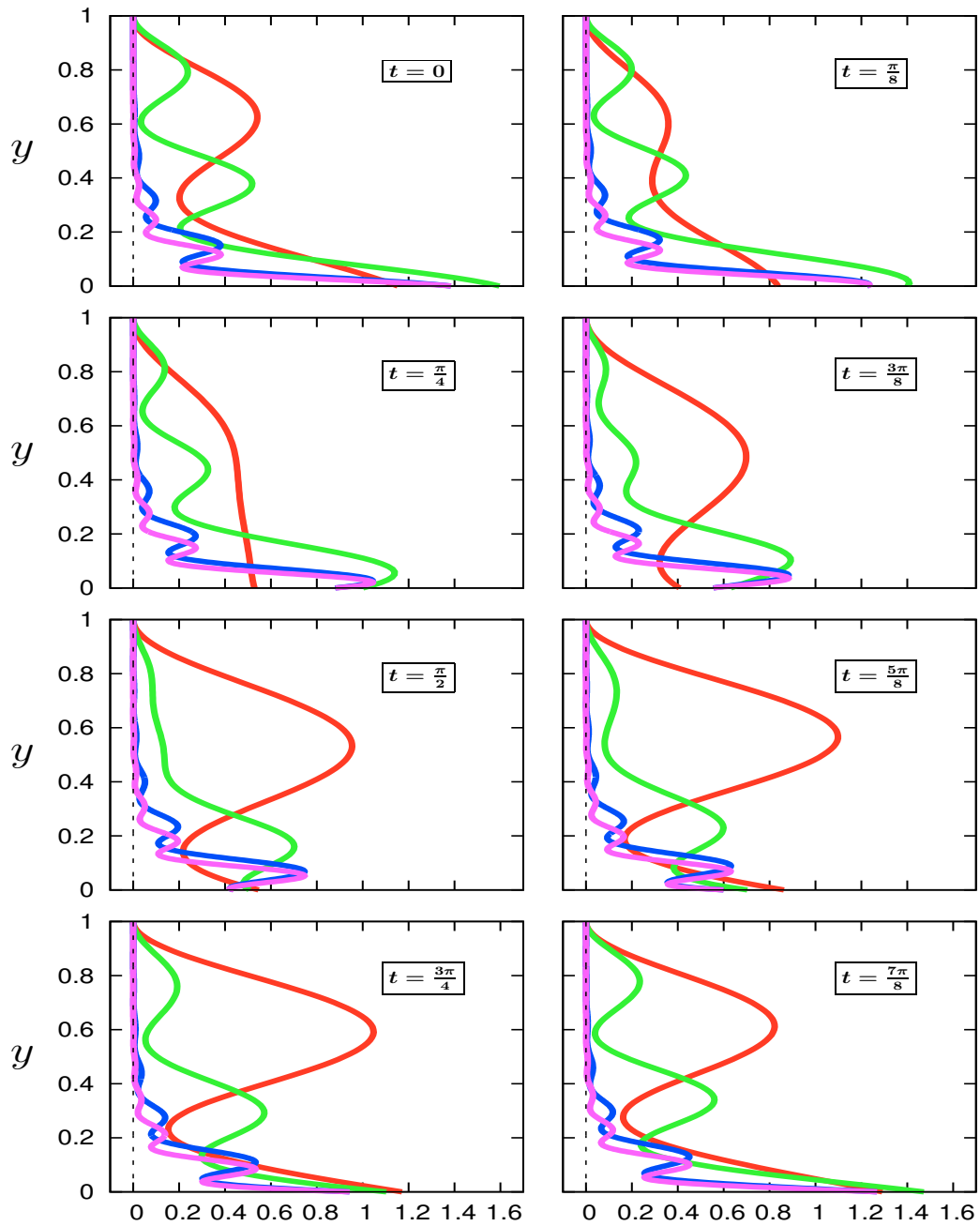


Abbildung 5.16.: Darstellung der Funktionen $A^0(y, t)$ an zunehmenden Zeitpunkten t (siehe Inlet) aus dem Intervall $[0, \pi]$ (von links oben zeilenweise nach rechts unten) für verschiedene Werte von R . Die Koeffizienten $\bar{\lambda}_r = 0.1$, $\tilde{g}\Gamma_x = 1$ sowie $\bar{\lambda} = 3$ bleiben konstant.
 Rot: $R = 5$; Grün: $R = 20$; Blau: $R = 120$; Lila: $R = 200$.

5.4. Kombiniert horizontal und vertikal bewegte Fluide

Wie wir im vorherigen Kapitel 4.1 sowie im bisherigen Kapitel 5 gezeigt haben, lassen sich Lösungen der allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen der Newtonschen Fluide (vgl. Gln. (3.21)-(3.29), S. 17) bzw. der viskoelastischen Fluide (vgl. Gln. (3.39)-(3.47), S. 21) unter Annahme bestimmter Symmetrien bei Anwesenheit äußerer Antriebe analytisch lösen. Dabei koppeln Antriebe in vertikaler Richtung in beiden Fluidmodellen nur an den Druck $p(y, t)$ und das Fluid bleibt ruhend auf der Platte. Falls die Platte in horizontaler Richtung extern getrieben wird, so resultiert dies in einer komplexen horizontalen Geschwindigkeit $u(y, t)$ sowie einem hydrostatischen Druck $p(y)$, der in diesem Fall jedoch zeitunabhängig bleibt.

Damit stellt sich die Frage, was bei gleichzeitigem Antrieb sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung passiert? Experimentell lässt sich dies in guter Näherung durch einen annularen Schwingförderer realisieren und wurde für den Fall von periodisch bewegter granularer Materie schon eingehend untersucht (siehe z.B. [11–13]). Dabei lassen sich drei allgemeine Antriebsformen untersuchen: Falls die Phasenwinkel ϕ_h sowie ϕ_v übereinstimmen, so resultiert dies in einer linearen Schwingung in der X - Y -Ebene, wobei die maximalen Amplituden Γ_x bzw. Γ_y betragen. Falls die Antriebsamplituden identisch sind, d.h. $\Gamma_x = \Gamma_y$, und für die Differenz der Phasenwinkel $\phi_h - \phi_v = \pm \frac{\pi}{2}$ gilt, so beschreibt ein Punkt auf der Bodenplatte einen Kreis und es wird von einem zirkularen Antrieb gesprochen. Beliebige Kombinationen von Werten der Amplituden bzw. Phasenwinkeln resultieren in einem elliptischen Antrieb, d.h. die Bewegungsform der antreibenden Platte ist eine Ellipse, deren Orientierung und Länge der Halbachsen durch die Antriebsamplituden und Phasenwinkel bestimmt ist.

Vom Standpunkt der hier berechneten Lösungen lassen sich die vorher angesprochenen linearen, zirkularen und elliptischen Antriebsformen jeweils in die horizontalen und vertikalen Anteile zerlegen, so dass die Lösungen getrennt berechnet und am Ende superponiert werden können. Das heißt, dass die Kopplung beider Antriebsformen für die Lösungen die Superposition eines raumzeitlich veränderlichen Druckterms, der aus der vertikalen Komponente des Antriebs resultiert, mit der lateralen komplexen Geschwindigkeitslösung darstellt, die durch den horizontalen Anteil des Antriebs hervorgerufen wird.

6. Stabilität vertikal vibrierter Oldroyd-B-Fluide

In den beiden vorherigen Kapiteln 4 sowie 5 haben wir möglichst elementare Lösungen der Grundgleichungen viskoelastischer und auch Newtonscher Fluide, die von außen parametrisch in vertikaler bzw. horizontaler Richtung angetrieben werden, berechnet. Für den Fall eines rein vertikalen harmonisch vibrierten Fluids kann die vormals flache Oberfläche bei Überschreiten einer kritischen Antriebsamplitude stehende Oberflächenwellen ausbilden, welche entweder subharmonisch (ungerade Vielfache der halben Antriebsfrequenz $\frac{f}{2}$) bzw. harmonisch (gerade Vielfache von $\frac{f}{2}$) auf den äußeren Antrieb antworten (vgl. dazu Kapitel 2.1 auf Seite 6 sowie Kapitel 4 auf Seite 23). Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Referenzlösung (4.7) von Seite 25 auf ihre lineare Stabilität hinsichtlich harmonischer und subharmonischer Oberflächenwellen zu untersuchen.

Die ersten theoretischen Untersuchungen zur Stabilität von idealen Fluiden auf vibrierten Oberflächen stammt von Benjamin und Ursell 1954 ([31]). In dieser Arbeit wird die Stabilität mit Hilfe von Mathieu-Gleichungen betrachtet und zudem die Dispersionsrelation für die Frequenz f_m der ohne äußeren Antrieb schwingenden Oberflächenwellen (aus [31]):

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \left[\tanh(k_m h) \left(\frac{k_m^3 \sigma}{\rho} + k_m g \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.1)$$

wobei k_m die Wellenzahl der Oberflächenwelle, h die Höhe der flachen Oberfläche, σ den Oberflächenspannungskoeff., ρ die Dichte des Fluids sowie g die Gravitationsbeschleunigung darstellen. In den Jahrzehnten danach wurden die Berechnungen auf viskose Newtonsche Fluide erweitert. Dazu wurde zum einen der Einfluss der viskosen Reibung mittels einer gedämpften Mathieu-Gleichung modelliert (siehe z.B. [53]), zum anderen die Stabilitätsgrenzen numerisch aus den Navier-Stokes-Gleichungen direkt hergeleitet (siehe z.B. [33, 34]). Der Übergang zu viskoelastischen Fluiden, z.B. diejenigen beschrieben durch das Maxwell-Modell, folgte kurze darauf, wobei ähnliche Methoden wie zuvor angewendet worden sind (siehe z.B. [57, 58]).

Für das vorliegende viskoelastische Oldroyd-B-Modell werden wir uns zur Untersuchung der vertikalen Stabilität an den Arbeiten und Verfahren von K. Kumar und L. Tuckerman ([33, 34]) bzw. S. Kumar und O. Matar ([57, 58]) orientieren. Dazu werden wir folgendermaßen vorgehen:

Wir betrachten als Basis die Referenzlösung (4.7) von Seite 25 mit einer kleinen additiven Störung dieser Lösung in allen abhängigen Variablen und bestimmen die entsprechenden Entwicklungsgleichungen, wobei nichtlineare Kopplungen der Größen ausgeschlossen werden (lineare Stabilitätsanalyse). Durch weitere Rechnungen und Ausnutzen von Symmetrien lässt sich das Problem auf drei abhängige Variablen reduzieren, welche sich aufgrund der lateralen Periodizität in ebene Wellen entwickeln lassen. Die einzelnen Wellenzahlen koppeln nicht miteinander und damit lassen sich die von der Zeit und der vertikalen Koordinate abhängigen Moden weiter untersuchen. Aufgrund der periodischen Zeitabhängigkeit wählen wir einen Floquet-Ansatz, so dass die Lösung in einen periodischen Teil der Periode $T = 2\pi$ und einen zeitlichen Vorfaktor $\exp((\mu + i\alpha)t)$ aufteilbar. Dabei entscheidet das Vorzeichen vom Realteil μ des i. Allg. komplexen Floquet-Exponenten $\mu + i\alpha$ über die Stabilität. Für positive Werte von μ wächst die Störung exponentiell und die berechnete Lösung ist instabil. Falls μ kleiner als Null ist, so werden infinitesimale Störungen gedämpft und die Lösung als linear stabil bezeichnet. Anstatt der Berechnung des Floquet-Exponenten fixieren wir $\mu = 0$ sowie entweder $\alpha = 0$ (harmonische Instabilität) oder $\alpha = \frac{1}{2}$ (subharmonische Inst.). D.h., wir „setzen“ uns auf die neutrale Stabilitätskurve, welche stabile und instabile Parameterbereiche voneinander trennt. Im Anschluss kann das DGL-System für die vertikale Geschwindigkeit gelöst werden und über die Randbedingungen an der freien Oberfläche und die kinematische Höhenbedingung in Beziehung zu den Entwicklungskoeffizienten der Höhenfunktion h gesetzt werden. Daraus ergibt sich schließlich ein generalisiertes Eigenwertproblem, dessen niedrigste reelle Eigenwerte die kritischen (dimensionslosen) Antriebsamplituden Γ_y sind und die marginale Stabilität bestimmen.

Das im vorherigen Abschnitt angesprochen Verfahren werden wir detailliert im nächsten Unterkapitel 6.1 vorstellen. Die daraus resultierenden Ergebnisse werden danach im Abschnitt 6.2 diskutiert und mit den Resultaten bekannter Modelle verglichen.

6.1. Stabilitätsalgorithmus im Oldroyd-B-Modell bei vertikalem periodischen Antrieb

6.1.1. Herleitung des linearisierten Gleichungssystems

Um die Stabilität der Referenzlösung (4.7) von Seite 25 zu bestimmen, definieren wir kleine Störungen in allen Variablen. Diese werden nachfolgend mit einer Tilde (\sim) gekennzeichnet und es ergibt sich:

$$u(x, y, t) = \tilde{u}(x, y, t) + u_v^0 = \tilde{u}(x, y, t) \quad (6.2a)$$

$$v(x, y, t) = \tilde{v}(x, y, t) + v_v^0 = \tilde{v}(x, y, t) \quad (6.2b)$$

$$p(x, y, t) = \tilde{p}(x, y, t) + p_v^0(y, t) = \tilde{p}(x, y, t) + G(t)(1 - y) \quad (6.2c)$$

$$h(x, t) = \tilde{h}(x, t) + h_v^0 = \tilde{h}(x, t) + 1 \quad (6.2d)$$

$$S_{ij}(x, y, t) = \tilde{S}_{ij}(x, y, t) + S_{v,ij}^0 = \tilde{S}_{ij}(x, y, t) . \quad (6.2e)$$

Durch Einsetzen der obigen abhängigen Variablen in die bestimmenden Gleichungen (3.38) bis (3.47) von Seite 21f des Oldroyd-B-Modells erhalten wir DGLn für die Störungsvariablen. Da wir kleine Störungen betrachten wollen, werden im Folgenden Produkte aus diesen gestörten Größen bzw. deren Ableitungen als vernachlässigbar angesehen, so dass die Evolutionsgleichungen linear in diesen Variablen bleiben. Indem wir die partielle Ableitung von Gl. (3.40) nach x von der partiellen Ableitung von Gl. (3.39) nach y abziehen, nachdem die Ansätze (6.2a) sowie (6.2b) eingesetzt worden sind, lässt sich die Druckvariable $\tilde{p}(x, y, t)$ eliminieren und durch Weglassen der Nichtlinearitäten erhalten wir:

$$\partial_{ty}^2 \tilde{u} - \partial_{tx}^2 \tilde{v} = \partial_y \left(\partial_x \tilde{S}_{xx} + \partial_y \tilde{S}_{xy} \right) - \partial_x \left(\partial_x \tilde{S}_{yx} + \partial_y \tilde{S}_{yy} \right) . \quad (6.3)$$

Durch Anwenden des Operators $-\partial_x$ auf obige Gl. (6.3) und mit Hilfe der Inkompressibilitätsbedingung (3.38) von Seite 21 lässt sich die horizontale Geschwindigkeit \tilde{u} aus der Gleichung entfernen:

$$\partial_t \left(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 \right) \tilde{v} = -\partial_{xxy}^3 \tilde{S}_{xx} - \partial_{xyy}^3 \tilde{S}_{xy} + \partial_{xxx}^3 \tilde{S}_{yx} + \partial_{xxy}^3 \tilde{S}_{yy} . \quad (6.4)$$

6.1. Stabilitätsalgorithmus im Oldroyd-B-Modell bei vertikalem periodischen Antrieb

Um die S_{xx} bis S_{yy} aus obiger Gleichung zu entkoppeln, betrachten wir zunächst die Gleichung des Konformationstensors $\underline{\tilde{S}}$, welche sich aus (3.47) auf Seite 21 ergibt:

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \tilde{S}_{xx} = \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \{2 \partial_x \tilde{u}\} \quad (6.5a)$$

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \tilde{S}_{xy} = \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \{\partial_y \tilde{u} + \partial_x \tilde{v}\} \quad (6.5b)$$

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \tilde{S}_{yx} = \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \{\partial_y \tilde{u} + \partial_x \tilde{v}\} \quad (6.5c)$$

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \tilde{S}_{yy} = \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \{2 \partial_y \tilde{v}\} . \quad (6.5d)$$

Die Symmetrie des Tensors $\underline{\tilde{S}}$ wurde schon auf Seite 40 in Gleichung (5.29) diskutiert. Aus der weiter oben schon angesprochenen Inkompressibilitätsbed. (3.38) lässt sich folgern, dass

$$\tilde{S}_{xx} = -\tilde{S}_{yy} \quad (6.6)$$

im obigen Gleichungssystem (6.5) gilt. Indem wir den Operator $(1 + \bar{\lambda} \partial_t)$ auf die Feldgleichung (6.4) anwenden und durch Ausnutzen der Relationen (6.5) und der Inkompressibilität (3.38) erhalten wir eine entkoppelte Gleichung für die vertikale Geschwindigkeit \tilde{v} innerhalb des Fluids:

$$\begin{aligned} (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \partial_t \Delta \tilde{v} &= \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \{\partial_{xxxx}^4 + 2 \partial_{xxyy}^4 + \partial_{yyyy}^4\} \tilde{v} \\ &= \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \Delta^2 \tilde{v} . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dabei stellt $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ den zweidimensionalen Laplace-Operator in obiger Gl. (6.7) dar. Die Gleichungen innerhalb der Fluidschicht konnten auf Abhängigkeiten der Variable \tilde{v} reduziert und entkoppelt werden. Damit fehlen noch die Randbedingungen am Boden bei $y = 0$ sowie an der freien Oberfläche bei $y = 1 + \tilde{h}(x, t)$ und die Kopplung von vertikaler Geschwindigkeit \tilde{v} und Höhenfeld $\tilde{h}(x, t)$ über die kinematische Höhenbedingung (3.41) (siehe Seite 21).

Die Randbedingungen am Boden ergeben sich aus den Relationen (3.42) sowie (3.44) von Seite 21:

$$\tilde{v}|_{y=0} = 0 \quad (6.8a)$$

$$(\partial_y \tilde{v})|_{y=0} = 0 . \quad (6.8b)$$

An der freien Oberfläche untersuchen wir die tangentielle (3.45) und normale Randbedingung (3.46) von Seite 21. Dabei werden die entsprechenden Variablen an der Stel-

le $h(x, t) = 1 + \tilde{h}(x, t)$ ausgewertet. Da die Höhenvariable $\tilde{h}(x, t)$ unbekannt aber klein im Vergleich zur Referenzhöhe $h_0 = 1$ ist, werden wir eine Taylorentwicklung für beliebige Größen $A(x, y, t)$ an der Oberfläche vornehmen und folgendermaßen approximieren:

$$A(x, y, t) \Big|_{y=1+\tilde{h}(x,t)} \approx A(x, y, t) \Big|_{y=1} + \tilde{h}(x, t) \left(\partial_y A(x, y, t) \right) \Big|_{y=1}. \quad (6.9)$$

Falls A in der obigen Relation eine Störungsvariable darstellt, so entfällt der zweite Teil der rechten Seite, weil dies eine nichtlineare Kopplung darstellt. Für die Referenzlösungen sind beide Teile der rechten Seite auszuwerten. Damit ergibt sich unter Vernachlässigung der Nichtlinearitäten für die tangentiale und normale Randbedingung sowie die kinematische Höhenbedingung:

$$\tilde{S}_{xy} \Big|_{y=1} = 0 \quad (6.10a)$$

$$-\tilde{p} \Big|_{y=1} + G(t) \tilde{h}(x, t) - \tilde{S}_{xx} \Big|_{y=1} = \sigma^* \partial_x^2 \tilde{h}(x, t) \quad (6.10b)$$

$$\partial_t \tilde{h}(x, t) = \tilde{v} \Big|_{y=1}. \quad (6.10c)$$

Die Funktion $G(t) = \tilde{g}(1 - \Gamma_y \sin(t + \phi_v))$ entspricht dabei der dimensionslosen, zeitabhängigen Gravitationsbeschleunigung, welche wir in Kapitel 4.1 in Gl. (4.6) auf Seite 25 eingeführt haben. Die obigen Gleichungen (6.10) sind noch an die Variablen \tilde{p} , \tilde{S}_{xx} bzw. \tilde{S}_{xy} gekoppelt. Daher werden wir versuchen, diese Relationen mit Hilfe der anderen Bestimmungsgleichungen so umzuschreiben, dass nur noch die vertikale Geschwindigkeit \tilde{v} und die Höhenfunktion \tilde{h} eingehen.

Für die Tangentialbedingung (6.10a) benutzen wir die gleiche Argumentation wie in Kapitel 5.3 in den Gleichungen (5.31) bis (5.33) (siehe S. 41), in der wir schon die Randbedingung im Fall der vereinfachten Gleichungen für horizontale Antriebe diskutiert haben. Betrachten wir analog dazu Gleichung (6.5b) und werten diese bei $y = 1$ aus, so verschwindet auch die Zeitableitung $\partial_t \tilde{S}_{xy}$ an der Stelle $y = 1$, so dass die linke Seite Null ergibt. Indem wir die gesamte, nur noch von den unabhängigen Variablen x und t abhängende Gleichung partiell nach x differenzieren und die an der Oberfläche ausgewertete Inkompressibilitätsbedingung (3.38) auf Seite 21 benutzen, erhalten wir für die tangentiale Randbedingung schließlich:

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \{ \partial_{xx}^2 - \partial_{yy}^2 \} \tilde{v} = 0. \quad (6.11)$$

Für die Entkopplung der Normalrandbedingung (6.10b) ist etwas mehr Aufwand erforderlich. Die Variablen \tilde{p} sowie \tilde{S}_{xx} lassen sich über folgendes Verfahren daraus

entkoppeln:

1. Wende den Operators $(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \partial_x$ auf linearisierte Gl. (3.39) von Seite 21 an.
2. Drücke die Größen \tilde{S}_{xx} , \tilde{S}_{xy} mit Hilfe der Gleichungen (6.5a) sowie (6.5b) durch die Geschwindigkeitsvariablen \tilde{u} , \tilde{v} aus.
3. Wende den Operator $(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \partial_x^2$ auf die Normalrandbedingung (6.10b) an und ersetze die Terme mit Hilfe der Gleichung aus 1. und 2., welche bei $y = 1$ ausgewertet wird.
4. Ersetze mit Hilfe der Inkompressibilitätsbedingung (3.38) (siehe S. 21) ausgewertet bei $y = 1$ die Abhängigkeiten der Variablen \tilde{u} durch diejenige von \tilde{v} .

Durch die Vorgehensweise der Punkte 1. bis 4. ergibt sich schließlich die Normalrandbedingung, die nur noch die vertikale Geschwindigkeit \tilde{v} , das Höhenfeld \tilde{h} sowie die ursprüngliche Antriebsfunktion über die Funktion $G(t)$ enthält:

$$\begin{aligned}
 - (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \left\{ \sigma^* \partial_x^4 \tilde{h} - G(t) \partial_x^2 \tilde{h} \right\} &= (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \left\{ \partial_{ty}^2 \tilde{v} \right\} & (6.12) \\
 &- \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \left\{ \partial_y^3 \tilde{v} + 3 \partial_{xxy}^3 \tilde{v} \right\} .
 \end{aligned}$$

Die kinematische Höhenbedingung (6.10c) bedarf keiner weiteren Modifikation. Damit stellt sich das gesamte lineare Stabilitätsproblem folgendermaßen dar:

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \partial_t \Delta \tilde{v} = \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \Delta^2 \tilde{v} \quad (6.13a)$$

$$\partial_t \tilde{h}(x, t) = \tilde{v} \Big|_{y=1} \quad (6.13b)$$

$$\tilde{v} \Big|_{y=0} = 0 \quad (6.13c)$$

$$(\partial_y \tilde{v}) \Big|_{y=0} = 0 \quad (6.13d)$$

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \left\{ \partial_{xx}^2 - \partial_{yy}^2 \right\} \tilde{v} = 0 \quad (6.13e)$$

$$\begin{aligned}
 - (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \left\{ \sigma^* \partial_x^4 \tilde{h} - G(t) \partial_x^2 \tilde{h} \right\} &= (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \left\{ \partial_{ty}^2 \tilde{v} \right\} & (6.13f) \\
 &- \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \left\{ \partial_y^3 \tilde{v} + 3 \partial_{xxy}^3 \tilde{v} \right\} .
 \end{aligned}$$

Wir wollen noch bemerken, dass obiges Gleichungssystem 6.13 für den Grenzfall $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 0$ in das lineare Stabilitätsproblem des Newtonschen Fluids übergeht (siehe z.B. [34]). Zudem koppelt der äußere vertikale periodische Antrieb nur über die

Normalrandbedingung (6.13f) an das lineare Gleichungssystem der kleinen Störungen.

6.1.2. Lösung der linearen Feldgleichungen und Aufstellen des Eigenwertproblems

Um das vertikale Stabilitätsproblem bestehend aus dem Gleichungssystem (6.13) zu lösen, führen wir zunächst die Hilfsvariable $\tilde{a}(x, y, t)$ ein:

$$\tilde{a}(x, y, t) := \partial_t \tilde{v}(x, y, t) . \quad (6.14)$$

Diese Variable \tilde{a} dient dazu, dass die im DGL-System (6.13) auftretenden Zeitableitungen von erster Ordnung bleiben. Da alle Variablen periodische Randbedingungen erfüllen sollen, bieten sich trigonometrische Funktionen an und wir machen den Ansatz:

$$\tilde{a}(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_n(y, t) e^{ik_n x} \quad (6.15a)$$

$$\tilde{v}(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{v}_n(y, t) e^{ik_n x} \quad (6.15b)$$

$$\tilde{h}(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_n(t) e^{ik_n x} . \quad (6.15c)$$

Durch die obigen Zerlegung in horizontale Moden mit den Wellenzahlen k_n geht der horizontale Differentialoperator $\partial_x^2 \rightarrow -k_n^2$ in eine algebraische Multiplikation über. Die Wellenzahl besitzt durch die Wahl unseres Systems (siehe Abb. 3.1 auf Seite 12) diskrete (hier entdimensionalisierte) Werte $k_n = \frac{2\pi n \bar{h}_0}{L}$. Da wir L i. Allg. beliebig wählen können und die horizontalen Moden aus Gln. (6.15) nicht miteinander koppeln, werden wir $k_n \rightarrow k$ verallgemeinern, wobei k beliebige kontinuierliche Werte annehmen kann. Daher erhält das Gleichungssystem (6.13) in den Hauptgleichungen folgende Form, wobei wir bei allen Variablen die Indizes n weglassen werden:

$$\tilde{a} = \partial_t \tilde{v} \quad (6.16a)$$

$$(1 + \bar{\lambda} \partial_t) \{-k^2 + \partial_y^2\} \tilde{a} = \frac{1}{R} \{-k^2 + \partial_y^2\}^2 (\tilde{v} + \bar{\lambda}_r \tilde{a}) \quad (6.16b)$$

$$\partial_t \tilde{h}(x, t) = \tilde{v}|_{y=1} . \quad (6.16c)$$

6.1. Stabilitätsalgorithmus im Oldroyd-B-Modell bei vertikalem periodischen Antrieb

Da das Gesamtgleichungssystem (6.13) ein lineares mit periodischen Koeffizienten ist (siehe Gl. (6.13f)), kann für die zeitlichen Lösungen ein Floquet-Ansatz gewählt werden (siehe [102] bzw. [103], S. 273ff). Dabei lassen sich die Lösungen der abhängigen Variablen so ansetzen, dass diese in zwei zeitliche Funktionen zerfallen, wobei eine periodisch mit $T = 2\pi$ ist. Z.B. gilt dann für $\tilde{h}(t)$:

$$\tilde{h}(t) = e^{(s+i\alpha)t} \hat{h}(t) = e^{(s+i\alpha)t} \hat{h}(t + 2\pi) , \quad (6.17)$$

wobei $(s + i\alpha)$ der sogenannte komplexe Floquet-Exponent ist und $\hat{h}(t) = \hat{h}(t + 2\pi)$ eine zeitlich periodische Funktion, die in eine Fourierreihe entwickelt werden kann. Der Realteil s des Floquet-Exponenten gibt dabei die Wachstumsrate wider, d.h. falls $s < 0$ ist, so wird für große Zeiten t die kleine Störung $\tilde{h}(t)$ gedämpft, während umgekehrt bei $s > 0$ die Störungen exponentiell zunehmen, so dass von Instabilität hin zu dieser neuen Lösung gesprochen wird. Der Fall $s = 0$ entspricht der sogenannten neutralen Stabilität, d.h. hier bleibt die Amplitude der Störung für große Zeiten erhalten. In einem Parameterdiagramm trennt die Kurve mit der Eigenschaft $s = 0$ genau die stabilen und instabilen Bereiche voneinander.

Der Imaginärteil α kann zunächst einmal beliebig sein. Wir werden uns auf zwei Spezialfälle konzentrieren, nämlich einerseits $\alpha = 0$, was einer harmonischen Antwort auf die periodische Antriebsfunktion entspricht mit dimensionsloser Frequenz $f_h = 1, 2, \dots$. Andererseits betrachten wir $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so dass die Gesamtfunktion $\tilde{h}(t)$ subharmonisch schwingt, d.h. diese Funktion oszilliert mit einem Vielfachen der halben Antriebsfrequenz. Demnach ist die dimensionslose Frequenz $f_{sh} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$. Da $\tilde{h}(t)$ eine reelle Funktion ist, muss für die Entwicklungskoeffizienten \tilde{h}_m gelten:

$$\alpha = 0 : \quad \tilde{h}_m^* = \tilde{h}_{-m} \quad (6.18a)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} : \quad \tilde{h}_{m-1}^* = \tilde{h}_{-m} , \quad (6.18b)$$

wobei der Stern $*$ die komplexe Konjugation bezeichnet. Somit können wir für die

abhängigen Variablen folgenden Ansatz machen:

$$\tilde{v}(y, t) = e^{(s+i\alpha)t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{v}_m(y) e^{im t} \quad (6.19a)$$

$$\tilde{h}(t) = e^{(s+i\alpha)t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_m e^{im t} \quad (6.19b)$$

$$\tilde{a}(y, t) = e^{(s+i\alpha)t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_m(y) e^{im t} \quad (6.19c)$$

$$\Rightarrow \tilde{a}(y, t) = e^{(s+i\alpha)t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (s + i(\alpha + m)) \tilde{v}_m(y) e^{im t}. \quad (6.19d)$$

Dabei wurde in der letzten Zeile (6.19d) die Relation (6.14) ausgenutzt, so dass wir alle Abhängigkeiten von \tilde{a} auf die Geschwindigkeit \tilde{v} umtransformieren können. Damit ergibt sich aus Gl. (6.16b) folgende zu lösende DGL vierter Ordnung in der Variablen y für die zeitlichen Moden \tilde{v}_m , wobei wir die Abkürzung $s_m^\alpha = (s + i(\alpha + m))$ benutzen:

$$s_m^\alpha (1 + \bar{\lambda} s_m^\alpha) (-k^2 + \partial_y^2) \tilde{v}_m - \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r s_m^\alpha) (-k^2 + \partial_y^2)^2 \tilde{v}_m = 0 \quad (6.20a)$$

$$\Rightarrow \left\{ s_m^\alpha (1 + \bar{\lambda} s_m^\alpha) - \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r s_m^\alpha) (-k^2 + \partial_y^2) \right\} (-k^2 + \partial_y^2) \tilde{v}_m = 0. \quad (6.20b)$$

Die obige lineare DGL (6.20b) lässt sich analytisch lösen, insbesondere, da die Gleichung in zwei multiplikative Anteile zweiter Ordnung zerfällt. Die allgemeine Lösung lässt sich damit bestimmen zu:

$$\tilde{v}_m(y) = A_1 \sinh(ky) + A_2 \cosh(ky) + A_3 \sinh(\kappa_m^\alpha y) + A_4 \cosh(\kappa_m^\alpha y). \quad (6.21)$$

Dabei ist κ_m^α definiert als:

$$\kappa_m^\alpha := \left(k^2 + R s_m^\alpha \frac{1 + \bar{\lambda} s_m^\alpha}{1 + \bar{\lambda}_r s_m^\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.22)$$

wobei κ_m^α als diejenige Wurzel mit positivem Realteil betrachtet wird. Die noch zu bestimmenden Integrationskonstanten A_1 bis A_4 aus Gl. (6.21) lassen sich mit Hilfe der Rand- und kinematischen Höhenbedingungen (6.13b) bis (6.13e) in Beziehung zu den Höhenkoeffizienten \tilde{h}_m setzen. Aus diesen Gleichungen ergibt sich nach Auflösen

der x - und t -Abhängigkeiten:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_m^\alpha \left[2k^2 \cosh(k) - (k^2 + (\kappa_m^\alpha)^2) \cosh(\kappa_m^\alpha) \right] \\ -k \left[2k\kappa_m^\alpha \sinh(k) - (k^2 + (\kappa_m^\alpha)^2) \sinh(\kappa_m^\alpha) \right] \\ -k \left[2k^2 \cosh(k) - (k^2 + (\kappa_m^\alpha)^2) \cosh(\kappa_m^\alpha) \right] \\ k \left[2k\kappa_m^\alpha \sinh(k) - (k^2 + (\kappa_m^\alpha)^2) \sinh(\kappa_m^\alpha) \right] \end{pmatrix} \frac{s_m^\alpha \tilde{h}_m}{N(k, \kappa_m^\alpha)}, \quad (6.23)$$

mit der Normierung $N(k, \kappa_m^\alpha)$:

$$N(k, \kappa_m^\alpha) = -k^3 \cosh(k) \sinh(\kappa_m^\alpha) + k^2 \kappa_m^\alpha \cosh(\kappa_m^\alpha) \sinh(k) \quad (6.24)$$

$$- (\kappa_m^\alpha)^3 \cosh(\kappa_m^\alpha) \sinh k + k (\kappa_m^\alpha)^2 \sinh(\kappa_m^\alpha) \cosh(k). \quad (6.25)$$

Aus den Koeffizienten (6.23) und der Lösung (6.21) ist zu erkennen, dass zwischen den zeitlichen Moden h_m sowie v_m ein linearer Zusammenhang besteht. Für den Spezialfall $s_m^\alpha = 0$, d.h. wenn s , α und m jeweils Null ergeben, geht κ_m^α über in k und in der Lösung (6.21) sind die beiden Lösungsfunktionen mit Koeffizienten A_3 und A_4 nicht mehr unabhängig. Daher müssen noch zwei zusätzliche linear unabhängige Funktionen gefunden werden:

$$\tilde{v}_m^0(y) = A_1^0 \sinh(ky) + A_2^0 \cosh(ky) + A_3^0 y + A_4^0. \quad (6.26)$$

Analog zum Ergebnis für die Koeffizienten in Relation (6.23) erhalten wir in diesem Fall:

$$\begin{pmatrix} A_1^0 \\ A_2^0 \\ A_3^0 \\ A_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_m^0(y) = 0. \quad (6.27)$$

Um das gesamte Problem abzuschließen, betrachten wir die Normalrandbedingung (6.13f), wobei wir die x -Abhängigkeit bereits aufgelöst haben:

$$\begin{aligned} - (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \left\{ \sigma^* k^4 \tilde{h} + G(t) k^2 \tilde{h} \right\} &= (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \left\{ \partial_{ty}^2 \tilde{v} \right\} \\ &- \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) \left\{ \partial_y^3 \tilde{v} - 3k^2 \partial_y \tilde{v} \right\}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die Funktion $G(t)$ ist eine periodische zeitabhängige Funktion und wir können diese über die Exponentialdarstellung der Sinus- und Kosinusfunktionen folgendermaßen

ausdrücken:

$$\begin{aligned} G(t) &= \tilde{g}(1 - \Gamma_y \sin(t + \phi_v)) = \tilde{g} - \tilde{g}\Gamma_y \{\sin t \cos \phi_v + \cos t \sin \phi_v\} \\ &= \tilde{g} - \tilde{g}\Gamma_y \left\{ \frac{\cos \phi_v}{2i} [e^{it} - e^{-it}] + \frac{\sin \phi_v}{2} [e^{it} + e^{-it}] \right\}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Die Abhängigkeiten von $\tilde{v}(y, t)$ auf der rechten Seite von Gleichung (6.29) lassen sich mit Hilfe der zeitlichen Entwicklung (6.19a) für jeden zeitlichen Koeffizienten $v_m(y)$ durch deren Lösung (6.21) mit den Koeffizienten (6.23) in Beziehung zu den Moden \tilde{h}_m setzen. Daher kann die Normalrandbedingung nur noch durch Terme $\propto \tilde{h}_m$ ausgedrückt werden. Durch die Exponentialterme in der zweiten Zeile von Gleichung (6.29) koppelt die Antriebsfunktion $G(t)$ an $(m+1)$ -Terme der Fourierdarstellung von $\tilde{h}(t)$ für e^{-it} bzw. an $(m-1)$ -Terme für e^{it} . Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} &(1 + \bar{\lambda} s_m^\alpha) \{\sigma^* k^4 + \tilde{g} k^2\} \tilde{h}_m + DY_m(s, \alpha, k, \bar{\lambda}_r) \tilde{h}_m \quad (6.30) \\ &= \Gamma_y \frac{\tilde{g} k^2}{2} \left\{ \cos \phi_v [i(1 + \bar{\lambda} s_{m+1}^\alpha) + \bar{\lambda}] + \sin \phi_v [(1 + \bar{\lambda} s_{m+1}^\alpha) + i\bar{\lambda}] \right\} \tilde{h}_{m+1} \\ &\quad + \Gamma_y \frac{\tilde{g} k^2}{2} \left\{ \cos \phi_v [-i(1 + \bar{\lambda} s_{m-1}^\alpha) + \bar{\lambda}] + \sin \phi_v [(1 + \bar{\lambda} s_{m-1}^\alpha) - i\bar{\lambda}] \right\} \tilde{h}_{m-1}, \end{aligned}$$

wobei die Funktion $DY_m(s, \alpha, k, \bar{\lambda}_r)$ in der ersten Zeile von Gl. (6.30) die gesamte Diskretisierung von y - und t -Abhängigkeit auf der rechten Seite von Gl. (6.28) darstellt. Aus obiger Gleichung (6.30) ist ersichtlich, dass jeder Koeffizient h_m der zeitlichen Entwicklung jeweils an seine nächsten Nachbarn h_{m-1} sowie h_{m+1} koppelt. Um das gesamte System zu lösen und die kritischen Amplituden Γ_y zu erhalten, bei denen der Realteil s des Floquet-Exponenten ($s + i\alpha$) und damit die Wachstumsrate der Störungen größer als Null wird, berechnen wir nicht die Funktion $s(\Gamma_y)$ bei Festhalten der anderen Parameter. Stattdessen fixieren wir $s = 0$, was genau der Stabilitätsgrenze entspricht und setzen des Weiteren $\alpha = 0$ für harmonische Störungen an bzw. entsprechend $\alpha = \frac{\pi}{2}$ für subharmonische. Die unendliche Summe der zeitlichen Entwicklung (siehe Gln. (6.19)) wird zu einer endlichen, da wir für hinreichend große M nur Terme von $-M \dots M$ für $\alpha = 0$ bzw. $-M \dots M - 1$ für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ aufsummieren und dabei höhere Frequenzen vernachlässigen. Die unterschiedlichen Entwicklungen hinsichtlich α ergeben sich aus den Symmetriebedingungen (6.18).

Dies lässt sich als Matrixgleichung aufschreiben:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} L_{-M} & 0 & \dots & & 0 \\ & 0 & \ddots & & \\ & & & L_{-1} & \\ \vdots & & & & L_0 & & \vdots \\ & & & & & L_1 & \\ & & & & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \dots & & & & 0 & L_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}_{-M} \\ \vdots \\ \tilde{h}_{-1} \\ \tilde{h}_0 \\ \tilde{h}_1 \\ \vdots \\ \tilde{h}_M \end{pmatrix} \\
 & = \Gamma_y \begin{pmatrix} 0 & R_{-M}^+ & 0 & \dots & 0 \\ R_{-M+1}^- & 0 & R_{-M+1}^+ & & \\ & R_{-M+2}^- & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & & R_{M-2}^+ \\ & & & & & R_{M-1}^- & 0 & R_{M-1}^+ \\ 0 & \dots & & 0 & R_M^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h}_{-M} \\ \vdots \\ \tilde{h}_{-1} \\ \tilde{h}_0 \\ \tilde{h}_1 \\ \vdots \\ \tilde{h}_M \end{pmatrix}, \tag{6.31}
 \end{aligned}$$

wobei die linke Seite von Gl. (6.30) jeweils in Diagonaleinträgen L_m resultiert und die rechte Seite in oberen Nebendiagonaleinträgen R_m^+ sowie auf der unteren Nebendiagonalen R_m^- . In diesem Fall sind im Gleichungssystem 6.31 die Matrizen für den Fall $\alpha = 0$ gezeigt, d.h. diese haben eine Dimension $(2M + 1) \times (2M + 1)$. Damit erhalten wir jeweils abhängig von α sowie den weiteren Parametern $k, R, \bar{\lambda}$ usw. ein generalisiertes Eigenwertproblem, wobei Γ_y die Rolle des Eigenwertes übernimmt. Für die Realisierung von $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich dementsprechend ein Matrixsystem der Größe $2M \times 2M$.

Mit Hilfe numerischer Computeralgebrasysteme und -routinen (z.B. *MATLAB*[®] bzw. den Fortran-90-Routinen der *Numerical Algorithms Group, NAG*) bestimmen wir die niedrigsten reellen Eigenwerte Γ_y^c , welche dann die kritischen Antriebsstärken darstellen. Dazu wollen wir bemerken, dass die Eigenwertberechnungen jeweils für mindestens zwei verschiedene M durchgeführt worden sind, so dass es einen Anhaltspunkt für die Güte und Genauigkeit der niedrigsten Eigenwerte gibt (siehe dazu insbesondere [104], Kapitel 7).

Im nächsten Unterkapitel werden wir dann die Resultate der Eigenwertberechnung und damit der linearen Stabilitätsanalyse beschreiben.

6.2. Subharmonische und harmonische Stabilitätsgrenzen

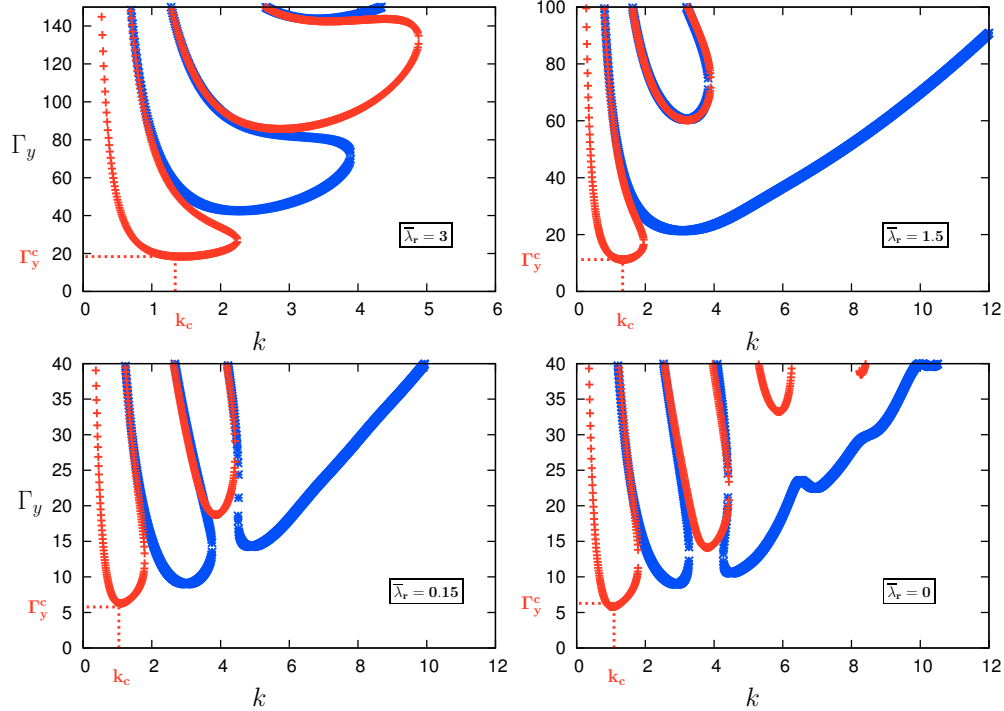


Abbildung 6.1.: Darstellung der numerisch berechneten neutralen Stabilitätskurven $\Gamma_y(k)$ für verschiedene Werte von $\bar{\lambda}_r$ (siehe Bild) bei konstantem $\bar{\lambda} = 3$. Rot: Subharmonische Lösungen; Blau: Harmonische Lösungen. Die Minima der Kurven ergeben jeweils Γ_y^c sowie k_c . Weitere dimensionslose Parameter: $R = 6.4088$, $\tilde{g} = 7.165 \cdot 10^{-2}$, $\sigma^* = 1.623 \cdot 10^{-2}$.

Um die Eigenwerte Γ_y des Matrixsystems (6.30) bzw. (6.31) zu bestimmen, berechnen wir die Einträge der Matrizen aus Relation (6.30) in Abhängigkeit aller Parameter (siehe Gln. (3.30) - (3.32) auf S. 17 sowie (3.48) und (3.49) auf S. 22) und der Wellenzahl k , wobei wir hier die dimensionslose Form wählen, falls explizit nichts anderes angegeben wird. Der Phasenwinkel ϕ_v der vertikalen periodischen Antriebsfunktion $G(t)$ (siehe Gl. (6.29) sowie (6.30)) wird bei den folgenden Berechnungen auf Null gesetzt, d.h. $\phi_v = 0$. Wir lösen das Eigenwertsystem (6.31) i. Allg. für zwei verschiedene Werte von M , wobei sich aufgrund der elementaren Gestalt der Matrizen im Wesentlichen $M_1 = 18$ sowie $M_2 = 12$ als hinreichend herausgestellt hat. Die so jeweils erhaltenen i. Allg. komplexen Eigenwerte werden

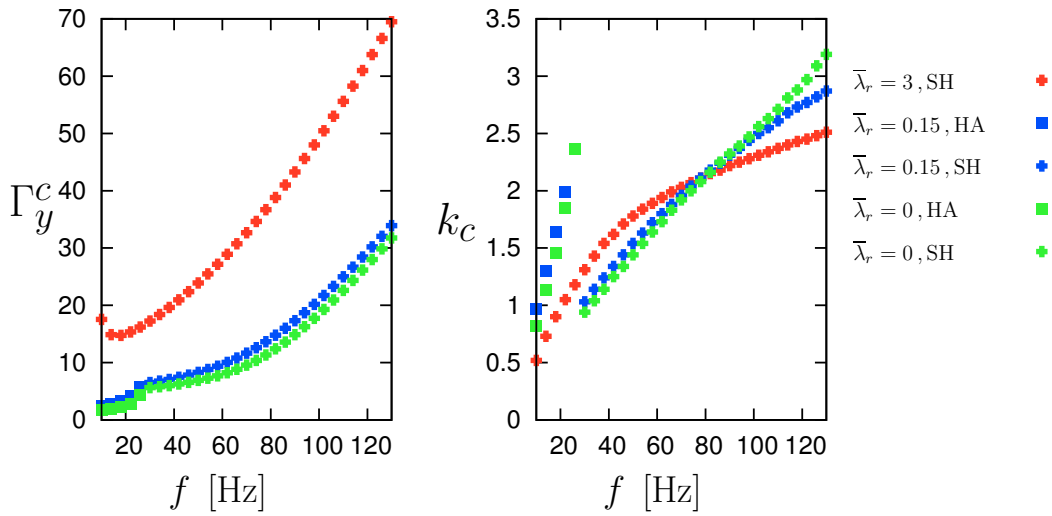


Abbildung 6.2.: Darstellung von Γ_y^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) in Abhängigkeit der Antriebsfrequenz f in Hertz. Dabei ist $\bar{\lambda} = 3.0$ konstant für alle Graphen und $\bar{\lambda}_r$ variiert (siehe Legende rechts). HA - Harmonische Lösungen, SH - Subharmonische Lösungen. Weitere Parameter: $h_0 = 0.3$ cm; $\theta = 20$ g/s²; $\nu = 3$ cm²/s; $\rho = 1$ g/cm³.

dahingehend analysiert, ob deren Imaginärteil Null bzw. sehr klein ist (d.h. in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit ϵ des Computers: $\epsilon \approx 10^{-14} - 10^{-15}$). Da das generalisierte Eigenwertproblem aus rein reellen Matrizen besteht, treten die Eigenwerte Γ_y in komplex konjugierten Paaren auf. Da das System invariant unter Umkehrung des Vorzeichens der Antriebsfunktion ist, d.h. $\Gamma_y \rightarrow -\Gamma_y$ ist, reicht es daher, sich auf die positiven zu beschränken. Die somit erhaltenen reellen und positiven Eigenwerte beider Entwicklungen M_1 und M_2 werden miteinander verglichen und damit die Güte eines jeden Eigenwerts bestimmt. Dazu haben wir die sogenannte „Ordinal-Difference“- bzw. „Nearest-Difference“-Methode verwendet (siehe Boyd [104], Kapitel 7), um zu bestimmen, wie akkurat diese reellen Eigenwerte sind. Diese Methoden berechnen skalierte Differenzen der Eigenwerte der ersten Entwicklung M_1 zur zweiten M_2 . Falls diese Differenzen für einen Eigenwert Γ_y unter einer bestimmen Toleranzschwelle tol liegen (z.B. $tol = 1 \cdot 10^{-10}$), so wird dieser als ein regulärer, physikalisch relevanter Eigenwert für weitere Berechnungen akzeptiert. Die gesamte Eigenwertberechnung wird einmal für subharmonische Lösungen mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sowie für harmonische mit $\alpha = 0$ durchgeführt.

In Abbildung 6.1 sind die Resultate einer solchen Eigenwertberechnung gezeigt.

In diesen vier Einzeldiagrammen sind jeweils die Eigenwerte Γ_y in Abhängigkeit von vielen verschiedenen Werten der Wellenzahl k dargestellt, wobei die Relaxationszeit $\bar{\lambda}_r$ in jedem Diagramm variiert und alle anderen Parameter konstant gehalten werden, z.B. $\bar{\lambda} = 3$. Die roten Punkte markieren dabei die neutrale Stabilitätskurve der subharmonischen Lösungen, d.h. im Bereich innerhalb dieser „Zungen“ ist die flache Oberfläche instabil gegenüber subharmonisch schwingenden Oberflächenwellen. Analog dazu stellen die blauen Punkte die neutrale Stabilitätskurve der harmonischen Lösungen dar. Es ist jeweils zu erkennen, dass im Wesentlichen subharmonische und harmonische Zungen einander abwechseln, wobei für die hier gewählten Werte der Parameter die subharmonischen Lösungen zuerst instabil werden. Damit ist gemeint, dass jeweils das Minimum $\min(\Gamma_y)$ aller reellen und positiven Eigenwerte die kritische Antriebsstärke Γ_y^c ergibt, d.h.:

$$\Gamma_y^c := \min_k \left(\Gamma_y(k) \right). \quad (6.32)$$

In Abbildung 6.1 sind die kritischen Antriebsamplituden Γ_y^c jeweils für die gewählten Parameter subharmonischen Oberflächenwellen zugeordnet. Die zu diesem kritischen Antriebswert Γ_y^c gehörende Wellenzahl k_c wird kritische Wellenzahl genannt, da die zunächst flache Oberfläche $h(x, t) = h_0$ bevorzugt periodische Oberflächenwellen mit dieser Wellenzahl ausbildet, sobald die Antriebsamplitude Γ_y den kritischen Wert Γ_y^c übersteigt. In allen Graphiken von Abbildung 6.1 sind die kritische Wellenzahl k_c sowie die kritische Antriebsamplitude Γ_y^c als gestrichelte Linien eingezeichnet.

In den einzelnen Unterdiagrammen von Abb. 6.1 ändert sich jeweils nur die dimensionslose Retardationszeit $\bar{\lambda}_r$ von Diagramm zu Diagramm. Dabei ist zu erkennen, dass der kritische Wert Γ_y^c mit kleiner werdendem $\bar{\lambda}_r$ zunächst sinkt und im rechten unteren Einzelbild mit $\bar{\lambda}_r = 0$ wiederum ansteigt gegenüber der linken unteren Graphik mit $\bar{\lambda}_r = 0.15$. Die kritischen Wellenzahlen k_c bleiben von der gleichen Größenordnung. Das bedeutet, hin zu kleineren Werten von $\bar{\lambda}_r$ wird die flache Fluidschicht deutlich leichter instabil hinsichtlich subharmonischer Oberflächenwellen. Dies deckt sich mit Erwartungen aus dem oszillatorischen Verhalten für niedrige $\bar{\lambda}_r$, welches wir z.B. schon in Kapitel 5.3.3 ab Seite 52 bei den Lösungen für die horizontale Geschwindigkeit u_{OB}^0 beobachtet hatten.

Im linken oberen Diagramm von Abb. 6.1 ist $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 3$. Durch genaueres Betrachten der Gleichungen (6.28) und (6.30) auf Seite 83 lässt sich berechnen, dass für gleiche Koeffizienten $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r$ der Faktor $(1 + \bar{\lambda} s_m^\alpha)$ auf beiden Seiten der Gleichung herausgekürzt werden kann. Dadurch sind die Gleichungen unabhängig von den beiden Parametern $\bar{\lambda}$ sowie $\bar{\lambda}_r$ und es ergibt sich das vertikale Stabilitätsproblem einer

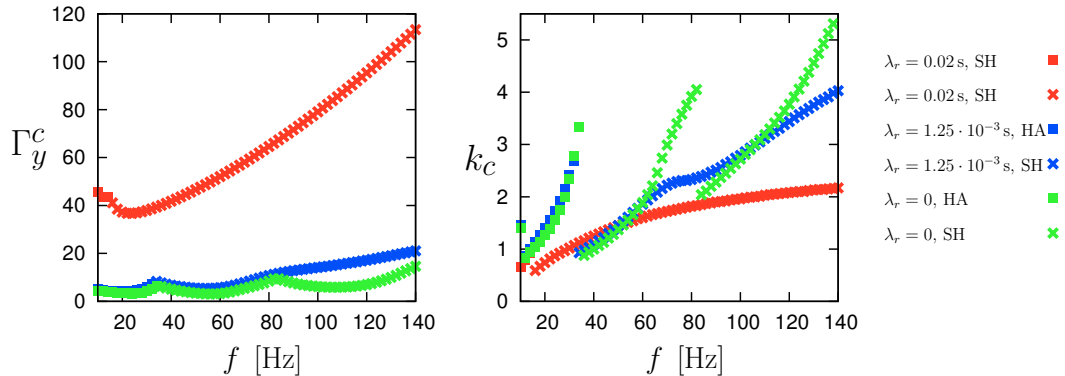


Abbildung 6.3.: Darstellung von Γ_y^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) in Abhängigkeit der Antriebsfrequenz f in Hertz. Dabei ist $\lambda = 0.02$ s konstant für alle Graphen und λ_r variiert (siehe Legende rechts). HA - Harmonische Lösungen, SH - Subharmonische Lösungen. Weitere Parameter: $h_0 = 0.3$ cm; $\bar{\theta} = 20$ g/s²; $\nu = 5$ cm²/s; $\rho = 1$ g/cm³.

Newtonschen viskosen Flüssigkeit. Analog dazu geht das Problem in dasjenige eines Maxwell'schen Fluides über, falls $\bar{\lambda}_r = 0$ gilt, wobei $\bar{\lambda}$ beliebig sein kann. Diese Resultate bestätigen die schon bekannten Ergebnisse aus Kapitel 5.3.4 (siehe S. 56ff). Daher wollen wir bei der Diskussion weiterer Graphiken im Wesentlichen zum einen die Grenzfälle Newtonscher und Maxwell'scher Fluide skizzieren, zum anderen auf beliebige andere Kombinationen der beiden Koeffizienten $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$ eingehen.

In Abbildung 6.2 sind die kritischen Werte Γ_y^c sowie k_c als Funktion der (dimensionsbehafteten) äußeren Antriebsfrequenz $f = \frac{2\pi}{\omega}$ aufgetragen. Die Kreuze markieren jeweils subharmonische Lösungen und die quadratischen Punkte sind die harmonischen. Dabei ist ersichtlich, dass bei der in rot skizzierten Lösung nur die subharmonische Instabilität zu beobachten ist. Dies entspricht, da Gleichheit von $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 3$ gegeben ist, dem Grenzfall eines Newtonschen Fluids. Die kritische dimensionslose Antriebsbeschleunigung Γ_y^c hat dabei ihr Minimum in der Nähe von $f \approx 15$ Hz und steigt danach mit einem nichtlinearen Verhalten an. Die kritische Wellenzahl k_c steigt monoton von $k_c(f = 10 \text{ Hz}) \approx 0.5$ bis 2.5 an, wenn $f = 130$ Hz.

Bei den in blau dargestellten Kreuzen und Quadraten beträgt der Wert von $\bar{\lambda}_r = 0.15$, was einem Zwanzigstel von $\bar{\lambda} = 3$ entspricht. Dabei verschiebt sich die Instabilität hin zu den harmonischen Wellen für niedrige Antriebsfrequenzen f bis hin zu einem Übergangspunkt, welcher ca. bei $f = 27$ Hz liegt. Für höhere Frequenzen ist wiederum die subharmonische Instabilität zu beobachten. Dabei steigen die kritischen Amplituden Γ_y^c vom Verlauf her ähnlich wie diejenigen des roten Graphen,

jedoch mit deutlich geringeren Werten. Die für kleine Frequenzen f berechneten kritischen Wellenzahlen k_c der harmonischen Instabilität wachsen bis zu dem Punkt, in dem die subharmonischen bevorzugt instabil werden, mit größerer Steigung als die entsprechenden darauffolgenden subharmonischen k_c . Die mit $\bar{\lambda}_r = 0$ dargestellten Punkte in grün aus Abbildung 6.2 haben qualitativ die gleichen Eigenschaften wie diejenigen in blau. Das bedeutet, dass die harmonische Instabilität bei viskoelastischen Fluiden die bevorzugte subharmonische Instabilität Newtonscher Flüssigkeiten unter bestimmten Umständen verdrängen kann (siehe dazu auch S. Kumar [57]).

In Abbildung 6.2 wird die Frequenzabhängigkeit der kritischen Parameter gezeigt, wobei diese bei konstanten Koeffizienten $\bar{\lambda}$ bzw. $\bar{\lambda}_r$ untersucht werden. Diese dimensionslosen Größen skalieren jedoch mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und damit mit der Frequenz f (siehe Gln. (3.48) und (3.49) auf S. 22). Somit skizzieren wir in Abbildung 6.3 die Situation, in der die dimensionsbehafteten Größen λ sowie λ_r konstant gehalten werden, so dass dies der experimentellen Realisierung näher kommt, in der nur die Frequenz veränderlich ist und alle Fluidparameter konstant gehalten werden. Die in dieser Abbildung 6.3 gezeigten Graphen sind wiederum in rot der Spezialfall des Newtonschen Fluids ($\lambda = \lambda_r = 0.02$ s) sowie in grün derjenige des Maxwell-Fluids ($\lambda_r = 0$). Die blauen Punkte stehen für die Kombination $\bar{\lambda} = 0.02$ s und $\lambda_r = 1.25 \cdot 10^{-3}$ s. In Fall dieser Parameterwahl zeigt sich auch beim Newtonschen Fluid bei kleinen Frequenzen die harmonische Instabilität, die jedoch bei den in grün und blau dargestellten viskoelastischen Fluiden über einen deutliche größeren Frequenzbereich ausgeprägt ist. Ansonsten ähnelt der Verlauf der Kurven in rot qualitativ denjenigen aus Abbildung 6.2. Die in blau und grün dargestellten Graphen bilden zunächst die harmonische Instabilität aus, wobei die kritischen Amplituden Γ_y^c deutlich geringer als diejenigen des in rot skizzierten Newtonschen Fluids sind. Sobald der Übergangspunkt von harmonisch zu subharmonisch bei $f \approx 33$ Hz erreicht ist, nehmen beide viskoelastischen Kurven für Γ_y^c zunächst einen ähnlichen Verlauf bis zur Frequenz $f \approx 83$ Hz. Die blaue Kurve wächst weiter monoton, während die kritischen Antriebsstärken Γ_y^c des Maxwell-Fluids gekennzeichnet durch die grünen Punkte zunächst sinken. Dabei beschreibt die Kurve einen ähnlichen Verlauf wie zuvor, als sie aus dem Übergangspunkt der harmonischen Instabilität gestartet ist.

Durch Betrachtung der kritischen Wellenzahlen k_c im rechten Diagramm von Abbildung 6.3 ist zu sehen, was dort passiert. Während die blaue Kurve bei der Frequenz $f \approx 83$ Hz kurz ein Plateau beschreibt, so zeigt sich, dass die grüne Kurve des Maxwell-Fluids eine Sprungstelle in der Funktion der kritischen Wellenzahl k_c besitzt, wobei jedoch die kritische Amplitude Γ_y^c stetig bleibt. Den genauen Vorgang

dieses Übergangs lässt sich mit Hilfe von Abbildung 6.4 erläutern. Diese Abbildung zeigt die Stabilitätszungen der subharmonischen und harmonischen Eigenwerte Γ_y in Abhängigkeit der Wellenzahl k , wie es entsprechend Abbildung 6.1 auf Seite 86 dargestellt ist. Die Diagramme auf der rechten Seite von Abbildung 6.4 zeigen exemplarisch den Vorgang, wie es zum unstetigen Übergang zweier kritischer Wellenzahlen kommt. Die in rot skizzierte, subharmonische neutrale Stabilitätskurve besitzt dabei zwei Minima, deren Amplituden zu Beginn unterschiedlich sind. Durch Erhöhung der Frequenz f steigt das rechte Minimum bei k_c^r , während im Gegenzug das linke absinkt. Dadurch gibt es eine Frequenz, bei der die Werte Γ_y^c beider Minima gleich sind und somit zwei kritische Wellenzahlen k_c^l sowie k_c^r parallel vorhanden sind. Durch eine weitere Steigerung der Antriebsfrequenz wird die linke kritische Wellenzahl k_c^l die alleinige, so dass in Parameterplots wie in Abbildung 6.3 insgesamt ein unstetiger Übergang zu erkennen ist.

Für harmonische Instabilitäten gibt es einen ähnlichen Vorgang, welcher beispielhaft in den linken Diagrammen von Abbildung 6.4 gezeigt ist. Dieser Mechanismus unterscheidet sich jedoch vom gerade beschriebenen der subharmonischen Instabilität insofern, als dass eine Stabilitätszunge nicht zwei Minima besitzt, sondern vielmehr zwei harmonische Instabilitätsbereiche einen subharmonischen Bereich so einengen, dass dieser zu höheren Werten von Γ_y verschoben ist. Durch Erhöhung der Frequenz f sinkt dann die linke harmonische Stabilitätszunge ab, so dass es auch eine Frequenz gibt, bei der zwei kritische Wellenzahlen für harmonische Instabilitäten parallel existieren und mit folgender Frequenzerhöhung die kleinere kritische Wellenzahl k_c^l die alleinige ist.

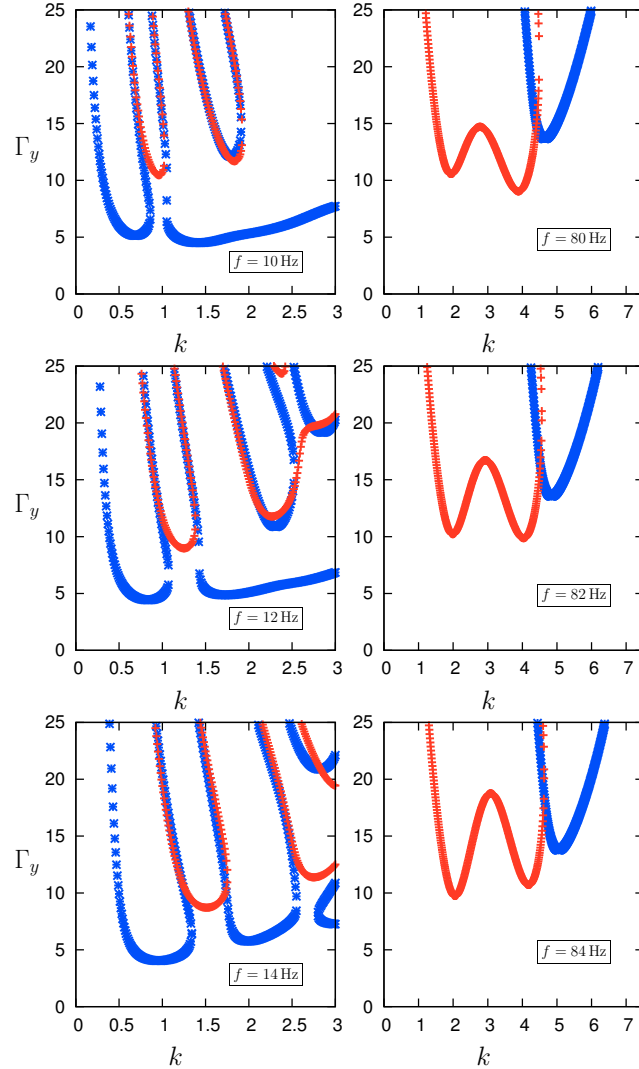


Abbildung 6.4.: Darstellung des unstetigen Übergangs der kritischen Wellenzahl k_c und Koexistenz zweier kritischer Wellenzahlen. Die Diagramme zeigen jeweils Γ_y als Funktion von k für die harmonische (blau) sowie subharmonische (rot) neutrale Stabilität. Auf der linken Seite ist der Wechsel von k_c bei harmonischen Wellen mit Antriebsfrequenzen $f = 10, 12, 14$ Hz exemplarisch dargestellt, die rechte Seite zeigt den subharmonischen Fall bei Frequenzen $f = 80, 82, 84$ Hz. Weitere Parameter: $h_0 = 0.3$ cm; $\bar{\theta} = 20$ g/s²; $\nu = 5$ cm²/s; $\rho = 1$ g/cm³; $\lambda = 0.02$ s; $\lambda_r = 7.8125 \cdot 10^{-5}$ s.

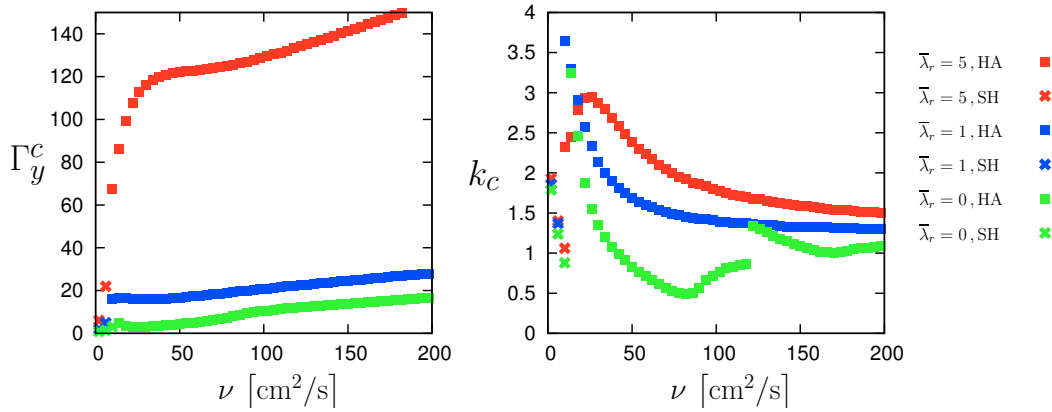


Abbildung 6.5.: Darstellung von Γ_y^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) in Abhängigkeit der kinematischen Viskosität ν in g/cm^2 . Dabei ist $\bar{\lambda} = 10$ konstant für alle Graphen und $\bar{\lambda}_r$ variiert (siehe Legende rechts). HA - Harmonische Lösungen, SH - Subharmonische Lösungen. Weitere Parameter: $h_0 = 0.3 \text{ cm}$; $\bar{\theta} = 20 \text{ g}/\text{s}^2$; $f = 40 \text{ Hz}$; $\rho = 1 \text{ g}/\text{cm}^3$.

Daher scheinen physikalisch gesehen bestimmte Kombinationen der Relaxations- und Retardationszeiten λ sowie λ_r einen Instabilitätsmechanismus zu bevorzugen, der hin zu kleineren Wellenzahlen und damit größeren Wellenlängen geht, so dass schon geringere Antriebsstärken Γ_y bei wachsender Frequenz f ausreichen, damit die Fluidschicht instabil wird.

Im Folgenden werden wir auf die Abhängigkeit der subharmonischen und harmonischen Instabilitäten von den Parametern Viskosität ν , Oberflächenspannung $\bar{\theta}$ sowie die Anfangshöhe h_0 eingehen. Die kinematische Viskosität ν skaliert invers proportional zur Reynoldszahl R (siehe Gl. (3.30) auf Seite 17). Da R proportional zur Antriebsfrequenz $f = \frac{2\pi}{\omega}$ ist und wir deren Abhängigkeit schon in den Abbildungen 6.2 sowie 6.3 skizziert haben, werden wir in diesem Fall die Abhängigkeit von ν direkt betrachten. Diese ist in Abbildung 6.5 dargestellt, wiederum für die kritischen Parameter Γ_y^c sowie k_c . In diesem Fall sind bei kleinen Werten der Viskosität ν zunächst die subharmonischen Moden instabil, wobei die harmonischen ab $\nu \approx 8 \text{ cm}^2/\text{s}$ den gesamten weiteren Bereich dominieren. In diesem Fall stellen die roten Punkte jeweils nicht den Fall $\bar{\lambda}_r = \bar{\lambda}$ dar, sondern hier ist $\bar{\lambda}_r = \frac{\bar{\lambda}}{2} = 5$, da im Fall der Gleichheit für diese Parameterkombination und die hohen Werte von ν die Stabilitätsgrenzen für Γ_y^c im Bereich von 10^4 bis 10^5 liegen.

Das bedeutet, dass die Eigenschaften von viskoelastischen Fluiden zum einen die Stabilitätsgrenzen für oszillatorische Lösungen deutlich nach unten senken. Zum an-

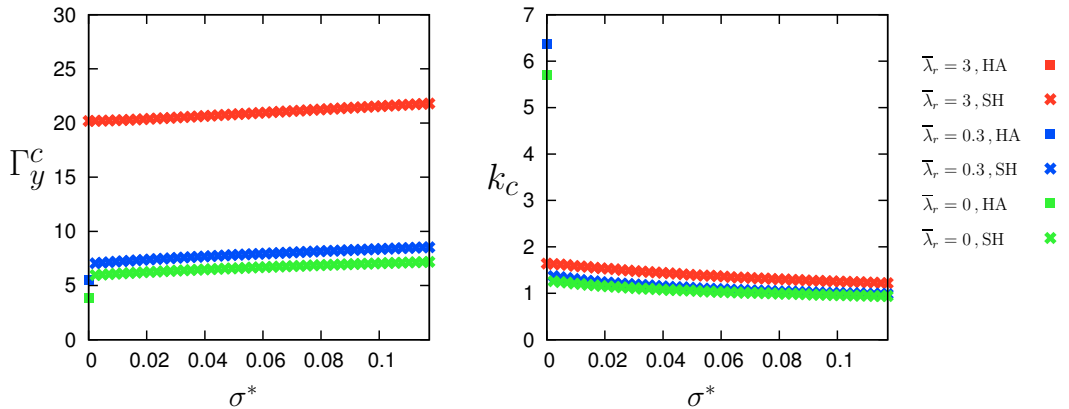


Abbildung 6.6.: Darstellung von Γ_y^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) in Abhängigkeit des dimensionslosen Oberflächenspannungskoeffizienten σ^* . Dabei ist $\bar{\lambda} = 3$ konstant für alle Graphen und $\bar{\lambda}_r$ variiert (siehe Legende rechts). HA - Harmonische Lösungen, SH - Subharmonische Lösungen. Weitere dimensionslose Parameter: $R = 7.5398$, $\tilde{g} = 5.176 \cdot 10^{-2}$.

deren lässt sich durch Erhöhung der Viskosität die Stabilität der flachen Fluidschicht erhöhen, was auch schon beim Übergang von idealen Fluiden zu viskosen Fluiden beobachtet wurde (vergleiche z.B. [31, 34]). Dieser Effekt ist für Flüssigkeiten mit Eigenschaften hin zu Maxwell'schen Fluiden (siehe blaue und grüne Kurven im linken Diagramm von Abb. 6.5) nicht so stark ausgeprägt, aber der Anstieg von Γ_y^c mit ν ist zu erkennen. In der Darstellung der kritischen Wellenzahlen k_c im rechten Diagramm von Abbildung 6.5 ist erkennbar, dass die subharmonischen k_c -Werte zunächst abnehmen. Ab dem Übergangspunkt zeigen die harmonischen Moden ein qualitativ unterschiedliches Verhalten. Während für große Werte von $\bar{\lambda}_r$ die Kurven zunächst steiler abnehmen und danach für große ν hin zu einem Plateauwert saturieren, so zeigen die grünen Punkte ein markanteres Verhalten. Diese nehmen zuvor ebenso ab, steigen danach jedoch wieder an und es kommt zu einer Sprungstelle in der kritischen Wellenzahl k_c . Die Prozedur, welche zur Sprungstelle führt, haben wir bei der Diskussion von Abbildung 6.4 weiter oben erläutert. Ab der Sprungstelle ähnelt der qualitative Verlauf dem vorherigen mit geringerer Amplitude, wobei es mit weiterer Erhöhung von ν zu weiteren Sprungstellen kommen kann.

Die Abhängigkeit der Instabilitätskurven für viele Realisierungen der dimensionslosen Oberflächenspannung σ^* ist in Abbildung 6.6 zu sehen. Es ist im Wesentlichen zu erkennen, dass die Oberflächenspannung einen leicht stabilisierenden Einfluss auf die flache Oberflächenlösung für diese Wahl der Parameter besitzt, da die kritische

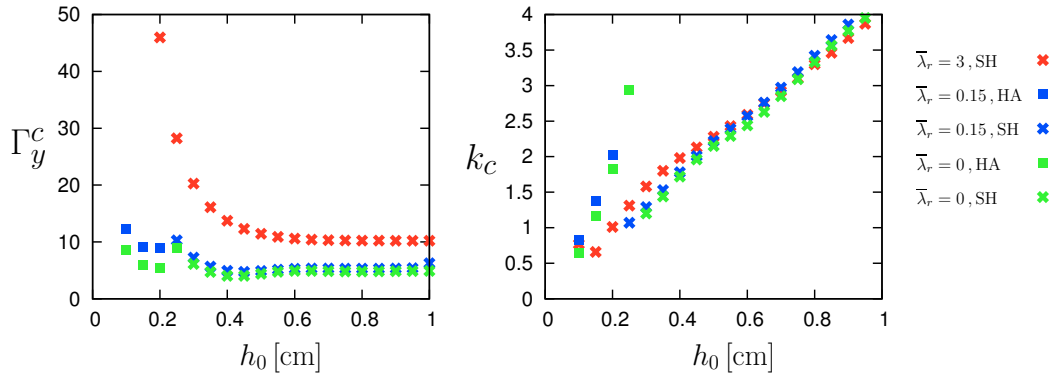


Abbildung 6.7.: Darstellung von Γ_y^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) in Abhängigkeit der Anfangshöhe h_0 in cm. Dabei ist $\bar{\lambda} = 3$ konstant für alle Graphen und $\bar{\lambda}_r$ variiert (siehe Legende rechts). HA - Harmonische Lösungen, SH - Subharmonische Lösungen. Weitere Parameter: $\bar{\theta} = 20 \text{ g/s}^2$; $f = 40 \text{ Hz}$; $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

Antriebsamplitude Γ_y^c mit steigendem σ^* auch zunimmt. Dies gilt für alle Werte von $\bar{\lambda}_r$, die in diesem Diagramm dargestellt sind. Die kritischen Wellenzahlen k_c der subharmonischen Instabilitäten nehmen monoton mit σ^* ab, wie im rechten Diagramm von Abbildung 6.6 zu erkennen ist. Interessant ist, dass für $\sigma^* = 0$, d.h. ohne Oberflächenspannung des Fluids, die viskoelastischen Fluide nur an diesem Punkt über die harmonischen Moden instabil werden. Die kritischen Wellenzahlen an diesem Punkt sind dabei deutlich größer als diejenigen der folgenden subharmonischen Moden. Da die Oberflächenspannung einen glättenden Einfluss auf Rauheiten der Oberfläche hat, ist es harmonischen Moden durch deren Abwesenheit möglich, diese hohen Wellenzahlen und damit kleinen Wellenlängen im Vergleich zu den folgenden subharmonischen Wellenzahlen auszubilden.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir die Abhängigkeit der Instabilitäten von der dimensionsbehafteten Höhe h_0 des Fluids betrachten. Diese Relationen zeigt Abbildung 6.7. In dieser Abbildung ist zu sehen, dass der Bereich kleiner Fluidhöhen h_0 mit dem Übergang von harmonischer zu subharmonischer Instabilität der interessante ist. Für größer werdende Fluidhöhen h_0 zeigt das linke Diagramm von Abb. 6.7, dass die kritische Antriebsamplituden Γ_y^c saturieren, sowohl für die rote Kurve des Newtonschen Fluids als auch für diejenigen der viskoelastischen Fluide, welche in blau und grün gekennzeichnet sind. Während die viskoelastischen Fluide durch den Übergang zur harmonischen Instabilität für abnehmende Höhen h_0 den Anstieg der kritischen Amplitude Γ_y^c kompensieren können, scheint dies bei den Newtonschen

Fluiden, die in rot dargestellt sind, nicht der Fall zu sein. Die Werte für Γ_y^c steigen in diesem Fall für kleine h_0 stark an, was auch für die harmonischen Moden gilt. Bei den kritischen Wellenzahlen k_c ist zu erkennen, dass sowohl harmonische als auch subharmonische Werte mit wachsendem h_0 zunehmen, wobei die subharmonischen Moden einen nahezu linearen Verlauf nehmen. Die harmonischen kritischen Wellenzahlen steigen etwas schneller. Der Trend des Wachsens der Wellenzahlen kann mit der vorherigen Diskussion zum Oberflächenspannungskoeffizienten σ^* in Abbildung 6.6 begründet werden. Da der Koeffizient σ^* mit der dritten Potenz der inversen Fluidhöhe, d.h. mit h_0^{-3} , skaliert (siehe Gl. (3.32) auf Seite 17), nimmt der schon angesprochene glättende Einfluss der Oberflächenspannung ab, so dass sich auch stärker oszillierende Strukturen mit kürzeren Wellenlängen ausbilden können.

In diesem Kapitel haben wir die vertikale Stabilitätsanalyse hinsichtlich der neutralen Stabilität durchgeführt. Dabei führen die zwei zusätzlichen Parameter $\bar{\lambda}$ sowie $\bar{\lambda}_r$ einmal dazu, dass die Stabilitätsgrenzen viskoelastischer Fluide i. Allg. unter denen der Newtonschen Fluide liegen. Des Weiteren zeigt sich, dass insbesondere die harmonische Instabilität für kleine Antriebsfrequenzen und auch anderer Parameter bei viskoelastischen Fluiden bevorzugt ausgebildet werden kann, zumindest mit deutlich geringeren Antriebsamplituden Γ_y^c als im Newtonschen Fall. Die Koexistenz zweier kritischer Wellenzahlen, welche z.B. mittels Durchfahren des Frequenzbereichs erhalten werden kann, ist ein weiterer spannender Teilaspekt. Damit werden wir uns im folgenden Kapitel 7 analog zum rein vertikalen Antriebsfall der linearen Stabilitätsanalyse des horizontalen Fluids widmen. Dies geschieht jedoch zunächst für Newtonsche Fluide.

7. Stabilitätsanalyse des horizontal oszillierenden Newtonschen Fluids

Analog zu der für den rein vertikalen Antrieb im vorherigen Kapitel 6 durchgeführten linearen Stabilitätsanalyse der zeitlich oszillierenden Drucklösung (4.7) (siehe Seite 25 in Kapitel 4.1) wollen wir die Lösungen der horizontalen Geschwindigkeit aus Kapitel 5 untersuchen, welche durch periodische laterale Bewegungen der Bodenplatte hervorgerufen werden. In diesem und dem folgenden Kapitel 8 wollen wir die Stabilität der horizontalen Referenzlösung (5.55) von Seite 57 hinsichtlich harmonischer und subharmonischer Oberflächenwellen untersuchen. Dieses Verfahren geschieht in ähnlicher Weise wie zuvor die lineare Stabilitätsanalyse im vorherigen Kapitel 6. Dabei werden wir zunächst den Spezialfall der Newtonschen Fluide in diesem Kapitel bearbeiten und im darauffolgenden Kapitel auf die allgemeinen viskoelastischen Fluide im Oldroyd-B-Modell eingehen.

Die Gründe für die Unterscheidung sind zum einen, dass beim Newtonschen Grenzfall die Lösungen hinsichtlich der Größen des Konformationstensors \underline{S} (siehe dazu Gln. (5.65) und (5.66) bzw. (5.68) und (5.69) auf den Seiten 65ff) herausfallen. Somit kann das zu erhaltende lineare Gleichungssystem wiederum auf die Störungsvariablen \tilde{v} und \tilde{h} reduziert werden, was im allgemeinen Fall des Oldroyd-B-Fluids nicht mehr möglich sein wird. Zum anderen werden wir, ähnlich wie beim Algorithmus zum vertikalen Stabilitätsproblem in Kapitel 6, das Finden der Stabilitätsgrenzen auf ein generalisiertes Eigenwertproblem zurückführen. Bei Newtonschen Fluiden geht der zu findende Eigenwert über die Geschwindigkeitslösung $u_h^0(y, t)$ nur linear ein, wohingegen bei der allgemeinen Lösung des viskoelastischen Oldroyd-B-Fluids der zu bestimmende Eigenwert Γ_y quadratisch über die Funktion $A^0(y, t)$ (siehe Gl. (5.68) auf Seite 67) eingeht, so dass ein nichtlineares generalisiertes Eigenwertproblem zu lösen ist. Dies erfordert zudem die Einführung neuer abhängiger Variablen zur Lösung des Problems.

Im Gegensatz zur Lösung des rein vertikalen Antriebs ist die Abhängigkeit der horizontalen Geschwindigkeitslösung $u^0(y, t)$ von der vertikalen Koordinate y deutlich komplexer. Die daraus resultierende partielle DGL lässt sich damit nicht mehr

nur mit analytischen Methoden lösen, wie wir im Folgenden sehen werden. Daher benutzen wir, analog zur Entwicklung der zeitlichen Abhängigkeit mit trigonometrischen Funktionen, Reihenentwicklungen in Chebyshev- bzw. Jacobi-Polynome sowie spezielle Kombinationen dieser Basisfunktionen (siehe Anhang C auf Seite 133). Die Lösung dieser Abhängigkeit muss zusammen mit der Bestimmung des Eigenwertproblems geführt werden, so dass der Grad der Entwicklung L der Polynome multiplikativ in die Größe der Matrizen eingeht. Dies führt zu deutlich längeren Zeiten der Berechnung.

Die theoretische Behandlung von harmonischen Oberflächenwellen als Folge horizontaler periodischer Vibration geht zurück auf Yih et al. ([71, 72]), welche die Instabilität im Grenzfall großer Wellenlängen mittels störungstheoretischer Methoden untersucht haben. Im letzten Jahrzehnt des vergangenen Jahrhunderts sind insbesondere die Arbeiten von Or ([85]), Khenner et al. ([83]) sowie in neuer Zeit die Arbeiten von Talib et al. ([84]) zu erwähnen, wobei in den letzteren Arbeiten die Stabilität von zwei Fluidschichten übereinander behandelt wird, wobei die untere Platte harmonisch bewegt wird. Or hat dabei gezeigt, dass die Symmetrie der Gleichungen i. Allg. keine subharmonischen Lösungen zulässt, wie dies bei den vertikal vibrierten Fluiden der Fall war, sondern dass nur harmonische Instabilitäten die geforderten Bedingungen erfüllen können.

Bei der Lösung der linearen Gleichungssysteme orientieren wir uns in dieser Arbeit am Algorithmus von Or ([85]), der in ähnlicher Weise auch von Talib et al. ([84]) diskutiert wird. Dazu wird die x -Abhängigkeit analog zum vertikalen Fall in räumliche harmonische Moden entwickelt und entsprechend für die zeitliche Dynamik ein Floquet-Ansatz gemacht. Die Abhängigkeit von der y -Koordinate und die dementsprechende DGL lösen wir dabei mittels eines Pseudospektralverfahrens, der sogenannten Tau-Methode (siehe dazu z.B. [104–107]). Dazu wird die Lösung in Polynome auf dem Intervall $[-1, 1]$ entwickelt, z.B. Jacobi- oder Chebyshev-Polynome. Im vorliegenden Fall lassen sich diese Polynome zu neuen Basisfunktionen zusammensetzen, die zum einen die homogenen Randbedingungen erfüllen, zum anderen jeweils orthogonal zueinander sind. Damit erhalten wir ein großes, dünn besetztes Gleichungssystem, so dass wir, ähnlich wie im vertikalen Fall, ein Eigenwertproblem lösen müssen, wobei der Antriebsparameter Γ_x als Eigenwert fungiert. Dies wird auch der Unterschied zu den Verfahren von Or und Juel sein, die stattdessen das Problem auf eine Determinantenberechnung zurückführen.

Im nächsten Kapitel werden wir die linearisierten Gleichungen und deren Lösung schrittweise herleiten, insbesondere im Hinblick auf deren numerische Beschreibung.

7.1. Horizontaler Stabilitätsalgorithmus des Newtonschen Fluids

7.1.1. Herleitung des linearisierten Gleichungssystems

Die zu untersuchende Referenzlösung ist diejenige aus Kapitel 5.1.2, welche auf Seite 36 in den Gleichungen (5.20) als $u_h^o(y, t)$ beschrieben ist. Da in diesem Fall die Variablen des Konformationstensors \underline{S} wegfallen und nur noch der hydrostatische Druck $p^o(y)$ eingeht, betrachten wir folgendes (wiederum durch die Tilde-Zeichen (\sim) beschriebenes) System kleiner Störungsvariablen addiert zu den Referenzlösungen:

$$u(x, y, t) = \tilde{u}(x, y, t) + u_h^o(y, t) = \tilde{u}(x, y, t) + \tilde{g}\Gamma_x\{v(y) \sin t + w(y) \cos t\} \quad (7.1a)$$

$$v(x, y, t) = \tilde{v}(x, y, t) + v_v^o = \tilde{v}(x, y, t) \quad (7.1b)$$

$$p(x, y, t) = \tilde{p}(x, y, t) + p_v^o(y) = \tilde{p}(x, y, t) + \tilde{g}(1 - y) \quad (7.1c)$$

$$h(x, t) = \tilde{h}(x, t) + h_v^o = \tilde{h}(x, t) + 1. \quad (7.1d)$$

Die Variablen auf der linken Seite des obigen Gleichungssystems setzen wir in die Navier-Stokes-Gleichungen und deren Randbedingungen (3.21) bis (3.29) ein und vernachlässigen, wie im Kapitel 6.1.1 ab Seite 76 beschrieben, alle Terme, welche nichtlinear in den als klein erachteten, gestörten Variablen sind. Indem wir dabei beinahe identisch vorgehen, wie es im Kapitel 6.1.1 beschrieben ist, lassen sich auch hier die horizontale Geschwindigkeit $\tilde{u}(x, y, t)$ sowie die Druckvariable $\tilde{p}(x, y, t)$ von der vertikalen Geschwindigkeit $\tilde{v}(x, y, t)$ entkoppeln, so dass wir schließlich folgende lineare partielle DGL im Innern des Fluids erhalten:

$$\partial_t \Delta \tilde{v} + u_h^o \partial_x \Delta \tilde{v} - \partial_y^2 (u_h^o) (\partial_x \tilde{v}) = \frac{1}{R} \Delta^2 \tilde{v}. \quad (7.2)$$

Dabei erfolgt die Kopplung von \tilde{v} an die horizontale Lösung $u_h^o(y, t)$ durch die konvektiven Terme in den beiden Navier-Stokes-Gleichungen der Geschwindigkeiten (3.8) sowie (3.9) auf Seite 14. Die weiteren Gleichungen, zum einen die Randbedingungen am Boden sowie an der freien Oberfläche, zum anderen die kinematische Höhenbedingung, lassen sich auf ähnliche Weise wie in Kapitel 6.1.1 auf den Seiten 77 bis 79 herleiten, falls $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 0$ betrachtet wird. Dazu kommen des Weiteren noch einige Änderungen durch die Beiträge der horizontalen Referenzgeschwindig-

keit $u_h^0(y, t)$, welche wir dazu erläutern werden:

$$\left(\partial_t - \frac{1}{R}\Delta\right)\Delta\tilde{v} = -u_h^0\partial_x\Delta\tilde{v} + (\partial_y^2 u_h^0)\partial_x\tilde{v} \quad (7.3a)$$

$$\partial_t\tilde{h}(x, t) - \tilde{v}|_{y=1} = \left(u_h^0|_{y=1}\right)\partial_x\tilde{h}(x, t) \quad (7.3b)$$

$$\tilde{v}|_{y=0} = 0 \quad (7.3c)$$

$$(\partial_y\tilde{v})|_{y=0} = 0 \quad (7.3d)$$

$$\{\partial_{xx}^2 - \partial_{yy}^2\}\tilde{v} = \left(\partial_{yy}^2 u_h^0|_{y=1}\right)\tilde{h}(x, t) \quad (7.3e)$$

$$\sigma^*\partial_x^4\tilde{h} - \tilde{g}\partial_x^2\tilde{h} + (\partial_{ty}^2\tilde{v}) - \frac{1}{R}\{\partial_y^3 + 3\partial_{xxy}^3\}\tilde{v} = -\left(u_h^0|_{y=1}\right)(\partial_{xy}^2\tilde{v}) \quad (7.3f)$$

Dabei ist das obige Gleichungssystem so aufgeteilt, dass Terme, die an die horizontale Geschwindigkeit u_h^0 oder deren Ableitungen koppeln, auf der rechten Seite zu finden sind, und die anderen Terme jeweils auf der linken Seite aufgeschrieben sind. Im Vergleich zum vertikalen Gleichungssystem (6.13) von Seite 79 fehlen in den obigen Gleichungen (7.3) die Koeffizienten $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$. Zusätzlich ergeben sich in allen Gleichungen außer den Geschwindigkeitsrandbedingungen (7.3c) und (7.3d) am Boden Abhängigkeiten von der horizontalen Geschwindigkeit u_h^0 bzw. deren räumlichen Ableitungen. Während in der kinematischen Randbedingung (7.3b) u_h^0 als Resultat der konvektiven Ableitung in die Gleichung rutscht, ist der Term proportional zur zweiten Ableitung in der Tangentialbedingung (7.3e) Ergebnis der Taylorentwicklung an der Oberfläche. Der Term in der Normalrandbedingung (7.3f) resultiert aus der Entkopplung der horizontalen Geschwindigkeit \tilde{u} mit Hilfe der Geschwindigkeitsgleichung.

Die Lösung des DGL-Systems (7.3) ist etwas aufwändiger als noch beim rein vertikalen Problem (6.13) auf Seite 79. Zum Auflösen der x -Abhängigkeit bietet sich aufgrund der Periodizität die Entwicklung in einer Fourierreihe an, wobei wir in diesem Fall eine reelle Entwicklung wählen werden, damit die Koeffizienten und damit das Gleichungssystem reell bleiben. Die gesuchten Funktionen sind hinsichtlich der Variablen y nicht notwendigerweise periodisch. Daher bieten sich Entwicklungen mittels orthogonaler Polynome an, z.B. Chebyshev- oder Jacobi-Polynome, welche Funktionen gleichmäßig auf dem Intervall $[-1, 1]$ approximieren (siehe z.B. [104, 106]). Dazu transformieren wir dann die Variable $y \in [0, 1]$ auf die neue Variable $y' \in [-1, 1]$ und erhalten dann mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen ein Matrixgleichungssystem mit zeitabhängigen Koeffizienten, welches dann noch gelöst

werden muss. Dazu starten wir mit der Entwicklung der x -Abhängigkeit in jeweils reelle Fourierreihen:

$$\tilde{v}(x, y, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n(y, t) \cos(k_n x) + b_n(y, t) \sin(k_n x) \right\} \quad (7.4a)$$

$$\tilde{h}(x, t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \alpha_n(y, t) \cos(k_n x) + \beta_n(y, t) \sin(k_n x) \right\}, \quad (7.4b)$$

wobei wiederum $k_n = \frac{2\pi n \bar{h}_0}{L}$ ist. Aufgrund der Linearität der Gleichungen sind unterschiedliche k_n aus obiger Entwicklung nach Einsetzen in Gln. (7.3) voneinander unabhängig. Allerdings sind die Koeffizienten a_n sowie b_n jeweils durch eine gerade bzw. ungerade Anzahl an Ableitungen in x -Richtung miteinander in den Gleichungen (7.3a) und (7.3b) und der Normalrandbedingung (7.3f) gekoppelt. Wie im vorherigen Kapitel 6.1.2 auf Seite 80 beschrieben verallgemeinern wir auch an diesem Fall $k_n \rightarrow k$ und lassen den Index n an den Koeffizienten a , b , α sowie β weg. Damit erhalten wir aus den DGLn der Geschwindigkeit \tilde{v} sowie der Höhe \tilde{h} die bestimmenden Gleichungen der Entwicklungskoeffizienten:

$$\left(\partial_t - \frac{1}{R} (-k^2 + \partial_y^2) \right) (-k^2 + \partial_y^2) a(y, t) = -k u_h^0(y, t) (-k^2 + \partial_y^2) b(y, t) + k (\partial_y^2 u_h^0(y, t)) b(y, t) \quad (7.5a)$$

$$\left(\partial_t - \frac{1}{R} (-k^2 + \partial_y^2) \right) (-k^2 + \partial_y^2) b(y, t) = +k u_h^0(y, t) (-k^2 + \partial_y^2) a(y, t) - k (\partial_y^2 u_h^0(y, t)) a(y, t) \quad (7.5b)$$

$$\partial_t \alpha(t) - a(y=1, t) = -k u_h^0(y=1, t) \beta(t) \quad (7.5c)$$

$$\partial_t \beta(t) - a(y=1, t) = k u_h^0(y=1, t) \alpha(t) \quad (7.5d)$$

Aufgrund der Komplexität der Funktion $u_h^0(y, t)$ lässt sich die y -Abhängigkeit der partiellen DGLn (7.5a) sowie (7.5b) nicht mehr analytisch lösen. Für die numerische Lösung transformieren wir zunächst von der Variablen $y \in [0, 1]$ auf die Variable $y' \in [-1, 1]$. Danach entwickeln wir dazu die Größen a und b in eine orthogonale Polynomial-Basis $\{\Phi_l(y')\}$, z.B. $a(y', t)$:

$$a(y', t) \approx \sum_{l=0}^L a_l(t) \Phi_l(y') . \quad (7.6)$$

Diese Basis $\{\Phi_l(y')\}$ besteht im allgemeinen Fall aus Jacobi-Polynomen vom Grad

l , in deren Gesamtmenge z.B. Chebyshev-Polynome als Spezialfall enthalten sind (siehe dazu auch Anhang C auf S. 133). Durch Einsetzen von Ansatz (7.6) und entsprechend für die Funktion $b(y', t)$ in die Gleichungen (7.5a) bzw. (7.5b), jeweils nachdem diese auf die neue Variable y' transformiert worden sind, erhalten wir jeweils $(L + 1)$ -Gleichungen für die unbekannt Funktionen $a_l(t)$, indem wir diese jeweils mit der Basisfunktion $\Phi_k(y')$, $k = 0, \dots, L$, und einer Gewichtsfunktion $w(y')$ multiplizieren und über das Intervall $[-1, 1]$ integrieren. Diese Gleichungen sind jeweils noch zu lösen, wobei zusätzlich die Randbedingungen (7.3c) bis (7.3f) zu erfüllen sind.

Mit Hilfe der sogenannten Tau-Methode lassen sich die Randbedingungen berücksichtigen (siehe z.B. [104–107]). Dazu werden zum einen $(L - 3)$ -Gleichungen, welche die Projektionen der DGLn auf die ersten $(L - 3)$ Basisfunktionen Φ_l darstellen, betrachtet. Zum anderen wird der Ansatz (7.6) in die auf die neue Variable y' transformierten Randbedingungen (7.3c) bis (7.3f) eingesetzt, so dass jeweils weitere vier Gleichungen insgesamt jeweils $(L + 1)$ Gleichungen für genauso viele unbekannte Koeffizienten liefern. Falls die Funktionen der Orthogonalbasis $\Phi_l(y')$ schon Randbedingungen automatisch erfüllen, so brauchen diese Relationen nicht mehr in der Tau-Methode berücksichtigt werden, so dass sich für jede automatisch erfüllte Randbedingung eine weitere Bedingung aus der Projektion auf die nächst höhere Basisfunktion ergibt.

Einen sehr interessanten Ansatz zum Einbau homogener Randbedingungen liefern Livermore et al. (siehe [108, 109]). In diesen Artikeln beschreiben sie, wie sich eine Vorschrift aus Kombinationen von Jacobi-Polynomen niedriger Ordnung entwickeln lässt, so dass eine neue Basis gebildet wird, die einmal die homogenen Randbedingungen erfüllt. Des Weiteren haben diese eine *Auto-Orthogonalität* genannte Eigenschaft: Basisfunktionen höherer Ordnung sind automatisch orthogonal zu allen Basisfunktionen niedrigerer Ordnung. Ansonsten zeigen die Basisfunktionen asymptotisch noch das Verhalten von Jacobi-Polynomen und damit deren Eigenschaften hinsichtlich Approximation von stetigen Funktion auf einem beschränkten Intervall $[-1, 1]$. In dieser Arbeit konstruieren wir uns mit den in von Livermore et al. in den Referenzen [108, 109] beschriebenen Verfahren eine Basis $\{\psi_l(y')\}$, welche die homogenen Randbedingungen

$$\psi_l(y') \Big|_{y'=-1} = 0 \tag{7.7a}$$

$$\partial_{y'} \psi_l(y') \Big|_{y'=-1} = 0 \tag{7.7b}$$

am linken Rand bei $y' = -1$ erfüllt (dies entspricht den Randbedingungen (7.3c) und (7.3d)). Für eine ausführliche Dokumentation zur Herleitung der Basisfunktionen $\psi_l(y')$ und zu orthogonalen Polynomen verweisen wir auf Anhang C auf Seite 133. Zur Lösung der Gleichungen (7.5) mit den verbleibenden Randbedingungen (7.3e) sowie (7.3f) führen wir zunächst die Transformation auf die Variable y'

$$y' = 2y - 1; \quad \Rightarrow \quad \partial_y \rightarrow 2 \partial_{y'} \quad (7.8)$$

durch, so dass $y' \in [-1, 1]$. Damit können wir die abhängigen Variablen $a(y', t)$ und $b(y', t)$ nach der Basis $\{\psi_l(y')\}$ entwickeln, wobei die ψ_l nun orthonormiert sind (siehe dazu Anhang C ab Seite 133, Relationen (C.12) bis (C.15)):

$$\begin{pmatrix} a(y', t) \\ b(y', t) \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^L \begin{pmatrix} a_l(t) \\ b_l(t) \end{pmatrix} \psi_l(y'). \quad (7.9)$$

Die kinematische Höhenbedingung (7.5c), (7.5d) sowie die Tangential- und Normalrandbedingungen (7.3e) und (7.3f) sowie ergeben sich damit zu:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} - \sum_{l=1}^L \psi_l(y' = 1) \begin{pmatrix} a_l(t) \\ b_l(t) \end{pmatrix} = k u_h^0(y' = 1, t) \begin{pmatrix} -\beta(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix} \quad (7.10a)$$

$$\sum_{l=1}^L [k^2 \psi_l(1) + 4 \psi_l''(1)] \begin{pmatrix} a_l(t) \\ b_l(t) \end{pmatrix} = 4 \{ \partial_{y'}^2 u_h^0(1, t) \} \begin{pmatrix} -\beta(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix} \quad (7.10b)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^L \left[2 \psi_l' \partial_t + \frac{1}{R} (-8 \psi_l''' + 6 k^2 \psi_l') \right] \begin{pmatrix} a_l(t) \\ b_l(t) \end{pmatrix} \\ + k^2 [\sigma^* k^2 + \tilde{g}] \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = 2k u_h^0(y' = 1, t) \sum_{l=1}^L \psi_l'(1) \begin{pmatrix} -b_l(t) \\ a_l(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.10c)$$

Wir bemerken noch, dass wir insgesamt eine Basis der Ordnung L verwenden. Da diese so konstruiert ist, dass der Index l bei Eins und nicht bei Null beginnt, besitzt unser System insgesamt $2(L+1)$ unbekannte Funktionen, nämlich $a_1(t), \dots, a_L(t)$ und entsprechend für die b , sowie die Oberflächenfunktionen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$. Die Gleichungen (7.10) bei $y' = 1$ können als sechs Zeilen einer Matrix geschrieben werden, so dass jeweils $(L-2)$ Gleichungen für jede der unbekannt Funktionen a und b fehlen. Diese ergeben sich aus den DGLn (7.5a) und (7.5b) im Innern des Fluids für a und b , welche nach der Koordinatentransformation folgendermaßen geschrieben

werden können:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\partial_t - \frac{1}{R} (-k^2 + 4\partial_{y'}^2) \right) (-k^2 + 4\partial_{y'}^2) \right] \begin{pmatrix} a(y', t) \\ b(y', t) \end{pmatrix} \\ & = [u_h^0(y', t) (-k^2 + 4\partial_{y'}^2) - 4k (\partial_{y'}^2 u_h^0(y', t))] \begin{pmatrix} -b(y', t) \\ a(y', t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Indem wir die Ansätze (7.9) in obige Gleichungen (7.11) einsetzen, diese jeweils mit $\psi_k(y') (1 - y'^2)^{-\frac{1}{2}}$ multiplizieren (wobei $k = 1, \dots, L - 2$) und dann über das Intervall $[-1, 1]$ integrieren, so erhalten wir zweimal $(L - 2)$ zusätzliche linear unabhängige Gleichungen, so dass wir zusammen mit den Gleichungen (7.10) insgesamt $2(L + 1)$ Gleichungen für ebenso viele unbekannte zeitabhängige Funktionen haben. Die Referenzgeschwindigkeit $u_h^0(y', t)$ lässt sich, wie wir in Kapitel 5.1.2 auf Seite 36 in Formel (5.20a) beschrieben haben, damit auch in der neuen Variablen y' wie folgt schreiben:

$$u_h^0(y', t) = v(y') \sin t + w(y') \cos t = \tilde{g} \Gamma_x \{v_s(y') \sin t + w_c(y') \cos t\}. \quad (7.12)$$

Damit lässt sich die gesamte Problemstellung als Matrixgleichung schreiben, falls wir die unbekannt Funktionen a , b sowie α und β in einen Lösungsvektor $\mathbf{X}(t)$ schreiben:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_L(t) \\ \alpha(t) \\ b_1(t) \\ \vdots \\ b_L(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

Der obige Vektor $\mathbf{X}(t)$ hat die Dimension $2(L + 1)$. Damit können wir die Problemstellung, bestehend aus Gln. (7.10) und (7.11), zusammenfassend folgendermaßen aufschreiben:

$$\underline{\underline{M}}^t \cdot \partial_t \mathbf{X}(t) + \underline{\underline{M}}^k \cdot \mathbf{X}(t) = \tilde{g} \Gamma_x (\underline{\underline{M}}^s \sin t + \underline{\underline{M}}^c \cos t) \cdot \mathbf{X}(t), \quad (7.14)$$

wobei in der obigen Gl. (7.14) die Matrizen $\underline{\underline{M}}^i$ jeweils reelle $2(L + 1) \times 2(L + 1)$ -Matrizen sind und konstante Einträge enthalten. $\underline{\underline{M}}^t$ fasst dabei alle Beiträge auf

den linken Seiten der Gln. (7.10) und (7.11) zusammen, in denen noch die partielle zeitliche Ableitung auftaucht und entsprechend enthält $\underline{\underline{M}}^k$ jegliche Terme, die als Konstanten auf den Vektor $\mathbf{X}(t)$ wirken. Die Matrizen $\underline{\underline{M}}^s$ sowie $\underline{\underline{M}}^c$ sind dementsprechend die Matrizen, welche aus den räumlichen Komponenten der horizontalen Geschwindigkeit resultieren. So hat beispielsweise die Matrix $\underline{\underline{M}}^t$ folgende Form:

$$\underline{\underline{M}}^t = \begin{pmatrix} \underline{\underline{m}}^t & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{m}}^t \end{pmatrix}; \quad \dim(\underline{\underline{m}}^t) = (L+1) \times (L+1) \quad (7.15a)$$

$$(\underline{\underline{m}}^t)_{k=1\dots L-2; l=1\dots L} = \int_{-1}^1 dy' \frac{\psi_k(y') (-k^2 \psi_l(y') + 4\psi_l''(y'))}{\sqrt{1-y'^2}} \quad (7.15b)$$

$$(\underline{\underline{m}}^t)_{k=L-1; l=1\dots L} = 0 \quad (7.15c)$$

$$(\underline{\underline{m}}^t)_{k=L; l=1\dots L} = -2\psi_l'(y' = 1) \quad (7.15d)$$

$$(\underline{\underline{m}}^t)_{k=L+1; l=L+1} = 1. \quad (7.15e)$$

Aus der oberen Gleichung (7.15a) ist zu erkennen, dass $\underline{\underline{M}}^t$ eine diagonale Untergestalt hat, bestehend jeweils aus zwei Matrizen $\underline{\underline{m}}^t$ links oben sowie rechts unten. Die einzelnen Terme der Untermatrix $\underline{\underline{m}}^t$ sind in den weiteren Formeln (7.15) erläutert. Dabei sind die Terme in Gl. (7.15b) diejenigen, die aus der Formel (7.11) resultieren, wenn diejenigen Terme, welche die partielle zeitliche Ableitung betreffen, betrachtet werden. Dies sind insgesamt $(L-2)$ Zeilen und jeweils L Spalten. In der $(L-1)$ -ten Zeile wird die Tangentialrandbedingung (7.10b) eingebaut. Da diese keine zeitliche Ableitungen enthält, sind alle Terme Null (siehe Relation (7.15c)). Entsprechend ist in der folgenden Zeile (7.15d) die Normalrandbedingung (7.10c) aufgeführt, welche Terme proportional zur Ableitung der Basisfunktionen ψ_l' bei $y' = 1$ enthält. Alle Terme in der Zeile und auch Spalte $L+1$ sind Null, bis auf einen Eintrag (siehe Gl. (7.15e), welcher derjenige des zeitlichen Terms aus der kinematischen Höhenbedingung (7.10a) ist.

Auf die gleiche Weise lässt sich mit den anderen Matrizen verfahren. Dabei hat die Matrix $\underline{\underline{M}}^k$ die gleiche Unterstruktur wie $\underline{\underline{M}}^t$ (siehe Gl. (7.15a)). Bei den Matrizen $\underline{\underline{M}}^s$ sowie $\underline{\underline{M}}^c$ fließen zusätzlich die Funktionen $v_s(y')$ sowie $w_c(y')$ in die Integrale (siehe (7.15b)) für die Untermatrizen $\underline{\underline{m}}^s$ bzw. $\underline{\underline{m}}^c$ mit ein. Zudem sind die Untermatrizen mit verschiedenen Vorzeichen in diesem Fall auf den Nebendiagonalen zu finden:

$$\underline{\underline{M}}^s = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{m}}^s \\ \underline{\underline{m}}^s & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{M}}^c = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{m}}^c \\ \underline{\underline{m}}^c & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Um das Problem abzuschließen, muss nach Aufstellen der Matrizen $\underline{\underline{M}}^i$ noch die zeitliche Matrix-DGL (7.14) gelöst werden. Dazu werden wir wie im vorherigen Kapitel 6.1.2 einen Floquet-Ansatz für die Variablen $\mathbf{X}(t)$ machen (siehe Gl. (6.17) und die Diskussion auf Seite 81). Daher setzen als Lösung für die Gesamt-DGL (7.14) an:

$$\mathbf{X}(t) = e^{(s+i\alpha)t} \hat{\mathbf{X}}(t) = e^{(s+i\alpha)t} \hat{\mathbf{X}}(t + 2\pi) = e^{(s+i\alpha)t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{X}}_m e^{imt} \quad (7.17)$$

wobei in diesem Fall $\hat{\mathbf{X}}$ eine 2π -periodische Vektorfunktion ist. Analog zum vertikalen Fall werden wir wieder die neutralen Stabilitätskurven betrachten, d.h. diejenigen, bei denen der Realteil s des Floquet-Exponenten Null ergibt, somit $s = 0$. Im Fall der vertikalen Stabilitätsanalyse in Kapitel 6 wurden subharmonische Instabilitäten, entsprechend $\alpha = \frac{1}{2}$, sowie harmonische Instabilitäten untersucht, d.h. $\alpha = 0$. Für Gleichungen der Form (7.14) hat Or gezeigt ([85], siehe auch Talib et al. [84]), dass in diesem Fall aus Symmetriegründen keine subharmonischen Lösungen zulässig sind und aus der Entwicklung hervorgehen können. Im Experiment sind in der Form auch nur harmonische Oberflächenwellen bekannt. In unseren Berechnungen haben wir für den subharmonischen Fall $\alpha = \frac{1}{2}$ keine sinnvollen Resultate erhalten. Daher werden wir uns in der folgenden Herleitung und Diskussion auf den Fall $\alpha = 0$ beschränken und betrachten ausschließlich die Stabilität hinsichtlich harmonischer Oberflächenwellen. Durch Einsetzen von Ansatz (7.17) in Gl. (7.14) erhalten wir aus den Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen:

$$\left\{ i m \underline{\underline{M}}^t + \underline{\underline{M}}^k \right\} \cdot \hat{\mathbf{X}}_m = \Gamma_x \frac{\tilde{g}}{2} \left\{ \left[\underline{\underline{M}}^c + i \underline{\underline{M}}^s \right] \cdot \hat{\mathbf{X}}_{m+1} + \left[\underline{\underline{M}}^c - i \underline{\underline{M}}^s \right] \cdot \hat{\mathbf{X}}_{m-1} \right\}, \quad (7.18)$$

wobei die entsprechende Realbedingung wie in Gl. (6.18a) auf Seite 81 auch für die Vektoren $\hat{\mathbf{X}}$ gelten muss, d.h.

$$\hat{\mathbf{X}}_m^* = \hat{\mathbf{X}}_{-m}. \quad (7.19)$$

Indem wir die Fourierentwicklung (7.17) bis zur Ordnung $|m| \leq M$, mit $M \in \mathbb{N}$, durchführen und Terme höherer Ordnungen vernachlässigen, erhalten wir insgesamt $(2M + 1)$ Gleichungssysteme der Form (7.18). Diese lassen sich in einer großen Gesamtgleichung als generalisiertes Eigenwertproblem mit Matrizen $\underline{\underline{M}}^{LS}$ sowie $\underline{\underline{M}}^{RS}$ der Dimension $(2M + 1) \cdot (2L + 2) \times (2M + 1) \cdot (2L + 2)$ darstellen, wobei wir wiederum den Antriebsparameter Γ_x als den zu berechnenden Eigenwert wählen werden

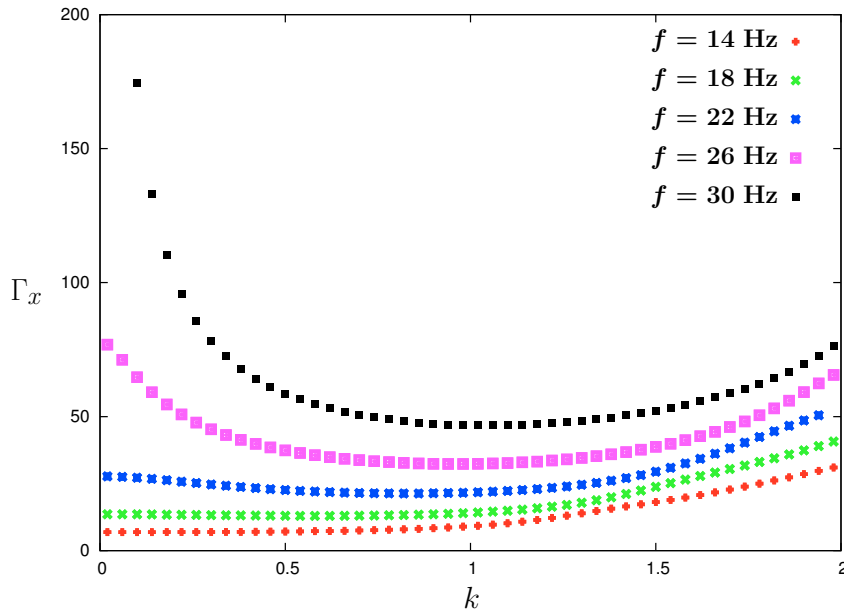


Abbildung 7.1.: Darstellung der niedrigsten reellen Eigenwerte Γ_x der harmonischen neutralen Stabilitätskurve als Funktion der Wellenzahl k bei verschiedenen Antriebsfrequenzen f (siehe Legende). Sonstige Parameter: $\bar{\theta} = 76.2 \text{ g/s}^2$; $h_0 = 0.4 \text{ cm}$; $\nu = 2 \text{ cm}^2/\text{s}$; $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

(siehe dazu Seite 84f in Kapitel 6.1.2):

$$\underline{\underline{M}}^{LS} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{ges} = \Gamma_x \underline{\underline{M}}^{RS} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{ges} . \quad (7.20)$$

Dabei sind in $\underline{\underline{M}}^{LS}$ die $(2M + 1)$ Einzelmatrizen der linken Seiten von Gl. (7.18) zusammengefasst und entsprechend gilt das gleich für $\underline{\underline{M}}^{RS}$. Die niedrigsten, reellen Eigenwerte für Γ_x , welche wir im folgenden Kapitel aus den numerischen Berechnungen erhalten, legen dann die Stabilitätsgrenzen fest.

7.1.2. Ergebnisse der numerischen Eigenwertberechnungen im horizontalen Fall

Im vorherigen Kapitel 7.1.1 haben wir den Algorithmus vorgestellt, der ähnlich wie beim vertikalen Fall die Antriebsamplituden Γ_x , welche auf der neutralen Stabilitätskurve liegen, als Eigenwerte eines großen Gleichungssystems berechnet. Die partielle DGL bezüglich \tilde{v} kann insbesondere für die Abhängigkeit von der Koordinate y nur numerisch gelöst werden, so dass sich der Rechenaufwand deutlich erhöht.

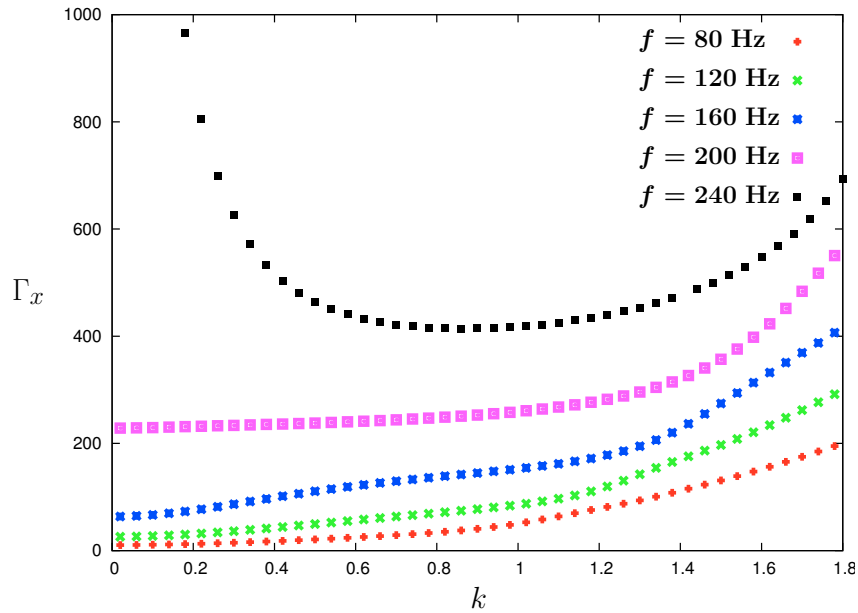


Abbildung 7.2.: Darstellung der niedrigsten reellen Eigenwerte Γ_x der harmonischen neutralen Stabilitätskurve als Funktion der Wellenzahl k bei verschiedenen Antriebsfrequenzen f (siehe Legende). Sonstige Parameter: $\bar{\theta} = 30 \text{ g/s}^2$; $h_0 = 0.055 \text{ cm}$; $\nu = 0.29 \text{ cm}^2/\text{s}$; $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

Das generalisierte Eigenwertproblem (7.18) bzw. (7.20) wurde unter Verwendung der Fortran-90-Routinen der *Numerical Algorithms Group, NAG*, implementiert und die umfangreichen Rechnungen wurden auf dem Rechnersystem des Instituts für Theoretische Physik an der WWU Münster mit Hilfe von Condor durchgeführt [110]. In der numerischen Behandlung skaliert die Berechnung der Eigenwerte ca. proportional N^3 , wobei N die Anzahl der Zeilen bzw. Spalten der quadratischen Matrizen ist. In unserem Fall gilt, wie vorher schon angesprochen worden ist:

$$N = (2M + 1) \cdot (2L + 2) , \quad (7.21)$$

wobei M und L die Entwicklungslängen der zeitlichen Fourierentwicklung bzw. der räumlichen Approximation in die autoorthogonalen Polynome der Basis $\{\psi\}$ darstellen. Aus Gleichung (7.21) folgt, dass schon kleinere Steigerungen von M und L die Rechenzeit stark erhöhen können. Insbesondere in Kapitel 5.1.2 ab Seite 33 haben wir gesehen, dass die Komplexität der Referenzlösung $u_h^0(y, t)$ mit der Reynoldszahl R zunimmt, so dass hinreichend viele Basisfunktionen ψ_l für eine gute Approximation benötigt werden. Das bedeutet, dass Parameterstudien, in denen große Reynolds-

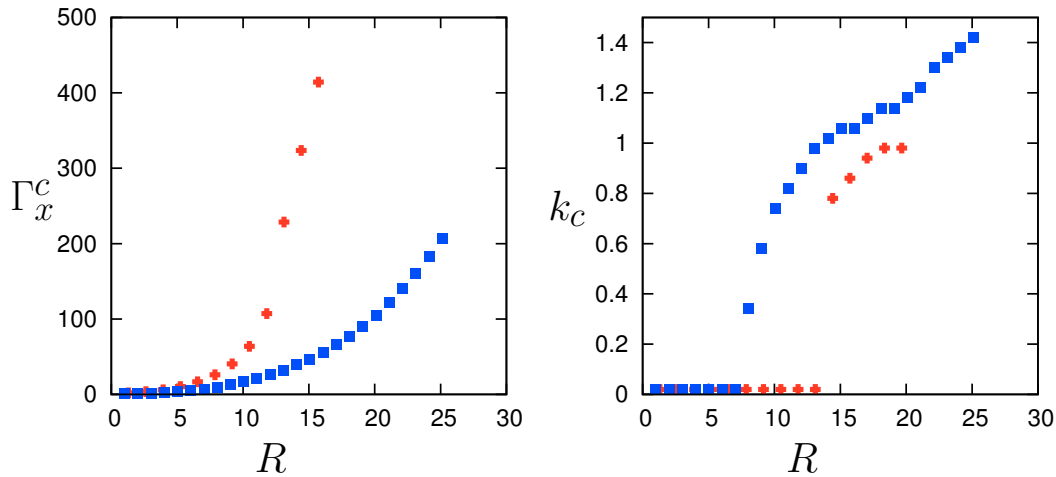


Abbildung 7.3.: Darstellung von Γ_x^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) als Funktion der Reynoldszahl R bei harmonischer Instabilität. Weitere Parameter:
 Rote Punkte: $\bar{\theta} = 30 \text{ g/s}^2$; $h_0 = 0.055 \text{ cm}$; $\nu = 0.29 \text{ cm}^2/\text{s}$; $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.
 Blaue Punkte: $\bar{\theta} = 76.2 \text{ g/s}^2$; $h_0 = 0.4 \text{ cm}$; $\nu = 2 \text{ cm}^2/\text{s}$; $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

zahlen R involviert sind, sehr lange dauern und oftmals aus numerischer Sicht nicht machbar sind. Wir werden uns daher im Wesentlichen auf kleine Reynoldszahlen R in den folgenden Diskussion beschränken müssen. Wie wir zuvor in Kapitel 6.2 ab Seite 86 diskutiert haben, werden die berechneten Eigenwerte Γ_x für verschiedene Werte von $L = L_1, L_2$ sowie $M = M_1, M_2$ auf ihre Genauigkeit geprüft.

Die Abbildungen 7.1 und 7.2 zeigen die Resultate dieser Berechnungen. In diesen Diagrammen sind jeweils die neutralen Stabilitätskurven der Eigenwerte Γ_x in Abhängigkeit der Wellenzahl k aufgetragen (vgl. Abb. 6.1 auf Seite 86 im vertikal oszillierten Fall). Dabei sind in beiden Bildern jeweils nur die harmonischen Instabilitätsbereiche gezeigt. Subharmonische Lösungen werden hier nicht beobachtet, was Or [85] mit Hilfe seiner numerischen Entwicklung herleitet und begründet sowie Schulze [86] mit Hilfe von mathematischen Symmetriebetrachtungen näher ausführt. Daher werden wir im Folgenden nur noch die harmonischen Instabilitäten diskutieren.

In beiden Abbildungen 7.1 und 7.2 werden die Instabilitätskurven für steigende Frequenzen f und damit wachsende Reynoldszahlen R dargestellt. Für niedrige Frequenzen befindet sich der kleinste Wert von Γ_x , also das globale Minimum Γ_x^c am linken Rand bei $k = 0$. Das bedeutet, dass sehr kleine Wellenzahlen k bzw. große Wellenlängen zuerst instabil werden. Dieses asymptotische Verhalten haben schon

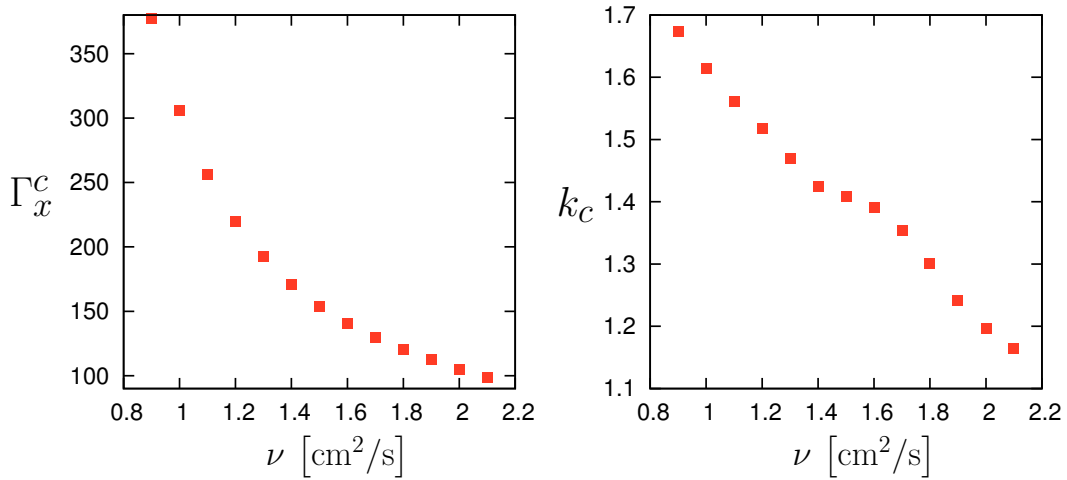


Abbildung 7.4.: Darstellung von Γ_x^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) als Funktion der kinematischen Viskosität ν bei harmonischer Instabilität. Weitere Parameter: $\bar{\theta} = 76.2 \text{ g/s}^2$; $h_0 = 0.4 \text{ cm}$; $f = 40 \text{ Hz}$; $\varrho = 1 \text{ g/cm}^3$.

Yih et al. [70–72] und Or [85] mit Hilfe einer Skalenentwicklung für kleine Wellenzahlen k hergeleitet, wobei sowohl die vertikale Geschwindigkeit \tilde{v} , die Höhe \tilde{h} als auch die Reynoldszahl R nach diesen Wellenzahlen k entwickelt werden. Diese Approximation ist dabei auf einen Bereich sehr kleiner k -Werte beschränkt.

Ab einer bestimmten Frequenz f gibt es einen Bifurkationspunkt, an dem das Minimum der neutralen Instabilitätskurve von $k_c = 0$ hin zu größeren Werten von $k_c > 0$ wandert. In Abbildung 7.1 ist dies z.B. bereits für die blaue Kurve mit $f = 22 \text{ Hz}$ der Fall, wohingegen in Bild 7.2 erst der schwarze Graph ein Minimum $k_c > 0$ zeigt. Mit weiter steigenden Frequenzen verschieben sich die Instabilitätsgrenzen weiter nach oben sowie die Stelle des Minimums dieser Kurven hin zu anwachsenden Werten von k_c . Die Werte am linken Rand steigen dabei sehr stark an, so dass kleine Wellenzahlen nicht mehr bevorzugt ausgebildet werden.

Die kritischen Wellenzahlen k_c sowie die kritischen Antriebsamplituden Γ_x^c , die aus den beiden Abbildungen 7.1 sowie 7.2 resultieren, sind in Abbildung 7.3 gezeichnet. Dabei entsprechen diejenigen Werte aus Abbildung 7.1 den blauen Quadraten und analog dazu sind die roten Kreuze an Abbildung 7.2 gekoppelt. In diesem Fall sind die Werte Γ_x^c sowie k_c als Funktion der Reynoldszahl R skizziert, da diese direkt proportional zur Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ ist (siehe Gleichung (3.30) auf Seite 17). Daraus resultiert wiederum eine bessere Vergleichbarkeit beider Graphen. Im Diagramm der kritischen Amplituden Γ_x^c auf der linken Seite der Abbildung 7.3 be-

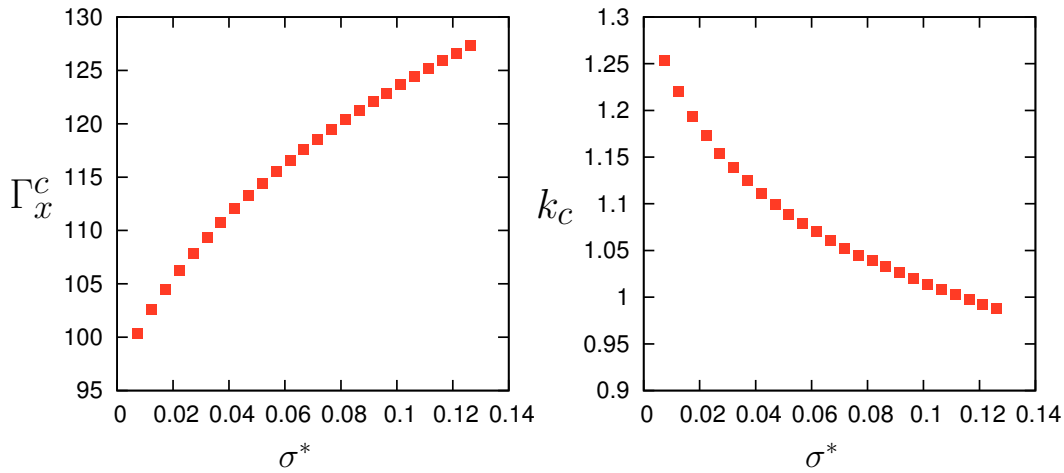


Abbildung 7.5.: Darstellung von Γ_x^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) als Funktion des Koeffizienten σ^* bei harmonischer Instabilität. Sonstige Parameter: $R = 20.106$; $\tilde{g} = 3.88266 \cdot 10^{-2}$.

ginnen beide Kurven bei sehr kleinen Reynoldszahlen R , wobei zudem die Werte der kritischen Amplituden Γ_x^c niedrig sind, jedoch ungleich Null. Mit zunehmendem R wachsen beide Kurven monoton, jedoch nichtlinear an, wobei die rote Kurve deutlich schneller ansteigt als die blaue. Dies ist zudem bemerkenswert, da der Punkt $k_c = 0$ bei der roten Kurve für deutlich größere Reynoldszahlen R erhalten bleibt. Sobald die Punkte $k_c(R) = 0$ aufhören zu existieren, geht der Übergang sehr schnell hin zu Wellenzahlen mit größeren Werten von k_c . Der Anstieg der kritischen Amplituden Γ_x^c mit steigender Frequenz ähnelt qualitativ dem Verhalten, welches wir auch beim rein vertikalen Stabilitätsproblem feststellen konnten, dort aber bei subharmonischen Instabilitätsgrenzen (vergleiche dazu die roten Kurven in den Abbildungen 6.2 auf S. 87 sowie 6.3 auf S. 89).

Der Vergleich zum rein vertikal vibrierten Fluid ist insbesondere bei der Betrachtung der Viskosität interessant. Im Kapitel 6.2 zeigt die Abbildung 6.5 auf Seite 93, dass eine zunehmende Viskosität eine Stabilisierung der flachen Oberfläche im Fall des vertikal vibrierten Fluids zur Folge hat. Dies gilt insbesondere für den Übergang von idealen zu viskosen Newtonschen Fluiden, bei dem dieser von infinitesimalen hin zu endlichen kritischen Amplituden Γ_y^c erfolgt (vgl. z.B. [31] und [34]). Im Fall des horizontal vibrierten Fluids ist die Situation in Abbildung 7.4 dargestellt. Aus dieser ist zu ersehen, dass mit zunehmender kinematischer Viskosität ν die kritischen Amplituden Γ_x^c monoton abnehmen und damit das genau entgegengesetzte Verhalten

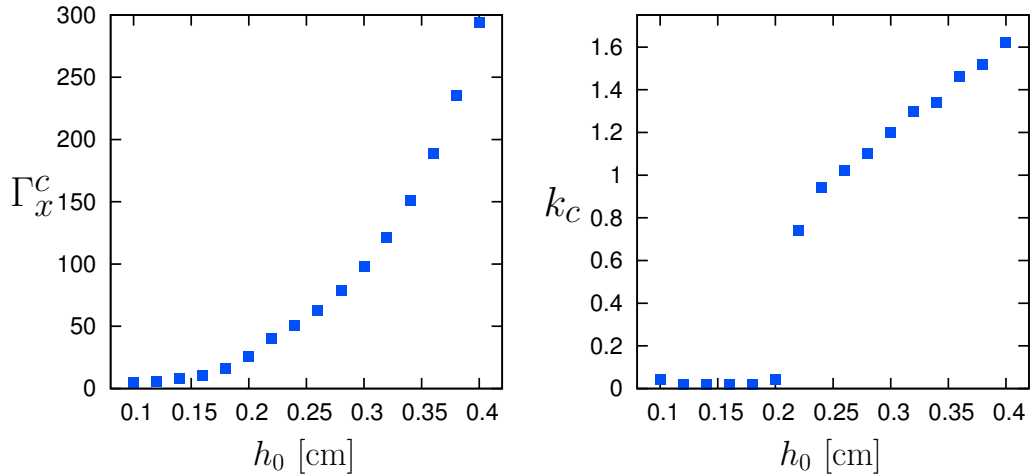


Abbildung 7.6.: Darstellung von Γ_x^c (linkes Diagramm) sowie k_c (rechts) als Funktion der Fluidhöhe h_0 bei harmonischer Instabilität. Weitere Parameter: $\bar{\theta} = 76.2 \text{ g/s}^2$; $h_0 = 0.4 \text{ cm}$; $f = 40 \text{ Hz}$; $\varrho = 1 \text{ g/cm}^3$; $\nu = 1.02 \text{ cm}^2/\text{s}$.

zeigen im Vergleich zum Verhalten bei rein vertikaler Oszillation.

Diese Abnahme lässt sich dadurch begründen, dass mit steigender Viskosität die Dicke der Grenzschicht größer wird (siehe z.B. die Diskussion von Gleichung (5.21) auf Seite 37 sowie Schlichting [17]). Da der Bereich der Grenzschicht im Wesentlichen derjenige in der Nähe der Plattenoberfläche ist, in dem die Geschwindigkeitsgradienten am größten sind, kann es dadurch leichter möglich werden, dass eine kleine Störung die Oberfläche instabil gegen die harmonischen Oberflächenwellen werden lässt. Zumal durch die zunehmende Ausdehnung der Grenzschicht deren Distanz zur Oberfläche mit steigender Viskosität ν immer geringer wird, so dass die komplexere Dynamik innerhalb der Grenzschicht auf die freie Oberfläche übertragen wird. Somit ist diese damit instabiler als es bei kleineren Viskositäten der Fall wäre.

Für die Abhängigkeiten von der Oberflächenspannung ergibt aus der Abbildung 7.5, dass mit wachsendem Koeffizienten σ^* die Kurve der kritischen Amplituden Γ_x^c monoton ansteigt. Dies ist im linken Diagramm der Abb. 7.5 zu erkennen, so dass eine steigende Oberflächenspannung zu einer erhöhten Stabilität führt, was erwartet werden durfte. Der Anstieg der Koeffizienten σ^* hat einen glättenden Effekt auf die Oberfläche, so dass die Oberflächenwellen sich zu größeren Wellenlängen hin verschieben. Dies zeigt entsprechend das rechte Diagramm von Abbildung 7.5 durch die monotone Abnahme von k_c bei steigendem σ^* . Dieses Gesamtverhalten ähnelt qualitativ demjenigen, welches bei rein vertikaler Vibration für subharmonische Wellen

in Abbildung 6.6 auf Seite 94 gezeigt ist.

Die Abhängigkeit der kritischen Amplitude Γ_x^c von der Fluidhöhe h_0 ist in Abbildung 7.6 auf der linken Seite zu sehen. Dabei nimmt die Stabilität mit zunehmender Höhe h_0 zu. Da in diesem Fall die anderen Parameter fest sind und damit auch die Dicke δ der Grenzschicht einen konstanten Wert besitzt, so wächst h_0 mit zunehmendem Wert über diese Dicke hinaus, so dass in diesem Fall das umgekehrte Argument im Vergleich zur Viskositätsdiskussion weiter oben anwendbar ist. Dabei zeigt sich bei der Betrachtung der kritischen Wellenzahl k_c , dass für kleine Höhen h_0 jeweils die Nullmode von k_c instabil ist. Ab einer bestimmten Schwelle steigt dann die kritische Wellenzahl k_c sehr schnell mit zunehmendem h_0 an, wobei der Verlauf qualitativ demjenigen ähnelt, der im Graphen $k_c(R)$ in Abbildung 7.3 gezeigt ist. Da die Höhe h_0 zudem in allen dimensionslosen Parametern enthalten ist, macht dies die Einschätzung deutlich komplizierter.

Insgesamt können wir festhalten, dass die numerische Untersuchung für rein horizontal vibrierte Fluide deutlich komplexer und numerisch aufwendiger ist, als dies bei der Stabilitätsanalyse des vertikal vibrierten Fluids der Fall war. Da für die einzelnen Diagramme deutlich mehr Rechenzeit sowie Speicherkapazität erforderlich ist, dauern Parameterstudien deutlich länger und durch die Größe der Matrizen sind numerische Fehler deutlich schneller gegeben. Andererseits zeigt der Vergleich der Instabilitäten einige interessante Unterschiede, wie z.B. das Fehlen der subharmonischen Moden sowie die Instabilität für große Wellenlängen bei rein horizontaler Vibration bzw. die Koexistenz zweier kritischer Wellenzahlen bei rein vertikalem Antrieb.

7.2. Stabilität kombiniert horizontal und vertikal vibrierter Newtonscher Fluide

In Kapitel 5.4 auf Seite 73 ist schon erläutert, dass die Referenzlösungen rein horizontal und rein vertikal vibrierter Fluide entkoppeln, woraus folgt, dass bei einer Superposition der Antriebe auch die Überlagerung der horizontalen und vertikalen Referenzlösungen eine Lösung des Gesamtsystems darstellt. Die technische Realisierbarkeit wurde schon für granulare Systeme gezeigt (siehe z.B. [11–13]). Dabei stellt sich die Frage, ob es für diese Gesamtlösung auch eine Instabilität hin zu subharmonischen und harmonischen Oberflächenwellen gibt, wie wir sie im vorherigen Kapitel 6 und in diesem untersucht haben.

Falls wir beide Stabilitätsalgorithmen aus den Kapiteln (6.1) und (7.1.1) parallel

betrachten, so ergibt sich, dass die zeitliche Entwicklungsgleichung 7.14 auf Seite 104 des rein horizontalen Falles vollständig erhalten bleibt. Zusätzlich koppelt nur noch ein Term in diese Gleichung aus dem vertikalen Antrieb ein, nämlich die zeitlich periodische Funktion $G(t)$ (siehe Gl. (6.29) auf Seite 84), wobei nur die Antriebsfunktion

$$\overline{G}(t) = \tilde{g} \Gamma_y \sin(t + \phi_v) \quad (7.22)$$

und deren Kopplung an die Höhenfunktion $\tilde{h}(t)$ relevant ist (siehe Gl. (6.28) auf Seite 83), da der konstante Term der dimensionslosen Gravitationsbeschleunigung auch im horizontalen Fall enthalten ist. Durch den Einbau in Gleichung (7.14) ergibt sich folglich:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}^t \cdot \partial_t \mathbf{X}(t) + \underline{\underline{M}}^k \cdot \mathbf{X}(t) = & \tilde{g} \Gamma_x (\underline{\underline{M}}^s \sin t + \underline{\underline{M}}^c \cos t) \cdot \mathbf{X}(t) \quad (7.23) \\ & + \tilde{g} \Gamma_y (\underline{\underline{M}}_v^s \sin t + \underline{\underline{M}}_v^c \cos t) \cdot \mathbf{X}(t) . \end{aligned}$$

Dabei enthalten die Matrizen $\underline{\underline{M}}_v^s$ sowie $\underline{\underline{M}}_v^c$ die Einträge aus der Funktion $\overline{G}(t)$ mit der Kopplung an die aufgeteilten zeitlichen Höhenfunktionen $\alpha(t)$ sowie $\beta(t)$, welche im Lösungsvektor $\mathbf{X}(t)$ enthalten sind (siehe Gl. (7.13) auf Seite 104). Diese Matrizen sind sehr dünn besetzt und enthalten nur Einträge in zwei Zeilen.

Indem wir die Form unseres Antriebs vorgeben, z.B. rein vertikal, rein horizontal, zirkular ($\Gamma_x = \Gamma_y$, $\phi_h = 0$; $\phi_v = \pm \frac{\pi}{2}$) usw. (siehe Diskussion auf Seite 73 bzw. [11, 12]), lässt sich mit Hilfe von Gleichung (7.23) ein Eigenwertproblem daraus erstellen und zwar beispielhaft für einen zirkularen Antrieb:

Für diesen gilt, dass $\Gamma_y = \Gamma_x = \Gamma$ ist. Damit lässt die Gleichung (7.23) zusammenfassen zu:

$$\underline{\underline{M}}^t \cdot \partial_t \mathbf{X}(t) + \underline{\underline{M}}^k \cdot \mathbf{X}(t) = \tilde{g} \Gamma (\underline{\underline{M}}_z^s \sin t + \underline{\underline{M}}_z^c \cos t) \cdot \mathbf{X}(t) , \quad (7.24)$$

wobei gilt:

$$\underline{\underline{M}}_z^s = \underline{\underline{M}}^s + \underline{\underline{M}}_v^s \quad (7.25a)$$

$$\underline{\underline{M}}_z^c = \underline{\underline{M}}^c + \underline{\underline{M}}_v^c . \quad (7.25b)$$

Dabei sind die Abhängigkeiten von ϕ_v sowie ϕ_h schon in den Matrizen $\underline{\underline{M}}_z^s$ sowie $\underline{\underline{M}}_z^c$ enthalten. Somit lässt sich der Algorithmus des horizontalen Problems auf das kombinierte, in diesem Fall zirkulare Problem übertragen. Somit bleiben in diesem Fall die generalisierten Eigenwerte Γ zu bestimmen.

Der Algorithmus lässt sich mit Hilfe des Spezialfalls der rein vertikalen Vibra-

tion testen. Im Vergleich zum Algorithmus aus Kapitel 6.1 (siehe Seite 76) wird dabei die DGL bzgl. \tilde{v} numerisch gelöst. Die Resultate zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Für die kombinierte horizontale und vertikale Vibration haben wir jedoch keine Parameterkombinationen gefunden, bei denen subharmonische bzw. harmonische Eigenwerte aufgetreten sind. Z.B. sind für den in Gleichung (7.24) beschriebenen zirkulären Antrieb die erhaltenen Eigenwerte von der Größenordnung $\Gamma \approx 10^7 \dots 10^9$. Selbst für sehr kleine Abweichungen vom rein vertikalen Antrieb, welche sich durch die Definition

$$\Gamma_x = \epsilon \Gamma_y ; \quad \epsilon \ll 1 \tag{7.26}$$

erzeugen lassen, sind die erhaltenen Eigenwerte unphysikalisch groß. Dabei ist ϵ ein Parameter, der die relative Stärke bzw. das Verhältnis von vertikalem zu horizontalem Antrieb angibt und welcher bei der Eigenwertberechnung als konstant vorgegeben wird. Das Analoge gilt im umgekehrten Fall, wenn geringe Störungen des rein horizontalen Antriebs untersucht wurden.

Damit bleibt die Frage, ob es entweder noch Parameterbereiche gibt, in denen derartige harmonische bzw. subharmonische Oberflächenwellen existieren, die nicht beachtet worden sind. Da die Lösungen für die Spezialfälle des rein horizontalen und vertikalen Problems existieren, ist es analog zum Ausschluss der subharmonischen Instabilität beim horizontalen Problem (siehe [85, 86]) zudem möglich, dass durch die Kombination beider Antriebe erforderliche Symmetrien gebrochen werden, so dass diese Form der Instabilität nicht mehr möglich ist. Direkte numerische Simulationen bzw. der Vergleich mit granularer Materie, die auf einem Schwingförderer kombiniert horizontal und vertikal vibriert wurde (siehe [11–13]), legen die Vermutung nahe, dass wandernde Oberflächenwellen bei der Kombination der Antriebe bevorzugt entstehen. Diese sind durch den hier vorgestellten Ansatz jedoch nicht berücksichtigt.

8. Stabilitätsanalyse der horizontalen Lösung im Oldroyd-B-Modell

Nachdem wir im vorherigen Kapitel 7 die horizontale Stabilitätsanalyse für den speziellen Fall des Newtonschen Fluids diskutiert haben, werden wir im vorliegenden Kapitel diese Analyse auf viskoelastische Fluide im Oldroyd-B-Modell übertragen und verallgemeinern. Da unseres Wissens bisher keine Literatur bzw. keine theoretischen Arbeiten auf diesem Gebiet bekannt sind, werden wir die Methoden und Ansätze aus den bisherigen Kapiteln auf die Problemstellung der linearen Stabilitätsanalyse hinsichtlich harmonischer Oberflächenwellen anwenden.

Es zeigt sich, dass sich im Vergleich zu den Analysen für das Newtonsche Fluid in Kapitel 7 und denjenigen des rein vertikalen Antriebs in Kapitel 6 das Problem deutlich umfangreicher und komplexer darstellt. Dieser Umstand lässt sich einmal damit begründen, dass nicht nur die horizontale Geschwindigkeitslösung u_h^0 inclusive derer partiellen räumlichen Ableitungen die Lösung beeinflusst, sondern zusätzlich die Referenzlösungen $A^0(y, t)$ sowie $B^0(y, t)$ (siehe Kapitel 5.3.4 ab Seite 65) an die zu berechnenden Variablen koppeln. Des Weiteren wird, da die konstitutiven Gleichungen des Oldroyd-B-Modells (siehe z.B. Gl. (3.36) auf Seite 19) erfüllt sein müssen, die Entkopplung und Reduktion auf nur noch zwei abhängige Variablen wie in den vorherigen Kapiteln, nämlich \tilde{v} und \tilde{h} , nicht mehr möglich sein. Damit steigt die Anzahl der zu berechnenden unbekanntenen Größen und insbesondere der numerische Aufwand dieser Berechnungen. Eine weitere Schwierigkeit stellt die nicht verschwindende Kopplung der linearisierten Variablen an die Funktion $A^0(y, t)$ dar, da diese vom Quadrat der dimensionslosen Antriebsamplitude Γ_x abhängt (siehe Gl. (5.68) auf Seite 67). Da der Parameter Γ_x in den vorherigen Rechnungen als zu berechnender generalisierter Eigenwert gedient hat, ist es noch erforderlich, das resultierende quadratische Eigenwertproblem in ein lineares zu überführen.

Den Lösungsweg zur Bestimmung der marginalen Stabilitätsgrenzen bestreiten wir auf ähnliche Weise wie im vorherigen Kapitel 7. Dazu geben wir zunächst die linearisierten Gleichungen und Randbedingungen an und entkoppeln diese soweit dies möglich ist. Daraufhin lösen wir die ortsabhängigen Teile der Gleichungen, zum einen

die x -Abhängigkeit durch Entwicklung in räumliche Sinus- und Kosinusfunktionen. Zum anderen benutzen wir wiederum die Tau-Methode zur Lösung der y -Abhängigkeit und verwenden eine orthogonale Polynomial-Basis, die in diesem Fall aus orthonormierten Chebyshev-Polynomen besteht. Im Anschluss erhalten wir ein Matrixgleichungssystem ähnlich der Form von Relation (7.14) auf Seite 104, so dass ein Floquet-Ansatz für die periodische Zeitabhängigkeit sinnvoll ist. Daraus resultiert ein nichtlineares Eigenwertproblem, welches wir daraufhin in ein lineares umformen werden. Somit lässt sich das Problem auf dasjenige aus Kapitel 7 zurückführen. Da die wesentlichen Züge des Lösungsverfahrens in den Kapiteln (7.1.1) (ab S. 99) für das horizontale Problem und (6.1.1) (ab S. 76) für das vertikale Problem hergeleitet und diskutiert wurden, werden wir aufgrund des umfangreichen Problems und einiger länglicher Gleichungen einige Details weniger ausgeprägt dokumentieren, aber insbesondere die wichtigen Resultate aufzeigen.

8.1. Horizontaler Stabilitätsalgorithmus von Oldroyd-B-Fluiden

8.1.1. Herleitung des linearisierten Gleichungssystems

Wir betrachten wiederum eine kleine Störung um die Referenzlösung im Oldroyd-B-Modell, welche sich aus den Gleichungen (5.64) bis (5.69) auf den Seiten 65 bis 67 ergeben. Damit definieren wir neue Lösung der abhängigen Größen als kleine Störungen (Tilde-Variablen) der Referenzlösungen entsprechend den vorherigen Kapiteln (siehe Gl. (7.1) auf Seite 99):

$$u(x, y, t) = \tilde{u}(x, y, t) + u_{\text{OB}}^0(y, t) \quad (8.1a)$$

$$v(x, y, t) = \tilde{v}(x, y, t) \quad (8.1b)$$

$$p(x, y, t) = \tilde{p}(x, y, t) + \tilde{g}(1 - y) \quad (8.1c)$$

$$h(x, t) = \tilde{h}(x, t) + 1 \quad (8.1d)$$

$$S_{xx}(x, y, t) = \tilde{A}(x, y, t) + A^0(y, t) \quad (8.1e)$$

$$S_{xy}(x, y, t) = \tilde{B}(x, y, t) + B^0(y, t) \quad (8.1f)$$

$$S_{yy}(x, y, t) = \tilde{C}(x, y, t) \quad (8.1g)$$

In obigem Gleichungssystem (8.1) haben wir die gestörten Größen $\left(\underline{\tilde{S}}\right)_i$ des Konformationstensors in die neuen Variablen \tilde{A} , \tilde{B} sowie \tilde{C} umbenannt, wie wir es zuvor bei den Referenzlösungen gehandhabt haben. Zu Beginn der linearen Stabilitätsana-

lyse setzen wir alle abhängigen Variablen in die Gleichungen (3.38) bis (3.47) von Seite 21 ein. Nach vielen Umformungen lassen sich aus dem dann linearisierten Gleichungssystem zwei Größen entfernen, zum einen die kleine Störung der horizontalen Geschwindigkeit \tilde{u} , zum anderen die Druckvariable \tilde{p} . Somit erhalten wir insgesamt fünf Feldgleichungen:

1. Evolutionsgleichung für $\tilde{v}(x, y, t)$ aus den beiden Geschwindigkeitsgleichungen:

$$\begin{aligned} & \partial_t \Delta \tilde{v} + \partial_{xxy}^3 \tilde{A} + \partial_x (\partial_{yy}^2 - \partial_{xx}^2) \tilde{B} - \partial_{xxy}^3 \tilde{C} \\ & = -u_{\text{OB}}^0 (\partial_x \Delta \tilde{v}) + (\partial_{yy}^2 u_{\text{OB}}^0) (\partial_x \tilde{v}) . \end{aligned} \quad (8.2)$$

2. Kinematische Höhenbedingung der Höhe $\tilde{h}(x, t)$:

$$\partial_t \tilde{h} - \tilde{v}|_{y=1} = - \left(u_{\text{OB}}^0|_{y=1} \right) \cdot (\partial_x \tilde{h}) . \quad (8.3)$$

3. Evolutionsgleichung für $\tilde{A}(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} & (1 + \bar{\lambda} \partial_t) (\partial_x \tilde{A}) + \frac{2}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) (\partial_{xy}^2 \tilde{v}) \\ & = \bar{\lambda} \left\{ -u_{\text{OB}}^0 (\partial_{xx}^2 \tilde{A}) + 2 (\partial_y u_{\text{OB}}^0) (\partial_x \tilde{B}) \right. \\ & \quad \left. - (\partial_y A^0) (\partial_x \tilde{v}) - 2 A^0 (\partial_{xy}^2 \tilde{v}) - 2 B^0 (\partial_{yy}^2 \tilde{v}) \right\} \\ & \quad + \frac{\bar{\lambda}_r}{R} \left\{ -2 u_{\text{OB}}^0 (\partial_{xxy}^3 \tilde{v}) + 2 (\partial_y u_{\text{OB}}^0) [2 \partial_{yy}^2 - \partial_{xx}^2] \tilde{v} \right\} . \end{aligned} \quad (8.4)$$

4. Evolutionsgleichung für $\tilde{B}(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} & (1 + \bar{\lambda} \partial_t) (\partial_x \tilde{B}) - \frac{1}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) [\partial_{xx}^2 - \partial_{yy}^2] \tilde{v} \\ & = \bar{\lambda} \left\{ -u_{\text{OB}}^0 (\partial_{xx}^2 \tilde{B}) + (\partial_y u_{\text{OB}}^0) (\partial_x \tilde{C}) - (\partial_y B^0) (\partial_x \tilde{v}) + A^0 (\partial_{xx}^2 \tilde{v}) \right\} \\ & \quad + \frac{\bar{\lambda}_r}{R} \left\{ u_{\text{OB}}^0 [\partial_{xxx}^3 - \partial_{xyy}^3] \tilde{v} - 2 (\partial_y u_{\text{OB}}^0) (\partial_{xy}^2 \tilde{v}) + (\partial_{yy}^2 u_{\text{OB}}^0) (\partial_x \tilde{v}) \right\} . \end{aligned} \quad (8.5)$$

5. Evolutionsgleichung für $\tilde{C}(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} & (1 + \bar{\lambda} \partial_t) \tilde{C} - \frac{2}{R} (1 + \bar{\lambda}_r \partial_t) (\partial_y \tilde{v}) \\ = & \bar{\lambda} \left\{ -u_{\text{OB}}^0 (\partial_x \tilde{C}) + 2 B^0 (\partial_x \tilde{v}) \right\} \\ & + \frac{\bar{\lambda}_r}{R} \left\{ 2 u_{\text{OB}}^0 (\partial_{xy}^2 \tilde{v}) - 2 (\partial_y u_{\text{OB}}^0) (\partial_x \tilde{v}) \right\}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Zu diesen Gleichungen ergeben sich noch die linearisierten Randbedingungen zu:

1. Randbedingungen am Boden:

$$\tilde{v}|_{y=0} = 0 \quad (8.7a)$$

$$(\partial_y \tilde{v})|_{y=0} = 0. \quad (8.7b)$$

2. Tangentialrandbedingung:

$$-\tilde{B}|_{y=1} = \left((\partial_y B^0)|_{y=1} \right) \tilde{h}. \quad (8.8)$$

3. Normalrandbedingung:

$$\begin{aligned} & \left[\partial_{xx}^2 (\tilde{A} - \tilde{C}) + \partial_{xy}^2 \tilde{B} + \partial_{ty}^2 \tilde{v} \right] \Big|_{y=1} + \sigma^* \partial_x^4 \tilde{h} - \tilde{g} \partial_{xx}^2 \tilde{h} \\ = & - \left(u_{\text{OB}}^0|_{y=1} \right) (\partial_{xy} \tilde{v})|_{y=1}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Die Gleichungen (8.2) bis (8.6) bestimmen das gesamte Stabilitätsproblem zusammen mit den Randbedingungen (8.7) bis (8.10). Dabei sind diese Relationen so aufgeteilt, dass jeweils links vom Gleichheitszeichen diejenigen Terme stehen, die nicht an die Grundfunktionen A^0 , B^0 und u_{OB}^0 koppeln, welche von den Koordinaten y und t abhängen. Für die rechts vom Gleichheitszeichen gilt demnach genau das Umgekehrte. Es lässt sich zudem zeigen, dass im Spezialfall $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_r = 0$ das Gesamtproblem aus den Gleichungen (8.2) bis (8.10) zu dem des horizontalen bewegten Newtonschen Fluids äquivalent ist (siehe dazu das Gleichungssystem (7.3) auf Seite 100).

Zur Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems (8.2) bis (8.6) gehen wir entsprechend dem bekannten Verfahren aus Kapitel 7.1.1 vor. Dazu entwickeln wir

alle fünf unbekanntenen Funktionen bezüglich der x -Abhängigkeit in reelle Fourierreihen. Da alle Gleichungen linear sind und es keine weiteren Funktionen gibt, die Veränderliche der lateralen Koordinate x enthalten, entstehen keine Kopplungen untereinander und wir können die Analyse auf eine beliebige, aber feste Wellenzahl $k_n = k$ reduzieren (siehe Gl. (7.4) sowie (7.5) auf Seite 101), wie wir es schon vorher praktiziert haben:

$$\tilde{F} \rightarrow \tilde{F}^1 \cos(kx) + \tilde{F}^2 \sin(kx) , \quad (8.10)$$

wobei \tilde{F} jeweils für jede der fünf Größen \tilde{v} , \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} und \tilde{h} steht. Durch Einsetzen dieser Ansätze für die einzelnen Funktionen und durch Ausnutzen der Orthogonalität der Sinus- und Kosinusterme in den DGLn (8.2) bis (8.6), erhalten wir eine doppelte Anzahl an Gleichungen, analog zum System (7.5) auf Seite 101. Den Ableitungsregeln von Sinus- und Kosinusfunktionen entsprechend werden dabei die Größen mit Index 1 bzw. 2 je nach Grad der Ableitung in den jeweiligen Gleichungen vermischt.

Aus der Lösung der lateralen x -Abhängigkeit sind aus den fünf partiellen DGLn (8.2) bis (8.6) damit zehn Gleichungen geworden, welche die unbekanntenen Größen $\tilde{v}^1, \dots, \tilde{h}^2$ enthalten, wie dementsprechend aus den vier Randbedingungen (8.7a) bis (8.10) danach acht resultieren. Für die Auflösung der y -Abhängigkeit der betreffenden Variablen (alle außer $\tilde{h}^1(t)$ sowie $\tilde{h}^2(t)$) werden wir wiederum orthogonale Polynome aus dem Intervall $[-1, 1]$ verwenden, welche in diesem Fall die Basis $\{\bar{T}_n\}$ aus normierten Chebyshev-Polynomen ist (siehe Anhang C.2 ab Seite 134). Diese benutzen wir zur einfacheren Handhabung auch für die Geschwindigkeitsfunktionen \tilde{v}^1 sowie \tilde{v}^2 , so dass wir mit Hilfe der Tau-Methode (siehe Kap. 7.1.1 auf Seite 101f sowie [104–107]) zusätzlich zu den Tangential- und Normalrandbedingungen (8.8) sowie (8.10) auch die homogenen Randbedingungen (8.7) am Boden damit behandeln werden.

Zunächst transformieren alle y -Abhängigkeiten gemäß Formel (7.8) auf Seite 103 auf die neue Variable y' und das Intervall $y' \in [-1, 1]$. Damit gehen auch alle partiellen Ableitungen ∂_y über in $2 \cdot \partial_{y'}$. Somit lassen sich die y' -abhängigen Funktionen approximieren durch:

$$G^i(y', t) \approx \sum_{l=0}^L G_l^i(t) \bar{T}_l(y') , \quad (8.11)$$

wobei der Ausdruck $G^i(y', t)$ stellvertretend für die acht Größen \tilde{v}^1 bis \tilde{C}^2 steht. Indem wir die Referenzgrößen $u_{\text{OB}}^0(y', t)$, $A^0(y', t)$ sowie $B^0(y', t)$ in die Einzelterme

zerlegen, d.h.:

$$u_{\text{OB}}^0(y', t) = \tilde{g} \Gamma_x \{v_s(y') \sin t + w_c(y') \cos t\} \quad (8.12a)$$

$$B^0(y', t) = \tilde{g} \Gamma_x \{B_s^0(y') \sin t + B_c^0(y') \cos t\} \quad (8.12b)$$

$$A^0(y', t) = (\tilde{g} \Gamma_x)^2 \left\{ A_k^0(y') + A_c^0(y') \cos(2t) + A_s^0(y') \sin(2t) \right\}, \quad (8.12c)$$

und anschließend diese Funktionen zusammen mit den Approximationen (8.11) jeder Größe in die Evolutionsgleichungen einsetzen, so erhalten wir mit Hilfe der Integralprojektion und Orthogonalitätsrelationen der normierten Chebyshev-Basis $\{\bar{T}_m\}$ zeitabhängige Matrix-Gleichungen der Form von Gl. (7.14) auf Seite 104. Dieses Gleichungssystem lautet somit:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}^t \cdot \partial_t \mathbf{X}(t) + \underline{\underline{M}}^k \cdot \mathbf{X}(t) &= \tilde{g} \Gamma_x \left(\underline{\underline{M}}^s \sin t + \underline{\underline{M}}^c \cos t \right) \cdot \mathbf{X}(t) \\ &+ (\tilde{g} \Gamma_x)^2 \left(\underline{\underline{M}}^{ak} + \underline{\underline{M}}^{as} \sin 2t + \underline{\underline{M}}^{ac} \cos 2t \right) \cdot \mathbf{X}(t). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Die Matrizen $\underline{\underline{M}}^i$ enthalten jeweils konstante Einträge. Speziell enthält $\underline{\underline{M}}^t$ alle Komponenten der linken Seite, die an eine Zeitableitung koppeln, und dementsprechend beinhaltet $\underline{\underline{M}}^k$ jegliche Terme mit konstanten Koeffizienten. Die Matrizen $\underline{\underline{M}}^s$ bzw. $\underline{\underline{M}}^c$ repräsentieren hier nicht nur die Referenzlösung u_{OB} und deren Ableitungen, sondern auch die Funktionen B^0 . Die Matrizen in der zweiten Zeile von Relation (8.13) entspringen jeweils den Komponenten von $A^0(y', t)$. Der Lösungsvektor $\mathbf{X}(t)$ ist im Fall des Oldroyd-B-Modells deutlich größer als im Newtonschen Fluid (vgl. Gl. (7.13) auf S. 104) und hat die Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \left(\tilde{v}_0^1(t) \dots \tilde{v}_L^1(t) \quad \tilde{A}_0^1(t) \dots \tilde{A}_L^1(t) \dots \dots \tilde{h}^1(t) \quad \tilde{v}_0^2(t) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \tilde{v}_L^2(t) \quad \tilde{A}_0^2(t) \dots \dots \tilde{C}_L^2(t) \quad \tilde{h}^2(t) \right)^{\mathbf{T}}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Damit enthält der Vektor $\mathbf{X}(t)$ der zu lösenden Funktionen insgesamt $2 \cdot 4 \cdot (L + 1)$ Funktionen, die aus der y -Abhängigkeit der Variablen \tilde{v}^1 bis \tilde{C}^2 resultieren. Dazu kommen noch die beiden Größen \tilde{h}^1 und \tilde{h}^2 , welche die Oberflächenauslenkung beschreiben. Damit hat der Lösungsvektor \mathbf{X} die Länge $\dim(\mathbf{X}) = 8 \cdot (L + 1) + 2$ und damit auch die quadratischen Matrizen $\underline{\underline{M}}^i$ die entsprechende Ausdehnung.

Wie in den vorherigen Kapiteln bleibt noch die zeitliche Entwicklung mit Hilfe eines Floquet-Ansatzes zu bestimmen. Die Formel (7.17) sowie die Diskussion auf Seite 106 können entsprechend auf die vorliegende Problemstellung übertragen

werden:

$$\mathbf{X}(t) = e^{(s+i\alpha)t} \hat{\mathbf{X}}(t) = e^{(s+i\alpha)t} \hat{\mathbf{X}}(t + 2\pi) = e^{(s+i\alpha)t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{X}}_m e^{imt}. \quad (8.15)$$

Wir betrachten wiederum die marginale Stabilität, d.h. den Fall $s = 0$ und harmonische Antworten auf die periodischen Funktionen der Periode $T = 2\pi$ und somit ist zudem $\alpha = 0$. Damit greifen die gleichen Relationen wie in Gleichung (7.18) auf Seite 106, mit der Ausnahme, dass zusätzlich noch die Terme der Matrizen $\underline{\underline{M}}^{ak}$ usw. in die Relation eingehen:

$$\begin{aligned} & \left\{ i m \underline{\underline{M}}^t + \underline{\underline{M}}^k \right\} \cdot \hat{\mathbf{X}}_m \\ = & \Gamma_x \frac{\tilde{g}}{2} \left\{ \left[\underline{\underline{M}}^c + i \underline{\underline{M}}^s \right] \cdot \hat{\mathbf{X}}_{m+1} + \left[\underline{\underline{M}}^c - i \underline{\underline{M}}^s \right] \cdot \hat{\mathbf{X}}_{m-1} \right\} \\ & + \Gamma_x^2 \frac{\tilde{g}^2}{2} \left\{ \left[\underline{\underline{M}}^{ac} + i \underline{\underline{M}}^{as} \right] \cdot \hat{\mathbf{X}}_{m+2} + \left[\underline{\underline{M}}^{ac} - i \underline{\underline{M}}^{as} \right] \cdot \hat{\mathbf{X}}_{m-2} \right\} \\ & + \Gamma_x^2 \frac{\tilde{g}^2}{2} \underline{\underline{M}}^{ac} \cdot \hat{\mathbf{X}}_m. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Damit koppeln die Referenzlösungen nicht mehr nur über die erste Nebendiagonale, sondern auch durch die Terme der zweiten Nebendiagonale ($(n, n \pm 2)$ -Einträge) und auch die der Hauptdiagonalen an die Störungslösung ein. Wie zuvor brechen wir die Floquet-Entwicklung (8.15) bei einer Ordnung $\pm M$ ab und vernachlässigen Vektoren $\hat{\mathbf{X}}_m$ höherer Ordnung (d.h. $|m| > M$). Indem wir die Einzelvektoren $\hat{\mathbf{X}}_m$ (insgesamt $2M + 1$) in einem großen Vektor $\hat{\mathbf{X}}_{ges}$ zusammenfassen, lassen sich dementsprechend die Einzelgleichungssysteme (8.16) als eine große Matrixgleichung der Form

$$\underline{\underline{M}}_L^{ges} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{ges} = \Gamma_x \underline{\underline{M}}_R^{ges} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{ges} + \Gamma_x^2 \underline{\underline{M}}_A^{ges} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{ges} \quad (8.17)$$

aufschreiben. Dabei fasst $\underline{\underline{M}}_L^{ges}$ alle $(2M + 1)$ Teilmatrizen aus der oberen Zeile von Gl. (8.16) zusammen und auf der rechten Seite der Matrix-Gl. (8.17) demgemäß die Matrix $\underline{\underline{M}}_R^{ges}$ die Terme proportional zu Γ_x und $\underline{\underline{M}}_A^{ges}$ analog denjenigen proportional zu Γ_x^2 . Es tritt bei Gl. (8.17) jedoch im Gegensatz zum Newtonschen Fall das Problem auf, dass der vormalige zu bestimmende generalisierte Eigenwert Γ_x quadratisch in dieser Relation vorkommt. Somit lassen sich die Aussagen zum linearen Eigenwertproblem hier nicht direkt anwenden.

Da die quadratische Abhängigkeit aus der Referenzlösung $A^0(y, t)$ und deren partieller Ableitung resultieren, betrachten wir das lineare Grundgleichungssystem (8.2)

bis (8.6) auf Seite 118f hinsichtlich $A^0(y, t)$. Aus diesen geht hervor, dass A^0 und die partielle Ableitung $\partial_y A^0$ in den Gleichungen (8.4) sowie (8.5) ausschließlich an die Variable \tilde{v} und deren Ableitungen koppelt. Diese Kopplung geht zudem nicht durch die Diskretisierungen der x -, y - und t -Abhängigkeit verloren und bleibt insbesondere durch die Linearität aller Gleichungen erhalten. Somit behelfen wir uns dadurch, dass wir folgende Hilfsvariablen \tilde{D}_{ml}^i einführen:

$$\tilde{D}_{ml}^1 = \Gamma_x \tilde{v}_{ml}^1 ; \quad \tilde{D}_{ml}^2 = \Gamma_x \tilde{v}_{ml}^2 . \quad (8.18)$$

Indem wir die Lösungsvektor $\hat{\mathbf{X}}_{ges}$ um diese Variablen \tilde{D}_{ml}^i zu einem neuen Gesamtvektor

$$\hat{\mathbf{Y}}_{ges} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{ges} \\ \tilde{v}_{ml}^1 \\ \tilde{v}_{ml}^2 \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

erweitern, so kann die Matrixgleichung (8.17) zu einer linearen Gleichung in Γ_x umgeformt werden, wobei die Matrizen $\underline{\underline{M}}_L^{ges}$ natürlich dementsprechend angepasst werden und die zusätzlichen Zeilen und Spalten der Variablen \tilde{D}_{ml}^i enthalten sein müssen. Dies lässt sich damit abschließend in folgender Form ausdrücken:

$$\underline{\underline{LS}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_{ges} = \Gamma_x \underline{\underline{RS}} \cdot \hat{\mathbf{Y}}_{ges} , \quad (8.20)$$

wobei in der Gesamtmatrix $\underline{\underline{LS}}$ alle Terme der linken Seite von Gl. (8.17) inklusive der Transformation in Gln. (8.18) und (8.19) enthalten sind und dementsprechend in der Matrix $\underline{\underline{RS}}$ alle Terme der rechten Seite. Auf diese Weise haben wir, in Anlehnung beispielsweise an das Verfahren zur Reduktion der Ordnung gewöhnlicher Differentialgleichungen, das quadratische Eigenwertproblem auf ein lineares generalisiertes Eigenwertproblem zurückgeführt. Die Größe des Gesamtsystems ist damit insgesamt $(2M + 1) \cdot (10(L + 1) + 2) \times (2M + 1) \cdot (10(L + 1) + 2)$.

8.1.2. Diskussion des Stabilitätsalgorithmus im Oldroyd-B-Modell

Wie wir schon in Kapitel 7.1.2 auf Seite 107 erläutert haben, ist schon die numerische Behandlung des generalisierten Eigenwertproblems im Fall des horizontal vibrierten Newtonschen Fluids sehr aufwendig. Im Vergleich dazu ist der Lösungsvektor \mathbf{Y}_{ges} (siehe Gl (8.20)) bei gleichen Entwicklungslängen M und L ungefähr um einen Faktor 5 größer, so dass sich für die Eigenwertberechnung der der Zeitfaktor $5^3 = 125$ ergibt. Damit bleibt zunächst noch ein Algorithmus zu entwickeln, der die gesamte Eigenwertberechnung auf niedrige reelle Eigenwerte reduzieren kann. Den von Or

[85] sowie Talib et al. [84] vorgestellte Algorithmus, durch eine iterative Bestimmung von Determinanten das Problem zu lösen, haben wir für die horizontale Newtonsche Stabilitätsanalyse implementiert. Dabei konnten wir jedoch nicht die von Or [85] publizierten Ergebnisse der Instabilität kleiner Wellenzahlen reproduzieren.

Ein weiteres numerisches Problem betrifft sogenannte „spurious eigenvalues“, also Schein-Eigenwerte (siehe auch [104, 106, 107]). Diese resultieren z.B. bei der hier benutzten Tau-Methode zur Lösung der DGL in Chebyshev-Polynome. Durch den Einbau der homogenen Randbedingungen (8.7 auf Seite 119) in die Zeilen des Gesamtmatrixsystems, koppeln diese Zeilen nicht mehr an den generalisierten Eigenwert. Dies resultiert im Endeffekt in einer zusätzlichen Fehlerquelle, die sich durch Verwendung angepasster Basisfunktionen wie die Basis $\{\psi\}$ (siehe Anhang C auf Seite 133) vermeiden lässt.

Daher ist es noch notwendig, den bestehenden Algorithmus anzupassen und auf stabile Art weiterzuentwickeln. Zum einen durch Verwendung neuer Basisfunktionen, zum anderen durch Umgehung der Lösung des gesamten Eigenwertproblems und der Reduktion auf wenige, geeignete reelle Eigenwerte.

9. Zusammenfassung

Die Untersuchung von kombiniert horizontal und vertikal vibrierter granularer Materie mit Hilfe von Schwingförderern und der damit verbundenen Erkundung interessanter Phänomene und Strukturen wirft die Frage auf, wie sich Flüssigkeiten unter diesen Bedingungen verhalten. Die Fälle der einzelnen horizontalen wie vertikalen Oszillation sind schon detailliert aus experimenteller und auch theoretischer Sicht untersucht. Die Fragestellung, was aus der Kombination beider Antriebsformen resultiert, bildet dabei die Basis unserer theoretischen Untersuchungen.

Da für Fluide im Gegensatz zu Granulaten Bilanzgleichungen existieren, die sich für sinusoidale, zeitlich periodische Antriebe nicht nur auf numerischem, sondern vielmehr auch auf analytischem Wege lösen lassen, ergibt sich hiermit ein weiterer Ansatzpunkt für die theoretische Untersuchung. Denn in den vergangenen Jahren sind viele elementare Lösungen in viskoelastischen Modellen berechnet und publiziert worden. Aus diesen Modellen betrachten wir das Oldroyd-B-Modell, welches die bekannten Modelle des Newtonschen und des Maxwell-Fluids als Untermenge enthält. Damit ist diese Arbeit in zwei wesentliche Teilaspekte aufgeteilt: Im ersten Teil steht die analytische Berechnung von Lösungen dieser Feldgleichungen für ein Fluid auf einer periodisch bewegten Platte im Vordergrund. Diese Lösungen erfüllen dabei elementare Symmetrien, z.B. sind diese nur noch von der vertikalen Raumkoordinate und der Zeit abhängig. Im zweiten Teil wird die neutrale Stabilität dieser analytisch berechneten Lösungen mit Hilfe numerischer Methoden untersucht, wobei die Instabilität zu stehenden, periodischen Oberflächenwellen betrachtet wird.

Nach einer kurzen Einleitung und einem Überblick haben wir im dritten Kapitel die für uns relevanten Bestimmungsgleichungen, einerseits diejenigen des Newtonschen Fluids, andererseits die des viskoelastischen Oldroyd-B-Modells vorgestellt und diskutiert. Im weiteren Verlauf konnten wir in Kapitel 4 zeigen, dass die Kombination aus hydrostatischem Druck und periodisch oszillierender Gravitationsbeschleunigung als Lösung des Druckes zusammen mit einer ruhenden, flachen Fluidschicht eine elementare Lösung des gesamten vertikal periodisch getriebenen Systems darstellt. Diese Lösung bleibt beim Übergang vom Newtonschen Fluid hin zu viskoelastischen Flüssigkeiten bei rein vertikaler Antriebsbeschleunigung erhalten.

Das folgende Kapitel 5 ist das Hauptkapitel zu den analytischen Lösungen bei horizontaler Vibration. Beginnend mit dem Spezialfall des Newtonschen Fluids lassen sich dabei zwei Arten von Lösungen herleiten: Einerseits eine transiente Lösung, welche als unendliche Summe über räumliche Basisfunktionen mit zeitabhängigen Koeffizienten darstellbar ist und mit deren Hilfe sich zeigen lässt, dass dadurch in das System eine laterale Nettogeschwindigkeit induziert wird. Andererseits existiert eine periodische Lösung, die außer obiger Reihendarstellung noch eine kompakte, reelle Form aus Kombinationen von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen besitzt. Die Form der Lösung hängt im Fall des Newtonschen Fluids nur von der Reynoldszahl R ab, wobei mit zunehmendem Parameter R die horizontale Geschwindigkeit in Schichten aufteilbar ist, die jeweils gegeneinander oszillieren. Für niedrige Reynoldszahlen R ist dagegen der räumliche Anteil monoton.

Diese beiden Formen der Lösung, zum einen die Reihendarstellung und zum anderen die kompakte Form, lassen sich damit für den Fall des viskoelastischen Fluides so verallgemeinern, dass auch hier die Aufteilung in einen periodischen und einen transienten Anteil möglich ist. Die kompakte Form der periodischen Lösung ist dabei ein neuer Beitrag, der unseres Wissens nach vorher noch nicht publiziert worden ist. Zudem können wir mit Hilfe der Eigenschaften geometrischer Reihen zeigen, dass sich für beliebige periodische Antriebe eine neue, vereinfachte Lösung ergibt. Die allgemeine Lösung der horizontalen Geschwindigkeit im Oldroyd-B-Modell besitzt dabei einen stark oszillatorischen Charakter. Neben der Reynoldszahl R werden die Eigenschaften durch die Werte und Verhältnisse der Relaxations- und Retardationskoeffizienten $\bar{\lambda}$ und $\bar{\lambda}_r$ bestimmt. Falls beide Parameter gleich sind, so geht die Lösung in diejenige des Newtonschen Fluids über. Je kleiner das Verhältnis von Retardationskoeffizient $\bar{\lambda}_r$ zum Relaxationskoeffizienten $\bar{\lambda}$ wird, desto größer wird die Anzahl der übereinanderliegenden Schichten, welche gegeneinander oszillieren. Für den Fall $\bar{\lambda}_r = 0$, welcher dem eines Maxwell-Fluids entspricht, ist diese Eigenschaft am deutlichsten ausgeprägt.

Am Ende dieses Kapitels berechnen wir noch detailliert die Lösungen des Konformationstensors $\underline{\underline{S}}$, dessen Einträge teilweise in komplexer nichtlinearer Form von der horizontalen Geschwindigkeitslösung abhängen. Dies führt dazu, dass z.B. die Komponente S_{xx} mit der doppelten Antriebsfrequenz oszilliert und quadratisch von der Antriebsamplitude Γ_x abhängt.

Wir können zudem zeigen, dass eine analytische Lösung einer flachen Fluidschicht, die kombiniert vertikal und horizontal periodisch angetrieben wird, sich aus den jeweiligen Einzellösungen der rein vertikal sowie der rein horizontal oszillierten Fluid-

de zusammensetzt. Das bedeutet, dass der vertikale Anteil des Antriebs in einem zeitabhängigen Druckterm resultiert, während der horizontale Anteil nur an die horizontale Geschwindigkeit koppelt.

Im folgenden zweiten großen Teil betrachten wir die linearen Stabilitätsanalysen der zuvor berechneten vertikalen und horizontalen analytischen Lösungen. Dabei werden die linearisierten Feldgleichungen in den Kapiteln 6 bis 8 jeweils für vertikale, horizontale bzw. kombiniert horizontal und vertikale getriebene Fluide hergeleitet und jeweils ein Algorithmus vorgestellt, wie die marginalen (neutralen) Stabilitätsgrenzen berechnet werden können.

Beim rein vertikal oszillierten Fluid bleibt die Instabilität hin zu subharmonischen Oberflächenwellen beim Übergang vom Newtonschen zum viskoelastischen Fluid im Wesentlichen erhalten. Die Stabilitätsgrenzen verschieben sich mit Abnahme des Verhältnisses $\bar{\lambda}_r/\bar{\lambda}$ hin zu kleineren kritischen Antriebsamplituden. Das bedeutet, dass bei Newtonschen Fluiden die flache Fluidoberfläche eine größere Stabilität aufweist, als dies bei viskoelastischen Fluiden der Fall ist. Zudem können harmonische Moden die vormals dominanteren subharmonischen leichter verdrängen. Ein sehr interessanter Effekt ist derjenige der Koexistenz zweier kritischer Wellenlängen und der damit einhergehende unstetige Übergang in der Dispersionsrelation. Dieser Effekt kann bei sonst festen Parameterwerten allein durch Frequenzänderungen erhalten werden.

Die Generierung der Resultate im Newtonschen horizontalen Stabilitätsproblem gestaltet sich deutlich aufwendiger. Die wesentlichen Beobachtungen sind hier das Fehlen subharmonischer Oberflächenwellen, d.h. das System kann nur die harmonische Instabilität ausbilden. Bei niedrigen Reynoldszahlen R sind dabei nur sehr große Wellenlängen, d.h. kleine Wellenzahlen, instabil. Erst durch Erhöhung der Reynoldszahl bilden sich Oberflächenwellen mit größeren kritischen Wellenzahlen aus. Im Gegensatz zu den Beobachtungen beim rein vertikal oszillierten Fluid führt die Erhöhung der Viskosität ν des Fluids nicht zu einer Stabilisierung der flachen Oberfläche, sondern umgekehrt zu einer Destabilisierung. Dies kann durch Betrachtung der Grenzschichten argumentativ untermauert werden.

Die Behandlung der kombinierten horizontalen und vertikalen Vibration wurde zwar eingehend untersucht, führte aber zu dem Resultat, dass kein Übergang der analytischen Lösungen hin zu harmonisch bzw. subharmonisch schwingenden Oberflächenwellen gefunden wurde. Somit ist zu erwarten, dass in diesem Fall z.B. der Ansatz propagierender Oberflächenwellen sinnvoller sein könnte.

Ausblick: Für die allgemeine horizontale Stabilitätsanalyse für das viskoelastische Oldroyd-B-Modell ist noch die Fortführung und stabile sowie effiziente Entwicklung des Eigenwertalgorithmus notwendig. Falls dies gelingt, darf auf neue Effekte im Vergleich zur Analyse im Newtonschen Modell gehofft werden. Zudem bedarf insbesondere das Bifurkationsverhalten, wie z.B. der Bereich zweier kritischer Wellenlängen bei rein vertikaler Oszillation, noch einer detaillierten Analyse. In experimenteller Hinsicht ist eine eingehende Untersuchung der Kombination aus horizontal und vertikal vibriertem Fluid wünschenswert, um einen theoretischen Ansatzpunkt für die zu erwartenden Lösungen und Hinweise auf das Stabilitätsverhalten zu bekommen.

A. Lösungsfunktionen der homogenen DGL: $v^{(\text{iv})}(y) + R^2 v(y) = 0$

Für die Referenzlösung der horizontalen Geschwindigkeit in Kapitel 5.1.1 (siehe Seite 28) wird die Lösung obiger DGL benötigt. Dazu betrachten wir zunächst die vier Kombinationen aus Sinus-, Kosinus- sowie deren hyperbolischen Partnern:

$$v_1(y) = \sinh(Ay) \sin(By) \quad (\text{A.1a})$$

$$v_2(y) = \sinh(Ay) \cos(By) \quad (\text{A.1b})$$

$$v_3(y) = \cosh(Ay) \sin(By) \quad (\text{A.1c})$$

$$v_4(y) = \cosh(Ay) \cos(By) \quad (\text{A.1d})$$

Diese Funktionen (A.1) haben folgende Eigenschaften hinsichtlich Differentiation:

$$v_1'(y) = Av_3 + Bv_2 \quad ; \quad v_1''(y) = (A^2 - B^2)v_1 + 2ABv_4 \quad (\text{A.2a})$$

$$v_2'(y) = Av_4 - Bv_1 \quad ; \quad v_2''(y) = (A^2 - B^2)v_2 - 2ABv_3 \quad (\text{A.2b})$$

$$v_3'(y) = Av_1 + Bv_4 \quad ; \quad v_3''(y) = (A^2 - B^2)v_3 + 2ABv_2 \quad (\text{A.2c})$$

$$v_4'(y) = Av_2 - Bv_3 \quad ; \quad v_4''(y) = (A^2 - B^2)v_4 - 2ABv_1 \quad (\text{A.2d})$$

Mit Hilfe der Gleichungssysteme (A.1) bzw. (A.2) sind die Differentialgleichungen in den Kapiteln 5.1.2 sowie 5.2 lösbar. Für den Spezialfall $A = B$ ergibt die rechte Seite von Gl.-System (A.2):

$$v_1''(y) = +2A^2 v_4 \quad \Rightarrow \quad v_1^{(\text{iv})}(y) = -4A^4 v_1 \quad (\text{A.3a})$$

$$v_2''(y) = -2A^2 v_3 \quad \Rightarrow \quad v_2^{(\text{iv})}(y) = -4A^4 v_2 \quad (\text{A.3b})$$

$$v_3''(y) = +2A^2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_3^{(\text{iv})}(y) = -4A^4 v_3 \quad (\text{A.3c})$$

$$v_4''(y) = -2A^2 v_1 \quad \Rightarrow \quad v_4^{(\text{iv})}(y) = -4A^4 v_4 \quad (\text{A.3d})$$

Durch Vergleich der rechten Seite vom Gleichungssystem (A.3) wird die DGL aus der Überschrift lösbar mit $A = \sqrt{\frac{R}{2}}$ sowie den vier linear unabhängigen Funktionen $v_1(y), \dots, v_4(y)$.

B. Inhomogene Lösung im Oldroyd-B-Modell für allgemeine periodische Antriebe

Die Lösung der zeitlich separierten, inhomogenen Gleichung im Oldroyd-B-Modell mit Hilfe der allgemeinen Formel (5.39) auf Seite 44 erfordert die Integration der kombinierten homogenen Lösungen (5.37) von Seite 43 mit der Antriebsfunktion $\bar{F}(t) = f_x(t) + \bar{\lambda}\dot{f}_x(t)$. Im Wesentlichen sind dabei Integrale der Form

$$I_1(t) = e^{-\beta t} \int_0^t \bar{F}(s) e^{\beta s} ds \quad (\text{B.1})$$

zu lösen, wobei β auch komplex werden darf (z.B. aus der Aufteilung der Sinusfunktionen in die komplexe Schreibweise). Falls die horizontale Antriebsfunktion $f_x(t)$ und auch deren Ableitung periodisch sind mit einer Periodendauer T , d.h. $\bar{F}(t) = \bar{F}(t+T)$, so lässt sich die Zeit t aufteilen in M Perioden der Dauer T und eine „periodische Zeit“ t' :

$$t = M \cdot T + t' ; \quad 0 \leq t' < T . \quad (\text{B.2})$$

Es kann gezeigt werden, dass sich mit den obigen Voraussetzungen die inhomogene Lösung $g_n^{\text{inh}}(t)$ (aus Gl. (5.39) auf Seite 44) in zwei Teile zerlegen lässt: In eine transiente Lösung, die exponentiell mit der Gesamtzeit t abnimmt, sowie eine periodische Lösung, welche nur noch von der periodischen Zeit t' und der Periodendauer T abhängt und damit eine kontinuierliche, jeweils periodisch fortgesetzte Lösung

bildet. Dies wollen wir mit Hilfe vom Integral in Gl. (B.1) verdeutlichen:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \overline{F}(s) e^{\beta s} ds &= \int_0^T \overline{F} e^{\beta s} ds + \int_T^{2T} \overline{F} e^{\beta s} ds + \dots + \int_{(M-1)T}^{MT} \overline{F} e^{\beta s} ds + \int_{MT}^{MT+t'} \overline{F} e^{\beta s} ds \\
&= \left(1 + e^{\beta T} + e^{2\beta T} + \dots + e^{(M-1)\beta T}\right) \int_0^T \overline{F}(s) e^{\beta s} ds + e^{M\beta T} \int_0^{t'} \overline{F}(s) e^{\beta s} ds \\
&= \frac{e^{M\beta T} - 1}{e^{\beta T} - 1} \underbrace{\int_0^T \overline{F}(s) e^{\beta s} ds}_{\overline{I}(T, \beta)} + e^{M\beta T} \underbrace{\int_0^{t'} \overline{F}(s) e^{\beta s} ds}_{\overline{I}(t', \beta)} \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

In der ersten Zeile von Relation (B.3) wurde die Periodizität von \overline{F} ausgenutzt, mit Hilfe derer die Integrale in Zeile zwei jeweils auf das Intervall $[0, T]$ zurückgeführt werden können. Mit den Eigenschaften geometrischer Reihen ergibt sich die letzte Zeile. Somit lässt sich Gleichung (B.1) folgendermaßen umformen, wobei wir die in der letzten Zeile von Gl. (B.3) definierten Abkürzungen der Integralfunktionen übernehmen werden:

$$I_1(t, t') = e^{-\beta t} \frac{e^{M\beta T} - 1}{e^{\beta T} - 1} \overline{I}(T, \beta) + e^{-\beta(t-MT)} \overline{I}(t', \beta) \quad (\text{B.4a})$$

$$= e^{-\beta t'} \underbrace{\left(\frac{\overline{I}(T, \beta)}{e^{\beta T} - 1} + \overline{I}(t', \beta) \right)}_{I_1^{\text{per}}(t')} - e^{-\beta t} \underbrace{\left(\frac{\overline{I}(T, \beta)}{e^{\beta T} - 1} \right)}_{I_1^{\text{trans}}(t)}. \quad (\text{B.4b})$$

Somit geht der Ausdruck I_1 über in einen Teil $I_1^{\text{per}}(t')$, welcher sich zeitlich periodisch wiederholt, und einen anderen $I_1^{\text{trans}}(t)$, welcher mit der Gesamtzeit t exponentiell abnimmt, sofern der Realteil des Koeffizienten β positiv ist. Damit kann das Finden der gesamten inhomogenen Lösung g_n^{inh} für alle drei Fälle aus Kapitel 5.3.1 (Seite 44) in obiger Form geschrieben werden. Folgende Abkürzungen werden dazu definiert:

$$I_F(\beta, t) := \int_0^t e^{\beta s} \overline{F}(s) ds \quad ; \quad I_F^{\cos}(\beta, \alpha, t) := \int_0^t e^{\beta s} \cos(\alpha s) \overline{F}(s) ds \quad (\text{B.5a})$$

$$I_F^s(\beta, t) := \int_0^t s e^{\beta s} \overline{F}(s) ds \quad ; \quad I_F^{\sin}(\beta, \alpha, t) := \int_0^t e^{\beta s} \sin(\alpha s) \overline{F}(s) ds. \quad (\text{B.5b})$$

Damit erhalten wir die inhomogenen Lösungen bei periodischem Antrieb in allen drei Fällen:

Fall a

$$g_n^{\text{a,inh}}(t', t) = \frac{-1}{\lambda w_n d_n} \left\{ e^{(-\beta_n^0 - d_n)t'} \left(\frac{I_F(\beta_n^0 + d_n, T)}{e^{(-\beta_n^0 - d_n)T} - 1} + I_F(\beta_n^0 + d_n, t') \right) - e^{(-\beta_n^0 + d_n)t'} \left(\frac{I_F(\beta_n^0 - d_n, T)}{e^{(-\beta_n^0 + d_n)T} - 1} + I_F(\beta_n^0 - d_n, t') \right) \right. \quad (\text{B.6})$$

$$\left. - e^{(-\beta_n^0 - d_n)t} \frac{I_F(\beta_n^0 + d_n, T)}{e^{(-\beta_n^0 - d_n)T} - 1} + e^{(-\beta_n^0 + d_n)t} \frac{I_F(\beta_n^0 - d_n, T)}{e^{(-\beta_n^0 + d_n)T} - 1} \right\}$$

Fall b

$$g_n^{\text{b,inh}}(t', t) = \frac{2}{\lambda w_n} \left\{ \frac{e^{-\beta_n^0 t'}}{e^{-\beta_n^0 T} - 1} \left[I_F(\beta_n^0, T) t' - I_F^s(\beta_n^0, T) + T \frac{I_F(\beta_n^0, T)}{1 - e^{-\beta T}} \right] + e^{-\beta_n^0 t'} [I_F(\beta_n^0, t') t' - I_F^s(\beta_n^0, t')] \right. \quad (\text{B.7})$$

$$\left. + \frac{e^{-\beta_n^0 t}}{e^{\beta_n^0 T} - 1} \left[I_F^s(\beta_n^0, T) - T I_F(\beta_n^0, T) - \frac{T}{1 - e^{-\beta T}} \right] \right\}$$

Fall c

$$g_n^{\text{c,inh}}(t', t) = \frac{2 e^{-\beta_n^0 t'}}{\lambda w_n \alpha_n} \left\{ \sin(\alpha_n t') I_F^{\cos}(\beta_n^0, \alpha_n, t') - \cos(\alpha_n t') I_F^{\sin}(\beta_n^0, \alpha_n, t') \right. \quad (\text{B.8})$$

$$+ A_c [\sin(\alpha_n (t' + T)) I_F^{\cos}(\beta_n^0, \alpha_n, T) - \cos(\alpha_n (t' + T)) I_F^{\sin}(\beta_n^0, \alpha_n, T)]$$

$$\left. - A_c e^{-\beta_n^0 T} [\sin(\alpha_n t') I_F^{\cos}(\beta_n^0, \alpha_n, T) - \cos(\alpha_n t') I_F^{\sin}(\beta_n^0, \alpha_n, T)] \right\}$$

$$- \frac{2 e^{-\beta_n^0 t}}{\lambda w_n \alpha_n} \left\{ A_c [\sin(\alpha_n (t + T)) I_F^{\cos}(\beta_n^0, \alpha_n, T) - \cos(\alpha_n (t + T)) I_F^{\sin}(\beta_n^0, \alpha_n, T)] \right.$$

$$\left. - A_c e^{-\beta_n^0 T} [\sin(\alpha_n t) I_F^{\cos}(\beta_n^0, \alpha_n, T) - \cos(\alpha_n t) I_F^{\sin}(\beta_n^0, \alpha_n, T)] \right\}.$$

Dabei ist $A_c = \frac{1}{2(\cosh(\beta_n^0 T) - \cos(\alpha_n T))}$ und die weiteren Koeffizienten sind in Kapitel 5.3.1 ab Seite 44 in den Gleichungen (5.35) bis (5.39) definiert. Die horizontalen Linien trennen jeweils die periodischen (oberhalb) von den transienten Lösungen (unterhalb der Linien).

C. Jacobi-, Chebyshev- und Auto-orthogonale Polynome

Zur Approximation von periodischen Funktionen dienen die harmonischen Sinus- und Kosinusfunktionen, mit der Eigenschaft, dass diese hinsichtlich eines integralen Skalarprodukt orthogonal zueinander sind. Für beliebige Funktionen mit hinreichenden Eigenschaften hinsichtlich Beschränktheit und Stetigkeit bieten sich auf einem begrenzten Intervall orthogonale Polynome an, z.B. Jacobi-, Legendre- sowie Chebyshev-Polynome u.v.m. Diese sind definiert auf dem Intervall $[-1, 1]$ und eignen sich aufgrund der globalen Approximationseigenschaften für Pseudospektral-Verfahren. Im Folgenden werden die Eigenschaften, Orthogonalitätsrelationen, usw. aufgeführt (aus [108, 109, 111]).

C.1. Jacobi-Polynome $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$

Expliziter Ausdruck ($\Gamma(\dots)$ - Gamma-Funktion; $\alpha, \beta > -1$):

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + m + 1)}{2^m \Gamma(\alpha + m + 1)} (x - 1)^m . \quad (\text{C.1})$$

Orthogonalität bezüglich der Gewichtsfunktion $w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$:

$$\int_{-1}^1 dx P_m^{(\alpha, \beta)}(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta = \frac{2^{\alpha + \beta + 1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \delta_{m, n} , \quad (\text{C.2})$$

wobei $\delta_{m, n}$ die übliche Darstellung des Kronecker-Symbols ist.

Symmetrie und Werte am Rand:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x) \quad (\text{C.3a})$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} \quad (\text{C.3b})$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+1)}. \quad (\text{C.3c})$$

Basisfunktionen niedrigster Ordnung für $\alpha = -\frac{1}{2}$ sowie $\beta = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} P_0^{(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})}(x) &= 1 & ; & & P_2^{(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})}(x) &= \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{8} \\ P_1^{(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})}(x) &= \frac{3}{2}x - 1 & ; & & P_3^{(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})}(x) &= \frac{35}{8}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{15}{16}x + \frac{5}{8}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

C.2. Chebyshev-Polynome $T_n(x)$

$T_n(x)$ Spezialfall der Jacobi-Polynome für $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$:

$$P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)} T_n(x). \quad (\text{C.5})$$

Rekursionsformel mit Startfunktionen $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (\text{C.6})$$

Orthogonalitätsrelation:

$$\int_{-1}^1 dx \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \end{cases}. \quad (\text{C.7})$$

Produkte zweier Chebyshev-Funktionen, Additionstheorem:

$$2T_m(x) T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x) \quad (\text{C.8})$$

Werte an den Rändern bei $x = \pm 1$:

$$T_n(1) = 1; T_n(-1) = (-1)^n; T'_n(1) = n^2; T'_n(-1) = (-1)^{n+1} n^2. \quad (\text{C.9})$$

Normierte Basisfunktionen $\bar{T}_n(x)$:

$$\bar{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} ; \quad \bar{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) , n \geq 1 . \quad (\text{C.10})$$

C.3. Auto-orthogonale Basis $\{\psi_n\}$

Die Konstruktion einer Basis $\{\phi\}_n$ aus Chebyshev-Polynomen $T_n(x)$, die zusätzlich noch homogene Randbedingungen erfüllt (z.B. $\phi'_n(x = -1) = 0$), ist möglich durch Rekombination der $T_n(x)$ (siehe z.B. [104, 106]). Allerdings gehen dabei i. Allg. die Orthogonalität sowie die optimalen Approximationseigenschaften verloren (siehe [108, 109]). Abhilfe schafft daher das Erstellen einer autoorthogonalen Basis nach dem Algorithmus von Livermore et al. ([108, 109]), welche orthogonal ist sowie die folgenden homogenen Randbedingungen erfüllt:

$$\bar{\psi}_n(x = -1) = 0 \quad ; \quad \bar{\psi}'_n(x = -1) = 0 . \quad (\text{C.11})$$

Diese Basis $\{\bar{\psi}_n\}$ kann nach Livermore wie folgt konstruiert werden:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_n(x) = & \frac{4n(n+1)(2n+1)}{(2n+3)^2(2n+5)} P_{n+1}^{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}(x) \\ & + \frac{8n(n+1)}{(2n+3)^2} P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}(x) + P_{n-1}^{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}(x) . \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Die obigen Funktionen $\bar{\psi}_n(x)$ ($n \geq 1$) sind orthogonal hinsichtlich des Integrals über die Wichtungsfunktion $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$:

$$\int_{-1}^1 dx \frac{\bar{\psi}_m(x) \bar{\psi}_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} = h_n^2 \delta_{m,n} , \quad (\text{C.13})$$

wobei h_n^2 die numerisch zu berechnende Normierung abhängig von n ist ($h_1^2 = \frac{18\pi}{35}$, $h_2^2 = \frac{125\pi}{336}$, usw.). Mit Hilfe dieser Normierung h_n lässt sich damit eine Orthonormal-Basis $\{\psi_n\}$ definieren:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{h_n} \bar{\psi}_n(x) . \quad (\text{C.14})$$

Neben der Orthogonalität (C.13) und der Erfüllung der Randbedingungen (C.11) bleiben zudem die Koeffizienten vor den Jacobi-Polynomen $P_{n+1}^{(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})}(x)$ usw. in Gleichung (C.12) erhalten.

chung (C.12) beschränkt und tendieren asymptotisch gegen 1, 2 sowie 1 für große Werte von n .

Die niedrigsten Funktionen der nicht normierten Basis $\{\bar{\psi}_n(x)\}$ sind:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_1(x) &= \frac{12}{35}x^2 + \frac{24}{35}x + \frac{12}{35} \\ \bar{\psi}_2(x) &= \frac{25}{21}x^3 + \frac{10}{7}x^2 - \frac{5}{7}x - \frac{20}{21} \\ \bar{\psi}_3(x) &= \frac{98}{33}x^4 + \frac{28}{11}x^3 - \frac{35}{11}x^2 - \frac{70}{33}x + \frac{7}{11}.\end{aligned}\tag{C.15}$$

Zur Verdeutlichung sind im folgenden Diagramm C.1 die normierten Basisfunktionen $\bar{T}_n(x)$ der Chebyshev-Basis sowie die $\psi_n(x)$ der auto-orthogonalen Polynome dargestellt:

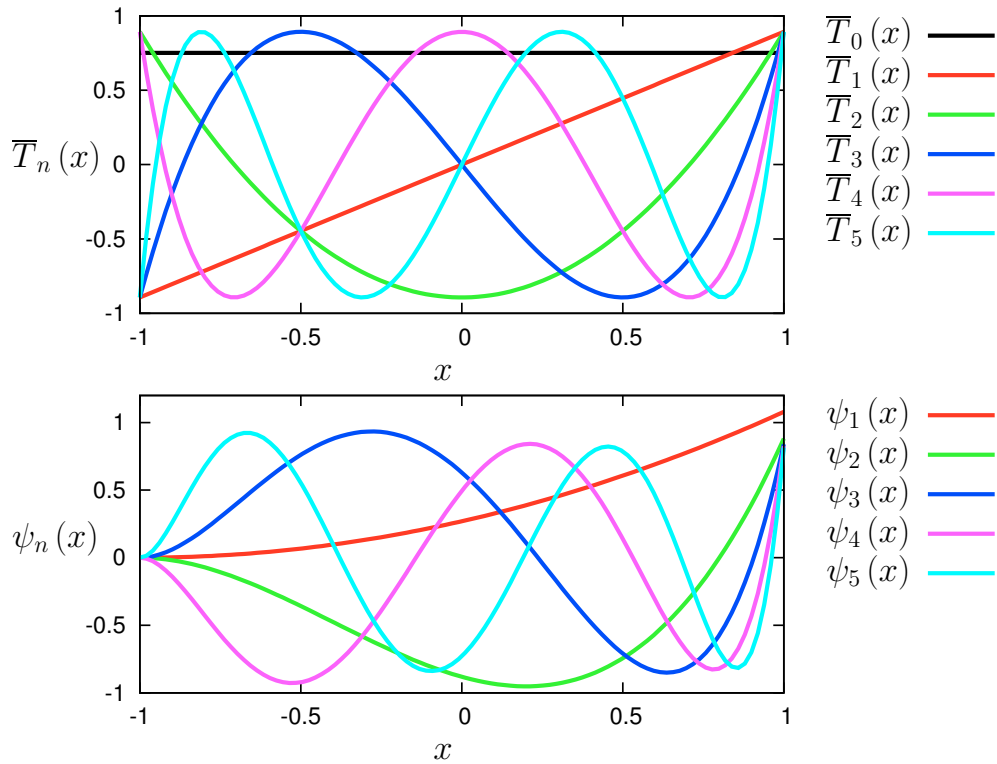


Abbildung C.1.: Darstellung der orthonormierten Basisfunktionen $\bar{T}_n(x)$ ($n = 0, \dots, 5$) im oberen Diagramm sowie $\psi_n(x)$ für die ersten Ordnungen $n = 1, \dots, 5$ im unteren Diagramm.

Literaturverzeichnis

- [1] F. S. Merkt, R. D. Deegan, D. I. Goldman, E. C. Rericha, und H. L. Swinney, *Persistent Holes in a Fluid*, Phys. Rev. Lett. **92**, 184501 (2004).
- [2] M. C. Cross und P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65**, 851 (1993).
- [3] M. Faraday, *On a Peculiar Class of Acoustical Figures; and on Certain Forms Assumed by Groups of Particles upon Vibrating Elastic Surfaces*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **121**, 299 (1831).
- [4] L. Matthiessen, *Akustische Versuche, die kleinsten Transversalwellen der Flüssigkeiten betreffend*, Annalen der Physik **210**, 107 (1868).
- [5] L. Matthiessen, *Ueber die Transversalschwingungen tönender tropfbarer und elastischer Flüssigkeiten*, Annalen der Physik **217**, 375 (1870).
- [6] L. Rayleigh, *VII. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support*, Philosophical Magazine Series 5 **16**, 50 (1883).
- [7] L. Rayleigh, *XXXIII. On maintained vibrations*, Philosophical Magazine Series 5 **15**, 229 (1883).
- [8] W. González-Viñas und J. Salán, *Surface Waves Periodically Excited in a CO₂ Tube*, EPL (Europhysics Letters) **26**, 665 (1994).
- [9] G. G. Stokes, *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society **9**, 8 (1851).
- [10] L. Rayleigh, *LXXXII. On the motion of solid bodies through viscous liquid*, Philosophical Magazine Series 6 **21**, 697 (1911).
- [11] M. Rouijaa, C. Krülle, I. Rehberg, R. Grochowski, und P. Walzel, *Transportverhalten und Strukturbildung granularer Materie auf Schwingförderern*, Chemie Ingenieur Technik **76**, 62 (2004).

- [12] H. El hor und S. J. Linz, *Model for transport of granular matter on an annular vibratory conveyor*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2005**, L02005 (2005).
- [13] M. Grevenstette und S. J. Linz, *Model for pattern formation of granular matter on vibratory conveyors*, Chaos Solitons & Fractals **39**, 1896 (2009).
- [14] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1932, 6. Auflage.
- [15] L. D. Landau und E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Band 6 of Course of Theoretical Physics, Pergamon Press Ltd., 1959.
- [16] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- [17] H. Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1982, 8. Auflage.
- [18] M. Erdogan, *A note on an unsteady flow of a viscous fluid due to an oscillating plane wall*, International Journal of Non-Linear Mechanics **35**, 1 (2000).
- [19] J. C. Maxwell, *On the Dynamical Theory of Gases*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **157**, pp. 49 (1867).
- [20] J. G. Oldroyd, *On the Formulation of Rheological Equations of State*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences **200**, 523 (1950).
- [21] J. G. Oldroyd, *The Motion of an elastico-viscous Liquid Contained Between Coaxial Cylinders. I*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics **4**, 271 (1951).
- [22] T. Hayat, S. Asghar, und A. Siddiqui, *Periodic unsteady flows of a non-Newtonian fluid*, Acta Mechanica **131**, 169 (1998), 10.1007/BF01177223.
- [23] T. Hayat, S. Asghar, und A. Siddiqui, *Some unsteady unidirectional flows of a non-Newtonian fluid*, International Journal of Engineering Science **38**, 337 (2000).
- [24] T. Hayat, A. Siddiqui, und S. Asghar, *Some simple flows of an Oldroyd-B fluid*, International Journal of Engineering Science **39**, 135 (2001).

-
- [25] T. Hayat, S. Nadeem, und S. Asghar, *Periodic unidirectional flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model*, Applied Mathematics and Computation **151**, 153 (2004).
- [26] C. Fetecau und C. Fetecau, *The first problem of Stokes for an Oldroyd-B fluid*, International Journal of Non-Linear Mechanics **38**, 1539 (2003).
- [27] C. Fetecau und C. Fetecau, *A new exact solution for the flow of a Maxwell fluid past an infinite plate*, International Journal of Non-Linear Mechanics **38**, 423 (2003).
- [28] C. Fetecau und C. Fetecau, *Starting solutions for some unsteady unidirectional flows of a second grade fluid*, International Journal of Engineering Science **43**, 781 (2005).
- [29] N. Aksel, M. Scholle, und C. Fetecau, *Starting solutions for some unsteady unidirectional flows of Oldroyd-B fluids*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP) **57**, 815 (2006), 10.1007/s00033-006-0063-8.
- [30] P. Oswald, *Rheophysics*, Cambridge University Press, 2009.
- [31] T. B. Benjamin und F. Ursell, *The Stability of the Plane Free Surface of a Liquid in Vertical Periodic Motion*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences **225**, 505 (1954).
- [32] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press, 1947.
- [33] K. Kumar und L. S. Tuckerman, *Parametric instability of the interface between two fluids*, Journal of Fluid Mechanics **279**, 49 (1994).
- [34] K. Kumar, *Linear Theory of Faraday Instability in Viscous Liquids*, Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **452**, 1113 (1996).
- [35] S. Douady und S. Fauve, *Pattern Selection in Faraday Instability*, EPL (Europhysics Letters) **6**, 221 (1988).
- [36] S. Douady, *Experimental study of the Faraday instability*, Journal of Fluid Mechanics **221**, 383 (1990).
- [37] B. Christiansen, P. Alstrøm, und M. T. Levinsen, *Ordered capillary-wave states: Quasicrystals, hexagons, and radial waves*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2157 (1992).

- [38] B. Christiansen, P. Alstrøm, und M. T. Levinsen, *Dissipation and ordering in capillary waves at high aspect ratios*, Journal of Fluid Mechanics **291**, 323 (1995).
- [39] S. T. Milner, *Square patterns and secondary instabilities in driven capillary waves*, Journal of Fluid Mechanics **225**, 81 (1991).
- [40] S. Fauve, K. Kumar, C. Laroche, D. Beysens, und Y. Garrabos, *Parametric instability of a liquid-vapor interface close to the critical point*, Phys. Rev. Lett. **68**, 3160 (1992).
- [41] W. S. Edwards und S. Fauve, *Parametrically excited quasicrystalline surface waves*, Phys. Rev. E **47**, R788 (1993).
- [42] H. W. Müller, *Periodic triangular patterns in the Faraday experiment*, Phys. Rev. Lett. **71**, 3287 (1993).
- [43] S. Ciliberto und J. P. Gollub, *Chaotic mode competition in parametrically forced surface waves*, Journal of Fluid Mechanics **158**, 381 (1985).
- [44] S. Ciliberto, S. Douady, und S. Fauve, *Investigating Space-Time Chaos in Faraday Instability by Means of the Fluctuations of the Driving Acceleration*, EPL (Europhysics Letters) **15**, 23 (1991).
- [45] J. Miles und D. Henderson, *Parametrically Forced Surface Waves*, Annual Review of Fluid Mechanics **22**, 143 (1990).
- [46] P. Chen und J. Viñals, *Pattern Selection in Faraday Waves*, Phys. Rev. Lett. **79**, 2670 (1997).
- [47] P. Chen und J. Viñals, *Amplitude equation and pattern selection in Faraday waves*, Phys. Rev. E **60**, 559 (1999).
- [48] W. Zhang und J. Viñals, *Square patterns and quasipatterns in weakly damped Faraday waves*, Phys. Rev. E **53**, R4283 (1996).
- [49] M.-T. Westra, D. J. Binks, und W. van de Water, *Patterns of Faraday waves*, Journal of Fluid Mechanics **496**, 1 (2003).
- [50] H. W. Müller, H. Wittmer, C. Wagner, J. Albers, und K. Knorr, *Analytic Stability Theory for Faraday Waves and the Observation of the Harmonic Surface Response*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2357 (1997).

-
- [51] J. Beyer und R. Friedrich, *Faraday instability: Linear analysis for viscous fluids*, Phys. Rev. E **51**, 1162 (1995).
- [52] E. A. Cerda und E. L. Tirapegui, *Faraday's instability in viscous fluid*, Journal of Fluid Mechanics **368**, 195 (1998).
- [53] S. Kumar, *Mechanism for the Faraday instability in viscous liquids*, Phys. Rev. E **62**, 1416 (2000).
- [54] F. Raynal, S. Kumar, und S. Fauve, *Faraday instability with a polymer solution*, The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems **9**, 175 (1999), 10.1007/s100510050753.
- [55] C. Wagner, H. W. Müller, und K. Knorr, *Faraday Waves on a Viscoelastic Liquid*, Phys. Rev. Lett. **83**, 308 (1999).
- [56] H. W. Müller und W. Zimmermann, *Faraday instability in a linear viscoelastic fluid*, EPL (Europhysics Letters) **45**, 169 (1999).
- [57] S. Kumar, *Parametrically driven surface waves in viscoelastic liquids*, Physics of Fluids **11**, 1970 (1999).
- [58] S. Kumar, *Vibration-induced interfacial instabilities in viscoelastic fluids*, Phys. Rev. E **65**, 026305 (2002).
- [59] R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager, C. F. Curtiss, und S. Middleman, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vols. 1 and 2*, Physics Today **31**, 54 (1978).
- [60] S. Kumar und O. K. Matar, *Parametrically Driven Surface Waves in Surfactant-Covered Liquids*, Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **458**, pp. 2815 (2002).
- [61] P. Ballesta und S. Manneville, *Signature of elasticity in the Faraday instability*, Phys. Rev. E **71**, 026308 (2005).
- [62] P. Huber, V. P. Sopruncyuk, J. P. Embs, C. Wagner, M. Deutsch, und S. Kumar, *Faraday Instability in a Surface-Frozen Liquid*, Phys. Rev. Lett. **94**, 184504 (2005).
- [63] G. H. Wolf, *The dynamic stabilization of the Rayleigh-Taylor instability and the corresponding dynamic equilibrium*, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei **227**, 291 (1969), 10.1007/BF01397662.

- [64] M. Legendre, P. Petitjeans, und P. Kurowski, *Instabilités à l'interface entre fluides miscibles par forçage oscillant horizontal*, Comptes Rendus Mécanique **331**, 617 (2003).
- [65] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications Inc. New York, 1981.
- [66] P. G. Drazin und W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 1981.
- [67] R. Wunenburger, P. Evesque, C. Chabot, Y. Garrabos, S. Fauve, und D. Bessens, *Frozen wave induced by high frequency horizontal vibrations on a CO₂ liquid-gas interface near the critical point*, Phys. Rev. E **59**, 5440 (1999).
- [68] A. A. Ivanova, V. G. Kozlov, und P. Evesque, *Interface Dynamics of Immiscible Fluids under Horizontal Vibration*, Fluid Dynamics **36**, 362 (2001), 10.1023/A:1019223732059.
- [69] E. Talib, S. V. Jalikop, und A. Juel, *The influence of viscosity on the frozen wave instability: theory and experiment*, Journal of Fluid Mechanics **584**, 45 (2007).
- [70] C.-S. Yih, *Stability of Liquid Flow down an Inclined Plane*, Physics of Fluids **6**, 321 (1963).
- [71] C.-S. Yih, *Instability of unsteady flows or configurations Part 1. Instability of a horizontal liquid layer on an oscillating plane*, Journal of Fluid Mechanics **31**, 737 (1968).
- [72] C.-S. Yih und C.-H. Li, *Instability of unsteady flows or configurations. Part 2. Convective instability*, Journal of Fluid Mechanics **54**, 143 (1972).
- [73] D. R. Woods und S. P. Lin, *Instability of a liquid film flow over a vibrating inclined plane*, Journal of Fluid Mechanics **294**, 391 (1995).
- [74] S. P. Lin, J. N. Chen, und D. R. Woods, *Suppression of instability in a liquid film flow*, Physics of Fluids **8**, 3247 (1996).
- [75] C. von Kerczek und S. H. Davis, *Linear stability theory of oscillatory Stokes layers*, Journal of Fluid Mechanics **62**, 753 (1974).
- [76] S. H. Davis, *The Stability of Time-Periodic Flows*, Annual Review of Fluid Mechanics **8**, 57 (1976).

-
- [77] M. K. Smith, *The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films*, Journal of Fluid Mechanics **217**, 469 (1990).
- [78] R. E. Kelly, *The stability of an unsteady Kelvin-Helmholtz flow*, Journal of Fluid Mechanics **22**, 547 (1965).
- [79] D. Lyubimov und A. Cherepanov, *Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field*, Fluid Dynamics **21**, 849 (1986), 10.1007/BF02628017.
- [80] C. K. Shyh und B. R. Munson, *Interfacial Instability of an Oscillating Shear Layer*, Journal of Fluids Engineering **108**, 89 (1986).
- [81] G. H. Wolf, *Dynamic Stabilization of the Interchange Instability of a Liquid-Gas Interface*, Phys. Rev. Lett. **24**, 444 (1970).
- [82] D. Lyubimov, M. Khenner, und M. Shotz, *Stability of a fluid interface under tangential vibrations*, Fluid Dynamics **33**, 318 (1998), 10.1007/BF02698179.
- [83] M. Khenner, D. Lyubimov, T. Belozerova, und B. Roux, *Stability of plane-parallel vibrational flow in a two-layer system*, European Journal of Mechanics - B/Fluids **18**, 1085 (1999).
- [84] E. Talib und A. Juel, *Instability of a viscous interface under horizontal oscillation*, Physics of Fluids **19**, 092102 (2007).
- [85] A. C. Or, *Finite-wavelength instability in a horizontal liquid layer on an oscillating plane*, Journal of Fluid Mechanics **335**, 213 (1997).
- [86] T. Schulze, *A note on subharmonic instabilities.*, Physics of Fluids **11**, 3573 (1999).
- [87] S. Shklyaev, A. A. Alabuzhev, und M. Khenner, *Influence of a longitudinal and tilted vibration on stability and dewetting of a liquid film*, Phys. Rev. E **79**, 051603 (2009).
- [88] E. S. Benilov und M. Chugunova, *Waves in liquid films on vibrating substrates*, Phys. Rev. E **81**, 036302 (2010).
- [89] K. Rajagopal, *A note on unsteady unidirectional flows of a non-Newtonian fluid*, International Journal of Non-Linear Mechanics **17**, 369 (1982).

- [90] K. Rajagopal und T. Na, *On Stokes' problem for a non-Newtonian fluid*, Acta Mechanica **48**, 233 (1983), 10.1007/BF01170422.
- [91] K. R. Rajagopal und R. K. Bhatnagar, *Exact solutions for some simple flows of an Oldroyd-B fluid*, Acta Mechanica **113**, 233 (1995), 10.1007/BF01212645.
- [92] N. D. Waters und M. J. King, *Unsteady flow of an elastico-viscous liquid*, Rheologica Acta **9**, 345 (1970), 10.1007/BF01975401.
- [93] A. Anjum, M. Ayub, und M. Khan, *Starting solutions for oscillating motions of an Oldroyd-B fluid over a plane wall*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **17**, 472 (2012).
- [94] W. Tan und T. Masuoka, *Stokes' first problem for an Oldroyd-B fluid in a porous half space*, Physics of Fluids **17**, 023101 (2005).
- [95] D. Cruz und F. Pinho, *Stokes' second problem with wall suction or blowing for UCM fluids*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics **157**, 66 (2009).
- [96] A. Kudrolli und J. Gollub, *Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves: a systematic survey at large aspect ratio*, Physica D: Nonlinear Phenomena **97**, 133 (1996).
- [97] Maple[™], Waterloo Maple Inc., Toronto.
- [98] O. Forster, *Analysis 2 Differentialrechnung im \mathbb{R}^n Gewöhnliche Differentialgleichungen*, vieweg Mathematik, 1977.
- [99] G. Birkhoff und G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, 1978, third edition Auflage.
- [100] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3 Elektrodynamik*, 8, Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [101] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1 Klassische Mechanik*, 8, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [102] G. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Ann. Écol. Norm. Sup. **12** (1883).
- [103] A. H. Nayfeh und D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley and Sons, 1979.

- [104] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Publications Inc. New York, 2000, 2. Auflage.
- [105] E. L. Ortiz, *The Tau Method*, SIAM Journal on Numerical Analysis **6**, pp. 480 (1969).
- [106] B. Fornberg, *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press, New York, 1998.
- [107] J. J. Dongarra, B. Straughan, und D. W. Walker, *Chebyshev tau-QZ algorithm methods for calculating spectra of hydrodynamic stability problems*, Applied Numerical Mathematics **22**, 399 (1996).
- [108] P. W. Livermore, *Galerkin orthogonal polynomials*, Journal of Computational Physics **229**, 2046 (2010).
- [109] P. Livermore und G. Ierley, *Quasi- L^p norm orthogonal Galerkin expansions in sums of Jacobi polynomials*, Numerical Algorithms **54**, 533 (2010), 10.1007/s11075-009-9353-5.
- [110] M. J. Litzkow, M. Livny, und M. W. Mutka, *Condor-a hunter of idle workstations*, 8th International Conference on Distributed Computing Systems (Cat. No.88CH2541-1) IEEE (1988).
- [111] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York, 1964, ninth dover printing, tenth gpo printing Auflage.

Danksagung

Ich möchte mich zunächst bei Herrn Prof. Dr. Stefan J. Linz für die Einführung in das interessante Gebiet der theoretischen Hydrodynamik bedanken. Dieser Dank umfasst insbesondere die sehr gute Betreuung, die stets hilfreichen Tipps und Ratschläge sowie viele anregende Diskussionen. Herrn Prof. Dr. Gernot Münster möchte ich für die Übernahme des Zweitgutachtens danken.

Für die angenehme Arbeitsatmosphäre danke ich dem Institut für Theoretische Physik und vor allem den derzeitigen und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe von Herrn Linz. Insbesondere gilt dies für aktuelle und vormalige Kollegen aus dem Büro 406, nämlich Dr. Patrick Fritsch, Dr. Karsten Dreimann, Nils Heptner, Marc Osthues, Vaidas Juknevičius sowie Christian Diddens. Letzterem und auch Karin Kleigrewe danke ich sehr für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Für zahlreiche miteinander verbrachte schöne Stunden in Mittags- sowie Kaffeepausen und vielem mehr während des Studiums und der Promotion geht ein großes Dankeschön an Dr. Matthias Böcker, Dr. Tobias Heil, Dr. Alexander Winnemöller, Dr. Kirsten Sunder sowie insbesondere an Uwe Hehmann, Dr. Jan Fiete Große-Oetringhaus und Dr. Thomas Bauer.

Den beteiligten Personen des SV Holdorf in fußballerischer und des UHC Münster sowie des Westfälischen Floorballclubs in floorballtechnischer Hinsicht danke ich für entspannende und abwechslungsreiche Stunden abseits des Büros und der Theoretischen Physik.

Meinen Eltern sowie meinen Geschwistern möchte ich sehr herzlich danken für die Unterstützung und Hilfe in vielen kleinen und großen Dingen während meines Studiums.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Freundin Karin für die mir gegenüber aufgebrachte Geduld sowie für Ihre stetige Unterstützung und Motivation bedanken.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und mit keinen weiteren, als den angegebenen, Hilfsmitteln durchgeführt und angefertigt habe.

Münster, 21. Mai 2012

Michael Grevenstette